

**POLITECNICO DI MILANO**

Scuola di Ingegneria Edile - Architettura

Corso di Laurea Specialistica in  
Ingegneria dei Sistemi Edilizi



**Il consolidamento delle strutture murarie  
mediante l'uso di catene metalliche**

Relatore: Prof. Marco Andrea PISANI

Tesi di Laurea di:

Marco ROCCO

Matr. 800868

Anno Accademico 2013 – 2014



# Indice

<b>Indice</b>	<b>3</b>
<b>Elenco delle Figure</b>	<b>7</b>
<b>Elenco delle Tabelle</b>	<b>13</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>15</b>
<b>Introduzione</b>	<b>21</b>
<b>1. Aspetti generali</b>	<b>23</b>
<b>1.1. Evoluzione storica</b>	<b>23</b>
<b>1.2. Le catene odierne</b>	<b>36</b>
1.2.1. Applicazioni	36
1.2.1.1. Presidi contro le strutture spingenti	36
1.2.1.2. Presidi tesi a ricercare il comportamento scatolare	39
1.2.1.3. Presidi tesi a consolidare porzioni di muratura	44
1.2.1.4. L'utilizzo delle catene per il restauro dei monumenti	44
1.2.2. Forme	47
1.2.3. Messa in opera	51
1.2.3.1. Applicazione di nuove catene	51
1.2.3.2. Manutenzione di catene esistenti	58
1.2.3.3. Creazione del vincolo bidirezionale nei solai	59
<b>2. Progetto dei tiranti</b>	<b>63</b>
<b>2.1. Comportamento delle murature</b>	<b>63</b>
2.1.1. Analisi delle sollecitazioni	63
2.1.2. Rottura dovuta ad azioni laterali agenti nel piano medio	64
2.1.2.1. Meccanismo di rottura per Fessurazione diagonale (Shear cracking)	64
2.1.2.2. Meccanismo di rottura per Scorrimento (Sliding)	68
2.1.2.3. Meccanismo di rottura per Schiacciamento/Ribaltamento	70
2.1.2.4. Confronto delle modalità di rottura	74
2.1.3. Rottura dovuta ad azioni laterali agenti fuori dal piano medio	78
<b>2.2. Presidi tesi ad incatenare la struttura</b>	<b>83</b>
2.2.1. Introduzione	83

---

2.2.2.	Modalità di analisi in caso di solai rigidi	85
2.2.2.1.	Esempio	93
2.2.3.	Modalità di analisi in caso di solai deformabili	96
2.2.3.1.	Introduzione	96
2.2.3.2.	Analisi cinematica lineare	101
2.2.3.3.	Analisi statica non lineare	105
2.2.3.4.	Esempio	111
2.2.4.	Osservazioni	122
2.2.5.	Meccanismi di ribaltamento alternativi	124
2.2.5.1.	Flessione verticale	124
2.2.5.2.	Flessione orizzontale	125
2.2.5.3.	Ribaltamento composto	127
<b>2.3.</b>	<b><i>Presidi tesi a contrastare le spinte</i></b>	<b>130</b>
2.3.1.	Introduzione	130
2.3.2.	Meccanismi di collasso per azioni statiche	135
2.3.2.1.	Presso-flessione	135
2.3.2.2.	Catene estradossali	141
<b>3.</b>	<b>La capacità delle catene</b>	<b>145</b>
<b>3.1.</b>	<b><i>Introduzione</i></b>	<b>145</b>
<b>3.2.</b>	<b><i>Resistenza della muratura</i></b>	<b>147</b>
3.2.1.	Stato dell'arte	147
3.2.1.1.	Esposizione tratta dall'autore Sisto Mastrodicasa	147
3.2.1.2.	Esposizione tratta dalle linee guida antisismiche	152
3.2.1.3.	Esposizione tratta dall'autore Michele Vinci	154
3.2.2.	Confronto delle proposte	156
3.2.3.	Analisi critica delle proposte	159
3.2.3.1.	Ipotesi generali	159
3.2.3.2.	Verifica a trazione	160
3.2.3.3.	Verifica a taglio	162
3.2.4.	La resistenza al punzonamento	163
3.2.4.1.	Ipotesi sulla modellazione	163

---

3.2.4.2.	Crisi per taglio	164
3.2.4.3.	Crisi per trazione	175
3.2.4.4.	Confronto dei due meccanismi	201
<b>3.3.</b>	<b><i>Resistenza del capochiave</i></b>	<b>209</b>
3.3.1.	Capochiave a paletto	209
3.3.1.1.	Stato dell'arte	209
3.3.1.2.	Metodo di analisi	211
3.3.1.3.	Precisazioni in merito alla costante elastica del terreno	212
3.3.1.4.	Risoluzione delle trave su suolo elastico	216
3.3.1.5.	Definizione della rigidezza complessiva limite	219
3.3.1.6.	Verifica di resistenza	222
3.3.2.	Capochiave circolare	225
3.3.2.1.	Stato dell'arte	225
3.3.2.2.	Schema di verifica	227
3.3.2.3.	Calcolo della rigidezza complessiva limite	233
3.3.2.4.	Procedimenti di verifica semplificati	235
3.3.2.5.	Confronto fra le tre procedure di verifica	242
3.3.2.6.	Considerazioni conclusive sulle verifiche tensionali semplificate	244
3.3.2.7.	Contributo delle nervature di irrigidimento	245
3.3.2.8.	Confronto tra gli spessori limite individuati	251
3.3.2.9.	Il capochiave di forma rettangolare	253
<b>3.4.</b>	<b><i>Resistenza della barra</i></b>	<b>254</b>
3.4.1.	Valutazione dell'azione resistente	254
3.4.2.	Scelta dell'acciaio	256
<b>Conclusioni</b>		<b>259</b>
<b>Riferimenti bibliografici</b>		<b>265</b>
<b>Appendice A</b>	<b>Risoluzione della trave su suolo elastico</b>	<b>269</b>
<b>Appendice B</b>	<b>Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante le equazioni di Bessel</b>	<b>270</b>
<b>Appendice C</b>	<b>Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante sviluppo in serie</b>	<b>271</b>

---

<b>Appendice D</b>	<b>Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante valori tabellati</b>	<b>272</b>
<b>Appendice E</b>	<b>Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante il metodo di Föppl</b>	<b>278</b>
<b>Ringraziamenti</b>		<b>280</b>

## Elenco delle Figure

Figura 1. Illustrazione tratta da [3].	24
Figura 2. Schema di posizionamento delle catene estratto da [5].	25
Figura 3. Scala autoportante in muratura a palazzo Boncompagni, Vignola.	27
Figura 4. Consolidamento della scala mediante tiranti metallici.	27
Figura 5. Porzione di una catena metallica a sezione rettangolare proveniente dal Duomo di Milano.	28
Figura 6. Giunto a forchetta per la connessione del tirante al capochiave, corte interna del complesso di Brera, Milano.	28
Figura 7. Estratto dalla tavola CXLIII di [9].	29
Figura 8. Schemi per la connessione reciproca dei tiranti estratti dalla tavola CXLIII di [9].	31
Figura 9. Estratto dalla tavola CCLXXVI di [11].	33
Figura 10. Estratto dalla tavola CCLXXVI di [11].	34
Figura 11. Estratto dalla tavola CCLXXVII di [11].	35
Figura 12. Camminamento esterno dell'abbazia di San Colombano (Bobbio).	36
Figura 13. Doppia catena intradossale, Palazzo comunale di Modena.	37
Figura 14. Schema di una catena estradossale.	37
Figura 15. Schema della catena a braga, estratto dalla tavola CCLXXVII di [11].	38
Figura 16. Catene per contenere la spinta della copertura, Abbazia di San Colombano, Bobbio.	39
Figura 17. Catene per contenere la spinta della copertura, Cappella presso Miazzina, Valgrande.	39
Figura 18. Schema generale per il posizionamento di tiranti metallici.	40
Figura 19. Catene applicate per vincolare mutuamente le pareti ortogonali. Chiesa di San Lorenzo ed edificio attiguo, Bobbio.	40
Figura 20. Crisi per mancanza di vincolo bilatero.	41
Figura 21. Rottura per scalzamento e martellamento delle travi principali lignee.	42
Figura 22. Vincolo bidirezionale applicato alle travi mediante un tirante metallico e un capochiave.	42
Figura 23. Schema di trasmissione dell'azione laterale.	43
Figura 24. Fabio Borbottoni, olio su tela dell'interno del Duomo di Firenze. Notare le catene risalenti alla costruzione originaria.	46
Figura 25. Tirante utilizzato per incatenare le travi lignee alla muratura [20].	47
Figura 26. Capochiave a paletto tradizionale, Piazza dei mercanti, Milano.	48

---

Figura 27. Moderno capochiave a paletto [20].	48
Figura 28. Diverse forme di capichiave a piastra [20, 21].	49
Figura 29. Particolare capochiave realizzato in acciaio e calcestruzzo proposto in [22].	50
Figura 30. Effetto dell'umidità relativa e della temperatura sulla velocità di corrosione di un inserto di acciaio inglobato in una malta di calce e gesso [24].	52
Figura 31. Possibile posizionamento dei capichiave.	53
Figura 32. Schema di un tenditore cilindrico [25].	54
Figura 33. Valori della massima azione di serraggio consentita ( $C_s$ ) a seconda del diametro nominale di filettatura e della classe del dado. Prospetto 4-IV della CNR-UNI 10011.	55
Figura 34. Sequenza di tesatura, fase a.	55
Figura 35. Sequenza di tesatura, fase b.	56
Figura 36. Sequenza di tesatura, fase c.	56
Figura 37. Sequenza di tesatura, fase d.	57
Figura 38. Sequenza di tesatura, fase e.	57
Figura 39. Solaio dotato di assito in ligneo inchiodato su un'orditura di travi.	60
Figura 40. Applicazione di tirante e capochiave alla trave.	60
Figura 41. Schema di deformazione dei tiranti applicati sulle travi.	61
Figura 42. Tecniche di incatenamento delle murature al solaio riportate in [19].	62
Figura 43. Sollecitazioni sulla muratura.	63
Figura 44. Interpretazione circa la comparsa di lesioni dal centro del muro verso le estremità [33].	64
Figura 45. Confronto tra legge empirica e risultati sperimentali (Hendry, 1981).	65
Figura 46. Meccanismo di rottura per schiacciamento con formazione di lesione.	70
Figura 47. Meccanismo di rottura per schiacciamento senza formazione di lesione.	72
Figura 48. Meccanismi di ribaltamento: A - Blocco rigido, B/C - Parziali	73
Figura 49. Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per $\lambda = 2,00$ .	75
Figura 50. Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per $\lambda = 1,20$ .	76
Figura 51. Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per $\lambda = 0,60$ .	76
Figura 52. Meccanismo di rottura per schiacciamento con formazione di lesione.	78
Figura 53. Schema di ribaltamento per pannello fissato alla base.	80
Figura 54. Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per $\lambda = 1,20$ .	81



Figura 55. Esempio di meccanismo locale per flessione verticale dovuto a un insufficiente ammorsamento della parete al solaio [50].	84
Figura 56. Esempio di utilizzo dei tiranti quali opere provvisionali atte a contenere i cedimenti delle fondazioni, Amsterdam.	84
Figura 57. Soluzioni efficaci per effettuare il vincolo bidirezionale del solaio [51].	86
Figura 58. Modello a mensola (sinistra) e "a telai" (destra).	87
Figura 59. Esempio di schematizzazione 3D per l'analisi Push-Over di un edificio in muratura [52].	87
Figura 60. Schema di verifica	88
Figura 61. Collasso per eccessiva distanza dei tiranti.	90
Figura 62. Schema per determinare il passo dei tiranti.	91
Figura 63. Possibile meccanismo resistente dovuto a un effetto arco.	91
Figura 64. Schema per il dimensionamento del passo dei tiranti.	92
Figura 65. Disposizione dei tiranti.	93
Figura 66. Risultati restituiti dal software.	94
Figura 67. Esempio di meccanismo di ribaltamento dovuto a flessione verticale [50].	96
Figura 68. Esempio di meccanismo di ribaltamento [50].	97
Figura 69. Regione ammissibile di equilibrio [56].	98
Figura 70. Modello per l'analisi dei meccanismi locali.	99
Figura 71. Schematizzazione della struttura assunta dalla normativa.	101
Figura 72. Curva di capacità del sistema.	105
Figura 73. Curva di capacità del sistema equivalente.	106
Figura 74. Curva di capacità del sistema reale consolidato.	108
Figura 75. Risoluzione grafica.	109
Figura 76. Possibili schemi di ribaltamento semplice.	111
Figura 77. Geometria della struttura oggetto di analisi.	112
Figura 78. Schema per la verifica del cinematismo.	113
Figura 79. Schema di verifica comprensivo dell'azione stabilizzante.	115
Figura 80. Curva di capacità del sistema reale non consolidato.	117
Figura 81. Costruzione della curva di capacità spettrale del sistema equivalente.	118
Figura 82. Curva di capacità spettrale del sistema equivalente.	119
Figura 83. Procedimento grafico per ricavare il valore di $a_s^*$ .	120
Figura 84. Schema e fotografie del ribaltamento in esame [50].	124
Figura 85. Schema e fotografie del ribaltamento in esame [50].	126
Figura 86. Schema e fotografie del ribaltamento in esame [50].	128
Figura 87. Similitudine di comportamento tra trave e arco [19].	130

---

Figura 88. Esempio di volta a crociera (composta) formata per intersezione di due volte a botte (semplici) nate a loro volta dallo sviluppo lungo una retta di un arco. Adattato da [25].	131
Figura 89. Studio effettuato da Poleni (1747) per assicurare la stabilità della cupola di san Pietro.	132
Figura 90. Telaio basilicale soggetto ad azioni sismiche, studiato e calcolato da Camillo Guidi secondo l'analisi elastica nel volume di <i>Esercizi delle sue Lezioni di Scienza delle costruzioni</i> , Negro, Torino, 1928.	133
Figura 91. Comportamento tipico della muratura secondo la tipologia di analisi, [60].	134
Figura 92. Rottura a flessione dell'arco.	135
Figura 93. Schema di ribaltamento del piedritto.	136
Figura 94. Arco a spinta eliminata [19].	138
Figura 95. Schema classico di una catena estradossale.	141
Figura 96. Schema di funzionamento della catena estradossale.	142
Figura 97. Analisi della sezione AA' per determinare l'azione di pretensione massima.	143
Figura 98. Schema del solido di distacco per coesione.	148
Figura 99. Schema del meccanismo ad attrito.	150
Figura 100. Schema del solido di distacco per attrito.	151
Figura 101. Schema del solido di distacco per capochiave a paletto.	152
Figura 102. Particolare della superficie laterale del solido di distacco.	153
Figura 103. Confronto tra i valori dell'azione resistente con l'uso di una piastra rettangolare.	157
Figura 104. Confronto tra i valori dell'azione resistente con l'uso di una piastra circolare.	158
Figura 105. Linee di rottura applicate a diversi pannelli.	160
Figura 106. Possibili linee di frattura per crisi a taglio lungo la sezione verticale della muratura.	164
Figura 107. Possibile modalità di scalzamento di un blocco parzialmente soggetto alla spinta.	165
Figura 108. Schema geometrico per muratura a filari orizzontali e capochiave rettangolare.	165
Figura 109. Schema geometrico per la valorizzazione dei giunti orizzontali.	166
Figura 110. Schema geometrico per muratura a filari orizzontali e capochiave circolare.	167
Figura 111. Schema geometrico per muratura a filari orizzontali e capochiave a paletto.	168
Figura 112. Schema geometrico per muratura incoerente e capochiave rettangolare.	170
Figura 113. Schema geometrico per muratura incoerente e capochiave circolare.	171

Figura 114. Tensioni principali presenti sul mattone.	175
Figura 115. Schema di frattura per crisi a trazione.	176
Figura 116. Rapporto tra l'area di un rettangolo e l'area sottesa da una parabola.	177
Figura 117. Schema di verifica aggiornato per la sezione verticale.	178
Figura 118. Schema di verifica aggiornato per la sezione orizzontale.	181
Figura 119. Schema del solido di distacco e delle superfici di taglio.	183
Figura 120. Schema geometrico.	185
Figura 121. Perimetro di verifica equivalente $u_1$	186
Figura 122. Schema per l'analisi dello stato tensionale.	188
Figura 123. Schema per l'analisi dello stato tensionale.	192
Figura 124. Schema geometrico.	194
Figura 125. Schema per l'analisi delle sollecitazioni.	196
Figura 126. Schema di verifica per la sezione verticale.	197
Figura 127. Schema di verifica per la sezione orizzontale.	197
Figura 128. Schema geometrico.	198
Figura 129. Schema per la relazione tra i parametri $c$ , $d$ ed $f$ .	199
Figura 130. Azione resistente al crescere dell'azione di compressione.	202
Figura 131. Confronto dell'azione resistente in funzione dello sforzo di compressione valutata in base alla proposta fatta e al procedimento di M. Vinci.	203
Figura 132. Valore dell'azione resistente al crescere dell'azione di compressione per diverse dimensioni del capochiave.	204
Figura 133. Valori dell'azione resistente in funzione dell'inclinazione del paletto per una muratura in tufo giallo.	205
Figura 134. Valori dell'azione resistente in funzione dell'inclinazione del paletto per una muratura costituita da pietrame eterogeneo.	206
Figura 135. Valore dell'azione resistente per punzonamento di una muratura di mattoni utilizzando diversi tipi di capichiave.	207
Figura 136. Valore dell'azione resistente per punzonamento di una muratura di mattoni in tufo giallo utilizzando diversi tipi di capichiave.	208
Figura 137. Capochiave a paletto, Abbazia di S. Donato a Sesto Calende, XI secolo.	209
Figura 138. Capochiave a paletto, Cappella presso Miazzina, Valgrande.	209
Figura 139. Schema statico per la verifica del capochiave a paletto.	210
Figura 140. Trave su solido elastico.	211
Figura 141. Sezione infinitesima di una trave su suolo elastico.	212
Figura 142. Schema statico.	216

---

Figura 143. Capochiave eccessivamente deformato, Veneranda fabbrica del Duomo, Milano.	220
Figura 144. Capochiave eccessivamente deformato, Palazzo comunale, Modena.	220
Figura 145. Capochiave a paletto abbinato a due catene, Piazza dei mercanti, Milano.	221
Figura 146. Esempio n°1, grafico dei momento flettenti.	223
Figura 147. Andamento delle tensioni nella sezione dell'esempio n°1.	223
Figura 148. Esempio n°2, grafico dei momenti flettenti.	224
Figura 149. Schema statico per la verifica del capochiave a piastra circolare.	225
Figura 150. Piastra circolare su solido elastico.	227
Figura 151. Equilibrio delle forze in un elemento infinitesimo.	228
Figura 152. Schema statico risolutivo.	235
Figura 153. Differenza dei coefficienti $\kappa$ .	236
Figura 154. Grafici dei coefficienti $\kappa$ e della curva che approssima la loro differenza.	237
Figura 155. Andamento delle tensioni.	240
Figura 156. Grafico riepilogativo dei risultati ottenuti.	243
Figura 157. Schema statico per l'analisi.	245
Figura 158. Schema statico per la verifica delle nervature.	250
Figura 159. Rappresentazione grafica degli spessori limite ottenuti.	252
Figura 160. Specifiche profilo triangolare [101].	255
Figura 161. Estratti dal punto 1.2.1	260
Figura 162. Estratti dal capitolo 2	261
Figura 163. Estratti dal punto 3.2.4	262
Figura 164. Estratti dal punto 3.3.1	263
Figura 165. Estratto dal punto 3.3.2	264
Figura 166. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 136-137.	272
Figura 167. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 138-139.	273
Figura 168. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 140-141.	274
Figura 169. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 142-143.	275
Figura 170. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 144-145.	276
Figura 171. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 146-147.	277

## Elenco delle Tabelle

Tabella 1. Coefficienti parziali da adottare nelle verifiche allo SLU [54].	137
Tabella 2. Valori della resistenza a trazione proposti [21].	148
Tabella 3. Valori delle resistenze a compressione e a taglio in assenza di compressione.	149
Tabella 4. Valori della coesione e del coefficiente di attrito [17].	173
Tabella 5. Valori indicativi del modulo edometrico e della costante elastica del terreno.	214
Tabella 6. Valori della costante elastica del terreno proposti da A. Riva.	215
Tabella 7. Valori del coefficiente $\kappa$ contenuti in [95].	235
Tabella 8. Valori de coefficiente $\kappa$ contenuti in [98].	235
Tabella 9. Resoconto dei valori ottenuti.	236
Tabella 10. Valori del coefficiente $\kappa$ , forma estesa.	237
Tabella 11. Resoconto degli spessori e delle rigidzze derivanti.	242
Tabella 12. Resoconto delle tensioni ideale ottenute con il metodo di Timoshenko.	243
Tabella 13. Resoconto delle tensioni ideali ottenute con il metodo di S. Caffè.	243
Tabella 14. Resoconto delle tensioni ideali ottenute con il metodo di M. Vinci.	243



## Nomenclatura

$A_W$	Sezione di base del maschio murario
$A_S$	Sezione del tirante metallico
$A_C$	Superficie di contatto tra il capochiave metallico e la muratura
$a, b$	Dimensioni del capochiave rettangolare
$B$	Rigidezza flessionale della lastra
$b_p$	Base del capochiave a paletto
$c_{mb}$	Coefficiente di coesione muratura
$D$	Diametro del capochiave circolare
$d$	Lunghezza in esame dell'arco
$d_f$	Diametro nominale di filettatura del bullone
$E_W$	Modulo di elasticità normale della muratura
$E_{W,\parallel}$	Modulo di elasticità normale della muratura
$E_S$	Modulo di elasticità normale del terreno
$e$	Eccentricità totale
$e_i$	Eccentricità dovuta al carico $i$ -esimo
$f_{b,ck}$	Resistenza caratteristica a compressione dell'elemento (mattoni) in direzione verticale
$\bar{f}_{b,ck}$	Resistenza caratteristica a compressione dell'elemento (mattoni) in direzione orizzontale
$f_{b,tk}$	Resistenza caratteristica a trazione dell'elemento (mattoni)
$f_{m,ck}$	Resistenza caratteristica a compressione della malta
$f_{m,tk}$	Resistenza caratteristica a trazione della malta
$f_{s,yk}$	Resistenza caratteristica a trazione per snervamento della catena
$f_{s,yd}$	Resistenza di calcolo a trazione per snervamento della catena
$f_{s,tk}$	Resistenza caratteristica a trazione per rottura della catena
$f_{s,td}$	Resistenza di calcolo a trazione per rottura della catena
$f_{w,ck}$	Resistenza caratteristica a compressione del maschio murario

---

$f_{w,cd}$	Resistenza di calcolo a compressione del maschio murario
$f_{w,tk}$	Resistenza caratteristica a trazione del maschio murario
$f_{w,td}$	Resistenza di calcolo a trazione del maschio murario
$f_{w,vk}$	Resistenza caratteristica a taglio del maschio murario
$f_{w,vd}$	Resistenza di calcolo a taglio del maschio murario
$f_{w,vk0}$	Resistenza caratteristica a taglio del maschio murario in assenza di azione assiale
$f_{w,vk,lim}$	Valore massimo della resistenza caratteristica a taglio che può essere impiegato nel calcolo
$FC$	Fattore di confidenza
$G$	Modulo di elasticità tangenziale
$H$	Spinta esercitata dall'arco
$h$	Altezza del maschio murario
$h_p$	Altezza del capochiave a paletto
$I_L$	Momento di inerzia della piastra
$I_p$	Momento di inerzia del capochiave a paletto
$L$	Dimensione parallela al piano medio del maschio murario
$L_C$	Dimensione parallela al piano medio del maschio murario sottoposta ad azione di compressione
$l_p$	Lunghezza aderente alla muratura del capochiave a paletto
$M_{Ed}$	Momento agente
$M_{Rd}$	Momento resistente
$N_{Ed}$	Azione assiale agente
$N_{Rd}$	Azione assiale resistente
$P_{Ed}$	Pretensione presente nel tirante
$p$	Reazione distribuita del terreno
$Q$	Carico concentrato
$q$	Carico distribuito
$R_L$	Raggio del capochiave circolare
$s_p$	Spessore della lastra



$T_{Ed}$	Azione di trazione presente nel tirante
$T_{w,Cd}$	Azione resistente della muratura al punzonamento secondo un meccanismo di rottura per compressione
$T_{w,Td}$	Azione resistente della muratura al punzonamento secondo un meccanismo di rottura per trazione
$T_{w,Vd}$	Azione resistente della muratura al punzonamento secondo un meccanismo di rottura per taglio
$t$	Spessore del maschio murario
$V_{Ed}$	Taglio agente
$V_{Rd}$	Taglio resistente
$w$	Peso specifico del materiale
$y$	Valore della deformata in direzione ortogonale all'asse principale
$\alpha_v$	Snellezza del pannello corretta in funzione dei vincoli di estremità
$\beta$	Coefficiente correttivo legato alla distribuzione degli sforzi tangenziali sulla sezione
$\gamma_M$	Coefficiente di sicurezza del materiale
$\Delta L_{yd}$	Deformazione limite elastica
$\Delta L_{td}$	Deformazione limite plastica
$\varepsilon_{s,yd}$	Allungamento percentuale a snervamento della catena
$\varepsilon_{s,td}$	Allungamento percentuale a rottura della catena
$\lambda_M$	Snellezza della parete
$\lambda$	Caratteristica del sistema (travi)
$\lambda l$	Rigidezza complessiva del sistema (travi)
$\mu$	Coefficiente di attrito
$\nu$	Modulo di Poisson
$\sigma_{Ed}$	Sforzo assiale nel maschio murario
$\sigma_1$	Tensione principale di trazione nel maschio murario
$\sigma_2$	Tensione principale di compressione nel maschio murario
$\zeta$	Angolo formato tra l'orizzontale e l'asse del paletto
$\tau_{Ed}$	Sforzo tangenziale nel maschio murario

---

$\tau_{Ed,U}$	Sforzo tangenziale ultimo nel maschio murario
$\phi$	Angolo di attrito interno tra blocco e legante
$\phi_R$	Diametro del tirante
$\psi$	Coefficiente funzione delle condizioni di vincolo
$\varphi$	Rotazione
$\omega$	Caratteristica del sistema (piastre)
$\omega/R_L$	Rigidezza complessiva del sistema (piastre)

## Abstract

Questa tesi si sviluppa nell'ambito del consolidamento delle strutture murarie. L'obiettivo generale del documento è quello di individuare e proporre i procedimenti analitici necessari al dimensionamento e alla verifica dei tiranti metallici, al fine di supportare la pratica del consolidamento edilizio.

La prima parte del lavoro svolto, consiste nella revisione della letteratura scientifica e mette in luce la povertà degli strumenti e dei modelli analitici disponibili su questo argomento. Per questa ragione la tesi fondamentale fornisce un'ampia trattazione riguardo la valutazione della capacità resistente ultima del "sistema" catena, intendendo quest'ultimo come l'insieme della barra, del capochiave e della zona di muratura investita dalla pressione di quest'ultima. Per arrivare a questo risultato si prende in considerazione criticamente quanto proposto dalla letteratura scientifica e se ne propongono radicali migliorie.

A compendio di quanto ora descritto, nella tesi viene proposta una panoramica delle modalità di messa in opera e progetto relative a (1) applicazioni necessarie al mutuo incatenamento dei pannelli al fine di permettere il comportamento scatolare dell'edificio; e (2) applicazioni necessarie a controbilanciare le azioni orizzontali prodotte da strutture spingenti.

## Abstract (english)

This thesis was developed in the field of masonry structures consolidation. The general objective of the thesis consists in the identification and formalization of appropriate analytical tools for sizing and testing metal rods.

The first part of the work is devoted to an in-depth critical review of scientific literature about the state-of-the-art methods in this field. The core of the thesis consists in the development of a comprehensive method for the evaluation of the last resistant capacity of the *metal rod system*, which is composed by the rod, the retaining plate and the portion of the masonry that is subjected to the pressure caused by the retaining plate. The novel approach here proposed overcomes the drawbacks highlighted in the literature review.

Finally, the thesis proposes an overview of practical approaches for design and construction of metal rod system in the following specific cases: (1) to increase the resistance of mutual chained walls and (2) to counterpoise the horizontal thrust of arches and vaults.



# Introduzione

Il consolidamento delle strutture in muratura è una tematica di primaria importanza all'interno del panorama edilizio italiano, poiché da essa dipende la possibilità di riqualificare l'immenso patrimonio costruttivo esistente sul territorio nazionale.

Tra gli interventi di consolidamento presenti nella pratica ingegneristica figura la disposizione di tiranti metallici. Essi sono principalmente utilizzati per impedire il ribaltamento dei pannelli murari non efficacemente ammortati e per contrastare le spinte indotte da particolari schemi strutturali. Questa pratica è stata apprezzata sin dai tempi passati e anche le attuali norme nazionali, nonché la letteratura scientifica in materia, ne consigliano l'utilizzo. Questo perché a una comprovata affidabilità ed efficacia si accompagnano una facile messa in opera, una bassa invasività e un'alta reversibilità dell'intervento.

Nonostante ciò questa tecnica di consolidamento è affetta da numerose incertezze e controversie, oltre al fatto che non risultano definiti dei procedimenti di verifica e dimensionamento comprovati da prove di laboratorio. Il presente documento ha quindi lo scopo di fornire un ampio quadro della materia, mediante l'analisi e la revisione della letteratura riguardante la tematica.

In prima istanza verranno dunque analizzati gli aspetti generali dell'argomento, valutando l'evoluzione che questa tecnica ha subito con il passare degli anni, la filosofia strutturale alla base di tale intervento e le modalità necessarie alla messa in opera. Sulla base di tali nozioni saranno poi definiti i procedimenti con cui determinare l'azione stabilizzante che i tiranti dovranno essere in grado di fornire.

Infine sarà riservata un'ampia trattazione alla capacità resistente ultima offerta dal sistema catena. Questa tematica, spesso disattesa o trattata in maniera erronea all'interno della letteratura scientifica, risulta di importanza fondamentale per la corretta riuscita dell'intervento.



# 1. Aspetti generali

## 1.1. Evoluzione storica

Una piena comprensione della tecnica con cui si dispongono le catene metalliche passa attraverso lo studio del ruolo che queste hanno avuto nei secoli. Nel capitolo in questione ci si accinge dunque a mostrare l'evoluzione che questi tiranti hanno subito per quanto riguarda la loro messa in opera, le loro funzioni e le loro forme. Il contesto di riferimento resta quello occidentale e ancora più in particolare quello italiano, ma se si cerca una trattazione più completa e rigorosa è possibile consultare la tesi [1].

Innanzitutto bisogna premettere che i tiranti in acciaio nascono per contenere la spinta prodotta da volte, archi e solai sulle pareti perimetrali degli edifici. In principio questa funzione era assolta mediante catene lignee, queste tuttavia causavano un forte impatto estetico e pertanto, con il tempo, si tentò di alleggerirne il profilo realizzandole in ferro.

La funzione di controllo della spinta laterale è riportata per la prima volta nel trattato di architettura, ingegneria e arte militare (1503) di Francesco Di Giorgio Martini [2] e nel trattato "De re aedificatoria" (1565) di Leon Battista Alberti [3], dove nel libro III cap. XIV si specifica l'utilizzo di tale presidio per contenere la spinta di volte e archi fortemente ribassati.

*"Adunque non habbiamo bisogno di corde ne gli archi interi, difendendosi per loro medesimi; ma ne gli archi meno che interi, habbiamo bisogno d'una catena di ferro, o gli affortichiamo di mura di quà e di là, che habbino forza di corda [...]" [3]*

Ancora Pellegrino Pellegrini Tibaldi, nel suo trattato "Architettura", afferma che:

*"[...] a tutti li modi che si facci la volta, convien porvi al dritto de' pilastri o colonne delle faciate le grosse chiavi di ferro intertenuto, che per il proprio peso non posi cadere, con deste chiave di fero che vada alle volte del circolo della volta; e tale chiave di fero scuro è vive e vesibile, et anco morte, che non si vedono." [4]*

Sempre in quegli anni Sebastiano Serlio, nel trattato "I sette libri dell'architettura" [5] (1584) al cap. VI del libro IV, ribadisce tale concetto introducendo però altre importanti nozioni.

*"[...] percioche quella loggia o portico, che vogliamo dirlo, vuole essere voltato a botte, ma dove saranno gli archi sarà dibisogno che si facciano le crociere, si come appare nella pianta qui di sotto (Figura 2); e perché le co-*

*lonne non potrebbero sostenere i fianchi delle crociere, le quali sempre spingono in fuori; sarà necessario sopra ogni colonna ne' fianchi della botte metterci le chiavi di ferro, ma di bronzo sariano più perpetue: se pur si faranno di ferro per difenderle dalla ruggine, si potrà vernicarle al fuoco, cuocerle sopra la vernice, anco il fasciar di lame di piombo, o di rame quella parte che sarà posta nel muro, darà grande aiuto alla durabilità.”[5]*



**Figura 1.** Illustrazione tratta da [3].

E' interessante notare la cura che si iniziava a riporre nella scelta dei materiali e nel loro posizionamento di modo da non inficiare la funzionalità del dispositivo a causa di un prematuro deterioramento causato dalla ruggine.

L'utilizzo delle catene era comunque visto come un male necessario a supplire le carenze meccaniche della muratura e le perniciosità causate dagli schemi strutturali adottati. Pertanto, come osservabile in Figura 2, si cercava di nascondere i ca-



pichiave all'interno delle strutture e dove possibile si cercava di occultare la catena stessa all'interno della volta.

"[...] poste infra la grossezza d'essa volta e 'l pavimento [...]" [2]

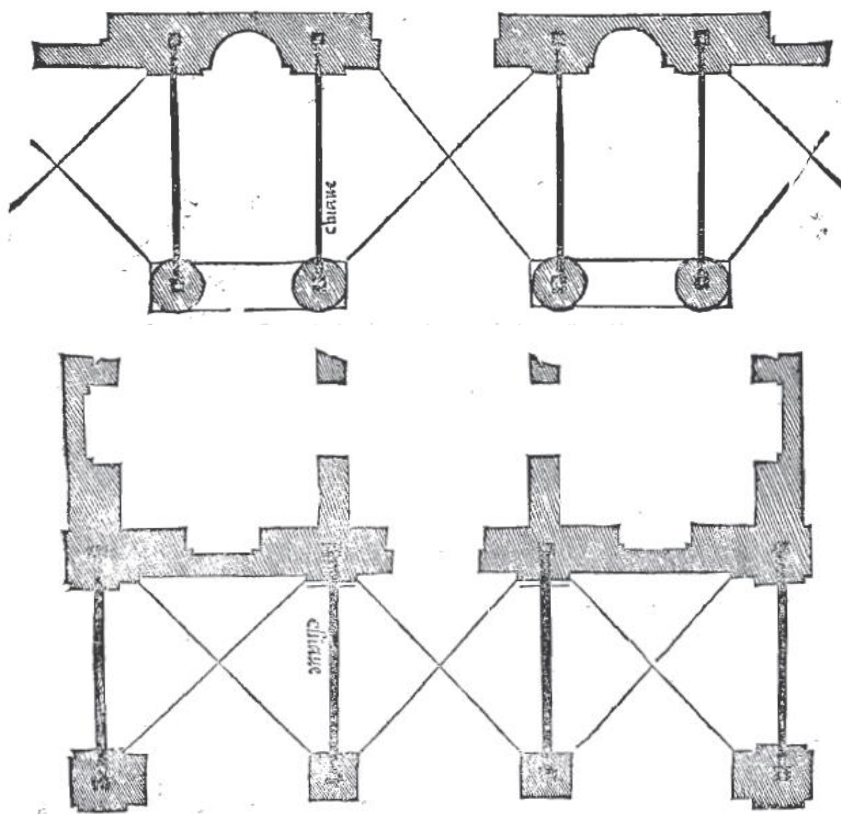


Figura 2. Schema di posizionamento delle catene estratto da [5].

Nel '600 e nel '700 l'utilizzo di tiranti metallici era fortemente sconsigliato più che per motivi strutturali, per fattori estetici e culturali. A tal proposito si riporta un estratto dal libro XIII cap. XIV de "L'idea dell'architettura universale" (1615) di Vincenzo Scamozzi [6].

"[...] le quali cose debbonsi molto bene osservare per fuggire quegli abusi e disconci di mettere ferramenti e catene da legar pali a traverso ai luoghi: maniere introdotte dai barbari e da genti straniere e del tutto lontane dalle belle e graziose maniere dell'edificare; e però alle volte osservate da alcuni moderni poco intelligenti, e manco osservatori del buono. Vero è, che alle volte ci possiamo assicurare con le catene di ferro fin tanto che l'opera possa stabilirsi e far buona presa [...] vero è che furono fatte di mattoni cotti buonissimi, e perciò a mezzo il fianco di essa volta, dove consiste il maggior contrasto, facemmo porre una catena di

*ferro di onesta grossezza, divisa in otto pezzi, impernata negli otto angoli, e murata nella grossezza di essa volta, la quale cinse con molta forza e leggiadria, essendo murata a spiche e con archi rimurati, i quali portano tutto il peso verso gli angoli; la onde ella si è conservata benissimo col suo coperto sopra, come si può vedere, e contro l'opinione della maggior parte degli artisti di quella città.” [6]*

e si cita un estratto del primo libro di “Principi di architettura civile” (1781) di Francesco Milizia [7]:

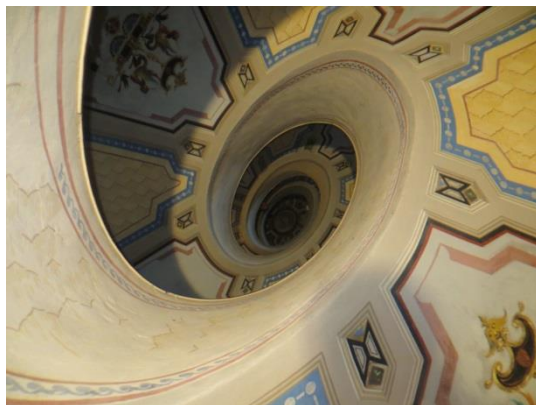
*"Negli edifici antichi si osserva molta parsimonia "di ferro; non se n'è mai scoperto alcun pezzo in luogo apparente: non vi si veggono che alcuni ramponi di bronzo, delle spranghe, o sieno grappe, o branche , nascoste negli architravi, nelle cornici, e nelle volte. Nelle opere Gotiche è tutto l'opposto : non vi si trova pietra , che non sia sigillata a piombo con branche di ferro. Anche nelle nostre l'abbondanza è grande, e forse abusiva, specialmente in quelle catene, che s'impiegano negli archi, e che dimostrano la debolezza della costruzione. Contro queste catene Vignola non si dava pace, e soleva dire, che le fabbriche non si hanno da reggere colle stringhe. E che direbbe egli, se ora vedesse in Roma, ove i materiali e i cementi sono i migliori, costruirsi edifici di pianta, e concatenarsene di ferro ogni pezzo? [...] Gli edifici ben costruiti non hanno bisogno di queste allacciature, le quali non sono che rimedi per le fabbriche vecchie e rovinose. Quando la necessità porta d'impiegar tali spranghe di ferro, s'impieghino, come si spacciano da' Mercanti, senza punto diminuirne la grossezza; basta solo batterne le estremità, per farne l'occhio e l'uncino.” [7]*

Dalla lettura dei brani proposti emerge in maniera preponderante una regola dell'arte che non vedeva certo di buon occhio l'utilizzo di tiranti metallici se adottati già in fase di progetto. Il buon costruttore non doveva dunque ricorrere al ferro per costruire ex-novo un edificio, poiché esso era ritenuto un materiale esterno alla pratica e alla cultura italica del buon costruire.

Occorre però distinguere il fatto che tale intervento era mal visto solo qualora fosse adottato già in fase di progetto, mentre era ritenuto doveroso ed efficace se effettuato come rinforzo strutturale di strutture ammalorate o mal progettate. A tal riguardo vi è un'evoluzione nella loro disposizione in quanto non sono più occultate nella muratura, ma denunciate esplicitamente all'osservatore (*s'impieghino, come si spacciano da' Mercanti*).

Un esempio di questa filosofia costruttiva è fornito dalla scalinata presente all'interno del palazzo Boncompagni a Vignola. Jacopo Barozzi progettò, infatti, una scala a chiocciola elicoidale in mattoni che aveva il pregio di sostenersi senza l'ausilio di una struttura verticale interna e senza il controllo della spinta laterale

mediante i tiranti metallici, ma solo appoggiandosi alle pareti perimetrali esterne. Il passare del tempo ha tuttavia deteriorato i materiali e portato la struttura a una situazione precaria, tanto da dover ricorrere al consolidamento della torre, mediante il controllo della spinta attraverso l'uso di tiranti metallici.



**Figura 3.** Scala autoportante in muratura a palazzo Boncompagni, Vignola.

**Figura 4.** Consolidamento della scala mediante tiranti metallici.



Un interessante indizio sulle forme dei capichiave è fornito nelle righe finali dell'ultimo estratto, dove si consiglia di terminare l'estremità della catena in maniera tale da formare l'occhiello in cui inserire il paletto metallico. Fino alla fine del '700 non vi è traccia, nei trattati o negli edifici conosciuti, di capichiave diversi da quelli a paletto o di tecniche di serraggio diverse dal mettere in tensione la catena attraverso l'inserimento di una zeppa metallica tra l'occhiello e il paletto. Fino a questo periodo la catena era dunque formata da un unico tirante di ferro di sezione quadrata (non rotonda, perché la sezione era ottenuta per battitura, vedi Figura 5), lavorato alle estremità e messo in tensione a freddo. Nel migliore dei casi il sistema era costituito da tre pezzi poiché, come osservabile in Figura 6 il tratto centrale era collegato alle estremità mediante i giunti a forchetta. Ciò consentiva una facile sostituzione del tirante se questo avesse subito una forte plasticizzazione.



**Figura 5.** Porzione di una catena metallica a sezione rettangolare proveniente dal Duomo di Milano.



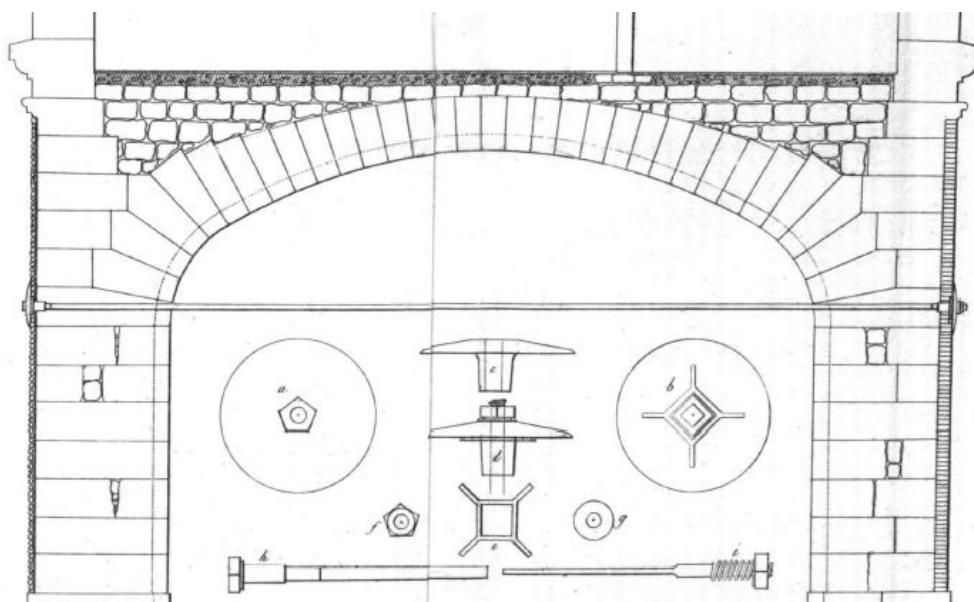
**Figura 6.** Giunto a forchetta per la connessione del tirante al capochiave, corte interna del complesso di Brera, Milano.

Nuove forme e innovative tecniche di messa in opera prendono piede dall'ottocento. Ciò è dovuto alle nuove scoperte maturate nel campo della scienza delle costruzioni e alle nuove problematiche legate alla conservazione del patrimonio edilizio esistente. Anche se poco esaustivo di una tematica qual è quella del restauro, in cui questo lavoro non ha intenzione di addentrarsi, è tuttavia molto utile citare l'aforisma 31 prelevato dal libro "Le sette lampade dell'architettura" scritto da John Ruskin nel 1849. Esso è utile poiché fornisce una parte del pensiero culturale intorno al quale si muoveva il dibattito sul restauro e maggiormente, esso mostra lo spazio che l'intervento di rinforzo strutturale mediante catene poteva occupare dentro lo scenario della conservazione dei beni monumentali.

*"Eppure, si dice, il restauro può presentarsi come una necessità. Certo! Guardiamola bene in faccia questa necessità, e cerchiamo di capirla nei suoi veri termini. E' una necessità distruttiva. Accettatela, così; e allora demolite tutto l'edificio, spargetene le pietre negli angoli più remoti, fatene zavorra, o materiale da costruzione, se volete; ma fatelo onestamente, e non elevate un monumento alla menzogna, al loro posto. [...] Prendetevi cura solerte dei vostri monumenti, e non avrete alcun bisogno di restaurarli. Poche lastre di piombo collocate a tempo debito su un tetto, poche foglie secche e sterpi spazzati via in tempo da uno scroscio*

*d'acqua, salveranno sia il soffitto che i muri dalla rovina. Vigilare su un vecchio edificio con attenzione prematura; proteggerlo meglio che potete e ad ogni costo [...] dove la struttura muraria mostra delle smagliature, tenetela compatta usando il ferro; e dove essa cede, puntellatela con travi: e non preoccupatevi per la bruttezza di questi interventi di sostegno [...] e più di una generazione potrà ancora nascere e morire all'ombra di quell'edificio.” [8]*

Accanto a questo nuovo spirito di conservazione si sviluppano profondamente le tecniche di consolidamento mediante i tiranti metallici, tanto che Jean-Baptiste Rondelet all'interno del suo “Trattato dell'arte di edificare” (1817) [9], dedica tutto il primo capitolo del settimo libro a questa tecnica. Si procede dunque col riportare alcuni estratti di questo libro per meglio comprendere l'evoluzione di questi dispositivi.



**Figura 7.** Estratto dalla tavola CXLIII di [9].

*“Non basta di costruire i muri d'un fabbricato nelle dimensioni volute e con tutta l'attenzione convenevole [...] si prendono di piano in piano certe precauzioni a questo riguardo nella costruzione dei muri per prevenire ogni allontanamento, mettendo nel centro dei muri o nel loro spessore, delle catene orizzontali di ferro piatto o quadrato ben applicate, e solidamente saldate alle loro estremità con àncore, le quali legano insieme i muri in modo da non poter agire l'uno senza l'altro ed a prestarsi un reciproco soccorso. Queste catene si pongono nei muri nel costruirli.*

*Frattanto solamente nei fabbricati u' una certa importanza si mettono le catene io tutta la lunghezza dei muri; perchè, nelle case ordinarie, basta porre dei tiranti alla testa o piuttosto all'incontro di tutti i muri di spartimento e divisori con i muri di faccia a ciascun piano, della lunghezza solamente di 7 a 8 piedi, la cui estremità opposta all'ancora è infissa nella murazione. [...]ed allora vi si dava la forma d'un S oppure d'un Y per abbracciare una più grande estensione di muro; ma ora, per non nuocere all'effetto delle facciate, benchè questo modo non sia così solido, si fanno diritte e s'incassano per 2 o 3 pollici per nasconderle alla vista."*

Oltralpe la tecnica dei tiranti è dunque fortemente apprezzata anche quando è utilizzata nella costruzione di nuovi edifici. Anzi ne viene fortemente consigliata la pratica per promuovere il comportamento scatolare dell'edificio ed esaltare così le capacità meccaniche della muratura. I tiranti sono dunque posti in opera fin dalla costruzione per legare tra loro i diversi setti, ma la loro presenza è occultata alla vista attraverso l'incassatura delle chiavi all'interno della muratura.

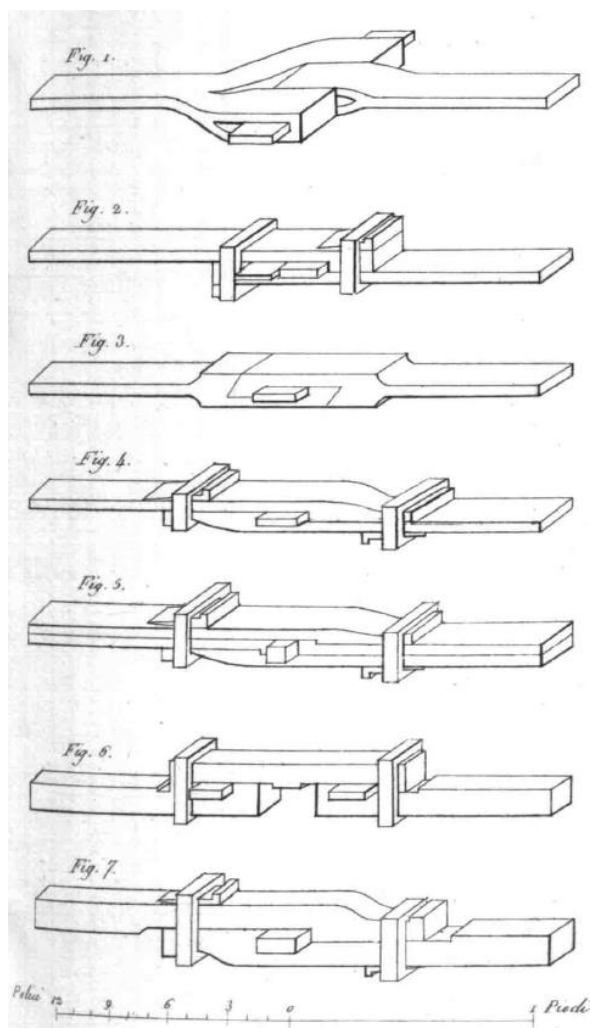
All'interno del capitolo, di cui si consiglia una lettura completa, è poi interessante scoprire i primi calcoli e ragionamenti, relativi al dimensionamento di questi dispositivi. Desta tuttavia maggiore interesse il seguente paragrafo relativo alle modalità di connessione reciproca dei tiranti:

*"Vi sono tre maniere differenti di formare le commessure delle catene; cioè con cerniere, con talloni e con occhi.*

*Per la commessura a cerniere rappresentata dalla figura 1 (vedi Figura 8), Tavola CXLIII, l'estremità d'una delle barre forma una forca nella quale s'introduce l'estremità dell'altra. Le tre grossezze di ferro riunite sono forate da un buco; in questo buco si fa entrare una cavicchia a vite oppure a chiavetta e qualche volta cunei doppi. Si preferiscono i cunei doppi quando trattasi di far tirare le barre che formano la catena; una tale operazione chiamasi far legare la catena. Le catene e i tiranti in ferro piatto mancano ordinariamente al punto della piegatura, che si pratica alla loro estremità, acciocchè l'occhio che le termina possa pigliare l'ancora in una posizione verticale, perchè il ferro è corrotto in questa parte. Si eviterà questo inconveniente posando le barre in coltello nei muri, oppure la lunghezza d'una delle faccie verticali delle travi.*

*Nella seconda commessura, rappresentata dalle figure 2 e 3 (vedi Figura 8), le estremità che devono unirsi sono terminate da talloni voltati in senso contrario. Si fa legare la catena, introducendo cunei di ferro fra i due talloni, mantenendosi unite le estremità delle barre per mezzo di due briglie situate al punto dei talloni.*

La commessura ad occhi non differisce dalla precedente che nell'essere i talloni più forti, e contornati come si vede nelle figure 4, 5, 6 e 7 (vedi Figura 8). Questa maniera di riunire le barre è la più solida, e perciò si preferisce per le grandi catene che hanno potenti sforzi da sostenere.”



**Figura 8.** Schemi per la connessione reciproca dei tiranti estratti dalla tavola CXLIII di [9].

Infine il capitolo riporta il consolidamento delle strutture del conservatorio delle arti e dei mestieri eseguito da Rondelet con l'aiuto del direttore dell'istituto M. Molard. Tali operazioni, riportate anche da C. Russo in [10], sono di grande interesse perché per la prima volta si utilizzano delle piastre circolari in ghisa in luogo dei normali paletti. Queste piastre, come osservabile in Figura 7, sono poi dotate di un bullone con cui era eseguita la messa in tensione della barra. Tuttavia l'operazione non avveniva a freddo, in quanto si provvedeva a scaldare il tirante per allungarlo durante il serraggio. Una volta raffreddata, la barra guadagnava uno stato di tra-

zione che era così imposto alle pareti per recuperare lo strapiombo delle stesse causato dalle spinte della volta.

A Rondelet e più in generale alle teorie proposte dall' Ecole de pont et chaussée si deve dunque l'introduzione dei capichiave a piastra, di tecniche per la connessione delle catene, dell'operazione di messa in tensione a caldo e, non meno importante, la ricerca del comportamento scatolare degli edifici in muratura attraverso l'uso di tiranti metallici.

Nello stesso periodo (1829) Giuseppe Valadier pubblica in Italia il trattato "L'architettura pratica" [11]. Al suo interno è ravvisabile una sintesi tra la parsimonia culturale italica verso l'utilizzo dei tiranti nelle nuove costruzioni, la razionalità francese che vedeva di buon occhio questa pratica e l'ingegnosità ottocentesca utilizzata per smascherare alcuni perniciosi sistemi di messa in opera, dettati unicamente da caratteri estetici.

In particolare è utile riportare il seguente estratto dal libro 2, sezione VII:

*"...se non vi fosse il sussidio delle catene, delle sbranche, de' tiranti, e simili altri mezzitermini per risparmio di grossezze immense de' muri e per supplire a forze che utilmente si pongono invece di queste, bisogna però anche queste forze collocarle e distribuirle senza abuso, e con quella parsimonia che è necessaria in ogni parte del fabricato ma questa parsimonia deve essere ragionata, giacché potrebbe divenire mancanza delle forze con deperimento del fabricato.*

*Le catene devono non sostenere decisamente in piedi un fabricato, o una parte di questo, ma devono esservi per soccorso ad un qualche cedimento che ogni fabbricato è soggetto a fare per suo peso per una qualche cessione di fondamento per suo naturale assestamento nel seccarsi i muri, e siccome dalle varie grossezze de' muri e dalla variata gravità che questi hanno per le diverse grandezze di ambienti, per i diversi carichi di volte di scale, de' solari, di elevazioni, di vani, e di tante varietà; così dando loro un eguale assettamento, fa sì che in ogni fabricato si osservi nei muri delle piccole, e varie lesioni provenienti da queste circostanze, e tanto maggiori appaiono, quando una fabrica è stata costruita sollecitamente. Ecco dunque che munita una fabrica di questi sussidi non solo sarà sicura a queste inevitabili mosse, che senza catena alcuna potrebbero divenir significanti, ma saranno ancor più utili a resistere a qualche scossa di terremoto."*

e altri frammenti prelevati dal libro 4 alla sezione XXI:

*"Quando accadesse di dover osservare un danno in qualche muro strappato di un fabbricato e che si riconosca cagionato dall'urto e spinta interna di qualche arco, volta, ed anche solare, che dalla sua vecchiaia, costruzio-*



ne, e carico possano aver prodotto questo detrimento al muro; il miglior modo di assicurarlo sarà quello di togliere la causa [...] Se il danno l'avesse prodotto la spinta di una volta, sarà prudenza di demolirla, e sostituirla un solaro con buoni travi maestri, ponendovi alle teste li suoi bandelloni di ferro, tanto dell'una che dall'altra testa, con i suoi paletti e zeppe come si osserva alla tavolare CCLXXVI fig.1 (vedi Figura 9). Questi bandelloni saranno di ferro, detto cerchio, proporzionato all'ufficio che devono fare, ed alla grandezza del vano e grossezza dei muri... e se le mura avessero sofferto negli angoli del fabbricato, sarà bene di collocarvi qualche catena di ferro con suoi paletti, che prenda a legare il muro esterno con altro interno buono e senza difetti; potendo queste catene internarle sotto il mattonato, o sia nella grossezza del lastrico..."

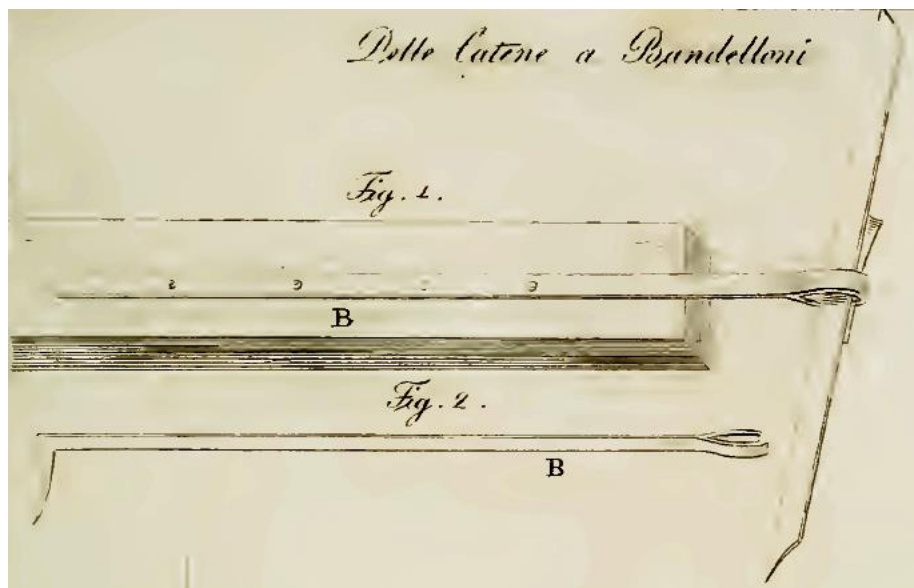
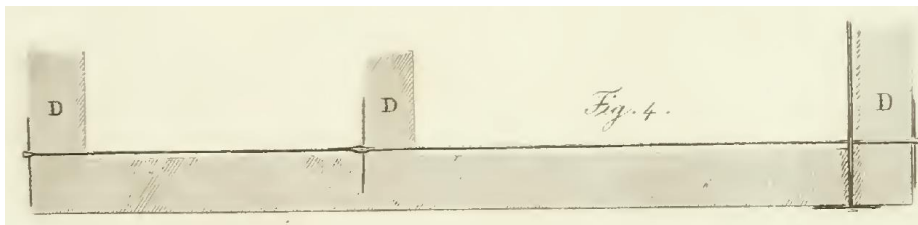


Figura 9. Estratto dalla tavola CCLXXVI di [11].

Valadier introduce dunque la necessità di creare un vincolo bidirezionale per le travi maestre di un solaio, di modo che queste non esercitino la funzione di maglio durante una scossa sismica. Viene inoltre ribadita la necessità di legare tra loro le diverse pareti di un fabbricato.

"Li paletti che si collocheranno nell'esterno delli prospetti sarà necessario porli obliquamente come si disse, e come in dette fig. 3 e 4 lett. D (vedi Figura 10) perchè prenderanno in una parte tutta la grossezza del muro che deve reggere, e coll'altra in appoggio a resistere all'urto di quelle, giacchè ponendoli perpendicolari non farebbero questo officio. Se tali catene o bandelloni si avessero a collocare in fabbricati di figura irregolare o mista

*dovrà sempre osservarsi di situarle colla direzione più breve ed opposta direttamente al sito che devono sostenere..."*



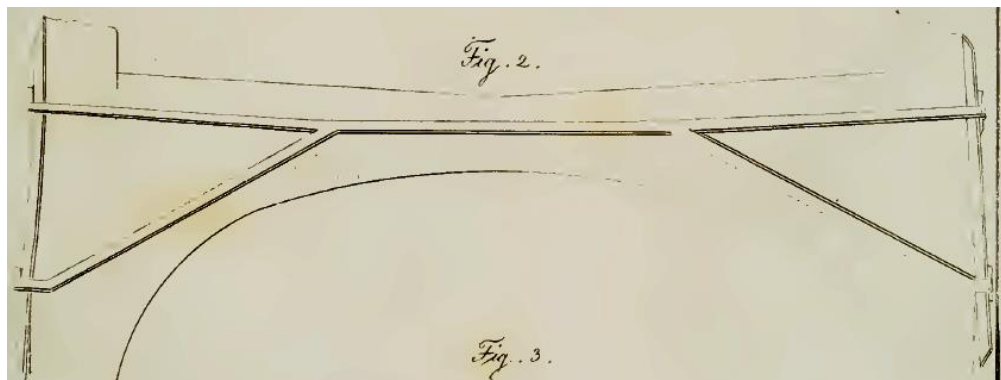
**Figura 10.** Estratto dalla tavola CCLXXVI di [11].

*"Devo darvi in proposito un avvertimento, che è di procurare nel far i buchi ai muri vecchi dove si giudicherà opportuna di porvi una e più catene [...] e perciò i paletti dovranno esser lunghi, e poco incassati nel muro giacchè l'incassarli troppo non farebbe che indebolire la parte che più deve essere sostenuta."*

Per la prima volta sono fornite delle informazioni per quanto riguarda il posizionamento dei capichiave a paletto. In particolare viene prescritto che quando le catene sono utilizzate per legare tra loro i diversi pannelli del fabbricato, è bene che il paletto sia disposto in posizione obliqua, in modo da sottendere il muro di spina e il muro di cui si vuole impedire il ribaltamento.

Di maggiore interesse è il prossimo estratto, in quanto per la prima volta viene espresso un giudizio molto severo sulle catene poste nello spessore della volta. Inoltre vengono fatti propri gli studi di Poleni e Couplet sulla spinta degli archi e viene proposto il posizionamento della catena a un terzo dell'altezza dell'arco.

*"Le catene nelle imposte degli archi e delle volte sono la vita delle medesime, quando li piedritti e li muri non sono abbastanza solidi [...] Alcuni architetti che hanno azzardato di fare volte ed archi senza catene, e senza l'opportuna base delli piedritti; hanno dovuto con dispiacere per loro colpa vedersi cadere tali volte. Vi è chi per non far vedere le catene, e non fare li piedritti abbastanza solidi ha praticato di mettere delle catene di ferro nascoste nella grossezza della volta medesima... ma questa sorte di catene poco o niente forzano, cedono all'urto della volta più o meno secondo la sua forma, seguendo col piegarsi, l'andamento del cedimento naturale del volto medesimo [...] All'opposto la catena retta, posta circa al terzo dell'arco, come si avvertì nella sudetta Tav. CCXLI fig. 9 per la spinta delle volte, senza strapparsi, non può mai pericolare"*



**Figura 11.** Estratto dalla tavola CCLXXVII di [11].

Ulteriori sviluppi nella teoria dei tiranti metallici sono portati da Nicola Cavalieri di San Bertolo il quale pone la questione degli effetti della dilatazione prodotta dalle variazioni termiche. Importante è poi il contributo di Gustav Adolf Breyman il quale introduce nel 1877 il giunto di connessione tra tiranti cosiddetto a manicotto, per mezzo del quale è possibile il tiro a freddo della barra.

Una forte opera di divulgazione è poi dovuta al trattato di Musso e Copperi [12], di Andreani [13], di Donghi [14] e di Formenti [15], per mezzo dei quali le conoscenze acquisite in secoli di teoria e pratica furono consolidate e trasmesse ai posteri.

## 1.2. Le catene odierne

### 1.2.1. Applicazioni

Con la precedente analisi storiografica sono stati analizzati numerosi trattati grazie ai quali è possibile intuire le numerose funzioni assolvibili dai tiranti metallici. Occorre tuttavia organizzare in maniera maggiormente dettagliata questo aspetto, anche alla luce delle nuove applicazioni adottate nel consolidamento.

Se si limita il campo di analisi alle strutture in muratura non armata è possibile scindere il fine per cui disporre dei tiranti metallici in tre macro aree:

- Contrasto alle azioni statiche di strutture spingenti,
- Ricerca del comportamento scatolare della struttura,
- Consolidamento locale di singole porzioni murarie.

#### 1.2.1.1. Presidi contro le strutture spingenti

Il primo gruppo comprende tutti quei presidi tesi a contrastare l'azione statica, generata da strutture spingenti (archi, volte e coperture inclinate), la quale andrebbe ad abbattere il supporto verticale della struttura stessa.

A questa categoria appartengono sicuramente le catene, queste sono costituite da un tirante, il quale viene posizionato a una determinata altezza dell'arco o della volta in direzione perpendicolare alla generatrice e successivamente vincolato alle pareti della struttura, mediante delle piastre dette capichiave. In questo modo la catena è in grado di assorbire la spinta che questi schemi statici generano per assolvere al loro compito.



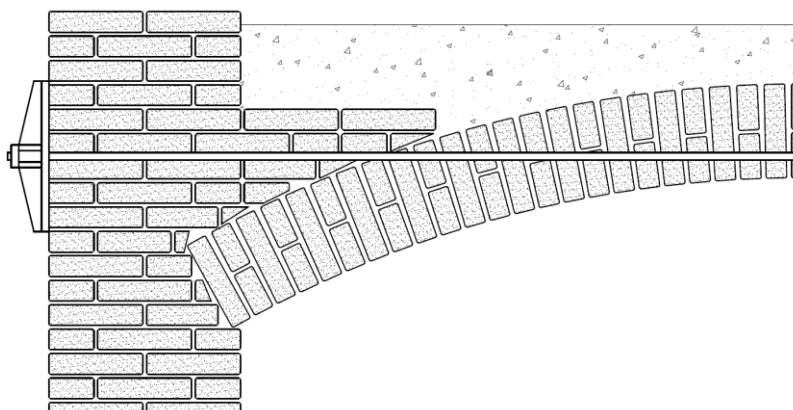
**Figura 12.** Camminamento esterno dell'abbazia di San Colombano (Bobbio).

E' bene anticipare che la risultante della spinta laterale esercitata da un arco è in genere situata a un terzo della sua freccia e pertanto, la posizione più efficace della catena per consolidare l'arco risulta quest'ultima (Figura 12). Tuttavia se l'arco è in buona salute ed è necessario consolidare i piedritti sarà necessario disporre i tiranti al piano di imposta in modo da eliminare integralmente la spinta su questi ultimi.

I tiranti disposti all'intradosso della sagoma dell'arco o della volta verranno chiamati catene intradossali (Figura 13), mentre quelli posizionati al di sopra dell'intradosso verranno invece chiamati catene estradossali (Figura 14).



**Figura 13.** Doppia catena intradossale, Palazzo comunale di Modena.

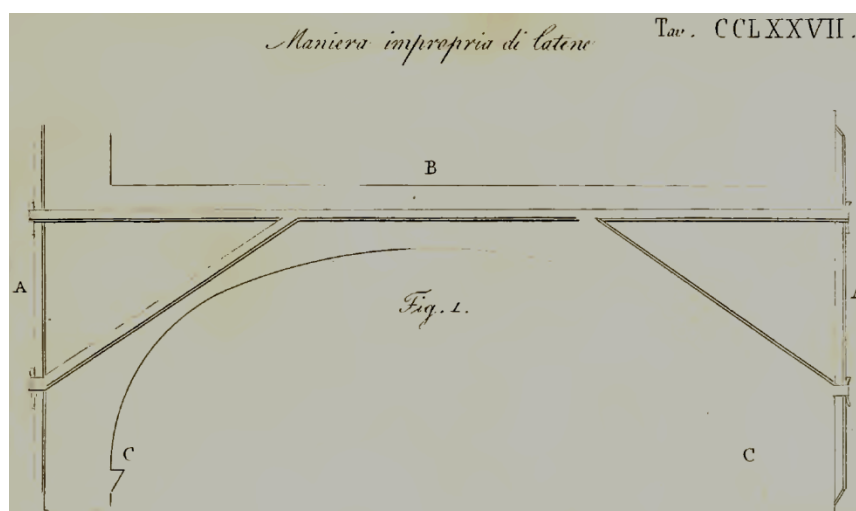


**Figura 14.** Schema di una catena estradossale.

Per quanto i tiranti estradossali presentino l'indiscutibile vantaggio di non deturpare il profilo di un'eventuale volta affrescata, essi scontano un pessimo comportamento meccanico, in quanto, specie se pretesi, inducono assieme alla spinta della

volta una coppia sulle pareti perimetrali, le quali rischiano così il collasso per pressoflessione.

Un primo metodo di mitigare questo effetto consiste nella cosiddetta catena “a braga” (vedi Figura 15), dove dei tiranti inclinati, detti “braghettoni”, collegano la catena annegata nella volta a dei capichiave maggiormente estesi lungo la muratura. Al precedente capitolo era stato fatto osservare che già G. Valadier sconsigliava l’uso di questi dispositivi in quanto non erano ritenuti tanto più efficaci di una semplice catena estradossale. Questo perché il tirante orizzontale non ha una sezione in grado di offrire la necessaria rigidezza flessionale e pertanto i braghettoni vanno semplicemente ad accompagnare il collasso della volta.



**Figura 15.** Schema della catena a braga, estratto dalla tavola CCLXXVII di [11].

Recentemente il sistema è stato tuttavia recuperato andando a sostituire il tirante metallico orizzontale con dei profili in acciaio, detti “graffette”, in grado di assicurare la necessaria rigidezza flessionale e permettere così ai braghettoni di contrastare l’azione di pressoflessione indotta dalla spinta della volta.

Tra le strutture spingenti sono comprese anche le coperture inclinate le cui spinte sulle pareti verticali di supporto potrebbero produrre il collasso delle stesse. Per prevenire ciò, anche in questo caso è possibile porre in opera dei tiranti metallici, dotati o meno di una pretensione iniziale, con lo scopo di contrastare tale spinta.

Ulteriori utilizzi dei tiranti metallici per il presidio di strutture spingenti consistono nella predisposizione di sistemi con cui letteralmente appendere la volta o nel posizionamento di cavi in adiacenza intra o estradossale al profilo dell’arco. Questi ultimi, più che assorbire la spinta dell’arco come i precedenti, tendono a correggerne la risultante delle azioni interne in modo che ricada dentro il profilo della struttura e garantirne così la stabilità. Questi sistemi presentano dunque un fun-

zionamento e un fine statico differente rispetto ai precedenti che miravano all'incatenamento della struttura muraria e pertanto non verranno affrontati nel presente lavoro. Il lettore interessato potrà comunque approfondire queste tematiche consultando i seguenti scritti [16-18].



**Figura 16.** Catene per contenere la spinta della copertura, Abbazia di San Colombano, Bobbio.

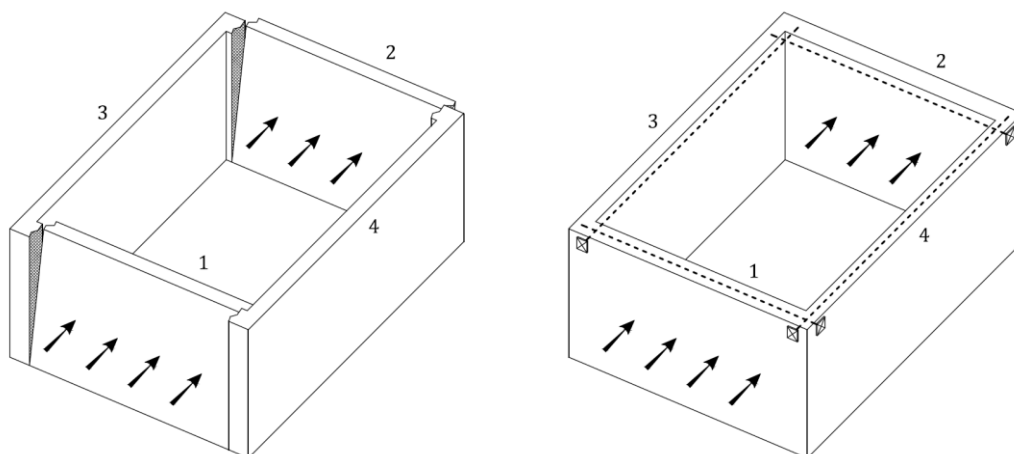
**Figura 17.** Catene per contenere la spinta della copertura, Cappella presso Miazzina, Valgrande.

#### **1.2.1.2. Presidi tesi a ricercare il comportamento scatolare**

La seconda famiglia di applicazioni racchiude tutti quei presidi destinati a migliorare la resistenza della struttura contro le azioni laterali causate dal vento e dal sisma. E' noto che un pannello murario mal si oppone a quelle azioni che lo investono perpendicolarmente al suo piano medio, tuttavia se questo è opportunamente connesso ad altre pareti, orientate parallelamente alla direzione con cui l'azione laterale investe il primo pannello, l'azione si redistribuisce su queste ultime in virtù della loro maggior rigidità.

Occorre pertanto che tutte le pareti portanti di un edificio in muratura siano connesse tra loro in modo da ottenere un comportamento scatolare e una risposta globale contro le azioni laterali. Il collegamento si esplica su più livelli, in quanto vi è la necessità di creare un collegamento tra i pannelli lungo la loro interfaccia verticale e un collegamento sull'interfaccia orizzontale ottenuto mediante un solaio sufficientemente rigido.

Generalmente negli edifici in muratura costruiti prima del primo dopoguerra è presente solo il collegamento di tipo verticale tra le pareti, il più delle volte ottenuto mediante lo sfalsamento dei giunti e dei blocchi. La necessità di disporre di orizzontamenti rigidi e dotati di vincolo bilatero in grado di redistribuire l'azione laterale era infatti un concetto abbastanza sconosciuto e pertanto, raramente si ritrovano solai di questo tipo nelle vecchie costruzioni. In ogni caso è possibile consolidare un edificio che sia in deficit di questi due tipi di connessione mediante dei tiranti metallici.



**Figura 18.** Schema generale per il posizionamento di tiranti metallici.

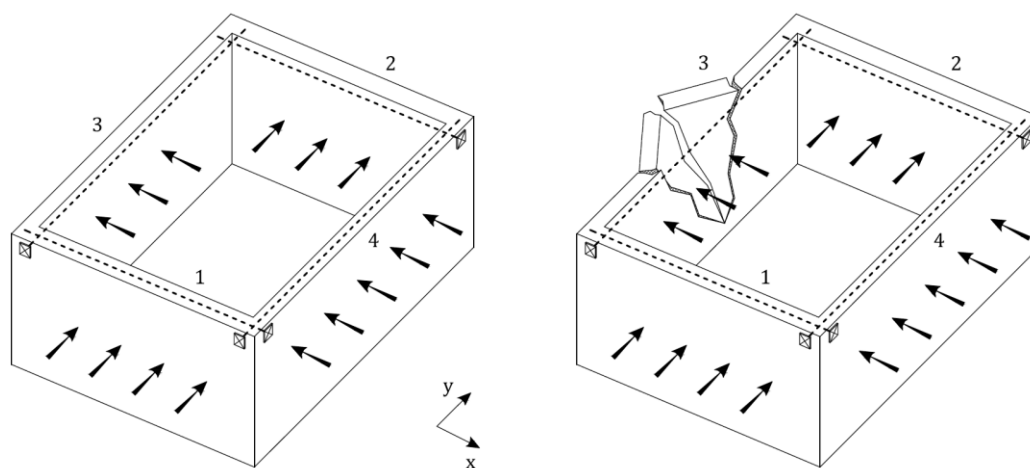


**Figura 19.** Catene applicate per vincolare mutuamente le pareti ortogonali. Chiesa di San Lorenzo ed edificio attiguo, Bobbio.



In particolare è possibile stabilire o ristabilire il necessario collegamento verticale tra le pareti, applicando delle catene dotate di capichiave ad entrambe le estremità. Come osservabile nella Figura 18, si ipotizzi un sistema strutturale elementare basato su quattro pannelli disposti a formare un rettangolo le cui intersezioni risultino scarsamente ammortate. Durante un evento sismico le pareti 3 e 4 rispondono egregiamente alla sollecitazione loro applicata in quanto parallele alla direzione del sisma, ma i pannelli 1 e 2, essendo sollecitati in direzione perpendicolare al piano medio cedono per pressoflessione e si ribaltano. L'apposizione di catene, situate a livello dei solai e posizionate in adiacenza ai muri, permette di risolvere questo problema, in quanto è possibile trasferire, mediante i capichiave, l'azione presente nei pannelli 1 e 2 ai ben più rigidi 3 e 4.

La connessione verticale tra le pareti può tuttavia non essere sufficiente a prevenire il ribaltamento delle stesse. In tal senso è utile riferirsi alla Figura 20, nella quale è osservabile la precedente struttura sottoposta però alle due componenti del sisma lungo le direzioni x e y. In questo caso la precedente sollecitazione agente lungo y è ancora assorbita, ma è possibile che la componente in direzione x comporti una rottura nei pannelli 3 e 4. Il fenomeno è causato dal fatto che le porzioni di muratura 3 e 4 vicine agli spigoli riescono a trasferire gli sforzi ai pannelli 1 e 2, mentre, data l'eccessiva lunghezza di 3 e 4, vi sono delle porzioni di muratura che non riescono a sfruttare l'effetto di connessione offerto dalle catene e pertanto, non riuscendo a trasferire l'azione laterale, sono sottoposte a una spinta che ne provoca il ribaltamento.

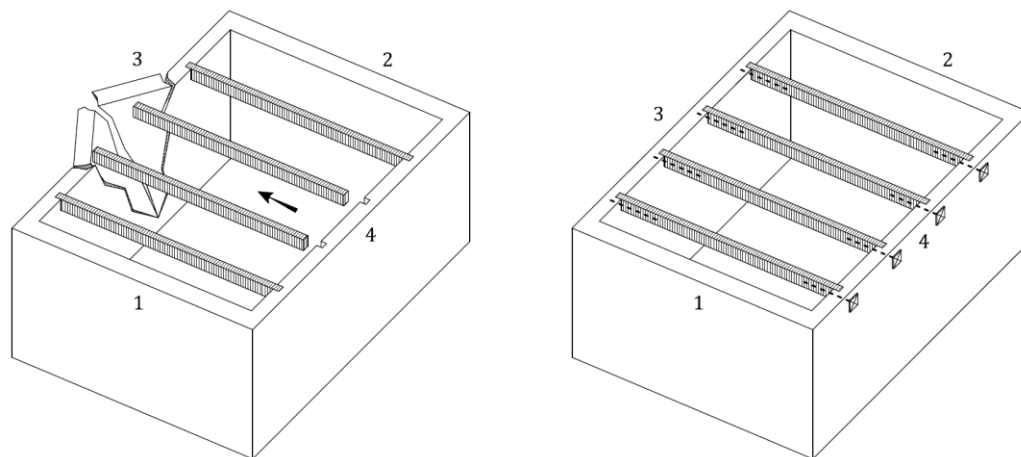


**Figura 20.** Crisi per mancanza di vincolo bilatero.

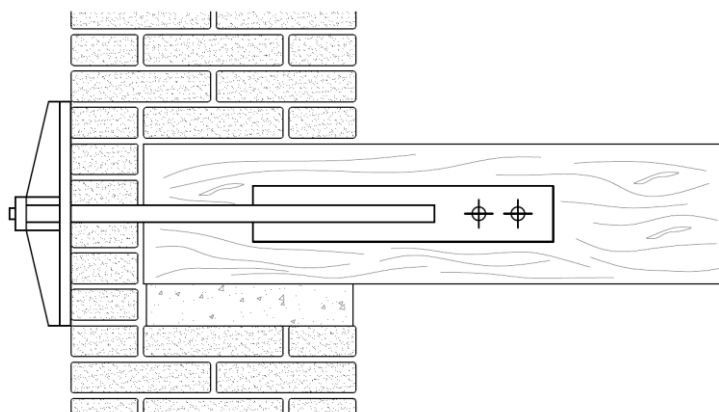
Per risolvere questa problematica è necessario disporre di un solaio infinitamente rigido (indeformabile) nel proprio piano e vincolato bilateralmente alle pareti, in modo che lo sforzo applicato sui pannelli 3 e 4 possa venire incanalato attraverso il

solaio (in luogo della sua elevata rigidità) verso le pareti 1 e 2. Il valore di rigidità da raggiungere è difficilmente quantificabile numericamente, ma risulta realisticamente raggiunto per solai laterocementizi, per solette piene in calcestruzzo, per solai misti acciaio – calcestruzzo o legno – calcestruzzo e per solai in legno se dotati di un doppio ordito di travi o di un assito formato da due strati incrociati di assi tra loro sufficientemente vincolate [19]. Anche nelle vecchie costruzioni si riscontrano spesso degli elementi strutturali di questo tipo, o sono comunque ricreabili in sostituzione o in aggiunta di quelli presenti, ma quasi sicuramente vi sarà carenza di bidirezionalità nel modo in cui questi sono vincolati alle pareti portanti.

Ad esempio un comune solaio in legno costituito da una singola orditura di travi in legno e da un assito, potrebbe, in caso di sisma, provocare la rottura evidenziata in Figura 21, in quanto le travi principali, non essendo vincolate nelle due direzioni, si comporterebbero come un maglio che percuote alternativamente i pannelli 3 e 4.

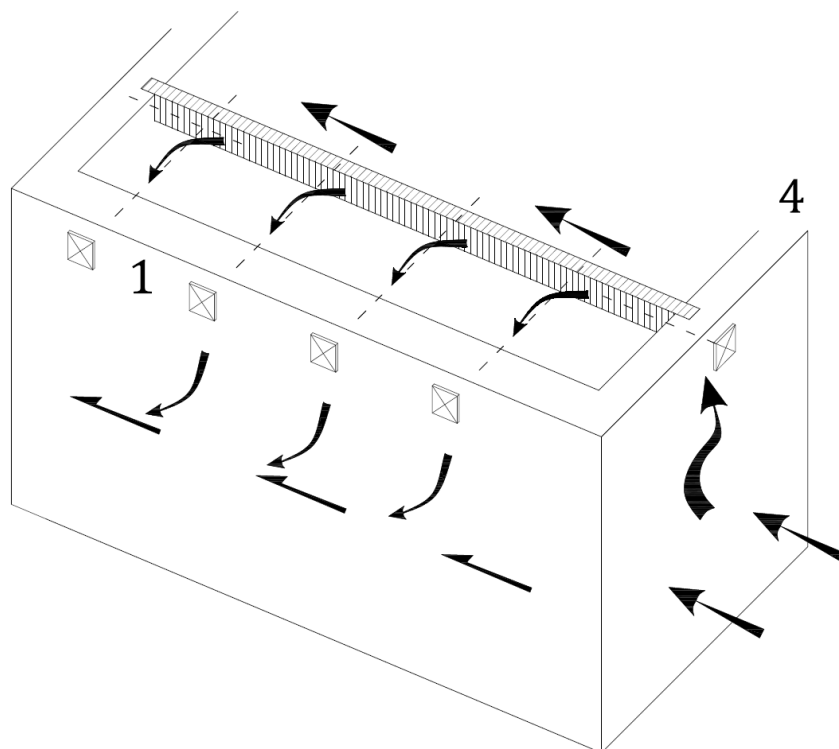


**Figura 21.** Rottura per scalzamento e martellamento delle travi principali lignee.



**Figura 22.** Vincolo bidirezionale applicato alle travi mediante un tirante metallico e un capochiave.

L'apposizione di tiranti metallici che vincolino l'estremità delle travi alle pareti perimetrali mediante l'utilizzo di capichiave (come visibile in Figura 22) eviterebbe l'insorgere di questo tipo di collasso, ma non di tutti i tipi collasso possibili, in quanto il solaio non sarebbe ancora in grado di trasferire la spinta laterale presente nelle pareti 3 e 4 alle 1 e 2. Per permettere questo passaggio è necessario che il solaio risulti vincolato bilateralmente anche in direzione perpendicolare all'orditura (Figura 23).



**Figura 23.** Schema di trasmissione dell'azione laterale.

L'utilizzo di tiranti metallici abbinati a strumenti di ritegno quali i capichiave, consente dunque ad una struttura realizzata in muratura non armata di resistere alla spinta laterale indotta da un evento sismico. Ciò è possibile in quanto i sistemi di catene che si vanno ad apporre consentono di innalzare la resistenza per rotture fragili (pressoflessione dei pannelli fuori dal piano medio) permettendo alla struttura di resistere secondo i meccanismi che le sono più consoni, ovvero pressoflessione e taglio agente lungo il piano medio dei pannelli.

Quanto fin qui scritto a riguardo dei presidi per prevenire la rottura delle strutture spingenti e per contrastare il sisma ha valore introduttivo e di iniziale indirizzo verso un più corposo lavoro affrontato nei capitoli successivi.

### **1.2.1.3. Presidi tesi a consolidare porzioni di muratura**

In questa sezione rientrano tutti gli interventi, eseguiti mediante l'uso di tiranti metallici, la cui finalità consiste nel consolidare singole porzioni di muratura. Al suo interno è possibile trovare gli interventi di cerchiatura, l'inserimento di tiranti antiespulsivi, le iniezioni armate e la precompressione di pareti sempre mediante barre metalliche.

Questi interventi non saranno tuttavia trattati in quanto non riguardano direttamente il tema del mutuo incatenamento tra le pareti in muratura di un edificio.

### **1.2.1.4. L'utilizzo delle catene per il restauro dei monumenti**

In base a quanto scritto fino a questo punto appaiono lampanti le potenzialità e i vantaggi ottenibili dalla disposizione delle catene per conseguire il rinforzo delle strutture di un edificio. Tuttavia conviene spendere alcune parole e sottolineare alcuni concetti quando tale intervento ha come destinazione non un semplice edificio, ma un oggetto dotato di un cospicuo interesse tecnico, storico o artistico, ovvero un monumento. Come già accennato, il presente lavoro non si prefigge l'obiettivo di discutere la filosofia del restauro o altri problemi assiologici legati alla conservazione dei monumenti, tuttavia è bene illustrare come la normativa vigente disciplini gli interventi di consolidamento strutturale su questi manufatti.

È dunque d'obbligo riferirsi alla direttiva del Presidente del Consiglio dei Ministri del 9 febbraio 2011 al cui interno viene disciplinata la valutazione e la riduzione del rischio sismico del patrimonio culturale in riferimento alle NTC 2008. Occorre riportare una serie di estratti del sesto capo della norma a partire dall'introduzione, dove viene ribadito l'obiettivo principale dell'intervento, ovvero:

*"[...] la conservazione non solo della materia, ma anche del funzionamento strutturale accertato, qualora questo non presenti carenze tali da poter comportare la perdita del bene."*

Più avanti viene aggiunto che:

*"[...] in via generale devono essere evitate tutte le opere di demolizione - sostituzione e di demolizione - ricostruzione, operando con interventi che si integrino con la struttura esistente senza trasformarla radicalmente."*

*"Dovranno essere privilegiati gli interventi in grado di trasformare in modo non permanente l'edificio ed i nuovi materiali, risultanti dall'innovazione tecnologica, dovranno essere valutati alla luce dei criteri di compatibilità e durabilità nel tempo, in relazione alla materia storica."*

*Gli interventi dovranno, per quanto possibile, rispettare la concezione e le tecniche originarie della struttura, nonché le trasformazioni significative avvenute nel corso della storia del manufatto. Da questo punto di vista gli*

*elementi strutturali danneggiati, quando possibile, devono essere riparati piuttosto che sostituiti [...]"*

Alla luce di quanto visto l'apposizione di tiranti metallici si inquadra in una strategia basata sull'inserimento di nuovi elementi, che come visto al punto 1.1 risulta compatibile storicamente, culturalmente e tecnicamente con la struttura esistente. Tale pratica ha come fine il miglioramento del funzionamento complessivo del manufatto e presenta alcuni caratteri fortemente vantaggiosi per il restauro dei monumenti dal punto di vista della statica, della reversibilità e dell'integrità.

Sotto il punto di vista statico, pur modificando l'attuale comportamento, l'uso di tiranti è coerente con il funzionamento della tipologia strutturale. Si pensi ad esempio alla posa di una catena per contenere la spinta di un arco e a come il tirante sia la naturale risposta alla richiesta dello schema in questione. Inoltre potendo decidere di fornire o meno una pretensione al tirante, la posa dei tiranti permette di non alterare lo stato tensionale attuale della struttura e soprattutto non presenta il rischio relativo all'aumento di rigidità di parte della struttura.

Per quanto riguarda l'invasività e la reversibilità dell'intervento, la norma descrive come invasivo il presidio teso alla modifica permanente degli elementi resistenti ed esalta le applicazioni in grado di integrare la struttura senza trasformarla permanentemente. In quest'ottica la posa di catene risulta fortemente reversibile in quanto nulla impedisce la loro manutenzione o sostituzione con altri sistemi ritenuti più idonei (ad esempio i contrafforti o il getto di una cappa in calcestruzzo nel caso di volte).

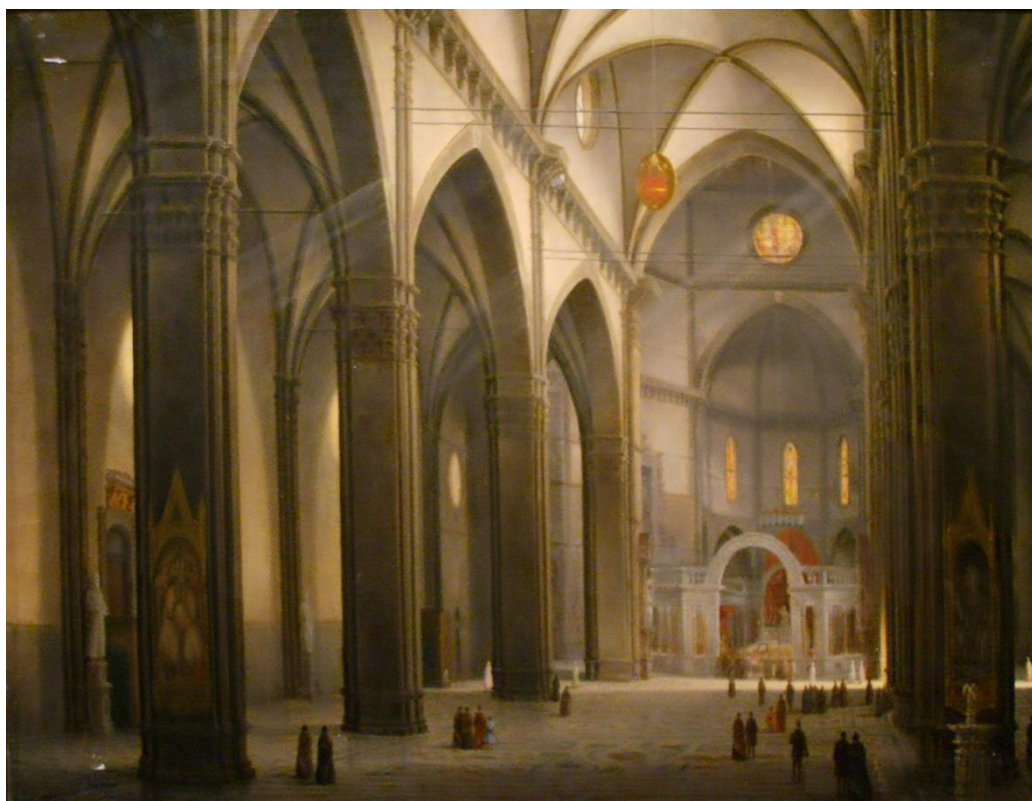
Sotto il punto di vista dell'integrità architettonica del manufatto, come già accennato, l'uso di tiranti metallici consente di scalfire solo in minima parte le caratteristiche materiche dell'opera, in quanto, anche se non è necessario sostituire i blocchi, potrebbe essere necessario consolidare, mediante stilatura dei giunti o iniezioni di miscele leganti, la porzione di muratura su cui insiste il capochiave. L'uso di catene consente inoltre di preservare la tipologia strutturale, in quanto, riducendo le spinte provocate ad esempio da una volta, essa potrebbe non essere demolita e conseguentemente sostituita da un solaio. Il nuovo intervento andrebbe poi ad integrarsi perfettamente sia dal punto di vista storico che da quello delle tecniche costruttive, in quanto sin dal medioevo si è fatto uso di questi presidi per consolidare gli edifici.

Per permettere l'integrità della tipologia strutturale è tuttavia necessario che i tiranti non siano celati alla vista in quanto, in caso contrario, si assisterebbe ad un manifesto falso. Si immagini infatti di agire su un'antica volta in pietra e di operare il consolidamento della stessa mediante la posa di catene nascoste nello spessore della volta o peggio di porre un sistema di tiranti per mezzo del quale appendere la volta a un solaio sovrastante. Bene, se l'obiettivo era preservare l'antica tecnica costruttiva si è fallito generando un falso, in quanto la volta non risulta più una

struttura, ma un carico portato. A tal fine è utile riportare le parole di Frank L. Wright:

*“[...] i blocchi di granito, tagliato secondo lo stile dei seguaci di Fidia, ingegnosamente disposti intorno alle travi e ai pilastri d'acciaio per sembrare veri, gravano pesantemente su uno scheletro interno d'acciaio che li sostiene da piano a piano, che regge lo sforzo stando sotto quella realtà e che, io penso, cadrebbe volentieri morto di vergogna.”*

Se invece è necessario preservare ad esempio gli affreschi di una volta si potranno disporre senza remore i tiranti nello spessore della volta, purché, come recita la norma, “ne sia dimostrata l’efficacia nel contenimento della spinta e siano verificate le sollecitazioni taglianti e flessionali che si producono nella parete”. Questo per sottolineare il fatto che l’inserimento di catene estradossali, adottate per evitare il leggero disturbo visivo causato da quelle intradossali, non permetta una fessurazione tale da comportare il danneggiamento degli affreschi citati nell’esempio.

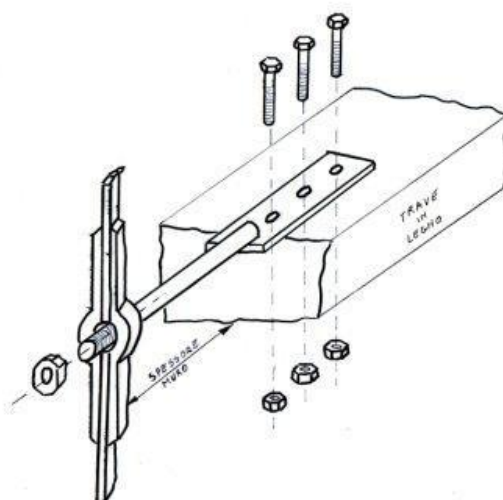


**Figura 24.** Fabio Borbottoni, olio su tela dell’interno del Duomo di Firenze. Notare le catene risalenti alla costruzione originaria.

