

POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

corso di Laurea in Ingegneria Aeronautica

Tecniche 2D e 3D per l'identificazione del Precessing Vortex Core

Autore:

Giacomo GALIMBERTI
920300

Relatore:

Prof. Fabio COZZI

Correlatore:

Prof. Maurizio QUADRIO

Anno Accademico 2019 – 2020

Indice

1	Introduzione	10
1.1	Motivazioni	10
1.2	Obiettivi	11
2	Getti isotermi con moto di swirl	12
2.1	Parametri caratteristici	12
2.1.1	Numero di Reynolds	13
2.1.2	Numero di swirl	13
2.2	Flussi con basso numero di swirl	14
2.3	Flussi con alto numero di swirl	15
2.4	Instabilità	17
2.4.1	Vortex Breakdown	17
2.4.2	Precessing Vortex Core	21
3	Apparato sperimentale	23
3.1	Generatore del moto di swirl	23
3.2	PIV stereoscopica	24
3.3	Strumentazione	25
3.4	Generazione delle medie in fase	26
4	Tecniche di identificazione di vortici	28
4.1	Criteri intuitivi	29
4.1.1	Minimo locale di pressione	29
4.1.2	Linee di flusso e traiettorie	29
4.1.3	Modulo della vorticità	30
4.2	Criteri basati sull'analisi di $\nabla \mathbf{u}$	30
4.2.1	Autovalori complessi	31
4.2.2	Swirling strength	32
4.2.3	Secondo invariante Q	33
4.2.4	Autovalori del tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$	34

4.2.5	Considerazioni	35
4.2.6	Misure piane in un campo di moto 2D	36
4.2.7	Misure piane in un campo di moto 3D	37
4.3	Approccio non locale	38
5	Risultati	41
5.1	Ricostruzione del campo di moto 3D	41
5.2	Calcolo delle derivate	43
5.3	Validazione del codice	45
5.3.1	Vortice di Lamb-Oseen	45
5.3.2	Vortice di Burgers	47
5.4	Criteri applicati al campo di velocità	48
5.4.1	Ricostruzione della struttura vorticoso	48
5.4.2	Media pesata delle PA	49
5.4.3	Stick model	52
5.4.4	Valore della soglia	57
5.5	Criteri applicati al campo di fluttuazioni medie	63
5.6	Criteri applicati al campo di velocità medio	70
6	Conclusioni e sviluppi futuri	74

Elenco delle figure

2.1	Schematizzazione di un getto a basso numero di swirl S [18]	15
2.2	(a) Schematizzazione del getto ad alto numero di swirl [18]; (b) CRZ e CTRZ in un getto confinato [32]	16
2.3	(a) Schematizzazione strutture vorticosi ad alto numero di swirl [4]; (b) Isosuperfici di swirling strenght [4]	17
2.4	Schematizzazione VB conico [3]	18
2.5	(a) VB a bolla [28]; (b) VB a spirale [22]	20
2.6	Struttura a doppio anello [15]	20
2.7	(a) Variazione frequenza PVC in funzione di Re e S [26]; (b) Effetto di Re e rapporto di miscela sulla frequenza per ingressi assiali e tangenziali [18]	22
3.1	Disco necessario per garantire l'uniformità del getto. Nel foro centrale viene alloggiato il gas gun [29]	24
3.2	(a) Schema bruciatore [16]; (b) Apparato sperimentale [29]	25
5.1	Profili del modulo della velocità totale $ vel $ prima (a) e dopo (b) la trasformazione sulle coordinate descritte in Eq.(5.1)	43
5.2	(a) Distribuzione err_a nel dominio di calcolo per il criterio Δ_{2D} ; (b) Grafico di convergenza di err_r in $P(0.002, 0.002)$ per il criterio Δ_{2D}	46
5.3	PA $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, $\sigma_{ci}^{th} = 400 s^{-1}$; id.3D (a), id.2D (b)	48
5.4	Profilo di velocità assiale (a) e radiale (b) per la mappa a $\theta = 0^\circ$	50
5.5	Distribuzione del numero di piani utilizzati per la definizione delle medie in fase in funzione della posizione angolare delle PA	50
5.6	PA pesate con bolla di ricircolo, $\sigma_{ci}^{th} = 400 s^{-1}$; id.3D (a), id.2D (b)	51
5.7	Sezione della struttura vorticosi per $\theta = 0^\circ$. Contour di σ_{ci} (scala di sx), isolinee di σ_{ci} (scala di dx). 3D (a), 2D (b)	52
5.8	Sezione della struttura vorticosi per $\theta = 0^\circ$ (a) e relativa finestra (b)	53
5.9	Struttura filtrata (a) e relativo stick model (b) ricavati dalla ricostruzione identificata con il criterio σ_{ci3D} ; $\sigma_{ci}^{th} = 412 s^{-1}$	54

5.10	Andamento dell'angolo di inclinazione del vortice per la struttura esterna (a) e interna (b)	55
5.11	Andamento dell'angolo di inclinazione del vortice per la struttura esterna (a) e interna (b)	57
5.12	Confronto tra le strutture identificate con i criteri: (a) Δ_{3D} , (b) Δ_{2D} , (c) σ_{ci3D} , (d) σ_{ci2D}	59
5.13	Confronto tra le strutture identificate con i criteri: (a) Q_{3D} , (b) Q_{2D} , (c) σ_{23D} , (d) σ_{22D}	60
5.14	Aree dei vortici nel caso di id.3D (a) e id.2D (b)	61
5.15	Dimensione e posizione dei vortici al variare della soglia ϵ per la sezione a $\theta = 0^\circ$	62
5.16	Profili di velocità medi	64
5.17	Mappe di velocità per il piano $\theta = 0^\circ$ adimensionalizzate con U_{bulk} : (a) PA assiale, (b) PA tangenziale, (c) campo medio assiale, (d) campo medio tangenziale, (e) fluttuazioni medie assiali, (f) fluttuazioni medie tangenziali	65
5.18	PA fluttuazioni pesate, $\sigma_{ci}^{th} = 200 s^{-1}$; id.3D (a), id.2D (b)	66
5.19	Vista dall'alto; id. sulla velocità $\sigma_{ci}^{th} = 400s^{-1}$ (a), id. sulle fluttuazioni $\sigma_{ci}^{th} = 200s^{-1}$ (b). In verde è evidenziata la bolla di ricircolo	67
5.20	Vista laterale; id. sulla velocità $\sigma_{ci}^{th} = 400s^{-1}$ (a), id. sulle fluttuazioni $\sigma_{ci}^{th} = 200s^{-1}$ (b). In verde è evidenziata la bolla di ricircolo	67
5.21	Sezione della struttura vorticoso per $\theta = 0^\circ$. Contour w/U_{bulk} (scala di sx), isolinee di σ_{ci} (scala di dx). In blu l'isolinea di $w/U_{bulk} = 0$. Le linee tratteggiate evidenziano i vortici dell'elica interna (giallo) e dell'elica esterna (rosso). Id. sulla velocità (a), id. sulle fluttuazioni (b)	68
5.22	Sovrapposizione id. sulle velocità e id. sulle fluttuazioni per la sezione a $\theta = 0^\circ$	69
5.23	(a) Confronto stick model ricostruiti partendo dal criterio σ_{ci2D} sulle fluttuazioni medie, $\sigma_{ci}^{th} = 250 s^{-1}$, e sulle PA, $\sigma_{ci}^{th} = 412 s^{-1}$. (b) Vista dall'alto di due modelli	70
5.24	(a) Vortici calcolati sul campo di moto medio, $\sigma_{ci}^{th} = 260 s^{-1}$; (b) Contour \bar{w}/U_{bulk} (scala di sx), isolinee di σ_{ci} (scala di dx). In blu è evidenziata l'isolinea di $\bar{w}/U_{bulk} = 0$	71
5.25	Ricostruzioni ottenute con $\delta s_z(r, z) \delta s_r(r, z)$; in nero le eliche ottenute dalle PA; (a) vortici shear layer esterno (b) vortici shear layer interno	72
5.26	Ricostruzioni ottenute con $\delta \bar{s}_z$; in nero le eliche ottenute dalle PA; (a) vortici shear layer esterno (b) vortici shear layer interno	73

Elenco delle tabelle

5.1	Parametri caratteristici del campo di moto	41
5.2	Coefficienti per lo schema alle differenze finite	45
5.3	Coefficienti per l'estrapolazione di Richardson	55
5.4	Risultati angoli medi	55

Sommario

La tesi verte ad individuare e caratterizzare le strutture vorticose proprie di un getto isoterma confinato dotato di moto di swirl. Dal momento che le medie in fase a disposizione sono state ottenute a partire da misure del campo di moto tramite la tecnica ottica Stereo PIV, è stato possibile applicare i criteri di identificazione al campo di moto completo e alle sole componenti di velocità appartenenti al piano di misura.

Nella prima parte del lavoro viene presentata una panoramica sulle principali caratteristiche dei getti dotati di moto rotatorio. Successivamente, dopo una descrizione teorica dello stato dell'arte in merito alla definizione di vortice, sono stati implementati i criteri di identificazione locali basati sull'analisi del tensore gradiente di velocità. Prima di procedere con la loro applicazione sui dati disponibili, il codice è stato validato, applicandolo a un campo di moto che soddisfi in modo esatto le equazioni di Navier-Stokes. Viene quindi presentato un confronto tra le diverse ricostruzioni del PVC ottenute con i vari criteri e discusse criticamente le similitudini tra le strutture vorticose ricavate dall'applicazione degli stessi a due e a tre componenti di velocità.

Dal momento che in letteratura non è presente una chiara indicazione se l'applicazione dei criteri di identificazione dei vortici al campo di velocità sia migliore rispetto all'applicazione degli stessi sul campo delle fluttuazioni, all'interno dell'elaborato viene dato spazio a questa seconda possibilità e studiate le differenze tra le due diverse ricostruzioni.

I criteri di identificazione vengono infine applicati al campo di moto medio. Il tentativo è quello di ottenere indicazioni in merito al fenomeno fisico del PVC partendo unicamente dalle mappe di velocità medie.

Parole chiave: vortici, PVC, fluttuazioni

Abstract

The aim of this thesis is to detect and characterize the vortical structures of a confined swirling jet in isothermal conditions. Since the available phase averages are obtained from Stereo PIV measurements of the flow field, it was possible to apply the identification criteria both to the complete motion field and to the velocity components which belongs to the measuring plane only.

In the first part of this thesis an overview of the main characteristics of swirling jets is presented. The local identification criteria based on the analysis of the velocity gradient tensor were implemented after a theoretical study on the definition of vortex. Before proceeding with their application on the available data, the code was validated, applying it to a field which is an exact solution of the Navier-Stokes equations. A comparison is then presented between different reconstructions of PVC obtained with the various criteria. The similarities between the swirling structures obtained from the application of the code to two and three speed components are also discussed critically.

Because in literature there is no clear indication whether the application of the vortex identification criteria to the velocity field is better than the application of the same to the fluctuations field, this latter possibility is deepened together with the differences between the two different reconstructions.

Finally, the identification criteria are applied to the average motion field. The attempt is to obtain indications of the physical phenomenon of PVC starting only from the average speed maps.

Key words: vortex, PVC, fluctuations

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Motivazioni

Flussi caratterizzati da un moto di rotazione sono da anni studiati per via delle numerose applicazioni tecniche in diversi ambiti, dalle camere di combustione alle lavastoviglie, passando per fornaci, cicloni e vortex shedding dalle ali degli aerei [18].

Nei sistemi a combustione la presenza di un moto rotatorio va a migliorare le performance di combustione. Crescita del getto, dimensione della fiamma, stabilità e intensità di combustione sono tutte influenzate dal grado di swirl del flusso. Il fenomeno dell'entrainment, ossia l'apporto di aria dall'esterno del getto, consente una migliore miscelazione tra aria e fuel, con conseguente aumento del rendimento e diminuzione degli agenti inquinanti nel sistema.

Per alti valori del grado di swirl si assiste alla formazione di un'ampia zona di ricircolo in corrispondenza dell'asse dell'ugello, detta zona di ricircolo toroidale CTRZ. Questa gioca un importante ruolo nella fase di stabilizzazione della fiamma e nella diminuzione di emissioni e lunghezza di combustione, generando una regione con velocità ridotta nella quale la velocità della fiamma e quella del flusso possono incontrarsi; un ottimo rimescolamento tra aria fresca e specie reattive è favorito dalla grande intensità di turbolenza che prevale nella regione vorticoso.

Un'altra applicazione di flussi in forte rotazione sono i cicloni per la separazione di miscele eterogenee [18]: sfruttando la forza centrifuga risulta infatti possibile separare particelle solide da una corrente di gas. Possono essere utilizzati anche come combustori per la combustione di fuel con basso potere calorifico o per carburanti che richiedono un lungo tempo di residenza.

Nonostante l'ampio utilizzo in diversi settori di questo tipo di flussi, alcuni

fenomeni fluidodinamici legati a campi di moto fortemente swirlati restano ancora da chiarire, come la formazione del Vortex Brakedown VB, lo svilupparsi della bolla di ricircolo CTRZ e del vortice di precessione PVC.

1.2 Obiettivi

Partendo dalle informazioni delle medie in fase PA del campo di moto di un getto swirlato, ci si propone di ricostruire la struttura vorticoso tridimensionale sfruttando i criteri di identificazione locali. Si vanno quindi ad analizzare le differenze tra la struttura ricostruita sfruttando tutte e tre le componenti di velocità con quella ottenuta utilizzando unicamente le due componenti sul piano della PA.

Dal momento che in letteratura sono presenti applicazioni dei criteri di identificazione dei vortici utilizzando sia il campo di velocità completo sia la sola componente di fluttuazione, senza indicazione di quale delle due soluzioni sia la migliore, sono state implementati entrambi i metodi e studiate le differenze.

Da ultimo i criteri di identificazione sono stati applicati al campo di moto medio con l'idea di poter ottenere un modello in grado di fornire delle indicazioni utili sulla fisica del fenomeno partendo unicamente da un'analisi di quantità medie.

Capitolo 2

Getti isotermi con moto di swirl

Un flusso con moto di swirl è essenzialmente una corrente fluida dove, accanto ad una componente di velocità assiale, è presente una componente di velocità tangenziale, la quale fa assumere al campo di moto un andamento a spirale. Dai numerosi esperimenti eseguiti sui getti swirlati emerge come questi possano avere caratteristiche molto diverse, sia per quanto riguarda la struttura globale del campo di moto, sia per i fenomeni legati alla turbolenza. Per poterli confrontare risulta quindi necessario definire dei parametri specifici della corrente che ne classifichino il comportamento [12] [18]: il numero di Reynolds Re e il numero di swirl S .

Nel presente capitolo, dopo aver fornito una descrizione dei parametri distintivi di questo tipo di flussi, ci si propone di esporre una breve illustrazione dell'evoluzione del campo di moto al variare del numero di swirl S , descrivendone in seguito le principali forme di instabilità.

2.1 Parametri caratteristici

Esistono numerosi elementi che vanno ad influenzare la struttura del campo di moto in un getto dotato di moto rotatorio. Gupta [18] propone un elenco di quelli che possono essere considerati i fattori più influenti:

- numero di Reynolds Re ;
- numero di swirl S ;
- modalità di generazione del moto rotatorio. Esso può essere ottenuto sfruttando sistemi di alette piane o modellate come profili, oppure facendo ricorso a ingressi tangenziali che, in aggiunta a quelli posti in direzione assiale, conferiscono al flusso la rotazione desiderata;

- presenza o meno di un hub centrale;
- geometria dell'ugello: convergente o divergente, a spigolo vivo o smussato;
- coefficiente di espansione del getto in camera di combustione, definito come D_{cc}/D_{exit} ;
- tipo di getto: isoterma o reattivo.

Come si può osservare accanto a parametri di natura fluidodinamica compaiono anche numerosi fattori geometrici legati al particolare set-up sperimentale.

2.1.1 Numero di Reynolds

Si definisce numero di Reynolds Re :

$$Re = \frac{u_0 d}{\nu} \quad (2.1)$$

dove:

- $d = 2R$ è la lunghezza caratteristica: nel caso di getto libero si fa riferimento al diametro dell'ugello di efflusso;
- ν è la viscosità cinematica;
- u_0 è la velocità assiale media all'efflusso dell'ugello calcolata a partire dalla portata nominale imposta.

In un sistema di riferimento cilindrico (z, r, θ) è possibile esprimere il vettore velocità \mathbf{u} in termini delle sue componenti (u, v, w) , con u componente di velocità nella direzione assiale. In queste condizioni si può riscrivere u_0 alla quota $z = \bar{z}$ nel seguente modo:

$$u_o = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r u(\bar{z}, r, \theta) r dr d\theta \quad (2.2)$$

2.1.2 Numero di swirl

Il numero di swirl è un parametro adimensionale che esprime il grado di rotazione del flusso in esame. Seguendo quanto proposto da Gupta [18] e Oberleithner [25], S è definito come rapporto tra il flusso assiale del momento angolare \dot{G}_θ e il prodotto tra il flusso assiale del momento della quantità di moto assiale \dot{G}_z e il raggio dell'ugello $d/2$:

$$S = \frac{\dot{G}_\theta}{\dot{G}_z d/2} \quad (2.3)$$

dove, in un sistema di riferimento cilindrico (z, r, θ) con velocità (u, v, w) , le espressioni di \dot{G}_θ e \dot{G}_z , per un getto inviscido, incomprimibile e caratterizzato da una

simmetria assiale, assumono la seguente forma:

$$\dot{G}_\theta = 2\pi\rho \int_0^\infty \left(\underbrace{UW}_I + \underbrace{\overline{u'w'}}_II \right) r^2 dr \quad (2.4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_x = 2\pi\rho \int_0^\infty & \left[\left(\underbrace{U^2 - \frac{W^2}{2}}_III + \underbrace{\overline{u'^2} - \frac{\overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}}_IV \right) r + \right. \\ & \left. + \left(\underbrace{U \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial V}{\partial r}}_V + \underbrace{\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial z}}_VI \right) \frac{r^2}{2} \right] dr \end{aligned} \quad (2.4b)$$

dove con $(\cdot)'$ si intende la componente fluttuante della velocità mentre con la lettera maiuscola sono indicate le componenti di velocità medie.

Si può ottenere una versione semplificata di queste espressioni [25] assumendo $\overline{u'^2} \approx \overline{v'^2} \approx \overline{w'^2}$ (termine IV si annulla) e trascurando i termini che contengono le componenti di velocità radiale (V) e gli sforzi di taglio turbolenti (II e VI). Queste semplificazioni portano alla più comune espressione di \dot{G}_θ e \dot{G}_z :

$$\dot{G}_\theta = 2\pi\rho \int_0^\infty UW r^2 dr \quad (2.5a)$$

$$\dot{G}_x = 2\pi\rho \int_0^\infty \left(U^2 - \frac{W^2}{2} \right) r dr \quad (2.5b)$$

Se il flusso è stato originato da generatori assiali e tangenziali, è possibile definire un numero di swirl geometrico S_g [13] in funzione della portata in direzione assiale \dot{m}_a e tangenziale \dot{m}_t , come:

$$S_g = \frac{\pi r_0 d}{2A_T} \left(\frac{\dot{m}_t}{\dot{m}_t + \dot{m}_a} \right)^2 \quad (2.6)$$

dove r_0 è la distanza degli inlet tangenziali dall'asse dell'ugello mentre A_T rappresenta l'area totale degli inlet tangenziali. Procedendo in questa direzione, il numero di Reynolds risulta esprimibile come $Re = \rho U_{bulk} d / \nu$ dove $U_{bulk} = (\dot{m}_t + \dot{m}_a) / \pi R^2$.

La relazione che lega il numero di swirl con le caratteristiche del campo di moto è decisamente non lineare. Per questo motivo in letteratura si tende a classificare questo genere di moti rotatori come moti a basso o alto numero di swirl.

2.2 Flussi con basso numero di swirl

I flussi caratterizzati da un basso numero di swirl sono quelli che non manifestano Vortex Breakdown. La presenza di un moto rotatorio all'interno del getto,

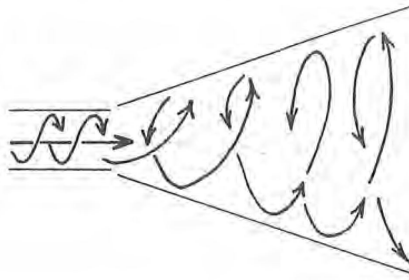


Figura 2.1: Schematizzazione di un getto a basso numero di swirl S [18]

che sia esso libero o confinato, provoca un aumento dell'entrainment e dell'angolo di divergenza rispetto al caso non swirlato.

Considerando l'equazione della quantità di moto in direzione radiale e omettendo i termini turbolenti, la presenza di un moto di swirl genera un gradiente di pressione in direzione radiale volto a bilanciare le forze centrifughe [18]:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho w^2}{r} \quad (2.7)$$

Nel caso di getto libero, la presenza di tale gradiente fa sì che la pressione nella regione prossima all'asse del getto sia inferiore al valore assunto dalla pressione atmosferica nelle zone distanti da esso.

A causa dell'espansione del getto, determinata dalla dissipazione viscosa, si assiste, all'aumentare della distanza dalla sezione di efflusso, ad una graduale diminuzione della velocità tangenziale e assiale. Il risultato di questi effetti è la progressiva diminuzione delle forze centrifughe e la nascita di un gradiente di pressione $\partial p / \partial z > 0$ sull'asse dell'ugello. Per piccoli valori del numero di swirl S il gradiente di pressione avverso non è abbastanza grande per poter contrastare l'energia cinetica del flusso impedendo quindi la generazione di alcuna zona di ricircolo, come mostrato in Fig.(2.1).

2.3 Flussi con alto numero di swirl

I flussi caratterizzati da un alto numero di swirl sono quelli che manifestano il Vortex Breakdown. In questo caso i forti gradienti di pressione radiale e assiale, nati vicino alla sezione di uscita dell'ugello, sono abbastanza intensi da permettere la formazione di una bolla di ricircolo assiale di forma toroidale chiamata Central Toroidal Recirculation Zone CTRZ in rotazione attorno all'asse del getto in direzione concorde rispetto a quella del campo di moto. In Fig(2.2a) viene mo-

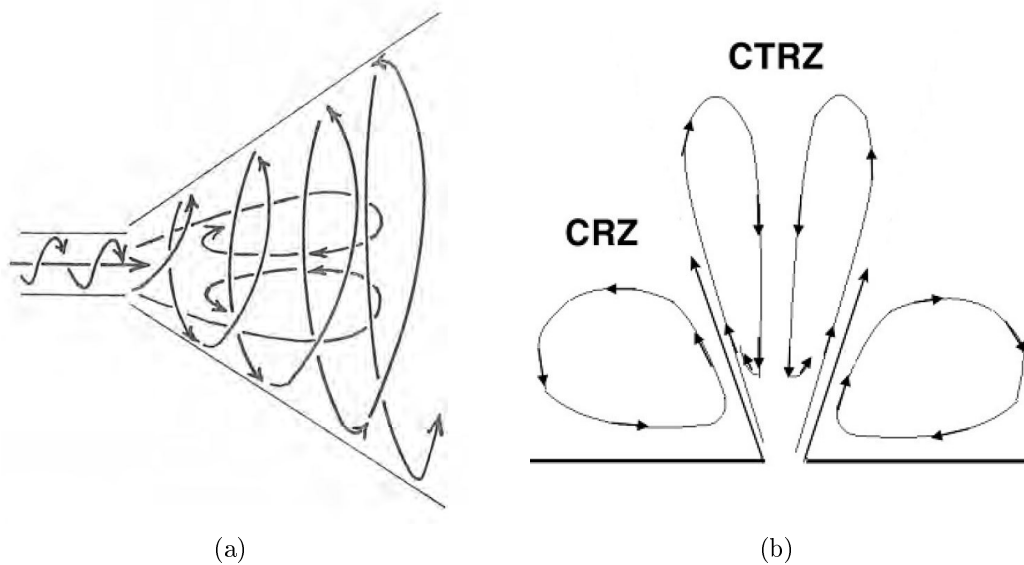


Figura 2.2: (a) Schematizzazione del getto ad alto numero di swirl [18]; (b) CRZ e CTRZ in un getto confinato [32]

strata una semplificazione del flusso: emerge chiaramente la presenza di una zona di ricircolo nella regione prossima all'asse del getto.

