



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE  
E DELL'INFORMAZIONE

# Un nuovo metodo per il calcolo dei parametri inerziali

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN  
AUTOMATION AND CONTROL ENGINEERING

Author: **Gianluca Cantino**

Student ID: 10752127  
Advisor: Luca Bascetta

Academic Year: 2021-22

# Abstract in lingua inglese

This thesis focuses on the development of an algorithm to measure the inertia of an object with a force sensor and a robotic arm. The benefit of this strategy is complete automation, it will not require the presence of an operator to perform the measurements.

The actual measurement techniques of inertia parameters, described in the first part of this work, are limited to the computation of specific parameters, like the mass of the position of the centre of mass, or need a specialized operator able to perform the experiments. The algorithm presented allows the use of a robotic arm, a common instrument nowadays in the industry, and a force sensor to cover these lacks. With a simulation, the efficiency and precision of this technique are tested.

In the final part of this thesis, a possible practical implementation of the code needed from the robotic arm is presented with dedicated software

Keyword: inertia, measurements system, automation, robotic arm, center of mass.



# Abstract

La presente tesi ha come obiettivo la realizzazione di un algoritmo per misurare correttamente l'inerzia di un oggetto utilizzando un sensore di forza e un braccio robotico. Il vantaggio di questa strategia è la completa automatizzazione: non richiederà l'intervento di un operatore per eseguire le misurazioni.

Le attuali tecniche di misurazione dei parametri inerziali, descritte nella prima parte dell'elaborato, sono limitate al calcolo di specifici parametri, come la massa o il baricentro, oppure richiedono operatori specializzati che eseguano gli esperimenti. Gli algoritmi descritti permettono di sfruttare un braccio robotico, strumento ormai molto comune nell'industria e un sensore di forza per coprire queste mancanze. Per mezzo di una simulazione si dimostra come questa nuova tecnica di misurazione risulti veloce e precisa.

La parte finale della tesi presenta una possibile implementazione pratica del codice utilizzato dal braccio robotico per mezzo di un software dedicato.

Parole chiave: inerzia, sistema di misurazione, automazione, braccio robotico, centro di massa.



# Indice

<b>Abstract in lingua inglese</b> .....	<b>iii</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>v</b>
<b>Indice</b> .....	<b>vii</b>
<b>1. Introduzione</b> .....	<b>10</b>
<b>2. Stato dell'arte</b> .....	<b>12</b>
2.1 Metodo di pesatura .....	15
2.2 Misura della forza d'interfaccia .....	15
2.3 Metodo di sospensione .....	16
2.4 Metodo di bilanciamento.....	17
2.5 Metodo di run-down.....	17
2.6 Pendolo gravitazionale .....	18
2.7 Metodo del pendolo torsionale.....	19
2.8 Metodo del Pendolo multi-filo .....	20
2.9 Identificazione diretta dei parametri fisici .....	21
2.10 Conclusione .....	22
<b>3. Esperimento statico</b> .....	<b>23</b>
3.1 Introduzione teorica .....	24
3.2 Applicazione fisica .....	26
3.2.1 Scelta parametri di simulazione .....	28
<b>4. Esperimento dinamico</b> .....	<b>34</b>
4.1 Introduzione teorica .....	35
4.2 Algoritmo.....	39
4.3 Dimostrazioni determinanti.....	43
4.3.1 Determinante L .....	43

4.3.2	Determinante $R$ .....	43
4.3.3	Dimostrazione singolarità matrice estesa .....	44
<b>5.</b>	<b>Simulazione</b> .....	<b>47</b>
5.1	Creazione del modello di simulazione .....	49
5.1.1	Axes .....	50
5.1.2	Joint.....	51
5.1.3	Sensore .....	52
5.1.4	Corpo.....	52
5.2	Aggiunta del rumore all'interno della simulazione .....	53
5.3	Risultati della simulazione .....	58
5.3.1	Esperimento statico .....	59
5.3.2	Esperimento dinamico.....	60
<b>6.</b>	<b>Controllo braccio robotico</b> .....	<b>64</b>
<b>7.</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b> .....	<b>70</b>
	<b>Bibliografia</b> .....	<b>72</b>





1.

# Introduzione

In fisica la dinamica è quel ramo della meccanica newtoniana che si occupa dello studio del moto dei corpi a partire dalle sue cause (forza). Lo studio delle forze in gioco all'interno di un sistema meccanico è fondamentale, in quanto permette di realizzare simulazioni molto precise, utili per analizzare il comportamento del sistema in situazioni non replicabili in laboratorio, riducendo così rischi e costi di produzione. L'interazione tra un corpo fisico e le forze che lo muovono viene descritta per mezzo di tre parametri principali: la massa, il centro di massa e l'inerzia. In questa tesi viene studiato un algoritmo che permette di misurare questi valori, in maniera automatica, senza quindi bisogno dell'intervento di operatori specializzati.

Nella prima parte vengono presentati i metodi storicamente utilizzati per il calcolo di questi parametri, successivamente viene descritto il metodo di misurazione. Questo si divide in due parti:

- Stima della posizione del centro di massa.
- Stima del tensore di inerzia.

Nella prima parte l'oggetto del test viene spostato in diverse posizioni statiche aventi una diversa angolazione, tramite l'analisi della direzione delle forze misurate dal sensore di forza è possibile risalire alla posizione del centro di massa.

Il tensore di inerzia viene invece misurato per mezzo di un esperimento dinamico. Tramite il braccio robotico viene imposto all'oggetto campione una specifica traiettoria: si generano così le forze, dovute ai fenomeni dinamici, che vengono misurate dal sensore. Infine, si calcola il tensore di inerzia che, data la velocità imposta, meglio approssima le forze e momenti misurati.

Questi algoritmi vengono poi testati con una simulazione realizzata su "Modelica" e "Matlab"; viene così verificata l'accuratezza sia in assenza che in presenza di rumore, in entrambi i casi gli algoritmi risultano precisi.

2.

Stato  
dell'arte

A livello matematico un corpo viene descritto come l'insieme dei punti infinitesimali che ne definiscono la geometria. Per avere una descrizione completa del comportamento di un oggetto quando è soggetto a forze esterne è necessario quindi studiare il movimento di tutti i punti che lo compongono. A seconda del materiale dell'oggetto le mutue distanze dei punti possono essere variabili (è il caso di materiali facilmente malleabili come la gomma), oppure costanti (per esempio un blocco di ferro). Nel secondo caso tali corpi sono definiti come *corpi rigidi*. Siccome la geometria dell'oggetto rimane costante, allora è possibile descrivere il movimento come la combinazione del movimento lineare di un singolo punto conforme all'oggetto e la rotazione del corpo attorno a questo punto. La relazione tra la forza e momenti applicati e il movimento che ne deriva è descritta dai parametri di inerzia dell'oggetto.

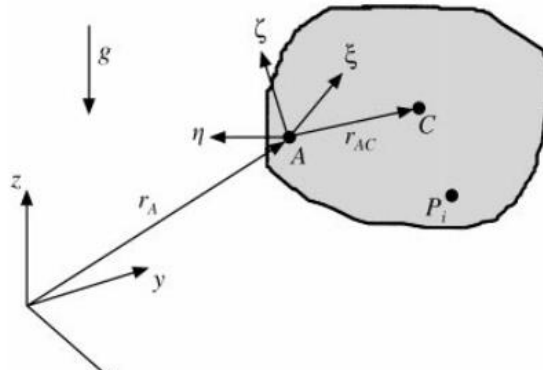


Figura 2.1 - Sistema di riferimento del corpo rigido

Se si considera un corpo rigido (Figura 2.1), ovvero che sia quando è fermo che quando è in movimento non si deforma, è possibile individuare le due *equazioni del moto* [1], ovvero quelle equazioni che ne descrivono il movimento in presenza di forze esterne.

$$m\ddot{\mathbf{r}}_A - m\mathbf{r}_{AC} \times \dot{\omega} = \mathbf{f}_A - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{AC})$$

$$m\mathbf{r}_{AC} \times \ddot{\mathbf{r}}_A + \Theta_A \cdot \dot{\omega} = \mathbf{t}_A - \omega \times (\Theta_A \cdot \omega)$$

Dove  $\mathbf{f}_A$  e  $\mathbf{t}_A$  sono, rispettivamente, le forze e i momenti esterni, che possono essere considerati come gli input del sistema;  $\mathbf{r}_A$  è il punto del corpo rigido preso in considerazione per misurare il movimento. Infine,  $m$ ,  $\mathbf{r}_{AC}$  e  $\Theta$  sono i dieci parametri di inerzia che caratterizzano il corpo rigido e descrivono come il corpo reagisce alle sollecitazioni estere:

- $m$  è la massa dell'oggetto, viene definita come quantità di materia che caratterizza un corpo, misura la resistenza con cui il corpo si oppone a una variazione di moto

- $\mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$  è la posizione del centro di massa rispetto al punto  $A$ , il centro di massa è il punto tale per cui il sistema si comporta come se la sua massa fosse concentrata tutta in quel punto. Normalmente viene definito il punto  $r_C$ , poi si calcola la posizione rispetto a un generico punto  $A$  con una semplice traslazione,  $r_{AC} = r_A - r_C$
- $\Theta = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$  è il tensore di inerzia, la matrice che lo descrive è simmetrica quindi ha solo sei gradi di libertà. Il momento di inerzia è quella proprietà del corpo che misura la resistenza con cui il corpo stesso si oppone a una variazione, in modulo o direzione, della velocità angolare.

Questi sono responsabili del comportamento dinamico dell'oggetto, per tanto l'identificazione di questi valori è sempre stato un problema di principale importanza nello sviluppo di qualunque sistema meccanico.

Attualmente esistono diverse tecniche che permettono la misurazione dell'inerzia, quella più utilizzata è senza dubbio offerta dagli attuali software CAD; questi permettono infatti di modellare un oggetto in un ambiente di sviluppo virtuale. Offrono quindi algoritmi numerici che permettono, partendo dalla forma dell'oggetto, di calcolare i valori di inerzia del modello. Ovviamente quando l'oggetto verrà realizzato, a causa degli errori dei processi di fabbricazione scelti, ma anche alle non idealità della struttura dei materiali, presenterà delle differenze rispetto al modello virtuale; quindi, la precisione dell'inerzia calcolata sarà sempre limitata.

Esistono inoltre metodi che permettono la misurazione dei valori di inerzia direttamente sull'oggetto in esame, questi metodi si distinguono per i valori misurati e la strategia con cui sono effettuate queste misurazioni.

Una prima importante classificazione è se il metodo è [1]:

- Statico
- Dinamico

I metodi statici misurano le forze e le coppie generate da un corpo in equilibrio, quelli dinamici invece forniscono forze esterne al corpo e misurano come questo risponda. I metodi dinamici possono essere ulteriormente divisi in:

- Metodi senza limitazioni al movimento del corpo rigido
- Metodi basati su piccoli movimenti angolari
- Metodi basati su piccolissime velocità e movimenti di rotazione.

Siccome le equazioni del modello sono in ogni caso non-lineari nei parametri, è necessario utilizzare metodi di identificazione iterativi. Ad ogni modo esistono metodi che utilizzano l'identificazione non iterativa, che prevedono di identificare massa e centro di gravità indipendentemente dal tensore di inerzia. In generale i metodi dinamici basati su piccole velocità e movimenti di rotazione sono i soli che permettono di identificare tutti e dieci i parametri contemporaneamente.

Verranno nel seguito sinteticamente descritti i principali metodi con cui vengono misurati i valori di inerzia.

## 2.1 Metodo di pesatura

Questo metodo viene utilizzato per determinare la massa di un oggetto: si basa sulla misura della forza generata dall'oggetto stesso per ricavarne la massa. Infatti, forza e massa sono legate dalla seconda legge di *Newton*:

$$0 = \sum_i f_{sp} - mg$$

Dove  $g$  è l'accelerazione gravitazionale mentre  $\sum_i f_{sp}$  è la risultante delle forze applicate dai punti di appoggio. Si può quindi ottenere la massa con la seguente formula:

$$m = \frac{\sum_i f_{sp}}{g}$$

## 2.2 Misura della forza d'interfaccia

Questo metodo, che può interpretarsi come una generalizzazione del metodo precedentemente descritto, sfrutta le forze statiche d'interfaccia (Figura 2.2) per identificare la massa e la posizione del centro di massa.

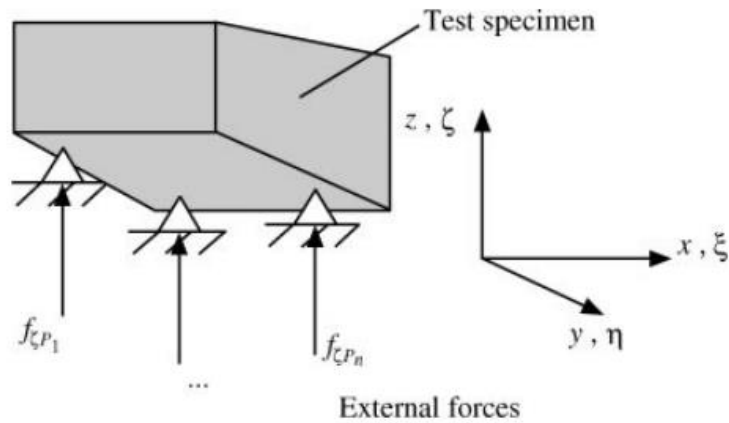


Figura 2.2 - Principio metodo forze di interfaccia

Si immagini che un oggetto sia posto su  $n$  sostegni, ognuno dei quali eserciterà una forza di reazione  $f_{\zeta p}$  al fine di avere il corpo in equilibrio. Si prenda ora un punto A nello spazio: se si considerano i momenti delle forze esercitate dai sostegni rispetto al punto A e il momento generato dalla forza di gravità, sempre rispetto allo stesso punto, la seguente relazione permetterà di calcolare la posizione del baricentro rispetto al punto A:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \eta_{APi} \\ -\xi_{APi} \end{bmatrix} f_{\zeta p_i} - \begin{bmatrix} \eta_{AC} \\ -\xi_{AC} \end{bmatrix} mg$$

Dove  $\eta_{APi}$  e  $-\xi_{APi}$  rappresentano la distanza dal punto di applicazione della forza al punto A sugli assi  $x$  e  $y$ . Al fine di ottenere tutti i valori della terna che identifica la posizione del baricentro sono necessari almeno due esperimenti.

Questo metodo non ha limitazioni per quanto riguarda forma e dimensioni dell'oggetto, per questa ragione viene largamente utilizzato in applicazioni industriali.

## 2.3 Metodo di sospensione

Questa strategia viene utilizzata per identificare la posizione del baricentro. Il campione viene sospeso su diversi punti da un filo (Figura 2.3). Il punto di intersezione di tutte le linee passanti per esso sarà il baricentro dell'oggetto, sono necessari almeno due esperimenti.

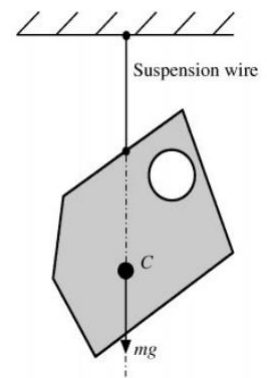


Figura 2.3 - Principio metodo di sospensione



Il grande vantaggio di questo metodo è la sua semplicità in quanto non è necessario un software dedicato, ma si utilizza un cavo e un mezzo per attaccare quest'ultimo al corpo in esame.

## 2.4 Metodo di bilanciamento

Questo approccio permette di misurare la posizione del baricentro, conoscendone la massa. Il sistema di bilanciamento è una semplice barra supportata da un perno (Figura 2.4); il test consiste nell'ancorare l'oggetto in esame a una estremità della barra e successivamente spostare un peso campione lungo il lato opposto fino a che il sistema non è in equilibrio.

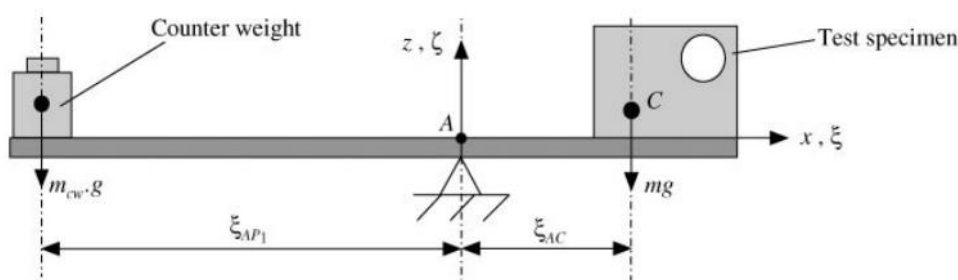


Figura 2.4 - Principio metodo di bilanciamento

In questa condizione, conoscendone la massa, si può misurare la posizione del baricentro come distanza dal perno, come descritto dalla seguente relazione:

$$0 = \xi_{APi} m_{ew} g - mg(-\xi_{AC})$$

$$\xi_{AC} = \xi_{APi} \frac{m_{ew}}{m}$$

Al fine di ottenere tutti i valori della terna che descrive la posizione del centro di massa sono necessari almeno tre esperimenti.

