

POLITECNICO DI MILANO
SCUOLA DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E TERRITORIALE



CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN CIVIL ENGINEERING -
STRUCTURES

MODELLAZIONE DI DISSIPATORI STOCKBRIDGE
PER LA MITIGAZIONE DELLE VIBRAZIONI
EOLICHE DEI CAVI SOSPESI

Francesco BOGANI Mat. 943540
Alex SOSIO Mat. 942908

RELATORE:
Prof. Francesco FOTI

CORRELATORE:
Prof. Luca MARTINELLI

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

Abstract

Stockbridge dampers are widely used in the mitigation of aeolian vibrations of suspended cables. Their dissipative contribution may be quantified on the basis of different analysis approaches, such as the Energy Balance Method (EBM) and the direct study of the equations of motion of the conductor. Due to the fact that all the solution strategies require a correct characterization of the damper's dynamic behaviour, the aim of the current dissertation consists in the development of different modelling techniques, in order to achieve a true reproduction of the response of these devices, marked by an high level of non-linearity. More in detail, at first, a discrete one degree of freedom idealization of the damper will be proposed, based on the Bouc-Wen hysteretic model; then, the mentioned model will be properly extended to the case of a more comprehensive two-lagrangian coordinates description, which will be further generalized by means of the introduction of the Park-Wen constitutive law. With the goal of characterizing the dynamic behaviour of these kind of dampers, a crucial role is played by the execution of frequency sweep tests, which allow to carry out the identification and subsequent validation of the models' governing parameters, highlighting their limits and possibilities. In parallel, in support of the performed numerical analyses for the simulation of the response and for its comparison with the experimental results, the implementation of appropriate algorithms into the MATLAB software, described throughout the discussion, has been required.

Sommario

I dissipatori Stockbridge trovano largo impiego nel campo della mitigazione delle vibrazioni eoliche dei cavi sospesi. Il loro apporto dissipativo può essere quantificato sulla base di differenti approcci di analisi, tra cui si citano il Metodo di Bilancio dell'Energia (EBM) e lo studio diretto delle equazioni di moto del cavo conduttore. Dal momento che tutte le strategie di soluzione non possono prescindere da una corretta caratterizzazione del comportamento dinamico dello smorzatore, lo scopo del presente elaborato consiste proprio nello sviluppo di differenti tecniche di modellazione, atte alla fedele riproduzione della risposta di tali dispositivi, contraddistinta da un alto grado di non-linearità. In particolare, dapprima verrà proposta un'idealizzazione discreta a un grado di libertà del sistema-dissipatore, basata sul modello isteretico di Bouc-Wen; tale modello verrà successivamente esteso nel contesto di una più esaustiva descrizione del sistema a due coordinate libere, la quale verrà poi ulteriormente generalizzata, mediante l'introduzione della legge costitutiva di Park-Wen. Per la caratterizzazione del comportamento dinamico di questi dispositivi di dissipazione, un ruolo centrale è rivestito dall'esecuzione di test sperimentali di sweep in frequenza, sulla base dei quali diverrà possibile eseguire le procedure di calibrazione e conseguente validazione dei parametri governanti i differenti modelli, consentendo di esplorarne limiti e potenzialità. In parallelo, a supporto delle analisi numeriche effettuate per la simulazione della risposta del dissipatore e per la successiva comparazione con gli esiti di laboratorio, è stata richiesta l'implementazione di opportuni codici di calcolo all'interno del software MATLAB, i quali verranno descritti nel corso della trattazione.

Indice

1	IL PROBLEMA DELLE VIBRAZIONI EOLICHE DEI CAVI SOSPESI	1
1.1	Descrizione e analisi del fenomeno fisico	1
1.1.1	Il distacco dei vortici dalla sezione trasversale di corpi tozzi	3
1.1.2	Dinamica di cavi sospesi soggetti a VIV: modellazione e metodi di soluzione	6
1.2	Scopi e contenuti dell'elaborato	14
2	I DISPOSITIVI DI SMORZAMENTO DELLE VIBRAZIONI EOLICHE	17
2.1	Il dissipatore Stockbridge	17
2.1.1	Principi di funzionamento e proprietà	17
2.1.2	Modellazione del sistema meccanico ed equazioni governanti	19
2.2	Stato dell'arte: proposte di letteratura circa la modellazione dei dissipatori Stockbridge	24
2.2.1	Modellazione discreta di Pivovarov e Vinogradov	24
2.2.2	Modellazione a trave di Sauter e Hagedorn	26
2.2.3	Modellazione a trave di Foti e Martinelli	30
2.2.4	Modellazione ad elementi finiti tipo trave di Langlois e Legeron	32
2.2.5	Modellazione ad elementi finiti tridimensionali di Luo, Wang e Zhang	36
2.2.6	Sintesi degli approcci di letteratura e proposte di sviluppo	39
3	MODELLAZIONE DISCRETA A UN GRADO DI LIBERTÀ	41
3.1	Il modello isteretico di Bouc-Wen a 5 parametri	42
3.2	Calcolo della forza di interazione in funzione del moto della massa	43
3.2.1	Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare	44
3.2.2	Moto monotono crescente della massa	48
3.2.3	Moto armonico della massa e riproduzione di un test sperimentale	52
3.3	Calcolo della risposta del sistema per un assegnato stato di sollecitazione	57
3.3.1	Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare	59
3.3.2	Moto armonico imposto al supporto	66
3.4	Caratterizzazione del sistema dinamico: il calcolo delle funzioni di trasferimento	70
3.4.1	Test di sweep in frequenza: caratteristiche e impieghi	72
3.4.2	Riproduzione test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità costante	75
3.4.3	Riproduzione test di sweep di Langlois ad ampiezza di spostamento costante	111
3.5	Il modello isteretico di Bouc-Wen a 5 parametri con grado di libertà rotazionale	121

4	MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN	125
4.1	Il modello isteretico a due gradi di libertà in presenza di solo accoppiamento inerziale	125
4.2	Calcolo della risposta del sistema per un assegnato stato di sollecitazione . .	126
4.2.1	Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare . .	128
4.3	Riproduzione test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità costante . . .	132
4.3.1	Modellazione elastica lineare	135
4.3.2	Modellazione isteretica	138
4.3.3	Modellazione isteretica "ridotta"	139
5	MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN	145
5.1	Il modello isteretico di Park-Wen	146
5.2	Calcolo della risposta del sistema per un assegnato stato di sollecitazione . .	148
5.2.1	Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare . .	150
5.2.2	Riproduzione del comportamento di un oscillatore isteretico di Bouc-Wen	153
5.3	Caratterizzazione del sistema dinamico: il calcolo delle funzioni di trasferimento	153
5.3.1	Riproduzione test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità costante	156
5.3.2	Riproduzione test di sweep di Langlois ad ampiezza di spostamento costante	172
6	CONSIDERAZIONI FINALI E SVILUPPI FUTURI	181
6.1	Aspetti salienti della trattazione e conclusioni	181
6.2	Applicazione allo studio del sistema linea + dissipatore	192
A	MODELLAZIONE ISTERETICA IN PRESENZA DI ACCOPPIAMENTO INERZIALE ED ELASTICO	197
B	SCHEMA DI FUNZIONAMENTO DI "SIG_INTERP"	201
C	SCHEMA DI FUNZIONAMENTO DI ODE45	205
D	ALGORITMI DI EVOLUZIONE DIFFERENZIALE	209
D.1	Inizializzazione	209
D.2	Mutazione	210
D.3	Ricombinazione (Crossover)	211
D.4	Selezione	211
D.5	Criteri di convergenza	211
E	CALCOLO DELL'AMPIEZZA DI OSCILLAZIONE ALL'ANTINODO	213
	Bibliografia	219

Elenco delle figure

1.1	Funzione di densità di probabilità secondo Weibull e Rayleigh dei fenomeni di interazione aerodinamica vento-struttura al variare della velocità media del vento [32].	2
1.2	(a) Esempi di cavi costituiti da nucleo in acciaio (in nero) e fili esterni in alluminio puro; (b) Esempi di cavi costituiti da fili in lega di alluminio [32].	2
1.3	Sforzo assiale σ , corrispondente al limite di rottura per fatica ciclica, in funzione del numero di cicli flessionali per diverse tipologie di cavi [32].	3
1.4	Schema rappresentativo delle componenti della forzante sezionale in grado di esprimere l'interazione corpo-struttura in regime subcritico [32].	4
1.5	Relazione tra il numero di Strouhal e il numero di Reynolds nel caso di corpo a sezione circolare [32].	5
1.6	Variazione dell'ampiezza di oscillazione in funzione della velocità media del vento al di fuori e in corrispondenza del regime di sincronizzazione (in alto); variazione della frequenza della forzante di lift in funzione della velocità media del vento e violazione della legge di Strouhal [32].	6
1.7	(a) Variazione della massima ampiezza di oscillazione in funzione del numero di Scruton; (b) Variazione dell'estensione dell'intervallo di lock-in in funzione del numero di Scruton [32].	7
1.8	Potenza immessa dal vento nel sistema, valutata da diversi test condotti in flusso laminare, in funzione della massima ampiezza di oscillazione adimensionalizzata rispetto al diametro del cavo [32].	8
1.9	Potenza dissipata internamente dal cavo al variare della massima ampiezza di oscillazione per diversi valori di frequenza, a valle dell'esecuzione di un test di laboratorio [32].	10
1.10	Bilancio di energia a frequenza fissata mediante risoluzione grafica. L'ascissa del punto di intersezione tra la curva raffigurante il contributo di potenza immessa nel sistema e la curva raffigurante il contributo di potenza dissipata rappresenta la massima ampiezza di oscillazione adimensionalizzata presente sulla linea a regime [32].	11
1.11	(a) Variazione dell'ampiezza di oscillazione massima con la frequenza in assenza di turbolenza e di dispositivi di dissipazione, considerando i risultati dei test di Cigre [5] per la definizione della potenza introdotta dal vento nel sistema e diverse modellazioni della potenza dissipata dal cavo. (b) Variazione dell'ampiezza di oscillazione massima con la frequenza in assenza di turbolenza e di dispositivi di dissipazione, considerando la modellazione di Foti e Martinelli per la definizione della potenza dissipata dal cavo (si veda [15]) e diverse strategie di modellazione della potenza introdotta dal vento.	11

1.12	Trave in doppio appoggio di rigidezza flessionale EI , soggetta a un'azione di tiro T e alla forzante di lift q distribuita. In corrispondenza della sezione trasversale $x = x_d$, risulta connesso alla linea un dispositivo di dissipazione.	12
2.1	Schema fondamentale di un dissipatore Stockbridge costituito da una pinza di collegamento al conduttore, due cavi messaggeri e due masse inerziali in corrispondenza delle zone estremali	18
2.2	Diagramma di Argand riferito ad una condizione di risonanza, in cui la forzante esterna viene completamente equilibrata dalle sole forze viscosse. . .	19
2.3	Modellazione del dissipatore Stockbridge come sistema meccanico discreto a quattro gradi di libertà soggetto al moto roto-traslazionale imposto del vincolo (pinza metallica di connessione al conduttore) [16].	20
2.4	Forze e coppie di inerzia e di richiamo agenti sulle masse per la scrittura delle equazioni di equilibrio dinamico [16].	22
2.5	Forze e coppie di inerzia e di richiamo agenti sulla pinza rigida per la scrittura delle equazioni di equilibrio dinamico della stessa [16].	22
2.6	Modello discreto secondo Pivovarov e Vinogradov con molla non-lineare. . .	24
2.7	Cicli d'isteresi sperimentali nel piano Forza-Spostamento per un dissipatore-2R con $f = \frac{\Omega}{2\pi} = 13Hz$ e differenti valori di $\frac{w_{co}}{m}$ [31].	25
2.8	Cicli d'isteresi calcolati numericamente nel piano Forza-Spostamento per un dissipatore-2R con $f = \frac{\Omega}{2\pi} = 13Hz$ e differenti valori di $\frac{w_{co}}{m}$ [31].	25
2.9	(a) Modello discreto di Masing ottenuto collegando in parallelo n elementi base di Jenkin. (b) Elemento base di Jenkin costituito da una molla lineare di rigidezza c connessa in serie ad un elemento d'attrito di Coulomb di coefficiente h [35].	26
2.10	Rappresentazione schematica della generalizzazione del modello discreto di Masing al caso di trave continua (modello di Sauter-Hagedorn) [35].	27
2.11	(a) Equilibrio di un concio di cavo messaggero compreso tra il suo estremo libero (punto di connessione con la massa) e una generica sezione di ascissa s . (b) Equilibrio dinamico dell' i -esimo blocco inerziale.	27
2.12	(a) Confronto tra i cicli isteretici numerici e sperimentali applicando una forza armonica di estremità; (b) Confronto tra i cicli isteretici numerici e sperimentali applicando una coppia armonica di estremità [35].	28
2.13	(a) Valore assoluto della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d sperimentale e numerica per un test di sweep a 0.20 m/s; (b) Valore assoluto della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d sperimentale e numerica per un test di sweep a 0.05 m/s [35].	29
2.14	Diagramma qualitativo momento-curvatura riferito alla generica sezione trasversale del cavo messaggero [16].	30
2.15	Rappresentazione schematica delle sezioni trasversali investigate sperimentalmente e del test quasi-statico effettuato [16].	31
2.16	Comparazione tra il modello proposto e i test sperimentali in termini di diagramma $M - \chi$ in corrispondenza delle sezioni (a)1 e (b)6 [16].	32
2.17	Variatione dei parametri EI_{\min} ed EI_{\max} , ottenuti secondo la procedura di taratura, in funzione dell'ascissa s considerata. (a) Rigidezza massima EI_{\max} ; (b) Rigidezza minima EI_{\min} [16].	32
2.18	Variatione del parametro χ_0 ottenuto secondo la procedura di taratura, in funzione dell'ascissa s considerata [16].	33

2.19	Comparazione tra il modello proposto e i test sperimentali in termini di diagramma $F-v$ nella sezione di estremità per due diverse scelte dell'estensione delle zone di disturbo l_{B1} e l_{B2} rispettivamente in prossimità dell'incastro e dell'estremo libero [16].	33
2.20	Valore assoluto della parte reale della funzione di impedenza del dispositivo: confronto tra dati sperimentali, modello di Sauter e Hagedorn e modello di Foti e Martinelli [16].	33
2.21	Schema fondamentale del dissipatore Stockbridge simmetrico adottato da Langlois e Legeron; la lunghezza e_G indica l'eccentricità tra il punto di connessione tra cavo messaggero e massa inerziale e il baricentro della massa stessa (G_1, G_2).	34
2.22	Schematizzazione relazione multilineare momento-curvatura.	34
2.23	Identificazione dei parametri del dissipatore Stockbridge alla frequenza $f = 0.1$ Hz [24].	35
2.24	Forza F_r e fase ζ in funzione della frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$, considerando diversi valori di ampiezza di spostamento w_{c0} [24].	36
2.25	Dettagli della mesh del modello ad elementi finiti 3D [28].	37
2.26	Comparazione tra dati sperimentali e soluzione numerica riferita alla parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d [28].	38
2.27	Comparazione tra dati sperimentali e soluzione numerica riferita alla parte immaginaria della funzione di impedenza \tilde{Z}_d [28].	38
3.1	Modello discreto a un grado di libertà del sistema cavo messaggero + massa.	42
3.2	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-t$ nel caso di moto libero della massa.	45
3.3	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-v$ nel caso di moto libero della massa.	46
3.4	Andamento temporale della variabile isteretica z per il caso elastico lineare di moto libero ottenuto mediante modello numerico di Bouc-Wen.	46
3.5	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-t$ nel caso di moto in condizioni di risonanza della massa.	47
3.6	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-t$ nel caso di moto in condizione di battimenti.	48
3.7	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-t$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.	50
3.8	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-v$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.	50
3.9	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $z-t$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.	51
3.10	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $z-v$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.	51
3.11	Schematizzazione del test quasi-statico eseguito da Sauter.	52
3.12	Risultati sperimentali, corrispondenti alla condizione di regime, del test ciclico di Sauter nel piano che associa la forza applicata all'estremo libero del cavo allo spostamento trasversale dell'estremo stesso.	52
3.13	Andamento temporale del moto imposto all'estremo libero nel test quasi-statico di Sauter.	53
3.14	Calcolo numerico della storia temporale della forza di richiamo di Bouc-Wen.	54
3.15	Calcolo numerico dell'andamento della forza di richiamo di Bouc-Wen in funzione della coordinata libera v	55

3.16	Calcolo numerico della storia temporale della variabile isteretica nel test quasi-statico di Sauter.	55
3.17	Calcolo numerico dell'andamento della variabile isteretica in funzione della coordinata libera v	56
3.18	Confronto risultati sperimentali e numerici associati al test ciclico quasi-statico eseguito da Sauter.	56
3.19	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-t$ nel caso di moto libero della massa, sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	60
3.20	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-v$ nel caso di moto libero della massa, sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	61
3.21	Andamento temporale della variabile isteretica z per il caso elastico lineare di moto libero ottenuto mediante modello numerico di Bouc-Wen sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	61
3.22	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-t$ nel caso forzante esterna armonica con frequenza pari a quella naturale del sistema (condizione di risonanza).	62
3.23	Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F-t$ nel caso di moto della massa in condizione di battimenti sotto l'effetto di una forzante esterna armonica con frequenza prossima a quella propria del sistema.	63
3.24	Soluzione analitica nel piano $F-t$ nel caso di sistema provvisto di smorzamento e soggetto a forzante esterna armonica.	65
3.25	Confronto tra soluzione analitica e numerica nel piano $F-t$ nel caso di sistema provvisto di smorzamento e soggetto a forzante esterna armonica.	65
3.26	Risposta del sistema nel sotto intervallo temporale (10,20)s a un moto armonico traslazionale con frequenza $f = 1$ Hz imposto alla pinza di supporto, con riferimento a diversi valori di ampiezza w_{c0}	67
3.27	Andamento temporale della variabile isteretica con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.	67
3.28	Variazione della variabile isteretica in funzione della posizione della massa con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.	68
3.29	Risposta del sistema nel sotto intervallo temporale (10,20)s a un moto armonico traslazionale con frequenza $f = 2$ Hz imposto alla pinza di supporto, con riferimento a diversi valori di ampiezza w_{c0}	69
3.30	Andamento temporale della variabile isteretica con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.	69
3.31	Variazione della variabile isteretica in funzione della posizione della massa con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.	70
3.32	Schema di funzionamento input-output a scatola nera per un generico sistema meccanico.	71
3.33	Andamento temporale del fattore correttivo $r(t)$ nello specifico caso numerico considerato.	74
3.34	(a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$	75
3.35	(a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$ nel caso di sweep ad ampiezza di spostamento costante; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$ nel caso di sweep ad ampiezza di spostamento costante; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$ nel caso di sweep ad ampiezza di spostamento costante	76

3.36	Esiti dei test sperimentali di Sauter: modulo della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d (si veda 3.55) [35].	77
3.37	Andamento temporale del fattore correttivo $r(t)$ per la riproduzione del test di Sauter a 0.20 m/s.	78
3.38	(a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$ per $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$ per $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$ per $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s	78
3.39	Curva di impedenza associata al set di parametri definiti in 3.57.	80
3.40	Andamento temporale della coordinata libera $v(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.	81
3.41	Andamento temporale della variabile isteretica $z(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.	81
3.42	Variazione della variabile isteretica z in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.	82
3.43	Andamento temporale della forza di richiamo $F(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.	82
3.44	Variazione della forza di richiamo F in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.	83
3.45	Andamento temporale della forza di interazione dispositivo-supporto $F_d(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.	83
3.46	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza $k = k_{max} = k_{min}$, con fattore di smorzamento viscoso fissato ($\xi = 0.30$).	86
3.47	Curva di impedenza ricavata fissando $k = k_{max} = k_{min} = 3600$ N/m.	86
3.48	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza pre-snervamento k_{max} , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.	88
3.49	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza pre-snervamento k_{max} , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.	88
3.50	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza pre-snervamento k_{max} , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.	89
3.51	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza post-snervamento k_{min} , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.	89
3.52	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza post-snervamento k_{min} , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.	90
3.53	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza post-snervamento k_{min} , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.	90
3.54	Variazione di F_{obj} in funzione dello spostamento in corrispondenza dello snervamento v_0 , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.	91
3.55	Variazione di F_{obj} in funzione dello spostamento in corrispondenza dello snervamento v_0 , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.	91
3.56	Variazione di F_{obj} in funzione dello spostamento in corrispondenza dello snervamento v_0 , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.	92
3.57	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro σ , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.	92
3.58	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro σ , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.	93

3.59	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro σ , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.	93
3.60	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro n , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.	94
3.61	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro n , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.	94
3.62	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro n , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.	95
3.63	Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri $k = k_{max} = k_{min}$ e ξ , nel caso di comportamento elastico del dispositivo.	96
3.64	Curva di impedenza ricavata fissando $k = 3600$ N/m, $\xi = 0.25$, nel caso di comportamento elastico del dispositivo.	96
3.65	Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.001 m.	97
3.66	Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 11500$ N/m, $k_{min} = 2500$ N/m, $v_0 = 0.001$ m e $\sigma = n = 1$	97
3.67	Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.0015 m.	98
3.68	Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 9000$ N/m, $k_{min} = 2250$ N/m, $v_0 = 0.0015$ m e $\sigma = n = 1$	98
3.69	Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.002 m.	99
3.70	Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 7500$ N/m, $k_{min} = 1750$ N/m, $v_0 = 0.002$ m e $\sigma = n = 1$	99
3.71	Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.003 m.	100
3.72	Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 6500$ N/m, $k_{min} = 1500$ N/m, $v_0 = 0.003$ m e $\sigma = n = 1$	100
3.73	Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.005 m.	101
3.74	Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 5500$ N/m, $k_{min} = 500$ N/m, $v_0 = 0.005$ m e $\sigma = n = 1$	101
3.75	Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$, minimo valore della funzione obiettivo tra quelle associate ad ogni individuo della famiglia all' i -esima iterazione e (b) ΔF_{obj} , differenza tra il massimo e il minimo valore della funzione obiettivo tra quelle associate ad ogni individuo della famiglia all' i -esima iterazione.	103
3.76	Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica per il caso elastico lineare.	103
3.77	Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{max} = 7967.00$ N/m e $k_{min} = 2197.30$ N/m.	104
3.78	Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj}	105
3.79	Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{max} = 7857.615$ N/m e $k_{min} = 1946.767$ N/m.	105
3.80	Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{min} = 1742.40$ N/m, $k_{max} = 7127.99$ N/m e $v_0 = 0.002312$ m.	106
3.81	Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj}	107

3.82	Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{min} = 1586.603$ N/m, $k_{max} = 6623.309$ N/m e $v_0 = 0.002617$ m.	107
3.83	Riproduzione della curva d'impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05 m/s mediante modellazione elastica lineare: la calibrazione dei parametri è stata precedentemente effettuata sulla base del test a 0.20 m/s mediante procedura automatica.	109
3.84	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione elastica lineare.	109
3.85	Riproduzione della curva d'impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05 m/s mediante modello di Bouc-Wen a 1 grado di libertà: la calibrazione dei parametri è stata precedentemente effettuata sulla base del test a 0.20 m/s mediante procedura manuale.	110
3.86	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen a 1 grado di libertà.	110
3.87	Esiti dei test sperimentali di Langlois: forza $F_r = \tilde{M} w_{c0}\omega^2$ (si veda 3.64) [24].	111
3.88	Andamento temporale del fattore correttivo $r(t)$ per la riproduzione del test di Langlois di ampiezza 3 mm.	112
3.89	(a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$ nel test di Langlois ad ampiezza di spostamento 3 mm; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$ nel test di Langlois ad ampiezza di spostamento 3 mm; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$ nel test di Langlois ad ampiezza di spostamento 3 mm	113
3.90	Curva di risposta associata al set di parametri definiti in 3.66.	114
3.91	Andamento del modulo della funzione di trasferimento H all'aumentare della frequenza.	115
3.92	Andamento temporale della coordinata libera $v(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.	116
3.93	Andamento temporale della variabile isteretica $z(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.	116
3.94	Variazione della variabile isteretica z in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.	117
3.95	Andamento temporale della forza di richiamo $F(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.	117
3.96	Variazione della forza di richiamo F in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.	118
3.97	Andamento temporale della forza di interazione dispositivo-supporto $F_d(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.	118
3.98	Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj}	119
3.99	Curva di risposta associata al set di parametri ricavati dalla procedura di calibrazione automatica.	119
3.100	Riproduzione della curva di risposta F_r riferita al test ad ampiezza di spostamento pari a 1 mm mediante modello di Bouc-Wen a un grado di libertà: la calibrazione dei parametri è stata precedentemente effettuata sulla base del test a 3 mm mediante procedura manuale.	120
3.101	Rappresentazione e confronto tra le curve di risposta F_r sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen a un grado di libertà.	121

3.102	Modello discreto a un grado di libertà (rotazionale) del sistema cavo messaggero + massa.	122
3.103	Curva di impedenza numerica ricavata per cercare di catturare il secondo picco della medesima funzione sperimentale.	123
3.104	Riproduzione della curva d'impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05 m/s mediante modello di Bouc-Wen a un grado di libertà rotazionale.	123
4.1	Modello discreto a 2 gradi di libertà del sistema cavo messaggero + massa. .	126
4.2	Confronto nel piano $F - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	129
4.3	Confronto nel piano $F - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	130
4.4	Confronto nel piano $M - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	130
4.5	Confronto nel piano $M - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	131
4.6	Confronto nel piano $z_v - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	131
4.7	Confronto nel piano $z_\phi - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	132
4.8	Confronto nel piano $F - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali omogenee e in presenza di un moto traslazionale sinusoidale imposto al supporto.	133
4.9	Confronto nel piano $M - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali omogenee e in presenza di un moto traslazionale sinusoidale imposto al supporto.	133
4.10	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen reso elastico, utilizzando i parametri di rigidezza e smorzamento viscoso in 4.12.	136
4.11	Riproduzione della curva di impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05m/s mediante modellazione elastica a 2 gradi di libertà.	137
4.12	Rappresentazione e confronto tra le curve di impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione a due gradi di libertà elastica lineare.	138
4.13	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 4.15.	139
4.14	Rappresentazione qualitativa della (a)prima deformata modale, (b)seconda deformata modale di una mensola elastica lineare con massa concentrata all'estremo libero.	140
4.15	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen ridotto, utilizzando i parametri del set ottimale in 4.21.	142
4.16	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen semplificato, utilizzando i parametri del set ottimale in 4.21 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05m/s.	143
4.17	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica "ridotta" di Bouc-Wen a due gradi di libertà.	143
5.1	Modello discreto a 2 gradi di libertà del sistema cavo messaggero + massa. .	146
5.2	Confronto nel piano $F - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	151
5.3	Confronto nel piano $F - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	151
5.4	Confronto nel piano $M - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	152
5.5	Confronto nel piano $M - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.	152
5.6	Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $F - t$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.	154
5.7	Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $F - v$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.	154
5.8	Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $M - t$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.	155

5.9	Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $M - \phi$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.	155
5.10	Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 1 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.	158
5.11	Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 2 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.	159
5.12	Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 3 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.	159
5.13	Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 4 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.	160
5.14	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza k_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	162
5.15	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro α_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	162
5.16	Variazione di F_{obj} in funzione della rigidezza k_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	162
5.17	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro α_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	163
5.18	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro k_{coup} , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	163
5.19	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro A_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	163
5.20	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro A_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	164
5.21	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro β_{vv} , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	164
5.22	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\beta_{v\phi}$ ($= \beta_{\phi v}$), considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	164
5.23	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\beta_{\phi\phi}$, considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	165
5.24	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro γ_{vv} , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	165
5.25	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\gamma_{v\phi}$ ($= \gamma_{\phi v}$), considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	165
5.26	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\gamma_{\phi\phi}$, considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	166
5.27	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro ξ_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	166
5.28	Variazione di F_{obj} in funzione del parametro ξ_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.	166
5.29	Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj}	167
5.30	Curva di impedenza ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.19, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 1 di Tab.5.2.	168

5.31	Curva di impedenza ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.20, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 2 di Tab.5.2.	169
5.32	Curva di impedenza ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.21, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 4 di Tab.5.2.	169
5.33	Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale numero 3 di Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s.	170
5.34	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen, in accordo con il set ottimale numero 3 di Tab.5.2.	171
5.35	Variazione delle forzanti di richiamo in funzione delle coordinate libere, nel caso di analisi associata al set di parametri di Park-Wen numero 3 di Tab.5.2 e test di Sauter ad ampiezza di velocità 0.20 m/s, nei piani (a) $F - v$ e (b) $M - \phi$	171
5.36	Variazione delle forzanti di richiamo in funzione delle coordinate libere, nel caso di analisi associata al set di parametri di Park-Wen numero 3 di Tab.5.2 e test di Sauter ad ampiezza di velocità 0.05 m/s, nei piani (a) $F - v$ e (b) $M - \phi$	172
5.37	Curva di risposta ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 1 in Tab.5.3 e considerando il test ad ampiezza di spostamento costante pari a 1 mm.	174
5.38	Curva di risposta ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 2 in Tab.5.3 e considerando il test ad ampiezza di spostamento costante pari a 1 mm.	175
5.39	Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj}	176
5.40	Curva di risposta ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.26, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 1 di Tab.5.3.	177
5.41	Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale numero 1 di Tab.5.3 e considerando il test ad ampiezza di spostamento costante pari a 3mm.	178
5.42	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen, in accordo con il set ottimale numero 1 di Tab.5.3.	179
6.1	Confronto risultati sperimentali e numerici associati al test ciclico quasi-statico eseguito da Sauter.	182
6.2	Risposta del sistema nel sotto intervallo temporale (10,20)s a un moto armonico traslazionale con frequenza $f = 1$ Hz imposto alla pinza di supporto, con riferimento a diversi valori di ampiezza w_{c0}	183
6.3	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute per il test di Sauter in accordo con (a) una modellazione elastica lineare e (b) una modellazione isteretica di Bouc-Wen.	184
6.4	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute per il test di Sauter in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen.	185
6.5	Rappresentazione e confronto tra le curve di risposta F_r sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen a un grado di libertà.	186

6.6	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute per il test di Sauter in accordo con (a) una modellazione elastica lineare e (b) una modellazione isteretica di Bouc-Wen a due gradi di libertà.	187
6.7	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica "ridotta" di Bouc-Wen a due gradi di libertà.	188
6.8	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con differenti strategie di modellazione.	189
6.9	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen.	190
6.10	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con differenti strategie di modellazione.	190
6.11	Rappresentazione e confronto tra le curve di risposta sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen.	191
6.12	Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con differenti strategie di modellazione.	191
6.13	Andamento numerico del modulo della rigidezza dinamica \tilde{K} in funzione della frequenza, al variare dell'ampiezza w_{c0} del test.	193
6.14	Andamento numerico della potenza dissipata P_d in funzione della frequenza, al variare dell'ampiezza w_{c0} del test.	194
6.15	Andamento numerico della potenza dissipata P_d in funzione dell'ampiezza w_{c0} , per fissati valori della frequenza di vibrazione f^*	194
6.16	Modello di fune tesata, in doppio appoggio, per la determinazione dei modi di vibrare del sistema linea + dissipatore: la generica forma modale risulta essere espressa, nei due sottointervalli $0 \leq x \leq x_d$ e $x_d \leq x \leq L$, rispettivamente dalle due espressioni analitiche $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$	195
6.17	Soluzione grafica del bilancio energetico in corrispondenza di un determinato valore f^* di frequenza di vibrazione.	196
6.18	Andamento qualitativo della massima ampiezza di oscillazione w_{max} in funzione della frequenza f , ottenibile mediante applicazione dell'EBM.	196
A.1	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.2.	198
A.2	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.3.	198
A.3	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s.	199
A.4	Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.3 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s.	200
B.1	Confronto tra la soluzione analitica $y(t)$, il segnale in ingresso ξ e il segnale interpolato \mathbf{x}	203
C.1	Interpretazione grafica del metodo di Runge-Kutta di ordine 4: la derivata è valutata quattro volte, all'istante iniziale (1), in due punti intermedi di prova (2) e (3) e nel punto di prova finale (4). Combinando tali valori come in equazione C.2, si ottiene una stima di \mathbf{x}_{k+1}	206

E.1	Modello di trave tesata in doppio appoggio.	213
E.2	Modello di fune tesata in doppio appoggio.	214

Elenco delle tabelle

1.1	Variazione della struttura del fenomeno di distacco dei vortici in funzione del regime di moto del fluido.	4
1.2	Valori adottabili per il set di parametri (l, m, n) , in accordo con diversi test sperimentali condotti da vari ricercatori, secondo metodologie differenti . . .	9
2.1	Parametri caratterizzanti il dispositivo Stockbridge utilizzato durante i test di sweep da Sauter e Hagedorn.	29
3.1	Input-Output dell'algoritmo numerico.	44
3.2	Input-Output dell'algoritmo numerico nel caso di forzante esterna o moto imposto alla pinza.	58
4.1	Input-Output dell'algoritmo numerico nel caso di forzante esterna o moto imposto alla pinza con modello a due gradi di libertà.	128
5.1	Input-Output dell'algoritmo numerico nel caso di forzante esterna o moto imposto alla pinza con modello Park-Wen.	149
5.2	Set ottimali ottenuti mediante procedura di calibrazione manuale con modello di Park-Wen.	158
5.3	Set ottimali ottenuti mediante procedura di calibrazione manuale con modello di Park-Wen.	174

Capitolo 1

IL PROBLEMA DELLE VIBRAZIONI EOLICHE DEI CAVI SOSPESI

Lo studio dell'interazione aerodinamica tra il vento e i cavi sospesi risulta di complessa interpretazione, stante la moltitudine e la complessità di descrizione dei fenomeni coinvolti. I conduttori delle linee elettriche ad alta tensione (“OverHead electrical transmission Lines, OHL”), i cavi presenti in strutture strallate e sospese, quali ponti di grande luce o tralicci per le telecomunicazioni, e molte altre strutture tipo-cavo possono essere soggetti a vibrazioni riconducibili ai seguenti fenomeni, in funzione della velocità della vena fluida in cui sono immersi e della geometria della struttura in esame. In corrispondenza di velocità del vento basso-moderate, spesso comprese nell'intervallo 0.75-8 m/s, è rilevante il problema delle cosiddette vibrazioni eoliche indotte dal distacco dei vortici (“aeolian vibrations” o “Vortex Induced Vibrations, VIV”), mentre, per velocità medio-elevate appartenenti al range 8-20 m/s, può assumere considerevole importanza il fenomeno delle oscillazioni di sub-campata (“subspan oscillations” o “Wake Induced Vibrations”). Inoltre, considerando valori di velocità del vento superiori ai 15 m/s e una modifica della geometria sezionale del cavo, dovuta ad esempio al deposito di neve o ghiaccio, è possibile incorrere in un particolare fenomeno di instabilità dinamica, meglio noto come galoppo. In Fig.1.1, è rappresentata, con riferimento a uno specifico caso sperimentale di una linea elettrica, la frequenza percentuale di avvenimento dei fenomeni sopra citati, in funzione della velocità media del vento.

Dal momento che nel seguito ci si soffermerà sullo studio dettagliato del fenomeno delle vibrazioni eoliche, risulta doveroso presentare più nel dettaglio le sue caratteristiche fisiche, nonché le problematiche ad esso associate. Con riferimento a queste ultime, diviene di fondamentale importanza nella pratica progettuale l'introduzione di opportuni dispositivi di mitigazione delle suddette oscillazioni, la quale non può prescindere da un'altrettanto attenta modellazione degli stessi. Proprio sulla modellazione numerica di tali dissipatori si concentrerà il presente elaborato di tesi.

1.1 Descrizione e analisi del fenomeno fisico

Il fenomeno delle vibrazioni eoliche indotte dal distacco dei vortici sulle linee elettriche ad alta tensione, come anticipato in precedenza, avviene tipicamente in corrispondenza di velocità del vento basso-moderate ed è caratterizzato prevalentemente da un'ampiezza di oscillazione in direzione ortogonale alla direzione di moto della vena fluida [12]. Tali vibrazioni presentano ampiezze ridotte, dell'ordine del diametro del cavo a sezione circolare,

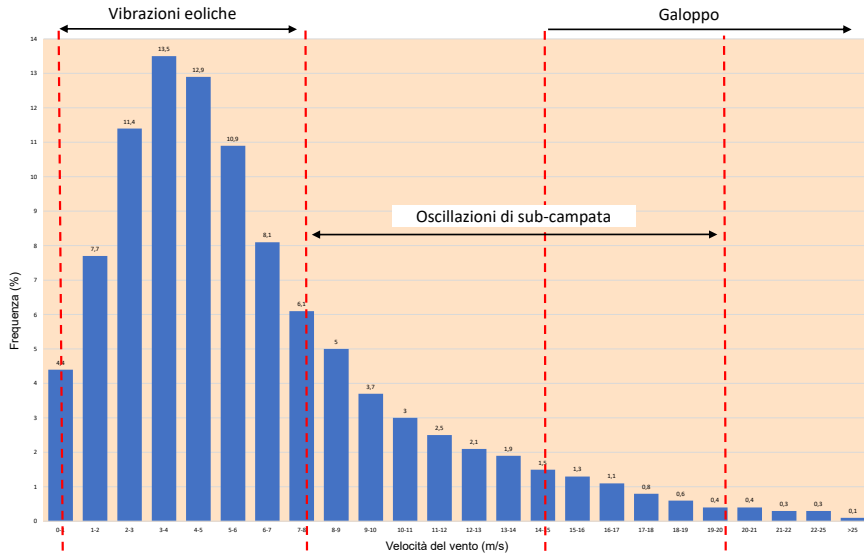


Figura 1.1: Funzione di densità di probabilità secondo Weibull e Rayleigh dei fenomeni di interazione aerodinamica vento-struttura al variare della velocità del vento [32].

e frequenze contenute nell'intervallo 3-200 Hz, in funzione della dimensione del cavo e della azione assiale di tiro. Le vibrazioni indotte dall'interazione vento-struttura, sono alla base dell'alternata inflessione della linea, la quale può comportare il danneggiamento nonché il collasso della stessa per effetto di fenomeni di fatica ciclica.

I cavi impiegati sono generalmente costituiti da più fili di alluminio e acciaio o da soli fili in lega di alluminio intrecciati, come mostrato in Fig.1.2. Nel primo caso, la presenza di un nucleo in acciaio fornisce un'adeguata resistenza meccanica al cavo, mentre l'alluminio permette di ottenere una buona conducibilità elettrica dell'assieme; nel secondo, la lega di alluminio svolge entrambe le funzioni di resistenza e conducibilità.

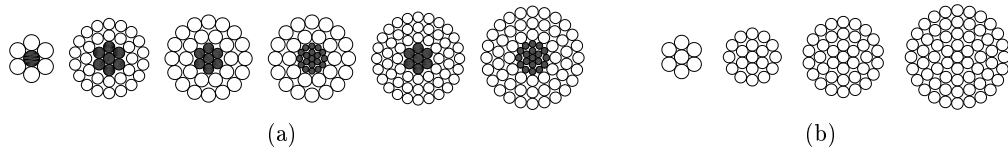


Figura 1.2: (a) Esempi di cavi costituiti da nucleo in acciaio (in nero) e fili esterni in alluminio puro; (b) Esempi di cavi costituiti da fili in lega di alluminio [32].

Proprio la caratteristica dei cavi di essere costituiti da più fili in contatto tra loro risulta alla base della generazione di micro-cricche da sfregamento nel materiale, le quali riducono drasticamente il limite a fatica rispetto a quello di un singolo filo, così da rendere tale tipo di collasso ancora più frequente per questo tipo di strutture. Si parla in tal caso di collasso da "fatica per sfregamento" (*fretting fatigue*) [17, 2]. In Fig.1.3, sono riportati i risultati di alcuni test sperimentali a fatica condotti sui diversi tipi di conduttori sopra citati.

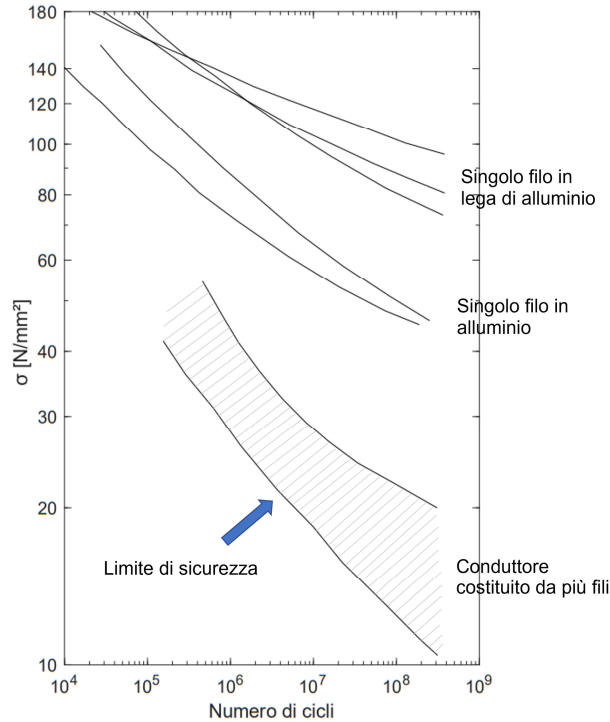


Figura 1.3: Sforzo assiale σ , corrispondente al limite di rottura per fatica ciclica, in funzione del numero di cicli flessionali per diverse tipologie di cavi [32].

1.1.1 Il distacco dei vortici dalla sezione trasversale di corpi tozzi

Il fenomeno del distacco dei vortici dalla sezione del corpo investito dal fluido risulta rilevante nel caso di sezioni tozze, mentre pressoché trascurabile per profili alari e fusiformi. In presenza di un flusso intrinsecamente laminare di velocità pari a V , è possibile definire come segue il cosiddetto numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho DV}{\mu} \quad (1.1)$$

dove ρ rappresenta la densità del fluido, D rappresenta una dimensione caratteristica della sezione trasversale dell'elemento in esame (il diametro nel caso particolare di sezione circolare), mentre μ rappresenta la viscosità del fluido.

Al variare del numero di Reynolds, il comportamento del fluido nell'intorno della sezione del corpo e le modifiche delle proprietà dello stesso dovute all'interazione fluido-struttura differiscono in maniera sostanziale: in particolare, risulta possibile distinguere i comportamenti riassunti in Tab.1.1 per valori del numero di Reynolds via via crescenti.

Il distacco alternato dei vortici che si manifesta a valle della sezione del corpo, in corrispondenza del regime subcritico, è alla base dell'insorgenza di una componente forzante in direzione ortogonale al moto del fluido (portanza o *lift force*) e ad una componente parallela al moto stesso (forza di trascinamento o *drag force*); la prima risulta caratterizzata da un andamento armonico a media nulla e frequenza pari alla cosiddetta frequenza di Strouhal, mentre la seconda risulta caratterizzata anch'essa da un andamento armonico a media diversa da zero (componente statica della forzante) e da una frequenza doppia rispetto a quella della forza di lift (Fig.1.4).

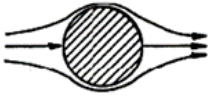
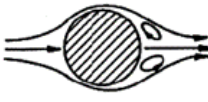

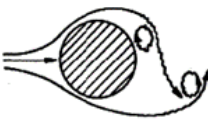
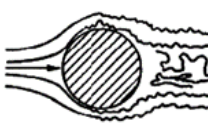
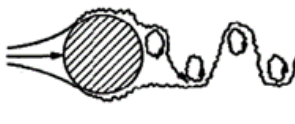
$Re < 5$	Flusso non separato: lo strato limite è laminare e si mantiene lungo il perimetro della sezione circolare	
$5 - 15 < Re < 40$	Flusso separato con vortici simmetrici: lo strato limite è laminare e si separa dal perimetro a valle della sezione, dando origine a due vortici stazionari, simmetrici e laminari	
$40 < Re < 150$	Vortici in regime laminare: lo strato limite è laminare e i vortici, anch'essi ancora a struttura laminare, si separano alternativamente dalla sezione	
$150 < Re < 3 \cdot 10^5$	Regime subcritico: per $Re < 300$ lo strato limite risulta ancora una volta laminare ed i vortici alternanti presentano una struttura prevalentemente turbolenta; oltre tale soglia, il regime diviene pienamente turbolento	
$3 \cdot 10^5 < Re < 3.5 \cdot 10^6$	Regime critico: lo strato limite è turbolento e la scia, anch'essa turbolenta, diviene più stretta tanto da non poter più distinguere il distacco dei vortici	
$Re > 3.5 \cdot 10^6$	Regime supercritico: riappare il distacco dei vortici, pur mantenendosi il regime puramente turbolento della scia	

Tabella 1.1: Variazione della struttura del fenomeno di distacco dei vortici in funzione del regime di moto del fluido.

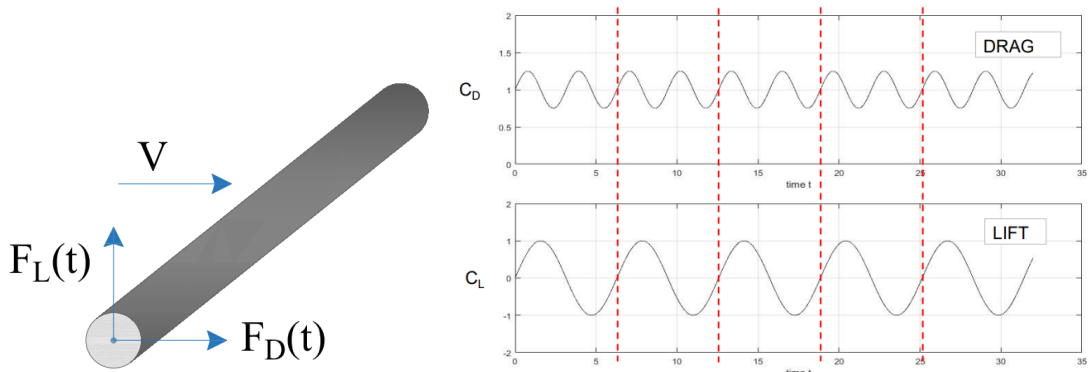


Figura 1.4: Schema rappresentativo delle componenti della forzante sezionale in grado di esprimere l'interazione fluido-struttura in regime subcritico [32].

Al fine di descrivere in termini quantitativi il fenomeno fisico e di definire le componenti forzanti sopra introdotte, risulta necessario introdurre un parametro significativo, il quale

si identifica con la cosiddetta frequenza di Strouhal; essa rappresenta la frequenza caratterizzante il fenomeno di distacco alternato dei vortici dalla sezione di un cilindro stazionario e può essere determinata tramite la relazione in 1.2.

$$f_{St} = St \frac{V}{D} \quad (1.2)$$

dove St rappresenta il numero di Strouhal associato alla sezione in esame. Tale parametro, che risulta in generale funzione del numero di Reynolds, si dimostra essere pressoché costante nel caso di sezione circolare in regime subcritico e assume un valore circa pari a 0.18, come si evince da Fig.1.5.

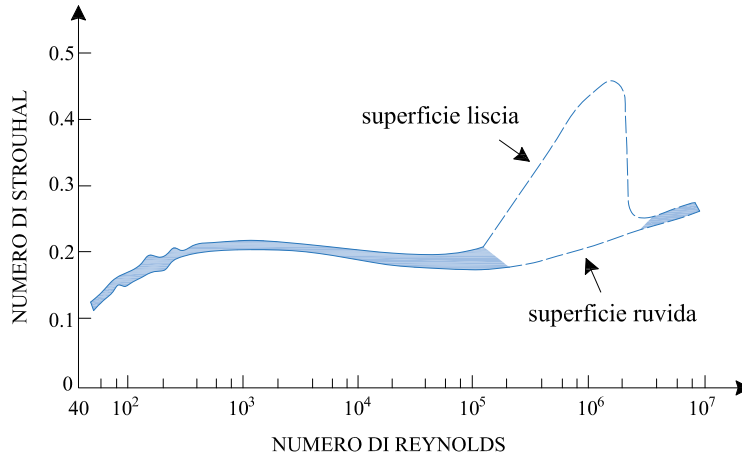


Figura 1.5: Relazione tra il numero di Strouhal e il numero di Reynolds nel caso di corpo a sezione circolare [32].

La forzante di lift, responsabile delle oscillazioni trasversali del cavo, al variare della velocità media del vento agisce sul sistema con diversi valori di frequenza secondo la legge di Strouhal sopra menzionata. Nel caso specifico in cui il valore della frequenza di Strouhal risulta prossimo a quello di una delle frequenze naturali del sistema, si entra in un regime di risonanza e la risposta della struttura in termini di ampiezza di oscillazione risulta notevolmente amplificata. In corrispondenza di tale condizione, la legge di Strouhal risulta violata e la frequenza di distacco dei vortici rimane ancorata alla frequenza naturale del sistema. In particolare, questa condizione di sincronizzazione (condizione di *lock-in*) si estende a un intervallo di velocità circa compreso tra 0.9 e 1.3 volte la velocità di Strouhal V_{St} (si veda Fig.1.6), la quale si ottiene dalla legge in 1.2 ponendo $f_{St} = f_n$, con f_n frequenza naturale della struttura associata all' n -esimo modo di vibrare [33].

A differenza di quanto accade nel caso canonico di sistema lineare soggetto a forzante armonica, in presenza di fenomeni di distacco dei vortici, le proprietà della forzante dipendono dal moto della struttura stessa. Pertanto, il fenomeno assume all'interno dell'intervallo di sincronizzazione un carattere aeroelastico, non-lineare ed isteretico. Ulteriore peculiarità del fenomeno risiede nel fatto che l'ampiezza di oscillazione, anche in regime di lock-in, rimane autolimitata.

La massima ampiezza di vibrazione della sezione trasversale sotto l'effetto del fenomeno di distacco dei vortici risulta influenzata da un ulteriore parametro, definito come numero di Scruton.

$$S_c = \frac{4\pi\gamma\xi}{\rho D^2} \quad (1.3)$$

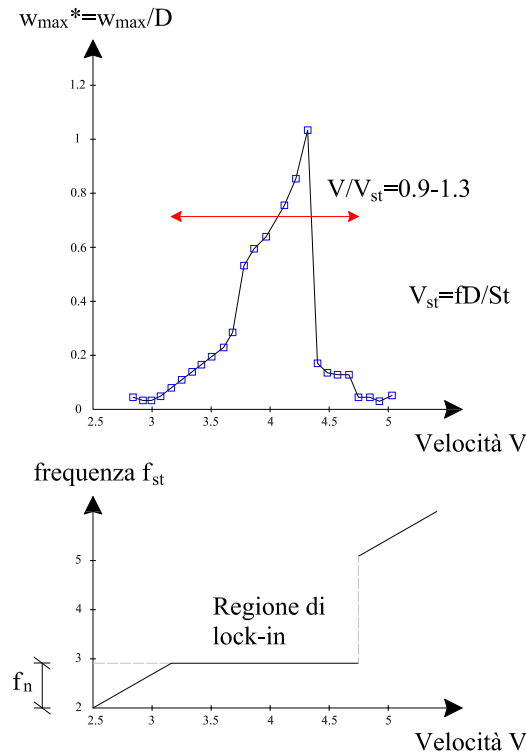


Figura 1.6: Variazione dell'ampiezza di oscillazione in funzione della velocità media del vento al di fuori e in corrispondenza del regime di sincronizzazione (in alto); variazione della frequenza della forzante di lift in funzione della velocità media del vento e violazione della legge di Strouhal [32].

dove γ rappresenta la massa strutturale per unità di lunghezza, ξ rappresenta il fattore di smorzamento strutturale, ρ la densità del fluido e D una grandezza caratteristica della sezione (diametro nel caso di sezione circolare). La dipendenza dell'ampiezza massima di oscillazione in regime di sincronizzazione dal numero di Scruton è rappresentata in Fig.1.7, da cui si evince anche come tale ampiezza risulti dell'ordine di grandezza del diametro del cavo. È inoltre possibile osservare come, all'aumentare del numero di Scruton, si riduca notevolmente l'estensione del range di sincronizzazione.

1.1.2 Dinamica di cavi sospesi soggetti a VIV: modellazione e metodi di soluzione

Il fenomeno delle vibrazioni eoliche di cavi sospesi richiede un'opportuna modellazione analitico-numerica, al fine di determinare in maniera quantitativa l'entità della risposta del sistema, tipicamente espressa in termini di massima ampiezza di oscillazione trasversale del cavo. Al fine di risolvere il problema, potenzialmente caratterizzato da un comportamento fortemente non lineare, in ragione della peculiare natura della forzante già descritta nel Par.1.1.1, è possibile adottare diversi approcci, secondo quanto riportato in letteratura [29]. Nel presente elaborato si lavora nel campo degli "externally forced models" e tra questi si riportano i due metodi più comunemente impiegati: il Metodo di Bilancio dell'Energia ("Energy Balance Method, EBM") e il metodo basato sullo studio delle equazioni di moto del cavo, soggetto a una forza di lift variabile nello spazio e nel tempo. Risulta opportuno sottolineare in tale sede come il primo metodo (EBM), sebbene sia basato sull'ipotesi semplificativa di risposta mono-modale, sia notevolmente diffuso nella pratica progettuale al fine di valutare la risposta del sistema ed, eventualmente, di mitigarla mediante l'impiego

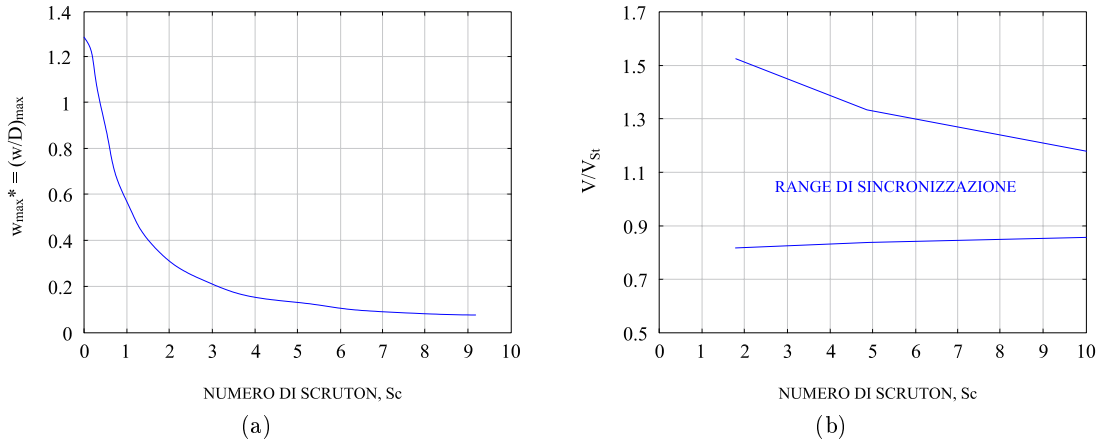


Figura 1.7: (a) Variazione della massima ampiezza di oscillazione in funzione del numero di Scruton; (b) Variazione dell'estensione dell'intervallo di lock-in in funzione del numero di Scruton [32].

di adeguati sistemi di dissipazione. Anche con lo scopo di superare questa assunzione potenzialmente limitante (si veda ad es. [8]) e di considerare un comportamento multi-modale riscontrabile in natura, trova impiego nel campo della ricerca il ricorso a modelli basati sulla integrazione delle equazioni di moto del cavo, soggetto a forze esterne che modellano l'azione indotta dal fenomeno di distacco dei vortici. Questo secondo approccio richiede una più dettagliata modellazione dell'intero problema in termini di forze di interazione aerodinamica, sistema-cavo con le relative condizioni al contorno e dell'eventuale presenza di dissipatori; quest'ultimo aspetto rappresenta in larga parte il tema fondamentale del presente lavoro di tesi, secondo quanto verrà discusso nei capitoli seguenti.

Il Metodo di Bilancio dell'Energia (EBM)

Il Metodo di Bilancio dell'Energia, spesso impiegato nella pratica per la determinazione delle vibrazioni eoliche, è fondato sulla determinazione delle frequenze naturali e dei modi di vibrare della linea. Sotto l'ipotesi semplificativa di risposta mono-modale della struttura, per ogni frequenza di vibrazione interessata dal fenomeno, l'ampiezza massima di oscillazione viene valutata imponendo l'uguaglianza tra l'energia immessa dal vento nel sistema e l'energia dissipata dallo stesso. Quest'ultima può essere valutata come la somma dell'energia dissipata internamente dal cavo (dissipazione intrinseca o *self-damping*) e dell'energia dissipata per mezzo di dispositivi di dissipazione, qualora presenti. Si noti come un approccio basato sulla conservazione dell'energia sia in grado di superare, seppur indirettamente, le difficoltà che possono riscontrarsi nella modellazione e nello studio di un problema caratterizzato da un alto grado di non-linearità, dovuto all'insorgenza di interazioni di carattere aeroelastico, come nel caso di analisi di vibrazioni eoliche in regime di sincronizzazione; l'assunzione di comportamento mono-modale che permette di impiegare tale metodo risulta piuttosto giustificabile, specie per le frequenze di vibrazione più moderate, in quanto, in condizioni prossime alla risonanza uno specifico modo della struttura risulta particolarmente eccitato, essendo i restanti solo moderatamente coinvolti. Per velocità del vento più elevate e, di conseguenza, frequenze di vibrazione più alte, i regimi di sincronizzazione associati a queste ultime risultano sovrapposti, così da rendere meno affidabili i risultati ottenibili mediante un'analisi mono-modale. Allo stesso modo,

le variazioni spatio-temporali della velocità del vento che investe la linea, fanno sì che più modi strutturali possano essere simultaneamente eccitati.

Al netto di quanto esposto, l'affidabilità del metodo risulta fortemente influenzata dai criteri adottati per la definizione dei vari contributi di energia immessa e dissipata, così come dalle tecniche di modellazione della dinamica della linea: differenti strategie di modellazione conducono infatti a diversi risultati in termini di risposta del sistema, come ampiamente discusso in [18].

Come già esposto, la massima ampiezza di oscillazione del cavo w_{max} può essere determinata imponendo l'uguaglianza tra la potenza introdotta dal vento nel sistema (P_w), la potenza dissipata internamente dal cavo (P_c) e la potenza dissipata dagli ulteriori dispositivi di dissipazione presenti ($P_{d,i}$ con $i = 1, \dots, N_d$):

$$P_w(f, w_{max}) - P_c(f, w_{max}) - \sum_{i=1}^{N_d} P_{d,i}(f, w_{max}) = 0 \quad (1.4)$$

Il primo contributo rappresentato dalla potenza introdotta dal vento per unità di lunghezza del cavo viene definito mediante test sperimentali in galleria del vento, in funzione del diametro D del conduttore, della frequenza f di vibrazione e di una funzione interpolante non-lineare fnc , dipendente dalla massima ampiezza adimensionale di vibrazione w_{max}/D . Tale espressione può essere corretta mediante l'impiego del fattore $B_w(I_v)$, che tiene conto dell'intrinseco carattere turbolento del vento: infatti, $I_v = \sigma_v/V$, dove σ_v rappresenta la deviazione standard della componente turbolenta di velocità del vento presente in direzione della velocità media V , si identifica con l'intensità di turbolenza. In letteratura sono disponibili diverse proposte per la funzione interpolante fnc (vedi [11]), così come per la definizione del fattore correttivo B_w (si veda [26, 27]). In Fig.1.8, sono mostrati diversi andamenti della funzione fnc , secondo gli esiti dei test sperimentali condotti in regime laminare (trascurando il fattore B_w) da differenti ricercatori. In definitiva, l'espressione che esprime la potenza immessa dal vento nel conduttore per unità di lunghezza risulta essere così definita:

$$P_w(f, w_{max}) = B_w(I_v)D^4 f^3 fnc(w_{max}/D) \quad (1.5)$$

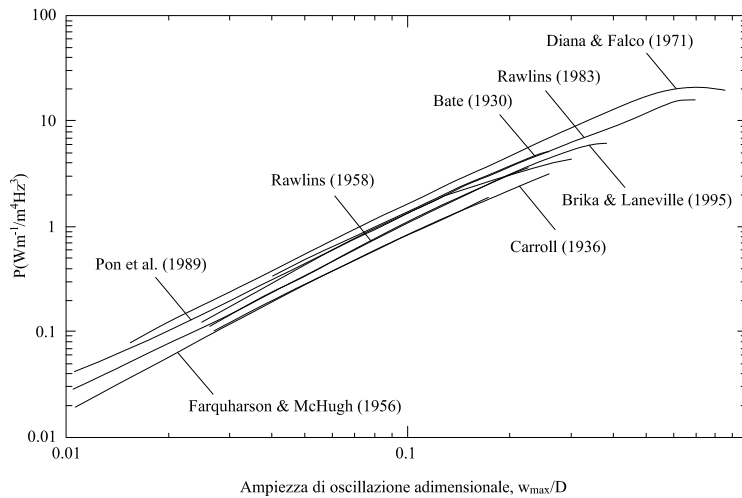


Figura 1.8: Potenza immessa dal vento nel sistema, valutata da diversi test condotti in flusso laminare, in funzione della massima ampiezza di oscillazione adimensionalizzata rispetto al diametro del cavo [32].

Il secondo contributo dell'equazione 1.4 si identifica con la potenza dissipata internamente dal cavo (*self-damping*) per unità di lunghezza dello stesso. Dal punto di vista fenomenologico, tale dissipazione è dovuta all'insorgenza di sforzi tangenziali di sfregamento e fenomeni di scorrimento relativo tra i fili intrecciati che costituiscono il cavo. Anche in questo caso, un'adeguata espressione analitica può essere determinata empiricamente mediante test di laboratorio, i quali evidenziano la dipendenza di tale grandezza dalla frequenza di vibrazione f , dalla massima ampiezza di oscillazione w_{max} e dalla tensione di tiro T impressa al cavo. Nell'espressione 1.6 riportata sotto, si evidenzia la dipendenza della potenza dissipata anche dal parametro k , il quale risulta solitamente compreso nell'intervallo 1.5-2 e può essere stimato o su base sperimentale o servendosi di opportune leggi empiriche, di cui è riportata una proposta nell'equazione 1.7, discussa più nel dettaglio in [25]. È presente inoltre il set di esponenti (l, m, n) , il quale può essere ricercato in letteratura e i cui valori dipendono essenzialmente dall'apparecchiatura di sperimentazione impiegata, dalle tecniche di misurazione e da inevitabili errori di natura sistematica e/o accidentale: alcune possibili scelte del set di parametri sono riassunte in Tab.1.2.

Ricercatori	l	m	n	Metodo	Lunghezza campata [m]
Tompkins et al.	2,3-2,6	5,0-6,0	1,9 ⁽¹⁾	ISWR	36
Claren & Diana	2,0	4,0	2,5;3,0;1,5	PT	46
Seppä	2,5	5,75	2,8	ISWR	36
Rawlins	2,2	5,4		ISWR	36
Lab. A	2,0	4,0		PT	46
Lab. B	2,2	5,2		PT	30
Lab. C	2,44	5,5		ISWR	36
Kraus & Hagedorn	2,47	5,38	2,8	PT	30
Noiseux ⁽²⁾	2,44	5,63	2,76	ISWR	63
Tavano	1,9-2,3	3,8-4,2		PT	92
Möcks & Schmidt	2,45	5,38	2,4	PT	30
Mech.Lab Politecnico di Milano	2,43	5,5	2,00	ISWR	46

ISWR: Inverse Standing Wave Method, PT: Power Method,
⁽¹⁾: extrapolated, ⁽²⁾: data corrected for aerodynamic damping

Tabella 1.2: Valori adottabili per il set di parametri (l, m, n) , in accordo con diversi test sperimentali condotti da vari ricercatori, secondo metodologie differenti.

$$P_c(f, w_{max}) = k \frac{w_{max}^l f^m}{T^n} \quad (1.6)$$

$$k = \frac{D}{\sqrt{\gamma RTS}} \quad (1.7)$$

dove D è il diametro del cavo espresso in mm, γ rappresenta la massa del cavo per unità di lunghezza espressa in kg/m e RTS rappresenta la resistenza a trazione stimata del cavo, espressa in kN.

L'espressione analitica 1.6 ottenuta in maniera empirica su base sperimentale richiede generalmente l'effettuazione di test dispendiosi in termini di tempo e complessi (di cui si riporta un esempio in Fig.1.9); pertanto, recentemente sono state anche formulate delle espressioni basate su modelli meccanici per la determinazione della potenza dissipata, senza la necessità di ricorrere a test di laboratorio [15].

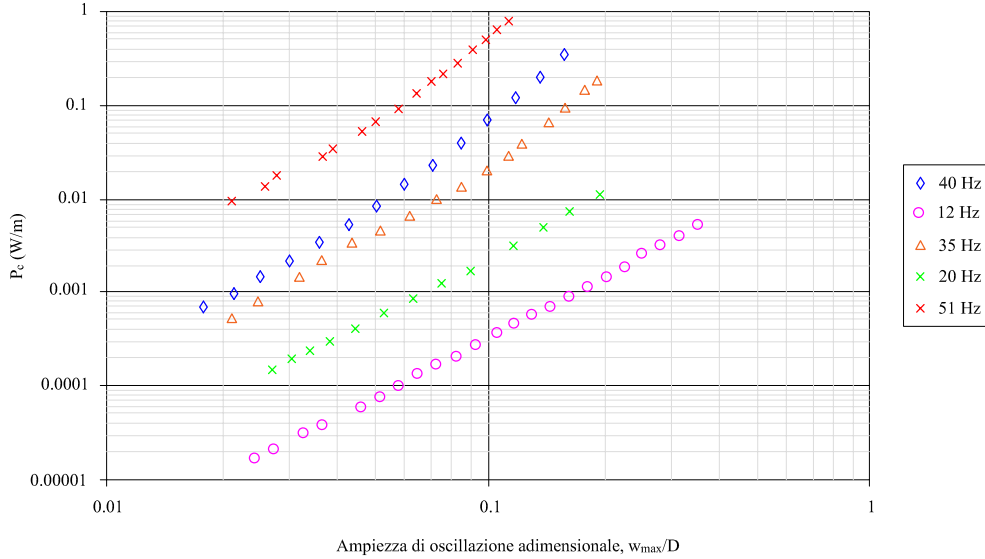


Figura 1.9: Potenza dissipata internamente dal cavo al variare della massima ampiezza di oscillazione per diversi valori di frequenza, a valle dell'esecuzione di un test di laboratorio [32].

Il terzo ed ultimo contributo che compare nell'equazione 1.4 rappresenta la potenza dissipata dai dispositivi di dissipazione eventualmente presenti su alcune sezioni della linea, al fine di mitigare l'ampiezza delle oscillazioni. Ci si sofferma in tale sede unicamente sulla definizione dell'equazione che esprime la potenza dissipata per mezzo di tali dispositivi, rimandando il lettore al Par.2.1 per una più approfondita trattazione a riguardo di essi. Anche in questo caso, la potenza dissipata viene determinata per base empirica tramite l'effettuazione di test sperimentali (*shaker test*), condotti secondo standard internazionali [1], in cui viene misurata l'intensità e la fase della forza esercitata dallo smorzatore, sottoposto a un moto imposto della base, in funzione della frequenza di vibrazione. Più nel dettaglio, la potenza dissipata, divisa per la lunghezza del cavo al fine di ripristinare l'omogeneità dimensionale delle grandezze coinvolte nell'equazione 1.4, può essere valutata mediante la seguente relazione:

$$P_{d,i}(f, w_{max}) = \frac{\pi}{L} \left(\frac{F_{d,i}}{w_{c0,i}} \right) w_{c0,i}^2 f \sin(\zeta) \quad (1.8)$$

dove $F_{d,i}$ rappresenta il modulo della forza concentrata trasmessa dall' i -esimo dissipatore alla linea in corrispondenza della sua sezione di attacco, $w_{c0,i}$ rappresenta l'ampiezza di oscillazione del cavo in corrispondenza della stessa sezione, f la frequenza di vibrazione e ζ lo sfasamento della forza esercitata rispetto al moto della sezione. Vale la pena sottolineare come lo spostamento incognito $w_{c0,i}$ possa essere direttamente relazionato al massimo spostamento della linea w_{max} , mediante la definizione della forma modale sollecitata, potendosi basare sull'ipotesi di risposta mono-modale del sistema. Si noti come il termine $F_{d,i}$, relativo all'interazione tra il dissipatore e la sezione di attacco del cavo, pur essendo determinato, a valle dei test sperimentali, unicamente in funzione della frequenza di vibrazione, risulta in realtà fortemente dipendente dall'ampiezza del moto imposto, a causa del carattere dissipativo non-lineare ed isteretico tipico degli smorzatori impiegati; pertanto, si necessiterebbe a rigore di esprimere la dipendenza di $F_{d,i}$ sia dalla frequenza f che dall'ampiezza di vibrazione $w_{c0,i}$. Analoga osservazione può essere effettuata con riferimento allo sfasamento temporale ζ .

Una volta definiti tutti i contributi che rientrano nel bilancio energetico, è possibile risolvere l'equazione 1.4 rispetto alla massima ampiezza di oscillazione incognita per un dato valore di velocità del vento e dunque di frequenza di vibrazione. Nello specifico, data la natura non lineare dell'equazione stessa, per determinarne il valore, risulta spesso necessario ricorrere o ad una procedura di soluzione grafica della stessa (come si evince da Fig.1.10) o, ancora, ad algoritmi di soluzione numerica. In definitiva, è possibile graficare l'andamento della massima ampiezza di oscillazione del conduttore w_{max} , in funzione della frequenza f di vibrazione, secondo quanto riportato ad esempio in Fig.1.11.

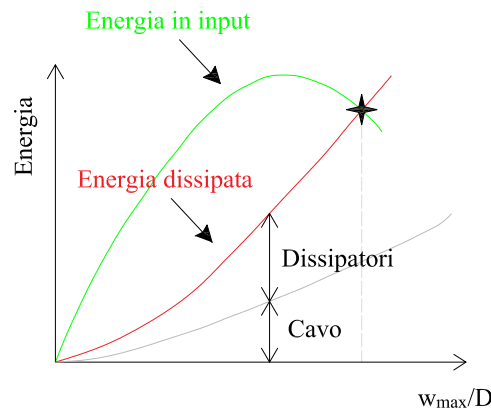


Figura 1.10: Bilancio di energia a frequenza fissata mediante risoluzione grafica. L'ascissa del punto di intersezione tra la curva raffigurante il contributo di potenza immessa nel sistema e la curva raffigurante il contributo di potenza dissipata rappresenta la massima ampiezza di oscillazione adimensionalizzata presente sulla linea a regime [32].

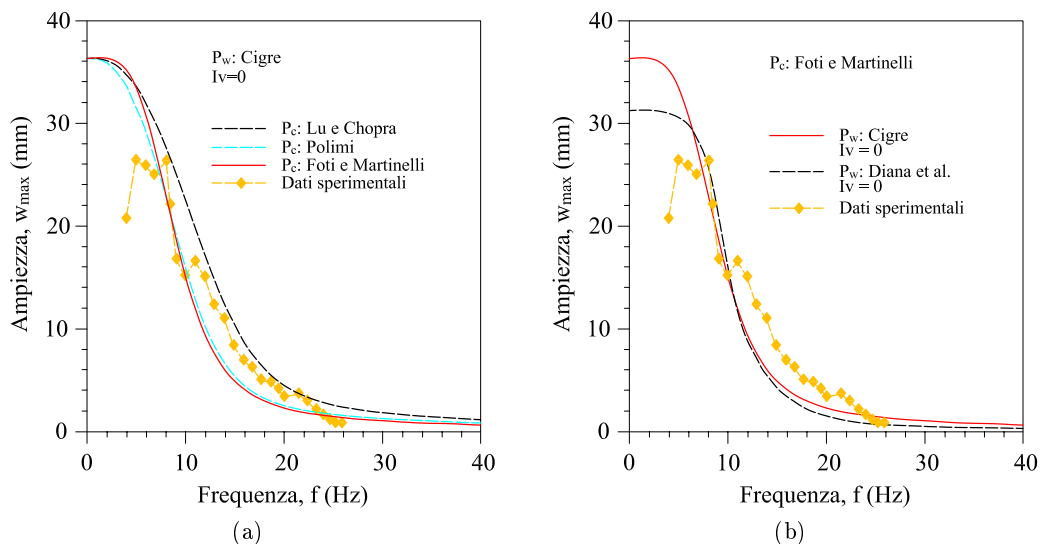


Figura 1.11: (a) Variazione dell'ampiezza di oscillazione massima con la frequenza in assenza di turbolenza e di dispositivi di dissipazione, considerando i risultati dei test di Cigre [5] per la definizione della potenza introdotta dal vento nel sistema e diverse modellazioni della potenza dissipata dal cavo. (b) Variazione dell'ampiezza di oscillazione massima con la frequenza in assenza di turbolenza e di dispositivi di dissipazione, considerando la modellazione di Foti e Martinelli per la definizione della potenza dissipata dal cavo (si veda [15]) e diverse strategie di modellazione della potenza introdotta dal vento.

Equazioni di moto del cavo soggetto a VIV

L'approccio diretto di questo paragrafo venne inizialmente introdotto da Hagedorn e i suoi collaboratori in [20, 21], al fine di sviluppare un modello analitico del cavo soggetto al fenomeno del distacco dei vortici, il quale fosse in grado di superare i limiti legati all'assunzione di comportamento mono-modale della struttura, alla base dell'applicazione dell'EBM. L'idea fondamentale di tale approccio consiste innanzitutto nello studio del sistema mediante un'opportuna modellazione del cavo e delle rispettive condizioni al contorno, nonché dei carichi agenti; questi ultimi sono riconducibili all'interazione aerodinamica con la vena fluida e alle forze scambiate con i dispositivi di dissipazione presenti. Più nel dettaglio, per l'analisi delle vibrazioni eoliche trasversali del sistema, indotte dal fenomeno di distacco dei vortici in direzione ortogonale alla velocità media del vento, risulta comodo studiare il problema nel piano (x, y) ; dove x identifica la direzione di sviluppo longitudinale del cavo e y la direzione di oscillazione trasversale dello stesso o, ugualmente, la direzione della componente forzante di lift.

Senza perdita di generalità, è possibile definire un'equazione di equilibrio dinamico indefinito alla traslazione trasversale del cavo, modellato come trave di Eulero-Bernoulli dotata di rigidità flessionale EI e sottoposta a una trazione applicata pari a T : l'equazione di moto governante è esprimibile secondo la 1.9.

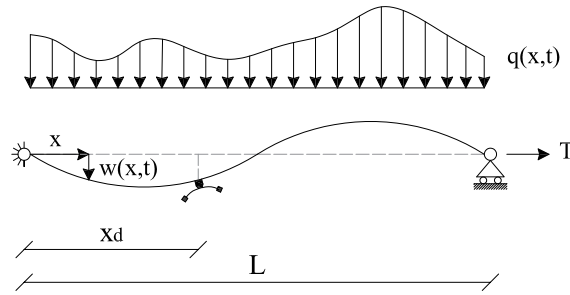


Figura 1.12: Trave in doppio appoggio di rigidità flessionale EI , soggetta a un'azione di tiro T e alla forzante di lift q distribuita. In corrispondenza della sezione trasversale $x = x_d$, risulta connesso alla linea un dispositivo di dissipazione.

$$EIw^{IV}(x, t) - Tw^{II}(x, t) + \beta\dot{w}(x, t) + \gamma\ddot{w}(x, t) = q(x, t) - F_d\delta(x - x_d), \quad (1.9)$$

con $x, x_d \in [0, L]$

dove $w(x, t)$ indica lo spostamento trasversale del cavo in corrispondenza della sezione x all'istante di tempo t (si veda Fig.1.12), β il coefficiente di smorzamento viscoso del cavo, γ la massa del cavo per unità di lunghezza, $q(x, t)$ rappresenta il carico dinamico di lift agente per effetto del fenomeno di distacco dei vortici e F_d la forza concentrata trasmessa dal dissipatore al conduttore in corrispondenza della sezione x_d . Si noti inoltre come con la simbologia IV e II si indicano rispettivamente le derivate parziali del quarto e secondo ordine della funzione $w(x, t)$ rispetto alla variabile spaziale x , mentre con i simboli $\ddot{\cdot}$ e $\dot{\cdot}$ si indicano rispettivamente le derivate parziali del secondo e primo ordine della funzione $w(x, t)$ rispetto alla variabile temporale t . Infine, si ricorda come la funzione $\delta(x - x_d)$ ("Delta di Dirac") assuma il valore 1 in corrispondenza della sezione $x = x_d$ e il valore 0 per $x \neq x_d$.

La soluzione dell'equazione differenziale 1.9 può essere ricavata solo previa imposizione delle corrispondenti condizioni iniziali e al contorno. Nel caso rappresentato in Fig.1.12

di trave cerniera-carrello in quiete all'istante iniziale nella sua configurazione di equilibrio statico, tali condizioni sono espresse rispettivamente dalle relazioni 1.10 e 1.11.

$$w(x, t = 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} w(x = 0, t) &= 0, \quad w(x = L, t) = 0 \quad \forall t \\ w^{\text{II}}(x = 0, t) &= 0, \quad w^{\text{II}}(x = L, t) = 0 \quad \forall t \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nel caso in cui, le condizioni di vincolo di estremità fossero rappresentate da due incastri perfetti, le ultime due condizioni al contorno riportate in 1.11 sarebbero differenti in quanto dovrebbero esprimere l'annullarsi della rotazione delle sezioni trasversali di estremità.

Nel proseguo della trattazione, risulta conveniente riferirsi a un'ulteriore semplificazione del modello, trascurando nell'equazione 1.9 il contributo legato alla rigidità flessionale dell'elemento; tale assunzione risulta essere ragionevole nel caso in cui la disuguaglianza 1.12 sia soddisfatta.

$$e = \sqrt{EI/TL^2} \ll 1 \quad (1.12)$$

In questo modo, si ottiene dalla 1.9 l'equazione di equilibrio dinamico indefinito alla traslazione, espressa in 1.13, di un cavo tesato privo di rigidità flessionale. A livello pratico, tale equazione risulta essere associata a un inferiore onere computazionale, dovuto al fatto che il massimo ordine di derivazione spaziale con cui compare la funzione $w(x, t)$ nell'equazione si riduce da quattro a due. Anche le condizioni al contorno necessarie per la soluzione del problema differenziale, in maniera del tutto consistente, passano da quattro a due e sono rappresentate dalle prime due della 1.11.

$$\begin{aligned} -Tw^{\text{II}}(x, t) + \beta\dot{w}(x, t) + \gamma\ddot{w}(x, t) &= q(x, t) - F_d\delta(x - x_d), \\ &\text{con } x, x_d \in [0, L] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Per risolvere il problema, risulta necessario esplicitare l'espressione che definisce la forza aerodinamica di lift $q(x, t)$, la quale può essere espressa dalla relazione 1.14, in cui ρ indica la densità dell'aria, D il diametro del cavo, V la velocità media del vento e $C_L = C_L(x, t)$ rappresenta il coefficiente aerodinamico di lift variabile nello spazio e nel tempo. Tale coefficiente può essere adeguatamente modellato come un processo stocastico stazionario a banda stretta, centrato sulla frequenza di Strouhal in esame e con assegnata correlazione spaziale. Si rimanda per una trattazione più dettagliata e per i conseguenti sviluppi delle equazioni coinvolte a [13].

$$q(x, t) = \frac{1}{2}\rho DV^2 C_L(x, t) \quad (1.14)$$

Infine, il termine F_d , che esprime l'interazione tra il cavo e il dispositivo di smorzamento ad esso connesso, può essere esplicitato solo a valle di un processo di modellazione del dissipatore stesso, secondo quanto verrà dettagliatamente discusso nel Capitolo 2.

1.2 Scopi e contenuti dell'elaborato

A valle dell'inquadramento generale del problema fornito nei paragrafi precedenti, risulta ora doveroso esporre le tematiche e gli obiettivi fondamentali che verranno discussi nel corso del presente elaborato di tesi. Secondo quanto appena esposto, al fine di mitigare il fenomeno delle oscillazioni eoliche dei cavi sospesi, si necessita in numerosi frangenti di opportuni dispositivi di smorzamento, tra i quali si citano i dissipatori Stockbridge. Per poter descrivere in termini quantitativi il loro comportamento in condizioni di operatività e con lo scopo di definirne il contributo da essi apportato nel contesto del Metodo di Bilancio dell'Energia o del metodo basato sullo studio delle equazioni di moto del cavo, diviene indispensabile munirsi di opportune tecniche di analisi e modellazione dei dispositivi stessi; pertanto, nel corso dei capitoli seguenti, ci si soffermerà proprio su tali aspetti, che ci si accinge ora ad esporre in maniera sintetica ma esaustiva.

All'interno del Capitolo 2, verranno dapprima analizzati i principi di funzionamento e le proprietà di tali dispositivi, in modo da comprendere, dal punto di vista concettuale e fenomenologico, gli aspetti fondamentali del loro comportamento. Successivamente, si procederà con la modellazione e l'analisi dinamica del sistema meccanico atto all'idealizzazione del dissipatore Stockbridge, attraverso la scrittura delle equazioni che ne governano il moto vibrazionale e che permettono il calcolo delle forzanti di interazione tra questi ultimi e il cavo conduttore. In tale contesto, assunta una descrizione del sistema-dissipatore a masse concentrate, il tema della modellazione del comportamento costitutivo degli elementi deformabili, presenti all'interno del dispositivo, si identifica come il principale oggetto della discussione, stante la complessità alla base della natura isteretica e non-lineare del fenomeno. A tal proposito, verranno esposti, allo stato dei fatti, i progressi effettuati dalla ricerca e presenti in letteratura, in modo da disporre di una panoramica generale a riguardo, prima di poter procedere, nel corso dei capitoli successivi, con sviluppi ulteriori ed innovativi.

All'interno del Capitolo 3, verrà fornita una proposta di modellazione discreta a un grado di libertà di un dissipatore Stockbridge simmetrico, per il quale si assumerà in prima istanza un comportamento puramente traslazionale e, in seguito, puramente rotazionale delle masse di estremità in esso presenti. La descrizione analitica delle proprietà dissipative e di deformabilità proprie del dispositivo verrà attuata sulla base dell'impiego del modello isteretico di Bouc-Wen. A partire dagli esiti sperimentali di test quasi-statici e dinamici effettuati da diversi ricercatori, si focalizzerà l'attenzione sul processo di taratura dei parametri governanti il modello, al fine di riprodurre numericamente la realtà fisica in esame; una volta definita una calibrazione ottimale, si procederà con la validazione dei risultati ottenuti sempre sfruttando la comparazione tra gli esiti numerici e quelli sperimentali, secondo quanto verrà esaustivamente discusso.

Nel Capitolo 4, la discussione effettuata in precedenza verrà ulteriormente generalizzata, in modo da descrivere compiutamente il comportamento globale di un dispositivo Stockbridge simmetrico, per il quale le masse di estremità possono esibire un moto genericamente roto-traslazionale. Per tale scopo, sarà necessario introdurre un'opportuna tecnica di modellazione discreta a due gradi di libertà del sistema, basata su un'estensione del modello di Bouc-Wen per il caso a più coordinate libere, per le quali le evoluzioni delle leggi isteretiche verranno assunte indipendenti l'una dall'altra. Con lo scopo di rifinire ulteriormente la tecnica di modellazione, nel Capitolo 5, verrà impiegato il modello discreto di Park-Wen, in grado di contare su un certo livello di accoppiamento isteretico e sull'introduzione di parametri aggiuntivi per un maggior controllo sull'evoluzione della risposta dissipativa del sistema.

A supporto dell'esposizione, verranno messe a disposizione del lettore una serie di appendici, per lo più atte a chiarificare la struttura e il funzionamento di alcuni strumenti di natura

numerico-computazionale, i quali verranno sfruttati all'interno del processo di soluzione del problema mediante l'impiego di codici implementati nel software MATLAB.

Da ultimo, il Capitolo 6 sarà dedicato all'esposizione sintetica dei principali risultati, ottenuti a partire dai differenti tentativi di modellazione attuati, evidenziandone nello specifico vantaggi, limitazioni ed eventuali migliorie che potranno essere apportate in studi di ricerca futuri. Inoltre, si dedicherà attenzione anche a quelle che si configurano come applicazioni pratiche del lavoro di modellazione svolto, introducendo la possibilità di sfruttare i risultati ottenuti all'interno del contesto del Metodo di Bilancio di Energia, affinché si possa stabilire l'impatto quantitativo di tali dispositivi di smorzamento non-lineari sull'entità delle oscillazioni eoliche dei cavi, sui quali essi verranno installati.

Capitolo 2

I DISPOSITIVI DI SMORZAMENTO DELLE VIBRAZIONI EOLICHE

Secondo quanto già discusso al Capitolo 1, qualora le ampiezze di vibrazione del cavo, causate dal fenomeno di distacco dei vortici dalla sezione, siano tali da condurre al potenziale rischio di danneggiamento o collasso della struttura per fenomeni di fatica ciclica, risulta necessario provvedere opportuni dispositivi di dissipazione di energia e conseguente mitigazione delle oscillazioni. Allo stato attuale si possono impiegare nella pratica progettuale diverse tipologie di smorzatori. I dispositivi più frequentemente impiegati sono i dissipatori Stockbridge ("Stockbridge dampers"), che costituiscono il principale oggetto di studio dell'elaborato di tesi e verranno descritti nel presente capitolo, insieme ad alcune tecniche proposte in letteratura per caratterizzarne la risposta dinamica. A tal proposito, si farà riferimento alla scrittura delle equazioni di moto governanti la dinamica del sistema meccanico idealizzante tali dispositivi e si determinerà l'espressione analitica delle forzanti di interazione F_d e M_d con il cavo conduttore, in funzione dell'ampiezza delle oscillazioni in corrispondenza della sezione di attacco.

2.1 Il dissipatore Stockbridge

2.1.1 Principi di funzionamento e proprietà

Il dissipatore Stockbridge per la mitigazione delle vibrazioni eoliche dei cavi venne ideato da George H. Stockbridge, ingegnere presso la società elettrica "Edison" della California del Sud, negli anni venti del XX secolo, ottenendo il brevetto americano numero 1675391 il 3 luglio 1928 ([37]). Economico, affidabile e semplice da installare, fu uno dei primi dispositivi di smorzamento ad essere commercializzato. La tipologia più comune di dissipatore Stockbridge risulta costituita da due masse in acciaio o in lega di zinco-alluminio connesse rigidamente alle estremità di altrettanti cavi in acciaio (cavi messaggeri – *messenger cables*), i quali sono collegati per mezzo di una pinza rigida, in leghe alleggerite di alluminio, a una sezione trasversale del conduttore; tali cavi messaggeri sono composti da più fili intrecciati in grado di scorrere l'uno rispetto all'altro (si veda Fig.2.1). All'occorrenza di oscillazioni trasversali nel conduttore, grazie alla presenza dei corpi inerziali alle estremità del dissipatore, i cavi messaggeri si comportano come mensole incastrate alla pinza e risultano soggetti a un regime di deformazione flessionale, il quale comporta lo scorrimento relativo tra i fili e la conseguente dissipazione di energia per attrito. Nel caso in cui la frequenza prevalente nello spettro del moto imposto alla pinza dello smorzatore, ossia la

frequenza prevalente nello spettro di vibrazione del conduttore, sia prossima o coincidente con una delle frequenze naturali del sistema meccanico che modella il dissipatore stesso, si entra in una condizione di risonanza caratterizzata da ampie deformazioni dei cavi messaggeri e dalla conseguente dissipazione di una rilevante quantità di energia sotto forma di attrito: quello appena descritto rappresenta un regime di funzionamento ottimale dello smorzatore, in grado di massimizzarne l'efficienza. La prova di quanto appena esposto si ha analizzando il termine relativo all'energia dissipata dal dispositivo di smorzamento, precedentemente introdotto per l'applicazione del Metodo di Bilancio dell'Energia: dall'equazione 1.8 si evince come tale contributo sia massimizzato quando l'angolo ϕ , che esprime lo sfasamento temporale tra il moto del cavo e la forza trasmessa allo stesso dal dissipatore, risulta pari a 90° , ossia quando la forza di interazione (F_d) risulta essere in quadratura di fase rispetto al moto. Si ricorda infatti, da nozioni base di dinamica dei sistemi meccanici, come una forzante esterna al sistema (forza F_d che sollecita il cavo nel caso in analisi) risulti essere in quadratura di fase rispetto al moto del cavo stesso quando si instaura un regime di risonanza (si veda Fig.2.2). Risulta quindi chiaro come, fissando opportunamente i diversi parametri dello strumento, quali le masse e la lunghezza dei cavi messaggeri, divenga possibile ottenere un sistema meccanico caratterizzato da frequenze naturali le più vicine possibile alle frequenze che più comunemente caratterizzano le vibrazioni eoliche del conduttore. Inoltre, se le frequenze proprie del dissipatore Stockbridge risultano essere sufficientemente diverse le une dalle altre, si è in grado di ottenere un dispositivo più efficiente e versatile, in grado di mitigare l'entità delle oscillazioni della struttura con riferimento a uno spettro di frequenze più ampio o, in altre parole, per diversi valori di velocità media del vento.

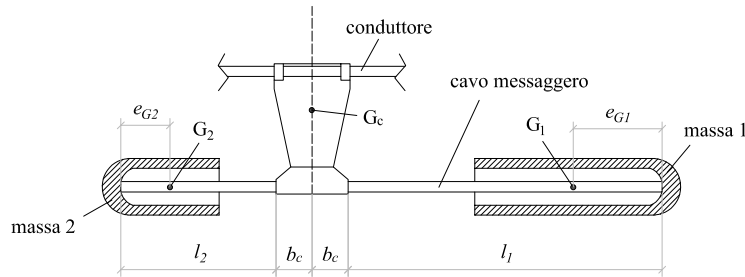


Figura 2.1: Schema fondamentale di un dissipatore Stockbridge costituito da una pinza di collegamento al conduttore, due cavi messaggeri e due masse inerziali in corrispondenza delle zone estremali

L'efficacia dell'impiego del dissipatore Stockbridge per lo smorzamento delle vibrazioni eoliche dipende, oltre che dalle sue proprietà, anche dal numero e dalla posizione in cui i dissipatori vengono collocati lungo il cavo conduttore. A riguardo di quest'ultimo aspetto, risulta importante sottolineare come il dispositivo sia in grado di fornire un adeguato grado di dissipazione se la forza di interazione dissipatore-struttura F_d compie un lavoro sufficientemente rilevante; nel caso in cui il dissipatore sia posizionato in corrispondenza di una sezione in prossimità di un nodo (punto a spostamento nullo) del modo strutturale eccitato dall'azione eolica, pur essendo il modulo di F_d elevato, il lavoro effettivo che essa compie risulta pressochè nullo, così da rendere irrilevante l'efficienza del dispositivo. Quindi, pur avendo selezionato una tipologia di dissipatore in grado di lavorare in regime di risonanza per un dato valore di velocità del vento e, conseguentemente, di frequenza di vibrazione del conduttore, se il dispositivo stesso viene erroneamente posizionato lungo la linea, la sua utilità si riduce ad essere irrilevante. Inoltre, per ragioni pratiche legate all'installazione e alla semplicità di manutenzione, risulta ragionevole posizionare tali dispositivi in prossi-

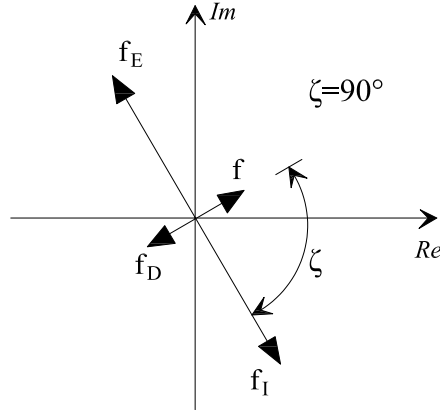


Figura 2.2: Diagramma di Argand riferito ad una condizione di risonanza, in cui la forzante esterna viene completamente equilibrata dalle sole forze viscose.

mità degli elementi di supporto del cavo (nel caso delle linee elettriche ad alta tensione, in prossimità dei tralicci).

Prima di addentrarsi nella modellazione e nell'analisi analitico-numerica del sistema meccanico in grado di descrivere il comportamento del dissipatore Stockbridge, tema che riveste importanza primaria all'interno del presente elaborato, risulta doveroso esporre un'ulteriore peculiarità circa il funzionamento di tali dispositivi. Differentemente da quanto accade per i classici smorzatori a masse accordate (*tuned mass dampers, TMD*), in grado di fornire un contributo dissipativo descrivibile mediante leggi lineari [7], la risposta dinamica dei dissipatori Stockbridge risulta essere caratterizzata da processi isteretici ad alto grado di non-linearità. La spiegazione fisica di tale fenomeno risiede nel fatto che, come descritto in precedenza, la dissipazione di energia al loro interno avviene per attrito per effetto dello scorrimento relativo tra fili costituenti i cavi messengeri. Come si analizzerà più in dettaglio nel seguito (si veda Par.3.4), la funzione di impedenza, che caratterizza la risposta del dispositivo, risulta essere influenzata non solo dalla frequenza del moto imposto alla pinza per effetto della vibrazione del conduttore, a cui il dissipatore è rigidamente connesso, ma anche dall'ampiezza di tale moto. Tale proprietà dei dissipatori Stockbridge, sebbene comporti maggiori difficoltà nel caratterizzarne numericamente la risposta rispetto al caso di dissipatore lineare (per il quale l'andamento della funzione d'impedenza risulta indipendente dall'ampiezza del moto imposto), rende tali dispositivi molto versatili ed efficienti nella pratica applicativa. Diviene infatti possibile ridurre notevolmente i fenomeni di perdita di sintonizzazione con il moto del cavo, dovuti, ad esempio, ad una variazione delle condizioni operative (modifica sostanziale del valore di velocità media del vento) o ad una variazione nel tempo delle proprietà meccaniche del dispositivo (fenomeni di invecchiamento che alterano il processo di scorrimento relativo tra i fili costituenti i cavi messengeri). Per tale motivo, si è soliti riferirsi ai dissipatori Stockbridge come dispositivi dotati della capacità di auto-sintonizzarsi sulla specifica banda di frequenze che caratterizza il moto del conduttore (*auto-tuning capability*).

2.1.2 Modellazione del sistema meccanico ed equazioni governanti

Per procedere con l'analisi numerica del dispositivo, risulta necessario definire un modello meccanico in grado di descrivere adeguatamente il funzionamento dello stesso, una volta connesso tramite una pinza rigida al cavo conduttore soggetto a un regime di vibrazione. D'ora innanzi, si farà riferimento come oggetto di studio al sistema costituito dalle masse e dai cavi messengeri, mentre la pinza rigida di connessione verrà considerata come un

supporto mobile esterno. Le masse presenti alle estremità dei cavi messaggeri sono generalmente dotate di due gradi di libertà ciascuno: infatti, esse risultano libere di traslare verticalmente e di ruotare rigidamente nel piano del dispositivo. Dal momento che l'entità delle masse risulta molto maggiore rispetto a quella della massa dei cavi messaggeri, risulta possibile fare riferimento ad un sistema dinamico a masse concentrate, in cui l'inerzia coincide con quella delle masse estremali e le proprietà dissipative e di deformabilità discendono unicamente dalla deformazione dei cavi messaggeri. Se da un lato, per quanto concerne la modellazione dell'inerzia, il processo si esaurisce con quanto appena esposto, dall'altro l'idealizzazione del comportamento costitutivo dei cavi messaggeri (e quindi della rigidità e del carattere dissipativo) risulta essere argomento aperto di discussione, specie nel presente lavoro; come verrà discusso nel Par.2.2, varie soluzioni, sia a deformabilità concentrata che distribuita, sono state proposte e sono tuttora presenti in letteratura, mentre altre verranno per la prima volta introdotte a fini di ricerca nel presente lavoro di tesi. Infine, il tema della modellazione dei vincoli risulta piuttosto definito, in quanto è ragionevole e diffuso attuare una modellazione della connessione alla pinza come vincolo di incastro soggetto a un'opportuna storia di cedimenti anelastici, i quali permettono di simulare l'effetto della vibrazione della sezione del conduttore a cui il dispositivo risulta connesso.

Lasciando per il momento aperta la questione della modellazione analitica dei cavi messaggeri, secondo quanto esposto finora, nel caso più generale di dissipatore non simmetrico (dissipatore 4R), è possibile fare riferimento al sistema meccanico discreto a quattro gradi di libertà di Fig.2.3, dove $v_i (i = 1, 2)$ si identifica con la coordinata libera che descrive lo spostamento verticale, in corrispondenza del punto di attacco all'estremo del cavo messaggero, dell' i -esima massa rispetto alla pinza, $\phi_i (i = 1, 2)$ la coordinata libera che descrive la rotazione rigida relativa dell' i -esima massa attorno ad un polo situato nell'estremo del cavo messaggero (punto di collegamento tra la massa e il cavo stesso) rispetto ad un sistema solidale alla pinza, mentre $w_c = w(x = x_c)$ e $\phi_c = \phi(x = x_c)$ rappresentano rispettivamente la traslazione verticale e la rotazione della sezione del cavo conduttore in corrispondenza della quale risulta collegato il dissipatore.

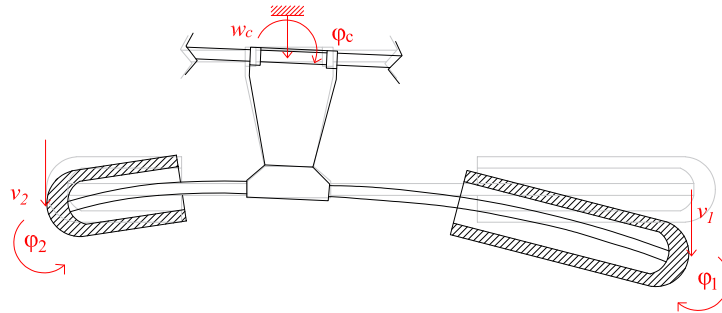


Figura 2.3: Modellazione del dissipatore Stockbridge come sistema meccanico discreto a quattro gradi di libertà soggetto al moto roto-traslazionale imposto del vincolo (pinza metallica di connessione al conduttore) [16].

Si sottolinea inoltre come i due sottosistemi costituiti da una massa e dal corrispondente cavo messaggero incastrato alla pinza si assumono completamente indipendenti e privi di ogni grado di accoppiamento, stante l'assunzione di pinza rigida, pertanto, anziché considerare un unico sistema dinamico a quattro gradi di libertà, è alternativamente possibile fare riferimento a due sistemi caratterizzati da due gradi di libertà ciascuno.

Definite le ipotesi di modellazione del sistema, risulta possibile ricavare le equazioni di moto che ne regolano il comportamento dinamico, circoscrivendo l'analisi al caso di piccoli spostamenti e rotazioni. Studiando per convenienza separatamente i due sottosistemi (cavo

messaggero + massa), posti rispettivamente a sinistra e a destra della pinza rigida, le equazioni di moto di ciascuno di essi possono essere ricavate in accordo con la formulazione matematicamente rigorosa basata sulla scrittura delle equazioni di Lagrange per sistemi dinamici discreti. Tali equazioni di moto, affiancate a quelle regolanti la dinamica della pinza rigida, permettono di esplicitare la forza F_d e la coppia M_d di interazione tra il dissipatore e il cavo conduttore, le quali risultano necessarie per risolvere il problema delle oscillazioni del cavo, sia secondo il Metodo di Bilancio dell'Energia sia secondo lo studio delle equazioni di moto del cavo (si veda Par.1.1.2). Rimandando il lettore a [19, 3] per una trattazione analitica più dettagliata, ci si limita in tale sede a riportare in 2.1 le equazioni di Lagrange in forma scalare riferite all' i -esimo sottosistema ($i=1,2$).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{v}_i} \right) + F_i &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{\phi}_i} \right) + M_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove T_i indica l'energia cinetica dell' i -esima massa e F_i ed M_i indicano rispettivamente la forza e il momento di richiamo esercitati dal cavo messaggero su di essa. Dal momento che non è stata ancora attribuita alcuna modellazione specifica al legame costitutivo regolante il comportamento del cavo messaggero, non è momentaneamente possibile fornirne un'espressione esplicita. Si noti come il membro di destra di entrambe le equazioni sia identicamente nullo, non essendo applicati forze e coppie perturbatrici attive sul sistema. Inoltre, si sottolinea il carattere non conservativo delle forze di richiamo dovuto ai fenomeni dissipativi che coinvolgono il cavo messaggero durante la deformazione flessionale. Nel dettaglio, l'energia cinetica dell' i -esimo sottosistema, sottoposto al moto della pinza, può essere determinata in accordo con il teorema di König secondo l'espressione 2.2.

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{w}_{Gi}^2 + \frac{1}{2} I_{Gi} \left(\dot{\phi}_i + \varepsilon_i \dot{\phi}_c \right)^2 \quad (2.2)$$

Si è indicato con i termini m_i ed I_{Gi} la massa e il momento d'inerzia attorno al baricentro dell' i -esimo corpo inerziale, w_{Gi} lo spostamento assoluto del baricentro dello stesso ed ε_i definita come $\varepsilon_i = (-1)^{i-1}$.

Lo spostamento w_{Gi} , secondo la notazione adottata nel presente elaborato, risulta definito come:

$$w_{Gi} = w_c + \varepsilon_i b_c \phi_c + v_i - e_{Gi} \phi_i \quad (2.3)$$

con e_{Gi} eccentricità dell'estremità del cavo messaggero (punto di connessione con la massa inerziale definito con la lettera B_i in Fig.2.1) rispetto al baricentro della massa e b_c lunghezza caratteristica della pinza (si veda Fig.2.1).

Sostituendo l'equazione 2.3 nella 2.2 si ottiene la seguente espressione:

$$T_i(\dot{v}_i, \dot{\phi}_i) = \frac{1}{2} m_i [(\dot{v}_i - e_{Gi} \dot{\phi}_i)^2 + 2(\dot{v}_i - e_{Gi} \dot{\phi}_i)(\dot{w}_c + \varepsilon_i b_c \dot{\phi}_c) + (\dot{w}_c + \varepsilon_i b_c \dot{\phi}_c)^2] + \frac{1}{2} I_{Gi} \left(\dot{\phi}_i + \varepsilon_i \dot{\phi}_c \right)^2 \quad (2.4)$$

In definitiva, le equazioni 2.1 assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{v}_i(t) - m_i e_{Gi} \ddot{\phi}_i(t) + F_i(v_i, \phi_i, t) &= -m_i \ddot{w}_c(t) - m_i \varepsilon_i b_c \ddot{\phi}_c(t) \\ -m_i e_{Gi} \ddot{v}_i(t) + (I_{Gi} + e_{Gi}^2 m_i) \ddot{\phi}_i(t) + M_i(v_i, \phi_i, t) &= m_i e_{Gi} \ddot{w}_c(t) + (m_i e_{Gi} \varepsilon_i b_c - I_{Gi} \varepsilon_i) \ddot{\phi}_c(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si noti come al membro di destra delle equazioni in 2.5, i termini forzanti apparenti, associati al moto imposto alla pinza, compaiono naturalmente nelle equazioni di moto, dal momento che esse sono state scritte solidalmente ad un sistema di riferimento assoluto ed inerziale. Alternativamente, tali equazioni si sarebbero potute ottenere considerando un sistema di riferimento solidale alla pinza e tenendo opportunamente in conto delle accelerazioni imposte al sistema di riferimento stesso.

Il sistema di equazioni 2.5 sancisce l'equilibrio dinamico tra le forze di richiamo esercitate dal cavo messaggero sulle masse e le forze d'inerzia associate alle masse stesse e risulta essere un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, accoppiate (sia nella componente inerziale che in quella di richiamo) e non-lineari (stante il carattere dissipativo delle forze di richiamo).

Un'ulteriore considerazione riguarda la procedura impiegata per l'ottenimento di tali equazioni; in luogo del metodo basato sulla definizione delle equazioni di Lagrange, medesimi risultati possono essere ottenuti scrivendo gli equilibri dinamici alla traslazione e alla rotazione dell' i -esimo corpo inerziale facendo riferimento alla Fig.2.4.

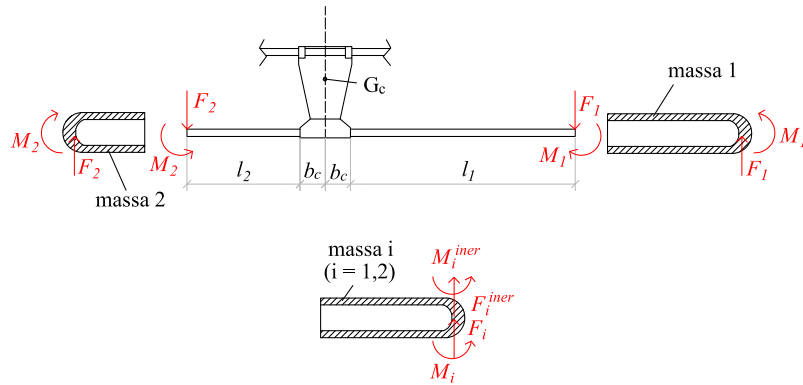


Figura 2.4: Forze e coppie di inerzia e di richiamo agenti sulle masse per la scrittura delle equazioni di equilibrio dinamico [16].

Risulta a questo punto possibile esplicitare le componenti di interazione tra la pinza rigida ed il cavo (forza F_d e momento M_d) considerando le equazioni di equilibrio dinamico alla traslazione verticale e alla rotazione della pinza stessa sotto l'azione delle forze e coppie illustrate in Fig.2.5.

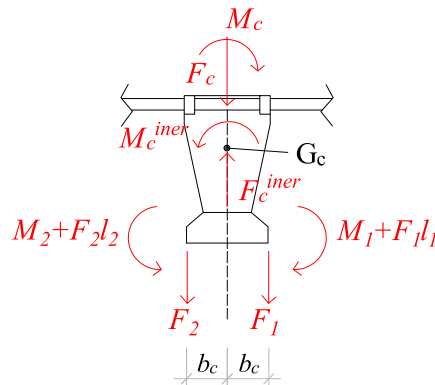


Figura 2.5: Forze e coppie di inerzia e di richiamo agenti sulla pinza rigida per la scrittura delle equazioni di equilibrio dinamico della stessa [16].

Si ottengono in definitiva le equazioni 2.6:

$$\begin{aligned} F_d &= m_c \ddot{w}_c - (F_1 + F_2) \\ M_d &= I_{Gc} \ddot{\phi}_c + M_2 - M_1 + F_2(l_2 + b_c) - F_1(l_1 + b_c) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove, in aggiunta alle quantità precedentemente definite, si indicano con m_c e I_{Gc} rispettivamente le inerzie traslazionali e rotazionali, calcolate rispetto al baricentro, della pinza.

Sostituendo a questo punto le equazioni 2.5 all'interno delle 2.6 è possibile ottenere le equazioni 2.7.

$$\begin{aligned} F_d &= (m_1 + m_2 + m_c) \ddot{w}_c + (m_1 - m_2) b_c \ddot{\phi}_c + m_1 \ddot{v}_1 + m_2 \ddot{v}_2 - m_1 e_{G1} \ddot{\phi}_1 - m_2 e_{G2} \ddot{\phi}_2 \\ M_d &= (m_1 l_1^* - m_2 l_2^*) \ddot{w}_c + (I_{G1} + I_{G2} + I_{Gc} + m_1 b_c l_1^* + m_2 b_c l_2^*) \ddot{\phi}_c + m_1 l_1^* \ddot{v}_1 - m_2 l_2^* \ddot{v}_2 + \\ &\quad + (I_{G1} - m_1 e_{G1} l_1^*) \ddot{\phi}_1 - (I_{G2} - m_2 e_{G2} l_2^*) \ddot{\phi}_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove appare il termine $l_i^* = l_i + b_c - e_{Gi}$, $i = 1, 2$.

Per il caso particolare di dissipatore Stockbridge simmetrico (dissipatore-2R) è possibile specializzare le 2.7 considerando le uguaglianze $v_1 = v_2 = v$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ ed ottenendo quindi le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} F_d &= (2m + m_c) \ddot{w}_c + 2m \ddot{v} - 2m e_G \ddot{\phi} \\ M_d &= (2I_G + I_{Gc} + 2m b_c l^*) \ddot{\phi}_c \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove m , I_G e e_G indicano le proprietà inerziali e geometriche delle masse alle estremità del cavo messaggero e l^* è definito come $l^* = l_1 + b_c - e_{G1} = l_2 + b_c - e_{G2}$.

