

POLITECNICO DI MILANO  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI  
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA



TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

L'EFFETTO DEL VALUE-AT-RISK  
SUL RISCHIO ENDOGENO

Relatore:

Prof. Emilio BARUCCI

Tesi di laurea di  
Andrea COSSO  
Matr. n. 733158

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

*Ai miei genitori,  
a mio fratello Jacopo*

# Abstract

The present research work analyzes the main instrument on which the current financial regulation (Basel II) is based: Value-at-Risk (“VaR”).

In the first part of this thesis, we consider the VaR effect on portfolio choices. In this context, we prove that, in the presence of leverage effect, if a bank uses VaR to measure its own financial assets portfolio risk, it will invest more in riskier securities rather than another bank that doesn’t use VaR. This occurs for example if a defaultable asset is negotiated in the financial market (which price evolves according to a CEV model) and the bank is less risk-averse than a log-investor.

In the second part of the thesis we analyze the VaR effect on financial markets stability. As shown in this research work VaR is able to increase markets volatility, making them less stable, because it enhances the endogenous risk. We also study the impact of Tobin tax adoption on financial markets stability. The obtained results show that volatility decreases, even if the endogenous risk effect is not so weakened.

Currently other risk measures are able to overcome VaR weak points as Expected Shortfall and CoVaR, that financial regulators should consider in substitution of VaR. As pointed out in the present research work, indeed, the adoption of VaR by financial institutions emphasized the recent global financial crisis.

# Sommario

L'obiettivo di un'economia avanzata è assicurare stabilità al sistema finanziario, garantendo l'affidabilità del mondo bancario. Se ciò non accade, si hanno effetti negativi su tutto il sistema economico, come è stato messo in luce dalla crisi del 1929 e da quella più recente iniziata nel 2007.

Per raggiungere tale obiettivo, apposite autorità di vigilanza a livello nazionale ed internazionale, come la Banca d'Italia e la Banca Centrale Europea, svolgono funzioni di regolamentazione e controllo, al fine di garantire che il sistema finanziario possa adempiere al proprio ruolo di supporto allo sviluppo delle attività economiche. Tali autorità si sono adoperate per far sì che il patrimonio delle banche fosse sufficiente a coprire i rischi a cui il sistema bancario risulta esposto. Nell'ambito degli Accordi di Basilea, sono stati definiti i requisiti patrimoniali a cui le istituzioni finanziarie devono sottostare, tenendo conto sia del rischio di mercato, legato alla negoziazione di titoli, sia del rischio di credito, legato alla concessione di prestiti. Alla base del calcolo di tali requisiti, viene utilizzato il *Value-at-Risk* ("VaR"), ovvero una misura della perdita potenziale di un portafoglio in un certo intervallo di tempo. Il VaR rappresenta, quindi, l'obiettivo di riassumere in un solo numero, il rischio complessivo di un portafoglio di attività finanziarie. È evidente come la crisi degli ultimi tre anni abbia costretto le autorità di vigilanza ad un ripensamento, circa i modelli alla base della valutazione dei rischi delle istituzioni finanziarie.

Da queste premesse, l'obiettivo che la tesi si pone, è quello di analizzare se il VaR, attualmente il principale strumento di misura del rischio per le banche, è idoneo a valutare il rischio a cui sono esposte le istituzioni finanziarie o deve essere superato da nuovi metodi di valutazione del rischio, più sofisticati ed efficienti.

Il **Capitolo 1** analizza la regolamentazione finanziaria, in particolare l'evoluzione degli Accordi di Basilea, focalizzandosi sull'Emendamento del 1996 in cui, per la prima volta, si fa riferimento al VaR. Inoltre, si fornisce una definizione rigorosa di Value-at-Risk, presentando le principali proprietà di tale misura di rischio. Il capitolo termina con l'analisi degli effetti del VaR sulla recente crisi finanziaria, soffermandosi sul legame tra Value-at-Risk e

rischio endogeno e sulla prociclicità del VaR.

Nel **Capitolo 2**, al fine di valutare gli effetti che l'utilizzo del VaR può avere sulle scelte di investimento delle banche, sono stati analizzati diversi modelli matematici presenti in letteratura. In tali modelli si suppone che l'investitore - la banca - scelga il portafoglio ottimo, risolvendo un problema di controllo stocastico. I titoli in cui è possibile investire sono i seguenti: un titolo privo di rischio, che rappresenta per esempio un titolo di Stato e un certo numero di titoli rischiosi, che seguono un moto Browniano geometrico. Se si impone un vincolo di VaR statico - il Value-at-Risk all'istante finale deve essere inferiore di una soglia prefissata - si ottiene che l'investitore compie scelte più rischiose rispetto al caso benchmark - ovvero senza il vincolo di VaR; mentre, adottando una differente misura di rischio, come l'Expected Shortfall, il portafoglio risulta meno rischioso.

Tuttavia un vincolo di VaR statico non è realistico, infatti le istituzioni finanziarie devono giornalmente calcolare il Value-at-Risk a dieci giorni. Risulta quindi necessario introdurre un vincolo di tipo dinamico e in particolare, si impone il vincolo di VaR in ogni istante di tempo.

Si ottiene che, per diversi modelli a volatilità stocastica, il Value-at-Risk non è una buona misura di rischio, infatti induce la banca ad investimenti maggiormente rischiosi rispetto al caso benchmark.

Inoltre, al fine di rendere l'analisi svolta più attuale ed allineata agli accadimenti economici degli ultimi anni, che hanno visto il fallimento di molte banche - si pensi a Lehman Brothers, la più grande bancarotta nella storia degli Stati Uniti - si è modellizzato un mercato in cui è presente un titolo soggetto al rischio di default. A tale scopo, al termine del secondo capitolo, si considera un mercato finanziario con un titolo che evolve secondo un modello CEV (modello a elasticità della varianza costante). Tale modello, infatti, ha la proprietà di descrivere adeguatamente l'evento di default, poiché il prezzo del titolo può annullarsi con probabilità positiva.

Nel **Capitolo 3**, invece, si analizza l'effetto del Value-at-Risk sulla stabilità dell'intero sistema finanziario, quindi, equivalentemente, sul rischio endogeno. A tal fine sono stati utilizzati, come strumento di analisi, i modelli di equilibrio che prevedono la presenza di più investitori, una parte dei quali regolamentati e soggetti al vincolo di VaR - le banche -, insieme ad altri non vincolati - ad esempio fondi hedge. Ogni investitore, risolvendo un problema di controllo stocastico, sceglie il suo portafoglio ottimo. Imponendo che valga la legge della domanda e dell'offerta all'equilibrio, si ottiene la dinamica dei prezzi dei titoli rischiosi.

A questo punto è possibile determinare la volatilità di equilibrio dei titoli ed in particolare l'effetto del Value-at-Risk su tale volatilità, quindi sulla stabilità dei mercati finanziari. Si ottiene che l'utilizzo del vincolo di VaR non è

uno strumento idoneo a garantire la solidità dell'intero sistema finanziario. Allo scopo di stabilizzare i mercati e ridurre la volatilità, col presente lavoro di tesi si introducono nel modello di equilibrio appena descritto, i costi di transazione sulle operazioni finanziarie, così come è stato recentemente proposto a seguito della crisi finanziaria. Tale imposta, comunemente nota come Tobin tax, proposta nel 1973 dal premio Nobel per l'economia James Tobin, ha l'obiettivo di eliminare molte operazioni cosiddette ad alta frequenza. Grazie alle analisi svolte, risulta che tale soluzione riduce effettivamente la volatilità dei mercati finanziari.

In conclusione, nella tesi si prende in considerazione il principale strumento del risk management del sistema finanziario, il Value-at-Risk. Un'analisi accurata delle conseguenze a cui tale misura di rischio può portare sono di particolare importanza, alla luce della recente crisi finanziaria. Nella tesi si evidenzia che il Value-at-Risk non è una buona misura di rischio, infatti induce l'investitore (le banche) a compiere scelte notevolmente rischiose ed incrementa la volatilità dei mercati finanziari. È stato inoltre verificato come, imponendo dei costi di transazione (Tobin tax), i mercati diventino più stabili.

In sostituzione al Value-at-Risk esistono diverse misure di rischio, maggiormente complesse da calcolare, che però risultano più efficienti. L'Expected Shortfall, per esempio, è una media dei valori maggiori del VaR ed è espresso come un integrale di VaR. Tale misura di rischio, rispetto al VaR, tiene maggiormente conto di eventi estremi come le crisi finanziarie. È stata introdotta anche un'altra misura di rischio: il CoVaR, che tiene conto del rischio contagio ed è espresso come il VaR condizionato al fatto che altre istituzioni finanziarie si trovino in difficoltà. Tale misura, durante le crisi finanziarie, fornisce informazioni importanti sia alle autorità di vigilanza, per contenere il rischio sistemico, ma anche agli asset manager e ai risk manager delle istituzioni finanziarie, per gestire in modo più efficiente il portafoglio dell'istituzione stessa e massimizzarne le performance.

Dopo la recente crisi mondiale, i Governi e i principali organismi internazionali hanno, come obiettivo primario, la stabilità dell'economia mondiale; le riforme necessarie per garantire tale priorità, inizieranno con una revisione strutturale delle teorie del risk management, in particolare del Value-at-Risk, il cui utilizzo, come evidenziato da questa tesi, ha accentuato le dinamiche della crisi.

# Indice

<b>1</b>	<b>Risk management e Value-at-Risk</b>	<b>1</b>
1.1	Accordi di Basilea . . . . .	2
1.2	Value-at-Risk . . . . .	9
1.3	Gli effetti del Value-at-Risk sulla crisi finanziaria . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Scelte di portafoglio con vincolo di VaR</b>	<b>22</b>
2.1	Modello di mercato . . . . .	23
2.1.1	Ottimizzazione di portafoglio: il problema di Merton . . . . .	25
2.2	Vincolo di VaR statico . . . . .	27
2.3	Vincolo di VaR dinamico . . . . .	35
2.4	Modello a volatilità stocastica e con vincolo di VaR dinamico . . . . .	42
2.5	Vincolo di VaR dinamico in presenza di un defaultable asset . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Modelli di equilibrio</b>	<b>65</b>
3.1	Modello a volatilità stocastica e con vincolo di VaR dinamico . . . . .	66
3.2	Value-at-Risk e rischio endogeno . . . . .	76
3.3	Modello di equilibrio con Tobin tax . . . . .	85
	<b>Conclusioni</b>	<b>97</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>100</b>

# Capitolo 1

## Risk management e Value-at-Risk

*'The difficulty lies, not in the new ideas,  
but in escaping from the old ones.'*  
John Maynard Keynes

La stabilità finanziaria riveste un ruolo fondamentale nel contesto del sistema finanziario e dell'economia in generale, come ha messo in luce la crisi del 1929 e quella più recente iniziata nel 2007. All'aumentare del numero delle istituzioni finanziarie che ormai operano in uno o più Paesi o continenti, la stabilità finanziaria mondiale ha assunto maggiore rilevanza. Per tutelare il sistema finanziario e assicurarne la stabilità, è necessario individuare le principali fonti di rischio e vulnerabilità e sensibilizzare ai rischi tutte le parti interessate, incluse le istituzioni finanziarie e le autorità di vigilanza.

Negli Stati Uniti, dopo la crisi del 1929, vennero adottate diverse misure per accrescere la fiducia nei confronti del sistema bancario e proteggere i risparmiatori, a tal proposito si veda [36]. Fu creata la Federal Deposit Insurance Corporation (FDIC) al fine di salvaguardare i depositanti nell'eventualità del fallimento di una banca. Venne anche emanato il Glass-Steagall Act, che impediva alle banche commerciali di svolgere le attività tipiche delle banche d'investimento. Attualmente negli Stati Uniti il fondo di garanzia dei depositi continua ad esistere, così come in molti altri Paesi. Sono state invece abrogate molte delle disposizioni contenute nel Glass-Steagall Act.

A livello globale, c'è stata la tendenza a sviluppare regole sempre più complesse per fissare i requisiti patrimoniali delle banche, infatti è il patrimonio che assorbe le perdite inattese. Quindi la regolamentazione, oltre a tutelare



i depositanti, rende le banche consapevoli dei rischi a cui sono esposte.

Da queste premesse, l'obiettivo che la tesi si pone è quello di analizzare se il principale strumento di misura del rischio per gli istituti finanziari, il Value-at-Risk (VaR) attualmente in uso, è idoneo per valutare il rischio e scongiurare crisi future o debba essere superato da nuovi metodi di valutazione del rischio.

Nel presente capitolo l'attenzione è focalizzata sull'attuale regolamentazione del sistema finanziario (*Basilea II*), concentrandosi sul *Value-at-Risk* ed evidenziando i punti deboli di tale regolamentazione.

Nel primo paragrafo analizziamo gli *Accordi di Basilea*, facendo riferimento a [7], [6], [8], [27] e [28], soffermandoci sull'*Emendamento del 1996*, in cui, per la prima volta, si fa riferimento al VaR.

Il Value-at-Risk è definito nel secondo paragrafo, facendo riferimento a [31] e [34]. Infine, nell'ultimo paragrafo, affrontiamo il tema degli effetti del VaR sulla crisi finanziaria. A tale scopo introduciamo il *rischio endogeno* e il concetto di *prociclicità* del Value-at-Risk.

## 1.1 Accordi di Basilea

L'obiettivo della regolamentazione è di stabilire i *requisiti patrimoniali minimi* delle banche, per far fronte alle *perdite che si verificano negli scenari peggiori* in un dato orizzonte temporale. Invece, le *perdite attese*, quindi quelle di cui mediamente una banca risente, vengono generalmente coperte dalle maggiorazioni di prezzo applicate ai prodotti bancari. Il patrimonio serve perciò per proteggere la banca da risultati estremamente sfavorevoli.

Le banche competono nei mercati finanziari con le società d'intermediazione mobiliare e con le compagnie d'assicurazione. Tali istituzioni finanziarie sono soggette a organismi di regolamentazione generalmente diversi da quelli previsti per le banche. Tuttavia, gli organismi di regolamentazione delle istituzioni finanziarie si trovano a dover affrontare problemi simili: nel caso delle banche il loro scopo è tutelare i depositanti e garantire la stabilità del sistema finanziario; mentre per le società d'intermediazione mobiliare, proteggere i clienti dei brokers dal rischio di fallimento e assicurare che i mercati funzionino regolarmente; nel caso delle compagnie d'assicurazione, il loro scopo è tutelare gli assicurati dall'insolvenza delle compagnie.

Negli Stati Uniti, per quanto riguarda i requisiti patrimoniali, ci sono segnali di convergenza della regolamentazione delle istituzioni finanziarie. Gli organismi che regolano le società d'intermediazione mobiliare e le compagnie d'assicurazione, stanno adottando metodi simili agli organismi che regolano le banche. L'Unione Europea, prevede che i requisiti patrimoniali delle

società d'intermediazione mobiliare vengano determinati in modo analogo a quanto stabilito per le banche. Anche per quanto riguarda le compagnie di assicurazione, l'obiettivo è di adattare la regolamentazione prevista per le banche, quindi Basilea II, attraverso il progetto Solvency II.

Prima del 1988, le autorità di vigilanza regolavano il patrimonio delle banche fissando livelli minimi per il rapporto tra patrimonio e attività complessive. Tuttavia, le definizioni di patrimonio e i rapporti presi in considerazione variavano da Paese a Paese, quindi la competizione internazionale tra banche non avveniva in condizioni uniformi dal punto di vista normativo. Un altro problema era rappresentato dal numero crescente di nuovi contratti negoziati dalle banche, soprattutto in mercati over the counter, come per esempio gli interest rate swaps, i currency swaps e le opzioni su valuta, che aumentavano il rischio di credito delle banche ed erano per lo più registrati fuori bilancio.

Tali problemi indussero le autorità di vigilanza di alcuni Paesi (Belgio, Canada, Francia, Germania, Giappone, Italia, Lussemburgo, Olanda, Regno Unito, Stati Uniti, Svezia, Svizzera) a costituire il **Basel Committee on Banking Supervision**. Questo Comitato si riunisce regolarmente a Basilea sotto il patronato della Bank for International Settlements (BIS).

Il primo importante documento del Comitato di Basilea fu l'*Accordo di Basilea del 1988*, più comunemente noto come **Basilea I**, che fu il primo tentativo di fissare uno standard internazionale con cui misurare l'adeguatezza del patrimonio delle banche.

Basilea I si focalizzava su due punti: il primo, riprendendo ciò che era in essere prima del 1988, prescriveva che il rapporto tra attività e patrimonio non superasse il limite di 20. Il secondo punto riguardava ciò che sarebbe diventato noto come *Cooke ratio*, quindi il rapporto tra il patrimonio e le attività ponderate per il rischio (risk-weighted assets, RWA). Nel Cooke ratio si consideravano anche le attività fuori bilancio e a ciascuna di esse era associato un rischio, secondo quanto stabilito nel documento di Basilea I. Con tali informazioni si poteva così ricavare il valore di RWA.

L'Accordo prescriveva che il Cooke ratio fosse almeno pari all'8%. Il patrimonio aveva due componenti, il Tier 1 Capital e il Tier 2 Capital, come descritto in [6]. Tuttavia nel 1998, si veda [7], è stato aggiornato e per i rischi di mercato, di cui si parlerà in seguito, è stato aggiunto il Tier 3 Capital. In definitiva, la struttura del patrimonio di vigilanza risulta attualmente articolata nel seguente modo:

1. *Tier 1 Capital* o patrimonio di base, che include il capitale sociale versato, le riserve, il fondo dei rischi bancari e generali e gli strumenti innovativi di capitale;

2. *Tier 2 Capital* o patrimonio supplementare primario, che include le riserve di rivalutazione, gli strumenti ibridi di patrimonializzazione, le passività subordinate, il fondo rischi di credito (al netto delle minusvalenze nette su titoli e degli altri elementi negativi), le plusvalenze o le minusvalenze nette sulle partecipazioni;
3. *Tier 3 Capital* o patrimonio supplementare secondario, che include i prestiti subordinati di terzo livello.

Almeno il 50% dei requisiti patrimoniali doveva essere rappresentato da patrimonio primario.

Nel 1995 il Comitato di Basilea presentò una proposta per emendare l'Accordo. Tale proposta divenne nota come **Emendamento del 1996**. Entrò in vigore nel 1998 e venne talvolta chiamata BIS 98.

L'Emendamento del 1996 prescriveva che le istituzioni finanziarie dovessero detenere capitale anche a fronte dei **rischi di mercato**, oltre che a fronte dei rischi creditizi. L'Emendamento distingueva tra *trading book* e *banking book*. Il primo è costituito da diversi strumenti tra cui azioni, obbligazioni, swaps, forwards e derivati esotici e viene rivalutato con frequenza giornaliera. Invece il *banking book* è formato soprattutto da prestiti e non è di solito rivalutato con frequenza.

In base all'Emendamento, i requisiti patrimoniali a fronte del rischio di credito previsti da Basilea I continuavano a valere, ad essi però andavano sommati i requisiti patrimoniali a fronte dei rischi di mercato per tutte le voci del trading book. Quest'ultimi potevano essere determinati in base al *metodo standardizzato*, che considerava separatamente i diversi strumenti finanziari, senza tener conto delle possibili correlazioni.

Tuttavia, alle banche più sofisticate fu consentito adottare un metodo basato sui modelli interni (*internal model-based approach*). In questo caso, le banche dovevano calcolare il **Value-at-Risk** del trading book, ottenendo i requisiti patrimoniali a fronte dei rischi di mercato (*market risk capital charge*) con la seguente formula:

$$k \cdot \text{VaR} + \text{SRC},$$

dove  $k$  è un fattore moltiplicativo e SRC è il requisito patrimoniale a fronte dei rischi specifici o idiosincratici (*specific risk charge*), che è presente per esempio nel caso di un corporate bond, in cui si ha il rischio di interesse (che rientra nel VaR) e il rischio di credito (che fa parte dell'SRC). Il Value-at-Risk nella formula è il maggiore tra il VaR del giorno precedente e la media dei VaR osservati negli ultimi sessanta giorni.

In definitiva, in seguito all'Emendamento del 1996, le banche che adottavano l'*internal model-based approach* furono tenute ad avere un patrimonio

pari alla somma di due componenti: il *credit risk capital*, pari all'8% dei *credit risk weighted assets* ( $RWA_C$ ) e il *market risk capital*, pari all'8% dei *market risk weighted assets* ( $RWA_M = 12.5\% \cdot (k \cdot VaR + SRC)$ ), quindi:

$$\text{Patrimonio di vigilanza} = 8\% \cdot (RWA_C + RWA_M).$$

L'Accordo di Basilea del 1988 ha comportato, nel decennio successivo alla sua adozione, un significativo aumento del capitale bancario e ha contribuito in modo determinante alla stabilità del sistema bancario globale. Aveva tuttavia diversi punti deboli:

- tutti i prestiti bancari nei confronti delle società avevano lo stesso coefficiente di rischio, pari al 100% e richiedevano la stessa quantità di capitale. Pertanto, i prestiti a società con rating AAA venivano trattati allo stesso modo dei prestiti a società con rating B;
- erano trascurati i benefici della diversificazione.

Nel giugno 1999, il Comitato di Basilea ha proposto nuove regole, che hanno preso il nome di **Basilea II**. Alcune modifiche sono state apportate nel gennaio 2001 e nell'aprile 2003. Per verificare gli effetti sui requisiti patrimoniali derivanti dall'applicazione di tali regole, sono stati condotti diversi studi sull'impatto quantitativo. Le regole approvate da tutti i membri del Comitato di Basilea sono state emanate nel giugno 2004 e aggiornate nel novembre 2005. L'implementazione di Basilea II è iniziata con il 1° gennaio 2007. I requisiti patrimoniali previsti da Basilea II si applicano alle banche attive a livello internazionale. In Europa, tutte le banche, grandi o piccole, sono regolate secondo Basilea II. Inoltre, l'Unione Europea ha stabilito che le regole di Basilea II vengano applicate non solo alle banche, ma come già ricordato, anche alle società di intermediazione mobiliare.

Basilea II si basa su *tre pilastri*:

- **I pilastro:** requisiti patrimoniali minimi (*minimum capital requirements*);
- **II pilastro:** processo di controllo prudenziale (*supervisory review*);
- **III pilastro:** disciplina di mercato (*market discipline*).

Il **primo pilastro** prevede che i requisiti patrimoniali a fronte del rischio di credito del banking book, siano calcolati in modo più sofisticato rispetto a quanto avveniva in Basilea I. I requisiti patrimoniali, a fronte del rischio di mercato non sono stati modificati rispetto a quanto previsto dall'Emendamento del 1996 ed è stato introdotto un nuovo requisito patrimoniale a

fronte dei *rischi operativi*. Il requisito generale previsto da Basilea I, secondo cui il patrimonio delle banche deve essere almeno pari all'8% delle attività ponderate per il rischio, è rimasto invariato. Pertanto si ottiene:

$$\text{Patrimonio di vigilanza} = 8\% \cdot (\text{RWA}_C + \text{RWA}_M + \text{RWA}_O),$$

dove  $\text{RWA}_O$  rappresenta gli *operational risk weighted assets* ed è quindi il contributo dovuto al rischio operativo.

Secondo Basilea II, per determinare il patrimonio a fronte dei **rischi di credito**, le banche hanno la possibilità di utilizzare una delle seguenti metodologie:

1. il metodo standardizzato (*standardized approach*);
2. il metodo IRB di base (*foundation IRB approach*);
3. il metodo IRB avanzato (*advanced IRB approach*).

Il *metodo standardizzato* è utilizzato da banche che operano in attività di credito non complesse e dotate di sistemi di controllo semplificati. Questo metodo si fonda sull'utilizzo di ratings forniti da agenzie specializzate come Moody's e Standard & Poor.

Il metodo basato sui ratings interni (*internal ratings based-IRB*) utilizza le seguenti quantità:

- WCDR: il peggior tasso d'insolvenza (*worst-case default rate*), che si ritiene non venga oltrepassato nel prossimo anno ad un livello di confidenza del 99.9%;
- PD: la probabilità d'insolvenza (*probability to default*) di ogni prestito nel prossimo anno;
- EAD: l'esposizione soggetta all'insolvenza (*exposure at default*) per ciascun prestito;
- LGD: la perdita in caso d'insolvenza (*loss given default*), ossia la quota dell'esposizione che verrà persa in caso d'insolvenza.
- MA: l'aggiustamento in funzione della scadenza (*maturity adjustment*), che è definito da:

$$\text{MA} = \frac{1 + (M - 2.5) \cdot b}{1 - 1.5 \cdot b},$$

dove

$$b = [0.11852 - 0.05478 \cdot \log(\text{PD})]^2$$

ed  $M$  è la scadenza dell'esposizione. Il maturity adjustment è stato introdotto per tener conto che, se uno strumento dura più di un anno, c'è un'esposizione creditizia derivante dalla possibile insolvenza della controparte o comunque dal peggioramento del suo merito di credito. Si noti, in particolare, che nel caso  $M = 1$  si ottiene  $MA = 1$ .

La quantità WCDR viene ricavata utilizzando le copule Gaussiane per rappresentare la dipendenza tra una qualsiasi coppia di debitori.

Il capitale richiesto a fronte del rischio di credito è dato da:  $EAD \cdot LGD \cdot (WCDR - PD) \cdot MA$ , quindi  $RWA_C$  è dato da questa espressione moltiplicata per 12.5%.

Nel metodo *foundation IRB* è la banca che stima PD, mentre LGD, EAD ed  $M$  sono valori fissati dal Comitato di Basilea. Invece nel metodo *advanced IRB* è la banca che stima anche queste ultime tre quantità.

La scelta del metodo da utilizzare dipenderà dal grado di sofisticazione della banca.

Analogamente al rischio di credito, anche per determinare il patrimonio a fronte dei **rischi operativi**, vi sono tre metodologie:

1. il metodo base (*basic indicator approach*);
2. il metodo standardizzato (*standardized approach*);
3. il metodo avanzato di misurazione (*advanced measurement approach*).

Il *basic indicator approach* prevede che il patrimonio della banca a fronte del rischio operativo, debba essere pari al 15% della media annua del margine d'intermediazione, rilevato negli ultimi tre esercizi.

Lo *standardized approach* è simile a quello base, fatta eccezione che l'attività della banca viene divisa in otto linee di business ed il requisito patrimoniale per ciascuna linea, è calcolato moltiplicando il margine d'intermediazione per il fattore attribuito a quella linea.

Infine, l'*advanced measurement approach* prescrive che la banca utilizzi i suoi modelli interni per il calcolo delle perdite operative che, ad un livello di confidenza del 99.9%, non verranno oltrepassate nel corso di un anno.

Anche in questo caso, il metodo utilizzato dipende dal grado di sofisticazione della banca.

Il **secondo pilastro** di Basilea II riguarda il *processo di controllo prudenziale* svolto dalle autorità di vigilanza. In particolare, si fonda sulla considerazione che il sistema di valutazione e controllo dei rischi delle banche debba essere posto sotto l'attenta supervisione delle autorità di vigilanza. Pertanto, queste ultime devono accertare che i sistemi interni di risk management delle banche siano affidabili, che il management ne faccia un utilizzo appropriato

e che la banca abbia una dotazione di capitale adeguata per i rischi in essere. Un'azione come questa esercitata dalle autorità potrebbe portare, per esempio, a stabilire che il fabbisogno di capitale della banca è al di sopra del livello minimo determinato in funzione del primo pilastro. In tal caso le autorità avrebbero la facoltà di richiedere che le banche operino con un patrimonio superiore al minimo regolamentare. Tale incremento del patrimonio potrebbe anche essere dovuto a rischi di natura diversa da quelli di credito, di mercato e operativi. Tra essi si possono considerare i rischi strategici e alcuni aspetti dei rischi di liquidità e di reputazione. In ogni caso, il confronto continuo tra autorità di vigilanza e banca sul tema dei sistemi di risk management, rappresenta un fattore di stimolo al continuo miglioramento dei processi e degli strumenti applicati alla gestione del rischio.

Più in particolare, il processo di controllo prudenziale si articola in due fasi principali: la prima è denominata ICAAP (Internal Capital Adequacy Assessment Process); la seconda fase invece è detta SREP (Supervisory Review and Evaluation Process). L'ICAAP è una fase di autovalutazione in cui la banca deve giudicare l'adeguatezza del proprio patrimonio in funzione, oltre che dei rischi considerati nei requisiti minimi, di alcuni altri fattori: i rischi non considerati, la situazione congiunturale, la capacità della struttura organizzativa e del sistema dei controlli interni. La fase SREP, invece, consiste nella revisione da parte dell'autorità di vigilanza del processo ICAAP, al fine di esprimere una valutazione circa l'adeguatezza dei sistemi di misurazione e controllo dei rischi, della dotazione patrimoniale e degli assetti organizzativi e di controllo.

Infine, il **terzo pilastro** riguarda la *disciplina di mercato*. L'obiettivo è raggiungere una maggiore trasparenza nell'informazione pubblica delle banche. Il mercato dovrebbe avere informazioni sufficienti per capire l'effettiva natura dell'attività svolta e dei sistemi di risk management utilizzati. In questo modo, è possibile esprimere una valutazione sull'adeguatezza della capitalizzazione della banca. Inoltre consente al mercato di premiare le banche che hanno sistemi di gestione appropriati e capitalizzazione adeguata e penalizzare invece gli istituti finanziari che si trovano in condizioni diverse.

## 1.2 Value-at-Risk

Come è stato evidenziato nel precedente paragrafo, il Value-at-Risk è diventato dal 1996, a seguito dell' "Emendamento dell'Accordo sui Requisiti Patrimoniali per incorporarvi i Rischi di Mercato", il principale strumento di misura del rischio per gli istituti finanziari. Tuttavia presenta alcuni punti deboli, messi in luce da accademici, dal Fondo Monetario Internazionale [29] e dalla Banca Centrale Europea [26], che possono aver alimentato la recente crisi finanziaria.

Il *Value-at-Risk* (valore a rischio - VaR) rappresenta il tentativo di riassumere in un solo numero il rischio complessivo di un portafoglio di attività finanziarie. Il VaR è stato per la prima volta utilizzato verso la fine degli anni '80 dalle principali istituzioni finanziarie ed è diventato pratica comune a partire dal 1994, quando sono state pubblicate da parte di J.P. Morgan [30] le metodologie per calcolarlo.

Allo scopo di definire il VaR, consideriamo un portafoglio di strumenti finanziari e indichiamo con  $V(t)$  il suo valore all'istante  $t$ . Nella pratica  $t$  è espresso in giorni. Fissiamo  $h > 0$ , anch'esso espresso in giorni e consideriamo l'istante futuro  $t+h$  e la variabile aleatoria  $V(t+h)$  che indica il valore del portafoglio a quell'istante, definita su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . In generale si sceglie  $h$  uguale ad 1 giorno oppure a 10 giorni quando si tratta il rischio di mercato, invece si pone  $h$  uguale ad 1 anno per il rischio di credito e per il rischio operativo.

Definiamo la perdita del portafoglio tra  $t$  e  $t+h$  come la variabile aleatoria seguente:

$$L(t+h) = -(V(t+h) - V(t))$$

e sia  $F_L(l) = P(L(t+h) \leq l)$ , con  $l \in \mathbb{R}$ , la funzione di distribuzione cumulativa della perdita  $L$ .

L'obiettivo è determinare a partire da  $L$  una misura del rischio di detenere il portafoglio tra  $t$  e  $t+h$ . Una misura ovvia sarebbe la massima perdita possibile, quindi  $\inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) = 1\}$ . Tuttavia in molti modelli di interesse, la massima perdita è infinita.

Il Value-at-Risk è una semplice estensione della massima perdita: l'idea è di rimpiazzare 'massima perdita' con 'massima perdita che non è superata con un'elevata probabilità', il cosiddetto livello di confidenza.

**Definizione 1.1 (Value-at-Risk).** *Consideriamo un livello di confidenza  $\alpha \in (0, 1)$ . Allora il Value-at-Risk al livello di confidenza  $\alpha$  è dato da:*

$$\text{VaR}^\alpha(t+h) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L(t+h) > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.$$



Quindi il VaR è un *quantile* della distribuzione di perdita, di conseguenza

$$P(L(t+h) \geq \text{VaR}^\alpha(t+h)) \geq 1 - \alpha.$$

Tipici valori per  $\alpha$  sono  $\alpha = 0.95$  e  $\alpha = 0.99$ .

Se la loss  $L$  è nota, il VaR ha il vantaggio di essere facilmente calcolabile. Tuttavia un punto debole del VaR è che, essendo un quantile, non tiene in considerazione le perdite che possono avvenire con una probabilità minore di  $1 - \alpha$ . Questo aspetto diventa rilevante quando i ritorni non hanno una *distribuzione ellittica*, di cui la distribuzione normale è un caso particolare. Tuttavia, nel caso del rischio di credito, di mercato e soprattutto del rischio operativo, a causa del fenomeno delle code pesanti, la distribuzione dei ritorni non è ellittica, quindi la conoscenza di ciò che accade oltre il VaR diventa fondamentale.

Per comprendere più a fondo questo punto debole del VaR, è utile fare riferimento alla nozione di misura di rischio coerente, che ora introduciamo. Il concetto di **misura di rischio coerente** è stato per la prima volta introdotto da Artzner et al. [3], [4], esteso a spazi di probabilità generali da Delbaen [22], mettendo in luce che il *Value-at-Risk non è una misura di rischio coerente*.

L'obiettivo è determinare una lista di proprietà che una buona misura di rischio dovrebbe avere. A tale scopo è necessario dare una definizione formale di misura di rischio.

Consideriamo uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e un orizzonte temporale  $h > 0$ . Sia  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  l'insieme delle variabili aleatorie a valori reali.

Sia  $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  l'insieme delle perdite di portafoglio lungo l'orizzonte temporale  $h$ .

Conviene inoltre richiedere che  $\mathcal{M}$  sia un cono convesso, quindi che se  $L_1 \in \mathcal{M}$  e  $L_2 \in \mathcal{M}$  allora anche  $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$  e  $\lambda L_1 \in \mathcal{M}$  per ogni  $\lambda > 0$ .

Le misure di rischio sono funzioni  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , le quali devono soddisfare le seguenti proprietà per essere coerenti:

1. **subadditività:**  $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ ,  $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ . La misura di rischio di un portafoglio risultante dalla fusione di altri due, non deve essere maggiore delle misure di rischio relative ai due portafogli originari (utilizza il concetto della *diversificazione*);
2. **omogeneità positiva:**  $\rho(\alpha L) = \alpha \rho(L)$ ,  $\forall \alpha > 0$  e  $L \in \mathcal{M}$ . Se aumentiamo la dimensione di un portafoglio in base a un fattore moltiplicativo  $\alpha$ , lasciandone invariata la composizione, la sua misura di rischio deve moltiplicarsi per  $\alpha$ ;

3. **invarianza per traslazione:**  $\rho(L + \alpha) = \rho(L) + \alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  e  $L \in \mathcal{M}$ .  
Se sottraiamo un capitale  $\alpha$  a un portafoglio, la sua misura di rischio deve aumentare di un importo pari a  $\alpha$ ;
4. **monotonia:**  $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$ ,  $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{M}$  con  $L_1 \leq L_2$  quasi certamente. Se il valore di un portafoglio è minore o uguale a quello di un altro portafoglio quasi certamente, la sua misura di rischio deve essere maggiore di quella dell'altro portafoglio.

