POLITECNICO
MILANO 1863

SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
E DELL'INFORMAZIONE

Analisi operativa di una macchina sincrona e isotropa a magneti permanenti soggetta ad un guasto nell'avvolgimento statorico

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN
ELECTRICAL ENGINEERING
INGEGNERIA ELETTRICA

Autore: **Dario Hoti**

Codice persona dello studente: 10532105

Relatore: prof. Roberto Perini

Correlatore: dott. Ing. Matteo Deponti

Anno Accademico: 2023-24

Abstract

The permanent magnet synchronous machine can be isotropic (SPMSM) or anisotropic (PMSM) and, during its operational life, it can be subject to various types of faults.
In the literature, various methods are being studied to detect each type of fault and to ensure extended operation of the machine following a fault, confining the propagation of the damaged parts of the motor.
This objective is usually achieved by limiting the machine's performance following the fault, compared to the performance it could provide during normal operation.
In this paper, the machine analyzed is an SPMSM subject to a fault already identified in its stator winding, specifically a fault between adjacent turns of one of the coils in the stator winding. The objective of this work is to evaluate the performance of an SPMSM affected by a short-circuit fault between turns, which has led to a coil-to-ground fault, in which the parallel path containing the faulty coil is disconnected to preserve machine operation at reduced performance, thereby temporarily delaying the machine shutdown for maintenance purposes.
The paper is structured by initially presenting an overview of the state-of-the-art on possible fault-tolerant control strategies for a permanent magnet synchronous machine subject to a fault in the stator winding. Subsequently, the construction details of the machine and the connection diagrams are presented, followed by the introduction of the circuit model of the permanent magnet.
The paper continues by first analyzing the coil and phase magnetomotive forces on the thickness of the air gap + magnets to obtain expressions for the rotating stator fields in this thickness, and then it examines how to derive the expressions of the rotating fields both in the air gap and in the thickness of the magnets. This division is ultimately useful for calculating the total magnetic co-energy in the machine, and subsequently, the electromagnetic torque of the SPMSM.

Key-words: Magnetic rotating field, permanent magnets, electromagnetic torque, torque harmonics.

Errore. Per applicare Heading 1 al testo da visualizzare in questo punto, utilizzare la scheda Home.

Abstract in italiano

La macchina sincrona a magneti permanenti può essere isotropa (SPMSM) o anisotropa (PMSM) e, durante l'arco della sua vita operativa, essa può essere soggetta a diversi tipi di guasto.

In letteratura, si stanno studiando diversi metodi per rilevare ciascun tipo di guasto e per garantire un'operazione prolungata della macchina a seguito del guasto, confinando la propagazione delle parti guaste del motore.

Tale obiettivo viene solitamente raggiunto limitando le prestazioni della macchina a seguito del guasto, rispetto a quelle che essa potrebbe garantire durante la sua normale operazione.

In questo elaborato, la macchina analizzata è una SPMSM soggetta ad un guasto già identificato nel suo avvolgimento statorico, precisamente si tratta di un guasto tra spire adiacenti di una delle diverse bobine che fanno parte dell'avvolgimento statorico.

L'obiettivo del presente elaborato è quello di valutare le prestazioni di una SPMSM interessata da un guasto di corto-circuito tra spire sfociato in un guasto bobina-massa, in cui la via parallela contenente la bobina guasta viene scollegata per preservare il funzionamento della macchina a prestazioni ridotte, ritardando, quindi, temporaneamente l'arresto della macchina per questioni di manutenzione.

L'elaborato è strutturato presentando inizialmente una panoramica dello stato dell'arte sulle possibili strategie di controllo tolleranti al guasto di una macchina sincrona a magneti permanenti soggetta ad un guasto nell'avvolgimento statorico.

Successivamente, vengono presentati i dettagli costruttivi della macchina e gli schemi di connessione e in seguito viene introdotto il modello circuitale del magnete permanente.

L'elaborato prosegue dapprima analizzando le forze magnetomotrici di bobina e fase sullo spessore traferro + magneti per ottenere le espressioni dei campi rotanti statorici in tale spessore e, poi, si analizza come ricavare le espressioni dei campi rotanti sia nel traferro che nello spessore dei magneti.

Tale ripartizione risulta utile, infine, per calcolare dapprima la coenergia magnetica totale nella macchina e in seguito la coppia elettromagnetica della SPMSM.

Parole chiave: Campo magnetico rotante, magneti permanenti, coppia elettromagnetica, armoniche di coppia.

Errore. Per applicare Heading 1 al testo da visualizzare in questo punto, utilizzare la scheda Home.

Indice

Abstract ..... **i**

Abstract in italiano ..... **iii**

Indice ..... **vi**

Introduzione **1**

1 Stato dell'arte **2**

1.1. Modello della macchina sincrona isotropa a magneti permanenti SPMSM 2

1.2. Tipologie di guasto di una macchina SPMSM 6

1.3. Sistema di monitoraggio e sistema di controllo della macchina 6

1.4. Modello e circuito equivalente della macchina guasta 7

1.5. Analisi del ripple di coppia da macchina sana a macchina guasta 10

1.6. Schema di controllo e strategia di controllo per la minimizzazione del ripple di coppia a macchina guasta 11

1.7. Strategia alternativa per la minimizzazione del ripple di coppia attraverso il rilevamento e la localizzazione del guasto 13

1.8. Strategia di controllo per la minimizzazione del ripple di coppia basata sul circuito magnetico equivalente della macchina 17

1.9. Strategia di controllo tollerante al guasto di una PMSM soggetta ad incertezza dei suoi parametri 20

1.10. Strategia di controllo vettoriale tollerante al guasto di una PMSM 21

1.11. Strategia di controllo tollerante al guasto tramite modulazione del flusso statorico 23

1.12. Strategia di controllo tollerante al guasto basata sulla limitazione del calore nel punto di guasto 25

2 Macchina SPMSM: dettagli costruttivi **28**

2.1. Struttura degli avvolgimenti della SPMSM 28

2.2. Caratteristiche geometriche e dati di targa della macchina 31

2.3. Lunghezze periferiche medie, diametro medio del traferro della macchina e diametro medio della corona circolare di magneti permanenti 32

3 Modello circuitale del magnete permanente PM 35

4 Analisi della forza magnetomotrice sulla corona circolare di magneti permanenti e sul traferro 38

4.1. Sistema di riferimento solidale con lo statore e sistema di riferimento solidale con il rotore 38

4.2. Forza magnetomotrice della macchina sana valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti 40

4.3. Forza magnetomotrice della singola bobina valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti 42

4.4. Forza magnetomotrice di fase valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti..... 43

4.5. Forza magnetomotrice di fase valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti: caso di macchina sana 44

4.6. Forza magnetomotrice di fase sullo spessore traferro + magneti: caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa 48

4.7. Forza magnetomotrice prodotta da una coppia di bobine per fase sullo spessore traferro + magneti 49

4.8. Sviluppo in serie di Fourier della forza magnetomotrice di fase sullo spessore traferro + magneti: caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa 51

4.9. Forza magnetomotrice di fase sullo spessore traferro + magneti: caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse 52

5 Campi di forza magnetomotrice generati dallo statore sullo spessore traferro + magneti 58

5.1. Campi rotanti di fmm da statore: caso di macchina sana 59

5.2. Campi rotanti di fmm da statore: caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa 65

5.3. Campi rotanti di fmm da statore: caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse 70

6 Determinazione delle ampiezze delle fmm al traferro e delle fmm sulla corona circolare di magneti permanenti 74

6.1. Forza magnetomotrice al traferro dovuta al rotore..... 74

6.2. Forza magnetomotrice al traferro di bobina 77

6.3. Campo rotante di fmm dovuto al rotore sulla corona circolare di magneti permanenti 82

6.4. Forza magnetomotrice di bobina sulla corona circolare di magneti permanenti 83

6.5. Ampiezza delle armoniche dei campi rotanti di fmm da statore al traferro 84

6.6. Ampiezza delle armoniche dei campi rotanti di fmm da statore sulla corona circolare di magneti permanenti 84

7 Coppia elettromagnetica generata dalla macchina: approccio basato sull'interazione tra armoniche di fmm 86

7.1. Determinazione della coenergia magnetica totale nella macchina 87

7.2. Forza magnetomotrice al traferro risultante e l'integrale del suo quadrato per $\theta \in [0, 2\pi]$ 89

7.3. Forza magnetomotrice risultante sulla corona circolare di magneti permanenti e l'integrale del suo quadrato per $\theta \in [0, 2\pi]$ 100

7.4. Determinazione della coppia elettromagnetica a partire dalla coenergia magnetica totale nella macchina 102

7.5. Armoniche di coppia elettromagnetica nella macchina SPMSM 111

8 Conclusioni 117

Bibliografia 121

A Appendice A 125

A.1. Fattore di passo di una bobina a macchina sana k_{ph} e a macchina con via parallela a_1 disconnessa $k_{ph\alpha}$ 125

A.2. Fattore di distribuzione a macchina sana k_{dh} 127

A.3. Fattore di distribuzione a macchina con via parallela a_1 disconnessa $k_{dh\alpha}$ 129

A.4. Fattore di avvolgimento a macchina sana k_{wh} 130

Lista di Figure 135

Lista di Tabelle 141

Lista di simboli 143

Riconoscimenti 147

Introduzione

La macchina sincrona a magneti permanenti può essere classificata in due tipologie a seconda delle proprietà magnetiche che la macchina mostra attorno alla sua periferia:

- Isotropa: questa variante viene indicata con l'acronimo SPMSM
- Anisotropa: questa variante viene indicata con l'acronimo PMSM

Tali macchine elettriche possono essere soggette a diversi tipi di guasto durante la vita operativa della macchina.
In letteratura, si stanno studiando diversi metodi per rilevare ciascun tipo di guasto e per garantire un'operazione prolungata della macchina a seguito del guasto, confinando la propagazione delle parti guaste del motore.
Tale obiettivo viene solitamente raggiunto limitando le prestazioni della macchina a seguito del guasto, rispetto a quelle che essa potrebbe garantire durante la sua normale operazione.
In questo elaborato, la macchina analizzata è una SPMSM soggetta ad un guasto già identificato nel suo avvolgimento statorico, precisamente si tratta di un guasto tra spire adiacenti di una delle diverse bobine che fanno parte dell'avvolgimento statorico.
L'obiettivo del presente elaborato è quello di valutare le prestazioni di una SPMSM interessata da un guasto di corto-circuito tra spire sfociato in un guasto bobina-massa, in cui la via parallela contenente la bobina guasta viene scollegata per preservare il funzionamento della macchina a prestazioni ridotte, ritardando, quindi, temporaneamente l'arresto della macchina per questioni di manutenzione.
L'elaborato è strutturato presentando inizialmente una panoramica dello stato dell'arte sulle possibili strategie di controllo tolleranti al guasto di una macchina sincrona a magneti permanenti soggetta ad un guasto nell'avvolgimento statorico (Cap. 1).
Successivamente, vengono presentati i dettagli costruttivi della macchina e gli schemi di connessione (Cap. 2) e in seguito viene introdotto il modello circuitale del magnete permanente (Cap. 3).
L'elaborato prosegue dapprima analizzando le forze magnetomotrici di bobina e fase sullo spessore traferro + magneti (Cap. 4) per poi ottenere le espressioni dei campi rotanti statorici in tale spessore (Cap. 5) e, poi nei (Cap. 6.5 e 6.6), si analizza come ricavare le espressioni dei campi rotanti sia nel traferro che nello spessore dei magneti.
Tale ripartizione risulta utile, infine, per calcolare dapprima la coenergia magnetica totale nella macchina e in seguito la coppia elettromagnetica della SPMSM (Cap. 7.4).

1 Stato dell'arte

La macchina sincrona a magneti permanenti PMSM sta avendo ultimamente grande popolarità nelle applicazioni dell'ingegneria elettrica e dei trasporti considerati gli intrinseci vantaggi che derivano dal suo impiego.

In particolare, la macchina sincrona a magneti permanenti è caratterizzata da un'elevata efficienza e densità di potenza.

La PMSM è sostanzialmente una macchina sincrona trifase in cui il flusso magnetizzante non è generato da un avvolgimento di campo avvolto sul rotore (in quanto tale macchina ne è sprovvista), bensì da magneti permanenti collocati nel rotore.

La macchina sincrona a magneti permanenti necessita di un inverter o azionamento a velocità variabile VFD (Variable Frequency Drive) per assumere le diverse condizioni operative richieste dall'applicazione in cui è impiegata.

In letteratura sono noti e impiegati da tempo diversi algoritmi con i quali comandare l'inverter e che consentono di impartire alla macchina condizioni di funzionamento desiderate.

Esempi di algoritmi con i quali la macchina può essere comandata sono il Field Oriented Control (FOC) e il Direct Torque Control (DTC).

Solitamente, l'obiettivo dell'algoritmo di controllo è quello di comandare l'inverter affinché la macchina elettrica mantenga la sua velocità di rotazione prossima alla velocità di riferimento che si desidera impostare.

1.1. Modello della macchina sincrona isotropa a magneti permanenti SPMSM

Il modello matematico della macchina sincrona viene qui brevemente richiamato. Tale modello ha implicite alcune semplificazioni riguardo alla natura costruttiva della macchina, ma risulta essere sufficientemente adeguato ai fini del suo controllo.

Si consideri la macchina rappresentata schematicamente in Figura 1.

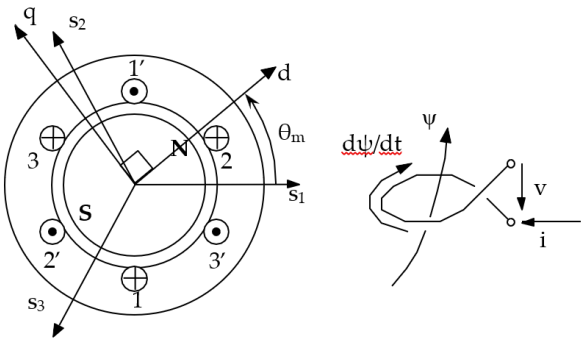


Figura 1: Rappresentazione schematica della macchina sincrona a magneti permanenti

La macchina è costituita da uno statore cilindrico nel quale è disposto un avvolgimento trifase simmetrico tale da generare una distribuzione di forza magnetomotrice al traferro sinusoidale, ed un rotore dotato di magneti permanenti (per gli avvolgimenti valgono le convenzioni di Figura 1). Si assume che lo statore ed il rotore siano costituiti da materiale completamente laminato e di permeabilità infinita. Si trascurano la saturazione, l'isteresi del materiale ferromagnetico e le anisotropie della macchina dovute alle cave.

In Figura 2 è possibile osservare dettagli maggiori sulla macchina a magneti permanenti del tipo SPMSM, immaginando per semplicità di poter assumere gli avvolgimenti di fase statorici come concentrati lungo la circonferenza della macchina.

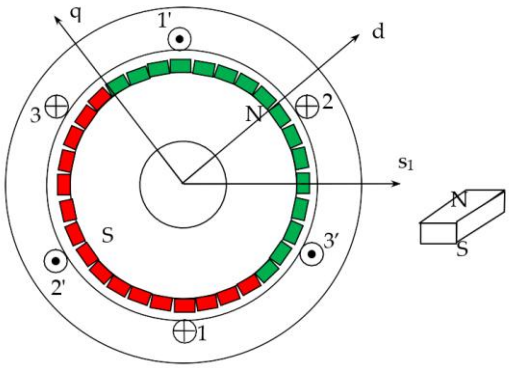


Figura 2: Esempio di macchina sincrona SPMSM a 2 poli (i magneti verdi hanno il Nord verso l'esterno mentre il Sud verso il rotore; i rossi viceversa)

Essendo la macchina isotropa, le autoinduttanze degli avvolgimenti statorici L_{ss} e le mutue induttanze tra gli avvolgimenti statorici M_{ss} non dipendono dalla posizione angolare θ_m.

Partendo dalle equazioni relative agli avvolgimenti di statore e dai legami flussi-correnti, con riferimento alla Figura 1, si ottiene che

$$
\begin{aligned}
v_{s1} &= R_s\, i_{s1} + p\psi_{s1} \\
v_{s2} &= R_s\, i_{s2} + p\psi_{s2} \\
v_{s3} &= R_s\, i_{s3} + p\psi_{s3} \\
\psi_{s1} &= L_{ss}\, i_{s1} + M_{ss}\, i_{s2} + M_{ss}\, i_{s3} + \psi_{PM}(\theta_m) \\
\psi_{s2} &= M_{ss}\, i_{s1} + L_{ss}\, i_{s2} + M_{ss}\, i_{s3} + \psi_{PM}(\theta_m - \tfrac{2}{3}\pi) \\
\psi_{s3} &= M_{ss}\, i_{s1} + M_{ss}\, i_{s2} + L_{ss}\, i_{s3} + \psi_{PM}(\theta_m - \tfrac{4}{3}\pi)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Ricordando che la somma delle tre correnti di fase è nulla per effetto del collegamento a centro stella isolato o a triangolo, si ha che

$$
\begin{aligned}
\psi_{s1} &= L_s\, i_{s1} + \psi_{PM}(\theta_m) \\
\psi_{s2} &= L_s\, i_{s2} + \psi_{PM}(\theta_m - \tfrac{2}{3}\pi) \\
\psi_{s3} &= L_s\, i_{s3} + \psi_{PM}(\theta_m - \tfrac{4}{3}\pi)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

in cui $L_s = L_{ss} - M_{ss}$ è definita come induttanza sincrona.

La macchina sincrona a magneti permanenti è caratterizzata da un flusso concatenato con gli avvolgimenti di statore, dovuto ai magneti permanenti, con andamento sinusoidale (per effetto di una opportuna distribuzione degli avvolgimenti nelle cave di statore e/o per una sagomatura dei magneti stessi).

Quindi,

$$
\psi_{PM}(\theta_m) = \hat{\psi}_{PM} \cos(\theta_m)
\tag{1.3}
$$

Applicando, ora, la procedura per la definizione dei vettori spaziali in un sistema di riferimento solidale il rotore (asse d solidale con il polo nord dovuto ai magneti

permanenti di rotore) e definendo $\psi_{pm} = \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{\psi}_{PM}$, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\bar{v}_s = R_s \bar{\imath}_s + p\bar{\psi}_s + j\dot{\theta}_m \bar{\psi}_s$$
$$\psi_{sd} = L_s i_{sd} + \psi_{pm}$$
$$\psi_{sq} = L_s i_{sq}$$

(1.4)

In cui $\bar{v}_s = v_d + jv_q$, $\bar{\imath}_s = i_{sd} + ji_{sq}$, $\bar{\psi}_s = \psi_{sd} + j\psi_{sq}$ sono i vettori spaziali di tensione, corrente, flusso statorico concatenato espressi in funzione delle loro componenti sugli assi d e q.

A partire dall'equazione di bilancio energetico si può risalire anche alle seguenti equazioni di potenza meccanica e, quindi, di coppia elettromagnetica

$$P_m = \dot{\theta}_m [\psi_{pm}\, i_{sq}]$$

(1.5)

$$C_e = n_p\, [\psi_{pm}\, i_{sq}]$$

(1.6)

L' equazione dinamica relativa al sistema meccanico in forma semplificata è

$$p\,\dot{\theta}_m = \frac{n_p}{J}\,(C_e - C_r)$$

(1.7)

In cui $p = \frac{d}{dt}$, n_p = coppie polari della macchina, J = momento d'inerzia, C_r = coppia resistente.

Quindi da tali equazioni si può osservare che la componente della corrente statorica $\bar{\imath}_s$ responsabile della generazione di coppia è la componente in quadratura i_{sq}, mentre invece la componente responsabile della regolazione del flusso magnetico al traferro è la componente diretta i_{sd}.

1.2. Tipologie di guasto di una macchina SPMSM

Tuttavia, diverse tipologie di guasto, sia di tipo elettrico che meccanico, possono interessare la macchina sincrona a magneti permanenti e limitarne le prestazioni:

- possono usurarsi i cuscinetti;
- i magneti permanenti possono smagnetizzarsi parzialmente o totalmente;
- gli avvolgimenti statorici possono incorrere in cortocircuiti tra spira e spira (guasti interspira);
- possono avvenire cortocircuiti tra gruppi di bobine dello stesso avvolgimento di fase;
- sono possibili cortocircuiti tra fase e terra;
- possono verificarsi cortocircuiti tra fase e fase;
- gli avvolgimenti statorici possono risultare in circuiti aperti in quanto interrotti;
- qualche interruttore statico dell'inverter potrebbe guastarsi.

Il guasto interspira avviene solitamente per via della progressiva usura dell'isolamento dell'avvolgimento dovuto all'eccessiva temperatura che si sviluppa nel punto in cui tale guasto avviene a causa della corrente che in esso scorre, ma anche per via di sollecitazioni meccaniche in tal punto e anche a causa di agenti chimici e atmosferici che gradualmente usurano lo strato isolante dell'avvolgimento.

Tra i diversi tipi di guasto cui una PMSM può essere soggetta, i guasti relativi agli avvolgimenti statorici risultano essere quelli che avvengono approssimativamente in un terzo degli eventi di guasto che possono interessare la macchina [1], [2], [6], [7].

1.3. Sistema di monitoraggio e sistema di controllo della macchina

In questo elaborato viene analizzata l'operatività e il controllo di una PMSM a prestazioni ridotte soggetta ad un guasto nell'avvolgimento statorico, in particolare l'attenzione viene focalizzata sui guasti tra spira e spira (interspira) e la macchina che si considera è isotropa e a magneti permanenti attaccati sulla superficie esterna del

rotore, cioè la macchina è una SPMSM (Surface-mounted Permanent Magnet Synchronous Machine).

È importante progettare un sistema di monitoraggio della macchina che rilevi il guasto il prima possibile e che congiuntamente trasmetta i dati relativi al guasto al sistema di controllo della macchina affinché esso applichi contromisure repentine affinché la PMSM non venga danneggiata esageratamente.

Ovvero, il sistema di controllo deve attuare azioni volte a contenere la propagazione del guasto ad altre parti della macchina e quindi adeguare il suo algoritmo di controllo facendo operare la PMSM a prestazioni ridotte in maniera tale da impedire il proseguo dell'usura dell'isolante dell'avvolgimento statorico.

Per stimare la severità del guasto dell'avvolgimento statorico della macchina sincrona a magneti permanenti, in letteratura solitamente si ricorre a due parametri: il rapporto spire di cortocircuito μ (definito come rapporto tra il numero di spire cortocircuitate dal guasto e il numero di spire totali di fase) e la resistenza di guasto r_f (ovvero la resistenza modellizzata come connessa in parallelo ai terminali delle spire cortocircuitate dal guasto) [1], [2], [5], [7].

1.4. Modello e circuito equivalente della macchina guasta

In [1] viene mostrato il seguente modello della PMSM qualora una delle fasi sia soggetta ad un guasto interspira, tuttavia qui sotto viene prima mostrato il circuito equivalente della macchina tratto da [2] in quanto visivamente più chiaro e in seguito viene mostrato il circuito equivalente della fase guasta e i calcoli ad esso relativi come mostrati in [1].

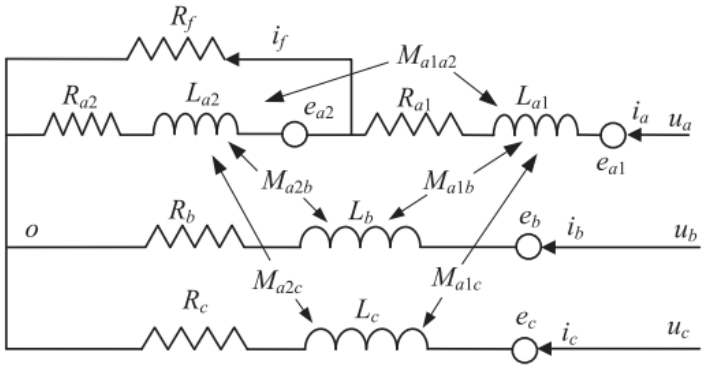


Figura 3: Circuito equivalente della SPMSM soggetta ad un guasto interspira (mostrato in [2])

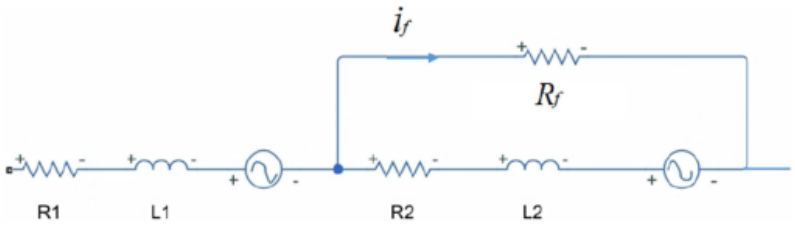


Figura 4: Circuito equivalente della fase guasta (mostrato in [1])

Con riferimento alla Figura 4, le equazioni che descrivono il modello della macchina soggetta ad un guasto interspira sono

$$i_a + i_b + i_c = 0$$

$$i_f r_f = (i_a - i_f)R_{as1} + L_{as1}\frac{d(i_a - i_f)}{dt} + e_{as1} + M_{as1,2}\frac{di_a}{dt} + M_{as1,b}\frac{di_b}{dt} + M_{as1,c}\frac{di_c}{dt} \tag{1.8}$$

in cui i_a, i_b, i_c sono le correnti di fase, i_f è la corrente di guasto, r_f è la resistenza di cortocircuito (o resistenza di guasto), R_{as1} è la parte della resistenza dell'avvolgimento

di fase cortocircuitata dal guasto, L_{as1} è la parte dell' induttanza dell'avvolgimento di fase cortocircuitata dal guasto, e_{as1} è la parte della fem (forza elettromotrice) dell'avvolgimento di fase cortocircuitata dal guasto, $M_{as1,2}$ è la mutua induttanza tra la parte di avvolgimento della fase A cortocircuitata dal guasto e la parte di avvolgimento della fase A non cortocircuitata dal guasto, $M_{as1,b}$ è la mutua induttanza tra la parte di avvolgimento della fase A cortocircuitata dal guasto e la fase B, $M_{as1,c}$ è la mutua induttanza tra la parte di avvolgimento della fase A cortocircuitata dal guasto e la fase C.

Da cui, dall'equazione di bilancio energetico si ottiene che la coppia vale

$$\mathbf{C} = \frac{i_a e_a + i_b e_b + i_c e_c - i_f e_{as1}}{\omega_{\text{mech}}} \tag{1.9}$$

dove

$$\begin{aligned} e_a &= K\omega_{\text{mech}} \sin(\theta) \\ e_b &= K\omega_{\text{mech}} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_c &= K\omega_{\text{mech}} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_{as1} &= \mu_{\text{sc}} e_a \\ \mu_{\text{sc}} &= \frac{N_{as1}}{N_{as}} = \frac{R_{as1}}{R_{as}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

In cui e_a, e_b, e_c sono le forze controelettromotrici di fase, e_{as1} è la parte di e_a relativa alle spire cortocircuitate, N_{as} è il numero di spire di fase, N_{as1} è il numero di spire di fase cortocircuitate dal guasto, R_{as} è la resistenza dell'avvolgimento di fase, R_{as1} è la parte di resistenza dell'avvolgimento di fase cortocircuitata dal guasto, ω_{mech} è la velocità angolare meccanica del rotore, K è una costante.

1.5. Analisi del ripple di coppia da macchina sana a macchina guasta

Attraverso una precisa stima della gravità del guasto è possibile determinare se sia opportuno continuare a tenere la PMSM in funzione.

A tal proposito, la strategia di controllo della macchina tollerante al guasto deve migliorare le prestazioni della macchina in seguito al guasto rispetto a quelle di guasto sopraggiunto ma senza l'adeguamento dell'algoritmo di controllo che tenga conto della presenza di un guasto.

Le informazioni circa la severità del guasto possono aiutare nell' ottimizzare il controllo della macchina tollerante al guasto.

Una possibile e intuitiva soluzione per evitare la propagazione e l'aggravarsi del guasto sarebbe quella di disconnettere la fase guasta e far funzionare il motore con gli avvolgimenti rimanenti.

L'alternativa consiste nel continuare a utilizzare la fase guasta.

La coppia esercitabile dal motore in tal caso verrebbe affetta minormente dal guasto, ma il ripple di coppia in questa situazione potrebbe costituire un problema.

Tra le possibilità di controllo in seguito ad un guasto, una fault-tolerant control FTC strategy potrebbe essere quella di minimizzare il ripple di coppia servendosi delle informazioni circa la stima della severità del guasto.

Per minimizzare il ripple di coppia bisogna prima di tutto capire come viene generato.

Una PMSM sana alimentata da una terna di correnti sinusoidali equilibrata, genera una coppia costante.

Con riferimento al modello della macchina guasta presentato nel paragrafo 1.4, a partire dall'equazione della coppia (1.9), si può dedurre che una PMSM guasta, se alimentata con una terna di correnti sinusoidali equilibrata, genera una coppia che è funzione del tempo (ovvero non costante come sarebbe a macchina sana), siccome la corrente di guasto i_f generata nell'anello di cortocircuito determina una differenza tra la corrente che scorre nella parte di avvolgimento guasto e la corrente con cui la fase viene alimentata.

Ciò fa sì che i termini variabili nel tempo nell'espressione della coppia (1.9) non si cancellino a vicenda, pertanto la coppia risulta funzione del tempo e la variazione di coppia è nota come "ripple di coppia".

Sostituendo l'espressione di e_a, e_b, e_c, e_{as1} nell'equazione della coppia (1.9), si ottiene un'equazione in forma diversa della coppia, utile per alcune considerazioni

$$\mathbf{C} = K(i_a \sin(\theta) + i_b \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - i_f \mu_{sc} \sin(\theta)) \tag{1.11}$$

Nel caso in cui il guasto non ci sia e la macchina sia alimentata da una terna di correnti equilibrata, si ottiene che $i_f = 0$ e quindi la coppia è costante.

Invece, se il guasto è presente, $i_f \neq 0$ e quindi la coppia è funzione dell'angolo di fase θ.

Pertanto, se la PMSM venisse alimentata con una terna equilibrata di correnti in caso di guasto, la coppia avrebbe andamento variabile.

Per far sì che la coppia sia costante, l'algoritmo di controllo della macchina dovrebbe fare in modo di determinare i_a, i_b, i_c, i_f in generale non equilibrate tali che l'ultima espressione della coppia (1.11) sia costante e del valore desiderato.

