



**POLITECNICO DI MILANO**

SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

**DINAMICA DELLA VOLATILITÀ IMPLICITA NEI  
MODELLI A VOLATILITÀ LOCALE-STOCASTICA**

Relatore:  
Prof. Carlo Sgarra

Correlatore:  
Dott. Alessandro Montinari

Candidato:  
Andrea Casati  
Matricola 799298

Anno Accademico 2014-2015

*A chi ha sempre creduto in me.*



# Sommario

In questo lavoro affronteremo il problema della dinamica della volatilità implicita sotto varie ipotesi per la volatilità del sottostante. Lavoreremo per trovare un modello consistente sia con le quotazioni di volatilità implicita che con la dinamica intrinseca nei prezzi di altri prodotti liquidi nel mercato. Questo problema assume molta rilevanza nel mercato Forex, in cui sono quotati, oltre alle opzioni plain vanilla, numerose opzioni barriera, tra cui le Double No Touch. Approfondiremo dapprima il modello di volatilità locale di Dupire il quale, nonostante sia calibrato perfettamente per costruzione a meno di errori numerici, risulta troppo semplice per cogliere a fondo la dinamica intrinseca nel mercato. Passeremo quindi ad analizzare i modelli a volatilità stocastica, tra cui Heston, il modello a volatilità iperbolica di Jäckel, il modello a volatilità lognormale ed il modello a volatilità path-dependent alla Hobson-Rogers. Calibreremo tutti i modelli mediante la Fundamental Transform di Lewis, che risulta abbastanza generale da includere tutti i casi presi in esame. Tale metodo richiede sia di risolvere una EDP a coefficienti complessi che di integrare una funzione in campo complesso. Sebbene questi modelli permettano di risolvere molti problemi della volatilità locale, non risultano abbastanza duttili da poter replicare, oltre alle plain vanilla, i prezzi di opzioni esotiche path-dependent. Analizzeremo dunque i modelli a volatilità locale-stocastica che, grazie ad un nuovo grado di libertà detto mixing factor, permettono di imporre la dinamica della volatilità implicita, riuscendo così a replicare i prezzi degli esotici. Grazie alla parte locale, la calibrazione agli smiles di mercato è equivalente ai modelli di volatilità locale. Per il calcolo della Leverage Function si utilizzerà il Particle Method di Guyon e Henry-Labordère, basato sulla simulazione Monte Carlo del processo stesso. Si osserverà che differenti scelte per la dinamica di volatilità stocastica non influiscono sul pricing delle opzioni barriere. Sarà posta grande attenzione ai dettagli implementativi, soprattutto per i processi di calibrazione. Verrà inoltre presentato un'interessante algoritmo per la generazione di una griglia temporale non uniforme, che permetterà di ottenere con i processi in cui vi sia parte locale una convergenza dei prezzi nelle simulazioni Monte Carlo decisamente superiore rispetto ad una semplice griglia equispaziata.

Nel capitolo 1 introdurremo brevemente la teoria dell'Option Pricing ed il

modello di Black e Scholes, delineando i limiti ed i pregi di quest'ultimo. Ci focalizzeremo sul problema della volatilità implicita e presenteremo le principali soluzioni note in letteratura. Nel capitolo 2 introdurremo il modello di volatilità locale di Dupire, ricavando la formula dall'equazione di Fokker-Planck per la densità del processo sottostante. Dopo aver discusso della costruzione della superficie di volatilità implicita, ci soffermeremo sui limiti del modello. Nel capitolo 3 tratteremo i modelli a volatilità stocastica; deriveremo la relativa equazione di pricing e presenteremo il metodo della Fundamental Transform per prezzare le opzioni europee. Successivamente analizzeremo nel dettaglio il processo di calibrazione e confronteremo le dinamiche implicate dai modelli a volatilità locale e stocastica. Nel capitolo 4 presenteremo i modelli a volatilità locale-stocastica, soffermandoci sulla condizione di calibrazione. Esporremo la teoria del Particle Method, applicandolo prima per la risoluzione di una EDS di McKeane-Vlasov e poi per il calcolo della Leverage Function. Infine studieremo la relazione tra i prezzi delle barriere e la dinamica della volatilità implicita e mostreremo come questi modelli permettano effettivamente di poter replicare i prezzi delle opzioni esotiche. Nell'ultimo capitolo verranno riportati i risultati numerici sotto forma di grafici e tabelle e verranno forniti numerosi dettagli implementativi.

# Abstract

In this work we deal with the problem of the implied volatility dynamics under different assumptions of the underlying's volatility process. Our aim is to find a model consistent with both market quotes of implied volatility and the intrinsic dynamics given by prices of other liquid derivatives listed in the market. This problem plays a very important role in the FX market in which different barrier options are quoted in addition to plain vanillas ones. Double No Touch are typical examples of liquid exotic derivatives. We first present the Dupire local volatility model. Even though it's perfectly calibrated by construction, it is too poor in order to get the right market dynamics. Then we focus on stochastic volatility models, among which the Heston model, the lognormal volatility model and the hyperbolic volatility one. Under this framework we take in consideration also path-dependent volatility model introduced by Hobson-Rogers. We calibrate every stochastic volatility model with the Fundamental Transform method by Lewis since it's enough general to take in account all cases. This method requires to solve a PDE with complex coefficients and to integrate a function in the complex plane. Although these models solve many problems of local volatility, they are not enough flexible to capture the right behavior of market dynamics. For this reason we move to study the local-stochastic volatility models, since they have a new degree of freedom, called mixing factor, which can be used to impose the implied volatility dynamics. In addition these models are perfectly calibrated to the market surface thanks to their local part. To calibrate the Leverage Function we use the Particle Method of Guyon and Henry-Labordère, an algorithm based on Monte Carlo simulation of the process itself. We note that different choices of stochastic volatility's dynamics do not influence the barrier options' prices. We pay serious attention to the implementation, especially to every calibration process. Finally we present an interesting algorithm to generate a non-uniform temporal grid. It has come out to be very useful in order to accelerate the Monte Carlo convergence of every process that shares a local part.

In chapter 1 we introduce briefly the Option Pricing Theory and the Black and Scholes model, outlining strengths and weaknesses of the latter one. Then we focus on the implied volatility problem and its main solutions known in literature. In chapter 2 we introduce the Dupire local volatility

model. We deduce the Dupire formula from the Fokker-Planck equation of the underlying's probability density. We discuss the implied volatility surface construction and the drawbacks of the model. In chapter 3 we present the stochastic volatility models; we derive the two-dimensional pricing equation and we analyze the Fundamental Transform approach in order to price european options. After that we study in details the calibration process and we compare process dynamics between local and stochastic volatility. In chapter 4 we introduce the local stochastic volatility models and we discuss their calibration's condition. Then we focus on the Particle Method, applying it first to the solution of the McKeane-Vlasov EDS and then to the Leverage Function evaluation. In the end we explicate the relation between barrier option prices and implied volatility dynamics and we show how these kind of model are the only ones able to price correctly the exotic derivatives. In the last chapter we report all the results we have carried out in the previous parts adding many implementational details. The outcomes are presented with the aid of graphs and tabs.





# Ringraziamenti

Questa tesi racchiude lo sforzo ed il lavoro di cinque lunghi anni e con essa si chiude un capitolo meraviglioso della mia vita.

Desidero ringraziare innanzitutto i miei genitori, è soprattutto grazie a loro che sono riuscito a raggiungere questo traguardo ed a essere ciò che sono. Un ringraziamento speciale va a mia madre che non ha mai smesso di spronarmi e mi ha insegnato molto più di quanto crede. Grazie di cuore.

Voglio ringraziare il Professor Carlo Sgarra per essere stato sempre disponibile, sia nella stesura di questo lavoro sia durante i suoi corsi. Voglio ringraziarlo anche per essere stato comprensivo nei miei confronti e per avermi dato l'opportunità di svolgere la tesi in stage.

Un doveroso ed enorme ringraziamento va ad Alessandro, senza i suoi continui suggerimenti e la sua infinita pazienza questo lavoro non sarebbe ciò che è. Grazie per essere stato più di un semplice correlatore e per avermi trasmesso passione per questo lavoro. Te ne sono grato.

Ringrazio il Dr. Parruccini per i suoi preziosi consigli e aiuti nella stesura di queste pagine. Ringrazio tutto il team del Financial Engineering di Mediobanca, soprattutto Marco, per i continui spunti e riflessioni e per avermi fatto sentire parte del gruppo. Ringrazio infine il Dottor Airoldi per avermi dato l'opportunità di lavorare alla mia tesi in un ambiente così stimolante e da cui ho imparato davvero molto.

Desidero ringraziare tutti i miei compagni, in particolare Stefano ed Edoardo, perché anche nei momenti più difficili di questo lungo viaggio non abbiamo mai perso il sorriso. Un ringraziamento speciale va a Milena, la preparazione di Analisi Reale e Funzionale è stata indimenticabile.

Ringrazio tutta la mia famiglia ed i miei amici: ognuno a suo modo mi ha aiutato in questi anni, credendo in me e spingendomi a fare sempre meglio.

Infine desidero ringraziare la persona che in questi anni è stata sempre al mio fianco. Grazie Luna. Grazie per avermi sorretto nelle difficoltà e per non avere mai smesso di credere in me. Grazie per avermi reso migliore e per essere ciò che sei.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Modello di Black&amp;Scholes e Volatilità Implicita</b>	<b>7</b>
1.1 Modello di Black-Scholes-Merton . . . . .	7
1.1.1 Modello . . . . .	7
1.1.2 Formula di Black&Scholes . . . . .	9
1.2 Limiti del Modello . . . . .	10
1.2.1 Dinamica del Sottostante . . . . .	10
1.2.2 Volatilità Implicita . . . . .	11
1.3 Oltre Black&Scholes . . . . .	13
1.3.1 Modelli a Volatilità Locale . . . . .	13
1.3.2 Modelli a Volatilità Stocastica . . . . .	13
1.3.3 Modelli a Volatilità Locale-Stocastica . . . . .	14
1.3.4 Modelli con Salti . . . . .	14
1.3.5 Scelta del Modello . . . . .	15
<b>2 Modelli a Volatilità Locale</b>	<b>16</b>
2.1 Derivazione dell'Equazione di Dupire . . . . .	17
2.1.1 Equazione di Fokker-Planck . . . . .	17
2.1.2 Equazione di Dupire . . . . .	19
2.1.3 Formula di Dupire . . . . .	20
2.1.4 Costruzione Superficie di Volatilità Implicita . . . . .	21
2.2 Legame tra Volatilità Locale e Stocastica . . . . .	24
2.2.1 Teorema di Gyöngy . . . . .	26
2.3 Limiti della Volatilità Locale . . . . .	27
<b>3 Modelli a Volatilità Stocastica</b>	<b>28</b>
3.1 Modelli . . . . .	29
3.1.1 Modello di Heston . . . . .	30
3.1.2 Modello a Volatilità Lognormale . . . . .	32
3.1.3 Modello a Volatilità Iperbolica . . . . .	33
3.1.4 Modello a Volatilità Path-Dependent . . . . .	34
3.2 Pricing e Calibrazione . . . . .	35

---

3.2.1	Equazione di Pricing . . . . .	35
3.2.2	Fundamental Transform . . . . .	37
3.2.3	Calibrazione . . . . .	42
3.3	Dinamica Implicata dai Modelli a Volatilità Locale e Stocastica	48
3.3.1	Volatilità Implicita Forward . . . . .	48
3.3.2	Analisi della Dinamica: Skew e Volatilità Implicita ATM	50
<b>4</b>	<b>Modelli a Volatilità Locale-Stocastica</b>	<b>56</b>
4.1	Modello . . . . .	57
4.2	Condizione di Calibrazione . . . . .	57
4.2.1	Leverage Function . . . . .	58
4.2.2	EDS Non Lineari di McKean . . . . .	59
4.3	Particle Method . . . . .	60
4.3.1	Metodo per EDS di McKean-Vlasov . . . . .	60
4.3.2	Metodo per LSV . . . . .	62
4.4	Limiti e Pregi del Modello . . . . .	62
4.4.1	Mixing Factor e Dinamica della Volatilità Implicita . .	63
<b>5</b>	<b>Implementazione e Risultati</b>	<b>68</b>
5.1	Volatilità Locale di Dupire . . . . .	68
5.1.1	Superficie Numerica della Volatilità Implicita . . . . .	69
5.1.2	Griglia Temporale Pesata . . . . .	71
5.2	Modelli a Volatilità Stocastica . . . . .	78
5.2.1	EDP Fundamental Transform . . . . .	78
5.2.2	Risultati . . . . .	83
5.3	Modelli a Volatilità Locale-Stocastica . . . . .	85
5.3.1	Risultati . . . . .	91
	<b>Conclusion</b>	<b>101</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>

# Elenco delle figure

1.1	Distribuzione Log>Returns Ftse-Mib . . . . .	11
1.2	Ftse-Mib Aprile 2005 - Aprile 2015 . . . . .	11
2.1	Arbitraggio di Butterfly con Sabr . . . . .	23
3.1	Confronto tra funzione iperbolica ed esponenziale . . . . .	33
3.2	Errore Assoluto . . . . .	44
3.3	Errore Relativo . . . . .	44
3.4	Errore Relativo Modificato . . . . .	45
3.5	Errore Vega Weighted . . . . .	46
3.6	Confronto tra Smile di Mercato e Calibrati . . . . .	49
3.7	Forward e Spot Skew a Confronto . . . . .	51
3.8	Dinamica Smile di Volatilità Implicita . . . . .	52
3.9	Dinamica Sabr con $\alpha$ modificato . . . . .	53
4.1	Convergenza Particle Method con $\nu = 2.5$ . . . . .	64
4.2	Prezzi DNT al Variare del Mixing Factor $\lambda$ . . . . .	66
4.3	LSV al Variare del Mixing Factor $\lambda$ . . . . .	67
5.1	Superficie di Volatilità Implicita . . . . .	69
5.2	Test Arbitraggi di Calendario . . . . .	70
5.3	Superficie di Volatilità Locale alla Dupire . . . . .	71
5.4	Volatilità Implicita vs. Volatilità Locale . . . . .	72
5.5	Convergenza Griglia Uniforme . . . . .	73
5.6	Confronto Griglie Temporali: Uniforme vs Pesata . . . . .	77
5.7	Smile di Mercato Implicati Dai Modelli a Volatilità Stocastica . . . . .	86
5.8	Confronto Smile di Volatilità Implicita al Variare di $\kappa$ . . . . .	89
5.9	Leverage Surface - Modello Iperbolico - $\kappa = 1.5$ . . . . .	92
5.10	Leverage Surface - Modello Iperbolico - $\kappa = 10$ . . . . .	93
5.11	Convergenza Particle Method . . . . .	94
5.12	Confronto Griglia Pesata vs. Griglia Uniforme per LSV (1) . . . . .	95
5.13	Confronto Griglia Pesata vs. Griglia Uniforme per LSV (2) . . . . .	96
5.14	Prezzi DNT al Variare Dei Modelli . . . . .	98
5.15	Prezzi AFS al Variare Dei Modelli . . . . .	99

# Elenco delle tabelle

3.1	Trasformate di Fourier Generalizzate per Varie Opzioni . . .	39
5.1	Parametri Calibrati Modelli a Volatilità Stocastica . . . . .	84
5.2	Analisi dei Parametri Calibrati al Variare di $N_T, N_z$ . . . . .	84
5.3	Indice di Tossicità $\mathcal{I}_{tox}$ . . . . .	100

Essentially, all models are wrong, but some are useful.  
George E. P. Box

# Introduzione

Nel mondo della finanza quantitativa la principale sfida con cui è necessario confrontarsi è saper *prezzare* un derivato, ossia trovare un prezzo *equo* in base ai dati di mercato.

Con *derivato* o *opzione* s'intende un contratto stipulato tra due parti, le quali si impegnano a scambiarsi un flusso di cassa futuro in base a delle regole prestabilite. Generalmente tali regole riguardano una quantità osservabile sul mercato, sia esso un titolo azionario od un tasso d'interesse. Quest'ultimo prende il nome di *sottostante* o *spot*. I derivati hanno durata limitata nel tempo e l'ultima data di validità viene detta *maturity* o *scadenza*.

Tra i contratti derivati più diffusi vi sono le *opzioni europee plain-vanilla*, le quali danno il diritto ma non l'obbligo di acquistare, nel caso delle *Call*, o di vendere nel caso delle *Put*, una unità di sottostante a scadenza ad un determinato prezzo di esercizio, detto *strike price*. Le opzioni europee, dette anche *plain vanilla*, sono così diffuse che i loro prezzi vengono quotati nei mercati regolamentati.

Il principale apporto alla modellistica finanziaria lo si deve a Black&Scholes [10] che, insieme a Merton[44], nel 1973 proposero un modello in cui, sotto semplici ipotesi, è possibile ricavare una formula chiusa per la valutazione dei prodotti europei coerentemente con la *Teoria del Non Arbitraggio*. Quest'ultima afferma che nel mercato non possono esistere guadagni certi senza esborso di denaro.

Nel modello si suppone che il processo stocastico del sottostante evolve secondo un *moto browniano geometrico*, il cui coefficiente di diffusione, detto *volatilità*, è assunto costante. La volatilità è quindi un indice della variazione del prezzo del sottostante ed è il parametro fondamentale del modello, nonché l'unico che non sia direttamente osservabile sul mercato.

Il valore di quest'ultima deve essere quindi stimato indirettamente. Per farlo esistono due approcci differenti: il primo, più econometrico, prevede di stimare la volatilità in base alle serie storiche dei prezzi; il secondo invece, più legato alla *Teoria dell'Option Pricing*, consiste nel ricavare tale valore dai dati di mercato, i.e. dai prezzi delle opzioni quotate.

Dato che lo scopo principale della finanza quantitativa consiste nel valutare *derivati esotici*, ossia prodotti più complessi delle plain vanilla, si ritiene più ragionevole il secondo metodo. Generalmente dato un prezzo di una call si



inverte la formula di Black&Scholes per trovare il valore di volatilità.

Così facendo però ci si scontra con la più grossa inconsistenza del modello stesso: il valore della *volatilità implicita* nei prezzi non è costante ma varia a seconda della maturity e dello strike.

Questo comportamento è noto come *smile di volatilità implicita*. La difficoltà maggiore conseguente alla variazione della volatilità riguarda la valutazione dei prodotti esotici, in particolare quelli in cui il payoff dipende dalla traiettoria del sottostante stesso fino a maturity. Per questi ultimi non è infatti scontato decidere quale valore di volatilità usare.

L'esigenza di risolvere questo problema è alla base dello sviluppo modellistico nell'era post Black e Scholes, nella quale molti autori proposero svariati modelli consistenti con lo smile osservato sul mercato.

La risposta più semplice è rappresentata dai *modelli a volatilità locale*, nei quali la volatilità è espressa come funzione deterministica del tempo e del sottostante. In questa classe va ricordato il lavoro di Dupire[20], il quale riuscì a dimostrare come in assenza di opportunità di arbitraggio la funzione di volatilità locale sia unica e permetta di replicare esattamente gli smile di volatilità implicita per costruzione. Tuttavia tali modelli non sono esenti da problemi: la funzione di volatilità tende a cambiare molto a fronte di piccoli scostamenti nei dati di mercato e il prezzo di alcuni prodotti esotici, come le opzioni *forward start*, non è coerente con quanto si osserva sul mercato. Quest'ultima difficoltà è indice della scarsa adeguatezza del modello nel catturare la dinamica intrinseca nel mercato.

Per questo motivo spesso si preferisce utilizzare i *modelli a volatilità stocastica*, nei quali la volatilità stessa viene dotata di una propria dinamica descritta da un processo stocastico. Quest'ultimo viene costruito in modo da replicare alcuni comportamenti econometrici osservati nelle serie storiche della volatilità, come la *mean reversion*. Anche questa classe di modelli riesce a spiegare molto bene gli smiles di volatilità implicita, sebbene per le prime maturity ciò comporti valori dei parametri molto estremi.

Il *modello di Heston* [30] è sicuramente il più diffuso e studiato tra i modelli a volatilità stocastica. Deve molta della sua popolarità alla formula chiusa per la trasformata di Fourier del prezzo per le opzioni europee. Questa infatti permette un rapido processo di calibrazione, ossia una facile scelta dei parametri che permettono di replicare al meglio i dati di mercato. Inoltre fu il primo modello che permise di avere una dinamica realistica per il sottostante anche se, con il passare degli anni, furono presentati modelli più adeguati a descrivere la realtà dei mercati finanziari, come il *modello a volatilità lognormale* [51] o *iperbolica di Jäckel* [35].

Parallelamente ai modelli a volatilità stocastica, Hobson e Rogers [31] presentarono un modello in cui la volatilità è una funzione dei valori passati del sottostante e per questo motivo è detto *modello a volatilità path-dependent*. Entrambe le classi di modelli presentano comportamenti molto simili tra loro. Riescono a risolvere i problemi della volatilità locale, prezzando ade-

guatamente le opzioni forward start e garantendo la stabilità dei parametri ad ogni nuova calibrazione. Ciononostante neanche con questi nuovi modelli è possibile prezzare qualsiasi prodotto esotico. Si prenda l'esempio delle *opzioni barriera* sui tassi di cambio. Questi derivati sono molto liquidi nel mercato *Forex* e quindi una loro corretta valutazione è cruciale quanto quella delle opzioni europee. Le barriere pagano un determinato valore a scadenza se le due valute non sono state mai scambiate all'infuori di un determinato range di prezzo deciso a priori.

Indipendentemente dal modello a volatilità stocastica utilizzato, il prezzo di questi contratti viene costantemente sovrastimato rispetto a quello di mercato. Inoltre sfruttando un modello a volatilità locale si ha il problema opposto: il prezzo ottenuto è sensibilmente minore di quello corretto.

Questo comportamento si spiega osservando che tutti i modelli presentati finora non sono adeguati per catturare la dinamica intrinseca nel mercato, che per quanto detto si trova a metà tra un processo a volatilità locale e stocastica.

Questo problema è molto noto in letteratura e la sua risoluzione ha portato negli ultimi quindici anni alla nascita di una nuova classe di modelli, detta *modelli a volatilità locale-stocastica*. L'idea è molto semplice: introdurre un nuovo grado di libertà, detto *mixing factor*, mediante il quale poter scegliere la dinamica del processo, spostandola da locale a stocastica a seconda delle esigenze. In questo modo è quindi possibile imporre la dinamica in modo da replicare al meglio quella di mercato. Inoltre grazie alla parte locale questi modelli sono perfettamente calibrati agli smiles di volatilità implicita, qualsiasi sia la scelta del mixing factor.

In questo lavoro andremo a verificare il diverso comportamento della dinamica della volatilità implicita al variare del modello utilizzato, sia esso a volatilità locale, stocastica o locale-stocastica.

Per far ciò andremo ad introdurre ciascuna classe di modelli separatamente, presentando in dettaglio i relativi punti di forza e di debolezza sia da un punto di vista teorico che numerico. Si è prestata inoltre molta attenzione ai singoli processi di calibrazione, in cui verranno messi in luce numerosi dettagli implementativi.

L'obiettivo finale è quello di riuscire a replicare la dinamica del sottostante implicita nei prezzi delle opzioni esotiche osservati nel mercato. Per far ciò sarà necessario utilizzare i modelli a volatilità locale-stocastica, la cui calibrazione non verrà effettuata attraverso la classica risoluzione dell'equazione di Fokker-Planck, ma sarà utilizzato un recente algoritmo basato sulla simulazione Monte Carlo.

Nel primo capitolo verrà introdotto formalmente il *modello di Black e Scholes*. Verranno esplicitate tutte le ipotesi del modello e verrà presentata brevemente la teoria della misura neutrale al rischio. Dopo aver presentato il principale risultato del loro lavoro, la formula chiusa per il prezzo delle call

europee, discuteremo i limiti del modello. In particolare ci soffermeremo sul problema della volatilità implicita, a cui verrà data una definizione formale. Nell'ultima parte presenteremo brevemente i modelli proposti in letteratura per risolvere i problemi di Black e Scholes, in particolare quelli che si concentrano nell'inglobare l'effetto della volatilità implicita. Per ciascuna soluzione discuteremo vantaggi e svantaggi, che verranno ulteriormente amplificati nei capitoli successivi.

Nel capitolo 2 ci occuperemo di studiare i modelli a volatilità locale. In primo luogo distingueremo i modelli parametrici da quelli non parametrici, dopo di che ci soffermeremo sull'analisi della *volatilità locale di Dupire*. Quest'ultima verrà introdotta formalmente in modo analogo a quanto fatto dall'autore stesso. Per questo motivo introdurremo l'equazione di Dupire, che può essere vista come la versione *in avanti* dell'equazione di Black e Scholes. Fatto ciò ci si soffermerà sulla costruzione *arbitrage-free* della superficie numerica di volatilità implicita, ingrediente essenziale per l'utilizzo della stessa volatilità locale di Dupire. Successivamente verrà riportata una definizione alternativa della funzione di volatilità locale che, oltre a mettere in luce il legame che intercorre tra essa ed i modelli a volatilità stocastica, rappresenterà un ingrediente fondamentale per la calibrazione dei modelli a volatilità locale-stocastica. Infine passeremo a discutere i limiti del modello: parleremo sia del problema delle opzioni forward start che della stabilità del modello al variare dei dati e mostreremo come entrambi siano dovuti all'errata dinamica della volatilità locale.

Nel terzo capitolo verrà introdotta la classe dei modelli a volatilità stocastica. Lo studio non si soffermerà su un unico modello, ma ne verranno studiati ben quattro. In primis Heston, in quanto rappresenta uno standard di mercato, dopo di che si introdurranno tre modelli più recenti: il modello a volatilità lognormale, il modello a volatilità iperbolica di *Jäckel* e il modello path-dependent alla *Hobson-Rogers*.

Dopo aver introdotto l'equazione di pricing generica bidimensionale sfruttando un portafoglio di hedging, si cercherà un metodo di calibrazione che sia abbastanza generale da poter essere utilizzato indifferentemente da ciascun modello sopra citato. La scelta ricadrà sul metodo della *Fundamental Transform* di *Lewis* [39], il quale non fornisce una formula chiusa ma richiede sia di risolvere un'equazione a derivate parziali monodimensionale con coefficienti complessi che di calcolare un integrale in campo complesso. Dopo ciò verrà studiato nel dettaglio l'algoritmo di calibrazione, dove grazie ad un cambio di variabili nei parametri sarà possibile evitare l'ottimizzazione vincolata. Inoltre si analizzerà numericamente l'impatto di varie funzioni obiettivo sull'errore calcolato e si discuterà la scelta del guess iniziale in modo da accelerare il processo di ottimizzazione. In aggiunta verrà evidenziato il problema della calibrazione per brevi maturity dei modelli a volatilità stocastica, mettendo in luce con un grafico la differenza rispetto alle scadenze più lunghe.

Infine verranno confrontate le varie dinamiche implicate dai modelli a volatilità locale e i modelli a volatilità stocastica. Mostreremo come i prezzi delle opzioni forward start siano effettivamente errati con i primi mentre come con i secondi si ottengano risultati molto più realistici. Confrontando la dinamica della volatilità At The Money Spot avanzaeremo un piccola critica a quanto affermato da Hagan in [27]. Grazie a questo ragionamento mostreremo, sia intuitivamente che numericamente, come la dinamica locale della volatilità implicita ATM a breve sia, almeno localmente, indipendente dal modello, al contrario dello skew.

Nel capitolo 4 verranno introdotti i modelli a volatilità locale-stocastica. Inizialmente verranno descritti in maniera generale, sottolineando la necessità di usare questi modelli per replicare i prezzi degli esotici in modo da catturare la dinamica del mercato. Dopo ciò verrà discussa la condizione di calibrazione per questa classe di modelli. Quest'ultima consiste nel costruire un'adeguata funzione locale che permetta di replicare esattamente i prezzi delle plain vanilla. La difficoltà di questa operazione è tutta concentrata nella stima di un valore atteso condizionato, che verrà calcolato attraverso il *Particle Method* di Guyon ed Henry-Labordère [25]. L'algoritmo, molto intuitivo nell'idea base, permette di trovare il valore atteso approssimando la densità del processo con la distribuzione empirica, trovata con una simulazione Monte Carlo. Inizialmente si presenterà tale algoritmo con un esempio esemplificativo per la risoluzione di una EDS di McKean-Vlasov [24], dopo di che lo si applicherà al caso dei modelli a volatilità locale-stocastica per la stima della *Leverage Function*. Successivamente si discuteranno i limiti e i pregi di questa classe di modelli. Verrà mostrato un esempio pratico in cui l'algoritmo di calibrazione non converge e infine verrà mostrato come le barriere vengono prezzate diversamente al variare del mixing factor, enfatizzando come questo nuovo grado di libertà permetta effettivamente di governare la dinamica della volatilità implicita.

Nell'ultimo capitolo saranno riportati i risultati numerici ed i dettagli implementativi di tutti i modelli presentati precedentemente.

Per quanto riguarda la volatilità locale inizialmente si mostrerà numericamente l'assenza di arbitraggi nella superficie numerica di volatilità implicita utilizzata. Verranno inoltre confrontati i singoli smile di volatilità implicita e locale per varie maturity.

Dopo di che verrà presentato un lavoro originale dell'autore per la costruzione di una griglia temporale non equispaziata da usare nella simulazione Monte Carlo per i processi con parte locale. Tale lavoro si è reso necessario dopo aver osservato come, usando una griglia uniforme, la convergenza del pricing, specialmente per le prime maturity, sia molto lenta. I risultati ottenuti con la nuova griglia in termini di performance sono molto soddisfacenti. Per quanto riguarda i modelli a volatilità stocastica verranno presentati tutti i dettagli riguardanti la risoluzione dell'EDP della Fundamental Transform, per la quale verrà usato un cambio di variabili in modo da ridurre il dominio

ad una regione finita dello spazio. Molta attenzione verrà posta nell'implementazione di quest'ultima la quale, a differenza delle normali equazioni di pricing, ha i coefficienti in campo complesso. Per la risoluzione dell'EDP sono state utilizzate due tecniche non standard: si è scelto di applicare lo schema di risoluzione di *Lawson-Swaney* [37] e l'*Exponentially Fitted* [19] per trattare il trasporto dominante. Inoltre verranno discusse in dettaglio le scelte per le condizioni al bordo e per le formule di quadratura dell'integrale complesso. Successivamente verranno mostrati gli smiles di volatilità implicita calibrati e verrà discussa la convergenza dei parametri nella calibrazione al variare dei parametri di risoluzione per la Fundamental Transform.

Infine verrà trattata l'implementazione del Particle Method. Verrà presentata una prima versione, dopo di che si discuterà l'approssimazione numerica della Delta di Dirac, essenziale per la valutazione della densità empirica. Successivamente verranno introdotte delle tecniche di accelerazione, cruciali per migliorare le performance dell'algoritmo. Fatto ciò verranno indagate la convergenza del metodo ed il comportamento al variare di alcuni parametri per l'approssimazione della densità empirica.

Anche per i processi a volatilità locale-stocastica verrà evidenziato come l'utilizzo della griglia temporale non uniforme presentata precedentemente sia cruciale per ottenere dei risultati apprezzabili per brevi maturity.

Infine verranno analizzati i prezzi di due prodotti esotici, uno di tipo barriera ed uno di tipo asiatico, al variare del modello utilizzato. In questo modo verificheremo come per prodotti fortemente dipendenti dalla dinamica sarà cruciale la scelta del mixing factor, mentre per prodotti più simili alle plain vanilla il risultato sia molto simile indipendentemente dal modello utilizzato.

Tutti i risultati numerici presentati sono stati ottenuti grazie allo sviluppo di una libreria di pricing in Matlab<sup>TM</sup>.

# Capitolo 1

## Modello di Black&Scholes e Volatilità Implicita

### 1.1 Modello di Black-Scholes-Merton

#### 1.1.1 Modello

Il passo fondamentale per costruire una solida teoria finanziaria lo si deve a *Fischer Black*, *Myron Scholes* [10] e *Robert Merton* [44], i quali nel 1973 proposero un modello, noto col nome di Black&Scholes, che risulta tutt'oggi uno dei più usati dall'industria della finanza. Per la trattazione dei seguenti risultati si è scelto di seguire [9].

Le assunzioni del modello sono:

**Ipotesi 1.1** (Ipotesi di Black&Scholes).

1. Non ci sono opportunità di arbitraggio
2. Il sottostante segue un moto browniano geometrico
3. Il tasso di interesse privo di rischio  $r$  e la volatilità  $\sigma$  sono costanti nel tempo
4. Il mercato è completamente liquido
5. E' possibile vendere allo scoperto
6. Non esistono costi di transazione
7. Il sottostante e il derivato sono scambiati in qualsiasi istante di tempo e possono assumere qualsiasi valore reale positivo
8. Non sono presenti dividendi

Quindi nel mercato sono presenti sia un sottostante rischioso che un titolo privo di rischio, le cui dinamiche sono

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.1)$$

$$dB_t = r B_t dt \quad (1.2)$$

dove  $\mu$  rappresenta la deriva locale,  $\sigma$  la volatilità e  $W_t$  un moto browniano monodimensionale.

Considerato un derivato semplice,

$$\chi = \phi(S_T) \quad (1.3)$$

il cui valore a scadenza dipende unicamente dal valore del sottostante essi riuscirono a derivare l'equazione a derivate parziali che governa l'evoluzione del prezzo  $V(t, S_t)$  nel tempo, sotto l'ipotesi che esso sia un processo markoviano.

**Teorema 1.1** (Equazione di Black&Scholes). *Assumendo le ipotesi 1.1 e il mercato dato da (1.2), l'unica funzione consistente con l'ipotesi di assenza di arbitraggio è la soluzione data dal seguente problema al contorno  $[0, T] \times \mathbb{R}_+$ :*

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) - r V(t, S_t) = 0 \\ V(T, S_T) = \phi(T, S_T). \end{cases} \quad (1.4)$$

Questo problema può essere elegantemente risolto nell'ambito del *Teorema di Feynman-Kač*. Esso permette di trovare la soluzione di un problema alle equazioni a derivate parziali attraverso la teoria della probabilità.

**Teorema 1.2** (Teorema di Feynman-Kač). *Si assuma che  $F$  sia la soluzione del seguente problema al contorno:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - r F(t, x) = 0 \quad (1.5)$$

$$F(T, x) = \phi(T, x). \quad (1.6)$$

*Assumendo inoltre che il processo  $e^{-ru} \sigma(u, X_u) \frac{\partial F}{\partial x}(u, X_u)$  sia in  $\mathcal{L}^2$ , con  $X_u$  che soddisfa*

$$dX_u = \mu(u, X_u) dt + \sigma(u, X_u) dW_u, \quad (1.7)$$

$$X_t = x \quad (1.8)$$

*si può affermare che  $F$  abbia rappresentazione stocastica data da*

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,x}[\phi(X_T)]. \quad (1.9)$$

*dove  $\mathbb{E}_{t,x}[\cdot]$  indica il valore atteso condizionato a  $X_t = x$ .*

Applicando il teorema al problema di Black&Scholes, otteniamo la seguente soluzione

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,x}[\phi(X_T)] \quad (1.10)$$

dove il processo sottostante è dato da

$$dX_u = rX_u dt + \sigma(u, X_u)X_u dW_u, \quad (1.11)$$

$$X_t = x. \quad (1.12)$$

Rispetto a quanto ipotizzato inizialmente in (1.2), il drift del processo risolvendo il problema è pari al tasso risk-free.

Ciò implica che per prezzare prodotti derivati è necessario cambiare la misura di probabilità, passando da quella reale  $\mathbb{P}$  alla così detta *risk neutral*  $\mathbb{Q}$ , il cui utilizzo equivale a valutare le opzioni in un mondo fittizio in cui tutti gli agenti del mercato siano neutrali al rischio. Questo deriva dalla completezza del modello, che permette di replicare qualsiasi derivato con un portafoglio a rischio nullo. Vale quindi il

**Teorema 1.3** (Valutazione neutrale al rischio). *Il prezzo di non arbitraggio di un derivato con payoff  $\phi(S_T)$  è dato da  $P(t, \phi) = V(t, S_t)$ , dove  $V(t, x)$  è dato da*

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_T)] \quad (1.13)$$

dove la  $\mathbb{Q}$ -dinamica di  $S_t$  segue

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (1.14)$$

D'ora in avanti supporremo di trovarci sempre sotto la misura  $\mathbb{Q}$ , nota anche come *misura di martingala* in quanto sotto essa il sottostante scontato è una martingala.