Nel caso di getto confinato, accanto alla CTRZ emerge un'ulteriore zona di ricircolo, posizionata tra il getto e le pareti della camera di combustione, chiamata Corner Recirculation Zone CRZ. In queste condizioni alla base del getto si assiste alla formazione di strutture vorticosi che, insieme al fenomeno dell'entrainment, favoriscono un maggior richiamo di aria dall'ambiente circostante all'interno del getto. Una schematizzazione di questa regione viene presentata in Fig.(2.2b).

Diversi lavori sperimentali [5] [13] [29] hanno mostrato, accanto alla presenza della zona di ricircolo CTRZ, una combinazione di strutture vorticosi tridimensionali instazionarie, come mostra Fig.(2.3):

- un vortice principale, con asse quasi perpendicolare alla sezione di efflusso, in precessione ai margini della CTRZ chiamato Precessing Vortex Core PVC;
- una struttura vorticosi elicoidale interna, definita vortice interno secondario HCRV;
- una struttura vorticosi elicoidale, ai margini del getto, definita vortice esterno secondario HOV.

Le due strutture di forma elicoidale si avvolgono attorno all'asse del getto in senso opposto rispetto alla direzione di rotazione del flusso. La tipica configurazione a

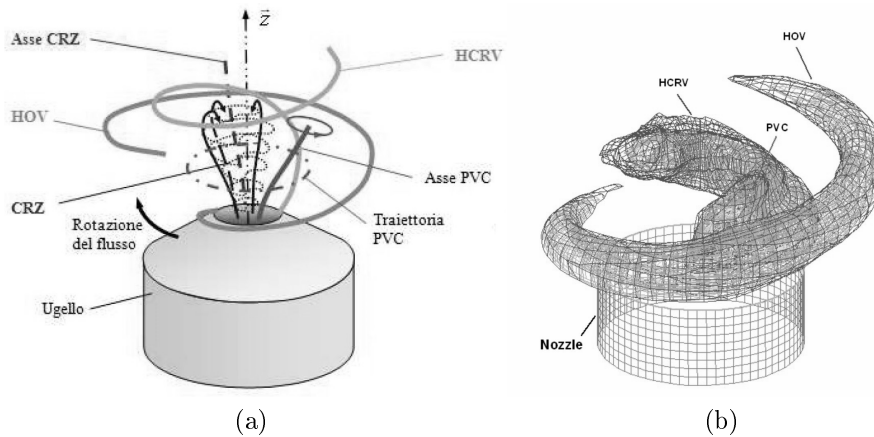


Figura 2.3: (a) Schematizzazione strutture vorticosi ad alto numero di swirl [4]; (b) Isosuperfici di swirling strength [4]

bipolo [5] di questi vortici può essere considerata la causa di una così grande estensione di questa struttura vorticosi in quanto intrinsecamente più stabile rispetto alla struttura monopolare del PVC.

Poiché queste strutture sono in rotazione attorno all'asse dell'ugello, non possono essere visibili analizzando i campi di moto medi: applicando una media in fase si può invece ottenere una visualizzazione qualitativa e pseudo istantanea del fenomeno.

2.4 Instabilità

Flussi dotati di un moto rotatorio, in particolar modo se descrivibili da un elevato numero di swirl, sono soggetti a fenomeni di instabilità fluidodinamica. Le principali forme di instabilità per questo tipo di flussi sono il Vortex Breakdown VB e il Precessing Vortex Core PVC. I numeri di Re e S insieme al grado di confinamento del getto D_{cc}/D_{exit} sono i principali parametri che ne determinano le caratteristiche.

2.4.1 Vortex Breakdown

Il Vortex Breakdown è un'instabilità caratteristica di moti vorticosi di diversa natura, come per esempio tornado o il flusso sulle ali a delta degli aerei. Nel corso degli anni numerosi sono stati gli sforzi volti a cercare di descrivere questo avvenimento fortemente instazionario, integrando a informazioni provenienti dall'ambito sperimentale risultati ottenuti da simulazioni numeriche.

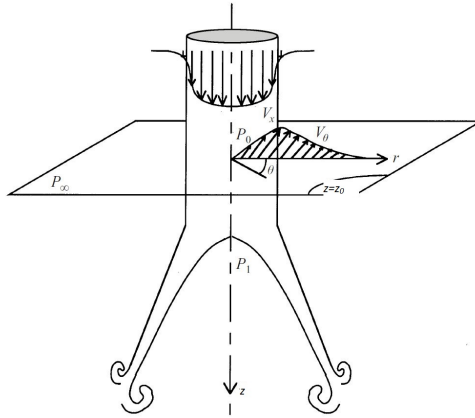


Figura 2.4: Schematizzazione VB conico [3]

Sviluppando un'analogia con quanto succede nel risalto idraulico, Benjamin [2], caratterizza il fenomeno come una transizione dissipativa e assialsimmetrica tra due stati non viscosi:

- uno stato *supercritico*, a monte della transizione, nel quale possono propagarsi solo onde infinitesime;
- uno stato *subcritico*, a valle della transizione, nel quale possono formarsi onde stazionarie.

Per Benjamin il flusso assiale della quantità di moto nello stato subcritico deve essere sempre maggiore della sua controparte nello stato supercritico: risulta quindi necessaria una regione molto turbolenta, identificata con il VB, che spieghi il motivo di tale differenza. Il tratto dissipativo di questa transizione non riesce però a giustificare alcuni risultati sperimentali nei quali non viene registrato alcun tipo di effetto con queste caratteristiche.

Escudier & Keller definiscono il VB come una transizione assialsimmetrica, non dissipativa, tra due stati distinti e con velocità trascurabili all'interno della zona di ristagno. Ripercorrendo quanto proposto da Billant [3] è possibile ricostruire un modello che definisca una condizione teorica necessaria per la formazione del VB in un getto libero.

Si consideri un vortice libero che mostri un punto di ristagno sull'asse z e che si apra come un cono dopo la transizione, come mostrato in Fig.(2.4). In accordo con l'equazione di Bernoulli scritta sulla linea di flusso corrispondente all'asse del vortice, è possibile dire che:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}u^2(z_0, 0) = \frac{p_1}{\rho} \quad (2.8)$$

dove p_0 è la pressione sull'asse del vortice alla coordinata z_0 localizzata a monte lontano dal punto di ristagno, ρ è la densità del fluido, u la velocità assiale mentre p_1 è la pressione nel punto di ristagno. A monte lontano dalla transizione, il gradiente di pressione radiale è bilanciato dalle forze centrifughe, di conseguenza si può scrivere:

$$p_0 = p_\infty - \int_0^\infty \rho \frac{w^2(z_0, r)}{r} dr \quad (2.9)$$

dove $w(z_0, r)$ è la velocità tangenziale nel piano perpendicolare all'asse del vortice, mentre $p_\infty = p(z_0, r \rightarrow \infty)$ è la pressione all'infinito sempre in quel piano. Nonostante all'interno della zona di ristagno possano essere presenti moti di ricircolo causati dall'instabilità della corrente viscosa, la loro velocità può essere trascurata. Dal momento che la zona di ristagno è aperta e il fluido circostante è fermo all'infinito, è possibile concludere che non siano presenti gradienti di pressione all'interno di questa regione, quindi $p_1 = p_\infty$. Sfruttando quest'ultima relazione e combinandola con Eq.(2.8) ed Eq.(2.9) si ottiene:

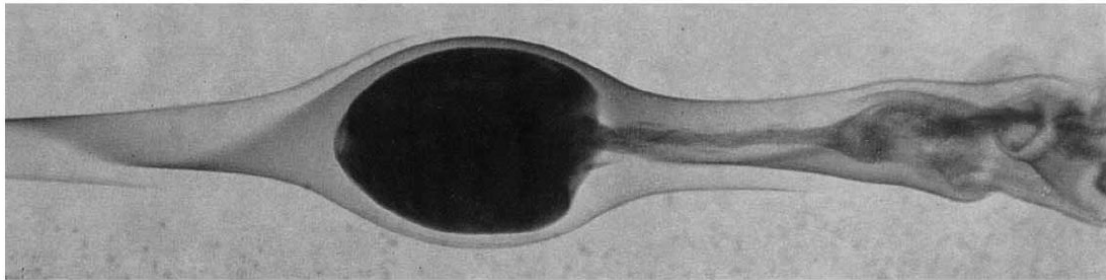
$$\frac{\int_0^\infty \frac{w^2(z_0, r)}{r} dr}{u^2(z_0, 0)} = \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

Questa relazione si configura come una condizione necessaria affinché possa verificarsi un'instabilità conica del vortice. Più in generale l'avvenimento del VB è associato ad un'improvvisa decelerazione del flusso lungo l'asse che porta alla generazione di un punto di ristagno.

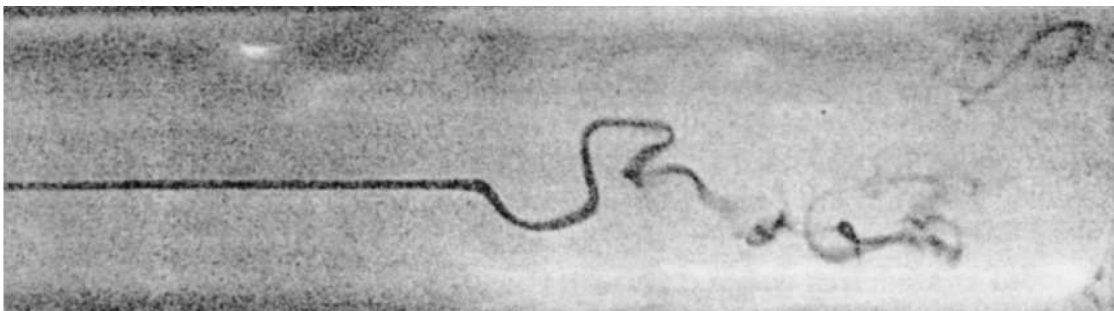
Esistono diverse forme di instabilità caratterizzate da diverse geometrie e dimensioni. Se per una descrizione completa si rimanda al lavoro di Lucca-Negro e O'Doherty [23], qui di seguito vengono presentate solo quelle che, secondo gli autori, sono le forme più ricorrenti per la corrente in considerazione, ossia VB a bolla e a spirale Fig.(2.5).

Il VB a bolla è una struttura di forma ovoidale caratterizzata da un rapporto lunghezza/larghezza intorno a 1.4. Sarpkaya [28] propone una descrizione dettagliata degli aspetti distintivi di questa forma di breakdown: la regione a monte, pressoché stazionaria, è simmetrica rispetto all'asse, mentre quella a valle presenta una conformazione a spirale con due braccia. All'interno della struttura ovoidale il campo di moto mostra due zone di ricircolo, come illustrato in Fig.(2.6). Le due celle sono le responsabili dello scambio di fluido tra l'interno e l'esterno della bolla: l'anello posteriore riempie la bolla mentre quello interno controrotante si occupa di svuotarla.

Il VB a spirale è caratterizzato da una rapida decelerazione delle linee di flusso lungo l'asse di rotazione, seguito dalla formazione di un punto di ristagno e da una rapida deviazione delle stesse, formando la tipica geometria a spirale. La



(a)



(b)

Figura 2.5: (a) VB a bolla [28]; (b) VB a spirale [22]

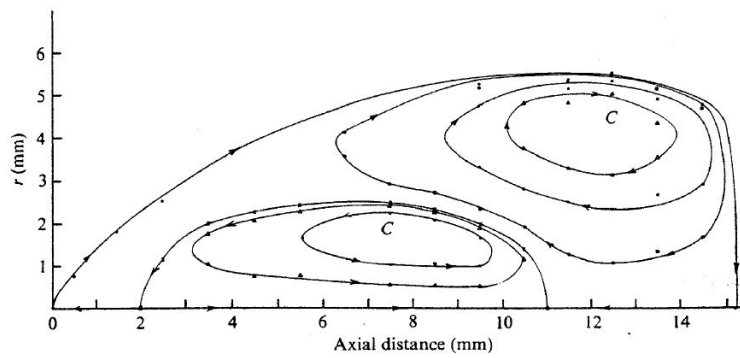


Figura 2.6: Struttura a doppio anello [15]

struttura sopravvive per una o due curve prima di rompersi in scale più grandi della turbolenza. Diversi lavori sperimentali portano a diverse conclusioni in merito al verso di avvolgimento delle spire rispetto alla corrente circostante; tali differenze possono forse essere attribuibili ai diversi metodi di generazione del campo di moto [23].

Numerosi esperimenti sono stati eseguiti con l'intenzione di studiare il comportamento di queste forme di breakdown al variare di diversi parametri come il grado di rotazione e il numero di Reynolds [18][28][3], insieme a confinamento, temperatura del getto [3] e variazioni delle condizioni del flusso a valle della transizione [28]. I risultati delle diverse esperienze identificano delle regioni nelle quali compaiono arbitrariamente due o più forme di breakdown. In queste regioni, chiamate da Sarpkaya di *isteresi*, il passaggio da una conformazione all'altra è spontaneo.

2.4.2 Precessing Vortex Core

Il Precessing Vortex Core è un fenomeno fortemente instazionario caratterizzato dalla precessione della struttura vorticoso principale attorno all'asse geometrico del getto. Si tende comunemente a considerare il Vortex Breakdown come precursore del PVC e a collocare quest'ultimo ai bordi della zona di ricircolo, tra la streamline zero e quella a velocità assiale nulla.

Sfruttando tecniche ottiche come la laser doppler velocimetry LDV o la particle image velocimetry PIV risolta nel tempo, è possibile ricostruire l'influenza che ha il PVC sul campo di moto. Il PVC genera infatti al suo passaggio zone di bassa pressione statica che, sommandosi al moto di precessione, danno origine a fluttuazioni di velocità che si trasmettono al fluido circostante. Con queste tecniche si riesce a risalire, in maniera non invasiva, al contenuto in frequenza delle fluttuazioni di velocità e quindi a caratterizzare il PVC. In alternativa è possibile eseguire un'analisi spettrale di queste fluttuazioni utilizzando anemometri a filo caldo o un microfono posizionato sulla parete della camera di prova.

Facendo riferimento al grafico Fig.(2.7a) proposto da Park [26], è possibile investigare la dipendenza della frequenza del PVC rispetto ai parametri caratteristici del flusso quali il numero di swirl S e il numero di Reynolds Re . Da misure ottenute sfruttando l'anemometria a filo caldo risulta evidente come, a pari numero di swirl, la frequenza del PVC aumenti all'aumentare di Re ; in maniera analoga la frequenza del moto di precessione aumenta all'aumentare del grado di rotazione purché si mantenga costante il numero di Reynolds.

È interessante sottolineare come le caratteristiche del PVC variano notevolmente in base al flusso considerato, a seconda che esso sia isoterma o reagente. Per determinare quali cambiamenti comporta la presenza della combustione sul

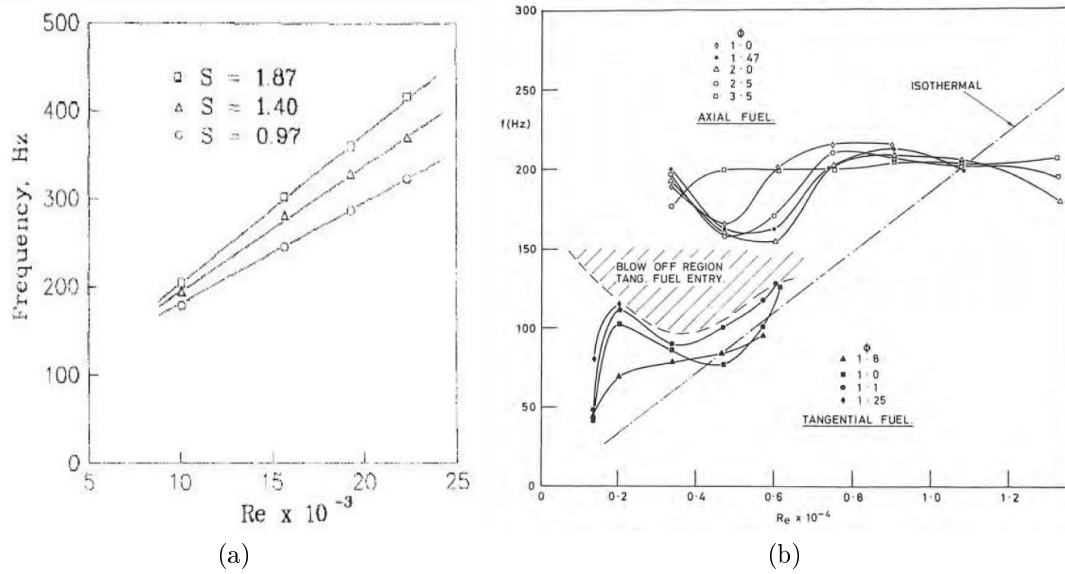


Figura 2.7: (a)Variazione frequenza *PVC* in funzione di *Re* e *S* [26]; (b) Effetto di *Re* e rapporto di miscela sulla frequenza per ingressi assiali e tangenziali [18]

campo di moto, Gupta [18] individua quattro possibili scenari caratterizzati da diverse strutture della fiamma e del PVC. In particolare, analizzando le frequenze del PVC, mostrata in Fig.(2.7b), è stato possibile osservare come il fenomeno sia eccitato, smorzato o mantenuto inalterato rispetto al caso isoterma al variare del numero di Reynolds, del rapporto di miscela e dalla modalità d'ingresso del combustibile in camera di combustione.

Capitolo 3

Apparato sperimentale

Nei paragrafi seguenti viene presentata una breve descrizione del set-up sperimentale e della tecnica utilizzata per l'acquisizione del campo di moto. Per un'analisi più completa si rimanda ai lavori di Sharma [29], Cozzi [13], Vanni [32], Arzuffi [1] e Raffel [27].

3.1 Generatore del moto di swirl

Il generatore del campo di moto sfrutta il controllo di portata in direzione assiale e tangenziale per poter imprimere al fluido il grado di rotazione desiderato.

Il moto di swirl è ottenuto sfruttando un bruciatore da laboratorio costituito da un condotto cilindrico lungo 180 mm di 80 mm di diametro, al termine del quale è posto un ugello convergente di 160 mm di lunghezza e 36 mm di diametro interno. Quest'ultima lunghezza viene utilizzata come lunghezza caratteristica per il calcolo delle grandezze adimensionali del getto.

Alla base del condotto cilindrico sono posti 4 ingressi per la generazione del flusso assiale. Questo passa successivamente attraverso un disco, Fig.(3.1), costituito da 24 fori di 2 mm di diametro, che consente di ottenere un campo di moto uniforme con un foro centrale, del diametro di 15 mm , per permettere l'alloggiamento del gas gun. Quest'ultimo viene utilizzato come ingresso coassiale per inseminare il flusso.

Oltre questa sezione sono presenti 8 condotti tangenziali (4 dei quali hanno un diametro di 4 mm mentre i restanti di 3 mm) necessari per conferire al flusso il moto rotatorio. A questo punto il flusso attraversa il convergente prima di entrare in camera di prova. Quest'ultima è di sezione ottagonale, dal momento che finestre di quarzo piane garantiscono un miglior accesso ottico rispetto a quelle cilindriche.

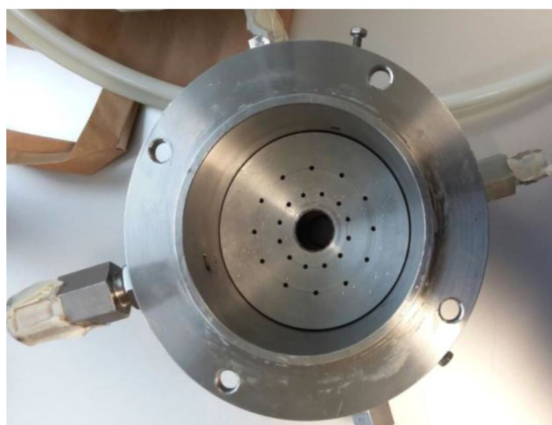


Figura 3.1: Disco necessario per garantire l'uniformità del getto. Nel foro centrale viene alloggiato il gas gun [29]

Il diametro del cerchio inscritto nell'ottagono ha un diametro di 193 mm mentre l'altezza della camera di combustione è di 290 mm . In Fig.(3.2) viene mostrata una schematizzazione del bruciatore e l'apparato sperimentale per la misurazione SPIV.

La portata d'aria necessaria per l'alimentazione è regolata da flussimetri massici termini.

3.2 PIV stereoscopica

La Particle Image Velocimetry PIV è una tecnica non intrusiva per la misura del campo di velocità. Il campo di moto, inseminato con micro particelle dal grande potere di diffusione luminosa, viene illuminato da un fascio laser piano pulsato; sincronizzando con esso una fotocamera digitale è possibile ottenere l'immagine delle particelle in due istanti di tempo successivi. Sfruttando la cross-correlazione si calcola, per ogni coppia di immagini, lo spostamento medio delle particelle; conoscendo infine il tempo trascorso tra i due impulsi è possibile ricostruire le mappe bidimensionali istantanee del vettore velocità. Con questa tecnica vengono ricostruite unicamente le componenti di velocità che giacciono sul piano illuminato dal laser.

Con la PIV stereoscopica S-PIV è possibile misurare anche la componente di velocità fuori dal piano. Utilizzando due fotocamere con diverso angolo di vista, ma puntate sullo stesso volume di fluido illuminato, diventa disponibile un nuovo set di componenti di velocità. L'opportuna combinazione della coppia di risultati permette la ricostruzione del campo di moto completo. In questa tecnica il

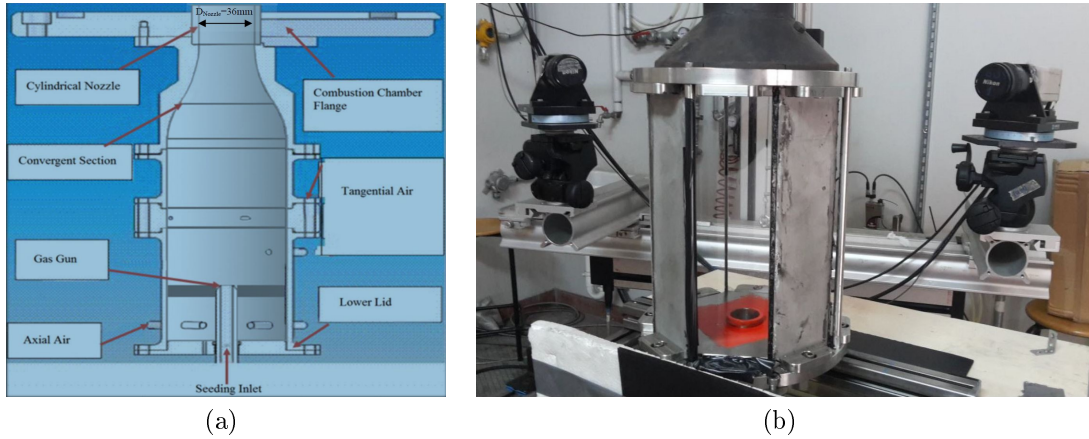


Figura 3.2: (a) Schema bruciatore [16]; (b) Apparato sperimentale [29]

processo di calibrazione, necessario per convertire la posizione delle particelle da pixel a metri, diventa più complesso, dal momento in cui risulta necessario ricavare informazioni aggiuntive sulla posizione della camera rispetto al piano di osservazione.