## 2.5 Metodo di run-down

Permette di calcolare il momento di inerzia su uno specifico asse. In questo test il corpo viene fatto ruotare attorno un asse con una velocità variabile e le forze generate dall'accelerazione vengono misurate per mezzo di sensori e da cui viene calcolato il momento di inerzia:

$$I_A \ddot{\alpha}_A = \tau_e$$

$$I_A = \frac{\tau_e}{\ddot{\alpha}_A}$$

Si considerano gli assi  $x$  e  $z$  nella geometria del corpo, in modo da ottenere il tensore di inerzia semplificato, che non considera i prodotti di inerzia:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Un tipico problema di questo metodo sono i possibili danni causati sulla superficie dell'oggetto. Il corpo viene infatti agganciato al supporto rotante per mezzo di un sistema di ritenuta, questo, a causa della rotazione, genera una pressione sulla superficie dell'oggetto che può andare a rovinare il surface finish.

## 2.6 Pendolo gravitazionale

Permette di identificare il momento di inerzia rispetto all'asse del pendolo. L'oggetto del test viene collegato a un perno tramite dei cavi, andando così a creare una sorta di

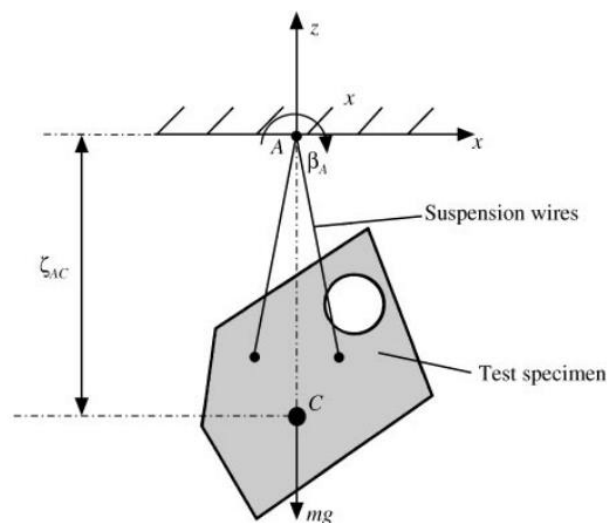


Figura 2.5 - Principio metodo pendolo gravitazionale

pendolo (Figura 2.5). Se si conoscono la massa e la posizione del centro di massa, si può calcolare il valore dell'inerzia andando a misurare la frequenza delle oscillazioni (metodo assoluto). Se invece è nota solo la massa, si possono integrare i risultati ottenuti da due diversi test con una lunghezza del filo differente (metodo relativo).

Questo metodo richiede la condizione di piccoli movimenti angolari: se, infatti, le oscillazioni hanno un angolo minore di circa sette gradi, il seno si può approssimare a una retta ( $\sin(a) \approx a$ ) con una certa accuratezza; vale quindi la seguente relazione:

$$I_A \ddot{\omega}_A + mg \xi_{AC} \omega_A = 0$$

Questa è l'equazione del moto di un oscillatore a singolo *degree of freedom*. Se la massa e il centro di massa sono conosciuti ( $m$  e  $\xi_{AC}$ ), allora l'inerzia può essere calcolata dalla seguente formula:

$$I_A = \frac{mg \xi_{AC}}{(2\pi f_0)^2}$$

Per ottenere il tensore di inerzia completo sono necessari almeno sei test con differenti assi di rotazione, il numero scende a tre nel caso si conoscano gli assi principali d'inerzia (gli assi ove i prodotti di inerzia sono uguali a zero).

## 2.7 Metodo del pendolo torsionale

Questo metodo è molto simile al precedente, ma al posto della gravità, vengono utilizzate delle molle per generare l'oscillazione (Figura 2.6).

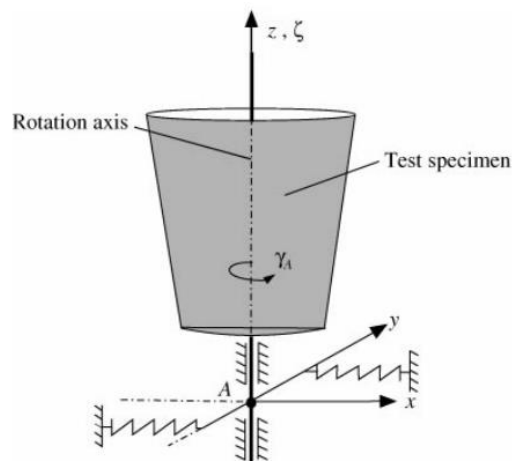


Figura 2.6 - Principio metodo del pendolo torsionale

Come nel caso precedente il valore dell'inerzia viene calcolato partendo dalla frequenza delle oscillazioni, ma è necessario conoscere il coefficiente di elasticità' delle molle.

$$I_A \ddot{\omega}_A + k_T \beta_A = 0$$

$$I_A = \frac{k_T}{(2\pi f_0)^2}$$

## 2.8 Metodo del Pendolo multi-filo

Questo metodo permette di calcolare l'inerzia relativa all'asse del pendolo. L'oggetto del test viene sospeso in aria tramite, tipicamente, due o tre fili. La struttura così realizzata si comporterà come un pendolo rotazionale che subisce l'influenza della gravità (Figura 2.7). Se si conoscono la massa e la geometria del pendolo, il momento di inerzia può essere calcolato partendo dalla frequenza delle oscillazioni (metodo assoluto), nel caso in cui non si conosca la massa è possibile calcolare l'inerzia, ma è necessario effettuare più misurazioni delle oscillazioni (metodo relativo).

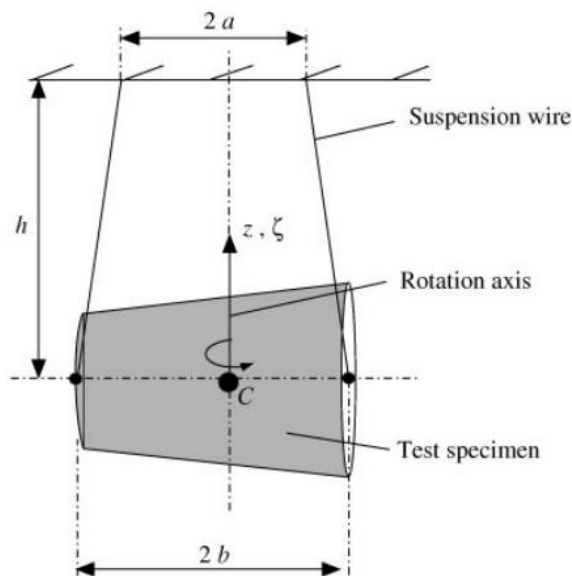


Figura 2.7 - Principio metodo del pendolo multi-filo

Questo metodo può essere esteso utilizzando una struttura apposita chiamata "bifilar testing rig", in questa maniera è possibile calcolare due momenti di inerzia e un prodotto di inerzia: il tensore di inerzia completo può quindi essere identificato tramite solo due test.

## 2.9 Identificazione diretta dei parametri fisici

Questo metodo cerca di adattare un sistema di matrici a dati sperimentali ottenuti osservando il corpo sottoposto a vibrazioni. Il sistema meccanico può sia essere testato in due diversi modi (Figura 2.8):

- Sospeso da molle con un basso coefficiente di elasticità, testando così il corpo in condizioni di quasi libertà
- Appoggiato su una struttura apposita che permette di generare le vibrazioni.

Nel secondo caso il supporto deve contenere anche i sensori che permettono di misurare la forza generata dal corpo.

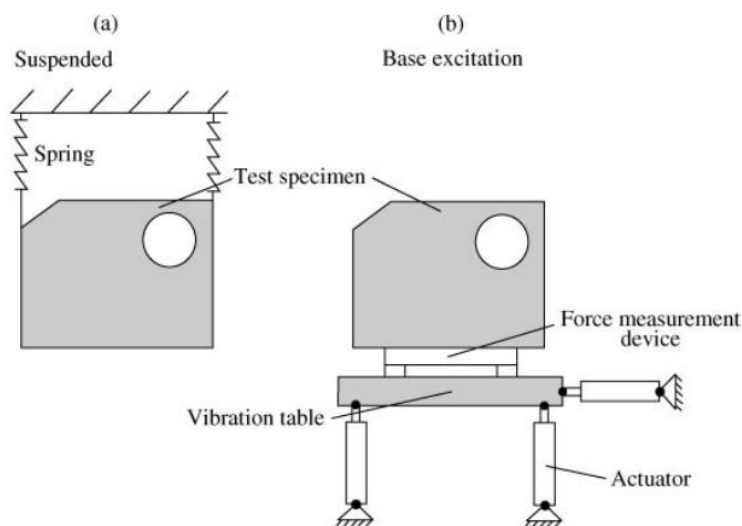


Figura 2.8 - Principio metodo identificazione diretta

Esistono diversi algoritmi che permettono l'elaborazione dei dati per il calcolo dell'inerzia. I metodi più comuni tengono conto dell'elasticità del sistema meccanico identificando la massa e i coefficienti di smorzamento e di elasticità del sistema meccanico, partendo dalle misurazioni sia nel dominio del tempo che della frequenza. Esistono poi metodi speciali che cercano di adattare le equazioni del moto di un corpo rigido, considerando un supporto elastico, per identificare le cosiddette "frequency response functions". Qui i parametri di elasticità e smorzamento del supporto sono inclusi nel modello matematico e identificati insieme ai dieci valori di inerzia. Il principale vantaggio di questi metodi è la semplicità della formulazione, ma

richiedono la condizione di corpo rigido per l'oggetto in esame. Infine, esistono metodi che si concentrano nelle equazioni di moto di corpo rigidi non vincolati, nel modello matematico sono presenti solo i valori di inerzia. Questo metodo è sicuro fin tanto che la forza di eccitazione è vincolata all'interno di certi limiti.

## 2.10 Conclusione

I metodi classici tipo la pesatura, il bilanciamento e i pendoli producono risultati precisi nell'identificazione di tutti e dieci i parametri di inerzia richiedendo una bassa abilità da parte dell'operatore [1]. Tuttavia, il principale problema è il tempo richiesto nell'esecuzione dei test e in alcuni casi la dimensione della strumentazione necessaria specialmente se la massa del sistema meccanico analizzato ha di per sé grossi volumi (si faccia riferimento a titolo di esempio al metodo di bilanciamento e del pendolo torsionale). Il metodo delle forze di interfaccia, che richiede meno hardware, può essere un'alternativa a quello del bilanciamento. Migliore è l'identificazione diretta dei parametri fisici, che richiede tuttavia la realizzazione di modelli matematici complessi per la misurazione dell'inerzia e ha lunghi tempi per l'allestimento dell'esperimento (in particolare il montaggio dell'oggetto sul supporto).

L'obiettivo della tesi in oggetto è proporre un nuovo metodo per il calcolo dei dieci parametri dell'inerzia utilizzando un braccio robotico. L'uso di questa tecnologia permetterà di forzare dei movimenti specifici e quindi di automatizzare il sistema di misurazione, con vantaggi in termini di velocità, e di conseguenza di minor costo, per ogni misurazione.

# 3.

## Esperimento statico

In questo capitolo verrà descritto come calcolare la posizione del baricentro: nella prima sezione si presentano le nozioni di baricentro e di momento, segue l'applicazione fisica dove verrà spiegato l'algoritmo di misurazione.

## 3.1 Introduzione teorica

In fisica il centro di massa di un sistema è il punto geometrico corrispondente al valor medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio [2]. Nel caso particolare di un corpo rigido, questo punto ha una posizione fissa rispetto al sistema. Il centro di massa è definito per un qualunque sistema di corpi che presentano una massa, indipendentemente dalla forza, interna o esterna, che agisce sui corpi. Il baricentro è definito come centro delle forze del peso, ovvero quel punto che si può considerare come centro di applicazione della forza peso. Nel caso in cui il corpo sia all'interno di un campo gravitazionale uniformemente distribuito, dove quindi ogni punto è sottoposto alla medesima accelerazione gravitazionale, il baricentro coincide col centro di massa. Siccome il campo gravitazionale terrestre può essere considerato uniforme con una buona approssimazione in questa tesi questi due termini verranno considerati sinonimi.

Attraverso la prima equazione cardinale è possibile definire il baricentro come quel punto che, se sottoposto a sollecitazioni esterne, si comporta come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in quel punto. Questa proprietà è valida sotto l'ipotesi che la risultante delle forze interne del sistema sia nulla, che valga quindi il principio di azione e reazione.

In una condizione di equilibrio un corpo rigido è sottoposto principalmente alla forza di gravità e alle forze e coppie di reazione. Queste ultime sono esercitate dal supporto che sostiene il corpo e, opponendosi alla forza peso, impediscono il movimento dello stesso. La forza peso, come visto in precedenza, viene applicata nel baricentro quindi, l'intensità della coppia generata sul supporto dipende dalla terna che descrive la forza peso a cui è sottoposto il corpo e dalla terna che indica la posizione del baricentro rispetto al punto di azione della coppia. Di conseguenza, a partire dalle forze di reazione è possibile calcolare la posizione del centro di massa.



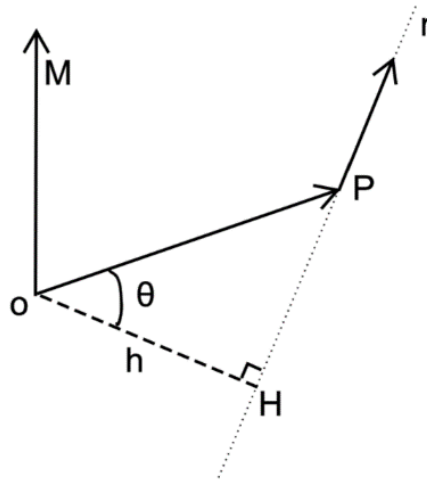


Figura 3.1 - Rappresentazione del momento di un vettore

Il momento di una forza è una grandezza inerente alla dinamica rotazionale ed è l'equivalente rotazionale del concetto di forza, matematicamente può essere descritto come segue [3].

Sia  $\vec{v}$  un vettore applicato nel punto P e O è un secondo generico punto (Figura 3.1). Si definisce momento del vettore  $\vec{v}$  rispetto al punto O, chiamato polo, il vettore

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{v}$$

La direzione del prodotto vettoriale è ortogonale al piano individuato da OP e  $\vec{v}$ , invece modulo del può anche essere calcolato dalla seguente formula:

$$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin(\theta)$$

Il prodotto vettoriale dipende quindi solo dalla componente di un vettore perpendicolare all'altro; detto OH il componente di OP perpendicolare a  $\vec{v}$ :

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{v} = \vec{OH} \times \vec{v}$$

Il momento generato dalla forza non cambia se tale forza viene applicata in un qualunque punto che appartiene alla retta individuata dal punto P e dalla direzione r.

Se ora si considera P come il baricentro e r il vettore forza peso è facile intuire che non è possibile individuare la posizione del baricentro da una singola misurazione, ma ne sono necessarie almeno due.

## 3.2 Applicazione fisica

Si consideri un corpo rigido di massa  $m$  e di centro  $p_c$ . Sia ora  $mg_0\vec{d}$  la forza gravitazionale esercitata sul baricentro, il momento della forza, rispetto al polo  $p_\Omega$  può essere calcolato come:

$$\vec{\mu}_\Omega = mg_0\vec{d} \times (p_\Omega - p_c)$$

Se ora si considera come polo  $p_\Omega$  il centro del sistema di riferimento,  $p_\Omega = 0$

$$\vec{\mu}_\Omega = mg_0\vec{d} \times (-p_c)$$

Siccome, come visto in precedenza, il momento della forza non cambia se la forza in esame viene applicata in un qualunque punto appartenente alla retta definita come  $p_c - \alpha\vec{d}$ , è possibile riscrivere l'equazione precedente come:

$$\vec{\mu}_\Omega = -mg_0\vec{d} \times (p_c - \alpha\vec{d})$$

Dove  $p_c - \alpha\vec{d}$  è il luogo dei punti in cui se si applica la forza  $mg_0\vec{d}$  si ottiene il momento  $\vec{\mu}_\Omega$ .

Si considera ora un qualunque punto  $l = [l_x \quad l_y \quad l_z]^T$  appartenente alla retta  $p_c - \vec{d}$ , la seguente relazione rimane valida:

$$\vec{\mu}_\Omega = -mg_0\vec{d} \times l$$

Si cerca ora di determinare il punto  $l$ , ma, siccome il sistema di equazioni che definisce il prodotto vettoriale è linearmente dipendente, per determinare il punto è necessario introdurre una ulteriore condizione. Al fine di semplificare i calcoli una possibile scelta è quella di considerare un valore della terna che definisce il punto uguale a zero, per esempio:

$$l_x = 0$$

Tale condizione è applicabile solo se la direzione  $\vec{d}$  della forza di gravità non è parallela al piano  $yz$ . Se questa ipotesi non è garantita si può cambiare la condizione imposta il punto:

$$l_y = 0$$

$$l_z = 0$$

Nel caso in cui la condizione sia  $l_x = 0$  il punto si calcola con la seguente formula:

$$\mu = -F \times \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -F_z & F_y \\ F_z & 0 & -F_x \\ -F_y & F_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix}$$

$$\mu_y = l_z F_x$$

$$\mu_z = -l_y F_x$$

$$l = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_z}{F_x} \\ \frac{\mu_y}{F_x} \end{bmatrix}$$

Dove  $\vec{\mu}$  e  $\vec{F}$  sono rispettivamente il momento e la forza misurati dal sensore.