### 1.1.2 Formula di Black&Scholes

Sfruttando il Teorema 1.3 è possibile trovare il prezzo di una *call europea*  $C(t, S_t)$  con *strike price*  $K$ , il cui payoff è dato da

$$\phi(S_T) = (S_T - K)^+. \quad (1.15)$$

Calcolando il valore atteso infatti si giunge alla formula

**Proposizione 1.1** (Formula di Black&Scholes).

$$C(t, S_t) = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (1.16)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (1.17)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (1.18)$$

dove  $\mathcal{N}(x)$  è la cumulata della normale standard.



Un altro punto di forza è dato dalla *completezza* del modello: è infatti possibile replicare ciascun derivato presente nel mercato con un portafoglio autofinanziante formato dal sottostante e dal titolo privo di rischio.

## 1.2 Limiti del Modello

Le assunzioni fatte per derivare il modello non rispecchiano tuttavia la realtà dei mercati finanziari. Tralasciando le ipotesi più tecniche come i costi di transazione, i principali punti deboli riguardano la dinamica stessa del sottostante e la scelta della volatilità.

### 1.2.1 Dinamica del Sottostante

Il moto browniano geometrico prevede che i *log returns* siano distribuiti come una normale data da:

$$\xi_i = \ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \sim \mathcal{N}(E[\xi_i], \sqrt{Var[\xi_i]}) \quad (1.19)$$

$$E[\xi_i] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t \quad (1.20)$$

$$Var[\xi_i] = \sigma^2 \Delta t. \quad (1.21)$$

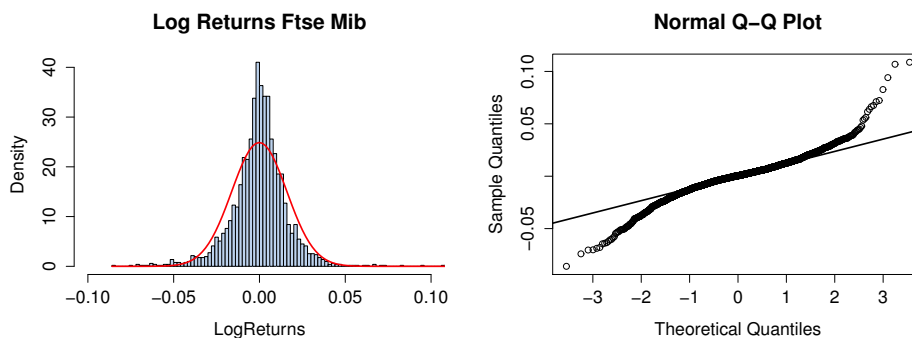
Empiricamente tuttavia si osserva una distribuzione le cui code (soprattutto la sinistra) sono molto più *grasse* di quelle previste, ovvero le realizzazioni estreme nel mondo reale avvengono con una frequenza maggiore di quella teorica.

Per vederlo si osservi la figura 1.1, nella quale sono esaminati i log returns del Ftse Mib negli ultimi dieci anni.

Nell'istogramma a sinistra è plottata la frequenza empirica contro la densità teorica.

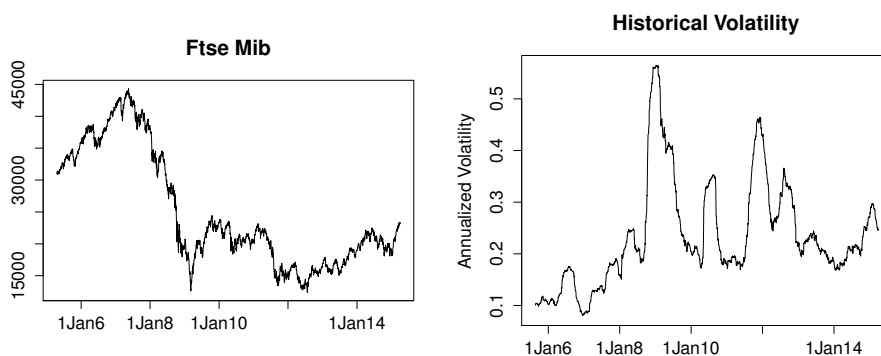
Ancor più evidente è il QQ-plot, dove gli eventi rari si allontanano sensibilmente dalla distribuzione gaussiana.

Figura 1.1: Distribuzione Log>Returns Ftse-Mib



Osservando la figura 1.2 si possono notare altri due comportamenti non previsti dall'evoluzione di un moto brogliano geometrico.

Figura 1.2: Ftse-Mib Aprile 2005 - Aprile 2015



Si può notare infatti come a cadute del valore del sottostante corrispondano picchi nei valori della volatilità e viceversa, il che porta a dire che essi debbano essere correlati negativamente tra loro. Questo effetto è chiamato *leverage effect*.

Con *volatility clustering* s'intende invece quel fenomeno per cui la volatilità tenda a cristallizzarsi sui valori più recenti: quindi è più probabile che a periodi di alta volatilità seguano periodi con volatilità elevata e viceversa.

### 1.2.2 Volatilità Implicita

Il parametro di diffusione del processo sottostante, noto come volatilità, è l'unico parametro che non è possibile osservare sul mercato.

Ci si rese subito conto come l'ipotesi di volatilità costante non fosse adeguata

a descrivere l'andamento del mercato. Come si vede in figura 1.2 infatti la volatilità storica presenta un comportamento lungi dall'essere costante.

Inizialmente si tentò di risolvere questa incoerenza introducendo una struttura a termine di volatilità:

$$dS_t = \sigma_t S_t dW_t. \quad (1.22)$$

In questo modo la soluzione diventa

$$S_t = S_0 e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2 du + \int_0^t \sigma_u dW_u} \quad (1.23)$$

che  $\forall t > 0$  è equivalente in distribuzione alla seguente soluzione con parametro diffusivo costante:

$$S_t = S_0 e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2 du + \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_u^2 du} W_t}. \quad (1.24)$$

Grazie a quest'ultima è possibile ricavare la relazione della struttura a termine della volatilità implicita, che permette al sottostante di evolvere tra due scadenze di mercato  $T_1, T_2$  con volatilità costante e pari a:

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} (\sigma_{imp}^2(T_2)T_2 - \sigma_{imp}^2(T_1)T_1)} \quad \forall t \in [T_1, T_2]. \quad (1.25)$$

Tuttavia anche questa ipotesi non è coerente con la volatilità implicita dei prezzi di mercato, definita come

**Definizione 1.1** (Volatilità Implicita). *Dato il prezzo di mercato di una call  $C^{mkt}(K, T)$  con strike  $K$  e maturity  $T$  è detta volatilità implicita  $\sigma^{imp}(K, T)$  il valore che soddisfa la seguente uguaglianza:*

$$C^{mkt}(K, T) = C^{BS}(K, T, \sigma^{imp}(K, T)) \quad (1.26)$$

dove  $C^{BS}(K, T, \sigma)$  è data da (1.18).

Essendo  $C^{BS}(K, T, \sigma)$  una funzione strettamente monotona in  $\sigma$  la volatilità implicita è unica per ogni prezzo.

Già prima del 1987 nei mercati equity si osservava un leggero effetto di *skew*: fissata una maturity a strikes minori corrispondevano volatilità implicite più grandi. Il fenomeno fu ancora più evidente a seguito del crollo del mercato dello stesso anno, dove la paura di improvvise cadute nel valore dei sottostanti portò a prezzare maggiormente le put *Out-The-Money* rispetto alle analoghe call *Out-The-Money*.

Si intende quindi con *superficie di volatilità implicita* l'insieme di tutte le volatilità implicite quotate sul mercato.

### 1.3 Oltre Black&Scholes

Per risolvere i vari problemi, nel corso degli anni sono state proposte soluzioni sempre più sofisticate e complesse, nelle quali sono stati incorporati ulteriori fattori stocastici per modellizzare la volatilità oppure la possibilità di discontinuità nelle traiettorie dei prezzi.

Va notato come l'introduzione di nuove estensioni non mirasse unicamente a eliminare un singolo problema, bensì a fornire una solida e ampia teoria che permettesse di tenere in conto tutti, o quasi, i difetti del modello originario.

#### 1.3.1 Modelli a Volatilità Locale

I modelli a volatilità locale sono il primo e più immediato approccio per tener conto dello *smile* di volatilità.

L'idea è quella di modificare il parametro diffusivo del sottostante, i.e. la volatilità locale, in modo da fittare i prezzi di mercato. In forma generale il modello è dato da:

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t \quad (1.27)$$

dove  $\sigma(t, S_t)$  è una funzione deterministica nel tempo e nel valore del sottostante.

Come vedremo più avanti, la funzione  $\sigma(t, S_t)$  può essere trovata in due modi: attraverso una forma parametrica dipendente da più parametri non noti a priori oppure a seguito di una costruzione teorica vincolata a soddisfare i prezzi di mercato. Nel primo caso è necessario un processo di calibrazione, mentre nel secondo l'effetto di *smile* è incorporato di default.

Il più grosso punto debole di questi modelli riguarda il *forward skew*: la volatilità implicita per un'opzione forward start, i.e. un'opzione che comincia a valere da una data futura, implicata dal modello tende infatti ad appiattirsi troppo, diventando così irrealistica.

Va sottolineato come questa sia una classe di modelli *completi*, infatti non si aggiunge nessun'altra fonte di incertezza oltre a quella del sottostante.

#### 1.3.2 Modelli a Volatilità Stocastica

In questa classe di modelli la volatilità è dotata di una propria dinamica descritta da un processo stocastico.

Questa scelta è abbastanza intuitiva, basti osservare la figura 1.2, dove la volatilità storica presenta un'evoluzione paragonabile a quella di un prezzo di un'azione. Nella sua forma generale il problema diventa:

$$dS_t = r S_t dt + f(v_t) S_t dW_t^1 \quad (1.28)$$

$$dv_t = \alpha(t, v_t) dt + \beta(t, v_t) dW_t^2 \quad (1.29)$$

dove  $W_t^1$  e  $W_t^2$  sono due moti browniani correlati tra loro secondo  $dW_t^1 dW_t^2 = \rho(t, v_t)dt$  e  $v_t$  rappresenta la variabile che governa la volatilità istantanea del sottostante.

Si tratta quindi di una classe di modelli non completi, in quanto non è possibile scambiare la volatilità sul mercato. Ciononostante risultano dei modelli molto utilizzati per prezzare i prodotti esotici il cui payoff dipende fortemente dalla traiettoria; infatti riescono a fornire una dinamica abbastanza realistica del sottostante.

Inoltre questi modelli riescono a spiegare in maniera consistente lo smile osservato sul mercato seppur risulta difficile calibrare le prime maturity, come vedremo nel capitolo 3.

### 1.3.3 Modelli a Volatilità Locale-Stocastica

Questo insieme di modelli mira a unificare le due precedenti categorie tenendo gli aspetti positivi dell'una ed eliminando quelli negativi dell'altra.

I modelli a volatilità locale-stocastica hanno avuto un'importante diffusione negli ultimi anni soprattutto nel mercato FX, dove venivano osservati dei prezzi di mercato di alcune opzioni esotiche diversi da quanto restituito da un modello a volatilità locale o stocastica. Un esempio è dato dalla *Double No Touch*, un'opzione che paga uno a scadenza se lo spot non viene scambiato ad un valore maggiore di  $U$  o inferiore a  $L$ . Il valore di quest'ultima risulta infatti sottostimato se prezzato con un modello a volatilità locale, mentre viene sovrastimato usandone uno a volatilità stocastica.

Il sistema di equazioni differenziali stocastiche è quindi dato da:

$$dS_t = rS_t dt + f(v_t)L(t, S_t)S_t dW_t^1 \quad (1.30)$$

$$dv_t = \alpha(t, v_t)dt + \gamma\beta(t, v_t)dW_t^2 \quad (1.31)$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho(t, v_t)dt \quad (1.32)$$

dove  $L(t, S_t)$  è detta *Leverage Function* e rappresenta la parte locale del processo, mentre  $\gamma$  è detto *fattore di mixing* ed è utilizzato per pesare le due componenti della volatilità.

### 1.3.4 Modelli con Salti

Come brillantemente spiegato in [14], l'utilizzo dei processi diffusivi non riesce di per se a catturare tutta l'informazione presente nel mercato.

Si faccia riferimento al problema di calibrare i modelli a volatilità stocastica sugli smile a brevi scadenze. La difficoltà è data dal fatto che i ritorni logaritmici sono condizionatamente gaussiani; così è necessario avere dei parametri con valori incredibilmente alti affinché si riesca a fittare lo *smile*.

Infatti un forte *skew* corrisponde alla possibilità di avere oscillazioni anche dell'ordine di più standard deviation nel giro di pochi giorni. Questi eventi nel mondo gaussiano/diffusivo hanno probabilità inferiori a  $10^{-8}$ , a meno appunto di avere delle varianze insensate.

Lo stesso problema è presente anche nei modelli a volatilità locale dove, nonostante sia possibile replicare esattamente la superficie di volatilità implicita, ciò è possibile solo con una grande variabilità della volatilità locale la quale risulta spesso difficile da usare.

Un modo per risolvere questo problema consiste nel rilassare l'ipotesi di continuità dei prezzi, introducendo dei *salto* nella dinamica del sottostante. Questo approccio è forte del fatto che i salti nei prezzi sono *effettivamente* osservati nel mercato. Matematicamente ciò si traduce nell'utilizzo dei *processi di Lévy*:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t dJ_t \quad (1.33)$$

dove  $J_t$  è una misura di salto di un *Compound Poisson*.

### 1.3.5 Scelta del Modello

In questo elaborato si è scelto di concentrarsi sui processi a volatilità locale-stocastica e la loro calibrazione, escludendo così la possibilità di avere discontinuità nelle traiettorie dei processi.

Questa decisione porta sia a dei vantaggi che a degli svantaggi.

L'assenza di salti sarà evidente soprattutto quando si tratterà di prezzare opzioni a scadenze brevi, le più affette dalla paura del mercato di improvvisi salti nel sottostante. A causa di questa scelta otterremo ad esempio valori di volatilità locale molto elevati per le prime maturity, che comporteranno difficoltà tecniche maggiori nella simulazione Monte Carlo.

Tuttavia questa decisione permetterà di avere un processo di calibrazione molto più rapido, in quanto il numero di parametri è minore e si evita la risoluzione di equazioni integro-differenziali.

Questa scelta non è detto che sia la migliore, ma permette di avere risultati soddisfacenti e risulta sufficiente per fittare la superficie di volatilità implicita nella maggior parte dei casi, come descritto in [33].

## Capitolo 2

# Modelli a Volatilità Locale

I modelli a volatilità locale hanno il seguente scopo: essere consistenti con gli smile di volatilità osservati sul mercato mantenendo la completezza del modello.

Come descritto in [22], l'idea non è tanto quella di tentare di modellizzare la volatilità ma piuttosto di fare delle ipotesi semplicistiche che permettano di prezzare le opzioni esotiche consistentemente con i prezzi delle *plain vanilla*. Tali ipotesi altro non sono che avere come parametro diffusivo una funzione deterministica dipendente dal tempo e dal valore del sottostante.

**Definizione 2.1** (Modelli a Volatilità Locale).

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma_{LV}(t, S_t)S_t dW_t \quad (2.1)$$

dove  $\sigma_{LV}(t, S_t)$  è detta **volatilità locale**.

Non è tuttavia chiaro come si debba ricavare tale funzione. In letteratura si trovano due approcci principali:

- *Volatilità Locale Parametrica*

Questo metodo consiste nell'ipotizzare una forma parametrica dipendente da più parametri, che andranno calibrati sulla superficie di mercato. Un esempio può essere trovato in [52], dove si ha:

$$\sigma_{LV}(t, S_t) = C_1(t) + \frac{C_2(t)}{S_t^{C_5(t)}} + C_3(t)S_t^{C_4(t)}. \quad (2.2)$$

- *Volatilità Locale alla Dupire*

In questo caso la volatilità locale è calcolata direttamente dai prezzi di mercato sfruttando l'equazione a derivate parziali *in avanti* che governa la loro dinamica. Nella forma più semplice, cioè annullando tutti i tassi, si ha:

$$\sigma_{DU}^2(t, K) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}. \quad (2.3)$$

Come dimostreremo successivamente, in assenza di dati arbitraggiabili la volatilità di Dupire è l'unica volatilità locale consistente col mercato ed è esatta per costruzione, a meno di errori numerici nel calcolo delle derivate. In questi casi l'utilizzo di volatilità parametriche andrebbe solo ad introdurre errori di calibrazione sulla soluzione.

Tuttavia per poter usare la volatilità di Dupire bisogna disporre di un metodo per interpolare ed estrapolare i dati di mercato. Come vedremo più avanti tale processo rischia però di introdurre arbitraggi nei dati.

Per questo motivo spesso si preferisce utilizzare le volatilità locali parametriche, che non presentano problemi anche nel caso in cui siano presenti arbitraggi nella superficie di volatilità implicita.

Dato che i dati di mercato utilizzati in questo lavoro sono *arbitrage-free*, si approfondirà unicamente la volatilità locale alla Dupire.

## 2.1 Derivazione dell'Equazione di Dupire

La svolta nei modelli a volatilità locale arrivò con il lavoro di Dupire [20] e di Derman, Kani [16], i quali arrivarono indipendentemente ad un risultato analogo con due vie diverse. Il metodo vincente risulta tuttavia il primo; il secondo infatti altro non è che una versione discretizzata, in cui i prezzi sono ottenuti mediante l'utilizzo di alberi binomiali.

Il metodo si basa su due brillanti intuizioni: conoscere i prezzi di mercato equivale a conoscere le distribuzioni marginali neutrali al rischio; inoltre esiste un *unico* processo diffusivo consistente con tali distribuzioni.

Il risultato finale rappresenta una versione finanziaria dell'*Equazione di Fokker-Planck*, nota in teoria delle probabilità per descrivere l'evoluzione nel tempo della densità di probabilità della posizione di una particella. Una breve revisione di quest'ultima si rende per tanto necessaria.

### 2.1.1 Equazione di Fokker-Planck

Seguendo quanto fatto nel paragrafo 5.6 in [9], rivediamo velocemente le *Equazioni di Kolmogorov* per la probabilità di transizione di un'equazione differenziale stocastica.

Si supponga che  $X$  sia la soluzione della seguente equazione:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (2.4)$$

e definiamo l'operatore infinitesimale

**Definizione 2.2** (Generatore Infinitesimale). *Data la EDS in 2.4 e una funzione  $h(x)$  tale che  $h \in C^2(\mathcal{R}^n)$ , chiamiamo **operatore infinitesimale** di  $X$  l'operatore a derivate parziali  $\mathcal{A}$  definito come*

$$\mathcal{A}h(t, x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad (2.5)$$



dove  $C(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$ .

Consideriamo quindi il seguente problema al contorno:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s} + \mathcal{A}h\right)(s, y) = 0, \quad (s, y) \in (0, T) \times R^n \quad (2.6)$$

$$h(T, y) = I_B(y), \quad \forall y \in R^n \quad (2.7)$$

dove  $I_B(y)$  rappresenta la funzione indicatrice dell'insieme  $B \subseteq R^n$ . Sfruttando un risultato simile a 1.2 si ha:

$$h(s, y) = \mathbb{E}_{s,y}[I_B(X_T)] = P(X_T \in B | X_s = y) \quad (2.8)$$

dove  $X$  è soluzione di (2.4).

Usando un ragionamento simile per le probabilità di transizione è possibile provare il seguente risultato

**Proposizione 2.1** (Equazione di Kolmogorov all'Indietro). *Sia  $X$  la soluzione di (2.4). Assumendo che la misura  $P(s, y; t, dx)$  abbia densità  $p(s, y; t, x)dx$  vale:*

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \mathcal{A}p\right)(s, y; t, x) = 0, \quad (s, y) \in (0, t) \times R^n \quad (2.9)$$

$$p(s, y; t, x) \rightarrow \delta_x, \text{ as } s \rightarrow t. \quad (2.10)$$

E' detta "all'indietro" in quanto le variabili indipendenti rappresentano lo "stato passato".

Con pochi passaggi algebrici è possibile trovare anche l'equazione analoga in cui le variabili indipendenti sono quelle in avanti.

Vale la seguente

**Proposizione 2.2** (Equazione di Kolmogorov in avanti). *Sia  $X$  la soluzione di (2.4). Si assuma che  $x$  abbia densità di transizione  $p(s, y; t, x) = P(X_s = y | X_t = x)$ . Allora  $p$  soddisfa la seguente equazione:*

$$\frac{\partial p}{\partial t}(s, y; t, x) = \mathcal{A}^*p(s, y; t, x), \quad (t, x) \in (0, T) \times R^n \quad (2.11)$$

$$p(s, y; t, x) \rightarrow \delta_y, \text{ as } t \downarrow s \quad (2.12)$$

dove

$$\mathcal{A}^*f(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_i(t, x)f(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [C_{ij}(t, x)f(t, x)] \quad (2.13)$$

L'equazione (2.12) è anche nota come **Equazione di Fokker-Planck**.

### 2.1.2 Equazione di Dupire

In questa sezione seguiamo la linea del capitolo 2 in [22].

Nel modello 2.1 il prezzo neutrale al rischio di una call con strike  $K$  e scadenza  $T$  è dato da:

$$C(S_0, K, T) = P(t, T) \int_0^\infty (S_T - K)^+ f(S_T, T) dS_T \quad (2.14)$$

$$= P(t, T) \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T, T) dS_T \quad (2.15)$$

dove  $P(t, T)$  è il fattore di sconto e  $f(S_T, T)$  è la densità marginale dello spot alla scadenza  $T$ .

Differenziando due volte rispetto a  $K$  si ottiene:

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -P(t, T) \int_K^\infty f(S_T, T) dS_T \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = P(t, T) f(K, T) \quad (2.17)$$

dove si è assunto  $\lim_{S \rightarrow \infty} f(S, t) = 0$ .

E' interessante sottolineare come quest'ultimo risultato permetta di ricavare le distribuzioni marginali neutrali al rischio dai prezzi delle opzioni call quotate.

Derivando secondo la maturità si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} P(t, T) \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T, T) dS_T + \\ &P(t, T) \int_K^\infty (S_T - K) \frac{\partial}{\partial T} [f(S_T, T)] dS_T \\ &= -r_T C(S_0, K, T) + P(t, T) \int_K^\infty (S_T - K) \frac{\partial}{\partial T} [f(S_T, T)] dS_T. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La densità  $f(S_T, T)$  evolve secondo la (2.12). Sostituendo il risultato si ottiene

$$\frac{\partial C}{\partial T} + r_T C(S_0, K, T) = P(t, T) \int_K^\infty (S_T - K) \times \quad (2.19)$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial S} [(r_T - q_T) S f(S, T)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} [\sigma(T, S)^2 S^2 f(S, T)] \right\} dS. \quad (2.20)$$

Integrando due volte per parti<sup>1</sup> si ottiene il seguente risultato:

**Definizione 2.3** (Equazione di Dupire). *Sia  $C(T, K)$  il prezzo di una call europea con prezzo di esercizio pari a  $K$  e scadenza  $T$ . Allora soddisfa la seguente equazione*

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r_T - q_T) \left( C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right) - r_T C. \quad (2.21)$$

<sup>1</sup>Per i dettagli si veda [46].

E' interessante osservare come la (2.21) rappresenta la versione "in avanti" dell'equazione di Black&Scholes; per questo motivo ha anche senso accumularla all'equazione di Fokker-Planck.

### 2.1.3 Formula di Dupire

Risolvendo l'equazione (2.21) per  $\sigma(K, T)$  si ottiene:

**Definizione 2.4** (Volatilità Locale di Dupire).

$$\sigma(K, T) = \sqrt{\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + q_T C + (r_T - q_T) K \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}. \quad (2.22)$$

Conoscendo l'insieme completo dei prezzi delle call è quindi possibile ricavare tale risultato. Come vedremo successivamente questo porta a seri problemi, in quanto il mercato fornisce quotazioni solo per pochi strikes ad ogni scadenza. Inoltre tali dati sono spesso forniti come *volatilità implicita di Black&Scholes*. Per questo motivo si ricava una formula analoga a (2.22) dove la volatilità locale viene espressa in termini di quest'ultima.

Per convenienza si introducono la *varianza totale implicita di Black&Scholes*, definita come

$$w(S_0, K, T) = \sigma_{BS}^2(S_0, K, T)T \quad (2.23)$$

e il *log-moneyness*  $y$  dato da

$$y = \ln\left(\frac{K}{F_T}\right) \quad (2.24)$$

dove  $F_T = S_0 e^{\int_0^T \mu_F(t) dt}$  è il prezzo del relativo forward in 0. Tralasciando i calcoli, si giunge alla seguente formula

$$v_L = \frac{\frac{\partial w}{\partial T}}{1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \quad (2.25)$$

dove con  $v_L$  si intende la *varianza locale di Dupire*.

*Osservazione 2.1.* Nel caso di superficie di volatilità implicita *flat* si ha

$$v_L = \frac{\partial w}{\partial T} \implies \sigma^2(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_u^2 du \quad (2.26)$$

grazie alla quale si può concludere che la varianza locale si riconduce alla *varianza implicita "forward" di Black&Scholes*.

E' possibile ricondursi ad una formula ancora più esplicita della (2.25), in cui la volatilità locale dipende direttamente dalla volatilità implicita. Sia  $\Sigma = \sigma_{BS}(K, T)$ , allora vale

$$v_L = \frac{\Sigma^2 + 2\Sigma T \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial T} + (r_T - q_T) K \frac{\partial \Sigma}{\partial K} \right]}{\left( 1 - \frac{Ky}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial K} \right)^2 + K \Sigma T \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial K} - \frac{1}{4} K \Sigma T \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial K} \right)^2 + K \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial K^2} \right]}. \quad (2.27)$$

Per i conti si rimanda a [46].

Per i motivi precedentemente descritti, nell'implementazione del codice Matlab verrà preferita quest'ultima formula.

### 2.1.4 Costruzione Superficie di Volatilità Implicita

Non è tuttavia ancora possibile utilizzare la (2.27).

Infatti nella formula appaiono i seguenti termini

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial K}, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial K^2}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial T}$$

il cui calcolo richiede di conoscere l'intera superficie in ogni singolo punto.

Dato che i dati di mercato sono discreti, è necessario trovare un modo per costruire in base ad essi i punti mancanti. Ciò però deve essere fatto senza introdurre arbitraggi, sia di *butterfly* che di *calendario*.

*Osservazione 2.2.* Com'è noto  $\left(\frac{1}{dK}\right)^2$  unità di un "*butterfly spread*" hanno valore

$$V(t, S_t) = \frac{C_t(K - dK) - 2C_t(K) + C_t(K + dK)}{dK^2}$$

dove  $C_t(K)$  equivale alla call europea con strike  $K$ . Il suo limite per  $dK \rightarrow 0$  altro non è che la derivata seconda del prezzo di una call secondo lo strike. Quindi per la (2.17) al limite il valore è dato dalla densità neutrale al rischio scontata.

$$V(t, S_t) \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = P(t, T) f(K, T)$$

Si ha arbitraggio di butterfly quando  $V(t, S_t) < 0$  che per quanto detto equivale ad avere una densità di probabilità negativa.

Un altro modo per accorgersi della presenza di arbitraggi di butterfly è quella di controllare se la volatilità di Dupire ha una singolarità in cui non risulta definita: infatti  $V(t, S_t) = 0$  implica che il denominatore della (2.22) sia nullo.

*Osservazione 2.3.* Analogamente si intende per arbitraggio di calendario il caso in cui un "*calendar spread*" ha valore negativo.

Come descritto in [32], esistono vari approcci per costruire la superficie di volatilità implicita, che possono essere riassunti in tre vie:

- Calibrare un modello a volatilità stocastica e invertire i prezzi delle call europee
- Calibrare una formula parametrica
- Interpolare i dati di mercato

Bisogna prestare molta attenzione negli ultimi due casi, dove è necessario imporre delle condizioni aggiuntive per garantire l'assenza di opportunità di arbitraggio.

Si è scelto di procedere utilizzando il modello a volatilità locale-stocastica SABR [27]:

$$df_t = \alpha_t f_t^\beta dW_t^1 \quad (2.28)$$

$$d\alpha_t = \nu \alpha_t dW_t^2 \quad (2.29)$$

$$E[dW_t^1 dW_t^2] = \rho dt \quad (2.30)$$

i cui parametri sono la volatilità iniziale  $\alpha$ , la volatilità della volatilità  $\nu$ , l'esponente  $\beta$  (che fissiamo a 1) e la correlazione  $\rho$  dei due moti browniani. La scelta del Sabr è uno standard di mercato in quanto fornisce una formula analitica della volatilità implicita grazie la quale è possibile avere una rapida ed efficiente calibrazione. Si tratta tuttavia di una formula approssimata a piccoli  $T$  e per questo motivo è possibile che la superficie fittata non sia priva di arbitraggi. La formula è infatti ottenuta tramite tecniche di espansioni a perturbazioni singolari per  $T \rightarrow 0$ , ed è data da

$$\sigma_{BS}(K, f) = \frac{\alpha \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\nu\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right] T \right\}}{(fK)^{(1-\beta)/2} \left[ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln^2 \frac{f}{K} + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \ln^4 \frac{f}{K} \right]} \times \frac{z}{\chi(z)} \quad (2.31)$$

$$z = \frac{\nu}{\alpha} (fK)^{(1-\beta)/2} \ln \frac{f}{K} \quad (2.32)$$

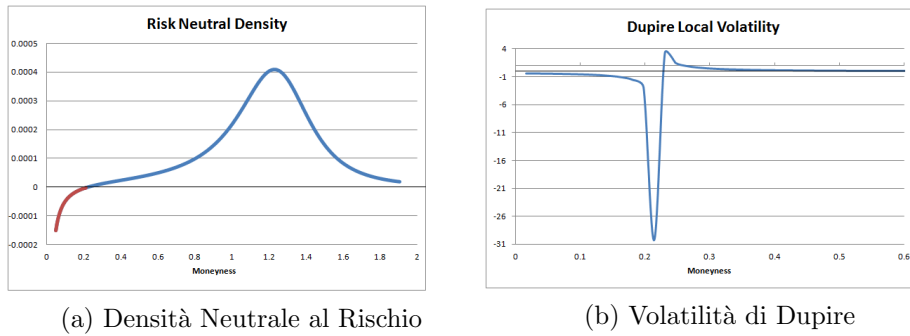
$$\chi(z) = \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right]. \quad (2.33)$$

Il grande utilizzo di questa formula è dovuto anche alla facilità d'interpretazione dei singoli parametri:  $\alpha$  governa il livello della superficie,  $\rho$  la sua *skew* (intesa come derivata ATM) e  $\nu$  la convessità.

In particolare si è deciso di calibrare un modello diverso ad ogni *pillar* in modo da avere un fitting il più fedele possibile per ogni smile.

Nel nostro caso non si sono osservati problemi, tuttavia l'utilizzo della formula approssimata può portare ad arbitraggi di butterfly, soprattutto per piccoli strike. Questo capita soprattutto quando si hanno parametri estremi. Empiricamente si è notato che si ha più probabilità di arbitraggi quando  $\nu^2 T \gg 1$ . Ad esempio si veda la figura 2.1. In letteratura esistono svariati

Figura 2.1: Arbitraggio di Butterfly con Sabr



In queste figure si possono osservare gli effetti degli arbitraggi di Butterfly, così come sono stati descritti nell'osservazione 2.2. Parametri Sabr utilizzati:  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\rho = -0.75$ ,  $\nu = 0.6$ . Inoltre si è preso  $T = 15.91$ , con il quale  $\nu^2 T = 5.73$ .

metodi per trattare questo problema, un esempio si trova in [26].

Calibrando modelli diversi per ogni scadenza di mercato si perde però la garanzia di assenza di arbitraggi di calendario. Per risolvere questo problema è sufficiente interpolare linearmente la varianza totale implicita (2.23) nel tempo tra due smile, a patto che i dati di mercato (i.e. varianza totale di mercato) siano essi stessi monotoni crescenti. Il motivo di tale scelta è semplice: in base alla (2.26) *volatilità totale implicita crescente implica varianza del processo positiva*.

Infine per scadenze che cadono fuori dal range di mercato si è scelto di estrapolare *flat*.

Riassumendo, come suggerito in [49] le derivate nello spazio vengono calcolate mediante le differenze finite centrate in modo da avere errori di ordine  $p = 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial K^2} \Sigma(K_i, t) &= \frac{\Sigma(K_i - \Delta K, t) - 2\Sigma(K_i, t) + \Sigma(K_i + \Delta K, t)}{\Delta K^2} + O(\Delta K^2) \\ \frac{\partial}{\partial K} \Sigma(K_i, t) &= \frac{\Sigma(K_i + \Delta K, t) - \Sigma(K_i - \Delta K, t)}{2\Delta K} + O(\Delta K^2). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la derivata temporale invece la scelta è molto più delicata.

Osservando la (2.26) si nota come la volatilità implicita in  $T$  dipende unicamente dal passato della volatilità locale; per questo motivo ha senso discretizzare la derivata nel tempo mediante differenze finite all'indietro di ordine

$p = 1$ .

$$\frac{\partial}{\partial T}\Sigma(K, T) = \frac{\Sigma(K, T) - \Sigma(K, T - \Delta T)}{\Delta T} + O(\Delta T).$$

Bisogna prestare però grande attenzione quando ci si trova vicino o a cavallo dei *pillar* di mercato  $t_i$ . Supponiamo infatti di trovarci in  $T \in [T_i, T_{i+1}]$ . Se  $T - \Delta T < T_i$  allora si andrebbe a valutare la derivata temporale in maniera totalmente errata, in quanto i due punti si trovano in due intervalli di *pillar* diversi, il che implica avere derivate temporali della volatilità implicita totali differenti. Per lo stesso motivo quando  $T = T_i$  la discretizzazione è scelta in avanti. In sintesi per si ha:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial T}(T, K) = \begin{cases} \frac{\Sigma(K, T) - \Sigma(K, T - \Delta T)}{\Delta T}, & T - \Delta T \geq T_i \\ \frac{\Sigma(K, T) - \Sigma(K, T_i)}{T - T_i}, & T - \Delta T < T_i \\ \frac{\Sigma(K, T + \Delta T) - \Sigma(K, T)}{\Delta T}, & T = T_i. \end{cases} \quad (2.34)$$

*Osservazione 2.4.* Per evitare problemi ed essere sempre coerenti su tutta la superficie bisogna usare i passi di discretizzazione relativi, ossia scelti  $\delta K^* = 10^{-5}$  e  $\delta T^* = 10^{-5}$  si usano

$$\begin{aligned} \Delta K &= K \delta K^* \\ \Delta T &= T \delta T^*. \end{aligned}$$

## 2.2 Legame tra Volatilità Locale e Stocastica

In questa sezione si vuol far vedere come i modelli a volatilità locale definiti nella 2.1 siano a tutti gli effetti un caso particolare dei modelli a volatilità stocastica 1.29. Intuitivamente si può pensare alla volatilità locale come una sorta media di tutte le possibili realizzazioni della volatilità istantanea. Questa idea fu formalizzata indipendentemente da Dupire [21] e Derman, Kani [17]. Presenteremo la dimostrazione di questi ultimi, così come si trova in [22].

**Proposizione 2.3** (Varianza Locale come Valore Atteso della Varianza Istantanea). *Supponiamo di porci sotto la misura di probabilità neutrale al rischio e definiamo il seguente modello:*

$$dS_t = f(v_t)S_t dW_t^1 \quad (2.35)$$

$$dv_t = \alpha(t, v_t)dt + \beta(t, v_t)dW_t^2 \quad (2.36)$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho(t, v_t)dt \quad (2.37)$$

dove tutte le funzioni nei coefficienti soddisfano le usuali ipotesi per esistenza ed unicità della soluzione.

Si può provare che quest'ultimo è equivalente ad un modello tipo 2.1, la cui varianza locale è pari al valore atteso condizionato della varianza istantanea, ovvero:

$$\sigma^2(K, T, S_0) = \mathbb{E}^Q[f(v_T)^2 | S_T = K]. \quad (2.38)$$

*Dimostrazione.* Si consideri una Call Europea con strike  $K$  e scadenza  $T$ . Il suo valore non scontato è dato da

$$C(S_0, K, T) = \mathbb{E}^Q[(S_T - K)^+].$$

Differenziando due volte secondo  $K$  si ottiene

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -\mathbb{E}^Q[\mathcal{I}(S_T - K)]$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \mathbb{E}^Q[\delta(S_T - K)]$$

dove  $\mathcal{I}(\cdot)$  è la *funzione di Heaviside* e  $\delta(\cdot)$  la *funzione di Dirac*.