3.3 Strumentazione

La sorgente luminosa utilizzata è un laser Nd-YAG a doppio impulso con energia e lunghezza d'onda pari rispettivamente a 200 mJ/pulse e 532 nm . Il raggio passa attraverso una serie di ottiche che permettono di espanderlo in un piano con spessore di circa 1.5 mm . Il tempo tra due impulsi successivi varia dai $10 \mu\text{s}$ ai $30 \mu\text{s}$ in base all'intensità del moto rotatorio. Per la registrazione delle immagini sono state utilizzate due camere CCD di 1344×1024 pixels, entrambe equipaggiate con un obiettivo Nikon con lunghezza focale di 60 mm e massima apertura di 2.8. L'inseminante utilizzato è un olio con densità di circa 850 kg/m^3 . L'utilizzo di un atomizzatore permette di poter creare particelle di diametro medio pari a $1 - 2 \mu\text{m}$.

Il numero Stokes St , definito come rapporto tra il tempo caratteristico delle particelle τ_p e quello del campo di moto τ_f , è un parametro adimensionale che ben descrive il comportamento delle particelle sospese nel fluido.

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} \ll 1 \quad (3.1)$$

con τ_p ricavato dalla legge di Stokes:

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu} \quad (3.2)$$

dove ρ_p , d_p e μ sono rispettivamente la densità delle particelle di tracciante, il loro diametro e la viscosità dinamica del fluido, mentre τ_f per flussi in rotazione è definito come:

$$\tau_f = \frac{r_{wmax}}{w_{max}} \quad (3.3)$$

dove w_{max} è la velocità tangenziale massima mentre r_{wmax} è la corrispondente coordinata radiale. Poiché in questo esperimento $St \approx 0.006 \ll 1$, il tracciante segue fedelmente il campo di moto.

Le immagini sono state processate utilizzando il software Dantec DynamicStudio4.15. Dopo l'acquisizione, le immagini hanno subito delle elaborazioni, tra le quali un filtro di bilanciamento con dimensione 5×5 e la rimozione dello sfondo, prima che su di esse venisse applicata la cross-correlazione. È stato implementato un algoritmo di cross-correlazione adattivo; la dimensione finale della zona di interrogazione è 32×32 pixel con 50% di overlap. Per la ricostruzione della terza componente del campo di moto è stato utilizzato il metodo proposto da Soloff [30] già implementato nel software.

3.4 Generazione delle medie in fase

Una caratteristica dei flussi ad alto numero di swirl è la presenza di oscillazioni periodiche della velocità generate dal passaggio del PVC. In queste situazioni, la decomposizione alla Reynolds del campo di moto, come somma di campo medio e parte fluttuante, non permette di distinguere se quest'ultima sia generata dal passaggio di una struttura coerente o se si tratti di una fluttuazione caotica, caratteristica delle piccole scale turbolente. In questi casi risulta più opportuno applicare lo schema di decomposizione della velocità proposto da Hussain e Reynolds [20]. Seguendo questo approccio, il campo di moto viene scomposto come somma di tre contributi:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

dove:

- $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ è il campo di velocità istantaneo;
- $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ è il campo di velocità medio;
- $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ è il campo di fluttuazioni coerenti;
- $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ è il campo di velocità che fluttua casualmente.

Il campo di velocità del flusso coerente $\tilde{\mathbf{u}}$ può quindi essere riscritto come:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \theta) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \theta) \quad (3.5)$$

dove θ rappresenta l'angolo di fase della componente periodica.

Per poter ricostruire correttamente il flusso risolto in fase partendo dalle misurazioni istantanee del campo di moto, è necessario determinare, per ogni realizzazione, la corrispondente fase. Questo può essere relativamente facile nel momento in cui le acquisizioni PIV sono risolte nel tempo; se questo non è possibile, come nel caso in esame, il metodo per la ricostruzione della fase risulta più complesso.

Seguendo l'approccio proposto da van Oudheusden [31], ripreso e applicato da Cozzi [13] per questo specifico caso, si osserva come l'informazione sulla fase possa essere estratta dai coefficienti dei due modi più energetici della POD (Proper Orthogonal Decomposition). L'angolo di fase θ per il generico campo di velocità istantaneo j , risulta esprimibile come:

$$\theta(j) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2\lambda_1} a_2(j)}{a_1(j) \sqrt{2\lambda_2}}\right) \quad (3.6)$$

dove $a_1(j)$ e $a_2(j)$ sono rispettivamente il primo e il secondo modo POD più energetico, mentre λ_1 e λ_2 i corrispondenti autovalori; j è l'istante di tempo corrispondente alla j -esima mappa di velocità istantanea.

Applicando questo metodo ad ogni istantanea è possibile raggruppare le mappe in slot di ampiezza $\Delta\theta$ in accordo con il loro angolo di fase. Mappe appartenenti allo stesso slot possono essere mediate insieme.

Per ottenere una ricostruzione più regolare della struttura nel 3D, gli slot delle fasi sono stati parzialmente sovrapposti [13]. Procedendo in questa direzione si ottiene un maggior numero di slot ad una minore distanza angolare, mentre l'ampiezza della fase $\Delta\theta$, ossia la risoluzione, e il numero di istantanee all'interno dello stesso slot sono rimasti invariati. Allo slot k -esimo viene assegnato l'angolo di fase $\theta_k = \Delta\theta k(1 - \alpha)$, dove $0 \leq \alpha \leq 1$ indica il grado di overlap; in particolare per $\alpha = 0$ slot adiacenti non si sovrappongono, per $\alpha = 1$ slot adiacenti sono completamente sovrapposti. La j -esima mappa appartiene al k -esimo slot solo se il suo angolo $\theta(j)$ soddisfa l'equazione:

$$\Delta\theta \left[k(1 - \alpha) - \frac{1}{2} \right] \leq \theta(j) \leq \Delta\theta \left[k(1 - \alpha) + \frac{1}{2} \right] \quad (3.7)$$

con $0 < k < \text{int}[2\pi/[\Delta\theta(1 - \alpha)]]$: così facendo la fase dell'ultimo slot è minore di 2π . Per questo specifico caso è stato scelto $\Delta\theta = \pi/6$ radianti ossia 30° mentre $\alpha = 5/6$, garantendo quindi una distanza angolare tra gli slot pari a $\pi/36$ radianti quindi 5° .

Capitolo 4

Tecniche di identificazione di vortici

I flussi turbolenti rappresentano uno dei problemi più interessanti della meccanica dei fluidi. Gli studi degli ultimi anni [14] hanno mostrato come la turbolenza non sia unicamente un fenomeno caotico ma come, all'interno di questo caos, siano presenti delle strutture coerenti caratterizzate da una dinamica deterministica. Lo studio dell'evoluzione di queste strutture è di fondamentale importanza per capire i fondamenti della fisica turbolenta, dai quali si possono ricavare svariati benefici in diversi settori industriali, da quello aeronautico a quello automobilistico.

Risulta necessario quindi identificare quelle che sono le strutture ricorrenti dal background caotico della turbolenza. Può sembrare tuttavia sorprendente come una definizione di vortice non sia ancora universalmente riconosciuta dalla comunità scientifica. Esiste però un sostanziale accordo su due proprietà che un vortice deve possedere per potersi definire tale [21]:

- (i) il nucleo del vortice deve avere una vorticità netta, e di conseguenza una circolazione netta diversa da zero;
- (ii) le caratteristiche della geometria del vortice devono essere invarianti galileiane.

Nei prossimi paragrafi vengono presentate ed analizzate le principali tecniche di identificazione, facendo particolare riferimento a quelle basate sull'analisi del tensore gradiente di velocità.

4.1 Criteri intuitivi

4.1.1 Minimo locale di pressione

Sotto le ipotesi di flusso piano, stazionario e non viscoso, è possibile individuare una regione vorticoso in corrispondenza di un minimo locale di pressione.

Questo criterio nasce da un semplice bilancio di forze sull'elemento di fluido: per garantire infatti che la traiettoria presenti una curvatura, è necessario che sull'elemento di fluido la forza centrifuga sia bilanciata da una forza generata da un gradiente di pressione in direzione radiale. Il punto che si trova sull'asse del vortice si configura quindi come punto di minimo locale di pressione.

Nel caso però di flusso non stazionario, viscoso o tridimensionale questo non è più vero. Seguendo quanto presentato da Jeong e Hussain [21] si può infatti osservare come per flussi non stazionari e irrotazionali l'esistenza di minimi di pressione non sia collegata alla presenza di vortici. Anche nei flussi stazionari e viscosi sono presenti delle eccezioni, come per esempio la corrente di Von Kàrmàn dove la forza centrifuga non è bilanciata da una forza di pressione ma da una forza viscosa. In questo caso la distribuzione di pressione radiale rimane costante su piani perpendicolari all'asse del vortice che pertanto non viene individuato da questo criterio.

Un'ulteriore problematica associata a questo criterio risiede nella separazione di scale presente tra la scala della pressione e quella della vorticità. La pressione soddisfa infatti l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 p = -\rho u_{i/j} u_{j/i} \quad (4.1)$$

Considerando per esempio il vortice di Lamb si osserva come la vorticità sia quasi completamente scomparsa (1.8% rispetto al valore massimo) ad una distanza $r = 4\sqrt{\nu t}$ mentre la pressione sia ancora ad un valore significativo (circa 25% del valore minimo). Questa differenza di scala rende difficile il confinamento della regione vorticoso da una regione non vorticoso.

La presenza di un minimo locale di pressione non risulta quindi né una condizione necessaria né sufficiente all'identificazione di un vortice.

4.1.2 Linee di flusso e traiettorie

Lugt [24] propone un criterio di identificazione basato sulla forma della traiettoria di una particella all'interno di un vortice. È comunemente accettato che le strutture vorticoso siano caratterizzate dalla presenza di un moto rotatorio in un adeguato sistema di riferimento, e pertanto la loro presenza è stata associata alla

presenza di linee di flusso circolari o a spirale. Questo tipo di analisi non porta a criteri che siano invarianti galileiani.

Rimane un ulteriore problema: una particella di fluido può appartenere a un vortice anche senza completare un'intera rivoluzione attorno al suo nucleo. Questo avviene quando il vortice attraversa una transizione a causa di fenomeni fortemente non lineari prima che la particella completi l'intera rivoluzione, come fenomeni di accoppiamento o rottura dei vortici.

4.1.3 Modulo della vorticità

Si può pensare ad utilizzare il modulo del vettore vorticità $|\boldsymbol{\omega}|$ come indicatore della presenza di una struttura vorticoso. Nonostante sia invariante galileiano, l'applicazione di questo criterio può portare a conclusioni errate. In presenza di una parete per esempio, il metodo non è in grado di distinguere se la rotazione sia legata alla presenza di un vortice o piuttosto se dovuta a uno sforzo di taglio. In altre situazioni, dove i vortici sono effettivamente presenti, questi potrebbero essere oscurati dal livello di vorticità di sottofondo, causato da interazioni vorticoso importanti come per esempio in uno strato limite.

Ecco quindi come $|\boldsymbol{\omega}|$ si mostra essere una condizione necessaria ma non sufficiente ad identificare un vortice, sia per flusso libero che per flusso confinato da una parete.

4.2 Criteri basati sull'analisi di $\nabla\mathbf{u}$

I metodi più comuni per l'identificazione dei vortici sono derivati dall'analisi locale del tensore gradiente di velocità $\nabla\mathbf{u}$. Essi definiscono una funzione che, valutata punto per punto all'interno del dominio, ne determina l'appartenenza o meno alla struttura vorticoso.

Per un generico campo di moto tridimensionale, fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y, z) , dove le componenti di velocità risultano rispettivamente (u, v, w) , il tensore gradiente di velocità è esprimibile come:

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

I criteri più utilizzati e che nei successivi paragrafi saranno soggetti ad un'analisi più dettagliata sono:

- autovalori complessi o criterio Δ ;

- swirling strength σ_{ci} ;
- secondo invariante Q ;
- due autovalori per il tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$.

Chakraborty et al[7] hanno mostrato come questi criteri possano essere espressi in forma chiusa in termini dei parametri cinematici locali σ_{ci} e σ_{cr}/σ_{ci} , ossia come funzione della frequenza alla quale le particelle di fluido ruotano attorno al punto critico e dell'estensione spaziale del moto a spirale. Le quantità σ_{cr} e σ_{ci} sono rispettivamente definite come parte reale e immaginaria della coppia di autovalori complessi del tensore $\nabla \mathbf{u}$. È emerso inoltre come, a patto di scegliere soglie coerenti, i risultati ottenuti siano tra loro consistenti.

4.2.1 Autovalori complessi

Chong [11] ha proposto un criterio di identificazione che si riferisce alla presenza di traiettorie a spirale. Per superare il problema legato all'invarianza galileiana, la curvatura delle linee di flusso viene ora calcolata in ogni punto del campo di moto riferendosi ad un sistema di riferimento locale che si muove con la velocità del fluido stesso. Per conseguire questo obiettivo non è necessario integrare le equazioni delle linee di flusso, dal momento che le informazioni istantanee sulla curvatura locale sono contenute nel tensore $\nabla \mathbf{u}$. Autovalori complessi in una determinata regione del campo di moto implicano infatti una linea di flusso chiuso o a spirale. Tale regione è quindi compatibile con la presenza di una struttura vorticoso.

L'autovalore σ del gradiente di velocità soddisfa l'equazione:

$$\sigma^3 - P\sigma^2 + Q\sigma - R = 0 \quad (4.3)$$

dove P, Q, R sono i tre invarianti di $u_{i/j}$ definiti come:

$$P = -\nabla \cdot \mathbf{u} = -u_{i/i} \quad (4.4a)$$

$$Q = \frac{1}{2}[(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \text{tr}(\nabla \mathbf{u}^2)] = \frac{1}{2}(u_{i/i}^2 - u_{i/j}u_{j/i}) \quad (4.4b)$$

$$R = \det(\nabla \mathbf{u}) = \det(u_{i/j}) \quad (4.4c)$$

Chen *et al* [8] risolve Eq.(4.3) utilizzando il metodo di Cardano. Radici complesse appaiono quando il discriminante Δ_{3D} dell'equazione è positivo. Nel caso di flusso incomprimibile, dove quindi $P = 0$, questa condizione implica:

$$\Delta_{3D} = \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 > 0 \quad (4.5)$$

È interessante osservare come vari la formulazione di questo criterio nel caso bidimensionale. Considerando infatti il terzo invariante R di $u_{i/j}$ si può osservare come

questo sia identicamente nullo poiché, essendo nel 2D, è possibile calcolare la variazione della velocità unicamente lungo due delle tre variabili spaziali. L'equazione caratteristica Eq.(4.3) pertanto cambia forma:

$$\sigma(\sigma^2 - P\sigma + Q) = 0 \quad (4.6)$$

Lo studio delle corrispondenti radici risulta semplificato in quanto una è identicamente nulla mentre l'altra coppia proviene dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado $\sigma^2 - P\sigma + Q = 0$. In accordo con quanto riportato da Chen [10], autovalori complessi appaiono nel momento in cui:

$$\Delta_{2D} = (P^2 - 4Q) < 0 \quad (4.7)$$

Nel caso di flusso incomprimibile, quindi dove $P = 0$, la condizione si riduce a:

$$\Delta_{2D} = -4Q < 0 \quad (4.8)$$

4.2.2 Swirling strength

Elaborando ulteriormente il metodo, Zhou [34] propone di utilizzare la parte immaginaria degli autovalori coniugati di $\nabla\mathbf{u}$ come criterio per l'identificazione dei vortici.

Nello spazio tridimensionale, quando il discriminante del tensore gradiente di velocità è positivo significa che $\nabla\mathbf{u}$ ha autovalori esprimibili nel seguente modo:

$$\sigma_1 = \sigma_r \quad (4.9a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{cr} + i\sigma_{ci} \quad (4.9b)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{cr} - i\sigma_{ci} \quad (4.9c)$$

È possibile quindi definire un sistema locale di coordinate curvilinee (y_1, y_2, y_3) definito da (v_1, v_2, v_3) che trasla localmente con le particelle di fluido, nel quale le linee di flusso sono espresse da:

$$y_1(t) = y_1(0)e^{\sigma_r t} \quad (4.10a)$$

$$y_2(t) = e^{\sigma_{cr} t} [y_2(0)\cos(\sigma_{ci} t) + y_3(0)\sin(\sigma_{ci} t)] \quad (4.10b)$$

$$y_3(t) = e^{\sigma_{cr} t} [y_3(0)\cos(\sigma_{ci} t) - y_2(0)\sin(\sigma_{ci} t)] \quad (4.10c)$$

ossia il flusso descrive un moto a spirale con rotazione attorno all'asse associato all'autovalore σ_r , dove $2\pi/\sigma_{ci}$ è il periodo necessario per compiere una rivoluzione sulla linea di flusso, mentre σ_r descrive l'intensità di espansione-compressione in direzione assiale. La quantità σ_{ci} è chiamata *swirling strength* del vortice.

Attraverso questa analisi risulta evidente come una caratteristica distintiva di questo criterio è che non si limita ad individuare le regioni nelle quali è presente il vortice, ma ne identifica anche l'intensità e il piano di rotazione locale.

Riprendendo quanto proposto da Chen [8], sfruttando il metodo di Cardano è possibile determinare la soluzione analitica dell'equazione caratteristica Eq.(4.3). Imponendo $t = \sigma + P/3$, $p = Q - P^2/3$ e $q = -R + PQ/3 + 2P^3/27$ si ricava l'equazione:

$$t^3 + pt + q = 0 \quad (4.11)$$

Assegnando $t = \xi + \eta$ e $\xi\eta = -p/3$ ci si riconduce ad un'equazione quadratica in ξ^3 facilmente risolvibile:

$$(\xi^3)^2 + q(\xi^3) - p^3/27 = 0 \quad (4.12)$$

Sfruttando la simmetria tra ξ e η , si può imporre:

$$\xi = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta_{3D}}} \quad (4.13a)$$

$$\eta = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta_{3D}}} \quad (4.13b)$$

con Δ_{3D} precedentemente definito nell'Eq.(4.5). Quando $\Delta_{3D} > 0$ l'equazione caratteristica ammette un autovalore reale e una coppia complessa:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \xi + \eta - P/3 \\ \sigma_2 = \beta\xi + \beta^2\eta = -(\xi + \eta)/2 - P/3 + i\sqrt{3}(\xi - \eta)/2 \\ \sigma_3 = \beta^2\xi + \beta\eta = -(\xi + \eta)/2 - P/3 - i\sqrt{3}(\xi - \eta)/2 \end{cases} \quad (4.14)$$

dove β è la radice primitiva dell'unità. La parte immaginaria dell'autovalore complesso risulta quindi:

$$\sigma_{ci} = \sqrt{3}(\xi - \eta)/2 \quad (4.15)$$

Nel caso di flusso incomprimibile, dove quindi $P = 0$, si trova $p = Q$ mentre $q = R$; l'espressione di σ_{ci} rimane sempre la stessa ma si semplificano le espressioni per ξ e η :

$$\xi = \sqrt[3]{-R/2 + \sqrt{(R/2)^2 + (Q/3)^3}} \quad (4.16a)$$

$$\eta = \sqrt[3]{-R/2 - \sqrt{(R/2)^2 + (Q/3)^3}} \quad (4.16b)$$

4.2.3 Secondo invariante Q

Nel 1988 Hunt [19] identifica come vortice quelle regioni nelle quali il secondo invariante Q del tensore gradiente di velocità è positivo, con una condizione

addizionale sulla pressione la quale deve essere inferiore rispetto al valore della pressione ambiente.

Dall'espressione di Δ_{3D} nel caso incomprimibile, Eq.(4.5), risulta evidente come il criterio $Q > 0$ sia più restrittivo del criterio $\Delta_{3D} > 0$.

La condizione addizionale sulla pressione si dimostra essere indipendente dal segno di Q . Riscrivendo infatti l'equazione di Poisson in termini del secondo invariante:

$$\nabla^2 p = 2 \rho Q \quad (4.17)$$

Per il principio dei massimi avremo che:

- se $Q \geq 0$ i *massimi* di pressione possono essere solo al bordo;
- se $Q \leq 0$ i *minimi* di pressione possono essere solo al bordo.

In generale comunque $Q \geq 0$ non implica che il minimo di pressione avvenga necessariamente all'interno della regione: non esiste una connessione esplicita tra una regione con $Q \geq 0$ e una definita da un minimo di pressione.

Come per il criterio Δ_{3D} , anche per il criterio Q non ci sono problemi nell'identificazione delle strutture vicino a parete. Riscrivendo infatti il gradiente di velocità nel caso più generale vicino a parete si trova:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

che riconduce a $Q = 0$ e $\Delta_{3D} = 0$ dal momento che anche $R = 0$.

4.2.4 Autovalori del tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$

Con l'intento di andare a migliorare le performance del criterio basato sul minimo di pressione, Hussain [21] definisce, per un fluido a proprietà costanti, il centro del vortice come quella regione connessa nella quale il tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ ha due autovalori negativi. \mathbf{S} e $\mathbf{\Omega}$ sono le componenti simmetriche e antisimmetriche del tensore gradiente di velocità, definite come:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (4.19a)$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (4.19b)$$

Il criterio basato sul minimo di pressione non sempre si mostra affidabile per due motivi:

- deformazioni instazionarie generate da minimi di pressione senza coinvolgere la presenza di strutture vorticosi;
- effetti viscosi che possono eliminare il minimo di pressione in un flusso con un moto vorticoso.

Eliminando questi due effetti, l'idea è quella di ottenere un indicatore migliore dell'esistenza di un vortice.

Prendendo il gradiente dell'equazione di Navier-Stoke, Hussain deriva l'equazione:

$$a_{i/j} = -\frac{1}{\rho} p_{/ij} + \nu u_{i/jkk} \quad (4.20)$$

dove $a_{i/j}$ è il gradiente di accelerazione mentre il tensore simmetrico p_{ij} è l'hessiano di pressione contenente informazioni sugli estremi locali di pressione. Il gradiente di accelerazione può essere diviso in parte simmetrica e antisimmetrica nel seguente modo:

$$a_{i/j} = \underbrace{\left[\frac{DS_{ij}}{Dt} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} \right]}_{\text{simmetrico}} + \underbrace{\left[\frac{D\Omega_{ij}}{Dt} + \Omega_{ik}S_{kj} + S_{ik}\Omega_{kj} \right]}_{\text{antisimmetrico}} \quad (4.21)$$

La parte simmetrica dell'Eq.(4.20) risulta:

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} - \nu S_{ij/kk} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} = -\frac{1}{\rho} p_{/ij} \quad (4.22)$$

dove il primo termine a sinistra dell'uguale rappresenta le deformazioni irrotazionali instazionarie mentre il secondo termine gli effetti viscosi.

In generale, se $p_{/ij}$ ha due autovalori positivi, esiste un minimo di pressione nel piano definito dagli autovettori associati. Andando quindi ad eliminare dall'Eq.(4.22) gli effetti instazionari e viscosi, si osserva come i minimi di pressione dipendano dagli autovalori di $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$. Il minimo di pressione ottenuto in questo modo è attribuibile unicamente ad un moto vorticoso.

Il tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$, simmetrico per costruzione, ha solo autovalori reali. Assumendo che essi siano riordinati in maniera tale che $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, il criterio si riduce a richiedere $\sigma_2 < 0$.

4.2.5 Considerazioni

Come illustrato da Hussain [21] e Cucitore [14] è possibile riscrivere il secondo invariante Q come:

$$Q = \frac{1}{2}(\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2) \quad (4.23)$$

dove:

$$\|\mathbf{S}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^T) \quad (4.24a)$$

$$\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 = \text{tr}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T) \quad (4.24b)$$

Riscrivendo gli elementi di \mathbf{S} e $\boldsymbol{\Omega}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \epsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$Q = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - \left[(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right] \quad (4.25)$$

Dalle Eq.(4.23) e Eq.(4.25) si osserva come la quantità Q può essere intesa come un bilancio tra la velocità di rotazione e quella di deformazione del fluido; richiedere $Q > 0$ significa trovare quella regione interconnessa nella quale la prima prevale sulla seconda.