Facendo N diverse misurazioni con diverse configurazioni del robot si possono ottenere N linee, le quali, in condizioni ideali, condividono un solo punto, il centro di massa:

$$\begin{aligned} l_1 - \alpha_1 \vec{d}_1 &= p_c \\ l_2 - \alpha_2 \vec{d}_2 &= p_c \\ &\dots \\ l_k - \alpha_k \vec{d}_k &= p_c \\ &\dots \\ l_N - \alpha_N \vec{d}_N &= p_c \end{aligned}$$

Siccome le misurazioni sono soggette a rumore, le linee non si intersecheranno tutte nello stesso punto e di conseguenza occorrerà trovare il punto che meglio approssima l'intersezione. Per far ciò si determinano i punti con minore distanza tra tutte le possibili coppie di linee e ne si fa la media [5].

I punti appartenenti alle due linee possono essere descritti come:

$$\begin{aligned} P &= l_1 - \alpha_1 \vec{d}_1 \\ Q &= l_2 - \alpha_2 \vec{d}_2 \end{aligned}$$

La distanza tra i due punti è:

$$PQ = l_2 - l_1 - \alpha_2 \vec{d}_2 + \alpha_1 \vec{d}_1$$

Affinché PQ rappresenti una distanza deve essere perpendicolare a  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$ :

$$\begin{aligned} \overline{PQ} \cdot \vec{d}_1 &= 0 \rightarrow (l_2 - l_1) \cdot \vec{d}_1 - \alpha_2 \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_1 + \alpha_1 \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 = 0 \\ \overline{PQ} \cdot \vec{d}_2 &= 0 \rightarrow (l_2 - l_1) \cdot \vec{d}_2 - \alpha_2 \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 + \alpha_1 \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 & -\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_1 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & -\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 - l_2) \cdot \vec{d}_1 \\ (l_1 - l_2) \cdot \vec{d}_2 \end{bmatrix}$$

Se  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  sono versori il loro modulo è unitario quindi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1 - l_2) \cdot \vec{d}_1 \\ (l_1 - l_2) \cdot \vec{d}_2 \end{bmatrix}$$

Questa matrice è singolare solo se  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  sono paralleli:

$$\begin{aligned} -1 + (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)^2 &= 0 \\ \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 &= 1 \\ |\vec{d}_1| |\vec{d}_2| \cos\theta &= 1 \\ \cos\theta &= 1 \end{aligned}$$

I vettori  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  rappresentano la direzione della forza di gravità nel sistema di riferimento del sensore e possono essere calcolati in due diversi modi:

- Prè-moltiplicando la matrice di rotazione  $R_w^s$ , dal sistema di riferimento fisso a quello del sensore, per il versore della forza di gravità nel sistema di riferimento fisso  $\vec{d} = R_w^s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ , dove  $R_w^s$  è la matrice di rotazione dal sistema di riferimento globale a quello del sensore.
- dividendo il vettore della forza, misurato dal sensore, per il suo modulo  $\vec{d} = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|}$

Il secondo metodo è preferibile in quanto può essere complesso estrarre la matrice di configurazione dal firmware del robot.

### 3.2.1 Scelta parametri di simulazione

Dal momento che i dati forniti dal sensore sono soggetti a errore, la scelta delle configurazioni del robot in cui vengono effettuate le misurazioni influirà sulla precisione del calcolo della posizione del centro di massa.

Il concetto matematico di linea retta non è sufficiente per descrivere tutti i punti in cui è possibile trovare il centro di massa; infatti, le linee rette descritte nella prima parte di questo capitolo possono presentare due tipi di errore:

- Offset, ovvero l'errore nella posizione del punto della linea con coefficiente  $\alpha$  uguale a 0
- Guadagno, che influisce sulla direzione della linea retta

Al fine di considerare questi due tipi di errore, le linee rette sono assimilate a cilindri ove ogni punto può essere un possibile baricentro. Ne consegue che l'intersezione tra due rette (ossia due cilindri) non sarà più un singolo punto, ma l'area di volume comune a entrambi i cilindri: minore sarà quest'area, maggiore sarà la precisione del sistema di misurazione.

Verrà ora trattata una possibile soluzione a questo problema di ottimizzazione, al fine di avere un approccio semplificato al problema, si considererà in un primo momento il caso bidimensionale, per poi proseguire con quello tridimensionale che permetterà di calcolare le configurazioni utilizzate dal robot in fase di misurazione.

### 3.2.1.1 Caso bidimensionale

Si consideri un punto all'interno del piano che rappresenta il baricentro, tale punto è l'intersezione delle linee ottenute nelle varie misurazioni.

Siccome le misurazioni sono affette da errore, le linee non passano realmente per il punto, nel modello si considererà il luogo dei punti tra due rette parallele e distanziate di  $\varepsilon$  dalla linea ideale.

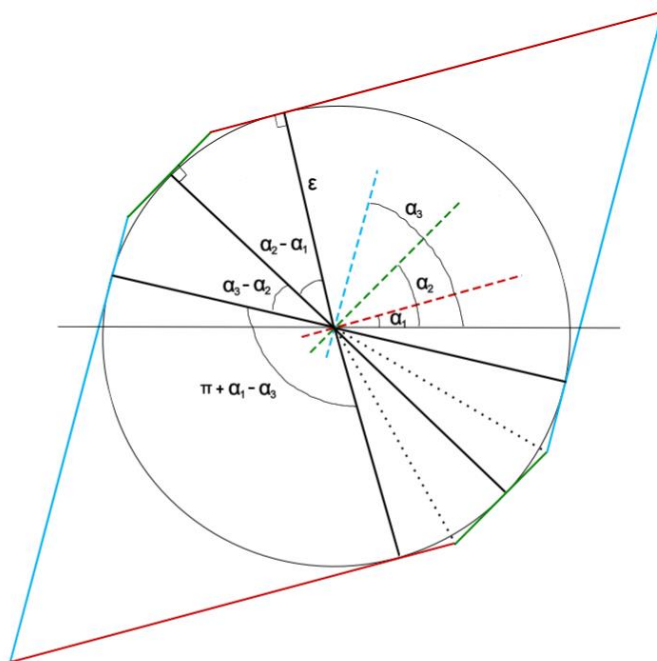


Figura 3.2 - Unione dei luoghi dei punti appartenenti alle diverse linee.

Il baricentro misurato potrà quindi trovarsi in un qualsiasi punto all'interno dello spazio inteso come l'unione di tutti i luoghi dei punti ottenuti (Figura 3.2). Minore sarà questa superficie e più precisa sarà la misurazione.

Si consideri ora di avere un numero infinito di misurazioni, tutte con angoli diversi, la superficie ottenuta sarà un cerchio di raggio  $\varepsilon$  centrato sul baricentro.

L'obiettivo è quindi trovare gli angoli delle linee tali per cui il poligono ottenuto è quello che meglio approssima l'area del cerchio inscritto.

Si procede con il calcolo dell'area del poligono ottenuto da n linee. Partendo dal caso di tre linee, rappresentato in figura, si può notare come:

$$\begin{aligned} A_{tot} &= 2(A_1 + A_2 + A_3) \\ A_1 &= \varepsilon^2 tg\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \\ A_2 &= \varepsilon^2 tg\left(\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}\right) \\ A_3 &= \varepsilon^2 tg\left(\frac{\pi + \alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \end{aligned}$$

In generale si ottiene che l'area di un poligono irregolare formato da n linee è data dalla seguente formula:

$$\begin{aligned} A_{tot} &= 2\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n tg\left(\frac{\Delta\alpha_i}{2}\right) \\ \Delta\alpha_i &= \alpha_{i+1} - \alpha_i \quad \forall i \in [1..n-1] \\ \Delta\alpha_n &= \pi + \alpha_1 - \alpha_n \end{aligned}$$

Per trovare i valori di  $\alpha_2$  e  $\alpha_1$  che minimizzano l'area del poligono irregolare se ne calcola la derivata sfruttando la *Lagrange multiplier technique* [4]:

Il sistema e':

$$\begin{aligned} f: & 2\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n tg\left(\frac{\Delta\alpha_i}{2}\right) - \zeta h \\ h: & \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i - \pi \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\cos^2(\Delta\alpha_1/2)} - \zeta = 0 \\ \frac{1}{\cos^2(\Delta\alpha_2/2)} - \zeta = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\cos^2(\Delta\alpha_n/2)} - \zeta = 0 \\ \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i - \pi = 0 \end{array} \right.$$

Si ottiene che gli angoli che minimizzano l'area sono quelli che rispettano i seguenti vincoli:

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \dots = \Delta\alpha_n = \Delta\alpha$$

$$\Delta\alpha = \pi/n$$

Si dimostra quindi che, nel caso bidimensionale, il poligono che meglio approssima l'area del cerchio è quello regolare.

### 3.2.1.2 Caso tridimensionale

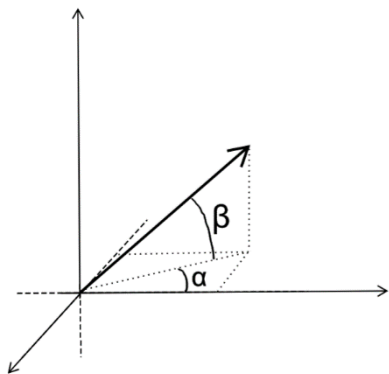


Figura 3.3 - Rappresentazione sistema di coordinate sferico

Si consideri la linea centrata sul baricentro e con direzione descritta da alfa e beta, tale linea rappresenta l'asse del cilindro di raggio  $\varepsilon$  che modella l'errore. Considerando un numero infinito di misurazioni, il volume ottenuto è quello di una sfera di raggio  $\varepsilon$  centrata sul baricentro.

Si prenda ora la proiezione ortogonale di questa sfera sui tre piani  $xy$   $xz$   $zy$  (Figura 3.4), su ogni piano ci si riconduce alla risoluzione del problema nel caso bidimensionale.

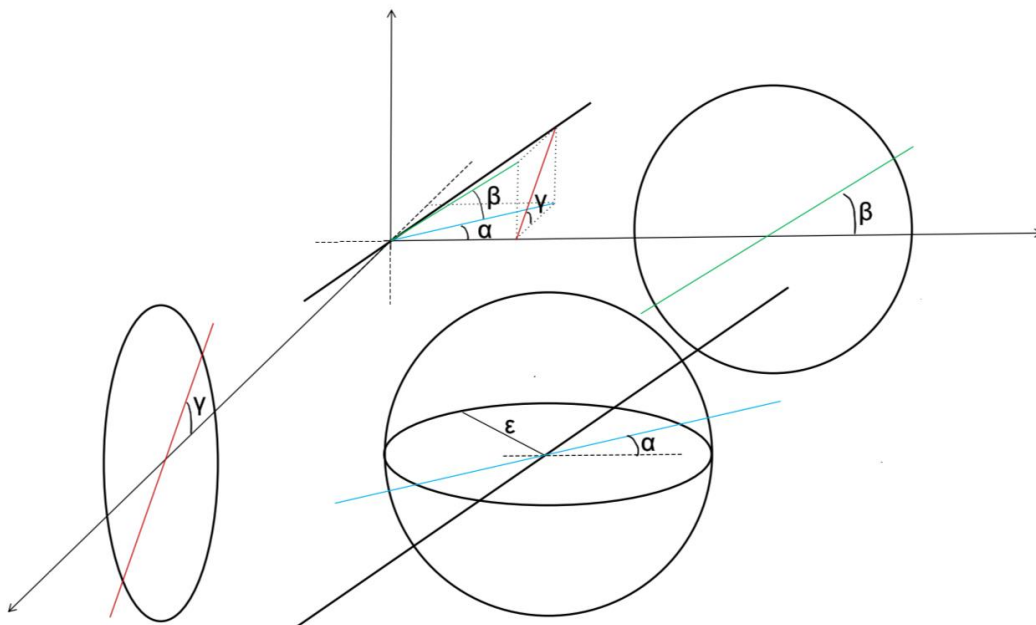


Figura 3.4 - Proiezione ortogonale della sfera di raggio  $\varepsilon$  e della linea rappresentante la direzione della forza misurata dal sensore

Modificando gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  si potranno modificare direttamente solo la direzione delle linee sui piani bidirezionali  $zx$  e  $xy$ , l'angolo sul piano  $\gamma$  si ottiene da una composizione degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$\gamma = \text{atg} \left( \frac{\text{tg}\beta}{\text{sin}\alpha} \right)$$

Per questa ragione utilizzando la configurazione che permette di minimizzare le superfici sui piani  $xy$  e  $zx$  il volume che risultante non è il minore possibile.

Al fine di ottenere gli angoli ottimali occorre individuare la sequenza di angoli alfa, beta e gamma che minimizzano la somma delle tre aree, utilizzando come condizione iniziale la configurazione che minimizza le superfici sui piani  $xz$  e  $xy$ .

$$A_{sum} = A_{\alpha} + A_{\beta} + A_{\gamma}$$

$$A_{\alpha} = 2\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \text{tg} \left( \frac{\Delta\alpha_i}{2} \right)$$

$$A_{\beta} = 2\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \text{tg} \left( \frac{\Delta\beta_i}{2} \right)$$

$$A_{\gamma} = 2\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \text{tg} \left( \frac{\Delta\gamma_i}{2} \right)$$

Nella seguente immagine vengono mostrati gli spazi ottenuti utilizzando un diverso numero di linee e il volume che possiedono. Si può notare come utilizzare la configurazione ottimizzata permetta di diminuire il volume.

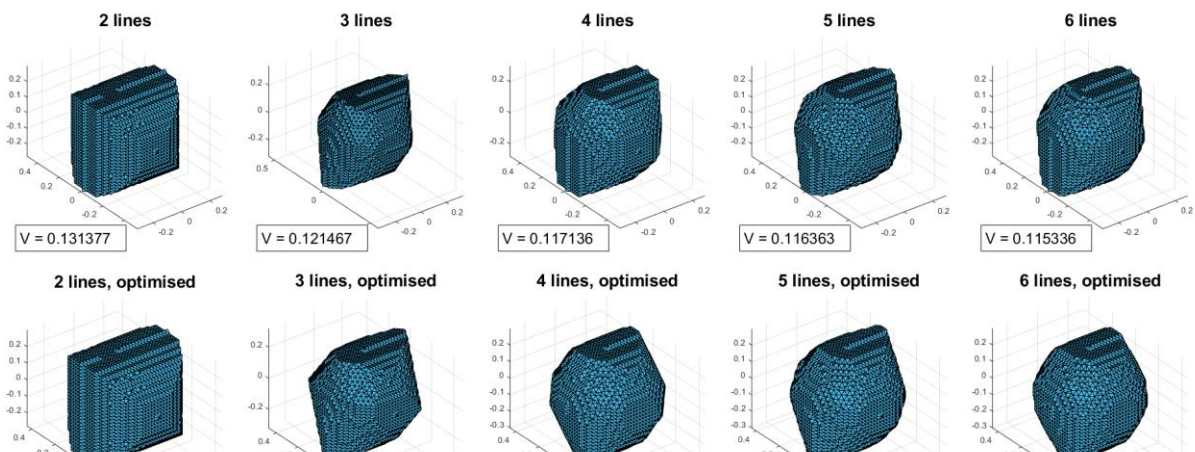


Figura 3.5 - Rappresentazione dei volumi ottenuti da diverse configurazioni degli esperimenti. Nelle righe inferiore le configurazioni delle misurazioni sono ottenute per mezzo dell'algoritmo ottimizzato



Per ottenere la rotazione che l'oggetto del test dovrà avere al fine di subire una forza di gravità secondo la direzione descritta da  $\alpha$  e  $\beta$  si considera prima una rotazione di  $z$  di  $\alpha$  gradi e poi una rotazione sull'asse  $x$  di  $\beta - \pi/2$ :

$$R_{\alpha z} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\beta x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\beta) & -\cos(\beta) \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$R_{\beta x} R_{\alpha z} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\beta)\cos(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

Infine, sfruttando il tool *"inverse kinematic"* di matlab, è possibile ottenere le configurazioni del robot che permettono di ottenere queste angolazioni (Figura 3.6).