1.6. Schema di controllo e strategia di controllo per la minimizzazione del ripple di coppia a macchina guasta

Si assuma, ora, che l'algoritmo con cui la macchina è comandata in condizioni normali sia il Field Oriented Control (FOC).

Come è possibile integrare la strategia di controllo tollerante al guasto (FTC strategy) allo schema preesistente del FOC senza stravolgerne totalmente la topologia e quindi fare in modo di preservare la topologia del FOC e aggiungere la FTC strategy in maniera modulare al FOC ?.

Considerando le tre generiche correnti di fase nella PMSM, esse possono essere decomposte nella somma algebrica di una parte equilibrata e una parte squilibrata.

La parte equilibrata corrisponde alla terna di correnti equilibrate di riferimento che il FOC determina in condizioni normali della PMSM per ottenere una coppia costante e desiderata.

Invece, la parte squilibrata delle correnti da iniettare in ciascuna fase che il fault-tolerant control deve determinare (considerando un guasto interspira in una delle fasi) deve essere calcolata in modo tale che la coppia in seguito al guasto sia costante e che comunque si rispetti il vincolo che la somma delle correnti di ciascuna fase sia zero dato dalla (1.8).

Lo schema di controllo è mostrato in Figura 5, in cui "Inject ?" è la terna di correnti non equilibrata che la strategia di controllo tollerante al guasto deve iniettare in ciascuna fase affinché si determinino i giusti riferimenti delle correnti di ciascuna fase in seguito al guasto per ottenere una coppia costante e cioè minimizzare il ripple di coppia:

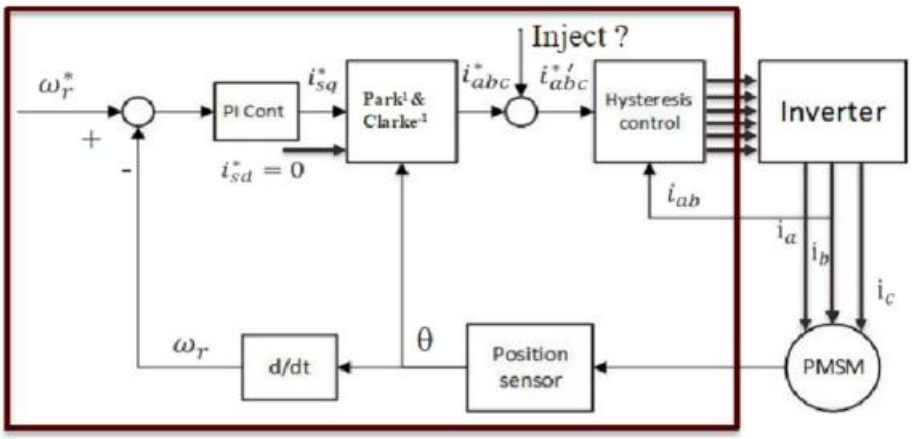


Figura 5: Schema di controllo per la minimizzazione del ripple di coppia a macchina guasta (come proposto in [1])

Ad ogni modo, i parametri che permettono di valutare la severità del guasto μ ed r_f possono essere stimati solo con una certa accuratezza.

Lo stesso dicasi per i parametri del motore che hanno margini di tolleranza rispetto ai loro valori nominali.

Sarebbe interessante capire quanto sensibile sia la strategia di controllo tollerante al guasto rispetto a tali incertezze sui parametri.

Migliore è la stima della gravità del guasto e minore è il ripple di coppia.

Maggiore è lo scostamento dei parametri di guasto dai valori nominali e maggiore è il ripple di coppia: oltre una certa percentuale di scostamento dai valori nominali, il fault-tolerant control genera un ripple di coppia maggiore rispetto al caso in cui esso non sia implementato come strategia di controllo della macchina [1], [2].

1.7. Strategia alternativa per la minimizzazione del ripple di coppia attraverso il rilevamento e la localizzazione del guasto

Un'altra possibile strategia proposta in [2] prevede la minimizzazione del ripple di coppia attraverso il rilevamento e la localizzazione del guasto interspira analizzando l'ampiezza e la fase della componente omopolare della tensione, nota come ZSVC (Zero-Sequence Voltage Component), senza stimare la gravità del guasto attraverso i parametri μ ed r_f.

Nell'articolo proposto, l'algoritmo di controllo della macchina è il Direct Torque Control DTC, il quale è meno sensibile alle variazioni dei parametri nello schema di controllo.

In tale metodo di minimizzazione del ripple di coppia, la coppia iniettata e l'osservatore del flusso magnetico vengono direttamente calcolati dalle già disponibili ampiezza e fase della ZSVC durante il processo di diagnosi del guasto, senza necessitare di valori specifici dei parametri di guasto μ e i_f.

È possibile osservare i punti tra i quali la tensione omopolare viene misurata nella Figura 6, qui in basso.

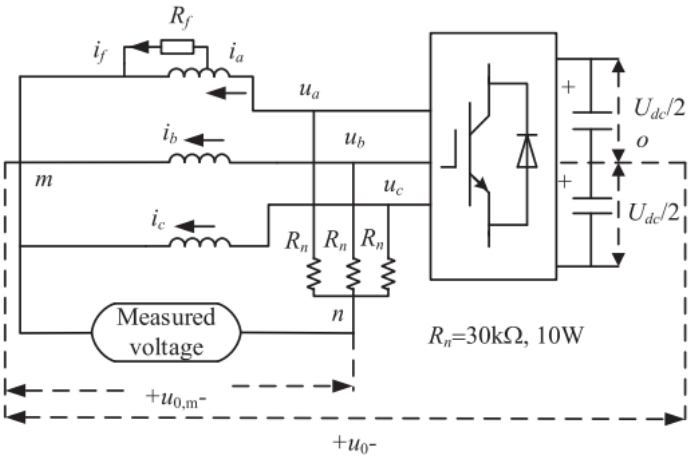


Figura 6: Misura della ZSVC $u_{0,m}$

(mostrato in [2])

Dopo alcune manipolazioni si ottiene che la tensione omopolare $u_{0,m}$ tra i due centri stella vale

$$u_{0,m} = \frac{1}{3}\mu R_s I_f \sin(\theta + \theta_f) + \frac{1}{3}\mu\omega_e I_f (L + 2M)\cos(\theta + \theta_f) = U_1 \sin(\theta + \theta_v) \tag{1.12}$$

Dove:

- θ_f e I_f sono la fase iniziale e l'ampiezza della corrente di guasto i_f;
- ω_e è la velocità angolare elettrica del rotore;
- θ_v e U_1 sono la fase iniziale e l'ampiezza all'armonica fondamentale della tensione omopolare $u_{0,m}$;
- R_s è la resistenza statorica;
- L ed M sono rispettivamente l'autoinduttanza e la mutua induttanza tra le fasi della macchina.

Si perviene così alle relazioni analitiche dei termini con cui la ZSVC può essere identificata

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3}\mu I_f \sqrt{R_s^2 + \omega_e^2 (L+2M)^2} \\ \theta_v = \theta_f + \delta \\ \delta = \tan^{-1}(\omega_e (L+2M)/R_s). \end{cases} \tag{1.13}$$

Ipotizzando che la macchina sia una SPMSM, la coppia elettromagnetica può essere espressa come

$$C_e = \begin{cases} 1.5KI, & \text{Macchina sana} \\ 1.5KI - 0.5\mu K I_f \cos(\theta_f) \\ \quad +0.5\mu K I_f \cos(2\theta + \theta_f), & \text{Guasto nella fase a} \end{cases} \tag{1.14}$$

In cui la parte di C_e che compare in caso di guasto può anche essere espressa come

$\Delta C_e = \Delta T_e = -\mu\, i_f K \sin(\theta)$.

L'espressione della coppia elettromagnetica C_e in caso di fase guasta è stata ricavata trascurando le armoniche superiori alla fondamentale nell'espressione della corrente di guasto i_f.

Dall'espressione (1.14) della coppia elettromagnetica C_e si può notare come il valore medio della coppia si riduca all'avvenimento del guasto, oltre a notarsi l'incombere di un ripple di coppia [2].

Siccome la coppia cambia al sopraggiungere di un guasto, la soppressione del ripple di coppia si può realizzare iniettando nello schema di controllo in Figura 7 un segnale di coppia che tiene conto di tale variazione.

Si ottiene così uno schema di controllo modificato del DTC allegato sotto, in cui è inclusa anche la parte tollerante al guasto ΔT_e, mentre invece T_e^* è la coppia di riferimento per l'operazione normale della macchina.

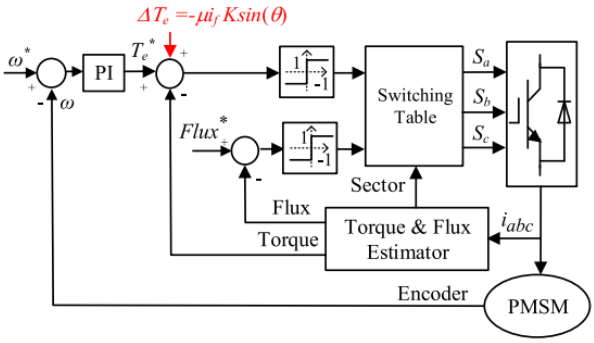


Figura 7: Schema di controllo del ripple di coppia per macchina comandata tramite DTC (mostrato in [2])

Il guasto interspira influenza il valore della coppia nei seguenti modi:

- Direttamente: come spiegato precedentemente, a guasto avvenuto, la coppia presenterebbe quindi un ripple da compensare tramite l'iniezione del segnale di coppia nello schema di controllo in Figura 7;

- Indirettamente: a guasto sopraggiunto, la variazione di corrente in una delle fasi determina anche la variazione del flusso concatenato con lo statore, di conseguenza la variazione del flusso statorico a sua volta determina la presenza di un ulteriore ripple di coppia che deve essere eliminato (vedi l'eq. della coppia (1.6), in cui la variazione di flusso può essere tenuta in conto attraverso la variazione di i_{sq} siccome ψ_{pm} è costante).

Per sopprimere o comunque ridurre questo ulteriore contributo al ripple di coppia, bisogna scegliere adeguatamente il modo con cui stimare il flusso magnetico di statore. Lo stimatore del flusso nello schema di controllo assolve a questa funzione.

1.8. Strategia di controllo per la minimizzazione del ripple di coppia basata sul circuito magnetico equivalente della macchina

L' articolo [3] propone una strategia per controllare la coppia in seguito ad un guasto interspira facendo riferimento ad un approccio basato sul modello della macchina.

La FTC strategy si basa sul circuito magnetico equivalente della macchina, pertanto la saturazione del materiale ferromagnetico e il comportamento della PMSM anche per armoniche diverse dalla fondamentale vengono tenuti in considerazione.

Tale articolo fa riferimento ad una IPMSM (Inset Permanent Magnet Synchronous Machine) la cui struttura è mostrata in Figura 8.

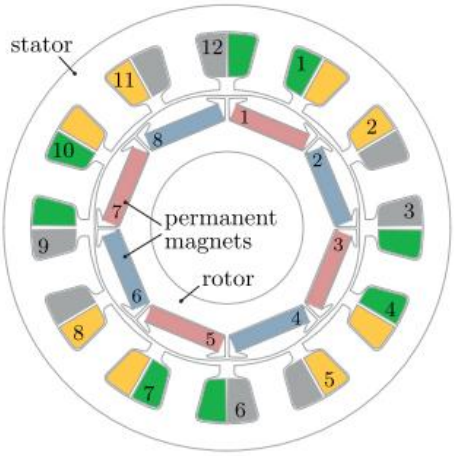


Figura 8: Inset Permanent Magnet Synchronous Machine IPMSM

La macchina è composta da 12 bobine di dente e 8 magneti permanenti innestati nel rotore.

Il circuito magnetico equivalente semplificato associato alla IPMSM è mostrato in Figura 9.

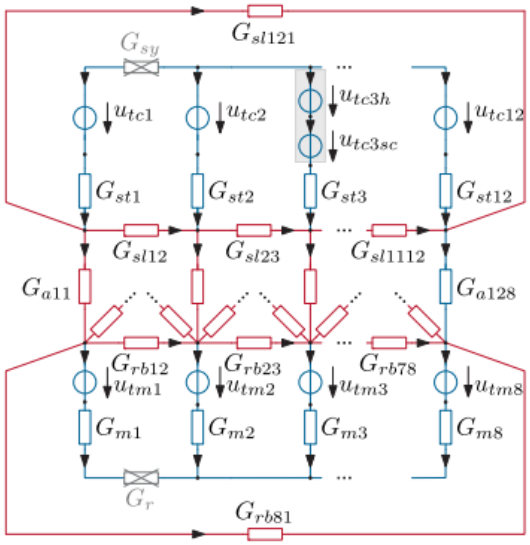


Figura 9: Circuito Magnetico Equivalente MEC della IPMSM mostrata in Figura 8

La semplificazione che viene fatta in questo modello è quella di assumere le permeanze relative al giogo statorico G_{sy} e al giogo rotorico G_r come infinite e quindi modellizzabili come un cortocircuito magnetico nel circuito in Figura 9.

Il circuito magnetico semplificato è costituito da:

- Le forze magnetomotrici di dente statorico u_{tci} causate dalle bobine avvolte attorno a ciascun dente statorico;
- Le permeanze di dente statorico G_{sti};
- Le permeanze di dispersione tra denti statorici adiacenti G_{slik};
- Le permeanze relative al flusso che attraversa il traferro giungendo al rotore G_{aik};
- Le permeanze rotoriche relative alla parte di flusso che non attraversa completamente i magneti permanenti ma che si richiude attraverso i ponti laterali vuoti facenti parte dell'alloggiamento in cui ciascun magnete permanente è posizionato G_{rbik};
- Le forze magnetomotrici di magnete permanente u_{tmi} e dalle permeanze di magnete permanente G_{mi}.

Assumendo ora di avere un guasto interspira nella bobina 3, la bobina 3 può essere modellizzata come due bobine minori poste in serie.

La parte di bobina sana è modellizzata dalla fmm u_{tc3h} mentre la parte di bobina guasta è modellizzata dalla fmm u_{tc3sc}, pertanto nel modello della macchina figurano 13 bobine.

Gli avvolgimenti della IPMSM in questione sono connessi come riportato nel circuito sottostante.

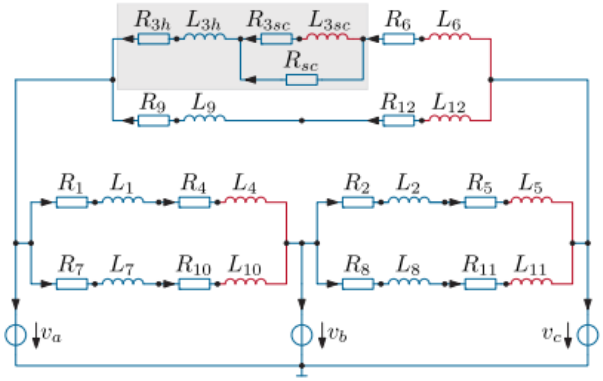


Figura 10: Schema elettrico di connessione degli avvolgimenti della IPMSM

Nel circuito in Figura 10, l'inverter VSI è modellizzato in forma ideale dalle 3 sorgenti di tensione ai terminali della macchina v_a, v_b, v_c.

Notando che nel circuito magnetico equivalente della macchina (in Figura 9), l'albero è indicato in blu mentre il coalbero in rosso, l'equazione della coppia elettromagnetica $\boldsymbol{\tau}$ della macchina è esprimibile come [3]:

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{tg}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{G}_t}{\partial \varphi}\mathbf{u}_{tg} + \mathbf{u}_c^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial \varphi}\mathbf{u}_c\right) \tag{1.15}$$

in cui:

- La matrice diagonale $\mathbf{G}_t(\mathbf{u}_{tg}, \varphi)$ è la matrice delle permeanze di albero, la quale è funzione non lineare del vettore delle fmm di albero $\mathbf{u}_{tg}$ (a causa della saturazione del circuito magnetico) e dell'angolo di rotore φ (angolo la cui variazione influenza le permeanze al traferro);
- La matrice diagonale $\mathbf{G}_c$ ($\mathbf{u}_c$, φ) è la matrice delle permeanze di coalbero, la quale è funzione non lineare del vettore delle fmm di coalbero $\mathbf{u}_c$ (a causa della saturazione del circuito magnetico) e dell'angolo di rotore φ (angolo la cui variazione influenza le permeanze al traferro).

Lo schema di controllo proposto in [3] è riportato in Figura 11.

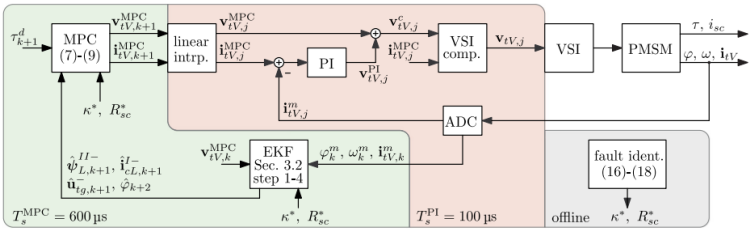


Figura 11: Schema di controllo della coppia della IPMSM basato sul Model Predictive Control MPC

L'obiettivo della presente strategia di controllo tollerante al guasto è quello di migliorare l'accuratezza del controllo della coppia rispetto agli effetti negativi derivanti dal guasto interspira.

La FTC strategy in questo articolo viene implementata tramite il Model Predictive Control (MPC).

1.9. Strategia di controllo tollerante al guasto di una PMSM soggetta ad incertezza dei suoi parametri

In [4] viene proposto un metodo di controllo predittivo e tollerante al guasto della macchina indipendente dal suo modello (MFFTPC, Model-Free Fault-Tolerant Predictive Control).

Tale strategia di controllo si pone l'obiettivo di migliorare la robustezza del controllo della macchina ed eliminare l'effetto delle perturbazioni dei parametri della macchina sul controllo predittivo.

Le strategie di controllo basate sul Model-Free control (MFC) sono in grado di ridurre la dipendenza del controllore dalla conoscenza del modello della macchina, migliorando significativamente le prestazioni di controllo della macchina.

Le informazioni relative agli ingressi e alle uscite della macchina vengono impiegate per ricavare un modello ultra-locale della macchina (ULM), dopodiché viene progettato un controllore MFC basato sulla conoscenza del modello ultra-locale della SPMSM.

In conclusione, lo schema di controllo complessivo MFFTPC per la macchina sincrona a magneti permanenti viene illustrato in Figura 12.

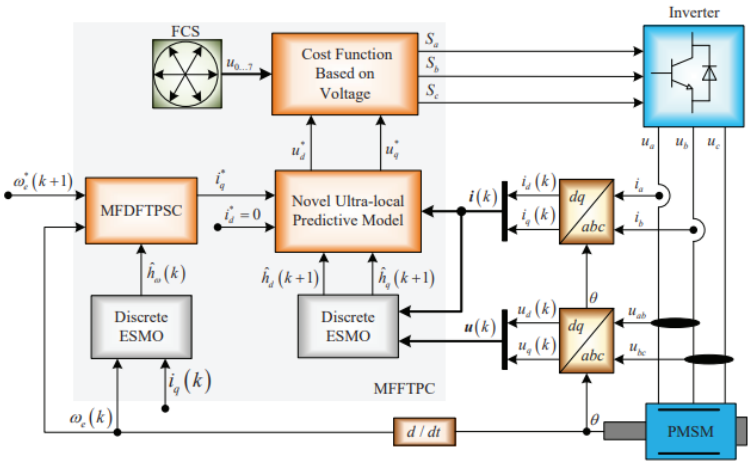


Figura 12: Schema di controllo tollerante al guasto di una PMSM soggetta a perturbazione dei suoi parametri

1.10. Strategia di controllo vettoriale tollerante al guasto di una PMSM

In [5] si propone una tecnica di controllo vettoriale di una PMSM soggetta a guasto interspira.

Lo schema di controllo è riportato in Figura 13.

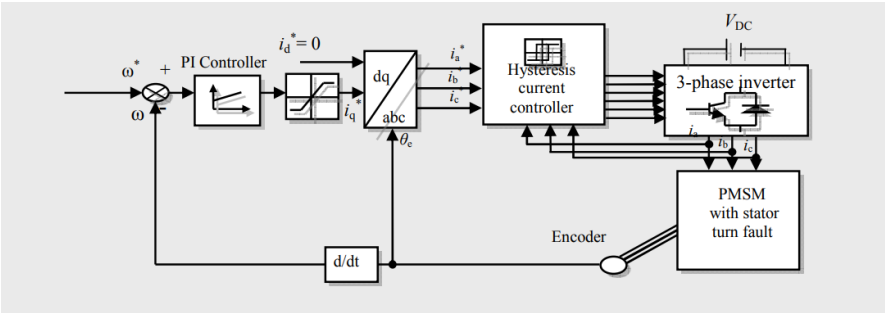


Figura 13: Schema di controllo vettoriale tollerante al guasto di una PMSM

La macchina è alimentata da un inverter controllato in corrente.

Per ottenere la coppia ottimale, la corrente di riferimento di asse d viene impostata a zero (i_d*= 0).

Il vettore di Clarke di tensione applicato alla macchina ha traiettoria esagonale nel tempo sia in caso di macchina sana a) che in caso di guasto b) come si può vedere in Figura 14.

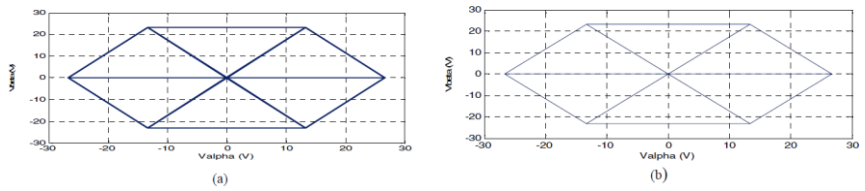


Figura 14: Vettore di Clarke della tensione statorica [(a) macchina sana, (b) macchina guasta]

Il vettore di Clarke delle correnti a macchina sana (Figura 15) ha traiettoria circolare a) invece a macchina guasta ha traiettoria ellittica b) in cui la pronunciazione dell'ellitticità è funzione della severità del guasto e l'asse maggiore dell'ellisse corrisponde con l'asse della fase guasta (in questo caso l'asse corrispondente alla fase a).

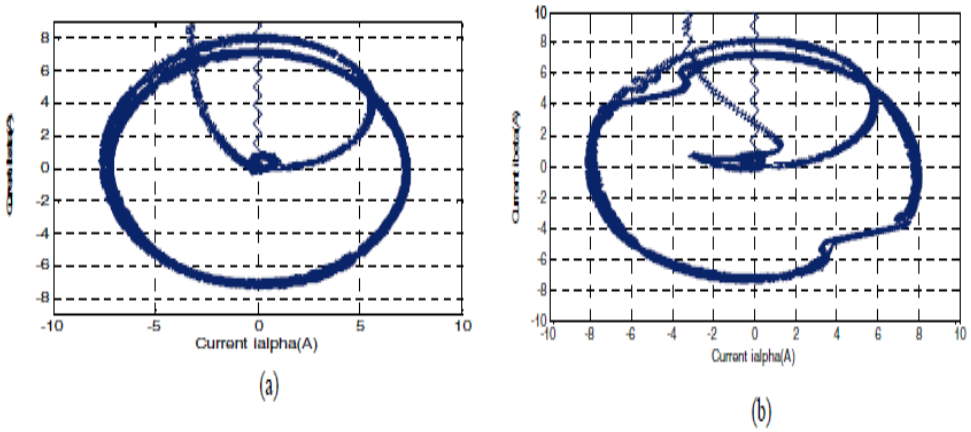


Figura 15: Vettore di Clarke della corrente statorica [(a) macchina sana, (b) macchina guasta]

Nei grafici seguenti viene mostrata la forma d'onda della somma delle tensioni di fase in caso di macchina sana a) e in caso di guasto b).

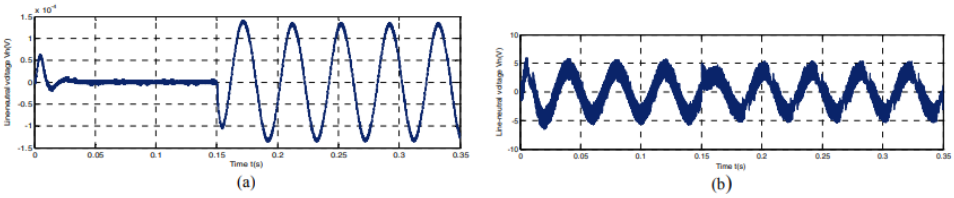


Figura 16: Somma delle tensioni di fase [(a) macchina sana, (b) macchina guasta]

Si assume che il guasto sia applicato a t=0 s, mentre a t=0,15 s è applicata una coppia resistente diversa da 0.

Va notato che la scala delle tensioni nel grafico a) presenta un fattore moltiplicativo x 10^{-4}, quindi si può assumere che in caso di macchina sana la tensione omopolare sia nulla, invece in caso di macchina guasta è presente una tensione omopolare diversa da zero.

I risultati delle simulazioni mostrano che tale azionamento della PMSM fornisce ripple di velocità accettabili per valori del rapporto spire di cortocircuito della fase guasta inferiori al μ = 40%, come si può vedere in Figura 17.

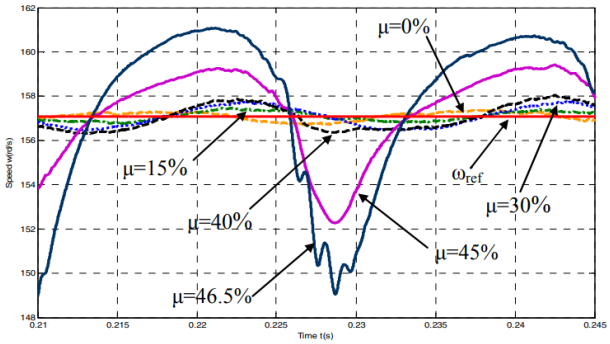


Figura 17: ripple della velocità angolare [(a) macchina sana, (b) macchina guasta]

1.11. Strategia di controllo tollerante al guasto tramite modulazione del flusso statorico

In [6] viene proposta una strategia di controllo tollerante al guasto che prevede di modulare il flusso magnetico nella PMSM in maniera tale da redistribuire lo sforzo elettrico (a cui la fase guasta è sottoposta) dalle parti statoriche soggette al guasto alle parti statoriche sane.

Tale strategia di controllo mira ad estrarre la massima potenza disponibile dal generatore a magneti permanenti durante il funzionamento in caso di guasto, alla condizione fondamentale che il guasto non si propaghi.

In [6] viene proposto un algoritmo di controllo per un generatore sincrono a magneti permanenti PMSG.

Una volta degradato, l'isolamento dei conduttori viene rapidamente danneggiato in funzione dell'ampiezza della tensione.

Pertanto, per fermare la propagazione del guasto, la tensione negli avvolgimenti statorici va ristretta e tenuta al di sotto di un valore sicuro K ottenuto dalla diagnostica della macchina.

Considerando la tensione in ciascun avvolgimento di fase e trascurando la caduta di tensione resistiva sull'avvolgimento, si ottiene che

$$u_{sx} = i_{sx} R_s + \frac{d\psi_{sx}}{dt} \approx \frac{d\psi_{sx}}{dt} \tag{1.16}$$

Dove Ψ_{sx} è il flusso concatenato con una delle fasi nello statore. Pertanto, la condizione di limitazione $|u_{sx}| \leq K$ si trasforma in $|p\Psi_{sx}| \leq K$ dove $p = d/dt$.

In linea di principio, il flusso magnetico nella macchina PMSG è generato solo dai magneti permanenti nel rotore ed è costante, quindi per limitare la derivata del flusso concatenato con lo statore un'opzione potrebbe essere quella dell'indebolimento del flusso percepito dagli avvolgimenti statorici.

La tecnica dell'indebolimento del flusso viene tipicamente utilizzata nell'operazione della macchina a velocità superiori alla velocità base.

Concettualmente, l'indebolimento del flusso si potrebbe anche applicare a velocità inferiori alla velocità base per evitare la propagazione del guasto, tuttavia ciò comporterebbe l'innecessaria riduzione della potenza erogata dalla macchina.

La condizione limite per lo scongiuramento della propagazione del guasto è

$|p\Psi_{sx}| = K$, in tale condizione anche la potenza erogata dalla macchina in condizioni di guasto sarebbe la massima ammissibile.

In base a tale condizione, il flusso statorico è modulato secondo una forma d' onda triangolare così descritta

$$\begin{aligned} \psi_{sa}(t) &= Kt, \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2\omega_e}, \tfrac{\pi}{2\omega_e}] + \tfrac{2k\pi}{\omega_e} \\ \psi_{sa}(t) &= -Kt + K\pi, \quad t \in [\tfrac{\pi}{2\omega_e}, \tfrac{3\pi}{2\omega_e}] + \tfrac{2k\pi}{\omega_e} \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.12. Strategia di controllo tollerante al guasto basata sulla limitazione del calore nel punto di guasto

In [7] la strategia di controllo tollerante al guasto della PMSM consiste nel limitare il calore che si sviluppa nel guasto interspira.

Ciò viene realizzato mediante l'adattamento del punto di lavoro della macchina.

Il guasto è modellizzato dalla resistenza di guasto R_F, dalla corrente di guasto I_F e dal numero di spire cortocircuitate a causa del guasto w_F.

Il calore locale prodotto dalla corrente di guasto viene determinato calcolando la potenza dissipata dal guasto $P_F = R_F I_F^2$.

La potenza P_F determina un aumento di temperatura locale nel punto di guasto e tale incremento di temperatura va limitato per evitare la propagazione del guasto.

Per arrestare la degradazione dell'isolamento, serve definire la temperatura massima ammissibile nel punto di guasto $\vartheta_{F,max}$.

Pertanto, il valore limite di P_F accettabile è dato dall'equazione

$$P_F^* = \frac{\vartheta_{F,max} - \vartheta_{F,nom}}{\beta_F} \tag{1.18}$$

In cui $\theta_{F,nom}$ = temperatura nel punto di guasto nel funzionamento nominale

(i.e. $P_F = 0$), β_F = coefficiente di proporzionalità tra θ e P_F (l'andamento lineare è dimostrato dall'analisi termica ad elementi finiti della macchina).