Considerazioni analoghe possono essere eseguite se applicate al criterio σ_2 analizzando quindi il tensore $\mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2$. In un sistema di riferimento nel quale ogni asse è parallelo agli autovettori del tensore, con x_1 nella direzione dell'asse del vortice, è possibile riscrivere $\mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2$ in forma diagonale:

$$\mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \cdot \mathbf{u}_{/1} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla u_2 \cdot \mathbf{u}_{/2} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla u_3 \cdot \mathbf{u}_{/3} \end{pmatrix}$$

dove gli elementi della diagonale possono essere riscritti come:

$$\nabla u_1 \cdot \mathbf{u}_{/1} = [\epsilon_1^2 + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)] - (\omega_2^2 + \omega_3^2) = \sigma_1 \quad (4.26a)$$

$$\nabla u_2 \cdot \mathbf{u}_{/2} = [\epsilon_2^2 + (\gamma_1^2 + \gamma_3^2)] - (\omega_1^2 + \omega_3^2) = \sigma_2 \quad (4.26b)$$

$$\nabla u_3 \cdot \mathbf{u}_{/3} = [\epsilon_3^2 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] - (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \sigma_3 \quad (4.26c)$$

Richiedere quindi che il secondo autovalore $\sigma_2 < 0$ equivale a richiedere che qualche misura della velocità di rotazione prevalga su quella di deformazione: ω^2 deve essere sufficientemente maggiore di γ^2 per garantire la validità del criterio. In questo caso il bilancio tra velocità di rotazione e di distorsione è effettuato solo nel piano perpendicolare all'asse del vortice.

4.2.6 Misure piane in un campo di moto 2D

Nel caso particolare di campo di moto bidimensionale piano, le regioni vorticosi definite dai criteri basati sull'analisi locale del tensore gradiente di velocità sono equivalenti.

In queste condizioni, l'espressione del gradiente di velocità per un flusso incomprimibile risulta:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & -u_x \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Pertanto l'equazione caratteristica per il calcolo degli autovalori si riduce a:

$$\sigma^2 - u_x^2 - u_y v_x = 0 \quad (4.28)$$

In particolare gli autovalori risultano immaginari quando:

$$\Delta = u_x^2 + u_y v_x < 0 \quad (4.29)$$

In queste stesse ipotesi, il secondo invariante Q definito come [4.4b] si riduce a:

$$Q = -\frac{1}{2} \text{tr}(\nabla \mathbf{u}^2) = -\frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} u_x^2 + u_y v_x & 0 \\ 0 & u_x^2 + u_y v_x \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

quindi:

$$Q = -\Delta = -(u_x^2 + u_y v_x) \quad (4.31)$$

Inoltre riprendendo la definizione dei tensori \mathbf{S} e $\mathbf{\Omega}$ Eq.(4.19) ed applicandola al caso in questione si ottiene:

$$\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} u_x^2 + u_y v_x & 0 \\ 0 & u_x^2 + u_y v_x \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Gli autovalori di $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ sono quindi coincidenti e risultano:

$$\sigma_2 = u_x^2 + u_y v_x = -Q = \Delta \quad (4.33)$$

mentre:

$$\sigma_{ci} = \sqrt{-u_x^2 - u_y v_x} = \sqrt{Q} \quad (4.34)$$

Pertanto nel caso di campo di moto piano i tre criteri sono equivalenti.

4.2.7 Misure piane in un campo di moto 3D

Nel caso in cui il flusso in esame sia tridimensionale, ma le informazioni del campo di moto siano disponibili unicamente su di un piano, i criteri basati sull'analisi del gradiente di velocità tornano a differenziarsi [6].

In queste condizioni infatti ci sono tre componenti di velocità (u, v, w) le quali sono funzioni delle tre coordinate spaziali (x, y, z) . Supponendo che il campo di moto sia disponibile unicamente nel piano parallelo a xy posizionato ad una quota $z = \bar{z}$, è possibile calcolare la variazione di velocità unicamente lungo le direzioni

x e y . La derivata parziale lungo la terza direzione non è identicamente nulla, ma non è possibile calcolarla. In queste condizioni le espressioni dei criteri Δ_{2D} e Q_{2D} risultano:

$$\Delta_{2D} = u_x^2 + v_y^2 - 2u_x v_y - 4u_y v_x \quad (4.35a)$$

$$Q_{2D} = u_x v_y - u_y v_x \quad (4.35b)$$

Per il calcolo di σ_{ci2D} e σ_{22D} si applicano le formulazioni riportate in precedenza, rispettivamente nei paragrafi § 4.2.2 e § 4.2.4, dove però divergenza e gradiente di velocità assumono le seguenti formulazioni:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_x + v_y + w_z \quad (4.36a)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ w_x & w_y & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36b)$$

4.3 Approccio non locale

I criteri legati sull'analisi del tensore gradiente di velocità sono associati ad uno studio basato su informazioni locali del campo di moto. Emerge chiaramente quindi come questi criteri non siano in grado di cogliere le relazioni che possono esserci tra un elemento di fluido e altri elementi che si trovano in una regione dello spazio con distanza comparabile alla dimensione del vortice.

Un esempio di criterio di identificazione dei vortici non locale è basato sulla ricerca di traiettorie o linee di flusso chiuse o a spirale; questo approccio ha però la caratteristica di non essere invariante galileiano.

Il criterio proposto da Cucitore [14] si basa sulla considerazione intuitiva che due particelle appartenenti ad una stessa struttura vorticoso, anche se seguono traiettorie completamente diverse, mostrano piccole variazioni nella loro distanza relativa.

Considerando in un flusso una coppia di particelle (a, b) , le quali per essere definite tali devono soddisfare:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (4.37)$$

e siano u_a e u_b le rispettive velocità, è possibile introdurre uno scalare $R(x, t)$ funzione sia della posizione iniziale della coppia di particelle a, b che del tempo t nel seguente modo:

$$R(\mathbf{x}_m, t) = \frac{|\int_0^t \mathbf{u}_a(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{u}_b(\tau) d\tau|}{\int_0^t |\mathbf{u}_a(\tau) - \mathbf{u}_b(\tau)| d\tau} \quad (4.38)$$

dove il numeratore esprime l'evoluzione della distanza relativa tra le due particelle al tempo zero e al tempo t , mentre il denominatore è una misura della differenza cumulativa tra le loro traiettorie nello stesso intervallo di tempo.

È previsto che per una coppia di particelle che appartengono alla stessa struttura vorticoso, il numeratore non aumenti mentre il denominatore cresca col tempo: il vortice viene quindi identificato come quella regione del flusso nella quale R risulti inferiore di una certa soglia R_{th} . Una caratteristica di questo criterio è di essere invariante galileiano.

Nonostante il criterio si comporti bene sia per flussi radiali (nei quali $R \equiv 1$) sia per quelli con grande vorticità di sottofondo, dimostrandosi in grado di distinguere una rotazione generata da uno sforzo di taglio (corrente di Couette) da una generata dalla presenza di una struttura vorticoso, si può notare come il rapporto R può rimanere molto piccolo anche per flussi che non hanno caratteristiche vorticoso. Cucitore [14] propone di usare questo criterio in relazione con $\Delta_{3D} > 0$: l'idea è quella di identificare un sottoinsieme localmente swirlante $\Delta_{3D} > 0$, per il quale il rapporto R rimanga inferiore ad una certa soglia.

Un approccio non locale ha un costo computazionale intrinsecamente più elevato rispetto ad uno locale. Per far fronte a questo problema, Chakraborty [7] ha sviluppato un'approssimazione locale di questa proprietà non locale.

Considerando la proiezione del moto di una particella di fluido sul piano del vortice, ossia il piano descritto dagli autovettori v_{cr} e v_{ci} , e riprendendo la seconda e la terza equazione della swirling strength, Eq.(4.10b) ed Eq.(4.10c), si può vedere come il periodo di rivoluzione della particella nel piano del vortice sia $2\pi/\sigma_{ci}$. In questo piano, due punti inizialmente separati da una distanza r_0 , dopo n rivoluzioni attorno all'asse del vortice saranno separati da una distanza pari a r_f . Queste due distanze possono essere espresse in termini degli autovalori del gradiente di velocità nel seguente modo:

$$\frac{r_f}{r_0} = \exp\left(2\pi n \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{ci}}\right) \quad (4.39)$$

Dall'equazione notiamo una dipendenza esponenziale del rapporto degli autovalori. Possiamo vedere il rapporto σ_{cr}/σ_{ci} come l'inverso di una misura dell'estensione spaziale del moto a spirale. Regioni con un valore di σ_{cr}/σ_{ci} elevato hanno bassa compattezza: non possono quindi essere considerate come appartenenti ad una struttura vorticoso anche se altri criteri locali suggeriscono altrimenti.

Per grandi valori negativi di questo rapporto, le linee di flusso istantanee spirano rapidamente all'interno del piano del vortice. Per un flusso incomprimibile esiste una relazione che lega l'autovalore reale alla coppia complessa:

$$\sigma_r = -2\sigma_{cr} \quad (4.40)$$

Quindi tanto più le particelle nel piano del vortice si avvicinano al centro di rotazione, tanto più queste si separano lungo l'asse del vortice. È possibile quindi dare due definizioni di vortice a seconda che la compattezza sia richiesta unicamente nel piano che trasla col vortice:

(i) $\sigma_r \geq \epsilon$

(ii) $\sigma_{cr}/\sigma_{ci} \leq \delta$

o se richiesta anche nella direzione dell'asse del vortice:

(i) $\sigma_r \geq \epsilon$

(ii) $-k \leq \sigma_{cr}/\sigma_{ci} \leq \delta$

dove a piccoli valori di σ_{ci} corrispondono grandi tempi per completare la rivoluzione attorno all'asse del vortice e di conseguenza regioni con vortici deboli.

Capitolo 5

Risultati

Accanto alla validazione del codice, di fondamentale importanza per qualificare i risultati ottenuti, nei seguenti paragrafi vengono presentate le analisi effettuate a partire dalle medie in fase di un getto swirlato caratterizzato dai parametri riportati in tabella.

Re	21800
S	1.4
S_g	4.6
f	175 Hz

Tabella 5.1: Parametri caratteristici del campo di moto

5.1 Ricostruzione del campo di moto 3D

Per poter creare la struttura vorticoso tridimensionale è stato anzitutto necessario ricostruire la griglia di calcolo. Essa è una griglia cilindrica, nata posizionando a raggiera le medie in fase (PA) del campo di moto disponibili attorno ad un'origine O , definita come punto di intersezione tra l'asse del getto e il piano dell'ugello. La difficoltà di allineamento geometrico del set-up sperimentale ha fatto sì che l'origine O' delle singole PA, definite in un sistema di riferimento cartesiano locale $(x' y')$, non coincida con l'origine della griglia cilindrica. Cross-correlando le mappe delle velocità totali di PA sfasate di 180° è stato possibile determinare il loro offset rispetto all'origine del sistema di riferimento.

Prima di eseguire la cross-correlazione sulle mappe di velocità è stato necessario eseguire alcune operazioni preliminari:

- orientare gli assi locali delle PA;
- organizzare le componenti di velocità in accordo con il nuovo sistema di riferimento;
- ricreare il campo di velocità completo a partire dalle componenti di velocità.

Per il calcolo della cross-correlazione 2D si è utilizzato la funzione *xcorr2* di *MATLAB*, considerando PA_θ come template, mentre $PA_{\theta+180}$ come offset-template. Risalendo alla posizione del massimo si è ricavato l'offset discreto da applicare alle mappe di velocità. In particolare si osserva come per ognuna delle 36 coppie di PA, si ottiene una corretta sovrapposizione dei campi di moto traslando $PA_{\theta+180}$ di un'unità lungo l'asse x' nel verso delle $x' < 0$; in questi termini, non risulta necessaria alcuna traslazione lungo l'asse verticale.

Noto l'offset discreto è stato possibile determinare quello da applicare alle coordinate: lo spostamento di una coordinata discreta corrisponde infatti ad un offset nel continuo pari a $\delta = 4.36 \text{ mm}$. Dalla simmetria del problema si osserva come l'origine del sistema di riferimento globale cade in posizione centrale rispetto alle due origini dei sistemi locali: traslando le coppie di medie in fase di $\pm\delta/2$ si fa in modo che le loro origini vadano a coincidere con quella del sistema di riferimento centrato in O . Nello specifico, la trasformazione da applicare alle ascisse delle PA per poterle esprimere nel sistema di riferimento con origine in O è la seguente:

$$x_{PA_\theta}^O = x_{PA_\theta}^{O'} + \delta/2 \quad \text{se } 0^\circ \leq \theta < 180^\circ \quad (5.1a)$$

$$x_{PA_\theta}^O = -(x_{PA_\theta}^{O'} + \delta/2) \quad \text{se } 180^\circ \leq \theta < 360^\circ \quad (5.1b)$$

In Fig.(5.1) vengono mostrati i profili del modulo della velocità totale, definita come $|\text{vel}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, alla quota $z/D \approx 0.12$ prima e dopo la traslazione descritta in Eq.(5.1). La velocità è adimensionalizzata con $U_{bulk} \approx 8.9 \text{ m/s}$.

Dopo aver centrato correttamente le PA è stato possibile esprimere la griglia cilindrica in un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) centrato in O , dove l'asse x è diretto come il diametro del bruciatore, l'asse z allineato con l'asse di simmetria del getto mentre l'asse y posizionato in modo tale da formare una terna destra con i due precedenti. Una rotazione attorno all'asse z dell'angolo θ corrispondente alla PA considerata e una traslazione verticale di 48 mm permettono di trasformare le coordinate espresse nel sistema di riferimento locale in quello globale. La seguente equazione riassume tutte le operazioni necessarie per ricostruire la griglia cilindrica a partire dalle PA originali:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \pm \left(\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{O'} \\ y^{O'} \end{bmatrix} + \frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 48 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

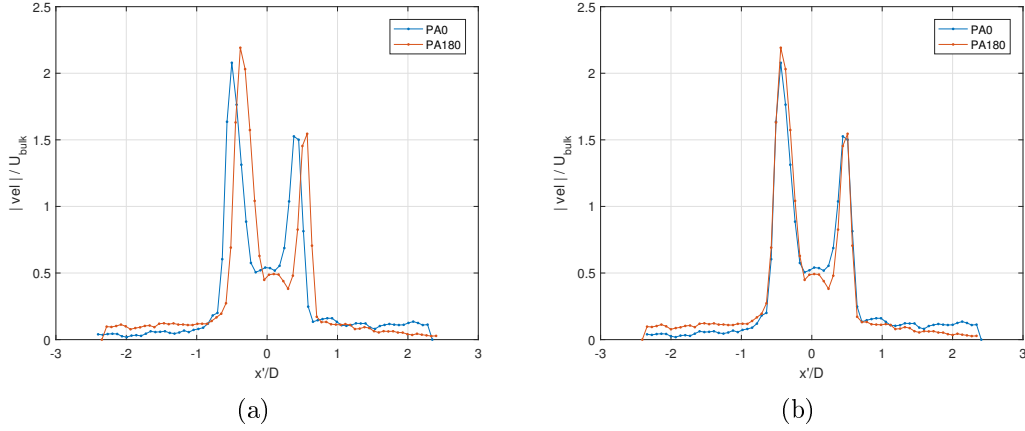


Figura 5.1: Profili del modulo della velocità totale $|vel|$ prima (a) e dopo (b) la trasformazione sulle coordinate descritta in Eq.(5.1)

dove si considera il segno $+$ per le PA con $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, mentre il segno $-$ per quelle con $180^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

5.2 Calcolo delle derivate

Nota la configurazione della griglia, il calcolo delle derivate è eseguito in coordinate cilindriche (r, θ, z) . Il nuovo sistema di riferimento condivide origine e asse z del sistema di riferimento cartesiano descritto in precedenza, mentre l'asse r è in direzione radiale. I parametri caratteristici della griglia di calcolo espressi in coordinate adimensionali sono i seguenti: $\Delta r = 0.0678$, $\Delta z = 0.0465$, $\Delta \theta = 0.0873$.

Se nel caso di identificazione 3D è necessario calcolare tutte e tre le derivate delle componenti di velocità, per il problema bidimensionale ci si limita al calcolo di $\partial/\partial r$ e $\partial/\partial z$, dal momento che le uniche variazioni del campo di velocità che si possono calcolare sono quelle che giacciono sul piano delle PA.

In questo sistema di riferimento, le espressioni di gradiente, divergenza e rotore di velocità, necessarie per la formulazione dei criteri di identificazione locali e per

la determinazione della vorticità, assumono la seguente forma:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r & u_\theta/r & u_z \\ v_r & v_\theta/r & v_z \\ w_r & w_\theta/r & w_z \end{pmatrix} \quad (5.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} (u_r r + u + v_\theta + w_z r) \quad (5.3b)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r} w_\theta - v_z \right) \hat{r} + (u_z - w_r) \hat{\theta} + \frac{1}{r} (v_r r + v - u_\theta) \hat{z} \quad (5.3c)$$

dove con u , v e w si indicano rispettivamente la componente radiale, tangenziale e assiale del campo di moto e con (\cdot) le corrispondenti derivate parziali rispetto alle coordinate (r, θ, z) .

Per la scelta del metodo che meglio approssimi l'operatore di derivazione si è fatto riferimento ai risultati proposti da Foucaut e Stanislas [17]. Il loro elaborato è volto alla caratterizzazione dei metodi basati su un approccio differenziale. Viene evidenziato come l'operatore di derivazione sia frutto di un compromesso tra l'errore di troncamento, che diminuisce all'aumentare dell'ordine del filtro, e l'amplificazione del rumore che, in generale, aumenta con l'ordine dello stesso. Diversi schemi di derivazione vengono descritti in termini delle rispettive funzioni di trasferimento. Nel caso ideale di misure prive di rumore, gli schemi di derivazione si comportano come dei filtri passa-basso, nei quali la frequenza di cutoff dipende dall'ordine del filtro e dall'errore di troncamento. Considerando invece gli errori di misura, si vede come il loro effetto trasformi il filtro della derivata in un filtro passa-banda, nel quale la frequenza di cutoff più bassa aumenta con il livello del rumore e il fattore di amplificazione.

Anche la tecnica PIV viene descritta in termini del suo spettro. Essa presenta due frequenze di cutoff: la più piccola è legata alle dimensioni del campo di osservazione mentre quella più alta dipende unicamente dalle dimensioni della finestra di interrogazione.

Dall'analisi spettrale emerge come la scelta di uno schema alle differenze finite centrate del second'ordine sia sufficiente per avere una buona approssimazione della derivata in quanto la più alta frequenza di cutoff è molto simile a quella della PIV; in particolare, nel caso di finestrazione ottimizzata, il filtro del second'ordine si dimostra essere migliore rispetto a filtri di ordine più elevato. Nel caso in cui le alte frequenze del segnale siano disturbate a causa di errori di misura, il calcolo della derivata non fa altro che amplificare il rumore; il suggerimento proposto da Foucaut e Stanislas è quello di filtrare le alte frequenze prima del calcolo delle derivate, oppure di utilizzare un filtro di derivazione che abbia frequenza di cutoff il più vicino possibile a quella della PIV.

Alla luce di queste considerazioni, il metodo scelto e implementato per il calcolo delle derivate è un metodo alle differenze finite centrate del secondo ordine. Per una griglia regolare di ampiezza Δx , la derivata prima della componente di velocità u nel punto j è espressa dalla seguente equazione [17]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j = \frac{1}{a\Delta x} \sum_{i=1, n/2} a_i(u_{j+i} - u_{j-i}) + \sum_{i=n+1, \infty} \alpha_i \frac{\Delta x^{i-1}}{i!} \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\Big|_j + \epsilon \frac{\sigma_u}{\Delta x} \quad (5.4)$$

dove ϵ è il coefficiente di amplificazione del rumore mentre σ_u il livello di rumore della misura; il valore degli altri coefficienti nel caso di schema del secondo ordine sono presentati nella seguente tabella:

Ordine	a	a_1	a_2	a_3	a_4	α_{n+1}	ϵ
2	2	1	0	0	0	1	0.71

Tabella 5.2: Coefficienti per lo schema alle differenze finite

5.3 Validazione del codice

Prima di applicare il codice numerico ai dati sperimentali disponibili, è necessario procedere con la sua validazione. A tal fine il programma sviluppato è stato applicato ad un campo di moto che risolve in maniera esatta le equazioni di Navier-Stokes. In particolare la procedura seguita è stata la seguente: dopo aver definito il dominio di calcolo, sono state determinate, per ogni punto appartenente allo stesso, le componenti di velocità e successivamente le rispettive derivate. Queste ultime sono state ricavate in un primo momento differenziando analiticamente le espressioni delle componenti delle velocità, poi applicando lo schema di derivazione scelto. Note le derivate è stato possibile quindi applicare i criteri di identificazioni locali e calcolare l'errore tra i risultati ottenuti sfruttando le derivate analitiche e quelle numeriche. Se l'errore è attribuibile unicamente al metodo adottato, allora il codice può considerarsi validato.

Nei seguenti paragrafi vengono descritti i campi di moto scelti per il conseguimento della validazione del codice; grafici e risultati fanno riferimento ai criteri Δ_{2D} e Δ_{3D} , ma considerazioni analoghe possono essere effettuate con gli altri criteri di identificazione dei vortici.

5.3.1 Vortice di Lamb-Oseen

Il vortice di Lamb-Oseen modella l'evoluzione di una linea vorticoso che decade a causa della viscosità. Le componenti di velocità u , v e w , rispettivamente in

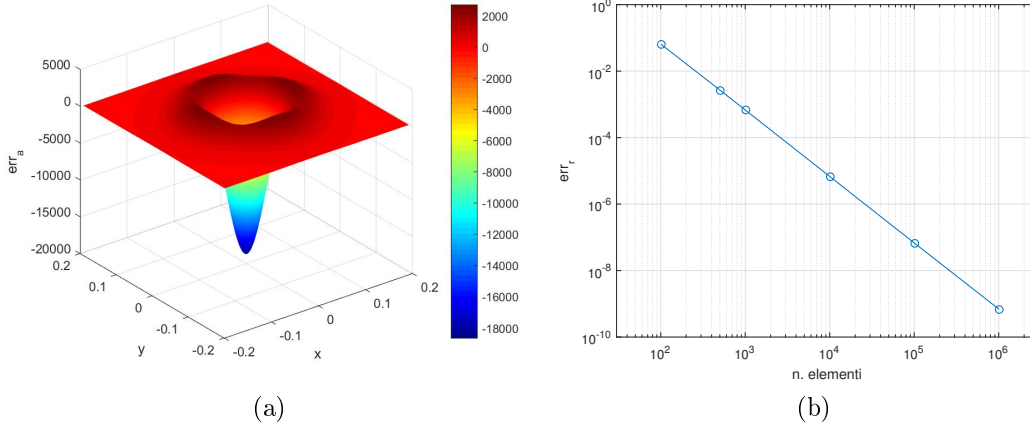


Figura 5.2: (a) Distribuzione err_a nel dominio di calcolo per il criterio Δ_{2D} ; (b) Grafico di convergenza di err_r in $P(0.002, 0.002)$ per il criterio Δ_{2D}

direzione radiale, tangenziale e assiale, possono essere espresse in un sistema di riferimento cilindrico nel seguente modo:

$$u = 0 \quad (5.5a)$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi r}g(r, t) \quad (5.5b)$$

$$w = 0 \quad (5.5c)$$

dove Γ è la circolazione al centro del vortice, ν la viscosità cinematica mentre l'espressione di $g(r, t)$, funzione della coordinata radiale r e del tempo t , assume la seguente forma:

$$g(r, t) = 1 - \exp(-r^2/4\nu t) \quad (5.6)$$

Il vortice di Lamb-Oseen è stato utilizzato per la validazione del codice che calcola le derivate nel 2D. Fissati i valori di Γ e t , sia le componenti di velocità che la griglia di calcolo sono state quindi espresse in un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro del vortice, indipendentemente dal fatto che la geometria del problema suggerisca l'utilizzo di un sistema di riferimento polare. Definendo l'errore assoluto come:

$$err_a = id_{an} - id_{num} \quad (5.7)$$

dove con id_{an} e id_{num} viene rispettivamente indicato il criterio di identificazione scelto applicato dapprima con derivate calcolate analiticamente, poi numericamente, nel grafico in Fig.(5.2a) viene mostrata la distribuzione dell'errore assoluto

all'interno del dominio di calcolo per il criterio Δ_{2D} . Emerge come questo sia concentrato prevalentemente in prossimità del centro del vortice. Per verificare se la causa dell'errore sia legata unicamente alla griglia di calcolo, sono state lanciate una serie di simulazioni su mesh progressivamente più raffinate e studiato, nel punto P(0.002, 0.002), l'andamento dell'errore relativo err_r , definito come:

$$err_r = \frac{err_a}{id_{an}} \quad (5.8)$$

Il punto selezionato ha le caratteristiche di appartenere alla regione di errore massimo, ma di non coincidere con il centro del vortice, in quanto in quel punto si trova una singolarità. Il grafico della convergenza viene presentato in Fig(5.2b): all'aumentare del numero di elementi all'interno del dominio si nota come l'errore diminuisca come una potenza di ordine 2. Dal momento che $err_r < 1 \cdot 10^{-10}$ per griglie molto raffinate, il codice 2D è considerato validato.