### 1.2.2. Forme

Dalle applicazioni elencate discendono due principali forme di tiranti; quelli destinati a esercitare un vincolo bilatero sulle travi in legno di un solaio e quelli destinati a formare le catene.

I primi sono costituiti dal sistema di ritegno esterno che insiste sulla muratura, ovvero il capochiave, da una piastra disposta sul lato della trave e utilizzata per vincolare quest'ultima attraverso dei bulloni passanti e infine da una barra che collega il capochiave alla piastra (Figura 25).



**Figura 25.** Tirante utilizzato per incatenare le travi lignee alla muratura [20].

Del sistema descritto esistono numerose varianti che presentano una piastra di ritegno per lato della trave o diverse geometrie del capochiave.

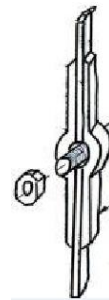
La seconda famiglia menzionata è quella delle catene ed è costituita da una barra circolare e da due capochiave posti alle estremità. Per quanto riguarda le caratteristiche della prima si rimanda al punto 3.4 del presente lavoro in cui sono descritte le caratteristiche del materiale da utilizzare a seconda delle condizioni ambientali, il diametro della sezione in base alle sollecitazioni cui è sottoposta e le lavorazioni a cui è bene sottoporla (filettatura e trattamenti antiossidanti) prima di porla in opera.

I capichiave, detti anche chiavarde o bolzoni, sono elementi in acciaio e ne esistono di varie foggie. Come è stato fatto osservare al punto 1.1, in passato venivano utilizzati principalmente capichiave a paletto inseriti nell'occhiello terminale della barra e successivamente messi in tensione mediante l'inserimento di una zeppa metallica (Figura 26).



**Figura 26.** Capochiave a paletto tradizionale, Piazza dei mercanti, Milano.

L'evoluzione delle teorie relative alla scienza delle costruzioni hanno permesso di determinare il valore della pretensione da applicare alla barra e pertanto nelle applicazioni moderne è necessario adottare paletti dotati di evoluti sistemi di serraggio, poiché il vecchio sistema delle zeppe non consente di capire l'effettivo livello di tensione applicato. Una possibile soluzione consiste nell'adozione di bolzoni nel cui centro è ricavato un foro che permetta il passaggio della barra filettata, la quale verrà successivamente messa in tensione mediante martinetti o chiavi dinamometriche e serrata infine con un dado (Figura 27).



**Figura 27.** Moderno capochiave a paletto [20].



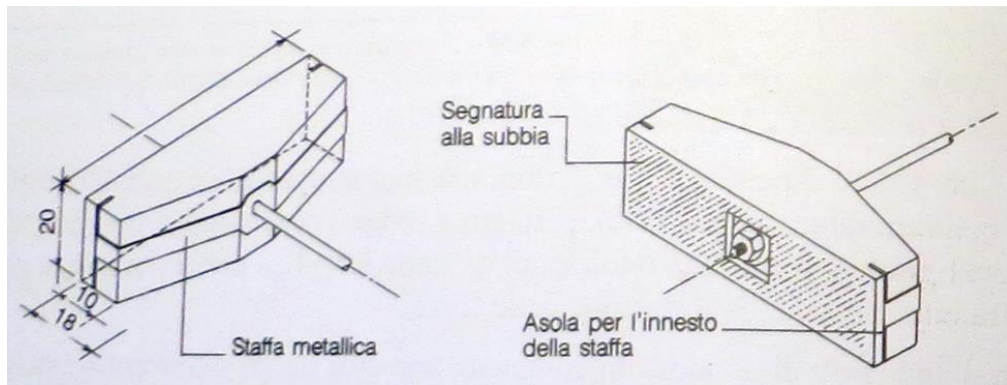
Necessità statiche o estetiche possono però condurre alla scelta di disporre delle chiavarde aventi una maggiore impronta di appoggio; in questo caso ci si orienta verso piastre d'acciaio di forma circolare, rettangolare o maggiormente complesse che vengono dotate, a seconda delle esigenze, di nervature di irrigidimento.



**Figura 28.** Diverse forme di capichieve a piastra [20, 21].

Anche in questo caso le chiavarde sono serrate grazie alla filettatura presente nella parte terminale della barra e a un dado.

Per quanto riguarda le dimensioni di questi componenti si rimanda al punto 3.3 dove viene appunto affrontato il dimensionamento in funzione del tipo di muratura su cui insistono e del livello di azione stabilizzante che devono essere in grado di garantire.



**Figura 29.** Particolare capochiave realizzato in acciaio e calcestruzzo proposto in [22].

### 1.2.3. Messa in opera

In questa sezione verranno sommariamente riassunte le tecniche di posa dei tiranti metallici. Nessuno dei libri che trattano la tematica prescrive una particolare sequenza operativa per la disposizione di questi dispositivi, la quale viene in genere affidata all'esperienza dell'impresa che ha vinto l'appalto per la realizzazione dell'intervento di consolidamento.

Nel descrivere le lavorazioni necessarie a una corretta messa in opera, conviene distinguere tre tipologie di intervento:

- Applicazione di nuove catene destinate al presidio di strutture spingenti o al contrasto del ribaltamento dei pannelli in muratura,
- Manutenzione di tiranti già presenti nell'edificio e aventi la medesima funzione dei precedenti,
- Creazione del vincolo bidirezionale nei solai mediante tiranti in acciaio.

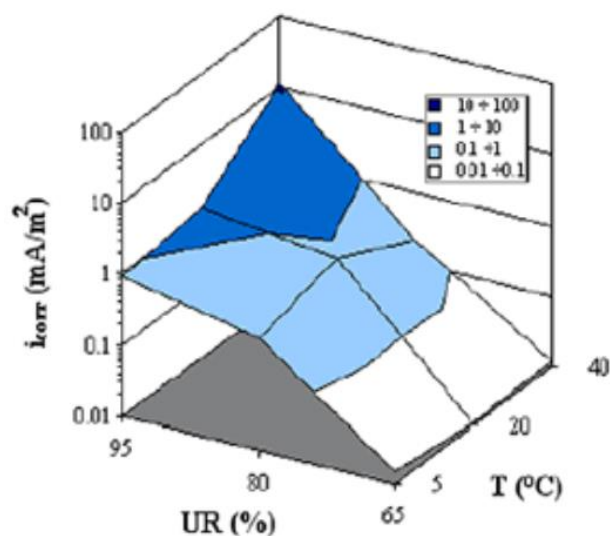
#### 1.2.3.1. Applicazione di nuove catene

In questo caso è necessario studiare attentamente gli elaborati progettuali e confrontare il tracciato dei tiranti proposto in questi ultimi con la situazione che si presenta nell'edificio. Questo per rilevare eventuali incongruenze tra gli elaborati e lo stato di fatto, ma soprattutto per valutare lo stato di salute delle murature su cui dovranno insistere i capichiave. Se ad essere ammalorata è la malta, sarà sufficiente procedere a una stilatura dei giunti o a delle iniezioni di miscele leganti, a seconda che il degrado e la mancanza di legante sia superficiale o interno. Se invece sono i mattoni a godere di cattivo stato, in quanto vi è ad esempio un'elevata presenza di blocchi albasì, si sconsiglia di procedere con un intervento di "cuci e scuci" in quanto se anche si sostituissero i blocchi ammalorati con altri di eccellente fattura, questi non sarebbero più compressi come i precedenti e dunque non garantirebbero più la necessaria azione resistente contro il punzonamento (vedi punto 3.2.4). Al punto 3.2.4.3 verrà evidenziato il fatto che in presenza di blocchi di scarsa qualità, la rottura per punzonamento avviene proprio per superamento della resistenza a trazione in questi elementi. Come per le solette in calcestruzzo sottoposte a punzonamento, conviene dunque cucire mutuamente i due lati della parete mediante tiranti antiespulsivi, di modo da garantire una maggior resistenza allo stato limite ultimo, piuttosto che adottare interventi di cucì e scuci.

Verificato ciò e rilevate le prestazioni che l'apparato murario è in grado di offrire, è necessario procedere con la perforazione della muratura mediante trapano, fioretto a rotazione/rotopercussione veloce o altri dispositivi diamantati e/o vidiati. La scelta dello strumento idoneo dipende dal diametro del foro da eseguire, dalla sua profondità, dai vincoli presenti in cantiere e dalle disponibilità dell'impresa appaltatrice. Se il tracciato dei cavi prevede che questi siano occultati all'interno dei mu-

ri di spina, è necessario procedere alla formazione di traccia all'interno delle pareti con la conseguente riparazione delle parti smosse e la stuccatura a chiudere dopo la posa dei tiranti.

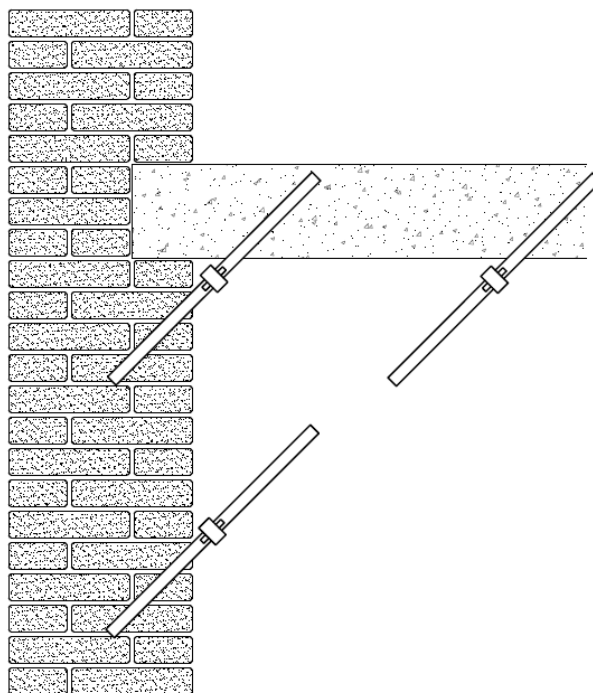
A questo punto è necessario aprire una parentesi per descrivere il comportamento dei materiali metallici quando sono inseriti nella muratura. Per iniziare è bene premettere che le murature, anche quelle realizzate con malte cementizie, non sono sufficientemente alcaline e dunque, a differenza del calcestruzzo, non sono in grado di proteggere efficacemente dalla corrosione gli inserti metallici contenuti. I fattori scatenanti la corrosione, la quale comporta la fessurazione della muratura a causa dell'azione espansiva degli ossidi prodotti, sono sicuramente l'ossigeno e l'acqua che attraversano i pori del laterizio e del legante, nonché l'umidità e i sali presenti all'interno della muratura [23].



**Figura 30.** Effetto dell'umidità relativa e della temperatura sulla velocità di corrosione di un inserto di acciaio inglobato in una malta di calce e gesso [24].

Pertanto è necessario proteggere dalla corrosione le barre metalliche che attraversano lo spessore del pannello murario o sono in esso inglobate in traccia. L'utilizzo di acciai austenitici o duplex previene questo rischio, ma l'alto costo non ne permette un massiccio utilizzo e pertanto si ricade su trattamenti superficiali quali la zincatura o la verniciatura. In questo caso però, c'è il rischio che i movimenti indotti dal sisma portino la muratura a sfregare contro le barre e dunque ad asportare lo strato protettivo. Convien dunque porre all'interno del foro una guaina polimerica in cui inserire successivamente la barra, in modo che questa non sia a diretto contatto con la muratura. Gli interstizi presenti tra il tubo e il tirante verranno poi riempiti mediante l'iniezione di resine.

Per quanto riguarda il tracciato delle catene, esso dovrà essere il più corto e rettilineo possibile e dove le barre avranno bisogno di giunzione, poiché la distanza è troppo elevata, conviene che l'unione sia a completo ripristino di resistenza. Per effettuare ciò è possibile adoperare manicotti che realizzino una giunzione di tipo filettata, clampata, ammorsata, imbullonata o inghisata [19].



**Figura 31.** Possibile posizionamento dei capichiave.

Disposti i tiranti, è possibile procedere a porre in opera i capichiave di ritegno. Se il presidio è teso a ricercare il mutuo incatenamento tra le murature dell'edificio, le chiavarde andranno posizionate in modo che, come osservabile in Figura 31, permettano di vincolare il pannello murario insistendo, almeno in parte, su un muro di spina o sul solaio. In questo modo è possibile trasferire con maggior sicurezza la spinta indotta dal sisma, verso quegli elementi che in virtù della loro maggior rigidità, sono più adatti a resistergli. Salvo forti esigenze estetiche, è bene che il capochiave non sia incassato nella muratura, onde non ridurre la resistenza al punzonamento della muratura e la diffusione dell'azione stabilizzante.

Successivamente è possibile fornire la necessaria azione di pretensionamento al tirante; questa è stabilita in base ai ragionamenti proposti nei capitoli successivi ed è indotta mediante l'utilizzo di tenditori posti in mezzera, chiavi dinamometriche o martinetti idraulici. Nel primo caso la barra è costituita da due spezzoni connessi da un apparecchio che generalmente è formato da un cilindro d'acciaio dotato al suo interno di una doppia filettatura entro cui si posizionano i due tronconi. Tale

apparecchio deve essere progettato come un giunto a totale ripristino di resistenza e offrire dunque un'azione resistente per trazione superiore a quella della barra.

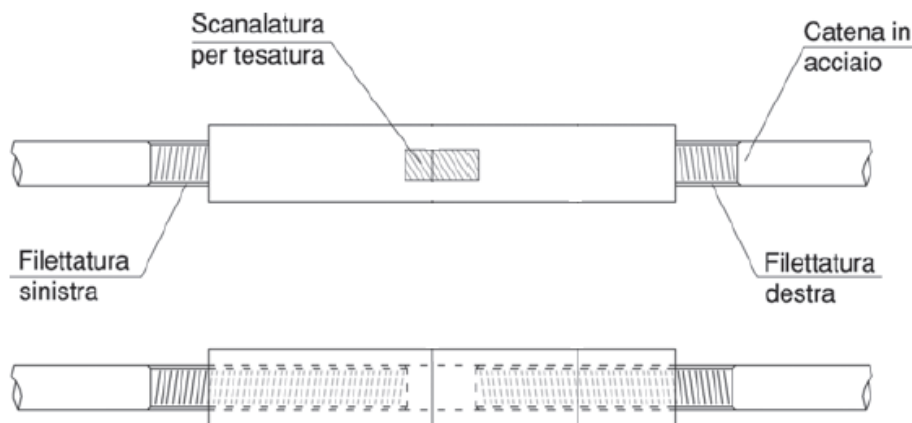


Figura 32. Schema di un tenditore cilindrico [25].

Agendo con un'adeguata chiave inglese sul tenditore è così possibile fornire una tensione di trazione nella catena. Il calcolo dell'azione di pretensione avviene sulla base della deformazione assiale  $\varepsilon_s$  che la barra subisce durante il suo serraggio e che può essere determinata, per esempio, grazie all'utilizzo di un deformometro millesimale rimovibile [25]. Grazie al suo valore e a quello del modulo elastico dell'acciaio usato  $E_s$ , sarà possibile determinare l'azione di pretensione grazie alla seguente formula:

$$P_{Ed} = E_s \varepsilon_s A_s \quad [kN] \quad (1.1)$$

In alternativa è possibile fare uso di una chiave dinamometrica, ovvero una chiave a cricchetto che permette di regolare con precisione la coppia di serraggio applicata a una vite. Questa fornisce dunque una coppia sul dado che insiste sulle chiavarda e così facendo, mette in tensione la barra. L'entità della tensione applicata ( $P_{Ed}$ ) varia a seconda del diametro nominale di filettatura del dado ( $d_f$ ) e della coppia di serraggio ( $C_{Ed}$ ) secondo la seguente formula proposta dalla CNR-UNI 10011:

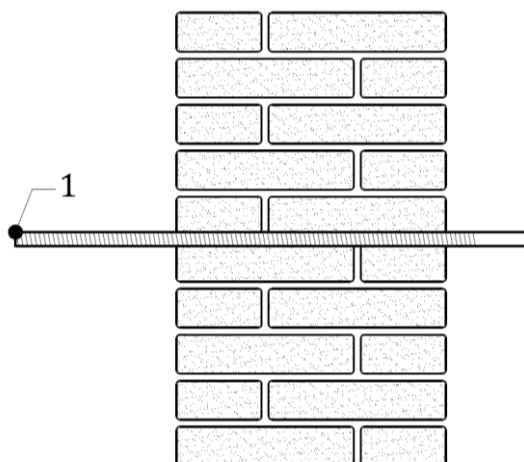
$$P_{Ed} = 5 \frac{C_{Ed}}{d_f} \quad [kN] \quad (1.2)$$

La massima coppia di serraggio imponente ( $C_s$ ) è fornita dalla CNR-UNI 10011 in base alla classe del dado e al suo diametro nominale di filettatura, tuttavia è bene tenere presente anche le caratteristiche della barra quando si progetta il valore della coppia da applicare.

$C_s$ (N · m)					$T_{Ed}$ (kN)					$d$ mm
4.6	5.6	6.6	8.8	10.9	4.6	5.6	6.6	8.8	10.9	
39	48	58	90	113	16	20	24	38	47	12
62	77	93	144	180	22	28	33	52	64	14
96	121	145	225	281	30	38	45	70	88	16
133	166	199	309	387	37	46	55	86	108	18
188	235	282	439	549	47	59	71	110	137	20
256	320	384	597	747	58	73	87	136	170	22
325	407	488	759	949	68	85	102	158	198	24
476	595	714	1 110	1 388	88	110	132	206	257	27
646	808	969	1 508	1 885	108	135	161	251	314	30

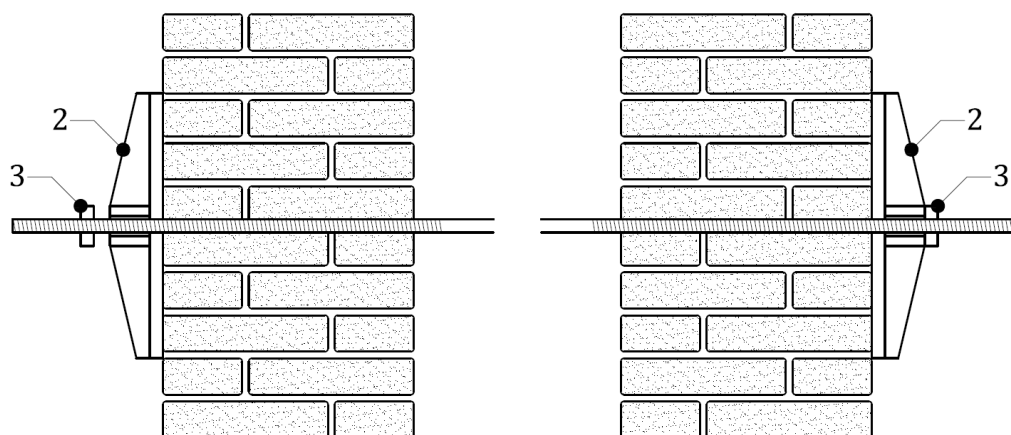
**Figura 33.** Valori della massima azione di serraggio consentita ( $C_s$ ) a seconda del diametro nominale di filettatura e della classe del dado. Prospetto 4-IV della CNR-UNI 10011.

Se le chiavi dinamometriche non permettono di raggiungere il necessario livello di trazione nel tirante sarà necessario adoperare dei martinetti idraulici secondo la seguente sequenza operativa.



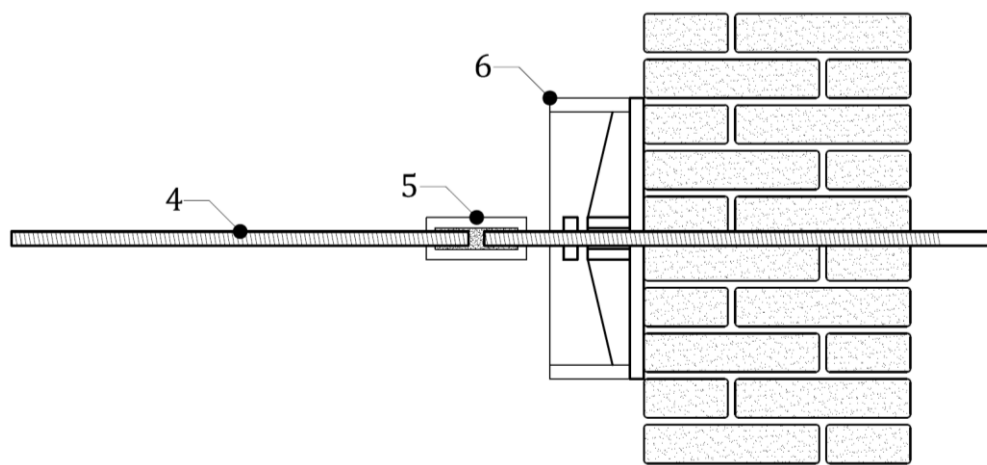
**Figura 34.** Sequenza di tesatura, fase a.

Nella fase di partenza si inserisce la barra metallica dotata di estremità filettate (1) all'interno della guaina polimerica posiziona nel foro praticato nel muro. L'operazione è eseguita per le due murature contrapposte.



**Figura 35.** Sequenza di tesatura, fase b.

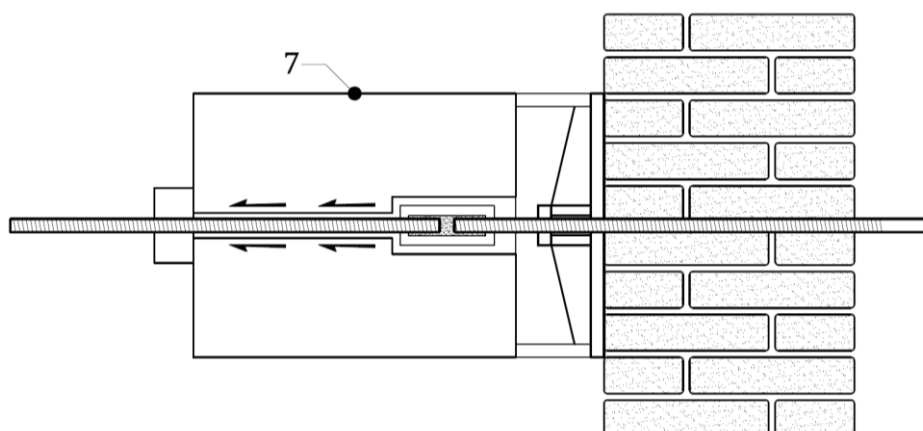
Successivamente si inseriscono i capichiave (2) da ambo i lati, ma solo da un lato si serra completamente il dado (3), mentre all'altra estremità viene lasciato lasco. E' bene che la superficie della muratura a contatto con la chiavarda sia piana e uniforme, pertanto conviene predisporre uno strato di regolarizzazione e ripartizione dei carichi in malta cementizia.



**Figura 36.** Sequenza di tesatura, fase c.

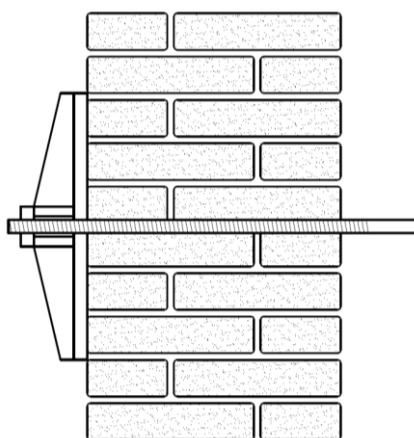
Operando dove non si è applicato il serraggio del capochiave si inghisa una seconda barra filettata (4) alla precedente mediante un idoneo apparecchio di giunzione e si dispone un supporto metallico (6) a ridosso del capochiave. Quest'ultimo servirà da vincolo al martinetto quando metterà in tensione il tirante.





**Figura 37.** Sequenza di tesatura, fase d.

A questo punto si dispone il martinetto idraulico vincolandolo alla struttura d'acciaio predisposta e si mette in tensione la barra fino al valore cercato. La lettura della pressione operante dell'olio è garanzia di un perfetto controllo del livello tensionale presente. Una volta raggiunto il livello di trazione cercato, è sufficiente serrare il dado a mano attraverso i fori presenti sul sistema di supporto al martinetto (6).



**Figura 38.** Sequenza di tesatura, fase e.

Nell'ultima fase si procede allo smontaggio del martinetto e del suo supporto, oltre che al taglio della barra filettata. La lunghezza rimanente deve permettere lo svolgimento delle sequenze c-d-e per una futura messa in tensione della catena.

Le operazioni presentate valgono anche per le catene disposte all'intradosso o all'estradosso di archi e volte, mentre per la posa in opera di una catena a braga o "graffettata", conviene, data la particolarità della lavorazione, riferirsi a specifiche pubblicazioni quali [25, 26].

### 1.2.3.2. *Manutenzione di catene esistenti*

L'intervento di consolidamento può riguardare la messa in sicurezza della struttura attraverso la verifica delle prestazioni rimanenti e l'eventuale manutenzione di una catena esistente. In questo caso occorre eseguire più verifiche a livello materico e statico, le quali riguardano:

- Lo stato di salute del supporto murario su cui insistono i capichiave,
- Il livello tensionale a cui sono sottoposte barre e chiavarde e quello a cui dovrebbero essere sottoposte per garantire la sicurezza della struttura,
- Le prestazioni rimanenti dell'acciaio e il suo livello di degrado.

La prima verifica e i conseguenti interventi di consolidamento sono già stati descritti al precedente paragrafo. Per quanto riguarda invece il secondo intervento, si premette che il calcolo dell'azione stabilizzante verrà affrontato al prossimo capitolo, mentre per determinare il livello dell'azione di trazione presente verranno ora riassunti i tre metodi principali.

Il primo di essi si basa su una prova pratica e invasiva sulla catena, ovvero la prova di rilascio. *Essa consiste nel rilasciare gradualmente la catena fino ad annullarne la sollecitazione, misurando tramite estensimetri la deformazione assiale preesistente. Conoscendo le caratteristiche geometriche e il modulo elastico del tirante, si risale al tiro. Questo metodo, tuttavia, non è applicabile in molti casi o perché i tenditori non sono presenti o perché il loro cattivo stato non ne consente l'allentamento o, infine, perché il rilascio della catena potrebbe pregiudicare la sicurezza strutturale del manufatto in questione [27].*

Se non fosse possibile eseguire tale prova bisognerà ricorrere ai restanti due metodi, detti anche indiretti, poiché misurano altre grandezze correlate al tiro. Il secondo sistema si basa su un'analisi statica e consiste nel monitorare le deformazioni del tirante applicando su di esso, una forza trasversale alla sua direzione principale. In base agli spostamenti rilevati sarà dunque possibile, mediante il principio dei lavori virtuali, arrivare a determinare l'entità dell'azione di trazione presente nella catena. Il procedimento analitico e dettagliato è contenuto all'interno del volume [28] e in [25].

L'ultimo metodo è basato su un'analisi dinamica del problema e in genere risulta maggiormente preciso del precedente. *Il metodo dinamico tradizionale, nella sua formulazione più semplice, modella la catena come una "corda vibrante", priva di rigidità flessionale, e consente di ricavare il valore del tiro in funzione della frequenza corrispondente al primo modo di vibrare [29].* All'interno di [27] si afferma che questo tipo di analisi risulta accurata solo quando le catene sono molto snelle e tese e pertanto viene presentato un diverso modello di calcolo. *Esso permette di determinare il tiro presente nella catena attraverso un'unica acquisizione dinamica, eseguita con un accelerometro collocato in posizione opportuna sulla catena. Con es-*

sa si determina tramite la trasformata rapida di Fourier lo spettro di risposta in frequenza. Da quest'ultimo si ricavano poi i valori delle prime frequenze proprie. Infine, attraverso la soluzione numerica di un sistema non lineare di equazioni, si identificano i parametri strutturali incogniti, cioè le rigidità dei vincoli ed il tiro [27]. Altri sistemi di analisi dinamica sono poi presenti in letteratura, come quello parametrico di S. Sorace descritto in [30].

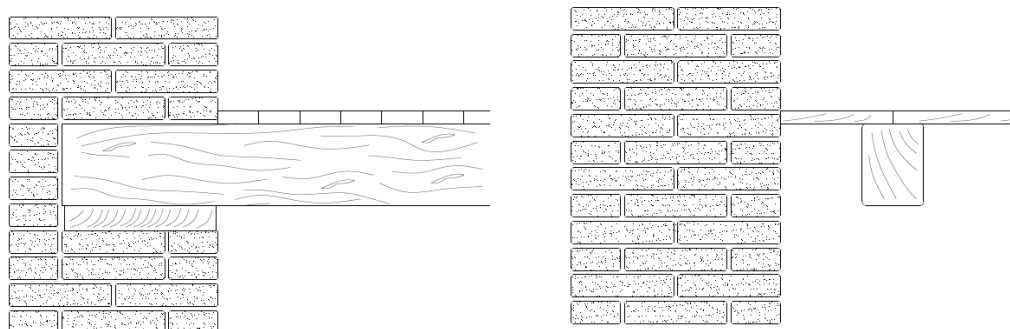
Prima di procedere alla tesatura o al rilascio del tirante in base alla differenza tra l'azione richiesta e quella presente è doveroso appurare lo stato di salute dei materiali metallici che compongono la catena. In particolare si cercherà di determinare le caratteristiche del ferro o dell'acciaio mediante analisi metallurgiche piuttosto che attraverso deduzioni storiche. Per le catene in ferro battuto Tomasoni in [25] indica la prova Rockwell come la più indicata per appurare le qualità del materiale. Successivamente si analizzerà il degrado dovuto alla corrosione e all'ossidazione per valutare l'eventuale sostituzione dell'intera catena o di una sua parte. All'interno di questa decisione peserà anche un fattore di tipo strutturale; i capichiave e la barra dovranno sostenere l'onere dell'eventuale tesatura e pertanto, se non ne saranno in grado o si mostrano già fortemente plasticizzati dall'attuale stato tensionale, andranno sicuramente sostituiti.

L'applicazione di un'azione di pretensione avviene mediante l'uso di chiavi dinamometriche o di martinetti idraulici secondo lo schema già descritto al paragrafo precedente. Se il capochiave non permette l'uso di questi attrezzi, ad esempio perché la catena è messa in tensione da una zeppa metallica, esso andrà sostituito. Si sconsiglia fortemente di eseguire l'operazione di rinzeppatura in quanto l'operatore non sarebbe in grado di definire il livello tensionale raggiunto.

#### **1.2.3.3. Creazione del vincolo bidirezionale nei solai**

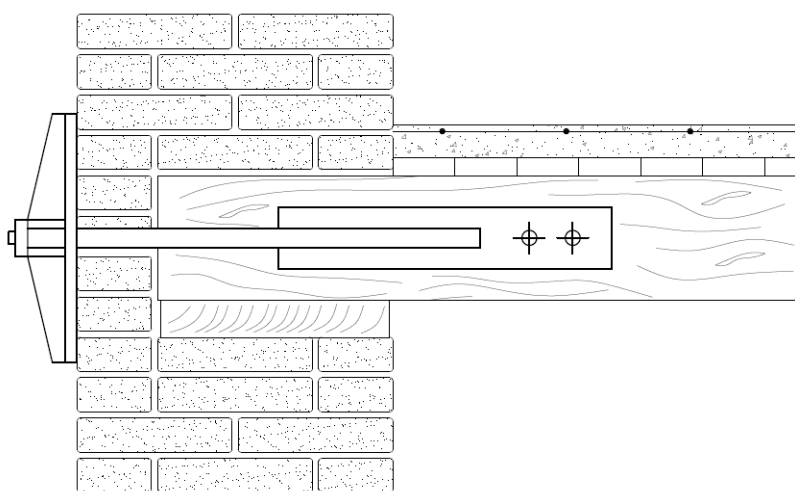
Come affermato al punto precedente è possibile fare uso di tiranti metallici per creare un vincolo bilatero tra il solaio e la muratura. A seconda della tipologia di struttura verticale presente è possibile adottare diverse soluzioni.

Una tipica soluzione costruttiva in cui non è raro imbattersi nella pratica comune è quella riportata in Figura 39, ovvero una struttura composta da un ordito di travi in legno su cui è inchiodato un assito di tavole.



**Figura 39.** Solaio dotato di assito in ligneo inchiodato su un'orditura di travi.

Il criterio generale per vincolare bilateralmente questo tipo di struttura, o altre simili, consiste nell'evitare lo scarroccio delle travi principali attraverso il sistema già presentato in Figura 22 e qui riproposto in Figura 40, dove è ora possibile apprezzare la posa di una cappa in calcestruzzo che dona la necessaria rigidezza alla struttura orizzontale.



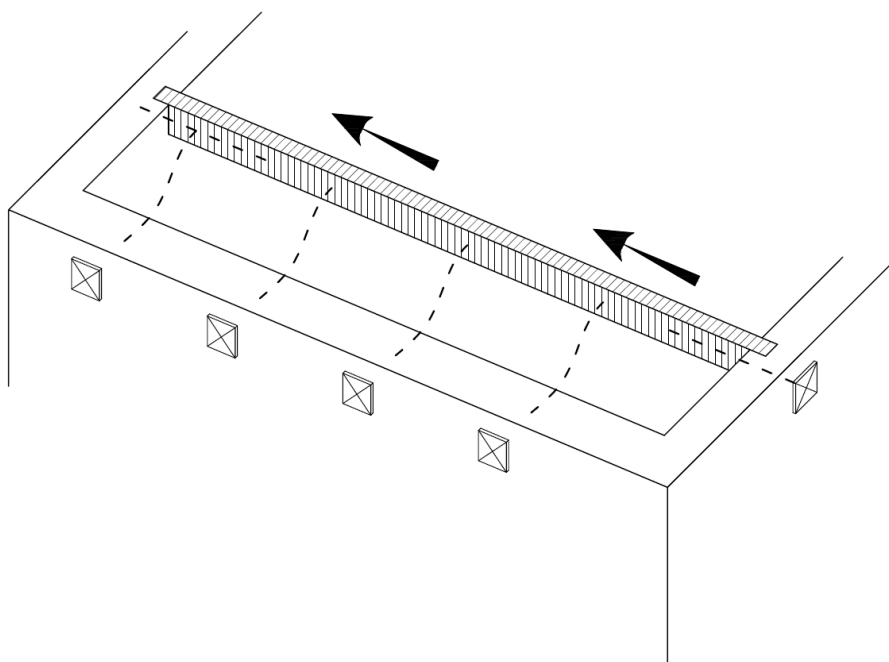
**Figura 40.** Applicazione di tirante e capochiave alla trave.

La posa del capochiave in questione può essere effettuata sulla base delle informazioni fornite al punto precedente. Si aggiunge semplicemente che in questo caso non è importante fornire una pretensione alla barra che collega la chiavarda alla trave, ma sarà sufficiente un corretto serraggio. Inoltre è bene che le testate delle travi non siano annegate nella malta, perché i due materiali presentano delle incompatibilità tali da pregiudicare la durabilità dell'opera. Qualora si cercasse di ridurre il ponte termico puntuale è però possibile seguire la soluzione dell'azienda Tecnaria, impresa specializzata nel recupero dei solai, la quale propone di riempire gli interstizi dello scasso con delle tavole di sughero.

L'ancoraggio bilatero proposto è eseguibile anche per altre tipologie di solai come quelli misti in acciaio - laterizio. Questa soluzione, molto usata da metà ottocento in poi, prevede che delle travi a doppio T in acciaio sostengano il peso di sottili voltine ribassate in laterizio il cui estradosso è appianato da uno strato di magrone. Anche se potrebbe sembrare la soluzione più ovvia, non è possibile saldare la barra all'anima del profilo, in quanto, l'acciaio di quest'ultimo risulta nella maggioranza dei casi non saldabile. Pertanto occorre saldare la barra a una piastra che verrà successivamente imbullonata o rivettata alla trave, ricordandosi di controllare la compatibilità galvanica degli acciai impiegati.

Una volta che il solaio risulta vincolato alle pareti lungo la direzione di orditura è necessario che lo sia anche in direzione perpendicolare, in modo da poter trasmettere l'azione laterale ai pannelli in muratura paralleli a quest'ultima.

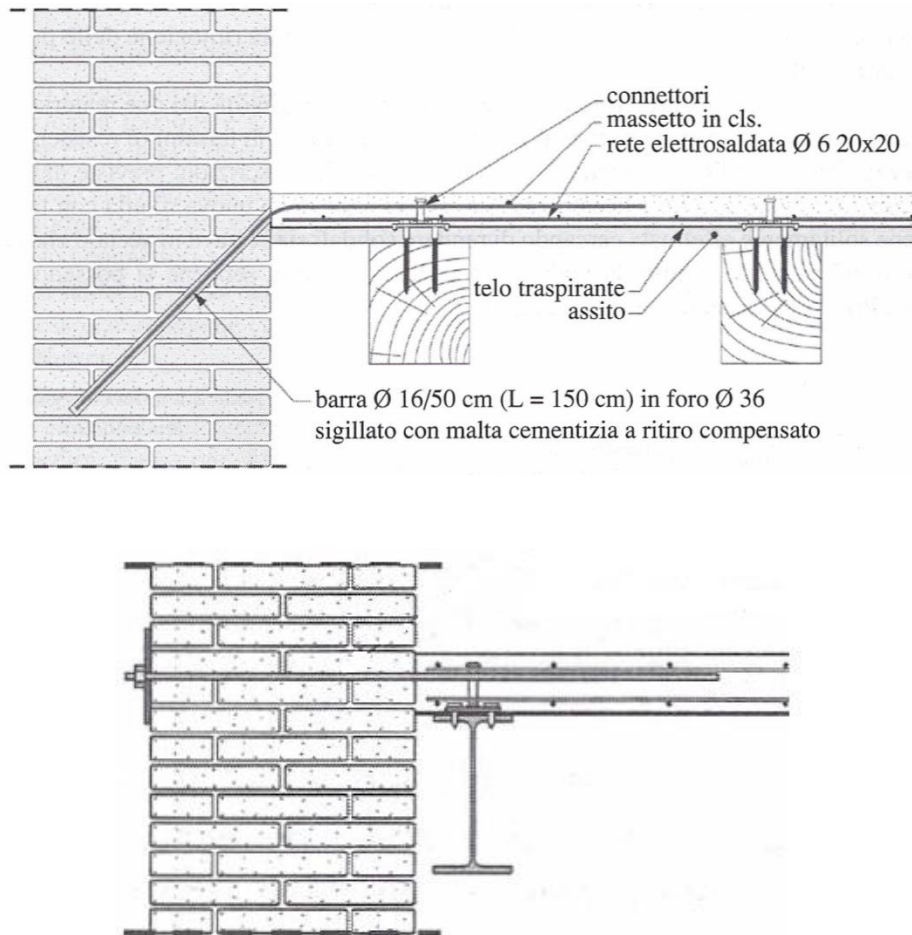
In riferimento al precedente solaio formato da travi e assito di legno, è bene premettere che non conviene realizzare tale vincolo mediante dei tiranti che attraversino le travi in direzione perpendicolare. Questo perché, come rappresentato in Figura 41, le barre non possiedono una sufficiente rigidezza flessionale e pertanto, non sarebbero in grado di offrire la necessaria azione di contrasto per effettuare il vincolo.



**Figura 41.** Schema di deformazione dei tiranti applicati sulle travi.

Meglio allora annegare i tiranti connessi ai capichave, all'interno della cappa in calcestruzzo utilizzata per irrigidire il solaio in legno. Come riportato da M. Pisani

in [19] è possibile omettere le chiavarde andando ad inserire le barre all'interno di appositi fori praticati nella muratura e successivamente operare il loro riempimento mediante iniezioni di malta cementizia (Figura 42) o apposite resine. Queste soluzioni risultano valide anche per solai scarsamente vincolati alle pareti del tipo misto acciaio - laterizio, acciaio - calcestruzzo e in laterocemento.



**Figura 42.** Tecniche di incatenamento delle murature al solaio riportate in [19].

## 2. Progetto dei tiranti

### 2.1. Comportamento delle murature

#### 2.1.1. Analisi delle sollecitazioni

Prima di descrivere i procedimenti con cui ricavare il valore dell'azione stabilizzante con cui dimensionare i tiranti è doveroso riassumere il comportamento e le modalità di rottura dei pannelli murari nei confronti dei diversi tipi di sollecitazione che si possono presentare.

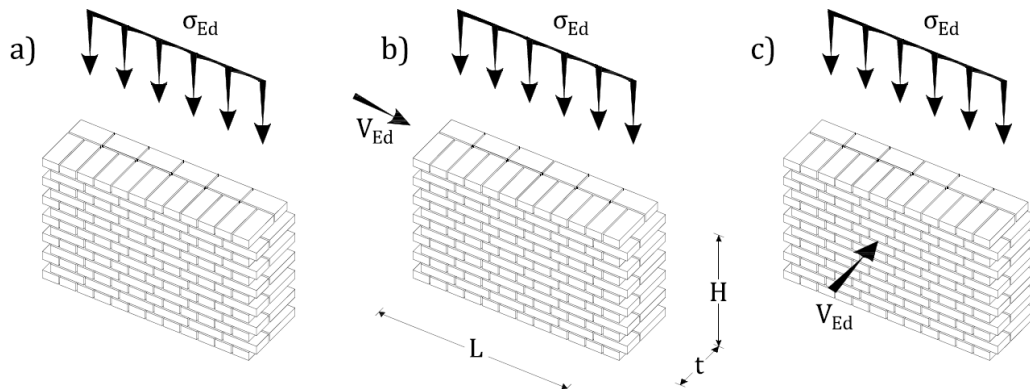


Figura 43. Sollecitazioni sulla muratura.

Le situazioni più comuni negli edifici in muratura sono state riassunte nella Figura 43. Nel primo caso (a) il pannello è sollecitato da uno sforzo normale di compressione  $\sigma_{Ed}$ , mentre nei restanti, oltre a quest'ultimo, vi è la presenza di un'azione laterale di taglio agente lungo il piano medio (b) o perpendicolarmente ad esso (c).

Le strutture in muratura ordinaria, ovvero non armata, resistono in maniera eccellente al primo tipo di sollecitazioni, ma, a causa della loro debolissima resistenza a trazione, esse dimostrano anche una scarsa propensione a resistere alle azioni laterali. Il peggioramento della resistenza è accentuato in base a quanto la sollecitazione laterale incida perpendicolarmente al piano medio.

Pertanto verranno riportate le modalità di rottura e le resistenze ottenibili nei due casi estremi. I procedimenti proposti risultano comprovati sotto l'ipotesi che la muratura abbia filari orizzontali e venga considerata come un solido omogeneo, isotropo e privo di resistenza a trazione. Tale ipotesi per quanto drastica e irrispettosa della reale natura del materiale fornisce una corretta lettura del comportamento della muratura [31].

## 2.1.2. Rottura dovuta ad azioni laterali agenti nel piano medio

Vengono ora presentate le modalità di crisi di un pannello sottoposto a compressione verticale e spinta laterale parallela al piano medio. In questo caso la rottura può avvenire secondo più modalità:

- Fessurazione diagonale
- Scorrimento
- Schiacciamento/Ribaltamento

### 2.1.2.1. Meccanismo di rottura per Fessurazione diagonale (Shear cracking)

In questo caso le tensioni tangenziali agenti sulla parete, raggiungono il loro massimo valore lungo l'asse geometrico verticale posto nella mezzeria del pannello, mentre la tensione di compressione verticale è praticamente costante in tutti i punti della sezione. La presenza simultanea di tensioni sia tangenziali che di compressione può comportare una concentrazione delle stesse che conducono alla creazione di lesioni a croce di sant'Andrea dovute a taglio - compressione nella parete muraria. Tali lesioni compaiono inizialmente nel centro della muratura, dove le tensioni tangenziali e di compressione raggiungono il loro massimo valore [32].

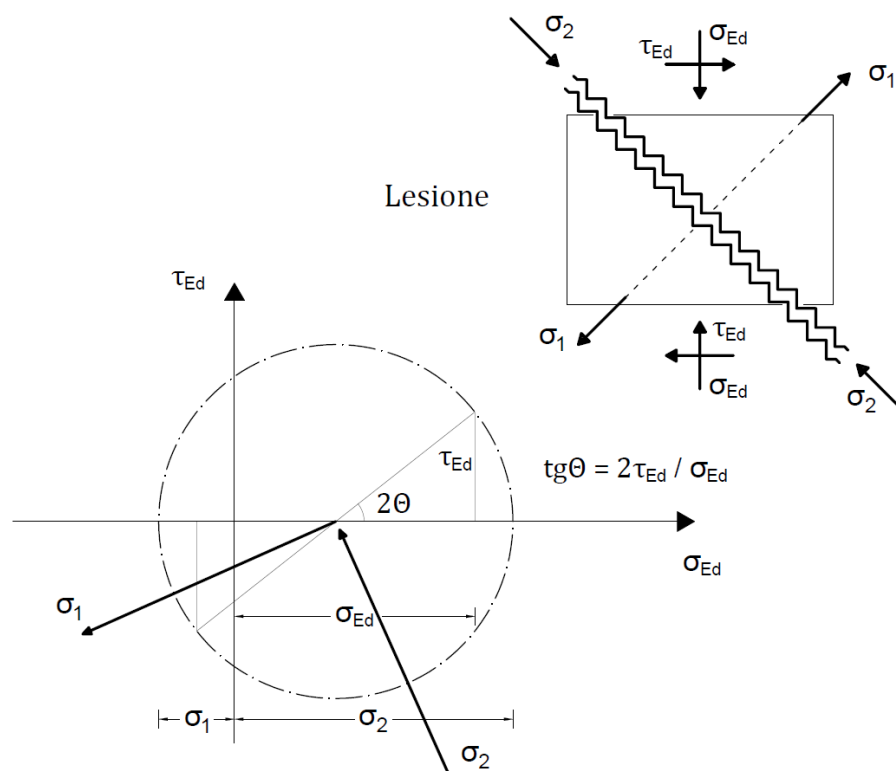


Figura 44. Interpretazione circa la comparsa di lesioni dal centro del muro verso le estremità [33].



Uno dei criteri presenti in letteratura per valutare la capacità ultima a taglio di una parete con questo criterio è dovuto a Turnsek e Cacovic [34]. Esso è nato dall'osservazione di numerose prove sperimentali [35] e si basa sull'assunzione che la rottura avvenga quando la tensione principale di trazione, nella zona centrale del pannello, uguaglia la resistenza a trazione della muratura.

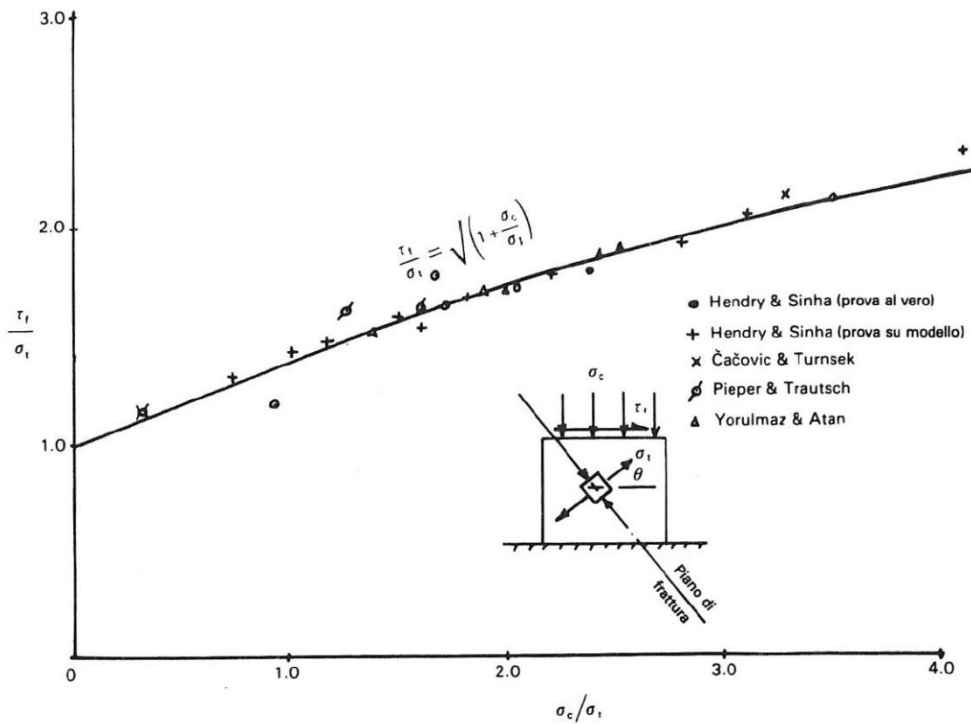


Figura 45. Confronto tra legge empirica e risultati sperimentali (Hendry, 1981).

In base alla teoria relativa al cerchio di Mohr possiamo descrivere la tensione principale di trazione di un corpo soggetto a sforzo assiale e tangenziale, come:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{Ed})^2} \quad [MPa] \quad (2.1)$$

Ponendo dunque  $\sigma_1 = f_{w,tk}$  e  $\tau_{Ed} = f_{w,vk}$

$$\left(f_{w,tk} + \frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta f_{w,vk})^2}\right)^2$$

$$f_{w,tk}^2 + \frac{\sigma_{Ed}^2}{4} + f_{w,tk}\sigma_{Ed} = \frac{\sigma_{Ed}^2}{4} + \beta^2 f_{w,vk}^2$$

$$\begin{aligned}
 f_{w,tk} (f_{w,tk} + \sigma_{Ed}) &= \beta^2 f_{w,vk}^2 \\
 \sqrt{f_{w,tk} (f_{w,tk} + \sigma_{Ed})} &= \sqrt{\beta^2 f_{w,vk}^2} \\
 f_{w,vk} &= \frac{f_{w,tk}}{\beta} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{w,tk}}} \quad [MPa] \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Se ora moltiplichiamo entrambi i membri per la sezione del pannello si ottiene il taglio ultimo cui è sottoponibile il pannello.

$$V_{w,v1k} = Lt \frac{f_{w,tk}}{\beta} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{w,tk}}} \quad [kN] \quad (2.3)$$

$f_{w,tk}$  rappresenta la resistenza a trazione della muratura ed è un parametro di difficile individuazione perché non esistono prove con cui rilevare il suo valore. Inoltre il valore della tensione principale di trazione al collasso non è costante dal momento che la sua inclinazione rispetto all'orizzontale, diminuisce al crescere delle compressioni, e a causa dell'anisotropia della muratura. Perciò le condizioni di collasso per compressione e taglio devono essere definite da una superficie funzione di  $\sigma_{Ed}$ ,  $f_{w,tk}$  e  $\theta$  che rappresenta l'inclinazione della direzione principale di compressione [36]. Il problema andrebbe quindi risolto attraverso il metodo agli elementi finiti come in [37].

La pratica edile necessita però di un approccio dotato di un minor onere computazionale e in alternativa sono disponibili formule empiriche di comprovata attendibilità. Proprio per questo la Circolare applicativa delle NTC 2008, al punto C.8.7.1.5, individua il suo valore in:

$$f_{w,tk} = 1,5 \cdot f_{w,vk0} \quad [MPa] \quad (2.4)$$

Il parametro  $f_{w,vk0}$  (resistenza a taglio in assenza di compressione) presenta il vantaggio di avere un riscontro fisico più immediato rispetto alla tensione convenzionale a trazione. Esso può essere infatti dedotto dalla tabella C8A.2.1 della circolare applicativa relativa ai parametri meccanici di diverse tipologie di muratura. Inoltre è ricavabile mediante prove sperimentali quali test di compressione diagonale (secondo norma ASTM E 519/10) su porzioni di muratura (di difficile esecuzione per edifici esistenti), utilizzando la formula relativa al criterio di Turnsek e Cacovic :

$$f_{w,vk0} = 0,33 \frac{\sigma_{max}}{A_n} \quad [MPa] \quad (2.5)$$

Ancora è possibile sfruttare prove su triplette regolate in base alla norma UNI EN 1052-3, le quali consentono di trovare la resistenza a taglio con un maggior fattore

di sicurezza rispetto alla prova precedente [38]. Infine è possibile determinare la resistenza a taglio in assenza di compressione mediante prove meccaniche effettuate su carote estratte dal pannello, così come indicato in [39].

In alternativa all'approccio proposto dalla Circolare con la formula (2.4), Chinwah in [40] e Schneider in [41], propongono di valutare la resistenza a trazione della muratura come la somma della resistenza a taglio in assenza di compressione e di un termine funzione del livello di compressione. Come vedremo questo porta a un maggior fattore di sicurezza e a una descrizione più adesa al reale comportamento del materiale.

$$f_{w,tk} = f_{w,vk0} + 0,05 \cdot \sigma_{Ed} \quad (2.6)$$

Conviene poi tornare all'equazione (2.3) per definire l'ultimo parametro rimasto ovvero il coefficiente  $\beta$ . Il suo valore è funzione della snellezza della parete  $\lambda_M = h/L$  (rapporto tra l'altezza del pannello  $h$  e la sua lunghezza  $L$ ) e delle sue condizioni di vincolo. Il suo scopo è quello di correlare l'equazione (2.3) con la possibile crisi locale della muratura, dovuta alla distribuzione non uniforme del taglio.

In origine Turnsek e Sheppard proposero di adottare una distribuzione parabolica e di uguagliare tale valore a 1,5, ma questo era corretto solo per quei pannelli aventi una snellezza paragonabile al solido di De Saint Venant. La circolare applicativa del 2009 suggerisce così di usare la formulazione proposta da Benedetti e Tomazevic in [42]:

$$\beta = \begin{cases} 1,0 & \text{per } \lambda = h / L \leq 1,0 \\ \lambda & \text{per } 1,0 < \lambda = h / L < 1,5 \\ 1,5 & \text{per } \lambda = h / L \geq 1,5 \end{cases} \quad (2.7)$$

Prove di laboratorio hanno tuttavia dimostrato che l'equazione (2.7) è affetta da un certo grado di approssimazione in quanto, per pannelli aventi snellezze inferiori a 1,5, i valori di  $\beta$  da essa ottenuti sono sensibilmente sottostimati portando, attraverso l'equazione (2.3), a una sovrastima del taglio ultimo resistente. Utilizzando i risultati ottenuti per via numerica sono state definite nuove espressioni del coefficiente  $\beta$  al variare della snellezza e l'andamento di tale relazione ha permesso l'uso di una formula approssimata più adesa al reale andamento del fattore di taglio  $\beta$  [43]:

$$\beta(\lambda) = 1,0 + \alpha_v = 1,0 + \psi \cdot \lambda \quad (2.8)$$

Dove il coefficiente  $\psi$  è funzione dei vincoli superiore e inferiore della parete e risulta pari a 1,0 in caso di mensola e 0,5 in caso di doppio incastro. Si precisa però che il criterio di rottura per fessurazione diagonale, fornisce una corretta interpretazione del comportamento della muratura unicamente in caso di doppio incastro.

Esiste poi la possibilità che la lesione diagonale non si inneschi a gradino lungo i giunti di malta, ma bensì, sia dovuta al superamento della resistenza a trazione nei blocchi ( $f_{b,tk}$ ), specie quando questi risultano di scarsa qualità e la malta di ottima fattura. Per valutare il taglio ultimo resistente in questo caso, all'interno di [44] Mann e Muller propongono la seguente formula, molto simile all'equazione (2.3):

$$V_{w,v2k} = Lt \frac{f_{b,tk}}{2,3\beta} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk}}} \quad [kN] \quad (2.9)$$

Il coefficiente di snellezza viene dunque amplificato e la resistenza a trazione della muratura viene sostituita con quella dei blocchi, la quale risulta di più facile estrapolazione rispetto alla precedente. Sperimentalmente si è notato che questa relazione funziona bene per  $\alpha_v \leq 1$ ; per valori superiori la lettura del comportamento a collasso diventa eccessivamente cautelativa [44].

### 2.1.2.2. Meccanismo di rottura per Scorrimento (Sliding)

Il secondo meccanismo di rottura è quello per scorrimento, dove la porzione superiore del pannello scorre su quella inferiore in seguito al collasso dei letti orizzontali di malta. Dalle prove di laboratorio [43, 45] è possibile notare che questo tipo di rottura si verifica maggiormente in caso di basso carico di compressione e nelle zone di estremità della parete, ovvero quelle dove il momento flettente è maggiore.

Il criterio di rottura tradizionalmente utilizzato è quello di Mohr - Coulomb che verrà meglio analizzato al punto 3.2.3.3. Secondo tale criterio, la tensione tangenziale ultima viene espressa come somma di un termine costante  $c_{mb}$  (detto coesione e assimilabile alla resistenza a taglio in assenza di compressione  $f_{w,vk0}$ ) e di un termine proporzionale alla tensione di compressione media nella sezione  $\sigma_{Ed}$  [46].

$$f_{w,vk} = c_{mb} + f \sigma_{Ed} \quad (2.10)$$

Il termine  $f$  prende il nome di coefficiente di attrito apparente ed esprime l'influenza della tensione verticale di compressione sulla resistenza a taglio.

$$f = \tan(\varphi) \quad (2.11)$$

Dove  $\varphi$  rappresenta l'angolo di attrito interno della muratura. Le NTC 2008 impongono di utilizzare un valore di 0,4 per il coefficiente di attrito, ma bisogna far notare che tale coefficiente non è in realtà costante. Il suo valore oscilla tra 0,3 e 0,8 [36] e per determinarlo con precisione si dovrebbero effettuare numerose prove di compressione diagonale inclinando i provini. Ad esempio si potrebbe utilizzare la tecnica descritta in [39].

La resistenza a taglio si calcola dunque come:

$$f_{w,vk} = f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed} \quad [MPa] \quad (2.12)$$

E se non sono presenti i giunti di testa:

$$f_{w,vk'} = 0,5f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed} \quad [MPa] \quad (2.13)$$

Al fine di determinare il taglio ultimo resistente bisogna poi moltiplicare entrambi i membri per l'area di base del pannello e dividere per il coefficiente di taglio  $\beta$  precedentemente descritto.

$$V_{w,V3k} = \frac{Lt(f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed})}{1 + \alpha_v} \quad [MPa] \quad (2.14)$$

Tuttavia bisogna considerare il fatto che la rottura potrebbe essere causata dalla flessione. Per prevenire ciò si può utilizzare la resistenza a taglio trovata con l'equazione (2.12) riferendola alla sezione non fessurata dal momento flettente [46]. La lunghezza di tale sezione è in genere calcolata omettendo il contributo a trazione dato dai letti di malta e assumendo una distribuzione semplificata delle compressioni, in genere lineare. Se queste ipotesi sono valide la lunghezza della sezione non fessurata,  $L_c$ , è calcolata in funzione dell'eccentricità del carico verticale e vale:

$$L_c = \begin{cases} L & e \leq L/6 \\ \kappa L = 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{V_{Ed}}{N_{Ed}} \alpha_v \right) \cdot L & L/6 < e < L/2 \end{cases} \quad [m] \quad (2.15)$$

E di conseguenza l'azione resistente offerta dalla muratura è pari a

$$V_{w,V3k} = \begin{cases} e \leq L/6 & \frac{Lt(f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed})}{1 + \alpha_v} \\ \frac{L}{6} < e < \frac{L}{2} & \frac{Lt \cdot 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{V_{Ed}}{N_{Ed}} \alpha_v \right) \cdot (f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed})}{1 + \alpha_v} \end{cases} \quad [MPa] \quad (2.16)$$

Come prescritto dalle NTC 2008, il valore di  $f_{w,vk}$  non può comunque essere maggiore di  $1,4 f_{b,ck}$ , dove  $f_{b,ck}$  indica la resistenza a compressione degli elementi nella direzione di applicazione della forza, né maggiore di 1,5 MPa. Oppure, come proposto dall'Eurocodice 6, non può essere maggiore di  $0,065 f_{w,ck}$  [47].

### 2.1.2.3. Meccanismo di rottura per Schiacciamento/Ribaltamento (Rocking failure)

Le azioni laterali agenti sul pannello murario inducono un momento flettente che varia lungo la lunghezza della parete. Questo produce tensioni normali di trazione e di compressione che risultano massime alla base della parete nelle zone di estremità.

Se le tensioni di compressione superano la resistenza a compressione della muratura si verifica uno schiacciamento in corrispondenza della parte compressa della sezione trasversale della parete. Allo stato limite ultimo la condizione di rottura può sopraggiungere secondo due casi: nel primo il pannello subisce una lesione a causa degli sforzi di trazione, mentre nel secondo no.

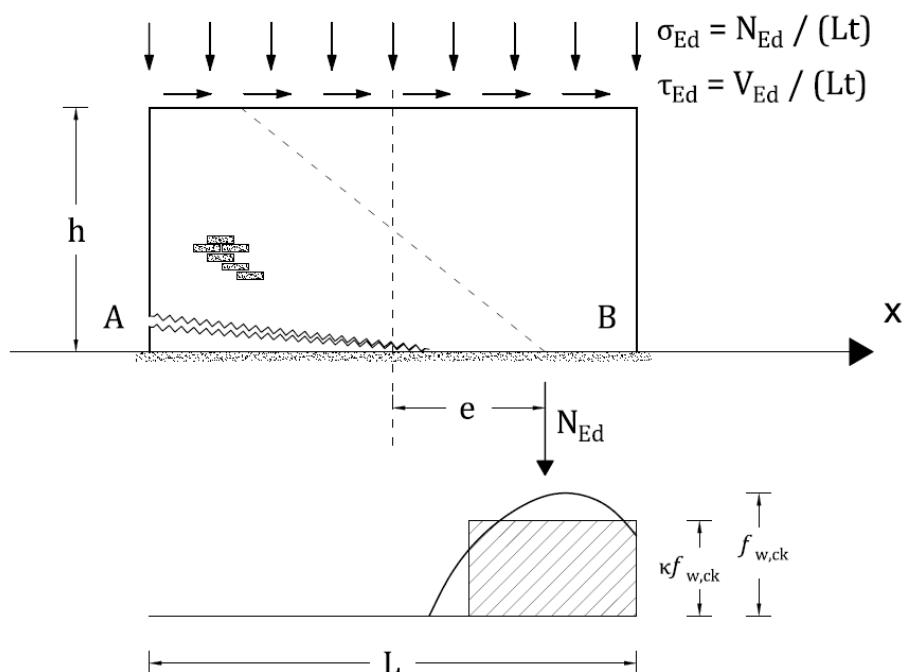


Figura 46. Meccanismo di rottura per schiacciamento con formazione di lesione.

Si consideri il primo caso dove, per piccoli valori dell'azione di compressione, si verifica la rottura nella regione B del pannello, dopo il lesionamento della porzione A.

In riferimento alla Figura 46 si ponga l'equilibrio alla traslazione verticale [33]:

$$2 \cdot \left( \frac{L}{2} - e \right) t \cdot \kappa f_{w,ck} = \sigma_{Ed} \cdot Lt$$

Sapendo che l'eccentricità della risultante delle forze  $N_{Ed}$  è pari a:

$$e = \frac{M_{Ed}}{N_{Ed}} = \frac{V_{Ed} \cdot \psi h}{N_{Ed}} = \frac{\tau_{Ed} \cdot \psi h L t}{\sigma_{Ed} \cdot L t} = \frac{\tau_{Ed}}{\sigma_{Ed}} \psi h$$

Si sostituisce la sua formulazione nella precedente equazione di equilibrio verticale e si ottiene:

$$\begin{aligned} \kappa f_{w,ck} L t - \kappa f_{w,ck} t 2 \cdot \frac{\tau_{Ed}}{\sigma_{Ed}} \psi h &= \sigma_{Ed} \cdot L t \\ \tau_{Ed} 2 \kappa f_{w,ck} t \psi h &= \kappa f_{w,ck} L t \sigma_{Ed} - \sigma_{Ed}^2 \cdot L t \\ \tau_{Ed} &= \frac{\kappa f_{w,ck} L t \sigma_{Ed} - \sigma_{Ed}^2 \cdot L t}{2 \kappa f_{w,ck} t \psi h} \\ \tau_{Ed} &= \frac{\sigma_{Ed}}{2 \psi h} L \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{\kappa f_{w,ck}} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

In condizioni di crisi incipiente è possibile uguagliare la tensione tangenziale ultima con la resistenza taglio, ovvero  $\tau_{Ed} = f_{w,vk}$ .

$$f_{w,vk} = \frac{\sigma_{Ed}}{2 \alpha_v} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{\kappa f_{w,ck}} \right) \quad [MPa] \quad (2.18)$$

Dove il coefficiente  $\kappa$  semplifica la distribuzione degli sforzi di compressione in corrispondenza dello spigolo attraverso l'uso di uno stress-block con  $\kappa = 0,85$ .

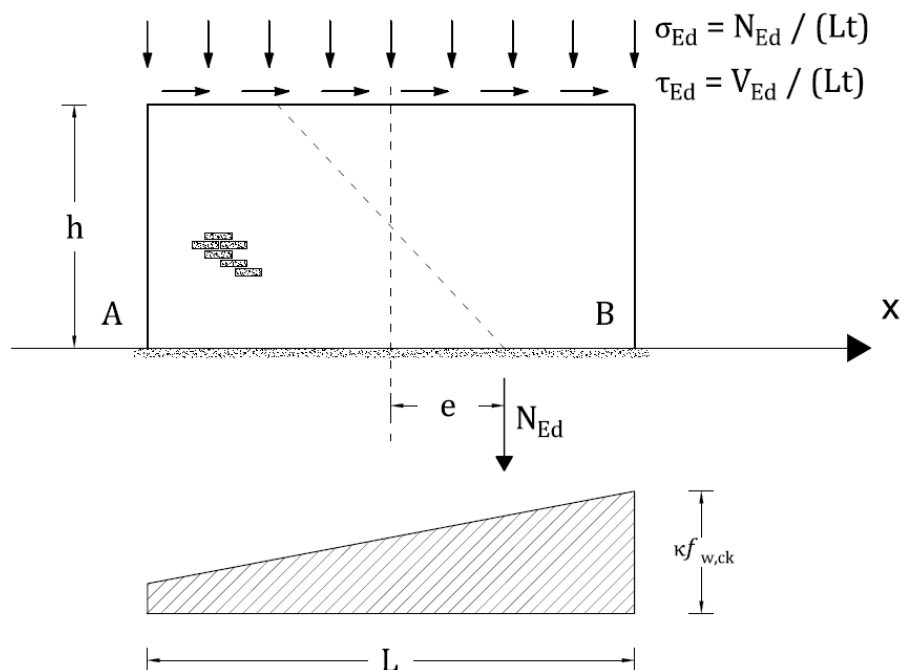
Si consideri invece il caso in cui, per grandi valori dello sforzo di compressione  $\sigma_{Ed}$ , si arriva al collasso per compressione nella porzione B, senza che si lesioni la parte in A. Questo accade non perché si ipotizza l'esistenza di una resistenza a trazione nella muratura, ma perché la risultante dei carichi cade all'interno del terzo medio della sezione ( $e < L/6$ ). Bisogna però ricordare che anche nella situazione di sezione non parzializzata, le NTC 2008 impongono di ridurre la resistenza caratteristica a compressione mediante il coefficiente  $\kappa = 0,85$ .

Poniamo allora l'equilibrio alla traslazione verticale riferendoci alla Figura 47.

$$\sigma_B = \frac{N_{Ed}}{A_w} + \frac{M_{Ed}}{I_{yy}} y = \frac{N_{Ed}}{L t} + \frac{V_{Ed} \cdot \psi h}{\frac{t L^3}{12}} \cdot \frac{L}{2} = \sigma_{Ed} + 6 \alpha_v \tau_{Ed}$$

Che al collasso diventa:

$$f_{w,vk} = \frac{\kappa f_{w,ck} - \sigma_{Ed}}{6 \alpha_v} \quad [MPa]$$



**Figura 47.** Meccanismo di rottura per schiacciamento senza formazione di lesione.

L'azione resistente al taglio è dunque pari a:

$$V_{w,V4k} = \begin{cases} e \leq L/6 & Lt \frac{\kappa f_{w,ck} - \sigma_{Ed}}{6\alpha_v} \\ \frac{L}{6} < e < \frac{L}{2} & Lt \frac{\sigma_{Ed}}{2\alpha_v} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{\kappa f_{w,ck}} \right) \end{cases} \quad [MPa] \quad (2.19)$$

Le NTC 2008 propongono invece una verifica basata sul confronto tra il momento flettente agente nel piano della parete e quello resistente valutato in base alla seguente formula:

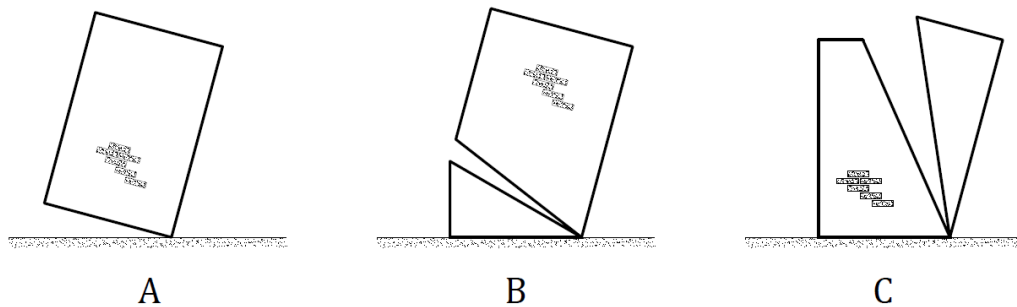
$$M_{Rd} = Lt^2 \frac{\sigma_{Ed}}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{0,85 f_{w,ck}} \right) \quad (2.20)$$

Ricordando il rapporto che lega il momento flettente ultimo con il taglio ultimo, ovvero  $M_{Rd} = V_{Rd} \cdot \psi h$ , è possibile osservare che tale equazione risulta uguale alla seconda della (2.19). Le NTC 2008 scartano dunque l'ipotesi di sezione non fessurata, in quanto per tale condizione è più probabile che si realizzino le precedenti rotture.

Tuttavia pur non pervenendo allo schiacciamento della muratura si potrebbe verificare il ribaltamento del pannello in corrispondenza di B. Questo a causa



dell'eccessiva parzializzazione della sezione che porterebbe l'asse neutro in prossimità del bordo compresso con un progressivo degrado della rigidità fino all'incapacità di sostenere ulteriori incrementi di carico. Tale meccanismo può avvenire secondo modalità differenti a seconda della qualità dei componenti. Nel caso di una muratura realizzata con malta di buona qualità il pannello si comporta come descritto in precedenza e ruota come un blocco rigido intorno a uno spigolo di base (Figura 48 A). In presenza di malta scadente o in caso di pannelli tozzi, il collasso avviene tramite il distacco e la rotazione di una porzione di parete delimitata da una direzione inclinata. Il valore del taglio ultimo per ribaltamento si può calcolare risolvendo un problema di analisi limite relativo a meccanismi parziali come quelli indicati in Figura 48 B/C. Ovviamente il verificarsi di tali meccanismi parziali riduce il taglio ultimo del pannello murario [48].



**Figura 48.** Meccanismi di ribaltamento: A - Blocco rigido, B/C - Parziali

Questa situazione si verifica quando la risultante delle compressioni  $N_{Ed}$  è posizionata oltre la base  $L$  della parete, ovvero quando l'eccentricità è maggiore di  $L/2$ , ma in caso di pannelli sollecitati parallelamente al piano medio risulta abbastanza raro.

#### 2.1.2.4. Confronto delle modalità di rottura

Se si esclude momentaneamente l'ultimo meccanismo di collasso presentato, in caso di murature aventi filari orizzontali, qualunque sia il tipo di lesione (scorrimento o fessurazione diagonale), si arriva al medesimo meccanismo di collasso. In ogni caso infatti, la parte superiore del pannello scorre su quella inferiore e a questo si oppone maggiormente la resistenza della malta presente nei filari orizzontali. I giunti di testa, spesso non presenti, hanno infatti un minor peso nel meccanismo resistente.

Volendo riassumere è possibile dire che la rottura per taglio del pannello può manifestarsi in modi diversi in relazione alla qualità del legante rispetto al blocco, della geometria del pannello, dei suoi vincoli ed in funzione del carico verticale agente. In particolare è utile osservare che la rottura per scorrimento orizzontale lungo i corsi di malta si verifica per bassi valori del carico verticale di compressione e nelle zone di estremità della parete. Queste infatti sono maggiormente soggette ad una contemporanea azione di flessione che parzializza la sezione riducendo così l'area resistente. La rottura di tipo diagonale è quella che si realizza maggiormente poiché è causata da medi e alti livelli di compressioni, da una malta di qualità simile a quella dei blocchi (murature storiche) e da geometrie tozze del pannello ( $0,5 < \lambda < 1,5$ ).

Tutte queste affermazioni sono riscontrabili nei prossimi grafici, all'interno dei quali sono riportati i valori dell'azione resistente a taglio determinata attraverso le formule mostrate in precedenza. L'analisi è stata eseguita su un maschio murario a due teste, incastrato alle estremità, costituito da mattoni pieni e malta di calce e dotato delle seguenti caratteristiche meccaniche:

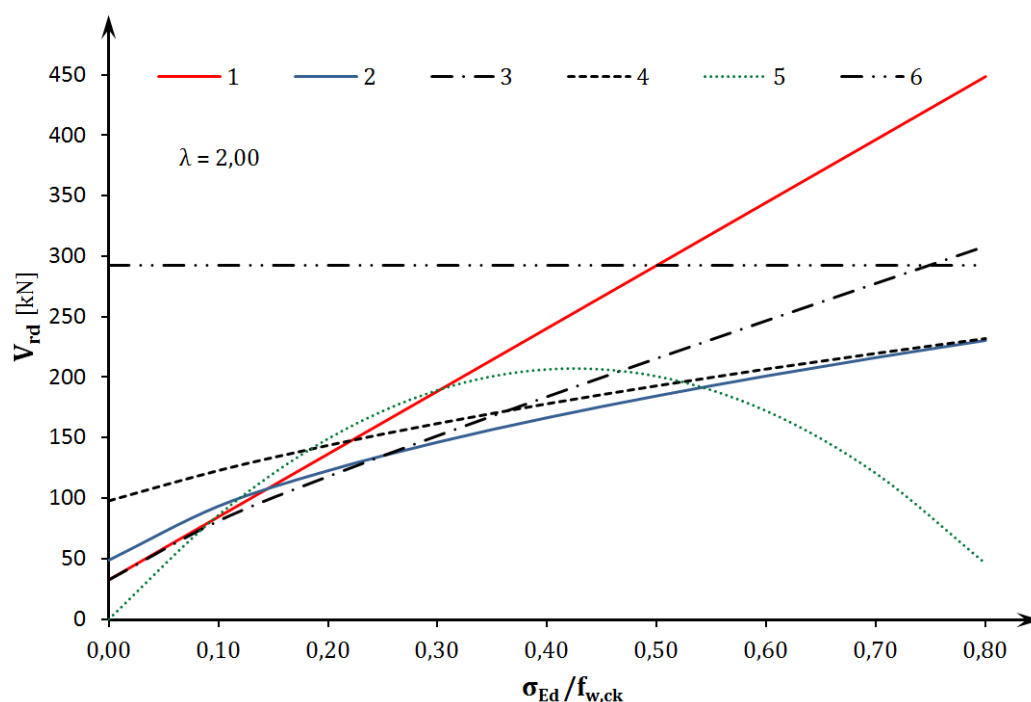
$$\begin{array}{ll} f_{w,ck} = 5,20 & [MPa] \\ f_{w,vk0} = 0,13 & [MPa] \\ f_{b,ck} = 18,00 & [MPa] \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_{w,vk \text{ lim}} = 0,13 & [MPa] \\ E = 1800 & [MPa] \\ f_{b,tk} = 0,90 & [MPa] \end{array}$$

Si è scelto di mostrare l'azione resistente determinata tramite:

1. Il criterio di rottura per scorrimento come prescritto dalle NTC 2008 (linea rossa continua) attraverso l'equazione (2.16) nell'ipotesi di sezione interamente reagente;
2. Il criterio di rottura per fessurazione diagonale della muratura come prescritto dalla circolare applicativa del 2009 attraverso la formula (2.3);
3. Il criterio di rottura per fessurazione diagonale della muratura utilizzando però gli accorgimenti descritti nelle formule (2.6) e (2.8);
4. Il criterio di rottura per fessurazione diagonale dei blocchi utilizzando l'equazione (2.9);

5. Il criterio di rottura per schiacciamento descritto nelle NTC 2008 attraverso l'equazione (2.19), nell'ipotesi di sezione fessurata;
6. Il limite della resistenza a taglio dettato dall'Eurocodice 6.

Per cogliere meglio gli aspetti del problema, si è scelto di replicare tre volte l'analisi facendo variare la lunghezza del pannello, di modo da ottenere diversi livelli di snellezza. I grafici si riferiscono quindi a murature aventi rispettivamente un coefficiente  $\lambda$  pari a 2,00 - 1,20 - 0,60.



**Figura 49.** Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per  $\lambda = 2,00$ .

Visionando i grafici è possibile notare che il criterio di rottura per schiacciamento è poco utile se non nel caso di elevata snellezza o di compressioni verticali talmente basse da risultare quasi impossibili nella pratica. Inoltre il limite posto alla resistenza a taglio dall'Eurocodice 6 è significativo solo per l'azione resistente determinata dal primo criterio.

Se si focalizza l'attenzione sulle azioni resistenti determinate tramite le normative nazionali è possibile vedere che il criterio della fessurazione diagonale della muratura si impone sullo scorrimento orizzontale al crescere dell'azione di compressione. Rispetto a quanto affermato in precedenza sembrerebbe che il punto di scambio tra i due, trasli verso le minori compressioni al diminuire della snellezza. Questo però è il contrario di quello che succederebbe realmente siccome è stata considerata una sezione interamente soggetta a compressione.

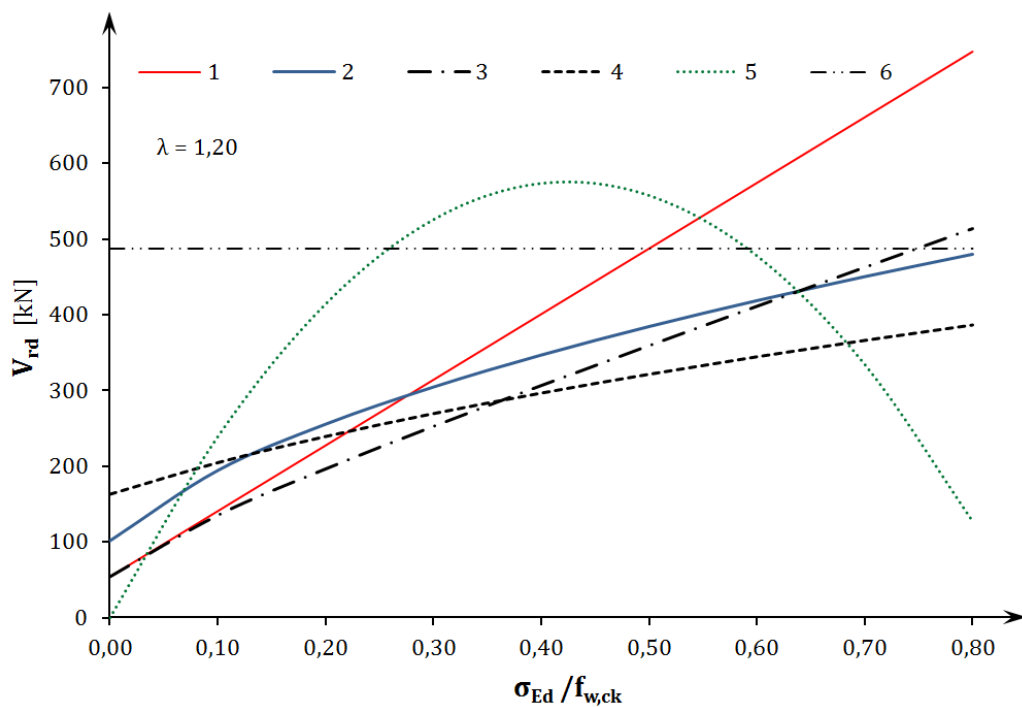


Figura 50. Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per  $\lambda = 1,20$ .

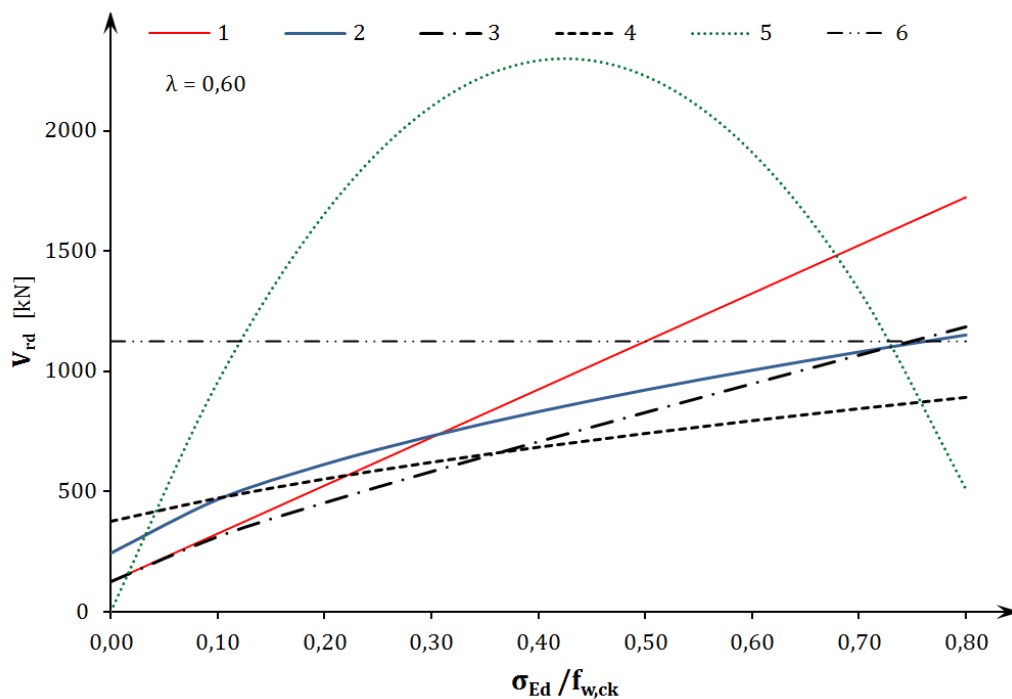


Figura 51. Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per  $\lambda = 0,60$ .

Ad ogni modo, come proposto da Tomazevic in [35], il secondo criterio offre una miglior lettura dell'azione resistente ultima nell'arco di compressioni proprie della pratica edile. Un perfezionamento di quest'ultimo avviene con il terzo e il quarto criterio, dove gli accorgimenti proposti da numerosi autori, permettono un maggior grado di sicurezza accompagnato da una più conscia e corretta lettura del reale comportamento della muratura. In particolare il terzo criterio adotta una resistenza a trazione che, calcolata in base al livello di compressione agente, permette di risolvere la sovrastima del taglio resistente alle basse compressioni effettuata dal secondo criterio.

### 2.1.3. Rottura dovuta ad azioni laterali agenti fuori dal piano medio

Quando il pannello è soggetto a una spinta laterale ortogonale al suo piano medio la rottura avviene principalmente secondo un meccanismo di schiacciamento o ribaltamento simile a quello precedentemente descritto. Al punto 4.5.6.2 le NTC 2008 propongono una verifica semplificata di questo stato tensionale che si basa su una verifica a compressione. Il procedimento prevede di ridurre la resistenza in funzione della snellezza del pannello e dell'eccentricità con cui agiscono i carichi.

In alternativa, al punto 7.8.2.2.2, sempre le NTC propongono di calcolare il momento ultimo resistente in maniera molto simile al caso di collasso per pressoflessione di una parete sollecitata nel suo piano medio. Similmente a quanto visto al punto 2.1.2.3 e all'equazione (2.20) si assume un diagramma delle compressioni rettangolare con uno stress-block pari a 0,85 e si trascura la resistenza a trazione. Il valore del momento resistente può essere dunque calcolato come:

$$M_{Rd} = Lt^2 \frac{\sigma_{Ed}}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{0,85 f_{w,ck}} \right) \geq M_{Ed} \quad [kNm] \quad (2.21)$$

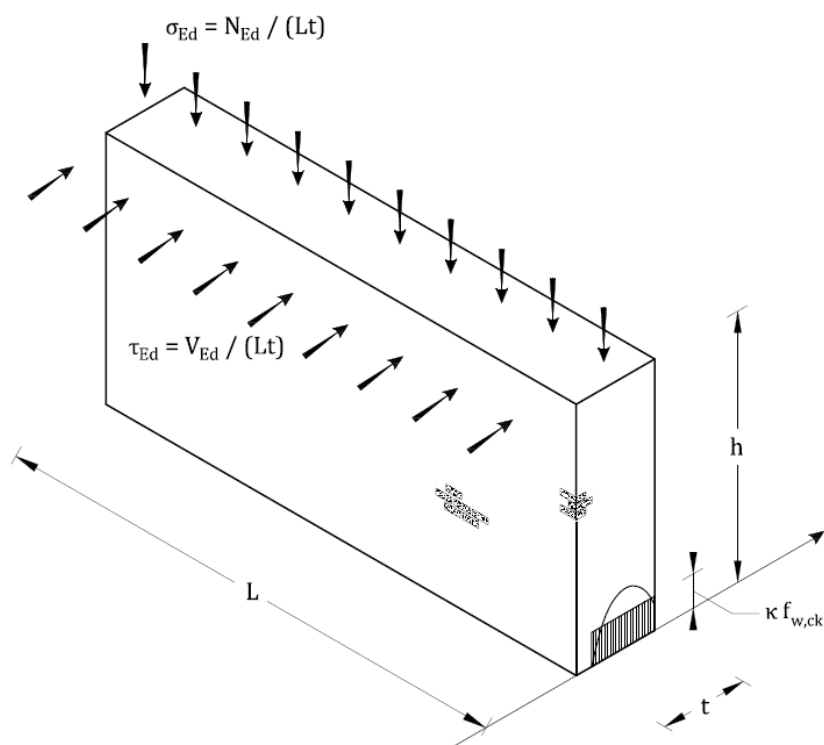


Figura 52. Meccanismo di rottura per schiacciamento con formazione di lesione.

Questa risoluzione non permette però di analizzare la situazione né di confrontare l'azione resistente ottenibile con le precedenti. Per questo motivo si procede a de-

terminare il valore dell'azione resistente a taglio, ponendo, similmente a quanto fatto in precedenza, l'equilibrio alla traslazione verticale in relazione allo schema di Figura 52.

$$2 \cdot \left( \frac{t}{2} - e \right) L \cdot \kappa f_{w,ck} = \sigma_{Ed} \cdot Lt \quad (2.22)$$

Sapendo che l'eccentricità della risultante delle forze  $N_{Ed}$  è pari a:

$$e = \frac{M_{Ed}}{N_{Ed}} = \frac{V_{Ed} \cdot \psi h}{N_{Ed}} = \frac{\tau_{Ed} \cdot \psi h Lt}{\sigma_{Ed} \cdot Lt} = \frac{\tau_{Ed}}{\sigma_{Ed}} \psi h$$

Si sostituisce la sua formulazione nella precedente equazione di equilibrio verticale e si ottiene:

$$\begin{aligned} \kappa f_{w,ck} Lt - \kappa f_{w,ck} L 2 \cdot \frac{\tau_{Ed}}{\sigma_{Ed}} \psi h &= \sigma_{Ed} \cdot Lt \\ \tau_{Ed} 2 \kappa f_{w,ck} L \psi h &= \kappa f_{w,ck} Lt \sigma_{Ed} - \sigma_{Ed}^2 \cdot Lt \\ \tau_{Ed} &= \frac{\kappa f_{w,ck} Lt \sigma_{Ed} - \sigma_{Ed}^2 \cdot Lt}{2 \kappa f_{w,ck} L \psi h} \\ \tau_{Ed} &= \frac{\sigma_{Ed}}{2 \psi h} t \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{\kappa f_{w,ck}} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se si osserva attentamente quest'ultima equazione e la si mette a confronto con la (2.17), scritta per una spinta laterale parallela al piano medio, è possibile notare che le due differiscono soltanto per il denominatore, dove, in luogo della lunghezza  $L$  del pannello è ora presente il suo spessore  $t$ . E' allora possibile affermare che siccome  $L \gg t$ , a parità di geometria e carichi, una muratura, sottoposta a un'azione laterale parallela al suo piano medio, sarà in grado di raggiungere una tensione tangenziale ultima maggiore, rispetto a quella raggiungibile qualora la spinta agisca perpendicolarmente ad essa. Questo è il motivo del perché convenga riportare le azioni laterali verso i rispettivi muri di controvento, mediante l'utilizzo di solai rigidi e opportunamente vincolati alle pareti.

In aggiunta a ciò, è doveroso sottolineare che, siccome lo spessore di un pannello è in genere molto inferiore alla sua lunghezza, aumenta considerevolmente il rischio di ribaltamento rispetto al caso precedente, dove le azioni laterali agivano parallelamente al piano medio. Come già accennato, è possibile determinare il taglio ultimo resistente mediante un'analisi limite in un cui si ipotizza l'innescò del meccanismo di ribaltamento attorno a una cerniera plastica. I casi possono essere molteplici, perché molteplici sono gli schemi statici che si presentano, ma è possibile chiarire la forma del problema mediante l'esempio riportato nella Figura 53-a. In

essa è riportata la sezione di un pannello vincolato alla base e sottoposto alla risultante delle azioni di compressione  $N_{Ed}$  nella mezziera del suo spessore e alla risultante delle azioni laterali  $V_{Ed}$  alla sua sommità.

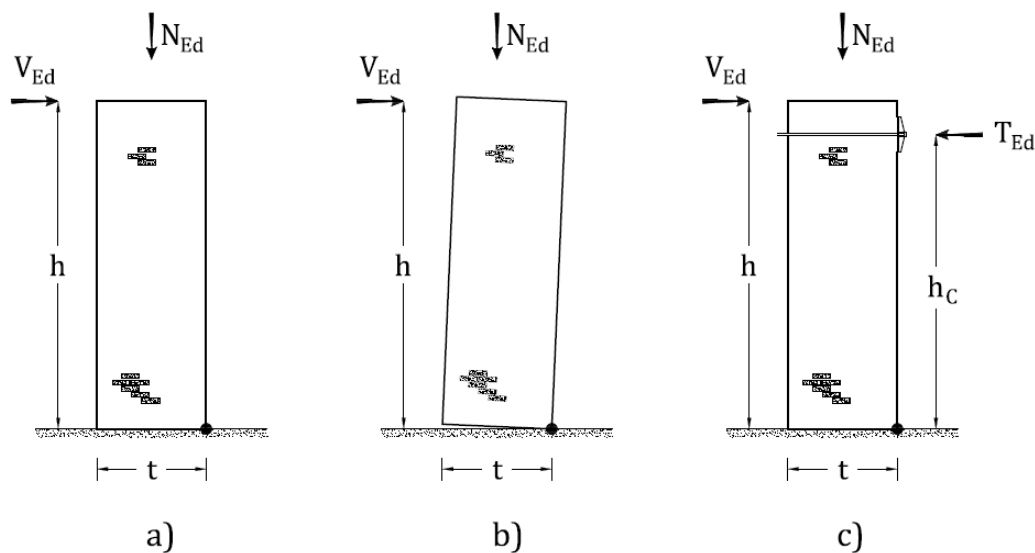


Figura 53. Schema di ribaltamento per pannello fissato alla base.

Tralasciando gli effetti del second'ordine, è possibile determinare la condizione di instabilità, ipotizzando la formazione di una cerniera plastica alla base e ponendo l'equilibrio alla rotazione in questo punto.

$$V_{Ed} h \geq N_{Ed} \frac{t}{2}$$

Siccome il momento è pari al prodotto della forza per il suo braccio è possibile scrivere la seguente relazione  $M_{Ed} = V_{Ed} h$  e sostituirla nella precedente equazione.

$$M_{Ed} \geq N_{Ed} \frac{t}{2}$$

L'eccentricità con cui agisce la risultante delle forze interne è pari a  $e = M_{Ed}/N_{Ed}$  e pertanto la condizione di instabilità si manifesta quando:

$$e \geq \frac{t}{2} \quad (2.24)$$

Tale condizione può anche essere espressa in funzione della spinta laterale  $V_{Ed}$ :



$$V_{Ed} \geq N_{Ed} \frac{t}{2h} \quad (2.25)$$

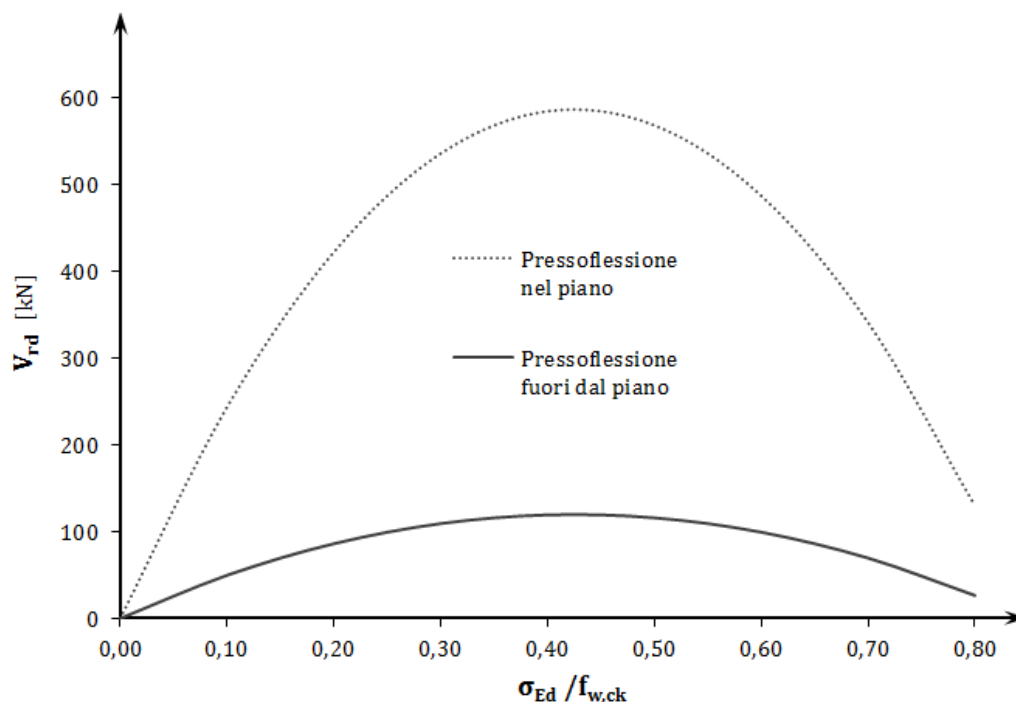


Figura 54. Andamento dell'azione resistente al crescere delle compressioni, per  $\lambda = 1,20$ .