Il Value-at-Risk non è una misura di rischio coerente, infatti vale il seguente risultato, per la cui dimostrazione si rimanda a [22]:

**Teorema 1.1.** *Se lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è puramente non atomico, ovvero  $P$  assegna ai punti probabilità nulla, allora non esiste alcuna misura di rischio coerente a valori reali definita su  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

Quindi il Value-at-Risk non può essere una misura di rischio coerente, essendo a valori reali. In particolare, poiché è un quantile, soddisfa l'omogeneità positiva, l'invarianza per traslazione e la monotonia, quindi non può soddisfare la subadditività. Tale proprietà però è molto importante, perché, come già descritto sopra, si fonda sul concetto di diversificazione: sommando due rischi, il rischio diminuisce, perciò il rischio di un portafoglio è minore o uguale della somma dei rischi che lo compongono.

Possiamo verificare che il *Value-at-Risk non soddisfa la proprietà di subadditività* anche con un semplice esempio. Consideriamo due defaultable bonds  $A$  e  $B$ . Ciascun emittente può fallire con probabilità 0.04 realizzando una perdita pari a 100, la perdita è invece pari a 0 se non si verifica il fallimento. Si nota facilmente che

$$\text{VaR}^{0.05}(A) = \text{VaR}^{0.05}(B) = \text{VaR}^{0.05}(A) + \text{VaR}^{0.05}(B) = 0,$$

la perdita del portafoglio  $A + B$  è:

1. 0 con probabilità  $(0.96)^2 = 0.9216$ ,
2. 200 con probabilità  $(0.04)^2 = 0.0016$ ,
3. 100 con probabilità  $1 - 0.9216 - 0.0016 = 0.0768$ .

Di conseguenza

$$\text{VaR}^{0.05}(A + B) = 100 > \text{VaR}^{0.05}(A) + \text{VaR}^{0.05}(B) = 0.$$

Si può tuttavia dimostrare che il Value-at-Risk è una misura di rischio coerente nel caso di distribuzioni ellittiche.

Un esempio di misura di rischio coerente è l'**Expected Shortfall** (ES), che tiene conto delle perdite che si verificano con una probabilità inferiore a  $1 - \alpha$ , un'informazione non fornita dal VaR, a tal proposito si veda [10]. L'Expected Shortfall è definito come il valor medio della perdita condizionatamente al fatto che essa sia superiore al VaR.

**Definizione 1.2 (Expected Shortfall).** *Sia  $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con funzione di distribuzione cumulativa  $F_L$ , allora l'Expected Shortfall al livello di confidenza  $\alpha \in (0, 1)$  è dato da:*

$$ES^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 F_L^{-1}(1 - u) du.$$

Il legame tra l'Expected Shortfall e il Value-at-Risk è il seguente:

$$ES^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR^u du.$$

Ovviamente  $ES^\alpha \geq VaR^\alpha$ . L'Expected Shortfall può essere interpretato come la perdita attesa condizionatamente al fatto che la perdita superi il VaR:

$$ES^\alpha = E[L | L \geq VaR^\alpha].$$

Nel caso in cui  $L(t + 1) \sim N(\mu, \sigma^2)$  allora

$$\begin{aligned} ES^\alpha(L(t + 1)) &= \mu + \sigma E\left(\frac{L(t + 1) - \mu}{\sigma} \mid \frac{L(t + 1) - \mu}{\sigma} \geq F_{\frac{L(t+1)-\mu}{\sigma}}^{-1}(\alpha)\right) = \\ &= \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}, \end{aligned}$$

dove  $\phi$  e  $\Phi$  sono rispettivamente la densità e la cumulata della probabilità della perdita  $L(t + 1)$ .

L'Expected Shortfall può essere calcolato esplicitamente anche nel caso di una perdita distribuita come una  $t$ -Student. Supponiamo che  $(L(t + 1) - \mu)/\sigma$  sia distribuita come una  $t$ -Student standardizzata  $t_v$ , con  $v$  gradi di libertà, quindi  $L(t + 1) \sim t(v, \mu, \sigma^2)$ , allora si ha che:

$$ES^\alpha(L(t + 1)) = \mu + \sigma \frac{f_v\left(\sqrt{\frac{v}{v-2}} t_v^{-1}(\alpha)\right)}{1 - \alpha} \cdot \frac{v + \left(\sqrt{\frac{v}{v-2}} t_v^{-1}(\alpha)\right)^2}{v - 1} \sqrt{\frac{v - 2}{v}},$$

dove  $f_v$  rappresenta la densità della  $t$ -Student con  $v$  gradi di libertà e  $t_v$  la cumulata della  $t$ -Student standardizzata con  $v$  gradi di libertà.

L'Expected Shortfall è più sensibile rispetto al Value-at-Risk a perdite estre-

me. Infatti, considerando una distribuzione Normale con media nulla, per la perdita otteniamo:

$$\frac{\text{ES}^\alpha}{\text{VaR}^\alpha} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{(1-\alpha)\Phi^{-1}(1-\alpha)}.$$

Il rapporto è maggiore di 1, in particolare nel caso di  $\alpha = 0.99$  è pari a 1.15; inoltre nel caso di code grasse il rapporto cresce. In più, considerando sempre una distribuzione Normale, si ha che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}^\alpha}{\text{VaR}^\alpha} = 1,$$

invece, nel caso di una  $t$ -Student con  $v > 1$  gradi di libertà si ottiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}^\alpha}{\text{VaR}^\alpha} = \frac{v}{v-1}.$$

Per piccoli livelli di probabilità la differenza tra Expected Shortfall e Value-at-Risk è trascurabile nel caso della distribuzione Normale, la differenza diviene invece significativa nel caso di code grasse e tende a crescere con l'accentuarsi del fenomeno.

Oltre a non essere una misura di rischio coerente, vi sono altri punti deboli legati al Value-at-Risk. Uno di questi è rappresentato dal calcolo del VaR a 10 giorni, infatti molte istituzioni utilizzano quanto suggerito dalla regolamentazione, quindi il metodo *square-root-of-time*. Secondo quest'ultimo metodo, per ottenere il VaR a 10 giorni è sufficiente moltiplicare il VaR a 1 giorno per la radice quadrata di 10. Tuttavia, tale regola vale solo se i rendimenti sono indipendenti e identicamente distribuiti, ma chiaramente questi assunti sono generalmente violati nella realtà. Su questo argomento si veda [24].

Un'importante verifica dell'attendibilità del Value-at-Risk è rappresentata dal **back-testing**, che è inoltre richiesto dall'Emendamento dell'Accordo di Basilea. Si tratta di verificare il comportamento delle stime del VaR sulla base dei dati storici. Le banche devono utilizzare le variazioni giornaliere del valore del portafoglio, sia effettive che ipotetiche, per verificare l'attendibilità del VaR giornaliero al 99%. Per effettuare il back-testing si considerano tutte le cosiddette *violazioni* del VaR, quindi tutte le volte in cui la perdita è stata superiore al VaR. Poiché la probabilità teorica che questo si verifichi è pari a 99%, o più in generale a  $1 - \alpha$ , si verifica statisticamente se il parametro  $1 - \alpha$  rappresenta adeguatamente la realtà. In particolare la frazione di violazioni che sono avvenute dovrebbe essere vicino proprio a  $1 - \alpha$ . Secondo l'Emendamento dell'Accordo di Basilea, se il numero delle violazioni nel corso degli ultimi 250 giorni è minore di 5, il moltiplicatore regolamentare del

VaR, indicato nel primo paragrafo con la lettera  $k$ , è pari al livello minimo di 3. Se il numero delle violazioni è 5, 6, 7, 8 o 9, il moltiplicatore è pari, rispettivamente, a 3.4, 3.5, 3.65, 3.75 e 3.85.

Infine, un altro modo per tenere conto delle perdite che si verificano con probabilità  $1 - \alpha$ , oltre a considerare altre misure di rischio come l'Expected Shortfall, è lo **stress-testing**, richiesto dal Comitato di Basilea come integrazione del Value-at-Risk. Consiste nella stima delle ripercussioni sul valore del portafoglio di variazioni estreme nelle condizioni di mercato. Di solito, come già ricordato, queste variazioni estreme hanno una probabilità molto bassa, praticamente nulla, nei modelli di stima del VaR, eppure si verificano e la recente crisi ne è un esempio. Operativamente uno stress test può essere implementato secondo due diverse direzioni: *scenario analysis* e *stress testing models and parameters*. Quando uno stress test indica una criticità, il management deve identificare i rischi e mettere in atto le strategie per la gestione del rischio che mirano ad eliminarli, come ad esempio: incremento delle riserve di capitale, modifica delle esposizioni ai fattori di rischio.

Uno stress testing secondo la metodologia *scenario analysis*, considera un insieme di variazioni dei fattori di rischio, il portafoglio è valutato per questi nuovi valori e si arriva a calcolare la perdita del portafoglio. La generazione di uno scenario può essere unidimensionale, se si considera un fattore di rischio per volta, oppure multidimensionale, se variano più fattori di rischio simultaneamente. Invece, nel caso della metodologia *stress testing models and parameters* si procede a valutare quanto la misura di rischio sia influenzata dalla scelta del modello o dei valori dei parametri.

### 1.3 Gli effetti del Value-at-Risk sulla crisi finanziaria

La recente crisi finanziaria, che successivamente si è estesa all'economia reale, ha avuto origine nel segmento dei mutui statunitensi ad alto rischio e dei prodotti strutturati.

Alla fine del 2006 la crescita dei prezzi delle abitazioni negli Stati Uniti si è arrestata bruscamente, riflettendo il rialzo dei tassi di interesse ufficiali e il rallentamento dell'economia.

Nei primi mesi del 2007 i **mutui subprime**, erogati a controparti con basso merito di credito, hanno cominciato ad evidenziare elevati tassi di default. Attraverso complesse operazioni di finanza strutturata, gli intermediari che hanno originato questi prestiti, li hanno trasferiti in prodotti opachi e complessi da valutare. Il forte aumento dei tassi di insolvenza ha determinato

incertezza, riguardo al valore degli strumenti di credito strutturato collegati ai mutui subprime, in particolare *mortgage-backed securities* (MBS) e *collateralized debt obligations* (CDO), che sono di fatto risultati non più negoziabili sul mercato.

La dimensione iniziale del problema non era tuttavia tale da avere un effetto sistemico; l'impatto è stato uniforme, ma concentrato in alcuni Paesi (USA, UK, Svizzera, Germania, Francia, Olanda, Irlanda), su banche altamente levereggiate, particolarmente esposte al segmento dei mutui e ai prodotti della finanza strutturata.

Tuttavia, la crisi dei prodotti legati ai mutui subprime, ha contagiato rapidamente altri mercati e numerosi segmenti del sistema finanziario. Le istituzioni finanziarie colpite, hanno iniziato a vendere con conseguente diminuzione dei prezzi; le incertezze e la poca trasparenza sulle dimensioni del problema, hanno provocato il blocco del mercato interbancario. I problemi di liquidità hanno portato alla vendita di altri asset: corporate bond, equity e titoli di Stato, causando il deterioramento dei prezzi e l'accumulo di altre perdite.

Di conseguenza anche i portafogli delle istituzioni finanziarie, non direttamente coinvolte, si sono svalutati provocando una generalizzata contrazione del patrimonio e dei ratios patrimoniali del sistema bancario, causando così il deleveraging di tutto il sistema finanziario e una brusca crescita dell'avversione al rischio. Successivamente la crisi si è estesa anche all'economia reale con il blocco dei finanziamenti alle economie emergenti, la stretta creditizia per le imprese e le famiglie, l'insolvenza e il fallimento di un numero crescente di banche e di istituzioni finanziarie.

Una delle **cause** della crisi è stata l'**abolizione del Glass Steagall Act** da parte del Congresso degli Stati Uniti, con il Gramm-Leach-Bliley Act del 1999, che imponeva una distinzione giuridica fra banche commerciali e banche d'investimento, attività che non potevano essere svolte dallo stesso soggetto giuridico per il conflitto di interessi esistente fra le due. Tale legge era stata approvata nel 1933 a seguito della crisi del '29.

Il **modello origination & distribution**, di natura anglosassone, ha avuto un ruolo centrale nella crisi. In base a tale modello, la banca, l'*originator*, cede un portafoglio di crediti ad una società veicolo (SPV, *special purpose vehicle*), la quale viene costituita ad hoc per consentire il trasferimento del pool di prestiti. A questo punto avviene il processo della *securitization* (*cartolarizzazione*), in base al quale l'SPV converte i crediti in strumenti cartolari e, più precisamente, in valori mobiliari negoziabili sul mercato secondario, denominati *Asset-Backed Securities* (ABS), di cui fanno parte i *Mortgage-Backed Securities* (MBS) e i *Collateralized Debt Obligations* (CDO). Quest'operazione permette di generare liquidità e ridurre l'esposizione creditizia,

che impatta sul patrimonio di vigilanza imposto da Basilea II. Per questi motivi si è aperta la via alla moltiplicazione dei derivati creditizi trattati sui *mercati over the counter* (OTC). Tuttavia, le transazioni che avvengono su tali mercati sono notevolmente più rischiose, soprattutto per l'assenza di clearing houses.

Un altro tema fondamentale della crisi finanziaria è quello della **prociclicità dei principi contabili internazionali** (IAS). Quest'ultimi sono orientati a valorizzare a prezzi di mercato le attività, è quindi sufficiente che vi siano riduzioni di prezzo legate a semplici aspettative, per determinare l'instabilità delle istituzioni.

La ragione del fallimento del sistema economico è da ricercarsi anche nell'**assenza di regole adeguate al funzionamento dell'economia di mercato**. La cultura della deregolamentazione aveva permesso alle banche di creare *veicoli fuori bilancio*, che non erano contabilizzati per i requisiti di capitale. Inoltre la rimozione da parte della Securities and Exchange Commission (SEC) dei *limiti di leverage* per le banche di investimento, ha fatto esplodere l'indebitamento.

Per quanto riguarda gli *Accordi di Basilea*, vi sono diversi punti deboli, che sono qui di seguito elencati, facendo riferimento a [19]:

- *la regolamentazione finanziaria ha sottovalutato l'importanza del **rischio endogeno***. In particolare il Value-at-Risk può destabilizzare i mercati finanziari e favorire il verificarsi di crisi;
- *il Comitato di Basilea ha utilizzato misure di rischio non efficienti, nonostante ne esistano di migliori;*
- *il metodo standard per il rischio di credito non dovrebbe basarsi sulle agenzie di rating, considerando che possono discordare notevolmente nell'assegnare il merito di credito di una società. Inoltre non sono regolamentate e i sistemi per stimare i ratings sono per la maggior parte inosservabili;*
- *la misura del rischio operativo non può ancora essere considerata soddisfacente, sia per la scarsità di dati a disposizione che per l'inadeguatezza dei modelli;*
- infine, *la regolamentazione finanziaria è **prociclica**.*

Il **rischio endogeno** non è stato adeguatamente considerato, in quanto i modelli di rischio esistenti considerano il rischio come un processo esogeno. Tuttavia ciò non corrisponde a realtà; per esempio, la volatilità del mercato

è, almeno in parte, il risultato dell'interazione tra trader ed è quindi endogena.

Più precisamente, prendendo spunto da [20], possiamo definire il *rischio endogeno* come causato da shocks prodotti all'interno del sistema, in contrapposizione al *rischio esogeno*, che si riferisce a shocks provenienti dall'esterno. I mercati finanziari sono soggetti a entrambi i rischi, tuttavia l'impatto più grande è dovuto al rischio endogeno, che è rilevante soprattutto nei periodi di crisi, quando il comportamento degli operatori di mercato è omogeneo.

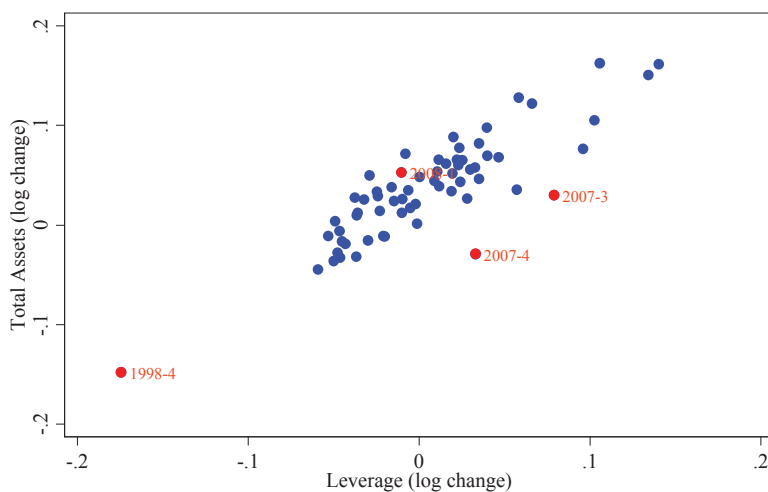
In una crisi finanziaria infatti, gli investitori istituzionali, utilizzando modelli di rischio simili, sono portati a mettere in atto strategie analoghe. Tuttavia le azioni individuali possono rinforzarsi le une con le altre, portando per esempio ad una caduta dei prezzi. Un operatore del mercato può allora essere incentivato a vendere il proprio titolo, causando di conseguenza una caduta ulteriore del prezzo e inducendo altri trader a comportarsi in modo analogo. Questo effetto non è considerato dalle banche, ma è fondamentale per la stabilità dei mercati finanziari.

Direttamente collegata a quest'ultimo tema, è la questione dell'*effetto della regolamentazione finanziaria sul rischio endogeno*, quindi l'argomento affrontato in questa tesi. Come verrà mostrato nei prossimi capitoli, diversi articoli hanno affrontato tale questione e in generale è stato dimostrato che il Value-at-Risk incrementa il rischio endogeno, quindi l'attuale regolamentazione amplifica le oscillazioni di prezzo dei titoli finanziari.

Un altro problema fondamentale della regolamentazione finanziaria, come evidenziato nei punti precedentemente menzionati, è la **prociclicità**. Infatti, come affermato in [2], le fluttuazioni della leva finanziaria hanno un ruolo fondamentale nell'incrementare il rischio di contagio. In particolare, il fenomeno del *deleveraging*, in base al quale gli intermediari cercano di contrarre i loro bilanci simultaneamente, diventa un meccanismo di trasmissione delle difficoltà finanziarie da un'istituzione ad un'altra.

Quando tutto il sistema finanziario detiene titoli illiquidi e a lunga scadenza, finanziati tuttavia da passività di breve termine, una contrazione sincronizzata dei bilanci causerà difficoltà finanziarie da qualche parte nel sistema stesso. Anche se alcune istituzioni possono aggiustare i loro bilanci in modo flessibile in tali condizioni, non tutte sono in grado di fare ciò. Questo è dovuto al fatto che l'intero sistema finanziario ha un problema di maturity mismatch. In [2] si mostra come le fluttuazioni della leva finanziaria siano determinate dall'equity. Infatti, una volta che è stato assegnato il valore dell'equity, anche il totale attivo è fissato, come mostra la Figura 1.1:





**Figura 1.1:** Leverage delle investment bank statunitensi

La Figura 1.1 rappresenta le variazioni trimestrali del totale attivo, rispetto alle variazioni trimestrali della leva finanziaria per le principali investment banks americane. In particolare, l'asse orizzontale misura la variazione percentuale nella leva finanziaria, espressa dalla variazione del logaritmo del totale attivo meno la variazione del logaritmo dell'equity. L'asse verticale misura la variazione percentuale del totale attivo, data dalla variazione del logaritmo del totale attivo. Quindi, la retta a 45 gradi indica l'insieme dei punti dove l'equity è invariato. Al di sopra di tale retta l'equity è crescente, invece al di sotto l'equity è decrescente. Lungo una qualsiasi retta con coefficiente angolare pari a 1 l'equity cresce ad un tasso costante. L'aspetto chiave della Figura 1.1 è che l'inclinazione della retta rappresentata è di circa 45 gradi, quindi l'equity cresce ad un tasso quasi costante. Di conseguenza l'equity sembra essere la variabile determinante, mentre tutti gli aggiustamenti del totale attivo derivano da variazioni nella leva finanziaria. Ciò può causare notevoli fluttuazioni dell'attivo. Per esempio, tra il terzo e il quarto trimestre del 1998, durante la crisi dell'LTCM, i bilanci delle investment banks americane si sono ridotti del 15%.

Può essere utile considerare la leva finanziaria implicita massima nelle operazioni in cui le istituzioni prendono in prestito capitali, dando in cambio delle garanzie, come accade nelle operazioni di pronti contro termine. Quest'ultime sono la fonte primaria di capitali per le banche d'investimento. In un pronti contro termine, chi riceve il capitale oggi, vende un titolo ad un prezzo al di sotto del valore di mercato, con l'accordo che lo ricomprerà in futuro ad un prezzo prestabilito. La differenza tra prezzo di mercato attuale

del titolo e il prezzo a cui è venduto, è chiamata haircut e fluttua in base alle condizioni di benessere finanziario dell'istituzione.

Le fluttuazioni nell'haircut determinano ampiamente il grado di finanziamento di un'istituzione finanziaria levereggiata. Il motivo è che l'haircut determina la leva massima possibile, raggiunta da chi prende in prestito il capitale. Se l'haircut è al 2%, il debitore può prendere in prestito 98 euro per 100 euro di titoli garantiti. Allora, per detenere 100 euro di titoli garantiti, il debitore deve ricorrere a 2 euro in più di equity. Quindi, se l'haircut dei pronti contro termine è pari al 2%, la leva massima possibile è  $100/2 = 50$ . Supponiamo che il debitore sfrutti tutta la leva finanziaria massima possibile. Un tale comportamento sarebbe giustificato dall'obiettivo di massimizzare il ROE, poiché quest'ultimo è incrementato dalla leva finanziaria. Il debitore ha un bilancio altamente levereggiato, con una leva pari a 50. Se a questo punto uno shock al sistema finanziario alza l'haircut, il debitore si trova di fronte ad una situazione difficile. Supponiamo, per esempio, che l'haircut salga al 4%, quindi la leva si dimezza a 25, dal 50. Il debitore può incrementare l'equity in modo tale che raddoppi rispetto al valore iniziale, o deve vendere metà del suo attivo, oppure una combinazione delle due precedenti possibilità. Tuttavia, la vendita degli asset può portare ad incrementare le difficoltà di altre istituzioni finanziarie. Questo tipo di fenomeno è analizzato più in particolare in [15].

Le considerazioni riguardanti gli haircuts dei pronti contro termine, suggeriscono che i rischi misurati giocheranno un ruolo centrale nella determinazione della leva finanziaria. In [2] si trova che il Value-at-Risk, valutato a partire dalle serie storiche dei ritorni dell'equity, spiega le variazioni del totale attivo, della leva finanziaria e di passività come i pronti contro termine. Inoltre si mostra che il Value-at-Risk è in grado di causare difficoltà finanziarie ad altre istituzioni, contro l'efficienza di tutto il sistema finanziario.

Da quanto finora esposto riguardo la regolamentazione finanziaria, si evince che i sistemi di risk management delle istituzioni finanziarie sono risultati inadeguati e incapaci di gestire la crisi finanziaria. L'utilizzo spregiudicato della leva finanziaria, unito all'obiettivo di utili alti nel breve periodo, insito nel meccanismo dei bonus, ha portato ad accumulare un altissimo grado di rischio, che è sfuggito a tutti, a cominciare dai membri degli organi di gestione e controllo delle banche d'affari.

Le autorità di supervisione si sono rivelate incapaci di svolgere il loro compito di controllo. Infatti, le banche centrali non hanno gestito efficacemente i temi della liquidità e della solvibilità, non riuscendo a ristabilire la fiducia nei mercati. In particolare non hanno previsto l'enorme assorbimento di liquidità delle cartolarizzazioni e il crescente orientamento del mercato al *rischio sistemico*. Gli strumenti di gestione della liquidità e della solvibilità erano

costruiti per l'attività bancaria tradizionale, mentre i problemi derivanti dal trading in proprio e dai rischi di controparte non erano previsti. Gli sforzi dei governi per ricapitalizzare le istituzioni finanziarie multinazionali, sono stati in parte vanificati dalla mancanza di meccanismi di coordinamento.

In definitiva la crisi ha posto in evidenza la necessità di rafforzare la regolamentazione finanziaria e l'azione di supervisione. La stabilità finanziaria è condizione necessaria per assicurare lo sviluppo dell'economia. Squilibri nei bilanci degli intermediari possono esercitare un forte impatto sulle prospettive di crescita del settore reale; un'attenta gestione della liquidità, la disponibilità di adeguate riserve patrimoniali e, più in generale, una corretta misurazione dei rischi, sono fattori chiave per evitare che si inneschino circoli viziosi tra fragilità finanziaria, capacità delle banche di finanziare l'economia e crescita.

Nella revisione della regolamentazione finanziaria, gli interventi sul capitale giocano un ruolo centrale. Le raccomandazioni del Financial Stability Board e del G20 hanno indicato chiaramente l'esigenza di rafforzare la dotazione patrimoniale delle banche e mitigare i possibili effetti prociclici delle nuove regole di Basilea II.

Per migliorare la regolamentazione finanziaria, in termini di contenimento del rischio sistemico, si potrebbe invece considerare il **CoVaR**, come possibile alternativa al VaR o in aggiunta ad esso. Il CoVaR è stato presentato per la prima volta in [1].

Il CoVaR è il Value-at-Risk condizionato al fatto che altre istituzioni finanziarie siano in difficoltà, quindi che subiscano una perdita pari al loro VaR.

**Definizione 1.3 (CoVaR).** *Consideriamo un livello di confidenza  $\alpha \in (0, 1)$ . Sia  $\text{CoVaR}_\alpha^{ij}$  il VaR di un'istituzione  $i$  condizionato al  $\text{VaR}_\alpha^j$  di un'altra istituzione  $j$ , dove tutto è valutato al livello di confidenza  $\alpha$ . Indichiamo con  $L^i$  la perdita dell'istituzione  $i$ , allora il  $\text{CoVaR}_\alpha^{ij}(t+h)$  sull'orizzonte di tempo  $h$  soddisfa:*

$$P(L^i(t+h) \geq \text{CoVaR}_\alpha^{ij}(t+h) | L^j(t+h) = \text{VaR}_\alpha^j(t+h)) \geq 1 - \alpha.$$

Un innalzamento del valore del CoVaR relativamente al VaR è in grado di misurare il rischio di contagio. In particolare è importante la seguente espressione:

$$\frac{\text{CoVaR}_\alpha^{ij} - \text{VaR}_\alpha^{ij}}{\text{VaR}_\alpha^{ij}} \cdot 100,$$

che rappresenta la differenza percentuale tra il CoVaR e il VaR, relativamente al VaR e cattura il grado di rischio di contagio a cui è esposta una particolare

istituzione in tempi di difficoltà finanziaria.

Il CoVaR, a differenza del VaR, tiene in considerazione anche il rischio sistemico, un aspetto di fondamentale importanza per le autorità di vigilanza, a seguito della recente crisi finanziaria.

Un altro importante aspetto del CoVaR è che può essere facilmente utilizzato per altre misure di rischio. Per esempio, in [1] si definisce anche il CoES, che può essere calcolato, analogamente all'Expected Shortfall, come un integrale di CoVaR.

Per tali motivi, come sottolineato in [1], durante i periodi di crisi, in cui le istituzioni finanziarie sono fortemente soggette al rischio contagio, sarebbe necessario considerare anche misure di rischio come il CoVaR e il CoES. Infatti, tali misure possono fornire informazioni importanti sia alle autorità di vigilanza, per contenere il rischio sistemico, ma anche agli asset managers e ai risk managers delle istituzioni finanziarie, per imporre in modo più accurato dei limiti alle operazioni di trading e, quindi, per ottimizzare le performance del portafoglio dell'istituzione stessa.

## Capitolo 2

# Scelte di portafoglio con vincolo di VaR

L'obiettivo della tesi è analizzare l'impatto del Value-at-Risk sugli investimenti finanziari effettuati da una singola istituzione e sulla stabilità del sistema finanziario. In questo capitolo affrontiamo il tema delle scelte di portafoglio con vincolo di VaR, quindi analizziamo l'impatto del Value-at-Risk sulla composizione del portafoglio di un investitore.

Nei paragrafi successivi verranno analizzati i contributi presenti in letteratura, iniziando da [11], in cui si suppone che l'investitore massimizzi il portafoglio, costituito da un'attività priva di rischio e un certo numero di titoli rischiosi, che seguono un moto Browniano geometrico e sono correlati tra loro. Il trader deve soddisfare il seguente vincolo di VaR: il Value-at-Risk alla fine del periodo utilizzato come orizzonte temporale deve essere minore di una soglia prefissata. In [11] si determina il portafoglio in questa situazione e nel caso cosiddetto benchmark, quindi in assenza del vincolo. Si ottiene che senza il vincolo di VaR l'investitore compie scelte meno rischiose; mentre se si usasse una misura di rischio migliore, come l'Expected Shortfall, si otterrebbe il risultato opposto.

Il secondo articolo [16], invece, muove una critica nei confronti del precedente, sostenendo che il vincolo di VaR, essendo imposto solo all'istante finale, non rispecchia la realtà. Infatti le banche sono obbligate a calcolare giornalmente il Value-at-Risk, facendo in modo che non superi un determinato valore. Per questo motivo, nel secondo articolo qui presentato, si mantiene il modello utilizzato in [11], modificando però il vincolo di VaR, che ora viene imposto in ogni istante temporale.

Tali modelli, che riportano due risultati contrastanti, si fondano entrambi sull'ipotesi di rendimenti logaritmici dei titoli rischiosi gaussiani. È quindi interessante verificare se i risultati ottenuti in [11] e [16] rimangono invariati

nel caso in cui si utilizzino modelli più sofisticati per descrivere l'andamento dei titoli rischiosi.

Questa strada è stata percorsa in [33], il cui articolo è il terzo qui presentato. Per il sottostante gli autori utilizzano un modello a volatilità stocastica; inoltre, per ridurre la complessità del problema, è stato considerato un unico sottostante. Il vincolo di VaR è stato imposto come in [16]. Tuttavia non si ottiene un risultato definitivo, ma si ricava che il vincolo di VaR può portare a investimenti meno rischiosi rispetto al caso benchmark, al variare delle seguenti quantità: i parametri del modello a volatilità stocastica, il coefficiente di avversione al rischio e il segno della correlazione tra il titolo rischioso e la sua volatilità.

Prima di presentare gli articoli introduciamo un *modello di mercato* che racchiuda al suo interno tutti i modelli presenti come casi particolari.

## 2.1 Modello di mercato

Il **mercato finanziario** è costituito da  $n + 1$  attività finanziarie ed è basato su uno *spazio di probabilità filtrato*  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$  soddisfacente le seguenti ipotesi:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  è uno spazio di probabilità completo;
- la filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  è continua da destra, perciò  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}, \forall t \in [0, T]$ ;
- se  $E \in \mathcal{F}$  e  $\mathbb{P}(E) = 0$  allora  $E \in \mathcal{F}_0$ .

Consideriamo un *moto Browniano* standard  $n$ -dimensionale  $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))$ ,  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adattato, continuo e ad incrementi indipendenti dal passato.

Le  $n + 1$  attività finanziarie sono date da:

- *un'attività priva di rischio*  $B$ :

$$\begin{aligned} dB(t) &= r(t)B(t)dt, & t \in (0, T], \\ B(0) &= B_0, \end{aligned}$$

dove il tasso d'interesse  $\{r(t), t \in [0, T]\}$  è un processo stocastico  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adattato, continuo e positivo.

- *$n$  attività rischiose*  $S_1, \dots, S_n$ :

$$dS_i(t) = \mu_i(t)S_i(t)dt + \sum_{j=1}^n S_i(t)\sigma_{ij}(t)dW_j(t), \quad t \in (0, T],$$

$$S_i(0) = S_{i,0}.$$

dove  $i = 1, \dots, n$ . Indichiamo con  $\boldsymbol{\mu}(t) = (\mu_i(t))_{i=1, \dots, n}$  il drift e con  $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\sigma_{ij}(t))_{i,j=1, \dots, n}$  la matrice di volatilità.

$\{\boldsymbol{\mu}(t), t \in [0, T]\}$  è un processo stocastico  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adattato, continuo e positivo.

$\{\boldsymbol{\sigma}(t), t \in [0, T]\}$  è un processo stocastico  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adattato, continuo e invertibile q.o. su  $[0, T]$ .

$B_0, S_{i,0}, \dots, S_{n,0}$  sono costanti positive.

L'assenza di arbitraggio e la completezza del mercato implicano l'esistenza di un unico processo  $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$  tale che:

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= -\xi(t)(r(t)dt + \boldsymbol{\kappa}(t)^\top d\mathbf{W}(t)), \quad \forall t \in (0, T], \\ \xi(0) &= 1, \end{aligned}$$

dove

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \boldsymbol{\sigma}^{-1}(t)(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n), \quad t \in [0, T]$$

è il *premio per il rischio* di mercato (Sharpe ratio).

Il processo  $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$  è denominato il *fattore di sconto stocastico* (SDF).

Il **portafoglio** dell'agente di mercato è un processo stocastico  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adattato dato da:  $\{\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t)), t \in [0, T]\}$ , dove i  $\pi_i$  sono pesi relativi, quindi rappresentano la percentuale del valore totale del portafoglio investita nel titolo  $S_i$ .

Il peso relativo del titolo privo di rischio è  $1 - \boldsymbol{\pi}(t)^\top \mathbf{1}_n$ , in questo modo il portafoglio è *autofinanziante*.

Sia  $X_0 > 0$  il capitale iniziale dell'investitore. Indichiamo con  $\{X^\pi(t), t \in [0, T]\}$  il processo stocastico che rappresenta il valore del portafoglio  $\boldsymbol{\pi}$ , allora vale la seguente equazione differenziale stocastica per  $t \in (0, T]$ :

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t) \left[ \left( r(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\top (\boldsymbol{\mu}(t) - r(t)\mathbf{1}_n) \right) dt + \boldsymbol{\pi}(t)^\top \boldsymbol{\sigma}(t) d\mathbf{W}(t) \right],$$

sapendo che  $X^\pi(0) = X_0$ .

Infine supponiamo che l'agente di mercato abbia una funzione di utilità  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $u \in C^2(\mathbb{R})$ , strettamente crescente, strettamente concava, che soddisfi  $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = 0$ .