5.3.2 Vortice di Burgers

Il vortice di Burgers rappresenta una soluzione esatta delle equazioni di Navier-Stokes per un flusso incomprimibile che descrive l'interazione tra il vortex stretching e la diffusione di vorticità. Le componenti di velocità del vortice di Burgers possono essere espresse in coordinate cilindriche nel seguente modo:

$$u = -\xi r \quad (5.9a)$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(\frac{-r^2\xi}{2\nu}\right) \right] \quad (5.9b)$$

$$w = 2\xi z \quad (5.9c)$$

dove Γ è la circolazione, ξ il tensore di sforzo assialsimmetrico e ν la viscosità cinematica mentre u , v e w sono le componenti di velocità in direzione radiale, tangenziale e assiale.

La griglia utilizzata per la discretizzazione del problema è una griglia cilindrica. Per ogni punto appartenente alla griglia vengono quindi calcolati velocità, derivate e criterio di identificazione con rispettivo errore relativo. Poiché l'errore relativo, err_r , definito dall'Eq.(5.8), risulta $err_r < 1 \cdot 10^{-14}$ per ogni punto del dominio, anche il codice 3D è considerato validato.

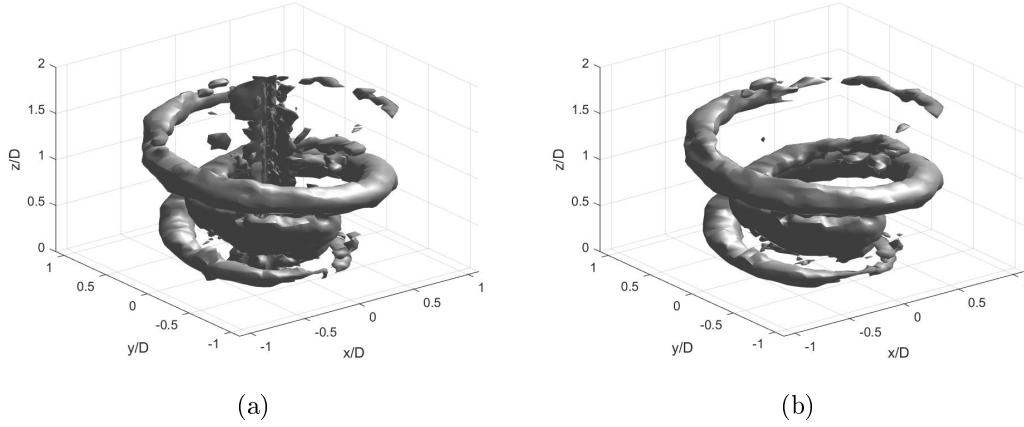


Figura 5.3: PA $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, $\sigma_{ci}^{th} = 400 \text{ s}^{-1}$; id.3D (a), id.2D (b)

5.4 Criteri applicati al campo di velocità

5.4.1 Ricostruzione della struttura vorticoso

In una fase iniziale per la generazione della struttura vorticoso sono state utilizzate unicamente metà delle PA disponibili: sfruttando infatti le sole PA con $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, o equivalentemente quelle con $180^\circ \leq \theta < 360^\circ$, si ha già a disposizione una visione completa del campo di moto.

Sono state ricostruite due diverse strutture utilizzando i criteri di identificazione 3D e 2D. Dal momento che il numero di Mach valutato sulla velocità media assiale all'efflusso $U_{bulk} = (\dot{m}_t + \dot{m}_a)/\pi R^2 \approx 8.9 \text{ m/s}$ è pari a $M = 2.6 \cdot 10^{-2}$, gli effetti della comprimibilità non sono rilevanti: i criteri di identificazione sono stati implementati sotto l'ipotesi di flusso incomprimibile. A titolo di esempio vengono presentate in Fig.(5.3) le strutture ricreate sfruttando le PA con $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ e individuate applicando il criterio swirling strength sia nella formulazione 3D che in quella 2D con una soglia $\sigma_{ci}^{th} = 400 \text{ s}^{-1}$; considerazioni analoghe possono essere fatte per l'altro gruppo di PA e per gli altri criteri di identificazione.

Entrambi i grafici in Fig.(5.3) mostrano la presenza di due strutture elicoidali che si avvolgono attorno all'asse del getto, come già evidenziato da altri lavori sperimentali [13][5][29]; la struttura interna risulta essere più corta e caratterizzata da valori di swirling strength più piccoli se confrontata con quella esterna. In corrispondenza dell'asse z , nella ricostruzione con identificazione 3D, emerge un disturbo che si estende nella regione centrale per tutto il dominio. Tre possono essere le cause che ne hanno determinato la formazione:

- misure molto disturbate nella regione centrale;
- singolarità posizionata lungo l'asse z ;
- scelta del metodo numerico non ottimale per il calcolo delle derivate.

Riprendendo infatti l'espressione del gradiente di velocità scritto in coordinate cilindriche, Eq.(5.3a), si vede che nella seconda colonna la derivata rispetto alla coordinata angolare θ è moltiplicata per il fattore $1/r$, quindi i valori delle derivate numeriche rispetto alla variabile in considerazione risultano sempre più corrotti dal rumore avvicinandosi all'asse z , ossia per $r \rightarrow 0$, e identificabile graficamente come un significativo disturbo. Nella struttura ricreata sfruttando l'identificazione 2D invece questo problema non è presente dal momento che le uniche derivate calcolate sono quelle rispetto alla coordinata z e r . Alla luce di queste considerazioni si è propensi ad escludere il metodo numerico scelto come causa principale della nascita del disturbo.

5.4.2 Media pesata delle PA

Con l'intento di utilizzare tutte le informazioni del campo di moto disponibili, si è deciso di eseguire una media pesata tra PA sfasate di 180° .

In particolare, come descritto nel §5.1, dall'analisi della posizione del picco di cross-correlazione, calcolato analizzando le mappe di velocità totali di PA sfasate di 180° , è stato possibile centrare correttamente le medie in fase nel sistema di riferimento globale. È importante sottolineare come, al termine dell'operazione descritta dall'Eq.(5.1), le ascisse della coppia di PA coincidano: dal momento che ogni punto della griglia contiene informazioni sul campo di velocità sia della mappa PA_θ che della mappa $PA_{\theta+180}$, la ricostruzione delle medie pesate delle velocità risulta banale. I pesi utilizzati per la determinazione della mappa media corrispondono al numero di piani utilizzati per valutare le PA di partenza:

$$PA_{\theta \text{ media}} = \frac{PA_\theta \cdot n \text{ piani}_\theta + PA_{\theta+180} \cdot n \text{ piani}_{\theta+180}}{n \text{ piani}_\theta + n \text{ piani}_{\theta+180}} \quad (5.10)$$

Bisogna sottolineare come prima di eseguire questa operazione sia necessario riorganizzare le componenti di velocità nel corretto sistema di riferimento: se per quanto riguarda la componente in direzione assiale non è necessaria alcuna trasformazione, le componenti radiali e tangenziali delle mappe con $180^\circ \leq \theta < 360^\circ$ devono essere sottoposte ad un'operazione di riflessione rispetto all'asse del getto per essere coerenti con quelle delle mappe con $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$. Nell'immagine riportata in Fig.(5.4) viene presentato, per la mappa a $\theta = 0^\circ$, il profilo di velocità assiale e radiale della $PA_{\theta \text{ media}}$ e delle mappe dalle quale questa ha avuto origine, mentre in Fig.(5.5) il numero di piani utilizzati per la definizione delle singole PA.

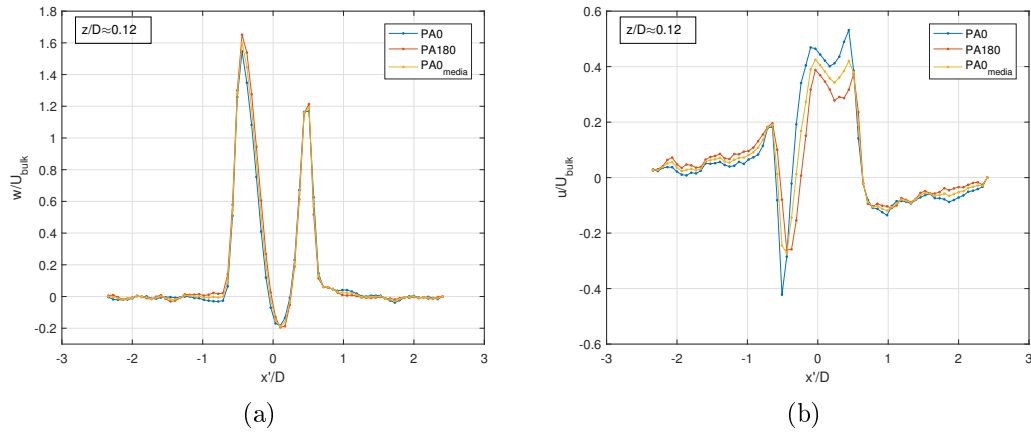


Figura 5.4: Profilo di velocità assiale (a) e radiale (b) per la mappa a $\theta = 0^\circ$

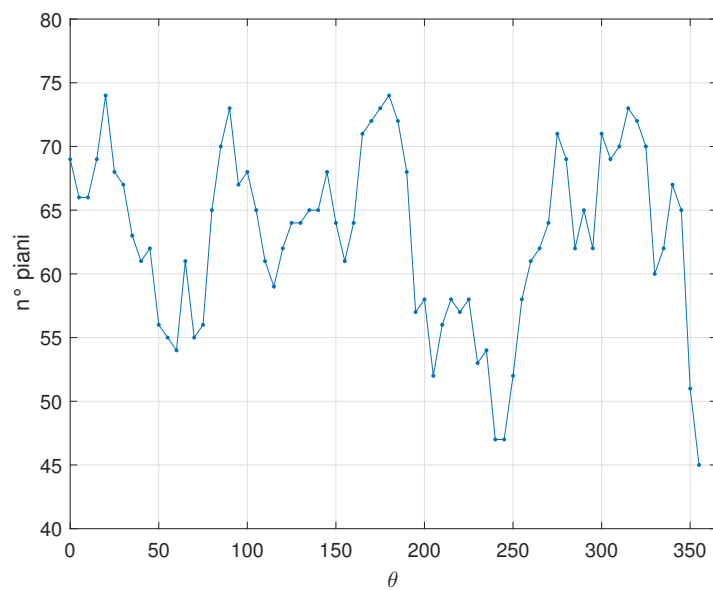


Figura 5.5: Distribuzione del numero di piani utilizzati per la definizione delle medie in fase in funzione della posizione angolare delle PA

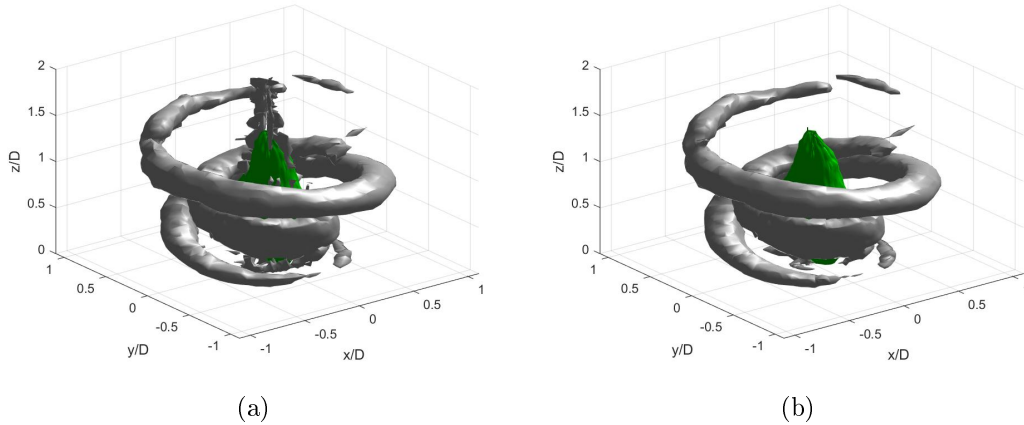


Figura 5.6: PA pesate con bolla di ricircolo, $\sigma_{ci}^{th} = 400 \text{ s}^{-1}$; id.3D (a), id.2D (b)

Su queste nuove mappe vengono applicati i criteri di identificazione locali. I risultati riguardanti il criterio della swirling strength sono presentati in Fig(5.6): accanto alla struttura vorticoso viene raffigurata in verde l'isosuperficie corrispondente alla velocità assiale nulla che delimita la bolla di ricircolo. Emerge come le strutture ora appaiano più estese e la loro ricostruzione più regolare, soprattutto nelle zone agli estremi dei vortici. Nella ricostruzione con identificazione 3D rimane comunque il disturbo nella regione centrale anche se si mostra con minore estensione.

Per un'analisi più dettagliata delle due strutture è possibile spostare il confronto sul piano di una sezione della struttura vorticoso. In particolare in Fig.(5.7), per il piano $\theta = 0^\circ$, accanto alla mappa di swirling strength vengono mostrate le isolinee corrispondenti al modulo di vorticità $|\boldsymbol{\omega}|$: dal confronto emerge come, accanto ad un'ottima corrispondenza tra posizioni e estensioni dei vortici individuate con i criteri di identificazione 2D e 3D, in corrispondenza dei picchi di σ_{ci} si trovano dei massimi locali di $|\boldsymbol{\omega}|$. Questa osservazione è in linea con quanto riportato da Hussain [21]: un vortice per potersi definire tale deve possedere, all'interno del suo nucleo, una vorticità netta diversa da zero. Queste osservazioni sono valide sia nel caso in cui $\boldsymbol{\omega}$ e σ_{ci} vengano calcolate a partire da due o da tre componenti di velocità. È importante sottolineare come le sole informazioni sulla distribuzione del modulo della vorticità $|\boldsymbol{\omega}|$ non siano sufficienti per andare a individuare i vortici in quanto non in grado di distinguere se il moto rotatorio sia legato alla presenza di un vortice o piuttosto se dovuto a uno sforzo di taglio.

Dal momento che, nel complesso, le strutture ottenute mediando PA sfasate di 180° risultano migliorate, da questo momento in poi grafici e considerazioni si

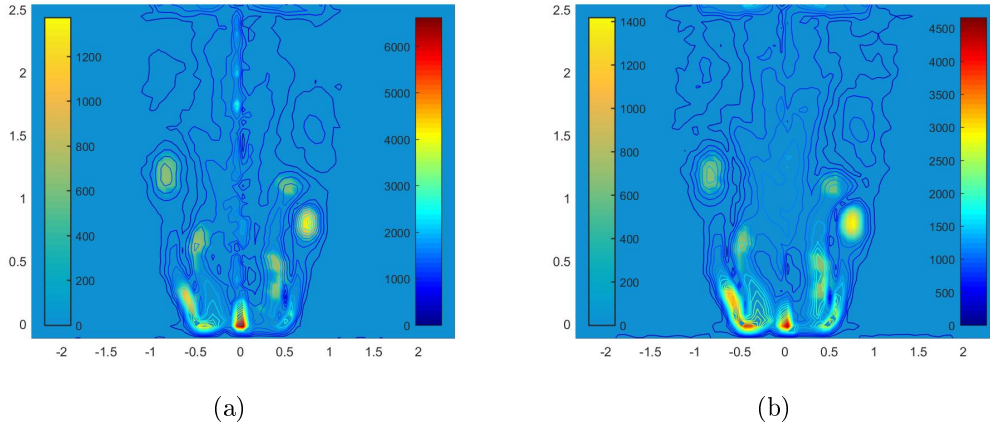


Figura 5.7: Sezione della struttura vorticoso per $\theta = 0^\circ$. Contour di σ_{ci} (scala di sx), isolinee di σ_{ci} (scala di dx). 3D (a), 2D (b)

riferiranno unicamente alle strutture vorticoso provenienti da PA pesate.

È da sottolineare la bontà della ricostruzione con identificazione 2D: nonostante le derivate vengano calcolate unicamente in due direzioni, la struttura ricostruita risulta molto simile a quella ottenuta con identificazione 3D. Nel paragrafo seguente, attraverso l'utilizzo dello stick model, viene mostrato il perché di questo comportamento.

5.4.3 Stick model

L'idea alla base della costruzione di questo modello è stata quella di poter calcolare, una volta ridotte le strutture vorticoso al loro asse, l'inclinazione che queste hanno rispetto al piano di misurazione PIV.

Dalla ricostruzione 3D della struttura vorticoso sono state estratte 36 mappe contenenti i valori di swirling strength 3D; ciascuna di esse rappresenta quindi una sezione della struttura vorticoso. Prima di procedere al calcolo dei baricentri dei vortici sono state effettuate delle operazioni preliminari necessarie per la successiva automatizzazione del codice:

- (i) eliminazione del disturbo nella regione centrale prossima all'asse z ponendo $\sigma_{ci3D} = 0 s^{-1}$ in tutti quei punti per i quali $-0.1695 \leq x/D \leq 0.1017$;
- (ii) impostazione del valore di soglia $\sigma_{ci}^{th} = 412 s^{-1}$, ossia un livello di soglia leggermente maggiore rispetto al precedente, ma necessario per ottenere le strutture vorticoso più separate; per i punti che non rispettano il livello di soglia selezionato viene imposto $\sigma_{ci3D} = 0 s^{-1}$

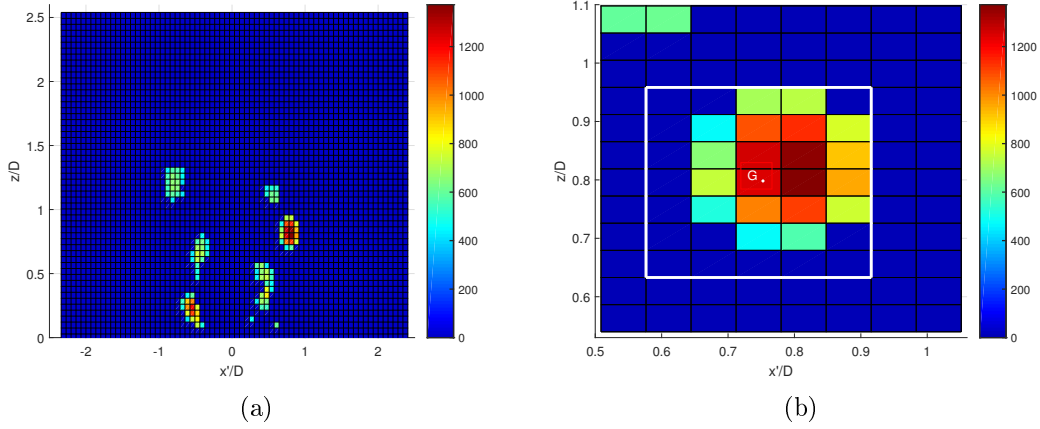


Figura 5.8: Sezione della struttura vorticoso per $\theta = 0^\circ$ (a) e relativa finestra (b)

Al termine di queste operazioni il risultato ottenuto per la mappa a 0° è presentato in Fig.(5.8a).

Il lancio del programma prevede una procedura di avviamento: ad ogni vortice appartenente alla mappa 0° (mappa iniziale) viene applicata una finestra in modo che esso venga interamente compreso, come mostrato in Fig(5.8b). Si procede quindi con la determinazione delle coordinate dei baricentri applicando le seguenti formule:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \sigma_{ci3Di}}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ci3Di}} \quad (5.11a)$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sigma_{ci3Di}}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ci3Di}} \quad (5.11b)$$

$$(5.11c)$$

dove x_G e y_G sono le coordinate del baricentro del vortice considerato, N il numero di elementi che compongono la finestra mentre σ_{ci3Di} il valore di swirling strength per ciascun punto appartenente alla finestra.

La finestra utilizzata per la mappa a 0° viene successivamente sfruttata come guess iniziale per la determinazione della stessa nella mappa successiva. Il programma a questo punto ne determina automaticamente le dimensioni valutando i valori di swirling strength sul suo perimetro: se questi non sono identicamente nulli, le dimensioni della finestra vengono aumentate fino a comprendere completamente il vortice; se le dimensioni di partenza sono invece troppo grandi, il programma procede a diminuirne la grandezza sempre assicurandosi che il vortice sia completamente compreso all'interno della finestra appena generata. Il valore di soglia

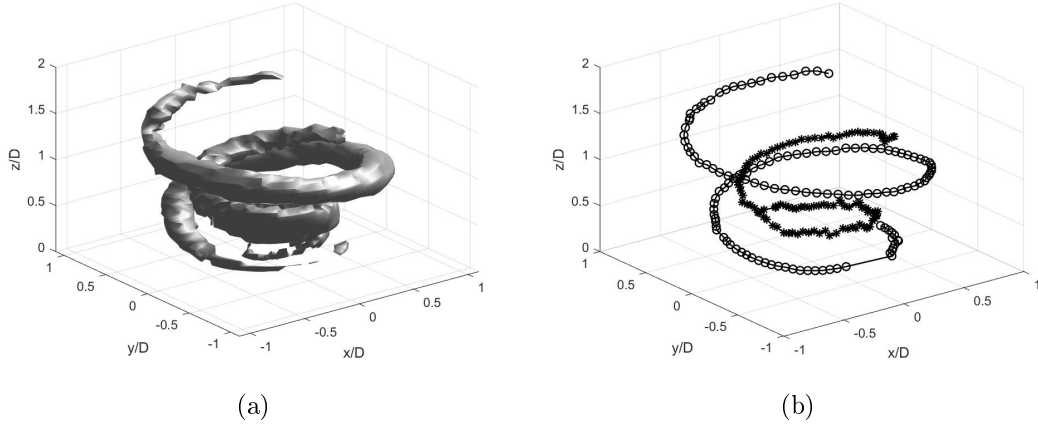


Figura 5.9: Struttura filtrata (a) e relativo stick model (b) ricavati dalla ricostruzione identificata con il criterio $\sigma_{ci\ 3D}$; $\sigma_{ci}^{th} = 412\ s^{-1}$

selezionato fa sì che la finestra comprenda uno e un solo vortice per ognuna delle sezioni considerate. In Fig.(5.9a) viene presentata l'azione di filtraggio eseguita dalla finestratura sulla struttura vorticoso iniziale; da questa vengono calcolati i baricentri per la determinazione dello stick model.