Il coefficiente β_F dipende dalla posizione del guasto nella macchina e dalla geometria della macchina, ma siccome lo schema di controllo non è in grado di determinare l'esatta locazione del punto di guasto nella PMSM, per semplicità, si considera l'ipotesi peggiore di β_F massimo.

Tale ipotesi corrisponde al punto di guasto al centro delle teste di matassa poiché il percorso del flusso termico dal punto di guasto allo statore è più elevato.

Lo schema di controllo tollerante al guasto è riportato in Figura 18.

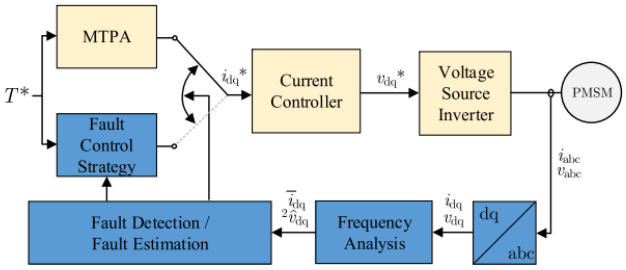


Figura 18: Schema di controllo tollerante al guasto tramite limitazione del calore prodotto nel punto di guasto

Durante il normale funzionamento della macchina, la coppia di riferimento T* viene tracciata tramite l'approccio MTPA (Maximum Torque per Ampere).

A guasto rilevato, lo schema di controllo cambia strategia nel determinare le correnti di riferimento i_{dq}*, passando dall'approccio MTPA alla FTC strategy.

Si riesce a sviluppare la minima potenza nel punto di guasto P_F qualora la corrente massima i_{max} venga impiegata esclusivamente per l'indebolimento del flusso.

Con riferimento alla Figura 19, per ridurre il calore generato e per mantenere la coppia di riferimento, il punto di lavoro inizialmente si deve spostare lungo l'iperbole a coppia costante dal punto 1 al punto 2.

Se poi, giunta al punto 2, la PMSM presenta ancora una potenza di guasto stimata $P_F(\mathbf{x}) \geq P_F$*, allora non è più possibile mantenere la coppia costante, ma essa va diminuita e il punto di lavoro si deve spostare lungo la circonferenza a corrente massima i_{max} dal punto 2 al punto 3.

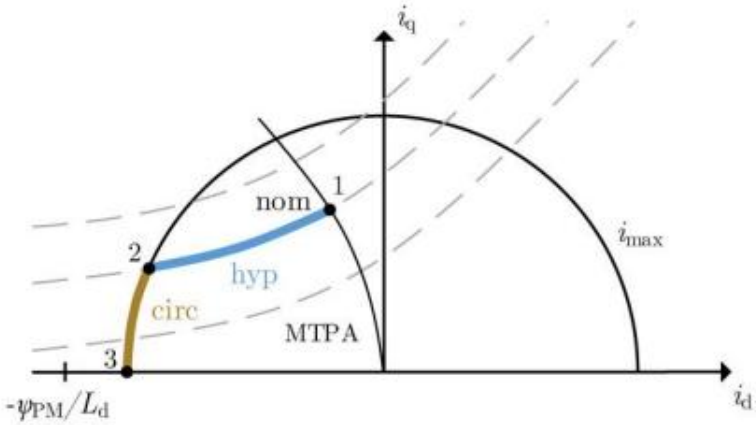


Figura 19: Strategia di controllo tollerante al guasto in termini del luogo dei punti definito dalle correnti i_d-i_q

2 Macchina SPMSM: dettagli costruttivi

2.1. Struttura degli avvolgimenti della SPMSM

La macchina sotto analisi è una SPMSM dotata di Q = 12 cave, p = 10 poli, $q = \frac{Q}{3p} = \frac{2}{5}$ cave/(polo·fase) e di un avvolgimento statorico costituito da bobine di dente in cui ciascuna bobina di dente è costituita da N = 37 spire.

Inoltre, si definisce il passo di cava $\alpha_u = \frac{2\pi}{Q} = \frac{\pi}{6}$.

La sequenza dei conduttori di fase per ciascuno strato può essere determinata nel modo seguente.

Tabella 1: Determinazione della sequenza dei conduttori per uno strato

A	A	$\bar{C}$	$\bar{C}$	B	B	$\bar{A}$	$\bar{A}$	C	C	$\bar{B}$	$\bar{B}$
x					x					x	
			x					x			
	x					x					x
				x					x		
		x					x				

Pertanto, la sequenza dei conduttori nelle cave per ciascuno strato può essere osservata nello schema seguente, in cui la sequenza dei conduttori nel secondo strato è disallineata rispetto a quella del primo strato di un passo di cava.

Tabella 2: Disallineamento tra gli strati di conduttori

	1° Ciclo Geometrico						2° Ciclo Geometrico					
1° Strato	A	B	$\bar{B}$	$\bar{C}$	C	A	$\bar{A}$	$\bar{B}$	B	C	$\bar{C}$	$\bar{A}$
2° Strato	A	$\bar{A}$	$\bar{B}$	B	C	$\bar{C}$	$\bar{A}$	A	B	$\bar{B}$	$\bar{C}$	C

Complessivamente, lungo la circonferenza statorica, la macchina elettrica ha la seguente disposizione degli avvolgimenti e i magneti permanenti sono denotati con PM nella legenda della Figura 20.

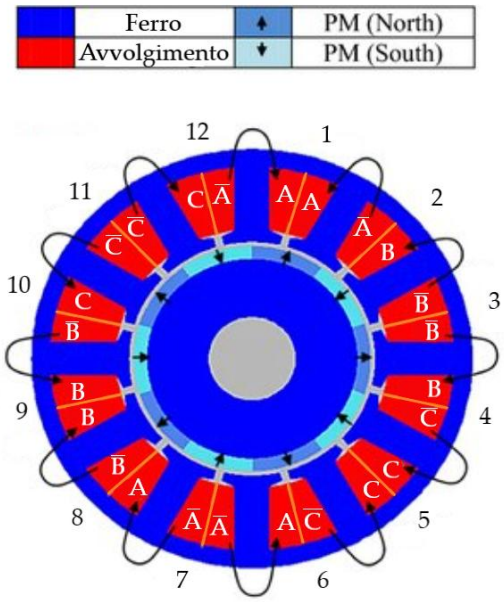


Figura 20: Macchina SPMSM a 12 cave, 10 poli e avvolgimenti concentrati a cave frazionarie con $q = \frac{2}{5}$ cave/(polo·fase)

La sequenza ciclica dei conduttori di fase attorno alla periferia statorica è organizzata in m=2 cicli geometrici, le vie parallele per fase sono a = 2, quindi gli avvolgimenti statorici possono essere rappresentati connessi nel seguente modo in cui $u_a(t)$, $u_b(t)$, $u_c(t)$ sono le sorgenti di tensione con cui si suppone che la macchina sia alimentata.

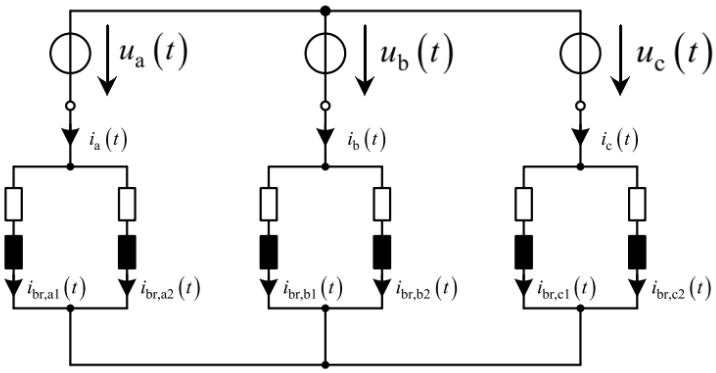


Figura 21: Schema di connessione delle vie parallele per ciascuna fase

Lo schema dell'avvolgimento per ciascuna fase a, b, c viene mostrato in Figura 22, inoltre gli assi geometrici di diverse fasi sono sfasati tra di loro di 120° elettrici.

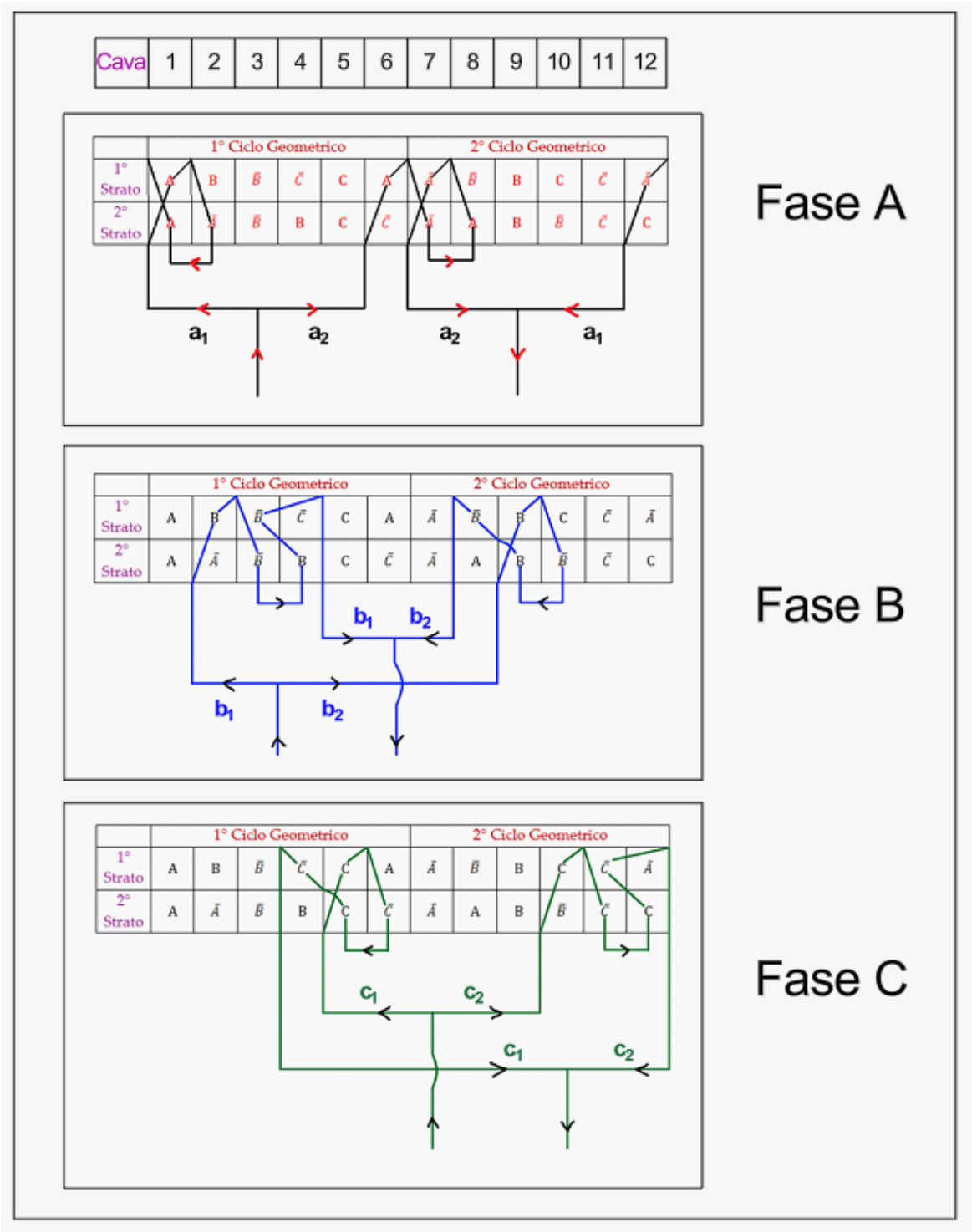


Figura 22: Schema di connessione delle vie parallele per ciascuna fase a, b, c (si considera la corrente nei conduttori A, B, C come entrante nel piano del foglio e quella nei conduttori di ritorno $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ come uscente dal piano del foglio)

2.2. Caratteristiche geometriche e dati di targa della macchina

I dati geometrici della macchina SPMSM sono riportati nella Tabella 3.

Tabella 3: Dati geometrici della macchina SPMSM

Dati Geometrici		
h_{PM}	2.9	[mm] Spessore del magnete PM
g	1.4	[mm] Spessore del traferro
L	50	[mm] Lunghezza assiale
$D_{in,statore}$	92.0	[mm] Diametro interno statore
$D_{out,rotore}$	89.2	[mm] Diametro esterno rotore
$D_{out,rotore_sPM}$	83.4	[mm] Diametro esterno rotore senza magneti PM

I dati di targa della macchina SPMSM sono riportati nella Tabella 4.

Tabella 4: Dati di targa della macchina SPMSM

Dati di targa		
I_n	20.4	[A] Corrente di linea nominale
V_n	95	[V] Tensione di fase nominale
$n_{m,n}$	4500	[rpm] Velocità meccanica nominale
T_n	12	[Nm] Coppia nominale

2.3. Lunghezze periferiche medie, diametro medio del traferro della macchina e diametro medio della corona circolare di magneti permanenti

L'area della corona circolare occupata dai magneti permanenti $A_{corona,PM}$ vale:

$$A_{corona,PM} = \pi \cdot \left({R_{out,r}}^2 - {R_{out,r_sPM}}^2\right) \tag{2.1}$$

Invece, l'area della corona circolare occupata dal traferro $A_{corona,g}$ vale:

$$A_{corona,g} = \pi \cdot \left({R_{in,s}}^2 - {R_{out,r}}^2\right) \tag{2.2}$$

Il singolo magnete permanente sulla superficie esterna del rotore ha la forma di un settore della corona circolare occupata dai magneti permanenti.

Siccome sul rotore vi sono $p = 10$ magneti permanenti di forma uguale tra di loro, l'area occupata dal singolo magnete permanente A_{PM} vale:

$$A_{PM} = \frac{A_{corona,PM}}{p} \tag{2.3}$$

Essendo h_{PM} lo spessore del singolo magnete permanente, la lunghezza periferica media w_{PM} del singolo magnete permanente vale:

$$w_{PM} = \frac{A_{PM}}{h_{PM}} \tag{2.4}$$

La porzione di traferro che si affaccia davanti al magnete permanente ha area A_g ed esso si assume avere la forma di un settore della corona circolare occupata dal traferro.

Siccome sul rotore vi sono $p = 10$ magneti permanenti di forma uguale tra di loro, l'area occupata dalla singola porzione di traferro davanti al magnete permanente A_g vale:

$$A_g = \frac{A_{corona,g}}{p} \tag{2.5}$$

Essendo g lo spessore del traferro, la lunghezza periferica media w_g della singola porzione di traferro davanti al magnete permanente vale:

$$w_g = \frac{A_g}{g} \tag{2.6}$$

Estendendo il ragionamento fatto finora per ottenere la lunghezza periferica media del singolo magnete permanente e della porzione di traferro che ad esso si affaccia, è possibile ottenere anche la lunghezza periferica media $w_{g\beta}$ e la lunghezza periferica media $w_{PM\beta}$, rispettivamente della porzione di traferro e della porzione di magneti permanenti entrambi interni al passo di bobina β.

Inoltre, si può ottenere anche la lunghezza periferica media $w_{g(1-\beta)}$ e la lunghezza periferica media $w_{PM(1-\beta)}$, rispettivamente della porzione di traferro e della porzione di magneti permanenti entrambi esterni al passo di bobina β.

Le lunghezze periferiche medie sinora menzionate sono visibili in Figura 23.

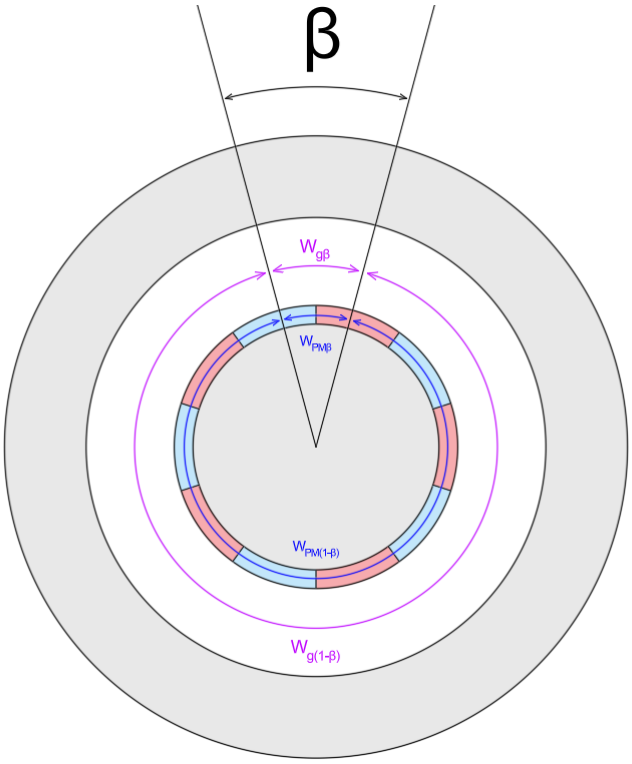


Figura 23: Lunghezze periferiche medie del traferro e dei magneti permanenti interni ed esterni al passo di bobina β

In Figura 23 si è immaginato per semplicità di poter assumere lo statore isotropo e il traferro e i magneti permanenti in proporzione diversa rispetto alla realtà per dare visibilità alle lunghezze periferiche medie.

A partire dalla lunghezza periferica media dell'intera corona circolare di traferro, il diametro medio del traferro D_g può essere così espresso:

$$D_g = \frac{\left({R_{in,s}}^2 - {R_{out,r}}^2\right)}{g} \tag{2.7}$$

A partire dalla lunghezza periferica media dell'intera corona circolare di magneti permanenti, il diametro medio della corona circolare di magneti permanenti D_{PM} può essere così espresso:

$$D_{PM} = \frac{\left({R_{out,r}}^2 - {R_{out,r_sPM}}^2\right)}{h_{PM}} \tag{2.8}$$

3 Modello circuitale del magnete permanente PM

In questo capitolo viene presentato il circuito magnetico equivalente del magnete permanente PM.

I magneti permanenti in questa macchina sono di grado YXG-30H e del tipo Samario-Cobalto.

Dalla scheda tecnica del materiale, l'induzione residua B_r del magnete permanente vale B_r = 1,08 T ed il magnete permanente ha permeabilità magnetica relativa $\mu_{r,PM}$ = 1,05.

La permeabilità magnetica assoluta del magnete permanente vale pertanto

$$\mu_{PM} = \mu_0 \, \mu_{r,PM} = 4{,}2 \cdot \pi \cdot 10^{(-7)} \ \frac{H}{m}.$$

I magneti permanenti hanno la seguente forma e dimensioni, illustrate in Figura 24.

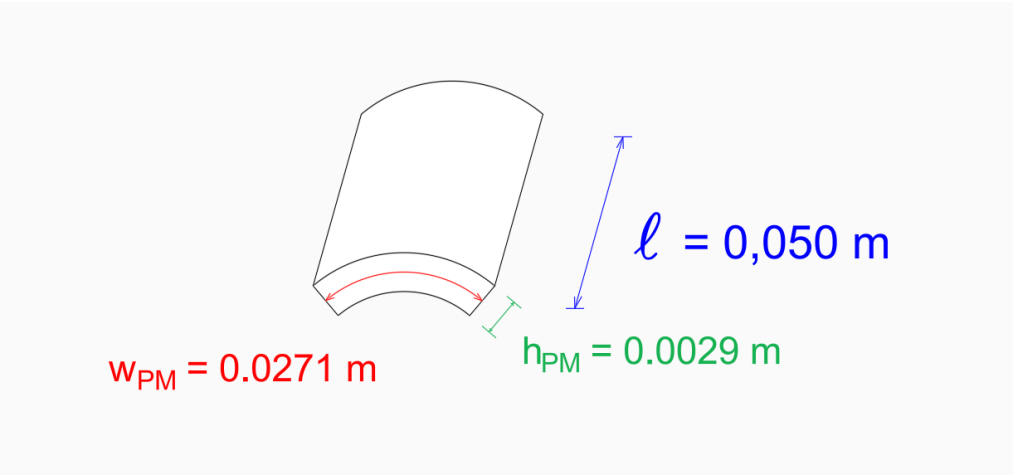


Figura 24: Forma e dimensioni dei magneti permanenti sulla superficie esterna del rotore

La porzione della curva d'isteresi del magnete permanente limitata al secondo quadrante è accettabilmente approssimabile dalla linea di ritorno fintanto che il punto operativo del magnete permanente sia collocato a destra del ginocchio della reale curva d'isteresi come mostrato nella Figura 25.

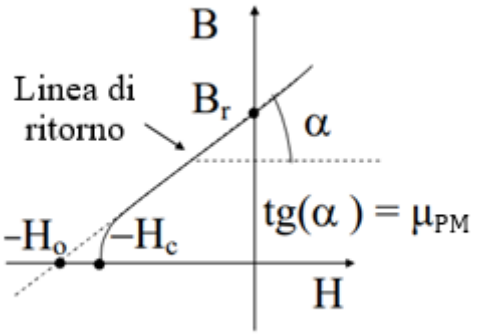


Figura 25: Curva d'isteresi effettiva (in linea continua) e la sua approssimazione tramite la linea di ritorno (in linea tratteggiata)

In Figura 25, la permeabilità magnetica assoluta del magnete permanente μ_{PM} è pari alla pendenza della linea di ritorno.

Pertanto, nel piano B-H la linea di ritorno è descrivibile dall'equazione:

$$B = B_r + \mu_{PM} H \tag{3.1}$$

Esprimendo l'eq. (5.1) in termini di H si ottiene che:

$$H = \frac{B}{\mu_{PM}} - \frac{B_r}{\mu_{PM}} \tag{3.2}$$

in cui $H_0 = \frac{B_r}{\mu_{PM}}$ e $-H_0$ = punto di intersezione della linea di ritorno con l'asse H.

Pertanto, l'eq. (3.2) è esprimibile come:

$$H = \frac{B}{\mu_{PM}} - H_0 \tag{3.3}$$

Denotando con B_m l'induzione magnetica del magnete permanente e H_m l'intensità magnetica del magnete permanente, si ottiene che la forza magnetomotrice del magnete permanente U_m è:

$$U_m = -\int_0^{h_{PM}} H_m \cdot dh = H_0 \cdot h_{PM} - \frac{B_m}{\mu_{PM}} \cdot h_{PM} \tag{3.4}$$

Moltiplicando e dividendo il secondo termine del secondo membro dell'eq. (3.4) per A_m = area/sezione del magnete permanente e definendo h_{PM} = spessore del magnete permanente, si ottiene che l'eq. (3.4) può essere riscritta come:

$$U_m = H_0 \cdot h_{PM} - \frac{h_{PM}}{\mu_{PM} \cdot A_m} \cdot (B_m \cdot A_m) \tag{3.5}$$

la quale può anche essere visualizzata in termini equivalenti come segue

$$U_m = \mathrm{M_{PM}} - \mathcal{R}_{\mathrm{PM}} \cdot \phi_{\mathrm{PM}} \tag{3.6}$$

Il circuito magnetico equivalente associato all' eq. (3.6) viene riportato in Figura 26.

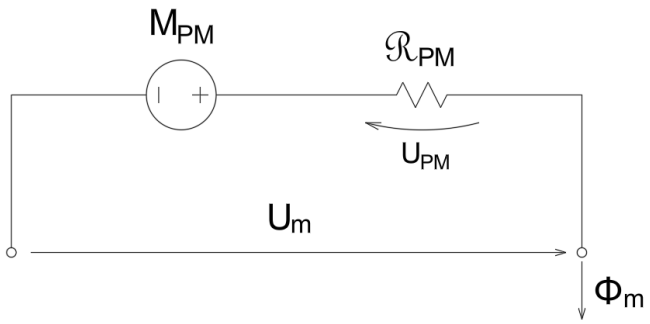


Figura 26: Circuito magnetico equivalente del magnete permanente PM

In cui:

- $\mathrm{M_{PM}}$ è la fmm interna del magnete permanente
- $\mathcal{R}_{\mathrm{PM}}$ è la riluttanza magnetica interna del magnete permanente
- $\mathrm{U_m}$ e ϕ_{m} sono rispettivamente la tensione magnetica agli estremi del magnete permanente e il flusso magnetico attraverso il magnete permanente (i.e. $\phi_{\mathrm{m}} = \phi_{\mathrm{PM}}$)

Dall'eq. (3.2) si ottiene che $H_0 = \frac{B_r}{\mu_{PM}} = 8{,}18 \cdot 10^5 \ \frac{A}{m}$, quindi la fmm interna del magnete permanente vale $M_{PM} = H_0 \cdot h_{PM} = 2.37 \cdot 10^3 \ Asp$.

4 Analisi della forza magnetomotrice sulla corona circolare di magneti permanenti e sul traferro

L'obiettivo della seguente analisi è quello di verificare come cambia la forza magnetomotrice totale sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dalla condizione di macchina sana alla condizione di macchina guasta nel caso in cui una bobina di una via parallela si guasti.

Si vuole analizzare come varia la f.m.m. sull'intero spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti se per rimuovere il guasto si decida di disconnettere la via parallela della bobina in cui il guasto avviene oppure se oltre alla via parallela della fase guasta si decida di disconnettere in modo spazialmente simmetrico anche una via parallela per ciascuna delle fasi sane.

Si ipotizza che lo statore e il rotore siano materiali ferromagnetici ideali caratterizzati da permeabilità magnetica $\mu_{fe} \to \infty$.

Si assume inoltre che il rotore sia rotante in senso diretto (i.e. senso orario) a velocità angolare meccanica $\Omega_m = costante$.

Prima di iniziare la trattazione analitica delle fmm sull'insieme di traferro e magneti permanenti, occorre fissare alcune notazioni relative ai sistemi di riferimento della macchina che si desidera considerare e alle coordinate angolari meccaniche ad essi relative.

4.1. Sistema di riferimento solidale con lo statore e sistema di riferimento solidale con il rotore

Con riferimento alla Figura 27, nel seguito verranno derivate le espressioni delle forze magnetomotrici (fmm) totali sull' insieme di traferro e corona circolare di magneti permanenti.

In verde è mostrato il sistema di riferimento solidale con lo statore, il quale è immobile nel tempo.

In magenta è mostrato il sistema di riferimento solidale con il rotore, il quale è mobile nel tempo alla stessa velocità angolare meccanica del rotore.

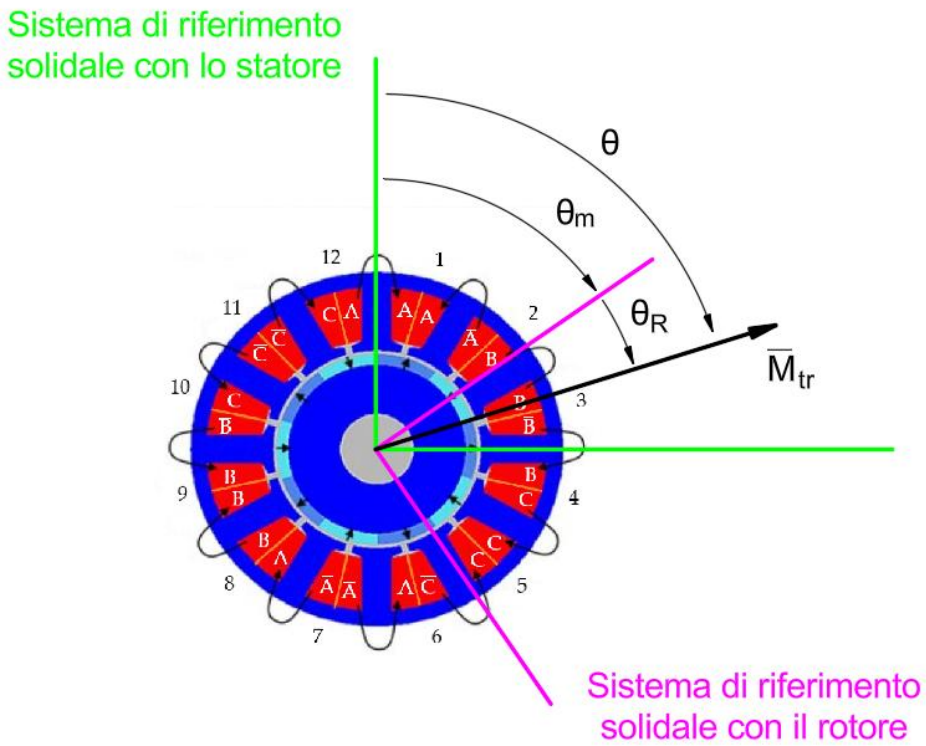


Figura 27: Posizione relativa tra il sistema di riferimento solidale con lo statore e il sistema di riferimento solidale con il rotore e notazioni riguardanti le coordinate angolari meccaniche prese rispetto a tali sistemi di riferimento

Il vettore rotante in nero $\overline{M}_{tr}$ rappresenta la forza magnetomotrice al traferro dovuta ai magneti permanenti sul rotore e viene rappresentato in corrispondenza di un punto di transizione da un magnete Sud ad un magnete Nord di rotore.

Con queste dovute premesse, la posizione istantanea di $\overline{M}_{tr}$ rispetto al sistema di riferimento fisso sullo statore è identificato dalla coordinata angolare meccanica θ.

La posizione istantanea di $\overline{M}_{tr}$ rispetto al sistema di riferimento solidale con il rotore è identificato dalla coordinata angolare meccanica θ_R.

Invece, con θ_m si indica la posizione angolare meccanica istantanea del sistema di riferimento solidale con il rotore rispetto al sistema di riferimento fisso sullo statore.

L'angolo meccanico θ rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore può essere così espresso:

$$\theta = \theta_m + \theta_R \tag{4.1}$$

Siccome la velocità angolare meccanica di rotazione del rotore $\Omega_m = costante$, l'angolo meccanico θ_m è così esprimibile in funzione del tempo t e dell'angolo meccanico iniziale (per $t = 0$) tra il sistema di riferimento solidale con lo statore e il sistema di riferimento solidale con il rotore θ_{m0}:

$$\theta_m = \Omega_m t + \theta_{m0} \tag{4.2}$$

Quindi, l'angolo meccanico θ_R rispetto al sistema di riferimento solidale con il rotore può essere espresso in funzione dell'angolo meccanico θ rispetto allo statore come:

$$\theta_R = \theta - \Omega_m t - \theta_{m0} \tag{4.3}$$

4.2. Forza magnetomotrice della macchina sana valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti

Si inizia con l'indagare l'effetto sulla f.m.m. nell'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuto ai soli magneti permanenti sul rotore.

