

POLITECNICO DI MILANO

SCUOLA DI INGEGNERIA DEI PROCESSI INDUSTRIALI



Dipartimento di Chimica, Materiali e Ingegneria Chimica "Giulio Natta"

Laurea specialistica in Ingegneria dei Materiali

**MODELLAZIONE DEI TEST CON ATLETA ARTIFICIALE
SU MANTI SPORTIVI**

Relatore: Luca ANDENA

Correlatore: Stefano MARIANI

Tesi di:

Emanuele CAZZONI

749960

Anno Accademico 2010/2011

INDICE

Indice delle figure	4
Indice delle tabelle	5
Indice dei grafici	6
Capitolo 1. INTRODUZIONE	11
1.1 <i>PISTE DI ATLETICA</i>	11
1.1.1 Pavimentazioni sintetiche prefabbricate.....	12
1.1.2 Pavimentazioni sintetiche colate	13
1.1.3 Caratteristiche delle piste d'atletica	14
1.2 <i>FORCE REDUCTION TEST</i>	17
1.2.1 Atleta artificiale.....	18
1.2.2 Filtraggio del segnale.....	19
1.2.3 Omologazione	21
1.3 <i>RISULTATI PRECEDENTI E OBIETTIVO</i>	22
1.4 <i>STRUMENTI UTILIZZATI</i>	27
1.4.1 Comportamento iperelastico nei materiali elastomerici.....	27
1.4.2 Modelli iperelastici	29
1.4.3 Il metodo degli elementi finiti.....	32
1.4.4 Meccanica di un continuo deformabile.....	33
1.4.4.1 <i>Principio delle potenze virtuali</i>	36
1.4.4.2 <i>Discretizzazione del problema</i>	38
1.4.5 Gestione dei contatti in ABAQUS.....	39
Capitolo 2. MATERIALI E METODI	41
2.1 <i>MATERIALI UTILIZZATI</i>	41
2.1.1 Gomma EPDM.....	41
2.1.2 Altri materiali.....	42
2.2 <i>METODI DI PROVA</i>	43
2.2.1 Prove al dinamometro.....	44
2.2.1.1 <i>Prove in compressione</i>	44
2.2.1.2 <i>Prove in trazione</i>	45
2.2.2 Prove al dardo	46
2.2.3 Prove al Minimat	48
Capitolo 3. CARATTERIZZAZIONE DELLE PROPRIETA' DEI MATERIALI	49
3.1 <i>RISULTATI DELLE PROVE IN COMPRESSIONE</i>	50
3.1.1 Fit dei risultati in compressione.....	50

3.1.2	Estrapolazione dei coefficienti di Mooney-Rivlin in compressione	52
3.2	<i>RISULTATI DELLE PROVE IN TRAZIONE</i>	55
3.2.1	Fit dei risultati in trazione	55
3.2.2	Estrapolazione dei coefficienti di Mooney-Rivlin in trazione	57
3.3	<i>RISULTATI DELLE PROVE D'ATTRITO</i>	58
Capitolo 4.	SIMULAZIONE DEI TEST CON IL DARDO	60
4.1	<i>RISULTATI DELLE PROVE AL DARDO</i>	60
4.2	<i>CONFIGURAZIONE DELL'ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI DEL DARDO</i>	61
4.2.1	Modellazione della piastra di afferraggio	62
4.2.2	Effetto dell'attrito	63
4.2.3	Fasi della simulazione del test col dardo	64
4.3	<i>ANALISI PARAMETRICA DEI COEFFICIENTI DI MOONEY RIVLIN</i>	65
Capitolo 5.	SIMULAZIONE DEI TEST CON L'ATLETA ARTIFICIALE	68
5.1	<i>ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI DEL TEST CON L'ATLETA ARTIFICIALE</i>	68
5.1.1	Modellazione del test per la determinazione della forza di riferimento ..	72
5.1.2	Mesh sensitivity	73
5.1.3	Fasi della simulazione del test con l'Atleta artificiale	74
Capitolo 6.	MODELLAZIONE DEI TEST CON L'ATLETA ARTIFICIALE	76
6.1	<i>ANDAMENTO DELLA FORZA</i>	77
6.1.1	Influenza dello spessore sull'andamento della forza	79
6.2	<i>DETERMINAZIONE DELLA FORCE REDUCTION</i>	81
6.2.1	Determinazione della forza di riferimento	81
6.3	<i>STUDIO DELLA FORCE REDUCTION</i>	82
6.3.1	Influenza del modulo del substrato	82
6.3.2	Andamento della <i>Force Reduction</i> per diversi materiali	82
6.3.3	Influenza dei coefficienti di Mooney-Rivlin sulle misure di FR	84
6.3.4	Influenza del modulo elastico sulle misure della FR	85
6.3.4.1	<i>Correlazione tra Force Reduction e s_0</i>	87
6.4	<i>CONFRONTO TRA LE FR_∞ DEI DIVERSI MATERIALI</i>	89
Capitolo 7.	CONCLUSIONI	92
Bibliografia	93

Indice delle figure

<i>Figura 1.1: esempio di pista d'atletica realizzata in materiale sintetico (2).....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 1.2: esempi di messa in posa di pavimentazioni sintetiche prefabbricate e colate.....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 1.3: rappresentazione grafica dello scambio di energia tra il piede dell'atleta e la superficie sportiva durante l'impatto. Parte dell'energia utilizzata dal manto nel processo di deformazione viene poi restituita all'atleta: la differenza tra l'energia fornita quella di ritorno rappresenta l'energia dissipata (5).....</i>	<i>15</i>
<i>Figura 1.4: descrizione schematica dell'Atleta artificiale, 1- supporto, 2- sistema di rilascio e recupero del peso, 3- corpo cadente, 4- incudine, 5- molla, 6- tubo metallico, 7- cella di carico, 8- piede dell'atleta</i>	<i>18</i>
<i>Figura 1.5: schema a blocchi del processo di simulazione agli elementi finiti.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 1.6: continuo deformabile nello spazio X_1, X_2, X_3.....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 1.7: rappresentazione grafica del contatto di tipo Hard nelle due fasi di separazione e di contatto delle superfici.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 1.8: schema riassuntivo del modus operandi del contatto di tipo Penalty implementato con i moltiplicatori lagrangiani.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2.1: vista superiore e in sezione del manto in gomma EPDM studiato; manto non strutturato e senza finitura superficiale.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2.2: struttura chimica dei dieni utilizzati per la copolimerizzazione della gomma EPDM. 5-etilene 2-norbonene; dicitolo penta diene; 1,4 esadiene.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 2.3: dimensioni del provino dumbbell in gomma naturale per prove in trazione col dinamometro elettromeccanico; spessore 8 mm, tratto utile di 60 mm.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 2.4: linee tracciate sul provino per favorire l'elaborazione delle immagini da parte del videoestensometro durante la prova in trazione.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 2.5: configurazione di prova del test d'impatto al Drop Weight Tower; 1- punzone in acciaio, 2- piastra per l'afferraggio, 3- provino in gomma, 4- supporto in PE, 5- supporto dell'attrezzatura</i>	<i>47</i>
<i>Figura 2.6: configurazione della prova per determinare il coefficiente d'attrito utilizzando il Minimat. 1- superficie da testare (PE o acciaio) collegata alla traversa mobile, 2- provino in gomma EPDM che è collegato alla traversa fissa dove risiede la cella di carico e sopra al quale è applicato un peso noto di 10 N.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 4.1: rappresentazione del modello utilizzato per descrivere agli elementi finiti la configurazione del test d'impatto col dardo; 1- asse di simmetria, 2- punzone in acciaio, 3- piastra di afferraggio, 4- provino in gomma EPDM, 5- substrato in polietilene, 6- supporto dello strumento.....</i>	<i>61</i>

<i>Figura 4.2: sequenza di alcuni frame presi dalla simulazione del Drop Weight Test; 1- afferraggio e precompressione del provino, 2- caduta del punzone e contatto col provino, 3- massima compressione del provino in gomma EPDM, 4- rimbalzo del punzone.....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 5.1: configurazione del modello utilizzato per l'analisi numerica del Force Reduction test; 1- asse di simmetria, 2- corpo cadente, 3- incudine, 4- molla, 5- cella di carico, 6- piede dell'Atleta artificiale, 7- superficie da testare con uno spessore S della superficie da testare, 8- pavimentazione rigida.....</i>	<i>69</i>
<i>Figura 5.2: disegno esploso delle interazioni tra i componenti dell'Atleta artificiale rappresentati da elementi rigidi, descritti da un solo reference point, e elementi spring che connettono due reference point e che sono caratterizzati da una costante elastica K; 1- reference point del corpo cadente; 2 interazione tra la parte superiore della molla e l'incudine; 3e4- interazione tra la molla e la cella di carico; 5e6- interazione tra la cella di carico e il piede dell'Atleta artificiale.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 5.3: configurazione del modello utilizzato per la determinazione della forza di riferimento mediante l'analisi numerica del Force Reduction test; 1- asse di simmetria, 2- corpo cadente, 3- incudine, 4- molla, 5- cella di carico, 6- piede dell'Atleta artificiale, 7- pavimentazione in calcestruzzo.....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 5.4: frame esemplificativi della simulazione agli elementi finiti del Force Reduction test; 1- configurazione iniziale del sistema, 2- fase di caduta del peso, 3- impatto del peso sull'incudine, inizio deformazione della molla e del manto sotto al piede dell'Atleta artificiale, 4- massima deformazione del manto, 5- risposta del manto che provoca il rimbalzo dei componenti impattanti, 6- fase finale della prova, rimbalzo dei componenti e ritorno alla configurazione indeformata da parte del manto testato</i>	<i>75</i>

Indice delle tabelle

<i>Tabella 1.1: confronto fra tre diversi valori di FR ricavati dalla stessa prova ma filtrati in maniera differente.....</i>	<i>20</i>
<i>Tabella 2.1: proprietà utilizzate per descrivere i diversi materiali con un comportamento lineare elastico; modulo di Young, coefficiente di Poisson e densità.....</i>	<i>43</i>
<i>Tabella 2.2: velocità di spostamento della traversa durante le prove in compressione su cubetti di gomma EPDM con lato di 16 mm e relative strain rate.....</i>	<i>44</i>
<i>Tabella 2.3: velocità di spostamento della traversa durante i test di trazione al dinamometro elettromeccanico su provini dumbbell in gomma naturale e relative strain rate ottenute dai dati elaborati al videoestensometro.....</i>	<i>46</i>

<i>Tabella 2.4: riassunto delle diverse configurazioni di prova nei test d'impatto con il Drop</i>	
<i>Weight Tower</i>	47
<i>Tabella 3.1: coefficienti ricavati per un fit non lineare dei dati in compressione su provini in gomma EPDM alla strain rate di 0.006 s⁻¹ utilizzando l'equazione di Neo-Hook</i>	51
<i>Tabella 3.2: coefficienti ricavati per un fit non lineare dei dati in compressione su provini in gomma EPDM alla strain rate di 0.006 s⁻¹ utilizzando l'equazione di Mooney-Rivlin</i>	
.....	51
<i>Tabella 3.3: valori dei coefficienti di Mooney-Rivlin ricavati dall'estrapolazione a 60 s⁻¹ utilizzando un fit lineare e valori estremi dell'intervallo di confidenza al 95%</i>	54
<i>Tabella 3.4: coefficiente dell'equazione di Neo-Hook ricavato da un fit non lineare dei dati in trazione su provini in gomma naturale alla strain rate di 0.2132 s⁻¹</i>	56
<i>Tabella 3.5: coefficienti ricavati per un fit non lineare dei dati in trazione alla strain rate di 0.2132 s⁻¹ utilizzando l'equazione di Mooney-Rivlin</i>	56
<i>Tabella 3.6: valori dei coefficienti di Mooney-Rivlin ricavati dalle curve di trazione su provini dumbbell in gomma naturale a diverse strain rate e valori estrapolati alla strain rate di 60 s⁻¹</i>	58
<i>Tabella 3.7: valori dei coefficienti d'attrito dinamico della gomma EPDM su una superficie di polietilene e su una d'acciaio</i>	59
<i>Tabella 6.1: valori asintotici della Force Reduction per i diversi materiali simulati con comportamento lineare elastico</i>	87

Indice dei grafici

<i>Grafico 1.1: esempio dei tre filtri utilizzati per il segnale risultante da un Force Reduction test su un manto sportivo</i>	20
<i>Grafico 1.2: andamento della Force Reduction in funzione dello spessore per diversi materiali e tentativo di estrapolazione della FR_{∞} mediante la correlazione empirica (eq.1.2)</i> ...24	
<i>Grafico 1.3: andamento della Force Reduction per diversi materiali in funzione della rigidezza dinamica a 10 Hz</i>	25
<i>Grafico 1.4: curva stress-stretch tipica di una gomma rispetto all'andamento di un materiale elastico lineare</i>	28
<i>Grafico 1.5: confronto tra l'andamento di un materiale elastico lineare e gli andamenti descritti dai modelli iperelastici di Neo-Hook e di Mooney-Rivlin</i>	31
<i>Grafico 3.1: prove in compressione su cubetti in gomma EPDM, andamento del carico in funzione dello stretch alla strain rate di 0.006 s⁻¹</i>	50

<i>Grafico 3.2: fit non lineare dei dati in compressione alla strain rate di 0.006 s⁻¹ utilizzando l'equazione di Neo-Hook e l'equazione di Mooney-Rivlin</i>	<i>51</i>
<i>Grafico 3.3: esempi di alcuni andamenti del carico in funzione dello stretch durante prove in compressione a differenti strain rate</i>	<i>52</i>
<i>Grafici 3.4: estrapolazione alla strain rate di 60 s⁻¹ dei coefficienti di Mooney-Rivlin C₁₀ e C₀₁, utilizzando un fit lineare in scala logaritmica e con un intervallo di confidenza del 95%</i>	<i>54</i>
<i>Grafico 3.5: andamento del carico in funzione dello stretch al variare della strain rate durante le prove in trazione con provini dumbbell in gomma naturale</i>	<i>55</i>
<i>Grafico 3.6: fit non lineare dei dati in trazione su provini in gomma naturale alla strain rate di 0.2132 s⁻¹ utilizzando l'equazione di Neo-Hook e l'equazione di Mooney-Rivlin.....</i>	<i>56</i>
<i>Grafico 3.7: andamento dei coefficienti di Mooney-Rivlin in funzione della strain rate per prove in trazione su gomma naturale ed estrapolazione alla strain rate di 60s⁻¹.....</i>	<i>57</i>
<i>Grafici 3.8: andamenti del carico durante le prove al Minimat per la valutazione del coefficiente d'attrito tra la gomma EPDM e il substrato in polietilene o acciaio</i>	<i>58</i>
<i>Grafico 4.1: andamento della forza nel tempo durante le prove d'urto col dardo al variare dell'energia d'impatto</i>	<i>60</i>
<i>Grafico 4.2: confronto tra i risultati di due analisi numeriche, una trascurando la piastra di afferraggio del provino e l'altra invece modellando il sistema di bloccaggio come un corpo indeformabile</i>	<i>63</i>
<i>Grafico 4.3 confronto tra l'andamento della forza nel tempo fornito dalla cella di carico durante il test eseguito col Drop Weight Tower e i risultati di due simulazioni del dardo, una implementando i coefficienti d'attrito dinamico valutati al Minimat e l'altra senza attrito</i>	<i>64</i>
<i>Grafici 4.4: grafici risultanti dall'analisi parametrica riguardante i coefficienti dell'equazione di Mooney-Rivlin; il primo grafico mostra l'effetto della variazione di C₁₀ mantenendo costante C₀₁; il secondo grafico indaga l'effetto di C₀₁ mantenendo fisso C₁₀.....</i>	<i>66</i>
<i>Grafico 4.5: confronto tra l'andamento della forza nei test di laboratorio al Drop Weight Tower e il risultato della simulazione utilizzando i valori centrali dei coefficienti: C₁₀=0.43 MPa e C₀₁=0.02 MPa</i>	<i>67</i>
<i>Grafico 5.1: confronto tra i risultati di una simulazione eseguita con tre diverse mesh size; la mesh size di 1 mm rappresenta un ottimo compromesso tra accuratezza dei risultati e tempi di calcolo</i>	<i>73</i>
<i>Grafico 6.1: confronto tra i risultati di laboratorio e quelli della simulazione di un test per la valutazione della Force Reduction su un manto in gomma EPDM per superfici sportive con uno spessore di 16 mm</i>	<i>77</i>

<i>Grafico 6.2: rappresentazione grafica della distanza tra i diversi componenti (piede, cella di carico e molla) durante la modellazione del Force Reduction test confrontata con l'andamento della forza. Una distanza tra i due elementi minore o uguale a zero significa che le due superfici sono a contatto. In nero è riportato l'andamento della forza ottenuto durante la simulazione (asse delle ordinate di destra).....</i>	<i>78</i>
<i>Grafico 6.3: confronto tra l'andamento della forza ottenuto dalle prove in laboratorio e quello derivante della simulazione di un test per la valutazione della Force Reduction su un manto in gomma EPDM per superfici sportive con uno spessore di 64 mm</i>	<i>79</i>
<i>Grafico 6.4: andamenti dal valore di forza letto sulla cella di carico durante le simulazioni del Force Reduction test su manti in gomma EPDM di diverso spessore; le curve sono traslate orizzontalmente al fine di semplificarne il confronto.....</i>	<i>80</i>
<i>Grafico 6.5: risultato della simulazione agli elementi finiti della configurazione di prova con solo il calcestruzzo per ottenere la forza di riferimento. 6430 N rappresenta la forza di riferimento utilizzata successivamente per il calcolo di tutti i valori della Force Reduction derivanti dalle simulazioni in ABAQUS.....</i>	<i>81</i>
<i>Grafico 6.6: influenza della variazione del modulo del substrato sulla misura della Force Reduction ricavata simulando un manto di gomma EPDM dallo spessore di 16 mm</i>	<i>83</i>
<i>Grafico 6.7: confronto tra l'andamento della Force Reduction ottenuto dai test di laboratorio e quello derivante dalle simulazioni agli elementi finiti. Per i materiali elastomerici analizzati sono riportati i risultati ottenuti modellandoli sia come lineari elastici (LE) sia con l'equazione di Mooney-Rivlin (MR). Per quanto riguarda i risultati dei test a 120 mm i valori riportati sono estrapolati utilizzando l'eq.1.2 (eccezion fatta per i manti sportivi di cui si possiedono valori di FR fino a 117 mm).....</i>	<i>83</i>
<i>Grafico 6.8: rappresentazione grafica dell'influenza che i due coefficienti di Mooney-Rivlin hanno sulla misura della Force Reduction.....</i>	<i>85</i>
<i>Grafico 6.9: andamento del valore della Force Reduction in funzione del modulo per materiali modellati secondo un comportamento lineare elastico e con spessori differenti.....</i>	<i>86</i>
<i>Grafico 6.10: andamento della Force Reduction simulato in funzione dello spessore per diversi materiali simulati come lineari elastici.....</i>	<i>87</i>
<i>Grafico 6.11: andamento della Force Reduction normalizzata in funzione della variazione di spessore</i>	<i>88</i>
<i>Grafico 6.12: valori di s_0 derivanti dal fitting non lineare in funzione del modulo di Young dei materiali simulati.....</i>	<i>89</i>
<i>Grafico 6.13: confronto tra i valori di Force Reduction asintotici estrapolati dalle prove di laboratorio e i valori ottenuti dalle simulazioni, facendo distinzione tra materiali</i>	

modellati come elastici e le due gomme descritte invece con il modello iperelastico di Mooney-Rivlin. I moduli elastici delle gomme sono stati ricavati partendo dal primo coefficiente del modello e utilizzando l'eq.1.18; inoltre è stato aggiunto un ulteriore valore ricavato dalle simulazioni col modello di Mooney-Rivlin imponendo $C_{10}=17$ MPa.....90

Il lavoro di tesi riguarda la simulazione agli elementi finiti del test per la valutazione della *Force Reduction* su manti impiegati per la realizzazione di piste d'atletica. La tesi è stata eseguita in collaborazione con la Fondazione Laboratorio Prove Materie Plastiche del Politecnico di Milano ed è stata supportata dalla borsa di studio "prof. Dante Pagani".

Scopo del lavoro è indagare la correlazione esistente tra le proprietà intrinseche del materiale testato e la misura della *Force Reduction*, che rappresenta il parametro scelto dall'Associazione Internazionale delle Federazioni di Atletica leggera per l'omologazione delle piste.

Il test per la misura della *Force Reduction* viene eseguito utilizzando una particolare attrezzatura denominata Atleta artificiale al fine di valutare la capacità di un materiale di assorbire gli urti.

La *Force Reduction* è definita come il rapporto tra la forza massima registrata sulla superficie testata rispetto a un valore di riferimento ottenuto su una pavimentazione rigida; essa non è una proprietà intrinseca del materiale: quindi per comprenderne appieno il comportamento è necessaria una correlazione con altre proprietà, con la struttura e la geometria della superficie e del substrato sopra al quale viene eseguito il test.

Al fine di indagare queste relazioni, si è deciso di compiere una modellazione agli elementi finiti del test per la valutazione della *Force Reduction*.

In primo luogo sono state eseguite delle prove in compressione per caratterizzare il manto preso in esame. Con l'intenzione di eseguire una verifica dinamica dei parametri scelti per la modellazione del materiale si sono poi eseguite delle analisi numeriche del test al *Drop Weight Tower*, confrontandole con i risultati delle prove al dardo in laboratorio.

Una volta caratterizzato il materiale in questione è stato poi possibile riprodurre le diverse configurazioni di prova per comprendere come le proprietà, la geometria e la struttura del materiale studiato e del substrato possano influenzare la misura della *Force Reduction*, approfondendo poi lo studio tramite le modellazioni di altri materiali con caratteristiche meccaniche differenti.

Capitolo 1. INTRODUZIONE

1.1 PISTE DI ATLETICA

Una pista di atletica leggera è il luogo in cui si svolgono le gare di diverse discipline: corsa di velocità, di mezzofondo, fondo, salto in alto, salto in lungo, salto triplo, salto con l'asta, getto del peso, lancio del giavellotto, lancio del disco, lancio del martello, marcia e corsa a ostacoli.

Esistono tre principali tipi di pavimentazioni utilizzabili per l'atletica. Fino all'inizio degli anni '60 la maggior parte delle competizioni internazionali si svolgeva su superfici costruite con materiale minerale poroso, sebbene in alcune parti del mondo si svolgessero ancora su piste in erba. In questo lavoro sono state prese in esame solamente le superfici sintetiche, che oggi hanno sostituito gli altri due tipi in quasi tutti gli eventi mondiali (un esempio è riportato in *Figura 1.1*); esse infatti sono preferite grazie alle loro superiori caratteristiche dinamiche e alla loro bassa richiesta di manutenzione rispetto alle altre due tipologie (1).



Figura 1.1: esempio di pista d'atletica realizzata in materiale sintetico (2)

Le moderne superfici sintetiche per le piste di atletica rappresentano dei sistemi a elevate *performance* realizzati per essere di lunga durata e progettati per fornire all'atleta il *comfort* necessario allo svolgimento ottimale della propria attività. Naturalmente i requisiti per una pista di velocità sono diversi da quelli per una pista

dove si svolgono gare di lunga durata, per questa ragione tutte le superfici sono realizzate in modo da poter offrire un compromesso tra le varie esigenze dei diversi atleti che utilizzano l'impianto. Altra caratteristica fondamentale per una pista di atletica deve essere la completa sicurezza per gli atleti e la loro protezione contro gli infortuni: per questo le piste sono sottoposte a un continuo monitoraggio e a interventi di manutenzione preventivi. A tale scopo i manti sono rifiniti con uno strato superficiale anti-usura in grado di garantire un'elevata resistenza ai raggi UV, agli agenti atmosferici e all'azione meccanica delle scarpette chiodate e caratterizzato da proprietà antisdrucchiolo e antiriflesso.

Generalmente le pavimentazioni sintetiche delle piste di atletica leggera si dividono in due categorie: manti prefabbricati, in teli a base di gomme naturali e sintetiche, e manti poliuretanic drenanti colati in opera. In entrambi i casi i manti sono realizzati negli spessori e con le caratteristiche fisico-meccaniche prescritte secondo i Regolamenti Tecnici FIDAL/IAAF per lo svolgimento di competizioni nazionali ed internazionali.

1.1.1 Pavimentazioni sintetiche prefabbricate

Le pavimentazioni prefabbricate in stabilimento sono prodotte in teli di larghezza fino a 1.80 m (come mostrato in *Figura 1.2*) a seguito di un processo in continuo di calandratura e vulcanizzazione. Questi manti sono ottenuti da una miscela di gomma naturale e sintetica con aggiunta di additivi (quali cariche minerali e stabilizzanti). Il vantaggio principale dei manti prefabbricati è che la loro formulazione e le caratteristiche fisiche sono predeterminate in stabilimento, dove sono realizzati nelle giuste condizioni di temperatura e umidità; si riesce quindi a ottemperare ai criteri di controllo qualitativo elevato tipici dei prodotti realizzati in serie su scala industriale. Normalmente i manti sono prodotti con spessore costante e la vulcanizzazione consente di evitare la perdita del rilievo superficiale dello strato di usura; questo permette all'atleta di avere la garanzia di ricevere in corsa lo stesso ritorno di spinta in qualsiasi punto pista mantenendo così inalterata la sua corsa. Inoltre questo tipo di superficie risulta poco sensibile agli effetti della temperatura tra -30°C e +90°C , mantenendo integrità strutturale anche in condizioni ambientali difficili (es. in caso di precipitazioni o in zone climatiche estreme). La prefabbricazione del prodotto

permette inoltre lo studio in laboratorio dell'attrito tra il manto e la calzatura, ottimizzandone il design.

1.1.2 Pavimentazioni sintetiche colate

La tecnologia per le pavimentazioni colate è in grado di realizzare su tutta la superficie dell'impianto un tappeto uniforme e continuo, ovvero senza linee di congiunzione, le quali possono creare tensioni interne, provocare dilatazioni differenziate e distacchi dalla superficie del rivestimento.

La realizzazione di questo tipo di manto prevede diverse colate di materiale seguite da una fase di compressione del fuso (come mostrato in *Figura 1.2*).

I manti confezionati direttamente sul luogo d'impiego possono essere costituiti da uno o più strati dalle differenti caratteristiche che conferiscono al manto diversa permeabilità all'acqua e diverse caratteristiche meccaniche e di durabilità. Infatti, modificando sia la compressione dello strato di base sia il tipo e la quantità dello strato di finitura, si ha la possibilità (mantenendo lo spessore costante) di variare le caratteristiche di risposta elastica del manto superiore sintetico.

Ad eccezione di alcuni impianti utilizzati per lo svolgimento di competizioni ad altissimo livello, realizzati con manti omogenei o granulari compatti, le superfici sintetiche colate più utilizzate sia per gare sia per allenamento sono quelle granulari porose o miste, con finitura spruzzata o seminata, le quali risultano così composte:

- strato di base realizzato a freddo per colata continua di un impasto formato da granuli di EPDM a curva granulometrica predeterminata e prepolimero poliuretano monocomponente come legante; il risultato è una superficie continua, esente da giunti ed interruzioni, di spessore, compattezza ed elasticità costanti
- strato di finitura superficiale anti-usura, antisdrucchiolo e antiriflesso. Tale rivestimento può essere eseguito mediante spruzzatura di miscela di resina poliuretano colorata nella massa e granuli di terpolimero EPDM colorati, di adeguata granulometria dello spessore di 2 mm oppure con la tecnica del *seeded topping* (particelle di gomma distribuite manualmente o mediante

macchinario apposito sulla superficie di resina poliuretanica bicomponente non ancora catalizzata)



Figura 1.2: esempi di messa in posa di pavimentazioni sintetiche prefabbricate e colate

1.1.3 Caratteristiche delle piste d'atletica

Secondo quanto prescritto dalla IAAF (Associazione Internazionale delle Federazioni di Atletica) i requisiti che deve soddisfare una pista di atletica sono diversi e possono essere suddivisi in due classi principali: la durabilità e l'efficacia del manto (1). Entrambi devono essere rispettati in modo da garantire nel tempo le migliori *performance* all'atleta e ridurre al minimo il rischio d'infortuni.

La durabilità di una superficie sintetica è legata al modo in cui essa risponde alle continue sollecitazioni meccaniche e agli agenti atmosferici; le piste di atletica outdoor rappresentano il caso più severo di usura, dovuta agli effetti meccanici di compressione e abrasione uniti alla presenza di raggi UV, precipitazioni e variazioni di temperatura.

Per quanto riguarda l'efficacia del manto, gli aspetti da tenere in considerazione riguardano: la realizzazione dell'impianto, le caratteristiche meccaniche del materiale impiegato e l'interazione della superficie col piede dell'atleta. Naturalmente nella fase di realizzazione della pista è necessario evitare difetti di progettazione (es. spessori non adeguati o pendenze indesiderate) o durante la fase di messa in posa (es. bolle o fessure). Con lo scopo di verificare se nel realizzare la pista siano stati utilizzati i giusti materiali, nelle corrette proporzioni e opportunamente distesi, i manti delle superfici sportive devono possedere due caratteristiche meccaniche in grado di soddisfare i parametri imposti dalla IAAF:

un'elongazione a rottura almeno del 40% e un modulo a trazione di 0.5 MPa per superfici non porose e 0.4 MPa per superfici porose. L'aspetto fondamentale durante l'attività sportiva è costituito dall'interazione tra piede dell'atleta e il manto: durante la prestazione non devono avvenire slittamenti indesiderati, per garantire ciò il corretto valore d'attrito deve essere assicurato da particolari *texture* del manto o da uno strato di finitura superficiale. Il maggiore componente di queste interazioni tra la pista e l'atleta è rappresentato dalla capacità della superficie di assorbire e restituire l'energia legata all'urto, la quale può condizionare notevolmente le prestazioni atletiche: una deformazione troppo elevata comporta uno spreco di energia e un'instabilità del piede, mentre per deformazioni troppo limitate aumenta il rischio di infortuni.