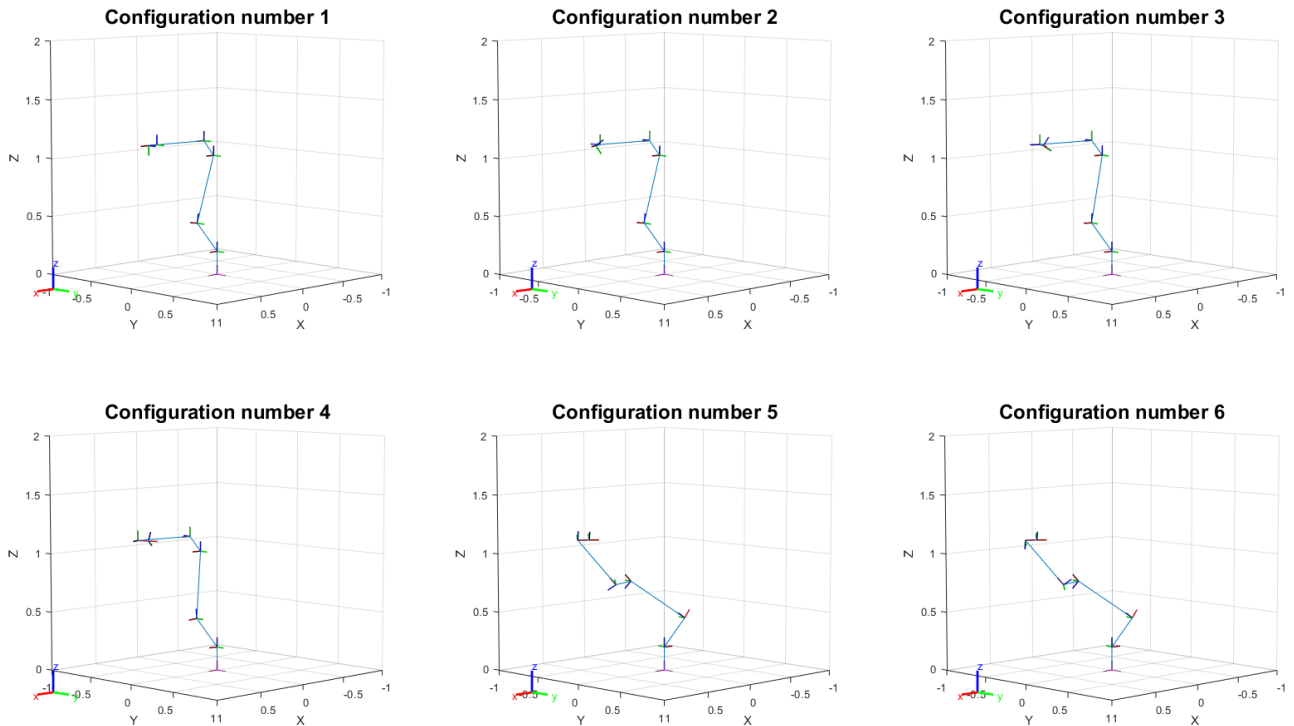


Figura 3.6. Sequenza delle configurazioni del robot

# 4.

## Esperimento dinamico

In questo capitolo verrà descritto come misurare il tenore di inerzia: dopo una breve disamina delle equazioni del moto, si descrive l'algoritmo di misurazione all'interno della sezione "Applicazione fisica".

## 4.1 Introduzione teorica

L'inerzia è una proprietà di un qualsiasi oggetto fisico che si manifesta come la resistenza a qual si voglia modifica alla velocità, sia essa in modulo (per esempio durante una frenata) o in direzione (per esempio durante una curva) [2]. A livello empirico questo aspetto del moto si può osservare nella tendenza di un corpo nel seguire una traiettoria rettilinea quando nessuna forza viene ad esso applicata. Comprendere la natura del moto dei corpi è fondamentale per comprendere le interazioni, e quindi le forze, che ogni corpo scambia con l'ambiente circostante.

Prima di tutto è necessario fare una distinzione tra forze esterne e interne. Le forze interne di un corpo sono quelle forze che permettono di tenere unito il corpo stesso; ogni corpo può infatti essere visto come l'unione di un numero infinito di particelle, che rimangono "insieme" grazie alle forze interne. Ogni particella imprime su quelle attorno una forza e ne subisce una uguale e contraria, per questa ragione la risultante delle forze interne è nulla e non influisce sul moto. Le forze esterne sono invece quelle applicate al corpo da altri corpi o dall'ambiente, un esempio può essere la forza di gravità. Queste sono le cause del moto dei corpi, come un corpo reagisce a queste forze dipende dalle proprietà intrinseche dello stesso.

La quantità di moto, anche detto momento lineare, di un oggetto è una grandezza vettoriale definita come il prodotto della massa dell'oggetto per la sua velocità:

$$q = m\vec{v}$$

Si tratta di una quantità conservativa: se la risultante delle forze applicate al corpo è nulla, allora il momento lineare resta costante come stabilito dal principio di conservazione della quantità di moto. Da questa grandezza fisica è possibile ricavare l'equazione del moto secondo la seconda legge di Newton, per la quale la risultante delle forze esterne è uguale alla variazione della quantità di moto:

$$\sum_i f_i = \frac{d}{dt}(q)$$

Da cui, nel caso in cui la massa  $m$  sia costante, si ottiene:

$$F_e = m\vec{a}$$

Questa equazione è fondamentale per lo studio del moto di un sistema, ma è insufficiente, in quanto considera solo il momento di traslazione e non di rotazione.

Per quanto riguarda quest'ultimo si introduce il concetto di momento angolare. Il momento angolare, o momento della quantità di moto, è una grandezza fisica di tipo vettoriale che rappresenta la quantità che si conserva in un sistema fisico sottoposto a rotazioni spaziali [3]. Costituisce quindi l'equivalente per le rotazioni della quantità di moto per le traslazioni. Nella meccanica newtoniana il momento angolare  $L$  rispetto a un polo  $\Omega$  di un punto materiale è definito come il prodotto vettoriale tra il valore che esprime la posizione  $\vec{p}$  del punto  $\Omega$  e il vettore quantità di moto  $q$ :

$$L_{\Omega} = \vec{p} \times q$$

Per i sistemi continui, come nel caso di un corpo, il momento angolare totale è definito come la somma di tutti gli infinitesimi momenti angolari:

$$L_{\Omega} = \int_V \rho(\vec{p} \times q) dV$$

Se le particelle formano un corpo rigido, l'espressione del momento angolare rispetto al centro di massa può essere ulteriormente semplificata, in questo caso infatti l'espressione diventerà analoga a quella vista nel caso del momento lineare e sarà il prodotto del tensore di inerzia moltiplicato per la terna che definisce la velocità angolare

$$L = I\omega$$

L'inerzia è una proprietà del corpo che dipende non solo dal materiale, ma anche dalla geometria che lo caratterizza [3]. Se si considera un asse  $r$  passante per il polo  $\Omega$ , il momento di inerzia del corpo rispetto alla linea è definito dal valore positivo:

$$I_r = \int_V d^2(p) \rho dV$$

Dove  $d(p)$  è la distanza di una particella infinitesimale del corpo dalla linea  $r$ , questa espressione può essere semplificata dalla seguente formula

$$I_r = r^T \left( \int_V S^t(p) S(p) \rho dV \right) r = r^T I_{\Omega} r$$

$S(\cdot)$  è la matrice skew simmetrica rispetto al punto  $p$ , invece  $I_{\Omega}$  è una matrice simmetrica e positiva chiamata comunemente tensore di inerzia relativo al polo  $O$ . Questa matrice si può riscrivere nel seguente modo:

$$I_{\Omega} = \begin{bmatrix} \int_V (p_y^2 + p_z^2) \rho dV & - \int_V p_x p_y \rho dV & - \int_V p_x p_z \rho dV \\ * & \int_V (p_x^2 + p_z^2) \rho dV & - \int_V p_y p_z \rho dV \\ * & * & \int_V (p_x^2 + p_y^2) \rho dV \end{bmatrix}$$

$$I_{\Omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ * & I_{yy} & -I_{yz} \\ * & * & I_{zz} \end{bmatrix}$$

I parametri  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  sono chiamati momenti di inerzia rispetto agli assi che identificano il *reference frame*, invece  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  e  $I_{yz}$  sono chiamati prodotti di inerzia. Il valore del tensore di inerzia dipende sia dal polo che dal sistema di riferimento, nel caso in un cui il sistema di riferimento ruoti per mezzo di una matrice di rotazione  $R$ , il tensore di inerzia  $I'_O$  nel nuovo sistema di riferimento è legato al precedente valore dell'inerzia  $I_O$  dalla seguente formula:

$$I_{\Omega} = R I'_O R^T$$

Siccome l'inerzia è una matrice simmetrica definita positiva, esiste sempre un *reference frame* per cui i prodotti di inerzia sono nulli, tale sistema di coordinate è chiamato *principal frame*, relativo al polo  $\Omega$ .

Se invece è il polo a cambiare posizione il tensore di inerzia cambia secondo l'equazione definita dal teorema di Steiener:

$$I'_{\Omega} = I_{\Omega} + m S^T(p') S(p')$$

Analogamente a quanto visto per il momento lineare la seconda legge di Newton stabilisce che la risultante dei momenti delle forze di un corpo è uguale alla variazione di momento angolare nel tempo:

$$\sum_i \mu_i = \frac{d}{dt}(L) = \frac{d}{dt}(I_{\Omega} \omega)$$

Dove  $I$  è l'inerzia definita nel sistema di coordinate fisso e  $\omega$  è la terna che definisce la velocità angolare; la direzione di questo vettore indica l'asse attorno cui il corpo ruota, mentre il modulo la velocità di rotazione. Siccome il corpo ruota, l'inerzia vista nel sistema di riferimento fisso varia, l'equazione del moto avrà quindi due diversi termini. Il primo proviene dalla derivazione della velocità angolare e indica la resistenza alla variazione nella stessa. Il secondo si ottiene derivando il tensore di inerzia e indica la tendenza di un corpo a opporsi al cambiamento di orientamento (effetto giroscopico). L'equazione del moto si ottiene sommando questi due termini:

$$\mu_{\Omega} = I_{\Omega}\dot{\omega} + \omega \times (I_{\Omega}\omega)$$

Dove  $\mu_{\Omega}$  è la risultante dei momenti delle forze sul polo  $\Omega$ :

$$\mu_{\Omega} = \mu + f \times r_{s,c}$$

## 4.2 Algoritmo

L'equilibrio delle forze tra sensore e corpo testato può essere espresso, nel sistema di riferimento fisso, dalla seguente equazione [6]:

$$\mu + f \times r_{s,C} = \bar{I}_w \dot{\omega} + \omega \times (\bar{I}_w \omega)$$

Dove:

- $\mu$  e  $f$  sono rispettivamente il momento e la forza esercitate dal sensore ruotate nel sistema di riferimento fisso
- $r_{s,C}$  è il vettore dall'origine del sensore al centro di massa.
- $\dot{\omega}$  e  $\omega$  sono rispettivamente accelerazione e velocità angolari
- $\bar{I}_w$  è l'inerzia espressa nel sistema di riferimento fisso, si può calcolare partendo dall'inerzia nel sistema di riferimento del sensore  $I_s$  tramite la relazione  $\bar{I}_w = R_s^w \bar{I}_s R_w^s$ .

Sia  $R_w^s$  la matrice di rotazione dal sistema fisso a quello del sensore, se la pre-moltiplico alla precedente relazione ottengo:

$$R_w^s \mu + R_w^s (f \times r_{s,C}) = R_w^s \bar{I}_w \dot{\omega} + R_w^s (\omega \times (\bar{I}_w \omega))$$

Siccome il prodotto vettoriale è invariante rispetto alle rotazioni ( $R(a \times b) = Ra \times Rb$ ):

$$\mu_s + (R_w^s f) \times (R_w^s r_{s,C}) = R_w^s \bar{I}_w \dot{\omega} + (R_w^s \omega) \times (R_w^s \bar{I}_w \omega)$$

Si considera la relazione  $\bar{I}_w = R_s^w \bar{I}_s R_w^s$ :

$$\mu_s + f_s \times (R_w^s r_{s,C}) = R_w^s R_s^w \bar{I}_s R_w^s \dot{\omega} + (R_w^s \omega) \times (R_w^s R_s^w \bar{I}_s R_w^s \omega)$$

$$\mu_s + f_s \times r_C = \bar{I}_s R_w^s \dot{\omega} + (R_w^s \omega) \times (\bar{I}_s R_w^s \omega)$$

$$\mu_s + f_s \times r_C = \bar{I}_s \dot{\omega}_s + \omega_s \times (\bar{I}_s \omega_s)$$

- $\mu_s$  e  $f_s$  sono rispettivamente il momento e la forza misurate dal sensore.
- $r_C$  è la posizione del centro di massa rispetto al sensore, misurata nel capitolo precedente.
- $I_s$  è l'inerzia nel sistema di riferimento del sensore,  $\bar{I}_s = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$ .
- $\dot{\omega}_s$  e  $\omega_s$  sono rispettivamente l'accelerazione angolare e la velocità angolare nel sistema di riferimento del sensore.

Partendo dall'equazione appena ottenuta si cerca di riscriverla in maniera che sia lineare rispetto ai componenti della matrice di inerzia:

$$M = A \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{zy} \\ I_{xz} \\ I_{xy} \end{bmatrix} = A \theta_I$$

Per fare ciò si parte dal lato destro dell'equazione:

$$\bar{I}_s \dot{\omega}_s + \omega_s \times (\bar{I}_s \omega_s)$$

Considerando  $\omega_s = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ , si espandono le matrici e risolvono i calcoli:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z \\ I_{xy}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z \\ I_{xz}\dot{\omega}_x + I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{xz}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z \\ I_{xy}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z \\ I_{xz}\dot{\omega}_x + I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_z(I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) + \omega_y(I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z) \\ \omega_z(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) - \omega_x(I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z) \\ -\omega_y(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \omega_x(I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) \end{bmatrix}$$

A questo punto è sufficiente raccogliere tutti gli elementi dell'inerzia in una matrice 6x1:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x & -\omega_y\omega_z & \omega_y\omega_z & \omega_y^2 - \omega_z^2 & \dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y & \dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \dot{\omega}_y & -\omega_x\omega_z & \dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y & \omega_z^2 - \omega_x^2 & \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z \\ -\omega_x\omega_y & \omega_x\omega_y & \dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z & \dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z & \omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{zy} \\ I_{xz} \\ I_{xy} \end{bmatrix}$$

La prima matrice può essere nominata  $A$  in modo da ottenere la stessa struttura lineare introdotta in precedenza. La matrice  $A$  può essere vista come l'unione di due matrici 3x3:

$$A = [L \ R]$$



$$L = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x & -\omega_y\omega_z & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \dot{\omega}_y & -\omega_x\omega_z \\ -\omega_x\omega_y & \omega_x\omega_y & \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \omega_y^2 - \omega_z^2 & \dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y & \dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z \\ \dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y & \omega_z^2 - \omega_x^2 & \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z \\ \dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z & \dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z & \omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix}$$

Dove  $L$  si moltiplica con gli elementi della diagonale dell'inerzia mentre  $R$  moltiplica i prodotti di inerzia. Nel caso in cui si voglia fare una stima del tensore di inerzia semplificato, dove i prodotti di inerzia sono considerati nulli, è sufficiente considerare solo la matrice  $L$ .

Sia  $L$  e  $R$  hanno determinante diverso da 0 solo se il vettore accelerazione angolare  $\dot{\omega}_s$  è diverso da 0. Per ulteriori informazioni in merito al calcolo del determinante si rimanda alla fine del capitolo.

Il sistema di equazioni:

$$M = A \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{zy} \\ I_{xz} \\ I_{xy} \end{bmatrix}$$

È definito da 3 equazioni e 6 incognite, per cui al fine di risolverlo è necessario introdurre 3 ulteriori equazioni. Queste vengono prese da una successiva misurazione, definendo così una matrice estesa:

$$A_e = \begin{bmatrix} L_1 & R_1 \\ L_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

Dove  $L_2$  e  $R_2$  sono ottenuti dalle stime della velocità angolare e dell'accelerazione angolare nell'istante di tempo successivo a quello di  $L_1$  e  $R_1$ .

Affinché il sistema sia risolvibile, la matrice  $A_e$  deve essere a determinante diverso da zero [7]; Sfortunatamente, è dimostrabile che  $A_e$  è singolare nel caso in cui velocità abbia la stessa direzione nei due istanti di tempo. Di conseguenza, la traiettoria seguita dal robot durante la misurazione non è indifferente e bisognerà utilizzare almeno due joint in modo tale da avere velocità e accelerazione angolare con direzioni diverse, generando così una traiettoria dove la terna della velocità angolare non cambia solo in modulo, ma anche in direzione.