Nel grafico di Figura 54 sono stati riportati i valori dell'azione resistente a taglio per un pannello vincolato a terra come una mensola e avente le medesime caratteristiche meccaniche di quelli introdotti al punto 2.1.2.4. In un caso si è ipotizzato che la spinta laterale agisse normalmente al piano medio della parete, mentre nell'altro che essa agisse in direzione parallela. Dal confronto tra le due, emerge la necessità di riportare l'azione laterale verso i muri di controvento.

Osservando la Figura 53-c è poi possibile intuire il contributo alla stabilità che i tiranti possono offrire. Per farlo è sufficiente porre ancora una volta l'equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera plastica.

$$V_{Ed} h \geq N_{Ed} \frac{t}{2} + T_{Ed} h_C$$

e determinare così la seguente condizione di instabilità:

$$V_{Ed} \geq N_{Ed} \frac{t}{2h} + T_{Ed} \frac{h_C}{h} \quad (2.26)$$

che rispetto alla precedente, definita dall'equazione (2.25), garantisce un maggior livello di sicurezza contro il ribaltamento. Ciò a patto che l'azione laterale  $V_{Ed}$  sia permanente e non temporanea, altrimenti in sua mancanza l'azione  $T_{Ed}$  da stabilizzante diventerebbe instabilizzante.

Da tale considerazione discende una prima indicazione sulla filosofia progettuale con cui disporre i tiranti; se questi vengono disposti per prevenire il ribaltamento dei pannelli in caso di evento sismico, bisognerà contenerne il pretensionamento in modo che non sia esso stesso causa di un preventivo ribaltamento. Mentre in caso di catene atte a contenere l'azione laterale di strutture spingenti, è bene che la pretensione di trazione presente nel tirante sia calcolata sulla base dei soli carichi permanenti.

## 2.2. Presidi tesi ad incatenare la struttura

### 2.2.1. Introduzione

In questo capitolo viene affrontato il dimensionamento dei tiranti quando lo scopo della loro applicazione consiste nel conferire un maggior comportamento scatolare all'edificio e/o nel prevenire le diverse modalità di collasso locale o globale che possono incorrere.

L'uso di catene metalliche non è in grado di raggiungere aprioristicamente il primo, il secondo o entrambi gli obiettivi proposti, in quanto ciò è possibile solo in relazione alle caratteristiche della struttura e alle sollecitazioni a cui essa è sottoposta. Un comportamento di tipo scatolare e dunque la possibilità di redistribuire le azioni laterali verso i pannelli ad esse paralleli, è infatti attuabile solo in presenza di un solaio sufficientemente rigido. La presenza o meno di quest'ultimo varierà poi i criteri di dimensionamento e verifica in base al tipo di sollecitazioni presenti, se di tipo statico o dinamico.

Tra le azioni statiche sono comprese le spinte esercitate da particolari schemi strutturali (come ad esempio le coperture spingenti, la presenza di materiali sciolti insilati, la pressione delle terre) o le azioni causate da cedimenti delle fondazioni. Le prime si inquadrano nel contesto di annullamento della spinta e verranno trattate al capitolo 2.3, mentre la risoluzione delle seconde mediante l'utilizzo di tiranti risulta un argomento poco, se non per nulla, trattato sia dalle norme tecniche che dalla letteratura scientifica. Questo perché il presidio non consente di risolvere la causa del dissesto, ma soltanto le conseguenze. Inoltre diventa difficile stabilire una corretta e realistica procedura di dimensionamento dei tiranti, in quanto non risulta possibile definire la reale entità delle sollecitazioni in gioco, poiché la fessurazione dei pannelli innesca nella muratura, dei meccanismi resistenti ausiliari di difficile implementazione nel modello di calcolo.

Visto e considerato che nella maggior parte dei casi non si è poi in grado di stabilire il progredire dei cedimenti e che l'utilizzo di tiranti consente di migliorare solo il comportamento ultimo e non quello in esercizio, tale presidio assume maggior significato nel campo delle opere a carattere provvisoriale e urgente, come quelle messe in campo per evitare il crollo di edifici in seguito ai cedimenti causati da un evento sismico. All'interno di questa macro area di interventi figura sì l'utilizzo di tiranti e cerchiature metalliche (Figura 56), ma l'urgenza con cui è necessario intervenire, fa passare in secondo piano il tema di una progettazione accurata grazie all'utilizzo di alti coefficienti di sicurezza. Pertanto si è deciso di non trattare il dimensionamento dei tiranti in caso di sollecitazioni indotte dai cedimenti del terreno, ma per maggiori delucidazioni a riguardo, si consiglia di visionare [49].

La normativa e la letteratura scientifica si concentrano maggiormente sulla verifica delle murature in seguito alle sollecitazioni dinamiche provocate da un evento sismico. In questo caso, se l'edificio è dotato di solai sufficientemente rigidi, esso sarà in grado di redistribuire tali sollecitazioni al suo interno e pertanto, le norme consentono di effettuare una verifica globale della struttura e una verifica semplificata dei meccanismi fuori piano che coinvolgono i pannelli. Entrando nello specifico di tali verifiche sarà dunque possibile effettuare il dimensionamento dei tiranti affinché garantiscano il necessario vincolo bilatero tra parete e orizzontamento.

Qualora i solai siano deformabili o la struttura non presenti un chiaro comportamento d'insieme, le NTC 2008 consigliano invece di vagliare la stabilità e la resistenza mediante un numero sufficiente di verifiche locali su singole porzioni di muratura. Anche in questo caso l'analisi dei procedimenti proposti consentirà di effettuare il dimensionamento.



**Figura 56.** Esempio di utilizzo dei tiranti quali opere provvisorie atte a contenere i cedimenti delle fondazioni, Amsterdam.



**Figura 55.** Esempio di meccanismo locale per flessione verticale dovuto a un insufficiente ammassamento della parete al solaio [50].

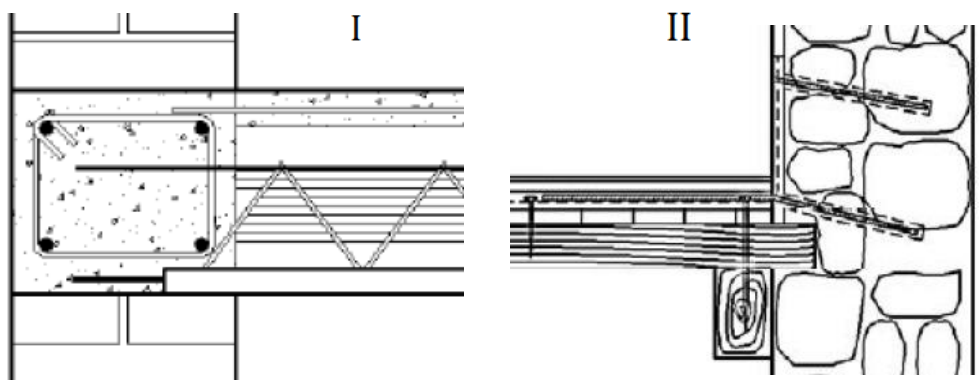
### 2.2.2. Modalità di analisi in caso di solai rigidi

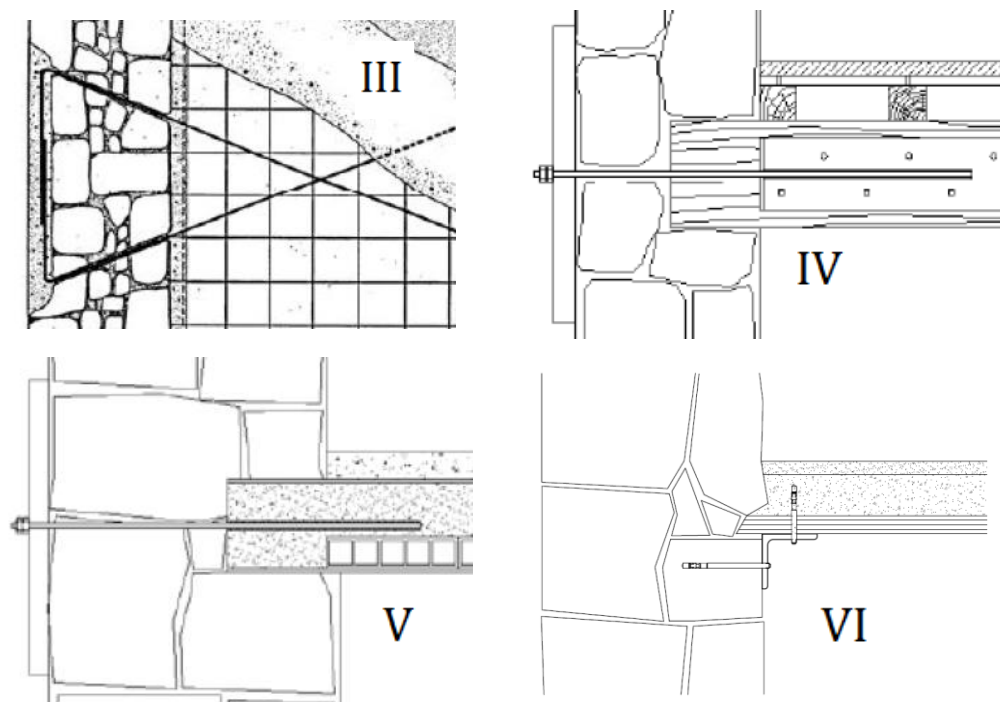
Come già affermato, in caso di solai sufficientemente rigidi nel loro piano medio, l'azione orizzontale inerziale delle pareti e dei carichi da esse portati vengono trasferite da queste alle pareti trasversali attraverso gli orizzontamenti.

Il valore di rigidezza da raggiungere è difficilmente quantificabile numericamente, ma al punto 7.2.6, le NTC 2008 affermano che *“gli orizzontamenti possono essere considerati infinitamente rigidi nel loro piano, a condizione che siano realizzati in cemento armato, oppure in latero-cemento con soletta in c.a. di almeno 40 mm di spessore, o in struttura mista con soletta in cemento armato di almeno 50 mm di spessore collegata da connettori a taglio opportunamente dimensionati agli elementi strutturali in acciaio o in legno e purché le aperture presenti non ne riducano significativamente la rigidezza”*.

L'ulteriore condizione necessaria a permettere questo tipo di comportamento è la presenza di un buon vincolo bidirezionale solaio-parete in grado di trasferire le azioni senza che avvenga il punzonamento della muratura o la prematura rottura del dispositivo di connessione stesso. La normativa tecnica non specifica alcun tipo di soluzione, mentre la letteratura in commercio presenta numerose soluzioni in grado di effettuare tale collegamento in maniera più o meno efficace. Al punto 1.2.3.3 sono state presentate in Figura 42 le soluzioni proposte da M. Pisani, mentre ora verranno riportate le modalità di vincolo ritenute efficaci dalla Kipendoff Engineering:

- I. cordoli in calcestruzzo armato;
- II. rete elettrosaldata risvoltata sulla parete;
- III. rete elettrosaldata collegata alla parete con ferri disposti a coda di rondine;
- IV. capochiave e tirante metallico ancorato a travi in legno o in acciaio;
- V. capochiave e tirante metallico annegato nella cappa in calcestruzzo;
- VI. profilo metallico continuo ancorato alla muratura e al solaio.





**Figura 57.** Soluzioni efficaci per effettuare il vincolo bidirezionale del solaio [51].

Mentre le tecniche proposte in Figura 42 sono ritenute affidabili da chi scrive, bisogna precisare che la I è difficilmente applicabile negli edifici esistenti, mentre la II offre una scarsa resistenza. Tra le altre brillano sicuramente per possibilità di utilizzo su strutture esistenti, efficacia e possibilità di dimensionamento, quelle che prevedono la disposizione di barre annegate nella cappa in calcestruzzo e vincolate alla muratura mediante l'inghisaggio o l'utilizzo di capichiave metallici.

Se le condizioni di vincolo e rigidezza sono assolute è possibile eseguire un'analisi globale della struttura, in base alle limitazioni descritte al punto 7.8.1.5 e alla controparte presente nella circolare applicativa, secondo quattro diversi metodi:

- analisi statica lineare,
- analisi statica non lineare,
- analisi dinamica lineare,
- analisi dinamica non lineare.

Nell'ipotesi di infinita rigidezza nel piano dei solai, il modello può essere costituito dai soli elementi murari continui dalle fondazioni alla sommità, collegati ai soli fini traslazionali alle quote dei solai (modello a mensole di Figura 58). In alternativa, gli elementi di accoppiamento fra pareti diverse, quali travi o cordoli in cemento armato e "travi in muratura" (qualora efficacemente ammorsate alle pareti mediante cordoli o tiranti), possono essere considerati nel modello, a condizione che

le verifiche di sicurezza vengano effettuate anche su tali elementi (modello a telai di Figura 58).

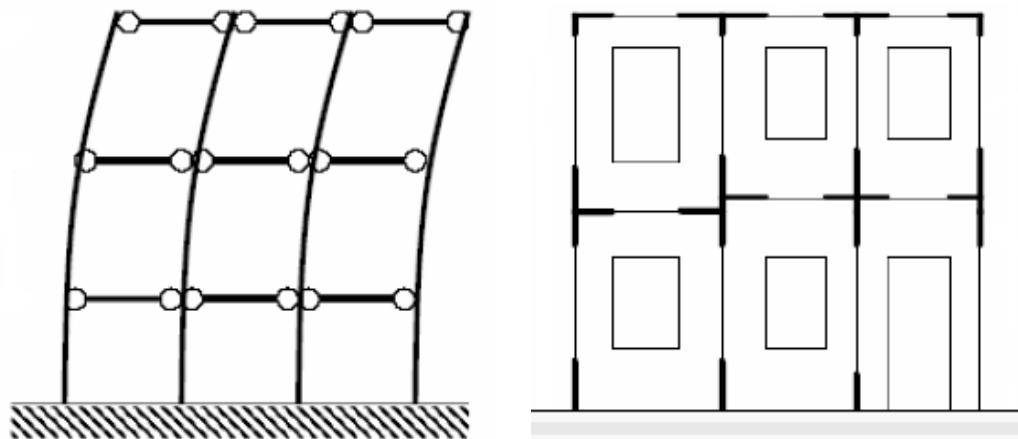


Figura 58. Modello a mensola (sinistra) e "a telai" (destra).

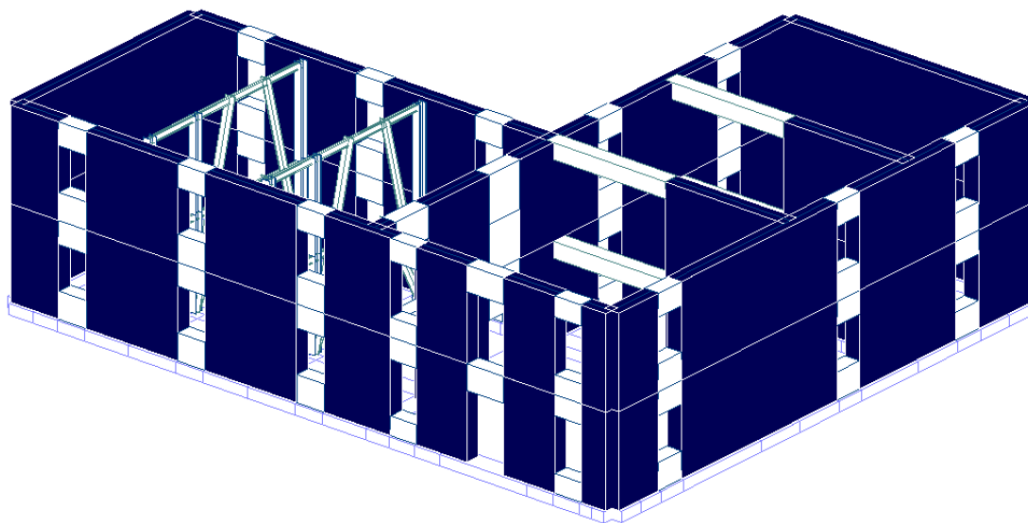


Figura 59. Esempio di schematizzazione 3D per l'analisi Push-Over di un edificio in muratura [52].

In base alle sollecitazioni ottenute si procede con la verifica a taglio e pressoflessione nel piano dei singoli maschi murari, mentre per quanto riguarda la verifica dei meccanismi fuori piano, al punto 7.8.1.5.2, la normativa afferma che *“Le verifiche fuori piano possono essere effettuate separatamente, e possono essere adottate le forze equivalenti indicate al § 7.2.3 per gli elementi non strutturali, assumendo  $q_a = 3$ . Più precisamente l'azione sismica ortogonale alla parete può essere rappresentata da una forza orizzontale distribuita, pari a  $S_{ay1}/q_a$  volte il peso della parete nonché da forze orizzontali concentrate pari a  $S_{ay1}/q_a$  volte il peso trasmesso dagli orizzon-*

tamenti che si appoggiano sulla parete, qualora queste forze non siano efficacemente trasmesse a muri trasversali disposti parallelamente alla direzione del sisma.”

E' doveroso precisare che in tale risoluzione appare scorretto permettere la presenza di forze orizzontali concentrate dovute al peso di orizzontamenti non efficacemente trasmessi alle pareti trasversali, perché se queste fossero presenti, non sarebbe realistico supporre che la struttura abbia un chiaro comportamento d'insieme e pertanto non sarebbe corretto applicare un'analisi globale e nemmeno la verifica semplificata in questione, ma sarebbe più giusto eseguire un'analisi dei meccanismi locali di collasso. Un esempio di ciò è fornito dalla Figura 55 dove l'insufficiente vincolo bidirezionale tra il solaio e la parete ha provocato un meccanismo di ribaltamento locale per flessione verticale.

Pertanto si assume la presenza di adeguati vincoli bilateri da dimensionare a posteriori e, in base a quanto espresso al punto 7.2.3 dove vengono descritti i criteri di progettazione di elementi strutturali secondari e non strutturali, è possibile eseguire la verifica dei meccanismi fuori piano secondo lo schema riportato nella figura sottostante.

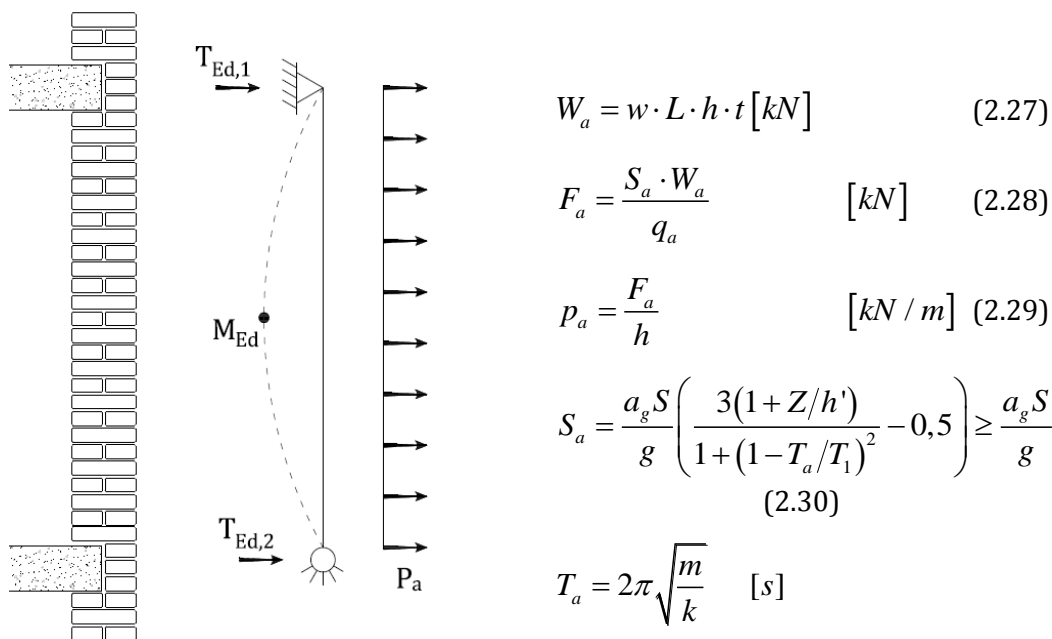


Figura 60. Schema di verifica

Dove:

- $W_a$  è il peso dell'elemento;
- $w$  è il peso specifico dell'elemento;
- $L$  è la lunghezza della parete;



- $h$  è l'altezza della parete;  
 $F_a$  è la forza sismica orizzontale agente al centro di massa dell'elemento non strutturale nella direzione più sfavorevole;  
 $S_a$  è l'accelerazione massima, adimensionalizzata rispetto a quella di gravità, che l'elemento strutturale subisce durante il sisma e corrisponde allo stato limite in esame (v. § 3.2.1);  
 $q_a$  è il fattore di struttura dell'elemento da porre uguale a 3;  
 $a_g$  è l'accelerazione orizzontale massima del sito;  
 $g$  è l'accelerazione di gravità;  
 $S$  è il coefficiente che tiene conto della categoria di sottosuolo e delle condizioni topografiche secondo quanto riportato nel § 3.2.3.2.1 delle NTC;  
 $T_a$  è il periodo fondamentale di vibrazione dell'elemento non strutturale (strutturale secondario) che può essere posto pari a 0 se il pannello rispetta i limiti geometrici imposti dalla tabella 7.8 II delle NTC;  
 $T_1$  è il periodo fondamentale di vibrazione della costruzione nella direzione considerata (da determinare anche con formule semplificate);  
 $Z$  è la quota del baricentro dell'elemento non strutturale misurata a partire dal piano di fondazione (v. § 3.2.2);  
 $h'$  è l'altezza della costruzione misurata a partire dal piano di fondazione.

Successivamente è possibile calcolare il momento massimo agente come:

$$M_{Ed} = \frac{p_a h^2}{8} \quad [kNm]$$

e confrontarlo con il momento resistente calcolato in base al punto 7.8.2.2.3 delle NTC 2008 secondo l'equazione (2.21) già presentata al punto 2.1.3:

$$M_{Rd} = Lt^2 \frac{\sigma_{Ed}}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{0,85 f_{w,ck}} \right) \geq M_{Ed} \quad [kNm]$$

La reazione vincolare  $T_{Ed,1}$ , riportata nello schema di Figura 60 e determinata in base all'equazione (2.31),

$$T_{Ed,1} = \frac{p_a h}{2} \quad [kN] \quad (2.31)$$

corrisponde alla sollecitazione a cui il vincolo bilatero dovrà essere in grado di resistere. Inoltre, se presenti, bisogna considerare il contributo determinato dall'azione inerziale di pannelli superiori o inferiori.

È bene tenere presente che l'effetto di ritegno esercitato dai capichave sulla muratura diminuisce all'aumentare della distanza tra il primo e il punto della muratura in cui l'azione di ritegno viene misurata. In questo senso lo schema di verifica bidimensionale ha dei limiti, in quanto non contempla un parametro che rappresenti

il passo tra i tiranti nelle equazioni di verifica. Si corre dunque il rischio di riuscire sì a dimensionare un capochiave per l'effettiva entità della sollecitazione, ma di non prevenire però il possibile collasso della muratura a causa dell'eccessiva distanza tra le chiavarde. Di quanto affermato viene fornito un esempio con la figura sottostante. I capichiave 1 e 2 possono infatti essere dimensionati in base al carico a cui sono soggetti, poiché basterà garantire che essi non collassino per una crisi dell'acciaio o per il punzonamento della muratura (cfr. capitolo 3), tuttavia l'aver scongiurato la crisi per punzonamento non consente di ammettere che la porzione di muratura compresa tra i due capichiave sia efficacemente vincolata al solaio (non esiste infatti alcuna prova di laboratorio o teorica). Pertanto lo schema statico "a" riportato in Figura 61 non è in grado di interpretare adeguatamente la reale situazione tensionale presente nella sezione AA', ma sarebbe più corretto adottare lo schema "b". L'aumento della lunghezza di libera inflessione dello schema porta ad un aumento del momento flettente e dunque a una possibile crisi del pannello per flessione verticale descritta nella parte destra di Figura 61 (esempio in Figura 55).

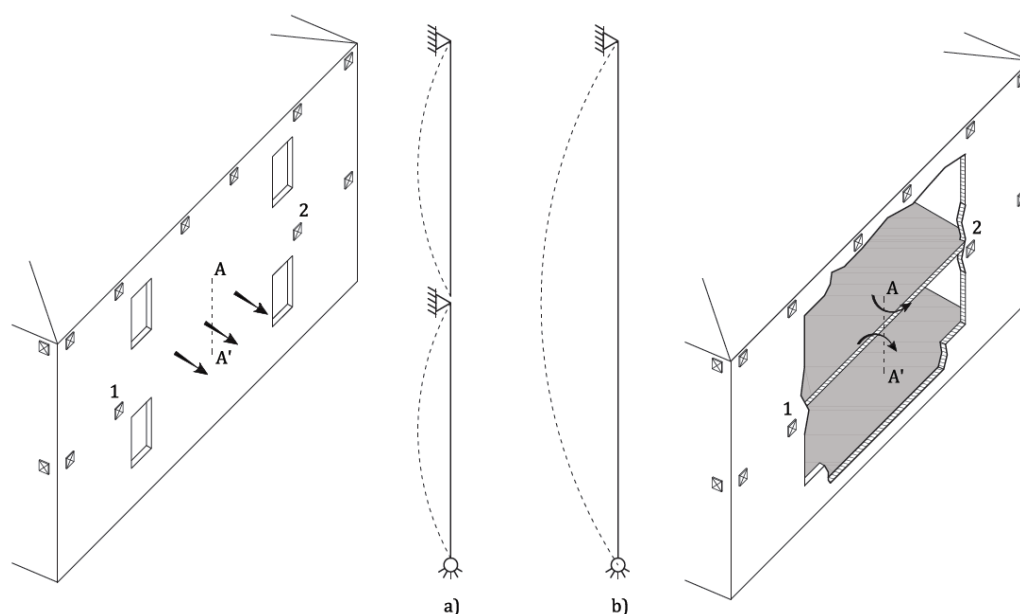


Figura 61. Collasso per eccessiva distanza dei tiranti.

Una teoria con cui dimensionare il passo dei tiranti si basa sulla ragionevole ipotesi che una forza concentrata e applicata a un ammasso murario si distribuisca al suo interno secondo un'inclinazione di  $45^\circ$  lungo l'orizzontale (vedi punto 3.2.4.3). In base a tale ipotesi è possibile disporre delle barre inghisate nella muratura (secondo lo schema di Figura 64) in modo che il passo con cui sono posizionate permetta di assoggettare tutta la sezione di muratura in esame all'azione di ritegno esercitata. In tal caso il passo sarebbe dunque pari a due volte la proiezione orizzontale della lunghezza di inghisaggio delle barre all'interno della muratura.

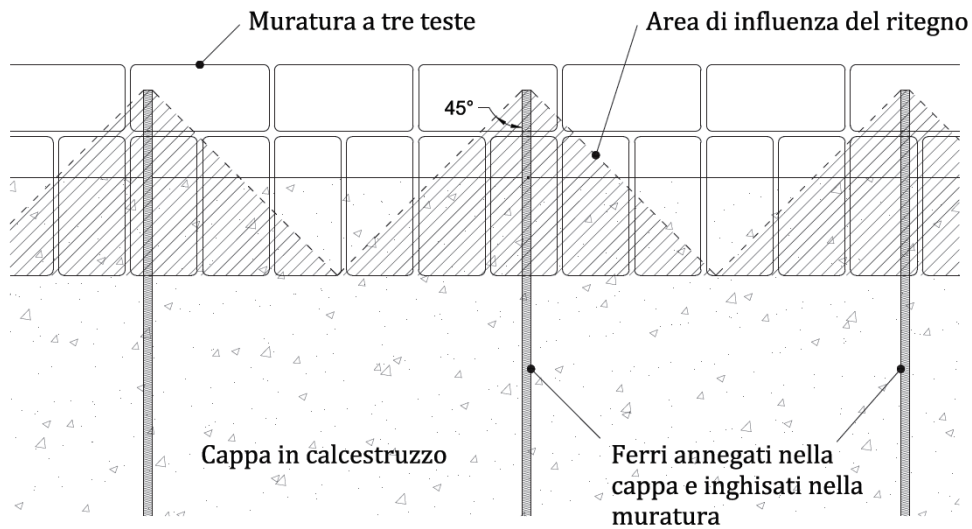


Figura 62. Schema per determinare il passo dei tiranti.

Tale soluzione risulta, a giudizio dell'autore, fortemente a favore di sicurezza, in quanto, l'inclinazione di  $45^\circ$  sull'orizzontale rappresenta l'ipotetica linea di frattura dovuta al punzonamento della muratura (cfr. capitolo 3.2.4.3). Se tale crisi risultasse scongiurata, l'area di influenza dell'azione di ritegno crescerebbe di una quantità tuttavia non definibile a causa dell'assenza di una teoria a riguardo o di specifiche prove di laboratorio.

Un procedimento meno restrittivo per definire il passo dei tiranti parte dall'analisi di una sezione orizzontale di una porzione di struttura muraria. In riferimento allo schema di Figura 63 è possibile osservare che se il pannello 2 è confinato su entrambi i lati del suo piano medio da pareti complanari sufficientemente rigide o di tiranti paralleli al suo piano medio, al suo interno può instaurarsi un meccanismo resistente "ad arco", in quanto la spinta laterale indotta da tale meccanismo può essere assorbita.

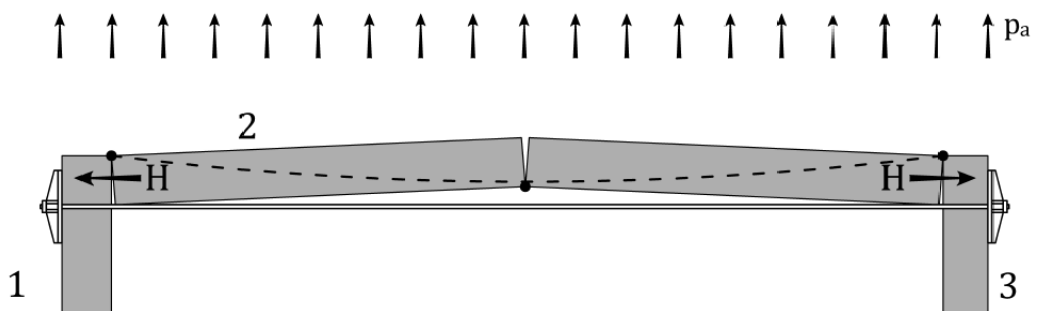
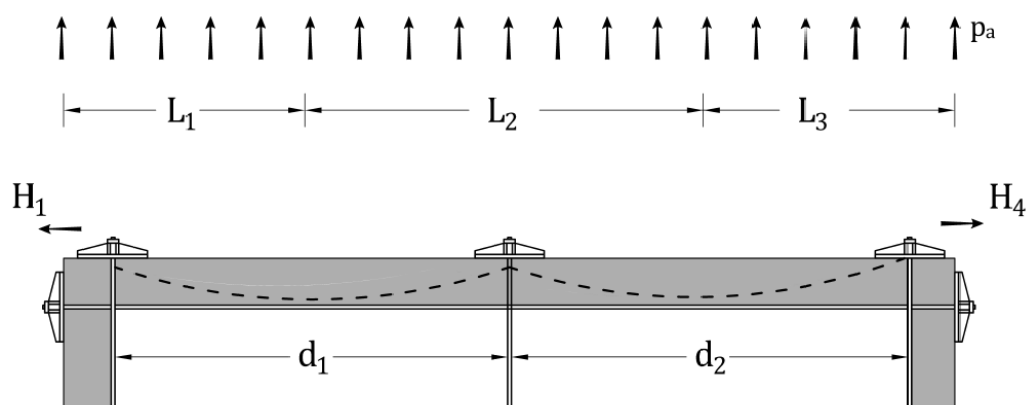


Figura 63. Possibile meccanismo resistente dovuto a un effetto arco.

Sotto tale ipotesi e con riferimento allo schema di Figura 64 è allora possibile progettare il passo dei tiranti verificando che la porzione di muratura compresa tra due tiranti non collassi per instabilità o superamento della resistenza a compressione. L'analisi va effettuata studiando l'elemento come una piattabanda e verificando sia che la funicolare dei carichi resti contenuta nel profilo della parete sia che le tensioni assiali indotte dal meccanismo resistente non superino la resistenza a compressione del materiale. Inoltre è necessario dimensionare il tirante parallelo al piano medio del pannello (se quest'ultimo è presente) affinché sia in grado di contenere la spinta  $H$  esercitata dal meccanismo.



**Figura 64.** Schema per il dimensionamento del passo dei tiranti.

Infine è possibile dimensionare i tiranti ortogonali alla parete secondo lo schema di Figura 60, affinché siano in grado di garantire il necessario vincolo bilatero per la lunghezza  $L$  di muratura di rispettiva pertinenza.

### 2.2.2.1. Esempio

Viene riportato ora un esempio che chiarisca maggiormente la teoria espressa al punto precedente per quanto riguarda il calcolo del passo tra le chiavarde mediante uno schema resistente ad arco. Si immagini quindi di consolidare la parete di un edificio in muratura, mediante l'apposizione di tiranti che garantiscano il necessario vincolo bilatero tra la parete e il solaio in laterocemento, secondo il passo ipotizzato in Figura 65.

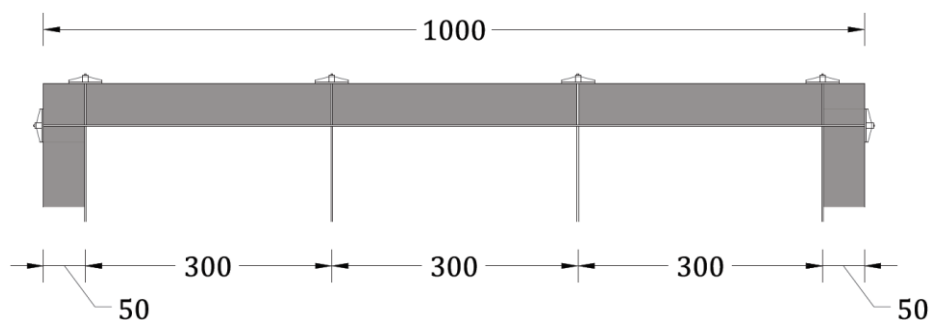


Figura 65. Disposizione dei tiranti.

Dati del problema:

Materiale:	Mattoni pieni e malta di calce aerea
Res. a compressione	$f_{w,ck} = 2,4 \text{ N/mm}^2$
Lunghezza	$L_p = 4 \text{ m}$
Altezza interpiano	$H = 4 \text{ m}$
Altezza edificio	$H' = 18 \text{ m}$
Altezza baricentro della parete in esame	$Z = 14 \text{ m}$
Spessore	$t = 0,5 \text{ m}$
Peso specifico	$\gamma_p = 18 \text{ kN/m}^3$

Input sismico:

Località:	L'Aquila
Accelerazione di picco	$a_g = 0,2607$
Amplificazione spettrale	$F_0 = 2,364$
Periodo di inizio del tratto a velocità costante	$T_c^* = 0,347$
Categoria di sottosuolo	D
Categoria topografica	T3
Vita nominale	50 anni
Classe d'uso	II
Fattore di struttura	$q_a = 3,00$
Livello di conoscenza	LC2 FC = 1,20

Si procede ora con la verifica del passo ipotizzato secondo lo schema resistente ad arco mediante il software Arco di Piero Gelfi [53]. Al suo interno viene schematiz-

zata la porzione di muratura posta tra due chiavarde come una piattabanda priva di rinfiango, freccia quasi nulla (posta pari a 0,01 m per esigenze del software), peso specifico nullo e sottoposta solo al carico variabile distribuito causato dalla forza inerziale indotta dal peso della parete.

Nel calcolo si considera una profondità (d) dell'arco pari a un metro e si amplificherà l'azione presente mediante un fattore correttivo (H/d) che tenga conto di come le forze di massa siano distribuite sull'altezza dell'intero piano e non solo sulla profondità dell'arco.

$$p = w \cdot t \cdot \frac{S_a}{q_a} \cdot \frac{H}{d} \quad [kN/m^2] \quad (2.32)$$

Il valore di  $S_a$  si ricava in base all'equazione (2.30):

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{a_g S}{g} \left( \frac{3(1+Z/H')}{1+(1-T_a/T_1)^2} - 0,5 \right) = \\ &= 0,2607 \cdot 2,68 \left( \frac{3(1+14/18)}{1+(1-0/0,43)^2} - 0,5 \right) = 1,52 \end{aligned}$$

e porta a trovare un valore dell'azione sollecitante pari a:

$$p = 18 \cdot 0,5 \cdot \frac{1,52}{3} \cdot \frac{4}{1} = 18,24 \quad [kN/m^2]$$

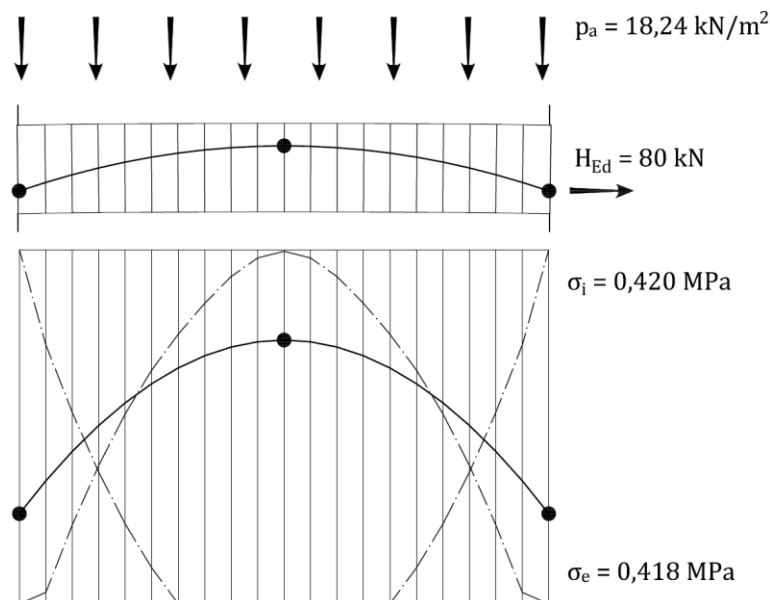


Figura 66. Risultati restituiti dal software.

Siccome la risultante dei carichi è contenuta all'interno del profilo della parete non resta che effettuare una verifica di resistenza in base alla massima sollecitazione di compressione presente all'estradosso o all'intradosso ( $\sigma_{arco}$ ). In questo caso è necessario tenere presente che oltre a questa tensione è presente la compressione assiale dovuta ai carichi verticali ( $\sigma_{Ed}$ ). Per effettuare la verifica sarà possibile adottare un criterio di resistenza lineare ed utilizzare la seguente formula [33]:

$$\frac{\sigma_{arco}}{f_{w,ck}} + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{w,ck}} \leq 1$$

Infine sarà necessario dimensionare il tirante parallelo al piano medio del pannello in modo che esso sia in grado di contrastare la spinta  $H_{Ed}$  (fornita come dato di output dal software) e garantire così il funzionamento del meccanismo resistente ad arco. Per fare ciò sarà necessario esplicitare in funzione dell'area, l'equazione (3.132) e una volta determinata l'area minima necessaria, si sceglierà il diametro adatto in base alle dimensioni presenti in commercio.

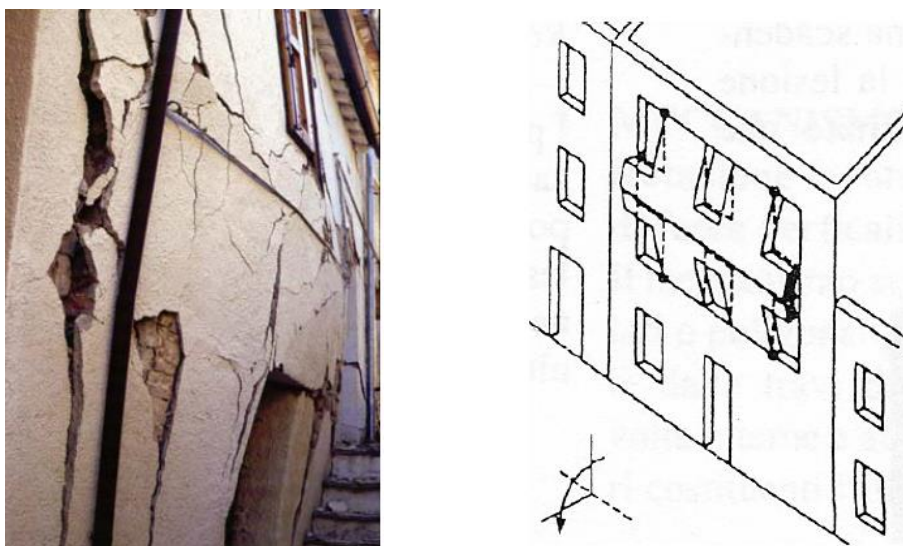
È importante notare che all'allungamento della barra corrisponde una caduta di spinta nell'arco che comporta un decremento dell'efficienza di quest'ultimo. Caduta di spinta che l'analisi limite ora svolta trascura. È dunque necessario garantire una contenuta deformazione del tirante, ma ad oggi non esiste alcun valore limite da poter considerare. È chiaro che questo problema, ma in generale tutta la questione del passo delle chiavarde, necessita maggiori studi e approfondimenti.

### 2.2.3. Modalità di analisi in caso di solai deformabili

#### 2.2.3.1. Introduzione

*Quando la costruzione non manifesta un chiaro comportamento d'insieme, ma piuttosto tende a reagire al sisma come un insieme di sottosistemi (meccanismi locali), la verifica su un modello globale non ha rispondenza rispetto al suo effettivo comportamento sismico. Particolarmente frequente è il caso delle grandi chiese o di edifici estesi e di geometria complessa non dotati di solai rigidi e resistenti nel piano, né di efficaci e diffusi sistemi di catene o tiranti. In tali casi la verifica globale può essere effettuata attraverso un insieme esaustivo di verifiche locali, purché la totalità delle forze sismiche sia coerentemente ripartita sui meccanismi locali considerati e si tenga correttamente conto delle forze scambiate tra i sottosistemi strutturali considerati [54].*

Quando si trattano costruzioni in muratura *non risulta quasi mai realistico studiare l'intero edificio (specie se antico) come una scatola pluriconnessa [55], ovvero non conviene estendere la nozione di materiale elastico, omogeneo e isotropo nell'analisi globale di una struttura in muratura come per un telaio in calcestruzzo o in acciaio. L'analisi globale prevista dalle norme va dunque intesa nel senso che la globalità dell'edificio deve essere passata in rassegna per individuare i possibili meccanismi di dissesto che l'azione sismica può provocare in ogni sua parte. Ciò è possibile attraverso la suddivisione della compagine muraria in porzioni elementari coinvolte nei singoli meccanismi resistenti [22].*



**Figura 67.** Esempio di meccanismo di ribaltamento dovuto a flessione verticale [50].

La verifica strutturale di questo tipo di edifici passa dunque per l'analisi di quelle modalità di collasso che avranno più probabilità di innescarsi a causa della scarsa



duttilità e della bassa resistenza offerte dal meccanismo resistente. Per quanto visto nei punti precedenti è chiaro che esistono numerose modalità di rottura di una porzione di muratura, le quali dipendono a loro volta da diversi fattori geometrici e materici che acquisiscono una maggior incidenza, quando risultano contemporaneamente localizzati. Tra tutti, risaltano certo per debolezza e modalità disastrose di crisi, i meccanismi che si innescano per il ribaltamento di un pannello o di una sua parte, a causa di forze che agiscono ortogonalmente al suo piano medio.

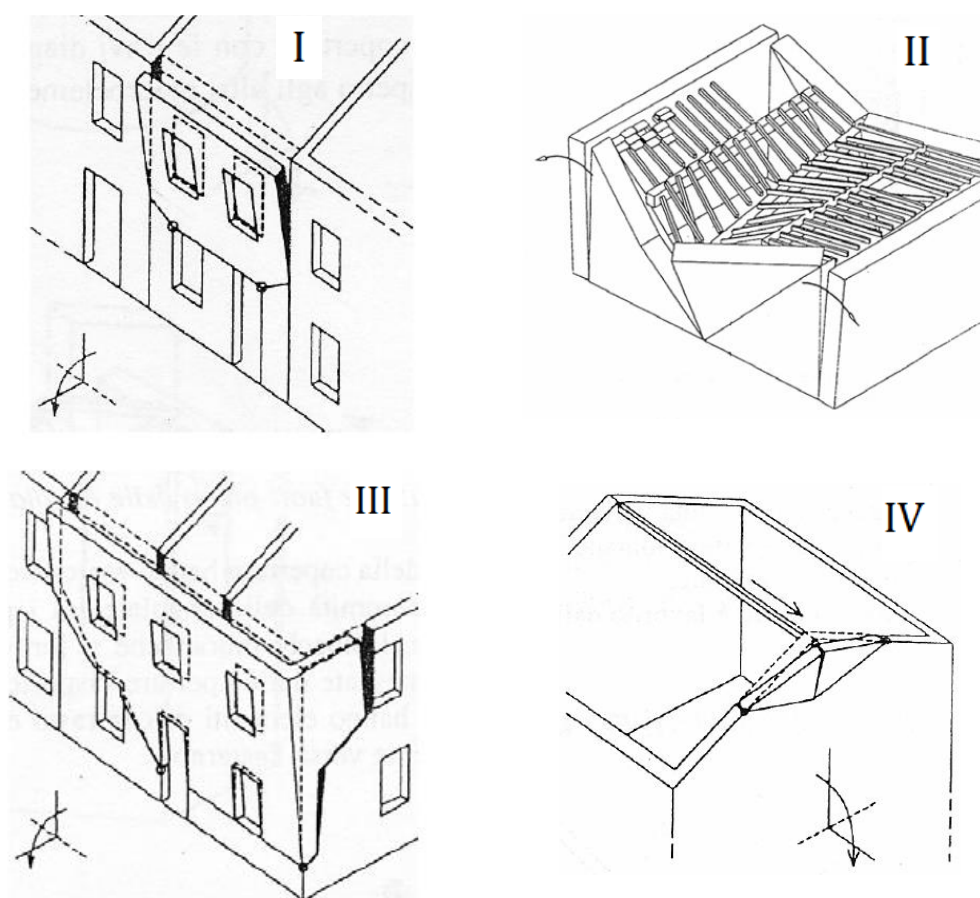
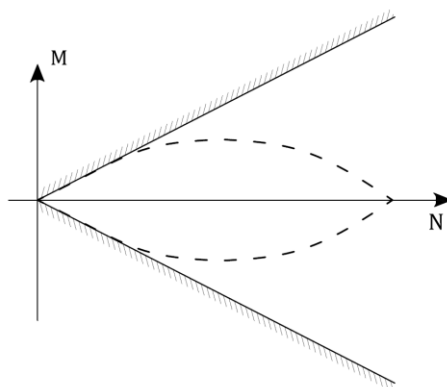


Figura 68. Esempio di meccanismo di ribaltamento [50].

Al punto C8A.4 della circolare applicativa delle NTC 2008 viene proposto un procedimento per valutare l'azione orizzontale che attiva i diversi meccanismi di ribaltamento. Esso è svolto attraverso un'analisi limite dell'equilibrio secondo un approccio cinematico, ovvero viene studiato l'avvio di diverse catene cinematiche, caratterizzate dal distacco di solidi murari assimilabili a corpi rigidi e dalla formazione di cerniere plastiche. Le ipotesi alla base dell'analisi sono le stesse formulate da J. Heyman per l'analisi limite degli archi in muratura [56], ovvero:

- la muratura ha resistenza nulla a trazione,
- la muratura ha resistenza infinita a compressione,
- assenza di scorrimento tra i giunti.

La prima ipotesi equivale ad ammettere che non è possibile trasferire sforzi di trazione in un ammasso murario e, vista la bassa resistenza del materiale, l'incertezza nel misurarla e la possibilità che sia presente uno stato fessurativo conseguente alla vita pregressa risulta un'opzione realistica. La seconda equivale ad ammettere che le tensioni di compressione siano così basse da annullare il rischio di schiacciamento del materiale. Questa ipotesi non è a favore di sicurezza, ma come dimostrato da Heyman comporta piccoli errori se la crisi avviene per formazione di un meccanismo cinematico, mentre se è possibile garantire la stabilità del pannello si può a posteriori verificare che sotto il carico di progetto lo stato di sollecitazione della muratura sia comunque compreso entro limiti accettabili.



**Figura 69.** Regione ammissibile di equilibrio [56].

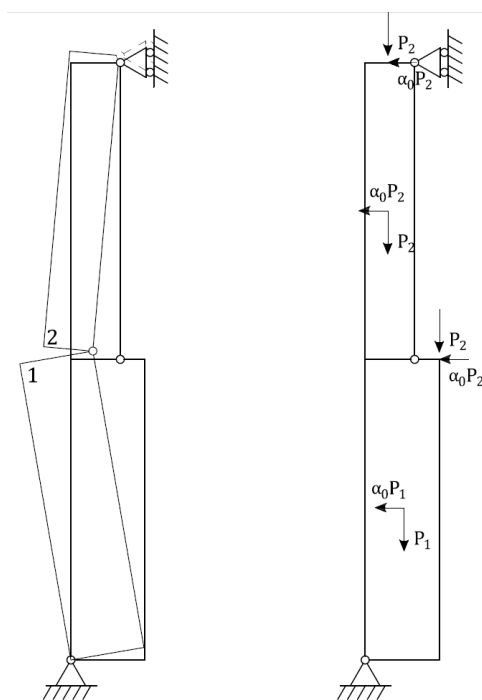
Il terzo assunto consiste invece nell'ammettere un valore dell'attrito sufficientemente elevato, tale da impedire lo scorrimento di una porzione muraria sull'altra. Se dunque sono impediti le rotture per superamento della resistenza a taglio ed è garantita la monoliticità della parete contro le disgregazioni puntuali indotte dall'azione delle chiavarde, sarà possibile studiare il collasso dei pannelli, assimilando questi ultimi a dei corpi rigidi (elastici, omogenei ed isotropi) che ruotano attorno a delle cerniere plastiche secondo diversi meccanismi, quali:

- ribaltamento semplice, Figura 68-I ;
- flessione verticale, Figura 67;
- flessione orizzontale, Figura 68-II;
- ribaltamento composto, Figura 68-III;
- ribaltamento del cantonale, Figura 67-IV.

Sempre all'appendice C8A.4 della circolare alle NTC 2008 vengono proposti due diversi procedimenti per eseguire la verifica di questi meccanismi; il primo è basa-

to su un'analisi di tipo cinematico lineare, mentre il secondo su una del tipo statico non lineare. Tale nomenclatura può tuttavia trarre in inganno, in quanto le analisi proposte non presentano tutte le caratteristiche che si potrebbero associare al loro nome secondo le definizioni fornite dalle NTC al punto 7.3.

In entrambi i casi infatti si utilizza un modello non lineare a plasticità concentrata, in quanto i blocchi che costituiscono la struttura rimangono in campo elastico, mentre laddove si prevede la formazione di una cerniera plastica, vengono introdotti elementi puntuali a cerniera con comportamento inelastico. Sempre secondo lo schema dell'analisi statica non lineare, al modello vengono poi applicati i carichi gravitazionali e, a seconda del meccanismo, una particolare distribuzione di forze statiche orizzontali incrementali secondo il moltiplicatore  $\alpha$  e proporzionali ai carichi gravitazionali.



**Figura 70.** Modello per l'analisi dei meccanismi locali.

A ciò segue l'analisi limite dell'equilibrio, secondo l'approccio cinematico, che si basa sulla scelta del meccanismo di collasso (sulla base dello stato fessurativo presente) e la valutazione dell'azione orizzontale che attiva tale cinematisimo [57]. Mediante il Principio dei Lavori Virtuali o ponendo l'equilibrio alla rotazione può essere quindi determinato il particolare moltiplicatore dei carichi orizzontali  $\alpha_0$  che porta all'attivazione del meccanismo di collasso.

Arrivati a questo punto i due procedimenti si differenziano in quanto il primo (cinematica lineare) valuta la sicurezza della struttura accertando che l'accelerazione

spettrale di attivazione del meccanismo  $a_0^*$ , che è funzione di  $\alpha_0$  valutato per una configurazione indeformata del sistema, risulti superiore all'accelerazione di picco della domanda sismica ( $a_s$ ). Nel secondo (statica non lineare) invece, viene effettuato il confronto tra la capacità di spostamento ultimo  $d_u^*$  del meccanismo locale e la domanda di spostamento richiesta dal sisma  $\Delta_d(T_S)$ . Per procedere in tal senso sarà necessario valutare la curva di capacità del sistema reale, ovvero l'andamento del moltiplicatore di collasso  $\alpha$  in base alle diverse configurazioni deformate. Per determinare il suo valore si dovrà applicare al precedente modello il Principio dei lavori virtuali o l'equilibrio alla rotazione, solo che questa volta non verrà valutata la sola condizione indeformata (come nel caso precedente), ma anche tutte le situazioni deformate fino ad arrivare all'annullamento del moltiplicatore.

Anche se i due procedimenti differiscono per le diverse configurazioni analizzate, in entrambi i casi i parametri di accelerazione e spostamento necessari alla verifica sono determinati associando alla struttura reale un sistema strutturale equivalente ad un grado di libertà (oscillatore).

L'analisi cinematica lineare risulta tuttavia maggiormente semplificata, in quanto fa uso dell'oscillatore equivalente solo per il calcolo dell'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo ( $a_0^*$ ). Tale quantità viene poi confrontata con l'accelerazione di picco della domanda sismica ( $a_s$ ) valutata però non in relazione alle caratteristiche dell'oscillatore equivalente, ma in base a quelle della struttura reale. Inoltre tale analisi è lineare, in quanto il calcolo di quest'ultima quantità avviene mediante l'utilizzo di spettri elastici di progetto, scalati del fattore di struttura  $q$ . In pratica si assume che l'edificio risponda al sisma rimanendo in campo elastico lineare, ma si permette di ridurre l'accelerazione che si otterrebbe in campo elastico mediante il coefficiente  $q$ , il quale *tiene in conto in modo semplificato della capacità dissipativa inelastica della struttura, della sua sovrarresistenza e dell'incremento del suo periodo proprio a seguito della plasticizzazione* [58].

Il secondo procedimento non si ferma allo studio dell'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo, ma in relazione alla struttura reale, valuta, grazie all'oscillatore equivalente, anche la capacità di spostamento spettrale del sistema e confronta quest'ultima con lo spettro elastico di spostamento riferito al sistema equivalente. In questo caso il comportamento dissipativo della struttura non viene tenuto in conto mediante l'utilizzo di un fattore di struttura come nel caso precedente, ma bensì mediante l'utilizzo del comportamento non lineare del materiale associato al sistema equivalente.

Per effettuare delle considerazioni sui due procedimenti è tuttavia necessario addentrarsi con maggiore perizia al loro interno, studiandone i passaggi e la loro applicazione mediante un caso pratico elementare.

### 2.2.3.2. Analisi cinematica lineare

In primo luogo è necessario schematizzare la struttura che partecipa al cinematisimo secondo quanto riportato nella circolare. Tale procedimento consiste nell' applicare ai blocchi rigidi le seguenti forze (Figura 71): "i pesi propri dei blocchi ( $P_i$ ), applicati nel loro baricentro ( $G$ ); i carichi verticali portati dagli stessi ( $P_k$ , pesi propri e sovraccarichi dei solai e della copertura, altri elementi murari non considerati nel modello strutturale); un sistema di forze orizzontali proporzionali ai carichi verticali portati ( $\alpha_0 P_k$ ), se queste non sono efficacemente trasmesse ad altre parti dell'edificio; eventuali forze esterne stabilizzanti ( $F_{h,s}$ ) o meno ( $F_{h,ins}$ )" [57].

Una volta che la struttura è stata schematizzata è possibile determinare il moltiplicatore dei carichi che porta all'attivazione del meccanismo ( $\alpha_0$ ) mediante l'equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera cinematica (C) oppure attraverso il principio dei lavori virtuali. Entrambi i metodi portano allo stesso risultato [59] e pertanto si è scelto di riportare solo il primo, in quanto la sua maggior facilità di esecuzione permette di ottenere una maggior chiarezza per il lettore. Ponendo l'equilibrio alla rotazione in C si determina dunque:

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^n P_i h_i + \alpha_0 \sum_{k=1}^n P_k h_k + \sum_{h=1}^m F_{h,ins} h_{h,ins} +$$

$$- \sum_{i=1}^n P_i d_i - \sum_{k=1}^n P_k d_k - \sum_{h=1}^o F_{h,s} h_{h,s} - \sum_{h=1}^o F_{h,s} d_{h,s} = 0 \quad (2.33)$$

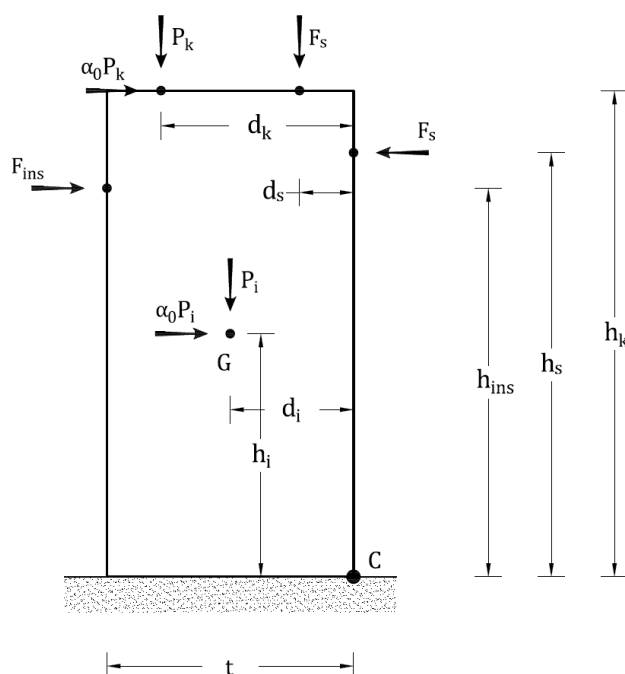


Figura 71. Schematizzazione della struttura assunta dalla normativa.

Dove  $n$  è il numero delle forze peso,  $m$  quello delle forze instabilizzanti e  $o$  quello delle forze stabilizzanti. È poi possibile riscrivere la precedente equazione in funzione del moltiplicatore  $\alpha_0$  e ottenere:

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=1}^n P_i h_i + \sum_{k=1}^n P_k h_k - \sum_{h=1}^m F_{h,ins} h_{h,ins} + \sum_{h=1}^o F_{h,s} h_{h,s} + \sum_{h=1}^o F_{h,s} d_{h,s}}{\sum_{i=1}^n P_i d_i + \sum_{k=1}^n P_k d_k} \quad (2.34)$$

Come è possibile vedere dalla forma dell'equazione (2.34), le azioni stabilizzanti offerte dai tiranti permettono di incrementare il moltiplicatore  $\alpha_0$  e pertanto è possibile disporre tali presidi per superare le verifiche di sicurezza, qualora queste non risultino soddisfatte.

Definito il moltiplicatore, non resta che effettuare la verifica di sicurezza nei confronti dello stato limite di danno e di salvaguardia della vita. Queste si ritengono soddisfatte qualora l'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo  $a_0^*$ , che è funzione di  $\alpha_0$ , risulti superiore all'accelerazione di picco della domanda sismica ( $a_s$ ).

$$a_0^* = \frac{\alpha_0 \cdot g}{e^* \cdot FC} \geq a_s \quad [mm / s^2] \quad (2.35)$$

Dove  $g$  è l'accelerazione di gravità (pari a 9,806 m/s<sup>2</sup>),  $e^*$  è la massa partecipante ed  $FC$  è il fattore di confidenza. Mentre quest'ultimo è scelto in base ai criteri definiti al punto C8A.1.A.4 della circolare, la frazione di massa partecipante  $e^*$  viene definita al punto C8A.4.2.2 come:

$$e^* = \frac{gM^*}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (2.36)$$

Dove  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $P_i$  la  $i$ -esima forza peso che genera, per effetto dell'azione sismica, una forza orizzontale sugli elementi della catena cinematica ed  $M^*$  è la massa partecipante al cinematismo. Quest'ultima può essere valutata considerando gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione dei diversi pesi associati al cinematismo, come una forma modale di vibrazione:

$$M^* = \frac{\left( \sum_{i=1}^{n+m} P_i \delta_{x,i} \right)^2}{g \sum_{i=1}^{n+m} P_i \delta_{x,i}^2} \quad [Nm] \quad (2.37)$$

Dove:

- $n+m$  è il numero delle forze peso  $P_i$  applicate, le cui masse, per effetto dell'azione sismica, generano forze orizzontali sugli elementi della catena cinematica;
- $\delta_{x,i}$  è lo spostamento virtuale orizzontale del punto di applicazione dell' $i$ -esimo peso  $P_i$ .

M. Vinci in [59] propone le seguenti relazioni per valutare lo spostamento  $\delta_{x,i}$  in funzione della variazione di angolo virtuale ( $\delta_\theta$ ):

$$\begin{aligned}\delta_x &= y \cdot \delta_\theta \\ \delta_y &= x \cdot \delta_\theta\end{aligned}$$

*“dove si indica con  $x$  la distanza in orizzontale del punto di applicazione della generica forza e la cerniera  $C$ , e con  $y$  la distanza in verticale tra la generica forza e la suddetta cerniera. Da notare che se sostituita all'interno dell'equazione C8A.4.3, l'angolo virtuale  $\delta_\theta$  si elimina” [59].*

Viene ora riportato il punto CA8.4 della circolare applicativa delle NTC 2008 necessario al calcolo dell'accelerazione di picco della domanda sismica secondo i diversi Stati limite.

### **Stato limite di danno**

La verifica di sicurezza nei confronti dello Stato limite di danno è soddisfatta qualora l'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo sia superiore all'accelerazione di picco della domanda sismica.

Nel caso in cui la verifica riguardi un elemento isolato o una porzione della costruzione comunque sostanzialmente appoggiata a terra, l'accelerazione di attivazione del meccanismo viene confrontata con l'accelerazione al suolo, ovvero lo spettro elastico definito nel § 3.2.6, valutato per  $T=0$ :

$$a_0^* \geq a_g [P_{VR}] \cdot S \quad (2.38)$$

dove:

- $a_g$  è funzione della probabilità di superamento dello stato limite scelto e della vita di riferimento come definiti al § 3.2 delle NTC;
- $S$  è definito al § 3.2.3.2.1 delle NTC.

Se invece il meccanismo locale interessa una porzione della costruzione posta ad una certa quota, si deve tener conto del fatto che l'accelerazione assoluta alla quota della porzione di edificio interessata dal cinematismo è in genere amplificata rispetto a quella al suolo. In aggiunta alla C8A.4.7, si verifica anche che:

$$a_0^* \geq S_e(T_1) \cdot \psi(Z) \cdot \gamma \quad (2.39)$$

dove:

- $S_e(T_1)$  è lo spettro elastico definito nel § 3.2.3.2.1 delle NTC, funzione della probabilità di superamento dello stato limite scelto (in questo caso 63%) e del periodo di riferimento  $V_R$  come definiti al § 3.2. delle NTC, calcolato per il periodo  $T_1$ ;
- $T_1$  è il primo periodo di vibrazione dell'intera struttura nella direzione considerata;
- $\psi(Z)$  è il primo modo di vibrazione nella direzione considerata, normalizzato ad uno in sommità all'edificio; in assenza di valutazioni più accurate può essere assunto  $\psi(Z)=Z/h_T$ , dove  $h_T$  è l'altezza della struttura rispetto alla fondazione;
- $Z$  è l'altezza, rispetto alla fondazione dell'edificio, del baricentro delle linee di vincolo tra i blocchi interessati dal meccanismo ed il resto della struttura;
- $\gamma$  è il corrispondente coefficiente di partecipazione modale (in assenza di valutazioni più accurate può essere assunto  $\gamma=3N/(2N+1)$ , con  $N$  numero di piani dell'edificio).

Nel caso di meccanismi locali, lo Stato limite di danno corrisponde all'insorgere di fessurazioni che non interessano l'intera struttura ma solo una sua parte; pertanto nel caso di edifici esistenti in muratura, anche in considerazione delle giustificate esigenze di conservazione, pur essendo auspicabile il soddisfacimento di questo stato limite, la sua verifica non è richiesta.

### ***Stato limite di salvaguardia della vita***

Nel caso in cui la verifica riguardi un elemento isolato o una porzione della costruzione comunque sostanzialmente appoggiata a terra, la verifica di sicurezza nei confronti dello Stato limite di salvaguardia della vita è soddisfatta se l'accelerazione spettrale  $a_0^*$  che attiva il meccanismo soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$a_0^* \geq \frac{a_g [P_{VR}] \cdot S}{q} \quad (2.40)$$

in cui  $a_g$  è funzione della probabilità di superamento dello stato limite scelto e della vita di riferimento come definiti al § 3.2 delle NTC,  $S$  è definito al § 3.2.3.2.1 delle NTC e  $q$  è il fattore di struttura, che può essere assunto uguale a 2.0.

Se invece il meccanismo locale interessa una porzione della costruzione posta ad una certa quota, si deve tener conto del fatto che l'accelerazione assoluta alla quota della porzione di edificio interessata dal cinematismo è in genere amplificata ri-



spetto a quella al suolo. Una approssimazione accettabile consiste nel verificare, oltre alla C8A.4.9, anche la:

$$a_0^* \geq \frac{S_e[T_1] \cdot \psi[Z] \cdot \gamma}{q} \quad (2.41)$$

dove:  $S_e(T_1)$ ,  $\psi(Z)$  e  $\gamma$  sono definite come al punto precedente, tenendo conto che lo spettro di risposta è riferito alla probabilità di superamento del 10% nel periodo di riferimento  $V_R$ .

Se la verifica non darà esito positivo sarà possibile consolidare la porzione in esame mediante dei tiranti che consentano di innalzare il moltiplicatore dei carichi  $\alpha_0$  e di conseguenza anche l'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo.

### 2.2.3.3. Analisi statica non lineare

Utilizzando il procedimento alternativo si dovrà comunque schematizzare la struttura secondo i criteri esposti al punto precedente e successivamente si procederà a determinare la curva di capacità del sistema reale. Questa non è altro che un grafico in cui l'ordinata rappresenta il moltiplicatore dei carichi, mentre in ascissa si riporta lo spostamento di un punto di controllo presente sulla struttura (generalmente l'estremo superiore del sistema). I punti individuati sul diagramma rappresentano dunque il valore del moltiplicatore dei carichi per cui si attiva il meccanismo di collasso secondo una precisa configurazione deformata del sistema, espressa mediante lo spostamento di un punto di controllo.

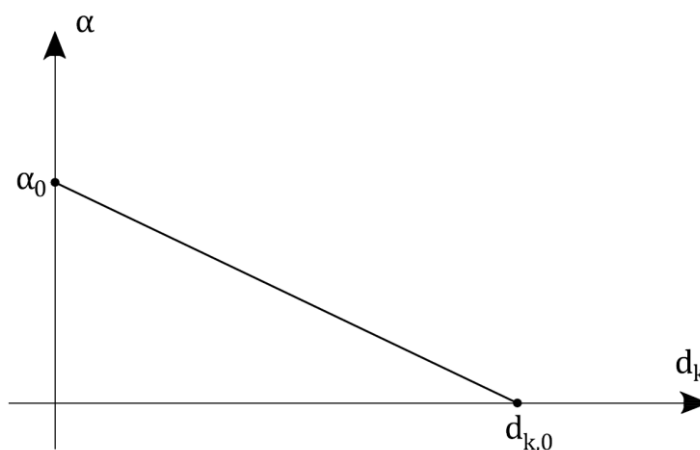


Figura 72. Curva di capacità del sistema.

Il grafico riportato in Figura 72 rappresenta la curva di capacità relativa ad un sistema (non consolidato mediante tiranti) per il quale le forze partecipanti al cinematismo si mantengono costanti fino all'avvio del meccanismo. Essa può essere quindi determinata attraverso il calcolo del moltiplicatore  $\alpha$  (mediante l'equazione

(2.34)) nella configurazione indeformata e in una deformata. L'unione dei due punti trovati restituirà la curva che assume la seguente espressione:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{1 - d_k}{d_{k,0}} \quad (2.42)$$

Se le forze non rimangano costanti, la funzione sarà lineare a tratti e sarà perciò necessario determinare un maggior numero di punti.

Successivamente è necessario passare dal sistema reale a quello spettrale equivalente, effettuando il passaggio dei parametri rappresentati sul precedente grafico ad un secondo diagramma. Su quest'ultimo saranno riportate le accelerazioni spettrali  $a^*$  sull'asse delle ordinate e gli spostamenti spettrali  $d^*$  sull'asse delle ascisse. Le prime verranno determinate mediante l'equazione (2.35), mentre le seconde attraverso la seguente formula:

$$d^* = d_k \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_{x,i}^2}{\delta_{x,k} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_{x,i}} \quad [cm] \quad (2.43)$$

Dove il pedice  $i$  indica l' $i$ -esimo spostamento virtuale associato all' $i$ -esima forza e il pedice  $k$  è associato allo spostamento del punto di controllo prescelto.

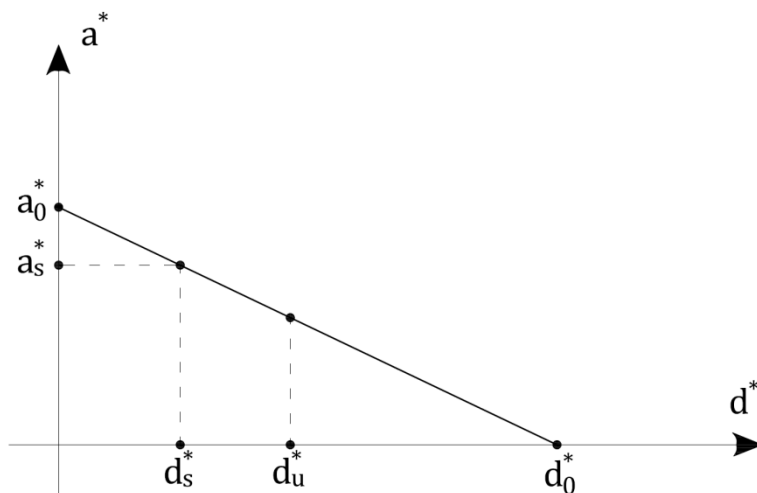


Figura 73. Curva di capacità del sistema equivalente.

Una volta che è nota la curva di capacità del sistema spettrale è possibile procedere alla verifica del meccanismo previa definizione delle seguenti quantità. La prima è la capacità di spostamento relativa allo Stato limite di salvaguardia della vita ( $d_u^*$ ) e corrisponde al minore fra gli spostamenti così definiti:

- a) il 40% dello spostamento per cui si annulla l'accelerazione spettrale  $a^*$ , valutata su una curva in cui si considerino solamente le azioni di cui è verificata la presenza fino al collasso;
- b) lo spostamento corrispondente a situazioni localmente incompatibili con la stabilità degli elementi della costruzione ( $d_c^*$ ) (ad esempio, sfilamento di travi), nei casi in cui questo sia valutabile. [57]

Ovvero:

$$d_u^* = \min[0, 4d_0^*; d_c^*] \quad (2.44)$$

La seconda quantità consiste nello spostamento spettrale ( $d_s^*$ ) relativo al periodo del sistema equivalente ( $T_s$ ) e si valuta come:

$$d_s^* = 0,4d_u^* \quad (2.45)$$

A questo punto è possibile determinare il periodo  $T_s$  del sistema equivalente come:

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{d_s^*}{a_s^*}} \quad [s] \quad (2.46)$$

In base al valore ottenuto è possibile determinare lo spettro di risposta elastico in spostamento delle componenti orizzontali  $S_{De}[T_s]$ , necessario al calcolo della domanda di spostamento  $\Delta_d(T_s)$  richiesta dal sisma. Quest'ultima è così ottenuta:

- nel caso in cui la verifica riguardi un elemento isolato o una porzione della costruzione comunque sostanzialmente appoggiata a terra:

$$\Delta_d[T_s] = S_{De}[T_s] \quad (2.47)$$

Dove  $S_{De}[T_s]$  si ricava dalla corrispondente risposta in accelerazione  $S_e[T_s]$  secondo la seguente equazione:

$$S_{De}[T_s] = S_e[T_s] \cdot \left(\frac{T_s}{2\pi}\right)^2 \quad (2.48)$$

- se invece il meccanismo locale interessa una porzione della costruzione posta ad una certa quota, deve essere considerato lo spettro di risposta in spostamento del moto alla quota della porzione di edificio interessata dal cinematismo. Una approssimazione accettabile consiste nel verificare, oltre alla C8A.4.11, anche la:

$$\Delta_d [T_s] = S_{De} [T_1] \cdot \psi [Z] \cdot \gamma \cdot \frac{\left(\frac{T_s}{T_1}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{T_s}{T_1}\right)^2 + 0,02 \frac{T_s}{T_1}}} \quad (2.49)$$

La verifica allo stato limite di danno può essere tralasciata, mentre quella allo stato limite di salvaguardia della vita (comprensiva anche di quella allo stato limite di collasso, vedi punto C8.7.1.1 della Circolare [57] ) si esegue confrontando la capacità di spostamento relativa all'SLV ( $d_u^*$ ) con la domanda di spostamento  $\Delta_d(T_s)$  richiesta dal sisma.

$$d_u^* \geq \Delta_d (T_s) \quad (2.50)$$

Se l'equazione non risulta verificata sarà possibile disporre dei tiranti.

Siccome si ricerca un comportamento duttile si assume che la rottura avvenga per la plasticizzazione della barra. Pertanto è possibile che la capacità di spostamento all'SLV non corrisponda al 40% dello spostamento per cui si annulla l' accelerazione spettrale, ma bensì alla massima plasticizzazione della barra ( $\Delta l_p$ ). Questa è pari al 10% della lunghezza della barra ( $l_R$ ), tale valore è utilizzato per la deformazione massima dell'acciaio nel calcolo agli stati limite di sezioni in calcestruzzo armato [59].

$$\Delta l_p = 0,01 \cdot l_R \quad (2.51)$$

La curva di capacità reale non presenterà più il precedente andamento lineare presentato in Figura 72, ma piuttosto quello lineare a tratti riportato in Figura 74 sinistra (se il sistema arriva a rottura per massima plasticizzazione della barra) o quello di Figura 74 destra (se la rottura avviene per il ribaltamento della parete senza che si giunga alla rottura del tirante).

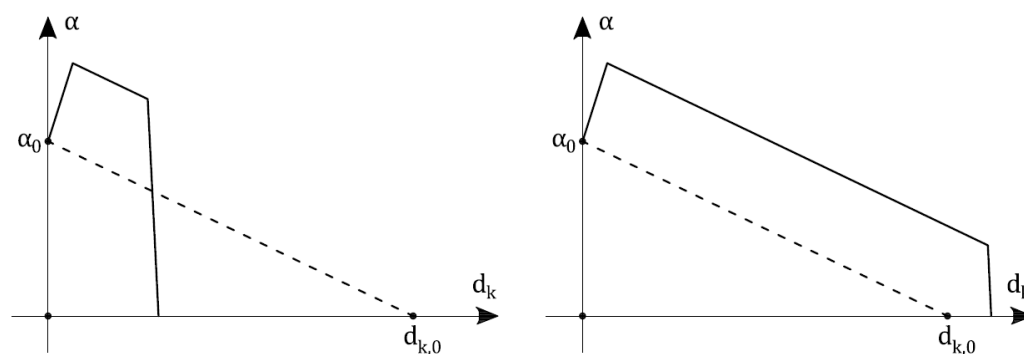


Figura 74. Curva di capacità del sistema reale consolidato.

Se si assume che la rottura avvenga per l'eccessiva plasticizzazione della barra, allora lo spostamento del punto di controllo per il quale si ha la massima plasticizzazione diventa la capacità di spostamento del sistema reale. Tale grandezza andrà trasformata in base all'equazione (2.43) in uno spostamento spettrale e si assumerà quest'ultimo come capacità di spostamento all'SLV ( $d_u^*$ ). Pertanto la domanda di spostamento non potrà eccedere tale valore.

Il procedimento di dimensionamento dei tiranti proposto da M. Vinci consiste dunque nel contenere il valore della domanda di spostamento mediante il contenimento del valore del periodo  $T_s$  relativo all'oscillatore associato.

Per fare ciò si attua una risoluzione per via grafica (Figura 75) che prevede il disegno della curva di capacità spettrale del sistema non consolidato e della curva ADSR (Attack Decay Sustain Release) legata allo spettro elastico di spostamento.

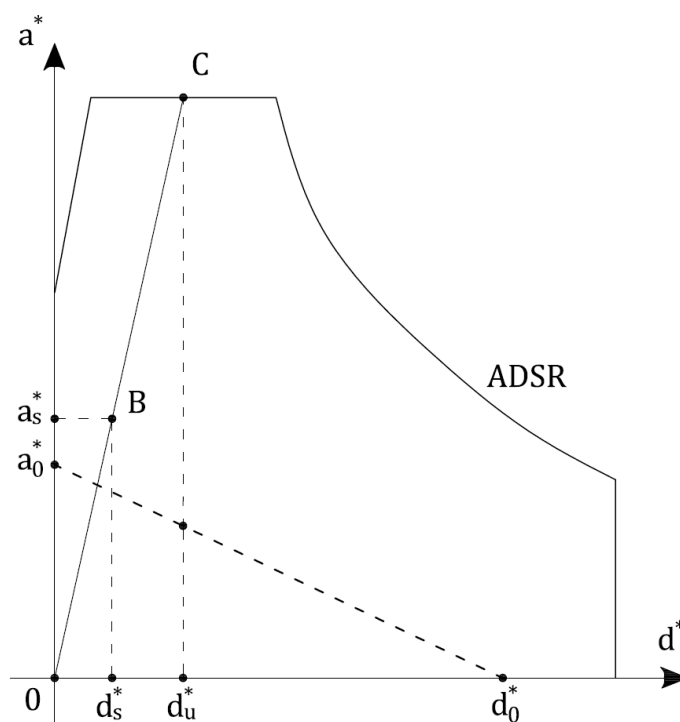


Figura 75. Risoluzione grafica.

Siccome la domanda di spostamento può assumere al massimo un valore pari a  $d_u^*$  è sufficiente intercettare in corrispondenza di tale ascissa la curva ADSR nel punto C. Il punto di intersezione tra retta  $\overline{OC}$  e la retta verticale passante per l'ascissa  $d_s^*$  fornisce l'ordinata, ovvero l'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo minima, che la curva di capacità deve assumere affinché il sistema dia esito positivo alla verifica [59]. Inserendo il valore dell'accelerazione spettrale trovata all'interno

dell'equazione (2.35) è poi possibile ricavare il valore del moltiplicatore dei carichi  $\alpha_{0,C}$  invertendo la stessa:

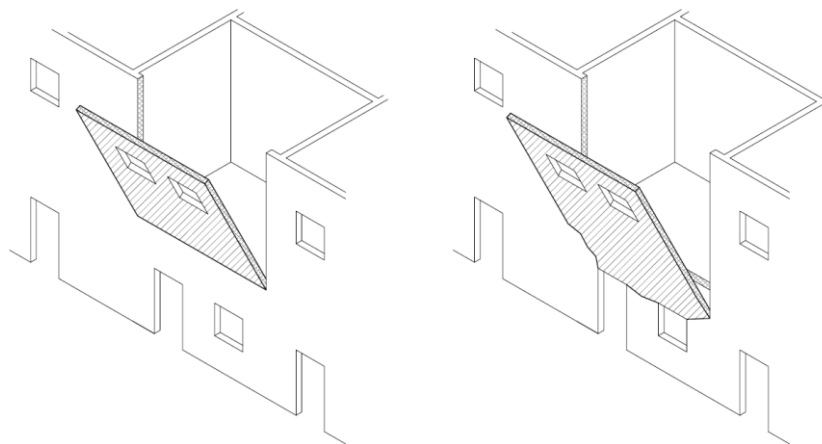
$$\alpha_{0,C} = \frac{a_s^* \cdot e^* \cdot FC}{g} \quad (2.52)$$

Esplicitando poi il valore di  $\alpha_0$  in base all'equazione (2.33) sarà possibile determinare il valore dell'azione resistente ( $T_{Ed}$ ) con cui dimensionare il tirante.

#### 2.2.3.4. Esempio

##### **Introduzione al cinematismo: Ribaltamento semplice**

Questo tipo di cinematismo si presenta per tutte quelle pareti scarsamente ammortate in sommità e alle pareti ortogonali e che dunque, collassano per rotazione attorno a una cerniera orizzontale posizionata nel punto di maggior vincolo del pannello (fondazione o solaio efficace). La presenza di spinte dovute a coperture spingenti, l'assenza di cordoli o catene che dovrebbero assorbire tali azioni e la presenza di solai deformabili o mal collegati sono fattori che esaltano il meccanismo di collasso in questione. Tale crisi può essere identificata per la presenza di lesioni verticali in corrispondenza delle intersezioni murarie o dal fuori piombo della parete ribaltante.

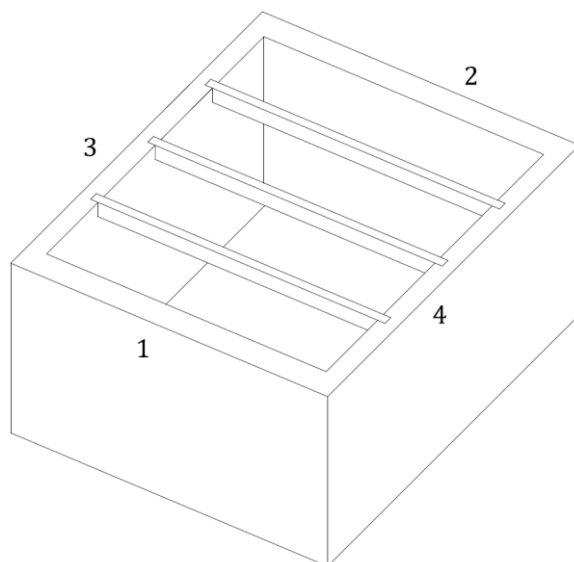


**Figura 76.** Possibili schemi di ribaltamento semplice.

Dato che la rotazione può avvenire a diverse quote della struttura sarà necessario effettuare più calcoli ipotizzando la posizione della cerniera cinematica su tutti i livelli e prendendo in considerazione solo quella che fornisce il moltiplicatore delle azioni cinematiche più basso.

**Dati del problema**

Si immagini di dover ora verificare la parete n°4 della struttura elementare riportata in Figura 77.



**Figura 77.** Geometria della struttura oggetto di analisi.

Parete n°4:

Materiale:	Mattoni pieni e malta di calce aerea
Lunghezza	$L_p = 4 \text{ m}$
Altezza	$h = 4 \text{ m}$
Spessore	$t = 0,5 \text{ m}$
Peso specifico	$\gamma_p = 18 \text{ kN/m}^3$
Peso	$W = L \cdot t \cdot h = 144 \text{ kN}$

Solaio:

Materiale:	Legno
Area di influenza	$A_s = 8 \text{ m}^2$
Peso specifico	$\gamma_s = 4,8 \text{ kN/m}^2$
Peso	$P_s = A_s \cdot \gamma_s = 38,4 \text{ kN}$

Input sismico

Località:	L'Aquila
Accelerazione di picco	$a_g = 0,2607$
Amplificazione spettrale	$F_0 = 2,364$
Periodo di inizio del tratto a velocità costante	$T_c^* = 0,347$



Categoria di sottosuolo	D
Categoria topografica	T3
Vita nominale	50 anni
Classe d'uso	II
Fattore di struttura	$q = 2,00$
Livello di conoscenza	LC2    FC = 1,20

Altre informazioni:

- Scarso ammorsamento tra le pareti ortogonali
- Assenza di vincolo bidirezionale tra il solaio e la parete
- Solaio di tipo deformabile
- Punto di applicazione dei carichi portati dalla parete ( $x_s$ ) situato a 10 cm dal bordo interno della stessa

### Analisi cinematica lineare

In Figura 78 è proposta la schematizzazione della precedente parete. Osservandola è possibile vedere l'interpretazione del meccanismo come una parete libera di ruotare intorno ad una cerniera cilindrica orizzontale sottoposta a diverse forze che determinano un preciso moltiplicatore delle azioni orizzontali  $\alpha_0$  che attiva il cinematismo. Per determinarlo si applica l'equazione (2.33) dalla quale si ricava:

$$W \frac{t}{2} + P_s (t - x_s) - \alpha_0 W \frac{h}{2} - \alpha_0 P_s h = 0$$

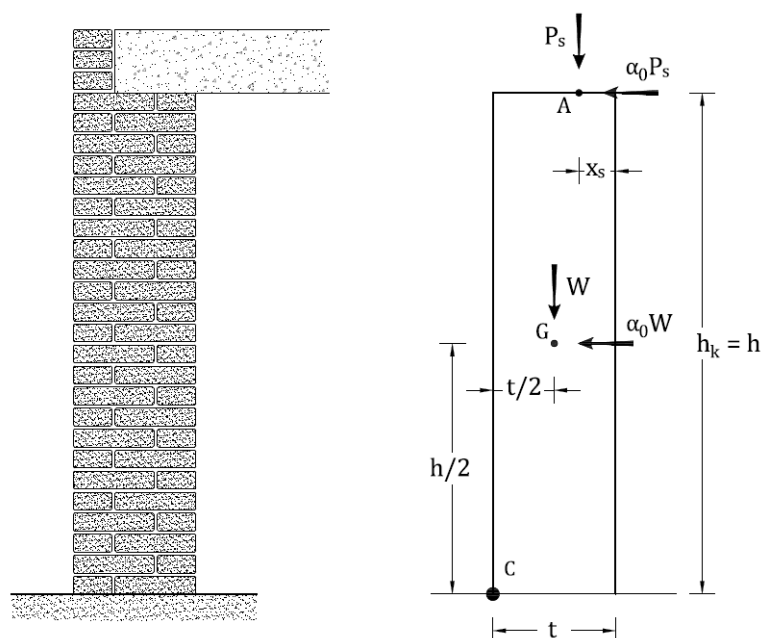


Figura 78. Schema per la verifica del cinematismo.

$$\alpha_0 = \frac{W \frac{t}{2} + P_s (t - x_s)}{\left( \frac{W}{2} + P_s \right) h} = 0,116$$

A questo punto si determinano i parametri di massa partecipante e frazione di massa partecipante per arrivare a determinare l'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo. Nel calcolo di  $M^*$  è possibile sostituire gli spostamenti virtuali con il braccio della  $i$ -esima forza applicata al blocco rigido [59].

$$M^* = \frac{\left( W \frac{h}{2} + P_s h \right)^2}{g \left( W \frac{h^2}{4} + P_s h^2 \right)} = \frac{\frac{W}{2} + P_s}{g \left( \frac{W}{4} + P_s \right)} = 0,151 \text{ kNm}$$

$$e^* = \frac{g M^*}{W + P_s} \% = 0,81$$

$$a_0^* = \frac{\alpha_0 \cdot g}{e^* \cdot FC} = 117,03 \text{ cm / s}^2$$

Si utilizza ora l'equazione (2.40) per la verifica allo stato limite di salvaguardia della vita:

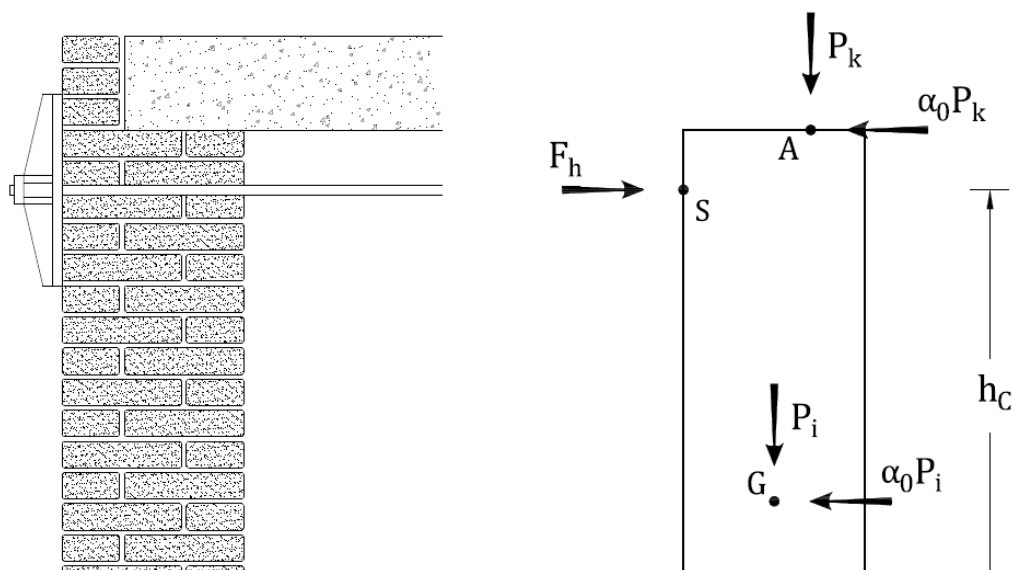
$$a_0^* \geq \frac{a_g [P_{VR}] \cdot S}{q}$$

$$117,03 \geq \frac{0,2607 \cdot 9,806 \cdot 10^2 \cdot 2,16}{2}$$

$$117,03 \geq 276,09$$

La verifica non risulta ottemperata e pertanto si decide di disporre due tiranti all'intersezione tra le pareti ortogonali a una quota di 3,7 m. Questo permetterà di innalzare il moltiplicatore dei carichi fino alla soglia cercata. Questa può essere determinata invertendo l'equazione (2.35) in funzione di  $\alpha_0$  e sostituendo al suo interno l'accelerazione spettrale di attivazione con quella relativa alla domanda sismica espressa dal sito. Chiameremo  $\alpha_{0,c}$  il moltiplicatore che permetterà di ottemperare alla verifica.

$$\alpha_{0,c} \geq \frac{a_s^* \cdot e^* \cdot FC}{g} \geq 0,274$$



**Figura 79.** Schema di verifica compressivo dell'azione stabilizzante.

A questo punto è possibile porre l'equilibrio alla rotazione in relazione al nuovo schema risolutivo che comprende la presenza dei tiranti.

$$W \frac{t}{2} + P_s (t - x_s) - \alpha_{0,C} W \frac{h}{2} - \alpha_{0,C} P_s h + T_{Ed} h_C \geq 0$$

$$T_{Ed} \geq \frac{\alpha_{0,C} \left( \frac{W}{2} + P_s \right) h - W \frac{t}{2} - P_s (t - x_s)}{h_C} \geq 18,82 \text{ kN}$$

Disponendo di tale valore si potrà procedere a determinare la geometria e i materiali con cui realizzare la barra e le chaviarde in base ai criteri di gerarchia delle resistenze e alle relative formule proposte al capitolo 3, tenendo presente che il valore determinato è da ripartire sui due tiranti.

Come valutare il valore di azione stabilizzante trasferito in funzione o meno della pretensione fornita è però un problema da non sottovalutare. In teoria, se si assumesse una configurazione indeformata del sistema, si dovrebbe conteggiare nel valore dell'azione stabilizzante il solo contributo dato dalla pretensione di cui la barra è fornita, in quanto, non essendoci rotazione nel pannello, non vi sarà sforzo nel tirante.

Per considerare il contributo del tirante privo di pretensionamento all'interno dello schema resistente si dovrebbe far riferimento a una condizione deformata e in particolare a quella che porta allo snervamento del cavo. In tale situazione l'azione stabilizzante da considerare corrisponderebbe a quella per cui si realizza lo sner-

vamento della barra, ma i calcoli diverrebbero altresì più complessi, in quanto bisognerebbe considerare nel calcolo anche lo spostamento del punto di applicazione di tutte le forze causato dalla rotazione del pannello.