Per determinare il portafoglio ottimo, si suppone che l'investitore massimizzi l'utilità attesa della ricchezza in  $T$ :

$$\sup_{\boldsymbol{\pi}} E[u(X^\pi(T))],$$

dove il portafoglio  $\pi$  potrebbe essere vincolato a soddisfare determinate condizioni di ammissibilità. A questo problema si aggiunge inoltre il vincolo di Value-at-Risk, quindi si impone che il VaR ad un certo istante di tempo non superi una soglia prefissata. Per esempio, in [11] il vincolo è imposto solo all'istante finale  $T$ . In tal caso, nel problema di ottimizzazione interviene solamente il valore del portafoglio all'istante finale, di conseguenza l'ottimizzazione è fatta rispetto a  $X^\pi(T)$ , anziché rispetto a  $\pi$ . Invece, in [16] e [33] si impone il vincolo di VaR in ogni istante di tempo tra 0 e  $T$ . In questo caso è necessario considerare il valore del portafoglio tra 0 e  $T$  e non solo all'istante finale, di conseguenza la massimizzazione viene fatta su tutti i portafogli ammissibili.

Presentiamo nel prossimo paragrafo un problema di scelte di portafoglio particolarmente significativo, noto come *problema di Merton*, che in seguito sarà denominato *caso benchmark*.

### 2.1.1 Ottimizzazione di portafoglio: il problema di Merton

Nel presente paragrafo affrontiamo il problema di Merton, supponendo che il mercato sia costituito da  $n$  titoli rischiosi e da un titolo privo di rischio. Di conseguenza, si considera il problema di scelte di portafoglio di un investitore, il quale massimizza l'utilità attesa derivante dal consumo intertemporale e dalla ricchezza finale. In tale problema l'investitore non è soggetto al vincolo di VaR.

Consideriamo il modello di mercato presentato nel paragrafo precedente, ipotizzando che il tasso d'interesse privo di rischio, il drift e i coefficienti di diffusione dei titoli rischiosi siano costanti. Supponiamo che l'investitore abbia la possibilità di consumare nell'intervallo di tempo considerato, quindi debba determinare anche il piano di consumo  $\{C(t), t \in [0, T]\}$ . Indichiamo il tasso di consumo con  $c(t) = C(t)/X^\pi(t)$ , che rappresenta la percentuale di capitale consumata dall'investitore all'istante di tempo  $t$ .

L'investitore determina il portafoglio ottimo massimizzando l'utilità attesa della ricchezza finale, che è pari a:  $E[u(X^\pi(T))]$ ; inoltre massimizza l'utilità attesa derivante dal consumo intertemporale:  $E[\int_0^T e^{-\delta t} u(c(t)) dt]$ .

Quindi il problema diventa massimizzare la seguente quantità:

$$E \left[ \int_0^T e^{-\delta t} u(c(t)) dt + u(X^\pi(T)) \right],$$



sapendo che il valore del portafoglio risolve la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t) \left[ (r + \boldsymbol{\pi}(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n)) dt + \boldsymbol{\pi}(t)^\top \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{W}(t) \right].$$

Inoltre il tasso di consumo deve essere sempre non negativo:  $c(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$ . Anche il valore del portafoglio deve sempre essere non negativo, per tale motivo introduciamo il seguente tempo d'arresto:  $\tau = \min\{\inf\{t \in (0, T] : X^\pi(t) = 0\}, T\}$ . La funzione obiettivo più naturale da utilizzare diventa allora la seguente:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\delta t} u(c(t)) dt \right].$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman associata a tale problema è data da:

$$\begin{cases} V_t + \sup_{c \geq 0, \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n} \left\{ e^{-\delta t} u(c) + \boldsymbol{\pi}^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) x V_x + (rx - c) V_x + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\pi} x^2 V_{xx} \right\} = 0, & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T), \\ V(x, T) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^+, \\ V(0, t) = 0, & \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Le condizioni del primo ordine per il problema di ottimizzazione statica sono le seguenti:

$$\begin{aligned} e^{-\delta t} u'(c) &= V_x(x, t), \\ \boldsymbol{\pi}^* &= -\frac{V_x}{x V_{xx}} (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n). \end{aligned}$$

Si ottengono quindi due fondi comuni:  $\boldsymbol{\pi}^0$ , le cui componenti sono tutte nulle, che rappresenta l'investimento nel titolo privo di rischio;  $\boldsymbol{\pi}^f = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n)$ , che è costituito solo da titoli rischiosi. L'allocazione ottima tra i due fondi comuni, in ogni istante di tempo, è la seguente:

$$\boldsymbol{\pi}^* = -\frac{V_x}{x V_{xx}} \boldsymbol{\pi}^f + \left( 1 - \frac{V_x}{x V_{xx}} \right) \boldsymbol{\pi}^0.$$

## 2.2 Vincolo di VaR statico

Nel seguente paragrafo si presenta il modello esposto in [11], in cui si considera un problema di ottimizzazione di portafoglio, analogo al problema di Merton, dove però l'investitore deve anche rispettare un vincolo di VaR. Il problema di Merton è denominato caso benchmark. Si ottiene che l'investitore compie scelte più rischiose in presenza del vincolo di VaR rispetto al caso benchmark. Gli autori studiano anche il portafoglio ottimo di un investitore soggetto al vincolo di Expected Shortfall, in sostituzione al vincolo di VaR. I risultati ottenuti mostrano che, in tal caso, l'investitore compie scelte meno rischiose rispetto al caso benchmark.

Nel presentare [11] facciamo riferimento al modello di mercato presentato nel paragrafo precedente. In tale articolo si suppone che l'investitore massimizzi l'utilità del valore finale del portafoglio, quindi  $u(X^\pi(T))$ , considerando però solo i portafogli per i quali il Value-at-Risk non va oltre una certa soglia prefissata.

In particolare, il **vincolo di Value-at-Risk** viene imposto supponendo che l'orizzonte temporale del VaR sia lo stesso dell'investimento. Poiché la perdita all'istante finale è data dalla variabile aleatoria seguente:  $X_0 - X^\pi(T)$ , fissato  $\alpha \in [0, 1]$  si ha che:

$$P(X_0 - X^\pi(T) \leq \text{VaR}^\alpha(T)) = 1 - \alpha.$$

Osserviamo che la definizione appena data di  $\text{VaR}^\alpha(T)$  è differente da quella presentata nel primo capitolo, infatti in questo caso  $\alpha$  tipicamente è pari a 1% oppure a 5%.

L'obiettivo è dunque di includere il vincolo di VaR in un problema di ottimizzazione del portafoglio, quindi di massimizzazione dell'utilità. A questo scopo si impone che il  $\text{VaR}^\alpha(T)$  debba essere minore o uguale di una certa soglia:

$$\text{VaR}^\alpha(T) \leq X_0 - \underline{X},$$

dove  $X_0$  è il capitale iniziale dell'investitore, invece  $\underline{X}$  è un valore fissato. Il *vincolo di VaR* diventa quindi:

$$P(X^\pi(T) \geq \underline{X}) \geq 1 - \alpha.$$

Il **problema di ottimizzazione** con vincolo di VaR è dato da:

$$\sup_{X^\pi(T)} E[u(X^\pi(T))]$$

soggetto a:

$$\begin{aligned} E[\xi(T)X^\pi(T)] &\leq X_0, \\ P(X^\pi(T) \geq \underline{X}) &\geq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

La soluzione a tale problema è presentata nel seguente

**Teorema 2.1.** *La soluzione al problema di ottimizzazione con il vincolo di VaR è la seguente:*

$$X^{\text{VaR}}(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)), & \xi(T) < \underline{\xi}, \\ \underline{X}, & \underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi}, \\ I(y\xi(T)), & \bar{\xi} \leq \xi(T), \end{cases}$$

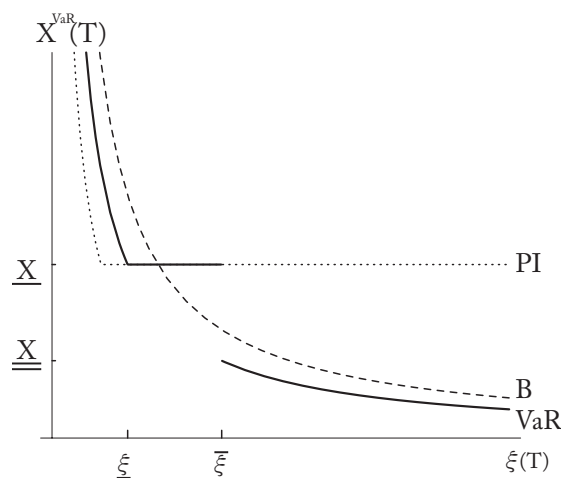
Dove  $I$  è la funzione inversa di  $u'$ ,  $\underline{\xi} = u'(\underline{X})/y$ ,  $\bar{\xi}$  è tale che  $P(\xi(T) > \bar{\xi}) = \alpha$  e  $y \geq 0$  risolve  $E[\xi(T)X^{\text{VaR}}(T; y)] = X_0$ . Il vincolo di VaR è efficace se e solo se  $\underline{\xi} < \bar{\xi}$ . Inoltre, il moltiplicatore di Lagrange  $y$  è decrescente in  $\alpha$ , quindi  $y \in [y_B, y_{PI}]$ , dove  $y_B$  fa riferimento al caso benchmark ( $\alpha = 1$ ), quindi privo del vincolo di VaR, invece  $y_{PI}$  corrisponde ad  $\alpha = 0$  (portfolio insurance), in cui il valore del portafoglio in  $T$  non può scendere al di sotto di  $\underline{X}$ .

La soluzione  $X^{\text{VaR}}(T)$  è rappresentata nella Figura 2.1, dove  $\underline{\underline{X}}$  è definito da:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{cases} I(y\bar{\xi}), & \text{se } \underline{\xi} < \bar{\xi}, \\ \underline{X}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ricordiamo che il fattore di sconto stocastico  $\xi$  è più elevato negli scenari peggiori del mondo, per esempio in presenza di una grave recessione. Vi sarà infatti una forte domanda di assicurazione per tutelarsi da tali eventi sfavorevoli, che aumenterà il prezzo dell'assicurazione stessa, causando un incremento del fattore di sconto stocastico. Al contrario, gli scenari migliori corrispondono a valori del fattore di sconto stocastico bassi.

Dalla Figura 2.1 si nota che negli *scenari migliori*  $\xi < \underline{\xi}$  e peggiori  $\xi > \bar{\xi}$  il vincolo di VaR riduce il valore del portafoglio rispetto al caso benchmark. Invece, negli scenari intermedi, in cui  $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$ , il vincolo di VaR incrementa il valore del portafoglio rispetto al caso benchmark. Si osserva anche, che gli *scenari* in cui  $\xi > \underline{\xi}$  sono suddivisi in due sottoinsiemi. Se  $\underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi}$  allora il trader si assicura, invece, per  $\xi(T) \geq \bar{\xi}$  decide di non assicurarsi, perché sarebbe molto costoso e la probabilità che un tale evento si verifichi è minima. Ne consegue che il vincolo di VaR porta il trader a considerare solo la probabilità della perdita e non la sua entità, quindi l'investitore sceglie di non assicurarsi nei confronti dei peggiori scenari, in quanto sono i più costosi.



**Figura 2.1:** Valore del portafoglio ottimo all'istante finale. La linea continua indica il valore del portafoglio dell'investitore soggetto al vincolo di VaR ( $X^{\text{VaR}}$ ). La linea punteggiata, invece, rappresenta il valore del portafoglio di un investitore che adotta la strategia portfolio insurance ( $X^{\text{PI}}$ ). Infine, la linea tratteggiata rappresenta il caso benchmark ( $X^{\text{B}}$ ).

Inoltre, sempre per  $\xi(T) \geq \bar{\xi}$ , si ha che la soluzione ottenuta con il vincolo di VaR, assume dei valori minori rispetto alle soluzioni ottenute per  $\alpha = 0$  e per  $\alpha = 1$ . Quindi si ha che:  $X^{\text{VaR}}(T) < X^{\text{B}}(T) < X^{\text{PI}}(T)$ . Di conseguenza, come sottolineato in [11], tale risultato è di fondamentale importanza per le autorità di vigilanza e il risk management. Infatti, si è ottenuto che il risk management basato sul Value-at-Risk può portare a perdite più ingenti, rispetto a quando il VaR non viene utilizzato. Quindi può accentuare i problemi di credito che si verificano durante periodi di crisi finanziaria, poiché fa assumere posizioni più rischiose.

Verifichiamo che la soluzione trovata soddisfa effettivamente il vincolo di VaR. L'obiettivo è dimostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$P(X^{\text{VaR}}(T) \geq \underline{X}) = 1 - \alpha.$$

Per calcolare  $P(X^{\text{VaR}}(T) \geq \underline{X})$ , notiamo che tale probabilità coincide con  $P(\xi(T) \leq \bar{\xi})$ , infatti l'evento  $E = \{\omega \in \Omega : X^{\text{VaR}}(T, \omega) \geq \underline{X}\}$  coincide con l'evento  $\{\omega \in \Omega : \xi(T) \leq \bar{\xi}\}$ , come si ricava dall'espressione della variabile aleatoria  $X^{\text{VaR}}(T)$ . La probabilità  $P(\xi(T) \leq \bar{\xi})$  è pari a  $1 - \alpha$ , come si deduce

dal teorema, quindi

$$P(X^\pi(T) \geq \underline{X}) = P(\xi(T) \leq \bar{\xi}) = 1 - \alpha.$$

Tuttavia, verifichiamo se il vincolo di VaR è rispettato anche quando si conosce la traiettoria di  $X^\pi$  fino all'istante di tempo  $t$ . Quindi verifichiamo se è ancora valida la seguente disuguaglianza:

$$P(X^{\text{VaR}}(T) \geq \underline{X} | \mathcal{F}_t) \geq 1 - \alpha.$$

Ciò è equivalente a dimostrare che:

$$P(\xi(T) \leq \bar{\xi} | \mathcal{F}_t) \geq 1 - \alpha.$$

Utilizzando l'equazione differenziale stocastica risolta da  $\xi$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} P(\xi(T) \leq \bar{\xi} | \mathcal{F}_t) &= P\left(\xi(t) e^{\int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du + \int_t^T \boldsymbol{\kappa}(u) d\mathbf{W}(u)} \leq \bar{\xi} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= P\left(e^{\int_t^T \boldsymbol{\kappa}(u) d\mathbf{W}(u)} \leq \frac{\bar{\xi}}{\xi(t)} e^{-\int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= P\left(\int_t^T \boldsymbol{\kappa}(u) d\mathbf{W}(u) \leq \log\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi(t)}\right) - \int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du \middle| \mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

Se  $\boldsymbol{\kappa} \in L^2([t, T]; \mathbb{R}^n)$  è deterministico, allora  $\int_t^T \boldsymbol{\kappa}(u) d\mathbf{W}(u)$  è una variabile aleatoria normale, con media nulla e varianza data dall'isometria di Itô:

$$\sigma(t)^2(T-t) := \mathbb{E}\left[\left(\int_t^T \boldsymbol{\kappa}(u) d\mathbf{W}(u)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^T \boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u) du \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Quindi, sia  $Z \sim N(0, 1)$  allora:

$$\begin{aligned} P(\xi(T) \leq \bar{\xi} | \mathcal{F}_t) &= P\left(\sigma(t)\sqrt{T-t}Z \leq \log\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi(t)}\right) - \int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi(t)}\right) - \int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du}{\sigma(t)\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned}$$

Verifichiamo se quest'ultima quantità è maggiore o uguale di  $1 - \alpha$ :

$$\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi(t)}\right) - \int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du}{\sigma(t)\sqrt{T-t}}\right) \geq 1 - \alpha,$$

che diventa:

$$\frac{\log\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi(t)}\right) - \int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du}{\sigma(t)\sqrt{T-t}} \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

quindi:

$$\log\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi(t)}\right) \geq \int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du + \sigma(t)\sqrt{T-t}\Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

da cui si ottiene:

$$\xi(t) \leq \bar{\xi} e^{-\int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du - \sigma(t)\sqrt{T-t}\Phi^{-1}(1 - \alpha)}.$$

Il secondo membro può essere visto come un'attualizzazione del valore  $\bar{\xi}$  al tempo  $t$ . Quindi abbiamo dimostrato che:

$$P(X^{\text{VaR}}(T) \geq \underline{X} | \mathcal{F}_t) \geq 1 - \alpha$$

se e solo se la variabile aleatoria  $\xi(t)$  soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$\xi(t) \leq \bar{\xi} e^{-\int_t^T \left(r(u) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}(u)^\top \boldsymbol{\kappa}(u)\right) du - \sigma(t)\sqrt{T-t}\Phi^{-1}(1 - \alpha)}.$$

Di conseguenza non è sempre vero che  $P(X^{\text{VaR}}(T) \geq \underline{X} | \mathcal{F}_t) \geq 1 - \alpha$ , ma solo per  $\omega \in \Omega$  per cui  $\xi(t, \omega)$  verifica la disuguaglianza scritta sopra. Tale risultato rappresenta uno dei punti deboli del modello presentato in [11], infatti si ha un problema di inconsistenza temporale, che deriva dall'aver imposto un vincolo di VaR statico. Nel paragrafo successivo si analizzerà invece un articolo in cui tale questione è stata risolta, imponendo un vincolo di VaR dinamico.

Adesso mostriamo che l'investitore soggetto al vincolo di VaR ha in media perdite superiori all'investitore del caso benchmark, come affermato nel prossimo teorema:

**Teorema 2.2.** *Siano  $u(X) = X^{1-\gamma}/(1-\gamma)$  con  $\gamma > 0$ ,  $r$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  costanti. Fissato il valore finale del portafoglio  $X^\pi(T)$ , definiamo le due seguenti misure*

di perdita:

$L_1(X^\pi) = E[(\underline{X} - X^\pi(T))1_{\{X^\pi(T) \leq \underline{X}\}}]$  e  $L_2(X^\pi) = E[\xi(T)(\underline{X} - X^\pi(T))1_{\{X^\pi(T) \leq \underline{X}\}}]$ ,  
in cui  $\underline{X}$  è definito da:

$$\underline{X} = \begin{cases} I(y\bar{\xi}), & \text{se } \underline{\xi} < \bar{\xi}, \\ \underline{X}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora:

- (i)  $L_1(X^{\text{VaR}}) \geq L_1(X^{\text{B}})$ ;
- (ii)  $L_2(X^{\text{VaR}}) \geq L_2(X^{\text{B}})$ .

In questo teorema l'attenzione è rivolta ai peggiori scenari, che portano alle perdite più ingenti, dati dagli  $\omega \in \Omega$  tali che  $X^\pi(T, \omega) \leq \underline{X}$ .  $L_1$  misura il valore atteso di tali perdite future, invece  $L_2$  rappresenta il valore atteso delle stesse perdite attualizzate. Tale teorema pone maggiormente in luce le proprietà non desiderabili del Value-at-Risk, soprattutto per le autorità di vigilanza. Infatti, la regolamentazione finanziaria dovrebbe limitare le perdite ingenti e renderle meno frequenti. È vero che sotto il vincolo di VaR le perdite sono meno frequenti, tuttavia le perdite peggiori sono più ingenti che in assenza del vincolo di Value-at-Risk. Il prossimo teorema mostra l'espressione esplicita del portafoglio dell'investitore soggetto al vincolo di VaR:

**Teorema 2.3.** *Siano  $u(X) = X^{1-\gamma}/(1-\gamma)$  con  $\gamma > 0$ ,  $r$  e  $\kappa$  costanti. Allora:*

- (i) *Il valore del portafoglio ottimo al tempo  $t \in [0, T]$  è dato da:*

$$X^{\text{VaR}}(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{1/\gamma}} - \left[ \frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{1/\gamma}} \Phi(-d_1(\underline{\xi})) - \underline{X}e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\underline{\xi})) \right] + \left[ \frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{1/\gamma}} \Phi(-d_1(\bar{\xi})) - \underline{X}e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\bar{\xi})) \right],$$

dove

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= \frac{1}{y\underline{X}^\gamma}, \\ \Gamma(t) &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \left( r + \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t) + \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 \frac{\|\kappa\|^2}{2} (T-t), \\ d_2(x) &= \frac{\log\left(\frac{x}{\xi(t)}\right) + \left( r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}}, \end{aligned}$$

$$d_1(x) = d_2(x) + \frac{1}{\gamma} \|\boldsymbol{\kappa}\| \sqrt{T-t}.$$

(ii) La percentuale di capitale investita nei titoli rischiosi è data da:

$$\boldsymbol{\pi}^{\text{VaR}}(t) = q^{\text{VaR}}(t) \boldsymbol{\pi}^{\text{B}}(t),$$

dove il portafoglio nel caso benchmark  $\boldsymbol{\pi}^{\text{B}}$  e  $q^{\text{VaR}}$  sono dati da:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^{\text{B}}(t) &= \frac{1}{\gamma} [\boldsymbol{\sigma}(t)^\top]^{-1} \boldsymbol{\kappa}, \\ q^{\text{VaR}}(t) &= 1 - \frac{\underline{X} e^{-r(T-t)} (\Phi(-d_2(\underline{\xi})) - \Phi(-d_2(\bar{\xi})))}{X^{\text{VaR}}(t)} + \\ &\quad + \frac{\gamma(\underline{X} - \underline{X}) e^{-r(T-t)} \phi(d_2(\bar{\xi}))}{X^{\text{VaR}}(t) \|\boldsymbol{\kappa}\| \sqrt{T-t}}, \end{aligned}$$

in cui  $\phi$  è la densità della distribuzione normale standard.

(iii)  $q^{\text{VaR}}(t) \geq 0$  per ogni  $t \in [0, T]$  e

$$\lim_{\xi(t) \rightarrow 0} q^{\text{VaR}}(t) = \lim_{\xi(t) \rightarrow +\infty} q^{\text{VaR}}(t) = 1.$$

(iv) Quando  $\underline{\xi} < \bar{\xi}$ , allora  $q^{\text{VaR}}(t) > 1$  se e solo se  $\xi(t) > \xi^*(t)$ , dove  $\xi^*(t)$  è deterministico e limitato:

$$\sqrt{\bar{\xi} \underline{\xi}} e^{(r - \|\boldsymbol{\kappa}\|^2/2)(T-t)} \leq \xi^*(t) \leq \bar{\xi} e^{(r - \|\boldsymbol{\kappa}\|^2/2)(T-t)} e^{(\|\boldsymbol{\kappa}\|^2/\gamma)(T-t)}.$$

Il primo termine che compare nell'espressione di  $X^{\text{VaR}}$  rappresenta il valore del portafoglio ottimo nel caso benchmark, invece i termini rimanenti servono per assicurarsi negli stati intermedi, in modo tale che il valore del portafoglio non scenda al di sotto di  $\underline{X}$ . In particolare, il primo termine rappresenta il costo di un'opzione put sul valore del portafoglio nel caso benchmark, con strike price  $\underline{X}$ ; invece, il secondo termine deriva dall'aver una posizione di tipo short in un portafoglio di opzioni binarie. In [11] si confronta il risultato ottenuto per il VaR con quello ottenuto per l'*Expected Shortfall*, indicato con LEL. Quest'ultimo porta al seguente vincolo nel problema di ottimizzazione:

$$\mathbb{E}[\xi(T)(\underline{X} - X^\pi(T))1_{\{X^\pi(T) \leq \underline{X}\}}] \leq \varepsilon,$$

dove  $\varepsilon \geq 0$  è una costante.

Anche per l'LEL si considerano il caso benchmark ( $\varepsilon = +\infty$ ) e il caso di



portfolio insurance ( $\varepsilon = 0$ ).

Il problema di ottimizzazione è dato da:

$$\sup_{X^\pi(T)} E[u(X^\pi(T))]$$

soggetto a:

$$\begin{aligned} E[\xi(T)X^\pi(T)] &\leq X_0, \\ E[\xi(T)(\underline{X} - X^\pi(T))1_{\{X^\pi(T) \leq \underline{X}\}}] &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

La soluzione a tale problema è fornita nel seguente

**Teorema 2.4.** *La soluzione del problema di ottimizzazione con il vincolo di LEL è la seguente:*

$$X^{\text{LEL}}(T) = \begin{cases} I(z_1\xi(T)), & \xi(T) < \underline{\xi}_\varepsilon, \\ \underline{X}, & \underline{\xi}_\varepsilon \leq \xi(T) < \bar{\xi}_\varepsilon, \\ I((z_1 - z_2)\xi(T)), & \bar{\xi}_\varepsilon \leq \xi(T), \end{cases}$$

dove  $\underline{\xi}_\varepsilon = \frac{u'(\underline{X})}{z_1}$ ,  $\bar{\xi}_\varepsilon = \frac{u'(\underline{X})}{z_1 - z_2}$  e  $z_1 \geq 0$ ,  $z_2 \geq 0$  risolvono il seguente sistema:

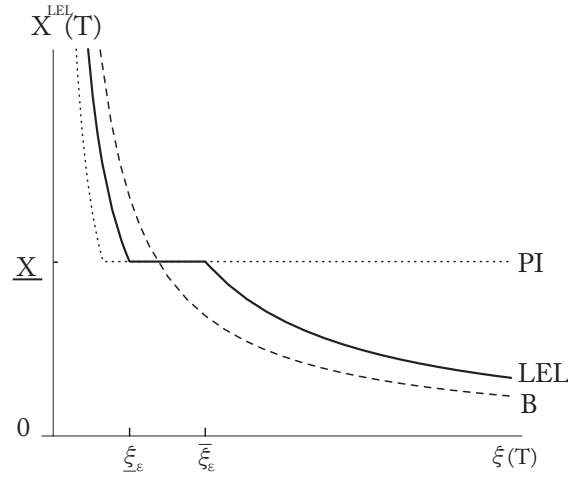
$$\begin{cases} E[\xi(T)X^{\text{LEL}}(T; z_1, z_2)] = \xi(0)X_0, \\ E[\xi(T)(\underline{X} - X^{\text{LEL}}(T; z_1, z_2))1_{\{X^{\text{LEL}}(T; z_1, z_2) \leq \underline{X}\}}] = \varepsilon \quad \text{o} \quad z_2 = 0. \end{cases}$$

Il vincolo di LEL è efficace se e solo se  $\underline{\xi}_\varepsilon < \bar{\xi}_\varepsilon$ . Inoltre, il moltiplicatore di Lagrange  $z_1$  è decrescente in  $\varepsilon$ , quindi  $z_1 \in [z_1^B, z_1^{PI}]$ . In più,  $z_1 - z_2 \leq z_1^B$ .

La soluzione  $X^{\text{LEL}}(T)$  è mostrata nella Figura 2.2. In questo caso si trova che  $X^B(T) < X^{\text{LEL}}(T) < X^{\text{PI}}(T)$ , quando  $\xi(T) \geq \bar{\xi}_\varepsilon$ , quindi la contraddizione ottenuta con il Value-at-Risk è scomparsa. Di conseguenza un risk management basato sul LEL permette di costruire portafogli meno rischiosi rispetto al caso benchmark.

In definitiva, i risultati esposti in [11] dimostrano come il vincolo di Value-at-Risk porti ad investimenti più rischiosi, di quanto si avrebbe in sua assenza. Inoltre, si dimostra che ciò non accade se si utilizza una misura di rischio più efficiente, indicata con LEL nell'articolo, che corrisponde all'Expected Shortfall. Si conclude quindi, che la regolamentazione finanziaria dovrebbe imporre l'utilizzo di quest'ultima misura di rischio, in sostituzione al Value-at-Risk.

Tuttavia il modello utilizzato in [11] per dedurre tali risultati, presenta alcuni punti deboli. Infatti, il vincolo di Value-at-Risk è statico, poiché viene imposto solo all'istante finale. Tale assunzione non rispecchia quanto avviene



**Figura 2.2:** Valore del portafoglio ottimo all'istante finale in presenza del vincolo di LEL

nelle istituzioni finanziarie, le quali calcolano il VaR ogni giorno, modificando di conseguenza la composizione del loro portafoglio.

Il prossimo articolo che presentiamo tiene conto di quest'ultimo punto, infatti impone un vincolo di VaR dinamico.

## 2.3 Vincolo di VaR dinamico

Nell'articolo [16] gli autori sostengono che il modello presentato in [11], essendo basato sull'ipotesi che il vincolo di VaR risulta presente solo all'istante finale, non rispecchia la realtà. Infatti le istituzioni finanziarie valutano il Value-at-Risk giornalmente. Per tale motivo in questo articolo si suppone che un'istituzione finanziaria determini la composizione del proprio portafoglio, lungo un orizzonte di tempo pari a  $T$ , massimizzando  $u(X^\pi(T))$  come in [11], ma rispettando un vincolo di VaR *dinamico* anziché statico. In particolare il vincolo di VaR viene imposto in ogni istante temporale.

Consideriamo il modello di mercato presentato all'inizio del capitolo, supponendo che il tasso d'interesse del titolo privo di rischio  $r$  sia costante. Inoltre, si considerano solo *portafogli ammissibili*, quindi tali che  $\int_0^T |\boldsymbol{\pi}(t)|^2 dt < +\infty$ . Indichiamo con  $\Pi$  l'insieme dei portafogli ammissibili.

Possiamo esprimere il *valore del portafoglio* all'istante  $t + \tau \in [0, T]$ , in funzione del valore all'istante  $t \in [0, T]$  nel seguente modo:

$$X^\pi(t + \tau) = X^\pi(t) \exp\left(\int_t^{t+\tau} (r + \boldsymbol{\pi}(s)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}(s)^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\pi}(s)) ds + \right.$$

$$+ \int_t^{t+\tau} \boldsymbol{\pi}(s)^\top \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{W}(s)).$$

Invece, se l'investitore non modificasse il portafoglio tra  $t$  e  $t + \tau$ , il valore di tale portafoglio all'istante  $t + \tau$ , indicato con  $\mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t))$ , sarebbe dato da:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t)) = & X^\pi(t) \exp \left( (r + \boldsymbol{\pi}(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}(t)^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\pi}(t)) \tau + \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\pi}(t)^\top \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{W}(t + \tau) - \mathbf{W}(t)) \right), \end{aligned}$$

infatti, in questo caso  $\boldsymbol{\pi}(s) = \boldsymbol{\pi}(t)$  per ogni  $s \in [t, t + \tau]$ .

$\mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t))$  è importante per definire il VaR. In [16] il Value-at-Risk ad un livello di confidenza  $\alpha \in [0, 1]$ , indicato con  $\text{VaR}^{\alpha, \boldsymbol{\pi}}(t)$ , viene calcolato in ogni istante di tempo  $t$ , sull'orizzonte temporale tra  $t$  e  $t + \tau$ , supponendo che il portafoglio non vari. In particolare, sia  $\alpha \in [0, 1]$  e  $\tau > 0$ , allora il Value-at-Risk è dato da:

$$\text{VaR}^{\alpha, \boldsymbol{\pi}}(t) = \inf \{ L \geq 0 : \mathbb{P}(X^\pi(t) - \mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t)) \geq L | \mathcal{F}_t) < \alpha \}.$$

Il VaR così definito può essere calcolato esplicitamente, in particolare si ha che:

$$\text{VaR}^{\alpha, \boldsymbol{\pi}}(t) = X^\pi(t) \left( 1 - e^{\left( r + \boldsymbol{\pi}(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}(t)^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\pi}(t) \right) \tau + \Phi^{-1}(\alpha) |\boldsymbol{\pi}(t)^\top \boldsymbol{\sigma}| \sqrt{\tau}} \right)^+.$$

Il *vincolo di VaR* viene quindi imposto in ogni istante di tempo  $t \in [0, T]$ , in modo tale che il Value-at-Risk del portafoglio  $\text{VaR}^{\alpha, \boldsymbol{\pi}}(t)$ , non sia più grande di una soglia fissata  $\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) \geq 0$ .

Di conseguenza, il **problema di ottimizzazione** diventa:

$$\sup_{\boldsymbol{\pi} \in \Pi} \mathbb{E}[u(X^\pi(T))]$$

soggetto a:

$$\text{VaR}^{\alpha, \boldsymbol{\pi}}(t) \leq \overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t),$$

per  $t \in [0, T]$ .

Nel caso di un unico titolo rischioso, il vincolo di VaR è equivalente alla richiesta che  $\boldsymbol{\pi}(t)$  sia compreso in un intervallo limitato per ogni  $t \in [0, T]$ . Infatti, utilizzando l'espressione di  $\text{VaR}^{\alpha, \boldsymbol{\pi}}(t)$ , il vincolo di Value-at-Risk si

può riscrivere nel seguente modo:

$$X^\pi(t) \left( 1 - e^{\left( r + \pi(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \pi^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \pi \right) \tau + \Phi^{-1}(\alpha) |\pi(t)^\top \boldsymbol{\sigma}| \sqrt{\tau}} \right)^+ \leq \overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t),$$

da cui:

$$\left( 1 - e^{\left( r + \pi(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \pi^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \pi \right) \tau + \Phi^{-1}(\alpha) |\pi(t)^\top \boldsymbol{\sigma}| \sqrt{\tau}} \right)^+ \leq \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)}. \quad (2.1)$$

Quest'ultima disuguaglianza diventa:

$$\left( 1 - \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} \right)^+ \leq e^{\left( r + \pi(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \pi^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \pi \right) \tau + \Phi^{-1}(\alpha) |\pi(t)^\top \boldsymbol{\sigma}| \sqrt{\tau}}. \quad (2.2)$$

Infatti, se

$$\frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} \geq 1,$$

allora (2.2) è certamente vera, poiché il primo membro si annulla e il secondo è sempre positivo. Analogamente, (2.1) vale, infatti il primo membro è sempre minore o uguale a 1.

Altrimenti se

$$0 < \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} < 1,$$

da (2.1) si deduce che il primo membro deve essere più piccolo di 1, quindi l'esponentiale è minore di 1, così possiamo non considerare più la parte positiva e la disuguaglianza diventa semplicemente:

$$1 - e^{\left( r + \pi(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \pi^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \pi \right) \tau + \Phi^{-1}(\alpha) |\pi(t)^\top \boldsymbol{\sigma}| \sqrt{\tau}} \leq \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)}.$$

Analogamente, per quanto riguarda (2.2), sappiamo che il primo membro è positivo anche se non si considera la sua parte positiva, quindi possiamo scrivere:

$$1 - \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} \leq e^{\left( r + \pi(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \pi^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \pi \right) \tau + \Phi^{-1}(\alpha) |\pi(t)^\top \boldsymbol{\sigma}| \sqrt{\tau}}.$$

Poiché le due ultime disuguaglianze scritte sono equivalenti, si deduce che sono equivalenti anche (2.1) e (2.2).