Risulta inoltre interessante considerare il caso in cui si abbia un dissipatore Stockbridge simmetrico sottoposto ad una pura traslazione verticale alla pinza ($w_c \neq 0$, $\phi_c = 0$). Tale assunzione non si dimostra essere particolarmente restrittiva ai fini della modellazione del sistema accoppiato cavo+smorzatore, dal momento che, secondo quanto discusso ad esempio in [9, 10], la rotazione rigida della pinza (*rocking effect*) influenza in maniera irrilevante la risposta globale del sistema. Inoltre, se si attua una modellazione del cavo conduttore come fune tesata priva di rigidità flessionale, il suddetto contributo di rotazione, anche se in principio presente, non rientra in alcun termine delle equazioni governanti il moto del cavo e può pertanto essere fin da subito trascurato. le equazioni che descrivono la forza e la coppia di interazione tra la pinza rigida e il cavo risultano espresse dalle 2.9.

$$\begin{aligned} F_d &= (2m + m_c) \ddot{w}_c + 2m \ddot{v} - 2m e_G \ddot{\phi} \\ M_d &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si noti come per uno Stockbridge simmetrico sottoposto a pura traslazione verticale, il momento di interazione M_d risulti identicamente nullo e il sistema meccanico che descrive il dissipatore passa da essere caratterizzato da quattro gradi di libertà a soli due.

Da ultimo, al fine di ricavare l'espressione della forza alla pinza, in funzione del moto del cavo, è opportuno sottolineare come sia necessario conoscere il moto delle masse. Questo può essere ricavato dalle 2.5 previa conoscenza dell'espressione analitica caratterizzante le forze di interfaccia cavo messaggero-massa. Per tale motivo risulta a tal punto necessario addentrarsi nel tema della modellazione dei cavi messaggeri, secondo quanto presentato nel paragrafo seguente.

2.2 Stato dell'arte: proposte di letteratura circa la modellazione dei dissipatori Stockbridge

La caratterizzazione del comportamento dissipativo isteretico dei dispositivi Stockbridge può essere effettuata mediante un'opportuna modellazione dei cavi messaggeri. In letteratura è possibile ritrovare diverse proposte in grado di tenere in conto le non-linearità presenti. In tale sede, verranno riportati alcuni modelli a deformabilità concentrata per i cavi messaggeri (molla non-lineare) ed altri a deformabilità continua (trave/solido non-lineare).

2.2.1 Modellazione discreta di Pivovarov e Vinogradov

Pivovarov e Vinogradov [31] proposero nel 1986 un modello matematico del cavo messaggero a deformabilità concentrata considerando un sistema ad un singolo grado di libertà (traslazione verticale v delle masse inerziali), in cui la forza di richiamo è definita attraverso la legge isteretica non-lineare di Bouc [4].

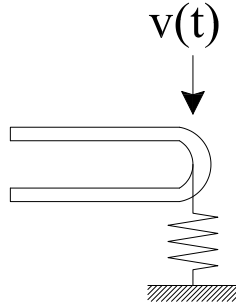


Figura 2.6: Modello discreto secondo Pivovarov e Vinogradov con molla non-lineare.

Nel dettaglio le proprietà non-lineari e dissipative sono controllate da due parametri del modello (a, b nella seconda equazione della 2.10), i quali possono essere tarati e successivamente validati mediante comparazione dei risultati numerici con i dati sperimentali. Le equazioni governanti il moto delle masse (equilibrio dinamico alla traslazione e legge di flusso), per Stockbridge simmetrico in assenza di rotazione alla pinza, risultano quindi essere definite come le 2.10, riferendosi al caso di un generico moto imposto alla pinza.

$$\begin{aligned} m\ddot{v} + F(v, t) &= -m\ddot{w}_c(t) \\ \dot{F} + amF|\dot{v}| + bm\dot{v}|F| &= \omega^2 m\dot{v} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove $F(v, t)$ rappresenta la forza di richiamo isteretica esercitata dal cavo messaggero sulla massa, a e b i già menzionati parametri regolanti i cicli d'isteresi e ω la frequenza naturale del sistema calcolata rispetto ad una rigidezza di riferimento, assumendo un comportamento lineare del sistema stesso.

I due coefficienti adimensionali a e b contribuiscono a definire la rigidezza e lo smorzamento non-lineari del sistema sebbene la legge di flusso in 2.10 non sia in grado di evidenziare se entrambi i coefficienti influenzino o meno entrambe le proprietà. In [31] viene chiarito il ruolo di tali parametri mediante la definizione di una forza di smorzamento equivalente e di una forza equivalente funzione della proprietà di rigidezza. Nel dettaglio, si può dimostrare come il parametro a influenzi entrambi i contributi mentre il parametro b solo il secondo. In ogni caso entrambi i parametri sono associati alle proprietà non-lineari del materiale: infatti, la forma dei cicli isteretici si prova essere influenzata sia da a e da b .

A titolo d'esempio, supponendo di considerare noto e di forma armonica il moto imposto alla pinza ($\ddot{w}_c(t) = -w_{c0}\Omega^2 \cos(\Omega t)$ con Ω frequenza della forzante apparente) è possibile

risolvere il sistema numericamente mediante il metodo di Runge-Kutta e ottenere il grafico in Fig.2.8, da confrontare con i dati sperimentali di Fig.2.7, che rappresenta l'evoluzione della forza di richiamo F in funzione della coordinata libera traslazionale v della massa.

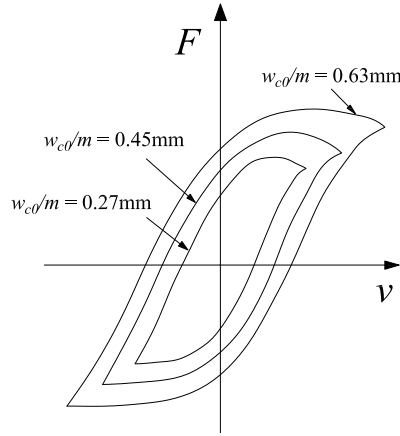


Figura 2.7: Cicli d'isteresi sperimentali nel piano Forza-Spostamento per un dissipatore-2R con $f = \frac{\Omega}{2\pi} = 13Hz$ e differenti valori di $\frac{w_{c0}}{m}$ [31].

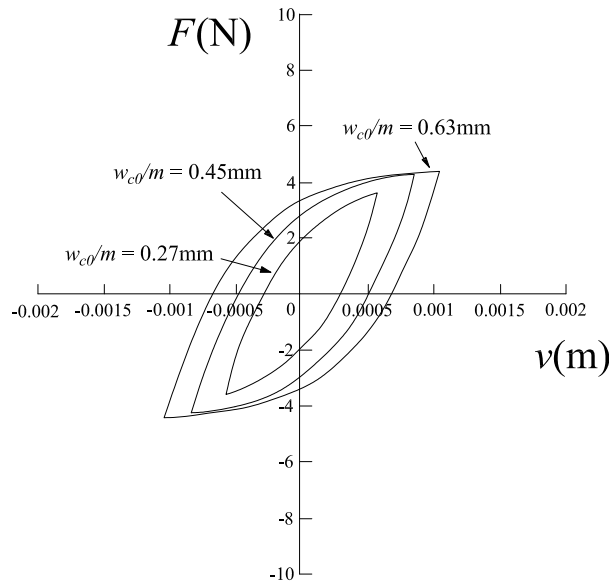


Figura 2.8: Cicli d'isteresi calcolati numericamente nel piano Forza-Spostamento per un dissipatore-2R con $f = \frac{\Omega}{2\pi} = 13Hz$ e differenti valori di $\frac{w_{c0}}{m}$ [31].

Dal confronto tra i dati sperimentali e i risultati numerici, si denota come, sebbene il modello di Bouc sia in grado di descrivere gli effetti non-lineari, dovuti a fenomeni di dissipazione per attrito nei cavi intrecciati, la formulazione ad un grado di libertà adottata nel presente paragrafo non sia capace di descrivere completamente la risposta del dissipatore. Esso, infatti, risulta più adeguatamente descritto da un modello a due gradi di libertà, in modo da tenere in considerazione anche la rotazione della massa. A conferma di questa affermazione, può essere utile fare riferimento al confronto tra Fig.2.7 e Fig.2.8, da cui si evince come la forma dei cicli numerici non sia in grado di riprodurre perfettamente quella dei cicli sperimentali: infatti, questi ultimi in corrispondenza dei vertici (transizione carico-scarico) sono caratterizzati da un andamento peculiare dovuto all'interazione tra il grado di

libertà traslazionale e quello rotazionale. Quest'ultimo, non essendo incluso nella presente modellazione non può influire quindi sulla risposta numerica del sistema. Tale limitazione può essere superata, come approfondito nel seguito, adottando un'idealizzazione discreta a due gradi di libertà o, alternativamente, una modellazione continua o ad elementi finiti del cavo messaggero.

2.2.2 Modellazione a trave di Sauter e Hagedorn

La modellazione secondo Sauter e Hagedorn [35, 34] della risposta del cavo messaggero consiste in una soluzione a deformabilità distribuita, che considera il cavo stesso come una trave di Eulero-Bernoulli, il cui comportamento sezionale risulta regolato da leggi anelastiche. Essa si fonda sul fenomeno fisico che regola la dissipazione di energia da parte del dispositivo, ossia l'insorgenza di sforzi di attrito che si generano tra i fili adiacenti costituenti il cavo messaggero, quando quest'ultimo è sottoposto a un regime di deformazione flessionale per effetto del moto imposto alla pinza. Il modello di Sauter e Hagedorn costituisce una generalizzazione, al caso di sistema continuo, del modello discreto di Masing, il quale consiste nella connessione in parallelo di più elementi di Jenkin; a sua volta, un elemento di Jenkin è caratterizzato da una molla lineare connessa in serie con un elemento d'attrito di Coulomb. Tale struttura base così come il modello di Masing risultante sono schematizzati in Fig.2.9.

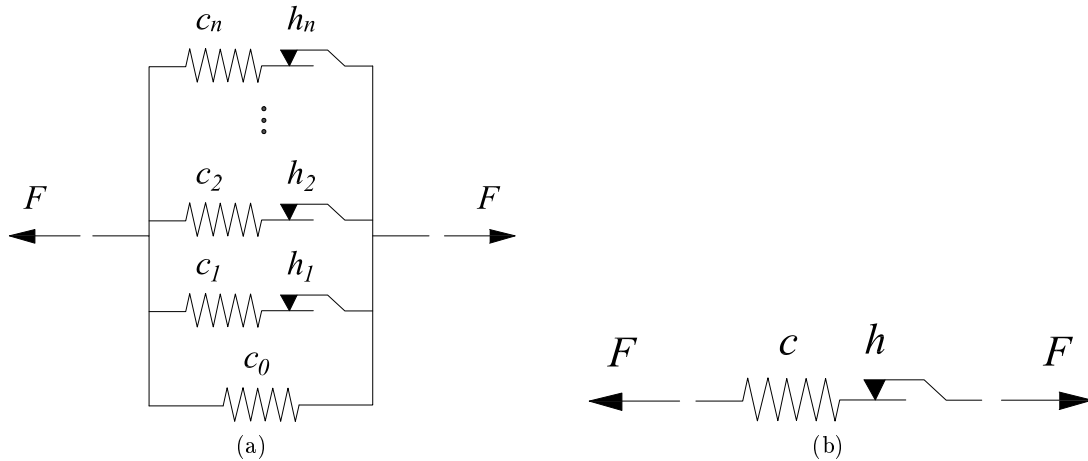


Figura 2.9: (a) Modello discreto di Masing ottenuto collegando in parallelo n elementi base di Jenkin. (b) Elemento base di Jenkin costituito da una molla lineare di rigidezza c connessa in serie ad un elemento d'attrito di Coulomb di coefficiente h [35].

La legge costitutiva viene quindi espressa non più in termini globali (forza-spostamento), come nel caso discreto, bensì in termini sezionali, fornendo una relazione tra il momento flettente agente in corrispondenza della generica sezione s del cavo messaggero e il valore di curvatura flessionale ivi presente. Il modello risulta univocamente determinato dalla definizione dei tre parametri $EI(s)$, $c(s)$ e $h(s)$, i quali risultano essere funzioni continue dell'ascissa s che percorre l'asse baricentrico dell'elemento; mentre $EI(s)$ si identifica con la rigidezza flessionale dell'elemento, l'interpretazione fisica dei parametri $c(s)$ e $h(s)$ può essere dedotta dal confronto tra Fig.2.9 e Fig.2.10.

Sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti e deformazioni, le equazioni governanti il modello risultano essere quelle espresse in 2.11.

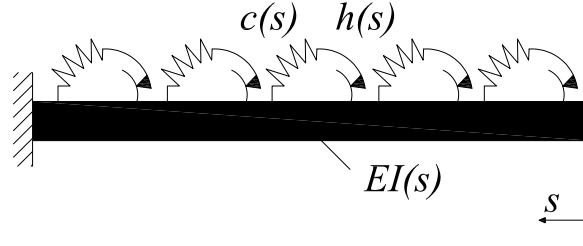


Figura 2.10: Rappresentazione schematica della generalizzazione del modello discreto di Masing al caso di trave continua (modello di Sauter-Hagedorn) [35].

$$\dot{H}(s, t) = c(s)\dot{\chi}(s, t)\frac{1}{2} [1 - \text{sgn}(H(s, t)^2 - h(s)^2) - \text{sgn}(\dot{\chi}(s, t)H(s, t))(1 + \text{sgn}(H(s, t)^2 - h(s)^2))] \quad (2.11)$$

$$EI(s)\chi(s, t) + H(s, t) = M(s, t)$$

Nelle equazioni mostrate sopra, indicate rispettivamente come legge di flusso e legge di additività, $H(s, t)$ indica la quota parte isteretica del momento flettente, $\chi(s, t)$ rappresenta la curvatura flessionale totale della generica sezione del cavo all'istante t ed $M(s, t)$ indica il momento flettente totale presente nella generica sezione trasversale all'istante t .

Mediante gli equilibri alla traslazione e alla rotazione di un concio di trave (si veda Fig.2.11), risulta quindi possibile esplicitare le espressioni della forza e della coppia di richiamo che l' i -esimo cavo messaggero ($i = 1, 2$) esercita sulla corrispondente massa in funzione del momento flettente complessivo $M(s, t)$, secondo quanto riportato in 2.12.

$$F_i(t) = V(s, t) \quad (2.12)$$

$$M_i(t) = M(s, t) + F_i(t)s$$

La figura 2.11(a) mostra un tratto di cavo di lunghezza \$s\$ fissato a un muro a sinistra. A sinistra del tratto, un momento \$M(s, t)\$ e una forza \$V(s, t)\$ agiscono. A destra, un momento \$M_i(t)\$ e una forza \$F_i(t)\$ agiscono. L'ascissa \$s\$ è indicata. La figura 2.11(b) mostra un blocco inerziale con momento d'inerzia \$G_i\$. Suo lato superiore agiscono un momento \$M_i^{iner}(t)\$ e una forza \$F_i^{iner}(t)\$. Sul suo lato inferiore agiscono una forza \$F_i(t)\$ e un momento \$M_i(t)\$.

Figura 2.11: (a) Equilibrio di un concio di cavo messaggero compreso tra il suo estremo libero (punto di connessione con la massa) e una generica sezione di ascissa s . (b) Equilibrio dinamico dell' i -esimo blocco inerziale.

A questo punto, una possibile strategia di risoluzione qui proposta consiste nella scrittura del sistema di equazioni costituito dalle 2.5, 2.11 e 2.12 e dalla doppia applicazione del principio delle forze virtuali in 2.13 (prima per una variazione infinitesima δF_i , poi per una variazione infinitesima δM_i in concomitanza con una variazione infinitesima ed equilibrata δM) che permette, affiancato da un opportuno algoritmo di soluzione numerica, di esplicitare il moto delle masse in funzione del moto imposto alla pinza. Eventualmente, mediante

l'impiego delle equazioni 2.7, è possibile ricavare le espressioni della forza e della coppia di interazione cavo-dissipatore ancora una volta in funzione del moto del cavo stesso.

$$\begin{aligned} v_i(F_i(t), M_i(t)) &= \int_0^{l_i} \chi(s, F_i(t), M_i(t)) ds \\ \phi_i(F_i(t), M_i(t)) &= \int_0^{l_i} \chi(s, F_i(t), M_i(t)) ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

A riguardo della determinazione dei parametri $EI(s)$, $c(s)$ ed $h(s)$, è possibile notare sperimentalmente come la rigidezza flessionale risulti maggiore in una zona circoscritta in prossimità della pinza, mentre si mantenga pressochè costante lungo lo sviluppo del cavo allontanandosi sufficientemente da tale regione di disturbo locale. D'altra parte, si nota come $h(s)$ e $c(s)$ siano sostanzialmente variabili lungo l'ascissa s e come risultino diversi al variare del modo flessionale eccitato. La procedura di taratura può essere condotta sottoponendo il cavo messaggero a cicli di carico, cioè applicando una forza $F_i(t)$ o una coppia $M_i(t)$ di carattere armonico al suo estremo libero, e il confronto tra i dati sperimentali e i risultati del modello, ottenuti mediante integrazione numerica delle equazioni 2.11 e 2.12, può essere effettuato sia a livello di storia temporale dello spostamento (o rotazione) della sezione terminale sia nel piano che esprime la variazione della forza (o coppia) applicata rispetto alla traslazione (o rotazione) della sezione di estremità. Nel caso in esame, gli autori hanno effettuato un test sperimentale quasi-statico a forza armonica imposta per la procedura di taratura dei parametri, per poi validare la bontà del modello confrontando i risultati numerici con un test sperimentale condotto a coppia armonica imposta, come mostrato in Fig.2.12.

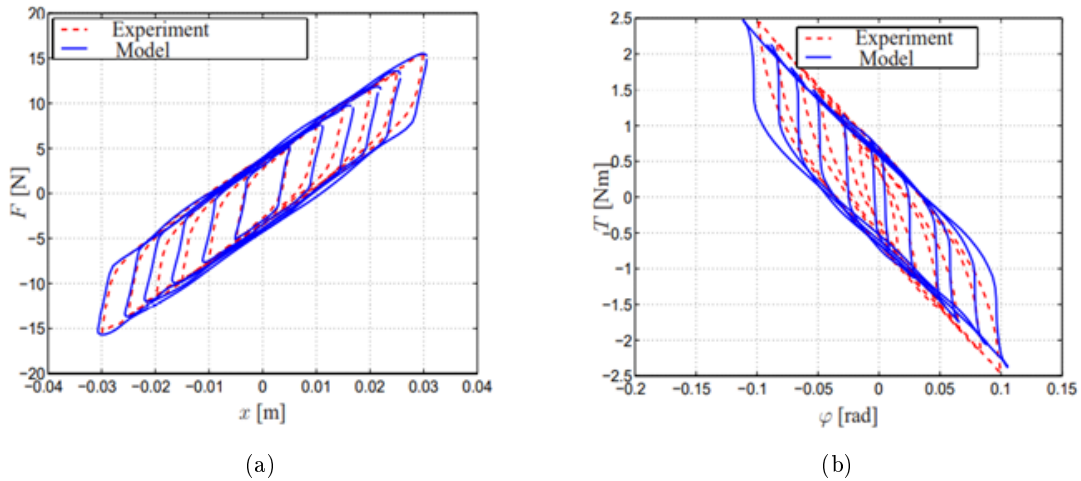


Figura 2.12: (a) Confronto tra i cicli isteretici numerici e sperimentali applicando una forza armonica di estremità; (b) Confronto tra i cicli isteretici numerici e sperimentali applicando una coppia armonica di estremità [35].

Al fine di validare ulteriormente il modello, il confronto con i dati sperimentali può essere condotto anche mediante l'esecuzione di test di sweep, per fornire una caratterizzazione dinamica del dispositivo a varie frequenze di oscillazione; nello specifico, gli autori, hanno eseguito due test di sweep (si veda Par.3.4.1 per una illustrazione più esaustiva dei test di sweep), durante i quali un dissipatore Stockbridge simmetrico, dalle proprietà sintetizzate in Tab.2.1, è stato sottoposto ad un moto noto della pinza ad ampiezze di velocità fissate,

pari rispettivamente a $\dot{w}_c = 0.20$ m/s e $\dot{w}_c = 0.05$ m/s. Il confronto tra i risultati sperimentali e quelli numerici del modello, riportato in Fig.2.13, è stato effettuato con riferimento alla funzione di impedenza del sistema, definita come in 2.14.

$$\tilde{Z}_d(\omega) = \frac{\tilde{F}_d(\omega)}{\tilde{w}_c(\omega)} \quad (2.14)$$

dove \tilde{F}_d rappresenta la trasformata di Fourier della forza di interazione cavo-dissipatore, mentre $\tilde{w}_c(\omega)$ la trasformata di Fourier della funzione velocità imposta alla pinza, durante il test.

Massa m	0.856 kg
Momento d'inerzia I_G	0.001814 kgm ²
Eccentricità e_G	0.0325 m
Lunghezza del cavo messaggero l	0.1875 m

Tabella 2.1: Parametri caratterizzanti il dispositivo Stockbridge utilizzato durante i test di sweep da Sauter e Hagedorn.

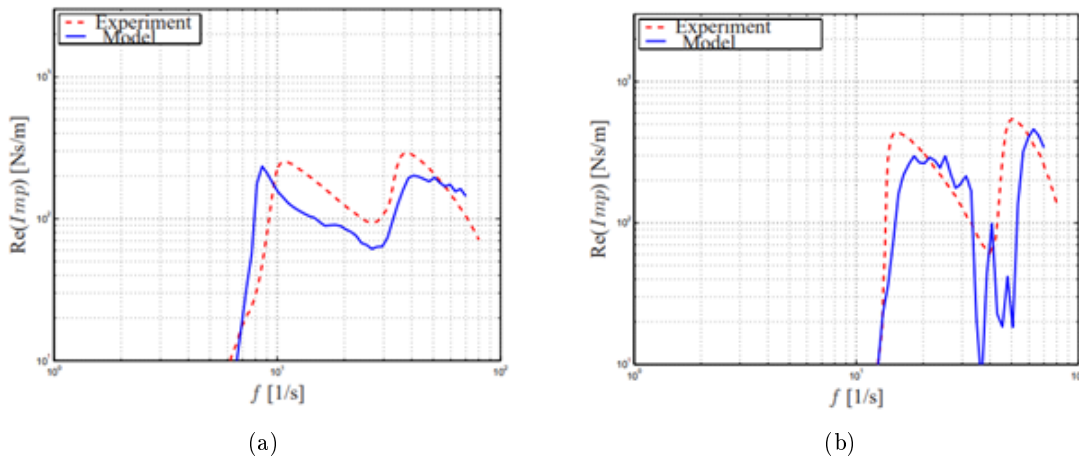


Figura 2.13: (a) Valore assoluto della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d sperimentale e numerica per un test di sweep a 0.20 m/s; (b) Valore assoluto della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d sperimentale e numerica per un test di sweep a 0.05 m/s [35].

Dal confronto in termini di funzione di impedenza tra dati sperimentali e risultati del modello, si evince come in prossimità della prima regione di risonanza il modello continuo di Sauter sia sufficientemente efficace, mentre in prossimità della seconda e nella zona di transizione tra di essi la corrispondenza venga meno; in aggiunta, l'attinenza con i dati sperimentali risulta migliore per il test (a) rispetto al test (b). Si noti inoltre come la scala impiegata in Fig.2.13 sia bi-logaritmica e pertanto il disaccordo tra risultati numerici e sperimentali sia meno evidente rispetto a quello riscontrabile mediante l'impiego di una scala lineare. La giustificazione di tali discrepanze tra le curve risiede principalmente sia nel fatto che i test di sweep sono stati impiegati dall'autore non in sede di calibrazione dei parametri, effettuata invece sulla base di test quasi-statici, bensì per la fase di validazione, sia nel fatto che, in corrispondenza di valori di curvatura più modesti caratterizzanti la zona di transizione, la sensibilità del modello non risulta sufficiente a descrivere il fenomeno fisico.

2.2.3 Modellazione a trave di Foti e Martinelli

La formulazione proposta da Foti e Martinelli [16] è basata sulla descrizione del comportamento del cavo messaggero mediante un modello isteretico di trave, in cui il comportamento non-lineare del sistema viene analizzato a livello sezionale in termini di legame momento flettente-curvatura flessionale. Tale approccio risulta formalmente analogo a quello di Sauter e Hagedorn esposto al Par.2.2.2.

Secondo l'ipotesi di planarità delle sezioni valida per la trave di Eulero-Bernoulli, la sezione trasversale del cavo messaggero, costituito da un certo numero di fili, ruota rigidamente a causa delle deformazioni flessionali. All'aumentare della curvatura, inizia a manifestarsi un certo grado di scorrimento relativo tra i fili e una conseguente diminuzione della rigidità flessionale tangente EI_{\tan} del cavo a partire dal valore iniziale EI_{\max} (*no-slip condition*). Per elevati valori di curvatura flessionale, tutti i fili risultano essere in condizione di scorrimento rispetto a quelli adiacenti e la rigidità flessionale tangente si attesta sul valore minimo EI_{\min} (*full-slip condition*). Nello specifico, in letteratura è possibile ritrovare diverse espressioni che esprimono la dipendenza delle rigidità flessionali massima e minima dalle proprietà geometriche e meccaniche dei singoli fili; una di queste è proposta dagli stessi autori in [14]. A partire da tali evidenze, il comportamento isteretico è stato modellato a livello sezionale tramite un legame momento-curvatura espresso con riferimento al modello di Bouc-Wen (su cui si tornerà, più nel dettaglio, nel Capitolo 3), rappresentato in Fig.2.14.

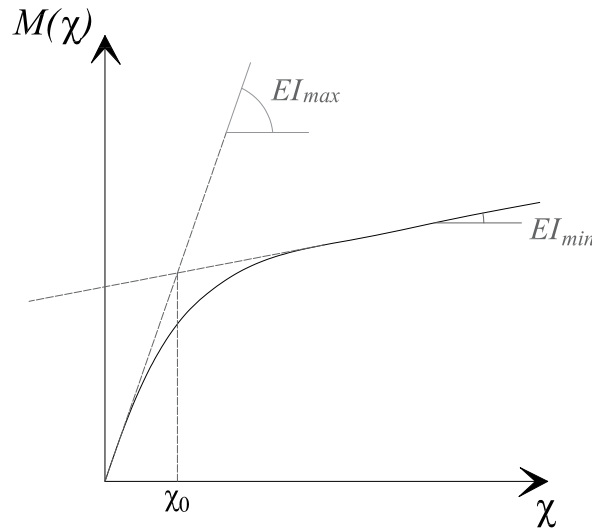


Figura 2.14: Diagramma qualitativo momento-curvatura riferito alla generica sezione trasversale del cavo messaggero [16].

In aggiunta alla rigidità massima EI_{\max} e minima EI_{\min} , per la completa definizione del modello isteretico, risulta necessario definire tre parametri aggiuntivi: la curvatura di snervamento χ_0 , secondo l'idealizzazione bilineare, e i parametri σ e n che influenzano rispettivamente la differenza tra le rigidità tangenti a carico-scarico e la transizione tra la rigidità massima e minima. In definitiva, le equazioni governanti il legame costitutivo risultano essere quelle riportate in 2.15.

$$M(\chi, t) = EI_{\min}\chi(t) + (EI_{\max} - EI_{\min})\chi_0\eta(t)$$

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{\chi_0} \left(\dot{\chi}(t) - \sigma |\dot{\chi}(t)| |\eta(t)|^{n-1} \eta(t) + (\sigma - 1)\dot{\chi}(t) |\eta(t)|^n \right) \quad (2.15)$$

La procedura di soluzione del problema, che permette di esplicitare il moto delle masse e, eventualmente, la forza F_d e la coppia M_d alla pinza in funzione del moto w_c imposto alla sezione d'attacco, risulta essere analoga a quella esposta al Par.2.2.2. La sola differenza consiste nel considerare il set di equazioni del modello 2.15 in luogo delle 2.11.

Stante la complessità computazionale e l'impossibilità di risolvere il problema differenziale in forma chiusa, risulta necessario ricorrere a metodi di integrazione numerica; nel caso presente, è stato adottato una schema di integrazione alla Gauss-Lobatto per la valutazione delle 2.13 e, in ogni punto di integrazione, la curvatura è stata valutata, per un dato incremento del momento flettente, mediante il metodo di Newton-Raphson usato in concomitanza con un algoritmo di Eulero all'indietro (*one-step backward Euler algorithm*), al fine di integrare le relazioni costitutive in 2.15.

I risultati degli esperimenti condotti da Sauter e Hagedorn (Par.2.2.2) sono stati sfruttati dagli autori per la procedura di identificazione dei parametri e conseguente validazione del modello. In particolare, anche in questo caso il test quasi-statico sul cavo messaggero a forzante armonica imposta è stato impiegato per la taratura di EI_{\min} , EI_{\max} e χ_0 , mentre σ ed n sono stati convenzionalmente assunti pari all'unità. Cercando di riprodurre gli esiti sperimentali del test sopra menzionato nel piano $M - \chi$, riferendosi alle diverse sezioni in Fig.2.15, sono stati tarati i parametri d'interesse sezione per sezioni; a titolo di esempio, si riportano alcuni dei diagrammi ottenuti in Fig.2.16.

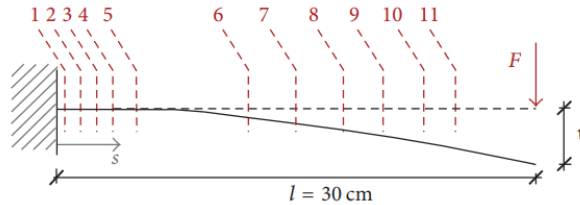


Figura 2.15: Rappresentazione schematica delle sezioni trasversali investigate sperimentalmente e del test quasi-statico effettuato [16].

Si noti come, similmente a quanto discusso nel caso di Sauter e Hagedorn, è possibile affermare che i parametri di rigidezza EI_{\min} ed EI_{\max} risultano pressoché costanti lungo il cavo, eccetto nelle porzioni terminali dove disturbi locali provocano l'alterazione dei parametri stessi (si veda Fig.2.17). D'altra parte, per quanto concerne la soglia di snervamento χ_0 , come si evince da Fig.2.18, è stata tenuto in conto nel modello la variazione del parametro stesso lungo il cavo.

A valle della procedura di taratura, eseguita secondo quanto riportato sopra, è stato possibile effettuare la validazione del modello, con riferimento al test sperimentale in esame, cercando di riprodurre gli esiti nel piano che associa la forza d'estremità F alla traslazione v corrispondente (Fig.2.19).

In aggiunta, gli autori hanno impiegato anche i risultati sperimentali di Sauter e Hagedorn riferiti al test di sweep menzionato al Par.2.2.2 per fornire un'ulteriore validazione del modello: in tal caso, i risultati ottenuti sono mostrati in Fig.2.20 con riferimento alla funzione di impedenza, definita come in 2.14.

In definitiva, sebbene sia possibile constatare come il presente modello sia in grado di riprodurre in modo abbastanza fedele i risultati sperimentali ottenuti da vari test, sia in termini di diagramma forza-spostamento, sia in termini di funzione di impedenza, la modellazione delle zone d'estremità influenza in maniera a tal punto significativa il modello che trascurarne la presenza può comportarne una rilevante perdita di efficacia ed accuratezza; pertanto, risulta opportuno includere l'estensione di tali zone tra i parametri da calibrare sulla base di test sperimentali.

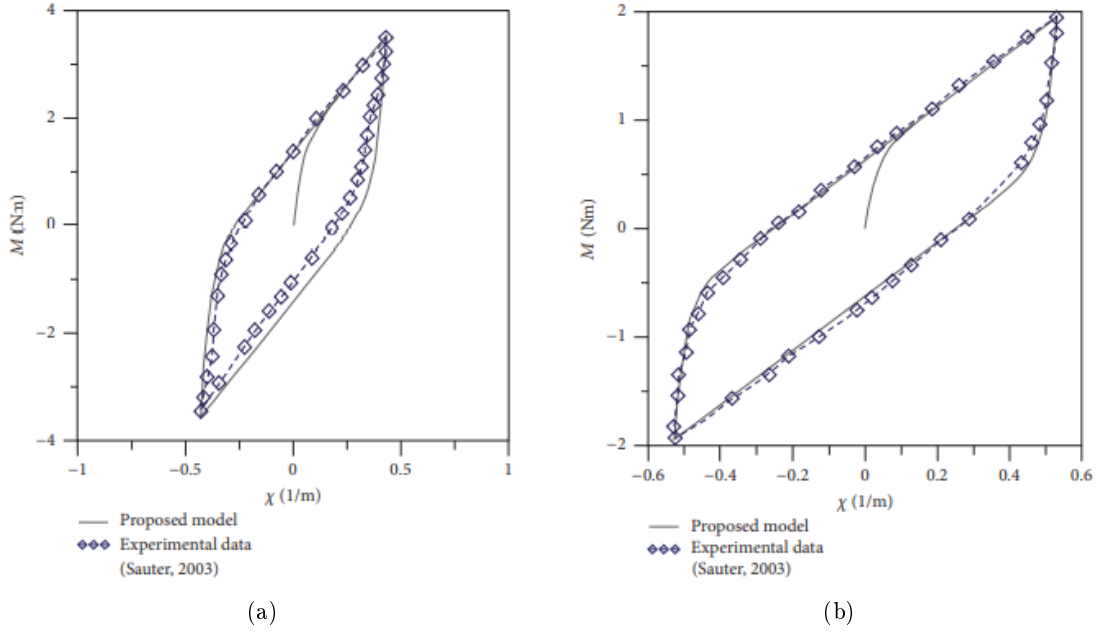


Figura 2.16: Comparazione tra il modello proposto e i test sperimentali in termini di diagramma $M - \chi$ in corrispondenza delle sezioni (a)1 e (b)6 [16].

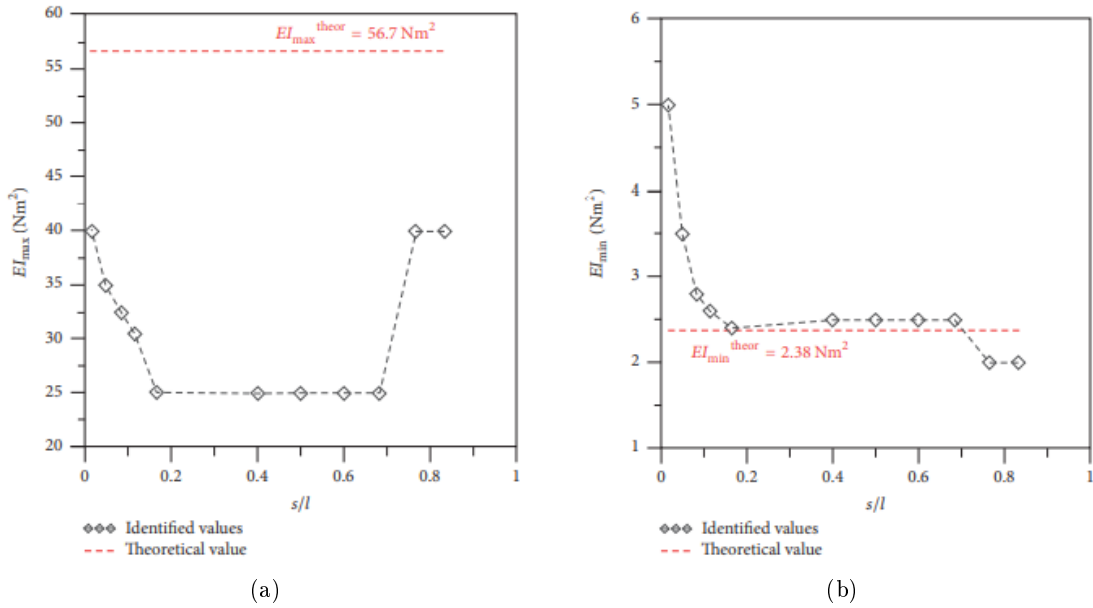


Figura 2.17: Variazione dei parametri EI_{\min} ed EI_{\max} , ottenuti secondo la procedura di taratura, in funzione dell'ascissa s considerata. (a) Rigidezza massima EI_{\max} ; (b) Rigidezza minima EI_{\min} [16].

2.2.4 Modellazione ad elementi finiti tipo trave di Langlois e Legeron

Langlois e Legeron [24] proposero un modello non-lineare ad elementi finiti di tipo trave per caratterizzare il comportamento del dissipatore Stockbridge. Facendo riferimento a Fig.2.21, il modello numerico adottato risulta costituito dai nodi A,B,C e D che rappresentano rispettivamente l'estremo superiore e inferiore della pinza, il punto di connessione

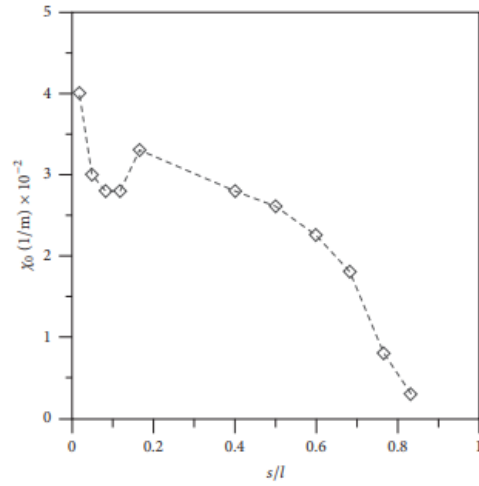


Figura 2.18: Variazione del parametro χ_0 ottenuto secondo la procedura di taratura, in funzione dell'ascissa s considerata [16].

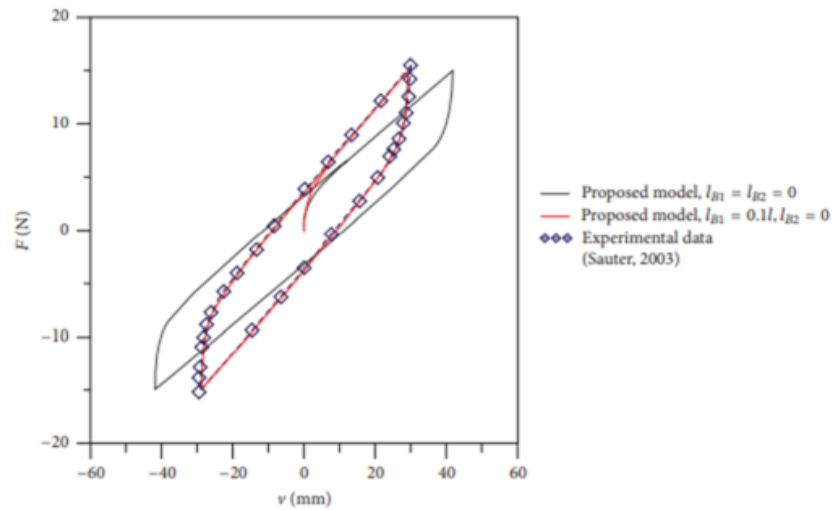


Figura 2.19: Comparazione tra il modello proposto e i test sperimentali in termini di diagramma $F - v$ nella sezione di estremità per due diverse scelte dell'estensione delle zone di disturbo l_{B1} e l_{B2} rispettivamente in prossimità dell'incastro e dell'estremo libero [16].

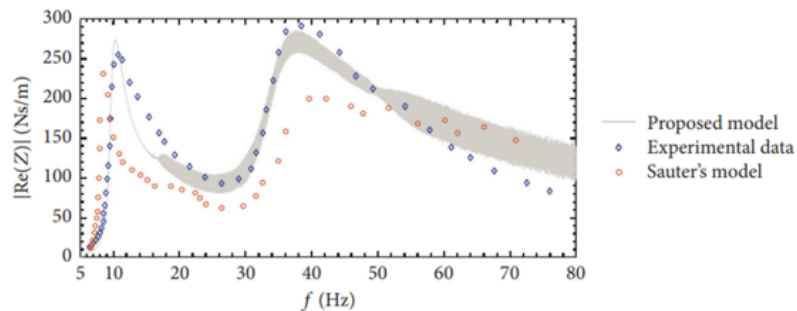


Figura 2.20: Valore assoluto della parte reale della funzione di impedenza del dispositivo: confronto tra dati sperimentali, modello di Sauter e Hagedorn e modello di Foti e Martinelli [16].

tra cavo messaggero e massa C ed il punto di connessione tra cavo messaggero e massa D. Degli elementi di trave molto rigidi sono considerati dal nodo A al nodo B, così come a destra e sinistra del nodo B stesso per un'estensione pari a b_c .

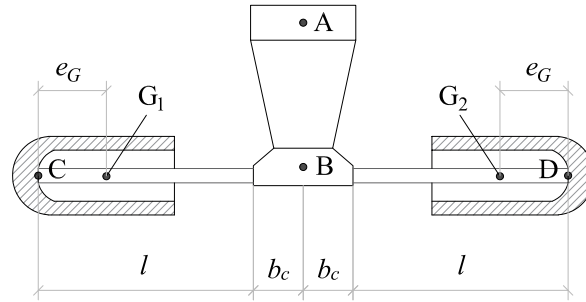


Figura 2.21: Schema fondamentale del dissipatore Stockbridge simmetrico adottato da Langlois e Legeron; la lunghezza e_G indica l'eccentricità tra il punto di connessione tra cavo messaggero e massa inerziale e il baricentro della massa stessa (G_1, G_2).

Per quanto concerne il cavo messaggero, esso viene modellato, sulla lunghezza l , da elementi finiti di tipo trave alla Eulero-Bernoulli non-lineari; nel dettaglio ciascun cavo messaggero risulta costituito da 20 elementi finiti. A livello sezionale, la rigidezza flessionale di ogni elemento dipende dalla curvatura seguendo una determinata legge momento-curvatura (rappresentata in maniera schematica in Fig.2.22): in corrispondenza di bassi valori di curvatura, l'elemento di trave possiede una rigidezza flessionale relativamente grande, mentre spostandosi su alti valori di curvatura tale rigidezza risulta notevolmente ridotta, in quanto i diversi fili costituenti il cavo scorrono gli uni rispetto agli altri. Tale differenza di rigidezza per differenti valori di curvatura, fa sì che sotto carichi di tipo ciclico sia possibile osservare un comportamento isteretico, responsabile della dissipazione di energia nel sistema. Risultata importante sottolineare come nella modellazione proposta in [24], cinque elementi trave siano sovrapposti su ciascun tratto che discretizza la lunghezza del cavo messaggero l , al fine di ottenere un legame costitutivo globalmente multilineare. Il primo di questi cinque è caratterizzato da un comportamento elastico lineare, mentre i restanti da un comportamento elastico perfettamente plastico, con diversi valori di rigidezza iniziale e momento limite in corrispondenza del plateau. Questi parametri, caratterizzanti gli elementi del modello, sono stati identificati in modo tale da riprodurre i risultati sperimentali di test condotti a basse frequenze in regime quasi-statico.

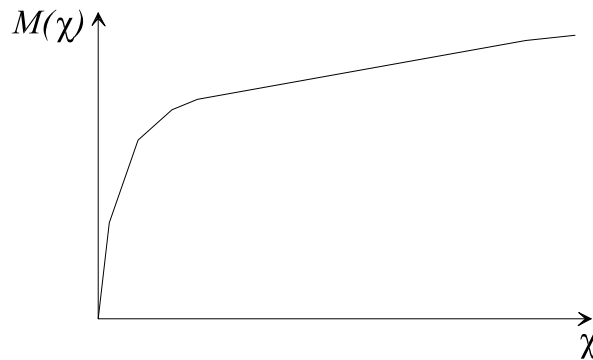


Figura 2.22: Schematizzazione relazione multilineare momento-curvatura.

Il comportamento isteretico non-lineare del cavo messaggero fornisce sia proprietà di rigidezza che di smorzamento al sistema. Per tale motivo, nella modellazione trattata da

Langlois e Legeron, non è stato preso in considerazione dello smorzamento addizionale di origine viscosa.

L'identificazione dei parametri è stata condotta mediante un test sperimentale a frequenza di vibrazione pari a 0.1 Hz (moto traslatorio armonico imposto alla pinza), in quanto si suppone che le proprietà dello smorzatore siano costanti al variare della frequenza. In Fig.2.23 è mostrato il test utilizzato per l'identificazione dei parametri e la risposta numerica associata al set finale.

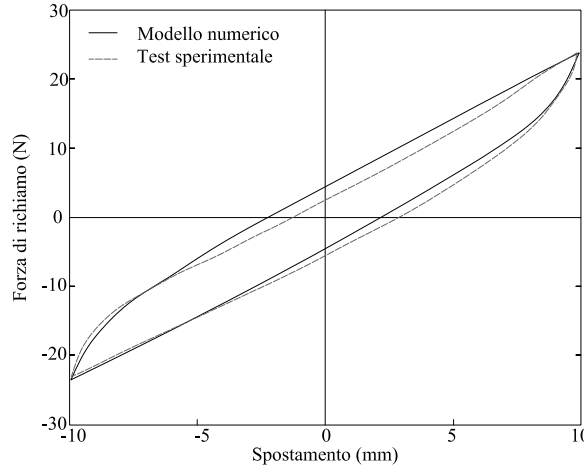


Figura 2.23: Identificazione dei parametri del dissipatore Stockbridge alla frequenza $f = 0.1$ Hz [24].

Per quanto riguarda i test sperimentali condotti per la procedura di validazione dei parametri, si sono eseguite delle prove di sweep ad ampiezza di spostamento costante e i valori di ampiezza di spostamento w_{c0} testati sono: 3 mm (da 5 Hz a 10 Hz), 2 mm (5-15 Hz), 1 mm (5-25 Hz), 0.6 mm (5-45 Hz) e 0.2 mm (5-55 Hz). Tramite l'utilizzo di sensori adeguatamente posizionati, sono state misurate le storie temporali dell'accelerazione $\ddot{w}_c(t)$ e della forza $F_d(t)$ alla pinza. A questo punto è possibile calcolarne le corrispondenti trasformate di Fourier $\tilde{\ddot{w}}_c$ e $\tilde{F}_d(\omega)$, le quali permettono la determinazione della funzione di trasferimento $\tilde{M}(\omega)$, massa dinamica del sistema, definita come:

$$\tilde{M}(\omega) = \frac{\tilde{F}_d(\omega)}{\tilde{\ddot{w}}_c(\omega)} \quad (2.16)$$

Particolare scelta degli autori è stata quella di non presentare direttamente i risultati in termini di parte reale e parte immaginaria della funzione di trasferimento $\tilde{M}(\omega)$, ma di trasformare tale informazione in una forza $F_r(\omega)$ e una fase $\zeta(\omega)$, descritte dalle equazioni 2.17.

$$F_r(\omega) = \sqrt{Re(\tilde{M}(\omega))^2 + Im(\tilde{M}(\omega))^2} w_{c0} \omega^2$$

$$\tan(\zeta(\omega)) = \frac{Im(\tilde{M}(\omega))}{Re(\tilde{M}(\omega))} \quad (2.17)$$

Sulla base di tali grandezze, è stata effettuata la comparazione (rappresentata in Fig.2.24) tra i dati sperimentali misurati e i risultati ottenuti con il modello numerico sopra descritto. Vale la pena notare che in [24] è stato considerato, per predire la risposta non-lineare dello smorzatore, un metodo di integrazione diretta nel dominio del tempo delle equazioni governanti (equazioni di moto delle masse + leggi costitutive dei cavi messaggeri).

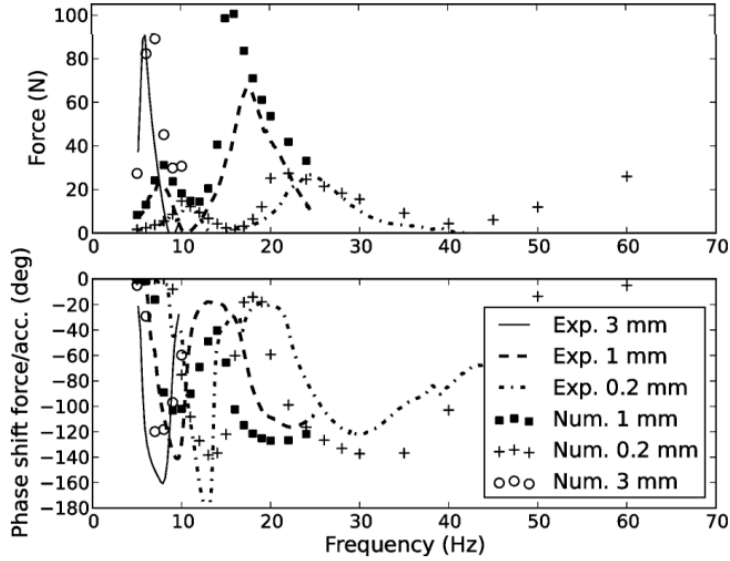


Figura 2.24: Forza F_r e fase ζ in funzione della frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$, considerando diversi valori di ampiezza di spostamento w_{c0} [24].

Come si può osservare dal grafico di Fig.2.24 relativo alla forza F_r , la posizione dei picchi della risposta risulta abbastanza ben riprodotta dal modello numerico; per quanto concerne l'ampiezza, invece, essa segue un andamento generale corretto ma non sempre combacia precisamente con i dati sperimentali. Questo è dovuto principalmente al fatto che il modello numerico si basa su un numero di parametri limitato per semplificarne l'individuazione; in questo modo risulta complicato trovare un set di valori che permetta di ottenere una risposta numerica molto vicina, per tutti i valori di frequenze e ampiezze, a quella sperimentale. Inoltre, gli autori hanno condotto l'individuazione stessa dei parametri in maniera esclusivamente manuale; l'impiego di tecniche di ottimizzazione automatica per l'identificazione dei parametri avrebbe forse potuto condurre a risultati ancora migliori.

2.2.5 Modellazione ad elementi finiti tridimensionali di Luo, Wang e Zhang

Luo, Wang e Zhang [28] nel 2016 proposero un modello ad elementi finiti tridimensionali per caratterizzare il comportamento del dissipatore Stockbridge. Utilizzando una modellazione ad elementi finiti 3D, risulta infatti possibile tenere in considerazione molti fenomeni locali che, mediante l'impiego di modelli più semplificati (ad esempio modelli a deformabilità concentrata o modelli continui monodimensionali) sarebbero molto complicati, se non impossibili, da catturare; tra questi è possibile citare tutte quelle condizioni di contatto che si hanno tra ciascun filo costituente il cavo messaggero dello Stockbridge e tra la pinza rigida e il cavo stesso. Vale la pena sottolineare che questo aspetto influenza notevolmente la risposta del sistema in quanto rappresenta la principale fonte di dissipazione a disposizione dello strumento.

Gli autori hanno realizzato un modello ad elementi finiti 3D di metà smorzatore (vista la simmetria dello Stockbridge considerato e l'indipendenza di ciascuna massa con l'altra). Ciascuna singola parte e ciascun singolo filo che lo costituisce sono stati modellati e discretizzati indipendentemente, come si evince dalla Fig.2.25.

Nel dettaglio, la massa d'estremità è stata modellata con una mesh ibrida costituita da elementi esaedrici a 20 nodi ed elementi tetraedrici a 10 nodi; il cavo messaggero e l'incastro, invece, sono stati modellati con soli elementi esaedrici a 20 nodi. Il numero totale di nodi

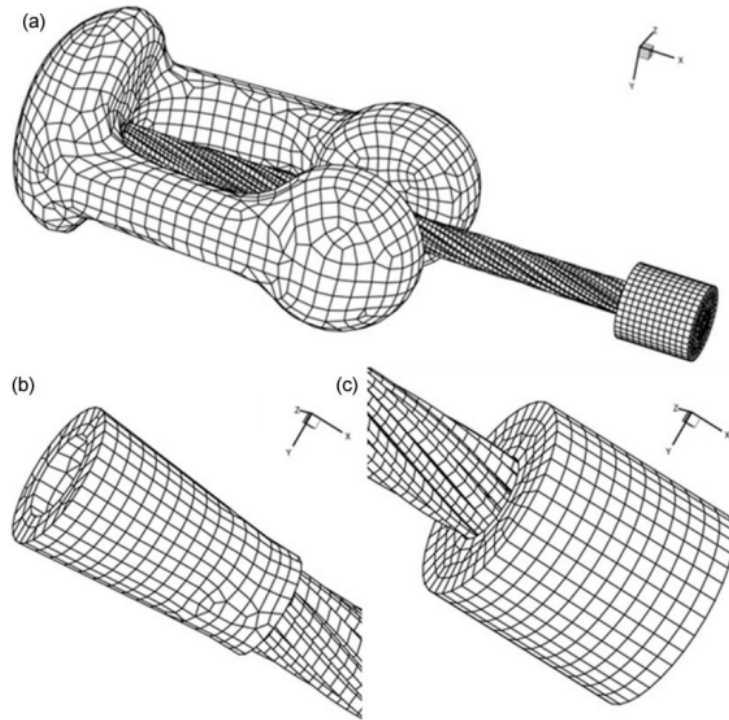


Figura 2.25: Dettagli della mesh del modello ad elementi finiti 3D [28].

costituenti il modello risultava pari a 101967 ed il numero di elementi finiti pari a 22392. Grande attenzione è stata prestata alla modellazione dei contatti tra i singoli elementi (ovvero tra i singoli fili costituenti il cavo messaggero e tra sezione di incastro e cavo stesso).

Per quanto concerne la fase sperimentale, da cui sono stati ottenuti i dati necessari per la taratura e successiva validazione del modello numerico, sono stati eseguiti dei test di sweep ad ampiezza di velocità costante e nello specifico i valori di ampiezza considerati sono stati: 0.05 m/s, 0.10 m/s, 0.15 m/s e 0.20 m/s. Tutti i test citati sono stati realizzati per un range di frequenze pari a 5-20 Hz. Tramite l'utilizzo di sensori adeguatamente posizionati, è stata misurata la storia temporale della forza alla pinza $F_d(t)$ e, successivamente, dopo averla convertita attraverso la trasformata di Fourier in $\tilde{F}_d(\omega)$, è stata definita la funzione di impedenza $\tilde{Z}_d(\omega)$ (equazione 2.14) sperimentale.

Sulla base di tale funzione, considerando distintamente la rispettiva parte reale e quella immaginaria, è stata condotta la comparazione con la medesima funzione ricavata con il modello numerico ad elementi finiti tridimensionali, rappresentata in Fig.2.26 ed in Fig.2.27. Come si può osservare, si ha una buona corrispondenza tra le diverse curve per ogni velocità di sweep considerata; questo è legato al fatto che si stia considerando un modello molto complesso, ma molto prossimo alla realtà.

Si può quindi apprezzare come una modellazione più accurata, ma allo stesso tempo più complessa, di tutti i fenomeni locali che si hanno tra i vari elementi, abbia un ruolo chiave nella caratterizzazione della risposta dinamica globale del dispositivo di smorzamento. Nonostante questo, risulta necessario sottolineare come non solo la realizzazione e calibrazione di un modello così complicato, soprattutto in presenza di così tante fonti di non-linearità, necessiti di tempi e sforzi computazionali notevolmente maggiori, ma risulti anche non compatibile con l'eventuale accoppiamento del sistema dissipativo alla linea.

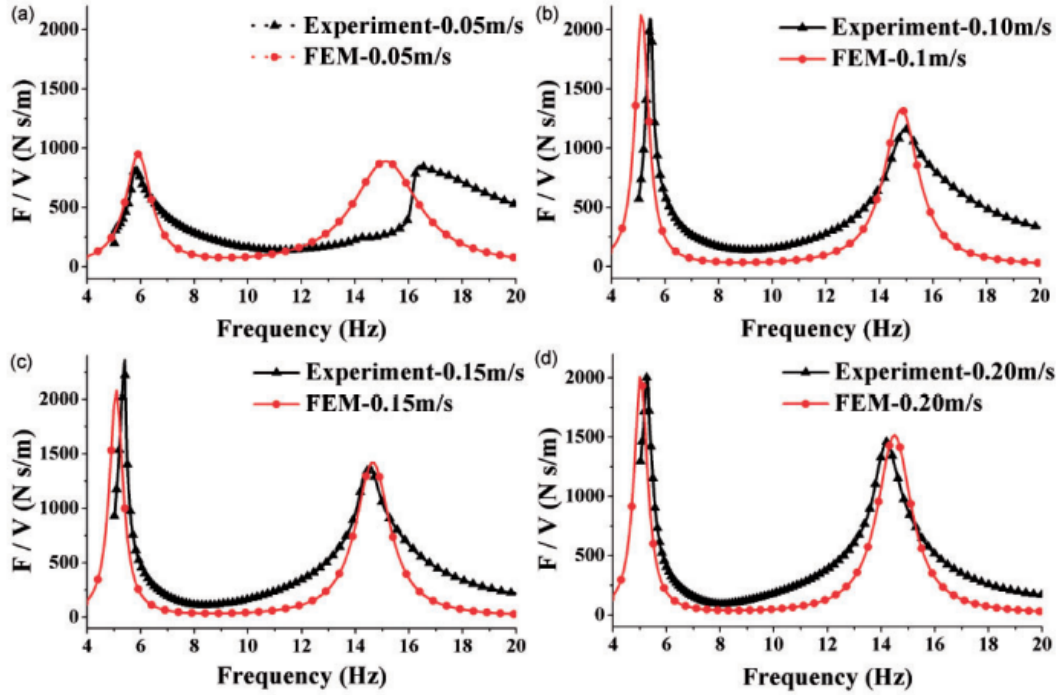


Figura 2.26: Comparazione tra dati sperimentali e soluzione numerica riferita alla parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d [28].

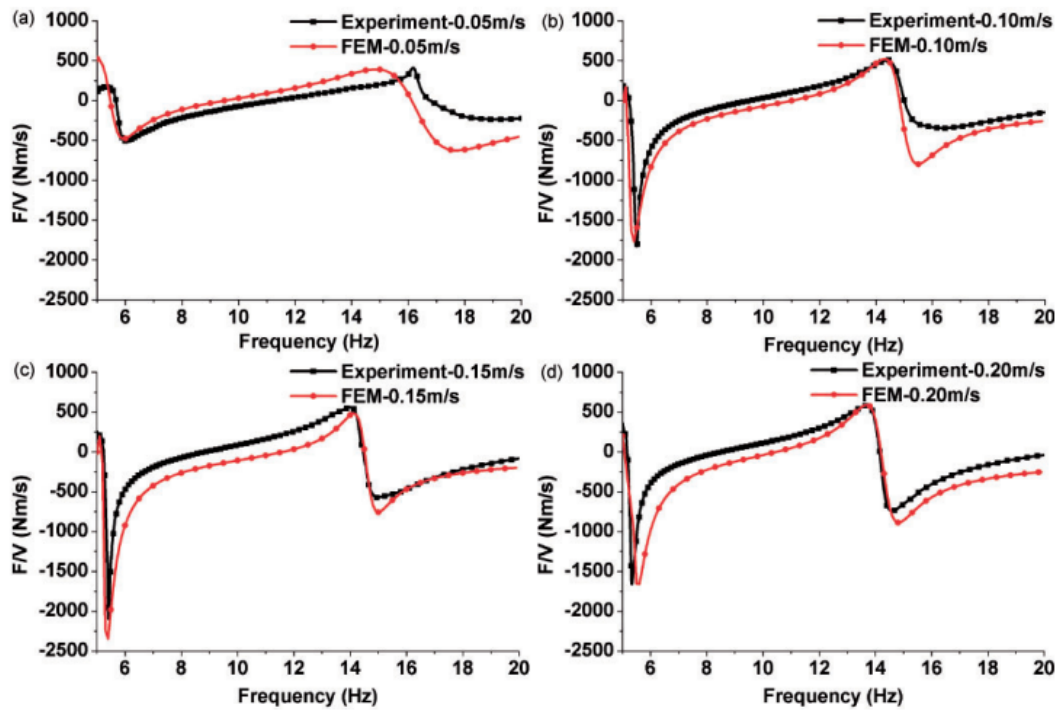


Figura 2.27: Comparazione tra dati sperimentali e soluzione numerica riferita alla parte immaginaria della funzione di impedenza \tilde{Z}_d [28].

2.2.6 Sintesi degli approcci di letteratura e proposte di sviluppo

A valle dell'inquadramento generale appena fornito, circa le proposte di modellazione del dissipatore Stockbridge presenti in letteratura, ci si sofferma ora sull'evidenziazione dei loro vantaggi e delle loro limitazioni, al fine di stabilire un punto di partenza per la proposizione di modelli alternativi.

Innanzitutto, a riguardo della modellazione di Pivovarov e Vinogradov di Par.2.2.1, si sottolinea come l'impiego di un approccio discreto, che ricorre all'introduzione di elementi a deformabilità concentrata (molle) per descrivere l'interazione d'estremità tra il cavo messaggero e il blocco inerziale, comporti il vantaggio di fornire uno strumento numerico semplice e basato sulla definizione di un ristretto numero di parametri, per l'idealizzazione di un fenomeno complesso e fortemente non-lineare. In aggiunta, il fatto di considerare un sistema a un solo grado di libertà semplifica ulteriormente la trattazione, pur comportando l'impossibile di descrivere la risposta globale del dispositivo dal momento che ciascuna massa può sperimentare sia una rotazione che una traslazione rigida. Una modellazione di questo tipo non risulta inoltre capace di catturare lo stato sezionale lungo tutto lo sviluppo del cavo messaggero, così come l'influenza di effetti locali sulla risposta del sistema.

Le modellazioni a trave continua alla Eulero-Bernoulli di Par.2.2.2 e Par.2.2.3, lavorando a livello sezionale, in termini di relazione momento-curvatura, consentono di caratterizzare il comportamento globale del dispositivo, libero di evolvere seguendo una risposta dinamica a due gradi di libertà. Da ciò consegue naturalmente una maggior aderenza ai dati sperimentali rispetto al caso discreto, sebbene questo non possa prescindere dall'introduzione di un maggior numero di parametri governanti e di un maggior onere computazionale, legato al fatto che la risposta sezionale debba essere integrata al fine di determinare l'interazione cavo messaggero-massa. Gli effetti locali relativi all'estensione dei disturbi di estremità e alla non uniformità di comportamento osservata da una sezione all'altra possono essere potenzialmente inclusi in tali modellazioni; tuttavia, l'influenza dei singoli fili costituenti il cavo e i fenomeni di sfregamento che li interessano sono all'occorrenza solo approssimativamente considerati, andando a far dipendere le proprietà meccaniche del cavo messaggero da quelle dei fili stessi.

Considerazioni di carattere pressoché analogo, rispetto a queste ultime due proposte, possono essere effettuate con riferimento alla modellazione ad elementi finiti di trave di Langlois e Legeron (Par.2.2.4), sebbene in questo caso il continuo venga discretizzato in un certo numero di sotto-elementi.

Tutte le tecniche di modellazione sin qui elencate hanno in comune l'ipotesi di considerare un approccio a masse concentrate, dal momento che il contributo inerziale dei cavi messaggeri risulta trascurabile rispetto a quello dei blocchi di estremità; in altre parole, il numero di gradi di libertà dinamici del dispositivo risulta pari a 4 (2 nel caso di Stockbridge simmetrico). Di contro, la modellazione ad elementi finiti 3D di Luo, Wang e Zhang, trattata al Par.2.2.5, si basa su una discretizzazione di tutto il sistema cavo messaggero + massa e concentra ad ogni nodo della mesh le proprietà di rigidezza, inerzia e dissipazione. Risulta evidente come, in questo modo, si riesca ottenere un elevato grado di accuratezza e corrispondenza con i risultati sperimentali, ma, al contempo, si necessita di introdurre molteplici parametri, di difficile controllo, e di un oneroso algoritmo numerico. La valenza prettamente teorica, più che l'utilità pratica, di tale approccio non si deduce solo da quanto appena esposto, ma consegue anche dall'impossibilità di considerare successivamente il sistema accoppiato dissipatore-linea, ai fini della determinazione dell'ampiezza delle oscillazioni eoliche.

In tale contesto si inseriscono gli sviluppi proposti nel presente elaborato, a partire dal Cap.3. Conservando l'impiego di un approccio a masse concentrate, si sfrutterà l'idea, proposta di Pivovarov e Vinogradov, di modellare in maniera discreta l'interazione tra il

cavo messaggero e la massa d'estremità; inoltre, sempre coerentemente con quanto svolto da essi, ci si approccerà al problema partendo dal caso più semplice di sistema a un grado di libertà, sia esso di natura traslazionale piuttosto che rotazionale. Parallelamente, si cercherà di adattare la modellazione isteretica di Bouc-Wen, impiegata da Foti e Martinelli (si veda Par.2.2.3), al caso discreto, al fine di comprendere se sia possibile cogliere i principali aspetti del fenomeno o se sia necessario invece introdurre alcune modifiche. Da ultimo, la trattazione verrà opportunamente estesa, sempre mantenendo il carattere discreto del sistema, con lo scopo di predire la risposta globale a due gradi di libertà di un dispositivo Stockbridge simmetrico.

Capitolo 3

MODELLAZIONE DISCRETA A UN GRADO DI LIBERTÀ

Come già discusso nel capitolo precedente, lo studio della risposta del dispositivo di smorzamento Stockbridge richiede un'adeguata interpretazione del comportamento dei cavi messengeri; tali componenti si identificano infatti come la fonte primaria di dissipazione di energia atta alla mitigazione delle vibrazioni eoliche. È per questo motivo che, tenendo a mente le considerazioni effettuate al Par.2.1.2 circa l'approccio impiegato per la modellazione del sistema, ci si propone in questa sede di sviluppare un modello alternativo a quelli esposti al Par.2.2, per fornire un'adeguata idealizzazione delle proprietà dissipative e di deformabilità dei cavi messengeri stessi, circoscrivendo l'analisi al caso di dispositivo simmetrico per il quale si trascura, senza significativa perdita di generalità, per i motivi esposti al Par.2.1.2, la presenza della rotazione della pinza di supporto.

Nel corso del presente capitolo, si svilupperà un modello del cavo messaggero come sistema discreto ad un singolo grado di libertà, secondo un approccio formalmente analogo a quello proposto da Pivovarov e Vinogradov (si veda Par.2.2.1). L'idea alla base di quanto verrà esposto risulta essere quella di realizzare uno strumento numerico semplificato da poter essere poi sfruttato per l'analisi del problema della mitigazione delle oscillazioni eoliche, che richiede l'analisi del sistema accoppiato linea + dissipatore. Pur essendo consapevoli che una strategia di questo tipo non sia in grado di descrivere compiutamente la risposta del dissipatore, in quanto i corpi inerziali di estremità sono comunemente dotati di due gradi di libertà in piano ciascuno (traslazione verticale e rotazione rigida), si riconosce in essa un valido punto di partenza che, se opportunamente generalizzato, sarà in grado di simulare il reale funzionamento del dispositivo e la sua influenza sul moto del cavo conduttore. Il vantaggio che l'adozione di un modello discreto comporta, se confrontato con i modelli continui o ad elementi finiti presenti in letteratura, consiste nel disporre di uno strumento dal minor onere computazionale, regolato da un numero inferiore di parametri e caratterizzato da una struttura di più semplice comprensione. A conferma di quanto appena esposto, si ricorda come proposte più affinate, come quella di Luo, Wang e Zhang, esposta al Par.2.2.5, necessitino della calibrazione di un elevato numero di parametri e siano associate ad un elevato onere computazionale che li rende poco adatti all'analisi del problema strutturale delle oscillazioni del sistema linea + smorzatore.

Per questo motivo, a partire dal seguente paragrafo, ci si addenterà nella descrizione analitica del modello proposto nonché nella interpretazione fisica delle variabili e dei parametri coinvolti.

3.1 Il modello isteretico di Bouc-Wen a 5 parametri

Si consideri l'oscillatore discreto ad un grado di libertà rappresentato in Fig.3.1 in grado di descrivere il moto traslatorio della massa in corrispondenza della sezione di attacco e la sua interazione con il cavo messaggero, definita dalla presenza dell'elemento a deformabilità concentrata.

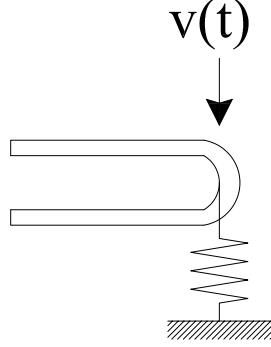


Figura 3.1: Modello discreto a un grado di libertà del sistema cavo messaggero + massa.

Dal momento che il cavo messaggero presenta un comportamento altamente isteretico e non-lineare, la legge costitutiva che regola la molla traslazionale deve necessariamente discostarsi dall'usuale adozione della legge di Hooke; nel caso presente, per la definizione della forza di interazione $F(t)$, si è deciso di adottare il modello isteretico di Bouc-Wen. Sebbene la formulazione originaria di tale modello [39] prevedeva l'impiego di sette parametri per descrivere l'evoluzione del processo isteretico, Ikhouane e Rodellar [22] hanno dimostrato che il minimo numero di parametri indipendenti necessari risulta pari a cinque; pertanto, nel seguente elaborato si farà riferimento a questa seconda proposta di modellazione. Più nel dettaglio, la forza di richiamo esercitata dal cavo messaggero sulla massa risulta essere funzione della coordinata libera $v(t)$ e della variabile isteretica adimensionale $z(t)$ mediante il set di parametri $P = \{k_{\min}, k_{\max}, v_0, \sigma, n\}$, secondo le relazioni espresse in 3.1.

$$F(t) = k_{\min}v(t) + (k_{\max} - k_{\min})v_0z(t)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{v_0} \left(\dot{v}(t) - \sigma |\dot{v}(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1)\dot{v}(t) |z(t)|^n \right) \quad (3.1)$$

Ciascuno dei cinque parametri caratterizzanti il modello assume un preciso significato fisico. In particolare, k_{\max} , k_{\min} ed v_0 rappresentano rispettivamente la rigidezza elastica pre-snervamento, la rigidezza post-snervamento e lo spostamento in corrispondenza dello stato di snervamento, in una idealizzazione bilineare della legge costitutiva. Il parametro σ è associato alla differenza tra i valori delle rigidezza tangenti a carico e scarico del modello, n è responsabile, invece, della transizione tra rigidezza massima e minima (k_{\max} e k_{\min}); per quanto concerne quest'ultimo parametro, infatti, si ha che, incrementandone il valore, la curva che esprime la dipendenza della forza di richiamo dalla configurazione del sistema tende ad assumere una forma bi-lineare. In aggiunta, si sottolinea come il dominio di definizione del set di parametri $D_P \subseteq \mathbb{R}^5$ debba essere opportunamente definito in modo da assicurare il comportamento asintoticamente dissipativo del sistema meccanico, la sua stabilità (sistema BIBO - *Bounded Input Bounded Output*) e la sua ammissibilità termodinamica. In questo contesto, facendo riferimento a [23], è possibile dimostrare che per il caso in esame debbano essere soddisfatte le seguenti disuguaglianze: $k_{\min} > 0$, $k_{\max} > 0$, $v_0 > 0$, $\sigma > 1/2$ e $n > 1$. Si dimostra inoltre che se $|z(0)| \leq 1$, allora $|z(t)| \leq 1$, $\forall t$.

Partendo dalla prima equazione delle 3.1, può essere utile valutare l'andamento della rigidità tangente nel tempo e i parametri che la influenzano; essa si identifica con la pendenza istantanea della curva $F = F(v(t))$ e può essere calcolata come in 3.2.

$$k_{tan}(v(t)) = \frac{\partial F(v(t))}{\partial v} = k_{min} + (k_{max} - k_{min})v_0 \frac{\partial z(v(t))}{\partial v} \quad (3.2)$$

Riscrivendo $\dot{z}(t)$ come nella 3.3 e ricordando che $\dot{z}(t) = \frac{\partial z(v(t))}{\partial v} \dot{v}(t)$ risulta possibile esplicitare l'espressione della derivata parziale della variabile isteretica z rispetto alla coordinata libera v (in 3.4) e, conseguentemente, l'espressione della rigidità tangente in 3.5.

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{v_0} (\dot{v}(t) + (-\sigma |\dot{v}(t)| \operatorname{sgn}(z(t)) + (\sigma - 1)\dot{v}(t)) |z(t)|^n) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{v_0} (1 + (-\sigma \operatorname{sgn}(\dot{v}(t)z(t)) + (\sigma - 1)) |z(t)|^n) \quad (3.4)$$

$$k_{tan}(v(t)) = k_{min} + (k_{max} - k_{min}) (1 + (-\sigma \operatorname{sgn}(\dot{v}(t)z(t)) + (\sigma - 1)) |z(t)|^n) \quad (3.5)$$

Si noti come $k_{tan}(v = 0, t = 0)$ coincida correttamente con il parametro k_{max} definito in precedenza, essendo identicamente nullo il valore assunto dalla variabile isteretica z . Inoltre, se il processo di isteresi giunge a saturazione (ovvero $|z| = 1$), dalla 3.5 si evince come la rigidità tangente in fase di carico si attesta sul valore di k_{min} .

3.2 Calcolo della forza di interazione in funzione del moto della massa

Le equazioni 3.1, che rappresentano rispettivamente la dipendenza della forza di richiamo F dalla configurazione v della massa e dalla variabile isteretica adimensionale z e la legge di flusso associata, risultano spesso sprovviste di una soluzione analitica in forma chiusa, eccetto che per moti della massa descritti da specifiche leggi temporali (si veda Par.3.2.2); in tali casi, l'equazione differenziale che descrive la legge di flusso risulta di semplice integrazione analitica. In tutti gli altri casi, risulta necessario disporre di adeguati strumenti numerici al fine di ottenere una soluzione del problema 3.1, seppur in forma approssimata. Per questo motivo, per ottenere i risultati che verranno esposti nel seguito, è stata necessaria una fase di implementazione delle equazioni governanti all'interno del software MATLAB.

In prima istanza, è stato implementato un algoritmo numerico in grado di determinare l'andamento della variabile isteretica z e della forza di interazione F , sia in funzione della variabile temporale t sia in funzione della coordinata libera traslazionale considerata v . I dati da fornire in input al codice risultano essere i cinque parametri regolanti il modello, l'intervallo di tempo di integrazione $[t_0, t_f]$ ed una sua eventuale discretizzazione uniforme di passo Δt , la condizione iniziale in termini di stato della variabile isteretica all'istante $t = t_0$, oltre che eventuali parametri aggiuntivi caratterizzanti lo stato del sistema assunto noto (si veda Tab.3.1).

A riguardo di quest'ultimo, è possibile fornire come dato di ingresso o l'espressione analitica della configurazione del sistema $v(t)$ istante per istante, o l'espressione analitica dell'atto di moto corrispondente $\dot{v}(t)$. Siccome sia l'espressione di $v(t)$ che quella di $\dot{v}(t)$ sono richieste per la soluzione del sistema governante 3.1, nel primo caso il codice esegue la derivazione rispetto al tempo della funzione $v(t)$, mentre nel secondo provvede all'integrazione numerica dell'atto di moto $\dot{v}(t)$, sfruttando le funzioni "diff" e "int" per variabili simboliche presenti

INPUT	OUTPUT
$k_{min}, k_{max}, v_0, \sigma, n, t_0, t_f, \Delta t, z(t_0)$, altri parametri (e.g. frequenza f del moto armonico $v(t)$)	$z(t), F(t), z(v), F(v)$

Tabella 3.1: Input-Output dell’algoritmo numerico.

nella libreria del programma. Dal punto di vista pratico, l’integrazione delle equazioni governanti 3.1 viene effettuata all’interno del codice mediante l’impiego della funzione predefinita ODE45: essa richiede come dati in ingresso la legge di flusso implementata come funzione analitica a variabile simbolica t , un vettore temporale di estremi t_0 e t_f , contenente gli istanti in cui si vuole che venga valutata la risposta (nel caso in cui venga fornito a priori un valore del passo Δt), e la condizione iniziale circa lo stato della variabile isteretica. Per una trattazione più approfondita a riguardo dell’algoritmo numerico impiegato da ODE45 per la risoluzione di un dato problema differenziale, si consulti l’Appendice C in allegato. Nei seguenti sottoparagrafi, la procedura numerica appena descritta verrà validata dapprima cercando di riprodurre il comportamento di un oscillatore lineare, successivamente confrontando i risultati numerici con quelli analitici in forma chiusa, ottenuti per il caso particolare di oscillatore isteretico soggetto ad un moto monotono crescente della massa. Infine, assicuratisi della bontà dell’algoritmo implementato, sarà possibile risolvere numericamente il caso di oscillatore isteretico sottoposto ad un moto armonico della massa, al fine di riprodurre i risultati sperimentali del test quasi-statico di Sauter, citato al Par.2.2.2. Vale la pena notare come i primi due procedimenti si pongano l’obiettivo di validare lo strumento numerico, mentre l’ultimo sia finalizzato alla comprensione dell’efficacia del modello di descrivere il comportamento del cavo messaggero.

3.2.1 Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare

Come anticipato, al fine di validare la procedura implementata nel software, è possibile cercare di riprodurre con il modello numerico di Bouc-Wen la risposta di un oscillatore elastico lineare soggetto a varie condizioni di eccitazione, per il quale la soluzione del problema è nota in forma chiusa da nozioni base di dinamica dei sistemi meccanici. Nello specifico, verranno assegnate come input tre diverse espressioni analitiche del moto $v(t)$ della massa, alle quali verrà attribuito un preciso significato fisico.

Per fare in modo che il modello isteretico definito al Par.3.1 riproduca il comportamento di un oscillatore elastico, in principio sarebbe sufficiente, come si evince dal significato fisico dei parametri e dalle espressioni in 3.1, attribuire alla soglia di snervamento v_0 un valore molto elevato; in questo modo non si attiverebbe alcuna fonte di non-linearità e dissipazione e la rigidezza del sistema si assesterebbe sul valore di k_{max} . Tuttavia, stante l’elevato valore attribuito al parametro v_0 , effettuando solo questa operazione, il processo di integrazione numerica della legge di flusso porterebbe a dei risultati non affidabili in termini di variabile isteretica z , e, di conseguenza, della risposta globale. Pertanto, dal punto di vista pratico, la linearità del comportamento può essere ristabilita uguagliando i valori dei parametri k_{max} e k_{min} . In questo modo, si riduce drasticamente il grado di accoppiamento tra le equazioni 3.1 in quanto la variabile isteretica non influenza più l’andamento della forza di richiamo, la quale diviene direttamente proporzionale alla traslazione v della massa mediante il parametro di rigidezza $k_{min} = k_{max} = k$ (i.e. legge di Hooke). Si sottolinea come, anche in tale caso, sia opportuno considerare valori elevati per la soglia di snervamento in quanto, in caso contrario, pur essendo il diagramma forza-spostamento lineare, si otterrebbero, dall’integrazione della legge di flusso, oscillazioni spurie della variabile istere-

tica dovute ad errori di troncamento ed accuratezza numerica, in evidente disaccordo con un comportamento elastico e non dissipativo del sistema.

Si consideri a titolo di esempio un oscillatore lineare di massa unitaria e di rigidezza $k = 4\pi^2$ N/m, privo di smorzamento viscoso: la frequenza naturale f_1 del sistema risulta quindi pari a $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ Hz. Si sottoponga tale sistema a tre diverse condizioni di moto e se ne calcoli l'espressione corrispondente della forza di richiamo elastica. Dalla legge di Hooke è ben noto che quest'ultima risulta pari a $F_{el} = kv$. Come primo caso, si consideri la legge oraria espressa in 3.6, che descrive il moto libero della massa fissate le condizioni iniziali $v(0) = 0.2$ m e $\dot{v}(0) = 4$ m/s.

$$v(t) = \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t) + 0.2 \cos(2\pi t) \quad \text{con } t \in [0, 15] \text{ s} \quad (3.6)$$

In accordo con le considerazioni effettuate in precedenza, per riprodurre la soluzione analitica con quella numerica ottenuta a partire dal modello di Bouc-Wen, fatto collasare al caso lineare, risulta necessario fornire in input al software il seguente set di dati: espressione analitica di $v(t)$ in 3.6 nell'intervallo considerato ($t_0 = 0$ s, $t_f = 15$ s), una discretizzazione dello stesso con $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_{min} = k_{max} = k = 4\pi^2$ N/m, $v_0 = 10^4$ m, $z(0) = 0$ e $f = 1$ Hz. I parametri σ ed n vengono convenzionalmente assunti pari all'unità, seppure ininfluenti.

Il confronto tra la soluzione del caso elastico in forma chiusa e quella ottenuta numericamente a partire dall'implementazione del modello di Bouc-Wen è mostrato in Fig.3.2 e 3.3 con riferimento rispettivamente al piano $F - t$ e al piano $F - v$. Inoltre, si noti come il valore della variabile isteretica z , rappresentato in Fig.3.4, sia identicamente nullo istante per istante.

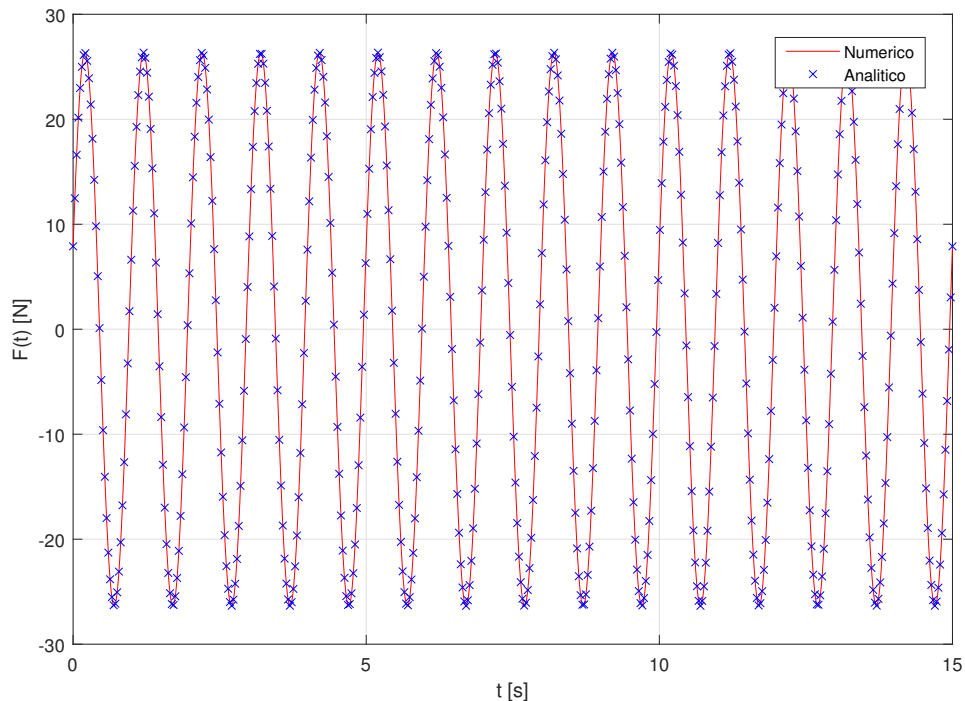


Figura 3.2: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - t$ nel caso di moto libero della massa.

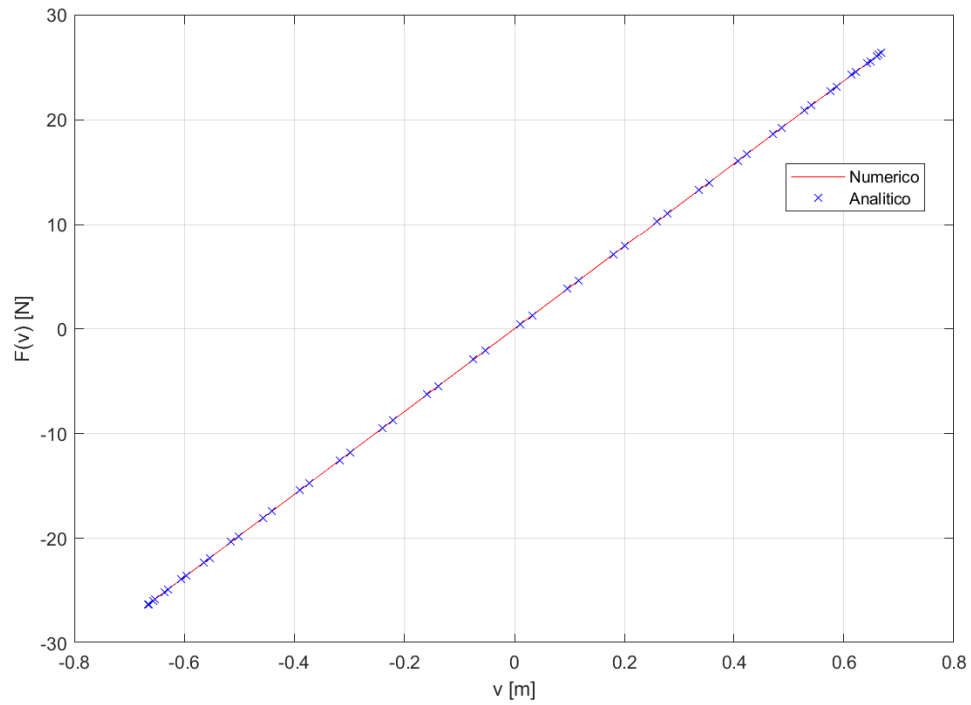


Figura 3.3: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - v$ nel caso di moto libero della massa.

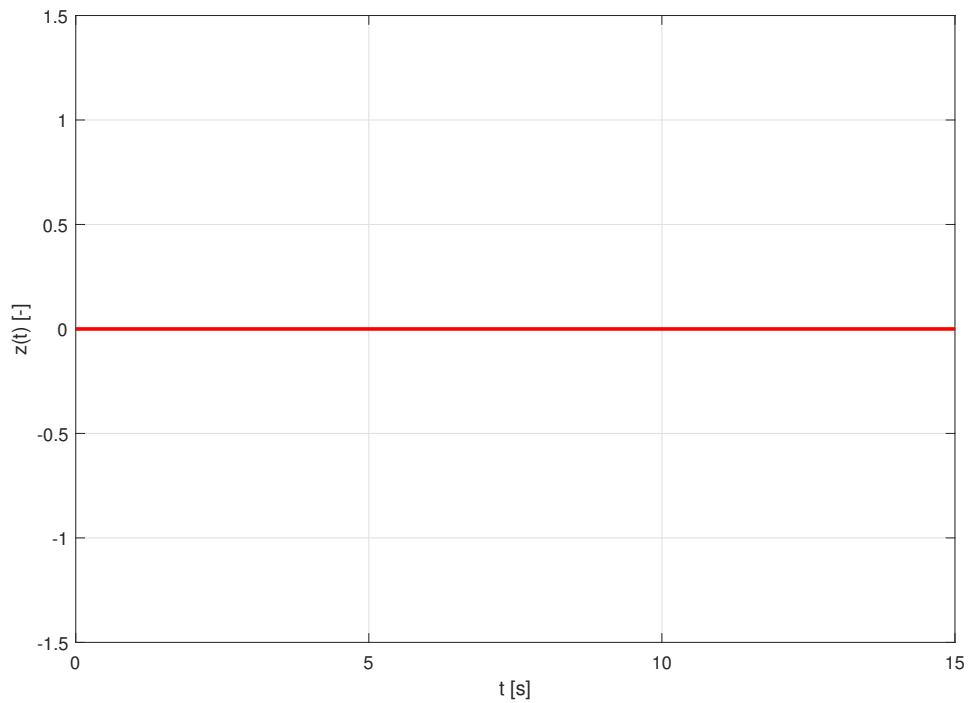


Figura 3.4: Andamento temporale della variabile isteretica z per il caso elastico lineare di moto libero ottenuto mediante modello numerico di Bouc-Wen.

Come secondo caso, si consideri la legge oraria espressa in 3.7, che assume il significato del moto della massa in condizioni di risonanza (ovvero immaginando una forzante esterna armonica, assunta di ampiezza unitaria, con frequenza pari alla frequenza naturale del sistema), considerando condizioni iniziali omogenee dell'oscillatore ($v(0) = 0$ m e $\dot{v}(0) = 0$ m/s).

$$v(t) = \frac{1}{8\pi^2} [\sin(2\pi t) - 2\pi t \cos(2\pi t)] \quad \text{con } t \in [0, 15] \text{ s} \quad (3.7)$$

Al fine di riprodurre la medesima soluzione mediante il modello numerico di Bouc-Wen, risulta necessario fornire in input il seguente set di parametri: espressione analitica di $v(t)$ in 3.7 nell'intervallo considerato ($t_0 = 0$ s, $t_f = 15$ s), una discretizzazione dello stesso con $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_{min} = k_{max} = k = 4\pi^2$ N/m, $v_0 = 10^4$ m, $z(0) = 0$ e $f = 1$ Hz. I parametri σ ed n vengono convenzionalmente assunti pari all'unità, seppure ininfluenti.

Il confronto tra la soluzione del caso elastico in forma chiusa e quella ottenuta numericamente a partire dall'implementazione del modello di Bouc-Wen è mostrato in Fig.3.5 con riferimento rispettivamente al piano $F - t$.

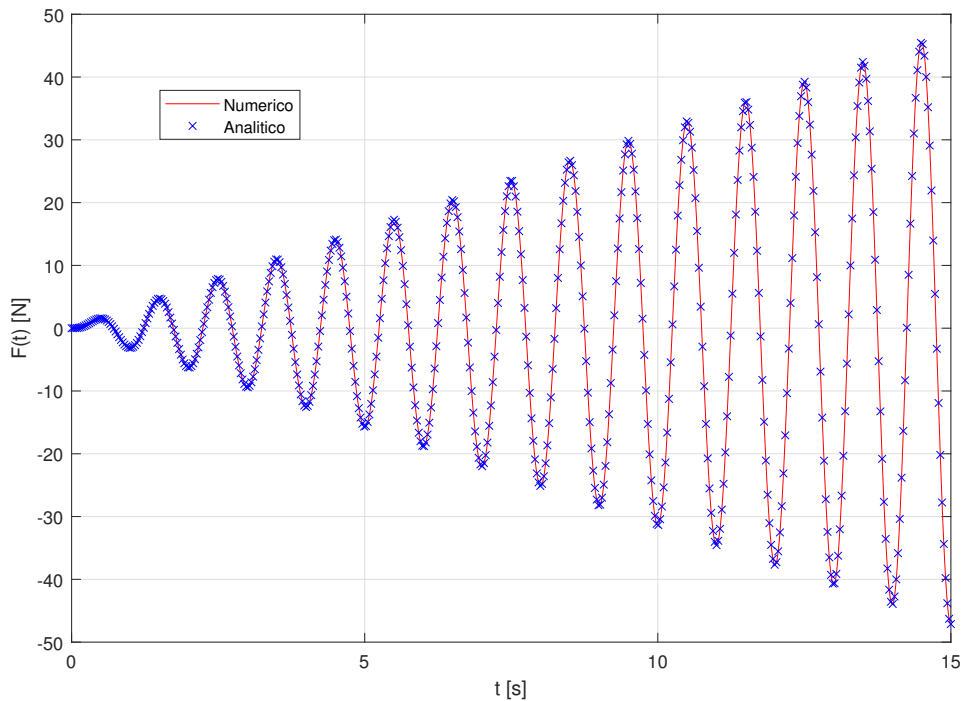


Figura 3.5: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - t$ nel caso di moto in condizioni di risonanza della massa.

Anche in questo caso l'andamento temporale della variabile isteretica z risulta identicamente nullo e l'andamento della forza di richiamo F nel piano $F - v$ lineare.

Come terzo ed ultimo caso di oscillatore elastico lineare, si consideri la legge oraria espressa in 3.8, che assume il significato fisico del cosiddetto fenomeno dei battimenti (ovvero immaginando una forzante esterna armonica, assunta di ampiezza unitaria, con frequenza molto prossima a quella naturale del sistema), considerando ancora una volta condizioni iniziali dell'oscillatore omogenee ($v(0) = 0$ m e $\dot{v}(0) = 0$ m/s).

$$v(t) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{2\pi}{4\varepsilon(2\pi + \varepsilon)} \{2\pi \cdot 2 \sin(-\varepsilon t) \cos[(2\pi + \varepsilon)t] + 2\varepsilon \sin(2\pi t)\} \quad \text{con } t \in [0, 15] \text{ s} \quad (3.8)$$

Il set di parametri da fornire in input al software per cercare di riprodurre la soluzione analitica risulta il seguente: espressione analitica di $v(t)$ in 3.8 nell'intervallo considerato ($t_0 = 0$ s, $t_f = 15$ s), una discretizzazione dello stesso con $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_{min} = k_{max} = k = 4\pi^2$ N/m, $v_0 = 10^4$ m e $z(0) = 0$. I parametri σ ed n vengono convenzionalmente assunti pari all'unità, seppure ininfluenti. Il parametro ε è stato assunto pari a $\frac{3}{20}\pi \simeq 0.47$ rad/s essendo ipotizzata una frequenza della forzante pari a 1.15 Hz.

Il confronto tra la soluzione del caso elastico in forma chiusa e quella ottenuta numericamente a partire dall'implementazione del modello di Bouc-Wen è mostrato in Fig.3.6 con riferimento rispettivamente al piano $F - t$. Anche in questo caso l'andamento temporale della variabile isteretica z risulta identicamente nullo e l'andamento della forza di richiamo F nel piano $F - v$ lineare.

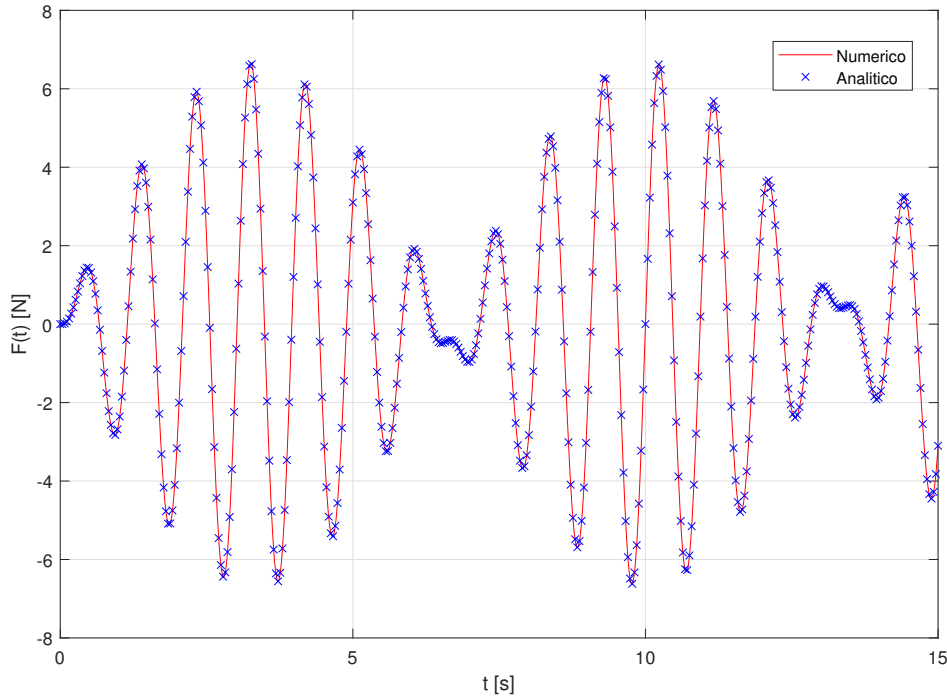


Figura 3.6: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - t$ nel caso di moto in condizione di battimenti.

3.2.2 Moto monotono crescente della massa

Un'ulteriore prova di validazione dell'algoritmo implementato può essere condotta cercando di riprodurre la risposta del sistema isteretico soggetto ad un moto monotono crescente linearmente nel tempo. Infatti, questo risulta essere uno dei pochi casi per cui la soluzione del sistema in 3.1 è ricavabile analiticamente, stante la presenza di una soluzione in forma chiusa per la variabile isteretica z che soddisfa la legge di flusso. Si consideri a tal proposito un andamento lineare per la variazione temporale della coordinata libera v del tipo:

$$v(t) = \frac{t}{\bar{t}} \bar{v} \quad \text{cont } t \in [0, 15] s \quad (3.9)$$

La legge di flusso specializzata al caso dell'input monotono crescente appena definito risulta essere espressa in 3.10.

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{t}} - \sigma \left| \frac{\bar{v}}{\bar{t}} \right| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1) \frac{\bar{v}}{\bar{t}} |z(t)|^n \right) \quad (3.10)$$

Assumendo per semplicità per il parametro n un valore pari ad 1, la legge di flusso può essere ulteriormente semplificata, come si evince dalla 3.11 e successivamente dalla 3.12.

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{t}} - \sigma \frac{\bar{v}}{\bar{t}} z(t) + (\sigma - 1) \frac{\bar{v}}{\bar{t}} z(t) \right) \quad (3.11)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{t}} - \frac{\bar{v}}{\bar{t}} z(t) \right) \quad (3.12)$$

La 3.12 risulta essere un'equazione differenziale nella variabile isteretica z lineare a coefficienti costanti, per cui la soluzione dell'omogenea associata si dimostra essere della forma in 3.13, mentre un integrale particolare della 3.12 è rappresentato dalla 3.14.

$$z_h(t) = C_0 e^{-\frac{1}{v_0} v(t)} \quad (3.13)$$

$$z_p(t) = 1 \quad (3.14)$$

A questo punto, per il principio di sovrapposizione, l'integrale generale dell'equazione differenziale 3.12 si identifica con:

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = 1 + C_0 e^{-\frac{1}{v_0} v(t)} \quad (3.15)$$

Imponendo la condizione iniziale $z(0) = 0$, è possibile ricavare l'espressione $C_0 = -1$ e di conseguenza la soluzione del problema differenziale può essere espressa come nella 3.16.

$$z(t) = 1 - e^{-\frac{1}{v_0} v(t)} = 1 - e^{-\frac{1}{v_0} \frac{\bar{v}}{\bar{t}} t} \quad (3.16)$$

Sostituendo la 3.16 nella prima equazione della 3.1 si ottiene l'espressione della forza di richiamo isteretica $F(t)$, esplicitata come nella 3.17.

$$F(t) = k_{min} v(t) + (k_{max} - k_{min}) v_0 z(t) = k_{min} v(t) + (k_{max} - k_{min}) v_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{v_0} v(t)} \right) \quad (3.17)$$

L'espressione della rigidità tangente, espressa in termini generali nella 3.2, può essere riscritta come nella 3.18.

$$k_{tan}(v(t)) = k_{min} + (k_{max} - k_{min}) e^{-\frac{1}{v_0} v(t)} \quad (3.18)$$

Si noti come, a conferma di quanto discusso nel caso più generale, nel Par.3.1, la rigidità tangente iniziale $k_{tan}(0)$ coincida col parametro k_{max} , ed inoltre si ha che:

$$k_{tan,\infty} = \lim_{v(t) \rightarrow \infty} k_{tan}(v(t)) = k_{min} \quad (3.19)$$

Questo aspetto risulta altresì prevedibile dal momento che, come affermato in precedenza, la rigidità assume valore costante corrispondente a k_{min} in corrispondenza dello stato di saturazione della variabile isteretica, il quale è stato senz'altro raggiunto per valori di spostamento molto elevati.

A titolo esemplificativo, si consideri un oscillatore caratterizzato dal seguente set di parametri: $k_{min} = 200$ N/m, $k_{max} = 2000$ N/m e $v_0 = 0.1$ m; si assegna a tale sistema un moto lineare monotono crescente del tipo descritto in 3.9 con $\bar{t} = 15$ s e $\bar{v} = 1$ m. Limitando l'analisi all'intervallo di tempo $[0, 15]$ s, le equazioni 3.16 e 3.17 permettono di ottenere la soluzione esatta del problema, che può essere confrontata con quella numerica ottenuta mediante il modello di Bouc-Wen e considerando, oltre ai parametri appena citati, un passo di discretizzazione dell'intervallo di integrazione $\Delta t = 10^{-4}$ s, la condizione iniziale $z(0) = 0$ e i valori di σ e n pari a zero. Tali risultati sono mostrati in Fig.3.7-3.10 con riferimento rispettivamente al piano $F - t$, $F - v$, $z - t$ e $z - v$.

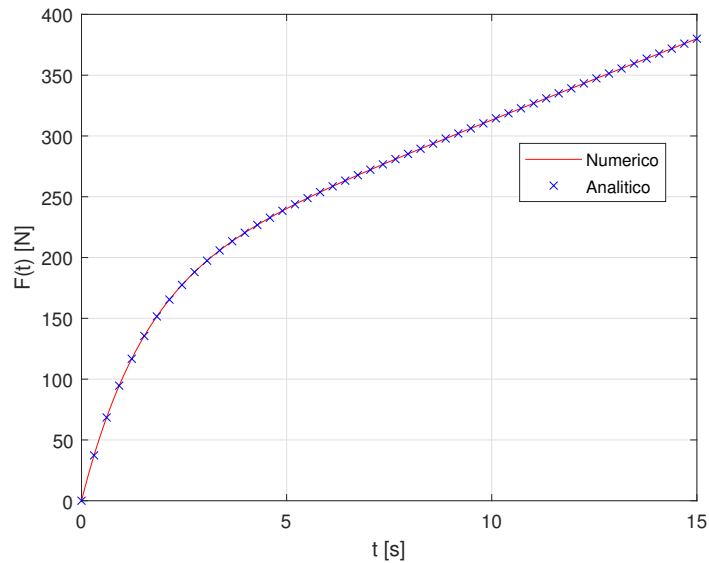


Figura 3.7: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - t$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.

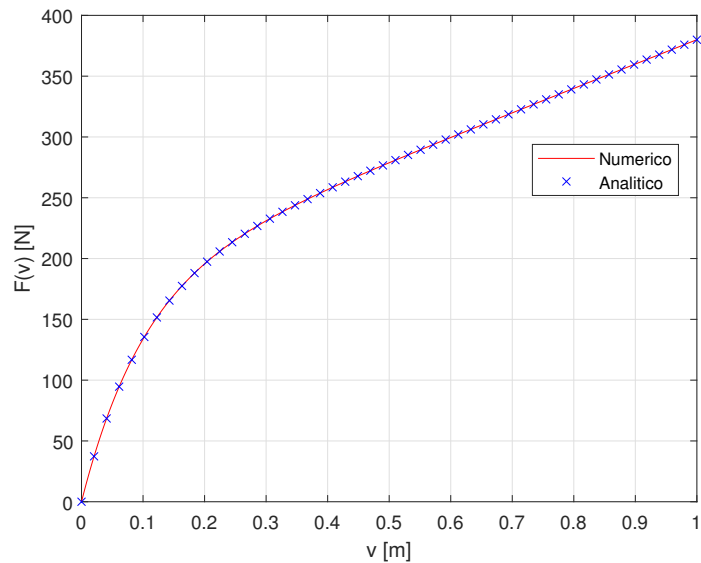


Figura 3.8: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - v$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.

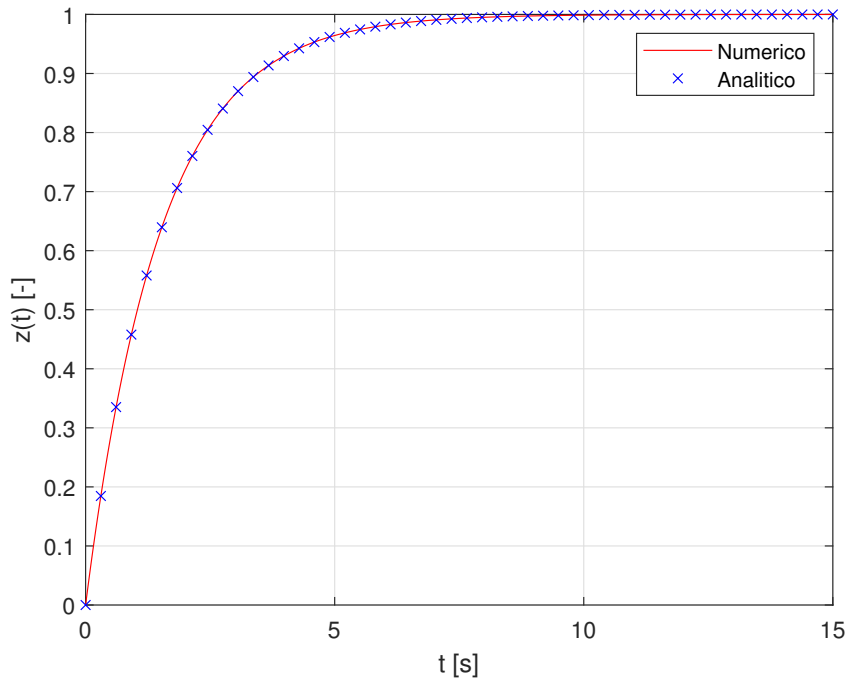


Figura 3.9: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $z - t$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.

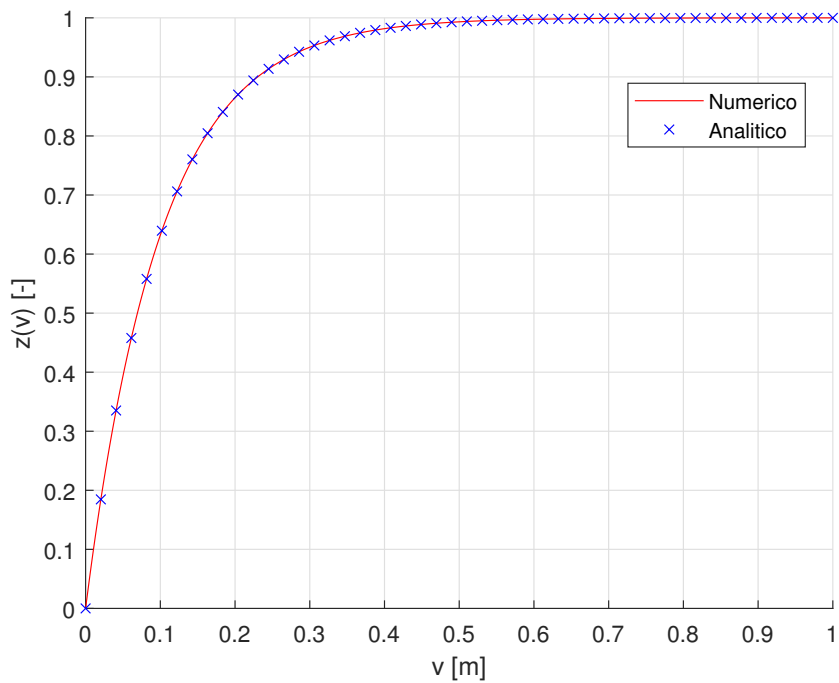


Figura 3.10: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $z - v$ nel caso di moto lineare monotono crescente della massa.

3.2.3 Moto armonico della massa e riproduzione di un test sperimentale

A valle del processo di validazione dell'algoritmo implementato in MATLAB, che permette la determinazione della forza di interazione $F(t)$ assegnata l'espressione analitica $v(t)$ del moto della massa, risulta in questa fase opportuno indagare se il modello costitutivo discreto di Bouc-Wen sia in grado di descrivere il comportamento isteretico del cavo messaggero, limitando per il momento l'analisi al caso di un sistema a un grado di libertà, libero di traslare verticalmente. A questo scopo, può essere utile cercare di riprodurre, mediante la strategia di modellazione attuata e la procedura di soluzione numerica implementata, i risultati sperimentali del test ciclico condotto in condizioni quasi-statiche da Sauter e descritto al Par.2.2.2. Si ricorda come in tale circostanza si sia considerato un cavo messaggero di lunghezza $l = 30\text{cm}$ incastrato ad un estremo e sollecitato all'estremo libero opposto mediante una forza $F(t)$ ortogonale all'asse del cavo stesso, la cui legge di variazione temporale risulta essere di carattere armonico a frequenza f fissata, molto inferiore al valore delle frequenze proprie del sistema (Fig.3.11). Misurando i valori sperimentali di spostamento trasversale $v(t)$ del punto di applicazione della forza, risulta possibile costruire un diagramma sperimentale nel piano forza-spostamento del tipo rappresentato in Fig.3.12, per un dato numero di cicli di carico.