All'interno di [59], M. Vinci esegue il calcolo del moltiplicatore  $\alpha_0$  considerando, sia in configurazione deformata sia in indeformata, il valore dell'azione stabilizzante pari a quello raggiunto in concomitanza con lo snervamento della barra. Egli giunge così alla conclusione che, siccome  $\alpha_0$  differisce di pochi millesimi tra i due casi, *è possibile considerare nella configurazione indeformata il massimo valore dell'azione resistente offerto dalla barra, sostituendo quest'ultimo nella (2.33) in luogo della forza di pretensionamento e facilitando così la verifica.*

### Analisi statica non lineare

Per prima cosa si determina la curva di capacità relativa al sistema reale non consolidato. In tale configurazione le forze rimangono costanti fino al collasso e pertanto è sufficiente calcolare solo due punti per disegnare la retta. Per farlo si calcola in prima istanza il valore del moltiplicatore  $\alpha_0$  in condizione indeformata, il quale è già stato calcolato al punto precedente ed è pari a 0,116. Per trovare il secondo punto invece è sufficiente valutare l'equazione (2.33) per una condizione deformata relativa a una rotazione di  $1^\circ$  del pannello. La rotazione aumenta le distanze verticali (maggiore effetto delle forze instabilizzanti) e diminuisce quelle orizzontali [59].

$$W \cdot x'_w + P_s \cdot x'_s - \alpha_0 W \cdot y'_w - \alpha_0 P_s \cdot y'_s = 0$$

Dove:

$$\begin{cases} x'_w = \frac{t}{2} - \frac{h}{2} \cdot \text{rad}(\theta) = 0,215 \text{ m} \\ y'_w = \frac{h}{2} + \frac{t}{2} \cdot \text{rad}(\theta) = 2,005 \text{ m} \\ x'_s = (t - x_s) - h \cdot \text{rad}(\theta) = 0,33 \text{ m} \\ y'_s = h + (t - x_s) \cdot \text{rad}(\theta) = 4,007 \text{ m} \end{cases}$$

$$\alpha_0 [1^\circ] = \frac{W \cdot x'_w + P_s \cdot x'_s}{W \cdot y'_w + P_s \cdot y'_s} = 0,0986$$

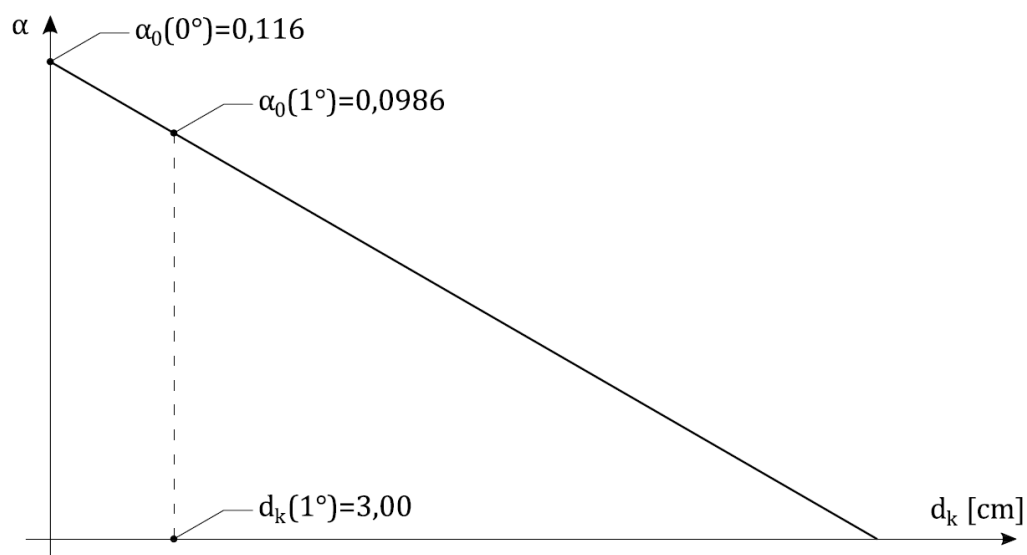


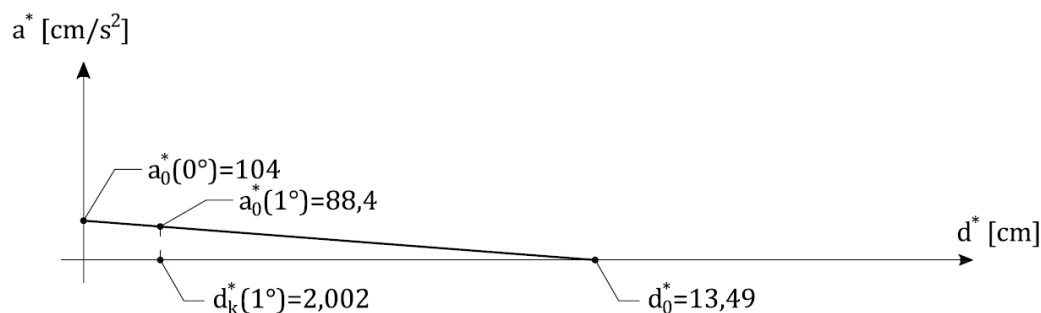
Figura 80. Curva di capacità del sistema reale non consolidato.

A questo punto si costruisce per punti la curva rappresentante la capacità spettrale del sistema equivalente. Lo spostamento spettrale si determina in base all'equazione (2.43), mentre l'accelerazione mediante la (2.35). Nel primo caso è possibile sostituire gli spostamenti virtuali con il braccio della i-esima forza applicata al blocco rigido [59].

$$d^* = d_k \frac{W \left( \frac{h}{2} \right)^2 + P_s h^2}{\left( W \frac{h}{2} + P_s h \right) h} = d_k \frac{\frac{W}{4} + P_s}{\frac{W}{2} + P_s} = 0,674 \cdot d_k \quad [cm]$$

Mentre nel secondo caso è bene tenere presente che siccome l'analisi è di tipo statico non lineare, la circolare impone di utilizzare sempre un fattore di confidenza pari a LC1 (FC = 1,35).

$$a_0^* = \alpha_0 \frac{g}{e^* \cdot FC} = \frac{9,806 \cdot 10^2}{0,81 \cdot 1,35} = 896,75 \cdot \alpha_0$$



**Figura 81.** Costruzione della curva di capacità spettrale del sistema equivalente.

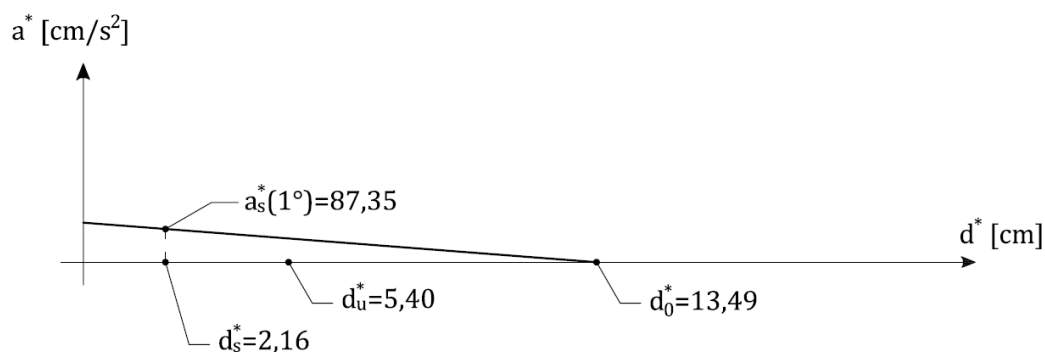
Definita la curva è possibile calcolare le grandezze necessarie alla risoluzione del problema per lo stato limite di salvaguardia della vita:

$$d_u^* = \min [0,4d_0^*; d_c^*] = \min [0,4 \cdot 13,49 ; assente] = 5,40 cm$$

$$d_s^* = 0,4d_u^* = 2,16 cm$$

Dove lo spostamento spettrale ( $d_0^*$ ) in corrispondenza dell'annullamento dell'accelerazione spettrale è stato ottenuto per via grafica. Allo stesso modo si determina l'accelerazione spettrale in corrispondenza di  $d_s^*$ :

$$a_s^* = 87,35 cm / s^2$$



**Figura 82.** Curva di capacità spettrale del sistema equivalente.

A questo punto si determina il periodo  $T_s$  del sistema equivalente attraverso l'equazione (2.46) e si esegue la verifica secondo (2.48) e (2.50):

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{d_s^*}{a_s^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,16}{87,35}} = 0,98''$$

$$d_u^* \geq \Delta_d(T_s)$$

$$d_u^* \geq S_{De}[T_s]$$

$$d_u^* \geq S_e[T_s] \cdot \left(\frac{T_s}{2\pi}\right)^2$$

$$d_u^* \geq 565,86 \cdot \left(\frac{0,98}{2\pi}\right)^2 = 13,77$$

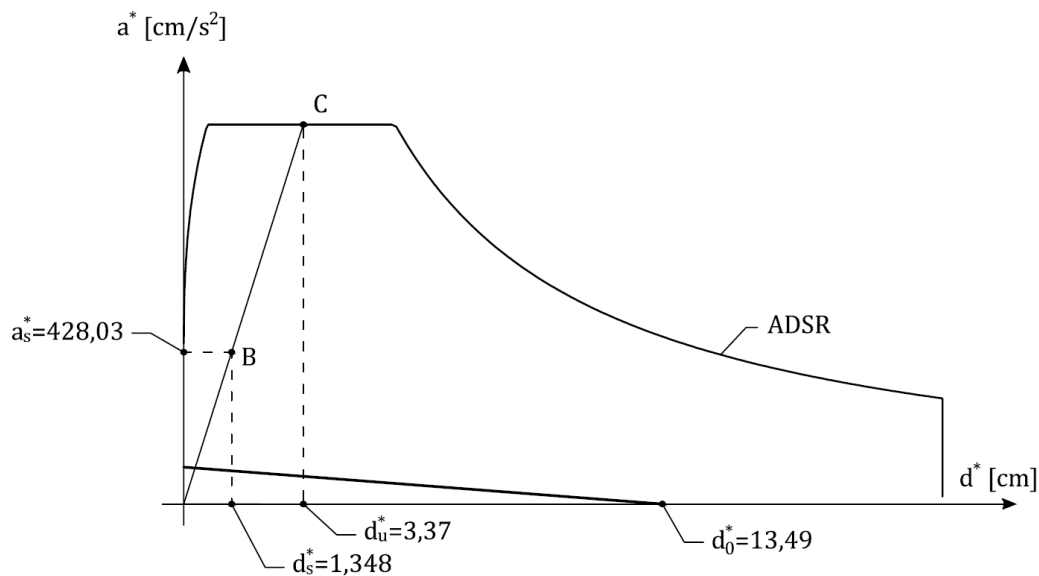
$$5,40 \geq 13,77$$

Poiché la domanda di spostamento è maggiore della capacità la verifica non risulta superata e si decide quindi di apporre due tiranti in corrispondenza dell'intersezione della parete con quelle trasversali per consolidare la struttura. In base al procedimento descritto al punto 2.2.3.3 si definisce il nuovo spostamento spettrale all'SLV:

$$d_u^* = \min[0,4d_0^*; d_c^*] = \min[0,4 \cdot 13,49; 0,674 \cdot 5] = 3,37 \text{ cm}$$

$$d_s^* = 0,4d_u^* = 1,348 \text{ cm}$$

Sempre seguendo il procedimento si uguaglia tale quantità alla domanda di spostamento e si ricava graficamente il valore dell'accelerazione spettrale  $a_s^*$ .



**Figura 83.** Procedimento grafico per ricavare il valore di  $a_s^*$ .

Una volta fatto ciò si procede a ritroso con il calcolo del moltiplicatore dei carichi  $\alpha_{0,C}$ , mediante l'equazione (2.52), e con l'esplicitazione di quest'ultimo per il calcolo dell'azione stabilizzante da affidare al tirante.

$$\alpha_{0,C} = \frac{a_s^* \cdot e^* \cdot FC}{g} = 0,478$$

L'equilibrio alla rotazione deve essere posto attraverso l'equazione (2.33) per una configurazione deformata relativa a uno spostamento del punto di controllo pari al corrispettivo reale di  $d_s^*$ .

$$d_s = \frac{d_s^*}{0,674} = 2 \text{ cm}$$

Se si assume che il punto di controllo è posizionato nel punto di applicazione dei carichi del solaio, allora è possibile dire che il braccio della forza gravitazionale del solaio in condizione deformata è esprimibile come:

$$x'_s = (t - x_s) - d_s$$

Ma tale distanza può essere anche espressa in funzione dell'angolo di rotazione del pannello come:

$$x'_s = (t - x_s) - h \cdot \text{rad}(\theta)$$



Uguagliando le due equazioni è possibile determinare il valore dell'angolo  $\theta$  espresso in radianti e calcolare così il braccio di tutte le altre forze come:

$$\begin{cases} x'_w = \frac{t}{2} - \frac{h}{2} \cdot \text{rad}(\theta) = 0,24\text{ m} \\ y'_w = \frac{h}{2} + \frac{t}{2} \cdot \text{rad}(\theta) = 2,00125\text{ m} \\ y'_s = h + (t - x_s) \cdot \text{rad}(\theta) = 4,002\text{ m} \\ h'_c = h_c - (t - x_s) \cdot \text{rad}(\theta) = 3,698\text{ m} \end{cases}$$

E determinare così l'entità dell'azione stabilizzante da affidare ai due tiranti:

$$\begin{aligned} W \cdot x'_w + P_s \cdot x'_s - \alpha_{0,C} W \cdot y'_w - \alpha_{0,C} P_s \cdot y'_s + T_{Ed} h'_c &= 0 \\ T_{Ed} &= \frac{\alpha_{0,C} W \cdot y'_w + \alpha_{0,C} P_s \cdot y'_s - W \cdot x'_w - P_s \cdot x'_s}{h'_c} = 43,82\text{ kN} \end{aligned}$$

#### 2.2.4. Osservazioni

Verranno ora espresse alcune considerazioni di carattere generale e particolare riguardanti l'incatenamento della struttura e le relative procedure di verifica elencate nei precedenti capitoli.

Innanzitutto è bene premettere che quando si interviene sulle strutture di un edificio in modo da operarne il consolidamento e il rinforzo in prevenzione del sisma, è bene disporre di orizzontamenti ben vincolati alle pareti e sufficientemente rigidi (secondo la definizione fornita al punto 2.2.2), i quali siano in grado di redistribuire le azioni laterali alle pareti in base alla loro rigidezza. Se la struttura dispone di orizzontamenti adeguati, oltre a redistribuire le azioni laterali, sarà maggiormente identificabile e presente un unico comportamento di insieme, piuttosto che diversi meccanismi locali di difficile interpretazione e verifica. Pertanto, se dallo stato di fatto risultano solai deformabili e poco vincolati alle pareti, si dovrà valutare il loro consolidamento o addirittura la loro sostituzione. La percorribilità di tale opzione sarà comunque vagliata soppesando i vantaggi statici ottenibili con i costi dell'intervento, il tutto alla luce dei vincoli tecnici, ergotecnici, estetici e conservativi.

La presenza di forti e reali impedimenti può comportare il mantenimento del solaio deformabile e dunque la necessità di verificare la struttura attraverso l'analisi dei meccanismi locali. Delle due procedure descritte si consiglia di adottare l'analisi cinematica lineare, in quanto attraverso la statica non lineare si opererebbe una verifica ingiustificatamente severa. Le motivazioni di tale affermazioni nascono dal confronto dei due sistemi. Nel primo si assume infatti che l'edificio risponda al sisma rimanendo in campo elastico lineare, ma si permette di ridurre l'accelerazione che si otterrebbe in campo elastico, mediante il coefficiente di struttura  $q$ , il quale tiene in conto la capacità dissipativa della struttura.

Nella normale analisi statica non lineare (non quella proposta dalla circolare per la verifica dei meccanismi locali) si associa il comportamento non lineare del materiale all'oscillatore equivalente e si lascia che sia tale comportamento a scalare lo spettro di risposta elastico. Questo permette dunque di valutare con maggiore precisione le capacità dissipative, in quanto non si utilizza un coefficiente poco rappresentativo delle caratteristiche del singolo edificio come il fattore di struttura  $q$ , ma un diagramma bilineare appositamente costruito in base alle proprietà meccaniche degli elementi strutturali. Come ricorda anche la norma, questo è un aspetto particolarmente vantaggioso proprio per le murature, le quali sono caratterizzate da un comportamento non lineare molto marcato sin da bassi stati di sforzo. Tuttavia il procedimento di verifica dei meccanismi locali che la circolare propone sotto il nome di statica non lineare, non permette di sfruttare la capacità dissipativa associata al diagramma inelastico del materiale, in quanto le equazioni alla base del procedimento sono equazioni di equilibrio e non di resistenza. Oltre a questo biso-

gna contare che se si adopera questa analisi è imposto l'utilizzo di un fattore di confidenza LC1.

Di fatto il secondo procedimento considera la struttura come non dissipativa e procede quindi nella sua verifica richiedendo che essa resista alle condizioni imposte dal sisma per uno stato limite di salvaguardia della vita, ovvero uno stato limite ultimo obbligando la struttura a rimanere in campo elastico. Questo spiega l'alto valore dell'azione stabilizzante trovato nell'esempio, il quale risulta più che doppio rispetto a quello rilevato mediante l'analisi cinematica lineare. Non appare dunque casuale il fatto che le raccomandazioni regionali per la verifica sismica delle costruzioni in muratura (ad esempio [50]) applichino solo l'approccio secondo l'analisi cinematica lineare.

In entrambi i casi si adotta comunque un modello non lineare a plasticità concentrata e una distribuzione di forze inerziali proporzionale alle forze statiche, dunque un modello tipico della normale statica non lineare. Se la non linearità dei vincoli è un'opzione realisticamente adottabile in base alle considerazioni espresse al punto 2.2.3.1, per le strutture in muratura l'utilizzo di una tale distribuzione di forze è ammesso solo se il modo di vibrare fondamentale nella direzione considerata ha una partecipazione di massa, ottenuto in base all'equazione (2.36), non inferiore al 60%.

## 2.2.5. Meccanismi di ribaltamento alternativi

Dei meccanismi di ribaltamento presentati al punto 2.2.3.1 è stato trattato in maniera esauriente solo il ribaltamento semplice. Per la risoluzione dei restanti secondo l'analisi cinematica lineare è possibile consultare il documento [50] e il relativo foglio Excel, al cui interno è appunto riportata la risoluzione di tutti i meccanismi e molti consigli utili per la schematizzazione di particolari soluzioni costruttive, come ad esempio le pareti a cortina. Lo svolgimento degli stessi secondo l'analisi statica non lineare può essere invece visionato all'interno di [59].

Dei meccanismi di collasso alternativi al ribaltamento semplice, è comunque doveroso riportarne una descrizione che comprenda i sintomi e le condizioni strutturali che comportano il potenziale avvio del cinematismo. In possesso di queste conoscenze si potrà dunque provvedere alla verifica strutturale secondo i procedimenti descritti al punto 2.2.3.2 e 2.2.3.3. La trattazione riportata è stata prelevata da [50].

### 2.2.5.1. Flessione verticale

Una situazione piuttosto comune negli edifici in muratura è rappresentata da una tesa muraria vincolata agli estremi e libera nella zona centrale (Figura 84). È questo il caso, ad esempio, di un edificio con un cordolo in sommità ed i solai intermedi privi di qualsiasi connessione; una situazione di questo tipo si presenta anche quando si considera la porzione di parete compresa tra due solai ben collegati ad essa. In queste condizioni la presenza in sommità di un dispositivo di connessione impedisce il ribaltamento della parete verso l'esterno.



Figura 84. Schema e fotografie del ribaltamento in esame [50].

Tuttavia questa, sotto l'effetto dello scuotimento orizzontale, può collassare per instabilità verticale. Infatti la struttura muraria, costruita per sovrapposizione di elementi lapidei e laterizi vincolati da semplice contatto o da una malta con scarsa resistenza a trazione, sopporta gli sforzi di flessione indotti dalle azioni ortogonali

al suo piano, solo se lo sforzo normale mantiene la risultante interna alla sezione trasversale. In caso contrario si forma in quel punto una cerniera cilindrica orizzontale che consente l'innescò del cinematismo per flessione verticale.

Tale meccanismo è favorito da una qualità scadente della muratura, ad esempio muratura a sacco, che la rende instabile e da spinte orizzontali localizzate, determinate ad esempio dalla presenza di archi, volte o solai intermedi non trattenuti; può quindi verificarsi in presenza di un trattenimento in testa alla tesa muraria, dovuti, ad esempio, a tiranti metallici, ad ancoraggi alle testate di travi lignee o a cordoli e solette in c.a. ben ammorsate alla muratura. Il meccanismo, in questo caso, è caratterizzato da valori del coefficiente di collasso  $\alpha_0$  più elevati rispetto al caso di ribaltamento semplice.

In un edificio già danneggiato dal terremoto il meccanismo è segnalato da un fuori piombo della parete, talvolta accompagnato dallo sfilamento delle travi del solaio che insiste sulla parete. In ogni caso, l'instaurarsi dell'arco verticale che precede l'attivazione del meccanismo richiede la presenza di efficaci vincoli orizzontali sopra e sotto il tratto di parete interessato.

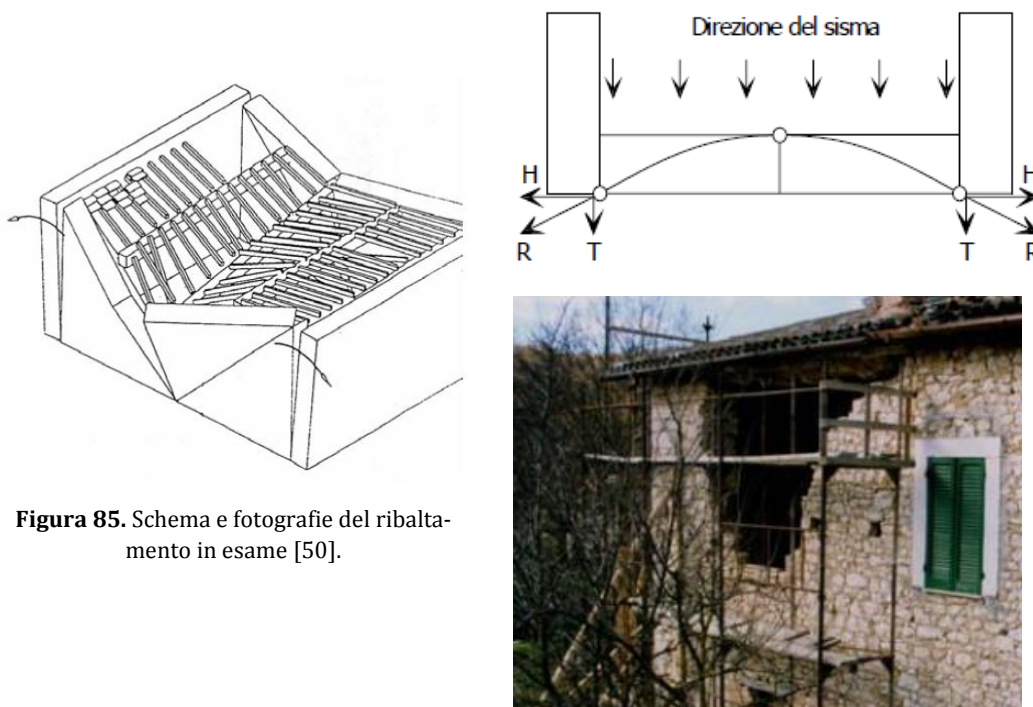
Il meccanismo di flessione verticale di una parete può quindi interessare uno o più piani dell'edificio, in relazione alla presenza di vincoli agli orizzontamenti, diverse geometrie dei macroelementi, determinate dalla presenza di aperture o spinte localizzate, ed uno o entrambi i paramenti nel caso di strutture murarie a doppia cortina. In particolare nel caso dei muri a sacco, il materiale di riempimento interno per effetto della sovrappressione può causare l'instabilità del paramento esterno, soprattutto quando il solo paramento interno è collegato ai solai (ad esempio quando su questo sono stati realizzati cordoli in c.a. in traccia).

#### **2.2.5.2. Flessione orizzontale**

In presenza di pannelli murari efficacemente vincolati alle pareti ortogonali con il lato sommitale non trattenuto da alcun dispositivo si assiste spesso ad un tipo di crisi riconducibile al comportamento flessionale nel piano orizzontale del solido murario. La risposta strutturale della parete si manifesta in questi casi come un effetto arco orizzontale all'interno della parete ed è chiamato in causa dall'azione sismica ortogonale alla stessa (Figura 85). In particolare, la spinta trasmessa dal solaio o dalla copertura in testa alla struttura muraria si scarica sulla parete di facciata fino ad arrivare ad interessare le pareti ad essa ortogonali (arco orizzontale). Tale azione, in corrispondenza delle intersezioni murarie, viene quindi ripartita in una componente T ortogonale alla parete investita dal sisma, assorbita dai tiranti, ed una componente H parallela alla stessa.

L'attivazione del meccanismo è preceduta dalla formazione di un arco orizzontale nello spessore del muro; nella condizione limite di equilibrio si formano tre cerniere, una in mezzeria, le altre in prossimità dell'intersezione tra la parete in esame ed

i muri ad essa ortogonali, in corrispondenza degli elementi che devono portare il tiro T. Dallo schema di calcolo si osserva che il collasso si manifesta quando la parete non trova elementi strutturali in grado di fornire le reazioni H. Nel caso in cui la parete si inserisce all'interno di una schiera e le porzioni di muratura contigue sono di sufficiente resistenza, il collasso per cinematismo non si verifica e la rottura può avvenire solo per schiacciamento della parte interna del muro.



**Figura 85.** Schema e fotografie del ribaltamento in esame [50].

In altre parole l'evoluzione del meccanismo dipende dalla capacità dei muri laterali di sopportare le spinte H degli archi. Se la parete non trova elementi di contrasto capaci di fornire una reazione pari ed opposta alla spinta H, allora lo schema isostatico di arco a tre cerniere diventa labile quando queste vengono ad essere allineate e si ha il conseguente cinematismo di collasso. Se, invece, la muratura in esame appartiene ad una cella interclusa di una schiera, allora la spinta H è generalmente assorbita dalle pareti contigue, quindi diventa necessaria un'analisi di tipo tensionale che verifichi la condizione di schiacciamento della parte interna del muro soggetta a forti sollecitazioni di compressione.

La situazione descritta è tipica delle pareti trattenute da tiranti ed è favorita dalle spinte in testa al muro (dovute alla presenza di una copertura spingente o all'azione di martellamento degli elementi di grossa orditura del tetto) e da una ridotta resistenza a trazione della muratura (che comporta rischi di espulsione del materiale che costituisce la faccia esterna della parete per le tensioni di trazione che nascono al centro della muratura a causa dal cinematismo stesso). Anche la

presenza di canne fumarie ricavate nello spessore della parete o di aperture per l'alloggio degli impianti tecnologici, riducendo la sezione resistente della struttura muraria, costituiscono situazioni preferenziali per la formazione delle cerniere verticali e l'innescò del cinematismo e rappresentano quindi elementi di particolare interesse. Nell'analisi del meccanismo di flessione orizzontale bisogna distinguere poi tra il caso di parete monolitica, per il quale l'arco di scarico può interessare l'intero spessore della parete, ed il caso di parete a doppia cortina per il quale si può manifestare espulsione di materiale senza che si abbia il coinvolgimento della cortina interna. Il meccanismo di flessione orizzontale inoltre può interessare diverse geometrie dei macroelementi coinvolti nel cinematismo, la cui definizione è condizionata principalmente dalla presenza di aperture allineate nella fascia di sottotetto e dalla qualità della muratura che influisce sull'altezza del cuneo di distacco.

Nel caso di strutture anche lievemente danneggiate l'individuazione di meccanismi di flessione orizzontale è agevolata dalla lettura del quadro fessurativo che fornisce importanti indicazioni sui macroelementi che si sono formati. Mentre in generale nel caso di murature integre con cantonali correttamente eseguiti i possibili cinematismi di collasso fuori dal piano possono svilupparsi con il coinvolgimento di porzioni più o meno ampie di muratura e non è immediato prevedere quale sia il cinematismo più probabile. Per stabilire quale sia la condizione più sfavorevole, in questi casi occorre valutare diversi moltiplicatori di collasso ipotizzando diverse geometrie delle porzioni di muratura interessate dal cinematismo.

### **2.2.5.3. Ribaltamento composto**

Per ribaltamento composto si vuole qui indicare un insieme di situazioni in cui al ribaltamento della parete ortogonale all'azione sismica si accompagna il trascinarsi di una porzione di struttura muraria appartenente ad un'angolata libera oppure a pareti di spina (Figura 86). In molti casi infatti i martelli murari e le angolate presentano connessioni adeguate tra le murature che confluiscono in un nodo, tali da determinare il coinvolgimento di parti di esse nel ribaltamento. Affinché si possa prevedere un meccanismo di ribaltamento composto in un edificio integro, devono esserci condizioni caratterizzate dall'assenza di vincoli in sommità della parete ribaltante e dalla presenza di un efficace collegamento tra la parete investita dal sisma e quella ad essa ortogonale. Si tratta generalmente di murature costruite in uno stesso momento (cellule originarie) o che hanno subito interventi di consolidamento che prevedono il collegamento dei pannelli murari ortogonali, ma in assenza di un efficace collegamento in testa alla parete ribaltante.

Inoltre, in relazione alla presenza di solai rigidi, si può definire una diversa configurazione del cuneo di distacco nella parete coinvolta nel ribaltamento. Nel caso in cui siano presenti solai tradizionali, privi di soletta armata, il meccanismo di ribaltamento della facciata è accompagnato generalmente dal distacco di un cuneo dia-

gonale della parete ortogonale. Se invece i solai sono dotati di soletta rigida il meccanismo di ribaltamento composto determina il trascinamento di un cuneo a doppia diagonale nella parete di controvento.



**Figura 86.** Schema e fotografie del ribaltamento in esame [50].

Quando l'edificio in esame ha già subito l'azione di un sisma è possibile constatare il meccanismo di ribaltamento composto attraverso la lettura del dissesto rilevato, descritto da lesioni diagonali o a doppia diagonale sulle pareti di spina con angolo di distacco differente a seconda della tipologia e della qualità muraria caratterizzante l'edificio stesso. In effetti tale meccanismo, che rappresenta una variante del ribaltamento semplice, è fortemente influenzato anche dal tipo di muratura e dalla presenza di aperture nelle pareti di controvento, da cui dipendono in particolare le dimensioni e la configurazione del cuneo di distacco. Per pareti di controvento prive di aperture si può osservare che in generale l'angolo formato dalla diagonale del



cuneo che ribalta con la verticale aumenta all'aumentare della qualità muraria (in particolare è tanto maggiore quanto migliore è l'apparecchiatura del sistema murario e quanto maggiori sono le dimensioni medie degli ortostrati). In presenza di aperture in prossimità dell'intersezione tra i muri, invece, la forma e le dimensioni del cuneo di distacco sono determinate da queste. Si osserva poi che, in questo tipo di cinematismo, minore è la porzione di muratura che viene trascinata nel moto di ribaltamento più ridotto risulta il valore del moltiplicatore di collasso determinato, fino a tendere al limite al caso di ribaltamento semplice.

Il meccanismo di ribaltamento composto può interessare quindi diverse geometrie del macroelemento coinvolto nel cinematismo e diversi piani dell'edificio, in relazione alla presenza di dispositivi di connessione ai vari livelli, ma riguarda generalmente murature a comportamento monolitico poiché può attivarsi solo in pareti di buona qualità ed apparecchiatura.

## 2.3. Presidi tesi a contrastare le spinte

### 2.3.1. Introduzione

Si vuole ora focalizzare il ragionamento sul consolidamento delle strutture spingenti mediante i tiranti metallici. Per iniziare conviene indagare il concetto stesso di spinta e per farlo, escludendo in un primo momento i tetti spingenti dalle strutture in esame, ci si concentra sul confronto tra le travi dotate o meno di una curvatura.

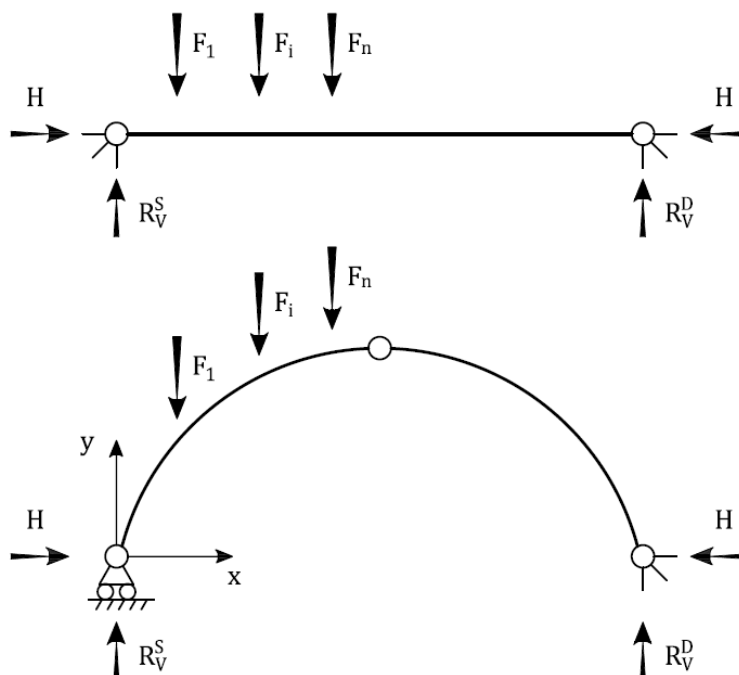


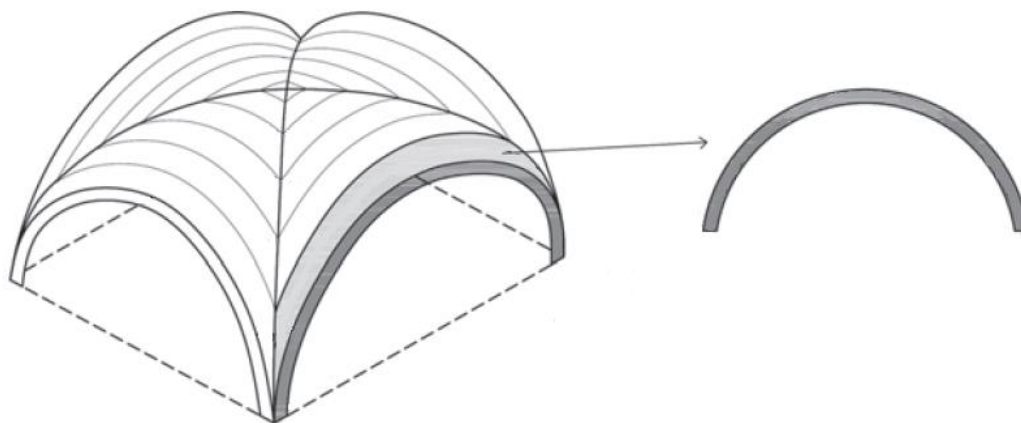
Figura 87. Similitudine di comportamento tra trave e arco [19].

Lo studio del funzionamento di una struttura ad arco può essere svolto partendo da quello di una trave rettilinea di pari luce, sottoposta agli stessi carichi verticali e ai medesimi vincoli. Le azioni verticali producono nell'arco un momento flettente ( $M_a$ ) diverso da quello generato nella trave ( $M_{tr}$ ) a causa della differente geometria e della presenza della spinta laterale  $H$  [19].

$$M_a(x) = M_{tr}(x) - H \cdot y(x) \quad (< M_{tr}(x)) \quad (2.53)$$

Tale comportamento è possibile solo in presenza di adeguati vincoli che permettano lo sviluppo della spinta, altrimenti la struttura non svilupperà un meccanismo resistente ad arco e resisterà come una semplice trave. Nella pratica costruttiva degli archi in muratura questo è possibile mediante il progetto di imposte sufficientemente robuste o tramite l'apposizione di catene.

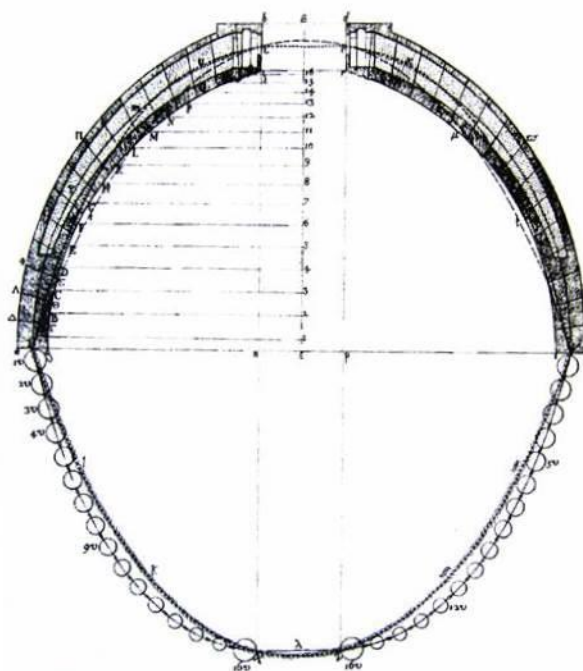
L'estensione dello schema bidimensionale dell'arco alla profondità del volume, portò già gli antichi costruttori a sfruttare il meccanismo resistente in esame, per la realizzazione di volte in muratura. Queste non sono altro che lo sviluppo dell'arco lungo una retta generatrice, dette volte semplici, o l'intersezione di diverse porzioni queste ultime, dette volte composte (Figura 88). In ogni caso anche questi sistemi tridimensionali devono poter produrre delle spinte orizzontali affinché si instaurino dei meccanismi resistenti ad arco al loro interno.



**Figura 88.** Esempio di volta a crociera (composta) formata per intersezione di due volte a botte (semplici) nate a loro volta dallo sviluppo lungo una retta di un arco. Adattato da [25].

Sin dal passato matematici, architetti ed ingegneri hanno messo a punto numerosi procedimenti per la verifica strutturale di questi elementi. Nel caso degli archi in muratura, i tentativi più concreti furono inizialmente intrapresi da De La Hire (1712) e Couplet (1730), i quali posero le basi per lo studio di questi elementi attraverso la ricerca del carico ultimo di collasso che permettesse la formazione di un cinematisimo. Ciò avveniva considerando l'arco come un insieme di elementi infinitamente rigidi, privi di resistenza a trazione e dotati (o meno nel modello di De La Hire) di attrito tra i conci, il cui collasso avveniva per la rotazione dei blocchi attorno a determinati punti. Il modello in questione fu ampliato, discusso ed enunciato in diverse forme da altrettanti autori, quali: Danisy, Frezier, Mascheroni, Poleni, Coulomb e molti altri. A tutti questi si deve la formulazione di una risoluzione che potrebbe essere definita analisi limite pre-moderna, in quanto precorre gli studi effettuati da J. Heyman dopo metà novecento sull'analisi limite degli archi.

Prima dell'avvento di quest'ultima si sviluppò però un approccio basato sull'analisi elastica della struttura. Le ricerche di molti degli autori presentati si basavano infatti sul calcolo della risultante delle azioni di compressione all'interno della saggoma dell'arco e sulla ricerca della sua posizione.

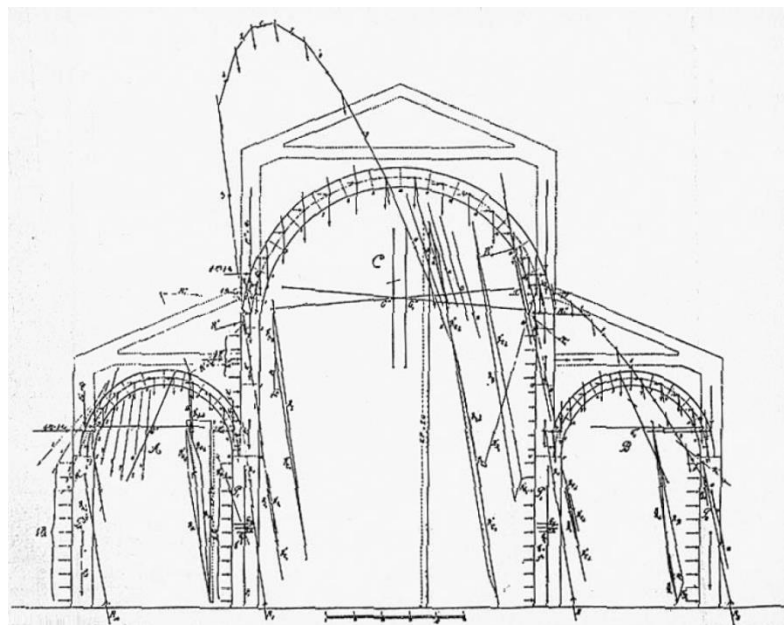


**Figura 89.** Studio effettuato da Poleni (1747) per assicurare la stabilità della cupola di san Pietro.

La maggior attenzione verso il reale stato di sollecitazione del materiale portò dunque molti autori, tra cui Castiglione, ad analizzare la struttura sotto l'ipotesi della teoria dell'elasticità formulata da Navier, Cauchy e Poisson. La verifica non veniva più effettuata valutando il carico ultimo che conduceva alla rotazione dei blocchi attorno alle cerniere, ma analizzando lo stato tensionale del materiale e ipotizzando che quest'ultimo avesse un comportamento isotropo ed elastico in compressione ed una resistenza nulla a trazione. Se la risultante delle azioni di compressione, valutata in corrispondenza di una precisa situazione di carico, ricadeva all'interno del terzo medio della sezione, allora non erano presenti sforzi di trazione ed era possibile confrontare gli sforzi di compressione con la resistenza del materiale.

Tale approccio non era tuttavia considerato da tutti come risolutivo del problema, ma come il più affidabile. Questo perché le prove meccaniche effettuate sulla muratura avevano evidenziato che *i materiali lapidei, naturali ed artificiali, non seguivano esattamente la legge di Hooke, discostandosene in maniera più o meno accentuata fin dalle prime fasi di carico* [60] con un comportamento non lineare. Vale la pena di riportare, come in [60], il commento formulato in proposito da Sejourné all'interno del suo testo riguardante il progetto di ponti in muratura (*Grandes voûtes*).

*“Non disponiamo, al momento, per il calcolo delle volte, di un’ipotesi migliore di quella elastica. A conti fatti, accettiamola dunque non perché sia vera, ma perché volte sottili, così calcolate, resistono. La accettiamo solo provvisoriamente, sotto beneficio di inventario sperimentale, vale a dire fino a quando nuove esperienze diano luogo ad altre formulazioni che si adattino meglio ai fatti.”*



**Figura 90.** Telaio basilicale soggetto ad azioni sismiche, studiato e calcolato da Camillo Guidi secondo l’analisi elastica nel volume di *Esercizi delle sue Lezioni di Scienza delle costruzioni*, Negro, Torino, 1928.

Durante la prima metà del novecento numerosi studiosi (Pippard, Baker, Kooharian) compresero i limiti dell’analisi elastica e riprendendo i concetti formulati nell’analisi limite pre-moderna gettarono le basi per l’analisi plastica degli archi in muratura. Ciò avvenne in maniera corposa e accettata mediante il lavoro di J. Heyman. Questi infatti comprese che [61]:

*“[...] ci sono forti argomentazioni per sostenere che non sia utile conoscere con esattezza lo stato tensionale reale della muratura. Sebbene la curva delle pressioni in un arco sia sempre unica, comunque, un qualsiasi pur piccolo spostamento successivo per esempio di un piedritto o una piccola variazione della temperatura, modificherà quasi certamente la posizione della curva delle pressioni di una quantità significativa. In una situazione mutevole come questa è utile la conoscenza di ciò che rimane costante, ovvero, non lo stato tensionale dell’arco, ma il suo comportamento.”*

Sotto le tre principali ipotesi già descritte al punto 2.2.3.1, Heyman considera l'arco come un solido continuo, la cui crisi avviene per la rotazione rigida di alcune sue porzioni attorno a delle cerniere. In questo contesto egli applica il teorema dell'estremo inferiore dell'analisi limite ed afferma che *se è possibile determinare una curva delle pressioni in equilibrio con le azioni applicate, compresa all'interno della sagoma dell'arco, allora questo è in sicurezza* [56]. Egli però non si limita a questo criterio di verifica, peraltro già noto a Coulomb (cfr. [62]), ma in relazione al precedente enunciato definisce due tipi di coefficiente di sicurezza in modo da stabilire il livello di sicurezza della struttura. Questi ultimi e il procedimento verranno definiti meglio al prossimo capitolo.

Alla luce di quanto appena affermato, nei prossimi capitoli non verrà trattato il consolidamento delle volte mediante tiranti, in quanto tale argomento meriterebbe per la sua vastità e complessità, una tesi monografica. Il lavoro si concentrerà maggiormente sugli archi in muratura isolati e per estensione alle volte a botte.

Il dimensionamento della capacità dei tiranti verrà effettuato mediante l'analisi limite allo stato limite ultimo, in quanto essa *non richiede la descrizione della risposta meccanica del materiale, ma soltanto la definizione di un dominio limite oltre il quale si attivano deformazioni incontrollate. Questo aspetto rende l'analisi limite uno strumento particolarmente significativo proprio per le costruzioni storiche in muratura, poiché consente di definire il margine di sicurezza della struttura indipendentemente dalle proprietà deformative del materiale* [60].

Il livello di pretensione da fornire alla catena verrà invece calcolato allo stato limite di esercizio attraverso la teoria elastica dell'arco a spinta eliminata.

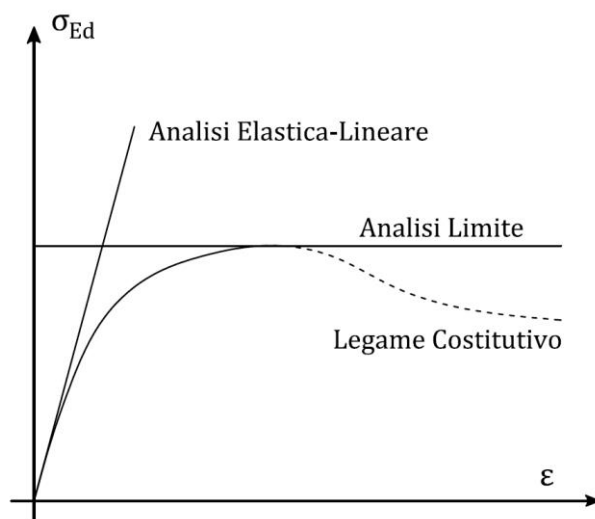


Figura 91. Comportamento tipico della muratura secondo la tipologia di analisi, [60].

### 2.3.2. Meccanismi di collasso per azioni statiche

Secondo la trattazione riportata in [25] la crisi di un arco può sopraggiungere secondo diverse modalità e l'innesco di un meccanismo piuttosto che di un altro, dipende da diversi fattori, quali la geometria della struttura (dimensione di freccia, corda, spessore, rinfianco [...]), le condizioni di vincolo, le tecniche costruttive, le caratteristiche dei materiali impiegati, i carichi attualmente agenti sulla struttura e la storia dei carichi che l'arco ha dovuto sopportare e quindi i danni che ne sono conseguiti.

È possibile identificare tre tipologie principali di crisi:

- formazione di cerniere plastiche per presso-flessione;
- ribaltamento dei piedritti;
- scorrimento relativo tra i conci.

Dallo studio della prima tipologia mediante l'analisi limite sarà possibile determinare la capacità portante ultima del tirante e del capochiave. Mediante l'analisi elastica sotto i carichi quasi permanenti sarà invece possibile ricavare il valore della pretesione da applicare alla barra.

#### 2.3.2.1. Presso-flessione

Nel primo caso il collasso si manifesta per la formazione di un numero sufficiente di cerniere plastiche lungo il profilo dell'arco. Per numero sufficiente si intende un numero tale da dar luogo a un meccanismo cinematico, ovvero al minimo quattro.

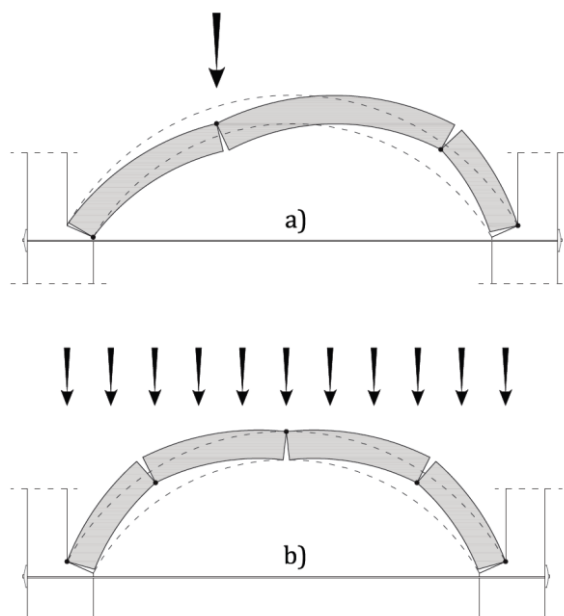


Figura 92. Rottura a flessione dell'arco.

La verifica nei confronti di questo meccanismo si esegue controllando che esista almeno una curva funicolare del carico che, in equilibrio con le azioni applicate, sia compresa all'interno della sagoma dell'arco. Essa si può svolgere con programmi di calcolo automatici ("Arco" di Piero Gelfi [53] o il foglio Excel contenuto in [25]), i quali restituiscono, in funzione di geometria e carichi, la funicolare dei carichi che tra le  $\infty^3$  possibili, genera il minor impegno statico per la struttura. Nel programma di Gelfi è sufficiente controllare graficamente o in base ai dati sull'eccentricità della spinta, che la funicolare sia ovunque contenuta entro la sagoma dell'arco. Il foglio di calcolo allegato in [25] permette inoltre di determinare il posizionamento delle cerniere plastiche e di valutare il livello di sicurezza della struttura in base a un coefficiente di sicurezza. Questo non è altro che il rapporto tra lo spessore reale dell'arco e quello minimo affinché sia garantita la stabilità.

La procedura proposta determina la soluzione di minor impegno statico per la struttura ipotizzando che i presidi tesi a far nascere il comportamento ad arco riescano a sopportare e a garantire lo sviluppo della spinta  $H$ , la quale è fornita come dato di output della procedura [19]. Il valore trovato andrà quindi uguagliato all'azione resistente  $T_{Ed}$  con cui dimensionare i diversi componenti della catena secondo le indicazioni contenute al capitolo 3.

È possibile che la quarta cerniera anziché formarsi lungo il profilo dell'arco si sviluppi su uno dei piedritti (o entrambi in caso di carico simmetrico). In questo caso è necessario contemplare anche i piedritti all'interno dell'analisi strutturale e verificare ancora che esista almeno una funicolare dei carichi contenuta nel profilo della struttura e in equilibrio con i carichi esterni agenti sulla struttura analizzata.

Un concetto a cui prestare molta attenzione durante la verifica è quello relativo a come conteggiare i carichi e in particolare quale valore affidare ai coefficienti di sicurezza e a quelli di combinazione delle azioni. In caso di strutture esistenti è bene premettere che le verifiche statiche potranno essere eseguite con riferimento ai soli SLU e pertanto si dovrà far riferimento alla combinazione fondamentale definita al punto 2.5.3 delle NTC 2008:

$$\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{G2} G_2 + \gamma_{Q1} Q_{k1} + \gamma_{Q2} \psi_{02} Q_{k2} + \gamma_{Q3} \psi_{03} Q_{k3} + \dots \quad (2.54)$$

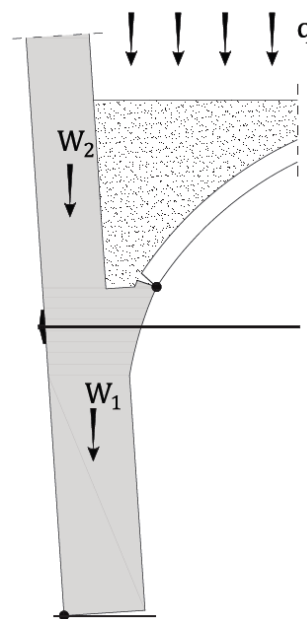


Figura 93. Schema di ribaltamento del piedritto.



Dove  $G_1$  rappresenta i carichi permanenti dovuti al peso proprio della struttura,  $G_2$  i carichi permanenti non strutturali,  $Q$  i carichi variabili,  $\gamma$  i coefficienti parziali delle azioni e  $\psi$  i coefficienti di combinazione.

Carichi permanenti strutturali	$V_{G1}$	favorevoli	0,9
		sfavorevoli	1,1
Carichi permanenti non strutturali *	$V_{G2}$	favorevoli	0,0
		sfavorevoli	1,5
Carichi variabili	$V_{Q1}$	favorevoli	0,0
		sfavorevoli	1,5

\* Nel caso in cui i carichi permanenti non strutturali (ad es. carichi permanenti portati) siano compiutamente definiti si potranno adottare per essi gli stessi coefficienti validi per le azioni permanenti.

**Tabella 1.** Coefficienti parziali da adottare nelle verifiche allo SLU [54].

Quando si studia il comportamento degli archi non risulta immediato definire se l'azione considerata darà un contributo favorevole o sfavorevole alla stabilità. Dunque converrà formulare più ipotesi, andando poi ad adottare quella combinazione di carico che fornisce il minor coefficiente di sicurezza dell'arco.

In genere il peso proprio è un carico favorevole e pertanto va assunto un coefficiente parziale pari a 0,9. I carichi variabili, distribuiti o concentrati, sono solitamente sfavorevoli e pertanto si assumono i coefficienti massimi indicati nella Tabella 1. Infine *il riempimento rappresenta un carico stabilizzante qualora il suo spessore in chiave sia nullo o comunque molto limitato [25]*, mentre diviene gravoso in caso contrario. Una volta dimensionata, sarà possibile disporre la catena all'altezza delle reni, ovvero dove agirà la spinta orizzontale  $H$ .

In base alle sollecitazioni taglianti ottenute dall'analisi, sarà poi possibile verificare l'assenza di slittamento tra i conci, confrontando l'azione agente con quella resistente. Quest'ultima è determinata moltiplicando la superficie compressa per una resistenza a taglio dedotta da un modello ad attrito e coesione del tipo Mohr-Coulomb (vedi punto 2.1.2.2).

Tramite l'analisi limite allo stato limite ultimo è dunque possibile trovare la capacità ultima della catena, tuttavia resta da definire come determinare il valore della pretensione da applicare alla barra. Secondo l'approccio proposto in [19] è possibile definire tale quantità mediante un'analisi elastica allo stato limite di esercizio.

Sotto l'ipotesi di comportamento elastico del materiale sarebbe in generale corretto studiare un arco isolato come una struttura incastrata alle imposte. Ciò risulta affidabile per archi in acciaio o in calcestruzzo armato, i quali possiedono un'elevata resistenza a flessione, ma non per quelli realizzati in muratura. Questi subiscono infatti un assestamento iniziale delle imposte a causa della caduta di

spinta e della viscosità più o meno marcata della malta che tende a produrre uno schema statico molto più simile all'arco a due cerniere [63]. Vista la presenza della catena è poi doveroso ricondursi al caso specifico di arco a spinta eliminata, dove un tirante di modulo elastico  $E_R$  e sezione  $A_R$  unisce tra di loro le imposte dell'arco assicurando lo sviluppo della spinta  $H$ .

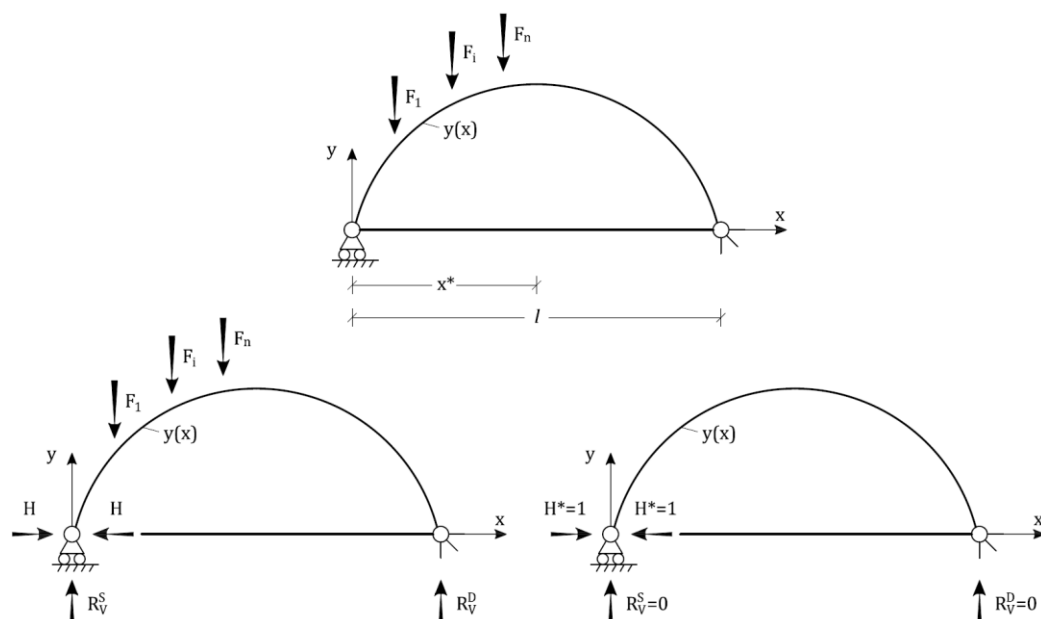


Figura 94. Arco a spinta eliminata [19].

Secondo la risoluzione completa presentata in [19, 64] è possibile determinare il valore della spinta applicando il principio dei valori virtuali. In primo luogo si definiscono le equazioni di momento, taglio e azione assiale per i due sistemi:

$$\begin{aligned}
 M_a(x) &= M_{tr}(x) - H y(x) \\
 N_a(x) &= H \cos \alpha(x) + (R_v^s - \sum F_j) \sin \alpha(x) = H \cos \alpha(x) + V_{tr}(x) \cos \alpha(x) \quad (2.55) \\
 V_a(x) &= -H \sin \alpha(x) + (R_v^s - \sum F_j) \cos \alpha(x) = -H \sin \alpha(x) + V_{tr}(x) \cos \alpha(x) \\
 M_{tr}^*(x) &= V_{tr}^*(x) = 0 \quad \forall x : 0 \leq x \leq l \\
 M_a^*(x) &= -y(x) \\
 N_a^*(x) &= \cos \alpha(x) \\
 V_a^*(x) &= -\sin \alpha(x)
 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dove:

- $N(x)$  è l'azione l'assiale (positiva se di compressione);
- $V(x)$  è il taglio (positivo se induce una rotazione oraria);

$M(x)$  è il momento flettente (positivo se orario)  
 $\alpha(x)$  è l'angolo compreso tra la tangente alla linea d'asse dell'arco,  $y(x)$ , e l'orizzontale. Dunque è ottenibile come derivata prima della linea d'asse.

Successivamente si applica il PLV:

$$0 = \int_0^l M_a^*(s) \left( \frac{M_a(s)}{EI(s)} + \mu(s) \right) ds + \int_0^l N_a^*(s) \left( \frac{N_a(s)}{EA(s)} + \lambda(s) \right) ds + \int_0^l V_a^*(s) \left( \frac{\chi V_a(s)}{GA(s)} + \nu(s) \right) ds + H^* \frac{Hl}{E_R A_R} \quad (2.57)$$

Dove:

$s$  è l'ascissa curvilinea della linea d'asse dell'arco  
 $\mu(s), \lambda(s), \nu(s)$  rappresentano eventuali distorsioni distribuite (rispettivamente flessionale, assiale e tagliante) che verranno trascurate nell'attuale trattazione.

Si semplifica poi l'equazione tenendo conto che  $ds = dx / \cos \alpha(x)$ .

$$0 = \int_0^l M_a^*(x) \frac{M_a(x)}{EI(x)} \frac{dx}{\cos \alpha(x)} + \int_0^l N_a^*(x) \frac{N_a(x)}{EA(x)} \frac{dx}{\cos \alpha(x)} + \int_0^l V_a^*(x) \frac{\chi V_a(x)}{GA(x)} \frac{dx}{\cos \alpha(x)} + H^* \frac{Hl}{E_R A_R}$$

A questo punto si esplicita l'equazione in funzione della spinta e si sostituiscono le precedenti (2.55)-(2.56) al suo interno:

$$H = \frac{\int_0^l \frac{y(x)}{\cos \alpha(x)} \frac{M_{tr}(x)}{EI(x)} dx - \int_0^l \frac{V_{tr}(x) \sin \alpha(x)}{EA(x)} dx + \int_0^l \frac{\chi V_{tr}(x) \sin \alpha(x)}{GA(x)} dx}{\int_0^l \frac{y^2(x)}{EI(x) \cos \alpha(x)} dx + \int_0^l \frac{\cos \alpha(x)}{EA(x)} dx + \int_0^l \frac{\chi \sin \alpha(x) \tan \alpha(x)}{GA(x)} dx + \frac{l}{E_R A_R}}$$

Dove al numeratore sono riportati i termini che determinano lo spostamento relativo tra le imposte dovuto ai carichi esterni, mentre il denominatore (in cui i primi tre termini vengono indicati globalmente con  $\Delta^*$ ) rappresenta tale spostamento per  $H^* = 1$ .

$$H = \frac{\int_0^l \frac{y(x)}{\cos \alpha(x)} \frac{M_{tr}(x)}{EI(x)} dx - \int_0^l \frac{V_{tr}(x) \sin \alpha(x)}{EA(x)} dx + \int_0^l \frac{\chi V_{tr}(x) \sin \alpha(x)}{GA(x)} dx}{\Delta^* + \frac{l}{E_R A_R}} \quad (2.58)$$

Siccome l'arco ha una sezione compatta è poi possibile semplificare il termine relativo alla deformabilità tagliante e riscrivere l'equazione come segue:

$$H = \frac{\int_0^l \frac{y(x)}{\cos \alpha(x)} \frac{M_{tr}(x)}{EI(x)} dx - \int_0^l \frac{V_{tr}(x) \sin \alpha(x)}{EA(x)} dx}{\int_0^l \frac{y^2(x)}{EI(x) \cos \alpha(x)} dx + \int_0^l \frac{\cos \alpha(x)}{EA(x)} dx + \frac{l}{E_R A_R}}$$

Anche in questo caso si raggruppano i primi due termini del denominatore sotto il simbolo di  $\Delta_1^*$ :

$$H = \frac{\int_0^l \frac{y(x)}{\cos \alpha(x)} \frac{M_{tr}(x)}{EI(x)} dx - \int_0^l \frac{V_{tr}(x) \sin \alpha(x)}{EA(x)} dx}{\Delta_1^* + \frac{l}{E_R A_R}} \quad (2.59)$$

Il termine a numeratore relativo all'azione assiale ha segno negativo e pertanto esso induce un decremento della spinta  $H$  chiamato appunto caduta di spinta. Questa inficia il meccanismo resistente ad arco in quanto produce, per qualunque distribuzione dei carichi, un decremento dell'azione assiale e un aumento delle sollecitazioni flessionali e taglianti. E' difficile stabilire a priori l'influenza di questo fenomeno sul comportamento strutturale e pertanto si consiglia di valutare ciò attraverso la seguente equazione [19], che fornisce una misura (in percentuale) dell'influenza della deformabilità assiale sul valore della spinta  $H$ .

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\int_0^l \frac{dx}{EA(x) \cos \alpha(x)} + \frac{l}{E_R A_R}}{\Delta_1^* + \frac{l}{E_R A_R}} \quad (2.60)$$

Se il valore dedotto dall'equazione (2.60) è inferiore al 10%, è allora ragionevole trascurare la deformabilità assiale e calcolare il valore della spinta come:

$$H = \frac{\int_0^l \frac{y(x)}{\cos \alpha(x)} \frac{M_{tr}(x)}{EI(x)} dx}{\int_0^l \frac{y^2(x)}{EI(x) \cos \alpha(x)} dx + \frac{l}{E_R A_R}} = \frac{\int_0^l \frac{y(x)}{\cos \alpha(x)} \frac{M_{tr}(x)}{EI(x)} dx}{\Delta_2^* + \frac{l}{E_R A_R}} \quad (2.61)$$

Il valore della pretensione da fornire al tirante sarà dunque pari al valore della spinta, calcolato mediante la (2.59) o la (2.61) per uno stato limite di esercizio in cui si prendono in considerazione i soli carichi permanenti.

### 2.3.2.2. Catene estradossali

La presenza di vincoli legati alla tutela del patrimonio artistico, come la presenza di affreschi sulla volta a botte, possono orientare le scelte del progettista verso l'utilizzo di catene estradossali occultate nel riempimento della volta.

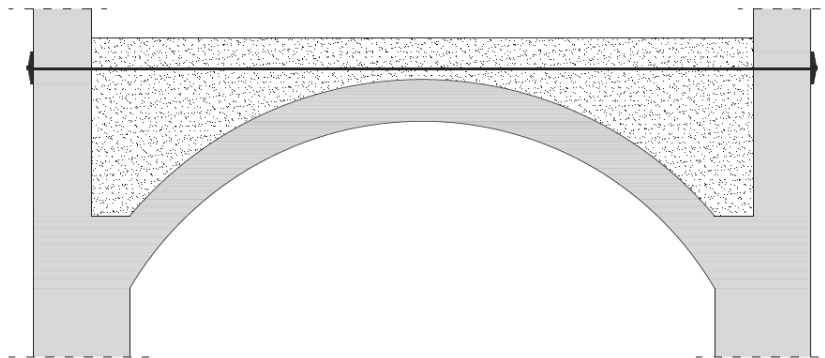


Figura 95. Schema classico di una catena estradossale.

In realtà con questo termine ci si dovrebbe riferire a tutti quei tiranti disposti oltre il piano delle reni (o del rinfiacco se più alto). Questo perché oltre tale altezza la catena non permette più lo sviluppo della spinta in maniera diretta, ma piuttosto, essa tende a consolidare il piedritto sottostante modificando l'eccentricità con cui agisce la risultante dei carichi esso sovrastanti.

Osservando molto attentamente la Figura 96 è possibile rendersi conto di quanto appena affermato. Nella parte sinistra della figura è infatti schematizzata una porzione di arco di cui si studia il funzionamento sotto i carichi di esercizio e quindi sotto un comportamento di tipo elastico. Essa inoltre non risulta consolidata mediante tiranti intradossali e pertanto la spinta innescata dal meccanismo ad arco ha modo di generarsi solo in forza del piedritto. Tuttavia, se il carico proveniente dalla struttura sovrastante ( $W_2$ ) agisce con una certa eccentricità, la sezione BB' non risulterà uniformemente compressa o peggio ancora, vi sarà una porzione di essa fessurata, con la conseguente riduzione della resistenza a pressoflessione della sezione.

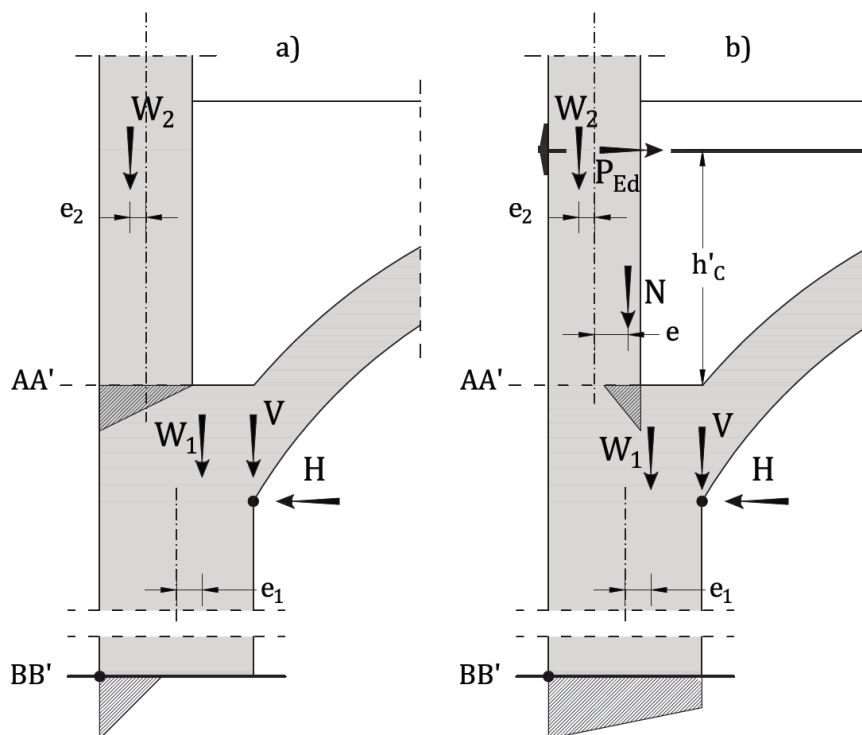
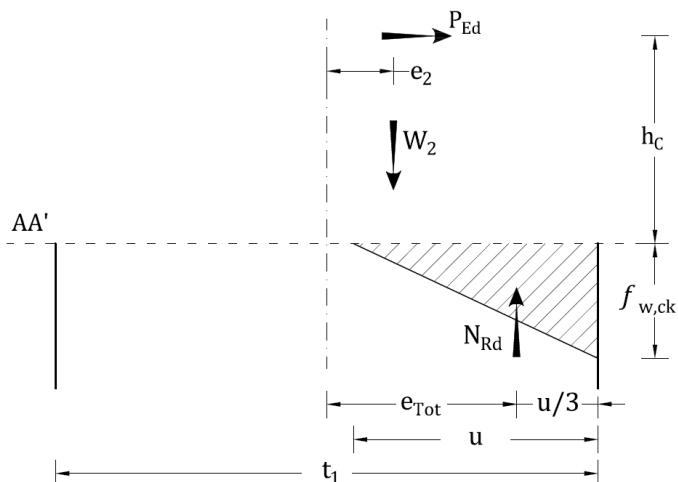


Figura 96. Schema di funzionamento della catena estradossale.

Anziché contrastare direttamente la spinta  $H$ , come con le catene intradossali, quelle estradossali si limitano a modificare l'eccentricità con cui agisce la risultante dei carichi delle strutture sovrastanti (vedi Figura 96-b) e così facendo, migliorano la distribuzione e l'entità delle compressioni agenti sulla porzione di muratura alla base del piedritto. In questo modo si permette lo sviluppo di una maggior spinta rispetto alla situazione non consolidata, così da incrementare la resistenza ultima della struttura e il suo comportamento in esercizio.

Come è facile intuire questo tipo di intervento di consolidamento risulta molto meno efficace rispetto al posizionamento di tiranti intradossali, oltre al fatto che il calcolo della capacità ultima della barra e la sua pretensione devono essere attentamente valutate in modo da impedire effetti indesiderati, come il ribaltamento della muratura su cui insiste il capochiave.

Il presente lavoro non intende occuparsi oltre del dimensionamento della sezione e della forza di pretensionamento nel caso di catene estradossali, in quanto i criteri di verifica espressi ai punti precedenti sono sufficienti a guidare la risoluzione del problema. Risulta tuttavia molto interessante studiare, in condizioni di esercizio e di collasso, la massima azione di pretensione e quella ultima che la struttura è in grado di assorbire.



**Figura 97.** Analisi della sezione AA' per determinare l'azione di pretensione massima.

Sotto i carichi di esercizio è possibile determinare il valore massimo dell'azione di pretensione ipotizzando che il materiale rimanga in campo elastico e che la sezione risulti parzialmente compressa per una lunghezza  $u$  pari a [19]:

$$u = 3 \left( \frac{t_1}{2} - e_{Tot} \right) \quad (2.62)$$

A questo punto si pone l'equilibrio alla traslazione e si sostituisce al suo interno l'equazione (2.62).

$$\begin{aligned} W_2 &= N = f_{w,ck} \frac{u}{2} d \\ W_2 &= f_{w,ck} \frac{3}{2} \left( \frac{t_1}{2} - e_{Tot} \right) d \\ \frac{2W_2}{3d f_{w,ck}} &= \frac{t_1}{2} - e_{Tot} \\ e_{Tot} &= \frac{t_1}{2} - \frac{2W_2}{3d f_{w,ck}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Successivamente si impone la condizione di equilibrio mediante l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al centro della sezione:

$$\begin{aligned}
 W_2 e_2 + P_{Ed} h_C &\leq N e_{Tot} \\
 W_2 e_2 + P_{Ed} h_C &\leq W_2 \left( \frac{t_1}{2} - \frac{2W_2}{3d f_{w,ck}} \right) \\
 P_{Ed} h_C &\leq W_2 \left( \frac{t_1}{2} - \frac{2W_2}{3d f_{w,ck}} \right) - W_2 e_2 \\
 P_{Ed} &\leq W_2 \frac{\frac{t_1}{2} - \frac{2W_2}{3d f_{w,ck}} - e_2}{h_C} \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

Mediante l'equazione (2.64) è possibile stabilire il valore massimo dell'azione di pretensione, tenendo però presente che il calcolo deve essere eseguito per una combinazione di esercizio in cui si prendono in considerazione i soli carichi permanenti.

Allo stato limite ultimo si ipotizza che la porzione di muratura ruoti attorno al bordo del pannello e qui vi sia la formazione di una cerniera plastica. In questo caso è sufficiente porre uguale a infinito la resistenza della muratura nell'equazione (2.64) e determinare così, mediante la combinazione fondamentale, l'azione resistente ultima che la muratura è in grado di assorbire. Se la muratura possiede una bassa resistenza a compressione si potrebbe adottare, come illustrato al punto precedente, uno stress-block per semplificare il diagramma delle tensioni non lineare e posizionare la cerniera nella mezzzeria di quest' ultimo.



## 3. La capacità delle catene

### 3.1. Introduzione

Affinché una catena metallica contribuisca al miglioramento della capacità resistente di una struttura in muratura e in generale ne impedisca i diversi meccanismi di ribaltamento, è necessario effettuare il corretto dimensionamento dei suoi componenti. La massima azione di trazione che un tirante è in grado di sopportare dipende infatti dalla resistenza offerta dalla barra d'acciaio, dal capochiave e dalla muratura limitrofa. In seguito verrà mostrato in dettaglio il calcolo delle resistenze di questi elementi, ma ora è importante mostrare la filosofia che guida la progettazione di questi componenti.

A fronte delle azioni sismiche è importante che il meccanismo di rottura permetta di dissipare molta energia prima di arrivare a collasso. Questo vale anche nel caso di azioni spingenti quasi statiche (per esempio la spinta di un arco): in termini di sicurezza strutturale è di gran lunga preferibile che il collasso sia preceduto da ampi stati fessurativi. E' quindi importante, in fase di progettazione, non prevedere, ma piuttosto governare il processo secondo cui si arriva al collasso della struttura, di modo che segua il criterio sopra descritto [58]. Ciò si ottiene favorendo la formazione di meccanismi duttili ed evitando la formazione di rotture fragili o di meccanismi indesiderati.

Nel caso in esame, questa filosofia di progettazione si esplica su due diversi livelli; il primo consiste nel dimensionare la capacità del "sistema" catena in funzione dei meccanismi di collasso dell'edificio. Il secondo concerne i principi con cui dimensionare i diversi elementi della catena in funzione dei loro meccanismi di rottura. Si tratta cioè di definire una gerarchia delle resistenze tra barra d'acciaio, capochiave e muratura limitrofa al capochiave.

E' lecito allora affermare che le catene devono assicurare ai pannelli murari un determinato livello di azione stabilizzante. Tale azione deve permettere alla struttura di resistere secondo meccanismi che impediscano o procrastinino il ribaltamento. Questi concetti, che corrispondono alla progettazione di un intervento che dia luogo ad un'opportuna gerarchia delle resistenze all'interno della struttura, condizionano le scelte progettuali relative al primo livello.

Per raggiungere quest'obbiettivo bisogna dunque evitare che la muratura ceda localmente secondo un meccanismo fragile di punzonamento. In questo senso si deve cercare di limitare il livello delle sollecitazioni agenti per mantenere il materiale nella fase elastica. Allo stesso tempo è necessario che il capochiave ripartisca in modo il più possibile omogeneo e con livelli di pressione sufficientemente ridotti

l'azione trasmessa dalla barra metallica della catena. Per permettere ciò bisognerà fare una stima adeguata della rigidità del capochiave in relazione al comportamento della muratura su cui insiste. Ciò comporta il dimensionamento di un capochiave in grado di distribuire convenientemente l'azione di progetto prevista. Si tratta dunque di un'analisi in cui è vincolante la deformabilità in campo elastico (fino a rottura del "sistema" catena), salvo verificare a posteriori la resistenza.

Per quanto riguarda la barra della catena va poi osservato che la stessa è soggetta a trazione pura, il che presuppone un meccanismo di rottura dotato di elevata duttilità. Ciò si realizza solo se viene effettuata una corretta scelta dell'acciaio e l'area della sezione retta è dimensionata in modo che il carico di progetto coincida con lo snervamento. In questo modo ai movimenti cinematici della struttura allo stato limite ultimo corrisponde la dissipazione di energia attraverso la deformazione plastica del tirante.

## 3.2. Resistenza della muratura

Il primo elemento che contribuisce a determinare la massima azione applicabile alla catena è definito dalla resistenza al punzonamento offerta dalla muratura. L'assenza di prove di laboratorio effettuate a riguardo e l'assenza di un modello teorico consolidato con cui la letteratura odierna stimi questo valore, fanno di quest'ultimo contributo il più difficile da definire e stimare correttamente.

I meccanismi resistenti e le formule proposte dalla normativa servono infatti a valutare la resistenza di macro porzioni di muratura, dove il materiale viene considerato isotropo e omogeneo. Nel caso in esame invece, le sollecitazioni si applicano a una micro porzione di muratura, la quale non può più essere considerata omogenea e tantomeno isotropa, dato che la riduzione della scala esalta il ruolo, prima minoritario, di fattori come la tessitura muraria o il mutuo rapporto tra le caratteristiche di legante e blocchi.

### 3.2.1. Stato dell'arte

Anche se la normativa nazionale con le NTC 2008 e quella europea con l' Eurocodice 6 non propongono criteri di verifica, in letteratura sono presenti alcune teorie per valutare l'azione resistente della muratura contro il punzonamento. Queste derivano da norme antisismiche regionali e da manuali sul consolidamento scritti da numerosi autori. In seguito vengono riportati i principali e più validi criteri sulla tematica, frutto di un corposo lavoro di ricerca.

#### 3.2.1.1. Esposizione tratta dall'autore Sisto Mastrodicasa

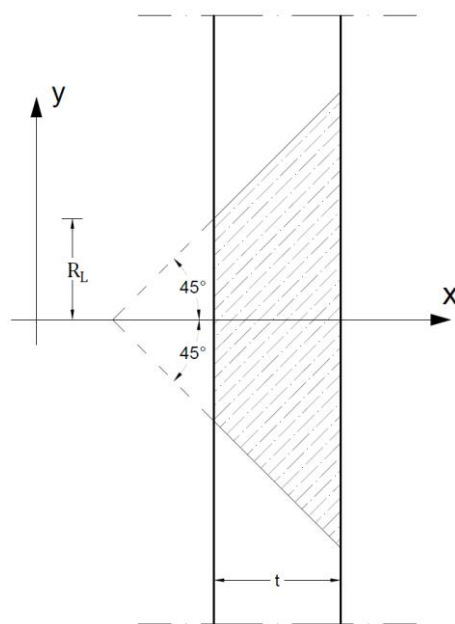
La maggior parte dei testi e delle linee guida antisismiche che trattano la questione si rifanno alla teoria proposta da *Sisto Mastrodicasa* in [21]. In questo volume, l'autore propone di ricavare la massima azione traente esercitabile dal tirante, deducendo tale valore, dal minore dei due contributi dovuti all'attrito e alla coesione nella muratura. Secondo l'autore vi è infatti un primo meccanismo resistente, per cui all'azione del tirante si oppone la coesione dell'apparato murario esprimibile mediante la resistenza a trazione di quest'ultimo. Oltre a questa bisogna poi valutare una seconda resistenza dovuta all'attrito che si genera per lo scorrimento di un solido di distacco rispetto all'altro. In entrambi i casi le resistenze sono calcolate ipotizzando di lavorare con un capochiave di tipo circolare.

Nel primo caso si descrive come la forza esercitata dal capochiave, tenda a "estirpare un solido di distacco costituito da un tronco di cono in cui la faccia esterna è definita dalla superficie del capochiave e quella interna è definita dalla regione paramentale delimitata dalla superficie conica che, involupando la piastra, diverge con l'angolo costante di  $45^\circ$  dall'asse del tirante. Secondo questa superficie conica si suppone che si verifichi lo strappamento del muro." [21]

La muratura viene dunque considerata un corpo omogeneo e isotropo, di cui si valuta la resistenza allo strappamento del solido di distacco moltiplicando la superficie laterale di tale volume, per la componente nella direzione dell'asse della catena della resistenza a trazione della muratura. Nel libro in esame, il valore della resistenza a trazione non è assunto in base alla tipologia di muratura, ma unicamente in funzione del tipo di malta usata. In seguito si riportano i dati proposti, lo schema del solido di distacco e il procedimento di verifica.

Carico di sicurezza ammissibile alla trazione	$f_{m,tk}$ [MPa]
Muratura con malta di cemento Portland a lenta presa	0,45
Muratura con malta di calce e pozzolana	0,10
Muratura con malta di calce, sabbia e pozzolana in parti eguali	0,10
Muratura con malta di calce in pasta e arena	0,03

**Tabella 2.** Valori della resistenza a trazione proposti [21].



**Figura 98.** Schema del solido di distacco per coesione.

L'azione resistente di calcolo dovuta alla coesione ( $T_{w,Td}$ ) è dunque pari alla resistenza a trazione della malta moltiplicata per la superficie laterale del solido di distacco causato da questo meccanismo di rottura ( $A_{SL,1}$ ) e diviso per un coefficiente di sicurezza.

$$T_{w,Td} = \frac{A_{SL,1} \cdot f_{m,tk}}{\gamma_M} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad [kN] \quad (3.1)$$

$$T_{w,Td} = \left[ 2\pi r + 2\pi(R_L + t) \right] \frac{1}{2} t \cdot \frac{f_{m,tk}}{\gamma_M} \quad [kN] \quad (3.2)$$

Il coefficiente di sicurezza è infine posto pari a 2 di modo da garantire un elevato grado di affidabilità.

$$T_{w,Td} = \pi t \cdot f_{m,tk} \left( R_L + \frac{t}{2} \right) \quad [kN] \quad (3.3)$$

Un affinamento di questo procedimento si può trovare nel libro “Trattato sul consolidamento e il restauro, Vol II”[65], scritto da Massimo Mariani, la cui pubblicazione è stata curata dal centro studi “Sisto Mastrodicasa”. Al suo interno possiamo ritrovare la stessa modalità di verifica, ma al posto dei precedenti valori usati per stimare la resistenza a trazione, qui si consiglia di utilizzare i valori dello sforzo tangenziale resistente  $\tau_k$  (assimilabile alla resistenza a taglio in assenza di sforzo assiale  $f_{w,vk0}$ ) desunti dalla tabella 1 della circolare del ministero dei lavori pubblici del 30/6/1981 [66].

Tipo di muratura	$f_{w,vk0}$ [MPa]	$f_{w,ck}$ [MPa]
<b>MURATURE NON CONSOLIDATE NON LESIONATE</b>		
• Mattoni pieni e malta bastarda	0,12	2,94
• Blocco modulare (con caratteristiche rispondenti alle prescrizioni del D.M. 3-3-75) (29x19; 19 cm) e malta bastrada	0,08	2,45
• Blocco in argilla espansa o calcestruzzo e malta bastarda	0,18	2,94
• Muratura in pietra (in presenza di ricorsi di mattoni estesi a tutto lo spessore del muro, il valore rappresentativo di $f_{w,vk0}$ può essere incrementato del 30%		
a) pietrame in cattive condizioni	0,02	0,49
b) pietrame squadrate e bene organizzato	0,07	1,96
c) a sacco in buone condizioni	0,04	1,47
• Blocchi di tufo di buona qualità	0,10	2,45
<b>MURATURE NUOVE</b>		
• Mattoni "pieni" con fori circolari e malta cementizia	0,20	4,91
• Mattoni doppio UNI 40% vuoto pieno e malta cementizia	0,24	4,91
<b>MURATURE CONSOLIDATE</b>		
• Mattoni pieni, pietrame squadrate, consolidate con due lastre in calcestruzzo armato da 3 cm minimo	0,18	4,91
• Murature in pietra a sacco consolidate con due lastre in calcestruzzo armato da 3 cm minimo	0,11	2,94

**Tabella 3.** Valori delle resistenze a compressione e a taglio in assenza di compressione.

L'uso di questi dati ha una portata rilevante poiché viene proposta una verifica a trazione monodirezionale, usando dei valori che la normativa in questione prescri-

ve vengano utilizzati per una verifica a taglio. Inoltre il valore della resistenza non è più frutto unicamente della malta, ma viene assegnata in funzione del tipo di muratura. Questa e altre criticità riscontrate in letteratura verranno poi discusse in un apposito spazio.

Nel secondo caso viene valutata l'azione resistente di calcolo ( $T_{w,vd}$ ) offerta dall'attrito causato dal carico gravante sulla porzione di muratura interessata dall'organo di ritegno. Se infatti venisse vinta la precedente azione resistente offerta dalla coesione, questo secondo contributo tenderebbe a impedire l'estirpazione del blocco.

Per determinare ciò, si trasforma la precedente superficie tronco-conica nella somma di infinite superfici cilindriche d'altezza  $dx$  e raggio  $r$  (pari a  $x$  nelle formule) e si valuta il diverso livello di compressioni agenti sulle superfici laterali infinitesime  $rd\alpha dx$  e sottoposte al coefficiente di attrito effettivo ( $\mu$ ) posto uguale a 0,75. Così facendo si applica la forza d'attrito alla superficie laterale di un cilindro avente altezza pari allo spessore della muratura e raggio pari a quello del capochiave circolare ipotizzato ( $r_1$ ), più una quantità ( $t/2$ ) determinata dalla proiezione orizzontale dell'intersezione tra la retta di diffusione dello sforzo (ipotizzata ragionevolmente a  $45^\circ$ ) e la mezzeria dello spessore murario.

L'azione resistente dovuta all'attrito è dunque il frutto della resistenza dovuta all'attrito ( $\mu\sigma_{Ed}$ ), ridotta di un coefficiente di sicurezza e moltiplicata per la superficie laterale del solido distacco ottimizzata per considerare il diverso livello di compressione ( $A_{SL,2}$ ).

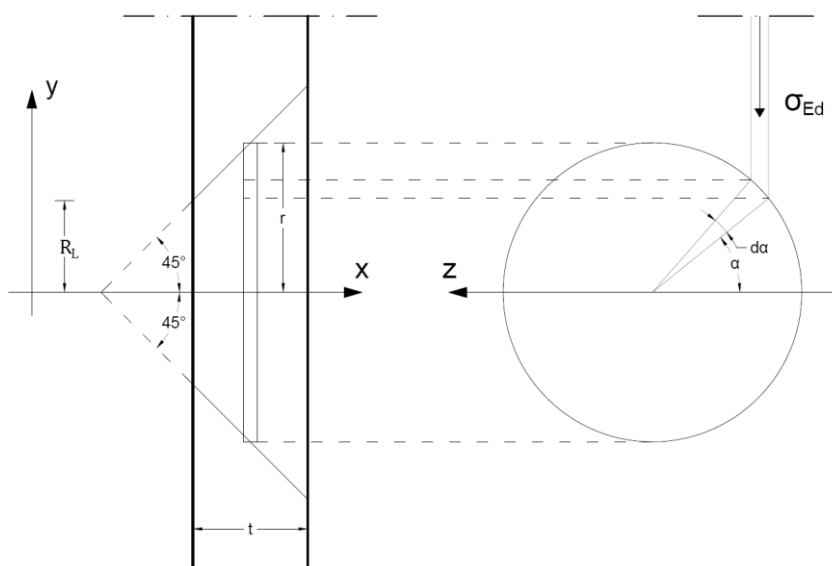
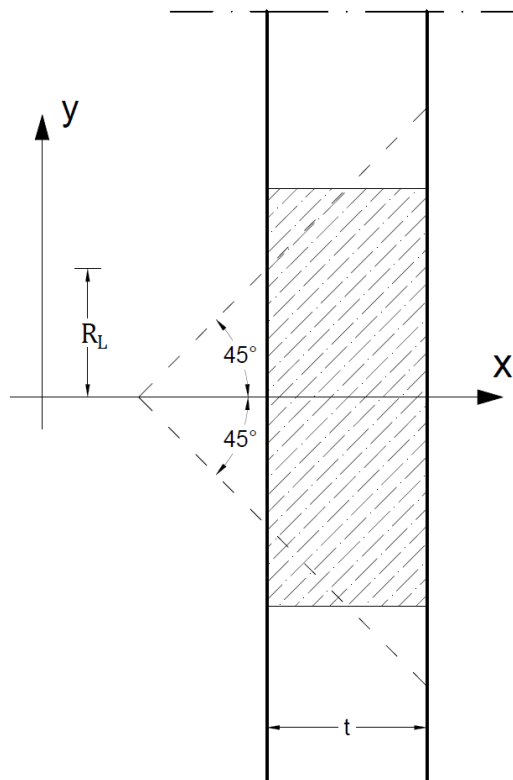


Figura 99. Schema del meccanismo ad attrito.

$$T_{w,Vd} = \frac{\mu\sigma_{Ed}}{\gamma_M} A_{SL,2} \quad [kN] \quad (3.4)$$

$$d^2T_{w,Vd} = \frac{\mu\sigma_{Ed}}{\gamma_M} x \sin \alpha dx d\alpha \quad [kN] \quad (3.5)$$

$$T_{w,Vd} = 4 \frac{\mu\sigma_{Ed}}{\gamma_M} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha \int_{x_1}^{x_2} x dx = 2 \frac{\mu\sigma_{Ed}}{\gamma_M} (x_2^2 - x_1^2) \quad [kN] \quad (3.6)$$



**Figura 100.** Schema del solido di distacco per attrito.

Posto poi  $x_1 = R_L$  e  $x_2 = R_L + t$ , e utilizzando un coefficiente di sicurezza pari a 2 si ottiene:

$$T_{w,Vd} = \mu\sigma_{Ed} t(t + 2R_L) \quad [kN] \quad (3.7)$$

La resistenza al punzonamento del maschio murario è dunque offerta dal minor contributo determinato mediante le equazioni (3.1) e (3.4).

Questo schema di verifica viene proposto senza modifiche anche nei libri [67-69] e nelle tesi di laurea [70, 71].

### 3.2.1.2. Esposizione tratta dalle linee guida antisismiche

Alcuni affinamenti della teoria proposta da S. Mastrodicasa sono offerti dalle due linee guida regionali antisismiche. Questi documenti sono stati redatti con il contributo della protezione civile, delle università e di istituti di ricerca.

Il primo documento è il “Manuale delle opere provvisionali urgenti post-sisma” [49]. Questo è il risultato di una convenzione tra il dipartimento di protezione civile, l’ufficio del servizio sismico nazionale e l’università degli studi della Basilicata e si occupa di tutti gli aspetti relativi alle opere provvisionali necessarie agli edifici colpiti da un evento sismico. Il taglio dato alla trattazione è quindi molto pragmatico e poco teorico, infatti vengono dati per lo più consigli di tipo pratico sulla messa in opera delle catene, rispetto a quelli destinati al dimensionamento degli organi di ritegno.

Un’informazione utile arriva dalla descrizione del solido di distacco per coesione in caso di capochiave avente la foggia di paletto.

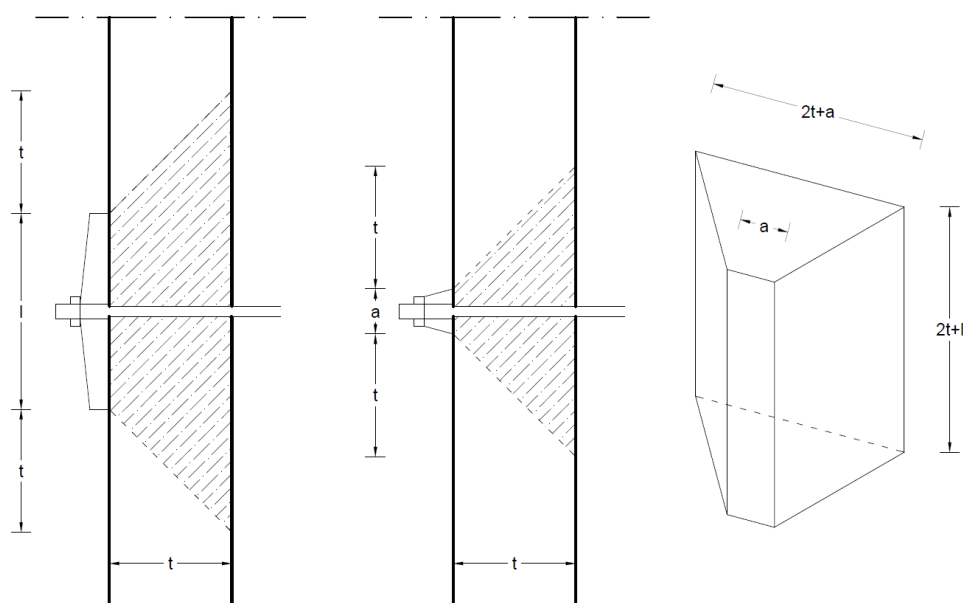


Figura 101. Schema del solido di distacco per capochiave a paletto.

Oltre a ciò, quando viene proposto il procedimento di stima della resistenza della muratura, si afferma in primo luogo che su questa bisogna eseguire una verifica a taglio, infatti, essendo il capochiave posizionato a ridosso dei solai e dei muri trasversali, gli sforzi flessionali sono trascurabili rispetto a quelli taglianti.

Tuttavia viene calcolato, con il procedimento di Mastrodicasa, il solo contributo dovuto alla coesione e dunque viene effettuata solo una verifica a trazione mediante l’equazione (3.1).

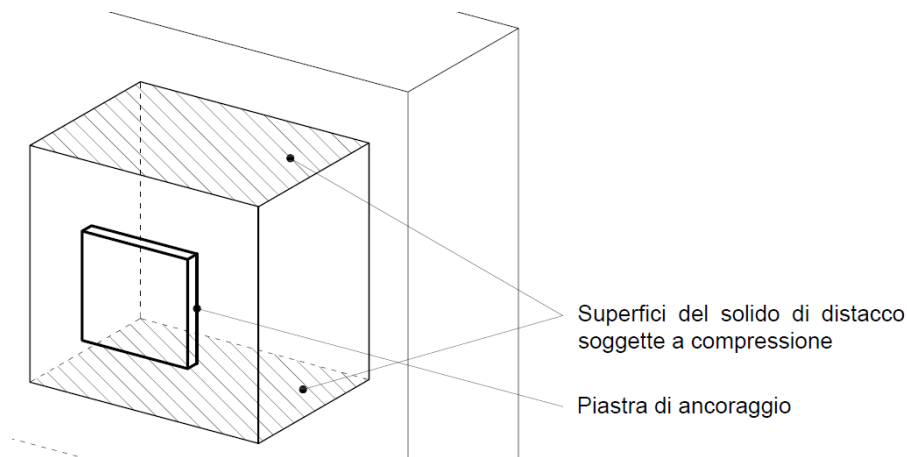


Il secondo documento è un foglio di calcolo Excel nato dalla collaborazione tra numerosi enti, tra cui la Protezione Civile e il Consorzio dei Laboratori Universitari di Ingegneria Sismica (ReLuis). Il documento è un applicativo per le verifiche sismiche dei meccanismi di collasso locali fuori piano, utilizzato negli edifici esistenti in muratura, mediante l'analisi cinematica lineare ed è allegato al testo [50]. Il suo funzionamento viene anche descritto nelle dispense [72] del corso di riabilitazione strutturale dell'università di Basilicata tenuto dal Professore Felice Ponzo.

Oltre a contenere alcuni fogli per il calcolo dei meccanismi di ribaltamento per pannelli in muratura, all'interno del documento è possibile trovare la procedura di calcolo per determinare, in caso di capochiave rettangolare, il tiro massimo da fornire alla catena per non superare la capacità portante della muratura. Questo è però valutato in maniera molto differente rispetto a quanto visto nei casi precedenti. Esso coincide con il minore tra due valori di cui il primo deriva da una rottura della muratura causata da uno sforzo di taglio. Il valore cercato è frutto della resistenza a taglio della parete in assenza di compressione ( $f_{w,vk0}$ ), moltiplicata per la superficie laterale del solido di distacco individuato con gli stessi criteri di quello visto nella Figura 100.

$$T_{w,vd} = \frac{f_{w,vk0}}{\gamma_M} A_{SL,2} \quad [kN] \quad (3.8)$$

E' interessante notare come le superfici verticali del parallelepipedo di distacco non sottoposte ad azione assiale, vengano in un primo momento escluse dal calcolo dell'area che fornisce la resistenza al punzonamento, in ottemperanza al punto 7.8.2.2.2 delle NTC 2008 [54]. Tuttavia il foglio di calcolo consente poi, a rischio del progettista, di considerare una quota parte di queste facce non sottoposte a compressione, per il calcolo dell'azione resistente.



