

**POLITECNICO DI MILANO**

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica

Dipartimento di Elettronica e Informazione



**CONTROLLO D'ASSETTO ROBUSTO  
DI SATELLITI CON ATTUATORI MAGNETICI**

Relatore: Prof. Marco LOVERA

Correlatori: Ing. Andrea CORTI

Ing. Andrea ZANCHETTIN

Tesi di Laurea di:

Alberto CALLONI

Matricola n. 739482

Anno Accademico 2010 - 2011



*A mio padre,  
a mio nonno*



# Sommario

Per satelliti di piccole dimensioni e operanti su orbite a bassa quota (LEO) spesso viene effettuata la scelta di utilizzare *attuatori magnetici* come principali strumenti per il controllo d'assetto. Essi generano coppie meccaniche di controllo attraverso l'interazione di bobine elettromagnetiche con il campo magnetico terrestre.

La difficoltà legata al progetto del sistema di controllo è data dal fatto che le coppie generate dagli attuatori dipendono dal campo geomagnetico, il quale varia in base alla posizione orbitale del satellite. Il problema di controllo d'assetto deve essere, dunque, formulato attraverso un modello tempo-variante.

In questa tesi viene affrontato il problema di *progetto di controllo robusto* dell'assetto di un satellite che dispone di attuatori magnetici. In particolare, vengono proposti due approcci in riferimento ai modelli che descrivono la dinamica d'assetto del satellite; il primo è basato su un modello lineare tempo-periodico, mentre il secondo su un modello lineare parametro-variante. Infine, vengono presentati e discussi i risultati ottenuti applicando tali metodi.



# Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il Professor *Marco Lovera* per la grande disponibilità, cortesia e soprattutto per aver sempre dimostrato interesse nel seguirmi in ogni parte di questo lavoro.

Ringrazio l'Ing. *Andrea Corti* e l'Ing. *Andrea Zanchettin* per essere sempre stati disponibili a risolvere i miei dubbi e per avermi dato un prezioso aiuto nella realizzazione di questa tesi.

Un sentito ringraziamento a mia *mamma*, a mia *sorella*, a mia *nonna*, a mio *cognato* e al dott. *Luciano*, che con il loro supporto morale e con il loro affetto mi hanno permesso di raggiungere questo obiettivo. Penso che in questo caso le parole non bastino per esprimere la mia riconoscenza; vorrei però che il raggiungimento di questo traguardo, per quanto possibile, fosse un premio anche per voi!

Inoltre, vorrei ringraziare tutti i miei *Amici*, i miei *compagni di università* e le persone care con cui ho condiviso questi ultimi anni: menzionare tutti sarebbe un compito estremamente arduo e faticoso, e sicuramente ogni persona coinvolta sa bene che questi ringraziamenti sono rivolti a lei. Per tutto il tempo passato insieme e per tutti i bei momenti che mi avete regalato vi rivolgo un sincero *grazie*.

Infine ringrazio le persone che mi sono state più vicine in questo ultimo periodo mostrando affetto, comprensione e talvolta sostenendomi nei momenti difficili.

*Milano, 20 Dicembre 2011*



# Indice

<b>Lista delle figure</b>	<b>IX</b>
<b>Lista delle tabelle</b>	<b>XI</b>
<b>Acronimi</b>	<b>XVI</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Descrizione del lavoro . . . . .	2
1.2 Struttura della tesi . . . . .	3
<b>2 Modellistica della dinamica d'assetto</b>	<b>5</b>
2.1 Cinematica e dinamica d'assetto . . . . .	5
2.1.1 Sistemi di riferimento e cinematica d'assetto . . . . .	6
2.1.2 Momento angolare e matrice d'inerzia . . . . .	7
2.1.3 Equazioni di Eulero del momento e dinamica d'assetto . . . . .	9
2.2 Controllo d'assetto attraverso attuatori magnetici . . . . .	10
2.3 Modello dinamico linearizzato . . . . .	12
2.3.1 Modellizzazione LTP . . . . .	16
2.3.2 Modellizzazione LPV . . . . .	18
2.4 Rappresentazione dell'incertezza nel modello linearizzato . . . . .	19
2.4.1 Descrizione del modello tramite LFT . . . . .	20
2.4.2 Stabilità robusta del sistema . . . . .	22
<b>3 Controllo robusto <math>H_\infty</math> per il modello LTP</b>	<b>25</b>
3.1 Cenni sui sistemi lineari periodici . . . . .	25
3.1.1 Elementi di teoria per i sistemi LTP . . . . .	26
3.1.2 Sistemi periodici nel dominio delle frequenze . . . . .	27
3.1.3 Calcolo della norma $H_\infty$ . . . . .	29

3.2	Progetto del controllore: approccio $H_\infty$ . . . . .	30
3.3	Controllo robusto $H_\infty$ . . . . .	35
3.4	Controllo $H_\infty$ congiunto: robustezza e prestazioni . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Controllo robusto per il modello LPV</b> . . . . .	<b>49</b>
4.1	Cenni sui sistemi LPV e sul controllo gain-scheduling . . . . .	49
4.2	Approccio per il controllo LPV . . . . .	53
4.2.1	Definizione del parametro variante . . . . .	54
4.2.2	Progetto del controllore LPV . . . . .	56
4.3	Penalizzazione del controllo . . . . .	59
4.4	Controllo robusto LPV/LFT . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Simulazioni e risultati</b> . . . . .	<b>67</b>
5.1	Caso di studio . . . . .	68
5.1.1	Parametri del modello: il satellite MITA . . . . .	68
5.1.2	Scelta del parametro incerto . . . . .	70
5.2	Controllo robusto $H_\infty$ per il modello LTP . . . . .	71
5.2.1	Simulazioni Monte Carlo . . . . .	73
5.2.2	Misure di prestazioni . . . . .	87
5.3	Controllo robusto per il modello LPV . . . . .	91
5.3.1	Taratura dei parametri . . . . .	91
5.3.2	Simulazioni Monte Carlo . . . . .	94
5.3.3	Norma $\mathcal{L}_2$ indotta . . . . .	99
5.4	Conclusioni . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b> . . . . .	<b>101</b>
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>A</b>	<b>Rappresentazioni e trasformazioni spaziali dell'assetto</b> . . . . .	<b>109</b>
A.1	Matrice dei coseni direttori . . . . .	109
A.1.1	Definizioni . . . . .	109
A.1.2	Proprietá di base . . . . .	110
A.2	Rotazioni tramite gli angoli di Eulero . . . . .	111
A.2.1	Angoli di Eulero . . . . .	111
A.2.2	Rappresentazione asse-angolo . . . . .	114
A.3	Il metodo dei quaternioni . . . . .	114
A.3.1	Definizioni e proprietá di base . . . . .	114
A.3.2	Quaternioni e matrice dei coseni direttori . . . . .	115

A.3.3 I quaternioni per la trasformazione dell'assetto . . . . 116



# Elenco delle figure

2.1	Sistemi di riferimento adottati. . . . .	7
2.2	Coordinate per lo studio del moto angolare di un corpo rigido. . . . .	8
2.3	Attuatori magnetici. . . . .	11
2.4	Interpretazione geometrica della coppia $T_{mag}$ come proiezione della coppia ideale $T_{id}$ sul piano $\mathcal{P}$ . . . . .	16
2.5	Approssimazione periodica del campo magnetico terrestre (inclinazione dell'orbita $87^\circ$ , 450 km di altezza). . . . .	17
2.6	Modellizzazione dell'incertezza parametrica: realizzazione LFT. . . . .	21
3.1	Un'iterazione dell'algoritmo di ottimizzazione randomizzato. . . . .	34
3.2	Schema a blocchi: controllo robusto per il modello LTP. . . . .	37
3.3	Schema a blocchi: controllo robusto-ottimo per il modello LTP. . . . .	41
3.4	Configurazione <i>HOT START</i> per il controllo robusto-ottimo $H_\infty$ del sistema LTP. . . . .	44
4.1	Schema a blocchi di un sistema LPV con controllo gain-scheduling. . . . .	50
4.2	Regolarit� del campo geomagnetico: andamento sovrapposto per la durata di 10 orbite (inclinazione dell'orbita $87^\circ$ , 450 km di altezza). . . . .	53
4.3	Componenti della matrice $\Delta\Gamma(b(t))$ (inclinazione dell'orbita $87^\circ$ , 450 km di altezza). . . . .	55
4.4	Schema a blocchi del sistema esteso LPV/LFT. . . . .	65
5.1	Il satellite MITA. . . . .	68
5.2	Controllo robusto: norma dell'errore di orientamento e del dipolo magnetico per $r_\Omega = 5\%$ e $r_\Omega = 10\%$ . . . . .	73
5.3	Controllo ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 15\%$ , $\sigma = 60$ . . . . .	75

5.4	Controllo ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 15\%$ , $\sigma = 120$ . . . . .	76
5.5	Controllo ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 15\%$ , $\sigma = 240$ . . . . .	77
5.6	Controllo ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 30\%$ , $\sigma = 60$ . . . . .	78
5.7	Controllo ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 30\%$ , $\sigma = 120$ . . . . .	79
5.8	Controllo ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 30\%$ , $\sigma = 240$ . . . . .	80
5.9	Controllo robusto-ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 15\%$ , $\sigma = 60$ . . . . .	81
5.10	Controllo robusto-ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 15\%$ , $\sigma = 120$ . . . . .	82
5.11	Controllo robusto-ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 15\%$ , $\sigma = 240$ . . . . .	83
5.12	Controllo robusto-ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 30\%$ , $\sigma = 60$ . . . . .	84
5.13	Controllo robusto-ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 30\%$ , $\sigma = 120$ . . . . .	85
5.14	Controllo robusto-ottimo $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP, $r_\Omega = 30\%$ , $\sigma = 240$ . . . . .	86
5.15	$\  \mathcal{G}_{zw} \ _\infty$ per il controllore progettato utilizzando il modello LTP. . . . .	88
5.16	$\  \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \ _\infty$ per il controllore progettato utilizzando il modello LTP. . . . .	89
5.17	$\  \mathcal{G}_{\delta q_r w_p} \ _\infty$ per il controllore progettato utilizzando il modello LTP. . . . .	90
5.18	$\  \mathcal{G}_{m w_p} \ _\infty$ per il controllore progettato utilizzando il modello LTP. . . . .	90
5.19	Controllo LPV: norma dell'errore di orientamento e del dipolo magnetico al variare della pulsazione di taglio $\omega_{cut}$ del filtro d'ingresso. . . . .	92
5.20	Controllo LPV: norma dell'errore di orientamento e del dipolo magnetico al variare del peso sul controllo $\sigma$ . . . . .	93
5.21	Controllo LPV: simulazioni Monte Carlo del modello LPV per $r_\Omega = 15\%$ . . . . .	95
5.22	Controllo LPV: simulazioni Monte Carlo del modello LPV per $r_\Omega = 30\%$ . . . . .	96

5.23	Controllo robusto LPV/LFT: simulazioni Monte Carlo del modello LPV/LFT per $r_\Omega = 15\%$ . . . . .	97
5.24	Controllo robusto LPV/LFT: simulazioni Monte Carlo del modello LPV/LFT per $r_\Omega = 30\%$ . . . . .	98
5.25	Norma $\mathcal{L}_2$ indotta per il controllore robusto progettato utilizzando il modello LPV/LFT. . . . .	100
A.1	Orientamento degli assi $u, v, w$ solidali al corpo del satellite rispetto ad un altro sistema di riferimento 1, 2, 3. . . . .	110
A.2	Angoli di Eulero: trasformazione dei sistemi di riferimento. . . . .	112



# Elenco delle tabelle

3.1	Parametri dell'algoritmo di ottimizzazione. . . . .	32
4.1	Intervallo e velocità di variazione dei parametri (inclinazione dell'orbita $87^\circ$ , 450 km di altezza). . . . .	56
5.1	Caratteristiche del satellite MITA. . . . .	69
5.2	Parametri orbitali. . . . .	69
5.3	Norme $H_\infty/H_2$ per gli operatori del modello LTP. . . . .	87



# Acronimi

<b>ACS</b>	Attitude Control Subsystem
<b>EMP</b>	Exponentially Modulated Periodic
<b>HTF</b>	Harmonic Transfer Function
<b>IGRF</b>	International Geomagnetic Reference Field
<b>LEO</b>	Low Earth Orbit
<b>LFR</b>	Linear Fractional Representation
<b>LFT</b>	Linear Fractional Trasformation
<b>LMI</b>	Linear Matrix Inequality
<b>LPV</b>	Linear Parametr-Varying
<b>LQR</b>	Linear Quadratic Regulator
<b>LTI</b>	Linear Time-Invariant
<b>LTP</b>	Linear Time-Periodic
<b>LTV</b>	Linear Time-Varying
<b>PDLF</b>	Parameter-Dependent Lyapunov Function
<b>SDP</b>	Semidefinite Programming



# Capitolo 1

## Introduzione

Il sistema di determinazione e controllo d'assetto (*Attitude Determination and Control Subsystem -ADCS-*) esercita un ruolo fondamentale per il progetto di un satellite. L'obiettivo di tale sistema consiste nel mantenere il veicolo spaziale stabile e garantire il corretto orientamento rispetto a direzioni desiderate. Il satellite determina l'orientamento rispetto a uno specifico sistema di riferimento attraverso l'utilizzo di appropriati sensori, e, attraverso il sottosistema di controllo (*Attitude Control Subsystem - ACS -*), calcola le correzioni necessarie per raggiungere l'assetto desiderato. Questi segnali di controllo vengono utilizzati dagli attuatori per compiere le manovre di ri-orientamento.

Una soluzione efficace ed affidabile per il controllo attivo di piccoli satelliti consiste nell'utilizzo di attuatori elettromagnetici. Inoltre, questa scelta risulta particolarmente adatta per missioni satellitari su orbite LEO.

Il principio di funzionamento si basa sull'interazione del dipolo magnetico generato dalle bobine magnetiche con il campo magnetico terrestre. In questo modo é possibile fornire delle coppie per il controllo d'assetto del satellite.

Tuttavia, la principale difficoltà nel progetto di controllo é data dal fatto che le coppie di controllo dipendono dal campo geomagnetico, il quale varia lungo orbita percorsa dal satellite. Questo implica che la dinamica d'assetto può essere solamente espressa tramite un modello tempo-variante.

Per i problemi di controllo lineare é possibile ottenere buone soluzioni, in termini di stabilità e prestazioni, utilizzando metodi che si basano sull'approssimazione tempo-periodica e parametro-variante di tale modello.

Lo scopo di questa tesi é studiare il problema di controllo nel caso in

cui i modelli, che descrivono la dinamica d'assetto, presentino dei parametri incerti. Si espongono, dunque, dei metodi di progetto di controllo robusto che permettono di verificare contemporaneamente requisiti prestazionali e di robustezza per il sistema soggetto ad incertezza parametrica.

La validazione sperimentale di tali approcci é stata effettuata a livello di simulazione.

## 1.1 Descrizione del lavoro

L'utilizzo di attuatori magnetici é stato oggetto di numerosi studi sia per il controllo attivo dell'assetto che per la gestione del momento angolare del veicolo spaziale.

La principale difficoltà nel progetto di controllo é data dal fatto che le coppie magnetiche, generate dagli attuatori per controllare l'orientamento del satellite, sono vincolate a rimanere istantaneamente sul piano ortogonale alla direzione del campo magnetico terrestre. La dipendenza dal campo geomagnetico conduce, dunque, alla formulazione dei problemi di controllo attraverso modelli tempo-varianti.

Negli ultimi anni, sono state formulate diverse soluzioni per il problema di controllo d'assetto tramite attuatori magnetici sulla linea della struttura comune per le leggi di controllo detta "projection-based" (*e.g.*, si veda [20]). In particolare, facendo riferimento a problemi di controllo lineare, si possono identificare alcune principali linee di ricerca presenti in letteratura.

Il primo approccio, originariamente proposto in [28] e successivamente sviluppato in [11], riguarda i metodi basati su modelli medi: l'idea consiste nell'approssimare la dinamica d'assetto tempo-variante con un modello tempo-invariante medio e utilizzare le classiche tecniche di controllo per i sistemi LTI. Tuttavia, tali formulazioni permettono solamente di verificare a posteriori i risultati del controllo, introducendo dei limiti per le prestazioni del sistema in anello chiuso.

Altri metodi, invece, sfruttano la quasi periodicitá del campo geomagnetico per esprimere il modello nel contesto LTP. Diversi studi hanno impiegato la teoria di controllo ottimo periodico per il progetto di controllori sia in configurazione state-feedback che output-feedback (*e.g.*, [18], [27], [21], [35], [22]). Inoltre, sono state sviluppate alcune tecniche per il progetto di regolatori con guadagno costante (*e.g.*, [39], [24]) al fine superare le difficoltà implementative dei controllori periodici (per una discussione dettagliata si veda [27]).

Recentemente sono stati considerati approcci basati sulla modellizzazione LPV (*e.g.*, [7]): l'idea consiste nello sfruttare il fatto che il campo magneti-

co può essere misurato in modo preciso a bordo del satellite e la dinamica d'assetto tempo-variante può essere rappresentata in forma LPV.

D'altro canto, non è stata trattata la possibile incertezza dei parametri fisici presenti nel modello e l'eventuale effetto che essa potrebbe avere sulle prestazioni del sistema. Attraverso la teoria ben consolidata del controllo lineare robusto è possibile sviluppare metodi di progetto per il problema considerato.

Questa tesi si pone l'obiettivo di formulare degli approcci di controllo robusto per la dinamica d'assetto di un satellite controllato mediante attuatori magnetici. In particolare, il problema di sintesi robusta è studiato per i modelli lineari periodici e parametro-varianti, sulla base dei recenti contributi proposti in [39] e [7].

È bene sottolineare che sono stati considerati questi due approcci in quanto permettono di ovviare ai problemi implementativi dati dall'impiego di controllori tempo-varianti; nel primo caso vengono progettati controllori con guadagno costante, mentre nel secondo caso viene sfruttata la misura in tempo reale del campo geomagnetico per la sintesi di controllori gain-scheduling. Gli obiettivi del progetto consistono nella ricerca di una legge di controllo che garantisce la stabilità del sistema nominale in anello chiuso con determinati requisiti prestazionali (*i.e.*, attenuazione dell'effetto di disturbi esterni sull'assetto) e la robustezza del sistema rispetto all'incertezza parametrica. I metodi proposti fanno riferimento alla teoria del controllo  $H_\infty$  per modelli LTP e LPV in cui viene rappresentata l'incertezza dei parametri rispetto al loro valore nominale. Successivamente il problema di sintesi del controllore ottimo e robusto viene, dunque, espresso tramite un problema di ottimizzazione matematica.

È stato effettuato uno studio sperimentale al fine di confrontare gli approcci di controllo robusto illustrati e osservare l'eventuale differenza, in termini di stabilità e prestazioni, rispetto ai metodi che considerano solamente il modello nominale. Più precisamente, sono state valutate, a livello di simulazione, le tecniche basate sul modello LTP e sul modello LPV per un satellite posto in configurazione momentum-bias e avente la velocità della ruota di momento come parametro incerto.

## 1.2 Struttura della tesi

La tesi è strutturata nel modo seguente.

Nel *Capitolo 2* viene descritta la modellistica della cinematica e della dinamica d'assetto di un satellite, con particolare attenzione al modello

linearizzato per il caso di satelliti controllati tramite l'utilizzo di attuatori magnetici. Per tale modello si discutono le approssimazioni tempo-periodico e parametro-variante al fine di gestire la dipendenza dal campo magnetico terrestre in fase di sintesi del controllore. Infine si introduce l'incertezza per i parametri fisici del modello in esame.

Nel *Capitolo 3* si presenta un approccio per il progetto di controllo robusto del modello LTP definito nel capitolo precedente. In particolare, dopo una breve introduzione dei sistemi LTP, viene riassunta la tecnica di controllo  $H_\infty$  esposta in [39] e successivamente viene formulato il problema di sintesi del controllore state-feedback che limita gli effetti dovuti alla presenza di parametri incerti e di disturbi esterni generici.

Nel *Capitolo 4* si illustra il problema di controllo robusto nel caso in cui la dinamica d'assetto del satellite viene espressa tramite la modellizzazione parametro-variante. A partire da una breve trattazione dei concetti relativi ai sistemi LPV e al controllo gain-scheduling, si riporta l'approccio di sintesi descritto in [7]. Si procede, dunque, con l'esposizione del problema di controllo robusto per il modello LPV soggetto ad incertezza parametrica.

Nel *Capitolo 5* si mostrano i risultati e le simulazioni degli approcci di sintesi robusta esposti nei Capitoli 3 e 4. All'inizio del capitolo si descrive il caso di studio: vengono definiti parametri fisici del modello e il parametro incerto. Sulla base di tale sistema, si illustrano alcuni risultati relativi agli studi Monte Carlo e all'analisi degli indici prestazionali, confrontando i metodi di controllo robusto per i modelli LTP e LPV con i rispettivi approcci che non considerano la presenza del parametro incerto.

Nel *Capitolo 6* si riassumono gli obiettivi del lavoro, le valutazioni dei risultati ottenuti e le prospettive future di ricerca.

Nell'*Appendice A* si fornisce una breve descrizione di alcune tecniche per la rappresentazione dell'assetto di un corpo e le relative trasformazioni nello spazio.

# Capitolo 2

## Modellistica della dinamica d'assetto

In questo capitolo vengono affrontati gli aspetti essenziali per la descrizione dell'orientamento di un satellite nello spazio e il modello necessario per il controllo dell'assetto.

Nella Sezione 2.1 vengono descritte la cinematica e la dinamica d'assetto di un satellite, con particolare attenzione ai sistemi di riferimento adottati; nella Sezione 2.2 si ricava il modello linearizzato per il caso di un satellite controllato attraverso attuatori magnetici e si discutono le approssimazioni attraverso la modellizzazione periodica e parametro-variante. Infine, nella Sezione 2.4 si introduce la rappresentazione dell'incertezza parametrica per il modello linearizzato tramite Linear Fractional Transformations (LFT).

### 2.1 Cinematica e dinamica d'assetto

Per osservare la posizione di un satellite rispetto al tempo, é necessario considerare la dinamica d'assetto e il moto orbitale del satellite stesso rispetto al pianeta intorno a cui esso ruota. Il moto orbitale può essere espresso tramite la posizione e la velocità del veicolo spaziale lungo l'orbita.

La *dinamica di assetto* indica il cambiamento dell'orientamento di un veicolo rispetto a un sistema di riferimento (solidale al corpo); essa é rappresentata dal vettore delle velocità angolari e da notazioni matematiche che definiscono la posizione del corpo rispetto al sistema di riferimento<sup>1</sup> (*e.g.*, matrice dei coseni direttori, angoli di Eulero, quaternioni).

---

<sup>1</sup>si veda l'Appendice A.

### 2.1.1 Sistemi di riferimento e cinematica d'assetto

Per rappresentare l'assetto di un satellite, in movimento su un'orbita circolare intorno alla Terra, si definiscono convenzionalmente tre sistemi di riferimento, ovvero il sistema di riferimento inerziale geocentrico, il sistema di riferimento del moto orbitale del satellite e le coordinate relative al corpo del satellite stesso.

Si illustra in Figura 2.1 la convenzione dei sistemi di riferimento adottati: il *sistema di riferimento inerziale terrestre* (ECI<sup>2</sup>) ha l'origine degli assi nel centro terrestre, l'asse  $X_I$  punta nella direzione del punto vernale, l'asse  $Z_I$  punta nella direzione del Polo Nord e l'asse  $Y_I$  completa la terna destrorsa ortogonale.

Il *sistema di riferimento orbitale* (indicato con il pedice  $O$ ) ha origine nel centro di massa del veicolo spaziale: è identificato dall'asse  $X_O$  che punta al centro terrestre, dall'asse  $Y_O$  che punta nella direzione del vettore relativo alla velocità orbitale (tangente all'orbita) e dall'asse  $Z_O$ , ortogonale al piano orbitale del satellite.

Gli assi identificati dal pedice  $B$  rappresentano il *sistema di riferimento del corpo del satellite*: in condizioni nominali di puntamento a Terra gli assi  $X_B$  (imbardata),  $Y_B$  (rollio),  $Z_B$  (beccheggio) sono allineati con i corrispondenti assi orbitali.

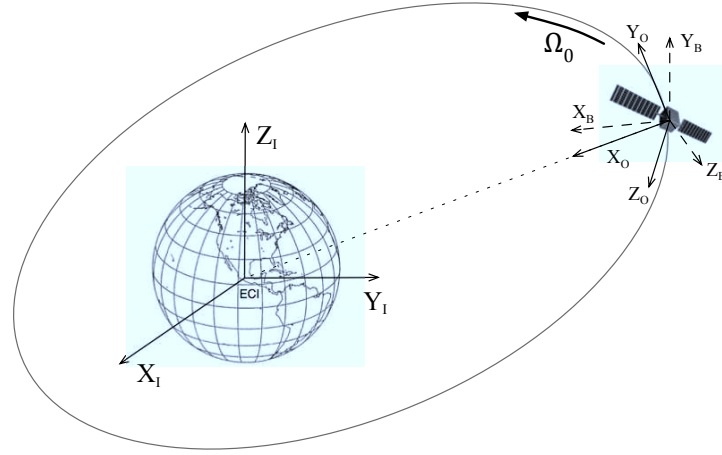
Si noti come la definizione dei sistemi di riferimento adottati è totalmente dipendente dall'applicazione in esame: in questo caso gli assi del sistema di riferimento relativo al corpo del satellite sono diretti lungo l'asse di rotazione dei momenti di inerzia principali.

L'*assetto* di un satellite identifica l'orientamento del corpo rispetto ad un sistema di riferimento solidale ad esso: è necessario definire delle matrici di rotazione che permettono di passare da un sistema di riferimento ad un altro tramite rotazioni degli assi cartesiani. Se si indica con  $R_{OI}$  la matrice di rotazione tra il sistema di riferimento inerziale geocentrico e quello orbitale,  $R_{BO}$  la matrice di rotazione tra il sistema di riferimento orbitale e quello rappresentante la posizione del corpo del satellite, si può definire  $R_{BI} = R_{BO}R_{OI}$ . Quest'ultima matrice di rotazione permette di identificare l'assetto del satellite in quanto esprime la rotazione tra un sistema di riferimento noto (quello geocentrico inerziale) e il sistema di riferimento solidale al satellite.

La parametrizzazione più comune per l'assetto di un satellite è espressa

---

<sup>2</sup>Earth Centered Inertial reference axes



**Figura 2.1:** Sistemi di riferimento adottati.

attraverso l'uso dei quaternioni<sup>3</sup>; definendo  $\omega \in \mathbb{R}^3$  il vettore delle velocità angolari nel sistema di riferimento solidale al corpo del satellite si ha che:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}W(\omega)q \quad , \quad W(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.1)$$

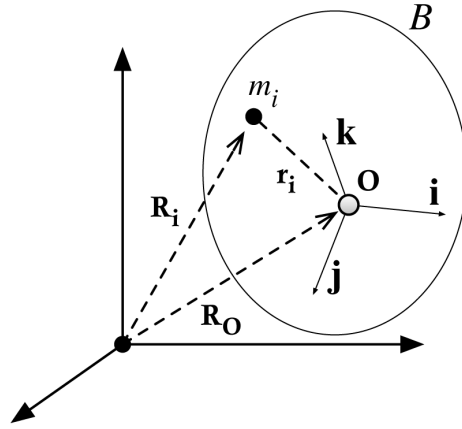
dove  $q \in \mathbb{R}^4$  é il vettore dei quaternioni.

La cinematica d'assetto del satellite é espressa dall'equazione (2.1) in quanto relaciona la variazione della posizione del satellite, rappresentata dal quaternion, in funzione delle velocità angolari degli assi del corpo.

### 2.1.2 Momento angolare e matrice d'inerzia

Si prenda in considerazione un corpo rigido in movimento rispetto ad un sistema di riferimento inerziale; il moto del corpo puó essere interamente descritto dal moto di traslazione del centro di massa e dal moto rotazionale di uno o piú assi rispetto ad esso.

<sup>3</sup>per approfondimenti sui quaternioni e sulle trasformazioni dei sistemi di riferimento si veda l'Appendice A.



**Figura 2.2:** Coordinate per lo studio del moto angolare di un corpo rigido.

Viene dunque definita la nota operazione vettoriale: dato un vettore  $A$ , si ha che la derivata osservata nel sistema inerziale  $I$  è uguale alla variazione del vettore  $A$  osservato nel sistema di riferimento rotante  $B$  a cui viene aggiunto il prodotto  $\omega \times A$ .

$$\frac{d}{dt}A|_I = \frac{d}{dt}A|_B + \omega \times A \quad (2.2)$$

Seguendo lo schema di Figura 2.2, si suppone che i tre assi di riferimento ortogonali abbiano il loro origine  $O$  nel baricentro del corpo e  $i, j, k$  indichino i versori rispettivi.

La distanza dal centro  $O$  rispetto a ogni particella infinitesimale  $m_i$  del corpo  $B$  è data da  $R_i = R_O + r_i$ , tale che:

$$\dot{R}_i = \dot{R}_O + \dot{r}_i + \omega \times r_i = v_O + v_i + \omega \times r_i, \quad (2.3)$$

dove  $\omega$  rappresenta il vettore della velocità angolare del corpo  $B$  rispetto al sistema di riferimento inerziale.

Inoltre, il *momento angolare* di una particella  $m_i$  è dato da:

$$h_i = r_i \times m_i \dot{R}_i = r_i \times m_i (\dot{R}_O + \dot{r}_i + \omega \times r_i) \quad (2.4)$$

e considerando  $\dot{r}_i = 0$  (per definizione di corpo rigido), si può semplificare in:

$$h_i = r_i \times m_i (\dot{R}_O + \omega \times r_i) = -v_O \times m_i r_i + r_i \times m_i (\omega \times r_i). \quad (2.5)$$

Per calcolare il momento angolare dell'intero corpo rigido  $B$  si effettua la somma del momento di tutte le particelle infinitesime  $m_i$ :

$$h_B = -v_O \times \sum_{m_i \in B} m_i r_i + \sum_{m_i \in B} r_i \times (\omega \times r_i) m_i \quad (2.6)$$

e considerando il moto angolare intorno al centro di massa del corpo, si ha che  $\sum_{m_i \in B} m_i r_i = 0$ , per cui semplificando:

$$h_B = \sum_{m_i \in B} r_i \times (\omega \times r_i) m_i. \quad (2.7)$$

Sviluppando i prodotti vettoriali dell'equazione (2.7) e ricordando che le componenti delle coordinate elevate al quadrato sono identificabili come i momenti di inerzia lungo i tre assi ortogonali, si può riscrivere l'equazione in termini di matrice di inerzia come:

$$h_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zt} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = I \omega_{BI} \quad (2.8)$$

dove  $I$  é la matrice di inerzia e  $\omega_{BI} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  é il vettore delle velocità angolari.

### 2.1.3 Equazioni di Eulero del momento e dinamica d'assetto

Il moto rotazionale di un corpo rigido, causato da un momento applicato al centro di massa corpo stesso, può essere espresso attraverso la nota *Equazione di Eulero del momento* (si veda [26]):

$$M = \dot{h}_I = \dot{h}_B + \omega \times h, \quad (2.9)$$

dove  $\omega \in \mathbb{R}^3$  é il vettore delle velocità angolari.

Assumendo che gli assi principali di inerzia siano dati dalla terna  $X_B Y_B Z_B$ , definendo il momento angolare come nell'equazione (2.8) e sviluppando il prodotto vettoriale, si ottengono le seguenti equazioni scalari:

$$\begin{aligned} M_x &= I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \\ M_y &= I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) \\ M_z &= I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si noti che queste equazioni sono non lineari: non hanno una soluzione analitica in forma chiusa. La soluzione dell'equazione omogenea associata alla (2.10) si ottiene ponendo  $M = [M_x \ M_y \ M_z]^T = \emptyset^{3 \times 1}$ .

Inoltre si consideri il momento angolare come somma delle coppie agenti per il controllo e delle coppie di disturbo esterne; il modello non lineare della dinamica di assetto del satellite diventa il seguente (si veda [33]):

$$I \dot{\omega} = -\omega \times I \omega + T_c + T_d \quad (2.11)$$

dove  $\omega \in \mathbb{R}^3$  é il vettore delle velocità angolari nel sistema di riferimento solidale al corpo del satellite,  $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  é la matrice di inerzia,  $T_c \in \mathbb{R}^3$  é il vettore delle coppie di controllo e  $T_d \in \mathbb{R}^3$  é il vettore delle coppie del disturbo esterno<sup>4</sup>.

## 2.2 Controllo d'assetto attraverso attuatori magnetici

Nel caso di satelliti di piccole dimensioni e operanti su orbite a bassa quota, spesso viene effettuata la scelta di utilizzare tre *attuatori magnetici* (chiamati anche *bobine magnetiche*, si veda la Figura 2.3(b)), allineati agli assi principali del corpo del satellite, in grado di generare delle coppie esterne di controllo.

Questa soluzione deriva dal fatto che essi sono leggeri, affidabili, economici e non richiedono propellente per essere operativi. Ciò nonostante sono adatti solamente per missioni su orbite LEO (generalmente per distanze inferiori ai 1000 km dalla superficie terrestre) in quanto riescono a sfruttare in modo efficace l'intensità del campo geomagnetico e per satelliti di dimensioni ridotte a causa delle modeste coppie di controllo generate. Inoltre i satelliti che utilizzano questo tipo di attuatori non sono istantaneamente controllabili: la diretta dipendenza dal campo magnetico rende il sistema tempo-variante, aggiungendo delle complicanze intrinseche nella risoluzione dei problemi di controllo.

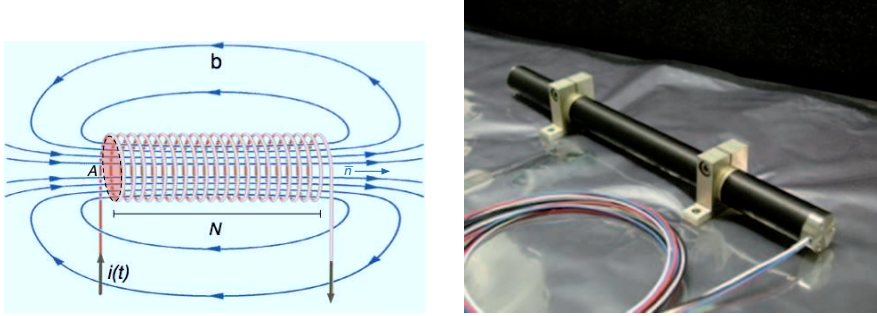
Gli attuatori magnetici possono essere rappresentati schematicamente attraverso un solenoide elettromagnetico (si veda la Figura 2.3(a)). Applicando una corrente  $i(t)$  ai capi della bobina, si genera un momento di dipolo magnetico  $m(t)$  diretto come le linee di forza del campo in cui é immersa la bobina stessa e avente intensità:

$$m(t) = N i(t) A \bar{n}, \quad (2.12)$$

dove  $N$  é il numero di spire della bobina e  $A$  é la superficie di un avvolgimento.

---

<sup>4</sup>le coppie di disturbo possono avere diverse sorgenti (*i.e.*, magnetiche, aerodinamiche, solari, gradiente gravitazionale) e dipendono dalle proprietà fisiche del satellite, dalle caratteristiche orbite e dal tempo di vita della missione spaziale. Non considerando i procedimenti fisici, si possono dividere in componenti secolari (*i.e.*, con media non nulla su ogni orbita) e componenti cicliche (*i.e.*, con media nulla, parti periodiche). Per ulteriori dettagli si faccia riferimento a [17], [33].



(a) Momento di dipolo magnetico generato all'interno di una bobina.

(b) Esempio di una bobina magnetica utilizzata per il controllo di un asse del satellite.