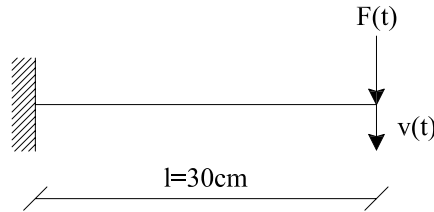


Figura 3.11: Schematizzazione del test quasi-statico eseguito da Sauter.

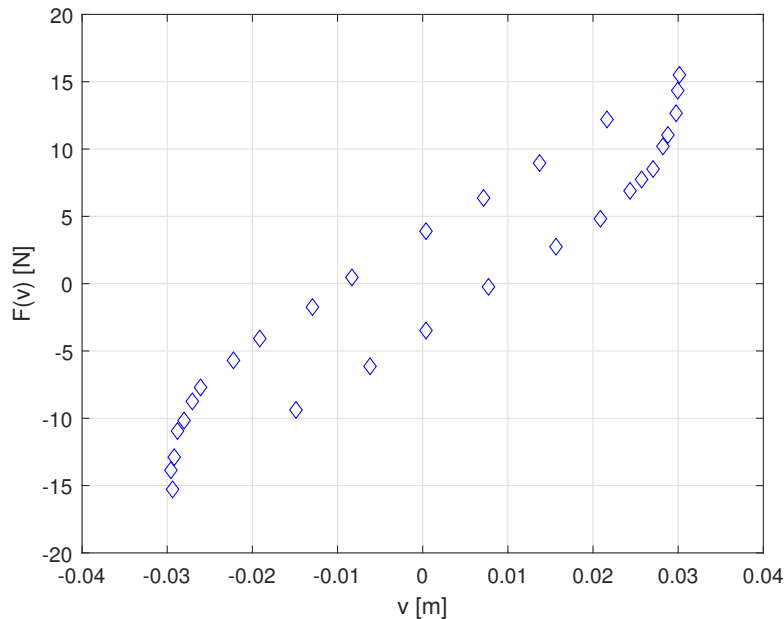


Figura 3.12: Risultati sperimentali, corrispondenti alla condizione di regime, del test ciclico di Sauter nel piano che associa la forza applicata all'estremo libero del cavo allo spostamento trasversale dell'estremo stesso.

Tale test sperimentale può essere facilmente riprodotto dall'algoritmo numerico implementato, basato su una descrizione discreta alla Bouc-Wen del cavo messaggero, fornendo come dati di input un moto armonico della massa del tipo $v(t) = v_{max} \sin(2\pi ft)$, rappresentato in Fig.3.13, di ampiezza $v_{max} = 0.03$ m, rilevata sperimentalmente, e frequenza f di valore arbitrario (e.g. $f = 0.5$ Hz), a patto che essa risulti molto inferiore rispetto alle frequenze naturali del sistema, in modo da non introdurre effetti dinamici nella risposta e di poter quindi condurre il test in condizioni quasi-statiche. L'arbitrarietà nella scelta del valore da assegnare ad f diviene possibile dal momento che la dissipazione del sistema è supposta di carattere isteretico e dunque non risulta influenzata, come nel caso viscoso, dalla velocità di deformazione. Infine, si assume un intervallo temporale di ampiezza pari a 10 s, in modo da potere effettuare un numero soddisfacente di cicli di spostamento. Si sottolinea come, data l'impostazione dell'algoritmo numerico che riceve in ingresso l'espressione analitica del moto dell'oscillatore $v(t)$ e permette il calcolo della forza di richiamo $F(t)$, il test venga riprodotto numericamente in forma inversa, sebbene questo aspetto non abbia alcuna influenza sulla bontà dei risultati ottenuti e rappresentati nel piano forza-spostamento. A questo punto, risulta sufficiente selezionare e inserire nel codice di calcolo un set $P = \{k_{min}, k_{max}, v_0, \sigma, n\}$ di parametri del modello in grado di riprodurre la risposta in maniera sufficientemente fedele (fase di taratura dei parametri). Se tale set esiste allora significa che la modellazione proposta, a patto di eseguire una corretta fase di taratura, risulta capace di descrivere la realtà sperimentale del test e, dunque, il comportamento del cavo in tale circostanza.

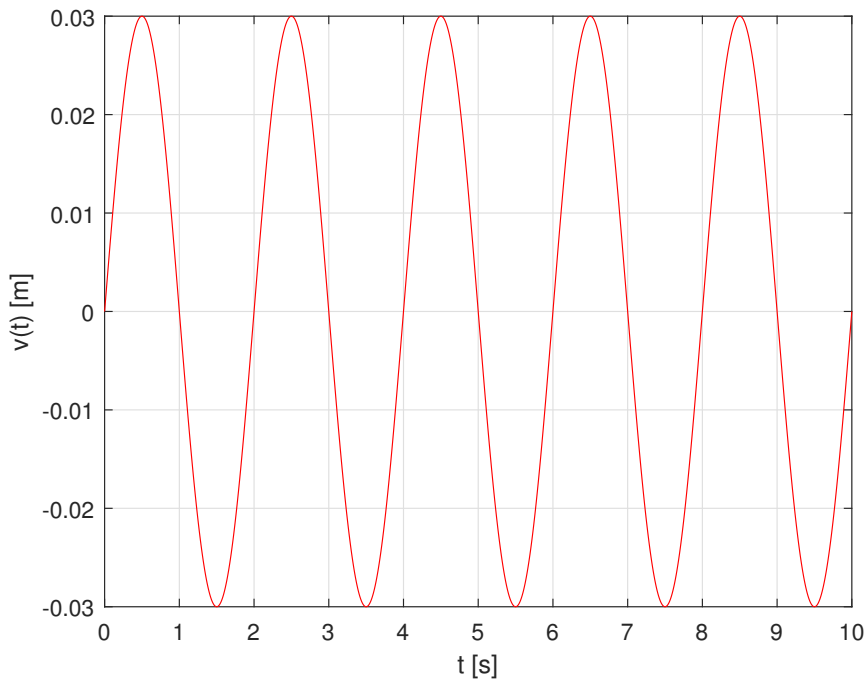


Figura 3.13: Andamento temporale del moto imposto all'estremo libero nel test quasi-statico di Sauter.

Per effettuare una scelta ottimale del set di parametri da impiegare, noto il significato fisico di ciascuno di essi, è possibile effettuare alcune considerazioni di carattere preliminare, con riferimento agli esiti sperimentali in Fig.3.12. Innanzitutto, i cicli considerati risultano essere caratterizzati da una pendenza a carico pressoché costante, da identificare con un opportuno valore del parametro k_{min} : per questo motivo, il valore v_0 da assegnare

alla soglia di snervamento deve essere tale da comportare la saturazione della variabile isteretica. Sebbene il grafico sperimentale non mostri il comportamento iniziale del cavo a partire dallo stato indeformato e non sia quindi possibile identificare in maniera diretta il valore di rigidità iniziale k_{max} , esso è comunque da definire in maniera ragionevole in quanto influenza globalmente la risposta del sistema e la forma dei cicli, ad esempio con riferimento alla pendenza allo scarico. Infine, il parametro σ può essere definito sulla base di considerazioni riguardanti la differenza di rigidità al carico-scarico, mentre n , regolante la transizione tra i valori di rigidità massima e minima, viene assunto uguale all'unità. Vari tentativi di taratura hanno condotto infine alla scelta del seguente set di parametri: $k_{min} = 400$ N/m, $k_{max} = 1600$ N/m, $v_0 = 0.003$ m, $\sigma = 3.5$, $n = 1$. La soluzione numerica del problema espresso in equazione 3.1, ottenuta dal codice MATLAB per il set di parametri appena definito, è rappresentata in Fig.3.14-3.17, con riferimento all'andamento della variabile isteretica z e della forza di richiamo F , sia in funzione del tempo che della posizione della massa (estremo libero del cavo) istante per istante.

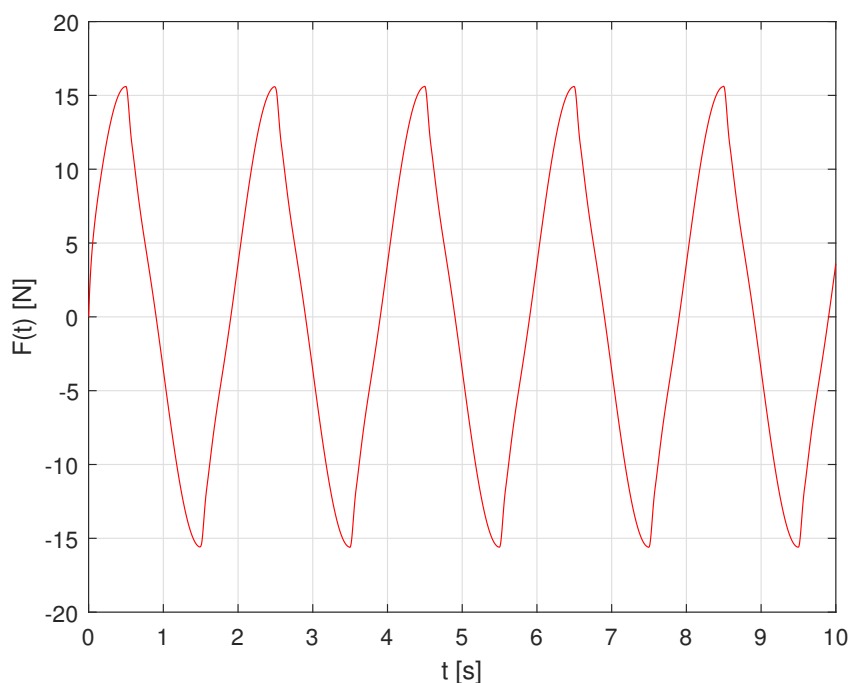


Figura 3.14: Calcolo numerico della storia temporale della forza di richiamo di Bouc-Wen.

In definitiva, il confronto tra i dati sperimentali e la soluzione numerica, espresso nel piano che associa la forza di richiamo allo spostamento dell'estremo del cavo, risulta essere quello mostrato in Fig.3.18. Esso mostra come il modello isteretico di Bouc-Wen, definito a livello globale con riferimento a un oscillatore discreto a un grado di libertà, rappresenti una tecnica di modellazione adeguata del comportamento del cavo messaggero e della massa ad esso connessa, con riferimento alla sua coordinata libera puramente traslazionale. Per simulare nella sua interezza il comportamento del dissipatore Stockbridge, cioè al fine di descrivere sia la traslazione che la rotazione in piano delle masse e le corrispondenti componenti di interazione con il cavo messaggero, risulta necessaria una formulazione del dispositivo come sistema meccanico a due gradi di libertà: tale aspetto esula però dagli obiettivi del presente paragrafo e verrà analizzato nel dettaglio ai Capitoli 4-5.

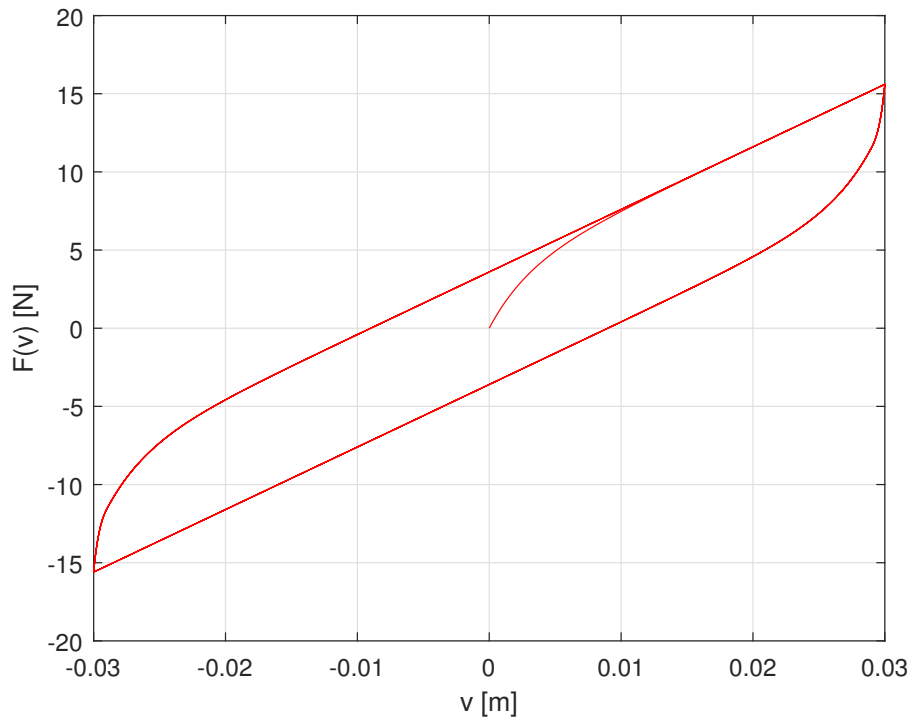


Figura 3.15: Calcolo numerico dell'andamento della forza di richiamo di Bouc-Wen in funzione della coordinata libera v .

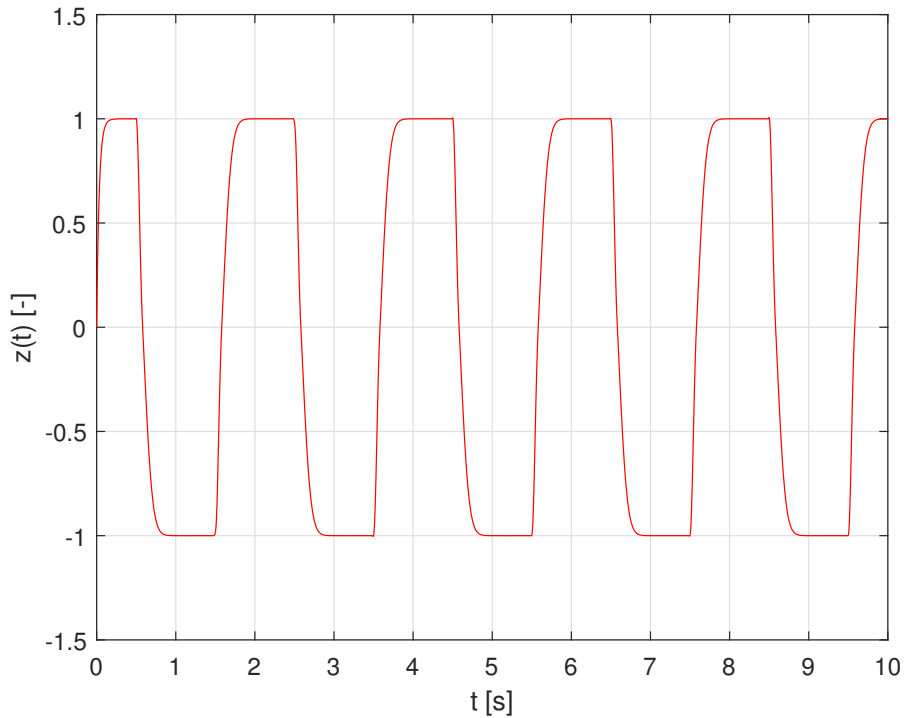


Figura 3.16: Calcolo numerico della storia temporale della variabile isteretica nel test quasi-statico di Sauter.

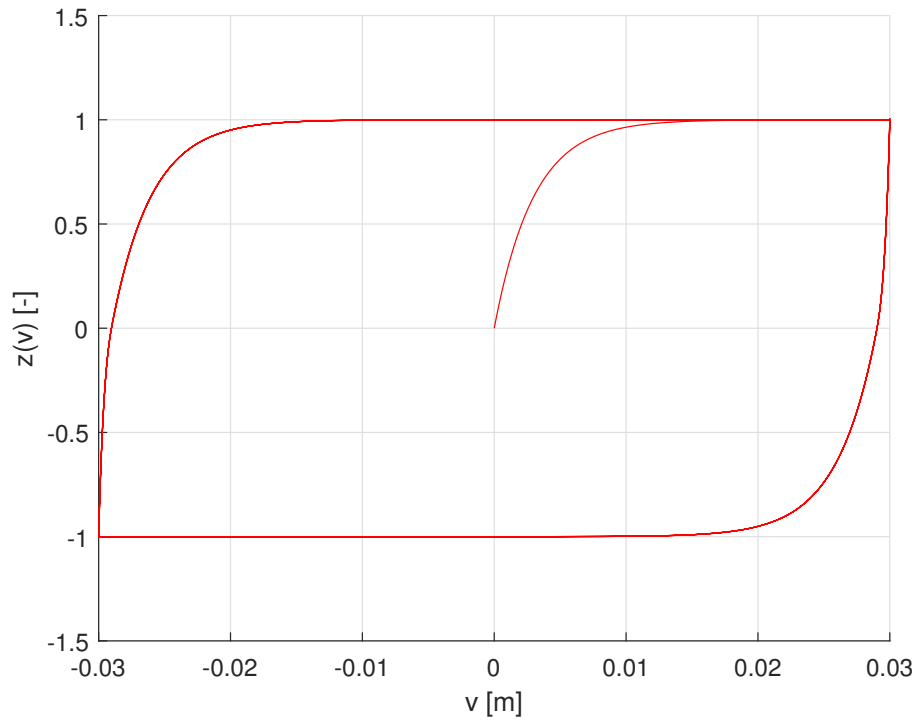


Figura 3.17: Calcolo numerico dell'andamento della variabile isteretica in funzione della coordinata libera v .

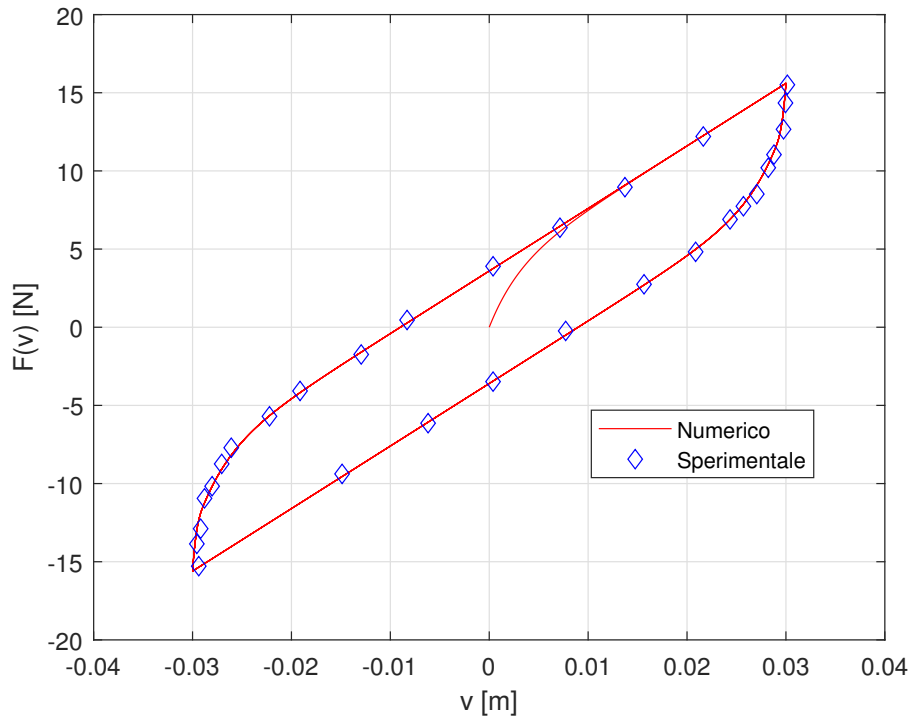


Figura 3.18: Confronto risultati sperimentali e numerici associati al test ciclico quasi-statico eseguito da Sauter.

3.3 Calcolo della risposta del sistema per un assegnato stato di sollecitazione

Nel caso in cui la storia temporale della coordinata libera traslazionale $v(t)$ non sia assegnata come input in 3.1, ma sia fornita una condizione di sollecitazione esterna per il sistema (forzante applicata, moto imposto del vincolo o effetto delle condizioni iniziali), al fine di risolvere il problema risulta necessario fornire un'ulteriore equazione che rappresenta l'equilibrio dinamico della massa inerziale. Infatti, in tali circostanze, le grandezze incognite sono il moto della massa stessa, descritto dalla variabile $v(t)$, la storia temporale della variabile isteretica $z(t)$ e la forza di richiamo $F(t)$, esercitata dal cavo messaggero sul corpo inerziale. Pertanto, le equazioni governanti il problema divengono quelle espresse in 3.20.

$$\begin{aligned}
 F(t) &= k_{\min}v(t) + (k_{\max} - k_{\min})v_0z(t) \\
 \dot{z}(t) &= \frac{1}{v_0} \left(\dot{v}(t) - \sigma |\dot{v}(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1)\dot{v}(t) |z(t)|^n \right) \\
 m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + F(t) &= q(t)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

dove m rappresenta la massa del corpo inerziale posto all'estremità del cavo messaggero, c il coefficiente di smorzamento viscoso del sistema, introdotto per maggiore generalità in aggiunta a quello isteretico, e $q(t)$ l'espressione della forzante effettiva o apparente agente sul sistema; tale sistema di equazioni va affiancato da adeguate condizioni iniziali che esprimono lo stato del sistema ad un istante $t = t_0$ (i.e. $v(t_0) = v^*$, $\dot{v}(t_0) = \dot{v}^*$, $z(t_0) = z^*$). Come per il caso discusso al Par.3.2, il sistema di equazioni governanti il problema risulta spesso sprovvisto di una soluzione analitica in forma chiusa; per tale motivo, è conveniente servirsi di adeguati strumenti numerici per ricavarne una soluzione. Mediante l'implementazione di un algoritmo numerico all'interno di una sezione del codice MATLAB e, in particolare, impiegando la funzione predefinita ODE45, è stato possibile procedere con questa risoluzione, pur consci dell'introduzione di un fisiologico grado di approssimazione. Vale la pena notare come tale funzione sia in grado di risolvere sistemi di equazioni differenziali solamente del primo ordine; essendo l'ordine del sistema in esame superiore a uno, è stata introdotta una variabile temporanea $u(t)$ definita come $u(t) = \dot{v}(t)$, la quale rappresenta l'atto di moto della massa istante per istante. Facendo riferimento, a titolo di esempio, al caso di sistema soggetto a un moto imposto del vincolo $w_c(t)$ (vibrazione della pinza rigida), il sistema di equazioni 3.20 può dunque essere ricondotto alla forma al primo ordine espressa in 3.21, in cui l'espressione che descrive la dipendenza della forza di richiamo dalla configurazione della massa $v(t)$ e dalla variabile isteretica adimensionale $z(t)$ è stata sostituita direttamente all'interno dell'equazione di equilibrio dinamico della massa (prima e terza equazione rispettivamente in 3.1). In definitiva, il problema differenziale 3.21 risulta costituito da tre equazioni in altrettante funzioni incognite ($v(t)$, $u(t)$, $z(t)$); una volta determinata la soluzione, all'occorrenza, è possibile condurre il calcolo della forza di interazione $F(t)$ nella fase di *post-processing*, in accordo con l'ormai nota espressione 3.22.

$$\begin{aligned}
 \dot{z}(t) &= \frac{1}{v_0} \left(u(t) - \sigma |u(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1)u(t) |z(t)|^n \right) \\
 \dot{u}(t) &= -2\xi \frac{\sqrt{k_{\max}m}}{m} u(t) - \frac{k_{\min}}{m} v(t) - \frac{(k_{\max} - k_{\min})}{m} v_0 z(t) - \ddot{w}_c(t) \\
 \dot{v}(t) &= u(t)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$F(t) = k_{\min}v(t) + (k_{\max} - k_{\min})v_0z(t) \quad (3.22)$$

Il parametro ξ rappresenta il fattore di smorzamento viscoso del sistema ed è relazionato al coefficiente di smorzamento viscoso c tramite l'espressione $c = 2\xi\sqrt{k_{\max}m}$.

Dal punto di vista dell'implementazione della procedura descritta, i dati da fornire in input al codice risultano essere i cinque parametri regolanti il modello di Bouc-Wen, l'intervallo di tempo di integrazione $[t_0, t_f]$ ed una sua eventuale discretizzazione uniforme di passo Δt , le condizioni iniziali in termini di variabile isteretica z , spostamento v e velocità u della massa all'istante di tempo $t = t_0$, oltre che eventuali parametri aggiuntivi caratterizzanti il moto imposto alla pinza assunto noto (si veda Tab.3.2).

INPUT	OUTPUT
$k_{\min}, k_{\max}, v_0, \sigma, n, t_0, t_f, \Delta t, z(t_0), v(t_0), u(t_0)$, altri parametri (e.g. frequenza f del moto armonico $w_c(t)$)	$z(t), v(t), u(t), z(v), F(t), F(v)$

Tabella 3.2: Input-Output dell'algorithmo numerico nel caso di forzante esterna o moto imposto alla pinza.

Per quanto concerne il moto imposto alla pinza, è possibile fornire come dato di ingresso al codice o l'espressione del moto traslatorio verticale $w_c(t)$ istante per istante, o l'espressione del suo atto di moto $\dot{w}_c(t)$, o ancora quella della sua accelerazione $\ddot{w}_c(t)$. Fatta eccezione per quest'ultimo caso, in cui l'espressione dell'accelerazione $\ddot{w}_c(t)$ figura direttamente nel sistema di equazioni governanti il problema, nei primi due casi è necessario, mediante la funzione "*diff*", presente nella libreria del programma, procedere rispettivamente con due e una operazioni di derivazione, al fine di ottenere la storia temporale dell'accelerazione della pinza da inserire nell'equazione di equilibrio dinamico della massa. Più nel dettaglio, risulta importante evidenziare come lo script, nella forma in cui è stato implementato, permetta di definire tali input secondo due modalità distinte: tramite un'espressione analitica esplicita oppure in maniera vettoriale, ossia sotto forma di array, le cui componenti si identificano con il valore assunto dal segnale in specifici istanti temporali. Quest'ultima possibilità riveste una notevole importanza di carattere pratico in quanto può capitare di interfacciarsi con storie temporali del moto imposto alla sezione di attacco (o atto di moto/accelerazione) espresse mediante segnali vettoriali discreti e non per mezzo di funzioni analitiche continue. Come già menzionato precedentemente, l'integrazione delle equazioni governanti 3.21 viene effettuata impiegando la funzione predefinita ODE45: essa richiede come dati di ingresso il sistema di equazioni differenziali al primo ordine in 3.21, un vettore temporale di estremi t_0 e t_f , contenente gli istanti di tempo in cui si vuole che venga valutata la risposta (nel caso in cui venga fornito a priori un valore del passo Δt) ed un vettore contenente le condizioni iniziali circa lo stato del sistema $(z(0), v(0), u(0))$. Per una trattazione più approfondita a riguardo dell'algorithmo numerico alla base della chiamata alla funzione ODE45 e al suo schema di funzionamento, si consulti ancora una volta l'Appendice C in allegato.

Si noti come, nel caso in cui l'input sia assegnato mediante la definizione di un segnale vettoriale, sia necessario interpolarlo in modo opportuno al fine di ricavare i valori del segnale stesso in corrispondenza degli istanti di tempo impiegati nella procedura di integrazione (definiti nel codice tramite gli estremi dell'intervallo t_0 e t_{inf} e dal passo di discretizzazione Δt), i quali, generalmente, non coincidono con gli istanti in corrispondenza di cui il valore del segnale stesso risulta assegnato; al fine di uniformare i due intervalli per procedere con la risoluzione numerica del problema, è stato sufficiente creare la specifica funzione "*sig_interp*", la quale viene esaustivamente discussa in Appendice B.

A questo punto, è doveroso chiarire come, sebbene il codice implementato sia strutturato per risolvere il problema nel caso di moto imposto alla pinza, sia comunque possibile considerare l'ulteriore casistica in cui una forzante esterna F_{est} venga direttamente applicata alla massa inerziale (si supponga per semplicità di considerare in tal caso i vincoli fissi, i.e. $w_c(t) = 0$). Le equazioni governanti il problema divengono in tal caso quelle espresse in 3.23.

$$\begin{aligned} F(t) &= k_{\min}v(t) + (k_{\max} - k_{\min})v_0z(t) \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{v_0} \left(\dot{v}(t) - \sigma |\dot{v}(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1)\dot{v}(t) |z(t)|^n \right) \\ m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + F(t) &= F_{est}(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'equivalenza è immediatamente ristabilita dall'uguaglianza 3.24, in cui viene definita un'accelerazione equivalente $\ddot{w}_{c,eq}(t)$ in grado di produrre sul sistema un effetto analogo a quello della forzante realmente applicata; diviene così possibile includere anche questo tipo di analisi all'interno del solutore numerico.

$$\ddot{w}_{c,eq}(t) = -\frac{F_{est}(t)}{m} \quad (3.24)$$

Inserendo nel codice numerico tale espressione di accelerazione $\ddot{w}_{c,eq}(t)$, è possibile ricondursi al set di equazioni governanti 3.23.

Come ultima osservazione, risulta utile sottolineare come sia possibile anche risolvere il problema di moto libero della massa (quindi con moto della pinza o forzante esterna nulli), sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

Nel seguente sottoparagrafo, la procedura numerica appena descritta verrà validata cercando di riprodurre il comportamento di un oscillatore lineare, per poi risolvere il caso di oscillatore isteretico sottoposto ad un moto armonico della pinza o, equivalentemente, ad una forzante armonica esterna.

3.3.1 Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare

Al fine di validare la procedura numerica implementata all'interno del software, può essere opportuno riprodurre con il modello di Bouc-Wen i risultati di un oscillatore elastico lineare, soggetto a differenti condizioni di eccitazione, quali l'effetto dell'imposizione di condizioni iniziali non omogenee, di una forzante esterna agente in risonanza con la frequenza naturale del sistema e di una forzante esterna con frequenza prossima a quella del sistema. Per fare in modo che il modello isteretico di Bouc-Wen riproduca il comportamento di un oscillatore elastico, è necessario adottare tutti gli accorgimenti, circa il valore dei parametri da assegnare in input, discussi al Par.3.2.1.

Si consideri quindi, a titolo di esempio, un oscillatore lineare di massa unitaria e rigidezza $k = 4\pi^2$ N/m, privo di smorzamento viscoso: la frequenza naturale f_1 del sistema risulta quindi pari a $f_1 = 1$ Hz.

Come primo caso, si studi il sistema sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee e moto della pinza o forzante esterna nulli; come ben noto, la soluzione analitica del moto libero è descritta dalla relazione 3.25.

$$v(t) = \frac{\dot{v}(t_0)}{2\pi f_1} \sin(2\pi f_1 t) + v(t_0) \cos(2\pi f_1 t) \quad (3.25)$$

Assumendo come condizioni iniziali $v(t_0) = 0.2$ m e $\dot{v}(t_0) = 4$ m/s, il moto della massa in esame risulta espresso mediante la 3.26.

$$v(t) = \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t) + 0.2 \cos(2\pi t) \quad (3.26)$$

Allo scopo di riprodurre la soluzione analitica con quella numerica ottenuta a partire dal modello di Bouc-Wen ricondotto al caso lineare, risulta necessario fornire in input al software il seguente set di dati: moto alla pinza nullo, intervallo di integrazione $[t_0, t_f] = [0, 15]$ s con discretizzazione di passo $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_{min} = k_{max} = k = 4\pi^2$ N/m, $v_0 = 10^4$ m e condizioni iniziali $v(t_0) = 0.2$ m, $\dot{v}(t_0) = 4$ m/s e $z(t_0) = 0$. I parametri σ e n vengono convenzionalmente assunti pari all'unità, secondo quanto già discusso.

Il confronto tra la soluzione del caso elastico in forma chiusa e quella ottenuta numericamente è mostrato in Fig.3.19 e 3.20 con riferimento rispettivamente al piano $F - t$ e al piano $F - v$.

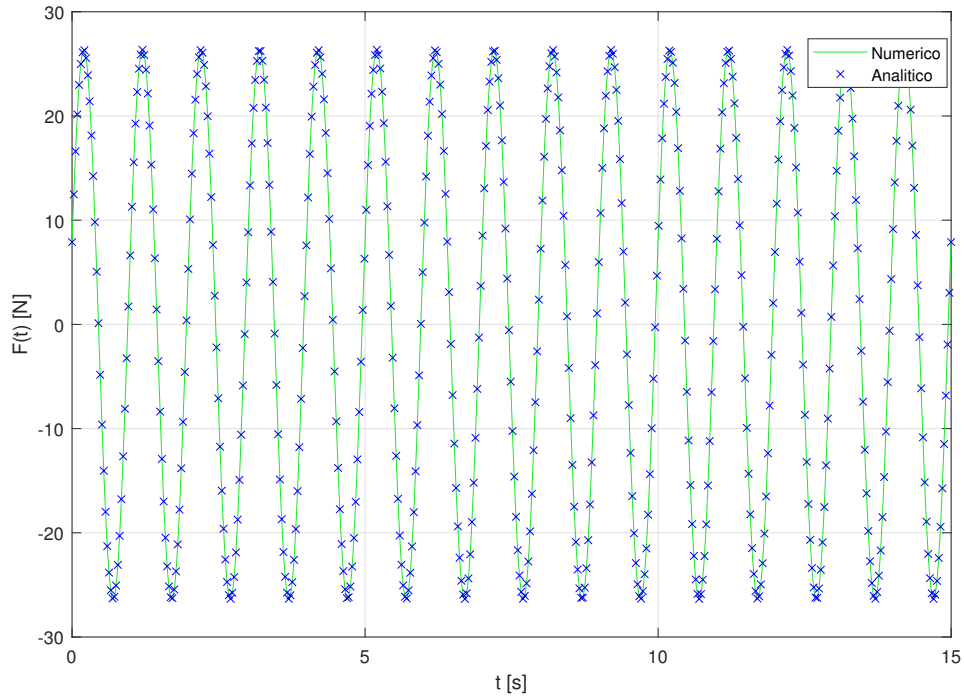


Figura 3.19: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - t$ nel caso di moto libero della massa, sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

Si può notare inoltre come, a valle dell'assunzione $v_0 = 10^4$ m, il valore della variabile isteretica z , rappresentato in Fig.3.21, sia identicamente nullo istante per istante.

Come secondo caso, si consideri una forzante esterna $F_{est}(t)$ di carattere armonico ad ampiezza F_0 unitaria e frequenza $f = f_1$, descritta dall'espressione 3.27; questa condizione di carico si identifica con una forzante in risonanza con il sistema e ne determina un moto forzato il cui integrale generale è espresso dalla 3.28.

$$F_{est}(t) = F_0 \sin(2\pi f t) \quad (3.27)$$

$$v(t) = v(t_0) \cos(2\pi f_1 t) + \frac{\dot{v}(t_0)}{2\pi f_1} \sin(2\pi f_1 t) + \frac{F_0}{2k} [\sin(2\pi f_1 t) - 2\pi f_1 t \cos(2\pi f_1 t)] \quad (3.28)$$

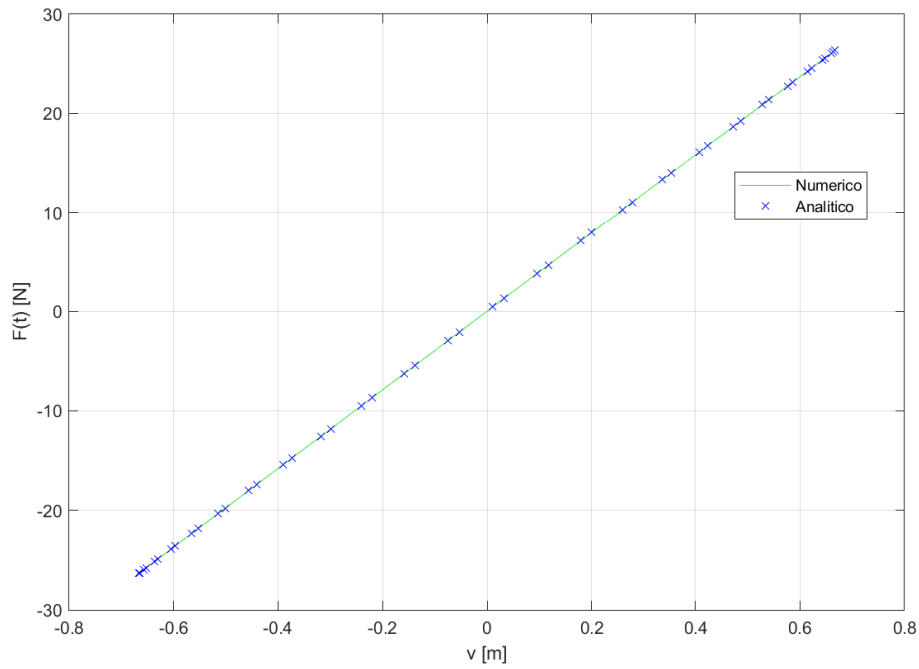


Figura 3.20: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - v$ nel caso di moto libero della massa, sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

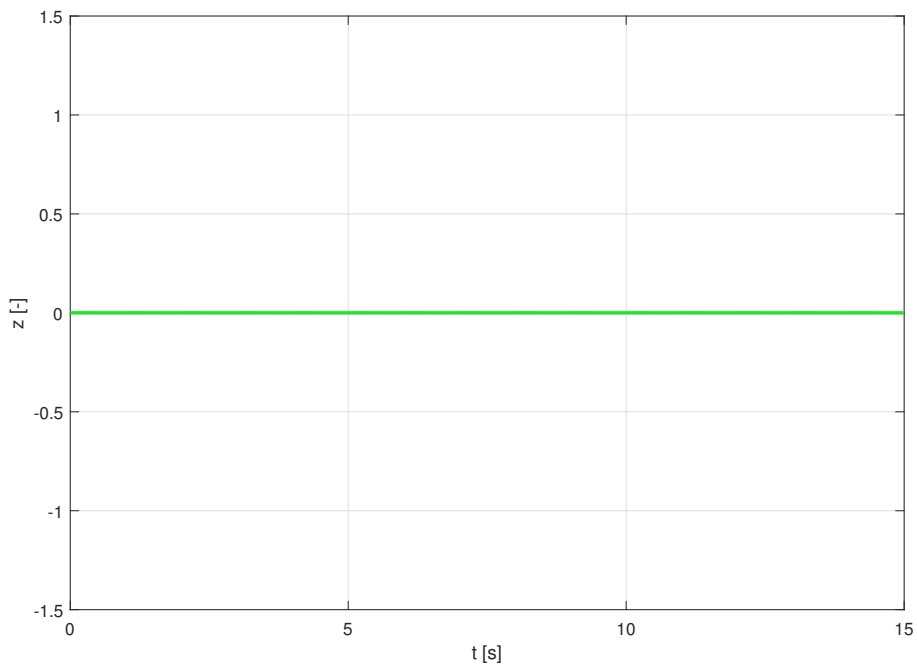


Figura 3.21: Andamento temporale della variabile isteretica z per il caso elastico lineare di moto libero ottenuto mediante modello numerico di Bouc-Wen sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

Assumendo, nel caso in esame, condizioni iniziali omogenee $v(t_0) = 0\text{ m}$ e $\dot{v}(t_0) = 0\text{ m/s}$, la 3.28 può essere riscritta come la 3.29.

$$v(t) = \frac{1}{8\pi^2} [\sin(2\pi t) - 2\pi t \cos(2\pi t)] \quad (3.29)$$

Al fine di riprodurre la medesima soluzione mediante il modello numerico di Bouc-Wen, risulta necessario fornire in input il seguente set di parametri: espressione (analitica o in forma vettoriale, secondo quanto già discusso) dell'accelerazione equivalente $\ddot{w}_{c,eq}(t)$, ottenuta facendo riferimento alla 3.24, intervallo di integrazione $[t_0, t_f] = [0, 15]\text{ s}$ con discretizzazione di passo $\Delta t = 10^{-4}\text{ s}$, $k_{min} = k_{max} = k = 4\pi^2\text{ N/m}$, $v_0 = 10^4\text{ m}$, condizioni iniziali $v(t_0) = 0\text{ m}$, $\dot{v}(t_0) = 0\text{ m/s}$ e $z(t_0) = 0$ e frequenza $f = 1\text{ Hz}$. I parametri σ e n vengono ancora una volta assunti pari all'unità.

Il confronto tra la soluzione esatta e quella ottenuta numericamente a partire dall'implementazione del modello di Bouc-Wen è mostrato in Fig.3.22 con riferimento al piano $F - t$, dalla quale si può notare una perfetta corrispondenza tra le due.

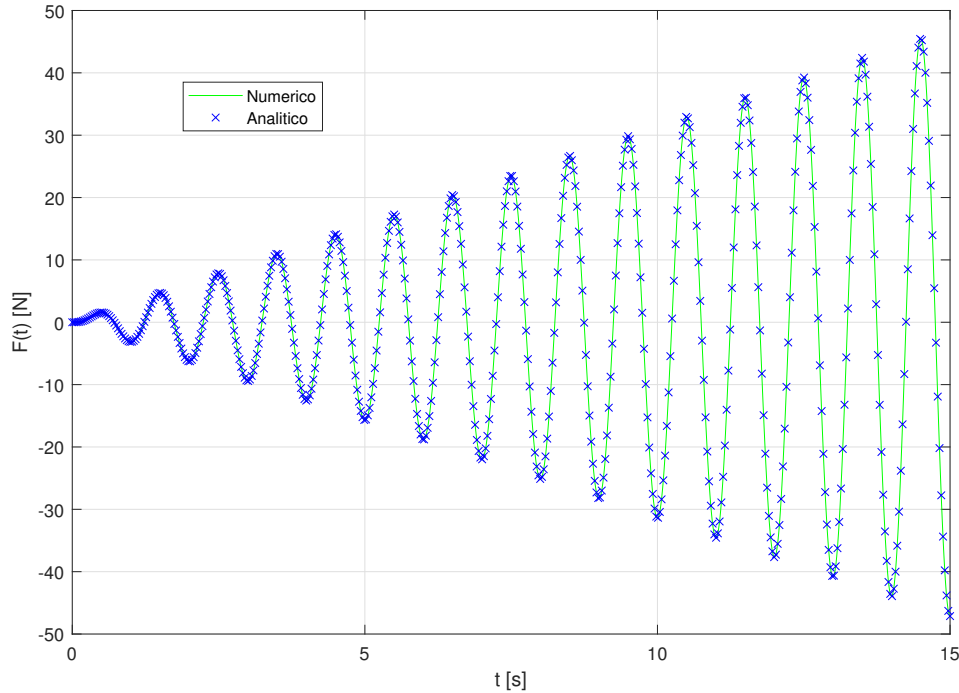


Figura 3.22: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - t$ nel caso forzante esterna armonica con frequenza pari a quella naturale del sistema (condizione di risonanza).

Anche in questa circostanza, l'andamento temporale della variabile isteretica z risulta identicamente nullo e l'andamento della forza di richiamo F nel piano $F - v$ lineare.

Si consideri ora un differente moto forzato dell'oscillatore, definito dalla forzante armonica F_{est} sempre di espressione 3.27, con frequenza f prossima a quella propria (f_1) del sistema (e.g. $f = 1.15\text{ Hz}$); tale condizione è alla base della generazione del cosiddetto fenomeno dei battimenti. Definito il parametro $\varepsilon = \frac{2\pi(f-f_1)}{2}$, è possibile provare che la soluzione in forma chiusa del problema è quella descritta nella 3.30, dove si sono nuovamente assunte condizioni iniziali omogenee $v(t_0) = 0\text{ m}$ e $\dot{v}(t_0) = 0\text{ m/s}$.

$$v(t) = \frac{F_0}{k} \frac{2\pi f_1}{4\varepsilon(2\pi f_1 + \varepsilon)} \{2\pi f_1 \cdot 2 \sin(-\varepsilon t) \cos[(2\pi f_1 + \varepsilon)t] + 2\varepsilon \sin(2\pi f_1 t)\} \quad (3.30)$$

Il set di parametri da fornire in ingresso all'algoritmo numerico, al fine di riprodurre il comportamento del sistema, risulta il seguente: espressione (analitica o in forma vettoriale) dell'accelerazione equivalente $\ddot{w}_{c,eq}(t)$, ottenuta facendo riferimento ancora una volta all'espressione 3.24, intervallo di integrazione $[t_0, t_f] = [0, 15]$ s con discretizzazione di passo $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_{min} = k_{max} = k = 4\pi^2$ N/m, $v_0 = 10^4$ m, condizioni iniziali $v(t_0) = 0$ m, $\dot{v}(t_0) = 0$ m/s, $z(t_0) = 0$ e frequenza $f = 1.15$ Hz. I parametri σ e n vengono convenzionalmente assunti pari all'unità, seppure ininfluenti.

Il confronto tra la soluzione del caso elastico in forma chiusa e quella ottenuta numericamente a partire dall'implementazione del modello di Bouc-Wen è mostrato in Fig.3.23, con riferimento al piano $F - t$, dalla quale, ancora una volta, si può osservare una perfetta corrispondenza tra le due.

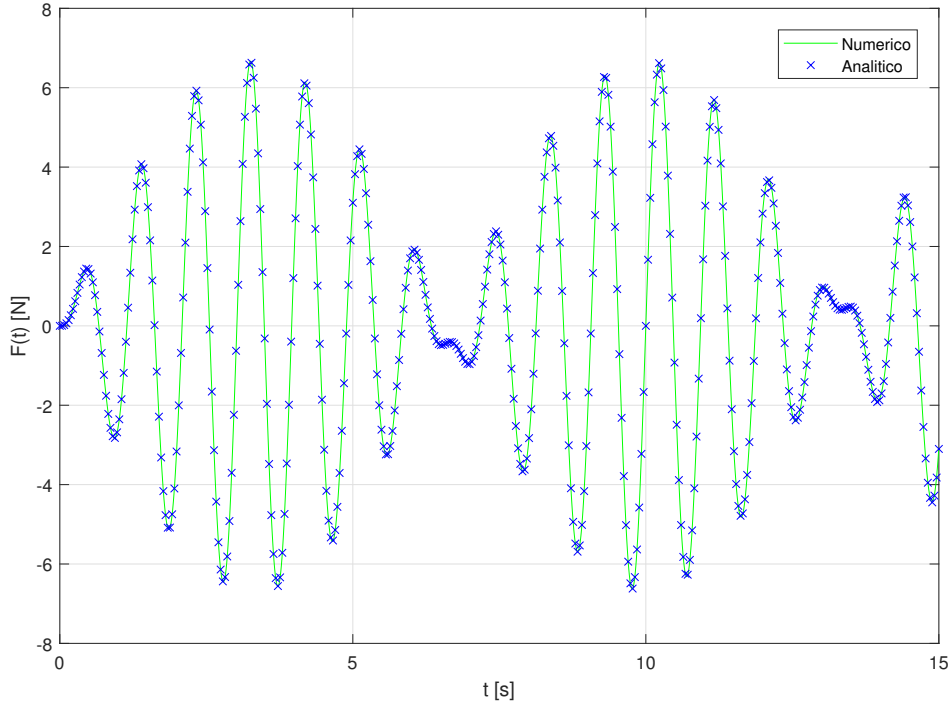


Figura 3.23: Confronto tra soluzione numerica e analitica nel piano $F - t$ nel caso di moto della massa in condizione di battimenti sotto l'effetto di una forzante esterna armonica con frequenza prossima a quella propria del sistema.

Anche in questo caso l'andamento temporale della variabile isteretica z risulta identicamente nullo e l'andamento della forza di richiamo F nel piano $F - v$ lineare.

Si consideri in ultima istanza il medesimo oscillatore lineare assunto per i tre casi appena descritti, provvisto di un fattore di smorzamento viscoso $\xi = 0.1$ e soggetto ad una forzante armonica esterna $F_{est}(t)$. In tale situazione, la frequenza naturale del sistema f_D risulta leggermente inferiore a quella del medesimo sistema in assenza di smorzamento (f_1) e può essere relazionata con quest'ultima mediante la 3.31.

$$\omega_D = 2\pi f_D = \omega_1 \sqrt{1 - \xi^2} = 2\pi f_1 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.31)$$

Definendo β il rapporto tra la frequenza della forzante f e la frequenza propria del sistema non smorzato f_1 , si ricorda dai principi di dinamica dei sistemi meccanici lineari che è possibile definire la cosiddetta "Funzione di Risposta in Frequenza" (FRF) del sistema stesso come:

$$\tilde{H}(\beta) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i2\xi\beta} = \frac{1}{k} \frac{1 - \beta^2 - i2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2} \quad (3.32)$$

Essendo una funzione complessa, la 3.32 viene generalmente espressa come la 3.33.

$$\tilde{H}(\beta) = \frac{1}{k} N(\beta) e^{-i\zeta(\beta)} \quad (3.33)$$

con:

$$N(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} \quad (3.34)$$

$$\zeta(\beta) = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right), \quad \text{con } 0 \leq \zeta \leq \pi \quad (3.35)$$

dove il termine $N(\beta)$ (in 3.34) rappresenta il modulo della FRF moltiplicato per la rigidezza k e viene solitamente definito come "fattore di amplificazione dinamico" della risposta, mentre il termine $\zeta(\beta)$ (in 3.35) rappresenta una costante di fase della risposta rispetto alla forzante.

A questo punto, diviene possibile risolvere l'equazione di moto forzato della massa e ricavarne l'integrale generale in funzione delle variabili appena definite, il quale viene descritto dalla relazione 3.36.

$$v(t) = e^{-\xi\omega_1 t} [C \cos(\omega_D t) + D \sin(\omega_D t)] + \frac{F_0}{k} N \sin(\omega t - \zeta) \quad (3.36)$$

Le costanti C e D possono essere ricavate imponendo le condizioni iniziali $v(t_0)$ e $\dot{v}(t_0)$; è dunque possibile ottenere le loro espressioni in 3.37.

$$\begin{aligned} C &= v(t_0) + \frac{F_0}{k} N \sin(\zeta) \\ D &= \frac{1}{\omega_D} \left\{ \dot{v}(t_0) + \xi\omega_1 \left[v(t_0) + \frac{F_0}{k} N \sin(\zeta) \right] - \omega \frac{F_0}{k} N \cos(\zeta) \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Considerando un fattore di smorzamento $\xi = 0.1$, come sopra menzionato, un rapporto $\beta = 2$ tra la frequenza della forzante e quella naturale del sistema non smorzato e condizioni iniziali omogenee, si può derivare l'andamento temporale di $v(t)$ nell'intervallo $[0, 15]$ s e, conseguentemente, quello della forza $F(t)$ di interazione cavo messaggero-massa, rappresentato in Fig.3.24.

Al fine di riprodurre la soluzione analitica mediante l'algoritmo numerico implementato, risulta necessario fornire al programma il seguente set di parametri: espressione (analitica o in forma vettoriale) dell'accelerazione equivalente $\ddot{w}_{c,eq}(t)$, ottenuta facendo riferimento alla 3.24, intervallo di integrazione $[t_0, t_f] = [0, 15]$ s con discretizzazione di passo $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_{min} = k_{max} = k = 4\pi^2$ N/m, $v_0 = 10^4$ m, condizioni iniziali $v(t_0) = 0$ m, $\dot{v}(t_0) = 0$ m/s e $z(t_0) = 0$ e frequenza $f = 2$ Hz.

Il confronto tra soluzione analitica e soluzione numerica è mostrato in Fig.3.25, con riferimento al piano $F - t$.

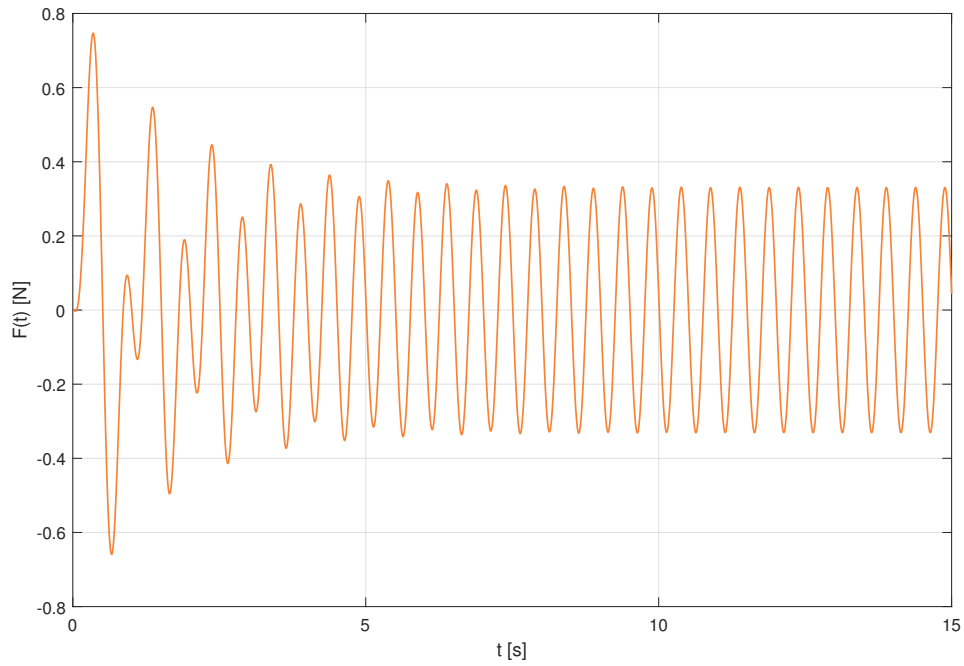


Figura 3.24: Soluzione analitica nel piano $F - t$ nel caso di sistema provvisto di smorzamento e soggetto a forzante esterna armonica.

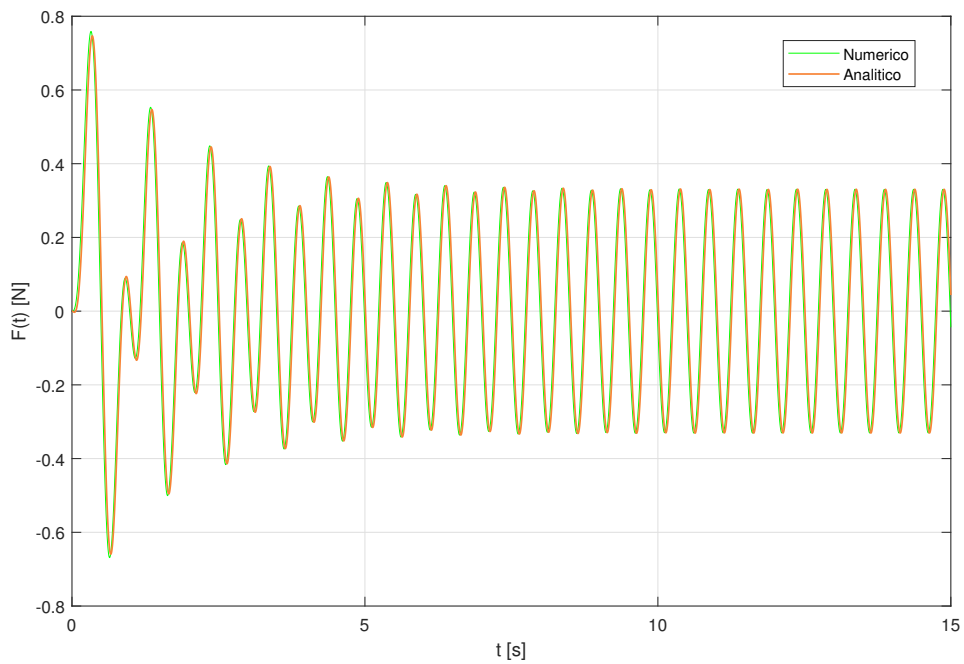


Figura 3.25: Confronto tra soluzione analitica e numerica nel piano $F - t$ nel caso di sistema provvisto di smorzamento e soggetto a forzante esterna armonica.

Come si denota da Fig.3.25, la risposta del sistema valutata numericamente in termini di relazione forza di richiamo F - variazione della coordinata libera della massa v non risulta

perfettamente sovrapposta a quella fornita dall'espressione analitica. Tale discrepanza può essere attribuita al fatto che l'implementazione della funzione analitica prevede l'impiego delle funzioni predefinite all'interno del software MATLAB "*exp*" e "*atan*", le quali rappresentano rispettivamente l'operatore esponenziale e l'arcotangente di un numero; queste ultime, infatti, introducono un errore numerico nella valutazione della risposta (seppure utilizzando le espressioni analitiche) che non compare invece nella risoluzione step by step delle equazioni governanti da parte dell'algoritmo numerico. Si può pertanto affermare come, anche in questo caso, il codice implementato sia stato efficacemente validato.

3.3.2 Moto armonico imposto al supporto

A questo punto della trattazione, assicuratisi della corretta implementazione della procedura numerica che permette il calcolo della risposta del sistema per assegnate condizioni di input (moto imposto alla pinza, effetto di una forzante applicata, effetto delle condizioni iniziali), può essere conveniente effettuare alcune considerazioni circa l'abilità del modello proposto di cogliere gli aspetti fondamentali del comportamento dissipativo del cavo messaggero. A tal proposito, si consideri l'oscillatore non-lineare di Bouc-Wen, rappresentato in Fig.3.1, si ponga la sua massa m pari a 1 kg e se ne descrivano le proprietà isteretiche mediante il seguente set di parametri: $k_{min} = 500$ N/m, $k_{max} = 2000$ N/m, $v_0 = 0.02$ m, $\sigma = n = 1$; il sistema in esame risulta sollecitato per mezzo di una storia ciclica di cedimenti traslazionali imposti alla pinza, i quali possono essere descritti tramite la legge espressa in 3.38.

$$w_c(t) = w_{c0} \sin(2\pi ft) \quad (3.38)$$

Per evidenziare diverse tipologie di comportamento dell'oscillatore, si supponga dapprima di fissare il valore della frequenza f dell'input (i.e. $f = 1$ Hz) e si considerino diverse condizioni di eccitazione ottenute variando il valore dell'ampiezza w_{c0} del moto imposto al vincolo: a titolo d'esempio, si analizzino i casi $w_{c0} = 0.5$ m, $w_{c0} = 0.75$ m, $w_{c0} = 1$ m e $w_{c0} = 1.2$ m. Risolvendo il problema in esame mediante la sezione dedicata del codice MATLAB implementato, una volta fissato l'intervallo di analisi $[t_0, t_f] = [0, 20]$ s e una discretizzazione dello stesso di passo costante $\Delta t = 10^{-4}$ s, poste condizioni iniziali di carattere omogeneo e fornita in ingresso l'espressione analitica 3.38 del moto imposto, si ottiene la risposta del sistema riportata in Fig.3.26 con riferimento al piano forza di richiamo F – posizione della massa v . Per completezza, nel medesimo diagramma è rappresentata la risposta di un sistema elastico lineare avente la stessa massa del sistema in esame e rigidità $k = k_{max} = k_{min}$ e sottoposto alle medesime condizioni di sollecitazione. Si sottolinea come la risposta del sistema è stata rappresentata nella figura sottostante con riferimento a una condizione di regime; infatti, non vengono considerati i primi cicli di carico in cui si evidenzia un transitorio della variabile isteretica z (si veda Fig.3.27 e Fig.3.28) e in cui, parallelamente, il sistema inizia ad evolvere a partire dallo stato iniziale non deformato, ma si rappresenta la risposta nel sotto-intervallo $[10, 20]$ s.

Il test numerico effettuato permette di cogliere varie peculiarità del comportamento dissipativo del cavo messaggero, idealizzato mediante il modello discreto a un grado di libertà di Bouc-Wen. Innanzitutto, si può concludere che tutte le condizioni di carico applicate al sistema in esame non comportano la completa saturazione del processo isteretico: infatti, da Fig.3.26 si denota come i cicli di risposta in termini della forza F di interazione, i quali riproducono la forma dei cicli della variabile z in accordo con quanto espresso nella prima equazione delle 3.1, siano caratterizzati da una pendenza variabile lungo tutta la curva. Si ricorda a tal proposito, secondo quanto già discusso al Par.3.5, che un sistema isteretico, raggiunta la condizione di saturazione del processo di isteresi, sia caratterizzato

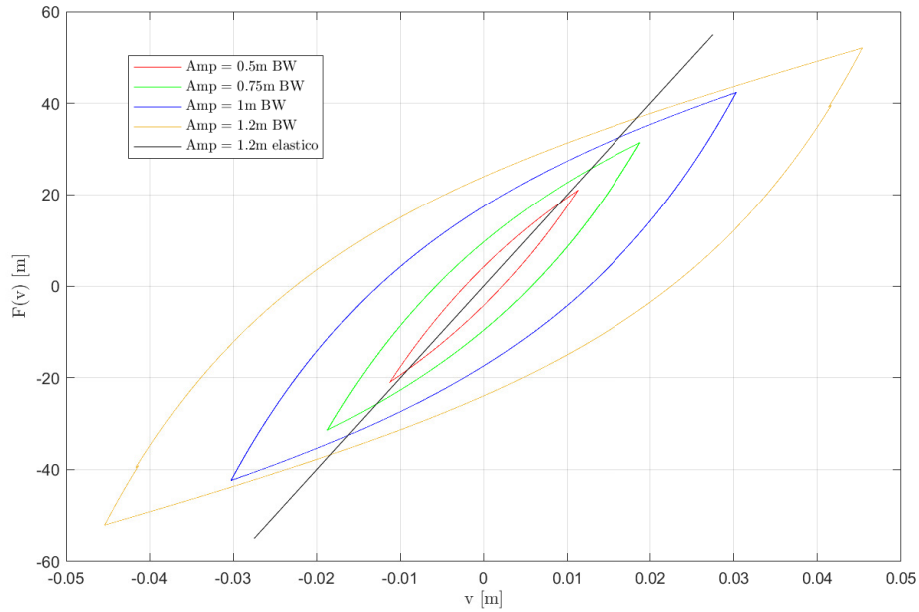


Figura 3.26: Risposta del sistema nel sotto intervallo temporale (10,20)s a un moto armonico traslazionale con frequenza $f = 1$ Hz imposto alla pinza di supporto, con riferimento a diversi valori di ampiezza w_{c0} .

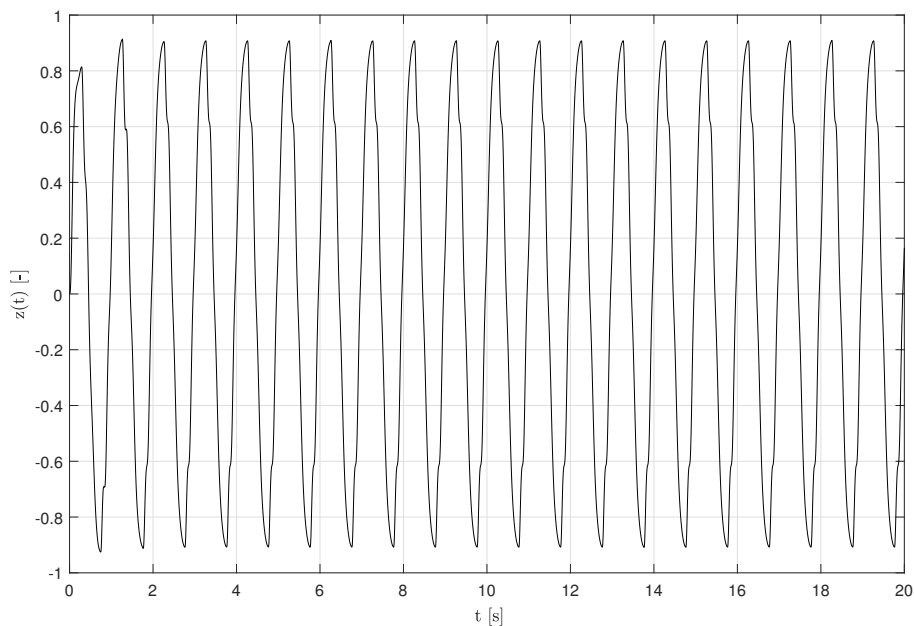


Figura 3.27: Andamento temporale della variabile isteretica con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.

da cicli con pendenza costante e pari a k_{min} . Si noti inoltre come la simmetria rispetto all'origine del piano di cui godono tutti i cicli è da attribuirsi esclusivamente al particolare input fornito al sistema. Il principale aspetto che vale la pena sottolineare consiste nel fatto che, a frequenza fissata e variando l'ampiezza del moto imposto, i cicli ottenuti non

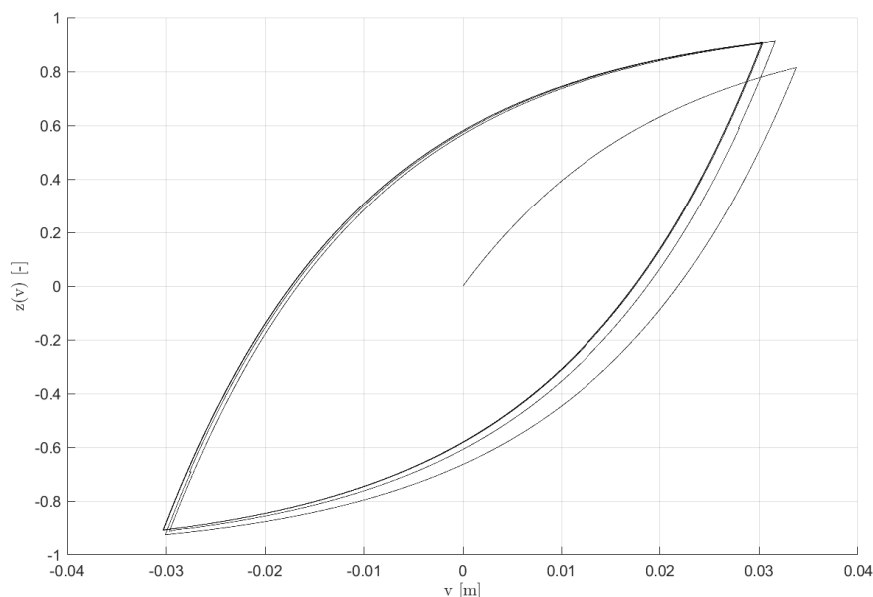


Figura 3.28: Variazione della variabile isteretica in funzione della posizione della massa con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.

presentano la medesima forma; infatti, dall'espansione o contrazione omotetica di uno di essi non è possibile ricavare nessuno degli altri. Dal momento che l'area racchiusa dai cicli rappresenta un indicatore della quantità di energia dissipata istereticamente, è immediato concludere come il livello di dissipazione risulti strettamente legato all'ampiezza della sollecitazione; in particolare, il medesimo sistema dissipa una maggiore quantità di energia in corrispondenza di eccitazioni ad ampiezza maggiore. D'altra parte, nel caso di un sistema lineare, al variare dell'ampiezza dell'eccitazione, le risposte nel piano $F - v$ assumono un andamento rettilineo di eguale pendenza e, pertanto, la dissipazione isteretica risulta correttamente nulla. La proprietà appena esposta, con riferimento al carattere dissipativo dei cicli, che costituisce un'ulteriore conferma della non-linearità del modello di Bouc-Wen, è ben riconoscibile facendo riferimento alla rappresentazione della funzione di impedenza \tilde{Z}_d o della funzione di risposta in frequenza \tilde{H} del sistema, come verrà esposto nel paragrafo seguente; nel caso elastico, esse risultano invece delle proprietà invarianti per quest'ultimo. Si riproduca ora un test analogo a quello appena effettuato incrementando la frequenza del moto imposto da $f = 1$ Hz a $f = 2$ Hz. Riportando la risposta del sistema ancora una volta nel piano forza-spostamento, si ottengono i risultati mostrati in Fig.3.29, dove si evidenzia come, al raggiungimento della saturazione del processo di isteresi, la pendenza dei cicli si attesta sul valore costante di k_{min} ; tale proprietà è riscontrabile anche in Fig.3.30 e 3.31, dalle quali si evince come l'eccitazione in esame conduca ad avere la condizione $|z| = 1$, a differenza di quanto riscontrato nel caso precedente. Anche in questo caso, si denota la dipendenza della risposta del sistema dall'entità dell'ampiezza della sollecitazione, fenomeno tipico di tali sistemi dissipativi, in quanto le curve ottenute non presentano nuovamente alcuna corrispondenza omotetica e l'area da loro sottesa risulta differente.

Da Fig.3.26 e 3.29, è possibile evidenziare un altro aspetto tipico della modellazione isteretica di Bouc-Wen; considerando infatti la rigidità secante del sistema in corrispondenza del massimo spostamento della massa, la quale si identifica graficamente con la pendenza della retta passante per l'origine e il vertice dei cicli a regime, si denota come essa diminuisca all'aumentare dell'ampiezza della sollecitazione.

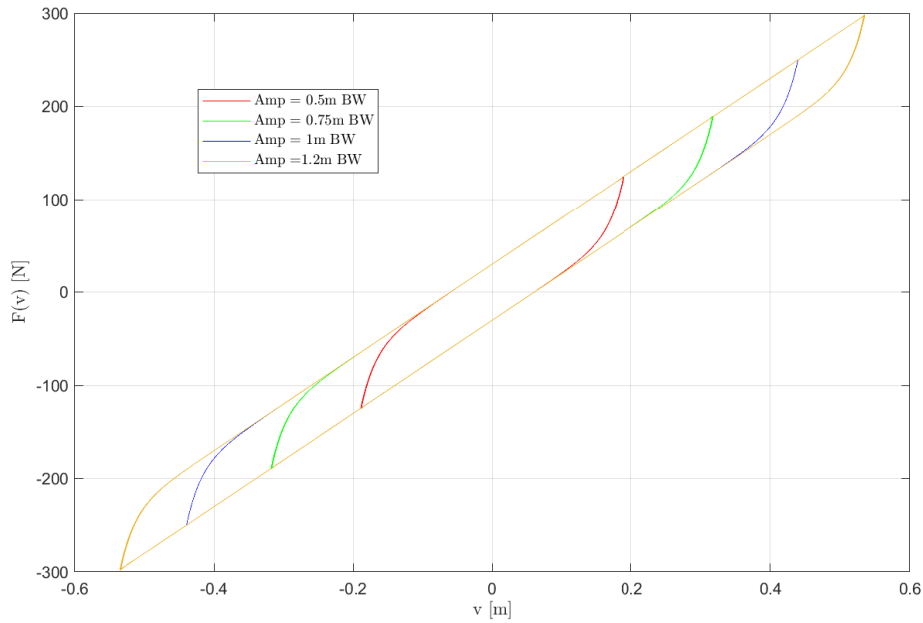


Figura 3.29: Risposta del sistema nel sotto intervallo temporale (10,20)s a un moto armonico traslazionale con frequenza $f = 2$ Hz imposto alla pinza di supporto, con riferimento a diversi valori di ampiezza w_{c0} .

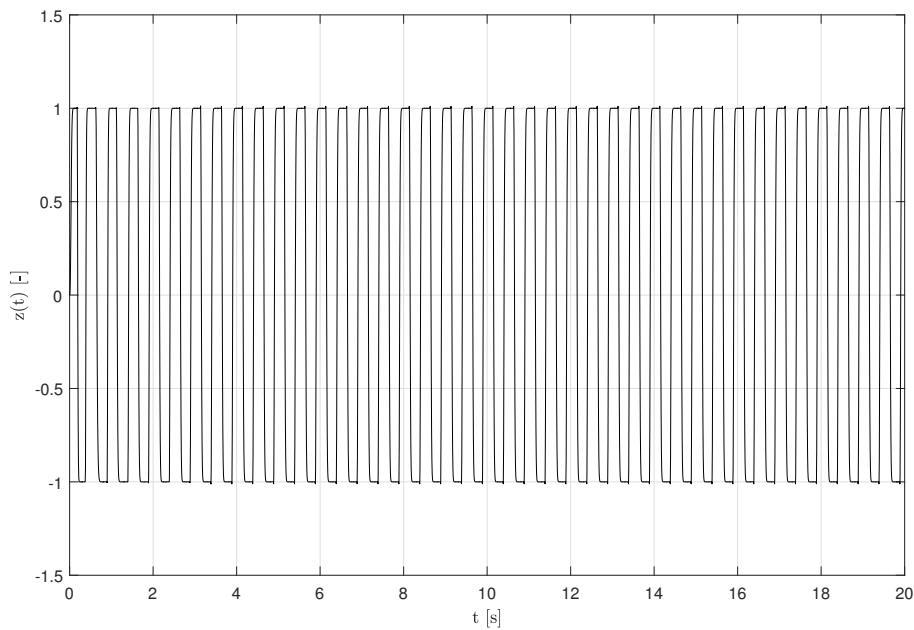


Figura 3.30: Andamento temporale della variabile isteretica con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.

Riassumendo, test armonici come quelli appena descritti permettono di rimarcare come il modello di Bouc-Wen consenta di cogliere la dipendenza della risposta dissipativa del sistema dall'ampiezza della sollecitazione applicata, a conferma di quanto osservato sperimentalmente circa il comportamento dei cavi messaggeri.

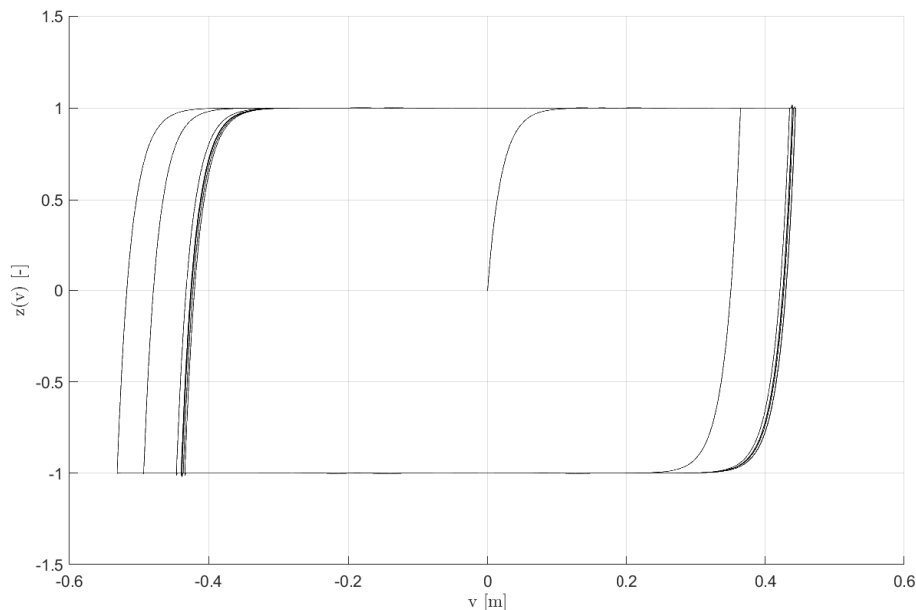


Figura 3.31: Variazione della variabile isteretica in funzione della posizione della massa con riferimento al caso $w_{c0} = 1$ m.

3.4 Caratterizzazione del sistema dinamico: il calcolo delle funzioni di trasferimento

In tale sede, a valle delle validazioni e delle analisi effettuate nei paragrafi precedenti, è possibile estendere la trattazione al caso di forzanti agenti sul sistema con un ampio spettro di frequenze (forzanti multiarmoniche, *broad-band input*); tale operazione riveste un'importanza primaria nel presente elaborato in quanto consente non solo di cogliere le caratteristiche del sistema sotto l'effetto di input in grado di simulare il reale stato di sollecitazione del dissipatore in opera, ma anche di comprendere l'adeguatezza o meno della tecnica di modellazione impiegata e, eventualmente, di tararne i parametri mediante una procedura più robusta rispetto al caso di eccitazione armonica. Al fine di condurre questi tipi di analisi, risulta conveniente definire opportuni strumenti numerici propedeutici definiti nel campo complesso e operanti nel dominio delle frequenze, comunemente noti come "funzioni di trasferimento, \tilde{H} " (*transfer functions*), che permettono di relazionare in maniera diretta l'input al corrispondente output. Nello specifico, supposte note le caratteristiche dell'input agente sul sistema si presentano tipicamente due scenari differenti. In un caso, qualora siano compiutamente caratterizzate le proprietà del sistema meccanico in esame (i.e. \tilde{H} nota), è possibile determinare univocamente l'output mediante la 3.39; alternativamente, in caso di output noto, è possibile caratterizzare il sistema calcolando l'espressione della funzione di trasferimento \tilde{H} secondo la 3.40

$$OUTPUT = \tilde{H} \times INPUT \quad (3.39)$$

$$\tilde{H} = \frac{OUTPUT}{INPUT} \quad (3.40)$$

Vale la pena sottolineare come, per gli scopi prefissati, verrà intrapresa questa seconda possibilità, seppure indirettamente, mediante un metodo "*trial and error*"; infatti, nota

la storia temporale delle sollecitazioni agenti, è possibile determinare numericamente la risposta del sistema in funzione di un set ipotizzato di parametri governanti il modello. Successivamente, mediante passaggio nel dominio delle frequenze e conseguente calcolo numerico di un'opportuna funzione di trasferimento, quest'ultima dovrà essere confrontata con la sua controparte sperimentale, in modo da condurre un'operazione di taratura o validazione dei parametri stessi. Tra le varie funzioni di trasferimento verrà spesso impiegata nel seguito la cosiddetta "funzione di impedenza" \tilde{Z}_d (*impedance function*), definita, nel caso in esame, come il rapporto tra la trasformata di Fourier \tilde{F}_d della forza di interazione dissipatore-conduttore e la trasformata \tilde{w}_c della velocità di traslazione rigida della pinza (si veda equazione 3.41). In accordo con le considerazioni effettuate al Par.3.3.2 e secondo quanto verrà ampiamente discusso in seguito, tali funzioni di trasferimento risultano essere dipendenti sia dall'ampiezza che dalla frequenza di eccitazione nel caso generico di sistema non-lineare, mentre solo da quest'ultima restringendo l'analisi al campo di sistemi lineari.

$$\tilde{Z}_d(w_{c0}, \omega) = \frac{\tilde{F}_d(w_{c0}, \omega)}{\tilde{w}_c(w_{c0}, \omega)} \quad (3.41)$$

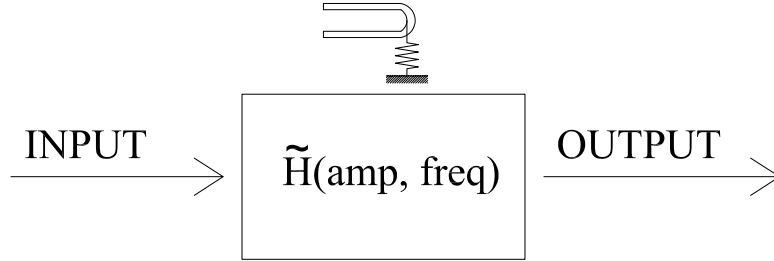


Figura 3.32: Schema di funzionamento input-output a scatola nera per un generico sistema meccanico.

Al fine di esplicitare l'espressione della funzione di trasferimento, qualora essa sia definita in funzione della forza F_d , come nel caso 3.41, risulta necessario calcolare la forza alla pinza secondo la procedura descritta al Par.2.1.2, specializzata al caso in cui il comportamento dissipativo del cavo messaggero sia riprodotto mediante la legge discreta ad un grado di libertà di Bouc-Wen; il sistema di equazioni risolvienti il problema (dissipatore Stockbridge simmetrico in assenza di rotazione alla pinza) è quello descritto nella 3.42.

$$\begin{aligned} F(t) &= k_{\min}v(t) + (k_{\max} - k_{\min})v_0z(t) \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{v_0} \left(\dot{v}(t) - \sigma |\dot{v}(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1)\dot{v}(t) |z(t)|^n \right) \\ m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + F(t) &= q(t) \\ F_d &= (2m + m_c)\ddot{w}_c(t) + 2m\ddot{v}(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

dove le funzioni $z(t)$, $v(t)$, $F(t)$ e $F_d(t)$ risultano incognite e devono essere determinate numericamente. In particolare, la quarta equazione in 3.42, per il calcolo della forza alla pinza, risulta disaccoppiata rispetto alle altre e può essere risolta in fase di *post-processing*.

3.4.1 Test di sweep in frequenza: caratteristiche e impieghi

Le considerazioni appena effettuate permettono di simulare numericamente in maniera efficiente una tipologia di test frequentemente utilizzata per caratterizzare il comportamento dinamico dei dissipatori Stockbridge, ossia quella che comunemente si identifica con il nome di "sweep test in frequenza". Tale prova consiste nell'imposizione di un moto alla base del dispositivo (pinza) per mezzo di un supporto vibrante (*shaker*), a cui esso è rigidamente vincolato, in grado di riprodurre una storia di oscillazione a frequenza variabile nel tempo; in tale modo diviene possibile, a differenza di un test armonico, esaminare la risposta del sistema al variare della frequenza di sollecitazione. Più nel dettaglio, è possibile attuare diverse tipologie di prove a controllo cinematico, tra cui si citano il test di sweep ad ampiezza di velocità costante e quello ad ampiezza di spostamento costante. Nel presente elaborato di tesi tali prove sperimentali verranno sfruttate per calibrare i parametri del modello numerico di Bouc-Wen ai fini di riprodurre la reale risposta del sistema. Si sottolinea come, sebbene questa operazione di taratura risulti più complicata rispetto al caso di test quasi-statico o con moto imposto di carattere armonico, essa consenta in definitiva di simulare il comportamento del dispositivo su un più ampio spettro di frequenze e quindi di ottenerne una completa caratterizzazione per vari regimi di funzionamento. Inoltre, stante la dipendenza della risposta dall'ampiezza della sollecitazione oltre che dalla sua frequenza, in generale la corrispondenza tra i dati sperimentali e quelli numerici risulta ancora più ardua nel caso si impieghi un test di sweep ad ampiezza di velocità costante in quanto, durante questa prova, l'ampiezza del moto imposto alla pinza varia continuamente il suo valore. Tuttavia, l'eventuale ottenimento di un buon grado di corrispondenza in quest'ultimo caso renderebbe ottimale l'efficacia del modello.

Test di sweep ad ampiezza di velocità costante

Nel caso di test di sweep ad ampiezza di velocità costante, il segnale che simula il cedimento traslazionale della pinza di supporto è definito a partire dall'andamento temporale della velocità del supporto stesso in 3.43.

$$\dot{w}_c(t) = f_{corr}\dot{w}_{c0} \sin(2\pi ft) \quad (3.43)$$

con

$$f = f(t) = f_0 + \frac{\Delta f}{\Delta t} t \quad (3.44)$$

dove f_0 rappresenta la frequenza iniziale del test, Δf il range di frequenze spazzato e $\Delta t = t_f - t_0$ la durata del test (t_0 può essere convenzionalmente posto pari a 0 s). La funzione correttiva f_{corr} può essere definita come in 3.45 ed è necessaria per la generazione di una rampa lineare attraverso la quale la velocità della pinza passa dallo stato di quiete all'ampiezza di regime in un arco temporale pari a t_i ; tale accortezza consente da un lato di simulare in maniera piuttosto fedele il transitorio esibito all'avvio della prova e dall'altro di regolarizzare il segnale che verrà successivamente sottoposto a operazioni di integrazione e derivazione numeriche.

$$f_{corr} = \begin{cases} \frac{t}{t_i}, & \text{se } t \in [t_0, t_i] \\ 1, & \text{se } t \in [t_i, t_f] \end{cases} \quad (3.45)$$

Una volta definita la storia temporale della velocità imposta allo shaker di supporto durante il test, che simula il moto della pinza rigida in condizioni di operatività, è immediato

ottenere l'espressione analitica in 3.46 dell'accelerazione del vincolo, supponendo per semplicità di esaminare il sotto intervallo temporale $[t_i, t_f]$, ossia in altre parole ponendosi al di fuori del regime transitorio iniziale ($f_{corr} = 1$).

$$\ddot{w}_c(t) = \dot{w}_{c0} 2\pi \left(f_0 + 2 \frac{\Delta f}{\Delta t} t \right) \cos(2\pi f t) \quad (3.46)$$

In aggiunta, si noti inoltre come, se si trascurasse la dipendenza della frequenza f dalla variabile temporale, l'accelerazione alla pinza sarebbe data semplicemente dalla 3.47.

$$\ddot{w}_c^*(t) = \dot{w}_{c0} 2\pi f \cos(2\pi f t) \quad (3.47)$$

Eseguendo il rapporto tra la 3.46 e la 3.47, si ottiene:

$$r(t) = \frac{f_0 + 2 \frac{\Delta f}{\Delta t} t}{f_0 + \frac{\Delta f}{\Delta t} t} = \frac{f_0 + 2 \frac{\Delta f}{\Delta t} t}{f} \quad (3.48)$$

Da cui:

$$\ddot{w}_c(t) = \dot{w}_{c0} 2\pi r(t) f \cos(2\pi f t) \quad (3.49)$$

La variabile $r(t)$ può essere considerata come un fattore di correzione variabile nel tempo da applicare alla frequenza f in modo che, ai fini delle operazioni di derivazione e integrazione, la dipendenza di quest'ultima dal tempo possa essere trascurata, così da trattarla come una quantità costante, pur essendo essa variabile linearmente. Seppure in principio, la funzione $r(t)$ sia sensibile alle operazioni di derivazione e integrazione sopra citate, se le si attribuisse un valore costante (i.e. $r(t) = \text{cost.} = \bar{r}$) per tutta la durata del test (la bontà di tale assunzione verrà mostrata in seguito con riferimento a un esempio numerico), allora la 3.49 potrebbe essere riscritta come:

$$\ddot{w}_c(t) = \dot{w}_{c0} 2\pi \bar{r} f \cos(2\pi f t) \quad (3.50)$$

Coerentemente con le assunzioni adottate, integrando due volte l'espressione 3.50 per ottenere l'andamento temporale della traslazione imposta al vincolo, si ha in definitiva la 3.51.

$$w_c(t) = -\frac{\dot{w}_{c0}}{2\pi \bar{r} f} \cos(2\pi f t) \quad (3.51)$$

Riassumendo, le espressioni analitiche che forniscono rispettivamente gli andamenti temporali dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione del supporto sono espresse nella 3.52, dove si è reintrodotta la funzione f_{corr} , pur consci dell'approssimazione, dal momento che le derivazioni precedenti sono state ottenute in condizioni di regime e dunque per un valore unitario di tale fattore.

$$\begin{aligned} w_c(t) &= -\frac{f_{corr} \dot{w}_{c0}}{2\pi \bar{r} f} \cos(2\pi f t) \\ \dot{w}_c(t) &= f_{corr} \dot{w}_{c0} \sin(2\pi f t) \\ \ddot{w}_c(t) &= f_{corr} \dot{w}_{c0} 2\pi \bar{r} f \cos(2\pi f t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

A titolo esemplificativo, si consideri un test caratterizzato da un'ampiezza a regime $\dot{w}_{c0} = 1$ m/s, una frequenza iniziale $f_0 = 10^{-2}$ Hz, un range di frequenze spazzato $\Delta f = 2$ Hz, una durata complessiva del test $\Delta t = t_f - t_0 = 40$ s e un transitorio che si estende fino all'istante

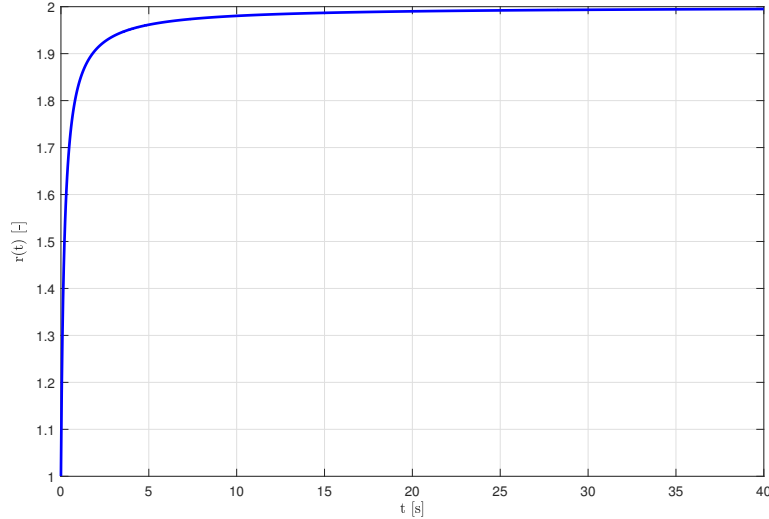


Figura 3.33: Andamento temporale del fattore correttivo $r(t)$ nello specifico caso numerico considerato.

$t_i = 5$ s. Tale set di dati, sostituito all'interno della relazione 3.48, fornisce l'andamento temporale del fattore correttivo $r(t)$ mostrato in Fig.3.33.

Come si può osservare, escludendo il sotto intervallo temporale $[t_0, t_i]$, privo di interesse pratico in quanto funzionale solo per un corretto raggiungimento della condizione di regime, per i restanti istanti di tempo la variabile $r(t)$ risulta compresa nel range $[1.962, 1.995]$ e dunque pressoché costante; pertanto, è ragionevole in tale circostanza porre $r(t) = \bar{r} = 1.98$. È quindi provata la validità della trattazione approssimata esposta in precedenza, così che le espressioni della 3.52 permettano di descrivere piuttosto fedelmente la storia temporale dell'input assegnato. Nel dettaglio, tali funzioni così ricavate sono rappresentate in Fig.3.34

Test di sweep ad ampiezza di spostamento costante

La seconda tipologia di test di sweep analizzata in questa sede consiste nelle prove ad ampiezza di spostamento costante; tali prove sono caratterizzate da una cinematica imposta al supporto mediante la legge 3.53.

$$w_c(t) = f_{corr} w_{c0} \sin(2\pi f t) \quad (3.53)$$

con f ed f_{corr} definite come nelle 3.44 e 3.45. Anche in questo secondo caso, è conveniente ai fini computazionali seguire la procedura approssimata esposta precedentemente, basata sulla definizione della variabile correttiva della frequenza $r(t)$; tuttavia, non è necessaria in questo caso alcuna operazione di integrazione, ma solamente eseguire una doppia derivazione dell'espressione 3.53 dello spostamento imposto alla pinza, così da ottenere rispettivamente l'atto di moto e l'accelerazione del supporto istante per istante, come esplicitato in 3.54.

$$\begin{aligned} \dot{w}_c(t) &= f_{corr} w_{c0} 2\pi \bar{r} f \cos(2\pi f t) \\ \ddot{w}_c(t) &= -f_{corr} w_{c0} (2\pi \bar{r} f)^2 \sin(2\pi f t) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Considerando nuovamente il set di parametri utilizzato per il test di sweep ad ampiezza di velocità costante, il fattore correttivo $r(t)$, definito in questa circostanza come $r(t) = \frac{\dot{w}_c(t)}{\dot{w}_c^*(t)}$,

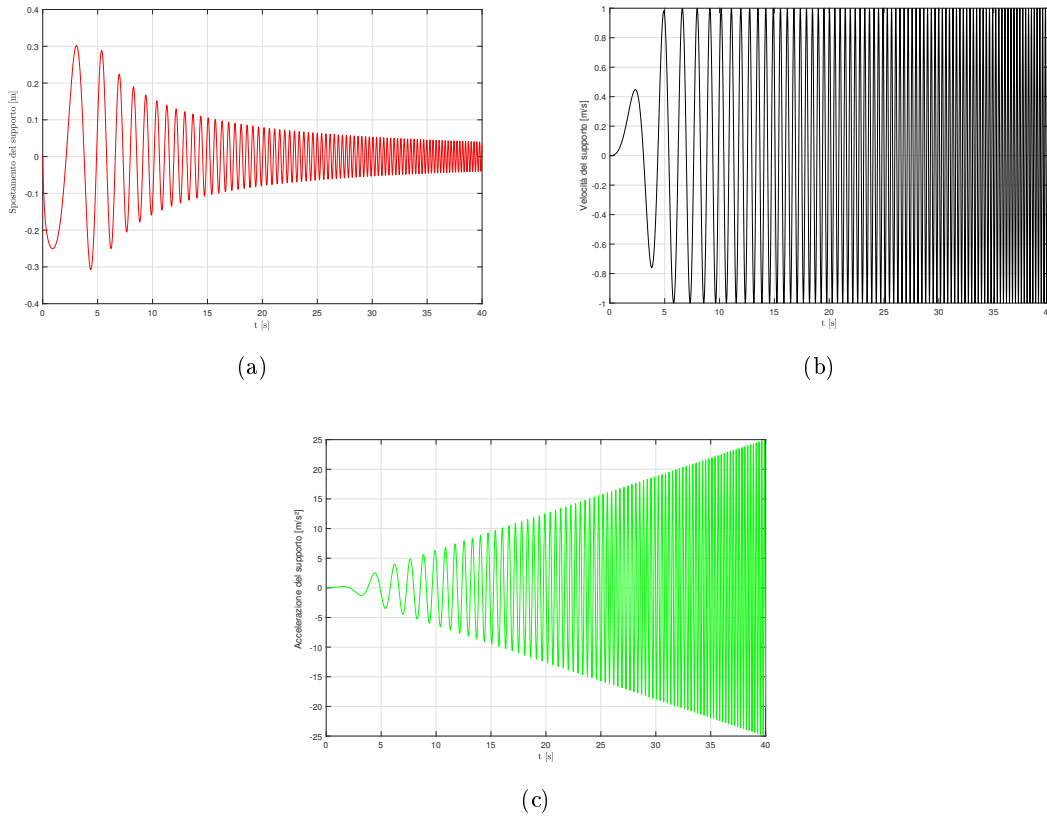


Figura 3.34: (a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$

risulta essere il medesimo del precedente, mostrato in Fig.3.33. Infine, si riportano in Fig.3.35 le storie temporali ottenute, descrittive della cinematica del supporto.

3.4.2 Riproduzione test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità costante

Sauter [35] effettuò dei test di sweep in frequenza ad ampiezza di velocità costante su un particolare dissipatore Stockbridge simmetrico (dissipatore-2R), al fine di determinarne la funzione di impedenza meccanica, definita come in 3.41; le prove sono state svolte a controllo cinematico, andando ad imporre la velocità dello shaker di supporto e misurando la forza trasmessa a quest'ultimo dal dispositivo. I parametri caratterizzanti lo smorzatore in esame sono quelli già citati in Tab.2.1 e qui brevemente richiamati: massa $m = 0.856$ kg, momento di inerzia baricentrico $I_G = 0.001814$ kgm², eccentricità tra il baricentro della massa e la sezione di attacco della stessa al cavo messaggero $e_G = 0.0325$ m e lunghezza del cavo messaggero $l = 0.1875$ m. Nel dettaglio, si riportano in Fig 3.36 i risultati dei due test, condotti rispettivamente ad un'ampiezza di velocità di 0.20 m/s e 0.05 m/s, con riferimento al piano che relazione il modulo della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d , definito come in 3.55, alla frequenza naturale f di vibrazione.

$$\left| \operatorname{Re}(\tilde{Z}_d) \right| = \left| \frac{\operatorname{Re}(\tilde{F}_d)\operatorname{Re}(\tilde{w}_c) + \operatorname{Im}(\tilde{F}_d)\operatorname{Im}(\tilde{w}_c)}{\operatorname{Re}(\tilde{w}_c)^2 + \operatorname{Im}(\tilde{w}_c)^2} \right| \quad (3.55)$$

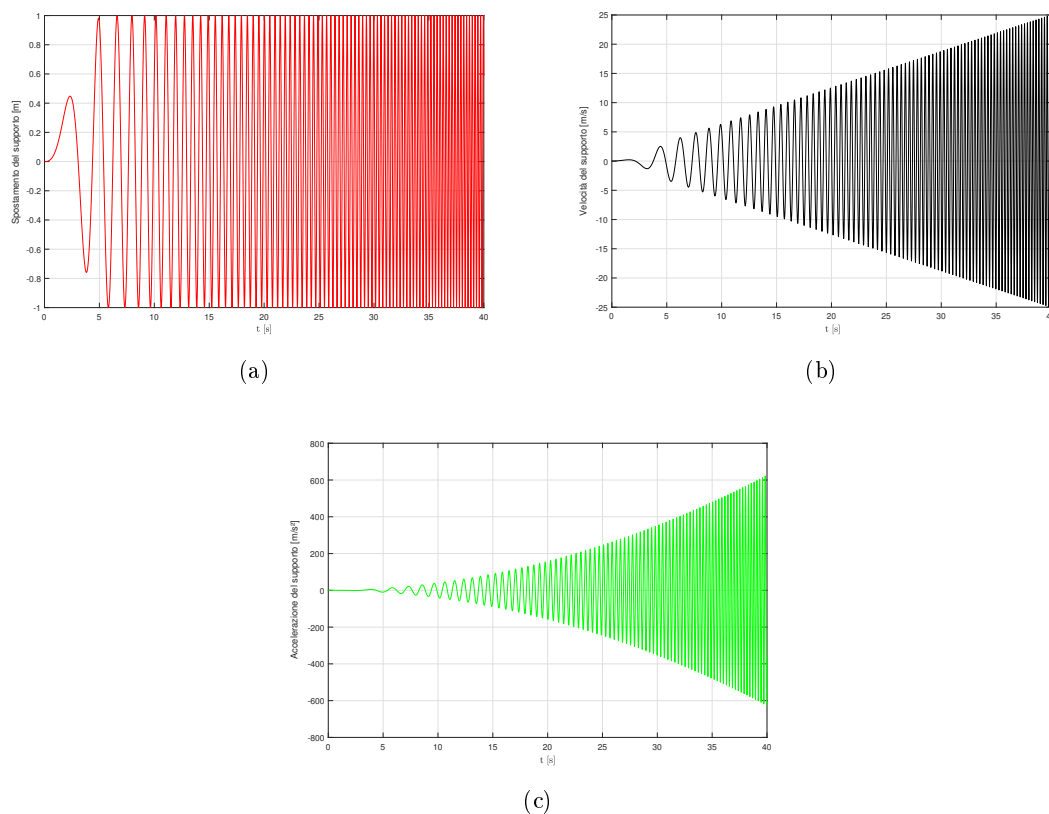


Figura 3.35: (a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$ nel caso di sweep ad ampiezza di spostamento costante; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$ nel caso di sweep ad ampiezza di spostamento costante; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$ nel caso di sweep ad ampiezza di spostamento costante

Si noti come gli esiti dei test mostrati in Fig.3.36 confermino la natura intrinsecamente non-lineare del fenomeno, presente nella variazione del valore delle frequenze di risonanza del dispositivo al variare dell'ampiezza di velocità, nella variazione della forma della curva di impedenza e nella marcata assenza di simmetria delle campane di risonanza; quest'ultimo aspetto risulta presente anche nel caso di oscillatori lineari, sebbene in maniera molto più lieve. I picchi evidenziati nella risposta sono associati ai due gradi di libertà (traslazionale e rotazionale) del sistema: pertanto è possibile concludere che una modellazione a masse concentrate dell'assieme risulta essere perfettamente consona alla descrizione delle sue proprietà dinamiche.

Una volta riportati i risultati sperimentali, è possibile cercare di riprodurre i test effettuati mediante il modello numerico di Bouc-Wen e la sua implementazione nel codice MATLAB. Essendo tale modellazione a un grado di libertà, si focalizzerà per il momento l'attenzione sulla prima risonanza della funzione di impedenza.

Dal punto di vista dell'implementazione, è stata dedicata una sezione del codice al calcolo della risposta del sistema, in termini di funzione di impedenza, a test di sweep ad ampiezza di velocità fissata. Il moto imposto alla pinza è stato fornito in forma vettoriale per mezzo delle espressioni approssimate 3.52, nelle quali un opportuno valore del fattore correttivo della frequenza \bar{r} è stato selezionato, in accordo con le considerazioni seguenti. Si è deciso di operare in modo da considerare i risultati del test a 0.20 m/s per la taratura dei pa-

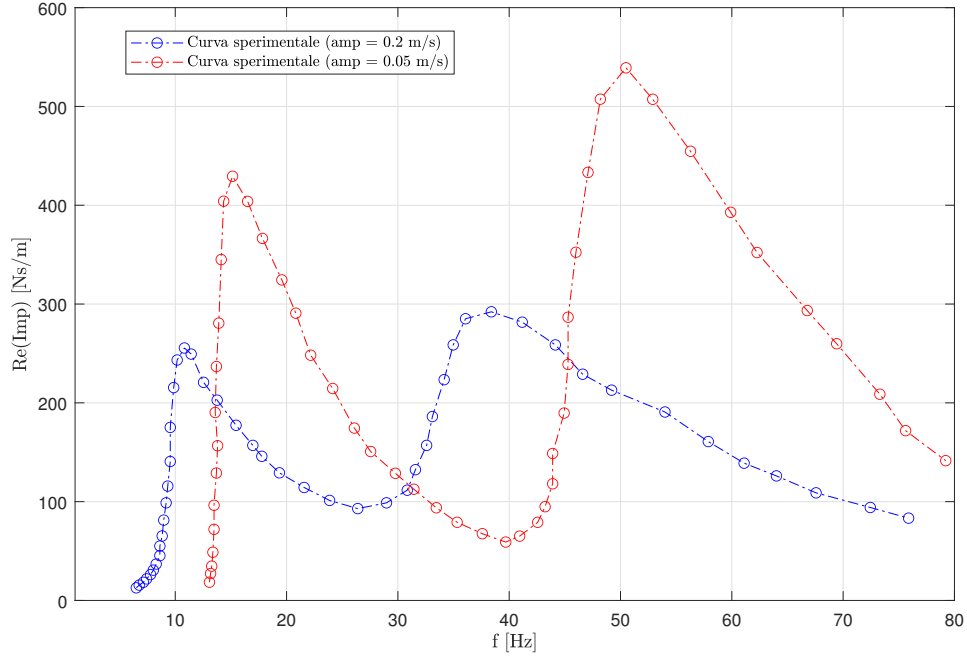


Figura 3.36: Esiti dei test sperimentali di Sauter: modulo della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d (si veda 3.55) [35].

rametri del modello, impiegando invece il test a 0.05 m/s per la validazione della tecnica di modellazione. Quindi, con riferimento alla curva blu di Fig.3.36, dal momento che in tale sede ci si occupa della riproduzione del primo picco, è sufficiente cogliere la risposta sino ad un valore di frequenza intorno a 25 Hz; per assicurarsi della stabilità e accuratezza dei risultati numerici nel sotto intervallo di frequenze interessato, nella pratica è sufficiente considerare come dati in ingresso uno sweep lineare di ampiezza $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s, con $f_0 = 1$ Hz e $\Delta f = 50$ Hz, per una durata totale $\Delta t = 100$ s, considerando un transitorio iniziale di durata 10 s. Sulla base di tali parametri è possibile valutare, secondo la 3.48, l'andamento temporale di $r(t)$. Come si evince da Fig.3.37, trascurando il transitorio, in cui la risposta del sistema non assume rilevanza, è lecito porre anche in questo caso $r(t) \simeq \text{cost.} = 1.98$. I vettori di input sono quindi stati calcolati in istanti di tempo appartenenti all'intervallo considerato secondo una griglia di discretizzazione di passo uniforme pari a 10^{-4} s e sono qui riportati in Fig.3.38.

A questo punto, il sistema di equazioni risolvente si identifica con il 3.42 in cui il termine $q(t)$, che compare nell'equazione di equilibrio dinamico, viene specializzato per il caso in esame secondo la 3.56.

$$q(t) = -m\ddot{w}_c(t) = -mf_{corr}\dot{w}_{c0}2\pi\bar{r}f \cos(2\pi ft) \quad (3.56)$$

Per quanto concerne la soluzione numerica del sistema 3.42 all'interno del software, si esegue il consueto cambio di variabile $\dot{v}(t) = u(t)$, così da riscrivere la seconda e la terza equazione nella forma espressa in 3.21; a questo punto diviene possibile eseguire una chiamata alla funzione ODE45, alla quale si forniscono in ingresso le equazioni differenziali al primo ordine appena menzionate, un vettore dei tempi di estremi t_0 e t_f e uniformemente discretizzato con passo Δt , contenente gli istanti di tempo in cui si vuole che venga valutata la risposta ed un vettore di condizioni iniziali circa lo stato del sistema $(z(0), v(0), u(0))$. Noti istante per istante la configurazione, l'atto di moto e l'accelerazione delle masse, così come l'andamento

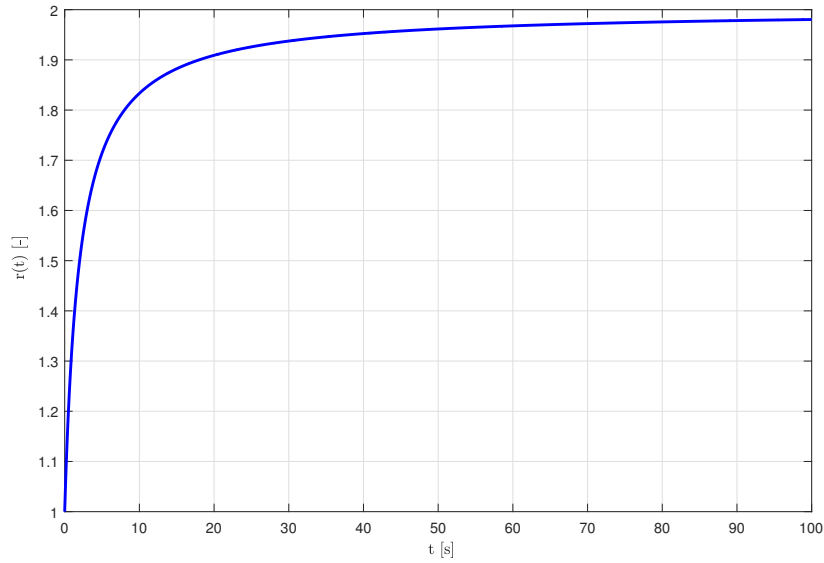


Figura 3.37: Andamento temporale del fattore correttivo $r(t)$ per la riproduzione del test di Sauter a 0.20 m/s.

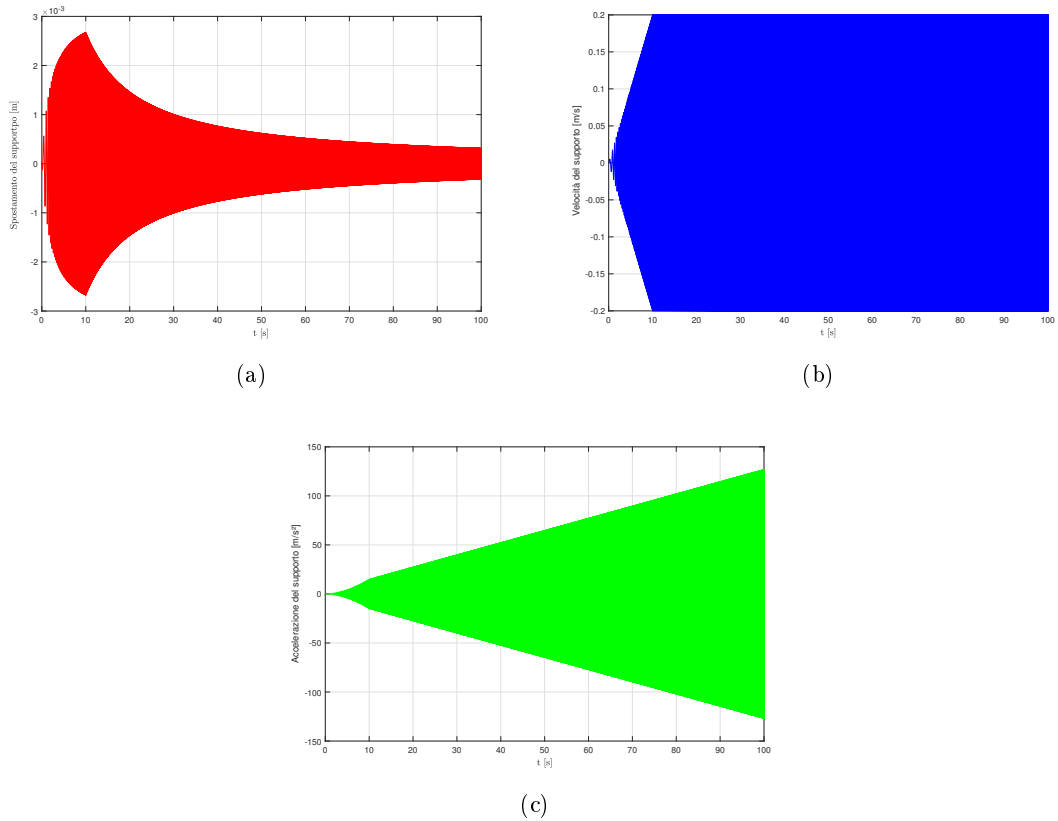


Figura 3.38: (a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$ per $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$ per $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$ per $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s

temporale della variabile isteretica, si può determinare all'occorrenza l'andamento della forza di richiamo $F(t)$ e della forza di interazione pinza-supporto $F_d(t)$ mediante la prima e la quarta equazione di 3.42. A questo punto il calcolo della funzione di impedenza \tilde{Z}_d , espressa nella 3.41, può essere condotto previo passaggio nel dominio delle frequenze, mediante calcolo numerico delle trasformate di Fourier rispettivamente di F_d e della velocità del supporto \dot{w}_c . Infine, il confronto tra dati sperimentali e risultati numerici può essere effettuato calcolando il modulo della parte reale di \tilde{Z}_d ottenuta numericamente come nella 3.55, in funzione della frequenza di vibrazione f .