**Figura 102.** Particolare della superficie laterale del solido di distacco.

Il meccanismo di rottura con cui viene valutato il secondo contributo è relativo alla resistenza del muro nei confronti della penetrazione della piastra di ancoraggio a causa di un eccesso di pressione di contatto. Tale valore è determinato dal prodotto della resistenza a compressione della parete moltiplicata per la superficie di contatto dell'apparecchio di ancoraggio con la muratura ( $A_C$ ) e divisa per un coefficiente di sicurezza di cui non viene fornito il valore.

$$T_{w,Cd} = \frac{f_{w,ck}}{\gamma_M} A_C \quad [kN] \quad (3.9)$$

### 3.2.1.3. Esposizione tratta dall'autore Michele Vinci

Un riassunto concorde e armonizzante delle precedenti teorie viene effettuato da Michele Vinci nel volume [59] di recente pubblicazione. Le verifiche svolte sono quelle già presentate in Mastrodicasa, ovvero deducendo la resistenza al punzonamento come il minore di due valori resistenti calcolati secondo un meccanismo di crisi per trazione e taglio. Tuttavia la trattazione è affinata secondo quanto riportato dal "Manuale delle opere provvisionali urgenti post sisma" e da altre intuizioni ricavate dai criteri delle NTC 2008.

Per quanto riguarda la verifica relativa alla crisi per trazione, per il calcolo dell'azione resistente offerta dalla muratura viene proposta l'equazione (3.1). Il solido di distacco è quello già proposto in Figura 98 in caso di capochiave circolare e viene data soluzione anche in caso di apparecchi di forma rettangolare o di paletto.

Tuttavia l'autore non fornisce alcuna indicazione su come ricavare il valore della resistenza a trazione, salvo poi, negli esempi successivi, uguagliare tale valore alla resistenza a taglio in assenza di compressione ( $f_{w,vk0}$ ) amplificata del fattore 1,5 così come descritto al punto C8.7.15 della circolare [57].

A seconda del tipo di capochiave l'equazione svolta diventa:

$$\begin{array}{ll} \text{Piastra circolare} & T_{w,Td} = f_{m,td} \pi t (t + 2R_L) \\ \text{Piastra rettangolare} & T_{w,Td} = f_{m,td} 2t (a + b + 2t) \\ \text{Paletto} & T_{w,Td} = f_{m,td} 2t (l_p + b_p + 2t) \end{array} \quad [N] \quad (3.10)$$

Il secondo valore dell'azione resistente è poi valutato secondo un meccanismo di crisi a taglio. Questa volta però, la resistenza a taglio della muratura ( $f_{w,vd}$ ) è determinata secondo il punto 4.5.6.1 delle NTC 2008.

$$f_{w,vd} = \frac{f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed}}{\gamma_M} \quad [MPa] \quad (3.11)$$

O in alternativa secondo il punto C8.7.1.5 della Circolare alle NTC 2008.

$$f_{w,vd} = \frac{f_{w,td}}{\beta} \sqrt{1 + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{w,td}}} \quad [MPa] \quad (3.12)$$

Dove la resistenza a trazione della muratura è pari alla resistenza a taglio in assenza di compressione moltiplicata per il fattore 1,5.

$$f_{w,td} = 1,5 \cdot f_{w,vd0} \quad [MPa] \quad (3.13)$$

Se si utilizza la resistenza a taglio espressa dalla (3.11) l'equazione generale dell'azione resistente di calcolo è pari a

$$T_{w,vd} = \int_{A_{SL,2}} f_{w,vd} \cdot dA \quad [kN] \quad (3.14)$$

Le formule vengono poi esplicitate in funzione delle diverse geometrie del capochiave:

Piastra Circolare	$T_{w,vd} = t(t + 2R_L)(\pi f_{vd0} + 2 \cdot 0,4\sigma_{Ed})$
Piastra rettangolare	$T_{w,vd} = 2t(f_{vd0}(a + b + 2t) + 0,4\sigma_{Ed}(a + t)) \quad [N]$
Paletto	$T_{w,vd} = 2t(f_{vd0}(l_p + b_p + 2t) + 0,4\sigma_{Ed} \cdot$ $\cdot ((l_p + t)\cos \zeta + (b_p + t)\sin \zeta))$

(3.15)

Quello che preme sottolineare è che nel calcolo dell'azione resistente secondo una crisi a taglio, rispetto a (3.4), dove Mastrodicasa considerava il solo contributo del termine dovuto all'attrito per compressione e rispetto a (3.8) dove veniva considerato il solo contributo della resistenza a taglio in assenza di compressione, ora, in ottemperanza alle NTC 2008, vengono contemplati entrambi i contributi resistenti. Inoltre viene fornita ampia trattazione su come valutare il livello di compressione agente sulle superfici curve e inclinate.

### 3.2.2. Confronto delle proposte

Arrivati a questo punto risulta molto utile effettuare un paragone tra i diversi procedimenti proposti dagli autori, di modo da valutarne il grado di sicurezza e iniziare a notarne le prime lacune.

Per effettuare questo paragone verrà valutata l'azione resistente caratteristica offerta dalla muratura utilizzando i procedimenti visti nel precedente capitolo, ovvero quello di Mastrodicasa, del Manuale delle opere provvisionali urgenti post-sisma, del foglio di calcolo di ReLuis e di Vinci.

L'analisi è effettuata su una parete costituita da una muratura a tre teste in mattoni pieni e malta di calce, le cui proprietà meccaniche sono estrapolate dalla tabella C8A.2.1 della circolare delle NTC 2008 utilizzando un fattore di confidenza pari a 1,35 e dai valori proposti da Mastrodicasa in [21] per quanto riguarda la resistenza a trazione della malta.

$$\begin{array}{ll}
 f_{w,ck} = 1,78 & [MPa] \quad E = 1800 \quad [MPa] \\
 f_{w,vk0} = 0,04 & [MPa] \quad G = 600 \quad [MPa] \\
 f_{m,tk} = 0,10 & [MPa] \quad (\text{Mastrodicasa})
 \end{array}$$

Su una muratura di questo tipo viene dunque valutata l'azione resistente al punzonamento al crescere delle compressioni. Il tutto è effettuato nel caso di un capochiave rettangolare di dimensioni  $a$  e  $b$  entrambe pari a 300 mm e di uno circolare avente un raggio della piastra pari a 170 mm. Essi hanno dunque una superficie di contatto praticamente identica.

In seguito sono riportati i risultati valutati al crescere del rapporto tra sforzo e resistenza a compressione, dai quali si evince che nel metodo proposto da Mastrodicasa, ad essere determinante è l'azione resistente calcolata con il criterio di rottura per trazione. Questa viene superata dal meccanismo per attrito solo per bassi livelli dell'azione di compressione. Oltre questo limite la resistenza offerta dall'attrito cresce a dismisura, favorita anche dall'assunzione di un coefficiente di attrito effettivo abbastanza elevato, poiché posto pari a 0,75 in luogo dello 0,4 proposto dalle NTC 2008 al punto 4.5.6.1.

Se si usa il metodo proposto dal Manuale delle opere provvisionali urgenti post-sisma, la resistenza al punzonamento è determinata unicamente dal termine frutto della coesione. Gli autori del documento prescrivono di adottare gli stessi valori della resistenza a trazione visti in Mastrodicasa e pertanto le linee risultano sovrapposte nei grafici.

L'approccio proposto da M. Vinci porta a determinare un valore dell'azione resistente dovuta a una crisi per trazione inferiore a quella dei due metodi precedenti, in quanto il valore usato per definire la resistenza a trazione è minore di quello proposto da Mastrodicasa. Infine il termine dovuto all'attrito risulta sempre molto maggiore di quello per trazione, ma minore di quello calcolato con il metodo precedente; questo perché si utilizza un coefficiente di attrito  $\mu$  inferiore e in linea con le NTC 2008.

Un discorso a parte merita il terzo metodo di risoluzione, ovvero quello del foglio di calcolo ReLuis. Esso è stato utilizzato solo nel caso del capochiave rettangolare non essendoci indicazioni in caso di piastre circolari. E' poi interessante notare che il terzo contributo, frutto della resistenza a compressione della muratura, è abbastanza superfluo, poiché l'ordine di grandezza della resistenza a compressione rispetto a quella a taglio in assenza di compressione è talmente superiore da consentire a questo contributo di essere sempre maggiore del primo. Quest'ultimo è poi il valore che garantisce il più alto fattore di sicurezza tra tutti i metodi visti, perché calcola l'azione resistente mediante una resistenza a taglio priva del contributo del termine funzione del livello di compressione ( $\mu\sigma_{Ed}$ ) e figlia unicamente della resistenza a taglio in assenza di compressione ( $f_{vk0}$ ).

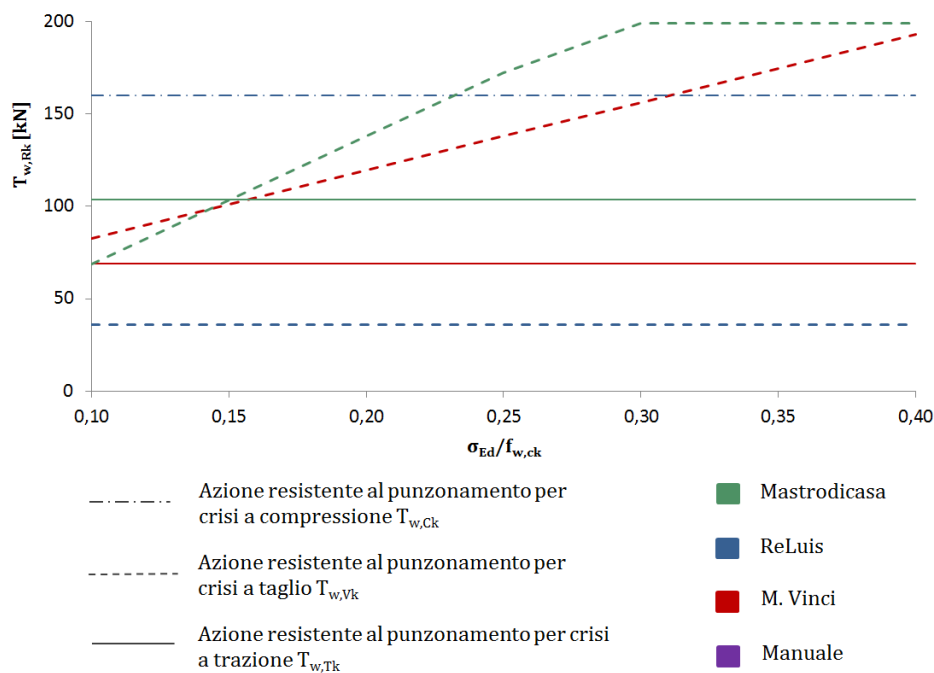
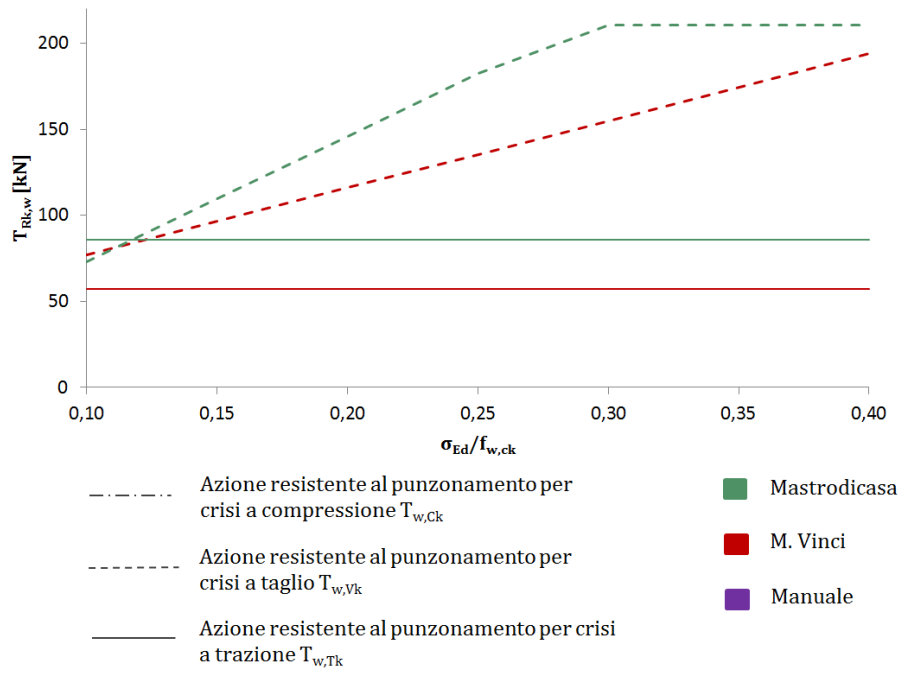


Figura 103. Confronto tra i valori dell'azione resistente con l'uso di una piastra rettangolare.



**Figura 104.** Confronto tra i valori dell'azione resistente con l'uso di una piastra circolare.

### 3.2.3. Analisi critica delle proposte

#### 3.2.3.1. Ipotesi generali

Da quanto descritto emerge un quadro discorde delle modalità di verifica proposte dalla letteratura attuale. La dimostrazione di ciò è data ad esempio dall'azione resistente dovuta a una crisi per taglio, calcolata secondo il foglio di calcolo ReLuis; il suo valore deriva unicamente dalla resistenza a taglio in assenza di compressione ed è valutato su un solido di distacco a forma di parallelepipedo, ma l'azione resistente dovuta a una crisi per trazione, calcolata secondo M. Vinci, è altresì il frutto della precedente resistenza a taglio, applicata però a un diverso solido di distacco. Insomma verifiche dovute a diversi meccanismi di crisi sono effettuate mediante un'identica resistenza.

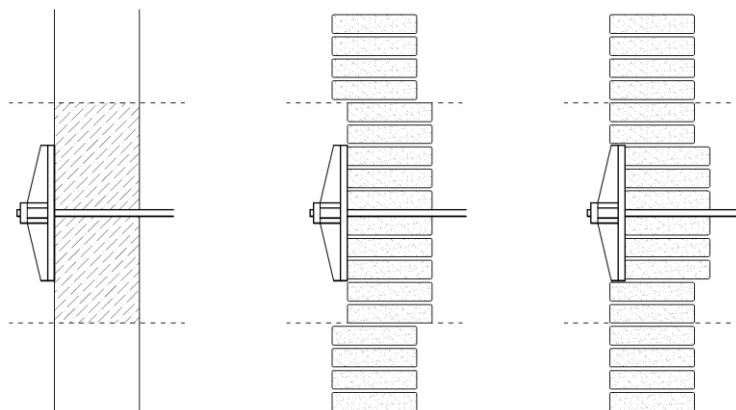
Dovendo però articolare un'analisi dei procedimenti esaminati è meglio iniziare facendo notare che i quattro metodi di valutazione riportati, rappresentanti la totalità degli approcci alla materia, non applicano contemporaneamente le stesse verifiche e se ne hanno qualcuna in comune, questa viene poi eseguita in maniera differente.

Permangono ulteriori dubbi sulle singole modalità con cui si procede a determinare la resistenza al punzonamento. In primo luogo perché tutti e quattro gli approcci partono dall'ipotesi di considerare la muratura come un solido omogeneo e isotropo. Se questa affermazione può essere assunta come corretta quando si eseguono le verifiche a compressione o a taglio di pannelli murari, perché permette una semplificazione del problema non imprecisa; non altrettanto può essere fatto quando si valuta la resistenza al punzonamento della muratura. Questo perché la riduzione della scala con cui si interagisce, implica l'esaltazione di fattori quali l'orditura muraria e il mutuo legame tra le caratteristiche degli elementi componenti la muratura. Su tale ipotesi si potrebbe comunque impostare un'analisi corretta del dettaglio, ma la letteratura si lancia in azzardate semplificazioni del solido di distacco. Azzardate perché nonostante l'ipotesi di isotropia premessa, si generalizza troppo il solido di distacco, concedendo così una sovrastima o anche una sottostima dell'area resistente al punzonamento.

Dell'affermazione ne viene fornito un esempio lampante grazie all'immagine successiva (Figura 105). In essa sono rappresentate le sezioni verticali di una muratura a due teste e in particolare nella prima è possibile osservare il solido di distacco per crisi a taglio applicato come descritto dalla letteratura proposta. Negli altri due casi viene evidenziata l'orditura in chiave del pannello mettendo così a confronto le linee di frattura proposte per una muratura considerata omogenea e isotropa, con quelle che intuitivamente è possibile tracciare considerando l'orditura.

Se si analizza il terzo pannello si può innanzitutto osservare che non esiste ragione per la quale si debba formare il solido di distacco proposto dalla letteratura. La

frattura dovrebbe infatti partire dal bordo del capochiave e non situarsi alcuni corsi dopo così come proposto dai testi analizzati.



**Figura 105.** Linee di rottura applicate a diversi pannelli.

Assumendo la muratura come un solido omogeneo e isotropo, la letteratura arriva a determinare dei solidi di distacco che rischiano di avere ben poca attinenza con quelli che si riscontrano nel fenomeno del punzonamento. Per quanto non sia obiettivo dell'esempio mostrare in maniera analitica il livello di errore, esso mostra in maniera abbastanza efficace che in caso di crisi per taglio l'area resistente sia erroneamente sovrastimata dai metodi precedenti.

Un valido procedimento di stima della resistenza offerta dalla muratura dovrebbe dunque tenere in conto se non la singola orditura, almeno le caratteristiche meccaniche dei componenti. In funzione delle caratteristiche appena citate, una corretta analisi dovrebbe permettere di determinare con precisione il solido di distacco mediante un'analisi delle linee di frattura che impiegano la minor quantità di lavoro per punzonare il pannello, valutando quindi la minor superficie di frattura tra le possibili superfici ipotizzate in base a una crisi della malta o dei mattoni.

### 3.2.3.2. *Verifica a trazione*

Se si volesse ammettere la correttezza delle ipotesi formulate e di conseguenze anche il fatto che il solido di distacco abbia a seconda della crisi per taglio o per trazione la forma presentata, c'è un altro aspetto che appare a tratti scorretto e a tratti lacunoso ed è quello relativo al valore da assegnare alle resistenze delle superfici di frattura.

Nel procedimento proposto da Mastrodicasa l'autore propone di utilizzare un valore desunto da prove di trazione rilevate sulla malta. Questo approccio appare tuttavia scorretto visto che se si parla di resistenza a trazione della muratura, questa non è il frutto delle sole caratteristiche della malta, ma anche di quelle dei blocchi, dello spessore dei giunti, dell'orditura e soprattutto del contenuto d'acqua nel mattone al momento della messa in opera [73]. Proprio quest'ultimo contributo, scar-



tato nella trattazione di Mastrodicasa, è alla base della formazione o meno di un elevata resistenza. Infatti, come è possibile vedere dagli studi di Grandet, riportati in [36], è il contenuto d'acqua e la porosità del blocco a determinare la formazione o meno di uno strato di ettringite all'interfaccia malta/blocco, necessario allo sviluppo di tale resistenza.

Sembrirebbe dunque più corretto ricavare il valore della resistenza a trazione direttamente da prove effettuate su un'intera porzione di muratura, piuttosto che da prove effettuate sui singoli componenti. Questo è l'approccio utilizzato da Mariani in [65] dove il valore proposto era infatti ricavato dalla tabella del decreto [36], oggi aggiornata dalla tabella C8A.2.1 della circolare alle NTC 2008, la quale proponeva dei valori in funzione del tipo di muratura e delle sue qualità.

Tuttavia all'interno di questa tabella non viene riportato il valore della resistenza a trazione, bensì quello della resistenza a taglio in assenza di compressione che gli autori paragonano alla prima. Tale accostamento è proposto in quanto *"negli elementi soggetti al solo taglio, la tensione principale di trazione uguaglia lo sforzo tangenziale unitario"* [21].

Utilizzando la teoria relativa al cerchio di Mohr è possibile descrivere la tensione principale di trazione come:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{Ed})^2} \quad [MPa] \quad (3.16)$$

che in assenza di tensione assiale  $\sigma_{Ed}$  diventa

$$\sigma_1 = \beta\tau_{Ed,u} \quad [MPa] \quad (3.17)$$

E dunque, quando il valore della tensione principale raggiunge il valore corrispondente alla rottura, è possibile scrivere

$$f_{w,tk} = \beta f_{w,vk0} \quad [MPa] \quad (3.18)$$

Osservando la precedente equazione è possibile mettere in evidenza il fatto che è erroneo, come proposto in [65] da Mariani, paragonare la resistenza a trazione a quella a taglio senza tenere conto del fattore amplificativo  $\beta$  che tiene conto della snellezza del maschio murario. Di tale fattore tiene invece conto l'approccio proposto da M. Vinci attraverso l'equazione (3.13).

In ogni caso resta il fatto che la muratura in esame è sottoposta a un diverso stato tensionale in quanto vi è la presenza di uno sforzo di compressione che innalza la resistenza a trazione dell'apparato murario. Pertanto le formule viste in tutta la letteratura sottostimano il valore dell'azione resistente secondo un meccanismo di crisi per trazione.

### 3.2.3.3. Verifica a taglio

I procedimenti descritti per determinare il contributo resistente dovuto a una crisi per taglio hanno in comune un identico solido di distacco. Come già descritto questo risulta però poco plausibile, in quanto non tiene conto dell'orditura presente sovrastimando così la superficie resistente. Inoltre vi è grande discordanza tra i vari approcci nel determinare le superfici da conteggiare come resistenti e il valore da assegnare alla resistenza stessa.

In ottemperanza al punto 7.8.2.2.2. delle NTC 2008 bisognerebbe infatti escludere dal calcolo dell'area resistente tutte quelle superfici non soggette a compressione, ma nessuna delle metodologie viste, salvo [72] e parzialmente [59], lo specifica.

Come visto al punto 3.2.1.3 delle NTC 2008, quest'ultima e la Circolare applicativa definiscono la resistenza a taglio della muratura sulla base del criterio di rottura Mohr-Coulomb e di quello di Turnsek-Cacovic. Dei due i procedimenti visti utilizzano essenzialmente il primo per stimare la resistenza al taglio. Secondo questo principio la resistenza cercata è data dalla somma di un termine costante  $c$  dovuto alla coesione (assimilabile alla resistenza a taglio in assenza di compressione  $f_{w,vk0}$ ) e di un termine proporzionale alla tensione di compressione media nella sezione ( $\sigma_{Ed}$ ) secondo il coefficiente di proporzionalità ( $f$ ), detto coefficiente di attrito apparente.

$$f_{w,vk} = c_{mb} + f \sigma_{Ed} \quad (3.19)$$

Alla luce di ciò possiamo confrontare le metodologie viste e notare che:

- Mastrodicasa basa la resistenza a taglio unicamente sul contributo dell'attrito trascurando quello della coesione, il quale viene utilizzato parallelamente per sviluppare il calcolo del secondo meccanismo resistente per crisi a trazione. Il valore del coefficiente di attrito è molto alto (0,75 in luogo dello 0,4 proposto dalle norme) e non è posto un limite superiore alla resistenza, fattore che causa l'esplosione del risultato al crescere del livello di compressione agente;
- Il foglio di calcolo proposto da ReLuis invece calcola la resistenza unicamente sulla base del contributo della coesione e dunque della resistenza a taglio in assenza di compressione, il che determina un basso valore della resistenza se paragonato a quello delle norme;
- Vinci segue fedelmente le NTC 2008 evidenziando anche a seconda della geometria del capochiave come valutare il diverso livello di compressione agente. Inoltre accenna il possibile uso del criterio di Turnsek-Cacovic.

### 3.2.4. La resistenza al punzonamento

#### 3.2.4.1. Ipotesi sulla modellazione

Per quanto scritto al punto precedente emerge la necessità di stabilire un nuovo procedimento di stima della resistenza al punzonamento, il quale sia esente dagli errori e dalle incertezze evidenziate.

Il procedimento che sarà mostrato nei punti a seguire determina l'azione resistente della muratura contro il punzonamento come la minore di due diversi valori. Questi sono determinati, come in alcuni dei casi presenti in letteratura, ipotizzando che la rottura avvenga secondo un meccanismo di crisi per taglio e di uno per trazione.

$$T_{w,Rk} = \min(T_{w,Vk}, T_{w,Tk}) \quad (3.20)$$

Si è scelto di escludere una crisi per schiacciamento dovuto alla spinta laterale perché come già accennato, il valore dell'azione resistente ottenuto secondo questo schema risultava sempre maggiore dei precedenti. Affinché tale ipotesi sia sempre verificata è tuttavia necessario che la pressione esercitata dal capochiave sia sufficientemente uniforme lungo il suo sviluppo e non presenti delle pericolose concentrazioni degli sforzi. Le condizioni per ottemperare a questa condizione verranno esplicitate nel capitolo riguardante i capichiave.

Indipendentemente dal meccanismo di crisi la formula che descrive la capacità resistente è del tipo:

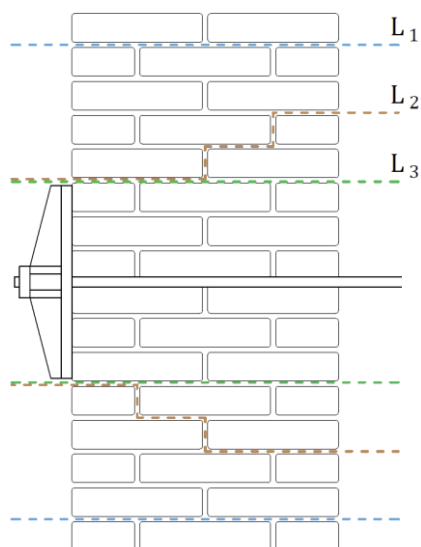
$$T_{w,Rk} = f A_L \quad [N] \quad (3.21)$$

Dove  $f$  è la resistenza e  $A_L$  l'area resistente, così come già visto nella letteratura esaminata.

Tuttavia rispetto a quanto visto nei punti precedenti si procederà ad affinare il procedimento secondo due vie; in primo luogo la corretta scelta di un solido di distacco che non sovrastimi la superficie resistente in una crisi a taglio e che tenga conto dell'effetto positivo indotto dalle compressioni quando la rottura avviene per trazione. A ciò si accompagna il secondo affinamento, che consiste in una determinazione affidabile della resistenza a trazione nel caso del calcolo di  $T_{w,Tk}$ .

### 3.2.4.2. Crisi per taglio

Come già affermato al punto 3.2.3.3 il solido di distacco proposto in letteratura per una crisi a taglio risulta ingiustamente sovradimensionato. Non esiste infatti alcuna motivazione per cui la frattura debba seguire il tratteggio L1 indicato nella Figura 106, mentre appare molto più plausibile che la frattura abbia inizio lungo il bordo del capochiave (dove inizia la diffusione della spinta nella muratura circostante) e da quel punto prosegua lungo il percorso che richieda la minima energia di frattura, ovvero la linea L3.



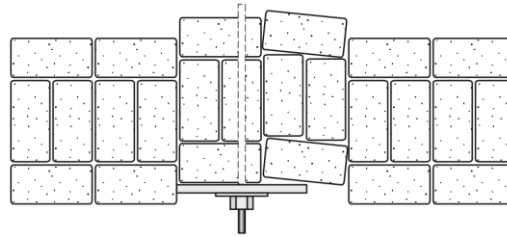
**Figura 106.** Possibili linee di frattura per crisi a taglio lungo la sezione verticale della muratura.

A giudicare da Figura 106 la distinzione tra L2 ed L3 è abbastanza ininfluenza in quanto i giunti di testa presenti lungo L2, per loro natura ed essendo sollecitati a trazione, offrono uno scarsissimo contributo alla resistenza del meccanismo complessivo. Quello che conta è dunque la superficie parallela all'azione di tiro che appare simile in entrambi i casi. Tuttavia se si analizza lo sviluppo del meccanismo in tre dimensioni è possibile notare che la linea L2 presuppone lo sviluppo di un solido di distacco tronco-piramidale, la cui proiezione sull'orizzontale è una superficie trapezoidale più ampia di quella rettangolare che si ottiene secondo il meccanismo di frattura L3. Pertanto quest'ultima rappresenta il meccanismo più plausibile e quindi quello che verrà adottato nel seguito. Ovviamente il percorso L3 presuppone che la rottura avvenga per scorrimento lungo i corsi di malta che solitamente rappresentano il materiale meno resistente.

Constatato che in sede di progetto non è possibile definire con precisione la collocazione del capochiave rispetto ai blocchi, è opportuno definire i diversi procedimenti con cui determinare la superficie resistente in base al tipo di tessitura muraria e in base al livello di conoscenza della stessa.

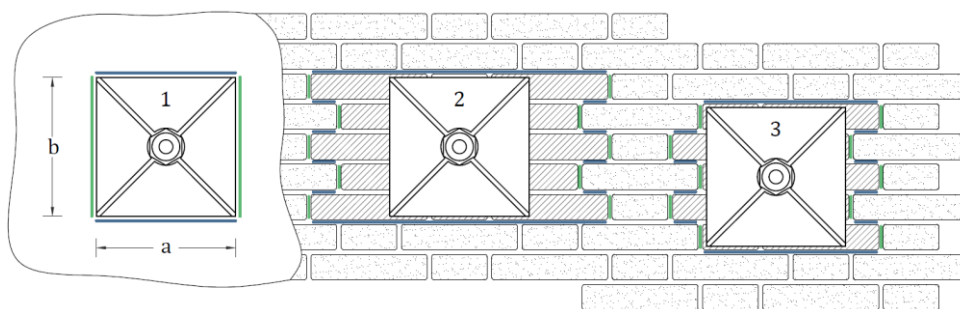
### Murature costituite da filari orizzontali

Se si dispongono delle chiavarde su una muratura costituita da blocchi squadrati disposti secondo uno schema a filari orizzontali è opportuno studiare il ruolo dei mattoni su cui il capochiave agisce solo parzialmente per definire correttamente il valore della superficie resistente.



**Figura 107.** Possibile modalità di scalzamento di un blocco parzialmente soggetto alla spinta.

E' importante sottolineare che i blocchi interessati solo parzialmente dall'azione della piastra subiranno uno scalzamento (vedi Figura 107), piuttosto che fratturarsi parallelamente alla direzione della spinta. Tale fenomeno per poter avvenire necessita di uno scorrimento sui letti di malta, come nei blocchi interamente soggetti alla spinta della chiavarda, e pertanto è importante considerare anche il perimetro di questi elementi nel calcolo della superficie resistente. Un altro elemento da tenere in conto è il differente comportamento dei giunti di testa rispetto a quelli orizzontali; nei primi si riscontrano spesso carenze di riempimento che portano a definire un valore della resistenza a taglio in assenza di compressione inferiore a quello dei giunti orizzontali e comunque questa resistenza è nettamente inferiore a quella delle superfici interessate da uno sforzo di compressione (in blu nella Figura 108). Il loro contributo verrà dunque scartato nel calcolo della superficie resistente.



**Figura 108.** Schema geometrico per muratura a filari orizzontali e capochiave rettangolare.

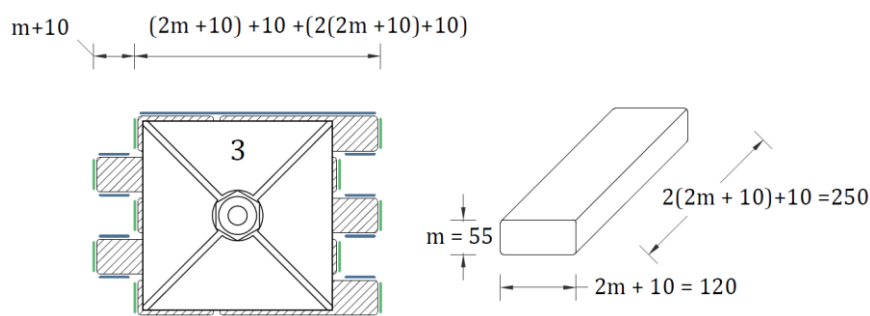
In Figura 108 è rappresentato il prospetto frontale di tre capochiave quadrati disposti su una muratura a quattro teste. Nel primo caso il progettista non è in grado di distinguere l'orditura a causa della presenza dell'intonaco; ciò potrebbe portare

a calcolare l'area resistente come composta unicamente dalle superfici orizzontali di dimensione pari ad  $a$ .

$$A_L = 2at \quad [mm^2]$$

Questo porterebbe tuttavia a sottostimare l'area resistente in quanto non vengono prese in considerazione le superfici orizzontali dei blocchi sottoposti parzialmente all'azione della piastra. Il valore di queste ultime varia in base alla posizione della chiavarda, spostandosi dal caso più favorevole della piastra n°2 al meno favorevole della piastra n°3. Il loro calcolo risulta tuttavia lungo e poco agevole, oltre a poter essere vanificato da un leggero difetto di posizionamento o da correzioni di posizionamento in corso d'opera.

Risulta invece maggiormente proficuo osservare che anche nel caso meno favorevole della piastra n°3, il valore delle superfici orizzontali dei blocchi a rischio di scalzamento e di quelli interamente soggetti all'azione piastra è almeno pari al valore del perimetro della piastra stessa.



**Figura 109.** Schema geometrico per la valorizzazione dei giunti orizzontali.

In base allo schema di Figura 109 la lunghezza del perimetro del capochiave risulta pari a  $30 \cdot 4 = 120\text{ cm}$ , mentre la lunghezza dei giunti orizzontali risulta pari a:

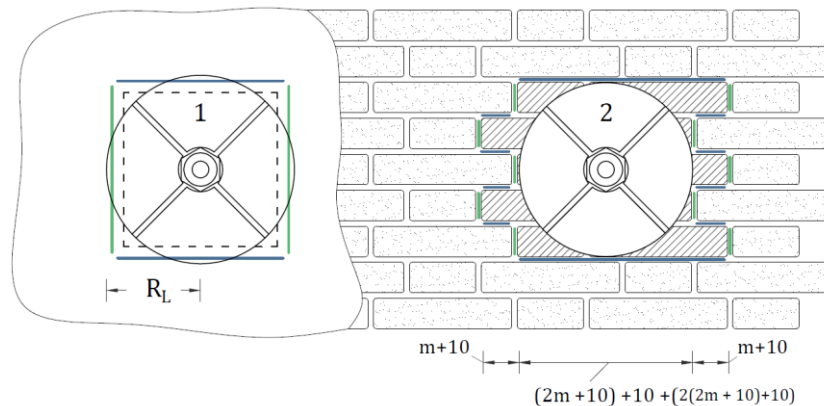
$$2((2m + 10) + 10 + (2(2m + 10))) + 8(m + 10) = 128\text{ cm}$$

Siccome questo è anche il caso che presenta la minor lunghezza dei giunti orizzontali è ragionevole assumere che la superficie resistente al punzonamento per crisi a taglio e sottoposta a un'azione di compressione, è almeno pari a

$$A_L = 2(a + b)t \quad [mm^2] \quad (3.22)$$

Il procedimento può essere replicato per un capochiave circolare. Prima di procedere è però importante sottolineare che se questo tipo di piastra viene disposta su una muratura costituita da blocchi quadrati disposti per filari orizzontali, è scorretto valutare la superficie resistente in base al contorno del capochiave. Questo

perché così facendo si utilizzerebbe una superficie circolare, mentre la muratura in esame attua il meccanismo resistente a scorrimento operando lungo i giunti orizzontali di malta. Pertanto è necessario riferirsi alle superfici orizzontali corrispondenti ai letti di malta.



**Figura 110.** Schema geometrico per muratura a filari orizzontali e capochiave circolare.

In questo senso la superficie della chiavarda n°1 potrebbe essere identificata con la proiezione orizzontale della superficie laterale ottenuta estrudendo il perimetro del capochiave lungo lo spessore della muratura.

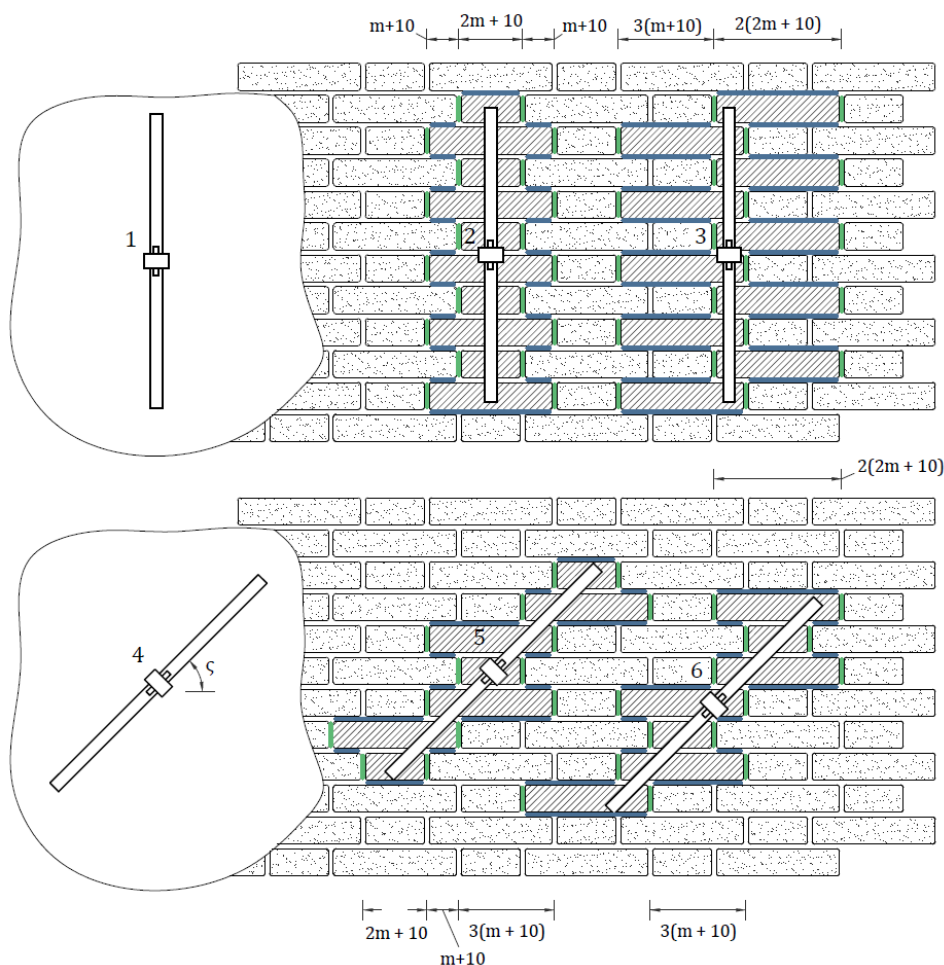
$$A_L = 2(2R_L)t \quad [mm^2]$$

Come nel caso precedente questo porterebbe ad escludere il contributo dei giunti orizzontali di quei blocchi parzialmente interessati dall'azione del capochiave. Giunti che determinano superfici di difficile conteggio, ma che sono implementabili nel calcolo attraverso un oculato ragionamento. Per farlo è sufficiente assumere che i giunti orizzontali soggetti a compressione siano pari al perimetro del quadrato di area equivalente al capochiave circolare in esame.

$$A_L = 4t\sqrt{\pi R_L^2} \quad [mm^2] \quad (3.23)$$

Se ad esempio effettuiamo il calcolo della superficie resistente complessiva, ottenuta posizionando la chiavarda nella posizione meno favorevole (caso n°2 di Figura 110), si determina una lunghezza dei giunti orizzontali coinvolti nel meccanismo resistente pari a 118 cm. Un valore dunque molto superiore a quello determinabile attraverso la proiezione orizzontale della piastra (62,8 cm), ma di poco superiore al perimetro del quadrato di area equivalente (111 cm).

In caso di capochiave a paletto diventa più difficoltoso conteggiare all'interno del meccanismo resistente il contributo dei blocchi scalzati. Questo perché la misura dei giunti orizzontali oltre a variare in base al posizionamento della chiavarda, cambia in base all'inclinazione del paletto.



**Figura 111.** Schema geometrico per muratura a filari orizzontali e capochiave a paletto.

Se si osserva il capochiave n°4 di Figura 111 non è possibile distinguere l'orditura e pertanto se si mantiene l'ipotesi di non conteggiare i giunti di testa del meccanismo resistente si potrebbe calcolare la superficie resistente come il doppio prodotto della proiezione orizzontale della lunghezza della chiavarda estrusa lungo lo spessore della muratura.

$$A_L = 2tL_p \cos \zeta \quad [mm^2] \quad (3.24)$$

Data la doppia variabilità del problema la formula presentata porta non solo a trascurare il contributo dei blocchi scalzati, ma anche ad azzerare l'area resistente quando il paletto è disposto lungo la verticale.

Se si effettua il calcolo complessivo dei giunti orizzontali a seconda dell'inclinazione e a seconda di un posizionamento più o meno favorevole del paletto si determi-



na (si faccia riferimento alla Figura 109 per le dimensioni del blocco) una superficie resistente pari a:

$$n^{\circ}2 \quad A_L = t((2m+10) + (2(2m+10)) + 18(m+10)) = 795600 \text{ mm}^2$$

$$n^{\circ}3 \quad A_L = t(18(3(m+10)) + 2(2(2m+10))) = 2055300 \text{ mm}^2$$

$$n^{\circ}5 \quad A_L = t(2(2m+10) + 8(m+10) + 4(3(m+10))) = 795600 \text{ mm}^2$$

$$n^{\circ}6 \quad A_L = t(2(2(2m+10)) + 4(3(m+10)) + 8(m+10)) = 928200 \text{ mm}^2$$

E' interessante notare che anche secondo il posizionamento meno a favore di sicurezza, il valore della superficie resistente è identico sia per una disposizione verticale (n°2) che per una obliqua (n°5). Con questo tipo di orditura è pertanto possibile escludere l'influenza dell'inclinazione sul calcolo dell'area resistente.

Il calcolo della superficie resistente sottoposta a compressione si può dunque effettuare mediante la seguente formula:

$$A_L = 2tL_p \quad [mm^2] \quad (3.25)$$

Poiché essa individua un valore a favore di sicurezza per ogni inclinazione e per ogni disposizione della chiavarda. A riprova di ciò, è possibile utilizzare la precedente equazione per valutare l'area resistente della muratura a quattro teste del caso precedente sottoposta all'azione dello stesso paletto di lunghezza pari a 600 mm.

$$A_L = 2tL_p = 2 \cdot 510 \cdot 600 = 612000 \text{ mm}^2$$

Un valore certamente inferiore a quello determinabile studiando lo specifico sviluppo delle superfici di frattura, ma superiore a quello ottenibile mediante il primo approccio presentato dall'equazione (3.24). Senza contare che l'equazione (3.25) consente di conteggiare parzialmente il contributo dei blocchi scalzati anche quando la presenza dell'intonaco impedisce lo studio delle superfici di frattura.

A ulteriore dimostrazione (aggiungere schema per muro a due teste in chiave)... funziona anche per questo.

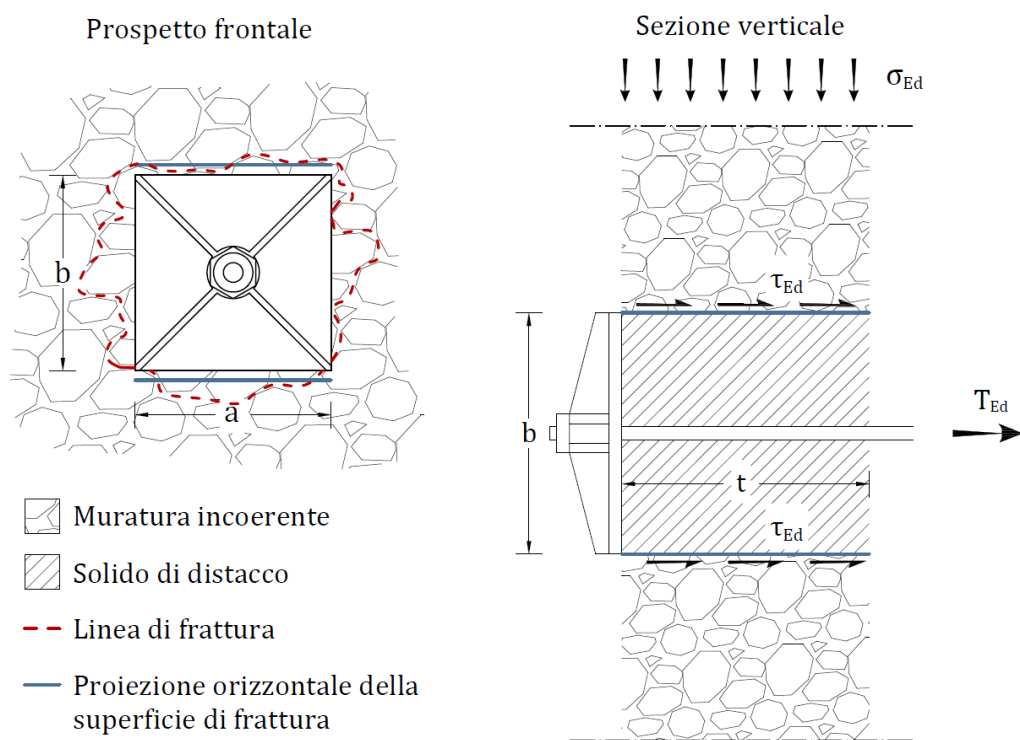
In conclusione bisogna tuttavia ribadire che gli approcci presentati per la valutazione della superficie resistente secondo un meccanismo di crisi per scorrimento in base alla forma del capochiave, hanno validità limitata a una muratura costituita da blocchi squadrati disposti per filari orizzontali. Inoltre è importante sottolineare che le formule presentate possono subire variazioni a seconda del numero di teste, della disposizione dei blocchi e della dimensione degli stessi. I procedimenti mostrati, oltre ad essere un corretto metodo di valutazione della superficie resistente per il singolo caso presentato, si prestano dunque ad essere il metodo di indagine per valutare altre tipologie di murature.

**Murature costituite da materiale incoerente**

Se la muratura è costituita da pietrame disomogeneo, come ciottoli o pietre erratiche irregolari, sarebbe errato considerare validi i precedenti ragionamenti perché questi sono stati sviluppati secondo un meccanismo resistente che ha tenuto in considerazione il contributo di quei blocchi parzialmente investiti dall'azione del capochiave.

Osservando lo schema di Figura 112 è possibile osservare che nel caso di murature in pietrame disomogeneo non è possibile conteggiare nel calcolo dell'area resistente i giunti orizzontali dei blocchi scalzati. Questo perché la forma irregolare delle pietre non permette la creazione di un giunto continuo e perfettamente orizzontale. Pertanto, volendo rimanere a favore di sicurezza, è più ragionevole considerare che il solido di distacco coincida con il perimetro del capochiave estruso lungo lo spessore della parete. In caso di capochiave rettangolare si trascurano dunque le superfici verticali non compresse e si determina l'area resistente attraverso la seguente equazione:

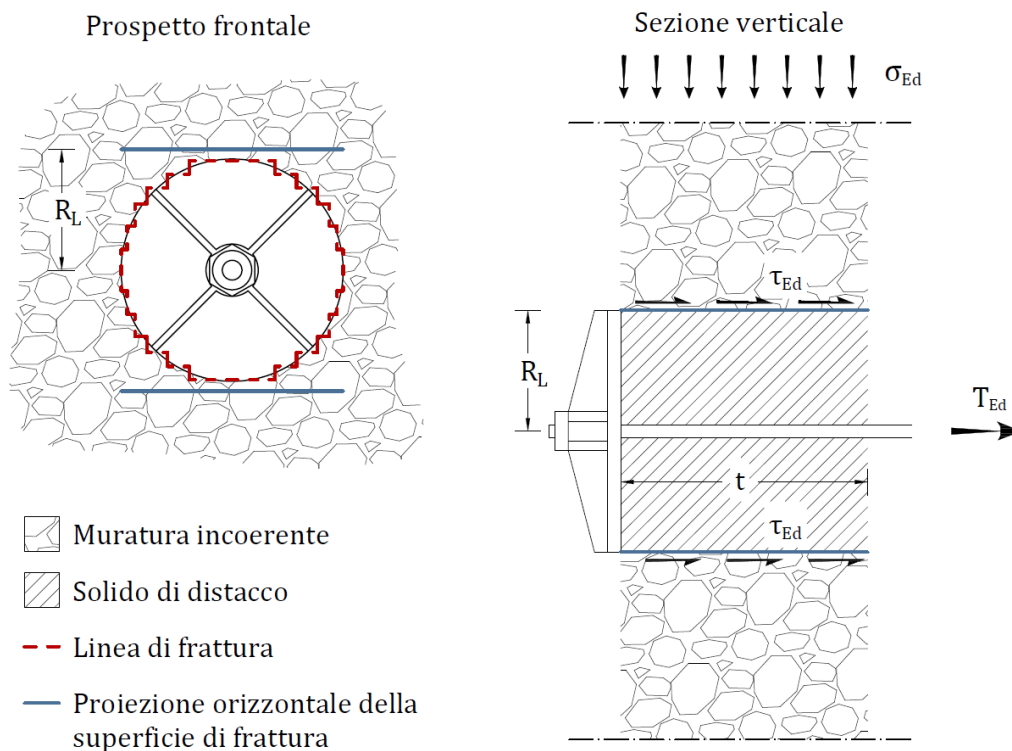
$$A_L = 2at \quad [mm^2] \quad (3.26)$$



**Figura 112.** Schema geometrico per muratura incoerente e capochiave rettangolare.

In caso di capochiave circolare si segue lo schema geometrico di Figura 113 e si considera un'area resistente pari al doppio prodotto della proiezione orizzontale della superficie laterale del solido di distacco, ottenuto mediante l'estrusione del perimetro del capochiave circolare lungo lo spessore della parete.

$$A_L = 4R_L t \quad [mm^2] \quad (3.27)$$



**Figura 113.** Schema geometrico per muratura incoerente e capochiave circolare.

Se si opera su questo tipo di murature si sconsiglia l'uso di capichiave a paletto poiché a meno di un corposo studio sulle possibili superfici di frattura, si dovrebbe adottare l'equazione (3.24) per il calcolo della superficie resistente. Tale formula ha il difetto di tendere a zero all'avvicinarsi dell'inclinazione del paletto verso la verticale, determinando così una resistenza nulla solo sulla carta. Pertanto si consiglia di utilizzare dei capichiave rettangolari o circolari per il consolidamento di murature incoerenti, di valutare l'area resistente di paletti inclinati ( $30^\circ$ - $60^\circ$ ) già presenti, mediante l'equazione (3.24) e di eseguire lo studio delle possibili linee di fratture se ci si trova in presenza di paletti disposti o tendenti ( $> 60^\circ$ ) verso la verticale.

**Resistenza allo scorrimento**

Determinata l'area, non resta che concentrarsi sul calcolo della resistenza caratteristica a taglio. Le NTC 2008 consentono il calcolo di questo valore secondo due schemi; il primo prevede un meccanismo di crisi per scorrimento e valuta la resistenza mediante un criterio di rottura Mohr-Coulomb attraverso l'equazione (3.19) già descritta al punto 3.2.3.3. Il secondo prevede una crisi della sezione per fessurazione diagonale e valuta la resistenza a taglio mediante l'equazione (3.12).

E' utile ricordare che quest'ultima equazione, descritta da Turnsek e Čačovič in [34], è pensata per valutare il valore della resistenza a taglio di un pannello soggetto a compressione e ad una spinta laterale nel proprio piano medio. I coefficienti presenti nelle equazioni e le equazioni stesse sono dunque stati pensati e sono comprovati unicamente per pannelli aventi una certa geometria e sottoposti allo stato tensionale già descritto. Appare dunque scorretto utilizzare tali formule, come proposto in [59], per valutare il valore della resistenza a taglio perché non risulterebbero comprovate nel caso in esame di una muratura compressa e sottoposta a una spinta concentrata ortogonalmente al piano medio. Si consiglia dunque di determinare tale valore attraverso l'equazione (3.19) di seguito riportata.

$$f_{w,vk} = c_{mb} + f\sigma_{Ed} \quad [MPa]$$

Come già affermato il primo termine del secondo membro ( $c_{mb}$ ), detto coesione è assimilabile alla resistenza a taglio in assenza di compressione ( $f_{w,vk0}$ ) e per una muratura esistente tale valore può essere dedotto con un certo margine di sicurezza dalla tabella C8A.2.1 della circolare [57] relativa ai parametri meccanici di diverse tipologie di pannelli murari.

Ancora è possibile sfruttare prove su triplette regolate in base alla norma UNI EN 1052-3, le quali consentono di trovare la resistenza a taglio con un maggior fattore di sicurezza rispetto alla prova di compressione diagonale regolata dalla norma ASTM E 519/10 (la cui esecuzione risulta difficoltosa per edifici esistenti) [38]. Infine è possibile determinare la resistenza a taglio in assenza di compressione mediante prove meccaniche effettuate su carote estratte dal pannello, così come indicato in [39].

Il coefficiente di attrito  $f$  varia anch'esso a seconda della tipologia e delle caratteristiche meccaniche dei componenti della muratura, oltre a variare anche in base al difficilmente quantificabile parametro della qualità costruttiva con cui è stato realizzato l'elemento. Numerose prove, riportate in [36] e riassunte nella Tabella 4, effettuate su materiali confezionati in laboratorio, esprimono una forte variazione di tale coefficiente, essendo questo compreso in un intervallo che va da 0,3 a 1,04. Anche se il suo valore potrebbe essere determinato in base alle prove precedenti, le NTC 2008 al punto 4.5.6.1 impongono di uguagliare il suo valore a 0,4.

Fonte	Tipo di mattone	Malta	$\tau_0$	$f$
Hendry e Sinha	mattone segato argilla	1:1/4:3	0.3	0.5
Chinwah	mattone segato argilla	1:1/4:3	0.25	0.34
Pieper e Trautsch	mattone pieno silicico-calcareo	1:2:8	0.2	0.84
	pieno silicico-calcareo	1:0:4	0.7	1.04
Schneider	calce e sabbia	1:1:6	0.14	0.3

**Tabella 4.** Valori della coesione e del coefficiente di attrito [17].

Per quanto riguarda lo sforzo di compressione da adottare nel calcolo della resistenza a taglio, si consiglia di evitare l'utilizzo di diversi valori dello sforzo a seconda della superficie in esame, come ad esempio due diversi numeri da applicare sulla superficie resistente inferiore e superiore di un capochiave rettangolare. Inoltre si sconsiglia di adottare l'approccio proposto da M. Vinci quando considera le compressioni agenti sulla superficie del solido di distacco circolare, come variabili secondo un andamento sinusoidale. Le superfici di frattura si sviluppano infatti secondo direzioni verticale ed orizzontale; le prime sono state escluse per ipotesi e pertanto si considerano solo le seconde, le quali rappresentano la proiezione orizzontale del solido di distacco. Data la giacitura, il valore resta costante a meno di un leggero e trascurabile aumento dell'azione di compressione dovuto al maggior carico della muratura nella porzione inferiore del capochiave.

$$f_{w,vk} = f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed} \quad [MPa] \quad (3.28)$$

**Formulario del meccanismo per scorrimento**

Volendo fare sintesi dei precedenti concetti si applica all'equazione (3.21) la specifica formulazione dell'area resistente e della resistenza a taglio in funzione della geometria del capochiave e del tipo di muratura.

Se si opera su una muratura costituita da blocchi squadrati disposti per filari orizzontali o su di un pannello avente due paramenti così realizzati e un nucleo di materiale incoerente, è possibile servirsi delle seguenti equazioni per determinare la resistenza al punzonamento secondo un meccanismo di crisi a taglio.

$$\begin{array}{l}
 \text{C. Rettangolare} \\
 \text{C. Circolare} \\
 \text{C. Paletto}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 f_{w,vk0} < f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2t(a+b)(f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed}) \\
 f_{w,vk0} > f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2t(a+b)f_{vk,lim} \\
 \\
 f_{w,vk0} < f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 4t\sqrt{\pi R_L^2}(f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed}) \\
 f_{w,vk0} > f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 4t\sqrt{\pi R_L^2}f_{vk,lim} \\
 \\
 f_{w,vk0} < f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2tL_P(f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed}) \\
 f_{w,vk0} > f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2tL_P f_{vk,lim}
 \end{array} \right. [N] \quad (3.29)$$

Se invece si interviene su una muratura costituita da pietrame eterogeneo si adottano invece le seguenti equazioni per determinare la resistenza al punzonamento secondo un meccanismo di crisi a taglio:

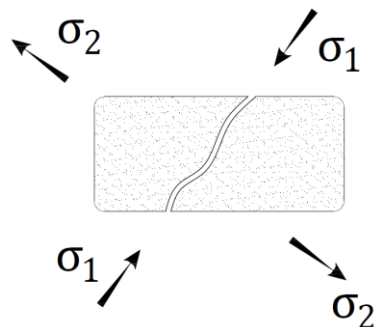
$$\begin{array}{l}
 \text{C. Rettangolare} \\
 \text{C. Circolare} \\
 \text{C. Paletto}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 f_{w,vk0} < f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2ta(f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed}) \\
 f_{w,vk0} > f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2ta f_{vk,lim} \\
 \\
 f_{w,vk0} < f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 4tR_L(f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed}) \\
 f_{w,vk0} > f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 4tR_L f_{vk,lim} \\
 \\
 f_{w,vk0} < f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2tL_P \text{Cos } \zeta (f_{w,vk0} + 0,4\sigma_{Ed}) \\
 f_{w,vk0} > f_{vk,lim} \rightarrow T_{w,Vk} = 2tL_P \text{Cos } \zeta f_{vk,lim}
 \end{array} \right. [N] \quad (3.30)$$

### 3.2.4.3. Crisi per trazione

Il secondo meccanismo che porta a punzonare la porzione di muratura su cui insiste la chiavarda avviene per trazione. Per definire il valore dell'azione resistente associato a questa crisi è necessario affinare il calcolo del solido di distacco e la scelta della resistenza a trazione da utilizzare.

Per quanto concerne il solido di distacco, gli esempi visti in letteratura propongono un solido di rottura formato dal perimetro del capochiave estruso per lo spessore della parete lungo rette inclinate di 45° verso l'esterno del solido. Questo porta a ottenere un tronco di cono in caso di capochiave circolare e un tronco di piramide in caso di capochiave a paletto o di piastra rettangolare. La superficie laterale di questi elementi viene poi moltiplicata per la componente della resistenza a trazione della muratura parallela all'azione della catena. Una siffatta soluzione non rende però conto della presenza in direzione verticale di importanti tensioni normali che in generale orientano le superfici di frattura secondo angoli di inclinazione diversi rispetto ai 45°.

Riguardo invece al valore della resistenza a trazione, va osservato che nel meccanismo di rottura in esame, la crisi sopraggiunge quando la tensione principale di trazione  $\sigma_2$  supera la resistenza a trazione dei mattoni (che in questo caso infatti si fratturano) in direzione obliqua rispetto alla giacitura dei letti di malta. La resistenza da considerare non è pertanto il frutto delle caratteristiche della malta, né peraltro quella a trazione monodirezionale del blocco, ma in generale un valore che tiene conto dello stato di sollecitazione biassiale presente nei mattoni.



**Figura 114.** Tensioni principali presenti sul mattone.

Una definizione affidabile di tale resistenza è proposta in [33] tramite la seguente relazione:

$$\frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{\sigma_2}{f_{b,tk}} = 1 \quad (3.31)$$

in cui però l'autore considera i moduli delle tensioni. Nel nostro caso le tensioni hanno il loro segno, per cui l'equazione precedente diventa:

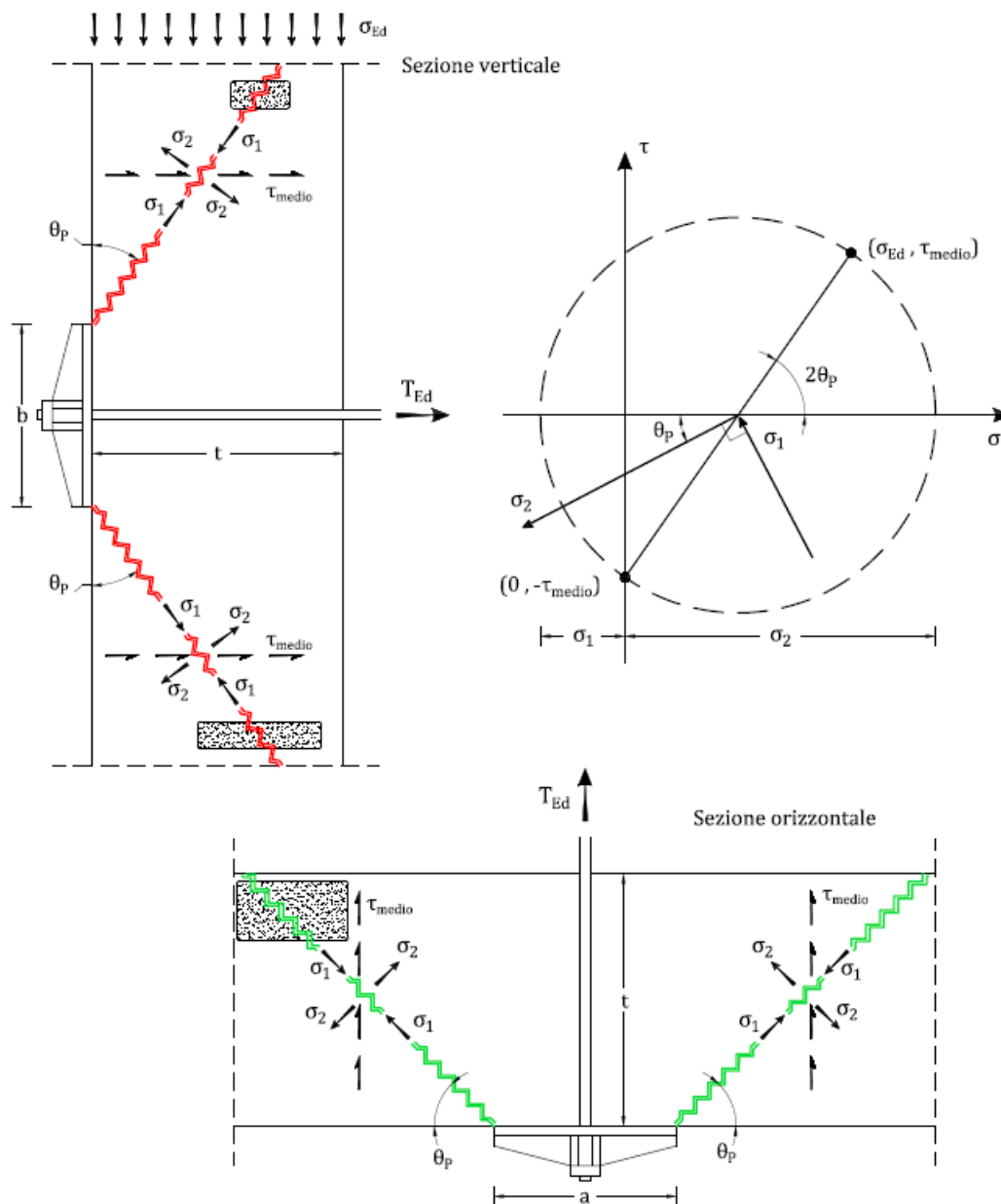
$$\frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} = 1 \quad (3.32)$$

La (3.32) può anche essere riscritta per evidenziare la formulazione della tensione principale di trazione in condizione di crisi incipiente nella seguente forma:

$$\sigma_2 = -f_{b,tk} \left( 1 - \frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} \right) \quad (3.33)$$

**Capochiave rettangolare**

Il procedimento di verifica può essere mostrato a partire dallo studio di due sezioni di muratura, verticale ed orizzontale, sottoposte all'azione di un capochiave rettangolare di dimensioni  $a$  e  $b$  (vedi Figura 115).



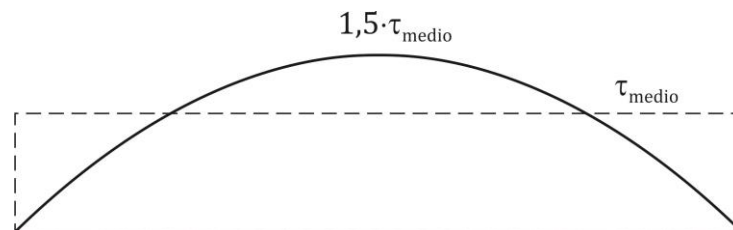
**Figura 115.** Schema di frattura per crisi a trazione.

In questo caso la tensione normale nella giacitura di un filare  $\sigma_{Ed}$  è definibile come la pressione trasmessa dalla muratura sovrastante il capochiave. Questa deve esse-



re determinata attraverso le formule per il calcolo delle azioni agenti, proposte dalle NTC 2008 al punto 2.5.3, in base alla combinazione in esame. Al suo interno possono dunque comparire o meno i carichi variabili, opportunamente moltiplicati per i coefficienti di combinazione ( $\psi_{n,i}$ ) e per i coefficienti parziali di sicurezza ( $\gamma_{G,i}$ ).

Per quanto concerne le tensioni tangenziali non è possibile ammettere che queste abbiano una distribuzione costante lungo lo spessore del pannello. Infatti in elasticità lineare risulta che  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , ma la tensione tangenziale sulla faccia libera del maschio murario ( $\tau_{yx}$ ) è necessariamente nulla. Tassios in [33] propone allora un andamento di tipo parabolico avente valore massimo pari a  $\beta \cdot \tau_{medio}$  al centro della sezione, dove pone  $\beta \simeq 1,5$ , e nullo alle estremità dove  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ . In questo modo la distribuzione parabolica e il valore di  $\beta$  assunto, consentono di avere la stessa intensità di azione agente rispetto a una distribuzione costante, infatti l'area sottesa da una parabola è  $2/3$  di quella del rettangolo che la incornicia (vedi Figura 116). Pertanto a parità di base (spessore della parete), l'azione  $T_{Ed}$  espressa da una distribuzione costante e pari a  $\tau_{medio}$ , è uguale a quella definita da una distribuzione parabolica avente valore massimo pari a  $1,5 \cdot \tau_{medio}$ .



**Figura 116.** Rapporto tra l'area di un rettangolo e l'area sottesa da una parabola.

Conformemente alla teoria del cerchio di Mohr relativa a uno stato di sforzo di piano è possibile definire le tensioni principali massima e minima come segue [74]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad [MPa] \quad (3.34)$$

Si osservi tuttavia che l'adozione di una distribuzione parabolica delle tensioni tangenziali dà necessariamente luogo ad un orientamento ed una intensità delle tensioni principali variabile da punto a punto lungo lo spessore della parete. Nelle verifiche che seguono si sceglie di trascurare questa variabilità partendo dal presupposto che la fragilità del meccanismo di rottura provochi la propagazione fragile delle lesioni una volta che questa si è innescata nella zona di massimo impegno statico della muratura. Pertanto  $\tau = \beta \cdot \tau_{medio}$  e la precedente (3.34) diventa [33]:

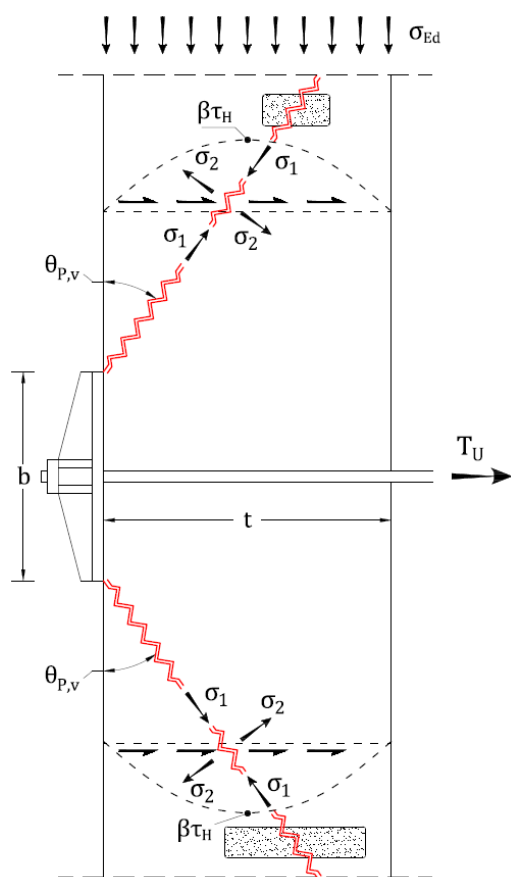
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{Ed}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{medio})^2} \quad [MPa] \quad (3.35)$$

E' poi importante definire l'angolo di giacitura di tali tensioni, poiché ortogonalmente alla tensione principale di trazione si svilupperà la frattura. Quest'angolo è determinato dalla seguente equazione prelevata sempre da [33]:

$$\theta_p = 0,5 \arctan\left(\frac{2\beta\tau_{medio}}{\sigma}\right) \quad [rad] \quad (3.36)$$

La dimostrazione delle equazioni (3.34) e (3.36) è visionabile nel libro [74].

Resta da definire il valore di  $\tau_{medio}$ , che deve essere valutato in corrispondenza della superficie di frattura in condizione di crisi incipiente ( $\tau_u$ ) e in base alla superficie in esame.



**Figura 117.** Schema di verifica aggiornato per la sezione verticale.

Per quanto riguarda le superfici evidenziate in rosso in Figura 115 e riportate nella Figura 117 posta in parte, è possibile definire il valore della tensione tangenziale ultima in condizione di crisi incipiente ( $\tau_{u,H}$ ) attraverso il seguente procedimento.

Innanzitutto si parte dall'equazione (3.32) che descrive il criterio di rottura dei blocchi a causa dello stato di sollecitazione biassiale.

$$\frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} = 1$$

Successivamente si sostituiscono i valori delle tensioni principali massima e minima in condizione di crisi incipiente in base alla formulazione (3.35) dove:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2}$$

$$|\sigma_2| = -\frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2}$$

La combinazione delle equazioni (3.32) e (3.35) conduce all'espressione (3.37), definita anche da Tassios in [33], attraverso il seguente procedimento:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} = 1 \\ \sigma_1 = \frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2} \\ |\sigma_2| = -\frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2} \end{cases}$$

Si sviluppa la prima equazione del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2}}{f_{b,ck}} + \frac{-\frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2}}{f_{b,tk}} &= 1 \\ f_{b,tk} \left( \frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2} \right) + f_{b,ck} \left( -\frac{\sigma_{Ed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2} \right) &= f_{b,ck} f_{b,tk} \\ \frac{\sigma_{Ed}}{2} (f_{b,tk} - f_{b,ck}) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2} (f_{b,tk} + f_{b,ck}) &= f_{b,ck} f_{b,tk} \\ \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2} &= \frac{f_{b,ck} f_{b,tk} - \frac{\sigma_{Ed}}{2} (f_{b,tk} - f_{b,ck})}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})} \\ \left(\frac{\sigma_{Ed}}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{u,H})^2 &= \frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 + \frac{\sigma_{Ed}^2}{4} (f_{b,tk} - f_{b,ck})^2 - \sigma_{Ed} f_{b,ck} f_{b,tk} (f_{b,tk} - f_{b,ck})}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\beta \tau_{u,H})^2 &= \frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 + \frac{\sigma_{Ed}^2}{4} (f_{b,tk}^2 - f_{b,ck}^2 - 2f_{b,ck} f_{b,tk} - f_{b,tk}^2 - f_{b,ck}^2 - 2f_{b,ck} f_{b,tk})}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} + \\
 &\quad + \frac{-\sigma_{Ed} f_{b,ck} f_{b,tk} (f_{b,tk} - f_{b,ck})}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} \\
 \tau_{u,H} &= \sqrt{\frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 - \sigma_{Ed} f_{b,ck} f_{b,tk} (f_{b,tk} - f_{b,ck}) - \sigma_{Ed}^2 f_{b,ck} f_{b,tk}}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2}} \\
 \tau_{u,H} &= \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed} (f_{b,tk} - f_{b,ck})}{f_{b,ck} f_{b,tk}} - \sigma_{Ed}^2 \frac{1}{f_{b,ck} f_{b,tk}} \right)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2}} \\
 \tau_{u,H} &= \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,ck}} + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk}} - \frac{\sigma_{Ed}^2}{f_{b,ck} f_{b,tk}} \right)}{\left( \frac{f_{b,tk} + f_{b,ck}}{f_{b,ck} f_{b,tk}} \right)^2}} \\
 \tau_{u,H} &= \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\left( 1 \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,ck}} \right) + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk}} \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,ck}} \right) \right)}{\left( \frac{1}{f_{b,tk}} + \frac{1}{f_{b,ck}} \right)^2}} \\
 \tau_{u,H} &= \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,ck}} \right) \left( 1 + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk}} \right)}{\frac{1}{f_{b,ck}} + \frac{1}{f_{b,tk}}}} \quad [MPa] \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Successivamente è necessario determinare la tensione tangenziale ultima sopportabile dalle superfici di frattura evidenziate in verde nella sezione orizzontale di Figura 115. In questo caso è importante analizzare lo stato di sollecitazione dei mattoni poiché non è più piano come nel caso precedente, ma triassiale, così come osservabile in Figura 118:

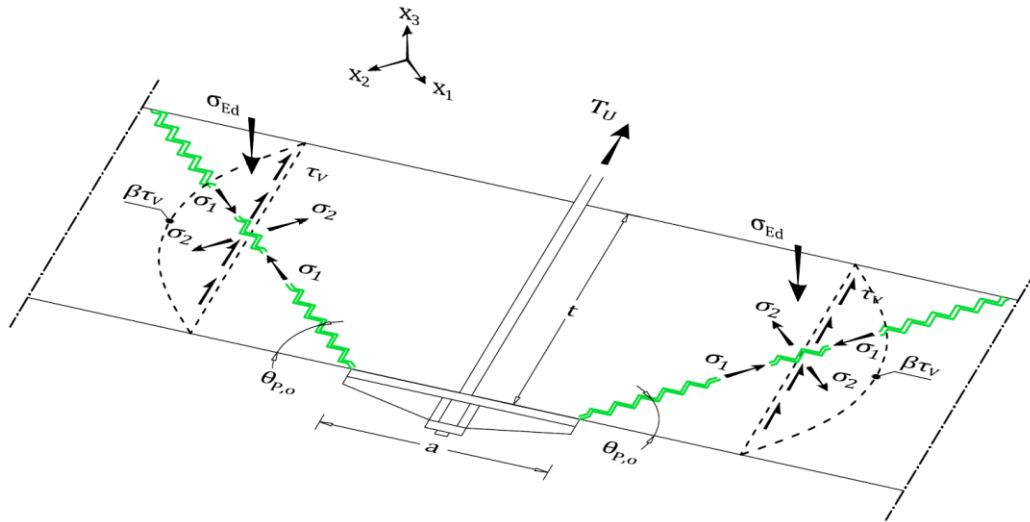


Figura 118. Schema di verifica aggiornato per la sezione orizzontale.

In questo caso è necessario fissare un sistema di riferimento in cui la direzione dell'asse  $z$  coincide con la direzione principale  $x_3$  ed è uguale alla direzione delle tensioni normali  $\sigma_{Ed}$ . Così facendo, su tutte le giaciture che hanno  $x_3$  per asse risultano nulle tutte le componenti tangenziali, ad eccezione dunque di  $\tau_{xy}$ . La situazione è del tutto analoga a quella che si verifica nel caso di tensioni piane e dunque, come proposto in [75], sarà possibile determinare il valore delle tensioni principali massima e minima attraverso l'equazione (3.34). Come per il caso precedente al suo interno si sostituisce il valore di  $\tau$  con  $\beta\tau_{medio}$ , ma ora il valore delle tensioni normali  $\sigma$  è nullo. In condizioni di crisi incipiente il valore delle tensioni principali è dunque definito dalla seguente equazione:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (\beta\tau_{medio})^2} \stackrel{\sigma=0}{=} \pm \beta\tau_{u,v} \quad (3.38)$$

Per proseguire è necessario definire un nuovo criterio di rottura in relazione allo stato di sforzo triassiale agente sui blocchi. Nel caso precedente la rottura di un materiale fragile relativa a uno stato di sforzo piano, seguiva un criterio lineare definito dall'equazione (3.32). Si sceglie di mantenere la linearità del criterio, di modo da preservare un certo margine di sicurezza e lo si adatta nella seguente forma per tenere in conto la tensione normale agente lungo la direzione  $x_3$ :

$$\frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,ck}} = 1 \quad (3.39)$$

Ora si dispone di tutti gli elementi necessari a determinare la tensione tangenziale ultima sopportabile dalle superfici evidenziate in verde in Figura 118 in condizione

di crisi incipiente. Per trovarla è sufficiente mettere a sistema le equazioni (3.38) e (3.39)

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,ck}} = 1 \\ \sigma_{1,2} = \pm \beta \tau_{u,V} \end{cases}$$

e sviluppare la prima come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\beta \tau_{u,V}}{f_{b,ck}} + \frac{\beta \tau_{u,V}}{f_{b,tk}} + \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,ck}} &= 1 \\ \beta \tau_{u,V} (f_{b,tk} + f_{b,ck}) + \sigma_{Ed} f_{b,tk} &= f_{b,tk} f_{b,ck} \\ \tau_{u,V} &= \frac{f_{b,tk} f_{b,ck} - \sigma_{Ed} f_{b,tk}}{\beta (f_{b,tk} + f_{b,ck})} \\ \tau_{u,V} &= \frac{f_{b,tk} (f_{b,ck} - \sigma_{Ed})}{\beta f_{b,tk} \left( 1 + \frac{f_{b,ck}}{f_{b,tk}} \right)} \\ \tau_{u,V} &= \frac{f_{b,ck} - \sigma_{Ed}}{\beta \left( 1 + \frac{f_{b,ck}}{f_{b,tk}} \right)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Prima di proseguire con l'analisi delle superfici di frattura di raccordo tra quelle fino ad ora esaminate, conviene fissare un importante ragionamento.

A giudizio dell'autore, in condizione di crisi incipiente non è lecito assumere una tensione tangenziale variabile lungo il perimetro del solido di distacco. Ciò presupporrebbe infatti che la frattura si creasse contemporaneamente su tutte le facce e si avesse una redistribuzione dell'azione presente in funzione della resistenza delle superfici. È invece molto più probabile che le tensioni tangenziali si redistribuiscono in maniera costante lungo il perimetro del solido di distacco in virtù della medesima rigidità posseduta dalle superfici e che la crisi si inneschi sulle superfici aventi minor sforzo tangenziale ultimo. Quando su queste ultime si arriva al valore limite della tensione tangenziale, esse perdono improvvisamente la loro capacità resistente, obbligando la parte integra di muratura a sobbarcarsi anche la quota parte di carico precedentemente portata dalle zone fratturate, il che solitamente si risolve nel collasso del sistema.

In sintesi si assumerà che la tensione tangenziale ultima sia costante su tutte le superfici, anche quelle di raccordo, e pari al minore dei valori determinati in base alle

equazioni (3.37) e (3.40). Questo è sempre quello relativo alle fratture evidenziate in verde sulla sezione orizzontale di Figura 118, ovvero  $\tau_{u,v}$ . Moltiplicando poi il valore trovato per l'estensione delle superfici di taglio sarà possibile ottenere il valore dell'azione resistente al punzonamento per crisi a trazione.

Legenda:

- Contorno del solido di distacco
- - - - - Contorno del piano di taglio

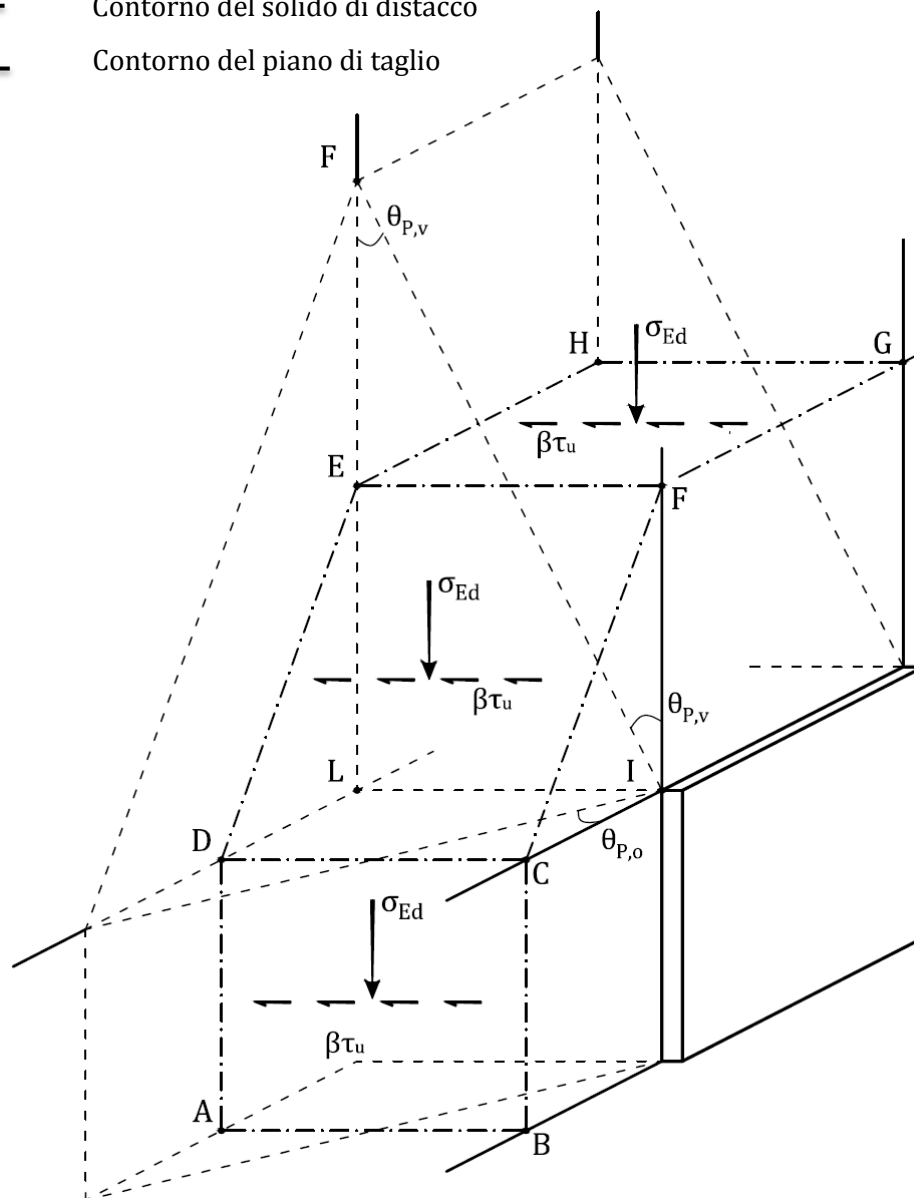


Figura 119. Schema del solido di distacco e delle superfici di taglio.

Per determinare l'estensione di tali superfici è necessario stabilire la geometria del solido di distacco e in particolare l'angolo di innesco della lesione. Questo è calcolabile utilizzando l'equazione (3.36) che determina la giacitura, rispetto alla direzione delle tensioni tangenziali, delle tensioni principali massima e minimo in funzione delle quali si innesca appunto la lesione.

Per la sezione orizzontale di Figura 118, l'angolo  $\theta_{p,o}$  è determinabile attraverso l'equazione (3.36) nonostante lo stato di sollecitazione triassiale. Questo perché, come già affermato, la particolare giacitura della tensione normale  $\sigma_{Ed}$  riconduce il problema all'analisi di uno stato di sforzo piano. Inoltre il valore nullo della tensione normale lungo  $y$  semplifica il problema, in quanto per qualsiasi valore della tensione tangenziale ultima, l'angolo risulta pari a  $45^\circ$ .

$$\theta_{p,o} = 0,5 \cdot \arctan\left(\frac{2\beta\tau_{u,v}}{0}\right) = 45^\circ \quad (3.41)$$

Se l'angolo posto sull'orizzontale è costante, quello verticale  $\theta_{p,v}$  varia invece con lo stato di sollecitazione a cui è sottoposta la parete, ovvero  $\sigma_{Ed}$  e  $\tau_u$ . Il valore della tensione tangenziale da inserire nell'equazione (3.36) è quello per cui si innesca la rottura a punzonamento della porzione di muratura interessata dall'azione del capochiave, ovvero  $\tau_{u,v}$ .

$$\theta_{p,v} = 0,5 \cdot \arctan\left(\frac{2\beta\tau_{u,v}}{\sigma_{Ed}}\right) \quad (3.42)$$

Per arrivare a determinare l'azione resistente al punzonamento per crisi a trazione è necessario determinare l'estensione delle superfici di taglio in base alle seguenti deduzioni geometriche:





documento, in seguito riportata, è possibile osservare che in caso di impronta di carico rettangolare è proposto un perimetro superiore del solido di distacco avente i bordi arrotondati.

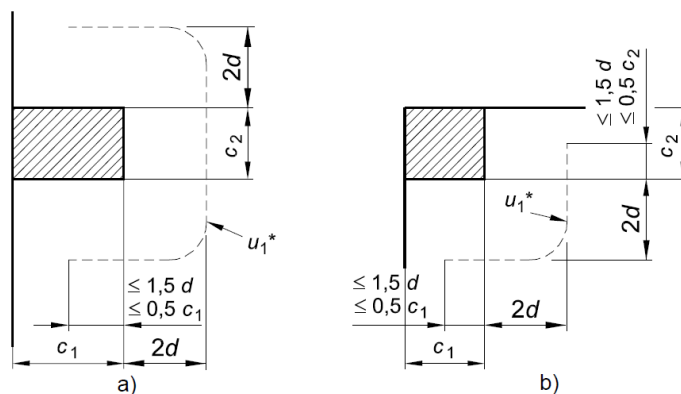


Figura 121. Perimetro di verifica equivalente  $u_1$

La procedura di verifica proposta dall'Eurocodice non contempla però questi arrotondamenti, valutando così il perimetro superiore come un rettangolo e il solido di distacco come un tronco di piramide. Se ciò può essere permesso nel punzonamento di elementi in calcestruzzo dove è stato conseguito un modello di calcolo consolidato e tarato su numerose prove di laboratorio, non è altrettanto giustificato adottare questa approssimazione nella muratura. In quest'ultimo caso la totale assenza di prove di laboratorio non consente di escludere l'arrotondamento dei bordi del solido di distacco, ma anzi, ne si consiglia la presa in considerazione in quanto sono superfici che richiedono una minor energia di frattura rispetto a quelle di un solido di distacco tronco-piramidale. Vista la laboriosità del calcolo di queste superfici arrotondate è poi ulteriormente consigliabile semplificare tali curve riducendole a delle rette, così come proposto nello schema di verifica riportato alla Figura 120.

Qualora prove sperimentali mirate fossero in grado di dimostrare che questo approccio è eccessivamente cautelativo si potrebbe sostituire la superficie di rottura di Figura 120 con un tronco di piramide a base rettangolare, così come nella verifica a punzonamento dei solai e fondazioni in calcestruzzo.

A questo punto si valuta l'azione resistente come il risultato della somma delle tre tipologie di azioni resistenti.

$$T_{w,Tk} = T_{w,Tk1} + T_{w,Tk2} + T_{w,Tk3} \quad [N] \quad (3.44)$$

Queste si riferiscono rispettivamente ai tre tipi di superficie di taglio moltiplicate per la tensione tangenziale ultima minore.

$$T_{w,Tki} = A_{L,i} \cdot \min(\tau_{u,V}, \tau_{u,H}) \quad (3.45)$$

Vengono ora riassunte le equazioni da utilizzare nella formula (3.44) per valutare il valore dell'azione resistente per crisi a trazione in caso di capochiave rettangolare.

$$\begin{aligned} T_{w,Tk1} &= 2at \tau_{u,V} \\ T_{w,Tk2} &= 2bt \tau_{u,V} \end{aligned} \quad [N] \quad (3.46)$$

$$T_{w,Tk3} = 2t^2 \sqrt{1 + \text{Cot}^2 \theta_{P,V}} \tau_{u,V}$$

$$T_{w,Tk} = 2t \tau_{u,V} \left( a + b + t \sqrt{1 + \text{Cot}^2 \theta_{P,V}} \right) [N] \quad (3.47)$$

È interessante mettere a confronto quest'ultima formula con l'equazione (3.10) (sotto riportata) proposta da M. Vinci per determinare la stessa azione resistente.

$$T_{w,Td} = 2t f_{m,td} (a + b + 2t) \quad [N]$$

Dal confronto è possibile notare che, come annunciato all'inizio del punto 3.2.4.3, il nuovo procedimento tiene in conto l'effetto dello stato di sollecitazione presente nel calcolo dell'area resistente. Ciò è possibile grazie al termine posto sotto la radice, il quale amplifica l'estensione dell'area resistente al crescere delle compressioni e al diminuire della tensione tangenziale.

Inoltre nell'equazione (3.10) con cui M. Vinci svolge la verifica a trazione viene utilizzata una resistenza che anziché discendere dalla resistenza a trazione dei blocchi, della malta o dell'intero solido murario è derivata dalla resistenza a taglio in assenza di compressione. Pertanto tale procedimento non può essere inteso come una verifica a trazione. Al contrario, il nuovo procedimento proposto asserisce che un meccanismo di crisi alternativo a quello che avviene per scorrimento dei letti di malta, nasca per fessurazione dei blocchi. Tale rottura è dovuta a uno stato di sollecitazione pluriassiale presente nei mattoni. In base a questo stato è stato possibile ricavare la tensione tangenziale ultima in funzione della resistenza a compressione e a trazione degli elementi. In seguito ci si riferirà a questo meccanismo indistintamente sia come crisi per trazione sia come rottura per sollecitazione pluriassiale.

### Capochiave a paletto

In caso di capochiave a paletto la risoluzione è simile al caso precedente in quanto il valore dell'azione resistente è ancora dovuto al prodotto della tensione tangenziale in condizione di crisi incipiente per i tre tipi di superficie resistente, ovvero quella relativa alla dimensione maggiore del paletto, quella relativa alla dimensione minore e infine le superfici curve che raccordano le aree precedenti (approssimate da dei triangoli). Rispetto a prima però vi è la problematica legata all'inclinazione "ζ" del paletto che modifica lo schema geometrico e i relativi passaggi necessari alla risoluzione.

In primo luogo conviene analizzare lo stato tensionale presente lungo la superficie di frattura relativa alla dimensione maggiore del paletto ( $l_p$ ).

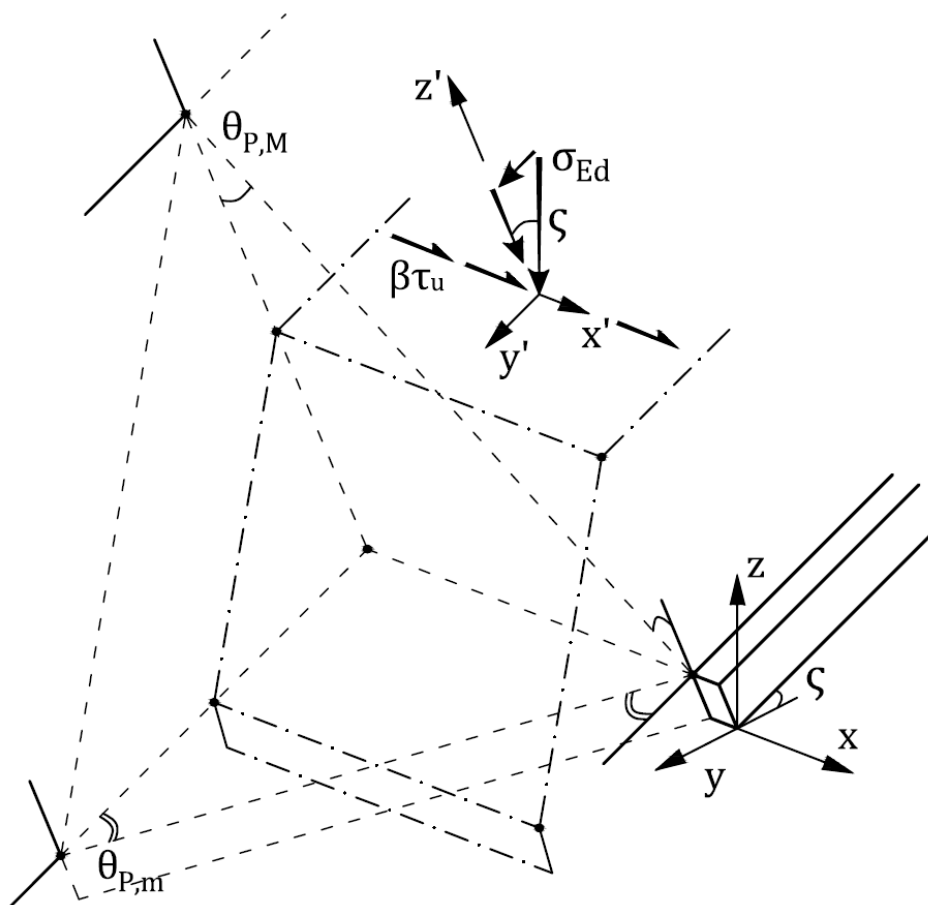


Figura 122. Schema per l'analisi dello stato tensionale.

L'inclinazione  $\zeta$  con cui è disposto il paletto fa scaturire uno stato di tensione triassiale sui blocchi. Pertanto si farà dunque uso del precedente criterio di rottura lineare fornito dall'equazione (3.39), i cui termini andranno tuttavia puntualizzati e corretti per semplificare la risoluzione.