Applicando il lemma di Itô al payoff della call si ottiene

$$d(S_T - K)^+ = \mathcal{I}(S_T - K)dS_T + \frac{1}{2}f(v_T)^2 S_T^2 \delta(S_T - K)dT.$$

Applicando il valore atteso e ricordando la condizione di martingalità  $\mathbb{E}[dW_t] = 0$  l'equazione diventa

$$dC = d\mathbb{E}^Q[(S_T - K)^+] = \frac{1}{2}\mathbb{E}^Q \left[ f(v_T)^2 S_T^2 \delta(S_T - K) \right] dT.$$

Sfruttando la regola del doppio valore atteso condizionato si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q \left[ f(v_T)^2 S_T^2 \delta(S_T - K) \right] &= \mathbb{E}^Q \left[ f(v_T)^2 | S_T = K \right] K^2 \mathbb{E}^Q \left[ \delta(S_T - K) \right] \\ &= \mathbb{E}^Q \left[ f(v_T)^2 | S_T = K \right] K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il secondo risultato di (2.17).

Sostituendo si ottiene infine

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}\mathbb{E}^Q \left[ f(v_T)^2 | S_T = K \right] K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}.$$

Comparandola con l'equazione della volatilità locale (2.21) si arriva alla conclusione

$$\sigma^2(K, T, S_0) = \mathbb{E}^Q[f(v_T)^2 | S_T = K].$$

□

Questo risultato avrà molta importanza quando introdurremo introdurremo formalmente i *processi a volatilità locale-stocastica*, in quanto sarà alla base del loro processo di calibrazione.



### 2.2.1 Teorema di Gyöngy

La proposizione appena dimostrata non è altro che un caso particolare del *teorema di Gyöngy*, il quale si concentra sulla costruzione di un'equazione differenziale stocastica la cui soluzione abbia distribuzioni marginali uguali ad un dato processo di Itô.

Seguendo [3], introduciamo un generico processo di Itô della forma

$$d\xi_t = \beta_t dt + \delta_t dW_t \quad (2.39)$$

dove  $W_t$  è un moto browniano  $\mathcal{F}_t$ -adattato mono-dimensionale e  $\delta_t, \beta_t$  sono anch'essi  $\mathcal{F}_t$ -adattati, reali e limitati. Prima di esporre l'enunciato del teorema ripassiamo la definizione di soluzione debole.

**Definizione 2.5** (Soluzione Debole). *Sia data l'equazione differenziale stocastica*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (2.40)$$

$$X_0 = x_0. \quad (2.41)$$

*Si dice che essa abbia soluzione debole se esiste uno spazio di probabilità  $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e un moto browniano  $\mathcal{F}_t$ -adattato tale che esista un processo  $\bar{X}$   $\mathcal{F}_t$ -adattato che soddisfi la seguente condizione*

$$\bar{X}_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, \bar{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s)d\bar{W}_s, \quad \forall t > 0. \quad (2.42)$$

Siamo ora in grado di enunciare il teorema, per la dimostrazione si rimanda a [23].

**Teorema 2.1** (Teorema di Gyöngy). *Sia dato un processo di Itô che soddisfi la condizione di ellitticità uniforme:  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$  tale che  $\delta^2 \geq \lambda$  allora esiste una funzione misurabile e limitata  $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite come:*

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \begin{cases} b(t, x) = \mathbb{E}[\beta_t | \xi_t = x] \\ \sigma^2(t, x) = \mathbb{E}[\delta_t^2 | \xi_t = x] \end{cases}$$

*tali che la seguente equazione differenziale stocastica*

$$dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t, \quad (2.43)$$

$$x_0 = 0 \quad (2.44)$$

*abbia una soluzione debole  $x_t$  con distribuzioni marginali uguali a  $\xi_t$ .*

### 2.3 Limiti della Volatilità Locale

Nonostante la facilità di utilizzo questi modelli soffrono di varie criticità, dovute per lo più all'ipotesi troppo semplicistica che ne sta alla base. Pensare infatti che tutta la fonte di incertezza sia dovuta unicamente al sottostante e che la volatilità locale sia condizionata solo al valore dello spot risulta un'assunzione troppo forte per descrivere il comportamento del mercato. Principalmente questi problemi sono il riflesso dell'errata dinamica implicata dal modello.

Un problema molto noto in letteratura [48] riguarda la *volatilità implicita forward*, ossia la volatilità da inserire nella formula di Black&Scholes per valutare opzioni call in cui lo strike viene fissato in una data futura  $T_1$ . Si mostra empiricamente che la volatilità implicita forward ottenuta nei modelli a volatilità locale risulta differente rispetto a quella del mercato in quanto la concavità si appiattisce in modo irrealistico all'aumentare di  $T_1$  (si veda la figura 3.7 nel capitolo 3).

La volatilità forward non è altro che una proiezione nel futuro della volatilità implicita. Una sua scorretta valutazione è quindi indice di una inesatta dinamica della volatilità implicita del modello.

Un ulteriore svantaggio nell'utilizzo dei modelli a volatilità locale consiste nella scarsa robustezza che offrono al variare dei dati: la superficie di volatilità locale tende a muoversi parecchio a fronte di piccoli spostamenti nel valore dello spot. Ciò è indice di scarsa consistenza con la dinamica osservata sul mercato. Uno degli scopi dei modelli a volatilità stocastica è proprio quella di sopperire a questo problema. Inoltre la volatilità di Dupire, essendo non parametrica, ha infiniti gradi di libertà che portano a fittare ogni tipo di superficie, amplificando notevolmente le oscillazioni.

## Capitolo 3

# Modelli a Volatilità Stocastica

I modelli a volatilità stocastica rappresentano un modo alternativo per risolvere i problemi di cui soffre il modello di Black&Scholes.

Come già descritto nel capitolo 1, permettere alla volatilità di un processo di evolvere seguendo una propria dinamica stocastica sembra essere la soluzione più adeguata a fronte delle osservazioni storiche. Essi riescono a spiegare in modo consistente perché le opzioni con prezzi di esercizio e scadenze differenti abbiano volatilità implicite diverse. Per questo motivo in genere riescono a fittare abbastanza bene la superficie di volatilità implicita. Al contrario dei modelli a volatilità locale, con questi processi si riesce a descrivere realisticamente la *forward skew*, come si è visto nei grafici 3.7. Ciò lo si deve alla presenza della dinamica stessa nella volatilità: il suo valore futuro  $\sigma_t$  non dipenderà unicamente dal presente  $\sigma_0$  ma da tutta la sua evoluzione in  $[0, t]$ .

Definiamo quindi tale classe di modelli nel modo generico possibile.

**Definizione 3.1** (Modelli a Volatilità Stocastica).

$$dS_t = (r - q)S_t dt + f(v_t)S_t dW_t^1 \quad (3.1)$$

$$dv_t = \alpha(t, v_t, S_t, X_t)dt + \beta(t, v_t, S_t, X_t)dW_t^2 \quad (3.2)$$

dove  $\mathbb{E} [dW_t^1 dW_t^2] = \rho(t, v_t, S_t, X_t)dt$  e  $X_t$  sono  $n$  fattori d'incertezza.  $v_t$  è il processo che guida la volatilità istantanea, ed ha drift  $\alpha(t, v_t, S_t, X_t)$ , diffusione  $\beta(t, v_t, S_t, X_t)$  e correlazione con  $S_t$  pari a  $\rho(t, v_t, S_t, X_t)$ .

In letteratura tuttavia si tende ad escludere la possibilità che i coefficienti del processo di volatilità possano dipendere dal valore del sottostante  $S_t$ . Per semplicità escluderemo inoltre la dipendenza da altre fonti d'incertezza.

Parleremo quindi di modelli a volatilità stocastica della forma:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + f(v_t)S_t dW_t^1 \quad (3.3)$$

$$dv_t = \alpha(t, v_t)dt + \beta(t, v_t)dW_t^2 \quad (3.4)$$

$$\mathbb{E} [dW_t^1 dW_t^2] = \rho(t, v_t)dt \quad (3.5)$$

La forma di  $\alpha(t, v_t)$ ,  $\beta(t, v_t)$  e  $\rho(t, v_t)$  non viene scelta arbitrariamente, ma in modo da replicare alcune caratteristiche delle traiettorie (vedi 1.2) che si osservano sul mercato:

- **Positività:** La volatilità deve essere positiva e ciò si ottiene prendendo come  $f(\cdot)$  una funzione positiva.
- **Mean Reversion:** Empiricamente si osserva che il processo non spazia verso valori infiniti, ma tende ad oscillare intorno ad un determinato livello  $\theta$ , detto media di lungo periodo. Questo effetto viene modellizzato scegliendo evoluzioni con il seguente drift:

$$dv_t = \kappa(v_t - \theta)dt + \dots dW_t \quad (3.6)$$

- **Volatility Clustering:** Come notato da Mandelbrot [42] ad ampie variazioni nel valore del sottostante seguiranno probabilmente altre ampie variazioni, qualsiasi sia il segno, mentre a piccoli cambiamenti ne seguiranno altri infinitesimi. Ciò implica che il processo sottostante la volatilità non deve avere incrementi indipendenti.
- **Leverage Effect:** Questo nome indica il fenomeno osservato sul mercato per il quale quando lo spot decresce si assiste ad un innalzamento nel valore della volatilità e viceversa. Ciò implica correlazione negativa tra spot e volatilità istantanea.

*Osservazione 3.1.* Va sottolineato come queste osservazioni siano puramente indicative e rispecchino i comportamenti riscontrati sotto la misura reale  $\mathbb{P}$ . Il passaggio alla misura risk-neutral potrebbe ad esempio cambiare totalmente l'effetto del drift. Tuttavia ciò non presenta un problema, dato che dal punto di vista del pricing l'importante è ottenere un modello che fitti bene lo smile e che sia stabile nei parametri.

### 3.1 Modelli

I primi modelli di questa classe videro la luce poco dopo il lavoro di Black-Merton-Scholes, ma fu solo dopo la crisi del 1987 che la loro considerazione accrebbe notevolmente. Vanno annoverati ad esempio il modello di Hull&White [34] e il modello di Scott [47].

La vera svolta tuttavia arrivò nel 1993, quando Heston [30] propose un modello a volatilità stocastica in cui è possibile prezzare opzioni call non più

in forma approssimata, ma con una formula chiusa nello spazio di Fourier. Successivamente si assistette allo sviluppo di modelli a volatilità stocastica con l'aggiunta dei salti: dapprima sul sottostante come nel modello di Bates [6], in cui fu esteso il risultato di Heston mantenendo però la formula chiusa, e successivamente sulla volatilità stessa, come nei modelli BNS [4].

In questo lavoro si è deciso di concentrarsi principalmente su quattro modelli di tipo diffusivo: il modello di Heston, il modello lognormale, l'*Hyperbolic-Stochastic Volatility Model* di Jäckel e un modello a volatilità path-dependent. Per semplificare la trattazione verranno esaminati i modelli con coefficienti omogenei nel tempo.

### 3.1.1 Modello di Heston

Heston prese come dinamica per la volatilità lo “*square-root process*”, noto anche come *CIR* per via dei suoi padri, *Cox, Ingersoll e Ross* [15].

Rispetto a (3.5) i coefficienti hanno la seguente forma:

$$\alpha(t, v_t) = \kappa(\theta - v_t), \quad \beta(t, v_t) = \nu\sqrt{v_t}, \quad \rho(t, v_t) = \rho, \quad f(t, v_t) = \sqrt{v_t} \quad (3.7)$$

Il modello è quindi definito dal seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche:

**Definizione 3.2** (Modello di Heston).

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^1 \quad (3.8)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \nu\sqrt{v_t}dW_t^2 \quad (3.9)$$

$$\mathbb{E} [dW_t^1 dW_t^2] = \rho dt \quad (3.10)$$

dove  $\kappa$ ,  $\theta$  e  $\nu$  sono coefficienti costanti e positivi. Quest'ultimo rappresenta la volatilità della volatilità istantanea e per questo motivo verrà detto *vol-of-vol*.

La soluzione del processo è continua e positiva, anche se può toccare lo zero e rimanerci per un istante di misura nulla, dopo di che verrà spinto nuovamente nella regione positiva dalla mean reversion. E' possibile tuttavia ottenere un processo che sia strettamente positivo, a patto di avere un drift sufficientemente grande rispetto alla vol-of-vol. Tale risultato è noto come *condizione di Feller*:

$$2\kappa\theta > \nu^2 \implies v_t > 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.11)$$

a patto ovviamente di avere  $v_0 > 0$ .

*Osservazione 3.2.* Va sottolineato che molto raramente i parametri calibrati sul mercato soddisfano la condizione di Feller. Per questo motivo bisogna prestare particolare attenzione nella simulazione Monte Carlo al fine di evitare simulazioni di volatilità negative.

Veniamo ora a mostrare il principale risultato del lavoro di Heston.

**Proposizione 3.1.** *Si consideri il modello definito in 3.2 e si voglia prezzare una call europea con strike  $K$  e maturity  $T$ . Allora la soluzione è data da:*

$$C(S_t, K, v_0, t, T) = S_t P_1 - K e^{-(r-q)(T-t)} P_2 \quad (3.12)$$

dove  $P_1$  è il delta della call e  $P_2 = \mathbb{Q}(S_T > K | \mathcal{F}_t)$  e valgono:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iulnK} \phi_j(S_t, v_t, t, T, u)}{iu} \right] du, \quad j = 1, 2 \quad (3.13)$$

dove  $\phi_j$  sono le funzioni caratteristiche di  $P_j$  e vengono date da:

$$\phi_j(S_t, v_t, \tau, u) = e^{C_j(\tau, u) + D_j(\tau, u)v_t + iuS_t}, \quad \tau = T - t \quad (3.14)$$

$$C_j(\tau, u) = (r - q)ui\tau + \frac{\kappa\theta}{\nu^2} \left\{ (b_j - \rho\nu ui + d_j)\tau - 2 \ln \left[ \frac{1 - g_j e^{d\tau}}{1 - g_j} \right] \right\} \quad (3.15)$$

$$D_j(\tau, u) = \frac{b_j - \rho\nu ui + d_j}{\nu^2} \left[ \frac{1 - g e^{d\tau}}{1 - g} \right] \quad (3.16)$$

dove

$$g = \frac{b_j - \rho\nu ui + d_j}{b_j - \rho\nu ui - d_j}, \quad d_j = \sqrt{(\rho\nu ui - b_j)^2 - \nu^2(2r_j ui - u^2)} \quad (3.17)$$

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\nu, \quad b_2 = \kappa + \lambda \quad (3.18)$$

dove  $\lambda$  è il premio per il rischio di volatilità.

E' quindi possibile trovare il prezzo della call al costo di calcolare due volte l'inversa della trasformata di Fourier, sfruttando ad esempio l'algoritmo suggerito da Carr e Madan nel loro lavoro [12].

*Osservazione 3.3.* Il metodo di Carr e Madan permette di prezzare le opzioni call europee per tutti i modelli in cui sia nota la funzione caratteristica. L'inversione viene calcolata con l'algoritmo *Fast Fourier Transform*, il quale necessita però una griglia uniforme con un passo molto stretto. A livello pratico diventa quindi competitivo solo se si necessita di calcolare i prezzi per molti strikes, altrimenti risulta molto più conveniente il calcolo diretto dell'integrale con formule di quadratura gaussiane, come descritto in [36].

Infine va detto che il modello di Heston risulta tutt'oggi il più popolare tra i modelli a volatilità stocastica.

Come sottolineato da Jäckel [35] il motivo per cui Heston è così utilizzato sta tutto nella sua formula analitica: la dinamica del modello non è per nulla realistica; inoltre la possibilità di ottenere valori vicini allo zero per lunghi periodi porta a forti instabilità nei metodi di pricing.

### 3.1.2 Modello a Volatilità Lognormale

Il modello a volatilità lognormale preso in esame è molto simile a quello di Scott [47], in questo caso i coefficienti sono:

$$\alpha(t, v_t) = \kappa(\theta - v_t), \quad \beta(t, v_t) = \nu v_t, \quad \rho(t, v_t) = \rho, \quad f(t, v_t) = v_t \quad (3.19)$$

Il sistema di equazioni differenziali stocastiche è quindi:

**Definizione 3.3** (Modello a Volatilità Lognormale).

$$dS_t = (r - q)S_t dt + v_t S_t dW_t^1 \quad (3.20)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \nu v_t dW_t^2 \quad (3.21)$$

$$\mathbb{E} [dW_t^1 dW_t^2] = \rho dt \quad (3.22)$$

A differenza di Heston il modello a volatilità lognormale non ha alcuna formula chiusa per il prezzo delle call europee, per le quali è quindi necessario utilizzare un metodo numerico di pricing.

Tuttavia la dinamica del processo di volatilità è molto più fedele alla realtà rispetto al precedente: il processo  $v_t$  è sempre strettamente positivo; inoltre tra i modelli della forma  $dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \nu v_t^\gamma dW_t$  il  $\gamma$  stimato dalle serie storiche è circa 1.

Il problema principale di questo modello è che, per alcuni valori dei suoi parametri, soffre del problema dell'esplosione del suo momento secondo. Come si può leggere in [2] ad esempio non esistono momenti di ordine  $\omega > (1 - \rho^2/2)^{-1}$  quando  $\rho > 0$ . Questo problema è condiviso da più modelli a volatilità stocastica: ad esempio nello stesso Sabr il momento secondo non esiste per  $\rho > -1/\sqrt{2}$ : ciò si spiega in quanto il processo è lognormale puro e quindi la volatilità può crescere esponenzialmente.

A livello teorico non è banale per i modelli a volatilità stocastica garantire l'esistenza e unicità della soluzione in quanto a priori non è soddisfatta l'ipotesi di sublinearità. Infatti in tutti i casi presi in esame  $f(v_t)$  può divergere all'infinito. Per ovviare a questo problema si è deciso di troncare la funzione di volatilità  $f(v_t)$  e usare

$$\bar{f}(v_t) = \min(v_{max}, f(v_t)) \quad (3.23)$$

dove si è scelto  $v_{max} = 10$ .

Così facendo si garantisce sia la condizione di sublinearità. Si prenda la norma euclidea

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (3.24)$$

e l'analogo per le matrici. E' banale osservare che

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (r-q)S_t \\ \kappa(\theta - v_t) \end{vmatrix} &\leq \max \{ (r-q)^2, (\kappa\theta)^2, \kappa^2 \} \left( 1 + \left\| \frac{S_t}{v_t} \right\| \right) \\ \begin{vmatrix} f(v_t)S_t & 0 \\ \rho\nu v_t & \sqrt{1-\rho^2}\nu v_t \end{vmatrix} &\leq \max \{ v_{max}, \nu \} \left( 1 + \left\| \frac{S_t}{v_t} \right\| \right) \end{aligned}$$

Anche la condizione di lipschitzianità è verificata, dato che i coefficienti sono lineari nella variabile di stato.

*Osservazione 3.4.* La scelta di limitare la funzione di volatilità  $f(v_t)$  verrà imposta anche a tutti gli altri modelli a volatilità stocastica presentati. Tale scelta si rivelerà molto utile a livello pratico, come vedremo nel capitolo 5.

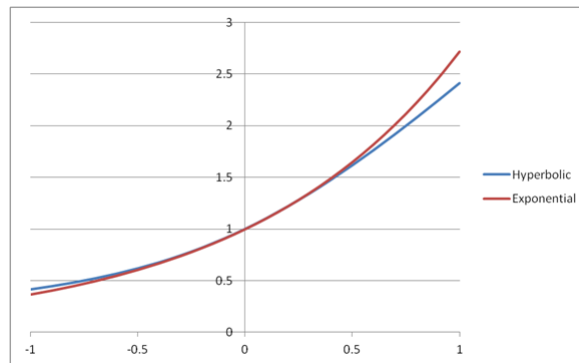
### 3.1.3 Modello a Volatilità Iperbolica

L'esplosione dei momenti fu uno dei motivi che spinse lo stesso Jäckel [35] a proporre il modello a volatilità locale-iperbolica stocastica-iperbolica. In particolare nella parte di volatilità stocastica si pose l'obiettivo di approssimare il modello a volatilità lognormale, ma in modo da avere code della distribuzione meno grasse.

In particolare sfruttò come  $f(v_t)$  una versione iperbolica di una sezione di cono  $f_{hyp}(y)$ , in modo da eguagliare la funzione esponenziale  $f_{exp}(y) = e^y$  in  $y = 0$  fino alla derivata seconda. Tale funzione è data da:

$$f(y) = y + \sqrt{y^2 + 1} \tag{3.25}$$

Figura 3.1: Confronto tra funzione iperbolica ed esponenziale



Come si vede in figura, l'approssimazione iperbolica  $y + \sqrt{y^2 + 1}$  cresce meno rapidamente dell'esponenziale  $e^y$  quando  $y$  cresce, mentre decresce più lentamente per  $y \rightarrow -\infty$ .

Introduciamo quindi il modello iperbolico:



**Definizione 3.4.** *Modello a volatilità stocastica iperbolica*

$$dS_t = (r - q)S_t dt + v_0 g(y_t) S_t dW_t \quad (3.26)$$

$$dy_t = \kappa(\tilde{\theta} - y_t) dt + \nu\sqrt{2\kappa} dZ_t \quad (3.27)$$

dove  $\mathbb{E}[dW_t dZ_t] = \rho dt$  e  $y(0) = 0$ .

Per comodità trasformiamo il sistema nella stessa forma di (3.5). Applicando il *lemma di Itô* otteniamo:

$$dv_t = d(e^{y_t}) = \kappa(\tilde{\theta} - \ln v_t) v_t dt + \nu\sqrt{2\kappa} v_t dW_t + \frac{1}{2}\nu^2 2\kappa v_t dt \quad (3.28)$$

$$= \kappa(\tilde{\theta} + \nu^2 - \ln v_t) v_t dt + \nu\sqrt{2\kappa} v_t dZ_t \quad (3.29)$$

$$= \kappa(\ln \theta - \ln v_t) v_t dt + \nu\sqrt{2\kappa} v_t dZ_t \quad (3.30)$$

dove si è imposto  $\ln \theta = \tilde{\theta} + \nu^2$ .

Con questa trasformazione avremo quindi il seguente sistema:

$$dS_t = v_0 g\left(\ln \frac{v_t}{v_0}\right) S_t dW_t \quad (3.31)$$

$$dv_t = \kappa(\ln \theta - \ln v_t) v_t dt + \nu\sqrt{2\kappa} v_t dZ_t \quad (3.32)$$

### 3.1.4 Modello a Volatilità Path-Dependent

Si è deciso di considerare anche i modelli a volatilità path-dependent, introdotti da Hobson-Rogers in [31].

Si tratta di modelli completi, in cui la volatilità istantanea dipende dei momenti pesati dei log-returns  $Z_t = \ln S_t$  nel tempo passato. Tralasciando i momenti superiori al primo si ha il seguente processo:

$$dZ_t = \mu(t, Z_t, M_t) dt + \sigma(t, Z_t, M_t) dW_t \quad (3.33)$$

$$M_t = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} Z_{t-u} du = \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)} Z_u du \quad (3.34)$$

Calcolando il differenziale stocastico di  $M_t$  è possibile esprimere la dinamica con un'unica EDS:

$$dZ_t = \mu(t, Z_t, M_t) dt + \sigma(t, Z_t, M_t) dW_t \quad (3.35)$$

$$dM_t = \lambda(Z_t - M_t) dt \quad (3.36)$$

Nel nostro caso utilizzeremo una funzione di volatilità locale *Sabr Inspired* [26]:

$$\sigma(x) = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\rho\nu \ln(x) + \nu^2 \ln^2 x} \quad (3.37)$$

dove avremo  $x = \frac{S_t}{M_t}$ . Ponendo  $\xi_t = \frac{S_t}{M_t}$  e sfruttando il lemma di Itô è possibile riscrivere il modello nella forma dei processi a volatilità stocastica:

$$\begin{cases} dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma(\xi_t) S_t dW_t \\ d\xi_t = \lambda(1 - \xi_t) \xi_t dt + \sigma(\xi_t) \xi_t dW_t \end{cases} \quad (3.38)$$

*Osservazione 3.5.* Va osservato quindi come ci sia un'unica fonte d'incertezza, che porta ad avere un *modello completo*.

Poiché la volatilità dipende dai movimenti del sottostante nel passato, essa sarà tanto più alta tanto più lo spot si allontanerà dalla sua media. Inoltre il modello descrive molto bene l'effetto di *mean-reversion* nella volatilità: essa infatti parte da  $\sigma(S_0/M_0)$  e viene spinta nel lungo periodo a valere  $\sigma(1) = \alpha$ .

Inoltre è possibile riprodurre gli smile di volatilità osservati dal mercato.

*Osservazione 3.6.* Per quanto visto i modelli PDV rappresentano più una nuova classe di modelli a *volatilità non costante*, che può includere i modelli a volatilità locale pur condividendo molte analogie con i modelli a volatilità stocastica.

## 3.2 Pricing e Calibrazione

Come facilmente intuibile i modelli a volatilità stocastica non soddisfano l'equazione di Black&Scholes. Per questo motivo è necessario derivare una nuova equazione di pricing che tenga conto delle variazioni nella volatilità istantanea del sottostante. Fatto questo procederemo a ricavare un metodo per prezzare le opzioni call che sia il più generico possibile, in modo da includere tutti i modelli presentati nella sezione precedente.

### 3.2.1 Equazione di Pricing

Per ricavare il risultato, seguiremo quanto fatto da Gatheral nel capitolo 1 in [22].

Si supponga che lo spot e la volatilità soddisfino il seguente sistema di EDS:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + f(v_t)S_t dW_t^1 \quad (3.39)$$

$$dv_t = \alpha(t, v_t, S_t)dt + \nu\beta(t, v_t, S_t)\sqrt{v_t}dW_t^2 \quad (3.40)$$

$$\langle dW_t^1, dW_t^2 \rangle = \rho dt \quad (3.41)$$

Come nel caso di Black&Scholes, si vuole costruire un portafoglio che replichi il valore dell'opzione presa in esame in modo da annullare il rischio. In questo caso però sarà necessario hedgiare anche il rischio di oscillazioni nella volatilità.

Si costruisce quindi il portafoglio  $\Pi$  formato dall'opzione stessa il cui valore è pari a  $V(t, S_t, v_t)$ , una quantità  $-\Delta$  dello stock e una quantità pari a  $-\Delta_1$  di un altro asset il cui valore  $V_1$  dipenda dalla volatilità. Si ha quindi

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1 \quad (3.42)$$

Il suo differenziale stocastico calcolato con il lemma di Itô è pari a

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\nu v\beta S \frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\nu^2 c\beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\} dt \quad (3.43) \\
 &\quad - \Delta_1 \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\nu v\beta S \frac{\partial^2 V_1}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\nu^2 c\beta^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right\} dt \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta \right\} dS \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} \right\} dv
 \end{aligned}$$

dove per chiarezza sono state eliminate tutte le dipendenze.

Per rendere il portafoglio privo di rischio è sufficiente annullare i termini in  $dS$  e  $dv$ :

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta = 0 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} = 0 \quad (3.45)$$

Così facendo il portafoglio evolve in modo deterministico  $d\Pi = r\Pi dt$ . L'equazione diviene quindi:

$$d\Pi = \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\nu v\beta S \frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\nu^2 c\beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\} dt \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
 &\quad - \Delta_1 \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\nu v\beta S \frac{\partial^2 V_1}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\nu^2 c\beta^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right\} dt \\
 &= r\Pi dt \\
 &= r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1) dt \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini in  $V$  a sinistra e in  $V_1$  a destra si ha:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\nu v\beta S \frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\nu^2 c\beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV}{\frac{\partial V}{\partial v}} \\
 &= \frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\nu v\beta S \frac{\partial^2 V_1}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\nu^2 c\beta^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} + rS \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial v}} \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto il medesimo rapporto da ambo i lati, a meno dell'opzione in esame:  $V$  a sinistra e  $V_1$  a destra. L'unico modo per cui ciò sia vero è che entrambi i lati siano uguali ad una stessa funzione  $f$  di  $S$ ,  $v$  e  $t$ . Senza perdita di generalità vale il seguente risultato.

**Proposizione 3.2.** *Equazione di Pricing per Modelli a Volatilità Stocastica*  
 Sia dato un processo della forma (3.41) e un derivato il cui valore sia una

funzione tipo  $V(t, S_t, v_t)$ . Allora esso soddisfa la seguente EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\nu v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\nu^2c\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ = -(\alpha - \phi\beta\sqrt{v})\frac{\partial V}{\partial v} \end{aligned} \quad (3.49)$$

dove  $\phi(S, v, t)$  è detto premio di mercato per il rischio di volatilità.

*Osservazione 3.7.*  $\phi(S, v, t)$  è il ritorno extra da pagare per prezzare il derivato in un mondo neutrale al rischio. Definendo infatti il drift neutrale al rischio

$$\bar{\alpha} = \alpha - \beta\sqrt{v}\phi \quad (3.50)$$

e ponendo

$$dv_t = \bar{\alpha}dt + \beta\sqrt{v}dW_t^2 \quad (3.51)$$

si sarebbe ottenuto un risultato identico senza però il termine con il premio di mercato, dato che ci si pone nel mondo fittizio di assenza di rischio. Nel prosieguo supporremo sempre di porci nel mondo neutrale al rischio, dato che siamo interessati a prezzare prodotti finanziari. Per questo motivo ci dimenticheremo del premio per il rischio di volatilità, che sarà intrinseco nei coefficienti dei calibrati. L'equazione (3.49) diviene quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \alpha\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{2}\nu^2c\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \\ + \rho\nu v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} - rV = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

### 3.2.2 Fundamental Transform

Come detto l'obiettivo di questa sezione è quello di trovare un procedimento il più generale possibile per calibrare i modelli a volatilità stocastica presentati.

Dato che i dati di mercato presi in considerazione sono in termini di volatilità implicita di call europee, ciò equivale a trovare un metodo per prezzare tali strumenti.

La scelta è ricaduta sul metodo della *Fundamental Transform* di Alan Lewis [39]. Il metodo in esame poggia infatti sulle seguente assunzioni:

#### Ipotesi 3.1. Ipotesi Fundamental Transform

1. Il processo deve avere la seguente forma generica:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + g(v_t)S_t dW_t \quad (3.53)$$

$$dv_t = \alpha(v_t)dt + \beta(v_t)dZ_t \quad (3.54)$$

$$\mathbb{E}[dW_t dZ_t] = \rho(v_t)dt \quad (3.55)$$

dove  $r$  e  $q$  sono costanti e  $\alpha(v)$ ,  $\beta(v)$  possono essere differenziabili infinite volte per  $v$  positive.

2. Il payoff  $\psi$  delle opzioni prezzate deve essere indipendente dalla volatilità

$$\psi(T, S_T, v_T) = \Psi(T, S_T). \quad (3.56)$$

Si osserva quindi che queste ultime sono soddisfatte nei casi presentati nella sezione 3.1.

### Soluzione della Fundamental Transform

Questo metodo permette di ricavare una soluzione per i prezzi delle call europee in formula chiusa nello *Spazio di Fourier*: ciò è possibile poiché in tale spazio l'equazione (3.52) dipende da un'unica variabile anziché due.

Si supponga quindi di voler prezzare una call europea con strike  $K$  e maturity  $T$  il cui valore è dato da  $F(t, S_t, v_t)$ .

Per prima cosa si sfrutta il seguente cambio di variabili

$$x_t = \ln S_t \quad (3.57)$$

in modo da semplificare la PDE, che passa ad essere:

$$f_t + (r - q - \frac{1}{2}g^2(v))f_x + \frac{1}{2}g^2(v)f_{xx} + \alpha f_v + \frac{1}{2}\beta^2 f_{vv} + \rho\beta g(v)f_{xv} - rf = 0 \quad (3.58)$$

dove  $f = f(t, x_t, V_t) = F(t, S_t, V_t)$  e per semplicità sono state tralasciate tutte le dipendenze.

Consideriamo ora la *trasformata di Fourier* di  $f(t, x, v)$

$$\hat{f}(k, v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(t, x, v) dx \quad (3.59)$$

dove  $i = \sqrt{-1}$  è l'unità immaginaria e  $k$  la variabile trasformata.

Per prima cosa dobbiamo determinare quando esiste la soluzione di (3.59) per le usuali opzioni da prezzare. Per farlo osserviamo il caso per  $t \rightarrow T$ , dove  $f(T, x, v) = \Psi(T, x)$ . Nel caso della call europea il payoff è pari a  $C(T, S_T) = (S_T - K)^+$  e la sua trasformata è

$$\hat{f}(k, v, T) = \left( \frac{\exp[(ik+1)x]}{ik+1} - K \frac{\exp(ikx)}{ik} \right) \Bigg|_{x=\ln K}^{x=\infty}. \quad (3.60)$$

Il limite superiore esiste se  $\text{Im } k > 1$ . In tal caso la soluzione è ben definita e pari a

$$\hat{f}(k, v, T) = -\frac{K^{1+ik}}{k^2 - ik} \quad (3.61)$$

*Osservazione 3.8.* Va osservato come la condizione di esistenza imponga che la variabile di trasformazione  $k$  abbia parte immaginaria non nulla, quindi  $k = k_r + ik_i$ . In generale la condizione di esistenza per la trasformata di un payoff generico ha la seguente forma:  $a < \text{Im } k < b$ .

In questi casi si parla di *Trasformata Generalizzata di Fourier*; la sua inversa è quindi data da:

$$f(t, x, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{ik_i - \infty}^{ik_i + \infty} e^{-ikx} \widehat{f}(k, v, t) dk \quad (3.62)$$

dove compare un integrale su una retta parallela all'asse  $x$  ma traslata nel campo complesso. Nel caso della cal tale linea si troverà in tutta la regione  $\text{Im } k > 1$ .

Nella tabella 3.1 sono riportate le trasformate e la loro condizione di esistenza per i più semplici e diffusi derivati *plain vanilla*.

Tabella 3.1: Trasformate di Fourier Generalizzate per Varie Opzioni

Opzione	$\Psi(T, S_T)$	$\widehat{\Psi}(k)$	Restrizioni
Call	$(S_T - K)^+$	$-\frac{K^{1+ik}}{k^2 - ik}$	$\text{Im } k > 1$
Put	$(K - S_T)^+$	$-\frac{K^{1+ik}}{k^2 - ik}$	$\text{Im } k < 0$
Covered Call	$\min[S_T, K]$	$\frac{K^{1+ik}}{k^2 - ik}$	$0 < \text{Im } k < 1$

Scriviamo quindi l'EDP per la trasformata  $\widehat{f}$ . Innanzitutto osserviamo che le trasformate delle derivate in  $x$  spariscono. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_x &= \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{\partial f}{\partial x} dx \\ &= \left[ e^{ikx} f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx} f(t, x, v) dx \\ &= -ik\widehat{f} \end{aligned} \quad (3.63)$$

dove il primo termine nella seconda riga è nullo (si veda [39] per i dettagli). Banalmente si ottiene

$$\widehat{f}_{xx} = \frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial x^2} = -k^2 \widehat{f} \quad (3.64)$$

Sostituendo in (3.58) il problema diviene

$$\begin{aligned} -\widehat{f}_t &= [-r - ik(r - q)]\widehat{f} - \frac{1}{2}g^2(v) [k^2 - ik] \widehat{f} + [\alpha - \rho\beta g(v)] f_v + \frac{1}{2}\beta^2 f_{vv} \\ \widehat{f}(k, T, V_T) &= \Psi(k) \end{aligned} \quad (3.65)$$

E' possibile rimuovere la dipendenza da  $r$  e  $q$  con la seguente trasformazione

$$\widehat{f}(k, v, t) = \exp \{[-r - ik(r - q)] \tau\} \widehat{h}(k, v, \tau) \quad (3.66)$$

dove  $\tau = T - t$ . Inoltre introducendo anche il termine  $c(k) = (k^2 - ik)/2$  il problema passa ad essere

$$-\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 \widehat{h}}{\partial v^2} + [\alpha - ik\rho\beta g(v)] \frac{\partial \widehat{h}}{\partial v} - c(k)g^2(v)\widehat{h} = 0 \quad (3.67)$$

$$\widehat{h}(k, v, \tau = 0) = \widehat{\Psi}(k) \quad (3.68)$$

Il problema ottenuto è così in funzione di una sola variabile.