Procedura manuale di calibrazione dei parametri

Gli strumenti numerici fin qui definiti possono essere impiegati per la riproduzione del test di sweep di Sauter, ad ampiezza di velocità costante e pari a 0.20 m/s, riportato in Fig.3.36. Forniti in ingresso al software la massa m dei corpi inerziali, l'intervallo temporale di analisi $[0, 100]$ s e una sua discretizzazione $\Delta t = 10^{-4}$ s, condizioni iniziali omogenee ($z(0) = 0$, $v(0) = 0$ m, $u(0) = 0$ m/s) e un input vettoriale, ottenuto a partire dal sistema di equazioni in 3.52 ed inserendo i valori sopra elencati, diviene possibile calcolare l'andamento della funzione di impedenza numerica al variare della frequenza: la forma di tale curva sarà compiutamente definita sulla base del set di parametri k_{max} , k_{min} , v_0 , σ , n e ξ governanti la risposta. Si sottolinea come, ai fini del calcolo della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d , il valore m_c della massa della pinza possa essere omesso, in quanto non influisce su di essa; infatti, considerando l'equazione 3.41 e la quarta delle 3.42, si comprende come m_c figuri, nel calcolo della funzione di impedenza, moltiplicata per il rapporto tra la trasformata di Fourier dell'accelerazione della pinza e quella della velocità della stessa. Essendo questi due segnali temporali in quadratura di fase, il rapporto tra le loro trasformate risulta puramente una funzione immaginaria della frequenza e dunque il parametro m_c che lo moltiplica compare esclusivamente nella parte immaginaria di \tilde{Z}_d e non in quella reale.

Scopo finale della trattazione è quello di individuare un set soddisfacente capace di consentire un buon grado di corrispondenza tra la prima campana di risonanza calcolata numericamente e quella sperimentale. Alcune considerazioni effettuate in sede preliminare verranno brevemente esposte. In primo luogo si evidenzia il ruolo del parametro k_{max} che, al pari di quanto accade per sistemi lineari, nei quali all'aumentare della rigidità corrisponde un incremento della frequenza di risonanza, influenza la collocazione e l'ampiezza del picco; fissato un valore per il parametro di rigidità elastica pre-snervamento, i parametri k_{min} e v_0 risultano responsabili del grado di dissipazione isteretica presente nel sistema, così da governare principalmente l'ampiezza e la forma della campana. Al diminuire del valore di entrambi i parametri, si osserva una riduzione dell'entità del picco e un allargamento dei fianchi dello stesso, in accordo con un maggiore smorzamento di natura isteretica. Per quanto concerne i parametri σ e n , eseguendo varie analisi, si è notato come variazioni imposte al loro valore si ripercuotono solo in maniera modesta sull'andamento della curva di impedenza, pur osservandosi una maggiore influenza degli stessi sulla forma dei cicli della variabile isteretica z ; pertanto si è deciso di porli per il momento convenzionalmente pari a 1, in modo da avere un maggior livello di controllo durante la fase di calibrazione manuale. In linea di principio sarebbe possibile introdurre nel sistema un aggiuntivo contributo di smorzamento viscoso, mediante l'imposizione di un valore non nullo del fattore ξ ; tuttavia, anche al fine di testare le potenzialità del contributo dissipativo isteretico, tale parametro è stato posto identicamente nullo.

Sulla base di tali considerazioni ed effettuando svariate analisi tentativo associate a diversi valori dei parametri del modello, si è identificato un set ottimale per cogliere la risposta del sistema in maniera adeguata: esso è riportato in 3.57:

$$k_{max} = 8000 \text{ N/m}, k_{min} = 2000 \text{ N/m}, v_0 = 0.002 \text{ m}, \sigma = 1, n = 1 \quad (3.57)$$

La curva di impedenza associata a tale set, calcolata numericamente mediante la sezione del software dedicata, è quella rappresentata in Fig.3.39 in cui se ne effettua il confronto con la sua controparte sperimentale. Si nota come il modello discreto di Bouc-Wen, a valle di una ragionevole calibrazione dei parametri, sia in grado di riprodurre la collocazione, l'ampiezza e la forma del primo picco, sebbene si perda la corrispondenza tra le curve sul ramo decrescente, a causa del fatto che il modello in esame ad un singolo grado di libertà non sia capace di prevedere la presenza di una seconda zona di risonanza e l'andamento della zona di transizione che ne consegue. È possibile concludere che, dal momento che impiegando unicamente una coordinata libera traslazionale si è riusciti a cogliere in maniera ottimale l'andamento della prima campana di risonanza, tale coordinata libera risulta in grado di descrivere quasi compiutamente il primo modo di vibrare del sistema.

Per completezza, in questa circostanza, nelle Fig.3.40-3.45, si riportano rispettivamente anche i seguenti grafici: l'andamento temporale della coordinata libera considerata $v(t)$, la variazione, sia in funzione del tempo che della coordinata libera, della variabile isteretica z e della forza di richiamo F e l'andamento temporale della forza trasmessa dal dispositivo al supporto $F_d(t)$.

Nel seguito, verranno discussi opportuni strumenti computazionali in grado di quantificare la corrispondenza tra le curve che, fino a tale momento, è stata apprezzata solo su base grafica.

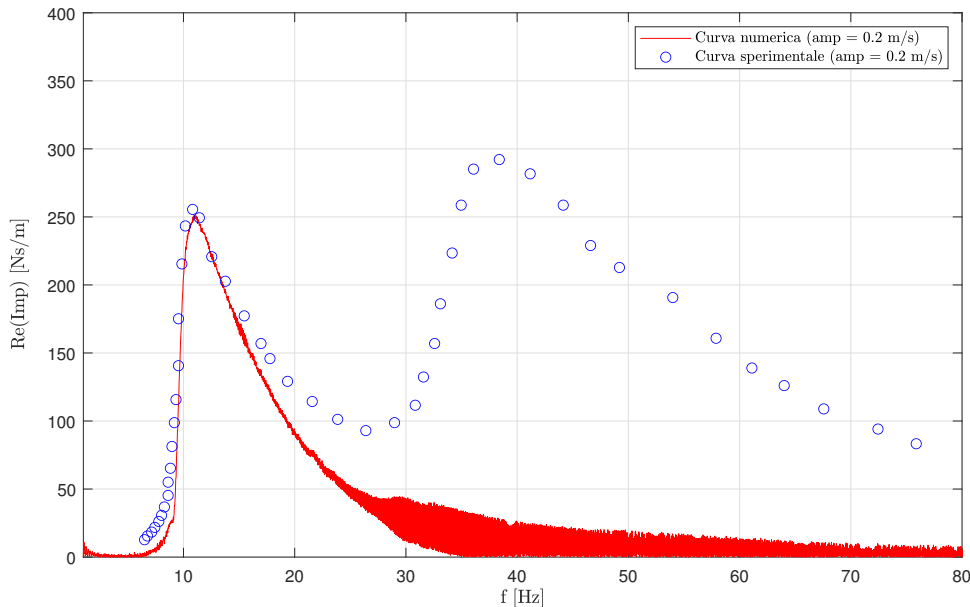


Figura 3.39: Curva di impedenza associata al set di parametri definiti in 3.57.

Funzione obiettivo: definizione e utilità

Il calcolo numerico della curva di impedenza del sistema risulta funzione dello specifico set di parametri del modello $P = \{k_{min}, k_{max}, v_0, \sigma, n\}$ (a cui si aggiunge il fattore ξ in presenza di un eventuale contributo di smorzamento viscoso) e il confronto con i dati sperimentali fornisce le linee guida per un'ottimale taratura degli stessi. Al fine di esprimere

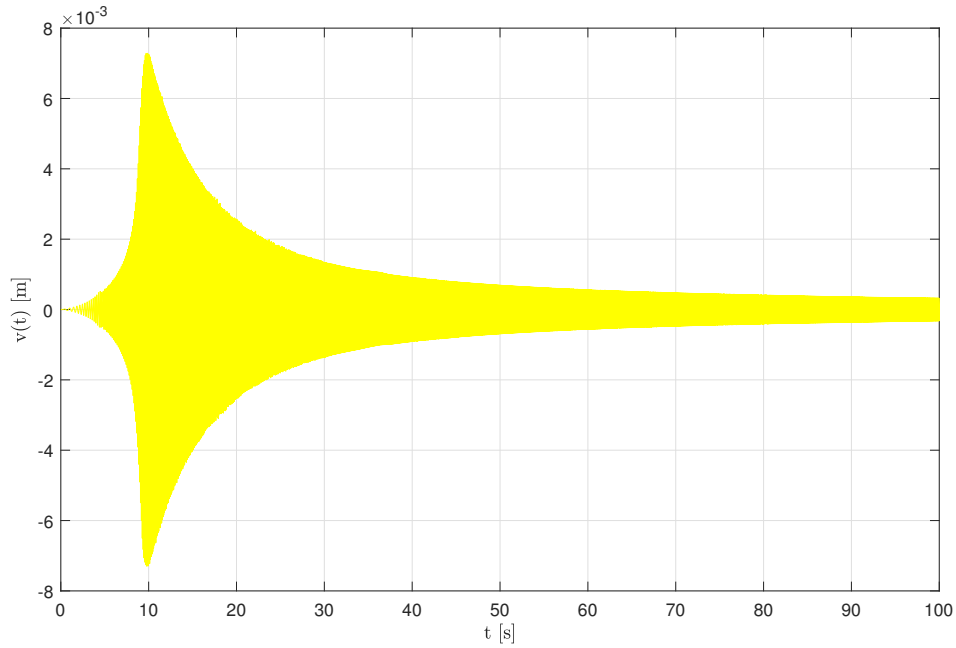


Figura 3.40: Andamento temporale della coordinata libera $v(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.

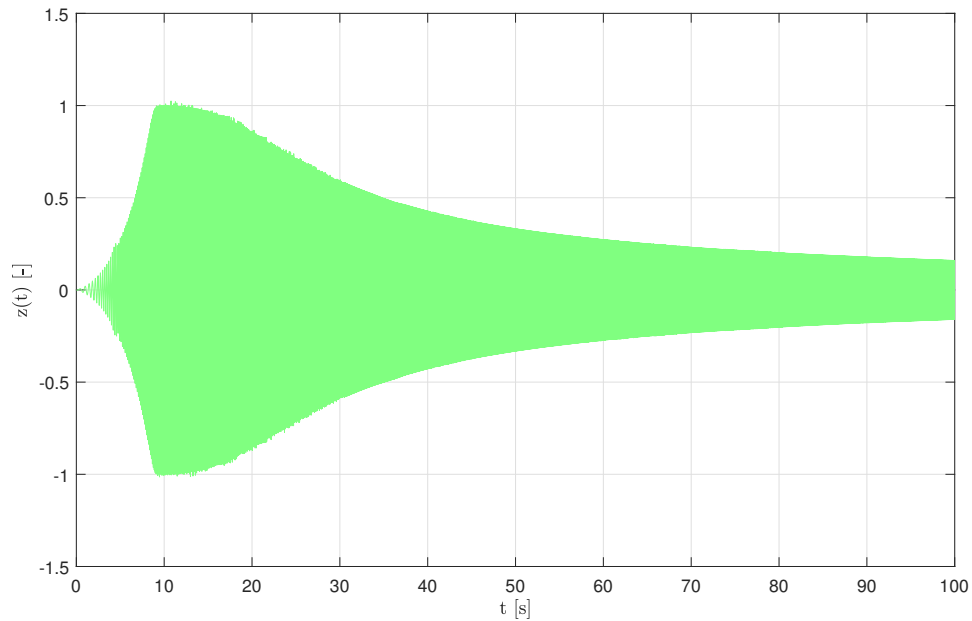


Figura 3.41: Andamento temporale della variabile isteretica $z(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.

in termini oggettivi la discrepanza presente tra gli andamenti della funzione di impedenza numerica e sperimentale, è opportuno munirsi di efficaci strumenti atti a quantificare il grado di corrispondenza tra le due, i quali vengono comunemente definiti come "funzioni obiettivo" o "funzioni costo". Diverse scelte possono essere effettuate per l'introduzione di una valida funzione obiettivo, con l'intento di cogliere tutti quegli aspetti che mag-

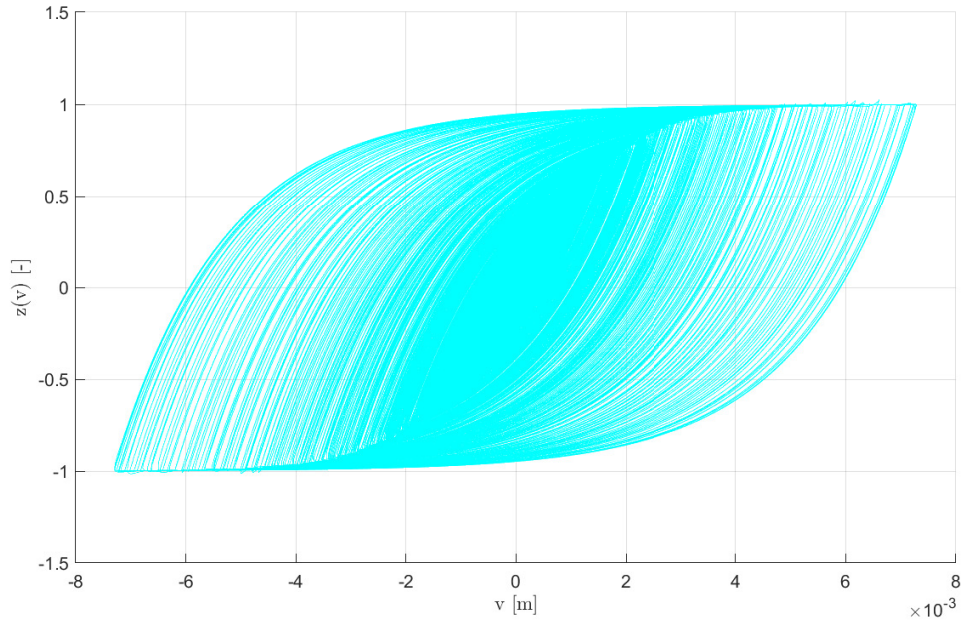


Figura 3.42: Variazione della variabile isteretica z in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.

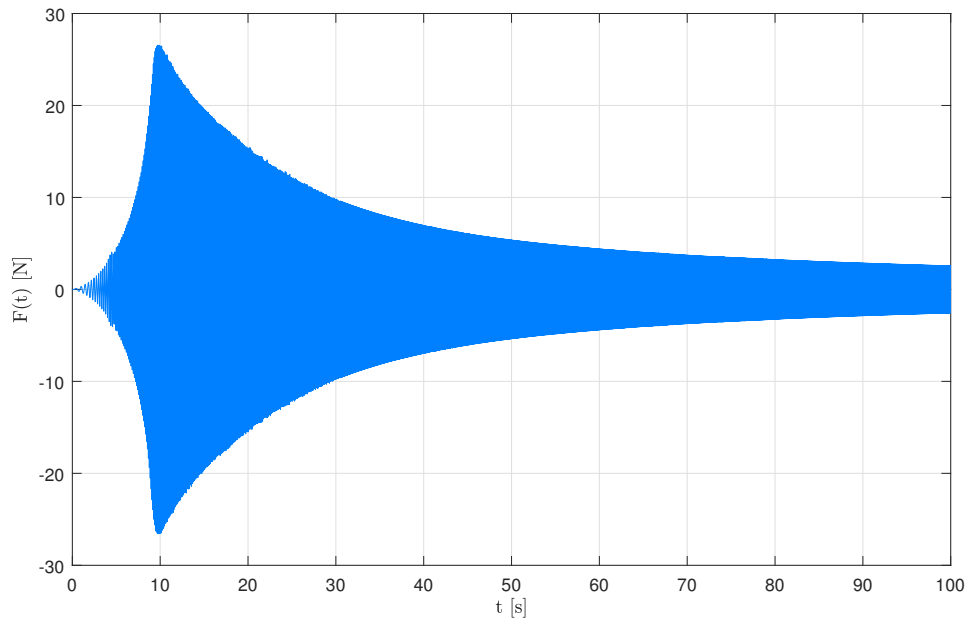


Figura 3.43: Andamento temporale della forza di richiamo $F(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.

giormente caratterizzano e governano la comparazione tra le due curve, i quali, nel caso in esame, sono rappresentati per esempio dalla posizione, dalla forma e dall'ampiezza dei picchi di risonanza, così come dall'andamento della zona di transizione tra i due. D'altra parte, tale funzione non deve risultare troppo complessa e vincolante in quanto si potrebbe incorrere nell'eventualità di non essere in grado di determinare, in accordo con essa, un

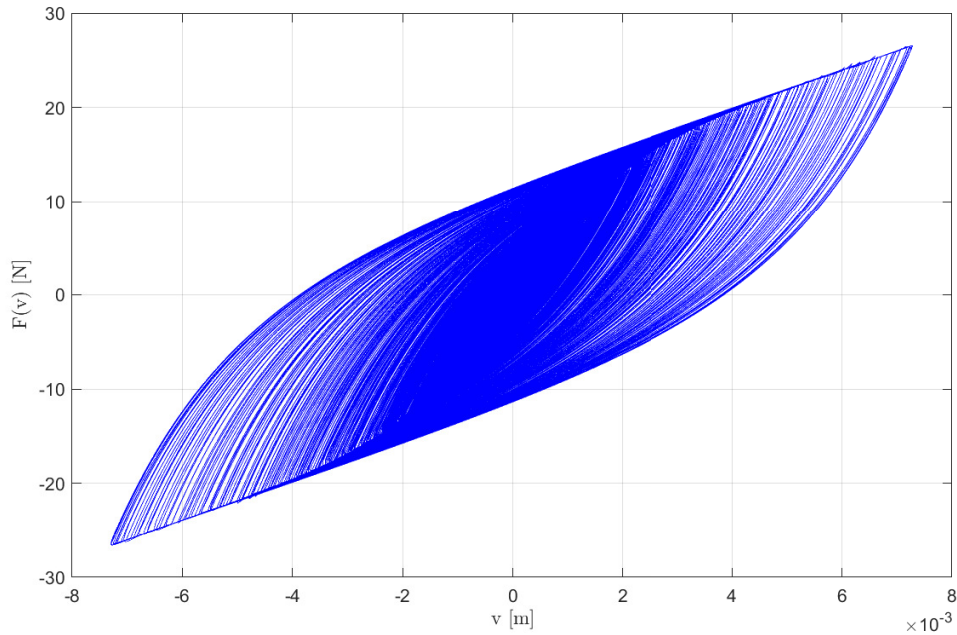


Figura 3.44: Variazione della forza di richiamo F in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.

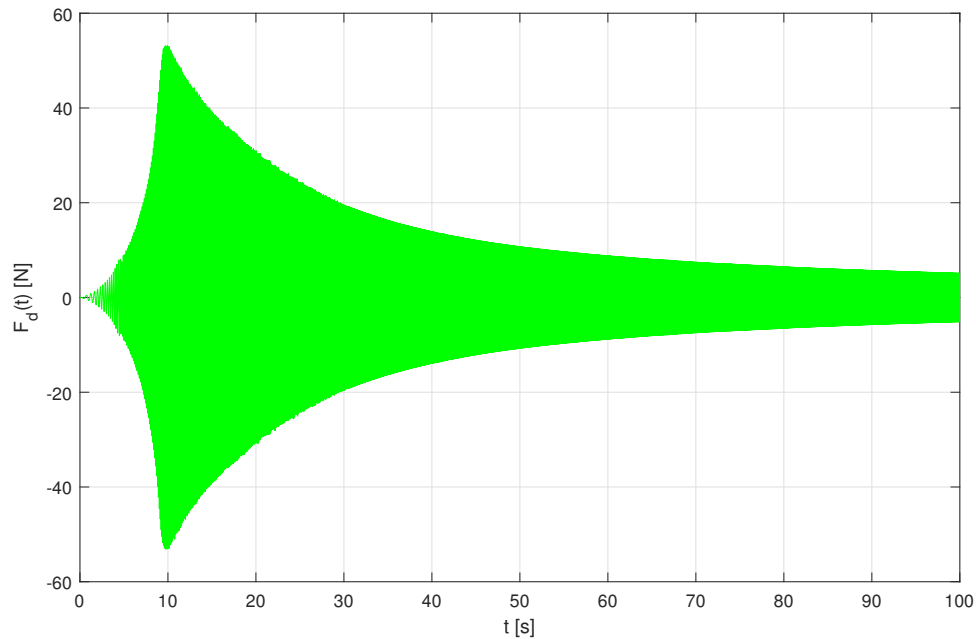


Figura 3.45: Andamento temporale della forza di interazione dispositivo-supporto $F_d(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.57.

set di parametri adeguato, pur essendo presente un buon grado di corrispondenza a livello grafico/qualitativo.

Per quanto concerne la riproduzione dei test di sweep in frequenza, è ragionevole definire una funzione obiettivo a carattere discreto, ossia in grado esplicitare il confronto tra curva

numerica e sperimentale sulla base del valore che esse assumono in corrispondenza di un numero finito di punti (i.e. in corrispondenza di prefissati valori di frequenza); più nel dettaglio, la funzione obiettivo adottata risulta essere del tipo in 3.58.

$$F_{obj} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_p} p_i \left(1 - \frac{\tilde{Z}_{d,i}^{num}}{\tilde{Z}_{d,i}^{exp}}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_p} p_i \left(\frac{\tilde{Z}_{d,i}^{exp} - \tilde{Z}_{d,i}^{num}}{\tilde{Z}_{d,i}^{exp}}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_p} p_i \left(\frac{\Delta \tilde{Z}_{d,i}}{\tilde{Z}_{d,i}^{exp}}\right)^2} \quad (3.58)$$

dove N_p rappresenta il numero di punti di confronto, $p_i \in [0, 1]$ rappresenta il peso associato all' i -esimo punto, mentre $\tilde{Z}_{d,i}^{num}$ e $\tilde{Z}_{d,i}^{exp}$ rappresentano rispettivamente il valore assunti dalla funzione di impedenza numerica e sperimentale in corrispondenza dell' i -esimo punto. Nel caso in cui le due curve assumano lo stesso valore in corrispondenza di tutti i punti di confronto, la funzione obiettivo risulterebbe identicamente nulla e minimizzata, viceversa a valori più elevati della funzione obiettivo sono associati livelli di corrispondenza via via meno adeguati. Si sottolinea come i valori assunti da una F_{obj} come quella indicata in 3.58 non si configurino come indicatori assoluti della bontà della corrispondenza, ma siano influenzati dal numero dei punti di comparazione; in altre parole, per un dato set di parametri, e dunque fissata la curva di impedenza numerica, se si considerano due insiemi di punti di confronto N_{p1} e N_{p2} , con $N_{p1} \subset N_{p2}$, si avrà che $F_{obj,1} \leq F_{obj,2}$.

Nel seguito, si farà impiego della funzione obiettivo, secondo la forma appena definita, in primo luogo per condurre la calibrazione dei parametri e poi, una volta definiti i parametri ottimali, per effettuare la validazione del modello sulla base di differenti test sperimentali. Più nello specifico, per quanto riguarda la fase di taratura, verranno eseguite una serie di analisi parametriche, le quali permettono di ottenere la variazione della funzione obiettivo al variare di uno o più parametri del modello al fine di identificare un range plausibile di variazione degli stessi e, allo stesso tempo, per comprendere la sensibilità del modello nei confronti di ciascun parametro; tali analisi verranno discusse in maniera dettagliata nel seguito. Successivamente, diverrà possibile procedere con l'identificazione di uno o più set di parametri in grado di dare luogo ad un buon livello di corrispondenza tra la curva d'impedenza sperimentale e quella numerica o, in altre parole, associati a valori soddisfacenti della funzione obiettivo stessa: anche questo processo, a cui si farà riferimento con il termine di "ottimizzazione dei parametri", verrà analizzato in maniera esaustiva.

Analisi parametriche a 1 parametro

Secondo quanto discusso finora, si è reso possibile il calcolo della risposta numerica del sistema a uno stato di sollecitazione generato da un moto imposto del supporto del tipo identificato nel sistema di equazioni 3.52 e, conseguentemente, il confronto dei risultati numerici con quelli sperimentali, in termini di variazione con la frequenza di vibrazione della funzione di impedenza \tilde{Z}_d , può essere quantificato mediante la definizione di un'opportuna funzione obiettivo, come quella definita in 3.58. Chiaramente, la capacità del modello di riprodurre più o meno fedelmente la realtà sperimentale dipende dalla scelta dei valori dei parametri impiegati, i quali, come già ripetutamente ribadito, devono essere opportunamente tarati. Al fine di attuare uno schema di taratura efficace, risulta conveniente effettuare un certo numero di analisi parametriche, le quali consistono nel calcolare ripetutamente la risposta del sistema (nel caso presente in termini di funzione di impedenza), soggetto a un input assegnato quale il moto imposto al vincolo durante un test di sweep, per diversi valori di uno o più parametri definiti all'interno di un range di variazione, mantenendo fissi su un valore assegnato i restanti; più nel dettaglio, se si decide di svolgere diverse analisi, ottenute facendo variare solamente un parametro del modello, allora si parlerà di analisi parametriche a 1 parametro. In definitiva, risulta conveniente costruire dei

grafici i quali permettono di rappresentare il valore assunto dalla funzione obiettivo F_{obj} al variare del parametro in esame. Tali analisi parametriche rivestono un ruolo di notevole importanza nel processo di calibrazione dei parametri del modello, in quanto consentono di identificare, coerentemente con i valori assunti dai parametri fissi, il valore da attribuire al parametro variabile al fine di minimizzare la funzione obiettivo e permettono di mettere in luce la sensibilità del modello alla variazione di ciascun parametro, in modo da riconoscere quali siano in grado di influenzare significativamente la risposta e quali no.

Applicativamente, si rivela quindi utile eseguire diverse analisi parametriche a 1 parametro per il processo di taratura dei parametri del modello di Bouc-Wen, sulla base della definizione della funzione di impedenza riferita al test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità pari a 0.20 m/s; a tale scopo, una sezione dedicata, dalla struttura analoga a quella impiegata per il calcolo della risposta del sistema a un test di sweep in velocità a parametri fissati, è stata implementata nel software per il calcolo di molteplici risposte al variare del parametro in esame. Dapprima, si circoscrive l'analisi al caso in cui si voglia riprodurre il comportamento sperimentale del dissipatore Stockbridge, oggetto della prova eseguita da Sauter, mediante una modellazione elastica lineare del dispositivo; a tale fine, si forniscano come dati in ingresso al codice MATLAB, oltre a quelli circa le proprietà del sistema e dell'eccitazione elencati e discussi in precedenza, i seguenti parametri fissi: una soglia di snervamento $v_0 = 10^4$ m, σ ed n unitari e un fattore di smorzamento $\xi = 0.30$. Per quanto concerne il parametro variabile di rigidità, si consideri un vettore \mathbf{k} avente come prima componente il valore $k_0 = k_{min,0} = k_{max,0} = 400$ N/m, come ultima il valore $k_f = k_{min,f} = k_{max,f} = 8000$ N/m e discretizzato con una griglia uniforme di passo $\Delta k = 400$ N/m. Siccome ci si aspetta che un comportamento elastico del sistema porti ad avere una funzione di impedenza caratterizzata da un picco pronunciato e pressoché simmetrico, si è posta l'attenzione sulla corrispondenza di impedenza numerica ed impedenza sperimentale proprio nella zona della risonanza, in quanto altrove ci si aspetta una discrepanza maggiore. In particolare, è stato considerato il seguente insieme di punti di confronto, definito sulla base della curva sperimentale, ciascuno con un relativo peso:

$$C_1 = [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], \text{ con } p_i = 1 \forall i \quad (3.59)$$

Per fare chiarezza, a titolo d'esempio, il numero 15 identifica il quindicesimo punto sperimentale, il numero sedici il sedicesimo e così via fino al ventunesimo; il picco della curva considerata sorge in corrispondenza del diciottesimo punto. Il vettore \mathbf{f}_{C_1} di frequenze sperimentali di confronto associato al set di punti C_1 risulta quello espresso in 3.60

$$\mathbf{f}_{C_1} = [9.55, 9.86, 10.17, 10.82, 11.43, 12.54, 13.77] \text{ Hz} \quad (3.60)$$

Si è pertanto ottenuto il grafico di Fig.3.46, dal quale è possibile osservare un preciso trend della funzione obiettivo al variare del valore di rigidità; nel dettaglio, si nota come in corrispondenza del valore $k = 3600$ N/m, la funzione presenta un punto di minimo. Eseguendo un'analisi a parametri fissi, assumendo tale valore per la rigidità $k = k_{max} = k_{min}$, si ottiene la curva di impedenza rossa mostrata in Fig.3.47 con riferimento a quella sperimentale; il picco risulta in tal caso più contenuto rispetto a quello misurato, indice del fatto che il fattore di smorzamento ξ assunto sia troppo elevato.

A questo punto, analizzata una possibile modellazione lineare del dispositivo, si consideri il caso in cui esso venga caratterizzato mediante la legge isteretica non-lineare di Bouc-Wen, sempre riferendosi al test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità pari a 0.20 m/s. In questa circostanza, i parametri del modello da esaminare saranno k_{max} , k_{min} , v_0 , σ ed n , trascurando il contributo di smorzamento viscoso ξ . Vale la pena sottolineare come il set di parametri, a partire dal quale verrà fatto variare un parametro volta per volta, è rappresentato da quello individuato con la procedura di calibrazione manuale,

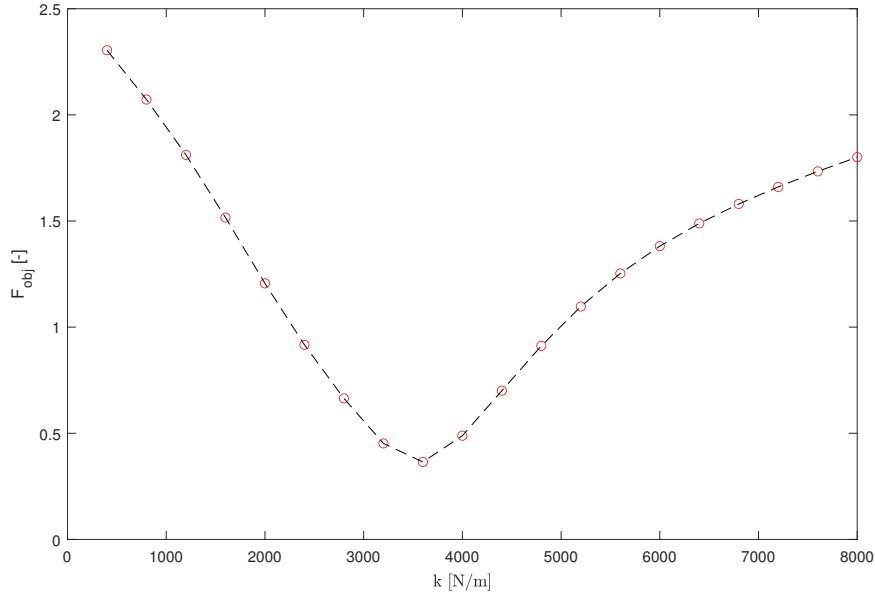


Figura 3.46: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità $k = k_{max} = k_{min}$, con fattore di smorzamento viscoso fissato ($\xi = 0.30$).

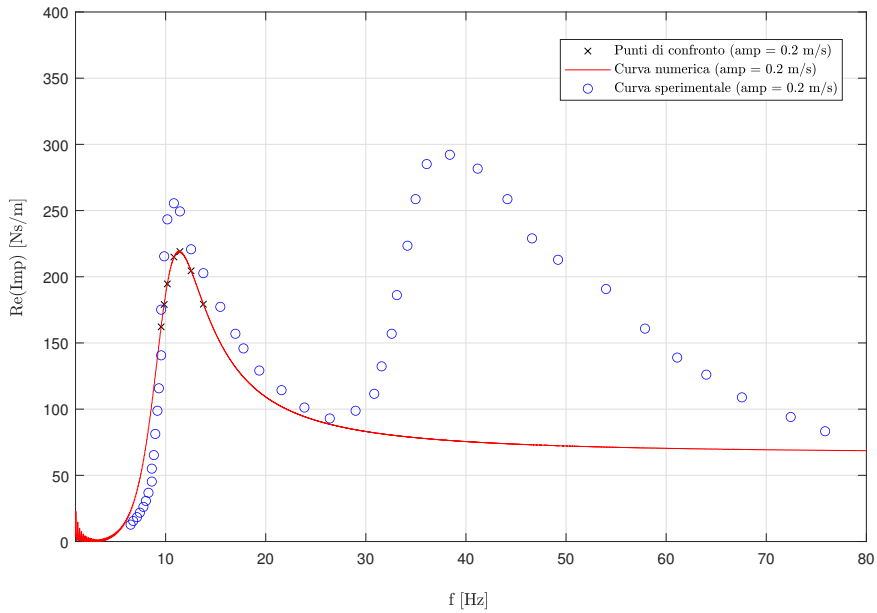


Figura 3.47: Curva di impedenza ricavata fissando $k = k_{max} = k_{min} = 3600$ N/m.

descritta precedentemente. Inoltre, la funzione obiettivo non verrà valutata solamente con riferimento all'insieme di punti di confronto utilizzati nel caso elastico, con i corrispondenti pesi unitari assegnati, ma verranno considerati anche altri due set di punti e relativi pesi. Nel dettaglio si farà quindi riferimento, oltre che a C_1 , agli insiemi di punti di confronto riportati in 3.61 e al corrispondente vettore di frequenze sperimentali di confronto $\mathbf{f}_{C_{2,3}}$ mostrato in 3.62.

$$\begin{aligned}
 C_2 &= [1, 3, 8, 10, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 27], \text{ con } p_i = 1 \forall i \\
 C_3 &= [1, 3, 8, 10, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 27], \\
 &\text{con } p = [0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.2, 0.1, 0.1]
 \end{aligned}
 \tag{3.61}$$

$$\mathbf{f}_{C_{2,3}} = [6.50, 7.14, 8.62, 8.83, 9.55, 9.86, 10.17, 10.82, 11.43, 12.54, 17.78, 19.36, 23.86] \text{ Hz}
 \tag{3.62}$$

Si noti come la scelta di porre $N_{p,C2} = N_{p,C3} > N_{p,C1}$ è stata effettuata in quanto ci si aspetta che, con il modello isteretico di Bouc-Wen, si riesca a cogliere in maniera migliore il carattere complessivo della risposta attorno al primo picco di risonanza. La differenza tra i set C_2 e C_3 consiste nel valore attribuito ai pesi p_i da applicare ai vari termini. Infatti, nel caso dell'insieme di punti C_2 , il valore di ciascun peso è unitario, il che significa che tutti i termini, appartenenti alla sommatoria che definisce la funzione obiettivo in 3.58, contribuiscono in maniera eguale al valore della stessa, indipendentemente dal fatto che un punto di confronto sia più o meno rilevante, ai fini della caratterizzazione della campana; nel caso del set C_3 , invece, sono stati attribuiti differenti valori ai singoli pesi p_i in modo tale da ponderare i singoli contributi (in corrispondenza del picco, dove si cerca un riscontro migliore tra le due curve, tali valori sono assunti unitari; per i punti di confronto lontani da esso, sono stati invece considerati valori molto minori pari a 0.1/0.2).

A questo punto, tramite il codice MATLAB implementato, è possibile eseguire tali analisi parametriche facendo variare volta per volta un singolo parametro governante il modello di Bouc-Wen ed impiegando i differenti set di punti di confronto, sopra definiti; quest'ultima operazione consente, in particolar modo, di valutare come si modifica l'andamento della funzione obiettivo F_{obj} al variare del set di punti e relativi pesi considerati.

Secondo quanto già affermato, il set di parametri di partenza è rappresentato da quello individuato con la procedura di calibrazione manuale e qui nuovamente riportato per maggiore chiarezza: $k_{max} = 8000 \text{ N/m}$, $k_{min} = 2000 \text{ N/m}$, $v_0 = 0.002 \text{ m}$, $\sigma = n = 1$, $\xi = 0$.

In primo luogo, si proceda con l'analisi facendo variare il parametro di rigidità pre-snervamento e si consideri quindi un vettore \mathbf{k}_{max} avente come prima componente il valore $k_{max,0} = 2500 \text{ N/m}$, come ultima il valore $k_{max,f} = 12500 \text{ N/m}$ e discretizzato con un passo uniforme $\Delta k_{max} = 500 \text{ N/m}$. Si riportano di seguito, in Fig.3.48-3.50, gli andamenti della funzione obiettivo al variare del parametro considerato.

Da Fig.3.48 è possibile osservare come, considerando il set C_1 , si denoti anche in questo caso un ben definito andamento della funzione obiettivo, minimizzata in corrispondenza di un valore di $k_{max} = 7500 \text{ N/m}$, prossimo a quello ricavato con la procedura di calibrazione manuale. Contrariamente, impiegando gli insiemi di punti di confronto C_2 e C_3 , lo sviluppo di F_{obj} risulta più oscillante per bassi valori del parametro considerato k_{max} , segnalando la presenza di un minimo locale per un valore di k_{max} leggermente inferiore a 4000 N/m , per poi mostrare un chiaro avvallamento per valori intermedi, con un minimo nel range $[7000, 8000] \text{ N/m}$, in accordo con la calibrazione manuale già menzionata.

Si consideri ora una variazione del parametro di rigidità post-snervamento e quindi un vettore \mathbf{k}_{min} avente come prima componente il valore $k_{min,0} = 0 \text{ N/m}$, come ultima il valore $k_{min,f} = 5000 \text{ N/m}$ e discretizzato con un passo uniforme $\Delta k_{min} = 250 \text{ N/m}$; gli andamenti della funzione obiettivo al variare del valore del parametro considerato e in funzione dei tre set di punti di confronto sono riportati in Fig.3.51-3.53.

Come mostrato in Fig.3.51-3.53, l'andamento della funzione obiettivo è molto simile per i tre differenti insiemi di punti di confronto. È inoltre possibile osservare un comportamento

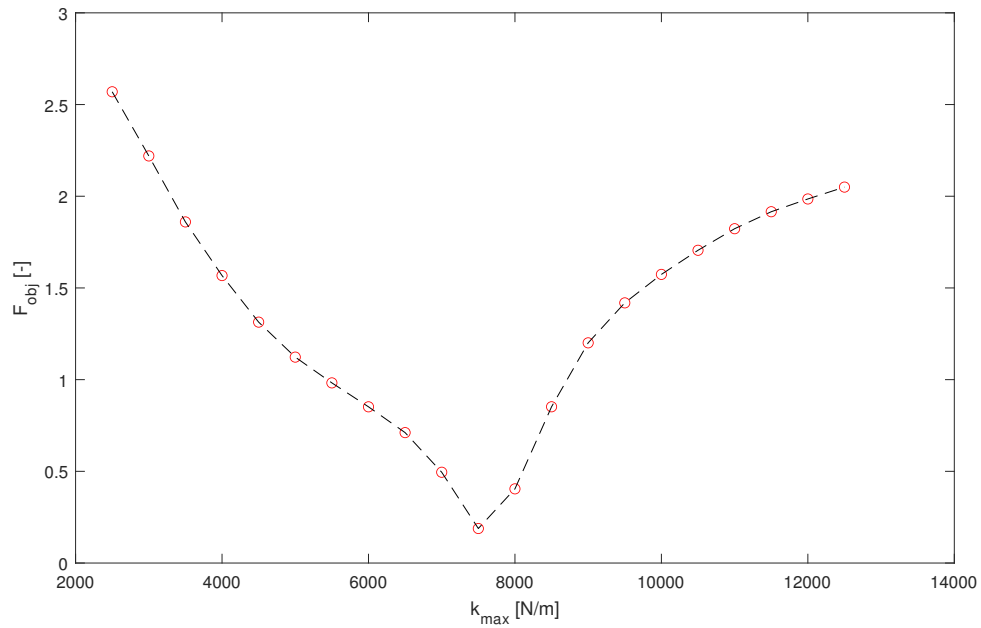


Figura 3.48: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità pre-snervamento k_{max} , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.

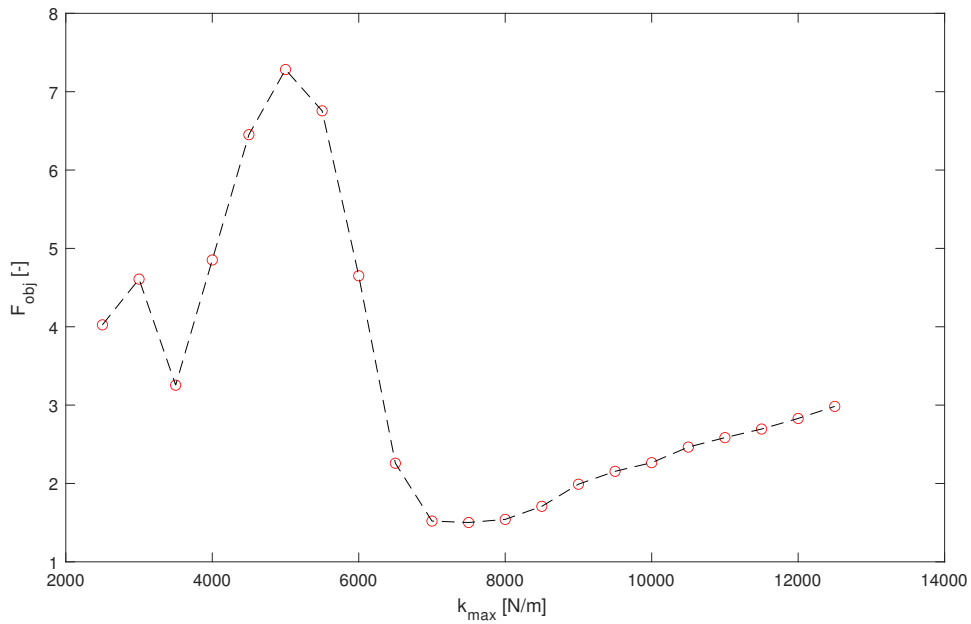


Figura 3.49: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità pre-snervamento k_{max} , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.

costante della funzione stessa fino a valori di k_{min} intorno ai 2500 – 3000 N/m, a testimonianza del fatto che la funzione obiettivo risulta, per valori inferiori a tale soglia, poco influenzata da tale parametro; per valori maggiori si denota invece un rapido incremento della funzione stessa.

Come terza analisi, si studi ora l'andamento della funzione obiettivo al variare del parame-

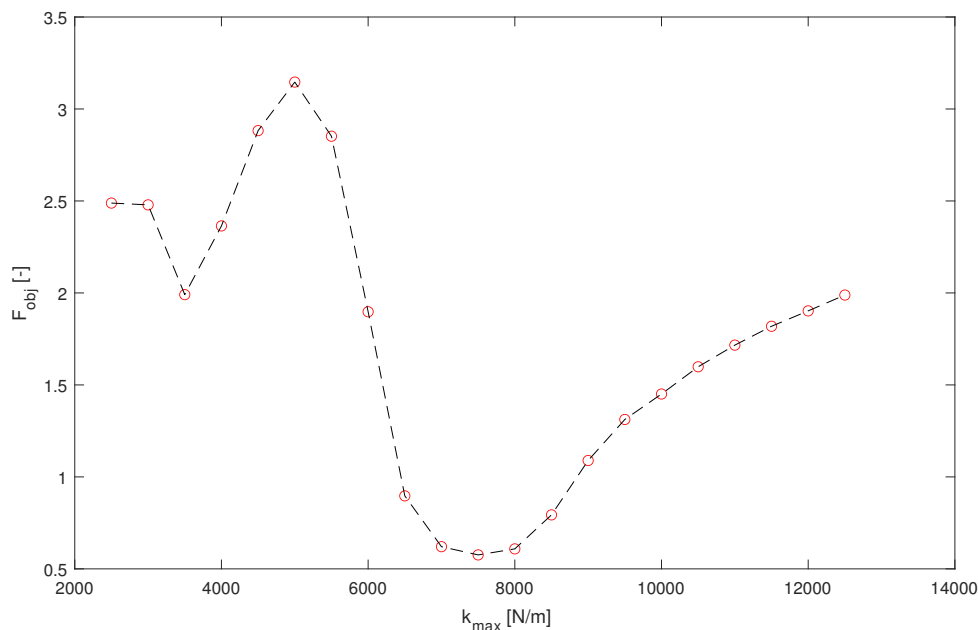


Figura 3.50: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità pre-snervamento k_{max} , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.

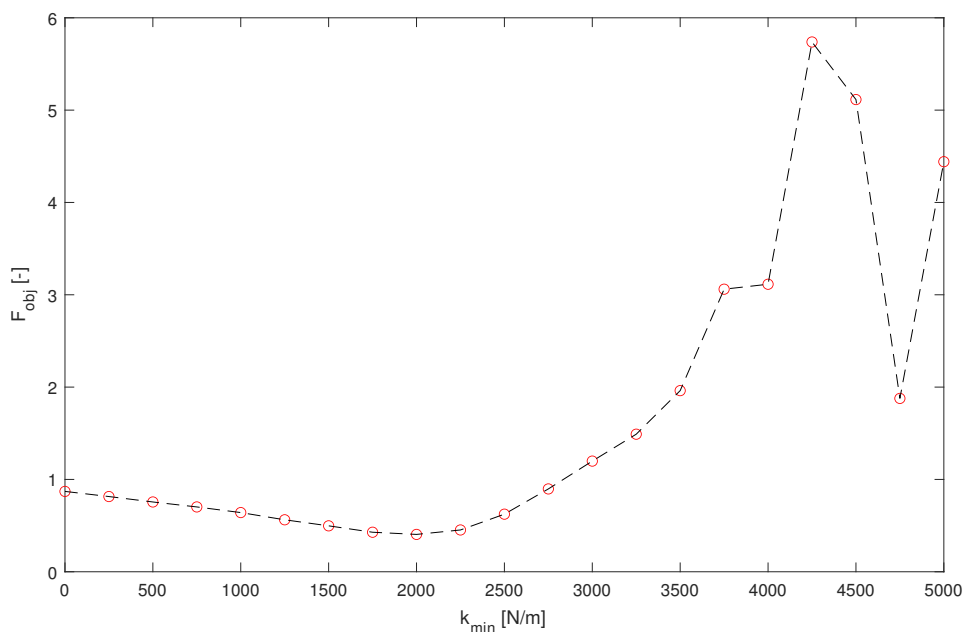


Figura 3.51: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità post-snervamento k_{min} , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.

tro v_0 e quindi si prenda in considerazione un vettore \mathbf{v}_0 avente come prima componente il valore $v_{0,0} = 0.00025$ m, come ultima il valore $v_{0,f} = 0.005$ m e discretizzato con un passo uniforme $\Delta v_0 = 0.00025$ m; si riportano i risultati ottenuti in Fig.3.54-3.56, dalle quali è possibile effettuare delle considerazioni analoghe a quelle associate ai risultati dell'analisi parametrica con k_{max} variabile. In particolar modo si sottolinea come, per tutte

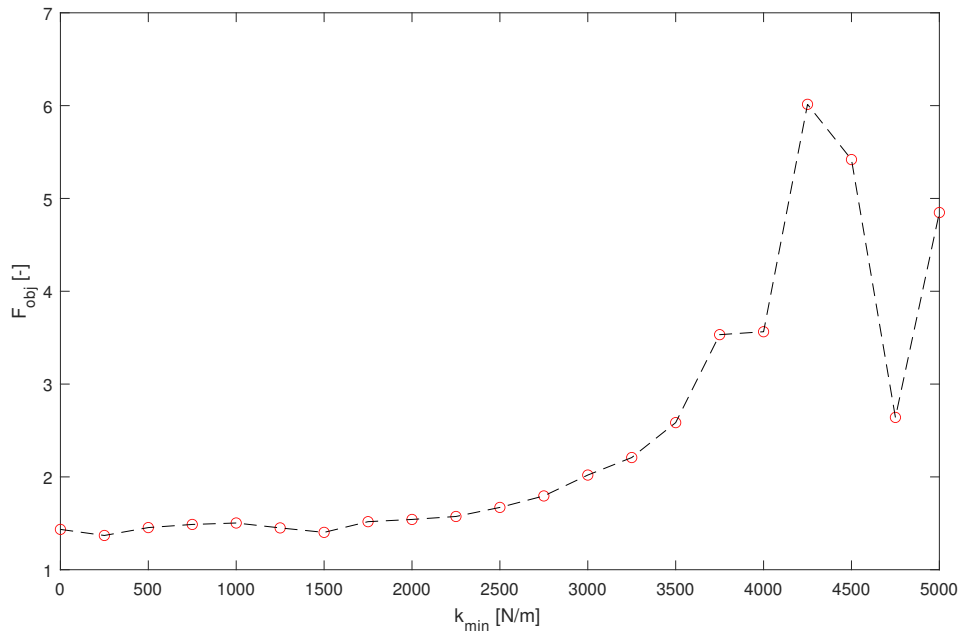


Figura 3.52: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità post-snervamento k_{min} , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.

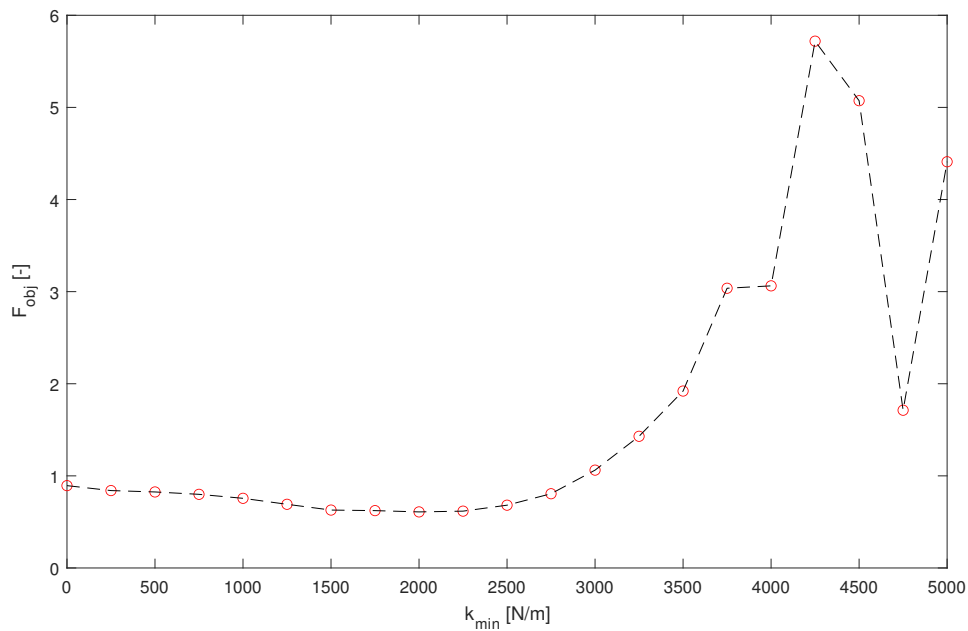


Figura 3.53: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità post-snervamento k_{min} , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.

e tre le figure menzionate, si possa osservare un minimo assoluto della funzione obiettivo in corrispondenza di valori di v_0 pari a $1.5/2 \cdot 10^{-3}$ m.

In ultima istanza, si valuti l'influenza dei parametri σ ed n sull'andamento della funzione di impedenza, al fine di verificare se sia o meno ragionevole assumere per entrambi un valore unitario all'interno della procedura di calibrazione manuale. A tale scopo si considerino

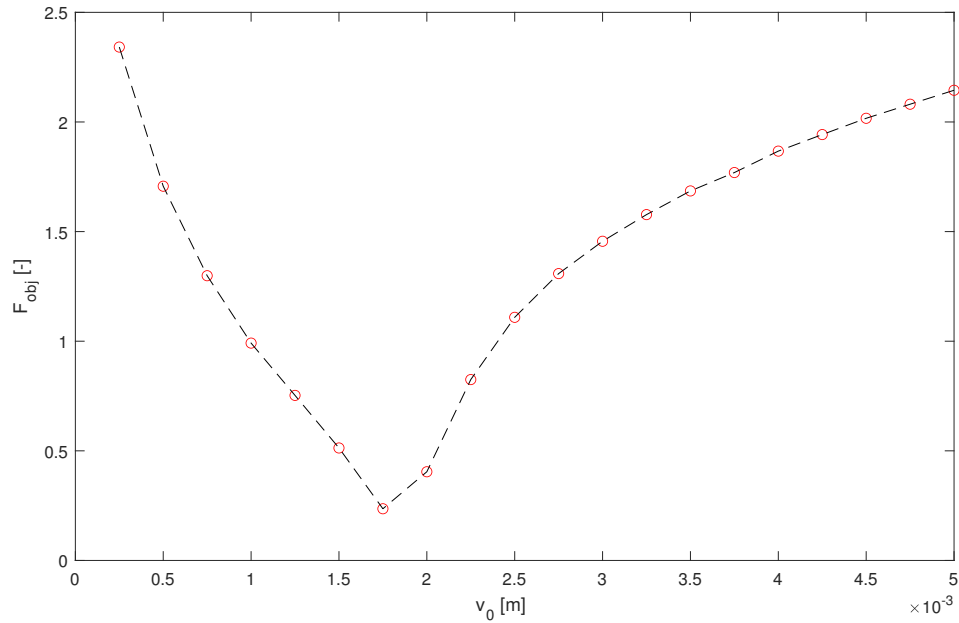


Figura 3.54: Variazione di F_{obj} in funzione dello spostamento in corrispondenza dello snervamento v_0 , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.

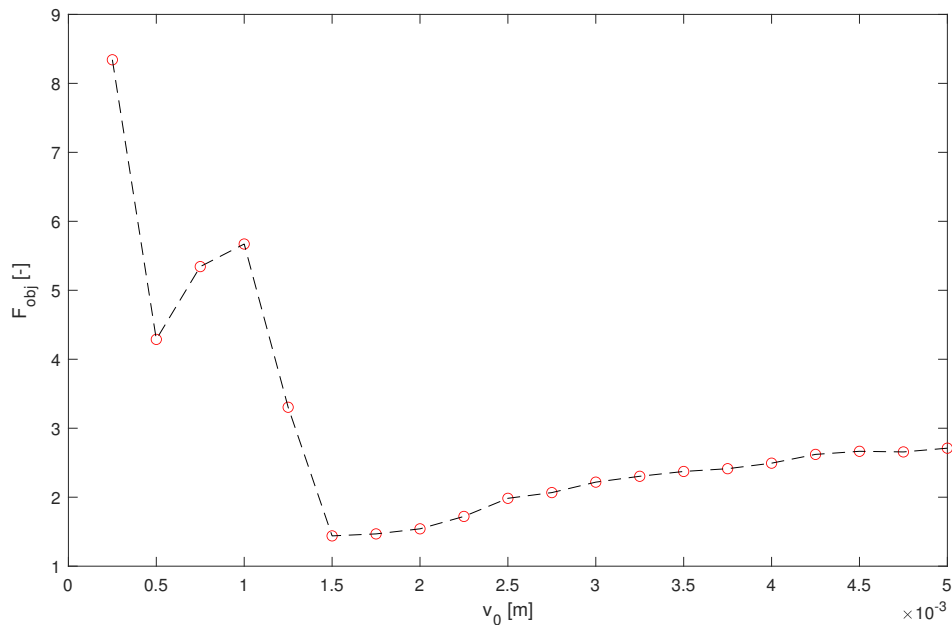


Figura 3.55: Variazione di F_{obj} in funzione dello spostamento in corrispondenza dello snervamento v_0 , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.

quindi i vettori σ e n , aventi rispettivamente come prima componente il valore $\sigma_0 = 0.5$ e $n_0 = 1$, come ultima il valore $\sigma_f = 19.5$ e $n_f = 5$ e discretizzati con passo uniforme $\Delta\sigma = 1$ e $\Delta n = 0.25$. Gli andamenti della funzione obiettivo al variare del valore dei parametri considerati e in funzione dei tre set di punti di confronto sono riportati in Fig.3.57-3.62.

Sulla base dei risultati associati alle analisi parametriche con σ variabile, è lecito dedurre

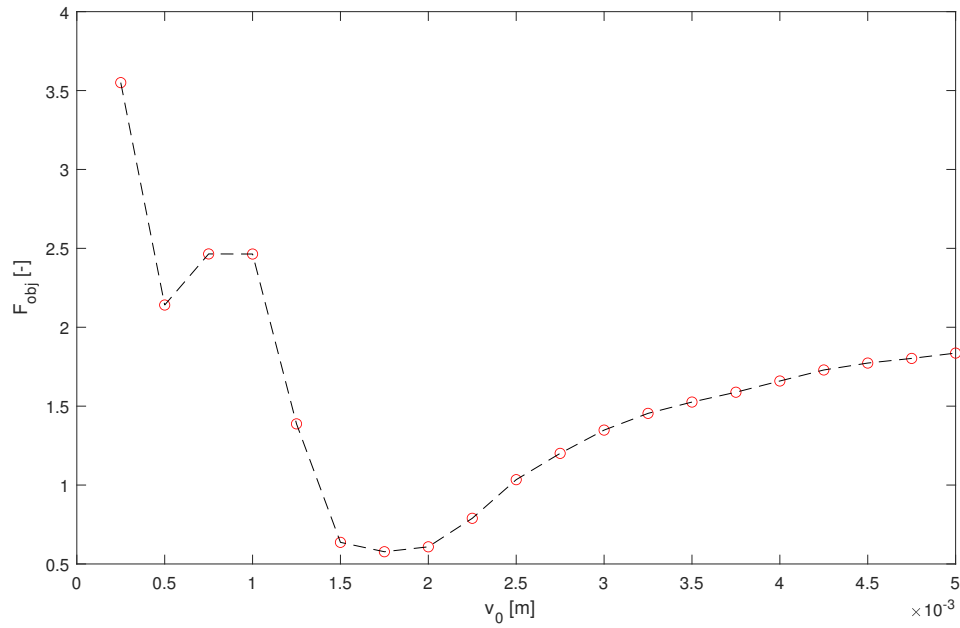


Figura 3.56: Variazione di F_{obj} in funzione dello spostamento in corrispondenza dello snervamento v_0 , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.

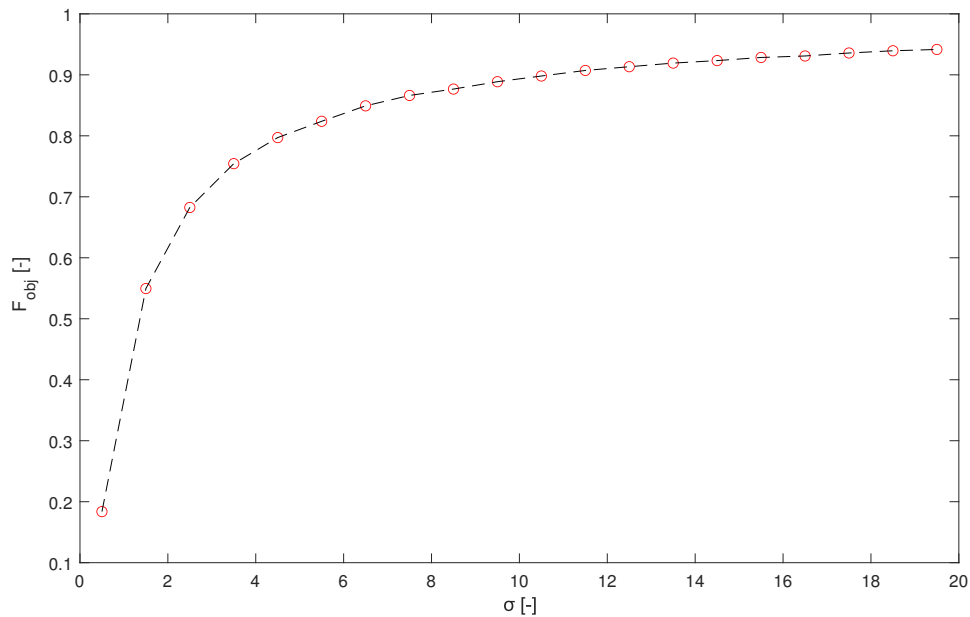


Figura 3.57: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro σ , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.

le seguenti considerazioni. Innanzitutto, vale la pena notare che, impiegando il set di punti di confronto C_1 e C_3 , l'andamento della funzione obiettivo mostri una tendenza crescente all'aumentare del valore di σ stesso; d'altro canto, nel caso di impiego del set C_2 , la curva associata a F_{obj} risulta invece decrescente all'aumentare del parametro. Questa considerazione fornisce l'ennesima riprova del fatto che la funzione obiettivo adottata sia

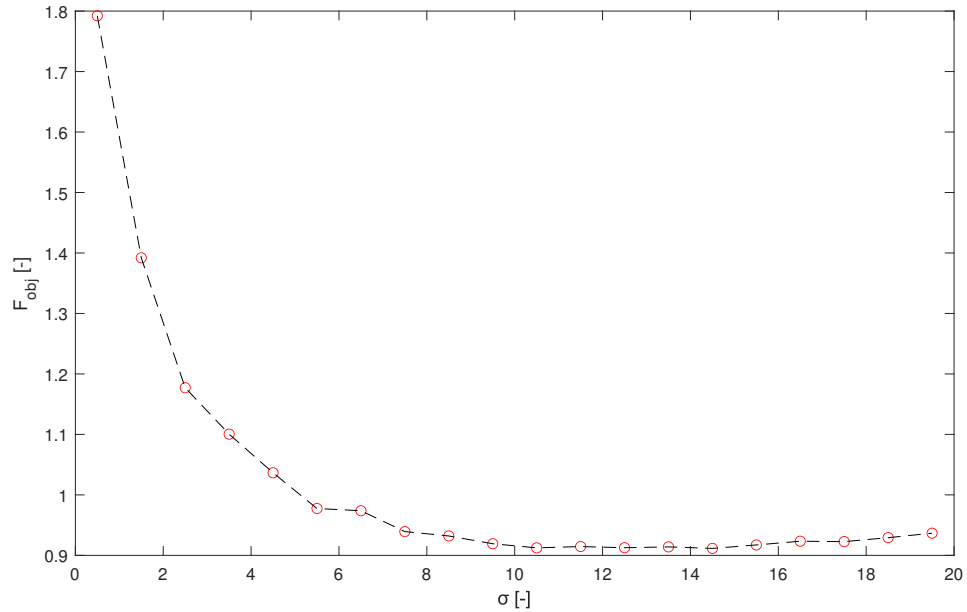


Figura 3.58: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro σ , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.

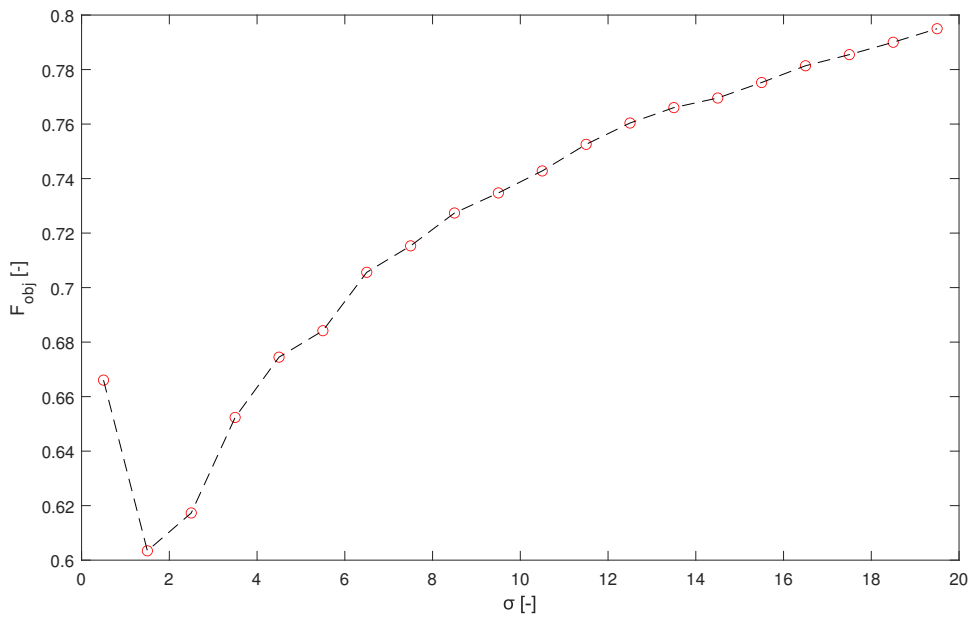


Figura 3.59: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro σ , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.

particolarmente sensibile alla scelta dei punti di confronto e dei relativi pesi assegnati. In aggiunta, facendo riferimento alla Fig.3.59, ovvero quella in cui è stato considerato il set C_3 , si osserva come un valore di σ prossimo a 1 minimizzi la funzione obiettivo.

Per quanto riguarda il parametro n , invece, è possibile concludere, osservando le Fig.3.60-3.62, che un suo valore unitario rende minimo il valore della funzione obiettivo: infatti, tutte e tre le curve risultano avere un trend crescente all'aumentare del parametro stesso.

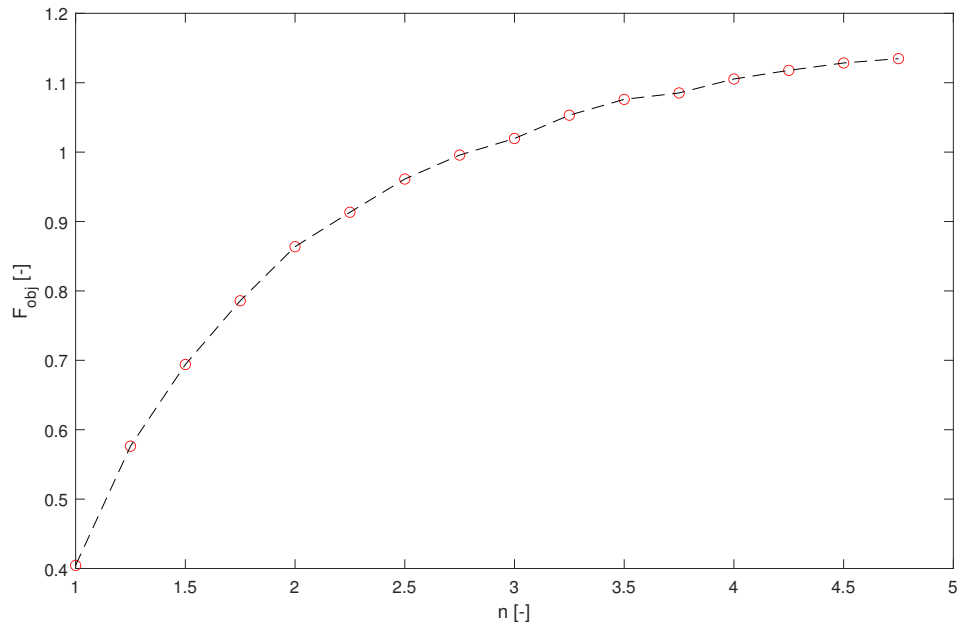


Figura 3.60: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro n , considerando il set di punti di confronto C_1 con i relativi pesi.

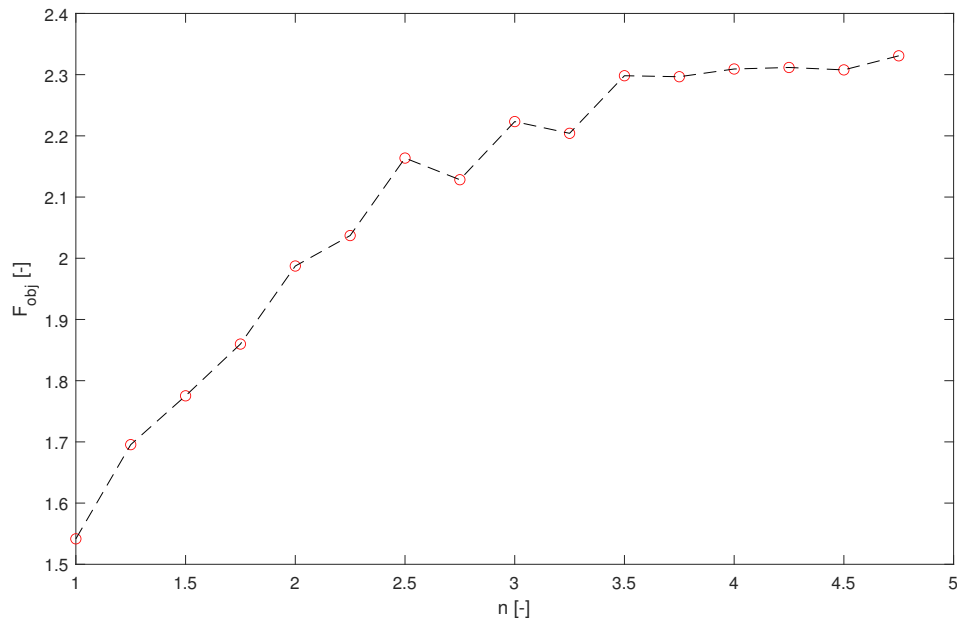


Figura 3.61: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro n , considerando il set di punti di confronto C_2 con i relativi pesi.

Analisi parametriche a 2 parametri

Oltre alle analisi parametriche descritte nel paragrafo precedente, in cui veniva fatto variare il valore di un singolo parametro volta per volta, mantenendo fissi i valori dei restanti, è possibile eseguire anche delle analisi parametriche a 2 parametri mediante una sezio-

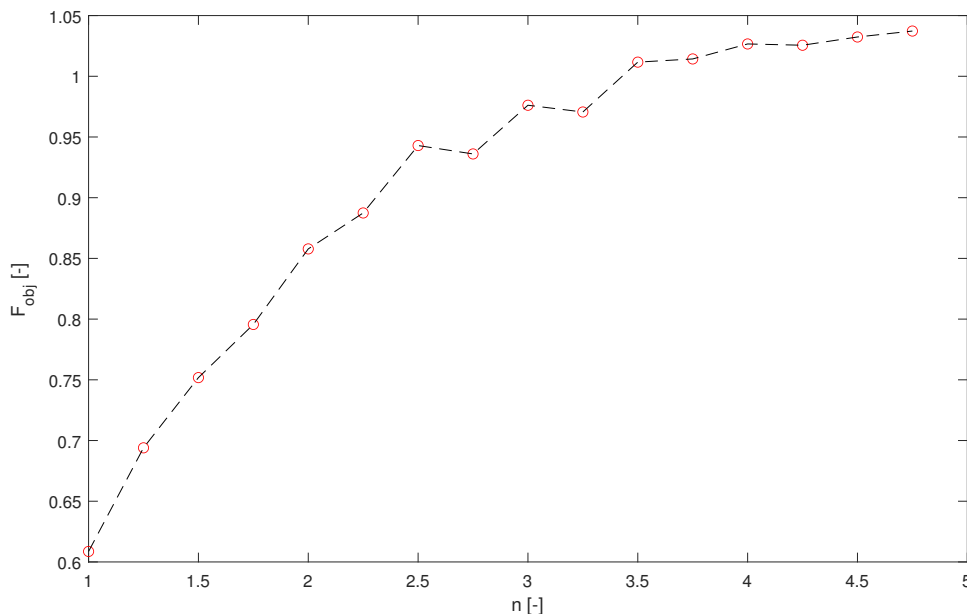


Figura 3.62: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro n , considerando il set di punti di confronto C_3 con i relativi pesi.

ne dedicata del codice MATLAB implementato. Innanzitutto, sulla falsa riga di quanto esposto in merito alle analisi parametriche ad un parametro, si studi il comportamento del dispositivo mediante una modellazione elastica lineare. Si considerino dunque, come parametri variabili, il vettore di rigidezza elastica $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{max} = \mathbf{k}_{min}$ e il vettore del fattore di smorzamento viscoso $\boldsymbol{\xi}$; i restanti parametri fissi da fornire in ingresso al codice risultano i seguenti: soglia di snervamento $v_0 = 10^4$ m e valori di σ e n unitari. In Fig.3.63 è possibile osservare l'andamento della funzione obiettivo F_{obj} , al variare dei due parametri considerati. Estrapolando la coppia di valori che minimizza la funzione stessa, ovvero $k_{max} = k_{min} = k = 3600$ N/m e $\xi = 0.25$, si ottiene la curva di impedenza mostrata in Fig.3.64. Si può notare come il primo picco, in termini di collocazione e ampiezza, venga colto in maniera adeguata anche se il ramo discendente numerico non risulta molto prossimo alla sua controparte sperimentale.

A questo punto, si consideri il caso in cui il dissipatore venga caratterizzato mediante la legge isteretica non-lineare di Bouc-Wen. Nel dettaglio, nel presente elaborato si manterrà fisso il valore dei parametri σ e n pari a 1, si considereranno cinque differenti valori del parametro v_0 e si faranno variare in opportuni range i restanti due parametri di rigidezza k_{max} e k_{min} .

In primo luogo, si consideri $v_0 = 0.001$ m e i vettori \mathbf{k}_{max} e \mathbf{k}_{min} definiti per le analisi parametriche a 1 parametro precedenti. Eseguendo l'analisi è possibile ottenere il risultato in Fig.3.65, che mostra l'andamento della funzione obiettivo F_{obj} , valutata in questa sezione prendendo in considerazione il solo insieme di punti di confronto C_3 , al variare di k_{max} e k_{min} ; come si può evincere dalla barra dei colori laterale, al diminuire del valore di F_{obj} si tende verso colori freddi. Vale la pena sottolineare come, nella zona in basso a destra della figura, in cui si ha $k_{min} \geq k_{max}$, la funzione obiettivo sia stata posta di default pari a 0 senza procedere con l'analisi per quelle coppie di punti; questa operazione è stata effettuata in quanto tale condizione non può fisicamente verificarsi.

La coppia di valori che minimizza la funzione obiettivo risulta essere $k_{max} = 11500$ N/m e $k_{min} = 2500$ N/m, la quale conduce ad ottenere la curva di impedenza numerica rappre-

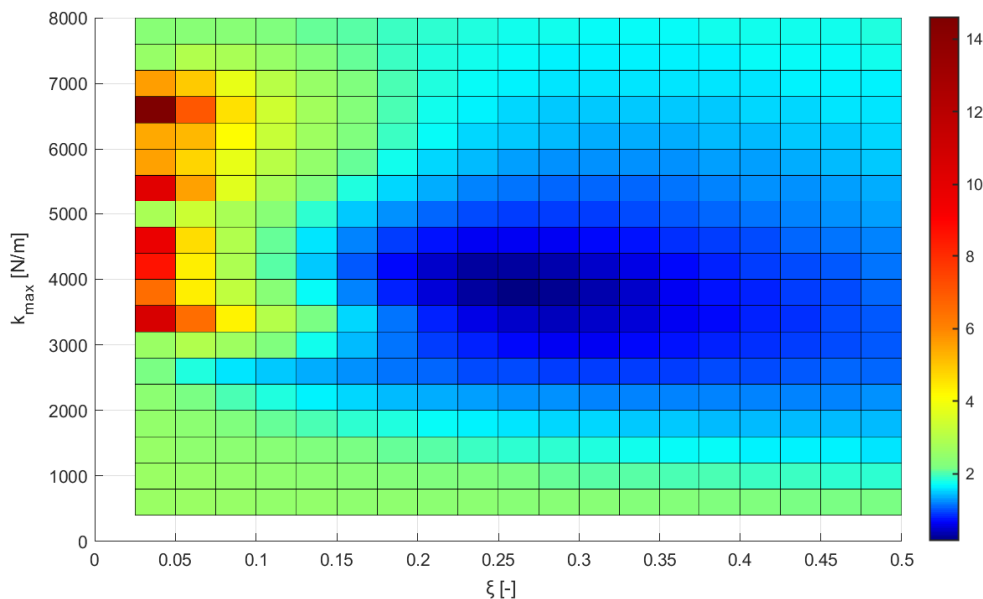


Figura 3.63: Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri $k = k_{max} = k_{min}$ e ξ , nel caso di comportamento elastico del dispositivo.

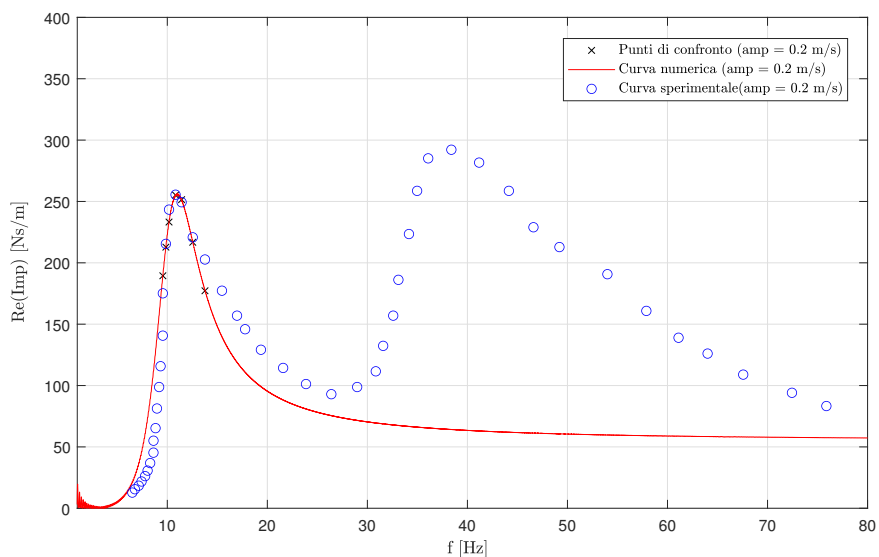


Figura 3.64: Curva di impedenza ricavata fissando $k = 3600$ N/m, $\xi = 0.25$, nel caso di comportamento elastico del dispositivo.

sentata in Fig.3.66. Come si può osservare, l'andamento di tale curva risulta molto simile a quello ottenuto dalla calibrazione manuale, nonostante i parametri k_{max} e v_0 risultino piuttosto differenti. Molto affini risultano anche tutti gli andamenti delle funzioni v , z , F e F_d ; per questo motivo, a partire dal caso in esame così come per le analisi parametriche e di ottimizzazione successive, non verranno riportate le figure corrispondenti.

Si esegua ora una seconda analisi parametrica a 2 parametri considerando gli stessi vettori k_{max} e k_{min} utilizzati in precedenza e un valore della soglia di snervamento $v_0 = 0.0015$ m; in Fig.3.67 si riporta l'andamento di F_{obj} proprio in funzione di tali parametri variabili.

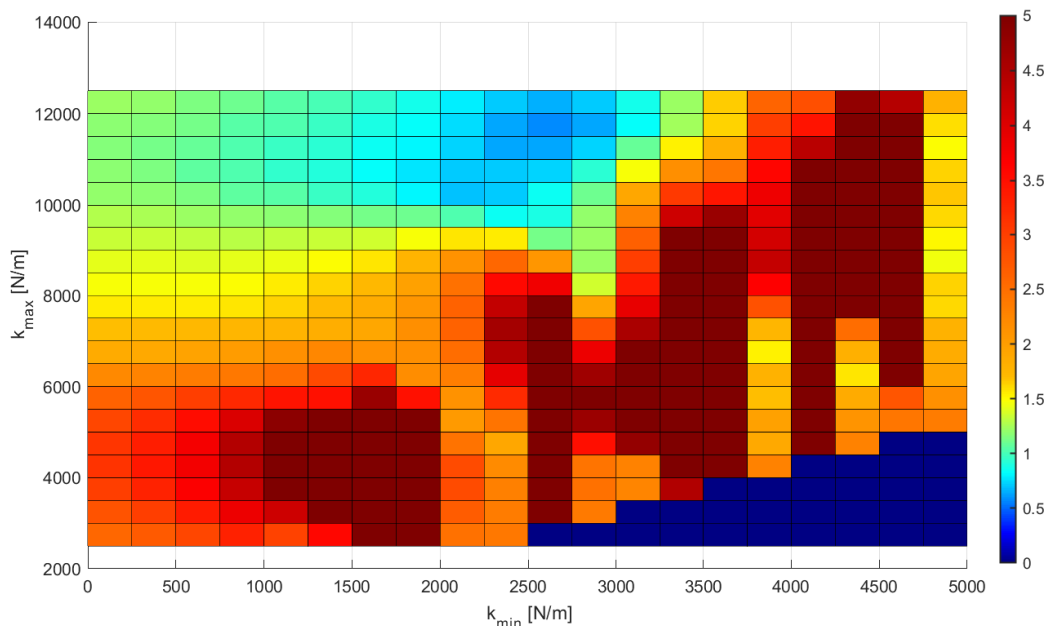


Figura 3.65: Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.001 m.

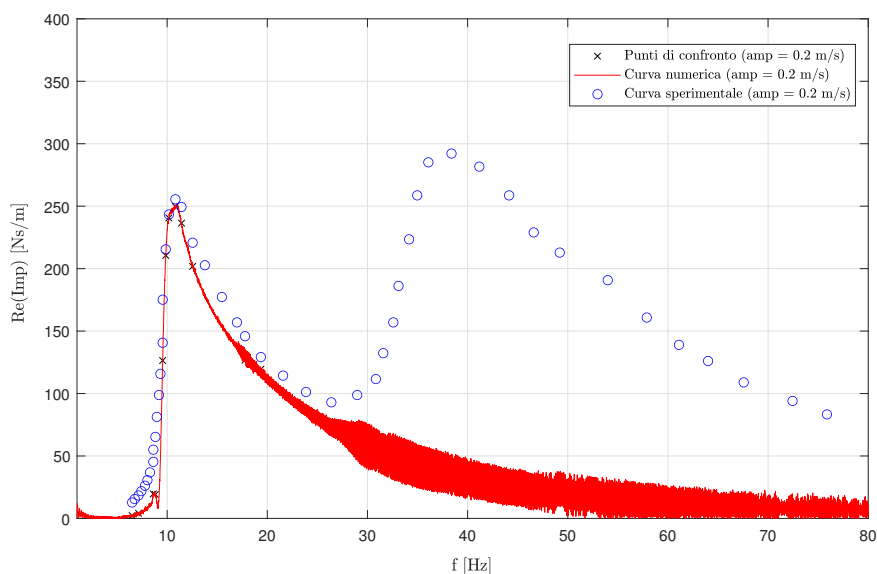


Figura 3.66: Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 11500$ N/m, $k_{min} = 2500$ N/m, $v_0 = 0.001$ m e $\sigma = n = 1$.

La coppia di valori che minimizza la funzione obiettivo risulta essere $k_{max} = 9000$ N/m e $k_{min} = 2250$ N/m, la quale conduce ad ottenere la curva di impedenza numerica rappresentata in Fig.3.68. In questa circostanza il valore dei vari parametri governanti il modello risulta prossimo a quello ottenuto mediante calibrazione manuale e dunque anche la curva di impedenza non può che risultare molto simile ad essa.

In terzo luogo, si consideri $v_0 = 0.002$ m, gli stessi vettori k_{max} e k_{min} e si esegua l'analisi. In termini di funzione obiettivo F_{obj} , il risultato ottenuto è quello rappresentato in Fig.3.69,

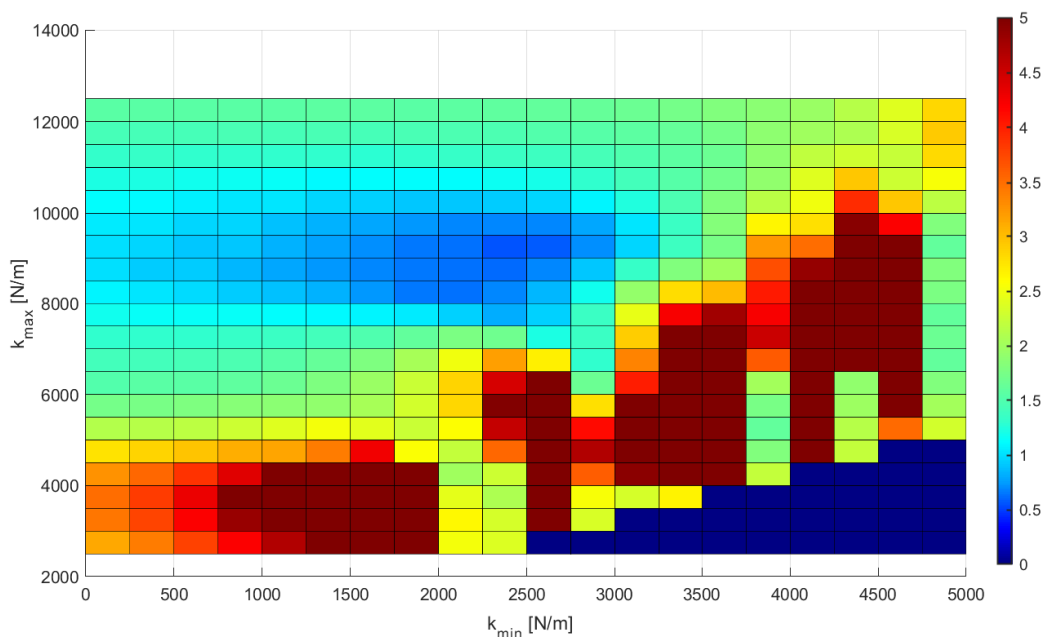


Figura 3.67: Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.0015 m.

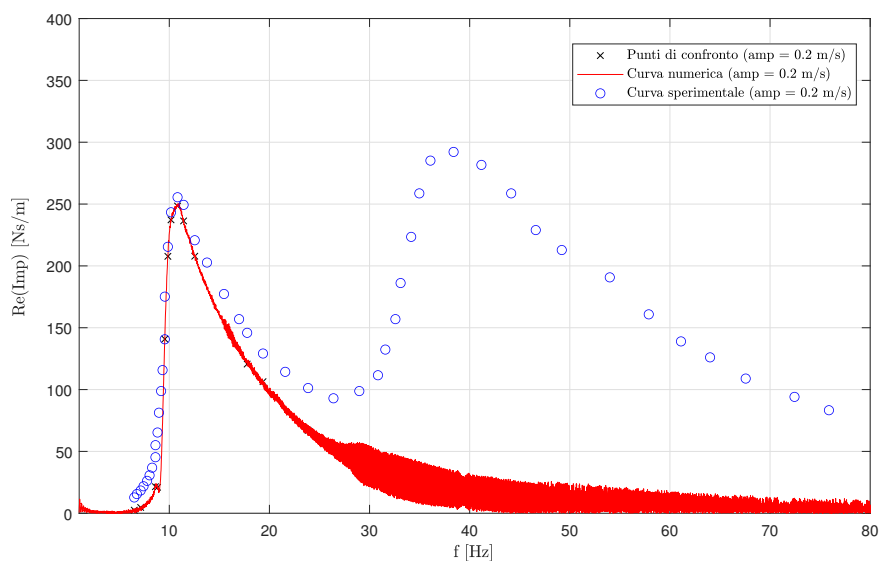


Figura 3.68: Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 9000$ N/m, $k_{min} = 2250$ N/m, $v_0 = 0.0015$ m e $\sigma = n = 1$.

dalla quale è possibile rilevare come il punto di minimo della funzione stessa si abbia in corrispondenza della coppia di valori $k_{max} = 7500$ N/m e $k_{min} = 1750$ N/m. Tali valori, impiegati in un'analisi a parametri fissi effettuata mediante la sezione dedicata del software, conducono alla curva di impedenza mostrata in Fig.3.70; è possibile osservare come, in questo caso, la curva di impedenza numerica ottenuta sia caratterizzata da un'ampiezza del picco più contenuta rispetto a quella sperimentale.

Si effettui ora un'ulteriore analisi parametrica a 2 parametri considerando una soglia di

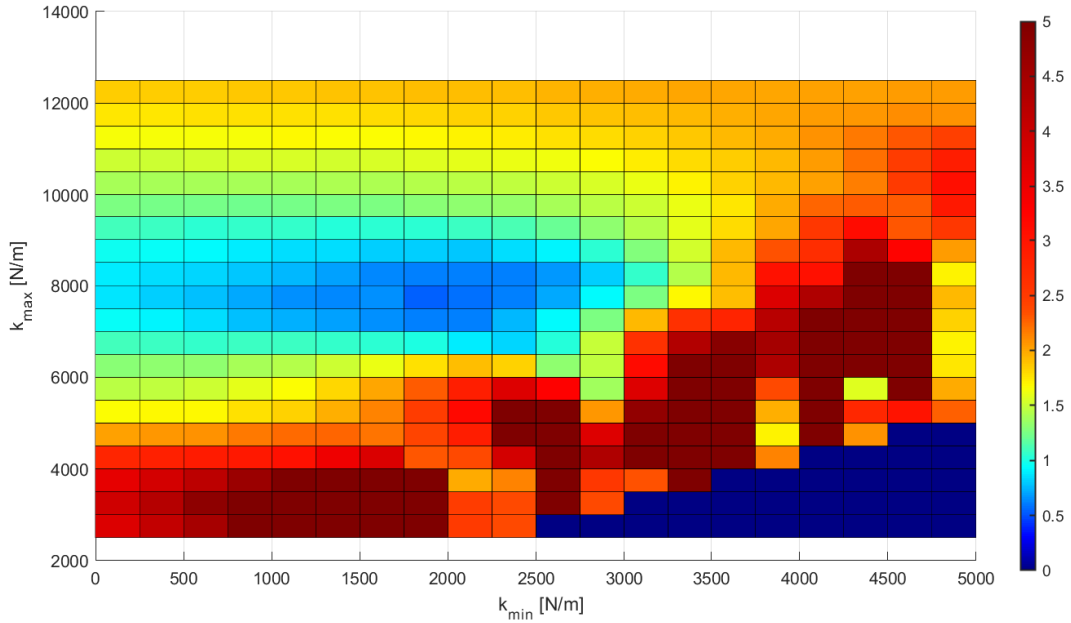


Figura 3.69: Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.002 m.

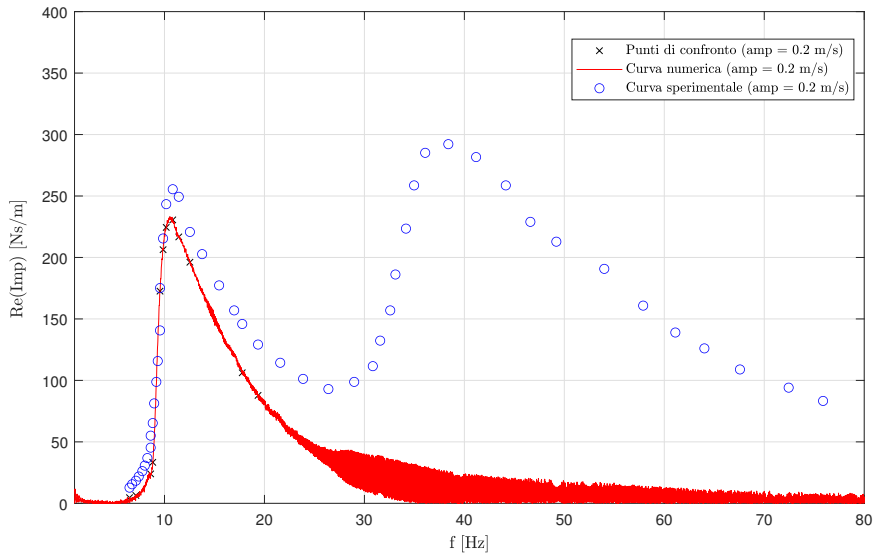


Figura 3.70: Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 7500$ N/m, $k_{min} = 1750$ N/m, $v_0 = 0.002$ m e $\sigma = n = 1$.

snervamento $v_0 = 0.003$ m; in Fig.3.71 e 3.72 sono rispettivamente mostrati l'andamento della funzione obiettivo F_{obj} al variare di k_{max} e k_{min} e la curva di impedenza numerica ottenuta impiegando i parametri che minimizzano la funzione obiettivo: $k_{max} = 6500$ N/m e $k_{min} = 1500$ N/m. Come si può osservare da Fig.3.72, la funzione di impedenza numerica ottenuta coglie efficacemente il primo picco e risulta graficamente migliore rispetto a quella ricavata con il set di parametri derivanti dalla fase di calibrazione manuale, seppur molto simili tra loro; vale la pena però sottolineare come i due set di parametri assumano valori

non così prossimi tra loro, a riprova del fatto che più set di parametri permettono di riprodurre adeguatamente la risposta del sistema e che quindi non è possibile determinarne solo uno in maniera univoca.

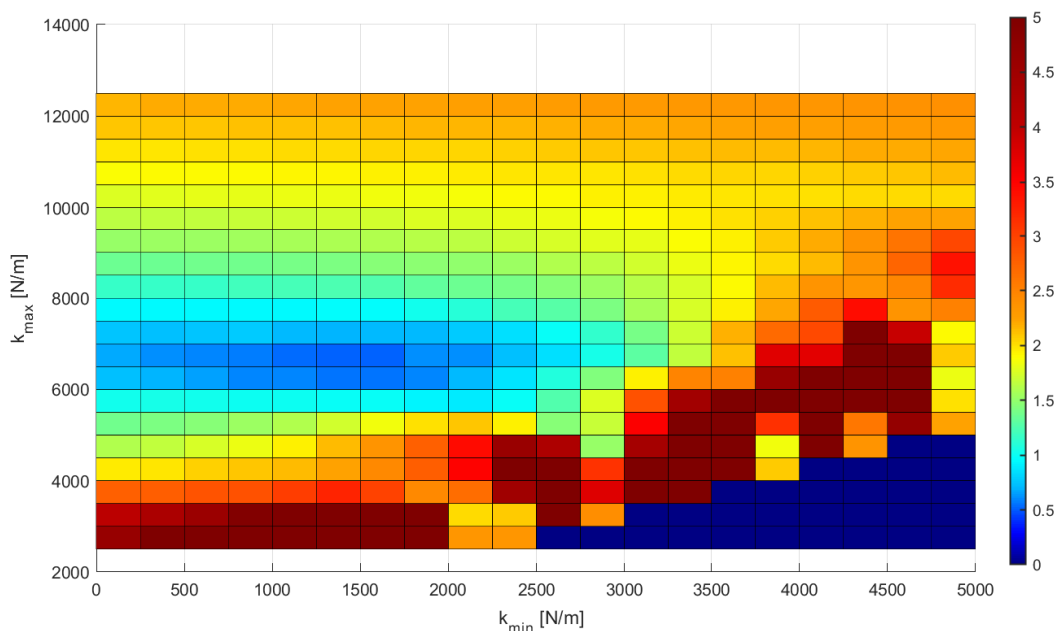


Figura 3.71: Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.003 m.

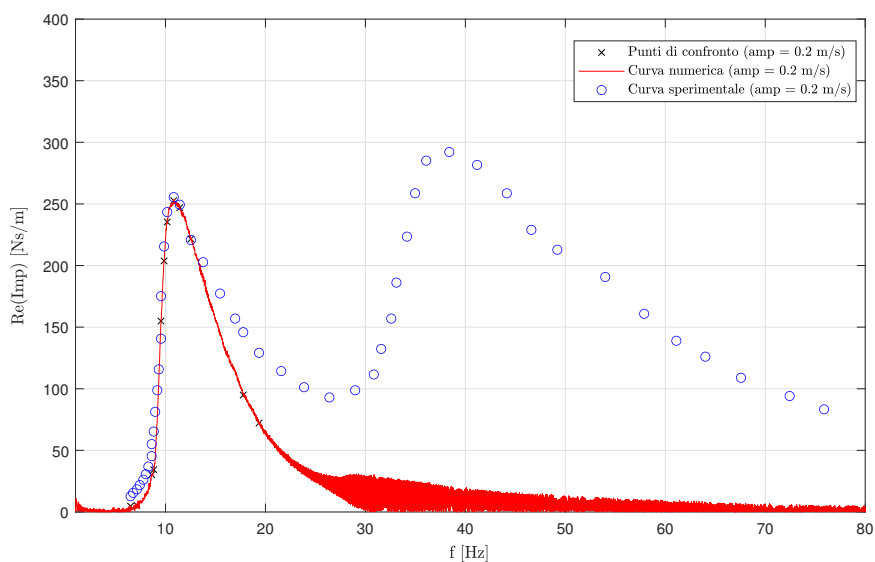


Figura 3.72: Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 6500$ N/m, $k_{min} = 1500$ N/m, $v_0 = 0.003$ m e $\sigma = n = 1$.

In ultima istanza, si consideri $v_0 = 0.005$ m e, al pari delle precedenti analisi, i vettori di rigidità elastica pre-snervamento e rigidità post-snervamento, k_{max} e k_{min} . Eseguendo l'analisi è possibile ottenere il risultato in Fig.3.73, in termini di andamento della funzione obiettivo al variare dei valori assunti dalle rigidità, e quello in Fig.3.74, in termini di

funzione di impedenza associata alla coppia di valori che minimizza F_{obj} : $k_{max} = 5500$ N/m e $k_{min} = 500$ N/m. Come si può osservare da quest'ultima, l'ampiezza del picco della curva associata alla risposta numerica risulta lievemente più elevata rispetto a quella della curva sperimentale, ma, globalmente, si può concludere come la risposta del sistema, sempre circoscritta alla prima campana di risonanza, venga colta in maniera adeguata. Risulta quindi nuovamente evidente la presenza di molteplici set di parametri, in grado di fornire risultati analoghi e accurati circa la risposta del sistema.

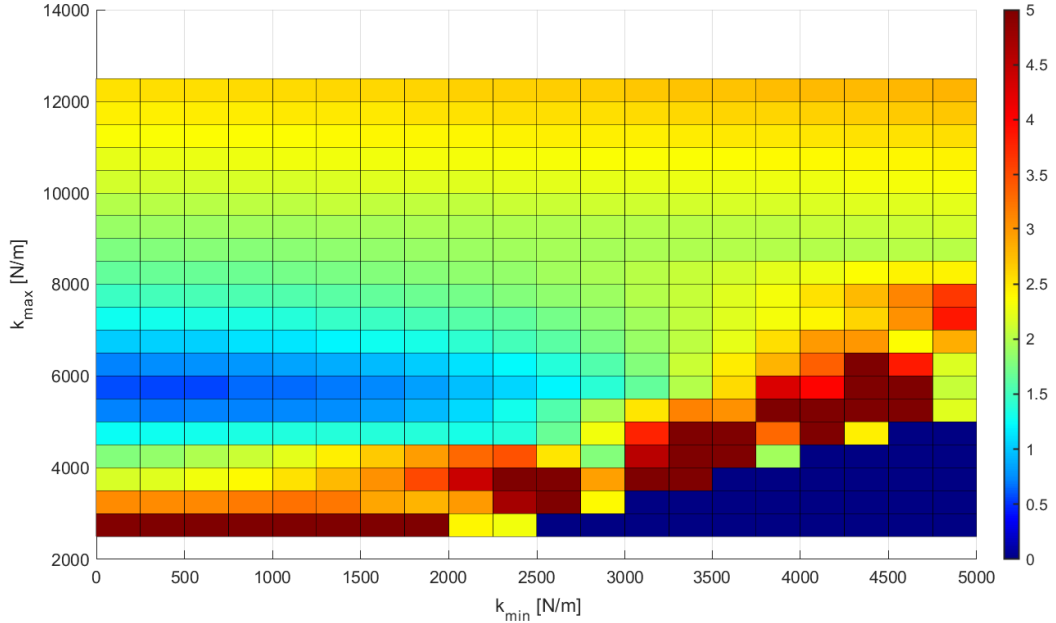


Figura 3.73: Variazione di F_{obj} in funzione dei parametri k_{max} e k_{min} , con v_0 fissato e pari a 0.005 m.

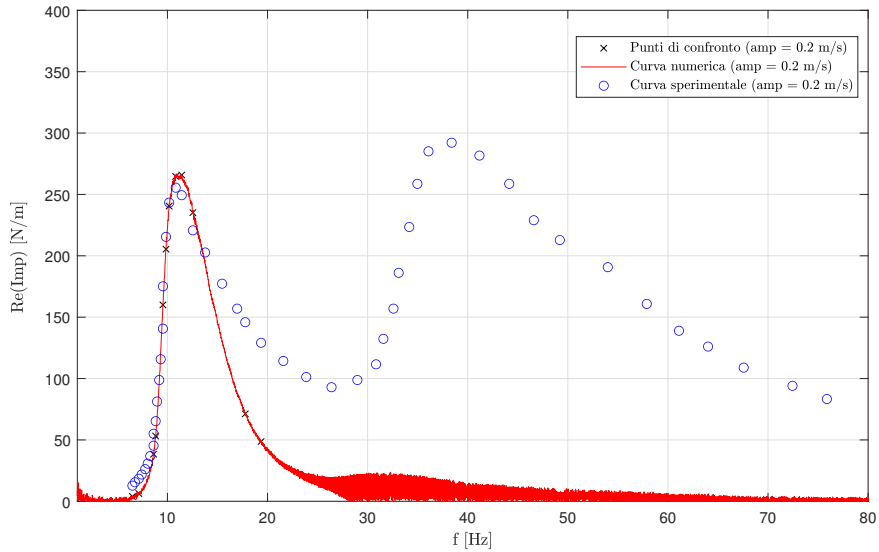


Figura 3.74: Curva di impedenza ricavata fissando $k_{max} = 5500$ N/m, $k_{min} = 500$ N/m, $v_0 = 0.005$ m e $\sigma = n = 1$.

Procedura automatica di calibrazione dei parametri

La procedura di calibrazione del modello può essere ulteriormente affinata mediante l'implementazione di un algoritmo atto alla minimizzazione automatica del valore della funzione obiettivo al variare dei parametri governanti; a tale scopo, si sfrutta un algoritmo di Evoluzione Differenziale ("*Differential Evolution*, DE"), proposto per la prima volta da Storn e Price nel 1995 [38]. L'idea alla base di tale procedura consiste nella generazione su base random di una famiglia di soluzioni di primo tentativo (nel presente contesto, set $\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_2^1, \dots$ di parametri governanti) all'interno di uno dominio D di definizione; successivamente, mediante operazioni di mutazione e crossover (ricombinazione), tali soluzioni candidato vengono opportunamente modificate, al fine di minimizzarne tramite una procedura iterativa il valore della funzione obiettivo. Il raggiungimento, a valle del processo evolutivo, di una condizione sufficiente di convergenza da parte di una o più soluzioni tentativo sancisce il termine di tale processo; per una esposizione più esaustiva in merito si rimanda all'Appendice D. Tale algoritmo di ottimizzazione è stato implementato in una sezione dedicata dello script MATLAB, la quale riceve in ingresso, oltre a tutti i dati forniti per il calcolo della funzione di impedenza, degli opportuni array \mathbf{x}_{min} e \mathbf{x}_{max} che definiscono il dominio D di definizione di tutte le soluzioni tentativo generate, in altre parole essi contengono rispettivamente gli estremi inferiori e superiori degli intervalli di variazione di ogni parametro che si desidera calibrare. In aggiunta, risulta necessario fornire al software il seguente set di parametri: il numero N_{pop} di individui generati a ciascuna iterazione ($\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{N_{pop}}^i$, con $i=i$ -esima iterazione), posto solitamente pari a $10N_{par}$, con N_{par} numero di parametri da ottimizzare, il numero massimo N_{eval} di valutazioni della funzione obiettivo che si desidera effettuare e il numero massimo N_{iter} di iterazioni ammesse. Una prima condizione sufficiente di convergenza è definita dal valore VTR che la funzione obiettivo minima deve raggiungere per terminare l'analisi a una data iterazione e una seconda condizione sufficiente di convergenza è legata alla definizione di una soglia $toll$, da confrontare con la differenza ΔF_{obj} tra la funzione obiettivo massima e minima durante l'iterazione in esame, affinché l'analisi possa considerarsi conclusa. Per agevolare il processo iterativo, è inoltre possibile fornire in input al codice un vettore \mathbf{IG} contenente un set di valori di riferimento, in modo che la fase iniziale di generazione delle soluzioni di primo tentativo non avvenga su base casuale (distribuzione di probabilità uniforme all'interno del dominio D), ma secondo una distribuzione di probabilità normale a media pari a \mathbf{IG} . Nell'ottica della taratura dei parametri del modello di Bouc-Wen a un grado di libertà, sono state effettuate più analisi, a partire come sempre dal caso semplificato di sistema reso elastico lineare, per poi passare all'applicazione della procedura al caso di sistema isteretico. Si consideri quindi, come primo esempio, un sistema discreto elastico lineare ($v_0 = 10^4$ m, $k_{min} = k_{max} = k$) per il quale si vuole condurre il calcolo numerico della funzione d'impedenza e la successiva comparazione con i risultati sperimentali al variare della rigidità k e del fattore di smorzamento ξ . Si scelga di voler ricercare una soluzione del problema per $k \in [400, 8000]$ N/m e $\xi \in [0.025, 0.5]$: si avrà dunque per il caso in esame: $\mathbf{x}_{min} = [400 \text{ N/m}, 0.025]$ e $\mathbf{x}_{max} = [8000 \text{ N/m}, 0.5]$; si ponga in aggiunta $N_{pop} = 10N_{par} = 20$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 200$, delle condizioni di convergenza del tipo $VTR = 10^{-3}$, $toll = 10^{-2}$ e si consideri un vettore \mathbf{IG} , le cui componenti rappresentano rispettivamente i valori di riferimento adottati per il parametro di rigidità e di smorzamento, del tipo $\mathbf{IG} = [3600 \text{ N/m}, 0.25]$, secondo quanto ottenuto dagli esiti dell'analisi parametrica. Impiegando il set di punti di confronto C_2 mostrato in equazione 3.61 per il calcolo della funzione obiettivo, si raggiunge, come si evince da Fig.3.75, una condizione di convergenza per soddisfacimento della tolleranza $toll$ dopo 35 iterazioni e i valori finali ottenuti rispettivamente per la funzione obiettivo, il parametro di rigidità e il fattore di smorzamento risultano essere i seguenti: $F_{obj} = 0.1271$, $k = 3708.662$ N/m

e $\xi = 0.2478$; l'andamento della funzione di impedenza corrispondente è rappresentato in Fig.3.76. Confrontando i valori appena ottenuti con quelli ricavati dall'analisi parametrica a due parametri (i.e. $k = 3600$ N/m, $\xi = 0.25$), si ottengono risultati tra loro compatibili, a conferma in primis della presenza, nel dominio di definizione considerato, di un minimo assoluto ben marcato, oltre che della bontà ed utilità dell'algoritmo di ottimizzazione DE.

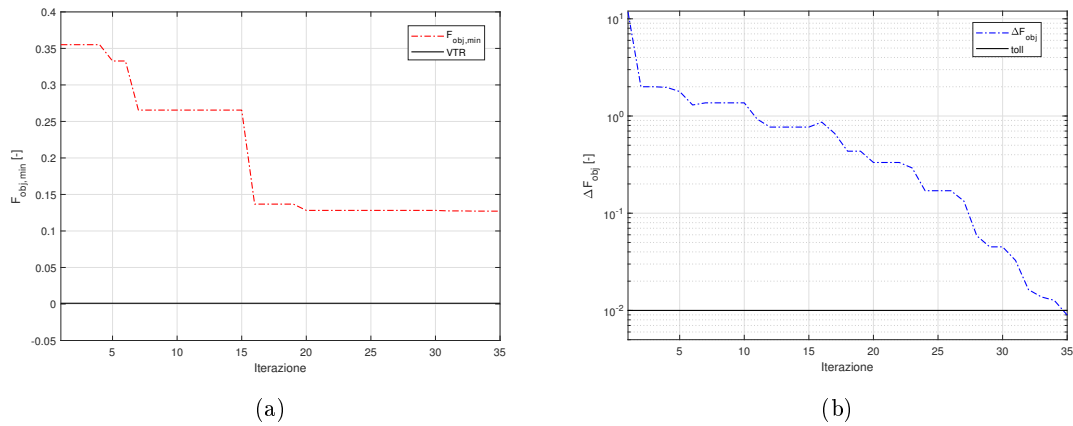


Figura 3.75: Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$, minimo valore della funzione obiettivo tra quelle associate ad ogni individuo della famiglia all'i-esima iterazione e (b) ΔF_{obj} , differenza tra il massimo e il minimo valore della funzione obiettivo tra quelle associate ad ogni individuo della famiglia all'i-esima iterazione.