Ipotizzando di poter rappresentare la fmm di fronte ai magneti permanenti come costante lungo tutta l'estensione angolare del singolo magnete permanente, la fmm totale sull'insieme del traferro e dei magneti permanenti dovuta al solo rotore M_{totr} ha il seguente andamento lungo la periferia della macchina in cui θ_R è l'angolo meccanico lungo la periferia della macchina misurato rispetto al sistema di riferimento solidale con il rotore.

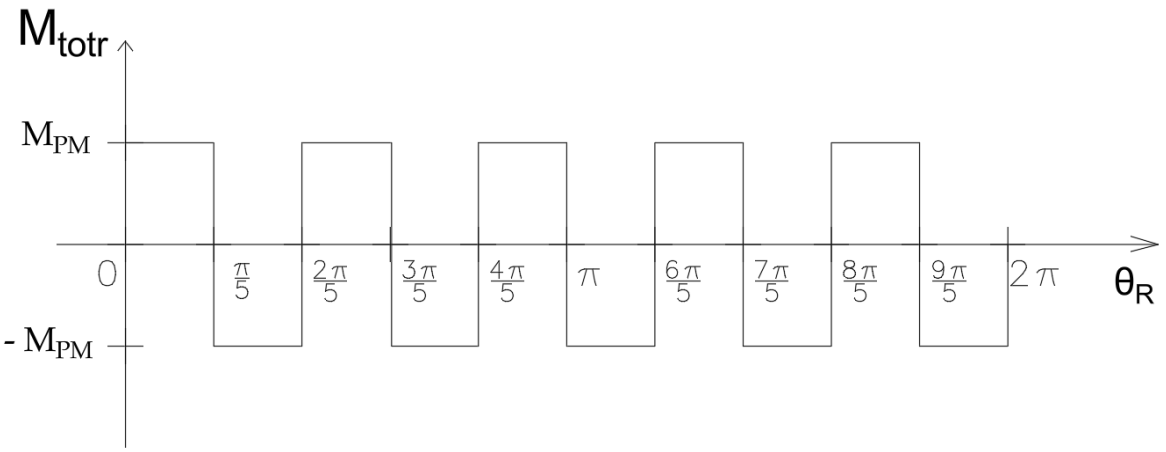


Figura 28: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta al rotore rispetto al sistema di riferimento solidale con il rotore

A partire dal grafico in Figura 28, eseguendo il suo sviluppo in serie di Fourier, è possibile ricavare l'espressione di $M_{totr}(\theta_R)$, ovvero riferita al sistema di riferimento solidale con il rotore:

$$M_{totr}(\theta_R) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{PMh}}\, sin(n_p \cdot h \cdot \theta_R) \tag{4.4}$$

In cui l'ampiezza dell'armonica h-esima di $M_{totr}(\theta_R)$ vale:

$$\widehat{M_{PMh}} = \frac{2}{\pi} \cdot M_{PM} \cdot \frac{1}{h} \cdot [1 - cos(h \cdot \pi)] \tag{4.5}$$

Pertanto, la fmm di rotore contiene solo armoniche h di ordine dispari.

Volendo esprimere $M_{totr}(\theta_R)$ in termini cosinusoidali, l'espressione per ottenerla diventa:

$$M_{totr}(\theta_R) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{PMh}}\, cos\left(n_p \cdot h \cdot \theta_R - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.6}$$

Volendo, invece, esprimere M_{totr} rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore $M_{totr}(\theta)$, l'espressione di $M_{totr}(\theta)$ è data dalla:

$$M_{totr}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{PMh}} \cos\left(n_p \cdot h \cdot \theta - n_p \cdot h \cdot \Omega_m \cdot t \; - n_p \cdot h \cdot \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.7}$$

4.3. Forza magnetomotrice della singola bobina valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti

La forza magnetomotrice di bobina $M_{BOBINA}(\theta)$ nell'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti viene rappresentata in Figura 29, in cui β = distanza angolare tra i lati attivi della bobina e I_B = corrente efficace di bobina.

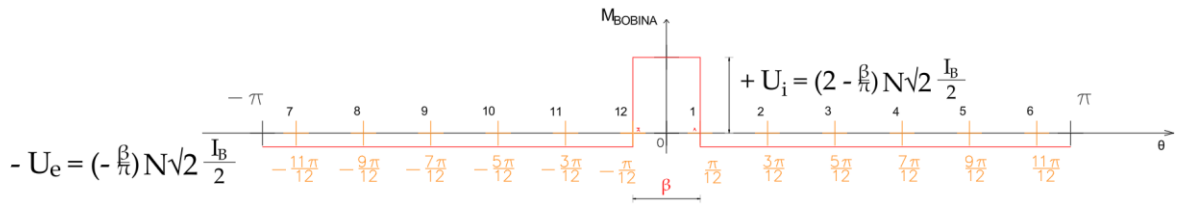


Figura 29: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta alla singola bobina nello statore

U_i denota la caduta di tensione magnetica sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti nella porzione di periferia che si affaccia tra i due lati attivi di bobina; invece, U_e è la caduta di tensione magnetica nella porzione di periferia esterna ai due lati attivi di bobina.

Come si può ben notare dal grafico in Figura 29, il valore massimo di $M_{BOBINA}(\theta)$ è diverso dal valore minimo di $M_{BOBINA}(\theta)$.

Ciò è dovuto al fatto che siccome il flusso magnetico che concatena la bobina deve essere lo stesso e siccome lo spessore dell'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti è lo stesso lungo tutta la periferia, il flusso uscente dalla bobina attraversa il traferro e la corona circolare di magneti permanenti nell'area corrispondente a β mentre, invece, il flusso entrante nella bobina attraversa il traferro e la corona circolare di magneti permanenti nell'area corrispondente all'estensione angolare $2\pi - \beta$.

Pertanto, la riluttanza del traferro e dei magneti permanenti in β è maggiore rispetto alla riluttanza del traferro e dei magneti permanenti in $2\pi - \beta$, quindi la caduta di

tensione magnetica sullo spessore traferro + magneti in β è superiore alla caduta di tensione magnetica sullo spessore traferro + magneti in 2π – β.

Lo sviluppo in serie di Fourier di $M_{BOBINA}(\theta)$ assume la seguente espressione:

$$M_{BOBINA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} a_h \cdot \cos[h \cdot (\theta - \alpha_{asse})] \tag{4.8}$$

In cui α_{asse} = distanza angolare tra l'asse della bobina e l'origine in θ = 0.

L' ampiezza delle armoniche di $M_{BOBINA}(\theta)$ vale:

$$a_h = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \tag{4.9}$$

Considerando che nel caso della macchina SPMSM che si sta analizzando le bobine sono avvolte attorno a ciascun dente statorico, l'estensione angolare della singola bobina β è pari al passo di cava α_u.

Pertanto, $M_{BOBINA}(\theta)$ può essere riscritta come:

$$M_{BOBINA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)\right] \cdot \cos[h \cdot (\theta - \alpha_{asse})] \tag{4.10}$$

4.4. Forza magnetomotrice di fase valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti

Per ottenere la forza magnetomotrice sullo spessore traferro + magneti dovuta alla singola fase, bisogna fare riferimento alla Figura 20.

In Figura 20 si può osservare che ciascuna fase è composta da 4 bobine, pertanto la forza magnetomotrice di fase $M_{tsj}(\theta)$ è ottenuta come:

$$M_{tsj}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_c} M_{BOBINA,i}(\theta) \tag{4.11}$$

Dove N_c = numero di bobine per fase, mentre j = una delle fasi A, B, C.

Tuttavia, prima di determinare la forza magnetomotrice di fase occorre conoscere quali siano gli avvolgimenti della Figura 20 che rimangono connessi per una data condizione operativa.

Come precedentemente accennato in questo elaborato si analizzano le situazioni in cui:

1. La macchina è sana, quindi tutti gli avvolgimenti in Figura 20 rimangono connessi alla sorgente esterna di tensione;

2. La macchina ha una via parallela disconnessa, siccome in seguito al guasto di una bobina appartenente ad essa si vuole staccare la via parallela in questione dalla sorgente di tensione per limitare il danneggiamento della bobina guasta e delle parti della macchina ad essa limitrofi.
   Per visualizzare tale situazione, si considera il caso di sola via parallela a_1 disconnessa;

3. La macchina ha una via parallela per fase disconnessa, siccome in seguito alla disconnessione della via a_1 si vuole indagare se per migliorare l'operatività della macchina in seguito al guasto convenga di più staccare una via parallela anche delle fasi sane rimanenti per preservare la simmetria dell'avvolgimento trifase.
   Per considerare tale situazione, si considera il caso delle vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse.

4.5. Forza magnetomotrice di fase valutata sullo spessore costituito dal traferro e dalla corona circolare di magneti permanenti: caso di macchina sana

Nel caso della macchina sana, gli avvolgimenti per ciascuna fase operanti nella macchina sono tutti quelli illustrati in Figura 20.

Si considera, ora, la fmm sullo spessore traferro + magneti dovuta a ciascuna fase dello statore.

Per ottenere lo sviluppo in serie di Fourier di ciascuna fmm di fase sullo spessore traferro + magneti bisogna applicare l'eq. (4.11) partendo dalla conoscenza della fmm di bobina sullo spessore traferro + magneti $M_{BOBINA}(\theta)$ e dalla posizione dell'asse magnetico di ciascuna bobina di fase lungo la periferia dello statore.

Le fmm sullo spessore traferro + magneti dovute a ciascuna fase dello statore (i.e. A, B, C) hanno l'andamento riportato in Figura 30.

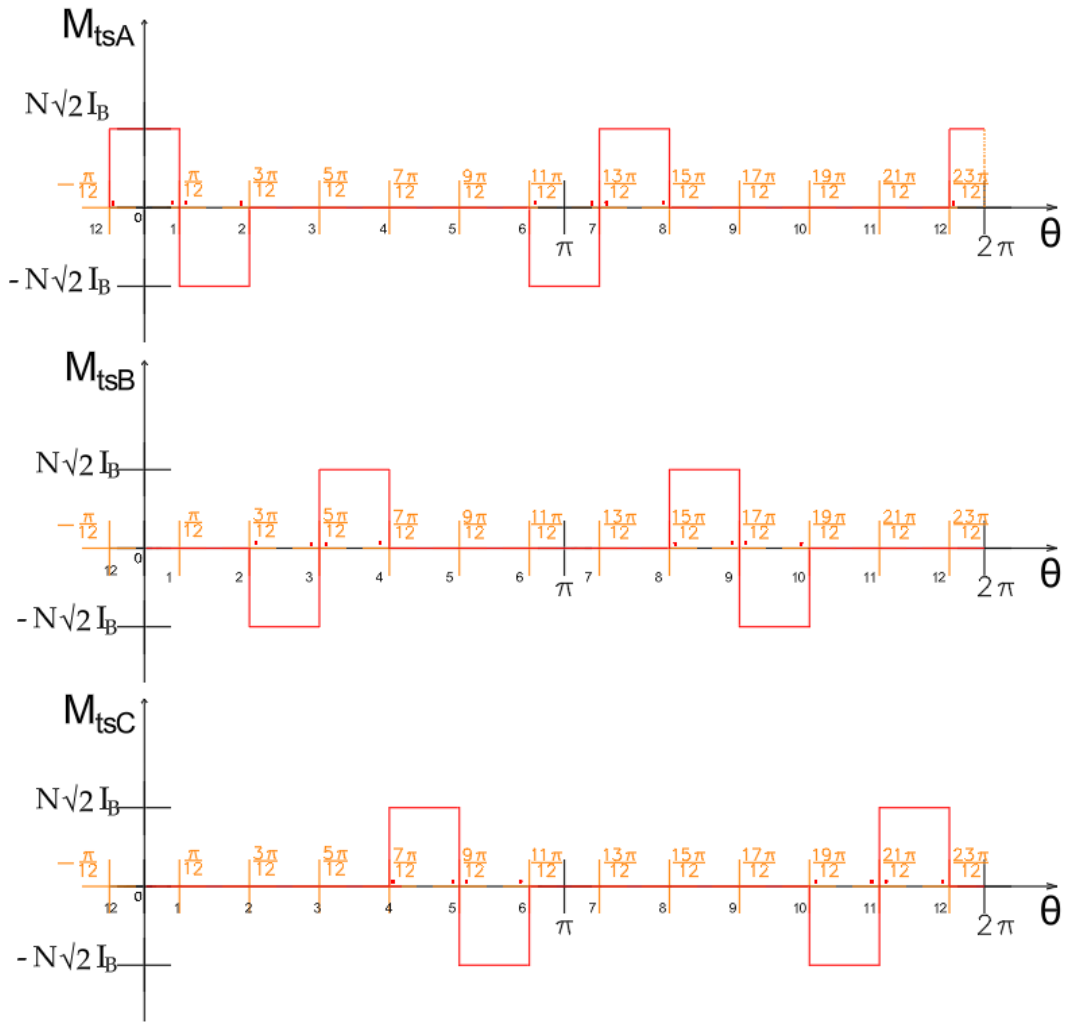


Figura 30: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta a ciascuna fase dello statore rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore (macchina sana)

La fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti per ciascuna fase assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} M_{tsA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot N_c \cdot N_{asc} \cdot \frac{k_{wh}}{h} \cdot cos\left[h\left(\theta - \frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \\ M_{tsB}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot N_c \cdot N_{asc} \cdot \frac{k_{wh}}{h} \cdot cos\left[h\left(\theta - \frac{11}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \\ M_{tsC}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot N_c \cdot N_{asc} \cdot \frac{k_{wh}}{h} \cdot cos\left[h\left(\theta - \frac{7}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \end{cases} \tag{4.12}$$

In cui:

- Fattore di avvolgimento (h-esima armonica): **K_{wh}**
- Fattore di passo: $K_{ph} = sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$
- Fattore di distribuzione: $K_{dh} = sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \cdot sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right)$
- $K_{wh} = K_{ph} \cdot K_{dh} = sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \cdot sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right)$
- Numero di bobine per fase: $N_c = p \cdot q = 4$
- Numero di lati attivi per bobina: $N_{asc} = 2$

In Figura 31 è possibile osservare l'andamento del valore assoluto del fattore di avvolgimento K_{wh} al variare dell'ordine dell'armonica h. L'espressione del fattore di avvolgimento è:

$$K_{wh} = \frac{fmm\ di\ fase}{N_c \cdot N_{asc} \cdot fmm\ di\ lato\ attivo\ di\ bobina} = sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \cdot sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right) \tag{4.13}$$

Per maggiori curiosità sui calcoli eseguiti per ottenere il fattore di avvolgimento si rimanda alla consultazione dell'appendice A.

Il valore assoluto del fattore di avvolgimento K_{wh} ha il seguente andamento in funzione di h:

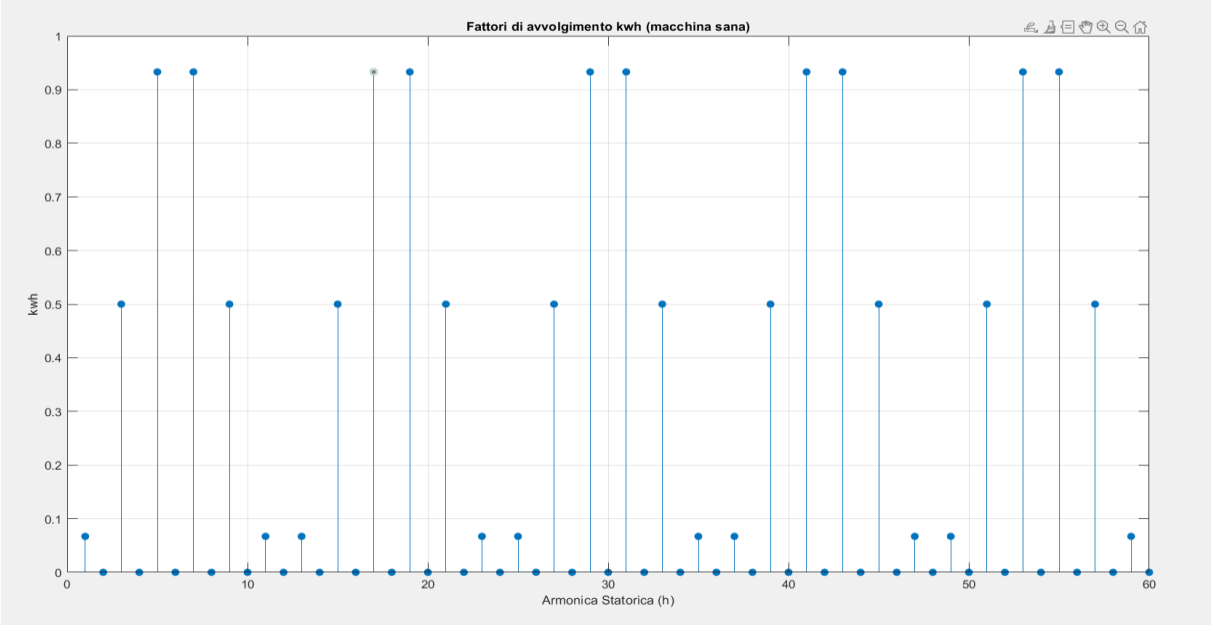


Figura 31: Fattore di avvolgimento K_{wh} al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina sana)

Osservando il grafico di Figura 31 si nota che tutte le armoniche di ordine pari sono nulle, quindi la fmm di ciascuna fase avente entrambe le vie parallele connesse presenta solo armoniche di ordine dispari.

Per completezza si riporta anche il grafico dei fattori di avvolgimento espresso in funzione dell'ordine dell'armonica statorica $h_m = \frac{h}{n_p}$ riferita all'armonica statorica principale $h = n_p$. Le armoniche h_m pari risultano nulle (vedi Figura 32).

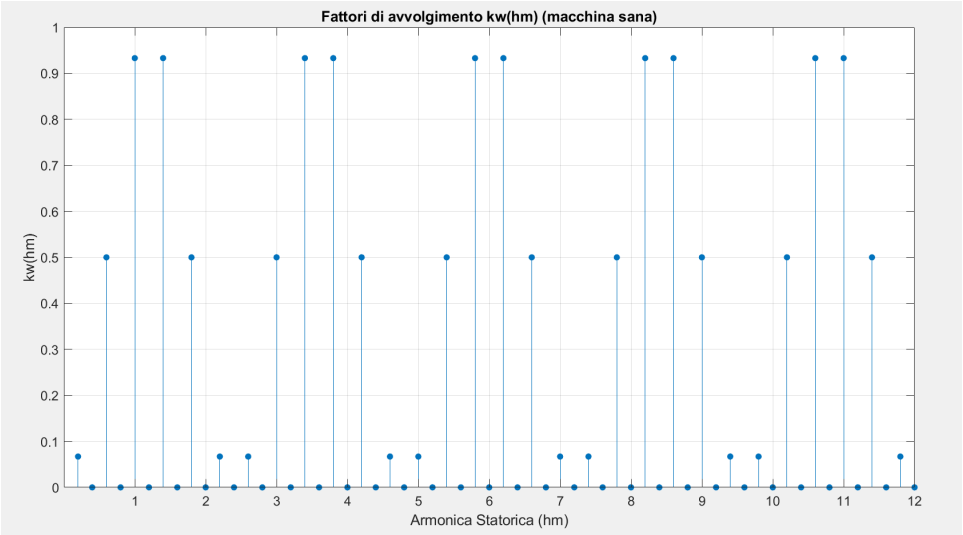


Figura 32: Fattori di avvolgimento riferiti all'armonica principale $h_m = 1$ (macchina sana)

4.6. Forza magnetomotrice di fase sullo spessore traferro + magneti: caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa

Ipotizzando un guasto interspira in una delle bobine della via parallela a_1, il quale successivamente sfocia in un guasto fase-massa, si vuole osservare come cambia la fmm di ciascuna fase sullo spessore traferro + magneti se per arrestare il guasto fase-massa della macchina si decida di scollegare la via parallela a_1.

Nel caso in cui la via parallela a_1 venga disconnessa, la macchina avrebbe 2 bobine rimanenti in funzione per la fase A e 4 bobine operanti per ciascuna delle fasi B e C.

La situazione degli avvolgimenti rimanenti in operazione della macchina in caso di via parallela a_1 scollegata attorno alla periferia della macchina viene rappresentata in Figura 33.

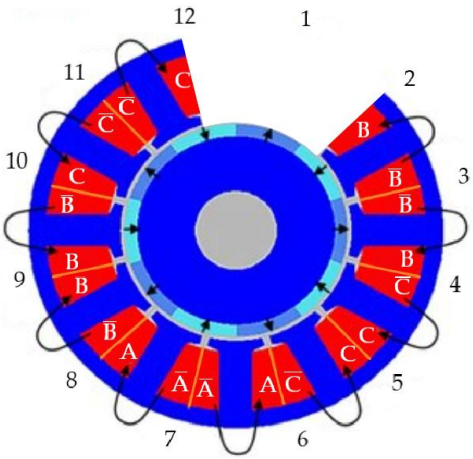


Figura 33: Bobine in funzione per ciascuna fase nel caso di scollegamento della via parallela a_1

Le fmm sullo spessore traferro + magneti dovute a ciascuna fase dello statore (i.e. A, B, C) hanno l'andamento riportato in Figura 34.

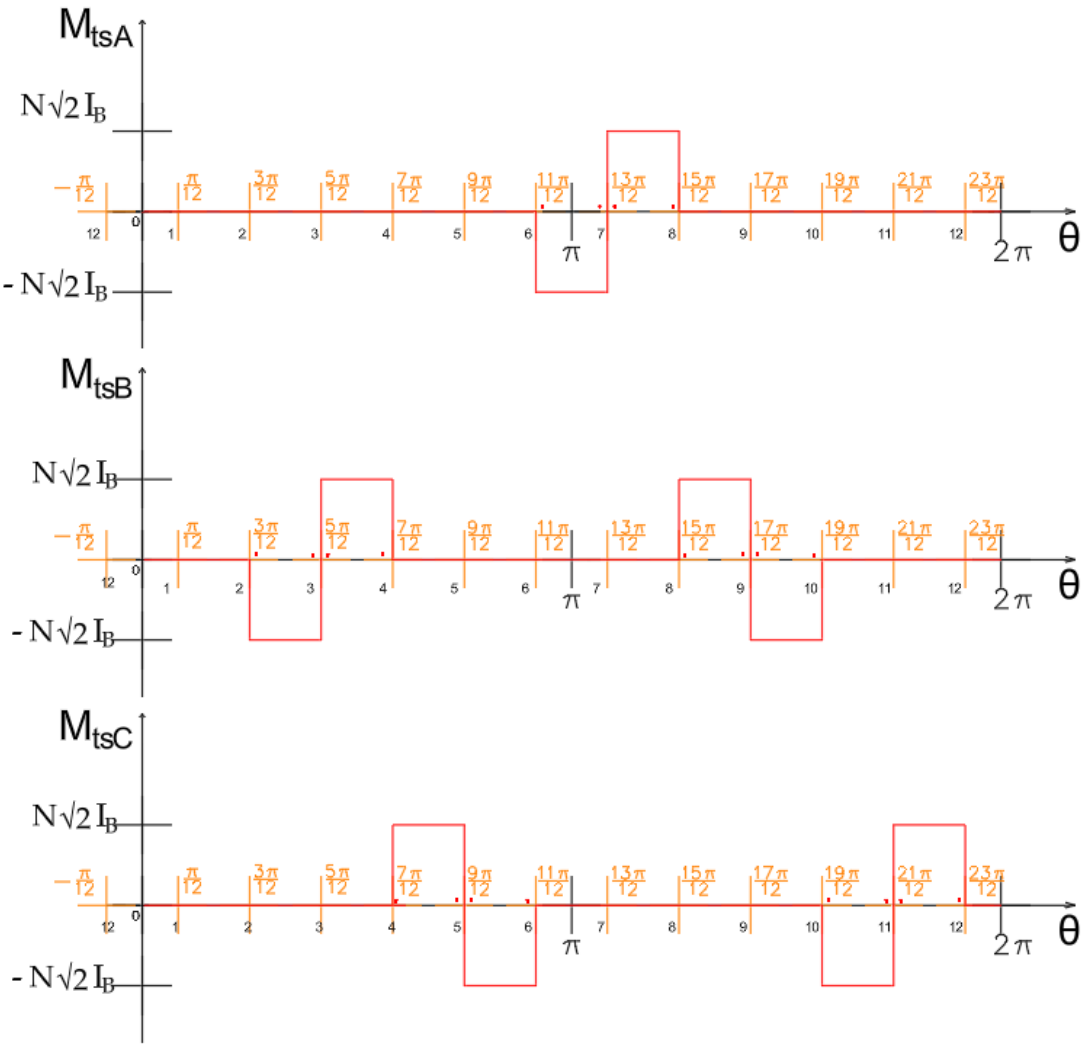


Figura 34: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta a ciascuna fase dello statore rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore (macchina con via a_1 disconnessa)

4.7. Forza magnetomotrice prodotta da una coppia di bobine per fase sullo spessore traferro + magneti

Osservando le semionde rettangolari della fmm prodotta da ciascuna fase sullo spessore traferro + magneti nel caso di macchina con via parallela a_1 scollegata, conviene analizzare la fmm prodotta da ciascuna fase sullo spessore traferro + magneti

in funzione della fmm prodotta da ciascuna coppia di bobine per fase sullo spessore traferro + magneti.

La fmm sullo spessore traferro + magneti prodotta da una coppia di bobine $M_\alpha(\theta')$ è mostrata in Figura 35, in cui viene definita una nuova variabile angolare meccanica θ' relativa a un sistema di riferimento degli assi posizionato in corrispondenza del punto di transizione dalla semionda negativa alla semionda positiva della fmm di una coppia di bobine (in questo caso la coppia di bobine con lato attivo in comune posizionato nella cava 7).

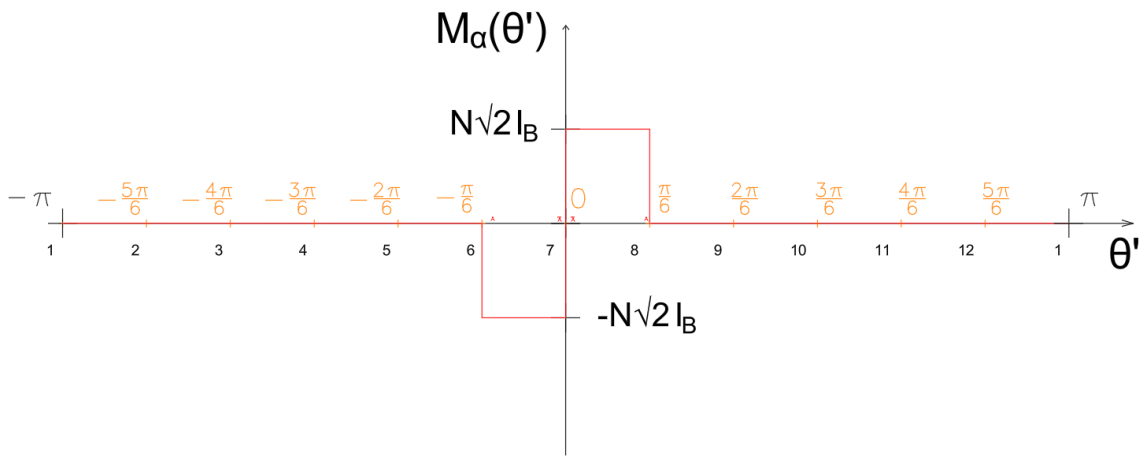


Figura 35: fmm sullo spessore traferro + magneti dovuta ad una coppia di bobine (ipotizzando il punto medio della cava comune alle due bobine centrato nell'origine del sistema di riferimento statorico)

Eseguendo lo sviluppo in serie di Fourier della forma d'onda illustrata in Figura 35, si ottiene che la fmm prodotta da una coppia di bobine $M_\alpha(\theta')$ sullo spessore traferro + magneti ha la seguente espressione:

$$M_\alpha(\theta') = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{\alpha h}}\, sin(h \cdot \theta') \tag{4.14}$$

In cui $\widehat{M_{\alpha h}}$ vale:

$$\widehat{M_{\alpha h}} = \frac{2}{\pi} \cdot N\sqrt{2}\, I_B \cdot \frac{1}{h} \cdot [1 - cos(h \cdot \alpha_u)] \tag{4.15}$$

In termini cosinusoidali, l'eq. (4.14) può essere riscritta come:

$$M_\alpha(\theta') = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{\alpha h}} \cos\left(h \cdot \theta' - \frac{\pi}{2}\right)$$

(4.16)

4.8. Sviluppo in serie di Fourier della forza magnetomotrice di fase sullo spessore traferro + magneti: caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa

Osservando i grafici in Figura 34 si può notare che ciascuno di essi è composto dalla presenza di almeno una forma d'onda della fmm sullo spessore traferro + magneti dovuta ad una coppia di bobine oppure da due forme d'onda di due coppie di bobine di cui una cambiata di segno rispetto a quella illustrata in Figura 35.

Osservando che l'origine del sistema di riferimento solidale con la coppia di bobine centrata nella cava 7 dista di un angolo + $\alpha_{TRANSIZIONE}$ rispetto all'origine del sistema di riferimento solidale con lo statore, la relazione che lega la posizione angolare θ (rispetto al sistema di riferimento fisso sullo statore) alla posizione angolare θ' è:

$$\theta' = \theta - \alpha_{TRANSIZIONE}$$

(4.17)

Pertanto, la fmm sullo spessore traferro + magneti di ciascuna fase j è data dalla seguente formula in cui N_{CBj} = numero di coppie di bobine della fase j che rimangono connesse, mentre $\alpha_{TRANSIZIONE}$ = posizione angolare lungo la periferia della transizione da polo Sud a polo Nord della coppia di bobine i:

$$M_{tsj}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_{CBj}} M_{\alpha,i}(\theta - \alpha_{TRANSIZIONE})$$

(4.18)

Con riferimento all'eq. (4.18) si ricava l'espressione delle fmm sullo spessore traferro + magneti di ciascuna fase nel caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa.