Grazie all'ipotesi d'indipendenza del payoff da  $v$ , per risolvere il problema è sufficiente considerare il caso speciale in cui  $\widehat{h}(k, v, \tau = 0) = 1$ , dopo di che moltiplicare la soluzione ottenuta per la trasformata del payoff  $\widehat{\Psi}(k)$ .

In modo da formalizzare meglio il discorso diamo una definizione a tale soluzione.

**Definizione 3.5.** Dato  $k \in \mathbb{C}$ , la soluzione  $\widehat{H}(k, v, \tau)$  dell'equazione (3.67) con condizione iniziale  $\widehat{H}(k, v, \tau = 0) = 1$  è detta **Fundamental Transform**.

L'algoritmo può essere quindi così riassunto:

1. Dato un problema sotto le ipotesi 3.1, si calcoli la Fundamental Transform  $\widehat{H}(k, v, \tau)$ .
2. Moltiplicare  $\widehat{H}(k, v, \tau)$  per la trasformata del payoff  $\widehat{\Psi}(k)$ .
3. Moltiplicare quanto ottenuto per il fattore presente in (3.66).
4. Calcolare l'inversa di Fourier  $f(t, x, v)$  integrando nel piano complesso come in (3.62) per ottenere il prezzo.

*Osservazione 3.9.* Come mostrato in [39] la Fundamental Transform può, sotto opportune ipotesi, essere interpretata come la funzione caratteristica del processo a volatilità stocastica.

Nel caso di Heston ad esempio  $\widehat{H}(k, v, \tau)$  si riduce a (3.14). Va sottolineato tuttavia come in questo caso non sia presente la *trappola del logaritmo complesso*.

*Osservazione 3.10.* La condizione di esistenza di tale soluzione non è tuttavia ben definita. Affinché la procedura funzioni deve esserci una *strip* nel piano complesso in cui esista la *fundamental transform*.

*Definizione 3.6.* Il problema (3.67) è detto **regolare** se esiste una soluzione della *fundamental transform* regolare in  $k$  all'interno di una regione della forma  $a < \text{Im } k < b$ . Tale regione è detta *Fundamental Strip of Regularity*.

A priori non sono noti i limiti della strip; tuttavia in pratica si utilizzano  $k$  tali che  $0 < \text{Im } k < 1$ , usualmente  $k_i = 1/2$ . La ragione di tale scelta è che la soluzione dell'EDP (3.67) ha un buon comportamento fintanto che la reazione spinge la soluzione all'interno del dominio, che si verifica se  $\text{Re } c(k) \geq 0$ , che equivale a porre  $0 \leq \text{Im } k \leq 1$ .

La condizione di esistenza della trasformata della call non interseca questa regione. Per questo motivo si preferisce prezzare una *Covered Call*, il cui payoff è equivalente a vendere una call di strike  $K$  e comprare il sottostante. Come riportato nella tabella 3.1, la restrizione di tale payoff coincide con la "regione di regolarità" di  $\widehat{H}(k, v, \tau)$ .

Quindi il prezzo della call europea è dato da:

$$C(S, v, \tau) = S e^{-q\tau} - \frac{1}{2\pi} \int_{ik_i - \infty}^{ik_i + \infty} e^{-ik \ln S} e^{-r\tau} e^{-ik(r-q)\tau} \frac{K^{ik+1}}{k^2 - ik} \widehat{H}(k, v, \tau) dk. \quad (3.69)$$

Introducendo

$$X = \ln \left( \frac{S e^{-q\tau}}{K e^{-r\tau}} \right) \quad (3.70)$$

e osservando che l'integranda in (3.69) è pari è possibile arrangiare i termini per arrivare al seguente risultato.

**Proposizione 3.3.** *Sia dato un modello a volatilità stocastica che soddisfi le ipotesi 3.1 e si voglia prezzare una Call Europea con prezzo di esercizio  $K$  e time to maturity  $\tau = T - t$ . Supponendo che la fundamental transform  $\widehat{H}(k, v, \tau)$  3.5 sia regolare per  $a < \text{Im } k < b$ . Allora il prezzo è pari a*

$$C(S, v, \tau) = S e^{-q\tau} - K e^{-r\tau} \frac{1}{\pi} \int_0^{ik_i + \infty} e^{-ikX} \frac{\widehat{H}(k, v, \tau)}{k^2 - ik} dk \quad (3.71)$$

$\max[0, a] < \text{Im } k < \min[1, b]$

Questo è il risultato principale del metodo descritto.

*Osservazione 3.11.* Tuttavia è possibile ricavare una formula analoga alla (3.71) su un sottostante che evolve senza drift, evitando l'uso della (3.66).

$$\begin{aligned} \text{Call}(t, S_t) &= DF(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= DF(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(F(0, T) Y_T - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= DF(0, T) F(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(Y_T - \bar{\alpha}, 0) | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (3.72)$$

dove

$$dY_t = g(v_t) Y_t dW_t, \quad Y_0 = 1 \quad (3.73)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{K}{F(0, T)}. \quad (3.74)$$

Sfruttando la (3.71) con sottostante  $Y_t$  si arriva al seguente risultato.



*Proposizione 3.4.* Dato un modello a volatilità stocastica che soddisfi le ipotesi 3.1, una call su un forward  $F(0, T)$  con time-to-maturity  $\tau$  e strike  $K$  ha prezzo pari a

$$C(F(0, T), v, \tau) = DF(0, T)F(0, T) \left( 1 - \bar{\alpha} \frac{1}{\pi} \int_0^{ik_i + \infty} e^{-ikX} \frac{\widehat{H}(k, v, \tau)}{k^2 - ik} dk \right) \quad (3.75)$$

dove  $X = \ln \frac{1}{\bar{\alpha}} = -\ln \bar{\alpha}$ .

Inoltre è possibile ottenere una formula con un integrale definito. Per farlo riscriviamo la (3.75) portando la parte immaginaria nell'integrando. Scegliendo  $k_i = 1/2$

$$C(F(0, T), v, \tau) = DF(0, T)F(0, T) \left( 1 - \frac{\sqrt{\bar{\alpha}}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iuX} \frac{\widehat{H}(u + \frac{1}{2}i, v, \tau)}{u^2 + \frac{1}{4}} du \right)$$

*Osservazione 3.12.* Si osservi come la scelta di  $k_i = \frac{1}{2}$  porta ad avere il termine di reazione nell'EDP (3.67) reale.

Ora sfruttando il cambio di variabile

$$y = \arctan(2u) \quad (3.76)$$

$$dy = \frac{1}{u^2 + \frac{1}{4}} du \quad (3.77)$$

$$u = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{y}{2}\right) \quad (3.78)$$

si ha:

$$C(F(0, T), v, \tau) = DF(0, T)F(0, T) \left( 1 - \frac{\sqrt{\bar{\alpha}}}{\pi} \int_0^\pi e^{-\frac{i}{2} \tan(\frac{y}{2})X} \widehat{H} \left[ \frac{1}{2} \tan\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}i, v, \tau \right] dy \right) \quad (3.79)$$

### 3.2.3 Calibrazione

Affinché un modello sia utilizzabile per prezziare prodotti esotici è necessario capire quale sia l'insieme dei parametri

$$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \quad (3.80)$$

che renda tale modello consistente col mercato. Generalmente tale congruenza la si valuta osservando la differenza tra i prezzi dei prodotti più liquidi presenti sul mercato e quelli restituiti dal modello. Nel mondo *Equity* e *Forex* le quotazioni di mercato vengono espresse in termini di volatilità implicita di Black&Scholes. Si supponga quindi di avere i seguenti dati di mercato:

- $M$  Maturity  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ .
- $N_i$  strikes  $K_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, N_i$  per ogni pillar  $i$ .
- Per ogni *pillar* sono note  $N_i$  valori di volatilità implicita  $\sigma^{mkt}(T_i, K_{ij})$  per ogni strike  $K_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, N_i$ .

Il problema della calibrazione consiste quindi nel trovare  $\Omega$  tale che:

$$\sigma^{model}(T_i, K_{ij}, \Omega) = \sigma^{mkt}(T_i, K_{ij}), \quad \forall i = 1 : M, j = 1 : N_i. \quad (3.81)$$

Si tratta quindi di un problema molto noto in matematica, un problema di inversione. Tuttavia nella pratica il problema è mal posto: non è possibile garantire in alcun modo esistenza e unicità della soluzione  $\Omega$ . Per questo il processo di calibrazione passa ad essere un problema di *ottimizzazione numerica*, che consiste nel trovare

$$\mathbf{x} \in D \text{ tale che } \mathcal{J}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in D} \mathcal{J}(\mathbf{y}) \quad (3.82)$$

dove  $D$  è il dominio delle soluzioni e  $\mathcal{J}(\cdot)$  una funzione di costo.

### Funzione Obiettivo

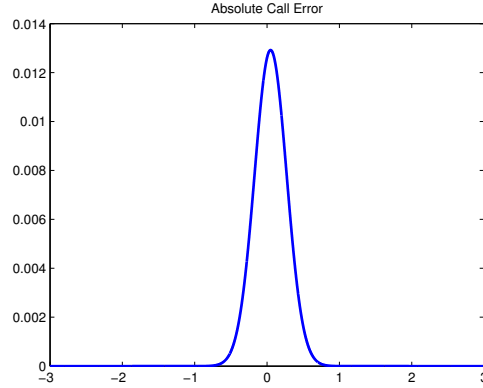
A questo punto ci siamo posti il problema di quale funzione costo, detta anche funzione obiettivo, utilizzare in (3.82). A questo proposito si è deciso di fare un'analisi estensiva sull'impatto che tale scelta ha sull'errore calcolato. Il nostro obiettivo è stato quello di capire quale funzione costo permettesse di pesare uniformemente l'errore commesso intorno all'ATM.

In finanza quantitativa la scelta più *naive* è prendere  $\mathcal{J}(\cdot)$  pari alla somma degli scarti quadratici tra i prezzi delle call europee di modello e di mercato, cioè:

$$\mathcal{J}(\Omega) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} \left( C^{model}(T_i, K_{ij}, \Omega) - C^{mkt}(T_i, K_{ij}) \right)^2 \quad (3.83)$$

Tale scelta porta a pesare maggiormente gli errori commessi *At-The-Money*, in quanto quelli *Out* e *In* dipendono poco dalla volatilità. Per chiarezza si veda la seguente figura, dove si è plottato l'errore assoluto in funzione della log-moneyness. Per farlo si è assunto che i prezzi di mercato siano dati dal modello di Black&Scholes con volatilità  $\bar{\sigma}$ , mentre come modello si è preso ancora Black&Scholes ma con volatilità pari a  $\sigma^{model} = 1.01\bar{\sigma}$ .

Figura 3.2: Errore Assoluto

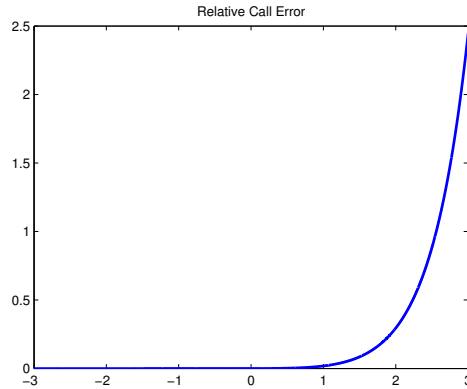


Spesso in letteratura si preferisce utilizzare gli errori relativi:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{C^{model}(T_i, K_{ij}, \boldsymbol{\Omega}) - C^{mkt}(T_i, K_{ij})}{C^{mkt}(T_i, K_{ij})} \right)^2 \quad (3.84)$$

che tuttavia portano ad un grosso problema: andando molto *Out-The-Money* il denominatore va a 0 più velocemente del numeratore, facendo così esplodere i contributi in tale regione.

Figura 3.3: Errore Relativo

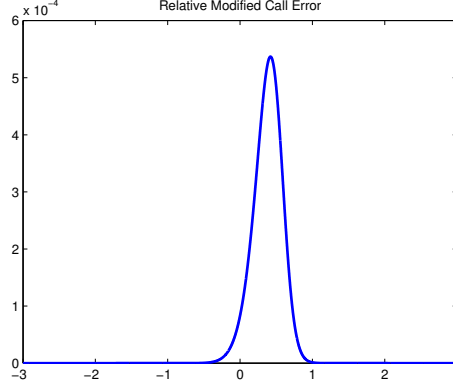


Questo problema può essere risolto con la seguente funzione di costo:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{C^{model}(T_i, K_{ij}, \boldsymbol{\Omega}) + 1}{C^{mkt}(T_i, K_{ij}) + 1} - 1 \right)^2. \quad (3.85)$$

Così facendo quando i prezzi si annullano la funzione rimane sempre ben definita e va anch'essa a 0; tuttavia quest'ultima non ha un peso centrato nell'*ATM*, come si vede in 3.4

Figura 3.4: Errore Relativo Modificato



Dato che le quotazioni sono espresse in termini di volatilità, può risultare più sensato avere una funzione obiettivo in termini di quest'ultima. Per esempio:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{\sigma^{model}(T_i, K_{ij}, \boldsymbol{\Omega}) - \sigma^{mkt}(T_i, K_{ij})}{\sigma^{mkt}(T_i, K_{ij})} \right)^2. \quad (3.86)$$

Questa scelta ha il vantaggio di pesare ciascun contributo in modo omogeneo: la volatilità assume valori in un range abbastanza ristretto e non si annulla al variare dello strike. Tuttavia a livello numerico richiede di risolvere ad ogni passo  $\sum_{i=1}^M N_i$  problemi inversi, andando ad appesantire maggiormente il costo computazionale. Tale procedimento risulta sempre più lento mano a mano che ci si allontana dall'ATM. Inoltre se il modello con un determinato set di parametri restituisse prezzi arbitraggiabili tale inversione sarebbe impossibile, in quanto per le condizioni di non arbitraggio non esiste la volatilità.

Un brillante compromesso tra calibrazione con prezzi e con volatilità è la così detta *calibrazione vega-weighted*, citata da Cont e Tankov in [14]. La funzione di costo diventa

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{C^{model}(T_i, K_{ij}, \boldsymbol{\Omega}) - C^{mkt}(T_i, K_{ij})}{\nu^{mkt}(T_i, K_{ij})} \right)^2, \quad (3.87)$$

dove

$$\nu^{mkt}(T_i, K_{ij}) = \max \left[ \frac{1}{cap}, \frac{\partial C^{mkt}}{\partial \sigma}(T_i, K_{ij}) \right]. \quad (3.88)$$

In questo modo non si devono risolvere problemi di inversione ma si ottiene un'approssimazione al prim'ordine della volatilità. Infatti sviluppando in

serie di Taylor il prezzo della call in funzione della volatilità si ha

$$\begin{aligned} C^{model} &= C^{BS}(\sigma) \\ &= C^{BS}(\sigma_0) + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_0) (\sigma - \sigma_0) + \mathcal{O}(\sigma - \sigma_0). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Dove  $\sigma_0$  è la volatilità implicita di mercato, cioè

$$C^{mkt} = C^{BS}(\sigma_0) \quad (3.90)$$

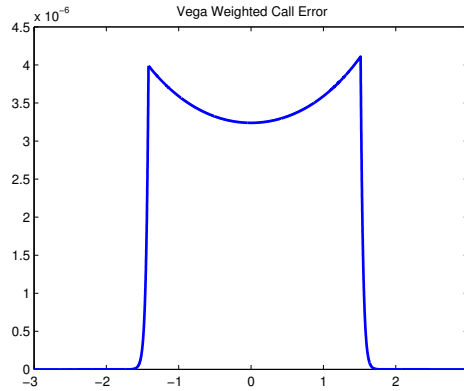
Invertendo tale equazione si ottiene la seguente relazione

$$(\sigma - \sigma_0) \simeq \frac{C^{BS}(\sigma) - C^{BS}(\sigma_0)}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_0)}, \quad (3.91)$$

con la quale è evidente come usando la funzione obiettivo (3.87) si minimizzi al prim'ordine l'errore sulla volatilità implicita.

Inoltre, come si evince da 3.5 in questo caso è possibile andare a pesare grossomodo uniformemente le regioni intorno all'*At-The-Money*, contrariamente a tutti gli altri metodi visti.

Figura 3.5: Errore Vega Weighted



Per questo motivo in questo elaborato si è scelto di sfruttare tale funzione di costo.

### Ottimizzazione non vincolata

Quasi tutti i parametri dei modelli sono vincolati ad assumere valori in una determinata regione dell'asse reale: volatilità iniziale  $v_0$ , mean reversion  $\theta$ , reversion speed  $\kappa$  e vol-of-vol  $\nu$  devono assumere solo valori positivi, mentre la correlazione  $\rho$  valori tra  $-1$  e  $1$ .

Inoltre alcuni modelli possono avere delle condizioni aggiuntive sul processo

stesso, un esempio è la *condizione di Feller* (3.11) nel modello di Heston. Una prima soluzione per tenere conto di questi aspetti consiste nell'utilizzare algoritmi di ottimizzazione vincolata. Questi ad ogni passo controllano che la soluzione rispetti tutti i vincoli del problema, altrimenti tornano alla soluzione precedente e “seguono” una nuova via per il minimo.

Risultano quindi algoritmi molto lenti per costruzione.

Per questo motivo si preferisce utilizzare algoritmi di ottimizzazione libera. Vediamo però come risolvere il problema dei vincoli.

Per quanto riguarda la condizione di Feller (l'unica condizione di questo genere incontrata in questo lavoro) si è semplicemente deciso di non tenerla in considerazione. Infatti se il minimo del funzionale si trovasse in una regione dei parametri in cui essa è violata avrebbe senso prendere dei parametri diversi, dove la condizione è verificata, ma con la conseguenza di prezzare male i prodotti? La risposta è ovviamente negativa. Semplicemente significa che il modello di Heston ha una dinamica intrinsecamente inadeguata per descrivere l'evoluzione del sottostante.

Per quanto riguarda i parametri invece non si fa altro che descriverli attraverso una relazione biunivoca con una variabile che può assumere qualsiasi valore reale, ed andare a ottimizzare variando quest'ultima. Nei nostri casi ciò significa:

$$\forall y > 0 \implies \exists! x \in \mathbb{R} : y = e^x \quad (3.92)$$

$$\forall \rho \in [-1, 1] \implies \exists! x \in \mathbb{R} : \rho = \frac{2}{\pi} \arctan(x) \quad (3.93)$$

L'algoritmo utilizzato è *Levenberg-Marquardt* [38, 43], uno standard per questo tipo di problemi.

### Guess Iniziale

Per sfruttare l'algoritmo è necessario fornire un valore iniziale da cui iniziare la ricerca del minimo. L'influenza del guess di partenza diventa oltre più cruciale nei problemi in cui si hanno più minimi locali. Infatti l'algoritmo stesso si basa su una ricerca locale del punto stazionario. Inoltre tanto più i valori iniziali sono vicini alla soluzione tanto più l'algoritmo convergerà rapidamente. Per questo motivo si è scelto di sfruttare i seguenti *sviluppi asintotici*:

$$\sigma^{BS}(T, K)|_{K=S_0} \simeq v_0 \text{ per } T \rightarrow 0 \quad (3.94)$$

$$\sigma^{BS}(T, K)|_{K=F_T} \simeq \theta \text{ per } T \rightarrow \infty \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial \sigma^{BS}}{\partial K}|_{K=S_0} \simeq \frac{\rho \nu}{2} \text{ per } T \rightarrow 0 \quad (3.96)$$

Prendendo quindi

$$\rho < 0 \quad (3.97)$$

in modo da essere coerenti con il segno della skew, la volo-of-vol è determinata. Per quanto riguarda la reversion speed invece la si è scelta pari a

$$\kappa = \frac{1}{2} \quad (3.98)$$

in modo che il processo ha un periodo di reversione pari a sei mesi.

### Calibrazione a Breve Maturity

Un noto problema nella calibrazione nei modelli diffusivi a volatilità stocastica è rappresentato dalle brevi maturity. Infatti per  $T \rightarrow 0$  lo *skew* presente sul mercato è molto marcato e non può essere spiegato fedelmente da un processo a volatilità stocastica con parametri omogenei nel tempo. Si veda 3.6, dove sono confrontati gli smile di mercato contro quelli ottenuti dal modello iperbolicocalibrato.

Un modo per risolvere il problema potrebbe essere quindi introdurre una struttura a termine nei coefficienti del modello. Tuttavia in questo modo si otterrebbero valori estremi, soprattutto nella vol-of-vol, che andrebbero ad introdurre altri problemi.

Per questo come suggerito in [22] è necessario introdurre dei salti nel processo.

## 3.3 Dinamica Implicita dai Modelli a Volatilità Locale e Stocastica

Veniamo quindi a confrontare il modello a volatilità locale di Dupire con i modelli a volatilità stocastica.

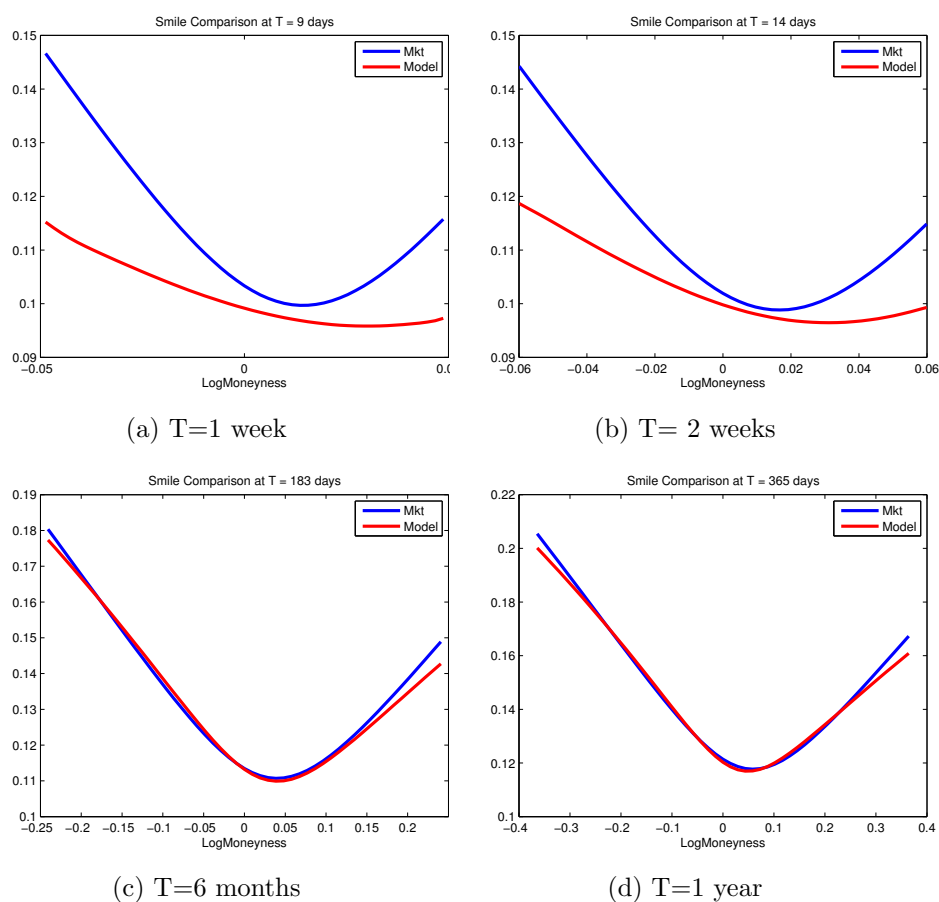
In particolare mostreremo le differenze della dinamica della volatilità implicita intrinseca in queste classi di modelli.

### 3.3.1 Volatilità Implicita Forward

Esaminiamo innanzitutto il problema della volatilità forward. Abbiamo già detto nel capitolo 2 come tale quantità rappresenta la proiezione nel futuro della volatilità implicita spot, per cui dipenderà fortemente dalla dinamica di quest'ultima. Infatti si prenda una opzione *Call forward start* con data di partenza  $T_1$ , strike  $\alpha S_{T_1}$  e scadenza  $T_2 > T_1$ . Il prezzo è dato da

$$\begin{aligned} C(t, T_1, T_2) &= P(t, T_2) \mathbb{E}^Q [(S_{T_2} - \alpha S_{T_1})^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= P(t, T_1) \mathbb{E}^Q \left[ \underbrace{P(T_1, T_2) \mathbb{E}^Q [(S_{T_2} - \alpha S_{T_1})^+ | \mathcal{F}_{T_1}]}_{Call^{model}(S=S_{T_1}, K=\alpha S_{T_1}, \sigma=T_2-T_1)} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Figura 3.6: Confronto tra Smile di Mercato e Calibrati



Gli smile calibrati sono riferiti al modello Iperbolico di Jäckel. La calibrazione è stata ottenuta con l'algoritmo della Fundamental Transform con i seguenti parametri:  $N_v = 500$ ,  $N_T = 100$ . L'integrale è stato calcolato con i pesi di quadratura alla *Gauss-Kronrod*. Maturity calibrate: 3 mesi, 6 mesi, 1 anno, 2 anni; per ciascuna maturity si son considerati solo gli strike tra -2 e 2 standard deviation.



$Call^{model}$  è il prezzo di una call europea che parte in  $T_1$  e scade in  $T_2$ . Il suo valore dipenderà dunque dalla volatilità implicita nella data futura  $T_1$ . Per questo motivo le opzioni forward start dipendono fortemente dalla dinamica della volatilità implicita.

Valutare non correttamente queste opzioni è quindi un segnale della scarsa adeguatezza del modello nel catturare la dinamica del mercato.

Abbiamo già detto come i modelli a volatilità locale presentano una volatilità forward che tende ad essere molto più piatta rispetto a quella del mercato. E' possibile intuirne il motivo in modo euristico. Infatti in questo caso  $Call^{model}$  dipenderà unicamente da  $\sigma(t, S_t)$  per  $t \in [T_1, T_2]$ .

E' quindi intuitivo concludere che

$$T_1 \rightarrow \infty \implies \sigma(t, S_t) \rightarrow \bar{\sigma} = const$$

in quanto la volatilità locale è calibrata sul mercato e la volatilità implicita si appiattisce all'aumentare della maturity, come descritto in [53].

Nei modelli a volatilità stocastica invece  $Call^{model}$  dipenderà da  $f(v_t)$  per  $t \in [T_1, T_2]$ . Essendo  $v_t$  un processo stocastico con parametri omogenei, una volta calibrato esso risulta indipendente dall'istante in cui viene valutato. Per questo motivo i modelli a volatilità stocastica mantengono un smile di volatilità implicita forward realistico, in cui è forte l'effetto dello skew.

Come sottolineato in [8], catturare bene la dinamica della volatilità implicita forward permette di valutare correttamente molti prodotti esotici, come i *cliquet*. Questi altro non sono che una serie di opzioni forward start.

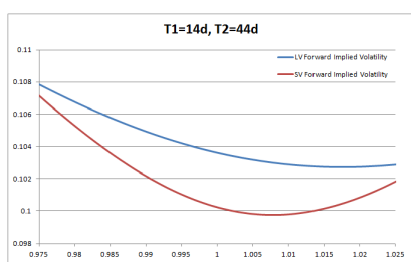
Si è deciso di verificare numericamente quanto appena detto. Per farlo si è deciso di confrontare i prezzi di call europee forward start per varie scadenze ottenuti con la volatilità locale di Dupire e il modello a volatilità iperbolica. A quest'ultimo è stato aggiunto un layer di volatilità locale (si veda il prossimo capitolo) in modo da comparare i risultati dei due modelli a parità di errore di calibrazione. Si veda la figura 3.7 per un confronto grafico dei due modelli.

### 3.3.2 Analisi della Dinamica: Skew e Volatilità Implicita ATM

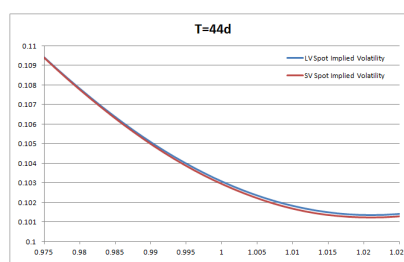
Veniamo ora a vedere cosa accade alla dinamica della volatilità implicita *At The Money* e dello *skew* al variare dei modelli.

In [27] Hagan sostenne che la dinamica degli smile implicata dalla volatilità locale è opposta a quanto si osserva sul mercato. Stando a quanto detto dall'autore infatti quando il prezzo del sottostante si muove lo smile lo "segue" spostandosi nella stessa direzione, ovvero quando lo spot aumenta lo smile scivola a destra, mentre quando decresce si sposta a sinistra. I modelli a volatilità locale invece, sempre secondo quanto scritto dallo stesso Hagan, hanno un comportamento opposto: lo smile di volatilità implicita si sposta in direzione opposta rispetto al valore dello spot.

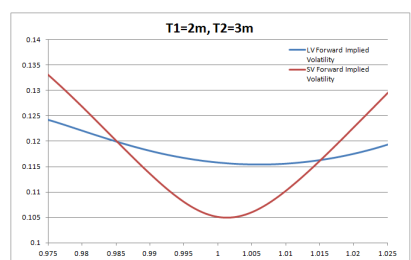
Figura 3.7: Forward e Spot Skew a Confronto



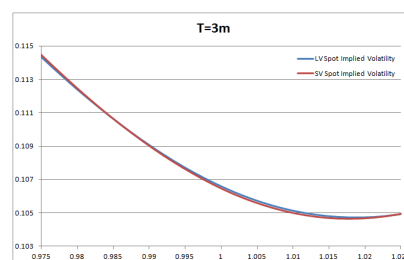
(a) Volatilità Implicita Forward



(b) Volatilità Implicita Spot



(c) Volatilità Implicita Forward

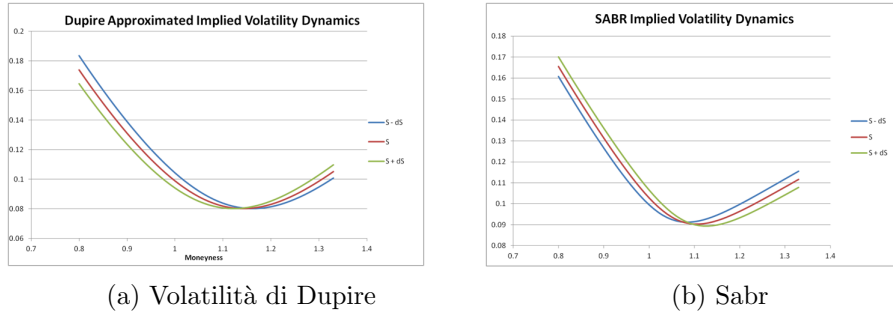


(d) Volatilità Implicita Spot

I grafici sono stati ottenuti con volatilità locale alla Dupire e processo a volatilità stocastica iperbolica con *layer* di volatilità locale per migliorare la calibrazione sulla superficie. Dai grafici si evince come entrambi i modelli abbiano distribuzioni marginali identiche, ma distribuzione congiunta differente. Quest'ultima risulta irrealistica per la volatilità locale, con la quale è evidente l'effetto di "flattening". Le date forward sono  $T_1 = 14d$ ,  $T_2 = 44d$  per il grafico in alto e  $T_1 = 2m$ ,  $T_2 = 3m$ . In entrambi i casi nel calcolo della volatilità spot si è preso  $T = T_2$ .

Per ovviare a questo problema gli autori proposero l'utilizzo del SABR (2.30) che, come si vede in 3.8, sembra riuscire a risolvere il problema della volatilità locale. Il grafico è stato ottenuto implementando la formula (2.31), dove mantenendo i parametri uguali è stato variato il valore dello spot.

Figura 3.8: Dinamica Smile di Volatilità Implicita



Sabr generato con i seguenti parametri:  $f = 1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\nu = 0.8$  e  $\rho = -0.5$ . La volatilità locale è stata calcolata sulla superficie implicita dal Sabr con identici parametri. Si può apprezzare come i comportamenti dello smile nei due modelli siano esattamente opposti.

A onor del vero la dinamica locale indotta dal Sabr calcolata in [27] non è quella corretta. Infatti gli autori si erano limitati a calcolare la volatilità implicita modificando solamente il forward

$$\begin{aligned} f &\rightarrow f + \Delta f \\ \alpha &\rightarrow \alpha \end{aligned}$$

non tenendo in alcun modo conto della correlazione tra spot e volatilità istantanea, per la quale una modifica nel valore dello spot deve portare ad una modifica nel valore di volatilità iniziale  $\alpha$ .

Per arrivare ad un risultato più realistico ci rifacciamo a quanto svolto in [5], in cui si è tenuto conto della correzione media nella volatilità stocastica. Il nuovo scenario si presenta come

$$\begin{aligned} f &\rightarrow f + \Delta f \\ \alpha &\rightarrow \alpha + \delta_f \alpha. \end{aligned}$$

Riscrivendo la dinamica del modello in modo conveniente si ha

$$\begin{aligned} df_t &= \alpha_t f_t^\beta dW_t \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t (\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t) \end{aligned}$$

che implica

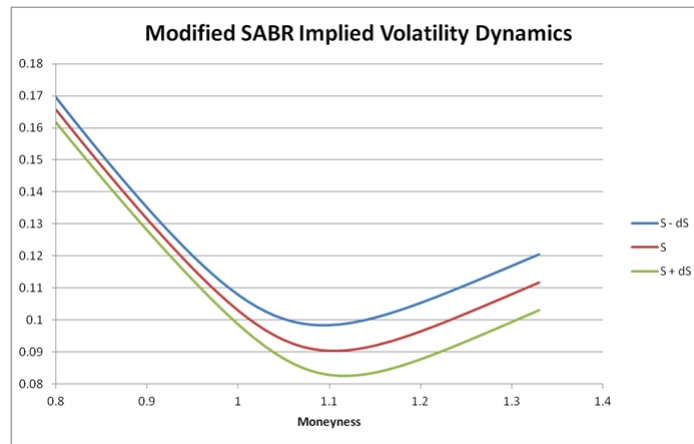
$$d\alpha_t = \frac{\rho\nu}{f_t^\beta} df_t + \nu \alpha_t \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t. \quad (3.100)$$

Prendendo il valore atteso otteniamo la correzione media della volatilità istantanea

$$\delta_f \alpha = \frac{\rho \nu}{f_t^\beta} \Delta f. \quad (3.101)$$

Calcolando ora la nuova dinamica del Sabr si ottiene un risultato lontano da quello precedente e quindi da quello che si sarebbero aspettati gli autori, come si vede in 3.9. Il nuovo grafico è stato ottenuto analogamente a quanto fatto per la figura 3.8, tenendo in considerazione però la variazione (3.101).

Figura 3.9: Dinamica Sabr con  $\alpha$  modificato



*Osservazione 3.13.* Indagando maggiormente il comportamento della dinamica della volatilità ATM al variare dello spot e per  $T \rightarrow 0$  si è scoperto come, almeno localmente, essa sia indipendente dal modello diffusivo considerato. Per semplicità si sono confrontati il *Sabr* (con  $\beta = 1$ ) come modello a volatilità stocastica e la volatilità locale pari a

$$\sigma_{loc}(K, S_0) = \sqrt{\alpha_0^2 + 2\alpha_0\nu\rho \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + \nu^2 \ln^2\left(\frac{K}{S_0}\right)}. \quad (3.102)$$

Come spiegato in [26] questi due modelli generano lo stesso smile di volatilità implicita a parità di parametri.

La dinamica della volatilità implicita ATM è stata calcolata nei due casi con le seguenti formule asintotiche per  $T \rightarrow 0$

$$\sigma_{ATM}^{SV} \simeq \alpha_0 \quad (3.103)$$

$$\sigma_{ATM}^{LV} \simeq \sigma^{loc}(S_0) \quad (3.104)$$

Osservando la figura 3.10a si può apprezzare come per piccoli spostamenti la dinamica sia influenzata pressoché unicamente dallo skew di mercato e non dal modello.