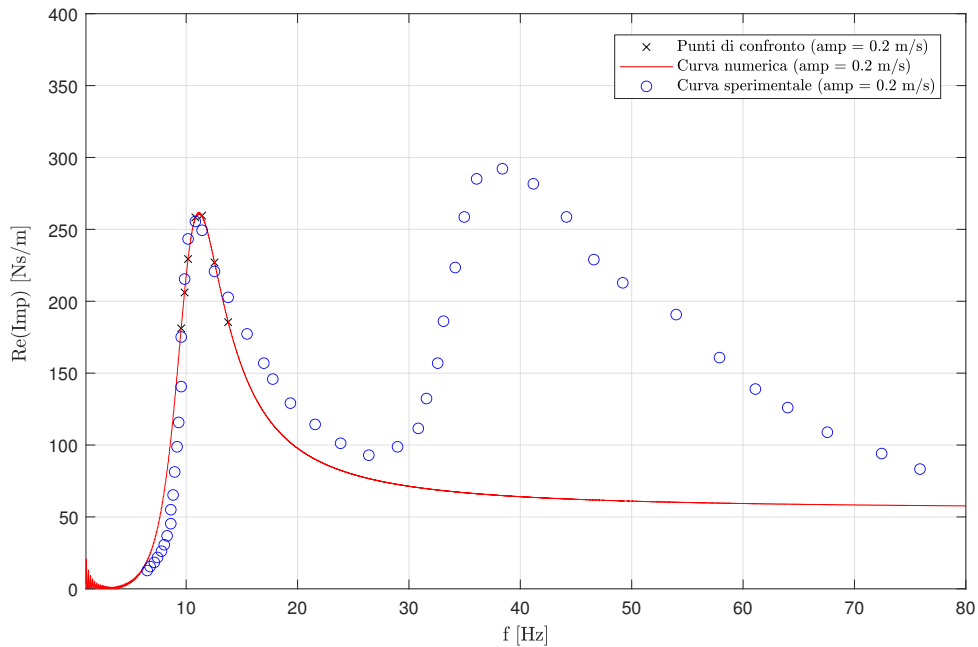


Figura 3.76: Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica per il caso elastico lineare.

Si consideri a questo punto un sistema isteretico in assenza di smorzamento viscoso ($\xi = 0$), per il quale si supponga di considerare fissi i parametri v_0 , σ e n e pari ai valori ottenuti mediante la procedura di ottimizzazione manuale (i.e. $v_0 = 0.002$ m, $\sigma = n = 1$) e di attuare una procedura di ottimizzazione automatica solamente per quanto concerne i due parametri di rigidezza k_{min} e k_{max} . I dati in ingresso alla sezione del codice risultano i seguenti: $k_{min} \in [10, 5000]$ N/m, $k_{max} \in [2500, 12500]$ N/m, da cui $\mathbf{x}_{min} = [10, 2500]$ N/m e $\mathbf{x}_{max} = [5000, 12500]$ N/m, $N_{pop} = 20$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 100$, $VTR = 10^{-3}$ e $toll = 10^{-2}$; come valori di riferimento per i parametri di rigidezza da calibrare, si adottano quelli ottenuti a valle della procedura di ottimizzazione manuale, così da porre $\mathbf{IG} = [2000, 8000]$ N/m. Impiegando questa volta per il calcolo della funzione obiettivo il set di confronto C_3 in 3.61, il quale si dimostra essere il più raffinato per la calibrazione del primo picco della risposta con il modello di Bouc-Wen, si ottiene in definitiva: $F_{obj} = 0.5768$, $k_{min} = 2197.30$ N/m e $k_{max} = 7967.00$ N/m. Si noti come, in questo caso, tutte le 100 iterazioni consentite sono state eseguite dall'algoritmo, dal momento che nessuna delle due condizioni sufficienti di convergenza è stata raggiunta. D'altra parte, il set di parametri di rigidezza e la funzione obiettivo ad essi associata, così come calcolati a valle dell'ultima iterazione, si dimostrano essere più che accettabili, come si evince da Fig.3.77 e come mostra la buona corrispondenza che essi trovano con i valori ottenuti mediante l'ottimizzazione manuale e le analisi parametriche eseguite.

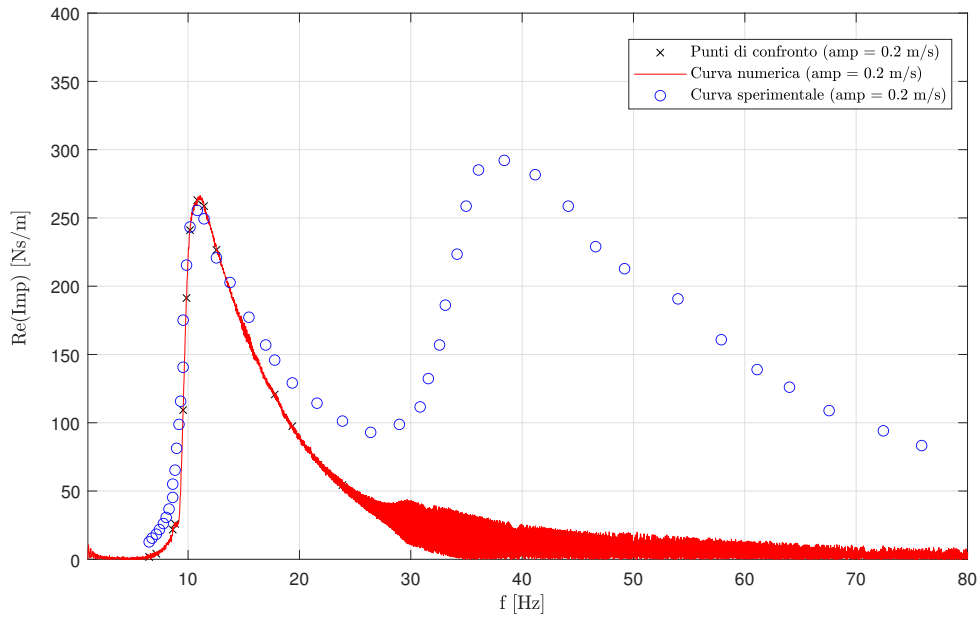


Figura 3.77: Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{max} = 7967.00$ N/m e $k_{min} = 2197.30$ N/m.

Gli esiti di questo primo tentativo di ottimizzazione automatica dei parametri di rigidezza sono stati impiegati a cascata per l'esecuzione di una seconda procedura di calibrazione a due parametri. In questo caso, per restringere gli intervalli all'interno dei quali vada ricercata la soluzione ottimale, si è posto: $k_{min} \in [1500, 2500]$ N/m, $k_{max} \in [7000, 9000]$ N/m, da cui $\mathbf{x}_{min} = [1500, 7000]$ N/m e $\mathbf{x}_{max} = [2500, 9000]$ N/m, $N_{pop} = 20$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 250$, $VTR = 0.4$ e $toll = 10^{-2}$. Sempre con riferimento al set di confronto C_3 e impiegando come valori di riferimento per i parametri variabili gli output dell'ottimizzazione precedente e, pertanto, $\mathbf{IG} = [2197.30, 7967.00]$ N/m, anche in questo caso tutte le 250 iterazioni sono state richieste, dal momento che, ancora una volta, entrambe le condizioni

di convergenza non risultavano soddisfatte. Questo aspetto, riscontrato sia nel caso precedente che in quello presente, è da attribuirsi non tanto al fatto che nessun set soddisfacente sia stato ottenuto, quanto più al fatto che i vincoli posti sulla convergenza, specialmente in termini del parametro VTR , potrebbero essere stati troppo severi; infatti, come si denota da Fig.3.78, riferita all'analisi in esame, pur rimanendo la funzione obiettivo molto maggiore della soglia VTR , ΔF_{obj} si attesta su valori prossimi a quello di $toll$ e pertanto non si è troppo distanti dalla sua convergenza. I risultati ottenuti all'ultima iterazione possono essere dunque considerati del tutto attendibili; nel dettaglio si è ricavato il set costituito da $F_{obj} = 0.5041$, $k_{min} = 1946.767$ N/m e $k_{max} = 7857.615$ N/m, il cui esito in termini di funzione di impedenza, riportato in Fig.3.79, si mostra essere nuovamente in analogia con tutte le tipologie di analisi precedenti.

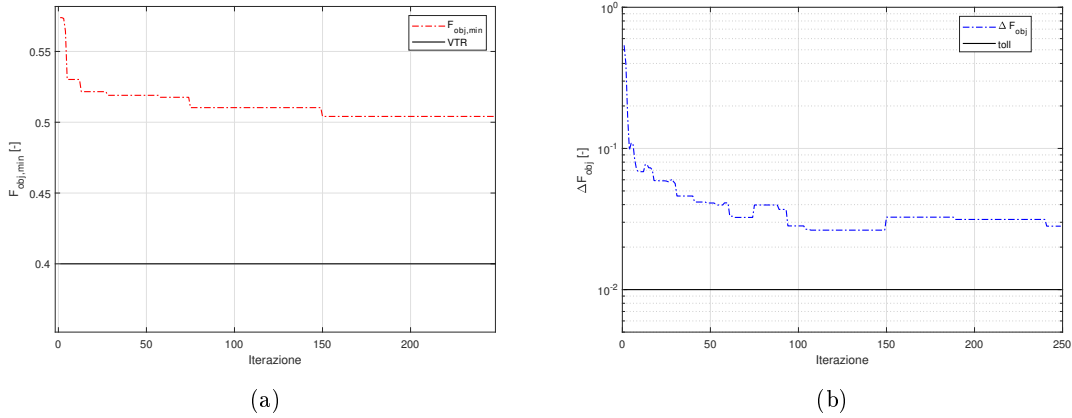


Figura 3.78: Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj} .

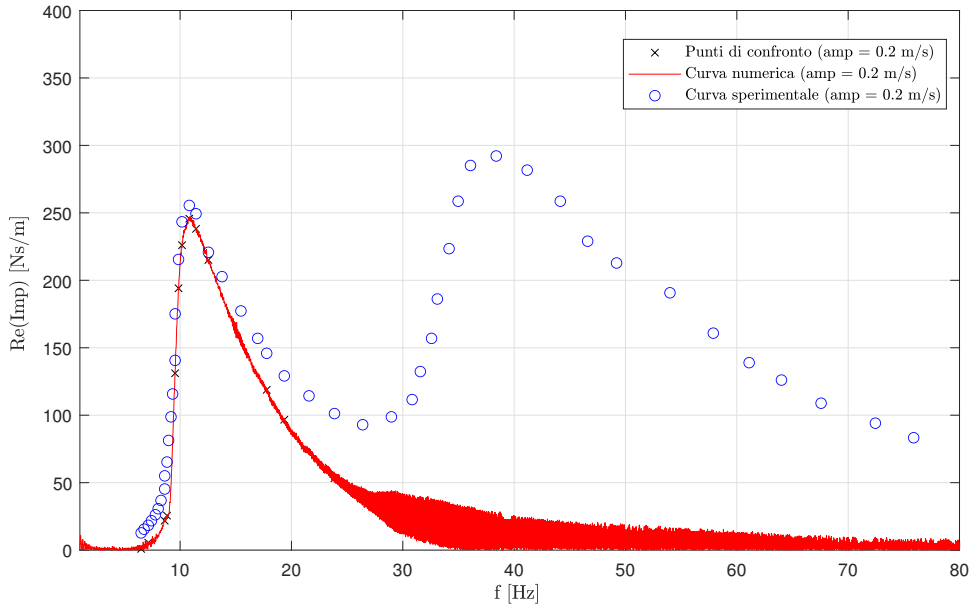


Figura 3.79: Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{max} = 7857.615$ N/m e $k_{min} = 1946.767$ N/m.

Si consideri ora il medesimo sistema isteretico in assenza di smorzamento viscoso e si proceda con il processo di ottimizzazione automatica facendo variare non solo i due parametri di rigidezza k_{min} e k_{max} , ma anche il valore della soglia di snervamento v_0 (mantenendo σ e n unitari). Scegliendo di cercare una soluzione negli intervalli $k_{min} = [10, 5000]$ N/m, $k_{max} = [2500, 12500]$ N/m e $v_0 = [0.00025, 0.005]$ m, gli array \mathbf{x}_{min} e \mathbf{x}_{max} , da fornire in input al software risultano così definiti: $\mathbf{x}_{min} = [10 \text{ N/m}, 2500 \text{ N/m}, 0.00025 \text{ m}]$ e $\mathbf{x}_{max} = [5000 \text{ N/m}, 12500 \text{ N/m}, 0.005 \text{ m}]$. In aggiunta, si assegnano i seguenti valori ai restanti parametri: $N_{pop} = 30$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 250$, $VTR = 0.45$ e $toll = 10^{-2}$; per quanto concerne invece il vettore dei parametri iniziali, su cui fa riferimento la procedura, si impiegano quelli derivanti dalla calibrazione manuale e si definisce quindi $\mathbf{IG} = [2000 \text{ N/m}, 8000 \text{ N/m}, 0.002 \text{ m}]$. Così come osservato per le due analisi di ottimizzazione a 2 parametri, impiegando il modello isteretico di Bouc-Wen, anche in questa circostanza vengono effettuate tutte le 250 iterazioni consentite al termine delle quali si è ottenuto il seguente set di parametri, $k_{min} = 1742.40 \text{ N/m}$, $k_{max} = 7127.99 \text{ N/m}$, $v_0 = 0.002312 \text{ m}$, associato ad un valore della funzione obiettivo F_{obj} pari a 0.4894; la curva di impedenza ottenuta impiegando tali parametri all'interno del modello risulta quella riportata in Fig.3.80.

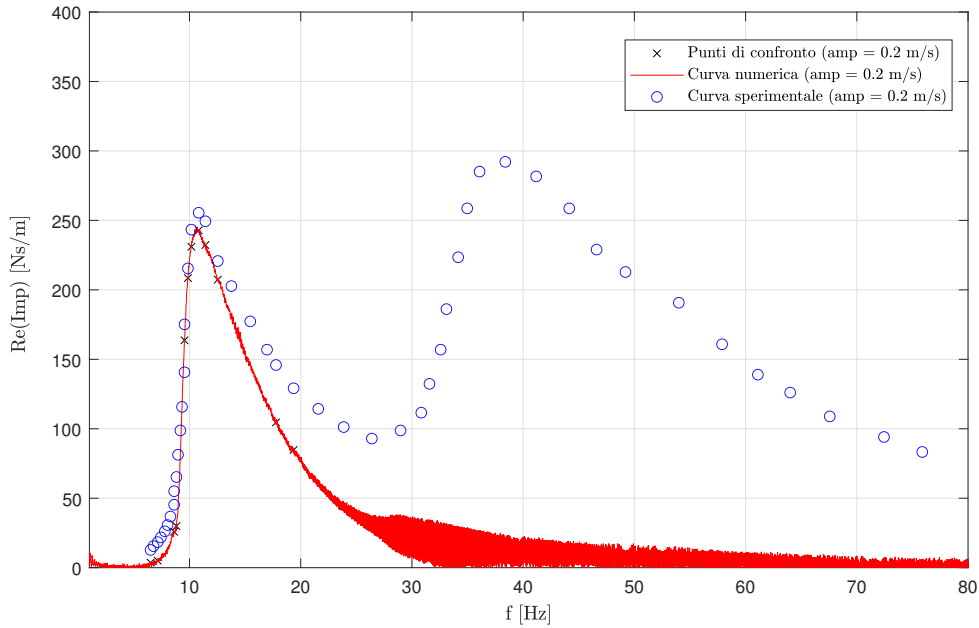


Figura 3.80: Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{min} = 1742.40 \text{ N/m}$, $k_{max} = 7127.99 \text{ N/m}$ e $v_0 = 0.002312 \text{ m}$.

Sulla base degli esiti di quest'ultima analisi di ottimizzazione, viene eseguita a cascata una seconda calibrazione automatica. Si ponga $\mathbf{x}_{min} = [500 \text{ N/m}, 5000 \text{ N/m}, 0.001 \text{ m}]$, $\mathbf{x}_{max} = [3500 \text{ N/m}, 11000 \text{ N/m}, 0.003 \text{ m}]$, $N_{pop} = 30$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 250$, $VTR = 0.30$, $toll = 10^{-2}$ e $\mathbf{IG} = [1742.40 \text{ N/m}, 7127.99 \text{ N/m}, 0.002312 \text{ m}]$. Il set di parametri che minimizza il valore della funzione obiettivo risulta: $k_{min} = 1586.603 \text{ N/m}$, $k_{max} = 6623.309 \text{ N/m}$ e $v_0 = 0.002617 \text{ m}$, a cui è associato un valore $F_{obj} = 0.4692$ e la curva di impedenza riportata in Fig.3.82. Si sottolinea come anche per le due ottimizzazioni eseguite a 3 parametri, pur non essendo stata raggiunta alcuna condizione di convergenza, il valore finale della funzione obiettivo minima si discosta ancora in maniera rilevante da

VTR , mentre ΔF_{obj} risulta prossimo al valore fissato per $toll$; pertanto, si è più vicini al raggiungimento della seconda condizione di convergenza rispetto alla prima. In Fig.3.81 si ha un riscontro di quanto detto relativamente ai risultati della seconda ottimizzazione a 3 parametri.

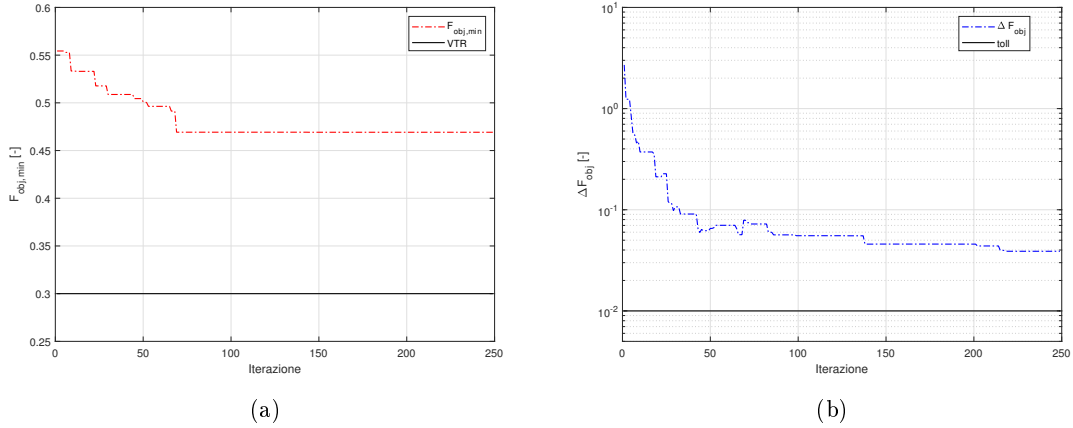


Figura 3.81: Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj} .

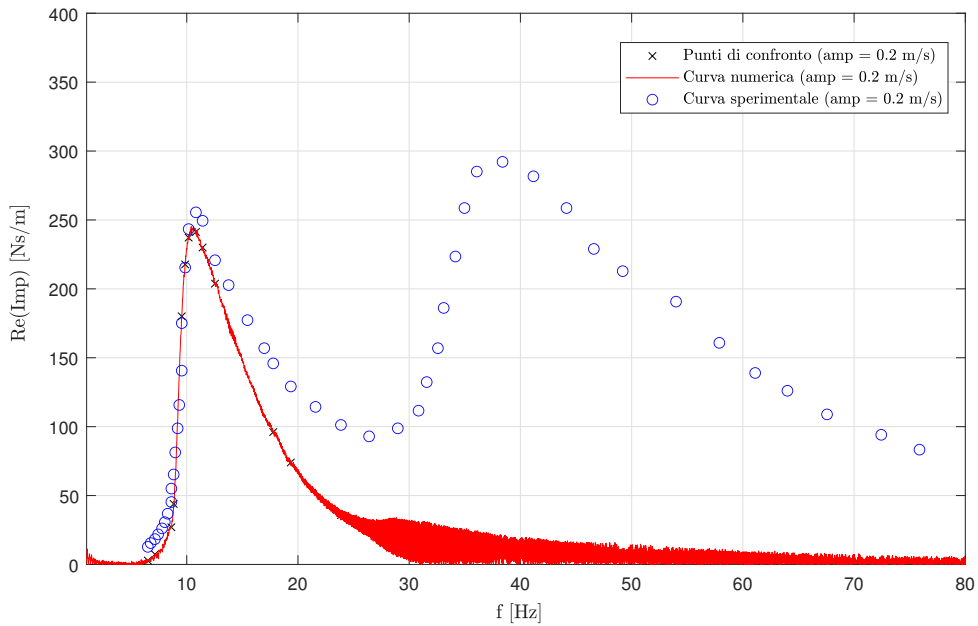


Figura 3.82: Curva di impedenza ricavata sulla base dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione automatica: $k_{min} = 1586.603$ N/m, $k_{max} = 6623.309$ N/m e $v_0 = 0.002617$ m.

Procedura di validazione dei parametri

Dopo aver opportunamente tarato i parametri del modello in modo da riprodurre il primo picco della curva d'impedenza riferita al test ad ampiezza 0.20 m/s, risulta opportuno impostare una procedura di validazione del modello stesso. A tale scopo, può essere utile cercare di riprodurre i risultati della seconda prova sperimentale condotta da Sauter, durante la quale è stato effettuato un test di sweep ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s, mediante uno dei modelli elastici e uno dei modelli isteretici precedentemente calibrati. Si sottolinea come i parametri regolanti le proprietà del cedimento imposto al supporto, ad eccezione dell'ampiezza di velocità, verranno considerati i medesimi del caso precedente. Dal momento che tutti i risultati ottenuti si sono dimostrati piuttosto coerenti in termini di valori da assegnare ai parametri, la scelta di quale set impiegare risulta piuttosto arbitraria; pertanto, a titolo di esempio, si considerano i parametri determinati mediante ottimizzazione automatica per quanto riguarda il caso elastico (i.e. $k = 3708.662$ N/m e $\xi = 0.2478$) e quelli ottenuti a valle dell'ottimizzazione manuale (i.e. $k_{max} = 8000$ N/m, $k_{min} = 2000$ N/m, $v_0 = 0.002$ m e $\sigma = n = 1$) per quanto concerne il modello isteretico di Bouc-Wen in assenza di smorzamento viscoso. Nel caso di sistema modellato linearmente, il confronto tra la curva d'impedenza sperimentale e quella numerica, determinata sulla base dell'impiego dei parametri appena richiamati, risulta quello mostrato in Fig.3.83. Si noti come, nonostante nel caso precedente si fosse riusciti a calibrare i parametri di rigidità e smorzamento viscoso in modo da catturare in maniera ragionevole ampiezza e collocazione del primo picco (si veda Fig.3.76), impiegando il medesimo set di parametri, il modello non sia in grado di riprodurre fedelmente la prima campana di risonanza né in termini di frequenza né in termini di ampiezza, così che la corrispondenza tra esiti numerici e sperimentali risulta pressoché assente. Questo aspetto si pone a conferma del fatto che una modellazione elastica provvista di smorzamento viscoso, come più volte asserito, non sia in alcun modo efficace per l'idealizzazione del comportamento del cavo messaggero, in quanto non consente di considerare il carattere isteretico della risposta, il quale fa sì che l'andamento della funzione d'impedenza dipenda significativamente dalle caratteristiche della sollecitazione (ampiezza del moto imposto alla pinza). Per meglio comprendere quest'ultima considerazione, è possibile far riferimento a Fig.3.84 in cui sono rappresentate le curve d'impedenza sperimentali e numeriche riferite ad entrambi i test. Da essa si evince come le curve sperimentali differiscano tra loro per forma, collocazione e ampiezza dei picchi, mentre quelle numeriche risultano essere sovrapposte; infatti, la natura intrinsecamente non-lineare del sistema, la cui risposta dipende dall'ampiezza dell'input, non è colta in alcun modo da un modello elastico, per quanto finemente calibrato, per il quale la funzione d'impedenza varia solo con la frequenza di eccitazione.

Passando ora alla modellazione isteretica di Bouc-Wen, il tentativo di riproduzione del test ad ampiezza di velocità 0.05 m/s, impiegando il set di parametri precedentemente tarato, porta ai risultati di Fig.3.85. Rispetto al caso elastico, si denota un migliore grado di corrispondenza tra curva numerica e sperimentale, dal momento che, pur essendo stato impiegato un test differente per la calibrazione, la posizione del picco viene ancora colta in maniera ottimale; per quanto concerne la sua ampiezza e la forma, si continua ad osservare un'aderenza sufficiente ai dati sperimentali, pur essendo essa ovviamente inferiore rispetto al caso impiegato per la taratura (si veda Fig.3.39). Da ultimo, con riferimento a Fig.3.86, si evince chiaramente come una modellazione non-lineare del sistema permetta di includere gli effetti *amplitude-dependent* della risposta; infatti, al variare dell'ampiezza di velocità del moto traslazionale imposto al vincolo, le caratteristiche della curva di impedenza numerica variano drasticamente, in scia a ciò che si osserva sperimentalmente. Quest'ultimo aspetto fornisce un'ulteriore conferma della ragionevolezza della scelta di modellare il dissipatore, limitandosi alla descrizione di un'unica coordinata libera, mediante la legge di Bouc-Wen.

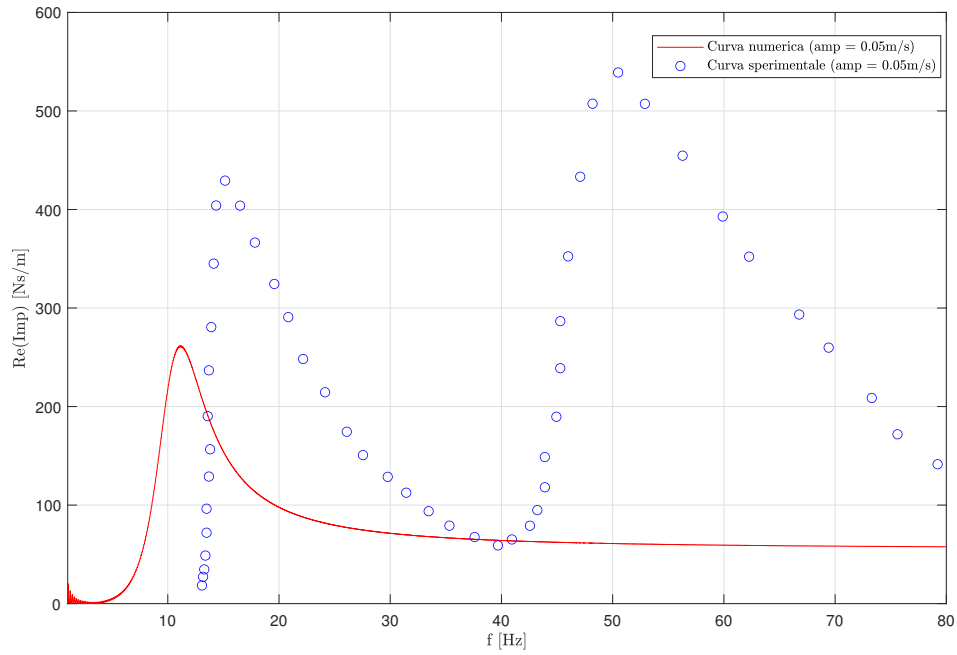


Figura 3.83: Riproduzione della curva d'impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05 m/s mediante modellazione elastica lineare: la calibrazione dei parametri è stata precedentemente effettuata sulla base del test a 0.20 m/s mediante procedura automatica.

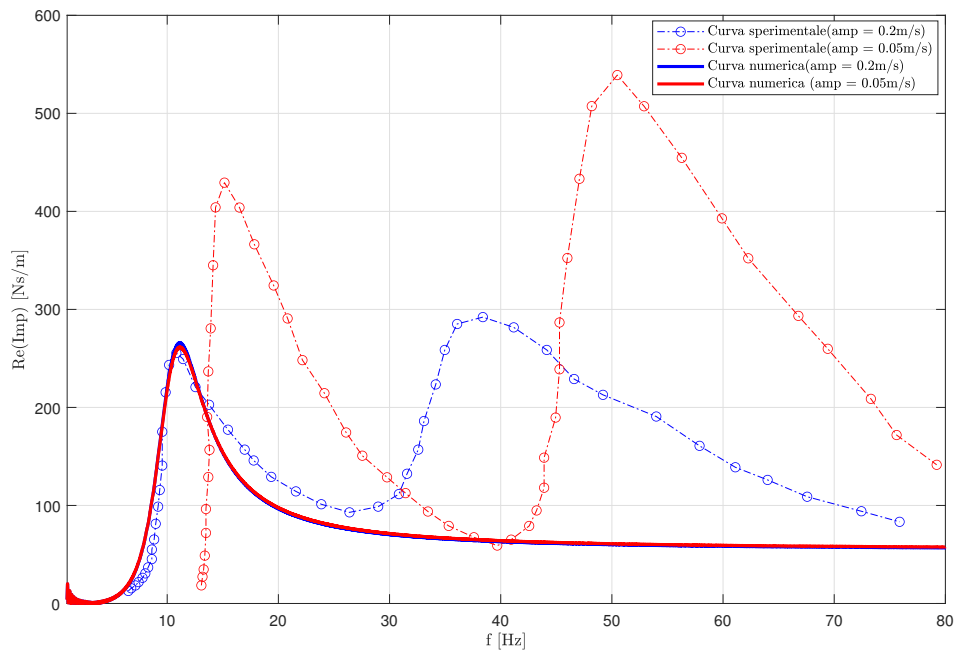


Figura 3.84: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione elastica lineare.

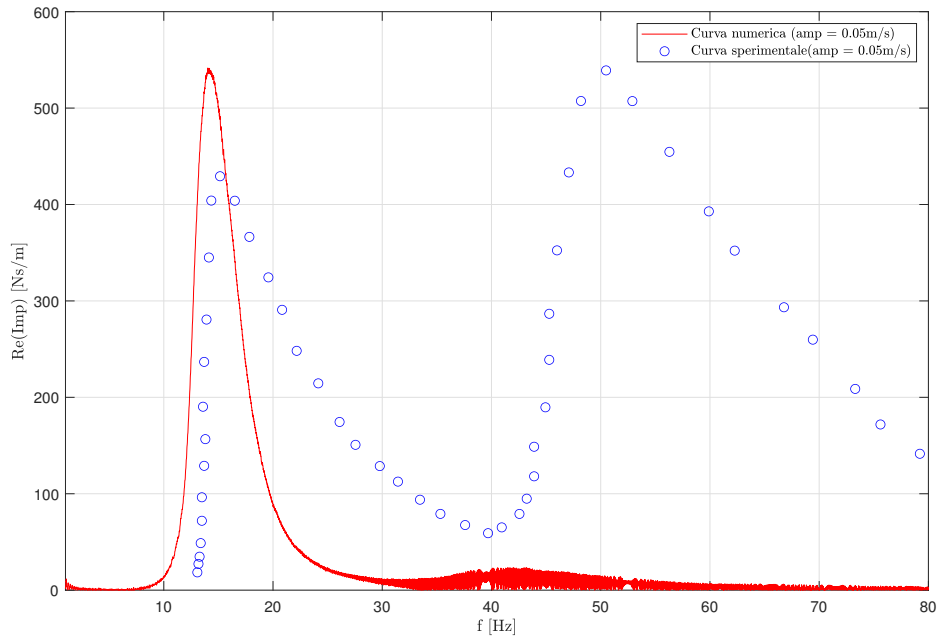


Figura 3.85: Riproduzione della curva d'impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05 m/s mediante modello di Bouc-Wen a 1 grado di libertà: la calibrazione dei parametri è stata precedentemente effettuata sulla base del test a 0.20 m/s mediante procedura manuale.

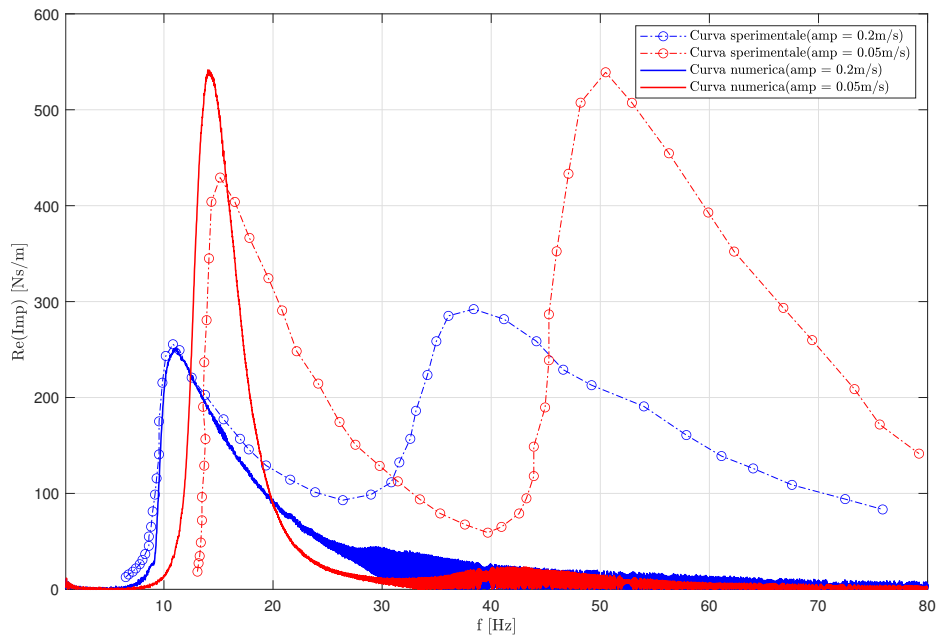


Figura 3.86: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen a 1 grado di libertà.

3.4.3 Riproduzione test di sweep di Langlois ad ampiezza di spostamento costante

Ai fini di mostrare un'applicazione pratica circa il processo di taratura del modello sulla base di un test di sweep in frequenza ad ampiezza di spostamento costante, è possibile cercare di riprodurre numericamente i risultati ottenuti da Langlois e Legeron e riportati in [24]. Anche in questo caso, il test si riferisce ad un dissipatore Stockbridge simmetrico (dissipatore-2R), provvisto di corpi inerziali d'estremità di massa $m = 3.021$ kg, momento d'inerzia baricentrico $I_G = 0.00449$ kgm², eccentricità $e_G = 0.0306$ m, massa della pinza $m_c = 0.534$ kg e lunghezza del cavo messaggero $l = 0.129$ m. A differenza del test di Sauter, si impone, durante la prova, una traslazione verticale del supporto che varia secondo una legge armonica con ampiezza costante e frequenza linearmente crescente nel tempo; più nel dettaglio, sono stati considerati diversi valori di ampiezza del moto pari rispettivamente a 3 mm, 1 mm e 0.2 mm e si è misurata la forza F_d di interazione tra il dissipatore e lo shaker. Con lo scopo di riportare gli esiti sperimentali e di confrontarli con quelli ottenuti attraverso il modello numerico, è stata impiegata un'opportuna funzione di trasferimento \tilde{M} , definita in 3.63, in grado di esprimere la cosiddetta massa dinamica del sistema (peso apparente) al variare della frequenza di vibrazione.

$$\tilde{M}(w_{c0}, \omega) = \frac{\tilde{F}_d(w_{c0}, \omega)}{\tilde{w}_c(w_{c0}, \omega)} \quad (3.63)$$

I risultati sono infine stati espressi in termini di variazione della funzione F_r , definita dalla 3.64, con la frequenza e sono mostrati in Fig.3.87.

$$F_r = F_r(w_{c0}, \omega) = \sqrt{\operatorname{Re}(\tilde{M}(w_{c0}, \omega))^2 + \operatorname{Im}(\tilde{M}(w_{c0}, \omega))^2} w_{c0} \omega^2 \quad (3.64)$$

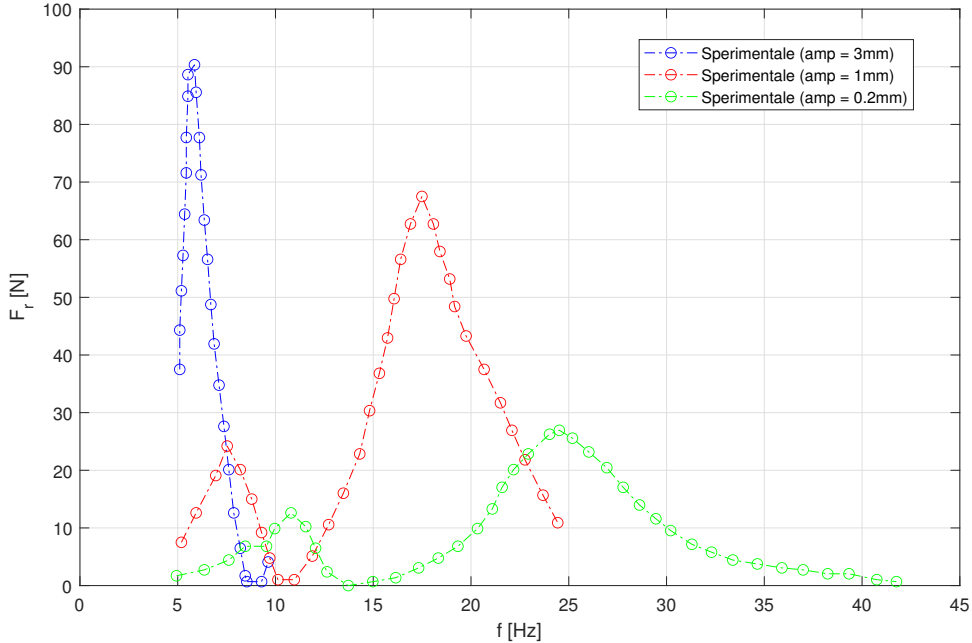


Figura 3.87: Esiti dei test sperimentali di Langlois: forza $F_r = |\tilde{M}|w_{c0}\omega^2$ (si veda 3.64) [24].

Dalla variazione della forma delle curve e della collocazione dei picchi in funzione dell'ampiezza di oscillazione, si evince nuovamente la non-linearità della risposta, la quale necessita dell'impiego di un opportuno modello isteretico; fatta eccezione per il test a 3 mm, per il quale lo sweep è stato effettuato per un range ristretto di frequenze (5-10 Hz), negli altri due casi la presenza di due zone di risonanza è ancora una volta a testimonianza del fatto che un'idealizzazione dell'inerzia discreta a due gradi di libertà risulta del tutto ragionevole.

Per quanto concerne la simulazione numerica della risposta nell'intorno del primo picco, impiegando in una nuova sezione del codice implementato una procedura simile a quella descritta per il caso dei test in velocità e focalizzando l'attenzione, per la taratura dei parametri, al test ad ampiezza 3 mm, più significativo in quanto ampiezze maggiori sono usualmente associate all'attivazione di un maggior grado di non-linearità, sono stati forniti i seguenti dati in ingresso: $w_{c0} = 3$ mm, $f_0 = 0.1$ Hz, $\Delta f = 25$ Hz, $\Delta t = 200$ s e transitorio iniziale di durata 10 s. Sulla base di tali parametri è possibile valutare, anche in questo caso, l'andamento temporale del fattore correttivo della frequenza $r(t)$, definito come $r(t) = \frac{\dot{w}_c(t)}{\dot{w}_c^*(t)}$ e rappresentato in Fig.3.88, da cui si evince come si possa nuovamente porre $r(t) \simeq \text{cost.} = 1.98$.

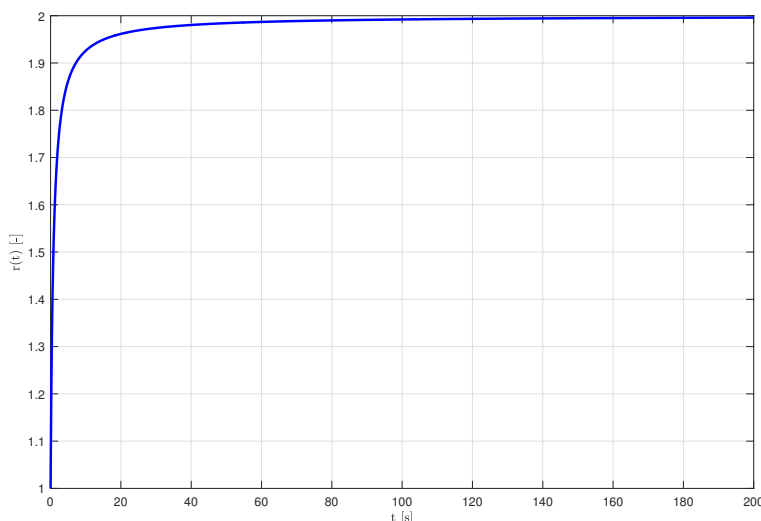


Figura 3.88: Andamento temporale del fattore correttivo $r(t)$ per la riproduzione del test di Langlois di ampiezza 3 mm.

I grafici che riportano l'andamento temporale del cedimento imposto al supporto in termini di spostamento, velocità e accelerazione (in Fig.3.89) possono essere rappresentati una volta definiti i vettori discretizzanti le equazioni 3.53 e 3.54 con passo $\Delta t = 10^{-4}$ s.

La soluzione numerica viene riferita all'intervallo temporale $[0, 100]$ s, pur essendo la durata complessiva del test pari a 200 s, pertanto, stante l'incremento lineare di f , solamente la metà delle frequenze spazzate concorre alla risposta del sistema, la quale si ottiene mediante una procedura del tutto analoga a quella impiegata per la riproduzione del test di Sauter; in questa circostanza si considera però una forzante generalizzata $q(t)$ del tipo in 3.65 e, a valle della valutazione della forza di interazione F_d , si procede al calcolo prima della funzione di trasferimento \tilde{M} , in luogo della funzione di impedenza \tilde{Z}_d , e, successivamente, al calcolo della funzione F_r precedentemente definita, per il confronto tra punti numerici e sperimentali.

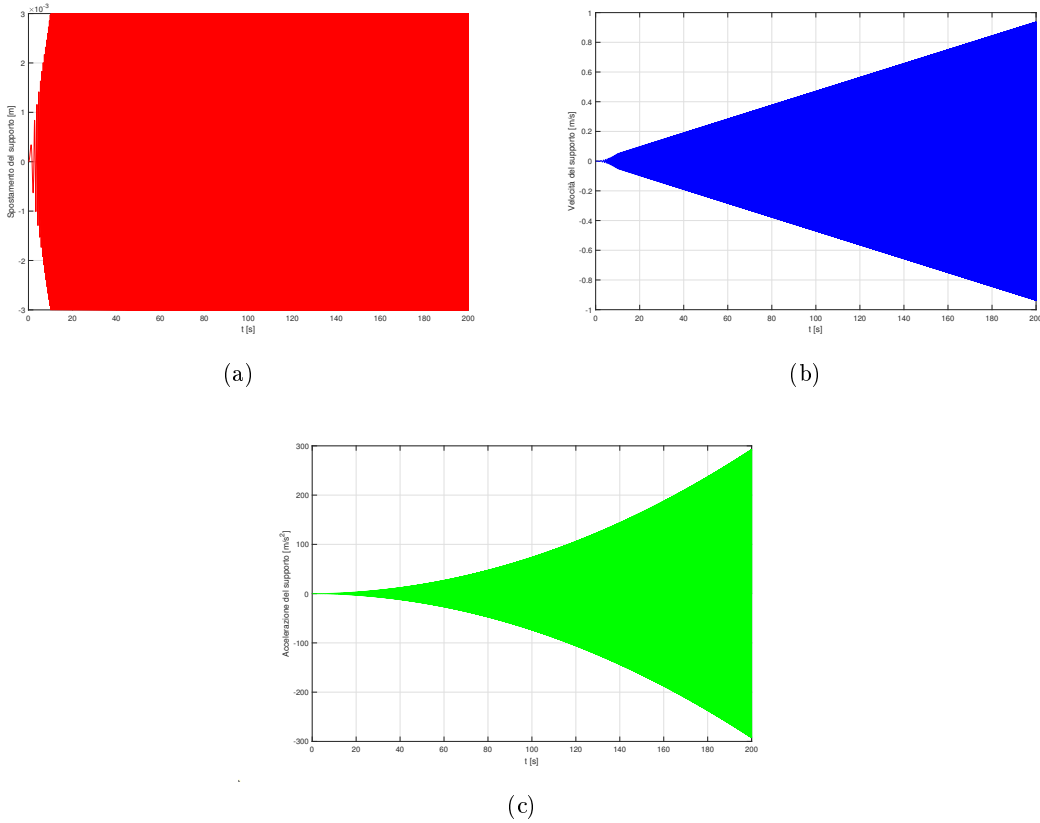


Figura 3.89: (a) Andamento temporale dello spostamento del supporto $w_c(t)$ nel test di Langlois ad ampiezza di spostamento 3 mm; (b) Andamento temporale della velocità del supporto $\dot{w}_c(t)$ nel test di Langlois ad ampiezza di spostamento 3 mm; (c) Andamento temporale dell'accelerazione del supporto $\ddot{w}_c(t)$ nel test di Langlois ad ampiezza di spostamento 3 mm

$$q(t) = -m\ddot{w}_c(t) = m f_{corr} \dot{w}_{c0} (2\pi\bar{r}f)^2 \sin(2\pi ft) \quad (3.65)$$

Procedure di calibrazione dei parametri

Come primo approccio al problema, al pari di quanto effettuato per la simulazione del test di Sauter, è buona norma procedere alla taratura manuale dei parametri del modello, in modo che la curva numerica tenda all'andamento di quella sperimentale. Conservando la validità delle considerazioni effettuate nel caso del test ad ampiezza di velocità costante circa l'influenza dei parametri governanti il modello sull'andamento della soluzione, diversi tentativi di analisi hanno portato all'individuazione di un set ottimale corrispondente ai valori riportati in 3.66:

$$k_{max} = 10500 \text{ N/m}, k_{min} = 3350 \text{ N/m}, v_0 = 0.001 \text{ m}, \sigma = 1, n = 1, \xi = 0.01 \quad (3.66)$$

La curva di risposta associata a tale set, calcolata mediante la sezione preposta del software a partire da condizioni iniziali omogenee, è quella rappresentata in Fig.3.90.

Come si denota da Fig.3.90, la curva numerica in rosso necessita dell'applicazione di un filtro, al fine di stabilizzarne e regolarizzarne l'andamento ottenuto; tale operazione viene realizzata mediante l'impiego di un filtro a media mobile che, considerata una finestra

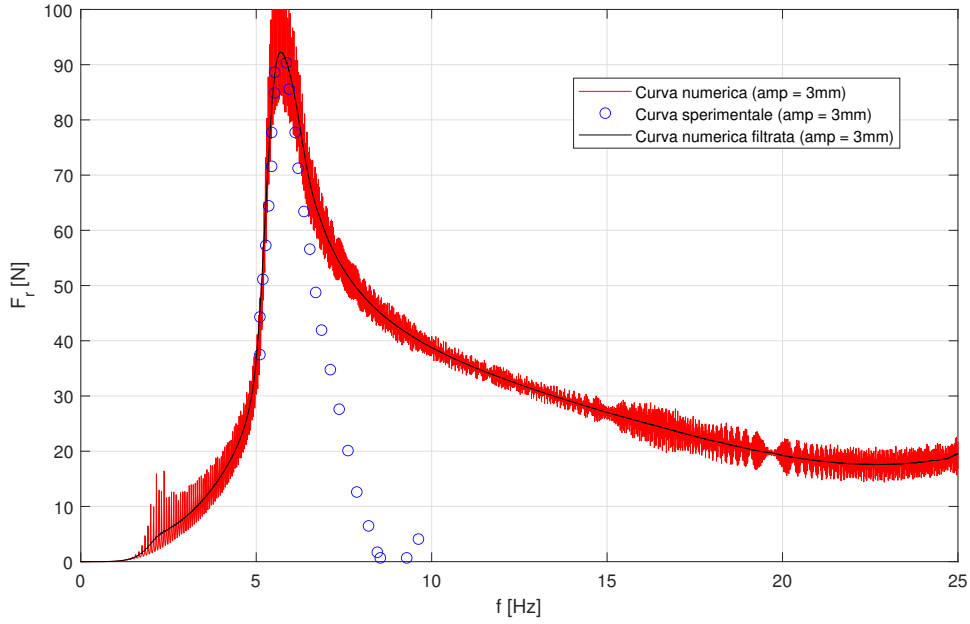


Figura 3.90: Curva di risposta associata al set di parametri definiti in 3.66.

di frequenze $\Delta\bar{f}$, centrata in ogni frequenza analizzata, valuta la funzione F_r in corrispondenza della frequenza stessa come media aritmetica dei valori che il segnale assume nell'intervallo. La curva numerica filtrata è rappresentata in nero. Il set di parametri identificato si dimostra capace di prevedere il comportamento del dissipatore durante il test, per quanto concerne la prima regione di risonanza, con un ottimo grado di corrispondenza: infatti, il ramo ascendente della campana e il vertice della stessa sono riprodotti in maniera soddisfacente. Per quanto concerne la rilevazione del ramo discendente, le curve risultano inizialmente sufficientemente sovrapposte, per poi perdere la corrispondenza all'aumentare della frequenza, dal momento che la curva sperimentale mostra una decisa decrescita, mentre quella numerica è caratterizzata da una pendenza negativa più contenuta. Tuttavia, tale aspetto non mette in discussione la bontà del modello e del set di parametri identificato, ma trova una sua giustificazione teorica nella definizione della funzione F_r che sancisce il confronto. A tal proposito, con riferimento alla definizione in 3.64, è possibile calcolare il limite in 3.67:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} F_r(\omega, w_{c0}) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sqrt{\operatorname{Re}(\tilde{M}(w_{c0}, \omega))^2 + \operatorname{Im}(\tilde{M}(w_{c0}, \omega))^2} w_{c0} \omega^2 = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left| \tilde{M}(w_{c0}, \omega) \right| w_{c0} \omega^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Senza addentrarsi nella determinazione rigorosa del limite, che esula dagli scopi del presente elaborato, è sufficiente limitarsi ad alcune considerazioni di carattere numerico-qualitativo per il calcolo del suo valore. Si noti infatti come, essendo l'ampiezza dello spostamento imposto w_{c0} una costante, l'andamento della funzione F_r al tendere all'infinito della frequenza dipenda unicamente dal prodotto tra il modulo della funzione di trasferimento \tilde{M} e il quadrato della frequenza circolare ω . Con riferimento all'esempio numerico in esame (test di sweep ad ampiezza di spostamento pari a 3mm), il calcolo, ottenuto mediante il codice MATLAB, del modulo di \tilde{M} per elevati valori di frequenza conduce ai risultati mostrati in Fig.3.91, la quale evidenzia la presenza per tale funzione di un ben definito

asintoto orizzontale diverso da zero. Diviene quindi possibile asserire che tale limite, al tendere all'infinito della frequenza, diverge al valore $+\infty$, in quanto prodotto tra due quantità costanti (w_{c0} e $|\tilde{M}|$) e una quantità divergente (ω^2).

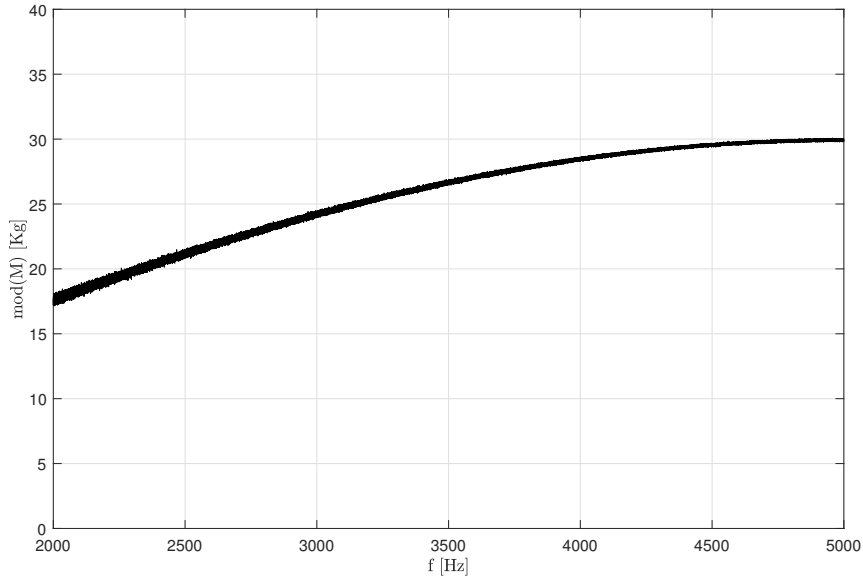


Figura 3.91: Andamento del modulo della funzione di trasferimento \tilde{M} all'aumentare della frequenza.

A valle di questa breve dissertazione, è possibile concludere che la mancanza di corrispondenza evidenziata nel ramo discendente sia dovuta al fatto che, se da un lato la curva sperimentale mostri una tendenza a diminuire per poi risalire in prossimità del secondo picco, la curva numerica, ottenuta a partire da un modello a un grado di libertà, non è in grado di riprodurre una seconda campana di risonanza e, pertanto, esibisce già per i valori di frequenza riportati in Fig.3.90 un andamento che tende lentamente a quello del suo ramo crescente finale. In virtù della sua giustificazione teorica, è possibile dunque prevedere come il fenomeno appena descritto sia una conseguenza intrinseca dell'impiego di un modello a un grado di libertà per il calcolo numerico di F_r , a prescindere dalla bontà del modello stesso e della taratura dei parametri governanti.

Per completezza, anche per questo nuovo test di sweep, si riportano rispettivamente nelle Fig.3.92-3.97 i seguenti grafici: l'andamento temporale della coordinata libera considerata $v(t)$, la variazione, sia in funzione del tempo che della coordinata libera, della variabile isteretica z e della forza di richiamo F e l'andamento temporale della forza trasmessa dal dispositivo al supporto $F_d(t)$.

Secondo quanto già esposto in precedenza, al fine di quantificare la corrispondenza tra le curve e quindi procedere con una calibrazione dei parametri automatica, ci si serve della funzione obiettivo F_{obj} definita in 3.58; l'insieme di punti di confronto considerati viene espresso in 3.68, dove i punti numero 9 e 10 rappresentano il picco della funzione sperimentale F_r . Il corrispondente vettore delle frequenze sperimentali di confronto \mathbf{f}_{C_4} è invece riportato in 3.69.

$$C_4 = [1, 5, 9, 10, 13], \text{ con } p = [0.1, 0.2, 1, 1, 0.2] \quad (3.68)$$

$$\mathbf{f}_{C_4} = [5.10, 5.36, 5.52, 5.86, 6.19] \text{ Hz} \quad (3.69)$$

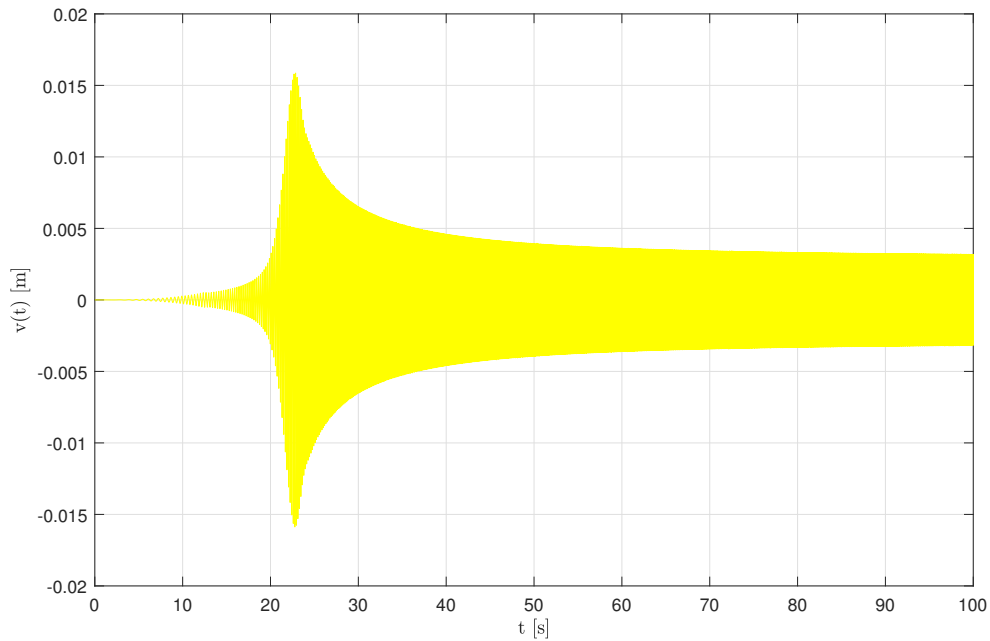


Figura 3.92: Andamento temporale della coordinata libera $v(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.

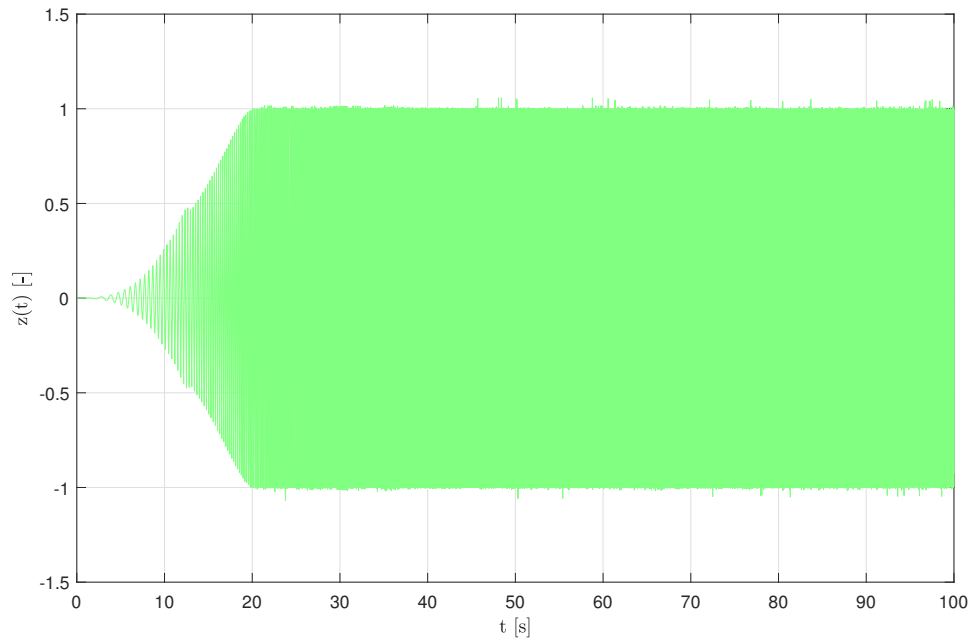


Figura 3.93: Andamento temporale della variabile isteretica $z(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.

Si esegua un'analisi di ottimizzazione, a valle di tutte le considerazioni effettuate per il test di Sauter già analizzato, tenendo fissi la soglia di snervamento $v_0 = 0.001$ m, i parametri $\sigma = n = 1$ e il fattore di smorzamento $\xi = 0.01$; si considerino invece come parametri da calibrare la rigidità elastica pre-snervamento k_{max} e quella post-snervamento k_{min} . Nel

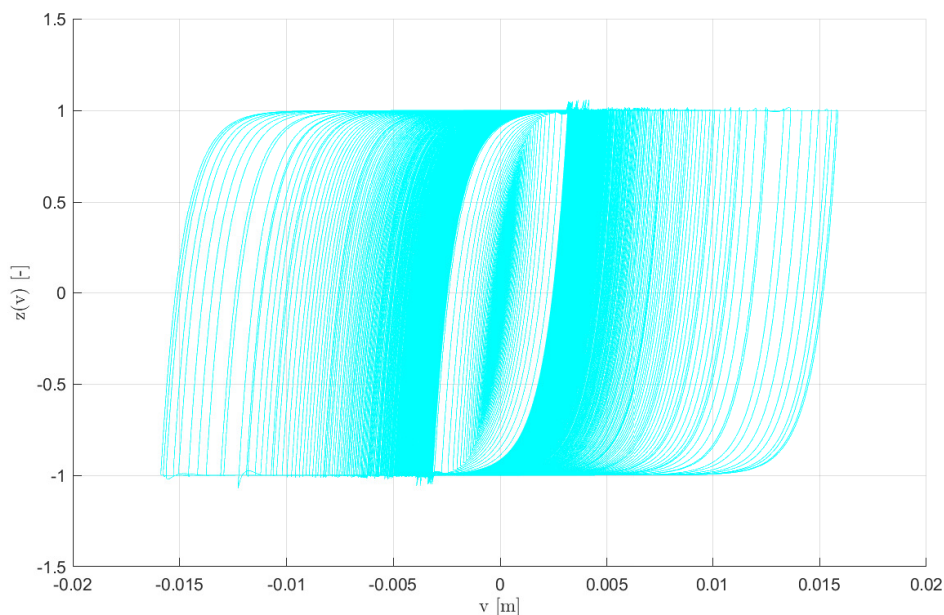


Figura 3.94: Variazione della variabile isteretica z in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.

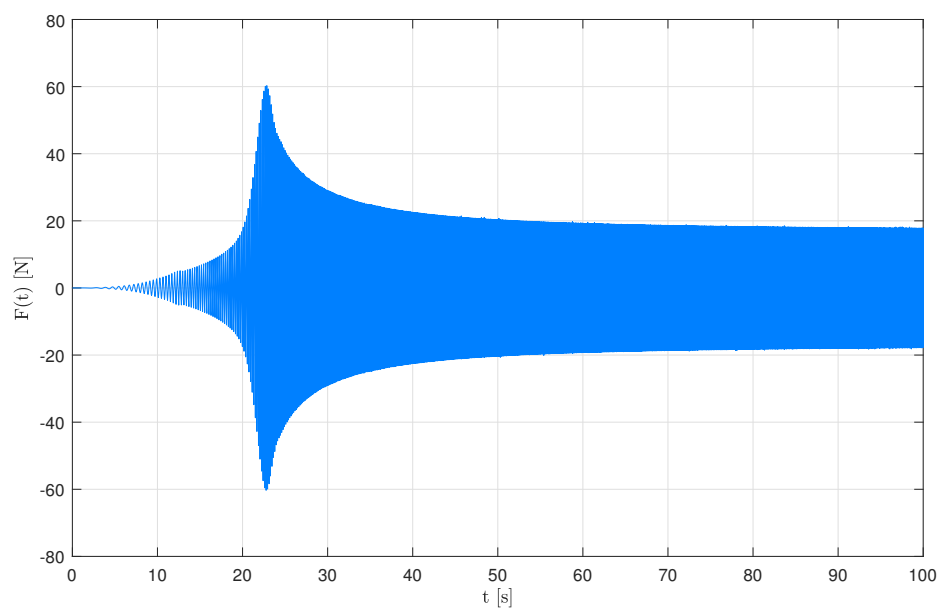


Figura 3.95: Andamento temporale della forza di richiamo $F(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.

dettaglio, si scelga di voler ricercare una soluzione del problema per $k_{min} \in [2000, 4000]$ N/m e $k_{max} \in [8000, 12000]$ N/m: si avrà dunque per il caso in esame $\mathbf{x}_{min} = [2000, 8000]$ N/m e $\mathbf{x}_{max} = [4000, 12000]$ N/m. In aggiunta, si ponga $N_{pop} = 20$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 150$, $VTR = 0.05$, $toll = 10^{-2}$ e $\mathbf{IG} = [3350, 10500]$ N/m. Impiegando quindi il set di punti di confronto C_4 per il calcolo della funzione obiettivo, si raggiunge una condizione di convergenza per soddisfacimento della tolleranza $toll$ dopo 34 iterazioni, come si denota

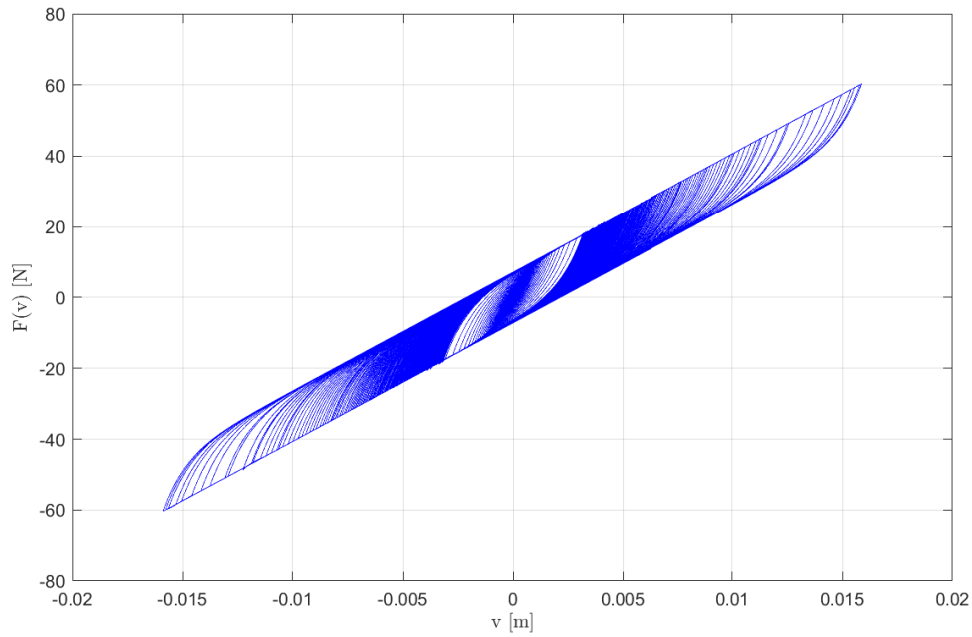


Figura 3.96: Variazione della forza di richiamo F in funzione della coordinata libera, nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.

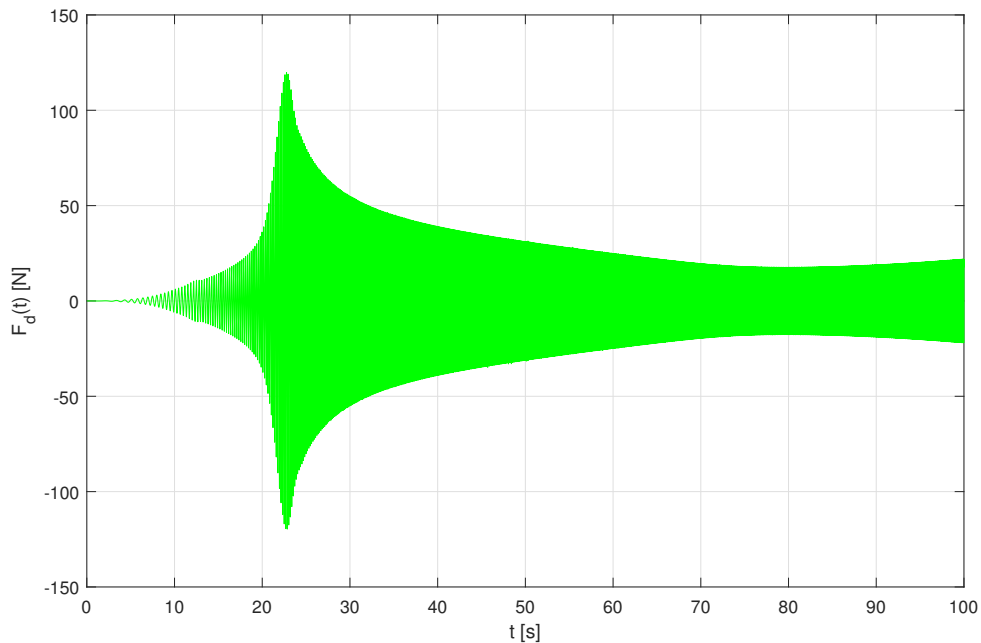


Figura 3.97: Andamento temporale della forza di interazione dispositivo-supporto $F_d(t)$ nel caso di analisi associata al set di parametri definiti in 3.66.

da Fig.3.98, e i valori finali ottenuti rispettivamente per la funzione obiettivo, per il parametro di rigidità pre-snervamento e per quella post-snervamento risultano i seguenti: $F_{obj} = 0.0973$, $k_{max} = 10707.73$ N/m e $k_{min} = 3382.491$ N/m; in Fig.3.99 viene mostrato l'andamento della funzione F_r valutata sulla base di tali parametri appena ricavati.

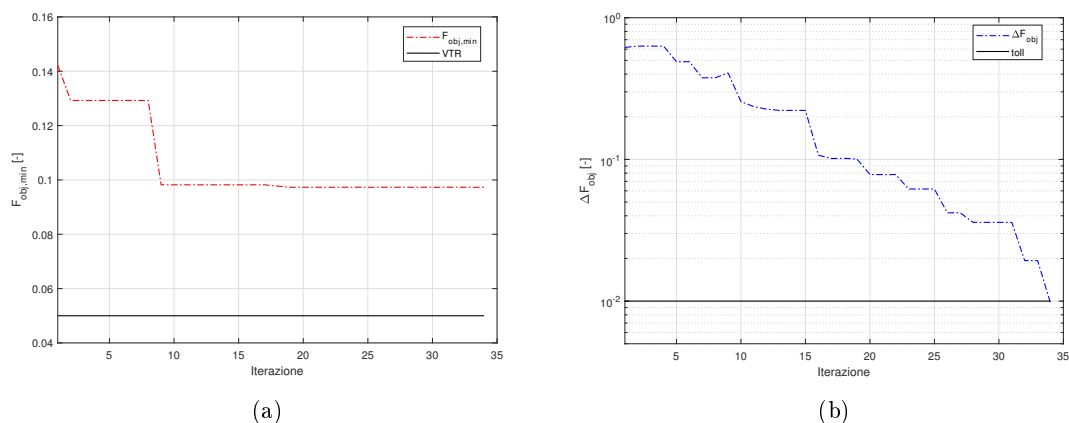


Figura 3.98: Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj} .

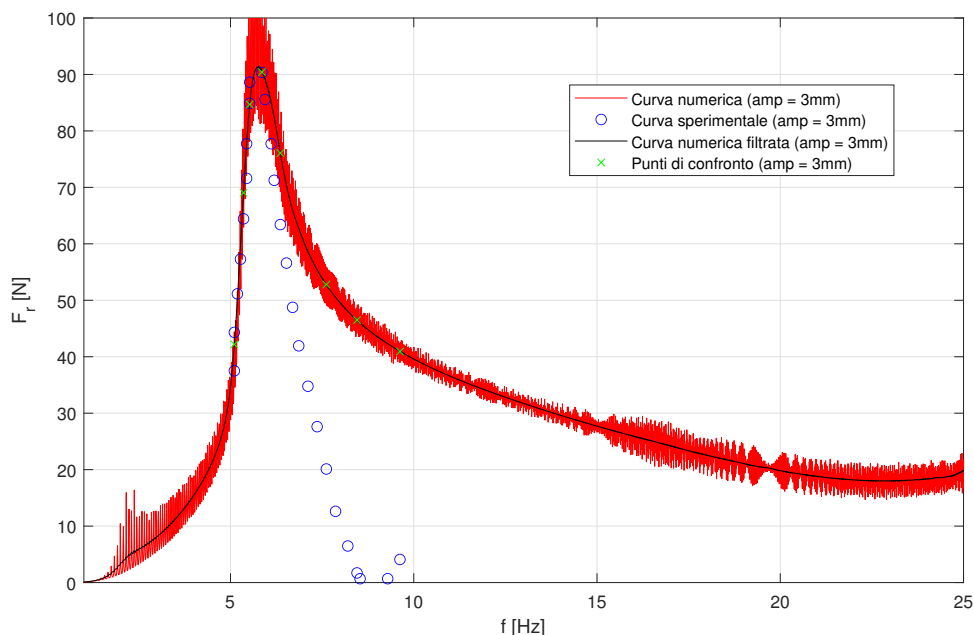


Figura 3.99: Curva di risposta associata al set di parametri ricavati dalla procedura di calibrazione automatica.

Anche per questa analisi di ottimizzazione non vengono riportate le figure degli andamenti delle funzioni v , z , F e F_d , in quanto risultano molto simili a quelle riportate nelle Fig.3.92-3.97 per il caso di calibrazione manuale dei parametri.

Procedura di validazione dei parametri

Anche nel caso dei test effettuati da Langlois ad ampiezza di spostamento costante, risulta necessario effettuare la validazione del modello isteretico di Bouc-Wen cercando di riprodurre la curva di risposta per il test a 1 mm, dopo aver tarato i parametri sulla base del test a 3 mm, secondo quanto già discusso. Si sottolinea come la scelta di eseguire il processo di taratura con riferimento al test ad ampiezza di spostamento massima trova una sua giustificazione nel fatto che, in tale circostanza, il sistema risulta maggiormente sollecitato

e, di conseguenza, le non-linearità della risposta emergono in maniera più netta e definita: pertanto, i valori che si attribuiscono ai parametri acquisiscono con tutta ragionevolezza un maggior livello di attendibilità. Il set di parametri adottato per la validazione si identifica con quello determinato mediante la procedura di ottimizzazione manuale precedentemente discussa; in particolare si era ottenuto: $k_{max} = 10500$ N/m, $k_{min} = 3350$ N/m, $v_0 = 0.001$ m e $\sigma = n = 1$. Calcolando numericamente la risposta del sistema, in termini di variazione della funzione F_r con la frequenza, a un test di sweep caratterizzato da parametri identici al precedente ($w_{c0} = 3$ mm), ma condotto con ampiezze di spostamento pari a $w_{c0} = 1$ mm, si ottiene l'andamento rappresentato in Fig.3.100. Come per la validazione del test di Sauter ad ampiezza di velocità costante, anche in questo caso si osserva un buon grado di aderenza tra i punti sperimentali e la curva numerica, facendo riferimento alla posizione e all'ampiezza del picco; per quanto concerne la forma della campana, questa risulta ben riprodotta nel ramo ascendente e nell'intorno del vertice, mentre la corrispondenza svanisce con riferimento al ramo discendente. Tuttavia, questa problematica, secondo quanto già discusso, viene a dipendere solo in maniera limitata dalla bontà della scelta dei parametri, in quanto consegue principalmente dal fatto che la modellazione attuata prevede la presenza di un unico grado di libertà e dal comportamento divergente di F_r per alti valori di frequenza.

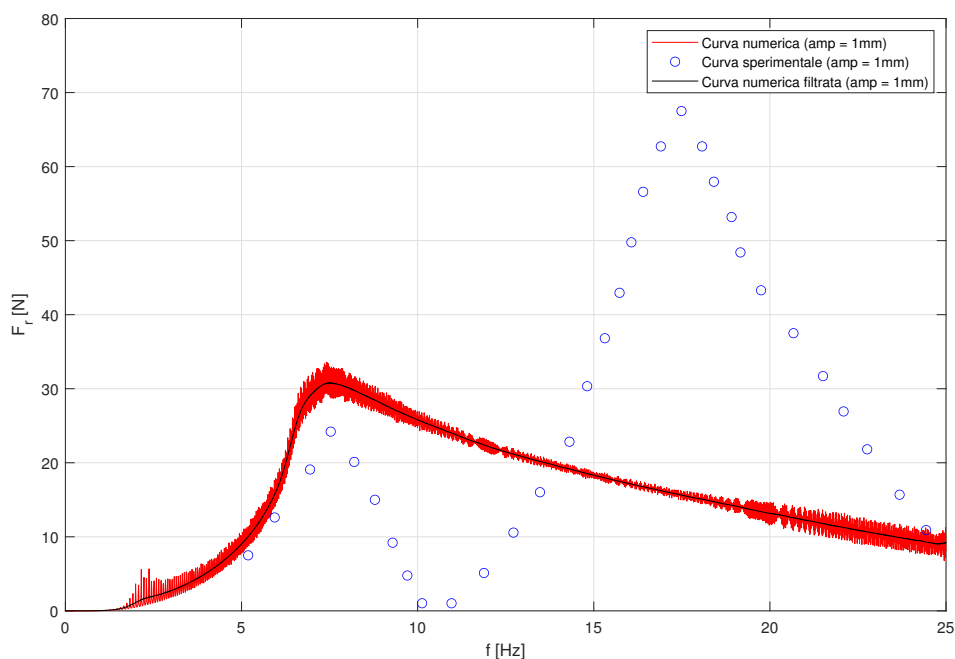


Figura 3.100: Riproduzione della curva di risposta F_r riferita al test ad ampiezza di spostamento pari a 1 mm mediante modello di Bouc-Wen a un grado di libertà: la calibrazione dei parametri è stata precedentemente effettuata sulla base del test a 3 mm mediante procedura manuale.

Anche in questa circostanza, la non-linearità e il comportamento *amplitude-dependent* del sistema sono ben colti dalla tecnica di modellazione impiegata, in quanto, come si evince da Fig.3.101, si ottiene una variazione dell'andamento della curva numerica di risposta con l'ampiezza del moto imposto alla pinza e una forma sostanzialmente asimmetrica del picco di risonanza, in perfetto accordo con gli esiti sperimentali. Come considerazione conclusiva, è possibile notare che, nel caso di test di sweep ad ampiezza di spostamento costante, risulta

più semplice ottenere un buon grado di corrispondenza con i dati sperimentali rispetto ai test ad ampiezza di velocità costante, in quanto, in quest'ultimo caso, si è in presenza di una variazione continua dell'ampiezza della sollecitazione durante l'esecuzione del test. Se da un lato questa variazione di ampiezza comporta una maggiore difficoltà nel processo di taratura dei parametri, dall'altro fa sì che il modello, se opportunamente calibrato, risulterà più sensibile e abile nel catturare la dipendenza della risposta dall'ampiezza della sollecitazione applicata.

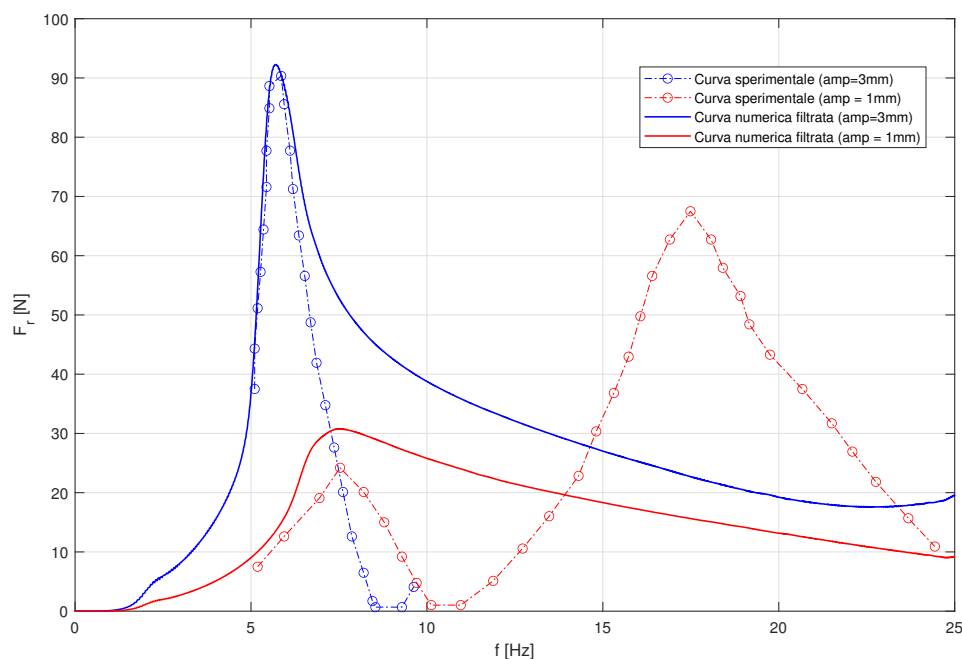


Figura 3.101: Rappresentazione e confronto tra le curve di risposta F_r sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen a un grado di libertà.

3.5 Il modello isteretico di Bouc-Wen a 5 parametri con grado di libertà rotazionale

Dopo aver esaminato il caso di oscillatore discreto ad un grado di libertà traslazionale ed aver cercato di calibrarne adeguatamente i parametri, al fine di cogliere in maniera soddisfacente il primo picco delle generiche funzioni di trasferimento considerate, si mostra ora come la modellazione attuata possa essere impiegata anche per riprodurre la risposta del sistema in corrispondenza della seconda zona di risonanza, associata al grado di libertà rotazionale; si consideri quindi l'oscillatore discreto rappresentato in Fig.3.102, in cui l'elemento a deformabilità concentrata descrive l'interazione della massa con il cavo messaggero del dispositivo.

Come già definito al Par.3.1, il cavo messaggero presenta un comportamento altamente isteretico e non-lineare; per tale motivo si è deciso di adottare il modello dissipativo di Bouc-Wen anche per definire il momento di interazione tra il cavo stesso e il corpo inerziale. L'espressione del momento di richiamo $M(t)$, riportata in 3.70, mostra una dipendenza

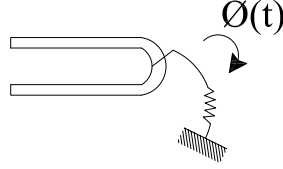


Figura 3.102: Modello discreto a un grado di libertà (rotazionale) del sistema cavo messaggero + massa.

dello stesso dalla coordinata libera rotazionale $\phi(t)$ e dalla variabile isteretica adimensionale $z(t)$.

$$\begin{aligned} M(t) &= k_{min}\phi(t) + (k_{max} - k_{min})\phi_0 z(t) \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{\phi_0} \left(\dot{\phi}(t) - \sigma \left| \dot{\phi}(t) \right| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1)\dot{\phi}(t) |z(t)|^n \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

I parametri k_{max} , k_{min} e ϕ_0 rappresentano rispettivamente la rigidità elastica rotazionale pre-snervamento, la rigidità rotazionale post-snervamento e la rotazione in corrispondenza dello stato di snervamento; σ ed n assumono lo stesso significato descritto al Par.3.1.

Si prenda ora in considerazione il test di sweep eseguito da Sauter ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s, il cui risultato viene rappresentato, in termini di funzione di impedenza del sistema, dalla curva blu di Fig.3.36. Prima di addentrarsi nel calcolo numerico di tale funzione, definita come in 3.41, risulta necessario determinare compiutamente il moto delle masse e conseguentemente l'andamento della forza di interazione cavo-smorzatore $F_d(t)$; il sistema di equazioni governanti il problema (dissipatore Stockbridge simmetrico in assenza di rotazione alla pinza) è quello descritto nella 3.71.

$$\begin{aligned} M(t) &= k_{min}\phi(t) + (k_{max} - k_{min})\phi_0 z(t) \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{\phi_0} \left(\dot{\phi}(t) - \sigma \left| \dot{\phi}(t) \right| |z(t)|^{n-1} z(t) + (\sigma - 1)\dot{\phi}(t) |z(t)|^n \right) \\ \lambda \ddot{\phi}(t) + c\dot{\phi}(t) + M(t) &= me_G \ddot{w}_c(t) \\ F_d(t) &= (2m + m_c)\ddot{w}_c(t) - 2me_G \ddot{\phi}(t) \end{aligned} \quad (3.71)$$

dove il termine $\lambda = I_G + me_G$, con I_G momento di inerzia della massa attorno al baricentro ed e_G eccentricità tra il punto di attacco cavo messaggero-corpo inerziale e baricentro del corpo stesso; nel dettaglio, il dispositivo impiegato da Sauter durante la sua campagna sperimentale risultava caratterizzato dai seguenti parametri: $I_G = 0.001814 \text{ kgm}^2$, $e_G = 0.0325 \text{ m}$.

In questa circostanza, ci si è limitati a ricavare un set plausibile di parametri del modello, che permettesse di riprodurre in maniera adeguata il secondo picco della funzione di impedenza, mediante la procedura di calibrazione manuale; nello specifico, il set individuato risulta il seguente: $k_{min} = 68.5 \text{ Nm}$, $k_{max} = 275 \text{ Nm}$ e $\phi_0 = 0.0075 \text{ rad}$ e $\sigma = n = 1$. Inoltre, gli altri parametri da fornire in input al codice MATLAB risultano: intervallo di integrazione $[t_0, t_f] = [0, 100] \text{ s}$ con discretizzazione di passo $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$, condizioni iniziali omogenee ($\phi(t_0) = 0 \text{ rad}$, $\dot{\phi}(t_0) = 0 \text{ rad/s}$, $z(t_0) = 0$), fattore di smorzamento viscoso $\xi = \frac{c}{2\sqrt{k_{max}\lambda}} = 0$ e input di sweep vettoriale caratterizzato in maniera analoga al caso del primo picco. La curva di impedenza associata a questo set di parametri è rappresentata in Fig.3.103.

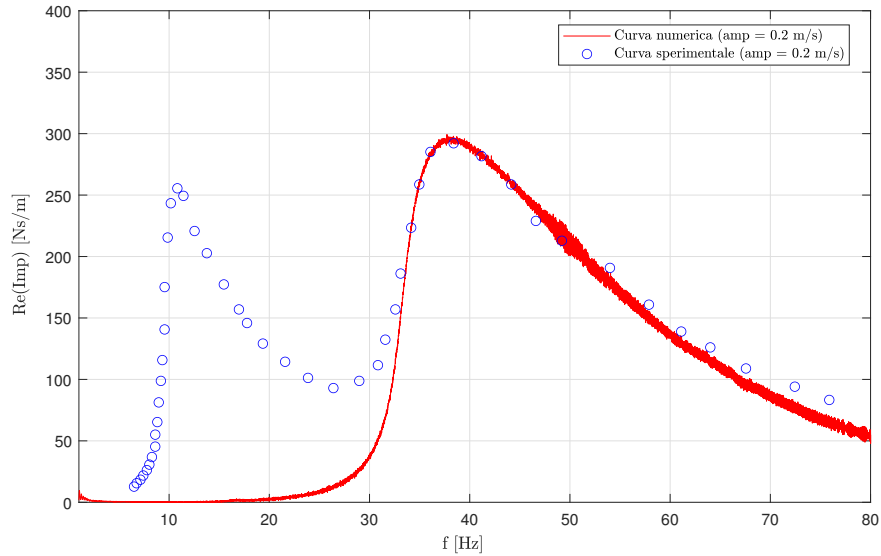


Figura 3.103: Curva di impedenza numerica ricavata per cercare di catturare il secondo picco della medesima funzione sperimentale.

Come si può facilmente osservare da Fig.3.103, la posizione del picco, ricavato numericamente, in termini di frequenza, e anche la sua ampiezza coincidono con le medesime grandezze sperimentali; in aggiunta, l'intero andamento della campana numerica è molto simile a quello della sua controparte sperimentale.

Seguendo lo stesso schema di ragionamento impiegato per l'analisi della risposta traslazionale, si riporta in Fig.3.104 la validazione del modello effettuata sulla base del test a 0.05 m/s.

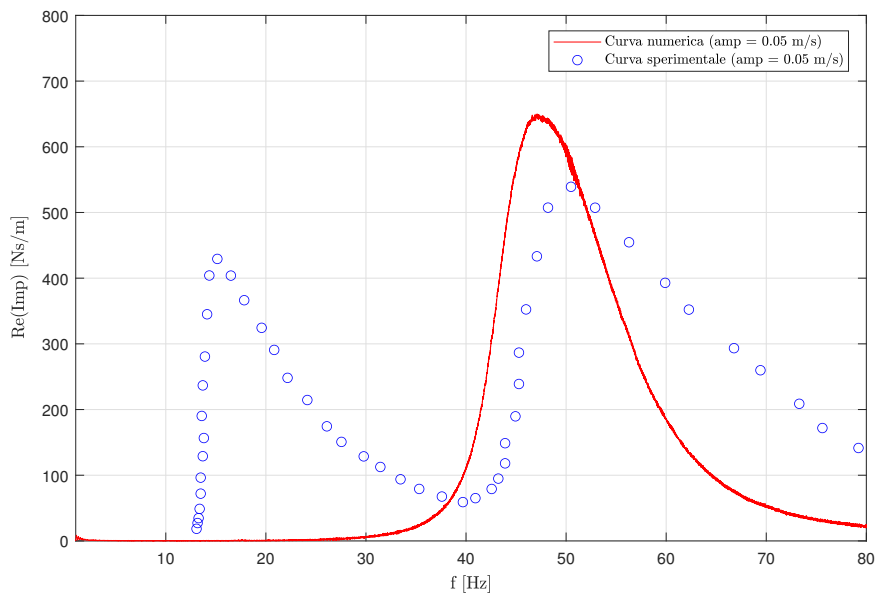


Figura 3.104: Riproduzione della curva d'impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05 m/s mediante modello di Bouc-Wen a un grado di libertà rotazionale.

Anche in questo caso, si ha una ragionevole riproduzione dei dati sperimentali, così come del comportamento isteretico del dispositivo, che si evince dalla modifica dell'andamento della funzione di impedenza, in termini di forma, ampiezza e collocazione del picco, al variare dell'ampiezza dell'input.

Si è giunti quindi alla conclusione che, mediante una semplice modellazione discreta a un grado di libertà, che sia esso di natura traslazionale o rotazionale, risulta possibile ricavare dei set di parametri del modello che permettono di riprodurre adeguatamente la risposta del sistema in corrispondenza di una sola zona di risonanza. Si noti come il fatto che un'opportuna taratura dei parametri governanti il comportamento della coordinata v permetta di cogliere la prima campana modale, così come quelli governanti il comportamento della coordinata ϕ permettano invece di cogliere la seconda, conferma le evidenze sperimentali circa la natura principalmente traslazionale del primo modo e quella prevalentemente rotazionale del secondo; nonostante questo, le due coordinate lagrangiane non risultano ortogonali tra loro e dunque, come verrà esposto in seguito, vi è sempre un'influenza di v sul secondo picco e di ϕ sul primo.

Da ultimo, si ricorda come, se si volesse cogliere la risposta del sistema in tutto lo spettro di frequenze testato e quindi cercando di riprodurre entrambi i picchi che caratterizzano il comportamento del dispositivo, risulti necessario estendere la trattazione ad un sistema a due gradi di libertà, approfondita nei capitoli seguenti.

Capitolo 4

MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

Nel capitolo precedente, è stata introdotta una tecnica di modellazione discreta ad un grado di libertà del dispositivo, capace di descrivere il comportamento costitutivo dei cavi messaggeri in presenza di un moto puramente traslazionale o rotazionale delle masse di estremità. Secondo quanto già accennato, al fine di cogliere la risposta complessiva del sistema, si necessita, a questo punto della trattazione, di disporre di un opportuno modello a più coordinate libere che si proponga come valida alternativa ai metodi di idealizzazione presenti in letteratura e ampiamente discussi al Par.2.2. Nello specifico, essi risultano spesso piuttosto complessi e di difficile calibrazione, stante la raffinata modellazione (continua o ad elementi finiti) delle proprietà di rigidità e dissipazione del dispositivo. E' in tale contesto che si inserisce il tentativo, effettuato nel presente capitolo, di impiegare per gli stessi scopi una descrizione a deformabilità concentrata dell'interazione tra i blocchi inerziali e i cavi messaggeri. In particolare, nei paragrafi seguenti, verranno dapprima evidenziati i limiti di una modellazione elastica del sistema e successivamente si considererà un'estensione del modello di Bouc-Wen ad un grado di libertà, sia in assenza che in presenza di accoppiamento a livello inerziale e di proprietà di rigidità delle coordinate libere lagrangiane.

4.1 Il modello isteretico a due gradi di libertà in presenza di solo accoppiamento inerziale

Si consideri l'oscillatore discreto a due gradi di libertà rappresentato in Fig.4.1, in grado di descrivere la traslazione $v(t)$ della massa inerziale in corrispondenza del punto di attacco con il cavo messaggero e la sua rotazione in piano $\phi(t)$ intorno al medesimo punto; l'interazione con il cavo stesso è idealizzata tramite la presenza di due elementi a deformabilità concentrata.

Estendendo al caso del sistema in esame le considerazioni effettuate al Par.3.1, è possibile adottare il modello isteretico di Bouc-Wen, nella sua descrizione a cinque parametri, per caratterizzare il comportamento costitutivo del sistema con riferimento a ciascuna coordinata libera. Di conseguenza, le variazioni della forza e del momento di richiamo esercitate dal cavo messaggero sulla massa, in funzione della traslazione v e della rotazione ϕ del-

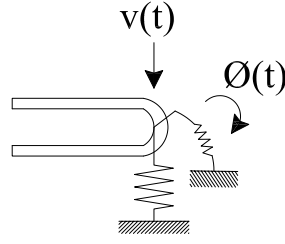


Figura 4.1: Modello discreto a 2 gradi di libertà del sistema cavo messaggero + massa.

la stessa, sono espresse rispettivamente in 4.1 e 4.2, a valle della definizione dei set di parametri $P_v = \{k_{max,v}, k_{min,v}, v_0, \sigma_v, n_v\}$ e $P_\phi = \{k_{max,\phi}, k_{min,\phi}, \phi_0, \sigma_\phi, n_\phi\}$.

$$F(t) = k_{min,v}v(t) + (k_{max,v} - k_{min,v})v_0z_v(t)$$

$$\dot{z}_v(t) = \frac{1}{v_0} \left(\dot{v}(t) - \sigma_v |\dot{v}(t)| |z_v(t)|^{n_v-1} z_v(t) + (\sigma_v - 1)\dot{v}(t) |z_v(t)|^{n_v} \right) \quad (4.1)$$

$$M(t) = k_{min,\phi}\phi(t) + (k_{max,\phi} - k_{min,\phi})\phi_0z_\phi(t)$$

$$\dot{z}_\phi(t) = \frac{1}{\phi_0} \left(\dot{\phi}(t) - \sigma_\phi |\dot{\phi}(t)| |z_\phi(t)|^{n_\phi-1} z_\phi(t) + (\sigma_\phi - 1)\dot{\phi}(t) |z_\phi(t)|^{n_\phi} \right) \quad (4.2)$$

Si sottolinea come il dominio di definizione di ciascuno dei set P_v e P_ϕ , il significato fisico associato ai parametri e tutte le proprietà del modello, come quelle riguardanti la definizione della rigidità tangente, rimangono gli stessi del caso ad un grado di libertà e possono pertanto essere dedotti dalle considerazioni effettuate al Par.3.5. Una modellazione di questo tipo considera le proprietà di rigidità così come quelle di evoluzione del comportamento isteretico associate a ciascun grado di libertà tra loro indipendenti, mentre come verrà esplicitato nel seguito, il sistema presenterà un fisiologico accoppiamento a livello inerziale tra le coordinate libere.

4.2 Calcolo della risposta del sistema per un assegnato stato di sollecitazione

Si consideri l'applicazione di un sistema di forzanti esterne, le cui componenti generalizzate associate si identificano con le espressioni $q_v(t)$ e $q_\phi(t)$: in questa circostanza, le incognite del problema risultano essere l'evoluzione temporale della traslazione $v(t)$ e della rotazione $\phi(t)$ della massa, gli andamenti delle variabili isteretiche $z_v(t)$ e $z_\phi(t)$ e le forze generalizzate di interazione $F(t)$ e $M(t)$, mentre le equazioni governanti il problema risultano quelle espresse in 4.1, 4.2 e 4.3, in cui le equazioni di moto (in 4.3) sono state ottenute a partire dalle 2.5, generalizzando l'espressione delle sollecitazioni.

$$m\ddot{v}(t) - me_G\ddot{\phi}(t) + c_v\dot{v}(t) + F(t) = q_v(t)$$

$$-me_G\ddot{v}(t) + \lambda\ddot{\phi}(t) + c_\phi\dot{\phi}(t) + M(t) = q_\phi(t) \quad (4.3)$$

dove $\lambda = (I_G + me_G^2)$, $c_v = 2\xi_v\sqrt{k_{max,v}m}$ e $c_\phi = 2\xi_\phi\sqrt{k_{max,\phi}\lambda}$. Le equazioni di moto possono alternativamente essere scritte in forma matriciale come segue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{R}(t) = \mathbf{q}(t) \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} m_d & -m_d e_{Gd} \\ -m_d e_{Gd} & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}(t) \\ \ddot{\phi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_v & 0 \\ 0 & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_v(t) \\ q_\phi(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Come si può osservare, avendo disaccoppiato nel modello le proprietà di rigidità e dissipazione, sia viscosa che isteretica, l'interazione tra le due coordinate libere v e ϕ è espressa solamente dai termini extra-diagonali della matrice di massa. Anche in questo caso, l'imposizione di opportune condizioni iniziali, che esprimono lo stato del sistema all'istante $t = t_0$, risultano propedeutiche alla soluzione del problema; in particolare, si pone $v(t_0) = v^*$, $\dot{v}(t_0) = \dot{v}^*$, $z_v(t_0) = z_v^*$, $\phi(t_0) = \phi^*$, $\dot{\phi}(t_0) = \dot{\phi}^*$, $z_\phi(t_0) = z_\phi^*$.

Come per il caso del modello ad un grado di libertà, risulta necessario servirsi di un algoritmo numerico al fine di calcolare la risposta del sistema, assegnata una data condizione di sollecitazione esterna. A questo scopo, è stato implementato un secondo script all'interno del software MATLAB, sulla falsa riga di quello utilizzato nel caso precedente. Nel dettaglio, la soluzione del problema differenziale, costituito dalle 4.1-4.3, viene ricavata impiegando nuovamente la funzione predefinita ODE45; di nuovo, essendo tale funzione in grado di ricevere come input unicamente sistemi differenziali del primo ordine, nel caso presente si deve ricorrere ai cambi di variabile in 4.6.

$$u_v(t) = \dot{v}(t), \quad u_\phi(t) = \dot{\phi}(t) \quad (4.6)$$

Per quanto concerne la tipologia di sollecitazione agente, la struttura del codice MATLAB è predisposta a ricevere in ingresso o un cedimento traslatorio imposto al vincolo $w_c(t)$ o il suo atto di moto $\dot{w}_c(t)$ o la sua accelerazione $\ddot{w}_c(t)$, definiti in forma vettoriale in un insieme discreto di istanti temporali. Siccome accade frequentemente che tali istanti di tempo, in cui il segnale è definito, non coincidano con quelli in cui si vuole che la risposta venga determinata, risulterà allora necessario attuare un processo preliminare di interpolazione del segnale stesso, mediante l'impiego della funzione "*sig_interp*", al fine di stimare il valore che esso assume in corrispondenza degli istanti di integrazione. Si ricorda inoltre come, fornita una delle tre espressioni, le altre due possono essere ricavate mediante l'impiego delle funzioni "*diff*" e "*int*" presenti nella libreria del programma. Per un moto imposto alla pinza, attuando gli opportuni cambi di variabile e sostituendo le equazioni descrittive la variazione delle forzanti di interazione $F(t)$ e $M(t)$ all'interno delle rispettive equazioni di equilibrio dinamico, il sistema risolvibile può essere riscritto come in 4.7.

$$\begin{aligned} \dot{z}_v(t) &= \frac{1}{v_0} \left(u_v(t) - \sigma_v |u_v(t)| |z_v(t)|^{n_v-1} z_v(t) + (\sigma_v - 1) u_v(t) |z_v(t)|^{n_v} \right) \\ m\dot{u}_v(t) - m e_G \dot{u}_\phi + c_v u_v(t) + k_{min,v} v(t) + (k_{max,v} - k_{min,v}) v_0 z_v(t) &= -m \ddot{w}_c(t) \\ \dot{v}(t) &= u_v(t) \\ \dot{z}_\phi(t) &= \frac{1}{\phi_0} \left(u_\phi(t) - \sigma_\phi |u_\phi(t)| |z_\phi(t)|^{n_\phi-1} z_\phi(t) + (\sigma_\phi - 1) u_\phi(t) |z_\phi(t)|^{n_\phi} \right) \\ -m e_G \dot{u}_v(t) + \lambda \dot{u}_\phi(t) + c_\phi u_\phi(t) + k_{min,\phi} \phi(t) + (k_{max,\phi} - k_{min,\phi}) \phi_0 z_\phi(t) &= m e_G \ddot{w}_c(t) \\ \dot{\phi}(t) &= u_\phi(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dal momento che, come discusso in Appendice C, la funzione ODE45 riceve in ingresso solamente un set di equazioni differenziali del prim'ordine scritte in forma normale (i.e. $y' = F(x, y)$), la seconda e la quinta equazione del sistema 4.7 vanno opportunamente

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE
DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

rielaborate, in modo che vengano esplicitate una in funzione di $\dot{u}_v(t)$ e l'altra in funzione di $\dot{u}_\phi(t)$ e non contengano ulteriori funzioni derivate rispetto alla variabile temporale; a tale fine, posto $\mathbf{u}(t) = [u_v(t), u_\phi(t)]^T$, diviene possibile esplicitare il vettore $\dot{\mathbf{u}}(t)$, risolvendo il sistema algebrico simbolico in 4.8 ad ogni istante temporale.

$$M\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.8)$$

dove $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{u}(t) - \mathbf{R}(t) + \mathbf{q}(t)$.

A questo punto, la determinazione numerica delle funzioni $z_v, z_\phi, v, \phi, u_v$ e u_ϕ e, in *post-processing*, della forza F e del momento M di richiamo può essere condotta, una volta forniti in input al codice i cinque parametri regolanti il modello di Bouc-Wen e i fattori di smorzamento per ciascun grado di libertà, l'intervallo di tempo di integrazione $[t_0, t_f]$ ed una sua eventuale discretizzazione uniforme di passo Δt ed il set di condizioni iniziali sopra menzionato (si veda Tab.4.1).

INPUT	OUTPUT
$k_{min,v}, k_{max,v}, v_0, \sigma_v, n_v, \xi_v, k_{min,\phi}, k_{max,\phi}, \phi_0,$ $\sigma_\phi, n_\phi, \xi_\phi, t_0, t_f, \Delta t, z_v(t_0), v(t_0), u_v(t_0), z_\phi(t_0),$ $\phi(t_0), u_\phi(t_0)$	$z_v(t), v(t), u_v(t), z_\phi(t),$ $\phi(t), u_\phi(t), F(t), M(t)$

Tabella 4.1: Input-Output dell' algoritmo numerico nel caso di forzante esterna o moto imposto alla pinza con modello a due gradi di libertà.

Infine, si noti come la soluzione del problema, mediante il codice implementato, possa essere ricavata solamente, per il caso di forzanti fisiche applicate, in presenza di una forza verticale agente in corrispondenza del baricentro della massa inerziale; infatti, in questa circostanza, mediante l'usuale equivalenza, espressa in 3.24, le equazioni di moto in 4.7 possono essere immediatamente adattate.

4.2.1 Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare

Al fine di validare la procedura numerica implementata all'interno del software, può essere opportuno riprodurre con il modello di Bouc-Wen, esteso all'analisi di sistemi a due gradi di libertà, la risposta di un oscillatore elastico lineare soggetto a due differenti stati di eccitazione esterna: imposizione di condizioni iniziali non omogenee e moto armonico imposto alla pinza a frequenza fissata. Affinché si possa condurre il confronto tra la soluzione numerica, ottenuta a partire dal modello di Bouc-Wen, e quella elastica, risulta preliminarmente necessario implementare un breve codice, al fine di ricavare anche quest'ultima in forma numerica. Questa procedura è stata realizzata con lo scopo di evitare di addentrarsi nell'analisi analitica del problema elastico che, seppure provvisto di una soluzione in forma chiusa, avrebbe comportato un aggiuntivo onere di calcolo manuale; nel dettaglio, lo script elastico realizzato considera come dati in ingresso, oltre a tutti i parametri necessari ai fini dell'integrazione numerica del problema e condivisi con il codice da validare, le matrici di massa, rigidezza e smorzamento viscoso del sistema, così come il vettore delle forze generalizzate presenti.

Si consideri quindi, a titolo di esempio, un dissipatore Stockbridge con comportamento idealmente lineare di massa $m = 1$ kg, momento di inerzia baricentrico $I_G = 0.002$ kgm², eccentricità $e_G = 0.05$ m e rigidezze degli elementi a deformabilità concentrata traslazionale e rotazionale rispettivamente pari a $k_v = 50$ N/m e $k_\phi = 10$ Nm; le proprietà viscoso sono sintetizzate, invece, dai fattori di smorzamento $\xi_v = 0.01$ e $\xi_\phi = 0.002$. Per inquadrare,

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

almeno a livello qualitativo, le caratteristiche fondamentali del sistema, il calcolo delle frequenze proprie, trascurando l'influenza delle proprietà dissipative, può essere condotto risolvendo il problema degli autovalori in 4.9.

$$\det [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = \det \left[\begin{bmatrix} k_v & 0 \\ 0 & k_\phi \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & -me_G \\ -me_G & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (4.9)$$

Le frequenze proprie del sistema a due gradi di libertà considerato risultano quindi pari a: $f_1 = 1.12$ Hz e $f_2 = 11.32$ Hz.

Si consideri dapprima il caso di sistema libero sottoposto ad un set di condizioni iniziali non omogenee del tipo: $v(t_0) = 0.2$ m, $\phi(t_0) = \pi/20$ rad, $\dot{v}(t_0) = 0$ m/s e $\dot{\phi}(t_0) = 0$ rad/s. Per la soluzione numerica mediante modello di Bouc-Wen, reso lineare, vanno forniti in input al codice, in aggiunta alle condizioni iniziali appena menzionate, i seguenti dati: moto alla pinza nullo, intervallo di integrazione $[t_0, t_f] = [0, 10]$ s con discretizzazione di passo $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_{min,v} = k_{max,v} = 5000$ N/m, $k_{min,\phi} = k_{max,\phi} = 200$ Nm, $v_0 = 10^4$ m, $\phi_0 = 10^4$ rad e $z_v(t_0) = z_\phi(t_0) = 0$. I parametri σ_v , σ_ϕ , n_v e n_ϕ , seppure ininfluenti, vengono convenzionalmente assunti unitari.

Il confronto tra le due soluzioni numeriche ottenute viene effettuato con riferimento all'evoluzione della forza e del momento di richiamo rispetto al tempo t e alle coordinate libere e l'andamento temporale delle variabili isteretiche adimensionali associate a ciascun grado di libertà: in particolare, queste vengono rappresentate in Fig.4.2-4.7.