Se consideriamo il logaritmo di (2.2) otteniamo:

$$\log \left( 1 - \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} \right)^+ - \left( r + \boldsymbol{\pi}(t)^\top (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1}_n) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^\top \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\pi} \right) \tau - \Phi^{-1}(\alpha) |\boldsymbol{\pi}(t)^\top \boldsymbol{\sigma}| \sqrt{\tau} \leq 0.$$

Nel caso di un unico titolo rischioso, quindi  $n = 1$ , abbiamo che:

$$\log \left( 1 - \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} \right)^+ - \left( r + \pi(t)(\mu - r) - \frac{1}{2} \pi(t)^2 \sigma^2 \right) \tau - \Phi^{-1}(\alpha) |\pi(t)| \sigma \sqrt{\tau} \leq 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza deve essere risolta, considerando separatamente il caso in cui  $\pi(t) \geq 0$  da quello in cui  $\pi(t) < 0$ . In questo modo si ottengono due disequazioni di secondo grado per  $\pi(t)$  da risolvere. Ogni disequazione impone che  $\pi(t)$  assuma solo i valori che cadono all'interno di un intervallo limitato. Riportandosi al caso generale, in cui  $\pi(t)$  può essere sia positivo che negativo, si ottiene un unico intervallo di valori per  $\pi(t)$ , quindi:

$$\pi^-(X^\pi(t), t) \leq \pi(t) \leq \pi^+(X^\pi(t), t),$$

dove

$$\begin{aligned} \pi^\pm(X^\pi(t), t) = & \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{\tau} \pm \Phi^{-1}(\alpha) \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\left( \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{\tau} \pm \Phi^{-1}(\alpha) \right)^2 - 2 \left( \log \left( 1 - \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} \right)^+ - r \tau \right)} \right). \end{aligned}$$

In particolare, l'insieme dei portafogli che soddisfano il vincolo è convesso se  $n = 1$  oppure se  $n > 1$  e  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ .

La soluzione al problema precedentemente presentato è fornita nel seguente:

**Teorema 2.5.** *Sia  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  e consideriamo la funzione valore del problema di controllo stocastico, definita nel modo seguente:*

$$V(X, t) = \sup_{\boldsymbol{\pi} \in \Pi} E[u(X^\pi(T)) | X^\pi(t) = X].$$

La soluzione del problema di ottimizzazione è data da:

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \varphi(t) (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{1}_n).$$

La funzione  $\varphi$  è uguale a:

$$\varphi(t) = \min \left( -\frac{V_X(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)V_{XX}(X^\pi(t), t)}, \varphi_\alpha^+(X^\pi(t), t) \right)$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^+(X^\pi(t), t) = & \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|\sqrt{\tau}} \left( |\boldsymbol{\omega}|\sqrt{\tau} + \Phi^{-1}(\alpha) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\left( |\boldsymbol{\omega}|\sqrt{\tau} \pm \Phi^{-1}(\alpha) \right)^2 - 2 \left( \log \left( 1 - \frac{\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)}{X^\pi(t)} \right)^+ - r\tau \right)} \right), \end{aligned}$$

in cui  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}^\top(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top)(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}_n)$ . Invece la funzione valore  $V : (0, +\infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  è soluzione della seguente equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{V_X^2}{V_{XX}} |\boldsymbol{\omega}|^2 + V_X X r + V_t &= 0, & \text{se } -\frac{V_X}{X V_{XX}} &\leq \varphi_\alpha^+, \\ \frac{1}{2} V_{XX} X^2 |\boldsymbol{\omega} \varphi_\alpha^+|^2 + V_X X (r + |\boldsymbol{\omega}|^2 \varphi_\alpha^+) + V_t &= 0, & \text{altrimenti,} \\ V(X, T) &= u(X). \end{aligned}$$

Gli autori considerano un caso particolare, in cui la funzione di utilità è di tipo potenza. Quindi  $u(X) = X^{1-\gamma}/(1-\gamma)$  se  $\gamma > 0$  e  $\gamma \neq 1$ , invece  $u(X) = \log(X)$  se  $\gamma = 1$ . Il parametro  $\gamma$  rappresenta il coefficiente relativo di avversione al rischio.

La funzione valore nel caso benchmark, quindi in assenza del vincolo di VaR, è data da:

$$V(X, t) = e^{\rho(T-t)} \frac{X^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

dove  $\rho = (1-\gamma)(r + |\boldsymbol{\omega}|^2/(2\gamma))$ . Inoltre il portafoglio ottimo è il seguente:

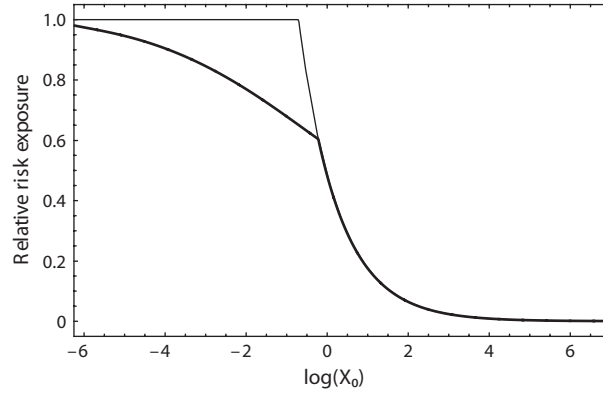
$$\boldsymbol{\pi}(X, t) = \frac{1}{\gamma} (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top)^{-1} \boldsymbol{\mu}.$$

La seguente quantità:  $q(X, t) = \gamma\varphi(t)$ , denominata relative risk exposure, tiene conto della composizione del portafoglio ottimo con vincolo di VaR, relativamente a quello non vincolato.

A questo punto gli autori considerano tre differenti specificazioni della soglia  $\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)$ , che indica il VaR massimo ammissibile per ogni  $t \in [0, T]$ . Più precisamente si considerano i tre casi seguenti:

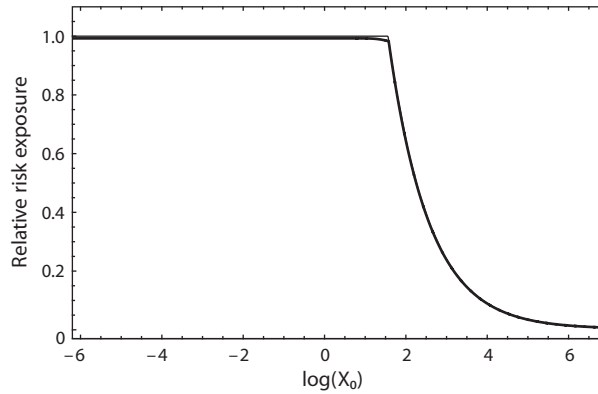
1.  $\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) = \beta$ , quindi il VaR non può superare una soglia costante pari a  $\beta$ . Di conseguenza il vincolo agisce quando il valore del por-

tafoglio cresce e non entra in azione se tale valore è sufficientemente basso. In questo modo, una soglia costante penalizza gli investitori migliori. Nella Figura 2.3 sono mostrati  $q(X, 0)$ , con la linea più spessa, e  $q(X, T)$ , con la linea più chiara:



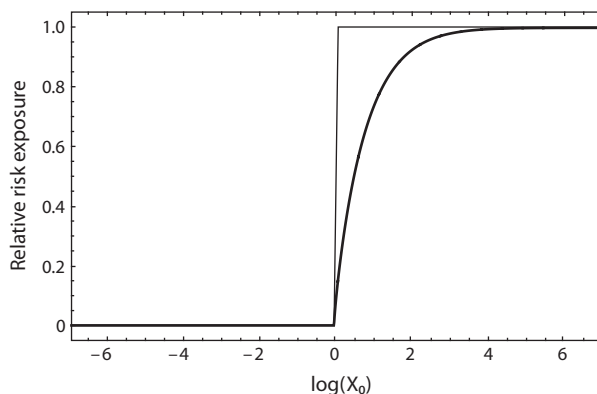
**Figura 2.3:** Relative risk exposure  $q(X, t)$ , calcolato in  $t = 0$  (linea continua) e in  $t = T$  (linea più chiara), assumendo  $r = 0.008$ ,  $|\omega| = 0.37$ ,  $T = 10$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $X_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\tau = 1/260$ ,  $\overline{\text{VaR}}(X, t) = 0.05$ .

2.  $\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) = \beta X$ , che risolve il difetto della soglia costante. Infatti, gli investitori migliori hanno un vincolo di VaR che aumenta al crescere del valore del loro portafoglio.  $q(X, 0)$  e  $q(X, T)$  sono mostrati nella Figura 2.4:



**Figura 2.4:** Relative risk exposure  $q(X, t)$ , calcolato in  $t = 0$  (linea continua) e in  $t = T$  (linea più chiara), assumendo  $r = 0.008$ ,  $|\omega| = 0.37$ ,  $T = 10$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $X_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\tau = 1/260$ ,  $\overline{\text{VaR}}(X, t) = 0.05X$ .

3.  $\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) = (X - (1 - \beta)X_0)^+$ . In quest'ultimo caso la soglia è uguale ad un multiplo del capitale iniziale  $\beta X_0$ , a cui è sommato il guadagno ottenuto tra l'istante iniziale e il tempo  $t$ :  $X - X_0$ . Nella Figura 2.5 sono mostrati  $q(X, 0)$  e  $q(X, T)$ :



**Figura 2.5:** Relative risk exposure  $q(X, t)$ , calcolato in  $t = 0$  (linea continua) e in  $t = T$  (linea più chiara), assumendo  $r = 0.008$ ,  $|\omega| = 0.37$ ,  $T = 10$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $X_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\tau = 1/260$ ,  $\overline{\text{VaR}}(X, t) = (X - (1 - 0.05)X_0)^+$ .

Nei tre casi considerati la soluzione trovata è tale che  $q(X, t)$  è minore o uguale a 1, quindi l'agente di mercato, soggetto al vincolo del VaR, investe meno in titoli rischiosi di un agente non vincolato.

Quanto ottenuto è quindi in contrasto con i risultati presentati in [11]. In particolare, si ha che la probabilità di perdite estreme sull'orizzonte temporale  $T$ , è inferiore in presenza del vincolo di Value-at-Risk.

Successivamente, gli autori analizzano come cambia la soluzione se si sostituisce al VaR, l'Expected Shortfall. In particolare, si dimostra che il vincolo di Expected Shortfall è equivalente al vincolo di VaR dinamico, se però si considera un livello di confidenza superiore. Per tale motivo, gli autori deducono che il vincolo di Expected Shortfall non rappresenta un miglioramento particolarmente significativo.

In conclusione, il modello presentato in [16] utilizza un vincolo di VaR dinamico, che rimpiazza il vincolo statico presente in [11]. Il risultato ottenuto è in contrapposizione con [11], infatti si dimostra che il vincolo di VaR favorisce investimenti meno rischiosi. Tuttavia resta da verificare se e in che modo i risultati qui presentati si possano estendere a modelli in cui i titoli evolvono secondo processi stocastici differenti dal moto Browniano geometrico. Questo tema è affrontato nel prossimo articolo.



## 2.4 Modello a volatilità stocastica e con vincolo di VaR dinamico

Nell'articolo [33] si generalizza il modello presentato nell'articolo precedente, considerando un *modello a volatilità stocastica*. Tuttavia, per rendere trattabile il problema, è necessario considerare un unico titolo rischioso. Quindi, in [33] si impone un *vincolo di VaR dinamico*, come in [16]. Purtroppo, data la complessità del modello, risulta impossibile determinare delle soluzioni esatte del problema di ottimizzazione. È quindi necessario ricorrere a procedure di approssimazione. In particolare, per quanto riguarda il vincolo di VaR, si ricorre ad un'*approssimazione di Itô-Taylor*; invece, per ottenere il portafoglio ottimo, si applica la *teoria perturbativa*.

Il modello di mercato, in cui si fa l'ipotesi che il tasso d'interesse  $r$  sia costante, è dunque costituito da un unico titolo rischioso:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu(Y(t))S(t)dt + S(t)\sigma(Y(t))dW(t), & t \in (0, T], \\ S(0) &= S_0, \end{aligned}$$

con  $\mu(Y(t)) - r = \lambda Y(t)^{n_1}$  e  $\sigma(Y(t)) = \sigma Y(t)^{n_2}$ , dove  $r, \lambda, \sigma$  sono costanti positive e  $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

$\{Y(t), t \in [0, T]\}$  è un processo stocastico, che evolve secondo la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{aligned} dY(t) &= \mu_Y(Y(t))dt + \sigma_Y(Y(t))dW^Y(t), & t \in (0, T], \\ Y(0) &= Y_0, \end{aligned}$$

in cui  $\mu_Y(Y(t)) = (\vartheta - zY(t))$ ,  $\sigma_Y(Y(t)) = \sigma_Y Y(t)^m$  e dove  $\vartheta, z, \sigma_Y, m$  sono costanti positive. Inoltre  $W^Y$  è un moto Browniano standard  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adattato, continuo e ad incrementi indipendenti dal passato, tale che  $\{(W(t), W_Y(t)), t \in [0, T]\}$  è un moto Browniano bidimensionale e per ogni  $t \in [0, T]$  le variabili aleatorie  $W(t)$  e  $W_Y(t)$  hanno coefficiente di correlazione pari a  $\rho$ .

Supponiamo che l'agente di mercato abbia una *funzione di utilità* di tipo potenza, dipendente, oltre che dal valore del portafoglio all'istante finale  $T$ , da un processo di consumo  $\{C(t), t \in [0, T]\}$ .

Quindi:

$$u(X^\pi(T), C, T) = \int_0^T e^{-\delta s} \frac{C_s^\gamma - 1}{\gamma} ds + e^{-\delta T} \frac{[X^\pi(T)]^\gamma - 1}{\gamma},$$

per  $\gamma < 1$  e  $0 \leq \delta < 1$ .

Il *portafoglio*, in termini relativi, dell'agente di mercato è dato da:  $\boldsymbol{\pi}(t) =$

$(1 - \pi(t), \pi(t))$ , dove  $\pi(t)$  è la frazione di capitale investita nel titolo rischioso. Il valore del portafoglio soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica per  $t \in (0, T]$ :

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t) \{ [\pi(t)(\mu(Y(t)) - r) + r - c(t)] dt + \pi(t)\sigma(Y(t))dW(t) \},$$

con  $X^\pi(0) = X_0$  e  $c(t) = C(t)/X^\pi(t)$ .

Si definisce il vincolo di  $\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t)$  in modo dinamico, come in [16]. Quindi, considerata la loss  $L(t, t + \tau)$  per ogni  $t \in [0, T]$ , il  $\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t)$  associato a tale loss è dato, come in [16], da:

$$\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t) = \inf \{ L \geq 0 : P(X^\pi(t) - \mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t)) \geq L | \mathcal{F}_t) < \alpha \},$$

dove  $\mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t))$  è il valore del portafoglio all'istante  $t + \tau$ , con pesi di portafoglio fissati e pari a  $\boldsymbol{\pi}(t)$  per tutto l'orizzonte temporale  $[t, t + \tau]$ .

In [33], a causa della complessità del modello, per calcolare il VaR si ricorre ad un'approssimazione di Itô-Taylor al primo ordine:

$$\log(\mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t))) \approx \log(X^\pi(t)) + \left( r + \pi(t)\lambda Y(t)^{n_1} - \frac{1}{2}\pi(t)^2\sigma^2 Y(t)^{2n_2} \right).$$

L'errore di approssimazione è controllato dalla seguente disuguaglianza, dimostrata in [33]:

$$\begin{aligned} P \left( \left| \log(X^\pi(t)) + \left( r + \pi(t)\lambda Y(t)^{n_1} - \frac{1}{2}\pi(t)^2\sigma^2 Y(t)^{2n_2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \log(\mathcal{X}(X^\pi(t), \boldsymbol{\pi}(t))) \right| \geq M \mid \mathcal{F}_t \right) \leq \frac{1}{M} E[|R|], \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove

$$E[|R|] = \left| \int_t^{t+\tau} \int_t^s E \left[ \pi(t) \mathcal{L}(\mu(Y(t)) - r) + \frac{1}{2} \pi(t)^2 \mathcal{L} \sigma(Y(t))^2 \mid \mathcal{F}_t \right] du ds \right|$$

e  $\mathcal{L} = \mu_Y \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2}$  è il generatore infinitesimale di  $Y$ . La disuguaglianza trovata per l'errore di approssimazione può essere interpretata nel seguente modo: poniamo  $M = 0.01$ , ciò significa commettere al più un errore dell'1%. La disuguaglianza stima con quale probabilità si avrà un errore al più dell'1%. In [33] si mostra che nella maggior parte dei casi l'approssimazione eseguita è soddisfacente, come mostrato nella Tabella 2.6:

		1 giorno 10 giorni		1 giorno 10 giorni	
		Y = 1		Y = 3	
		M = 1%			
$\pi$	0.2	0.000	0.001	0.002	0.189
	0.5	0.000	0.005	0.005	0.525
	0.8	0.000	0.009	0.009	0.924
		M = 5%			
$\pi$	0.2	0.000	0.003	0.000	0.038
	0.5	0.000	0.001	0.001	0.105
	0.8	0.000	0.002	0.002	0.185
		M = 10%			
$\pi$	0.2	0.000	0.000	0.000	0.019
	0.5	0.000	0.000	0.001	0.053
	0.8	0.000	0.001	0.001	0.092

**Tabella 2.6:** Upper bound per la probabilità presente in (2.3). I numeri riportati sono percentuali. Sono state fatte le seguenti assunzioni:  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$ ,  $m = 1$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\sigma_Y = 0.15$ ,  $\vartheta = 0.2$  e  $z = 0.2$ .

I valori riportati nella tabella rappresentano la seguente quantità:  $\frac{1}{M}E[|R|]$ . Tale approssimazione permette di esprimere il vincolo di VaR in un modo più conveniente. In particolare, in [16] si dimostra che il vincolo  $\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t) \leq \overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) = \beta X^\pi(t)$ , con  $\beta \in [0, 1]$ , è equivalente alle due seguenti disuguaglianze:

$$\pi_b^-(Y(t)) \leq \pi(t) \leq \pi_b^+(Y(t)),$$

dove:

$$\begin{aligned} \pi_b^\pm(Y(t)) &= \frac{\mu(X(t)) - r(X(t))}{\sigma(X(t))^2} + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sigma(X(t))\sqrt{\tau}} \\ &\pm \frac{1}{\sigma(X(t))^2\tau} \{[(\mu(X(t)) + r(X(t)))\tau + \sigma(X(t))\sqrt{\tau}\Phi^{-1}(\alpha)]^2 \\ &+ 2\sigma(X(t))^2\tau(r(X(t))\tau - \log(1 - \beta))\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il **problema di ottimizzazione** che si ottiene è quindi il seguente:

$$J(X, Y, t) := \sup_{c, \pi} E[u(X^\pi(T), C, T) | \mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T]$$

soggetto a:

$$\pi_b^-(Y(t)) \leq \pi(t) \leq \pi_b^+(Y(t)), \quad t \in [0, T].$$

Dalle proprietà di omogeneità della funzione  $J$ , si ottiene che tale funzione deve essere della seguente forma:

$$J(X, Y, t) = \frac{e^{\gamma g(Y, t)} X^\gamma - 1}{\gamma},$$

per una qualche funzione incognita  $g$ . Poiché non è possibile risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman in forma esatta, si ricorre alla teoria perturbativa, secondo cui se nell'equazione compare un parametro piccolo, allora la soluzione può essere espressa come una serie di potenze rispetto a quel parametro. In questo caso, l'obiettivo degli autori è descrivere la soluzione per valori di  $\gamma$  vicino a 0, che risulta quindi essere il parametro del metodo perturbativo. Porre  $\gamma = 0$ , infatti, implica che l'investitore utilizzi una funzione di utilità logaritmo (log-investitore). Invece, per  $\gamma < 0$  l'investitore è meno avverso al rischio rispetto al log-investitore ed è maggiormente avverso al rischio rispetto al log-investitore se  $\gamma > 0$ . La descrizione della soluzione per valori di  $\gamma$  vicini a 0, permette di descrivere cosa accade nei tre casi appena menzionati, quindi  $\gamma < 0$ ,  $\gamma = 0$  e  $\gamma > 0$ . Scriviamo quindi la funzione  $g$  come una serie di potenze rispetto al parametro  $\gamma$ :

$$g(Y, t) = g_0(Y, t) + \gamma g_1(Y, t) + \frac{\gamma^2}{2} g_2(Y, t) + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma^n}{n!} g_n(Y, t).$$

Facendo la seguente approssimazione:

$$g(Y, t) = g_0(Y, t) + O(\gamma),$$

quindi supponendo  $\gamma$  vicino a zero, è possibile determinare la soluzione in forma approssimata, come affermato nel seguente

**Teorema 2.6.** *La soluzione al problema di ottimizzazione, considerando solo i termini al più del primo ordine in  $\gamma$ , è data da:*

$$\pi^{(1)}(t) = \begin{cases} \pi_b^+(Y(t)), & \pi_f^{(1)}(t) \geq \pi_b^+(Y(t)), \\ \pi_b^-(Y(t)), & \pi_f^{(1)}(t) \leq \pi_b^-(Y(t)), \\ \pi_f^{(1)}(t), & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove

$$\pi_f^{(1)}(t) = (1 + \gamma)Y(t)^{n_1 - 2n_2} \frac{\lambda}{\sigma^2} + \gamma Y(t)^{m - n_2} \frac{\rho \sigma_Y}{\sigma} \frac{\partial g_0(Y(t), t)}{\partial Y}.$$

Inoltre, il tasso di consumo è il seguente:

$$c^{(1)}(t) = \frac{1 - \gamma(g_0(Y(t), t) + \log A(t))}{A(t)},$$

dove

$$A(t) = e^{-\delta(T-t)} + \frac{1 - e^{-\delta(T-t)}}{\delta}$$

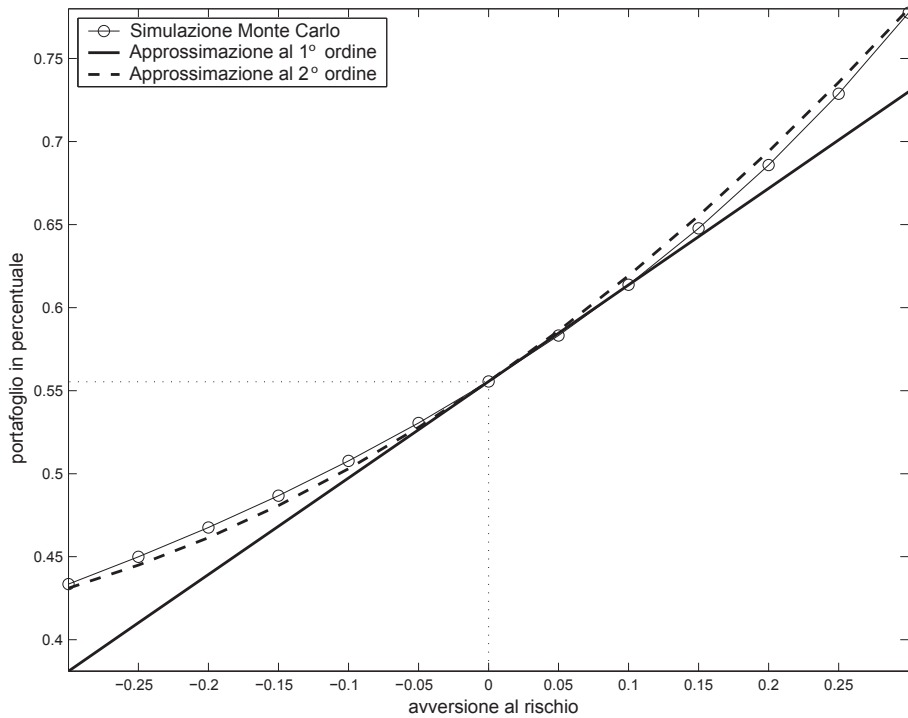
e

$$\begin{aligned} g_0(Y(t), t) = & \frac{1}{A(t)} e^{-\delta(T-t)} + r(T-t) - \int_t^T A(s)^{-1} ds + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma^2} \int_t^T E[Y(s)^{2(n_1-n_2)} | \mathcal{F}_t] ds \\ & - \frac{1}{2} \int_t^T E\left[1_{\{\phi(Y(s), s) < [\Phi^{-1}(\alpha)]^2/\tau\}} \phi(Y(s), s) \middle| \mathcal{F}_t\right] ds \\ & + \frac{1}{A(t)} \int_t^T e^{-\delta(s-t)} \left( r(T-s) \right. \\ & - \int_s^T A(u)^{-1} du + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma^2} \int_s^T E[Y(u)^{2(n_1-n_2)} | \mathcal{F}_s] du \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_s^T E\left[1_{\{\phi(Y(u), u) < [\Phi^{-1}(\alpha)]^2/\tau\}} \phi(Y(u), u) \middle| \mathcal{F}_s\right] du \right. \\ & \left. - \log A(s) \right) ds, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \phi(Y(t), t) = & \frac{\lambda^2}{\sigma^2} Y(t)^{2(n_1-n_2)} + \frac{2\lambda\Phi^{-1}(\alpha)}{\sigma\sqrt{\tau}} Y(t)^{n_1-n_2} + \\ & + \frac{[\Phi^{-1}(\alpha)]^2 + 2\left(\left(r - \frac{1}{A(t)}\right)\tau - \log(1 - \beta)\right)}{\tau}. \end{aligned}$$

La bontà del metodo perturbativo è studiata ampiamente in [33], dove si riporta anche il seguente grafico:



**Figura 2.7:** Confronto tra il metodo perturbativo e la simulazione Monte Carlo.

La Figura 2.7 confronta l’approccio perturbativo con la simulazione Monte Carlo. Come sostenuto dagli autori, l’accordo è molto buono. Per verificare quale sia l’impatto del Value-at-Risk sulla composizione del portafoglio ottimo abbiamo il seguente:

**Corollario 2.1.** *La soluzione del problema di ottimizzazione  $\pi_f^{(1)}$ , ottenuta nel precedente teorema, soddisfa le seguenti proprietà:*

- i) *gli investitori con  $\gamma > 0$  ( $\gamma < 0$ ) incrementano (diminuiscono) il consumo  $c(t)$ ;*
- ii) *se  $n_1 < n_2$ , gli investitori con  $\gamma\rho > 0$  ( $\gamma\rho < 0$ ) incrementano (diminuiscono) la frazione di portafoglio investita nel titolo rischioso;*
- iii) *se  $n_1 > n_2$ , gli investitori con  $\gamma\rho > 0$  ( $\gamma\rho < 0$ ) diminuiscono (incrementano) la frazione di portafoglio investita nel titolo rischioso;*
- iv) *se  $n_1 = n_2$ , il vincolo di VaR non impatta sulla composizione del portafoglio ottimo dell’investitore.*

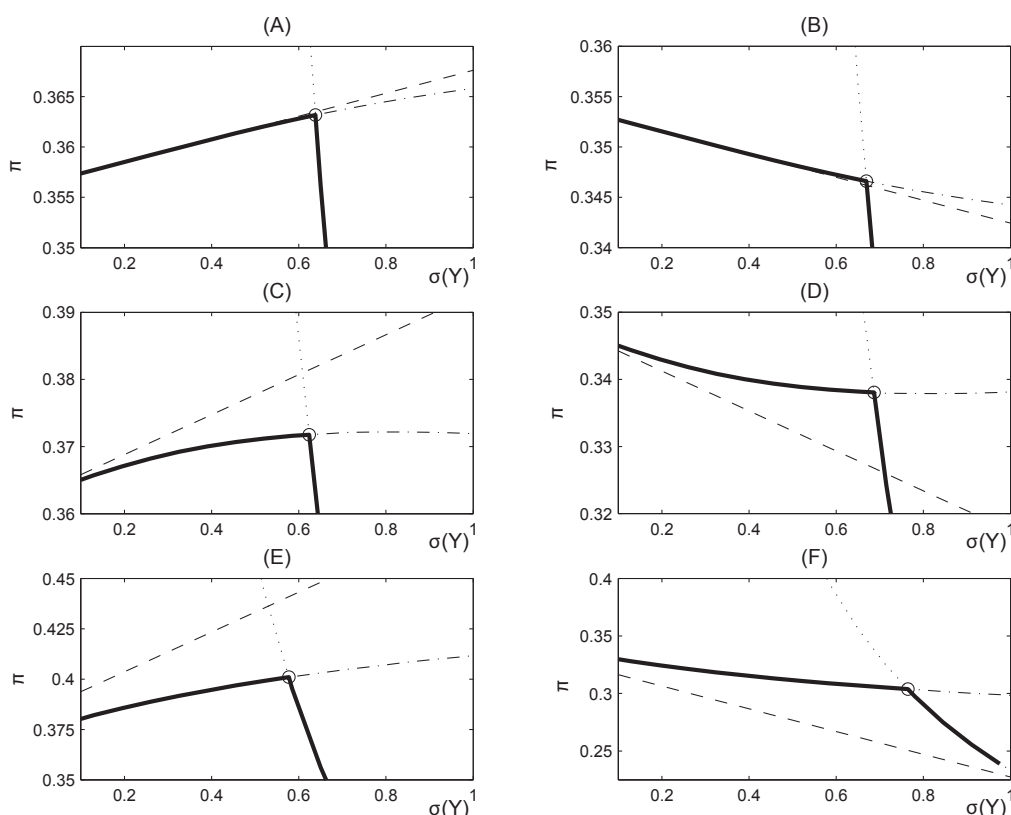
In definitiva, in base ai risultati trovati, il vincolo di VaR può avere effetti differenti sulle scelte di portafoglio, infatti dipende dalle seguenti quantità:

1. i parametri  $n_1$  ed  $n_2$  che compaiono nell'equazione differenziale stocastica soddisfatta dal prezzo del titolo rischioso;
2. il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore;
3. il segno del coefficiente di correlazione tra il titolo rischioso e la sua volatilità.

La situazione più interessante si ottiene considerando il coefficiente di correlazione negativo  $\rho < 0$ . Infatti, diversi articoli sostengono che  $\rho$  debba essere negativo, come per esempio [13]; tale fenomeno è denominato *leverage effect*. Inoltre, per quanto riguarda il coefficiente di avversione al rischio  $\gamma$ , si distinguono i due casi seguenti:  $\gamma < 0$ , in cui l'investitore è meno aggressivo rispetto al log-investitore;  $\gamma \in (0, 1)$ , dove l'investitore è più aggressivo del log-investitore.

Per illustrare graficamente quanto affermato nel corollario 2.1, in [33] si studia un caso particolare, in cui  $\lambda(Y) = \lambda Y^2$ ,  $\sigma(Y) = \sigma Y$  e  $\sigma_Y(Y) = \sigma_Y Y$ . Nella Figura 2.8, si mostra come varia la soluzione al variare dell'orizzonte temporale. Nelle figure di sinistra si è considerato  $\rho > 0$ , invece a destra si ha  $\rho < 0$ , inoltre in tutte le figure  $\gamma > 0$ . Dalla figura (A), in cui  $T = 1$  anno, si nota che la frazione di capitale investita nel titolo rischioso da parte dell'investitore soggetto al vincolo di VaR - linea continua - coincide con quella dell'investitore non vincolato - linea tratteggiata -, fino a quando entra in azione il vincolo di VaR, a partire dal punto cerchiato. Nel grafico (C), con  $T = 5$  anni, la frazione di portafoglio si è già sostanzialmente ridotta, prima che il vincolo di VaR diventi effettivo. Il motivo è che la banca deve prendere in considerazione il valore attuale dei vincoli futuri nelle decisioni di investimento. Una situazione simile è presente nella figura (E), dove l'orizzonte temporale è di 10 anni. Se si considerano i grafici a destra, in cui  $\rho$  è negativo, l'effetto del vincolo di VaR è opposto. In particolare, prima che il vincolo di VaR diventi effettivo, l'esposizione al titolo rischioso per l'investitore vincolato è maggiore rispetto a quello non vincolato. Solamente quando il vincolo entra in azione e la volatilità aumenta ulteriormente, la banca diminuisce l'esposizione.

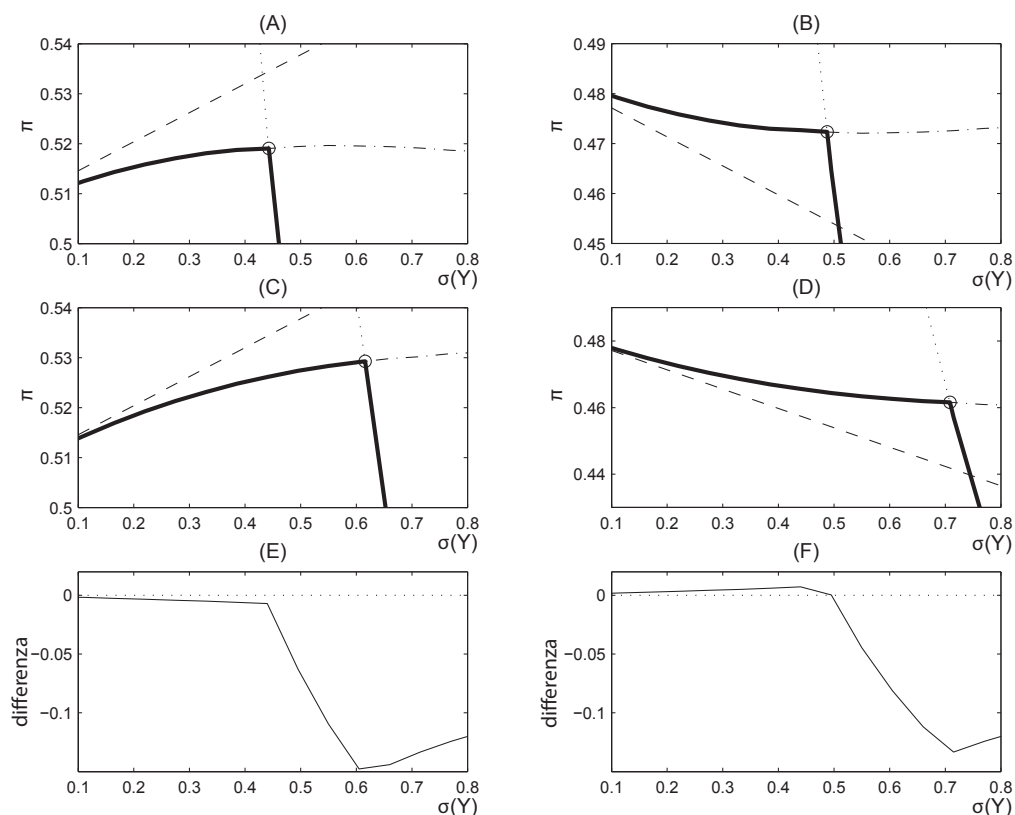
Come osservato in [16], un vincolo di VaR dinamico è equivalente ad un vincolo di Expected Shortfall dinamico, a patto di imporre un livello di confidenza  $\alpha$  più stringente. La Figura 2.9, presentata in [33], illustra cosa cambia al variare del livello di confidenza. I grafici a sinistra corrispondono al caso in cui la correlazione è positiva, invece a destra si considera una correlazione negativa. Per le figure in alto si ha  $\alpha = 0.01$ , invece per (C) e (D)  $\alpha = 0.05$ . Come nei grafici precedenti si nota, per entrambi i livelli di confidenza, un incremento dell'esposizione, se la correlazione è negativa. Le figure (E) e (F)



**Figura 2.8:** Portafoglio in presenza del vincolo di VaR, al variare dell'orizzonte temporale. Nei grafici a sinistra si considera una correlazione positiva pari a  $\rho = 0.4$ . Invece, nei grafici a destra  $\rho = -0.4$ . In (A) e in (B) l'orizzonte temporale è  $T = 1$  anno. Nei due grafici (C) e (D), invece, si è posto  $T = 5$  anni. Infine, per i grafici (E) e (F) si è assunto  $T = 10$  anni. La linea continua rappresenta il portafoglio in presenza del vincolo di VaR. Nel punto cerchiato, la banca tocca il vincolo di VaR, rappresentato dalla linea punteggiata. La linea tratteggiata rappresenta, invece, il portafoglio in assenza del vincolo di VaR. I parametri sono stati scelti come segue:  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\tau = 10/250$ ,  $r = 0.05$ ,  $\lambda = 0.03$ ,  $\sigma = 0.32$ ,  $\vartheta = 0.2$ ,  $z = 0.2$  e  $\sigma_Y = 0.6$ . I grafici sono stati ottenuti facendo uso delle simulazioni Monte Carlo.