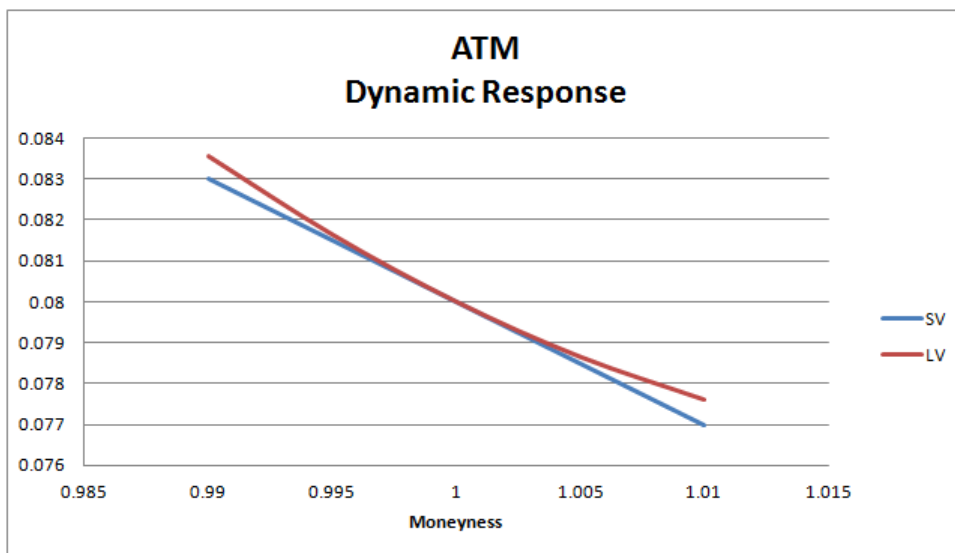
Discorso diverso vale per la dinamica dello skew. Quest'ultimo infatti è molto differente a seconda che si usi un modello a volatilità locale o stocastica. Prendendo ad esempio gli sviluppi asintotici in [22] si ha per  $T \rightarrow 0$ :

$$skew_{ATM}^{SV} \simeq \frac{\rho\nu}{2} \quad (3.105)$$

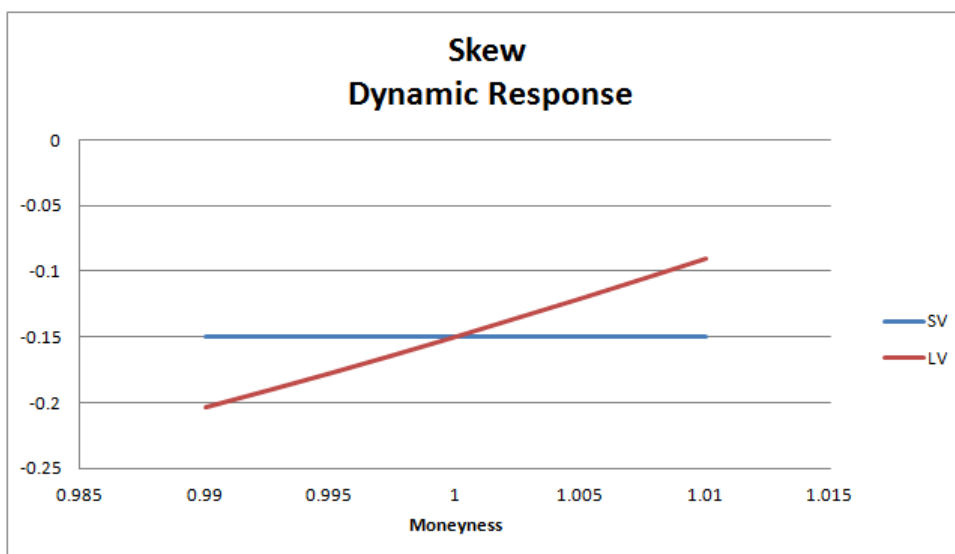
$$skew_{ATM}^{LV} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial K} \sigma^{loc}(S_0), \quad (3.106)$$

dalle quali è evidente come lo skew nei modelli a volatilità stocastica rimane localmente costante, mentre nei modelli a volatilità locale cambia al variare di  $S_0$ . A conferma di quanto detto si veda 3.10b.

In conclusione i risultati appena ottenuti ci suggeriscono che i prodotti il cui prezzo dipende dalla dinamica dello skew saranno impattati dalla scelta del modello di volatilità. Nel prossimo capitolo andremo a presentare una classe di modelli in cui è possibile imporre la dinamica dello skew implicito senza però rinunciare ad una buona calibrazione alla superficie di volatilità implicita.



(a) Dinamica Volatilità ATM



(b) Dinamica Skew ATM

Parametri dei modelli:  $\alpha = 0.08$ ,  $\nu = 1$  e  $\rho = -0.3$ .

## Capitolo 4

# Modelli a Volatilità Locale-Stocastica

I modelli fin qui presentati, sia a volatilità locale che stocastica, pur soffrendo di alcuni problemi riescono a replicare abbastanza bene i prezzi delle *plain vanilla* presenti sul mercato.

Tuttavia il prezzo di altri prodotti path-dependent, come le opzioni barriera, non vengono influenzati unicamente dal valore della volatilità implicita, ma dipendono fortemente dalla sua dinamica [8].

Come sottolineato in [51], per approssimare bene la dinamica della volatilità intrinseca nel mercato è necessario replicare i prezzi delle opzioni esotiche liquide. Infatti come visto in (2.17) i prezzi delle *plain vanilla* forniscono solamente informazioni sulle densità marginali.

Dato che i modelli visti finora sono determinati completamente da tali prezzi, essi non offrono alcun tipo di flessibilità per tenere in conto questa “extra dimensione” presente nel mercato.

Questo problema assume notevole rilevanza nel mercato *Forex*, dove sono presenti diverse opzioni barriera molto liquide. Essere consistenti con i prezzi di queste ultime diventa quindi cruciale nella scelta del modello finanziario, in modo da garantire un corretto pricing di opzioni ancor più esotiche.

Come si può leggere in [33], un classico esempio di quanto detto è offerto dal caso delle *Double No Touch*, una delle opzioni più scambiate nel mercato FX. Esse pagano una unità di valuta domestica a scadenza se il tasso di cambio (quotato come valuta domestica su valuta straniera) non è mai stato scambiato a valori inferiori a  $L$  o superiori a  $U$ . Queste opzioni vengono sottoprezzate da modelli a volatilità locale e sovrapprezzate da quelli a volatilità stocastica.

Per risolvere questo mispricing l’approccio adottato dall’industria finanziaria negli ultimi anni è stata quella di mixare i due approcci finora adoperati, dando vita ai *modelli a volatilità locale-stocastica*.

## 4.1 Modello

Andiamo a definire questa nuova classe di modelli.

**Definizione 4.1.** *Un modello a volatilità locale stocastica è definito dal seguente sistema di EDS:*

$$dS_t = (r - q)S_t dt + L(S_t, t)f(v_t)dW_t^1 \quad (4.1)$$

$$dv_t = \alpha(t, v_t)dt + \lambda\beta(t, v_t)dW_t^2 \quad (4.2)$$

$$\mathbb{E} [dW_t^1 dW_t^2] = \rho(t, v_t)dt \quad (4.3)$$

dove  $\lambda \in [0, 1]$  è detto mixing factor e  $L(S_t, t)$  Leverage Function.

Come è intuibile, a seconda del valore di  $\lambda$  si pesa maggiormente una delle due parti, locale o stocastica. Per  $\lambda = 0$  si ricade nel caso di volatilità locale pura, mentre per  $\lambda = 1$  si va a pesare al massimo l'effetto stocastico. La leverage function  $L(S_t, t)$  rappresenta la parte locale del processo ma, come vedremo, non coincide con la volatilità di Dupire. Intuitivamente è una funzione il cui scopo consiste nel correggere gli smile di volatilità implicita ottenuti con la parte stocastica spingendoli verso quelli di mercato. Infatti anche se usassimo un processo di volatilità stocastica calibrato perfettamente sul mercato l'azione di mixing va a modificare i risultati ottenuti, che quindi necessitano di essere corretti.

*Osservazione 4.1.* D'ora in avanti ci si riferirà con modello a volatilità stocastica a modelli della forma 4.1 con mixing factor  $\lambda$  pari a 1.

*Osservazione 4.2.* In letteratura si trovano modelli della forma 4.1 in cui il mixing factor è presente anche nel termine di correlazione

$$\mathbb{E} [dW_t^1 dW_t^2] = \lambda\rho(t, v_t)dt. \quad (4.4)$$

Questa scelta non ci è sembrata necessaria, in quanto l'effetto di mixare lo skew e la convexity della superficie di volatilità lo si ottiene anche solo con il termine di mixing davanti alla vol-of-vol.

*Osservazione 4.3.* Va altresì osservato come la formulazione nella definizione 4.1 sia molto generale ed includa tutti i casi visti finora. Ad esempio si riottiene il framework di Black&Scholes prendendo  $L(S_t, t) = S_t$  e  $f(v_t) = v_0$ .

## 4.2 Condizione di Calibrazione

Il processo di calibrazione per i modelli a volatilità locale-stocastica presenta una procedura generica, qualunque sia la volatilità locale considerata e per qualunque processo  $v_t$  preso in esame.

Tale metodo può essere riassunto nei seguenti passi:



1. Si calibri la volatilità locale  $\sigma_{loc}(K; T)$
2. Si calibrino i parametri del processo a volatilità stocastica pura  $v_t$
3. Si applichi il contributo del *mixing factor*  $\lambda$
4. Si calibri la correzione locale, i.e. la *Leverage Function*,  $L(K, T)$

Nel nostro caso il passo 1 non è presente in quanto ci siamo avvalsi della volatilità locale di Dupire.

Per il passo 2 invece ci si rifà a quanto detto nel capitolo precedente.

Non rimane quindi che discutere come risolvere l'ultimo punto.

### 4.2.1 Leverage Function

Come detto la parte locale  $L(K, T)$  ha l'obbiettivo di correggere l'errore sul fitting della superficie di volatilità implicita dovuto, in primis, alla difficoltà dei processi a volatilità stocastica di matchare sia le scadenze a breve che le code e, secondariamente, all'effetto del mixing factor.

La calibrazione è basata sul teorema di Gyongy (2.1). Infatti sfruttando la proposizione 2.3 si ha che la volatilità locale del processo 4.1 è pari a

$$\sigma_{loc}^2(K, T) = \mathbb{E}^Q \left[ (L(S_T, T) f(v_T))^2 | S_T = K \right] \quad (4.5)$$

$$= L(K, T)^2 \mathbb{E}^Q [f(v_T)^2 | S_T = K], \quad (4.6)$$

dove la leverage function è uscita dal valore atteso in quanto è deterministica. Il processo è quindi perfettamente calibrato agli smile di mercato se e solo se (4.6) è pari alla varianza di Dupire (o nel caso generico ad una volatilità locale calibrata sul mercato), cioè

$$\sigma_{loc}(K, T) = \sigma_{Dup}(K, T). \quad (4.7)$$

E' quindi immediato concludere che

$$L(K, T) = \frac{\sigma_{Dup}(K, T)}{\sqrt{\mathbb{E}^Q [f(v_T)^2 | S_T = K]}} \quad (4.8)$$

Quindi l'unica cosa che manca è calcolare il valore atteso a denominatore. Sfruttando delle semplici regole probabilistiche è possibile esprimere il denominatore in funzione della probabilità congiunta  $p(t, S_t, v_t)$  di  $(S_t, v_t)$ .

$$\mathbb{E}^Q [f(v_t)^2 | S_t = K] = \int_0^{+\infty} f(v)^2 p_{v_t | S_t=K}(t, v) dv \quad (4.9)$$

$$= \int_0^{+\infty} f(v)^2 \frac{p_{S_t, v_t}(t, K, v)}{p_{S_t}(t, K)} dv \quad (4.10)$$

$$= \frac{\int_0^{+\infty} f(v)^2 p_{S_t, v_t}(t, K, v) dv}{\int_0^{+\infty} p_{S_t, v_t}(t, K, v) dv} \quad (4.11)$$

Sfruttando questa formulazione otteniamo la leverage function nella seguente forma:

$$L(t, S, p) = \sigma_{Dup}(t, S) \sqrt{\frac{\int p(t, S, v) dv}{\int f(v)^2 p(t, S, v) dv}} \quad (4.12)$$

dove si è voluta rimarcare la dipendenza di  $L$  dalla distribuzione congiunta  $p(t, S, v)$ .

Calibrare la leverage function equivale quindi ad approssimare tale densità di probabilità.

#### 4.2.2 EDS Non Lineari di McKean

L'evoluzione del sottostante nel modello 4.1 segue quindi la seguente EDS

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma_{Dup}(t, S_t) \sqrt{\frac{\int p(t, S_t, u) du}{\int f(v)^2 p(t, S_t, u) du}} f(v_t) dW_t^1. \quad (4.13)$$

Tale dinamica rientra nella classe delle *equazioni Non Lineari di McKean*.

**Definizione 4.2.** *Un processo stocastico  $n$ -dimensionale  $X$  è detto di McKean se i coefficienti di drift e diffusione non dipendono unicamente dal tempo  $t$  dal valore corrente  $X_t$ , ma anche dalla distribuzione di probabilità di  $X_t$ . La sua dinamica è quindi data da:*

$$dX_t = \mu(t, X_t, \mathbb{P}_t) dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{P}_t) dW_t, \quad (4.14)$$

dove  $\mathbb{P}_t = \mathcal{L}(X_t)$  e  $W_t$  è un moto browniano  $d$ -dimensionale.

L'equazione di Fokker-Planck (2.12) per (4.14) è pari a

$$\begin{aligned} \partial_t p &= - \sum_{i=1}^n \partial_i (\mu_i(t, X_t, \mathbb{P}_t) p(t, x)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} \left( \sum_{k=1}^n \sigma_k^i(t, X_t, \mathbb{P}_t) \sigma_k^j(t, X_t, \mathbb{P}_t) p(t, x) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t, x) = \delta(x - X_0) \quad (4.16)$$

dove  $\delta(\cdot)$  è la *delta di Dirac*.

L'equazione (4.15) è non-lineare poiché sia  $\mu_i(t, X_t, \mathbb{P}_t)$  che  $\sigma_k^i(t, X_t, \mathbb{P}_t)$  dipendono dalla soluzione  $p$ .

Per questo motivo le EDS di McKean vengono anche dette *Equazioni non lineari di McKean*.

Anche per questa classe di processi esiste un risultato di esistenza e unicità a patto che i coefficienti soddisfino una condizione di lipschitzianità in  $X$  (e di crescita lineare) e in  $\mathbb{P}$ ; per i dettagli si veda [24].

Tuttavia tale risultato non può essere applicato alla (4.13) dato che la condizione di Lipschitzianità non è verificata. Quindi l'esistenza e unicità della soluzione di 4.1 non è del tutto ovvia. Empiricamente per esempio si osserva che per valori molto alti di vol-of-vol il processo di calibrazione non converge, qualsiasi sia l'algoritmo utilizzato.

### 4.3 Particle Method

Il primo approccio per calibrare i modelli 4.1 è stato quello di risolvere numericamente la relativa Fokker-Planck bidimensionale, così da poter calcolare gli integrali in (4.12) con delle formule di quadratura. Non si è intrapresa questa via in quanto la risoluzione dell'EDP bidimensionale presenta numerose difficoltà tecniche; inoltre non è possibile applicarlo a modelli multifattoriali. Come riferimento si veda [40, 13].

Un altro metodo per calibrare tali modelli è basato sul metodo delle proiezioni markoviane [29], tuttavia è stato scartato poiché fornisce solamente una soluzione approssimata.

Una ulteriore via, basata su un approccio Monte Carlo, la si può trovare in [54]: in questo caso Van der Stoep e gli altri autori proposero di stimare la densità di probabilità attraverso l'istogramma<sup>1</sup>. A questo approccio si è però preferito il *Particle Method* di Guyon ed Henry-Labordère [25]: quest'ultimo infatti è sempre basato sul Monte Carlo ma presenta una ben più solida teoria per la stima della distribuzione  $\mathbb{P}_t$ , che può inglobare al suo interno il metodo di Van der Stoep.

#### 4.3.1 Metodo per EDS di McKean-Vlasov

La simulazione stocastica dei processi di McKean non rientra nel framework dei classici metodi Monte Carlo per una EDS generica.

In questo caso infatti ciascuna traiettoria dipende a sua volta dalla posizione di tutte le altre. Sfruttando la terminologia della *fisica statistica* si preferisce perciò parlare dell'evoluzione di *particelle* anziché traiettorie; per questo motivo il metodo di simulazione di questi processi è detto *Particle Method*. Tale approccio risulta naturale e molto intuitivo.

Essenzialmente consiste nel sostituire la legge di probabilità  $\mathbb{P}_t$  presente nei coefficienti del processo con la relativa distribuzione empirica  $\mathbb{P}_t^N$ .

Per vederlo prendiamo un *processo di McKean-Vlasov*, in cui i coefficienti

<sup>1</sup>Come descritto in [50], l'istogramma è molto utile per presentare i dati, mentre presenta numerosi problemi per la stima della densità.

in (4.14) hanno la seguente forma

$$\mu_i(t, x, \mathbb{P}_t) = \mathbb{E} [\mu_i(t, x, X_t)] = \int \mu_i(t, x, y) \mathbb{P}_t(dy) \quad (4.17)$$

$$\sigma_i^j(t, x, \mathbb{P}_t) = \mathbb{E} [\sigma_i^j(t, x, X_t)] = \int \sigma_i^j(t, x, y) \mathbb{P}_t(dy). \quad (4.18)$$

Si supponga quindi di avere  $N$  particelle  $(X_t^{i,N})_{i=1,\dots,N}$  soluzioni dello spazio  $(\mathbb{R}^n)^N$  e si consideri la densità di probabilità empirica

$$\mathbb{P}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}. \quad (4.19)$$

Sostituendola in (4.14) si ottiene

$$dX_t^{i,N} = \mu(t, X_t^{i,N}, \mathbb{P}_t^N)dt + \sigma(t, X_t^{i,N}, \mathbb{P}_t^N)dW_t^i, \quad \mathcal{L}(X_0^{i,N}) = \mathbb{P}_0, \quad (4.20)$$

in cui  $\{W_t^i\}_{1 \leq i \leq N}$  sono  $N$  moti browniani  $d$ -dimensionali indipendenti.

Con i coefficienti del caso McKean-Vlasov l'EDS diventa banalmente

$$dX_t^{i,N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu(t, X_t^{i,N}, X_t^{j,N})dt + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sigma(t, X_t^{i,N}, X_t^{j,N})dW_t^i, \quad (4.21)$$

dove si vede chiaramente l'interazione tra le varie particelle: non è sufficiente infatti conoscere  $t$  e  $X_t^{i,N}$  per trovare  $X_{t+dt}^{i,N}$ .

*Osservazione 4.4.* Le EDS di McKean-Vlasov soddisfano le ipotesi di esistenza e unicità della soluzione. Inoltre per questa classe di processi è possibile dimostrare la convergenza del Particle Method in  $L^1$ : data una funzione  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$  (spazio delle funzioni continue e limitate in  $\mathbb{R}^n$ ) e  $t > 0$  vale

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(X_t^{i,N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int \varphi(x) p(t, x) dx \quad (4.22)$$

dove  $p(t, x) = \mathcal{L}(X_t)$ .

L'equazione (4.22) può essere interpretata richiamando la *Teoria della Propagazione del Caos*. Intuitivamente quest'ultima afferma che se a  $t = 0$  le particelle  $X_0^{i,N}$  sono particelle indipendenti tra loro, allora per  $N \rightarrow \infty$  e per qualsiasi  $t > 0$  fissato si ha che  $X_t^{i,N}$  sono asintoticamente indipendenti tra loro e la loro distribuzione empirica  $\mathbb{P}_t^N$  converge in legge a  $\mathbb{P}_t$ .

Per ulteriori dettagli si rimanda a [24].

### 4.3.2 Metodo per LSV

Vediamo come sfruttare questa teoria nei modelli a volatilità locale-stocastica. Sostituendo la distribuzione empirica  $p_N(t, S_t, v_t)$ , il valore atteso in (4.8) diventa pari a

$$\mathbb{E}^{Q_t^N} [f(v_t)^2 | S_t = K] = \frac{\int_0^{+\infty} f(v)^2 p_N(t, K, v) dv}{\int_0^{+\infty} p_N(t, K, v) dv} \quad (4.23)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^N \left( f(v_t^{i,N}) \right)^2 \delta \left( S_t^{i,N} - K \right)}{\sum_{i=1}^N \delta \left( S_t^{i,N} - K \right)}. \quad (4.24)$$

Così facendo la parte locale del modello diventa

$$L_N(t, S) = \sigma_{Dup}(t, S) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \delta \left( S_t^{i,N} - S \right)}{\sum_{i=1}^N \left( f(v_t^{i,N}) \right)^2 \delta \left( S_t^{i,N} - S \right)}}. \quad (4.25)$$

Il problema in questo caso consiste nell'approssimare le *delta di Dirac* che, come suggerito in [50], verrà approssimata mediante i *kernel regolarizzatori*, di cui discuteremo approfonditamente dopo. In questo modo si ottiene:

$$L_N(t, S) = \sigma_{Dup}(t, S) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \delta_{t,N} \left( S_t^{i,N} - S \right)}{\sum_{i=1}^N \left( f(v_t^{i,N}) \right)^2 \delta_{t,N} \left( S_t^{i,N} - S \right)}}. \quad (4.26)$$

Supponendo quindi di conoscere  $L_N(0, S_0)$  si hanno tutti gli ingredienti necessari per la calibrazione.

## 4.4 Limiti e Pregi del Modello

Il principale ostacolo all'utilizzo dei modelli a volatilità locale-stocastica sta proprio nel suo processo di calibrazione. Infatti qualsiasi sia il metodo scelto, ci si deve scontrare sia con varie difficoltà tecniche che con onerosi costi computazionali.

Nel caso del Particle Method quest'ultimo aspetto assume una notevole rilevanza: i metodi di accelerazione che verranno descritti nel prossimo capitolo giocheranno un ruolo cruciale per l'affidabilità e l'utilizzo dell'algoritmo stesso.

Va sottolineato nuovamente come per il processo a volatilità locale-stocastica definito in 4.1 non vi sia alcun risultato di esistenza e unicità della soluzione. Ciò si riflette nella pratica con il fallimento dell'algoritmo di calibrazione per

valori di vol-of-vol troppo elevati (circa 250%), come abbiamo verificato in figura 4.1.

Un altro aspetto che andrebbe indagato più approfonditamente riguarda la stabilità dei parametri del modello e delle sue greche.

Ci si aspetta che un modello in grado di adattarsi bene al sottostante preso in esame ne catturi l'essenza della dinamica. Ciò si traduce nell'avere dei parametri che, una volta calibrati, rimangono costanti nel tempo e non cambino al variare dei dati. Tuttavia questa proprietà è molto difficile da ottenere in finanza, a differenza di quanto accade in altre discipline come la fisica. Si pensi ad esempio al modello di Heston, uno dei più usati nella pratica. Come già detto deve gran parte della sua fama alla possibilità di una rapida calibrazione grazie alle formule semichiusure (3.14). Questo vantaggio nasconde però il difetto di fondo del modello, che non riesce a descrivere adeguatamente il fenomeno osservato e necessita quindi di continui aggiustamenti nei parametri.

*Osservazione 4.5.* Va osservato che non tutti i parametri del modello devono rimanere costanti.

Nei modelli a volatilità stocastica si è scelto di definire come parametro il valore della volatilità iniziale  $v_{t_0}$ . Tuttavia questa definizione non è corretta. In realtà si tratta solamente del valore assunto in  $t_0$  da una variabile del modello. Viene calibrata in quanto non essendo osservabile direttamente la si deve ricavare dai dati di mercato.

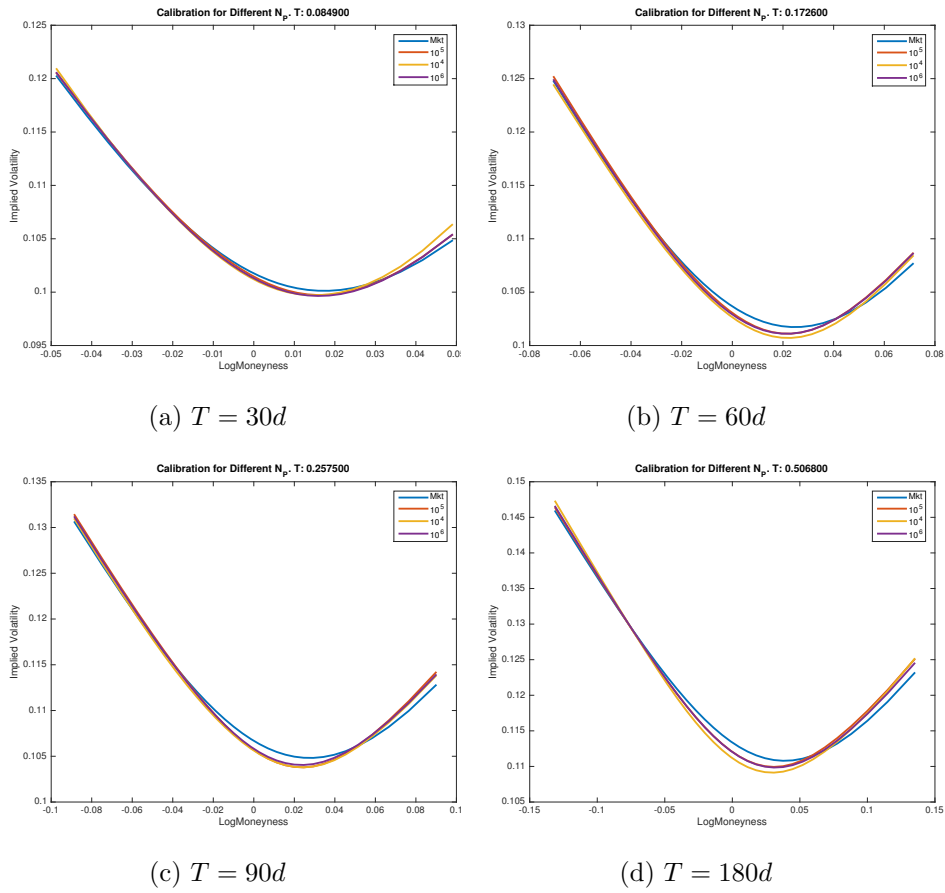
Questo aspetto può essere esteso anche ad altri parametri. Si provi ad immaginare un modello in cui la vol-of-vol  $\nu$  abbia una propria dinamica stocastica. In questo caso varrebbe per  $\nu_{t_0}$  la stessa valutazione fatta precedentemente per  $v_{t_0}$ , ovvero che si tratterebbe di una variabile in grado di cambiare valore.

Da questo punto di vista i modelli a volatilità locale-stocastica non portano alcun miglioramento: il motivo sta tutto nel suo processo di calibrazione. Infatti i parametri del processo a volatilità stocastica vengono calibrati in modo del tutto analogo a quanto si farebbe se si volesse considerare un modello a volatilità stocastica puro.

#### 4.4.1 Mixing Factor e Dinamica della Volatilità Implicita

Il maggior pregio del modello è sicuramente quello di poter *variare la dinamica della volatilità implicita senza mai perdere il fitting sul mercato*. Ciò è possibile andando a variare il *mixing-factor*  $\lambda$  che è a tutti gli effetti un grado di libertà aggiuntivo del modello. Quest'ultimo può essere scelto in due modi. Se ci si trova in un mercato in cui sono presenti prodotti path-dependent molto liquidi, come le barriere nel FX, è possibile calibrarlo sfruttando i

Figura 4.1: Convergenza Particle Method con  $\nu = 2.5$



In questi grafici sono riportati gli smile di Volatilità Implicita del modello Iperbolico ottenuti prezzando le analoghe Call Europee con il metodo MC ( $N_{Sim} = 7 \cdot 10^6$ ,  $M_t = 365|_{1year}$ ). Come si vede con valori di vol-of-vol abbastanza elevato ( $\nu = 2.5$ ) il metodo di calibrazione converge ad una soluzione errata.

prezzi di queste ultime. In caso contrario, è possibile scegliere il valore di  $\lambda$  in modo arbitrario o coerente con una propria view di mercato.

Si veda la figura 4.2: è chiaro come variando  $\lambda$  sia possibile spaziare in tutta la regione compresa tra volatilità locale e stocastica. A 6 mesi la differenza nei prezzi di questi due modelli è pari a circa il 128%, per cui la scelta del mixing factor è fondamentale. Come si osserva in 4.3a,4.3b tale decisione non influisce sulla bontà della calibrazione.

### Opzioni Barriera e Dinamica della Volatilità

Vediamo di capire meglio perché saper replicare adeguatamente i prezzi delle opzioni barriera significhi catturare bene la dinamica della volatilità implicita. Per farlo prendiamo spunto da quanto fatto da Bergomi in [8].

Si supponga di trovarsi nel modello di Black e Scholes e si voglia prezzare un'opzione barriera di tipo *Out* col seguente payoff:

$$\phi(T, S_T) = \begin{cases} f(S_T) & M_t^T < B \\ 0 & M_t^T \geq B, \end{cases} \quad (4.27)$$

dove

$$M_t^T = \max_{t \in [0, T]} S_t. \quad (4.28)$$

Come mostrato in [11], è possibile replicare questo tipo di opzioni con un portafoglio di opzioni europee. In questo caso il portafoglio di replica è pari a

$$\Pi(t) = \begin{cases} f(S_T) & S_T < B \\ -\left(\frac{B}{S_T}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} f\left(\frac{L^2}{S_T}\right) & S_T \geq B. \end{cases} \quad (4.29)$$

Analizziamo in dettaglio come  $\Pi(t)$  replica la barriera. Se il sottostante non tocca mai la barriera il payoff a scadenza è lo stesso in entrambi i casi. Se invece  $S_t$  tocca  $B$  l'opzione cessa di esistere e vale 0, mentre il portafoglio nello stesso istante in cui  $S_t = B$  ha valore nullo per costruzione e può essere liquidato senza alcun esborso.

Supponendo  $f(S_T) = 1$ , il portafoglio è approssimativamente una *Double Digital Europea*. Il prezzo della barriera, espresso in termini di portafoglio di replica, è pari a

$$DD^{BS} = D_{Call}^{BS}(B) - D_{Put}^{BS}(B) = -\left(\frac{\partial Call_K^{BS}}{\partial K}\Big|_{K=B} + \frac{\partial Put_K^{BS}}{\partial K}\Big|_{K=B}\right).$$

Supponiamo ora di trovarci non più nel framework di Black e Scholes ma in un modello che inglobi l'effetto della volatilità implicita. La formula diventa



quindi

$$\begin{aligned}
 DD^{mod} &= - \left( \frac{dCall^{BS}(K, \sigma_K^{imp})}{dK} \Big|_{K=B} + \frac{dPut^{BS}(K, \sigma_K^{imp})}{dK} \Big|_{K=B} \right) \\
 &= - \left( \frac{\partial Call^{BS}(K, \sigma_K^{imp})}{\partial K} \Big|_{K=B} + \frac{\partial Call^{BS}(K, \sigma_K^{imp})}{\partial \sigma_K^{imp}} \Big|_{K=B} \frac{\partial \sigma_K^{imp}}{\partial K} \Big|_{K=B} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial Put^{BS}(K, \sigma_K^{imp})}{\partial K} \Big|_{K=B} + \frac{\partial Put^{BS}(K, \sigma_K^{imp})}{\partial \sigma_K^{imp}} \Big|_{K=B} \frac{\partial \sigma_K^{imp}}{\partial K} \Big|_{K=B} \right).
 \end{aligned}$$

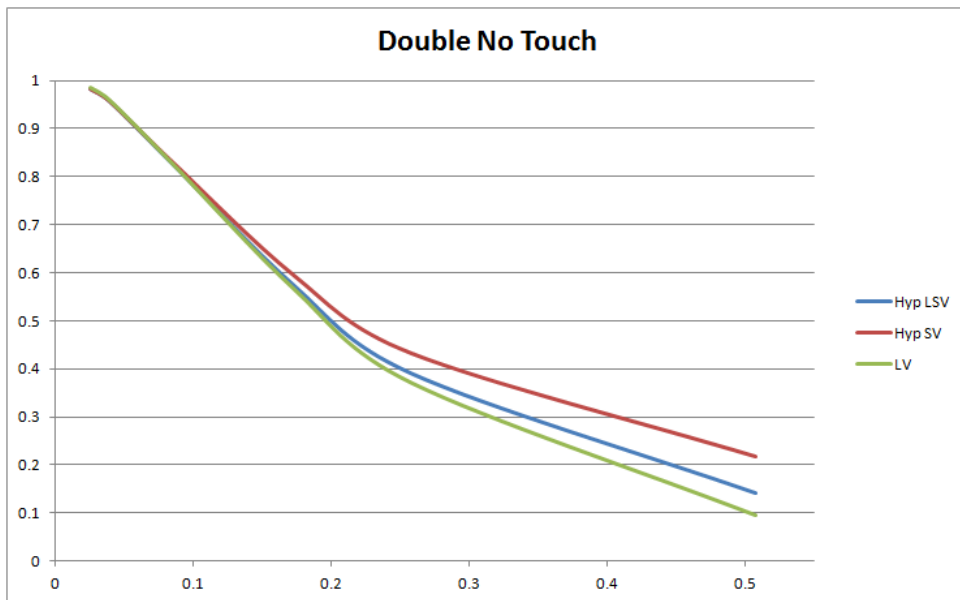
Riscrivendola in termini di Black e Scholes si ottiene

$$DD^{mod} = -DD^{BS}(\sigma_B^{imp}) - 2 \text{vega}^{BS}(B, \sigma_B^{imp}) \frac{\partial \sigma_K^{imp}}{\partial K} \Big|_{K=B}. \quad (4.30)$$

Il prezzo della barriera dipende quindi dal valore dello skew nell'istante futuro in cui il sottostante toccherà la barriera.

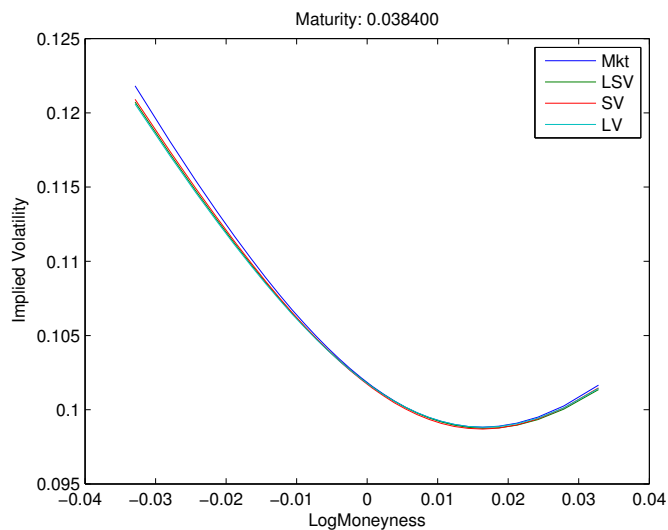
E' possibile quindi concludere che essere in grado di replicare le opzioni barriere liquide sul mercato equivale a cogliere a fondo la dinamica dello skew di volatilità implicita intrinseca nei prezzi di queste ultime.

Figura 4.2: Prezzi DNT al Variare del Mixing Factor  $\lambda$

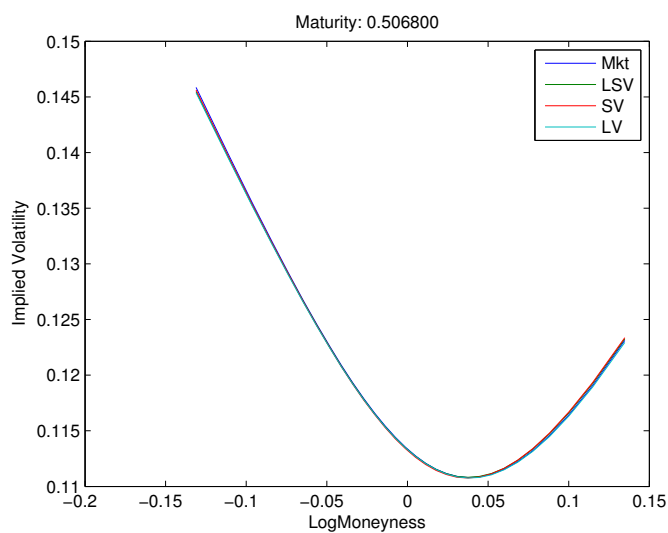


Anche in questo grafico si è preso in esame il modello Iperbolico calibrato. Si è voluto indagare al variare del mixing factor il comportamento in termini di dinamica, prezzando le Double No Touch. LSV:  $\lambda = 0.5$ ; SV:  $\lambda = 1$ ; LV:  $\lambda = 0$ .