Detto ciò, la fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti per ciascuna fase assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} M_{tsA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{\alpha h}} \cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ M_{tsB}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} M_{fh} \cdot \cos\left[h\left(\theta - \frac{11}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \\ M_{tsC}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} M_{fh} \cdot \cos\left[h\left(\theta - \frac{7}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \end{cases} \tag{4.19}$$

In cui, all' h-esima armonica:

- L'ampiezza della fmm della fase guasta è $\widehat{M_{\alpha h}} = \frac{2}{\pi} \cdot N\sqrt{2}\, I_B \cdot \frac{1}{h} \cdot [1 - \cos(h \cdot \alpha_u)]$
- L'ampiezza della fmm di ciascuna fase sana è $M_{fh} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot N_c \cdot N_{asc} \cdot \frac{k_{wh}}{h}$
- Il fattore di avvolgimento per ciascuna fase sana è K_{wh}

$$K_{wh} = K_{ph} \cdot K_{dh} = \sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \cdot \sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right)$$

- Il fattore di avvolgimento per la fase guasta è $K_{wh\alpha}$

$$K_{wh\alpha} = K_{ph\alpha} \cdot K_{dh\alpha} = \sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$$

4.9. Forza magnetomotrice di fase sullo spessore traferro + magneti: caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse

Ipotizzando un guasto interspira in una delle bobine della via parallela a_1, il quale successivamente sfocia in un guasto fase-massa, si vuole osservare come cambia la fmm di ciascuna fase sullo spessore traferro + magneti se per arrestare il guasto fase-massa della macchina, si decida di scollegare oltre alla via parallela guasta a_1 anche le vie parallele b_2 e c_1 al fine di preservare la simmetria dell'avvolgimento trifase.

Nel caso in cui vengano scollegate le vie parallele a_1, b_2, c_1, la macchina avrebbe 2 bobine rimanenti in funzione per ciascuna fase A, B, C.

La situazione degli avvolgimenti rimanenti in funzione della macchina in caso di vie parallele a_1, b_2, c_1 scollegate attorno alla periferia della macchina viene rappresentata in Figura 36.

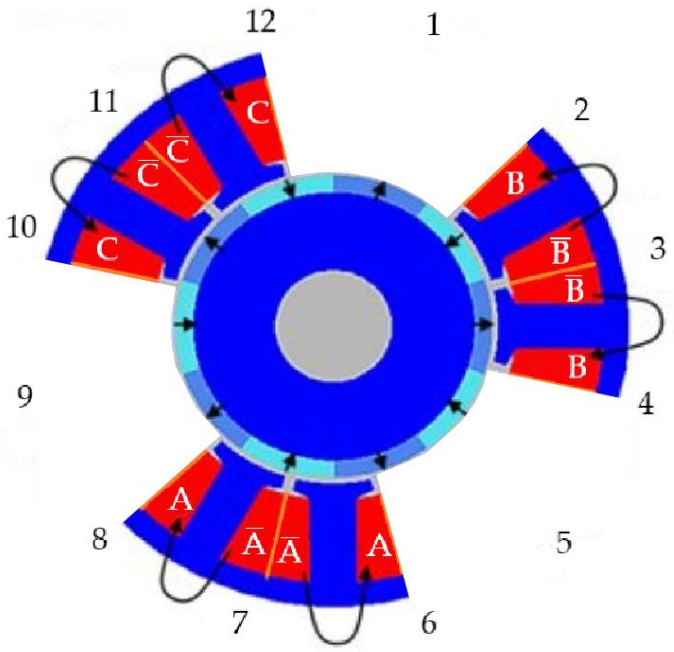


Figura 36: Bobine in funzione per ciascuna fase nel caso di disconnessione delle vie parallele a_1, b_2, c_1

Le fmm sullo spessore traferro + magneti dovute a ciascuna fase dello statore (i.e. A, B, C) hanno l'andamento riportato nei grafici di Figura 37.

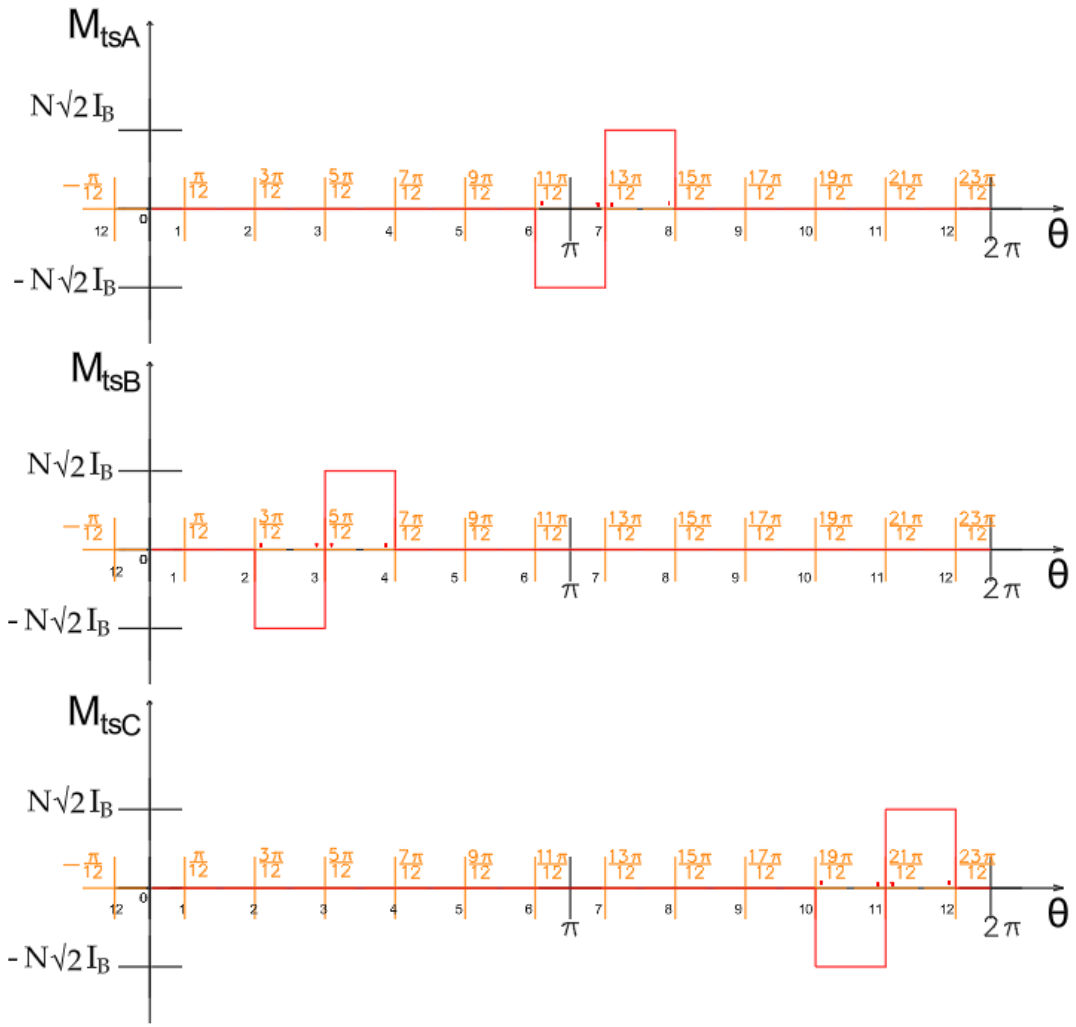


Figura 37: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta a ciascuna fase dello statore rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

Detto ciò, la fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti per ciascuna fase assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} M_{tsA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{\alpha h}} \cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ M_{tsB}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{\alpha h}} \cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} + \frac{2}{3}\frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ M_{tsC}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{\alpha h}} \cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{2}{3}\frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \tag{4.20}$$

In cui $\widehat{M_{\alpha h}}$ = ampiezza della fmm di una coppia di bobine sullo spessore traferro + magneti (h-esima armonica).

Volendo, invece, evidenziare la dipendenza di ciascuna fmm di fase dal fattore di avvolgimento in seguito alla disconnessione di una via parallela per fase $k_{wh\alpha}$, si ottiene che la fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti per ciascuna fase assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} M_{tsA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot N_{cd} \cdot N_{asc} \cdot \frac{k_{wh\alpha}}{h} \cdot \cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ M_{tsB}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot N_{cd} \cdot N_{asc} \cdot \frac{k_{wh\alpha}}{h} \cdot \cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} + \frac{2}{3}\frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ M_{tsC}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot N_{cd} \cdot N_{asc} \cdot \frac{k_{wh\alpha}}{h} \cdot \cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{2}{3}\frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \tag{4.21}$$

In cui:

- Fattore di avvolgimento (h-esima armonica): $K_{wh\alpha} = K_{ph\alpha} \cdot K_{dh\alpha} = \sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$
- Fattore di passo: $K_{ph\alpha} = \sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$
- Fattore di distribuzione: $K_{dh\alpha} = \sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$
- Numero di bobine per fase dopo la disconnessione delle vie a_1, b_2, c_1: $N_{cd} = \frac{p \cdot q}{2} = 2$
- Numero di lati attivi per bobina: $N_{asc} = 2$

In Figura 38 è possibile osservare l'andamento del valore assoluto del fattore di avvolgimento K_{wh} al variare dell'ordine dell'armonica h. L'espressione del fattore di avvolgimento è:

$$K_{wh} = \frac{fmm\ di\ fase}{N_{cd} \cdot N_{asc} \cdot fmm\ di\ lato\ attivo\ di\ bobina} = sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \tag{4.22}$$

Per maggiori curiosità sui calcoli eseguiti per ottenere il fattore di avvolgimento si rimanda alla consultazione dell'appendice A.

Il valore assoluto del fattore di avvolgimento K_{wh} ha il seguente andamento in funzione di h:

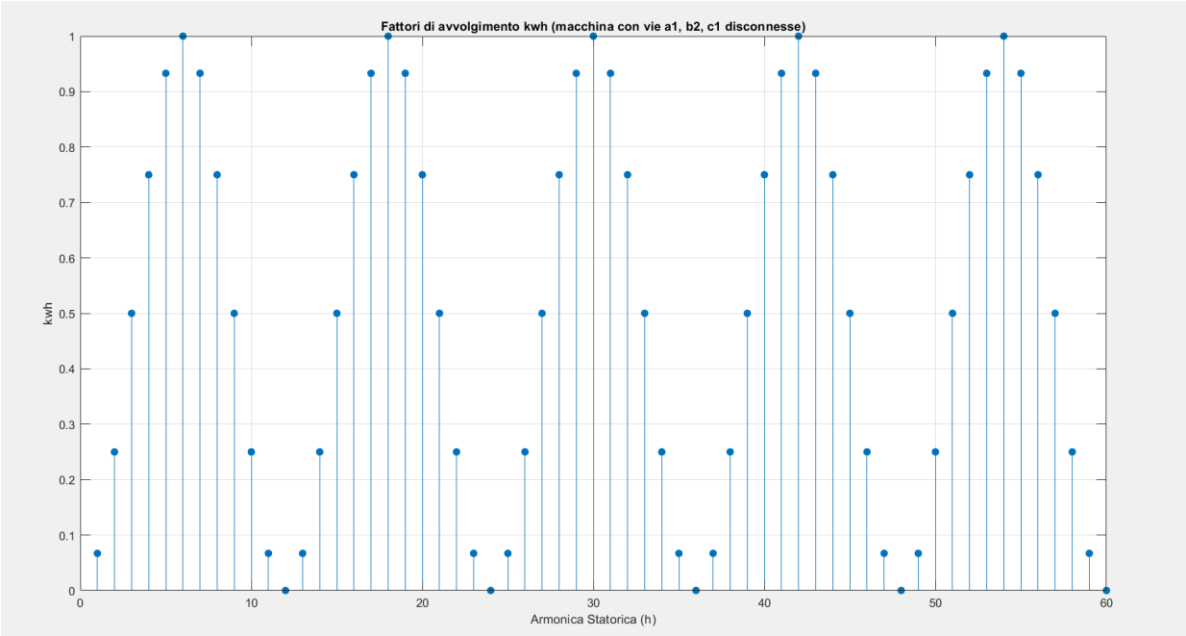


Figura 38: Fattore di avvolgimento K_{wh} al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 scollegate)

Osservando il grafico di Figura 38 si nota che tutte le armoniche di ordine dispari presenti nel caso del fattore di avvolgimento di ciascuna fase con entrambe le vie parallele connesse continuano ad esistere con lo stesso valore anche nel caso in cui la fase considerata abbia solo una via parallela connessa, tuttavia disconnettendo una via parallela si nota che sono presenti anche le armoniche di ordine pari e conseguentemente il contenuto armonico della fmm di fase aumenta.

Per completezza si riporta anche il grafico dei fattori di avvolgimento espresso in funzione dell'ordine dell'armonica statorica $h_m = \frac{h}{n_p}$ riferita all'armonica statorica principale $h = n_p$.

Il fattore di avvolgimento all'armonica principale $h_m = 1$ risulta inalterato rispetto al caso di macchina sana, ma i fattori di avvolgimento per le armoniche h_m pari questa volta risultano generalmente non nulli (vedi Figura 39).

Figura 39: Fattori di avvolgimento riferiti all'armonica principale $h_m = 1$ (caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 scollegate)

5 Campi di forza magnetomotrice generati dallo statore sullo spessore traferro + magneti

In questo capitolo vengono ottenute le espressioni analitiche dei campi rotanti di forza magnetomotrice sullo spessore traferro + magneti prodotti dall'azione contemporanea delle correnti che scorrono nei tre avvolgimenti di fase.

Lo sviluppo in serie di Fourier dei campi rotanti di fmm al traferro viene analizzato nei tre casi considerati sinora, ovvero: 1) macchina sana, 2) macchina con via parallela a_1 disconnessa, 3) macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse.

Si precisa che per ciascun caso verranno definite due fmm statoriche rotanti:

- Il campo rotante diretto $M_{ts}(\theta,t)^+$ è quello che ruota nello stesso senso in cui l'angolo meccanico θ viene misurato rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore;
- Il campo rotante inverso $M_{ts}(\theta,t)^-$ è quello che ruota in senso contrario rispetto a quello con cui l'angolo meccanico θ viene misurato rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore;

Per maggiore chiarezza visiva, si può fare riferimento alla Figura 27 in cui viene mostrato il senso in cui l'angolo meccanico θ viene misurato come positivo.

La metodologia adottata per ottenere l'espressione dei campi rotanti per ciascuna condizione operativa della macchina è la seguente:

1. Si definisce la terna di correnti di fase $i_a(t)$, $i_b(t)$, $i_c(t)$ con cui alimentare la macchina. Per comodità si sceglie una terna di correnti diretta;
2. A partire dalle fmm di fase $M_{tsA}(\theta)$, $M_{tsB}(\theta)$, $M_{tsC}(\theta)$ statiche nello spazio e nel tempo, si sostituisce al loro interno al posto della corrente efficace di bobina I_B la corrente sinusoidale variabile nel tempo $i_B(t)$ che realmente scorre nella bobina il cui valore efficace è sempre I_B.
   Per le fasi sane si ottiene che $I_B = \frac{I}{2}$ in cui I è la corrente efficace di fase, invece per le fasi che hanno una via parallela disconnessa $I_B = I$;
3. Dopo tali sostituzioni si ottengono le espressioni delle fmm di fase $M_{tsA}(\theta,t)$, $M_{tsB}(\theta,t)$, $M_{tsC}(\theta,t)$ statiche nello spazio ma variabili nel tempo;

4. Per ottenere la fmm sullo spessore traferro + magneti dovuta all'azione contemporanea delle fmm di ciascuna fase $M_{ts}(\theta, t)$ statica nello spazio ma variabile nel tempo, si sommano le fmm di fase sullo spessore traferro + magneti $M_{tsA}(\theta, t)$, $M_{tsB}(\theta, t)$, $M_{tsC}(\theta, t)$;
5. La fmm $M_{ts}(\theta, t)$ statica nello spazio ma variabile nel tempo può essere vista come la somma di due campi controrotanti $M_{ts}(\theta, t)^{+}$ e $M_{ts}(\theta, t)^{-}$ i quali hanno ampiezza costante nel tempo ma sono rotanti nello spazio.
   Utilizzando relazioni trigonometriche note, si perviene all'espressione del campo rotante diretto $M_{ts}(\theta, t)^{+}$ e del campo rotante inverso $M_{ts}(\theta, t)^{-}$.

5.1. Campi rotanti di fmm da statore: caso di macchina sana

Partendo dalle eq. (4.12), ed assumendo la macchina alimentata da una terna di correnti equilibrate, si può ottenere lo sviluppo in serie di Fourier dei campi rotanti di fmm al traferro nel caso della macchina sana.

Assumendo che la macchina sia alimentata per ciascuna fase dalla seguente terna di correnti equilibrate:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{2} I \cos(\omega\, t) \\ i_b(t) &= \sqrt{2} I \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ i_c(t) &= \sqrt{2} I \cos\left(\omega\, t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

La fmm al traferro $M_{ts}(\theta, t)$ dovuta all'azione contemporanea delle fmm al traferro delle tre fasi, la quale è statica nello spazio ma variabile in ampiezza nel tempo, è data dalla formula seguente:

$$M_{ts}(\theta, t) = M_{tsA}(\theta, t) + M_{tsB}(\theta, t) + M_{tsC}(\theta, t) \tag{5.2}$$

In cui ciascuno dei termini dell'eq. (5.2) può essere ottenuto a partire dalle espressioni delle eq. (4.12) come:

$$
\begin{aligned}
M_{tsA}(\theta,t) &= \frac{M_{tsA}(\theta)}{\sqrt{2}I}\cdot i_a(t)\\
M_{tsB}(\theta,t) &= \frac{M_{tsB}(\theta)}{\sqrt{2}I}\cdot i_b(t)\\
M_{tsC}(\theta,t) &= \frac{M_{tsC}(\theta)}{\sqrt{2}I}\cdot i_c(t)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Pertanto, l'espressione di $M_{ts}(\theta,t)$ può essere ulteriormente sviluppata ottenendo i seguenti risultati:

$$
\begin{aligned}
M_{ts}(\theta,t) = \sum_{h=1}^{+\infty} M_{fh}\Big\{ & cos\left[h\left(\theta-\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)+\pi\right]\cos(\omega t)\\
&+ cos\left[h\left(\theta-\frac{11}{3}\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)+\pi\right]\cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\\
&+ cos\left[h\left(\theta-\frac{7}{3}\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)+\pi\right]\cos\left(\omega t-\frac{4}{3}\pi\right)\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Ma, siccome $cos(x)\cdot cos(y) = \frac{1}{2}\cdot[cos(x+y) + cos(x-y)]$, l'eq. (5.4) si può riscrivere come:

$$
\begin{aligned}
M_{ts}(\theta,t) = \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{M_{fh}}{2}\Big\{ & cos\left[\omega t + h\left(\theta-\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)+\pi\right] + cos\left[\omega t - h\left(\theta-\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)-\pi\right]\\
&+ cos\left[\omega t + h\left(\theta-\frac{11}{3}\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)+\pi - \frac{2}{3}\pi\right]\\
&+ cos\left[\omega t - h\left(\theta-\frac{11}{3}\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)-\pi - \frac{2}{3}\pi\right]\\
&+ cos\left[\omega t + h\left(\theta-\frac{7}{3}\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)+\pi - \frac{4}{3}\pi\right]\\
&+ cos\left[\omega t - h\left(\theta-\frac{7}{3}\frac{\pi}{m}-\frac{\alpha_u}{2}\right)-\pi - \frac{4}{3}\pi\right]\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Considerando i coseni del tipo $\omega t + h\theta$ e valutandoli come fasori per $\omega t + h\theta = 0$, la loro somma restituisce come risultato il fasore $\bar{y}$ definito come segue:

$$\bar{y} = \left\{2cos\left[h\left(\frac{2}{3}\frac{2\pi}{m}\right) - \frac{2}{3}\pi\right] + 1\right\} \angle \left[-h\left(\frac{\pi}{m} + \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \tag{5.6}$$

Considerando i coseni del tipo $\omega t - h\theta$ e valutandoli come fasori per $\omega t - h\theta = 0$, la loro somma restituisce come risultato il fasore $\bar{m}$ definito come segue:

$$\bar{m} = \left\{2cos\left[h\left(\frac{2}{3}\frac{2\pi}{m}\right) + \frac{2}{3}\pi\right] + 1\right\} \angle \left[+h\left(\frac{\pi}{m} + \frac{\alpha_u}{2}\right) - \pi\right] \tag{5.7}$$

Pertanto, si ottiene che la fmm al traferro $M_{ts}(\theta, t)$ dovuta all'azione contemporanea al traferro delle tre fasi può essere visualizzata come il risultato dell'azione contemporanea di due campi di fmm al traferro controrotanti: il campo rotante diretto ${M_{ts}}^{+}(\theta, t)$ ed il campo rotante inverso ${M_{ts}}^{-}(\theta, t)$.

Il campo rotante diretto ${M_{ts}}^{+}(\theta, t)$ è esprimibile come:

$${M_{ts}}^{+}(\theta, t) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{|\bar{m}|}{2} \cdot M_{fh} \cdot cos[\omega t - h\theta + (\angle \bar{m})] \tag{5.8}$$

Invece, il campo rotante inverso ${M_{ts}}^{-}(\theta, t)$ è esprimibile come:

$${M_{ts}}^{-}(\theta, t) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{|\bar{y}|}{2} \cdot M_{fh} \cdot cos[\omega t + h\theta + (\angle \bar{y})] \tag{5.9}$$

In cui:

- M_{fh} = ampiezza della fmm di fase (h-esima armonica)
- $\frac{|\bar{m}|}{2} = \begin{cases} 0 \; per \; h \neq 2 + 3K \\ \frac{3}{2} \; per \; h = 2 + 3K \end{cases}$
- $\frac{|\bar{y}|}{2} = \begin{cases} 0 \; per \; h \neq 1 + 3K \\ \frac{3}{2} \; per \; h = 1 + 3K \end{cases}$

- K = 0, 1, 2, 3, …..
- $M_{tsh}{}^{+}$ = Ampiezza della fmm rotante diretta (h-esima armonica) = $\frac{|\bar{m}|}{2} \cdot M_{fh}$
- $M_{tsh}{}^{-}$ = Ampiezza della fmm rotante inversa (h-esima armonica) = $\frac{|\bar{y}|}{2} \cdot M_{fh}$

In Figura 40 è possibile osservare l'andamento dell'ampiezza del campo rotante diretto $M_{tsh}{}^{+}$ in funzione dell'ordine dell'armonica statorica h.

Si precisa che tale grafico riporta in ordinata il valore assoluto di $M_{tsh}{}^{+}$ (considerando come $M_{tsh}{}^{+}$ è stato finora definito).

L'armonica di ordine $h = n_p = 5$ risulta essere la più elevata poiché il costruttore della macchina ha scelto saggiamente di disporre gli avvolgimenti statorici in modo tale da massimizzare questa armonica di fmm al fine di massimizzare l'ampiezza dell'armonica di coppia elettromagnetica di contributo maggiore nella coppia elettromagnetica totale (come si vedrà nei capitoli successivi).

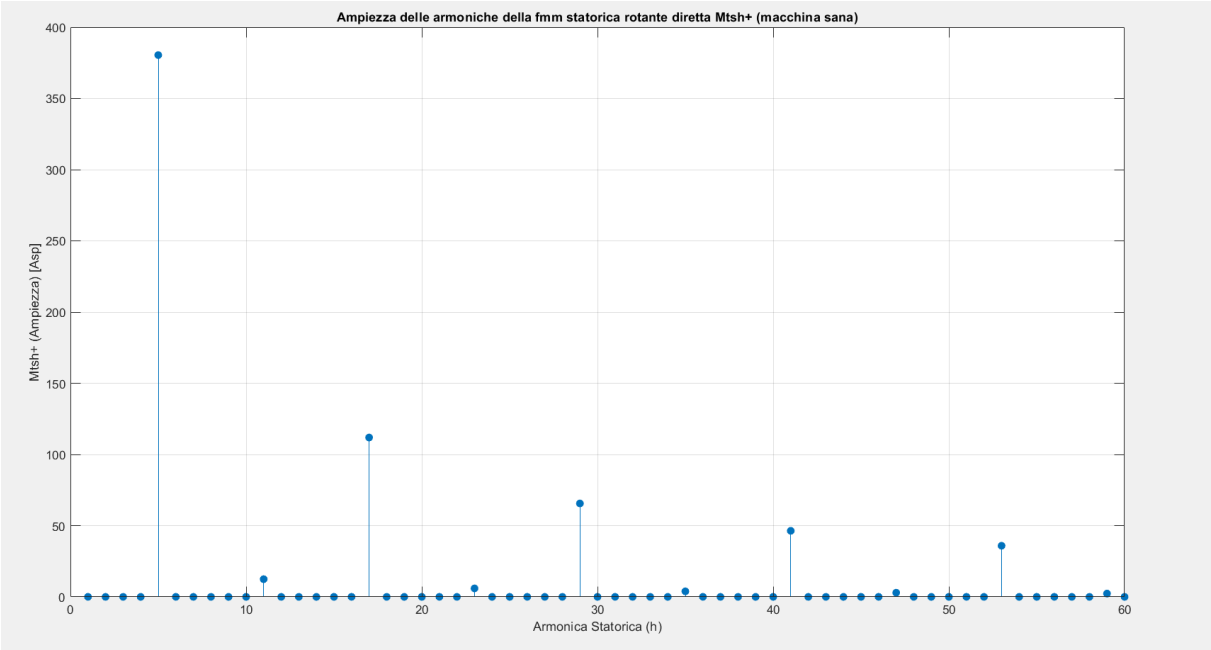


Figura 40: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $M_{tsh}{}^{+}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina sana)

In Figura 41 è possibile osservare l'andamento dell'ampiezza del campo rotante inverso M_{tsh}^{-} in funzione dell'ordine dell'armonica statorica h.

Si precisa che tale grafico riporta in ordinata il valore assoluto di M_{tsh}^{-} (considerando come M_{tsh}^{-} è stato finora definito).

In questo grafico, l'armonica di fmm di ampiezza maggiore è quella di ordine $h = 7$ poiché il fattore di avvolgimento a macchina sana e a bassi indici armonici è massimo a pari merito per le armoniche di ordine $h = 5$ e $h = 7$ e la fmm di fase M_{fh} decade come 1/h.

Per questo motivo l'armonica $h = 7$ del campo rotante inverso è inferiore a quella del campo rotante diretto.

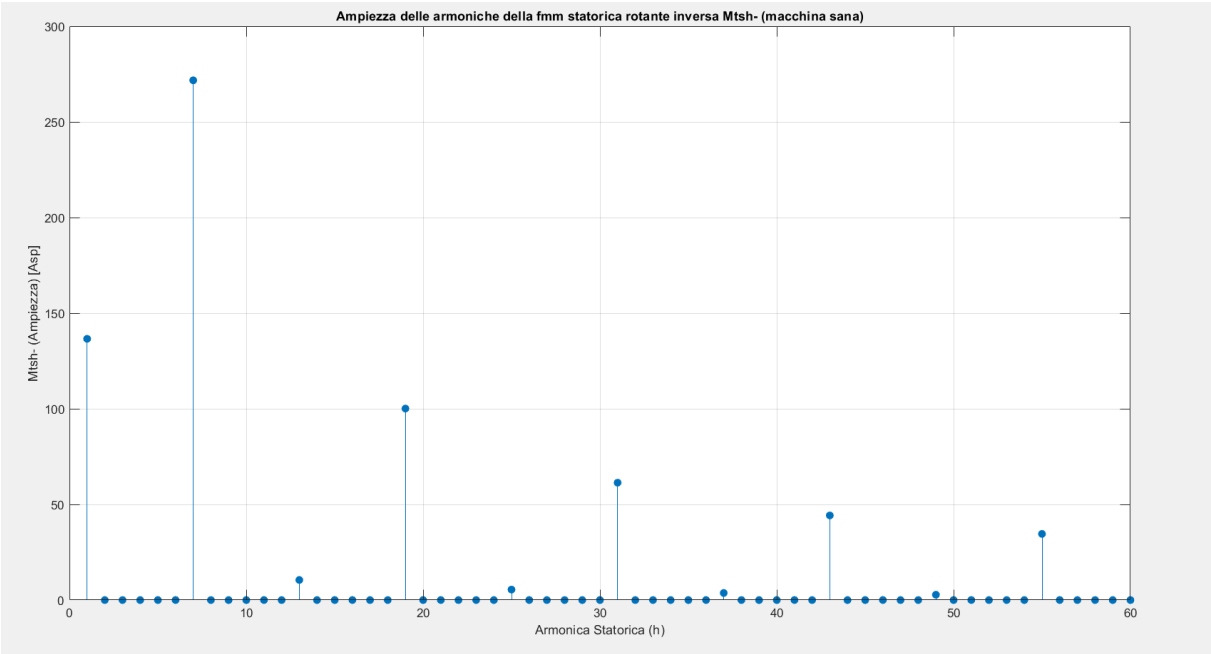


Figura 41: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa M_{tsh}^{-} sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina sana)

Per completezza, nel seguito si riportano anche i grafici delle ampiezze delle armoniche delle fmm statoriche rotanti diretta e inversa sullo spessore traferro + magneti, espressi in funzione dell'ordine dell'armonica statorica $h_m = \frac{h}{n_p}$ riferita all'armonica statorica principale $h = n_p$.