**Figura 2.3:** Attuatori magnetici.

L'interazione tra il momento di dipolo magnetico generato dal satellite attraverso le bobine magnetiche e il campo magnetico terrestre genera una coppia meccanica  $T_{mag}$  agente sul satellite stesso:

$$T_{mag} = m \times b = S(b) m, \quad (2.13)$$

dove  $m \in \mathbb{R}^3$  é il vettore dei dipoli magnetici per le tre bobine,  $b \in \mathbb{R}^3$  é il vettore costituito dalle componenti istantanee del campo magnetico terrestre nel sistema di riferimento del corpo del satellite e  $S(b)$  é la matrice antisimmetrica che permette di effettuare il prodotto vettoriale:

$$S(b) = \begin{bmatrix} 0 & b_z & -b_y \\ -b_z & 0 & b_x \\ b_y & -b_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Il controllo d'assetto del satellite viene effettuato utilizzando il vettore dei dipoli magnetici  $m$  come variabile di controllo; la variazione dei momenti di dipolo magnetico permette di controllare la coppia meccanica  $T_{mag}$  e quindi la dinamica d'assetto dell'intero satellite.

Nel caso di controllo con attuatori magnetici, la coppia di controllo  $T_c$  presente nella dinamica d'assetto di equazione (2.15) corrisponde alla coppia  $T_{mag}$  di equazione (2.24) e la dinamica d'assetto del satellite diventa dunque la seguente:

$$I\dot{\omega} = -\omega \times I\omega + T_{mag} + T_d = -\omega \times I\omega + B(b)m + T_d. \quad (2.15)$$

Una configurazione tipica per satelliti controllabili attraverso attuatori magnetici é detta *momentum-bias* (per dettagli si veda [33], [26] e [34]): essa

comprende una ruota di momento a velocità angolare costante  $\Omega$  orientata sull'asse di beccheggio del corpo del satellite (asse  $Z_B$  in Figura 2.1).

Questa soluzione fornisce rigidità giroscopica sull'asse di beccheggio  $Z_B$  e offre la possibilità di manovrare il satellite sullo stesso asse semplicemente regolando la velocità della ruota.

La dinamica del sistema, con l'inserimento della ruota di momento, viene modificata aggiungendo un termine che rappresenta il momento giroscopico dato dalla ruota stessa:

$$I\dot{\omega} = -\omega \times [I\omega + J\Omega] + T_{mag} + T_d, \quad (2.16)$$

dove  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  rappresenta la matrice di inerzia della ruota nel sistema di riferimento del corpo del satellite e  $\Omega$  è la velocità angolare della ruota mantenuta costante. Si assume, dunque, che un altro anello di controllo sia stato progettato per mantenere la velocità della ruota costante rispetto agli assi di riferimento del satellite.

### 2.3 Modello dinamico linearizzato

Dopo aver definito i sistemi di riferimento adottati per un satellite rotante su un'orbita circolare intorno alla Terra, si considera la configurazione momentum-bias appena descritta. In particolare, si suppone che il satellite abbia una matrice di inerzia diagonale  $I$  definita dai *momenti principali d'inerzia*:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

e per la ruota di momento, allineata all'asse di beccheggio  $Z_B$ , si abbia il momento di inerzia  $J$  e la velocità angolare relativa  $\Omega$ .

Il sistema di controllo d'assetto si pone, dunque, lo scopo di mantenere il sistema di riferimento del satellite allineato con il sistema di riferimento orbitale, sfruttando, in aggiunta alla coppia magnetica, l'effetto giroscopico generato dalla ruota di momento.

Si noti che questa configurazione non risulta particolarmente restrittiva in quanto, assumendo  $\Omega = 0$  e  $I_{xx} \ll I_{yy}$ ,  $I_{xx} \ll I_{zz}$ , può estendere la struttura *gravity-gradient* (si veda [34]). Inoltre, le ipotesi di utilizzare una matrice di inerzia diagonale e di considerare circolare l'orbita del satellite rendono solamente più semplice la presentazione del modello, ma non hanno rilevanza nei risultati dello studio effettuato.

Per descrivere la cinematica e la dinamica d'assetto del satellite, attraverso il modello linearizzato dell'equazione (2.16), si considerano come

variabili di stato la parte vettoriale del quaternionione  $q$  (che esprime l'assetto del satellite rispetto al sistema di riferimento orbitale) e il vettore  $\omega$  delle velocità angolari inerziali rispetto al sistema di riferimento solidale al corpo. In particolare, il vettore dei quaternioni e delle velocità angolari assumono rispettivamente la forma  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [q_1 \ q_r^T]^T$  (si veda l'Appendice A.3) e  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ .

L'equilibrio nominale del sistema considerato si raggiunge quando gli assi del corpo del satellite sono allineati con gli assi orbitali<sup>5</sup> e quando la velocità angolare è nulla lungo gli assi  $X_B, Y_B$  del satellite e coincidente con la velocità orbitale sull'asse  $Z_B$ . Rispetto alle variabili di stato enunciate, l'equilibrio nominale corrisponde a

$$\begin{aligned}\bar{q} &= [q_1 \ q_r^T]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \bar{\omega} &= [0 \ 0 \ -\Omega_0]^T,\end{aligned}\tag{2.17}$$

dove  $\Omega_0$  è la velocità angolare orbitale.

Si procede dunque con la presentazione del modello dinamico linearizzato per il problema di controllo sino ad ora descritto (si faccia riferimento a [18],[27]).

Il vettore  $x$  di *stato* comprende:

- le variazioni della parte vettoriale ( $\delta q_r$ ) del quaternionione rappresentante l'assetto  $q$  rispetto al valore nominale  $\bar{q}_r = [0 \ 0 \ 0]^T$ ;
- le variazioni delle velocità angolari ( $\delta\omega$ ) rispetto al valore nominale  $\bar{\omega} = [0 \ 0 \ -\Omega_0]^T$ ;

e si può rappresentare come:

$$x = [\delta q_r^T \ \delta\omega^T]^T.\tag{2.18}$$

Dunque, lo stato nominale  $x_{nom}$  può essere espresso:

$$x_{nom} = [\bar{q}^T \ \bar{\omega}^T]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\Omega_0]^T.\tag{2.19}$$

La dinamica del modello può essere linearizzata nell'intorno dell'equilibrio nominale  $x_{nom}$  e descritta dal seguente sistema dinamico locale LTV:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_T[T_{mag}(t) + T_d(t)]\tag{2.20}$$

---

<sup>5</sup>noto in letteratura come "Earth-Fixed Pointing" in quanto, fissato un punto sulla Terra, il satellite mostra sempre la stessa superficie per tutto il suo moto orbitale.

dove:

$$A = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} \end{bmatrix} \Big|_{x=x_{nom}} =$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\Omega_0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \Omega_0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & W_x & 0 \\ 0 & -6k_y\Omega_0^2 & 0 & W_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6k_z\Omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.21)$$

$$B_T = \begin{bmatrix} 0 \\ I^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_{xx}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e i coefficienti presenti nella matrice  $A$  sono definiti come segue:

$$k_x = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}, \quad k_y = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{zz}}, \quad k_z = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}, \quad (2.23)$$

$$W_x = -k_x\Omega_0 + k_{wx}\bar{\Omega}, \quad W_y = -k_y\Omega_0 + k_{wy}\bar{\Omega}$$

$$k_{wx} = \frac{J}{I_{xx}}, \quad k_{wy} = \frac{J}{I_{yy}},$$

dove  $\bar{\Omega}$  indica la velocità costante della ruota di momento,  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  é la velocità angolare orbitale e  $T$  é il periodo orbitale.

La coppia magnetica di controllo  $T_{mag}$  é generata seguendo l'equazione (2.24) che ne descrive l'interazione istantanea tra il vettore dei dipoli magnetici e il campo magnetico. Il termine  $T_{mag}$  é dunque tempo-variante a causa della dipendenza dal vettore relativo al campo magnetico  $b(t)$ :

$$T_{mag}(t) = m(t) \times b(t) = S(b(t))m(t) \quad (2.24)$$

dove  $m(t)$  é il vettore dei dipoli magnetici e  $S(b(t))$  é definita dall'equazione (2.14) relativa alle componenti istantanee del campo magnetico  $b_x, b_y, b_z$ .

Il termine  $T_d$  rappresenta il vettore associato alla coppia esterna di disturbo

nel sistema di riferimento solidale al corpo del satellite.

L'equazione (2.20) può essere riscritta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_m(t)m(t) + B_T T_d(t) \quad (2.25)$$

dove

$$B_m(t) = B_T S(b(t))$$

Si noti che la matrice  $B_m(t)$  è tempo-variante in quanto dipende dal valore istantaneo del campo geomagnetico  $b(t)$ .

Inoltre, si consideri l'equazione (2.21): si può osservare che la matrice  $A$  è costante e evidenzia il fatto che le dinamiche sull'asse di beccheggio sono disaccoppiate da quelle sugli assi di rollio e imbardata: nel caso in cui il satellite dispone di tre diversi attuatori magnetici indipendenti (uno per ogni asse), è possibile progettare due regolatori differenti rispettivamente per il controllo dell'asse di beccheggio e degli assi di imbardata/rollio (si veda [26]). Nonostante ciò, la matrice  $B_m(t)$  introduce un accoppiamento su tutti gli assi del corpo del satellite dovuto dalla definizione di  $B_T$  nell'equazione (2.22). Questo fenomeno può anche dipendere dalla matrice di inerzia  $I$  nel caso in cui essa non sia diagonale (situazione molto frequente in pratica).

Per definire istantaneamente il vettore dei dipoli magnetici  $m(t)$ , si adotta una struttura di controllo frequentemente utilizzata (si veda [20]):

$$m(t) = \frac{1}{\|b(t)\|^2} S^T(b(t)) T_{id}(t), \quad (2.26)$$

dove  $b(t)$  è il valore del campo geomagnetico e  $T_{id}$  identifica una coppia di controllo *ideale* ricavata tramite leggi di controllo adatte all'architettura del modello in considerazione (*e.g.*, approcci in anello chiuso come state-feedback o output-feedback).

Utilizzando le equazioni (2.24) e (2.26) si può ridefinire  $T_{mag}$  nel seguente modo:

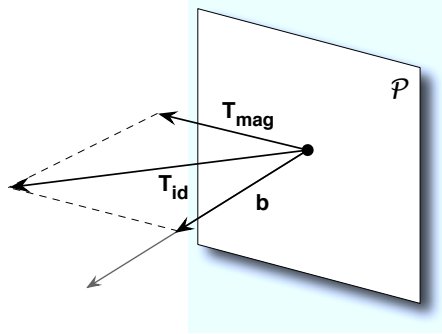
$$T_{mag}(t) = \frac{1}{\|b(t)\|^2} S(b(t)) S^T(b(t)) T_{id}(t) = \Gamma(b(t)) T_{id}(t) \quad (2.27)$$

È da notare che la matrice  $\Gamma(b(t))$  è simmetrica e semidefinita positiva per tutti i valori di  $b(t)$  e permette, inoltre, di dare un'interpretazione geometrica all'equazione (2.27): la coppia  $T_{mag}$  è la proiezione<sup>6</sup> della coppia ideale  $T_{id}$  sul piano  $\mathcal{P}$  ortogonale alla direzione del campo magnetico  $b(t)$  (si faccia riferimento alla Figura 2.4).

Il sistema di equazioni (2.25), tenendo conto delle definizioni appena

---

<sup>6</sup>spesso questa tipologia di controllori è chiamata anche "projection-based"; la terminologia deriva dalla proprietà descritta.



**Figura 2.4:** Interpretazione geometrica della coppia  $T_{mag}$  come proiezione della coppia ideale  $T_{id}$  sul piano  $\mathcal{P}$ .

esposte, diventa:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \underbrace{B_T \Gamma(b(t))}_{B(t)} T_{id}(t) + B_T T_d(t). \quad (2.28)$$

Indicando  $B(t) = B_T \Gamma(b(t))$  si può esprimere il modello finale come:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u(t) + B_T T_d(t), \quad (2.29)$$

dove si è scelta come variabile di controllo la coppia ideale  $T_{id}(t) = u(t)$ .

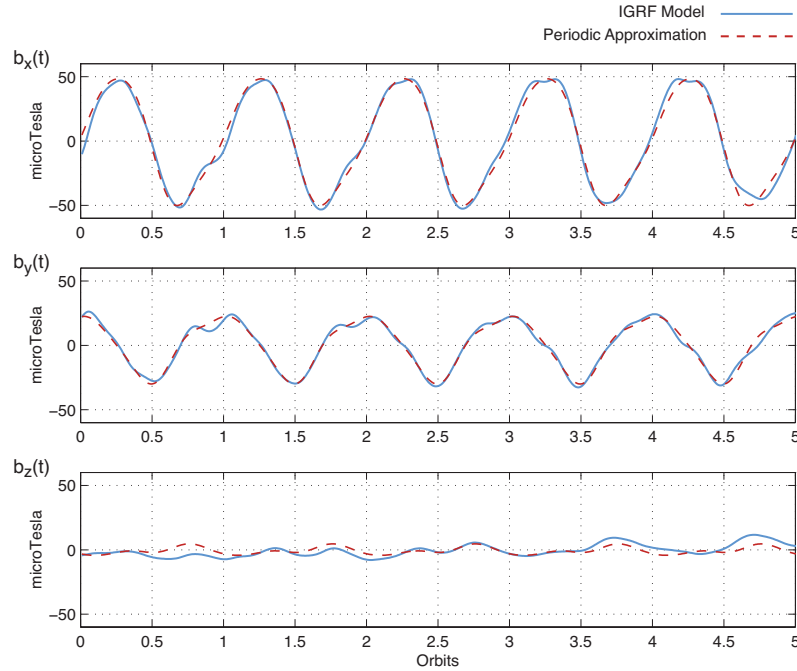
Come si è già notato in precedenza, il sistema appena definito è LTV a causa della dipendenza del campo magnetico terrestre  $b(t)$ : nei due paragrafi successivi si descrivono le approssimazioni utilizzate per il modello di equazione (2.29) necessarie per la sintesi di un controllore avente determinati requisiti di stabilità. In particolare si considerano, rispettivamente, il modello periodico e il modello parametro variante del sistema LTV esposto.

### 2.3.1 Modellizzazione LTP

Una possibile approssimazione del modello lungo l'orbita di equazione (2.29) è data dall'approssimazione dell'andamento del campo magnetico  $b(t)$  attraverso un andamento periodico  $b_P(t)$  di periodo  $T$  coincidente con il periodo orbitale  $2\pi/\Omega_0$ , quindi tale che  $b_P(t) = b_P(t + T)$ .

Infatti è possibile ottenere una rappresentazione periodica del campo magnetico  $b(t)$  accurata attraverso un modello semplificato (ad esempio il *Geomagnetic Field Tilted Dipole Model* in [23]) oppure ricavando una funzione periodica interpolante con il metodo dei minimi quadrati rispetto ad un modello preciso del campo geomagnetico.

Per esempio, considerando la rigorosa descrizione matematica Interna-



**Figura 2.5:** *Approssimazione periodica del campo magnetico terrestre (inclinazione dell'orbita  $87^\circ$ , 450 km di altezza).*

tional Geomagnetic Reference Field (IGRF, si veda [33]) del campo geomagnetico, é possibile definire un'approssimazione  $b_P(t)$  con una struttura periodica del tipo:

$$b_P(t) = b_0 + b_{1c} \cos(\Omega t) + b_{1s} \sin(\Omega t) + b_{2c} \cos(2\Omega t) + b_{2s} \sin(2\Omega t).$$

In Figura 2.5 si mostra un esempio tra le componenti del campo magnetico terrestre del modello IGRF (calcolato ad un'altezza di 450 km e con inclinazione di  $87^\circ$  rispetto all'equatore) e la sua approssimazione periodica per la durata di 5 orbite.

Come si può osservare, le componenti  $b_x(t)$  e  $b_y(t)$  hanno un andamento regolare e pressoché periodico, mentre la componente  $b_z(t)$  é più irregolare. Questo é dato dal fatto che, quando il satellite é nel suo assetto nominale (cioé coincide con il riferimento orbitale), i magnetometri posti sugli assi di imbardata e rollio percepiscono la variazione del campo magnetico causata dal moto orbitale, mentre sull'asse di beccheggio viene avvertita l'influenza del cambiamento di  $b(t)$  dovuto al moto rotazionale terrestre.

Considerando l'equazione (2.29) del modello LTV, si può applicare l'approssimazione periodica del campo magnetico  $b_P(t)$  sostituendo la matrice tempo-variante  $\Gamma(b(t))$  con la sua corrispondente periodica  $\Gamma_P(t)$ .

Si ottiene dunque il sistema LTP seguente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \underbrace{B_P(t)}_{B_T \Gamma_P(t)} u(t) + B_T T_d(t), \quad (2.30)$$

dove si può notare che la matrice  $B_P(t)$  è anch'essa periodica in quanto dipendente direttamente da  $\Gamma_P(t)$ .

Esistono diversi metodi teorici per la sintesi di un controllore ottimo e robusto (sia state-feedback che output-feedback) nel caso di sistemi LTP (si veda [3]); tuttavia a livello implementativo diventa difficile il processo di sintesi a causa della complessità del controllore.

Alcuni approcci, computazionalmente più efficienti, si basano sul controllo ottimo di sistemi periodici attraverso un regolatore costante (*e.g.*, per sistemi a tempo continuo si veda [31], [39]): queste soluzioni risultano essere un buon compromesso tra la complessità metodologica e l'accuratezza del controllo.

### 2.3.2 Modellizzazione LPV

Un ulteriore approccio possibile per la sintesi del controllore si basa su descrizioni locali del sistema LTV: i controllori progettati verificheranno determinate specifiche solamente nei punti di lavoro in cui il modello è valido. Questo procedimento, noto come gain-scheduling, consiste nell'approssimare il modello con un sistema linearizzato locale ai punti di lavoro per effettuare la sintesi attraverso la teoria lineare (si veda [14]).

Tuttavia, spesso risulta difficile ricavare dei modelli in cui la dipendenza dai punti di lavoro è esplicita: un metodo che descrive localmente il modello è la forma lineare parametro-variante (LPV).

Il modello LTV è rappresentato tramite un sistema LPV dove la parametrizzazione dipende dallo stato. Si consideri  $\rho(t)$  il vettore dei parametri tempo-variante, un sistema generico LPV può essere descritto come:

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t), \quad \rho \in \mathcal{P} \quad (2.31)$$

dove  $\rho(t)$  è contenuto in un insieme compatto  $\mathcal{P}$ .

Le tecniche di sintesi del controllore per un modello LPV derivano da quelle relative ai sistemi lineari invarianti e tengono in considerazione i parametri (solitamente provenienti da segnali misurati o derivanti da essi) e la loro velocità di variazione; non richiedono un'interpolazione euristica dei controllori locali e permettono la progettazione di regolatori con garanzie teoriche di stabilità e prestazioni per l'intero intervallo operativo.

In pratica, la dipendenza dai parametri implica la formulazione in termini di problemi di ottimizzazione convessa tramite vincoli espressi attraverso

## 2.4. Rappresentazione dell'incertezza nel modello linearizzato 19

disuguaglianze lineari tra matrici, o Linear Matrix Inequalities (LMIs), e l'efficiente risoluzione con metodi di programmazione semi-definita positiva (si veda [37],[6]).

Per il modello LTV in esame, *i.e.*, (2.29), si nota che la parametro varianza può essere introdotta solo nella componente tempo-variante del sistema  $B(t)$ . Si può formulare come un problema LPV:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(\rho(t))u(t) + B_T T_d(t) \quad (2.32)$$

dove  $\rho(t)$  è il vettore dei parametro di gain-scheduling.

Una realizzazione intuitiva di questo problema si basa sull'uso della matrice  $\Gamma(b(t))$  come parametro del modello  $\rho(t)$ .

Questa risoluzione è descritta in Sezione 4.2 e in modo dettagliato in [7].

## 2.4 Rappresentazione dell'incertezza nel modello linearizzato

La qualità di un qualsiasi problema di controllo dipende da quanto il modello matematico descrive in modo preciso il sistema reale. Spesso nel progetto ci si limita alla verifica a posteriori di certi requisiti prestazionali in anello chiuso, sulla base del modello nominale associato al sistema. Nonostante ciò, risulta evidente che è possibile tener conto dell'incertezza di modello sin dalle fasi iniziali del progetto affiancando al modello nominale una caratterizzazione di tale incertezza rispetto al sistema da controllare.

In un qualsiasi sistema reale, la perturbazione dei parametri del processo rispetto ai valori nominali può essere data da esigue variazioni nel tempo, difficoltà nell'identificazione dei valori reali, variazioni delle condizioni operative (*incertezza strutturata*). Inoltre possono essere trascurate delle dinamiche non propriamente modellizzabili, come, per esempio, perturbazioni in alta frequenza (*incertezza non strutturata*).

L'incertezza parametrica potrebbe essere considerata attraverso modelli sempre più accurati; tuttavia, ciò complicherebbe notevolmente la sintesi del controllore.

La sintesi di un controllore avente requisiti di robustezza si basa su un procedimento classico (si veda [43],[10]) che tiene conto di queste componenti: viene inclusa nel modello nominale una funzione di trasferimento (o *blocco d'incertezza*) non totalmente specificata e con risposta in frequenza limitata. In questo modo è possibile gestire le incertezze strutturate e non strutturate in modo unificato, trascurandone la loro natura.

Uno degli obiettivi raggiungibili attraverso il controllo in retroazione riguar-

da, quindi, la riduzione degli effetti delle incertezze sul modello del sistema. I problemi di controllo  $H_\infty$  risultano adatti per scopo in quanto permettono di valutare e limitare l'effetto delle variazioni attraverso il guadagno presente sulla linea di incertezza, assicurando la stabilità per l'insieme dei modelli perturbati.

Nel sistema in esame, le diverse grandezze fisiche che caratterizzano il modello linearizzato di equazione (2.20) possono rappresentare fonti di incertezza. Infatti, é possibile modellizzare il sistema tenendo conto della perturbazione dei momenti principali di inerzia del satellite  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ , del momento di inerzia  $J$  della ruota e della sua velocità angolare nominale  $\bar{\Omega}$  associata al sistema di riferimento solidale al corpo del satellite.

#### 2.4.1 Descrizione del modello tramite LFT

Un modello prossimo al sistema reale necessita la definizione del range di incertezza per uno o piú parametri in relazione alle quantità fisiche considerate e, di conseguenza, un intervallo di confidenza in cui il controllore progettato soddisfi determinate caratteristiche.

Nel caso in esame si valuta l'integrazione della presenza di incertezza parametrica<sup>7</sup> strutturata e/o non strutturata al modello di equazione (2.25). Come già discusso nella Sezione (2.3), la dinamica d'assetto del sistema é identificata dalle matrici  $A$  e  $B_T$  presenti nella descrizione del modello linearizzato (2.20): la realizzazione del modello incerto dipende dai parametri contenuti in esse. Inoltre, osservandone la struttura, é ragionevole considerare l'incertezza parametrica come additiva (per dettagli si veda [43],[42]), per cui:

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= A_{nom} + \delta^p A \\ \widehat{B}_T &= B_{T_{nom}} + \delta^p B_T,\end{aligned}\tag{2.33}$$

dove  $\widehat{A}$  (e analogamente la matrice  $\widehat{B}_T$ ) é la matrice reale costituita dalla somma tra il valore nominale  $A_{nom}$  e l'incertezza  $\delta^p A$  (dipendente dal vettore dei parametri  $p \in \mathbb{R}^g, g > 0$ ).

Data la natura del problema trattato, i parametri incerti (*e.g.*, momenti di inerzia, velocità della ruota di momento) entrano in modo razionale nel modello linearizzato. Per questo motivo, l'incertezza parametrica é dunque rappresentabile attraverso la nota trasformazione LFT (si veda [12],[42]); il modello incerto é esprimibile tramite l'inserimento di una matrice diagonale

<sup>7</sup>intesa come differenza o insieme di errori generici tra il modello reale e quello nominale.

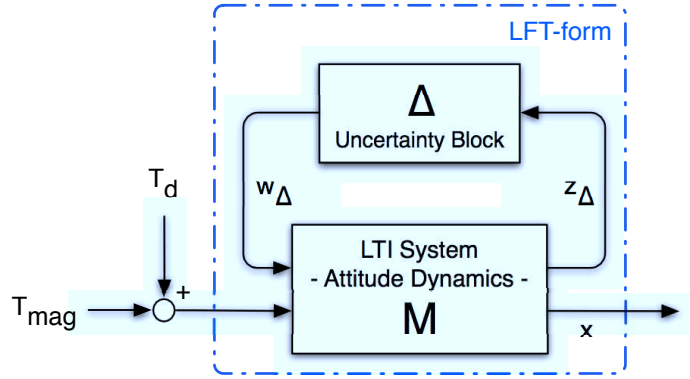


Figura 2.6: Modellizzazione dell'incertezza parametrica: realizzazione LFT.

a blocchi  $\Delta$  in retroazione al sistema di partenza (si faccia riferimento alla Figura 2.6):

$$\Delta = \text{diag} \{ \delta_1 I_1, \delta_2 I_2, \dots, \delta_k I_k, \dots, \delta_n I_n \}, \quad \forall 0 < k \leq g \quad (2.34)$$

dove  $\delta_k$  rappresenta il  $k$ -esimo parametro incerto e  $g$  é il numero di parametri incerti considerati.

Si supponga, inoltre, che i parametri incerti  $\xi_k$  siano definiti mediante intervalli di incertezza simmetrici aventi come valore medio la quantità nominale  $\bar{\xi}_k$  e gli estremi  $\xi_{mk}$ ,  $\xi_{Mk}$  dipendenti dalla variazione percentuale  $r_{\delta_k}$  rispetto al valore nominale, ovvero:

$$\xi_k = \bar{\xi}_k(1 + r_{\delta_k} \delta_k), \quad |\delta_k| \leq 1, \quad \xi_k \in [\xi_{mk}, \xi_{Mk}], \quad (2.35)$$

dove, per  $\delta_k = \pm 1$ , si definiscono gli estremi

$$\begin{aligned} \xi_{mk} &= \bar{\xi}_k(1 - r_{\delta_k}) \\ \xi_{Mk} &= \bar{\xi}_k(1 + r_{\delta_k}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

In tal caso la matrice  $\Delta$  di equazione (2.34) risulta normalizzata:

$$|\Delta| = \|\Delta\|_{\infty} \leq 1, \quad (2.37)$$

Questo é dovuto al fatto che i blocchi diagonali interni  $\delta_k I_k$  sono a loro volta già normalizzati dal vincolo  $|\delta_k| \leq 1$ .

La realizzazione LFT<sup>8</sup> del modello considerato é rappresentata dallo schema a blocchi di Figura 2.6.

Il blocco  $M$  puó essere interpretato come un nuovo sistema lineare derivante dal sistema lineare associato al modello certo a cui é stato inserito un

<sup>8</sup>chiamata anche Linear Fractional Representation (LFR).

ulteriore ingresso  $w_\Delta$ , a sua volta dipendente dall'incertezza parametrica. Inoltre, é possibile caratterizzare  $M$  attraverso la sua rappresentazione nello spazio di stato (si veda [12]):

$$M = \left[ \begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad M_{11} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{12} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

da cui si può dedurre la formulazione finale del modello in presenza di incertezza parametrica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_1 w_\Delta(t) + B_2 [T_{mag}(t) + T_d(t)] \\ z_\Delta(t) &= C_1 x(t) \\ w_\Delta(t) &= \Delta z_\Delta(t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove il blocco di incertezza  $\Delta$  é definito come in (2.34).

É bene sottolineare che la dinamica d'assetto del satellite é, anche in questo caso, espressa tramite un sistema tempo-invariante avente in ingresso le coppie  $T_{mag}$  e  $T_d$ . Tuttavia, aggiungendo al modello la proiezione della coppia  $T_{id}$  (si veda l'equazione (2.27)), il sistema risulta LTV.

L'estensione tramite la realizzazione LFT mantiene la natura iniziale del modello, ovvero, essendo costituito dalla composizione in retroazione di blocchi lineari esso ne preserva la linearit .

A seguito di queste considerazioni, il modello incerto di equazione (2.39) avente la coppia di controllo  $T_{mag}$  definita come in (2.27) appartiene anch'esso alla categoria dei sistemi LTV. Anche in questo caso l'analisi e la progettazione del controllore ottimo e robusto richiedono la semplificazione del modello; tenendo presente le medesime assunzioni esposte nel capitolo precedente, il sistema pu  essere considerato tempo-periodico oppure parametro-variante a seconda dell'approccio scelto.

## 2.4.2 Stabilit  robusta del sistema

Il processo di analisi/sintesi di un controllore robusto rispetto alla perturbazione dei parametri incerti si traduce nel valutare il problema per l'insieme dei modelli definiti in un intervallo di variazione. Tuttavia é possibile verificare una condizione che permette di stabilire a priori la stabilit  per qualsiasi modello interno al range della definizione dei parametri incerti.

La rappresentazione LFT risulta uno strumento utile per la verifica della robustezza del sistema: data la disposizione dei blocchi in retroazione (si veda la Figura 2.6) é ragionevole applicare direttamente il *Teorema del Piccolo Guadagno* (per dettagli si faccia riferimento a [43], [42]).

## 2.4. Rappresentazione dell'incertezza nel modello linearizzato 23

Supponendo che il blocco di incertezza  $\Delta$  sia definito come in equazione (2.34), tale per cui  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , la *condizione di stabilità robusta* si riduce a considerare la norma  $H_\infty$  relativa alla funzione di trasferimento tra le variabili di incertezza, ovvero  $\|G_{z_\Delta w_\Delta}\|_\infty$ .

**Definizione 2.4.1 (Stabilità robusta)** *Il sistema di controllo di Figura 2.6, in presenza di incertezza  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , è stabile asintoticamente se:*

$$\|G_{z_\Delta w_\Delta}\|_\infty < 1, \quad (2.40)$$

dove il blocco di incertezza  $\Delta$  è definito come

$$\Delta = \text{diag} \{ \delta_1 I_1, \delta_2 I_2, \dots, \delta_k I_k, \dots, \delta_n I_n \},$$

e i parametri incerti  $|\delta_k| \leq 1, \quad \forall \quad 0 < k \leq n$ .

Questa condizione sufficiente permette la verifica della *stabilità robusta* in presenza di incertezza  $\Delta$  e assume diverse espressioni esplicite a seconda del metodo utilizzato per la risoluzione problema di controllo.



# Capitolo 3

## Controllo robusto $H_\infty$ per il modello LTP

In questo capitolo si affronta la risoluzione del problema di controllo di robusto in configurazione state-feedback per il modello linearizzato, sfruttando l'approssimazione periodica del campo geomagnetico.

In primo luogo, si descrivono brevemente alcune proprietà dei sistemi LTP con particolare riferimento alla stabilità e alla rappresentazione nel dominio delle frequenze, necessaria per il calcolo del guadagno  $\mathcal{L}_2$  (o norma  $H_\infty$ ) del trasferimento tra alcuni segnali di ingresso e di uscita rilevanti.

Si procede, dunque, con l'esposizione di un metodo per il controllo  $H_\infty$  (si veda [39]) che risolve il problema di ottimizzazione delle prestazioni attraverso un algoritmo randomizzato; questo approccio viene collocato nel contesto del modello LTP avente parametri incerti e, successivamente, esteso al caso più generale in cui il controllore deve ridurre contemporaneamente gli effetti legati alle perturbazioni dei parametri e a disturbi esterni generici.

### 3.1 Cenni sui sistemi lineari periodici

In questa sezione vengono presentati dei concetti di base sui sistemi Lineari Tempo-Periodico (LTP) con lo scopo di definirne la stabilità e una breve descrizione circa l'analisi nel dominio delle frequenze per i sistemi LTP stessi. Si noti che tali definizioni vengono presentate solamente per il caso dei sistemi a tempo continuo, ma possono essere estese per sistemi a tempo discreto. Per un approfondimento dettagliato si faccia riferimento a [3].

### 3.1.1 Elementi di teoria per i sistemi LTP

Si consideri un sistema LTP autonomo, definito attraverso la sua rappresentazione nello spazio di stato:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (3.1)$$

dove la matrice  $A$  é tempo-periodica di periodo  $T$ . Partendo dalla condizione iniziale  $x(t_0) = x(\tau)$ , la soluzione dell'equazione (3.1) é data da:

$$x(t) = \phi_A(t, \tau)x(\tau) \quad (3.2)$$

e la matrice  $\phi_A$  é detta *matrice di transizione* (o *matrice fondamentale*).

Essa si può ricavare dalla soluzione dell'equazione differenziale:

$$\dot{\phi}_A(t, \tau) = A(t)\phi_A(t, \tau), \quad \phi_A(\tau, \tau) = I, \quad (3.3)$$

dove  $\phi_A(t + T, \tau + T) = \phi_A(t, \tau)$  (detta anche bi-periodicità di  $\phi_A(\tau, \tau)$ ).

La matrice di transizione relativa ad un solo periodo é nota come *matrice di monodromia* per il tempo  $\tau$ :

$$\Psi_A(\tau) = \phi_A(\tau + T, \tau). \quad (3.4)$$

É noto che per i sistemi LTI la matrice di transizione é calcolabile come  $\phi_A(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ ; tuttavia per i sistemi tempo-periodici si può caratterizzare  $\phi_A$  attraverso il *Teorema di Floquet*.

**Teorema 1 (di Floquet)** *Si consideri il sistema periodico di equazione (3.1) e la relativa matrice di transizione  $\phi_A(t, \tau)$ :*

- la matrice  $\phi_A(t + T, \tau)$  é anch'essa di transizione;
- esiste una matrice non singolare  $P(t)$  periodica (di periodo  $T$ ), tale che:

$$\phi_A(t, \tau) = P(t)e^{\Lambda(t-\tau)} \quad P(t + T) = P(t), \quad (3.5)$$

dove  $\Lambda$  é una matrice costante (generalmente complessa).

L'equazione (3.5) é detta *Forma Normale di Floquet* per la matrice di transizione  $\phi_A(t, \tau)$ .

Per il calcolo della matrice di transizione non esistono espressioni analitiche in forma chiusa (in generale  $\Lambda$  viene ricavata numericamente); nonostante ciò, un importante risultato riguarda il determinante di  $\phi_A$  (*formula di Liouville-Jacobi*):

$$\det[\phi_A(t, \tau)] = e^{\int_\tau^t \text{trace}[A(\sigma)]d\sigma}. \quad (3.6)$$

Questo significa che ciascun sistema periodico a tempo continuo<sup>1</sup> é reversibile (la matrice di transizione  $\phi_A$  é sempre invertibile).

Si consideri la matrice di monodromia  $\Psi_A$ ; per essa vale la seguente relazione:

$$\Psi_A(\tau_1) = \phi_A(\tau_1, \tau_2)\Psi(\tau_2)\phi_A(\tau_2, \tau_1) \quad (3.7)$$

dove  $\phi_A(\tau_2, \tau_1) = \phi_A(\tau_1, \tau_2)^{-1}$ . Si deduce che gli autovalori della matrice di monodromia  $\Psi_A$  (detti *moltiplicatori caratteristici*) non dipendono dal tempo.

La stabilitá del sistema di equazione (3.1) non dipende, come nel caso dei sistemi LTI, dagli autovalori della matrice  $A$  che per altro sono quantitá tempo-varianti: puó essere tuttavia verificata attraverso i moltiplicatori caratteristici.

**Definizione 3.1.1 (Stabilitá di un sistema LTP)** *Il sistema LTP di equazione (3.1) é uniformemente esponenzialmente stabile se e solo se i suoi moltiplicatori caratteristici (i.e., gli autovalori della matrice di monodromia) sono contenuti nel disco aperto di modulo unitario che giace nel piano complesso.*

Formalizzando questa condizione, si puó esaminare la stabilitá del sistema LTP di equazione (3.1) verificando che:

$$\rho = \max_i |\lambda_i(\Psi_A(\tau))| < 1,$$

dove  $\rho$  é il raggio spettrale (i.e., il modulo dell'autovalore di modulo massimo) della matrice di monodromia  $\Psi_A(\tau)$ .

Si noti che anche il calcolo degli esponenti/moltiplicatori caratteristici non ha in generale una soluzione in forma chiusa: l'analisi di stabilitá di un sistema periodico puó solo essere eseguita numericamente (si veda [19]).

### 3.1.2 Sistemi periodici nel dominio delle frequenze

Nel caso di sistemi lineari tempo-invarianti asintoticamente stabili, é ben noto che la risposta ad un segnale sinusoidale in ingresso produce, a regime, un segnale sinusoidale in uscita con la stessa frequenza dell'ingresso e fase/ampiezza differenti.

Per questo motivo spesso si utilizza la rappresentazione nel dominio delle frequenze come strumento di analisi e di sintesi per il controllo di sistemi LTI.