Figura 4.3: LSV al Variare del Mixing Factor  $\lambda$



(a) Maturity: 14 giorni



(b) Maturity: 6 mesi

In 4.3a,4.3b si nota come i vari modelli in 4.2 presentano comportamenti così differenti hanno in realtà il medesimo errore di calibrazione. Detto in altri termini, a parità di distribuzioni marginali hanno densità di transizione molto differenti.

## Capitolo 5

# Implementazione e Risultati

Nel mondo della finanza quantitativa il lavoro si divide principalmente in due stadi: in primis vi è lo studio del problema a livello teorico, cercando di inquadralo in qualche modello in base allo scopo o alle specificità richieste; dopo di che vi è il livello pratico, nel quale il modello prende vita sotto forma di codice. Non è detto che una volta trovata una soluzione teorica che soddisfi tutte le richieste che ci si è dati, il risultato pratico sia altrettanto soddisfacente. Anzi sovente sono i casi in letteratura in cui si presentano modelli molto sofisticati che però non trovano spazio nell'industria finanziaria per la loro complessità implementativa.

Il cuore di questo elaborato non è stato perciò solo lo studio dei vari modelli presentati nei capitoli precedenti, ma anche e soprattutto la loro implementazione.

A questo proposito si è data molta attenzione allo sviluppo di una libreria di pricing mediante l'utilizzo del software Matlab<sup>TM</sup>.

Nell'implementazione si è seguito lo stesso ordine con cui sono stati presentati i contenuti in questo elaborato: dapprima ci si è concentrati sul modello della volatilità locale di Dupire, dopodiché si è passati ad implementare i modelli a volatilità stocastica ed infine locale-stocastica.

### 5.1 Volatilità Locale di Dupire

Come già discusso nel capitolo 2 si è scelto di considerare la volatilità locale alla Dupire e non parametrica. La sua implementazione richiede una notevole attenzione ai dettagli, soprattutto per quanto riguarda l'approssimazione delle derivate presenti nella formula (2.27). Nello stesso capitolo si è già discusso sia come trattare la derivata spaziale che quella temporale, si veda il sistema di equazioni (2.34).

Va sottolineato nuovamente come l'uso di passi di discretizzazione relativi e non assoluti faccia la differenza in termini di accuratezza del risultato. In

questo elaborato si è scelto di utilizzare

$$\delta K = 10^{-3} \quad (5.1)$$

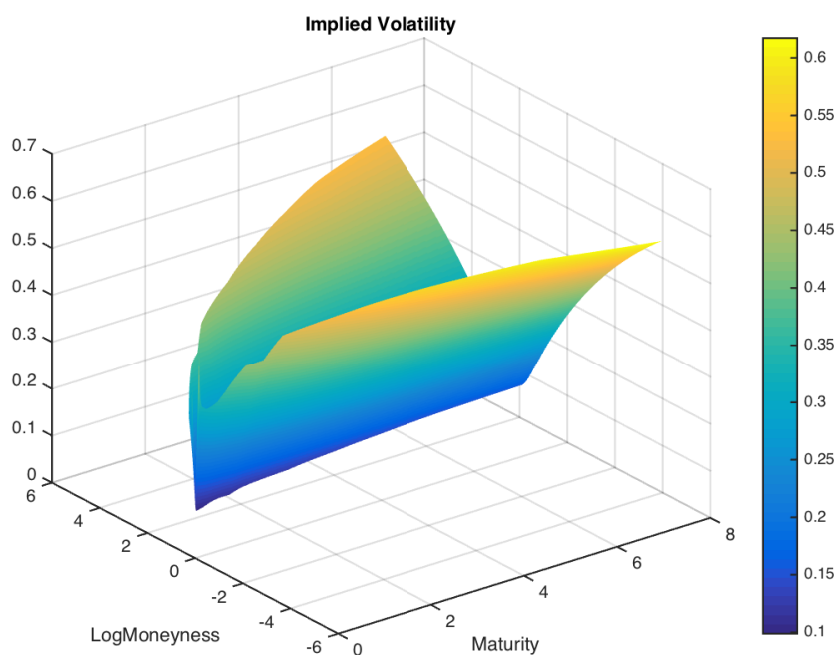
$$\delta t = 10^{-5}. \quad (5.2)$$

### 5.1.1 Superficie Numerica della Volatilità Implicita

Per essere confidenti nell'utilizzare la volatilità di Dupire bisogna essere sicuri sia di avere dei dati di mercato privi di arbitraggio, che di avere un metodo per costruire l'intera superficie di volatilità implicita senza introdurre di nuovi.

Il processo per la costruzione della superficie è già stato descritto nel paragrafo 2.1.4; la superficie di volatilità implicita è osservabile in 5.1.

Figura 5.1: Superficie di Volatilità Implicita



Superficie di volatilità “Forex-like”. Si osservi come lo skew a 2 giorni, la prima quotazione presente, sia molto più marcato rispetto agli altri. Questa è una caratteristica ben nota sul mercato.

In questo paragrafo mostreremo che, con i dati presi in esame, non sono presenti né arbitraggi di butterfly né di calendario. Entrambi i controlli sono stati fatti a livello grafico.

Per quanto riguarda gli arbitraggi di calendario, condizione sufficiente per la loro assenza è avere la volatilità totale implicita

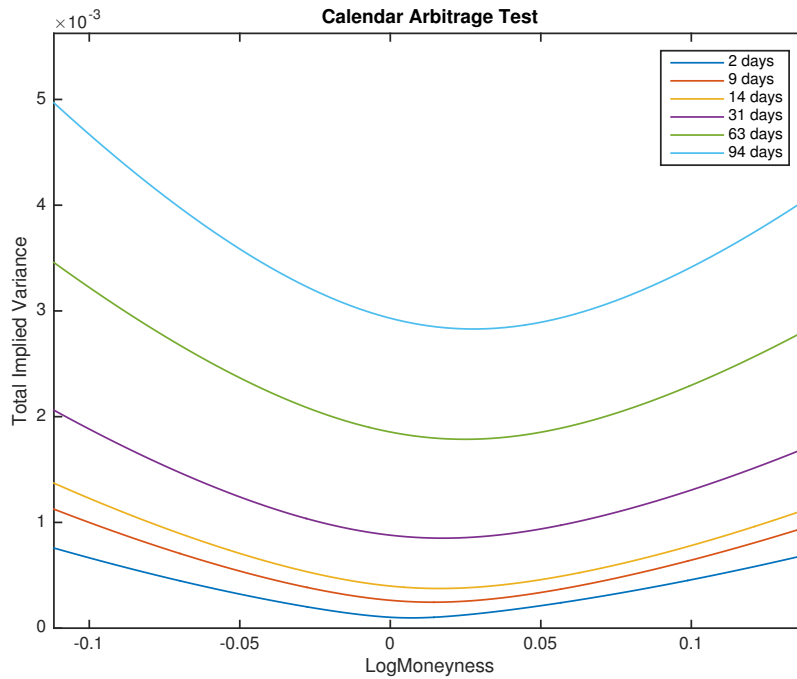
$$\omega(K, T) = T\sigma_{imp}^2(K, T)$$

crescente in  $T$ . Il test grafico consiste quindi nel plottare gli smile  $\omega(K, T)$  per ogni scadenza e assicurarsi che

$$T_1 < T_2 \implies \omega(K, T_1) < \omega(K, T_2) \quad \forall K \quad (5.3)$$

Nel nostro caso il risultato è raffigurato in figura 5.2, nella quale si può apprezzare come tutti gli smile di volatilità totale implicita siano ben separati gli uni dagli altri e crescenti nella maturity.

Figura 5.2: Test Arbitraggi di Calendario

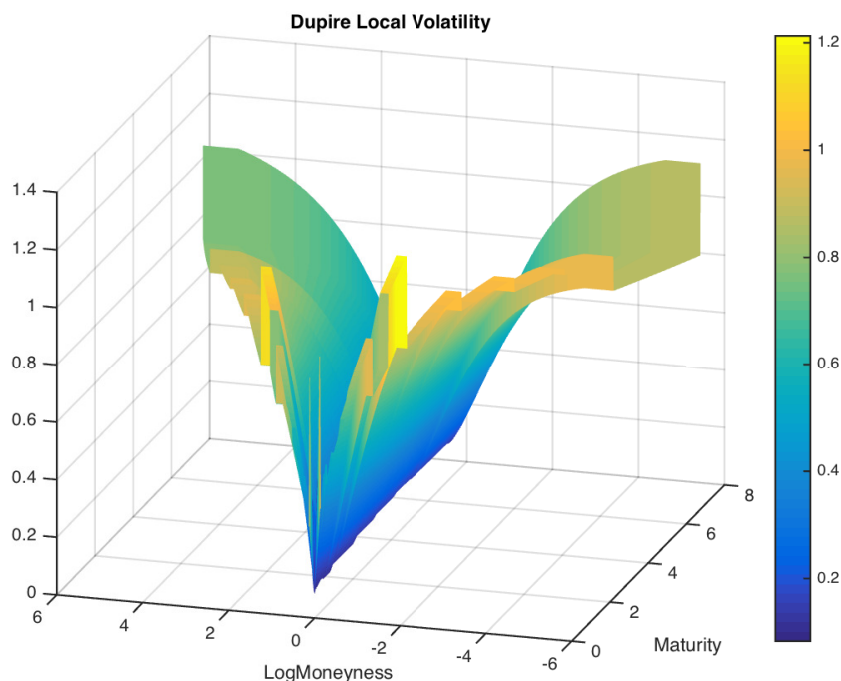


Come si vede all'aumentare della maturity  $T$  gli smile di volatilità totale implicita  $\omega(T, K)$  sono crescenti. Per chiarezza nel grafico sono state considerate solo le prime sei maturity di mercato, ma la proprietà è valida anche per scadenze lunghe.

Come si è già visto nella figura 2.1, per gli arbitraggi di butterfly è sufficiente osservare la *superficie di volatilità locale*: se quest'ultima presenta delle singolarità è indice della presenza di arbitraggi in strike. Nel nostro caso la superficie della volatilità locale è riportata in figura 5.3. Come si può

osservare non vi sono comportamenti sospetti. I salti che si vedono all'aumentare della maturity si trovano in corrispondenza dei *pillar* di mercato e sono causati dalla discontinuità della derivata temporale.

Figura 5.3: Superficie di Volatilità Locale alla Dupire



In figura 5.4 è possibile confrontare gli smile di volatilità implicita contro quelli della volatilità locale per le principali maturity di mercato.

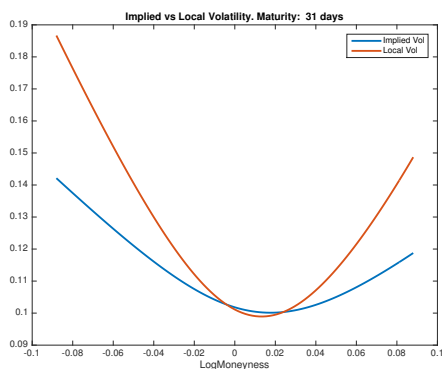
### 5.1.2 Griglia Temporale Pesata

Come si è già sottolineato, l'assenza dei salti nella dinamica del sottostante porta ad una difficoltà maggiore nella calibrazione dei prodotti a breve. Questo effetto si ripercuote sul valore della volatilità locale: come si vede in 5.3 per maturity molto a breve  $\sigma_{loc}(t, S)$  assume valori molto estremi per essere consistente con i dati di mercato.

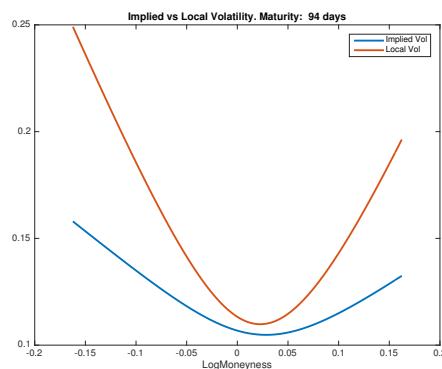
Ciò porta ad avere dei problemi nella valutazione stessa di tutti i prodotti, anche plain-vanilla, attraverso il metodo *Monte Carlo classico*, nel quale i passi temporali vengono discretizzati uniformemente. Vediamo di capire perché.

Discretizzare l'intervallo  $[0, T]$  in  $M$  intervalli, ciascuno di egual lunghezza

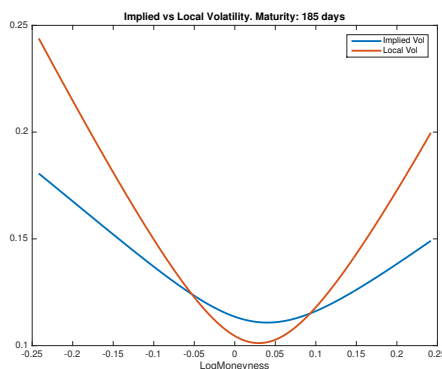
Figura 5.4: Volatilità Implicita vs. Volatilità Locale



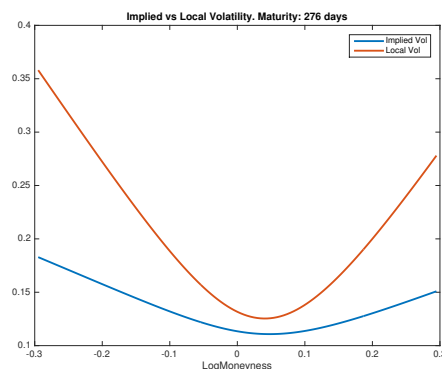
(a)  $T = 1$  mese



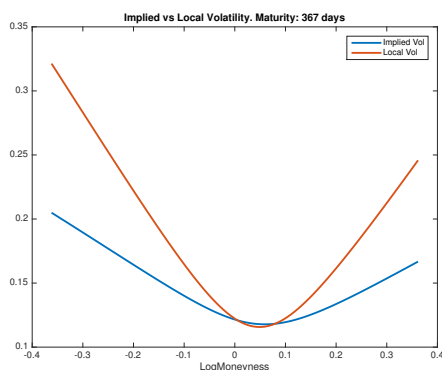
(b)  $T = 3$  mesi



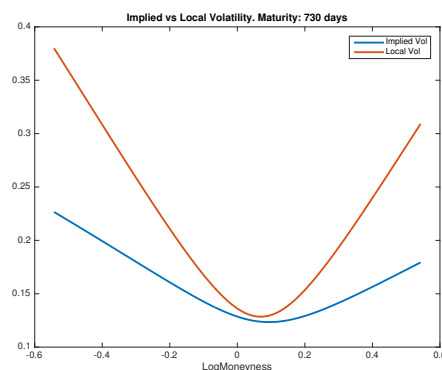
(c)  $T = 6$  mesi



(d)  $T = 9$  mesi



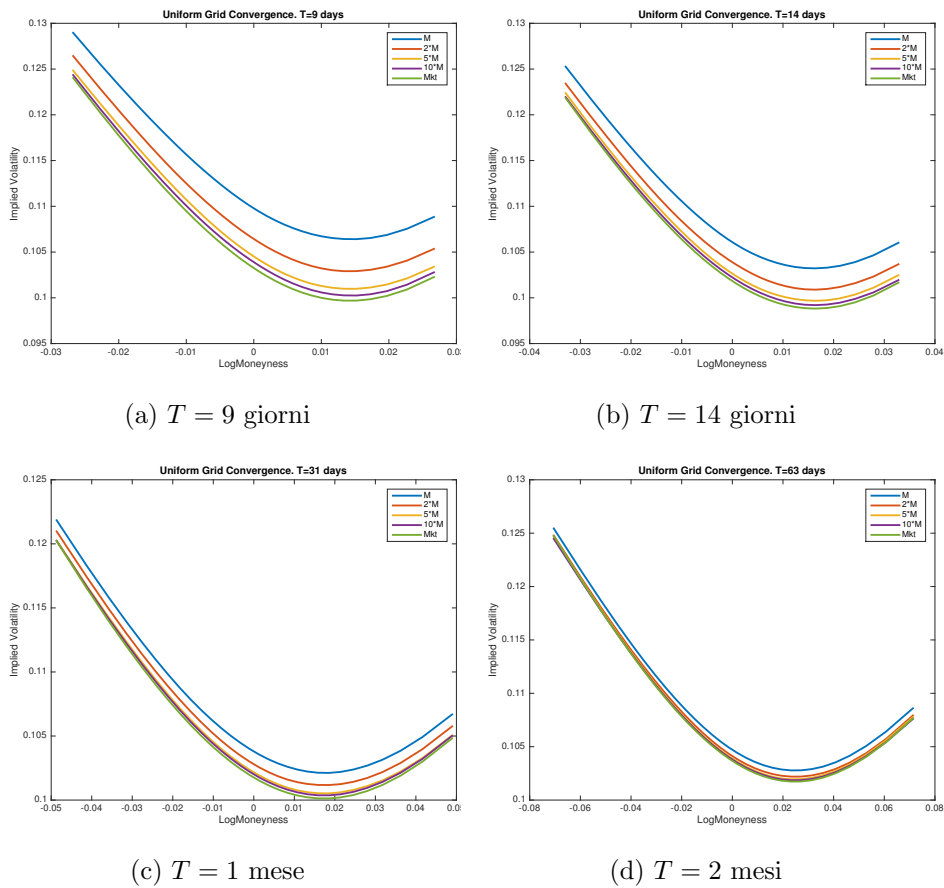
(e)  $T = 1$  anno



(f)  $T = 2$  anni

$dt = T/M$ , è come voler affermare che tutta l'informazione del processo è distribuita equamente da qui alla maturity. Tuttavia non è così. Per quanto detto il sottostante modellizzato con la volatilità di Dupire ha una variabilità molto più marcata in corrispondenza delle prime maturity di mercato e per questo è necessario aumentare molto il numero di punti  $M$  per catturare questa informazione che altrimenti andrebbe persa. Ciò porta ad una convergenza molto lenta del metodo, si veda la seguente figura 5.5, nella quale si vede come per avere un errore accettabile si debbano porre 10 punti temporali in un giorno!

Figura 5.5: Convergenza Griglia Uniforme



Si è analizzata la convergenza della volatilità implicita calcolata attraverso il MC con 7 milioni di simulazioni e una griglia temporale uniformemente distribuita in  $[0, T_{max}]$  con  $T_{max} = 6$  mesi. Si è preso  $M = 185$ , i.e. 365 punti in 1 anno, e si è aumentato tale valore fino a 10 volte. Come si vede per avere un risultato accettabile è necessario arrivare a porre 10 punti in un giorno, uno ogni 2 ore e mezza circa! Va notato come la differenza tende a ridursi mano a mano che T aumenta.



*Osservazione 5.1.* Con griglia uniforme s'intende una griglia equispaziata in  $[0, T]$  a cui si aggiungono i pillar di mercato, i.e. le maturity relative alle quotazioni precedenti  $T$ .

In letteratura non si è trovato un rimedio adeguato a tale problema: l'unico tentativo sembra essere stati quello di Clark [13], il quale propose di discretizzare il processo andando a prendere il coefficiente di diffusione "medio" all'interno di ciascun intervallino, ossia:

$$\begin{aligned}\Delta S(t + dt) &= \hat{\sigma}_{loc}(t, t + dt, S_t) S_t \Delta W_t & (5.4) \\ \hat{\sigma}_{loc}(t, t + dt, S_t) &= \frac{1}{2} \sigma_{loc}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma(t + dt, \mathbb{E}[S_{t+d}|S_t]). & (5.5)\end{aligned}$$

In questo modo si dovrebbe ottenere un valore di volatilità locale più realistico. Tuttavia dopo averlo testato si è potuto concludere che non porta ad alcun miglioramento apprezzabile.

Per questo motivo abbiamo sviluppato un nostro metodo euristico per risolvere il problema.

L'idea di fondo è quella di disporre i punti in modo da raccogliere più informazione possibile dal processo, concentrando un numero maggiore di punti dove ci si aspetta più variabilità.

La regola si basa sul valore della volatilità locale e le sue derivate.

Per ricavarlo prendiamo la dinamica di un processo a volatilità locale espresso in *log-price*  $X_t = \log S_t$ :

$$dX_t = -\frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t. \quad (5.6)$$

Ora vogliamo capire dato  $X_t$  qual è la differenza commessa nella valutazione di  $X_{t+2\Delta}$  se si fa uno o due passi. Ciò si traduce nel capire che differenza ci sia tra queste due discretizzazioni

$$\hat{X}_{t+2\Delta t} - X_t = -\frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) 2\Delta t + \sigma(t, X_t) (\sqrt{\Delta t} Z_1 + \sqrt{\Delta t} Z_2) \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}\bar{X}_{t+2\Delta t} - X_t &= -\frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2(t + \Delta t, X_{t+\Delta t}) \Delta t \\ &\quad + \sigma(t, X_t) \sqrt{\Delta t} Z_1 + \sigma(t + \Delta t, X_{t+\Delta t}) \sqrt{\Delta t} Z_2\end{aligned} \quad (5.8)$$

La differenza tra questi due è quindi pari a

$$\begin{aligned}|\hat{X}_{t+2\Delta t} - \bar{X}_{t+2\Delta t}| &\leq \frac{1}{2} |\sigma^2(t, X_t) - \sigma^2(t + \Delta t, X_{t+\Delta t})| \Delta t \\ &\quad + |\sigma(t, X_t) - \sigma(t + \Delta t, X_{t+\Delta t})| \sqrt{\Delta t} |Z_2|. \quad (5.9)\end{aligned}$$

A questo punto si applica il lemma di Itô alle due differenze assolute, sia della volatilità che della varianza locale. Si ottiene

$$\begin{aligned}|\sigma(t, X_t) - \sigma(t + \Delta t, X_{t+\Delta t})| &= \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt + \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| |dX_t| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right| dX_t^2, \quad (5.10)\end{aligned}$$

dove  $\sigma = \sigma(t, X_t)$  e  $dX_t^2$  è la correzione quadratica di Itô

$$dX_t^2 = \sigma^2(t, X_t)dt. \quad (5.11)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} |\sigma^2(t, X_t) - \sigma^2(t + \Delta t, X_{t+\Delta t})| &= \left| \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} dt + \frac{\partial \sigma^2}{\partial x} |dX_t| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2}{\partial x^2} |dX_t^2| \right|, \end{aligned} \quad (5.12)$$

dove le derivate parziali sono date da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} &= 2\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial x} &= 2\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial x^2} &= 2 \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \sigma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo il tutto in (5.9) e tralasciando i termini in  $\Delta t^2$  si ottiene il seguente errore

$$\begin{aligned} |\hat{X}_{t+2\Delta t} - \bar{X}_{t+2\Delta t}| &\leq \sigma(t, X_t) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, X_t) \right| \Delta t \\ &\quad + \left[ \sigma(t, X_t) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, X_t) \right| + \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, X_t) \right| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \left( \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, X_t) \right| + \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(t, X_t) \right| \right) \right] \Delta t^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

### Algoritmo Griglia Pesata

Siamo in grado di proporre un algoritmo che permetta di costruire la griglia temporale pesandola per l'errore (5.13). Va sottolineato che l'algoritmo proposto non è l'unico modo possibile.

La nostra idea è stata quella di concentrare più punti negli intervalli tra i *fixing* di mercato dove l'errore (5.13) risultava più alto, in modo da ridurre l'errore massimo.

### Proposizione 5.1. Griglia Temporale Pesata

*Si voglia discretizzare l'intervallo  $[t, T]$  con  $M + 1$  punti. Si eseguano i seguenti passi:*

1. Si inizializzi la griglia temporale ponendo

$$Grid = \{t\} \cup \{T\} \bigcup_{i=1}^{N_f} \{\hat{t}_i\} \quad (5.14)$$

dove  $\hat{t}_i$  sono i pillar di mercato contenuti tra gli estremi dell'intervallo. Si indichi con  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$  l'intervallo  $i$ -esimo di lunghezza  $\Delta t_i$ .

L'algoritmo consiste nell'assegnare a ciascun  $I_i$  un numero di punti  $M_i$  da distribuire uniformemente all'interno dell'intervallo.

2. Per ciascun intervallo si calcolino numericamente i contributi medi

$$\bar{C}_1^i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, F_s) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, F_s) \right| ds \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{3/2}^i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} & \left[ \sigma(s, F_s) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, F_s) \right| + \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, F_s) \right| \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(s, F_s) \left( \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, F_s) \right| + \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(s, F_s) \right| \right) \right] ds \quad (5.16) \end{aligned}$$

dove  $F_{t_j}$  è il forward.

3. Si ponga inizialmente un punto su ciascun intervallo

$$M_i = 0, \quad \forall i = 1 : N_f \quad (5.17)$$

e si indichi con

$$N_{left} = M - N_f \quad (5.18)$$

$i$  punti restanti.

4. L'algoritmo per distribuire gli  $N_{left}$  punti è dato da:

```

while  $N_{left} > 0$  do
  for  $i = 1 : N_{fixing}$  do
     $\delta_i = \frac{\Delta t_i}{M_{i+1}}$ ;
     $E_i = \bar{C}_1^i \cdot \delta_i + \bar{C}_{3/2}^i \cdot \delta_i^{\frac{3}{2}}$ ;
  end
  Find  $i_{max}$  such that  $E_{i_{max}} = \max_i E_i$ ;
   $M_{i_{max}} = M_{i_{max}} + 1$ ;
   $N_{left} = N_{left} - 1$ ;
end
    
```

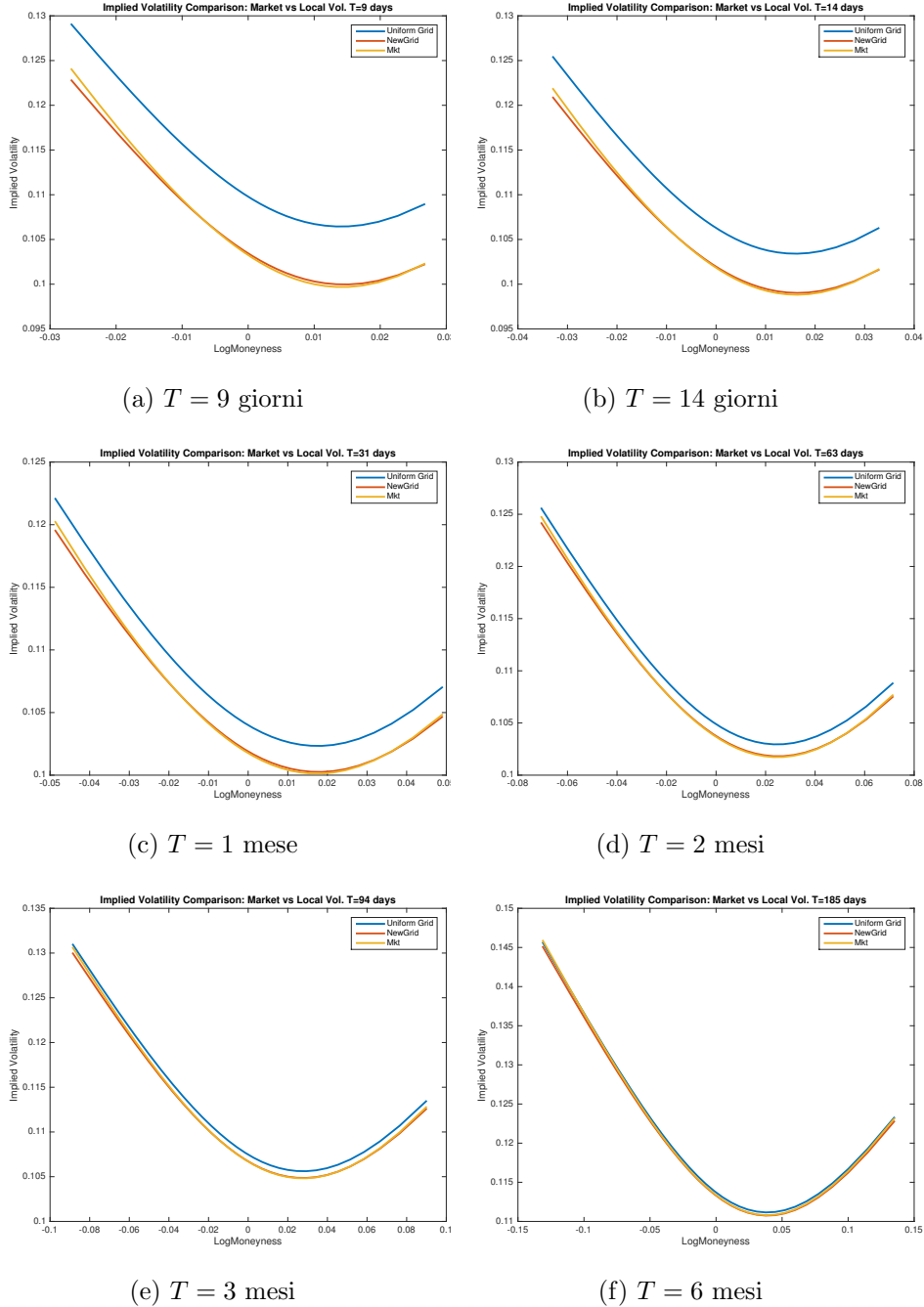
I risultati sono molto incoraggianti.

Come test si sono comparati gli smile di volatilità implicita di mercato contro quelli ottenuti prezzando in Monte Carlo le relative call europee. Si sono usate le due differenti griglie temporali, uniforme e pesata.

Come si vede in 5.6, la griglia pesata porta a risultati sempre migliori rispetto a quella uniforme standard.

Come vedremo successivamente questo miglioramento impatterà in maniera significativa anche i risultati dei modelli a volatilità stocastica.

Figura 5.6: Confronto Griglie Temporali: Uniforme vs Pesata



I risultati sono stati ottenuti analogamente a quanto fatto in figura 5.5.

La griglia pesata permette di ottenere smile di volatilità praticamente coincidenti con quelli di mercato, a differenza della spaziatura uniforme che da risultati lungi da quelli corretti. Inoltre confrontando questi grafici con quelli in 5.5, si osserva come usando la griglia pesata con  $M = 185$  punti temporali (1 al giorno) performa meglio della spaziatura uniforme con un numero di punti 10 volte più grande!

## 5.2 Modelli a Volatilità Stocastica

L'implementazione dei modelli a volatilità stocastica è stato basato sull'idea di sviluppare uno strumento di calibrazione e pricing che fosse il più generale possibile, in modo da inglobare tutti i casi presentati nel capitolo 3.

Le difficoltà maggiori si sono avute nell'implementare una versione stabile e robusta della formula derivante dal metodo della *Fundamental Transform*, per la quale bisogna risolvere una EDP a coefficienti complessi ed integrare una funzione in campo complesso.

### 5.2.1 EDP Fundamental Transform

Per utilizzare la formula (3.75) è necessario saper risolvere l'equazione a derivate parziali (3.67) che riportiamo per semplicità di trattazione nella seguente forma

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial v^2} - [\alpha - ik\rho\beta g(v)] \frac{\partial \hat{h}}{\partial v} + c(k)g^2(v)\hat{h} = 0. \quad (5.19)$$

Tuttavia per la risoluzione in forma numerica è necessario troncare il dominio della variabile spaziale  $v$   $[0, +\infty)$  imponendo  $v \in [0, v_{max}]$ . In questo modo però si ha il problema non banale di scegliere il valore limite  $v_{max}$ .

Onde evitare questa complicazione si è optato per utilizzare il seguente cambio di variabili:

$$z = \frac{v}{v + v_0}, \quad v = v_0 \frac{z}{1 - z}, \quad (5.20)$$

dove  $v_0$  è il valore iniziale assunto dal processo governante la volatilità  $g(v_t)$ . Così facendo si ottiene un dominio limitato e ben definito

$$z \in [0, 1], \quad (5.21)$$

che ci faciliterà anche nella scelta delle condizioni al bordo.

Per semplicità riscriviamo l'equazione (5.19) in modo più generico

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + a(v) \frac{\partial F}{\partial v} + b(v) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + d(v)F = 0 \quad (5.22)$$

$$F(v) = \hat{h}(v) \quad (5.23)$$

$$a(v) = -[\alpha - ik\rho\beta g(v)] \quad (5.24)$$

$$b(v) = -\frac{1}{2}\beta^2 \quad (5.25)$$

$$d(v) = c(k)g^2(v). \quad (5.26)$$

Applicando il cambio di variabili (5.20) la soluzione diventa

$$\tilde{F}(z) = F\left(v_0 \frac{z}{1 - z}\right), \quad (5.27)$$

mentre i coefficienti in termini di  $z$  vengono espressi come

$$\tilde{a}(z) = a \left( v_0 \frac{z}{1-z} \right) \quad (5.28)$$

$$\tilde{b}(z) = b \left( v_0 \frac{z}{1-z} \right) \quad (5.29)$$

$$\tilde{d}(z) = d \left( v_0 \frac{z}{1-z} \right). \quad (5.30)$$

Le derivate parziali espresse secondo  $z$  sono pari a

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{(1-z)^2}{v_0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{(1-z)^3}{v_0^2} \left[ (1-z) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} \right]. \quad (5.32)$$

L'equazione (5.22) diventa quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} + \left[ \tilde{a}(z) \frac{(1-z)^2}{v_0} - 2\tilde{b}(z) \frac{(1-z)^3}{v_0^2} \right] \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} \\ + \tilde{b}(z) \frac{(1-z)^4}{v_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial z^2} + \tilde{d}(z) \tilde{F} = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

### Condizioni al Bordo

La condizione al bordo destro in  $z = 1$  la si trova sostituendo tale valore in (5.33) nella quale, per i modelli presi in esame, i coefficienti di diffusione e trasporto si annullano. La condizione diviene quindi

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} + \tilde{d}(1) \tilde{F} = 0, \quad (5.34)$$

dove

$$\tilde{d}(1) = \lim_{v \rightarrow \infty} c(k)g(v). \quad (5.35)$$

Va sottolineato come quest'ultimo valore sia sempre ben definito dato che si è scelto di limitare la funzione  $g(\cdot)$ , come spiegato nel capitolo 3 (si veda l'equazione (3.23)).

La condizione può quindi essere espressa in forma chiusa come

$$\tilde{F}(T, 1) = \tilde{F}(0, 1) e^{-c(k)v_{max}T}. \quad (5.36)$$

Il bordo sinistro in  $z = 0$  invece non porta ad una formulazione esplicita, tuttavia è possibile trarre delle osservazioni di consistenza.

Innanzitutto si osservi che  $z = 0$  è equivalente ad avere  $v = 0$  e che  $v_t$  è un processo positivo. Per non avere problemi è necessario quindi che la

condizione spinga la soluzione all'interno del dominio positivo in modo che quest'ultima sia ben definita. Ciò si verifica se e solo se la diffusione è nulla e il trasporto strettamente positivo

$$\tilde{b}(0) = b(0) = 0 \quad (5.37)$$

$$\tilde{a}(0) = a(0) > 0. \quad (5.38)$$

Nei modelli presi in esame si ha sempre un coefficiente di diffusione del processo  $v_t$  della forma

$$\beta(t, v) \sim v^\gamma \text{ con } \gamma > 0 \quad (5.39)$$

che si annulla per  $v = 0$ . Quindi i coefficienti dell'equazione (5.22) diventano

$$a(v)|_{v=0} = -\alpha(0) \quad (5.40)$$

$$b(v)|_{v=0} = 0. \quad (5.41)$$

*Osservazione 5.2.* Il segno “-” in (5.40) porta ad avere  $a(0) < 0$ . Tuttavia ciò è coerente con quanto detto poiché si tratta di un'equazione *forward* e quindi i segni dei coefficienti sono invertiti.

La condizione espressa in  $z$  diviene quindi

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} + \frac{\tilde{a}(0)}{v_0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} + \tilde{d}(0) \tilde{F} = 0. \quad (5.42)$$

### Schema di Risoluzione

Si è scelto di discretizzare l'equazione (5.33) con il *metodo alle differenze finite* [49]. Si supponga quindi di avere una griglia di punti spaziale e una temporale

$$\{z_j\}_{j=1}^{N_z}, \quad \{\tau_i\}_{i=1}^{N_T} \quad (5.43)$$

equispaziate all'interno dei relativi domini.