L'interazione tra l'atleta e la pavimentazione è influenzata quindi dalla cedevolezza del materiale e dalla capacità del manto di assorbire e restituire l'energia a seguito dell'impatto col piede. L'analisi di questi due aspetti è fondamentale in sede di progettazione della pavimentazione sportiva in quanto le piste di atletica sono realizzate con lo scopo di aiutare l'atleta nelle sue prestazioni e garantirne l'incolumità (3).

Durante l'attività l'energia dell'impatto viene trasferita dall'atleta alla superficie e convertita in energia di deformazione. Parte dell'energia conservata verrà poi dissipata a causa della natura viscoelastica del manto. La differenza tra l'energia immagazzinata dal manto e quella restituita rappresenta l'energia dissipata, la quale non può essere impiegata dall'atleta ai fini di una *performance* migliore (4).

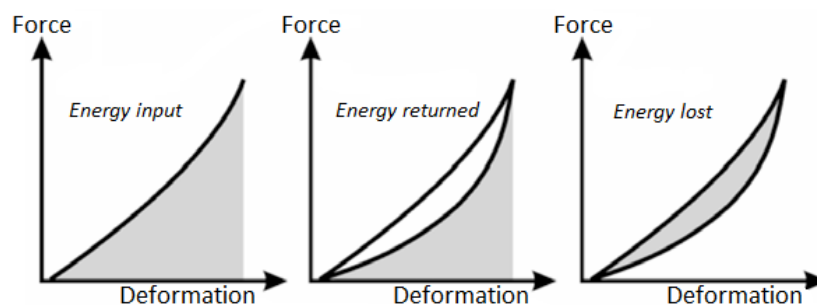


Figura 1.3: rappresentazione grafica dello scambio di energia tra il piede dell'atleta e la superficie sportiva durante l'impatto. Parte dell'energia utilizzata dal manto nel processo di deformazione viene poi restituita all'atleta: la differenza tra l'energia fornita quella di ritorno rappresenta l'energia dissipata (5)

È quindi possibile definire gli aspetti che influenzano la restituzione di energia all'atleta da parte della superficie: in primo luogo quanta parte dell'energia fornita viene dissipata dal manto e successivamente quanta parte dell'energia residua ritorna in maniera efficace all'atleta, ovvero in un tempo utile per l'esecuzione del gesto.

Oltre all'aspetto della restituzione di energia ai fini di migliorare il *comfort* è utile analizzare la dinamica che si riscontra durante l'impatto con la superficie: nel corso di questo lavoro di tesi è stata posta l'attenzione sulla capacità di assorbire gli urti da parte della pista, facendo riferimento a quanto previsto nell'ambito delle superfici sportive dalla IAAF, che ha deciso di utilizzare il *Force Reduction test* come strumento per valutarne la capacità di assorbire gli urti.

Le piste di atletica sono realizzate con materiali viscoelastici in grado di attenuare le onde d'urto che risalgono lungo l'apparato muscolo-scheletrico dell'atleta durante la *performance* a causa dell'impatto del tallone sulla superficie (6). Nel corpo umano sono presenti elementi (come menischi e dischi intervertebrali) che fungono da attenuatori naturali delle vibrazioni, ma che spesso si danneggiano a causa di un carico eccessivo e prolungato nel tempo. Proprio per questo motivo i materiali viscoelastici sono sempre più frequentemente utilizzati nella realizzazione di superfici e calzature sportive al fine di prevenire l'insorgenza di patologie traumatiche o degenerative ad articolazioni, tendini e legamenti.

1.2 FORCE REDUCTION TEST

Il *Force Reduction test* è eseguito lasciando cadere una massa sulla superficie da testare e registrando con una cella di carico la forza massima all'impatto; tale forza è poi posta a confronto con la forza massima registrata durante l'urto della stessa massa su una pavimentazione in calcestruzzo. Il rapporto tra questi due valori è una quantità adimensionale definita come *Force Reduction* (FR).

In questa sezione viene preso in esame il metodo di misura della *Force Reduction* previsto dalla norma europea UNI EN 14808 "*Superfici per aree sportive: Determinazione dell'assorbimento degli urti*" del 2006 (7).

Le superfici per uso sportivo sono suddivise dalla normativa in funzione dell'area interessata da deformazione in seguito all'applicazione di un carico localizzato. Nel caso in esame saranno trattate soltanto superfici di tipo *point-elastic*, in cui la deformazione coinvolge un piccolo intorno della zona sollecitata. Esistono superfici nelle quali gli sforzi e le deformazioni si distribuiscono su una regione più ampia definite *area-elastic*, per le quali un carico concentrato provoca una deformazione a una distanza relativamente grande dal punto di applicazione del carico; infine superfici di tipo *combination-elastic*, per le quali l'applicazione di un carico concentrato comporta sia una deformazione puntuale sia una distribuzione su un'area relativamente grande.

La norma presa in considerazione specifica un preciso metodo per la determinazione delle caratteristiche di assorbimento degli urti. Per assorbimento di urti s'intende la capacità di una superficie di ridurre la forza d'impatto di un corpo cadente sulla superficie stessa. La determinazione di tale quantità viene effettuata lasciando cadere una massa su di una molla posizionata sul campione da testare e misurando la forza con una cella di carico; rapportando il valore massimo registrato con la forza ottenuta su una superficie rigida di riferimento viene stimata la *Force Reduction*.

1.2.1 Atleta artificiale

L'apparato di misura della *Force Reduction* è chiamato Atleta artificiale (o Atleta di Berlino) e consiste nelle componenti mostrate in Figura 1.4:

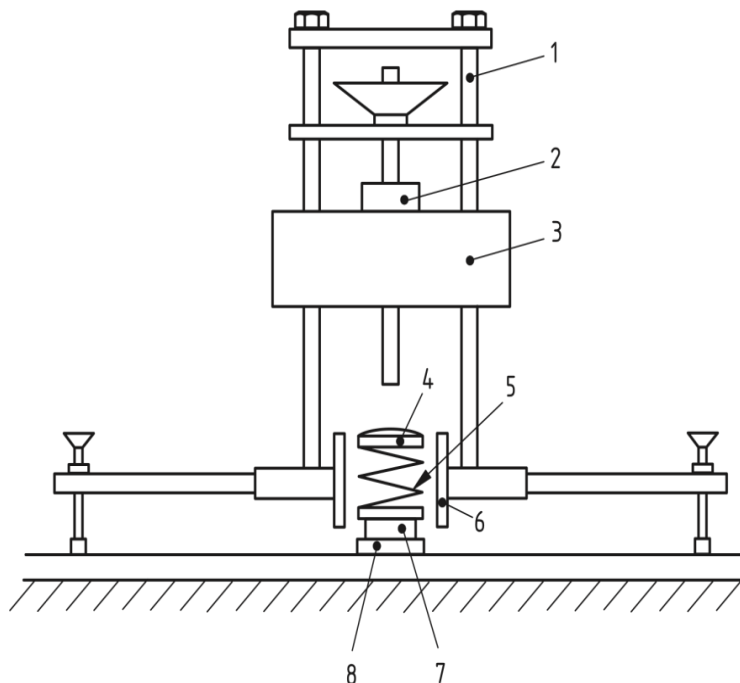


Figura 1.4: descrizione schematica dell'Atleta artificiale, 1- supporto, 2- sistema di rilascio e recupero del peso, 3- corpo cadente, 4- incudine, 5- molla, 6- tubo metallico, 7- cella di carico, 8- piede dell'atleta

Il corpo cadente ha una massa di 20 kg e viene guidato nella caduta da un supporto liscio che offre poco attrito. La molla è costituita da tre spire coassiali rigidamente unite tra loro alle estremità ed è caratterizzata da una costante elastica di 2000 N/mm. La molla e la cella di carico sono contenute all'interno di un tubo metallico con diametro interno 71 mm.

La cella di tipo piezoelettrico (che genera una differenza di potenziale quando viene deformata) è caratterizzata da un'elevata rigidità, nell'ordine di 1 MN/mm per celle con fondo scala di 10 kN.

La base metallica (detta *piede dell'atleta*) che poggia sulla superficie da testare ha una superficie bombata con raggio di curvatura di 500 mm, un diametro di 70 mm e uno spessore sul bordo di 10 mm. La massa complessiva di piede dell'atleta, cella di

carico e molla è di 3 ± 0.3 kg. L'apparato è sostenuto da tre piedi d'appoggio regolabili in altezza che permettono il posizionamento orizzontale dello strumento. La cella di carico è collegata con un sistema elettronico di acquisizione dei dati che registra il segnale, lo amplifica e lo filtra.

La configurazione iniziale della prova prevede l'apparato posizionato verticalmente sopra alla superficie da testare posta sulla pavimentazione rigida (ad esempio in calcestruzzo). La massa è sistemata a un'altezza di 55 mm al di sopra della calotta superiore della molla. In seguito si lascia cadere la massa e la cella di carico misura la forza applicata sulla superficie.

La *Force Reduction*, espressa in percentuale, è definita dalla seguente equazione:

$$FR = \left(1 - \frac{F_t}{F_r}\right) \times 100 \quad (eq.1.1)$$

dove F_t è la forza massima misurata durante il test sulla superficie da testare mentre F_r è la forza di riferimento ottenuta dall'impatto direttamente sulla pavimentazione: per la determinazione della forza di riferimento il risultato delle prove è considerato valido se il valore ottenuto cade nell'intervallo 6.35-6.85 kN (8).

1.2.2 Filtraggio del segnale

In seguito all'impatto il segnale viene rilevato dalla cella di carico e per eliminare gli effetti inerziali delle vibrazioni meccaniche si possono utilizzare tre differenti tipi di filtro passa basso con una frequenza di *cut off* di 120 Hz (9).

Nel *Grafico 1.1* è mostrato il segnale risultante dall'impatto su una superficie sportiva. In nero è riportato il segnale non filtrato. Si può notare come le vibrazioni meccaniche non siano completamente eliminate utilizzando un filtro Butterworth del secondo ordine (linea tratteggiata blu). Il segnale invece viene completamente ripulito da ogni disturbo utilizzando un filtro Butterworth del nono ordine (linea rossa) o un filtro Fast Fourier Transform (FFT, linea tratteggiata magenta).

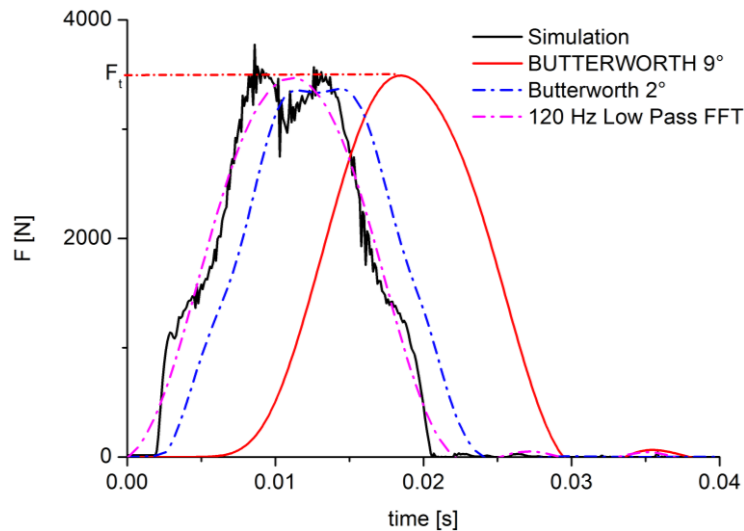


Grafico 1.1: esempio dei tre filtri utilizzati per il segnale risultante da un Force Reduction test su un manto sportivo

Per la determinazione della *Force Reduction* sul materiale da testare la norma EN 14808 (valida per le prove in laboratorio) impone l'uso del filtro Butterworth del secondo ordine (7), mentre la prova di omologazione sul campo eseguita in accordo con il protocollo IAAF impone l'uso del filtro Butterworth del nono ordine (1). Per quanto riguarda il segnale generato dai test per la forza di riferimento sul calcestruzzo, il metodo di filtraggio corretto è quello che prevede un filtro Butterworth del nono ordine, passa basso ma con una frequenza di *cut off* non inferiore a 220 Hz (9).

Il software di acquisizione dati restituisce in un grafico l'andamento della forza durante l'impatto e i valori di FR in funzione dei tre tipi di filtro utilizzati. Nella *Tabella 1.1* sono riportati, a titolo esemplificativo, i valori della forza massima determinati utilizzando i diversi filtri a partire dai dati riportati nel *Grafico 1.1*.

FILTRO	F_t [N]
Butterworth 2°	3368
Butterworth 9°	3490
FFT	3469

Tabella 1.1: confronto fra tre diversi valori di FR ricavati dalla stessa prova ma filtrati in maniera differente

1.2.3 Omologazione

La valutazione della conformità delle superfici sportive alle norme internazionali è di particolare importanza sia per ragioni di uniformità e standardizzazione delle prestazioni atletiche sia per il *comfort* e la salute degli atleti che correndo su un manto non adeguato potrebbero incorrere in danni anche gravi a legamenti e articolazioni. Per queste ragioni la IAAF e altri organismi nazionali dispongono controlli e procedure di omologazione delle piste e più in generale delle superfici sportive.

Le superfici per uso sportivo sono sottoposte a test per la valutazione dell'assorbimento di urti. I parametri secondo cui una superficie per uso sportivo è ritenuta adeguata sono la *Force Reduction* e la deformazione verticale.

Nel corso di questo lavoro verrà posta l'attenzione solamente sull'aspetto riguardante la forza in gioco durante l'impatto.

La IAAF fa riferimento alla normativa UNI EN 14808 per l'omologazione delle piste d'atletica (7). In particolare è richiesto un valore di *Force Reduction* compreso tra 35% e 50% rilevato ad una temperatura tra 10° e 40° C. Nel caso in cui la temperatura al momento della misura cada al di fuori di tale intervallo, le prescrizioni della IAAF permettono di estrapolare il dato della FR utilizzando una regressione lineare.

1.3 RISULTATI PRECEDENTI E OBIETTIVO

Non è chiaro come la misura della FR possa essere influenzata dalle proprietà del materiale, dalla struttura e geometria della superficie o del substrato; difatti la misura della sola forza registrata durante l'impatto su una superficie permette una valutazione ristretta della capacità del materiale di assorbire l'urto, trascurando ad esempio i tempi di restituzione dell'energia.

Inoltre alcuni studi (10) hanno evidenziato un'incongruenza tra i limiti imposti dalla IAAF e le opinioni degli atleti, i quali hanno espresso delle buone impressioni anche su piste non omologabili.

In un lavoro precedente riguardante i manti e i metodi di prova per piste di atletica (11) si è cercato di comprendere meglio come le caratteristiche del materiale possano incidere sulla risposta della pista a seguito dell'urto col piede e come queste proprietà possano essere correlate al valore ottenuto di *Force Reduction*. Nei materiali viscoelastici la dissipazione di energia e la rigidità dipendono fortemente dalla frequenza. Per questo motivo è stato ritenuto opportuno caratterizzare i manti in funzione della frequenza, in modo da comprendere in corrispondenza di quali valori si riscontri una maggiore dissipazione. In particolare sono ritenute dannose per l'apparato locomotorio umano le alte frequenze (>30 Hz) corrispondenti agli impatti rapidi che avvengono durante la corsa (12).

Nell'ambito di questo studio, cercando un legame tra la *Force Reduction* e le proprietà intrinseche del materiale, sono state effettuate analisi dinamico meccaniche e prove condotte mediante l'Atleta artificiale.

Tramite le prove DMA è stato possibile ricavare le diverse proprietà viscoelastiche dinamiche (E' , E'' , $\tan\delta$) per tutti i tipi di manto esaminati in funzione della frequenza di sollecitazione (da 1 a 50 Hz, con un precarico di 0.017 MPa e un'ampiezza di deformazione dello 0,1%).

Il confronto tra i risultati ottenuti dalle prove eseguite all'Atleta artificiale e le proprietà viscoelastiche dinamiche ricavate con la DMA però non ha portato ad una precisa correlazione.

La causa di questo mancato riscontro è stata attribuita ai limitati spessori delle superfici sportive (10-16 mm) testate con l'Atleta artificiale. Difatti per spessori così ridotti il risultato è fortemente influenzato dalla presenza della pavimentazione rigida sottostante. Al fine comprendere come la *Force Reduction* possa essere legata alle diverse proprietà del materiale è stato quindi necessario cercare di eliminare l'influenza del substrato rigido: per fare ciò ci si è allontanati dai valori di spessore tipici per le piste di atletica, andando ad analizzare spessori di manto sempre maggiori fino all'individuazione di un valore che non permettesse al campo di sforzi generato dall'urto di propagarsi nel substrato.

Solamente una volta riscontrato uno spessore sufficientemente elevato (tipico del materiale) si possono ottenere delle misure completamente indipendenti dalla risposta meccanica del substrato rigido, ottenendo così dei valori di *Force Reduction* riferiti unicamente al materiale testato e quindi costanti al variare dello spessore.

In seguito i test all'Atleta artificiale sono stati eseguiti anche su altre superfici in materiale polimerico a disposizione e di differenti spessori con lo scopo di confermare quanto supposto in precedenza. Anche in queste prove è stata riscontrata la forte influenza di questa variabile geometrica sulle misure (come mostrato nel *Grafico 1.2*): raffigurando graficamente i risultati di FR ottenuti in funzione dello spessore è stata evidenziata una FR caratteristica per ogni materiale.

Dagli andamenti di FR ottenuti è stata ricavata una correlazione empirica secondo la quale la *Force Reduction* ha un andamento esponenziale del tipo:

$$FR(s) = FR_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{s}{s_0}} \right) \quad (eq.1.2)$$

dove s è lo spessore della superficie testata, FR_{∞} è il valore asintotico della *Force Reduction* che si ottiene quando s è ragionevolmente maggiore di uno spessore caratteristico del materiale, definito s_0 . Lo spessore s_0 indica la rapidità con la quale la curva della *Force Reduction* tende ad un valore costante.

Estrapolando mediante l'*eq.1.2* i dati della FR ottenuti dai test all'Atleta artificiale sulle diverse superfici e con differenti spessori è stato stimato un valore asintotico di FR per ogni materiale come riportato nel seguente grafico:

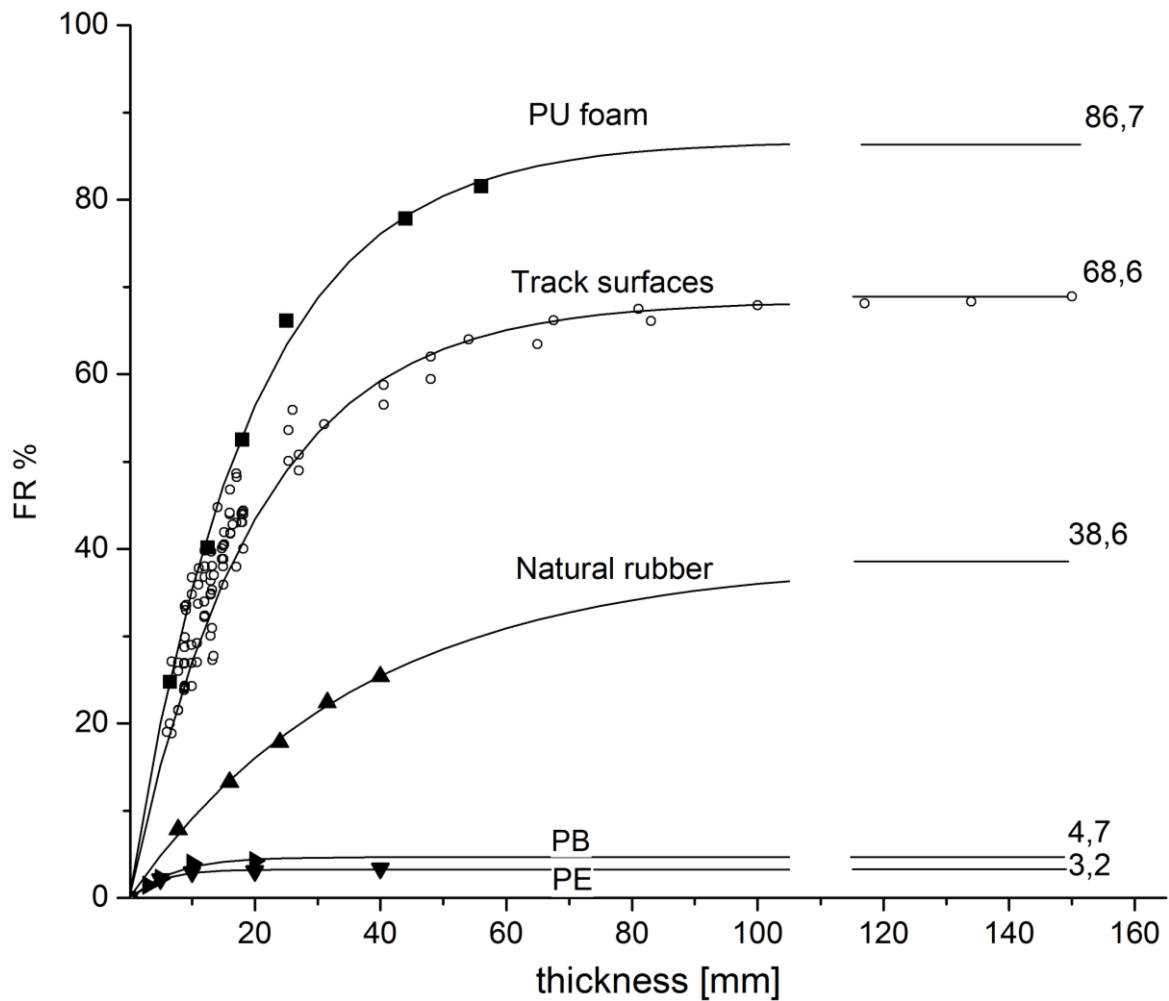


Grafico 1.2: andamento della Force Reduction in funzione dello spessore per diversi materiali e tentativo di estrapolazione della FR_{∞} mediante la correlazione empirica (eq.1.2)

Proprio grazie a questi valori asintotici è stato possibile mettere in evidenza una relazione inversa tra la Force Reduction e la rigidità dinamica, riportata nel Grafico 1.3. La rigidità dinamica è definita come il valore assoluto del modulo complesso:

$$|E^*| = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} \quad (eq.1.3)$$

dove E' è il modulo dinamico, mentre E'' rappresenta il modulo dissipativo.

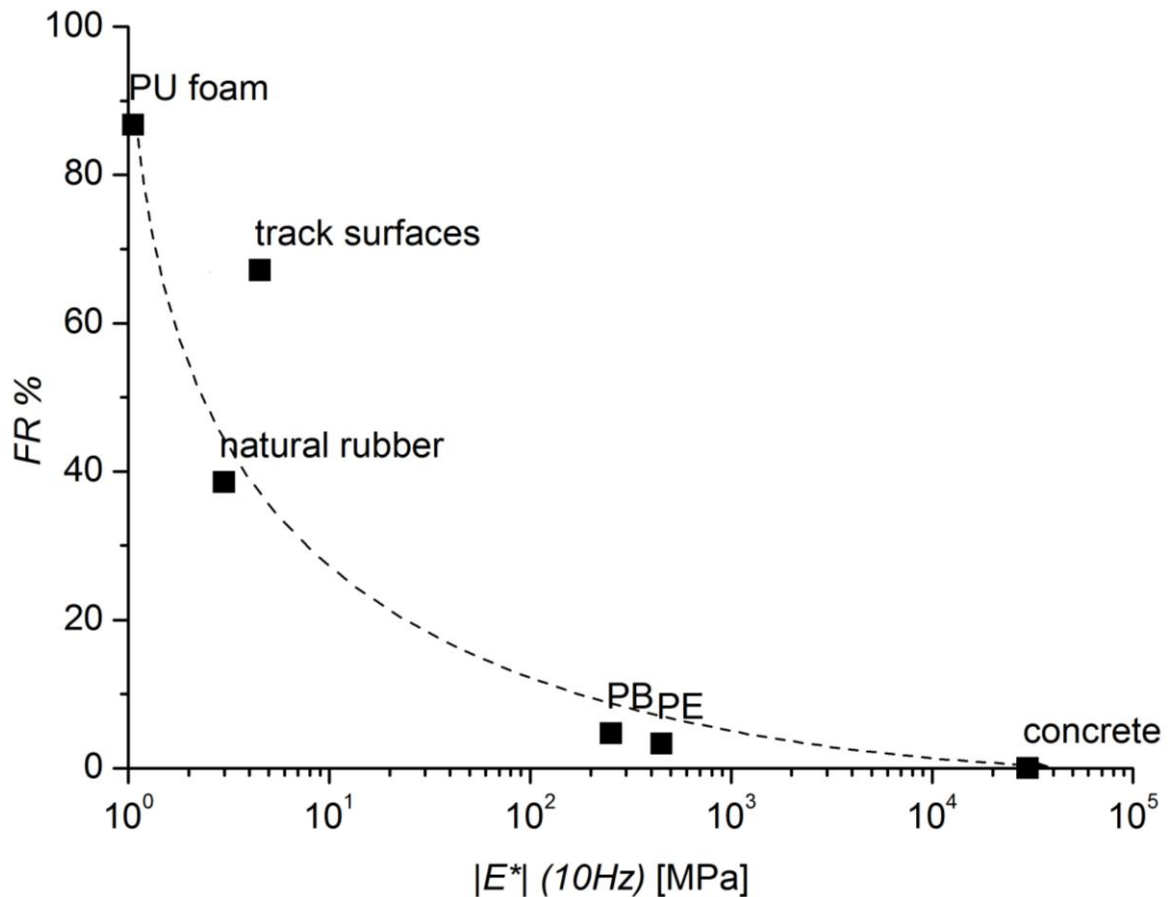


Grafico 1.3: andamento della Force Reduction per diversi materiali in funzione della rigidità dinamica a 10 Hz

Naturalmente questa correlazione è valida solo per spessori molto lontani da quelli tipici dei manti per le piste di atletica, risulta quindi difficile indagare il valore della *Force Reduction* senza tener conto della presenza della pavimentazione rigida. Per poter prevedere il comportamento dei manti sportivi è necessario conoscere a priori la rapidità con la quale si raggiungono i valori asintotici della *Force Reduction*.

Nel corso di questo lavoro di tesi è stato ritenuto opportuno compiere un'analisi agli elementi finiti del test per la determinazione della *Force Reduction* (utilizzando il software ABAQUS), simulando l'apparecchiatura di misura, il manto della pista e anche un'ampia gamma di materiali con caratteristiche notevolmente differenti.

Obiettivo del lavoro è stato ottenere mediante la modellazione dell'Atleta artificiale dei risultati che siano ragionevolmente simili a quelli ottenuti dai test in laboratorio. Una volta verificata l'attendibilità dei risultati ottenuti dalle simulazioni sono state compiute delle analisi numeriche con superfici differenti e di diversi spessori in modo da riprodurre la correlazione empirica proposta nel lavoro precedente andando ad analizzare anche quei valori di modulo e di spessore che non erano stati presi in esame. Inoltre è stata effettuata un'indagine riguardante la correlazione tra il modulo e lo spessore asintotico, cercando poi un legame con lo spessore s_0 caratteristico del materiale allo scopo di ricavare l'informazione mancante nell'*eq.1.2*. Infine si è cercato di comprendere meglio l'influenza del substrato, in particolare della sua rigidità, sulle misure di FR eseguite sulla superficie sportiva.

1.4 STRUMENTI UTILIZZATI

1.4.1 Comportamento iperelastico nei materiali elastomerici

I materiali elastomerici sono formati da un *network* macromolecolare composto da lunghe catene in grado di modificare il loro arrangiamento e la loro estensione nello spazio in risposta ad una sollecitazione; le catene sono poi interconnesse da vincoli permanenti denominati *cross-link* e generano una struttura tridimensionale stabile e capace di sopportare reversibilmente ampie deformazioni. Questo comportamento è dovuto alle macromolecole che allo stato non deformato normalmente sono ripiegate, mentre sotto l'effetto di una sollecitazione esterna modificano la loro distribuzione spaziale, orientandosi nella direzione dell'allungamento. Il manifestarsi, nella gomma deformata, di una forza di richiamo avente stessa direzione e verso opposto alla forza deformante, è direttamente collegato alla naturale tendenza delle macromolecole a ritornare nella loro conformazione originaria. Dopo la rimozione della sollecitazione esterna ciascuna catena polimerica recupera la forma originale: la forza emergente risulta pertanto dalla tendenza del sistema a conservare la propria entropia, ritornando al valore massimo che possiede nello stato non deformato (13).

Di conseguenza, il comportamento deformazionale (quasi-statico) delle gomme può essere considerato in prima approssimazione (ossia trascurando isteresi ed effetto Mullins) elastico fino a valori molto elevati di deformazione (400÷600%); esso risulta però fortemente non lineare presentando delle curve sforzo-deformazione aventi forma sigmoidale; un confronto con il comportamento elastico lineare è riportato nel *Grafico 1.4* (14).