---

<sup>1</sup>in generale non é vero per i sistemi a tempo discreto:  $\phi_A(k, \tau)$  risulta singolare quando esiste un  $k$  per cui anche  $A(k)$  é singolare.

Questa rappresentazione può essere estesa nel caso di sistemi LTP facendo riferimento ai segnali detti *Exponentially Modulated Periodic* (EMP) (si veda [32]).

Dato un segnale  $u(t)$  (complesso), è detto EMP di periodo  $T = 2\pi/\Omega$  e modulazione  $s$  se

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{s_k t}, \quad s_k = s + jk\Omega. \quad (3.8)$$

Esso può anche essere rappresentato nel seguente modo:

$$\mathcal{U} = [ \dots \quad u_{-2} \quad u_{-1} \quad u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots ]^T$$

dove  $u_k$  è il  $k$ -esimo coefficiente dello sviluppo armonico di  $u(t)$ .

È da sottolineare che la classe dei segnali EMP è una generalizzazione dei segnali a periodici, infatti ponendo  $s = 0$  si ottengono quest'ultimi.

Si consideri ora il sistema LTP stabile:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \dot{y}(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

per ogni matrice dinamica del sistema si può effettuare la sua espansione attraverso la serie complessa di Fourier (approccio descritto in [40]):

$$A(t) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} A_v e^{jv\Omega t} \quad (3.10)$$

e in modo analogo per le matrici  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$ . L'espansione di  $A(t)$  può anch'essa essere rappresentata rispetto ai suoi coefficienti:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \dots \\ \dots & A_1 & A_0 & A_{-1} & \dots \\ \dots & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Definendo allo stesso modo gli sviluppi  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ , si può effettuare un bilanciamento armonico e ricavare l'operatore *Harmonic Transfer Function* (HTF)  $\mathcal{G}(s)$  come:

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{C} [s\mathcal{I} - (\mathcal{A} - \mathcal{N})]^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}, \quad (3.12)$$

dove  $\mathcal{N}$  è una matrice diagonale a blocchi

$$\mathcal{N} = \text{blkdiag} \{jk\Omega I\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In seguito si utilizza la notazione  $\mathcal{G}(s) = [A(t), B(t), C(t), D(t)]$  per indicare la HTF delle matrici appartenenti al sistema LTP di equazione (3.1).

Si noti che tale operatore rappresenta la relazione tra le armoniche di ingresso e le armoniche di uscita (ovvero, rispettivamente, tra i vettori di lunghezza infinita  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{Y}$ ) ed ha dimensione infinita.

Naturalmente, per la risoluzione pratica, il modello si può sostituire con la sua approssimazione: è possibile assumere una dimensione finita per le matrici  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{N}$  ottenuta attraverso il troncamento delle serie di Fourier ad una determinata armonica ed il troncamento delle numero di righe e di colonne per tali matrici.

Inoltre la HTF  $\mathcal{G}(s)$ , non essendo tempo-variante, può essere sfruttata per ottenere informazioni sul trasferimento dei segnali dall'ingresso all'uscita senza alcun integrazione numerica. Tali informazioni possono riguardare alcune misure prestazionali di un sistema stabile come le norme  $H_\infty$  e  $H_2$  (si faccia riferimento a [40],[41]).

È da evidenziare che è stato valutato l'effetto dell'approssimazione ad una dimensione finita per lo sviluppo in serie della HTF: l'errore delle norme  $H_\infty$  e  $H_2$  decresce con l'aumentare del numero di armoniche considerate (si veda [41]).

### 3.1.3 Calcolo della norma $H_\infty$

Nei problemi di controllo viene spesso utilizzata la norma  $H_\infty$  come indice per valutare il livello di prestazioni del sistema. In seguito si definisce brevemente tale misura (per ulteriori dettagli si faccia riferimento a [14],[3]).

Data una funzione di trasferimento  $G(s)$  di un generico sistema MIMO lineare tempo-invariante, la norma  $\mathcal{L}_2$  indotta è definita come:

$$\| G(s) \|_\infty = \sup_{\omega} \| G(j\omega) \| = \sup_{\omega} \sqrt{\lambda_{\max}[G^T(-j\omega)G(j\omega)]}.$$

Questa quantità è chiamata anche norma  $H_\infty$  nel caso in cui  $G(j\omega)$  è un elemento dello spazio di Hardy  $H_\infty$ . Inoltre, tale norma può essere interpretata nel dominio del tempo come guadagno  $\mathcal{L}_2$  dell'operatore di ingresso/uscita:

$$\| G_{zw} \|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\| z \|_2}{\| w \|_2}, \quad (3.13)$$

dove  $w$  è il segnale di ingresso e  $z$  è il segnale d'uscita (*i.e.*, tale che  $z = Gw$ ).

Tale concetto si può estendere per i sistemi LTP (si veda [3]). Inoltre, nel caso di sistema periodico, è possibile calcolare la norma  $H_\infty$  per un operatore  $\mathcal{G}(s)$  a partire dalla sua rappresentazione HTF: si può ricavare la

risposta in frequenza troncata del sistema lineare periodico e effettuare il bilanciamento armonico (si veda [32], [41]).

### 3.2 Progetto del controllore: approccio $H_\infty$

Nella seguente sezione viene descritto, in modo sintetico, un metodo  $H_\infty$  per il progetto di un controllore state-feedback con lo scopo di limitare gli effetti dei disturbi esterni e rendere il livello di prestazioni ottimo per il modello considerato. In particolare, l'approccio considerato si basa sulla ricerca di un controllore tempo-invariante che garantisca la stabilità nominale del modello e minimizzi la norma  $H_\infty$  rispetto a perturbazioni esterne: il problema di sintesi del controllore, che soddisfa i requisiti appena esposti, viene realizzato attraverso un algoritmo randomizzato basato sull'ottimizzazione non-smooth<sup>2</sup>. Per ulteriori dettagli relativi all'approccio descritto si faccia riferimento a [39].

Il termine “*ottimo*” é inteso, in questa trattazione, come la miglior soluzione possibile a livello di *prestazioni* per il modello nominale in anello chiuso, anche nel caso di perturbazioni esterne.

#### Formulazione del problema

Si consideri il modello tempo-periodico di equazione (2.30) dipendente dall'approssimazione periodica del campo magnetico  $b_P(t)$  e avente lo stato  $x$  misurabile:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_P(t)Kx(t) + B_T T_d(t). \quad (3.14)$$

Lo scopo é progettare un controllore  $K$  per cui la legge di controllo state-feedback del tipo

$$T_{id}(t) = u(t) = Kx(t) \quad (3.15)$$

permetta di stabilizzare il sistema ed attenuare l'effetto di qualsiasi coppia esterna di disturbo  $T_d$  (come già precisato, indipendentemente dalla natura di essa) agente sull'assetto del satellite.

A tal fine, si definiscono le seguenti variabili:

- la variabile da valutare all'ingresso del sistema  $w_p = T_d$ ;

---

<sup>2</sup>il termine *non-smooth* si riferisce alla teoria che permette lo studio e l'ottimizzazione matematica di funzioni non necessariamente differenziabili (per approfondimenti si veda [15]).

- la variabile prestazionale  $z_p$  (si veda [39]):

$$z_p = \begin{bmatrix} Z \\ \sigma K \end{bmatrix} x = C_\sigma x, \quad Z = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \sigma > 0 \quad (3.16)$$

dove  $\sigma$  é un parametro positivo che assume il significato di *penalizzazione del controllo*, ovvero permette di limitare l'azione di controllo considerando  $\sigma$  come fattore di scala costante.

La misura prestazionale comune che permette di valutare l'entità del disturbo  $w_p$  rispetto alla variabile di uscita  $z_p$  é la norma  $H_\infty$  (o norma  $\mathcal{L}_2$  indotta, si veda la Sezione 3.1.3) della funzione di trasferimento tra i due segnali, ovvero:

$$\| \mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma \|_\infty = \sup_{w_p \in \mathcal{L}_2} \frac{\| z_p \|_2}{\| w_p \|_2}, \quad (3.17)$$

dove  $\mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma = [A + KB_P(t), B_T, C_\sigma, 0]$  é la HTF del sistema (3.14).

Il vincolo di stabilità del sistema, facendo riferimento alla Definizione 3.1.1, si può esprimere come:

$$\rho(\Psi_{A+BP(t)K}(\tau)) < 1 \quad (3.18)$$

dove  $\rho(\Pi)$  indica il raggio spettrale della matrice  $\Pi$  e  $\Psi_{A+BP(t)K}$  indica la matrice di monodromia del sistema controllato (3.14).

Formalizzando gli obiettivi del controllore, si ha che il guadagno costante  $K$  deve minimizzare la funzione di costo (3.17), interpretata come riduzione dell'effetto del disturbo esterno, e garantire il vincolo di stabilità (3.18):

$$\begin{aligned} \mathbf{min} \quad & \| \mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma \|_\infty \\ \mathbf{subject\ to} \quad & \rho(\Psi_{A+BP(t)K}(\tau)) < 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Considerando la funzione di costo (3.17), si può osservare come generalmente essa sia non-smooth e quindi gli algoritmi di ottimizzazione a discesa del gradiente potrebbero non convergere a soluzioni minime (il gradiente non é sempre definibile a causa della non differenziabilità). In seguito si descrive l'algoritmo proposto in [39] che risolve il problema appena citato e provvede alla ricerca del controllore ottimo.

### Algoritmo di ottimizzazione per il controllo ottimo $H_\infty$

In primo luogo é da evidenziare che l'algoritmo esposto adotta un metodo stocastico per risolvere il problema di ottimizzazione: l'idea di base consiste nel trovare un controllore tale per cui le soluzioni vicine sono certamente peggiori in termini della funzione di costo.

Tabella 3.1: Parametri dell' algoritmo di ottimizzazione.

Parametro	Descrizione
$N$	numero di campioni MONTE CARLO generati ad ogni iterazione ( $N \gg 1$ )
$r_{max}$	rejection ratio per la verifica della convergenza ( $0 \ll r_{max} < 1$ )
$\mu$	step di incremento/decremento per lo scostamento da $K$

Per la ricerca di  $K$  si procede dunque con la selezione casuale di controllori simili a  $K$  e con la scelta del migliore in termini della funzione obiettivo<sup>3</sup> espressa in (3.19).

Dato un controllore  $K^{(i)}$ , si cerca in un intorno di  $K^{(i)}$  un nuovo controllore  $K^{(i+1)}$  tra i campioni scelti in base alla valore della funzione obiettivo; questo procedimento viene iterato fino a che non é possibile trovare un controllore migliore.

Per rappresentare la funzione di costo dipendente dal controllore  $K$  si consideri la notazione

$$J_p(K) = \| \mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma \|_\infty,$$

dove il pedice  $p$  identifica l'ottimizzazione delle prestazioni del sistema in seguito a perturbazioni esterne.

L'algoritmo di ottimizzazione discusso, é caratterizzato dai parametri elencati in Tabella 3.1 e può essere riassunto nei passi di seguito elencati:

**Algoritmo 3.2.1** *Progetto del controllore ottimo  $H_\infty$*

1. ricerca di un controllore iniziale stabilizzante  $K^{(0)}$ ;
2. generazione MONTE CARLO di  $N$  controllori a partire dal controllore  $K^{(i)}$ . Ogni controllore  $K^j$  é ottenuto nel seguente modo:

$$K^j \triangleq K^{(i)} + \mu \| K^{(i)} \| \eta^j, \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

dove  $\eta \sim \mathcal{N}\left(\frac{\Delta K^{(i)}}{\|\Delta K^{(i)}\|}, I\right)$  e  $\Delta K^{(i)} = K^{(i)} - K^{(i-1)}$ ;

<sup>3</sup>l'algoritmo é particolarmente adatto all'ottimizzazione non-smooth in quanto non é richiesto il calcolo di alcun gradiente per la funzione di costo.

3. calcolo delle norme corrispondenti agli  $N$  controllori generati al passo precedente:

$$J(K^j) \quad \forall j = 1, \dots, N$$

4. [**Minimizzazione della funzione obiettivo**]

selezione del controllore  $\underline{K} \leftarrow K^{\underline{j}}$  che minimizza la funzione di costo:

$$\left\{ \underline{j} : \underset{j}{\operatorname{argmin}} [J_p(K^j)] \right\} \quad (3.21)$$

5. calcolo dell'approssimazione del rejection ratio  $r^{(i+1)}$ :

$$r^{(i+1)} = \operatorname{prob} \left\{ J_p(K^{\underline{j}}) > J_p(K^{(i)}) \right\} \quad (3.22)$$

6. [**Controllo del vincolo**]

se  $\rho(\Psi_{A+B_P(t)\underline{K}}(\tau)) < 1$  allora  $K^{(i+1)} \leftarrow \underline{K}$  e  $i \leftarrow i+1$ , altrimenti viene decrementato lo step  $\mu$  e si torna al passo (2);

7. aggiornamento dello step  $\mu$  (se  $r^{(i)}$  é maggiore di  $r^{(i-1)}$  si incrementa  $\mu$ , altrimenti si decrementa):

$$\mu^{(i+1)} \leftarrow \mu^{(i)} \frac{r^{(i-1)}}{r^{(i)}}; \quad (3.23)$$

8. se  $r^{(i+1)} \geq r^{max}$  si sceglie  $K_p \leftarrow \underline{K}$ , altrimenti si torna al passo (2).

Al passo (1) dell'algorithmo il controllore stabilizzante iniziale  $K^{(0)}$  può essere, per esempio, ottenuto attraverso metodi di controllo associati al modello medio LTI (e.g., sintesi LQ, si veda [28]).

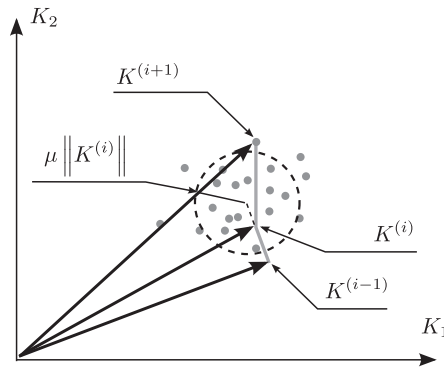
La convergenza dell'algorithmo é assicurata dal parametro  $r^{(i)}$ , il quale coincide con la probabilità che nell'intorno dell'attuale controllore  $K^{(i)}$  sia possibile trovare un controllore peggiore in termini della funzione di costo. Ponendo  $r_{max}$  prossimo al valore di probabilità certa, l'algorithmo termina quando si é raggiunti il criterio di ottimalità<sup>4</sup>.

Il controllore ottimo risultante  $K_p$  é una matrice casuale che rende minima la funzione di costo  $J_p(K)$  e stabilizza il sistema in anello chiuso considerato (3.14).

<sup>4</sup>coincide con la verifica che la probabilità di trovare un controllore "migliore", nell'intorno di quello corrente, sia pressoché nulla.

Nell'algoritmo si assume che la direzione di discesa piú ripida segua l'approssimazione data da  $\frac{\Delta K^{(i)}}{\|\Delta K^{(i)}\|}$ : ogni controllore generato casualmente (passo (2)) tiene conto delle precedenti direzioni calcolate nelle iterazioni giá svolte. Nella Figura 3.1 si può osservare la sequenza dei controllori scelti e la loro direzione associata nel caso di due variabili decisionali  $K_1$  e  $K_2$ .

Un'ulteriore annotazione riguarda la precisione ottenuta dall'algoritmo



**Figura 3.1:** Un'iterazione dell'algoritmo di ottimizzazione randomizzato.

esposto: in [39] si mostra che l'operazione di scelta casuale dei controllori raggiunge la condizione di minimalità per la funzione obiettivo con una tolleranza molto contenuta (deviazione standard di circa  $\pm 0.7\%$ ), mantenendo, ovviamente, il vincolo di asintotica stabilità.

### Complessità dell'algoritmo

Facendo riferimento in modo sintetico al costo computazionale (in termini di tempo di calcolo) dato dall'algoritmo in questione, si può osservare il carico determinato dai principali blocchi di istruzioni:

- la scelta di  $N$  controllori casuali non incide negativamente sull'esecuzione dell'algoritmo;
- il calcolo della funzione di costo di equazione (3.17) dipende dal troncamento della HTF: tuttavia è possibile utilizzare degli approcci efficienti che considerano un buon numero di armoniche (si veda [41],[40]);
- il controllo del vincolo di stabilità (passo (6)), ossia il calcolo dei moltiplicatori caratteristici del sistema. Questa operazione può essere svolta direttamente (*i.e.*, risolvendo l'equazione differenziale per il calcolo della matrice di monodromia  $\Psi_{A+B_P(t)K}(\tau)$ ) oppure attraverso la decomposizione periodica di Schur (si faccia riferimento a [19],[4]).

Assumendo che l'algoritmo converga ad una soluzione ottima, il numero di iterazioni non é predicibile a priori data la natura randomizzata del metodo<sup>5</sup>.

Si semplifica l'analisi di complessità attraverso lo studio dell'istruzione dominante: si può osservare che il collo di bottiglia per l'esecuzione dell'algoritmo é dato dall'ultimo blocco di istruzioni indicato in quanto i due precedenti possono essere svolti in modo efficiente. La risoluzione dell'equazione differenziale, che determina la forma esplicita della matrice di monodromia, richiede l'impiego dell'integrazione numerica sul periodo  $T$ . In questo caso la complessità totale dell'algoritmo dipende, in prima approssimazione, dal metodo di integrazione e dalla tolleranza utilizzati.

Nel caso in cui il calcolo dei moltiplicatori caratteristici venga effettuato attraverso la decomposizione periodica di Schur, l'esecuzione può risultare computazionalmente più efficiente sulla base dell'implementazione e del sistema di elaborazione adottato.

### 3.3 Controllo robusto $H_\infty$

Il problema di controllo precedentemente affrontato riguarda il progetto di un controllore che, posto sull'anello di retroazione, permetta di verificare i requisiti di stabilità interna e di attenuazione dei disturbi esterni per il sistema nominale. A livello pratico, spesso il sistema nominale non corrisponde al modello reale a causa di variazioni dei parametri non necessariamente note a priori: é sensato tener presente che queste perturbazioni possano incidere sui requisiti di controllo stabiliti.

L'approccio  $H_\infty$  esposto si limita, dunque, a trattare il problema di controllo sulla base di un disturbo generico  $T_d$  in ingresso al sistema, cercando di attenuare gli effetti che esso potrebbe avere sull'assetto del satellite. La formulazione dell'algoritmo di ottimizzazione assume che il modello sia a priori fissato rispetto alla definizione del sistema linearizzato di equazione (2.30): data la necessità di controllare l'assetto in seguito alla variazione dei parametri fisici presenti, si introduce la rappresentazione LFT per descrivere l'incertezza parametrica.

La prospettiva per la sintesi del controllore si sposta dall'attenuazione di perturbazioni esterne alla limitazione della variazione dei parametri interni, ossia dal controllo ottimo delle prestazioni al controllo di robustezza del sistema nominale perturbato.

---

<sup>5</sup>é possibile stimare in modo empirico il numero massimo atteso di iterazioni.

### Formulazione del problema

Si consideri il sistema tempo-periodico di equazione (2.30) in *assenza di disturbi esterni* (o equivalentemente ponendo  $T_d \equiv 0$ ) e la formulazione del modello generico incerto tramite LFT (2.39); dall'unione di questi si può derivare un modello che sfrutta l'approssimazione LTP per la risoluzione del problema di controllo e tiene conto dei parametri incerti razionali presenti nella matrice  $\Delta$ . Il modello discusso è rappresentato dal seguente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_P^\Delta(t) u(t) + B_1 w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) &= C_1 x(t) \\ w_\Delta(t) &= \Delta z_\Delta(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

dove  $B_P^\Delta(t) = B_2 \Gamma_P(t)$ , le matrici  $A_1, B_1, B_2, C_1$  sono definite come in (2.38) e  $\Delta$  è la matrice diagonale a blocchi che rappresenta l'incertezza parametrica (si veda l'equazione (2.34)).

Anche in questo caso il problema di controllo si riconduce al progetto di un controllore state-feedback tale che  $T_{id}(t) = u(t) = Kx(t)$ .

È evidente che il sistema (3.24) è anch'esso tempo-periodico a causa della funzione  $\Gamma_P(t)$ , definita periodica dall'andamento del campo magnetico  $b(t)$ .

Per una migliore comprensione del sistema LTP incerto, si osservi la Figura 3.2: essa mostra come il sistema periodico dipenda dalla proiezione della coppia ideale  $u(t)$  (si ricordi che si è assunto  $u(t) = T_{id}(t)$ ) e dal blocco di incertezza  $\Delta$ . Inoltre si può notare la presenza, in configurazione state-feedback, del controllore robusto  $K$  da progettare.

La matrice di incertezza  $\Delta$  è definita come in (2.34) e composta da  $n$  parametri incerti:

$$\Delta = \text{diag} \{ \delta_1 I_1, \delta_2 I_2, \dots, \delta_k I_k, \dots, \delta_n I_n \}, \quad |\delta_k| \leq 1 \quad (3.25)$$

e si assume essere tale che

$$\| \Delta \|_\infty = \| \mathcal{G}_{w_\Delta z_\Delta} \|_\infty \leq 1. \quad (3.26)$$

Si osservi solamente la rappresentazione LFT in Figura 3.2: la robustezza del sistema può essere verificata attraverso la *condizione di stabilità robusta* espressa nella Definizione 2.4.1. Dato che i blocchi associati all'incertezza e alla dinamica d'assetto sono connessi in retroazione, essa si riduce a:

$$\| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty \leq 1, \quad (3.27)$$

avendo supposto, per ipotesi, che  $\| \Delta \|_\infty \leq 1$ .

Il problema di controllo robusto si traduce, dunque, nella ricerca di un controllore  $K$  che verifichi la stabilità del sistema e minimizzi la seguente norma

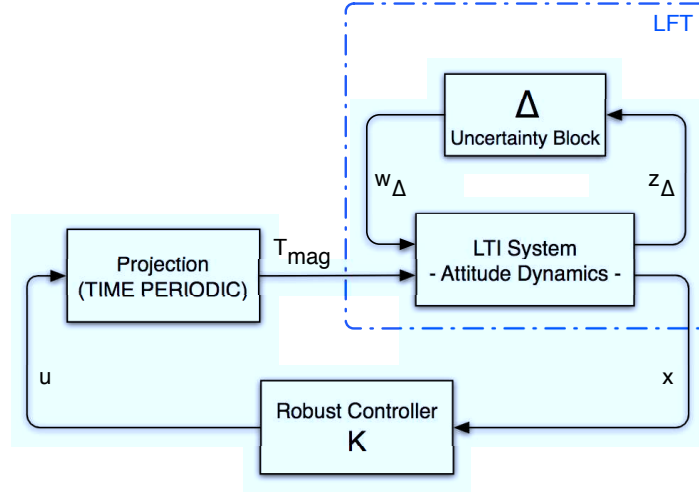


Figura 3.2: Schema a blocchi: controllo robusto per il modello LTP.

$H_\infty$  (o indicatore di robustezza):

$$\| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty \quad (3.28)$$

dove  $\mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} = [A_1 + KB_P^\Delta(t), B_1, C_1, 0]$  é la HTF del sistema incerto (3.24) tra l'ingresso  $z_\Delta$  e l'uscita  $w_\Delta$ .

Equivalentemente all'approccio descritto nel paragrafo precedente, il problema si formalizza nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty \\ \text{subject to} \quad & \rho(\Psi_{A_1 + B_P^\Delta(t)K}(\tau)) < 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

#### Algoritmo di ottimizzazione per il controllo robusto $H_\infty$

Riprendendo le considerazioni analoghe sulla funzione di costo espote per l'approccio precedente, si può adottare l'algoritmo randomizzato per la ricerca del controllore ottimo (*i.e.*, Algoritmo 3.2.1), modificando solamente la funzione di costo con

$$J_r(K) = \| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty,$$

dove il pedice  $r$  indica l'ottimizzazione per il controllo *robusto*.

Riassumendo, l'algoritmo di ottimizzazione per il controllo robusto  $H_\infty$  é descritto dai seguenti passi:

- (a) esecuzione dell'algoritmo di ottimizzazione (*i.e.*, Algoritmo 3.2.1) con funzione di costo  $J_r(K) = \| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty$ ;  
[ sostituzione al passo (3) di  $J_r(K^j) \mapsto J(K^j)$  ]

(b) verifica a posteriori della condizione di stabilità robusta

$$J_r(K_r) < 1, \quad (3.30)$$

dove  $K_r$  è il controllore ottimo trovato al passo precedente.

A fronte di queste modifiche si possono fare alcune osservazioni. L'algoritmo per il controllo robusto permette di trovare il controllore che minimizza la funzione di costo  $J_r$  con una tolleranza trascurabile: se è stato accertato il vincolo di stabilità robusta, è possibile stabilire a priori che il sistema in anello chiuso sarà asintoticamente stabile per qualsiasi variazione dei parametri nel range impostato (*i.e.*, definizione della matrice  $\Delta$ ).

Tuttavia, se il controllore risultante  $K_r$  non permette di rispettare il vincolo di equazione (3.30), non si ha alcuna certezza sul comportamento del sistema nell'intervallo dei valori possibili dei parametri incerti in quanto la condizione di stabilità robusta, derivata teorema del piccolo guadagno, è solamente sufficiente. A livello teorico, il modello potrebbe essere comunque stabile o portare a situazioni di instabilità non prevedibili.

Nonostante ciò, è da evidenziare che la misura  $H_\infty$  sulla linea di robustezza (da  $w_\Delta$  a  $z_\Delta$ ) consente di limitare al massimo gli effetti che si potrebbero avere sul sistema: con quest'approccio si ottiene il miglior comportamento a seguito di perturbazioni dei parametri considerati.

Il problema è formulato in modo indipendente da possibili limitazioni sul controllo<sup>6</sup> e non considera la presenza di alcun disturbo esterno nella ricerca del controllore robusto. Quest'ultima ipotesi risulta essere molto restrittiva dato che il sistema in esame è già un'approssimazione di quello reale a causa della linearizzazione e della dipendenza tempo-periodica (data dall'ipotesi di periodicità del campo geomagnetico). Nonostante il controllore progettato sia robusto al sistema "interno", ovvero rispetto ai parametri presenti nel modello linearizzato, esso ignora qualsiasi coppia esterna perturbante  $T_d$ , rendendo imprevedibile il comportamento a regime a seguito di disturbi generici.

La *complessità dell'algoritmo* è analoga a quella analizzata per l'algoritmo di controllo ottimo (si veda l'Algoritmo 3.2.1) in quanto non vengono introdotte modifiche computazionali rilevanti. La verifica della stabilità robusta viene effettuata in tempo trascurabile rispetto al controllo della condizione di stabilità asintotica, la quale rimane l'istruzione critica per il tempo di elaborazione dell'algoritmo.

<sup>6</sup>indicato con  $\sigma$  nell'approccio ottimo  $H_\infty$  in Sezione 3.2.

### 3.4 Controllo $H_\infty$ congiunto: robustezza e prestazioni

Come é già stato accennato nel paragrafo precedente, il problema di controllo robusto affrontato permette di circoscrivere solamente le perturbazioni del modello dovute alle variazioni dei parametri fisici. Questo metodo può essere utilizzato quando si ha la certezza a priori che lo stato del sistema non venga alterato da qualsiasi segnale esterno. Tuttavia per i problemi di controllo é bene porsi nelle situazioni più generali possibili, assicurando determinati comportamenti per eventuali disturbi generici.

Data la natura del problema in esame, la considerazione della sola coppia generata dalle bobine magnetiche  $T_{mag}$ , presente nel modello linearizzato rappresentante la dinamica d'assetto del satellite di equazione (3.24), risulta un'ipotesi abbastanza restrittiva. Infatti il sistema può essere soggetto a molteplici sorgenti di disturbo (*e.g.*, coppie di disturbo dovute al gradiente gravitazionale, pressione causata dalla radiazione solare, residui dei dipoli magnetici su ciascun asse) che agiscono in modo determinante sulla stabilità e sulle prestazioni.

Inoltre, si ricordi che il modello é ulteriormente approssimato a causa della linearizzazione.

Per queste ragioni, nel seguente paragrafo si affronta il problema di controllo aggiungendo la coppia di disturbo esterna generica  $T_d$ , già presente nel controllo ottimo di Sezione 3.2, al modello dipendente dall'incertezza parametrica (descritto tramite LFT). In questo modo é possibile formulare la sintesi rispetto a vincoli che limitano sia le perturbazioni "interne" che quelle "esterne", ovvero assicurando la robustezza e alcuni requisiti prestazionali.

#### Formulazione del problema

Partendo dal sistema generico LTP definito in equazione (2.30), é possibile aggiungere la rappresentazione dell'incertezza espressa dalla trasformazione LFT (2.39) mantenendo la perturbazione data dalla coppia esterna. In questo modo si ottiene un modello che estende quello descritto nel problema di controllo robusto precedente, considerando, oltre all'incertezza parametrica, anche la componente di disturbo esterno  $T_d$ .

A tal fine si definiscono le seguenti misure:

- la variabile da valutare all'ingresso del sistema  $w$ , costituita dal disturbo esterno  $w_p = T_d$  e dal disturbo  $w_\Delta$  proveniente dal blocco di

incertezza  $\Delta$ :

$$w = \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w_p \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

- la variabile in uscita al sistema  $z$  definita come l'unione di  $z_p$  (si veda l'equazione (3.16)) e  $z_\Delta$  in ingresso al blocco  $\Delta$ :

$$z = \begin{bmatrix} z_\Delta \\ z_p \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Il modello tempo-periodico, che mette in relazione i contributi discussi, può essere formulato come segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_P^\Delta(t) u(t) + B_1 w_\Delta(t) + B_2 w_p(t) \\ z_\Delta(t) &= C_1 x(t) \\ z_p(t) &= C_\sigma x(t) \\ w_\Delta(t) &= \Delta z_\Delta(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove  $C_\sigma$  è definito come in equazione (3.16), ovvero:

$$C_\sigma = \begin{bmatrix} Z \\ \sigma K \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \sigma > 0$$

e  $B_P^\Delta(t) = B_2 \Gamma_P(t)$ .

Equivalentemente, considerando la definizione delle variabili  $w$  e  $z$ , il sistema di equazione (3.33) si può semplificare in:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_P^\Delta(t) u(t) + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} w \\ z(t) &= \widehat{C} x(t) \\ w_\Delta(t) &= \Delta z_\Delta(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\text{e } \widehat{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_\sigma \end{bmatrix}.$$

Le matrici  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  derivano dalla rappresentazione LFT (2.38), mentre  $\Delta$  è la matrice diagonale a blocchi che tiene conto dell'incertezza parametrica (si veda l'equazione 2.34).

Si noti che la definizione di  $z_p$  è la medesima dell'approccio ottimo  $H_\infty$  (descritto in Sezione 3.2.1): anche in questo caso è possibile limitare lo sforzo del controllore attraverso il valore di  $\sigma$  presente in  $C_\sigma$ . La scelta di utilizzare la stessa variabile prestazionale  $z_p$  ricade sulla possibilità di mantenere i metodi conformi e le soluzioni direttamente confrontabili rispetto alla dipendenza del parametro  $\sigma$ .

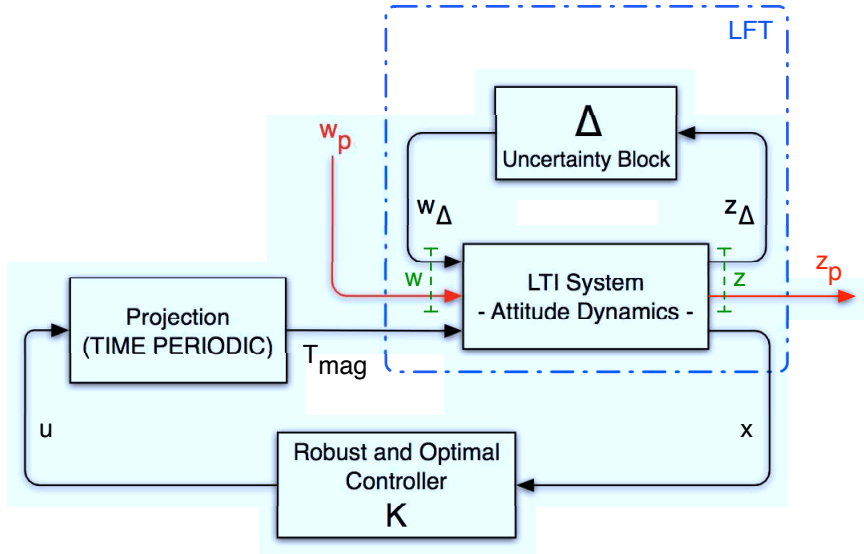


Figura 3.3: Schema a blocchi: controllo robusto-ottimo per il modello LTP.

Come per i precedenti approcci di sintesi, si riconduce il problema alla ricerca di un controllore  $K$  che, posto in configurazione state-feedback (*i.e.*, legge di controllo  $u(t) = T_{id}(t) = Kx(t)$ ), verifichi determinati requisiti. Il sistema periodico di equazione (3.34) si può rappresentare attraverso lo schema a blocchi di Figura 3.3: è evidente che il problema di controllo in questione è la diretta estensione del sistema equazione (3.24), in quanto la dinamica d'assetto del satellite, oltre a dipendere dalla proiezione della coppia di controllo ideale  $u(t)$  e dal blocco di incertezza  $\Delta$ , introduce un ingresso esterno  $w_p$  e la variabile  $z_p$  in uscita.

Una naturale evoluzione due approcci precedenti permette di progettare un controllore  $K$  che ottimizza le prestazioni del sistema e limita gli effetti di perturbazioni parametriche: la minimizzazione delle norme  $H_\infty$  relative all'incertezza e alle prestazioni, *i.e.*, rispettivamente  $\|\mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta}\|_\infty$  e  $\|\mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma\|_\infty$ , può essere ricondotta ad un'unica funzione di costo dipendente dalle variabili  $w$  e  $z$ :

$$\|\mathcal{G}_{zw}^\sigma\|_\infty. \quad (3.35)$$

È evidente che questa norma  $H_\infty$  rappresenta il guadagno<sup>7</sup> tra l'ingresso  $w$  e l'uscita  $z$ ; è sensato cercare di limitare il più possibile questo valore tenendo presente che esso è composto in modo proporzionale dalle componenti di robustezza e di prestazioni. In questo modo, il problema di ottimizzazione esamina una trade-off tra le due misurazioni cercando di:

<sup>7</sup>inteso come guadagno  $\mathcal{L}_2$  dell'operatore di ingresso/uscita, si veda la Sezione 3.1.3.

- spostarsi verso la stabilità robusta, ovvero riducendo  $\| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty$  e verificando, eventualmente, la *condizione di stabilità robusta* (si veda la Definizione 2.4.1);
- circoscrivere significativamente l'effetto dei disturbi esterni, limitando  $\| \mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma \|_\infty$ .

Le HTF appena citate possono essere definite attraverso la loro rappresentazione nello spazio di stato:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} &= [A_1 + KB_P^\Delta(t), B_1, C_1, 0] \\ \mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma &= [A_1 + KB_P(t), B_2, C_\sigma, 0] \\ \mathcal{G}_{z_w}^\sigma &= [A_1 + KB_P(t), [B_1 \quad B_2], \hat{C}, 0] \end{aligned} \quad (3.36)$$

e risolte secondo lo sviluppo armonico delle componenti (si veda l'equazione (3.12)).

Riprendendo singolarmente i problemi di ottimizzazione per il controllo ottimo e per il controllo robusto, risulta immediato formulare il problema di controllo congiunto, avendo già stabilito la funzione di costo di equazione (3.35) e inserendo il vincolo di stabilità del sistema LTP:

$$\begin{aligned} \mathbf{min} \quad & \| \mathcal{G}_{z_w}^\sigma \|_\infty \\ \mathbf{subject\ to} \quad & \rho(\Psi_{A_1 + B_P^\Delta(t)K}(\tau)) < 1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

dove  $K$  è il *controllore robusto-ottimo* da ricercare.