Le derivate spaziale sono approssimate con le differenze finite centrate

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial z^2} \sim \frac{\tilde{F}_{j-1} - 2\tilde{F}_j + \tilde{F}_{j+1}}{\Delta z^2} + \mathcal{O}(\Delta z^2) \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} \sim \frac{\tilde{F}_{j+1} - \tilde{F}_{j-1}}{2\Delta z} + \mathcal{O}(\Delta z^2), \quad (5.45)$$

mentre per la derivata temporale è conveniente spendere due parole.

Per la discretizzazione di quest'ultima sono due i metodi più diffusi: l'*implicito* e *Crank-Nicolson* [49]. Il primo prevede che la soluzione di un problema *in avanti* come quello in esame sia approssimata come

$$\frac{\tilde{F}^{i+1} - \tilde{F}^i}{\Delta \tau} \sim \mathcal{A}_{\Delta \tau} \tilde{F}^{i+1} + \mathcal{O}(\Delta \tau), \quad (5.46)$$

mentre il secondo come

$$\frac{\tilde{F}^{i+1} - \tilde{F}^i}{\Delta\tau} \sim \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta\tau}\tilde{F}^i + \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta\tau}\tilde{F}^{i+1} + \mathcal{O}(\Delta\tau^2). \quad (5.47)$$

Entrambi i metodi sono stabili, quindi la preferenza tra i due ricade nella maggior parte dei casi sul metodo di *Crank-Nicolson* per via dell'ordine di convergenza maggiore.

Nonostante sia così usato nell'industria questo metodo non è però esente da problemi. Come descritto da Duffy in [19] infatti possono sorgere oscillazioni nella soluzione per  $\tau \simeq 0$  quando la condizione iniziale ha derivata discontinua. Questa difficoltà diventa ancor più evidente se si analizzano le greche, i.e. le derivate prime e seconde della soluzione.

Il metodo implicito invece non propaga le oscillazioni e quindi non presenta quest'ultimo problema; tuttavia l'ordine di convergenza è inferiore. E' possibile però "accelerare" l'implicito grazie all'*estrapolazione di Richardson*, che permette di avere ordine di convergenza pari a 2. Questa tecnica consiste nel richiamare tre volte il metodo implicito ma con passi differenti.

Si supponga che la soluzione del problema sia  $\eta^*$ , mentre l'approssimazione numerica in funzione dell'intervallo  $\Delta\tau$  sia  $\eta(\Delta\tau)$ . Allora l'estrapolazione di Richardson consiste nel trovare la soluzione sia con passo  $\Delta\tau$  che con  $\Delta\tau/2$  (che ovviamente richiederà due step impliciti). Dato che gli errori delle due soluzioni sono dati da

$$\eta(\Delta\tau) = \eta^* + c\Delta\tau + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \quad (5.48)$$

$$\eta\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) = \eta^* + c\frac{\Delta\tau}{2} + \mathcal{O}(\Delta\tau^2), \quad (5.49)$$

ponendo

$$\begin{aligned} \eta &= 2\eta\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) - \eta(\Delta\tau) \\ &= \eta^* + \mathcal{O}(\Delta\tau^2). \end{aligned} \quad (5.50)$$

si ottiene una soluzione che converge con ordine 2.

Abbiamo quindi ottenuto una soluzione incondizionatamente stabile con la stessa convergenza di Crank-Nicolson.

Tuttavia a ben vedere l'estrapolazione di Richardson ha un costo computazionale non indifferente, in quanto ad ogni passo richiede di invertire due matrici distinte e di risolvere ben tre sistemi lineari. Come estensivamente analizzato in [37] nessuno dei metodi finora presentati è quello ottimale per risolvere i problemi alle EDP.

Tra gli altri metodi presentati, si è scelto di usare lo schema di *Lawson-Swaney* in quanto a parità di performance ha un costo computazionale inferiore. Lo schema consiste nel fare due step col metodo implicito di passo



pari a  $b\Delta\tau$  con  $b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Tornando al nostro caso l'i-esimo passo diviene

$$\tilde{F}^{i+b} - \tilde{F}^i = b\Delta\tau \mathcal{A}_{b\Delta\tau} \tilde{F}^{i+b} \quad (5.51)$$

$$\tilde{F}^{i+2b} - \tilde{F}^{i+b} = b\Delta\tau \mathcal{A}_{b\Delta\tau} \tilde{F}^{i+2b} \quad (5.52)$$

$$\tilde{F}^{i+1} - \tilde{F}^i = (\sqrt{2} + 1)\tilde{F}^{i+2b} - \sqrt{2}\tilde{F}^{i+b}. \quad (5.53)$$

Come si vede ad ogni passo il metodo richiede di invertire una sola matrice e di risolvere due sistemi lineari: il risparmio computazionale è quindi notevole. Non reste che mostrare che l'ordine di convergenza si mantiene pari a 2.

E' possibile scrivere il seguente sistema

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t + \Delta\tau) &= \tilde{F}(t + b\Delta\tau) + \tilde{F}'(t + b\Delta\tau)(\Delta\tau - b\Delta\tau) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \\ \tilde{F}(t + \Delta\tau) &= \tilde{F}(t + 2b\Delta\tau) + \tilde{F}'(t + 2b\Delta\tau)(\Delta\tau - 2b\Delta\tau) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2). \end{aligned}$$

Invertendo si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t + b\Delta\tau) &= \tilde{F}(t + \Delta\tau) - \tilde{F}'(t + b\Delta\tau)(\Delta\tau - b\Delta\tau) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \\ \tilde{F}(t + 2b\Delta\tau) &= \tilde{F}(t + \Delta\tau) - \tilde{F}'(t + 2b\Delta\tau)(\Delta\tau - 2b\Delta\tau) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2). \end{aligned}$$

Imponendo la soluzione (5.53) e osservando che

$$\tilde{F}'(t + 2b\Delta\tau) = \tilde{F}'(t + b\Delta\tau) + \tilde{F}''(t + b\Delta\tau)b\Delta\tau + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \quad (5.54)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + 1)\tilde{F}(t + 2b\Delta\tau) - \sqrt{2}\tilde{F}(t + b\Delta\tau) &= F(t + \Delta\tau) \\ -\tilde{F}'(t + b\Delta\tau)\Delta\tau \left[ (\sqrt{2} + 1)(1 - 2b) - \sqrt{2}(1 - b) \right] &+ \mathcal{O}(\Delta\tau^2). \end{aligned}$$

Annullando i termini del prim'ordine si ottiene la seguente condizione

$$(\sqrt{2} + 1)(1 - 2b) - \sqrt{2}(1 - b) = 0, \quad (5.55)$$

che equivale ad avere

$$b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5.56)$$

### Trasporto Dominante

Si ha il problema del *trasporto dominante* quando il coefficiente che moltiplica la derivata seconda (termine di diffusione) è molto più piccolo rispetto al coefficiente della derivata prima (termine di trasporto). In questi casi la soluzione mediante differenze centrate provoca delle forti oscillazioni nella soluzione numerica. Per risolvere il problema esistono in letteratura diversi metodi, tra cui lo schema dell'up-wind [49] è sicuramente uno dei più usati. Tuttavia come descritto in [49] esistono altri metodi molto più efficienti. Nel

nostro caso si è scelto di usare l'*Exponentially Fitted*, il quale propone di sostituire il termine di diffusione nella  $\sigma(x)$  (5.22) con la *diffusione artificiale* pari a

$$\sigma_h(x) = \sigma(x) \cdot \mathbb{P}e_h(x) \coth(\mathbb{P}e_h(x)), \quad (5.57)$$

dove  $\mathbb{P}e_h(x)$  è il *numero di Péclet*, definito come

$$\mathbb{P}e_h(x) = \frac{|\mu(x)|}{2\sigma(x)h}, \quad (5.58)$$

dove  $\mu(\cdot)$  è il coefficiente di trasporto e  $h$  il passo di spaziatura spaziale. La funzione  $\coth(\cdot)$  è invece la cotangente iperbolica, definita come

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}. \quad (5.59)$$

### Griglia Spaziale

La griglia spaziale nella variabile  $z$  va scelta in modo furbo in modo da non dover interpolare la soluzione per usare (3.75). Infatti siamo interessati unicamente al valore della fundamental transform  $\hat{h}(k, v, \tau)$  in  $v = v_0$ . Tuttavia per avere ciò è sufficiente costruire la griglia in  $[0, 1]$  con un numero dispari di punti. In questo modo per costruzione si cade sul punto  $z = 1/2$  che per (5.20) equivale a  $v = v_0$ .

### Integrale Numerico

Per quanto riguarda gli integrali che appaiono nelle formule (3.75) e (3.79) è necessario fare uso delle formule di quadratura. Nel primo caso, in cui l'integrale è generalizzato, si è optato per usare le formule di quadratura *Gauss-Kronrod* [28]; nel secondo invece dove l'integrale è definito è stato possibile anche considerare i pesi di quadratura di *Gauss-Legendre* [1]. Non si è notata alcuna differenza nel risultato ottenuto sia al variare del metodo d'integrazione che del tipo di integrale, definito o generalizzato.

#### 5.2.2 Risultati

Presentiamo i risultati della calibrazione.

Va subito sottolineato che la calibrazione dei modelli a volatilità stocastica non è stata eseguita con lo scopo di avere un fitting perfetto sull'intera superficie, ma con quello di catturare la dinamica di mercato implicata nelle quotazioni.

Per questo motivo è stato scelto di usare i parametri dei modelli omogenei nel tempo, coi quali è solo possibile ottenere un fitting medio accettabile su tutta la superficie.

Non ci aspettiamo inoltre che la dinamica del processo possa essere stravolta usando dei parametri che non permettano di replicare esattamente la superficie di mercato.

Quest'osservazione risulta ancor più fondata se si ragiona in ottica di modelli a volatilità locale-stocastica, dove in primo luogo andremo a modificare la vol-of-vol attraverso il mixing factor (sporcando quindi il risultato della calibrazione); in secondo saremo in grado di recuperare l'errore sulla calibrazione degli smile di volatilità implicita.

Per motivi analoghi la calibrazione è stata eseguita considerando i dati di mercato con scadenze a 3 mesi, 6 mesi, 1 anno e 2 anni. Inoltre per ogni maturity non si è tenuto dell'intero smile ma solo di alcuni punti: insieme all'ATM forward anche gli strikes a uno e due standard deviation.

Per quanto riguarda i parametri per la risoluzione numerica dell'equazione alle derivate parziali (5.19) si è scelto di prendere  $N_z = 50$  e  $N_T = 10$ . In questo modo, come vedremo si ottengono risultati abbastanza accurati in un tempo ragionevole.

I risultati per ciascun modello sono riassunti nella seguente tabella.

Tabella 5.1: Parametri Calibrati Modelli a Volatilità Stocastica

Modelli	$v_0$	$\kappa$	$\theta$	$\nu$	$\rho$
Heston	0.011743	0.491744	0.044928	0.370986	-0.296351
Lognormale	0.101367	1.457903	0.124202	1.412742	-0.292835
Iperbolico	0.097767	0.592954	0.358877	1.341737	-0.297629
PDV	1.012895	4.442028	0.099376	2.433565	-0.241388

Va osservato come i parametri dei primi tre modelli sono abbastanza simili tra loro; i risultati per il modello a volatilità path-dependent sono ovviamente da interpretare in maniera differente. Per esempio  $v_0$  in questo caso è il rapporto tra lo spot e la sua media pesata in  $t = 0$ , ha quindi senso che assuma un valore vicino ad 1. Negli altri casi invece rappresenta il valore di volatilità iniziale (in Heston bisogna prendere  $\sqrt{v_0}$  per avere la volatilità) e in tutti assume un valore simile, circa 0.1. Questo fatto è indice di consistenza sia dei modelli che del processo di calibrazione.

Si è inoltre analizzato cosa accade ai risultati appena presentati se si fossero presi valori differenti di  $N_z$  ed  $N_T$ . Considerando il processo a volatilità Iperbolica si sono ottenuti i seguenti risultati.

Tabella 5.2: Analisi dei Parametri Calibrati al Variare di  $N_T, N_z$ 

$N_T$	$N_z$	$v_0$	$\kappa$	$\theta$	$\nu$	$\rho$	Time (min)
10	50	0.097767	0.592954	0.358877	1.341737	-0.297629	11
20	100	0.097902	0.580179	0.363469	1.351621	-0.296596	16
40	200	0.097925	0.578460	0.364108	1.352380	-0.296739	24
100	500	0.097929	0.578154	0.364234	1.352492	-0.296772	85

Come si vede nella tabella, prendendo  $N_T = 10$  e  $N_z = 50$  si ottengono valori approssimati al più alla seconda cifra decimale; il risultato tuttavia è considerato sufficiente in ottica di LSV.

Gli smile calibrati sono mostrati in figura 5.7.

### 5.3 Modelli a Volatilità Locale-Stocastica

In questa sezione presenteremo l'algoritmo utile per calibrare la Leverage Function (4.12).

Vediamo quindi un primo semplice algoritmo

#### Proposizione 5.2. *Naive Particle Method*

Sia data una griglia temporale  $\{t_k\}$  dell'intervallo  $[0, T]$ . L'algoritmo del Particle Method consiste nei seguenti passi:

1. Si inizializzi  $k = 1$  e si ponga  $L_N(t, S_t) = \frac{\sigma_{Dup}(0, S_0)}{f(v_0)}$ ,  $\forall t \in [0, t_1]$ .
2. Si simuli il moto delle  $N$  particelle tra  $t_{k-1}$  e  $t_k$  con la seguente dinamica

$$dS_t^{i,N} = (r - q)S_t^{i,N} dt + L_N(t, S_t^{i,N})f(v_t^{i,N})dW_t^i \quad (5.60)$$

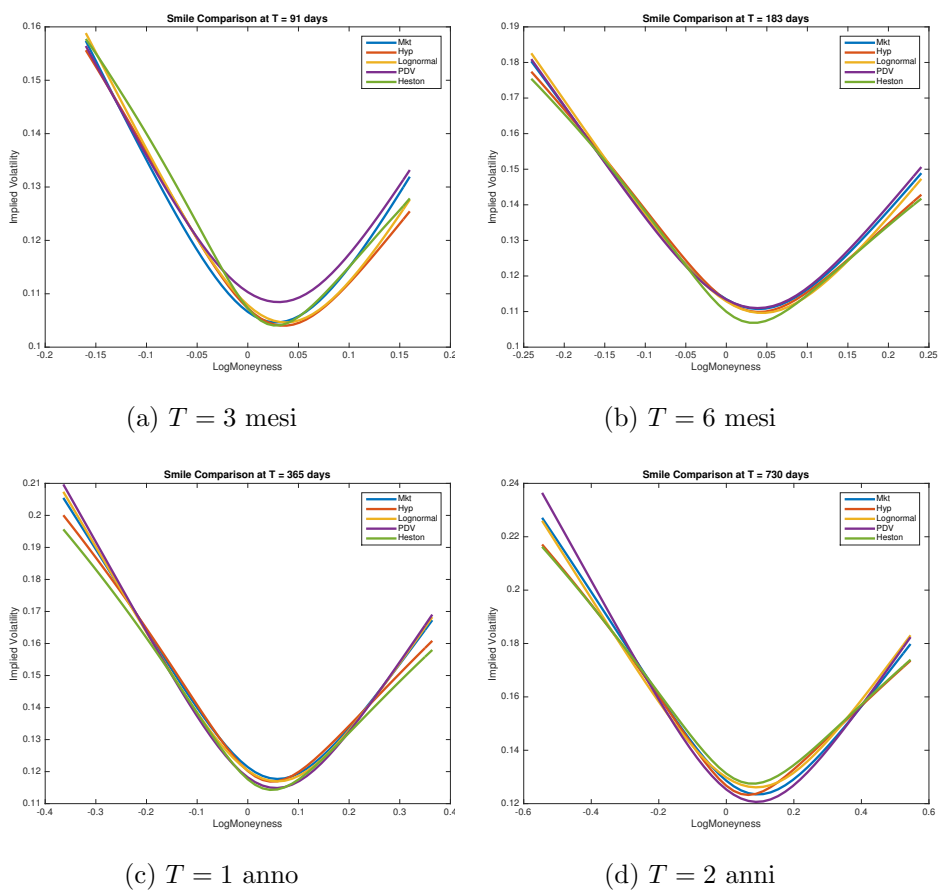
$$dv_t^{i,N} = \alpha(t, v_t^{i,N})dt + \lambda\beta(t, v_t^{i,N})dZ_t^i. \quad (5.61)$$

3. Si calcoli la  $L_N(t_k, S_{t_k}^{i,N})$  mediante (4.26). Si interpoli la parte locale empirica con un polinomio spline (con estrapolazione flat) e si ponga  $L_N(t, S_t) = L_N(t_k, S_t)$ ,  $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ .
4. Si ponga  $k = k + 1$  e si torni al passo 2.

#### Kernel Regolarizzatori

Affinché l'algoritmo appena presentato fornisca un risultato accurato è fondamentale approssimare correttamente la *delta di Dirac*. A questo scopo

Figura 5.7: Smile di Mercato Implicati Dai Modelli a Volatilità Stocastica



Smile di volatilità implicita implicati dai modelli a volatilità stocastica con i parametri riportati nella tabella 5.2. Si sono riportati i risultati unicamente per le maturity considerate nella calibrazione.

si utilizzano i così detti *kernel regolarizzatori*, ossia funzioni simmetriche e smooth che integrano ad uno. I più noti sono il *kernel gassiano*

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (5.62)$$

ed il *kernel quartico*

$$K(x) = \frac{15}{16} (1 - x^2)^2 1_{\{|x| \leq 1\}}. \quad (5.63)$$

In pratica si è scelto quest'ultimo poiché ha un costo computazionale inferiore.

Come suggerito in [50], il modo più naturale per approssimare la delta di Dirac è fare uso di una larghezza di banda  $h$  in modo da allargare o stringere il supporto del kernel, cioè

$$\delta_{t,N}(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right). \quad (5.64)$$

Ovviamente più  $h \rightarrow 0$  più il bias dello stimatore sarà ridotto, ma la sua varianza sarà più alta. Si può dimostrare che la banda ottima che riduce la somma di bias e varianza decresce come  $N^{-\frac{1}{5}}$ . La larghezza di banda suggerita da Guyon è pari a

$$h_{t,N} = \kappa f_t \sigma(t, f_t) \sqrt{\max(t, t_{min})} N^{-\frac{1}{5}} \quad (5.65)$$

con  $t_{min} = 1/4$ ,  $f_t = F(0, t)$  è il valore del forward con scadenza  $t$  e  $\kappa$  è un valore da ricavare euristicamente. Questa scelta è sensata in quanto permette di avere una banda tanto più grande tanto più la volatilità è alta e tanto più  $t$  aumenta; in questo modo infatti si riesce a raccogliere sufficiente informazione anche quando le particelle sono molto sparse.

Come evidenziato da Silverman questo metodo soffre nell'approssimare la delta di Dirac per valori estremi di  $x$ , ossia nel nostro caso quando  $S$  è molto lontano dall'ATM, i.e. il forward. Questo poiché più ci si allontana dal valor medio meno particelle si avranno a disposizione per valutare il valore del kernel: per questo motivo nelle code della distribuzione si avrà molto rumore.

*Osservazione 5.3.* In [25] gli autori affermano che il valore di  $\kappa$  è cruciale ai fini del risultato. Inoltre viene suggerito di utilizzare  $\kappa = 1.5$ .

Il nostro riscontro è molto simile. Come si vede in figura 5.8, l'errore sulla volatilità implicita di mercato sembra minimizzato prendendo  $\kappa = 1.5$ . Per  $\kappa = 5$  si ottengono risultati ancora accettabili mentre per  $\kappa = 10$  si hanno degli smiles completamente diversi.

E' interessante osservare come la scelta di questo parametro vada ad impattare la forma della superficie  $L(t, S_t)$ . Più  $\kappa$  aumenta più larga diventa la banda e quindi più particelle vengono considerate nel calcolo di ciascuna

approssimante della delta di Dirac. Ciò si traduce in una superficie più liscia come si vede confrontando 5.9 e 5.10. Come evidenziato in [50] bisogna però fare attenzione a non esagerare nell'allargare la larghezza di banda  $h_{t,N}$ : si corre il rischio infatti di ottenere una distribuzione diversa rispetto a quella voluta andando a pesare maggiormente le realizzazioni più estreme.

### Tecniche di Accelerazione

L'algoritmo sopra presentato ha chiaramente un costo computazionale che ad ogni passo richiede  $\mathcal{O}(N^2)$  operazioni. Tuttavia è possibile introdurre delle varie tecniche per ridurre il numero di operazioni richieste.

1. Innanzitutto è inutile calcolare  $L_N(t_k, S_{t_k}^{i,N})$  per ogni  $i$ . E' possibile infatti calcolare la leverage function su una griglia di valori  $S_t$  di dimensione  $N_t$  molto minore rispetto a  $N$ ; dopo di che per calcolare i valori fuori della griglia  $G_{F_t,t}$  si interpola con una spline cubica e si estrapola flat. Come regola si è scelto di seguire quanto suggerito in [25]

$$N_t = \max\left(N_1\sqrt{t}, N_2\right) \quad (5.66)$$

dove  $N_1 = 30$  e  $N_2 = 15$ . Il range della griglia è stato considerando  $G_{F_t,t} = [F_{min}^t, F_{max}^t]$ , con

$$F_{min}^t = F_t e^{-\sigma(t, F_t)\sqrt{t}N_{std}} \quad (5.67)$$

$$F_{max}^t = F_t e^{\sigma(t, F_t)\sqrt{t}N_{std}} \quad (5.68)$$

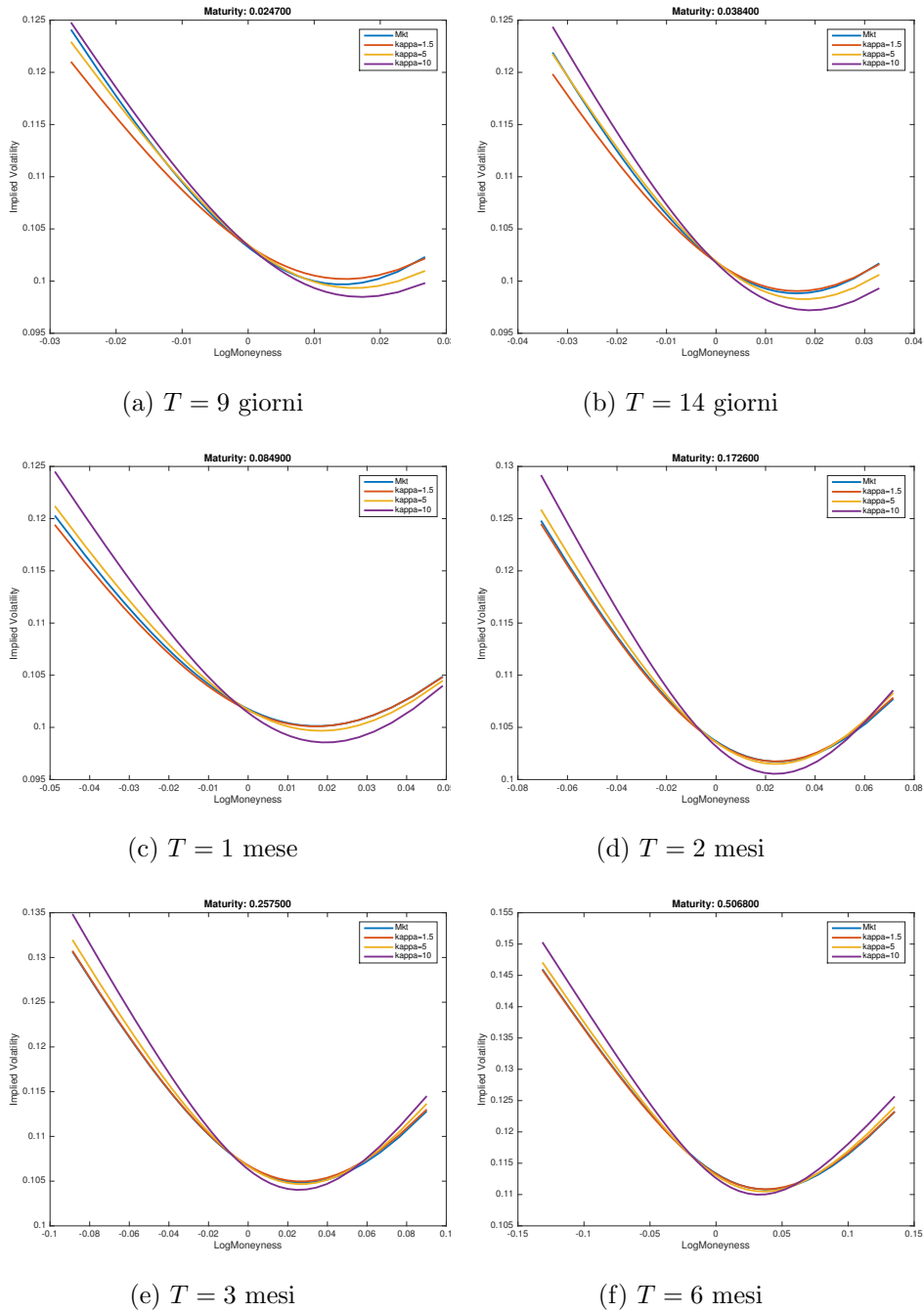
dove  $F_t$  è il forward in  $t$  e  $N_{std}$  rappresenta il numero di standard deviation che soddisfa la seguente relazione

$$\begin{aligned} P(\exists i : S_t^i \notin [F_t^{min}, F_t^{max}]) &= 1 - P(\forall i S_t^i \in [F_t^{min}, F_t^{max}]) \\ &= 1 - P(S_t^i \in [F_t^{min}, F_t^{max}])^N \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Prendendo  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  è possibile invertire la relazione precedente

$$\begin{aligned} P(S_t^i \in [F_t^{min}, F_t^{max}]) &= P\left(F_t e^{\sigma\sqrt{t}Z} \leq F_t e^{\sigma\sqrt{t}N}\right) \\ &\quad - P\left(F_t e^{\sigma\sqrt{t}Z} \leq F_t e^{-\sigma\sqrt{t}N}\right) \\ &= P(Z \leq N) - P(Z \leq -N) \\ &= 2\Phi(Z \leq N) - 1 \\ &= \sqrt[N]{1 - \alpha}, \end{aligned}$$

Figura 5.8: Confronto Smile di Volatilità Implicita al Variare di  $\kappa$



Si osservi come per le prime maturity il valore  $\kappa = 1.5$  non sia quello ottimale. Questo potrebbe essere indice che la regola (5.65) non scala bene per piccole maturity. Probabilmente ciò può essere causato dalla scelta di  $t_{min}$ .



da cui si conclude che

$$N_{std} = \Phi^{-1} \left( \frac{1}{2} (1 + \sqrt[1-\alpha]{1-\alpha}) \right), \quad (5.69)$$

dove  $\Phi$  è la cumulata della normale standard e  $\alpha = 10^{-3}$ .

2. Nelle sommatorie presenti in (4.26), un gran numero di elementi portano ad un contributo trascurabile. Per evitare quindi di compiere un gran numero di operazioni inutili dato  $f$  si è scelto di non tenere in considerazione le particelle  $S_t^{i,N}$  troppo lontane. Quindi nella valutazione della leverage function ad ogni passo verranno considerate le particelle tali che

$$\delta_{t,N} \left( S_t^{i,N} - S \right) > \eta \quad (5.70)$$

dove  $\eta = 10^{-3}$ .

Per fare questa operazione in maniera efficiente è necessario ordinare il vettore delle particelle in modo da trovare facilmente gli indici  $i_{min}(S), i_{max}(S)$  della regione di  $S_t^{i,N}$  che soddisfano la condizione. Il costo dell'ordinamento è pari a  $\mathcal{O}(N \log N)$ , ma è più che compensato dall'accelerazione al punto precedente. Per facilitare la ricerca è possibile, dato  $\eta$ , invertire la formula del kernel per ottenere i bound seguenti

$$S_t^{i_{min}(S),N} = S - h_{t,N} K^{-1}(h_{t,N} \eta) \quad (5.71)$$

$$S_t^{i_{max}(S),N} = S + h_{t,N} K^{-1}(h_{t,N} \eta). \quad (5.72)$$

In questo modo si evitano numerose operazioni.

E' possibile quindi scrivere una nuova versione dell'algorithmo che tenga conto delle tecniche appena presentate.

### Proposizione 5.3. Particle Method

Sia data una griglia temporale  $\{t_k\}$  dell'intervallo  $[0, T]$ . L'algorithmo del Particle Method consiste nei seguenti passi:

1. Si inizializzi  $k = 1$  e si ponga  $L_N(t, S_t) = \frac{\sigma_{Dup}(0, S_0)}{f(v_0)}$ ,  $\forall t \in [0, t_1]$ .
2. Si simuli il moto delle  $N$  particelle tra  $t_{k-1}$  e  $t_k$  con la seguente dinamica

$$dS_t^{i,N} = (r - q) S_t^{i,N} dt + L_N(t, S_t^{i,N}) f(v_t^{i,N}) dW_t^i \quad (5.73)$$

$$dv_t^{i,N} = \alpha(t, v_t^{i,N}) dt + \lambda \beta(t, v_t^{i,N}) dZ_t^i. \quad (5.74)$$

3. Si ordinino le coppie  $\{S_t^{i,N}, v_t^{i,N}\}$  in base al valore dello spot. Per ogni  $S \in G_{F_t,t}$ , si trovino  $i_{min}(S), i_{max}(S)$  sfruttando (5.71), (5.72) e si calcoli

$$L_N(t, S) = \sigma_{Dup}(t, S) \sqrt{\frac{\sum_{i=i_{min}(S)}^{i_{max}(S)} \delta_{t,N} \left( S_t^{i,N} - S \right)}{\sum_{i=i_{min}(S)}^{i_{max}(S)} \left( f(v_t^{i,N}) \right)^2 \delta_{t,N} \left( S_t^{i,N} - S \right)}}. \quad (5.75)$$

Si interpoli la parte locale empirica con un polinomio spline (con estrapolazione flat) e si ponga  $L_N(t, S_t) = L_N(t_k, S_t)$ ,  $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

4. Si ponga  $k = k + 1$  e si torni al passo 2.

Si veda la figura 5.9 come esempio di *Leverage Surface* calibrata con l'algoritmo del Particle Method.

### 5.3.1 Risultati

In questo paragrafo presentiamo i risultati ottenuti per i modelli a volatilità locale-stocastica, dividendoli in risultati di calibrazione e di pricing di prodotti esotici.

#### Calibrazione

I risultati conseguiti sono in linea con quanto presentato da Guyon nel suo lavoro [25]. Il Particle Method converge con un numero di particelle relativamente piccolo e non si sono osservate differenze al variare della dinamica di volatilità stocastica considerata.

Come test sono stati confrontati su un grafico gli smile calibrati del modello LSV per vari valori del numero di particelle  $N_p$  contro lo smile di mercato. I risultati, per varie maturity, sono riportati in figura 5.11 nel caso del modello a volatilità lognormale.

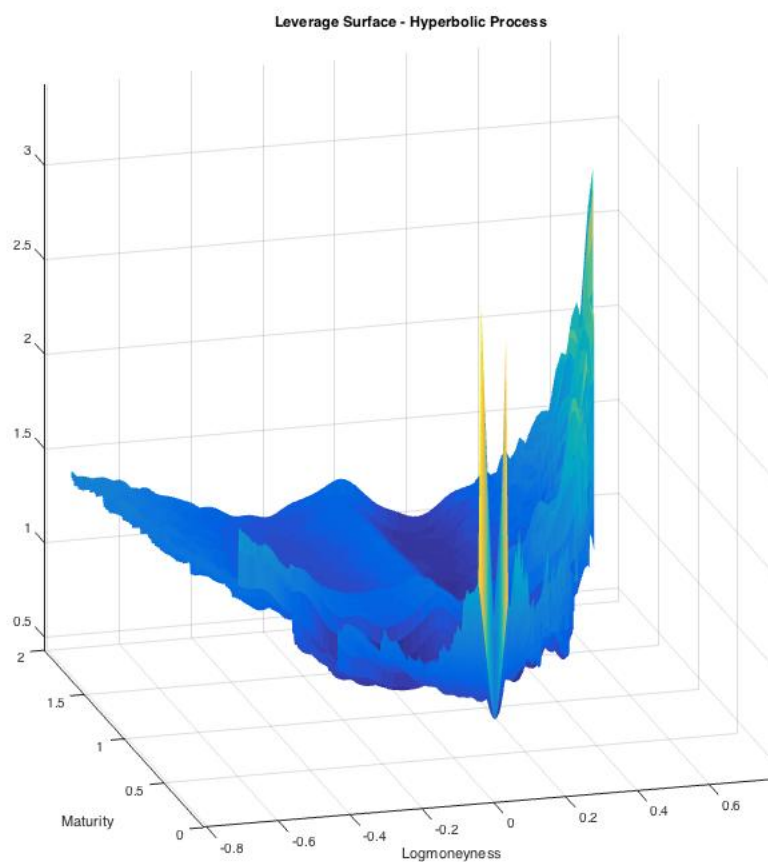
Come si vede prendendo  $N_p = 10^5$  si è praticamente a convergenza.

Va sottolineato che anche con i modelli a volatilità locale-stocastica è stata usata la griglia temporale pesata, sia nella calibrazione col Particle Method che nel pricing col Monte Carlo.

Anche in questo caso la differenza rispetto all'uso della griglia uniforme è sostanziale, soprattutto per le brevi maturity.

A conferma di quanto detto si vedano i grafici 5.12 e 5.13, nei quali è anche possibile apprezzare come la parte locale  $L(t, S_t)$  corregga gli smiles implicati dal modello a volatilità stocastico puro, spingendoli contro gli smiles di mercato.

Figura 5.9: Leverage Surface - Modello Iperbolico -  $\kappa = 1.5$



Superficie della Leverage Function ottenuta applicando il Particle Method con  $10^5$  simulazioni. Si è considerato il processo a volatilità stocastica iperbolica calibrato sul mercato con  $\kappa = 10$ . Parametri:  $v_0 = 0.09777$ ,  $\kappa = 0.59296$  (reversion speed),  $\theta = 0.358878$ ,  $\nu = 1.341737$ ,  $\rho = -0.297629$ .