Riferendosi alle deformazioni è conveniente introdurre come variabile lo *stretch* λ , definito come il rapporto tra la lunghezza di un elemento di un corpo in configurazione deformata e quella in configurazione indeformata:

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (eq.1.4)$$

Lo *stretch* è dunque legato alla deformazione nominale dalla relazione:

$$\lambda = \varepsilon + 1 \quad (eq.1.5)$$

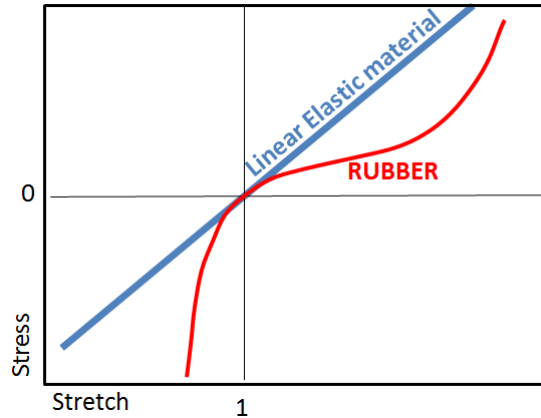


Grafico 1.4: curva stress-stretch tipica di una gomma rispetto all'andamento di un materiale elastico lineare

I legami costitutivi iperelastici rappresentano una sottoclasse dei legami elastici (legami biunivoci e reversibili tra sforzi e deformazioni del tipo $\sigma = \sigma(\varepsilon)$) caratterizzata dall'esistenza di un potenziale della deformazione, detto energia di deformazione (*strain energy function*):

$$U(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (eq.1.6)$$

Definito un tensore gradiente di deformazione F :

$$F = \nabla x \quad (eq.1.7)$$

in cui x è il vettore posizione di un punto nella configurazione deformata rispetto ad un punto della configurazione iniziale, è possibile descrivere il comportamento iperelastico mediante la variazione dell'energia deformazionale (per unità di volume) $U(F)$ immagazzinata dal materiale per passare dalla configurazione di riferimento (per la quale si assume in genere $U = 0$) a quella deformata.

In seguito è possibile esprimere il tensore degli sforzi nominali S come:

$$S = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (eq.1.8)$$

grazie al quale, derivando il potenziale rispetto al tensore gradiente di deformazioni, viene definito il legame costitutivo per i materiali iperelastici.

1.4.2 Modelli iperelastici

Proprio le variazioni dell'energia di deformazione U dalla configurazione di riferimento sono alla base delle funzioni che descrivono il comportamento di questa specifica classe di materiali. I vari modelli proposti per la descrizione analitica del comportamento iperelastico forniscono diverse espressioni della funzione energia di deformazione, che generalmente è espressa in termini degli *stretch* principali λ_i o degli invarianti del tensore di deformazione I_n , e di alcuni coefficienti dipendenti dal materiale, i quali possono essere determinati utilizzando test in varie configurazioni di prova (es. trazione, compressione o *pure shear*).

La modellazione di un corpo iperelastico comporta la scelta di una funzione dell'energia di deformazione U che sia il più possibile rappresentativa del comportamento del materiale stesso. In letteratura è già stata pubblicata una quantità considerevole di modelli per le gomme; la scelta del modello dipende dal comportamento del materiale in esame e dalle configurazioni di prova a disposizione per determinarne i parametri (15).

Tutti i modelli prevedono generalmente due contributi per descrivere la *strain energy function*: un termine di energia di deformazione U_{incomp} che rappresenta il comportamento di materiali iperelastici nell'ipotesi di incomprimibilità (coefficiente di Poisson $\nu=0.5$), al quale viene aggiunto un termine U_{comp} per tener conto della comprimibilità del materiale:

$$U = U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = U(I_1, I_2, I_3) = U_{incomp}(I_1, I_2) + U_{comp}(I_3^{0.5}) \quad (eq.1.9)$$

In questo lavoro di tesi sono state prese in considerazione alcune delle più semplici formulazioni esistenti: quelle basate sulle ipotesi di elasticità (trascurando perciò la viscoelasticità, l'isteresi e l'effetto Mullins), d'isotropia del materiale in configurazione indeformata, di simmetria materiale e oggettività della *strain energy function*. Tra queste formulazioni esistono varie forme di potenziale di deformazione, tuttavia sono stati studiati solamente i modelli in grado di riprodurre interamente la risposta della gomma nel diagramma *stress/stretch*, indipendentemente dalle condizioni di prova. Inoltre sono stati preferiti quei modelli descritti da un ridotto numero di parametri da ricavare sperimentalmente: in tal modo diminuiscono i test da compiere sul materiale per la loro determinazione.

Una particolare sottoclasse dei modelli analizzati prevede la descrizione del potenziale in forma polinomiale:

$$U = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (I_3^{0.5} - 3)^{2i} \quad (eq.1.10)$$

Dove N rappresenta l'ordine della funzione di energia di deformazione, mentre C_{ij} e D_i sono costanti del materiale.

Considerando la gomma come un materiale incomprimibile, gli invarianti si riducono a:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} \quad I_3 = 1 \quad (eq.1.11)$$

Risulta quindi che $\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$ e U_{comp} scompare:

$$U = U(I_1, I_2) = U(\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}) \quad (eq.1.12)$$

Partendo dalla forma polinomiale (eq.1.10) è possibile ricavare diverse funzioni per esprimere il potenziale, in particolare il modello iperelastico più semplice è quello di Neo-Hook, forma polinomiale ridotta di primo ordine che ipotizza una *strain energy function* indipendente da I_2 e definita a meno di due parametri C_{10} e D_1 :

$$U = C_{10}(I_1 - 3) + \frac{1}{D_1} (I_3^{0.5} - 1)^2 \quad (eq.1.13)$$

la quale, nella forma per materiali incomprimibili, diviene:

$$U = C_{10}(I_1 - 3) \quad (eq.1.14)$$

Infine derivando il potenziale espresso dal modello di Neo-Hook rispetto allo *stretch* (così come riportato nell'eq.1.8) si ottiene l'equazione costitutiva per un materiale incomprimibile in prove uniassiali:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_u} = \sigma = 2C_{10} \left(\lambda_u - \frac{1}{\lambda_u^2} \right) \quad (eq.1.15)$$

Un modello più raffinato, cioè in grado di seguire meglio l'andamento del materiale iperelastico grazie all'introduzione di un secondo coefficiente è rappresentato

dall'equazione di Mooney-Rivlin, caso particolare dell'equazione polinomiale di primo ordine. Preso in esame un materiale elastico non lineare, isotropo e comprimibile il modello è il seguente:

$$U = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{D_1} (I_3^{0.5} - 1)^2 \quad (eq.1.16)$$

Anche questo modello può essere semplificato a seguito dell'ipotesi di incomprimibilità del materiale:

$$U = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (eq.1.17)$$

dove C_{10} e C_{01} sono i due coefficienti da ricavare sperimentalmente. Il primo coefficiente rappresenta l'elasticità del materiale ed è definito come il modulo a taglio G :

$$C_{10} \approx G = \frac{E}{2(\nu + 1)} \quad (eq.1.18)$$

Il secondo coefficiente invece rappresenta la deviazione dal comportamento lineare.

Derivando il potenziale espresso dal modello di Mooney-Rivlin rispetto allo *stretch* si ottiene l'equazione costitutiva per un materiale incomprimibile in prove uniassiali:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_u} = \sigma = 2C_{10} \left(\lambda_u - \frac{1}{\lambda_u^2} \right) - 2C_{01} \left(\frac{1}{\lambda_u^3} - 1 \right) \quad (eq.1.19)$$

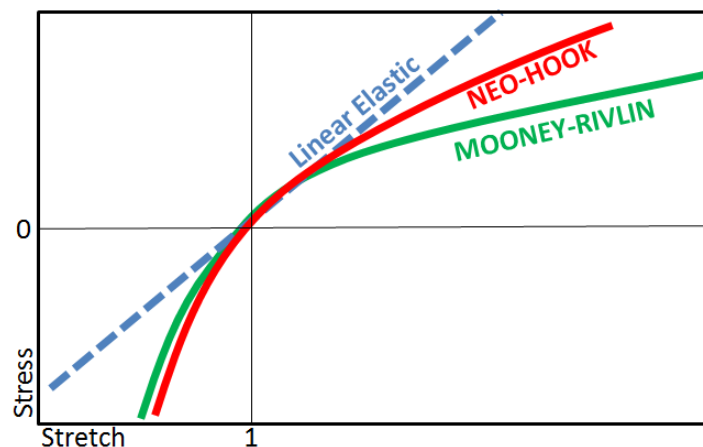


Grafico 1.5: confronto tra l'andamento di un materiale elastico lineare e gli andamenti descritti dai modelli iperelastici di Neo-Hook e di Mooney-Rivlin

1.4.3 Il metodo degli elementi finiti

Il metodo degli elementi finiti ha un ampio campo di applicazione, quali problemi strutturali, termici o di flusso.

Questo approccio si fonda sul concetto della discretizzazione, ottenuta definendo un numero finito di punti caratteristici (nodi) che costituiscono la base per una suddivisione del volume in parti discrete (elementi).

Il metodo degli elementi finiti si basa sulla descrizione dello stato di un sistema continuo mediante funzioni di spostamento o “funzioni di forma”, tipicamente dotate di supporto locale. In quest’ottica, la soluzione è approssimata in forma polinomiale. Ciascun elemento è poi assemblato per ottenere la soluzione stessa per l’intero corpo (16).

Il costo dell’analisi in termini economici, di tempo di calcolo e di spazio occupato su disco è direttamente legato alla strategia di modellazione: è quindi di fondamentale importanza una scelta adeguata del grado di precisione della discretizzazione del modello in relazione al problema in esame.

La risoluzione di un problema con gli elementi finiti è costituita essenzialmente da tre fasi (17):

- I. Pre-processamento, fase durante la quale si sviluppa una griglia di elementi finiti (discretizzazione), dividendo il corpo in sottodomini per l’analisi (idealizzazione), e assegnando le proprietà del materiale e le condizioni al contorno (sotto forma di carichi e vincoli)
- II. Soluzione delle equazioni che governano il modello
- III. Post-processamento, fase in cui si controlla la validità della soluzione, si esaminano gli eventuali errori e si verificano se i valori delle quantità fornite dal software sono, in linea di massima, conformi con quanto ci si attendeva (es. entità degli sforzi, degli spostamenti e delle deformazioni)

Un riassunto schematico del processo iterativo di simulazione agli elementi finiti è riportato nella *Figura 1.5*.

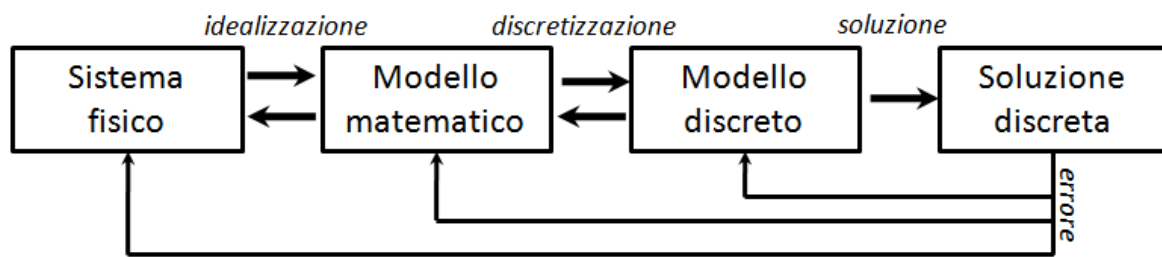


Figura 1.5: schema a blocchi del processo di simulazione agli elementi finiti

1.4.4 Meccanica di un continuo deformabile

In questo capitolo sono fornite alcune nozioni basilari sulle misure degli stati di deformazione (cinematica) e sforzo (equilibrio) in un continuo soggetto a grandi variazioni di configurazione, nonché indicazioni sulla scrittura del principio dei lavori virtuali in forma incrementale (principio delle potenze virtuali). Infine vengono descritte le equazioni governanti il problema discretizzato agli elementi finiti, con riferimento alle formulazioni degli elementi bidimensionali a quattro nodi e assialsimmetrici utilizzati nelle analisi, il tutto in maniera conforme con quanto descritto nel manuale teorico di ABAQUS (18).

NOTA: le convezioni adottate nel seguito, così come le notazioni, sono il più possibile conformi con quanto descritto nel manuale teorico di ABAQUS. In particolare: le quantità scalari sono indicate in corsivo (es. a); i vettori sono indicati con lettere minuscole in grassetto (es. \mathbf{a}); i tensori del secondo e del quarto ordine sono indicati con lettere maiuscole (solo in particolari casi minuscole, quando non sussista possibilità di confusione) in grassetto (es. \mathbf{A}); le quantità assegnate del problema sono soprالineate (es. \bar{a}). I prodotti interni (contratti) tra vettori e/o tensori sono indicati con “ \cdot ” (es. $a_i = b_{ij}c_j \leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$) oppure con “ $:$ ” se doppiamente contratti (es. $\sigma_{ij} = H_{ijkl}\epsilon_{kl} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}:\boldsymbol{\epsilon}$), mentre i prodotti esterni non vengono espressamente indicati (es. $a_{ij} = b_i c_j \leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}\mathbf{c}$).

Fissata una terna cartesiana ortonormale X_1, X_2, X_3 di riferimento in uno spazio tridimensionale, si consideri un continuo di Cauchy (Figura 1.6) che occupi una configurazione iniziale, al tempo t_0 , caratterizzata dal volume V_0 e dalla superficie esterna S_0 , somma di una parte libera S_0^f ed una vincolata S_0^u .

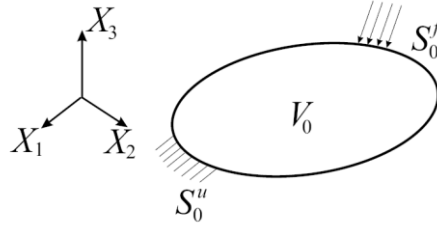


Figura 1.6: continuo deformabile nello spazio X_1, X_2, X_3

Nel caso di piccoli spostamenti, le equazioni che governano il problema sono:

- le equazioni di equilibrio:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad \text{in } V_0 \quad (\text{eq.1.20})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{su } S_0^f \quad (\text{eq.1.21})$$

- le relazioni spostamento-deformazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \right) \quad \text{in } V_0 \quad (\text{eq.1.22})$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{su } S_0^f \quad (\text{eq.1.23})$$

- il legame costitutivo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (\text{eq.1.24})$$

in cui \mathbf{X} è il vettore posizione nella configurazione iniziale; $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il tensore di deformazione; $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore di sforzo; $\bar{\mathbf{b}}$ il vettore delle forze di volume e $\bar{\mathbf{f}}$ il vettore delle forze di superficie, \mathbf{u} è il vettore spostamento; \mathbf{n} è la normale uscente da V_0 .

L'aspetto fondamentale da rimarcare in queste equazioni è l'assunzione che la configurazione corrente V, S sia sempre coincidente con quella iniziale V_0, S_0 in

quanto \mathbf{u} è piccolo ovunque rispetto alle dimensioni del solido. Nel caso studiato, invece, gli spostamenti non sono trascurabili rispetto alle caratteristiche del solido in oggetto. È necessario dunque distinguere tra il vettore posizione \mathbf{X} nella configurazione iniziale e il vettore posizione \mathbf{x} nella configurazione corrente V,S , per cui:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (eq.1.25)$$

Considerando due punti inizialmente prossimi, posti in \mathbf{X} e $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$, al tempo t il campo di spostamento è tale per cui:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} \equiv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (eq.1.26)$$

in cui \mathbf{F} è il gradiente di deformazione. Esso include sia la descrizione della deformazione reale nell'intorno del punto, sia moti puramente rigidi dell'intorno; per isolare questi ultimi si opera una decomposizione polare di \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (eq.1.27)$$

in cui \mathbf{V} è il tensore di *stretch* sinistro e \mathbf{R} il tensore di rotazione rigida. Lo spostamento viene dunque decomposto in una rotazione rigida seguita da una pura deformazione.

In quest'ambito, le misure di deformazione che si possono introdurre sono molteplici, tutte però devono coincidere con il tensore delle piccole deformazioni (eq.1.22), nel caso queste siano piccole. La misura di deformazioni utilizzata in ABAQUS è rappresentata dalle cosiddette deformazioni logaritmiche, definite nel caso uniassiale come:

$$\varepsilon = \ln \lambda \equiv \ln \left(\frac{dl}{dL} \right) \quad (eq.1.28)$$

in cui λ è lo *stretch*, cioè il rapporto tra la lunghezza corrente (dl) e quella iniziale (dL) di un segmento infinitesimo nell'intorno di P . Per il continuo tridimensionale si pone:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \ln(\mathbf{V}) \quad (eq.1.29)$$

assumendo che $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{V} abbiano le stesse direzioni principali.

Per legami costitutivi elastoplastici o viscoelastici non è possibile scrivere la relazione sforzi-deformazioni in termini totali; occorre invece studiare l'evoluzione del sistema in forma incrementale. A questo scopo si introducono quantità legate alla cinematica del continuo simili alle precedenti, ma derivate dal vettore velocità $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ quali:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} \equiv \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{eq.1.30})$$

in cui \mathbf{L} è il vettore gradiente di velocità (19).

\mathbf{L} può essere decomposto nelle due parti simmetrica ed emisimmetrica:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (\text{eq.1.31})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (\text{eq.1.32})$$

dove \mathbf{D} e $\boldsymbol{\Omega}$ sono rispettivamente i tensori velocità di deformazione e di spin.

1.4.4.1 Principio delle potenze virtuali

L'equilibrio globale alla traslazione per il continuo nella configurazione corrente V, S può essere scritto come:

$$\int_V \bar{\mathbf{b}} dV + \int_S \bar{\mathbf{f}} dS = 0 \quad (\text{eq.1.33})$$

dove $\bar{\mathbf{b}}$ e $\bar{\mathbf{f}}$ sono intese come forze per unità di volume e superficie correnti. Applicando il teorema di Green all'integrale di superficie si arriva alle equazioni di equilibrio indefinito (eq.1.20).

Il principio delle potenze virtuali esprime questo equilibrio indefinito tramite l'integrale:

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} \right] \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \quad (\text{eq.1.34})$$

in cui $\delta \mathbf{v}$ (funzione test) è un campo di velocità virtuali in V , sufficientemente regolare e tale da rispettare i vincoli cinematici su S^u . Integrando per parti si ottiene, per la configurazione corrente:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} \, dV = \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{v} \, dV + \int_S \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{v} \, dS \quad \forall \delta \mathbf{v} \quad (\text{eq.1.35})$$

dove $\delta \mathbf{D}$ è la parte simmetrica del gradiente $\delta \mathbf{L}$.

La misura dello stato di sforzo da utilizzare nella formulazione del problema deve essere quindi coniugata a quella adottata per lo stato di deformazione nel senso della potenza; nell'eq.1.35 $\boldsymbol{\sigma}$ deve essere il tensore coniugato nella potenza di \mathbf{D} .

Questo si ottiene partendo dal tensore degli sforzi di Cauchy (o sforzi veri), che rappresenta la misura dello stato di sollecitazione per unità di area corrente nel solido, dunque la sollecitazione sarà sempre espressa in questi termini.

Per poter esprimere la variazione del tensore degli sforzi veri in forma oggettiva (cioè indipendente dal sistema di riferimento adottato e dai moti rigidi del corpo) occorre introdurre il tensore degli sforzi di Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, legato al tensore degli sforzi di Cauchy dalla relazione:

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{eq.1.36})$$

dove $J \equiv \frac{dV}{dV_0}$ è lo jacobiano della trasformazione $V_0, S_0 \rightarrow V, S$. Il tensore $\boldsymbol{\tau}$ permette

infatti di scrivere la potenza interna del principio delle potenza virtuali come:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} \, dV = \int_{V_0} J \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} \, dV_0 \equiv \int_{V_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{D} \, dV_0 \quad (\text{eq.1.37})$$

Il principio delle potenze virtuali può quindi essere scritto in termini di quantità coniugate nella potenza:

$$\int_{V_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{D} \, dV_0 = \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{v} \, dV + \int_S \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{v} \, dS \quad \forall \delta \mathbf{v} \quad (\text{eq.1.38})$$

Per quanto riguarda le variazioni del tensore di sforzo in ABAQUS, si ipotizza che al tempo t i versori \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) del sistema di riferimento ruotino concordemente con la relazione:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_i \quad (eq.1.39)$$

con $\boldsymbol{\Omega}$ definito dall'equazione (eq.1.32). Ne consegue che la variazione del tensore degli sforzi di Kirchhoff $J\boldsymbol{\sigma} = (J\boldsymbol{\sigma})_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ è:

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\boldsymbol{\sigma}) = (J\boldsymbol{\sigma})_{ij}\dot{\mathbf{e}}_i\mathbf{e}_j + (J\boldsymbol{\sigma})_{ij}\mathbf{e}_i\dot{\mathbf{e}}_j + (J\boldsymbol{\sigma})_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\dot{} \equiv (J\boldsymbol{\sigma})^\nabla + J(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T) \quad (eq.1.40)$$

Nell'eq.1.40 solo il primo termine deve essere legato, tramite il legame costitutivo, alle variazioni dello stato di deformazione, mentre gli altri due termini sono causati dallo spin (velocità di rotazione rigida) (18).

1.4.4.2 Discretizzazione del problema

Introducendo la seguente discretizzazione del campo degli spostamenti:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_N \mathbf{u}^N \quad (eq.1.41)$$

in cui \mathbf{N}_N è la matrice delle funzioni di interpolazione e \mathbf{u}^N sono gli spostamenti nodali, i campi virtuali di velocità $\delta\mathbf{v}$ e di velocità di deformazione $\delta\mathbf{D}$, associato a $\delta\mathbf{v}$ tramite la congruenza, sono rispettivamente:

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{N}_N \delta\mathbf{v}^N \quad (eq.1.42)$$

$$\delta\mathbf{D} = \mathbf{B}_N \delta\mathbf{v}^N \quad (eq.1.43)$$

La forma discretizzata del principio delle potenze virtuali risulta quindi:

$$\left(\delta\mathbf{v}^N \right)^T \int_{V_0} \mathbf{B}_N^T \boldsymbol{\tau} dV_0 = \left(\delta\mathbf{v}^N \right)^T \left[\int_V \mathbf{N}_N^T \cdot \bar{\mathbf{b}} dV + \int_S \mathbf{N}_N^T \cdot \bar{\mathbf{f}} dS \right] \quad \forall \delta\mathbf{v}^N \quad (eq.1.44)$$

Il termine di sinistra dell'eq.1.44 determina un sistema di forze nodali, funzione degli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ che devono equilibrare i carichi esterni: si genera così sistema di equazioni algebriche non lineari, rappresentato in breve da:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}^N) = \mathbf{f} \quad (\text{eq.1.45})$$

Dove \mathbf{r} è il vettore delle forze nodali e \mathbf{f} è il vettore delle forze esterne.

Questo problema non lineare è risolvibile in maniera iterativa, ad esempio tramite il metodo di Newton-Raphson: Abaqus difatti risolve il problema in modo incrementale.

1.4.5 Gestione dei contatti in ABAQUS

Un aspetto cruciale nelle simulazioni agli elementi finiti è rappresentato dal contatto tra le varie componenti della configurazione. In particolare, è fondamentale definire un tipo opportuno di contatto onde evitare penetrazioni indesiderate tra corpi deformabili, distorsioni anomale della *mesh* o rappresentazioni falsate dell'interazione tra i corpi (es: lo scivolamento senza attrito).

Il contatto *Hard*, definito di default da ABAQUS e rappresentato graficamente nella *Figura 1.7*, permette un qualsiasi valore di pressione tra i due corpi non appena essi giungono a contatto (definito ovviamente dalla meccanica dei corpi in contatto), mentre l'interazione è nulla in caso di non adesione (20).

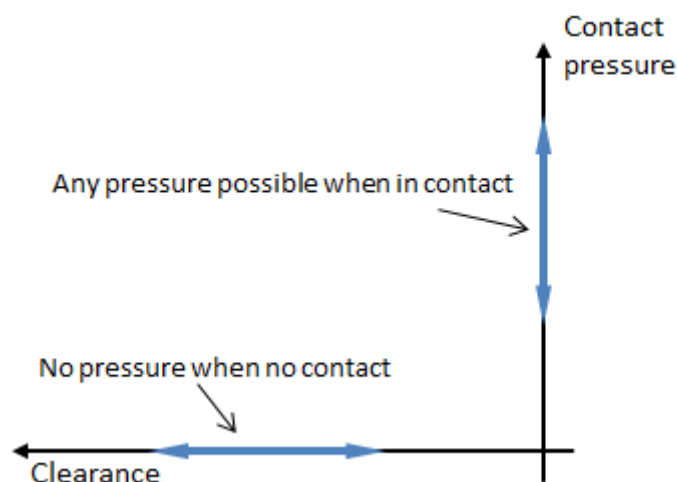


Figura 1.7: rappresentazione grafica del contatto di tipo Hard nelle due fasi di separazione e di contatto delle superfici

In alcuni casi particolari è necessario per ragioni di convergenza passare ad un differente tipo di contatto denominato *Penalty*. Il *Penalty* è un'approssimazione o meglio un rilassamento delle condizioni che caratterizzano il contatto *Hard*: in caso di contatto, l'algoritmo continua ad accrescere la pressione in funzione della compenetrazione in maniera lineare, cercando di ottenere una convergenza con penetrazione inferiore ad un valore di tolleranza (20). Per questo, ABAQUS utilizza dei moltiplicatori lagrangiani e una costante di rigidità K definita automaticamente dal software come il valore caratteristico della rigidità degli elementi a contatto (ovvero il termine pivotale della matrice di rigidità).

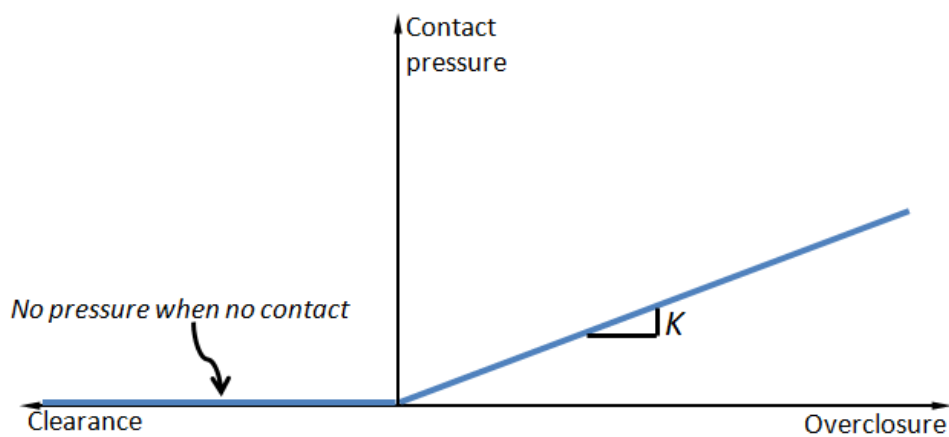


Figura 1.8: schema riassuntivo del modo operando del contatto di tipo *Penalty* implementato con i moltiplicatori lagrangiani

Capitolo 2. MATERIALI E METODI

2.1 MATERIALI UTILIZZATI

2.1.1 Gomma EPDM

Per questo lavoro è stato studiato uno specifico tipo di manto colato, realizzato in gomma EPDM, senza lo strato di rifinitura superficiale e non strutturato; la scelta è stata fatta in modo da facilitarne notevolmente la caratterizzazione (i manti strutturati sono caratterizzati da differenti orientazioni delle strutture interne al materiale). In *Figura 2.1* è riportata un'immagine del manto studiato:

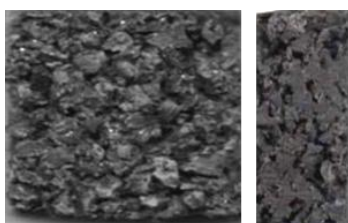


Figura 2.1: vista superiore e in sezione del manto in gomma EPDM studiato; manto non strutturato e senza finitura superficiale

Le gomme EPDM (dall'inglese *Ethylene-Propylene Diene Monomer*) sono una famiglia di gomme sintetiche del gruppo M secondo la classificazione della DIN/ISO 1629 e della ASTM D 1418-19. Del gruppo M fanno parte gli elastomeri che contengono catene polimeriche sature di polietilene (senza doppi o tripli legami); sono terpolimeri ottenuti dalla copolimerizzazione di etilene (60÷80%), propilene e da un terzo monomero rappresentato da un diene (1÷2%) contenente due doppi legami non coniugati in modo che nella catena risultante siano presenti due punti laterali di non saturazione e permettere così la vulcanizzazione con zolfo in presenza di acceleranti. Il diene utilizzato solitamente è scelto tra 5-etilene 2-norbonene (ENB, diene di più largo impiego), dicitolo penta diene (DCPD), e 1,4 esadiene (HD).

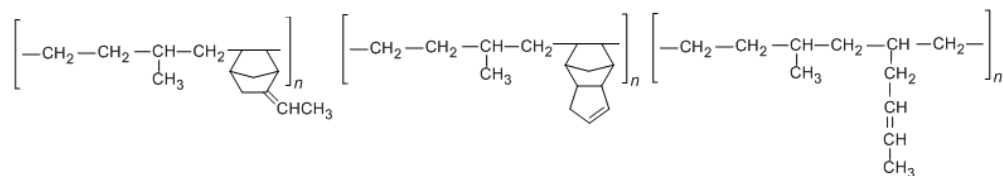


Figura 2.2: struttura chimica dei dieni utilizzati per la copolimerizzazione della gomma EPDM. 5-etilene 2-norbonene; dicitelo penta diene; 1,4 esadiene

Le gomme EPDM sono caratterizzate da basso peso specifico e la catena sostanzialmente satura fornisce al sistema una elevata resistenza all'ossidazione, all'invecchiamento e agli agenti chimici aggressivi; per di più mostrano buone proprietà meccaniche, bassa deformazione permanente, ottima resistenza al calore ed un ampio intervallo di temperature di lavoro (-50°C ÷ 150°C). Tutte queste proprietà le rendono ottime candidate per la realizzazione di manti per superfici sportive outdoor.

Il comportamento delle gomme EPDM può essere descritto mediante un modello di tipo iperelastico, rappresentato da un particolare legame costitutivo che ammette l'esistenza di una *strain energy function* non lineare e che si estende al campo delle deformazioni finite.

2.1.2 Altri materiali

Oltre ai dati ottenuti in laboratorio sul manto, le simulazioni sono state confrontate anche con test eseguiti su una serie di differenti materiali, con caratteristiche notevolmente diverse.