Come per il caso precedente infatti, se si orienta in maniera corretta la terna cartesiana di riferimento, è possibile ridurre il calcolo delle tensioni principali e dell'angolo per cui queste sono massime a un problema di sforzo piano. Se dunque si ruota il sistema di riferimento  $x, y, z$  secondo l'angolo di inclinazione del paletto si ottiene il nuovo sistema di riferimento  $x', y', z'$ . Secondo questi nuovi assi è possibile scomporre la tensione normale  $\sigma_{Ed}$  lungo  $y'$  e  $z'$  di modo da azzerare le componenti tangenziali che hanno per componente  $y'$ . In questo modo si ottiene uno stato di sollecitazione triassiale in cui il calcolo delle tensioni principali massima e minima sono riconducibili a uno stato di sforzo piano.

$$\frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} + \frac{\sigma_{Ed,y'}}{f_{b,ck}} = 1$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{medio})^2} \quad (3.48)$$

$$\sigma_{Ed,y'} = \sigma_{Ed} \sin \zeta$$

Mettendo a sistema le precedenti equazioni è possibile determinare la forma della tensione tangenziale in condizione di crisi incipiente sviluppando la prima equazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} + \frac{\sigma_{Ed,y'}}{f_{b,ck}} = 1 \\ \sigma_1 = \frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2} \\ |\sigma_2| = -\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2} \\ \sigma_{Ed,y'} = \sigma_{Ed} \sin \zeta \end{array} \right.$$

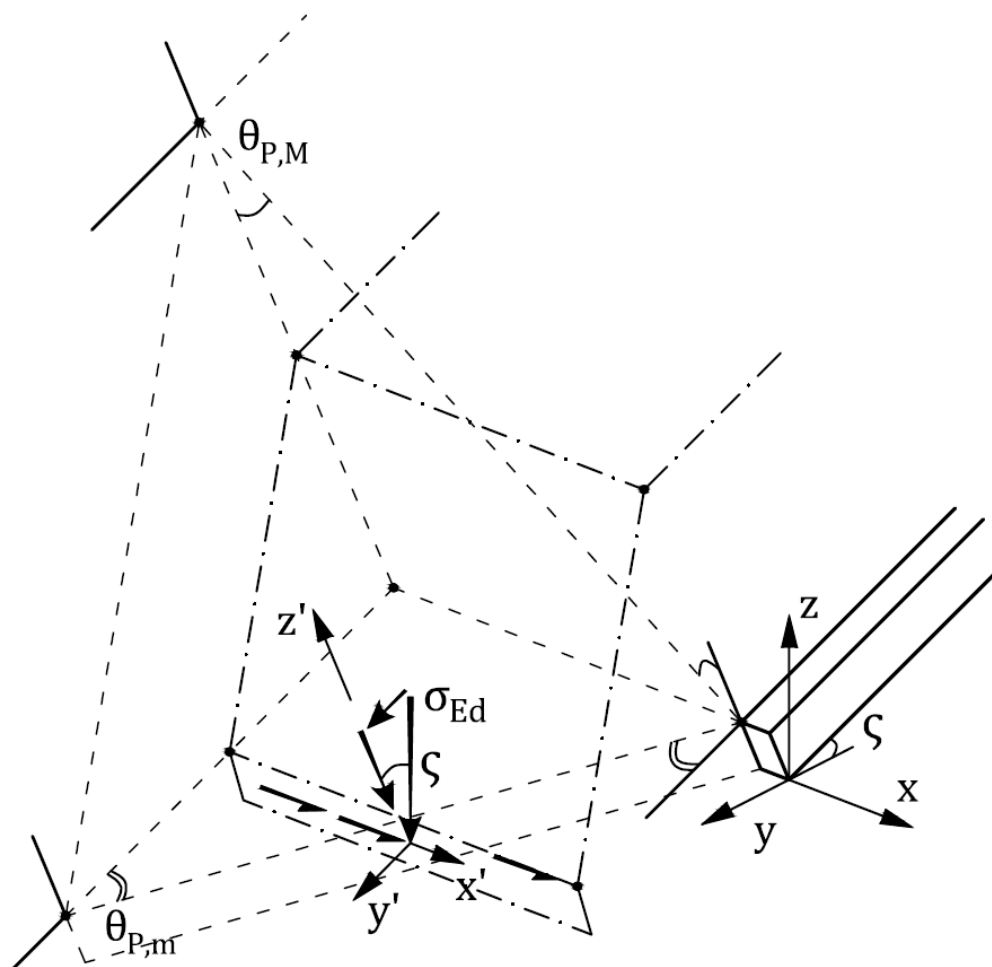
$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2}}{f_{b,ck}} + \frac{-\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2}}{f_{b,tk}} + \\
 & + \frac{\sigma_{Ed} \sin \zeta}{f_{b,ck}} = 1 \\
 & f_{b,tk} \left( \frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2} + \sigma_{Ed} \sin \zeta \right) + \\
 & + f_{b,ck} \left( -\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2} \right) = f_{b,tk} f_{b,ck} \\
 & \frac{\sigma_{Ed}}{2} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2} \cdot \\
 & (f_{b,tk} + f_{b,ck}) = f_{b,tk} f_{b,ck} \\
 & \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2} = \frac{f_{b,tk} f_{b,ck} - \frac{\sigma_{Ed}}{2} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})} \\
 & \left(\frac{\sigma_{Ed} \cos \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,M})^2 = \frac{\left(f_{b,tk} f_{b,ck} - \frac{\sigma_{Ed}}{2} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta)\right)^2}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} \\
 & (\beta \tau_{u,M})^2 = \frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 - 2 \frac{\sigma_{Ed}}{2} f_{b,tk} f_{b,ck} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} + \\
 & \frac{\frac{\sigma_{Ed}^2}{4} (f_{b,tk}^2 \cos^2 \zeta + 4f_{b,tk}^2 \sin^2 \zeta + f_{b,ck}^2 \cos^2 \zeta)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} + \\
 & \frac{\frac{\sigma_{Ed}^2}{4} (4f_{b,tk}^2 \cos \zeta \sin \zeta - 2f_{b,tk} f_{b,ck} \cos^2 \zeta - 4f_{b,tk} f_{b,ck} \cos \zeta \sin \zeta)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} + \\
 & - \frac{\frac{\sigma_{Ed}^2}{4} (f_{b,tk}^2 \cos^2 \zeta + f_{b,ck}^2 \cos^2 \zeta + 2f_{b,tk} f_{b,ck} \cos^2 \zeta)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\beta \tau_{u,M})^2 &= \frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 - \sigma_{Ed} f_{b,tk} f_{b,ck} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2 f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} + \\
 &\quad \frac{\sigma_{Ed}^2 (f_{b,tk}^2 \sin^2 \zeta + f_{b,tk}^2 \cos \zeta \sin \zeta - f_{b,tk} f_{b,ck} \cos \zeta \sin \zeta - 2 f_{b,tk} f_{b,ck} \cos^2 \zeta)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} \\
 (\beta \tau_{u,M})^2 &= \frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 \left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk} f_{b,ck}} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2 f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta) \right)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} + \\
 &\quad + \frac{f_{b,tk}^2 f_{b,ck}^2 \left( -\frac{\sigma_{Ed}^2}{f_{b,tk} f_{b,ck}} \left( \cos^2 \zeta + \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \sin^2 \zeta \right) \right)}{(f_{b,tk} + f_{b,ck})^2} \\
 \tau_{u,M}^2 &= \frac{1}{\beta} \frac{\left( 1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk} f_{b,ck}} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2 f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta) \right)}{\left( \frac{f_{b,tk} + f_{b,ck}}{f_{b,tk} f_{b,ck}} \right)^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \frac{\left( -\frac{\sigma_{Ed}^2}{f_{b,tk} f_{b,ck}} \left( \cos^2 \zeta + \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \sin^2 \zeta \right) \right)}{\left( \frac{f_{b,tk} + f_{b,ck}}{f_{b,tk} f_{b,ck}} \right)^2} \\
 \tau_{u,M} &= \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk} f_{b,ck}} (f_{b,tk} \cos \zeta + 2 f_{b,tk} \sin \zeta - f_{b,ck} \cos \zeta)}{\frac{1}{f_{b,tk}} + \frac{1}{f_{b,ck}}}} + \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{-\frac{\sigma_{Ed}^2}{f_{b,tk} f_{b,ck}} \left( \cos^2 \zeta + \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \sin^2 \zeta \right)}{\frac{1}{f_{b,tk}} + \frac{1}{f_{b,ck}}}} \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

A riprova della correttezza dell'equazione appena scritta è possibile verificare che per un paletto perfettamente orizzontale ( $\zeta = 0^\circ$ ), la precedente equazione è equi-

valente alla (3.37) relativa alla tensione tangenziale ultima riferita alla superficie di taglio orizzontale di un capochiave quadrato. Mentre per un paletto verticale ( $\zeta = 90^\circ$ ) la (3.49) è uguale all'equazione (3.40) riferita alla tensione tangenziale ultima della superficie di taglio verticale di un capochiave quadrato.

Si passa poi a calcolare il valore della tensione tangenziale ultima sopportabile dalle superfici di frattura relative alla dimensione minore del paletto ( $b_p$ ).



**Figura 123.** Schema per l'analisi dello stato tensionale.

In base allo schema precedente è possibile stabilire un procedimento di risoluzione analogo, ma in questo caso l'entità delle tensioni principali è funzione della componente di  $\sigma_{Ed}$  secondo la direzione  $y'$  e pertanto il sistema di risoluzione diventa:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_1}{f_{b,ck}} + \frac{|\sigma_2|}{f_{b,tk}} + \frac{\sigma_{Ed,z'}}{f_{b,ck}} = 1 \\ \sigma_1 = \frac{\sigma_{Ed} \sin \zeta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \sin \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,m})^2} \\ |\sigma_2| = -\frac{\sigma_{Ed} \sin \zeta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed} \sin \zeta}{2}\right)^2 + (\beta \tau_{u,m})^2} \\ \sigma_{Ed,y'} = \sigma_{Ed} \cos \zeta \end{array} \right.$$

Visto il procedimento di risoluzione adottato in precedenza e vista la reciproca inversione della funzione seno con quella coseno all'interno del sistema risolutivo è possibile affermare che l'equazione con cui descrivere l'andamento della tensione tangenziale ultima è equivalente alla (3.49) se al suo interno si scambiano le funzioni seno con quelle coseno e viceversa.

$$\begin{aligned} \tau_{u,m} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{1 - \frac{\sigma_{Ed}}{f_{b,tk} f_{b,ck}} (f_{b,tk} \sin \zeta + 2 f_{b,tk} \cos \zeta - f_{b,ck} \sin \zeta)}{\frac{1}{f_{b,tk}} + \frac{1}{f_{b,ck}}}} + \\ + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{-\frac{\sigma_{Ed}^2}{f_{b,tk} f_{b,ck}} \left( \sin^2 \zeta + \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \cos \zeta \sin \zeta - \frac{f_{b,tk}}{f_{b,ck}} \cos^2 \zeta \right)}{\frac{1}{f_{b,tk}} + \frac{1}{f_{b,ck}}}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Come per il capochiave rettangolare la minor tensione tangenziale ultima trovata in base alle equazioni (3.49) e (3.50) corrisponde alla resistenza da moltiplicare per l'estensione delle superfici di taglio per ottenere la resistenza al punzonamento per crisi a trazione.

L'estensione di queste è deducibile in base ai seguenti ragionamenti.

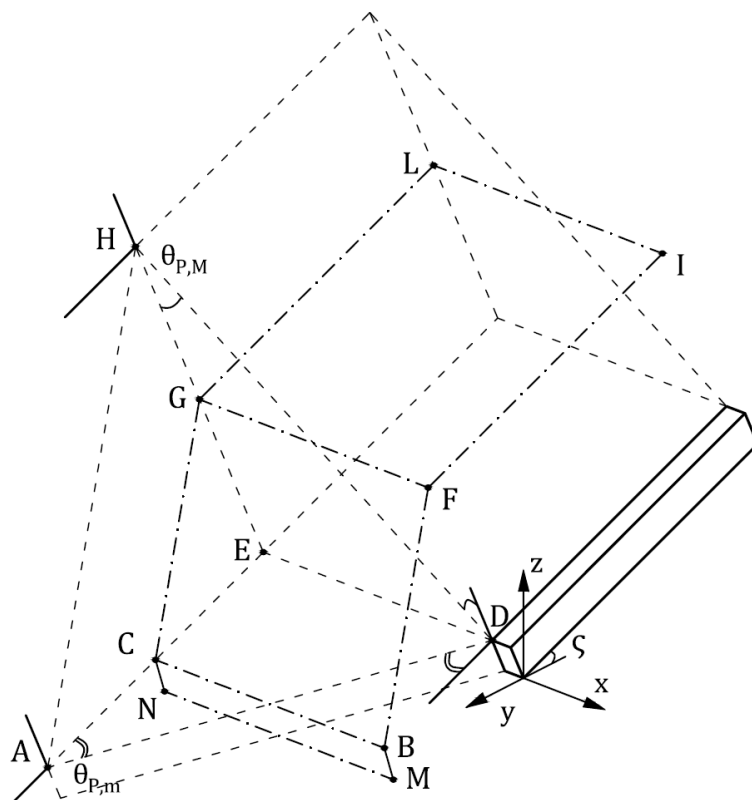


Figura 124. Schema geometrico.

$$A_{L1} = 2 \cdot A_{EFGH}$$

$$A_{L2} = 2 \cdot A_{ABCD}$$

$$A_{L3} = 4 \cdot A_{DCFE} = 4 \cdot \overline{CG} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \overline{GF} = \overline{ED} = t$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{ED}}{\sin \theta_{P,m}} = \frac{t}{\sin \theta_{P,m}}$$

$$\overline{HD} = \frac{\overline{ED}}{\sin \theta_{P,M}} = \frac{t}{\sin \theta_{P,M}}$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} \cdot \cos \theta_{P,m} = t \cot \theta_{P,m}$$

$$\overline{EH} = \overline{HD} \cdot \cos \theta_{P,M} = t \cot \theta_{P,M}$$

$$\overline{CG} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AE}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{EH}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{t^2}{4} \cot^2 \theta_{P,m} + \frac{t^2}{4} \cot^2 \theta_{P,M}} = \frac{t}{2} \sqrt{\cot^2 \theta_{P,m} + \cot^2 \theta_{P,M}}$$

$$A_{L1} = 2l_p t$$

$$A_{L2} = 2b_p t$$

$$[mm^2]$$

$$(3.51)$$

$$A_{L3} = 2t^2 \sqrt{\cot^2 \theta_{P,m} + \cot^2 \theta_{P,M}}$$

A questo punto si valuta l'azione resistente come il risultato della somma delle tre tipologie di azioni resistenti. Queste si riferiscono rispettivamente ai tre tipi di superficie di taglio moltiplicate per la tensione tangenziale ultima minore.

$$T_{w,Tki} = A_{L,i} \cdot \min(\tau_{u,M}, \tau_{u,m}) \quad (3.52)$$

Vengono ora riassunte le equazioni da utilizzare nella formula (3.52) per valutare il valore dell'azione resistente per crisi a trazione in caso di capochiave a paletto.

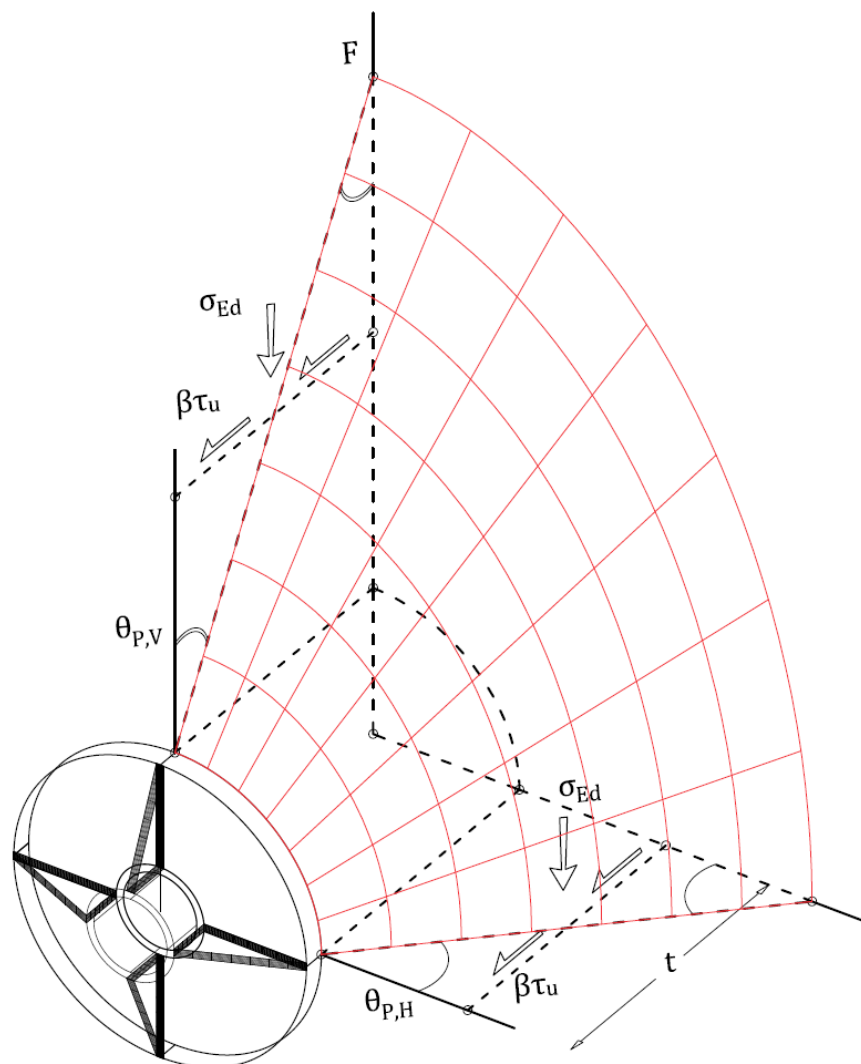
$$\begin{aligned} T_{w,Tk1} &= 2l_p t \tau_{u,v} \\ T_{w,Tk2} &= 2b_p t \tau_{u,v} \quad [N] \\ T_{w,Tk3} &= 2t^2 \sqrt{\text{Cot}^2 \theta_{P,m} + \text{Cot}^2 \theta_{P,M}} \tau_{u,v} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Il cui valore complessivo risulta pari a:

$$T_{w,Tk} = 2t \tau_u \left( a + b + t \sqrt{\text{Cot}^2 \theta_{P,m} + \text{Cot}^2 \theta_{P,M}} \right) [N] \quad (3.54)$$

**Capochiave circolare**

In caso di capochiave circolare è possibile ricondursi ai casi precedenti per determinare il valore dell'azione resistente per crisi a trazione. Se si effettua lo studio dello stato di sollecitazione relativo a una sezione verticale e ad una orizzontale si scopre che la forma delle sezioni e le tensioni presenti sono analoghe a quelle registrate nel caso di un capochiave quadrato.



**Figura 125.** Schema per l'analisi delle sollecitazioni.

E' possibile dunque ricondursi alla Figura 117 e alla Figura 118 (in seguito riportate) e in generale al procedimento risolutivo precedentemente affrontato.

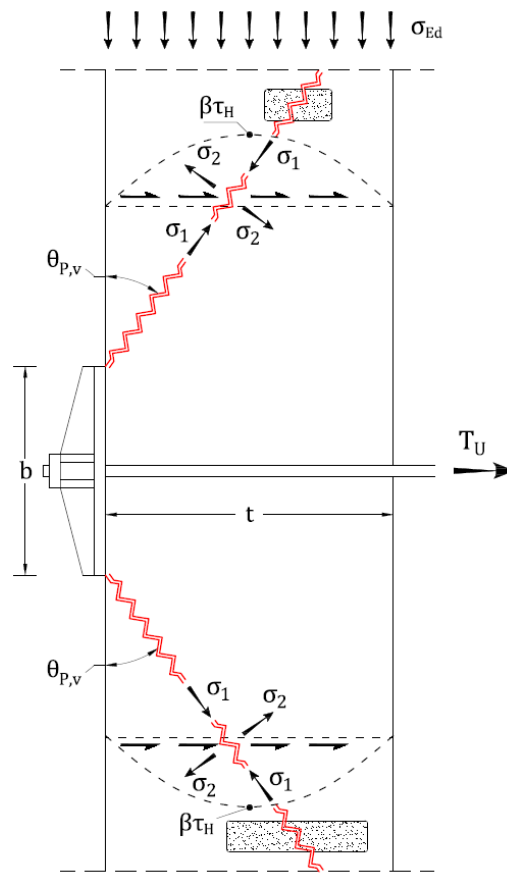


Figura 126. Schema di verifica per la sezione verticale.

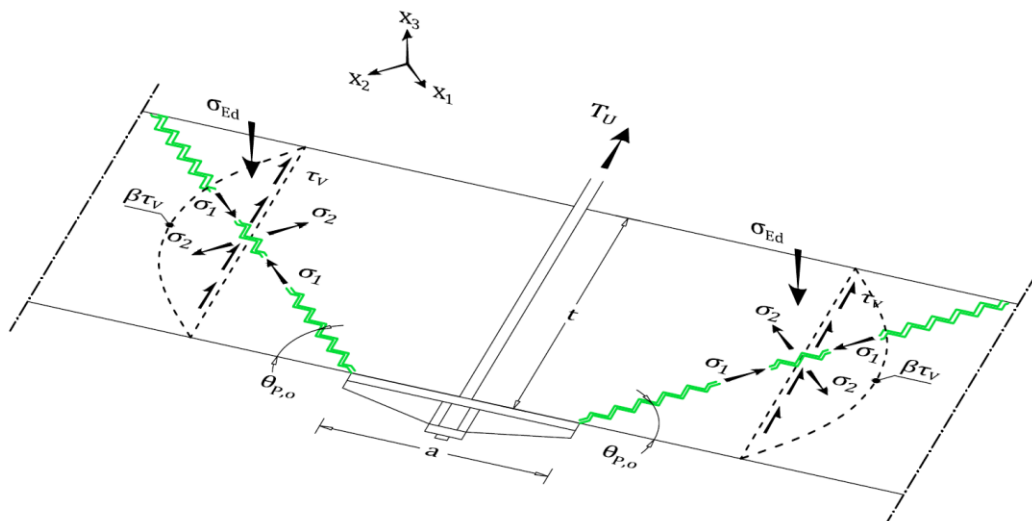


Figura 127. Schema di verifica per la sezione orizzontale.

In sintesi sarà sufficiente determinare la tensione tangenziale in condizione di crisi incipiente nella sezione verticale ( $\tau_{u,H}$ ) attraverso l'equazione (3.37) e nella sezione orizzontale ( $\tau_{u,V}$ ) attraverso la (3.40). Questi due valori rappresentano l'estremo superiore ( $\tau_{u,H}$ ) e inferiore ( $\tau_{u,V}$ ) dell'intervallo contenente le tensioni tangenziali ultime relative alle infinite superfici radiali con cui è possibile sezionare il solido di distacco.

Per le modalità di crisi già discusse l'azione resistente a punzonamento verrà determinata dal prodotto tra la minore delle azioni tangenziali ultime per l'estensione della superficie di taglio relativa al solido di distacco. Come osservabile in Figura 125 quest'ultima è ragionevolmente approssimabile con un'ellisse estrusa lungo lo spessore della parete.

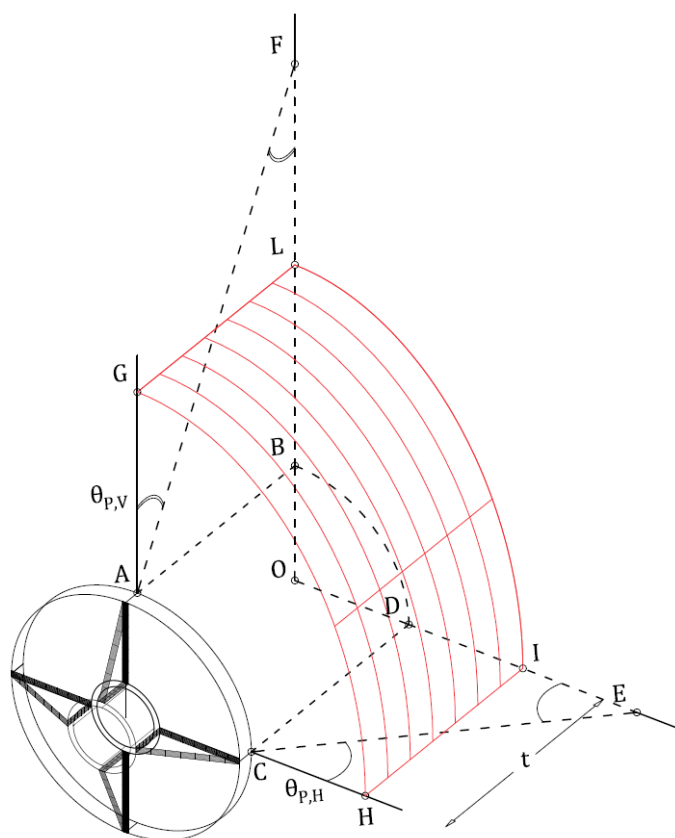


Figura 128. Schema geometrico.

L'estensione di questa superficie resistente è calcolabile mediante le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{CD} = t & \overline{OB} &= \overline{OD} = R_L \\ \overline{AF} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \theta_{p,v}} = \frac{t}{\sin \theta_{p,v}} & \overline{CE} &= \frac{\overline{CD}}{\sin \theta_{p,h}} = \frac{t}{\sin \theta_{p,h}} \\ \overline{BF} &= \overline{AF} \cdot \cos \theta_{p,v} = t \cot \theta_{p,v} & \overline{ED} &= \overline{CE} \cdot \cos \theta_{p,h} = t \cot \theta_{p,h} \\ \overline{OL} &= \overline{OB} + \frac{\overline{BF}}{2} = R_L + \frac{t}{2} \cot \theta_{p,v} & \overline{OI} &= \overline{OD} + \frac{\overline{ED}}{2} = R_L + \frac{t}{2} \cot \theta_{p,h} \end{aligned}$$

Se il segmento OL rappresenta il semiasse maggiore ( $c$ ) e OI quello minore ( $d$ ) è possibile definire l'eccentricità ( $e$ ) dell'ellisse come il rapporto tra la distanza tra i due fuochi ( $2f$ ) e la lunghezza dell'asse maggiore, ovvero:

$$e = \frac{2f}{2a} = \frac{f}{a}$$

Per determinare l'eccentricità dell'ellisse è sufficiente osservare la Figura 129 e ricordare la proprietà dell'ellisse per cui la distanza tra il fuoco M e il punto I è pari alla lunghezza del semiasse maggiore  $c$  (pari al segmento OL).

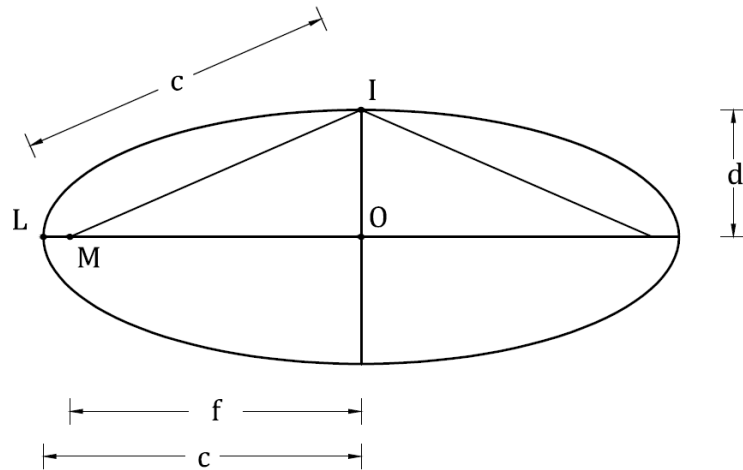


Figura 129. Schema per la relazione tra i parametri  $c$ ,  $d$  ed  $f$ .

Pertanto è possibile utilizzare il teorema di Pitagora per definire la distanza  $f$  e riscrivere l'equazione dell'eccentricità come:

$$e = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{c} = \frac{\sqrt{OL^2 - OI^2}}{OL}$$

A questo punto si determina la lunghezza dell'ellisse come:

$$2p_{El} = 4aE(e^2) \quad [mm] \quad (3.55)$$

dove  $E$  è un integrale ellittico completo di seconda specie per la cui dimostrazione si rimanda a [77]. L'equazione può essere tuttavia sviluppata in serie come:

$$2p_{El} = 2\pi c \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2(k+1)} \right)^2 \frac{e^{2n}}{2n-1} \right) \quad [mm] \quad (3.56)$$

di cui la formulazione di Ramanujan [78] ne fornisce un'ottima approssimazione:

$$2p_{El} = \pi \left( 3(c+d) - \sqrt{(3c+d)(c+3d)} \right) \quad [mm] \quad (3.57)$$

Pertanto è possibile esprimere l'azione resistente (caratteristica, non di calcolo) al punzonamento della muratura per crisi a trazione dei blocchi come:

$$T_{w,Tk} = \tau_{u,H} \cdot t \cdot 2p_{El} \quad [N] \quad (3.58)$$



#### **3.2.4.4. Confronto dei due meccanismi**

Per quanto visto è lecito affermare che il punzonamento per trazione, o meglio per uno stato di tensione pluriassiale, si manifesta in quelle murature dove l'alta qualità del legante permette lo sviluppo di un'elevata azione resistente contro la crisi per scorrimento del solido di distacco. Tale meccanismo, che è garanzia di una elevata duttilità a causa della gran quantità di energia necessaria a permettere il movimento reciproco di superfici scabre, può essere tuttavia preceduto da una crisi meno duttile nei blocchi a causa di una sollecitazione composta di trazione e compressione. La condizione che causa l'insorgere di questo secondo meccanismo di crisi "meno desiderato", poiché maggiormente fragile, è essenzialmente la presenza di elementi dotati di scarse proprietà meccaniche nella muratura, come mattoni albasì o blocchi di tufo.

E' utile offrire ora degli esempi che mettano in risalto alcune caratteristiche delle leggi proposte per determinare l'azione resistente.

Nel primo caso è proposto il calcolo dell'azione resistente attraverso l'uso di un capochiave quadrato, avente lato pari a 250 mm, applicato su una muratura costituita da blocchi di tufo giallo, le cui caratteristiche sono state prelevate dai test riportati nella prova [79]. Si riassumo i parametri necessari al calcolo:

$$f_{w,vk0} = 0,146 \quad [MPa] \quad t = 300 \quad [mm]$$

$$f_{b,ck} = 4,13 \quad [MPa] \quad f_{b,tk} = 0,23 \quad [MPa]$$

In primo luogo si mostra l'andamento dell'azione resistente secondo i due meccanismi di crisi al crescere dell'azione di compressione agente. Come immaginabile al crescere delle compressioni crescono entrambe le azioni resistenti ed è importante notare che, data la scarsa resistenza a trazione dei blocchi, è presente un intervallo di valori nello stato di sollecitazione per il quale l'azione resistente da assumere come rappresentativa del solido murario diventa quella dovuta a un meccanismo di crisi per trazione. Ciò è in aperto contrasto con gli andamenti che presentano le azioni resistenti calcolate secondo la letteratura scientifica in circolazione.

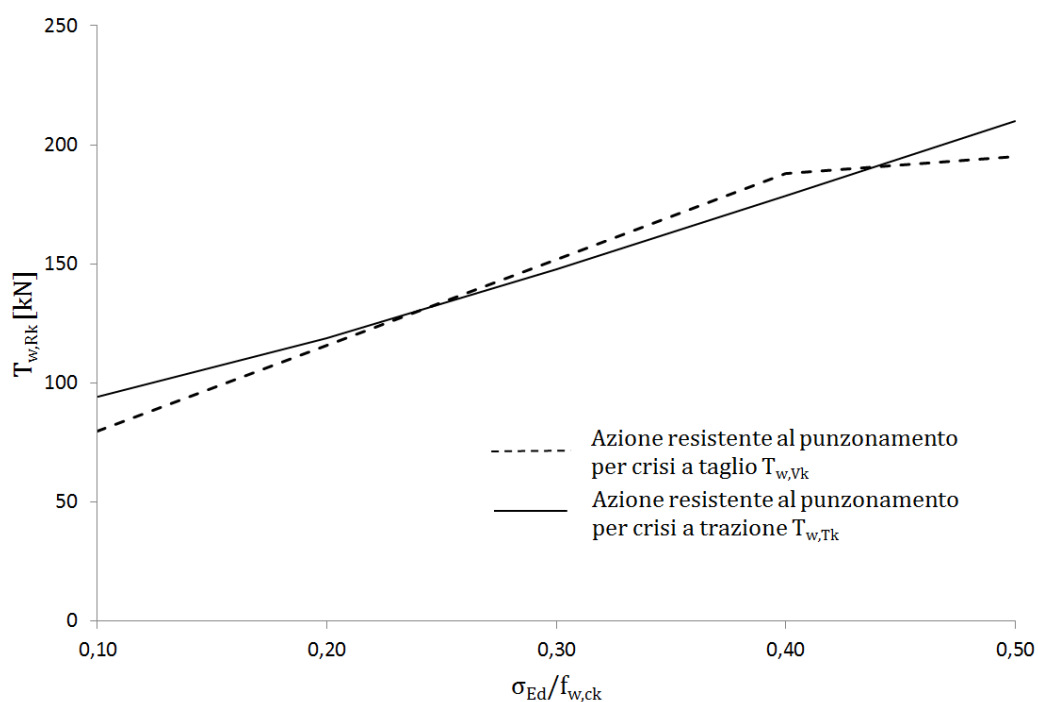
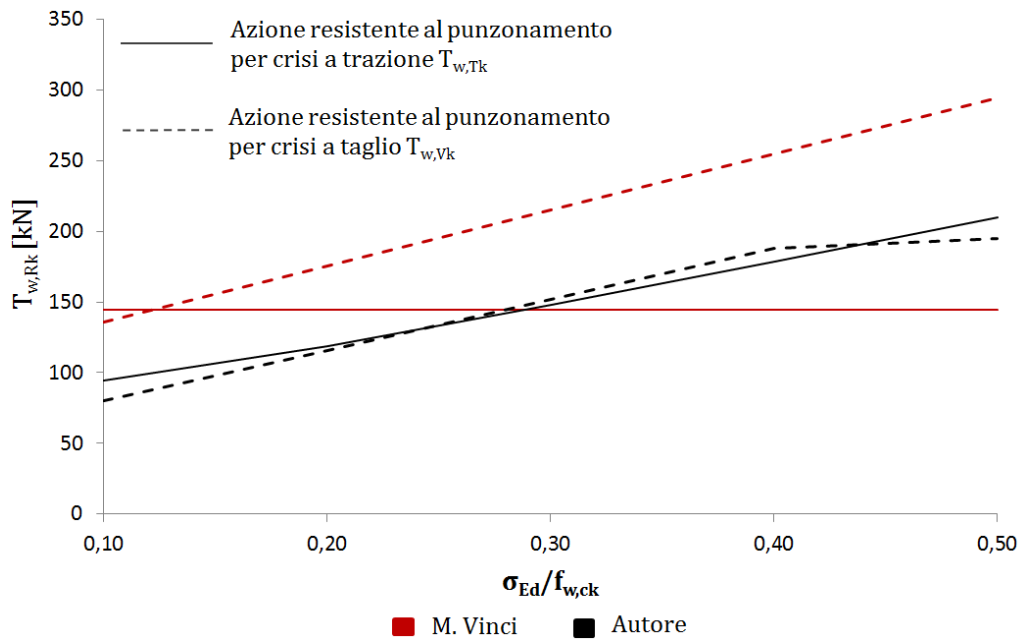


Figura 130. Azione resistente al crescere dell'azione di compressione.

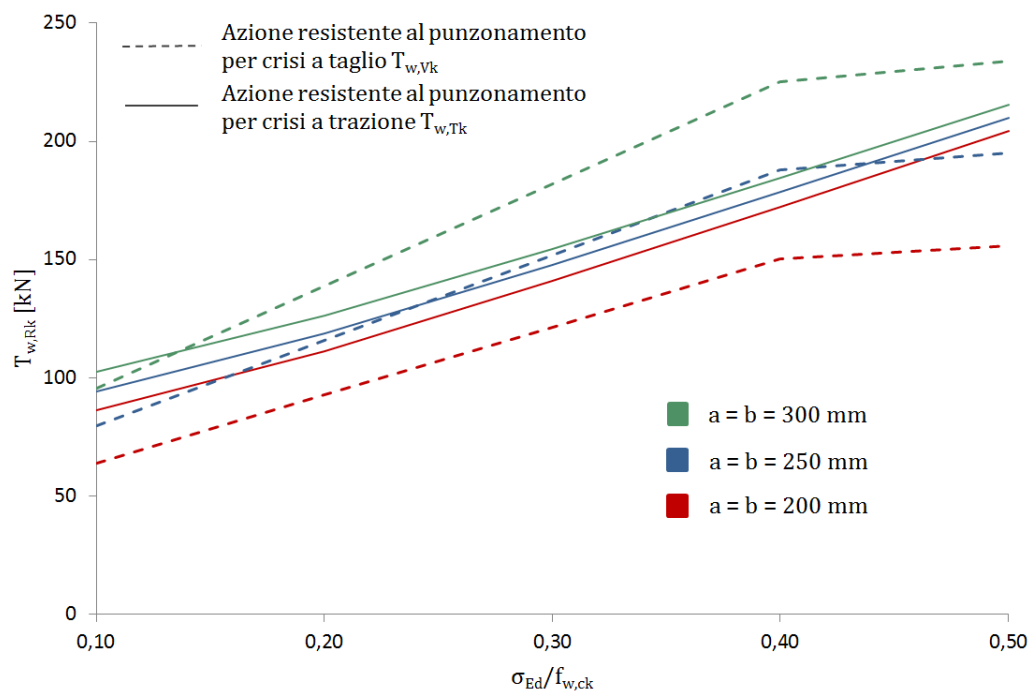
Nel seguente grafico viene invece mostrato l'andamento dell'azione resistente calcolata secondo il procedimento mostrato e secondo quello proposto da M. Vinci.



**Figura 131.** Confronto dell'azione resistente in funzione dello sforzo di compressione valutata in base alla proposta fatta e al procedimento di M. Vinci.

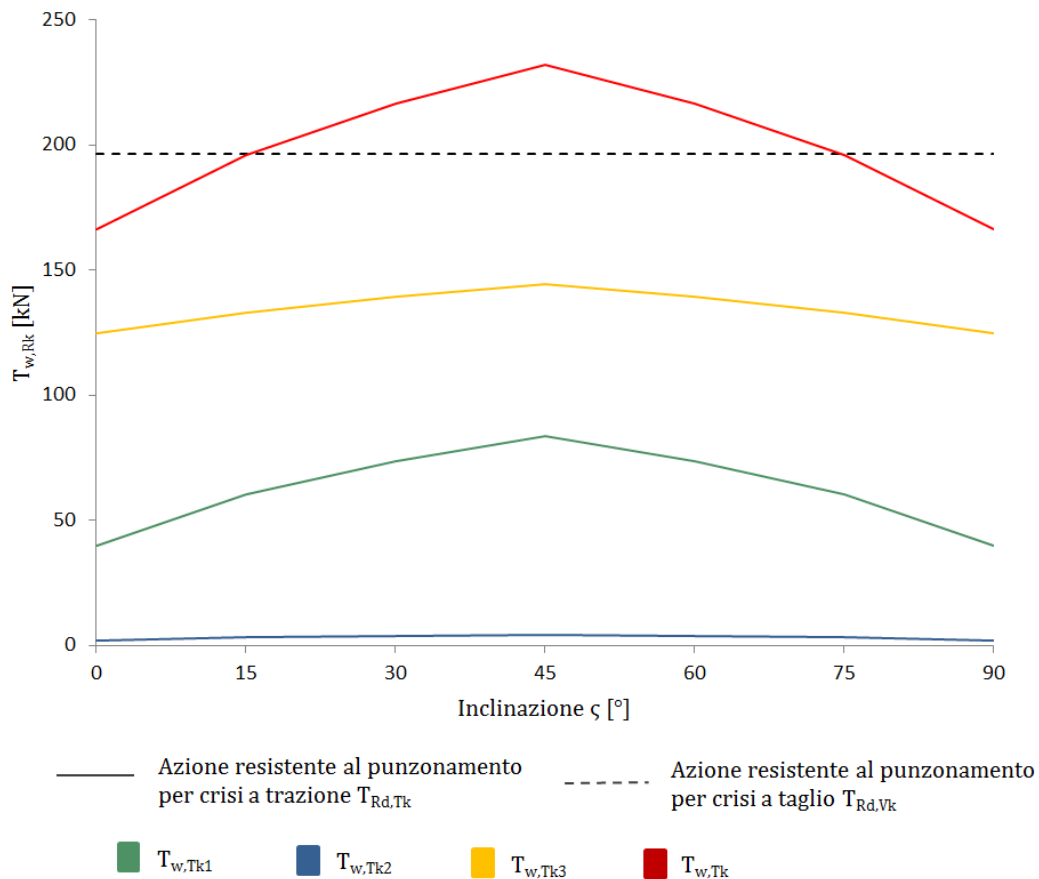
Innanzitutto è possibile notare che il nuovo procedimento proposto per valutare il meccanismo di crisi per taglio individua dei valori notevolmente inferiori; ciò è dovuto alla riformulazione del metodo di valutazione dell'area resistente. Inoltre il nuovo procedimento per il calcolo dell'azione resistente secondo un meccanismo di crisi per sollecitazione pluriassiale, contemplando l'effetto indotto da tale stato di sforzo ed utilizzando una resistenza basata sulle caratteristiche dei blocchi, individua dei valori variabili in base allo stato di sollecitazione e diversi rispetto a quelli determinati mediante il procedimento di M. Vinci.

Nel grafico seguente viene invece mostrato l'andamento dell'azione resistente secondo le due modalità di rottura proposte e utilizzando capochiave quadrati di diverse dimensioni. Ciò per mostrare al lettore che mantenendo costante lo spessore della parete e aumentando la dimensione del capochiave, l'azione resistente per crisi a taglio cresce molto più velocemente di quella per "trazione".



**Figura 132.** Valore dell'azione resistente al crescere dell'azione di compressione per diverse dimensioni del capochiave.

E' poi interessante mostrare l'andamento dell'azione resistente utilizzando un capochiave a paletto avente una lunghezza pari a 60 cm e una larghezza di 3 cm. In questo esempio si adotta il precedente solido murario e si mantiene costante il livello delle tensioni normali  $\sigma_{Ed}$  a 1,00 MPa per determinare il valore dell'azione resistente al variare dell'inclinazione  $\zeta$  con cui è stato disposto il paletto.



**Figura 133.** Valori dell'azione resistente in funzione dell'inclinazione del paletto per una muratura in tufo giallo.

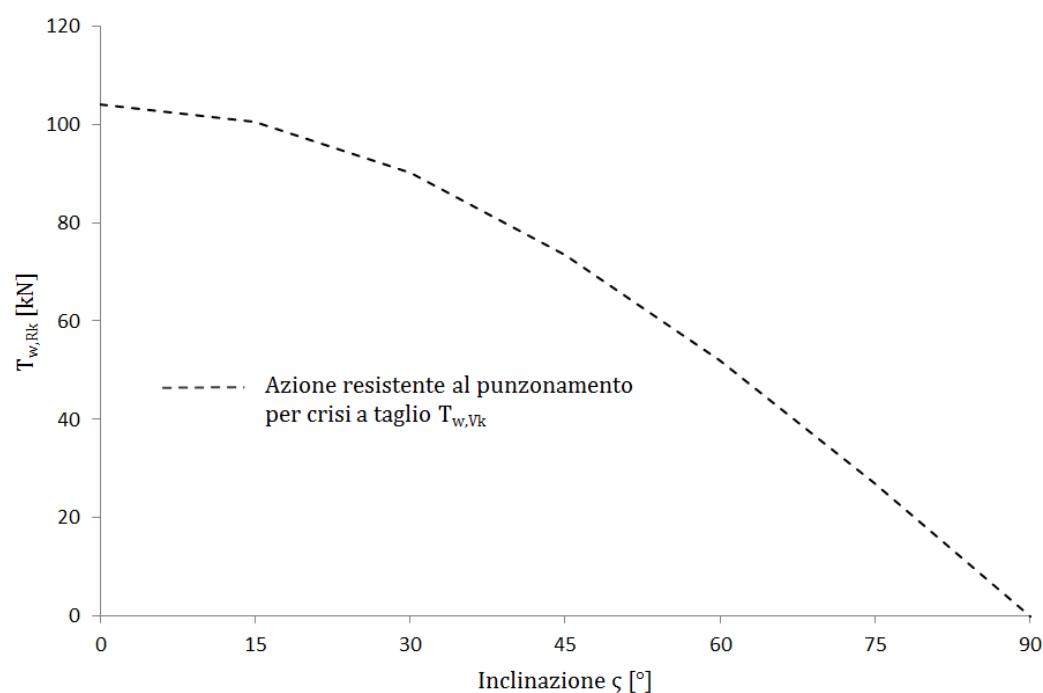
Si nota subito che l'azione resistente per crisi a taglio resta costante. Questo perché, come visto al punto 3.2.4.2, la presenza di blocchi parzialmente interessati dal paletto rende costante l'area resistente al variare dell'inclinazione. Per quanto riguarda il secondo meccanismo di crisi, oltre al valore complessivo dell'azione resistente, sono state riportate le tre componenti relative ai tre tipi di superfici resistenti, di cui è molto interessante osservare l'andamento in funzione dell'inclinazione  $\zeta$  del paletto.

Lo stesso capochiave a paletto viene ora disposto su una muratura in pietrame disordinata (costituita da ciottoli, pietre erratiche e irregolari) le cui caratteristiche meccaniche sono prelevate dalla tabella C8.A.2.1 della Circolare delle NTC 2008.

$$f_{w,ck} = 1,00 \quad [MPa] \quad f_{w,vk0} = 0,02 \quad [MPa] \quad t = 400 \quad [mm]$$

La resistenza a trazione e compressione dei blocchi coincide con quella delle pietre presenti nel paramento e pertanto, visto le elevate caratteristiche meccaniche delle pietre, si trascura la verifica dovuta alla fessurazione di queste ultime.

Nel grafico seguente viene mostrato l'andamento dell'azione resistente al punzonamento per crisi a taglio della muratura, ipotizzando che questa sia sottoposta a una tensione normale  $\sigma_{Ed}$  pari a 0,50 MPa e facendo variare l'inclinazione del paletto.



**Figura 134.** Valori dell'azione resistente in funzione dell'inclinazione del paletto per una muratura costituita da pietrame eterogeneo.

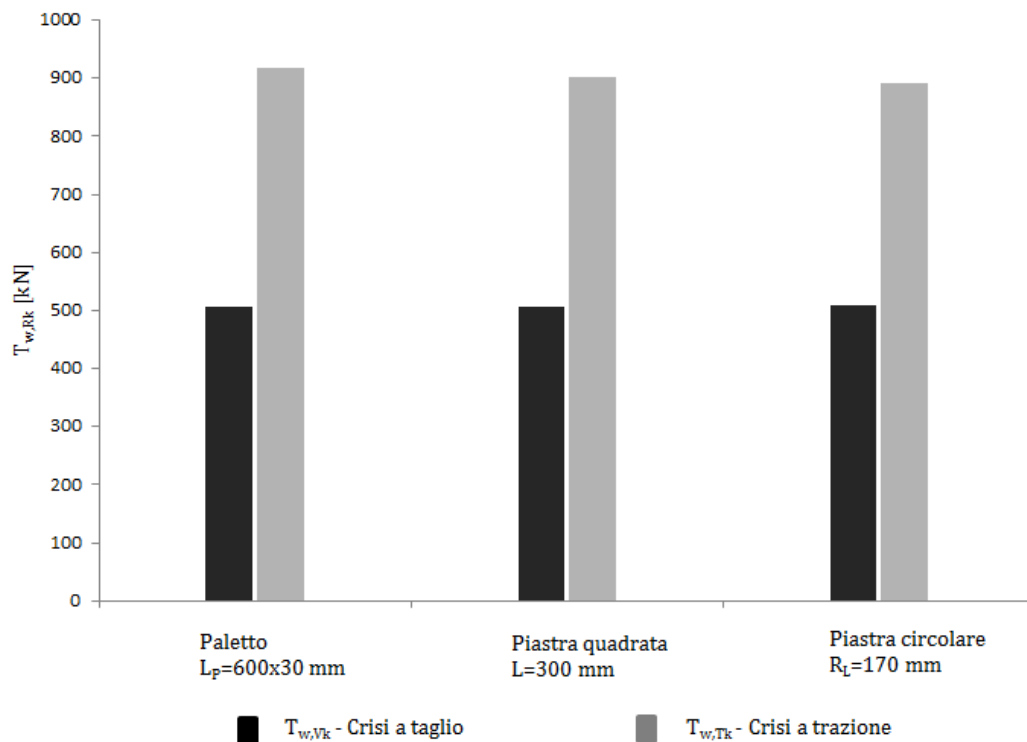
In questo caso, per le motivazioni già espresse al punto 3.2.4.2, non è possibile stabilire dei meccanismi resistenti per una crisi a taglio come per il caso precedente e il valore dell'azione resistente secondo questo meccanismo di crisi varia da un valore massimo a un minimo, registrati rispettivamente a 0° e a 90°.

Infine si ipotizzi di applicare diversi tipi di capochiave ad una vecchia muratura di mattoni disposti per filari orizzontali, le cui caratteristiche meccaniche sono prelevate dal test [80] e in seguito riportate:

$$f_{w,ck} = 7,90 \quad [MPa] \quad f_{w,vk0} = 0,11 \quad [MPa] \quad t = 380 \quad [mm]$$

$$f_{b,ck} = 19,5 \quad [MPa] \quad f_{b,tk} = 1,26 \quad [MPa]$$

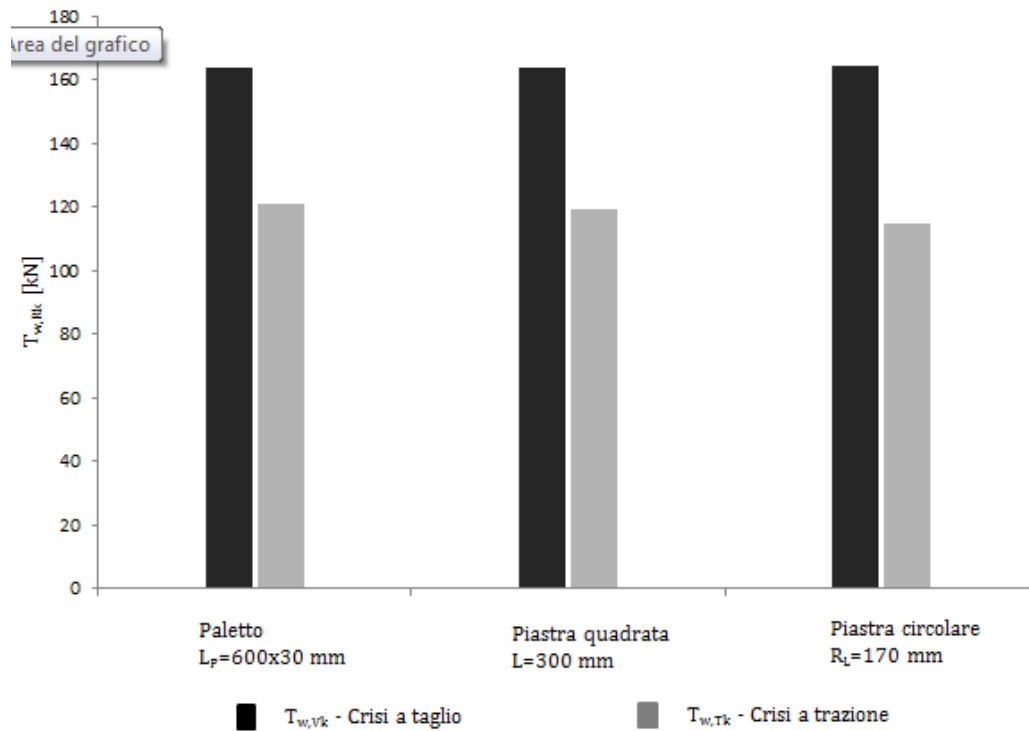
Ipotizzando di mantenere costante il valore della tensione normale di compressione  $\sigma_{Ed}$  e pari a 2,5 MPa, si rilevano le seguenti azioni resistenti.



**Figura 135.** Valore dell'azione resistente per punzonamento di una muratura di mattoni utilizzando diversi tipi di capochiave.

In questo caso l'elevata resistenza a trazione e compressione dei blocchi porta a determinare dei valori per crisi a trazione estremamente elevati e pertanto la verifica fondamentale è quella per crisi a taglio.

Al contrario se sullo stesso grafico si mostra il valore delle azioni resistenti in relazione alla precedente muratura in tufo giallo il rapporto tra queste si inverte e la l'azione resistente per crisi a trazione risulta determinante.



**Figura 136.** Valore dell'azione resistente per punzonamento di una muratura di mattoni in tufo giallo utilizzando diversi tipi di capichave.

Si ricorda che i valori trovati non sono dei valori di calcolo, ma caratteristici, in quanto non è stato loro applicato il coefficiente parziale di sicurezza  $\gamma_M$  fornito dalla tabella 4.5 II delle NTC 2008.



### 3.3. Resistenza del capochiave

#### 3.3.1. Capochiave a paletto

##### 3.3.1.1. Stato dell'arte

L'unico riferimento per determinare la capacità portante di un capochiave in acciaio, avente la forma di un paletto, ovvero un elemento in cui una dimensione prevale sulle altre due e la sezione di base rettangolare è estrusa lungo una retta normale alla base, è contenuta all'interno del libro [59] scritto da Michele Vinci.

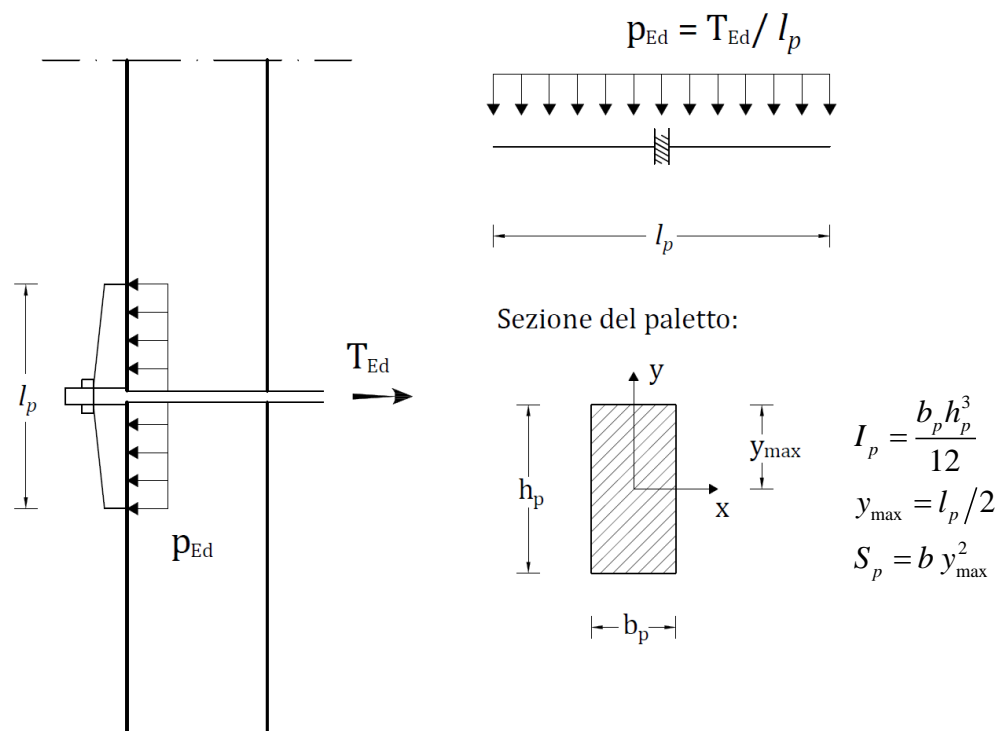


**Figura 137.** Capochiave a paletto, Abbazia di S. Donato a Sesto Calende, XI secolo.

**Figura 138.** Capochiave a paletto, Cappella presso Miazzina, Valgrande.

L'autore esegue l'analisi della resistenza studiando il paletto come un tradizionale elemento monodimensionale incastrato in prossimità del collegamento con il tirante. Esso viene dunque schematizzato come due mensole incastrate in mezzeria e soggette alla reazione distribuita linearmente della muratura, pari all'azione di trazione del tirante diviso la lunghezza del paletto.

Viene dunque proposto il calcolo di momento e taglio presenti nel paletto, i quali generano uno stato di sforzo, composto da tensioni assiali e tangenziali, con cui attraverso il criterio di rottura di Von Mises, si ricava la tensione ideale agente, da confrontare in ultima istanza con la resistenza a snervamento dell'acciaio.



**Figura 139.** Schema statico per la verifica del capochiave a paletto.

$$M_{Ed} = \frac{p_{Ed} \left( \frac{l_p}{2} \right)^2}{2} = \frac{T_{Ed} l_p}{8} \quad [kNm] \quad (3.59)$$

$$V_{Ed} = p_{Ed} \frac{l_p}{2} = \frac{T_{Ed}}{2} \quad [kN] \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} \sigma_{Ed}(x, y) = \frac{M_{Ed} y_{max}}{I_p} \quad [MPa] \\ \tau_{Ed}(x, y) = \frac{V_{Ed} S_p}{I_p b_p} \quad [MPa] \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\sigma_{id}(x, y) = \sqrt{\sigma_{Ed}^2(x, y) + 3\tau_{Ed}^2(x, y)} \leq f_{yd} \quad [MPa] \quad (3.62)$$

L'ipotesi alla base del procedimento è che le caratteristiche geometriche e meccaniche del capochiave e del pannello, nonché il loro mutuo interagire, permettano di sviluppare una reazione costante della muratura lungo lo sviluppo del paletto, in risposta all'azione concentrata esercitata dal tirante.

Questa ipotesi non può dirsi automaticamente verificata ed è bene addentrarsi maggiormente nella problematica, per stabilire:

- Se il procedimento valuti correttamente le azioni agenti,
- I limiti entro cui si ottiene una risposta adeguata della muratura.

È bene osservare che non basta adempiere alla prima condizione espressa, poiché l'eventuale disomogeneità marcata nella risposta del solido murario comporterebbe una pericolosa concentrazione degli sforzi, potenzialmente dannosa poiché fonte di meccanismi di rottura prematuri rispetto a quelli attesi. In buona sostanza si tratta di comprendere se la condizione di progetto più gravosa sia quella legata alla resistenza del paletto o dipenda dalla deformabilità di quest'ultimo, come supposto nell'introduzione a questo capitolo.

### 3.3.1.2. Metodo di analisi

Per stabilire quanto affermato in precedenza è necessario adoperare un modello di analisi maggiormente adeso alla reale situazione presente. Non è detto infatti che la muratura risponda in maniera omogenea, e la verifica dello stato tensionale non può dunque prescindere dallo studio del mutuo interagire dei due corpi lungo il confine del capochiave.

È quindi necessario riferirsi al caso di una trave su appoggio elastico continuo e assimilare così il paletto in esame, a un elemento monodimensionale di dimensione principale finita, appoggiato per tutta la sua lunghezza su di un suolo elastico, tale che la sua reazione in ogni punto sia proporzionale all'abbassamento che subisce la trave nell'infiattersi [81]. Per quanto detto, l'intensità della reazione del terreno  $p$ , avente distribuzione lineare, è pari a

$$p = k y \quad [N / mm] \quad (3.63)$$

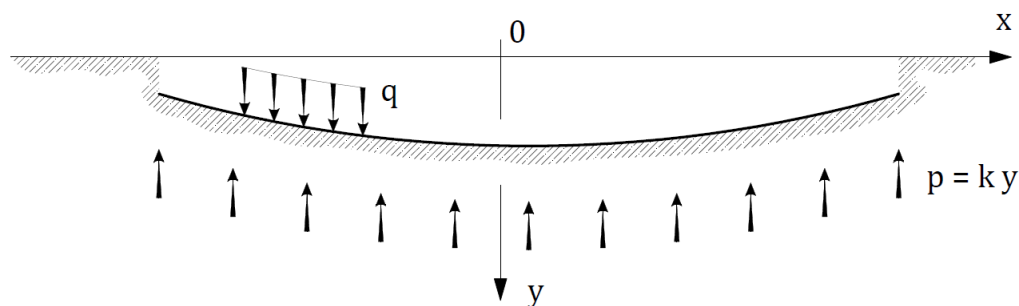


Figura 140. Trave su solido elastico.

Questa teoria fu introdotta nel 1867 da E. Winkler e si basa sul descrivere il comportamento elastico del suolo mediante la costante elastica del terreno  $k_0$ , che rappresenta la reazione del suolo nell'area di  $1 \text{ mm}^2$  quando l'abbassamento è di 1

mm. Pertanto esso si misura  $N/mm^3$ . Se poi si considera la larghezza  $b_p$  della trave, la reazione esercitata dal suolo su un millimetro della sua lunghezza, quando l'abbassamento è di 1 mm, è pari al modulo:

$$k = k_0 b_s \quad \left[ \frac{N}{mm^2} \right] \quad (3.64)$$

Se si analizza una sezione infinitesima della trave di Figura 140 e si considera l'equazione all'equilibrio verticale delle forze, è possibile scrivere, per una trave prismatica e omogenea, l'equazione differenziale della linea elastica.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q - k y \quad (3.65)$$

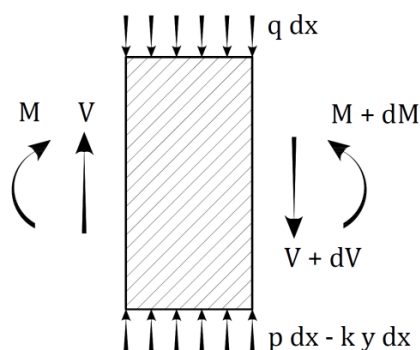


Figura 141. Sezione infinitesima di una trave su suolo elastico.

### 3.3.1.3. *Precisazioni in merito alla costante elastica del terreno*

Prima di procedere ad analizzare il caso specifico di trave su suolo elastico sottoposta a un carico concentrato in mezzzeria, ovvero la situazione che meglio interpreta il comportamento del capochiave a paletto, è bene soffermarsi sulla costante elastica del terreno  $k_0$ .

Questo parametro è un valore applicato in geotecnica per caratterizzare i diversi tipi di suolo e definirne le prestazioni meccaniche. In particolare il suolo viene schematizzato, oltre che come un semispazio elastico, anche come un mezzo elastico caratterizzato dal fatto che in un punto il cedimento dipende soltanto dal carico ivi applicato. Il parametro che rappresenta la portanza è appunto  $k_0$  e si determina mediante un apparecchio detto edometro che mettendo in compressione un volume di terreno, ne misura le caratteristiche. E' utile notare che la prova di compressione avviene mentre le espansioni laterali del volume di terreno sono impedito e che il dispositivo di prova misura anche il modulo elastico, il quale può essere quindi correlato a  $k_0$ .

La relazione tra i due parametri e in particolare il tentativo di esprimere la costante  $k_0$  in funzione del modulo elastico del terreno fu oggetto di numerosi studi. Questo perché si cercava una formulazione empirica della costante elastica del terreno che fosse basata su un parametro conosciuto per ogni tipo di terreno, piuttosto che eseguire delle prove meccaniche ogni qualvolta si operi in un nuovo ambiente. Fu così che Biot in [82] propose la seguente relazione:

$$k_0 = 0,95 \frac{E_s}{b(1-\nu^2)} \left( \frac{E_s b^4}{EI} \right)^{0,108} \quad [\text{N/mm}^3] \quad (3.66)$$

Altre formulazioni basate sugli studi di Biot furono poi proposte da Hetenyi in [83]:

$$k_0 = 0,71 \frac{E_s}{b} \sqrt[3]{\frac{E_s b^4}{EI}} \quad [\text{N/mm}^3] \quad (3.67)$$

e da Vesic in [84]:

$$k_0 = 0,65 \frac{E_s}{b(1-\nu^2)} \sqrt[12]{\frac{E_s b^4}{EI}} \quad [\text{N/mm}^3] \quad (3.68)$$

Ulteriori formulazioni sono proposte in [85-87], mentre in [88] è riportata una relazione ricavata valutando i cedimenti secondo la teoria di Boussinesq:

$$k_0 = 2,632 \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \quad [\text{N/mm}^3] \quad (3.69)$$

Se si paragona l'edometro a una situazione in cui un capochiave a paletto mette in carico la muratura, si osserva innanzitutto che l'azione trasmessa dalla chiavarda avviene in direzione normale a quella in cui normalmente si misura il modulo elastico della muratura. Perciò nelle formule precedenti bisognerebbe innanzitutto far uso del modulo di elasticità normale parallelo ai letti di malta (la muratura può essere vista come un materiale omogeneo ortotropo). In secondo luogo è bene ricordare che nello studio di una trave su suolo elastico, il suolo è assimilabile ad un semispazio infinito in cui si diffonde l'azione localizzata esercitata dalla fondazione. Nel caso del capochiave invece, ci si trova di fronte a un supporto elastico di spessore finito e ridotto, in cui la deformazione in direzione trasversale non avviene soltanto per cedimento del mezzo elastico, ma anche per l'infiattersi della parete. Tuttavia le catene vengono spesso disposte in prossimità dei solai e/o di muri ad esse paralleli dove l'inflessione è minima e pertanto questa discrepanza nel comportamento è trascurabile.

Tuttavia le formule presentate non sono adatte per valutare la costante elastica del terreno di un solido avente un alto modulo elastico e una composizione diversa da

quella di un terreno. Esse sono state infatti concepite per correlare con sufficiente approssimazione la costante elastica di un terreno al modulo elastico solo per materiali dotati di un basso modulo elastico.

Se infatti si utilizzano i valori del modulo edometrico presi da [89] (riassunti nella Tabella 5) per calcolare attraverso le precedenti formule la costante elastica del terreno, si riscontrano dei valori simili a quelli proposti da [89], solo fino a che il modulo edometrico non sorpassa all'incirca il valore di 200 MPa. Oltre questo termine il valore di  $k_0$  esplode.

Tipo di terreno	$E_S$ da [89] [N/mm <sup>2</sup> ]	$k_0$ da [89] [N/mm <sup>3</sup> ]	$k_0$ (3.66) [N/mm <sup>3</sup> ]	$k_0$ (3.67) [N/mm <sup>3</sup> ]	$k_0$ (3.68) [N/mm <sup>3</sup> ]	$k_0$ (3.69) [N/mm <sup>3</sup> ]
Sabbia sciolta	10 ÷ 50	0,01 ÷ 0,10	0,03 ÷ 0,14	0,01 ÷ 0,07	0,04 ÷ 0,19	0,02 ÷ 0,09
Sabbia compatta	50 ÷ 120	0,1 ÷ 0,15	0,16 ÷ 0,37	0,13 ÷ 0,30	0,22 ÷ 0,53	0,09 ÷ 0,21
Ghiaia compatta	100 ÷ 200	0,1 ÷ 0,3	0,33 ÷ 0,66	0,32 ÷ 0,63	0,48 ÷ 0,96	0,17 ÷ 0,35
Arenaria	5000 ÷ 40000 (*)	0,6 ÷ 0,8	> 200	> 700	> 300	> 60

(\*)Il modulo elastico dell'arenaria proposto in [16] diventa 8000÷40000[N/mm<sup>3</sup>] secondo quanto esposto in [90].

**Tabella 5.** Valori indicativi del modulo edometrico e della costante elastica del terreno.

Analogamente, se si calcola la costante elastica  $k_0$  di una muratura a partire dal modulo elastico normale parallelo ai letti di malta della stessa, si perviene a valori da 4 a 10 volte al di sopra della costante elastica dell'arenaria riportata in [89]. Valori dunque del tutto fuori scala e inapplicabili nell'analisi di una trave su suolo elastico. Utilizzando infatti il valore del modulo elastico normale parallelo ai letti di malta riportato nel test [91], il valore più attendibile della costante elastica del terreno è determinato dall'equazione (3.69) e risulta compreso tra 4,47 ÷ 7,95 [N/mm<sup>3</sup>].

E' invece ragionevole assumere che il valore di  $k_0$  di una muratura, sia compreso tra il valore della costante di un terreno ghiaioso e quello di una pietra arenaria. L'escursione tra i due estremi potrebbe essere risolta facendo un'interpolazione lineare e utilizzando come discriminante il modulo elastico: posto che l'indice "a" rappresenti l'arenaria, "g" la ghiaia e "W" la muratura, si potrebbe assumere che la costante elastica  $k_0$  della muratura sia pari a:

$$k_{0,W} = k_{0,g} + (k_{0,a} - k_{0,g}) \frac{E_{W,\parallel} - E_g}{E_a - E_g} \quad [N / mm^3] \quad (3.70)$$

A titolo di confronto si riportano di seguito i valori di  $k_0$  proposti dall'ing. A. Riva in [92]. Tale tabella non riporta però i corrispondenti moduli edometrici, per cui non è direttamente utilizzabile nell'equazione (3.70).

Tipo di terreno	$k_0$ [N/mm <sup>3</sup> ]
Torba	0,006 ÷ 0,018
Terreno vegetale	0,01 ÷ 0,015
Sabbia fine poco addensata	0,015 ÷ 0,02
Terreno eterogeneo poco addensato	0,02 ÷ 0,035
Terreni argillosi	0,05 ÷ 0,15
Ghiaia con sabbia incoerente	0,10 ÷ 0,15
Ghiaia con sabbia mediamente coerente	0,12 ÷ 0,18
Ghiaia con sabbia compatta	0,15 ÷ 0,20
Ghiaia e ciottoli con sabbia compatta	0,20 ÷ 0,25
Roccia fratturata	0,15 ÷ 0,25
Roccia sedimentaria	0,25 ÷ 0,50
Roccia intrusiva o metamorfica	> 0,50

**Tabella 6.** Valori della costante elastica del terreno proposti da A. Riva.

In conclusione, la costante elastica  $k_0$  della muratura può essere ottenuta dalla relazione:

$$k_0 = 0,3 + 0,5 \frac{E_{w,\parallel} - 200}{39800} \quad [N / mm^3] \quad (3.71)$$

in cui si è assunto

$$k_{0,g} = 0,3 \text{ [N/mm}^3\text{]}$$

$$k_{0,a} = 0,8 \text{ [N/mm}^3\text{]}$$

$$E_g = 200 \text{ [MPa]}$$

$$E_a = 40000 \text{ [MPa]}$$

Se ad esempio si utilizzasse il valore del modulo elastico normale parallelo ai letti di malta del test [91], ovvero 2560 N/mm<sup>2</sup>, attraverso la formula (3.71) si otterrebbe un valore della costante elastica  $k_0$  pari a 0,33 N/mm<sup>3</sup>. Un valore che in riferimento ai dati di [89] appare in scala e correttamente posizionato.

### 3.3.1.4. Risoluzione delle trave su suolo elastico

Volendo dunque descrivere il comportamento di un capochiave a paletto, collegato al tirante in prossimità della zona centrale e avente sezione rettangolare di rigidità costante, è necessario riferirsi al caso specifico di trave appoggiata su di un solido elastico e sottoposta unicamente a un'azione concentrata in mezzeria pari all'azione di trazione  $T_{Ed}$  trasmessa dalla barra in acciaio .

Tra le ipotesi del problema dobbiamo anche aggiungere che il solido elastico reagisce solo tramite azione di compressione e non di trazione, dunque se le zone terminali del paletto si sollevano esse non saranno sottoposte ad alcuna azione. Inoltre si ipotizza che le zone adiacenti, ma non direttamente a contatto con la trave, non portino alcun contributo alla risoluzione.

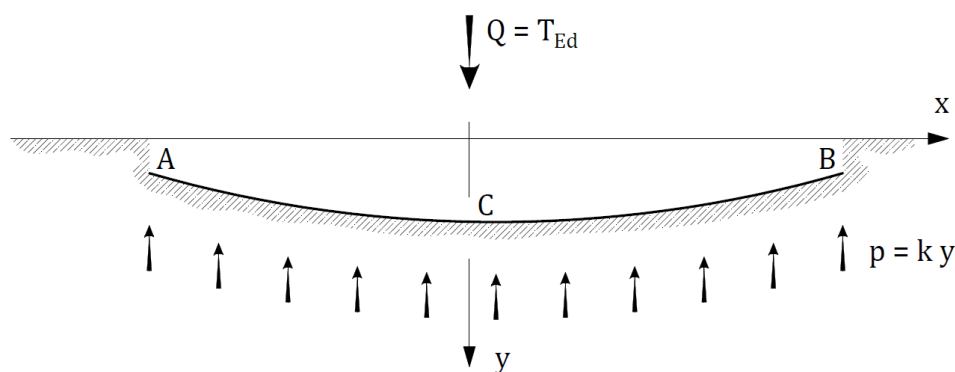


Figura 142. Schema statico.

Riferendosi dunque alla Figura 142 si riprende in considerazione l'equazione della linea elastica precedentemente scritta (3.65), che, in virtù dei carichi agenti, diventa:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{k}{EI} y \quad (3.72)$$

Successivamente si pone il termine

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad [mm^{-1}] \quad (3.73)$$

Questo fattore include la rigidità flessionale della trave così come la capacità elastica del supporto e pertanto è un importante fattore che influenzerà l'andamento della linea elastica. Per questo motivo esso è chiamato la caratteristica del sistema e, siccome ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza, il termine  $1/\lambda$  viene chiamato lunghezza caratteristica del sistema [83].



Inoltre è altresì utile far notare che il coefficiente  $\lambda l$ , siccome contiene le caratteristiche di entrambi i solidi e in quanto adimensionale, ben si presta per descrivere i limiti geometrici e meccanici per cui si realizzano i punti affermati al paragrafo 3.3.1.1, ovvero determinare quanto la soluzione di M. Vinci sia sufficientemente corretta e quando la risposta della muratura sia uniforme lungo la lunghezza del capochiave. Chiameremo questo termine rigidità complessiva.

Tornando alla risoluzione del problema è possibile determinare l'andamento della linea elastica risolvendo l'equazione differenziale (3.72), il cui integrale generale è

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} \sin(\lambda x) + C_2 e^{\lambda x} \cos(\lambda x) + C_3 e^{-\lambda x} \sin(\lambda x) + C_4 e^{-\lambda x} \cos(\lambda x)$$

e determinare le costanti di integrazione ponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow y'=0 & -EIy''' &= -\frac{Q}{2} \\ x=\frac{l}{2} &\rightarrow -EIy''=0 & -EIy''' &= 0 \end{aligned}$$

Note le costanti è possibile calcolare deformata ( $y$ ), rotazione ( $\varphi$ ), momento ( $M_{Ed}$ ), taglio ( $V_{Ed}$ ) e reazione del terreno ( $p$ ) in qualunque punto della trave. All'Appendice A è possibile trovare il codice scritto per Wolfram Mathematica 9.0 con cui risolvere il caso in esame, ma per svolgere il ragionamento si è deciso di adottare la risoluzione delle precedenti variabili scritta in forma chiusa da M. Henteny in [83].

Tuttavia è molto utile osservare l'integrale generale della (3.72) per capire che siccome  $e^{-\lambda x}$  diminuisce molto rapidamente al crescere di  $\lambda x$ , gli effetti del carico concentrato su deformata, taglio, momento e reazione del suolo, si riducono altrettanto velocemente al crescere della distanza  $x$  dal punto di applicazione del carico.

Si riportano ora le equazioni contenute in [83].

- Equazione generale della deformata [cm]:

$$\begin{aligned} y = \frac{Q\lambda}{2k} \frac{1}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} \{ & \text{Cosh } \lambda l \cos \lambda(l-x) + \cos \lambda x \text{Cosh } \lambda(l-x) + \\ & - \text{Sinh } \lambda x \sin \lambda(l-x) + \sin \lambda x \text{Sinh } \lambda(l-x) + \\ & + 2\text{Cosh } \lambda x \cos \lambda x \} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Deformata in mezzzeria:

$$y_c = \frac{Q\lambda}{2k} \frac{\text{Cosh } \lambda l + \cos \lambda l + 2}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} \quad [mm] \quad (3.75)$$

Deformata agli estremi:

$$y_A = y_B = \frac{2Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh} \frac{\lambda l}{2} + \cos \frac{\lambda l}{2}}{\text{Sinh} \lambda l + \sin \lambda l} \quad [mm] \quad (3.76)$$

- Equazione generale della rotazione:

$$\varphi = \frac{Q\lambda^2}{k} \frac{1}{\text{Sinh} \lambda l + \sin \lambda l} \{ \text{Sinh} \lambda x [\cos \lambda x + \cos \lambda(l-x)] + \text{sin} \lambda x [\text{Cosh} \lambda x + \text{Cosh} \lambda(l-x)] \} \quad (3.77)$$

Rotazione alle estremità

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{2Q\lambda^2}{k} \frac{\text{Sinh} \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2} - \sin \frac{\lambda l}{2} \text{Cosh} \frac{\lambda l}{2}}{\text{Sinh} \lambda l + \sin \lambda l} \quad (3.78)$$

- Equazione generale del momento:

$$M_{Ed} = \frac{Q}{4\lambda} \frac{1}{\text{Sinh} \lambda l + \sin \lambda l} \{ \text{Sinh} \lambda x [\sin \lambda x - \sin \lambda(l-x)] + \text{Cosh} \lambda x [\cos \lambda x + \cos \lambda(l-x)] + \text{sin} \lambda x [\text{Sinh} \lambda x - \text{Sinh} \lambda(l-x)] + \text{cos} \lambda x [\text{Cosh} \lambda x + \text{Cosh} \lambda(l-x)] \} \quad (3.79)$$

Momento in mezzeria

$$M_{Ed,C} = \frac{Q}{4\lambda} \frac{\text{Cosh} \lambda l - \cos \lambda l}{\text{Sinh} \lambda l + \sin \lambda l} \quad (3.80)$$

- Equazione generale del taglio

$$V_{Ed} = \frac{Q}{2} \frac{1}{\text{Sinh} \lambda l + \sin \lambda l} \{ \text{Cosh} \lambda x [\sin \lambda x - \sin \lambda(l-x)] + \text{cos} \lambda x [\text{Sinh} \lambda x - \text{Sinh} \lambda(l-x)] \} \quad (3.81)$$

L'equazione (3.76) è molto importante perché permette di definire la lunghezza limite del paletto oltre la quale si avrà il sollevamento delle estremità del capochiave. Anche se scongiurare questa eventualità non garantisce la risposta uniforme della muratura, determinare questa lunghezza limite resta comunque un inte-

ressante esercizio. Ponendo quindi il limite alla deformata  $y_A < 0$  e risolvendo l'equazione, si riscontra che essa è verificata per

$$\lambda l < \pi \quad (3.82)$$

e dunque la lunghezza limite del paletto risulta essere  $l < \pi/\lambda$ . I principi che verranno in seguito fissati per determinare gli obbiettivi descritti in 3.3.1.1 andranno poi a determinare un valore più stringente per il coefficiente  $\lambda l$ .

### 3.3.1.5. Definizione della rigidità complessiva limite

Il procedimento risolutivo proposto da M. Vinci ipotizzava di schematizzare il paletto mediante la Figura 139 e presupponeva una reazione omogenea della muratura. Come già accennato un'eventuale concentrazione degli sforzi può essere dannosa, pertanto, oltre a superare una verifica di resistenza, le dimensioni geometriche del paletto, nonché le caratteristiche meccaniche dei due materiali, dovranno essere tali da definire un limite al coefficiente  $\lambda l$ , di modo da ottenere una reazione della muratura il più possibile uniforme. Dovendo porre un limite ingegneristico si sceglie di contenere la differenza di reazione tra l'estremità e la mezzeria della chiavarda entro il 10% della reazione presente all'estremità. Valutando le reazioni con lo schema di trave su suolo elastico è possibile stabilire che:

$$p_C - p_A \leq 0,1 p_A \quad (3.83)$$

$$k y_C - k y_A \leq 0,1 k y_A$$

$$\frac{Q\lambda}{2k} \frac{\text{Cosh } \lambda l + \cos \lambda l + 2}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} - \frac{2Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh } \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2}}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} \leq 0,1 \frac{2Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh } \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2}}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l}$$

Conviene porre  $N = Q\lambda/k$  e  $x = \lambda l/2$

$$\frac{N}{2} \frac{\text{Cosh } 2x + \cos 2x + 2}{\text{Sinh } 2x + \sin 2x} - 2N \frac{\text{Cosh } x \cos x}{\text{Sinh } 2x + \sin 2x} \leq 0,1 \cdot 2N \frac{\text{Cosh } x \cos x}{\text{Sinh } 2x + \sin 2x}$$

Si applicano poi le formule di bisezione al seno e al coseno normali e iperbolici di modo che abbiano lo stesso argomento e siccome N è sempre maggiore di zero è possibile semplificarlo.

$$\frac{N}{2} \frac{2\text{Cosh}^2 x - 1 + 2\cos^2 x - 1 + 2}{\text{Sinh } 2x + \sin 2x} - 2,2N \frac{\text{Cosh } x \cos x}{\text{Sinh } 2x + \sin 2x} \leq 0$$

$$\frac{\text{Cosh}^2 x + \cos^2 x - 2,2\text{Cosh } x \cos x}{\text{Sinh } x \text{Cosh } x + \sin x \cos x} \leq 0$$

E' poi impossibile procedere oltre per via analitica, perciò si sviluppa il primo termine della disequazione in serie di Taylor

$$a(x) = \text{Sin } x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800}$$

$$b(x) = \text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800}$$

$$c(x) = \text{Sinh } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{11}}{39916800}$$

$$d(x) = \text{Cosh } x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^{10}}{3628800}$$

e si giunge alla seguente disequazione:

$$\frac{(d(x))^2 + (b(x))^2 - 2,2d(x)b(x)}{c(x)d(x) + b(x)a(x)} \leq 0$$

Attuando poi una riduzione ai minimi termini si giunge alla seguente soluzione

$$x \leq -0,663111 \quad \wedge \quad 0 < x \leq 0,663111$$

Tuttavia, siccome  $x = \lambda l / 2 \in \mathbb{N}$ , l'unica soluzione possibile resta  $x \leq 0,663111$  e pertanto:

$$\lambda l = l^4 \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \leq 1,326 \tag{3.84}$$



**Figura 143.** Capochiave eccessivamente deformato, Veneranda fabbrica del Duomo, Milano.

**Figura 144.** Capochiave eccessivamente deformato, Palazzo comunale, Modena.

Come si avrà modo di vedere la verifica di deformabilità proposta risulterà, salvo elevati valori dell'azione di tiro, la verifica determinante per individuare le dimensioni del paletto. Pertanto conviene sviluppare l'equazione (3.84) per individuare i termini di progetto, ovvero l'altezza del paletto e la sua lunghezza.

$$\lambda l = l^4 \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = l \sqrt[4]{\frac{bk_0}{4E \frac{bh^3}{12}}} = l^4 \sqrt[4]{\frac{3k_0}{Eh^3}} \leq 1,326$$

Nella progettazione di queste chiavarde la lunghezza del paletto verrà determinata in base alla resistenza al punzonamento della muratura. Una volta fatto ciò, sarà possibile, in base alle caratteristiche della muratura definite da  $k_0$  e a quelle dell'acciaio definite dal modulo di Young, determinare l'altezza del paletto necessaria ad impedire una concentrazione pericolosa degli sforzi.

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{3k_0}{E \left(\frac{1,326}{l}\right)^4}} \quad [mm] \quad (3.85)$$



**Figura 145.** Capochiave a paletto abbinato a due catene, Piazza dei mercanti, Milano.

Il procedimento mostrato può essere altresì adottato per definire la rigidezza complessiva limite anche in situazioni diverse dal generico caso di capochiave a paletto collegato al tirante in mezzzeria. Osservando la catena di Figura 145 è possibile notare che il paletto è abbinato a due tiranti. In questo caso non è possibile utilizzare lo schema proposto da M. Vinci per la risoluzione ed è obbligatorio riferirsi allo schema di trave su suolo elastico per definire le azioni agenti sull'elemento. Per definire poi la rigidezza complessiva limite sarà sufficiente inserire nell'equazione (3.83) le equazioni in forma chiusa della deformata, proposte per il caso in esame sempre da Hetenyi in [83], e ricavare il valore di  $\lambda l$  utilizzando il medesimo procedimento.

### 3.3.1.6. Verifica di resistenza

Se si rispetta il criterio posto dalla disequazione (3.84) si ottiene una risposta sufficientemente omogenea della muratura, evitando così una pericolosa concentrazione degli sforzi. Soddisfatta questa condizione è poi necessario effettuare comunque una verifica di resistenza, da attuare mediante il criterio di rottura di Von Mises. Tuttavia, a differenza di quanto scritto da M. Vinci, le equazioni di verifica differiscono dallo schema proposto dall'autore mediante le equazioni (3.61) e (3.62).

Come proposto dall'autore è necessario verificare la sezione posta nella mezzeria del paletto, poiché lì, il taglio e il momento flettente raggiungono il loro valore massimo. Tuttavia la tensione assiale  $\sigma_{Ed}$  e quella tangenziale  $\tau_{Ed}$  variano lungo l'altezza  $y$  della sezione con andamento inverso, ovvero dove l'una raggiunge il suo massimo, l'altra trova il suo minimo. Pertanto risulta scorretto valutare la tensione ideale sommando all'interno dell'equazione (3.62) i valori massimi delle tensioni assiali e tangenziali. Al punto 3.3.2.6 verrà studiata la variazione delle due tensioni lungo l'altezza di una sezione unitaria in caso di capochiave circolare. In questo caso valgono i medesimi ragionamenti e si giunge alla stessa conclusione, ovvero che la tensione ideale è da valutare all'estremità della sezione, dove la tensione assiale raggiunge il suo massimo, mentre la tangenziale si azzerava.

$$\sigma_{id} \left( \frac{l_p}{2}, \frac{h_p}{2} \right) = \sqrt{\sigma_{Ed}^2(x, y)} \leq f_{yd} \quad [MPa] \quad (3.86)$$

Il momento e il taglio agenti, necessari al calcolo della tensione ideale  $\sigma_{id}$ , è bene che siano calcolati mediante le equazioni della trave su suolo elastico per ottenere una maggior precisione. Tuttavia è bene far notare che se viene rispettata la condizione posta dalla disequazione (3.84), allora anche lo schema di doppia mensola incastrata, proposto da M. Vinci per il calcolo di momento e taglio, fornisce un'ottima approssimazione del problema, in quanto la reazione della muratura sarà praticamente omogenea.

Per dare dimostrazione di quanto affermato viene effettuato un esempio mettendo a confronto due capichiave a paletto sottoposti alla stessa azione concentrata in mezzeria  $T_{Ed}$  ed aventi identica geometria, salvo l'altezza che passa da 60 a 45 mm, modificando così il valore della rigidità complessiva  $\lambda l$ .

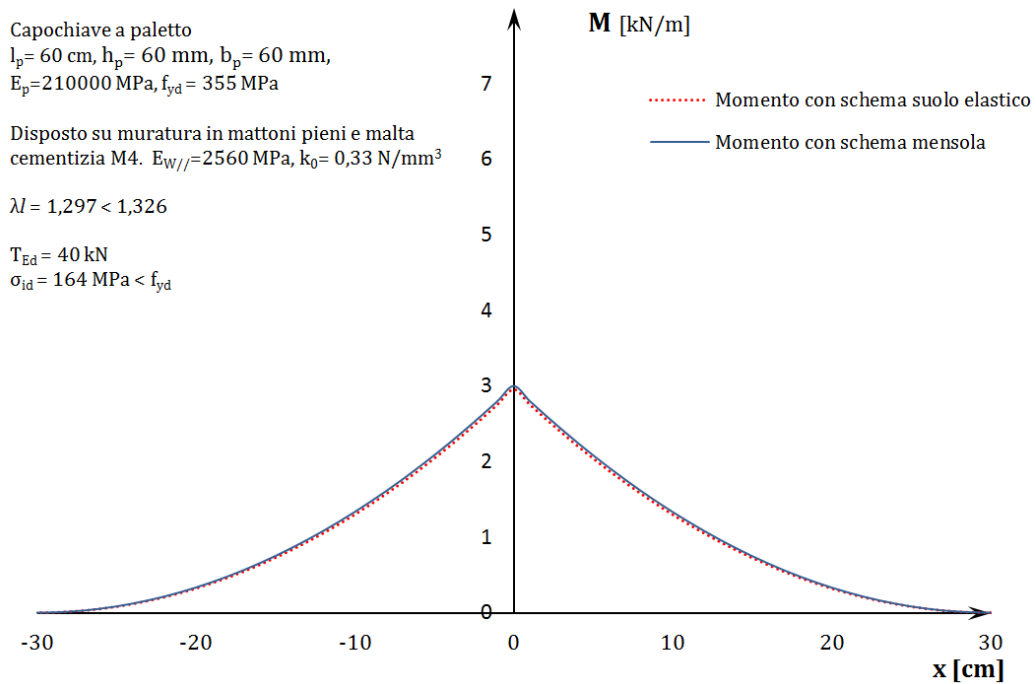


Figura 146. Esempio n°1, grafico dei momento flettenti.

Nel primo caso siccome  $\lambda l < 1,326$ , non si avrà un'elevata concentrazione degli sforzi e lo schema a mensola permetterà di ottenere dei risultati simili a quelli ottenibili con la risoluzione della trave su suolo elastico.

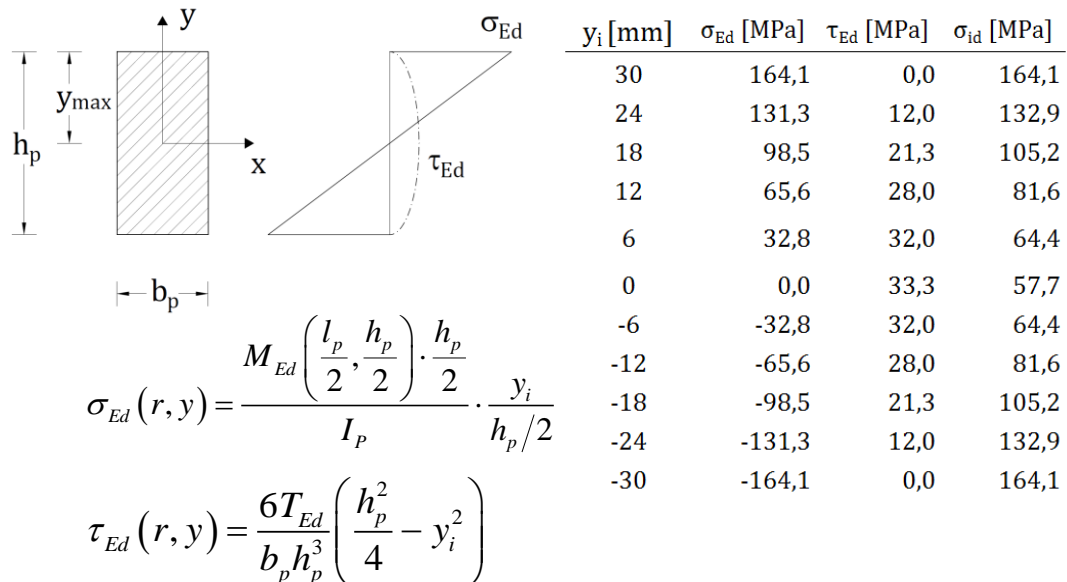


Figura 147. Andamento delle tensioni nella sezione dell'esempio n°1.

Se poi si osserva l'andamento della tensione assiale e di quella tangenziale lungo l'altezza della sezione è possibile avere una dimostrazione concreta del fatto che il punto in cui valutare la tensione ideale sia quello posto all'estremità della sezione, poiché è qui che si registra il valore più alto.

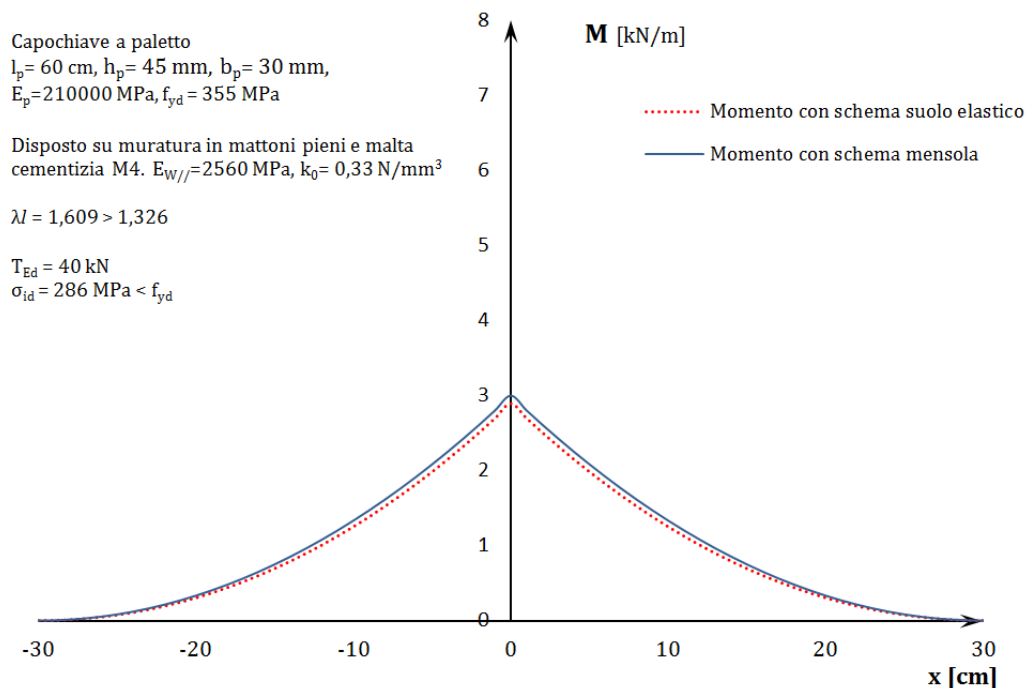


Figura 148. Esempio n°2, grafico dei momenti flettenti.

Nel secondo caso invece  $\lambda l$  è maggiore del valore limite proposto, il che si traduce in una disomogeneità marcata nella reazione della muratura. Questa infatti aumenta di circa il 25% passando da un estremo alla mezzeria, creando una situazione pericolosa per la sicurezza della muratura.

E' interessante notare che nonostante sia stata imposta azione di tiro non troppo elevata, in entrambi i casi la verifica di resistenza mediante il criterio di Von Mises risulta positiva, mentre la condizione relativa alla deformabilità è più difficoltosa da ottemperare. Questo comunque non solleva il progettista dal compito di effettuarle entrambe, in quanto la verifica dell'uniformità della reazione, per il principio di sovrapposizione e proporzionalità degli effetti, non è funzione del carico applicato.



### 3.3.2. Capochiave circolare

#### 3.3.2.1. Stato dell'arte

L'unico riferimento presente in letteratura per determinare la capacità portante di un capochiave in acciaio, avente la forma di una piastra circolare dotata o meno di nervature di irrigidimento, è contenuta all'interno del libro [59] scritto da Michele Vinci.