Questo algoritmo richiede un minimo di due misurazioni, ma a causa del rumore presente nell'ambiente è bene aumentarle, per aumentarne la precisione. La strategia

adottata è quella di andare a campionare velocità, accelerazioni e momenti angolari a intervalli di tempo regolari. A questo punto è possibile combinare le matrici derivanti dalle N misurazioni, ottenendo così il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} \theta_I$$

Dove:

- $M_i$  è calcolato dall'equazione  $\mu_{si} + f_{si} \times r_{C_i}$ , in cui i valori del momento e della forza sono ottenuti alla i-esima misurazione.
- $A_i$  è la matrice A ottenuta alla i-esima misurazione

- $\theta_I = \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{zy} \\ I_{xz} \\ I_{xy} \end{bmatrix}$

Questo sistema viene risolto con il metodo dei minimi quadrati, si cercherà quindi la matrice  $\theta_I$  che meglio minimizza la seguente equazione di ottimizzazione:

$$\Theta(\theta_I) = \sum_i^N (M_i - A_i \theta_I)^2$$

## 4.3 Dimostrazioni determinanti

In questa sezione viene trattato il calcolo dei determinanti delle matrici viste nella sezione precedente (3.2). In particolare, delle matrici denominate "L" e "R", da cui si ottiene che il determinante è nullo nel caso in cui sia nulla l'accelerazione angolare. Per quanto riguarda la matrice A, non verrà calcolato direttamente il determinante, ma si dimostrerà che la matrice è singolare nel caso in cui velocità e accelerazione angolare abbiano la stessa direzione.

### 4.3.1 Determinante L

$$L = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x & -\omega_y\omega_z & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \dot{\omega}_y & -\omega_x\omega_z \\ -\omega_x\omega_y & \omega_x\omega_y & \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$

$$\det(L) = \dot{\omega}_x(\omega_y\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_z\omega_x\omega_y) - \omega_y\omega_z(\omega_x\omega_z\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z\omega_x\omega_z) + \omega_y\omega_z(\omega_x\omega_z\omega_x\omega_y + \dot{\omega}_y\omega_x\omega_y)$$

$$\det(L) = \dot{\omega}_x\dot{\omega}_y\dot{\omega}_z + \dot{\omega}_x\omega_x^2\omega_y\omega_z - \omega_x^2\omega_y^2\omega_z^2 + \dot{\omega}_z\omega_x\omega_y\omega_z^2 + \omega_x^2\omega_y^2\omega_z^2 + \dot{\omega}_y\omega_x\omega_y^2\omega_z$$

$$\det(L) = \dot{\omega}_x\dot{\omega}_y\dot{\omega}_z + \dot{\omega}_x\omega_x^2\omega_y\omega_z + \dot{\omega}_y\omega_x\omega_y^2\omega_z + \dot{\omega}_z\omega_x\omega_y\omega_z^2$$

Il determinante è uguale a 0 se l'accelerazione angolare è uguale a 0.

### 4.3.2 Determinante R

$$R = \begin{bmatrix} \omega_y^2 - \omega_z^2 & \dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y & \dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z \\ \dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y & \omega_z^2 - \omega_x^2 & \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z \\ \dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z & \dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z & \omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(R) &= (\omega_y^2 - \omega_z^2) \left( (\omega_z^2 - \omega_x^2)(\omega_x^2 - \omega_y^2) - (\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z)(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) \right) \\ &\quad + (\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) \left( (\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z)(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z) - (\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y)(\omega_x^2 - \omega_y^2) \right) \\ &\quad + (\dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z) \left( (\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y)(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - (\omega_z^2 - \omega_x^2)(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(R) &= (\omega_y^2 - \omega_z^2)(\omega_x^2\omega_z^2 - \omega_y^2\omega_z^2 - \omega_x^4 + \omega_x^2\omega_y^2 - \dot{\omega}_x^2 + \omega_y^2\omega_z^2) \\ &\quad + (\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y)(\dot{\omega}_x\dot{\omega}_y + \dot{\omega}_x\omega_x\omega_z + \dot{\omega}_y\omega_y\omega_z + \omega_x\omega_y\omega_z^2 - \dot{\omega}_z\omega_x^2 + \dot{\omega}_z\omega_y^2 \\ &\quad + \omega_x^3\omega_y - \omega_x\omega_y^3) \\ &\quad + (\dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z)(\dot{\omega}_x\dot{\omega}_z - \dot{\omega}_z\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x\omega_x\omega_y + \omega_x\omega_y^2\omega_z - \dot{\omega}_y\omega_z^2 - \omega_x\omega_z^3 \\ &\quad + \dot{\omega}_y\omega_x^2 + \omega_x^3\omega_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(R) &= \dot{\omega}_x^2(\omega_z^2 - \omega_y^2) + \dot{\omega}_y^2(\omega_x^2 - \omega_z^2) + \dot{\omega}_z^2(\omega_y^2 - \omega_x^2) + 2\dot{\omega}_x\dot{\omega}_y\dot{\omega}_z + 2\dot{\omega}_x\omega_x^2\omega_y\omega_z \\ &\quad + 2\dot{\omega}_y\omega_x\omega_y^2\omega_z + 2\dot{\omega}_z\omega_x\omega_y\omega_z^2 \end{aligned}$$

$$\det(R) = \dot{\omega}_x^2(\omega_z^2 - \omega_y^2) + \dot{\omega}_y^2(\omega_x^2 - \omega_z^2) + \dot{\omega}_z^2(\omega_y^2 - \omega_x^2) + 2 \det(A_1)$$

Il determinante è uguale a 0 se l'accelerazione angolare è uguale a 0.

### 4.3.3 Dimostrazione singolarità matrice estesa

La matrice estesa è una matrice 6x6 ottenuta dalle misurazioni di velocità e accelerazione angolare in due istati di tempo diversi:

$$A_e = \begin{bmatrix} A_i \\ A_{i+1} \end{bmatrix}$$

Una matrice ha determinante uguale a 0 se e solo se le righe e le colonne che la definiscono sono linearmente dipendenti [7].

Le matrici  $A_t$  e  $A_{t+1}$  hanno le righe linearmente indipendenti in quanto composte da 2 matrici con determinate diverso da 0:

$$A_i = [L_i \quad R_i]$$

Bisogna ora dimostrare che esiste una combinazione lineare delle prime 3 righe che permetta di ottenere le seconde 3.

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{x,i+1} \\ -\omega_{y,i+1}\omega_{z,i+1} \\ \omega_{y,i+1}\omega_{z,i+1} \end{bmatrix} = L_i^T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{y,i+1}^2 - \omega_{z,i+1}^2 \\ \dot{\omega}_{z,i+1} + \omega_{y,i+1}\omega_{x,i+1} \\ \dot{\omega}_{y,i+1} - \omega_{z,i+1}\omega_{x,i+1} \end{bmatrix} = R^T L^{-T} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{x,i+1} \\ -\omega_{y,i+1}\omega_{z,i+1} \\ \omega_{y,i+1}\omega_{z,i+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{y,i+1}^2 - \omega_{z,i+1}^2 \\ \dot{\omega}_{z,i+1} + \omega_{y,i+1}\omega_{x,i+1} \\ \dot{\omega}_{y,i+1} - \omega_{z,i+1}\omega_{x,i+1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{x,i+1} \\ -\omega_{y,i+1}\omega_{z,i+1} \\ \omega_{y,i+1}\omega_{z,i+1} \end{bmatrix}^T L^{-1} R$$

Se questa equazione è vera allora la quarta riga è linearmente dipendente dalle prime 3.

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z + X & \dot{\omega}_z \omega_y \omega_z + Y & -\dot{\omega}_y \omega_y \omega_z + Z \\ -\dot{\omega}_z \omega_x \omega_z + X & \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z + Y & \dot{\omega}_x \omega_x \omega_z + Z \\ \dot{\omega}_y \omega_x \omega_y + X & -\dot{\omega}_x \omega_x \omega_y + Y & \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y + Z \end{bmatrix}$$

- $X = \omega_x^2 \omega_y \omega_z$
- $Y = \omega_x \omega_y^2 \omega_z$
- $Z = \omega_x \omega_y \omega_z^2$

- $\det(L) = \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z + \dot{\omega}_x \omega_x^2 \omega_y \omega_z + \dot{\omega}_y \omega_x \omega_y^2 \omega_z + \dot{\omega}_z \omega_x \omega_y \omega_z^2$

$$C = L^{-1}R$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

- $c_{11} = \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z (\omega_y^2 - \omega_z^2) + \omega_y \omega_z (\dot{\omega}_z^2 - \dot{\omega}_y^2)$
- $c_{21} = \dot{\omega}_z \omega_x \omega_z^3 + \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z^2 - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z \omega_x \omega_y + \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y \omega_x \omega_z + \dot{\omega}_x \omega_x^2 \omega_z^2 + \dot{\omega}_y \omega_x \omega_y \omega_z^2$
- $c_{31} = \dot{\omega}_y \omega_x \omega_y^3 + \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y^2 - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z \omega_x \omega_y + \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y \omega_x \omega_z + \dot{\omega}_x \omega_x^2 \omega_y^2 + \dot{\omega}_z \omega_x \omega_y^2 \omega_z$
- $c_{12} = \dot{\omega}_z \omega_y \omega_z^3 + \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z^2 - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y \omega_y \omega_z + \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z \omega_x \omega_y + \dot{\omega}_y \omega_y^2 \omega_z^2 + \dot{\omega}_x \omega_x \omega_y \omega_z^2$
- $c_{22} = \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z (\omega_x^2 - \omega_z^2) + \omega_x \omega_z (\dot{\omega}_z^2 - \dot{\omega}_x^2)$
- $c_{32} = \dot{\omega}_x \omega_x^3 \omega_y + \dot{\omega}_x^2 \dot{\omega}_y - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y \omega_y \omega_z + \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z \omega_x \omega_y + \dot{\omega}_y \omega_x^2 \omega_y^2 + \dot{\omega}_z \omega_x^2 \omega_y \omega_x$
- $c_{13} = \dot{\omega}_y \omega_y^3 \omega_z + \dot{\omega}_y^2 \dot{\omega}_z - \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z \omega_x \omega_z + \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z \omega_y \omega_z + \dot{\omega}_z \omega_y^2 \omega_z^2 + \dot{\omega}_x \omega_x \omega_y^2 \omega_z$
- $c_{23} = \dot{\omega}_x \omega_x^3 \omega_z + \dot{\omega}_x^2 \dot{\omega}_z - \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z \omega_x \omega_z + \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z \omega_y \omega_z + \dot{\omega}_z \omega_x^2 \omega_z^2 + \dot{\omega}_y \omega_x^2 \omega_y \omega_x$
- $c_{33} = \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y (\omega_y^2 - \omega_x^2) + \omega_x \omega_y (\dot{\omega}_x^2 - \dot{\omega}_y^2)$

Se velocità e accelerazione angolare hanno la stessa direzione si possono scrivere nella seguente forma:

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{d}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_0 = \dot{\omega}_0 \vec{d}$$

Siccome velocità e accelerazione angolare hanno la stessa direzione, questa non cambia nel tempo:

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{d}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_1 = \dot{\omega}_1 \vec{d}$$

Se sostituisco questi valori nella matrice  $C$

- $c_{11} = 0$
- $c_{21} = \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x d_z^4 + \dot{\omega}_0^3 d_x d_z^2 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^3 d_z^2 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x d_y^2 d_z^2$
- $c_{31} = \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x d_y^4 + \dot{\omega}_0^3 d_x d_y^2 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^3 d_y^2 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x d_y^2 d_z^2$
- $c_{12} = \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_y d_z^4 + \dot{\omega}_0^3 d_y d_z^2 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_y^3 d_z^2 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^2 d_y d_z^2$
- $c_{22} = 0$
- $c_{32} = \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^4 d_y + \dot{\omega}_0^3 d_x^2 d_y + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_y^3 d_z^2 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^2 d_y d_z^2$
- $c_{13} = \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_y^4 d_z + \dot{\omega}_0^3 d_y^2 d_z + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_y^2 d_z^3 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^2 d_y^2 d_z$
- $c_{23} = \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^4 d_z + \dot{\omega}_0^3 d_x^2 d_z + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^2 d_z^3 + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^2 d_y^2 d_z$
- $c_{33} = 0$

$$\det(L) \begin{bmatrix} \omega_1^2 d_y^2 - \omega_1^2 d_z^2 \\ \dot{\omega}_1 d_z + \omega_1^2 d_x d_y \\ \dot{\omega}_1 d_y - \omega_1^2 d_x d_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 d_x \\ -\omega_1^2 d_y d_z \\ \omega_1^2 d_y d_z \end{bmatrix}^T C$$

$$\det(L) = \dot{\omega}_0^3 d_x d_y d_z + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x^2 d_y d_z + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x d_y^2 d_z + \dot{\omega}_0 \omega_0^4 d_x d_y d_z^2$$

Risolvendo i calcoli si dimostra che il lato sinistro dell'equazione e quello destro sono uguali, il sistema è quindi linearmente dipendente.

Per avere quindi una matrice con determinante diverso da 0 è necessario avere una direzione della velocità e dell'accelerazioni angolari diverse.

## 5.

## Simulazione

In questo capitolo è illustrata la modalità di realizzazione della simulazione che ha permesso di testare gli algoritmi descritti precedentemente. La simulazione è principalmente incentrata nella realizzazione del modello del braccio robotico presente nel laboratorio di robotica, il “*Comau Smart Six*”. Il corpo da testare sarà trattato come un generico corpo rigido, avente i propri parametri di inerzia, collegato direttamente all’*end-effector*. Una volta realizzato il modello del braccio robotico, i giunti seguiranno delle traiettorie specifiche e tali da ottenere il movimento desiderato. Le forze generate dall’*end-effector*, così come le velocità e le accelerazioni a cui è sottoposto, verranno successivamente importate su *Matlab*, al fine di utilizzarle per testare la correttezza degli algoritmi descritti in precedenza. Nella seconda parte di questo capitolo vengono invece descritte le strategie adottate per aggiungere il rumore al modello, necessario al fine di ottenere delle misurazioni più realistiche. L’ultima parte presenterà invece i risultati ottenuti dalla simulazione.

Il software scelto per la simulazione è Modelica [8], in quanto l’approccio modulare fornito dal software permette una maggiore semplicità nello sviluppo del modello del braccio robotico.



## 5.1 Creazione del modello di simulazione

Modelica è un linguaggio di programmazione orientato agli oggetti che permette di descrivere sistemi fisici tramite equazioni algebriche, differenziali e discrete.

Per la realizzazione del modello del robot è stata utilizzata la libreria di meccanica *multibody* e quella relativa alla meccanica rotazionale. La prima permette la modellazione di componenti meccanici tridimensionali, risulta quindi adatto per la modellazione della struttura del robot. La seconda invece permette di modellare sistemi di meccanica di rotazione, necessaria per modellare il movimento dei giunti.

Per realizzare la modello sono stati sviluppati due blocchi principali chiamati “*Axes*” e “*Joint*”.

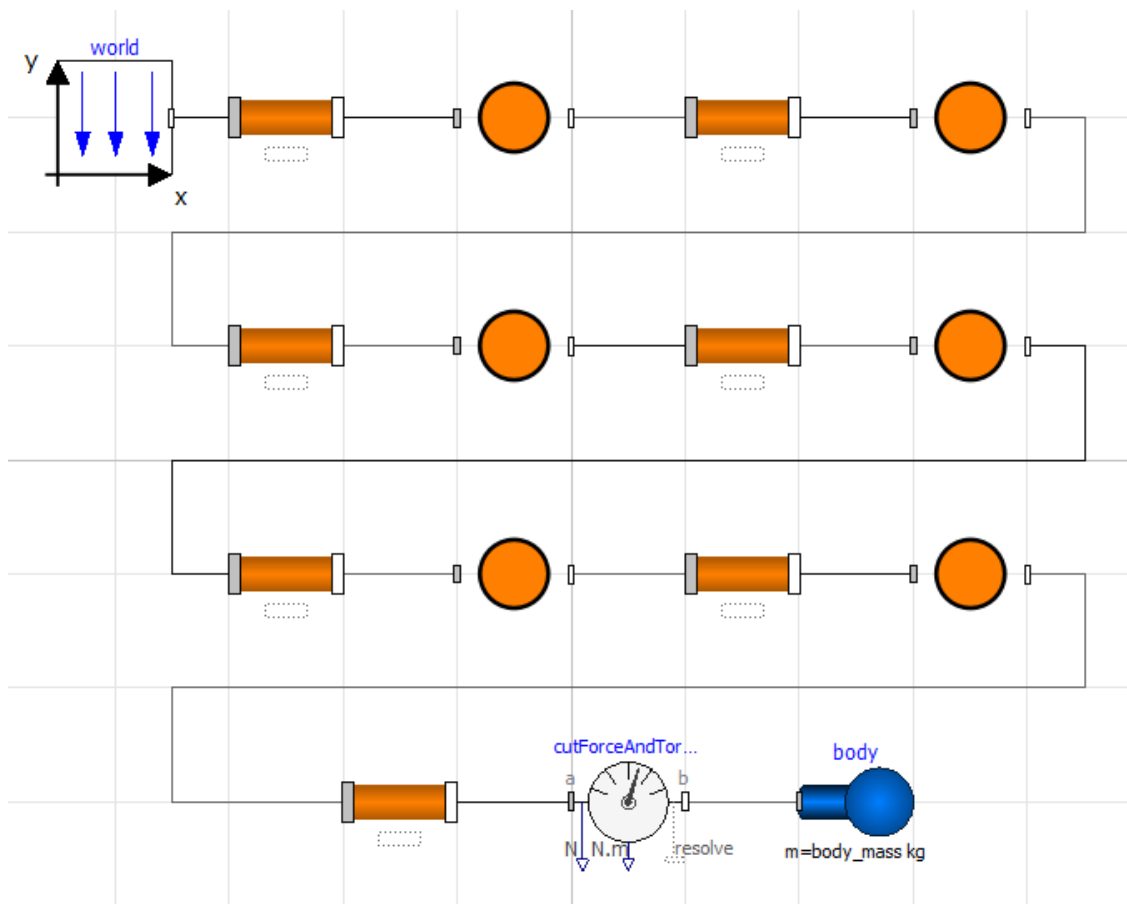


Figura 5.1 - Rappresentazione grafica modello su Modelica.