Il comportamento della gomma naturale è stato descritto mediante un modello iperelastico, effettuando dei test per caratterizzarne i parametri. Mentre i restanti materiali sono stati simulati tramite un andamento lineare elastico: specificandone il modulo di Young, il coefficiente di Poisson e la densità; le proprietà impiegate sono riportate in tabella:

MATERIALE	E [MPa]	ν	ρ [kg/m ³]
PU espanso	1	0.3	150
PB	290	0.44	950
PE	350	0.43	934
Calcestruzzo	30000	0.15	2300

Tabella 2.1: proprietà utilizzate per descrivere i diversi materiali con un comportamento lineare elastico; modulo di Young, coefficiente di Poisson e densità

2.2 METODI DI PROVA

Per comprendere come la misura della *Force Reduction* possa essere influenzata dalle proprietà del materiale, dalla struttura e geometria della superficie o del substrato è stato deciso nel corso di questo lavoro di tesi di effettuare una simulazione agli elementi finiti del test per la valutazione della FR.

Per caratterizzare la gomma EPDM e quindi poter scegliere un modello costitutivo adatto alla sua rappresentazione all'interno del software per l'analisi agli elementi finiti, sono state eseguite delle prove in compressione a velocità di deformazione costante utilizzando un dinamometro elettromeccanico.

Il comportamento della gomma naturale è stato testato mediante prove in trazione con velocità di spostamento costante fino a rottura del campione. In questo caso i provini sono stati ricavati da lastre di gomma naturale avanzate da lavori precedenti: per questo motivo il numero di prove è ridotto al minimo a causa della scarsa quantità di materiale disponibile. Inoltre, non si sono potute effettuare delle prove in compressione a causa del limitato spessore delle lastre a disposizione per effettuare i provini, tuttavia considerato il comportamento isotropo della gomma non dovrebbero esserci particolari discordanze tra le caratterizzazioni con differenti tipi di sollecitazione.

Per una descrizione efficace del manto in gomma EPDM si sono compiuti dei test preliminari con il dardo (detto anche *Drop Weight Tower*) strumento molto più versatile ed accurato rispetto all'Atleta artificiale: è stato dunque possibile effettuare prove con diverse configurazioni, attuando così una verifica dinamica dei parametri ottenuti dei test in compressione con il dinamometro elettromeccanico.

Successivamente è stato necessario valutare i coefficienti d'attrito tra il provino in gomma e le diverse parti del dardo: il substrato in polietilene e la piastra di fermo in acciaio. Difatti l'attrito tra i vari componenti gioca un ruolo fondamentale nella riproduzione del sistema reale. Per il calcolo dei coefficienti d'attrito tra manto e PE e manto e acciaio è stato utilizzato un dinamometro con una particolare configurazione di prova.

2.2.1 Prove al dinamometro

2.2.1.1 Prove in compressione

Le prove in compressione a velocità di deformazione costante sono state eseguite utilizzando un dinamometro elettromeccanico Instron 1185 con una cella di carico di 10 kN. Il materiale è stato ritagliato in modo da ottenere dei provini cubici di circa 16 mm per lato. Le prove sono state eseguite a tre diverse velocità, ottenendo così un ampio intervallo di *strain rate* in modo da indagare quale fosse l'effetto della velocità di deformazione sul comportamento del materiale.

Velocità [mm/min]	<i>Strain rate</i> [s⁻¹]
6.5	0.006
65	0.06
100	0.1
200	0.2
400	0.4
500	0.5
650	0.6

Tabella 2.2: velocità di spostamento della traversa durante le prove in compressione su cubetti di gomma EPDM con lato di 16 mm e relative strain rate

Le prove in compressione sono state compiute fino ad una deformazione massima del provino in gomma EPDM intorno al 90%.

2.2.1.2 Prove in trazione

Le prove in trazione sono state eseguite con un dinamometro elettromeccanico Instron 1121 con una cella di carico di 10 kN. La configurazione dei provini realizzati è di tipo *dumbbell* e sono stati impiegati dei morsetti pneumatici autostringenti in grado da evitare lo scivolamento del campione durante la prova (problema tipico per questo tipo di materiali). Le caratteristiche del provino sono riportate nell'illustrazione sottostante:

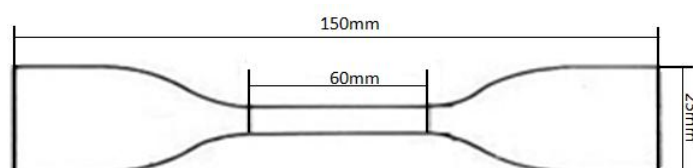


Figura 2.3: dimensioni del provino dumbbell in gomma naturale per prove in trazione col dinamometro elettromeccanico; spessore 8 mm, tratto utile di 60 mm

Anche in questo caso sono stati compiuti test a diverse velocità di spostamento della traversa in modo da poter estrapolare in seguito i dati alla *strain rate* desiderata. Le velocità utilizzate sono riportate nella *Tabella 2.3*. L'andamento della prova è stato seguito utilizzando una videocamera e un videoestensometro, ossia un software di analisi delle immagini in grado di riconoscere i *marker* applicati al provino e i relativi spostamenti grazie ad una elaborazione dei contrasti nell'immagine. Per questa configurazione di prova si è scelto di utilizzare come *marker* sei linee tracciate in direzione perpendicolare rispetto alla direzione di tiro; i *marker* disegnati sono mostrati in un esempio in *Figura 2.4*

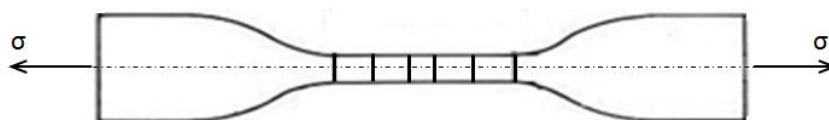


Figura 2.4: linee tracciate sul provino per favorire l'elaborazione delle immagini da parte del videoestensometro durante la prova in trazione

I valori di *strain rate* calcolati utilizzando la distanza tra le linee sul provino letta dal videoestensometro sono riportati nella seguente tabella:

Velocità [mm/min]	Strain rate [s⁻¹]
0.5	0.0002
20	0.0088
500	0.2132

Tabella 2.3: velocità di spostamento della traversa durante i test di trazione al dinamometro elettromeccanico su provini dumbbell in gomma naturale e relative strain rate ottenute dai dati elaborati al videoestensometro

2.2.2 Prove al dardo

Il *Drop Weight Tower* è uno strumento per misurare la forza d'impatto di un corpo cadente (il punzone in acciaio) contro il provino da testare. Vengono effettuate prove meccaniche su un'ampia gamma di materiali strutturali, quali materiali metallici, compositi e sandwich. In particolare è utilizzato per indagini distruttive nello studio dei problemi di frattura in materiali avanzati. In questa tesi la macchina per prove di impatto del tipo a caduta libera è stata impiegata con lo scopo di eseguire prove in condizioni simili a quelle descritte dalla norma per l'Atleta artificiale, garantendo però ampi intervalli di variabilità ad energia e velocità di impatto.

Durante la prova il punzone viene rilasciato con un peso noto da una determinata altezza, mentre il campione è appoggiato su un supporto che presenta una cavità interna di diametro pari a 4 cm ed è dotato di un apposito dispositivo pneumatico per l'afferraggio (*clamp*).

L'energia cinetica del percussore può essere variata regolando in modo opportuno la quota di rilascio o variando i pesi aggiunti al corpo impattante.

Mediante la strumentazione alloggiata in testa al corpo impattante o nei supporti, è possibile misurare il carico dinamico cui è sottoposto il provino. La velocità del percussore viene misurata, immediatamente prima dell'impatto, da un *trigger* ottico posizionato in corrispondenza del supporto del campione; inoltre, la testa del punzone è equipaggiata con sensori a semiconduttore, che ne misurano la deformazione a compressione per tutta la durata del contatto con il provino.

I dati sono convertiti dal sistema di acquisizione in un grafico del carico in funzione del tempo.

Per l'esecuzione delle prove è stata utilizzata una macchina della serie *Fractovis* (CEAST), la quale dispone di un sistema anti-rimbalzo che evita impatti multipli; l'apparato di misura è descritto schematicamente in *Figura 2.5*:

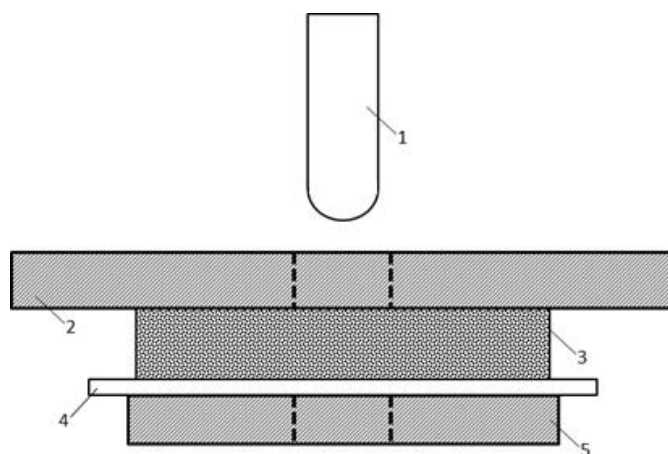


Figura 2.5: configurazione di prova del test d'impatto al Drop Weight Tower; 1- punzone in acciaio, 2- piastra per l'afferraggio, 3- provino in gomma, 4- supporto in PE, 5- supporto dell'attrezzatura

Questa particolare configurazione, che presenta un substrato di polietilene, è dovuta al fatto che senza tale supporto il punzone avrebbe trapassato il provino in gomma da testare.

Sono state eseguite delle prove di impatto utilizzando pesi e altezze differenti, ottenendo così diverse velocità di caduta e di conseguenza differenti energie d'impatto.

Massa punzone [kg]	Altezza di caduta [m]	Velocità di caduta [m/s]	Energia d'impatto [J]
3.135	0.055	1.04	1.7
6.135	0.055	1.04	3.3
8.135	0.073	1.20	5.9
6.135	0.165	1.80	9.2
8.135	0.165	1.50	9.9
8.135	0.165	1.80	13.2

Tabella 2.4: riassunto delle diverse configurazioni di prova nei test d'impatto con il Drop Weight Tower

2.2.3 Prove al Minimat

Per il calcolo dei coefficienti d'attrito tra manto e PE e manto e acciaio è stato utilizzato un dinamometro Minimat (miniature materials tester) elaborando una particolare configurazione di prova (mostrata in *Figura 2.6*): la superficie da testare è stata collegata alla traversa mobile in modo da scorrere sotto il provino, il quale a sua volta è stato unito alla traversa fissa congiunta alla cella di carico così da poter leggere l'entità della forza necessaria per lo scorrimento; sul provino in gomma inoltre è stato applicato un peso di 10 N del quale si è poi tenuto conto una volta ottenuti i risultati dallo strumento

Per verificare la ripetibilità dei test svolti e l'influenza della velocità di spostamento sono state eseguite prove con due velocità di spostamento della traversa mobile: 3 mm/min e 30 mm/min; per lo stesso motivo sono stati compiuti tre test alla stessa velocità per ogni coppia manto-superficie.

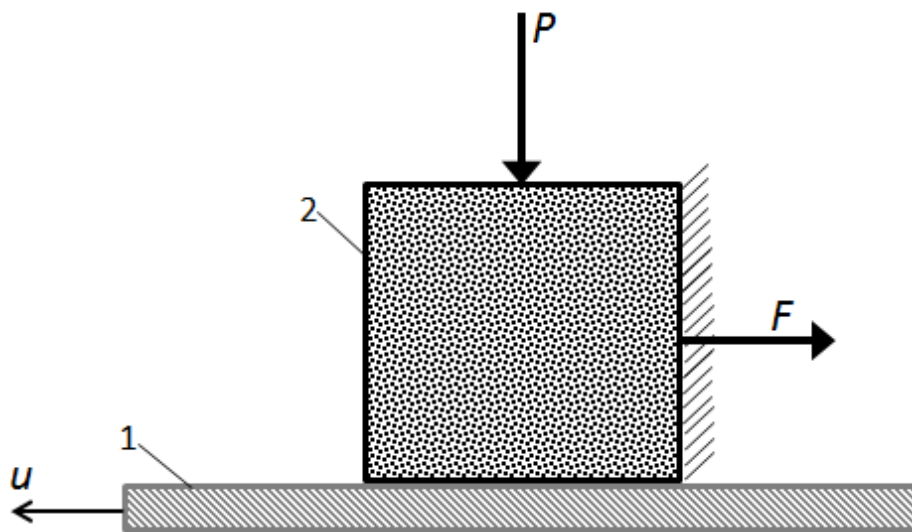


Figura 2.6: configurazione della prova per determinare il coefficiente d'attrito utilizzando il Minimat. 1- superficie da testare (PE o acciaio) collegata alla traversa mobile, 2- provino in gomma EPDM che è collegato alla traversa fissa dove risiede la cella di carico e sopra al quale è applicato un peso noto di 10 N

Capitolo 3. CARATTERIZZAZIONE DELLE PROPRIETA' DEI MATERIALI

In questo capitolo sono riportati i risultati delle prove effettuate in laboratorio per la caratterizzazione dei materiali elastomerici descritti dai modelli iperelastici.

La parte di caratterizzazione del manto per piste di atletica scelto è stata svolta mediante delle prove in compressione al dinamometro elettromeccanico su dei cubetti di gomma. Al fine di caratterizzare il comportamento della gomma naturale sono state eseguite delle prove in trazione al dinamometro elettromeccanico utilizzando provini di tipo *dumbbell*, come spiegato nel paragrafo 2.2.

In seguito è stata svolta l'analisi dei dati per ricercare il modello che meglio descrivesse il comportamento dei materiali elastomerici testati. Nel corso di questa fase è stato effettuato uno studio molto più approfondito per quanto riguarda la caratterizzazione della gomma EPDM, la quale rappresenta il materiale elastomerico usato per le piste e alla base del lavoro di tesi; la gomma naturale è stata studiata solamente allo scopo di avere un altro materiale iperelastico con cui verificare l'attendibilità dei modelli scelti. In questo modo si sono potuti confrontare i risultati ottenuti modellando i due materiali iperelastici con i risultati ottenuti sui materiali lineari elastici.

3.1 RISULTATI DELLE PROVE IN COMPRESSIONE

Il seguente grafico mostra un esempio dell'andamento dello sforzo in funzione dello *stretch* durante le prove in compressione su campioni cubici di gomma EPDM:

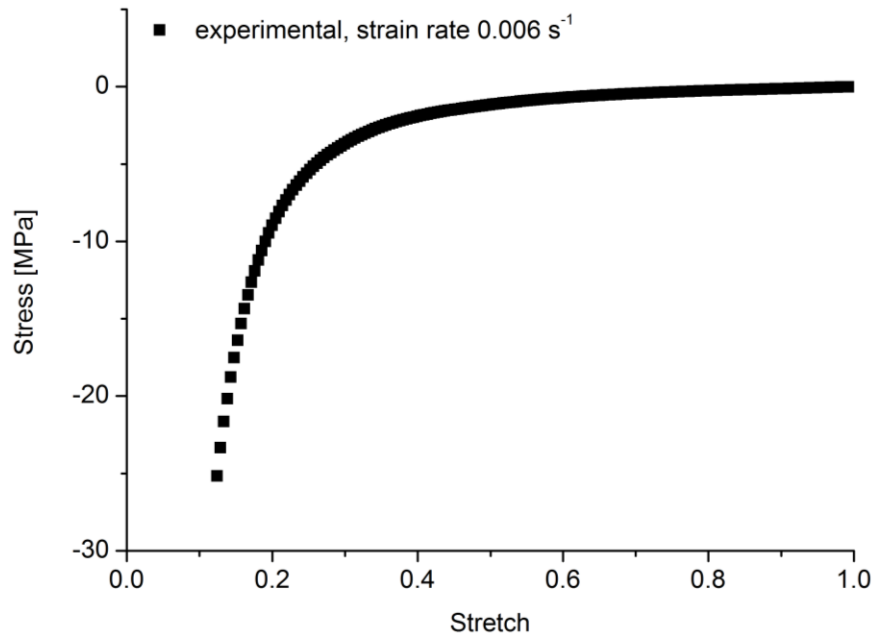


Grafico 3.1: prove in compressione su cubetti in gomma EPDM, andamento del carico in funzione dello stretch alla strain rate di 0.006 s⁻¹

3.1.1 Fit dei risultati in compressione

Partendo dalle curve *stress-stretch* è stata effettuata una ricerca del modello costitutivo iperelastico che meglio descrivesse questi andamenti di sforzo: sono stati utilizzati il modello di Neo-Hook (*eq.1.15*) e quello di Mooney-Rivlin (*eq.1.19*), entrambi per materiali incomprimibili. Nel *Grafico 3.2* è riportato il *fit* non lineare dei dati in compressione utilizzando i modelli sopracitati.

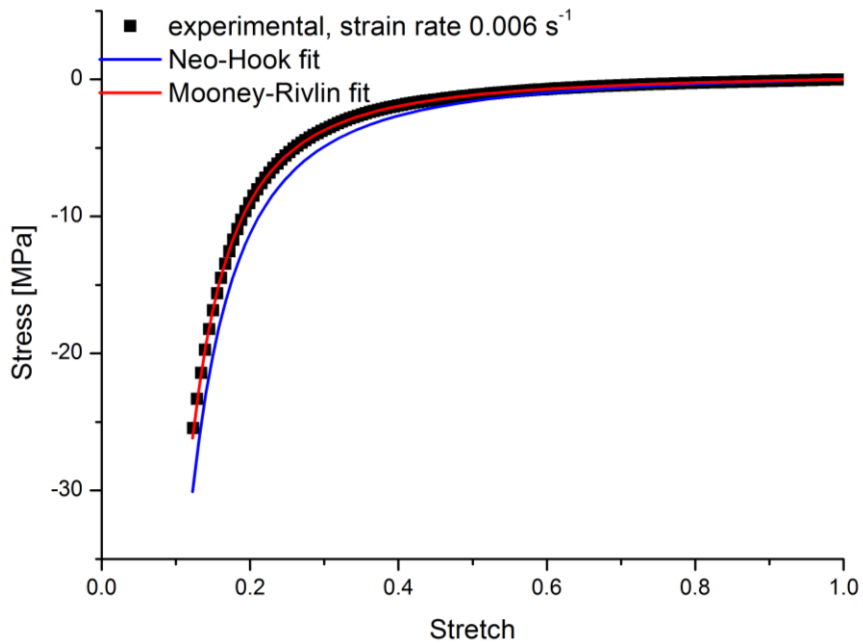


Grafico 3.2: fit non lineare dei dati in compressione alla strain rate di 0.006 s^{-1} utilizzando l'equazione di Neo-Hook e l'equazione di Mooney-Rivlin

Neo-Hook equation	$\frac{\partial U}{\partial \lambda_u} = \sigma = 2C_{10} \left(\lambda_u - \frac{1}{\lambda_u^2} \right)$	
R²	0.98728	
coefficient	value	standard error
C_{10}	0.22677	$2 \cdot 10^{-3}$

Tabella 3.1: coefficienti ricavati per un fit non lineare dei dati in compressione su provini in gomma EPDM alla strain rate di 0.006 s^{-1} utilizzando l'equazione di Neo-Hook

Mooney-Rivlin equation	$\frac{\partial U}{\partial \lambda_u} = \sigma = 2C_{10} \left(\lambda_u - \frac{1}{\lambda_u^2} \right) - 2C_{01} \left(\frac{1}{\lambda_u^3} - 1 \right)$	
R²	0.99987	
coefficients	value	standard error
C_{10}	0.1532	$2 \cdot 10^{-4}$
C_{01}	0.0054	$3 \cdot 10^{-5}$

Tabella 3.2: coefficienti ricavati per un fit non lineare dei dati in compressione su provini in gomma EPDM alla strain rate di 0.006 s^{-1} utilizzando l'equazione di Mooney-Rivlin

A seguito dei risultati riportati nel *Grafico 3.2* si per descrivere la gomma EPDM si è scelto il modello Mooney-Rivlin nell'ipotesi di incomprimibilità, il quale possedendo anche un secondo coefficiente segue meglio il comportamento del materiale elastomerico (21).

I fit con quest'ultima equazione sono stati eseguiti su tutte le curve *stress-stretch* a diverse *strain rate* riscontrando, di fatto, come il modello di Mooney-Rivlin rappresentasse un buon compromesso tra semplicità (infatti, ha solo due coefficienti sperimentali) e precisione nel riprodurre l'andamento a compressione della gomma. Inoltre il primo coefficiente del *fitting* non lineare è di un ordine di grandezza maggiore rispetto al secondo, in accordo con quanto si osserva in letteratura (22).

3.1.2 Estrapolazione dei coefficienti di Mooney-Rivlin in compressione

Dalle prove in compressione effettuate sui cubetti in gomma EPDM si è riscontrato un andamento del carico influenzato dalla velocità di spostamento della traversa: nello specifico all'aumentare della *strain rate* si verifica una diminuzione dello *stretch* a parità di carico applicato. Per un materiale gommoso come l'EPDM non ci si aspetterebbe un comportamento viscoelastico (ovvero dipendente dalla velocità della sollecitazione), tuttavia questo comportamento è da attribuirsi alla natura non omogenea del manto testato. Alcuni esempi dell'andamento del carico alle diverse *strain rate* sono riportati nel *Grafico 3.3*.

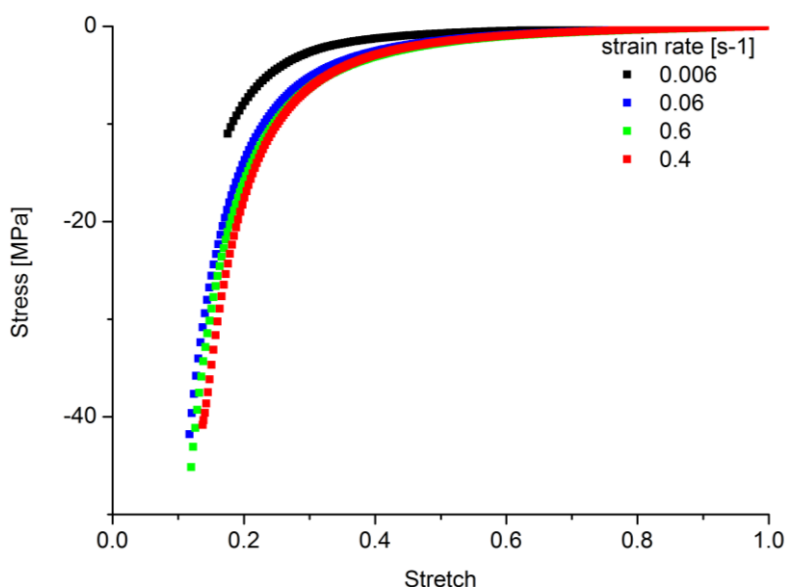
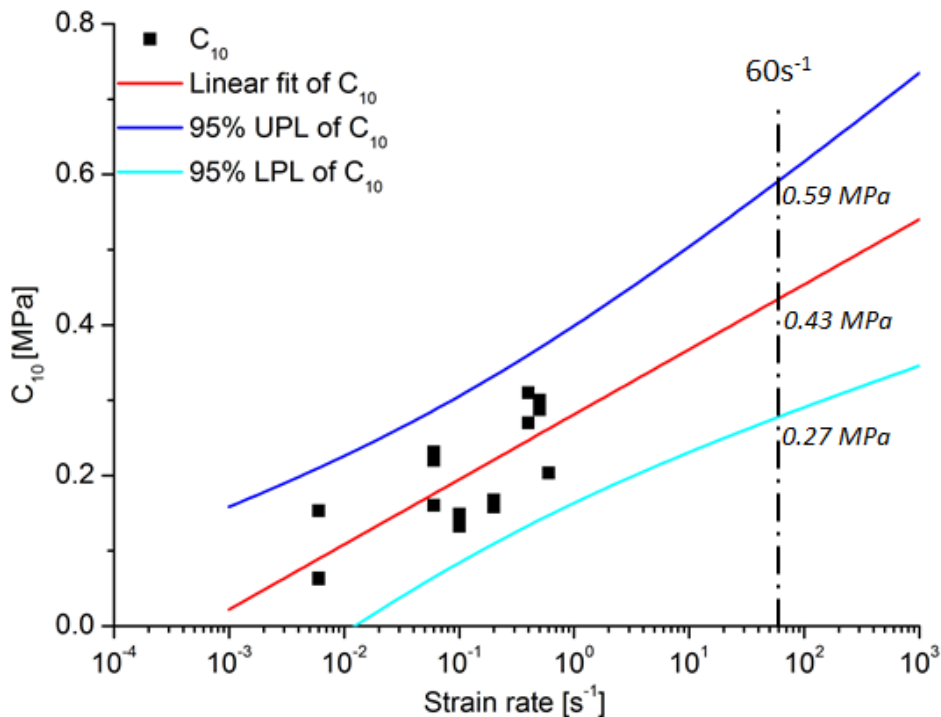
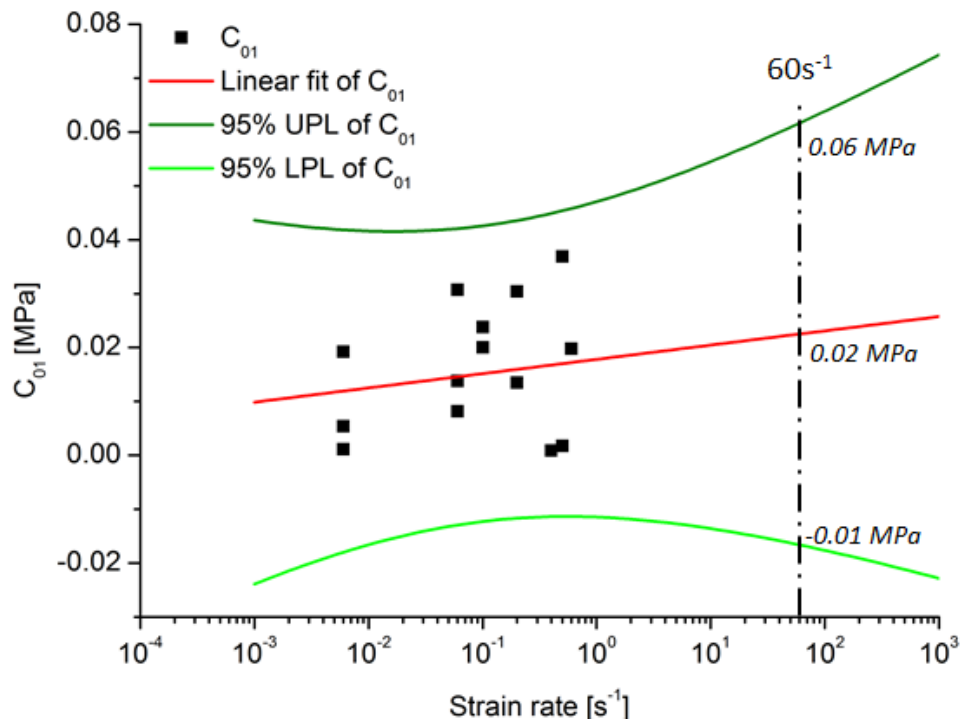


Grafico 3.3: esempi di alcuni andamenti del carico in funzione dello stretch durante prove in compressione a differenti strain rate

La *strain rate* caratteristica per questo genere di prove è stata scelta analizzando i test di laboratorio con il *Drop Weight Tower* e l'Atleta artificiale. Assumendo una regione deformabile di 16 mm sulla quale impatta un corpo con velocità di caduta di 1 m/s, è stata valutata una *strain rate* di 60 s^{-1} . Naturalmente la velocità del corpo impattante diminuisce nel corso della prova, fino ad arrivare a un valore nullo al momento di massima deformazione del provino, a seguito del quale il moto si inverte; non essendo possibile seguire l'intero andamento della *strain rate*, si è deciso di servirsi unicamente del valore massimo, cioè quello valutato al momento dell'impatto, ritenendola determinante ai fini del comportamento complessivo.

Grazie al *fit* con l'equazione di Mooney-Rivlin ogni curva risulta descritta univocamente da una coppia di coefficienti C_{10} e C_{01} in funzione della *strain rate* applicata. Tuttavia, a causa della limitata velocità di spostamento della traversa del dinamometro elettromeccanico non è stato possibile arrivare alla *strain rate* di 60 s^{-1} , quindi, per descrivere il comportamento del materiale elastomerico in queste determinate condizioni di prova, si è deciso di estrapolare i dati ricavati dalle prove eseguite fino alla *strain rate* desiderata: l'estrapolazione di entrambi i coefficienti è riportata nei *Grafici 3.4*, nei quali la stima dei nuovi coefficienti è stata eseguita utilizzando un *fit* lineare (in scala logaritmica).





Grafici 3.4: estrapolazione alla strain rate di 60 s⁻¹ dei coefficienti di Mooney-Rivlin C₁₀ e C₀₁, utilizzando un fit lineare in scala logaritmica e con un intervallo di confidenza del 95%

Come conseguenza dell'extrapolazione sono stati ottenuti i due valori per i coefficienti alla strain rate voluta.

Inoltre, con l'intenzione di verificare in seguito la validità delle ipotesi alla base dell'extrapolazione, si è deciso di prendere anche i valori estremi ottenuti mediante un intervallo di confidenza del 95%. I valori stimati sono riportati nella tabella sottostante:

	C ₁₀ [MPa]	C ₀₁ [MPa]
UPL	0.59	0.06
CL	0.43	0.02
LCL	0.27	-0.01

Tabella 3.3: valori dei coefficienti di Mooney-Rivlin ricavati dall'extrapolazione a 60 s⁻¹ utilizzando un fit lineare e valori estremi dell'intervallo di confidenza al 95%.

3.2 RISULTATI DELLE PROVE IN TRAZIONE

Elaborando i dati forniti dal videoestensometro riguardanti gli spostamenti relativi delle linee tracciate sul provino durante i test in trazione, è stato possibile esprimere l'andamento del carico in funzione dello *stretch* a ogni *strain rate* applicata.