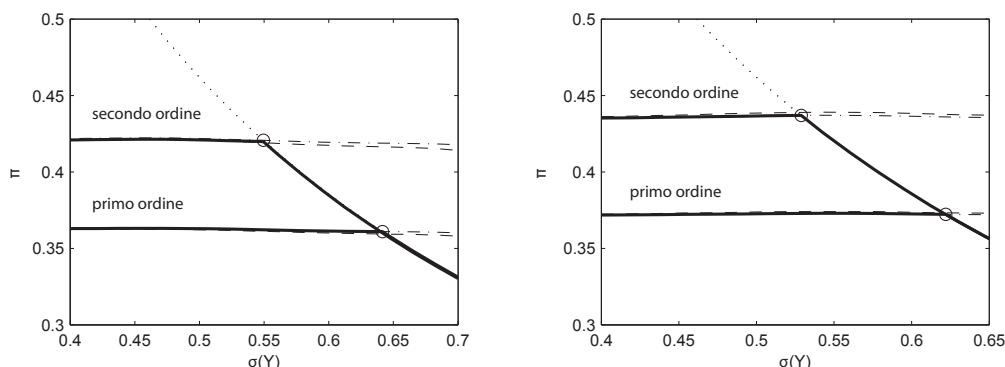
rappresentano la differenza tra i portafogli ai due livelli di confidenza. Intuitivamente, quando il vincolo diventa più stringente, l'esposizione dovrebbe diminuire. Tuttavia, se la correlazione è negativa, accade il fenomeno opposto, passando da  $\alpha = 0.05$  a  $\alpha = 0.01$ . Solo se la volatilità è sufficientemente elevata, superiore a 50%, un livello di confidenza più stringente porta ad una diminuzione dell'esposizione.





**Figura 2.9:** Portafoglio in presenza del vincolo di VaR, al variare del livello di confidenza. Nei grafici a sinistra si considera una correlazione positiva pari a  $\rho = 0.4$ . Invece, nei grafici a destra  $\rho = -0.4$ . In (A) e in (B) il livello di confidenza è  $\alpha = 0.01$ . Nei grafici (C) e (D), invece, si è posto  $\alpha = 0.05$ . Infine, i grafici (E) e (F) mostrano la differenza tra i portafogli ai due livelli di confidenza, quindi (E) e (F) rappresentano, rispettivamente, (C)-(A) e (D)-(B). I valori assegnati ai parametri sono gli stessi della Figura 2.8. L'orizzonte temporale è  $T = 5$  anni.

In [33] si considera anche un'approssimazione del secondo ordine, da cui si ottiene la Figura 2.10:



**Figura 2.10:** Approssimazione del primo e del secondo ordine con correlazione positiva (a sinistra) e negativa (a destra). I valori assegnati ai parametri sono i seguenti:  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\tau = 10/250$ ,  $r = 0.05$ ,  $\lambda = 0.03$ ,  $\sigma = 0.35$ ,  $\vartheta = 0.7$ ,  $z = 0.7$ ,  $\sigma_Y = 0.6$  e  $T = 2$ .

Si osserva che includere un termine del secondo ordine porta ad ottenere uno shift quasi parallelo verso l'alto. Quindi, almeno qualitativamente, la differenza tra le approssimazioni del primo e secondo ordine è trascurabile. Pertanto, se  $n_1 > n_2$  e se si considera un investitore maggiormente avverso al rischio rispetto ad un log-investitore, il vincolo di VaR porta a compiere scelte più rischiose.

Invece, se  $n_1 < n_2$  e se l'investitore è meno avverso al rischio rispetto al log-investitore, il vincolo di VaR induce a compiere scelte maggiormente rischiose. Per molti modelli a volatilità stocastica si ha che  $n_1 < n_2$ , come ad esempio per il modello di Heston, in cui  $n_1 = 0$  e  $n_2 = \frac{1}{2}$ .

## 2.5 Vincolo di VaR dinamico in presenza di un defaultable asset

La recente crisi finanziaria induce a considerare un modello di mercato in cui sia presente un defaultable asset, quindi un titolo soggetto a rischio default. Nel presente paragrafo considereremo un modello per le scelte di portafoglio, in cui nel mercato finanziario sia negoziabile un defaultable asset. Un tale modello è stato formulato in [12], senza considerare però il vincolo di VaR. L'obiettivo è quindi estendere i risultati ottenuti in [12] al caso in presenza di un vincolo di VaR dinamico.

Il mercato è basato su uno *spazio di probabilità filtrato*  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ , dove  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  è la filtrazione naturale completata generata dal *moto Bro-*

wiano continuo e unidimensionale  $\{W(t), t \in [0, T]\}$ .

Nel mercato sono presenti due titoli:

1. un *titolo privo di rischio*, che evolve in modo deterministico:

$$\begin{cases} \frac{dB(t)}{B(t)} = rdt, & t \in (0, T], \\ B(0) = 1, \end{cases}$$

con tasso d'interesse costante  $r > 0$ ;

2. un *titolo rischioso*, la cui dinamica è descritta dal *modello CEV* (modello a elasticità della varianza costante):

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = (\xi + r)dt + S(t)^\beta dW(t), & t \in (0, T], \\ S(0) = s, \end{cases}$$

con  $s > 0$ , rendimento in eccesso  $\xi > 0$  e  $\beta \in (-1, 0)$ .

Osserviamo che la soluzione esiste per ogni  $\beta \in (-1, 0)$ . Inoltre, se quando  $S$  vale zero, si pone  $S$  uguale a zero fino all'istante finale  $T$ , allora è garantita anche l'unicità per traiettorie. A tal proposito si veda [23].

Il modello CEV è adatto per descrivere l'evoluzione del prezzo di un titolo soggetto a rischio default. Infatti, si può dimostrare che il prezzo di tale titolo ha una probabilità positiva di annullarsi nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ . Inoltre, il modello CEV presenta il fenomeno del leverage effect.

L'investitore sceglie un portafoglio  $\mathbf{h} = (h_B, h_S)$ , dove  $h_B$  rappresenta il numero di azioni del titolo privo di rischio presenti in portafoglio, invece  $h_S$  corrisponde al numero di azioni del titolo rischioso possedute.

Il *valore del portafoglio*  $X^{\mathbf{h}}$  risolve la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX^{\mathbf{h}}(t) = h_B(t)dB(t) + h_S(t)dS(t), & t \in (0, T], \\ X^{\mathbf{h}}(0) = x, \end{cases}$$

dove il capitale iniziale  $x > 0$ . Nel seguito considereremo solo portafogli che possiedono determinate proprietà, come affermato nella prossima definizione.

**Definizione 2.1.** *Indichiamo con  $\Pi[\bar{t}, T]$  l'insieme dei **portafogli** sull'intervallo  $[\bar{t}, T]$ , quindi l'insieme dei processi stocastici  $\{\mathbf{h}(t) = (h_B(t), h_S(t)), t \in [\bar{t}, T]\}$  che siano  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [\bar{t}, T]}$ -adattati e tali che, per ogni  $x > 0$ ,  $X^{\mathbf{h}}$  sia l'unica*

soluzione della seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX^{\mathbf{h}}(t) = h_B(t)dB(t) + h_S(t)dS(t), & t \in (\bar{t}, T], \\ X^{\mathbf{h}}(\bar{t}) = x. \end{cases}$$

L'unicità è intesa per traiettorie. Supponiamo anche che  $X^{\mathbf{h}}(t) \geq 0$  per ogni  $t \in [\bar{t}, T]$  e q.o. in  $\Omega$ .

Poiché si considerano solo portafogli il cui valore sia sempre non negativo, possiamo esprimere il portafoglio in termini percentuali. In particolare, ad ogni portafoglio  $\mathbf{h} = (h_B, h_S)$  assegniamo un portafoglio in termini relativi:  $\boldsymbol{\pi} = (1 - \pi, \pi)$ , dove  $\pi = h_S S / X^{\mathbf{h}}$ . Poiché nel seguito ci riferiremo sempre al portafoglio  $\boldsymbol{\pi}$ , denoteremo il valore del portafoglio nel seguente modo:  $X^\pi$ . Inoltre,  $X^\pi$  risolve la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} \frac{dX^\pi(t)}{X^\pi(t)} = (\pi(t)\xi + r)dt + \pi(t)S(t)^\beta dW(t), & t \in (0, T], \\ X^\pi(0) = x. \end{cases}$$

Se il portafoglio  $\{\boldsymbol{\pi}(t), t \in [\bar{t}, T]\}$  è ammissibile, quindi il corrispondente portafoglio  $\mathbf{h} \in \mathbf{\Pi}[\bar{t}, T]$ , scriveremo  $\pi \in \mathbf{\Pi}[\bar{t}, T]$ .

L'investitore massimizza l'utilità attesa finale, di conseguenza consideriamo il funzionale guadagno  $J : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T] \times \mathbb{R}^{[0, T]} \rightarrow \mathbb{R}$  dato da:

$$J(x, s, t, \pi) = \mathbb{E}_t^{x, s} [u(X^\pi(T))],$$

per ogni  $(x, s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T]$  e  $\pi \in \mathbf{\Pi}[t, T]$ , inoltre  $u$  è la funzione di utilità dell'investitore.

Supponiamo che l'investitore, oltre a massimizzare l'utilità attesa finale, debba imporre in ogni istante di tempo  $t \in [0, T]$  che il Value-at-Risk, indicato con  $\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t)$ , sia minore di una soglia fissata  $\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) \geq 0$ . Tale vincolo è realistico, infatti la regolamentazione impone alle istituzioni finanziarie di calcolare il VaR ogni giorno, con un orizzonte temporale pari a 10 giorni.

Il Value-at-Risk  $\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t)$  è quindi calcolato rispetto all'intervallo di tempo  $[t, t + \tau]$ , con  $\tau > 0$ , che per esempio è pari a 10 giorni. Tale Value-at-Risk è valutato rispetto alla funzione perdita  $L(t, t + \tau)$  del frozen portafoglio  $(1 - \pi(t), \pi(t))$ , quindi supponendo che  $\pi(s) = \pi(t)$  per ogni  $t \in [t, t + \tau]$ .

Indichiamo con  $\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t))$  il valore del frozen portafoglio all'istante  $t + \tau$ , dato da:

$$\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t)) = X^\pi(t) e^{\int_t^{t+\tau} \left( \pi(s)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(s)^2 S(s)^{2\beta} \right) ds + \int_t^{t+\tau} \pi(s) S(s)^\beta dW(s)}.$$

Per determinare il vincolo di VaR considereremo un'approssimazione del frozen portafoglio, con cui si ottiene la quantità  $\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))$  data da:

$$\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t)) = X^\pi(t) e^{\left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau + \pi(t)S(t)^\beta (W(t+\tau) - W(t))}.$$

L'errore che si commette nel compiere tale approssimazione è considerato nella prossima proposizione.

**Proposizione 2.1.** *L'errore di approssimazione che si commette nel considerare il frozen portafoglio  $\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))$  in cui il prezzo del titolo rischioso è mantenuto costante, rispetto a  $\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t))$ , è limitato da:*

$$P\left(\left|\log(\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))) - \log(\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t)))\right| \geq M\right) \leq \frac{1}{M} E_t[|\mathbf{R}|],$$

dove  $M > 0$  e

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2}\pi(t)^2 \int_t^{t+\tau} (S(t)^{2\beta} - S(s)^{2\beta}) ds + \pi(t) \int_t^{t+\tau} (S(t)^\beta - S(s)^\beta) dW(s).$$

*Dimostrazione.* Il logaritmo di  $\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))$  è dato:

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))) &= \log(X^\pi(t)) + \int_t^{t+\tau} \left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right) ds + \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} \pi(t)S(t)^\beta dW(s), \end{aligned}$$

invece, il logaritmo di  $\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t))$  è il seguente:

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t))) &= \log(X^\pi(t)) + \int_t^{t+\tau} \left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(s)^{2\beta}\right) ds + \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} \pi(t)S(s)^\beta dW(s). \end{aligned}$$

Quindi, facendo la differenza, si ottiene:

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))) - \log(\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t))) &= -\frac{1}{2}\pi(t)^2 \int_t^{t+\tau} (S(t)^{2\beta} - S(s)^{2\beta}) ds + \\ &\quad + \pi(t) \int_t^{t+\tau} (S(t)^\beta - S(s)^\beta) dW(s). \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\mathbf{R}$  il resto della differenza  $S(s)^{2\beta} - S(t)^{2\beta}$ , che è dato da:

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2}\pi(t)^2 \int_t^{t+\tau} (S(t)^{2\beta} - S(s)^{2\beta}) ds + \pi(t) \int_t^{t+\tau} (S(t)^\beta - S(s)^\beta) dW(s).$$

Dalla disuguaglianza di Markov si ricava:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left|\log(\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))) - \log(\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t)))\right| \geq M\right) \leq \\ & \leq \frac{1}{M} \mathbb{E}[|\log(\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))) - \log(\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t)))|] = \frac{1}{M} \mathbb{E}[|\mathbf{R}|]. \end{aligned}$$

□

Ricordiamo che il Value-at-Risk, al livello di confidenza  $\alpha \in (0, 1)$ , è il seguente:

$$\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t) = \inf\{L \geq 0 : \mathbb{P}(X^\pi(t) - \mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t)) \geq L | \mathcal{F}_t) < \alpha\}.$$

Il vincolo di VaR,  $\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t) \leq \overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)$ , è possibile esprimerlo in un modo più conveniente, come affermato nel prossimo teorema. Nel seguito considereremo  $\overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) = \delta X^\pi(t)$ , con  $\delta \in (0, 1)$ .

**Teorema 2.7.** *Il vincolo di Value-at-Risk,  $\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t) \leq \overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t)$ , per  $t \in [0, T]$ , approssimando  $\mathcal{X}(X^\pi(t), \pi(t))$  con  $\mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t))$ , è equivalente alle due seguenti disuguaglianze:*

$$\pi^-(S(t)) \leq \pi(t) \leq \pi^+(S(t)),$$

dove

$$\begin{aligned} \pi^\pm(S(t)) &= \frac{\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)S(t)^\beta\sqrt{\tau}}{S(t)^{2\beta\tau}} \\ &\pm \frac{\sqrt{(\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)S(t)^\beta\sqrt{\tau})^2 + 2rS(t)^{2\beta\tau} - 2\log(1-\delta)S(t)^{2\beta\tau}}}{S(t)^{2\beta\tau}}. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Per calcolare il VaR fissiamo  $L \geq 0$  e consideriamo la seguente probabilità:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X^\pi(t) - \mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t)) \geq L | \mathcal{F}_t) = \\ & = \mathbb{P}\left(X^\pi(t) \left(1 - e^{\int_t^{t+\tau} \left(\pi(s)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(s)^2 S(s)^{2\beta}\right) ds + \int_t^{t+\tau} \pi(s) S(s)^\beta dW(s)}\right) \geq L \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ & = \mathbb{P}\left(e^{\int_t^{t+\tau} \left(\pi(s)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(s)^2 S(s)^{2\beta}\right) ds + \int_t^{t+\tau} \pi(s) S(s)^\beta dW(s)} \leq 1 - \frac{L}{X^\pi(t)} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ & = \mathbb{P}\left(\int_t^{t+\tau} \left(\pi(s)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(s)^2 S(s)^{2\beta}\right) ds + \right. \\ & \quad \left. + \int_t^{t+\tau} \pi(s) S(s)^\beta dW(s) \leq \log\left(1 - \frac{L}{X^\pi(t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{P}\left(\left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \pi(t)S(t)^\beta(W(t+\tau) - W(t)) \leq \log\left(1 - \frac{L}{X^\pi(t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\log\left(1 - \frac{L}{X^\pi(t)}\right) - \left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau}{\pi(t)S(t)^\beta\sqrt{\tau}}\right).
 \end{aligned}$$

Poiché  $\mathbb{P}(X^\pi(t) - \mathcal{X}^1(X^\pi(t), \pi(t)) \geq L | \mathcal{F}_t) < \alpha$  si ha che:

$$\Phi\left(\frac{\log\left(1 - \frac{L}{X^\pi(t)}\right) - \left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau}{\pi(t)S(t)^\beta\sqrt{\tau}}\right) < \alpha,$$

da cui si ottiene:

$$L > X^\pi(t) \left(1 - e^{\left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau + \Phi^{-1}(\alpha)\pi(t)S(t)^\beta\sqrt{\tau}}\right).$$

Quindi il VaR al livello di confidenza  $\alpha$  è dato da:

$$\text{VaR}^{\alpha, \pi}(t) = X^\pi(t) \left(1 - e^{\left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau + \Phi^{-1}(\alpha)\pi(t)S(t)^\beta\sqrt{\tau}}\right).$$

Di conseguenza il vincolo di VaR diventa:

$$X^\pi(t) \left(1 - e^{\left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau + \Phi^{-1}(\alpha)\pi(t)S(t)^\beta\sqrt{\tau}}\right) \leq \overline{\text{VaR}}(X^\pi(t), t) = \delta X^\pi(t),$$

che si può scrivere nel seguente modo:

$$\left(\pi(t)\xi + r - \frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\right)\tau + \Phi^{-1}(\alpha)\pi(t)S(t)^\beta\sqrt{\tau} \geq \log(1 - \delta),$$

che diventa:

$$\frac{1}{2}\pi(t)^2 S(t)^{2\beta}\tau - (\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)S(t)^\beta\sqrt{\tau})\pi(t) - r\tau + \log(1 - \delta) \leq 0.$$

Definiamo ora le seguenti quantità:

$$\begin{aligned}
 \pi^\pm(S(t)) &= \frac{\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)S(t)^\beta\sqrt{\tau}}{S(t)^{2\beta}\tau} \\
 &\quad \pm \frac{\sqrt{(\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)S(t)^\beta\sqrt{\tau})^2 + 2rS(t)^{2\beta}\tau^2 - 2\log(1 - \delta)S(t)^{2\beta}\tau}}{S(t)^{2\beta}\tau}.
 \end{aligned}$$

Il vincolo di VaR è quindi equivalente alle due seguenti disuguaglianze:

$$\pi^-(S(t)) \leq \pi(t) \leq \pi^+(S(t)).$$

□

Poiché i portafogli che considereremo dovranno soddisfare anche il vincolo di VaR, diamo la seguente definizione.

**Definizione 2.2.** *Indichiamo con  $\mathbf{\Pi}_{ad}[\bar{t}, T]$  l'insieme dei **portafogli ammissibili** sull'intervallo  $[\bar{t}, T]$ , quindi tali che  $\pi \in \mathbf{\Pi}[\bar{t}, T]$ ,*

$$\pi^-(S(t)) \leq \pi(t) \leq \pi^+(S(t)), \quad \forall t \in [\bar{t}, T] \text{ e q.o. in } \Omega$$

e

$$\mathbb{E}_{\bar{t}}^{x,s}[|u(X^\pi(T))|] < +\infty, \quad \forall (x, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Se  $\pi$  è un portafoglio ammissibile sull'intervallo  $[\bar{t}, T]$ , scriviamo  $\pi \in \mathbf{\Pi}_{ad}[\bar{t}, T]$ .

Infine, denotiamo con  $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  la *funzione valore ottimale*:

$$V(x, s, t) = \sup_{\pi \in \mathbf{\Pi}_{ad}[t, T]} \mathbb{E}_t^{x,s}[u(X^\pi(T))], \quad \forall (x, s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T].$$

Il **problema di ottimizzazione di portafoglio** è quindi il seguente:

*determinare un **portafoglio ottimo**  $\pi^* \in \mathbf{\Pi}_{ad}[0, T]$  tale che:*

$$V(x, s, t) = J(x, s, t, \pi^*), \quad \forall (x, s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T],$$

*rispettando i seguenti vincoli:*

$$\text{i) } \begin{cases} \frac{dS(z)}{S(z)} = (\xi + r)dz + S(z)^\beta dW(z), & z \in (t, T], \\ S(t) = s, \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} \frac{dX^\pi(z)}{X^\pi(z)} = (\pi(z)\xi + r)dz + \pi(z)S(z)^\beta dW(z), & z \in (t, T], \\ X^\pi(t) = x, \end{cases}$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman associata al problema di ottimizzazione è la seguente:

$$\begin{cases} V_t + \sup_{\pi^-(s) \leq \pi \leq \pi^+(s)} \left\{ (\pi\xi + r)xV_x + (\xi + r)sV_s + \frac{1}{2}\pi^2 s^{2\beta} x^2 V_{xx} + \right. \\ \quad \left. + \pi s^{1+2\beta} x V_{xs} + \frac{1}{2} s^{2+2\beta} V_{ss} \right\} = 0, & \forall (x, s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0, T), \\ V(x, s, T) = u(x), & \forall (x, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$



Supponiamo che il seguente portafoglio sia in  $\mathbf{\Pi}_{ad}[0, T]$ :

$$\pi^*(x, s, t) = \begin{cases} \pi^-(s), & \tilde{\pi}(x, s, t) \leq \pi^-(s), \\ \tilde{\pi}(x, s, t), & \pi^-(s) < \tilde{\pi}(x, s, t) < \pi^+(s), \\ \pi^+(s), & \tilde{\pi}(x, s, t) \geq \pi^+(s), \end{cases}$$

dove

$$\tilde{\pi} = -\frac{V_x}{xV_{xx}} \frac{\xi}{s^{2\beta}} - \frac{sV_{xs}}{xV_{xx}}.$$

Se il portafoglio  $\pi^*$  appartiene a  $\mathbf{\Pi}_{ad}[0, T]$ , allora è il portafoglio ottimo.

**Funzione di utilità CRRA.** Supponiamo che l'investitore abbia la seguente funzione di utilità:

$$u_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}, & x > 0, \\ -\infty, & x \leq 0, \end{cases}$$

con  $\gamma < 1$  e  $\gamma \neq 0$ , invece

$$u_0(x) = \begin{cases} \log x, & x > 0, \\ -\infty, & x \leq 0, \end{cases}$$

per  $\gamma = 0$ .

Dalla proprietà di omogeneità del problema di ottimizzazione, si ottiene che la funzione valore ha la seguente espressione:

$$V(x, s, t) = \frac{e^{\gamma g_\gamma(s, t)} x^\gamma - 1}{\gamma}, \quad \forall (x, s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T],$$

per  $\gamma < 1$  e  $\gamma \neq 0$ , invece

$$V(x, s, t) = \log x + g_0(s, t), \quad \forall (x, s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T],$$

per  $\gamma = 0$ .

La funzione  $g_\gamma$  è data da:

$$g_\gamma(s, t) = g_0(s, t) + O(\gamma), \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T],$$

dove la funzione  $g_0$  non dipende da  $\gamma$ .

Il portafoglio  $\tilde{\pi}$  diventa:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} &= -\frac{e^{\gamma g_\gamma} x^{\gamma-1}}{x(\gamma-1)e^{\gamma g_\gamma} x^{\gamma-2} s^{2\beta}} \frac{\xi}{s^{2\beta}} - \frac{s\gamma e^{\gamma g_\gamma} x^{\gamma-1}}{x(\gamma-1)e^{\gamma g_\gamma} x^{\gamma-2}} \frac{\partial g_\gamma}{\partial s} \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \frac{\xi}{s^{2\beta}} + \frac{\gamma s}{1-\gamma} \frac{\partial g_\gamma}{\partial s}.\end{aligned}$$

Se si considera il problema di ottimizzazione in assenza del vincolo di VaR, come è stato fatto in [12], si ottiene, indicando con  $\pi_f^*$  il portafoglio ottimo per tale problema:

$$\pi_f^* = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\xi}{s^{2\beta}} + \frac{\gamma s}{1-\gamma} \frac{\partial g_\gamma^f}{\partial s},$$

dove la funzione  $g_\gamma^f$  può essere determinata esplicitamente.

L'obiettivo è valutare la seguente differenza:

$$\tilde{\pi} - \pi_f^* = \frac{\gamma s}{1-\gamma} \left( \frac{\partial g_\gamma}{\partial s} - \frac{\partial g_\gamma^f}{\partial s} \right).$$

Se introduciamo la funzione  $g_0^f$ , che non dipende da  $\gamma$ , tale che:

$$g_\gamma^f(s, t) = g_0^f(s, t) + O(\gamma), \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T],$$

si ottiene:

$$\tilde{\pi} - \pi_f^* = \gamma s \left( \frac{\partial g_0}{\partial s} - \frac{\partial g_0^f}{\partial s} \right) + O(\gamma^2).$$

Quindi, il segno di tale differenza, per  $\gamma$  vicino a zero, dipende solo dal segno della differenza seguente:

$$\frac{\partial g_0}{\partial s} - \frac{\partial g_0^f}{\partial s}.$$

In primo luogo, è necessario trovare un'espressione della differenza tra  $g_0$  e  $g_0^f$ . Tale espressione si ottiene considerando il problema di ottimizzazione nel caso della funzione di utilità logaritmo, come illustrato nel prossimo teorema.

**Teorema 2.8.** *La differenza tra le funzioni  $g_0$  e  $g_0^f$  è data da:*

$$g_0(s, t) - g_0^f(s, t) = -\frac{1}{2} \int_t^T \mathbb{E}_t^s \left[ 1_{\{\hat{\pi}(S(z)) \leq 0\}} (S(z)^\beta \hat{\pi}(S(z)))^2 \right] dz,$$

dove  $\hat{\pi} = \pi^+ - \tilde{\pi}_{\log}$  e  $\tilde{\pi}_{\log}$  è il portafoglio ottimo per la funzione di utilità logaritmo nel caso non vincolato.

*Dimostrazione.* Poiché la funzione valore nel caso dell'utilità logaritmo ha la seguente espressione:

$$V(x, s, t) = \log x + g_0(s, t),$$

il portafoglio ottimo diventa:

$$\pi_{\log}^*(s) = \begin{cases} \pi^-(s), & \tilde{\pi}_{\log}(s) \leq \pi^-(s), \\ \tilde{\pi}_{\log}(s), & \pi^-(s) < \tilde{\pi}_{\log}(s) < \pi^+(s), \\ \pi^+(s), & \tilde{\pi}_{\log}(s) \geq \pi^+(s), \end{cases}$$

dove

$$\tilde{\pi}_{\log}(s) = \frac{\xi}{s^{2\beta}}.$$

Osserviamo che  $\tilde{\pi}_{\log}(s) > \pi^-(s)$  per ogni  $s \in \mathbb{R}^+$ , infatti:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\log}(s) - \pi^-(s) &= \frac{\xi}{s^{2\beta}} - \frac{\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)s^\beta\sqrt{\tau}}{s^{2\beta}\tau} + \\ &+ \frac{\sqrt{(\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)s^\beta\sqrt{\tau})^2 + 2rs^{2\beta}\tau^2 - 2\log(1-\delta)s^{2\beta}\tau}}{s^{2\beta}\tau} \\ &= -\frac{\Phi^{-1}(\alpha)s^\beta\sqrt{\tau}}{s^{2\beta}\tau} + \\ &+ \frac{\sqrt{(\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)s^\beta\sqrt{\tau})^2 + 2rs^{2\beta}\tau^2 - 2\log(1-\delta)s^{2\beta}\tau}}{s^{2\beta}\tau} > 0, \end{aligned}$$

poiché  $\Phi^{-1}(\alpha) < 0$ , essendo generalmente  $\alpha = 0.01$  oppure  $\alpha = 0.05$ . Per tale motivo, il portafoglio ottimo diventa:

$$\pi_{\log}^*(s) = \begin{cases} \tilde{\pi}_{\log}(s), & \tilde{\pi}_{\log}(s) < \pi^+(s), \\ \pi^+(s), & \tilde{\pi}_{\log}(s) \geq \pi^+(s). \end{cases}$$

Poiché il valore del portafoglio ha la seguente espressione:

$$X^\pi(T) = xe^{\int_t^T \left( \pi_{\log}^*(S(z))\xi + r - \frac{1}{2}\pi_{\log}^*(S(z))^2 S(z)^{2\beta} \right) dz + \int_t^T \pi_{\log}^*(S(z)) S(z)^\beta dW(z)},$$

la funzione valore è data da:

$$\begin{aligned} V(x, s, t) &= \mathbb{E}_t^{x,s}[\log(X^\pi(T))] = \log x + \\ &+ \int_t^T \left( \mathbb{E}_t^s[\pi_{\log}^*(S(z))]\xi + r - \frac{1}{2}\mathbb{E}_t^s[\pi_{\log}^*(S(z))^2 S(z)^{2\beta}] \right) dz, \end{aligned}$$

da cui si deduce:

$$\begin{aligned}
 g_0(s, t) &= \int_t^T \left( \mathbb{E}_t^s[\pi_{\log}^*(S(z))] \xi + r - \frac{1}{2} \mathbb{E}_t^s[\pi_{\log}^*(S(z))^2 S(z)^{2\beta}] \right) dz \\
 &= \int_t^T \left( \mathbb{E}_t^s[1_{\{\tilde{\pi}_{\log}(S(z)) < \pi^+(S(z))\}} \tilde{\pi}_{\log}^*(S(z))] \xi + r \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathbb{E}_t^s[1_{\{\tilde{\pi}_{\log}(S(z)) < \pi^+(S(z))\}} \tilde{\pi}_{\log}^*(S(z))^2 S(z)^{2\beta}] \right) dz + \\
 &\quad + \int_t^T \left( \mathbb{E}_t^s[1_{\{\tilde{\pi}_{\log}(S(z)) \geq \pi^+(S(z))\}} \pi^+(S(z))] \xi + r \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathbb{E}_t^s[1_{\{\tilde{\pi}_{\log}(S(z)) \geq \pi^+(S(z))\}} \pi^+(S(z))^2 S(z)^{2\beta}] \right) dz.
 \end{aligned}$$

Il portafoglio ottimo nel caso non vincolato è il seguente:

$$\pi_f^*(s) = \frac{\xi}{s^{2\beta}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

quindi coincide con  $\pi^*(s)$ , per  $s \in \mathbb{R}^+$  tale che  $\tilde{\pi}_{\log}(s) < \pi^+(s)$ . Inoltre, procedendo in modo analogo a quanto fatto per il caso vincolato, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 g_0^f(s, t) &= \int_t^T \left( \mathbb{E}_t^s[\pi_f^*(S(z))] \xi + r - \frac{1}{2} \mathbb{E}_t^s[\pi_f^*(S(z))^2 S(z)^{2\beta}] \right) dz \\
 &= \int_t^T \left( \mathbb{E}_t^s[\tilde{\pi}_{\log}(S(z))] \xi + r - \frac{1}{2} \mathbb{E}_t^s[\tilde{\pi}_{\log}(S(z))^2 S(z)^{2\beta}] \right) dz.
 \end{aligned}$$

Di conseguenza, la differenza tra  $g_0$  e  $g_0^f$  diventa:

$$\begin{aligned}
 g_0(s, t) - g_0^f(s, t) &= \int_t^T \mathbb{E}_t^s \left[ 1_{\{\tilde{\pi}_{\log}(S(z)) \geq \pi^+(S(z))\}} \left( \xi \pi^+(S(z)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \pi^+(S(z))^2 S(z)^{2\beta} - \frac{\xi^2}{2} S(z)^{-2\beta} \right) \right] dz.
 \end{aligned}$$

Consideriamo la quantità che compare all'interno del valore atteso:

$$\begin{aligned}
 \xi \pi^+(S(z)) - \frac{1}{2} \pi^+(S(z))^2 S(z)^{2\beta} - \frac{\xi^2}{2} S(z)^{-2\beta} &= -\frac{1}{2} \left( \pi^+(S(z))^2 S(z)^{2\beta} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\xi^2}{S(z)^{2\beta}} - 2\xi \pi^+(S(z)) \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \pi^+(S(z)) S(z)^\beta - \frac{\xi}{S(z)^\beta} \right)^2 = \\
 &= -\frac{1}{2} S(z)^{2\beta} \left( \pi^+(S(z)) - \frac{\xi}{S(z)^{2\beta}} \right)^2 =
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}S(z)^{2\beta}(\pi^+(S(z)) - \tilde{\pi}_{\log}(S(z)))^2.$$

Definiamo  $\hat{\pi} := \pi^+ - \tilde{\pi}_{\log}$ , allora si ottiene:

$$g_0(s, t) - g_0^f(s, t) = -\frac{1}{2} \int_t^T \mathbb{E}_t^s [1_{\{\hat{\pi}(S(z)) \leq 0\}} (S(z)^{\beta} \hat{\pi}(S(z)))^2] dz.$$

□

**Teorema 2.9.** *Sia  $\pi_h$  la componente di hedging per un investitore soggetto al vincolo di VaR, che compare nell'espressione di  $\tilde{\pi}$ , quindi  $\pi_h = \frac{\gamma s}{1-\gamma} \frac{\partial g_\gamma}{\partial s}$ . Inoltre, sia  $\pi_h^f$  la componente di hedging per un investitore non vincolato, quindi  $\pi_h^f = \frac{\gamma s}{1-\gamma} \frac{\partial g_\gamma^f}{\partial s}$ . Allora, al primo ordine rispetto a  $\gamma$ , valgono le seguenti proprietà:*

- i) *se  $\gamma \in (0, 1)$ , quindi l'investitore è maggiormente avverso al rischio del log-investitore, allora  $\pi_h > \pi_h^f$ , di conseguenza il vincolo di VaR porta a compiere scelte più rischiose;*
- ii) *se  $\gamma < 0$ , quindi l'investitore è meno avverso al rischio del log-investitore, si ottiene che  $\pi_h < \pi_h^f$ , perciò il vincolo di VaR porta a ridurre l'esposizione nei confronti del titolo rischioso.*

*Dimostrazione.* Nell'espressione di  $g_0 - g_0^f$ , determiniamo esplicitamente la quantità che compare all'interno del valore atteso:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(S(z)) &= \pi^+(S(z)) - \tilde{\pi}_{\log}(S(z)) = \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{S(z)^\beta \sqrt{\tau}} + \\ &+ \frac{\sqrt{(\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)S(z)^\beta \sqrt{\tau})^2 + 2rS(z)^{2\beta}\tau^2 - 2\log(1-\delta)S(z)^{2\beta}\tau}}{S(z)^{2\beta}\tau}, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} S(z)^\beta \hat{\pi}(S(z)) &= \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{\tau}} + \\ &+ \frac{\sqrt{(\xi\tau + \Phi^{-1}(\alpha)S(z)^\beta \sqrt{\tau})^2 + 2rS(z)^{2\beta}\tau^2 - 2\log(1-\delta)S(z)^{2\beta}\tau}}{S(z)^\beta \tau} \\ &= \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{\tau}} + \\ &+ \frac{\sqrt{(\xi\sqrt{\tau}S(z)^{-\beta} + \Phi^{-1}(\alpha))^2 + 2r\tau - 2\log(1-\delta)}}{\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, derivando rispetto a  $s$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S(z)^\beta \hat{\pi}(S(z)))^2}{\partial s} &= 2S(z)^\beta \hat{\pi}(S(z)) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{(\xi \sqrt{\tau} S(z)^{-\beta} + \Phi^{-1}(\alpha)) \xi(-\beta) S(z)^{-\beta-1}}{\sqrt{(\xi \sqrt{\tau} S(z)^{-\beta} + \Phi^{-1}(\alpha))^2 + 2r\tau - 2\log(1-\delta)}} \right) \frac{\partial S(z)}{\partial s} \\ &= 2S(z)^\beta \hat{\pi}(S(z)) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{(\xi \tau + \Phi^{-1}(\alpha) S(z)^\beta \sqrt{\tau}) \xi(-\beta) S(z)^{-2\beta-1}}{\sqrt{(\xi \tau S(z)^{-\beta} + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\tau})^2 + 2r\tau^2 - 2\log(1-\delta)\tau}} \right) \frac{\partial S(z)}{\partial s}. \end{aligned}$$

Quindi, la derivata della differenza tra  $g_0$  e  $g_0^f$  diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_0}{\partial s} - \frac{\partial g_0^f}{\partial s} &= - \int_t^T \mathbb{E}_t^s [1_{\{\hat{\pi}(S(z)) \leq 0\}} S(z)^\beta \hat{\pi}(S(z)) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{(\xi \tau + \Phi^{-1}(\alpha) S(z)^\beta \sqrt{\tau}) \xi(-\beta) S(z)^{-2\beta-1}}{\sqrt{(\xi \tau S(z)^{-\beta} + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\tau})^2 + 2r\tau^2 - 2\log(1-\delta)\tau}} \right) \frac{\partial S(z)}{\partial s}] dz. \end{aligned}$$

L'espressione appena ricavata è analoga alla formula ottenuta in [33], nella dimostrazione del corollario 3, se si pone  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = \beta$ ,  $v = \Phi^{-1}(\alpha)$ ,  $\lambda = \xi$ ,  $X_s = S(z)$ ,  $X_t = s$  e  $\sigma = S(z)^\beta$ . Quindi, come affermato in [33], possiamo concludere che la quantità all'interno del valore atteso è negativa, di conseguenza la differenza tra le derivate è positiva.