L'analogia di questo approccio rispetto ai precedenti si riporta anche alla soluzione del problema di minimizzazione, in quanto la funzione obiettivo presente in equazione (3.37) è generalmente non differenziabile: in seguito si descrive una possibile estensione dell'algoritmo di ottimizzazione (*i.e.*, Algoritmo 3.2.1) in riferimento all'unione dei requisiti prestazionali e di robustezza.

### Algoritmo di ottimizzazione per il controllo robusto-ottimo $H_\infty$

Sulla base delle considerazioni appena espresse, la sintesi del controllore ottimo e robusto può sfruttare i principi dell'algoritmo randomizzato applicando la funzione di costo di equazione (3.35), cioè:

$$J_{rp}(K) = \| \mathcal{G}_{z_w}^\sigma \|_\infty,$$

dove il pedice  $rp$  indica l'ottimizzazione associata al controllo di *robustezza* e delle *prestazioni*.

Sebbene la formulazione dell'algoritmo randomizzato si focalizzi sulla minimizzazione della norma  $H_\infty$  tra l'ingresso  $w$  e l'uscita  $z$ , é necessario sottolineare che le componenti relative all'incertezza parametrica e ai disturbi esterni sono minimizzate in modo proporzionale alla riduzione della HTF  $\|\mathcal{G}_{zw}^\sigma\|_\infty$ . Tuttavia, spesso é necessario richiedere un livello minimo per la qualità del controllo rispetto a una sola componente critica. Nel contesto in esame, le coppie esterne di disturbo possono diventare una componente delicata per determinati requisiti di controllo in quanto potrebbero avere maggiore variabilità rispetto alle perturbazioni date dall'incertezza parametrica.

Questo accorgimento può essere aggiunto tramite un vincolo nel problema di ottimizzazione.

Si consideri la HTF associata alle variabili prestazionali  $z_p$ ,  $w_p$  e utilizzata come funzione di costo per il problema di controllo ottimo (3.2):

$$J_p(K) = \|\mathcal{G}_{z_p w_p}^\sigma\|_\infty.$$

Considerando un qualsiasi controllore  $K$  stabilizzante, il vincolo riguardante il miglioramento delle prestazioni si può esprimere come:

$$N_{start} > \gamma J_p(K), \quad \gamma \geq 1, \quad (3.38)$$

dove  $N_{start}$  é la norma  $H_\infty$  relativa alle variabili prestazionali del controllore iniziale stabilizzante  $K^{(0)}$ , cioè:

$$N_{start} = J_p(K^{(0)}).$$

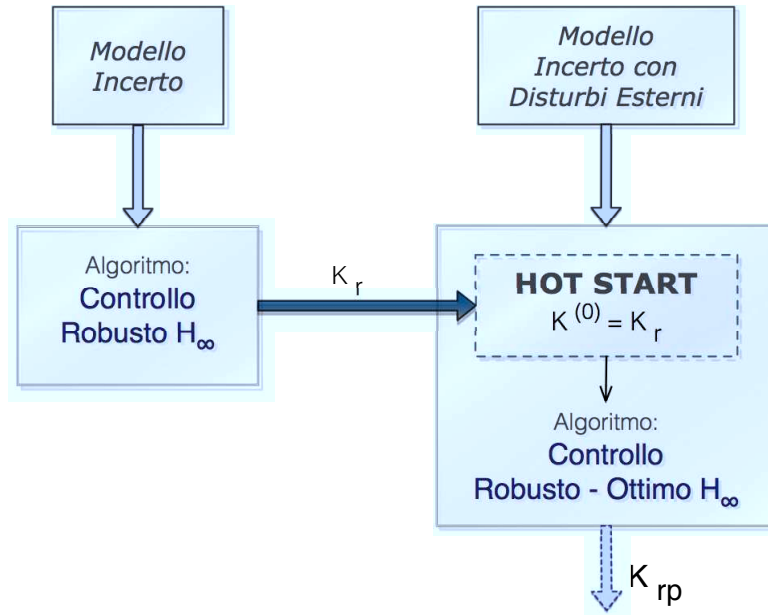
Inoltre, il parametro  $\gamma$  é il *fattore di miglioramento* per le prestazioni del sistema.

Aggiungendo quest'ulteriore vincolo, il problema di ottimizzazione per la ricerca del controllore robusto-ottimo si formula nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{min} \quad & \|\mathcal{G}_{zw}^\sigma\|_\infty \\ \mathbf{subject\ to} \quad & \rho(\Psi_{A_1+B_P^\Delta(t)K}(\tau)) < 1 \\ & N_{start} > \gamma J_p(K), \quad \gamma \geq 1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

L'introduzione del vincolo di miglioramento non aggiunge sostanziali modifiche ai principi dell'algoritmo randomizzato in quanto limita solamente l'insieme delle soluzioni possibili.

Una modifica aggiuntiva può riguardare la definizione del controllore stabilizzante iniziale  $K^{(0)}$ . Come si é visto per l'approccio di controllo ottimo, l'algoritmo di ottimizzazione non impone condizioni sul controllore



**Figura 3.4:** Configurazione *HOT START* per il controllo robusto-ottimo  $H_\infty$  del sistema LTP.

iniziale  $K^{(0)}$  oltre alla necessità di rendere il sistema asintoticamente stabile. In realtà esso può essere ricavato da semplici tecniche che si basano sull'approssimazione attraverso il modello medio (*e.g.*, si veda [28]). Questa inizializzazione viene in seguito indicata con il termine *COLD START*.

Tuttavia è possibile ricondurre la ricerca di un controllore ottimo e robusto partendo da un controllore che verifica preventivamente alcuni requisiti. Infatti, sfruttando il controllo robusto (si veda la Sezione 3.3),  $K^{(0)}$  può essere inizializzato con il controllore che limita l'effetto della sola incertezza parametrica, ovvero con  $K_r$  ottenuto attraverso l'algoritmo esposto in Sezione 3.3.

In questo modo, il problema in esame viene suddiviso in due sotto-problemi di ottimizzazione dove il primo tiene conto delle sole perturbazioni interne del sistema e il secondo considera anche i disturbi esterni generici a partire dalla prima soluzione trovata. In Figura 3.4 è riportato lo schema di tale soluzione. È necessario sottolineare che il secondo problema di ottimizzazione deve tener conto anche della componente di robustezza o, in caso contrario, la ricerca si potrebbe spostare verso controllori che migliorano solamente le prestazioni del sistema in anello chiuso: per questo motivo la scelta ricade sul controllo congiunto di equazione (3.34).

L'inizializzazione del controllore iniziale  $K^{(0)}$ , attraverso il controllore robu-

sto  $K_r$  trovato in precedenza, viene chiamata in seguito *HOT START*. Sulla base di quanto discusso, l'algoritmo di ottimizzazione può essere, dunque, eseguito in configurazione COLD START oppure HOT START.

I parametri dell'*algoritmo di ottimizzazione per il controllo robusto-ottimo* sono equivalenti a quelli definiti per l'Algoritmo 3.2.1, con l'aggiunta del fattore di miglioramento  $\gamma$  (con  $\gamma > 1$ ).

Si riportano in seguito i passi dell'algoritmo discusso:

**Algoritmo 3.4.1** *Progetto del controllore robusto-ottimo  $H_\infty$*

1. assegnamento del controllore iniziale:

• [**HOT START**]

si pone il controllore iniziale  $K^{(0)}$  uguale al controllore trovato con l'algoritmo per il controllo robusto (si veda Sezione 3.3):

$$K^{(0)} = K_r \quad (3.40)$$

• [**COLD START**]

ricerca di un controllore iniziale stabilizzante  $K^{(0)}$

2. memorizzazione della norma  $H_\infty$  delle variabili prestazionali per il controllore iniziale:

$$N_{start} = J_p(K^{(0)}) \quad (3.41)$$

3. generazione MONTE CARLO di  $N$  controllori a partire dal controllore  $K^{(i)}$ . Ogni controllore  $K^j$  è ottenuto nel seguente modo:

$$K^j \triangleq K^{(i)} + \mu \|K^{(i)}\| \eta^j, \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3.42)$$

dove  $\eta \sim \mathcal{N}\left(\frac{\Delta K^{(i)}}{\|\Delta K^{(i)}\|}, I\right)$  e  $\Delta K^{(i)} = K^{(i)} - K^{(i-1)}$ ;

4. calcolo delle norme corrispondenti agli  $N$  controllori generati al passo precedente, ovvero  $J_{rp}(K^j) \quad \forall j = 1, \dots, N$ ;

5. [**Minimizzazione della funzione obiettivo**]

selezione del controllore  $\underline{K} \leftarrow K^{\underline{j}}$  che minimizza la funzione di costo:

$$\left\{ \underline{j} : \underset{j}{\operatorname{argmin}} [J_{rp}(K^j)] \right\} \quad (3.43)$$

6. calcolo dell'approssimazione del rejection ratio  $r^{(i+1)}$ :

$$r^{(i+1)} = \text{prob} \left\{ J_{rp}(K^{\underline{j}}) > J_{rp}(K^{(i)}) \right\} \quad (3.44)$$

7. [Controllo dei vincoli]

(a) se  $\rho(\Psi_{A+B_P(t)\underline{K}}(\tau)) < 1$  allora  $K^{(i+1)} \leftarrow \underline{K}$  e  $i \leftarrow i + 1$ , altrimenti viene decrementato lo step  $\mu$  e si torna al passo (3);

(b) se  $\gamma \cdot J_p(\underline{K}) > N_{start}$  si torna al passo (3), altrimenti si procede;

8. aggiornamento dello step  $\mu$  (se  $r^{(i)}$  è maggiore di  $r^{(i-1)}$  si incrementa  $\mu$ , altrimenti si decrementa):

$$\mu^{(i+1)} \leftarrow \mu^{(i)} \frac{r^{(i-1)}}{r^{(i)}}; \quad (3.45)$$

9. se  $r^{(i+1)} \geq r^{max}$  si sceglie  $K_{rp} \leftarrow \underline{K}$ , altrimenti si torna a (3).

10. test di stabilità robusta per il controllore robusto-ottimo  $K_{rp}$ :

$$J_r(K_{rp}) = \| \mathcal{G}_{z\Delta w\Delta} \|_\infty < 1 \quad (3.46)$$

Il controllore  $K_{rp}$  è la soluzione ottima al problema di controllo: esso minimizza la funzione di costo  $J_{rp}$ , mantenendo il sistema asintoticamente stabile e assicurando un miglioramento delle prestazioni di un fattore  $\gamma$  rispetto al controllore iniziale (si veda il passo (7.b) dell'algoritmo).

Come per il problema di solo controllo robusto esposto in Sezione 3.3, è possibile stabilire a priori la stabilità robusta del sistema in anello chiuso, rispetto alla variazione dei parametri definita dalla rappresentazione LFT, verificando la condizione presente al passo (10). In caso contrario non si ha alcuna certezza sul comportamento del sistema a seguito della variazione dei parametri incerti, ma si effettua comunque la miglior limitazione possibile.

Riassumendo quanto appena trattato, le due configurazioni di inizializzazione del controllore (HOT START e COLD START) permettono di gestire i criteri di robustezza e di prestazioni sia in modo separato che contemporaneamente. In particolare, partendo dal controllore robusto, l'algoritmo in configurazione HOT START ricerca la soluzione ottima da una soluzione già

intrinsecamente robusta.

Sulla base di queste due soluzioni é possibile derivare la *complessitá dell'algoritmo*. L'esecuzione dell'algoritmo con l'inizializzazione COLD START é equivalente, a livello computazionale, a quelle viste in precedenza: il vincolo di miglioramento delle prestazioni (si veda l'equazione (3.38)) e il test di stabilitá robusta sono trascurabili rispetto all'istruzione piú costosa in termini di tempo di calcolo, ovvero la condizione di stabilitá asintotica del sistema.

In riferimento alla configurazione HOT START si ha che l'algoritmo deve svolgere due problemi di ottimizzazione sequenziali (*i.e.*, il problema di ottimizzazione per il controllo robusto e successivamente per il controllo congiunto), quindi la complessitá di calcolo totale raddoppia in quanto la condizione di stabilitá del sistema deve essere verificata per entrambe le risoluzioni.



# Capitolo 4

## Controllo robusto per il modello LPV

In questo capitolo viene affrontato il problema di controllo robusto per il modello che descrive la dinamica d'assetto del satellite in forma LPV.

In particolare, dopo aver illustrato brevemente alcuni concetti relativi ai sistemi paramentro-varianti e al controllo gain-scheduling, si discute l'approccio LPV esposto in [7] con particolare riferimento alla definizione del vettore dei parametri varianti e alla formulazione matematica necessaria per il progetto di controllo.

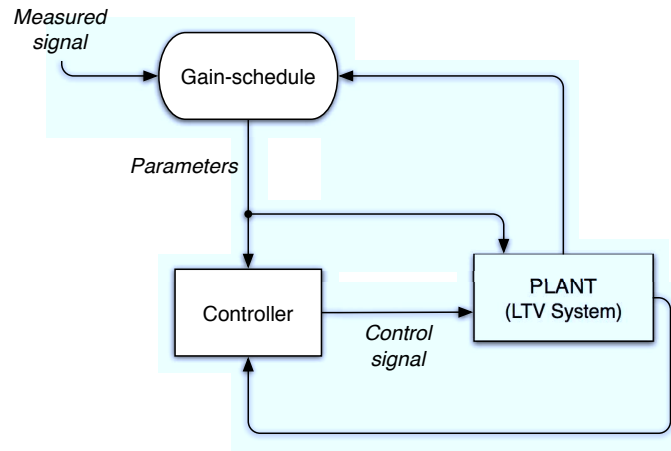
Nella sezione successiva si valuta l'inserimento di un'eventuale penalizzazione sul controllo attraverso l'introduzione di una modifica al modello matematico.

In seguito si propone la modellizzazione LPV/LFT al fine di progettare una legge di controllo che, oltre a mantenere i requisiti di stabilità e di attenuazione dei disturbi esterni, rende il sistema robusto alla variazione di parametri incerti.

### 4.1 Cenni sui sistemi LPV e sul controllo gain-scheduling

Un sistema a tempo continuo si definisce lineare paramentro-variante (LPV) se é descritto dalle seguenti equazioni nello spazio di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$



**Figura 4.1:** Schema a blocchi di un sistema LPV con controllo gain-scheduling.

dove  $\rho(t) \in \mathcal{P}$  é un vettore di parametri e  $\mathcal{P}$  é un insieme compatto.

Il sistema di equazione (4.1) puó essere visto come un sistema tempo-variante la cui dinamica é regolata da un vettore di parametri  $\rho(t)$  variabile nel tempo; solitamente si suppone che ogni parametro  $\rho_i(t)$  e la sua velocitá di variazione  $\dot{\rho}_i(t)$  siano limitati.

Le tecniche che permettono la sintesi del controllore per i sistemi LPV si appoggiano ai metodi di controllo  $H_\infty$  che utilizzano il *Bounded Real Lemma* (e.g., si veda [9]).

Un vantaggio della formulazione LPV é la disponibilitá di molte tecniche presenti in letteratura (e.g., [37], [2], [38]) che permettono di sintetizzare il controllore gain-scheduling per questi sistemi. Ad ogni istante, il controllore dipende dai parametri tempo-varianti: la misurazione del vettore dei parametri, effettuata durante l'evoluzione del sistema, permette di progettare il controllore nell'intorno dei punti operativi scelti e sulla base della politica di gain-scheduling adottata (si veda la Figura 4.1).

L'idea per il progetto del sistema di controllo consiste, dunque, nello sfruttare i metodi di controllo  $H_\infty$  (nel contesto dei modelli LPV) per imporre determinati requisiti di stabilitá e prestazioni in anello chiuso.

Di seguito si enunciano alcune definizioni e proprietá che permettono di determinare il controllore state-feedback ottimo per il problema di sintesi LPV (per una trattazione completa si faccia riferimento a [37]).

Si consideri il seguente sistema LPV:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_w(\rho(t)) & B_u(\rho(t)) \\ C_{1x}(\rho(t)) & 0 & 0 \\ C_{2x}(\rho(t)) & 0 & I_{n_{z_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$  é il vettore di stato,  $w \in \mathbb{R}^{m_w}$  é il vettore associato ai disturbi esterni,  $u \in \mathbb{R}^{m_u}$  é la variabile di controllo,  $z_1 \in \mathbb{R}^{n_{z_1}}$  e  $z_2 \in \mathbb{R}^{n_{z_2}}$  sono le variabili di prestazione e  $\rho$ , appartenente ad un insieme compatto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^s$ , é il vettore dei parametri da cui dipende il sistema.

Il problema controllo LPV si traduce nel progetto di un controllore state-feedback che renda asintoticamente stabile il sistema retroazionato e riduca la norma  $\mathcal{L}_2$  indotta tra i disturbi esterni e le variabili di prestazione sotto una soglia  $\gamma$ .

In [37] e [38] sono mostrate le condizioni per l'esistenza, rappresentate attraverso disuguaglianze matriciali lineari (o LMI), e la formulazione di un controllore state-feedback per il modello LPV di equazione (4.2).

**Teorema 2** *Dato un insieme compatto  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^s$ , una misura di prestazione  $\gamma > 0$  e il sistema LPV di equazione (4.2), si può risolvere il problema di controllo state-feedback associato se e solo se esiste  $X \in C^1(\mathbb{R}^s, \mathcal{S}^{n \times n})$  tale che, per tutti i parametri dipendenti  $\rho \in \mathcal{P}$  aventi la loro velocità di variazione limitata  $|\dot{\rho}_i| < \nu_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , si verificano le condizioni:*

$$\begin{array}{l} X(\rho) > 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} X(\rho)\hat{A}^T(\rho) + \hat{A}(\rho)X(\rho) - \sum_{i=1}^s \pm \left( \nu_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} \right) - B_u(\rho)B_u^T(\rho) & X(\rho)C_{1x}^T(\rho) & \gamma^{-1}B_w(\rho) \\ C_{1x}(\rho)X(\rho) & -I_{n_{z_1}} & 0 \\ \gamma^{-1}B_w^T(\rho) & 0 & -I_{m_w} \end{array} \right] < 0 \end{array} \quad (4.3)$$

dove

$$\hat{A}(\rho) := A(\rho) - B_u(\rho)C_{2x}(\rho). \quad (4.4)$$

Il Teorema 2 mostra che sotto l'ipotesi di verifica dei vincoli descritti dalle LMI in (4.3), si può trovare il controllore state-feedback che garantisce la stabilità esponenziale del sistema e la norma indotta  $\mathcal{L}_2$  tra il disturbo  $w$  e le variabili di prestazione  $z_1, z_2$  minore di  $\gamma$ :

$$\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2, \quad (4.5)$$

dove si é indicato  $z = [z_1^T \ z_2^T]^T$ .

Per definizione (si veda la Sezione 3.1.3 o [14]), la norma indotta  $\mathcal{L}_2$  coincide

con la norma  $H_\infty$  del trasferimento tra i segnali  $w$  e  $z$ ,

$$\|G_{zw}\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma. \quad (4.6)$$

Inoltre, facendo sempre riferimento a [37], é possibile caratterizzare il controllore  $K(\rho)$  dalla seguente legge di controllo state-feedback:

$$u = K(\rho)x = -[B_u^T(\rho)X^{-1}(\rho) + C_{2x}(\rho)]x. \quad (4.7)$$

Il problema posto dalle LMI di equazione (4.3) é generalmente di dimensione infinita; tuttavia, esso puó essere ricondotto ad un problema di dimensioni finite assumendo che la funzione di Lyapunov  $X(\rho)$ , detta anche Parameter-Dependent Lyapunov Function (PDLF), sia costituita da un numero finito di funzioni base. In secondo luogo, stabilendo a priori l'intervallo di variazione dei parametri  $\rho$ , si ha che l'insieme compatto  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^s$  diventa un politopo<sup>1</sup>, *i.e.*,

$$\mathcal{P} = \{\rho : \underline{\rho}_i < \rho_i < \bar{\rho}_i, i = 1, \dots, s\}.$$

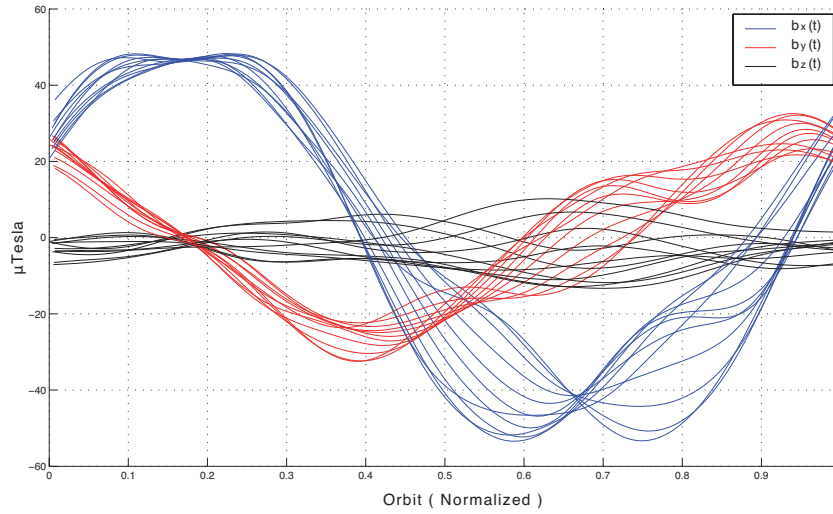
Infine, se il sistema in anello aperto puó essere espresso in forma affine, il problema diventa convesso per cui é sufficiente verificare le condizioni poste dalle LMI ai vertici del politopo (la risoluzione non necessita la considerazione dei punti interni<sup>2</sup> al politopo). In questo caso devono essere solamente verificate simultaneamente  $2^{s+1} + s$  LMI, dove  $s$  é il numero di parametri considerati.

Si noti che tale metodo conduce alla verifica di una soluzione solo sufficiente per la ricerca dell'indice  $\gamma$  e l'effettiva esistenza di una soluzione dipende dalle funzioni base presenti nella PDLF.

Dato che il Teorema 2 vale per un indice prestazionale  $\gamma > 0$ , é ragionevole ricondurre il problema di sintesi alla minimizzazione di tale indice con lo scopo di ridurre la norma indotta  $\mathcal{L}_2$  tra il disturbo  $w$  e le variabili di prestazione  $z_1, z_2$ . Per effettuare questa operazione puó essere impostato il

<sup>1</sup>un *politopo* di dimensione  $n$  é la generalizzazione dei poligoni ( $n = 2$ ) e dei poliedri ( $n = 3$ ) su uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Si definisce *politopo convesso* di dimensione  $n$  la chiusura convessa di un numero finito di punti sullo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Per dettagli si veda [5].

<sup>2</sup>la dipendenza generica dal parametro viene solitamente gestita attraverso la verifica delle LMI sui punti di incrocio di una griglia interna al politopo, la quale rappresenta la combinazione discreta dei valori assunti dai parametri. É evidente che il numero di LMI cresce esponenzialmente con il numero dei punti della griglia. Per approfondimenti si faccia riferimento a [38], [1].



**Figura 4.2:** *Regolarità del campo geomagnetico: andamento sovrapposto per la durata di 10 orbite (inclinazione dell'orbita  $87^\circ$ , 450 km di altezza).*

seguinte problema di ottimizzazione convessa:

$$\begin{aligned} \mathbf{min}_{X(\rho)} \quad & -\alpha \\ \text{subject to} \quad & (4.3), \end{aligned} \tag{4.8}$$

dove  $\alpha = 1/\gamma$ .

Il problema di ottimizzazione (4.8) si può risolvere attraverso la programmazione semidefinita positiva (SDP) in quanto la funzione obiettivo presente è lineare e le LMI identificano un cono di matrici semidefinite positive su uno spazio affine (si veda [5]).

## 4.2 Approccio per il controllo LPV

L'approssimazione ottenuta attraverso il sistema LTP, discusso nel Capitolo 3, ha lo svantaggio che il problema di controllo si basa sulla qualità dell'approssimazione periodica del campo magnetico terrestre. Considerando un ampio intervallo di tempo per l'evoluzione del sistema, è possibile notare la variabilità del campo magnetico su ogni componente: l'andamento reale non è propriamente approssimabile con un andamento periodico.

Per esempio, in Figura 4.2 si può osservare l'irregolarità del campo magnetico nelle sue tre componenti spaziali attraverso l'andamento ottenuto per la durata di 10 orbite consecutive e sovrapposto sul dominio di un orbita.

Una possibile idea per la risoluzione del problema di controllo, consiste

nell'esprimere la dinamica d'assetto in modo dipendente da uno o piú parametri varianti associati alla componente tempo-variante del sistema (*i.e.*, campo geomagnetico), riconducendo la progettazione di un controllore state-feedback al contesto LPV. Il problema di controllo puó, dunque, adottare le tecniche LPV descritte nel paragrafo precedente.

In questo caso é possibile sfruttare la misurazione in tempo reale del campo magnetico per il gain-scheduling del controllore: si puó effettuare la precisa rilevazione della direzione e dell'intensitá del campo geomagnetico attraverso l'uso di magnetometri, generalmente giá presenti a bordo del satellite.

In seguito viene esposto un approccio basato sulla modellizzazione LPV discusso in [7]; in primo luogo si definisce l'insieme dei parametri varianti e successivamente si formula il problema di sintesi del controllore.

#### 4.2.1 Definizione del parametro variante

Nel modello LTV di equazione (2.28), la dipendenza da campo geomagnetico é espressa tramite la matrice  $\Gamma(b(t))$  definita in (2.27). Tale matrice puó essere rappresentata istantaneamente come la somma di una componente media  $\bar{\Gamma}$  e una deviazione  $\Delta\Gamma(b(t))$ :

$$\Gamma(b(t)) = \bar{\Gamma} + \Delta\Gamma(b(t)). \quad (4.9)$$

La componente media  $\bar{\Gamma}$  deriva dall'approssimazione del sistema attraverso il modello tempo-invariante (giá ampiamente studiato in [28]):

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma(b(t)) dt. \quad (4.10)$$

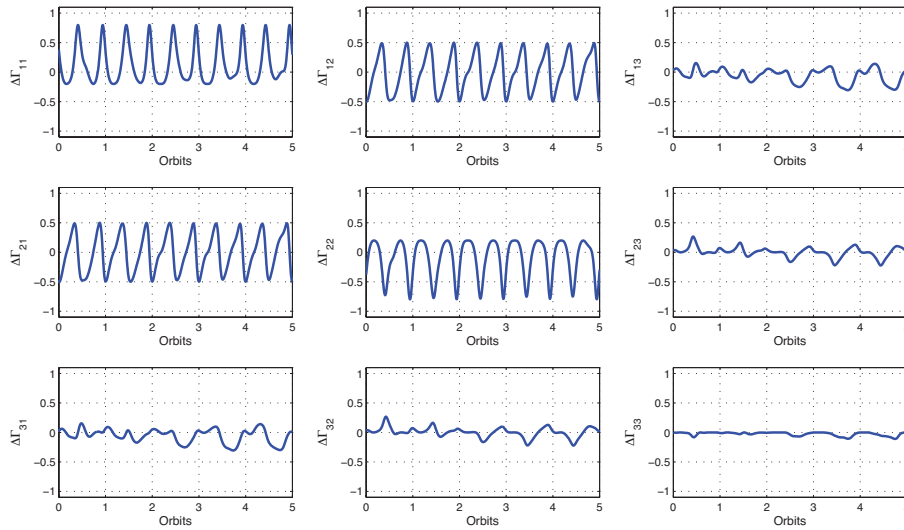
Si noti che l'utilizzo di  $\Gamma(b(t)) = \bar{\Gamma}$  renderebbe il sistema LTI e quindi il problema di sintesi risolvibile attraverso le tecniche classiche per il controllo tempo-invariante (si veda [33], [26]), senza garantire a priori la stabilitá del sistema in anello chiuso e assicurando solamente prestazioni limitate.

La formulazione LPV del modello si puó descrivere, invece, utilizzando l'equazione (4.9) per rappresentare la matrice  $\Gamma(b(t))$  e i parametri del modello  $\rho$  sono gli elementi della matrice  $\Delta\Gamma(b(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Dall'equazione (2.28) si puó ricavare direttamente la rappresentazione dipendente dai parametri del modello presenti in  $\Delta\Gamma(b(t))$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_T(\bar{\Gamma} + \Delta\Gamma(b(t)))u(t) + B_T T_d(t). \quad (4.11)$$

I parametri del modello si possono determinare durante l'evoluzione del sistema in quanto  $\bar{\Gamma}$  si puó calcolare a priori e il campo geomagnetico  $b(t)$  (e



**Figura 4.3:** Componenti della matrice  $\Delta\Gamma(b(t))$  (inclinazione dell'orbita  $87^\circ$ , 450 km di altezza).

di conseguenza anche  $\Gamma(b(t))$  é direttamente misurabile in tempo reale:

$$\Delta\Gamma(b(t)) = \underbrace{\Gamma(b(t))}_{\text{Misurata On-line}} - \underbrace{\bar{\Gamma}}_{\text{Calcolata Off-line}}$$

Nonostante la matrice  $\Delta\Gamma(b(t))$  sia composta da 9 elementi, essa puó essere é caratterizzata mediante 6 parametri in quanto  $\Gamma(b(t))$  é una matrice simmetrica e la componente media  $\bar{\Gamma}$  é una matrice diagonale.

In questo modo é possibile sfruttare il controllo in gain-scheduling ponendo come punti operativi i sistemi associati ai parametri varianti  $\rho$  precedentemente stimati.

La maggior parte delle tecniche di controllo LPV necessita della conoscenza a priori dell'intervallo di variazione dei parametri: questi valori possono essere approssimati simulando il campo magnetico  $b(t)$  con un modello accurato (*e.g.*, IGRF [33]) e valutando il comportamento della matrice  $\Delta\Gamma(b(t))$  per un numero di orbite opportuno (nel caso in esame tale simulazione é stata effettuata per una durata complessiva di 24 ore, circa 15 orbite).

In Figura 4.3 si mostra un esempio delle componenti di  $\Delta\Gamma(b(t))$  per la durata di 5 orbite, ottenuto dal modello IGRF del campo magnetico per l'orbita distante 450 km dalla superficie terrestre e con inclinazione di  $87^\circ$ .

Per tale definizione di  $\Delta\Gamma(b(t))$  (si veda la Figura 4.3), seguendo le considerazioni espone in [7], é possibile diminuire ulteriormente il numero dei para-

metri trascurando la componente  $\Delta\Gamma_{33}$  e supponendo la seguente relazione per gli elementi posti sulla diagonale:

$$\Delta\Gamma_{11}(b(t)) + \Delta\Gamma_{22}(b(t)) + \Delta\Gamma_{33}(b(t)) \approx 0. \quad (4.12)$$

Dunque, la matrice  $\Delta\Gamma(b(t))$  semplificata dipende solamente dai 4 parametri<sup>3</sup>  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ :

$$\Delta\Gamma(b(t)) = \begin{bmatrix} \Delta\Gamma_{11} & \Delta\Gamma_{12} & \Delta\Gamma_{13} \\ \Delta\Gamma_{12} & \Delta\Gamma_{22} & \Delta\Gamma_{23} \\ \Delta\Gamma_{13} & \Delta\Gamma_{23} & \Delta\Gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_2 & -\rho_1 & \rho_4 \\ \rho_3 & \rho_4 & 0 \end{bmatrix} = \Delta\Gamma(\rho). \quad (4.13)$$

Avendo ricavato la forma della matrice  $\Delta\Gamma(b(t))$ , l'intervallo di variazione dei parametri si può derivare direttamente dalla simulazione rilevando il valore minimo  $\underline{\rho}$  e il valore massimo  $\bar{\rho}$ . In Tabella 4.1 si riportano l'intervallo e la velocità di variazione dei parametri per la matrice  $\Delta\Gamma(b(t))$  rappresentata in Figura 4.3.

**Tabella 4.1:** Intervallo e velocità di variazione dei parametri (inclinazione dell'orbita  $87^\circ$ , 450 km di altezza).

Parametri	$\underline{\rho}$	$\bar{\rho}$	$ \dot{\rho} $
$\rho_1$	-0.2	0.8	$2 \times 10^{-3}$
$\rho_2$	-0.5	0.5	$1 \times 10^{-3}$
$\rho_3$	-0.25	0.25	$1 \times 10^{-3}$
$\rho_4$	-0.25	0.25	$1 \times 10^{-3}$

## 4.2.2 Progetto del controllore LPV

Il modello LPV di equazione (4.11) descrive la dinamica d'assetto del satellite; avendo a disposizione la misura del campo magnetico  $b(t)$  è possibile risolvere il problema di ottimizzazione (4.8) e sintetizzare il controllore state-feedback.

Come per l'approccio tempo-periodico (si faccia riferimento alla trattazione esposta in Sezione 3.4), essendo il modello linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio e non avendo considerato la presenza di diversi effetti di disturbo, è necessario tener conto di una coppia esterna  $T_d$  che può introdurre una perturbazione sull'assetto  $q_r$ .

Riconducendo il modello LPV in esame al sistema di equazione (4.2), si possono definire:

<sup>3</sup>per semplificare la notazione, in equazione (4.13) si è omessa la dipendenza dal campo magnetico  $b(t)$  per gli elementi della matrice  $\Delta\Gamma(b(t))$ .

- la coppia di disturbo esterna  $w = T_d \in \mathbb{R}^3$ ;
- le variabili di prestazione  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$ ;
- le matrici  $C_{1x} = C_{2x} = [I_3 \ 0]$ .

Si noti che le matrici  $C_{1x}$  e  $C_{2x}$  così definite permettono di valutare solamente l'assetto del satellite rispetto al disturbo  $w$  (si ricorda che le prime tre componenti dello stato  $x$  rappresentano l'errore d'assetto  $\delta q_r$ ).

Avendo caratterizzato completamente il sistema sulla base del modello di equazione (4.2), è possibile progettare il controllore che rende il sistema stabile e fornisce dei requisiti prestazionali (in termini di guadagno  $\mathcal{L}_2$ ) risolvendo il problema di ottimizzazione di equazione (4.8). A questo punto, la funzione di Lyapunov  $X(\rho)$  permette di determinare, tramite l'equazione (4.7), il controllore ottimo  $K(\rho)$  posto in configurazione state-feedback.

Affinché il problema di progetto diventi di dimensione finita, la struttura delle funzioni base deve essere scelta a priori. Nel caso in esame si sceglie una struttura affine per la PDLF (in linea con la definizione della parametro-dipendenza del sistema) del tipo:

$$X(\rho) = X_0 + \rho_1 X_1 + \rho_2 X_2. \quad (4.14)$$

Al fine di ridurre il numero di vincoli imposti dalle LMI, la  $X(\rho)$  dipende solamente dai due parametri  $\rho_1$  e  $\rho_2$  usati per il gain-scheduling. Osservando la Figura 4.3 si può notare che i parametri  $\rho_3$  e  $\rho_4$  hanno scarsa variabilità e possono essere considerati incerti.

Inoltre, nell'approccio esposto in [7] è stato verificato che la definizione della PDLF dipendente da due parametri risulta un buon compromesso tra le prestazioni del sistema in anello chiuso e la complessità di risoluzione del problema di sintesi. L'utilizzo di tutti e quattro i parametri di scheduling non introduce un significativo miglioramento in termini di prestazioni ma aumenta notevolmente il numero di LMI, mentre la soluzione basata sul gain-scheduling costante, *i.e.*,  $X(\rho) = X_0$ , risulta inaccettabile per quanto riguarda i requisiti imposti per il controllo (non viene sfruttata l'informazione fornita dai parametri  $\rho$ ).

Per risolvere il problema di controllo con un numero finito di LMI è necessario che la matrice di ingresso del sistema LPV sia indipendente dai parametri (si veda [2]): si noti che nel sistema di equazione (4.11) la matrice di ingresso  $B_u(\rho) = B_T(\bar{\Gamma} + \Delta\Gamma(\rho))$  dipende dalle variabili di scheduling  $\rho$ . Tuttavia, è possibile rendere il problema di dimensione finita spostando la

parametro-dipendenza nella matrice di stato  $A$  con l'inserimento di un filtro del primo ordine in ingresso al sistema.

A questo scopo, si definisce un nuovo vettore di controllo  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^3$  in ingresso al sistema. Esso rappresenta il vettore di controllo  $u$  filtrato.