Riferendosi allo schema esposto in Figura 149, l'autore propone un metodo semplificato per schematizzare le azioni sollecitanti. Ovvero quello di considerare la piastra come incastrata sull'asse orizzontale passante per il baricentro (asse  $xx'$ ) della piastra stessa e sollecitata da due forze applicate nel baricentro di ogni semicerchio.

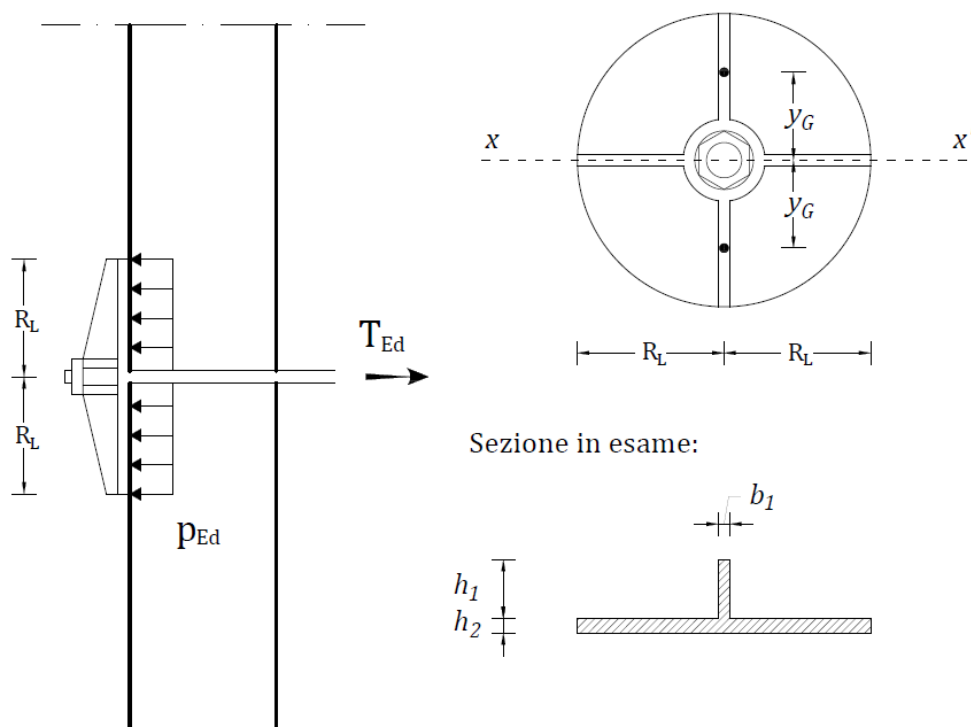


Figura 149. Schema statico per la verifica del capochiave a piastra circolare.

$$y_G = \frac{4R_L}{3\pi} \quad [mm]$$

$$y_{Max} = \frac{h_1 + h_2}{2} \quad [mm]$$

$$S_C = \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1}{2} \right)^2 + \frac{2R_L}{2} \left( \frac{h_2}{2} \right)^2 \quad [mm^3]$$

$$I_C = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{2R_L h_2^3}{12} \quad [mm^4]$$

Viene dunque proposto il calcolo di momento e taglio presenti nella sezione di incastro, i quali generano uno stato di sforzo, composto da tensioni assiali e tangenziali, con cui attraverso il criterio di rottura di Von Mises, si ricava la tensione ideale agente, da confrontare in ultima istanza con la resistenza a snervamento dell'acciaio.

$$M_{Ed} = \frac{T_{Ed}}{2} y_G \quad [kNm] \quad (3.87)$$

$$V_{Ed} = \frac{T_{Ed}}{2} \quad [kN] \quad (3.88)$$

$$\begin{cases} \sigma_{Ed}(x, y) = \frac{M_{Ed} y_{\max}}{I_C} & [MPa] \\ \tau_{Ed}(x, y) = \frac{V_{Ed} S_C}{I_C 2R_L} & [MPa] \end{cases} \quad (3.89)$$

$$\sigma_{id}(x, y) = \sqrt{\sigma_{Ed}^2(x, y) + 3\tau_{Ed}^2(x, y)} \leq f_{yd} \quad [MPa] \quad (3.90)$$

La verifica viene condotta assumendo che due forze, entrambe pari a metà dell'azione esercitata dal tirante, agiscano puntualmente nel baricentro dei due settori circolari e imponendo dunque implicitamente che la distribuzione di pressione sia uniforme. Tale schema è inadeguato, in quanto non rispecchia il reale comportamento meccanico della piastra poiché si impone la conservazione delle sezioni piane anziché adottare i meccanismi resistenti della piastra caricata in maniera assialsimmetrica. E' quindi necessario effettuare uno studio mediante uno schema statico maggiormente adeso alla realtà, il quale permetta di stabilire:

- le caratteristiche geometriche e meccaniche della piastra necessarie ad ottenere una risposta sufficientemente omogenea della muratura in modo da evitare una pericolosa concentrazione degli sforzi,
- se il procedimento più sopra esposto valuti correttamente le azioni agenti. In caso contrario sarà necessario trovare un metodo alternativo.

### 3.3.2.2. Schema di verifica

In analogia a quanto visto in precedenza per il capochiave a paletto, si è scelto di studiare il problema attraverso la risoluzione relativa alla piastra circolare di dimensione finita appoggiata su un suolo elastico e sottoposta a un carico concentrato nel punto centrale.

Si potrebbe tuttavia obiettare che la piastra circolare di una catena risulta forata al centro e per di più essa è quasi sempre dotata di nervature di irrigidimento. Alla prima obiezione si risponde facendo notare che nel foro passa il tirante in acciaio collegato mediante filettatura alla piastra. Il vincolo che si realizza tra i due corpi consente dunque di considerarli come un unico solido e studiare così il suo comportamento mediante uno schema di piastra circolare non anulare. Per quanto riguarda la seconda obiezione si risponde che è una precisa scelta studiare un elemento privo di irrigidimenti, per poi stabilire solo in un secondo momento il contributo di questi ultimi al comportamento del capochiave.

Come visto nel caso della trave su suolo elastico anche per le piastre la reazione del solido elastico in ogni punto è proporzionale all'abbassamento che subisce la piastra nell'infiattersi [81]. Visto il tipo di supporto tale reazione è unicamente di compressione e non di trazione, quindi dove la piastra si solleva il solido non reagirà.

Per quanto detto, l'intensità della reazione del terreno  $p$  è proporzionale allo spostamento secondo la costante elastica  $k_0$  già descritta in 3.3.1.3.

$$p = k_0 y \quad [N/mm^2] \quad (3.91)$$

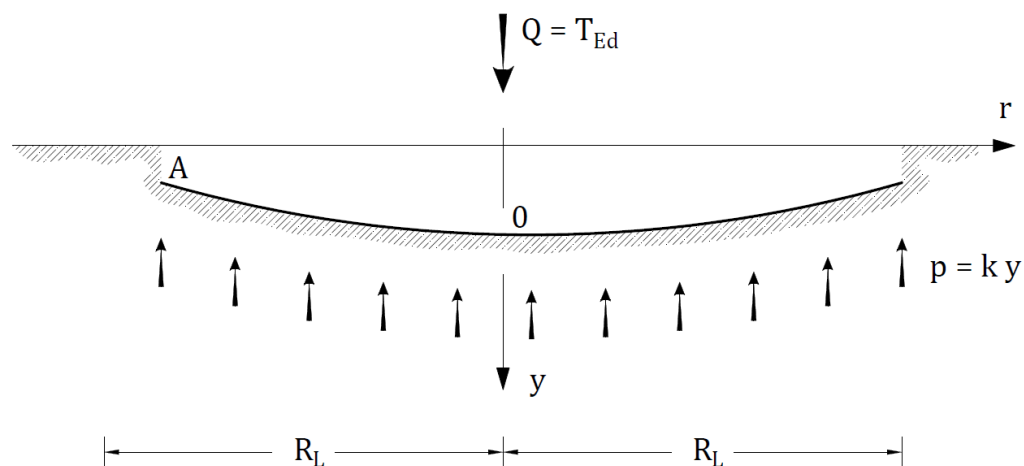
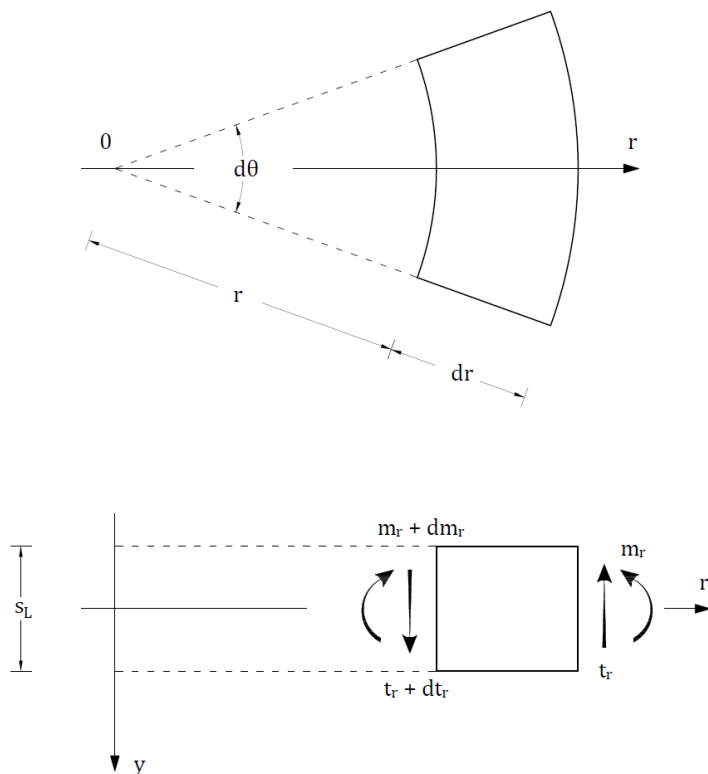


Figura 150. Piastra circolare su solido elastico.



**Figura 151.** Equilibrio delle forze in un elemento infinitesimo.

Per determinare l'equazione della superficie elastica si propone l'approccio contenuto in [93] dove si impone l'equilibrio alla traslazione verticale per l'elemento infinitesimo di Figura 151, limitato da due superfici cilindriche  $r$  e  $dr$  e da due piani radiali formanti l'angolo  $d\theta$ . Al termine del procedimento si ottiene un'equazione della superficie elastica pari a

$$\frac{d^4 y}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 y}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dy}{dr} + \frac{k_0}{B} y = 0 \quad (3.92)$$

Dove  $B$  è la rigidità flessionale della lastra, pari a

$$B = \frac{EI_L}{1-\nu^2} \quad (3.93)$$

E  $I_L$  è il momento di inerzia della sezione per unità di larghezza, pari a

$$I_L = \frac{s_L^3}{12} \quad (3.94)$$

Prima di proseguire nella risoluzione si pone anzitutto

$$\frac{B}{k_0} = \frac{Es_L^3}{12(1-\nu^2)k_0} = \omega^4$$

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{Es_L^3}{12(1-\nu^2)k_0}} \quad [mm] \quad (3.95)$$

Analogamente a quanto visto per il paletto, chiamiamo  $\omega$  lunghezza caratteristica del sistema. Essa dipende sia dalla rigidità flessionale della lastra sia dalle caratteristiche del solido elastico ed è un fattore che influenza profondamente l'andamento della superficie elastica. Visto che ha le dimensioni di una lunghezza, nello sviluppo delle equazioni del problema, converrà evidenziare al loro interno il termine  $\alpha = R/\omega$ , che chiameremo rigidità complessiva del sistema, in quanto è adimensionale e contiene tutte le informazioni del problema utili a risolvere gli interrogativi posti al punto precedente. Si introducono così nuove variabili  $x$  e  $z$ , rappresentate dai rapporti:

$$x = \frac{r}{\omega} \quad z = \frac{y}{\omega} \quad (3.96)$$

A questo punto la risoluzione può seguire più strade. L'integrazione della (3.92) venne effettuata da Hertz in [94] attraverso le equazioni cilindriche di Bessel. Tale approccio viene riportato anche da Timoshenko in [95] e mostra che la deformazione della piastra è pari a

$$w = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + C_3 Z_3 + C_4 Z_4 \quad [mm] \quad (3.97)$$

Dove  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  sono le costanti di integrazione moltiplicate per le rispettive funzioni di Bessel  $Z_1, Z_2, Z_3$  e  $Z_4$ . All'interno di [95] non viene tuttavia risolto il caso di piastra circolare sottoposta a un carico concentrato; esso venne affrontato da F. Schleicher in [96] e la sua risoluzione porta a definire una deformazione trasversale pari a

$$w = \frac{P}{4\sqrt{k_0 B}} (C_1 Z_1 + C_2 Z_2 + Z_3) \quad [mm] \quad (3.98)$$

$$C_1 = \frac{Z_1(\alpha)Z_4'(\alpha) - Z_1'(\alpha)Z_4(\alpha) + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} \{Z_1'(\alpha)Z_3'(\alpha) + Z_2'(\alpha)Z_4'(\alpha)\}}{Z_1(\alpha)Z_2'(\alpha) - Z_1'(\alpha)Z_2(\alpha) + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} \{Z_1'^2(\alpha) + Z_2'^2(\alpha)\}} \quad (3.99)$$

$$C_2 = \frac{-Z_2(\alpha)Z_4'(\alpha) - Z_2'(\alpha)Z_4(\alpha) + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} \{Z_1'(\alpha)Z_4'(\alpha) + Z_2'(\alpha)Z_3'(\alpha)\}}{Z_1(\alpha)Z_2'(\alpha) - Z_1'(\alpha)Z_2(\alpha) + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} \{Z_1'^2(\alpha) + Z_2'^2(\alpha)\}}$$

Per determinare le costanti di integrazione e le funzioni  $Z$  l'autore propone più strade. Una prima risoluzione è basata sul calcolo diretto delle equazioni di Bessel, il cui svolgimento è riportato all'Appendice B. Una seconda tecnica consiste, per bassi valori di  $x$  ( $x < 5$ , come nel nostro caso), una semplificazione delle costanti e delle funzioni mediante lo sviluppo in serie di Taylor e l'utilizzo di ulteriori serie armoniche. Questa risoluzione viene riportata all'Appendice C. Infine all'appendice D vengono riportati i valori tabellati delle funzioni  $Z$  da inserire nelle equazioni (3.98) e (3.99) per ottenere il valore della deformata.

E' fondamentale mettere in evidenza che se applicati, i tre metodi non consentono di arrivare ad un risultato univoco. Ciò è sorprendente, poiché non è nemmeno ipotizzabile che gli approcci più sopra trattati non siano corretti. La discrepanza è probabilmente ascrivibile a qualche errore di stampa, che però non è possibile evidenziare in quanto non si hanno a disposizione le intere dimostrazioni. E' dunque necessario utilizzare un quarto metodo di integrazione dell'equazione (3.92) per stabilire quale sia il risultato giusto. Viene dunque mostrato il metodo di integrazione proposto da A. Föppl in [97].

Applicando la seconda della (3.96) all'equazione differenziale della superficie elastica descritta alla (3.92) si ottiene

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{1}{x^2} \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x^3} \frac{dz}{dx} + z = 0 \quad (3.100)$$

La soluzione della precedente equazione trovata da Föppl è

$$\begin{aligned} z(x) = & \{C_1 (10^6 - 15625x^4 + 6,7817x^8 + \dots) + C_2 (10^6 x^2 - 1736x^6 + 0,2713x^{10} + \dots) + \\ & + C_3 ((10^6 - 15625x^4 + 6,7817x^8 + \dots) \ln x + 23437,5x^4 - 14,129x^8) + \\ & + C_4 ((10^6 x^2 - 1736x^6 + 0,2713x^{10} + \dots) \ln x + 1447x^6 - 0,348x^{10})\} \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (3.101)$$

La costante di integrazione  $C_4$  non dipende dalle condizioni al contorno e vale

$$C_4 = \frac{T_{Ed}}{8\pi k_0 \omega^3} \quad (3.102)$$

La costante  $C_3$  deve essere uguale a zero altrimenti risulterebbe  $z = C_3 \ln 0 = \infty$  per  $r = 0$  e ciò è impossibile. Infine le costanti  $C_1$  e  $C_2$  si trovano ponendo le condizioni al contorno e in particolare uguagliando a zero il momento e il taglio radiali per  $r = R$ . La piastra infatti non risulta vincolata sul bordo esterno.

$$m_r(R_L) = -B \left( \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dy}{dr} \right) = 0 \quad (3.103)$$

$$t_r(R_L) = -B \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} \right) = 0 \quad (3.104)$$

Dalla seconda equazione della (3.96) sappiamo che  $y = z(x)\omega$ , pertanto nelle equazioni (3.103) e (3.104) è necessario operare uno scambio di variabili semplificandole nel seguente modo:

$$\begin{cases} m_r \left( x = \frac{R_L}{\omega} \right) = -B \left( \frac{d^2 \left( z \left( \frac{R_L}{\omega} \right) \omega \right)}{dx^2} + \frac{v}{x\omega} \frac{d \left( z \left( \frac{R_L}{\omega} \right) \omega \right)}{dx} \right) = 0 \\ t_r \left( x = \frac{R_L}{\omega} \right) = -B \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 \left( z \left( \frac{R_L}{\omega} \right) \omega \right)}{dx^2} + \frac{1}{x\omega} \frac{d \left( z \left( \frac{R_L}{\omega} \right) \omega \right)}{dx} \right) = 0 \end{cases}$$

Scrivendo la  $z(x)$  in  $R_L/\omega$  mediante l'equazione (3.101) e sostituendo tale valore all'interno del precedente sistema si ottiene un sistema di due equazioni nelle due incognite  $C_1$  e  $C_2$ , ovvero le ultime due costanti di integrazione da determinare. Il sistema, risolto con l'ausilio del software Wolfram Mathematica e limitando la (3.101) al sesto ordine, porta a descrivere le costanti di integrazione nella seguente forma:

$$\begin{aligned} C_1 &= (T_{Ed} (5509413 R_L^8 + 2119005 R_L^8 v + 1302187500 R_L^4 \omega^4 + \\ &\quad + 651187500 R_L^4 \omega^4 v + 15625 \cdot 10^6 v \omega^8) (2,5 \cdot 10^5 k_0 \pi \omega^3 (1302 R_L^4 + \\ &\quad + 651 R_L^4 v + 62500 \omega^4 + 62500 \omega^4 v))^{-1} \\ C_2 &= T_{Ed} (215 R_L^4 - 218 R_L^4 v + 3,75 \cdot 10^3 \omega^4 + 1,25 \cdot 10^3 v \omega^4 + 10416 \text{Log} \left( \frac{R_L}{\omega} \right) + \\ &\quad + 5208 R_L^4 v \text{Log} \left( \frac{R_L}{\omega} \right) + 5 \cdot 10^5 \omega^4 \text{Log} \left( \frac{R_L}{\omega} \right) + 5 \cdot 10^5 v \omega^4 \text{Log} \left( \frac{R_L}{\omega} \right)) \cdot \\ &\quad \left( 2,5 \cdot 10^5 k_0 \pi \omega^3 (1302 R_L^4 + 651 R_L^4 v + 62500 \omega^4 (1+v)) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Se ora si utilizzano le costanti definite per esprimere l'equazione della deformata trasversale  $y$ , in funzione della posizione lungo il raggio  $r$ , si arriva alla seguente formulazione:

$$y(r) = \omega z(r) \quad [mm]$$

$$\begin{aligned}
 y(r) = & 10^{-6} \frac{T_{Ed}}{k_0 \pi \omega^2} \left\{ \left[ \left( 10^6 - \frac{15625 r^4}{\omega^4} \right) (5509413 R_L^8 + 2119005 R_L^8 \nu \right. \right. \\
 & + 1302187500 R_L^4 \omega^4 + 651187500 R_L^4 \nu \omega^4 + 15625 \cdot 10^6 \omega^8 (1 + \nu)) \cdot \\
 & \cdot (2,5 \cdot 10^5 \omega^2 R_L^2 (1302 R_L^4 + 651 R_L^4 \nu + 62500(1 + \nu)))^{-1} \Big] + \\
 & + \left[ \left( \left( 1447 \frac{r^6}{\omega^6} + (-1736 \frac{r^6}{\omega^6} + 10^6 \frac{r^2}{\omega^2}) \text{Log} \left( \frac{r}{\omega} \right) \right) / 8 \right] + \right. \\
 & - \left[ \left( (-1736 \frac{r^6}{\omega^6} + 10^6 \frac{r^2}{\omega^2}) (215 R_L^4 - 218 R_L^4 \nu + 375000 \omega^4 + \right. \right. \\
 & 125000 \nu \omega^4 + 10416 R_L^4 \text{Log} \left( \frac{r}{\omega} \right) + 5208 R_L^4 \nu \text{Log} \left( \frac{r}{\omega} \right) + \\
 & \left. \left. + 5 \cdot 10^5 \omega^4 (1 + \nu) \text{Log} \left( \frac{r}{\omega} \right) (1302 R_L^4 + 651 R_L^4 \nu + 62500 \omega^4 (1 + \nu))^{-1} \right] / 64 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

All'Appendice E è riportato il codice di calcolo per il software Wolfram Mathematica con cui determinare la deformazione trasversale, le sollecitazioni e la risposta del terreno con un ordine della variabile  $z$  arrestato al decimo grado.

Se ora si utilizza questo procedimento per risolvere l'esercizio contenuto in [96] a pagina 38 e ivi risolto con il metodo tabellare, si ottengono i medesimi risultati dell'autore; dunque questa espressione può ritenersi affidabile. Bisogna precisare che non è possibile, mediante la (3.105), calcolare la deformazione per  $r = 0$ , in quanto si giungerebbe a una forma indeterminata. Tuttavia è sufficiente calcolare  $y$  in  $r = 0,1$  mm per ottenere il medesimo risultato calcolato da F. Schleicher in [96].

In seguito si farà uso del procedimento di calcolo di Föppl per determinare, attraverso il fattore di rigidità complessiva della piastra  $R_L/\omega$ , le caratteristiche della piastra e del solido tali da garantire una differenza massima di reazione del suolo inferiore al 10%. Questo permetterà di trascurare tale differenza e utilizzare come schema risolutivo quello di una piastra anulare incastrata lungo il bordo interno e sottoposta a un carico distribuito uniformemente. Di tale procedimento verrà proposta la risoluzione tabellare di Timoshenko in [95] e quella, sempre tabellare ma dotata di un minor fattore sicurezza, proposta da S. Caffè in [98].



### 3.3.2.3. Calcolo della rigidità complessiva limite

Come affermato in precedenza si intende ora calcolare il valore della rigidità complessiva limite ( $\alpha = R_L/\omega$ ) al di sotto della quale si ottiene una risposta sufficientemente omogenea della muratura. Nel caso del capochiave a paletto si era imposto che la massima differenza tra la reazione della muratura  $p$ , applicata in due punti diversi, non superasse il 10% della reazione massima e tale percentuale verrà adottata anche in questo caso. Pertanto si cerca di risolvere la seguente disequazione in funzione della rigidità complessiva limite  $\alpha$ :

$$p(0) - p(R_L) \leq 0,1 p(R_L) \quad (3.106)$$

Sotto l'ipotesi di suolo elastico alla Winkler la reazione del suolo è proporzionale alla deformazione secondo la costante elastica  $k_0$  definita al punto 3.3.1.3. Pertanto la precedente equazione diventa

$$k_0 y(0) - k_0 y(R_L) \leq 0,1 k_0 y(R_L)$$

All'interno della quale possiamo semplificare  $k_0$  e sostituire l'equazione della deformazione  $y(r)$  calcolata secondo la (3.105) in  $R_L$  e  $0,1$ , visto che in zero si ottiene una forma indeterminata.

$$\begin{aligned} & \frac{10^{-6} T_{Ed}}{k_0 \pi \omega^2} \left\{ \left[ \left( 10^6 - \frac{1,5625}{\omega^4} \right) (5509413 R_L^8 + 2119005 R_L^8 \nu + 1302187500 R_L^4 \omega^4 + 651187500 R_L^4 \omega^4 \nu + \right. \right. \\ & + 15625 \cdot 10^6 \omega^8 (1 + \nu)) (2,5 \cdot 10^5 R_L^2 \omega^2 (1302 R_L^4 + 651 R_L^4 \nu + 62500 \omega^4 (1 + \nu))^{-1}) + [0,125 \cdot \\ & \cdot \left( \frac{0,001447}{\omega^6} + \left( -\frac{0,001736}{\omega^6} + \frac{10000}{\omega^2} \right) \text{Log} \left( \frac{0,1}{\omega} \right) \right)] - \left[ \left( -\frac{0,001736}{\omega^6} + \frac{10000}{\omega^2} \right) (215 R_L^4 - 218 R_L^4 \nu + \right. \\ & + 375000 \omega^4 + 125000 \nu \omega^4 + 10416 R_L^4 \text{Log} \left( \frac{R}{\omega} \right) + 5208 R_L^4 \nu \text{Log} \left( \frac{R}{\omega} \right) + 5 \cdot 10^5 \omega^4 (1 + \nu) \text{Log} \left( \frac{R}{\omega} \right)) \cdot \\ & \cdot (64 R_L^2 (1302 R_L^4 + 651 R_L^4 \nu + 62500 \omega^4 (1 + \nu))^{-1}) + \\ & \left. - \frac{1,1 \cdot 10^{-6} T_{Ed}}{k_0 \pi \omega^2} \left\{ \left[ \left( 10^6 - \frac{15625 R_L^4}{\omega^4} \right) (5509413 R_L^8 + 2119005 R_L^8 \nu + 1302187500 R_L^4 \omega^4 + 651187500 R_L^4 \omega^4 \nu + \right. \right. \right. \\ & + 15625 \cdot 10^6 \omega^8 (1 + \nu)) (2,5 \cdot 10^5 R_L^2 \omega^2 (1302 R_L^4 + 651 R_L^4 \nu + 62500 \omega^4 (1 + \nu))^{-1}) + [0,125 \left( \frac{1447 R_L^6}{\omega^6} + \right. \\ & + \left. \left( -\frac{1736 R_L^6}{\omega^6} + \frac{10^6}{\omega^2} \right) \text{Log} \left( \frac{R_L}{\omega} \right) \right)] - \left[ \left( -\frac{1736}{\omega^6} + \frac{10^6}{\omega^2} \right) (215 R_L^4 - 218 R_L^4 \nu + 375000 \omega^4 + 125000 \nu \omega^4 + \right. \\ & + 10416 R_L^4 \text{Log} \left( \frac{R}{\omega} \right) + 5208 R_L^4 \nu \text{Log} \left( \frac{R}{\omega} \right) + 5 \cdot 10^5 \omega^4 (1 + \nu) \text{Log} \left( \frac{R}{\omega} \right)) (64 R_L^2 (1302 R_L^4 + 651 R_L^4 \nu + \\ & \left. \left. + 62500 \omega^4 (1 + \nu))^{-1} \right] \right\} \leq 0 \end{aligned}$$

Purtroppo la lunghezza e la sua complessità non ne permettono un' agevole risoluzione. Studiando l'equazione si può tuttavia notare che è possibile semplificare al suo interno il termine  $T_{Ed}/k_0$ ; così facendo essa risulta funzione unicamente dei termini  $R$  e  $\omega$ . La soluzione del problema è stata poi ottenuta per tentativi, ovvero

risolvendo la 4.48 al variare del parametro  $\alpha$  ed andando a cercare la situazione limite per cui nella 4.48 vale il segno di uguaglianza. Così facendo si è determinato un valore limite del parametro  $\alpha$  pari a:

$$\alpha = \frac{R_L}{\omega} = \frac{R_L}{\sqrt[4]{\frac{ES_L^3}{12(1-\nu^2)k_0}}} \leq 1,00647 \sim 1,00 \quad (3.107)$$

Siccome il raggio della piastra dipende dalla resistenza al punzonamento della muratura e il modulo di Young, il coefficiente di Poisson e la costante elastica dipendono dalle proprietà dei materiali, è possibile determinare lo spessore limite della piastra per cui si ottiene una distribuzione degli sforzi sufficientemente omogenea.

$$s_{L,\text{lim}} \geq \sqrt[3]{\frac{12R_L^4 k_0 (1-\nu^2)}{E}} \quad [mm] \quad (3.108)$$

### 3.3.2.4. Procedimenti di verifica semplificati

Se si assolve alla condizione del punto precedente, la pressione esercitata dalla muratura sarà distribuita in maniera sufficientemente uniforme sulla superficie del capochiave da permettere l'utilizzo dei due approcci semplificati mostrati più sotto.

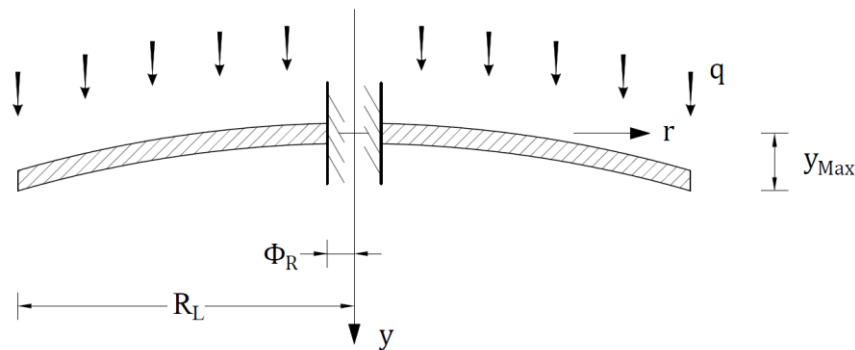


Figura 152. Schema statico risolutivo.

In entrambi la reazione della muratura è calcolata come

$$q = \frac{T_{Ed}}{\pi \left( R_L^2 - \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2 \right)} \quad [N / mm^2] \quad (3.109)$$

Il primo metodo è proposto da Timoshenko in [95]; al suo interno l'autore localizza la massima tensione assiale sulla superficie esterna della piastra all'incastro e propone di calcolarla come:

$$\sigma_{Ed,Max} \left( \frac{\phi_R}{2}, \pm \frac{s_L}{2} \right) = \kappa \frac{q R_L^2}{s_L^2} \quad [N / mm^2] \quad (3.110)$$

Dove  $\kappa$  è un coefficiente calcolato in [99] per diversi rapporti di  $2R_L/\Phi_R$  e assumendo un modulo di Poisson pari a quello dell'acciaio ( $\nu=0,3$ ).

$2R_L / \phi_R$	1,25	1,5	2	3	4	5
$\kappa$	0,135	0,41	1,04	2,15	2,99	3,69

Tabella 7. Valori del coefficiente  $\kappa$  contenuti in [95].

In alternativa è possibile adottare i coefficienti proposti da S. Caffè in [98]

$2R_L / \phi_R$	1,25	1,5	2	3	5	10
$\kappa$	0,124	0,373	0,947	1,96	3,36	5,30

Tabella 8. Valori de coefficiente  $\kappa$  contenuti in [98].

In entrambi i casi è possibile utilizzare la seguente formula di interpolazione per determinare  $\kappa$ :

$$\kappa = \kappa_i + \frac{(\kappa_j - \kappa_i) \left( \left( \frac{2R_L}{\phi_R} \right)_j - \left( \frac{2R_L}{\phi_R} \right)_i \right)}{\left( \frac{2R_L}{\phi_R} \right)_j - \left( \frac{2R_L}{\phi_R} \right)_i} \quad (3.111)$$

In generale i coefficienti proposti da Timoshenko portano a determinare una tensione maggiore di circa il 10% rispetto a quelli del secondo metodo, nel quale non è indicata la provenienza dei valori di  $\kappa$ . Tuttavia per le normali geometrie con cui si presentano i capochiave circolari si riscontrano rapporti  $2R_L/\Phi_R$  maggiori di 5 (in genere > 8). Questo porta a un aumento ingiustificato del coefficiente  $\kappa$ , perché si è costretti ad utilizzare la (3.111) riferendosi ad un errato intervallo del rapporto  $2R_L/\Phi_R$ , visto che non è presente un valore del rapporto pari a 10 come nella Tabella 8. E' dunque necessario ricostruire il valore di  $\kappa$  con un rapporto pari a 10 e per farlo si inizia con il calcolare la differenza tra i due coefficienti in base al valore del rapporto.

$2R_L / \phi_R$	1,25	1,5	2	3	5	10	
$\kappa$	0,135	0,41	1,04	2,15	3,69		Timoshenko
$\kappa$	0,124	0,373	0,947	1,96	3,36	5,30	S. Caffè
$\Delta\kappa$	0,011	0,037	0,093	0,190	0,330		

Figura 153. Differenza dei coefficienti  $\kappa$ .

I valori trovati vengono quindi riportati su un grafico e tramite il software Grapher si ricava l'equazione della funzione logaritmica che meglio approssima questa differenza. Così facendo si è in grado di calcolare la differenza tra i coefficienti  $\kappa$  dei due approcci quando il rapporto  $2R_L/\Phi_R$  è uguale a 10 e di conseguenza è possibile ottenere il valore di  $\kappa$  a 10 secondo Timoshenko sommando la precedente differenza, con il valore di  $\kappa$  a 10 secondo S. Caffè.

$2R_L / \phi_R$	1,25	1,5	2	3	5	10	
$\kappa$	0,135	0,41	1,04	2,15	3,69	5,78	Timoshenko
$\kappa$	0,124	0,373	0,947	1,96	3,36	5,30	S. Caffè
$\Delta\kappa$	0,011	0,037	0,093	0,190	0,330	0,480	

Tabella 9. Resoconto dei valori ottenuti.

Tuttavia i valori del rapporto  $2R_L/\Phi_R$  possono arrivare anche al di sopra del valore 10, posizionandosi in un intervallo che ha come estremi 8 e 20. Pertanto è necessario definire il valore assunto dal coefficiente  $\kappa$  per un rapporto pari a 20.

Per fare ciò è possibile ricostruire la pendenza che la retta di interpolazione assume tra i valori 10 e 20 sulla base delle precedenti pendenze. Il valore che  $\kappa$  assume in 20 sarà pari al valore assunto in 10 più la pendenza trovata moltiplicata per la differenza di intervallo, ovvero:

$$\kappa(20) = \kappa(10) + \left( 2 \frac{\kappa(10) - \kappa(5)}{10 - 5} - \frac{\kappa(5) - \kappa(4)}{5 - 4} \right) (20 - 10) = 7,14 \quad (3.112)$$

$2R_L / \Phi_R$	1,25	1,5	2	3	5	10	20
$\kappa$	0,135	0,41	1,04	2,15	3,69	5,78	7,14

Tabella 10. Valori del coefficiente  $\kappa$ , forma estesa.

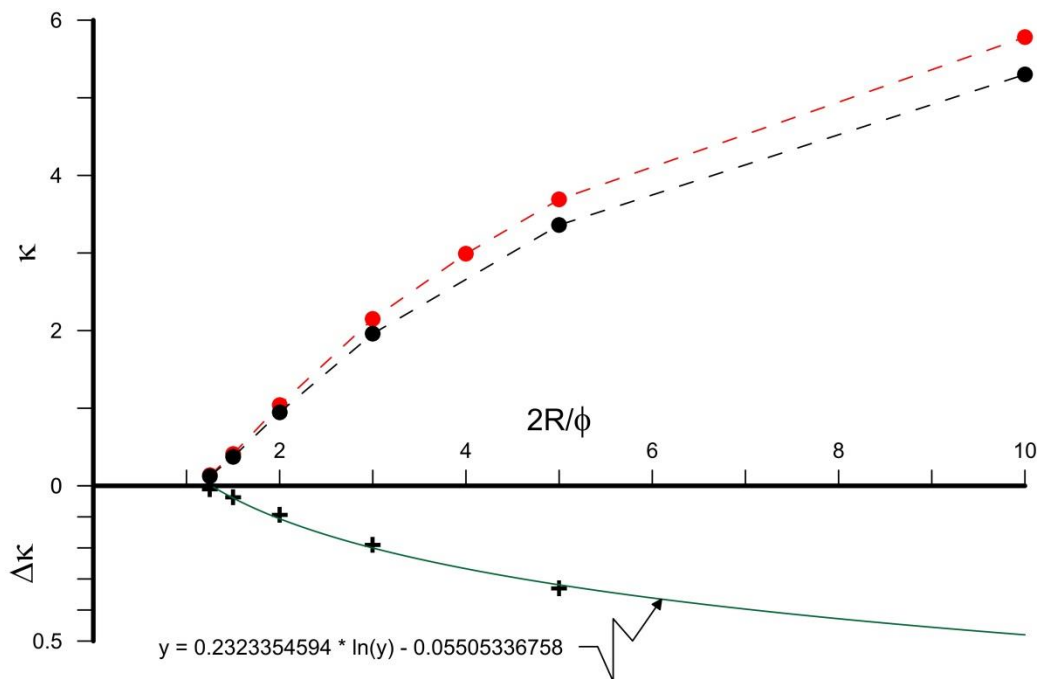


Figura 154. Grafici dei coefficienti  $\kappa$  e della curva che approssima la loro differenza.

In entrambi i casi è poi necessario valutare la tensione tangenziale  $\tau_{Ed}$ ; per determinarla è possibile utilizzare l'equazione di Jourawsky:

$$\tau_{Ed}(r, y) = \frac{v_{Ed} S^*}{I_L b} \quad [N / mm^2] \quad (3.113)$$

Al variare della distanza  $y$  del punto considerato dall'asse neutro, le quantità  $I_L, b$  e  $T_{Ed}$  non variano; quindi  $\tau_{Ed}$  varia con il momento statico  $S^*$ . Il valore massimo della tensione tangenziale si trova sull'asse neutro, dove il momento statico per una larghezza unitaria è pari a:

$$S^* = \frac{s_L}{2} \cdot 1 \cdot \frac{s_L}{4} = \frac{s_L^2}{8} \quad [mm^3] \quad (3.114)$$

Mentre il momento di inerzia della sezione per unità di larghezza ( $I_L$ ) era già stato definito attraverso l'equazione (3.94). Infine il taglio agente sul bordo interno incastrato  $v_{Ed}$  e dunque un'azione per unità di lunghezza, si determina come:

$$v_{Ed} = \frac{T_{Ed}}{\pi \phi_R} \cdot 1 \quad [N] \quad (3.115)$$

Se si utilizzano le semplificazioni proposte si arriva alla seguente equazione della tensione tangenziale agente.

$$\tau_{Ed,Max} \left( \frac{\phi_R}{2}, 0 \right) = \frac{\frac{T_{Ed}}{\pi \phi_R} \cdot \frac{s_L^2}{12}}{\frac{s_L^3}{12} \cdot 1} = \frac{3}{2} \frac{T_{Ed}}{\pi \phi_R s_L} \quad [N / mm^2] \quad (3.116)$$

Successivamente è possibile effettuare una verifica di resistenza sulla piastra in esame mediante il criterio di Von Mises.

$$\sigma_{id}(r_0, y_0) = \sqrt{\sigma_{Ed}^2(r_0, y_0) + 3\tau_{Ed}^2(r_0, y_0)} \leq f_{yd} \quad [MPa] \quad (3.117)$$

Tuttavia è necessario stabilire quale sia il punto maggiormente sollecitato, visto che le tensioni assiale e tangenziale massime sono localizzate in punti diversi. Per farlo è necessario studiare l'andamento di tali tensioni e della tensione ideale  $\sigma_{id}$ .

Visto che la tensione assiale  $\sigma_{Ed}$  varia con legge lineare è possibile descrivere la sua variazione lungo l'altezza della sezione come:

$$\sigma_{Ed}(r, y) = \kappa \frac{qR_L^2}{s_L^2} \frac{y_i}{s_L/2} \quad [N / mm^2] \quad (3.118)$$

Dove  $y_i$  rappresenta la distanza lungo  $y$  dall'asse neutro della sezione. La tensione tangenziale si può invece rappresentare mediante la formula [81]:

$$\tau_{Ed}(r, y) = \frac{6v_{Ed}}{s_L^3} \left( \frac{s_L^2}{4} - y_i^2 \right) \quad [N / mm^2] \quad (3.119)$$

Come è possibile intuire dalla forma delle equazioni presentate, al crescere di  $y_i$  aumenta la tensione assiale, mentre decresce quella tangenziale. E' necessario sostituire all'interno della (3.117) le equazioni (3.118) e (3.119) per studiare la forma dell'equazione.

$$\begin{aligned} \sigma_{id}(r, y) &= \sqrt{\left( \kappa \frac{qR_L^2}{s_L^2} \frac{y_i}{s_L/2} \right)^2 + 3 \left( \frac{6v_{Ed}}{s_L^3} \left( \frac{s_L^2}{4} - y_i^2 \right) \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4\kappa^2 R_L^4 q^2}{s_L^6} y_i^2 + 3 \left( \frac{3v_{Ed}s_L^2}{2s_L^3} - \frac{6v_{Ed}}{s_L^3} y_i^2 \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4\kappa^2 R_L^4 q^2}{s_L^6} y_i^2 + 3 \left( \frac{3v_{Ed}s_L^2}{2s_L^3} - \frac{6v_{Ed}}{s_L^3} y_i^2 \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4\kappa^2 R_L^4 T_{Ed}^2}{s_L^6 \left( \pi R_L^2 - \pi \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2 \right)^2} y_i^2 + \frac{27T_{Ed}^2 s_L^4}{4s_L^6 \pi^2 \phi^2} + \frac{108T_{Ed}^2}{s_L^6 \pi^2 \phi^2} y_i^4 - \frac{54T_{Ed}^2 s_L^2}{s_L^6 \pi^2 \phi^2} y_i^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{108T_{Ed}^2}{s_L^6 \pi^2 \phi^2} \right) y_i^4 + \left( \frac{4\kappa^2 R_L^4 T_{Ed}^2}{s_L^6 \left( \pi R_L^2 - \pi \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2 \right)^2} - \frac{54T_{Ed}^2 s_L^2}{s_L^6 \pi^2 \phi^2} \right) y_i^2 + \left( \frac{27T_{Ed}^2 s_L^4}{4s_L^6 \pi^2 \phi^2} \right)} \end{aligned}$$

Si perviene dunque alla radice di un polinomio di quarto grado nella forma  $x = ay^4+by^2+c$ . I parametri  $a$  e  $c$  risultano maggiori di zero, mentre è possibile determinare il segno di  $b$  solo se si contestualizza il problema descrivendo i parametri geometrici in base alle generiche dimensioni di un capochiave e ponendo lo spessore della lastra e la dimensione del foro in funzione del raggio della piastra.

$$s_L = R_L/6 \qquad \phi_R = R_L/8 \qquad \kappa \sim 5$$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{4\kappa^2 R_L^4 T_{Ed}^2}{s_L^6 \left( \pi R_L^2 - \pi \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2 \right)^2} - \frac{54 T_{Ed}^2 s_L^2}{s_L^6 \pi^2 \phi^2} \\
 &= \frac{4\kappa^2 R_L^4 T_{Ed}^2}{\frac{R_L^6}{6^6} \left( \pi R_L^2 - \pi \frac{R_L^2}{256} \right)^2} - \frac{54 T_{Ed}^2 \frac{R_L^2}{6^2}}{\frac{R_L^6}{6^6} \pi^2 \frac{R_L^2}{8^2}} \\
 &\cong \frac{4 \cdot 6^6 \kappa^2 T_{Ed}^2}{R_L^6 \pi^2} - \frac{54 \cdot 6^6 \cdot 8^2 T_{Ed}^2}{6^2 R_L^6 \pi^2} \\
 &= \frac{6^6 T_{Ed}^2}{R_L^6 \pi^2} (100 - 96) > 0
 \end{aligned}$$

Il valore dei coefficienti a,b,c non è di alcun interesse, mentre risulta molto più importante osservare la forma assunta dall'equazione.

$$\sigma_{id}(r, y) = \sqrt{ay^4 + by^2 + c} \quad [MPa]$$

Osservandola si può infatti stabilire che il valore massimo della tensione ideale si raggiunge alle estremità della sezione della piastra quando  $y = s_L/2$ . Dai grafici delle tre funzioni si potrà avere una spiegazione probabilmente più immediata.

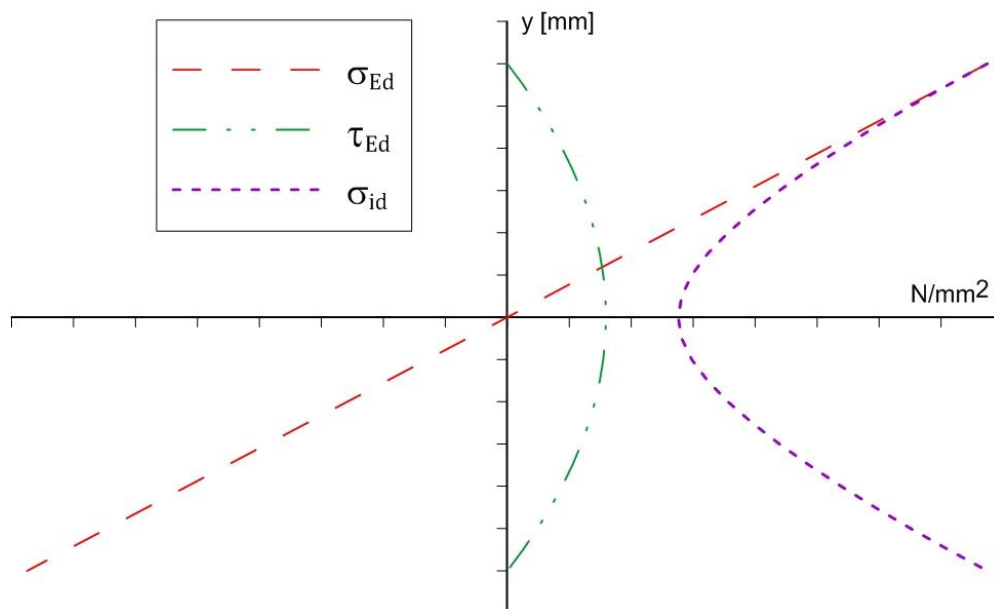


Figura 155. Andamento delle tensioni.



Pertanto l'equazione (3.117) con cui effettuare la verifica di resistenza è calcolata nella sezione posta all'incastro con altezza  $y_i = s/2$  e diventa:

$$\sigma_{id}\left(\frac{\phi_R}{2}, \frac{s_L}{2}\right) = \sqrt{\sigma_{Ed}^2\left(\frac{\phi_R}{2}, \frac{s_L}{2}\right)} = \sigma_{Ed,Max}\left(\frac{\phi_R}{2}, \frac{s_L}{2}\right) \leq f_{yd} \quad [MPa] \quad (3.120)$$

Dove la tensione  $\sigma_{Ed,Max}$  è descritta dall'equazione (3.110). E' poi possibile utilizzare questa relazione per calcolare lo spessore minimo della piastra necessario a soddisfare la verifica di resistenza allo stato limite ultimo. Per farlo sostituiamo la (3.110) all'interno della (3.120) e uguagliamo  $\sigma_{Ed,Max}$  alla resistenza a snervamento dell'acciaio.

$$s_{L,lim} \geq \sqrt{\frac{\kappa q R_L^2}{f_{yd}}} \quad [mm] \quad (3.121)$$

### 3.3.2.5. Confronto fra le tre procedure di verifica

Conviene ora porre un caso di esempio concreto per osservare la lettura dello stato tensionale offerto dalle tre procedure. L'esempio viene condotto su tre capichave circolari in acciaio privi di nervature di irrigidimento, aventi uguali raggi, fori e azioni agenti, ma dotati di diverso spessore:

$$\begin{array}{llll}
 E = 200000 & [N / mm^2] & T_{Ed} = 50 & [kN] \\
 k_0 = 0,33 & [N / mm^3] & R_L = 160 & [mm] \\
 f_{yd} = 275 & [N / mm^2] & \phi_R = 20 & [mm] \\
 \nu = 0,3 & & & 
 \end{array}$$

Nella seguente tabella vengono riassunti gli spessori delle piastre, il valore della caratteristica  $\omega$  dei tre sistemi e la loro rigidezza complessiva  $\alpha$ .

	$s_L$ [mm]	$\omega$ [mm]	$\alpha$
1	18	134,1	1,19
2	20	145,2	1,10
3	24	166,4	0,96

**Tabella 11.** Resoconto degli spessori e delle rigidezze derivanti.

La disuguaglianza (3.107) risulta rispettata solo nel terzo caso e pertanto solo in questo sarebbe possibile adottare correttamente l'approccio semplificato visto al punto precedente. Tuttavia è utile notare che si potrebbe adottare questo metodo anche nei primi due casi; così facendo il valore della tensione ideale restituito sarebbe maggiormente a favore di sicurezza, in quanto a fronte di una distribuzione di pressione non sufficientemente omogenea, essa verrebbe assunta come costante. Tuttavia la distribuzione reale presente non sarebbe sufficientemente omogenea da escludere una situazione di pericolo per la muratura retrostante a causa della concentrazione degli sforzi.

Per osservare i diversi aspetti del comportamento si decide comunque di utilizzare l'approccio semplificato per tutti e tre i casi presentati e dunque si calcola il carico distribuito sulla piastra attraverso la (3.109).

$$q = \frac{T_{Ed}}{\pi \left( R_L^2 - \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2 \right)} = 0,62 \quad [N / mm^2]$$

Nelle seguenti tabelle sono stati riassunti i valori della tensione ideale valutati con l'equazione (3.120) attraverso i coefficienti di Timoshenko e di S. Caffè e il valore della tensione ideale che si ottiene attraverso l'uso dell'approccio di M. Vinci descritto al punto 3.3.2.1.

Timoshenko	k	$\sigma_{id}$ [MPa]
1		325,4
2	6,60	263,6
3		183,1

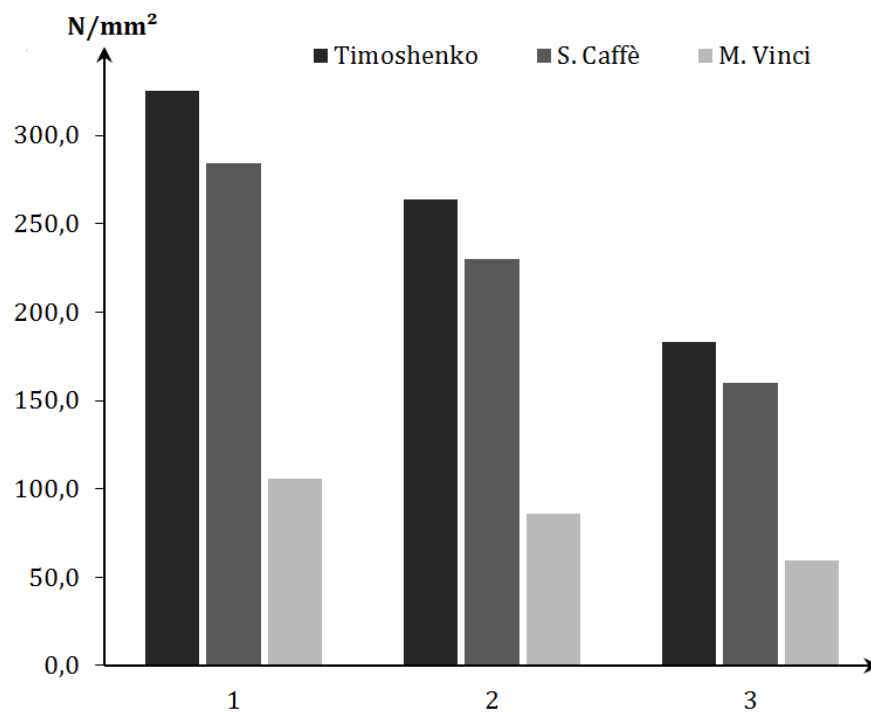
**Tabella 12.** Resoconto delle tensioni ideali ottenute con il metodo di Timoshenko.

Caffè	k	$\sigma_{id}$ [MPa]
1		284,0
2	5,76	230,0
3		159,7

**Tabella 13.** Resoconto delle tensioni ideali ottenute con il metodo di S. Caffè.

Vinci	$y_G$ [mm]	$y_{Max}$ [mm]	$M_{Ed}$ [Nmm]	$V_{Ed}$ [N]	$\sigma_{Ed}$ [MPa]	$\tau_{Ed}$ [MPa]	$\sigma_{id}$ [MPa]
1	67,9	9	1697653	25000	104,8	6,9	105,5
2		10			84,9	6,3	85,6
3		12			58,9	5,2	59,6

**Tabella 14.** Resoconto delle tensioni ideali ottenute con il metodo di M. Vinci.



**Figura 156.** Grafico riepilogativo dei risultati ottenuti.

### **3.3.2.6. Considerazioni conclusive sulle verifiche tensionali semplificate**

Osservando i risultati ottenuti nel caso di studio di cui al paragrafo precedente è possibile giungere ad alcune conclusioni.

Al punto 3.3.2.1 si era già accennato a come lo schema statico di M. Vinci non fosse realmente rappresentativo della reale situazione di carico presente sul capochiave. La comparazione effettuata tra i risultati ottenuti con questo procedimento (Vinci) e quelli ottenuti da modelli più accurati (Timoshenko e Caffè) ha infine dimostrato che questo procedimento oltre a non schematizzare correttamente il problema, offre dei risultati molto a sfavore di sicurezza. Pertanto se ne sconsiglia fortemente l'utilizzo nella pratica progettuale.

In secondo luogo è bene evidenziare che i valori del coefficiente  $\kappa$  suggeriti da Timoshenko portano a valori delle tensioni agenti un po' più elevati di quelli ottenibili con i dati di S. Caffè, ovvero più cautelativi. Inoltre non vi è certezza sull'origine dei dati di S. Caffè, mentre quelli proposti in [95] sono tratti da [99]. Ciò suggerisce di preferire l'utilizzo dei dati contenuti alla Tabella 10 rispetto a quelli proposti da Caffè.

Un'ulteriore considerazione nasce dall'osservazione che in due casi la verifica di resistenza era soddisfatta, ma solo uno spessore permetteva di superare anche la verifica più restrittiva legata alla deformabilità, ovvero quella descritta al punto 3.3.2.3 dall'equazione (3.107). Con essa è possibile determinare lo spessore del capochiave in funzione sia del raggio della piastra, il cui valore dipende dalla resistenza al punzonamento del solido murario, sia del parametro  $k_0$  utilizzato per descrivere il comportamento della muratura. Effettuando tale verifica si è quindi in grado di eliminare il rischio derivante dalla concentrazioni degli sforzi, pericolosa non tanto per la piastra, quanto per l'integrità della muratura retrostante. Soddisfatta tale condizione, è comunque doveroso effettuare la verifica di resistenza semplificata secondo Timoshenko, in quanto, siccome la verifica di deformabilità è slegata dall'intensità del carico, potrebbe capitare che per un'azione di tiro molto elevata il requisito di resistenza diventi il più restrittivo.

### 3.3.2.7. Contributo delle nervature di irrigidimento

Le precedenti verifiche sono state concepite per un capochiave circolare privo di nervature di irrigidimento. Un punto che tuttavia è ancora necessario studiare riguarda proprio il contributo di queste ultime.

Nella normale prassi costruttiva un capochiave è sempre dotato di irrigidimenti. Più che per un effettivo bisogno tale presenza è pensata per garantire, attraverso l'aumento della rigidezza, un maggior livello di sicurezza a una situazione tensionale non sufficientemente definita. Come affermato nei precedenti paragrafi, nella letteratura odierna vi è infatti la mancanza di un approccio mediante la teoria delle piastre che descriva il comportamento di un capochiave privo di nervature. In questa situazione il progettista era dunque portato ad aggiungere delle costolature il cui contributo era difficilmente quantificabile, ma la cui presenza era garanzia di sufficiente sicurezza per l'intervento.

Il progetto di questi elementi all'interno del sistema catena resta dunque non definito nella letteratura appositamente scritta a riguardo, ma un professionista potrebbe comunque rifarsi alle verifiche mediante gli schemi semplificati che si adottano nella progettazione delle nervature presenti alla base dei pilastri in acciaio; ad esempio quelli riportati in [100] a partire da pagina 308.

In maniera simile (vedi Figura 157) si procederà ora a schematizzare le costole di irrigidimento come azioni concentrate agenti su una trave poggiate però su di un suolo elastico. Dove la trave non è altro che il segmento di piastra che intercorre tra due costole adiacenti.

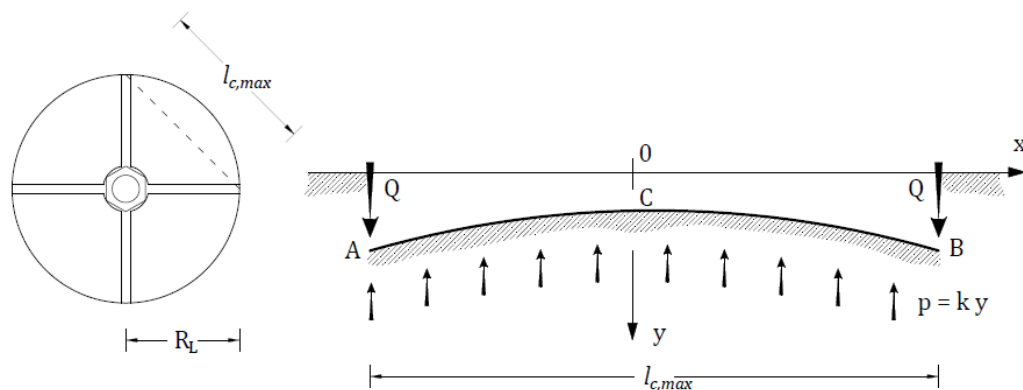


Figura 157. Schema statico per l'analisi.

Analizzando il segmento più sollecitato, ovvero quello che ha come estremi i bordi della piastra, si procederà all'analisi mediante la risoluzione in forma chiusa di Hetenyi in [83]. In primo luogo si imporrà che la differenza di reazione del solido elastico tra un estremo e la mezzeria sia inferiore al 10% della massima reazione. In maniera analoga a quanto visto per il capochiave a paletto si determinerà dunque

la rigidezza complessiva  $\lambda l$ , questo permetterà di sviluppare tale termine in funzione dell'altezza della piastra e di ottenere così l'altezza minima della lastra, che sarà dunque inferiore a quella calcolata in assenza di nervature, per cui non si realizza una pericolosa concentrazione degli sforzi. Svoltata la verifica di deformazione si procederà con il calcolare, sempre mediante le equazioni di Hetenyi, il valore del momento massimo presente nella mezzeria della trave, di modo da verificare se l'altezza ridotta ora utilizzata è in grado di sopportare il carico agente. E' necessario svolgere tale controllo perché come nei casi precedenti, l'equazione con cui si effettua la verifica di deformabilità è indipendente dall'intensità del carico.

Le formule di Hetenyi per stabilire la deformazione all'estremità e in mezzeria per lo schema statico di Figura 157 sono in seguito riassunte:

$$y_A = y_B = \frac{2Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh } \lambda l + \cos \lambda l}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} \quad [mm] \quad (3.122)$$

$$y_C = \frac{4Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh } \frac{\lambda l}{2} \cdot \cos \frac{\lambda l}{2}}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} \quad [mm] \quad (3.123)$$

Come già affermato la pressione esercitata dal solido elastico è proporzionale allo spostamento secondo la legge:

$$p(x) = k y(x)$$

Pertanto se si vuole contenere la reazione della muratura tenendo conto delle nervature è possibile riscrivere l'equazione (3.83) già utilizzata per il paletto, sostituendo però al suo interno la formulazione dello spostamento relativo all'attuale schema statico proposto nelle formule (3.122) e (3.123).

$$p_C - p_A \leq 0,1 p_A$$

$$k y_C - k y_A \leq 0,1 k y_A$$

$$\frac{2Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh } \lambda l + \cos \lambda l}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} - \frac{4Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh } \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2}}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l} \leq 0,1 \frac{4Q\lambda}{k} \frac{\text{Cosh } \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2}}{\text{Sinh } \lambda l + \sin \lambda l}$$

Conviene porre  $N = 2Q\lambda / k$  e  $x = \lambda l / 2$

$$N \frac{\text{Cosh } 2x + \cos 2x}{\text{Sinh } 2x + \sin 2x} - 2,2N \frac{\text{Cosh } x \cos x}{\text{Sinh } 2x + \sin 2x} \leq 0$$

Si applicano poi le formule di bisezione al seno e al coseno normali e iperbolici di modo che abbiano lo stesso argomento e siccome  $N$  è sempre maggiore di zero è possibile semplificarlo.

$$\frac{N}{2} \frac{2\text{Cosh}^2 x - 1 + 2\cos^2 x - 1}{\text{Sinh } x \text{Cosh } x + \sin x \cos x} - 2,2N \frac{\text{Cosh } x \cos x}{2(\text{Sinh } x \text{Cosh } x + \sin x \cos x)} \leq 0$$

$$\frac{\text{Cosh}^2 x + \cos^2 x - 1,1\text{Cosh } x \cos x - 1}{\text{Sinh } x \text{Cosh } x + \sin x \cos x} \leq 0$$

E' poi impossibile procedere oltre per via analitica, perciò si sviluppa il primo termine della disequazione in serie di Taylor

$$a(x) = \text{Sin } x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^{11}}{39916800}$$

$$b(x) = \text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800}$$

$$c(x) = \text{Sinh } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{11}}{39916800}$$

$$d(x) = \text{Cosh } x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^{10}}{3628800}$$

E si giunge alla seguente disequazione

$$\frac{(d(x))^2 + (b(x))^2 - 1,1d(x)b(x) - 1}{c(x)d(x) + b(x)a(x)} \leq 0$$

Mediante il software Mathematica viene poi attuata la riduzione ai minimi termini della disequazione e si giunge alla seguente soluzione:

$$x \leq -0,58554 \quad \wedge \quad 0 < x \leq 0,58554$$

Tuttavia, siccome  $x = \lambda l / 2 \in \mathbb{N}$ , l'unica soluzione possibile resta  $0 \leq x \leq 0,58554$  e pertanto

$$\lambda l = l^4 \sqrt{\frac{k}{4EI}} \leq 1,171 \tag{3.124}$$

E' necessario ora sviluppare la caratteristica del sistema  $\lambda$  per evidenziare l'altezza della piastra e girare tutta l'equazione (3.124) in funzione di questo termine.

$$\lambda l = l^4 \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = l \sqrt[4]{\frac{bk_0}{4E \frac{bs_L^3}{12}}} = l^4 \sqrt[4]{\frac{3k_0}{Es_L^3}} \leq 1,171$$

Pertanto l'utilizzo delle nervature di irrigidimento consente di ottenere una distribuzione sufficientemente omogenea della reazione a partire da una altezza della piastra superiore a

$$s_{L,\min} \geq \sqrt[3]{\frac{3k_0}{E \left(\frac{1,171}{l}\right)^4}} \quad [mm] \quad (3.125)$$

Dove la costante elastica  $k_0$  è stata definita al punto 3.3.1.3, il modulo di Young è quello dell'acciaio, mentre la lunghezza  $l$  non è altro che la massima distanza tra due costole adiacenti ( $l_{c,\max}$ ) ed è funzione della tipologia di costolatura scelta:

$$\begin{aligned} N^\circ \text{ Costole} \quad n = 4 & \rightarrow l_{c,\max} = R_L \sqrt{2} & [mm] \\ N^\circ \text{ Costole} \quad n = 5 & \rightarrow l_{c,\max} = R_L & [mm] \quad (3.126) \\ N^\circ \text{ Costole} \quad n = 6 & \rightarrow l_{c,\max} = 2R_L \cos\left(\frac{\pi - \pi/4}{2}\right) & [mm] \end{aligned}$$

Si sconsiglia di utilizzare sistemi a tre costole perché poco efficienti come irrigidimenti o sistemi a più di sei costolature perché di costruzione troppo complessa.

In ogni caso è poi necessario effettuare una verifica di resistenza sulla base del nuovo spessore della piastra. Questa viene condotta calcolando la tensione ideale presente sulla trave di lunghezza  $l_{c,\max}$  e larghezza  $b$  unitaria. Per i ragionamenti che verranno affrontati al punto 3.3.2.4 tale tensione è massima quando la tensione assiale assume il suo valore massimo e quella tangenziale si azzerava. E' quindi necessario definire, attraverso l'equazione in forma chiusa proposta da Hetenyi, il momento massimo che agisce nella mezzera della trave per arrivare a calcolare mediante l'equazione (3.89) la tensione assiale massima.

$$M_c = \frac{2Q}{\lambda} \frac{\sinh \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda}{2}}{\sinh \lambda + \sin \lambda} \quad [Nmm] \quad (3.127)$$

Al contrario della precedente verifica, nella quale il risultato era indipendente dall'intensità del carico, ora è necessario definire il valore dell'azione concentrata  $Q$  che sostituisce la presenza della nervatura. Per calcolare tale azione si assume una distribuzione perfettamente uniforme della pressione  $q$  sulla piastra, poi si procede con il moltiplicare tale valore, calcolato mediante l'equazione (3.109), per



l'area della piastra e la larghezza  $b$  della trave, che in questo caso assume grandezza unitaria. Successivamente si passa a dividerlo per il numero di costole presenti e a dividerlo ulteriormente per il raggio della piastra, di modo da ottenere l'azione concentrata sulla trave di larghezza unitaria.

$$Q = q \frac{\left( \pi R_L^2 - \pi \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2 \right) b}{n R_L} = \frac{T_{Ed}}{\pi R_L^2 - \pi \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2} \frac{\left( \pi R_L^2 - \pi \left( \frac{\phi_R}{2} \right)^2 \right) \frac{1}{R_L}}{n} = \frac{T_{Ed}}{n} \frac{1}{R_L}$$

$$Q = \frac{T_{Ed}}{n} \frac{1}{R_L} \quad [N] \quad (3.128)$$

Come affermato si valuta quindi il momento massimo in mezzeria mediante la (3.127) e la relativa tensione assiale mediante la (3.89), ricordandosi però di calcolare il momento di inerzia della sezione  $I_C = b s_L^3 / 12$  riferendosi a una larghezza unitaria e ponendo dunque  $b = 1$  mm.

$$\sigma_{Ed} \left( R_L, \frac{S_L}{2} \right) = \frac{M_c y_{\max}}{I_C} \quad [MPa]$$

Infine si effettua la verifica di resistenza confrontando la tensione ideale presente nel punto più sollecitato della sezione di mezzeria con la resistenza allo snervamento dell'acciaio adottato:

$$\sigma_{id} \left( R_L, \frac{S_L}{2} \right) = \sqrt{\left( \sigma_{Ed} \left( R_L, \frac{S_L}{2} \right) \right)^2} \leq f_{yd} \quad [MPa] \quad (3.129)$$

Tuttavia è doveroso affermare che questa verifica è superflua in quanto il rispetto della precedente verifica a deformazione impone degli spessori della piastra tali da permettere di contenere il livello delle sollecitazioni presenti costantemente al di sotto del limite di snervamento. Per i generici livelli dell'azione di tiro presenti nella catena e dunque per azioni normalmente inferiori ai 100 kN, l'uso di spessori ricavati mediante l'equazione (3.125) permettono di verificare sempre l'equazione (3.129).

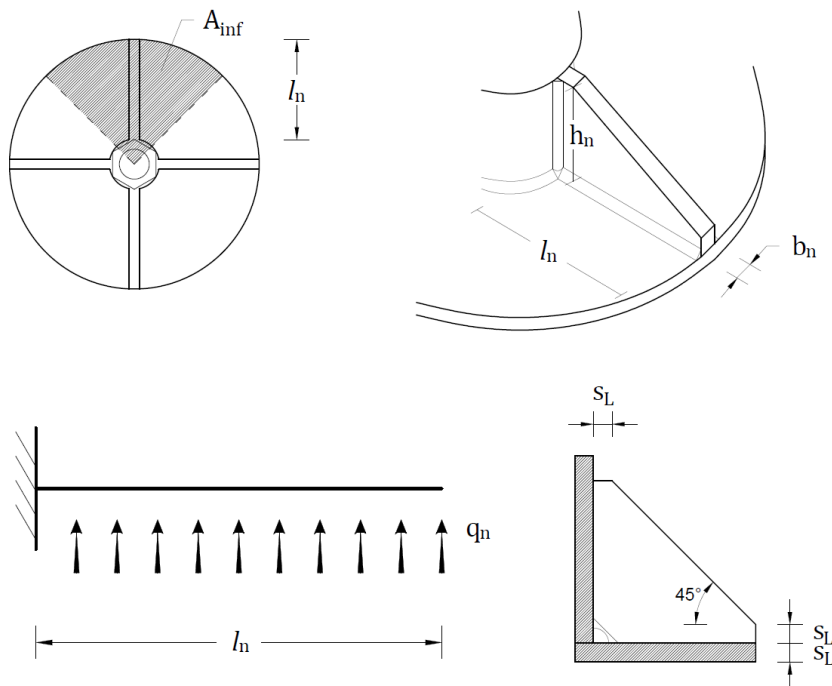
In seguito è necessario procedere con la verifica della nervatura di irrigidimento. Questa si esegue considerando l'elemento come una mensola tozza sottoposta a un carico distribuito  $q_n$  il cui modulo è pari alla precedente forza concentrata  $Q$  definita dalla (3.128).

$$q_n = Q \quad [N / mm] \quad (3.130)$$

E' quindi necessario confrontare il taglio e il momento flettente agenti all'incastro con i rispettivi valori resistenti offerti dalla sezione.

$$M_{Ed} = \frac{q_n l_n^2}{2} < M_{Rd} = f_{yd} \frac{b_n h_n^2}{6} \quad (3.131)$$

$$V_{Ed} = q_n l_n < V_{Rd} = f_{yd} b_n h_n / \sqrt{3}$$



**Figura 158.** Schema statico per la verifica delle nervature.

Infine è necessario valutare l'altezza di gola delle saldature che connettono la nervatura all'anello centrale. Il progetto di questa dimensione non viene qui riassunto poiché è già notevolmente sviluppato in molti testi e nelle NTC 2008.

### 3.3.2.8. Confronto tra gli spessori limite individuati

Arrivati a questo punto diventa molto utile confrontare gli spessori minimi della piastra necessari a superare le diverse verifiche di resistenza e deformabilità a seconda dell'utilizzo o meno delle nervature di irrigidimento.

Per operare questo confronto si è deciso di studiare tali spessori mantenendo invariati alcuni parametri e facendone variare di altri. In particolare si è scelto di utilizzare lo stesso acciaio per realizzare le piastre e lo stesso supporto murario dell'esempio posto al punto 3.3.2.5:

$$E = 200000 \quad [N / mm^2] \quad f_{yd} = 275 \quad [N / mm^2] \quad k_0 = 0,33 \quad [N / mm^3]$$

Gli spessori sono stati calcolati al variare dell'azione di tiro all'interno del range cui normalmente è sottoposta la catena, ovvero tra i 40 e i 100 kN. Inoltre i valori sono stati ulteriormente definiti al variare del raggio della piastra tra 160, 180 e 200 mm e siccome è stato mantenuta costante la dimensione del foro, ovvero 20 mm, è possibile affermare che per ogni verifica sono state definite tre curve in base al rapporto tra il raggio della piastra e il suo foro e in base all'azione di tiro.

Si è quindi calcolato lo spessore limite della piastra priva di nervature necessario a garantire una distribuzione degli sforzi sufficientemente omogenea, ovvero la verifica di deformabilità. Il calcolo è stato eseguito mediante l'equazione (3.108) in seguito riportata:

$$s_{L,lim} \geq \sqrt[3]{\frac{12R_L^4 k_0 (1 - \nu^2)}{E}} \quad [mm]$$

Successivamente si è calcolato lo spessore limite di una piastra priva di nervature necessario a superare la verifica di resistenza attraverso il metodo di Timoshenko. Tali valori sono stati definiti in base al rapporto  $2R_L/\phi_R$  e al variare dell'azione di tiro attraverso l'equazione (3.121) in seguito riportata

$$s_{L,lim} = \sqrt{\frac{\kappa q R_L^2}{f_{yd}}} \quad [mm]$$

Infine si è valutato lo spessore limite di una piastra dotata di cinque nervature di irrigidimento necessario a superare la verifica di deformabilità, attraverso l'equazione (3.125) in seguito riportata:

$$s_{L,min} \geq \sqrt[3]{\frac{3k_0}{E \left(\frac{1,171}{l}\right)^4}} \quad [mm]$$

Si è optato per mostrare i valori relativi all'uso di cinque nervature perché al di sotto di questo numero non si apprezzano significative riduzioni di spessore e al di

sopra di tale valore si complicano le lavorazioni necessarie al posizionamento degli irrigidimenti.

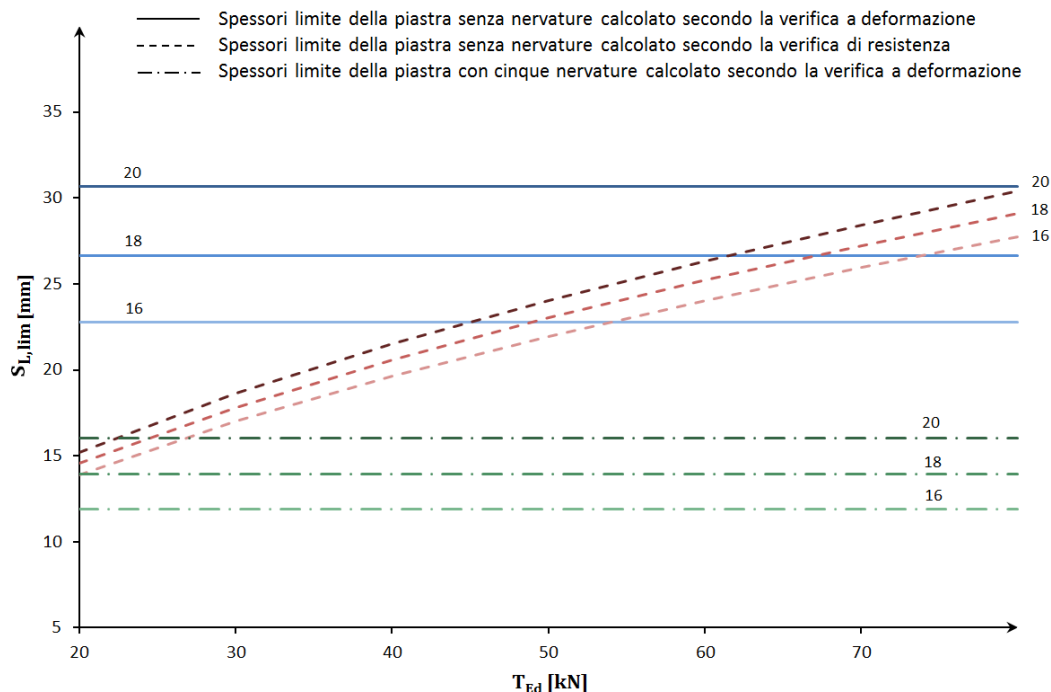


Figura 159. Rappresentazione grafica degli spessori limite ottenuti.

Osservando attentamente il grafico è possibile affermare che le dimensioni di progetto del capochiave sono determinate dalle verifiche di deformabilità all'aumentare del raggio della piastra e al diminuire dell'azione presente nella catena. Inoltre è corretto aggiungere che l'utilizzo di nervature di irrigidimento porta a una significativa diminuzione dello spessore della piastra all'aumentare del suo raggio, come nel caso in cui il rapporto  $2R_L/\Phi_R$  è pari a 20, dove si registra un dimezzamento dello spessore.

Per l'applicazione di queste ultime è però necessario eseguire numerose lavorazioni che aumentano drasticamente il costo dell'intervento. Si è infatti costretti ad eseguire costose saldature che si complicano all'aumentare del numero di costole e dunque all'aumentare del risparmio sul materiale. Bisogna poi ricordare che non sempre è opportuno saldare tali elementi; come nel caso di utilizzo degli acciai inossidabili.

Il progetto di un capochiave privo di irrigidimenti è ora tuttavia eseguibile seguendo i criteri descritti ai punti 3.3.2.3 e 3.3.2.4.

### **3.3.2.9. *Il capochiave di forma rettangolare***

Se si intende disporre un capochiave avente forma rettangolare e più precisamente quadrata è possibile utilizzare le precedenti formule per verificare un capochiave circolare di area equivalente. La forma quadrata assicura infatti un comportamento migliore o al massimo pari rispetto a quella circolare, a patto di disporre le nervature lungo le diagonali.

Oppure è possibile sviluppare una metodologia specifica di analisi, dimensionamento e verifica, sulla base di quella mostrata per il capochiave circolare.

## 3.4. Resistenza della barra

### 3.4.1. Valutazione dell'azione resistente

La massima azione di calcolo sopportabile dalla barra ( $T_{R,Rd}$ ) è fornita dal prodotto tra la resistenza caratteristica a snervamento per trazione dell'acciaio ( $f_{s,yk}$ ) e l'area della barra ( $A_R$ ). Il tutto viene poi diviso per il coefficiente di sicurezza del materiale ( $\gamma_M$ ).

$$T_{R,Rd} = \frac{f_{s,yk} A_R}{\gamma_M} \quad (3.132)$$

E' utile notare che il coefficiente di sicurezza del materiale dovrebbe assumere in una generica sezione della barra il valore di  $\gamma_S = 1,15$  e come specificato al punto 4.1.2.1.1.3 delle NTC 2008, tale valore deve essere utilizzato per tutte le tipologie di acciaio. Tuttavia le sezioni maggiormente a rischio sono quelle terminali, dove la barra si connette al capochiave. Pertanto, la sezione da verificare sarà proprio questa, dove il coefficiente di sicurezza da adottare nel calcolo è quello espresso al punto 4.2.8.1.1 delle NTC 2008, dove viene posto pari a  $\gamma_{M2} = 1,25$ . In [25] l'autrice consiglia, per le catene in ferro battuto, di innalzare il valore di quest'ultimo coefficiente a 1,3 o 1,5 a causa dell'imprecisione che caratterizza le prove di durezza con cui è possibile determinare le caratteristiche dell'acciaio. L'inaffidabilità delle prove e la disomogeneità del materiale è considerata dall'autrice così elevata, da consigliare l'utilizzo di un valore della resistenza a trazione (di calcolo) pari a 50-100 MPa, che rappresenta, con buona approssimazione, la minima resistenza a rottura delle catene desunta dalla letteratura.

Inoltre è bene considerare che l'area contenuta nella formula di verifica non si riferisce alla generica sezione, ma bensì alla sezione terminale perché maggiormente sollecitata. Questo perché la filettatura necessaria all'ancoraggio può ridurre l'area resistente. Generalmente il giunto è concepito a "parziale ripristino", in quanto la sezione filettata è ricavata per asportazione del materiale della barra secondo una filettatura metrica ISO 4533 a profilo triangolare[100].

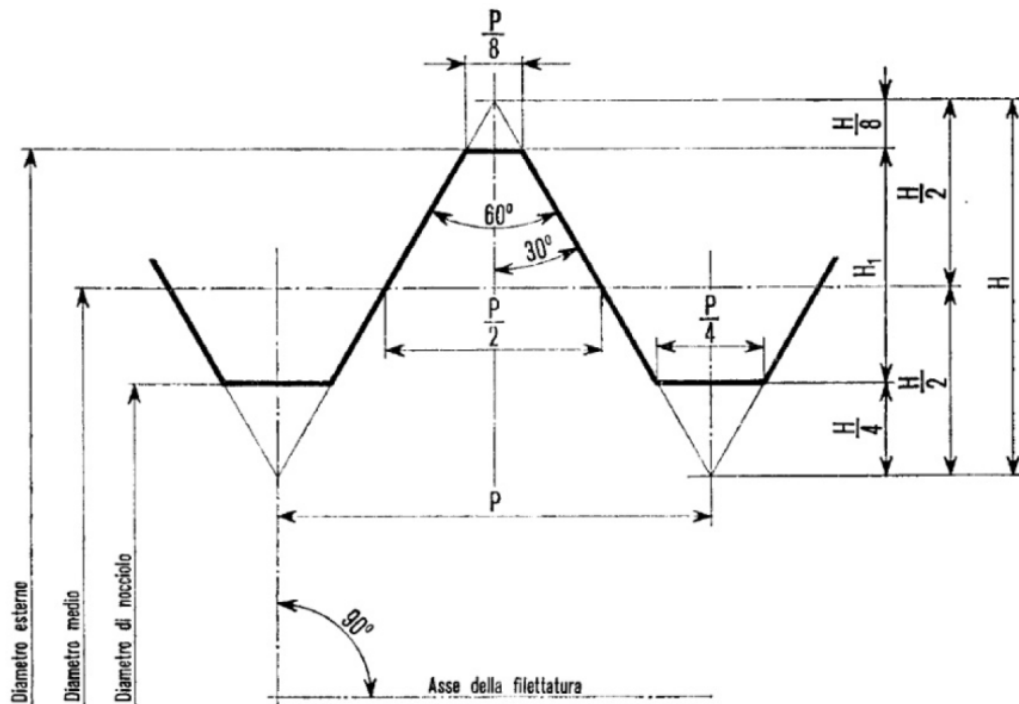


Figura 160. Specifiche profilo triangolare [101].

Nel caso odierno più comune di barra circolare e con riferimento alla Figura 160 possiamo calcolare l'area resistente della parte filettata come:

$$A_{R,res} = \frac{\pi d_{res}^2}{4} \quad (3.133)$$

dove il diametro della sezione resistente si ottiene dalla media aritmetica del diametro del nocciolo e del diametro medio (Figura 160), oppure mediante apposite tabelle.

Pertanto le zone terminali, filettate mediante asportazione di materiale, sono le zone critiche della barra. Vi è quindi il rischio che queste siano le prime ad entrare in crisi e per di più, vi entrerebbero ancora prima che venga raggiunto il limite di snervamento in una sezione generica, rendendo così inutili le capacità duttili dell'elemento. Per tale ragione è preferibile, specie se si intende fare affidamento sulla duttilità del tirante, ricorrere a una filettatura ricavata per rullatura [100]. Questa operazione consiste in una laminazione a freddo in cui il pezzo da filettare, avente il diametro di poco superiore al diametro medio della filettatura da generare, viene costretto a rotolare fra cuscinetti opportunamente rigati, i quali, sotto la pressione esercitata dalla macchina, penetrano nel pezzo imprimendo progressivamente il bassofondo del profilo. Questo costringe il materiale a deformarsi plasticamente generando la cresta della filettatura senza asportazione di materiale.

La rullatura presenta dunque il vantaggio di non ridurre l'area resistente della barra, evitando così di localizzare la sezione meno resistente nel punto più delicato del sistema. Inoltre questo sistema presenta l'ulteriore vantaggio di creare una filettatura dotata di gole arrotondate; la forma arrotondata presenta infatti un minor rischio di formazione di cricche rispetto alle gole a spigolo vivo della tornitura dove, specialmente dopo lo snervamento del materiale, vi è un'elevata possibilità di creazione di cricche che dalla base della gola si estendano velocemente e in maniera incontrollata, creando così una modalità di rottura fragile.

### 3.4.2. Scelta dell'acciaio

Siccome la richiesta di duttilità potrebbe essere elevata e siccome in ambito sismico è buona prassi conferire questa proprietà al tirante, in luogo della riduzione di duttilità causata dalla filettatura, sembra conveniente escludere l'utilizzo di acciai ad alto tenore di carbonio come quelli utilizzati per il calcestruzzo armato precompresso. Questi acciai sono da evitare anche a causa dell'elevata fragilità di cui sono dotati, nel caso di catene infatti, la barra non è protetta dal calcestruzzo, ma inserita per brevi tratti nella muratura e scoperta nei restanti. I movimenti dei pannelli durante il sisma o il fattore antropico potrebbero dunque causare delle lesioni che diventerebbero un principio di innesco di cricche veloci e incontrollate proprio a causa della fragilità del materiale. In ogni caso è bene che il produttore dell'acciaio certifichi che il prodotto scelto sia destinato a realizzare catene per il consolidamento.

Si è poi accennato al fatto che il sistema catena è a contatto con l'aria per la maggior parte della sua lunghezza. E' dunque necessario valutare l'aggressività dell'ambiente, per la cui corretta valutazione si rimanda a [23], di modo da prevenire la possibile corrosione dei tiranti attraverso un'opportuna scelta dell'acciaio o delle tecniche di protezione dello stesso.

In caso di ambienti poco aggressivi e a seconda del livello di azione stabilizzante richiesto è possibile orientarsi verso acciai come il B500, S555 o l'S670. Se aumenta l'aggressività è poi possibile dotare le barre di un rivestimento protettivo attuato attraverso una resina epossidica o meglio, con una zincatura effettuata a spruzzo o a caldo. I prodotti aventi alte resistenze a trazione ( $f_{yd} > 1000$  MPa) sono particolarmente suscettibili alle conseguenze della corrosione, soprattutto perché, a causa della loro bassa duttilità, anche piccolissimi attacchi corrosivi possono portare a rotture in esercizio [102] e dunque ne è sconsigliato l'utilizzo.

Se le condizioni ambientali dovessero farsi particolarmente gravose bisognerà infine ripiegare verso l'utilizzo di acciai inossidabili. Tra questi trovano maggiore applicazione quelli a struttura austenoferritica e austenitica, dove i primi sono dotati di una minor resistenza alla corrosione rispetto ai secondi. Tra gli acciai austenitici si dovrà poi scegliere se adottare leghe contenenti piccole quantità di molib-



deno (2-3%) o leghe prive di tale elemento. In questa sede si ricorda solo la maggior resistenza alla corrosione delle leghe provviste di molibdeno, sigla AISI 316, rispetto a quelle sprovviste, sigla AISI 304. E' poi possibile applicare ulteriori trattamenti, come la riduzione del tenore di carbonio o l'aggiunta di titanio per aumentare la resistenza a particolari tipi di corrosione. L'utilizzo di queste leghe comporta un considerevole aumento del costo del materiale e delle lavorazioni per la posa in opera, in quanto l'AISI 304 può arrivare a costare 8 volte tanto rispetto a un normale acciaio al carbonio, mentre l'AISI 316 fino a 10 volte tanto [19].

Bisogna poi tenere in considerazione che gli elementi di fissaggio e giunzione delle barre, come dadi, piastre e manicotti, devono essere selezionati con particolare cura. In genere i produttori tendono a produrre e fornire insieme allo specifico acciaio gli accessori necessari alla corretta posa dei dispositivi. Quanto detto vale in particolar modo per gli acciai inossidabili dove l'accoppiamento meccanico è da preferire alla saldatura, in quanto quest'ultima rischia di asportare o rovinare lo strato di protezione dalla corrosione.



## Conclusioni

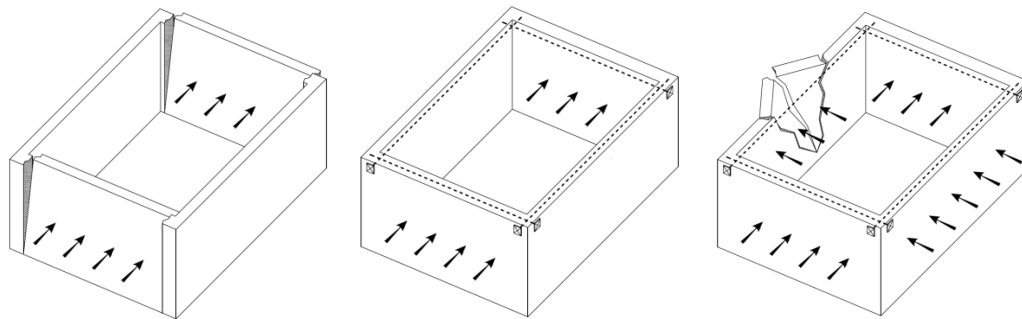
Nell'attuale panorama della letteratura tecnico – scientifica, le conoscenze riguardanti il consolidamento delle strutture murarie mediante i tiranti metallici non risultano organizzate in maniera completa ed esauriente all'interno di una singola opera. In genere i manuali di consolidamento, così come le norme, si limitano a esprimere un giudizio positivo sulla tecnica e a fornire un quadro poco approfondito della questione che non aiuta il progettista nella pratica quotidiana. Esistono poi numerosi documenti che, più o meno direttamente, trattano specifici ambiti di questa pratica, delineandone ad esempio il profilo storico o una precisa funzione strutturale cui assolvono. Ovunque regna in ogni caso l'incertezza nel definire in maniera sicura e comprovata il reale effetto di questi tiranti una volta inseriti nella struttura, soprattutto a causa dell'assenza di prove di laboratorio.

In sede conclusiva si intende dunque evidenziare il filo conduttore del lavoro svolto. Esso si basa in assoluto su un corposo lavoro di ricerca, intrapreso per analizzare la quasi totalità delle conoscenze presenti in letteratura riguardanti il consolidamento della muratura mediante i tiranti. All'interno di questo documento esse sono state vagliate e organizzate in una trattazione che fosse il più possibile globale, ma allo stesso tempo esauriente. Dove possibile si è cercato poi di colmare le lacune e le incertezze delle trattazioni disponibili fornendo una trattazione e una risoluzione inedita di molti problemi che affliggono la progettazione di un intervento di recupero mediante i tiranti metallici.

Volendo ripercorrere nello specifico lo sviluppo dell'opera è possibile osservare che il primo capitolo ha come scopo proprio quello di organizzare in maniera ragionata quell'universo di nozioni e consigli che riguardano questa tecnica di consolidamento. Al suo interno si è preferito indagare in primis il ruolo e l'evoluzione che le catene hanno avuto nel corso dei secoli ancor prima di analizzarne funzioni e forme. Ciò non è stato svolto per mero esercizio storiografico, ma piuttosto, perché si intendeva offrire la conoscenza di alcuni spunti e intuizioni che mossero già gli antichi costruttori verso l'utilizzo di questi dispositivi. Leggendo si ha così modo di cogliere la stratificazione di idee e l'impegno profuso nello studio di questi presidi, a testimonianza del fatto che essi erano già efficacemente utilizzati nella pratica pur non riuscendo a interpretarne compiutamente gli effetti e il funzionamento. Successivamente sono state riportate le possibili forme e applicazioni svolte dalle catene al giorno d'oggi. In questo frangente il taglio dato alla trattazione è più legato alla filosofia strutturale che all'elaborazione di un modello matematico con cui interpretare la statica del presidio. Al termine del capitolo si è infine dato corpo a un tema molto trascurato dalla letteratura e cioè, quello riguardante la messa in opera dei tiranti. Il sotto capitolo in questione non si è tuttavia limitato a elencare

---

una serie di piccoli accorgimenti e a stigmatizzarne di altri, ma sono state elaborate delle procedure per la corretta messa in opera di nuove catene e per la manutenzione di quelle esistenti. Quanto scritto è stato proposto in modo da non inficiare la durabilità del presidio stesso e allo stesso tempo al fine di ottenere il massimo effetto consolidante dall'applicazione di questi dispositivi. La stesura definitiva di questo capitolo è dunque avvenuta a posteriori rispetto ai successivi, in modo che la definizione del procedimento ergotecnico fosse integrata dalla corretta interpretazione del comportamento strutturale. All'interno del capitolo 2.1 sono state infine fornite le principali nozioni riguardanti il comportamento e la verifica della muratura sulla base non solo delle normative tecniche, ma anche delle più significative pubblicazioni presenti sul tema.



**Figura 161.** Estratti dal punto 1.2.1

In questo modo il lettore dispone di tutti gli strumenti necessari a comprendere i modelli, descritti all'interno del capitolo 2, con cui saranno dimensionate le catene a seconda che la loro presenza serva a incatenare mutuamente i pannelli murari per ottenere il comportamento scatolare dell'edificio o a contenere le azioni statiche di strutture spingenti. La trattazione effettuata all'interno di questo capitolo ha il forte pregio di affrontare in maniera unificata il dimensionamento dei tiranti secondo il singolo utilizzo, cosa che richiederebbe la lettura di numerosi testi, ma al tempo stesso scende nel dettaglio delle specifiche formule di verifica.

Per quanto riguarda l'incatenamento dei pannelli, la procedura è stata sdoppiata secondo la presenza o meno di solai sufficientemente rigidi nel loro piano medio. Nel primo caso è stato proposto un procedimento di dimensionamento dei tiranti e verifica degli stessi che era solo accennato all'interno delle NTC 2008, sviluppando altresì diversi metodi per risolvere l'annosa questione riguardante il passo dei tiranti. Nel secondo caso sono stati invece analizzati i procedimenti proposti dalla Circolare per la verifica a ribaltamento dei pannelli, mostrando, a differenza di quest'ultima, come procedere al dimensionamento dei tiranti in caso tali verifiche non fossero adempiute. L'analisi, effettuata anche grazie a un ampio esempio, ha messo in chiaro la filosofia generale e i punti più spinosi, mostrando altresì le mo-

tivate incertezze legate all'utilizzo dell'analisi statica non lineare per la verifica dei meccanismi locali. Al punto 2.3 sono stati poi riassunti i procedimenti con cui dimensionare i diversi tipi di catene e il livello di pretensione da fornire a queste ultime, affinché fossero in grado di contrastare le spinte prodotte dagli archi e dalle volte a botte.