Poiché la differenza tra le due componenti di hedging è la seguente:

$$\pi_h - \pi_h^f = \gamma s \left( \frac{\partial g_0}{\partial s} - \frac{\partial g_0^f}{\partial s} \right) + O(\gamma^2),$$

si deduce la tesi. □

Il risultato ottenuto è in parte in disaccordo con quanto ricavato in [33]. Infatti, in tale articolo, se si considerano i modelli a volatilità stocastica più comuni, come ad esempio il modello di Heston, allora il vincolo di VaR porta a compiere scelte meno rischiose se  $\gamma \in (0, 1)$  e maggiormente rischiose per  $\gamma < 0$ . Il risultato è tuttavia confermato anche dai risultati ottenuti in [12], in cui si dimostra che gli investitori maggiormente avversi al rischio, in un mercato con un titolo privo di rischio e un defaultable asset, investono notevolmente in quest'ultimo titolo. Infatti, si ricava che esiste un istante di tempo finito per cui l'esposizione nel defaultable asset diventa infinita, per gli

investitori con  $\gamma \in (0, 1)$ . Di conseguenza, poiché in [12] gli autori sostengono che le banche con tale avversione al rischio hanno dominato la scena nella recente crisi finanziaria, il risultato ottenuto conferma che il vincolo di VaR è stato una delle principali cause della crisi.

# Capitolo 3

## Modelli di equilibrio

Per analizzare l'effetto del Value-at-Risk sui mercati finanziari non è sufficiente considerare la composizione del portafoglio di un singolo investitore, ma è necessario affrontare un'analisi dell'intero sistema finanziario. Quindi, in questo capitolo, spostiamo l'attenzione sui modelli di equilibrio, supponendo che un gruppo di investitori sia soggetto al vincolo di Value-at-Risk.

In primo luogo, esponiamo il modello di equilibrio presentato in [33], che riprende il modello per le scelte di portafoglio descritto nel capitolo precedente. In tale articolo si considera un'economia di puro scambio, nella quale sono presenti due istituzioni finanziarie. Si studiano due possibili situazioni: nella prima, entrambe le istituzioni non sono vincolate; mentre nella seconda solo un'istituzione è vincolata. Il vincolo di Value-at-Risk è di tipo dinamico, come descritto nel precedente capitolo.

L'obiettivo dell'articolo è analizzare come variano le seguenti quantità: il tasso d'interesse privo di rischio, la distribuzione del capitale tra le due istituzioni, il drift e la volatilità del titolo rischioso. Si dimostra che la presenza del vincolo di VaR determina un incremento della domanda del titolo privo di rischio, quindi il tasso d'interesse tende a diminuire. L'istituzione non vincolata investe maggiormente nel titolo rischioso e l'effetto è un incremento dello Sharpe ratio. Si nota anche che la regolamentazione porta ad una redistribuzione della ricchezza, che in parte passa dall'istituzione vincolata all'istituzione non vincolata, indipendentemente dal coefficiente relativo di avversione al rischio delle istituzioni stesse.

Mentre il primo articolo studia principalmente l'effetto del VaR sul portafoglio delle istituzioni finanziarie, il secondo articolo analizzato [21], sposta l'attenzione sull'impatto del VaR sui mercati finanziari. In particolare studia l'effetto del Value-at-Risk sul rischio endogeno. A questo scopo si analizza un'economia di puro scambio, in cui sono presenti due tipologie di investitori: i trader attivi, che rappresentano le istituzioni finanziarie soggette al vincolo



di VaR, i trader passivi, caratterizzati da una curva di domanda dei titoli inclinata negativamente e soggetta a informazioni rilevanti. Tali informazioni causano fluttuazioni nel prezzo dei titoli, quindi rappresentano il rischio esogeno.

L'obiettivo dell'articolo è studiare come le informazioni provenienti dall'esterno, quindi il rischio esogeno, impattano sulla volatilità dei titoli rischiosi, che è una misura del rischio endogeno. Inoltre, poiché alcuni investitori sono regolamentati, il prezzo dei titoli rischiosi all'equilibrio ha una volatilità determinata, oltre che dagli shocks esogeni, anche dalla presenza del vincolo di VaR.

Infine, nell'ultima parte del presente capitolo, si considera il modello esposto in [21], supponendo però che sia stata imposta la Tobin tax. Quest'ultima, proposta nel 1973 dal premio Nobel per l'economia James Tobin, mira a tassare le transazioni finanziarie, con un'aliquota non troppo elevata, per esempio dell'ordine dello 0.5% sul valore totale dell'operazione, ma abbastanza alta da introdurre qualche granello di sabbia nei meccanismi della finanza nazionale e internazionale. Una tale commissione dovrebbe portare ad una diminuzione del numero di operazioni finanziarie cosiddette ad alta frequenza, quindi sarebbe in grado di abbassare la volatilità dei titoli e rendere più stabili i mercati.

### 3.1 Modello a volatilità stocastica e con vincolo di VaR dinamico

L'articolo [33] presenta un modello di equilibrio, basandosi sul modello per le scelte di portafoglio descritto nel capitolo precedente, in cui sono stati analizzati gli effetti del vincolo di VaR sulla composizione di portafoglio della singola istituzione finanziaria. Tuttavia, per comprendere a fondo le conseguenze a cui può portare l'attuale regolamentazione sul sistema finanziario, è necessario utilizzare un modello di equilibrio.

In [33] si considera un'economia di puro scambio, in cui il mercato è costituito da due strumenti finanziari: un titolo privo di rischio ed uno rischioso. Il titolo privo di rischio è disponibile con offerta netta pari a zero e tasso di interesse  $r(t)$  determinato all'equilibrio. Invece, il titolo rischioso è un derivato con sottostante la dotazione aggregata  $e(t)$ , data da:

$$de(t) = \mu_e(Y(t), t)e(t)dt + \sigma_e(Y(t))e(t)dW_e(t),$$

dove  $W_e$  è un moto Browniano standard. La variabile di stato  $Y$  è data da:

$$dY(t) = \mu_Y(Y(t))dt + \sigma_Y(Y(t))dW_Y(t),$$

in cui  $W_Y$  è un moto Browniano standard tale che  $\{(W_e(t), W_Y(t)), t \in [0, T]\}$  è un moto Browniano bidimensionale e per ogni  $t \in [0, T]$  le variabili aleatorie  $W_e(t)$  e  $W_Y(t)$  hanno coefficiente di correlazione pari a  $\rho_{eY}$ .

Nell'economia operano due istituzioni finanziarie, indicate con  $I$  e  $II$ , le quali determinano il proprio portafoglio risolvendo il problema di ottimizzazione seguente:

$$J(X, Y, t) = \sup_{c_i, \pi_i} E[u_i(X^{\pi_i}(T), C_i, T) | \mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T], \quad i = I, II,$$

in cui l'estremo superiore è calcolato su tutte le coppie  $(c_i, \pi_i)$  ammissibili. La funzione di utilità, che è di tipo potenza, è caratterizzata da un coefficiente relativo di avversione al rischio pari a  $\gamma_i$ , quindi:

$$u_i(X^{\pi_i}(T), C_i, T) = \int_0^T e^{-\delta s} \frac{C_{i,s}^{\gamma_i} - 1}{\gamma_i} ds + e^{-\delta T} \frac{[X^{\pi_i}(T)]^{\gamma_i} - 1}{\gamma_i}.$$

Di conseguenza, le due istituzioni finanziarie si distinguono solo per il coefficiente relativo di avversione al rischio.

Definiamo  $\omega^i(t) = X^i(t)/(X^I(t) + X^{II}(t))$  per  $i = I, II$ , quindi  $\omega^I(t) + \omega^{II}(t) = 1$ . Lo stato dell'economia di scambio è descritto dal vettore di stato  $\boldsymbol{\chi}(t) = (X(t), \omega^I(t))$ . Allora si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t) + e(t)dt}{S(t)} &= \alpha(\boldsymbol{\chi}, t)dt + \sigma_{S1}(\boldsymbol{\chi}, t)dW_Y(t) + \sigma_{S2}(\boldsymbol{\chi}, t)dW_e(t) \\ &= \alpha(\boldsymbol{\chi}, t)dt + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}, t)^\top d\mathbf{W}(t), \end{aligned}$$

dove  $\alpha$  e il vettore  $\boldsymbol{\sigma}$  sono determinati all'equilibrio.

**Definizione 3.1.** Denotiamo  $(\alpha(\boldsymbol{\chi}, t), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}, t), r(\boldsymbol{\chi}, t), \pi_I(t), \pi_{II}(t), c_I(t), c_{II}(t))$  un **equilibrio asintotico** di puro scambio se:

- a)  $\pi_I(t)$  e  $\pi_{II}(t)$  sono soluzioni, al primo ordine, dei problemi di ottimizzazione per le due istituzioni finanziarie;
- b) vale la seguente identità:

$$\pi_I(t)\omega^I(t) + \pi_{II}(t)\omega^{II}(t) = 1 + O(\gamma^2);$$

c) analogamente, per i beni di consumo vale che:

$$c_I(t)X^I(t) + c_{II}(t)X^{II}(t) = e(t) + O(\gamma^2).$$

Determiniamo quindi un tale equilibrio in due casi: nel primo, il caso *benchmark*, supponiamo che nessun investitore sia soggetto al vincolo di Value-at-Risk. Successivamente consideriamo la situazione in cui la banca *II* è vincolata, invece la banca *I* rimane non vincolata.

Il portafoglio ottimo è lo stesso presentato nel capitolo precedente, nell'ambito delle scelte di portafoglio. Tuttavia la funzione  $g_0$  è sostituita da una corrispondente funzione determinata all'equilibrio  $g_{0e}$ , che ora dipende anche da  $\omega^I$  e dai parametri  $\gamma_I$  e  $\gamma_{II}$ . Poiché  $g_{0e}$  dipende dal valore di equilibrio di diverse quantità, è determinata endogenamente. Espandendo  $g_{0e}$  rispetto ai parametri di avversione al rischio si ottiene:

$$g_{0e}(\boldsymbol{\chi}, \gamma_I, \gamma_{II}, t) = g_{0,0}(\boldsymbol{\chi}, t) + (\gamma_I, \gamma_{II}) \cdot \mathbf{g}_{0,1}(\boldsymbol{\chi}, t) + O(\gamma_I^2, \gamma_{II}^2).$$

Nel seguito scriveremo semplicemente  $g_{0e}(\boldsymbol{\chi}, t)$  al posto di  $g_{0e}(\boldsymbol{\chi}, \gamma_I, \gamma_{II}, t)$  e  $O(\gamma^2)$  invece di  $O(\gamma_I^2, \gamma_{II}^2)$ .

Nel caso benchmark la situazione all'equilibrio è riassunta dal seguente

**Teorema 3.1.** *In assenza del vincolo di Value-at-Risk si ha che:*

i) *il tasso d'interesse all'equilibrio è dato da:*

$$r(\boldsymbol{\chi}^f, t) = \alpha(\boldsymbol{\chi}^f, t) - \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}^f, t)\|^2(1 - (1 + \eta^f(t))\Delta^f) + O(\gamma^2);$$

ii) *la quantità  $\omega^{I,f}$  soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:*

$$\begin{aligned} d\omega^{I,f}(t) = & (\gamma_I - \gamma_{II})\omega^{I,f}(t)(1 - \omega^{I,f}(t))(\xi(t)dt + \\ & + (1 + \eta^f(t))\sigma_e(Y(t))dW_e(t)) + O(\gamma^2); \end{aligned}$$

iii) *il drift e la volatilità del processo del prezzo  $S(t)$  con dotazione aggregata  $e(t)$  sono pari a:*

$$\begin{aligned} \alpha^f(\boldsymbol{\chi}^f, t) = & \delta + \mu_e(Y(t)) + (\partial_t A(t) - 1)\xi(t)\Delta^f + A(t)\Delta^f(\partial_t \xi(t) + \\ & + \sigma_{eY}\partial_Y \xi(t)) + O(\gamma^2), \\ \boldsymbol{\sigma}^f(\boldsymbol{\chi}^f, t) = & \begin{pmatrix} \sigma_{S1}^f(\boldsymbol{\chi}^f, t) \\ \sigma_{S2}^f(\boldsymbol{\chi}^f, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t)\Delta^f \partial_t \xi(t) \sigma_Y(Y(t)) \\ \sigma_e(Y(t)) \end{pmatrix} + O(\gamma^2), \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \frac{g_{0e}(\boldsymbol{\chi}^f, t) + \log A(t)}{A(t)}, \\ \eta^f(t) &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}^f, t)\|^2} \begin{pmatrix} \sigma_{SX}(\boldsymbol{\chi}^f, t) \\ \sigma_{S\omega}(\boldsymbol{\chi}^f, t) \end{pmatrix}^\top \frac{\partial g_{0e}(\boldsymbol{\chi}^f, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}}, \\ \Delta^f &= \gamma_I \omega^{I,f}(t) + \gamma_{II} (1 - \omega^{I,f}(t)).\end{aligned}$$

Invece, in presenza del vincolo di Value-at-Risk, si ottiene il seguente

**Teorema 3.2.** *In un'economia dove la banca I non è vincolata, invece la banca II è soggetta al vincolo di Value-at-Risk si ha che:*

i) *il tasso d'interesse all'equilibrio è dato da:*

$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{\chi}^c, t) &= \alpha(\boldsymbol{\chi}^c, t) - \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}^c, t)\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}^c, t)\| \frac{\Phi^{-1}(\alpha)(1 - \omega^{I,c}(t))}{\sqrt{\omega^{I,c}(t)B}} + \\ &\quad + h\left(\gamma_I, \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \sqrt{\tau}, \tau\right) + O(\gamma^2, \tau^2),\end{aligned}$$

con  $B = \omega^{I,c}(t)(\Phi^{-1}(\alpha))^2 + 2 \log(1 - \beta)(\omega^{I,c}(t) - 2)$  e per quanto riguarda la funzione  $h$  rimandiamo all'appendice di [33];

ii) *la quantità  $\omega^{I,c}$  soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:*

$$\begin{aligned}d\omega^{I,c}(t) &= (\mu_0^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t) + \mu_\gamma^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t) + \mu_\tau^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t))dt + \sigma_0^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t)dW_e(t) + \\ &\quad + (\boldsymbol{\sigma}_\tau^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t) + \boldsymbol{\sigma}_\gamma^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t))^\top d\mathbf{W}(t) + O(\gamma^2, \tau^2),\end{aligned}$$

dove le funzioni  $(\mu^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t), \sigma^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t))$  che compaiono sono funzioni delle variabili di stato e del vincolo, per la cui espressione si rimanda a [33];

iii) *il drift e la volatilità del processo del prezzo  $S(t)$  con dotazione aggregata  $e(t)$  sono pari a:*

$$\begin{aligned}\alpha^c(\boldsymbol{\chi}^c, t) &= (\gamma_I - \gamma_{II})A(t)\xi(t) \left( \mu_0^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t) + \left( \rho_{eY} \sigma_Y(Y(t)) \frac{\partial \xi(t)/\partial Y}{\xi(t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_e(Y(t)) \right) \sigma_0^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t) \right) + \alpha^f(\boldsymbol{\chi}^c, t) + O(\gamma^2, \tau^2), \\ \boldsymbol{\sigma}^c(\boldsymbol{\chi}^c, t) &= \begin{pmatrix} \sigma_{S1}^f(\boldsymbol{\chi}^c, t) \\ \sigma_e(Y(t)) + (\gamma_I - \gamma_{II})\xi(t)\sigma_0^{\omega,c}(\boldsymbol{\chi}^c, t) \end{pmatrix} + O(\gamma^2, \tau^2).\end{aligned}$$

Consideriamo infine il caso di un'economia in cui l'utilità delle due istituzioni sia logaritmica, l'unica differenza è quindi data dal capitale iniziale. Il seguente corollario riassume le quantità di equilibrio in questo tipo di economia.

**Corollario 3.1.** *In un'economia dove la banca I non è vincolata, invece la banca II è soggetta al vincolo di Value-at-Risk, inoltre  $\gamma_I = \gamma_{II} = 0$  si ottiene che:*

i) *il tasso d'interesse all'equilibrio è dato da:*

$$\begin{aligned} r^c(\boldsymbol{\chi}, t) &= r^f(\boldsymbol{\chi}, t) + \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}, t)\|^2 \frac{\Phi^{-1}(\alpha)(1 - \omega^{I,c}(t))}{\sqrt{\omega^{I,c}(t)B}} + \\ &\quad + h\left(0, \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \sqrt{\tau}, \tau\right) + O(\tau^2), \\ r^f(\boldsymbol{\chi}, t) &= \alpha(\boldsymbol{\chi}, t) - \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}, t)\|^2. \end{aligned}$$

ii) *il drift e la volatilità del processo del prezzo  $S(t)$  con dotazione aggregata  $e(t)$  sono pari a:*

$$\begin{aligned} \alpha^c(\boldsymbol{\chi}, t) &= \alpha^f(\boldsymbol{\chi}, t) = \delta + \mu_e(Y(t)), \\ \boldsymbol{\sigma}^c(\boldsymbol{\chi}, t) &= \boldsymbol{\sigma}^f(\boldsymbol{\chi}, t) = \sigma_e(Y(t)). \end{aligned}$$

Quindi, in un'economia in cui entrambe le istituzioni hanno la stessa funzione di utilità, la quale è di tipo logaritmo, il drift e la volatilità del titolo rischioso rimangono invariati passando dal caso benchmark al caso con vincolo di VaR. Solo i tassi d'interesse variano, quindi cambia  $\omega^I$ , di conseguenza la regolamentazione porta ad una redistribuzione del capitale tra le due istituzioni.

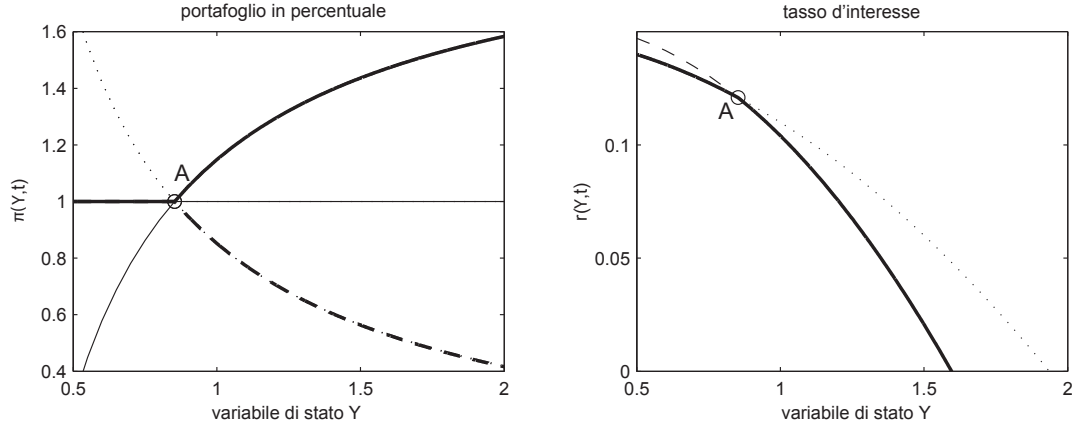
Successivamente si analizzano diversi modelli per la dotazione aggregata del titolo rischioso  $e(t)$ . I modelli considerati sono i seguenti:

- (i)  $M_0$ :  $\mu_e(Y(t), t) = \mu_e$ ,  $\sigma_e(Y(t)) = \sigma_e Y(t)$  e  $\gamma_I = \gamma_{II} = 0$ ;
- (ii)  $M_1$ :  $\mu_e(Y(t), t) = \mu_e$ ,  $\sigma_e(Y(t)) = \sigma_e Y(t)$ ;
- (iii)  $M_2$ :  $\mu_e(Y(t), t) = \mu_e Y(t)$ ,  $\sigma_e(Y(t)) = \sigma_e Y(t)$ .

Inoltre si assume che la variabile di stato  $Y$  segua un moto Browniano geometrico di tipo mean-reverting.

Consideriamo in primo luogo il modello  $M_0$ , quindi il caso in cui entrambe le

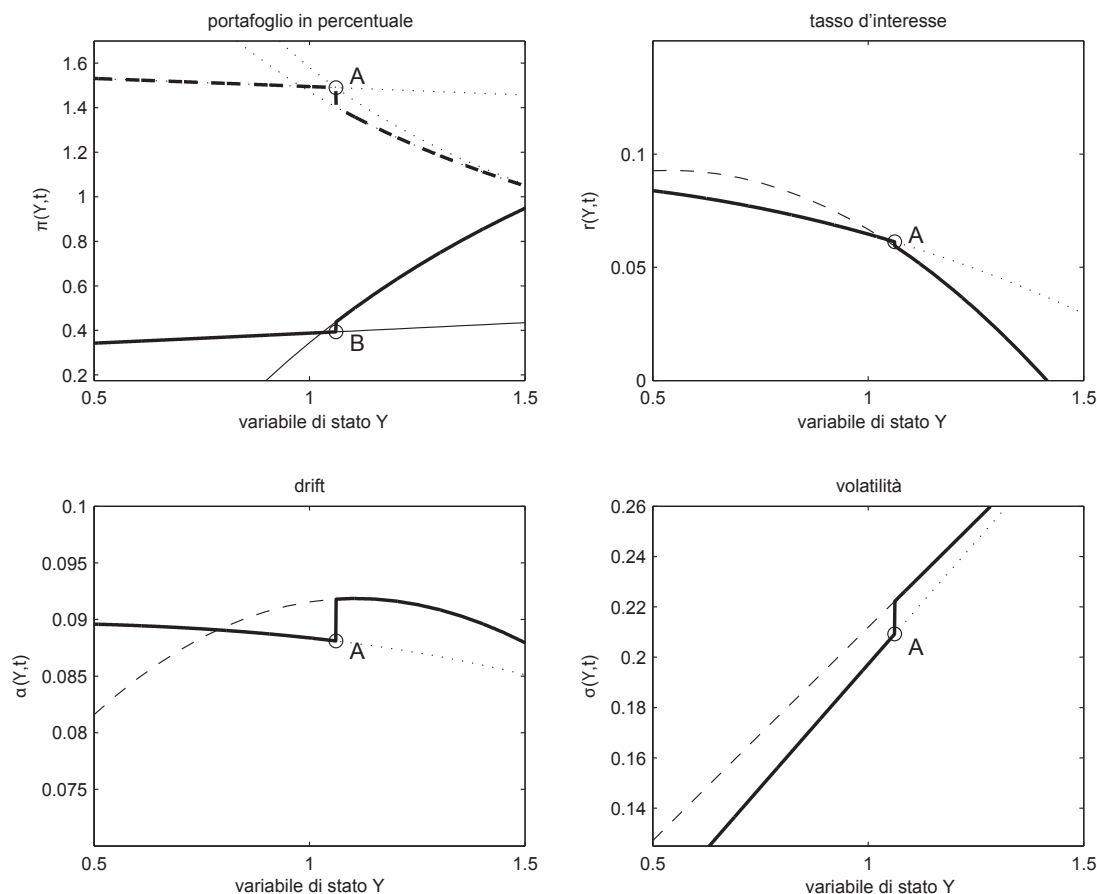
istituzioni abbiano una funzione di utilità logaritmo. Analizziamo i seguenti grafici:



**Figura 3.1:** Presenza del Value-at-Risk in una log-economia  $M_0$ . I valori assegnati ai parametri sono i seguenti:  $\mu_e = 0.1$ ,  $\sigma_e = 0.2$ ,  $\sigma_Y = 1$ ,  $\vartheta = 0.1$ ,  $z = 0.1$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $T = 5$ ,  $\tau = 1/250$ ,  $\beta = 2.5\%$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\omega = 0.5$  e  $\gamma_I = \gamma_{II} = 0$ . La linea continua rappresenta le quantità di interesse quando nell'economia è stato imposto il vincolo di VaR. Nel grafico del tasso d'interesse, la linea punteggiata a destra del punto A rappresenta il tasso d'interesse in assenza del vincolo di VaR.

Il grafico a sinistra mostra la frazione di portafoglio investita nel titolo rischioso. Prima del punto  $A$ , tale frazione è pari a 1 per entrambe le istituzioni. Dopodiché l'istituzione  $II$  diventa vincolata e quindi deve diminuire la sua esposizione (linea tratteggiata). Parte del suo capitale è adesso investito nel titolo privo di rischio. Ciò influenza i tassi d'interesse, che all'equilibrio devono diminuire a causa dell'aumentata domanda per i bond da parte di  $II$ . La linea continua nel grafico a destra mostra i tassi d'interesse all'equilibrio. Quando il punto  $A$  è stato raggiunto, i tassi d'interesse diminuiscono rispetto al caso di un'economia non vincolata (linea punteggiata). Essendo i tassi d'interesse più bassi, l'istituzione  $I$  è maggiormente attratta da un investimento nel titolo rischioso, come mostrato nel grafico a sinistra dalla linea continua. Tutto ciò porta ad una modifica del valore di  $\omega^I$ , quindi ad una redistribuzione della ricchezza tra le due istituzioni, indipendentemente dalla loro avversione al rischio. Di conseguenza la regolamentazione favorisce l'istituzione non vincolata, infatti porta ad un incremento del capitale di  $I$  a discapito dell'istituzione  $II$ , che è soggetta al vincolo di VaR.

La Figura 3.2 si riferisce, invece, al secondo modello  $M_1$ , supponendo che la correlazione  $\rho_{eY}$  sia positiva.

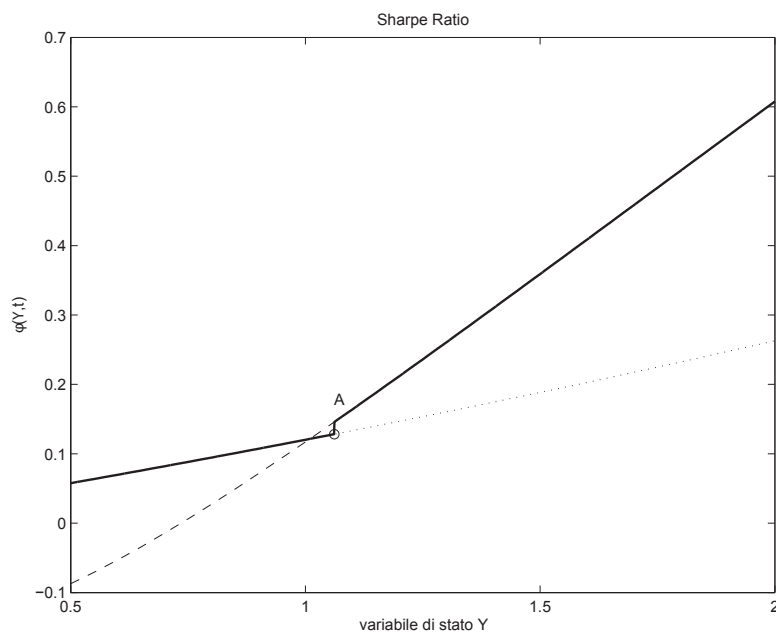


**Figura 3.2:** Presenza del Value-at-Risk nell'economia  $M_1$ , con correlazione positiva. I valori assegnati ai parametri sono i seguenti:  $\mu_e = 0.1$ ,  $\sigma_e = 0.2$ ,  $\sigma_Y = 1$ ,  $\vartheta = 0.1$ ,  $z = 0.1$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $T = 2$ ,  $\tau = 1/250$ ,  $\beta = 5\%$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\rho_{eY} = 0.4$ ,  $\gamma_I = -0.1$  e  $\gamma_{II} = 0.4$ . La linea continua rappresenta le quantità di interesse quando nell'economia è stato imposto il vincolo di VaR. Nei grafici del tasso d'interesse, del drift e della volatilità le linee punteggiate a destra del punto A rappresentano le corrispondenti quantità in assenza del vincolo di VaR.

Il grafico in alto a sinistra mostra che non appena l'istituzione  $II$  diventa vincolata nel punto  $A$ , deve diminuire la sua esposizione nei confronti del titolo rischioso (linea tratteggiata). Nel momento in cui si raggiunge il punto  $A$ , il tasso d'interesse privo di rischio, il drift e la volatilità del titolo rischioso

risentono della presenza del vincolo di VaR e cambiano istantaneamente. Ciò provoca un salto nella linea tratteggiata del grafico in alto a sinistra. L'accresciuta domanda per i bond favorisce una diminuzione del tasso d'interesse, come mostrato nel grafico in alto a destra. Di conseguenza, oltre il punto  $A$ , il tasso d'interesse privo di rischio inizia a diminuire. Allo stesso tempo, si osserva un salto verso l'alto nel drift del titolo rischioso e un incremento della sua volatilità. Quindi, se la correlazione  $\rho_{eY}$  è positiva, la regolamentazione provoca un salto verso l'alto nella volatilità di equilibrio. Solo quando la variabile di stato  $Y$  cresce ulteriormente, la volatilità scende al di sotto del valore che ha nell'economia non vincolata.

Poiché il tasso d'interesse privo di rischio, il drift e la volatilità devono cambiare in modo tale che l'istituzione  $I$  incrementi la sua domanda per il titolo rischioso, come mostrato nella figura in alto a sinistra dalla linea continua, l'effetto globale corrisponde ad un incremento dello Sharpe ratio. La Figura 3.3 mostra lo Sharpe ratio:



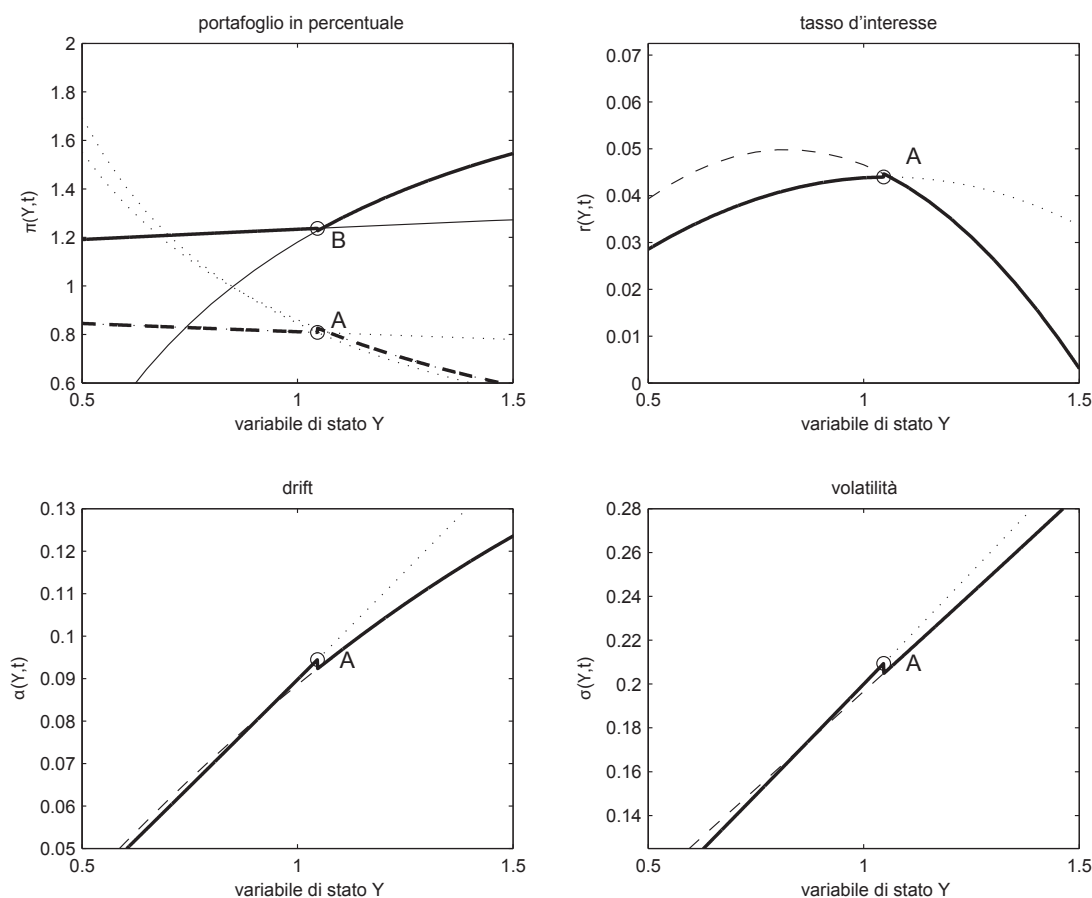
**Figura 3.3:** Impatto del Value-at-Risk sullo Sharpe ratio nell'economia  $M_1$ , con correlazione positiva. I valori assegnati ai parametri sono gli stessi della Figura 3.2. La linea continua rappresenta lo Sharpe ratio in presenza del vincolo di VaR. La linea punteggiata a destra del punto  $A$  rappresenta lo Sharpe ratio in assenza del vincolo di VaR.