Note le coordinate di tutti i baricentri delle strutture vorticoso delle 36 mappe di swirling strength, è stato possibile ridurre le due eliche ai propri assi, generando quindi lo stick model presentato in Fig.(5.9b).

Utilizzando lo schema alle differenze finite centrate del second'ordine è stato possibile calcolare, nel punto considerato, il vettore tangente alla curva che identifica la struttura vorticoso, e quindi l'angolo tra l'asse del vortice, ora approssimato dal vettore tangente alla curva, e il corrispondente piano meridiano passante per lo stesso punto. Visto il disturbo presente nella ricostruzione, in particolare nell'elica interna, è stata implementata anche l'estrapolazione di Richardson con i coefficienti adattati per la minimizzazione dell'errore legato al rumore [17]. Lo schema utilizzato è riportato qui di seguito:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{1}{a} \sum_{i=1,2,4,8} a_i \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2i \Delta x} + \sum_{i=n+1,\infty} \alpha_i \frac{\Delta x^{i-1}}{(n+1)!} \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + \epsilon \frac{\sigma_u}{\Delta x} \quad (5.12)$$

dove j indica il punto nel quale è calcolata la derivata, Δx la dimensione della griglia, mentre i valori degli altri coefficienti sono elencati nella seguente tabella:

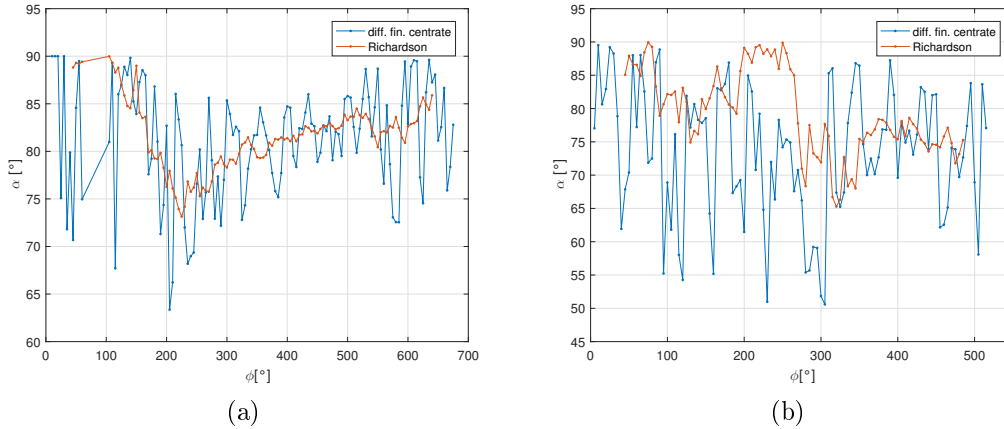


Figura 5.10: Andamento dell'angolo di inclinazione del vortice per la struttura esterna (a) e interna (b)

Ordine	a	a_{i+1}	a_{i+2}	a_{i+4}	a_{i+8}	α_{n+1}	ϵ
2	65	1	0	0	-64	63.03	0.088

Tabella 5.3: Coefficienti per l'estrapolazione di Richardson

Nel grafico in Fig.(5.10) viene presentata l'evoluzione di α , definito come angolo tra l'asse del vortice e il piano della PA, in funzione dell'angolo di avvolgimento ϕ della struttura attorno all'asse del getto. Viene posto $\phi = 0$ all'estremo inferiore dell'elica interna e esterna. Considerando inizialmente quanto succede nella struttura esterna, si vede come la ricostruzione ottenuta a partire dal calcolo della derivata con lo schema delle differenze finite centrate sia molto più disturbata rispetto a quella ricavata con l'estrapolazione di Richardson; nonostante ciò i risultati ottenuti in termini di inclinazione media, presentati in Tab.(5.4) sono molto simili. Per quanto riguarda invece la struttura interna, gli andamenti dell'angolo di incidenza presentano in entrambi i casi delle oscillazioni. Questo si rispecchia anche nei valori delle medie calcolate con i due approcci le quali si differenziano maggiormente.

	struttura esterna	struttura interna
Diff. finite centrate	81.19°	73.72°
Richardson	81.66°	79.33°

Tabella 5.4: Risultati angoli medi

La differenza tra gli andamenti dell'angolo, più regolare nella struttura esterna, meno in quella interna, è da ricercare nella regolarità della ricostruzione dello stick model: mentre la prima ha un andamento abbastanza uniforme, lo stesso non accade per la seconda. In particolare è il valore della soglia il principale responsabile di queste differenze, più nel dettaglio il rapporto tra questo e l'intensità caratteristica del vortice che si va a ricostruire. All'aumentare del valore della soglia infatti, nell'elica interna vengono a generarsi, per alcuni piani, dei vuoti che inevitabilmente hanno un peso nel determinare la posizione del baricentro del vortice. Tali buchi non sono presenti invece nell'elica esterna dal momento che è generalmente caratterizzata da valori di swirling strength maggiori. L'utilizzo di un valore di soglia più piccolo potrebbe portare quindi ad una ricostruzione dello stick model più regolare, ma per $\sigma_{ci}^{th} < 412 s^{-1}$ le dimensioni delle sezioni dei vortici sono sufficientemente grandi da non permettere all'algoritmo di funzionare, in quanto la finestra non individua più un unico vortice ma più di uno.

Per poter risolvere il problema si è pensato di applicare due livelli di soglia differenti per le due eliche, prendendo $\sigma_{ci}^{th} < 412 s^{-1}$ per la struttura interna mantenendo invece inalterato il valore per quella esterna; questo metodo non è stato applicato dal momento che l'obiettivo primario del modello non è quello di fornire una caratterizzazione della struttura vorticoso, quanto piuttosto quello di analizzare se, in queste condizioni, i criteri di identificazione 3D possano essere sostituiti con una buona approssimazione da quelli 2D. In tal senso non ci si aspetta di trovare dei risultati che possano portare a conclusioni diverse da quelle ottenibili con le informazioni che si hanno già a disposizione.

I valori dell'angolo medio delle strutture vorticoso rispetto al piano di misura supportano la bontà della ricostruzione della doppia elica con il metodo della swirling strength 2D. Chen [9] nel suo elaborato, mettendo in relazione i criteri di swirling strength 2D e 3D applicati al vortice di Burgers, mostra i limiti nei quali la PIV piana è sufficiente a caratterizzare le strutture vorticoso presenti nel campo di moto. I parametri caratteristici in gioco sono due: l'inclinazione del vortice e la circolazione dello stesso. In particolare se l'orientamento del vortice è perpendicolare al piano di misura, le proiezioni delle componenti di velocità in questo piano coincidono con le proiezioni delle stesse nel piano perpendicolare all'asse del vortice; l'identificazione 2D individua precisamente il vortice 3D. Nel caso in cui invece sia presente un'inclinazione, le considerazioni sulle componenti della velocità non valgono più, pertanto il vortice può essere identificato unicamente per certi valori di circolazione.

Estendendo le considerazioni di Chen al caso in esame si vede come le strutture vengano correttamente ricreate dal momento che le loro inclinazioni rispetto al piano delle PA sono grandi e che i valori di intensità dei vortici considerati sono

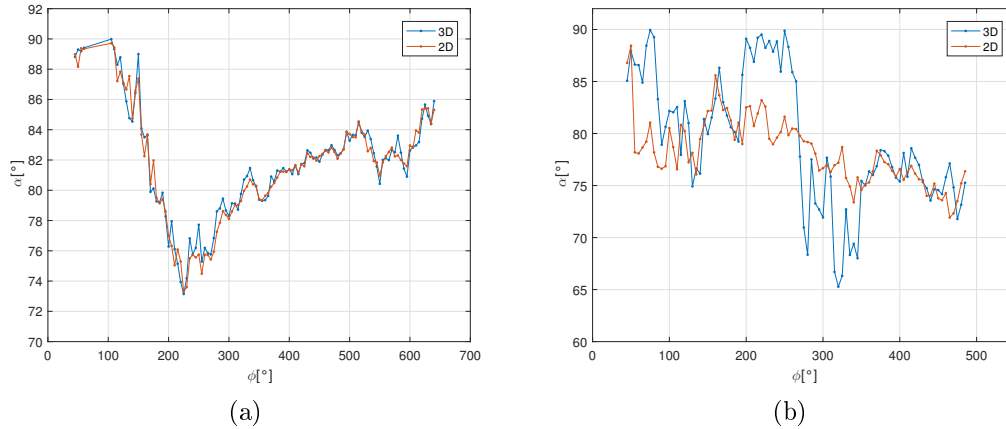


Figura 5.11: Andamento dell'angolo di inclinazione del vortice per la struttura esterna (a) e interna (b)

elevati.

Per confermare la bontà della struttura ottenuta con identificazione 2D è stato determinato un nuovo stick model partendo dalla doppia elica ricavata attraverso il criterio σ_{ci2D} e calcolato l'angolo α che l'asse della doppia elica forma, per ogni sezione, col piano rz . In Fig.(5.11) vengono mostrati i valori di α , sia per la struttura interna che per quella esterna, determinati sfruttando l'estrapolazione di Richardson a partire dagli stick model basati su identificazione 2D e 3D. Analizzando inizialmente quanto succede per la l'elica esterna, risulta evidente un'ottima corrispondenza tra i valori di α per tutta la lunghezza del vortice; per quanto riguarda la struttura interna invece compaiono maggiori discrepanze attribuibili, come già discusso in precedenza, al valore di soglia utilizzato. Nel paragrafo successivo verranno presentate le ricostruzioni delle strutture vorticosi ricavate applicando i criteri di identificazione locali 3D e 2D. Dai grafici mostrati in Fig.(5.12) e in Fig.(5.13) si può cogliere come le strutture ottenute con identificazione 2D appaiono complessivamente più regolari: a conferma di questa affermazione si può osservare come l'andamento dell'inclinazione della struttura interna con identificazione 2D sia meno disturbato di quello ottenuto con identificazione 3D.

5.4.4 Valore della soglia

Diversi criteri di identificazione determinano strutture vorticosi differenti: la geometria del vortice trovata infatti soddisfa requisiti diversi a seconda dello schema di identificazione applicato. Impostare valori di soglia diversi da zero è necessario per far emergere le strutture vorticosi più intense dal background caotico della

turbolenza. Ecco come il problema legato alla selezione del corretto livello di soglia diventa di fondamentale importanza per poter paragonare vari criteri di identificazione: soglie equivalenti permettono di estrarre dal campo di moto strutture di intensità paragonabile.

Facendo riferimento al lavoro di Chakraborty [7], fissata una soglia ϵ , soglie equivalenti possono essere ottenute sfruttando le seguenti relazioni:

$$\Delta_{3D} \geq \Delta_{3D}^{th} = \frac{1}{27}\epsilon^6 \quad (5.13a)$$

$$\sigma_{ci} \geq \sigma_{ci3D}^{th} = \epsilon \quad (5.13b)$$

$$Q_{3D} \geq Q_{3D}^{th} = \epsilon^2 \quad (5.13c)$$

$$\sigma_{23D} \leq \sigma_{23D}^{th} = -\epsilon^2 \quad (5.13d)$$

Nel caso di identificazione 2D le relazioni usate per i criteri σ_{ci2D} , Q_{2D} , σ_{22D} sono le stesse del caso 3D, mentre l'espressione per il criterio Δ_{2D} è ricavata dall'Eq.(4.8):

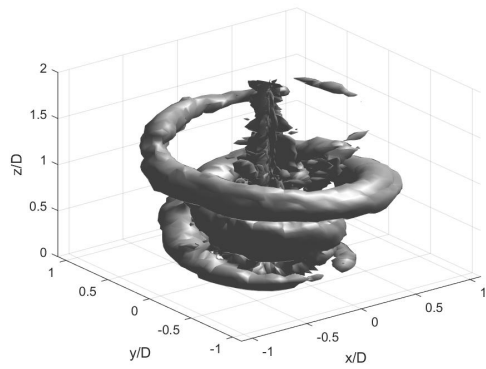
$$\Delta_{2D} \leq \Delta_{2D}^{th} = -4\epsilon^2 \quad (5.14)$$

Il valore di ϵ è stato impostato a $\epsilon = 400 s^{-1}$, in accordo con quanto fatto in precedenza da Cozzi [13] per la ricostruzione della struttura vorticoso dal medesimo campo di moto. La scelta di questo livello di soglia si è mostrata essere il giusto compromesso tra eliminazione delle strutture più deboli e conservazione di quelle più intense.

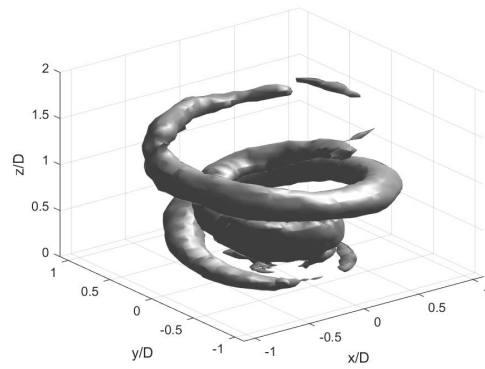
Di seguito vengono presentate le ricostruzioni con i criteri di identificazione basati sull'analisi del tensore gradiente di velocità, sia nel caso 2D che 3D; in particolare in Fig.(5.12) vengono presentati i criteri Δ e σ_{ci} , mentre in Fig.(5.13) i criteri Q e σ_2 .

Dalle immagini si osserva come tutte le strutture ricavate con l'identificazione 3D presentano il disturbo nella zona centrale, assente in quelle ottenute con l'identificazione 2D. L'elica interna nella regione prossima all'origine del getto risulta più regolare nel caso in cui sia applicato il criterio Q_{3D} rispetto a quanto non succeda per gli altri criteri nel 3D. Nonostante ciò le strutture appaiono complessivamente molto simili tra loro, ad eccezione di quella ricavata con il criterio Δ_{3D} la quale appare più rumorosa. Questo comportamento è riconducibile alla definizione stessa del criterio e alla presenza di errori di misura: dal momento che Δ_{3D} è proporzionale a $(Q_{3D})^3$, gli errori di misura, presenti nel termine Q , vengono amplificati attraverso l'elevazione a potenza, generando una visualizzazione più disturbata rispetto a quanto non succeda applicando il criterio Q_{3D} .

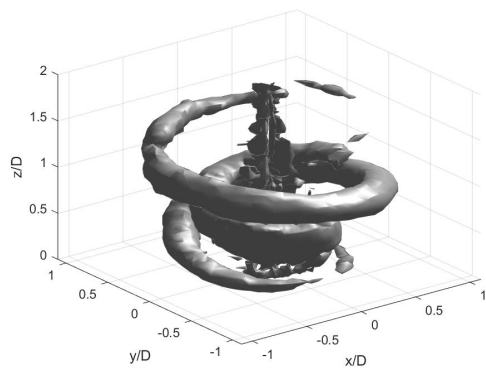
Estraendo, come fatto in precedenza, 36 mappe contenenti i valori numerici dei criteri di identificazione applicati, è stato possibile studiare la dimensione



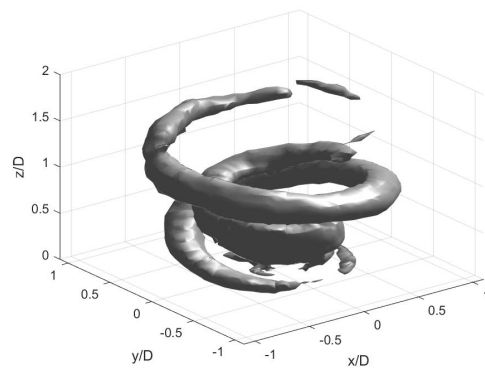
(a)



(b)

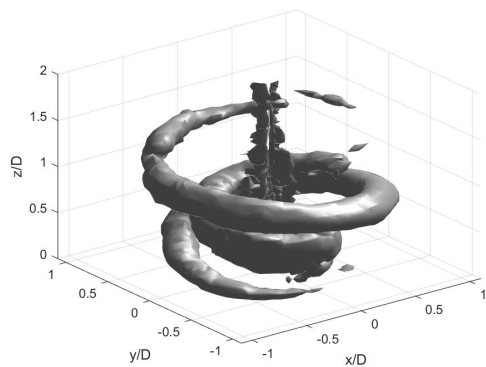


(c)

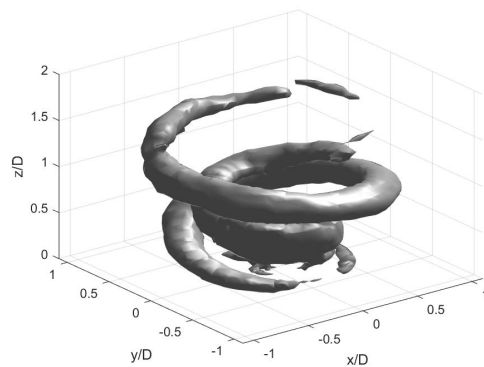


(d)

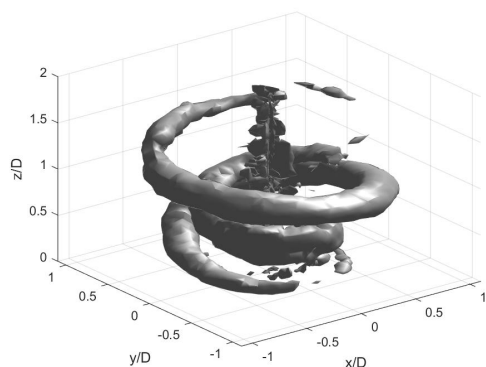
Figura 5.12: Confronto tra le strutture identificate con i criteri: (a) Δ_{3D} , (b) Δ_{2D} , (c) σ_{ci3D} , (d) σ_{ci2D}



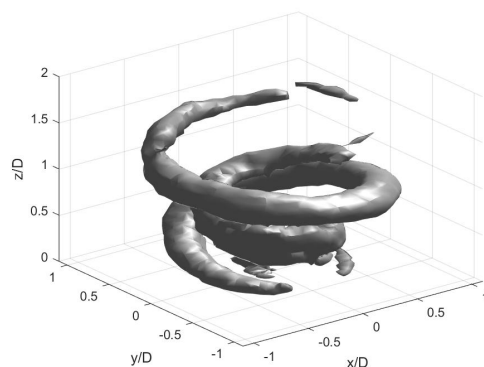
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.13: Confronto tra le strutture identificate con i criteri: (a) Q_{3D} , (b) Q_{2D} , (c) σ_{23D} , (d) σ_{22D}

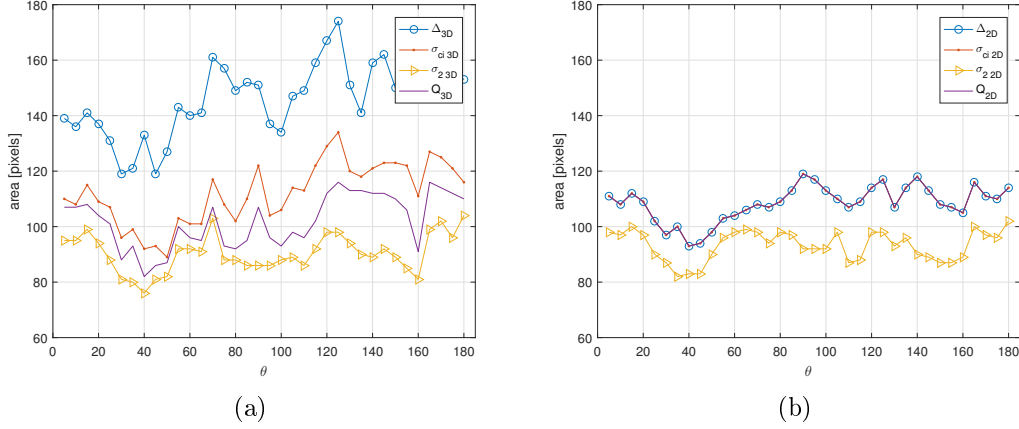
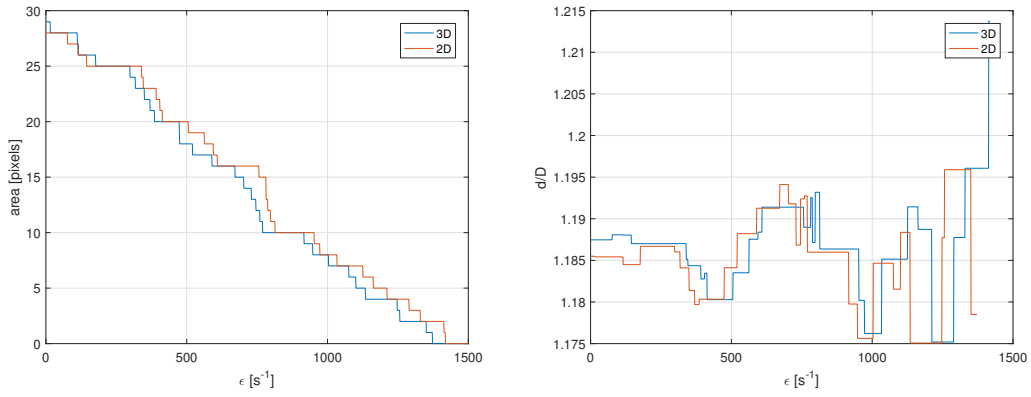


Figura 5.14: Aree dei vortici nel caso di id.3D (a) e id.2D (b)

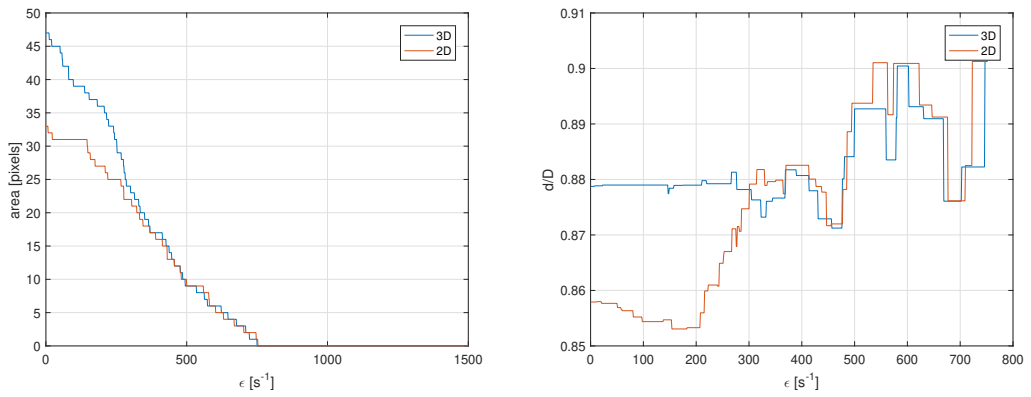
dei vortici sul piano della sezione contando il numero di pixel che rispettino le disuguaglianze descritte in Eq.(5.13). In accordo con quanto presentato da Chakraborty [7], riferendosi a Fig.(5.14) risulta evidente come, nonostante siano state applicate soglie equivalenti, esistano delle differenze, esprimibili per esempio in termini di area delle sezioni dei vortici individuati, tra i diversi schemi di identificazione. In particolare le strutture determinate dal criterio Δ_{3D} hanno dimensioni maggiori rispetto a quelle individuate con il criterio σ_{ci3D} e Q_{3D} [7]; in questi termini il criterio σ_{23D} risulta essere il più stringente. Nel caso di identificazione 2D invece, soglie equivalenti portano alla visualizzazione di strutture aventi stesse dimensioni per quanto riguarda i criteri Δ_{2D} , σ_{ci2D} e Q_{2D} , mentre vortici con sezioni più piccole per il criterio σ_{22D} .