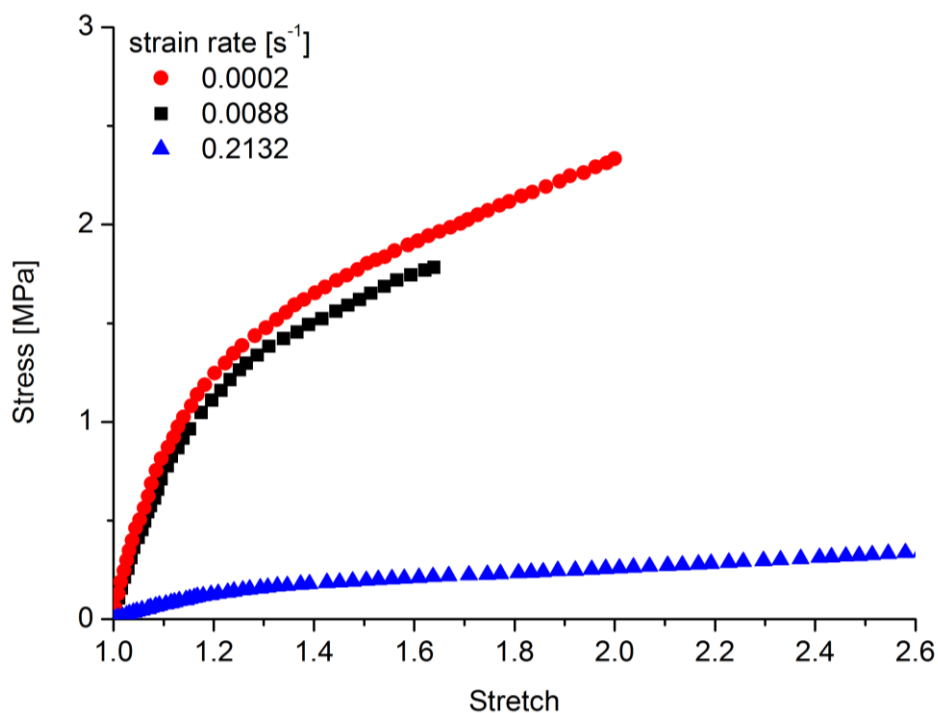


Grafico 3.5: andamento del carico in funzione dello stretch al variare della strain rate durante le prove in trazione con provini dumbbell in gomma naturale

3.2.1 Fit dei risultati in trazione

I *fit* non lineari con l'equazione di Neo-Hook e quella di Mooney-Rivlin sono eseguiti sulle curve *stress-stretch* ottenute dalle prove in trazione. Come mostrato nel Grafico 3.6, il modello di Mooney-Rivlin sembra il più adatto a ricostruire in maniera accettabile il comportamento della gomma naturale in trazione.

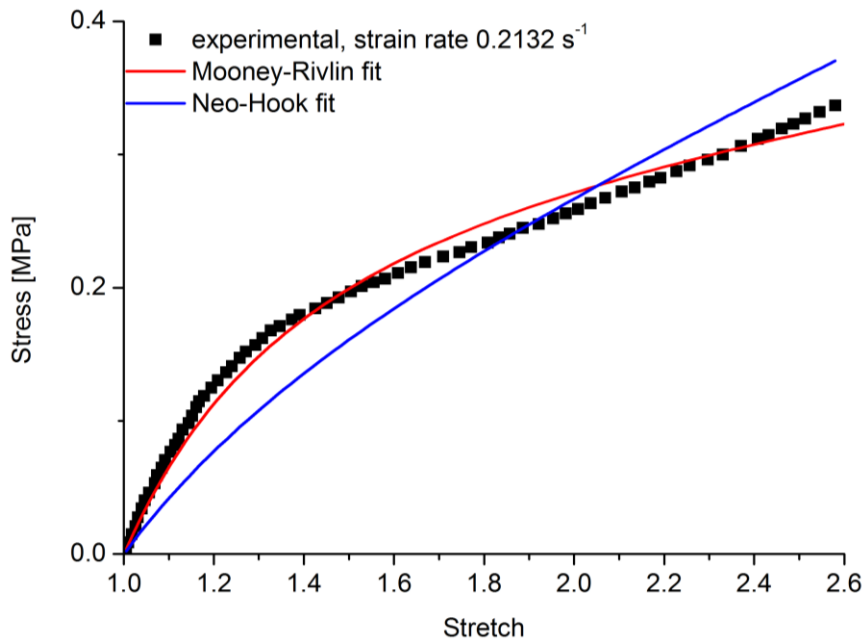


Grafico 3.6: fit non lineare dei dati in trazione su provini in gomma naturale alla strain rate di 0.2132 s^{-1} utilizzando l'equazione di Neo-Hook e l'equazione di Mooney-Rivlin

Neo-Hook equation	$\frac{\partial U}{\partial \lambda_u} = \sigma = 2C_{10} \left(\lambda_u - \frac{1}{\lambda_u^2} \right)$	
R²	0.89252	
coefficient	value	standard error
C_{10}	0.0753	$1 \cdot 10^{-3}$

Tabella 3.4: coefficiente dell'equazione di Neo-Hook ricavato da un fit non lineare dei dati in trazione su provini in gomma naturale alla strain rate di 0.2132 s^{-1}

Mooney-Rivlin equation	$\frac{\partial U}{\partial \lambda_u} = \sigma = 2C_{10} \left(\lambda_u - \frac{1}{\lambda_u^2} \right) - 2C_{01} \left(\frac{1}{\lambda_u^3} - 1 \right)$	
R²	0.98788	
coefficients	value	standard error
C_{10}	-0.53167	$2 \cdot 10^{-3}$
C_{01}	-0.09093	$4 \cdot 10^{-3}$

Tabella 3.5: coefficienti ricavati per un fit non lineare dei dati in trazione alla strain rate di 0.2132 s^{-1} utilizzando l'equazione di Mooney-Rivlin

3.2.2 Estrapolazione dei coefficienti di Mooney-Rivlin in trazione

I coefficienti dell'equazione di Mooney-Rivlin ottenuti dai *fit* dei dati in trazione alle diverse velocità di deformazione sono stati poi rappresentati in funzione della *strain rate* ed estrapolati fino al valore di 60 s^{-1} , come già mostrato nel paragrafo 3.1.2 per l'EPDM.

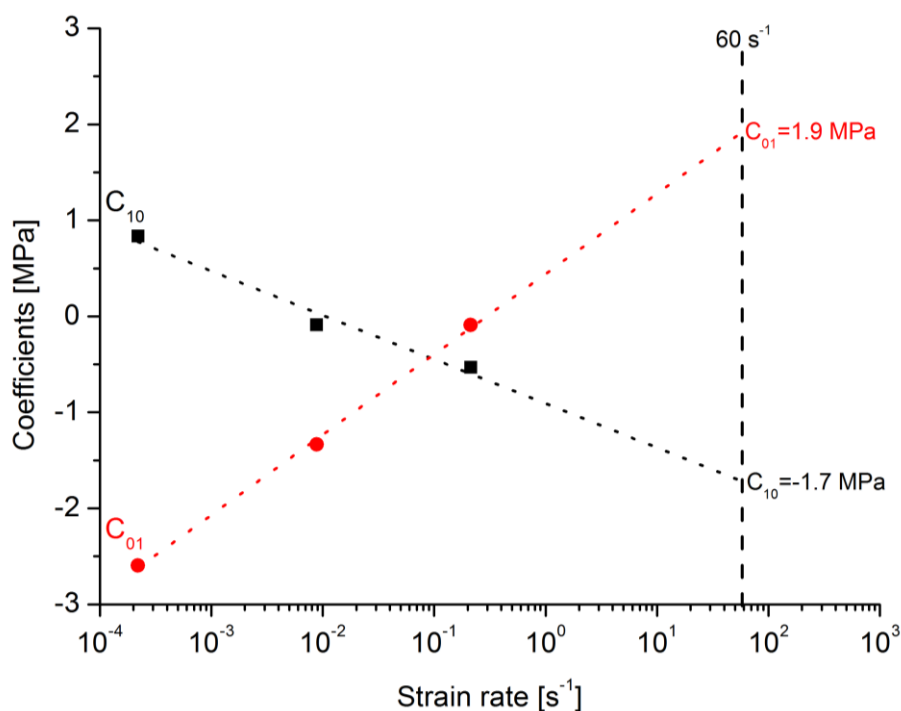


Grafico 3.7: andamento dei coefficienti di Mooney-Rivlin in funzione della strain rate per prove in trazione su gomma naturale ed estrapolazione alla strain rate di 60 s^{-1}

In questo caso non è stato ritenuto necessario delimitare un intervallo di confidenza entro al quale ricercare coefficienti diversi perché il numero dei dati nel Grafico 3.7 è notevolmente ridotto (a causa del limitato numero di provini che si sono potuti ottenere dalle lastre di gomma naturale) e questo comporta un fit lineare con bassissima incertezza se confrontato con l'estrapolazione dei Grafici 3.4.

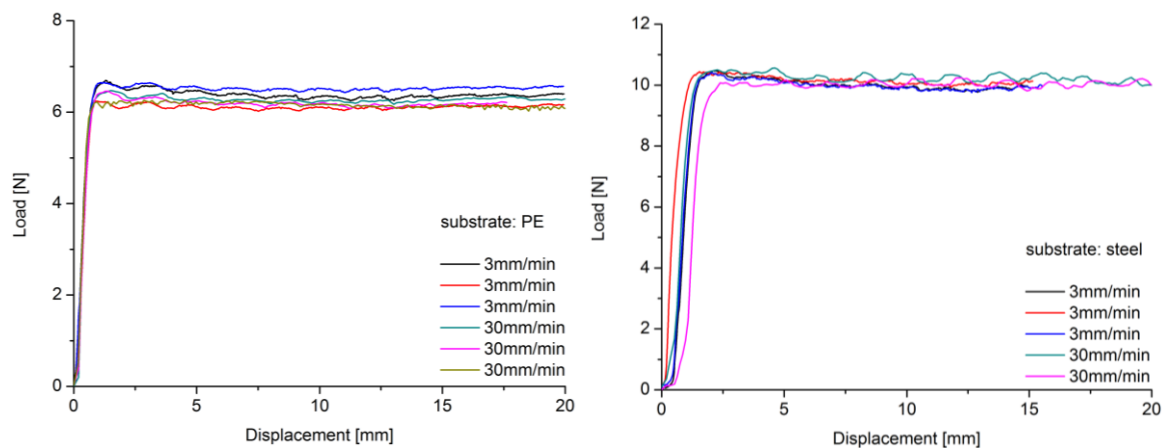
I valori dei coefficienti ottenuti sono riportati nella Tabella 3.6, nella quale sono indicati anche i valori estrapolati:

<i>strain rate</i> [s ⁻¹]	<i>C</i> ₁₀ [MPa]	<i>C</i> ₀₁ [MPa]
0.0002	0.83437	-2.59626
0.0088	-0.08742	-1.33301
0.2132	-0.53167	-0.09093
60	-1.7	1.9

Tabella 3.6: valori dei coefficienti di Mooney-Rivlin ricavati dalle curve di trazione su provini dumbbell in gomma naturale a diverse strain rate e valori estrapolati alla strain rate di 60 s⁻¹

3.3 RISULTATI DELLE PROVE D'ATTRITO

I valori dei coefficienti d'attrito dinamico del manto in gomma EPDM a contatto con il polietilene o l'acciaio sono stati ricavati partendo dalle curve carico/spostamento ottenute dalle prove al Minimat e mostrate nei Grafici 3.8.



Grafici 3.8: andamenti del carico durante le prove al Minimat per la valutazione del coefficiente d'attrito tra la gomma EPDM e il substrato in polietilene o acciaio

I coefficienti di attrito dinamico sono stati calcolati utilizzando la seguente equazione:

$$\mu_d = \frac{F}{P} \quad (\text{eq.3.1})$$

dove F rappresenta la forza tangenziale misurata dalla cella di carico alla quale è collegato il provino in gomma EPDM, mentre P è la forza normale applicata al sistema (ovvero 10 N), così come nella configurazione riportata nella *Figura 2.6*.

I valori di attrito dinamico per la gomma EPDM sulle due superfici sono i seguenti:

Superficie	μ_d
Polietilene	0.68
Acciaio	0.98

Tabella 3.7: valori dei coefficienti d'attrito dinamico della gomma EPDM su una superficie di polietilene e su una d'acciaio

Capitolo 4. SIMULAZIONE DEI TEST CON IL DARDO

Con l'intenzione di eseguire una verifica dinamica dei parametri scelti per la modellazione del materiale, sono state eseguite delle analisi numeriche del test al *Drop Weight Tower*, confrontando poi i risultati con quelli derivanti dalle prove al dardo in laboratorio.

4.1 RISULTATI DELLE PROVE AL DARDO

Di seguito è riportato un esempio delle curve forza/tempo fornite dal dardo durante le prove al dardo in laboratorio con differenti energie d'impatto: è possibile notare il cambiamento delle forze in gioco durante l'urto al variare delle condizioni iniziali (nello specifico: l'altezza di caduta e il peso del punzone).

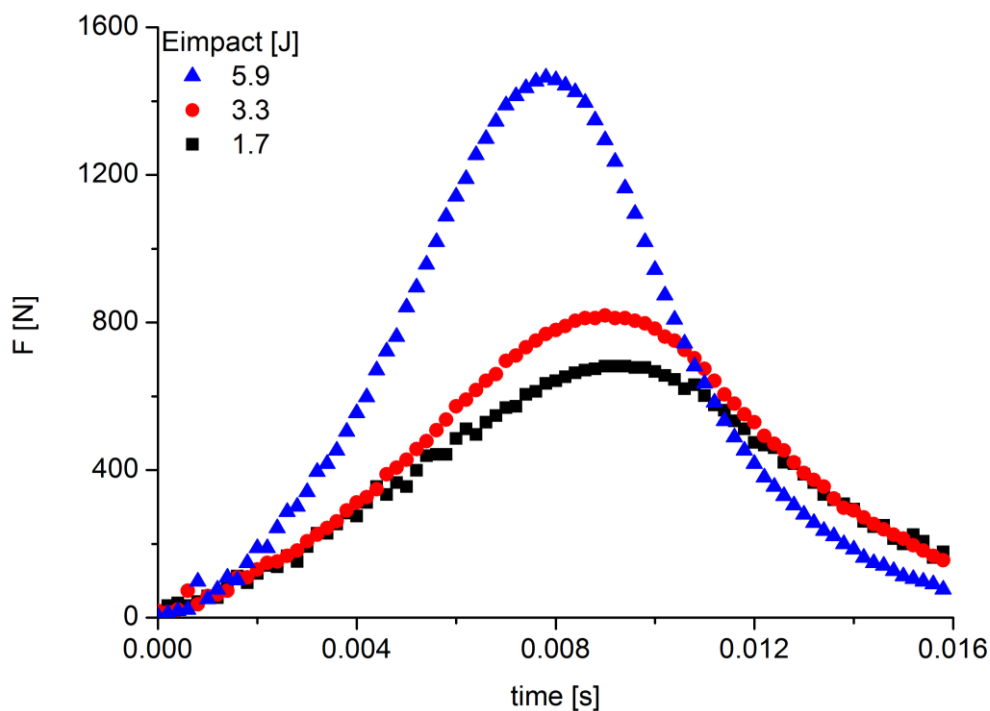


Grafico 4.1: andamento della forza nel tempo durante le prove d'urto col dardo al variare dell'energia d'impatto

4.2 CONFIGURAZIONE DELL'ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI DEL DARDO

Al fine di ottenere un riscontro del modello e dei parametri in condizioni dinamiche scelti è stata effettuata un'analisi agli elementi finiti del test d'urto col dardo sul manto in gomma EPDM utilizzando una simulazione con queste caratteristiche:

- simmetria assialsimmetrica, la quale, data la particolare geometria del sistema, permette tempi di calcolo ridotti (rispetto alle analisi tridimensionali)
- di tipo dinamico, in quanto è necessario il calcolo delle forze inerziali
- modellata con elementi bidimensionali assialsimmetrici, a quattro nodi e di forma quadrata

La configurazione realizzata per la simulazione e mostrata in *Figura 4.1* è composta di un punzone, dal manto bloccato dalla piastra di afferraggio e da un substrato di polietilene che separa il provino dal supporto.

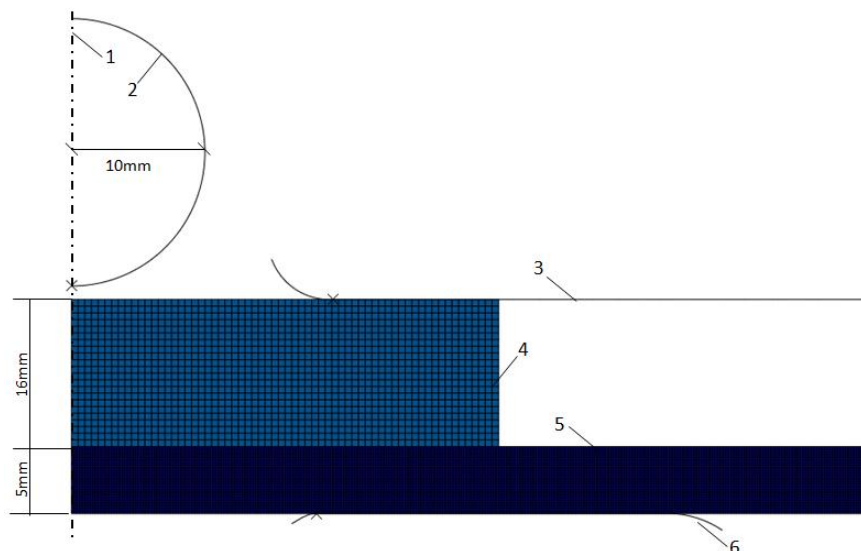


Figura 4.1: rappresentazione del modello utilizzato per descrivere agli elementi finiti la configurazione del test d'impatto col dardo; 1- asse di simmetria, 2- punzone in acciaio, 3- piastra di afferraggio, 4- provino in gomma EPDM, 5- substrato in polietilene, 6- supporto dello strumento

Il substrato in polietilene è stato simulato come un materiale lineare elastico utilizzando le proprietà riportate nella *Tabella 2.1*; il provino in gomma EPDM è stato descritto dall'equazione di Mooney-Rivlin (*eq.1.19*) utilizzando i valori centrali dell'estrapolazione dei coefficienti alla *strain rate* di 60 s^{-1} :

- $C_{10} = 0.43 \text{ MPa}$
- $C_{01} = 0.02 \text{ MPa}$

In conseguenza del fatto che rispetto al materiale da testare l'acciaio risulta essere molto più rigido, il punzone è stato riprodotto come un corpo indeformabile. In ABAQUS i corpi rigidi sono definiti da semplici linee alle quali è associato un *reference point*; questo particolare punto ha il compito di raccogliere in sé tutte le informazioni (come i vincoli, la massa o la velocità) necessarie per la completa descrizione del moto del corpo. Così come il punzone anche la base dell'apparecchiatura e la piastra di fermo sono stati riprodotti come corpi rigidi.

In particolare al *reference point* del punzone sono state assegnate le seguenti caratteristiche, in accordo con le specifiche tecniche dello strumento:

- massa di 3.153 kg
- velocità di caduta iniziale di 1 m/s
- spostamento in direzione orizzontale e rotazione impediti

La base di supporto invece è stata caratterizzata semplicemente vincolando ogni spostamento.

4.2.1 Modellazione della piastra di afferraggio

In prima approssimazione è stato trascurato l'effetto di precompressione della piastra di acciaio che blocca il provino comprimendolo ai margini; tuttavia, come si può notare dal *Grafico 4.2*, non è possibile omettere questa componente poiché gioca un ruolo considerevole al fine di raggiungere il picco di forza riscontrato nei test di laboratorio. Difatti il dispositivo pneumatico di afferraggio agisce con una forza di compressione sul provino pari a 984 N; questa forza è stata stimata grazie all'utilizzo di una molla con costante di rigidità nota, dalla quale si è calcolato lo spostamento sotto carico.

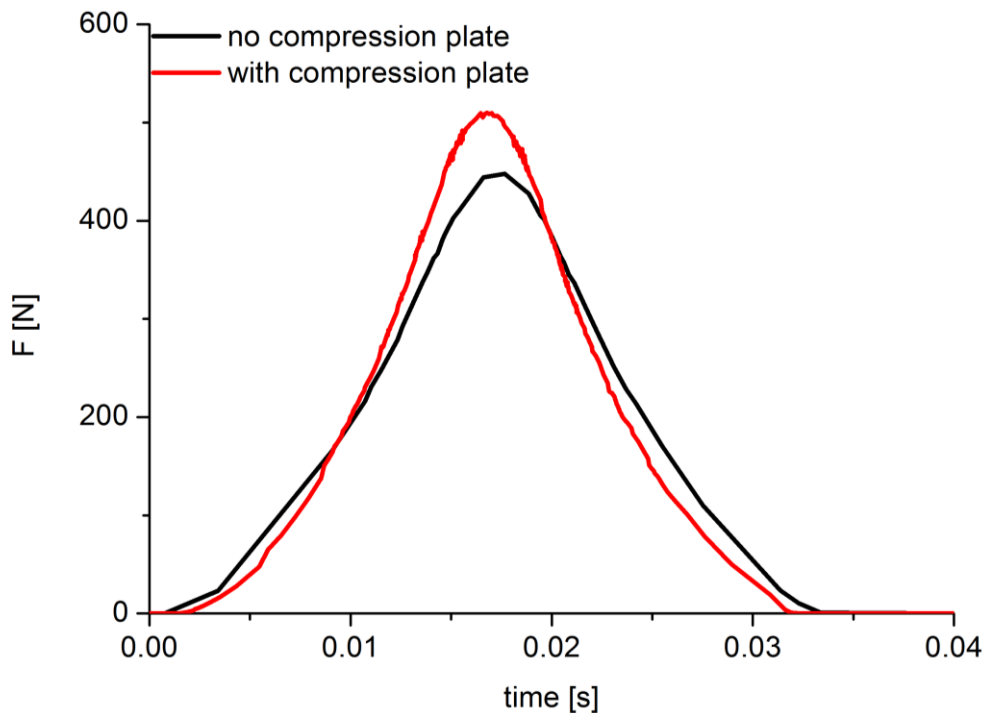


Grafico 4.2: confronto tra i risultati di due analisi numeriche, una trascurando la piastra di afferraggio del provino e l'altra invece modellando il sistema di bloccaggio come un corpo indeformabile

4.2.2 Effetto dell'attrito

Durante l'analisi numerica del Drop Weight Test lungo la direzione normale al provino è stato utilizzato un tipo di contatto chiamato *Hard Contact*, che agisce lungo la direzione normale alla superficie del provino. L'*Hard Contact* è risultato opportuno per questa simulazione in quanto il sistema di interazione tra lo strumento e il provino è risultato relativamente semplice.

Come già accennato nel paragrafo 2.2.3, per quanto riguarda le forze di contatto in direzione tangenziale alla superficie del provino è stato necessario implementare la formulazione dei moltiplicatori lagrangiani ed indicare i valori d'attrito dinamico per ogni coppia di materiali a contatto (acciaio e gomma EPDM, polietilene e gomma EPDM), trovati grazie alle prove al Minimat.

Di seguito sono riportate due simulazioni eseguite con il contatto tangenziale caratterizzato dalla presenza o meno dei coefficienti d'attrito confrontate con i dati di forza di una prova al *Drop Weight Tower*:

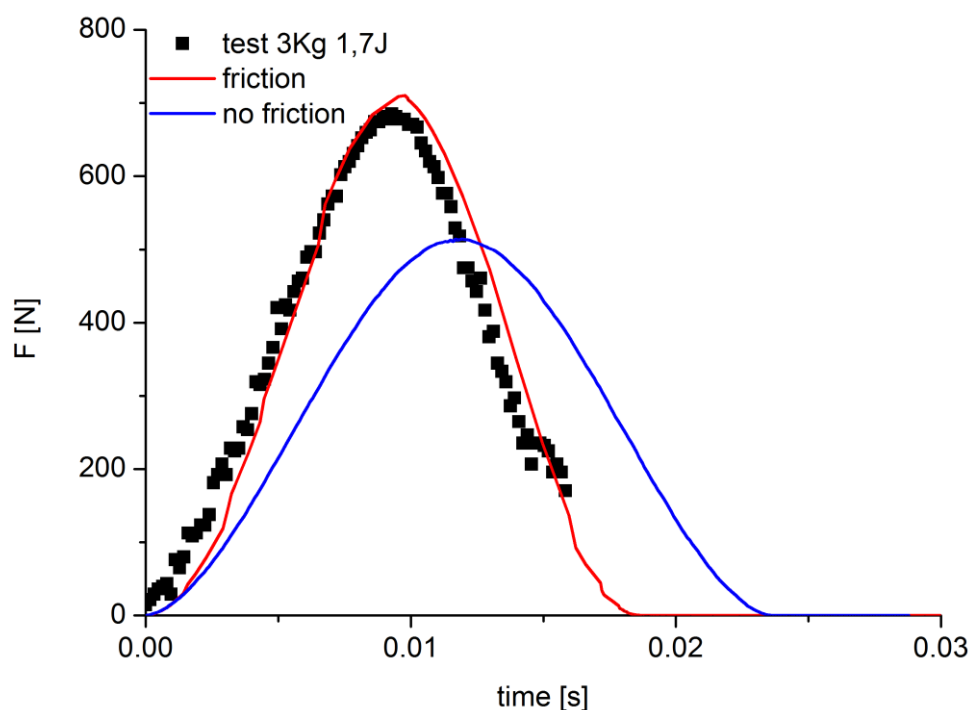


Grafico 4.3 confronto tra l'andamento della forza nel tempo fornito dalla cella di carico durante il test eseguito col Drop Weight Tower e i risultati di due simulazioni del dardo, una implementando i coefficienti d'attrito dinamici valutati al Minimat e l'altra senza attrito

Come si nota dal *Grafico 4.3*, dalla configurazione modellata esplicitando i coefficienti d'attrito tra le diverse componenti si ottengono dei risultati che descrivono molto bene quanto riscontrato nelle prove di laboratorio: in particolare un valore di forza e una scala dei tempi dell'impatto del tutto conformi con i test eseguiti.

4.2.3 Fasi della simulazione del test col dardo

Per comprendere meglio la dinamica della simulazione in *Figura 4.2* sono stati riportati alcuni frame rappresentativi della simulazione composta fondamentalmente da quattro differenti fasi: nella prima si ha la preparazione della configurazione iniziale che prevede il bloccaggio del provino, nella quale si nota come la forza di precompressione sia tutt'altro che trascurabile andando di fatto a

generare ampie deformazioni nella superficie da testare. La seconda fase invece è rappresentata dalla caduta del punzone rigido, il quale va a deformare notevolmente il provino in gomma EPDM e nella momento di massima deformazione (terza fase) anche a sollecitare la piastra di polietilene; infine il campione riprende rapidamente la propria configurazione iniziale respingendo il punzone verso l'alto.