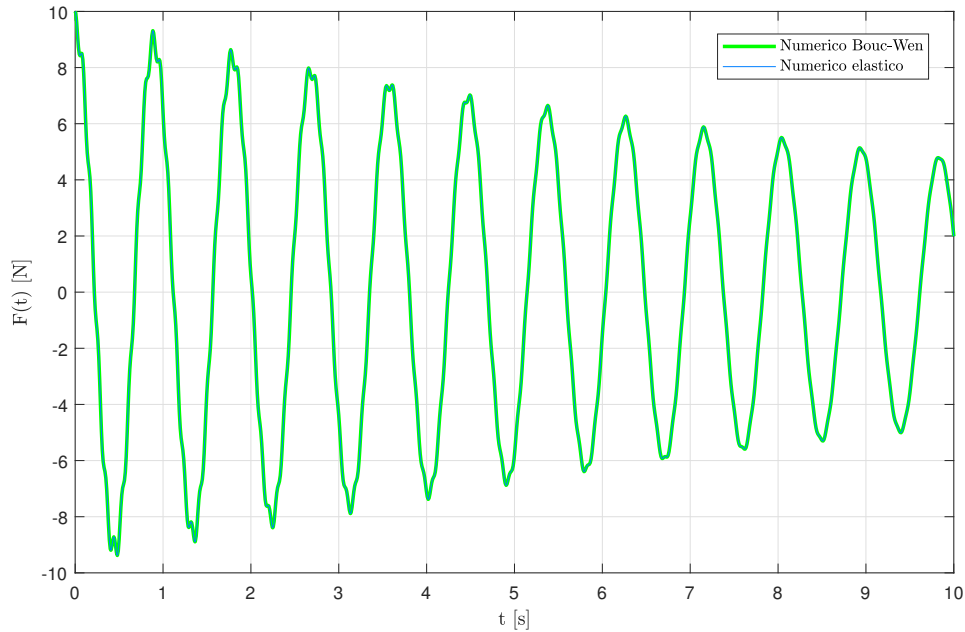


Figura 4.2: Confronto nel piano $F - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

Si noti come le due soluzioni numeriche risultano essere perfettamente sovrapposte, a conferma della capacità dell'algoritmo di Bouc-Wen implementato di riprodurre, come caso particolare, il comportamento di un sistema elastico lineare. Un'ultima considerazione, che scaturisce dalla non ortogonalità delle coordinate libere impiegate per la descrizione del moto del sistema, può essere effettuata con riferimento al confronto tra le storie temporali della forza e del momento di richiamo, F ed M , mostrate in Fig.4.2 e 4.4. Da esse, si può osservare come entrambi i modi di vibrare del sistema partecipino in maniera significativa alla definizione della risposta, per quanto concerne l'andamento della coordinata

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

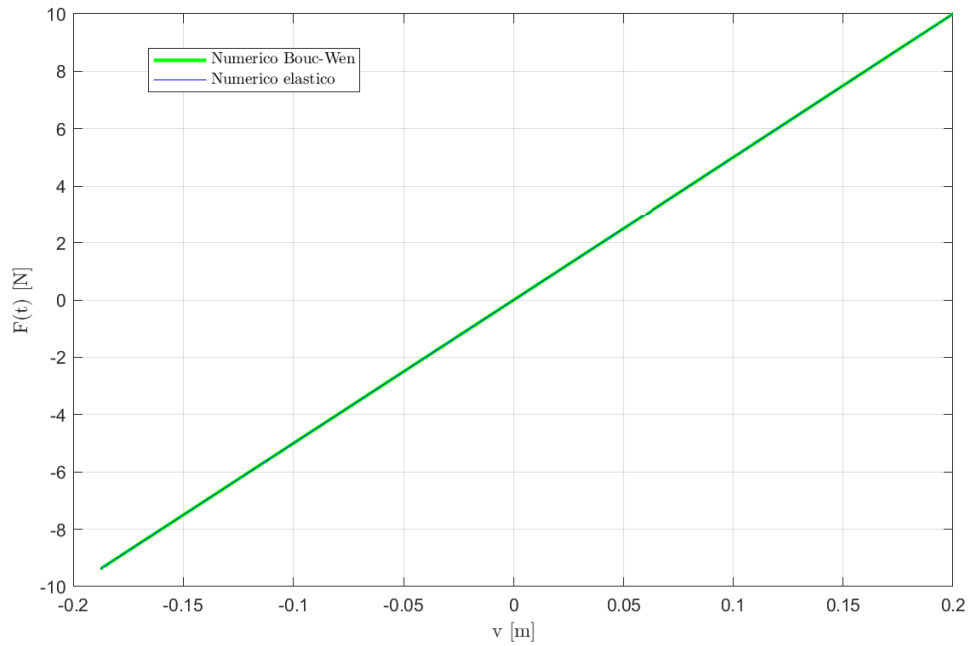


Figura 4.3: Confronto nel piano $F - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

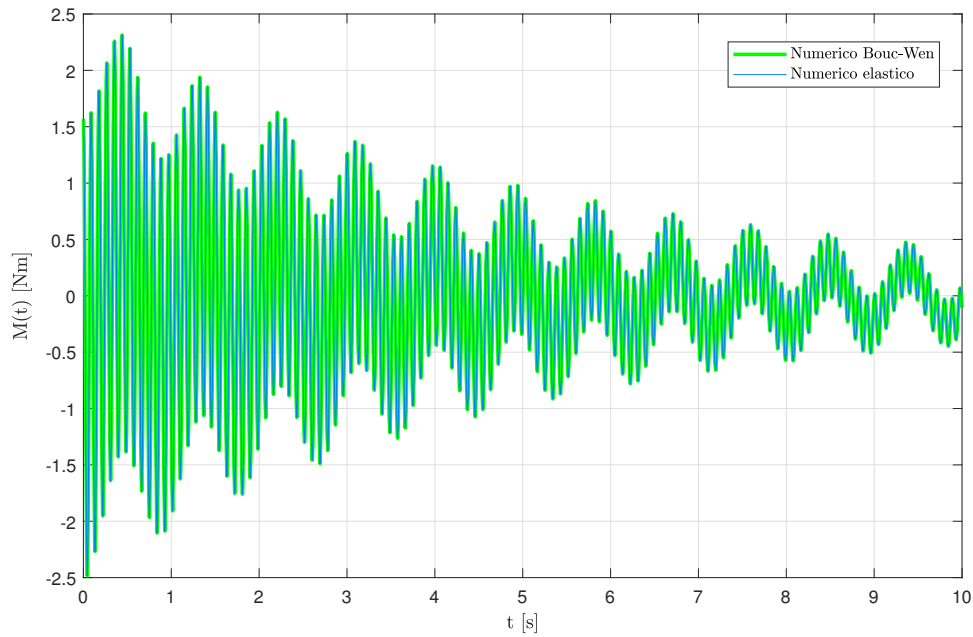


Figura 4.4: Confronto nel piano $M - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

libera rotazionale ϕ , e quindi del momento di richiamo M ad essa proporzionale; infatti, in Fig.4.4 sono ben riconoscibili due armoniche distinte di frequenze che, a meno del contributo viscoso, coincidono con f_1 e f_2 . D'altra parte, la storia temporale della coordinata libera traslazionale v , e quindi della forza F , mostra la prevalenza del contributo modale associato alla frequenza f_1 . In altre parole, se da un lato entrambi i modi concorrono in maniera significativa alla risposta del sistema secondo la coordinata libera $\phi(t)$, dall'altro,

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

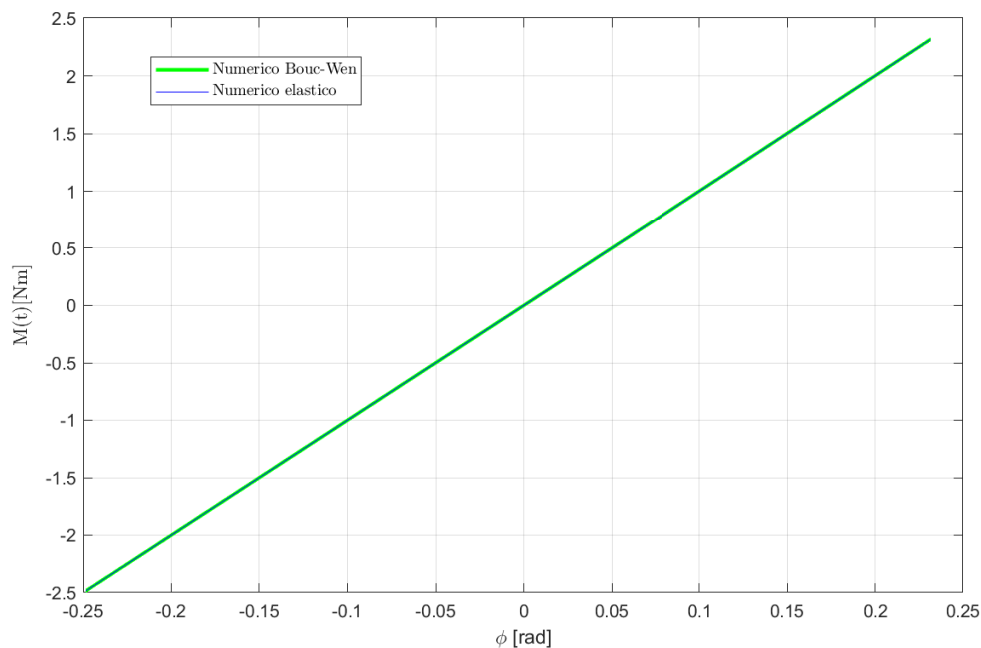


Figura 4.5: Confronto nel piano $M - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

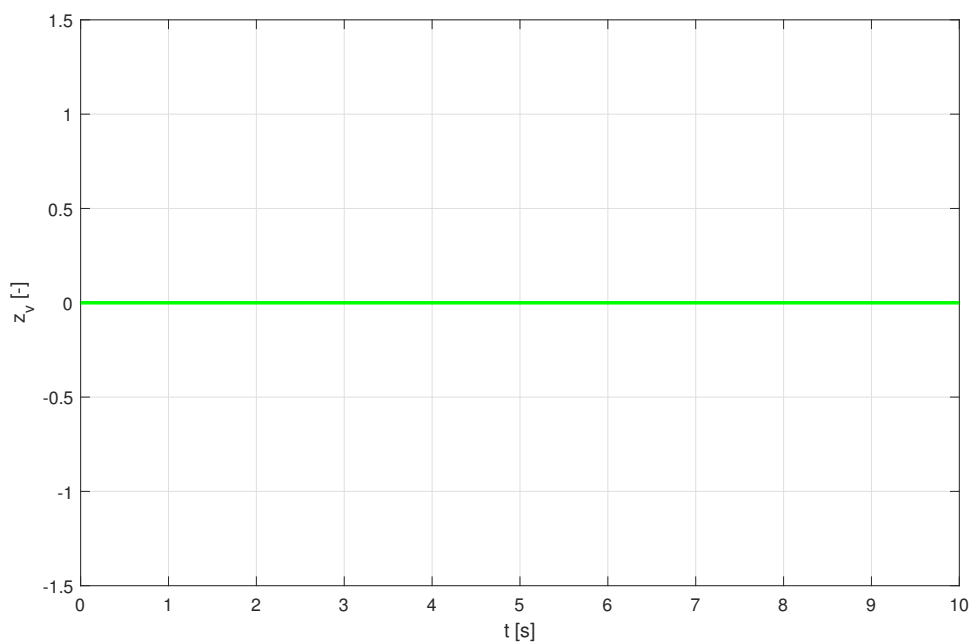


Figura 4.6: Confronto nel piano $z_v - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

l'andamento della coordinata $v(t)$ risulta a prevalenza mono-modale.

Si sottolinea, a conclusione di quanto detto, come la non ortogonalità tra le coordinate libere v e ϕ , causata dall'accoppiamento inerziale introdotto e quindi dal carattere non diagonale della matrice di massa, pur essendo più facilmente riconoscibile ed esplorabile con riferimento ad un sistema elastico lineare, risulta in realtà, secondo quanto verrà mostrato nel paragrafo seguente, un aspetto governante anche il comportamento dei sistemi non

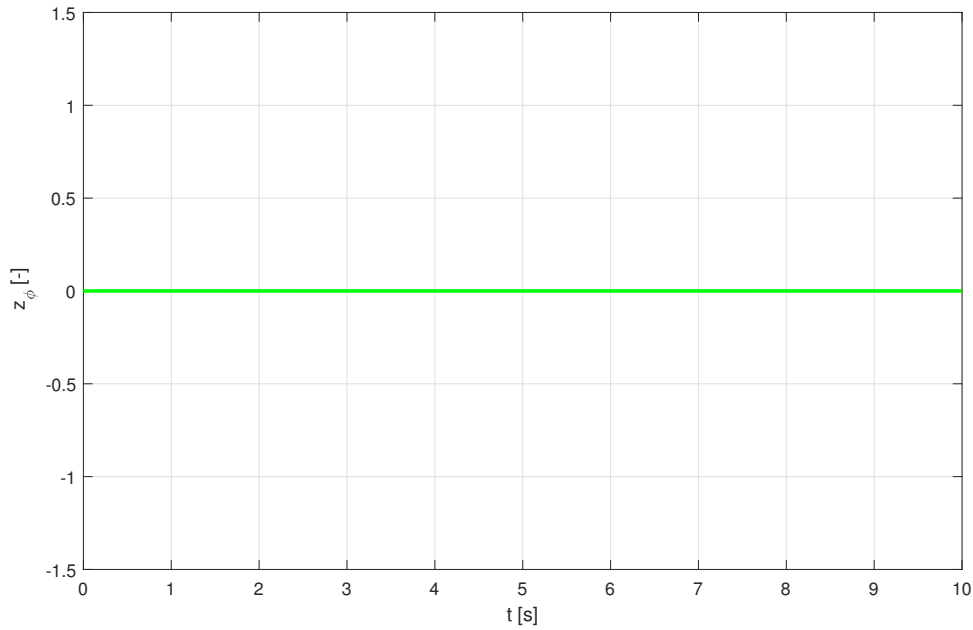


Figura 4.7: Confronto nel piano $z_\phi - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

lineari, in grado di influenzare significativamente il processo di calibrazione dei parametri caratterizzanti il modello.

Come secondo caso, si consideri il medesimo oscillatore lineare, fatta eccezione per i valori dei fattori di smorzamento, pari in questa circostanza a $\xi_v = 0.1$ e $\xi_\phi = 0.02$, sottoposto ad un moto armonico sinusoidale $w_c(t)$ imposto alla pinza di frequenza fissata pari a $f = 5$ Hz; per il resto si consideri un set di condizioni iniziali omogenee e si studi la risposta con riferimento allo stesso intervallo temporale del caso precedente.

Si riportano, in Fig.4.8 e 4.9, i risultati ottenuti con riferimento all'evoluzione temporale della forza F e del momento M di interazione cavo messaggero-massa, in cui è possibile osservare nuovamente la perfetta corrispondenza tra la curva numerica ottenuta mediante l'impiego del modello di Bouc-Wen fatto collassare al caso lineare e quella ottenuta mediante una diretta implementazione elastica del problema. Del resto, come nel caso precedente, pur non essendo qui riportate per brevità, la dipendenza delle forzanti F ed M , rispettivamente dalle coordinate libere v e ϕ , risulta lineare tramite le corrispondenti rigidezze elastiche, mentre l'evoluzione temporale delle variabili isteretiche, ottenuta come output del codice non-lineare, si dimostra correttamente nulla. Da entrambi i grafici, in Fig.4.8 e 4.9, si osserva come, all'esaurirsi di un transitorio iniziale, il moto del sistema in termini di entrambe le coordinate libere si assesta su un andamento pressochè mono-armonico, caratterizzato da una frequenza pari a quella della sollecitazione applicata; tale comportamento risulta ben noto dai concetti base di analisi dei sistemi dinamici e, pertanto, la correttezza dei risultati ottenuti viene ulteriormente confermata.

4.3 Riproduzione test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità costante

Similmente a quanto effettuato per la validazione del modello discreto di Bouc-Wen a un grado di libertà, anche in questo caso, dopo aver descritto e implementato nel software le equazioni governanti e dopo aver validato l'algoritmo impiegato mediante la riprodu-

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

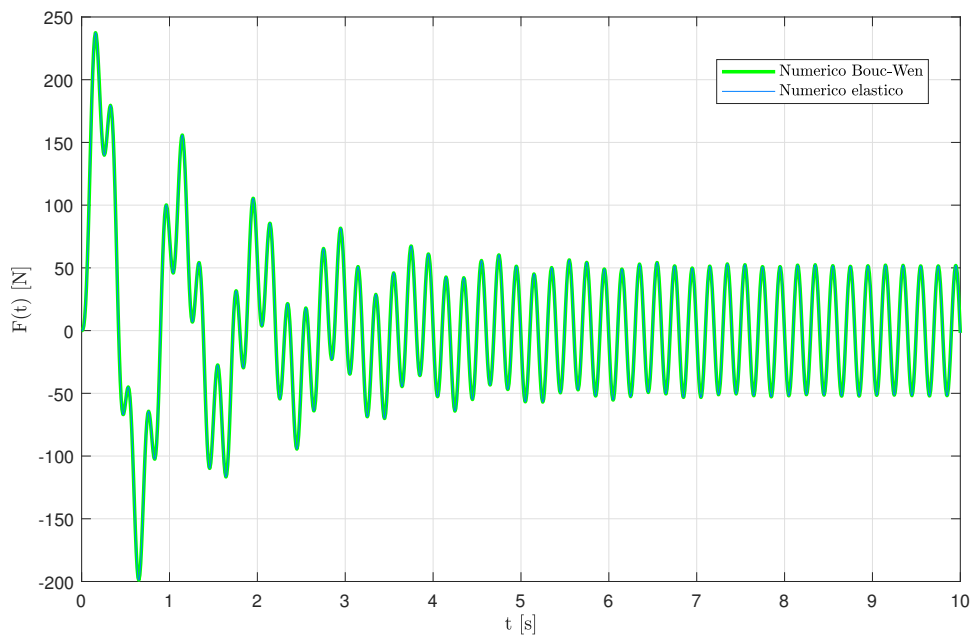


Figura 4.8: Confronto nel piano $F - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali omogenee e in presenza di un moto traslazionale sinusoidale imposto al supporto.

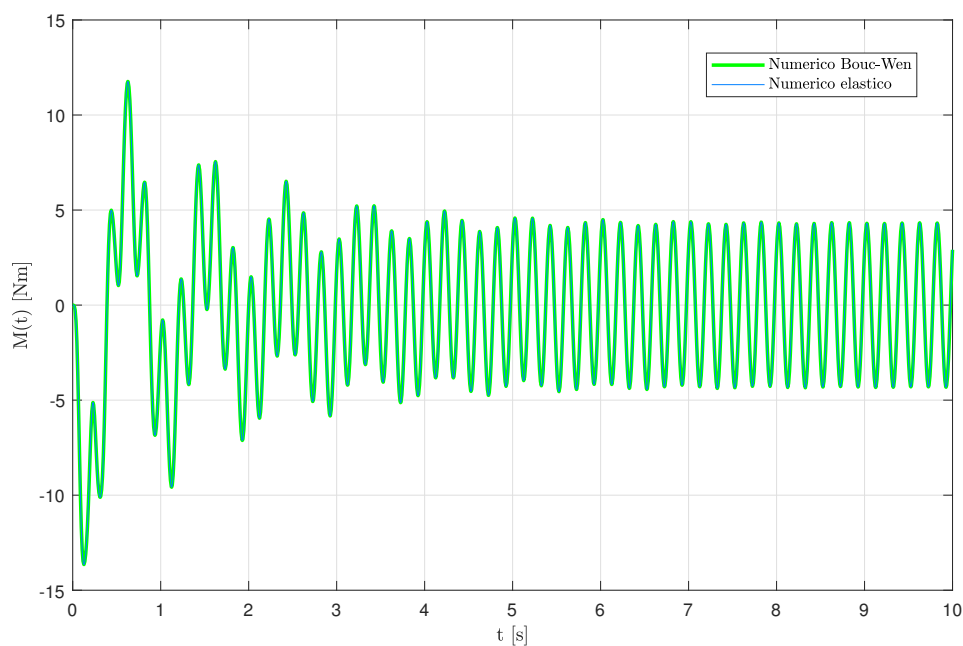


Figura 4.9: Confronto nel piano $M - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali omogenee e in presenza di un moto traslazionale sinusoidale imposto al supporto.

zione del comportamento di un sistema lineare, risulta opportuno indagare se la tecnica di modellazione impiegata sia in grado di riprodurre il comportamento di un dissipatore Stockbridge. Dal momento che si hanno a disposizione gli esiti sperimentali del test di sweep ad ampiezza di velocità costante, effettuati da Sauter su un dissipatore simmetrico

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE
DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

dalle proprietà riportate in Tab.2.1, risulta possibile cercare di riprodurre numericamente i risultati ottenuti; il confronto verrà nuovamente effettuato con riferimento al modulo della parte reale della funzione d'impedenza, precedentemente definito dalla relazione 3.55. Si noti come, nel caso presente, disponendo di una proposta di modellazione a due gradi di libertà, diviene possibile attuare una caratterizzazione completa del comportamento del dispositivo, cercando di riprodurre in maniera fedele la curva di impedenza per tutto lo spettro di frequenza su cui esso risulta definito. Il sistema di equazioni risolvibili, che permette in definitiva di effettuare il calcolo della forza di interazione F_d tra il supporto e la pinza rigida e, di conseguenza, quello della funzione d'impedenza, risulta essere quello espresso in 4.10, valido per uno smorzatore simmetrico in assenza di rotazione del supporto.

$$\begin{aligned}
 F(t) &= k_{min,v}v(t) + (k_{max,v} - k_{min,v})v_0z_v(t) \\
 \dot{z}_v(t) &= \frac{1}{v_0} \left(\dot{v}(t) - \sigma_v |\dot{v}(t)| |z_v(t)|^{n_v-1} z_v(t) + (\sigma_v - 1)\dot{v}(t) |z_v(t)|^{n_v} \right) \\
 M(t) &= k_{min,\phi}\phi(t) + (k_{max,\phi} - k_{min,\phi})\phi_0z_\phi(t) \\
 \dot{z}_\phi(t) &= \frac{1}{\phi_0} \left(\dot{\phi}(t) - \sigma_\phi |\dot{\phi}(t)| |z_\phi(t)|^{n_\phi-1} z_\phi(t) + (\sigma_\phi - 1)\dot{\phi}(t) |z_\phi(t)|^{n_\phi} \right) \\
 m\ddot{v}(t) - me_G\ddot{\phi}(t) + c_v\dot{v}(t) + F(t) &= q_v(t) \\
 -me_G\ddot{v}(t) + \lambda\ddot{\phi}(t) + c_\phi\dot{\phi}(t) + M(t) &= q_\phi(t) \\
 F_d(t) &= (2m + m_c)\ddot{w}_c(t) + 2m\ddot{v}(t) - 2me_G\ddot{\phi}(t)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Esso è stato quindi implementato in una sezione del codice MATLAB dedicata per poi essere risolto numericamente seguendo una procedura analoga a quella esposta al Par.3.3, previa specializzazione dei termini delle forzanti generalizzate secondo quanto riportato in 4.11.

$$\begin{aligned}
 q_v(t) &= -m\ddot{w}_c(t) = -mf_{corr}\dot{w}_{c0}2\pi\bar{r}f \cos(2\pi ft) \\
 q_\phi(t) &= me_G\ddot{w}_c(t) = me_Gf_{corr}\dot{w}_{c0}2\pi\bar{r}f \cos(2\pi ft)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Per quanto riguarda l'input simulante il moto imposto al supporto $\ddot{w}_c(t)$, fornito all'algoritmo in termini vettoriali, si è considerato, ugualmente al caso a un grado di libertà, per la taratura dei parametri il test di sweep ad ampiezza di velocità $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s, mentre il test a 0.05 m/s è stato considerato solo in un secondo momento al fine di validare i risultati ottenuti. Per assicurarsi di riprodurre gli esiti sperimentali in modo da comprendere nell'analisi le frequenze caratterizzanti entrambi i picchi della risposta, si è settato uno sweep lineare in frequenza con $f_0 = 1$ Hz e $\Delta f = 50$ Hz di durata pari a $\Delta t = 100$ s con rampa lineare iniziale di durata 10 s. Dal momento che i parametri di sweep forniti in input sono esattamente gli stessi di quelli impiegati al Par.3.4.2, anche in questo caso si può porre il fattore correttivo ivi introdotto $\bar{r} = 1.98$. Per il resto, si è nuovamente considerato nello script un intervallo di integrazione delle equazioni di estremi $t_0 = 0$ s e $t_f = 100$ s, uniformemente discretizzato con passo $\Delta t = 10^{-4}$ s, e un set di condizioni iniziali perfettamente omogeneo. Una volta determinate, mediante la procedura di integrazione numerica delle equazioni, condotta dalla funzione ODE45, le evoluzioni temporali delle coordinate libere $v(t)$ e $\phi(t)$ e delle variabili isteretiche adimensionali $z_v(t)$ e $z_\phi(t)$ e, conseguentemente, quelle della forza e del momento di richiamo $F(t)$ e $M(t)$ e della forza di interazione supporto-pinza $F_d(t)$, il codice da ultimo effettua il calcolo numerico delle trasformate di Fourier rispettivamente di $F_d(t)$ e di $\dot{w}_c(t)$, per poi ottenere l'andamento della funzione di impedenza \tilde{Z}_d e del valore assoluto della sua parte reale al variare della frequenza f di vibrazione. Ancora una volta, si sottolinea come il valore della massa m_c

della pinza non influisca sul calcolo della parte reale della funzione di impedenza \tilde{Z}_d e pertanto, per semplicità, esso verrà considerato nullo.

Nel seguito, si farà riferimento allo schema appena descritto applicandolo a diverse strategie di modellazione, le quali si riveleranno più o meno valide al fine di cercare di riprodurre la curva di impedenza sperimentale. Chiaramente, un primo tentativo che può essere effettuato a carattere preliminare, prima di addentrarsi nello studio del problema con una modellazione isteretica, può ragionevolmente consistere in una idealizzazione elastica lineare del sistema, sulla falsa riga di quanto discusso al Capitolo 3, con riferimento a un sistema dotato di un'unica coordinata libera.

4.3.1 Modellazione elastica lineare

Come primo approccio al problema, si decide di impiegare una modellazione elastica lineare del dissipatore, stante la sua semplicità di analisi, dovuta al fatto che essa risulta controllata solamente dalle costanti di rigidezza e dai fattori di smorzamento viscoso associati a ciascun grado di libertà. Per tale sistema meccanico, non sussiste alcuna forma di dissipazione isteretica e tutta l'energia viene dissipata mediante la presenza di un eventuale contributo di smorzamento viscoso. Innanzitutto, come menzionato in precedenza, sulla base dei risultati sperimentali ottenuti da Sauter nel test di sweep ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s, si procede con una calibrazione manuale dei parametri del modello, per poi condurre una procedura di validazione dei risultati con riferimento al test a 0.05 m/s, al fine di testare la robustezza della procedura di taratura.

Procedura manuale di calibrazione dei parametri

Come già discusso per il caso di modellazione del sistema a un grado di libertà, risulta buona norma procedere in primis con una taratura manuale dei parametri del modello, cercando di ottenere un buon grado di corrispondenza tra la curva numerica e quella sperimentale. Dal lato pratico, al fine di esaminare il caso di sistema elastico lineare, è possibile impiegare direttamente lo script in cui è implementato il modello di Bouc-Wen a due gradi di libertà ponendo: $k_i = k_{max,i} = k_{min,i}$ (con $i = v, \phi$), valori elevati delle soglie di snervamento associate alle due coordinate libere ($v_0 = 10^4$ m, $\phi_0 = 10^4$ rad) e parametri σ_i e n_i (con $i = v, \phi$) unitari, seppure ininfluenti. L'affidabilità di tale procedura è stata garantita nel corso del Par.4.2.1, in cui si è mostrato come il codice implementato fosse perfettamente in grado di simulare una risposta di carattere elastico lineare. Diversi tentativi di analisi, condotti facendo variare il valore delle rigidezze elastiche k_v e k_ϕ e quello dei fattori di smorzamento viscoso ξ_v e ξ_ϕ , hanno portato all'individuazione di un set che si è rivelato essere tra tutti il più soddisfacente: i corrispondenti valori dei parametri sono riportati in 4.12.

$$k_v = 3600 \text{ N/m}, k_\phi = 80 \text{ Nm}, \xi_v = 0.26, \xi_\phi = 0.1 \quad (4.12)$$

Vale la pena notare che la procedura di calibrazione manuale, pur basandosi principalmente su considerazioni qualitative circa il significato fisico dei parametri e su osservazioni di natura essenzialmente grafica relative alle curve di impedenza ottenute, è stata condotta parallelamente alla definizione di un set di punti di confronto C_5 con i relativi pesi associati, tramite il quale è stato possibile definire una corrispondenza quantitativa grazie all'impiego di una funzione obiettivo del tipo mostrato in 3.58; tale set di punti è espresso in 4.13, mentre il vettore di frequenze sperimentali di confronto f_{C_5} associato è riportato in 4.14. Si sottolinea come, rispetto al caso a un singolo grado di libertà, questa volta i punti di confronto sono stati scelti non solo per garantire un buon grado di coerenza tra le curve in corrispondenza della prima campana di risonanza, ma anche in prossimità della seconda e

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

della zona di transizione tra le due. La modellazione del sistema e il processo di taratura spesso rivelano problemi proprio nel riprodurre la transizione tra i picchi, in quanto, in corrispondenza di tale range di frequenze, la risposta del sistema è fortemente influenzata dai parametri governanti lo stato di entrambe le coordinate libere.

$$C_5 = [1, 3, 8, 10, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41],$$

con $p = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.75, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 1, 1, 1, 0.1, 0.1]$

(4.13)

$$f_{C_5} = [6.50, 7.14, 8.62, 8.83, 9.55, 9.86, 10.17, 10.82, 11.43, 12.54, 17.78, 19.36, 21.58, 23.86, 26.40, 28.98, 30.84, 33.10, 34.97, 36.08, 38.39, 41.17, 44.14, 49.20] \text{ Hz}$$

(4.14)

In ogni caso, la funzione di impedenza associata al set di parametri "ottimale" risulta quella rappresentata in Fig.4.10, in cui si effettua in aggiunta il confronto con la sua controparte sperimentale. Da essa, è possibile osservare come il primo picco della curva risulta ben caratterizzato sia in termini di collocazione che ampiezza, mentre il secondo, sebbene venga correttamente localizzato, non viene colto in termini di forma ed ampiezza. Tale fenomeno è associato in modo rilevante all'interazione inerziale presente tra le due coordinate libere: infatti, pur cercando, come in questo caso, in primo luogo di calibrare al meglio la prima campana di risonanza agendo sui parametri della coordinata libera traslazionale, si va indirettamente a modificare anche la seconda campana, in quanto l'accoppiamento tra le coordinate, introdotto dalla matrice di massa, fa sì che la traslazione v della massa influenzi anche il secondo modo di vibrare. Viceversa, si osserva come, in questa circostanza, i parametri associati alla coordinata libera ϕ non vadano a modificare significativamente la risposta del sistema in corrispondenza del primo modo (prima zona di risonanza).

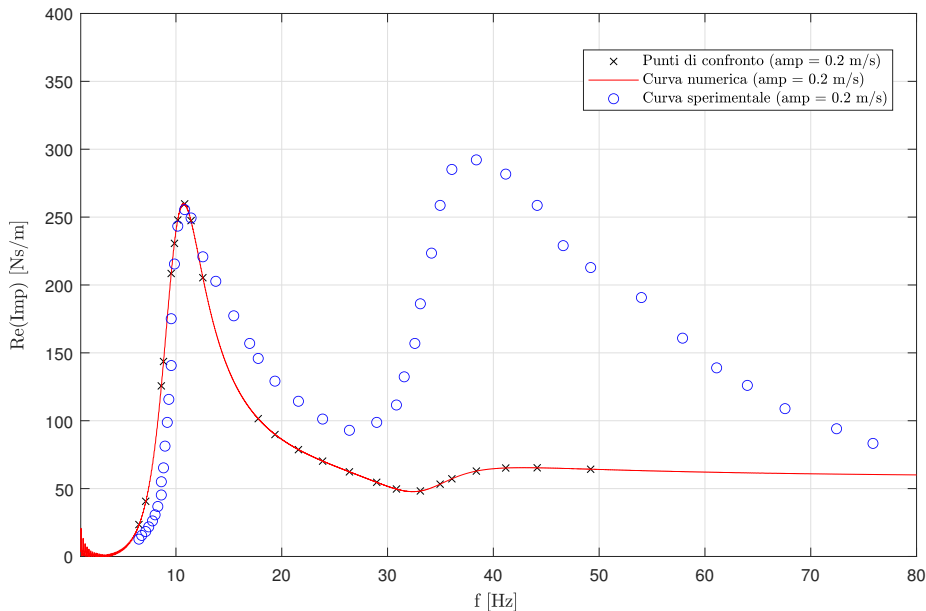


Figura 4.10: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen reso elastico, utilizzando i parametri di rigidezza e smorzamento viscoso in 4.12.

Procedura di validazione dei parametri

Nonostante la curva di impedenza rappresentata in Fig.4.10 non sia in grado di cogliere in maniera adeguata le caratteristiche principali del secondo picco presente nella curva sperimentale, evidenziando fin da subito che il modello lineare non risulta adeguato per descrivere la risposta del sistema, si procede ora con la validazione dello stesso, effettuata cercando di riprodurre i risultati del test di sweep ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s. I parametri regolanti le proprietà del moto imposto al supporto, ad eccezione dell'ampiezza \dot{w}_{c0} , mantengono gli stessi valori di quelli impiegati per la fase di taratura. Eseguendo questa ulteriore analisi, diviene possibile ottenere la funzione di impedenza numerica rappresentata in Fig.4.11 e rapportarla alla sua controparte sperimentale; come già evidenziato a riguardo della validazione dei parametri con il test di Sauter per il sistema ad un grado di libertà, anche in questa circostanza la corrispondenza tra le curve viene meno, anche in prossimità del primo picco, ove la risposta durante il test a 0.20 m/s era stata correttamente riprodotta, così da poter affermare per certo che il modello non risulta capace di cogliere la risposta all'interno dell'intero spettro di frequenze.

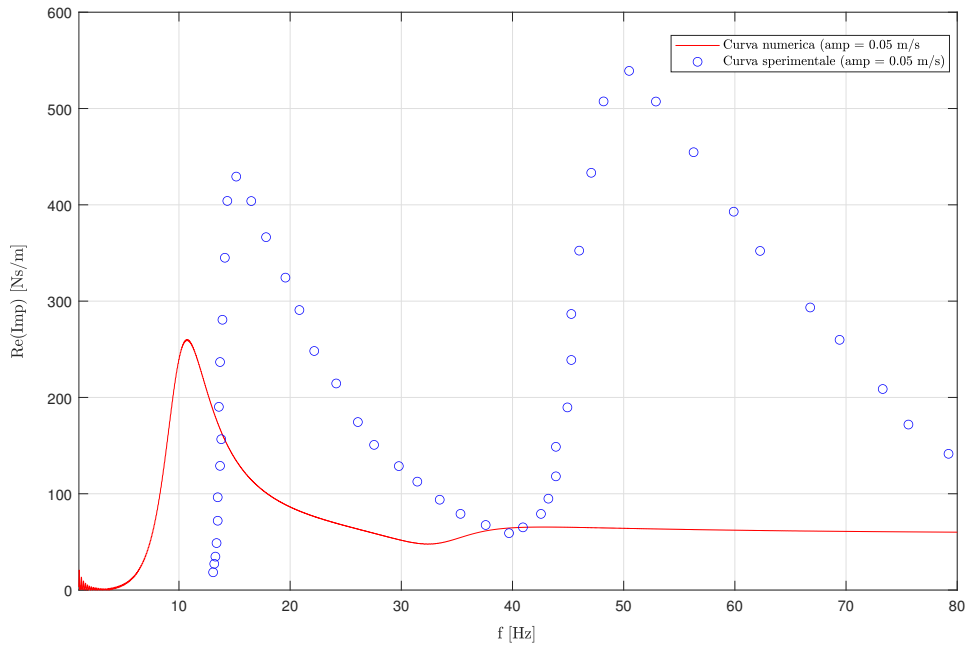


Figura 4.11: Riproduzione della curva di impedenza riferita al test ad ampiezza di velocità pari a 0.05m/s mediante modellazione elastica a 2 gradi di libertà.

Inoltre, sovrapponendo sullo stesso grafico le curve sperimentali e quelle ottenute numericamente relative ai due differenti test (Fig.4.12), è possibile nuovamente osservare che la risposta associata ad un modello elastico non si modifica al variare dell'ampiezza dell'input agente sul sistema, come invece si può riscontrare sperimentalmente. Riassumendo, due sono state le principali problematiche riscontrate durante l'impiego di tale strategia di modellazione: in primo luogo, l'accompiamento a livello della matrice di massa tra le due coordinate libere costituisce un intralcio alla procedura di taratura, in quanto non si riesce a ottenere una buona corrispondenza nell'intorno della seconda risonanza, in secondo luogo, l'incapacità del modello di cogliere la dipendenza della risposta dall'ampiezza della sollecitazione non permette al sistema di adattarsi all'input introdotto durante il test a 0.05 m/s. Principalmente allo scopo di ovviare alla seconda delle due problematiche,

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

nel Par.4.3.2 verrà considerato una modellazione di Bouc-Wen nella sua forma isteretica generale, al fine di comprendere se con tale modello si possa descrivere ragionevolmente il comportamento del dispositivo Stockbridge.

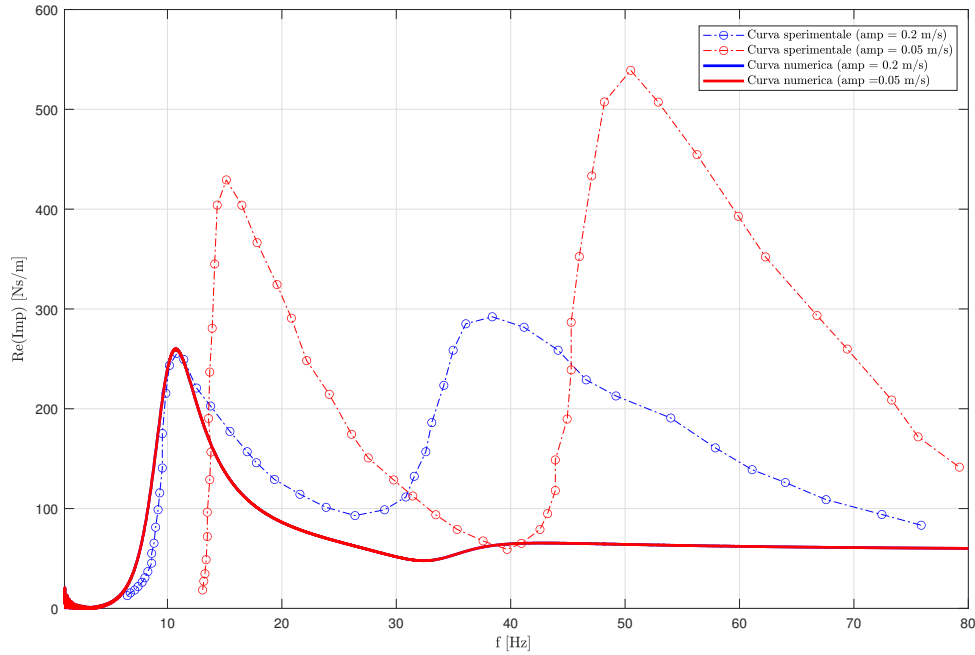


Figura 4.12: Rappresentazione e confronto tra le curve di impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione a due gradi di libertà elastica lineare.

4.3.2 Modellazione isteretica

Constatato che una modellazione elastica lineare del comportamento del cavo messaggero non sia aderente alla realtà fisica del problema, dato che non si riesce ad ottenere una buona corrispondenza tra la funzione di impedenza numerica e quella sperimentale, si consideri ora il modello di Bouc-Wen nella sua forma isteretica. Sulla base delle considerazioni effettuate per la calibrazione del modello nel caso di sistema ad un grado di libertà, circa l'influenza dei singoli parametri sull'andamento della soluzione, dopo vari tentativi di analisi è possibile ottenere il set riportato in 4.15.

$$\begin{aligned} k_{min,v} &= 1100 \text{ N/m}, k_{max,v} = 4600 \text{ N/m}, v_0 = 0.006 \text{ m}, \sigma_v = 1, n_v = 1, \xi_v = 0.1, \\ k_{min,\phi} &= 20 \text{ Nm}, k_{max,\phi} = 95 \text{ Nm}, \phi_0 = 0.1 \text{ rad}, \sigma_\phi = 1, n_\phi = 1, \xi_\phi = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Il risultato in termini di funzione di impedenza, a partire da tale set di parametri, viene rappresentato in Fig4.13.

Come si può osservare da Fig.4.13, la corrispondenza tra le due curve risulta adeguata solo nell'intorno della prima campana di risonanza; per quanto concerne invece il secondo picco, questo risulta mal rappresentato dal modello numerico assunto. Sulla base del risultato ottenuto in fase di calibrazione, si è deciso quindi di non effettuare esplicitamente la validazione del modello in quanto non potrà fornire risultati soddisfacenti. Diversamente da quanto si ottiene da una modellazione elastica del sistema, considerando il modello di Bouc-Wen è possibile però osservare, eseguendo delle analisi con ampiezze variabili \dot{w}_{c0} dell'input, una risposta *amplitude dependent*, tipica dei sistemi ad alto grado di non-linearità. Tale aspetto è stato approfondito e provato graficamente in Appendice A.

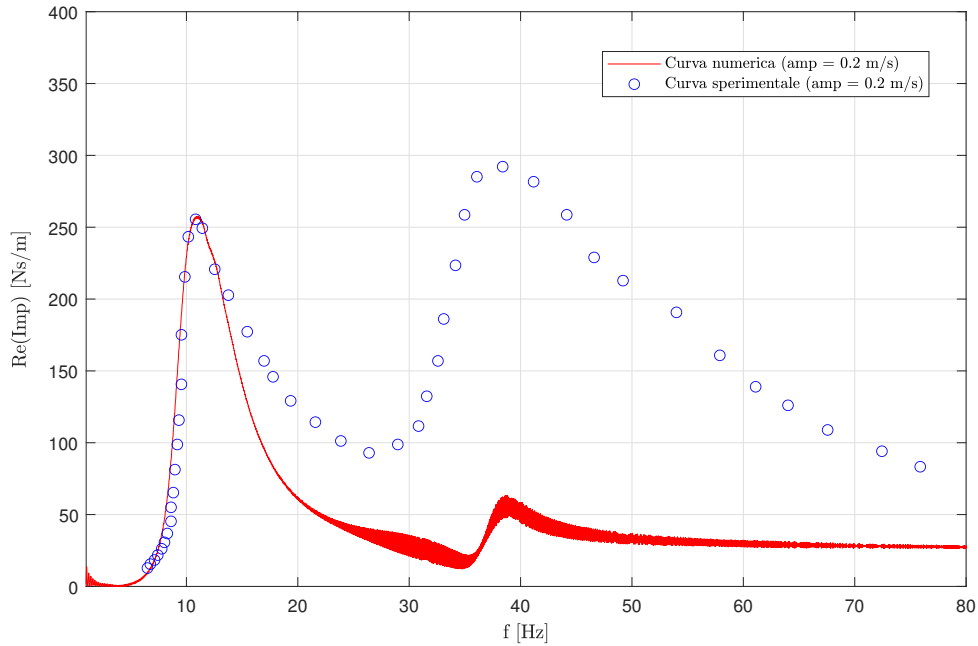


Figura 4.13: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 4.15.

Il fatto che il secondo picco numerico risulti estremamente più ridotto in termini di ampiezza rispetto a quello ottenuto sperimentalmente, come già descritto per il caso elastico, risulta legato alla non ortogonalità tra le due coordinate libere v e ϕ dovuta al livello di interazione inerziale tra di esse. I parametri associati alla coordinata libera traslazionale, se opportunamente calibrati, permettono di ricavare una buona corrispondenza tra la soluzione numerica e quella sperimentale per quanto riguarda la prima risonanza, ma allo stesso tempo influenzano drasticamente la seconda. Pertanto, valori dei parametri stessi settati in modo da riprodurre la prima porzione dello spettro conducono inevitabilmente a risultati non soddisfacenti ad alte frequenze, nonostante si cerchi di fare variare in maniera significativa i parametri regolanti la risposta secondo la coordinata libera rotazionale. Viceversa, il problema non si osserva a parti invertite, dal momento che la sensibilità della prima risposta modale a variazioni della coordinata libera rotazione risulta pressoché irrilevante.

Nel tentativo di bilanciare questo effetto e superare quindi anche la seconda problematica precedentemente menzionata, associato al più volte citato accoppiamento inerziale, si è deciso di provare a considerare nel modello un termine aggiuntivo di accoppiamento lineare tra le due coordinate libere a livello di rigidità, definendo il parametro aggiuntivo k_{coup} . Sulla base dei risultati così ottenuti si può concludere che, anche impiegando tale correzione, il modello continui a non mostrarsi adeguato a descrivere la risposta del sistema; si rimanda all'Appendice A per una trattazione più approfondita a riguardo.

4.3.3 Modellazione isteretica "ridotta"

La strategia di modellazione discussa al Par.4.3.2 risulta in grado di descrivere la variazione esibita nella curva di impedenza al variare dell'ampiezza della sollecitazione esterna, in accordo con la natura sperimentale del fenomeno. A questo punto, resta aperta la questione circa l'ottenimento di un buon grado di corrispondenza tra esiti numerici e sperimentali per

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

tutto lo spettro di frequenze esplorato durante il test; infatti, a causa della non ortogonalità tra le coordinate libere selezionate, la taratura dei parametri associati al primo grado di libertà, atta a cogliere la prima risonanza, influenza in maniera significativa anche il secondo picco della risposta. Per porsi all'interno di un contesto ottimale, può essere utile sviluppare un approccio "ridotto", basato sulla definizione di un sistema discreto a due gradi di libertà, la cui evoluzione viene descritta mediante l'impiego delle coordinate y_1 e y_2 , ortogonali tra loro, in modo che ognuna di esse caratterizzi un modo del sistema, sebbene, il concetto di "modo" sia da intendere in tale sede in termini puramente qualitativi, in quanto, a differenza di un sistema lineare, nel caso presente non è possibile introdurre delle forme modali unicamente determinate. Seguendo un approccio di questo tipo, le equazioni di moto riferite a ciascuna coordinata "modale", risultano indipendenti tra loro; tale approccio può conferire un notevole vantaggio alla trattazione dal momento che, se ragionevolmente introdotto, sarebbe in grado di superare le difficoltà riscontrate relative all'accoppiamento inerziale presente qualora si tentasse, come già effettuato, di descrivere il sistema mediante le coordinate fisiche v e ϕ . Seppure semplice dal punto di vista concettuale, l'idea appena presentata riscontra in principio, secondo quanto anticipato, difficoltà pratiche legate all'impossibilità di identificare i modi di vibrare di un sistema intrinsecamente non-lineare come quello in esame; pertanto, risulta necessario introdurre un approccio approssimato, al fine di perseguire tale schema di ragionamento. A tal proposito, è possibile fare riferimento alle forme modali di una mensola elastica lineare con massa concentrata all'estremo libero: le deformate qualitative corrispondenti a ciascun modo risultano del tipo in Fig.4.14 e possono, all'occorrenza, essere determinate in maniera analitica mediante la risoluzione di un semplice problema agli autovalori-autovettori. Dalla figura, si evince come il primo modo sia caratterizzato da un contributo prevalente di traslazione $v|_{y_1}$, mentre l'apporto della coordinata libera rotazionale $\phi|_{y_1}$ risulta di entità irrisoria; al contrario, la rotazione $\phi|_{y_2}$ partecipa in maniera sostanziale alla definizione della seconda deformata modale, mentre il contributo traslazionale $v|_{y_2}$ risulta più contenuto.

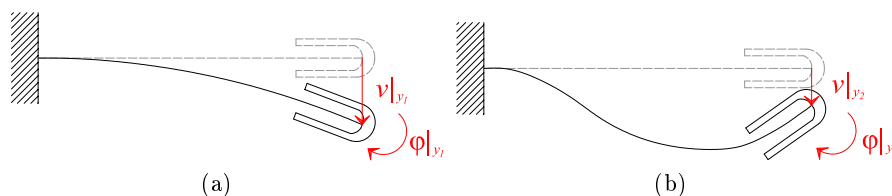


Figura 4.14: Rappresentazione qualitativa della (a)prima deformata modale, (b)seconda deformata modale di una mensola elastica lineare con massa concentrata all'estremo libero.

Sebbene l'osservazione precedente sia stata a rigore ottenuta con riferimento al caso di un sistema elastico, è ragionevole supporre che tale comportamento si manifesti in maniera simile anche in presenza di non-linearità; infatti, se da un lato le due deformate non risultano più definibili in maniera deterministica, è sensato ipotizzare che esse non vengano del tutto stravolte.

In tale contesto, si inquadra la scelta effettuata, con riferimento alle equazioni di moto, di definire le componenti di inerzia M_1 e M_2 , associate alle coordinate y_1 e y_2 , pari alle componenti dirette della matrice di massa calcolata con riferimento alle coordinate lagrangiane v e ϕ , trascurando il contributo fornito ad esse dai termini extra-diagonali. Si effettuano pertanto le posizioni in 4.16.

$$M_1 \simeq m, \quad M_2 \simeq \lambda = I_G + me_G^2 \quad (4.16)$$

4. MODELLO DISCRETO A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE
DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

Sulla scia di quanto effettuato per i termini inerziali, analoghe considerazioni si effettuano con riferimento alle componenti generalizzate delle forze esterne, associate alle coordinate y_1 e y_2 , le quali possono essere approssimate come in 4.17.

$$q_1(t) \simeq -m\ddot{w}_c(t), \quad q_2(t) \simeq me_G\ddot{w}_c(t) \quad (4.17)$$

Per quanto concerne i restanti contributi delle equazioni, si descrivono ancora una volta le proprietà dissipative del sistema mediante il modello isteretico di Bouc-Wen, riferito alle componenti generalizzate delle forze di richiamo $F_1(t)$ e $F_2(t)$, e si trascura ogni tipo di contributo di smorzamento viscoso.

Alla luce di quanto appena discusso, le equazioni di moto e le leggi costitutive governanti il problema si identificano con quelle espresse in 4.18 e 4.19.

$$\begin{aligned} F_1(t) &= k_{min,1}y_1(t) + (k_{max,1} - k_{min,1})y_{0,1}z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) &= \frac{1}{y_{0,1}} \left(\dot{y}_1(t) - \sigma_1 |\dot{y}_1(t)| |z_1(t)|^{n_1-1} z_1(t) + (\sigma_1 - 1)\dot{y}_1(t) |z_1(t)|^{n_1} \right) \\ M_1\ddot{y}_1(t) + F_1(t) &= -m\ddot{w}_c(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} F_2(t) &= k_{min,2}y_2(t) + (k_{max,2} - k_{min,2})y_{0,2}z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{1}{y_{0,2}} \left(\dot{y}_2(t) - \sigma_2 |\dot{y}_2(t)| |z_2(t)|^{n_2-1} z_2(t) + (\sigma_2 - 1)\dot{y}_2(t) |z_2(t)|^{n_2} \right) \\ M_2\ddot{y}_2(t) + F_2(t) &= me_G\ddot{w}_c(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Determinati gli andamenti temporali $y_1(t)$ e $y_2(t)$, per il calcolo della forza di interazione F_d tra il dissipatore e il cavo conduttore, possono essere effettuati i medesimi ragionamenti qualitativi, circa la prevalenza di comportamento traslazionale governante l'evoluzione della prima deformata modale e la prevalenza di carattere rotazionale che sancisce l'evoluzione della seconda. Risulta quindi possibile approssimare l'andamento temporale della forza alla pinza come mostrato in equazione 4.20.

$$F_d(t) \simeq (2m + m_c)\ddot{w}_c(t) + 2m\ddot{y}_1(t) - 2me_G\ddot{y}_2(t) \quad (4.20)$$

Risulta chiaro come sia le equazioni di moto che quelle costitutive riferite a ciascuna coordinata siano totalmente indipendenti; in aggiunta, si osserva che le espressioni in 4.18 e 4.19 coincidono rispettivamente, a meno delle notazioni impiegate, con le 3.20 e 3.71.

Definito il modello, risulta ora opportuno investigare i risultati che discendono da esso, espressi in termini di curva di impedenza. Consci della completa indipendenza tra le equazioni e dell'analogia appena evidenziata tra esse e quelle riferite all'analisi di un sistema a un grado di libertà, è possibile sfruttare i risultati ottimali ottenuti ai Par.3.4.2 e 3.5, con riferimento rispettivamente alle coordinate fisiche v e ϕ , per cogliere l'intero andamento della funzione di impedenza. A tale scopo, associando alle forze generalizzate di richiamo F_1 e F_2 i set di parametri, ottenuti separatamente ai paragrafi appena menzionati e riportati in 4.21, per maggiore chiarezza, è possibile ottenere mediante l'ausilio di un codice MATLAB dedicato la funzione di impedenza rappresentata in rosso in Fig.4.15, dove viene effettuato il confronto con la sua controparte sperimentale.

$$\begin{aligned} k_{min,1} &= 2000 \text{ N/m}, \quad k_{max,1} = 8000 \text{ N/m}, \quad y_{0,1} = 0.002 \text{ m}, \quad \sigma_1 = 1, \quad n_1 = 1 \\ k_{min,2} &= 68.5 \text{ Nm}, \quad k_{max,2} = 275 \text{ Nm}, \quad y_{0,2} = 0.0075 \text{ rad}, \quad \sigma_2 = 1, \quad n_2 = 1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

4. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: ESTENSIONE DELLA LEGGE COSTITUTIVA DI BOUC-WEN

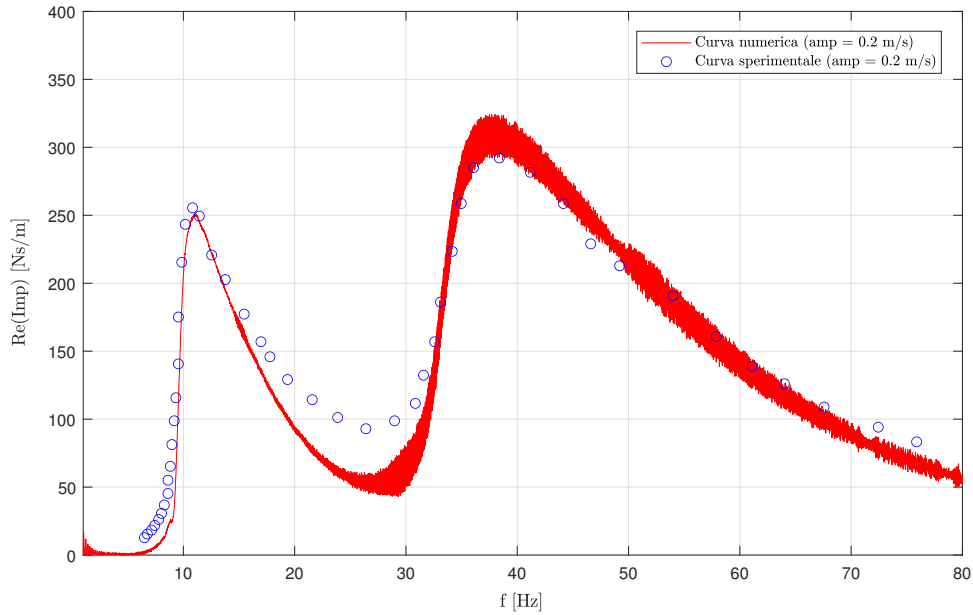


Figura 4.15: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen ridotto, utilizzando i parametri del set ottimale in 4.21.

Si denota come il grado di corrispondenza ottenuto risulta ottimo con riferimento ad entrambi i picchi di risonanza, in termini di forma, ampiezza e collocazione; inoltre, anche nella zona di transizione l'andamento può ritenersi soddisfacente, sebbene esso possa essere ulteriormente rifinito, per esempio mediante una procedura di ottimizzazione dei parametri o l'impiego di un contributo di smorzamento viscoso aggiuntivo. Da ultimo, si evince come in prossimità della coda della seconda campana il comportamento del sistema sia perfettamente riprodotto.

A questo punto, può essere interessante indagare l'influenza sulla curva di risposta di un cambio di ampiezza dell'input; in particolare, considerando il test di sweep ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s, si ottiene il risultato rappresentato in Fig.4.16, il quale mostra nuovamente una buona corrispondenza in termini di collocazione e ampiezza dei picchi, sebbene si perda parzialmente la bontà della modellazione per quanto concerne la forma degli stessi e l'andamento della zona di transizione. Infine, dal confronto di Fig.4.17 tra le curve di impedenza ottenute a varie ampiezze di velocità, è possibile osservare come la non-linearità del comportamento del dispositivo sia adeguatamente riprodotta dal modello in esame, come evidenziato dalla variazione dell'andamento delle curve stesse e dall'asimmetria dei picchi, tipica di una dissipazione a carattere isteretico e non viscoso, in accordo con quanto ottenuto sperimentalmente.

Alla luce di quanto esposto in questo paragrafo, è evidente come la modellazione e i tentativi di analisi effettuati sulla base di un'idealizzazione discreta a un grado di libertà non si limitino solo ad avere un fine introduttivo e di riproduzione parziale della risposta, ma costituiscano un punto di partenza fondamentale per la descrizione globale (a due gradi di libertà) del sistema, per esempio mediante l'approccio qui discusso.

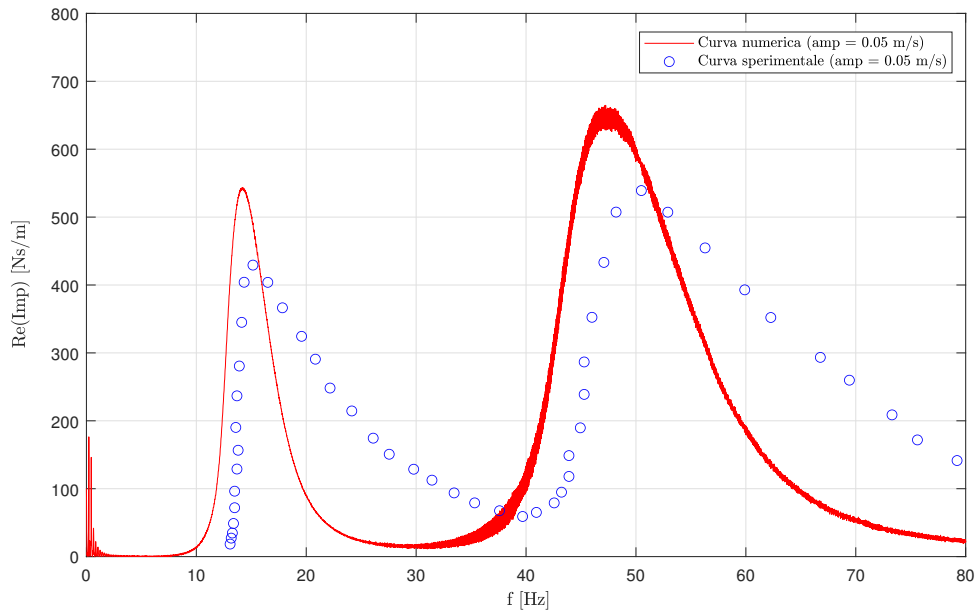


Figura 4.16: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen semplificato, utilizzando i parametri del set ottimale in 4.21 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05m/s.

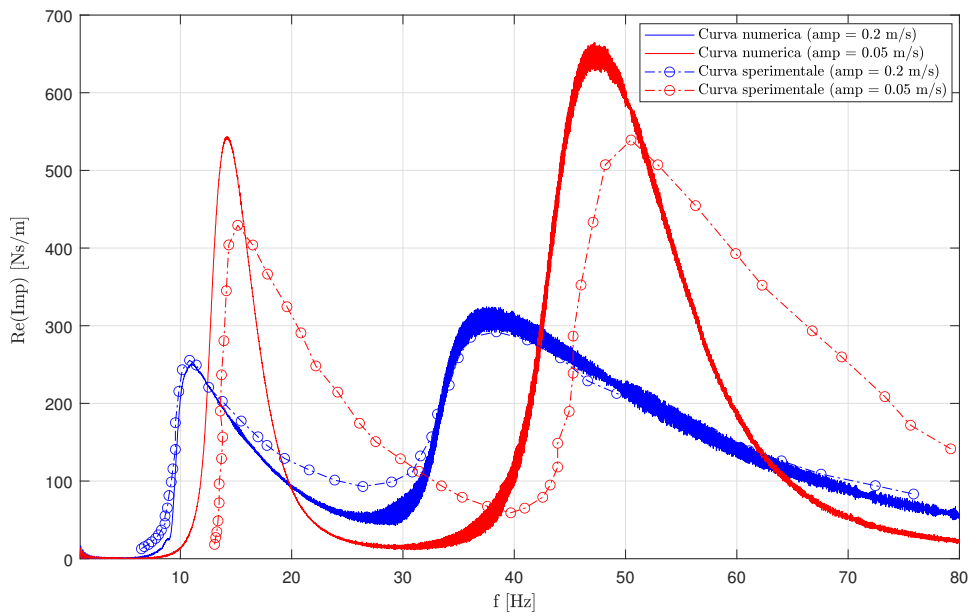


Figura 4.17: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica "ridotta" di Bouc-Wen a due gradi di libertà.

Capitolo 5

MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

Prima di procedere con la discussione, può essere utile effettuare un rapido resoconto di quanto esposto finora. Nel corso del Capitolo 3, è stato introdotto il modello isteretico di Bouc-Wen a un grado di libertà per l'idealizzazione delle proprietà dissipative e di deformabilità dei cavi messaggeri, circoscrivendo l'analisi al caso di moto puramente traslazionale o puramente rotazionale dei blocchi inerziali attorno al punto di attacco alla sezione terminale del cavo. In tale circostanza, erano stati opportunamente calibrati i parametri governanti il modello per riprodurre gli esiti sperimentali, in termini di specifiche funzioni di trasferimento, in corrispondenza della prima e della seconda risonanza: i risultati ottenuti si sono ritenuti del tutto soddisfacenti. Conseguentemente, nel Capitolo 4, è stato effettuato ricorso a una generalizzazione del modello di Bouc-Wen al fine di simulare numericamente il comportamento globale del dispositivo, nel caso in cui le masse fossero libere di evolvere secondo un moto roto-traslazionale a due gradi di libertà. Inizialmente, si è notato come l'accoppiamento presente unicamente a livello inerziale tra le due coordinate lagrangiane v e ϕ , dal momento che introduceva un elevato grado di influenza della coordinata traslazionale sul secondo modo, rendeva impraticabile la procedura di calibrazione dei parametri per la riproduzione della risposta sperimentale. Per superare questa difficoltà, si è introdotta l'approssimazione di considerare le equazioni di moto scritte in forma "ridotta", così da poter lavorare con due coordinate ortogonali tra loro; in questo modo, consci dei risultati soddisfacenti ottenuti nel caso a singolo grado di libertà, si è stati in grado di raggiungere un ottimo grado di corrispondenza tra esiti numerici e di laboratorio. Alla luce di queste considerazioni, si inserisce il tema fondamentale del presente capitolo, il quale consiste in una proposta alternativa di modellazione del sistema nel caso più generale di moto a due gradi di libertà delle masse, al fine di ottenere una risposta numerica il più fedele possibile alla realtà fisica in esame. Più nel dettaglio, la legge costitutiva dei cavi messaggeri verrà qui espressa mediante il modello isteretico di Park-Wen, il quale introduce leggi di evoluzione isteretica più dettagliate e rifinite, rispetto a quelle discusse nel caso di Bouc-Wen; infatti, mediante l'impiego di tale modellazione, la scrittura delle equazioni di equilibrio dinamico delle masse evidenzierà la presenza di termini misti di accoppiamento, non più solo a livello inerziale, bensì anche a livello isteretico. Tutto ciò verrà effettuato con l'obiettivo finale di disporre di una strategia di modellazione capace di riprodurre ragionevolmente il comportamento dei dissipatori Stockbridge, senza le approssimazioni teoriche

del Par.4.3.3, le quali trascurerebbero dei contributi di accoppiamento che compaiono naturalmente nella stesura delle equazioni. Il rovescio della medaglia consisterà ovviamente nel fatto che, disponendo di uno strumento analitico più articolato, i parametri da introdurre risulteranno essere in numero maggiore, così da rendere più difficoltoso il controllo del modello e, di conseguenza, richiedendo di attuare un minuzioso lavoro di taratura.

5.1 Il modello isteretico di Park-Wen

Si consideri nuovamente l'oscillatore discreto non-lineare di Fig.5.1, atto alla modellazione del comportamento del sistema costituito dal cavo messaggero e dalla massa rigida di estremità. Il significato fisico delle coordinate lagrangiane $v(t)$ e $\phi(t)$ e degli elementi a deformabilità concentrata risulta essere il medesimo descritto nei capitoli precedenti.

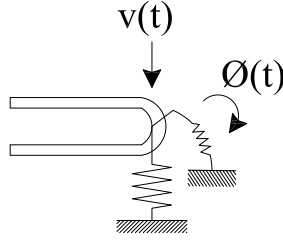


Figura 5.1: Modello discreto a 2 gradi di libertà del sistema cavo messaggero + massa.

Nel caso presente, si assume di descrivere la dipendenza della forza e del momento di richiamo dal moto della massa mediante il modello isteretico di Park-Wen [30] a due gradi di libertà, il quale costituisce una generalizzazione del modello di Bouc-Wen a un grado di libertà e si fonda sulla definizione dei set di parametri riportati in 5.1.

$$\begin{aligned} P_v &= \{k_v, \alpha_v, A_v, \beta_{vv}, \beta_{v\phi}, \gamma_{vv}, \gamma_{v\phi}\} \\ P_\phi &= \{k_\phi, \alpha_\phi, A_\phi, \beta_{\phi\phi}, \beta_{\phi v}, \gamma_{\phi\phi}, \gamma_{\phi v}\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Le relazioni costitutive che permettono di esplicitare le forzanti di interazione e le corrispondenti leggi di flusso sono proposte in Eq.5.2-5.3.

$$\begin{aligned} F(t) &= \alpha_v k_v v(t) + (1 - \alpha_v) k_v Z_v(t) \\ \dot{Z}_v(t) &= A_v \dot{v}(t) - \beta_{vv} |\dot{v}(t) Z_v(t)| Z_v(t) - \gamma_{vv} \dot{v}(t) Z_v^2(t) - \beta_{v\phi} \left| \dot{\phi}(t) Z_\phi(t) \right| Z_v(t) + \\ &\quad - \gamma_{v\phi} \dot{\phi}(t) Z_v(t) Z_\phi(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} M(t) &= \alpha_\phi k_\phi \phi(t) + (1 - \alpha_\phi) k_\phi Z_\phi(t) \\ \dot{Z}_\phi(t) &= A_\phi \dot{\phi}(t) - \beta_{\phi\phi} \left| \dot{\phi}(t) Z_\phi(t) \right| Z_\phi(t) - \gamma_{\phi\phi} \dot{\phi}(t) Z_\phi^2(t) - \beta_{\phi v} |\dot{v}(t) Z_v(t)| Z_\phi(t) + \\ &\quad - \gamma_{\phi v} \dot{v}(t) Z_v(t) Z_\phi(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

In particolare, i parametri k_v e k_ϕ si identificano con i valori di rigidezza elastica pre-snervamento associati rispettivamente alle coordinate libere v e ϕ , α_v e α_ϕ rappresentano i rapporti tra i valori di rigidezza post-snervamento e pre-snervamento corrispondenti e i parametri A_v , A_ϕ , β_{vv} , $\beta_{v\phi}$, $\beta_{\phi v}$, $\beta_{\phi\phi}$, γ_{vv} , $\gamma_{v\phi}$, $\gamma_{\phi v}$, $\gamma_{\phi\phi}$ regolano l'evoluzione delle variabili isteretiche Z_v e Z_ϕ secondo le leggi di flusso in 5.2 e 5.3. A riguardo delle variabili isteretiche, è possibile notare come nel presente approccio, a differenza di quanto effettuato

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE
COSTITUTIVA DI PARK-WEN

nella modellazione di Bouc-Wen, le funzioni $Z_v(t)$ e $Z_\phi(t)$ vengono espresse rispettivamente in metri e radianti. In generale, all'interno della prima equazione delle 5.2 e delle 5.3 è possibile riconoscere come il primo addendo rappresenti la quota parte elastica (a rigidità post-sneramento) della risposta e il secondo si configuri invece come il contributo puramente isteretico che sancisce l'interazione. Si sottolinea inoltre che per la modellazione di Park-Wen solamente i parametri di rigidità assumono un immediato significato fisico, mentre per quanto concerne i parametri regolanti il processo isteretico, tale interpretazione si rivela meno chiara ed immediata e, pertanto, non verrà approfondita nella presente trattazione. Anche in questo caso, dovrà essere necessariamente definito il dominio di definizione $D_{P_v} \subseteq \mathbb{R}^7$ e $D_{P_\phi} \subseteq \mathbb{R}^7$ di entrambi gli insiemi di parametri P_v e P_ϕ , in modo da assicurare un comportamento asintoticamente dissipativo, stabile e termodinamicamente ammissibile per il sistema meccanico in esame; in tale sede, ci si limita ad esplicitare le immediate disuguaglianze in 5.4 che devono essere rispettate dai parametri di rigidità, tralasciando i vincoli da imporre sui valori ammissibili per i parametri governanti l'isteresi, per la cui conoscenza sono richieste analisi approfondite che esulano dagli scopi dell'elaborato e che, allo stato attuale, non sono state trovate in letteratura.

$$k_v > 0, \alpha_v > 0, k_\phi > 0, \alpha_\phi > 0 \quad (5.4)$$

Prima di procedere affiancando le equazioni del modello con le equazioni di moto delle masse per il calcolo della risposta del sistema a un dato stato di sollecitazione, è opportuno evidenziare alcune analogie presenti tra il presente modello e quello di Bouc-Wen. Confrontando le equazioni che permettono di esplicitare l'espressione della forza di richiamo $F(t)$ in 4.1 con quelle in 5.2, si evince come sussistano le seguenti relazioni tra i parametri e le variabili governanti l'uno e l'altro modello: $k_v = k_{max,v}$, $\alpha_v k_v = k_{min,v}$ e $Z_v(t) = v_0 z_v(t)$. In aggiunta, se si considera il caso particolare in cui si fissa nella legge di flusso di Bouc-Wen $\sigma_v = n_v = 2$, si ottiene l'espressione in 5.5.

$$\dot{z}_v(t) = \frac{1}{v_0} (\dot{v}(t) - 2|\dot{v}(t)||z_v(t)|z_v(t) + \dot{v}(t)z_v(t)^2) \quad (5.5)$$

Dalla comparazione tra la legge di flusso di Bouc-Wen così specializzata e quella di Park-Wen in 5.2, è possibile esprimere i vincoli ulteriori in 5.6 da porre sui parametri di Park-Wen, in modo da ottenere la perfetta equivalenza tra le due strategie di modellazione.

$$\begin{aligned} A_v &= 1 \\ \beta_{vv} &= \frac{2}{v_0^2} \\ \gamma_{vv} &= -\frac{1}{v_0^2} \\ \beta_{v\phi} &= \gamma_{v\phi} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Seguendo una procedura analoga per quanto concerne la coordinata libera rotazionale, si ottengono in definitiva le relazioni esplicitate in 5.7.

$$\begin{aligned}
 k_\phi &= k_{max,\phi} \\
 \alpha_\phi k_\phi &= k_{min,\phi} \\
 Z_\phi(t) &= \phi_0 z_\phi(t) \\
 A_\phi &= 1 \\
 \beta_{\phi\phi} &= \frac{2}{\phi_0^2} \\
 \gamma_{\phi\phi} &= -\frac{1}{\phi_0^2} \\
 \beta_{\phi v} &= \gamma_{\phi v} = 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

La trattazione appena effettuata risulta finalizzata essenzialmente a diversi scopi. Innanzitutto, essa ricalca il fatto che la modellazione di Park-Wen prevede l'introduzione di un numero maggiore di parametri per descrivere l'evoluzione del processo di isteresi; infatti, i parametri $\beta_{v\phi}$, $\beta_{\phi v}$, $\gamma_{v\phi}$ e $\gamma_{\phi v}$, che compaiono nelle leggi di flusso e sono assenti nella modellazione di Bouc-Wen, introducono un grado di accoppiamento a livello isteretico, in quanto fanno dipendere la derivata prima temporale della variabile isteretica associata all' i -esima coordinata libera ($i = v, \phi$) dall'atto di moto della j -esima coordinata libera ($j = v, \phi$) e dal valore assunto dalla sua variabile isteretica. Inoltre, i parametri A_v e A_ϕ , posti implicitamente pari all'unità in Bouc-Wen, permettono di disporre di un maggiore controllo sulla dissipazione isteretica, in quanto fungono da fattore di amplificazione o riduzione della dipendenza della derivata prima delle variabili isteretiche Z_v e Z_ϕ dall'atto di moto della corrispondente coordinata libera. L'unico aspetto in cui il modello di Park-Wen risulta più limitante, se rapportato a quello di Bouc-Wen, consiste nell'indiretta imposizione in esso di $\sigma_v = \sigma_\phi = n_v = n_\phi = 2$, da cui consegue l'impossibilità di andare ad agire in maniera esplicita sul rapporto tra le rigidzze a carico-scarico e sulla progressiva transizione tra il valore di rigidzza massima pre-snervamento e minima post-snervamento. Un secondo impiego delle relazioni individuate tra i parametri consiste nel fatto che esse potranno essere successivamente sfruttate per un processo di taratura: infatti, diverrà all'occorrenza possibile cercare di calibrare i parametri di Park-Wen a partire da un set soddisfacente, precedentemente determinato nel caso di Bouc-Wen, e andando ad agire principalmente sui parametri aggiuntivi introdotti nella presente modellazione (i.e. A_v , A_ϕ , $\beta_{v\phi}$, $\beta_{\phi v}$, $\gamma_{v\phi}$ e $\gamma_{\phi v}$). Da ultimo, si cita inoltre come, sfruttando tali corrispondenze tra parametri, diverrà possibile attuare un processo di validazione dell'implementazione numerica nel software di calcolo del modello di Park-Wen, una volta che sono disponibili i risultati ottenuti impiegando il modello di Bouc-Wen; tale procedura verrà impiegata e mostrata nel dettaglio nel paragrafo seguente.

5.2 Calcolo della risposta del sistema per un assegnato stato di sollecitazione

Per la determinazione della risposta del sistema, risulta necessario affiancare alle equazioni 5.2 e 5.3 le equazioni di equilibrio dinamico alla traslazione e alla rotazione del blocco inerziale, qualora esso venga sollecitato mediante l'applicazione di forzanti esterne, le cui componenti generalizzate si identificano rispettivamente con $q_v(t)$ e $q_\phi(t)$. Come nel caso di Bouc-Wen, si è in presenza di un sistema costituito da sei equazioni in sei incognite, rappresentate dalle storie temporali delle variabili $Z_v(t)$, $Z_\phi(t)$, $v(t)$, $\phi(t)$, $F(t)$ e $M(t)$. Le equazioni di moto sono riportate in 5.8, dove si è considerato un contributo aggiuntivo

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE
COSTITUTIVA DI PARK-WEN

di smorzamento viscoso nella forma già discussa e un ulteriore contributo elastico di accoppiamento in rigidezza, rappresentato dal termine k_{coup} [N]. In definitiva, seguendo un approccio di questo tipo, si cerca di riprodurre nella maniera più dettagliata possibile l'interazione dinamica presente tra le due coordinate libere, mediante un contributo inerziale, uno isteretico e uno puramente elastico. Il problema differenziale può quindi essere risolto previa imposizione di un assegnato set di condizioni iniziali.

$$\begin{aligned} m\ddot{v}(t) - me_G\ddot{\phi}(t) + c_v\dot{v}(t) + F(t) + k_{coup}\phi(t) &= q_v(t) \\ -me_G\ddot{v}(t) + \lambda\ddot{\phi}(t) + c_\phi\dot{\phi}(t) + M(t) + k_{coup}v(t) &= q_\phi(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Si è inoltre considerato, con coerenza di notazioni: $\lambda = (I_G + me_G^2)$, $c_v = 2\xi_v\sqrt{k_v m}$ e $c_\phi = 2\xi_\phi\sqrt{k_\phi\lambda}$.

La tecnica di implementazione e la successiva soluzione del problema mediante il software MATLAB può essere condotta mediante uno script formalmente identico a quello impiegato per il caso descritto al Par.4.2, con la sola differenza che le espressioni delle forzanti di interazione e le leggi di flusso sono espresse in accordo con il modello di Park-Wen. Attuando gli opportuni cambi di variabile e considerando una sollecitazione indotta da un moto traslazionale imposto alla pinza rigida, si ottiene il sistema in 5.9, che permette di determinare l'evoluzione temporale delle variabili isteretiche e delle coordinate lagrangiane e, in fase di *post-processing*, delle forzanti di interazione tra la massa e l'estremo del cavo messaggero. Lo schema input-output per l'algoritmo in questione risulta essere quello riportato in Tab.5.1

$$\begin{aligned} \dot{Z}_v(t) &= A_v u_v(t) - \beta_{vv} |u_v(t) Z_v(t)| Z_v(t) - \gamma_{vv} u_v(t) Z_v^2(t) - \beta_{v\phi} |u_\phi(t) Z_\phi(t)| Z_v(t) + \\ &\quad - \gamma_{v\phi} u_\phi(t) Z_v(t) Z_\phi(t) \\ m\dot{u}_v(t) - me_G\dot{u}_\phi + c_v u_v(t) + \alpha_v k_v v(t) + (1 - \alpha_v) k_v Z_v(t) + k_{coup}\phi(t) &= -m\ddot{u}_c(t) \\ \dot{v}(t) &= u_v(t) \\ \dot{Z}_\phi(t) &= A_\phi u_\phi(t) - \beta_{\phi\phi} |u_\phi(t) Z_\phi(t)| Z_\phi(t) - \gamma_{\phi\phi} u_\phi(t) Z_\phi^2(t) - \beta_{\phi v} |u_v(t) Z_v(t)| Z_\phi(t) + \\ &\quad - \gamma_{\phi v} u_v(t) Z_v(t) Z_\phi(t) \\ -me_G\dot{u}_v(t) + \lambda\dot{u}_\phi(t) + c_\phi u_\phi(t) + \alpha_\phi k_\phi \phi(t) + (1 - \alpha_\phi) k_\phi Z_\phi(t) + k_{coup}v(t) &= me_G\ddot{u}_c(t) \\ \dot{\phi}(t) &= u_\phi(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

INPUT	OUTPUT
$k_v, \alpha_v, A_v, \beta_{vv}, \gamma_{vv}, \beta_{v\phi}, \gamma_{v\phi}\xi_v, k_\phi, \alpha_\phi, A_\phi, \beta_{\phi\phi}, \gamma_{\phi\phi}, \beta_{\phi v}, \gamma_{\phi v}, \xi_\phi, t_0, t_f, \Delta t, Z_v(t_0), v(t_0), u_v(t_0), Z_\phi(t_0), \phi(t_0), u_\phi(t_0)$	$Z_v(t), v(t), u_v(t), Z_\phi(t), \phi(t), u_\phi(t), F(t), M(t)$

Tabella 5.1: Input-Output dell'algoritmo numerico nel caso di forzante esterna o moto imposto alla pinza con modello Park-Wen.

Confrontando i sistemi risolvibili in 4.7 e in 5.9, si evince come, nel primo caso, le equazioni riferite alla coordinata libera traslazionale risultano debolmente accoppiate a quelle relative alla coordinata traslazionale, stante solamente la presenza del termine misto inerziale

$-me_{Gd}$ che compare nelle equazioni di moto; d'altra parte, per il modello di Park-Wen, l'accoppiamento risulta presente sia nelle leggi di flusso che nelle equazioni di moto, così da rendere il sistema più complesso da risolvere numericamente, oltre che più oneroso dal punto di vista del tempo di calcolo, mediante l'usuale impiego di ODE45. Anche per questo motivo, nel seguito, si condurrà una procedura di validazione dell'algoritmo implementato che verterà non solo alla riproduzione di un comportamento puramente elastico, ma anche di quello isteretico ottenuto mediante una modellazione alla Bouc-Wen: infatti, alla luce delle relazioni determinate al paragrafo precedente tra i parametri governanti i due modelli, diviene possibile verificare se i due algoritmi siano in grado di fornire la stessa risposta del sistema a uno stato di sollecitazione armonica.

5.2.1 Riproduzione del comportamento di un oscillatore elastico lineare

Come primo benchmark di validazione dell'implementazione dell'algoritmo, si ricorre alla riproduzione, mediante il modello isteretico di Park-Wen, della risposta di un oscillatore elastico lineare. Stante la struttura sostanzialmente differente delle equazioni di modello rispetto al caso di Bouc-Wen, è opportuno, prima di procedere, soffermarsi sugli accorgimenti da introdurre al fine di fare collasare le leggi governanti a quelle elastiche. Con riferimento alle equazioni in 5.2 e 5.3, risulta evidente come, ponendo α_v e α_ϕ pari all'unità, si ottiene una variazione lineare della forza F e del momento di richiamo M con le coordinate v e ϕ , rispettivamente secondo un coefficiente di proporzionalità pari a k_v e k_ϕ . Per far sì che anche le leggi di flusso evidenzino il carattere non-dissipativo della risposta, è opportuno porre i parametri $A_v, A_\phi, \beta_{vv}, \beta_{v\phi}, \beta_{\phi v}, \beta_{\phi\phi}, \gamma_{vv}, \gamma_{v\phi}, \gamma_{\phi v}, \gamma_{\phi\phi}$ pari a zero e, parallelamente, condizioni iniziali omogenee in termini di variabili isteretiche Z_v e Z_ϕ , così che esse risultino nulle per tutto l'intervallo di tempo in analisi. Si ricorda come, per validare i risultati forniti in output dal codice in esame, si disponga sia di un algoritmo MATLAB per la determinazione della risposta di un sistema lineare a due gradi di libertà sia dei risultati ottenuti in 4.2.1 a partire dal codice di Bouc-Wen. Si consideri quindi, a titolo esemplificativo, ancora una volta un dissipatore Stockbridge idealmente lineare di massa $m = 1$ kg, momento di inerzia baricentrico $I_G = 0.002$ kgm², eccentricità $e_G = 0.05$ m, costanti di rigidezza della molle rispettivamente pari a $k_v = 50$ N/m e $k_\phi = 10$ Nm e fattori di smorzamento viscoso $\xi_v = 0.01$ e $\xi_\phi = 0.002$. Il calcolo delle frequenze proprie del sistema in esame, effettuato in 4.2.1, ha condotto ai seguenti valori: $f_1 = 1.12$ Hz e $f_2 = 11.32$ Hz. Si ponga il caso in cui sul sistema non sia applicata alcuna forzante esterna, ma esso venga messo in moto mediante l'imposizione di un set di condizioni iniziali non-omogenee del tipo: $v(t_0) = 0.2$ m, $\phi(t_0) = \pi/20$ rad, $\dot{v}(t_0) = 0$ m/s e $\dot{\phi}(t_0) = 0$ rad/s. La soluzione numerica del problema ridotto a lineare viene effettuata mediante l'impiego sia dello script in cui è implementata una modellazione alla Bouc-Wen sia mediante quello in cui ci si riferisce al modello isteretico di Park-Wen; i dati di ingresso da fornire allo script di Bouc-Wen, oltre alle proprietà del sistema e alle condizioni iniziali appena definite, sono stati già elencati in 4.2.1, mentre quelli da fornire allo script di Park-Wen risultano essere l'intervallo di integrazione delle equazioni $[t_0, t_f] = [0, 10]$ s, uniformemente discretizzato mediante una griglia a maglia $\Delta t = 10^{-4}$ s, $k_v = 5000$ N/m, $\alpha_v = 1$, $k_\phi = 200$ Nm, $\alpha_\phi = 1$ ed i parametri regolanti l'evoluzione delle variabili isteretiche $A_v = A_\phi = 0$, $\beta_{vv} = \gamma_{vv} = \beta_{\phi v} = \gamma_{\phi v} = 0$ m⁻², $\beta_{v\phi} = \gamma_{v\phi} = \beta_{\phi\phi} = \gamma_{\phi\phi} = 0$ rad⁻². Si sottolinea inoltre come il contributo di accoppiamento elastico, definito mediante il parametro k_{coup} , non venga considerato nel caso in esame.

Dal momento che il codice di Bouc-Wen riproduce in maniera pressochè esatta gli output del codice elastico, il confronto per la validazione dello script di Park-Wen può essere effettuato confrontandolo direttamente con il primo; i risultati, espressi in termini di variazione della

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

forza F e del momento M di richiamo sia rispetto al tempo che rispetto alla coordinata libera corrispondente, è riportato in Fig.5.2-5.5.

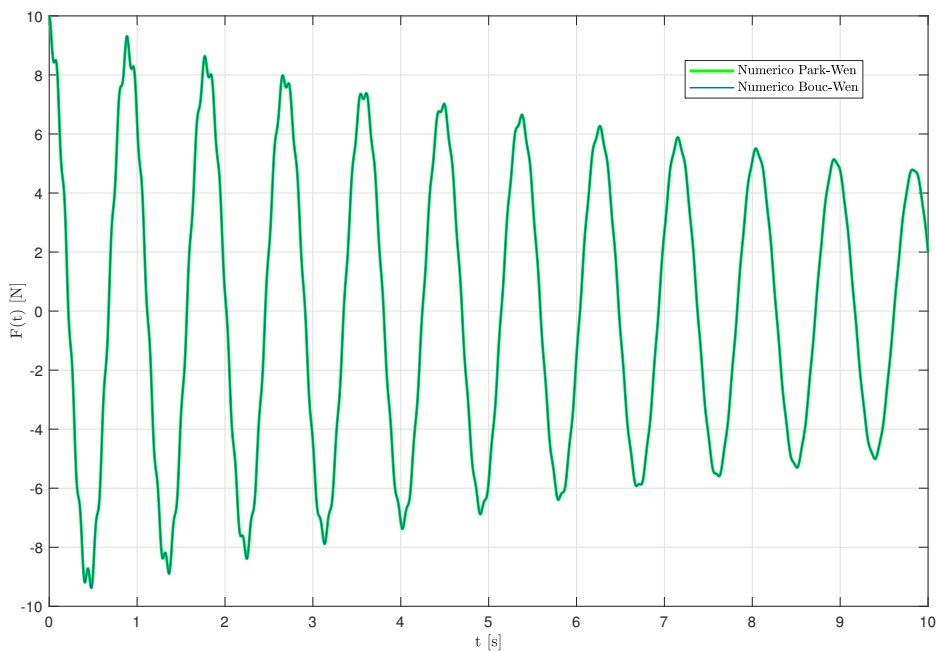


Figura 5.2: Confronto nel piano $F - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

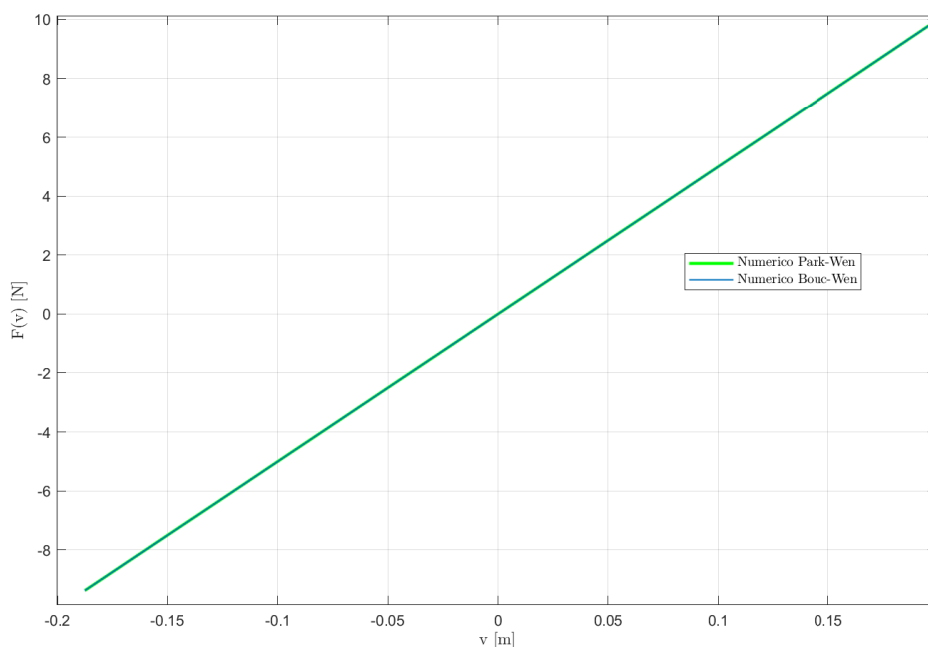


Figura 5.3: Confronto nel piano $F - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

Dalle figure appena menzionate, si nota come, anche in questa circostanza, si è ottenuto un ottimo grado di corrispondenza tra le curve, le quali risultano essere perfettamente

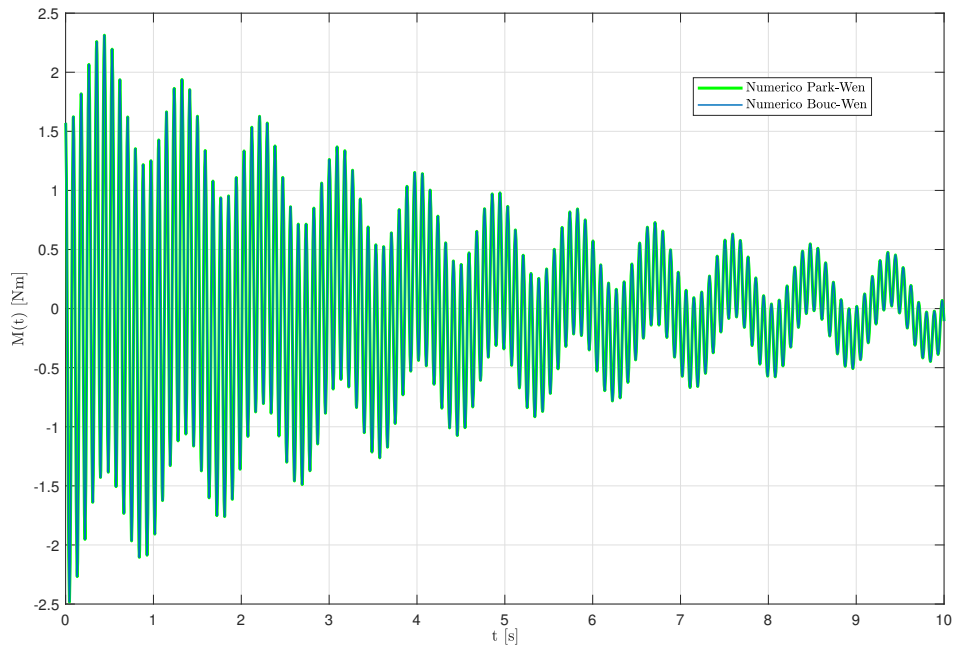


Figura 5.4: Confronto nel piano $M - t$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

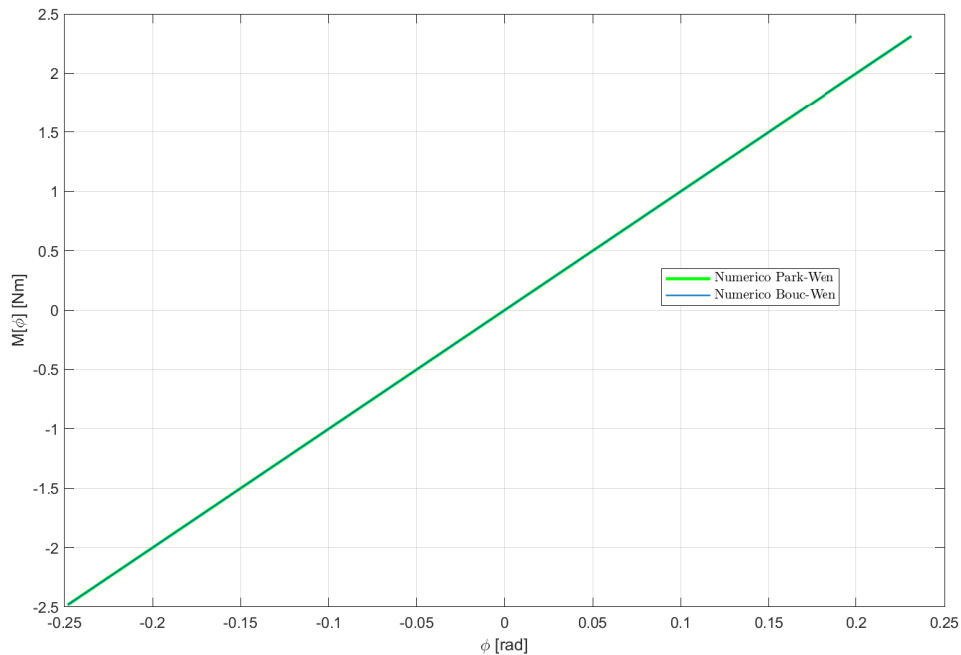


Figura 5.5: Confronto nel piano $M - v$ sotto l'effetto di condizioni iniziali non omogenee.

sovrapposte; si è quindi ottenuta una prima conferma della corretta implementazione dell'algoritmo numerico e della sua capacità di riprodurre la risposta di un oscillatore elastico lineare. Sebbene qui non riportate per brevità, è possibile dimostrare come l'evoluzione temporale delle variabili isteretiche $Z_v(t)$ e $Z_\phi(t)$ si mantenga identicamente nulla.

5.2.2 Riproduzione del comportamento di un oscillatore isteretico di Bouc-Wen

Si consideri un oscillatore discreto a due gradi di libertà avente proprietà inerziali e caratteristiche geometriche analoghe a quelle introdotte in 5.2.1, in assenza di smorzamento viscoso, ma dotato di un carattere dissipativo isteretico. Si supponga di imporre un moto traslazionale alla pinza, caratterizzato da un andamento temporale armonico dell'accelerazione del tipo in 5.10: si assuma inoltre per semplicità un'ampiezza $\ddot{w}_{c0} = 1 \text{ m/s}^2$ e una frequenza $f = 1 \text{ Hz}$.

$$\ddot{w}_c(t) = \ddot{w}_{c0} \sin(2\pi ft) \quad (5.10)$$

L'interazione tra la massa e il cavo messaggero può essere descritta sia mediante una modellazione alla Bouc-Wen che mediante il modello di Park-Wen. Nel primo caso, si assegnano i seguenti valori per i parametri: $k_{min,v} = 25 \text{ N/m}$, $k_{max,v} = 100 \text{ N/m}$, $v_0 = 0.02 \text{ m}$, $k_{min,\phi} = 5 \text{ Nm}$, $k_{max,\phi} = 20 \text{ Nm}$, $\phi_0 = 0.005 \text{ rad}$, $\sigma_v = \sigma_\phi = n_v = n_\phi = 2$. Volendo fare in modo che il modello di Park-Wen sia ricondotto al precedente, in virtù di quanto discusso al Par.5.1 e eseguendo gli opportuni calcoli, risulta necessario assegnare i parametri qui riportati: $k_v = 100 \text{ N/m}$, $\alpha_v = 0.25$, $k_\phi = 20 \text{ Nm}$, $\alpha_\phi = 0.25$, $A_v = 1$, $A_\phi = 1 \text{ m/s}$, $\beta_{vv} = 5000 \text{ m}^{-2}$, $\gamma_{vv} = -2500 \text{ m}^{-2}$, $\beta_{\phi v} = \gamma_{\phi v} = 0 \text{ m}^{-2}$, $\beta_{\phi\phi} = 80000 \text{ rad}^{-2}$, $\gamma_{\phi\phi} = -40000 \text{ rad}^{-2}$, $\beta_{v\phi} = \gamma_{v\phi} = 0 \text{ rad}^{-2}$. A questo punto, risulta possibile risolvere il problema sia mediante il codice MATLAB preposto all'analisi dei sistemi con comportamento alla Bouc-Wen sia con quello per la soluzione numerica delle equazioni nel caso di modellazione di Park-Wen; in entrambi gli script, si è considerato in aggiunta un set omogeneo di condizioni iniziali, un intervallo di analisi di estremi $t_0 = 0 \text{ s}$ e $t_f = 10 \text{ s}$ e discretizzato con passo $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$, e l'input armonico di accelerazione imposta al vincolo è stato definito in forma vettoriale nei medesimi istanti di tempo, così da rendere non necessaria la procedura di interpolazione del segnale. L'integrazione delle equazioni governanti, condotta numericamente in entrambi i codici, ha fornito i risultati riportati in Fig.5.6-5.9 ,con riferimento sia all'andamento temporale che in funzione della coordinata libera corrispondente delle due componenti di richiamo F e M .

Il perfetto grado di corrispondenza e sovrapponibilità delle risposte ottenute fornisce un'ulteriore conferma della bontà dell'algoritmo numerico implementato per la determinazione della risposta del sistema, obbediente alle leggi isteretiche di Park-Wen, all'applicazione di un assegnato stato di sollecitazione. Si rileva inoltre come la storia temporale sia della coordinata libera traslazionale che rotazionale, pur non manifestando un andamento sinusoidale a causa della non-linearità della risposta, mostri dei picchi che si susseguono in maniera verosimilmente periodica, con periodo pari a 1 s e dunque coincidente con quello della forzante apparente applicata: tale andamento a regime si configura quindi come una generalizzazione di quanto si osserva nei sistemi elastici lineari. A questo punto, a partire dal paragrafo seguente, ci si dedicherà alla riproduzione dei test sperimentali di sweep in frequenza, al fine di tarare i parametri del modello e, conseguentemente, di validarlo.

5.3 Caratterizzazione del sistema dinamico: il calcolo delle funzioni di trasferimento

Seguendo lo stesso schema concettuale dei capitoli precedenti, una volta definite le equazioni di modello e per il calcolo della risposta a un dato stato di eccitazione e dopo aver validato la bontà della loro implementazione numerica, risulta doveroso procedere con la riproduzione degli esiti sperimentali dei test di sweep in frequenza. Per questo scopo, si

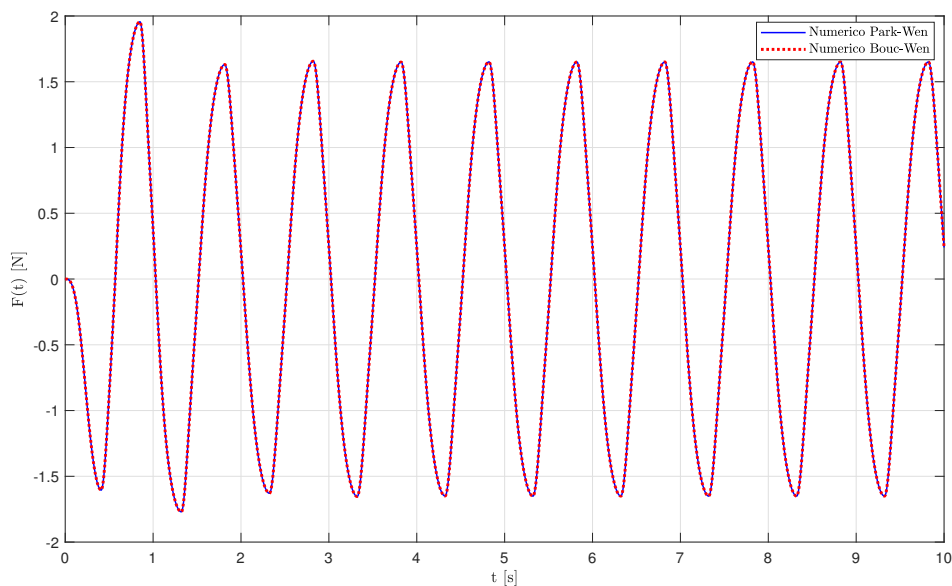


Figura 5.6: Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $F - t$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.

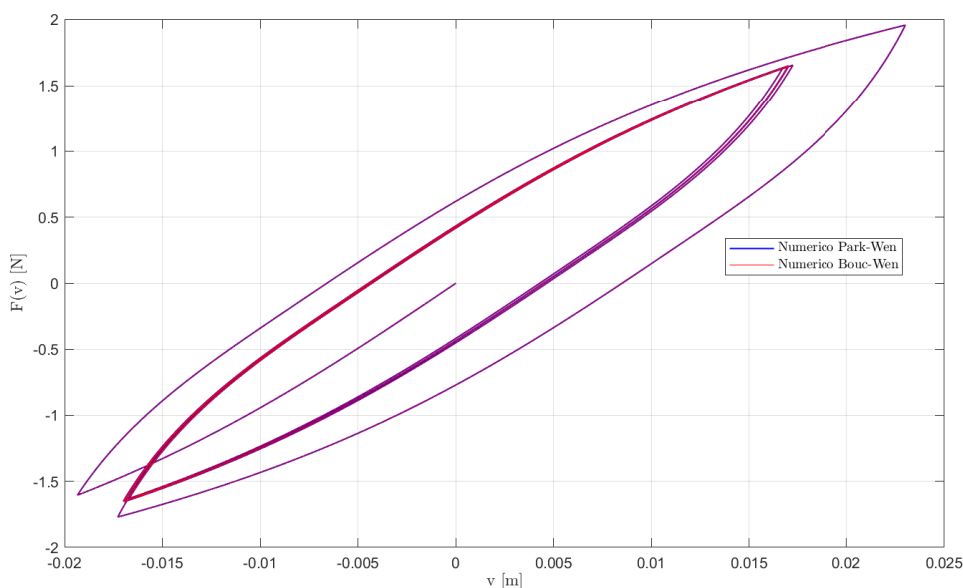


Figura 5.7: Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $F - v$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.

necessita preliminarmente di effettuare il calcolo numerico della funzione di trasferimento impiegata per riportare i risultati di laboratorio; come già discusso, essa si identifica con la funzione d'impedenza \tilde{Z}_d , definita secondo la 3.41, nel caso di test ad ampiezza di velocità costante, mentre si identifica con la massa dinamica \tilde{M} (si veda la definizione in 3.63) per quanto concerne i test ad ampiezza di spostamento costante. Nelle espressioni di entrambe le funzioni di trasferimento, compare la trasformata di Fourier della forza di interazione F_d tra il cavo conduttore, simulato dalla presenza del supporto di base, e la

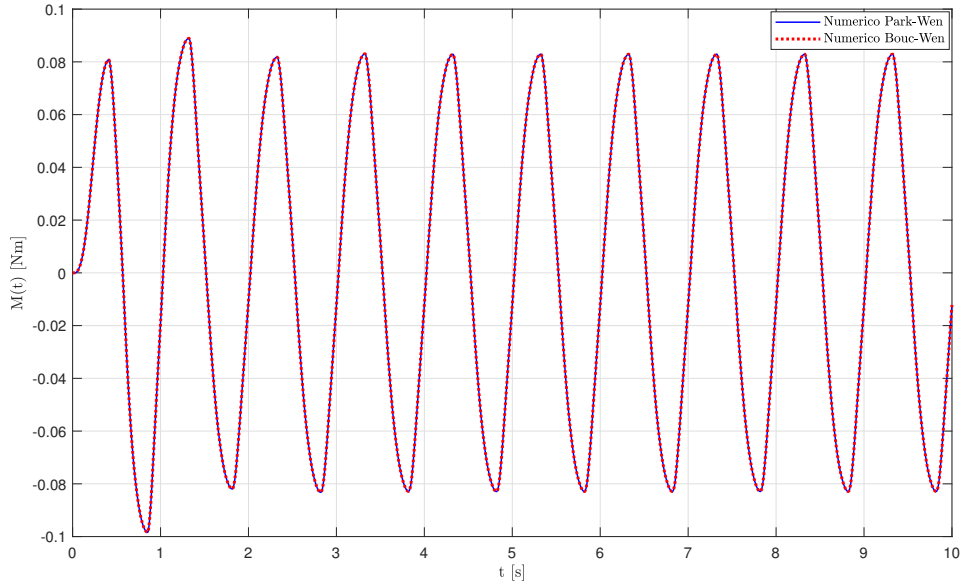


Figura 5.8: Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $M - t$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.

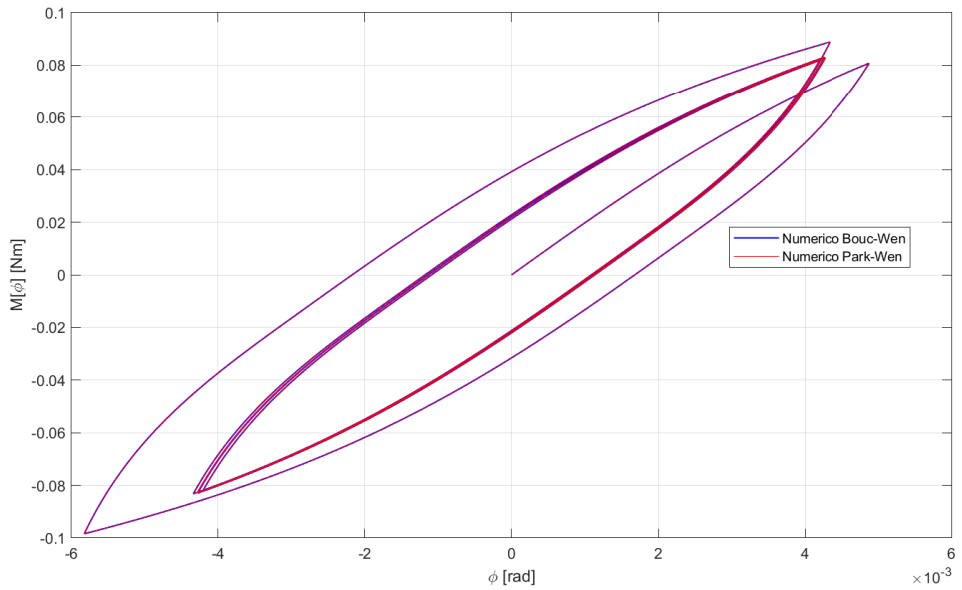


Figura 5.9: Confronto modelli Bouc-Wen e Park-Wen nel piano $M - \phi$ sotto l'effetto di un'accelerazione armonica imposta al supporto.

pinza rigida di connessione: pertanto, in prima istanza, si procede con il calcolo di questa componente di interazione. Con riferimento a un dissipatore Stockbridge simmetrico sottoposto unicamente alla traslazione della pinza $w_c(t)$, l'espressione della forza F_d si ottiene, come già discusso, dall'equazione in 5.11, a valle dell'imposizione dell'equilibrio dinamico alla traslazione della pinza stessa.

$$F_d(t) = (2m + m_c)\ddot{w}_c(t) + 2m\ddot{v}(t) - 2me_G\ddot{\phi}(t) \quad (5.11)$$

Tale equazione deve essere risolta in un contesto più ampio che considera anche le leggi costitutive del modello di Park-Wen in 5.2 e 5.3, associate a ciascuna coordinata lagrangiana, e le equazioni di moto delle masse in 5.8, nelle quali i termini forzanti vanno opportunamente specializzati come: $q_v(t) = -m\ddot{w}_c(t)$ e $q_\phi(t) = me_G\ddot{w}_c(t)$. L'espressione analitica dell'accelerazione imposta al vincolo $\ddot{w}_c(t)$ sarà poi definita in maniera differente per i test di sweep ad ampiezza di velocità costante e ad ampiezza di spostamento costante, come mostrato in seguito.

5.3.1 Riproduzione test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità costante

Si vogliono ora riprodurre, anche mediante la presente strategia di modellazione, i test di sweep ad ampiezza di velocità costante pari rispettivamente a 0.20 m/s e 0.05 m/s, effettuati da Sauter su un dissipatore Stockbridge simmetrico (dissipatore-2R) dalle proprietà riassunte in 2.1; come per i casi precedenti, si impiegheranno gli esiti numerici del primo test per attuare la procedura di calibrazione dei parametri, mentre il secondo verrà sfruttato per la validazione del modello. Per quanto concerne la fase di implementazione del problema nel codice di calcolo, il moto imposto al supporto è stato fornito in input in termini vettoriali sotto forma di accelerazione, velocità e spostamento della pinza, mediante la generazione di tre array aventi per componenti (nel caso dell'accelerazione) il valore che l'espressione in 5.12 assume in istanti di tempo spazati di un passo $\Delta t = 10^{-4}$ s, per un totale di 100 s. La frequenza f è stata variare linearmente nel tempo a partire dal valore $f_0 = 1$ Hz fino al valore $f_0 + \Delta f = 51$ Hz, mentre la rampa iniziale di transitorio è stata estesa per una durata pari a 10 s.

$$\ddot{w}_c(t) = f_{corr}\dot{w}_{c0}2\pi\bar{r}f \cos(2\pi ft) \quad (5.12)$$

Una volta risolto numericamente il problema, secondo lo schema più volte descritto, il vettore contenente il valore assunto dalla forza F_d negli istanti di tempo considerati risulta noto e, pertanto, può essere condotto il passaggio nel dominio delle frequenze mediante il calcolo delle trasformate di Fourier delle funzioni $F_d(t)$ e $\dot{w}_c(t)$ e la conseguente determinazione del modulo della parte reale della funzione d'impedenza, secondo l'equazione in 3.55, sulla base della quale potrà essere effettuato il confronto tra risultati sperimentali e numerici. Nel seguito, vengono riportate diverse tipologie di analisi, volte alla definizione di alcuni set di parametri adeguati alla riproduzione della curva sperimentale per il test ad ampiezza 0.20 m/s; nel dettaglio, sono state condotte procedure di ottimizzazione manuale, analisi parametriche e procedure di ottimizzazione automatica. Infine, una volta definito un set selezionato come ottimale, il test ad ampiezza 0.05 m/s sarà impiegato per la validazione del modello di Park-Wen.