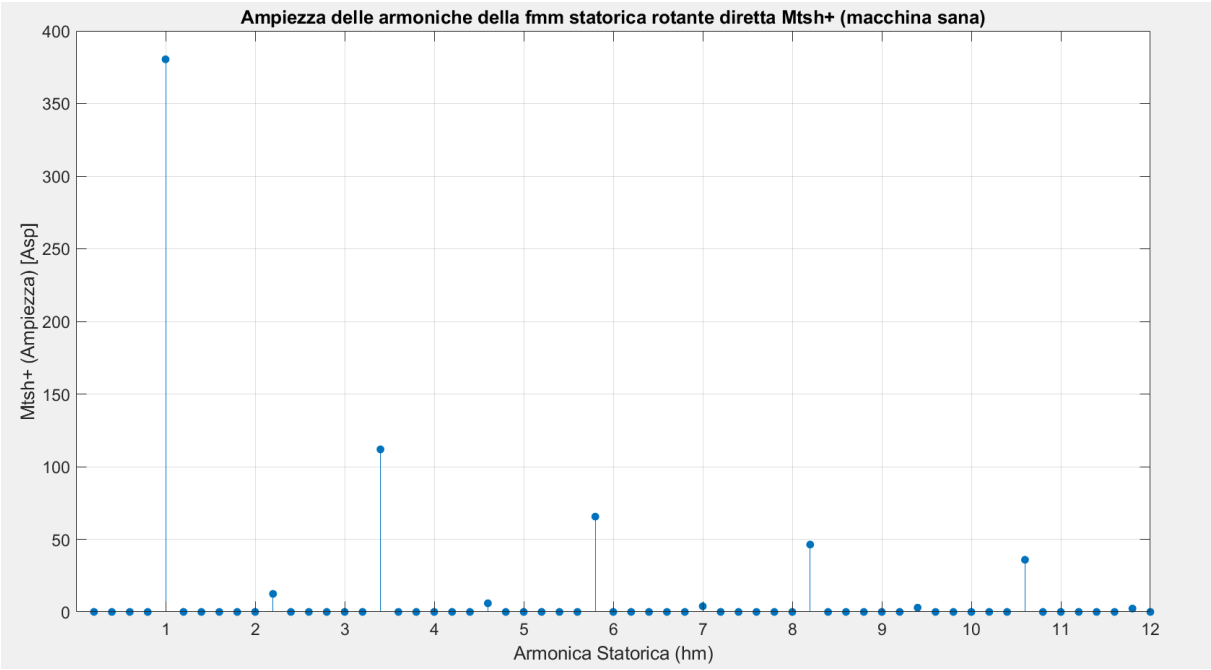


Figura 42: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta ${M_{tsh}}^{+}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h_m (caso di macchina sana)

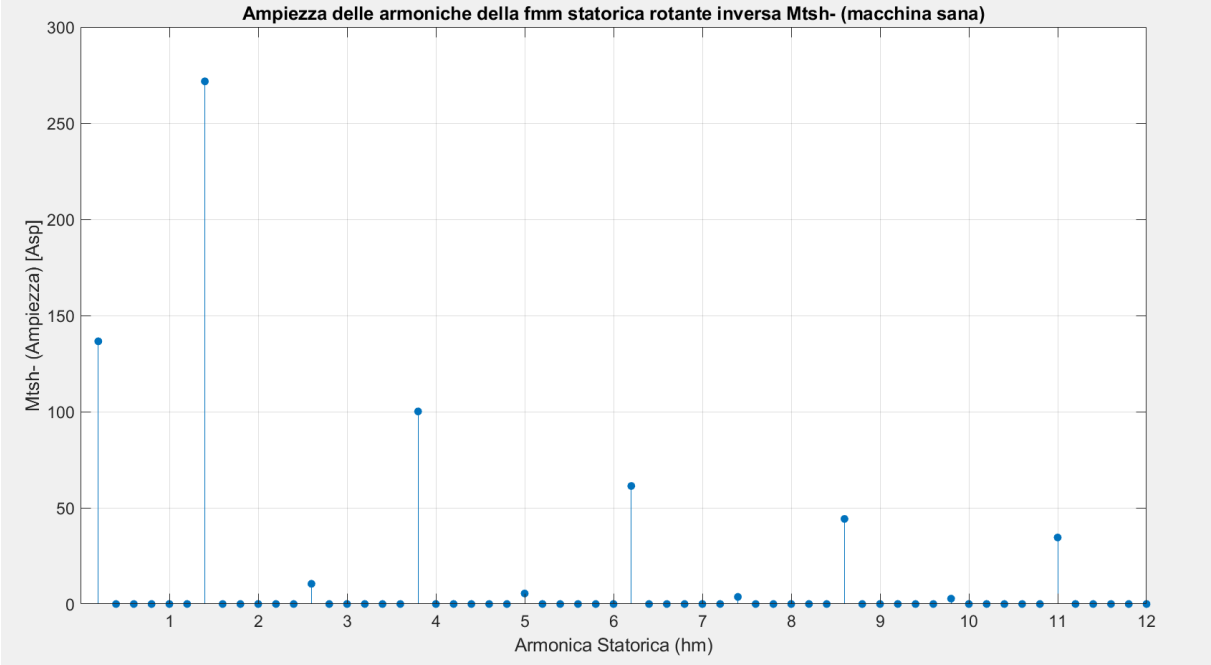


Figura 43: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa ${M_{tsh}}^{-}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h_m (caso di macchina sana)

5.2. Campi rotanti di fmm da statore: caso di macchina con via parallela a1 disconnessa

Siccome la macchina SPMSM analizzata è sprovvista del conduttore neutro, anche disconnettendo la via parallela a1 bisogna assicurare che la somma delle tre correnti di fase nel centro stella della macchina sia uguale a zero.

Assumendo che la macchina sia alimentata da una terna di correnti equilibrata, con corrente efficace in ciascuna fase $I' = \frac{I}{2}$ dimezzata per non eccedere la corrente nominale di bobina nella fase A in seguito alla disconnessione della via parallela a1, si può ottenere lo sviluppo in serie di Fourier dei campi rotanti di fmm sullo spessore traferro + magneti nel caso della macchina con via parallela a1 disconnessa.

La fmm $M_{ts}(\theta, t)$ dovuta a tutte le tre fasi vale:

$$M_{ts}(\theta, t) = M_{tsA}(\theta, t) + M_{tsB}(\theta, t) + M_{tsC}(\theta, t) \tag{5.10}$$

In cui ciascuno dei termini dell'eq. (5.10) può essere ottenuto come:

$$\begin{aligned} M_{tsA}(\theta, t) &= \frac{M_{tsA}(\theta)}{\sqrt{2}I'} \cdot i_a'(t) \\ M_{tsB}(\theta, t) &= \frac{M_{tsB}(\theta)}{\sqrt{2}I'} \cdot i_b'(t) \\ M_{tsC}(\theta, t) &= \frac{M_{tsC}(\theta)}{\sqrt{2}I'} \cdot i_c'(t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

In cui si considera che $M_{tsA}(\theta)$, $M_{tsB}(\theta)$, $M_{tsC}(\theta)$ siano causate dalla corrente I'. Pertanto, l'espressione di $M_{ts}(\theta, t)$ può essere ulteriormente sviluppata ottenendo i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} M_{ts}(\theta, t) = \sum_{h=1}^{+\infty} \Bigg(& \widehat{M}_{\alpha h} \cos\left[h\left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \cos(\omega t) \\ & + M_{fh} \left\{ \cos\left[h\left(\theta - \frac{11}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \right. \\ & \left. + \cos\left[h\left(\theta - \frac{7}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \right\} \Bigg) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ma, siccome $cos(x) \cdot cos(y) = \frac{1}{2} \cdot [cos(x+y) + cos(x-y)]$, l'eq. (5.12) si può riscrivere come:

$$M_{ts}(\theta,t) = \sum_{h=1}^{+\infty} \left(\frac{\widehat{M}_{\alpha h}}{2} cos\left[\omega t + h\left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \right.$$
$$+ \frac{\widehat{M}_{\alpha h}}{2} cos\left[\omega t - h\left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$
$$+ \frac{M_{fh}}{2} \cdot cos\left[\omega t + h\left(\theta - \frac{11}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi - \frac{2}{3}\pi\right]$$
$$+ \frac{M_{fh}}{2} \cdot cos\left[\omega t - h\left(\theta - \frac{11}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \pi - \frac{2}{3}\pi\right]$$
$$+ \frac{M_{fh}}{2} \cdot cos\left[\omega t + h\left(\theta - \frac{7}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi - \frac{4}{3}\pi\right]$$
$$\left. + \frac{M_{fh}}{2} \cdot cos\left[\omega t - h\left(\theta - \frac{7}{3}\frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \pi - \frac{4}{3}\pi\right] \right)$$

(5.13)

Considerando i coseni del tipo $\omega t + h\theta$ e valutandoli come fasori per $\omega t + h\theta = 0$, la loro somma restituisce come risultato il fasore $\bar{e}$ definito come segue:

$$\bar{e} = \left\{ M_{fh} \cdot cos\left[h\left(\frac{2}{3}\frac{2\pi}{m}\right) - \frac{2}{3}\pi\right] + \frac{\widehat{M}_{\alpha h}}{2} \right\} \angle \left[-h\left(\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

(5.14)

Considerando i coseni del tipo $\omega t - h\theta$ e valutandoli come fasori per $\omega t - h\theta = 0$, la loro somma restituisce come risultato il fasore $\bar{d}$ definito come segue:

$$\bar{d} = \left\{ M_{fh} \cdot cos\left[h\left(\frac{2}{3}\frac{2\pi}{m}\right) + \frac{2}{3}\pi\right] + \frac{\widehat{M}_{\alpha h}}{2} \right\} \angle \left[+h\left(\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha_u}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

(5.15)

Il campo rotante diretto $M_{ts}{}^{+}(\theta,t)$ è esprimibile come:

$$M_{ts}{}^{+}(\theta,t) = \sum_{h=1}^{+\infty} |\bar{d}| \cdot cos[\omega t - h\theta + (\angle \bar{d})]$$

(5.16)

Invece, il campo rotante inverso $M_{ts}{}^{-}(\theta,t)$ è esprimibile come:

$$M_{ts}^{-}(\theta, t) = \sum_{h=1}^{+\infty} |\bar{e}| \cdot cos[\omega t + h\theta + (\angle \bar{e})] \tag{5.17}$$

In Figura 44 è possibile osservare l'andamento dell'ampiezza del campo rotante diretto $M_{tsh}{}^{+}$ in funzione dell'ordine dell'armonica statorica h.

Si precisa che tale grafico riporta in ordinata il valore assoluto di $M_{tsh}{}^{+}$ (considerando come $M_{tsh}{}^{+}$ è stato finora definito).

Anche in questo caso l'armonica di fmm di ampiezza maggiore è $h = n_p = 5$, tuttavia l'ampiezza di tale armonica risulta sensibilmente ridotta poiché parte degli avvolgimenti disponibili nella macchina è stata disconnessa e anche perché la corrente nelle fasi della macchina è stata fortemente ridotta.

Complessivamente, si osserva un notevole aumento del contenuto armonico del campo rotante diretto in caso di via a_1 disconnessa rispetto al caso della macchina sana anche se le ampiezze delle armoniche risultano ridimensionate per via degli avvolgimenti disponibili e della corrente che in essi scorre nel caso di via a_1 disconnessa.

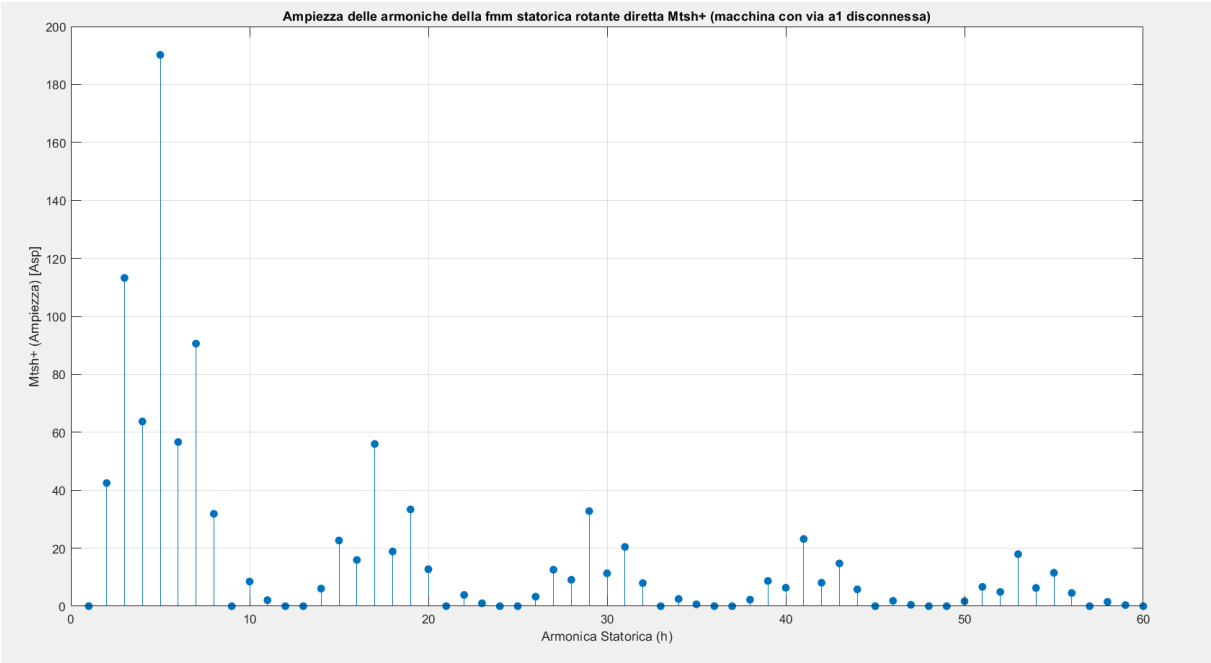


Figura 44: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $M_{tsh}{}^{+}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con via a_1 disconnessa)

In Figura 45 è possibile osservare l'andamento dell'ampiezza del campo rotante inverso M_{tsh}^{-} in funzione dell'ordine dell'armonica statorica h.

Si precisa che tale grafico riporta in ordinata il valore assoluto di M_{tsh}^{-} (considerando come M_{tsh}^{-} è stato finora definito).

Osservando tale grafico si nota che il contenuto armonico del campo rotante inverso a macchina con via a_1 disconnessa risulta sensibilmente aumentato rispetto al caso di macchina sana anche se le ampiezze delle armoniche risultano ridimensionate per via degli avvolgimenti disponibili e della corrente che in essi scorre nel caso di via a_1 disconnessa.

Tuttavia, la differenza rispetto al caso di macchina sana è che l'armonica di fmm di ampiezza maggiore è $h = 3$ al posto di $h = 7$.

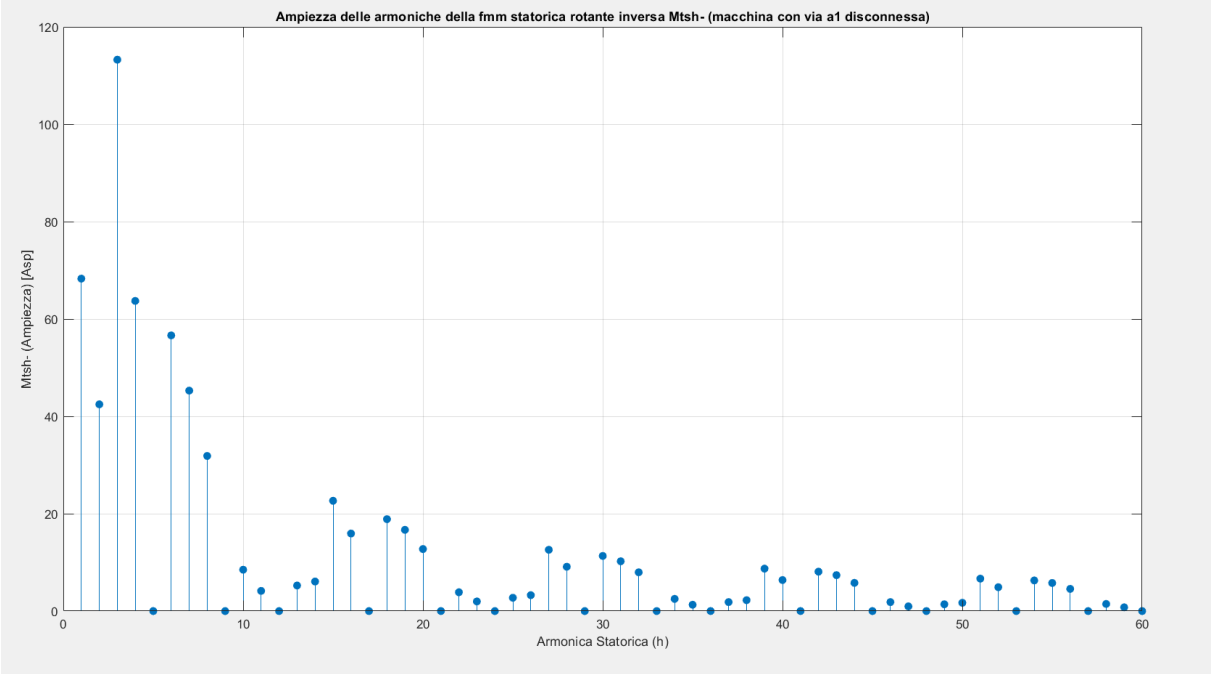


Figura 45: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa M_{tsh}^{-} sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con via a_1 disconnessa)

Per completezza, nel seguito si riportano anche i grafici delle ampiezze delle armoniche delle fmm statoriche rotanti diretta e inversa sullo spessore traferro + magneti, espressi in funzione dell'ordine dell'armonica statorica $h_m = \frac{h}{n_p}$ riferita all'armonica statorica principale $h = n_p$.

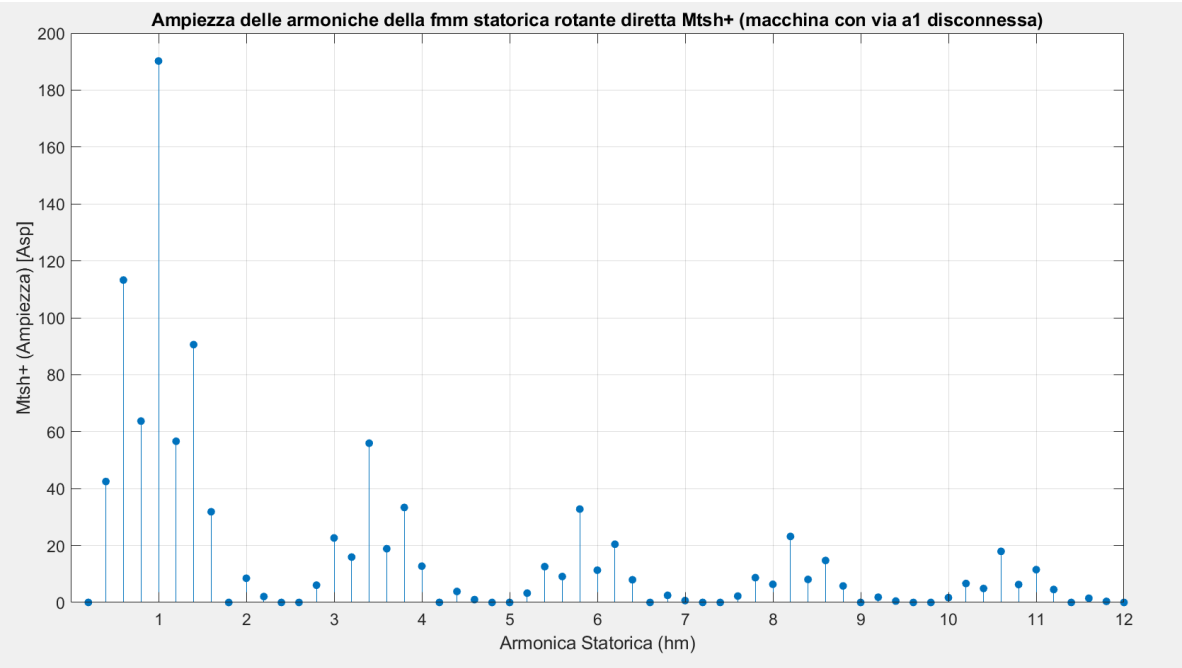


Figura 46: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $M_{tsh}{}^{+}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h_m (caso di macchina con via a_1 disconnessa)

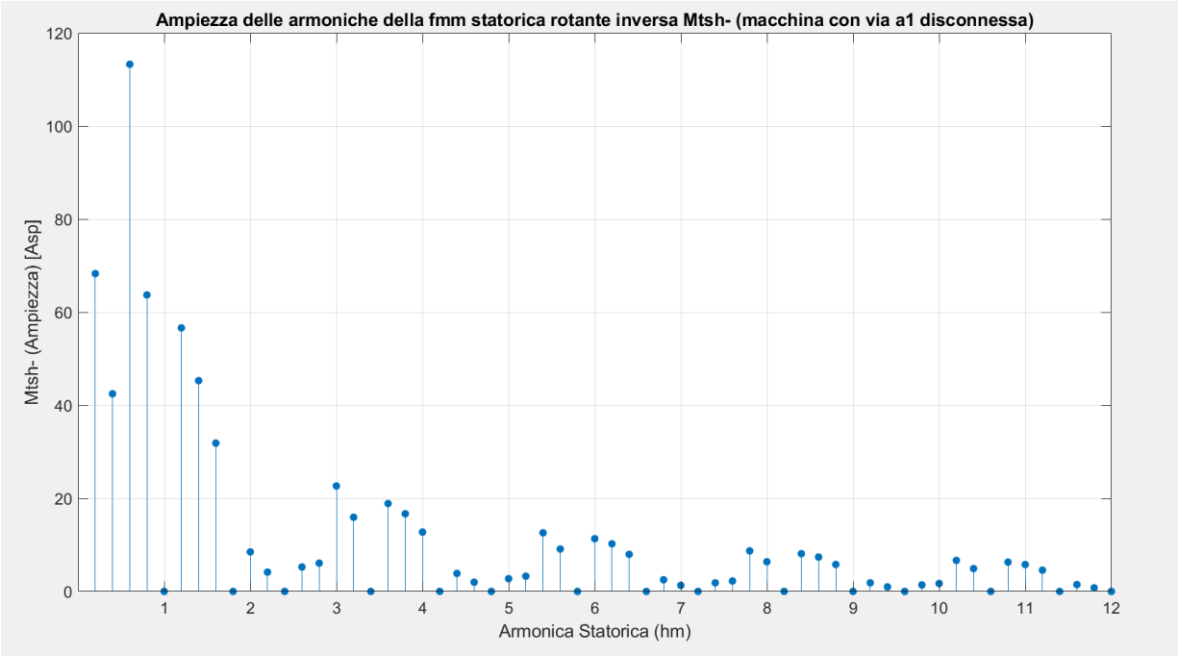


Figura 47: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $M_{tsh}{}^{-}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h_m (caso di macchina con via a_1 disconnessa)

5.3. Campi rotanti di fmm da statore: caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse

Assumendo la macchina alimentata con una terna di correnti equilibrate con corrente efficace in ciascuna fase $I' = \frac{I}{2}$ dimezzata per non eccedere la corrente nominale di bobina, si può ottenere lo sviluppo in serie di Fourier dei campi rotanti di fmm sullo spessore traferro + magneti nel caso della macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse.

Siccome questo caso presenta calcoli del tutto analoghi al caso della macchina sana, si conviene di saltare molti passaggi.

Considerando i coseni del tipo $\omega t + h\theta$ e valutandoli come fasori per $\omega t + h\theta = 0$, la loro somma restituisce come risultato il fasore $\bar{f}$ definito come segue:

$$\bar{f} = \left\{2cos\left[h\left(\frac{2}{3}\frac{2\pi}{m}\right) - \frac{2}{3}\pi\right] + 1\right\} \angle \left[-h\left(\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \tag{5.18}$$

Considerando i coseni del tipo $\omega t - h\theta$ e valutandoli come fasori per $\omega t - h\theta = 0$, la loro somma restituisce come risultato il fasore $\bar{s}$ definito come segue:

$$\bar{s} = \left\{2cos\left[h\left(\frac{2}{3}\frac{2\pi}{m}\right) + \frac{2}{3}\pi\right] + 1\right\} \angle \left[+h\left(\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha_u}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \tag{5.19}$$

Il campo rotante diretto $M_{ts}{}^{+}(\theta, t)$ è esprimibile come:

$$M_{ts}{}^{+}(\theta, t) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{|\bar{s}|}{2} \cdot \widehat{M_{\alpha h}} \cdot cos[\omega t - h\theta + (\angle \bar{s})] \tag{5.20}$$

Invece, il campo rotante inverso $M_{ts}{}^{-}(\theta, t)$ è esprimibile come:

$$M_{ts}{}^{-}(\theta, t) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{|\bar{f}|}{2} \cdot \widehat{M_{\alpha h}} \cdot cos[\omega t + h\theta + (\angle \bar{f})] \tag{5.21}$$

In cui:

- $\widehat{M_{\alpha h}}$ = ampiezza della fmm di fase (h-esima armonica)
- $\frac{|\bar{s}|}{2} = \begin{cases} 0 \; per \; h \neq 2 + 3K \\ \frac{3}{2} \; per \; h = 2 + 3K \end{cases}$

- $\frac{|\bar{f}|}{2} = \begin{cases} 0 \; per \; h \neq \; 1 \; + 3K \\ \frac{3}{2} \; per \; h \; = \; 1 + \; 3K \end{cases}$

- K = 0, 1, 2, 3, …..

- $M_{tsh}{}^{+}$ = Ampiezza della fmm rotante diretta (h-esima armonica) = $\frac{|\bar{s}|}{2} \cdot \widehat{M_{\alpha h}}$

- $M_{tsh}{}^{-}$ = Ampiezza della fmm rotante inversa (h-esima armonica) = $\frac{|\bar{f}|}{2} \cdot \widehat{M_{\alpha h}}$

In Figura 48 è possibile osservare l'andamento dell'ampiezza del campo rotante diretto $M_{tsh}{}^{+}$ in funzione dell'ordine dell'armonica statorica h.

Si precisa che tale grafico riporta in ordinata il valore assoluto di $M_{tsh}{}^{+}$ (considerando come $M_{tsh}{}^{+}$ è stato finora definito).

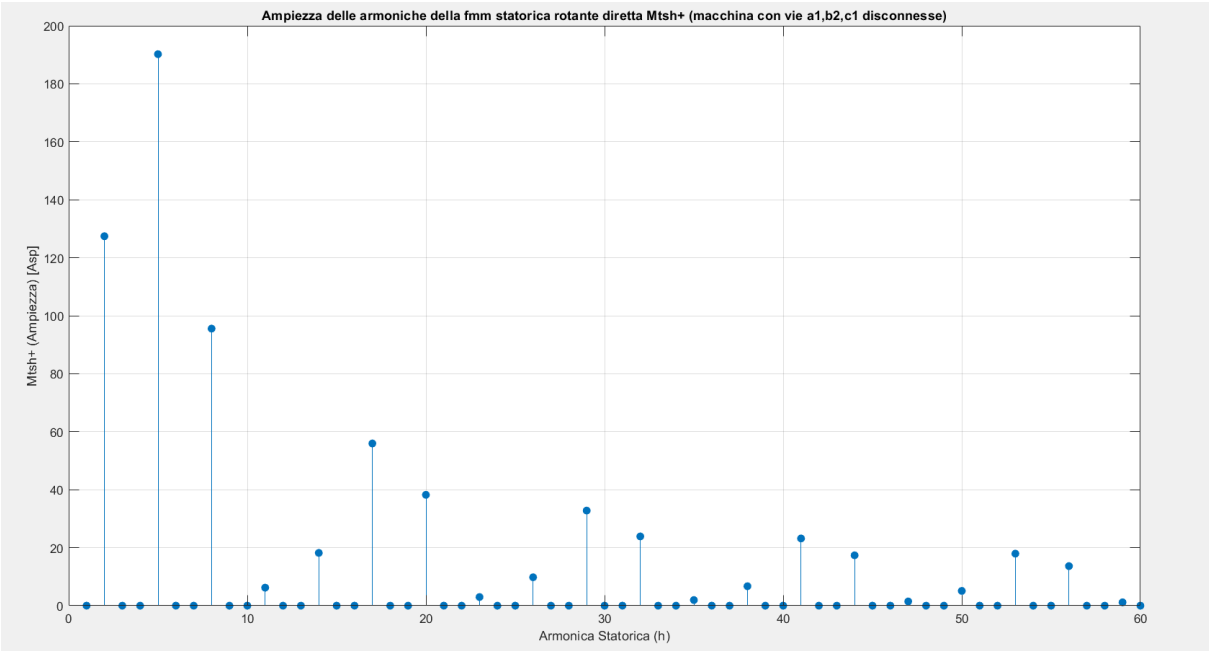


Figura 48: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $M_{tsh}{}^{+}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

In Figura 48 è possibile notare che l'armonica di fmm di ampiezza maggiore è ancora $h = 5$, la quale però risulta dello stesso valore in ampiezza del caso di macchina con

via a_1 disconnessa, oltretutto il campo rotante diretto risulta avere un contenuto armonico inferiore rispetto al caso di sola via a_1 disconnessa ma maggiore rispetto al caso di macchina sana.

In Figura 49 è possibile osservare l'andamento dell'ampiezza del campo rotante inverso $M_{tsh}{}^{-}$ in funzione dell'ordine dell'armonica statorica h.

Si precisa che tale grafico riporta in ordinata il valore assoluto di $M_{tsh}{}^{-}$ (considerando come $M_{tsh}{}^{-}$ è stato finora definito).

L'armonica di fmm di ampiezza maggiore in questo caso è quella per $h = 4$ la quale risulta essere approssimativamente uguale in ampiezza all'armonica $h = 5$ del campo rotante diretto.

Complessivamente, si nota una riduzione del contenuto armonico del campo rotante inverso rispetto al caso di macchina con via a_1 disconnessa, ma un aumento del contenuto armonico del campo rotante inverso rispetto al caso di macchina sana.