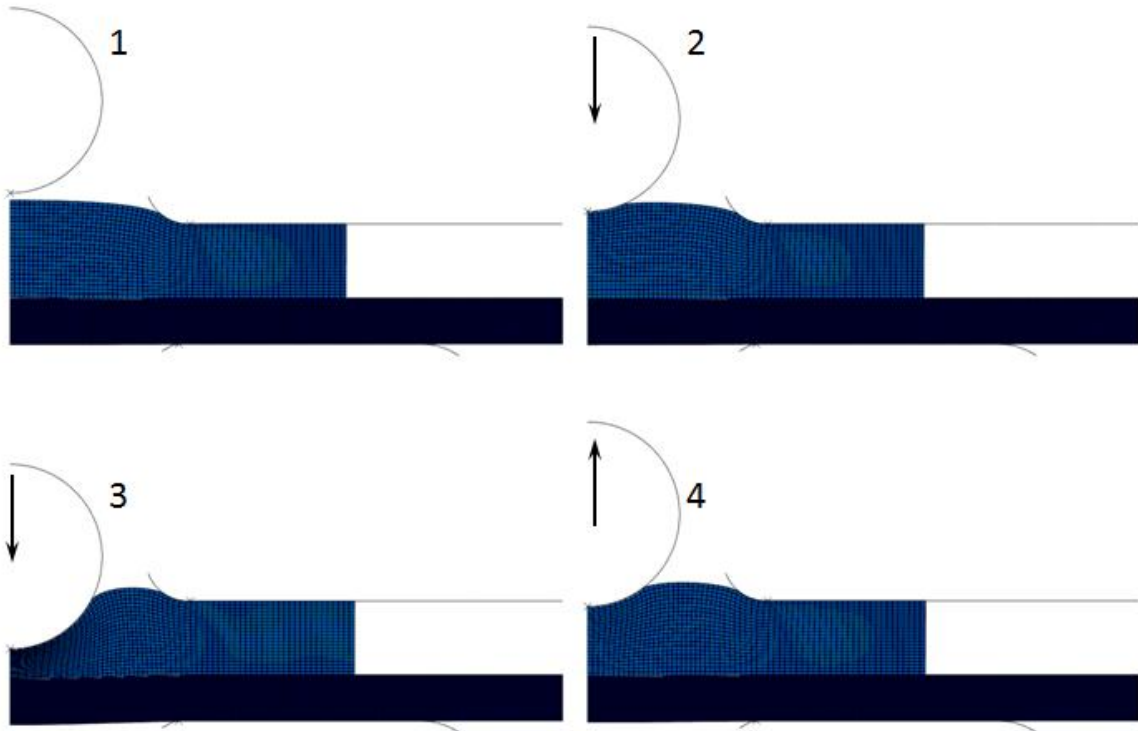


Figura 4.2: sequenza di alcuni frame presi dalla simulazione del Drop Weight Test; 1- afferraggio e precompressione del provino, 2- caduta del punzone e contatto col provino, 3- massima compressione del provino in gomma EPDM, 4- rimbalzo del punzone

4.3 ANALISI PARAMETRICA DEI COEFFICIENTI DI MOONEY RIVLIN

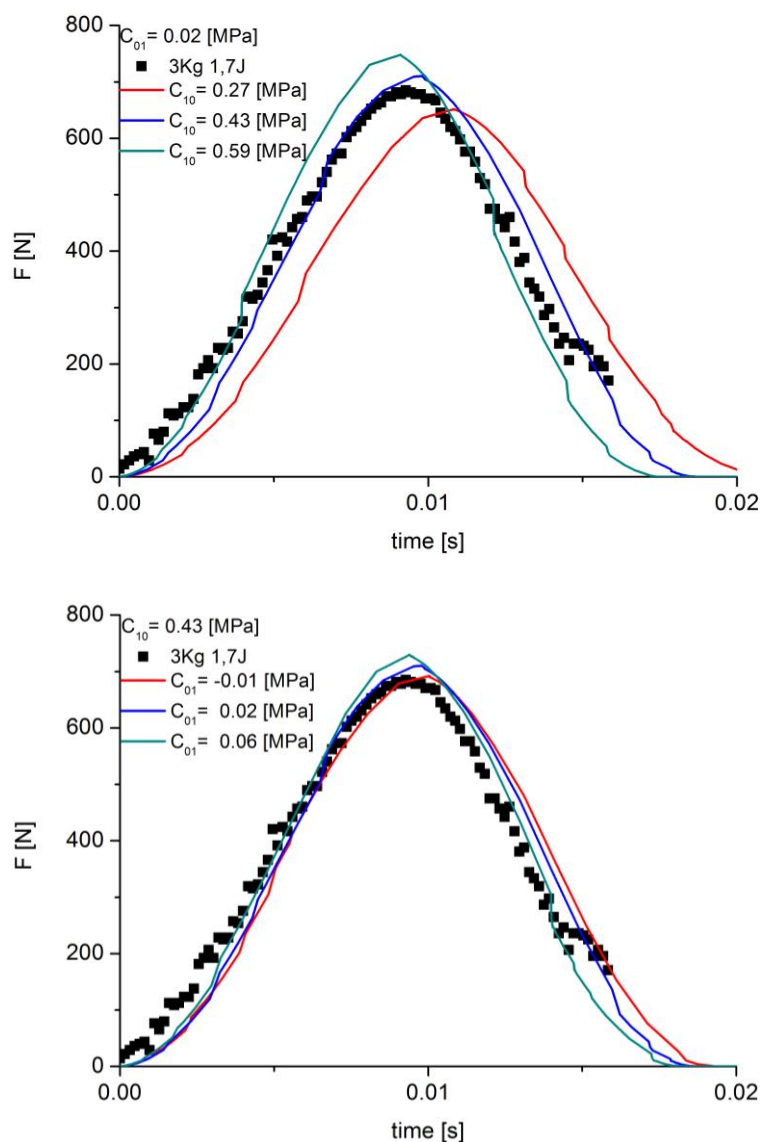
Le simulazioni del dardo sono state effettuate modellando il provino in gomma EPDM con l'equazione di Mooney-Rivlin e utilizzando i valori centrali dell'estrapolazione a 60 s^{-1} dei relativi coefficienti, arrivando così a definire gli aspetti riguardanti la configurazione più adatta per la riproduzione con ABAQUS delle prove di impatto.

Per ricavare i parametri del modello di Mooney-Rivlin sono state formulate alcune ipotesi semplificative riguardanti la *strain rate*: l'estrapolazione dei coefficienti a 60

s⁻¹ e l'utilizzo esclusivo del valore massimo stimato trascurandone la variazione durante l'impatto.

A seguito di queste ipotesi si è voluto verificare come parametri in gioco influenzassero i risultati della simulazione. Pertanto è stata svolta un'analisi parametrica riguardante C_{10} e C_{01} : mantenendo fisso al valore centrale un coefficiente e facendo variare l'altro secondo i valori riportati nella *Tabella 3.3*.

Di seguito sono riportati i grafici ottenuti dall'analisi parametrica confrontati con il risultato ottenuto dalle prove in laboratorio:



Grafici 4.4: grafici risultanti dall'analisi parametrica riguardante i coefficienti dell'equazione di Mooney-Rivlin; il primo grafico mostra l'effetto della variazione di C_{10} mantenendo costante C_{01} ; il secondo grafico indaga l'effetto di C_{01} mantenendo fisso C_{10}

Dal confronto tra queste simulazioni risulta chiaramente come il coefficiente C_{10} influisca maggiormente sul comportamento del materiale modellato rispetto al campo di valori indagato.

A valle di questa indagine parametrica è stato constatato come il risultato della simulazione non sia significativamente diverso nemmeno utilizzando i coefficienti che si trovano agli estremi dell'intervallo di confidenza dell'estrapolazione. È stata ritenuta accettabile la scelta iniziale riguardante la coppia centrale dei coefficienti (ovvero $C_{10}=0.43$ MPa e $C_{01}=0.02$ MPa), la quale conduce ad un risultato della simulazione più che soddisfacente, come mostrato nel *Grafico 4.5*.

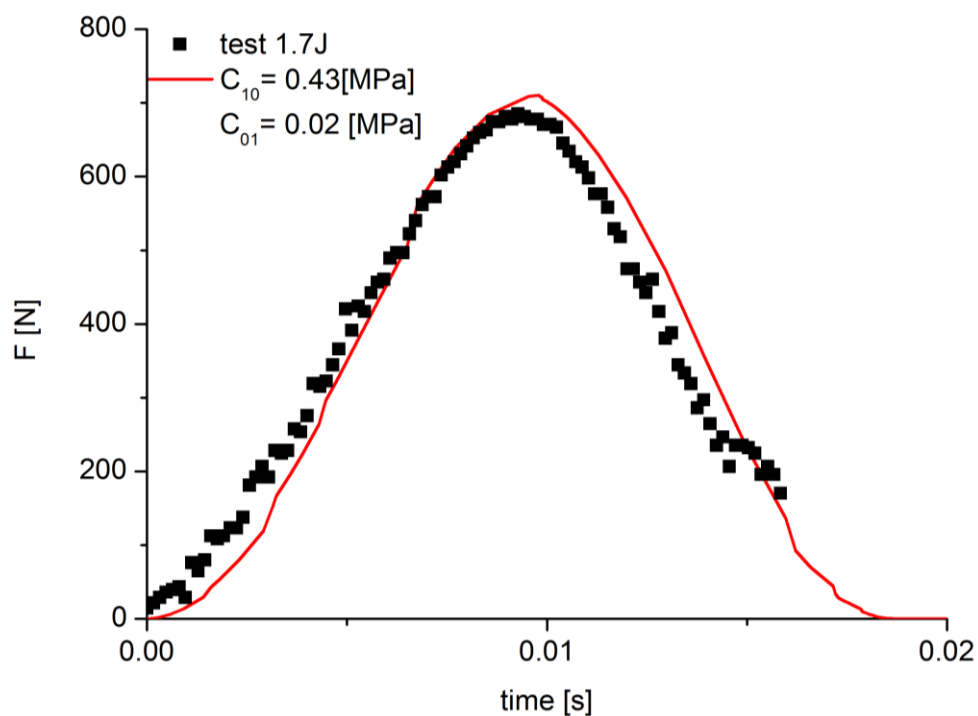


Grafico 4.5: confronto tra l'andamento della forza nei test di laboratorio al Drop Weight Tower e il risultato della simulazione utilizzando i valori centrali dei coefficienti: $C_{10}=0.43$ MPa e $C_{01}=0.02$ MPa

Capitolo 5. SIMULAZIONE DEI TEST CON L'ATLETA ARTIFICIALE

Grazie al confronto tra le prove al dardo in laboratorio e le analisi numeriche eseguite al calcolatore è stata attuata la verifica in dinamica del modello scelto e dei relativi parametri. In questo capitolo verrà quindi descritta la modellazione dei test con l'Atleta artificiale.

L'intero sistema modellato in ABAQUS è conforme a quanto previsto dalla norma europea UNI EN 14808 *"Superfici per aree sportive: Determinazione dell'assorbimento degli urti"* del 2006 (7), fatta eccezione per il peso complessivo dell'insieme molla/cella/piede che pesa 2.629 kg, in accordo col peso dell'apparato utilizzato durante i test di laboratorio del lavoro precedente ma non con quanto prescritto dalla IAAF (3 ± 0.3 kg). Tuttavia tramite delle simulazioni è stata verificata l'ininfluenza di questa discrepanza.

5.1 ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI DEL TEST CON L'ATLETA ARTIFICIALE

Come nel caso della simulazione del test col dardo, anche per questa analisi è stata realizzata una simulazione con le seguenti caratteristiche:

- assialsimmetrica
- dinamica
- modellata con elementi bidimensionali assialsimmetrici, a quattro nodi e di forma quadrata

La simulazione della prova prevede un corpo cadente di 20 kg sopra all'incudine che tramite la molla trasferisce la forza d'urto alla cella di carico e al piede dell'Atleta artificiale a contatto con la superficie da testare.

La configurazione realizzata per l'analisi agli elementi finiti è rappresentata in *Figura 5.1*.

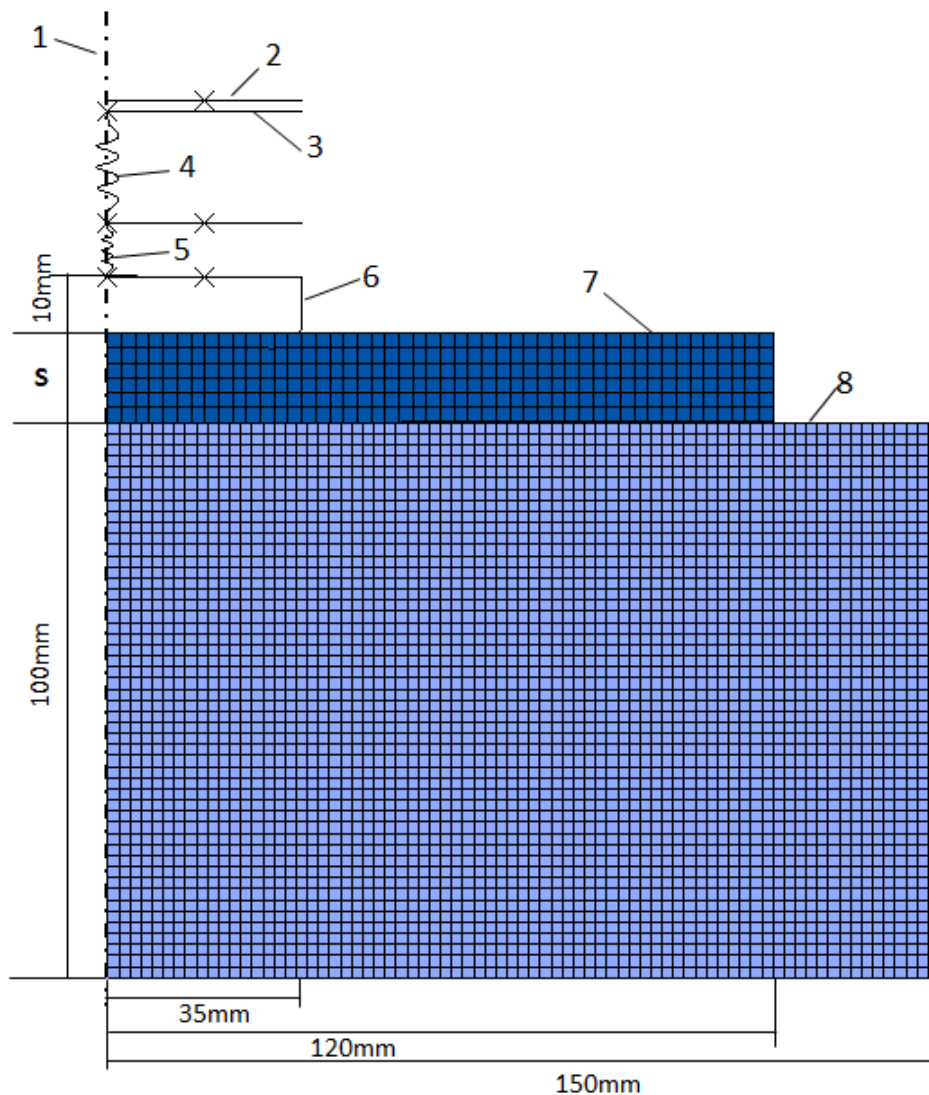


Figura 5.1: configurazione del modello utilizzato per l'analisi numerica del Force Reduction test; 1- asse di simmetria, 2- corpo cadente, 3- incudine, 4- molla, 5- cella di carico, 6- piede dell'Atleta artificiale, 7- superficie da testare con uno spessore S della superficie da testare, 8- pavimentazione rigida

I componenti dell'apparato di misura sono stati simulati come corpi indeformabili in quanto molto più rigidi rispetto al resto del sistema. Questa considerazione è stata compiuta prendendo in considerazione la differenza di rigidità tra il piede dell'Atleta artificiale in acciaio e la superficie da testare: le onde d'urto nell'acciaio si propagano con una velocità di 5 km/s e dunque per attraversare il piede dell'Atleta artificiale (spesso 10 mm) impiegherebbero 2 μ s, un tempo di molto inferiore ai

tempi caratteristici dell'impatto in questo genere di prove che solitamente sono nell'ordine dei 0.02-0.03 s.

Come già riportato nel paragrafo 4.2 il moto degli elementi rigidi è descritto da un *reference point*. Per il piede dell'Atleta artificiale si è considerata una massa di 0.651 kg. Al corpo impattante sull'incudine è stata imposta una velocità di caduta di 1 m/s, una massa di 20 kg e l'impossibilità di spostamenti che non siano lungo l'asse verticale; quest'ultimo vincolo è stato applicato anche a tutti i restanti componenti. La molla e la cella di carico hanno una massa rispettivamente di 1.460 kg e di 0.518 kg; per ognuno di questi due componenti il peso è stato equamente diviso tra i due punti alle loro estremità che rappresentano i punti di connessione dell'elemento *spring*. Inoltre alla molla è stata conferita una costante di rigidità elastica del valore di 2000 N/mm e alla cella di carico una costante di 1 MN/mm (così come riportato in alcune schede tecniche riguardanti analoghe celle di carico piezoelettriche, che in effetti sono caratterizzate da un'elevata rigidità).

Di seguito è riportato un disegno esploso del sistema utile per evidenziare le interazioni specifiche dell'apparato di misura:

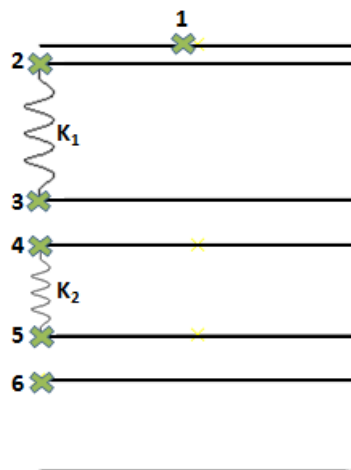


Figura 5.2: disegno esploso delle interazioni tra i componenti dell'Atleta artificiale rappresentati da elementi rigidi, descritti da un solo *reference point*, e elementi *spring* che connettono due *reference point* e che sono caratterizzati da una costante elastica K ; 1- *reference point* del corpo cadente; 2 interazione tra la parte superiore della molla e l'incudine; 3e4- interazione tra la molla e la cella di carico; 5e6- interazione tra la cella di carico e il piede dell'Atleta artificiale

La pavimentazione in calcestruzzo è stata modellata anch'essa in maniera lineare elastica per permettere di considerare anche la ridotta cedevolezza del substrato ed ha uno spessore di 100 mm, il quale è stato considerato ragionevole per l'assorbimento delle onde elastiche provenienti dalla superficie testata.

Nelle simulazioni dei test con l'Atleta artificiale è stato necessario utilizzare un tipo di contatto differente dall'*Hard Contact* a causa dell'interazione tra più superfici rigide che il software non riesce a gestire: questo problema è stato affrontato utilizzando un particolare tipo di contatto chiamato *Penalty*, il quale ammette una minima penetrazione tra le superfici rigide.

Partendo dalla configurazione rappresentata nella *Figura 5.1* sono state eseguite diverse analisi facendo variare alcune caratteristiche della superficie da testare e del substrato rigido.

In questo lavoro di tesi lo spessore scelto per i manti delle piste di atletica è di 16 mm; solo successivamente questo valore è stato modificato per indagarne l'influenza sulle misure della *Force Reduction*.

Inoltre la superficie da testare è stata modellata in maniera differente a seconda del materiale da cui è composta: nello specifico si è utilizzato un modello iperelastico per le due gomme studiate (scegliendo in ABAQUS l'equazione di Mooney-Rivlin) e un modello lineare elastico per i restanti materiali (utilizzano le proprietà riportate nella *Tabella 2.1*). Per eseguire un'analisi più approfondita sul ruolo della rigidità nelle misure della FR, sono stati simulati anche dei materiali virtuali con valori di modulo di Young differenti: 3, 10, 25, 100 e 3000 MPa; mentre, per quanto riguarda le altre proprietà, è stato scelto un valore di 0.4 per il coefficiente di Poisson e una densità di 950 kg/m³.

Successivamente è stato fatto variare anche il modulo della pavimentazione al fine di verificarne l'influenza sulle misure della *Force Reduction* per un manto in gomma EPDM.

5.1.1 Modellazione del test per la determinazione della forza di riferimento

Al fine di calcolare il valore della *Force Reduction* è necessario rapportare la forza massima misurata durante la prova a una forza di riferimento ottenuta su una superficie rigida.

Nel corso di questo lavoro la forza di riferimento è stata ricavata eseguendo un'analisi numerica con una configurazione simile a quella precedente, ma togliendo il manto di gomma in modo che il piede dell'Atleta artificiale appoggiasse direttamente sulla pavimentazione in calcestruzzo.

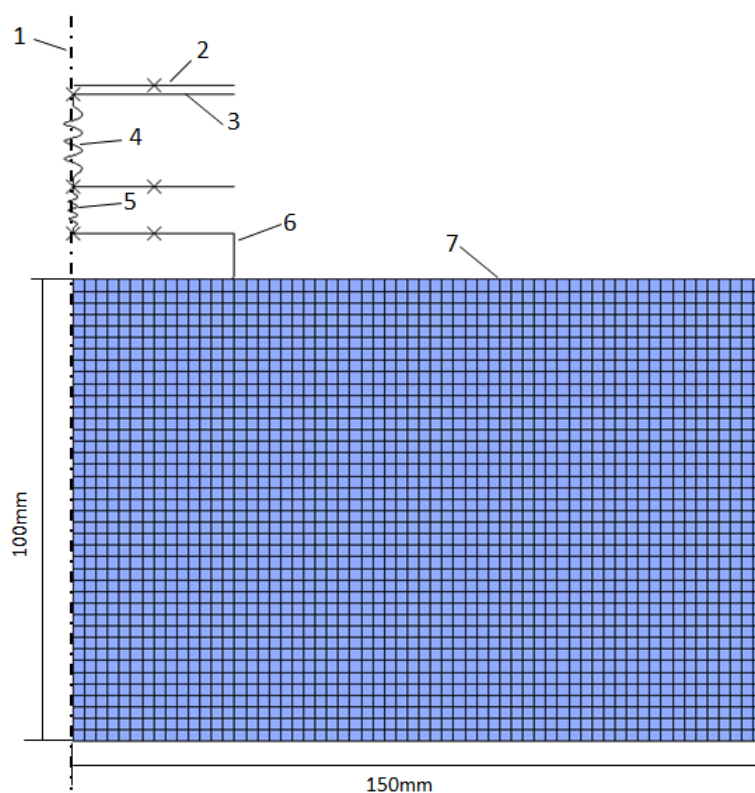


Figura 5.3: configurazione del modello utilizzato per la determinazione della forza di riferimento mediante l'analisi numerica del Force Reduction test; 1- asse di simmetria, 2- corpo cadente, 3- incudine, 4- molla, 5- cella di carico, 6- piede dell'Atleta artificiale, 7- pavimentazione in calcestruzzo

5.1.2 Mesh sensitivity

Per scegliere la grandezza caratteristica di ciascun elemento che compone la *mesh* da utilizzare nella modellazione della superficie da testare, sono state effettuate tre modellazioni con differenti valori: 0.5mm, 1 mm e 2 mm.

A seguito di un confronto tra gli andamenti di forza ottenuti dalle differenti simulazioni (riportati nel *Grafico 5.1*), è stata preferita la *mesh size* di 1 mm. La scelta è dovuta al fatto che una *mesh* più grossolana avrebbe causato alcuni problemi ai contatti, fornendo un risultato molto approssimativo; mentre una *mesh* più fine non avrebbe aumentato sufficientemente l'accuratezza dei risultati ma piuttosto i tempi di calcolo.

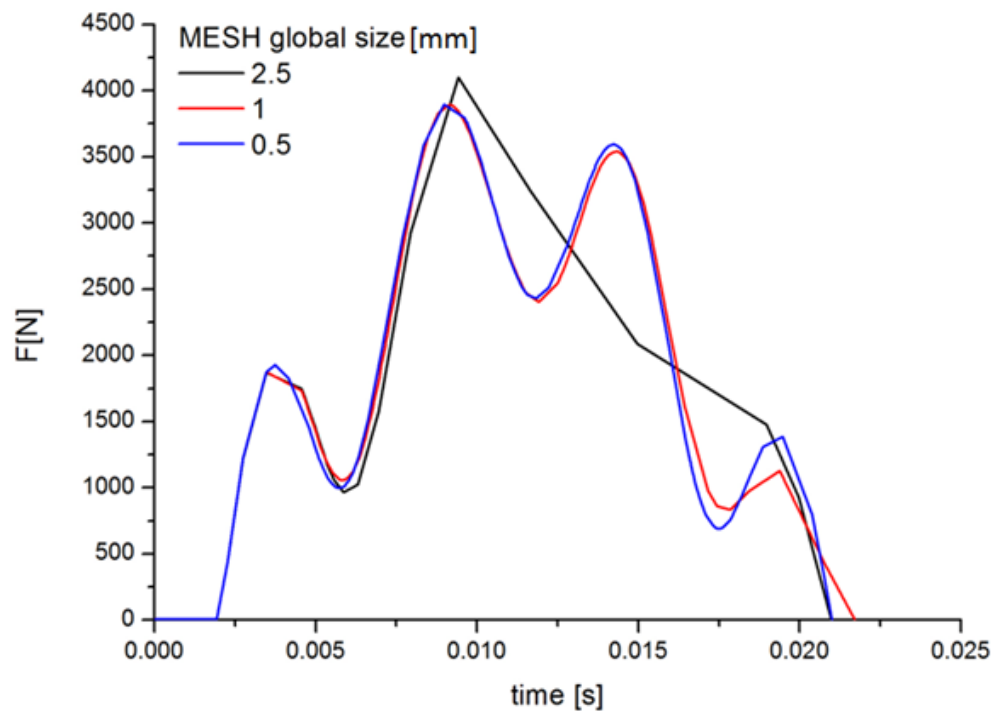


Grafico 5.1: confronto tra i risultati di una simulazione eseguita con tre diverse mesh size; la mesh size di 1 mm rappresenta un ottimo compromesso tra accuratezza dei risultati e tempi di calcolo

5.1.3 Fasi della simulazione del test con l'Atleta artificiale

Per comprendere meglio la simulazione del *Force Reduction test* nella *Figura 5.4* sono stati riportati alcuni frame rappresentativi delle varie fasi della prova:

- nella fase iniziale tutti i componenti dell'apparato di misura sono fermi: il software elabora le forze in gioco legate alla presenza dell'apparecchiatura appoggiata sul manto (primo *frame*)
- la seconda fase prevede la caduta della massa e l'impatto con l'incudine: la forza d'urto viene smorzata dalla molla e trasmessa alla cella di carico e al piede dell'Atleta (secondo *frame*)
- in seguito è possibile osservare la deformazione della superficie da testare (terzo e quarto *frame*)
- durante la fase finale la superficie testata, dopo essere giunta alla massima deformazione, riprende rapidamente la propria configurazione indeformata respingendo verso l'intero sistema di corpi rigidi (quinto e sesto *frame*)

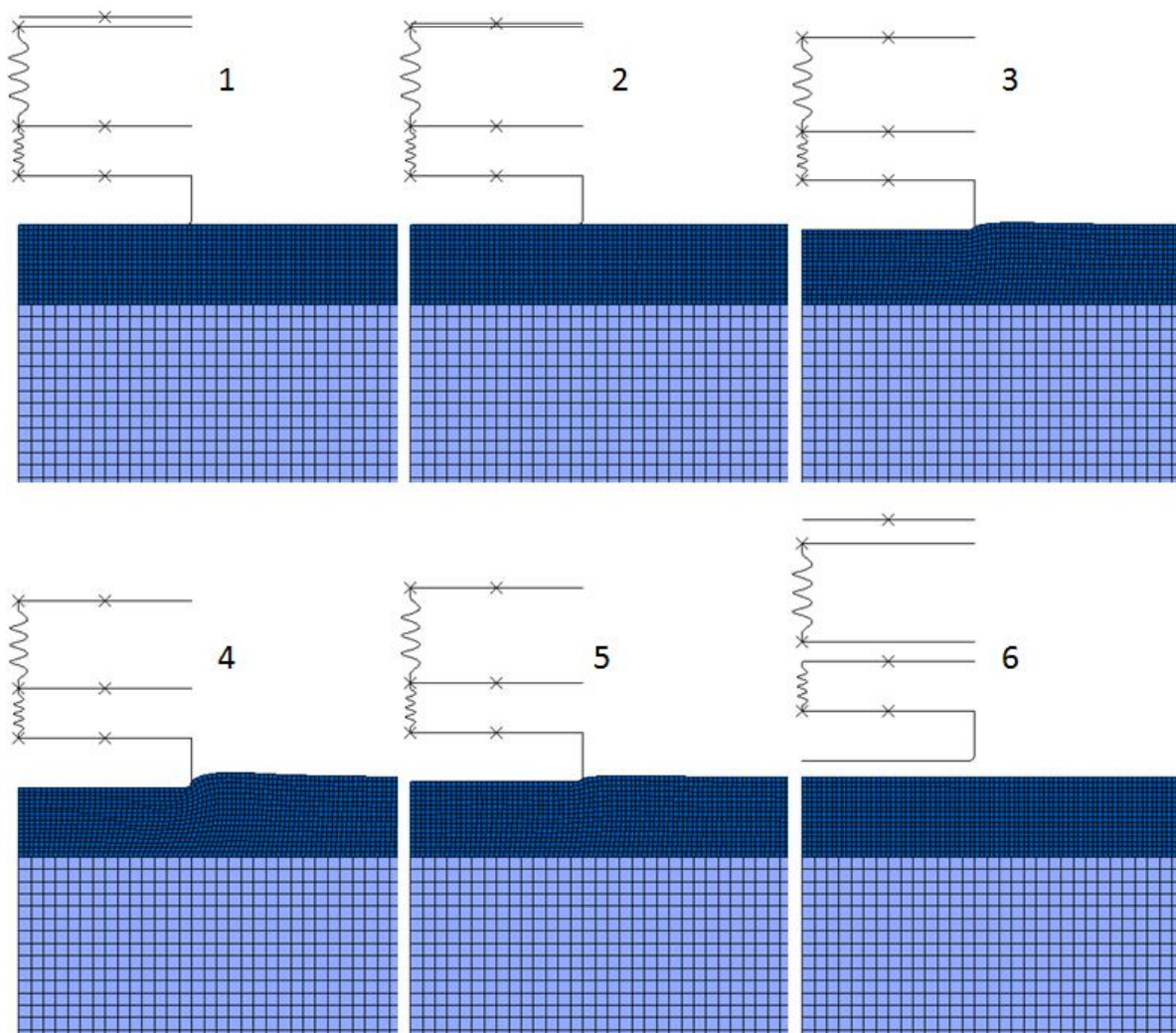


Figura 5.4: frame esemplificativi della simulazione agli elementi finiti del Force Reduction test; 1- configurazione iniziale del sistema, 2- fase di caduta del peso, 3- impatto del peso sull'incudine, inizio deformazione della molla e del manto sotto al piede dell'Atleta artificiale, 4- massima deformazione del manto, 5- risposta del manto che provoca il rimbalzo dei componenti impattanti, 6- fase finale della prova, rimbalzo dei componenti e ritorno alla configurazione indeformata da parte del manto testato

Come si nota nella *Figura 5.4* gli spostamenti del campione a seguito dell'impatto non sono trascurabili rispetto alla sua configurazione iniziale.

Il dato di maggiore interesse tra gli output delle simulazioni eseguiti è l'andamento della forza in gioco durante l'impatto con la superficie da testare. Questo risultato è stato ottenuto direttamente andando a leggere i valori di forza applicati sulla cella di carico durante l'intera simulazione.

Capitolo 6. MODELLAZIONE DEI TEST CON L'ATLETA ARTIFICIALE

In primo luogo è stata eseguita un'analisi numerica con la configurazione riportata in *Figura 5.1*, confrontando poi l'andamento della forza durante la simulazione con il segnale fornito dall'Atleta artificiale durante una prova con la stessa configurazione. Tutti i dati derivanti da test di laboratorio sono stati presi da un lavoro precedente (11).

Variando lo spessore del manto in gomma EPDM da testare è stato indagata l'influenza dello spessore sui risultati ottenuti. In seguito a queste analisi è stato riscontrato un buon accordo tra gli andamenti di forza della simulazione e i segnali dell'Atleta artificiale: quindi si è deciso di passare al confronto basando lo studio principalmente sui valori di *Force Reduction* ricavati.

Modificando la rigidità della pavimentazione modellata da 100 MPa fino a 60 GPa, è stato possibile investigare l'influenza del modulo elastico del substrato rigido sui valori di *Force Reduction*.