### 5.1.1 Axes

Axes è il modello che rappresenta i link del robot (Figura 5.2), ovvero le strutture meccaniche che permettono di collegare due successivi joint. Ogni link è caratterizzato da due principali proprietà:

- La massa e l'inerzia, che ne definiscono il comportamento dinamico,
- La geometria, che determina la relazione tra il *reference frame* di ingresso e quello di uscita.

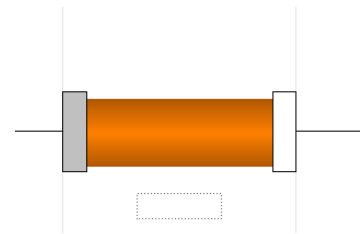


Figura 5.2 - Icona modello Axes.

In Modelica gli input e gli output di un blocco sono chiamati interfacce; tali blocchi cambiano a seconda della libreria che si usa e permettono di connettere diversi modelli insieme. Nel caso della libreria multibody le interfacce sono rappresentate dai blocchi denominati "*frames*", e rappresentano la definizione del sistema di coordinate.

Il modello Axes ha 3 interfacce:

- "*frame\_a*" rappresenta il collegamento con il joint precedente
- "*frame\_b*" rappresenta il collegamento con il joint successivo
- "*main\_frame*" permette di avere un riferimento sul *main frame* del *link*, può essere utile se per esempio si vuole aggiungere una veste grafica tramite il blocco *visual*.

Il modello presenta una prima rotazione che permette di passare dal sistema di riferimento del joint precedente al *main frame* del link. Tale *reference frame* è quello su cui vengono forniti valori di inerzia del link.

Il comportamento dinamico del *link* viene affidato al blocco *body*, tale blocco si collega al *main frame* tramite una trasformazione rigida, rappresenta la posizione del centro di massa rispetto il *joint* precedente.

Il *frame b* si collega al *main frame* tramite una traslazione e una successiva rotazione.

Quella appena descritta è la struttura generale del modulo (Figura 5.3), ogni link del robot presenterà i propri parametri (principalmente relativi alla massa, all'inerzia e alla geometria) che sarà possibile settare nel pannello delle proprietà del robot.

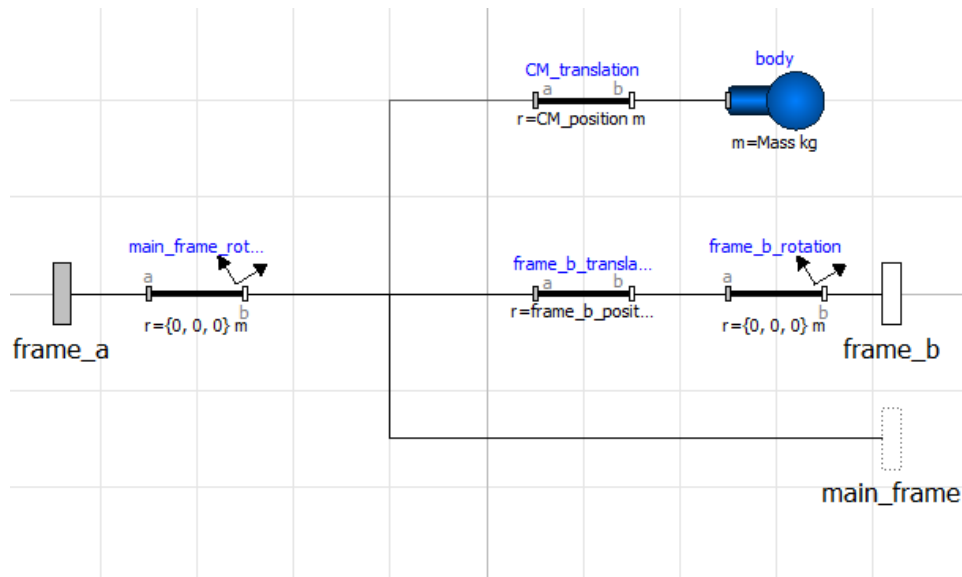


Figura 5.3 - Rappresentazione grafica modello Axes.

### 5.1.2 Joint

Questo modello (Figura 5.4) si basa principalmente sul blocco *revolute* della libreria *multibody*, e permette il movimento di rotazione, lungo un asse, nella meccanica tridimensionale.

Per controllare il blocco *revolute* è necessario fornirgli un riferimento di posizione tramite l'interfaccia flange, è quindi necessario utilizzare la libreria di meccanica rotazionale.

Tramite il blocco *position* è possibile generare un movimento compatibile con il blocco *revolute*; basta fornirgli un riferimento di posizione in ingresso e questo viene convertito in una posizione in un formato adatto all'interfaccia.

Il modello joint può assumere 4 tipi di comportamenti selezionabili nei parametri del modello tramite il valore intero *mode*:

- 1, *static*, permette di mantenere il joint fisso a un angolo fisso;
- 2, *constant speed*, permette di far muovere il giunto seguendo una velocità angolare costante *w*;

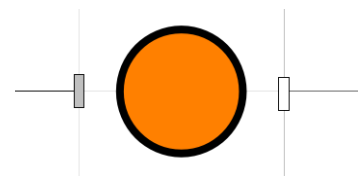


Figura 5.4 - Icona modello Joint

- 3, *cycloidal trajectory*, permette di muovere il giunto partendo dall'angolo "a" fino ad arrivare all'angolo "b" seguendo una traiettoria cicloidale;
- 4, *position sequence*, permette di raggiungere una sequenza di posizioni dando come input un vettore contenente gli angoli e uno contenente i tempi. Ogni successiva posizione è raggiunta seguendo una traiettoria cicloidale.

Queste diverse modalità di movimento sono necessarie per fare tutti gli esperimenti.

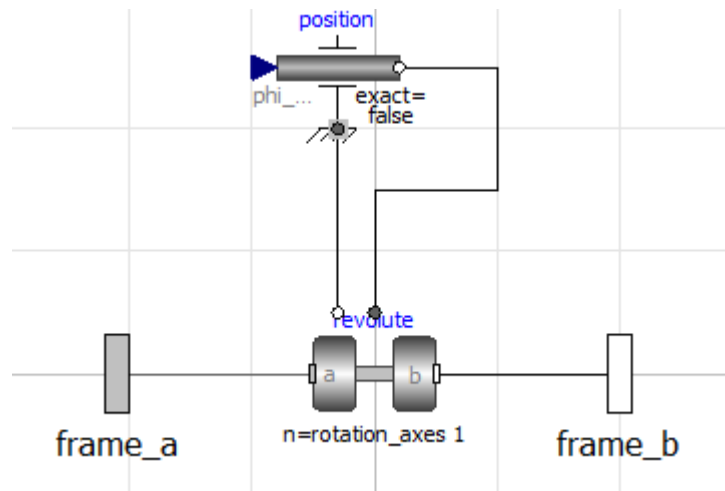


Figura 5.5 - Rappresentazione grafica modello Joint.

### 5.1.3 Sensore

Come sensore viene utilizzato il modulo "cutForceAndTorque" (Figura 5.6) della libreria *multibody*. Questo permette di misurare la forza e la coppia che il blocco collegato al frame b del sensore esercita su quello collegato sul frame a; risulta quindi adatto per la modellazione del sensore collegato al CumaoSmartSix.

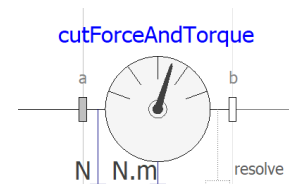


Figura 5.6 - Icona sensore.

### 5.1.4 Corpo

Il drone viene simulato tramite il blocco "body" che permette la simulazione del comportamento dinamico di un oggetto. All'interno dei parametri del blocco è possibile specificare i valori di massa, inerzia e la posizione del centro di massa.

Figura 5.7-  
Icona massa.



## 5.2 Aggiunta del rumore all'interno della simulazione

Il rumore viene introdotto all'interno della simulazione andando a modificare il modulo "*joint*" appena descritto. Le modifiche effettuate mirano ad aggiungere i disturbi sulla corrente che controlla i singoli motori e i fenomeni elastici del sistema di trasmissione.

Per poter introdurre i disturbi sui motori che controllano la posizione dei giunti è prima necessario capire come questi vengano controllati. Il regolatore interno di posizione, sviluppato da Comau, non può essere divulgato in dettaglio, si riporta quindi unicamente che al suo interno è presente un controllo di posizione decentralizzato sui singoli giunti a parametri costanti.

Il controllo è formato da tre anelli chiusi disposti in cascata, rispettivamente di corrente, velocità e posizione [9]. Oltre alla struttura classica dei regolatori industriali di tipo PID per i servomeccanismi, sono presenti ulteriori accorgimenti per migliorare le prestazioni complessive del sistema (per esempio il *feedforward* sulla coppia). Per completare la descrizione del regolatore interno va considerato il fatto che lavora a tempo discreto con un conseguente tempo di campionamento pari a  $500\mu s$ . Inoltre, è presente un filtro passa basso del second'ordine a 12Hz che agisce sul riferimento di posizione in ingresso.

Per semplificare la realizzazione del controllore, i due anelli interni, rispettivamente di velocità e di corrente, sono stati trascurati perchè considerati abbastanza veloci da non influire in maniera significativa sul sistema. Non andando a considerare questi due anelli è possibile approssimare il motore DC con il blocco "*torque*", questo infatti prende un valore di riferimento della coppia e si occupa di tradurlo nel dominio della meccanica rotazionale; l'inerzia del rotore viene aggiunta per completezza.

Il controllore di posizione appena descritto è stato realizzato all'interno di un nuovo modulo, questo prende in input la posizione e la velocità angolare dei motori, misurati per mezzo di appositi sensori e restituisce la coppia che deve essere applicata. Il rumore viene aggiunto sui due sensori (di posizione e di velocità) e sulla coppia restituita dal controllore.

Il modulo Joint modificato può essere visto nella figura sottostante (Figura 5.8).

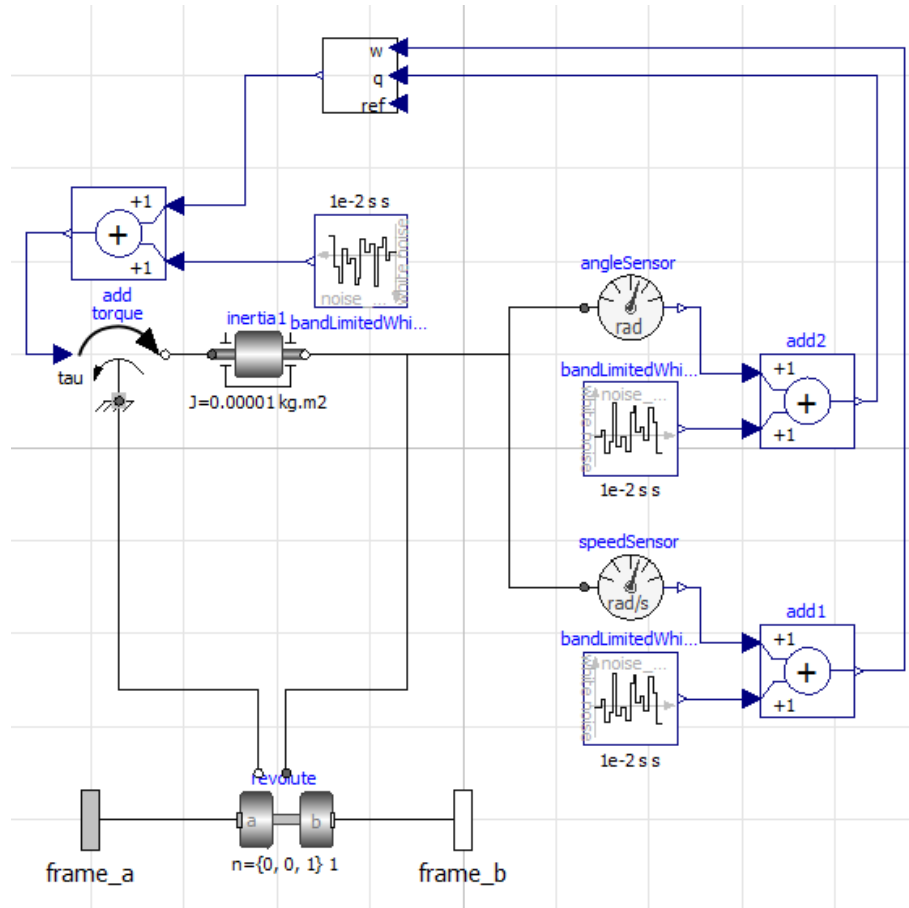


Figura 5.8 - Rappresentazione grafica modello "Joint" con aggiunta del rumore.

Un ulteriore fonte di disturbo è dato dalla non idealità del sistema di trasmissione del moto tra *joint* e *link*. Questo, infatti, è stato finora considerato rigido, ovvero la coppia generata dal motore viene trasferita al carico senza che ci siano fenomeni elastici. Tuttavia, in un servo-meccanismo reale questi fenomeni, per quanto trascurabili, sono presenti e vanno a modificare la velocità del carico collegato al sistema. Nel caso del braccio robotico questi fenomeni si sommano di joint in joint modificando così la traiettoria all'end-effector.

All'interno di Modelica è possibile includere questi effetti andando ad aggiungere il blocco "spring-damper" tra l'interfaccia del blocco "revolute" (Figura 5.9), che rappresenta il collegamento con il link successivo del robot, e il motore, approssimato nel modello dal blocco "torque".

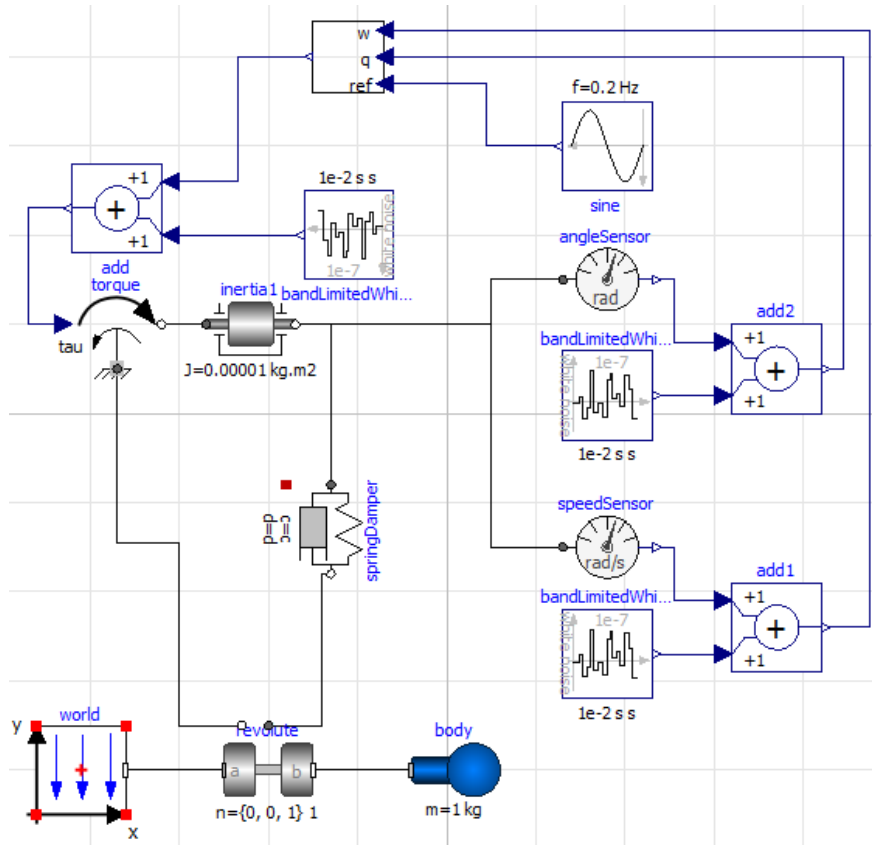


Figura 5.9 - Rappresentazione grafica modello "Joint" con aggiunta del rumore e considerando una trasmissione del rumore non ideale.

Utilizzando questi accorgimenti è possibile ottenere un risultato molto più simile a quello che si otterrebbe in condizioni reali.

Per verificarne la correttezza questa simulazione è stata eseguita andando a controllare solamente il giunto 1. Le due immagini che seguono mostrano i risultati di due simulazioni, eseguite prima senza (Figura 5.0) e poi (Figura 5.1) con i disturbi.