Il sistema lineare del filtro passa-basso di primo ordine é descritto da:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= A_f x_f(t) + B_f \tilde{u}(t) \\ u(t) &= C_f x_f(t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

dove le matrici  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$  sono definite in modo che il filtro possa essere caratterizzato solamente dalla pulsazione di taglio  $\omega_{cut}$ :

$$A_f = \begin{bmatrix} -\omega_{cut} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{cut} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_{cut} \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} \omega_{cut} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{cut} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{cut} \end{bmatrix}, \quad C_f = I_3. \quad (4.16)$$

Si puó, dunque, definire un nuovo stato  $x_e$  per il sistema esteso<sup>4</sup> aggiungendo allo stato  $x$ , indicato in equazione (2.18), lo stato corrispondente al filtro  $x_f$ :

$$x_e = \begin{bmatrix} x^T & x_f^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \delta q_r^T & \delta \omega^T & x_f^T \end{bmatrix}^T. \quad (4.17)$$

A seguito di queste considerazioni, il sistema esteso si puó esprimere come:

$$\dot{x}_e(t) = A(\rho)x_e(t) + B_{\tilde{u}}\tilde{u}(t) + B_w w(t), \quad (4.18)$$

dove

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} A & B(\rho)C_f \\ 0 & A_f \end{bmatrix}, \quad B_{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} B_T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Dal sistema di equazione (4.18) si puó osservare come la parametro-dipendenza si sia effettivamente spostata dalla matrice associata al controllo  $B(\rho)$ , presente in equazione (4.11), alla matrice di stato  $A(\rho)$ : dato che la matrice  $A(\rho)$  dipende in modo affine dai parametri, si puó risolvere il problema di ottimizzazione convessa (4.8) solo ai vertici del politopo  $\mathcal{P}$ .

Per una completa trattazione dell'approccio di sintesi del controllore per il modello LPV si faccia riferimento a [7]: in esso viene illustrato come effettivamente questo approccio risolve il problema di controllo garantendo a priori determinati livelli di stabilitá e di prestazioni. Inoltre viene suggerita la pulsazione di taglio  $\omega_{cut}$  come possibile parametro per la regolazione della

<sup>4</sup>per sistema esteso si intende il sistema che comprende il modello LPV di equazione (4.11) e il filtro in ingresso di equazione (4.15).

sintesi di controllo.

Un'ulteriore precisazione riguarda la *complessità computazionale* per la risoluzione del problema di ottimizzazione: la formulazione del problema in termini di SDP permette di determinare la soluzione in modo efficiente attraverso l'utilizzo di comuni solutori per la programmazione semidefinita, rendendo la sintesi del controllore un procedimento relativamente rapido.

### 4.3 Penalizzazione del controllo

Il problema di controllo esposto nella sezione precedente fornisce una soluzione per il modello LPV che dipende dai parametri di scheduling  $\rho$ . Tuttavia la formulazione descritta non permette di tarare il controllore tenendo conto di possibili vincoli sulle variabili di controllo (*i.e.*, i momenti di dipolo magnetico  $m$ ) ed eventualmente gestire le prestazioni del sistema in anello chiuso. Inoltre i problemi di controllo LPV, risolti attraverso l'ottimizzazione convessa, possono fornire soluzioni mal condizionate.

Una possibile soluzione riguarda l'inserimento di un fattore costante  $\sigma$  al fine di penalizzare lo "sforzo" del controllore. Il principio coincide con quello espresso per il controllo del sistema LTP (si faccia riferimento alla Sezione 3.2) dove  $\sigma$  è stato definito come un peso che amplifica la variabile di controllo  $u$ .

Si osservi il sistema LPV di equazione (4.2): la penalizzazione  $\sigma$  non può essere inserita semplicemente come fattore moltiplicativo del segnale di controllo  $u$  in quanto non introdurrebbe alcuna modifica nella formulazione dei vincoli di equazione (4.3). Per applicare tale peso alla variabile  $u$ , esistono solamente soluzioni nel caso di controllo output-feedback, dove l'idea di base consiste nell'inserire direttamente  $\sigma$  nella legge di controllo (*e.g.*, si veda [36], [37]).

Nonostante ciò, per la configurazione state-feedback è possibile spostare la penalizzazione  $\sigma$  dalla variabile di controllo allo stato del sistema.

Si consideri la nota funzione di minimizzazione del problema di controllo ottimo LQR (infinite-horizon) per il sistema a tempo continuo  $\dot{x} = Ax + Bu$ :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (4.20)$$

dove per ipotesi  $Q = Q^T \geq 0$ ,  $R = R^T > 0$ ,  $(A, B)$  è stabilizzabile e  $(A, Q)$  è osservabile.

Il metodo LQR si basa sulla minimizzazione dell'errore medio tra la variabile

di controllo  $u$  e lo stato  $x$ : é ragionevole considerare che il peso sul controllo venga assunto come rafforzamento dello stato corrente.

In equazione (4.20), l'applicazione di un fattore costante  $\sigma$  proporzionale alla variabile di controllo  $u$  coincide con l'inserimento del termine moltiplicativo  $1/\sigma$  sullo stato  $x$ . In questo modo, la funzione di minimizzazione  $J$  viene ridotta del fattore  $\sigma$ .

Come naturale evoluzione del controllo LQR, questo concetto può anche essere esteso per il controllo  $H_\infty$ .

Dato il sistema lineare e la legge di controllo state-feedback:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_T T_d(t) \\ u(t) &= Kx(t),\end{aligned}\tag{4.21}$$

dove  $T_d$  identifica un segnale esterno generico, si definisce la variabile prestazionale  $z_a$  in cui viene introdotto il peso  $\sigma$  sul controllo:

$$z_a(t) = Zx(t) + \sigma u(t), \quad \sigma \geq 1.\tag{4.22}$$

Analogamente, si può definire una nuova variabile prestazionale  $z_b$ :

$$z_b(t) = \frac{1}{\sigma} Zx(t) + u(t), \quad \sigma \geq 1,\tag{4.23}$$

in cui viene lo stato viene rafforzato dal fattore  $1/\sigma$ .

Si può osservare che le variabili  $z_a$  e  $z_b$  sono legate dalla seguente relazione: la norma del trasferimento dal segnale  $T_d$  alla variabile  $z_a$  equivale alla norma del trasferimento dal segnale  $T_d$  alla variabile  $z_b$ , amplificata del fattore  $\sigma$ :

$$\| G_{z_a T_d} \|_\infty = \sigma \| G_{z_b T_d} \|_\infty.\tag{4.24}$$

Questo risultato permette di formulare il problema di sintesi  $H_\infty$  attraverso il rafforzamento dello stato e la successiva minimizzazione di  $\| G_{z_b T_d} \|_\infty$ , tenendo presente che da essa si può ricavare direttamente la norma  $H_\infty$  per la variabile prestazionale  $z_a$  come in equazione (4.24).

Si consideri ora il modello LPV di equazione (4.2): per ovviare all'impossibilità di inserire la penalizzazione  $\sigma$  direttamente sulla variabile di controllo  $u$ , si può utilizzare l'accorgimento appena descritto definendo le matrici  $C_{1x}$  e  $C_{2x}$  in questo modo:

$$C_{1x} = C_{2x} = \frac{1}{\sigma} [I_3 \quad 0], \quad \sigma \geq 1,\tag{4.25}$$

dove il termine  $1/\sigma$  introduce il rafforzamento dello stato  $x$ . Inoltre, é evidente che tale modifica non é vincolante in quanto, ponendo  $\sigma = 1$ , é possibile tornare al modello LPV di partenza (4.2).

A valle di queste osservazioni, é bene notare che l'inserimento del fattore moltiplicativo  $1/\sigma$  si ripercuote nel problema di ottimizzazione per la sintesi del controllore ( $C_{1x}$  e  $C_{2x}$  sono presenti nelle LMI di equazione (4.3) e nell'espressione esplicita del controllore  $K(\rho)$  di equazione (4.7)).

Inoltre, la misura di prestazione  $\gamma$  del modello avente il peso sullo stato (intesa come massimo valore della norma indotta  $\mathcal{L}_2$  tra il disturbo e le variabili di prestazione) risulta ridotta di un fattore  $\sigma$  come in equazione (4.24). Quindi, dato  $\gamma$ , si può ricavare direttamente l'indice di prestazione  $\gamma'$  per il modello avente la penalizzazione sul controllo:

$$\gamma' = \sigma \gamma.$$

Il parametro  $\sigma$  ha, dunque, la funzione di regolare l'effettiva azione del controllore in modo analogo alla definizione espressa per il sistema LTP, rendendo direttamente confrontabili i problemi di controllo  $H_\infty$  per il modello periodico e per il modello parametro-variante.

Si noti che, nonostante la modifica introdotta, il modello LPV del sistema esteso (*i.e.*, con l'aggiunta del filtro in ingresso) rimane il medesimo di quello definito in equazione (4.18).

## 4.4 Controllo robusto LPV/LFT

Come si é visto nella Sezione 4.1, la risoluzione del problema di sintesi per il modello LPV (4.2) permette di ottenere un controllore che rende il sistema esponenzialmente stabile e minimizza l'effetto di disturbi esterni generici. Nonostante ciò, la parametro-dipendenza dal solo campo magnetico potrebbe risultare un'ipotesi stringente rispetto a eventuali requisiti di robustezza: nei punti di lavoro considerati dal gain-scheduling si assume che il sistema lineare sia definito univocamente, trascurando le possibili variazioni dai valori nominali dei parametri che caratterizzano la dinamica d'assetto (*i.e.*, momenti principali di inerzia, momento di inerzia della ruota, velocità angolare della ruota).

Una prima soluzione potrebbe riguardare l'estensione dei parametri considerati nel modello LPV di equazione (4.11), aggiungendo i parametri incerti al vettore  $\rho$ . Tuttavia questo approccio può essere solamente utilizzato nel caso di dipendenza affine dai parametri<sup>5</sup> e introduce alcune ipotesi restrittive, tra cui la conoscenza a priori dell'intervallo e della velocità di variazione

<sup>5</sup>per un modello LPV dipendente da molti parametri, il numero di LMI potrebbe crescere notevolmente e limitare l'effettiva risoluzione pratica.

dei parametri incerti.

Per questi motivi, é ragionevole considerare ancora una volta l'incertezza dei parametri "interni" al sistema attraverso la rappresentazione LFT (esposta in Sezione 2.4) e sfruttare il Teorema del piccolo guadagno per la sintesi/analisi robusta.

Si noti che, al fine di caratterizzare l'incertezza parametrica, é possibile descrivere il sistema partendo dal modello tempo-invariante di equazione (2.20) e applicando ad esso la realizzazione LFT; a questo punto si può adottare la tecnica LPV esposta in questo capitolo per esprimere la tempo-varianza, derivata dalla dipendenza dal campo magnetico, e risolvere il problema di controllo.

In generale, le tecniche LPV e LFT possono essere utilizzate contemporaneamente sulla base dei parametri che definiscono il sistema. L'approccio 'misto' LPV/LFT viene spesso applicato a problemi di controllo  $H_\infty$  per sfruttare sia la sintesi LPV (requisiti di stabilità nominale e prestazioni in anello chiuso) che la formulazione LFT (robustezza rispetto alla variazione dei parametri incerti) (*e.g.*, si veda [25]).

Nel problema in esame si modella il sistema rispetto alla natura dei parametri presenti:

- i *parametri incerti* sono rappresentati attraverso la forma LFT in quanto si assume che a priori non é possibile caratterizzare in modo preciso la loro variazione;
- la parametro-varianza del modello dipende vettore dei parametri  $\rho$  (direttamente correlato al campo geomagnetico), il quale é ben definito dalla matrice  $\Delta\Gamma(\rho)$  in termini di intervallo e velocità di variazione dei parametri (si veda la Sezione 4.2.1).

Sulla base delle considerazioni effettuate, si procede nella definizione del modello LPV/LFT.

In primo luogo, si modella l'incertezza parametrica tramite la rappresentazione LFT esposta in Sezione 2.4, ovvero inserendo una matrice diagonale a blocchi  $\Delta$  in retroazione al sistema LTI. Anche in questo caso si suppone che  $\Delta$  sia definita in modo che  $\|\Delta\|_\infty < 1$  e che la rappresentazione nello spazio di stato del sistema sia data dall'equazione (2.39).

Analogamente all'approccio LTP, si definiscono i segnali di ingresso  $w$  e di uscita  $z$  rispetto alle componenti incerte e prestazionali:

$$w = [w_\Delta^T \quad w_p^T]^T \quad (4.26)$$

$$z = [z_\Delta^T \quad z_p^T]^T, \quad (4.27)$$

dove  $w_p = T_d$  identifica il disturbo esterno generico,  $z_p$  una variabile prestazionale e  $z_\Delta$ ,  $w_\Delta$  sono rispettivamente, i segnali di ingresso e di uscita dal blocco d'incertezza  $\Delta$  (si veda la Figura 4.4).

Il sistema parametro-variante si ricava dall'estensione del sistema (4.2) assumendo  $z_1 = z_\Delta$  e  $z_2 = z_p$ . Di conseguenza il modello LPV/LFT é formulato nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_\Delta(t) \\ z_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & B_2 & B_u(\rho(t)) \\ C_{1x}(\rho(t)) & 0 & 0 & 0 \\ C_{2x}(\rho(t)) & 0 & 0 & I_{n_{z_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w_\Delta(t) \\ w_p(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

a cui naturalmente va aggiunto il legame che pone in retroazione il blocco  $\Delta$  al sistema LPV:

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta.$$

Si può osservare che la dipendenza dal parametro variante é dovuta dalla presenza della matrice  $B_u(\rho(t))$ . Essa deriva direttamente dalla realizzazione LFT e dal parametro variante definito in equazione (4.9):

$$B_u(\rho(t)) = B_2\Gamma(b(t)) = B_2(\bar{\Gamma} + \Delta\Gamma(\rho)). \quad (4.29)$$

La rappresentazione del modello incerto rende necessaria anche la ridefinizione delle matrici associate allo stato  $C_{1x}$  e  $C_{2x}$ :

$$\begin{aligned} C_{1x} &= \frac{1}{\sigma} [C_1 & 0] \\ C_{2x} &= \frac{1}{\sigma} [I_3 & 0], \end{aligned} \quad (4.30)$$

dove  $\sigma > 1$  é il peso sul controllo espresso attraverso il rafforzamento dello stato (si veda la Sezione 4.3). Anche in questo caso, l'inserimento del parametro  $\sigma$  non introduce vincoli sulla formulazione del problema di sintesi in quanto, per  $\sigma = 1$ , é possibile ricavare il sistema privo della penalizzazione sul controllo.

Il problema di sintesi del controllore per il modello LPV/LFT si riconduce direttamente all'ottimizzazione convessa di equazione (4.8) dove i vincoli, espressi tramite LMI, possono essere risolti per il sistema di equazione (4.28) definendo la matrice  $B_w = [B_1 \ B_2]$  e le matrici  $C_{1x}$ ,  $C_{2x}$  come in (4.30). A questo punto é possibile ricavare dall'equazione (4.7) il controllore  $K(\rho)$  dipendente dai parametri di scheduling.

La legge di controllo state-feedback  $u(t) = K(\rho)x(t)$  rende il sistema stabile in anello chiuso e la norma  $\mathcal{L}_2$  indotta, tra il disturbo  $w$  e la variabile  $z$ ,

minore dell'indice  $\gamma$ : si noti che il trasferimento  $\|G_{zw}\|_\infty$  tiene conto sia del disturbo associato ai parametri incerti che del disturbo generico esterno. In questo modo, il problema di controllo non si limita a trovare una soluzione che attenua i disturbi esterni, ma considera anche la robustezza rispetto all'incertezza parametrica.

Inoltre, é possibile ottenere informazioni relative al trasferimento sulla linea di incertezza (da  $w_\Delta$  a  $z_\Delta$ ) e sulla linea delle prestazioni (da  $w_p$  a  $z_p$ ) attraverso i metodi di analisi per il sistemi LPV (*e.g.*, si veda [37]).

La parametro-dipendenza della matrice di ingresso  $B_u(\rho)$  rende il problema di ottimizzazione di dimensioni infinite: come per il modello LPV esposto in Sezione 4.2.2, l'introduzione di un filtro passa-basso del primo ordine permette di spostare la dipendenza nella matrice di stato  $A$ , limitando il numero di LMI.

Il filtro é caratterizzato solamente dalla pulsazione di taglio  $\omega_{cut}$  e definito dal sistema (4.15): dato il segnale di controllo  $u$ , esso produce il segnale filtrato di controllo  $\tilde{u}$  in ingresso al sistema.

Lo stato del sistema esteso  $x_e$  é composto dallo stato del modello LPV e dallo stato  $x_f$  del filtro come in equazione (4.17).

A seguito di queste considerazioni, il sistema LPV/LFT esteso si può esprimere come:

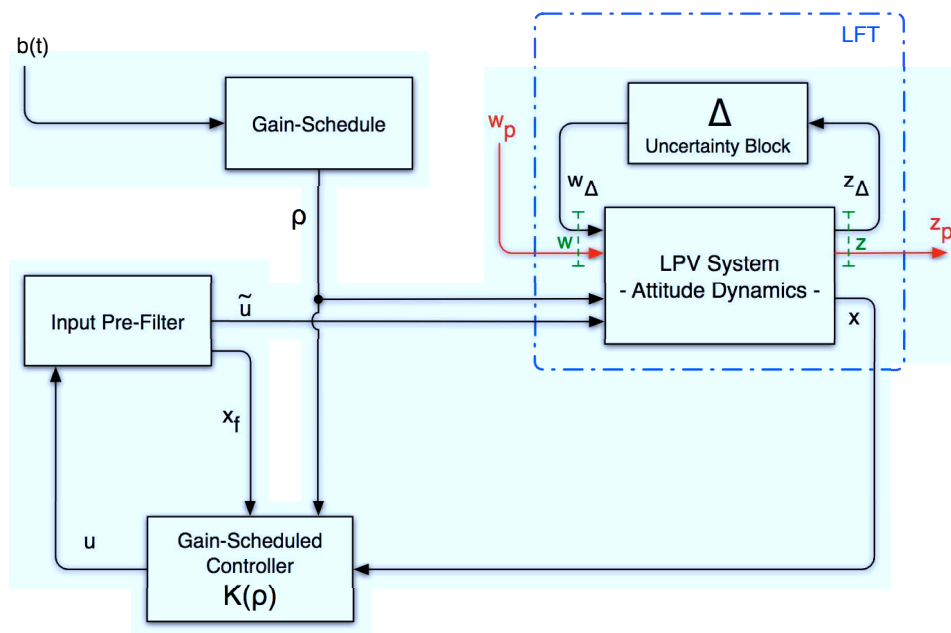
$$\dot{x}_e(t) = A(\rho)x_e(t) + B_{\tilde{u}}\tilde{u}(t) + B_{w_\Delta}w_\Delta(t) + B_{w_p}w_p(t), \quad (4.31)$$

dove

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} A_1 & B_u(\rho)C_f \\ 0 & A_f \end{bmatrix}, \quad B_{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \end{bmatrix}, \quad B_{w_\Delta} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{w_p} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

In Figura 4.4 si rappresenta lo schema a blocchi del modello LPV/LFT completo: viene illustrata la realizzazione LFT, il controllore  $K(\rho)$  posto in configurazione state-feedback e computato in real-time attraverso il gain-scheduling dei parametri  $\rho$ , il filtro del primo ordine in ingresso al sistema LPV.

La *complessità* del problema di controllo é analoga a quella del modello LPV che non considera l'incertezza parametrica in quanto il numero dei parametri varianti (e quindi di LMI) é il medesimo. La realizzazione LFT non richiede alcun sforzo computazionale e l'ottimizzazione convessa può essere risolta attraverso la programmazione SDP.



**Figura 4.4:** Schema a blocchi del sistema esteso LPV/LFT.

In conclusione, é bene precisare che il progetto di controllo per il modello LPV/LFT richiede una fase preventiva di taratura dei parametri riguardanti la banda passante del filtro passa-basso ( $\omega_{cut}$ ) e l'eventuale peso sulla variabile di controllo ( $\sigma$ ).



# Capitolo 5

## Simulazioni e risultati

*“Ciò che può essere affermato senza prova,  
può essere negato senza prova.”*

Eulero

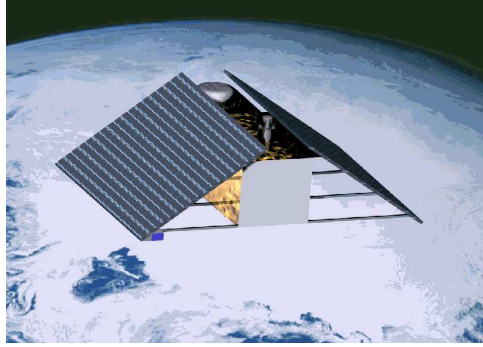
In questo capitolo si presentano alcuni risultati ottenuti attraverso il progetto di controllo robusto del modello tempo-periodico e del modello parametro-variante, descritti nei capitoli precedenti.

In primo luogo si descrive il caso di studio definendo i parametri fisici del modello linearizzato e la velocità della ruota di momento  $\Omega$  come parametro incerto.

Si procede, dunque, con l'analisi del modello LTP confrontando i risultati ottenuti dal controllo  $H_\infty$  e dal controllo robusto  $H_\infty$ . In particolare, si mostrano diversi studi Monte Carlo basati sulla variazione di  $\Omega$  e gli indici di prestazioni (*i.e.*, norme  $H_\infty$  e  $H_2$ ) associati agli operatori di trasferimento tra alcuni segnali rilevanti presenti nel sistema.

Per quanto riguarda il modello LPV, si discute la taratura dei parametri introdotti dalla modellizzazione parametro-variante (*i.e.*, frequenza di taglio del filtro d'ingresso ed eventuale penalizzazione sul controllo). In seguito si espongono le simulazioni Monte Carlo sia per il sistema LPV che per il sistema robusto LPV/LFT, e la norma  $\mathcal{L}_2$  indotta dai disturbi. Questi studi vengono effettuati sulla base dei parametri tarati in precedenza e variando l'intervallo di incertezza parametrica.

I progetti di controllo esposti e le simulazioni del sistema sono stati sviluppati in ambiente MATLAB/SIMULINK; inoltre, la realizzazione LFT del modello incerto è stata derivata attraverso l'uso del LFR-TOOLBOX (si



**Figura 5.1:** *Il satellite MITA.*

veda [13]) e la risoluzione del problema di ottimizzazione convessa per la sintesi del modello LPV é stata svolta tramite il toolbox YALMIP (si veda [16]) e il solutore SDPT3 (si veda [29]).

## 5.1 Caso di studio

Nella sezione corrente si espone un caso di studio al fine di valutare gli approcci di controllo robusto trattati. I parametri del modello linearizzato sono definiti sulla base di un satellite reale che possiede la struttura per il controllo d'assetto conforme al problema studiato, il satellite MITA.

Inoltre, la caratterizzazione del modello viene completata con le definizioni delle variabili presenti nel sistema, supponendo il caso generico con perturbazioni iniziali e disturbi esterni non nulli.

A questo punto si illustra il parametro incerto considerato per il controllo robusto e l'importanza di tale scelta per il sistema.

### 5.1.1 Parametri del modello: il satellite MITA

Al fine di illustrare le prestazioni relative agli approcci di controllo descritti e il concreto utilizzo di queste tecniche, sono state effettuate diverse simulazioni basate su un'architettura consolidata: il satellite MITA (Minisatellite Italiano di Tecnologia Avanzata).

MITA é un satellite costituito da un modulo principale di forma cubica avente massa di circa 170 kg (si veda la Figura 5.1) e stabilizzato sui tre assi con puntamento verso Terra: la sua struttura corrisponde a quella di un veicolo spaziale con dimensioni limitate e progettato per missioni LEO (per maggiori dettagli circa il satellite MITA si faccia riferimento a [8]).

Inoltre MITA é stato progettato per supportare carichi relativi a varie tipo-

**Tabella 5.1:** *Caratteristiche del satellite MITA.*

<b>Satellite inertia tensor</b> [ $kg\ m^2$ ]	$I_{xx} = 35, I_{yy} = 17, I_{zz} = 25$
<b>Momentum wheel inertia</b> [ $kg\ m^2$ ]	$J = 0.01$
<b>Nominal wheel speed</b> [ $rad/s$ ]	$\bar{\Omega} = -200$

**Tabella 5.2:** *Parametri orbitali.*

<b>Inclination</b> [ $deg$ ]	87.27 (near polar orbit)
<b>Altitude</b> [ $km$ ]	450
<b>Orbital period</b> [ $s$ ]	5614.8

logie di missioni spaziali: nella prima missione<sup>1</sup> furono impiegati l'apparato NINA-2, uno spettrometro in silicio sviluppato dal INFN (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare) avente lo scopo di rilevare il flusso delle particelle cariche, e l'apparato MTS-AOMS, un sistema di sensori autonomo realizzato dall'ESA (European Space Agency).

Il sistema per il controllo d'assetto (ACS) dispone di 2 sensori di orizzonte monoassiali, 1 magnetometro triassiale (ridondato), 5 sensori di Sole (ridondato). Gli attuatori presenti sono tre bobine magnetiche allineate lungo i tre assi solidali al corpo del satellite (ridondati) e una ruota di momento avente l'asse di rotazione perpendicolare al piano orbitale: si noti che la struttura é, in prima approssimazione, analoga a quella descritta nel problema di controllo trattato (si veda la Sezione 2.2).

A questo scopo, si riportano i parametri fisici del satellite MITA e dell'orbita operativa, rispettivamente in Tabella 5.1 e 5.2, che caratterizzano completamente il modello linearizzato per la dinamica d'assetto di equazione (2.20).

La configurazione descritta corrisponde ad un satellite con le dinamiche di rollio/imbardata accoppiate, marginalmente stabile grazie alla presenza della ruota di momento e avente dinamica instabile intorno all'asse di beccheggio a causa dell'effetto sfavorevole del gradiente gravitazionale (*i.e.*, dato dalle caratteristiche del satellite, si veda  $k_z > 0$  in equazione (2.23)). Tuttavia, l'instabilit  presente sull'asse di beccheggio   compensata dal fatto che il controllo svolto dagli attuatori magnetici   pi  semplice che sugli assi di rollio e imbardata. Ci    dato dal fatto che per le orbite polari il campo geomagnetico giace praticamente sul piano orbitale, rendendo controllabile la dinamica di beccheggio per l'intera orbita.

<sup>1</sup>la prima missione del satellite MITA risale al lancio effettuato in data 15 Giugno 2000 dalla stazione spaziale di Plesetsk (Russia).

Si é considerata una perturbazione iniziale per la dinamica d'assetto rispetto all'equilibrio di puntamento nominale. Questa perturbazione é stata applicata al vettore delle velocitá angolari all'istante iniziale  $t = 0$ ,

$$\delta\omega(0) = [1 \times 10^{-3} \quad 2 \times 10^{-3} \quad 0]^T \quad \text{rad/s.}$$

Sebbene sembri una condizione iniziale trascurabile, essa risulta una perturbazione rilevante rispetto all'orientamento del satellite nella condizione nominale.

Inoltre é stata assunta la presenza del dipolo magnetico residuo di intensitá di  $1 \text{ Am}^2$  lungo ciascun asse. Esso é rappresentato dalla coppia esterna non misurabile  $T_d$  :

$$T_d(t) = S(b(t)) [1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

Su ciascuna bobina magnetica si é aggiunto un limite di saturazione pari a  $\pm 20 \text{ Am}^2$  al fine di contenere lo sforzo di controllo.

Infine, l'approssimazione periodica del campo geomagnetico  $b_P(t)$  utilizzata nel modello LTP e nelle simulazioni del sistema di controllo dipende dall'orbita considerata, e nel caso in esame assume la seguente forma:

$$b_P(t) = 10^{-6} \begin{bmatrix} 7 \cos(\Omega_0 t) + 48 \sin(\Omega_0 t) \\ 23 \cos(\Omega_0 t) - 2 \sin(\Omega_0 t) \\ 5 \end{bmatrix} T, \quad (5.1)$$

dove  $\Omega_0$  é la velocitá angolare orbitale (*i.e.*,  $\Omega_0 = 2\pi/T$ ).

### 5.1.2 Scelta del parametro incerto

Per risolvere i problemi di controllo robusto affrontati é necessario definire i parametri che, a livello pratico, potrebbero risultare incerti e subire delle variazioni limitate. Si noti che questa operazione dipende dal sistema in esame in quanto é necessario valutare se é sensato definire l'incertezza sulla base della natura del parametro (*e.g.*, nel caso in cui i parametri derivano da altre misurazioni oppure sono soggetti a perturbazioni durante l'evoluzione del sistema).

Nel modello della dinamica d'assetto del satellite si é scelto come parametro incerto la velocitá angolare della ruota di momento  $\Omega$ . La rigidezza giroscopica viene assicurata se la velocitá é mantenuta costante; in caso contrario potrebbero presentarsi delle dinamiche nutazionali che a loro volta devono essere controllate dagli attuatori presenti. Nella configurazione

studiata, questo compito andrebbe svolto dalle bobine magnetiche disposte su ciascun asse.

Generalmente, per mantenere la velocità della ruota fissata al suo valore nominale, il sistema dispone di un ulteriore sistema di controllo separato. Ciò implica che la ruota è soggetta a possibili variazioni date dalla precisione del sistema stesso; queste considerazioni permettono di concludere che la velocità della ruota  $\Omega$  risulta un buon candidato da esprimere come parametro incerto per la dinamica d'assetto del satellite.

Richiamando la definizione del parametro incerto di equazione (2.35), si rappresenta la velocità angolare della ruota di momento  $\Omega$  nel seguente modo:

$$\Omega = \bar{\Omega}(1 + r_\Omega \delta_\Omega), \quad |\delta_\Omega| < 1, \quad (5.2)$$

dove  $r_\Omega$  è la percentuale di variazione massima dal valore nominale  $\bar{\Omega}$  e  $\delta_\Omega$  è il parametro che definisce il blocco di incertezza  $\Delta$ . Si ricordi che l'ipotesi di assumere  $|\delta_\Omega| < 1$  rende la norma del blocco di incertezza  $\|\Delta\|_\infty < 1$  (per approfondimenti si faccia riferimento alla Sezione 2.4).

L'intervallo di variazione della velocità della ruota di momento  $[\Omega_m, \Omega_M]$  è simmetrico rispetto al valore nominale  $\bar{\Omega}$  e gli estremi sono definiti da:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \bar{\Omega}(1 - r_\Omega) \\ \Omega_M &= \bar{\Omega}(1 + r_\Omega). \end{aligned} \quad (5.3)$$

In questo modo, è possibile ricavare il blocco d'incertezza  $\Delta$  ed esprimere l'entità del parametro incerto solamente definendo a priori la variazione percentuale massima  $r_\Omega$ .

## 5.2 Controllo robusto $H_\infty$ per il modello LTP

Nella seguente sezione si mostrano alcuni risultati ottenuti attraverso la simulazione del modello tempo-periodico, per il quale è stato svolto il progetto di controllo robusto  $H_\infty$  secondo gli approcci esposti nel Capitolo 3.

La legge di controllo è stata ricavata attraverso il progetto di controllo robusto  $H_\infty$ , considerando la velocità della ruota come parametro incerto.

In primo luogo, si riportano alcune osservazioni sperimentali relative ai problemi di controllo considerati.

La sintesi del controllore state-feedback  $K$  è stata effettuata al variare dei seguenti parametri:

- variazione del peso sul controllo  $\sigma$  per il controllo ottimo;

- variazione dell'incertezza parametrica  $r_\Omega$  per il controllo robusto;
- variazione del peso sul controllo  $\sigma$  e dell'incertezza parametrica  $r_\Omega$  per il controllo congiunto (robusto e ottimo).

Analogamente allo studio svolto in [39], per il peso sul controllo sono stati considerati i valori  $\sigma = 60, 120, 240$ .

La ricerca del controllore state-feedback é stata effettuata tramite l'algoritmo di ottimizzazione (si veda la Sezione 3.2). I parametri di ottimizzazione dell'algoritmo, esposti in Tabella 3.1, sono stati impostati in questo modo:

$$N = 540, \quad r_{max} = 0.995, \quad \mu = 10^{-3}. \quad (5.4)$$

Tali valori sono stati ricavati da un processo di taratura al fine di ottenere un compromesso tra la complessità e la precisione dell'algoritmo.

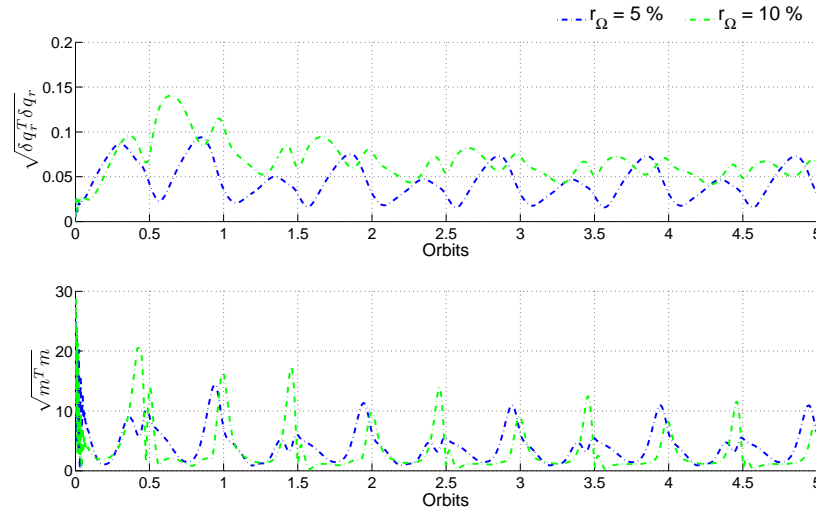
Inoltre, per il progetto di controllo robusto e ottimo si é adoperato l'algoritmo di ottimizzazione in configurazione *HOT START* in quanto si é preventivamente calcolato i controllori robusti (per i dettagli si faccia riferimento alla Sezione 3.4). Il fattore di miglioramento é stato regolato al valore  $\gamma = 7.5$ : tale scelta permette di migliorare significativamente le prestazioni rispetto al solo controllo robusto e contemporaneamente non introduce un vincolo particolarmente restrigente, mantenendo la stessa complessità dell'algoritmo.

Un'ulteriore precisazione riguarda il test sul vincolo di stabilità del sistema: la matrice di monodromia é stata ricavata in modo esplicito<sup>2</sup> integrando numericamente l'equazione differenziale associata al sistema LTP.

Per quanto riguarda le simulazioni relative al problema di controllo robusto  $H_\infty$  (*i.e.*, sistema avente il controllore che considera unicamente l'incertezza parametrica e non la coppia di disturbo esterna) é necessario osservare che si possono raggiungere buone prestazioni in anello chiuso solamente se non vi sono disturbi esterni. É già stato discusso nella Sezione 3.4 che questa situazione non corrisponde ad una condizione reale del sistema: si é verificato che la coppia dovuta al dipolo residuo  $T_d$  non viene attenuata dai controllori che tengono conto solamente del parametro incerto.

In Figura 5.2 si evidenzia come la norma dell'errore di orientamento  $\sqrt{\delta q_r^T \delta q_r}$  e la norma del momento di dipolo magnetico  $\sqrt{m^T m}$  non vengano smorzate durante l'evoluzione del sistema, mantenendo costante un certo grado di perturbazione sull'assetto del satellite (*e.g.*, si confrontino tali risultati con quelli esposti in [39]). Sulla base di queste osservazioni, é

<sup>2</sup>gli aspetti computazionali di tale metodo sono esposti in Sezione 3.2.



**Figura 5.2:** Controllo robusto: norma dell'errore di orientamento e del dipolo magnetico per  $r_\Omega = 5\%$  e  $r_\Omega = 10\%$ .

ragionevole ricondurre il problema di controllo robusto alla sintesi che considera sia l'incertezza parametrica che il disturbo esterno, valutando l'apporto che questo approccio porta in termini di prestazioni.

In seguito si mostrano i risultati ottenuti sulla base dei dettagli implementativi esposti. In particolare, si illustrano alcune simulazioni Monte Carlo per il sistema LTP avente i controllori ricavati dal progetto di controllo ottimo  $H_\infty$  (si veda la Sezione 3.2) e dal progetto di controllo congiunto (sia robusto rispetto ai parametri incerti che ottimo per i disturbi esterni, si veda la Sezione 3.4).