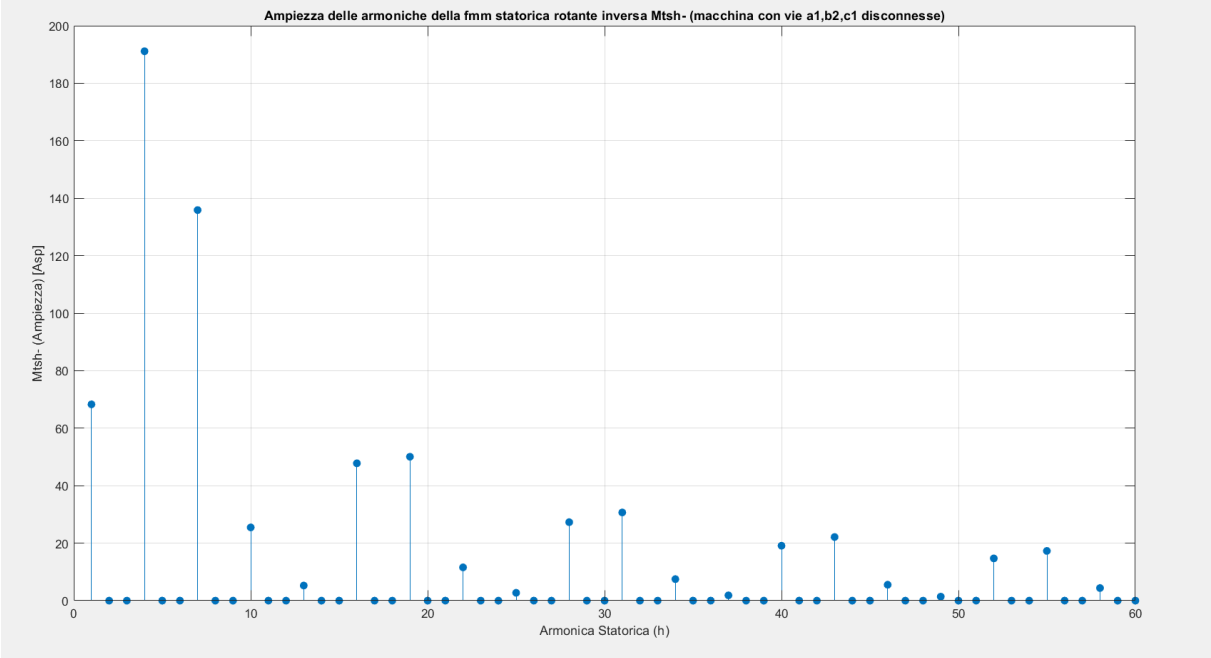


Figura 49: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $M_{tsh}{}^{-}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

Per completezza, nel seguito si riportano anche i grafici delle ampiezze delle armoniche delle fmm statoriche rotanti diretta e inversa sullo spessore traferro + magneti, espressi in funzione dell'ordine dell'armonica statorica $h_m = \frac{h}{n_p}$ riferita all'armonica statorica principale $h = n_p$.

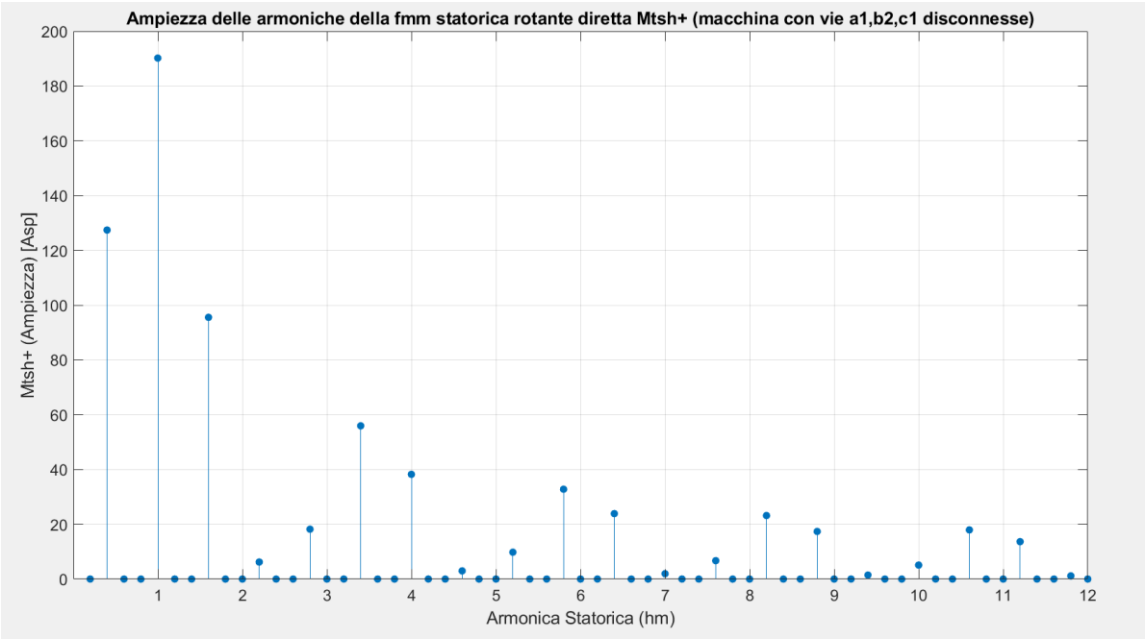


Figura 50: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $M_{tsh}{}^{+}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h_m (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

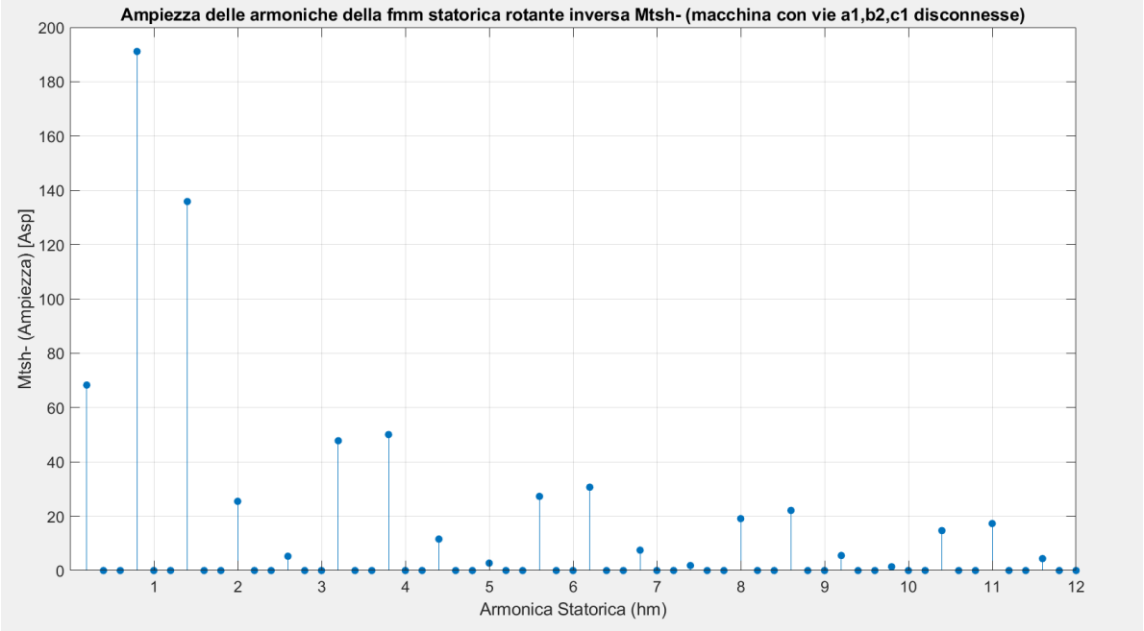


Figura 51: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $M_{tsh}{}^{-}$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h_m (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

6 Determinazione delle ampiezze delle fmm al traferro e delle fmm sulla corona circolare di magneti permanenti

Rispetto alla fmm sullo spessore traferro + magneti, una quota parte di tale fmm risulta essere la caduta di tensione magnetica sulla corona circolare di magneti permanenti attaccati alla superficie esterna del rotore, mentre invece la quota parte rimanente di tale fmm risulta essere la caduta di tensione magnetica al traferro.

In questo capitolo si determineranno la fmm al traferro e la fmm sulla corona circolare di magneti permanenti le quali, a loro volta, serviranno per determinare la coppia elettromagnetica sviluppata dalla macchina.

6.1. Forza magnetomotrice al traferro dovuta al rotore

Per studiare la fmm nel traferro dovuta al rotore $M_{tr}(\theta_R)$ rispetto al sistema di riferimento solidale con il rotore, si inizia con il considerare la situazione illustrata in Figura 52.

In Figura 52 viene illustrato il flusso magnetico nel traferro prodotto da un magnete permanente intero (i.e. il magnete Nord) che si richiude nei due semi-magneti permanenti ad esso adiacenti (i.e. i due semi-magneti Sud).

Il flusso magnetico nel traferro si divide in due parti: ϕ_g = flusso utile del magnete permanente e ϕ_{lr} = flusso di dispersione del magnete permanente.

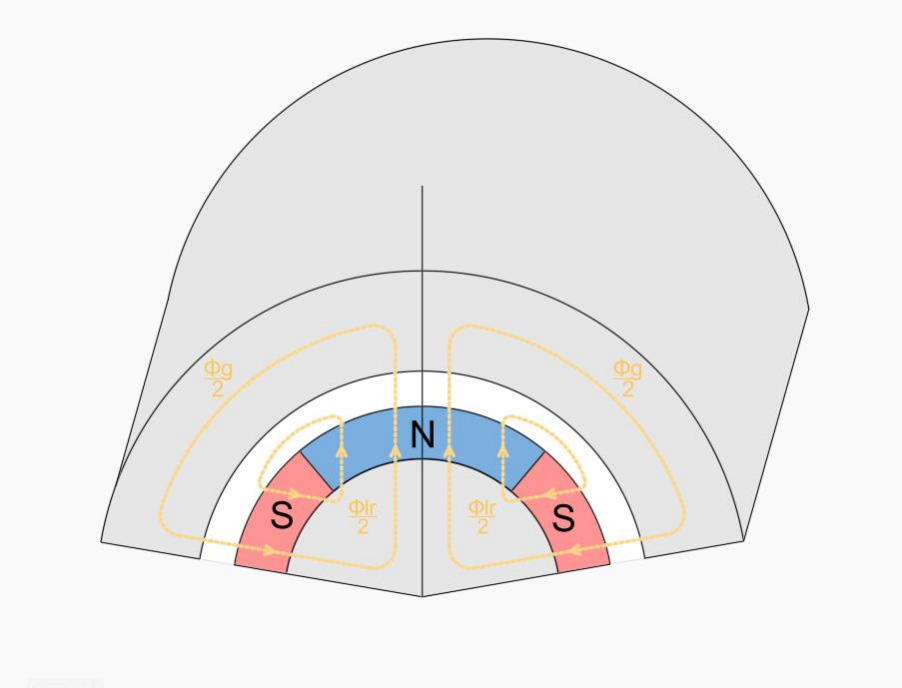


Figura 52: Flusso magnetico nel traferro prodotto da un magnete permanente (ϕ_g = flusso utile di magnete PM, ϕ_{lr} = flusso di dispersione di magnete PM)

Il circuito magnetico equivalente visto dal magnete permanente reale Nord in Figura 52 è illustrato in Figura 53.

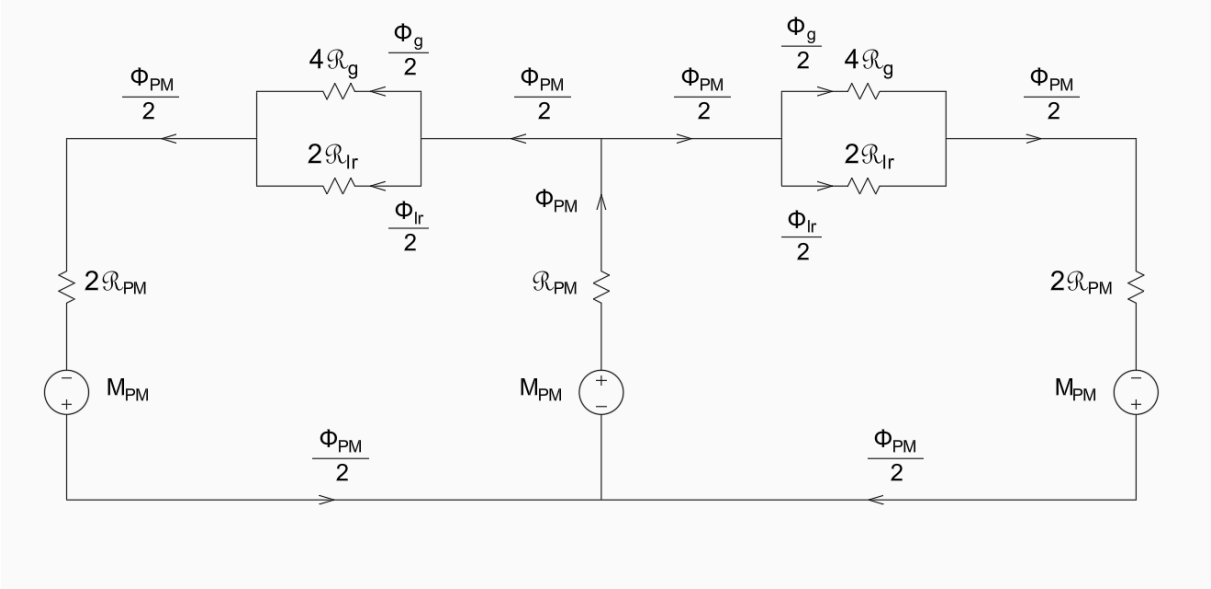


Figura 53: Circuito magnetico equivalente visto dalle linee di campo del flusso magnetico ϕ_{PM} passante per il magnete permanente Nord (rappresentato dal ramo centrale)

Nel circuito magnetico equivalente di Figura 53 i componenti ivi raffigurati sono:

- $\mathfrak{R}_{PM} = \frac{1}{\mu_{PM}} \cdot \frac{h_{PM}}{w_{PM} \cdot l}$ è la riluttanza del magnete permanente
- $\mathfrak{R}_g = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{g}{w_g \cdot l}$ è la riluttanza della porzione di traferro di fronte al magnete permanente
- $\mathfrak{R}_{lr} = \frac{1}{\sigma_{PM}} \cdot 2\,\mathfrak{R}_g$ è la riluttanza associata al percorso delle linee del flusso di dispersione del magnete permanente
- $M_{PM} = H_0 \cdot h_{PM}$ è la fmm interna del magnete permanente (ovvero la fmm ideale del magnete permanente)

(6.1)

In cui σ_{PM} è il coefficiente di dispersione del magnete permanente il cui valore viene stabilito empiricamente ed H_0 è il valore assoluto del punto di intersezione della linea di ritorno del magnete permanente con l'asse dell'intensità magnetica H.

Precisamente, in questa trattazione $\sigma_{PM} = 0.035$, tale valore è stato determinato tramite una simulazione FEM della macchina SPMSM a vuoto.

Il bipolo magnetico equivalente del circuito magnetico visto dal magnete nord reale è caratterizzato da una riluttanza $\mathfrak{R}_{eqr}$ e da un generatore di fmm M_{eqr} come è possibile osservare in Figura 54.

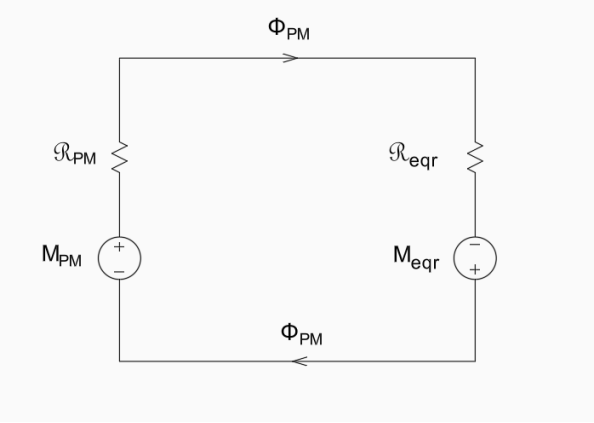


Figura 54: Circuito magnetico equivalente visto dal magnete Nord in forma ridotta

I parametri del bipolo magnetico equivalente valgono:

- $\mathfrak{R}_{eqr} = \frac{2\mathfrak{R}_g \cdot \mathfrak{R}_{lr}}{2\mathfrak{R}_g + \mathfrak{R}_{lr}} + \mathfrak{R}_{PM}$

- $M_{eqr} = M_{PM}$

(6.2)

Partendo dalla Figura 54, il flusso magnetico di magnete permanente ϕ_{PM} vale:

$$\phi_{PM} = \frac{M_{PM} + M_{eqr}}{\mathfrak{R}_{PM} + \mathfrak{R}_{eqr}}$$

(6.3)

Di conseguenza la fmm alle facce radialmente esterne del magnete permanente Nord vale:

$$U_m = \mathrm{M_{PM}} - \mathfrak{R}_{\mathrm{PM}} \cdot \phi_{\mathrm{PM}}$$

(6.4)

Pertanto, la fmm al traferro rettangolare dovuta ai magneti permanenti sul rotore $M_{tr}(\theta_R)$ ha ampiezza $M_{tr} = U_m$.

Rispetto ad un sistema di riferimento solidale con lo statore, assumendo che il rotore ruoti in senso diretto (i.e. senso orario) a velocità angolare meccanica Ω_m = costante, la fmm rotante al traferro dovuta ai magneti permanenti sul rotore $M_{tr}(\theta, \mathrm{t})$ vale:

$$M_{tr}(\theta, \mathrm{t}) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M_{trh}} \cos\left(n_p \cdot h \cdot \theta - n_p \cdot h \cdot \Omega_m \cdot t - n_p \cdot h \cdot \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)$$

(6.5)

In cui l'ampiezza all'h-esima armonica di $M_{tr}(\theta, \mathrm{t})$ vale:

$$\widehat{M_{trh}} = \frac{2}{\pi} \cdot M_{tr} \cdot \frac{1}{h} \cdot [1 - \cos(h \cdot \pi)]$$

(6.6)

6.2. Forza magnetomotrice al traferro di bobina

In Figura 55 è possibile osservare la mappa delle linee di campo prodotte da una bobina percorsa da corrente collocata adiacentemente alla superficie interna statorica di una macchina con statore isotropo.

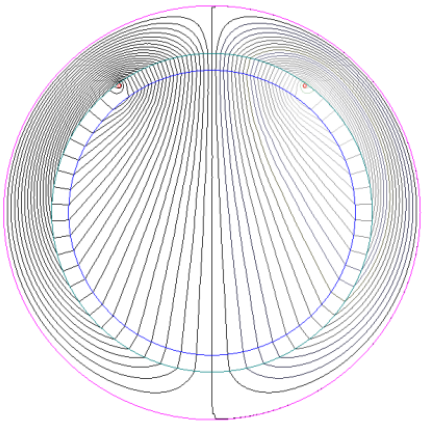


Figura 55: Linee di flusso magnetico prodotte da una bobina statorica (i lati attivi di bobina sono mostrati in rosso)

Ridisegnando la Figura 55 in maniera tale da evidenziare che il flusso di bobina ϕ_B si divide in due parti uguali attorno al suo asse di simmetria, è possibile ottenere un'immagine in cui si illustra per semplicità che il flusso di si divide in due parti uguali rappresentate da sole 2 linee di flusso ma che in realtà rappresentano tutte le linee di flusso di bobina a destra e sinistra del suo asse di simmetria. Tale situazione viene illustrata in Figura 56.

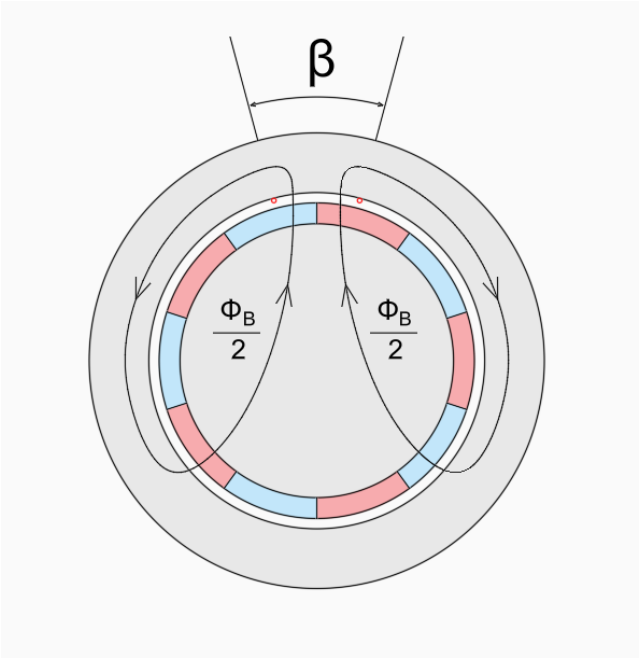


Figura 56: Diramazione del flusso magnetico di bobina ϕ_B in due parti attorno al suo asse di simmetria.

La bobina di passo β viene mostrata con i suoi lati attivi di bobina in rosso.

Osservando il percorso delle linee di flusso di bobina ϕ_B in Figura 56 è possibile ottenere il circuito magnetico equivalente visto dalla singola bobina statorica, rappresentato in Figura 57.

Si conviene di poter trascurare il flusso di dispersione della singola bobina statorica.

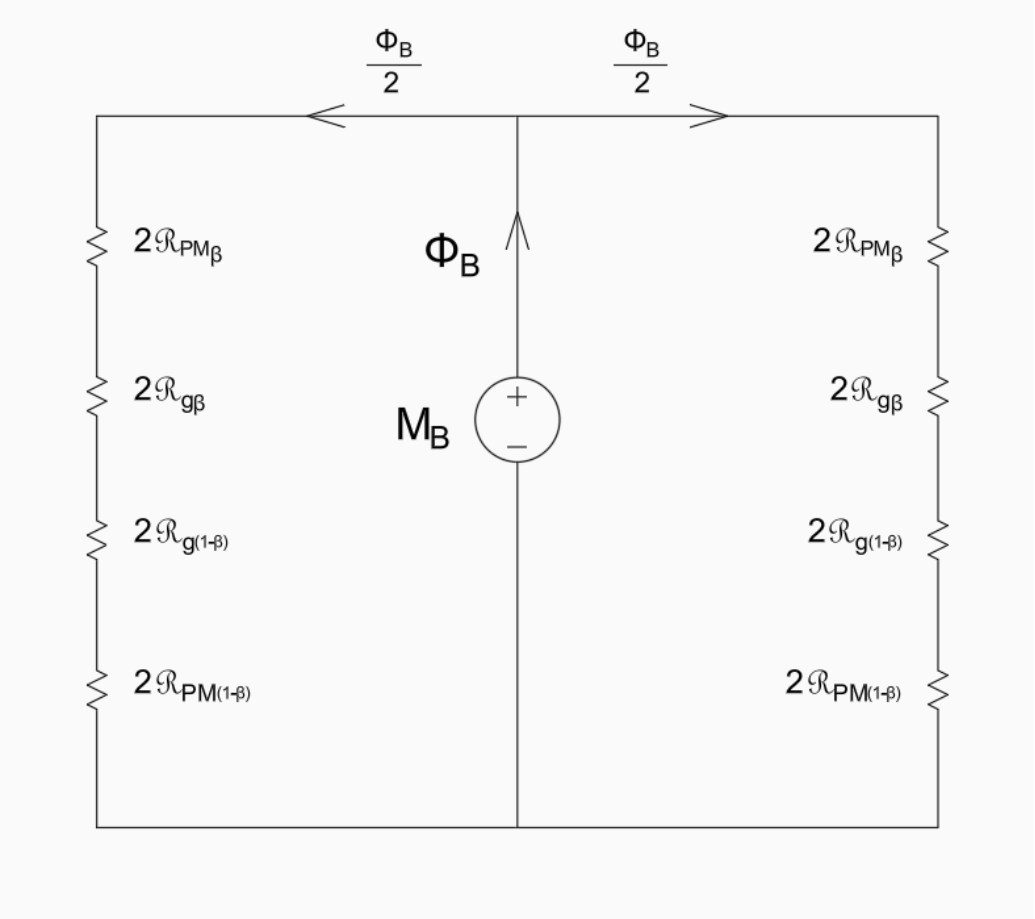


Figura 57: Circuito magnetico equivalente visto dalle linee di campo del flusso magnetico ϕ_B passante per la singola bobina statorica (la cui fmm di bobina M_B è rappresentata nel ramo centrale)

Semplificando ulteriormente il circuito di Figura 57, si perviene al circuito di Figura 58 in cui viene mostrata la caduta di tensione magnetica U_i al traferro nella porzione interna al passo di bobina β e la caduta di tensione magnetica U_e al traferro nella porzione esterna al passo di bobina (i.e. nella porzione 2π - β).

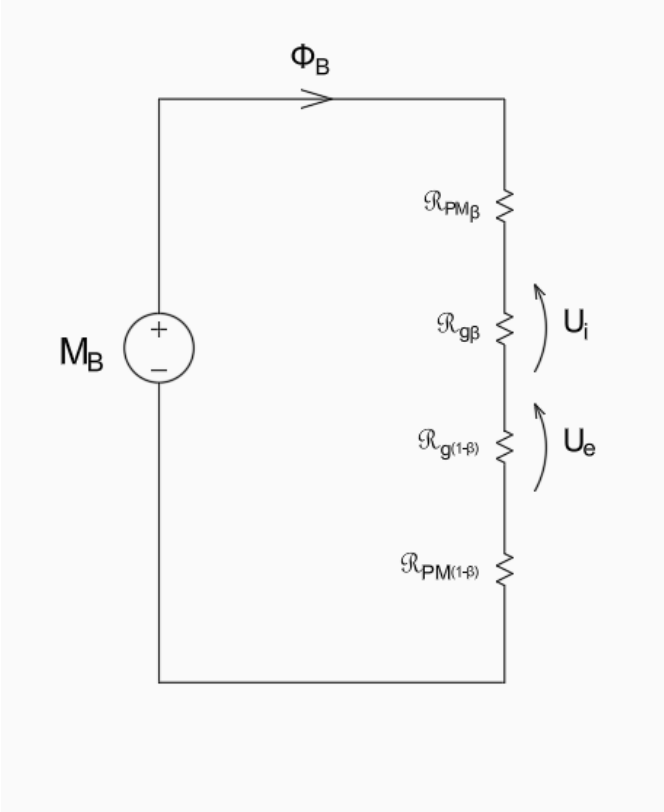


Figura 58: Circuito magnetico visto dalla bobina in forma ridotta.
U_i è la cdtm al traferro interno alla bobina, mentre U_e è la cdtm al traferro esterno alla bobina

Nel circuito magnetico equivalente di Figura 58 i componenti ivi raffigurati sono:

- $\mathfrak{R}_{PM\beta} = \frac{1}{\mu_{PM}} \cdot \frac{h_{PM}}{w_{PM\beta} \cdot l}$ è la riluttanza del settore di magneti permanenti interno al passo di bobina β
- $\mathfrak{R}_{g\beta} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{g}{w_{g\beta} \cdot l}$ è la riluttanza del settore di traferro interno al passo di bobina β
- $\mathfrak{R}_{g(1-\beta)} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{g}{w_{g(1-\beta)} \cdot l}$ è la riluttanza del settore di traferro esterno al passo di bobina β
- $\mathfrak{R}_{PM(1-\beta)} = \frac{1}{\mu_{PM}} \cdot \frac{h_{PM}}{w_{PM(1-\beta)} \cdot l}$ è la riluttanza del settore di magneti permanenti esterno al passo di bobina β
- $M_B = N \cdot \sqrt{2} \cdot I_B$ è la forza magnetomotrice di bobina

(6.7)

Stando al circuito di Figura 58, il flusso magnetico di bobina ϕ_B è esprimibile come:

$$\phi_B = \frac{M_B}{\Re_{PM\beta} + \Re_{g\beta} + \Re_{g(1-\beta)} + \Re_{PM(1-\beta)}} \tag{6.8}$$

Da cui si ottiene che la fmm al traferro interna alla bobina U_i e la fmm al traferro esterna alla bobina U_e valgono:

$$\begin{aligned} U_i &= \Re_{g\beta} \cdot \phi_B \\ U_e &= \Re_{g(1-\beta)} \cdot \phi_B \end{aligned} \tag{6.9}$$

Il rapporto tra le due fmm al traferro vale:

$$\frac{U_i}{U_e} = \frac{2\pi - \beta}{\beta} \tag{6.10}$$

Quindi, partendo da $U_i = \Re_{g\beta} \cdot \phi_B$ e considerando l'espressione di ϕ_B data dall' eq. (6.8), la fmm al traferro interna al passo di bobina U_i vale:

$$U_i = \frac{\Re_{g\beta}}{\Re_{PM\beta} + \Re_{g\beta} + \Re_{g(1-\beta)} + \Re_{PM(1-\beta)}} \cdot M_B \tag{6.11}$$

Definendo un parametro ε dato dal rapporto tra riluttanze come indicato nell' eq. (6.12):

$$\varepsilon = \frac{\Re_{g\beta}}{\Re_{PM\beta} + \Re_{g\beta} + \Re_{g(1-\beta)} + \Re_{PM(1-\beta)}} \tag{6.12}$$

Si ottiene che la fmm al traferro interno di bobina U_i è definibile come:

$$U_i = \left(2 - \frac{\beta}{\pi}\right) \cdot \frac{M_B}{2} \cdot \frac{2}{\left(2 - \frac{\beta}{\pi}\right)} \cdot \varepsilon \tag{6.13}$$

Definendo un parametro τ come indicato nell' eq. (6.14):

$$\tau = \frac{2}{\left(2 - \frac{\beta}{\pi}\right)} \cdot \varepsilon$$

(6.14)

Si può determinare la quota parte $M_{B\tau}$ della fmm di bobina M_B che cade nel traferro totale visto lungo tutto il percorso delle linee di flusso.

Pertanto, la cdtm della fmm di bobina nel traferro totale $M_{B\tau}$ può essere ottenuta come:

$$M_{B\tau} = \tau \cdot M_B$$

(6.15)

Determinando la cdtm della fmm di bobina nel traferro totale $M_{B\tau}$ è possibile preservare la trattazione riguardante lo sviluppo in serie di Fourier della fmm di bobina sullo spessore traferro + magneti, sostituendo nell'ampiezza delle armoniche delle fmm di bobina sullo spessore traferro + magneti a_h il termine $M_{B\tau}$ al posto di M_B.

Per concludere, lo sviluppo in serie di Fourier della fmm al traferro di bobina $M_{BOBINA_g}(\theta)$ vale:

$$M_{BOBINA_g}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} a_{h_g} \cdot \cos[h \cdot (\theta - \alpha_{asse})]$$

(6.16)

In cui, l'ampiezza delle armoniche di $M_{BOBINA_g}(\theta)$ vale:

$$a_{h_g} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_{B\tau}}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

(6.17)

In questa macchina SPMSM, l'estensione angolare della singola bobina β è pari al passo di cava α_u.