Escludendo il criterio Δ_{3D} , dai grafici in Fig.(5.14) emerge come le dimensioni dei vortici siano molto simili tra identificazione 2D e 3D. Per analizzare questo aspetto più nel dettaglio, per la sezione a $\theta = 0^\circ$ è stato studiato il comportamento di area e posizione del baricentro del vortice al variare del valore di soglia. A titolo di esempio in Fig.(5.15) vengono riportati gli andamenti di un vortice appartenente alla spirale esterna e di uno appartenente a quella interna. Il criterio di identificazione applicato è quello della swirling strength.

È interessante osservare come per piccoli valori di ϵ le dimensioni del vortice ottenuto con identificazione 3D siano tendenzialmente maggiori rispetto al caso di identificazione 2D; tale differenza risulta ancora più evidente se il vortice considerato appartiene all'elica interna, ossia alla struttura vorticoso più debole. Per valori di soglia prossimi a quella selezionata per le visualizzazioni [13], si osserva come le variazioni tra le dimensioni delle aree e le posizioni dei baricentri tra iden-



(a) Sezione del vortice appartenente all'elica esterna



(b) Sezione del vortice appartenente all'elica interna

Figura 5.15: Dimensione e posizione dei vortici al variare della soglia ϵ per la sezione a $\theta = 0^\circ$

tificazione 2D e 3D possano essere trascurabili. È possibile in particolare dividere il grafico che descrive la distanza tra il baricentro del vortice selezionato e l'origine del sistema di riferimento in tre regioni a seconda del valore di ϵ applicato. Per piccoli valori di soglia laddove si sono osservate variazioni in termini di area, si osservano anche differenze nella posizione del baricentro. Per valori di soglia maggiori si osserva come i due criteri applicati riconducano a risultati analoghi, mentre per alti valori di ϵ le posizioni dei baricentri tornano a differenziarsi, ma a questo punto le aree dei vortici sono talmente piccole da far perdere di significato l'applicazione di livelli così elevati.

5.5 Criteri applicati al campo di fluttuazioni medie

In letteratura si trovano applicazioni dei criteri di identificazione dei vortici utilizzando sia il campo di velocità completo sia la sola componente di velocità fluttuante, senza indicazioni su quale delle due soluzioni sia la migliore [8]. In questo paragrafo, i criteri di identificazione vengono applicati alle fluttuazioni di velocità: viene ricostruita la struttura vorticoso e presentato un confronto con quella ricavata nei paragrafi precedenti.

Riprendendo l'Eq.(3.5) si vede come sia facile ricavare il campo medio di fluttuazioni coerenti $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ a partire dalle mappe mediate in fase semplicemente sottraendo a queste il campo di moto medio. Per la determinazione della mappa del campo di moto medio è stata eseguita una media pesata delle PA dove i pesi corrispondono al numero di piani utilizzati per la definizione delle stesse. È importante sottolineare come questa operazione di media sia stata eseguita sulle mappe originali, senza che su di esse siano state applicate le trasformazioni descritte nel §5.1: tali trasformazioni porterebbero infatti alla generazione di mappe non riconducibili a una descrizione del fenomeno in termini di quantità medie. In Fig.(5.16) vengono presentati i profili medi delle componenti di velocità adimensionalizzati con U_{bulk} .

Sottraendo il campo di moto medio a ciascuna PA, prima che ad esse vengano effettuate le operazioni di centraggio, sono state ottenute le mappe di fluttuazioni; seguendo lo stesso procedimento descritto nel §5.4.2, coppie di PA sfasate di 180° vengono combinate tra loro ottenendo 36 mappe di fluttuazioni pesate. In Fig.(5.17) vengono presentate le mappe di velocità assiale e tangenziale delle medie in fase originali, del campo di moto medio e di quello fluttuante, alla quota $z/D \approx 0.12$ per il piano $\theta = 0^\circ$, rese adimensionali attraverso U_{bulk} .

Sulle mappe di fluttuazioni medie così ottenute sono stati applicati i criteri locali di identificazione dei vortici. In Fig(5.18) a titolo di esempio sono presentati i criteri σ_{ci} sia nel 2D che nel 3D; il valore di soglia applicato è $\sigma_{ci}^{th} = 200 s^{-1}$ ossia

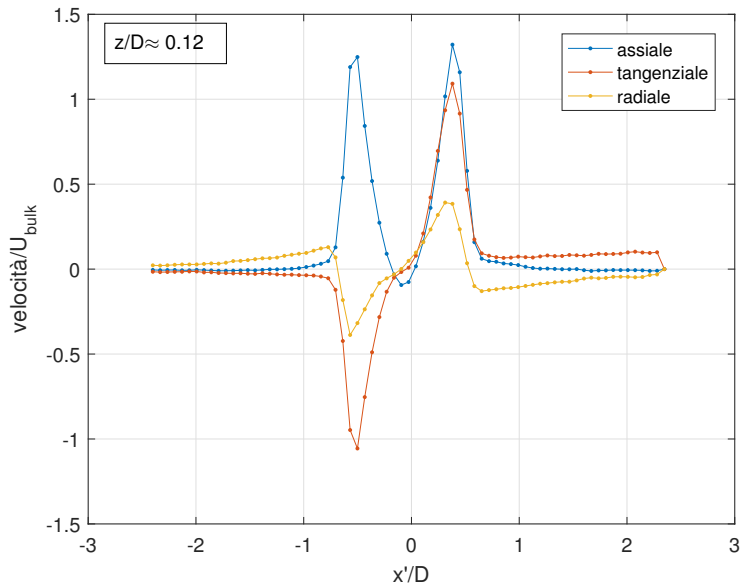


Figura 5.16: Profili di velocità medi

un valore inferiore rispetto a quello utilizzato nel caso in cui i criteri siano applicati al campo di velocità completo.

Anche in questo caso le ricostruzioni ottenute con l'identificazione 3D e 2D sono molto simili; permane ancora, nella ricostruzione con identificazione 3D, il disturbo nella regione prossima all'asse del getto anche se in questo caso ha un'estensione inferiore.

La struttura ricostruita è diversa da quella ottenuta applicando i criteri al campo di velocità completo: nonostante non sia chiaro, a causa del rumore presente nella ricostruzione, se le eliche siano due o tre, risulta però evidente come non sia più presente la distinzione tra struttura interna ed esterna, caratteristica invece della ricostruzione ottenuta in precedenza. In Fig.(5.19) viene presentata la vista dall'alto della struttura ottenuta sia analizzando il campo di moto completo sia sfruttando le sole fluttuazioni. Si è scelto di presentare la ricostruzione con identificazione 2D in quanto la visualizzazione appare più pulita. Si osserva come, nella ricostruzione basata sull'analisi delle mappe di velocità, l'elica interna si avvolge attorno alla zona di ricircolo rimanendo quasi in contatto, mentre, nel caso di identificazione sulle mappe di fluttuazioni, è presente una maggiore separazione tra le eliche e la bolla centrale. Dalla vista laterale Fig.(5.20) si apprezza anche una differenza nell'angolo di apertura della struttura rispetto all'asse del getto, più aperto per la struttura ricostruita considerando la velocità completa, più chiu-

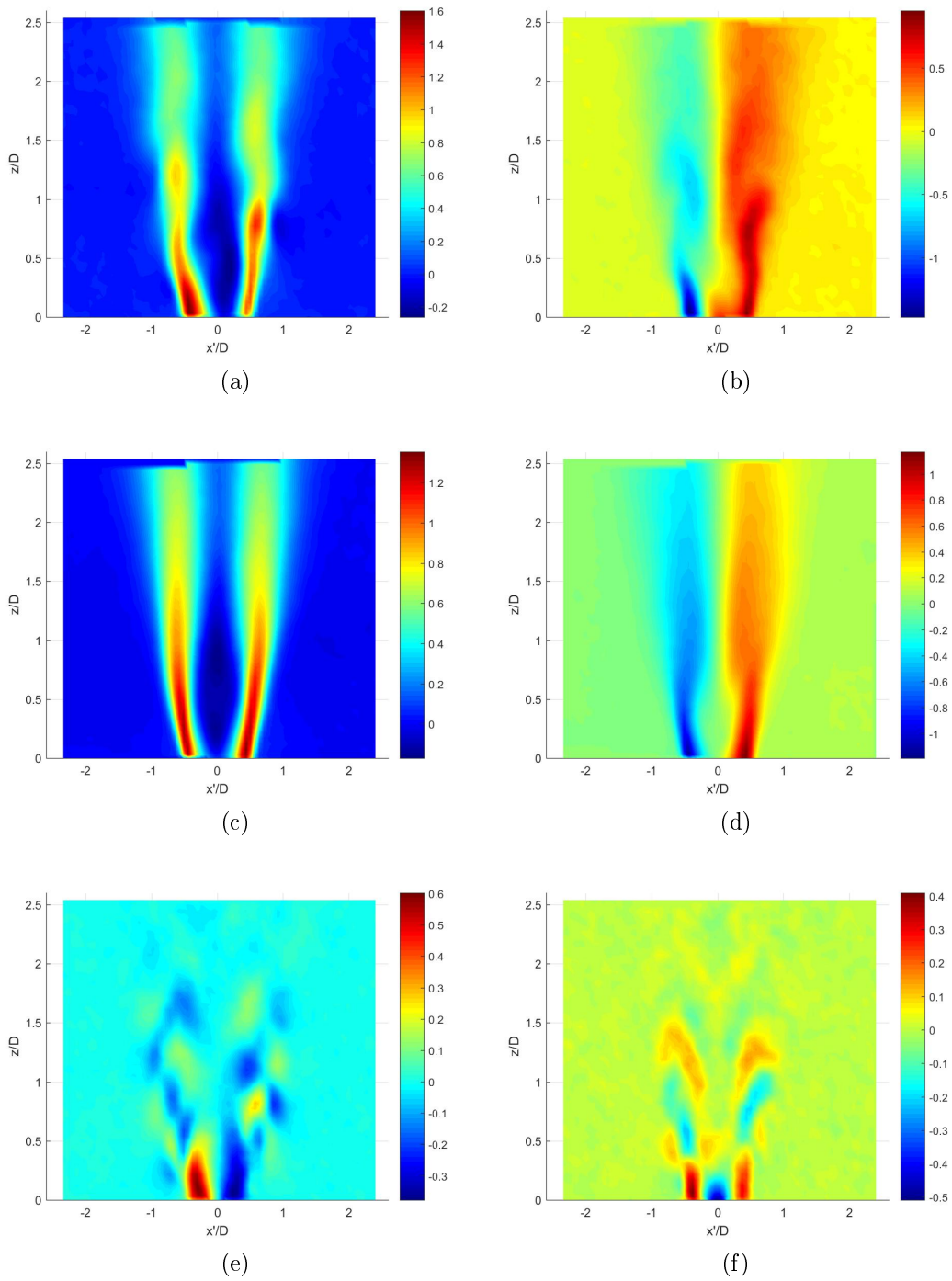


Figura 5.17: Mappe di velocità per il piano $\theta = 0^\circ$ adimensionalizzate con U_{bulk} : (a) PA assiale, (b) PA tangenziale, (c) campo medio assiale, (d) campo medio tangenziale, (e) fluttuazioni medie assiali, (f) fluttuazioni medie tangenziali

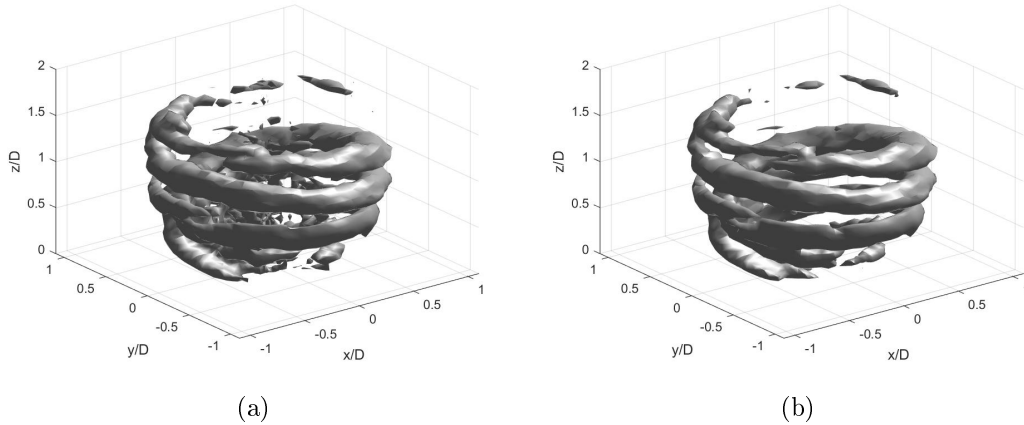


Figura 5.18: PA fluttuazioni pesate, $\sigma_{ci}^{th} = 200 \text{ s}^{-1}$; id.3D (a), id.2D (b)

sa per quella ricostruita sfruttando le fluttuazioni. Mentre nel primo caso le due strutture vorticosi si avvolgono attorno all'asse del getto con raggi differenti per la struttura interna e per quella esterna, nel secondo caso i raggi sono paragonabili tra loro.

Conclusioni analoghe possono essere tratte spostando il confronto sul piano della sezione delle due strutture vorticosi. In Fig.(5.21) viene presentata la sezione a $\theta = 0^\circ$ per il criterio della swirling strength; nel background è rappresentata la mappa della componente di velocità assiale con in blu le isolinee di $w/U_{bulk} = 0$ mentre nella scala di grigi le isolinee di swirling strength. Con i tratteggi vengono collegati i vortici appartenenti alla stessa struttura; è presente una sola spezzata in Fig.(5.21b) in quanto quella evidenziata è l'unica ad estendersi con continuità a valle dell'ugello.

Come già evidenziato da Cozzi [13] si può osservare come, nel caso in cui le strutture vorticosi siano ricavate a partire dal campo di velocità completo Fig.(5.21a), l'elica interna sia posizionata in corrispondenza dello shear layer interno, attorno alla regione di ricircolo, mentre l'elica esterna si trova nello shear layer esterno, tra il getto e l'aria ambiente. Sempre da questo grafico si apprezza come l'elica esterna presenti dei valori di swirling strength maggiori rispetto a quella interna, che appare quindi meno intensa, sia nel caso in cui la ricostruzione provenga dall'identificazione 2D sia 3D. Non si possono trarre conclusioni analoghe per la struttura ricostruita a partire dalle fluttuazioni di velocità Fig.(5.21b): gran parte dei vortici individuati appartengono allo shear layer esterno e la struttura interna non sembra essere individuata. Anche le intensità dei vortici non sono paragonabili rispetto al caso precedente in quanto mediamente appaiono più deboli: è per

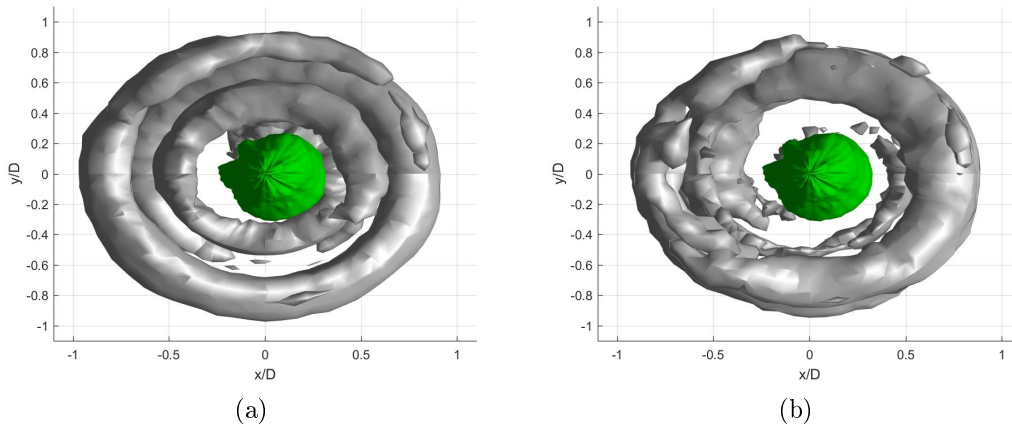


Figura 5.19: Vista dall'alto; id. sulla velocità $\sigma_{ci}^{th} = 400s^{-1}$ (a), id. sulle fluttuazioni $\sigma_{ci}^{th} = 200s^{-1}$ (b). In verde è evidenziata la bolla di ricircolo

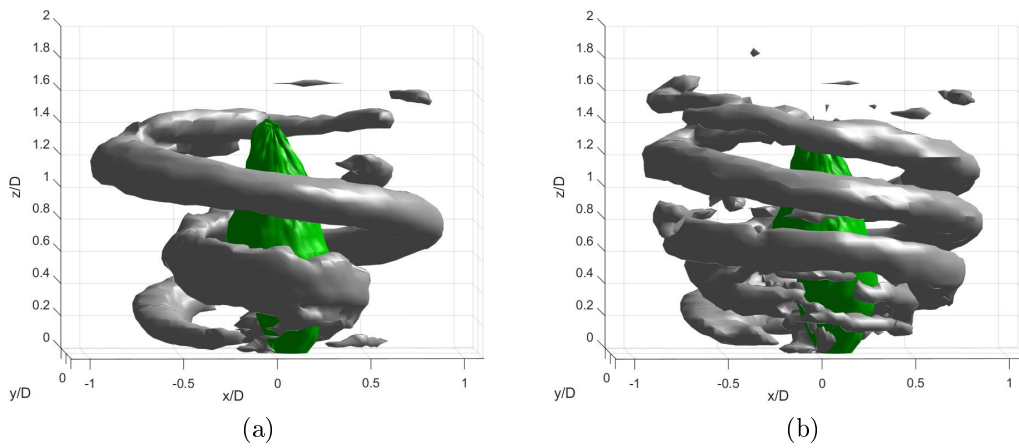


Figura 5.20: Vista laterale; id. sulla velocità $\sigma_{ci}^{th} = 400s^{-1}$ (a), id. sulle fluttuazioni $\sigma_{ci}^{th} = 200s^{-1}$ (b). In verde è evidenziata la bolla di ricircolo

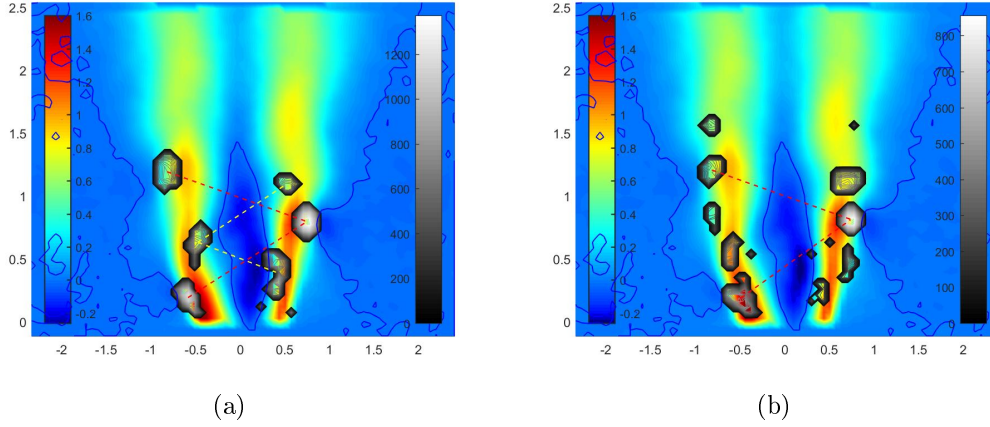


Figura 5.21: Sezione della struttura vorticoso per $\theta = 0^\circ$. Contour w/U_{bulk} (scala di sx), isolinee di σ_{ci} (scala di dx). In blu l'isolinea di $w/U_{bulk} = 0$. Le linee tratteggiate evidenziano i vortici dell'elica interna (giallo) e dell'elica esterna (rosso). Id. sulla velocità (a), id. sulle fluttuazioni (b)

questo motivo che nella visualizzazione in Fig.(5.18) sono stati utilizzati valori di soglia più piccoli per le fluttuazioni rispetto a quelli utilizzati per le strutture del campo completo, mostrate in Fig.(5.3).

Nonostante queste differenze e nonostante l'incertezza sul numero esatto di strutture elicoidali individuate a partire dalle mappe di fluttuazioni, una di queste eliche sembra coincidere con la struttura esterna individuata in precedenza: in Fig.(5.22) viene mostrato un confronto tra i vortici identificati nel piano della sezione posta a $\theta = 0^\circ$. Per poter interpretare il grafico è necessario far riferimento alla seguente legenda:

- Rosso: $\sigma_{ci}^{flutt} \neq 0 \cap \sigma_{ci}^{vel} \neq 0$
- Giallo: $\sigma_{ci}^{flutt} \equiv 0 \cap \sigma_{ci}^{vel} \neq 0$
- Azzurro: $\sigma_{ci}^{flutt} \neq 0 \cap \sigma_{ci}^{vel} \equiv 0$
- Blu: $\sigma_{ci}^{flutt} \equiv 0 \cap \sigma_{ci}^{vel} \equiv 0$

dove con σ_{ci}^{flutt} si intende il criterio della swirling strength applicato alle fluttuazioni mentre con σ_{ci}^{vel} si intende lo stesso applicato alle velocità. Ora risulta quindi semplice osservare come l'elica interna non sia mai identificata dal criterio applicato sulle fluttuazioni (area azzurra) mentre come la struttura esterna venga a coincidere con uno dei vortici appena determinati (area rossa).

In supporto a tale affermazione è stato generato uno stick model dell'elica in questione e confrontato con quello corrispondente all'elica esterna della struttura

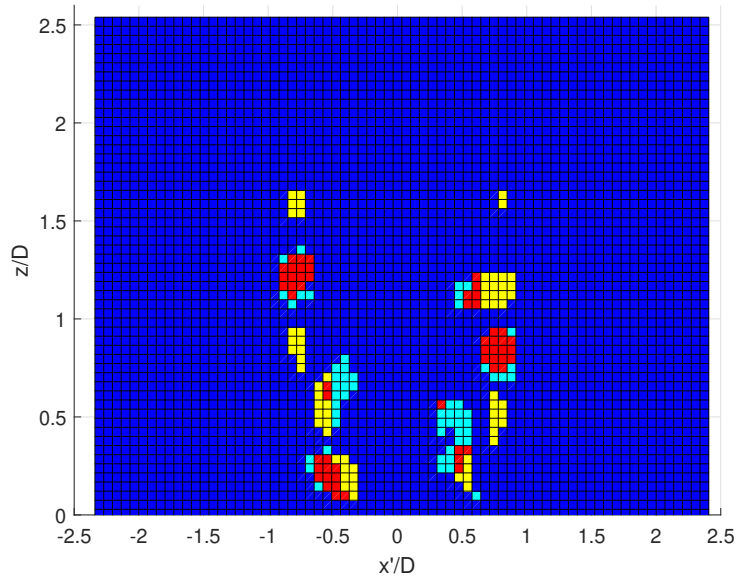


Figura 5.22: Sovrapposizione id. sulle velocità e id. sulle fluttuazioni per la sezione a $\theta = 0^\circ$

ricostruita a partire dall'analisi delle medie in fase. Il criterio di identificazione utilizzato per la generazione dei due modelli è quello della swirling strength $\sigma_{ci\ 2D}$, con soglia $\sigma_{ci}^{th} = 412\ s^{-1}$ per lo stick model ricavato a partire dalle PA, mentre $\sigma_{ci}^{th} = 250\ s^{-1}$ per quello ricavato a partire dalle fluttuazioni. Dai grafici mostrati in Fig.(5.23) appare chiaro come, accanto alla diversa estensione dei due modelli, le differenze più sostanziali riguardano la parte inferiore delle eliche, quella più prossima all'asse del getto. In particolare dalla vista dall'alto si osserva come la struttura identificata a partire dalle fluttuazioni tende ad avvicinarsi all'asse del getto con una maggiore rapidità rispetto a quanto non succede per il modello ricavato a partire dalle medie in fase. Quella analizzata è l'unica struttura vorticoso, ricavata da un'analisi sul campo di fluttuazioni medie, che si estende con chiarezza e senza interruzioni a valle dell'ugello; la parte restante della ricostruzione appare invece più disturbata, da qui l'incertezza sul numero di eliche che la costituiscono.