La valutazione dell'approccio procede con l'analisi quantitativa delle prestazioni del sistema: in linea con i metodi di controllo  $H_\infty$ , si espongono le norme per le principali funzioni di trasferimento e la loro variazione rispetto ai parametri di regolazione del controllore (*i.e.*, peso sul controllo  $\sigma$  e percentuale di variazione massima  $r_\Omega$ ).

### 5.2.1 Simulazioni Monte Carlo

A livello sperimentale é utile osservare l'andamento dell'assetto del satellite, in termini di orientamento rispetto all'assetto nominale, quando il sistema é effettivamente soggetto a perturbazioni limitate della velocità della ruota  $\Omega$ . Un possibile procedimento riguarda la possibilità di esplorare tutto lo spazio dei valori assunti dal parametro incerto e dedurre il comportamento

del sistema in fase di simulazione.

A tal proposito sono state effettuate simulazioni Monte Carlo per il modello LTP, prendendo come variabile casuale il parametro incerto  $\Omega$ : per essa si é assunta la distribuzione uniforme di  $N$  campioni nell'intervallo  $[\Omega_m, \Omega_M]$  definito dalla variazione massima percentuale  $r_\Omega$  (si veda l'equazione (5.3)). I risultati sono stati ottenuti prendendo un campione di  $N = 100$  valori casuali per  $\Omega$  e simulando, per ogni campione, il comportamento del sistema per la durata di 5 orbite.

In seguito, si illustrano le simulazioni del sistema LTP nel caso di controllo ottimo  $H_\infty$  e di controllo congiunto (robusto e ottimo)  $H_\infty$  al variare dei parametri  $r_\Omega$  e  $\sigma$ ; per ciascuna di esse viene rappresentato l'errore dell'assetto tramite la parte vettoriale del quaternion<sup>3</sup>  $q_2, q_3, q_4$  e le variabili di controllo  $m_x, m_y, m_z$  (*i.e.*, il vettore dei momenti di dipolo magnetico  $m$ ).

Si noti che per ogni grafico viene rappresentato l'andamento sovrapposto delle  $N$  simulazioni associate ai campioni casuali del parametro incerto.

### Controllo ottimo $H_\infty$

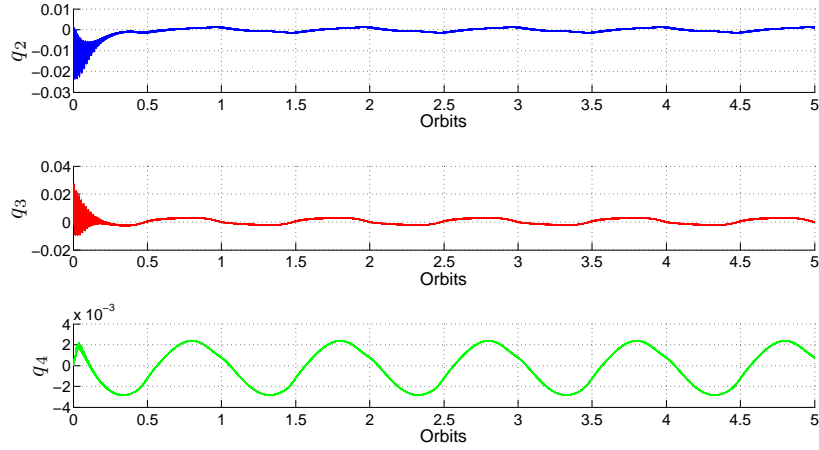
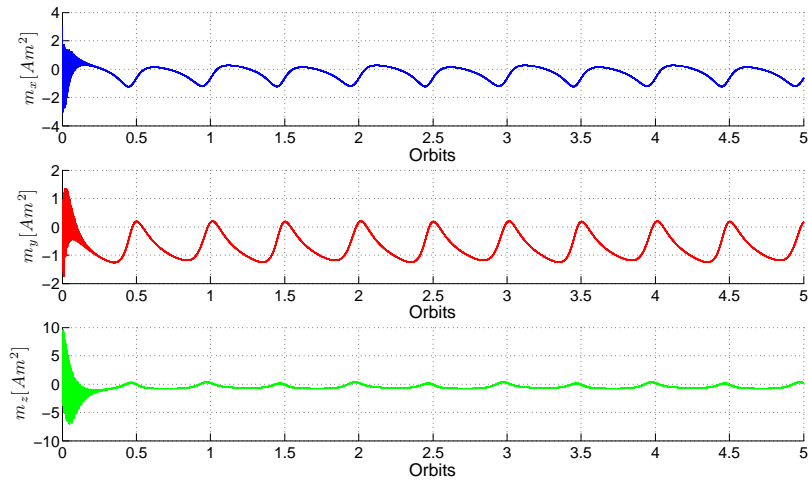
In questo paragrafo si mostrano le simulazioni del modello LTP avente il controllore ricavato dall'approccio ottimo  $H_\infty$ . É bene notare che la sintesi di controllo é stata effettuata solamente sulla base del parametro  $\sigma$  scelto. Dopo aver ricavato il controllore ottimo, si valuta quale impatto potrebbe avere l'incertezza parametrica attraverso le simulazioni Monte Carlo di  $N$  campioni casuali.

Nelle Figure 5.3-5.5 si mostra l'andamento dell'errore d'assetto e dei momenti di dipolo magnetico per  $r_\Omega = 15\%$  e  $\sigma = 60, 120, 240$ . Al fine di valutare diverse variazioni del parametro incerto, nelle Figure 5.6-5.8 si mostrano gli andamenti per  $r_\Omega = 30\%$  e  $\sigma = 60, 120, 240$ .

Osservando tali risultati si puó notare che lo smorzamento della perturbazione iniziale, dovuta dalle condizioni iniziali non nulle delle velocità angolari, avviene in meno di un orbita.

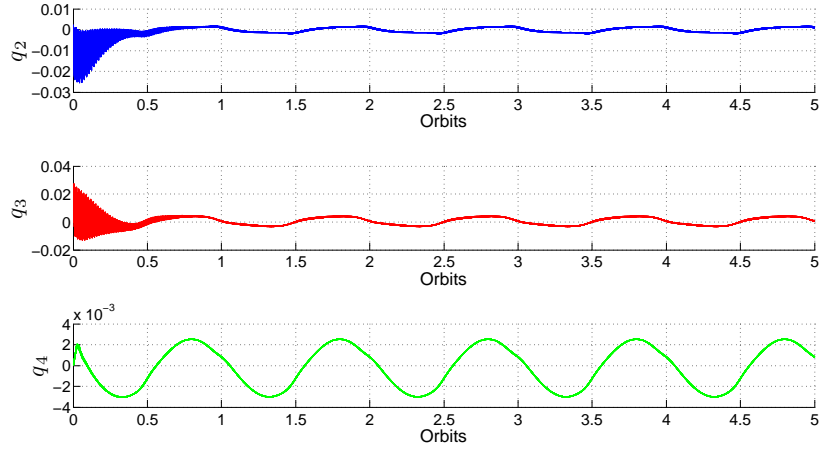
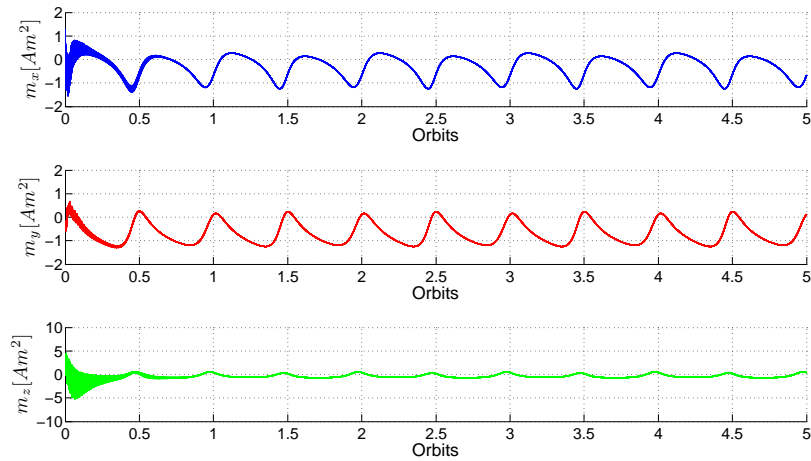
Si confrontino i risultati al variare del peso sul controllo  $\sigma$ . All'aumentare di tale parametro l'attenuazione della coppia di disturbo risulta piú debole, mentre per piccoli valori di  $\sigma$  (*i.e.*,  $\sigma = 60$ ) si ottengono migliori prestazioni in termini di orientamento (*e.g.*, si confronti la Figura 5.3(a) con 5.5(a)). Ciò

<sup>3</sup>si noti che non viene rappresentata la componente scalare del quaternion  $q_1$  in quanto una rotazione puó essere caratterizzata totalmente dalla sola parte vettoriale  $q_r$ , per dettagli si veda l'Appendice A.3.

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.***Figura 5.3:** *Controllo ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 15\%$ ,  $\sigma = 60$ .*

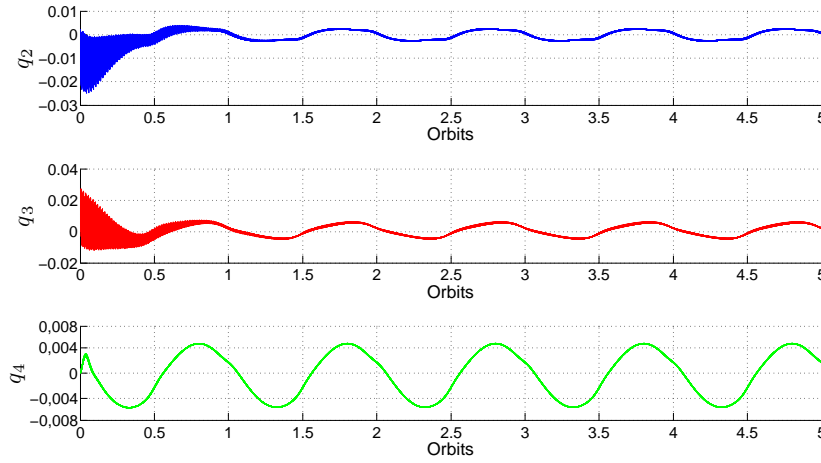
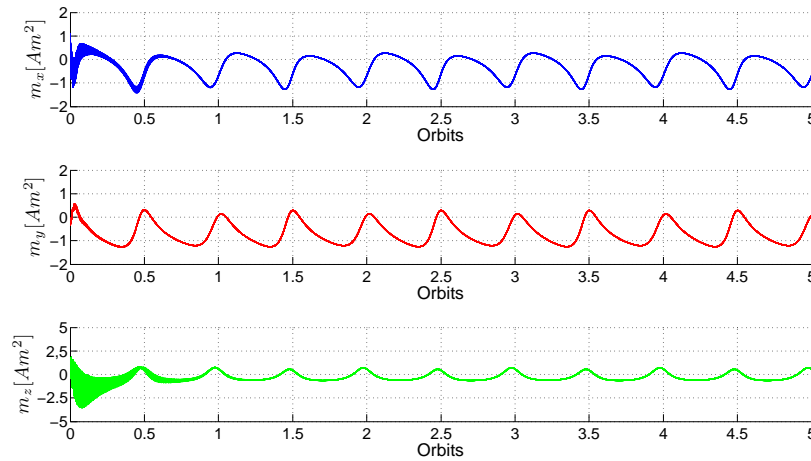
vale anche per l'asse di beccheggio  $q_4$  che, in accordo con quanto già discusso in Sezione 5.1.1, è comunque maggiormente controllato sin dal principio dell'evoluzione del sistema.

Nonostante ciò, l'azione di controllo non richiede uno sforzo aggiuntivo al variare di  $\sigma$ : diminuendo il peso sul controllo, l'intensità dei momenti di dipolo è maggiore solamente nel transitorio iniziale (*e.g.*, si vedano le Figure

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.***Figura 5.4:** *Controllo ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 15\%$ ,  $\sigma = 120$ .*

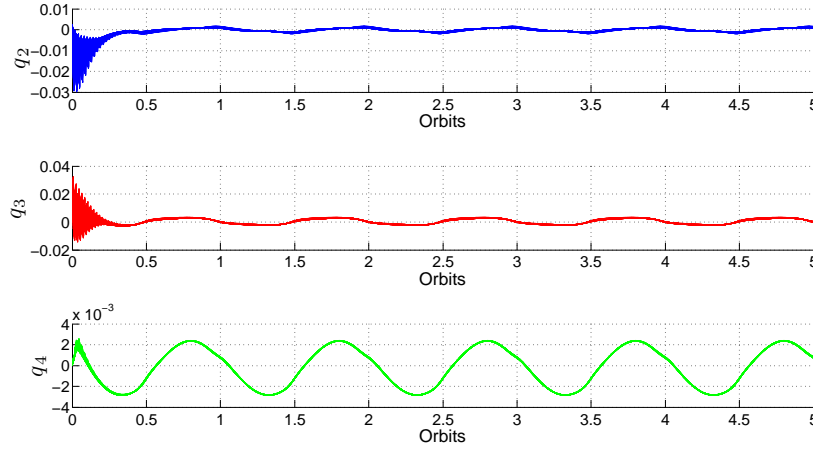
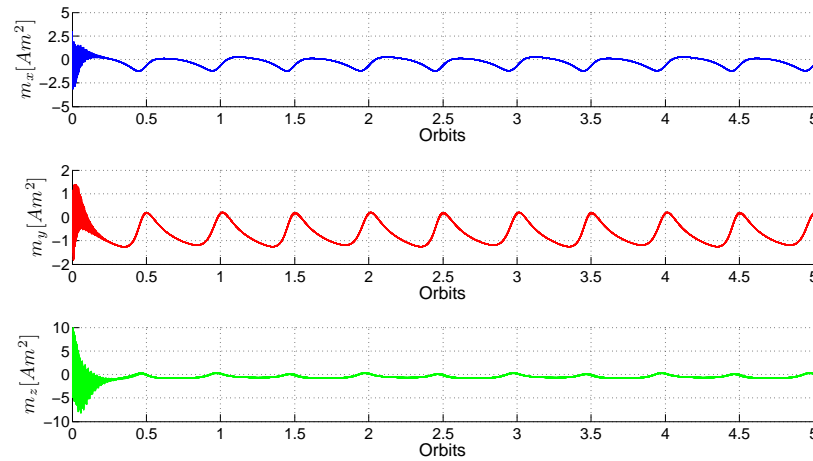
5.3(b) e 5.5(b)).

La perturbazione della velocità della ruota di momento, rispetto al suo valore nominale  $\bar{\Omega}$ , introduce maggiore oscillazione nella fase iniziale sugli assi di imbardata e rollio ( $q_2$ ,  $q_3$ ). Tali osservazioni possono essere derivate confrontando, a parità di  $\sigma$ , l'errore d'assetto per le simulazioni aventi  $r_\Omega = 15\%$ ,  $30\%$  e i risultati ottenuti in [39], dove  $\Omega$  é fissata al suo valore

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.***Figura 5.5:** Controllo ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 15\%$ ,  $\sigma = 240$ .

nominale  $\bar{\Omega}$ . Un esempio é dato dalle Figure 5.5(a) e 5.8(a), dove la fase di assestamento iniziale é, rispettivamente, meno di un orbita e circa un orbita e mezza.

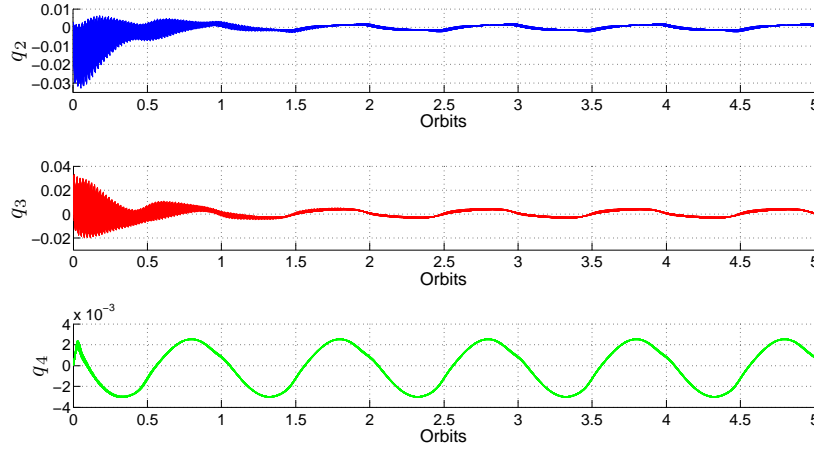
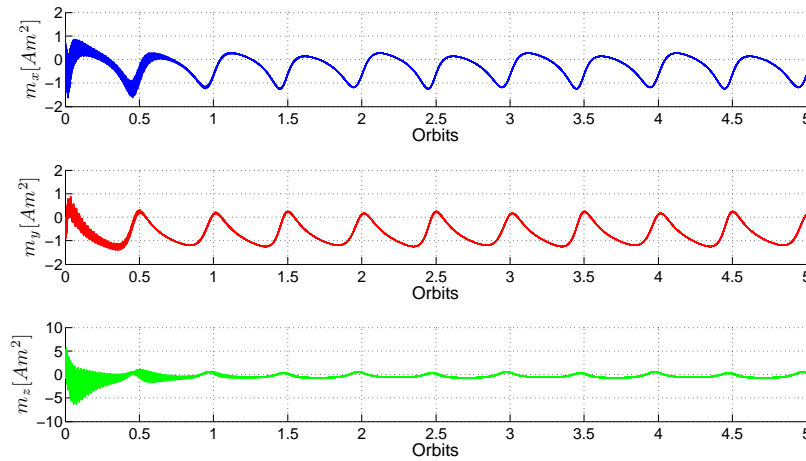
Tuttavia, l'incremento di  $r_\Omega$  non introduce un significativo cambiamento per le variabili di controllo che rimangono solamente sensibili alla variazione del peso sul controllo  $\sigma$ .

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.6:** Controllo ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 30\%$ ,  $\sigma = 60$ .

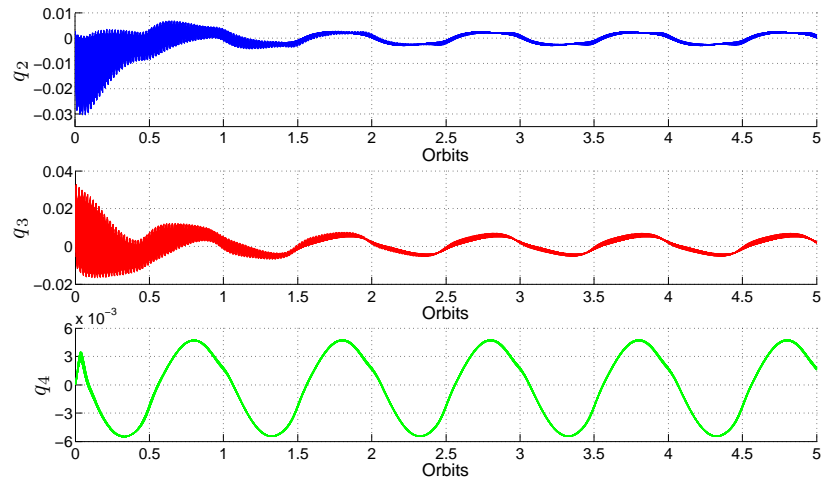
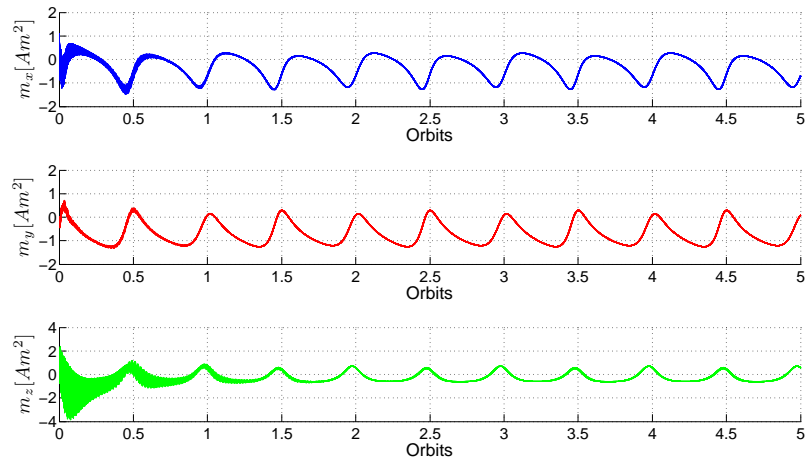
### Controllo robusto e ottimo $H_\infty$

In modo analogo al paragrafo precedente, si presentano alcune simulazioni del modello LTP per cui si é effettuata la sintesi di controllo tramite l'approccio robusto-ottimo  $H_\infty$ . Si noti che, diversamente dal controllo ottimo, il controllore ricavato dipende sia dal peso sul controllo  $\sigma$  che dalla variazione massima percentuale  $r_\Omega$  del parametro incerto.

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.***Figura 5.7:** Controllo ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 30\%$ ,  $\sigma = 120$ .

Le simulazioni Monte Carlo permettono di valutare se effettivamente l'introduzione dei requisiti di robustezza nel problema di controllo rende il sistema meno sensibile alla variazione del parametro incerto  $\Omega$ . Inoltre, è possibile osservare l'impatto che il controllo robusto potrebbe avere sulle prestazioni del sistema in anello chiuso, in termini di attenuazione dei disturbi esterni.

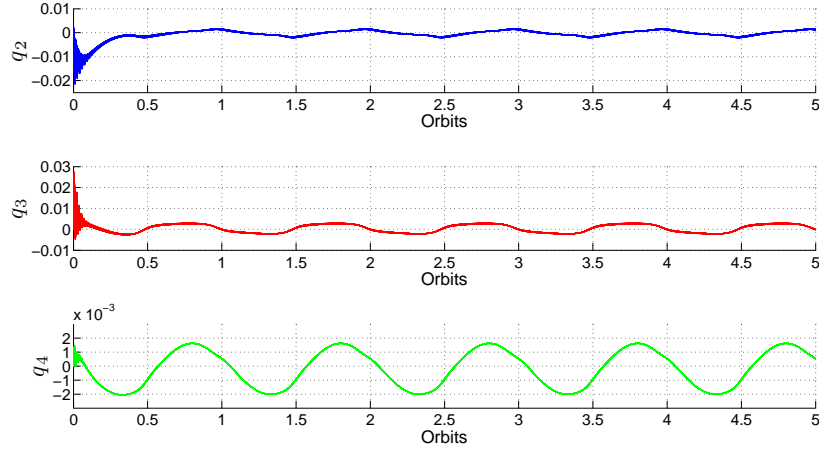
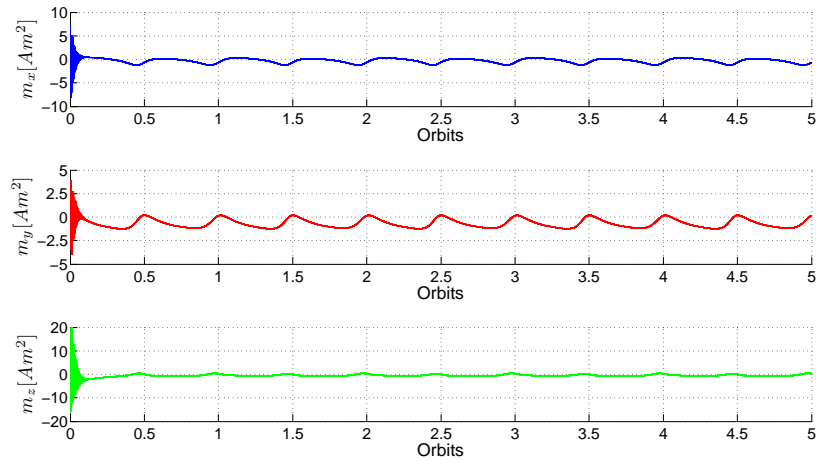
Si mostrano le figure relative alle simulazioni Monte Carlo per gli stessi

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.8:** *Controllo ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 30\%$ ,  $\sigma = 240$ .*

valori di  $\sigma$  e di  $r_\Omega$  considerati nel caso di controllo ottimo: gli andamenti dei quaternioni e dei momenti di dipolo sono riportati nelle Figure 5.9-5.11 per i parametri  $r_\Omega = 15\%$  e  $\sigma = 60, 120, 240$ , mentre nelle Figure 5.12-5.14 per  $r_\Omega = 30\%$  e  $\sigma = 60, 120, 240$ .

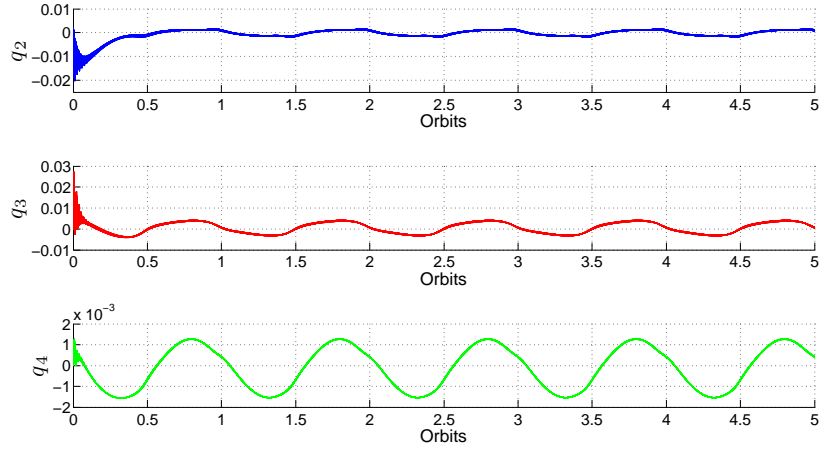
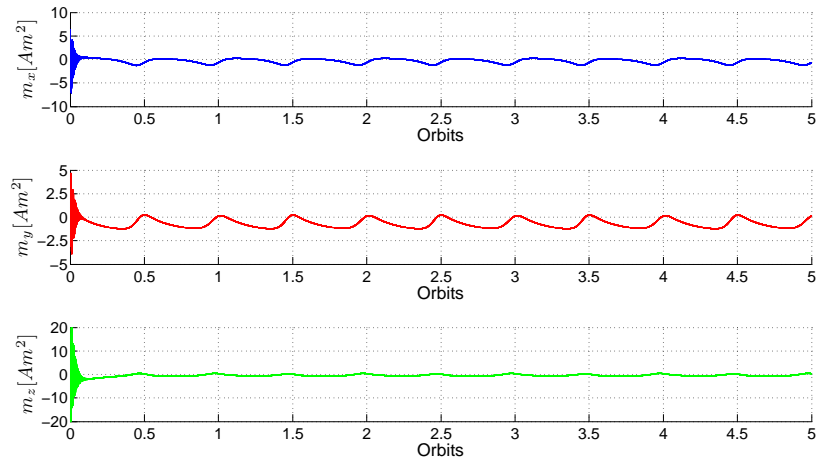
Confrontando tali risultati con le simulazioni del controllo ottimo, si può notare che il comportamento dell'errore d'assetto é meno oscillatorio nel

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.9:** Controllo robusto-ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 15\%$ ,  $\sigma = 60$ .

transitorio iniziale e stabilizzato in modo piú efficiente. Queste osservazioni risultano particolarmente evidenti per gli assi di rollio e imbardata (si veda, *e.g.*, la Figura 5.4(a) e la Figura 5.10(a)), mentre l'asse di beccheggio rimane comunque ben controllata.

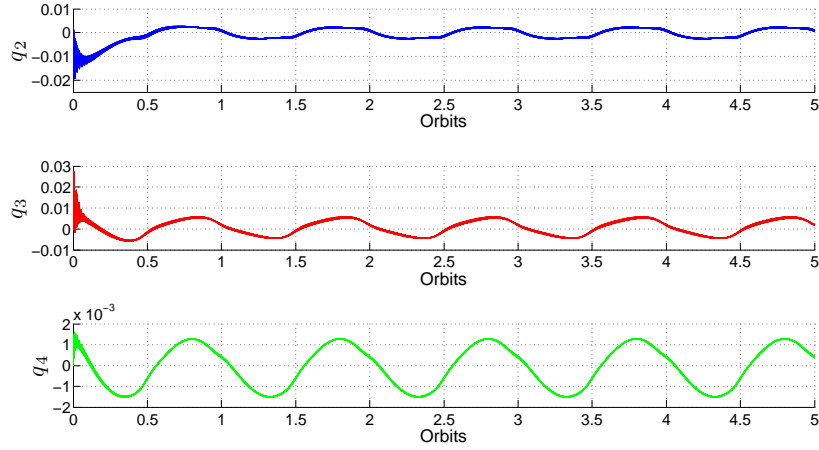
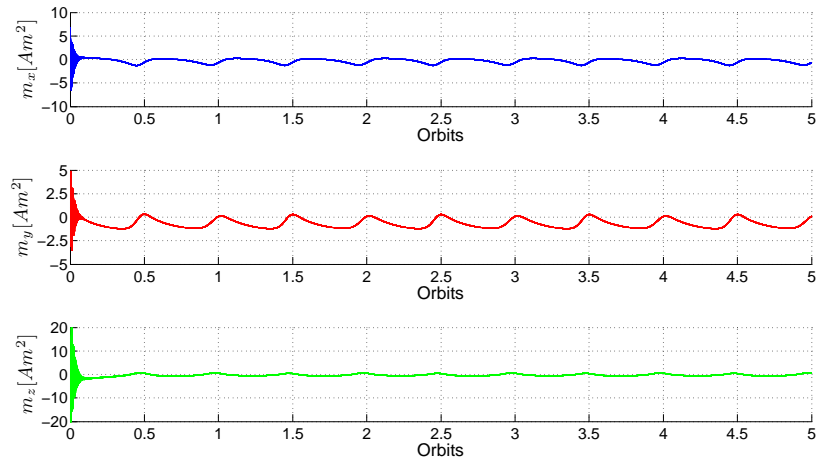
Inoltre, le considerazioni esposte sono maggiormente visibili all'aumentare della perturbazione di  $\Omega$ : per  $r_\Omega = 30\%$ , si veda per esempio la Figura

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.10:** Controllo robusto-ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 15\%$ ,  $\sigma = 120$ .

5.14(a), la risposta del sistema controllato risulta meno oscillante nella fase iniziale e stabile dopo circa metà orbita.

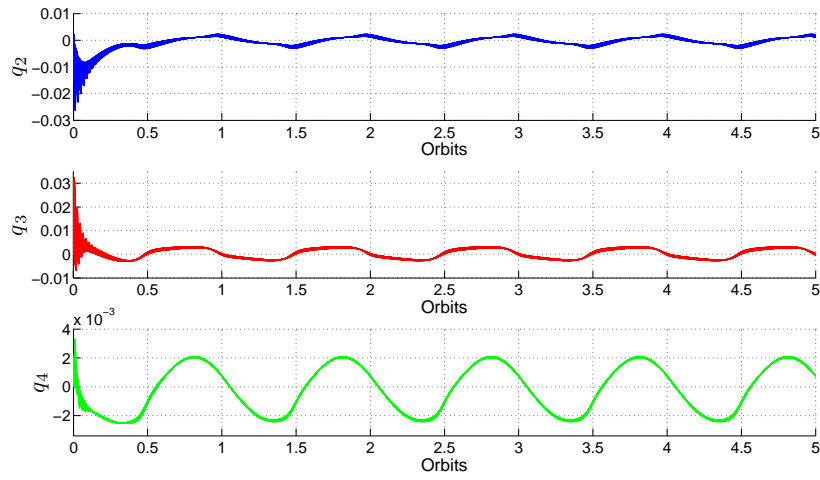
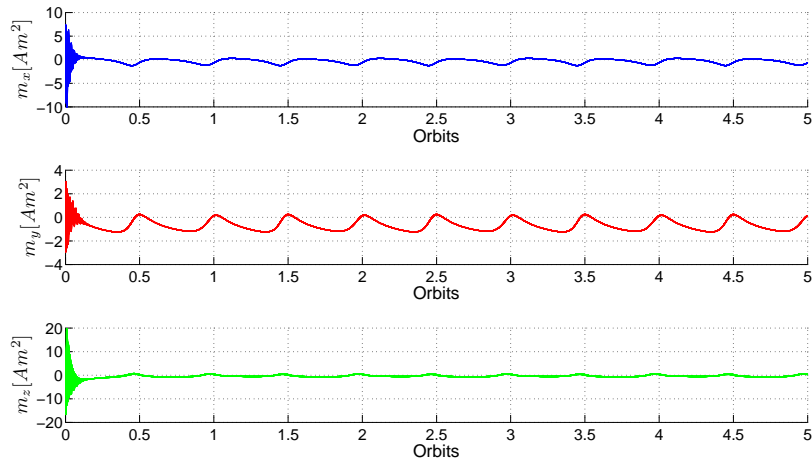
A discapito di tali caratteristiche, si può notare una maggiore intensità delle variabili di controllo all'inizio del transitorio. Nonostante ciò, una volta che il sistema ha raggiunto il suo regime stazionario, l'andamento dei momenti di dipolo è il medesimo di quello ottenuto col solo controllo ottimo (*e.g.*, si

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.11:** Controllo robusto-ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 15\%$ ,  $\sigma = 240$ .

confrontino le Figure 5.7(b) e 5.13(b)).

La variazione del peso sul controllo  $\sigma$  implica lo stesso effetto già esposto nel paragrafo precedente: riducendo il valore di  $\sigma$  si ottengono migliori prestazioni in termini di orientamento e le variabili di controllo non richiedono un particolare sforzo aggiuntivo, tranne che all'inizio della simulazione.

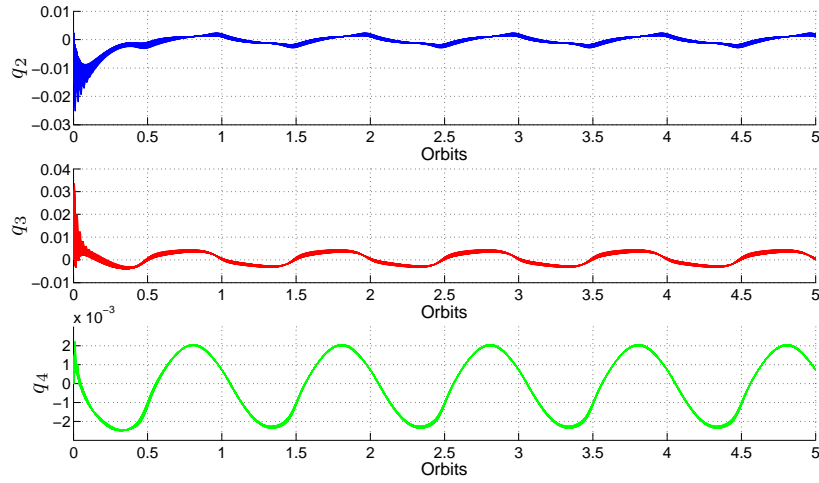
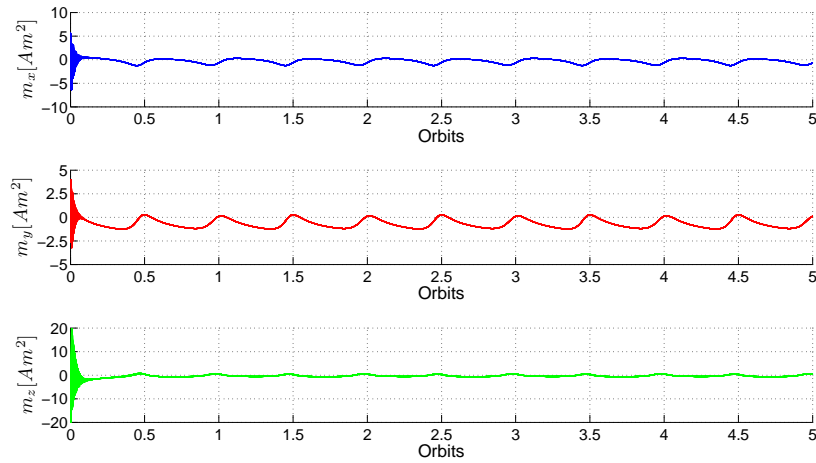
(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.12:** Controllo robusto-ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 30\%$ ,  $\sigma = 60$ .