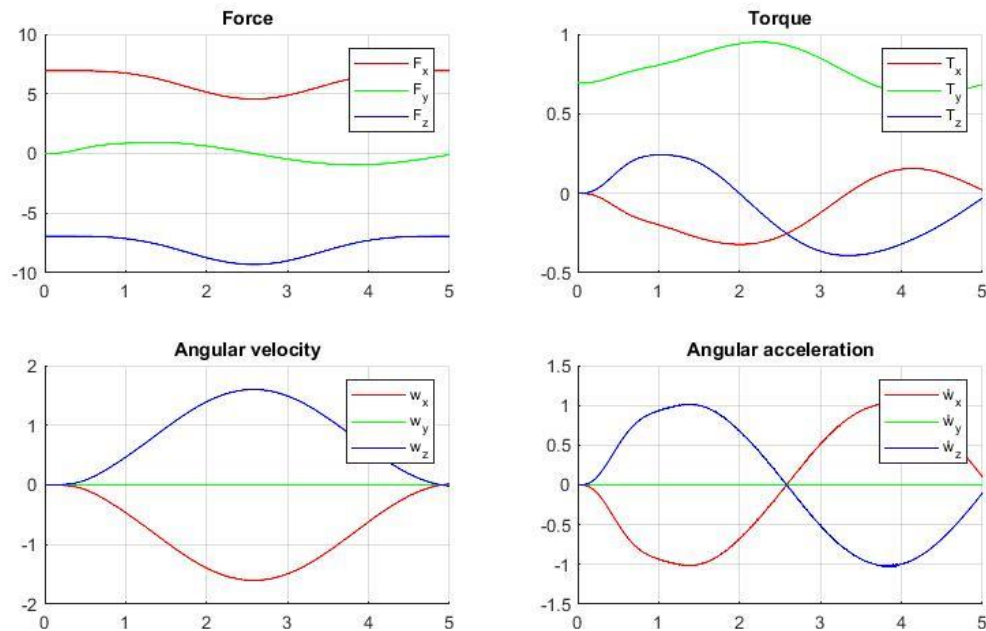


Figura 5.10 - Diagrammi rappresentanti: forza e coppia misurate dal sensore di forza e, in basso, la velocità e accelerazione angolare del corpo. I valori rappresentati sono ottenuti considerando la simulazione priva di rumore

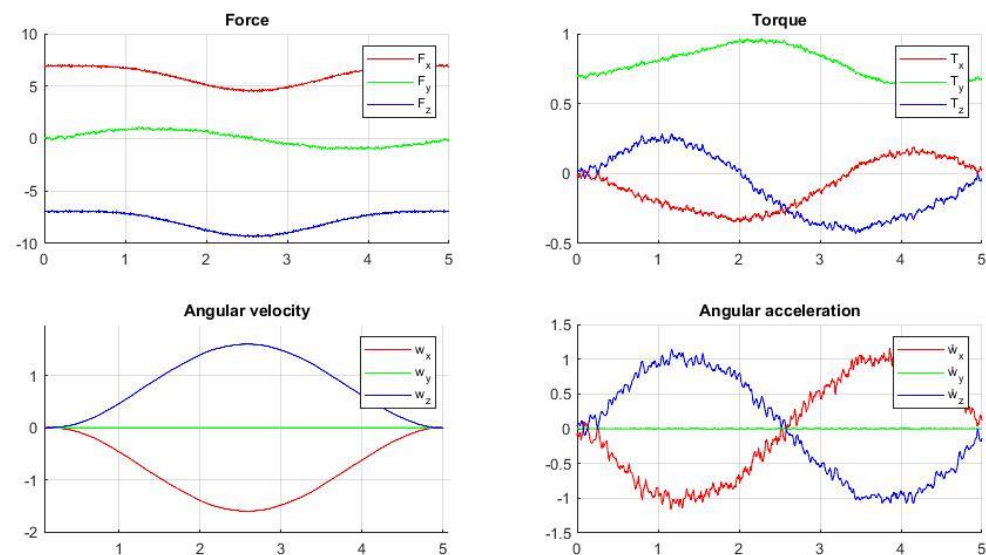


Figura 5.11 - Diagrammi che rappresentano gli stessi valori dell'immagine precedente, ma considerando il rumore nella simulazione





## 5.3 Risultati della simulazione

Da Modelica i dati vengono esportati tramite il formato “.mat” e importati all’interno dell’ambiente Matlab. Qui vengono utilizzati per eseguire l’algoritmo descritto nei capitoli 2 e 3. I dati necessari sono:

- I momenti e le forze lette dal sensore, necessari sia per l’esperimento statico che per quello dinamico
- Le velocità e le accelerazioni angolari a cui il corpo è sottoposto, necessari solo per l’esperimento dinamico.

I primi vengono direttamente forniti dal sensore, possono quindi essere utilizzati senza ulteriori elaborazioni. Al contrario, per quanto riguarda i secondi, sebbene Modelica fornisca direttamente i dati, è bene calcolarli partendo dalle velocità e dalle configurazioni dei singoli giunti; infatti, nell’ottica di un’implementazione pratica, il braccio robotico non fornisce a terna della velocità angolare dell’end-effector, ma solo le velocità dei motori. Questa operazione risulta abbastanza semplice se si considera che, nel caso dell’esperimento dinamico, vengono mossi solo due giunti. Considerando quindi che la velocità nel sistema di riferimento fisso si calcola tramite la seguente formula:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 + R_5^W \omega_6 \\ \dot{\omega}_W &= \dot{\omega}_1 + R_5^W \dot{\omega}_6 + \omega_1 \times R_5^W \omega_6\end{aligned}$$

Dove  $R_5^W$  è la matrice di rotazione dal frame del sesto giunto al frame fisso. Per ottenere i valori della velocità angolare nel sistema di riferimento desiderato è sufficiente moltiplicare per la matrice di rotazione dal sistema fisso a quello del sensore:

$$\begin{aligned}R_W^S \omega &= R_W^S \omega_1 + R_W^S R_5^W \omega_6 \\ R_W^S \dot{\omega}_W &= R_W^S \dot{\omega}_1 + R_W^S R_5^W \dot{\omega}_6 + R_W^S (\omega_1 \times R_5^W \omega_6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_W^S \omega &= R_W^S \omega_1 + R_5^S \omega_6 \\ R_W^S \dot{\omega}_W &= R_W^S \dot{\omega}_1 + R_5^S \dot{\omega}_6 + (R_W^S \omega_1) \times (R_5^S \omega_6)\end{aligned}$$

Le matrici di rotazione possono essere calcolate partendo dalla posizione dei singoli giunti del braccio robotico.

### 5.3.1 Esperimento statico

L'esperimento statico viene eseguito andando a muovere il robot in cinque diverse posizioni trattate alla fine del secondo capitolo, Una volta raggiunta la posizione si attende che il robot si fermi, in maniera da annullare le forze dinamiche che altererebbero la misurazione. La seguente tabella mostra le cinque diverse configurazioni del robot su cui vengono effettuate le misurazioni:

	Posizione 1	Posizione 2	Posizione 3	Posizione 4	Posizione 5	Posizione 6
Joint 1	0	0.0568	0.1130	0.1047	-2.9670	-2.9670
Joint 2	-0.1542	-0.1372	-0.0540	0.0745	-0.9576	-0.9576
Joint 3	-1.7134	-1.6986	-1.6227	-1.4930	-0.1975	-0.1975
Joint 4	3.1416	1.5866	1.5712	1.5694	-2.5483	-2.5483
Joint 5	-0.0108	-0.4982	-1.2511	-2.0648	-2.2375	-2.2375
Joint 6	-1.5720	-0.6514	-0.9823	-0.9838	0.6763	1.8268

Tabella 5.1 – Posizioni assunte dai giunti nelle sei diverse configurazioni che il braccio robotico assume durante l'esperimento.

Il modello viene simulato impostando i seguenti parametri:

- Centro di massa:  $p_{CM} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix} m$
- Massa  $m = 2kg$

Eseguendo l'algoritmo si ottiene che la posizione del centro di massa, misurata rispetto al centro del sensore è pari a  $\hat{p}_{CM} = \begin{bmatrix} 0.1005 \\ 0.0201 \\ 0.0999 \end{bmatrix} m$

Nel caso in cui si voglia incrementare la velocità dell'esperimento un possibile modo è quello di, al posto di fermarsi sul punto della misurazione, passarci a velocità costante in maniera da evitare lo stallo, ma avere comunque l'assenza delle forze dinamiche. In questo caso la misurazione risulterebbe comunque meno precisa a causa di interferenze provenienti da altri fenomeni come la resistenza dell'aria.

### 5.3.2 Esperimento dinamico

Si procede quindi con l'esperimento dinamico, come descritto in precedenza. Il robot compie un movimento generato dall'ausilio di due joints; in questo esperimento vengono scelti i giunti numero 1 e 6. La traiettoria seguita dai motori è di tipo cicloidale e può essere ottenuta attraverso la seguente formula [3]:

$$q(t) = (q_f - q_i) \left( \frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{1}{2\pi} \sin \left( \frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right) \right) + q_i$$

$$\dot{q}(t) = \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right) \right)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{2\pi(q_f - q_i)}{(t_f - t_i)^2} \sin \left( \frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right)$$

Dove  $q_f$  e  $q_i$  sono rispettivamente la posizione iniziale e finale. Questa tipologia di traiettoria è ampiamente utilizzata all'interno dell'ambito robotico perchè permette di ottenere un movimento continuo non solo per quanto riguarda la posizione, ma anche per la velocità e l'accelerazione. Questa caratteristica è necessaria al fine di evitare sforzi non necessari sulla struttura del robot, inoltre evita di avere fenomeni dinamici dovuti a impulsi di forza, per esempio nel caso di discontinuità nella velocità. I parametri selezionati per il calcolo della traiettoria dei due joint sono descritti nella seguente tabella:

	Joint 1	Joint 6
$q_i$	-160°	-180°
$q_f$	+160°	+180°
$t_i$	0	0
$t_f$	5	5

Tabella 5.2 – Condizioni iniziali utilizzate per generare la traiettoria cicloidale per “Joint 1” e “Joint 6”.

Tramite questi parametri è possibile ottenere le curve mostrate nella figura sottostante (Figura 5.10):

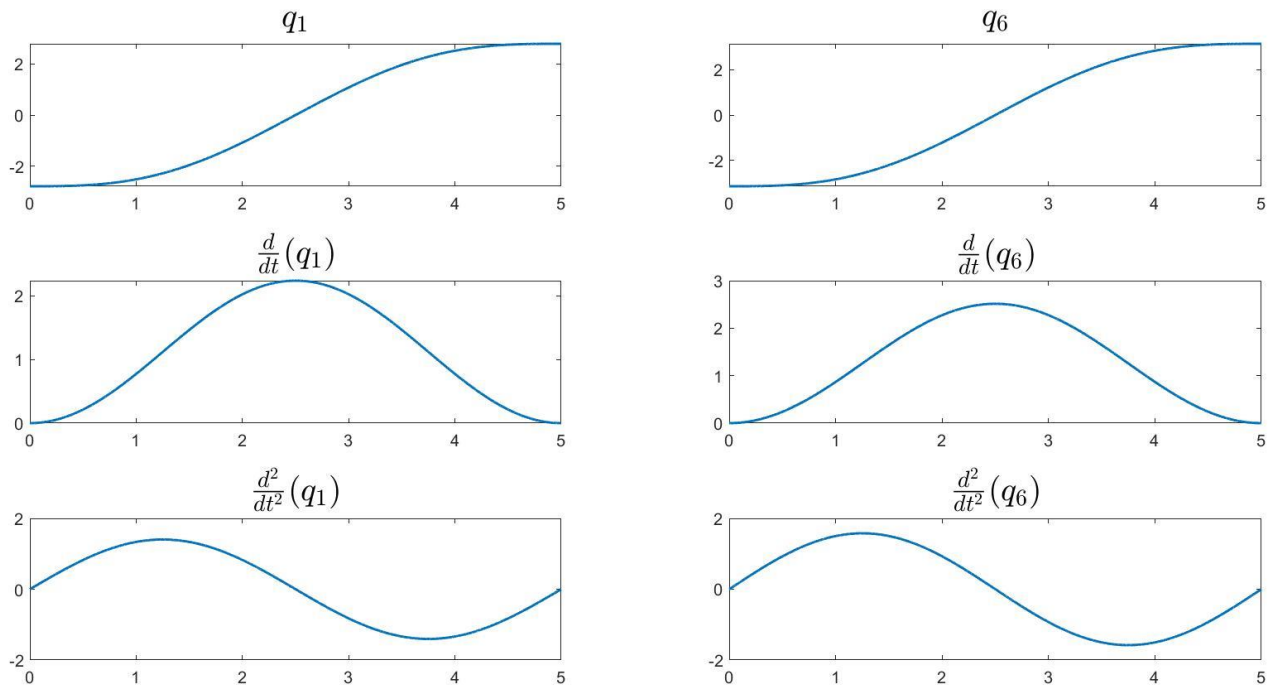


Figura 5.10 – Traiettorie di riferimento per “Joint 1” e “Joint 6”.

Eseguendo la simulazione utilizzando gli input appena descritti si ottengono così le velocità angolari le forze e le coppie mostrate nei seguenti grafici (Figura 5.11):

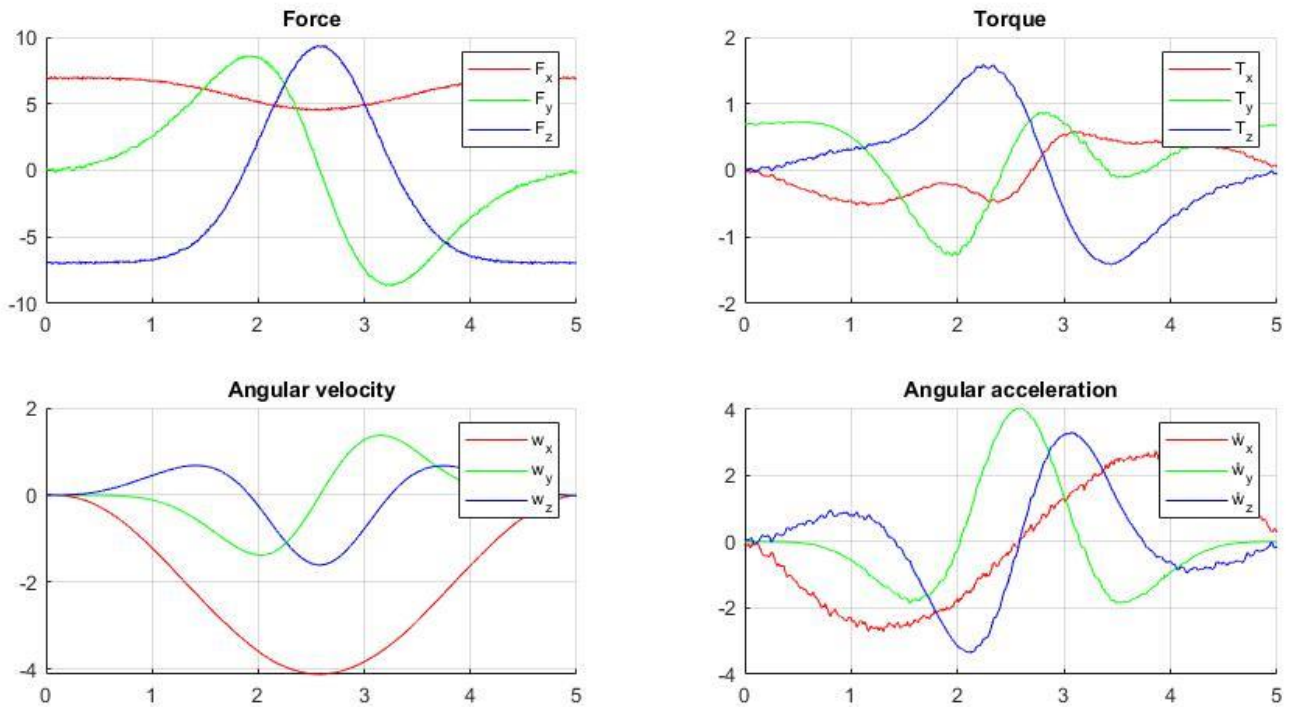


Figura 5.11 – Rappresentazione valori della forza, della coppia, della velocità e accelerazione angolare.

Per il calcolo dell'inerzia viene campionato un numero  $n$  di valori, uniformemente spazati su tutta la durata l'esperimento; all'aumentare di  $n$  aumenta sia la precisione che il carico computazionale.

Per testare la correttezza dell'algoritmo i parametri inerziali della massa sono

- Massa:  $2kg$
- Centro di massa, impostato dal centro del sensore,  $p_{CM} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m$
- Tensore di inerzia:  $I = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.001 & 0.01 \\ 0.001 & 0.4 & 0.1 \\ 0.01 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$

Successivamente è stato eseguito l'algoritmo con valori crescenti di  $n$ , in maniera da valutarne la precisione.