Procedura manuale di calibrazione dei parametri

In linea con quanto effettuato nei Capitoli 3 e 4, si effettuano in primo luogo delle analisi volte alla calibrazione manuale dei parametri governanti il modello di Park-Wen; prima di procedere, visto l'elevato numero di parametri da tarare, risulta importante effettuare delle veloci considerazioni "empiriche" circa l'influenza di essi sull'andamento della funzione di impedenza del sistema, in modo da agire in maniera più mirata in un secondo momento. Nel dettaglio, sono stati osservati i seguenti comportamenti:

- al diminuire delle rigidzze pre-snervamento associate alle due coordinate libere k_v e k_ϕ , i picchi della funzione di impedenza si abbassano e si spostano a sinistra;

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE
COSTITUTIVA DI PARK-WEN

- al diminuire dei parametri α_v e α_ϕ , i picchi si abbassano e si spostano a sinistra;
- all'aumentare dei fattori di smorzamento viscoso ξ_v e ξ_ϕ , i picchi si abbassano e si allargano in maniera piuttosto simmetrica;
- all'aumentare del parametro A_v , si ha un innalzamento dei picchi ed il primo si sposta verso destra;
- all'aumentare di A_ϕ , si ha un abbassamento del secondo picco, che risulta inoltre spostato verso destra;
- all'aumentare del parametro di accoppiamento elastico k_{coup} , i picchi della funzione di impedenza hanno ampiezza maggiore e risultano spostati, sebbene in maniera non molto rilevante, verso sinistra;
- all'aumentare di β_{vv} (o γ_{vv}), i picchi si riducono solamente in termini di ampiezza;
- all'aumentare di $\beta_{\phi\phi}$ (o $\gamma_{\phi\phi}$), si ha un abbassamento solo del secondo picco;
- all'aumentare dei parametri di accoppiamento isteretico $\beta_{v\phi}$, $\beta_{\phi v}$, $\gamma_{v\phi}$ e $\gamma_{\phi v}$, si ha un abbassamento dei due picchi senza modifica della loro collocazione in termini di frequenza.

Un'ulteriore considerazione riguarda il fatto che, come osservato anche durante la modellazione del sistema a due gradi di libertà secondo la legge di Bouc-Wen, i parametri associati alla coordinata libera traslazionale v hanno grande influenza su entrambe le campane della curva di impedenza, mentre quelli associati alla coordinata libera rotazionale ϕ modificano in maniera trascurabile il primo picco della funzione, influenzando principalmente il secondo.

Al fine di procedere con dei tentativi di analisi manuale, pur basandosi principalmente su osservazioni di natura grafica circa l'andamento della funzione di impedenza, si è fatto riferimento anche alla definizione di una funzione obiettivo del tipo mostrato in 3.58, in cui si è considerato il set di punti di confronto C_6 e relativi pesi, definiti in 5.13. Il vettore delle frequenze sperimentali di confronto \mathbf{f}_{C_6} risulta quello espresso in 5.14.

$$C_6 = [17, 18, 19, 22, 27, 28, 29, 33, 36, 37, 38], \quad (5.13)$$

$$\text{con } p = [0.5, 1, 0.5, 0.2, 0.5, 1, 0.5, 0.2, 0.5, 1, 0.5]$$

$$\mathbf{f}_{C_6} = [10.17, 10.82, 11.43, 15.46, 23.86, 26.40, 28.98, 33.10, 36.08, 38.39, 41.17] \text{ Hz} \quad (5.14)$$

Si ricorda che il punto di confronto, tra curva sperimentale e sua controparte numerica, numero 18 rappresenta il primo picco della funzione di impedenza, mentre il numero 37 il secondo; i punti 27, 28, 29 sono riferiti invece alla zona di transizione. L'insieme C_6 rappresenta quindi un set di punti che caratterizzano globalmente la curva di impedenza del sistema.

A partire dalle considerazioni, sopra riportate, circa l'influenza dei singoli parametri sull'andamento della soluzione, diversi tentativi di analisi sono stati effettuati; i quattro set ottimali più significativi ottenuti da tali analisi sono riportati in Tab.5.2, per i quali i valori assunti dalla funzione obiettivo, con riferimento all'insieme di punti di confronto C_6 e relativi pesi risultano rispettivamente pari a $F_{obj} = 1.1389$, $F_{obj} = 0.7155$, $F_{obj} = 0.9052$ e $F_{obj} = 1.0730$ e le funzioni di impedenza associate sono mostrate in Fig.5.10-5.13.

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

PARAMETRI	SET 1	SET 2	SET 3	SET 4
k_v [N/m]	5500	5500	5000	5000
α_v [-]	0.25	0.25	0.25	0.25
k_ϕ [Nm]	200	200	200	200
α_ϕ [-]	0.25	0.25	0.25	0.25
k_{coup} [N]	280	280	250	250
A_v [-]	2	2	4	3.25
A_ϕ [-]	0.02	0.002	0.01	0.001
β_{vv} [m ⁻²]	5000	5000	30000	30000
$\beta_{\phi\phi}$ [rad ⁻²]	1000	1000	250000	250000
$\beta_{v\phi}$ [rad ⁻²]	0	0	30000	0
$\beta_{\phi v}$ [m ⁻²]	0	0	30000	0
γ_{vv} [m ⁻²]	5000	5000	30000	-15000
$\gamma_{\phi\phi}$ [rad ⁻²]	1000	1000	250000	-125000
$\gamma_{v\phi}$ [rad ⁻²]	0	0	30000	0
$\gamma_{\phi v}$ [m ⁻²]	0	0	30000	0
ξ_v [-]	0.30	0.30	0.10	0.10
ξ_ϕ [-]	0.02	0.10	0.085	0.085

Tabella 5.2: Set ottimali ottenuti mediante procedura di calibrazione manuale con modello di Park-Wen.

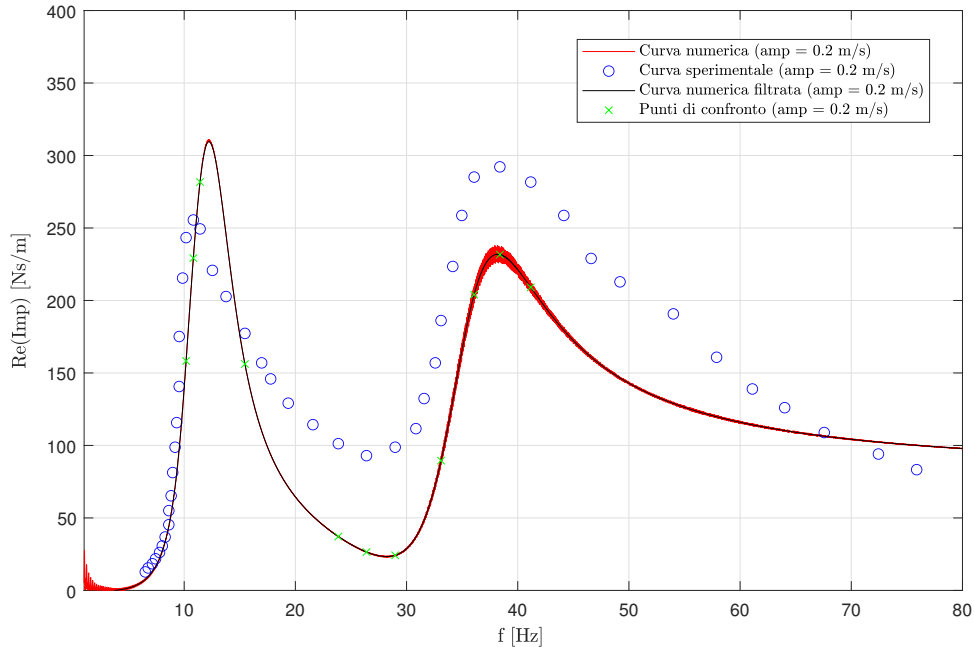


Figura 5.10: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 1 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

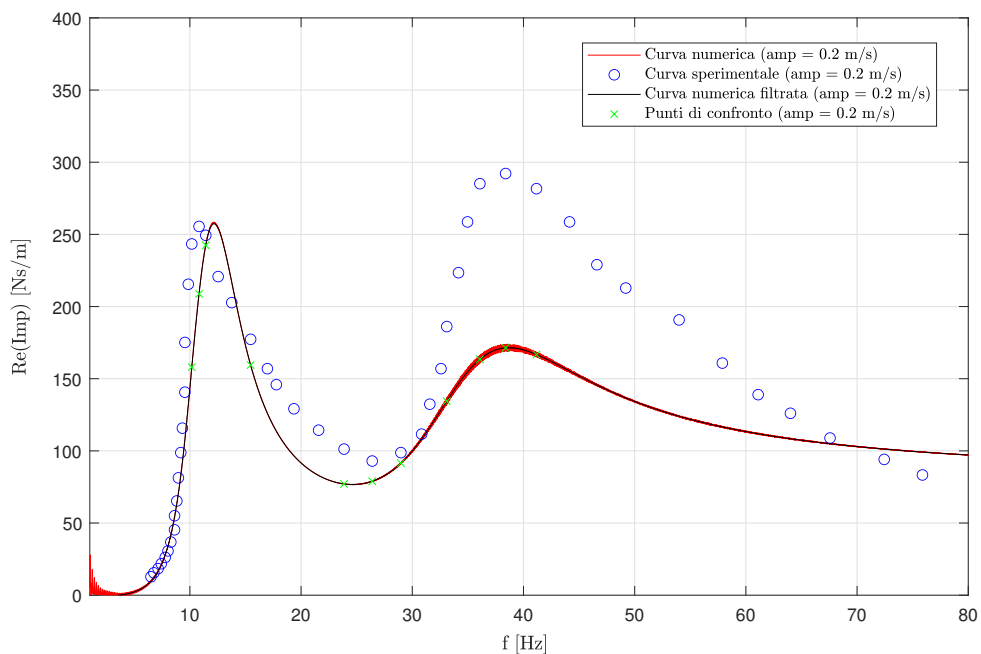


Figura 5.11: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 2 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.

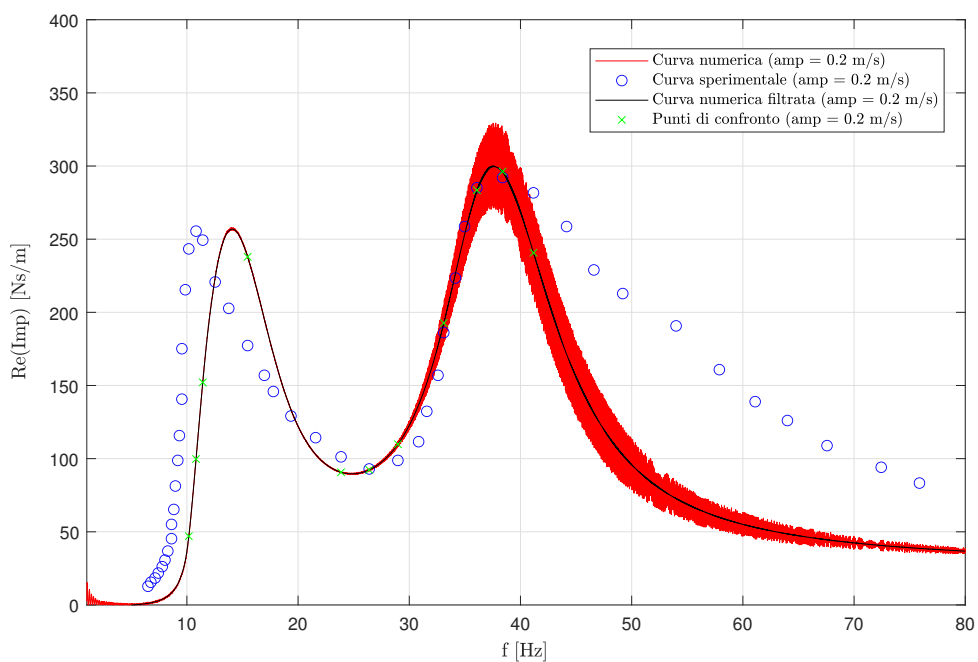


Figura 5.12: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 3 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.

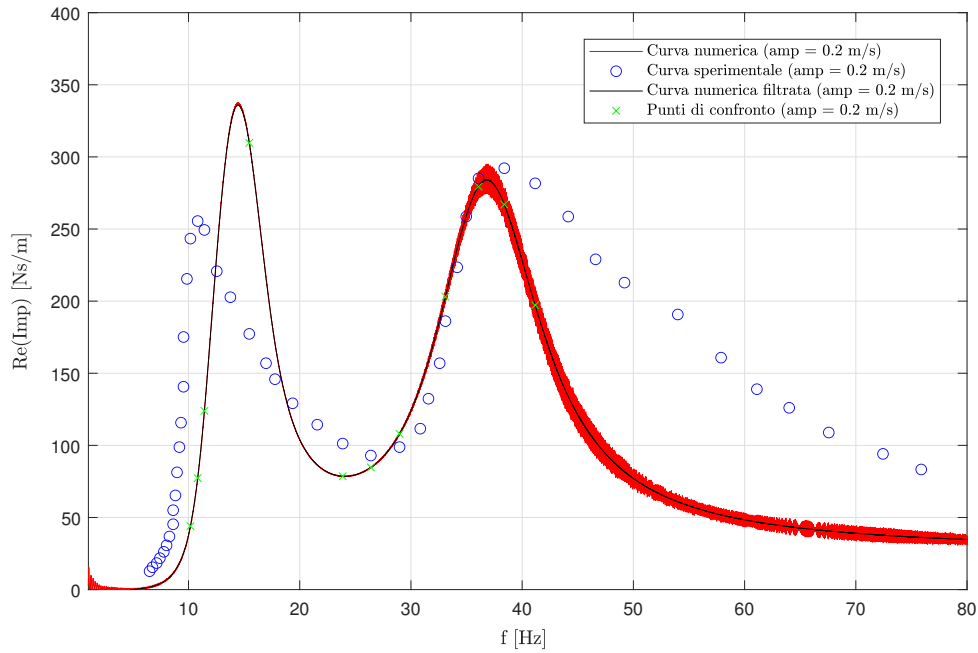


Figura 5.13: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 4 in Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.

A valle dei tentativi di ottimizzazione manuale della risposta del dispositivo i risultati ottenuti possono essere ritenuti soddisfacenti, sebbene risulta necessario sottolineare come l'effetto dell'accoppiamento isteretico, introdotto con il modello di Park-Wen, non sia tale da bilanciare perfettamente quello dovuto all'accoppiamento inerziale naturalmente presente nella stesura delle equazioni di moto. Di seguito, per maggiore completezza, si procederà con analisi parametriche e di calibrazione automatica dei parametri al fine di cercare set più rifiniti che permettano di ottenere una migliore corrispondenza tra esiti sperimentali e soluzioni numeriche del problema.

Analisi parametriche a 1 parametro

Come già discusso nel Capitolo 3 circa la modellazione discreta ad un grado di libertà traslazionale del sistema, prima di effettuare onerose operazioni di taratura automatica dei parametri governanti il problema, può essere utile eseguire delle analisi parametriche che permettano di valutare l'influenza degli stessi sulla risposta del dispositivo. Nel dettaglio, in questa circostanza, tali analisi vengono realizzate a partire dal set ottimale numero 1 di Tab.5.2, facendo variare volta per volta un singolo parametro all'interno di un opportuno range di variazione. Al fine di valutare l'influenza dei parametri sulle principali caratteristiche della funzione di impedenza, quali collocazione e ampiezza dei picchi di risonanza e andamento della zona di transizione, si è fatto riferimento alla definizione di una funzione obiettivo del tipo in 3.58, considerando tre differenti insiemi di punti di confronto: C_6 , C_7 e C_8 . Il set C_6 , con relativi pesi, già definito nel paragrafo precedente circa la calibrazione manuale dei parametri, permette di determinare il grado di corrispondenza tra la curva sperimentale e quella ottenuta numericamente a livello globale, ossia considerando l'intero andamento della funzione stessa; i set C_7 e C_8 , definiti in 5.15 e 5.17, assieme ai vettori di frequenze sperimentali di confronto \mathbf{f}_{C_7} e \mathbf{f}_{C_8} ad essi associati, definiti in 5.16

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE
COSTITUTIVA DI PARK-WEN

e 5.18, permettono invece di cogliere la somiglianza tra le due curve in corrispondenza rispettivamente dei picchi e della zona di transizione.

$$C_7 = [17, 18, 19, 36, 37, 38], \text{ con } p_i = 1 \forall i \quad (5.15)$$

$$f_{C_7} = [10.17, 10.82, 11.43, 36.08, 38.39, 41.17] \text{ Hz} \quad (5.16)$$

$$C_8 = [22, 27, 28, 29, 33], \text{ con } p_i = 1 \forall i \quad (5.17)$$

$$f_{C_8} = [15.46, 23.86, 26.40, 28.98, 33.10] \text{ Hz} \quad (5.18)$$

Come si può osservare dalla definizione dei tre set di punti, si ha che $C_6 = C_7 \cup C_8$. A differenza di quanto fatto in precedenza, in questo caso le analisi parametriche non hanno la pretesa di evidenziare i minimi della funzione obiettivo al variare del valore dei singoli parametri (dato che, mantenendo fissi tutti i restanti ed essendo questi in numero molto elevato, questo ragionamento perde di significato), quanto più dimostrare l'influenza degli stessi sulla risposta del sistema e, di conseguenza, sull'andamento della funzione obiettivo. Una volta eseguite tutte queste analisi parametriche, sarà quindi possibile impostare delle procedure di calibrazione automatica, ponendo l'attenzione esclusivamente su quei parametri che condizionano in maniera rilevante il comportamento del dispositivo; questa operazione di "filtraggio" viene eseguita anche alla luce del fatto che risulta impraticabile tenere in considerazione così tanti parametri variabili all'interno di una procedura automatica, stante l'ingente onere computazionale richiesto. Di seguito, in Fig.5.14-5.28, sono riportati gli andamenti della funzione obiettivo al variare del valore assunto dal parametro considerato, per i tre differenti insiemi di punti di confronto. Nello specifico, come già menzionato, i parametri fissi delle varie analisi assumono il medesimo valore di quelli appartenenti al set ottimale numero 1 di Tab.5.2, mentre i range di variazione dei parametri variabili risultano i seguenti: $k_v = [1000 : 500 : 10000] \text{ N/m}$, $\alpha_v = [0.1 : 0.05 : 1]$, $k_\phi = [40 : 20 : 400] \text{ Nm}$, $\alpha_\phi = [0.1 : 0.05 : 1]$, $k_{coup} = [0 : 20 : 280] \text{ N}$, $A_v = [0.5 : 0.5 : 10]$, $A_\phi = [0.002 : 0.01 : 0.202]$, $\beta_{vv} = [0 : 500 : 10000] \text{ m}^{-2}$, $\beta_{v\phi} (= \beta_{\phi v}) = [0 : 500 : 10000] \text{ rad}^{-2}(\text{m}^{-2})$, $\beta_{\phi\phi} = [0 : 250 : 5000] \text{ rad}^{-2}$, $\gamma_{vv} = [-5000 : 500 : 5000] \text{ m}^{-2}$, $\gamma_{v\phi} (= \gamma_{\phi v}) = [-5000 : 500 : 5000] \text{ rad}^{-2}(\text{m}^{-2})$, $\gamma_{\phi\phi} = [-2500 : 250 : 2500] \text{ rad}^{-2}$, $\xi_v = [0 : 0.025 : 0.5]$, $\xi_\phi = [0 : 0.0025 : 0.05]$, dove il primo numero tra parentesi si identifica con la prima componente del vettore, il secondo con il passo ed il terzo con l'ultima componente. Vale la pena sottolineare che, nel caso delle analisi parametriche con k_v , k_ϕ , α_v , α_ϕ , $\beta_{v\phi} (= \beta_{\phi v})$ e $\gamma_{v\phi} (= \gamma_{\phi v})$ variabili, il valore della costante di accoppiamento elastico k_{coup} è stato assunto pari a 100 N, in luogo del valore presente nel set 1 di Tab.5.2 pari a 280 N, al fine di evitare condizioni di instabilità nella risposta del sistema.

Osservando i grafici di Fig.5.14-5.28, è possibile notare che i parametri più influenti sull'andamento della funzione obiettivo risultano essere k_v , k_ϕ , α_v , α_ϕ , k_{coup} , A_v , A_ϕ , ξ_v e ξ_ϕ , per i quali la variazione del valore di F_{obj} è associata all'unità/prima cifra decimale; i restanti parametri β_{ij} e γ_{ij} , con $i = v, \phi$, invece provocano una variazione di F_{obj} in termini della seconda/terza cifra decimale. Per tale motivo, si è deciso di mantenere questi ultimi come parametri fissi durante le procedure di calibrazione automatica, discusse nel paragrafo seguente. In aggiunta, nonostante i risultati ottenuti dalle analisi parametriche, si è deciso di fissare anche il valore dei parametri α_v e α_ϕ pari a 0.25; tale scelta risulta in linea con l'andamento di F_{obj} al variare di α_ϕ in quanto, come si può osservare da Fig.5.17, all'aumentare del valore del parametro corrisponde un incremento del valore della funzione obiettivo, mentre risulta più in contrasto con quanto mostrato in Fig.5.15, circa la variazione di F_{obj} rispetto al parametro α_v , in quanto all'aumentare del valore del parametro

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

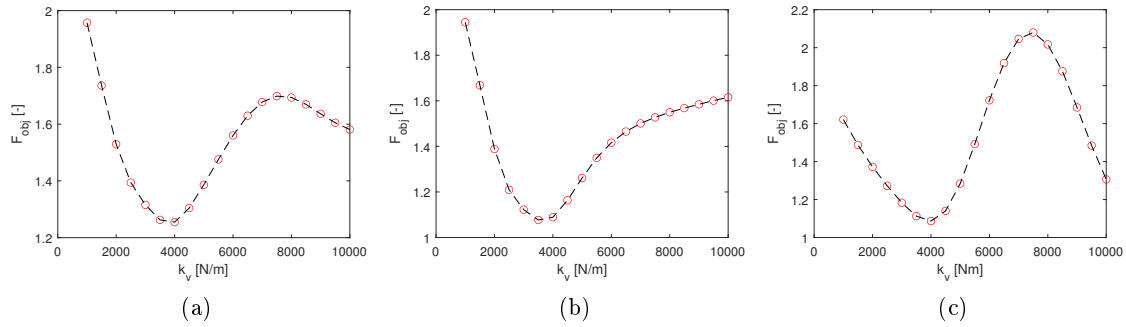


Figura 5.14: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità k_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

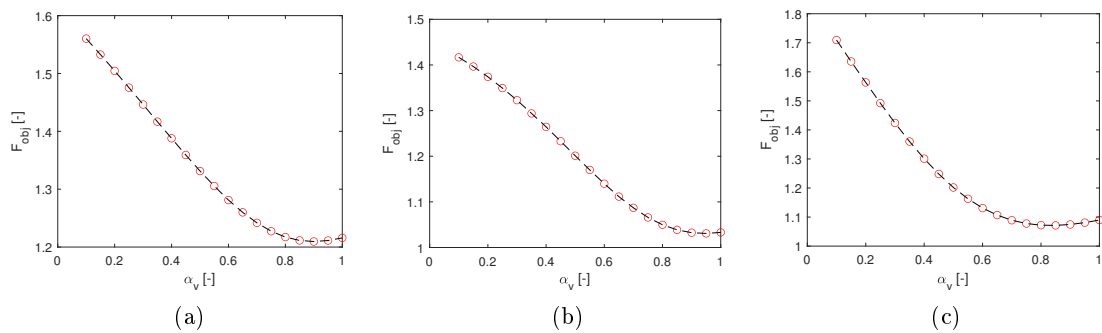


Figura 5.15: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro α_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

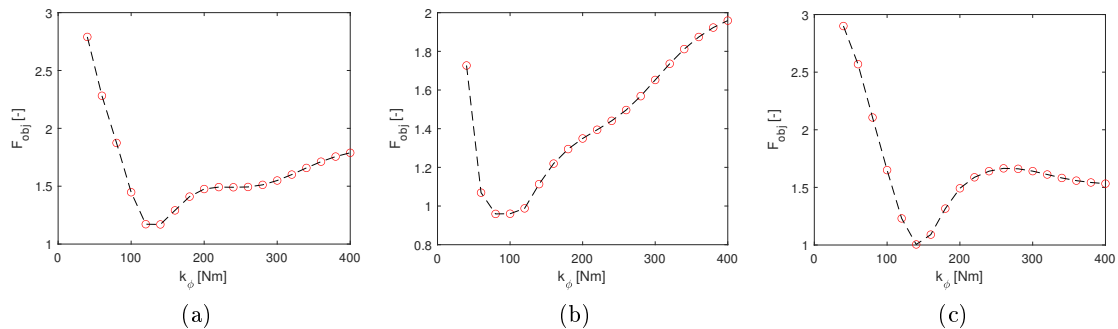


Figura 5.16: Variazione di F_{obj} in funzione della rigidità k_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

stesso si ha una diminuzione del valore di F_{obj} . Ad ogni modo, si è deciso di considerare un valore medio-basso per questi due parametri in modo da poter sfruttare il contributo di smorzamento isteretico del sistema.

Come si può osservare dalle figure riportate, considerando un parametro variabile alla volta, l'andamento della funzione obiettivo risulta in alcuni casi simile per tutti e tre i set di punti confronto impiegati (si veda ad esempio Fig.5.15,5.18,5.22), mentre in altri sensibilmente differente; la prima condizione indica che la variazione del parametro considerato porta a una migliore (peggiore) corrispondenza, tra la funzione di impedenza del sistema

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

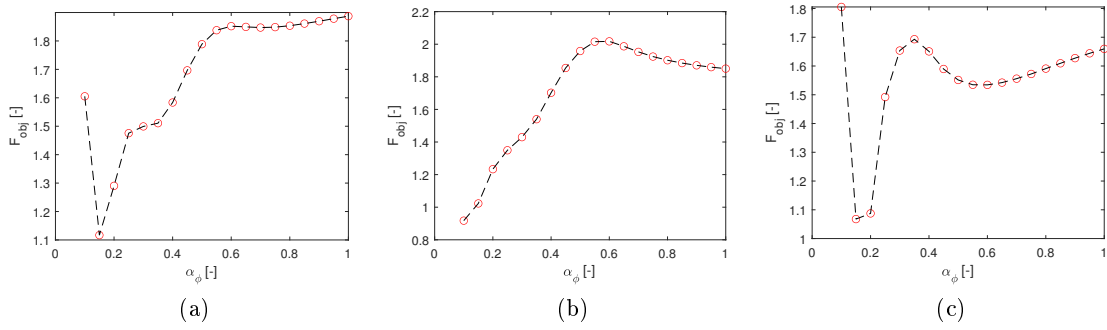


Figura 5.17: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro α_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

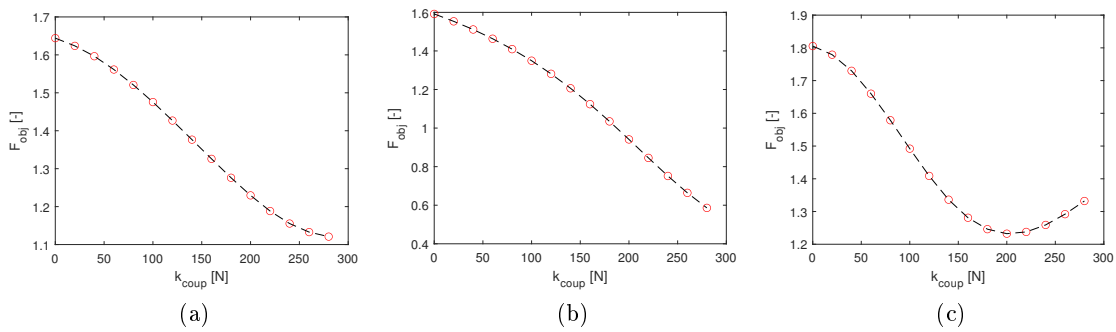


Figura 5.18: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro k_{coup} , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

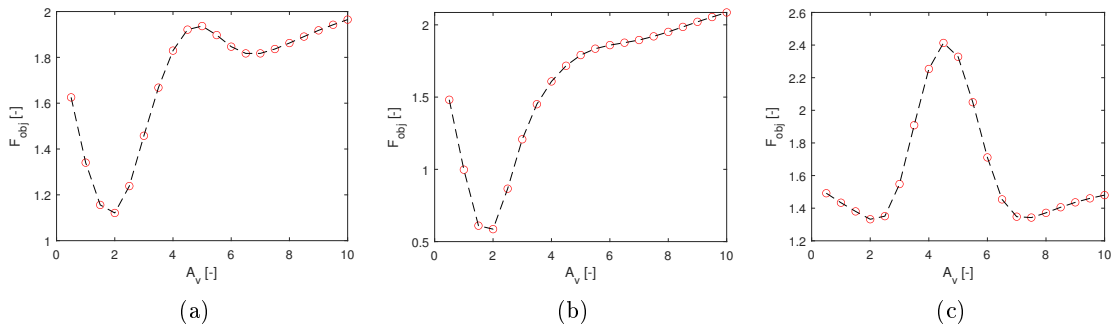


Figura 5.19: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro A_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

valutata numericamente e la sua controparte sperimentale, contemporaneamente in prossimità dei picchi e della zona di transizione (e di conseguenza a livello globale), mentre la seconda indica che la variazione del parametro comporta nello stesso istante una migliore (peggiore) corrispondenza tra le due curve nelle zone di risonanza e una peggiore (migliore) corrispondenza nella zona di transizione.

Con riferimento al set 1 di Tab.5.2 e agli esiti delle analisi parametriche, focalizzando l'attenzione sul set di punti di confronto C_6 che descrive la risposta globale del sistema, è possibile effettuare alcune considerazioni. Innanzitutto, mediante la procedura di taratura

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

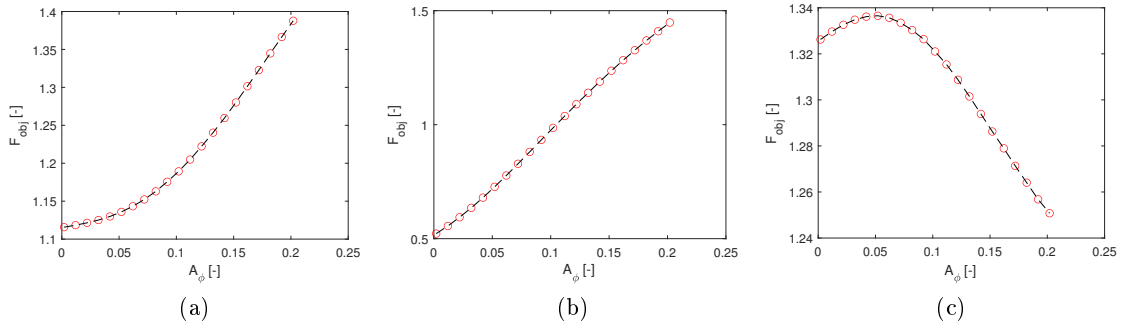


Figura 5.20: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro A_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

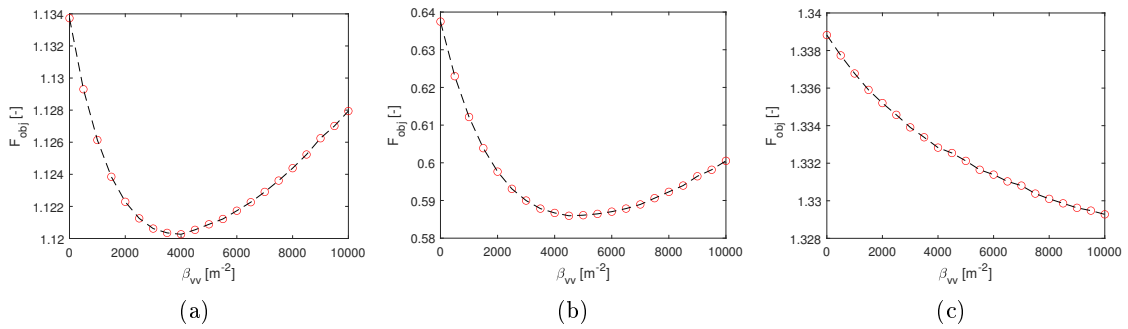


Figura 5.21: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro β_{vv} , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

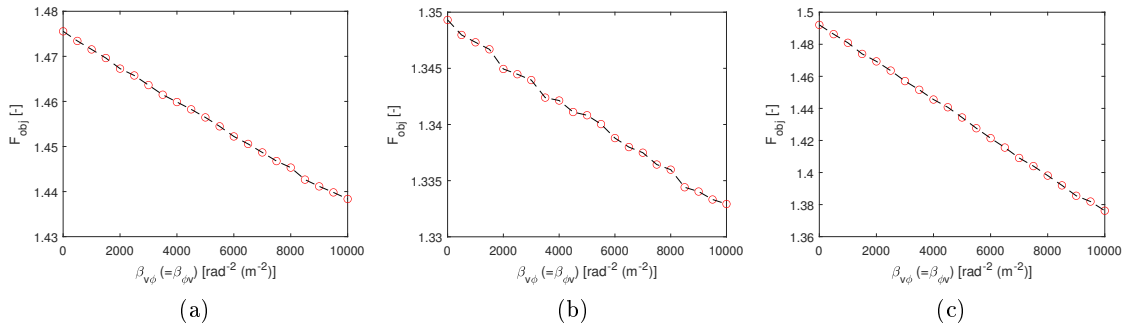


Figura 5.22: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\beta_{v\phi}$ ($= \beta_{\phi v}$), considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

manuale, si è identificato un valore di k_v pari a 5500 N/m e, coerentemente, la curva in Fig.5.14a evidenzia un minimo assoluto ben definito intorno a valori di 4000 N/m; si ottiene pertanto un buon grado di corrispondenza tra i risultati ottenuti dalle due analisi. Un ragionamento analogo può essere effettuato con riferimento al valore di A_v in Tab.5.2 e a Fig.5.19a, tra i cui esiti la corrispondenza si dimostra ancora più soddisfacente. D'altra parte, analizzando i risultati dell'analisi parametrica con k_ϕ variabile in Fig.5.16a, si osserva un minimo ben marcato per valori poco superiori a 100 Nm, mentre manualmente il suo valore era stato posto pari a 200 Nm; tale discrepanza era però da un lato prevedibile a priori, dal momento che il parametro k_ϕ governa principalmente l'andamento della seconda

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

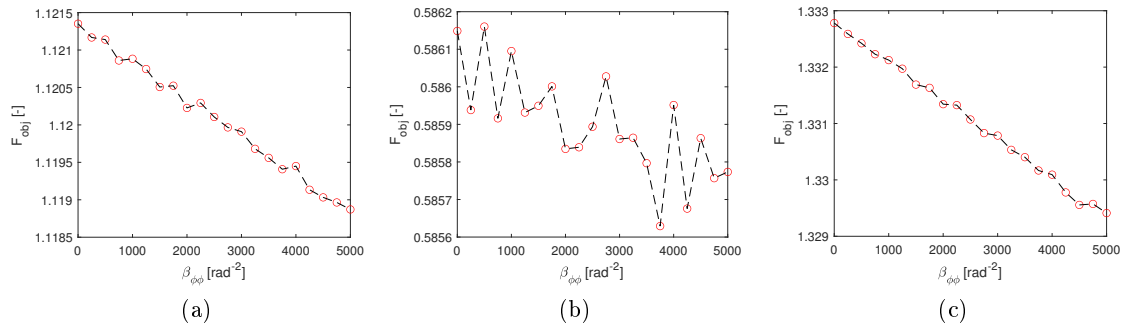


Figura 5.23: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\beta_{\phi\phi}$, considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

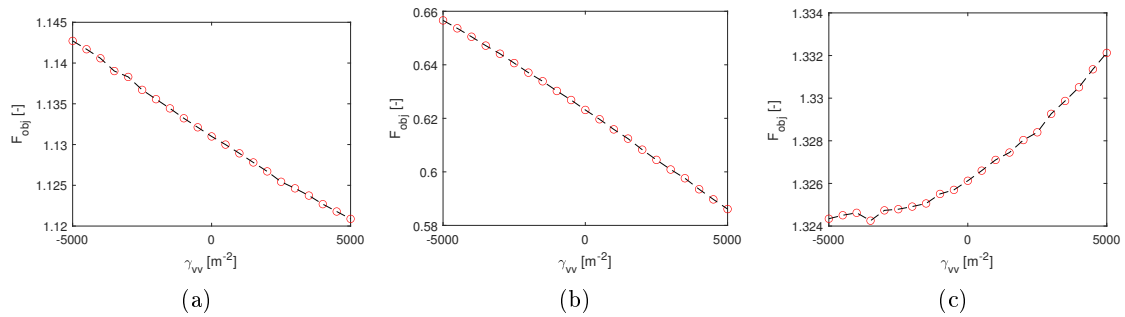


Figura 5.24: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro γ_{vv} , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

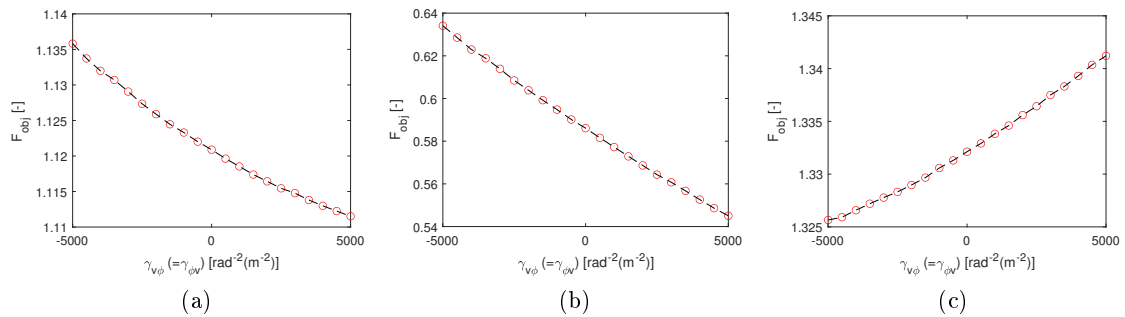


Figura 5.25: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\gamma_{v\phi}$ ($= \gamma_{\phi v}$), considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

campana di risonanza, per la quale il grado di corrispondenza, seppure ragionevole, non si dimostra ottimale.

A valle di queste considerazioni, è dunque possibile concludere che l'individuazione di un set ottimale di parametri governanti il modello non è per nulla immediata; nel paragrafo seguente si proporrà quindi l'impiego di una procedura automatica di calibrazione dei parametri, eseguita sulla base delle analisi fin qui effettuate.

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

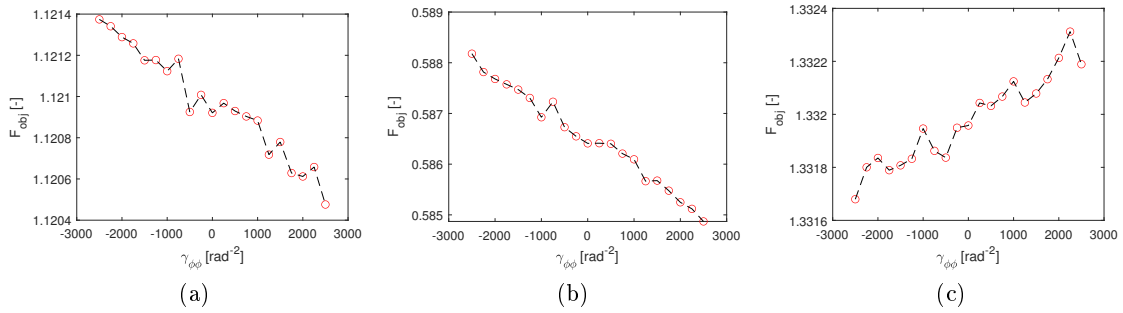


Figura 5.26: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro $\gamma_{\phi\phi}$, considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

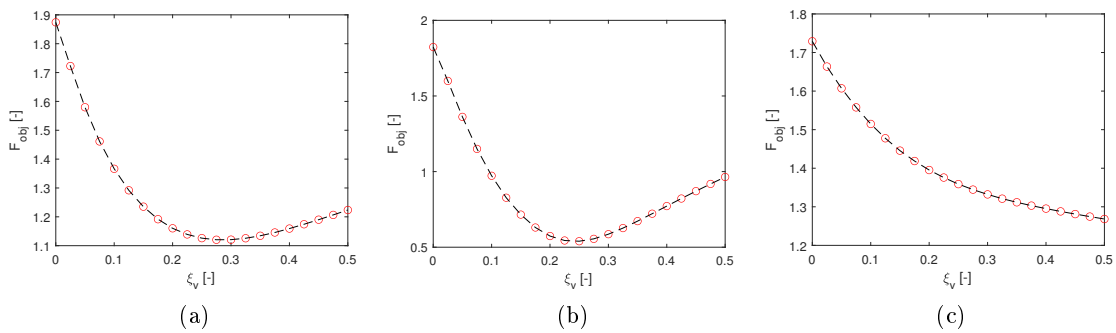


Figura 5.27: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro ξ_v , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

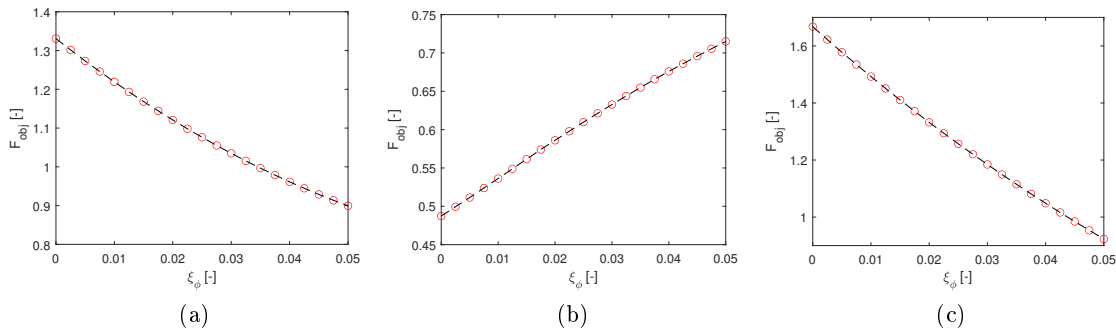


Figura 5.28: Variazione di F_{obj} in funzione del parametro ξ_ϕ , considerando il set di punti di confronto (a) C_6 , (b) C_7 e (c) C_8 , con relativi pesi.

Procedura automatica di calibrazione dei parametri

A questo punto, sulla base delle considerazioni effettuate nei paragrafi precedenti, avendo ora un'idea piuttosto precisa circa l'influenza dei singoli parametri sulla risposta del sistema, è possibile eseguire delle analisi di calibrazione automatica dei parametri governanti il modello mediante una sezione dedicata del codice MATLAB implementato. Come già discusso, i parametri che verranno fatti variare durante tali procedure saranno k_v , k_ϕ , k_{coup} , A_v , A_ϕ , ξ_v e ξ_ϕ , mentre i restanti assumeranno dei valori fissi; la decisione di considerare solo un sottoinsieme di parametri variabili è stata effettuata sia sulla base dei risultati

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

delle analisi parametriche, circa la variazione del valore della funzione obiettivo al variare di ogni singolo parametro, sia per ragioni di onere computazionale richiesto.

Come primo tentativo, si esegua un'analisi di ottimizzazione considerando il set di parametri governanti il modello numero 1 di Tab.5.2 come set di partenza e si scelga di voler ricercare una soluzione del problema all'interno del dominio definito dalle seguenti espressioni: $k_v \in [3000, 6500]\text{N/m}$, $k_\phi \in [100, 300]\text{Nm}$, $k_{coup} \in [150, 350]\text{N}$, $A_v \in [1, 7]$, $A_\phi \in [0.005, 0.03]$, $\xi_v \in [0.05, 0.35]$ e $\xi_\phi \in [0.05, 0.20]$. I dati da fornire in input alla sezione del codice risultano dunque $\mathbf{x}_{min} = [3000\text{ N/m}, 100\text{ Nm}, 150\text{ N}, 1, 0.005, 0.05, 0.05]$, $\mathbf{x}_{max} = [6500\text{ N/m}, 300\text{ Nm}, 350\text{ N}, 7, 0.03, 0.35, 0.20]$, $\mathbf{IG} = [5500\text{ N/m}, 200\text{ Nm}, 280\text{ N}, 2, 0.02, 0.30, 0.02]$, oltre che i parametri circa il numero di individui della popolazione generati ad ogni iterazione e i criteri di convergenza, considerati rispettivamente pari a $N_{pop} = 10N_{par} = 70$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 200$, $VTR = 0.30$ e $toll = 10^{-2}$. Impiegando il set di punti di confronto C_6 per il calcolo della funzione obiettivo, si ottiene in definitiva il set di parametri in 5.19, a cui è associato un valore della funzione obiettivo stessa $F_{obj} = 0.5368$ e l'andamento della curva di impedenza mostrato in Fig.5.30. Vale la pena notare come tutte le 200 iterazioni consentite siano state eseguite dall'algoritmo, siccome nessuna delle due condizioni sufficienti di convergenza è stata raggiunta. Tuttavia, come si può osservare da Fig.5.29, pur essendo, al termine dell'analisi, ancora distante il raggiungimento della convergenza in termini di $F_{obj,min}$, si nota come il valore di ΔF_{obj} sia prossimo a quello della soglia $toll$ stabilita e, pertanto, i risultati assumano una buona attendibilità pratica. In ogni caso, da Fig.5.30, si evince come tale ottimizzazione comporti un miglior grado di corrispondenza nell'intorno della seconda campana di risonanza piuttosto che della prima.

$$\begin{aligned} k_v &= 6500\text{ N/m}, k_\phi = 194.0203\text{ Nm}, k_{coup} = 281.2699\text{ N}, A_v = 2.471876, \\ A_\phi &= 0.02956758, \xi_v = 0.05, \xi_\phi = 0.08619559 \end{aligned} \quad (5.19)$$

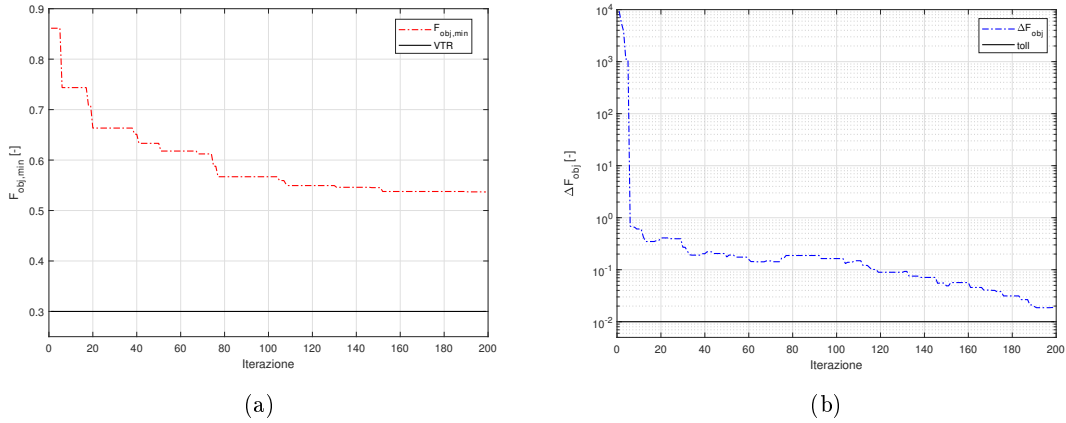


Figura 5.29: Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj} .

Si proceda ora con una calibrazione automatica riferendosi al set di parametri numero 2 di Tab.5.2 come set di partenza ($\mathbf{IG} = [5500\text{ N/m}, 200\text{ Nm}, 280\text{ N}, 2, 0.002, 0.30, 0.10]$). Considerando i medesimi range di variazione dei parametri k_v , k_ϕ e k_{coup} della prima procedura di ottimizzazione e impiegando invece $A_v \in [1, 5]$, $A_\phi \in [0.0005, 0.03]$, $\xi_v \in [0.05, 0.40]$ e $\xi_\phi \in [0.01, 0.20]$, si ha: $\mathbf{x}_{min} = [3000\text{ N/m}, 100\text{ Nm}, 150\text{ N}, 1, 0.0005, 0.05, 0.01]$, $\mathbf{x}_{max} = [6500\text{ N/m}, 300\text{ Nm}, 350\text{ N}, 5, 0.03, 0.40, 0.20]$; gli altri dati di input da fornire al

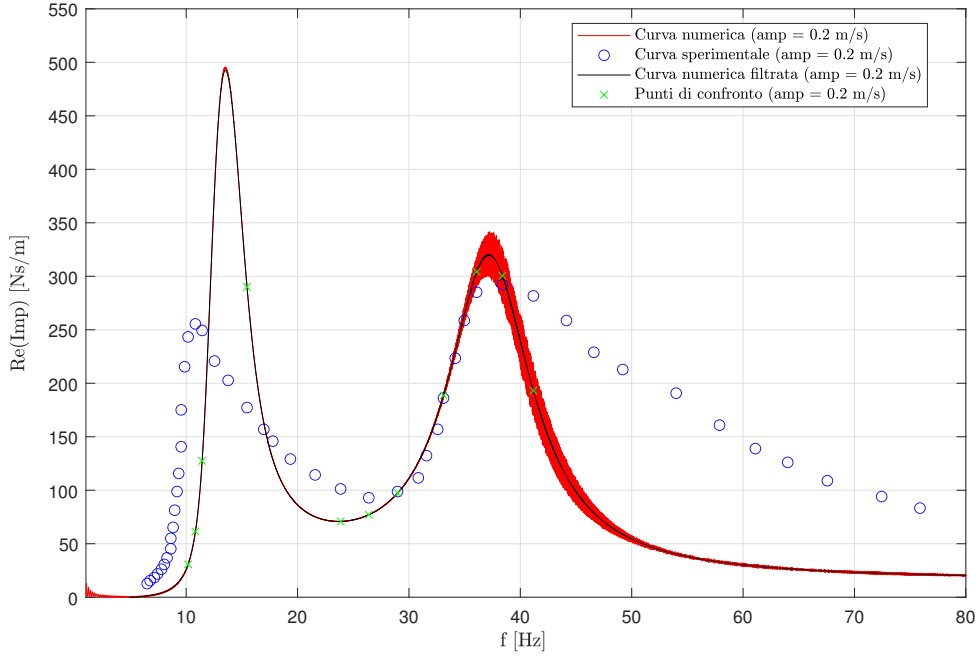


Figura 5.30: Curva di impedenza ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.19, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 1 di Tab.5.2.

codice risultano $N_{pop} = 70$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 200$, $VTR = 0.30$ e $toll = 10^{-2}$. Impiegando anche in questa circostanza il set di punti di confronto C_6 per il calcolo di F_{obj} , al termine delle 200 iterazioni consentite si ottiene il set di parametri in 5.20 a cui è associato un valore della funzione obiettivo $F_{obj} = 0.5055$ e la curva di impedenza in Fig.5.31. Per quanto concerne il mancato raggiungimento delle condizioni di convergenza, è possibile effettuare delle considerazioni analoghe a quelle del caso precedente.

$$\begin{aligned} k_v &= 6500 \text{ N/m}, k_\phi = 136.3292 \text{ Nm}, k_{coup} = 262.4548 \text{ N}, A_v = 2.213463, \\ A_\phi &= 0.0005, \xi_v = 0.283456, \xi_\phi = 0.08024165 \end{aligned} \quad (5.20)$$

In ultima istanza, si considerino i valori del set ottimale numero 4 di Tab.5.2 come "*initial guess*" di una terza procedura di calibrazione automatica dei parametri e si ponga dunque $\mathbf{IG} = [5000 \text{ N/m}, 200 \text{ Nm}, 250 \text{ N}, 3.25, 0.001, 0.1, 0.085]$. Cercando in questo caso la soluzione del problema nel dominio definito dalle espressioni $k_v \in [3000, 7000] \text{ N/m}$, $k_\phi \in [100, 300] \text{ Nm}$, $k_{coup} \in [150, 350] \text{ N}$, $A_v \in [1, 6.5]$, $A_\phi \in [0.0005, 0.01]$, $\xi_v \in [0.05, 0.30]$ e $\xi_\phi \in [0.02, 0.15]$, si forniscono come dati ingresso al codice MATLAB i seguenti parametri: $\mathbf{x}_{min} = [3000 \text{ N/m}, 100 \text{ Nm}, 150 \text{ N}, 1, 0.0005, 0.05, 0.02]$, $\mathbf{x}_{max} = [7000 \text{ N/m}, 300 \text{ Nm}, 350 \text{ N}, 6.5, 0.01, 0.30, 0.15]$, $N_{pop} = 70$, $N_{eval} = 10^{12}$, $N_{iter} = 200$, $VTR = 0.30$, $toll = 10^{-2}$. Analogamente a quanto accade per le precedenti due analisi, anche in questa circostanza tutte e 200 le iterazioni vengono effettuate, al termine delle quali, impiegando il set di punti di confronto C_6 per il calcolo di F_{obj} , si ottiene il set ottimale in 5.21, associato ad un valore della funzione obiettivo $F_{obj} = 0.6259$ e alla curva di impedenza mostrata in Fig.5.32.

$$\begin{aligned} k_v &= 7000 \text{ N/m}, k_\phi = 145.3785 \text{ Nm}, k_{coup} = 255 \text{ N}, A_v = 1.871119, \\ A_\phi &= 0.0005, \xi_v = 0.2580759, \xi_\phi = 0.08685955 \end{aligned} \quad (5.21)$$

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

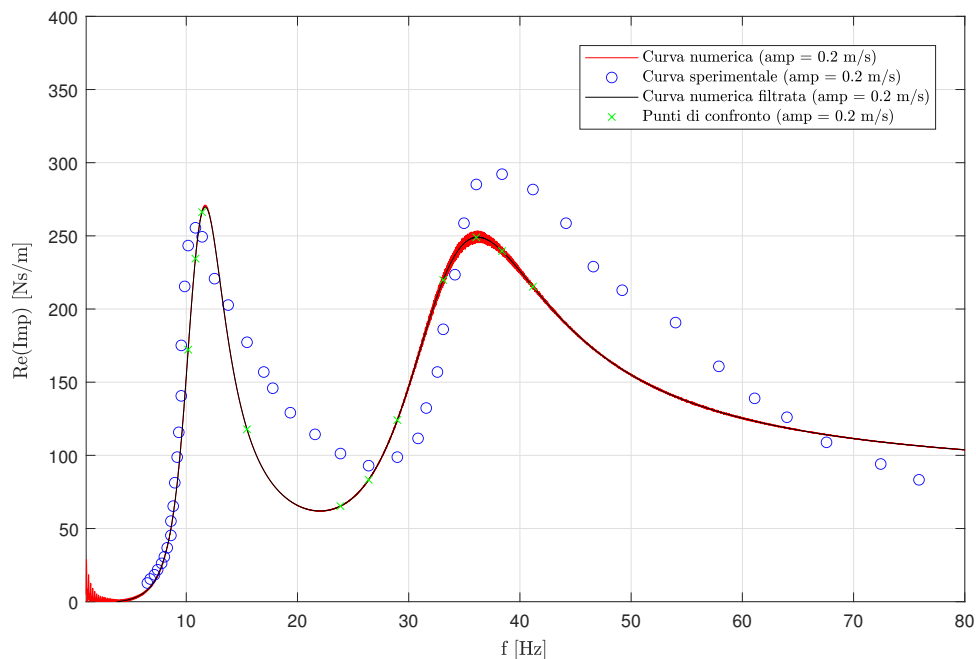


Figura 5.31: Curva di impedenza ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.20, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 2 di Tab.5.2.

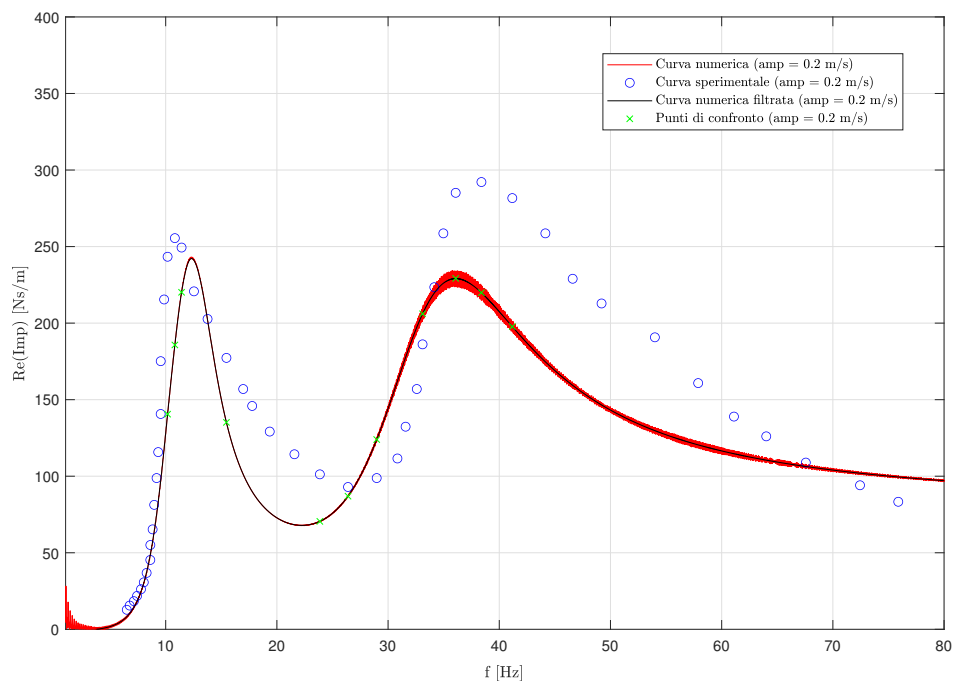


Figura 5.32: Curva di impedenza ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.21, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 4 di Tab.5.2.

Procedura di validazione dei parametri

Dopo aver effettuato diverse analisi di calibrazione manuale e automatica dei parametri del modello, riferendosi al test di Sauter ad ampiezza di velocità pari a 0.20 m/s, risulta opportuno impostare una procedura di validazione del modello stesso; pertanto, in analogia con quanto discusso nei capitoli precedenti, si consideri ora il test di sweep ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s. Si sottolinea, ancora una volta, come i parametri regolanti le proprietà del cedimento imposto al supporto (mediante test di sweep), ad eccezione dell'ampiezza di velocità \dot{w}_{c0} , verranno considerati i medesimi del test a 0.20 m/s. Si consideri, a titolo di esempio, il set numero 3 di Tab.5.2, il quale, ottenuto tramite una procedura di calibrazione manuale, ha condotto a risultati piuttosto soddisfacenti in termini di collocazione, ampiezza e forma della prima campana di risonanza, ampiezza e collocazione del secondo picco e descrizione della zona di transizione tra i due. L'algoritmo numerico impiegato per la validazione ha portato all'ottenimento del risultato mostrato in Fig.5.33, dalla quale si può osservare come ancora una volta la posizione del primo picco venga colta in maniera soddisfacente, sebbene in termini di ampiezza esso risulti più elevato della sua controparte sperimentale, mentre per quanto concerne la seconda campana di risonanza, e di conseguenza la zona di transizione, si ha una perdita marcata di corrispondenza tra le due curve.

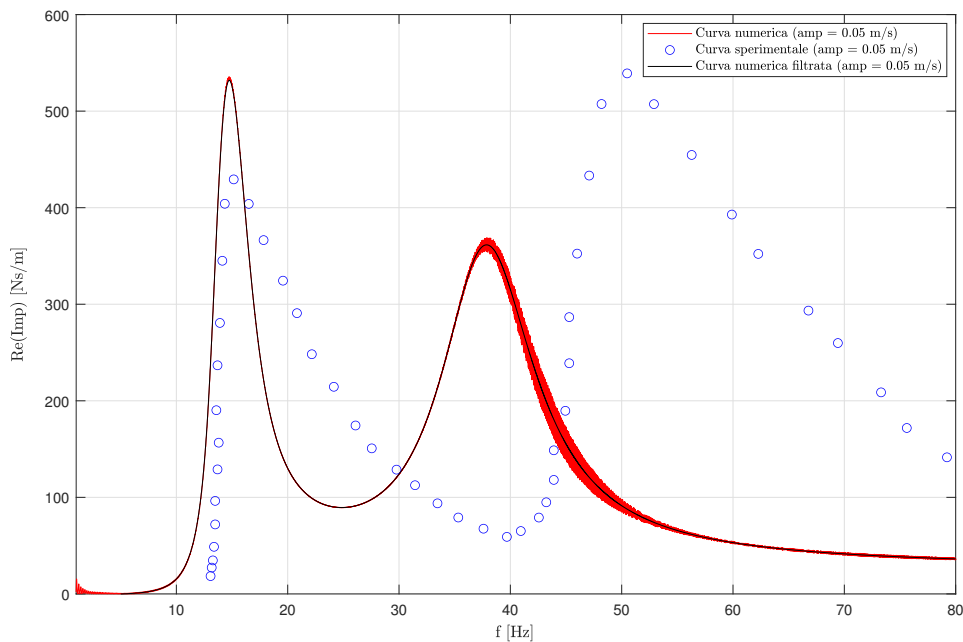


Figura 5.33: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale numero 3 di Tab.5.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s.

Inoltre, facendo riferimento a Fig.5.34, si nota come, relativamente al primo modo, la modellazione attuata sia in grado di cogliere in maniera sostanziale il carattere di dipendenza della risposta dall'ampiezza della sollecitazione, mentre, nel caso del secondo modo, tale versatilità viene meno, in quanto le due curve numeriche risultano molto simili. Tale aspetto trova una sua giustificazione nel fatto che, assegnato tale set di parametri, la risposta secondo la coordinata traslazionale, governante prevalentemente il primo modo, mostra in entrambe le prove un elevato livello d'isteresi, mentre quella secondo la coordinata ro-

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

tazionale, che contribuisce in maniera decisa alla seconda risonanza, esibisce un grado di dissipazione anelastica inferiore e conseguentemente una minore influenza sulla funzione di impedenza da parte dell'ampiezza dell'input: a conferma di quanto esposto, si riportano in Fig.5.35 e 5.36 gli andamenti delle forzanti di richiamo in funzione dell'evoluzione delle coordinate lagrangiane corrispondenti durante il test.

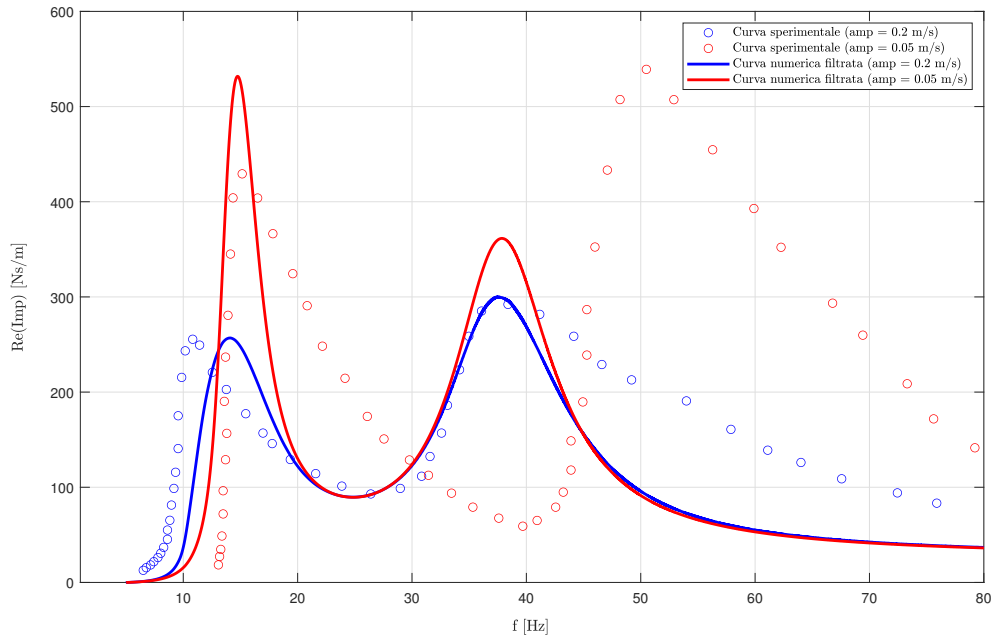


Figura 5.34: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen, in accordo con il set ottimale numero 3 di Tab.5.2.

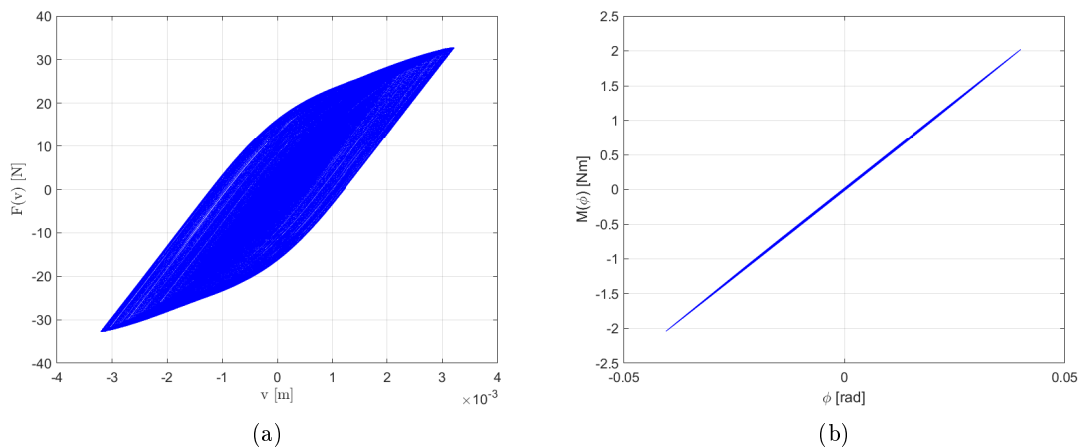


Figura 5.35: Variazione delle forzanti di richiamo in funzione delle coordinate libere, nel caso di analisi associata al set di parametri di Park-Wen numero 3 di Tab.5.2 e test di Sauter ad ampiezza di velocità 0.20 m/s, nei piani (a) $F - v$ e (b) $M - \phi$.

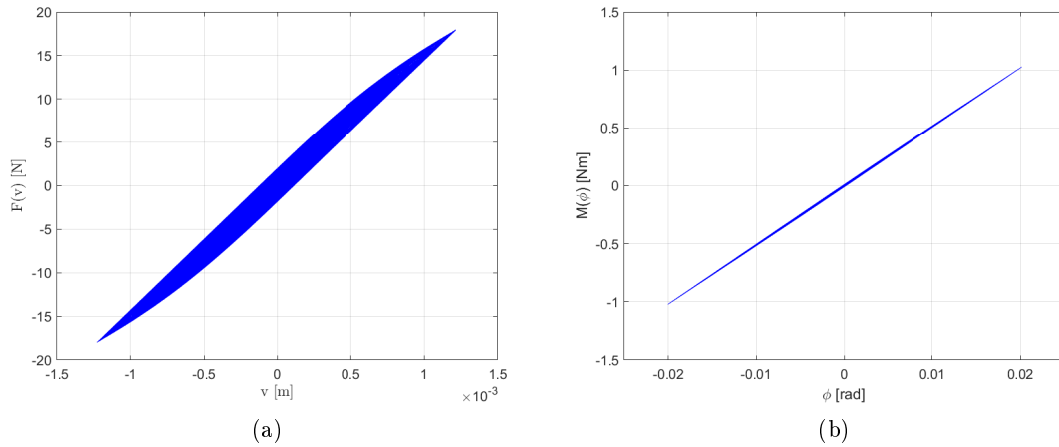


Figura 5.36: Variazione delle forzanti di richiamo in funzione delle coordinate libere, nel caso di analisi associata al set di parametri di Park-Wen numero 3 di Tab.5.2 e test di Sauter ad ampiezza di velocità 0.05 m/s, nei piani (a) $F - v$ e (b) $M - \phi$.

5.3.2 Riproduzione test di sweep di Langlois ad ampiezza di spostamento costante

Per mostrare le prestazioni della modellazione isteretica di Park-Wen con riferimento alla riproduzione di un test di sweep ad ampiezza di spostamento costante, risulta possibile cercare di riprodurre le prove sperimentali effettuate da Langlois su un dissipatore Stockbridge simmetrico con le seguenti proprietà: $m = 3.021$ kg, $I_G = 0.00449$ kgm², $e_G = 0.0306$ m, massa della pinza $m_c = 0.534$ kg e lunghezza del cavo messaggero $l = 0.129$ m. Il dispositivo, posto al di sopra di un supporto mobile, sperimenta un moto traslazionale imposto del tipo in equazione 5.22. Secondo quanto già discusso, sono state effettuate tre differenti prove a tre diverse ampiezze w_{c0} del moto, pari rispettivamente a 3 mm, 1 mm e 0.2 mm. Si noti come, sebbene da un punto di vista concettuale sarebbe più opportuno tarare i parametri del modello sul test ad ampiezza massima, dato che in esso le proprietà isteretiche del sistema vengono attivate in maniera più consistente, nella pratica ci si è dovuti accontentare di effettuare la taratura sul set ad ampiezza 1 mm, dal momento che, come si evince da Fig.3.87, per il caso del test ad ampiezza 3 mm, lo spettro di risposta sperimentale è fornito solo con riferimento alla prima regione di risonanza. In ogni caso, un volta calibrati i parametri, gli esiti dei test a 3mm possono essere sfruttati in fase di validazione.

$$w_c(t) = f_{corr} w_{c0} \sin(2\pi ft) \quad (5.22)$$

Il calcolo della risposta numerica viene effettuato mediante la sezione preposta del codice MATLAB, al quale sono forniti in ingresso, oltre alle proprietà dello smorzatore sopra citate, i segnali vettoriali in termini di accelerazione, velocità e spostamento imposti alla pinza, definiti in un intervallo di tempo pari a 100 s (sebbene la durata del test di sweep sia pari a 200 s), discretizzato uniformemente con passo $\Delta t = 10^{-4}$ s, e il range di frequenze spazzate durante la prova $\Delta f = 50$ Hz con valore iniziale $f_0 = 0.1$ Hz, al fine di avere una riproduzione numerica completa dello spettro. La durata della rampa transitoria iniziale è stata ragionevolmente posta pari a 10 s. Si ricorda come, per il caso di test di sweep ad ampiezza di spostamento costante, il confronto tra la risposta del dispositivo ottenuta durante il test e quella numerica venga effettuato mediante la funzione F_r , richiamata in 5.23. Di seguito, si riportano gli esiti delle procedure di ottimizzazione manuale e

automatica dei parametri e, successivamente, si cercheranno di validare i risultati ottenuti mediante la consueta procedura più volte esposta.

$$F_r = F_r(w_{c0}, \omega) = \sqrt{\text{Re}(\tilde{M}(w_{c0}, \omega))^2 + \text{Im}(\tilde{M}(w_{c0}, \omega))^2} w_{c0} \omega^2 \quad (5.23)$$

Procedura manuale di calibrazione dei parametri

Come effettuato per il caso del test di Sauter, la procedura di calibrazione manuale, condotta con riferimento al test ad ampiezza $w_{c0} = 1$ mm, risulta in linea di principio piuttosto complessa, stante la presenza di un elevato numero di parametri governanti la risposta; tuttavia, la validità delle considerazioni effettuate in tale sede, circa l'effetto sull'andamento della curva indotto dalla modifica dei valori dei parametri stessi, mantiene una sua validità generale. Al fine di munirsi di un indicatore oggettivo della corrispondenza tra le curve, da affiancare alle evidenze di carattere grafico, si è deciso di fare uso di una funzione obiettivo del tipo in 3.58, associata al set di punti di confronto con relativi pesi in 5.24 e dunque al vettore delle frequenze sperimentali f_{C_9} di confronto riportato in 5.25. Si sottolinea come il punto di confronto numero 4 sia collocato in corrispondenza della prima frequenza di risonanza, il punto 21 in corrispondenza della seconda risonanza, mentre i punti 9 e 10 siano atti alla descrizione della zona di transizione tra i picchi: dal momento che questi quattro punti risultano fondamentali per la descrizione della curva di risposta, ad essi verrà assegnato un peso unitario.

$$C_9 = [1, 3, 4, 5, 9, 10, 14, 20, 21, 22, 26, 29, 32], \quad (5.24)$$

con $p = [0.2, 0.5, 1, 0.5, 1, 1, 0.2, 0.5, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.1]$

$$f_{C_9} = [5.19, 6.95, 7.53, 8.20, 10.13, 10.96, 14.31, 16.90, 17.49, 18.08, 19.75, 22.09, 24.44] \text{ Hz} \quad (5.25)$$

Effettuando differenti tentativi di calibrazione, si è giunti in conclusione ad identificare due diversi set, i quali riproducono meglio degli altri l'andamento della risposta sperimentale; tali set sono riportati in Tab.5.3, mentre i grafici che riproducono il confronto tra gli andamenti numerici e sperimentali della funzione F_r sono raffigurati in Fig.5.37 e in Fig.5.38, rispettivamente per il primo e per il secondo caso.

Può essere utile notare come il primo set sia perfettamente abile nel cogliere l'andamento della regione di transizione, il ramo ascendente del secondo picco e la collocazione ed ampiezza di tale campana; per quanto concerne la prima regione di risonanza, l'andamento generale è individuato, specie con riferimento al ramo discendente, sebbene l'identificazione della sua collocazione ed ampiezza dovrebbero essere ulteriormente migliorati. Per questo primo tentativo, il valore della funzione obiettivo risulta pari a $F_{obj} = 3.02$ e, di conseguenza, esso non risulta particolarmente ridotto: questo fatto è da attribuirsi principalmente alle difficoltà nella rilevazione della prima campana, nell'intorno della quale i punti di confronto sono associati a fattori di peso elevati. In ogni caso, si ricorda come, per stabilire se un dato valore ottenuto per la funzione obiettivo risulti più o meno soddisfacente, risulta opportuno confrontarlo con quello ottenuto a partire da un differente set di parametri. A tal proposito, si denota come anche il secondo set evidenzi qualche difficoltà nel cogliere la risposta del sistema in prossimità della prima risonanza, mostrando un andamento piuttosto simile al caso precedente. Nonostante per quanto riguarda la zona di transizione l'andamento risulti leggermente meno soddisfacente rispetto al set 1, si continua ad avere un ottimo grado di riproduzione del secondo picco della risposta in termini di collocazione, ampiezza ed andamento complessivo della curva: più nel dettaglio, si riesce a riprodurre

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

PARAMETRI	SET 1	SET 2
k_v [N/m]	6500	6500
α_v [-]	0.25	0.25
k_ϕ [Nm]	100	120
α_ϕ [-]	0.25	0.25
k_{coup} [N]	160	140
A_v [-]	2	2
A_ϕ [-]	0.01	0.01
β_{vv} [m ⁻²]	50000	50000
$\beta_{\phi\phi}$ [rad ⁻²]	20	50
$\beta_{v\phi}$ [rad ⁻²]	0	0
$\beta_{\phi v}$ [m ⁻²]	0	0
γ_{vv} [m ⁻²]	50000	50000
$\gamma_{\phi\phi}$ [rad ⁻²]	20	50
$\gamma_{v\phi}$ [rad ⁻²]	0	0
$\gamma_{\phi v}$ [m ⁻²]	0	0
ξ_v [-]	0.20	0.02
ξ_ϕ [-]	0	0.03

Tabella 5.3: Set ottimali ottenuti mediante procedura di calibrazione manuale con modello di Park-Wen.

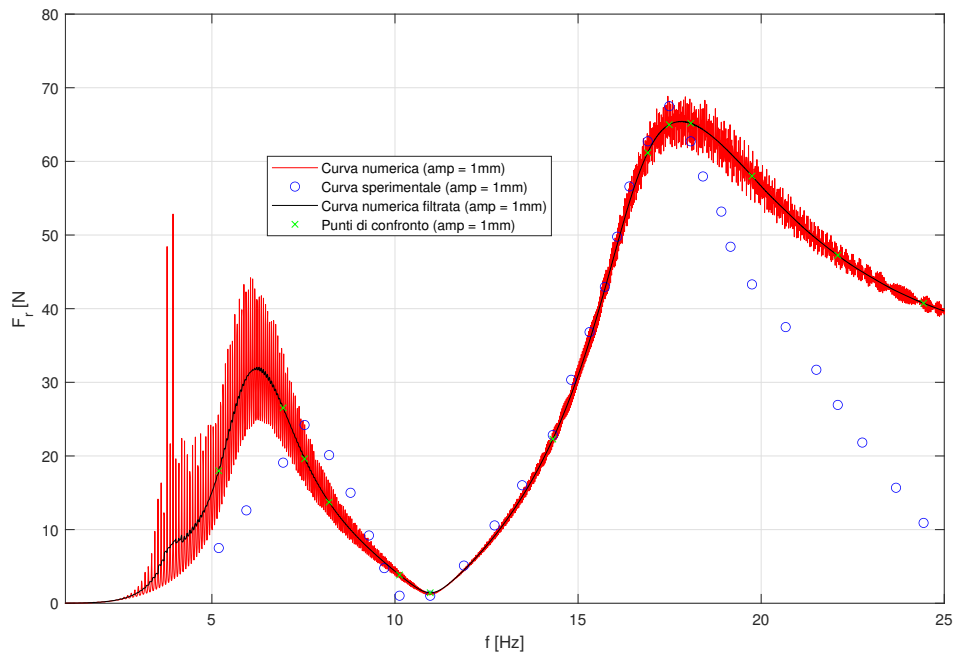


Figura 5.37: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 1 in Tab.5.3 e considerando il test ad ampiezza di spostamento costante pari a 1 mm.

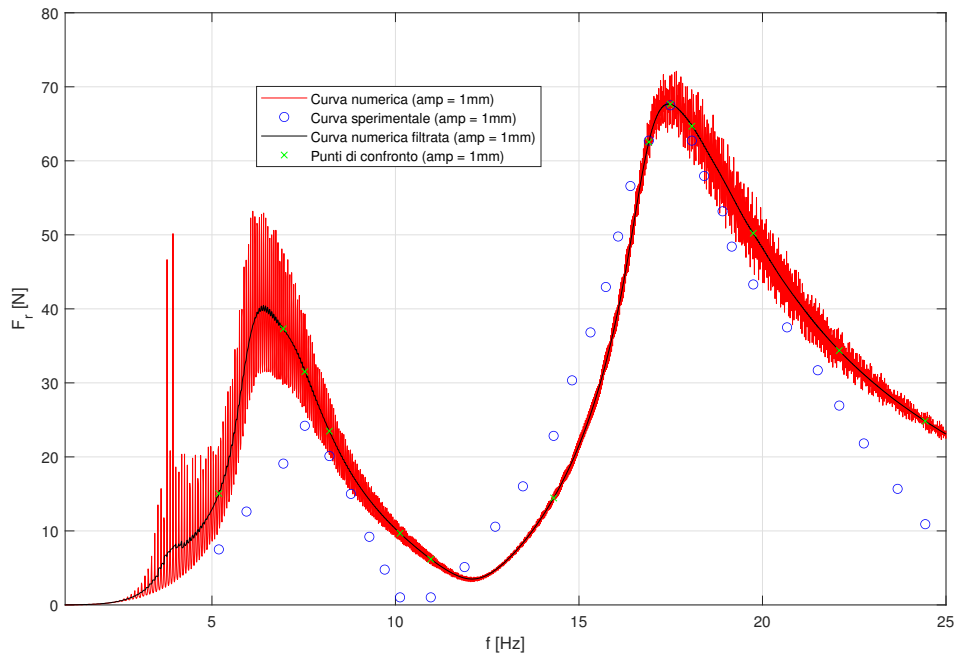


Figura 5.38: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale 2 in Tab.5.3 e considerando il test ad ampiezza di spostamento costante pari a 1 mm.

in maniera del tutto fedele il ramo discendente della risposta, aspetto che veniva meno con riferimento al set precedente. A causa della maggiore discrepanza tra i risultati numerici e sperimentali in prossimità della prima risonanza e della transizione rispetto al set 1, in questo caso la funzione obiettivo si attesta sul valore $F_{obj} = 9.85$, così da mostrare come, in termini comparativi, il valore precedentemente ottenuto ($F_{obj} = 3.02$) possa ritenersi del tutto soddisfacente. Si sottolinea inoltre come, durante tali procedure di ottimizzazione manuale, i parametri $\beta_{v\phi}, \beta_{\phi v}, \gamma_{v\phi}, \gamma_{\phi v}$, atti all'introduzione di un contributo di accoppiamento isteretico, siano stati considerati identicamente nulli, in quanto si è riusciti ad ottenere, anche in assenza di tale grado di interazione, una buona ampiezza della risposta numerica in prossimità del secondo picco.

Procedura automatica di calibrazione dei parametri

Al fine di effettuare un'analisi di taratura esaustiva, ci si accinge ora a discutere i risultati ottenuti a valle di una procedura di calibrazione automatica dei parametri del modello. Anche in questo caso, si impiega la sezione dedicata del codice MATLAB e si consente ai parametri $k_v, k_\phi, k_{coup}, A_v, A_\phi, \xi_v, \xi_\phi$ di variare, mentre i rimanenti verranno considerati fissati. Dal momento che si hanno a disposizione gli esiti di due processi di calibrazione manuale, si sceglie di impiegare come set di partenza per l'analisi quello ottenuto a valle della prima ottimizzazione, il quale risulta definito come in Tab.5.3 e ha dato luogo a un valore della funzione obiettivo pari a $F_{obj} = 3.02$: si considera quindi un vettore "initial guess" del tipo $\mathbf{IG} = [6500 \text{ N/m}, 100 \text{ Nm}, 160 \text{ N}, 2, 0.01, 0.2, 0]$. Inoltre, risulta necessario definire il dominio di variazione dei parametri all'interno del quale l'algoritmo ricercherà la soluzione; cercando di definire intervalli il più possibile centrati intorno ai valori dell' "initial guess", si considera: $k_v \in [4000, 8000] \text{ N/m}$, $k_\phi \in [50, 250] \text{ Nm}$, $k_{coup} \in [100, 300] \text{ N}$, $A_v \in [1, 5]$, $A_\phi \in$

5. MODELLAZIONE DISCRETA A DUE GRADI DI LIBERTÀ: LA LEGGE COSTITUTIVA DI PARK-WEN

$[0.005, 0.03]$, $\xi_v \in [0, 0.5]$ e $\xi_\phi \in [0, 0.05]$. I corrispondenti dati da fornire in input alla sezione del codice si identificano dunque con $\mathbf{x}_{min} = [4000 \text{ N/m}, 50 \text{ Nm}, 100 \text{ N}, 1, 0.005, 0, 0]$, $\mathbf{x}_{max} = [8000 \text{ N/m}, 250 \text{ Nm}, 300 \text{ N}, 5, 0.03, 0.5, 0.05]$. In aggiunta, si decide di considerare un numero di individui della popolazione generati ad ogni iterazione pari a $N_{pop} = 10N_{par} = 70$, un numero massimo di valutazioni della funzione obiettivo $N_{eval} = 10^{12}$, un numero massimo di iterazioni $N_{iter} = 200$, un valore minimo-soglia per la funzione obiettivo $VTR = 0.5$ e una tolleranza pari a $toll = 10^{-2}$. Al termine della procedura si osserva come l'esecuzione delle analisi abbia necessitato di effettuare tutte le 200 iterazioni, stante il non raggiungimento di nessuna delle due condizioni di convergenza stabilite, come si evince peraltro da Fig.5.39; da essa, si deduce come la funzione obiettivo non riesca a ridursi al di sotto del valore 1,2. Nonostante questo, al termine del processo, il raggiungimento della condizione di convergenza riguardante ΔF_{obj} non appare così lontano e pertanto i risultati ottenuti possono considerarsi significativi. Come commento di validità generale si può notare come la seconda condizione di convergenza acquisisca un carattere più assoluto rispetto alla prima; infatti, se da un lato il valore della funzione obiettivo dipende non solo dal reale grado di corrispondenza tra esiti numerici e sperimentali, ma anche dalla sua definizione e dalla scelta dei punti di confronto, il parametro ΔF_{obj} risulta parzialmente in grado di tenere in considerazione quelle che sono le effettive potenzialità del modello, dal momento che considera l'evoluzione di tutti gli individui della popolazione e non solo del candidato principale alla soluzione. Al netto di questa breve dissertazione, ad ogni modo, al termine della presente procedura, si ottiene il valore minimo $F_{obj} = 1.212$, associato al set di parametri finale riportato in 5.26 e alla curva numerica filtrata in Fig.5.40.

$$\begin{aligned} k_v &= 5040.632 \text{ N/m}, k_\phi = 109.6 \text{ Nm}, k_{coup} = 180.442 \text{ N}, A_v = 1.6235, \\ A_\phi &= 0.00794, \xi_v = 0.005, \xi_\phi = 0.005 \end{aligned} \quad (5.26)$$

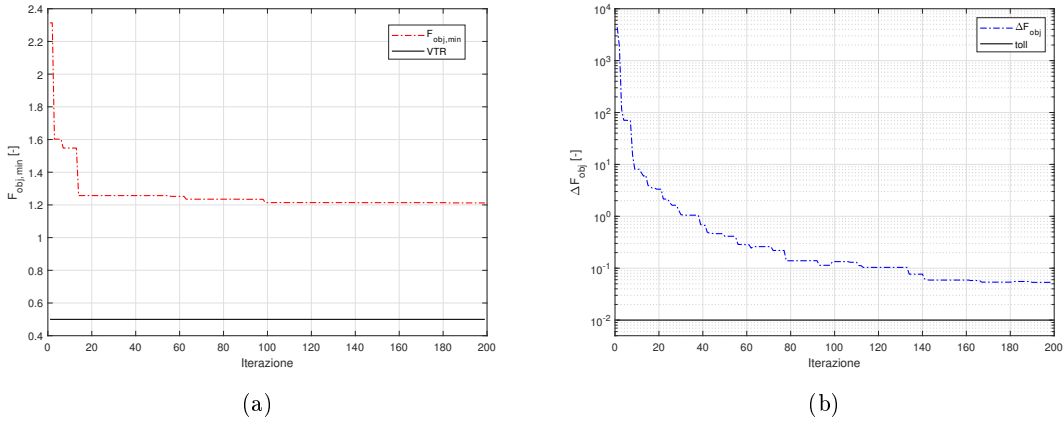


Figura 5.39: Andamento al procedere delle iterazioni di (a) $F_{obj,min}$ e (b) ΔF_{obj} .

Come si evince da Fig.5.40, pur essendo in tale circostanza il valore della funzione obiettivo sostanzialmente inferiore rispetto a quello ottenuto mediante le calibrazioni manuali, non si osserva un riscontro grafico di tale aspetto: infatti, i risultati qui ottenuti non si dimostrano essere migliori dei precedenti. Se da un lato la seconda campana di risonanza sia catturata in maniera soddisfacente per quanto riguarda il suo andamento complessivo (posizione e ampiezza del picco), non si ottiene una corrispondenza altrettanto ragionevole in corrispondenza della prima zona di risonanza, la quale viene identificata dal modello solo in ampiezza, ma non in termini di frequenza associata. Tuttavia, anche in questo caso,

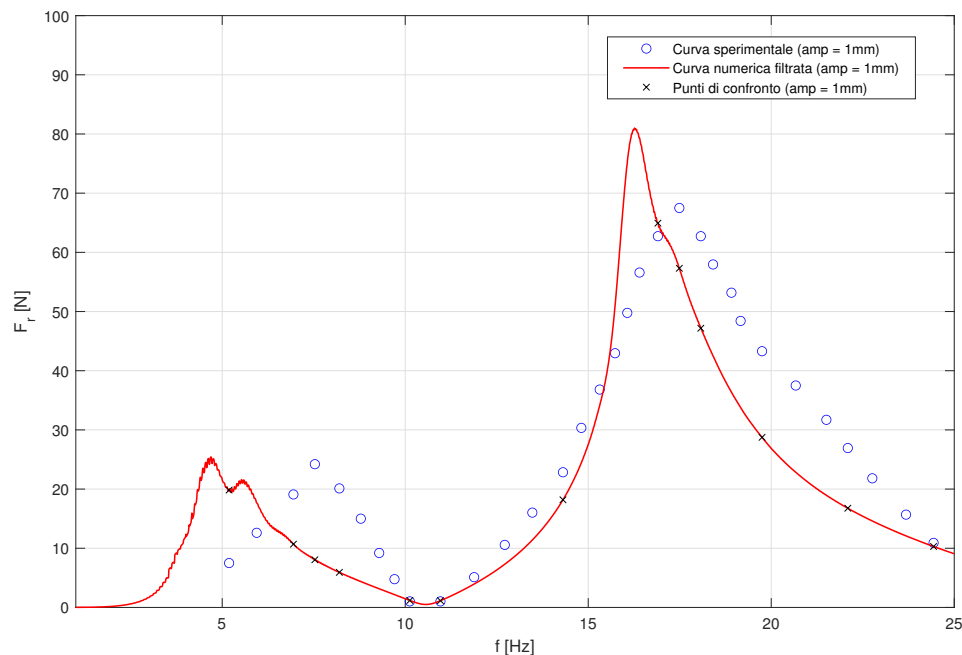


Figura 5.40: Curva di risposta ricavata con il modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in 5.26, ottenuto da un'analisi di calibrazione automatica partendo dal set numero 1 di Tab.5.3.

il set di parametri ottenuto è in grado di riprodurre piuttosto fedelmente una transizione caratterizzata da valori pressochè nulli della curva di risposta, in prossimità di frequenze pari a circa 10 Hz. Nel seguito, si andrà a definire una procedura di validazione della tecnica di modellazione con riferimento al migliore set tra i tre fin qui discussi, al fine di comprendere se, con riferimento a un test di sweep a differente ampiezza, la curva numerica mantenga un andamento accettabile e in grado di rispecchiare le non-linearità del sistema fisico in esame.

Procedura di validazione dei parametri

A questo punto, a valle della determinazione di tre set di parametri in grado di riprodurre in maniera abbastanza soddisfacente la risposta durante il test ad ampiezza 1 mm, ci si addentra nella procedura di validazione del modello, sulla base della riproduzione del test ad ampiezza di spostamento costante e pari a 3 mm, sebbene per questo caso i punti sperimentali siano definiti solo con riferimento al primo picco della risposta; inoltre, dal momento che per quanto riguarda il test ad ampiezza 0.2 mm la curva sperimentale a disposizione non risulta definita con sufficiente precisione, esso non verrà preso in considerazione. Più nel dettaglio, ci si sofferma sul primo set di parametri ottenuto mediante calibrazione manuale, i cui valori sono riportati in Tab.5.3. La simulazione numerica, mediante l'algoritmo MATLAB preposto, del test di sweep ad ampiezza di spostamento costante pari a 3 mm porta al confronto di risultati riportato in Fig. 5.41.

Dal confronto tra le curve, si nota che, nel caso presente, il modello numerico, impiegato con il set di parametri selezionato, sia in grado di individuare in maniera piuttosto corretta la posizione del primo picco, sebbene la sua ampiezza e forma non vengano riprodotte adeguatamente. Il confronto sul secondo picco di risonanza non può essere effettuato, stante

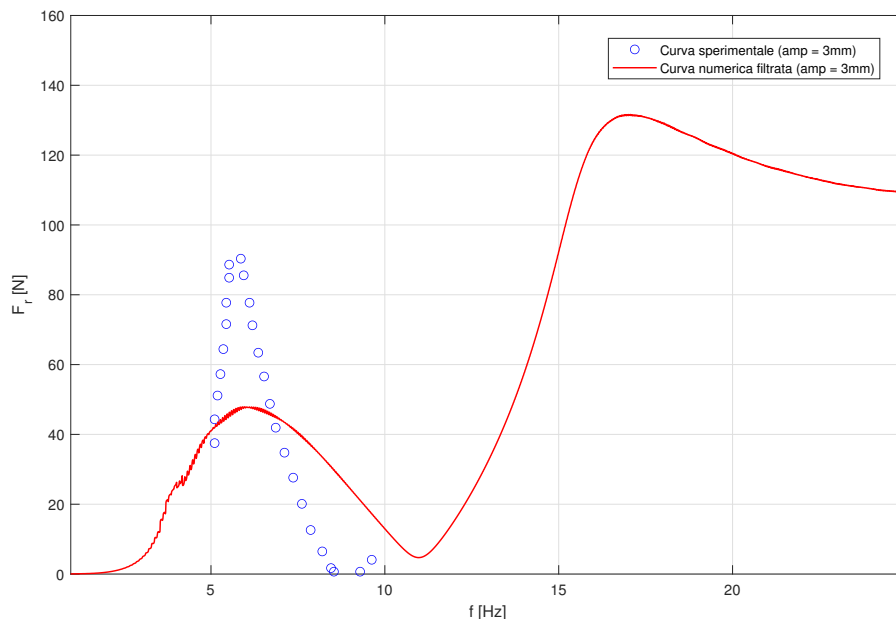


Figura 5.41: Curva di impedenza ricavata con modello di Park-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale numero 1 di Tab.5.3 e considerando il test ad ampiezza di spostamento costante pari a 3mm.

la carenza dei dati sperimentali a disposizione. In aggiunta, con riferimento a Fig.5.42, è possibile notare come le non-linearità e il comportamento *amplitude-dependent* del sistema siano correttamente riprodotti, dal momento che l'andamento generale delle curve varia in funzione dell'input sollecitante. Tuttavia, le due curve numeriche evidenziano la presenza di un primo picco di risonanza in corrispondenza del medesimo valore di frequenza, sebbene questo non sia del tutto pertinente alla realtà sperimentale. Per quanto riguarda l'andamento dei secondi picchi numerici, si nota come esso risulti qualitativamente lo stesso nelle due analisi, pur variando la sua ampiezza; questo aspetto può essere giustificato dal momento che, anche in questo caso, il set di parametri in questione non permette di osservare un grado di dissipazione isteretica rilevante associato alla coordinata libera rotazionale, così da ottenere un comportamento del secondo modo di vibrare, il quale risulta fortemente influenzato da tale coordinata, più vicino a quello di una sistema elastico.

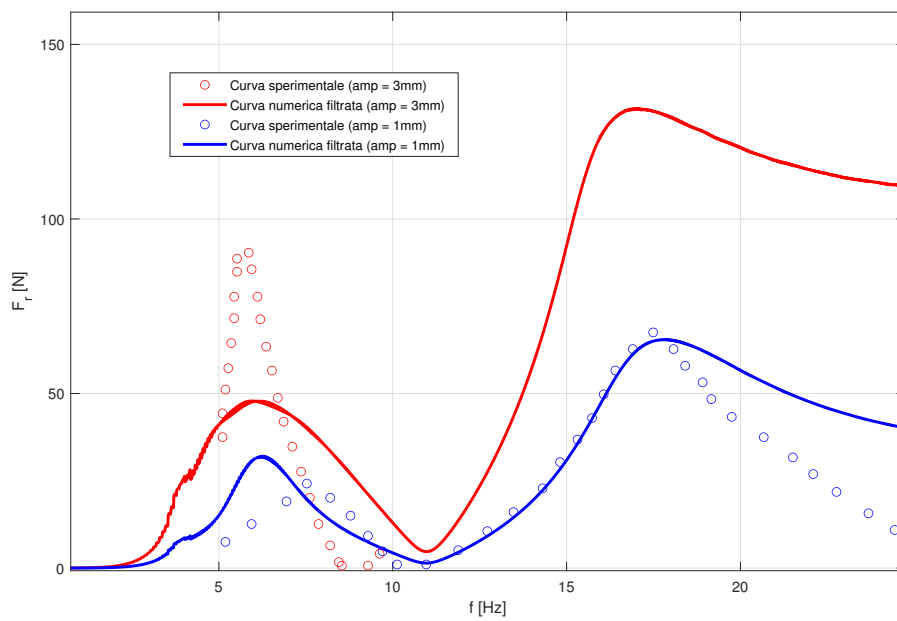


Figura 5.42: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen, in accordo con il set ottimale numero 1 di Tab.5.3.

Capitolo 6

CONSIDERAZIONI FINALI E SVILUPPI FUTURI

6.1 Aspetti salienti della trattazione e conclusioni

Al termine della trattazione del problema della modellazione numerica dei dissipatori Stockbridge per la mitigazione delle oscillazioni dei cavi sospesi, si procede in tale sede fornendo al lettore un resoconto degli aspetti salienti e dei più importanti risultati ottenuti.

In primo luogo, si ricalca nuovamente come il fenomeno delle vibrazioni eoliche, dovute al distacco dei vortici dalla sezione del cavo conduttore, sia caratterizzato da una natura fortemente non-lineare, in corrispondenza di valori di velocità del vento tali da condurre il sistema all'interno di un regime di sincronizzazione; di conseguenza, il calcolo della massima ampiezza di oscillazione può essere effettuato seguendo due approcci distinti, che si identificano, come discusso al Par.1.1.2, rispettivamente con il Metodo di Bilancio dell'Energia (EBM) e lo studio diretto delle equazioni di moto del cavo soggetto a VIV. Si sottolinea come, in presenza di dissipatori Stockbridge connessi alla linea, venga introdotta all'interno delle equazioni risolventi, con riferimento ad entrambi gli approcci, un'ulteriore fonte di non-linearità, strettamente connessa al comportamento isteretico di tali dispositivi; infatti, l'interazione tra il conduttore e questi ultimi, sancita quantitativamente nelle equazioni dalla presenza della forza F_d , mostra, in accordo con le evidenze sperimentali, una dipendenza dall'ampiezza delle oscillazioni del cavo (*amplitude-dependent behaviour*). Tale aspetto costituisce una proprietà vantaggiosa di questi dispositivi se comparati a quelli lineari, dal momento che consente di usufruire di un maggior grado di versatilità, legato alla possibilità di variare le proprie frequenze naturali in funzione delle condizioni di operatività presenti (*auto-tuning capability*).

Dalle considerazioni appena richiamate, si è dedotta la necessità di attuare una modellazione del dissipatore Stockbridge abile a riprodurre adeguatamente i tratti fondamentali del funzionamento. Innanzitutto, secondo quanto esposto al Par.2.1.2, si è considerata una condizione di vincolo a incastro sia tra la sezione di attacco del conduttore e la pinza rigida, sia tra quest'ultima e ciascun cavo messaggero; essendo la massa dei blocchi inerziali molto maggiore rispetto a quella dei cavi messaggeri stessi, si è assunta una modellazione a masse concentrate del sistema, il cui moto può essere compiutamente descritto mediante l'impiego di una coordinata lagrangiana traslazionale e di una rotazionale. Per quanto concerne l'idealizzazione delle proprietà dissipative e di deformabilità dei cavi messaggeri, con l'obiettivo di superare le difficoltà connesse a modellazioni più rifinite e dettagliate, sono state proposte nel corso dell'elaborato soluzioni a deformabilità concentrata, basate sulla definizione di molle non-lineari equivalenti, in grado di simulare l'interazione tra i cavi stessi e le masse d'estremità. Avendo impiegato tale approccio, si è deciso di rinunciare a

una descrizione sezionale o locale del continuo in esame, pur consci della perdita di informazioni riguardanti fenomeni circoscritti, quali l'effetto di una corretta modellazione delle zone diffusive di bordo, presenti alle estremità dei cavi (si veda [16]), o dell'interazione tra i singoli fili costituenti i cavi stessi [28].

Dapprima, si è focalizzata l'attenzione sulla riproduzione del comportamento del dispositivo come sistema dotato di un unico grado di libertà, sia esso di carattere traslazionale che rotazionale. A tale scopo, si è impiegato il modello isteretico a cinque parametri di Bouc-Wen per la descrizione delle forze di richiamo inelastiche, le quali risultano scomposte in un contributo prettamente elastico a rigidità k_{min} e in una quota parte isteretica, funzione della variabile adimensionale z , la cui evoluzione è regolata da un'opportuna legge di flusso. Per testare la bontà della tecnica di modellazione impiegata, si è cercato di riprodurre in primis gli esiti sperimentali del test quasi-statico condotto da Sauter: la procedura esposta al Par.3.2.3 ha condotto all'ottimo grado di corrispondenza mostrato in Fig.6.1.

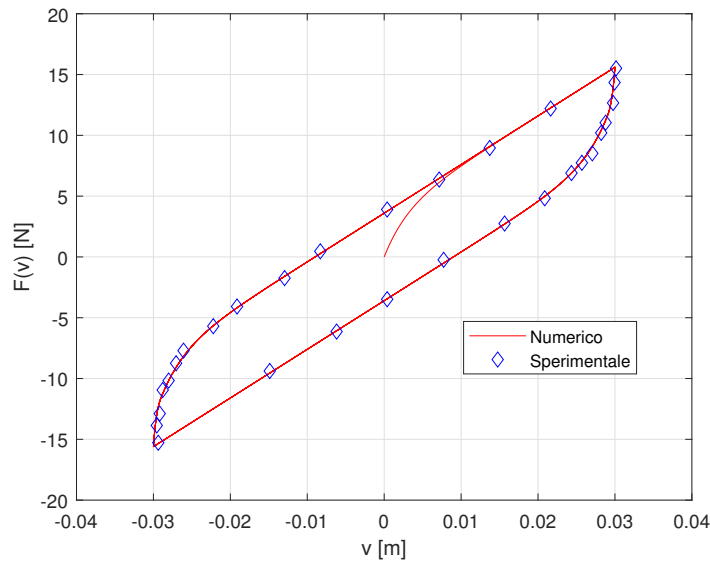


Figura 6.1: Confronto risultati sperimentali e numerici associati al test ciclico quasi-statico eseguito da Sauter.

Inoltre, è importante richiamare come il modello di Bouc-Wen è risultato capace di includere gli effetti non-lineari di dipendenza della risposta del sistema-dissipatore dall'ampiezza della sollecitazione agente. A conferma di ciò, si riportano gli esiti numerici di Fig.6.2 nel caso di moto imposto al supporto di carattere armonico, ottenuti in termini di variazione della forza di interazione F in funzione dell'evoluzione della coordinata traslazionale v , i quali evidenziano come, per un dato valore di frequenza e al variare dell'ampiezza della sollecitazione applicata, la forma dei cicli di risposta si modifichi in maniera non-omotetica, variando in parallelo l'area sottesa da essi.

A riguardo dei test dinamici di sweep, sono stati riprodotti innanzitutto i risultati del test di Sauter ad ampiezza di velocità costante, al fine di cogliere separatamente la risposta sperimentale relativamente all'andamento del primo e del secondo picco della curva di impedenza. Nel primo caso, riferendosi alla prova a $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s, è stato condotto un processo di taratura dei parametri governanti, sia mediante tecniche di ottimizzazione manuale/automatica sia usufruendo di opportune analisi parametriche a uno o più parametri, e sono stati confrontati i risultati numerici ottenuti con l'impiego di una modellazione lineare con quelli ricavati a partire dal modello di Bouc-Wen. Nel dettaglio, sia nel caso elastico che in quello isteretico, i valori da assegnare ai parametri, per ottenere corrispon-

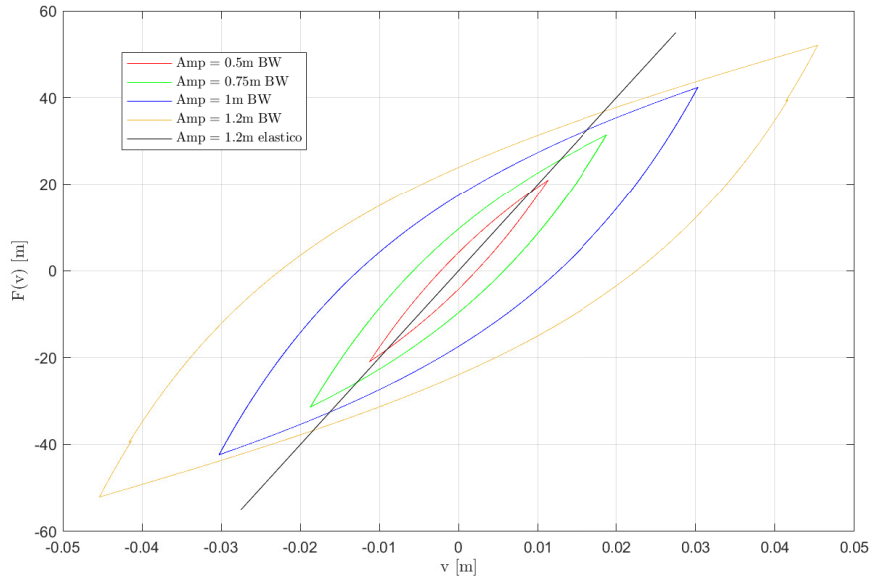
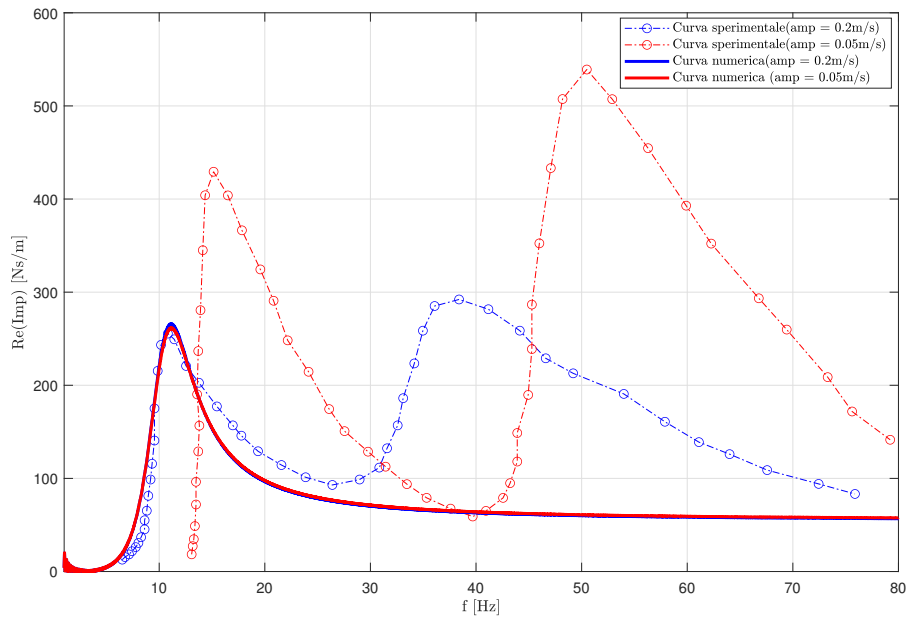


Figura 6.2: Risposta del sistema nel sotto intervallo temporale (10,20)s a un moto armonico traslazionale con frequenza $f = 1$ Hz imposto alla pinza di supporto, con riferimento a diversi valori di ampiezza w_{c0} .

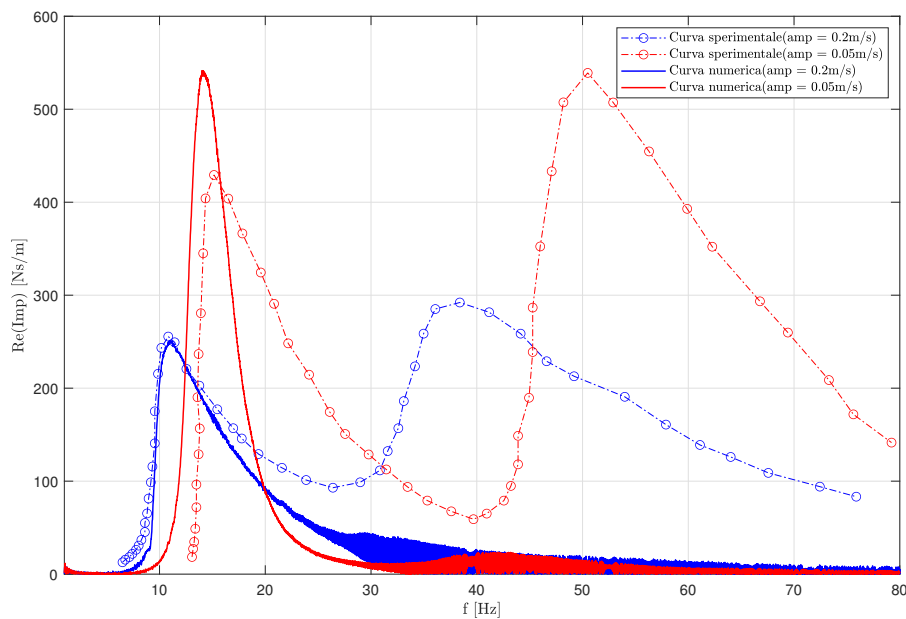
denza tra esiti numerici e di laboratorio, ottenuti a valle delle differenti tipologie di analisi, sono risultati coerenti tra loro e si identificano con i set riportati in Par.3.4.2. Eseguito il processo di calibrazione, gli esiti del test ad ampiezza $\dot{w}_{c0} = 0.05$ m/s sono stati impiegati al fine di validare la bontà del modello; le principali considerazioni effettuabili a riguardo sono riportate qui di seguito:

- con riferimento a Fig.6.3a, una modellazione elastica del comportamento del dispositivo, pur essendo in grado di cogliere in maniera ragionevole la prima campana della curva d'impedenza, relativa al test impiegato per la calibrazione, non consente di riprodurre altrettanto fedelmente la funzione d'impedenza sperimentale corrispondente a test effettuati con un'ampiezza della sollecitazione differente, dal momento che, per un sistema lineare, tale funzione risulta una proprietà invariante del sistema;
- con riferimento a Fig.6.3b, una modellazione isteretica non-lineare alla Bouc-Wen consente di riprodurre la curva sperimentale impiegata per la calibrazione in maniera ottimale e quella relativa ad un test a differente ampiezza con un buon grado di approssimazione, in virtù del carattere variabile, in funzione dell'ampiezza della sollecitazione, della funzione d'impedenza, in accordo con quanto si evidenzia in natura;
- dal momento che nel caso isteretico la funzione di impedenza assume valori nulli per elevati valori di frequenza, il ramo discendente della campana sperimentale non può essere riprodotto fedelmente da un modello numerico a un grado di libertà: infatti, al fine di ottenere una decrescita a pendenza più contenuta, risulta necessario disporre di un modello a due gradi di libertà, capace di incorporare gli effetti della transizione tra i picchi e la presenza di una campana di risonanza associata al secondo modo.