### Osservazioni

Per completare quest'analisi, a seguito di diverse valutazioni del sistema al variare della perturbazione sul parametro incerto  $\Omega$ , si é osservato che la perdita della stabilit  del sistema LTP si raggiunge per:

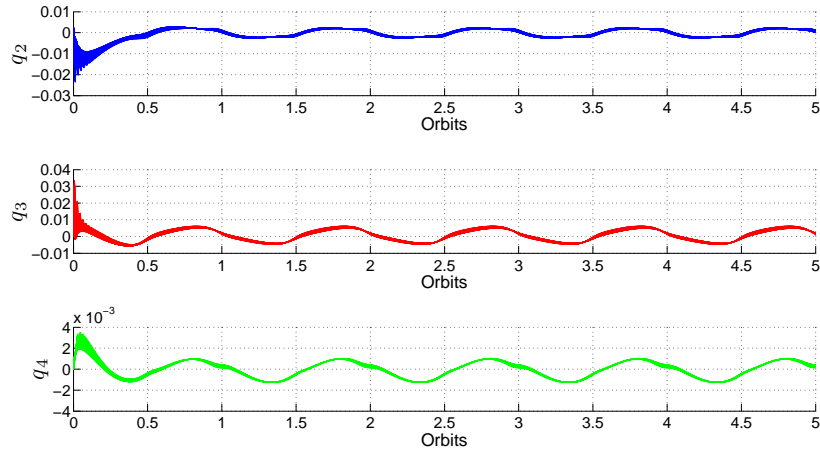
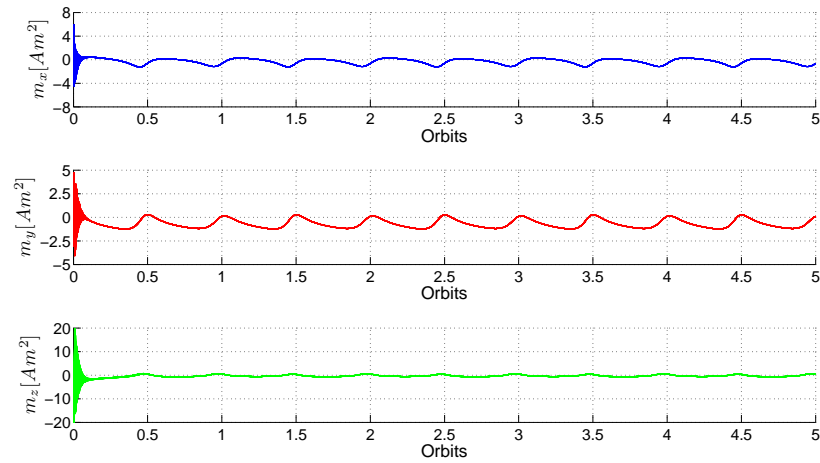
- $r_\Omega \simeq 40\%$  nel caso di controllo ottimo;

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.13:** Controllo robusto-ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 30\%$ ,  $\sigma = 120$ .

- $r_\Omega \simeq 75\%$  nel caso di controllo robusto e ottimo.

Nonostante si sia assunto un andamento periodico per il campo magnetico  $b_P(t)$ , é necessario sottolineare che i comportamenti del sistema sono indipendenti dall'istante iniziale  $t_0$ ; é stato verificato in fase di simulazione che l'evoluzione del sistema risulta identica anche per  $t_0 \neq 0$  (o equivalentemente aggiungendo uno sfasamento alle componenti periodiche del campo

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.14:** Controllo robusto-ottimo  $H_\infty$ : simulazioni Monte Carlo del modello LTP,  $r_\Omega = 30\%$ ,  $\sigma = 240$ .

magnetico  $b_P(t)$ .

Si osservi che nei risultati esposti sono state omesse le variazioni delle velocità angolari  $\delta\omega$  (presenti nello stato del sistema). Per le simulazioni effettuate si ha che le velocità angolari si stabilizzano al valore nominale  $\bar{\omega}$  in tempo breve (*i.e.*, dopo meno di un quarto di orbita) e assumono valori

**Tabella 5.3:** Norme  $H_\infty/H_2$  per gli operatori del modello LTP.

Norma $H_\infty/H_2$	Interpretazione Ingresso/Uscita	Descrizione
$\  \mathcal{G}_{zw} \ _\infty$	$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\ z\ _2}{\ w\ _2}$	Norma $H_\infty$ tra l'ingresso $w$ e l'uscita $z$ .
$\  \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \ _\infty$	$\sup_{w_\Delta \in \mathcal{L}_2} \frac{\ z_\Delta\ _2}{\ w_\Delta\ _2}$	Norma $H_\infty$ tra l'ingresso $w_\Delta$ e l'uscita $z_\Delta$ , derivanti dal blocco di incertezza $\Delta$ .
$\  \mathcal{G}_{\delta q_r w_p} \ _\infty$	$\sup_{w_p \in \mathcal{L}_2} \frac{\ \delta q_r\ _2}{\ w_p\ _2}$	Norma $H_\infty$ tra la coppia di disturbo $w_p = T_d$ e l'errore di orientamento $\delta q_r$ .
$\  \mathcal{G}_{m w_p} \ _2$	$\sup_{m \in \mathcal{L}_\infty} \frac{\ m\ _\infty}{\ w_p\ _\infty}$	Norma $H_2$ tra la coppia di disturbo $w_p = T_d$ e il vettore dei momenti di dipolo $m$ .

modesti durante il transitorio (tipicamente sull'ordine  $10^{-3}$  rad/s). A valle di queste considerazioni, risulta evidente la scelta di valutare principalmente l'errore d'assetto e le variabili di controllo del sistema.

### 5.2.2 Misure di prestazioni

Per supportare i risultati ottenuti attraverso le simulazioni del modello LTP e confrontare i controllori ottenuti dall'approccio di controllo robusto-ottimo, si presentano le norme  $H_\infty/H_2$  per le principali funzioni di trasferimento del sistema. Queste misure prestazionali permettono di dare un'interpretazione quantitativa del guadagno di ingresso/uscita per i segnali del sistema considerati.

Si noti che tali valori dipendono direttamente dal controllore state-feedback ricavato tramite il problema di ottimizzazione. Per questo motivo, le seguenti misure sono espresse in funzione dei parametri di regolazione del controllore  $\sigma$  e  $r_\Omega$ .

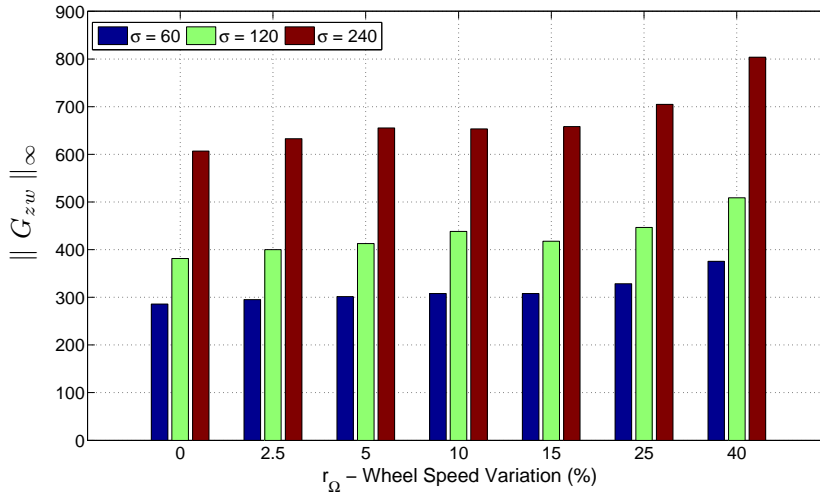
In Tabella 5.3 si riportano le norme valutate e la loro rappresentazione in termini di guadagno  $\mathcal{L}_2$  dell'operatore di ingresso/uscita. I segnali presenti e le HTF sono definite come in Sezione 3.4.

Si noti che le quantità  $\| \mathcal{G}_{\delta q_r w_p} \|_\infty$  e  $\| \mathcal{G}_{m w_p} \|_2$  forniscono una misura degli effetti dovuti alla presenza della coppia di disturbo, rispettivamente, sull'errore d'assetto e sulle variabili di controllo (tali norme sono definite come in [39]). In aggiunta, la norma  $\| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty$  permette di valutare la linea di incertezza e la stabilità robusta del sistema (si veda la Sezione 2.4.2).

Sulla base delle considerazioni fatte, nelle Figure 5.15-5.18 si rappresentano le norme presenti in Tabella 5.3 al variare del peso sul controllo  $\sigma = 60, 120, 240$  e del parametro incerto  $r_\Omega$ .

Per  $r_\Omega = 0\%$  si identifica il progetto di controllo svolto senza tener conto del parametro incerto; naturalmente esso coincide con l'approccio ottimo descritto in Sezione 3.2.

In Figura 5.15 si evidenzia come le perturbazioni  $w$  in ingresso al modello, dovute sia all'incertezza parametrica che ai disturbi esterni, vengano maggiormente controllate al decrescere del peso  $\sigma$ . Inoltre, solo per alte variazioni della velocità della ruota ( $r_\Omega > 25\%$ ) si può notare un significativo peggioramento nell'attenuazione dei disturbi.

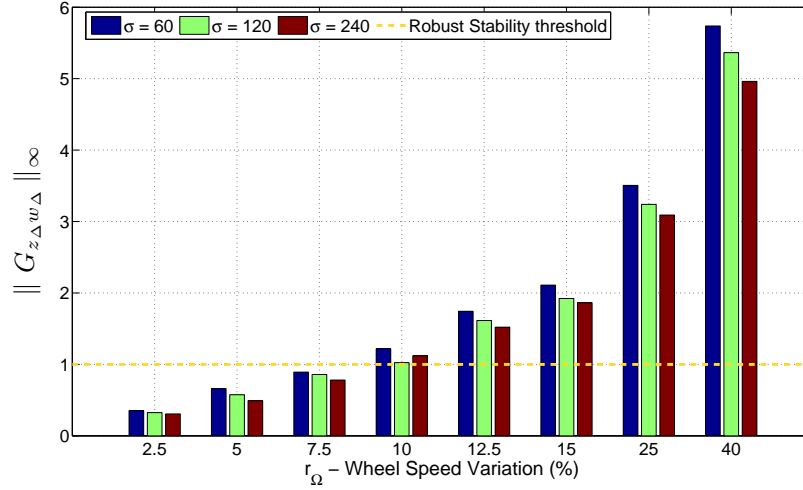


**Figura 5.15:**  $\|G_{zw}\|_\infty$  per il controllore progettato utilizzando il modello LTP.

Attraverso il calcolo della norma  $\|G_{z\Delta w\Delta}\|_\infty$  si può verificare a priori la stabilità robusta<sup>4</sup> del modello LTP sulla base dell'intervallo di variazione definito da  $r_\Omega$ . In Figura 5.16 viene mostrato per quali valori di  $r_\Omega$  si ricavano i controllori che soddisfano tale proprietà; il sistema LTP discusso è stabile in presenza del parametro incerto  $\Omega$  per valori di  $r_\Omega < 10\%$ .

Sebbene non si abbia alcuna indicazione sul comportamento del sistema per valori di  $r_\Omega \geq 10\%$  (si ricorda che la condizione di stabilità robusta è solamente sufficiente), è stato discusso in Sezione 3.4 che attraverso l'approccio di controllo robusto si minimizza comunque il contributo dato dall'incertezza parametrica. Infatti, solamente in fase di simulazione si può notare che

<sup>4</sup>per la condizione di *stabilità robusta* si faccia riferimento alla Definizione 2.4.1.



**Figura 5.16:**  $\| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty$  per il controllore progettato utilizzando il modello LTP.

il sistema rimane stabile fino ad una variazione di circa  $\pm 40\%$  dalla velocità nominale della ruota di momento.

La norma  $\| \mathcal{G}_{z_\Delta w_\Delta} \|_\infty$  viene, inoltre, influenzata leggermente dal peso sul controllo  $\sigma$ .

L'errore di orientamento dato dalla presenza della coppia esterna  $T_d$  è illustrato in Figura 5.17. Si osservi che all'aumentare di  $r_\Omega$  il valore della norma  $H_\infty$  si mantiene pressoché costante; ciò permette di affermare che le prestazioni in anello chiuso rimangono le medesime finché il sistema mantiene la stabilità, giustificando i risultati ottenuti dalle simulazioni Monte Carlo. Coerentemente ai risultati esposti in [39], l'aumento del parametro  $\sigma$  incide negativamente sulla attenuazione dei disturbi esterni.

D'altro canto, osservando la Figura 5.18 si può notare che la norma  $\| \mathcal{G}_{mw_p} \|_2$  è poco sensibile alla variazione del peso  $\sigma$  e assume un valore maggiore in modulo per l'intervallo di incertezza dato da  $5\% < r_\Omega < 10\%$ . Questo implica che lo sforzo per il controllo del sistema, effettuato dal vettore dei momenti di dipolo  $m$ , è maggiore nell'intorno della soglia di stabilità robusta. Tuttavia, è bene sottolineare che per intervalli di incertezza maggiori (*i.e.*,  $r_\Omega \gtrsim 15\%$ ) la norma  $H_2$  non aumenta. Anche in questo caso, le considerazioni esposte supportano i risultati ricavati dalle simulazioni.

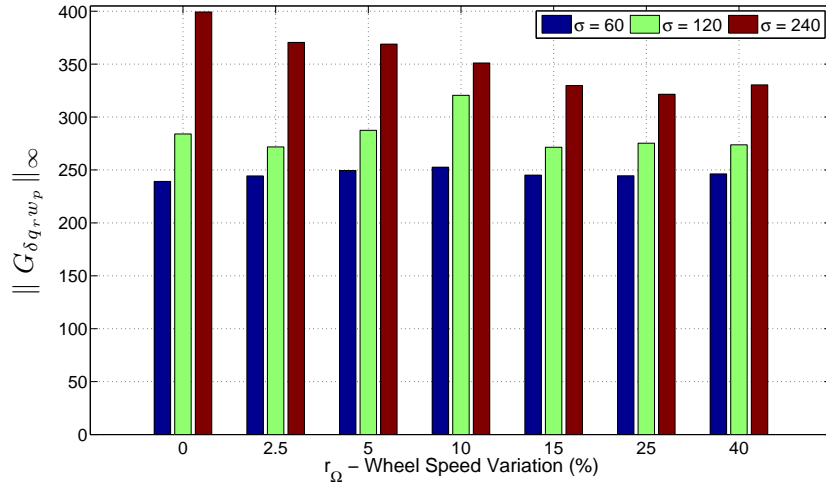


Figura 5.17:  $\|G_{\delta q_r w_p}\|_{\infty}$  per il controllore progettato utilizzando il modello LTP.

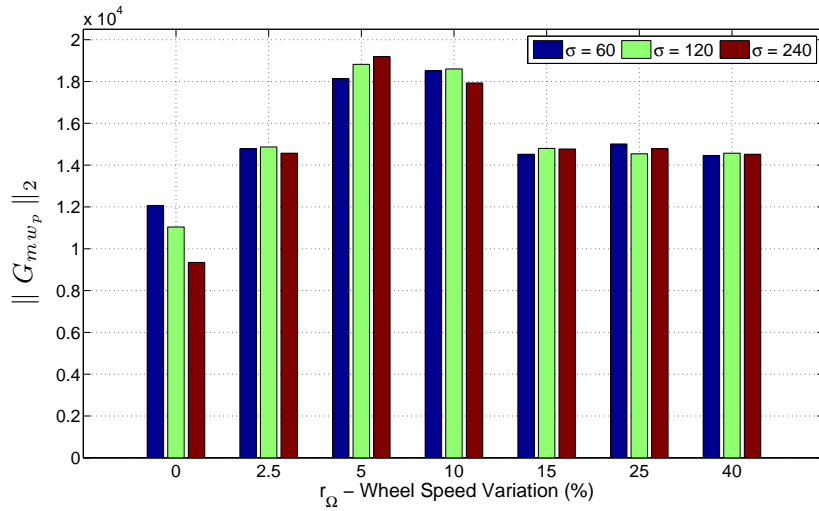


Figura 5.18:  $\|G_{m w_p}\|_2$  per il controllore progettato utilizzando il modello LTP.

## 5.3 Controllo robusto per il modello LPV

In questa sezione vengono illustrati i risultati del progetto di controllo robusto LPV/LFT. In primo luogo si discutono i possibili valori assunti dai parametri di regolazione presenti nella definizione del modello parametro-variante; in modo analogo alla sezione precedente, si mostrano le simulazioni Monte Carlo dei sistemi per cui é stata effettuata la sintesi LPV in presenza del parametro incerto  $\Omega$ . Infine si riporta una breve analisi delle prestazioni attraverso la norma  $\mathcal{L}_2$  indotta del sistema incerto, ricavata dal problema di minimizzazione (4.8).

### 5.3.1 Taratura dei parametri

In seguito vengono illustrate le scelte effettuate per la sintesi di controllo robusto, sulla base del modello LPV descritto nel Capitolo 4. Tali scelte corrispondono al numero di parametri utilizzati per il gain-scheduling, alla pulsazione di taglio  $\omega_{cut}$  del filtro d'ingresso e all'eventuale penalizzazione  $\sigma$  del segnale di controllo.

Si noti che per trovare un controllore che renda il sistema stabile con determinati requisiti di prestazioni/robustezza é necessario effettuare un'analisi dei valori che potrebbero assumere i parametri. Inoltre, é da tener presente che il problema di ottimizzazione convessa potrebbe condurre a situazioni di instabilitá numerica per determinati valori di questi parametri.

Sulla base di quanto é stato esposto nella Sezione 4.2 e in [7], per la funzione di Lyapunov  $X(\rho)$  si é scelto di utilizzare la struttura affine alle sole due variabili di scheduling  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , come in equazione (4.14). Tale soluzione permette di limitare notevolmente il numero di LMI e non introduce una differenza significativa, in termini di prestazioni, rispetto all'utilizzo di tutti e quattro i parametri per il gain-scheduling.

Si procede, dunque, con la taratura della banda del filtro passa-basso e con la scelta del peso sul controllo  $\sigma$  per il sistema LPV avente il controllore state-feedback che dipende dai due parametri di scheduling.

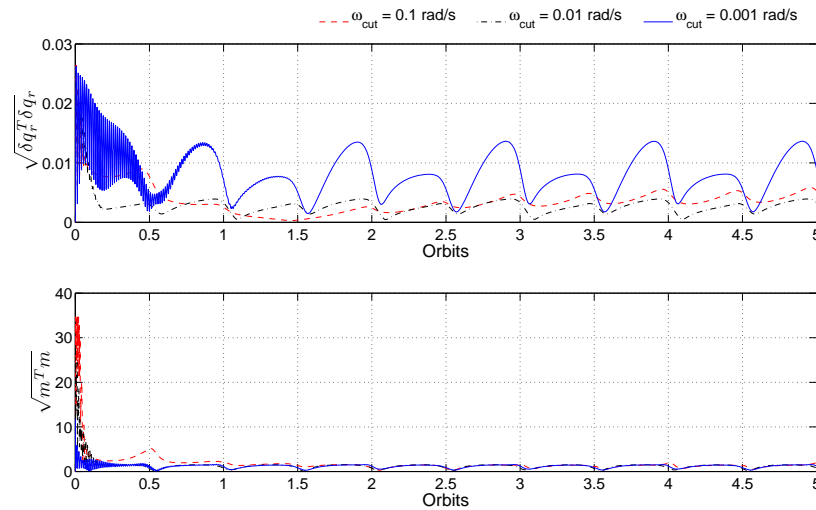
#### Banda del filtro d'ingresso

Come giá discusso nella Sezione 4.4, é stato aggiunto un filtro del primo ordine in ingresso al sistema al fine di spostare la parametro-dipendenza dalla matrice  $B_u(\rho)$  alla matrice  $A$ .

Tale filtro é caratterizzato solamente dalla frequenza di taglio; é possibile

regolare tale valore sulla base dei risultati ottenuti per l'errore di orientamento del satellite e per l'intensità delle variabili di controllo.

In Figura 5.19 si illustrano la norma dell'errore d'assetto  $\sqrt{\delta q_r^T \delta q_r}$  e la norma del vettore dei dipoli magnetici  $\sqrt{m^T m}$  per il sistema LPV avente le pulsazioni di taglio del filtro d'ingresso fissate a 0.1 rad/s, 0.01 rad/s e 0.001 rad/s. Si può notare come  $\omega_{cut}$  agisca come peso sull'azione di controllo: il transitorio causato dalle condizioni iniziali non nulle è maggiormente attenuato per  $\omega_{cut} = 0.01$  rad/s e lo sforzo di controllo iniziale viene incrementato all'aumentare della pulsazione di taglio. Inoltre, per tale valore di  $\omega_{cut}$ , si ottengono delle migliori prestazioni in termini di attenuazione dei disturbi esterni senza un'addizionale sforzo del segnale di controllo (si veda il comportamento del sistema nel suo stato stazionario, *i.e.*, per  $t \in [T, 5T]$ ).



**Figura 5.19:** Controllo LPV: norma dell'errore di orientamento e del dipolo magnetico al variare della pulsazione di taglio  $\omega_{cut}$  del filtro d'ingresso.

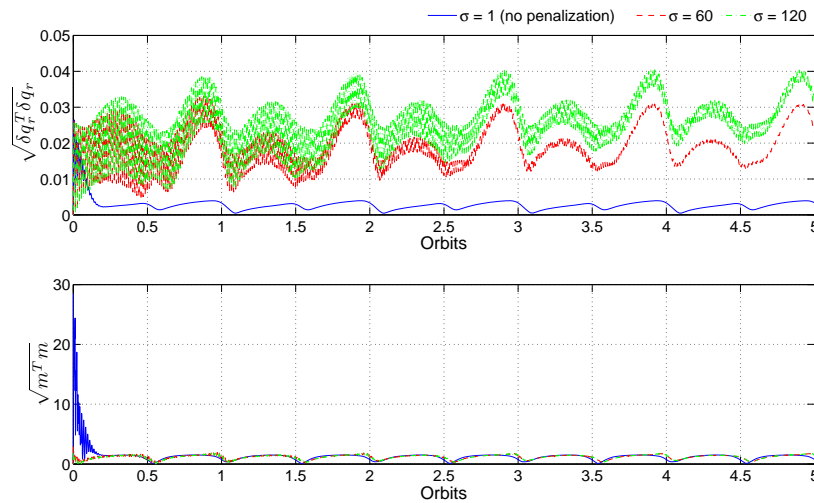
Per completezza, il progetto di controllo è stato effettuato anche al variare di frequenze di taglio diverse da quelle citate in Figura 5.19: si è osservato che con filtri troppo lenti le prestazioni in anello chiuso peggiorano sensibilmente e con filtri troppo veloci spesso il problema di ottimizzazione risolto tramite SDP non ammette soluzione.

A seguito di queste considerazioni, si è scelta la pulsazione di taglio  $\omega_{cut} = \bar{\omega}_{cut} = 0.01$  rad/s per le sintesi di controllo LPV successive.

### Penalizzazione del controllo

Oltre alla caratterizzazione del filtro d'ingresso, si é valutata la possibilità di inserire un peso<sup>5</sup>  $\sigma$  al fine di poter regolare lo sforzo di controllo mantenendo determinate prestazioni per l'orientamento del satellite.

In Figura 5.20 si riporta la norma dell'errore d'assetto e dei momenti di dipolo per  $\sigma = 60, 120$  (valori utilizzati anche per il controllo  $H_\infty$  del modello LTP) e in assenza della penalizzazione sul controllo (*i.e.*,  $\sigma = 1$ ).



**Figura 5.20:** Controllo LPV: norma dell'errore di orientamento e del dipolo magnetico al variare del peso sul controllo  $\sigma$ .

Sebbene i segnali di controllo siano molto piú contenuti nella fase iniziale, si può osservare che l'attenuazione dell'effetto delle coppie di disturbo esterne peggiora notevolmente all'aumentare del peso  $\sigma$ . Inoltre, dopo il transitorio iniziale, le variabili di controllo assumono lo stesso comportamento per tutti i valori di  $\sigma$  considerati.

Sulla base di questi risultati si é deciso di non inserire il peso  $\sigma$ , evitando di penalizzare il controllore state-feedback schedulato.

Si riassumono, dunque, i valori dei parametri di regolazione utilizzati per la sintesi di controllo robusto LPV:

- PDLF dipendente dai due parametri di scheduling  $\rho_1, \rho_2$ ;
- pulsazione di taglio del filtro  $\omega_{cut} = \bar{\omega}_{cut} = 0.01$  rad/s;

<sup>5</sup>tramite il rafforzamento dello stato, si veda la Sezione 4.3.

- penalizzazione sul controllo assente ( $\sigma = 1$ ).

Nonostante ciò, non si esclude la possibilità di ottenere dei controllori altrettanto adatti a seguito di una accurata regolazione di questi parametri (*e.g.*, si potrebbe filtrare meno l'azione di controllo con  $\omega_{cut} = 0.1$  rad/s e tener conto di una penalizzazione  $\sigma > 1$ ).

### 5.3.2 Simulazioni Monte Carlo

Anche per i problemi di controllo LPV e LPV/LFT è utile osservare il comportamento del sistema soggetto a perturbazioni del parametro incerto, ovvero, nel caso in esame, della velocità della ruota di momento  $\Omega$ .

Come per il modello tempo-periodico, sono state svolte le simulazioni Monte Carlo perturbando il parametro incerto  $\Omega$  sulla base della sua variazione massima percentuale  $r_\Omega$  (analogamente a quanto esposto in Sezione 5.2.1 per il modello LTP). In particolare, si è considerato un campione di  $N = 100$  valori casuali distribuiti in modo uniforme nell'intervallo di variazione di  $\Omega$ .

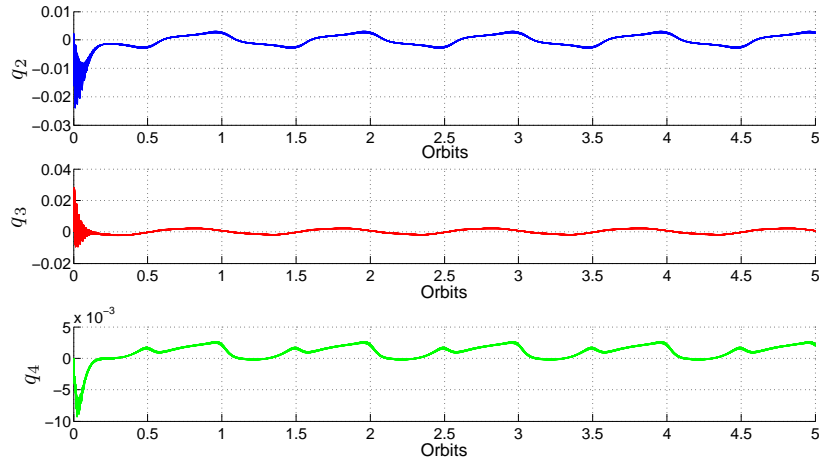
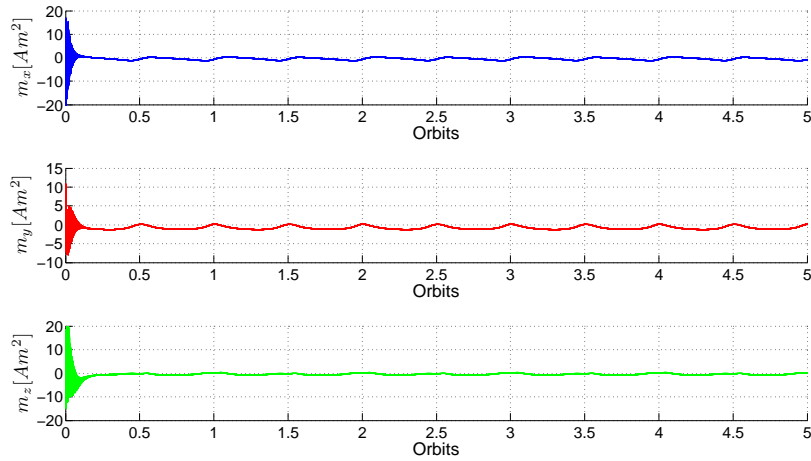
In seguito, vengono mostrate le simulazioni Monte Carlo del sistema parametro-variante per cui si è svolto precedentemente il progetto di controllo LPV e il progetto di controllo robusto (per i dettagli di questi approcci si veda il Capitolo 4) con i parametri tarati secondo quanto esposto nella Sezione 5.3.1.

Per ogni analisi Monte Carlo si rappresenta l'andamento, per la durata di 5 orbite, dell'errore d'assetto (parte vettoriale del quaternion  $q_2, q_3, q_4$ ) e delle variabili di controllo (momenti di dipolo magnetico  $m_x, m_y, m_z$ ) per  $N$  simulazioni del sistema in cui la velocità della ruota  $\Omega$  assume valori casuali all'interno dell'intervallo di variazione.

#### Controllo LPV

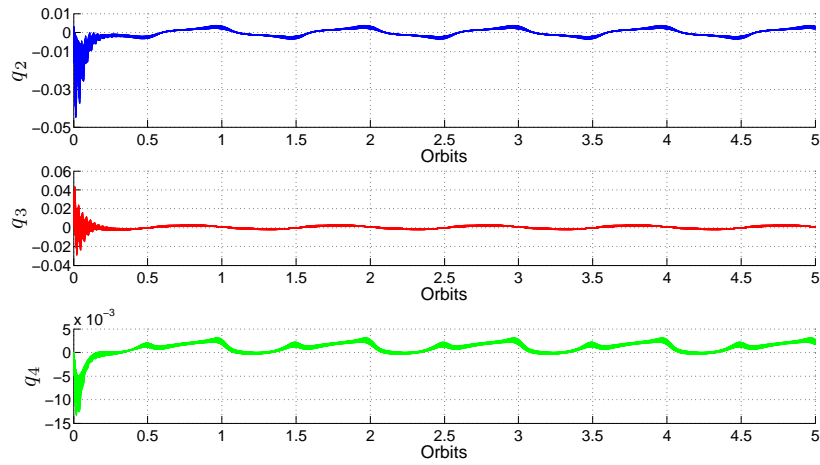
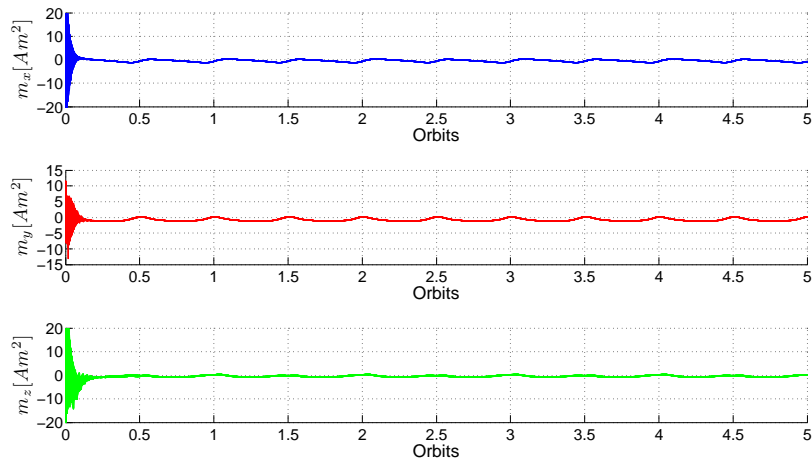
Le simulazioni mostrate in questo paragrafo riguardano il modello LPV per cui è stata effettuata la sintesi di controllo tramite l'approccio LPV che non considera l'incertezza parametrica (la sintesi è stata svolta rispetto al valore nominale  $\Omega = \bar{\Omega}$ ). La variazione della velocità di ruota  $\Omega$  nell'intorno del suo valore nominale permette di valutare l'effetto sulle prestazioni del sistema in anello chiuso.

Nelle Figure 5.21 e 5.22 si rappresentano gli andamenti dell'errore di orientamento e delle variabili controllo per le variazioni percentuali massime  $r_\Omega = 15\%$  e  $r_\Omega = 30\%$ .

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.***Figura 5.21:** *Controllo LPV: simulazioni Monte Carlo del modello LPV per  $r_\Omega = 15\%$ .*

Si noti, in Figura 5.21(a), come l'assetto del satellite è ben controllato per  $r_\Omega = 15\%$  sia per quanto riguarda il transitorio iniziale, dato dalle velocità angolari iniziali non nulle, che per l'attenuazione dei disturbi esterni. Lo sforzo dei segnali di controllo è notevole all'inizio dell'evoluzione del sistema e limitato durante la fase stazionaria (si veda la Figura 5.21(b)).

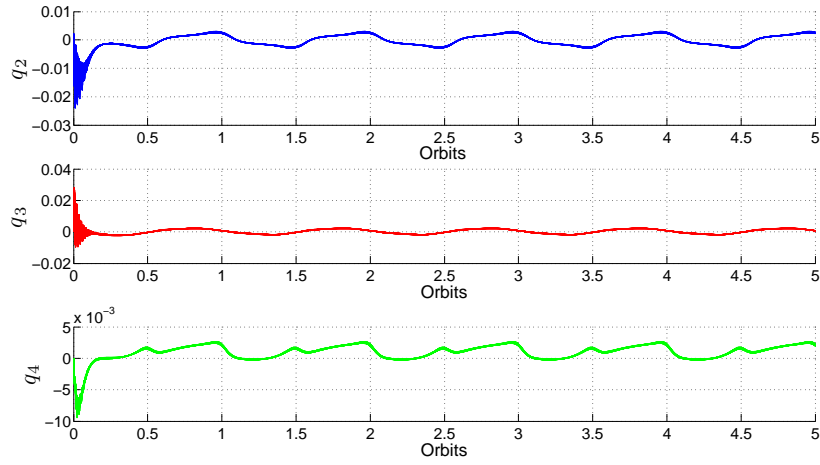
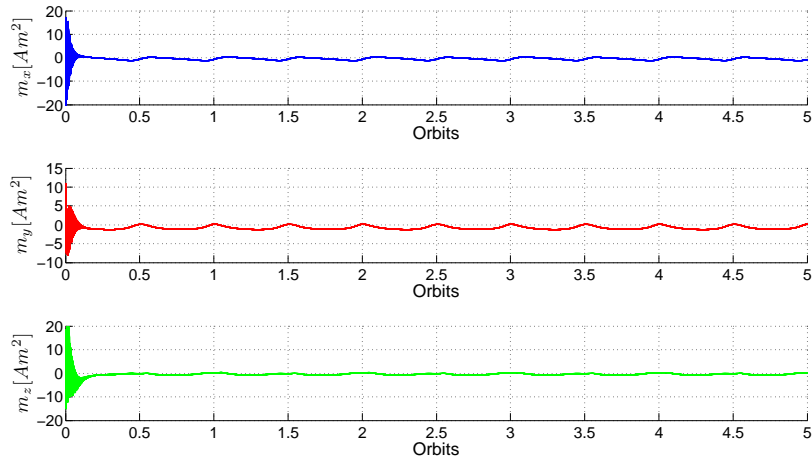
Aumentando l'intervallo di variazione della velocità di ruota ( $r_\Omega = 30\%$ ), le prestazioni del sistema non cambiano in modo significativo: si possono

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.***Figura 5.22:** *Controllo LPV: simulazioni Monte Carlo del modello LPV per  $r_\Omega = 30\%$ .*

riscontrare delle minime differenze solamente nel transitorio iniziale sia per l'errore d'assetto che per i momenti di dipolo (si vedano le Figure 5.22(a)-5.22(b)).