$n = 5$	$n = 10$	$n = 50$
$\begin{bmatrix} 0.2015 & 0.0012 & 0.0102 \\ 0.0012 & 0.4051 & 0.1001 \\ 0.0102 & 0.1001 & 0.2066 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2004 & 0.0013 & 0.0102 \\ 0.0013 & 0.4002 & 0.0996 \\ 0.0102 & 0.0996 & 0.2007 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1999 & 0.0011 & 0.0101 \\ 0.0011 & 0.4000 & 0.0999 \\ 0.0101 & 0.0999 & 0.2000 \end{bmatrix}$

Tabella 5.3 – Tensori di inerzia ottenuti variando il numero di valori campionati.

Come si può notare dai valori nella tabella, maggiore è il numero di campioni, maggiore è la precisione. Per dare una stima della precisione di questo metodo sono stati calcolata media e varianza andando eseguire 100 volte la simulazione:

- Media  $\mu_I = \begin{bmatrix} 0.2000 \\ 0.4000 \\ 0.2001 \\ 0.1000 \\ 0.0100 \\ 0.0010 \end{bmatrix}$
- Varianza, calcolata per ogni parametro del tensore di inerzia,  $\sigma_I^2 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.0560 \\ 0.4060 \\ 0.5055 \\ 0.0171 \\ 0.0096 \\ 0.0091 \end{bmatrix}$

I valori dell'inerzia rappresentati sono considerati con centro nel centro di massa e sistema di riferimento uguale a quello del sensore, è possibile calcolare l'inerzia relativa a un altro sistema di riferimento utilizzando il teorema di Steiener già citato nel terzo capitolo.

6.

Controllo  
braccio  
robotico



In questo capitolo si tratta la realizzazione del codice del braccio robotico. La programmazione di un braccio robotico è complessa dal momento che esistono diversi *firmware* e quindi le API con cui interfacciarsi cambiano a seconda del dispositivo scelto e sono generalmente di basso livello. Tuttavia, negli anni sono stati sviluppati dei programmi che permettono di interfacciarsi con varie tipologie di robot sfruttando linguaggi di programmazione di alto livello come Python. Questi programmi sfruttano apposite API per interagire col robot direttamente oppure traducono il codice in un formato comprensibile per il *firmware* utilizzato. Un esempio è RoboDK [10] che offre un ambiente simulativo per tutti i robot compatibili, dove è possibile simulare virtualmente il robot modificando l'ambiente di simulazione aggiungendo ostacoli o oggetti con cui interagire. Per la realizzazione del programma questo software permette un approccio di alto livello, dove è possibile impostare i vari punti in cui il robot deve passare, andando a indicare velocità e traiettoria per raggiungerli. Nel caso in cui sia necessario un approccio più di basso livello, offre interfacce col *firmware* del robot programmabili in C#, python, Matlab. I programmi generati sono anch'essi simulabili all'interno dell'ambiente virtuale. Infine, permette di eseguire il software direttamente all'interno del robot fisico, occupandosi di gestire in maniera autonoma connessioni e scambio dati.

RoboDK è stato utilizzato per testare la realizzazione del programma che permette di controllare il braccio robotico. Siccome gli algoritmi trattati, soprattutto la parte riguardante l'esperimento dinamico, richiedono un preciso controllo sui singoli giunti, si è deciso di utilizzare l'approccio più di basso livello, utilizzando quindi le API fornite dall'applicazione. In particolare si è deciso di utilizzare Python che, pur rimanendo più semplice di C#, offre una maggiore velocità rispetto a Matlab, che è necessaria per poter campionare il maggior numero di dati possibili.

Il programma è molto semplice, si tratta, infatti, di muovere inizialmente il robot nella configurazione di partenza e successivamente muovere i giunti numero 1 e 6 alla posizione desiderata. La traiettoria cicloidale è direttamente implementata dal software. Durante il movimento il software si occupa di memorizzare i dati a un intervallo di tempo costante, sperimentalmente si è trovato che  $30ms$  è il minimo tempo di campionamento possibile, ma può cambiare a seconda del computer. L'API fornita da RoboDK permette non solo di leggere i valori direttamente dei giunti, ma anche di esportare gli angoli di Eulero relativi all'orientamento dell'*end-effector*, molto più comodi per il calcolo della velocità angolare. Gli angoli di Eulero [3] utilizzati hanno configurazione XYZ; quindi, la velocità angolare si può calcolare come:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\varphi) \left( \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R_y(\psi) \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Dove

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \right)$$

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

L'accelerazione angolare verrà quindi calcolata derivando la terna della velocità angolare.

Sfortunatamente i dati esportati sono poco precisi (Figura 6.1), quindi andarli a derivare direttamente porterebbe a un risultato inutilizzabile.

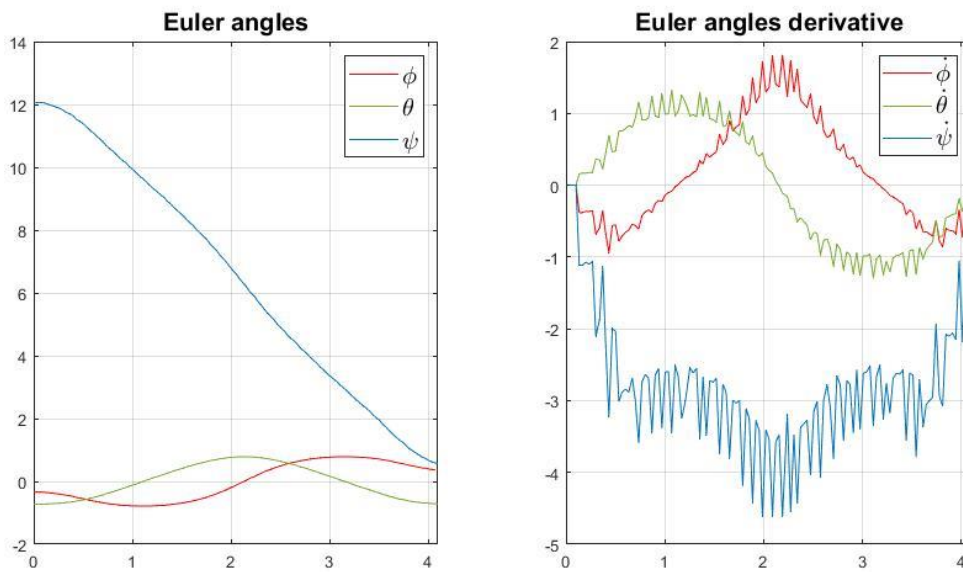


Figura 6.1 – Valori degli angoli di eulero esportati dal programma RoboDK

Per ovviare a questa problematica è necessario quindi elaborarli (Figura 6.2). Tale operazione viene effettuata andando a interpolare un polinomio con i dati misurati, con il fine non solo di migliorare le misure, ma anche di rendere il calcolo della derivata più semplice e preciso. Inoltre permette di risolvere i problemi di sincronizzazione con il sensore di forza; infatti, non si sarà più limitato solo agli intervalli di tempo misurati, ma si potranno calcolare la posizione e la velocità in qualunque istante di tempo.

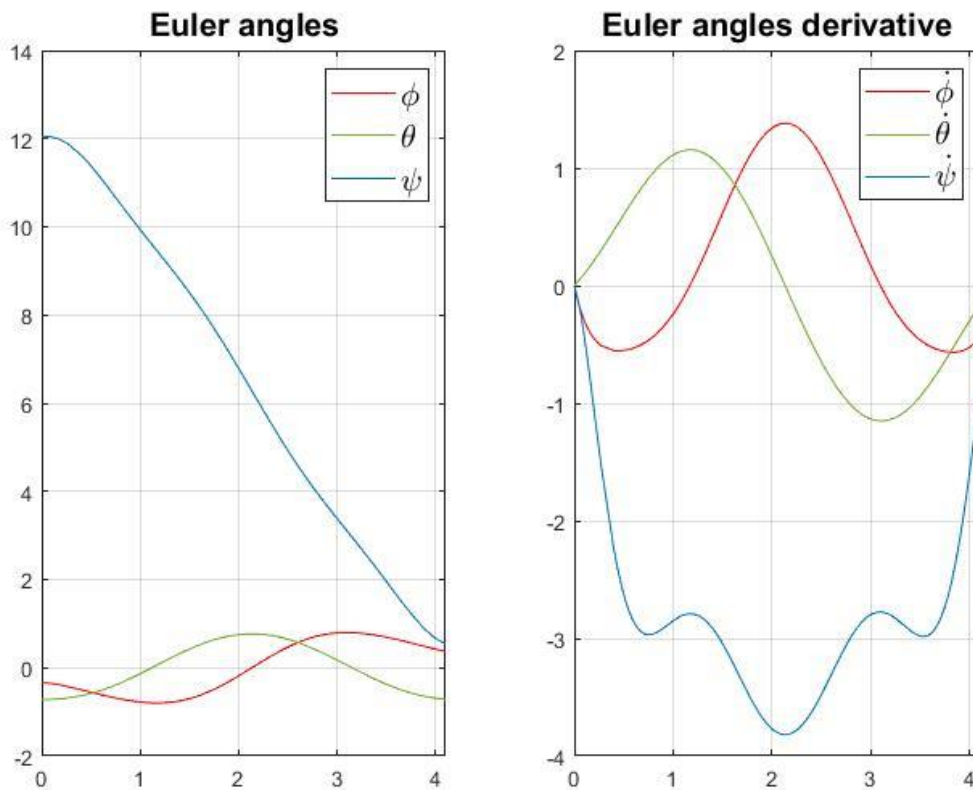


Figura 6.2 – Valori degli angoli di eulero esportati da RoboDk ed elaborati tramite Matlab

---

## RoboDK data acquisition

---

```
from robolink import *      # RoboDK API
from robodk import *       # Robot toolbox
#from robodk.robomath import *
from time import sleep

import scipy
from scipy import io
import time
import numpy as np

def current_milli_time():
    return round(time.time() * 1000)

RDK = Robolink()

# Notify user:
print('Start program')

item = RDK.Item('Comau Smart SiX 6-1.4') # retrieve robot by name
Dummy = RDK.Item('Dummy')
joints = item.Joints().list() # retrieve the current robot joints
as a list

# Go to starting position

print("Move back to starting position...")
joints[0] = -160
joints[1] = 0
joints[2] = -45
joints[3] = 0
joints[4] = 0
joints[5] = -180
item.MoveJ(joints, True)
```

---

```

# Move joint and acquire data

print("Beginning experiment...");

time_array = [];
mat_array = [];
pose_array = [];
var_mat = np.array([]);
joints[0] = 160
joints[1] = 0
joints[2] = -45
joints[3] = 0
joints[4] = 0
joints[5] = 180
item.MoveJ(joints, False)
count = 0;
var_time = 0;
while item.Busy():

    t_ref = current_milli_time()
    #var_time = current_milli_time()

    if (t_ref - var_time) > 30:#cerco di fare le misurazioni
mantenendo costante l'intervallo di tempo
        var_time = t_ref;
        time_array.append(var_time)

        pose = Dummy.PoseAbs()
        var_mat = pose.Rot33();

        mat_array.append(var_mat)
        count = count+1;

        pose_array.append(robodk.Pose_2_TxyzRxyz(pose));

print("END")

mat_data = np.array(mat_array,
dtype=np.longdouble).transpose(2,1,0);
time_data = np.array(time_array, dtype=float).reshape(count,1);
pose_data = np.array(pose_array);
scipy.io.savemat('../Simulation/Matlab/Data/robodk_data.mat',
mdict={'Matrices': mat_data, 'Time': time_data, 'Pose': pose_data})

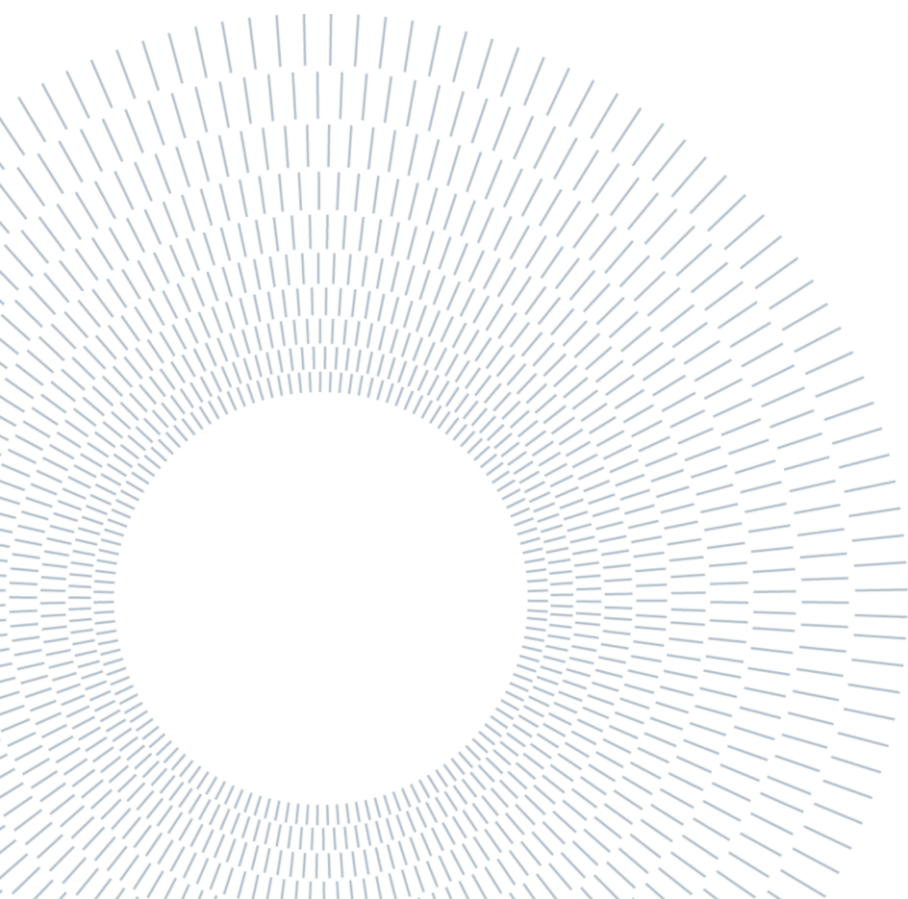
```

---

*Codice 1 – Codice Python utilizzato su RoboDK per controllare la simulazione del braccio robotico e esportare i valori della posizione relativa all'end-effector.*

7.

Conclusioni e  
sviluppi  
futuri



Il presente elaborato si proponeva l'obiettivo di sviluppare una nuova tecnica per il calcolo dei parametri d'inerzia. Come visto nell'introduzione esistono già numerose tecniche che realizzano questo tipo di misurazione, ma sono limitate a specifici parametri, come la massa o alla posizione del baricentro. Inoltre, queste tecniche necessitano di operatori specializzati che effettuino gli esperimenti, andando ad aumentare i costi e i tempi di misurazione.

Il braccio robotico è uno strumento dalla grande versatilità che ormai riveste un ruolo chiave all'interno dell'ambiente industriale. Se dotato di appositi strumenti, è in grado di afferrare in maniera autonoma diversi tipi di oggetti. Questa grande versatilità unita agli algoritmi appena descritti permette di ottenere un sistema di misurazione in grado di coprire le mancanze delle strategie precedentemente utilizzate.

Tuttavia, ogni robot presenta dei limiti operazionali, per esempio il robot utilizzato per la simulazione permette di manipolare oggetti che pesano fino a  $6kg$ , il che limita la tipologia di oggetti che possono essere misurati. Inoltre, il "*Comao Smat Six*" ha sei gradi di libertà, quando in realtà ne bastano soltanto tre. Per riuscire a sfruttare al massimo questo sistema è opportuno realizzare un braccio robotico a tre gradi di libertà, in maniera da ridurre i disturbi dovuti ai giunti in eccesso, e con una struttura molto rigida, per attenuare eventuali vibrazioni.

# Bibliografia

- [1] C. Schedlinski. *A survey of current inertia parameter identification methods*
- [2] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci. *Fisica. Volume 1*
- [3] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. *Robotic Modelling, planning and Control, pagine 580-585*
- [4] URL <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/constrained-optimization/a/lagrange-multipliers-single-constraint>.
- [5] URL <https://mathworld.wolfram.com/Point-LineDistance3-Dimensional.html>.
- [6] URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s\\_equations\\_\(rigid\\_body\\_dynamics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_equations_(rigid_body_dynamics)).
- [7] S. Greco, P. Valabrega. *Algebra lineare*.
- [8] URL <https://doc.modelica.org/om/index.html>.
- [9] F. Oliva. *Sviluppo del controllo di forza in un robot industriale per un'applicazione di finitura superficiale*
- [10] URL <https://robodk.com/doc/en/Basic-Guide.html>
- [11] M. Castelli, S. Colombo. *Generazione della traiettoria e controllo per un manipolatore robotico aereo*
- [12] s. Yildirim, I. Eski. *Noise analysis of robot manipulator using neural networks*









**POLITECNICO**  
MILANO 1863