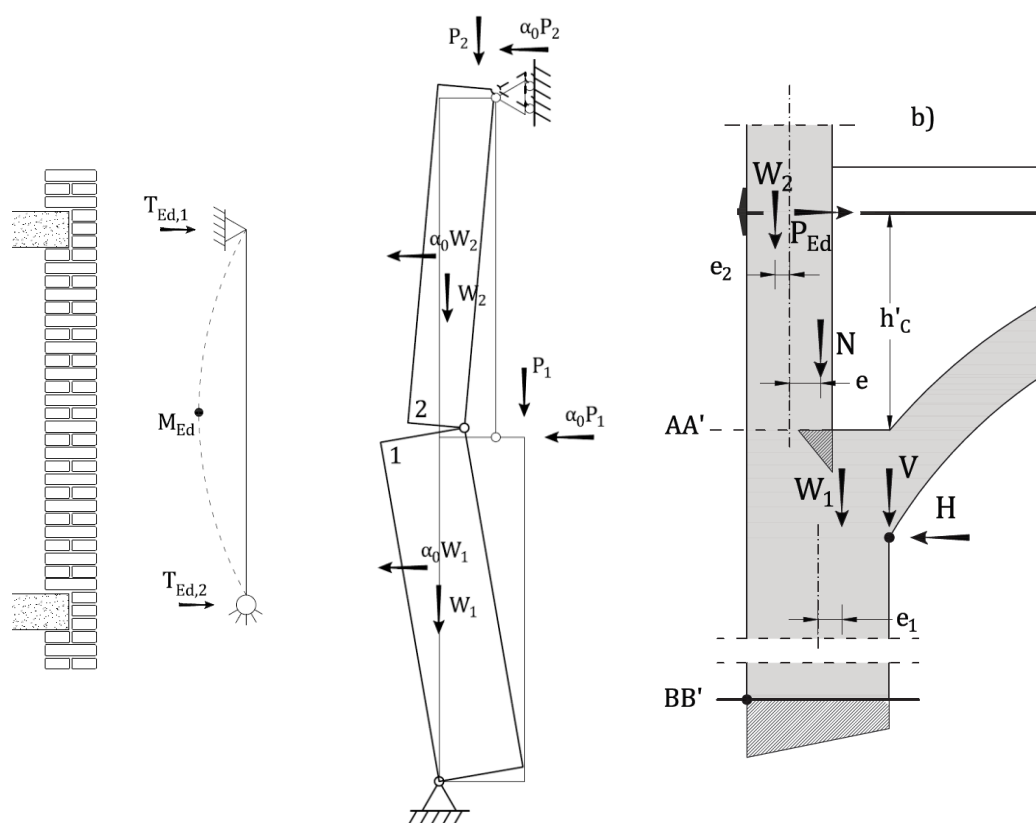


Figura 162. Estratti dal capitolo 2

Gli aspetti più spinosi legati all'utilizzo dei tiranti, nel senso che oltre a non esserci dei modelli comprovati vi è anche discordia o parsimonia di trattazione, sono principalmente due. Il primo di essi è legato alla valutazione dell'effettiva azione di ritegno espressa dal capochiave e dunque, al passo con cui disporre le catene all'interno della struttura. Per quanto il presente documento contenga due procedimenti atti a valutare ciò, è anche doveroso ammettere che essi rappresentano solo uno stato embrionale e poco raffinato dell'analisi. Più che un modello compiuto e definitivo, essi vanno dunque intesi come l'incipit di una possibile futura ricerca sull'argomento.

Il secondo tema che non risulta ancora comprovato all'interno della letteratura scientifica, è invece legato alla capacità ultima del sistema catena. Di quest'aspetto

viene però fornita un'ampia analisi e una possibile soluzione al capitolo 3. Al suo interno viene infatti stabilito che l'azione resistente ultima sopportabile dal sistema è pari al minore di tre contributi dovuti allo snervamento della barra, alla crisi per snervamento o eccessiva deformazione del capochiave e al punzonamento della muratura e tra questi vengono stabiliti dei criteri di gerarchia delle resistenze.

Per prima cosa è stata valutata l'azione resistente offerta dalla muratura e per farlo sono stati passati in rassegna tutti gli approcci presenti ad oggi in letteratura. Grazie all'analisi delle criticità, degli approcci e dei punti di forza delle singole metodologie è stato poi possibile enunciare una teoria che consentisse di valutare l'azione resistente offerta dalla muratura secondo due diversi meccanismi di collasso. Il primo è basato su una crisi per taglio dovuta allo scorrimento orizzontale dei blocchi lungo l'interfaccia. Il procedimento di valutazione per questo tipo di crisi è stato sviluppato in seguito alla correzione dei migliori approcci analoghi presenti in letteratura e armonizzato secondo la filosofia progettuale contenuta nelle NTC. Il secondo meccanismo di collasso è invece dovuto al superamento delle tensioni limite nei blocchi in seguito a uno stato di sforzo biassiale ed è stato sviluppato a partire dalle verifiche a trazione presenti in letteratura. Rispetto a queste ultime esso rappresenta però una teoria innovativa all'interno del panorama complessivo, poiché supera le forti limitazioni della precedente verifica (vedi 3.2.3.2) andando a interpretare correttamente lo stato tensionale presente nella muratura.

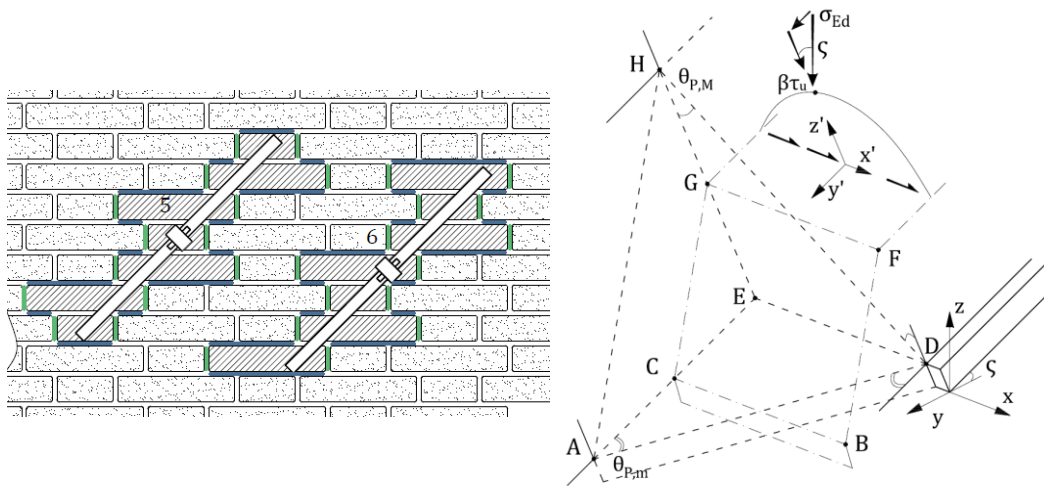


Figura 163. Estratti dal punto 3.2.4

Tra le cause del punzonamento non è stato considerato lo schiacciamento del supporto murario a contatto con il capochiave, poiché se la reazione della muratura agisce in maniera omogenea lungo l'area di contatto tra la chiavarda e la muratura, le precedenti cause di dissesto sopraggiungeranno prima dello schiacciamento. Tuttavia bisognava scoprire per quali caratteristiche del capochiave e della mura-

tura si ottiene una pressione di contatto omogenea, oltre a stabilire se le verifiche di resistenza proposte in letteratura fossero adeguate.

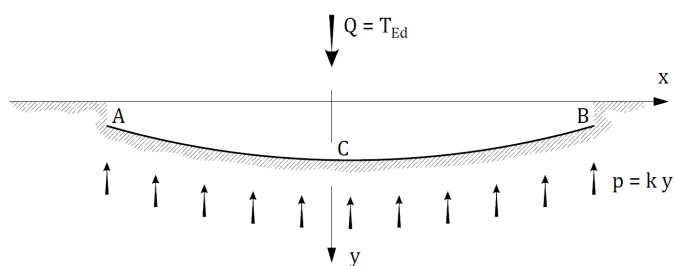
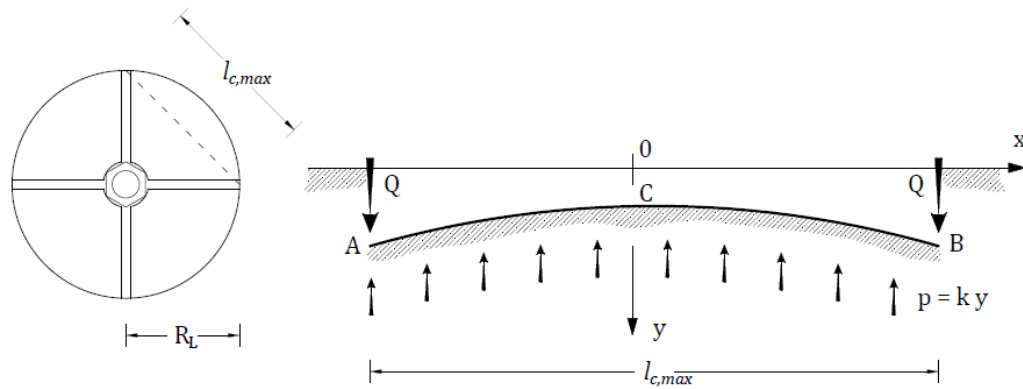


Figura 164. Estratti dal punto 3.3.1

Per effettuare ciò è stata utilizzata la teoria della trave su suolo elastico attraverso cui è stato possibile valutare in maniera più accurata il comportamento del capochiave a paletto. Tale approccio è solitamente adottato in geotecnica e perciò è stato necessario calibrare alcuni termini dell'equazione in funzione delle caratteristiche della muratura, ma una volta definite le equazioni di verifica, è stato possibile dimensionare in funzione della lunghezza del paletto e delle condizioni del supporto, un'altezza del paletto tale da permettere lo sviluppo di una reazione distribuita in maniera sufficientemente omogenea lungo lo sviluppo del capochiave. Allo stesso tempo sono state fornite le equazioni per effettuare le verifiche di resistenza sempre sotto l'ipotesi di trave su suolo elastico, ma in generale è stato possibile osservare che se era assolta la prima condizione legata alla deformazione del paletto, era allora possibile condurre la verifica di resistenza mediante lo schema semplificato di trave incastrata in mezzzeria e sottoposta a un carico uniformemente distribuito.

Lo stesso procedimento di analisi è stato poi utilizzato per i capochiave costituiti da una piastra circolare. In prima istanza si è studiato il comportamento di una piastra priva di nervature, arrivando a formulare una semplice equazione con cui stabilire lo spessore minimo per cui si ottiene una risposta omogenea del supporto. In seguito è stato proposto un procedimento di verifica semplificato e alternativo, rispetto a quello errato presente in letteratura, con cui condurre la verifica di resistenza. A posteriori è stato poi enunciato un nuovo metodo per valutare il contributo che l'aggiunta di piastre di irrigidimento avrebbe comportato sulla condizione

di deformabilità e sulla verifica di resistenza in modo da completare in maniera esauriente la trattazione della problematica.



**Figura 165.** Estratto dal punto 3.3.2

È bene ricordare che i procedimenti proposti per valutare la capacità resistente ultima del sistema catena, come del resto tutti gli altri approcci presenti in letteratura, non sono comprovati da prove di laboratorio che ne attestino la veridicità. Pertanto un interessante percorso di ricerca potrebbe consistere proprio nell'eseguire diversi test con cui vagliare la teoria proposta all'interno della tesi. Ciò offrirebbe inoltre numerosi spunti di approfondimento, tra i quali si ribadisce l'importanza strategica di arrivare a modelli di calcolo comprovati per valutare il passo con cui disporre i tiranti.



## Riferimenti bibliografici

1. Tacconi, D. and E. Verneti, *Catene e capichave : un'analisi storica, tecnologica e strutturale*. 2001, Politecnico di Milano.
2. Martini, F.D.G., *Trattato di architettura, ingegneria e arte militare*. 1503.
3. Alberti, L.B., *De re aedificatoria*. 1565.
4. Tibaldi Pellegrini, P., *L'architettura*. 1990, Milano.
5. Serlio, S., *I sette libri dell'architettura*. 1584.
6. Scamozzi, V., *L'idea dell'architettura universale*. 1615.
7. Milizia, F., *Principi di architettura civile*. 1781.
8. Ruskin, J., *Le sette lampade dell'architettura*. 1849, Milano.
9. Rondelet, G., *Trattato teorico e pratico dell'arte Di Edificare*. 1832.
10. Russo, C., *Le lesioni dei fabbricati*. 1947, Torino.
11. Valadier, G., *L'architettura pratica*. 1829, Roma.
12. Musso, G. and G. Copperi, *Particolari di costruzioni murali e finimenti di fabbricati*. 1890.
13. Andreani, I., *L'arte dei mestieri: il fabbro*. 1930, Milano.
14. Donghi, D., *Manuale dell'architetto*. 1925, Torino.
15. Formenti, C., *La pratica del fabbricare*. 1895, Milano.
16. Galli, C., *Consolidamento di archi e volte in muratura mediante la tecnica dell'arco armato : un approccio numerico* 2011, Politecnico di Milano.
17. Bonfigliuoli, S., *Consolidamento strutturale e antisismico di archi e volte in muratura : una sperimentazione sulla tecnica dell'arco armato*. 2011, Politecnico di Milano.
18. Giglio, S.M., *Consolidamento di archi e volte in muratura mediante la tecnica dell'arco armato : approccio sperimentale*. 2009, Politecnico di Milano.
19. Pisani, M.A., *Consolidamento delle strutture*. 2013, Milano.
20. Bei, L. [http://www.palibloc.it/chiavi\\_tiranti.htm](http://www.palibloc.it/chiavi_tiranti.htm). 2013.
21. Mastrodicasa, S., *Dissesti statici delle strutture edilizie*. 1973, Milano.
22. Cangi, G. and F. Giovanetti, *Manuale del recupero strutturale e antisismico*. 2012: Dei.
23. Bertolini, L., *Materiali da costruzione*. Vol. 2. 2010, Novara.
24. Bertolini, L., M. Carsana, and E. Marra, *Conseguenze della corrosione degli inserti metallici negli elementi in muratura dei beni culturali*. 2011.
25. Tomasoni, E., *Analisi, verifiche e consolidamento strutturale di archi e volte*. 2015, Palermo.
26. Basile, A. and A. Benini, *La riduzione della spinta in archi e volte: confronto tra le principali tecniche, analisi e modellazione*. 2011, Politecnico di Milano.

- 
27. Dardano, D., et al. *Un metodo per la determinazione del tiro nelle catene mediante identificazione dinamica*. in *Procs. of Conferenza Nazionale sulle Prove non Distruttive Monitoraggio Diagnostica*. 2005.
  28. Pozzati, P. and C. Ceccoli, *Teoria e tecnica delle strutture*. 1980.
  29. Belluzzi, O., *Scienza delle costruzioni*. Vol. 4. 1982, Bologna.
  30. Sorace, S., *Parameter models for estimating in-situ tensile force in tie-rods*. *Journal of engineering mechanics*, 1996. 122(9): p. 818-825.
  31. Borri, A., G. Cangi, and A. De Maria, *Sulle caratteristiche meccaniche delle murature storiche. Esperienze e perplessità*. 2011.
  32. Tassios, T., *Meccanica delle murature*.
  33. Tassios, T.P. and N. Avramidou, *Meccanica delle murature*. 1988, Napoli.
  34. Turnšek, V. and F. Čačovič. *Some experimental results on the strength of brick masonry walls*. in *Proceedings of the 2nd international brick-masonry conference*. *British Ceramic Society, Stoke-on-Trent*. 1971.
  35. Tomažević, M., *Shear resistance of masonry walls and Eurocode 6: shear versus tensile strength of masonry*. *Materials and structures*, 2009. 42(7): p. 889-907.
  36. Hendry, A.W., *Statica delle strutture in muratura di mattoni*. 1990.
  37. Page, A.W., A.W. Hendry, and W. Samarasinghe, *On the failure of masonry shear walls*. 1980.
  38. Alecci, V., et al., *Prove di compressione diagonale e taglio su differenti tipologie murarie*. 2011.
  39. Mazzotti, C., E. Sassoni, and G. Pagliai, *Determination of shear strength of historic masonries by moderately destructive testing of masonry cores*. 2014.
  40. Chinwah, J., C.G., *Shear resistance of brick walls*. 1972.
  41. Schneider, H., *Tests on shear resistance masonry*. 1976.
  42. Benedetti, D. and M. Tomazevic, *Sulla verifica sismica di costruzioni in muratura*. 1984.
  43. Betti, M., et al., *Uno studio numerico sulla resistenza a taglio per fessurazione diagonale di pannelli in muratura ordinaria*. 2011.
  44. Mann, W. and H. Muller. *Failure of Shear-Stressed Masonry. An Enlarged Theory, Tests and Application to Shear Walls*. in *Proc. Br. Ceram. Soc.* 1982.
  45. Calderoni, B., et al., *Ulteriori sviluppi dell'indagine sperimentale in scala ridotta su pannelli di fascia di piano*. 2011.
  46. Magenes, G. and M. Calvi, *In plane seismic response of brick masonry walls*. 1997.
  47. UNI, E., *1-1 Eurocodice 6, in Progettazione delle strutture di muratura-Parte 1-1: Regole generali per strutture di muratura armata e non armata*. 2006.
  48. Pantò, B., *La modellazione sismica degli edifici in muratura*. 2004.
  49. Dolce, M., et al., *Manuale delle opere provvisorie urgenti post-sisma*. 2001.
  50. Beolchini, G., L. Milano, and E. Antonacci, *Repertorio dei meccanismi di danno, delle tecniche di intervento e dei relativi costi negli edifici in muratura*

- *Definizione di modelli per l'analisi strutturale degli edifici in muratura, Volume II - Parte 1°*. 2006.
51. Engineering, K., *Edifici esistenti in muratura verifiche di vulnerabilità sismica analisi cinematiche*.
  52. Biondi, A., *Analisi Push-Over*. 2015.
  53. Gelfi, P. <http://dicata.ing.unibs.it/gelfi/arco.htm>. 2015.
  54. Pubblici, C.S.d.L., *Norme tecniche per le costruzioni*. 2008, Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana.
  55. Pubblici, C.S.d.L. *Indicazioni - I Sezione - prot. n°29*. 1992.
  56. Heyman, J., *The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture*. 1997: Cambridge University Press.
  57. Trasporti, M.d.I.e.d., *Circolare applicativa delle NTC08 del 2 febbraio 2009, n°617 2009*.
  58. Beconcini, M.L., *Costruzioni in zona sismica*. 2013, Pisa.
  59. Vinci, M., *I tiranti in acciaio nel calcolo delle costruzioni in muratura*. 2012, Palermo.
  60. Calderini, C., *Un modello costitutivo per la muratura: formulazione ed implementazione per l'analisi di strutture complesse*. 2004.
  61. Heyman, J. and C. Padfield. *Two masonry bridges*. in *ICE Proceedings*. 1972. Thomas Telford.
  62. Heyman, J., *Il saggio di Coulomb sulla statica*. Hevelius, Benevento, 1999.
  63. Pippard, A.J.S., E. Tranter, and L. Chitty, *The mechanics of the voussoir arch*. *Journal of the ICE*, 1936. 4(2): p. 281-306.
  64. Belluzzi, O., *Scienza delle costruzioni*. Vol. 2. 1982, Bologna.
  65. Mariani, M., *Trattato sul consolidamento e il restauro*. Vol. II. 2006, Roma.
  66. Pubblici, M.L., *Istruzioni per l'applicazione della normativa tecnica per la riparazione ed il rafforzamento degli edifici danneggiati dal sisma*. 1981.
  67. Sbacchis, S., *Elementi strutturali negli edifici in muratura*. 2002, Palermo.
  68. Olivito, R., *Statica e stabilità delle costruzioni in muratura*. 2003, Bologna.
  69. Pasta, A., *Restauro conservativo e antisismico*. 2006, Palermo.
  70. Lucchini, B. and S. Tagliaferri, *Le catene metalliche nelle strutture in muratura*. 1995, Politecnico di Milano.
  71. Tacconi, D. and E. Verneti, *Catene e capichiave, un'analisi storica, tecnologica e strutturale*. 2001.
  72. Ponzo, F., *Meccanismi di collasso locale negli edifici esistenti in muratura e rafforzamento mediante tiranti*. 2012.
  73. Carbone, I.V., A. Fiore, and G. Pistone, *Le costruzioni in muratura: interpretazione del comportamento statico e tecniche di intervento*. 2001, Milano.
  74. Beer, F.P., et al., *Scienza delle costruzioni: introduzione alla meccanica dei materiali*. 1997.
  75. Giannini, R., *Dispense del corso di tecnica delle costruzioni*. 2007.

- 
76. UNI, E., *1-1 (2005) Eurocodice 2-Progettazione delle strutture in calcestruzzo*. 1992, Parte.
  77. Vaglieco, M.  
[http://geometriaparametrica.it/data/\\_uploaded/file/geometria/documenti/pdf/07-VII%20Apel.pdf](http://geometriaparametrica.it/data/_uploaded/file/geometria/documenti/pdf/07-VII%20Apel.pdf).
  78. Wikipedia. <http://it.wikipedia.org/wiki/Ellisse>.
  79. Augenti, N. and F. Parisi, *Constitutive modelling of tuff masonry in direct shear*. *Construction and Building Materials*, 2011. 25(4): p. 1612-1620.
  80. Magenes, G.M. and G. Calvi, *Experimental evaluation of seismic strength of old masonry structures*.
  81. Belluzzi, O., *Scienza delle costruzioni*. Vol. 1. 1982, Bologna.
  82. Biot, M., *Bending of an infinite beam on an elastic foundation*. 1922.
  83. Hetényi, M., *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*. 1971, Rexdale.
  84. Vesic, A.B. *Beams on elastic subgrade and the Winkler's hypothesis*. 1961.
  85. Guidi, C.C., *Geotecnica e tecnica delle fondazioni*. Vol. 1. 1987, Milano.
  86. Fischer, F.D. and E. Gamsjäger, *Beams on foundation, Winkler bedding or halfspace—a comparison*. 2008.
  87. Sadrekarimi, J. and M. Akbarzad, *Comparative study of methods of determination of coefficient of subgrade reaction*. 2009.
  88. Giannatasio, P., et al., *Portanza dei sottofondi*. 1989.
  89. Alasia, U. and M. Pugno, *Corso di costruzioni*. Vol. V. 2011, Torino.
  90. Leonhardt, F. and R. Mariani, *I ponti: dimensionamento, tipologia, costruzione*. 1979: Edizioni di Scienza e Tecnica.
  91. Badalà, A. and M. Cuomo, *Determinazione delle proprietà meccaniche della muratura come solido composito*. 1996.
  92. Riva, A. <http://www.andreariva.it/utilita>.
  93. Belluzzi, O., *Scienza delle costruzioni*. Vol. 3. 1982, Bologna.
  94. Hertz, H., *Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten*. 1884.
  95. Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*. 1959.
  96. Schleicher, F., *Kreisplatten auf elastischer Unterlage*. 1926, Madison.
  97. Föppl, A., *Vorlesungen über technische Mechanik*. 1912, Rexdale.
  98. Caffè, S., *Schemi riassuntivi sull'acciaio (Giunti)*. 2006.
  99. Wahl, A. and G. Lobo, *Stresses and deflections in flat circular plates with central holes*. 1930.
  100. Ballio, G. and F.M. Mazzolani, *Strutture in acciaio*. 1982, Milano.
  101. EN, U., *ISO 4533 - Filettature ISO a profilo triangolare*.
  102. Bertolini, L., *Materiali da costruzione*. Vol. 1. 2010, Novara.

## Appendice A Risoluzione della trave su suolo elastico

Simbologia:

F	Modulo elastico dell'acciaio [kg/cm <sup>2</sup> ]
l	Lunghezza del paletto [cm]
b	Larghezza del paletto [cm]
h	Altezza del paletto [cm]
K	Costante elastica del terreno [kg/cm <sup>3</sup> ]
i	Momento di inerzia [cm <sup>4</sup> ]
P	Carico concentrato [kg]
$\eta$	Deformata [mm]
M	Momento flettente [kNm]
r	Reazione del terreno [N/mm]

Dati e svolgimento

$$F = 2100000; l = 60; h = 4; b = 2; K = 33;$$

$$P = 6000; \beta = Kb; i = \frac{bh^3}{12}; \lambda = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4Fi}}$$

Attraverso l'equazione della linea elastica ( $\eta^{IV} + 4\lambda\eta = 0$ ) viene valutato l'andamento dei differenti indici di riferimento.

$$\begin{aligned} \text{sol1} &= \text{DSolve}[\{\eta_{dx}''''[x] + 4\lambda^4 \eta_{dx}[x] == 0, \\ &\quad \eta_{dx}'[0] == 0, -Fi \eta_{dx}''''[0] == -P/2, \\ &\quad -Fi \eta_{dx}''[1/2] == 0, -Fi \eta_{dx}''''[1/2] == 0\}, \eta_{dx}, x]; \\ \text{sol2} &= \text{DSolve}[\{\eta_{sx}''''[x] + 4\lambda^4 \eta_{sx}[x] == 0, \eta_{sx}'[0] == 0, \\ &\quad -Fi \eta_{sx}''''[0] == -P/2, -Fi \eta_{sx}''[-1/2] == 0, \\ &\quad -Fi \eta_{sx}''''[-1/2] == 0\}, \eta_{sx}, x]; \end{aligned}$$

Deformata

$$\eta[x_] = \text{If}[x > 0, 10 \eta_{dx}[x] /. \text{sol1}, -10 \eta_{sx}[x] /. \text{sol2}];$$

Momento flettente

$$\begin{aligned} M[x_] &= \text{If}[x > 0, \\ &\quad -Fi \frac{9.81}{10^5} \eta_{dx}''[x] /. \text{sol1}, +Fi \frac{9.81}{10^5} \eta_{sx}''[x] /. \text{sol2}]; \end{aligned}$$

Reazione del terreno

$$r[x_] = \beta * \left(\frac{9.81}{100}\right) 10 \eta[x];$$

## Appendice B Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante le equazioni di Bessel

### Simbologia

m	Modulo di Poisson (formulazione tedesca)
K	Costante elastica del terreno [kg/cm <sup>3</sup> ]
F	Modulo elastico dell'acciaio [kg/cm <sup>2</sup> ]
s	Spessore della piastra [cm]
ω	Lunghezza caratteristica [cm]
R	Raggio della piastra [cm]
B	Rigidezza flessionale [kg cm]
Z	Funzioni di Bessel
y	Deformata

$$m = 10 / 3; K = 40; F = 2\,000\,000; s = 2;$$

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{B}{K}}; R = 1 \omega; \alpha = R / \omega; B = \frac{F s^3 m^2}{12 (m^2 - 1)};$$

### Equazioni di Bessel

$$a = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2 \pi x}}; b = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}; \varrho = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}; \sigma = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8};$$

$$Z1[x_] = a \cos[\varrho]; Z1d[x_] = \frac{a}{\sqrt{2}} (\cos[\varrho] - \sin[\varrho]);$$

$$Z2[x_] = -a \sin[\varrho]; Z2d[x_] = -\frac{a}{\sqrt{2}} (\cos[\varrho] + \sin[\varrho]);$$

$$Z3[x_] = b \sin[\sigma]; Z3d[x_] = +\frac{b}{\sqrt{2}} (\cos[\sigma] + \sin[\sigma]);$$

$$Z4[x_] = -b \cos[\sigma]; Z4d[x_] = +\frac{b}{\sqrt{2}} (\cos[\sigma] + \sin[\sigma]);$$

### Risoluzione

$$c1[\alpha] = \frac{Z1[\alpha] Z4d[\alpha] - Z1d[\alpha] Z4[\alpha] + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} (Z1d[\alpha] Z3d[\alpha] + Z2d[\alpha] Z4d[\alpha])}{Z1[\alpha] Z2d[\alpha] - Z1d[\alpha] Z2[\alpha] + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} ((Z1d[\alpha])^2 + (Z2d[\alpha])^2)};$$

$$c2[\alpha] = \frac{-Z2[\alpha] Z4d[\alpha] + Z2d[\alpha] Z4[\alpha] + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} (Z1d[\alpha] Z4d[\alpha] - Z2d[\alpha] Z3d[\alpha])}{Z1[\alpha] Z2d[\alpha] - Z1d[\alpha] Z2[\alpha] + \frac{m-1}{m} \frac{1}{\alpha} ((Z1d[\alpha])^2 + (Z2d[\alpha])^2)};$$

$$Y[x_] = \frac{P}{4 \sqrt{KB}} (c1[\alpha] Z1[x] + c2[\alpha] Z2[x] + Z3[x]);$$

## Appendice C Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante sviluppo in serie

### Simbologia

m	Modulo di Poisson (formulazione tedesca)
K	Costante elastica del terreno [kg/cm <sup>3</sup> ]
F	Modulo elastico dell'acciaio [kg/cm <sup>2</sup> ]
s	Spessore della piastra [cm]
ω	Lunghezza caratteristica [cm]
R	Raggio della piastra [cm]
B	Rigidezza flessionale [kg cm]
Z	Funzioni di Bessel
y	Deformata

$$m = \frac{10}{3}; \quad \Pi = 3.14159; \quad P = 2000; \quad F = 2\,000\,000; \quad s = 2; \quad K = 40; \quad \alpha = 1;$$

$$B = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{F s^3}{12}; \quad \omega = \sqrt[4]{\frac{B}{K}}; \quad R = \alpha \omega;$$

### Semplificazione delle equazioni Bessel

$$\mathfrak{E}[\lambda_{-}] = \sum_{y=1}^{\lambda} \frac{1}{y}; \quad a = 0.577216 \frac{x}{2};$$

$$g[x_{-}] = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + \frac{1}{3} \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right)^7;$$

$$R1[x_{-}] = x^2 - \mathfrak{E}[3] \frac{x^6}{2304}; \quad R1d[x_{-}] = \frac{x}{2} \left( 1 - \mathfrak{E}[3] \frac{x^4}{192} + \mathfrak{E}[5] \frac{x^8}{737\,280} \right);$$

$$R2[x_{-}] = \mathfrak{E}[2] \frac{x^4}{64} - \mathfrak{E}[4] \frac{x^8}{147\,456}; \quad R2d[x_{-}] = \frac{x}{2} \left( \mathfrak{E}[2] \frac{x^2}{8} + \mathfrak{E}[4] \frac{x^6}{9216} \right);$$

$$Z1[x_{-}] = 1 - \frac{x^4}{64} + \frac{x^8}{147\,456}; \quad Z1d[x_{-}] = -\frac{x}{2} \left( \frac{x^2}{8} + \frac{x^6}{9216} \right);$$

$$Z2[x_{-}] = \frac{x^2}{4} + \frac{x^6}{2304}; \quad Z2d[x_{-}] = -\frac{x}{2} \left( 1 - \frac{x^4}{192} + \frac{x^8}{737\,280} \right);$$

$$Z3[x_{-}] = \frac{Z1[x]}{2} - \frac{2}{\Pi} (R1[x] + g[a] Z2[x]);$$

$$Z3d[x_{-}] = \frac{Z1d[x]}{2} - \frac{2}{\Pi} \left( R1d[x] + \frac{Z2[x]}{x} + g[a] Z2d[x] \right);$$

$$Z4[x_{-}] = \frac{Z2[x]}{2} + \frac{2}{\Pi} (R2[x] + g[a] Z1[x]);$$

$$Z4d[x_{-}] = \frac{Z2d[x]}{2} + \frac{2}{\Pi} \left( R2d[x] + \frac{Z1[x]}{x} + g[a] Z1d[x] \right);$$

# Appendice D Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante valori tabellati

Per calcolare la deformazione  $y$  di una lastra è possibile utilizzare le equazioni (3.98) e (3.99) utilizzando i seguenti valori tabellati all'interno di [96].

Anhang C.		Anhang C.	
$x$	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$
0,00	+1,00000 0000	0,00000 0000	0,00000 0000
0,01	+1,00000 0000	-0,00000 2500	-0,00000 0050
0,02	+1,00000 0000	-0,00010 0000	-0,00000 0050
0,03	+0,99999 9999	-0,00020 2500	-0,00000 0169
0,04	+0,99999 9996	-0,00040 0000	-0,00000 0400
0,05	+0,99999 9980	-0,00060 2500	-0,00000 0781
0,06	+0,99999 9960	-0,00090 0000	-0,00000 1350
0,07	+0,99999 9963	-0,00120 2500	-0,00000 2144
0,08	+0,99999 9936	-0,00160 0000	-0,00000 3200
0,09	+0,99999 9898	-0,00200 2500	-0,00000 4556
0,10	+0,99999 9844	-0,00250 0000	-0,00000 6250
0,11	+0,99999 9771	-0,00300 2500	-0,00000 8319
0,12	+0,99999 9676	-0,00360 0000	-0,00000 10800
0,13	+0,99999 9554	-0,00420 2500	-0,00000 13731
0,14	+0,99999 9400	-0,00490 0000	-0,00000 17150
0,15	+0,99999 9209	-0,00560 2500	-0,00002 1094
0,16	+0,99999 8976	-0,00630 0000	-0,00002 2600
0,17	+0,99999 8695	-0,00700 2500	-0,00003 5706
0,18	+0,99999 8369	-0,00780 0000	-0,00003 6450
0,19	+0,99999 7994	-0,00860 2498	-0,00004 2869
0,20	+0,99999 7500	-0,00940 9997	-0,00005 0000
0,21	+0,99999 6901	-0,01020 2496	-0,00005 7881
0,22	+0,99999 6240	-0,01100 9995	-0,00006 6550
0,23	+0,99999 5528	-0,01180 2494	-0,00007 6044
0,24	+0,99999 4816	-0,01260 9992	-0,00008 6400
0,25	+0,99999 3896	-0,01350 2490	-0,00009 7656
0,26	+0,99999 2860	-0,01450 9987	-0,00010 9850
0,27	+0,99999 1696	-0,01560 2488	-0,00012 3018
0,28	+0,99999 0396	-0,01680 9979	-0,00013 7199
0,29	+0,99998 8949	-0,01810 2474	-0,00015 2439
0,30	+0,99998 7344	-0,01940 9967	-0,00016 8746
0,31	+0,99998 5570	-0,02080 2462	-0,00018 6102
0,32	+0,99998 3616	-0,02220 9952	-0,00020 4708
0,33	+0,99998 1470	-0,02370 2444	-0,00022 4604
0,34	+0,99997 9120	-0,02520 9939	-0,00024 5647
0,35	+0,99997 6558	-0,02680 2420	-0,00026 7065
0,36	+0,99997 3756	-0,02840 9906	-0,00029 1596
0,37	+0,99997 0716	-0,03010 2389	-0,00031 6576
0,38	+0,99996 7420	-0,03180 9869	-0,00034 2944
0,39	+0,99996 3853	-0,03360 2347	-0,00037 0736
0,40	+0,99996 0000	-0,03540 9822	-0,00039 9991
0,41	+0,99995 5848	-0,03720 2294	-0,00043 0746
0,42	+0,99995 1380	-0,03900 9762	-0,00046 3087
0,43	+0,99994 6582	-0,04080 2226	-0,00049 6904
0,44	+0,99994 1437	-0,04260 9685	-0,00053 2384
0,45	+0,99993 5926	-0,04440 9166	-0,00057 7506
0,46	+0,99993 0041	-0,04620 2119	-0,00061 3281
0,47	+0,99992 4757	-0,04800 9046	-0,00065 9720
0,48	+0,99991 9038	-0,04980 1954	-0,00070 6836
0,49	+0,99991 2927	-0,05160 8842	-0,00075 4636
0,50	+0,99991 6375	-0,05340 1716	-0,00080 3126
0,51	+0,99991 9330	-0,05520 8586	-0,00085 2302
0,52	+0,99992 1738	-0,05700 5436	-0,00090 2166
0,53	+0,99992 3637	-0,05880 2286	-0,00095 1626
0,54	+0,99992 5071	-0,06060 9136	-0,00100 1686
0,55	+0,99992 6071	-0,06240 5986	-0,00105 1346
0,56	+0,99992 6657	-0,06420 2836	-0,00110 1606
0,57	+0,99992 6837	-0,06600 9686	-0,00115 1466
0,58	+0,99992 6617	-0,06780 6536	-0,00120 1326
0,59	+0,99992 6007	-0,06960 3386	-0,00125 1186
0,60	+0,99991 4985	-0,07140 236	-0,00130 1046
0,61	+0,99991 3567	-0,07320 921	-0,00135 926
0,62	+0,99991 1813	-0,07500 606	-0,00140 806
0,63	+0,99990 9788	-0,07680 291	-0,00145 686
0,64	+0,99990 7488	-0,07860 976	-0,00150 566
0,65	+0,99990 4888	-0,08040 661	-0,00155 446
0,66	+0,99990 1988	-0,08220 346	-0,00160 326
0,67	+0,99990 7888	-0,08400 36	-0,00165 206
0,68	+0,99990 3588	-0,08580 951	-0,00170 86
0,69	+0,99989 8088	-0,08760 636	-0,00175 74
0,70	+0,99989 1288	-0,08940 321	-0,00180 62
0,71	+0,99988 3488	-0,09120 16	-0,00185 50
0,72	+0,99987 5288	-0,09300 151	-0,00190 38
0,73	+0,99986 6688	-0,09480 84	-0,00195 26
0,74	+0,99985 7688	-0,09660 529	-0,00200 14
0,75	+0,99984 8288	-0,09840 214	-0,00205 2
0,76	+0,99983 8488	-0,10020 909	-0,00210 10
0,77	+0,99982 8288	-0,10200 604	-0,00215 98
0,78	+0,99981 7688	-0,10380 299	-0,00220 86
0,79	+0,99980 6688	-0,10560 994	-0,00225 74
0,80	+0,99979 5288	-0,10740 689	-0,00230 62
0,81	+0,99978 3488	-0,10920 384	-0,00235 50
0,82	+0,99977 1288	-0,11100 79	-0,00240 38
0,83	+0,99975 8688	-0,11280 484	-0,00245 26
0,84	+0,99974 5688	-0,11460 179	-0,00250 14
0,85	+0,99973 2288	-0,11640 874	-0,00255 2
0,86	+0,99971 8488	-0,11820 569	-0,00260 10
0,87	+0,99969 4288	-0,12000 264	-0,00265 98
0,88	+0,99966 9688	-0,12180 959	-0,00270 86
0,89	+0,99964 5688	-0,12360 654	-0,00275 74
0,90	+0,99962 1288	-0,12540 349	-0,00280 62
0,91	+0,99959 6488	-0,12720 44	-0,00285 50
0,92	+0,99956 1288	-0,12900 139	-0,00290 38
0,93	+0,99952 5688	-0,13080 834	-0,00295 26
0,94	+0,99948 9688	-0,13260 529	-0,00300 14
0,95	+0,99945 3288	-0,13440 224	-0,00305 2
0,96	+0,99941 6488	-0,13620 919	-0,00310 10
0,97	+0,99937 9288	-0,13800 614	-0,00315 98
0,98	+0,99934 2688	-0,13980 309	-0,00320 86
0,99	+0,99930 5688	-0,14160 104	-0,00325 74
1,00	+0,99926 8288	-0,14340 739	-0,00330 62

Figura 166. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 136-137.



Anhang C.						Anhang C.									
$x$	$Z_0(x)$	$Z_1(x)$	$\frac{dZ_0(x)}{dx}$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$	$x$	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$	$\frac{dZ_2(x)}{dx}$	$x$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$\frac{dZ_2(x)}{dx}$	$\frac{dZ_3(x)}{dx}$	$x$
0,90	+0,989 7514	-0,202 2694	-0,045 6365	-0,448 4625	0,90	+0,860 971	-0,712 037	-0,304 838	-0,813 105	1,70	+0,863 767	-0,728 377	-0,315 614	-0,820 887	1,70
0,91	+0,989 3384	-0,206 7786	-0,047 0701	-0,453 3752	0,91	+0,863 767	-0,728 377	-0,315 614	-0,820 887	1,72	+0,857 345	-0,744 872	-0,326 634	-0,828 564	1,72
0,92	+0,988 8698	-0,211 3366	-0,048 6377	-0,458 2840	0,92	+0,857 345	-0,744 872	-0,326 634	-0,828 564	1,74	+0,850 700	-0,761 519	-0,337 901	-0,836 132	1,74
0,93	+0,988 3155	-0,215 9442	-0,050 2396	-0,463 1887	0,93	+0,850 700	-0,761 519	-0,337 901	-0,836 132	1,76	+0,843 827	-0,778 317	-0,349 416	-0,843 588	1,76
0,94	+0,987 8049	-0,220 6006	-0,051 8763	-0,468 0892	0,94	+0,843 827	-0,778 317	-0,349 416	-0,843 588	1,78	+0,836 722	-0,795 282	-0,361 182	-0,850 927	1,78
0,95	+0,987 2778	-0,225 3066	-0,053 5481	-0,472 9854	0,95	+0,836 722	-0,795 282	-0,361 182	-0,850 927	1,80	+0,829 375	-0,812 359	-0,373 201	-0,858 146	1,80
0,96	+0,986 7359	-0,230 0603	-0,055 2553	-0,477 8771	0,96	+0,829 375	-0,812 359	-0,373 201	-0,858 146	1,82	+0,821 792	-0,829 587	-0,385 475	-0,865 240	1,82
0,97	+0,986 1726	-0,234 8635	-0,056 9982	-0,482 7642	0,97	+0,821 792	-0,829 587	-0,385 475	-0,865 240	1,84	+0,813 955	-0,846 902	-0,398 005	-0,872 206	1,84
0,98	+0,985 5938	-0,239 7156	-0,058 7774	-0,487 6466	0,98	+0,813 955	-0,846 902	-0,398 005	-0,872 206	1,86	+0,805 870	-0,864 474	-0,410 794	-0,879 040	1,86
0,99	+0,984 9969	-0,244 6164	-0,060 5931	-0,492 5241	0,99	+0,805 870	-0,864 474	-0,410 794	-0,879 040	1,88	+0,797 524	-0,882 122	-0,423 844	-0,885 737	1,88
1,00	+0,984 3882	-0,249 5566	-0,062 446	-0,497 397	1,00	+0,797 524	-0,882 122	-0,423 844	-0,885 737	1,90	+0,788 915	-0,899 903	-0,437 107	-0,892 293	1,90
1,02	+0,983 095	-0,259 611	-0,066 264	-0,507 126	1,02	+0,788 915	-0,899 903	-0,437 107	-0,892 293	1,92	+0,780 036	-0,917 813	-0,450 734	-0,898 703	1,92
1,04	+0,981 780	-0,269 851	-0,070 233	-0,516 833	1,04	+0,780 036	-0,917 813	-0,450 734	-0,898 703	1,94	+0,770 883	-0,935 850	-0,464 577	-0,904 363	1,94
1,06	+0,980 285	-0,280 284	-0,074 356	-0,526 516	1,06	+0,770 883	-0,935 850	-0,464 577	-0,904 363	1,96	+0,761 451	-0,954 011	-0,478 687	-0,911 063	1,96
1,08	+0,978 756	-0,290 912	-0,078 638	-0,536 175	1,08	+0,761 451	-0,954 011	-0,478 687	-0,911 063	1,98	+0,751 734	-0,972 292	-0,493 067	-0,917 014	1,98
1,10	+0,977 138	-0,301 732	-0,083 082	-0,545 807	1,10	+0,751 734	-0,972 292	-0,493 067	-0,917 014	2,0	+0,697	-1,0654	-0,5690	-0,9442	2,1
1,12	+0,975 430	-0,312 744	-0,087 688	-0,555 412	1,12	+0,697	-1,0654	-0,5690	-0,9442	2,1	+0,697	-1,0654	-0,5690	-0,9442	2,1
1,14	+0,973 629	-0,323 945	-0,092 461	-0,564 988	1,14	+0,6377	-1,1610	-0,6520	-0,9661	2,2	+0,6377	-1,1610	-0,6520	-0,9661	2,2
1,16	+0,971 751	-0,335 343	-0,097 403	-0,574 534	1,16	+0,5680	-1,2585	-0,7420	-0,9836	2,3	+0,5680	-1,2585	-0,7420	-0,9836	2,3
1,18	+0,969 732	-0,346 929	-0,102 517	-0,584 045	1,18	+0,4890	-1,3575	-0,8392	-0,9944	2,4	+0,4890	-1,3575	-0,8392	-0,9944	2,4
1,20	+0,967 629	-0,358 704	-0,107 806	-0,593 523	1,20	+0,4000	-1,4572	-0,9436	-0,9983	2,5	+0,4000	-1,4572	-0,9436	-0,9983	2,5
1,22	+0,965 419	-0,370 669	-0,113 272	-0,602 965	1,22	+0,3001	-1,5569	-1,0552	-0,9943	2,6	+0,3001	-1,5569	-1,0552	-0,9943	2,6
1,24	+0,963 097	-0,382 823	-0,118 919	-0,612 370	1,24	+0,1887	-1,6557	-1,1737	-0,9815	2,7	+0,1887	-1,6557	-1,1737	-0,9815	2,7
1,26	+0,960 661	-0,395 164	-0,124 750	-0,621 735	1,26	+0,0651	-1,7529	-1,2993	-0,9580	2,8	+0,0651	-1,7529	-1,2993	-0,9580	2,8
1,28	+0,958 106	-0,407 692	-0,130 767	-0,631 059	1,28	-0,0714	-1,8472	-1,4315	-0,9256	2,9	-0,0714	-1,8472	-1,4315	-0,9256	2,9
1,30	+0,955 428	-0,420 406	-0,136 972	-0,640 338	1,30	+0,2314	-1,6376	-1,5698	-0,8804	3,0	+0,2314	-1,6376	-1,5698	-0,8804	3,0
1,32	+0,952 625	-0,433 306	-0,143 369	-0,649 572	1,32	+0,3555	-2,0298	-2,0298	-0,8223	3,1	+0,3555	-2,0298	-2,0298	-0,8223	3,1
1,34	+0,949 693	-0,446 388	-0,149 960	-0,658 759	1,34	+0,5044	-2,1016	-1,8636	-0,7499	3,2	+0,5044	-2,1016	-1,8636	-0,7499	3,2
1,36	+0,946 626	-0,459 655	-0,156 749	-0,667 895	1,36	+0,7584	-2,1723	-2,0177	-0,6621	3,3	+0,7584	-2,1723	-2,0177	-0,6621	3,3
1,38	+0,943 421	-0,473 104	-0,163 738	-0,676 978	1,38	+0,9680	-2,2334	-2,2334	-0,5577	3,4	+0,9680	-2,2334	-2,2334	-0,5577	3,4
1,40	+0,940 075	-0,486 734	-0,170 929	-0,686 008	1,40	+1,1936	-2,2832	-2,2832	-0,4353	3,5	+1,1936	-2,2832	-2,2832	-0,4353	3,5
1,42	+0,936 585	-0,500 544	-0,178 324	-0,694 981	1,42	+1,4353	-2,3199	-2,4983	-0,2936	3,6	+1,4353	-2,3199	-2,4983	-0,2936	3,6
1,44	+0,932 941	-0,514 533	-0,185 928	-0,703 894	1,44	+1,6933	-2,3413	-2,6608	-0,1315	3,7	+1,6933	-2,3413	-2,6608	-0,1315	3,7
1,46	+0,929 144	-0,528 699	-0,193 742	-0,712 745	1,46	+1,9674	-2,3454	-2,8221	-0,0526	3,8	+1,9674	-2,3454	-2,8221	-0,0526	3,8
1,48	+0,925 190	-0,543 042	-0,201 769	-0,721 531	1,48	+2,2576	-2,3300	-2,9808	+0,2596	3,9	+2,2576	-2,3300	-2,9808	+0,2596	3,9
1,50	+0,921 072	-0,557 566	-0,210 011	-0,730 256	1,50	+4,0	-2,5634	-3,1346	+0,4912	4,0	+4,0	-2,5634	-3,1346	+0,4912	4,0
1,52	+0,916 788	-0,572 251	-0,218 471	-0,738 900	1,52	+4,1	-2,8843	-3,2819	+0,7482	4,1	+4,1	-2,8843	-3,2819	+0,7482	4,1
1,54	+0,912 332	-0,587 117	-0,227 152	-0,747 477	1,54	+4,2	-3,2195	-3,4199	+1,0318	4,2	+4,2	-3,2195	-3,4199	+1,0318	4,2
1,56	+0,907 706	-0,602 151	-0,236 057	-0,755 978	1,56	+4,3	-3,5673	-3,5465	+1,3433	4,3	+4,3	-3,5673	-3,5465	+1,3433	4,3
1,58	+0,902 888	-0,617 354	-0,245 187	-0,764 406	1,58	+4,4	-3,9283	-3,6587	+1,6833	4,4	+4,4	-3,9283	-3,6587	+1,6833	4,4
1,60	+0,897 891	-0,632 726	-0,254 544	-0,772 740	1,60	+4,5	-4,2991	-3,7536	+2,0526	4,5	+4,5	-4,2991	-3,7536	+2,0526	4,5
1,62	+0,892 705	-0,648 263	-0,264 133	-0,780 896	1,62	+4,6	-4,6784	-3,8280	+2,4520	4,6	+4,6	-4,6784	-3,8280	+2,4520	4,6
1,64	+0,887 324	-0,663 965	-0,273 955	-0,789 163	1,64	+4,7	-5,0639	-3,8782	+2,8818	4,7	+4,7	-5,0639	-3,8782	+2,8818	4,7
1,66	+0,881 745	-0,679 829	-0,284 011	-0,797 246	1,66	+4,8	-5,4531	-3,9006	+3,3492	4,8	+4,8	-5,4531	-3,9006	+3,3492	4,8
1,68	+0,875 902	-0,695 854	-0,294 304	-0,805 221	1,68	+4,9	-5,8429	-3,8910	+3,8330	4,9	+4,9	-5,8429	-3,8910	+3,8330	4,9

Figura 167. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 138-139.

Anhang C.					Anhang C.					
$x$	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$	$\frac{dZ_2(x)}{dx}$	$x$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$	$\frac{dZ_3(x)}{dx}$	$\frac{dZ_4(x)}{dx}$	$x$
5,0	-6,2301	-0,1160	-3,8454	+ 4,3542	5,0	+0,46 671	-0,85 129	-0,17 463	+2,04 988	0,30
5,1	-6,6107	+0,3467	-3,7589	+ 4,9046	5,1	+0,46 405	-0,83 116	-0,17 727	+1,97 913	0,31
5,2	-6,9803	+0,8658	-3,6270	+ 5,4835	5,2	+0,46 316	-0,81 170	-0,17 981	+1,91 271	0,32
5,3	-7,3344	+1,4443	-3,4446	+ 6,0883	5,3	+0,46 135	-0,79 289	-0,18 226	+1,85 019	0,33
5,4	-7,6674	+2,0845	-3,2063	+ 6,7198	5,4	+0,45 952	-0,77 469	-0,18 462	+1,79 124	0,34
5,5	-7,9736	+2,7890	-2,9070	+ 7,3729	5,5	+0,45 766	-0,75 706	-0,18 689	+1,73 554	0,35
5,6	-8,2466	+3,5597	-2,5409	+ 8,0453	5,6	+0,45 578	-0,73 997	-0,18 908	+1,68 283	0,36
5,7	-8,4794	+4,3986	-2,1024	+ 8,7336	5,7	+0,45 388	-0,72 339	-0,19 119	+1,63 286	0,37
5,8	-8,6644	+5,3068	-1,5856	+ 9,4332	5,8	+0,45 196	-0,70 731	-0,19 322	+1,58 542	0,38
5,9	-8,7937	+6,2854	-0,9844	+ 10,1394	5,9	+0,45 002	-0,69 163	-0,19 517	+1,54 032	0,39
6,0	-8,8583	+7,3347	-0,2931	+ 10,3462	6,0	+0,44 806	-0,67 649	-0,19 704	+1,49 738	0,40
0,00	+0,50 000	$\infty$	0,00 000	$\infty$	0,00	+0,43 799	-0,66 048	-0,20 537	+1,31 009	0,45
0,01	+0,49 991	-3,00 556	-0,01 662	+ 63,65 948	0,01	+0,43 592	-0,64 354	-0,20 684	+1,27 728	0,46
0,02	+0,49 968	-2,56 438	-0,02 883	+ 31,82 599	0,02	+0,43 385	-0,62 693	-0,20 825	+1,24 580	0,47
0,03	+0,49 934	-2,30 626	-0,03 937	+ 21,21 316	0,03	+0,43 176	-0,61 082	-0,20 960	+1,21 557	0,48
0,04	+0,49 890	-2,12 320	-0,04 883	+ 15,80 551	0,04	+0,42 966	-0,59 561	-0,21 089	+1,18 649	0,49
0,05	+0,49 836	-1,98 126	-0,05 740	+ 12,71 992	0,05	+0,42 754	-0,58 149	-0,21 212	+1,15 852	0,50
0,06	+0,49 775	-1,86 533	-0,06 550	+ 10,59 537	0,06	+0,42 542	-0,56 834	-0,21 330	+1,13 158	0,51
0,07	+0,49 706	-1,76 735	-0,07 299	+ 9,07 712	0,07	+0,42 328	-0,55 225	-0,21 443	+1,10 562	0,52
0,08	+0,49 629	-1,68 253	-0,08 002	+ 7,93 782	0,08	+0,42 113	-0,51 132	-0,21 550	+1,08 057	0,53
0,09	+0,49 546	-1,60 776	-0,08 665	+ 7,05 117	0,09	+0,41 897	-0,50 064	-0,21 652	+1,05 640	0,54
0,10	+0,49 456	-1,54 092	-0,09 293	+ 6,34 134	0,10	+0,41 680	-0,49 019	-0,21 749	+1,03 305	0,55
0,11	+0,49 360	-1,48 051	-0,09 889	+ 5,76 014	0,11	+0,41 462	-0,47 997	-0,21 842	+1,01 049	0,56
0,12	+0,49 258	-1,42 540	-0,10 457	+ 5,27 559	0,12	+0,41 243	-0,46 998	-0,21 929	+0,98 866	0,57
0,13	+0,49 151	-1,37 476	-0,10 998	+ 4,86 484	0,13	+0,41 023	-0,46 029	-0,22 012	+0,96 754	0,58
0,14	+0,49 038	-1,32 791	-0,11 515	+ 4,51 262	0,14	+0,40 803	-0,45 063	-0,22 091	+0,94 709	0,59
0,15	+0,48 921	-1,28 434	-0,12 009	+ 4,20 707	0,15	+0,40 581	-0,44 126	-0,22 165	+0,92 727	0,60
0,16	+0,48 798	-1,24 364	-0,12 483	+ 3,93 940	0,16	+0,40 359	-0,43 208	-0,22 235	+0,90 805	0,61
0,17	+0,48 671	-1,20 545	-0,12 937	+ 3,70 293	0,17	+0,40 137	-0,42 309	-0,22 309	+0,88 941	0,62
0,18	+0,48 540	-1,16 940	-0,13 372	+ 3,49 240	0,18	+0,39 913	-0,41 429	-0,22 382	+0,87 132	0,63
0,19	+0,48 404	-1,13 553	-0,13 790	+ 3,30 396	0,19	+0,39 689	-0,40 566	-0,22 419	+0,85 376	0,64
0,20	+0,48 264	-1,10 336	-0,14 192	+ 3,13 405	0,20	+0,39 465	-0,39 721	-0,22 473	+0,83 670	0,65
0,21	+0,48 120	-1,07 278	-0,14 578	+ 2,98 010	0,21	+0,39 240	-0,38 893	-0,22 523	+0,82 012	0,66
0,22	+0,47 972	-1,04 371	-0,14 949	+ 2,83 995	0,22	+0,39 015	-0,38 081	-0,22 568	+0,80 399	0,67
0,23	+0,47 821	-1,01 596	-0,15 307	+ 2,71 179	0,23	+0,38 789	-0,37 285	-0,22 610	+0,78 831	0,68
0,24	+0,47 666	-0,98 943	-0,15 651	+ 2,59 412	0,24	+0,38 562	-0,36 504	-0,22 648	+0,77 305	0,69
0,25	+0,47 508	-0,96 404	-0,15 982	+ 2,48 569	0,25	+0,38 336	-0,35 739	-0,22 683	+0,75 818	0,70
0,26	+0,47 347	-0,93 969	-0,16 300	+ 2,38 544	0,26	+0,38 109	-0,34 988	-0,22 715	+0,74 371	0,71
0,27	+0,47 182	-0,91 631	-0,16 607	+ 2,29 245	0,27	+0,37 881	-0,34 251	-0,22 743	+0,72 961	0,72
0,28	+0,47 014	-0,89 382	-0,16 903	+ 2,20 595	0,28	+0,37 654	-0,33 528	-0,22 768	+0,71 586	0,73
0,29	+0,46 844	-0,87 217	-0,17 188	+ 2,12 527	0,29	+0,37 427	-0,32 819	-0,22 789	+0,70 245	0,74

Figura 168. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 140-141.

14.2		Anhang C.					14.3				
$x$	$Z_0(x)$	$Z_1(x)$	$\frac{dZ_0(x)}{dx}$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$	$\frac{dZ_2(x)}{dx}$	$x$	$Z_0(x)$	$Z_1(x)$	$\frac{dZ_0(x)}{dx}$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$	$\frac{dZ_2(x)}{dx}$
0,75	+0,37 198	-0,32 123	-0,22 809	+0,68 039	+0,22 856	1,40	+0,23 024	-0,05 419	-0,19 712	+0,22 349	1,40
0,76	+0,36 970	-0,31 440	-0,22 824	+0,67 665	+0,22 824	1,42	+0,22 632	-0,04 980	-0,19 538	+0,21 581	1,42
0,77	+0,36 742	-0,30 770	-0,22 837	+0,66 410	+0,22 837	1,44	+0,22 249	-0,04 555	-0,19 361	+0,20 835	1,44
0,78	+0,36 513	-0,30 112	-0,22 847	+0,65 203	+0,22 847	1,46	+0,21 857	-0,04 136	-0,19 182	+0,20 112	1,46
0,79	+0,36 285	-0,29 456	-0,22 853	+0,64 015	+0,22 853	1,48	+0,21 475	-0,03 751	-0,19 002	+0,19 410	1,48
0,80	+0,36 056	-0,28 832	-0,22 857	+0,62 856	+0,22 857	1,50	+0,21 097	-0,03 370	-0,18 819	+0,18 728	1,50
0,81	+0,35 828	-0,28 209	-0,22 859	+0,61 723	+0,22 859	1,52	+0,20 723	-0,03 002	-0,18 635	+0,18 666	1,52
0,82	+0,35 599	-0,27 597	-0,22 857	+0,60 615	+0,22 857	1,54	+0,20 352	-0,02 647	-0,18 449	+0,18 424	1,54
0,83	+0,35 370	-0,26 996	-0,22 853	+0,59 532	+0,22 853	1,56	+0,19 985	-0,02 305	-0,18 261	+0,18 261	1,56
0,84	+0,35 142	-0,26 406	-0,22 846	+0,58 473	+0,22 846	1,58	+0,19 621	-0,01 975	-0,18 073	+0,18 193	1,58
0,85	+0,34 913	-0,25 827	-0,22 837	+0,57 437	+0,22 837	1,60	+0,19 262	-0,01 657	-0,17 883	+0,18 004	1,60
0,86	+0,34 685	-0,25 258	-0,22 826	+0,56 422	+0,22 826	1,62	+0,18 906	-0,01 351	-0,17 692	+0,18 033	1,62
0,87	+0,34 457	-0,24 699	-0,22 812	+0,55 420	+0,22 812	1,64	+0,18 554	-0,01 056	-0,17 500	+0,18 066	1,64
0,88	+0,34 229	-0,24 140	-0,22 795	+0,54 457	+0,22 795	1,66	+0,18 206	-0,00 772	-0,17 307	+0,18 098	1,66
0,89	+0,34 001	-0,23 609	-0,22 776	+0,53 507	+0,22 776	1,68	+0,17 862	-0,00 498	-0,17 114	+0,18 131	1,68
0,90	+0,33 774	-0,23 078	-0,22 756	+0,52 576	+0,22 756	1,70	+0,17 522	-0,00 235	-0,16 920	+0,18 163	1,70
0,91	+0,33 546	-0,22 557	-0,22 732	+0,51 664	+0,22 732	1,72	+0,17 185	+0,00 018	-0,16 725	+0,18 195	1,72
0,92	+0,33 319	-0,22 045	-0,22 707	+0,50 770	+0,22 707	1,74	+0,16 853	+0,00 261	-0,16 530	+0,18 227	1,74
0,93	+0,33 092	-0,21 542	-0,22 680	+0,49 894	+0,22 680	1,76	+0,16 524	+0,00 495	-0,16 335	+0,18 259	1,76
0,94	+0,32 865	-0,21 047	-0,22 650	+0,49 035	+0,22 650	1,78	+0,16 199	+0,00 720	-0,16 139	+0,18 291	1,78
0,95	+0,32 639	-0,20 561	-0,22 619	+0,48 193	+0,22 619	1,80	+0,15 878	+0,00 936	-0,15 943	+0,18 323	1,80
0,96	+0,32 413	-0,20 083	-0,22 585	+0,47 367	+0,22 585	1,82	+0,15 561	+0,01 143	-0,15 747	+0,18 355	1,82
0,97	+0,32 187	-0,19 614	-0,22 550	+0,46 558	+0,22 550	1,84	+0,15 248	+0,01 341	-0,15 552	+0,18 387	1,84
0,98	+0,31 962	-0,19 152	-0,22 513	+0,45 764	+0,22 513	1,86	+0,14 939	+0,01 531	-0,15 356	+0,18 419	1,86
0,99	+0,31 737	-0,18 698	-0,22 474	+0,44 984	+0,22 474	1,88	+0,14 634	+0,01 714	-0,15 160	+0,18 451	1,88
1,00	+0,31 512	-0,18 252	-0,22 432	+0,44 220	+0,22 432	1,90	+0,14 333	+0,01 888	-0,14 965	+0,18 483	1,90
1,02	+0,31 084	-0,17 883	-0,22 345	+0,42 738	+0,22 345	1,92	+0,14 036	+0,02 055	-0,14 770	+0,18 515	1,92
1,04	+0,30 619	-0,16 543	-0,22 251	+0,41 300	+0,22 251	1,94	+0,13 742	+0,02 215	-0,14 575	+0,18 547	1,94
1,06	+0,30 175	-0,15 731	-0,22 151	+0,39 919	+0,22 151	1,96	+0,13 458	+0,02 367	-0,14 381	+0,18 579	1,96
1,08	+0,29 733	-0,14 946	-0,22 045	+0,38 585	+0,22 045	1,98	+0,13 167	+0,02 513	-0,14 187	+0,18 611	1,98
1,10	+0,29 293	-0,14 187	-0,21 933	+0,37 300	+0,21 933	2,0	+0,12 886	+0,02 651	-0,13 983	+0,18 643	2,0
1,12	+0,28 855	-0,13 453	-0,21 815	+0,36 058	+0,21 815	2,2	+0,12 606	+0,02 712	-0,13 780	+0,18 675	2,2
1,14	+0,28 420	-0,12 744	-0,21 692	+0,34 857	+0,21 692	2,4	+0,12 330	+0,02 750	-0,13 577	+0,18 707	2,4
1,16	+0,27 988	-0,12 059	-0,21 564	+0,33 697	+0,21 564	2,6	+0,12 053	+0,02 765	-0,13 374	+0,18 739	2,6
1,18	+0,27 558	-0,11 396	-0,21 431	+0,32 576	+0,21 431	2,8	+0,11 777	+0,02 755	-0,13 171	+0,18 771	2,8
1,20	+0,27 130	-0,10 755	-0,21 293	+0,31 496	+0,21 293	3,0	+0,11 500	+0,02 720	-0,12 968	+0,18 803	3,0
1,22	+0,26 706	-0,10 136	-0,21 151	+0,30 440	+0,21 151	3,2	+0,11 223	+0,02 665	-0,12 765	+0,18 835	3,2
1,24	+0,26 284	-0,09 538	-0,21 006	+0,29 428	+0,21 006	3,4	+0,10 946	+0,02 590	-0,12 562	+0,18 867	3,4
1,26	+0,25 866	-0,08 959	-0,20 855	+0,28 439	+0,20 855	3,6	+0,10 669	+0,02 505	-0,12 359	+0,18 899	3,6
1,28	+0,25 450	-0,08 400	-0,20 702	+0,27 485	+0,20 702	3,8	+0,10 392	+0,02 410	-0,12 156	+0,18 931	3,8
1,30	+0,25 038	-0,07 859	-0,20 546	+0,26 562	+0,20 546	4,0	+0,10 115	+0,02 305	-0,11 953	+0,18 963	4,0
1,32	+0,24 628	-0,07 337	-0,20 384	+0,25 668	+0,20 384	4,2	+0,09 838	+0,02 190	-0,11 750	+0,18 995	4,2
1,34	+0,24 222	-0,06 832	-0,20 220	+0,24 799	+0,20 220	4,4	+0,09 561	+0,02 065	-0,11 547	+0,19 027	4,4
1,36	+0,23 820	-0,06 345	-0,20 054	+0,23 957	+0,20 054	4,6	+0,09 284	+0,01 940	-0,11 344	+0,19 059	4,6
1,38	+0,23 420	-0,05 874	-0,19 884	+0,23 141	+0,19 884	4,8	+0,09 007	+0,01 815	-0,11 141	+0,19 091	4,8

Figura 169. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 142-143.

144					Anhang C.					145						
$x$	$Z_5(x)$	$Z_4(x)$	$Z_3(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_5(x)}{dx}$	$Z_5(x)$	$Z_4(x)$	$Z_3(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_5(x)}{dx}$	$Z_5(x)$	$Z_4(x)$	$Z_3(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_5(x)}{dx}$	$x$
5,0	-0,007 122	+0,007 309	+0,000 5218	-0,010 9457	5,0	-0,010 9457	+0,000 5218	-0,010 9457	5,0	+0,000 5218	+0,007 309	+0,007 122	-0,007 122	-0,007 122	-0,007 122	5,0
5,2	-0,006 893	+0,005 325	+0,001 7552	-0,009 1468	5,2	-0,009 1468	+0,001 7552	-0,006 893	5,2	+0,001 7552	+0,005 325	+0,006 893	-0,006 893	-0,006 893	-0,006 893	5,2
5,4	-0,006 456	+0,003 661	+0,003 0362	-0,007 4959	5,4	-0,007 4959	+0,003 0362	-0,006 456	5,4	+0,003 0362	+0,003 661	+0,006 456	-0,006 456	-0,006 456	-0,006 456	5,4
5,6	-0,005 892	+0,002 312	+0,003 2759	-0,004 7108	5,6	-0,004 7108	+0,003 2759	-0,005 892	5,6	+0,003 2759	+0,002 312	+0,005 892	-0,005 892	-0,005 892	-0,005 892	5,6
5,8	-0,005 257	+0,001 243	+0,003 3258	-0,003 5851	5,8	-0,003 5851	+0,003 3258	-0,005 257	5,8	+0,003 3258	+0,001 243	+0,005 257	-0,005 257	-0,005 257	-0,005 257	5,8
6,0	-0,004 594	+0,000 417	+0,003 3258	-0,003 5851	6,0	-0,003 5851	+0,003 3258	-0,004 594	6,0	+0,003 3258	+0,000 417	+0,004 594	-0,004 594	-0,004 594	-0,004 594	6,0
$x$	$Z_5(x)$	$Z_4(x)$	$Z_3(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_5(x)}{dx}$	$Z_5(x)$	$Z_4(x)$	$Z_3(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_5(x)}{dx}$	$Z_5(x)$	$Z_4(x)$	$Z_3(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_5(x)}{dx}$	$x$
0,00	$\infty$	+0,50 000	$\infty$	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00 000	0,00
0,01	-3,00 554	+0,50 009	+0,36 648	+0,01 662	+0,01 662	+0,50 009	+0,36 648	+0,01 662	+0,01 662	+0,01 662	+0,50 009	+0,36 648	+0,01 662	+0,01 662	+0,01 662	0,01
0,02	-2,56 423	+0,50 032	+0,31 833 599	+0,02 883	+0,02 883	+0,50 032	+0,31 833 599	+0,02 883	+0,02 883	+0,02 883	+0,50 032	+0,31 833 599	+0,02 883	+0,02 883	+0,02 883	0,02
0,03	-2,30 604	+0,50 066	+0,21 22 816	+0,03 937	+0,03 937	+0,50 066	+0,21 22 816	+0,03 937	+0,03 937	+0,03 937	+0,50 066	+0,21 22 816	+0,03 937	+0,03 937	+0,03 937	0,03
0,04	-2,12 281	+0,50 110	+0,15 02 551	+0,04 882	+0,04 882	+0,50 110	+0,15 02 551	+0,04 882	+0,04 882	+0,04 882	+0,50 110	+0,15 02 551	+0,04 882	+0,04 882	+0,04 882	0,04
0,05	-1,98 064	+0,50 164	+0,12 74 492	+0,05 748	+0,05 748	+0,50 164	+0,12 74 492	+0,05 748	+0,05 748	+0,05 748	+0,50 164	+0,12 74 492	+0,05 748	+0,05 748	+0,05 748	0,05
0,06	-1,86 443	+0,50 225	+0,10 62 537	+0,06 549	+0,06 549	+0,50 225	+0,10 62 537	+0,06 549	+0,06 549	+0,06 549	+0,50 225	+0,10 62 537	+0,06 549	+0,06 549	+0,06 549	0,06
0,07	-1,76 613	+0,50 294	+0,10 21 212	+0,07 296	+0,07 296	+0,50 294	+0,10 21 212	+0,07 296	+0,07 296	+0,07 296	+0,50 294	+0,10 21 212	+0,07 296	+0,07 296	+0,07 296	0,07
0,08	-1,68 093	+0,50 371	+0,10 77 82	+0,07 938	+0,07 938	+0,50 371	+0,10 77 82	+0,07 938	+0,07 938	+0,07 938	+0,50 371	+0,10 77 82	+0,07 938	+0,07 938	+0,07 938	0,08
0,09	-1,60 573	+0,50 454	+0,10 93 617	+0,08 660	+0,08 660	+0,50 454	+0,10 93 617	+0,08 660	+0,08 660	+0,08 660	+0,50 454	+0,10 93 617	+0,08 660	+0,08 660	+0,08 660	0,09
0,10	-1,53 842	+0,50 544	+0,10 69 134	+0,09 287	+0,09 287	+0,50 544	+0,10 69 134	+0,09 287	+0,09 287	+0,09 287	+0,50 544	+0,10 69 134	+0,09 287	+0,09 287	+0,09 287	0,10
0,11	-1,47 748	+0,50 640	+0,10 51 514	+0,09 881	+0,09 881	+0,50 640	+0,10 51 514	+0,09 881	+0,09 881	+0,09 881	+0,50 640	+0,10 51 514	+0,09 881	+0,09 881	+0,09 881	0,11
0,12	-1,42 180	+0,50 741	+0,10 44 446	+0,10 446	+0,10 446	+0,50 741	+0,10 44 446	+0,10 446	+0,10 446	+0,10 446	+0,50 741	+0,10 44 446	+0,10 446	+0,10 446	+0,10 446	0,12
0,13	-1,37 053	+0,50 848	+0,10 38 984	+0,10 985	+0,10 985	+0,50 848	+0,10 38 984	+0,10 985	+0,10 985	+0,10 985	+0,50 848	+0,10 38 984	+0,10 985	+0,10 985	+0,10 985	0,13
0,14	-1,32 301	+0,50 961	+0,10 34 292	+0,11 498	+0,11 498	+0,50 961	+0,10 34 292	+0,11 498	+0,11 498	+0,11 498	+0,50 961	+0,10 34 292	+0,11 498	+0,11 498	+0,11 498	0,14
0,15	-1,27 872	+0,51 079	+0,10 30 207	+0,11 988	+0,11 988	+0,51 079	+0,10 30 207	+0,11 988	+0,11 988	+0,11 988	+0,51 079	+0,10 30 207	+0,11 988	+0,11 988	+0,11 988	0,15
0,16	-1,23 724	+0,51 201	+0,10 26 940	+0,12 457	+0,12 457	+0,51 201	+0,10 26 940	+0,12 457	+0,12 457	+0,12 457	+0,51 201	+0,10 26 940	+0,12 457	+0,12 457	+0,12 457	0,16
0,17	-1,19 823	+0,51 328	+0,10 24 006	+0,12 906	+0,12 906	+0,51 328	+0,10 24 006	+0,12 906	+0,12 906	+0,12 906	+0,51 328	+0,10 24 006	+0,12 906	+0,12 906	+0,12 906	0,17
0,18	-1,16 139	+0,51 459	+0,10 21 549	+0,13 336	+0,13 336	+0,51 459	+0,10 21 549	+0,13 336	+0,13 336	+0,13 336	+0,51 459	+0,10 21 549	+0,13 336	+0,13 336	+0,13 336	0,18
0,19	-1,12 651	+0,51 594	+0,10 19 896	+0,13 747	+0,13 747	+0,51 594	+0,10 19 896	+0,13 747	+0,13 747	+0,13 747	+0,51 594	+0,10 19 896	+0,13 747	+0,13 747	+0,13 747	0,19
0,20	-1,09 335	+0,51 734	+0,10 18 404	+0,14 142	+0,14 142	+0,51 734	+0,10 18 404	+0,14 142	+0,14 142	+0,14 142	+0,51 734	+0,10 18 404	+0,14 142	+0,14 142	+0,14 142	0,20
0,21	-1,06 176	+0,51 877	+0,10 17 050	+0,14 520	+0,14 520	+0,51 877	+0,10 17 050	+0,14 520	+0,14 520	+0,14 520	+0,51 877	+0,10 17 050	+0,14 520	+0,14 520	+0,14 520	0,21
0,22	-1,03 160	+0,52 024	+0,10 15 826	+0,14 882	+0,14 882	+0,52 024	+0,10 15 826	+0,14 882	+0,14 882	+0,14 882	+0,52 024	+0,10 15 826	+0,14 882	+0,14 882	+0,14 882	0,22
0,23	-1,00 275	+0,52 175	+0,10 14 718	+0,15 231	+0,15 231	+0,52 175	+0,10 14 718	+0,15 231	+0,15 231	+0,15 231	+0,52 175	+0,10 14 718	+0,15 231	+0,15 231	+0,15 231	0,23
0,24	-0,97 503	+0,52 329	+0,10 13 712	+0,15 564	+0,15 564	+0,52 329	+0,10 13 712	+0,15 564	+0,15 564	+0,15 564	+0,52 329	+0,10 13 712	+0,15 564	+0,15 564	+0,15 564	0,24
0,25	-0,94 842	+0,52 486	+0,10 12 806	+0,15 884	+0,15 884	+0,52 486	+0,10 12 806	+0,15 884	+0,15 884	+0,15 884	+0,52 486	+0,10 12 806	+0,15 884	+0,15 884	+0,15 884	0,25
0,26	-0,92 280	+0,52 646	+0,10 11 990	+0,16 190	+0,16 190	+0,52 646	+0,10 11 990	+0,16 190	+0,16 190	+0,16 190	+0,52 646	+0,10 11 990	+0,16 190	+0,16 190	+0,16 190	0,26
0,27	-0,89 809	+0,52 810	+0,10 11 264	+0,16 484	+0,16 484	+0,52 810	+0,10 11 264	+0,16 484	+0,16 484	+0,16 484	+0,52 810	+0,10 11 264	+0,16 484	+0,16 484	+0,16 484	0,27
0,28	-0,87 422	+0,52 976	+0,10 10 630	+0,16 765	+0,16 765	+0,52 976	+0,10 10 630	+0,16 765	+0,16 765	+0,16 765	+0,52 976	+0,10 10 630	+0,16 765	+0,16 765	+0,16 765	0,28
0,29	-0,85 115	+0,53 145	+0,10 10 066	+0,17 035	+0,17 035	+0,53 145	+0,10 10 066	+0,17 035	+0,17 035	+0,17 035	+0,53 145	+0,10 10 066	+0,17 035	+0,17 035	+0,17 035	0,29
0,30	-0,82 879	+0,53 317	+0,10 9 562	+0,17 293	+0,17 293	+0,53 317	+0,10 9 562	+0,17 293	+0,17 293	+0,17 293	+0,53 317	+0,10 9 562	+0,17 293	+0,17 293	+0,17 293	0,30
0,31	-0,80 714	+0,53 491	+0,10 9 118	+0,17 541	+0,17 541	+0,53 491	+0,10 9 118	+0,17 541	+0,17 541	+0,17 541	+0,53 491	+0,10 9 118	+0,17 541	+0,17 541	+0,17 541	0,31
0,32	-0,78 610	+0,53 667	+0,10 8 724	+0,17 776	+0,17 776	+0,53 667	+0,10 8 724	+0,17 776	+0,17 776	+0,17 776	+0,53 667	+0,10 8 724	+0,17 776	+0,17 776	+0,17 776	0,32
0,33	-0,76 567	+0,53 846	+0,10 8 380	+0,18 001	+0,18 001	+0,53 846	+0,10 8 380	+0,18 001	+0,18 001	+0,18 001	+0,53 846	+0,10 8 380	+0,18 001	+0,18 001	+0,18 001	0,33
0,34	-0,74 579	+0,54 027	+0,10 8 086	+0,18 216	+0,18 216	+0,54 027	+0,10 8 086	+0,18 216	+0,18 216	+0,18 216	+0,54 027	+0,10 8 086	+0,18 216	+0,18 216	+0,18 216	0,34

Schleicher, Kreisplatten.

Figura 170. Valori delle funzioni di Bessel, pp. 144-145.

Anhang C.		Anhang C.	
$x$	$Z_0(x)$	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$
0,80	-0,12 843	+0,63 304	+1,02 771
0,81	-0,11 819	+0,63 500	+1,02 132
0,82	-0,10 800	+0,63 695	+1,01 518
0,83	-0,09 788	+0,63 888	+1,00 929
0,84	-0,08 781	+0,64 080	+1,00 364
0,85	-0,07 780	+0,64 271	+0,99 821
0,86	-0,06 786	+0,64 460	+0,99 300
0,87	-0,05 795	+0,64 648	+0,98 799
0,88	-0,04 809	+0,64 834	+0,98 320
0,89	-0,03 828	+0,65 019	+0,97 862
0,90	-0,02 851	+0,65 201	+0,97 422
0,91	-0,01 879	+0,65 383	+0,97 002
0,92	-0,00 911	+0,65 562	+0,96 598
0,93	+0,00 053	+0,65 740	+0,96 213
0,94	+0,01 013	+0,65 915	+0,95 844
0,95	+0,01 970	+0,66 089	+0,95 492
0,96	+0,02 923	+0,66 261	+0,95 155
0,97	+0,03 873	+0,66 430	+0,94 834
0,98	+0,04 820	+0,66 598	+0,94 529
0,99	+0,05 764	+0,66 765	+0,94 236
1,00	+0,06 705	+0,66 926	+0,93 960
1,02	+0,08 578	+0,67 245	+0,93 446
1,04	+0,10 442	+0,67 555	+0,92 988
1,06	+0,12 298	+0,67 854	+0,92 570
1,08	+0,14 145	+0,68 142	+0,92 204
1,10	+0,15 986	+0,68 421	+0,91 881
1,12	+0,17 821	+0,68 688	+0,91 599
1,14	+0,19 651	+0,68 943	+0,91 357
1,16	+0,21 476	+0,69 185	+0,91 150
1,18	+0,23 297	+0,69 416	+0,90 970
1,20	+0,25 115	+0,69 632	+0,90 842
1,22	+0,26 931	+0,69 836	+0,90 736
1,24	+0,28 745	+0,70 025	+0,90 660
1,26	+0,30 557	+0,70 200	+0,90 612
1,28	+0,32 369	+0,70 360	+0,90 591
1,30	+0,34 181	+0,70 505	+0,90 596
1,32	+0,35 993	+0,70 634	+0,90 625
1,34	+0,37 806	+0,70 747	+0,90 676
1,36	+0,39 620	+0,70 843	+0,90 746
1,38	+0,41 436	+0,70 922	+0,90 830
1,40	+0,43 254	+0,70 988	+0,90 906
1,42	+0,45 074	+0,71 026	+0,91 079
1,44	+0,46 898	+0,71 051	+0,91 224
1,46	+0,48 716	+0,71 057	+0,91 386
1,48	+0,50 533	+0,71 043	+0,91 563
0,80	+0,52 386	+0,71 010	+0,91 753
0,81	+0,54 228	+0,70 956	+0,91 956
0,82	+0,56 064	+0,70 881	+0,92 172
0,83	+0,57 910	+0,70 785	+0,92 397
0,84	+0,59 760	+0,70 667	+0,92 633
0,85	+0,61 616	+0,70 527	+0,92 878
0,86	+0,63 475	+0,70 364	+0,93 133
0,87	+0,65 341	+0,70 178	+0,93 393
0,88	+0,67 211	+0,69 968	+0,93 661
0,89	+0,69 087	+0,69 731	+0,93 935
0,90	+0,70 969	+0,69 475	+0,94 213
0,91	+0,72 856	+0,69 191	+0,94 496
0,92	+0,74 745	+0,68 882	+0,94 783
0,93	+0,76 647	+0,68 546	+0,95 073
0,94	+0,78 551	+0,68 183	+0,95 364
0,95	+0,80 462	+0,67 794	+0,95 657
0,96	+0,82 378	+0,67 377	+0,95 950
0,97	+0,84 300	+0,66 931	+0,96 243
0,98	+0,86 227	+0,66 456	+0,96 535
0,99	+0,88 161	+0,65 953	+0,96 825
1,00	+0,90 100	+0,65 419	+0,97 113
1,02	+0,92 045	+0,64 856	+0,97 397
1,04	+0,93 996	+0,64 261	+0,97 677
1,06	+0,95 952	+0,63 636	+0,97 953
1,08	+0,97 914	+0,62 978	+0,98 224
1,10	+0,99 881	+0,62 288	+0,98 488
1,12	+1,01 844	+0,61 551	+0,98 740
1,14	+1,03 815	+0,60 777	+0,98 982
1,16	+1,05 796	+0,60 059	+0,99 223
1,18	+1,07 783	+0,59 288	+0,99 455
1,20	+1,09 783	+0,58 467	+0,99 677
1,22	+1,11 794	+0,57 596	+0,99 889
1,24	+1,13 815	+0,56 675	+1,00 091
1,26	+1,15 845	+0,55 704	+1,00 283
1,28	+1,17 883	+0,54 683	+1,00 465
1,30	+1,19 928	+0,53 611	+1,00 637
1,32	+1,21 979	+0,52 489	+1,00 799
1,34	+1,24 036	+0,51 317	+1,00 951
1,36	+1,26 098	+0,50 095	+1,01 093
1,38	+1,28 165	+0,48 823	+1,01 225
1,40	+1,30 236	+0,47 501	+1,01 347
1,42	+1,32 311	+0,46 129	+1,01 459
1,44	+1,34 390	+0,44 707	+1,01 561
1,46	+1,36 472	+0,43 235	+1,01 653
1,48	+1,38 557	+0,41 707	+1,01 735
1,50	+1,40 644	+0,40 129	+1,01 807
1,52	+1,42 733	+0,38 501	+1,01 869
1,54	+1,44 824	+0,36 823	+1,01 921
1,56	+1,46 916	+0,35 095	+1,01 963
1,58	+1,49 009	+0,33 317	+1,02 005
1,60	+1,51 103	+0,31 489	+1,02 037
1,62	+1,53 198	+0,29 611	+1,02 059
1,64	+1,55 293	+0,27 683	+1,02 071
1,66	+1,57 388	+0,25 705	+1,02 073
1,68	+1,59 483	+0,23 677	+1,02 065
1,70	+1,61 578	+0,21 600	+1,02 047
1,72	+1,63 673	+0,19 472	+1,02 019
1,74	+1,65 768	+0,17 294	+1,01 981
1,76	+1,67 863	+0,15 066	+1,01 933
1,78	+1,69 958	+0,12 788	+1,01 875
1,80	+1,72 053	+0,10 462	+1,01 807
1,82	+1,74 148	+0,08 090	+1,01 729
1,84	+1,76 243	+0,05 662	+1,01 641
1,86	+1,78 338	+0,03 186	+1,01 543
1,88	+1,80 433	+0,00 660	+1,01 435
1,90	+1,82 528	-0,01 916	+1,01 317
1,92	+1,84 623	-0,04 344	+1,01 189
1,94	+1,86 718	-0,06 762	+1,01 051
1,96	+1,88 813	-0,09 170	+1,00 903
1,98	+1,90 908	-0,11 568	+1,00 745
2,00	+1,93 003	-0,13 956	+1,00 577
2,02	+1,95 098	-0,16 334	+1,00 400
2,04	+1,97 193	-0,18 702	+1,00 213
2,06	+1,99 288	-0,21 060	+1,00 015
2,08	+2,01 383	-0,23 408	+0,99 807
2,10	+2,03 478	-0,25 746	+0,99 589
2,12	+2,05 573	-0,28 074	+0,99 361
2,14	+2,07 668	-0,30 392	+0,99 123
2,16	+2,09 763	-0,32 700	+0,98 875
2,18	+2,11 858	-0,35 008	+0,98 617
2,20	+2,13 953	-0,37 306	+0,98 349
2,22	+2,16 048	-0,39 594	+0,98 071
2,24	+2,18 143	-0,41 872	+0,97 783
2,26	+2,20 238	-0,44 140	+0,97 485
2,28	+2,22 333	-0,46 398	+0,97 177
2,30	+2,24 428	-0,48 646	+0,96 859
2,32	+2,26 523	-0,50 884	+0,96 531
2,34	+2,28 618	-0,53 112	+0,96 193
2,36	+2,30 713	-0,55 330	+0,95 845
2,38	+2,32 808	-0,57 538	+0,95 487
2,40	+2,34 903	-0,59 726	+0,95 119
2,42	+2,37 000	-0,61 904	+0,94 741
2,44	+2,39 097	-0,64 072	+0,94 353
2,46	+2,41 194	-0,66 230	+0,93 955
2,48	+2,43 291	-0,68 378	+0,93 547
2,50	+2,45 388	-0,70 516	+0,93 129
2,52	+2,47 485	-0,72 644	+0,92 701
2,54	+2,49 582	-0,74 762	+0,92 263
2,56	+2,51 679	-0,76 870	+0,91 815
2,58	+2,53 776	-0,78 968	+0,91 357
2,60	+2,55 873	-0,81 056	+0,90 889
2,62	+2,57 970	-0,83 134	+0,90 411
2,64	+2,60 067	-0,85 202	+0,89 923
2,66	+2,62 164	-0,87 260	+0,89 425
2,68	+2,64 261	-0,89 308	+0,88 917
2,70	+2,66 358	-0,91 346	+0,88 400
2,72	+2,68 455	-0,93 374	+0,87 873
2,74	+2,70 552	-0,95 392	+0,87 335
2,76	+2,72 649	-0,97 400	+0,86 787
2,78	+2,74 746	-0,99 398	+0,86 230
2,80	+2,76 843	-1,01 386	+0,85 663
2,82	+2,78 940	-1,03 364	+0,85 085
2,84	+2,81 037	-1,05 332	+0,84 497
2,86	+2,83 134	-1,07 290	+0,83 899
2,88	+2,85 231	-1,09 238	+0,83 291
2,90	+2,87 328	-1,11 176	+0,82 673
2,92	+2,89 425	-1,13 104	+0,82 045
2,94	+2,91 522	-1,15 022	+0,81 407
2,96	+2,93 619	-1,16 930	+0,80 759
2,98	+2,95 716	-1,18 828	+0,80 101
3,00	+2,97 813	-1,20 716	+0,79 433
3,02	+2,99 910	-1,22 594	+0,78 755
3,04	+3,02 007	-1,24 462	+0,78 067
3,06	+3,04 104	-1,26 330	+0,77 369
3,08	+3,06 201	-1,28 188	+0,76 661
3,10	+3,08 298	-1,30 036	+0,75 943
3,12	+3,10 395	-1,31 874	+0,75 215
3,14	+3,12 492	-1,33 702	+0,74 477
3,16	+3,14 589	-1,35 520	+0,73 729
3,18	+3,16 686	-1,37 328	+0,72 971
3,20	+3,18 783	-1,39 126	+0,72 203
3,22	+3,20 880	-1,40 914	+0,71 425
3,24	+3,22 977	-1,42 692	+0,70 637
3,26	+3,25 074	-1,44 460	+0,69 839
3,28	+3,27 171	-1,46 228	+0,69 031
3,30	+3,29 268	-1,47 986	+0,68 213
3,32	+3,31 365	-1,49 734	+0,67 385
3,34	+3,33 462	-1,51 472	+0,66 547
3,36	+3,35 559	-1,53 200	+0,65 699
3,38	+3,37 656	-1,54 918	+0,64 841
3,40	+3,39 753	-1,56 626	+0,63 973
3,42	+3,41 850	-1,58 324	+0,63 095
3,44	+3,43 947	-1,60 012	+0,62 207
3,46	+3,46 044	-1,61 690	+0,61 309
3,48	+3,48 141	-1,63 358	+0,60 401
3,50	+3,50 238	-1,65 016	+0,59 483
3,52	+3,52 335	-1,66 664	+0,58 555
3,54	+3,54 432	-1,68 302	+0,57 617
3,56	+3,56 529	-1,69 930	+0,56 669
3,58	+3,58 626	-1,71 548	+0,55 711
3,60	+3,60 723	-1,73 156	+0,54 743
3,62	+3,62 820	-1,74 754	+0,53 765
3,64	+3,64 917	-1,76 342	+0,52 777
3,66	+3,67 014	-1,77 920	+0,51 779
3,68	+3,69 111	-1,79 488	+0,50 771
3,70	+3,71 208	-1,81 046	+0,49 753
3,72	+3,73 305	-1,82 594	+0,48 725
3,74	+3,75 402	-1,84 132	+0,47 687
3,76	+3,77 499	-1,85 660	+0,46 639
3,78	+3,79 596	-1,87 178	+0,45 581
3,80	+3,81 693	-1,88 686	+0,44 513
3,82	+3,83 790	-1,90 184	+0,43 435
3,84	+3,85 887	-1,91 672	+0,42 347
3,86	+3,87 984	-1,93 150	+0,41 249
3,88	+3,90 081	-1,94 618	+0,40 141
3,90	+3,92 178	-1,96 076	+0,39 023
3,92	+3,94 275	-1,97 524	+0,37 895
3,94	+3,96 372	-1,98 962	+0,36 757
3,96	+3,98 469	-1,99 990	+0,35 609
3,98	+4,00 566	-2,00 998	+0,34 451
4,00	+4,02 663	-2,01 986	+0,33 283
4,02	+4,04 760	-2,02 954	+0,32 105
4,04	+4,06 857	-2,03 902	+0,30 917
4,06	+4,08 954	-2,04 830	+0,29 719
4,08	+4,11 051	-2,05 738	+0,28 511
4,10	+4,13 148	-2,06 626	+0,27 293
4,12	+4,15 245	-2,07 494	+0,26 065
4,14	+4,17 342	-2,08 342	+0,24 827
4,16	+4,19 439	-2,09 170	+0,23 579
4,18	+4,21 536	-2,10 008	+0,22 321
4,20	+4,23 633	-2,10 826	+0,21 053
4,22	+4,25 730	-2,11 624	+0,19 775
4,24	+4,27 827	-2,12 412	+0,18 487
4,26	+4,29 924	-2,13 190	+0,17 189
4,28	+4,32 021	-2,13 958	+0,15 881
4,30	+4,34 118		

## Appendice E Risoluzione della piastra su suolo elastico mediante il metodo di Föppl

### Simbologia

$\nu$	Modulo di Poisson
$K$	Costante elastica del terreno [kg/cm <sup>3</sup> ]
$F$	Modulo elastico dell'acciaio [kg/cm <sup>2</sup> ]
$s$	Spessore della piastra [cm]
$\omega$	Lunghezza caratteristica [cm]
$R$	Raggio della piastra [cm]
$B$	Rigidezza flessionale [kg cm]
$y$	Deformata [cm]

$$F = 2\,000\,000; P = 2000; s = 2; \nu = 0.3; K = 40; R = 20;$$

### Risoluzione

$$x = \frac{r}{\omega}; c = 0; d = \frac{P}{8\pi K(\omega)^3}; B = K\omega^4; \omega = \sqrt[4]{\frac{Fs^3}{12(1-\nu^2)K}}; \alpha = R/\omega;$$

$$z[x_] = 10^{-6} * (a (10^6 - 15625 x^4 + 6.7817 x^8) + b (10^6 x^2 - 1736 x^6 + 0.2713 x^{10}) + c ((10^6 - 15625 x^4 + 6.7817 x^8) * \text{Log}[x] + 23437.5 x^4 - 14.129 x^8) + d ((10^6 x^2 - 1736 x^6 + 0.2713 x^{10}) \text{Log}[x] + 1447 x^6));$$

$$y[z_] = z[x] \omega; m_r[r_] = -B \left( (D[y[z], \{r, 2\}]) + \frac{\nu}{r} * D[y[z], r] \right);$$

$$t_r[r_] = B D \left[ \left( (D[y[z], \{r, 2\}]) + \frac{1}{r} * D[y[z], r] \right), r \right];$$

$$\text{sol} = \text{Solve}[\{m_r[R] = 0, t_r[R] = 0\}, \{a, b\}];$$

$$z[r_] =$$

$$10^{-6} * \left( a \left( 10^6 - 15625 \left( \frac{r}{\omega} \right)^4 + 6.7817 \left( \frac{r}{\omega} \right)^8 \right) + b \left( 10^6 \left( \frac{r}{\omega} \right)^2 - 1736 \left( \frac{r}{\omega} \right)^6 + 0.2713 \left( \frac{r}{\omega} \right)^{10} \right) + c \left( \left( 10^6 - 15625 \left( \frac{r}{\omega} \right)^4 + 6.7817 \left( \frac{r}{\omega} \right)^8 \right) * \text{Log} \left[ \frac{r}{\omega} \right] + 23437.5 \left( \frac{r}{\omega} \right)^4 - 14.129 \left( \frac{r}{\omega} \right)^8 \right) + d \left( \left( 10^6 \left( \frac{r}{\omega} \right)^2 - 1736 \left( \frac{r}{\omega} \right)^6 + 0.2713 \left( \frac{r}{\omega} \right)^{10} \right) \text{Log} \left[ \frac{r}{\omega} \right] + 1447 \left( \frac{r}{\omega} \right)^6 \right) \right);$$

### Deformata

$$y[r_] = \omega z[r] /. \text{sol};$$

$$\text{Plot}[y[r], \{r, 0, R\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 0.25\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{\text{cm}\}]$$

### Reazione del suolo

$$\nu[r_] = K y[r];$$

$$\text{Plot}[\nu[r] \frac{9.81}{100}, \{r, 0, R\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 0.75\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{\text{N/mm}^2\}]$$

Momento radiale e circonferenziale

$$m_r[r_] = -B \left( (D[Y[r], \{r, 2\}]) + \frac{v}{r} * D[Y[r], r] \right);$$

$$m_\theta[r_] = -B \left( v (D[Y[r], \{r, 2\}]) + \frac{1}{r} * D[Y[r], r] \right); W = \frac{s^2}{6};$$

$$\sigma_r[r_] = \frac{m_r[r]}{W}; \sigma_\theta[r_] = \frac{m_\theta[r]}{W};$$

$$\text{Plot} \left[ \left\{ \sigma_r[r] \frac{9.81}{100}, \sigma_\theta[r] \frac{9.81}{100} \right\}, \{r, s/2, R\}, \right.$$

$$\left. \text{PlotRange} \rightarrow \{\{0, R\}, \{0, 100\}\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{\sigma_r \text{ (MPa)}, \sigma_\theta \text{ (MPa)}\} \right]$$

# Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento al professor Marco A. Pisani che mi ha seguito nello sviluppo di questo elaborato, ma soprattutto, un ringraziamento profondo va alla mia famiglia che mi ha permesso di compiere questo percorso di studi.