Si osserva che nel punto  $A$  lo Sharpe ratio salta ad un livello superiore e il



tasso di crescita aumenta rispetto al caso dell'economia non vincolata. Quindi, la presenza di istituzioni finanziarie vincolate e non vincolate, permette di spiegare in parte il fatto stilizzato di Sharpe ratio relativamente elevati e tassi d'interesse bassi.

Nella Figura 3.4, infine, si considera il modello  $M_2$ , con un coefficiente di correlazione  $\rho_{eY}$  negativo.



**Figura 3.4:** Presenza del Value-at-Risk nell'economia  $M_2$ , con correlazione negativa. I valori assegnati ai parametri sono i seguenti:  $\mu_e = 0.1$ ,  $\sigma_e = 0.2$ ,  $\sigma_Y = 1$ ,  $\vartheta = 0.1$ ,  $z = 0.1$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $T = 2$ ,  $\tau = 1/250$ ,  $\beta = 2.5\%$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\rho_{eY} = -0.4$ ,  $\gamma_I = -0.1$  e  $\gamma_{II} = 0.4$ . La linea continua rappresenta le quantità di interesse quando nell'economia è stato imposto il vincolo di VaR. Nei grafici del tasso d'interesse, del drift e della volatilità le linee punteggiate a destra del punto A rappresentano le corrispondenti quantità in assenza del vincolo di VaR.

Nella figura in alto a sinistra la linea tratteggiata indica l'istituzione vincolata  $II$ , invece la linea continua corrisponde all'istituzione non vincolata  $I$ . Poiché la correlazione è negativa, la frazione di portafoglio investita nel titolo rischioso è più bassa, per l'istituzione vincolata che per l'istituzione  $I$ . Quando  $II$  diventa vincolata nel punto  $A$ , deve diminuire la frazione di capitale investita nel titolo rischioso. Ciò favorisce una diminuzione del tasso d'interesse privo di rischio a partire dal punto  $A$  della figura in alto a destra. Paragonato al modello  $M_1$  con coefficiente di correlazione  $\rho_{eY}$  negativo, si nota che quando l'istituzione  $II$  diventa vincolata, sia il drift che la volatilità del titolo rischioso compiono un salto verso il basso e rimangono ad un livello inferiore che nell'economia non vincolata. Tuttavia, all'aumentare di  $Y$  lo Sharpe ratio aumenterà e l'istituzione  $I$  incrementerà la sua esposizione nel titolo rischioso nel punto  $B$ , come mostrato nella figura in alto a sinistra. In definitiva, possiamo riassumere quanto dedotto dai modelli analizzati nei seguenti punti:

- la regolamentazione favorisce una redistribuzione della ricchezza, che in parte passa dalle istituzioni vincolate alle istituzioni non vincolate, indipendentemente dalla loro avversione al rischio. Ciò crea uno squilibrio nella competizione tra le diverse istituzioni finanziarie;
- per un'istituzione non vincolata, un investimento nel titolo rischioso risulta più vantaggioso, poiché la regolamentazione incrementa lo Sharpe ratio;
- quando un'istituzione diventa vincolata, i tassi d'interesse di equilibrio, il drift e la volatilità dei titoli possono compiere un salto nel loro valore.
- quando il coefficiente di correlazione  $\rho_{eY}$  è positivo e l'istituzione  $II$  diventa vincolata, lo Sharpe ratio sembra essere innalzato da un aumento nel drift. Invece, se  $\rho_{eY}$  è negativo, lo Sharpe ratio è aumentato da una diminuzione della volatilità.

## 3.2 Value-at-Risk e rischio endogeno

L'articolo [21] studia come agisce il vincolo di VaR sul rischio endogeno, quindi sulla volatilità dei titoli rischiosi. Inoltre si analizza l'effetto degli shocks esogeni sui prezzi degli asset e sul rischio endogeno.

In tale articolo si utilizza un modello per il mercato finanziario come quello introdotto nel capitolo precedente, con l'ipotesi che il tasso d'interesse  $r$  sia costante.

Nel mercato vi sono due tipi di investitori: i trader attivi e i trader passivi. Quest'ultimi sono caratterizzati da una curva di domanda per i titoli rischiosi inclinata negativamente.

Invece, i trader attivi, che rappresentano le istituzioni finanziarie, effettuano scelte di portafoglio di breve termine, massimizzando il rendimento istantaneo del loro portafoglio. Inoltre sono soggetti ad un vincolo di VaR.

In questo caso il portafoglio dell'investitore, dato da  $\{\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t)), t \in [0, T]\}$ , è espresso in termini assoluti, quindi  $\pi_i$  indica il numero di azioni del titolo  $i$  possedute. Inoltre si introduce la seguente quantità:  $D_i(t) = \pi_i(t)S_i(t)$ , che rappresenta la quantità di denaro investita nel titolo  $i$ -esimo. Di conseguenza la dinamica del valore del portafoglio è data da:

$$dX(t) = [rX(t) + \mathbf{D}(t)^\top(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)]dt + \mathbf{D}(t)^\top\boldsymbol{\sigma}(t)d\mathbf{W}(t);$$

Il Value-at-Risk è definito a partire dalla deviazione standard, in particolare è  $\alpha$ -volte, con  $\alpha > 0$ , la deviazione standard di  $dX(t)$ , calcolata condizionando rispetto a  $\mathcal{F}_t$ , quindi:

$$\text{VaR}_t = \alpha\sqrt{\text{Var}(dX(t)|\mathcal{F}_t)} = \alpha\sqrt{\mathbf{D}(t)^\top\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\sigma}(t)^\top\mathbf{D}(t)}.$$

Il problema di ottimizzazione si basa sull'idea di massimizzare il rendimento atteso del portafoglio tra  $t$  e  $t + dt$ , di conseguenza si considera la seguente quantità:

$$\mathbb{E}[dX(t)|\mathcal{F}_t] = [rX(t) + \mathbf{D}(t)^\top(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)]dt$$

e si ottiene il problema di ottimizzazione seguente:

$$\sup_{\mathbf{D}(t)} \{rX(t) + \mathbf{D}(t)^\top(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)\}, \quad t \in [0, T],$$

soggetto al vincolo di VaR:

$$\alpha\sqrt{\mathbf{D}(t)^\top\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\sigma}(t)^\top\mathbf{D}(t)} \leq X(t), \quad t \in [0, T].$$

Si dimostra che per  $(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n) \neq 0$ , il vincolo di VaR deve valere col segno di uguaglianza. Quindi si determina la soluzione  $\mathbf{D}(t)$  imponendo le condizioni del primo ordine:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{X(t)}{\alpha^2 \gamma(t)} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n),$$

dove  $\boldsymbol{\Sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\sigma}(t)^\top$  e  $\gamma(t)$  è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo di VaR, che è dato da:

$$\gamma(t) = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)}}{\alpha}.$$

In definitiva si ottiene:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{X(t)}{\alpha \sqrt{\xi(t)}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n),$$

in cui

$$\xi(t) = (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n).$$

Per quanto riguarda i trader passivi, la domanda aggregata di titoli rischiosi è la seguente:

$$\mathbf{D}^P(t) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) \begin{bmatrix} \delta_1(rt + \eta z_1(t) - \ln S_1(t)) \\ \vdots \\ \delta_n(rt + \eta z_n(t) - \ln S_n(t)) \end{bmatrix},$$

dove  $\delta_i$  determina l'inclinazione della curva di domanda, invece  $z_i$  rappresenta uno shock esogeno ed è pari a  $z_i(t) = \boldsymbol{\sigma}_i^z(t) d\mathbf{W}(t)$ . L'obiettivo è determinare in che modo la matrice  $\boldsymbol{\sigma}^z$ , che è di rango massimo, determina la matrice  $\boldsymbol{\sigma}$ , che rappresenta il rischio endogeno.

Di conseguenza, la condizione di equilibrio del mercato finanziario  $\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}^P(t) = 0$  diventa:

$$\frac{X(t)}{\alpha \sqrt{\xi(t)}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n) + \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) \begin{bmatrix} \delta_1(rt + \eta z_1(t) - \ln S_1(t)) \\ \vdots \\ \delta_n(rt + \eta z_n(t) - \ln S_n(t)) \end{bmatrix}.$$

Quindi i prezzi di equilibrio sono dati da:

$$S_i(t) = \exp\left(\frac{X(t)}{\alpha\delta_i\sqrt{\xi(t)}}(\mu_i(t) - r) + rt + \eta z_i(t)\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Nell'articolo si analizza in particolare il caso di un *unico* titolo rischioso. Il prezzo del titolo all'equilibrio è dato da:

$$S(t) = \exp\left(rt + \eta z(t) + \frac{\sigma(t)X(t)}{\alpha\delta}\right).$$

Si suppone che il fattore di rischio esogeno, rappresentato da  $z(t)$ , evolva nel seguente modo:

$$dz(t) = \sigma_z dW(t).$$

L'obiettivo è determinare in che modo la volatilità del titolo  $\sigma$  dipende da  $\sigma_z > 0$ . Per ottenere tale relazione, calcoliamo il differenziale di  $\ln S(t)$ .

In particolare, dalla definizione di  $S(t)$  otteniamo:

$$d(\ln S(t)) = \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma(t)^2\right)dt + \sigma(t)dW(t).$$

Invece, utilizzando l'equazione che  $S(t)$  deve soddisfare all'equilibrio si ha che:

$$\begin{aligned} d(\ln S(t)) &= d\left\{rt + \eta z(t) + \frac{\sigma(t)X(t)}{\alpha\delta}\right\} \\ &= rdt + \eta dz(t) + \frac{1}{\alpha\delta}d(\sigma(t)X(t)) \\ &= rdt + \eta\sigma_z dW(t) + \frac{1}{\alpha\delta}(\sigma(t)dX(t) + X(t)d\sigma(t) + d\sigma(t)dX(t)) \end{aligned}$$

Per determinare  $d\sigma(t)$ , applichiamo la formula di Itô a  $\sigma(X(t))$ :

$$\begin{aligned} d\sigma(X(t)) &= \frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial(X)^2}(dX(t))^2 \\ &= \left\{\frac{\partial\sigma}{\partial X}\left[rX(t) + \frac{X(t)(\mu(t) - r)}{\alpha\sigma}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial(X)^2}\left(\frac{X(t)}{\alpha}\right)^2\right\}dt + \frac{\partial\sigma}{\partial X}\frac{X(t)}{\alpha}dW(t), \end{aligned}$$

dove è stata utilizzata l'identità seguente:

$$\begin{aligned} dX(t) &= [rX(t) + D(t)(\mu(t) - r)]dt + D(t)\sigma(t)dW(t) \\ &= \left[ rX(t) + \frac{X(t)(\mu(t) - r)}{\alpha\sigma} \right]dt + \frac{X(t)}{\alpha}dW(t). \end{aligned}$$

Quindi  $d(\ln S(t))$  diventa:

$$d(\ln S(t)) = (\text{drift})dt + \left[ \eta\sigma_z + \frac{1}{\alpha\delta} \left( \sigma \frac{X(t)}{\alpha} + \frac{\partial\sigma}{\partial X} \frac{X(t)^2}{\alpha} \right) \right]dW(t).$$

Uguagliando la volatilità che compare nelle due espressioni di  $d(\ln S(t))$  si ricava:

$$\sigma(X(t)) = \eta\sigma_z + \frac{1}{\alpha\delta} \left( \sigma(X(t)) \frac{X(t)}{\alpha} + \frac{\partial\sigma(X(t))}{\partial X} \frac{X(t)^2}{\alpha} \right),$$

che può essere scritta come la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{\partial\sigma(X(t))}{\partial X} = \frac{\alpha^2\delta - X(t)}{X(t)^2} \sigma(X(t)) - \frac{\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{X(t)^2}.$$

La soluzione generale è data da:

$$\sigma(X(t)) = \frac{1}{X(t)} e^{-\frac{\alpha^2\delta}{X(t)}} \left( C - \alpha^2\delta\eta\sigma_z \int_{-\frac{\alpha^2\delta}{X(t)}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right),$$

con  $C$  costante arbitraria.

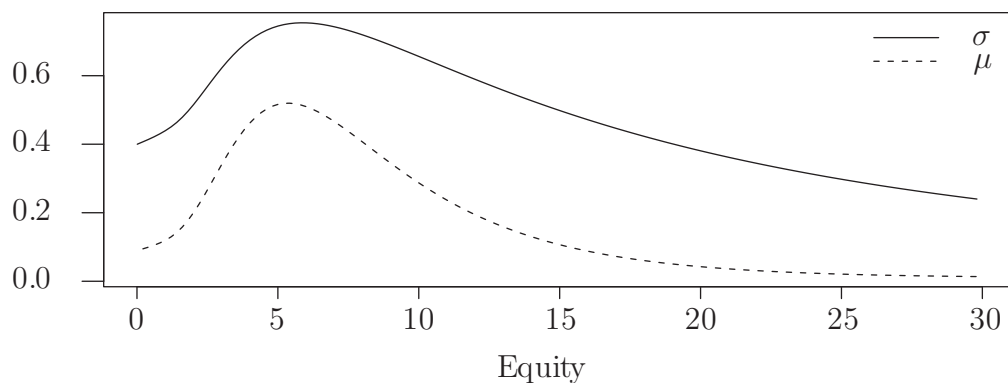
Per quanto riguarda il drift si ottiene:

$$\mu(t) = r + \frac{\sigma(X(t))}{2\alpha\eta\sigma_z} \left\{ \alpha\sigma(X(t))^2 - \eta\sigma_z + (\sigma(X(t)) - \eta\sigma_z) \left( 2\alpha^2r + \frac{\alpha^2\delta}{X(t)} - 2 \right) \right\}.$$

Quindi lo Sharpe ratio diventa:

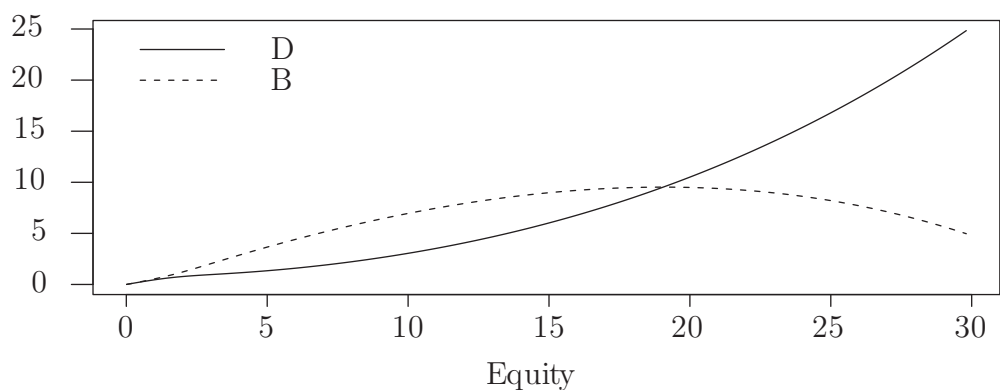
$$\frac{\mu(t) - r}{\sigma(X(t))} = \frac{1}{2\alpha\eta\sigma_z} \left\{ \alpha\sigma(X(t))^2 - \eta\sigma_z + (\sigma(X(t)) - \eta\sigma_z) \left( 2\alpha^2r + \frac{\alpha^2\delta}{X(t)} - 2 \right) \right\}.$$

Se i parametri assumono i valori:  $r = 0.01$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\sigma_z = 0.4$ ,  $\eta = 1$  e  $C = 10$ , si ottiene il seguente grafico della volatilità come funzione di  $X(t)$ :



**Figura 3.5:** Volatilità e drift del titolo rischioso

Quindi per certi valori di  $X(t)$  si ha un notevole effetto di amplificazione. La Figura 3.6, invece, mostra il capitale investito nel titolo rischioso e nel titolo privo di rischio, sempre come funzione del valore del portafoglio:



**Figura 3.6:** Composizione del portafoglio

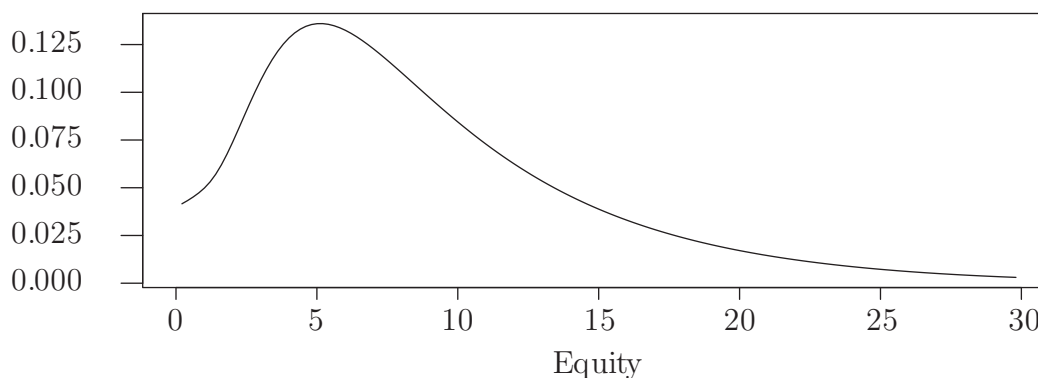
Si nota che all'aumentare di  $X(t)$  il trader investe maggiormente nel titolo rischioso. Quando  $b(t)B(t)$  diventa negativo l'interpretazione è che il trader è levereggiato, infatti sta finanziando la sua posizione nel titolo rischioso, indebitandosi. Ciò provoca un effetto di amplificazione di piccole variazioni, che il prezzo del titolo può avere a causa di informazioni che arrivano dall'esterno.

Come mostra la Figura 3.5, l'effetto di amplificazione si verifica solo intorno ad un valore intermedio di  $X(t)$ . Questo perché se  $X(t)$  è molto piccolo, allora i movimenti del trader determinano un lieve impatto sul titolo. Mentre, se  $X(t)$  è molto grande, il trader inizia a comportarsi sempre più come

un investitore non vincolato. Poiché il trader diventa neutrale al rischio, la volatilità si abbassa e il premio per il rischio del titolo tende a zero.

Tuttavia, ad un livello intermedio di  $X(t)$ , l'effetto di amplificazione è massimizzato, quindi ad una piccola variazione positiva del prezzo, corrisponde un nuovo investimento nel titolo, che fa salire ulteriormente il prezzo, ciò porta ad un nuovo investimento nel titolo e così via. Tale effetto di amplificazione determina l'aumento della volatilità di equilibrio  $\sigma(X(t))$ . Poiché i trader, che sono neutrali al rischio, ma soggetti al vincolo di VaR, si comportano come investitori avversi al rischio, quindi il valore del drift all'equilibrio si amplifica con l'aumentare della volatilità.

Il moltiplicatore di Lagrange, mostrato nella Figura 3.7, è proporzionale allo Sharpe ratio, nel caso di un unico titolo rischioso.



**Figura 3.7:** Moltiplicatore di Lagrange

Quindi lo Sharpe ratio ha un andamento simile al drift e alla volatilità, con un massimo intermedio, crescente per piccoli valori di  $X(t)$  e decrescente per elevati valori del portafoglio.

É possibile dare un'interpretazione dei termini che compaiono nella volatilità di equilibrio. Supponiamo che il trader ipotizzi una volatilità pari a  $\tilde{\sigma}(X(t))$ , allora si ottiene:

$$\sigma(X(t)) = \eta\sigma_z + \frac{1}{\alpha\delta} \left( \tilde{\sigma}(X(t)) \frac{X(t)}{\alpha} + \frac{\partial \tilde{\sigma}(X(t))}{\partial X} \frac{X(t)^2}{\alpha} \right),$$

dove il secondo termine deriva dall'ottimizzazione di portafoglio degli investitori istituzionali, invece l'ultimo termine è dato da variazioni della volatilità ipotizzata al variare del valore del portafoglio. Quando  $X(t) = 0$ , all'equilibrio si ottiene  $\sigma = \eta\sigma_z$ . Quindi si definisce la volatilità in eccesso come  $\sigma - \eta\sigma_z$ , che è una misura del rischio endogeno generato dalla presenza dei

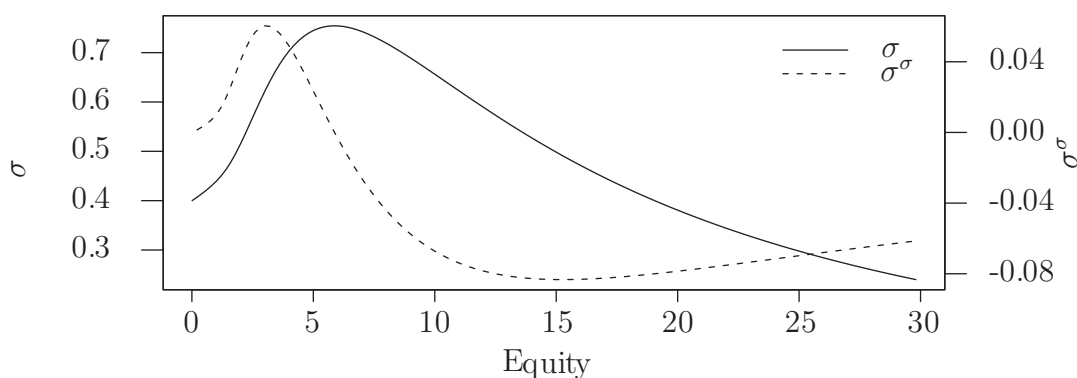


trader attivi. Infine, la costante arbitraria  $C$  è una misura del legame esistente tra  $X(t)$  e la volatilità, in particolare se i trader congetturano che all'equilibrio  $C$  sarà grande, allora si comportano in modo che effettivamente ciò si verifichi.

L'articolo affronta anche il tema della volatilità della volatilità (vol of vol), definita formalmente come il valore assoluto di  $\sigma^\sigma(t)$  in  $d\sigma(t) = \mu^\sigma(t)dt + \sigma^\sigma(t)dW(t)$ . Essa soddisfa, dal lemma di Itô, l'equazione:

$$\sigma^\sigma(t) = \frac{X(t)}{\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial X(t)} = \frac{1}{\alpha X(t)} [\alpha^2 \delta(\sigma(t) - \eta \sigma_z) - X(t) \sigma(t)].$$

La Figura 3.8 mostra il grafico della volatilità e della vol of vol in funzione del valore del portafoglio:



**Figura 3.8:** Volatilità e  $\sigma^\sigma$

Si nota che la vol of vol è anticiclica, infatti quando la volatilità cresce, la volatilità della volatilità aumenta e lo fa più velocemente della volatilità stessa. Tuttavia, quando  $X(t)$  converge al valore di picco della volatilità, la vol of vol decresce, poiché la volatilità varia in modo sempre più contenuto.

Infine l'articolo considera il caso generale con  $n$  titoli rischiosi, in cui i fattori di rischio esogeno sono dati da:

$$dz_i(t) = \sigma_z^i d\mathbf{W}(t),$$

dove  $\sigma_z^i$  è un vettore  $1 \times n$ , che governa gli shock esogeni che impattano sulla domanda dei trader passivi.

Indichiamo le quantità congetturate con una tilde. Per esempio, il drift e il coefficiente di diffusione saranno indicati rispettivamente con  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\sigma}$ , invece i valori reali con  $\mu$  e  $\sigma$ . Per convenienza notazionale, definiamo la seguente

quantità:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) := \frac{\boldsymbol{\Sigma}(t)^{-1}(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)^\top \boldsymbol{\Sigma}(t)^{-1}(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)}},$$

$$\beta_i(t) := \frac{\mu_i(t) - r}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)^\top \boldsymbol{\Sigma}(t)^{-1}(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)}},$$

$$\varepsilon_i(t) := \frac{1}{\alpha^2 \delta_i} \beta_i(t) + \frac{X(t)}{\alpha^2 \delta_i} \frac{\partial \beta_i(t)}{\partial X(t)},$$

e dove

$$\frac{\partial \varepsilon_i(t)}{\partial X(t)} = \frac{2}{\alpha^2 \delta_i} \beta_i(t) + \frac{X(t)}{\alpha^2 \delta_i} \frac{\partial^2 \beta_i(t)}{\partial X(t)^2}.$$

L'obiettivo è calcolare il drift e il coefficiente di diffusione reali in funzione dei valori congetturati. Dal lemma di Itô si ottiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_i(t) = \tilde{\varepsilon}_i(t) X(t) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)^\top \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \eta \boldsymbol{\sigma}_z^i.$$

A questo punto si risolve il problema di punto fisso seguente:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \end{bmatrix},$$

quindi la matrice di diffusione diventa:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = X(t) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)^\top \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \eta \boldsymbol{\sigma}_z.$$

Poiché  $\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\sigma}(t)^\top = \boldsymbol{\beta}(t)^\top$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  soddisfa la seguente equazione matriciale:  $\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\sigma}(t)^\top = X(t) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \boldsymbol{\beta}(t)^\top + \eta \boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{\sigma}(t)^\top$ , quindi

$$(\boldsymbol{\sigma}(t) - \eta \boldsymbol{\sigma}_z) \boldsymbol{\sigma}(t)^\top = X(t) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \boldsymbol{\beta}(t)^\top.$$

La matrice di diffusione risulta data dalla somma di tre contributi:

$$\sigma_i(t) = \frac{1}{\alpha^2 \delta_i} \beta_i(t) + \frac{X(t)}{\alpha^2 \delta_i} \frac{\partial \beta_i(t)}{\partial X(t)} + \eta \sigma_z^i,$$

dove il primo termine rappresenta l'effetto endogeno dovuto alla presenza del vincolo di VaR; il secondo, invece, è l'effetto endogeno dovuto a cambiamenti nelle aspettative sulla volatilità di equilibrio; infine, l'ultima quantità corrisponde al rischio esogeno.

La matrice di diffusione può essere scritta nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \eta \left[ \frac{X(t)}{1 - X(t)\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \boldsymbol{\varepsilon}(t)} \boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\lambda}(t)^\top + \mathbf{I}_n \right] \boldsymbol{\sigma}_z.$$

Per risolvere il problema in forma chiusa, si considera il caso simmetrico, che permette di ricondursi al modello con un unico titolo rischioso. A tal scopo si pone  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_z = \tilde{\sigma}_z \mathbf{I}_n$ , dove  $\sigma_z > 0$  è uno scalare. Inoltre, si suppone che  $\delta_i = \delta$ ,  $\mu_i(t) = \mu_1(t)$ ,  $\beta_i(t) = \beta_1(t)$ ,  $\lambda_i(t) = \lambda_1(t)$ ,  $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_1(t)$ ,  $\sigma_{ii}(t) = \sigma_{11}(t)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{12}(t)$  per ogni  $i \neq j$ . Quindi  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\lambda}(t)^\top = \varepsilon_1(t)\lambda_1(t)\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$  e  $\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \boldsymbol{\varepsilon}(t) = n\lambda_1(t)\varepsilon_1(t)$ . Di conseguenza, la matrice di diffusione diventa:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \eta\sigma_z \left[ \frac{X(t)\varepsilon_1(t)\lambda_1(t)}{1 - nX(t)\lambda_1(t)\varepsilon_1(t)} \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top + \mathbf{I}_n \right].$$

A questo punto, grazie alla simmetria, è sufficiente considerare la soluzione generale della seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{\partial y(X(t))}{\partial X} = \frac{\alpha^2\delta - X(t)}{X(t)^2} y(X(t)) - \frac{\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{nX(t)^2},$$

che è data da:

$$y(X(t)) = \frac{1}{X(t)} e^{-\frac{\alpha^2\delta}{X(t)}} \left( C - \frac{\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{n} \int_{-\frac{\alpha^2\delta}{X(t)}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right),$$

dove  $C$  è una costante di integrazione.

Si dimostra che:

$$\sigma_{ii}(X(t)) = y(X(t)) + \frac{n-1}{n}\eta\tilde{\sigma}_z$$

e

$$\sigma_{ij}(X(t)) = y(X(t)) - \frac{1}{n}\eta\tilde{\sigma}_z.$$

Inoltre

$$\Sigma_{ii}(t) = \eta^2\tilde{\sigma}_z^2 + \frac{1}{n} \left( n^2 y(X(t))^2 - \eta^2\tilde{\sigma}_z^2 \right),$$

$$\Sigma_{ij}(t) = \frac{1}{n} \left( n^2 y(X(t))^2 - \eta^2\tilde{\sigma}_z^2 \right)$$

e

$$\text{Corr}_{ij}(t) = \frac{ny(X(t))^2 - \frac{1}{n}\eta^2\tilde{\sigma}_z^2}{ny(X(t))^2 + \frac{n-1}{n}\eta^2\tilde{\sigma}_z^2}.$$

Infine

$$D_i(t) = \frac{X(t)}{\alpha n^{3/2} y(t)}$$

e

$$\frac{\mu_i(t) - r}{y(t)} = \frac{1}{2\alpha\frac{\eta}{n}\tilde{\sigma}_z} \left\{ \alpha \left( y(X(t)) + \frac{n-1}{n}\eta\tilde{\sigma}_z \right)^2 - \frac{\eta}{\sqrt{n}}\tilde{\sigma}_z + \sqrt{n} \left( y(X(t)) - \frac{\eta}{n}\tilde{\sigma}_z \right) \left[ 2\alpha^2 r + \frac{\alpha^2 \delta}{X(t)} - 2 \right] \right\}.$$

I risultati ottenuti sono molto simili al caso con un unico titolo rischioso, inoltre si riducono ad esso ponendo  $n = 1$ . La presenza di più titoli rischiosi implica che uno shock idiosincratco per un titolo è trasmesso ai rimanenti. Quindi, l'impatto di tale shock non è assorbito totalmente dal singolo titolo, portando potenzialmente ad una minore volatilità. Infatti, solo una frazione del capitale è investita nel singolo titolo, di conseguenza l'effetto feedback si riduce. Viceversa, se si considera uno shock che investe tutto il mercato, la volatilità può aumentare, a seconda dell'effetto diversificazione del portafoglio.

In definitiva, in [21] si prende in considerazione il rischio endogeno, che rappresenta il fattore di rischio principale dei mercati finanziari. Infatti, come mostrato nell'articolo, esso è la causa degli aspetti anticiclici della volatilità, della vol of vol, delle correlazioni, della volatilità implicita e dello Sharpe ratio. La volatilità di equilibrio è stata decomposta come la somma di una componente dovuta al rischio esogeno e una dovuta al rischio endogeno. Quest'ultima è la più ingente e il Value-at-Risk è una delle cause della presenza di tale componente. Quindi, quanto è stato ottenuto in [21] è di fondamentale importanza per comprendere le conseguenze dell'utilizzo del VaR da parte dei risk manager delle banche e per determinare migliori regole per l'intero sistema finanziario.

### 3.3 Modello di equilibrio con Tobin tax

Il modello qui presentato estende quanto visto nell'articolo precedente al caso in cui, su ogni operazione finanziaria è imposta una commissione, denominata Tobin tax.

L'obiettivo è mostrare che tale tassa può diminuire la volatilità del titolo rischioso, quindi fornire maggiore stabilità al mercato finanziario.

Il modello di mercato è analogo a quello utilizzato nell'articolo precedentemente esposto, inoltre anche in questo caso vi sono due tipi di investitori: i trader attivi, rappresentanti le istituzioni finanziarie, soggetti al vincolo di Value-at-Risk e i trader passivi.

**Portafoglio dei trader attivi.** Per determinare la dinamica del portafoglio dei trader attivi con costi di transazione si fa riferimento a [25]. Consideriamo inizialmente il caso a *tempo discreto*. Supponiamo che il portafoglio sia modificato solo agli istanti  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ , dove  $t_j = j\Delta t$  e  $j = 0, \dots, m$ . Indichiamo con  $b(t_j)$  il numero di titoli privi di rischio in portafoglio all'istante  $t_j$ ; invece  $\pi_i(t_j)$  rappresenta il numero di azioni dell' $i$ -esimo titolo rischioso possedute.