Figura 5.10: Leverage Surface - Modello Iperbolico -  $\kappa = 10$

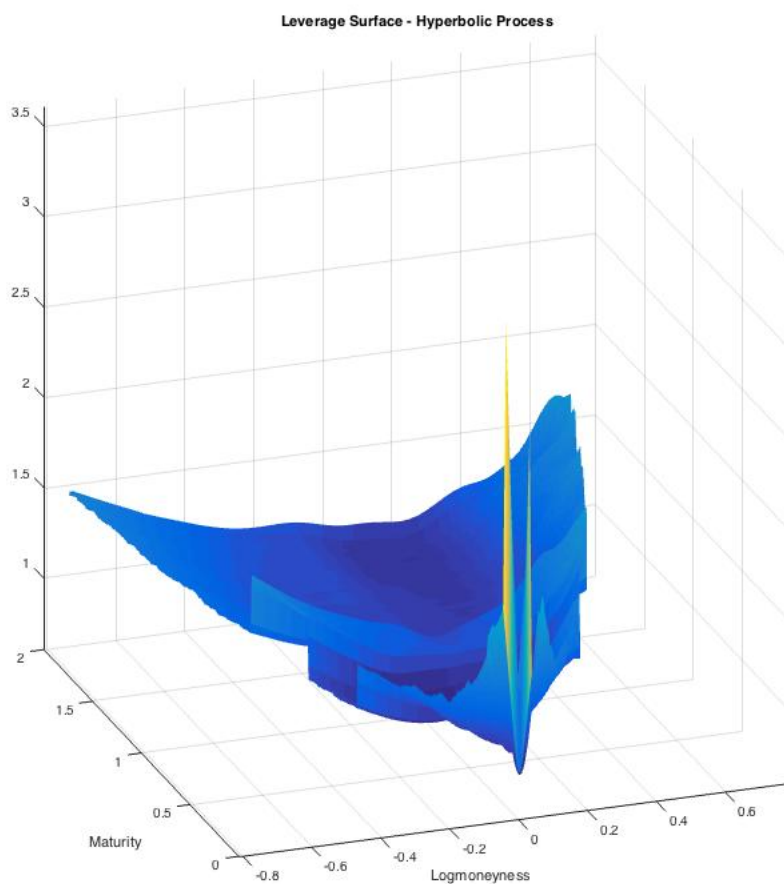
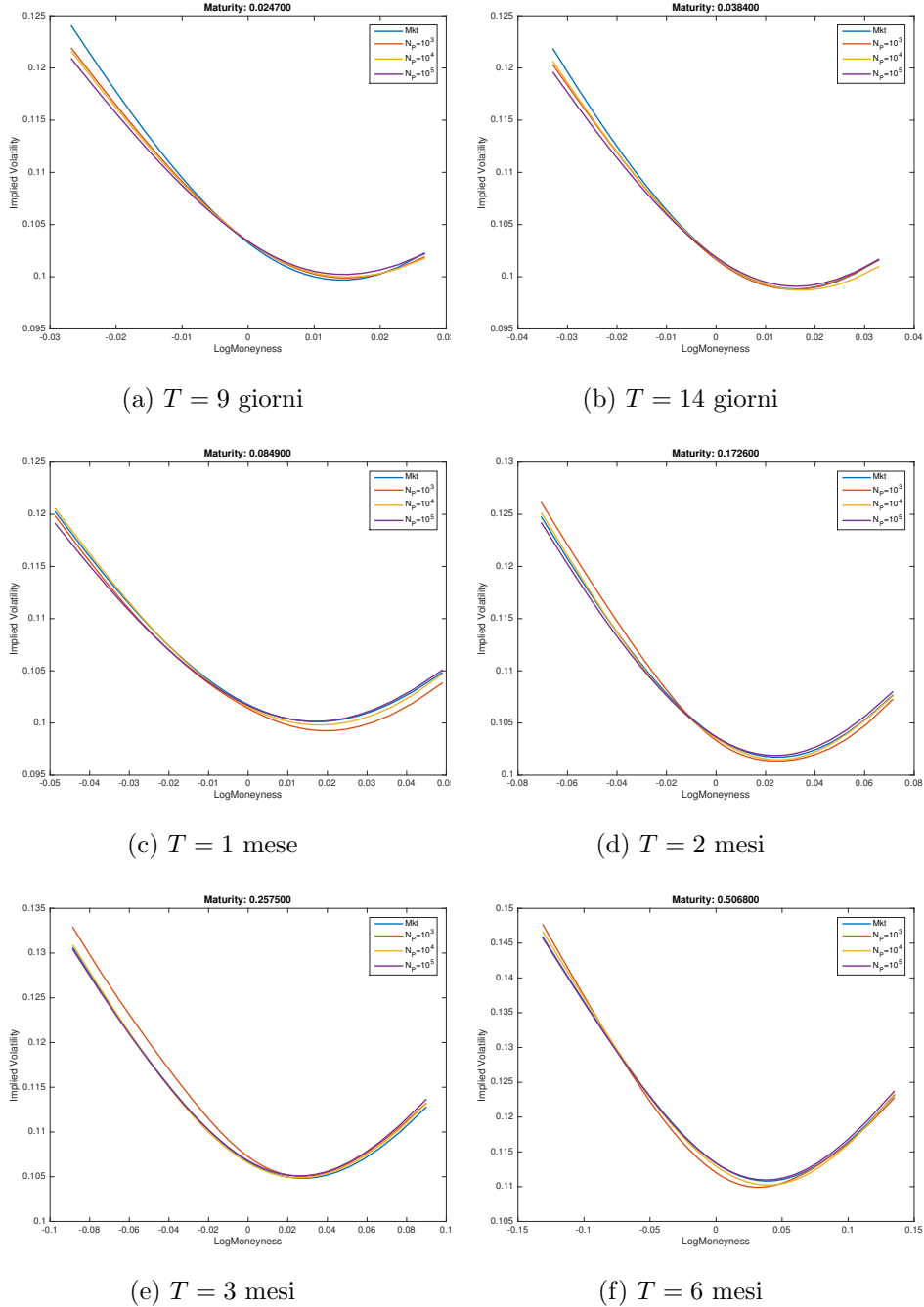


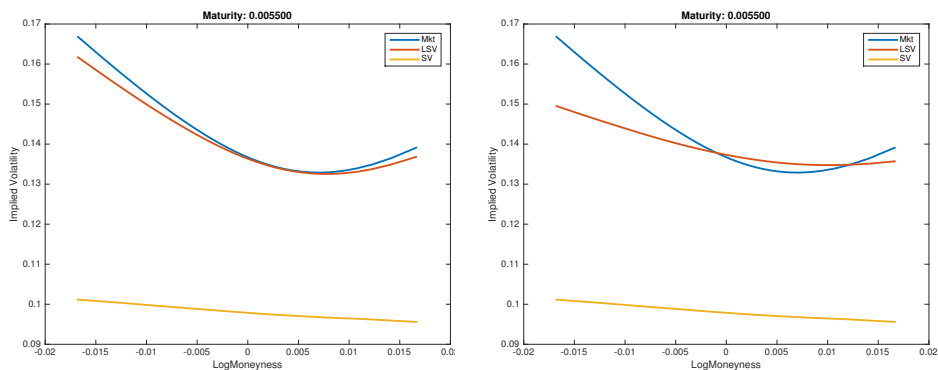
Grafico ottenuto con gli stessi parametri della figura 5.9 a meno del  $\kappa = 10$ .

Figura 5.11: Convergenza Particle Method



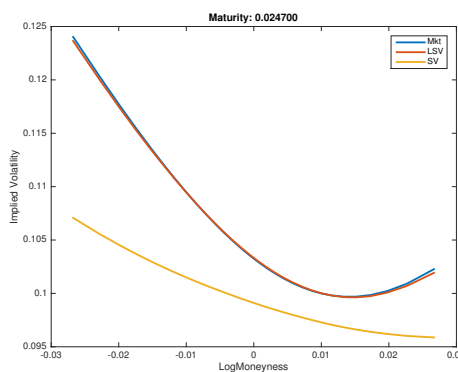
Si è analizzata la convergenza del metodo all'aumentare del numero di particelle confrontando smile calibrati e smile di mercato per varie maturity. Si è considerato il caso della volatilità stocastica lognormale con  $\kappa = 1.5$ . Il pricing è stato effettuato con un Montecarlo con  $N_{sim} = 7 \cdot 10^6$  e con griglia temporale pesata con  $M = 365|_{1y}$ . La leverage Function è stata calibrata fino a 2 anni.

Figura 5.12: Confronto Griglia Pesata vs. Griglia Uniforme per LSV (1)

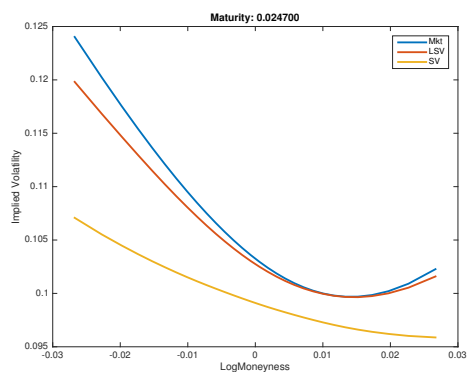


(a) Griglia Pesata ( $T = 2d$ )

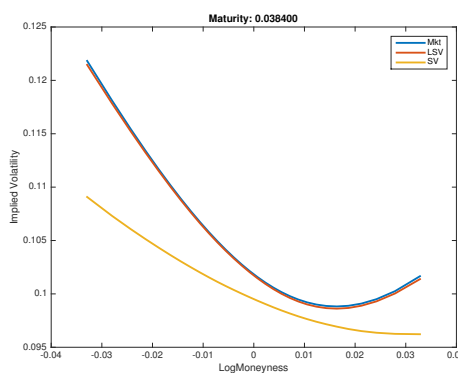
(b) Griglia Uniforme ( $T = 2d$ )



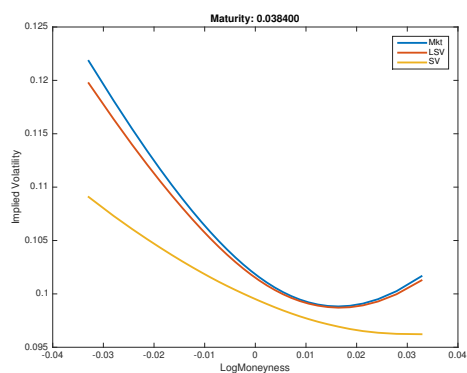
(c) Griglia Pesata ( $T = 9d$ )



(d) Griglia Uniforme ( $T = 9d$ )



(e) Griglia Pesata ( $T = 14d$ )

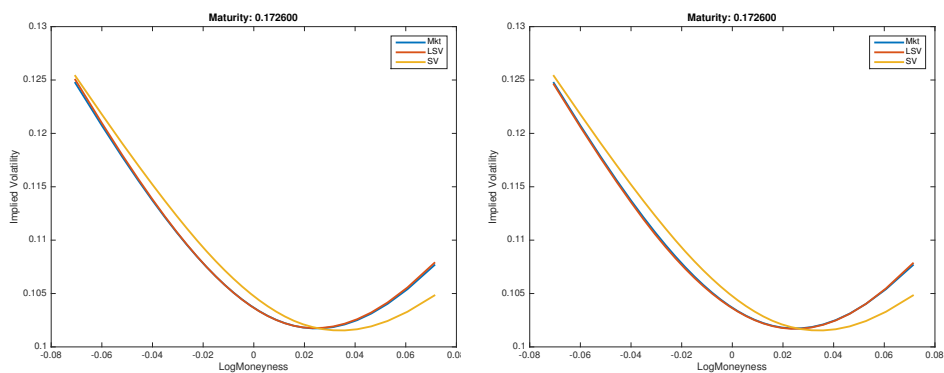


(f) Griglia Uniforme ( $T = 14d$ )

Come si vede per le maturity molto brevi il miglioramento della calibrazione è decisivo per fittare gli smiles di mercato.

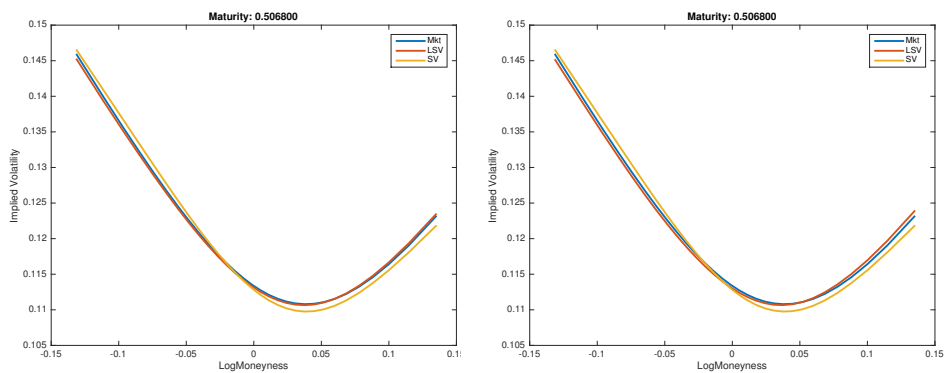
Per eseguire i test è stato usato il modello a volatilità stocastica Iperbolica, mentre la parte locale è stata calibrata con  $N_p = 10^5$ .

Figura 5.13: Confronto Griglia Pesata vs. Griglia Uniforme per LSV (2)



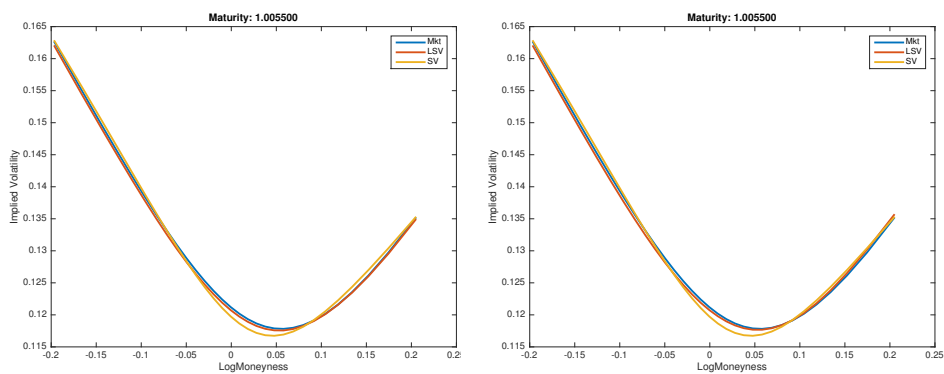
(a) Griglia Pesata ( $T = 1m$ )

(b) Griglia Uniforme ( $T = 1m$ )



(c) Griglia Pesata ( $T = 6m$ )

(d) Griglia Uniforme ( $T = 6m$ )



(e) Griglia Pesata ( $T = 1y$ )

(f) Griglia Uniforme ( $T = 1y$ )

Per le maturity un po' più lunghe si vede come l'utilizzo della griglia pesata fornisca risultati analoghi a quelli ottenuti mediante griglia uniforme.  
 Per i parametri e il modello si faccia riferimento alla figura 5.12.

### Pricing Prodotti Esotici

Infine sono stati prezzati due prodotti esotici: le *Double No Touch* (DNT) e le *opzioni asiatiche floating-strike* (AFS).

Dei primi si è già parlato nell'introduzione del capitolo 4 e, come già anticipato, rappresentano uno dei motivi principali per cui sono stati introdotti i modelli a volatilità locale-stocastica. Il payoff è dato da

$$\phi_{DNT}(S_t) = \mathcal{I}(L < \min_{t \in [0, T]} S_t \leq \max_{t \in [0, T]} S_t < U) \quad (5.76)$$

$$L < S_0 < U. \quad (5.77)$$

Il prodotto paga uno a scadenza se il sottostante non ha mai toccato una delle due barriere  $L, U$  in  $[0, T]$ .

Come si è visto in figura 4.2 i prezzi delle DNT sono fortemente dipendenti dal *mixing factor* e quindi dal tipo di dinamica utilizzata. Basti pensare che la differenza nel prezzo a sei mesi tra volatilità stocastica e volatilità locale è pari al 128%.

In quel caso si era sfruttato il modello a volatilità iperbolica, ora vogliamo capire se ci siano grosse differenze al variare del modello stesso di volatilità stocastica utilizzato.

Si veda la figura 5.14, in cui il prodotto è stato prezzato con i vari modelli presentati, sia con mixing factor pari a 1 (SV) che 0.5 (LSV).

E' evidente che qualsiasi sia il modello a volatilità stocastica considerato il risultato non si discosta molto, per cui l'utilizzo del *mixing factor* è necessario per coprire la regione intermedia tra volatilità locale (LV) e stocastica (SV).

*Osservazione 5.4.* Si osservi meglio l'andamento dei prezzi con il modello di Heston. Nel caso SV i prezzi tendono ad essere maggiori dei relativi valori dell'Iperbolico e Lognormale, mentre nel caso LSV sono quasi coincidenti. Questo effetto è dovuto alla difficoltà nel simulare il modello di Heston quando la condizione di Feller non è soddisfatta. Infatti in questo caso la volatilità assume con probabilità positiva il valore nullo e si muove intorno ad esso per molto tempo. Ciò fa sì che il sottostante non si discosti molto dal suo valore iniziale, aumentando così la possibilità di non toccare le barriere e quindi sopravvalutando il prezzo del prodotto.

Nel caso LSV invece il mixing factor diminuisce la vol-of-vol e, nel nostro caso, fa sì che la condizione di Feller sia verificata. In questo caso quindi non si hanno problemi e i prezzi ottenuti sono quindi più veritieri.

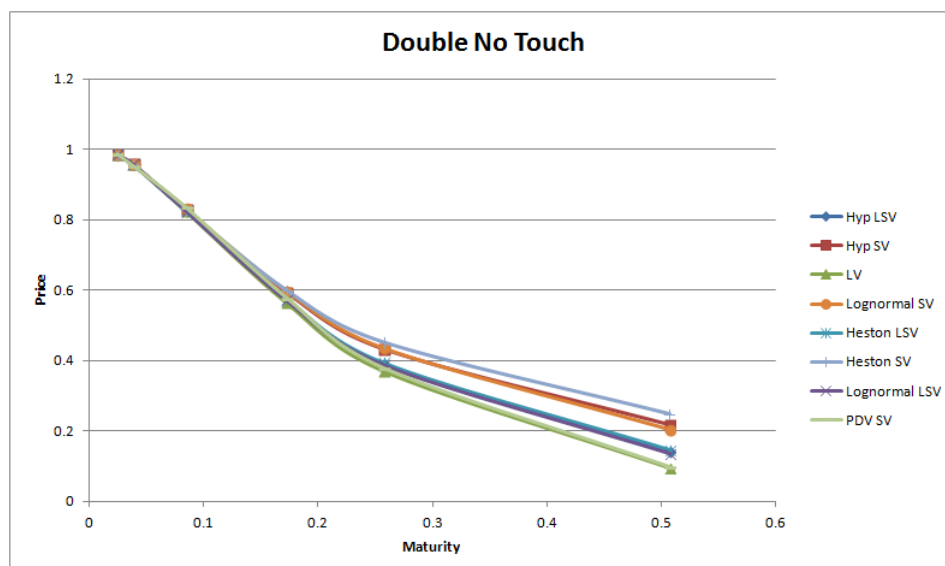
Il mixing factor, oltre a permettere di replicare i prezzi di mercato, facilita la simulazione MC nel caso di Heston.

*Osservazione 5.5.* Per quanto riguarda il PDV, in 5.14 si osserva che tende a restituire prezzi equivalenti al caso della volatilità locale.

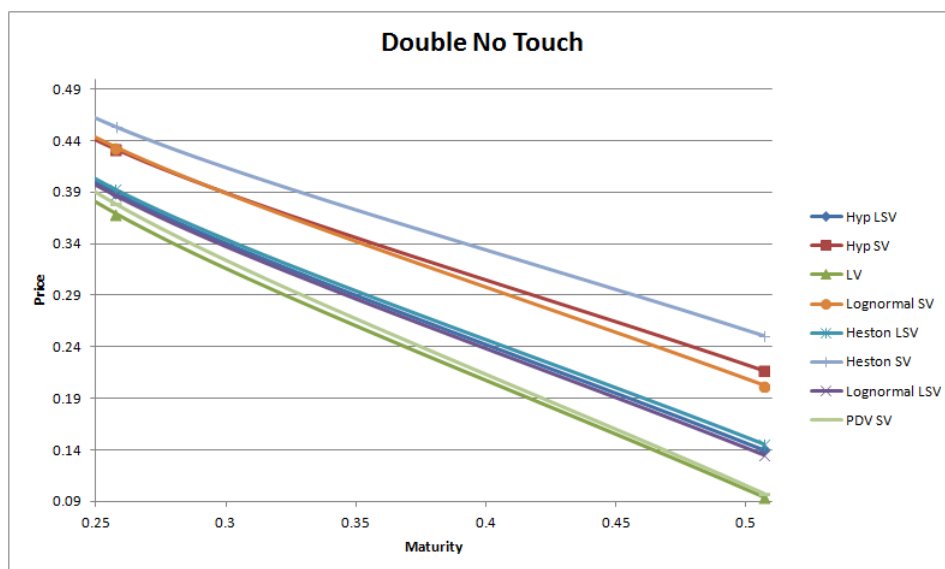


Ciò ci porta supporre che per questo processo la vol-of-vol andrebbe aumentata e non diminuita per avere una dinamica coerente con il mercato.

Figura 5.14: Prezzi DNT al Variare Dei Modelli



(a)



(b)

Nel grafico 5.14a sono riportati i prezzi per tutte le maturity da 2 giorni a 6 mesi, mentre in 5.14b si è voluto evidenziare il comportamento solo per le ultime scadenze. LSV:  $\lambda = 0.5$ ; SV:  $\lambda = 1$ ; LV:  $\lambda = 0$ .

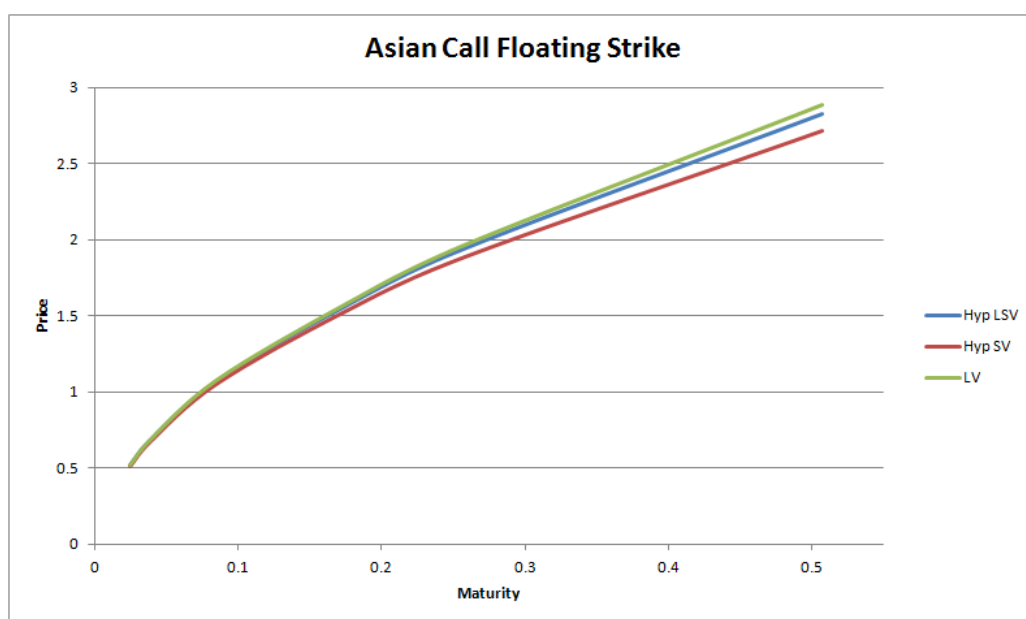
I prodotti asiatici invece hanno un payoff dipendente dalla media realizzata dal sottostante nell'intervallo di osservazione. Nel nostro caso si è deciso di prezzare una Call floating-strike con media aritmetica e fixing giornalieri. Il payoff è quindi

$$\phi_{AFS}(S_t) = \max\left(S_T - \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} S_{t_i}, 0\right). \quad (5.78)$$

L'utilizzo della media come strike price fa sì che il prodotto sia poco influenzato dalla dinamica del sottostante, ma dipenda unicamente dal valore di quest'ultimo a scadenza. Per questo motivo ci aspettiamo che qualsiasi sia il modello utilizzato nel pricing, il risultato non vari molto.

Le nostre aspettative hanno trovato riscontro pratico: prezzando il prodotto con tre diverse dinamiche (LV, SV e LSV) si ottengono valori che a sei mesi differiscono al più del 6%, contro il 128% nelle double no touch con medesima maturity. I risultati sono riportati in figura 5.15.

Figura 5.15: Prezzi AFS al Variare Dei Modelli



Confronto dei prezzi di opzioni Asian Call Floating Strike con dinamica di volatilità Iperbolica al variare del mixing factor. LSV:  $\lambda = 0.5$ ; SV:  $\lambda = 1$ ; LV:  $\lambda = 0$ .

*Osservazione 5.6.* Per le *Double No Touch* è rilevante il cosiddetto *rischio di modello*, ossia il rischio di valutare erroneamente un prodotto per via dell'utilizzo di un modello inadeguato.

Nel suo libro Reghai [45] propone di valutare tale rischio per un prodotto  $\phi$

attraverso l'indice di tossicità  $\mathcal{I}_{tox}$ , definito come

$$\mathcal{I}_{tox}(\phi) = \frac{|P_{LV}(\phi) - P_{SV}(\phi)|}{|P_{LV}(\phi) + P_{SV}(\phi)|}, \quad (5.79)$$

dove con  $P_{LV}(\phi)$ ,  $P_{SV}(\phi)$  si denotano i prezzi di  $\phi$  usando rispettivamente un modello a volatilità locale e uno a volatilità stocastica.

Supponendo che entrambi i modelli siano perfettamente calibrati sul mercato, tale indice è identicamente nullo per le Call e Put Europee. Inoltre queste ultime, essendo dei dati di calibrazione, sono indipendenti dal modello utilizzato per prezzarle.

Euristicamente si può quindi affermare che per valori di  $\mathcal{I}_{tox}$  prossimi allo zero il prodotto è indipendente dal modello scelto per prezzarlo.

Al contrario, più  $\mathcal{I}_{tox}$  aumenta più bisogna prestare attenzione nella scelta del modello utilizzato per il pricing.

Applicando l'indice di tossicità ai prodotti presi in esame si ha un'ulteriore conferma di quanto detto precedentemente: per la Call Asiatica si ottengono valori vicino allo zero, mentre per le Double No Touch valori sensibilmente più elevati mano a mano che cresce la maturity. Si veda la tabella 5.3 per i risultati.

Tabella 5.3: Indice di Tossicità  $\mathcal{I}_{tox}$

Maturity	DNT	AFS
0.0247	0.00012873	0.00413759
0.0384	0.00017821	0.00623812
0.0849	0.00326725	0.01030154
0.1726	0.02548564	0.01455059
0.2575	0.07735411	0.02033183
0.5068	0.39090991	0.03088855

Si osservi che per le prime scadenze, dove è difficile avere un impatto nel prezzo a seconda del modello scelto, il valore dell'indice è pressoché identico in entrambi i casi mentre quando  $T$  aumenta il suo andamento è completamente diverso nei due prodotti. Per l'asiatica  $\mathcal{I}_{tox}$  aumenta lentamente, mentre per la barriera c'è una forte variazione: a sei mesi il valore di  $\mathcal{I}_{tox}$  della DNT è circa 13 volte più grande rispetto alla AFS.

# Conclusione

In questo lavoro abbiamo affrontato il problema della dinamica della volatilità implicita. In particolare si è voluto costruire un modello che fosse consistente sia con la dinamica del mercato che con i prezzi delle plain vanilla, ma allo stesso tempo permettesse di replicare i prezzi di prodotti esotici molto liquidi.

In primo luogo è stato studiato il modello a volatilità locale di Dupire il quale, pur garantendo per costruzione una calibrazione perfetta ai dati di mercato a meno di errori numerici, non riesce a cogliere la dinamica intrinseca del mercato a causa delle ipotesi troppo semplicistiche.

Siamo quindi passati a studiare i modelli a volatilità stocastica, la cui calibrazione attraverso l'algoritmo della Fundamental Transform ha richiesto una notevole attenzione nei dettagli implementativi. Sebbene i modelli a volatilità stocastica siano più consistenti con la dinamica implicita dal mercato e permettano di risolvere molti problemi della volatilità locale, essi non riescono ancora a replicare i prezzi delle opzioni esotiche liquide. Per risolvere questo problema sono stati introdotti i modelli a volatilità locale-stocastica i quali, grazie all'introduzione del mixing factor, permettono di modificare la dinamica della volatilità implicita senza mai perdere la calibrazione ai prezzi delle plain vanilla. Ciò è possibile grazie alla parte locale, anche detta Leverage Function, che va a correggere gli smile di volatilità implicati dal modello. Con questo nuovo grado di libertà è stato dunque possibile replicare i prezzi delle opzioni liquide, come le barriere nel mercato Forex.

Il calcolo della Leverage Function è stato eseguito tramite il Particle Method di Guyon e Henry-Labordère [25] che, a differenza dei classici metodi di risoluzione della Fokker-Planck, è basato sull'approssimazione della distribuzione empirica del sottostante mediante una simulazione Monte Carlo.

I risultati numerici, frutto di una lunga e faticosa implementazione in Matlab, sono in linea con quanto si trova in letteratura. Si veda in particolare [25, 51, 48, 33].

Ulteriori sviluppi possono andare nella direzione di formulare un processo a volatilità locale-stocastica che includa i salti, come suggerito in [48]. L'introduzione dei salti è abbastanza immediata nel caso in cui si scelga di limitare le discontinuità unicamente al processo del sottostante. In questo

caso ci aspettiamo una dinamica della volatilità implicita che vari leggermente per brevi maturity, mentre per le lunghe i risultati dovrebbero essere analoghi. Tuttavia molti autori consigliano di porre i salti nell'evoluzione della volatilità stessa. Questa scelta porta ad un'estensione non banale della teoria, in cui è necessario avvalersi di una versione del teorema di Gyöngy valida per le semimartingale. Per riferimento si veda [7, 14]. Va sottolineato come in questo caso i risultati riguardanti la dinamica della volatilità implicita potrebbero essere molto differenti.

In termini di modelli a volatilità locale-stocastica va approfondito meglio l'impatto della calibrazione della parte stocastica. In particolare si potrebbe analizzare se possa essere sufficiente scegliere i parametri attraverso degli sviluppi asintotici, evitando così il processo di calibrazione e risparmiare tempo computazionale. Per riferimento si veda [41, 35].

# Bibliografia

- [1] Abbott, P. “*Tricks of the Trade: Legendre-Gauss Quadrature*”, *Mathematica J.* 9, 689-691, 2005
- [2] Andersen Leif B. G. and Piterbarg Vladimir, “*Moment Explosions in Stochastic Volatility Models*”, (2007) *Finance and Stochastics* 11,1 pp. 29-50
- [3] Atlan Marc, “*Localizing Volatilities*”, Available Online, 2006
- [4] Barndorff-Nielsen, O.E., “*Normal Inverse Gaussian Distribution and Stochastic Volatility Modelling*”, *Scand. J. Statist.*, 24 (1997), pp.1-13.
- [5] Bartlett Bruce *Hedging Under SABR Model*, *Wilmott Magazine*, 2004
- [6] Bates, D., *Jumps and Stochastic Volatility: The Exchange rate Process Implicit in Deutschemark Options*, *Rev. Fin. Studies*, 9, pp. 69-107, 1996
- [7] Bentata A., Cont R., “*Mimicking the Marginal Distributions of a Semimartingale*”, 2009. Available online.
- [8] Bergomi Lorenzo, “*Stochastic Volatility Modeling: A Practitioner’s Approach*”, Third SMAI European School of Financial Mathematics, 2010
- [9] Björk Tomas, “*Arbitrage Theory in Continuous Time*”, Oxford Finance Series, 2009
- [10] Black F., Scholes M., “*The Pricing of Option and Corporate Liabilities*”, *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-659, 1973
- [11] Carr P., Chou A., “*Hedging Complex Barrier Options*”, 1997. Available Online.
- [12] Carr P., Madan D. (1999) “*Option Valuation Using The Fast Fourier Transform*” *Journal of Computational Finance* 3, pp. 463-520
- [13] Clark Ianin J., “*Foreign Exchange Option Pricing: A Practitioner’s Guide*”, Wiley, 2011

- 
- [14] Cont Rama, Tankov Peter, *“Financial Modelling With Jump Process”*, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2003.
- [15] Cox, J.C., Ingersoll and S.A. Ross (1985) *“A Theory of the Term Structure of Interest Rates”*, *Econometrica* 53, pp. 385-407
- [16] Derman E., Kani I., *“Riding on a Smile”*, 1994. *Risk* 7 pp. 32-39
- [17] Derman E., Kani I., *“Stochastic Implied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Term and Strike Structure of Volatility”*, Quantitative Strategies Technical Notes, 1998
- [18] Derman E., Kani I., Zou J. Z., *“The Local Volatility Surface”*, 1995. Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs
- [19] Duffy, Daniel J., *“A Critique of the Crank Nicolson Scheme Strengths and Weaknesses for Financial Instrument Pricing”*, *Wilmott Magazine* (4), pp.68-76, 2004
- [20] Dupire Bruno, *“Pricing With a Smile”*, 1994. *Risk* 7, pp. 18-20
- [21] Dupire Bruno, *“A Unified Theory of Volatility”*, *Derivative Pricing, The Classic Collection*, 1996
- [22] Gatheral Jim, *“The Volatility Surface. A Practitioner’s Guide”*, John Wiley & Sons Inc, 2006.
- [23] Gyöngy I. *“Mimicking the One-Dimensional Marginal Distribution of Processes Having an Ito Differential”*, *Probability Theory and Related Fields*, 1986
- [24] Guyon Julien, Henry-Labordère Pierre, *“Nonlinear Option Pricing”*, Chapman&Hall, Financial Mathematic Series, 2013
- [25] Guyon Julien, Henry-Labordère Pierre, *“The Smile Calibration Problem Solved”*, 2011. Available at [www.ssrn.com](http://www.ssrn.com)
- [26] Hagan P. S., Kumar D., Lesniewski A. and Woodward D., *“Arbitrage-Free SABR”*, *Wilmott Magazine* (69), pp.60-75, 2014
- [27] Hagan P. S., Kumar D., Lesniewski A. and Woodward D., *“Managing Smile Risk”*, *Wilmott Magazine*, 2002
- [28] Hazewinkel, Michiel, *“Gauss–Kronrod Quadrature Formula”*, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, 2001
- [29] Henry-Labordère Pierre, *“Calibration of Local Stochastic Volatility Models to Market Smiles: A Monte-Carlo Approach”*, *Risk Magazine*, September, 2009

- [30] Heston, S.L., “*A Closed-Form Solution For Options With Stochastic Volatility With Applications to Bond and Currency Options*”. The Review of Financial Studies, 6:327-343, 1993
- [31] Hobson D. G. and Rogers L.C.G., “*Complete Models With Stochastic Volatility*”, Mathematical Finance 8 (1), pp.27-48, 1998
- [32] Homescu Cristian , “*Implied Volatility Surface: Construction Methodologies and Characteristics*”, 2011. Available at [www.ssrn.com](http://www.ssrn.com)
- [33] Homescu Cristian, “*Local Stochastic Volatility Models: Calibration and Pricing*”, 2014. Available at <http://ssrn.com>
- [34] Hull J. C. and A. White, 1987, “*The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*”, Journal of Finance, 42, 281-300
- [35] Jäckel P. and C. Kahl, “*Hyp Hyp Hooray*”, Wilmott Magazine, 2008
- [36] Kilin F., “*Accelerating The Calibration of Stochastic Volatility Models*”, Frankfurt School of Finance and Management, 2007.
- [37] Le Floc'h F. and Kennedy G. J., “*Finite Difference Techniques for Arbitrage Free SABR*”, 2014. Available at <http://ssrn.com>
- [38] Levenberg Kenneth (1944), “*A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares*”, Quarterly of Applied Mathematics 2, pp.164-168
- [39] Lewis Alan L., “*Option Valuation Under Stochastic Volatility*”, Finance Press, 2000
- [40] Lipton A., “*The Vol Smile Problem*”, Risk Magazine, (February) pp.61-65, 2002
- [41] Lorig M., Pagliarini S., Pascucci A., “*Explicit Implied Volatilities for Multifactor Local-Stochastic Volatility Models*”. To appear in Math. Finance, 2015
- [42] Mandelbrot, B. B. “*The Variation of Certain Speculative Prices*”, The Journal of Business 36, 1963
- [43] Marquardt Donald (1963), “*An Algorithm for Least-Squares Estimation of Non-Linear Parameters*”, SIAM Journal on Applied Mathematics 11 (2), pp.431-441
- [44] Merton, R., “*Theory of Rational Option Pricing*”, Bell J. Econ. Manag. Sci 4, 141-183, 1973
- [45] Reghai Adil, “*Quantitative Finance: Back to Basic Principles*”, Palgrave Macmillan, Applied Quantitative Finance, 2014



- 
- [46] Rouah Fabrice Douglas , “*Derivation of Local Volatility*”, Available at [www.frouah.com](http://www.frouah.com)
- [47] Scott, L.O., 1987, “*Option Pricing When The Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application*”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 419-438
- [48] Sepp Artur, “*Efficient Numerical PDE Methods to Solve Calibration and Pricing Problems in Local Stochastic Volatility Models*”, *Global Derivatives*, 2011
- [49] Seydel Rüdiger, *Tools for Computational Finance*, Springer Universitext, 2004
- [50] Silverman, B. W., “*Density Estimation for Statistics and Data Analysis*”, Chapman&Hall, New York, 1986
- [51] Tataru G., Fisher T. and Yu J., “*The Bloomberg Stochastic Local Volatility Model for FX Exotics*”, *Quantitative Finance Development* Bloomberg L.P., 2012
- [52] Tavella Domingo, Wolfgang Klopfer, “*Implying Local Volatility*”, *Wilmott Magazine*, 2001.
- [53] Tehranchi, M.R. “*Implied Volatility: Long Maturity Behavior*”, *Encyclopedia of Quantitative Finance*, 2010
- [54] Van der Stoep A. W., Grzelak L. A., Oosterlee C.W., “*The Heston Stochastic-Local Volatility Model: Efficient Monte Carlo Simulation*”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 17, No.7, 2014