In letteratura non sono stati trovati esempi di una ricostruzione simile a quella ricavata analizzando le mappe delle fluttuazioni medie, mentre la doppia elica trova riscontri in molti altri lavori [29] [13] [5]; per dare maggior rilievo ai risultati ottenuti sarebbero necessari ulteriori approfondimenti sfruttando dati meno rumorosi e possibilmente disponibili su una griglia più fitta.

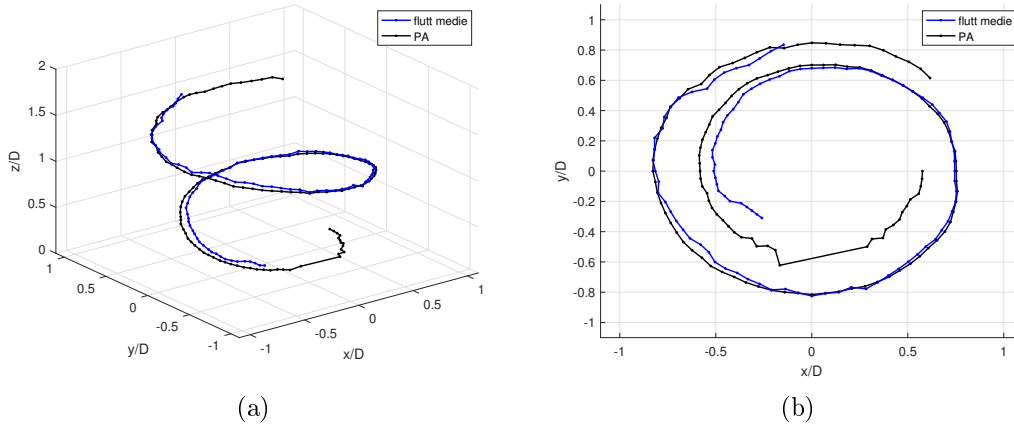


Figura 5.23: (a) Confronto stick model ricostruiti partendo dal criterio $\sigma_{ci\ 2D}$ sulle fluttuazioni medie, $\sigma_{ci}^{th} = 250\ s^{-1}$, e sulle PA, $\sigma_{ci}^{th} = 412\ s^{-1}$. (b) Vista dall'alto di due modelli

5.6 Criteri applicati al campo di velocità medio

Dopo aver applicato i criteri di identificazione alle medie in fase e al campo di fluttuazioni medie, gli stessi sono stati applicati alla mappa delle velocità medie, con l'obiettivo di poter ricavare informazioni utili sulla struttura del PVC, partendo unicamente dal campo di moto medio.

In Fig.(5.24a) viene mostrato il criterio σ_{ci} applicato alla mappa media con soglia $\sigma_{ci}^{th} = 260\ s^{-1}$, mentre in Fig.(5.24b) la posizione che i vortici hanno rispetto al campo di moto della velocità assiale media: si può osservare come tre dei cinque vortici identificati appartengano allo shear layer interno, mentre i restanti due a quello esterno. Un posizionamento simile di questi vortici era già stato osservato quando i criteri di identificazione sono stati applicati alle medie in fase Fig.(5.21a).

Due diverse strutture sono state successivamente ricavate a seconda di come i vortici appartenenti alla mappa di swirling strength sono stati fatti evolvere lungo l'asse del getto.

In un primo momento i vortici individuati vengono fatti avanzare sfruttando le velocità proprie del campo di moto medio: dopo aver calcolato la posizione del baricentro di ciascun vortice, per la determinazione delle coordinate degli stessi nella sezione successiva è stata valutata la velocità assiale e radiale media, rispettivamente $\bar{w}(r, z)$ e $\bar{u}(r, z)$, e, nota la frequenza f del PVC e l'incremento angolare della griglia $\Delta\theta$, calcolati i rispettivi spostamenti in direzione assiale $\delta s_z(r, z)$ e

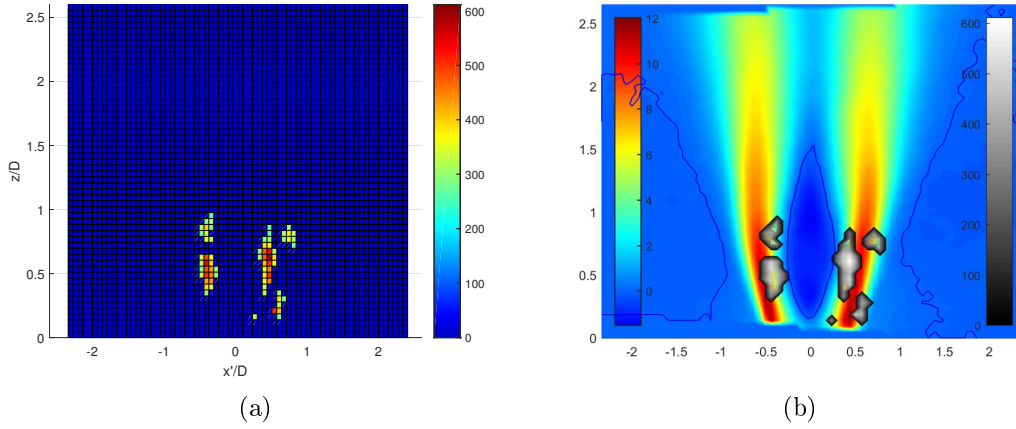


Figura 5.24: (a) Vortici calcolati sul campo di moto medio, $\sigma_{ci}^{th} = 260 \text{ s}^{-1}$; (b) Contour \bar{w}/U_{bulk} (scala di sx), isolinee di σ_{ci} (scala di dx). In blu è evidenziata l'isolinea di $\bar{w}/U_{bulk} = 0$

radiale $\delta s_r(r, z)$:

$$\delta s_z(r, z) = \frac{\bar{w}(r, z)\Delta\theta}{2\pi f} \quad (5.15a)$$

$$\delta s_r(r, z) = \frac{\bar{u}(r, z)\Delta\theta}{2\pi f} \quad (5.15b)$$

$$(5.15c)$$

In Fig.(5.25a) vengono presentate le strutture così ricostruite a partire dall'unione dei baricentri dei vortici appartenenti allo shear layer esterno e, in nero, l'elica esterna dello stick model ottenuto a partire dal criterio della swirling strength 2D. Dal confronto emerge come il passo delle strutture, ricostruite a partire dalla mappa di velocità media, non coincide con quello dell'elica ottenuta a partire dalle PA, mentre le estensioni radiali delle due strutture sono tra loro confrontabili. Inoltre bisogna evidenziare come, con questa ricostruzione, i vortici appartenenti allo shear layer esterno della mappa media generino due strutture differenti: la struttura ricostruita seguendo questo approccio prevede quindi la formazione di una doppia elica esterna.

In Fig.(5.25b) vengono invece mostrate le strutture ricostruite facendo evolvere i vortici dello shear layer interno e, in nero, l'elica interna dello stick model ottenuto sempre con il criterio σ_{ci2D} . Si possono effettuare considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza per quanto riguarda il comportamento del passo mentre, per quanto riguarda l'estensione radiale, solo il vortice dello shear layer interno

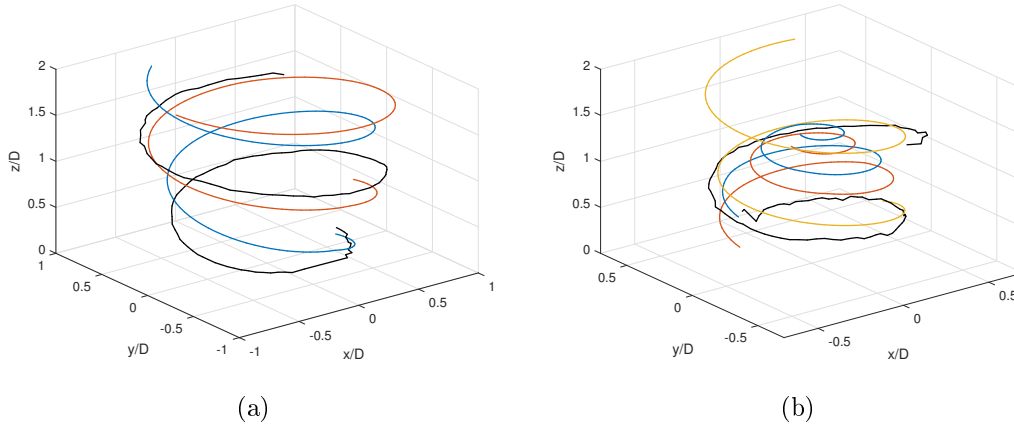


Figura 5.25: Ricostruzioni ottenute con $\delta s_z(r, z) \delta s_r(r, z)$; in nero le eliche ottenute dalle PA; (a) vortici shear layer esterno (b) vortici shear layer interno

posizionato in corrispondenza delle $x'/D > 0$ Fig.(5.24a) evolve come l'elica interna dello stick model, mentre i restanti due tendono ad avvicinarsi all'asse del getto. Anche in questo caso i vortici individuati analizzando la mappa media evolvono in maniera autonoma andando a formare tre eliche distinte.

In un secondo momento i baricentri dei vortici individuati sono stati fatti avanzare lungo l'asse del getto con un'unica velocità assiale determinata a partire dalla frequenza del PVC f , e dal passo p della sezione vorticoso, definito come la distanza misurata lungo l'asse del getto tra il baricentro del vortice più alto e l'ugello. L'incremento in direzione assiale così ottenuto da applicare ad ogni $\Delta\theta$ è pari a $\delta\bar{s}_z = p/72 \approx 0.01$. I risultati così ottenuti sono mostrati in Fig.(5.26) insieme all'elica interna ed estera ottenuta dall'analisi sulle PA (rappresentata in nero).

Analizzando in particolare Fig.(5.26a) si osserva come l'estensione radiale della struttura così ricostruita sia molto distante da quella ricavata dall'analisi delle mappe mediate in fase, mentre si osserva una certa analogia confrontando i passi delle strutture: il passo p si nota approssimare, con un difetto prossimo al 10%, il passo medio adimensionale \bar{p} dell'elica esterna ricavata con le PA, determinato dall'analisi di 36 sezioni della struttura, che si mostra essere pari a $\bar{p} = 0.9229$. Considerazioni analoghe non sono state effettuate per quanto riguarda la struttura interna Fig.(5.26b), in quanto l'elica interna proveniente dalle medie in fase è poco sviluppata in direzione assiale, rendendo l'analisi sul passo medio poco attendibile. Bisogna comunque sottolineare come con questo approccio due vortici appartenenti all'elica interna vanno a coincidere durante l'evoluzione: la struttura così ricostruita presenterà quindi due eliche esterne e due interne.

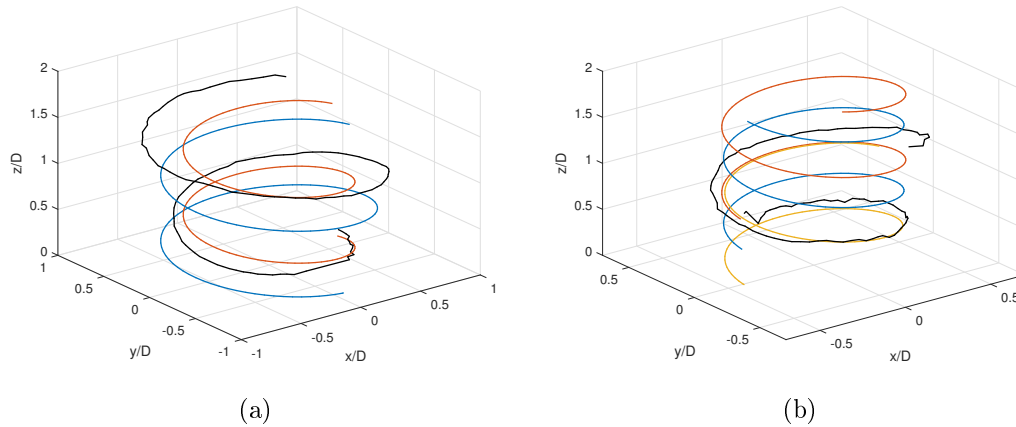


Figura 5.26: Ricostruzioni ottenute con $\delta\bar{s}_z$; in nero le eliche ottenute dalle PA; (a) vortici shear layer esterno (b) vortici shear layer interno

Nonostante queste analisi risulta evidente come il tentativo di poter caratterizzare il PVC partendo unicamente dal campo di moto medio e dalla frequenza di rivoluzione della struttura vorticoso porti a risultati di rilevanza limitata. Se con la prima ricostruzione viene correttamente individuata l'ampiezza della struttura vorticoso, nel secondo caso viene individuato con buona approssimazione il passo. Entrambe le ricostruzioni conducono però a strutture costituite da più di due eliche, lontane quindi da quanto ottenuto basandosi sulle analisi delle medie in fase.

Capitolo 6

Conclusioni e sviluppi futuri

Obiettivo primario di questa tesi è stata la ricostruzione del PVC a partire da mappe S-PIV mediate in fase di un getto confinato, dotato di moto rotatorio, in condizioni isoterme.

La prima operazione effettuata in questo senso è stata la ricostruzione della griglia di calcolo 3D a partire dalle medie in fase bidimensionali. Sfruttando la tecnica della cross-correlazione è stato possibile far fronte alle difficoltà di allineamento tra l'origine delle mappe e l'asse del bruciatore, permettendo così la corretta costruzione della griglia cilindrica.

Le tecniche di identificazione implementate sono quelle basate sull'analisi locale del tensore gradiente di velocità. Prima di procedere alla loro applicazione sul campo di moto in esame, i codici numerici sono stati validati utilizzando due campi di moto che risolvono in modo esatto le equazioni di Navier-Stokes. In particolare si è osservato come la scelta di una griglia di calcolo diversa da quella suggerita dalla geometria del problema abbia una grande influenza sulla distribuzione dell'errore relativo che, solo per griglie molto raffinate, è possibile considerarlo trascurabile, Fig.(5.2b).

Con l'applicazione dei codici ai dati a disposizione è stato possibile visualizzare le strutture coerenti dominanti del campo di moto. Da questo studio risulta chiara la presenza di due strutture vorticose di forma elicoidale, avvolte nella stessa direzione lungo l'asse del getto e tra loro controrotanti: la più intensa posizionata in corrispondenza dello shear layer esterno mentre l'altra, meno intensa, in corrispondenza dello shear layer interno, Fig.(5.21a). La ricostruzione del PVC è stata effettuata applicando i criteri di identificazione sia al campo di moto completo, sia alle sole componenti di velocità appartenenti al piano di misura. I risultati ottenuti per entrambi i casi a livello di dimensione dei vortici, posizione dei loro baricentri e inclinazione delle strutture vorticose, sono tra loro confrontabili. La

bontà della ricostruzione con identificazione 2D si è visto essere legata all'elevata inclinazione che l'asse dei vortici ha rispetto al piano delle PA: in queste condizioni le proiezioni delle componenti di velocità nel piano di misura sono molto simili alle proiezioni delle stesse lungo l'asse del vortice, permettendo quindi ai criteri basati sull'analisi delle due sole componenti di velocità di comportarsi bene rispetto al caso reale. Bisogna sottolineare come la somiglianza tra le ricostruzioni ricavate con identificazione 2D e 3D sia limitata alle strutture vorticosi più intense del campo di moto; è ragionevole pensare che considerazioni analoghe possano non valere per vortici di intensità inferiore.

Si è osservato come l'applicazione di soglie equivalenti su diversi criteri porti alla visualizzazione di strutture molto simili tra loro §5.4.4, ad eccezione del criterio Δ_{3D} , il quale genera vortici con dimensioni maggiori e ricostruzioni più disturbate. In quest'ottica, per questo specifico campo di moto, le ricostruzioni più regolari ricavate dall'identificazione 3D sono quelle ottenute con il criterio Q_{3D} .

I criteri di identificazione sono stati applicati successivamente alle fluttuazioni medie di velocità. Queste sono state ricavate dalle medie in fase sottraendo ad ognuna di esse il campo di moto medio, ottenuto mediando le PA senza che ad esse venisse applicata alcuna operazione di centraggio con il sistema di riferimento globale. Sostanziali differenze si riscontrano tra la struttura così ricreata e quella ottenuta dall'analisi delle medie in fase, osservabili nelle intensità dei vortici individuati, nelle diverse posizioni che questi occupano rispetto agli shear layers del getto, Fig.(5.21), e nella conformazione stessa della struttura vorticosi, Fig.(5.19) Fig.(5.20). Nonostante l'incertezza sul numero di eliche così ricostruite, è emersa una grande similitudine tra l'elica esterna ricostruita a partire dall'analisi delle medie in fase, e l'unica elica estesa con continuità a valle dell'ugello Fig.(5.23); il vortice appartenente allo shear layer interno non sembra invece essere ricostruito. Dal momento che le misure disponibili sono molto disturbate, potrebbe essere interessante applicare questa procedura ad un nuovo set di dati ottenuto da mappe S-PIV con maggior numerosità e maggiore risoluzione spaziale rispetto al set utilizzato, con l'idea di poter capire in questo modo il numero esatto delle strutture vorticosi.

I criteri di identificazione sono stati infine applicati alla mappa di velocità media; due diverse strutture sono state ricostruite a seconda di come questa è stata fatta evolvere. In entrambi i casi si osserva come il tentativo di poter estrarre informazioni utili sulla struttura del PVC partendo unicamente da considerazioni sul campo di moto medio e sulla frequenza di rotazione, porti a risultati lontani da quelli ottenuti dall'analisi delle medie in fase, rendendo quindi quest'analisi di difficile interpretazione.

Bibliografia

- [1] F. Arzuffi. *Analisi del fenomeno dell'entrainment e della struttura di getti isotermi con diverso grado di swirl mediante tecnica stereo-PIV*. Master's thesis, Politecnico di Milano, Italy, 2015. <http://hdl.handle.net/10589/110221>.
- [2] T.B. Benjamin. Theory of the vortex breakdown phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(4):593–629, 1962.
- [3] P. Billant, J.M. Chomaz, and P. Huerre. Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 376:183–219, 1998.
- [4] C.E. Cala, E.C. Fernandes, M.V. Heitor, and S.I. Shtork. Lda analysis of pvc-central recirculation zone interaction in a model vortex burner. In *Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, 2004.
- [5] C.E. Cala, E.C.V. Fernandes, M.V. Heitor, and S.I. Shtork. Coherent structures in unsteady swirling jet flow. *Experiments in Fluids*, 40(2):267–276, 2006.
- [6] F. Capelli. *Analisi del PVC in un getto ad elevato grado di swirl mediante immagini TR-PIV*. Master's thesis, Politecnico di Milano, Italy, 2010. <http://hdl.handle.net/10589/410>.
- [7] P. Chakraborty, S. Balachandar, and R.J. Adrian. On the relationships between local vortex identification schemes. *Journal of fluid mechanics*, 535:189, 2005.
- [8] H. Chen, R.J. Adrian, Q. Zhong, and X. Wang. Analytic solutions for three dimensional swirling strength in compressible and incompressible flows. *Physics of Fluids*, 26(8):081701, 2014.
- [9] H. Chen, Z. Wang, L. Zhu, and J. Wang. Evaluation of vortex identification methods based on two-and three-dimensional swirling strengths. *Physics of Fluids*, 30(12):125102, 2018.
- [10] Q. Chen, Q. Zhong, M. Qi, and X. Wang. Comparison of vortex identifica-

- tion criteria for planar velocity fields in wall turbulence. *Physics of Fluids*, 27(8):085101, 2015.
- [11] M.S. Chong, A.E. Perry, and B.J. Cantwell. A general classification of three-dimensional flow fields. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 2(5):765–777, 1990.
- [12] A.S. Coghe, F. Cozzi, and F. Martinelli. Experimental analysis of a pvc in swirling jet by combined tr-piv and ldv. In *XV AI VE. LA. National Meeting*, pages 1–5, 2007.
- [13] F. Cozzi, R. Sharma, and G. Solero. Analysis of coherent structures in the near-field region of an isothermal free swirling jet after vortex breakdown. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 109:109860, 2019.
- [14] R. Cucitore, M. Quadrio, and A. Baron. On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 18(2):261–282, 1999.
- [15] J.H. Faler and S. Leibovich. An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown. *Journal of Fluid Mechanics*, 86(2):313–335, 1978.
- [16] I. Farina and P.P. Tedde. *Progettazione e caratterizzazione sperimentale in regime isoterma di un bruciatore a swirl*. Master’s thesis, Politecnico di Milano, Italy, 2010.
- [17] J.M. Foucaut and M. Stanislas. Some considerations on the accuracy and frequency response of some derivative filters applied to particle image velocimetry vector fields. *Measurement Science and Technology*, 13(7):1058, 2002.
- [18] A.K. Gupta, D.G. Lilley, and N. Syred. Swirl flows. *tw*, 1984.
- [19] J. Hunt, A. Wray, and P. Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases*, -1:193–208, 11 1988.
- [20] A. Hussain and W.C. Reynolds. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):241–258, 1970.
- [21] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *Journal of fluid mechanics*, 285:69–94, 1995.
- [22] S. Leibovich. The structure of vortex breakdown. *Annual review of fluid mechanics*, 10(1):221–246, 1978.
- [23] O. Lucca-Negro and T. O’Doherty. Vortex breakdown: a review. *Progress in energy and combustion science*, 27(4):431–481, 2001.
- [24] H.J. Lugt. The dilemma of defining a vortex. In *Recent developments in*

- theoretical and experimental fluid mechanics*, pages 309–321. Springer, 1979.
- [25] K. Oberleithner, C. O. Paschereit, R. Seele, and I. Wygnanski. Formation of turbulent vortex breakdown: intermittency, criticality, and global instability. *AIAA journal*, 50(7):1437–1452, 2012.
- [26] S.H. Park and H.D. Shin. Measurements of entrainment characteristics of swirling jets. *International journal of heat and mass transfer*, 36(16):4009–4018, 1993.
- [27] M. Raffel, C.E. Willert, F. Scarano, C.J. Kähler, S.T. Wereley, and J. Kompenhans. *Particle image velocimetry: a practical guide*. Springer, 2018.
- [28] T. Sarpkaya. On stationary and travelling vortex breakdowns. *Journal of Fluid Mechanics*, 45(3):545–559, 1971.
- [29] R. Sharma. *Experimental Study of Unconfined and Confined Isothermal Swirling Jets*. PhD thesis, Politecnico di Milano, Italy, 2017. <http://hdl.handle.net/10589/132686>.
- [30] S.M. Soloff, R.J. Adrian, and Z.C. Liu. Distortion compensation for generalized stereoscopic particle image velocimetry. *Measurement science and technology*, 8(12):1441, 1997.
- [31] B.W. van Oudheusden, F. Scarano, N.P. van Hinsberg, and D.W. Watt. Phase-resolved characterization of vortex shedding in the near wake of a square-section cylinder at incidence. *Experiments in Fluids*, 39(1):86–98, 2005.
- [32] M. Vanni. *Analisi sperimentale e numerica di un getto isoterma confinato ad alto grado di swirl*. Master’s thesis, Politecnico di Milano, Italy, 2011. <http://hdl.handle.net/10589/38921>.
- [33] H. Vollmers. Detection of vortices and quantitative evaluation of their main parameters from experimental velocity data. *Measurement Science and Technology*, 12(8):1199, 2001.
- [34] J. Zhou, R.J. Adrian, S. Balachandar, and T.M. Kendall. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *Journal of fluid mechanics*, 387:353–396, 1999.