Grazie ai valori dell'estrapolazione e delle bande di confidenza, è stata eseguita un'analisi parametrica sui coefficienti dell'equazione costitutiva iperelastica per descrivere il materiale elastomerico.

In seguito è stata studiata la misura della *Force Reduction* in particolari configurazioni di prova che altrimenti non si sarebbero potute ottenere in laboratorio: simulazioni di superfici con differenti spessori (da 8 mm a 120 mm) e di materiali con diversi valori di modulo elastico, in modo da indagare un ampio intervallo di rigidità (da 1 MPa del poliuretano espanso fino ai 30 GPa del calcestruzzo). Grazie a queste analisi numeriche è stata approfondita la correlazione tra *Force Reduction* e le proprietà del materiale o lo spessore della superficie.

6.1 ANDAMENTO DELLA FORZA

Nel *Grafico 6.1* si può notare come l'andamento della forza durante la simulazione segua in maniera accurata il segnale fornito dall'Atleta artificiale.

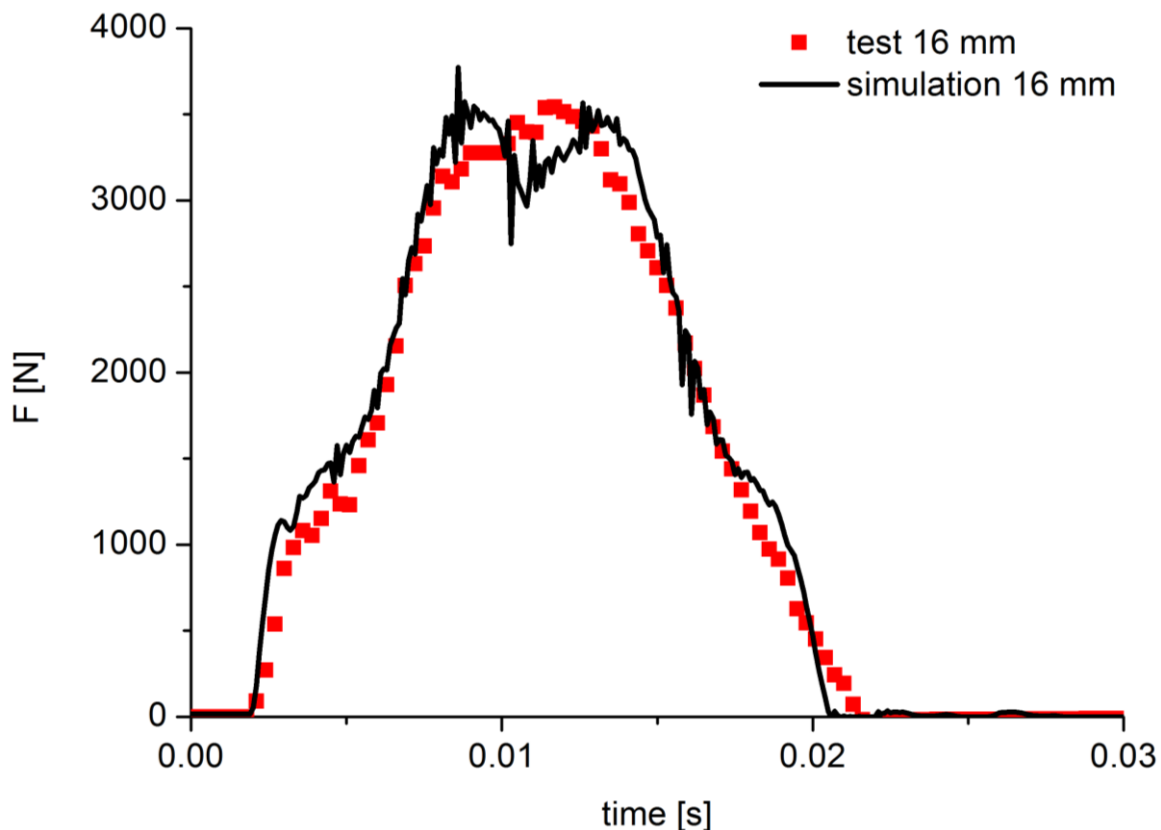


Grafico 6.1: confronto tra i risultati di laboratorio e quelli della simulazione di un test per la valutazione della Force Reduction su un manto in gomma EPDM per superfici sportive con uno spessore di 16 mm

La differenza evidente tra i due andamenti riportati nel *Grafico 6.1* è dovuta alle oscillazioni presenti nel risultato della modellazione: questa peculiarità è legata con ogni probabilità al rimbalzo di alcuni componenti contro la cella di carico, la quale durante l'impatto oscilla tra il piede dell'Atleta artificiale e la molla. A supporto di questa ipotesi sono state rappresentate graficamente le distanze tra le diverse componenti coinvolte rapportandole alla curva forza/tempo. Nel *Grafico 6.2* le distanze relative sono stimate partendo dal valore nullo, il quale rappresenta il contatto tra due superfici; naturalmente non sarebbero possibili delle distanze

inferiori, ma i valori negativi presenti nel grafico sono dovuti alla minima penetrazione concessa dalla formulazione *Penalty* del contatto.

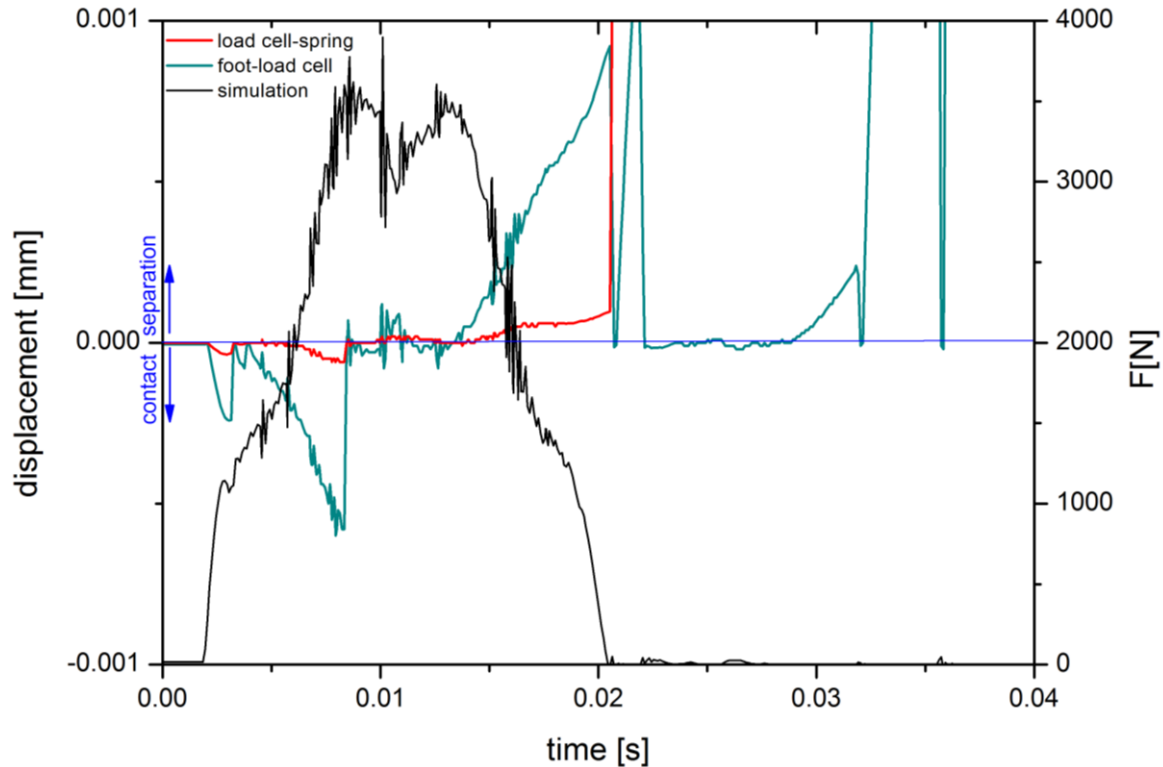


Grafico 6.2: rappresentazione grafica della distanza tra i diversi componenti (piede, cella di carico e molla) durante la modellazione del Force Reduction test confrontata con l'andamento della forza. Una distanza tra i due elementi minore o uguale a zero significa che le due superfici sono a contatto. In nero è riportato l'andamento della forza ottenuto durante la simulazione (asse delle ordinate di destra)

Come si nota dal *Grafico 6.2*, gran parte delle oscillazioni nel valore di forza coincide con gli impatti ripetuti tra le diverse parti del sistema: in particolare con il piede dell'Atleta artificiale, il quale rimbalza tra la cella di carico che gli trasmette la forza proveniente dall'alto e il manto che si oppone alla deformazione.

Infine non è da escludere, che a causa della limitata frequenza di acquisizione dell'apparecchiatura, l'Atleta artificiale possa essere insensibile a questo tipo di oscillazioni, fornendo così un segnale apparentemente più pulito.

6.1.1 Influenza dello spessore sull'andamento della forza

Variando lo spessore del manto è stato messo in evidenza come, anche al variare della dinamica d'impatto, l'andamento di forza derivante dalle modellazioni segua in maniera ottimale il segnale fornito dai test di laboratorio. Un esempio di questi confronti tra i due risultati è riportato nel *Grafico 6.3*.

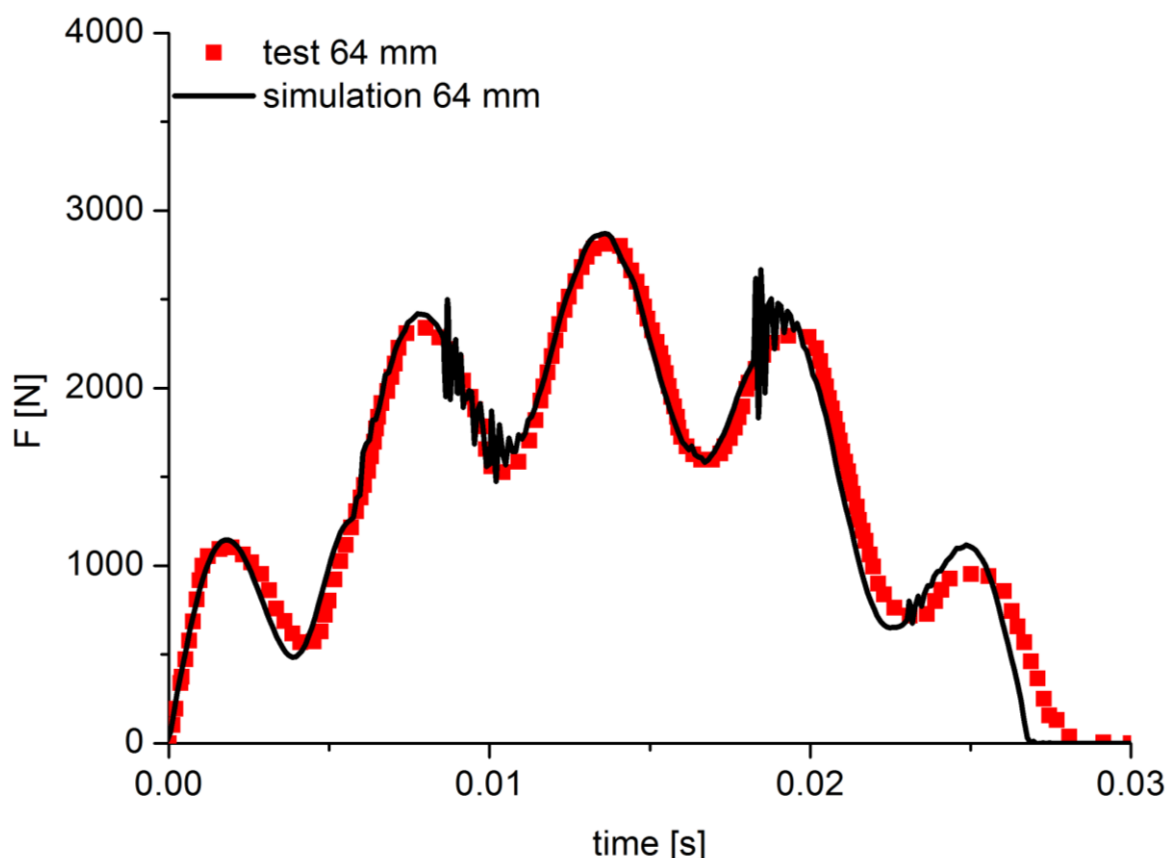


Grafico 6.3: confronto tra l'andamento della forza ottenuto dalle prove in laboratorio e quello derivante dalla simulazione di un test per la valutazione della Force Reduction su un manto in gomma EPDM per superfici sportive con uno spessore di 64 mm

Paragonando i risultati riportati nel *Grafico 6.1* con quelli del *Grafico 6.3* si nota come all'aumentare dello spessore di gomma EPDM nell'andamento della forza si evidenzino dei picchi dovuti a delle oscillazioni all'interno del materiale elastomerico che funge come una nuova molla in serie alle due già presenti (23): questo comportamento non era facilmente rilevabile nella simulazione precedente a causa del fatto che con uno spessore ridotto di gomma (es. 16 mm) il valore di forza è

sensibilmente influenzato dal substrato in calcestruzzo, il quale essendo molto più rigido non permette questo genere di oscillazioni della forza al suo interno.

Un ulteriore aspetto legato al cambiamento nella dinamica della simulazione è fornito dall'aumento del tempo d'impatto, il quale decresce all'aumentare della forza massima registrata come già riscontrato nei test di laboratorio. A titolo esemplificativo nel *Grafico 6.4* sono riportate alcune curve ottenute dalla simulazione del *Force Reduction test* su manti di gomma EPDM con diversi spessori.

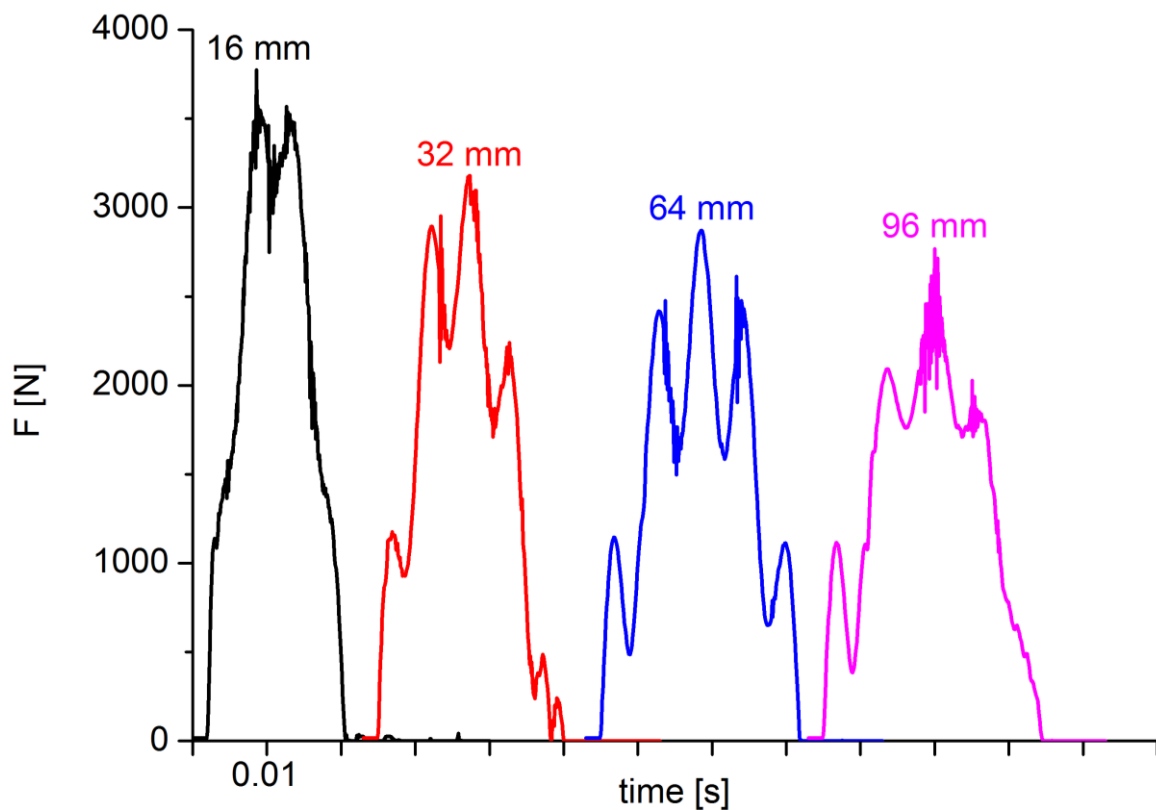


Grafico 6.4: andamenti dal valore di forza letto sulla cella di carico durante le simulazioni del Force Reduction test su manti in gomma EPDM di diverso spessore; le curve sono traslate orizzontalmente al fine di semplificarne il confronto

Dalle analisi eseguite è stato possibile confermare l'effetto, ipotizzato in un lavoro precedente (11), che lo spessore della superficie da testare ha sul valore di forza massima misurato, nello specifico, un aumento di spessore provoca una minore influenza del substrato rigido sull'andamento della forza: di conseguenza si riscontrano valori più bassi e tempi d'impatto dilatati.

6.2 DETERMINAZIONE DELLA *FORCE REDUCTION*

Verificato l'accordo tra le simulazioni e i test di laboratorio anche al variare delle dinamiche d'impatto, si è passati al confronto dei valori di *Force Reduction*. Per fare ciò è stato necessario rielaborare i valori di forza ottenuti mediante l'utilizzo del filtro Butterworth del nono ordine (come descritto nel paragrafo 1.2.2) e riportare la forza massima ricavata ad una forza di riferimento.

6.2.1 Determinazione della forza di riferimento

La forza di riferimento utilizzata per il calcolo dei valori della *Force Reduction* è stata ricavata effettuando una simulazione su una superficie di calcestruzzo secondo la configurazione riportata nella *Figura 5.3*.

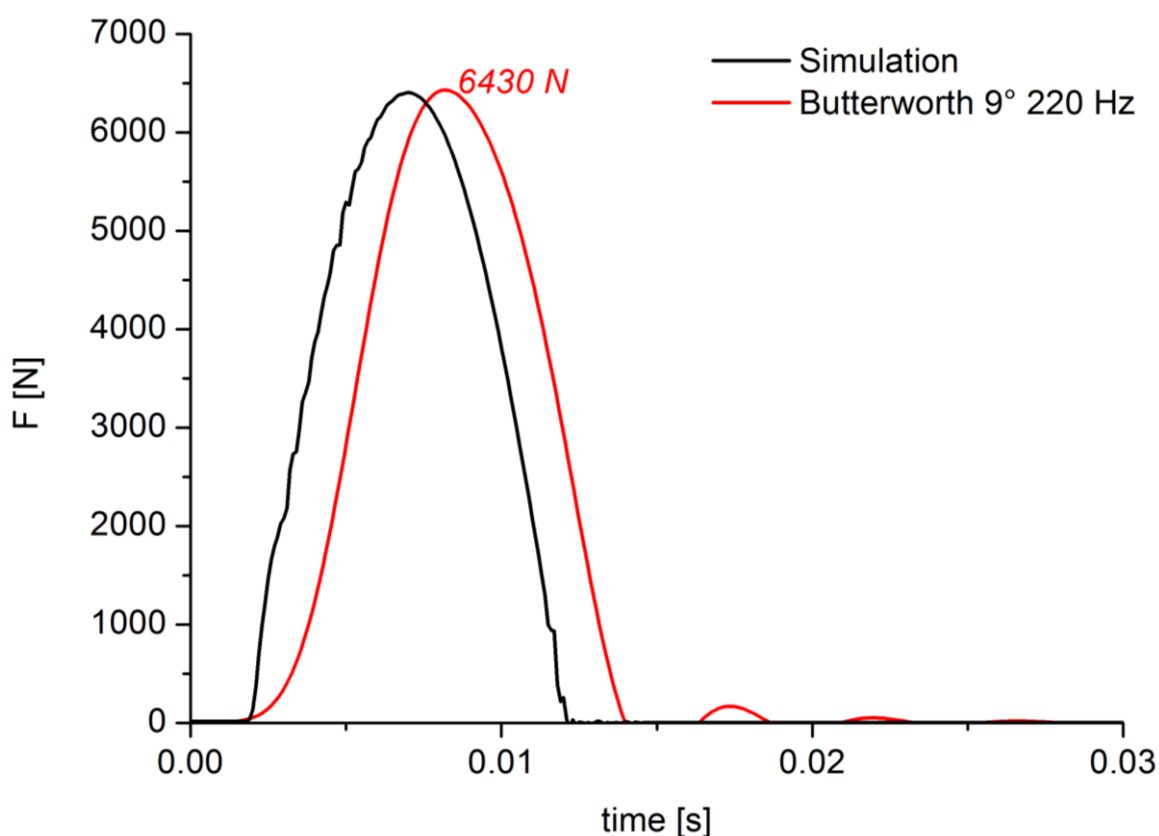


Grafico 6.5: risultato della simulazione agli elementi finiti della configurazione di prova con solo il calcestruzzo per ottenere la forza di riferimento. 6430 N rappresenta la forza di riferimento utilizzata successivamente per il calcolo di tutti i valori della Force Reduction derivanti dalle simulazioni in ABAQUS

Come rappresentato nel *Grafico 6.5*, l'andamento ottenuto dall'analisi agli elementi finiti è stato filtrato con un filtro Butterworth del nono ordine con una frequenza di *cut-off* di 220 Hz: il risultato ottenuto di 6430 N è conforme a quanto stabilito nella norma utilizzata per l'assorbimento di urti nel caso di superfici sportive (6350÷6850 N) (7) e in linea con i valori di riferimento trovato nelle prove di laboratorio (circa 6400 N) (11).

Di seguito dunque tutti i valori della FR derivanti dalle analisi numeriche sono stati rapportati a questa forza di riferimento utilizzando l'*eq.1.1* nella quale si è assunto $F_r=6430$ N.

6.3 STUDIO DELLA FORCE REDUCTION

6.3.1 Influenza del modulo del substrato

Nonostante l'ampio intervallo entro il quale è stato fatto variare il modulo del substrato (da 100 MPa fino a 60 GPa), il risultato delle simulazioni del *Force Reduction test* resta pressoché invariato, come si può notare dal *Grafico 6.6*. Di fatti a causa di una elevata differenza di rigidità tra il manto e la pavimentazione si ha un'influenza del substrato sempre uguale.

6.3.2 Andamento della Force Reduction per diversi materiali

Nel *Grafico 6.7* sono riportati gli andamenti della FR ottenuti dai test di laboratorio confrontati con alcuni dei risultati delle simulazioni.

Le simulazioni sono state eseguite modellando i materiali secondo due diversi comportamenti: lineare elastico o iperelastico.

Nel caso del polietilene e del polibutene è stato ritenuto sufficiente descrivere il comportamento in maniera lineare elastica: i materiali si differenziano uno dall'altro unicamente per il modulo di Young, il coefficiente di Poisson e la densità. I valori di FR riportati per le due gomme studiate sono stati ricavati modellando sia un comportamento lineare elastico sia l'equazione di Mooney-Rivlin: così da poter mettere in evidenza la differenza tra questi due modelli.

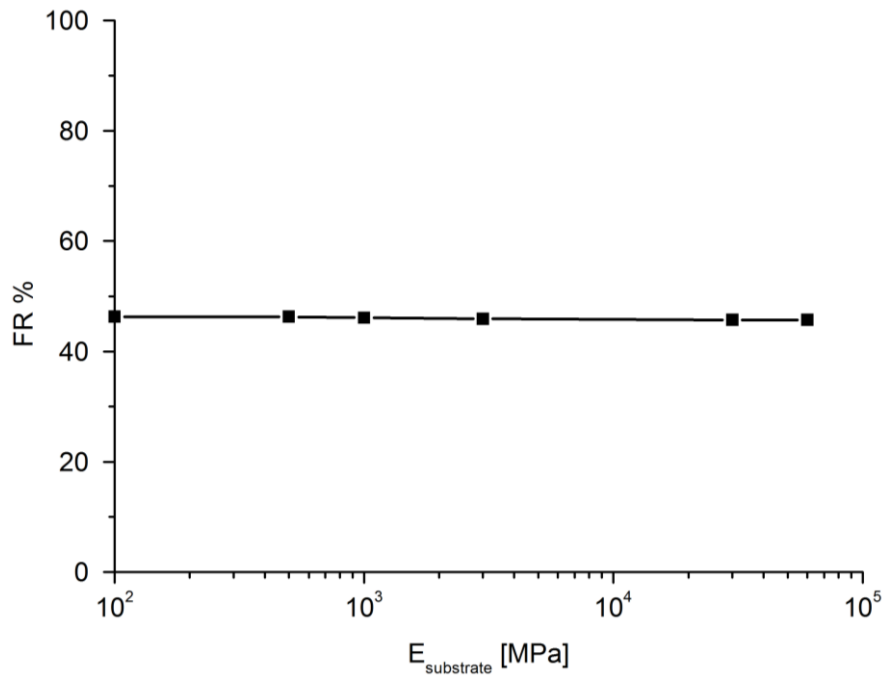


Grafico 6.6: influenza della variazione del modulo del substrato sulla misura della Force Reduction ricavata simulando un manto di gomma EPDM dallo spessore di 16 mm

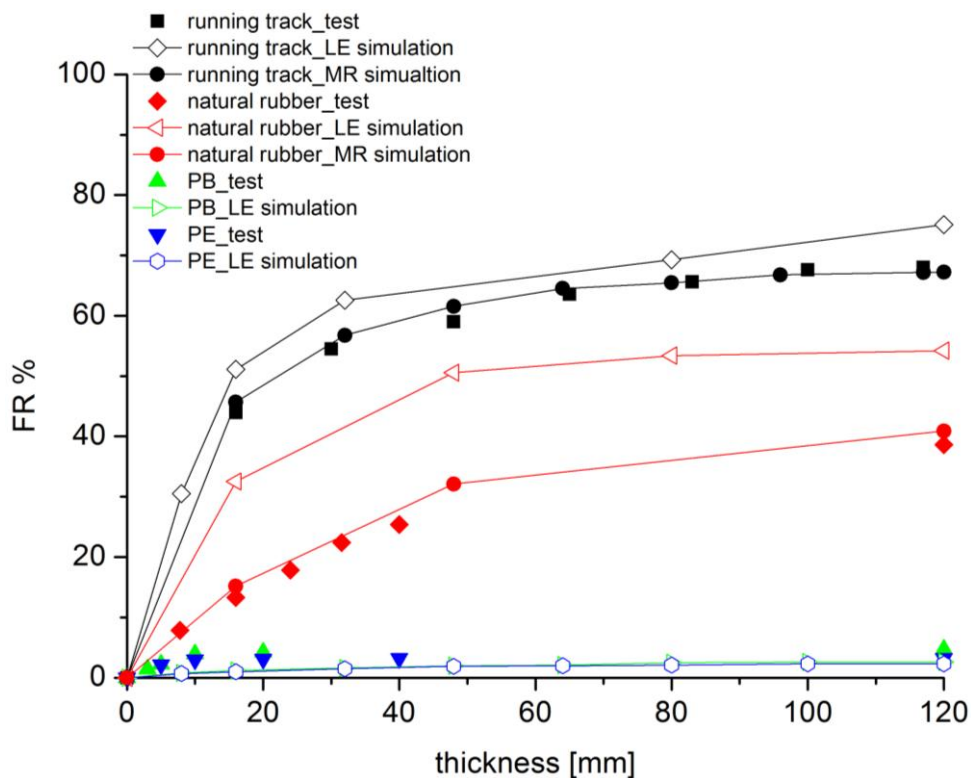


Grafico 6.7: confronto tra l'andamento della Force Reduction ottenuto dai test di laboratorio e quello derivante dalle simulazioni agli elementi finiti. Per i materiali elastomerici analizzati sono riportati i risultati ottenuti modellandoli sia come lineari elastici (LE) sia con l'equazione di Mooney-Rivlin (MR). Per quanto riguarda i risultati dei test a 120 mm i valori riportati sono estrapolati utilizzando l'eq.1.2 (eccezion fatta per i manti sportivi di cui si possiedono valori di FR fino a 117 mm)

I risultati ottenuti dalle analisi numeriche del test con l'Atleta artificiale variando lo spessore della superficie simulata ricalcano in maniera inequivocabile quanto già riscontrato nei test di laboratorio: un andamento crescente della FR all'aumentare dello spessore fino al raggiungimento di un valore pressoché costante.

Inoltre dal *Grafico 6.7* risulta evidente come il modello di Mooney-Rivlin descriva in maniera chiaramente migliore il comportamento dei due materiali elastomerici: difatti Mooney-Rivlin, a differenza del modello lineare elastico, tiene conto della maggiore rigidità in compressione dei materiali elastomerici testati (il confronto tra i modelli è riportato nel *Grafico 1.5*).

Partendo da questi risultati si è deciso di indagare l'effetto delle proprietà del materiale sulla misura di *Force Reduction* nel caso dei due diversi metodi di modellazione: i coefficienti di Mooney-Rivlin e il modulo elastico.

6.3.3 Influenza dei coefficienti di Mooney-Rivlin sulle misure di FR

Per investigare l'influenza dei coefficienti di Mooney-Rivlin sulle misure di *Force Reduction* sono state eseguite differenti simulazioni, assegnando a C_{10} e C_{01} i valori riportati nella *Tabella 3.3*

Lo studio parametrico è stato svolto riportando graficamente i risultati ottenuti tenendo fisso un coefficiente e facendo variare l'altro. Dal *Grafico 6.8* risulta evidente come la variazione del coefficiente C_{10} nell'intervallo considerato abbia un effetto molto più marcato sul valore della FR rispetto alla variazione del secondo che risulta quasi trascurabile quando C_{10} raggiunge i valori più alti.