Successivamente, al fine di identificare la seconda campana di risonanza, caratterizzante la funzione d'impedenza nel caso di test a $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s, è stata effettuata un'unica



(a)



(b)

Figura 6.3: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute per il test di Sauter in accordo con (a) una modellazione elastica lineare e (b) una modellazione isteretica di Bouc-Wen.

procedura di calibrazione manuale dei parametri che ha condotto al set di valori riportato al Par.3.5, il quale, mostrando l'ottimo livello di corrispondenza di Fig.6.4, evidenzia come, andando ad agire esclusivamente sulla coordinata ϕ , sia possibile identificare compiutamente il secondo modo, dal momento che esso risulta fortemente influenzato dalla

rotazione della massa attorno al punto di attacco al cavo messaggero. Dalla medesima figura, si deduce la bontà dei risultati ottenuti anche in sede di validazione, siccome la curva numerica risulta prossima a quella sperimentale e mostra il carattere *amplitude dependent* della risposta.

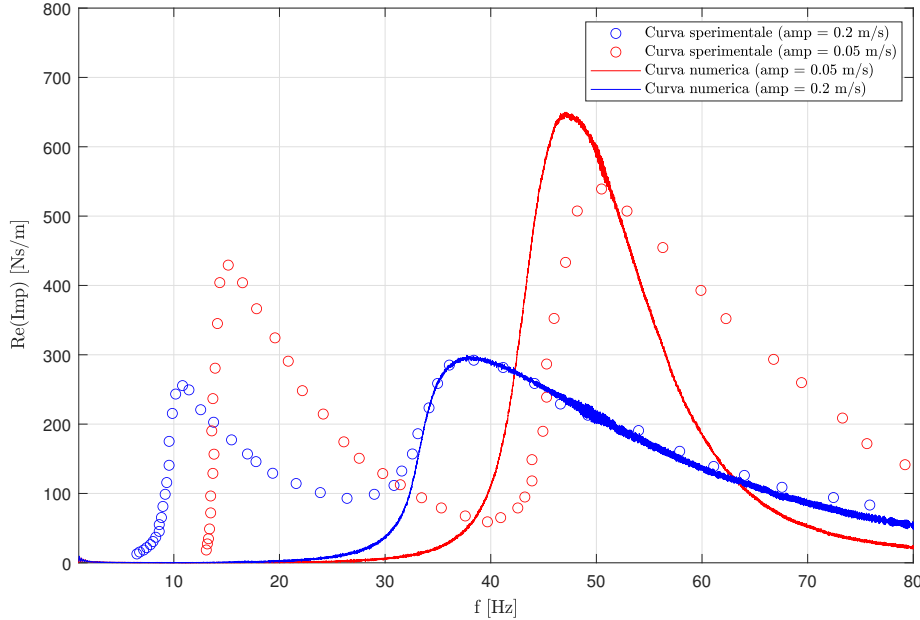


Figura 6.4: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute per il test di Sauter in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen.

Da ultimo, si nota come, dal momento che modificando i parametri del modello associati alla coordinata traslazionale v si è riusciti a catturare compiutamente il primo modo e, modificando quelli relativi a ϕ , il secondo, è possibile confermare l'evidenza sperimentale circa il fatto che i due modi risultano rispettivamente l'uno a prevalenza traslazionale e l'altro a prevalenza rotazionale.

Seguendo lo stesso schema di ragionamento, sono stati quindi riprodotti i test di sweep di Langlois ad ampiezza di spostamento costante, per l'identificazione, in termini della funzione F_r definita in 3.64, del primo picco della risposta; in particolare, il test ad ampiezza $w_{c0} = 3$ mm è stato sfruttato per tarare i parametri, mentre quello ad ampiezza $w_{c0} = 1$ mm è stato successivamente impiegato per la validazione del modello. Anche in questa circostanza, i risultati si reputano piuttosto soddisfacenti, data la capacità di cogliere l'andamento complessivo della risposta, al pari della variazione della collocazione, forma ed ampiezza del primo picco della funzione F_r , secondo quanto si evince da Fig.6.5. Per una trattazione più dettagliata circa i set di parametri che hanno condotto ai risultati qui riportati, si faccia riferimento al Par.3.4.3. Si ricorda come, il fatto che il ramo discendente delle risposte numeriche evidenzia un andamento caratterizzato da una decrescita meno marcata rispetto a quanto si osserva sperimentalmente, consegua unicamente, come ampiamente discusso nel corso del medesimo paragrafo, dalla definizione di F_r e dalla scelta di modellare il comportamento del sistema con riferimento a un unico grado di libertà, corrispondente a quello traslazionale per il caso in esame.

Come considerazione di carattere generale circa la simulazione dei test di sweep, vale la pena sottolineare nuovamente che una tecnica di calibrazione basata sulla riproduzione di

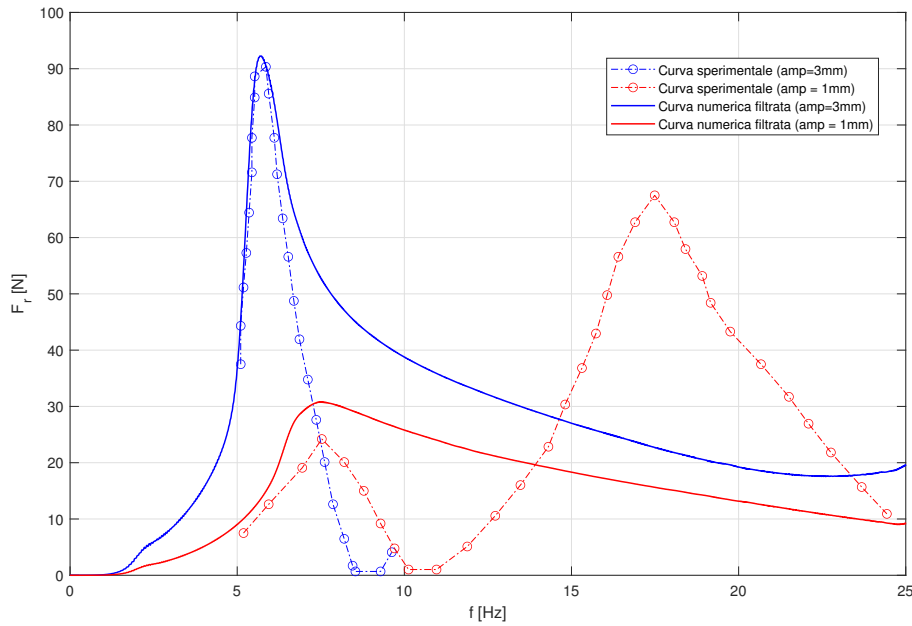


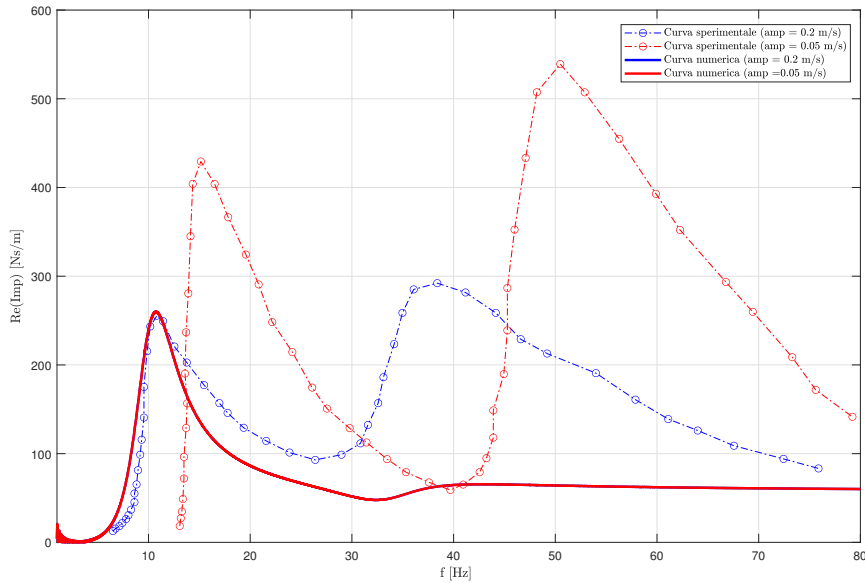
Figura 6.5: Rappresentazione e confronto tra le curve di risposta F_r sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Bouc-Wen a un grado di libertà.

prove ad ampiezza di velocità costante risulti in genere più robusta, ossia in grado di portare alla definizione di un set di parametri abile nel cogliere la risposta in presenza di input di diversa natura; infatti, durante tali test, l'ampiezza di spostamento della sollecitazione varia in maniera continua, in modo che il sistema sperimenti diverse condizioni di operatività nel corso della prova.

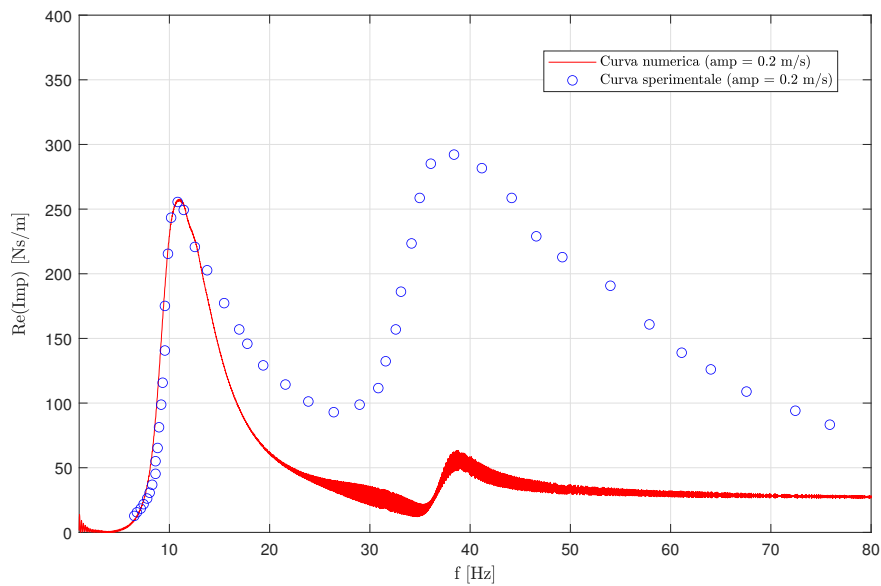
A questo punto, al fine di caratterizzare il comportamento complessivo del dispositivo, la tecnica di modellazione precedente è stata generalizzata al caso di un sistema a due gradi di libertà, definendo le leggi costitutive tra loro indipendenti, esplicitate nelle equazioni 4.1 e 4.2. Pertanto, l'unico accoppiamento tra l'evoluzione delle due coordinate è risultato essere quello inerziale, che compare naturalmente nella scrittura delle equazioni di moto. I tentativi effettuati per la calibrazione dei parametri sulla base del test di Sauter a $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s hanno messo in luce i seguenti aspetti:

- come mostrato in Fig.6.6a, una modellazione elastica lineare dotata di smorzamento viscoso, per gli stessi motivi discussi al caso precedente, ha evidenziato seri limiti nella riproduzione della risposta;
- come si evince da Fig.6.6b, pur considerando svariati set di parametri, una modellazione isteretica coglie opportunamente il primo picco della risposta, mentre è capace di riprodurre solo la posizione del secondo e non la sua altezza: infatti, fissati i parametri relativi a v per ricalcare la prima campana, a causa dell'accoppiamento inerziale, che comporta un'influenza da parte della stessa coordinata sul secondo modo, non si è riusciti a sollevare il secondo picco andando ad agire esclusivamente sui parametri legati alla coordinata ϕ ;
- dal momento che, per i motivi elencati al punto precedente, gli esiti della calibrazione non si sono mostrati soddisfacenti, non ci si è addentrati in un processo di validazione;

- al fine di "bilanciare" gli effetti dell'accoppiamento inerziale, si è introdotto in Appendice A un tentativo di accoppiamento elastico tra i gradi di libertà sancito dal fattore di rigidezza k_{coup} : in questo modo, pur aumentando l'ampiezza della funzione in corrispondenza della seconda zona di risonanza, il suo andamento complessivo non è risultato ancora del tutto ragionevole.



(a)



(b)

Figura 6.6: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute per il test di Sauter in accordo con (a) una modellazione elastica lineare e (b) una modellazione isteretica di Bouc-Wen a due gradi di libertà.

Per ottenere risultati coerenti con quelli sperimentali, si è fatto uso nel Par.4.3.3 dell'approccio "ridotto", basato sulla definizione delle coordinate tra loro disaccoppiate y_1 e y_2 , con l'approssimazione di considerare, come componenti di inerzia quelle dirette relative

alle coordinate fisiche v e ϕ e come forzanti esterne associate quelle generalizzate relative alle medesime coordinate; consapevoli dei risultati soddisfacenti ottenuti separatamente mediante il modello a un grado di libertà, impiegando il set di parametri richiamato in 6.1, i calcoli numerici hanno condotto alla corrispondenza ottimale di Fig.6.7, sia in fase di calibrazione che in fase di validazione.

$$\begin{aligned} k_{min,v} &= 2000 \text{ N/m}, k_{max,v} = 8000 \text{ N/m}, v_0 = 0.002 \text{ m}, \sigma_v = 1, n_v = 1, \xi_v = 0, \\ k_{min,\phi} &= 68.5 \text{ Nm}, k_{max,\phi} = 275 \text{ Nm}, \phi_0 = 0.0075 \text{ rad}, \sigma_\phi = 1, n_\phi = 1, \xi_\phi = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

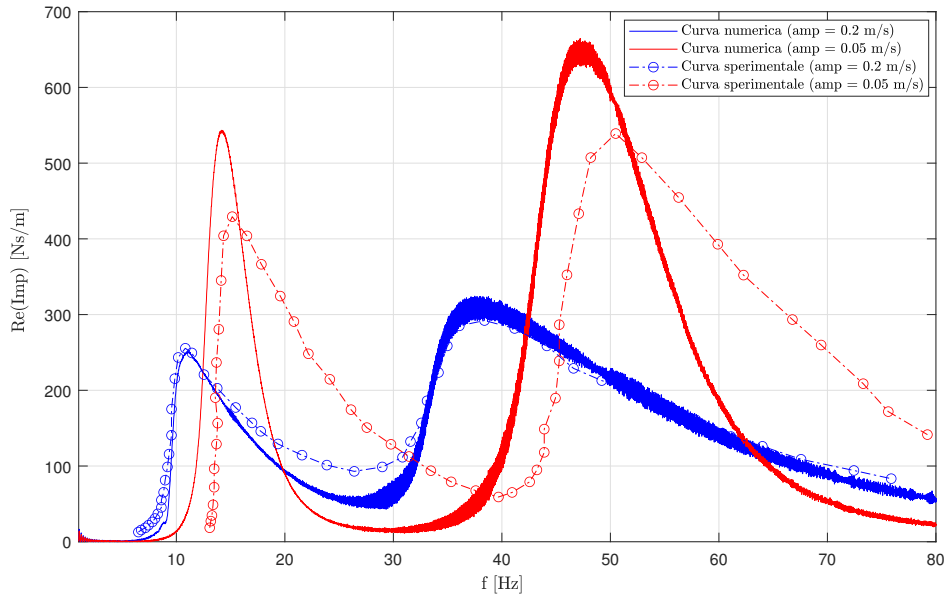


Figura 6.7: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica "ridotta" di Bouc-Wen a due gradi di libertà.

Per maggiore completezza, si riporta inoltre in Fig.6.8 un confronto, sulla base del test a $\dot{w}_{c0} = 0.20$ m/s, tra la proposta di modellazione presente, quelle di letteratura, secondo il modello di Sauter e Hagedorn [35] e il modello di Foti e Martinelli [16], e i risultati sperimentali. A tal proposito, si sottolinea come la modellazione "ridotta" proposta nel presente elaborato manifesti un ottimo accordo con i dati sperimentali, a fronte di una complessità minore rispetto ai modelli di letteratura utilizzati come confronto; infatti, essa si fonda sull'introduzione di un minor numero di parametri governanti e su un'idealizzazione discreta del comportamento del sistema.

L'ultima strategia di modellazione proposta consiste nel modello isteretico di Park-Wen, introdotto al fine di poter disporre di più parametri governanti, così da controllare in maniera più accurata il processo di isteresi e usufruire, se necessario, di un ulteriore grado di accoppiamento; nel dettaglio, i parametri A_v e A_ϕ hanno permesso di modulare la variazione delle derivate temporali \dot{Z}_v e \dot{Z}_ϕ in funzione di \dot{v} e $\dot{\phi}$, mentre i parametri β_{ij} e γ_{ij} , con $i \neq j$, hanno condotto a un accoppiamento tra le leggi evolutive delle variabili isteretiche. Vale la pena sottolineare come non si siano indagati né ritrovati in letteratura criteri atti alla definizione della frontiera del dominio dei parametri, sulla base di considerazioni inerenti alla stabilità del sistema ed alla sua ammissibilità termodinamica. La riproduzione dei test di sweep di Sauter ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s

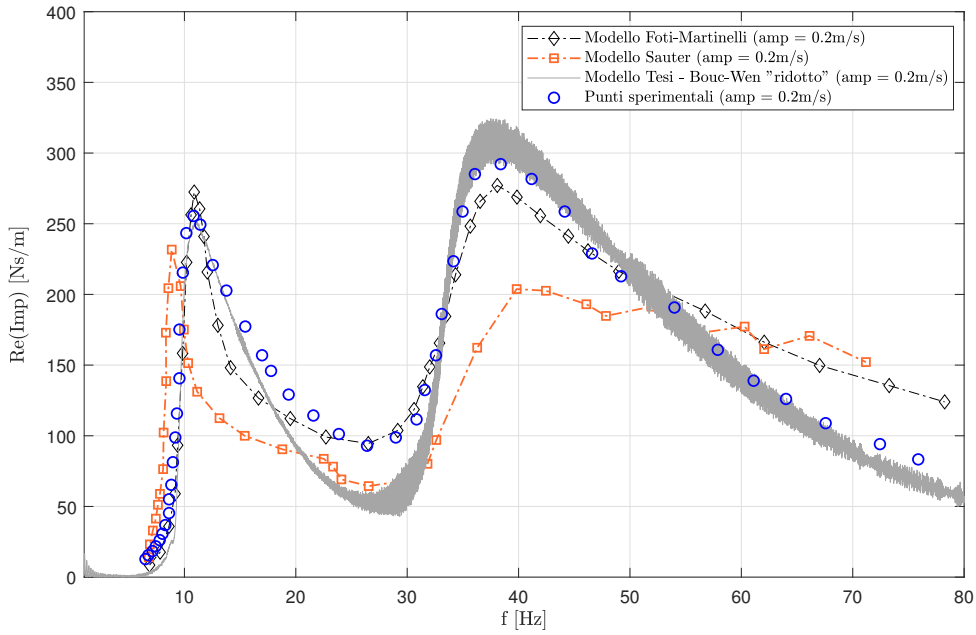


Figura 6.8: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con differenti strategie di modellazione.

e 0.05 m/s, impiegati rispettivamente per la calibrazione e per la validazione del modello sulla base di analisi parametriche e di ottimizzazione, permettono di effettuare le seguenti considerazioni, coerentemente con i risultati ottimali riportati in Fig.6.9, ottenuti a partire dal set di parametri numero 3 di Tab.5.2:

- in fase di taratura dei parametri, a differenza di quanto osservato per il caso di Bouc-Wen, è stato possibile ottenere un'adeguata ampiezza del secondo picco, sebbene il suo ramo discendente non risulti correttamente riprodotto;
- i fattori chiave, per quanto concerne i risultati esposti al primo punto, si sono rivelati essere i parametri A_v e A_ϕ , mentre il contributo di β_{ij} e γ_{ij} , con $i \neq j$, si è rivelato piuttosto limitato, così che essi sono stati posti pari a 0 nel corso di alcune analisi;
- i set di parametri relativi alle risposte numeriche più soddisfacenti, hanno spesso comportato un ridotto grado di snervamento associato alla coordinata ϕ : per tale motivo, in sede di validazione, il comportamento *amplitude dependent* in corrispondenza della seconda campana risulta essere contenuto, come dimostra il fatto che, durante la riproduzione del test a 0.05 m/s, si è ottenuta la sola variazione di ampiezza e non quella di collocazione del picco numerico rispetto alla curva ricavata in fase di taratura.

In definitiva, anche in questo caso, è possibile proporre il confronto, in Fig.6.10, tra gli esiti numerici proposti in letteratura, quelli ottenuti nel presente elaborato, mediante l'introduzione della legge costitutiva di Park-Wen in associazione col set 3 di Tab.5.2, e quelli sperimentali, riferiti al test di sweep ad ampiezza di velocità costante pari a 0.20 m/s.

Considerazioni analoghe possono essere effettuate in merito alla riproduzione del test di Langlois ad ampiezza di spostamento costante, dove il test ad ampiezza 1 mm è stato impiegato per la calibrazione, mentre quello ad ampiezza pari a 3 mm ai fini della validazione; in Fig.6.11 sono mostrati gli esiti della modellazione numerica sulla base del set

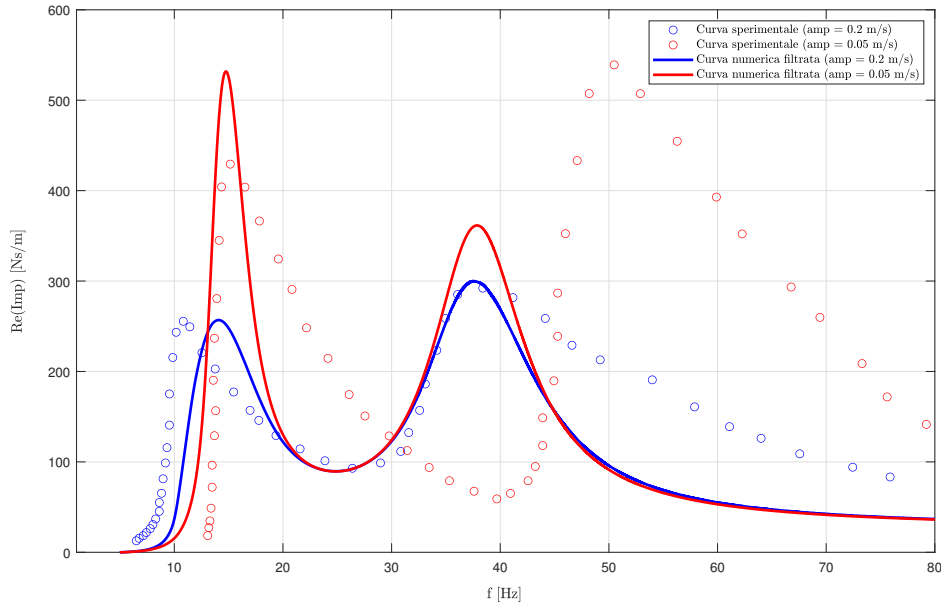


Figura 6.9: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen.

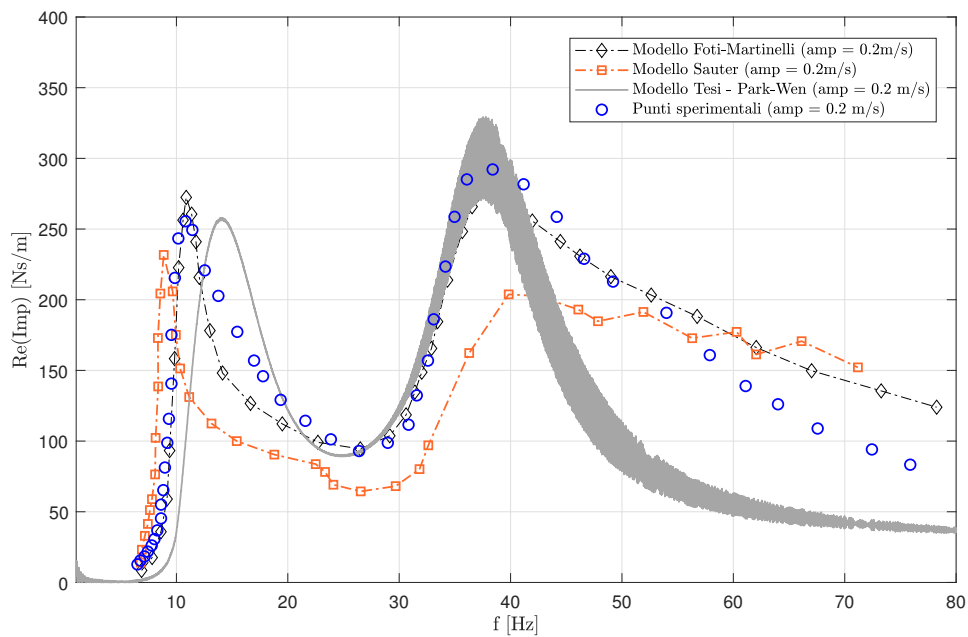


Figura 6.10: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con differenti strategie di modellazione.

di parametri ottimali numero 1 di Tab.5.3. Si può notare come, in tale circostanza, si sia raggiunto un maggior grado di aderenza alla realtà fisica per quanto concerne il secondo picco della risposta e la zona di transizione, a differenza di quanto ottenuto nel caso dei test di Sauter, in cui venivano colti in maniera migliore il primo picco e la transizione.

Da ultimo, con riferimento a Fig.6.12, si riporta il confronto tra i risultati numerici proposti

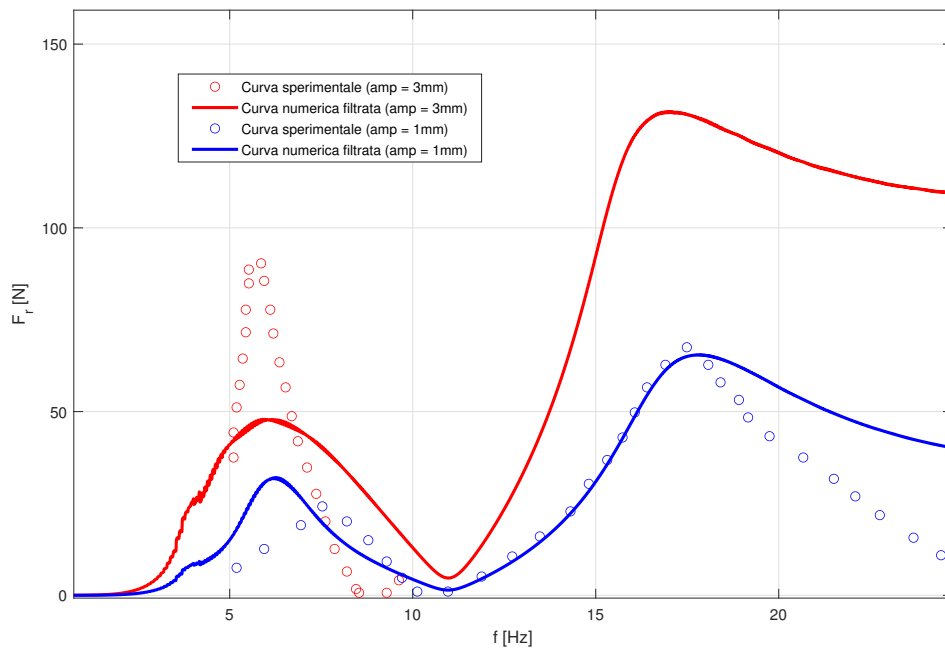


Figura 6.11: Rappresentazione e confronto tra le curve di risposta sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con una modellazione isteretica di Park-Wen.

da Langlois e Legeron [24], quelli ottenuti nel presente elaborato, mediante l'introduzione della legge costitutiva di Park-Wen in associazione col set 1 di Tab.5.3, e quelli sperimentali, riferiti al test di sweep ad ampiezza di spostamento costante pari a 1 mm.

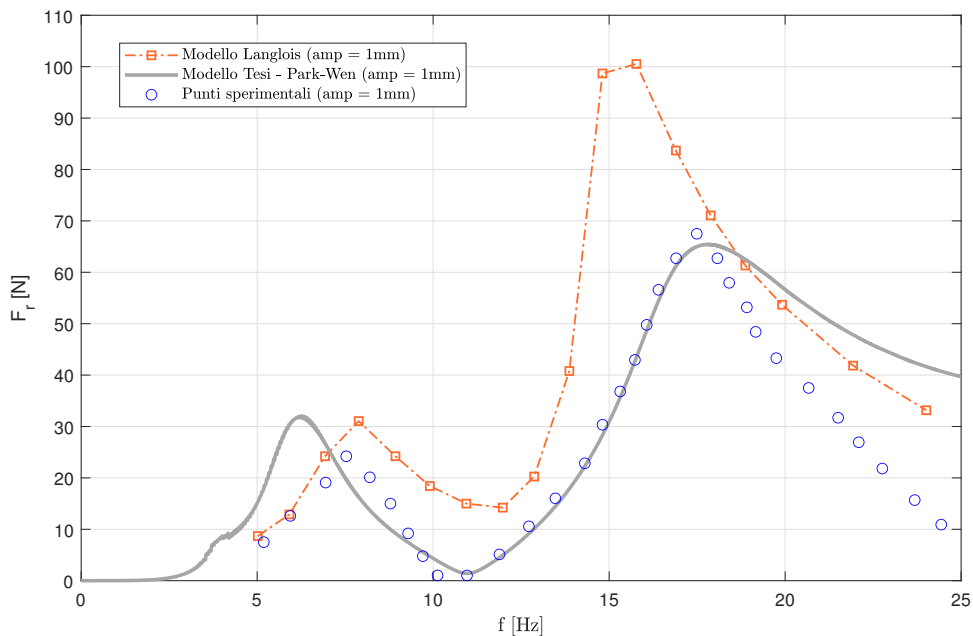


Figura 6.12: Rappresentazione e confronto tra le curve d'impedenza sperimentali e quelle numeriche ottenute in accordo con differenti strategie di modellazione.

6.2 Applicazione allo studio del sistema linea + dissipatore

Nel presente paragrafo, ci si appresta a presentare una possibile applicazione delle analisi effettuate, circa la modellazione del comportamento dei dissipatori Stockbridge, allo studio del sistema meccanico linea + dissipatore, al fine di determinare la massima ampiezza di oscillazione del conduttore; nel dettaglio, a tale scopo, si approccerà la soluzione del problema mediante l'impiego del Metodo di Bilancio dell'Energia (EBM), secondo quanto presentato al Par.1.1.2. Si sottolinea preliminarmente come, in tale sede, ci si limiterà a fornire una descrizione qualitativa dello schema di soluzione, senza entrare nei dettagli di uno specifico caso di studio e quindi in un'analisi quantitativa dei risultati numerici; una trattazione dettagliata di questo tipo potrà però costituire l'oggetto di un possibile sviluppo futuro del presente elaborato di tesi.

Si consideri quindi, a titolo esemplificativo, un dissipatore Stockbridge avente proprietà meccanico-geometriche analoghe a quelle del dispositivo impiegato da Sauter per l'esecuzione di test sperimentali di sweep ad ampiezza di velocità costante (per informazioni dettagliate a riguardo si faccia riferimento al Par.2.2.2), per il quale si assuma in aggiunta un valore della massa della pinza rigida $m_c = 0.15$ kg. Al fine di modellare il comportamento isteretico del dispositivo, è possibile fare riferimento alle varie strategie di modellazione discusse nel corso del lavoro e, stante il buon grado di aderenza alla realtà fisica mostrato al Par.5.3.1, si consideri una legge costitutiva di Park-Wen governata dal set di parametri 3 di Tab.5.2. Simulando numericamente la risposta del dispositivo in esame a una serie di test di sweep ad ampiezza di spostamento costante w_{c0} pari a 0.1 mm, 0.5 mm, 1 mm, 2 mm, 3 mm, 5 mm e 10 mm, risulta possibile caratterizzare per ciascun test la variazione con la frequenza della rigidità dinamica \tilde{K} , definita come in 6.2.

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{F}_d}{\tilde{w}_c} \quad (6.2)$$

L'andamento della risposta numerica del sistema ai differenti test di sweep, espressa in termini del modulo $|\tilde{K}| = \sqrt{Im(\tilde{K})^2 + Re(\tilde{K})^2}$ della rigidità dinamica, risulta essere quello mostrato in Fig.6.13.

Il carattere non-lineare del comportamento del dissipatore è rispecchiato, nelle curve numeriche rappresentate, dalla variazione ben visibile della loro ampiezza, ottenuta per i differenti valori di w_{c0} assunti durante i test; infatti, se si attuasse una modellazione elastica lineare del sistema, scalando l'ampiezza w_{c0} dell'input, si otterrebbe un output F_d scalato della medesima entità, così da mantenere invariato l'andamento della rigidità dinamica \tilde{K} . In altre parole, per sistemi lineari, la rigidità dinamica, al pari delle altre funzioni di trasferimento, risulta essere per questo motivo una proprietà invariante del sistema. Si noti inoltre come, in linea di principio, la non-linearità si ripercuota anche sulla collocazione, in termini di frequenza, dei due picchi della risposta; tuttavia, nel caso presente, questo aspetto risulta marcato solo in corrispondenza della prima zona di risonanza, mentre risulta poco apprezzabile nell'intorno della seconda. Tale aspetto costituisce una conseguenza diretta del fatto che, secondo quanto già discusso, il set di parametri governanti comporti l'attivazione di un rilevante grado di snervamento associato alla coordinata libera traslazionale v , mentre quella rotazionale ϕ evolve in maniera pressoché lineare.

L'andamento di $|\tilde{K}|$ e di $\angle\tilde{K} = atan\left(\frac{Im(\tilde{K})}{Re(\tilde{K})}\right)$, che si identificano rispettivamente con il modulo del rapporto tra la trasformata di Fourier della forza alla pinza F_d e quella del moto imposto alla stessa w_c e con lo sfasamento temporale tra questi due segnali, può essere sfruttato per il calcolo della potenza dissipata dal dispositivo, la quale, secondo le definizioni date al Par.1.1.2, può essere esplicitata mediante l'espressione in 6.3.

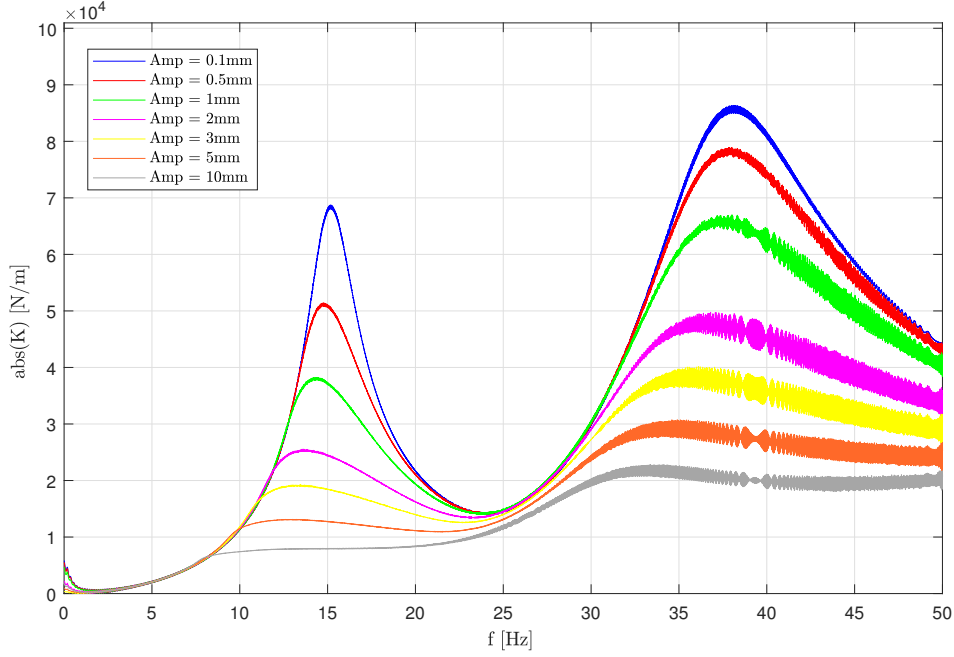


Figura 6.13: Andamento numerico del modulo della rigidità dinamica \tilde{K} in funzione della frequenza, al variare dell'ampiezza w_{c0} del test.

$$P_d = \frac{\pi}{L} \left| \frac{\tilde{F}_d}{\tilde{w}_c} \right| w_{c0}^2 f \sin(\zeta) = \frac{\pi}{L} |\tilde{K}| w_{c0}^2 f \sin(\angle \tilde{K}) \quad (6.3)$$

Si noti inoltre come l'espressione della potenza dissipata P_d sia funzione della frequenza di vibrazione f del conduttore e della sua ampiezza w_{c0} , in corrispondenza della sezione d'attacco del dispositivo (come si discuterà in seguito, essa può essere legata a sua volta dalla massima ampiezza di oscillazione del cavo w_{max}); tale dipendenza dall'ampiezza w_{c0} , a differenza di quanto accade in presenza di una modellazione lineare del dissipatore, si manifesta anche nelle espressioni del modulo e della fase della rigidità dinamica \tilde{K} , dato che, stante il comportamento *amplitude dependent* del dispositivo, risulta: $\tilde{K} = \tilde{K}(f, w_{c0})$. A questo punto, diviene possibile graficare la variazione della potenza dissipata con la frequenza di vibrazione, per fissati valori di ampiezza del moto imposto: tali andamenti sono riportati in Fig.6.14. Come si può osservare, a fissata frequenza, all'aumentare dell'ampiezza w_{c0} si riscontra un incremento della potenza dissipata; d'altro canto, ad ampiezza fissata, si denota un aumento di P_d in prossimità di una condizione di risonanza tra il moto del conduttore e l'oscillazione dei blocchi inerziali costituenti il dissipatore.

Nell'ottica dell'applicazione dell'EBM, risulta necessario ricavare, a partire dalle curve appena citate di Fig.6.14, l'andamento della potenza dissipata per un dato valore di frequenza di vibrazione f^* , in funzione dell'ampiezza di oscillazione w_{c0} . Con riferimento a valori di f^* pari rispettivamente a 15 Hz, 25 Hz e 35 Hz, è possibile ottenere gli andamenti multilineari di Fig.6.15.

Il grafico appena ottenuto dovrà essere opportunamente scalato in modo da rappresentare la dipendenza della potenza dissipata non dall'ampiezza di vibrazione w_{c0} in corrispondenza della sezione di attacco, bensì in funzione della massima ampiezza di oscillazione w_{max} della linea; le due quantità possono essere relazionate, una volta definite le forme modali, da cui si suppone essere caratterizzato il moto del conduttore. A tale scopo, si

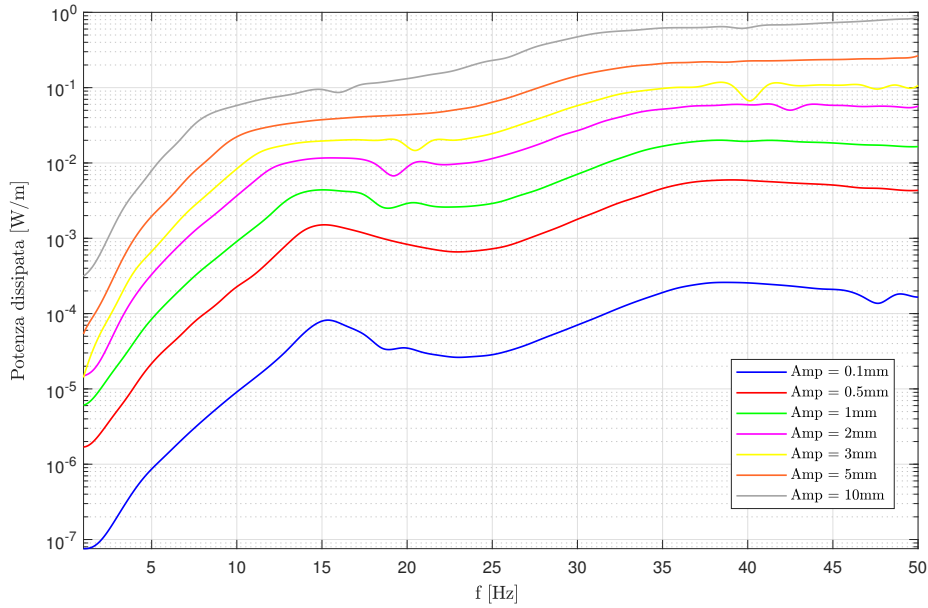


Figura 6.14: Andamento numerico della potenza dissipata P_d in funzione della frequenza, al variare dell'ampiezza w_{c0} del test.

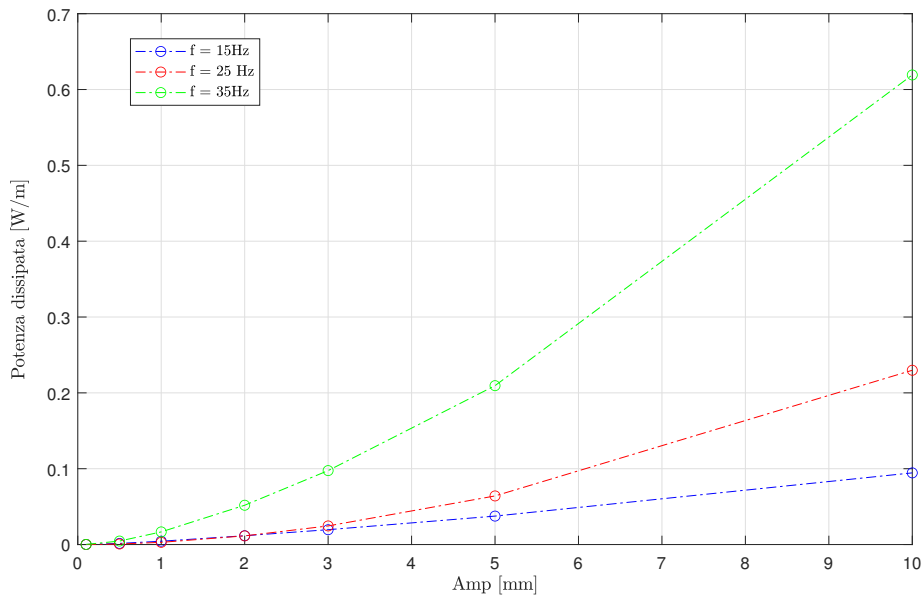


Figura 6.15: Andamento numerico della potenza dissipata P_d in funzione dell'ampiezza w_{c0} , per fissati valori della frequenza di vibrazione f^* .

deve preliminarmente definire una strategia di modellazione meccanica del cavo sospeso (ad esempio, modello di fune tesata, trave tesata, ecc.), i cui modi di vibrare risultano distorti a causa della presenza del/dei dissipatore/i connesso/i ad esso. La determinazione dei modi può essere effettuata a valle dell'imposizione di opportune condizioni al contorno di natura statica e/o cinematica: in ogni caso, qualora si decidesse di tenere in conto dell'influenza di tali dispositivi sulla linea, nelle condizioni di carattere statico, che sanciscono

l'equilibrio dinamico alla traslazione verticale dell'*i*-esima sezione di attacco, comparirebbe l'espressione della forza di interazione $F_{d,i}$, la quale non risulta nota, ma dipendente a sua volta dalla forma modale incognita.

In tale sede, ci si limita a riportare in equazione 6.4, con riferimento alla schematizzazione del sistema meccanico mostrata in Fig.6.16, una possibile relazione tra la massima ampiezza di oscillazione della linea all'antinodo w_{max} e quella in corrispondenza della sezione di attacco w_{c0} .

$$w_{max} = \frac{w_{c0}}{\left| \sin \left[\frac{2\pi f}{f_c} \left(\frac{L-x_d}{L} \right) \right] \right|} \quad (6.4)$$

dove f_c rappresenta la cosiddetta frequenza caratteristica del cavo, definita come $f_c = \sqrt{\frac{T}{\gamma L^2}}$, e γ indica la massa per unità di lunghezza del cavo stesso. Si noti come una formulazione di questo tipo renda il rapporto tra w_{max} e w_{c0} indipendente dalla forza di interazione F_d . Per comprendere come l'espressione appena riportata possa essere ricavata, si consulti l'Appendice E.

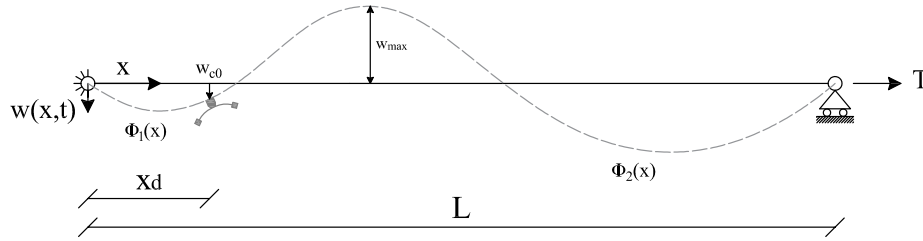


Figura 6.16: Modello di fune tesa, in doppio appoggio, per la determinazione dei modi di vibrare del sistema linea + dissipatore: la generica forma modale risulta essere espressa, nei due sottointervalli $0 \leq x \leq x_d$ e $x_d \leq x \leq L$, rispettivamente dalle due espressioni analitiche $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$.

Dopo aver determinato i modi di vibrare e aver quindi stabilito una relazione tra le ampiezze w_{c0} e w_{max} , diviene possibile graficare l'andamento della potenza dissipata dallo smorzatore, in corrispondenza di un certo valore f^* della frequenza di vibrazione, in funzione di w_{max} ; riportando nel medesimo grafico anche gli andamenti della potenza P_w introdotta nel sistema dal vento e della potenza P_c dissipata intrinsecamente dal cavo, i quali possono essere determinati rispettivamente mediante le espressioni introdotte al Par.1.1.2 e riportate in 6.5 per maggior chiarezza, è possibile determinare la massima ampiezza di oscillazione w_{max} incognita, sotto l'ipotesi di comportamento mono-modale del conduttore a frequenza di vibrazione f^* .

$$\begin{aligned} P_w(f, w_{max}) &= B_w(I_v) D^4 f^3 f n c(w_{max}/D) \\ P_c(f, w_{max}) &= k \frac{w_{max}^l f^m}{T^n} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Il punto di intersezione tra le curve (si veda Fig.6.17), che rappresenta la condizione di equilibrio dinamico del sistema, costituisce la soluzione del bilancio di potenza in 6.6, in cui il significato dei parametri presenti all'interno delle varie espressioni risulta essere quello esposto al Par.1.1.2.

$$P_w(f, w_{max}) - P_c(f, w_{max}) - \sum_{i=1}^{N_d} P_{d,i}(f, w_{max}) = 0 \quad (6.6)$$

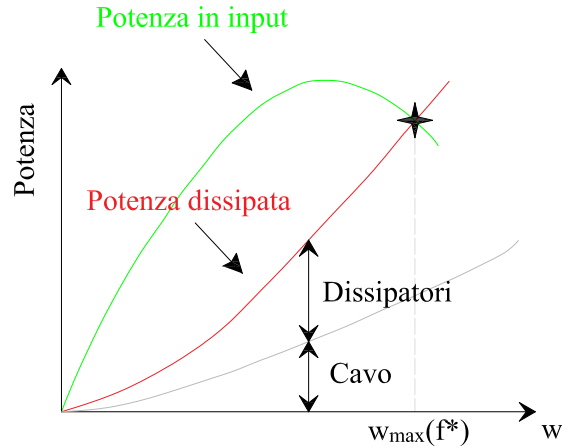


Figura 6.17: Soluzione grafica del bilancio energetico in corrispondenza di un determinato valore f^* di frequenza di vibrazione.

Eseguendo in maniera ricorsiva la procedura appena descritta per diversi valori di frequenza f^* , diviene possibile riportare i risultati nel piano $w_{max} - f$ (si veda Fig.6.18), da cui è possibile osservare come l'entità dell'oscillazione all'antinodo del cavo vari, in presenza di un determinato grado di smorzamento fornito dai dissipatori, in funzione della frequenza di vibrazione.

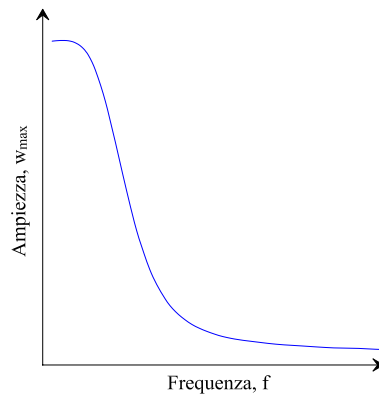


Figura 6.18: Andamento qualitativo della massima ampiezza di oscillazione w_{max} in funzione della frequenza f , ottenibile mediante applicazione dell'EBM.

L'approccio descritto in maniera qualitativa nel presente paragrafo si pone a coronamento delle analisi del comportamento dei dissipatori Stockbridge, trattate nel corso dei capitoli precedenti, e costituisce il punto di partenza per la realizzazione di un seguente lavoro di ricerca, in cui si potrà fissare l'obiettivo di sviluppare in termini quantitativi la strategia di soluzione appena esposta, con riferimento ad uno specifico caso di studio. In particolar modo, mediante i progressi esposti circa la modellazione numerica delle proprietà non-lineari di tali dispositivi, risulterà possibile tenere in conto, nel contesto dell'applicazione dell'EBM, del carattere *amplitude dependent* della loro risposta, il quale si manifesta in definitiva nella dipendenza non-lineare, all'interno dell'espressione della potenza P_d dissipata, della forza di interazione F_d dall'ampiezza di oscillazione del cavo conduttore.

Appendice A

MODELLAZIONE ISTERETICA IN PRESENZA DI ACCOPIAMENTO INERZIALE ED ELASTICO

Come descritto nel Par.4.3.2, circa la modellazione del sistema a due gradi di libertà mediante la legge isteretica di Bouc-Wen, con riferimento al sistema di equazioni governanti il problema in 4.10 non risulta possibile rappresentare in maniera adeguata con tale modello la risposta del dispositivo: infatti, a causa dell'accoppiamento inerziale presente tra le due coordinate libere, il secondo picco della funzione di impedenza non coglie in alcun modo la sua controparte sperimentale. Per questo motivo, si è deciso di introdurre nelle equazioni di equilibrio dinamico del corpo inerziale un termine aggiuntivo di accoppiamento tra le due coordinate libere, operante a livello di rigidità; tale termine introdotto nel tentativo di bilanciare l'effetto dato dall'accoppiamento inerziale si identifica con il parametro k_{coup} . Il sistema di equazioni governanti il problema rimane dunque quello espresso in 4.10, con l'eccezione che le due equazioni di moto diventano quelle descritte in A.1.

$$\begin{aligned} m\ddot{v}(t) - me_G\ddot{\phi}(t) + c_v\dot{v}(t) + F(t) + k_{coup}\phi &= q_v(t) \\ -me_G\ddot{v}(t) + \lambda\ddot{\phi}(t) + c_\phi\dot{\phi}(t) + M(t) + k_{coup}v &= q_\phi(t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

dove il parametro k_{coup} compare con le dimensioni di una forza [N].

Effettuando una calibrazione manuale dei parametri è possibile selezionare i due set riportati in A.2 e A.3 e ottenuti rispettivamente in presenza e in assenza di un contributo di smorzamento viscoso.

$$\begin{aligned} k_{min,v} &= 1500 \text{ N/m}, k_{max,v} = 5400 \text{ N/m}, v_0 = 0.006 \text{ m}, \sigma_v = 1, n_v = 1, \xi_v = 0.1, \\ k_{min,\phi} &= 20 \text{ Nm}, k_{max,\phi} = 85 \text{ Nm}, \phi_0 = 0.1 \text{ rad}, \sigma_\phi = 1, n_\phi = 1, \xi_\phi = 0.05, k_{coup} = 150 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} k_{min,v} &= 1500 \text{ N/m}, k_{max,v} = 7300 \text{ N/m}, v_0 = 0.0035 \text{ m}, \sigma_v = 1, n_v = 1, \xi_v = 0, \\ k_{min,\phi} &= 20 \text{ Nm}, k_{max,\phi} = 85 \text{ Nm}, \phi_0 = 0.2 \text{ rad}, \sigma_\phi = 1, n_\phi = 1, \xi_\phi = 0, k_{coup} = 150 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A. MODELLAZIONE ISTERETICA IN PRESENZA DI ACCOPPIAMENTO INERZIALE ED ELASTICO

Le funzioni di impedenza associate a tali set di parametri, rispettivamente rappresentate in Fig.A.1 e A.2, mostrano un andamento simile nell'intorno della prima campana di risonanza, mentre differiscono in maniera sostanziale in corrispondenza del secondo picco e nella zona di transizione. Infatti, in prossimità di tale zona, il primo riproduce in maniera leggermente più fedele la forma generale della curva sperimentale, mentre il secondo mostra un'ampiezza del picco più verosimile.

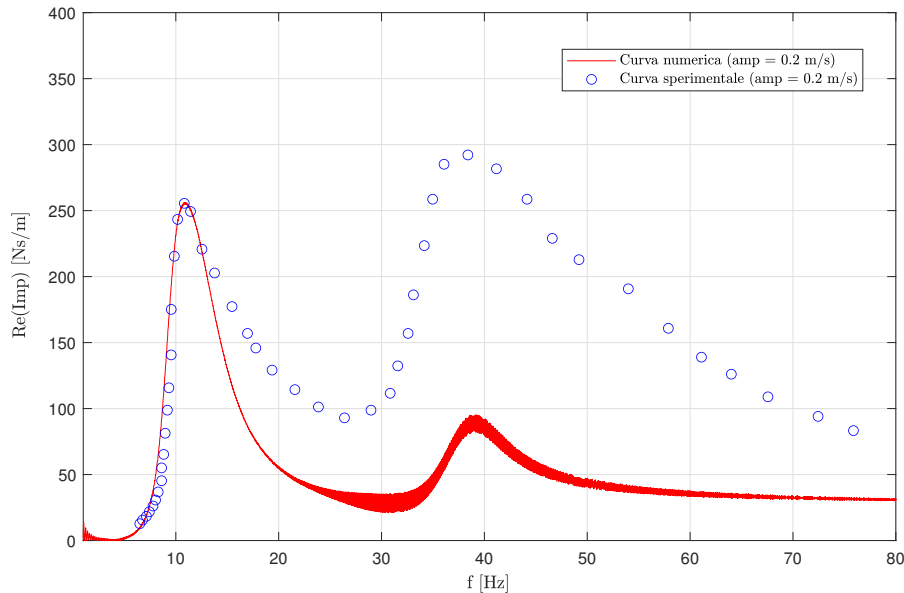


Figura A.1: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.2.

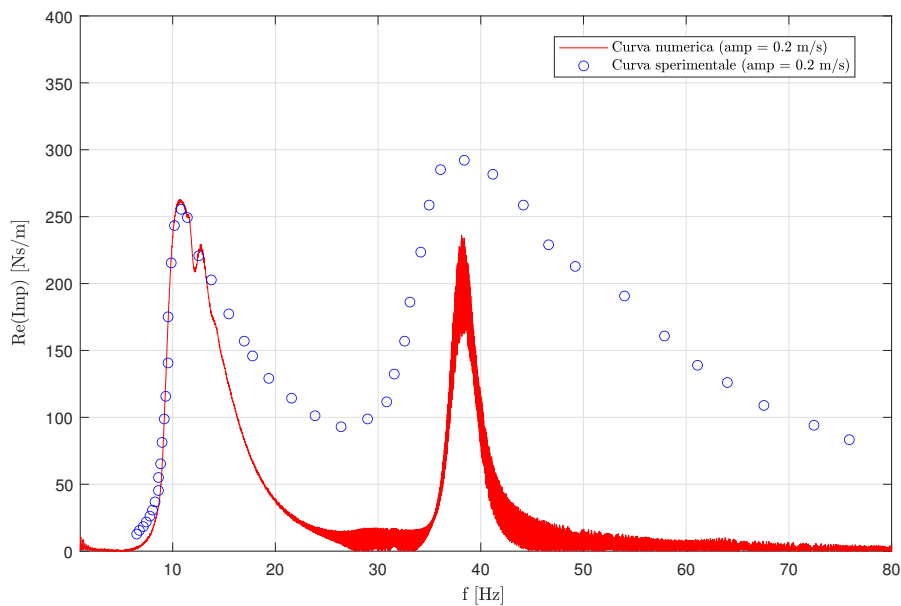


Figura A.2: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.3.

A. MODELLAZIONE ISTERETICA IN PRESENZA DI ACCOPPIAMENTO INERZIALE ED ELASTICO

In accordo con Fig.A.1, si può concludere che tale aspetto consegue principalmente dal contributo di smorzamento viscoso, associato a valori dei fattori ξ_v e ξ_ϕ non nulli, il quale permette al contempo di ottenere una zona di transizione ad andamento più prossimo a quello sperimentale; da Fig.A.2 è invece possibile osservare come, in assenza di smorzamento viscoso, la risposta del sistema in corrispondenza della zona di transizione, tendendo a valori nulli, risulta più distante da quella misurata durante il test. Ad ogni modo, il termine aggiuntivo legato al parametro k_{coup} non risulta particolarmente significativo al fine di cogliere in maniera migliore la risposta globale del dispositivo. Nonostante anche questo modello non permetta di ottenere risultati soddisfacenti in fase di calibrazione dei parametri, si riportano in questa circostanza a titolo dimostrativo rispettivamente in Fig.A.3 e A.4 anche i risultati associati all'analisi di sweep a velocità costante pari a 0.05 m/s. Da queste figure, tralasciando la già discussa incapacità del modello di cogliere appieno la risposta del sistema, è possibile osservare in maniera netta il carattere *amplitude dependent* del modello isteretico di Bouc-Wen. In questo caso specifico, gli esiti della procedura di validazione si rivelano piuttosto deludenti, siccome non solo si perde, come previsto, la bontà della corrispondenza tra la curva numerica e quella sperimentale, ma il modello non si dimostra neppure abile a cogliere le frequenze di risonanza del sistema.

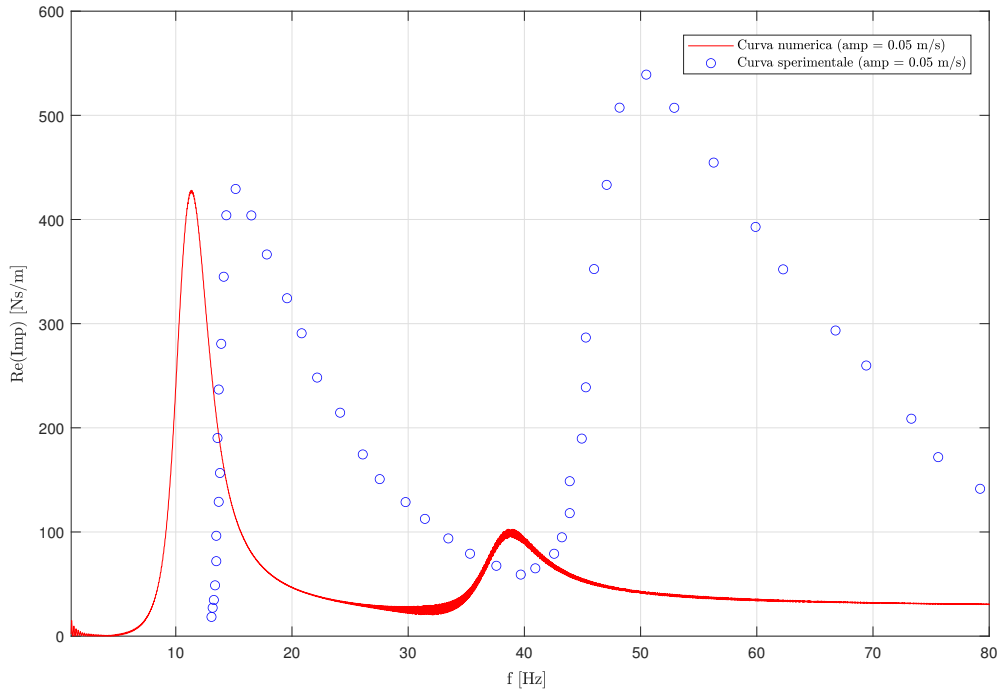


Figura A.3: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.2 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s.

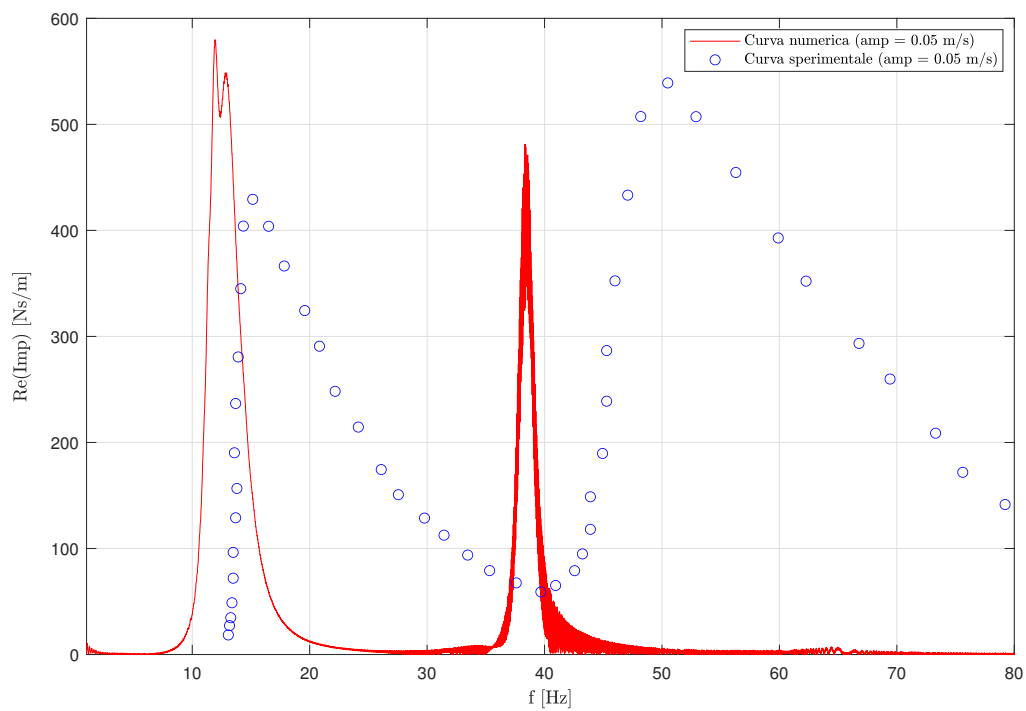


Figura A.4: Curva di impedenza ricavata con modello di Bouc-Wen, utilizzando i parametri del set ottimale in equazione A.3 e considerando il test ad ampiezza di velocità costante pari a 0.05 m/s.

Appendice B

SCHEMA DI FUNZIONAMENTO DI "SIG_INTERP"

La funzione "*sig_interp*" è stata implementata all'interno del software MATLAB al fine di eseguire la procedura di interpolazione numerica di un segnale vettoriale fornito in input al codice. Nel contesto dell'applicazione per il calcolo della risposta del dissipatore a un dato stato di sollecitazione, il vettore in ingresso si può identificare con il segnale di accelerazione, velocità o spostamento del supporto (i.e. cavo conduttore), definito in corrispondenza di un certo numero di istanti temporali. In termini del tutto generali, si identifichi con $\boldsymbol{\xi}$ il vettore avente per componenti i valori che un generico segnale temporale assume negli istanti di tempo contenuti all'interno del vettore $\boldsymbol{\tau}$, in modo da stabilire una corrispondenza biunivoca tra le componenti $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ di $\boldsymbol{\tau}$ e le componenti $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ di $\boldsymbol{\xi}$. Si supponga ora di considerare un secondo vettore dei tempi \boldsymbol{t} di componenti $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ e si decida di voler valutare i valori che il segnale assume in corrispondenza degli istanti di tempo contenuti in \boldsymbol{t} ; a tale scopo, risulta opportuno impostare un algoritmo di interpolazione numerica all'interno della funzione MATLAB "*sig_interp*", il quale permette, seppure in maniera approssimata, di costruire il vettore \boldsymbol{x} , la cui generica componente x_i rappresenta il valore assunto dal segnale in corrispondenza del generico istante temporale t_i . Innanzitutto, l'algoritmo implementato identifica, con riferimento all' i -esima componente t_i (con $i = 1, \dots, m$) del vettore \boldsymbol{t} , i corrispondenti istanti $\tau_j = t_{i,inf}$ (con $j = 1, \dots, n$) e $\tau_k = t_{i,sup}$ (con $j \leq k \leq n$), i quali rappresentano rispettivamente la maggiore e la minore componente del vettore $\boldsymbol{\tau}$ in grado di soddisfare la disuguaglianza in B.1.

$$\tau_j \leq t_i \leq \tau_k \quad (\text{B.1})$$

Nel caso in cui la disuguaglianza in B.1 sia soddisfatta in senso stretto (i.e. $\tau_j < t_i < \tau_k$), noti i valori $\xi_j = x_{i,inf}$ e $\xi_k = x_{i,sup}$ assunti dal segnale rispettivamente in corrispondenza degli istanti temporali $t_{i,inf}$ e $t_{i,sup}$, l'algoritmo procede mediante un usuale metodo di interpolazione lineare, per la valutazione approssimata del valore x_i che il segnale assume all'istante temporale t_i ; dal punto di vista quantitativo, viene eseguito il semplice calcolo riportato in B.2.

$$x_i = x_{i,inf} + \frac{x_{i,sup} - x_{i,inf}}{(t_{i,sup} - t_{i,inf})}(t_i - t_{i,inf}) \quad (\text{B.2})$$

Qualora invece si ricada nel caso particolare in cui $t_i = t_{i,inf}$, noto il valore $x_{i,inf}$ assunto dal segnale in corrispondenza dell'istante temporale $t_{i,inf}$, il calcolo del valore di x_i viene effettuato nel codice banalmente mediante la B.3.

$$x_i = x_{i,inf} \quad (\text{B.3})$$

Uguualmente, se si ha $t_i = t_{i,sup}$, allora basterà porre, secondo la B.4:

$$x_i = x_{i,sup} \quad (B.4)$$

Si noti inoltre come l'implementazione della funzione "*sig_interp*" sia tale da essere in grado di attuare la procedura di interpolazione appena discussa solo nel caso in cui $\tau_0 \leq t_0$ e $\tau_n \geq t_m$; in altre parole, l'algoritmo non risulta funzionante nel caso in cui l'intervallo temporale \mathbf{t} , nei cui istanti si vuole valutare l'espressione del segnale, sia più ampio rispetto all'intervallo $\boldsymbol{\tau}$. Tuttavia, questo aspetto non risulta affatto limitante dal punto di vista pratico, specie in virtù del suo impiego per il calcolo della risposta del dissipatore Stockbridge, dal momento che non avrebbe senso impiegare tale procedura per cercare di prevedere l'andamento del segnale oltre gli estremi del suo intervallo di definizione.

A titolo d'esempio, al fine di testare l'efficacia e la bontà dell'implementazione, può essere utile impiegare la funzione per la soluzione di un semplice caso di studio. Si consideri l'intervallo di tempo $\boldsymbol{\tau}$ definito in B.5.

$$\boldsymbol{\tau} = [0 : 0.1 : 6]\text{s} \quad (B.5)$$

Dove, all'interno della parentesi, il primo ed ultimo termine rappresentano gli estremi dell'intervallo, mentre il termine intermedio identifica il passo di discretizzazione, supposto in questo caso costante.

Si definisca quindi un segnale caratterizzato dall'espressione analitica in B.6 e si costruisca il vettore $\boldsymbol{\xi}$, ottenuto dalla valutazione del segnale in corrispondenza degli istanti di tempo di $\boldsymbol{\tau}$.

$$y(\tilde{t}) = \tilde{t}^3 + 2\tilde{t}^2 + \tilde{t} \quad (B.6)$$

A questo punto, si desidera ottenere il vettore \mathbf{x} dei valori assunti dal segnale in esame, secondo la procedura di interpolazione appena descritta, in corrispondenza degli istanti temporali contenuti nel vettore \mathbf{t} , definito come in B.7.

$$\mathbf{t} = [0 : 0.15 : 6]\text{s} \quad (B.7)$$

Fornendo in ingresso alla funzione "*sig_interp*" il vettore dei tempi $\boldsymbol{\tau}$, il vettore dei tempi \mathbf{t} e il segnale vettoriale $\boldsymbol{\xi}$, quest'ultima risulta in grado di calcolare il vettore-segnale interpolato \mathbf{x} ; il confronto tra la soluzione analitica $y(\tilde{t})$, in corrispondenza della quale sono evidenziate le componenti di $\boldsymbol{\xi}$, e quella interpolata, espressa invece dal vettore \mathbf{x} , è riportato graficamente in Fig.B.1.

Dalla figura si denota il perfetto grado di approssimazione ottenuto a valle dell'impiego della funzione "*sig_interp*" per la valutazione dei valori del segnale \mathbf{x} . Tuttavia, è possibile intuire anche a livello qualitativo come la procedura divenga in generale più accurata all'aumentare del numero delle componenti n e m riferite rispettivamente ai vettori $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{t} e quando il numero di tali componenti risulti prossimo per i due vettori dei tempi. Si sottolinea infine il fatto che, per il funzionamento dell'algoritmo, non risulta in alcun modo necessario che i vettori dei tempi $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{t} siano composti da un insieme di istanti temporali tra loro equi-spaziati, bensì le uniche condizione che devono sussistere, secondo quanto già menzionato, risultano essere: $\tau_0 \leq t_0$ e $\tau_n \geq t_m$.

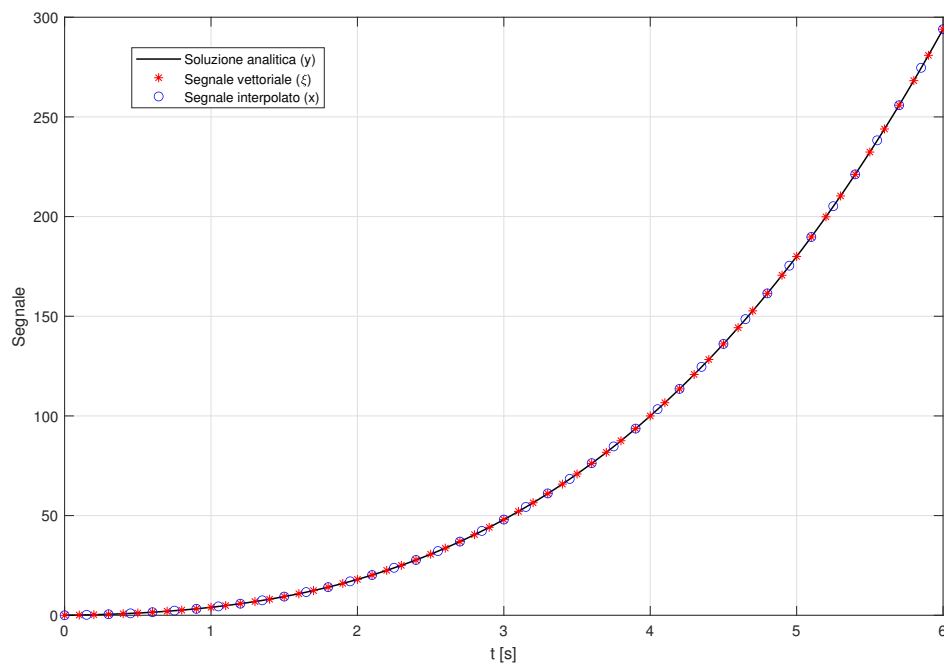


Figura B.1: Confronto tra la soluzione analitica $y(t)$, il segnale in ingresso ξ e il segnale interpolato x .

Appendice C

SCHEMA DI FUNZIONAMENTO DI ODE45

La funzione ODE45, presente di default nella libreria del software MATLAB, implementa un algoritmo di soluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (ODEs), espressi nella forma in C.1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{C.1})$$

dove t rappresenta la variabile temporale indipendente, \mathbf{x} il vettore delle funzioni dipendenti incognite e $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ una funzione di t e \mathbf{x} . Il problema differenziale risulta compiutamente definito una volta specificato il vettore di funzioni note $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ e un set di condizioni iniziali \mathbf{x}_0 , il quale esplicita il valore assunto dal vettore delle funzioni incognite all'istante iniziale $t = t_0$.

Sebbene il problema differenziale nella forma riportata in C.1 permetta unicamente la soluzione di equazioni del primo ordine, la sua validità risulta in realtà di più ampio respiro, dal momento che, come ben noto, una qualsiasi equazione differenziale ordinaria, di qualsiasi ordine, può sempre essere ridotta a un sistema di equazioni differenziali di ordine 1. Nello specifico, lo studio di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere ugualmente effettuato mediante l'analisi di un sistema di n equazioni accoppiate del primo ordine.

Il principio alla base di qualsivoglia metodo di integrazione numerico del problema C.1 consiste nell'approssimazione di riscrivere i differenziali $d\mathbf{x}$ e dt sotto forma di incrementi finiti $\Delta\mathbf{x}$ e Δt , così da ridurre il sistema differenziale a un sistema algebrico di equazioni, da risolvere step by step; in particolare, uno specifico metodo di integrazione numerico si dice convergente se nel limite per $\Delta t \rightarrow 0$ la soluzione numerica tende alla soluzione esatta del problema differenziale di partenza. Il valore di Δt , definito ad ogni passo, può essere mantenuto costante durante l'intera procedura di integrazione o opportunamente adattato e variato, qualora necessario.

Più nel dettaglio, nel caso della funzione ODE45, si richiedono come dati di ingresso il problema differenziale nella forma C.1 che si desidera risolvere e un vettore $\tilde{\mathbf{t}}$ di istanti temporali, in cui l'utente vuole che sia valutato il valore assunto dalla soluzione; la funzione restituisce come output una matrice $\tilde{\mathbf{X}}$, la cui i -esima colonna $\tilde{\mathbf{x}}_i$ è costituita dalle componenti, calcolate in forma approssimata, della funzione incognita $x_i(t)$, valutate in corrispondenza di ciascuna componente \tilde{t}_j del vettore $\tilde{\mathbf{t}}$. Si noti come, in linea generale, tali istanti temporali non coincidano con quelli in cui ODE45 integra numericamente il problema; le componenti dei vettori $\tilde{\mathbf{x}}_i$ saranno di conseguenza valutate a valle della procedura di integrazione, mediante opportune operazioni di interpolazione.

Addentrando proprio nel merito della suddetta procedura di soluzione numerica, gli schemi di integrazione impiegati dalla funzione consistono in due metodi di Runge-Kutta, uno di ordine 4 e uno di ordine 5, da cui la denominazione "ODE45". Tuttavia, la soluzione avrà globalmente un'accuratezza del quarto ordine, dal momento che si serve del metodo di ordine 5 unicamente per una stima a posteriori dell'errore commesso, al k-esimo passo di integrazione, sul calcolo di $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}(t_k)$, al fine di comprendere se il valore di $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ risulti o meno adeguato.

L'idea alla base dei metodi di Runge-Kutta, i quali costituiscono un'estensione del metodo di Eulero in avanti (coincidente con il metodo di Runge-Kutta del primo ordine), consiste nella valutazione approssimata $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ del valore di \mathbf{x}_{k+1} , unicamente a partire dal valore $\hat{\mathbf{x}}_k$ assunto dalla funzione allo step precedente; nel caso specifico della formula al quarto ordine, implementata all'interno di ODE45, la procedura si esplicita come riportato in C.2, con riferimento al generico step di integrazione k .

$$\begin{aligned}
 \delta_{1,k} &= \Delta t_k \mathbf{f}(t_k, \hat{\mathbf{x}}_k) \\
 \delta_{2,k} &= \Delta t_k \mathbf{f}\left(t_k + \frac{\Delta t_k}{2}, \hat{\mathbf{x}}_k + \frac{\delta_{1,k}}{2}\right) \\
 \delta_{3,k} &= \Delta t_k \mathbf{f}\left(t_k + \frac{\Delta t_k}{2}, \hat{\mathbf{x}}_k + \frac{\delta_{2,k}}{2}\right) \\
 \delta_{4,k} &= \Delta t_k \mathbf{f}(t_k + \Delta t_k, \hat{\mathbf{x}}_k + \delta_{3,k}) \\
 \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_k + \frac{\delta_{1,k}}{6} + \frac{\delta_{2,k}}{3} + \frac{\delta_{3,k}}{3} + \frac{\delta_{4,k}}{6}
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Come si può osservare dalle equazioni in C.2, il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine richiede quattro valutazioni della funzione vettoriale \mathbf{f} , fissato il passo di integrazione Δt_k ; un'interpretazione grafica di tale metodo è riportata in Fig.C.1.

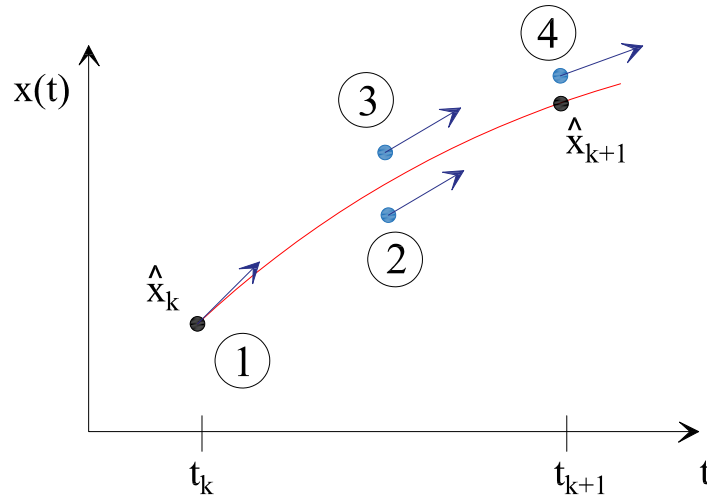


Figura C.1: Interpretazione grafica del metodo di Runge-Kutta di ordine 4: la derivata è valutata quattro volte, all'istante iniziale (1), in due punti intermedi di prova (2) e (3) e nel punto di prova finale (4). Combinando tali valori come in equazione C.2, si ottiene una stima di \mathbf{x}_{k+1} .

In parallelo, il calcolo del vettore $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ viene effettuato all'interno della funzione ODE45 anche mediante un metodo di Runge-Kutta di ordine 5, il quale necessita in aggiunta a quanto esposto in precedenza, la valutazione preliminare del vettore $\delta_{5,k}$. Infine, l'algoritmo esegue una stima dell'errore al k-esimo step, calcolato come differenza tra le soluzioni

$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{(4)}$ e $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{(5)}$ ottenute tramite i due metodi, e il confronto di tale errore con una tolleranza ε fissata, al fine di poter stabilire se il passo di integrazione Δt_k impiegato risulti adeguato o vada altresì opportunamente modificato: per questo motivo, il metodo in esame risulta adattivo di ordine 4 a passo variabile. La tolleranza ε viene fissata di default dalla funzione, ma può essere all'occorrenza posta a piacimento dall'utente; per quanto concerne il passo di integrazione, esso è definito in maniera automatica all'interno dell'algoritmo secondo una procedura dedicata. Ulteriori dettagli a riguardo sono consultabili in [36] o, ugualmente, all'interno della documentazione online fornita dal produttore del software (<https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>).

A conclusione della discussione effettuata, si rimarca come, all'interno della libreria del software, siano presenti implementazioni alternative a ODE45, tra cui si cita, a titolo d'esempio, ODE23; esso è basato su due schemi di integrazione di Runge-Kutta di ordine rispettivamente pari a 2 e 3, sulla falsa riga di quanto esposto nella presente Appendice. In ogni caso, sebbene non sia possibile definire in maniera assoluta un algoritmo "migliore" rispetto agli altri, ODE45 viene spesso impiegato come prima alternativa, dal momento che si dimostra essere in molti contesti veloce ed accurato.

Appendice D

ALGORITMI DI EVOLUZIONE DIFFERENZIALE

Storn e Price [38] proposero nel 1995 un algoritmo di Evoluzione Differenziale ("*Differential Evolution*, DE") per la soluzione automatica di problemi di ottimizzazione. Basato su una procedura di minimizzazione di specifiche funzioni obiettivo/costo F_{obj} , opportunamente definite, esso procede mediante tecniche di variazione iterativa dei parametri governanti le funzioni stesse, il cui dominio di definizione si identifica con $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^+$. Partendo da una famiglia di N_{pop} soluzioni candidato $(\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_2^1, \dots, \mathbf{x}_{N_{pop}}^1)$, campionate all'interno di D con riferimento a una distribuzione di probabilità uniforme, ad ogni iterazione (generazione) successiva, eseguita dallo schema DE, si attua in primo luogo un processo di mutazione di ogni candidato appartenente alla popolazione dell'iterazione i -esima e, conseguentemente, un'operazione di ricombinazione (*crossover*), al fine di ottenere gli individui appartenenti alla famiglia dell'iterazione seguente $(\mathbf{x}_1^{i+1}, \mathbf{x}_2^{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{N_{pop}}^{i+1})$; tale procedura viene ripetuta fino al soddisfacimento di uno o più criteri di terminazione, preliminarmente stabiliti. L'algoritmo canonico DE richiede la definizione di soli 3 parametri di controllo, i quali si identificano rispettivamente con il numero di individui generati per ciascuna famiglia/popolazione N_{pop} (il quale si assume costante ad ogni iterazione), il fattore di scala (o di mutazione) F e il tasso di ricombinazione (*crossover rate*) CR . Nei paragrafi seguenti, ci si appresta a fornire una descrizione dei vari step che compongono lo scheletro fondamentale della procedura di ottimizzazione; maggiori dettagli e approfondimenti possono essere ritrovati con riferimento a [6].

D.1 Inizializzazione

Assegnato lo spazio dei parametri $D \subseteq \mathbb{R}^d$ con $d \in \mathbb{N}^+$, la cui frontiera è definita dai vettori \mathbf{x}_{min} e \mathbf{x}_{max} , in questa fase, risulta necessario definire gli N_{pop} individui costituenti la popolazione di partenza come in equazione D.1: una scelta ragionevole per N_{pop} consiste nel porre $N_{pop} = 10d$.

$$\mathbf{x}_i^1 = [x_{i,1}^1, x_{i,2}^1, \dots, x_{i,j}^1, \dots, x_{i,d}^1], \quad \text{con } i = 1, \dots, N_{pop} \quad (\text{D.1})$$

La generica componente $x_{i,j}^1$ ($j = 1, \dots, d$) appartenente all' i -esimo individuo della popolazione \mathbf{x}_i^1 viene generata sulla base di un'assegnata distribuzione di probabilità all'interno del suo range di definizione: in termini quantitativi, deve sussistere la relazione D.2.

$$x_{min,j} \leq x_{i,j}^1 \leq x_{max,j}, \quad i = 1, \dots, N_{pop}, \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{D.2})$$

Qualora non venga esplicitamente fornito all' algoritmo un set di parametri di riferimento (*initial guess*, \mathbf{IG}), secondo quanto già anticipato, gli individui della popolazione iniziale vengono campionati, all'interno del dominio di definizione D , coerentemente con una distribuzione di probabilità uniforme. Si avrà quindi:

$$x_{i,j}^1 = x_{min,j} + rand_{i,j}[0, 1] (x_{max,j} - x_{min,j}), \quad i = 1, \dots, N_{pop}, j = 1, \dots, d \quad (D.3)$$

dove $rand_{i,j}[0, 1]$ si identifica con un numero casuale appartenente all'intervallo compatto $[0,1]$, il quale viene ricavato in maniera indipendente per ogni componente dell' i -esimo individuo.

Nel caso in cui sia invece disponibile un assegnato vettore \mathbf{IG} , la componente $x_{i,j}^1$ non verrà più estratta secondo una distribuzione uniforme di probabilità, ma in accordo con la relazione in D.4.

$$x_{i,j}^1 = IG_j + \sigma_{IG,j} randn_{i,j}[0, 1], \quad i = 1, \dots, N_{pop}, j = 1, \dots, d \quad (D.4)$$

dove $randn_{i,j}[0, 1]$ rappresenta un numero estratto dall'intervallo compatto $[0,1]$, in accordo con una distribuzione di probabilità normale standard. In aggiunta, IG_j rappresenta la j -esima componente del vettore di riferimento \mathbf{IG} , mentre $\sigma_{IG,j}$, definibile come $\sigma_{IG,j} = k_j IG_j$, $k_j \in \mathbb{R}^+$, assume il significato di un parametro correlabile al grado di dispersione attorno al valore medio IG_j della distribuzione di probabilità normale, che descrive la statistica della componente $x_{i,j}^1$.

D.2 Mutazione

A valle della procedura di inizializzazione, l'algoritmo DE genera, con riferimento alla generica iterazione m (con $m = 1, \dots, N_{iter}$), il vettore donatore/mutante (*donor/mutant vector*) \mathbf{v}_i^m , corrispondente ad ogni individuo \mathbf{x}_i^m della popolazione in esame. La nomenclatura impiegata per definire la strategia di mutazione risulta del tipo "DE/x/y/z", dove "x" rappresenta una stringa che definisce il vettore da perturbare, "y" è il numero di differenze tra vettori sfruttate per la perturbazione in esame e "z" indica il tipo di crossover coinvolto (si veda Par.D.3). In particolare, per l'esecuzione delle procedure di ottimizzazione automatica descritte nel corso dell'elaborato, si è impiegata una strategia del tipo "DE/rand/2/bin", con fattore di scala F pari a 0.8: l' i -esimo vettore mutante \mathbf{v}_i^m viene determinato secondo quanto riportato in equazione D.5.

$$\mathbf{v}_i^m = \mathbf{x}_{R_1^i}^m + F \left(\mathbf{x}_{R_2^i}^m - \mathbf{x}_{R_3^i}^m \right) + F \left(\mathbf{x}_{R_4^i}^m - \mathbf{x}_{R_5^i}^m \right) \quad (D.5)$$

dove gli indici $R_1^i, R_2^i, R_3^i, R_4^i, R_5^i$ rappresentano numeri interi selezionati in maniera casuale all'interno dell'intervallo $[1, N_{pop}]$ e risultano tutti differenti dall'indice i , mentre F deve risultare strettamente maggiore di zero.

Vale la pena sottolineare come tutte le strategie di generazione del vettore mutante comportino il seguente vantaggio, il quale si può evincere anche analizzando l'espressione in D.5: nel caso in cui la popolazione risulti compatta con riferimento ad una variabile, mentre manifesti un elevato grado di dispersione in corrispondenza di un'altra, i vettori differenza campionati dalla famiglia saranno caratterizzati da una componente trascurabile riferita alla prima variabile e da una più rilevante nel caso della seconda. Un tale comportamento auto-adattivo, definito come *self-referential mutation*, incrementa in maniera significativa la capacità di ottimizzazione dell'algoritmo.

D.3 Ricombinazione (Crossover)

Tramite la procedura di ricombinazione, il vettore mutante \mathbf{v}_i^m combina le sue componenti con quelle del vettore obiettivo \mathbf{x}_i^m , al fine di generare il vettore di prova (*trial vector*) \mathbf{u}_i^m . Tra le varie tipologie di crossover, quelle più comunemente impiegate si identificano con quelle a schema binomiale e quelle a schema esponenziale. Dal momento che, nelle analisi effettuate, si è fatto uso di una procedura di ricombinazione binomiale, ci si appresta ora a descriverne i caratteri fondamentali.

Essa viene effettuata su ciascuna delle d variabili ogniqualevolta un numero generato casualmente all'interno dell'intervallo $[0,1]$ risulti minore o uguale di un prefissato valore della *crossover rate* CR . Nel corso delle analisi eseguite e riportate nell'elaborato è stato assunto un valore di CR pari a 0.9, in modo da conservare la diversità presente nella popolazione e da incrementare la velocità dell'algoritmo. In ogni caso, lo schema di definizione del vettore di prova \mathbf{u}_i^m si identifica con quello riportato in equazione D.6.

$$\mathbf{u}_{i,j}^m = \begin{cases} v_{i,j}^m, & \text{se } j = K \text{ o } rand_{i,j}[0,1] \leq CR \\ x_{i,j}^m, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N_{pop}, \quad j = 1, \dots, d \quad (D.6)$$

dove K è un numero naturale scelto casualmente all'interno del set $\{1, 2, \dots, d\}$; in questo modo, diviene possibile garantire che \mathbf{u}_i^m erediti almeno una componente dal vettore mutante \mathbf{v}_i^m .

D.4 Selezione

Nella fase di selezione, ogni vettore obiettivo \mathbf{x}_i^m viene comparato con il corrispondente vettore di prova \mathbf{u}_i^m , al fine di determinare l' i -esimo individuo della popolazione all'iterazione seguente ($m + 1$). Più nel dettaglio, quest'ultimo viene determinato secondo lo schema riportato in D.7.

$$\mathbf{x}_i^{m+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^m, & \text{se } F_{obj}(\mathbf{u}_i^m) \leq F_{obj}(\mathbf{x}_i^m) \\ \mathbf{x}_i^m, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N_{pop} \quad (D.7)$$

dove F_{obj} rappresenta la funzione obiettivo da minimizzare mediante la procedura di ottimizzazione automatica.

L'inserimento di una disuguaglianza larga nell'equazione D.7 permette di ridurre la possibilità di ottenere un andamento "stagnante" della popolazione, il quale differisce in maniera significativa dal concetto di convergenza; infatti, la popolazione non risulta in questo caso in grado di raggiungere una condizione di minimo locale, riferita alla funzione obiettivo, e il grado di diversità tra gli individui appartenenti ad essa continua a manifestarsi in maniera significativa.

D.5 Criteri di convergenza

Al fine di terminare la procedura iterativa di ottimizzazione, risulta necessario introdurre degli opportuni criteri di convergenza; nel dettaglio, nell'algoritmo impiegato, si sono considerate due condizioni di convergenza propriamente dette e due criteri di terminazione aggiuntivi. La prima condizione sufficiente definisce il raggiungimento da parte del valore minimo assunto dalla funzione obiettivo F_{obj} di una soglia VTR (*Value To Reach*); infatti, se il valore di F_{obj} si attesta al di sotto di VTR , il processo viene arrestato e l'individuo

della popolazione associato a tale valore viene identificato con la soluzione della procedura di calibrazione automatica. La seconda condizione è sancita dalla differenza ΔF_{obj} tra il valore massimo e quello minimo, assunti dalla funzione obiettivo in corrispondenza di una data iterazione: anche in questo caso, qualora tale parametro risulti inferiore ad una tolleranza *toll* fissata, il processo iterativo può dirsi giunto a convergenza. Una scelta sensata per la definizione di *toll* consiste nel porre il suo valore un'ordine di grandezza inferiore rispetto a quello di *VTR*. Si sottolinea come il raggiungimento di quest'ultima condizione di convergenza possa in taluni casi dare luogo a risultati non affidabili, specie in presenza di funzioni obiettivo caratterizzate da un andamento a tratti costantoide. Infine, pur in assenza, al procedere delle iterazioni, del raggiungimento di una delle due condizioni sufficienti di convergenza, è possibile comunque terminare la procedura, imponendo un limite al numero N_{iter} delle iterazioni effettuabili o, alternativamente, al numero N_{eval} di valutazioni della funzione obiettivo.

Appendice E

CALCOLO DELL'AMPIEZZA DI OSCILLAZIONE ALL'ANTINODO

Si consideri la schematizzazione del cavo conduttore di Fig.E.1, con riferimento alla quale si riporta l'equazione E.1 che ne descrive il moto oscillatorio trasversale sotto l'effetto della sola forzante di interazione F_d cavo-dissipatore.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -F_d \delta(x - x_d), \quad (\text{E.1})$$

con $x, x_d \in [0, L]$

dove $w(x,t)$ indica lo spostamento trasversale del cavo in corrispondenza della sezione x all'istante di tempo t , β il coefficiente di smorzamento viscoso del cavo, γ la massa del cavo per unità di lunghezza e F_d la forza concentrata trasmessa dal dissipatore al conduttore in corrispondenza della sezione x_d . La funzione $\delta(x - x_d)$ ("Delta di Dirac") assume valore unitario in corrispondenza della sezione $x = x_d$ e valore nullo per $x \neq x_d$.

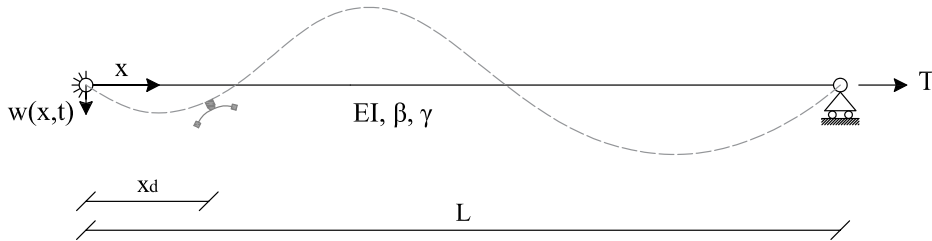


Figura E.1: Modello di trave tesata in doppio appoggio.

Si trascuri, in tale contesto, il contributo di rigidità flessionale e quello di dissipazione intrinseca del cavo: l'equazione di moto valutata in corrispondenza della generica ascissa $x \neq x_d$ assume la forma semplificata in E.2.

$$-T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \text{con } x \in [0, L], x \neq x_d \quad (\text{E.2})$$

Ai fini pratici, risulta conveniente introdurre le due ascisse locali x_1 e x_2 , mostrate in Fig.E.2, e riscrivere dunque in E.3 l'equazione di moto E.2, con riferimento a ciascun sotto-intervallo.

$$\begin{aligned}
 -T \frac{\partial^2 w_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \gamma \frac{\partial^2 w_1(x_1, t)}{\partial t^2} &= 0, \quad \text{con } x_1 \in [0, x_d), \\
 -T \frac{\partial^2 w_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} + \gamma \frac{\partial^2 w_2(x_2, t)}{\partial t^2} &= 0, \quad \text{con } x_2 \in [0, L - x_d)
 \end{aligned}
 \tag{E.3}$$

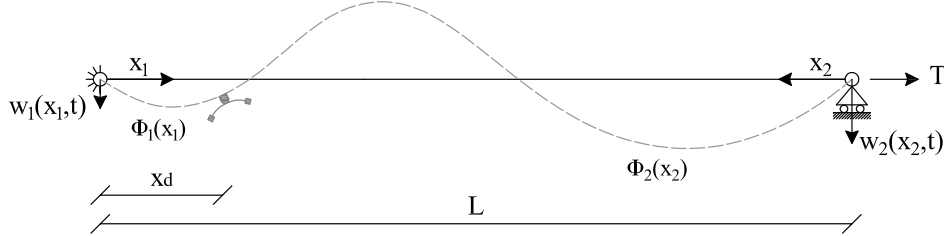


Figura E.2: Modello di fune tesata in doppio appoggio.

Si introducano a questo punto le seguenti adimensionalizzazioni: $\xi_i = \frac{x_i}{L}$, $y_i = \frac{w_i}{L}$ e $\tau = f_c t$, con $i = 1, 2$, le quali permettono di ottenere le relazioni in E.4.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{L} \frac{\partial^2 y_i(\xi_i, \tau)}{\partial \xi_i^2}, \quad \text{con } i = 1, 2 \\
 \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} &= L f_c^2 \frac{\partial^2 y_i(\xi_i, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad \text{con } i = 1, 2
 \end{aligned}
 \tag{E.4}$$

dove f_c si identifica con la frequenza caratteristica del sistema opportunamente definita come: $f_c = \sqrt{\frac{T}{\gamma L^2}}$. Le equazioni di moto in forma adimensionale, riferite a ciascun tratto, risultano dunque le seguenti:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 y_1(\xi_1, \tau)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 y_1(\xi_1, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0, \quad \text{con } \xi_1 \in [0, \xi_d), \\
 -\frac{\partial^2 y_2(\xi_2, \tau)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 y_2(\xi_2, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0, \quad \text{con } \xi_2 \in [0, 1 - \xi_d)
 \end{aligned}
 \tag{E.5}$$

Considerando un regime di vibrazioni mono-modali, coerentemente con le ipotesi adottate per l'applicazione dell'EBM, e una linearizzazione del comportamento del dissipatore Stockbridge nell'intorno della frequenza f di operatività, le espressioni dello spostamento adimensionale y_i per ciascun tratto e della forza adimensionale $f_d = \frac{F_d}{T}$ possono identificarsi con le E.6 e E.7.

$$y_i(\xi_i, \tau) = \phi_i(\xi_i) e^{j\bar{\omega}\tau}, \quad \text{con } i = 1, 2
 \tag{E.6}$$

$$f_d(\tau) = \hat{f}_d e^{j\bar{\omega}\tau}, \quad \text{con } \hat{f}_d \in \mathbb{C}
 \tag{E.7}$$

dove $\phi_i(\xi_i)$ si identifica con l'autofunzione relativa al modo di vibrazione sollecitato di frequenza f sull' i -esimo tratto, mentre $\bar{\omega}$ viene definito come: $\bar{\omega} = \frac{2\pi f}{f_c}$.

Sostituendo le equazioni E.6 all'interno delle E.5, è possibile, mediante opportune elaborazioni, ricavare le equazioni differenziali ordinarie espresse in E.8.

$$\frac{d^2 \phi_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} + \bar{\omega} \phi_i = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \quad (\text{E.8})$$

Tali equazioni ammettono integrali generali della forma in E.9, in cui le costanti di integrazione a_i e b_i sono da determinare sulla base dell'imposizione di adeguate condizioni al contorno; con riferimento al caso presente di fune tesata in doppio appoggio, queste ultime sono espresse dalle E.10 e sanciscono rispettivamente l'annullarsi dello spostamento trasversale in ciascuno estremo, la continuità di spostamento in corrispondenza della sezione di attacco del dissipatore e l'equilibrio alla traslazione verticale della medesima sezione.

$$\phi_i(\xi_i) = a_i \sin(\bar{\omega} \xi_i) + b_i \cos(\bar{\omega} \xi_i) \quad \text{con } i = 1, 2, \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1 = 0) &= 0 \\ \phi_2(\xi_2 = 0) &= 0 \\ \phi_1(\xi_1 = \xi_d) &= \phi_2(\xi_2 = 1 - \xi_d) \\ \frac{d\phi_1}{d\xi_1}(\xi_1 = \xi_d) + \frac{d\phi_2}{d\xi_2}(\xi_2 = 1 - \xi_d) + \hat{f}_d &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

In definitiva, dalle equazioni E.9 e E.10 si ottengono i seguenti valori per le costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sin[\bar{\omega}(1 - \xi_d)]}{\sin(\bar{\omega} \xi_d)} a_2 \\ b_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{1}{\bar{\omega} C} \hat{f}_d \\ b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\text{con } C = \left[\frac{\cos(\bar{\omega} \xi_d) \sin[\bar{\omega}(1 - \xi_d)]}{\sin(\bar{\omega} \xi_d)} + \cos[\bar{\omega}(1 - \xi_d)] \right].$$

Assumendo $\xi_d \ll 1$ (i.e. $x_d \ll L$), si avrà $a_2 \gg a_1$; in altre parole, è possibile affermare che in tale circostanza la massima ampiezza di oscillazione della linea si ottiene sulla seconda campata e, pertanto, si avrà $y_{max} = |Re(a_2)|$.

L'ampiezza y_{c0} delle oscillazioni adimensionali in corrispondenza della sezione di attacco ξ_d del dissipatore, espressa in funzione della massima ampiezza all'antinodo y_{max} , è descritta dall'equazione E.12.

$$y_{c0} = |\sin[\bar{\omega}(1 - \xi_d)]| y_{max} \quad (\text{E.12})$$

Si noti come, nel caso in cui $\bar{\omega} = \frac{k\pi}{1 - \xi_d}$ con $k \in \mathbb{N}^+$, l'ampiezza di oscillazione y_{c0} risulti identicamente nulla (smorzatore posizionato in un nodo del modo in esame) e, di conseguenza, anche la forza di interazione f_d ; pertanto, l'efficacia del dispositivo, identificata per mezzo della potenza da esso dissipata, si riduce a zero con riferimento al modo sollecitato. Infine, tornando alle variabili fisiche, si ottiene la relazione cercata di E.13 tra w_{max} e w_{c0} .

$$w_{max} = \frac{w_{c0}}{\left| \sin \left[\frac{2\pi f}{f_c} \left(\frac{L - x_d}{L} \right) \right] \right|} \quad (\text{E.13})$$

Bibliografia

- [1] Report sponsored by study committees - Guide on the Measurement of the Performance of Aeolian Vibration Dampers for Single Conductors.
- [2] C. Azevedo, A. Henriques, A. Pulino Filho, J. Ferreira, and J. Araujo. Fretting fatigue in overhead conductors: rig design and failure analysis of a Grosbeak aluminium cable steel reinforced conductor. *Eng. Fail. Anal.* 16, 136–151. 2009.
- [3] A. Bedford. *Hamilton's Principle in Continuum Mechanics*, Pitman Publishing, London, UK. 1985.
- [4] R. Bouc. Modèle mathématique d'hystérésis, *Acustica*, vol. 21, pp. 16–25. 1971.
- [5] CIGRE. *In: Diana, G. (Ed.), Modelling of Vibrations of Overhead Line Conductors, CIGRE Green Books. Springer, 2018.*
- [6] S. Das, S. S. Mullick, and P. N. Suganthan. Recent advances in differential evolution- An updated survey. *Swarm and Evolutionary Computation*, 27:1–30, 2016.
- [7] J. Den Hartog. *Mechanical Vibrations, Fourth Ed.*, Dover Publications Inc., New York. 1984.
- [8] G. Diana, F. Cheli, F. Fossati, and A. Manenti. Aeolian vibrations of overhead transmission lines: computation in turbulence conditions. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 46/47, 639–648. 1993.
- [9] G. Diana, A. Cigada, M. Belloli, and M. Vanali. Stockbridge- type damper effectiveness evaluation: Part I - Comparison between tests on span and on the shaker, *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 18, no. 4, pp. 1462–1469. 2003.
- [10] G. Diana, A. Manenti, C. Pirotta, and A. Zuin. Stockbridge- type damper effectiveness evaluation: part II - The influence of the impedance matrix terms on the energy dissipated, *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 18, no. 4, pp. 1470–1477. 2003.
- [11] G. Diana, F. Tavano, R. Claren, L. Cloutier, M. Ervik, P. Hagedorn, C. Hardy, G. Kern, H. Krispin, L. Mocks, C. Rawlins, P. Dulhunty, A. Manenti, M. Tunstall, J. Asselin, M. Buckner, D. Havard, and D. Hearnshaw. Modelling of Aeolian vibration of single conductors: Assessment of the technology. *ELECTRA, NO.181*, pages 52–69, 1998.
- [12] EPRI. *Electric Research Power Institute - Transmission Line Reference Book: Wind-induced Conductor Motion. U.S., Palo Alto, 2006.*
- [13] F. Foti, V. Denoël, L. Martinelli, and F. Perotti. A stochastic and continuous model of aeolian vibrations of conductors equipped with Stockbridge dampers. *Eurodyn 2020 - XI International Conference on Structural Dynamics M.Papadrakakis, M. Fragiadakis, C. Papadimitriou (eds.) Athens, Greece, 22-24 June 2020.*

- [14] F. Foti and L. Martinelli. An analytical approach to model the hysteretic bending behavior of spiral strands, *Applied Mathematical Modelling* 40: 6451-6467. 2016.
- [15] F. Foti and L. Martinelli. An enhanced unified model for the self-damping of stranded cables under aeolian vibrations. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 182(July):72–86, 2018.
- [16] F. Foti and L. Martinelli. Hysteretic Behaviour of Stockbridge Dampers: Modelling and Parameter Identification. *Mathematical Problems in Engineering*, page 17, 2018.
- [17] C. Fricke, W.G., Rawlins. Importance of fretting in vibration failures of stranded conductors. *IEEE Trans. Pow. App. and Systems PAS-* 87, 1381–1384. 1968.
- [18] C. Gazzola, F. Foti, L. Martinelli, and F. Perotti. An appraisal of modelling strategies for assessing aeolian vibrations of transmission lines. *AIMETA 2019 XXIV Conference The Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics Rome, Italy, 15–19 September 2019*.
- [19] H. Goldstein. *Classical Mechanics*, First Ed. (Sixth printing), Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading. 1959.
- [20] P. Hagedorn. Wind-excited vibrations of transmission lines: a comparison of different mathematical models. *Mathematical Modelling*, 8(C):352–358, 1987.
- [21] P. Hagedorn, J. Schmidt, and N. Nascimento. Stochastic field processes in the mathematical modelling of damped transmission line vibrations. *Mathematical Modelling*, 8(C):359–363, 1987.
- [22] F. Ikhrouane and J. Rodellar. On the hysteretic Bouc-Wen model. Part I: Forced limit cycle characterization, *Nonlinear Dynamics* 42: 63-78. 2005.
- [23] F. Ikhrouane, J. Rodellar, and J. E. Hurtado. Analytical characterization of hysteresis loops described by the Bouc-Wen model. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 13(6):463–472, 2006.
- [24] S. Langlois and F. Legeron. Prediction of aeolian vibration on transmission-line conductors using a nonlinear time history model - Part I: Damper model. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 29(3), 2014.
- [25] J. Lilien. *Power Line Aeolian Vibrations*. Technical report, 2013.
- [26] M. Lu. The effect of turbulence on the wind power imparted to a vibrating conductor. In: 11th Conf. Wind Engineering, Lubbock, Texas (U.S.), June 2-5. 2003.
- [27] M. Lu and N. Chopra. Rational design equations for the aeolian vibration of overhead power lines. In: CIGRE Conference on Power Systems, Winnipeg (Canada), October 19-21. 2008.
- [28] X. Luo, L. Wang, and Y. Zhang. Nonlinear numerical model with contact for Stockbridge vibration damper and experimental validation. *JVC/Journal of Vibration and Control*, 22(5):1217–1227, 2016.
- [29] M. Païdoussis, S. Price, and E. De Langre. *Fluid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities*. Cambridge University Press. 2010.

- [30] Y. Park, Y. Wen, and A.-S. Ang. Random vibration of hysteretic systems under bi-directional ground motions. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 14:543–557, 1986.
- [31] I. Pivovarov and O. G. Vinogradov. One application of Bouc’s model for non-linear hysteresis. *Journal of Sound and Vibration*, 118(2):209–216, 1987.
- [32] D. Rocchi. Slides del corso di "Wind Engineering", A.A. 2020-2021.
- [33] T. Sarpkaya. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures* 19: 389–447. 2004.
- [34] D. Sauter. *Modeling the Dynamic Characteristics of Slack Wire Cables in Stockbridge Dampers*. PhD thesis, Technische Universitat Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2003.
- [35] D. Sauter and P. Hagedorn. On the hysteresis of wire cables in Stockbridge dampers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37(8):1453–1459, 2002.
- [36] L. F. Shampine and M. W. Reichelt. The MATLAB ODE Suite. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 18(1):1–22, 1997.
- [37] G. H. Stockbridge. Vibration Dampers Patent, 1928.
- [38] R. Storn and K. Price. Differential Evolution - A simple evolution strategy for fast optimization. *Dr. Dobb’s journal*, 22(4):18–24, 1997.
- [39] Y. Wen. Method for random vibration of hysteretic systems, *Journal of Engineering Mechanics Division (ASCE)* 102: 249-263. 1976.