Quindi il valore del portafoglio ad un istante  $t = t_j$  è dato da:

$$X(t) = b(t - \Delta t)B(t) + \boldsymbol{\pi}(t - \Delta t)^\top \mathbf{S}(t).$$

Se all'istante  $t$  il nuovo portafoglio diventa  $(b(t), \boldsymbol{\pi}(t))$ , il costo del portafoglio è pari a:

$$X(t) = b(t)B(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\top \mathbf{S}(t) + \frac{\tau}{2} \mathbf{D}(t)^2 \Delta t,$$

dove  $\mathbf{D}_i(t) = \pi_i(t)S_i(t)$  e l'ultimo termine rappresenta i costi di transazione. Uguagliando le ultime due espressioni si ottiene:

$$B(t)\Delta b(t) + \mathbf{S}(t)^\top \Delta \boldsymbol{\pi}(t) + \frac{\tau}{2} \mathbf{D}(t)^2 \Delta t = 0,$$

dove  $\Delta b(t) = b(t) - b(t - \Delta t)$  e analogamente per  $\Delta \boldsymbol{\pi}(t)$ . Aggiungendo e sottraendo la quantità:

$$B(t - \Delta t)\Delta b(t) + \mathbf{S}(t - \Delta t)^\top \Delta \boldsymbol{\pi}(t)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} B(t - \Delta t)\Delta b(t) + \mathbf{S}(t - \Delta t)^\top \Delta \boldsymbol{\pi}(t) + \frac{\tau}{2} \mathbf{D}(t)^2 \Delta t + \\ + \Delta B(t)\Delta b(t) + \Delta \mathbf{S}(t)^\top \Delta \boldsymbol{\pi}(t) = 0. \end{aligned}$$

Facendo tendere  $\Delta t$  a zero si ottiene formalmente:

$$B(t)db(t) + \mathbf{S}(t)^\top d\boldsymbol{\pi}(t) + \frac{\tau}{2} \mathbf{D}(t)^2 dt + dB(t)db(t) + d\mathbf{S}(t)^\top d\boldsymbol{\pi}(t) = 0.$$

Per quanto riguarda  $X(t)$ , facendo tendere  $\Delta t$  a zero si ottiene:

$$X(t) = b(t)B(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\top \mathbf{S}(t).$$

Quindi, il valore del portafoglio dei trader attivi, nel caso a *tempo continuo*, risolve la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dX(t) = b(t)dB(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\top d\mathbf{S}(t) + B(t)db(t) + \mathbf{S}(t)^\top d\boldsymbol{\pi}(t) +$$

$$+dB(t)db(t) + d\mathbf{S}(t)^\top d\boldsymbol{\pi}(t).$$

Di conseguenza il valore del portafoglio evolve nel seguente modo:

$$dX(t) = b(t)dB(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\top d\mathbf{S}(t) - \frac{\tau}{2}\mathbf{D}(t)^2 dt.$$

Sostituendo l'espressione di  $dB(t)$  e  $d\mathbf{S}(t)$  si ottiene:

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t)dB(t) + \boldsymbol{\pi}(t)^\top d\mathbf{S}(t) - \frac{\tau}{2}\mathbf{D}(t)^2 dt \\ &= [rb(t)B(t) + \mathbf{D}(t)^\top \boldsymbol{\mu}(t) - \frac{\tau}{2}\mathbf{D}(t)^2]dt + \mathbf{D}(t)^\top \boldsymbol{\sigma}(t)d\mathbf{W}(t) \\ &= \left[ rX(t) + \mathbf{D}(t)^\top (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n) - \frac{\tau}{2}\mathbf{D}(t)^2 \right] dt + \\ &\quad + \mathbf{D}(t)^\top \boldsymbol{\sigma}(t)d\mathbf{W}(t). \end{aligned}$$

L'obiettivo dell'investitore è massimizzare il *drift*, quindi il rendimento istantaneo del portafoglio, rispettando un vincolo di VaR. Il Value-at-Risk è espresso come  $\alpha$ -volte la volatilità del portafoglio  $X$ , con  $\alpha > 0$  fissato.

Di conseguenza, nell'ipotesi che  $X(t) > 0$ , il **problema di ottimizzazione** per il trader attivo diventa:

$$\sup_{\mathbf{D}(t)} \left\{ rX(t) + \mathbf{D}(t)^\top (\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n) - \frac{\tau}{2}\mathbf{D}(t)^2 \right\}$$

soggetto al *vincolo di VaR*:

$$\alpha \sqrt{\mathbf{D}(t)^\top \boldsymbol{\Sigma}(t)\mathbf{D}(t)} \leq X(t).$$

Il massimo globale della funzione è dato da:

$$\mathbf{D}_M(t) = \frac{\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n}{\tau}.$$

Quindi il massimo non è raggiunto dove il vincolo vale con il segno di uguaglianza, se e solo se il massimo globale soddisfa il vincolo con il minore stretto:

$$\alpha \sqrt{\mathbf{D}_M(t)^\top \boldsymbol{\Sigma}(t)\mathbf{D}_M(t)} < X(t),$$

quindi se:

$$\frac{\alpha}{\tau} \sqrt{(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)^\top \boldsymbol{\Sigma}(t)(\boldsymbol{\mu}(t) - r\mathbf{1}_n)} < X(t).$$

Supponiamo che tale condizione sia soddisfatta, di conseguenza che il *vincolo valga con il segno di uguaglianza*.

Dalla condizione del primo ordine si ottiene:

$$\frac{\alpha\gamma(t)}{\sqrt{\mathbf{D}(t)^\top \boldsymbol{\Sigma}(t) \mathbf{D}(t)}} \boldsymbol{\Sigma}(t) \mathbf{D}(t) + \tau \mathbf{D}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n,$$

dove  $\gamma(t)$  è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo di VaR. Dall'equazione del vincolo abbiamo che:

$$\frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) \mathbf{D}(t) + \tau \mathbf{D}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n,$$

da cui si ricava

$$\mathbf{D}(t) = \left( \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n \right)^{-1} (\boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n),$$

dove abbiamo supposto che la matrice sia invertibile. Questo è possibile verificarlo, a patto di conoscere  $\gamma(t)$ . Infatti, siano  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  gli autovalori di  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ , che sappiamo essere tutti positivi. Allora gli autovalori della matrice  $\frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n$  sono  $\frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \lambda_1(t) + \tau, \dots, \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \lambda_n(t) + \tau$ . Stiamo quindi supponendo che questi ultimi autovalori siano non nulli.

Infine notiamo che  $\gamma(t)$  è possibile determinarlo dall'equazione del vincolo:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n)^\top \left( \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n \right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}(t) \left( \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n \right)^{-1} \\ \cdot (\boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n) = \frac{X(t)^2}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Nel caso di *un unico titolo rischioso* si ottiene:

$$\gamma(t) = \frac{[\boldsymbol{\mu}(t) - r] \alpha \sigma(t) - \tau X(t)}{\alpha^2 \sigma(t)^2},$$

quindi:

$$D(t) = \frac{X(t)}{\alpha \sigma(t)}.$$

**Portafoglio dei trader passivi.** Per quanto riguarda i trader passivi, supponiamo che abbiano una curva di domanda per i titoli rischiosi inclinata negativamente e consideriamo due casi differenti, a seconda di come la domanda dipende dai costi di transazione:

$$1) \mathbf{D}_1^P(t) = \frac{1}{1 + \tau} \boldsymbol{\Sigma}(t)^{-1} \begin{bmatrix} \delta_1(rt - \eta z_1(t) - \ln S_1(t)) \\ \vdots \\ \delta_n(rt - \eta z_n(t) - \ln S_n(t)) \end{bmatrix};$$

$$2) \mathbf{D}_2^P(t) = (\boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n)^{-1} \begin{bmatrix} \delta_1(rt - \eta z_1(t) - \ln S_1(t)) \\ \vdots \\ \delta_n(rt - \eta z_n(t) - \ln S_n(t)) \end{bmatrix}.$$

Chiaramente, in entrambi i casi, un incremento dei costi di transazione incide negativamente sulla domanda. Il primo caso rappresenta il modello più semplice, ottenuto a partire dalla domanda dei trader passivi presentata in [21] e dividendo il tutto per  $1 + \tau$ . Il secondo modello, invece, è maggiormente significativo, infatti è stato ottenuto a partire dall'espressione della domanda dei trader attivi, adattandola alla domanda dei trader passivi. Osserviamo che, rispetto all'espressione della domanda presentata in [21], in questo caso vi è un segno meno di fronte alla sorgente di rischio esogeno,  $\eta z_1, \dots, \eta z_n$ . In tal modo si conferma l'ipotesi secondo cui i trader passivi hanno una curva di domanda inclinata negativamente, quindi vendono i titoli quando il loro prezzo sale e li comprano quando il loro prezzo scende.

Nel caso di *un unico titolo rischioso*, si ottiene:

$$1) \mathbf{D}_1^P(t) = \frac{\delta}{(1 + \tau)\sigma(t)} (rt - \eta z(t) - \ln S(t));$$

$$2) \mathbf{D}_2^P(t) = \frac{\delta}{\sigma(t) + \tau} (rt - \eta z(t) - \ln S(t)).$$

**Prezzo dei titoli all'equilibrio.** La condizione di equilibrio del mercato dei titoli rischiosi diventa:

$$\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}_i^P(t) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Quindi, nel *primo caso* si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n \right)^{-1} (\boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n) + \\ & + \frac{1}{1 + \tau} \boldsymbol{\Sigma}(t)^{-1} \begin{bmatrix} \delta_1(rt - \eta z_1(t) - \ln S_1(t)) \\ \vdots \\ \delta_n(rt - \eta z_n(t) - \ln S_n(t)) \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$



di conseguenza il prezzo dei titoli rischiosi diventa:

$$S_i(t) = \exp \left\{ \frac{1 + \tau}{\delta_i} \left( \boldsymbol{\Sigma}(t) \left( \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n \right)^{-1} (\boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n) \right)_i + rt - \eta z_i(t) \right\},$$

per  $i = 1, \dots, n$ .

Invece, se vi è *un unico titolo rischioso* si ottiene:

$$S(t) = \exp \left\{ \frac{(1 + \tau)\sigma(t)X(t)}{\alpha\delta} + rt - \eta z(t) \right\}.$$

Nel **secondo caso**, invece, si ricava:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n \right)^{-1} (\boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n) + \\ & + (\boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n)^{-1} \begin{bmatrix} \delta_1(rt - \eta z_1(t) - \ln S_1(t)) \\ \vdots \\ \delta_n(rt - \eta z_n(t) - \ln S_n(t)) \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

di conseguenza il prezzo dei titoli rischiosi è dato da:

$$S_i(t) = \exp \left\{ \frac{1}{\delta_i} \left( (\boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n) \left( \frac{\alpha^2 \gamma(t)}{X(t)} \boldsymbol{\Sigma}(t) + \tau \mathbf{I}_n \right)^{-1} (\boldsymbol{\mu}(t) - r \mathbf{1}_n) \right)_i + rt - \eta z_i(t) \right\},$$

per  $i = 1, \dots, n$ .

Invece, se vi è *un unico titolo rischioso* si ottiene:

$$S(t) = \exp \left\{ \frac{(\sigma(t)^2 + \tau)X(t)}{\alpha\sigma(t)\delta} + rt - \eta z(t) \right\}.$$

**Volatilità all'equilibrio nel caso di un unico titolo rischioso.** Supponiamo che il processo stocastico  $z$ , rappresentante la fonte di rischio esogeno, evolva nel seguente modo:

$$dz(t) = \sigma_z dW(t), \quad t \in (0, T],$$

con  $z(0) = 0$  e dove  $\sigma_z$  è una costante positiva che misura il rischio esogeno. L'obiettivo è esprimere la volatilità  $\sigma$ , che misura il rischio endogeno, come funzione di  $\sigma_z$ . Per tale motivo calcoliamo il differenziale di  $\ln S(t)$ . Poiché

$S(t)$  è un moto Browniano geometrico si ottiene:

$$d(\ln S(t)) = \left( \mu(t) - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \right) dt + \sigma(t)dW(t).$$

Invece, utilizzando l'equazione che  $S(t)$  deve soddisfare all'equilibrio si ha, nel **primo caso**:

$$\begin{aligned} d(\ln S(t)) &= d \left\{ rt - \eta z(t) + \frac{(1 + \tau)\sigma(t)X(t)}{\alpha\delta} \right\} \\ &= rdt - \eta dz(t) + \frac{1 + \tau}{\alpha\delta} d(\sigma(t)X(t)) \\ &= rdt - \eta\sigma_z dW(t) + \frac{1 + \tau}{\alpha\delta} (\sigma(t)dX(t) + X(t)d\sigma(t) + d\sigma(t)dX(t)). \end{aligned}$$

Per determinare  $d\sigma(t)$ , applichiamo la formula di Itô a  $\sigma(X(t))$ . Ricordando che il differenziale di  $X(t)$  è dato da:

$$dX(t) = \left[ rX(t) + \frac{X(t)(\mu(t) - r)}{\alpha\sigma(t)} - \frac{\tau X(t)^2}{2\alpha^2\sigma(t)^2} \right] dt + \frac{X(t)}{\alpha} dW(t),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} d\sigma(X(t)) &= \frac{d\sigma}{dX} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma}{dX^2} (dX(t))^2 \\ &= \left\{ \frac{d\sigma}{dX} \left[ rX(t) + \frac{X(t)(\mu(t) - r)}{\alpha\sigma} - \frac{\tau X(t)^2}{2\alpha^2\sigma^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma}{dX^2} \left( \frac{X(t)}{\alpha} \right)^2 \right\} dt + \frac{d\sigma}{dX} \frac{X(t)}{\alpha} dW(t). \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di  $d\sigma(X(t))$  in  $d(\ln S(t))$  si ottiene:

$$d(\ln S(t)) = (\text{drift})dt + \left[ \frac{1 + \tau}{\alpha\delta} \left( \sigma \frac{X(t)}{\alpha} + \frac{d\sigma}{dX} \frac{X(t)^2}{\alpha} \right) - \eta\sigma_z \right] dW(t).$$

Eguagliando la volatilità che compare nelle due espressioni di  $d(\ln S(t))$  si ricava:

$$\sigma(X(t)) = \frac{1 + \tau}{\alpha\delta} \left( \sigma(X(t)) \frac{X(t)}{\alpha} + \frac{d\sigma(X(t))}{dX} \frac{X(t)^2}{\alpha} \right) - \eta\sigma_z.$$

Quindi  $\sigma$  deve soddisfare la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \frac{\frac{\alpha^2\delta}{1+\tau} - x}{x^2}\sigma(x) + \frac{\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{(1+\tau)x^2}.$$

La soluzione generale è data da:

$$\sigma_1(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{\alpha^2\delta/(1+\tau)-y}{y^2} dy} \left( \sigma_1(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^y \frac{\alpha^2\delta/(1+\tau)-u}{u^2} du} \frac{\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{(1+\tau)y^2} dy \right).$$

L'obiettivo è dimostrare che la volatilità ottenuta in assenza di costi di transazione, la cui espressione è la seguente:

$$\sigma(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{\alpha^2\delta-y}{y^2} dy} \left( \sigma(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^y \frac{\alpha^2\delta-u}{u^2} du} \frac{\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{y^2} dy \right),$$

sia effettivamente superiore alla volatilità ricavata in presenza dei costi di transazione. A questo scopo, consideriamo la differenza:

$$w = \sigma - \sigma_1$$

e dimostriamo che  $w$  è sempre non negativa. Infatti  $w$  soddisfa la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{\frac{\alpha^2\delta}{1+\tau} - x}{x^2}w(x) + \frac{\tau\alpha^2\delta}{(1+\tau)x^2}\sigma_1(x) + \frac{\tau\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{(1+\tau)x^2},$$

quindi  $w$  ha la seguente espressione:

$$w(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{\alpha^2\delta/(1+\tau)-y}{y^2} dy} \left( w(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^y \frac{\alpha^2\delta/(1+\tau)-u}{u^2} du} \left\{ \frac{\tau\alpha^2\delta}{(1+\tau)y^2}\sigma_1(y) + \frac{\tau\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{(1+\tau)y^2} \right\} dy \right).$$

Di conseguenza, se  $w(x_0) \geq 0$ , che significa  $\sigma(x_0) \geq \sigma_1(x_0)$ , allora  $w$  si mantiene non negativa, essendo  $\sigma_1$  non negativa. Questo dimostra che l'introduzione della Tobin tax ha effettivamente diminuito la volatilità.

Invece, nel **secondo caso** si ottiene:

$$d(\ln S(t)) = d \left\{ rt - \eta z(t) + \frac{(\sigma(t)^2 + \tau)X(t)}{\alpha\sigma(t)\delta} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= d \left\{ rt - \eta z(t) + \frac{\sigma(t)X(t)}{\alpha\delta} + \frac{\tau X(t)}{\alpha\sigma(t)\delta} \right\} \\
 &= rdt - \eta dz(t) + \frac{1}{\alpha\delta} d(\sigma(t)X(t)) + \frac{\tau}{\alpha\delta} d\left(\frac{X(t)}{\sigma(t)}\right) \\
 &= rdt - \eta\sigma_z dW(t) + \frac{1}{\alpha\delta} (\sigma(t)dX(t) + X(t)d\sigma(t) + d\sigma(t)dX(t)) + \\
 &\quad + \frac{\tau}{\alpha\delta} \left( \frac{dX(t)}{\sigma(t)} - \frac{X(t)}{\sigma(t)^2} d\sigma(t) + \frac{X(t)}{\sigma(t)^3} (d\sigma(t))^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma(t)^2} d\sigma(t)dX(t) \right).
 \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di  $d\sigma(X(t))$  in  $d(\ln S(t))$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
 d(\ln S(t)) = & (\text{drift})dt + \left[ \frac{1}{\alpha\delta} \left( \sigma \frac{X(t)}{\alpha} + \frac{d\sigma}{dX} \frac{X(t)^2}{\alpha} \right) - \eta\sigma_z + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau}{\alpha\delta} \left( \frac{X(t)}{\alpha\sigma} - \frac{d\sigma}{dX} \frac{X(t)^2}{\alpha\sigma^2} \right) \right] dW(t).
 \end{aligned}$$

Eguagliando la volatilità che compare nelle due espressioni di  $d(\ln S(t))$  si ricava:

$$\begin{aligned}
 \sigma(X(t)) = & \frac{1}{\alpha\delta} \left( \sigma(X(t)) \frac{X(t)}{\alpha} + \frac{d\sigma(X(t))}{dX} \frac{X(t)^2}{\alpha} \right) - \eta\sigma_z + \\
 & + \frac{\tau}{\alpha\delta} \left( \frac{X(t)}{\alpha\sigma} - \frac{d\sigma(X(t))}{dX} \frac{X(t)^2}{\alpha\sigma^2} \right).
 \end{aligned}$$

Quindi  $\sigma$  deve soddisfare la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma(x)}{dx} = & \frac{\alpha^2\delta - x}{x^2} \frac{\sigma(x)^3}{\sigma(x)^2 - \tau} + \frac{\alpha^2\delta\eta\sigma_z}{x^2} \frac{\sigma(x)^2}{\sigma(x)^2 - \tau} \\
 & - \frac{\tau}{x} \frac{\sigma(x)}{\sigma(x)^2 - \tau}.
 \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\sigma_2$  la soluzione generale di tale equazione. Osserviamo che se  $\sigma_2(x_0) > 0$ , allora  $\sigma_2(x) > 0$  per ogni  $x > x_0$ . Infatti, supponiamo che si annulli in un punto  $x_1$ , quindi  $\sigma_2(x_1) = 0$  e  $\sigma_2(x) > 0$  per  $x_0 \leq x < x_1$ . Dall'equazione si deduce che  $\frac{d\sigma_2(x)}{dx} \sim \frac{\sigma_2(x)}{x}$  se  $x \sim x_1$ . Quindi la derivata prima è positiva se  $x < x_1$ , poiché  $\sigma_2(x) > 0$  per tali valori di  $x$ . Di conseguenza  $\sigma_2$  è crescente per  $x < x_1$  e  $x \sim x_1$ , quindi non può annullarsi. Consideriamo la differenza  $w = \sigma - \sigma_2$ , dove  $\sigma$  è la volatilità in assenza di

costi di transazione. Allora  $w$  soddisfa la seguente equazione:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{\alpha^2 \delta}{x^2} \left( \sigma(x) - \frac{\sigma_2(x)^3}{\sigma_2(x)^2 - \tau} \right) + \frac{\alpha^2 \delta \eta \sigma_z}{x^2} \left( \sigma(x) - \frac{\sigma_2(x)^2}{\sigma_2(x)^2 - \tau} \right) - \frac{1}{x} \left( \sigma(x) - \sigma_2(x) \frac{\sigma_2(x)^2 + \tau}{\sigma_2(x)^2 - \tau} \right).$$

Sia  $x_0$  un punto in cui  $w$  si annulla, allora  $\sigma(x_0) = \sigma_2(x_0)$ . Quindi, il valore della derivata prima di  $w$  in  $x_0$  è dato da:

$$\begin{aligned} \frac{dw(x_0)}{dx} &= -\frac{\alpha^2 \delta}{x_0^2} \frac{\tau \sigma(x_0)}{\sigma(x_0)^2 - \tau} + \frac{\alpha^2 \delta \eta \sigma_z}{x_0^2} \frac{\sigma(x_0)^3 - \sigma(x_0)^2 - \tau \sigma(x_0)}{\sigma(x_0)^2 - \tau} + \\ &\quad + \frac{2\tau}{x_0} \frac{\sigma(x_0)}{\sigma(x_0)^2 - \tau} = \\ &= \frac{\sigma(x_0)}{x_0^2 (\sigma(x_0)^2 - \tau)} (\alpha^2 \delta \eta \sigma_z \sigma(x_0)^2 - \alpha^2 \delta \eta \sigma_z \sigma(x_0) + 2\tau x_0 \\ &\quad - \alpha^2 \delta \tau - \alpha^2 \delta \eta \sigma_z \tau). \end{aligned}$$

Il polinomio di secondo grado in  $\sigma(x_0)$  seguente:

$$\alpha^2 \delta \eta \sigma_z \sigma(x_0)^2 - \alpha^2 \delta \eta \sigma_z \sigma(x_0) - \alpha^2 \delta \tau - \alpha^2 \delta \eta \sigma_z \tau,$$

raggiunge il minimo nel punto  $\sigma(x_0) = \frac{1}{2}$ . Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(x_0)}{x_0^2 (\sigma(x_0)^2 - \tau)} (\alpha^2 \delta \eta \sigma_z \sigma(x_0)^2 - \alpha^2 \delta \eta \sigma_z \sigma(x_0) + 2\tau x_0 - \alpha^2 \delta \tau - \alpha^2 \delta \eta \sigma_z \tau) &\geq \\ &\geq \frac{\sigma(x_0)}{x_0^2 (\sigma(x_0)^2 - \tau)} \left( -\frac{\alpha^2 \delta \eta \sigma_z}{4} + 2\tau x_0 - \alpha^2 \delta \tau - \alpha^2 \delta \eta \sigma_z \tau \right). \end{aligned}$$

L'ultima quantità è maggiore di zero se:

$$x_0 > \frac{\alpha^2 \delta}{2} \left( \frac{\eta \sigma_z}{4\tau} + 1 + \eta \sigma_z \right).$$

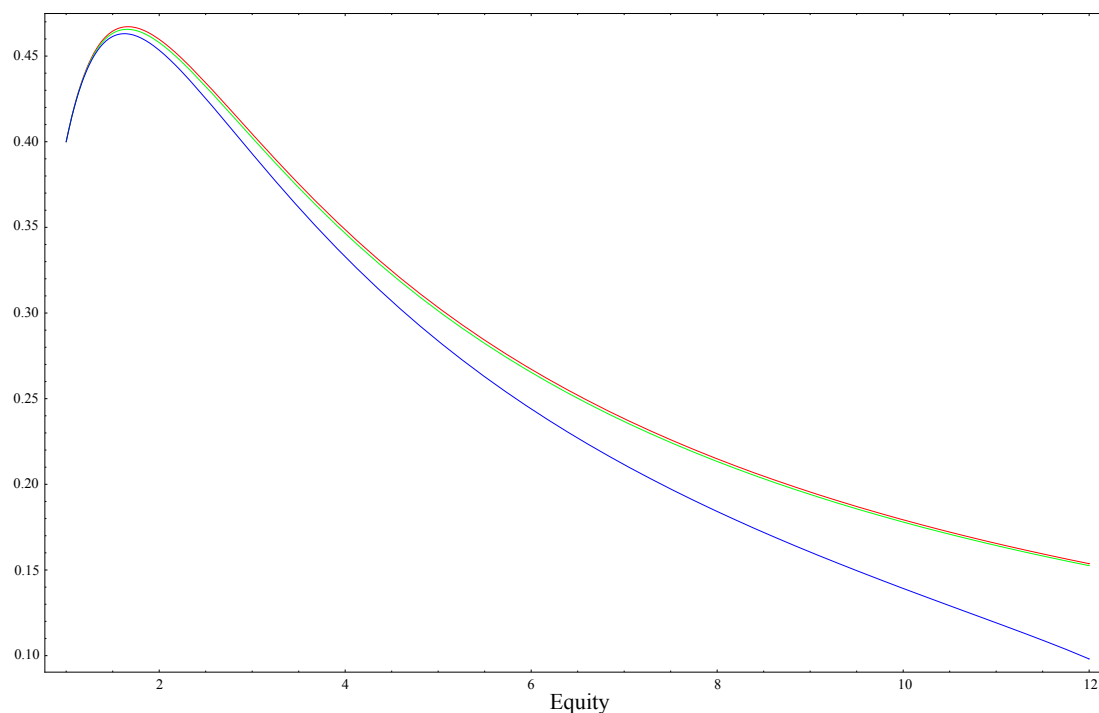
Di conseguenza, se  $x_0$  rappresenta il punto iniziale e  $w(x_0) \geq 0$ , allora  $w$  non si annulla mai per  $x > x_0$ , se  $\sigma_2(x)^2 > \tau$ . Più precisamente, supponiamo che esista  $x_1 > x_0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_1^-} \sigma_2(x)^2 = \tau$ . Allora  $w(x) > 0$  per ogni  $x_0 < x < x_1$ . Infatti, se  $w$  si annullasse, la derivata in quel punto dovrebbe essere positiva, ma ciò è impossibile. Quindi  $\sigma(x) > \sigma_2(x)$  per ogni  $x$  tale che  $x_0 < x < x_1$ .

Confrontiamo le due soluzioni ottenute con il modello presentato in [21], in

cui  $\tau = 0$ . Poniamo  $\delta = 0.066$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\sigma_z = 0.4$ ,  $\eta = 0.01$  e  $\tau = 0.005$ .  
In tal caso si ottiene:

$$\frac{\alpha^2 \delta}{2} \left( \frac{\eta \sigma_z}{4\tau} + 1 + \eta \sigma_z \right) = 0.9933.$$

Quindi consideriamo come punto iniziale  $x_0 = 1$  e poniamo  $\sigma(1) = 0.4$ .



**Figura 3.9:** Volatilità in assenza della Tobin tax (linea rossa); con Tobin tax nel primo caso (linea verde); con Tobin tax nel secondo caso (linea blu).

La linea rossa rappresenta la volatilità in assenza della Tobin tax; la linea verde, invece, è la volatilità con Tobin tax nel primo caso; infine, la linea blu rappresenta la volatilità con Tobin tax nel secondo caso. Il grafico conferma quanto prima dimostrato, infatti la volatilità in presenza della Tobin tax diminuisce in entrambi i casi e in particolar modo per il secondo modello. Tuttavia, la riduzione risulta al massimo del 5%, quindi non molto significativa. Inoltre, si nota chiaramente un incremento notevole della volatilità per valori dell'equity intorno a 2, quindi l'effetto del rischio endogeno è ancora notevolmente significativo.

In definitiva, l'imposizione della Tobin Tax ha l'effetto di diminuire la vola-

tilità dei titoli, anche se tale diminuzione non risulta essere particolarmente significativa e la presenza del rischio endogeno rimane comunque evidente.

# Conclusioni

La recente crisi, iniziata nel 2007, ha evidenziato l'importanza di garantire la stabilità dell'intero sistema finanziario. In particolare, l'attuale regolamentazione, è considerata una delle principali cause della crisi, per tale motivo i Governi e i principali organismi di controllo internazionali si stanno adoperando per riformarla.

Nell'ambito degli Accordi di Basilea, sono stati definiti i requisiti patrimoniali a cui le istituzioni finanziarie devono sottostare, tenendo conto sia del rischio di mercato che del rischio di credito.

Per determinare l'entità di tale patrimonio, attualmente le banche utilizzano il Value-at-Risk ("VaR"), una misura della perdita potenziale di un portafoglio in un certo intervallo di tempo. Il VaR rappresenta, quindi, l'obiettivo di riassumere in un solo numero, il rischio complessivo di un portafoglio di attività finanziarie.

Nel presente lavoro di tesi è stato preso in esame il principale strumento su cui è fondata l'attuale regolamentazione finanziaria, il Value-at-Risk. Sono stati analizzati pregi e difetti di tale misura di rischio. In particolare, nella prima parte della tesi è stato analizzato l'effetto del VaR sulle scelte di portafoglio. In tale contesto, si è mostrato che se una banca utilizza il VaR per misurare il rischio del proprio portafoglio di attività finanziarie, investirà maggiormente nei titoli più rischiosi, rispetto ad una istituzione finanziaria che non utilizza il VaR. Tale fatto si verifica ad esempio se nel mercato finanziario è presente un defaultable asset e la banca è meno avversa al rischio rispetto ad un log-investitore.

Nella seconda parte della tesi, invece, si è studiato l'effetto del Value-at-Risk sulla stabilità dei mercati finanziari. Quanto ottenuto evidenzia che il VaR è in grado di aumentare la volatilità dei mercati, quindi di renderli meno stabili, poiché incrementa il rischio endogeno. Inoltre, è stato analizzato l'impatto dell'imposizione della Tobin tax sulla stabilità dei mercati finanziari. I risultati ottenuti mostrano che la volatilità diminuisce, anche se l'effetto del rischio endogeno non è particolarmente attenuato.



Attualmente esistono altre misure di rischio in grado di superare i punti deboli del VaR. L'Expected Shortfall, ad esempio, che è definito come la media delle perdite superiori al VaR, induce a compiere scelte meno rischiose rispetto al Value-at-Risk. Infine, un'altra misura di rischio, particolarmente importante nei periodi in cui si verifica una crisi finanziaria, è il CoVaR, che tiene conto del rischio contagio, quindi se una banca si trova in difficoltà, le altre istituzioni finanziarie ne risentono, conseguentemente il loro VaR effettivo, che è dato dal CoVaR, deve aumentare. Tale misura di rischio dovrebbe essere quindi utilizzata nei periodi in cui le banche si trovano maggiormente in difficoltà, anziché adottare il Value-at-Risk.

La recente crisi finanziaria mondiale ha portato i Governi e i principali organismi internazionali ad una revisione dell'intera regolamentazione, allo scopo di rendere maggiormente stabili i mercati ed evitare crisi future. L'utilizzo del Value-at-Risk rappresenta una delle principali tematiche che dovranno essere affrontate; infatti, come è stato messo in luce da questa tesi, la sua adozione da parte delle istituzioni finanziarie ha accentuato la crisi.

# Ringraziamenti

Innanzitutto desidero ringraziare il Professor Emilio Barucci per avermi seguito nella stesura del presente lavoro di tesi e per avermi dato la possibilità di comprendere a fondo le dinamiche del sistema economico mondiale, che in questo ultimo periodo è cambiato radicalmente.

Desidero anche ringraziare i Proff. Marco Fuhrman, Sandro Salsa e Carlo Sgarra per i preziosi consigli, che sono stati di fondamentale importanza per il completamento della tesi.

# Bibliografia

- [1] T. Adrian, M. Brunnermeier, *CoVaR*, Federal Reserve Bank of New York, Staff Report 348, Settembre 2008.
- [2] T. Adrian, H. S. Shin, *Financial Intermediary Leverage and Value-at-Risk*, Federal Reserve Bank of New York Staff Reports, no. 338, 2008.
- [3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, *Thinking Coherently*, Risk 10(11), pagg. 68-71, 1997.
- [4] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance 9, pagg. 203-228, 1999.
- [5] P. Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana - 28, Pitagora Editrice, Bologna, 2000.
- [6] Bank for International Settlements, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, Basel Committee on Banking Supervision, 1988.
- [7] Bank for International Settlements, *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Basel Committee on Banking Supervision, 1998.
- [8] Bank for International Settlements, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, Basel Committee on Banking Supervision, 2006.
- [9] E. Barucci, *Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information*, Springer, 2003.
- [10] E. Barucci, C. Marsala, M. Nencini, C. Sgarra, *Ingegneria Finanziaria: Un'introduzione quantitativa*, Egea, 2009.

- [11] S. Basak, A. Shapiro, *Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices*, Review of Financial Studies 14(2), pagg. 371-405, 2001.
- [12] A. Battauz, A. Sbuelz, *Reaching nirvana with a defaultable asset?*, Settembre 2009.
- [13] F. Black, *Studies in Stock Price Volatility Changes*, in Proceedings of the 1976 Business and Economic Statistic Section, pagg. 177-181, American Statistical Association, Alexandria, VA.
- [14] M. Brunnermeier, A. Crockett, C. Goodhart, A. Persaud, H. S. Shin, *The Fundamental Principles of Financial Regulation*, Geneva Report on the World Economy 11, Gennaio 2009.
- [15] M. K. Brunnermeier, L. H. Pedersen, *Market Liquidity and Funding Liquidity*, The Review of Financial Studies, Dicembre 2008.
- [16] D. Cuoco, H. He, S. Issaenko, *Optimal Dynamic Trading Strategies with Risk Limits*, Working Paper, Wharton School, University of Pennsylvania, Aprile 2001.
- [17] J. Danielsson, *The Emperor has no Clothes: Limits to Risk Modelling*, Journal of Money and Finance, Settembre 2001.
- [18] J. Danielsson, *Blame the Models*, Journal of Financial Stability, Giugno 2008.
- [19] J. Danielsson, P. Embrechts, C. Goodhart, C. Keating, F. Muennich, O. Renault, H. S. Shin, *An Academic Response to Basel II*, LSE Financial Markets Group, Special Paper 130, Maggio 2001.
- [20] J. Danielsson, H. S. Shin, *Endogenous Risk*, in *Modern Risk Management - A History*, Chapter 20, 2003.
- [21] J. Danielsson, H. S. Shin, J.-P. Zigrand, *Risk Appetite and Endogenous Risk*, Marzo 2009.
- [22] F. Delbaen, *Coherent Risk Measures on General Probability Spaces*, Advances in Finance and Stochastics, pagg. 1-37, Springer, 2002.
- [23] F. Delbaen, H. Shirakawa, *A Note on Option Pricing for the Constant Elasticity of Variance Model*, Financial Engineering and the Japanese Markets, Volume 9, Numero 2, pagg. 85-99, 2002.

- [24] F. X. Diebold, A. Hickman, A. Inoue, T. Schuermann, *Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by  $\sqrt{h}$  is Worse than You Think*, July 3, 1997.
- [25] J. Dow, R. Rahi, *Should Speculators Be Taxed?*, The Journal of Business, Vol. 73, No. 1, pagg. 89-107, Gennaio 2000.
- [26] European Central Bank, *Market Risk Measurement, Beyond Value at Risk*, Financial Stability Review, pagg. 108-110, Giugno 2007.
- [27] G. Forestieri, P. Mottura, *Il Sistema Finanziario*, Egea, quinta edizione, Febbraio 2009.
- [28] J. C. Hull, *Risk Management and Financial Institutions*, Prentice Hall, seconda edizione, Giugno 2009.
- [29] International Monetary Fund, *Global Financial Stability Report*, Ottobre 2007.
- [30] J.P. Morgan, *RiskMetrics<sup>TM</sup> – Technical Document*, fourth edition, Dicembre 1996.
- [31] P. Jorion, *Value-at-Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, terza edizione, Ottobre 2006.
- [32] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag New York, 1988.
- [33] M. Leippold, F. Trojani, P. Vanini, *Equilibrium Impact of Value-at-Risk Regulation*, Working Paper, Swiss Banking Institute, University of Zurich, 2002.
- [34] A. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, 2005.
- [35] L. C. G. Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales: Volume 2, Itô Calculus*, Cambridge University Press, 2000.
- [36] M. N. Rothbard, *America's Great Depression*, Ludwig von Mises Institute, Giugno 2000.
- [37] J. Yong, X. Y. Zhou, *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer-Verlag New York, 1999.