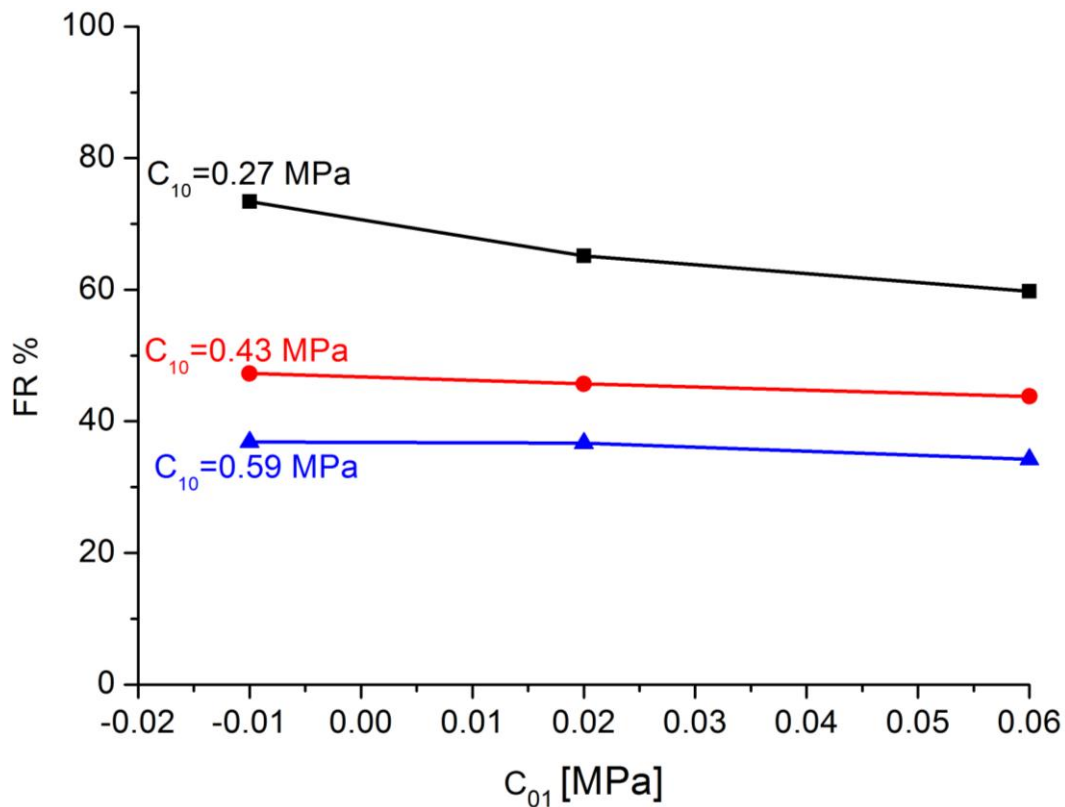


Grafico 6.8: rappresentazione grafica dell'influenza che i due coefficienti di Mooney-Rivlin hanno sulla misura della Force Reduction

6.3.4 Influenza del modulo elastico sulle misure della FR

Nel Grafico 6.9 sono riportate delle serie di simulazioni effettuate modellando i materiali come lineari elastici e con modulo compreso tra 1 MPa e 30 GPa; lo spessore delle superfici da testare è stato variato da 8 mm fino a 120 mm. Le simulazioni sono state eseguite con spessori delle superfici fino a 120 mm perché questo valore è stato considerato come sufficiente a eliminare l'effetto del substrato per qualsiasi materiale simulato. La supposizione è stata compiuta sulla base dei dati di laboratorio riportati nel Grafico 1.2 ed estrapolati secondo la correlazione empirica (eq.1.2).

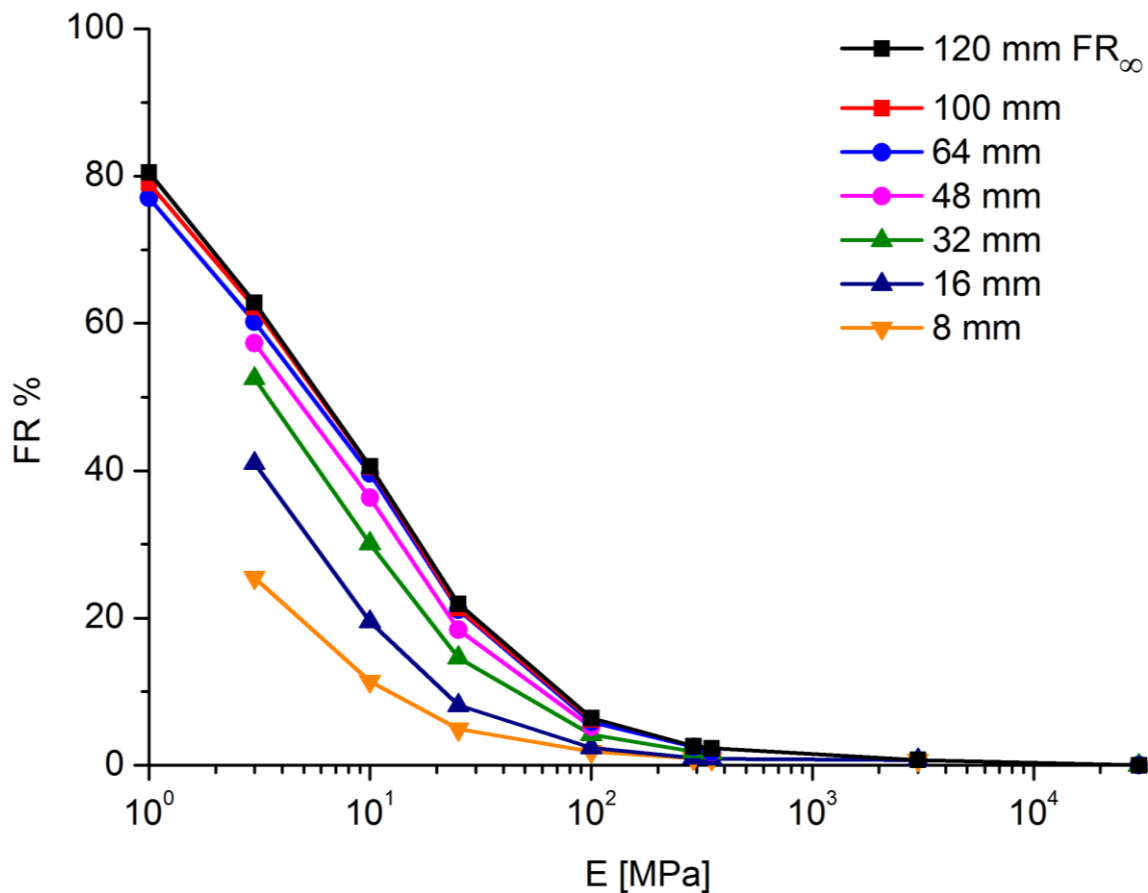


Grafico 6.9: andamento del valore della Force Reduction in funzione del modulo per materiali modellati secondo un comportamento lineare elastico e con spessori differenti

Da questa correlazione risulta un andamento decrescente della *Force Reduction*, dove la pendenza della curva è legata allo spessore della superficie da testare. Dal Grafico 6.9 si nota come la supposizione che 120 mm fosse già uno spessore in grado di restituire un valore asintotico di FR sembrerebbe rivelarsi giusta, eccezion fatta per il poliuretano, per il quale anche uno spessore di 120 mm potrebbe non essere sufficiente ad eliminare del tutto l'influenza del substrato.

Per questo motivo d'ora in avanti la curva della FR derivante dalle modellazioni con superfici di spessore 120 mm sarà identificata anche come la curva dei valori asintotici di *Force Reduction* (FR_{∞}). Di seguito sono riportati i valori di *Force Reduction* dei diversi materiali simulati con i relativi moduli elastici.

E [MPa]	1	3	10	25	100	290	350	3000
$FR_{\infty}\%$	81.1	62.8	40.6	21.4	6.4	2.6	2.3	0.2

Tabella 6.1: valori asintotici della Force Reduction per i diversi materiali simulati con comportamento lineare elastico

6.3.4.1 Correlazione tra Force Reduction e s_0

Al fine di cercare una conferma dell'equazione empirica proposta nel lavoro precedente (eq.1.2) nel Grafico 6.10 sono stati riportati i valori di Force Reduction espressi in funzione dello spessore per i diversi materiali modellati con comportamento lineare elastico.

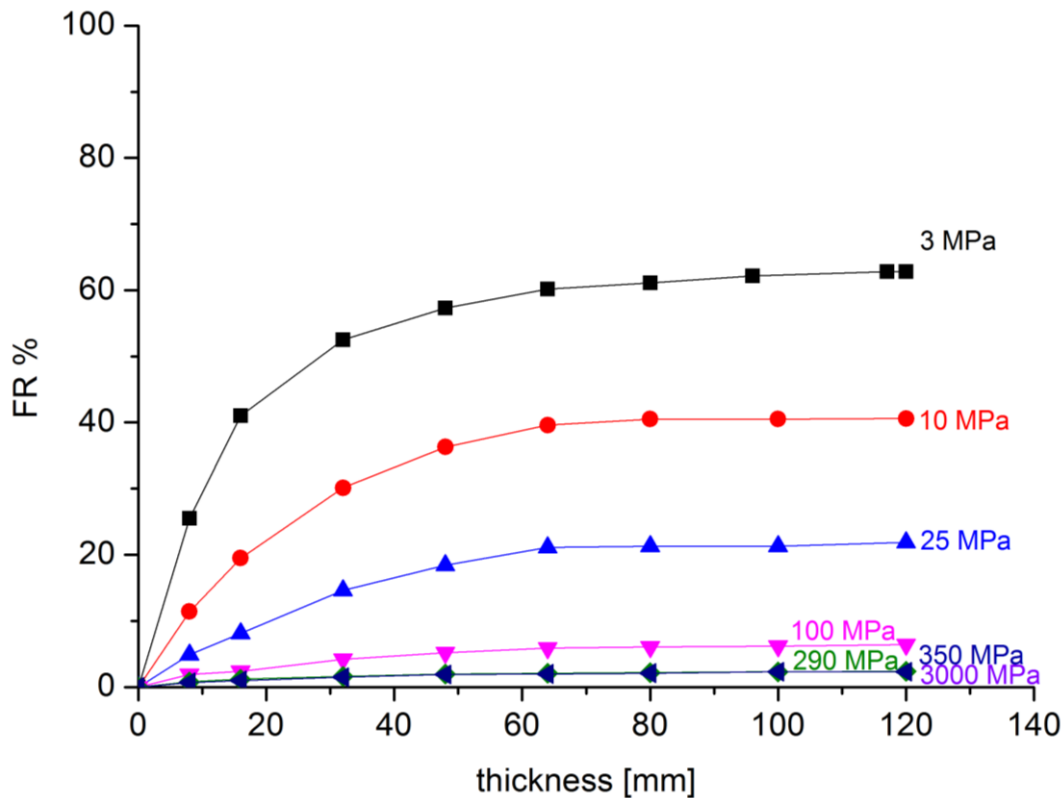


Grafico 6.10: andamento della Force Reduction simulato in funzione dello spessore per diversi materiali simulati come lineari elastici

Utilizzando l'equazione empirica (eq.1.2) è stato poi effettuato un *fit* non lineare cercando di ottenere maggiori informazioni riguardanti la variabile che compare nella correlazione: s_0 , la quale rappresenta la rapidità con cui la Force Reduction giunge al valore asintotico.

Per meglio esaminare la rapidità con cui per ogni materiale si arriva all'asintoto, gli andamenti del *Grafico 6.10* sono stati normalizzati rispetto ai valori di FR_{∞} riportati nella *Tabella 6.1*, ottenendo così il seguente grafico:

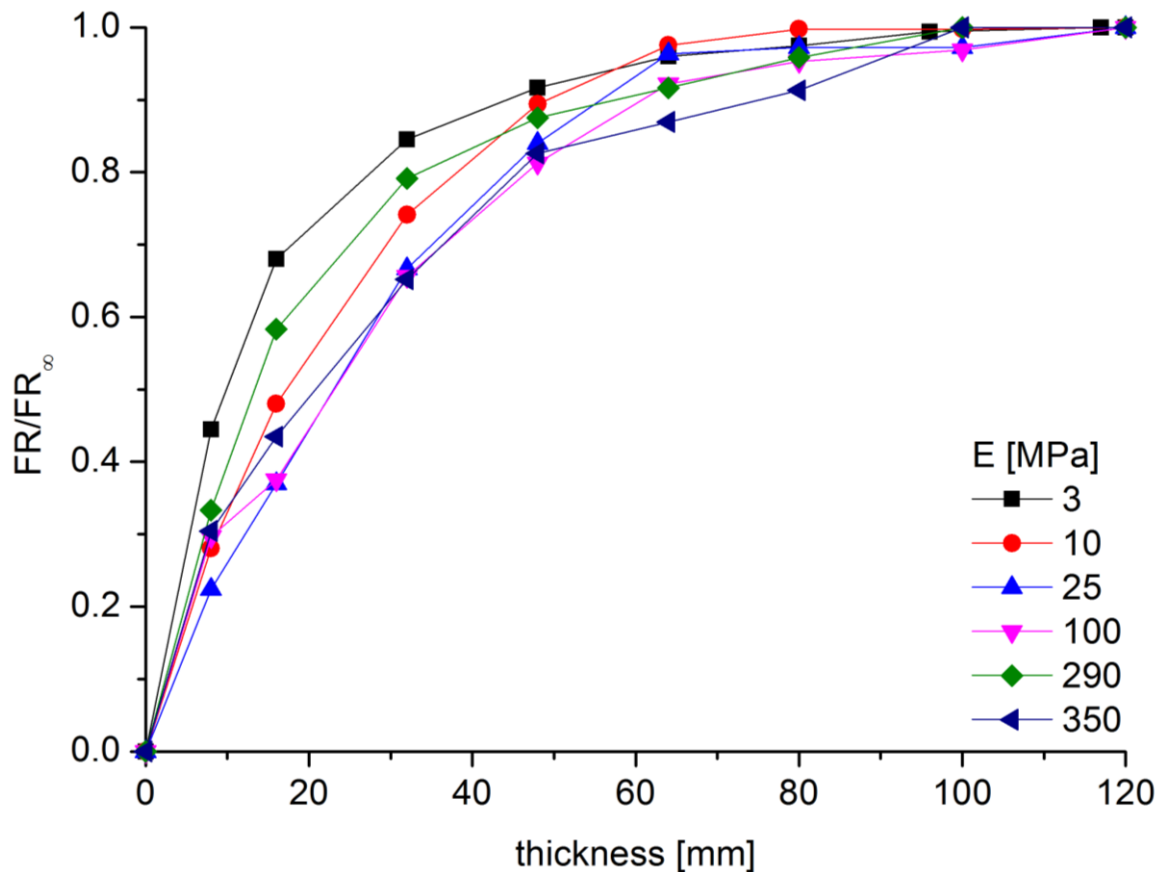


Grafico 6.11: andamento della Force Reduction normalizzata in funzione della variazione di spessore

Si può notare le simulazioni non hanno un andamento del tutto regolare, risulta quindi difficile eseguire un *fit* e ricavarne dei parametri in grado di descriverlo; infatti, non è stato possibile trovare una correlazione che legasse i valori dello spessori s_0 al modulo del materiale. Difatti dal *Grafico 6.12* si delinea solamente un trend apparente che sembrerebbe indicare valori di s_0 inferiori (quindi una maggiore rapidità nel raggiungere il valore asintotico) per i materiali meno rigidi.

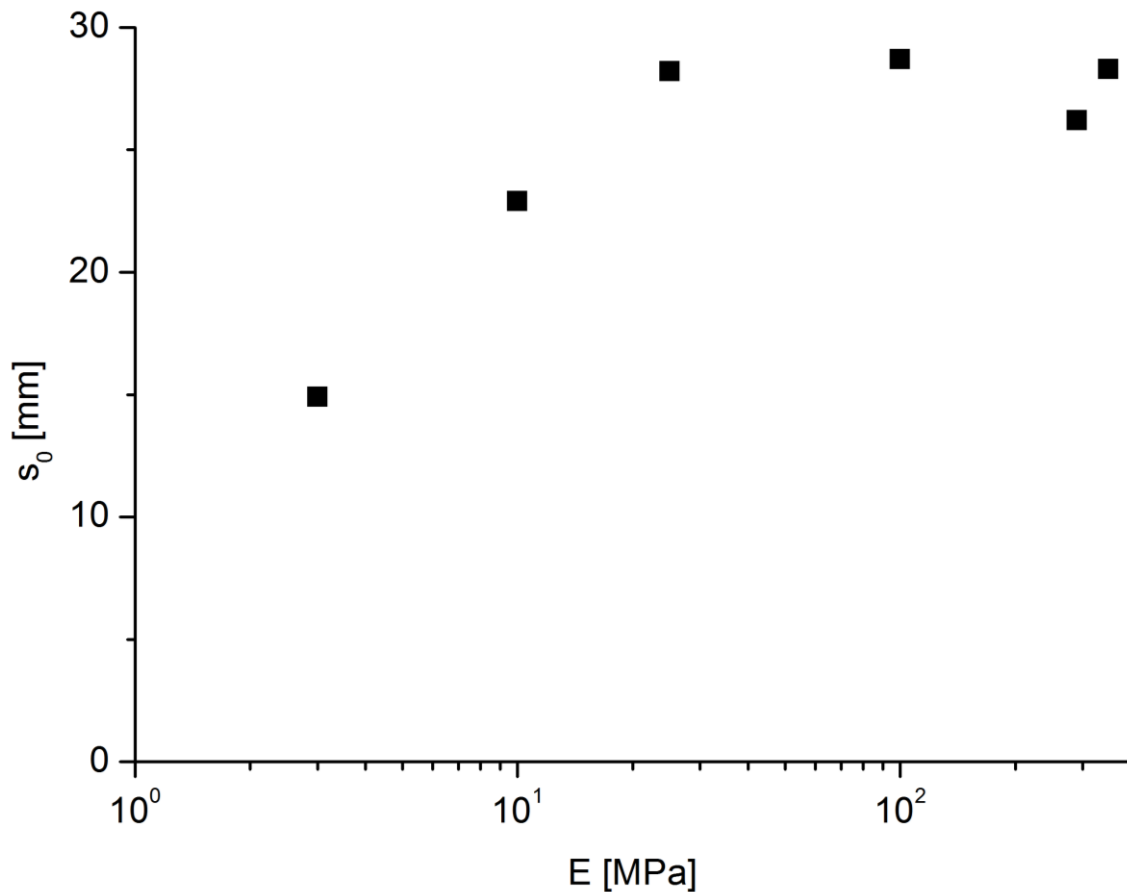


Grafico 6.12: valori di s_0 derivanti dal fitting non lineare in funzione del modulo di Young dei materiali simulati

6.4 CONFRONTO TRA LE FR_{∞} DEI DIVERSI MATERIALI

In questo paragrafo è riportato un confronto tra i valori della *Force Reduction* asintotici ricavati in laboratorio (*Grafico 1.3*) e quelli ottenuti dalla modellazione con materiali e spessori da testare differenti in funzione del modulo elastico.

Nel *Grafico 6.13* i valori asintotici della FR per materiali lineari elastici sono rappresentati dalla linea continua, e sono confrontati con i valori estrapolati dai risultati di laboratorio. Inoltre nel grafico sono presenti anche due valori che rappresentano i risultati delle simulazioni effettuate descrivendo i materiali elastomerici in ABAQUS attraverso il modello di Mooney-Rivlin, i cui parametri sono stati caratterizzare in precedenza; il modulo da utilizzare per rappresentare questi due materiali iperelastici è stato stimato inserendo nell'*eq.1.18* il primo coefficiente dell'equazione costitutiva che li rappresenta. Per poter confrontare i due modelli costituiti utilizzati anche a moduli elevati è stato aggiunto anche un dato derivato da

una simulazione col modello di Mooney-Rivlin impostando un valore del primo coefficiente pari a 17 MPa (corrispondenti ad un modulo di Young di 51 MPa).

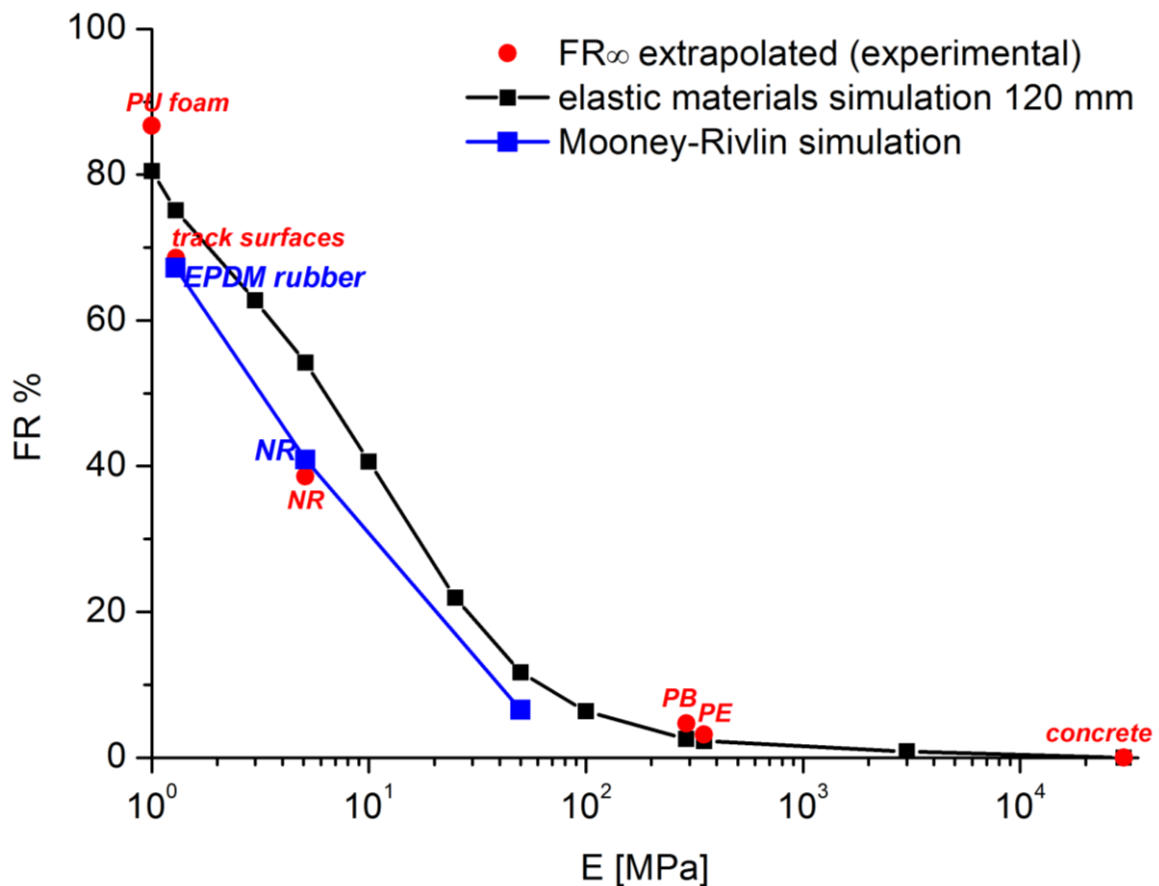


Grafico 6.13: confronto tra i valori di Force Reduction asintotici estrapolati dalle prove di laboratorio e i valori ottenuti dalle simulazioni, facendo distinzione tra materiali modellati come elastici e le due gomme descritte invece con il modello iperelastico di Mooney-Rivlin. I moduli elastici delle gomme sono stati ricavati partendo dal primo coefficiente del modello e utilizzando l'eq.1.18; inoltre è stato aggiunto un ulteriore valore ricavato dalle simulazioni col modello di Mooney-Rivlin imponendo $C_{10}=17$ MPa

Un risultato interessante derivante da questo grafico è legato alla natura della misura della Force Reduction che sembrerebbe essere determinata puramente dalla risposta elastica dei materiali polimerici presi in esame: difatti l'unica proprietà che sembra influire sulla risposta dei test d'impatto all'Atleta artificiale risulta essere la rigidezza.

Da questo studio risulta palese l'efficacia del modello di Mooney-Rivlin utilizzato per stimare la Force Reduction dei due materiali elastomerici con comportamento

iperelastico: infatti i dati ottenuti vanno a sovrapporsi con i risultati delle prove all'Atleta artificiale.

Ciò porta a concludere che sia possibile ipotizzare una correlazione tra il valore asintotico della *Force Reduction* e il modulo di Young, ma solo a scopo indicativo, in quanto altre proprietà influiscono sui risultati delle prove, come ad esempio il comportamento non lineare delle superfici sportive e la loro incomprimibilità. Analizzando il *Grafico 6.13* si può notare lo scostamento dei risultati derivanti dalle modellazioni iperelastiche dal trend generale definito dalle simulazioni con materiali lineari elastici: sottolineando ancora una volta come la modellazione lineare elastica tenda a sovrastimare il valore di FR per i materiali elastomerici.

Capitolo 7. CONCLUSIONI

La *Force Reduction* non è una proprietà intrinseca del materiale ma dipende anche dalla geometria della superficie in esame: per poterla correlare alle altre proprietà del materiale è stato quindi necessario eliminare questa dipendenza utilizzando dei valori di spessori tali da non risentire della pavimentazione rigida sottostante. A seguito di questa indagine tramite la modellazione agli elementi finiti dei test con l'Atleta artificiale è stato possibile confermare l'influenza dello spessore sui valori della *Force Reduction*: all'aumentare dello spessore si verifica una diminuzione della FR dovuta alla minor influenza del substrato rigido sulla risposta. Inoltre questo andamento è più marcato per quanto riguarda i materiali con bassi valori di modulo elastico e con spessori tipici delle superfici per piste di atletica.

Utilizzando l'equazione empirica ricavata nel lavoro precedente, è stata cercata una correlazione tra la *Force Reduction* e lo spessore della superficie. Da questo studio è risultato come all'aumentare della rigidità la FR abbia un valore asintotico inferiore; tuttavia non è stata riscontrata una chiara correlazione tra la rapidità con cui si arriva a questo valore e il modulo del materiale. Sembrerebbe esserci solamente un trend che indica una maggiore rapidità per i materiali meno rigidi.

Il modello iperelastico utilizzato per le due gomme permette di prevedere molto bene il valore di *Force Reduction*, anche se i materiali elastomerici tipici per la realizzazione delle piste di atletica non sono omogenei. Resta invece da verificare la sua adeguatezza nel caso in cui vengano presi in considerazione dei manti strutturati.

A valle di questo lavoro di tesi sembra evidente come il contributo del materiale alla misura di Force Reduction sia legato in prevalenza alla risposta puramente elastica: i modelli che permettono di prevedere la FR non tengono conto infatti della parte dissipativa della superficie. Tuttavia va ricordato che, anche se nell'ambito della determinazione della *Force Reduction* non vengono prese in considerazione, le caratteristiche dissipative del materiale possono risultare importanti al fine di smorzare le risposte della pista ad alte frequenze, ritenute dannose per l'apparato locomotorio dell'atleta. Ciò evidenzia un limite della caratterizzazione effettuata attraverso la FR e suggerisce la necessità di analisi più approfondite per chiarire completamente il ruolo del materiale nell'assorbimento degli urti.

Bibliografia

1. **IAAF.** *Track facilities testing protocols.* 2009.
2. *www.mondoworldwide.com.*
3. **R.D.Thomson, A.E.Birkbeck, T.D. Lucas.** *Hyperelastic modelling of nonlinear running surfaces.* Sports Engineering, 2001.
4. **G.Baroud, B.M.Nigg,D.Stefanyshyn.** *Energy storage and return in sport surfaces.* Sports Engineering, 1999, 2, 173-180.
5. **D.J.Stefanyshyn, B.M.Nigg.** *Energy and performance aspects in sport surfaces.* Human Performance Laboratory, University of Calgary, Canada.
6. **M.R.Shorten, J.A.Himmelsbach.** *Shock attenuation of sports surfaces.* Oxford : Blackwell Science, 2002.
7. *UNI EN 14808 Superfici per aree sportive: determinazione dell'assorbimento degli urti.* 2006.
8. **M.Harrison.** *Factors affecting the results of the "Berlin Artificial Athlete" shock absorption test.* 1999.
9. **B.Harting.** *Filters in Artificial Athlete Berlin Determination of Force Reduction.* IST Leipzig, 10 December 2006.
10. **J.V.Durà.** *Opinion study: Application of the IAAF rules in the Valencia region.* International association for Sports Surface Science TECHNICAL FORUM 2000. Schaffhausen.
11. **M.Benanti.** *Piste di atletica leggera: studio dei materiali e dei metodi di prova.* Politecnico di Milano: Tesi di laurea, 2011.
12. **J.V.Durà, A.C.Garcia, J.Solaz.** *Testing shock absorbing materials: the application of viscoelastic linear model.* Sports Engineering, 2002, 5,9-14.
13. *Enciclopedia degli idrocarburi, Vol.II Raffinazione e petrolchimica.* Istituto della enciclopedia italiana fondata da Giovanni Treccani s.p.a., 2006.

14. **A.Romeo.** *Modellazione del comportamento deformazionale delle gomme.*
15. **A.Ali, M.Hosseini,B.B.Sahari.** *A review for constitutive models for rubber-like materials.* American J. of Engineering and Applied Sciences, 2010, 3,232-239.
16. **C.A.Felippa.** *Introduction to Finite Element Method.* 2004.
17. **S.Roensch.** *Finite Element Method: a four-articles series.* 2005.
18. **T.Belytschko, W.K.Liu, B.Moran.** *Non linear finite elements for continua and structures.* JOHN WILEY & SONS,LTD.
19. **J.C.Simo, T.J.R.Hughes.** *Computational Inelasticity.* Springer,1998.
20. *Manuale teorico di ABAQUS.*
21. **X.Ouyang.** *Constitutive equations of rubber under large tensile strain and high strain rates.* 2006.
22. **M.C.Boyce, E.M.Arruda.** *Constitutive models of rubber elasticity: a review.* 2000.
23. **M.Harrison, B.Harting.** *Accuracy and calibration of Artificial Athlete Berlin.*