### Controllo robusto LPV/LFT

Nel seguente paragrafo si mostrano le simulazioni Monte Carlo del modello LPV/LFT in cui é presente il controllore state-feedback ricavato dalla sin-

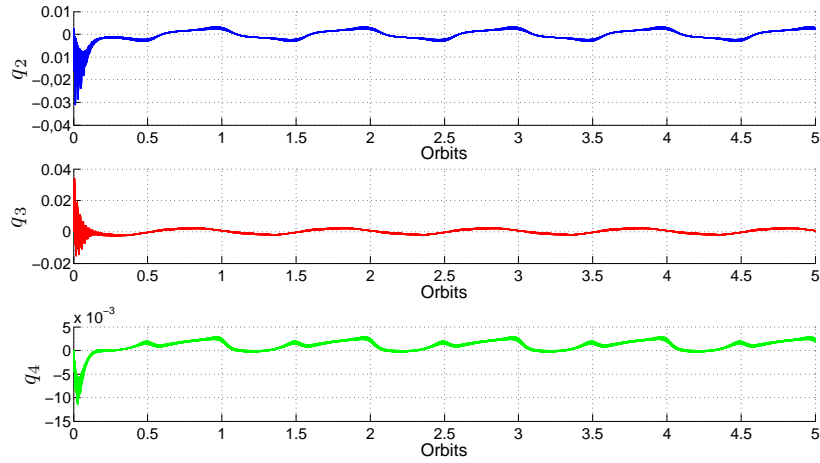
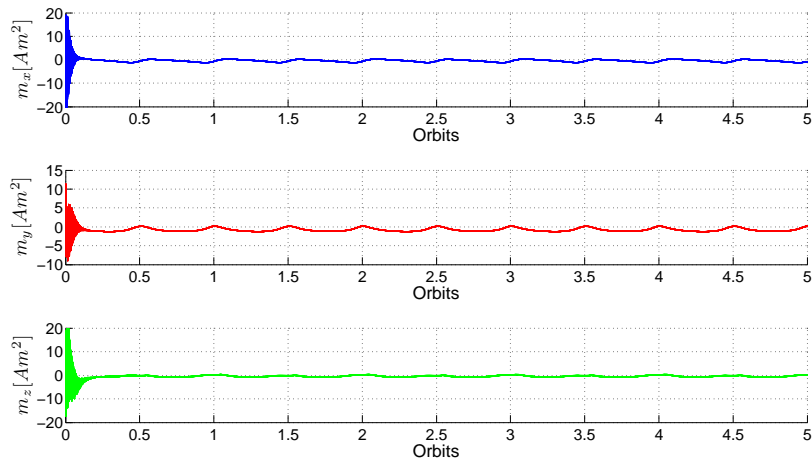
(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.23:** *Controllo robusto LPV/LFT: simulazioni Monte Carlo del modello LPV/LFT per  $r_\Omega = 15\%$ .*

tesi robusta LPV. In tal caso, é bene evidenziare che il processo di sintesi del controllore considera il parametro  $\Omega$  come incerto.

Questa analisi permette di valutare se l'introduzione del requisito di robustezza migliora le prestazioni del sistema a seguito delle variazioni della velocità di ruota  $\Omega$ .

Analogamente a quanto illustrato nel paragrafo precedente, si presenta-

(a) *Errore d'assetto.*(b) *Momenti di dipolo magnetico.*

**Figura 5.24:** *Controllo robusto LPV/LFT: simulazioni Monte Carlo del modello LPV/LFT per  $r_\Omega = 30\%$ .*

no, nelle Figure 5.23 e 5.24, i risultati delle simulazioni Monte Carlo in termini di andamento dell'errore d'assetto e dei momenti di dipolo per  $r_\Omega = 15\%$  e  $r_\Omega = 30\%$ .

Per la variazione massima  $r_\Omega = 15\%$  si ottengono i medesimi risultati ricavati dal progetto di controllo LPV che non considera  $\Omega$  come parametro incerto, sia per l'errore di orientamento che per le variabili di controllo (si

vedano le Figure 5.21 e 5.23).

Si confrontino invece le simulazioni Monte Carlo con  $r_\Omega = 30\%$  nel caso di controllo robusto LPV/LFT (Figura 5.24) e di controllo LPV (Figura 5.22): nel primo caso é possibile notare un lieve miglioramento per l'errore d'assetto solamente nel transitorio iniziale, mentre l'andamento delle variabili di controllo rimane invariato.

Infine, é bene osservare in Figura 5.23 e 5.24 che le prestazioni del sistema rimangono inalterate per i controllori robusti progettati con  $r_\Omega = 15\%$  e  $r_\Omega = 30\%$ .

### Osservazioni

Le simulazioni Monte Carlo sono state svolte sino alla soglia di stabilit  del sistema al variare del parametro incerto  $\Omega$ . Il controllore progettato attraverso l'approccio LPV permette di mantenere il sistema asintoticamente stabile fino a  $r_\Omega \simeq 55\%$ , mentre l'approccio robusto LPV/LFT estende l'intervallo di variazione della velocit  di ruota sino a  $r_\Omega \simeq 70\%$ .

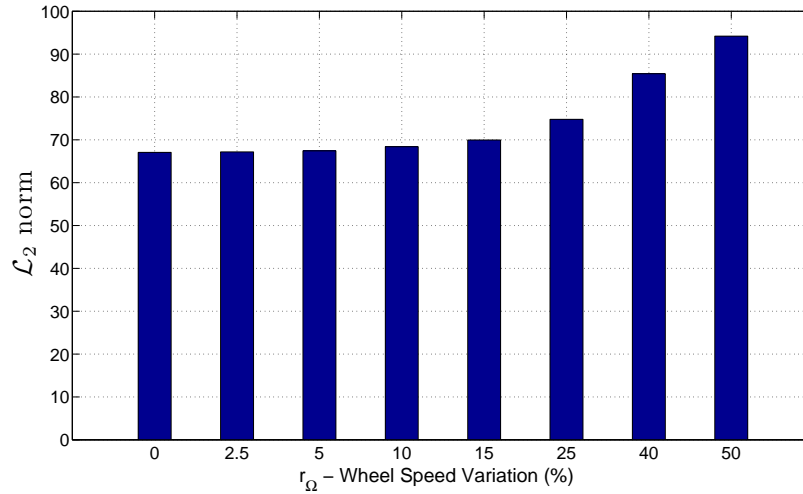
Anche in questo caso, nelle rappresentazioni sono stati omessi gli andamenti delle velocit  angolari  $\delta\omega$  in quanto subiscono una modesta variazione solamente nel transitorio iniziale, a causa delle condizioni iniziali non nulle, assumendo valori di picco dell'ordine di  $10^{-3}$  rad/s per gli assi di rollio/imbardata e  $10^{-4}$  rad/s per l'asse di beccheggio.

### 5.3.3 Norma $\mathcal{L}_2$ indotta

L'analisi quantitativa del progetto di controllo robusto LPV si basa sull'indice prestazionale  $\gamma$  ottenuto dal problema di ottimizzazione convessa. Nella Sezione 4.1 é stato osservato che tale misura rappresenta il valore massimo che pu  assumere la norma  $\mathcal{L}_2$  indotta tra i disturbi  $w$  e le variabili prestazionali  $z$  in uscita al sistema.

In Figura 5.25 viene illustrato il valore della norma  $\mathcal{L}_2$  indotta (o equivalentemente della norma  $H_\infty \|G_{zw}\|_\infty$ ) ricavata dal progetto di controllo robusto del modello LPV/LFT per diversi valori di variazione  $r_\Omega$  e sulla base dei parametri tarati come in Sezione 5.3.1. Con  $r_\Omega = 0\%$  si identifica il progetto di controllo LPV che non tiene conto dell'incertezza parametrica (*i.e.*, approccio LPV descritto in Sezione 4.2).

La quantit   $\|G_{zw}\|_\infty$  evidenzia come le perturbazioni  $w$ , date sia dai disturbi esterni generici che dall'incertezza parametrica, vengano maggiormente attenuate dal sistema controllato per basse variazioni della velocit 



**Figura 5.25:** Norma  $\mathcal{L}_2$  indotta per il controllore robusto progettato utilizzando il modello LPV/LFT.

di ruota  $\Omega$ ; nonostante ciò, tale indice cresce lentamente all'aumentare di  $r_\Omega$ , giustificando i risultati ottenuti nelle simulazioni Monte Carlo (*i.e.*, errore d'assetto e variabili di controllo pressoché equivalenti fino ad un intervallo di incertezza  $\pm 50\%$ ).

## 5.4 Conclusioni

In questo capitolo sono stati illustrati diversi risultati relativi al progetto di controllo robusto  $H_\infty$  per il modello LTP e al modello LPV. É stato definito un caso di studio sulla base dei parametri fisici di un satellite reale e sull'ipotesi di incertezza della velocità della ruota di momento.

Per entrambi i problemi di sintesi robusta sono stati effettuati diversi studi Monte Carlo del sistema soggetto a variazioni del parametro incerto, al fine di confrontare i controllori che tengono conto dell'incertezza parametrica rispetto a quelli che attenuano solamente i disturbi esterni. Nel caso del modello parametro-variante é stata riportata la taratura dei parametri presenti nella definizione del modello stesso.

Inoltre é stata presentata un'analisi quantitativa degli indici prestazionali (norme  $H_\infty$ ) che supporta i risultati ottenuti dalle simulazioni dei modelli, con particolare attenzione per il contesto LTP.

## Conclusioni e sviluppi futuri

*“Chi biasima la somma certezza della matematica si pasce di confusione, e mai porrà silenzio alle contraddizioni delle sofistiche scienze, colle quali si impara uno eterno gridare.”*

Leonardo Da Vinci

In questa tesi é stato affrontato il problema di controllo robusto per la dinamica d’assetto di un satellite che dispone di attuatori elettromagnetici per il controllo attivo. In particolare, sono stati proposti degli approcci di sintesi robusta al fine di gestire la possibile incertezza dei parametri fisici presenti nel modello (*e.g.*, momenti di inerzia, velocità della ruota di momento) e limitare gli effetti che quest’ultima potrebbe avere sulle prestazioni del sistema.

Il progetto di controllo robusto é stato ricondotto ai modelli LTP e LPV che approssimano la tempo-varianza della dinamica d’assetto. A partire da tali modelli, é stata rappresentata l’incertezza parametrica tramite la trasformazione LFT.

I metodi illustrati si appoggiano alla tecniche di controllo  $H_\infty$ , riconducendo, dunque, il problema di sintesi ad un problema di ottimizzazione matematica. Inoltre, si é fatto riferimento alla teoria del piccolo guadagno per la verifica dei requisiti di robustezza. In questo modo é stato possibile sviluppare degli approcci che minimizzano contemporaneamente le perturbazioni date dalla presenza di disturbi esterni e di parametri incerti.

É stato svolto uno studio sperimentale al fine di valutare i metodi di controllo robusto esposti. Questa analisi ha permesso di osservare la differenza delle prestazioni del sistema in anello chiuso rispetto ai metodi che si basano sul progetto di controllo ottimo del modello nominale. É stato con-

siderato il caso di studio di un satellite in configurazione momentum-bias e avente la velocità angolare della ruota di momento come parametro incerto. In particolare, per questa struttura si è valutato sia l'errore d'assetto che l'azione di controllo a livello di simulazione, riscontrando un errore di puntamento su ogni asse dell'ordine di  $\pm 0.02^\circ$  rispetto all'assetto nominale. L'analisi quantitativa delle norme  $H_\infty$  ha permesso, inoltre, di giustificare i risultati ottenuti tramite le simulazioni dei modelli tempo-periodico e parametro-variante.

I principali problemi riscontrati nel corso di questo lavoro riguardano il tempo di esecuzione dell'algoritmo di ottimizzazione per l'approccio LTP e il processo di taratura dei parametri presenti nel modello LPV. Il primo è dato dalla complessità computazionale dell'algoritmo discussa, mentre il secondo è dovuto al fatto che per regolare i valori ottimi dei parametri è necessario svolgere un numero elevato di prove di sintesi del controllore e di simulazioni del modello LPV.

I progetti di controllo robusto considerati forniscono dei livelli di prestazione molto soddisfacenti in relazione allo schema generico per il controllo d'assetto con attuatori magnetici, superando alcune restrizioni imposte dagli approcci di controllo esistenti. Infatti, con le tecniche di sintesi proposte è possibile tener conto *a priori* dei parametri incerti presenti nel modello (situazione molto comune nella pratica) mantenendo determinate prestazioni per il sistema in anello chiuso.

Infine, è bene sottolineare che le leggi di controllo ricavate dai metodi proposti sono direttamente implementabili data la natura dei controllori a guadagno costante per il modello LTP e gain-scheduling per il modello LPV.

Per validare ulteriormente i risultati ottenuti, si potrebbero osservare le prestazioni del sistema effettuando le simulazioni per il modello non lineare accurato della dinamica d'assetto, utilizzando i controllori ricavati dai metodi proposti. In questo modo è possibile valutare il sistema controllato tenendo presente tutte le non linearità e i disturbi presenti in natura (*e.g.*, modelli precisi del campo geomagnetico e della distribuzione della densità atmosferica, forze aerodinamiche, pressione della radiazione solare, gradienti gravitazionale).

Un ulteriore sviluppo possibile riguarda la riduzione della complessità per l'algoritmo di ottimizzazione utilizzato nella sintesi di controllo LTP. Dato che la complessità dipende, in prima approssimazione, dal vincolo di stabilità del sistema LTP, si potrebbe pensare di valutare se l'implementazione della decomposizione periodica di Schur introduca un miglioramento in termini di trade-off tra tempo di esecuzione e precisione dell'algoritmo.

Infine, si potrebbe estendere l'analisi effettuata svolgendo la sintesi di controllo robusto in presenza di diversi parametri incerti del modello (*e.g.*, momenti di inerzia del satellite e della ruota di momento), prestando, tuttavia, attenzione alla crescita dell'ordine del sistema introdotta dalla trasformazione LFT. A tal punto si potrebbe valutare, in termini di prestazioni, l'apporto delle tecniche proposte attraverso la simulazione del sistema controllato.



# Bibliografia

- [1] P. Apkarian and R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 6:21–32, 1997.
- [2] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, 31(9):1251–1261, 1995.
- [3] S. Bittanti and P. Colaneri. *Periodic Systems: Filtering and Control*. Springer, 1st edition, 2008.
- [4] A. Bojanczyk, G. Golub, and P. Van Dooren. The periodic Schur decomposition. Algorithms and applications. In *Proceedings SPIE Conference*, 1992.
- [5] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004.
- [6] F. Bruzelius. *Linear Parameter-Varying Systems an approach to gain scheduling*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2004.
- [7] A. Corti and M. Lovera. Attitude regulation for spacecraft with magnetic actuators: an LPV approach. In *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications (in preparation)*. Springer, 1st edition, 2012.
- [8] M.C. Falvella, M. Crisconio, T. Lupi, P. Sabatini, G. Valentini, and F. Viola. MITA: An Italian minisatellite for small missions. *Advances in Space Research*, 31(2):357–361, 2003.

- 
- [9] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.
- [10] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Linear robust control*. Prentice Hall, 1994.
- [11] H.B. Hablani. Comparative stability analysis and performance of magnetic controllers for momentum bias satellites. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18(6):1313–1320, 1995.
- [12] S. Hecker and A. Varga. Generalized LFT-based representation of parametric uncertain models. *European Journal of Control*, 10:326–337, 2004.
- [13] S. Hecker, A. Varga, and J. F. Magni. Enhanced LFR-toolbox for Matlab. *Aerospace Science and Technology*, 9:173–180, 2005.
- [14] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 3rd edition, 2002.
- [15] A. Lewis. Nonsmooth optimization and robust control. *Annual Reviews in Control*, 31(2):167–177, 2007.
- [16] J. Lofberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab. In *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, 2004.
- [17] M. Lovera. Modelling and simulation of spacecraft attitude dynamics. In *Proceedings of the 4th international symposium on mathematical modelling*, Vienna, Austria, 2003.
- [18] M. Lovera, E. De Marchi, and S. Bittanti. Periodic attitude control techniques for small satellites with magnetic actuators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(1):90–95, 2002.
- [19] K. Lust. Improved numerical Floquet multipliers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11(9):2389–2410, 2001.
- [20] F. Martel, P. Pal, and M. Psiaki. Active magnetic control system for gravity gradient stabilized spacecraft. In *2nd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*, Logan (Utha), USA, 1988.
- [21] M. Pittelkau. Optimal periodic control for spacecraft pointing and attitude determination. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 16(6):1078–1084, 1993.

- 
- [22] M. Psiaki. Magnetic torquer attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 24(2):386–394, 2001.
- [23] T. Pulecchi, M. Lovera, and A. Varga. Classical vs modern magnetic attitude control design: a case study. In *7th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems*, Tralee, Ireland, 2008.
- [24] T. Pulecchi, M. Lovera, and A. Varga. Optimal discrete-time design of three-axis magnetic attitude control laws. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(3):714–722, 2010.
- [25] C.W. Scherer. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37(3):361–375, 2001.
- [26] M.J. Sidi. *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*. Cambridge University Press, 1997.
- [27] E. Silani and M. Lovera. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results. *Control Engineering Practice*, 13(3):357–371, 2005.
- [28] A.C. Stickler and K.T. Alfriend. An elementary magnetic attitude control system. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 13(5):282–287, 1976.
- [29] K.C. Toh, M.J. Todd, and R.H. Tutuncu. SDPT3 - a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11(12):545–581, 1999.
- [30] L. Vicci. Quaternions and rotations in 3-space : the algebra and its geometric interpretation. Technical report, University of North Carolina at Chapel Hill, 2001.
- [31] L. Viganò, M. Bergamasco, M. Lovera, and A. Varga. Optimal periodic output feedback control: a continuous-time approach and a case study. *International Journal of Control*, 83(5):897–914, 2010.
- [32] N.M. Wereley and S.R. Hall. Frequency response of linear time periodic systems. In *Proceedings of the 29th IEEE International Conference on Decision and Control*, Honolulu, HI , USA, 1990.
- [33] J. Wertz. *Spacecraft attitude determination and control*. D. Reidel Publishing Company, 1978.

- 
- [34] James R. Wertz. *Mission Geometry; Orbit and Constellation Design and Management - Spacecraft Orbit and Attitude Systems*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [35] R. Wisniewski and L.M. Markley. Optimal magnetic attitude control. In *14th IFAC World Congress*, Beijing, China, 1999.
- [36] G. Wolodkin, G. J. Balas, and W. L. Garrard. Application of parameter-dependent robust control synthesis to turbofan engines. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 22(6):833–838, 1999.
- [37] F. Wu. *Control of linear parameter varying system*. PhD thesis, University of California, Berkeley, USA, 1995.
- [38] F. Wu, X. H. Yang, A. Packard, and G. Becker. Induced  $L_2$ -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:2379–2383, 1996.
- [39] A. Zanchettin and M. Lovera.  $H_\infty$  attitude control of magnetically actuated satellites. In *18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.
- [40] J. Zhou and T. Hagiwara. Existence conditions and properties of the frequency response operators of continuous-time periodic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(6):1867–1887, 2002.
- [41] J. Zhou and T. Hagiwara.  $H_2$  and  $H_\infty$  norm computations of linear continuous-time periodic systems via the skew analysis of frequency response operators. *Automatica*, 38(8):1381–1387, 2002.
- [42] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essential of robust control*. Prentice Hall, 1997.
- [43] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.

# Appendice **A**

## Rappresentazioni e trasformazioni spaziali dell'assetto

In questa appendice vengono illustrate alcune definizioni e proprietà necessarie per la rappresentazione dell'assetto di un corpo nello spazio; questi strumenti permettono di esprimere l'orientamento dei tre assi ortogonali, aventi come origine il baricentro del corpo considerato, rispetto ad un altro sistema di riferimento.

In particolare, vengono descritti la *matrice dei coseni direttori*, le rotazioni spaziali tramite gli *angoli di Eulero* e il metodo dei *quaternioni*.

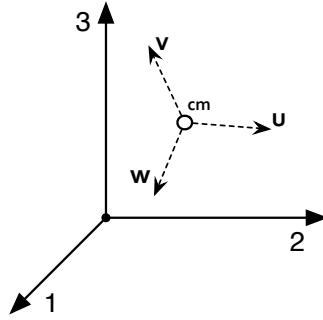
Per eventuali approfondimenti si faccia riferimento a [26], [33], [30].

### A.1 Matrice dei coseni direttori

#### A.1.1 Definizioni

L'orientamento di una terna ortogonale rispetto ad un'altra può essere sempre individuata attraverso la matrice dei coseni direttori. Questo strumento permette una semplice rappresentazione della trasformazione spaziale dell'assetto di un corpo rigido, prendendo come riferimento il suo centro di massa.

In Figura A.1 gli assi 1, 2, 3 rappresentano i versori ortogonali che definiscono un sistema di riferimento inerziale; la terna  $u, v, w$  rappresenta il sistema di riferimento solidale al corpo in movimento e  $cm$  è il suo centro di massa.



**Figura A.1:** Orientamento degli assi  $u, v, w$  solidali al corpo del satellite rispetto ad un altro sistema di riferimento  $1, 2, 3$ .

Si può dunque definire la matrice  $A$  nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

dove gli elementi  $u_1, u_2, u_3$  rappresentano i componenti del versore  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  lungo i tre assi  $1, 2, 3$  del sistema di riferimento inerziale. Analogamente si possono definire le componenti  $v_1, v_2, v_3$  e  $w_1, w_2, w_3$  rispettivamente per il versore  $v = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$  e  $w = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$ .

La matrice  $A$  permette di effettuare la trasformazione di un vettore da un sistema di riferimento di partenza a quello del corpo dell'oggetto in considerazione: essa é chiamata *matrice dei coseni direttori*, o *matrice d'assetto*, in quanto ogni elemento della matrice é il coseno dell'angolo formato dal versore in esame del sistema di riferimento solidale al corpo rispetto a un asse cartesiano del sistema di riferimento inerziale.

Prendendo, per esempio, un vettore  $e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$  con le sue componenti espresse nel sistema di riferimento  $1, 2, 3$  ed effettuando la seguente operazione

$$Ae = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ue \\ ve \\ we \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_u \\ e_v \\ e_w \end{bmatrix} = e_B \quad (\text{A.2})$$

si ottiene il vettore  $e_B$  che rappresenta l'espressione del vettore  $e$  nel sistema di riferimento solidale al corpo dell'oggetto.

### A.1.2 Proprietá di base

In seguito si elencano alcune proprietá basilari della matrice dei coseni direttori  $A$  precedentemente definita.

1. Ciascun versore  $u, v, w$  ha norma unitaria:

$$\|u\| = 1 \quad \|v\| = 1 \quad \|w\| = 1.$$

2. Ogni versore  $u, v, w$  é ortogonale a ciascun altro versore:

$$\sum_{i=1}^3 u_i \cdot v_i = 0 \quad \sum_{i=1}^3 u_i \cdot w_i = 0 \quad \sum_{i=1}^3 v_i \cdot w_i = 0.$$

3. Dalle due precedenti definizioni si può concludere che  $A$  é una matrice ortogonale e quindi:

$$A^{-1} = A^T.$$

Si noti che per calcolare l'inversa della matrice  $A$  é sufficiente calcolarne la matrice trasposta in quanto quest'ultima operazione é meno onerosa rispetto all'inversione matriciale.

Riprendendo l'esempio dell'equazione (A.2), si può effettuare l'operazione inversa di  $e_B = Ae$  utilizzando la matrice trasposta  $A^T$ :

$$e = A^{-1}e_B = A^T e_B.$$

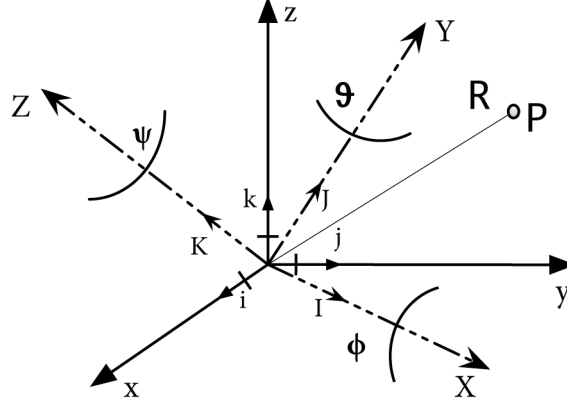
4. La trasformazione indotta dalla matrice dei coseni direttori preserva sia la lunghezza dei vettori che gli angoli compresi tra essi; essa rappresenta dunque una rotazione (si veda [33]).
5. Il prodotto di due o piú matrici d'assetto é il risultato di due o piú rotazioni successive: la matrice  $A = A_2 A_1$  definisce la rotazione prima effettuata dalla matrice  $A_1$  e poi dalla matrice  $A_2$ .

## A.2 Rotazioni tramite gli angoli di Eulero

### A.2.1 Angoli di Eulero

Si é visto nel paragrafo precedente che la matrice dei coseni direttori descrive la relazione tra ogni asse del sistema di riferimento del corpo rispetto ad ogni asse del sistema di riferimento inerziale; per effettuare il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro é possibile tener conto solamente delle rotazioni avvenute da ciascun asse del sistema di riferimento di partenza. Infatti se si considera un sistema di riferimento  $X - Y - Z$ , attraverso tre rotazioni angolari  $\phi - \theta - \psi$  é possibile arrivare ad un sistema di riferimento  $x - y - z$ , descrivendo, quindi, il completo orientamento dell'oggetto.

Gli angoli appena citati vengono chiamati *angoli di Eulero*: una scelta comune é quella di definire l'angolo di roll ( $\phi$ ) come rotazione intorno all'asse



**Figura A.2:** Angoli di Eulero: trasformazione dei sistemi di riferimento.

$x$ , l'angolo di pitch ( $\theta$ ) come rotazione intorno all'asse  $y$  e infine l'angolo di yaw ( $\psi$ ) la rotazione intorno all'asse  $z$ . Qualsiasi altra definizione é accettabile a patto che rimanga consistente con lo sviluppo analitico.

In Figura A.2 sono mostrati i due sistemi di riferimento  $X - Y - Z$  e  $x - y - z$  aventi le origini degli assi coincidenti e un punto  $P$  di coordinate  $(X_P, Y_P, Z_P)$  rispetto al primo sistema di riferimento e  $(x_P, y_P, z_P)$  rispetto al secondo.

A questo punto si può definire la distanza  $R$  dal punto  $P$  all'origine degli assi come:

$$R = X_P I + Y_P J + Z_P K = x_P i + y_P j + z_P k, \quad (\text{A.3})$$

dove  $i, j, k$  sono i versori del sistema di riferimento  $x - y - z$  e  $I, J, K$  sono i versori del sistema di riferimento  $X - Y - Z$ .

Sviluppando il prodotto scalare tra i vettori e i versori presenti, é possibile esprimere  $R$  in funzione di  $x_P, y_P, z_P$ :

$$\begin{aligned} RI &= X_P = x_P iI + y_P jI + z_P kI \\ RJ &= Y_P = x_P iJ + y_P jJ + z_P kJ \\ RK &= Z_P = x_P iK + y_P jK + z_P kK. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Da questa rappresentazione si possono dedurre i nove parametri che rappresentano l'orientamento tra i due sistemi di riferimento; essi sono equivalenti ai nove elementi della matrice dei coseni direttori espressa nel paragrafo precedente. Infatti ogni prodotto tra i versori ( $iI, jI, iK \dots$ ) rappresenta il coseno direttore di un asse rispetto ad un altro; per esempio  $iI = \cos(\psi)$ ,  $jI = -\sin(\psi)$  e così via.

É possibile ottenere una matrice di rotazione che esprime il passaggio del

punto  $P$  dalle coordinate del sistema di riferimento  $X - Y - Z$  a quello  $x - y - z$  come composizione di tre rotazioni ben definite e consecutive intorno agli assi  $X, Y$  e  $Z$ .

La matrice seguente mostra la rotazione angolare  $\psi$  intorno all'asse  $Z$ :

$$A_Z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e analogamente si può considerare le singole rotazioni intorno all'asse  $X$  e  $Y$ , rispettivamente di angolo  $\phi$  e  $\theta$ :

$$A_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad A_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Per esprimere una rotazione complessiva rispetto agli angoli di Eulero  $\phi, \theta, \psi$  si può procedere alla moltiplicazione di diverse matrici di rotazione rispetto a ciascun asse, tenendo conto dell'ordine delle rotazioni che si vuol fare eseguire all'oggetto per passare dal sistema di riferimento di partenza  $X - Y - Z$  a quello finale  $x - y - z$ .

Si mostra di seguito la matrice di rotazione complessiva ottenuta compiendo la rotazione  $Z \rightarrow Y \rightarrow X$  (per ridurre la notazione si abbrevia  $\cos()$  con  $c()$  e  $\sin()$  con  $s()$ ):

$$A_{ZYX}(\psi, \theta, \phi) = A_X(\psi)A_Y(\theta)A_Z(\phi) = \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ -c(\phi)s(\psi) + s(\phi)s(\theta)c(\psi) & c(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & s(\phi)c(\theta) \\ s(\phi)s(\psi) + c(\phi)s(\theta)c(\psi) & -s(\phi)c(\psi) + c(\phi)s(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix}$$

Considerando un vettore di partenza  $[X_1 \ Y_1 \ Z_1]^T$ , per applicare la rotazione descritta nell'equazione (A.7) e portare il vettore iniziale nel sistema di riferimento  $x - y - z$ , é necessario dunque effettuare il prodotto seguente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = A_{ZYX}(\psi, \theta, \phi) \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

É da precisare che la coincidenza dell'origine dei due sistemi di riferiemnto considerati é solamente una semplificazione modellistica relativa al caso della matrice d'assetto di un satellite: tuttavia essa non compromette la generalitá delle soluzioni analitiche espresse in questo paragrafo.

### A.2.2 Rappresentazione asse-angolo

Attraverso il *teorema di Eulero delle rotazioni* si può descrivere una qualsiasi rotazione di un corpo rigido in un sistema ortogonale con una rotazione pura intorno a un singolo asse corrispondente; presa la matrice di orientamento del corpo  $A$  e un suo autovettore  $e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$  con autovalore associato unitario, si può definire *e il vettore di rotazione* e ad esso associare un *angolo di rotazione*  $\alpha$ .

Riassumendo, per passare dal sistema di riferimento inerziale a quello del corpo dell'oggetto in considerazione è sufficiente avere l'autovettore di rotazione  $e$  e l'angolo  $\alpha$ .

La relazione tra la matrice di rotazione dei coseni direttori e la *rappresentazione asse-angolo* è la seguente:

$$A(e, \alpha) = \cos(\alpha)I_3 + (1 - \cos(\alpha))ee^T - \sin(\alpha)E \quad (\text{A.9})$$

con

$$\|e\| = 1, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## A.3 Il metodo dei quaternioni

### A.3.1 Definizioni e proprietà di base

Un altro possibile strumento per la rappresentazione della rotazione di un corpo rigido è il quaternione.

L'insieme dei quaternioni  $\mathbb{H}$  è un corpo non commutativo in cui ogni elemento è definito da un vettore a quattro dimensioni:

$$q = iq_1 + jq_2 + kq_3 + q_4 = q_r + q_4 \quad (\text{A.10})$$

dove  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}$  e  $i, j, k$  sono vettori unitari che soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Nella definizione di quaternione si ha che  $q_4$  è uno scalare e  $q_r$  è la parte immaginaria del quaternione:

$$q = q_r + q_4 \quad q_r = iq_1 + jq_2 + kq_3,$$

o equivalentemente, in forma matriciale:

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T = [q_r \quad q_4]^T. \quad (\text{A.12})$$

Si definisce inoltre il coniugato del quaternione  $q$  come:

$$\bar{q} = [-q_1 \quad -q_2 \quad -q_3 \quad q_4]^T = [-q_r \quad q_4]^T. \quad (\text{A.13})$$

Un quaternione  $q$ , avente norma unitaria  $|q| = 1$ , definisce una rotazione in  $\mathbb{R}^3$ .

Dato un qualsiasi vettore  $x$  puramente immaginario (*i.e.*, con coordinata  $x_4 = 0$ ), la rotazione determinata dal quaternione  $q$  é data dall'operazione:

$$x \mapsto q x \bar{q}$$

Inoltre due quaternioni unitari  $q$  e  $q'$  definiscono la stessa rotazione in  $\mathbb{R}^3$  se e solo se  $q = -q'$ .

Il prodotto di due quaternioni  $q$  e  $s$  non é commutativo e il risultato rappresenta la rotazione totale, ovvero la somma delle rotazioni tra il primo e il secondo quaternione:

$$q \times s = [q_4 s_r + s_4 q_r + s_r \times q_r \quad q_4 s_4 - q_r^T s_r]^T. \quad (\text{A.14})$$

Il *quaternione identitá* identifica una rotazione nulla:

$$I_q = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (\text{A.15})$$

### A.3.2 Quaternioni e matrice dei coseni direttori

I componenti scalari di ogni quaternione (chiamati anche *parametri simmetrici di Eulero*) possono essere espressi in funzione dell'autovettore  $e$  associato all'autovalore di modulo unitario della matrice d'assetto. Sono definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1 \sin(\alpha/2) \\ q_2 &= e_2 \sin(\alpha/2) \\ q_3 &= e_3 \sin(\alpha/2) \\ q_4 &= \cos(\alpha/2) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

dove  $e$  é il vettore di rotazione e  $\alpha$  é l'angolo di rotazione definiti nella rappresentazione asse-angolo esposta in Sezione A.2.2.

Dall'equazione (A.16) si puó ricavare la matrice dei coseni direttori espressa in termini di quaternioni:

$$A(q) = (q_4^2 - q_r^2)I_3 + 2q_r q_r^T - 2q_4 Q \quad (\text{A.17})$$

dove

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La relazione (A.17) é ricavata esprimendo la matrice di rotazione in funzione sia degli angoli di Eulero che del quaternione e uguagliando termine a termine i componenti della matrice. Si noti che i risultati ottenuti dipendono dalla rotazione effettuata e dunque non sono univoci, tuttavia é sempre possibile uguagliare la rappresentazione matriciale dei quaternioni e la matrice dei coseni direttori per ricavare gli angoli di Eulero corrispondenti alla rotazione effettuata.

Per esempio, considerando la rotazione  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  si ottiene il seguente quaternione:

$$q = A_Z(\psi)A_Y(\theta)A_X(\phi) = \tag{A.18}$$

$$[\cos(\psi/2) + k \sin(\psi/2)] [\cos(\theta/2) + k \sin(\theta/2)] [\cos(\phi/2) + k \sin(\phi/2)],$$

da cui si possono ricavare gli angoli di Eulero:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \frac{2(q_4 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)} \\ \arcsin(2(q_4 q_2 - q_3 q_1)) \\ \arctan \frac{2(q_4 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \end{bmatrix}. \tag{A.19}$$

Per ulteriori dettagli e dimostrazioni delle relazioni dirette tra quaternioni e matrice dei coseni direttori, si faccia riferimento a [26],[30].

### A.3.3 I quaternioni per la trasformazione dell'assetto

La rappresentazione dell'assetto di un corpo rigido attraverso la matrice dei coseni direttori, in un sistema di riferimento definito, richiede l'utilizzo di nove parametri (gli elementi della matrice  $A$ ), mentre la rappresentazione tramite i quaternioni ne richiede solamente quattro.

Inoltre gli elementi della matrice dei coseni direttori, espressi attraverso gli angoli di Eulero, sono funzioni trigonometriche che possono introdurre diverse singularit  a livello computazionale: solitamente si usano i quaternioni o eventualmente la matrice dei coseni direttori con la sua rappresentazione algebrica.

Nelle applicazioni spaziali e in generale applicazioni associate al calcolo di diverse rotazioni di un corpo rigido, é consigliabile l'utilizzo dei quaternioni in quanto prevengono situazioni in cui é possibile la perdita di gradi di libert  (fenomeno chiamato *gimbal lock* per gli angoli di Eulero).

In seguito viene mostrato come ottenere una trasformazione d'assetto

attraverso la moltiplicazione tra quaternioni. Analogamente al caso delle rotazioni successive rappresentate dalle matrici dei coseni direttori, si può effettuare la stessa operazione nel caso dei quaternioni:

$$A(q'') = A(q')A(q) \quad (\text{A.20})$$

dove si ha la rotazione  $q \rightarrow q'$  e il quaterniono risultante  $q''$  può essere estratto da  $A(q'')$ .

Tuttavia è molto più semplice ricavare  $q''$  effettuando direttamente la moltiplicazione tra i quaternioni  $q$  e  $q'$ .

Definendo i quaternioni come in equazione A.12, si ottiene:

$$\begin{aligned} q'' = q q' = & (-q_1 q'_1 - q_2 q'_2 - q_3 q'_3 + q_4 q'_4) \\ & + i(q_1 q'_4 + q_2 q'_3 - q_3 q'_2 + q_4 q'_1) \\ & + j(-q_1 q'_3 + q_2 q'_4 + q_3 q'_1 + q_4 q'_2) \\ & + k(q_1 q'_2 - q_2 q'_1 + q_3 q'_4 + q_4 q'_3) \end{aligned}$$

dove  $q''$  è il quaterniono associato alla rotazione totale.