6.3. Campo rotante di fmm dovuto al rotore sulla corona circolare di magneti permanenti

Volendo esprimere la fmm sulla corona circolare di magneti permanenti dovuta al rotore rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore $M_{corona_{PM}}(\theta, t)$, assumendo che il rotore ruoti in senso diretto (i.e. senso orario) a velocità angolare meccanica Ω_m = costante, l'espressione di $M_{corona_{PM}}(\theta, t)$ è data dall' eq. (6.18):

$$M_{corona_{PM}}(\theta, \mathrm{t}) = \sum_{h=1}^{+\infty} \widehat{M}_{corona_{PM}h} \cos\left(n_p \cdot h \cdot \theta - n_p \cdot h \cdot \Omega_m \cdot t \ - n_p \cdot h \cdot \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)$$

(6.18)

In cui l'ampiezza dell'armonica h-esima di $M_{corona_{PM}}(\theta, t)$ vale:

$$\widehat{M}_{corona_{PM}h} = \frac{2}{\pi} \cdot M_{corona_{PM}} \cdot \frac{1}{h} \cdot [1 - cos(h \cdot \pi)]$$

(6.19)

In cui $M_{corona_{PM}}$ denota la quota parte della fmm interna del magnete permanente M_{PM} che cade nella riluttanza interna del magnete permanente $\mathfrak{R}_{PM}$, ovvero:

$$M_{corona_{PM}} = M_{PM} - M_{tr} = \mathfrak{R}_{PM} \cdot \phi_{PM}$$

(6.20)

6.4. Forza magnetomotrice di bobina sulla corona circolare di magneti permanenti

Analogamente alla trattazione effettuata per la fmm al traferro di bobina, si può determinare con lo stesso procedimento anche la fmm di bobina sulla corona circolare di magneti permanenti $M_{BOBINA_{PM}}(\theta)$.

Per iniziare, si può determinare la quota parte $M_{B(1-\tau)}$ della fmm di bobina M_B che cade nello spessore totale della corona circolare di magneti permanenti visto lungo tutto il percorso delle linee di flusso di bobina.

Pertanto, la cdtm della fmm di bobina nello spessore totale della corona circolare di magneti permanenti $M_{B(1-\tau)}$ può essere ottenuta come:

$$M_{B(1-\tau)} = (1 - \tau) \cdot M_B$$

(6.21)

Lo sviluppo in serie di Fourier della fmm di bobina sulla corona circolare di magneti permanenti $M_{BOBINA_{PM}}(\theta)$ vale:

$$M_{BOBINA_{PM}}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} a_{h_{PM}} \cdot \cos[h \cdot (\theta - \alpha_{asse})]$$

(6.22)

In cui, l'ampiezza delle armoniche di $M_{BOBINA_{PM}}(\theta)$ vale:

$$a_{h_{PM}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M_{B(1-\tau)}}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \tag{6.23}$$

In questa macchina SPMSM, l'estensione angolare della singola bobina β è pari al passo di cava α_u.

6.5. Ampiezza delle armoniche dei campi rotanti di fmm da statore al traferro

A partire dalla fmm di bobina nel traferro $M_{BOBINA_g}(\theta)$ e ripercorrendo gli stessi passaggi per l'ottenimento dei campi rotanti di fmm da statore sullo spessore traferro + magneti, è possibile dimostrare che il campo rotante diretto al traferro $M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)$ e il campo rotante inverso al traferro $M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t)$ hanno l'ampiezza di ciascuna armonica (rispettivamente $M_{ts_gh}{}^{+}$ e $M_{ts_gh}{}^{-}$) esprimibile come:

$$M_{ts_gh}{}^{+} = \tau \cdot M_{tsh}{}^{+}$$

$$M_{ts_gh}{}^{-} = \tau \cdot M_{tsh}{}^{-} \tag{6.24}$$

In cui:

- τ è il parametro definito dall'eq. (6.14);
- $M_{tsh}{}^{+}$ e $M_{tsh}{}^{-}$ sono l'ampiezza dell' h-esima armonica statorica, rispettivamente del campo rotante diretto e inverso sullo spessore traferro + magneti

6.6. Ampiezza delle armoniche dei campi rotanti di fmm da statore sulla corona circolare di magneti permanenti

A partire dalla fmm di bobina sulla corona circolare di magneti permanenti $M_{BOBINA_{PM}}(\theta)$ e ripercorrendo gli stessi passaggi per l'ottenimento dei campi rotanti di

fmm da statore sullo spessore traferro + magneti, è possibile dimostrare che il campo rotante diretto sulla corona circolare di magneti permanenti ${M_{ts_{PM}}}^{+}(\theta, t)$ e il campo rotante inverso sulla corona circolare di magneti permanenti ${M_{ts_{PM}}}^{-}(\theta, t)$ hanno l'ampiezza di ciascuna armonica (rispettivamente ${M_{ts_{PM}h}}^{+}$ e ${M_{ts_{PM}h}}^{-}$) esprimibile come:

$$
\begin{aligned}
{M_{ts_{PM}h}}^{+} &= (1-\tau) \cdot {M_{tsh}}^{+} \\
{M_{ts_{PM}h}}^{-} &= (1-\tau) \cdot {M_{tsh}}^{-}
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

In cui:

- τ è il parametro definito dall'eq. (6.14);
- ${M_{tsh}}^{+}$ e ${M_{tsh}}^{-}$ sono l'ampiezza dell' h-esima armonica statorica, rispettivamente del campo rotante diretto e inverso sullo spessore traferro + magneti.

7 Coppia elettromagnetica generata dalla macchina: approccio basato sull'interazione tra armoniche di fmm

In questo capitolo si fornisce un approccio per derivare le espressioni matematiche della coppia elettromagnetica ispirato alla trattazione in [10] nei tre casi di: 1) macchina sana, 2) macchina con via parallela a_1 disconnessa, 3) macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse.

La novità proposta in questo elaborato consiste nel determinare una formula per ottenere il valore e la forma d'onda della coppia elettromagnetica totale della macchina in funzione del tempo, visualizzando la coppia totale come la somma di contributi di coppia definiti come "armoniche di coppia".

Le armoniche di coppia sono dovute alla contemporanea interazione tra i campi di fmm al traferro statorici rotanti con il campo di fmm al traferro rotorico rotante $M_{tr}(\theta)$ e all'interazione tra i campi statorici rotanti sulla corona circolare di magneti permanenti con il campo di fmm rotorico rotante sulla corona circolare di magneti permanenti $M_{corona_{PM}}(\theta, t)$.

Si ribadisce che finora sono state fatte le seguenti ipotesi nel ricavare le fmm al traferro e le fmm sulla corona circolare di magneti permanenti:

- Cadute di tensione magnetiche nel nucleo magnetico statorico e nel nucleo magnetico rotorico ritenute trascurabili per via della permeabilità magnetica in tali nuclei $\mu_{fe} \to \infty$;
- Il flusso di dispersione generato da ciascuna bobina nello statore viene trascurato;
- Il rotore viene assunto essere rotante in senso diretto (senso orario, in Figura 27) a velocità angolare meccanica Ω_m = costante.

D'ora in avanti si adotterà l'ipotesi aggiuntiva di macchina elettrica operante a regime, condizione in cui la velocità angolare meccanica di rotazione del rotore è uguale alla velocità angolare meccanica del campo rotante statorico principale.

Inoltre, a regime, l'angolo tra il campo statorico rotante principale di fmm e il campo rotorico rotante di fmm di armonica rotorica fondamentale rimane costante e pari all'angolo iniziale tra i due.

Per ottenere l'espressione della coppia elettromagnetica totale della macchina in funzione del tempo, si parte dalla valutazione della coenergia totale immagazzinata nella macchina in funzione del tempo.

Viste le ipotesi fatte finora, siccome è possibile trascurare la caduta di tensione magnetica nel nucleo ferromagnetico statorico e nel nucleo ferromagnetico rotorico, la macchina SPMSM è in grado di immagazzinare coenergia magnetica in 2 regioni della macchina: 1) Il traferro, 2) La corona circolare di magneti permanenti sul rotore.

Dunque, l'espressione della coppia elettromagnetica della macchina va determinata considerando la derivata della coenergia totale immagazzinata nella macchina rispetto all'angolo meccanico iniziale tra statore e rotore θ_{m0} e valutando tale derivata mantenendo le correnti di fase virtualmente costanti nel tempo.

7.1. Determinazione della coenergia magnetica totale nella macchina

Il traferro e la corona circolare di magneti permanenti sono le uniche regioni della macchina che possono immagazzinare energia magnetica, oppure, in termini duali, il traferro e la corona circolare di magneti permanenti sono le uniche regioni della macchina che possono immagazzinare coenergia magnetica $W_\mu{}'$.

La coenergia magnetica totale nella macchina $W_\mu{}'$, espressa in funzione della coenergia nel traferro W'_{μ_g} e della coenergia nella corona circolare di magneti permanenti $W'_{\mu_{PM}}$ vale:

$$W'_\mu = W'_{\mu_g} + W'_{\mu_{PM}} \tag{7.1}$$

La coenergia magnetica nel traferro W'_{μ_g} vale:

$$W'_{\mu_g} = \frac{\mu_0 \cdot R_g \cdot g \cdot l}{2} \cdot \int_0^{2\pi} {H_g}^2(\theta, t)\, d\theta \tag{7.2}$$

Che in termini della fmm risultante al traferro $F_g(\theta, t)$ vale:

$$W'_{\mu_g} = \frac{\mu_0 \cdot R_g \cdot l}{2g} \cdot \int_0^{2\pi} {F_g}^2(\theta, t)\, d\theta \tag{7.3}$$

In termini del diametro medio al traferro D_g, l'eq. (7.3) si può riscrivere come:

$$W'_{\mu_g} = \frac{\mu_0 \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot \int_0^{2\pi} {F_g}^2(\theta, t)\, d\theta \tag{7.4}$$

In cui:

- μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto;
- R_g è il raggio medio al traferro;
- D_g è il diametro medio al traferro;
- l è la lunghezza assiale della macchina;
- g è lo spessore del traferro;
- $H_g(\theta, t)$ è l'intensità magnetica risultante al traferro;
- $F_g(\theta, t)$ è la fmm risultante al traferro.

Analogamente, la coenergia magnetica nella corona circolare di magneti permanenti $W'_{\mu_{PM}}$ vale:

$$W'_{\mu_{PM}} = \frac{\mu_{PM} \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot \int_0^{2\pi} {F_{PM}}^2(\theta, t)\, d\theta \tag{7.5}$$

In cui:

- μ_{PM} è la permeabilità magnetica assoluta del magnete permanente;
- D_{PM} è il diametro medio della corona circolare di magneti permanenti;
- h_{PM} è lo spessore della corona circolare di magneti permanenti;
- $F_{PM}(\theta, t)$ è la fmm risultante sulla corona circolare di magneti permanenti.

Quindi, la coenergia magnetica totale nella macchina $W_\mu{}'$ vale:

$$W'_\mu = \frac{\mu_0 \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot \int_0^{2\pi} {F_g}^2(\theta, t)\, d\theta + \frac{\mu_{PM} \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot \int_0^{2\pi} {F_{PM}}^2(\theta, t)\, d\theta \tag{7.6}$$

7.2. Forza magnetomotrice al traferro risultante e l'integrale del suo quadrato per $\theta \in [0, 2\pi]$

La forza magnetomotrice al traferro risultante $F_g(\theta, t)$, espressa rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore, tiene conto della contemporanea presenza al traferro dei campi rotanti statorici e del campo rotante rotorico.

Essa è espressa dall'eq. (7.7):

$$F_g(\theta, t) = M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) + M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t) + M_{tr}(\theta, t) \tag{7.7}$$

Per calcolare l'integrale $\int_0^{2\pi} F_g{}^2(\theta, t)\, d\theta$, necessario per determinare l'espressione della coenergia totale nella macchina, si inizia con il valutare il quadrato della fmm risultante al traferro $F_g(\theta, t)$, che vale:

$$F_g{}^2(\theta, t) = \left(M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) + M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t) + M_{tr}(\theta, t)\right)^2 \tag{7.8}$$

Che dopo alcuni calcoli diventa:

$$\begin{aligned} F_g{}^2(\theta, t) = {} & \left[M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)\right]^2 + \left[M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t)\right]^2 + [M_{tr}(\theta, t)]^2 + 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) \cdot M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t) \\ & + 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) \cdot M_{tr}(\theta, t) + 2M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t) \cdot M_{tr}(\theta, t) \end{aligned} \tag{7.9}$$

L'integrale del quadrato della fmm risultante al traferro vale:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} F_g{}^2(\theta, t)\, d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \Big\{ \left[M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)\right]^2 + \left[M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t)\right]^2 + [M_{tr}(\theta, t)]^2 + 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) \\ & \cdot M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t) + 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) \cdot M_{tr}(\theta, t) + 2M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t) \cdot M_{tr}(\theta, t) \Big\} d\theta \end{aligned} \tag{7.10}$$

L'integrale del quadrato del campo statorico rotante diretto $M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)$ vale:

$$\int_0^{2\pi} \left[M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)\right]^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{h_1=1}^{+\infty} M_{ts_g h_1}{}^{+} \cdot cos[\omega t - h_1\theta + (\angle \overline{m})] \right\}^2 d\theta \tag{7.11}$$

Ma siccome $\int_0^{2\pi} cos(h_i\theta)\cdot cos(h_j\theta)\,d\theta = 0,\ \forall h_i \neq h_j$ allora l'eq. (7.11) si può anche riscrivere come:

$$\int_0^{2\pi}\left[M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t)\right]^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{h_1=1}^{+\infty}\left(M_{ts_gh_1}{}^{+}\right)^2\cdot cos^2[\omega t - h_1\theta + (\angle\overline{m})]\right\}d\theta$$
$$= \sum_{h_1=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\left(M_{ts_gh_1}{}^{+}\right)^2\cdot cos^2[\omega t - h_1\theta + (\angle\overline{m})]\,d\theta\right\}$$
$$= \sum_{h_1=1}^{+\infty}\pi\cdot\left(M_{ts_gh_1}{}^{+}\right)^2 \tag{7.12}$$

Con un procedimento analogo a quello del campo statorico diretto, si dimostra che l'integrale del quadrato del campo statorico rotante inverso $M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)$ vale:

$$\int_0^{2\pi}\left[M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\right]^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{h_2=1}^{+\infty}M_{ts_gh_2}{}^{-}\cdot cos[\omega t + h_2\theta + (\angle\overline{y})]\right\}^2 d\theta \tag{7.13}$$

Ma siccome $\int_0^{2\pi} cos(h_i\theta)\cdot cos(h_j\theta)\,d\theta = 0,\ \forall h_i \neq h_j$ allora l'eq. (7.13) si può anche riscrivere come:

$$\int_0^{2\pi}\left[M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\right]^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{h_2=1}^{+\infty}\left(M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)^2\cdot cos^2[\omega t + h_2\theta + (\angle\overline{y})]\right\}d\theta$$
$$= \sum_{h_2=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\left(M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)^2\cdot cos^2[\omega t + h_2\theta + (\angle\overline{y})]\,d\theta\right\}$$
$$= \sum_{h_2=1}^{+\infty}\pi\cdot\left(M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)^2 \tag{7.14}$$

Con un procedimento analogo a quello del campo statorico diretto e inverso, si dimostra che l'integrale del quadrato del campo rotante rotorico di fmm $M_{tr}(\theta,t)$ vale:

$$\int_0^{2\pi}[M_{tr}(\theta,t)]^2\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{h_3=1}^{+\infty}\widehat{M_{trh_3}}\cdot cos\left[n_ph_3\theta - n_ph_3\Omega_m t - n_ph_3\theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right]\right\}^2 d\theta \tag{7.15}$$

Ma siccome $\int_0^{2\pi} cos(h_i\theta) \cdot cos(h_j\theta)\, d\theta = 0,\ \forall h_i \neq h_j$ allora l'eq. (7.15) si può anche riscrivere come:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} [M_{tr}(\theta,t)]^2\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{h_3=1}^{+\infty} \left(\widehat{M_{trh_3}}\right)^2 \cdot cos^2\left[n_p h_3\theta - n_p h_3 \Omega_m \mathrm{t} - n_p h_3 \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right] \right\} d\theta \\ &= \sum_{h_3=1}^{+\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\widehat{M_{trh_3}}\right)^2 \cdot cos^2\left[n_p h_3\theta - n_p h_3 \Omega_m \mathrm{t} - n_p h_3 \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right] d\theta \right\} \\ &= \sum_{h_3=1}^{+\infty} \pi \cdot \left(\widehat{M_{trh_3}}\right)^2\end{aligned} \tag{7.16}$$

L'integrale del doppio prodotto tra il campo statorico diretto ${M_{ts_g}}^+(\theta,t)$ e il campo statorico inverso ${M_{ts_g}}^-(\theta,t)$ vale:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} 2{M_{ts_g}}^+(\theta,t){M_{ts_g}}^-(\theta,t)\, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} 2\left\{ \sum_{h_1=1}^{+\infty} {M_{ts_g h_1}}^+ \cdot cos[\omega t - h_1\theta + (\angle \overline{m})] \right\} \\ &\cdot \left\{ \sum_{h_2=1}^{+\infty} {M_{ts_g h_2}}^- \cdot cos[\omega t + h_2\theta + (\angle \overline{y})] \right\} d\theta\end{aligned} \tag{7.17}$$

Siccome $\int_0^{2\pi} cos(h_i\theta) \cdot cos(h_j\theta)\, d\theta = 0,\ \forall h_i \neq h_j,$ nell'eq. (7.17) possono dare risultato diverso da zero solo gli integrali dei doppi prodotti tra le armoniche statoriche dirette e le armoniche statoriche inverse aventi lo stesso indice armonico $h_1 = h_2$.

Considerando che $cos[\omega t - h_1\theta + (\angle \overline{m})] = cos[-\omega t + h_1\theta - (\angle \overline{m})]$ e definendo $h_{12} = h_1 = h_2$, l'eq. (7.17) può essere riscritta come:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t)M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\left\{\sum_{h_{12}=1}^{+\infty}\left(M_{ts_gh_{12}}{}^{+}\cdot M_{ts_gh_{12}}{}^{-}\right)\cdot cos[-\,\omega t\ +\ h_{12}\theta\ -\ (\angle\,\overline{m})]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot cos[\omega t\ +\ h_{12}\theta\ +\ (\angle\,\overline{y})]\right\}d\theta$$

(7.18)

Riorganizzando l'eq. (7.18) diversamente si ottiene che:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t)M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \sum_{h_{12}=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi} 2\cdot\left(M_{ts_gh_{12}}{}^{+}\cdot M_{ts_gh_{12}}{}^{-}\right)\cdot cos[-\omega t + h_{12}\theta - (\angle\overline{m})]\cdot cos[\omega t\ +\ h_{12}\theta\ +\ (\angle\,\overline{y})]\,d\theta\right\}$$

(7.19)

Ma, siccome $cos(x)\cdot cos(y)\ =\ \frac{1}{2}\cdot[cos(x+y)\ +\ cos(x-y)]$, l'eq. (7.19) si può riscrivere come:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t)M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \sum_{h_{12}=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{l}\int_0^{2\pi}\left(M_{ts_gh_{12}}{}^{+}\cdot M_{ts_gh_{12}}{}^{-}\right)\cdot cos[2h_{12}\theta - (\angle\overline{m}) + (\angle\overline{y})]\,d\theta\ + \\ \int_0^{2\pi}\left(M_{ts_gh_{12}}{}^{+}\cdot M_{ts_gh_{12}}{}^{-}\right)\cdot cos[-\,2\omega t\ -\ (\angle\,\overline{m})\ -\ (\angle\,\overline{y})]\,d\theta\end{array}\right\}$$

(7.20)

Ma nell' eq. (7.20) il primo integrale vale:

$$\int_0^{2\pi}\left(M_{ts_gh_{12}}{}^{+}\cdot M_{ts_gh_{12}}{}^{-}\right)\cdot cos[2h_{12}\theta - (\angle\overline{m}) + (\angle\overline{y})]\,d\theta\ =\ 0\,,\qquad \forall h_{12}$$

(7.21)

Invece, il secondo integrale dell'eq. (7.20) vale:

$$\int_0^{2\pi}\left(M_{ts_gh_{12}}{}^{+}\cdot M_{ts_gh_{12}}{}^{-}\right)\cdot cos[-\,2\omega t\ -\ (\angle\,\overline{m})\ -\ (\angle\,\overline{y})]\,d\theta$$
$$= \left(M_{ts_gh_{12}}{}^{+}\cdot M_{ts_gh_{12}}{}^{-}\right)\cdot 2\pi\cdot cos[-\,2\omega t\ -\ (\angle\,\overline{m})\ -\ (\angle\,\overline{y})]$$

(7.22)

Ma siccome $(\angle \overline{m}) = -(\angle \overline{y})$ e siccome $cos(-x) = cos(x)$, si ottiene che:

$$\int_0^{2\pi} \left(M_{ts_g h_{12}}{}^{+} \cdot M_{ts_g h_{12}}{}^{-}\right) \cdot cos[-2\omega t - (\angle \overline{m}) - (\angle \overline{y})]\, d\theta = \left(M_{ts_g h_{12}}{}^{+} \cdot M_{ts_g h_{12}}{}^{-}\right) \cdot 2\pi \cdot cos(2\omega t) \tag{7.23}$$

Quindi, per concludere, l'integrale del doppio prodotto tra i due campi rotanti statorici vale:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t) M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\, d\theta = \sum_{h_{12}=1}^{+\infty} \left(M_{ts_g h_{12}}{}^{+} \cdot M_{ts_g h_{12}}{}^{-}\right) \cdot 2\pi \cdot cos(2\omega t) \tag{7.24}$$

L'integrale del doppio prodotto tra il campo statorico diretto $M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t)$ e il campo rotorico $M_{tr}(\theta,t)$ vale:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t) \cdot M_{tr}(\theta,t)\, d\theta = \\ = \int_0^{2\pi} 2\left\{\sum_{h_1=1}^{+\infty} M_{ts_g h_1}{}^{+} \cdot cos[\omega t - h_1\theta + (\angle \overline{m})]\right\} \\ \cdot \left\{\sum_{h_3=1}^{+\infty} \widehat{M_{trh_3}} \cdot cos\left[n_p h_3 \theta - n_p h_3 \Omega_m \mathrm{t} - n_p h_3 \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right]\right\} d\theta \tag{7.25}$$

Eseguendo alcuni calcoli l'eq. (7.25) può essere riscritta come:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t) \cdot M_{tr}(\theta,t)\, d\theta = \\ = \int_0^{2\pi} \sum_{h_3=1}^{+\infty} \sum_{h_1=1}^{+\infty} \left(2 \cdot \widehat{M_{trh_3}} \cdot M_{ts_g h_1}{}^{+}\right) \cdot \\ \cdot cos\left[n_p h_3 \theta - n_p h_3 \Omega_m \mathrm{t} - n_p h_3 \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right] \cdot cos[\omega t - h_1\theta + (\angle \overline{m})]\, d\theta \tag{7.26}$$

Riorganizzando l'eq. (7.26) diversamente si ottiene che:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t)\cdot M_{tr}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \sum_{h_3=1}^{+\infty}\sum_{h_1=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\left(2\cdot\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_1}{}^{+}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\, cos\left[n_ph_3\theta\ -\ n_ph_3\Omega_m\mathrm{t}\ -\ n_ph_3\theta_{m0}-\frac{\pi}{2}\right]\cdot cos[\omega t\ -\ h_1\theta\ +\ (\angle\,\overline{m})]\,d\theta\right\}$$

(7.27)

Ma, siccome $cos(x)\cdot cos(y)\ =\ \frac{1}{2}\cdot[cos(x+y)\ +\ cos(x-y)]$, l'eq. (7.27) si può riscrivere come:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta,t)\cdot M_{tr}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \sum_{h_3=1}^{+\infty}\sum_{h_1=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_1}{}^{+}\right)\cdot\right.$$
$$\cdot\, cos\left[(\omega-n_ph_3\Omega_m)t\ -\ (h_1-n_ph_3)\theta\ +\ \left(\angle\,\overline{m}-\ n_ph_3\theta_{m0}-\frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta$$
$$+\int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_1}{}^{+}\right)\cdot$$
$$\left.\cdot\, cos\left[(\omega+n_ph_3\Omega_m)t\ -\ (h_1+n_ph_3)\theta\ +\ \left(\angle\,\overline{m}+\ n_ph_3\theta_{m0}+\frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta\right\}$$

(7.28)

Nell' eq. (7.28), il primo integrale è diverso da zero se $(h_1-n_ph_3)\ =\ 0\ \rightarrow\ h_1=n_ph_3$, quindi, definendo $h_3\ =\ h^*\ \Longrightarrow\ h_1=n_ph^*$.

Quindi, il primo integrale dell'eq. (7.28), apportando le sostituzioni degli indici armonici h_1 e h_3 in funzione di un indice armonico comune h^*= armonica rotorica, diventa:

$$\int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_1}{}^{+}\right)\cdot$$
$$\cdot\, cos\left[(\omega-n_ph_3\Omega_m)t\ -\ (h_1-n_ph_3)\theta\ +\ \left(\angle\,\overline{m}-\ n_ph_3\theta_{m0}-\frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh^*}}\cdot M_{ts_g(n_ph^*)}{}^{+}\right)\cdot$$
$$\cdot\, cos\left[(\omega-n_ph^*\Omega_m)t\ +\ \left(\angle\,\overline{m}_{(n_ph^*)}-\ n_ph^*\theta_{m0}-\frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta$$

(7.29)

Pertanto, il risultato finale del primo integrale dell' eq. (7.28) vale:

$$\int_0^{2\pi} \left(\widehat{M_{trh_3}} \cdot M_{ts_g h_1}{}^{+}\right) \cdot \cdot \cos\left[(\omega - n_p h_3 \Omega_m)t - (h_1 - n_p h_3)\theta + \left(\angle \overline{m} - n_p h_3 \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] d\theta = 2\pi \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+}\right) \cdot \cdot \cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m)t + \left(\angle \overline{m}_{(n_p h^*)} - n_p h^* \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{7.30}$$

Invece, il secondo integrale dell'eq. (7.28) è diverso da zero se $(h_1 + n_p h_3) = 0 \rightarrow h_1 = -n_p h_3$, quindi, definendo $h_3 = h^* \implies h_1 = -n_p h^*$.

Tuttavia, questa condizione non può essere soddisfatta siccome entrambi gli indici armonici h_1 e h_3 sono $h_1 \geq 1$ e $h_3 \geq 1$.

Quindi, il secondo integrale dell' eq. (7.28) vale:

$$\int_0^{2\pi} \left(\widehat{M_{trh_3}} \cdot M_{ts_g h_1}{}^{+}\right) \cdot \cdot \cos\left[(\omega + n_p h_3 \Omega_m)t - (h_1 + n_p h_3)\theta + \left(\angle \overline{m} + n_p h_3 \theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\theta = 0 \tag{7.31}$$

Quindi, per concludere, l'integrale del doppio prodotto tra il campo statorico diretto $M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)$ e il campo rotorico $M_{tr}(\theta, t)$ vale:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) \cdot M_{tr}(\theta, t)\, d\theta = \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+}\right) \cdot \cdot \cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m)t + \left(\angle \overline{m}_{(n_p h^*)} - n_p h^* \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{7.32}$$

L'integrale del doppio prodotto tra il campo statorico inverso $M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t)$ e il campo rotorico $M_{tr}(\theta, t)$ vale:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\cdot M_{tr}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\left\{\sum_{h_2=1}^{+\infty} M_{ts_gh_2}{}^{-}\cdot cos[\omega t + h_2\theta + (\angle\bar{y})]\right\}$$
$$\cdot\left\{\sum_{h_3=1}^{+\infty} \widehat{M_{trh_3}}\cdot cos\left[n_ph_3\theta - n_ph_3\Omega_m\mathrm{t} - n_ph_3\theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right]\right\}d\theta$$

(7.33)

Eseguendo alcuni calcoli l'eq. (7.33) può essere riscritta come:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\cdot M_{tr}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\sum_{h_3=1}^{+\infty}\sum_{h_2=1}^{+\infty}\left(2\cdot\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)\cdot$$
$$\cdot cos\left[n_ph_3\theta - n_ph_3\Omega_m\mathrm{t} - n_ph_3\theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right]\cdot cos[\omega t + h_2\theta + (\angle\bar{y})]\,d\theta$$

(7.34)

Riorganizzando l'eq. (7.34) diversamente si ottiene che:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\cdot M_{tr}(\theta,t)\,d\theta =$$
$$= \sum_{h_3=1}^{+\infty}\sum_{h_2=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\left(2\cdot\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot cos\left[n_ph_3\theta - n_ph_3\Omega_m\mathrm{t} - n_ph_3\theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right]\cdot cos[\omega t + h_2\theta + (\angle\bar{y})]\,d\theta\right\}$$

(7.35)

Ma, siccome $cos(x)\cdot cos(y) = \frac{1}{2}\cdot[cos(x+y) + cos(x-y)]$, l'eq. (7.35) si può riscrivere come:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)\cdot M_{tr}(\theta,t)\,d\theta = \\ = \sum_{h_3=1}^{+\infty}\sum_{h_2=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)\cdot \right. \\ \cdot\, cos\left[(\omega - n_p h_3\Omega_m)t + (h_2 + n_p h_3)\theta + \left(\angle\,\bar{y} - n_p h_3\theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta \\ + \int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)\cdot \\ \left.\cdot\, cos\left[(\omega + n_p h_3\Omega_m)t + (h_2 - n_p h_3)\theta + \left(\angle\,\bar{y} + n_p h_3\theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta\right\} \tag{7.36}$$

Nell' eq. (7.36), il primo integrale è diverso da zero se $(h_2 + n_p h_3) = 0 \rightarrow h_2 = -\,n_p h_3$, quindi, definendo $h_3 = h^* \implies h_2 = -\,n_p h^*$.

Tuttavia, questa condizione non può essere soddisfatta siccome entrambi gli indici armonici h_2 e h_3 sono $h_2 \geq 1$ e $h_3 \geq 1$.

Quindi, il primo integrale dell' eq. (7.36) vale:

$$\int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)\cdot \\ \cdot\, cos\left[(\omega - n_p h_3\Omega_m)t + (h_2 + n_p h_3)\theta + \left(\angle\,\bar{y} - n_p h_3\theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta \\ = 0 \tag{7.37}$$

Invece, il secondo integrale dell'eq. (7.36) è diverso da zero se $(h_2 - n_p h_3) = 0 \rightarrow h_2 = n_p h_3$, quindi, definendo $h_3 = h^* \implies h_2 = n_p h^*$.

Quindi, il secondo integrale dell' eq. (7.36), apportando le sostituzioni degli indici armonici h_2 e h_3 in funzione di un indice armonico comune h^*= armonica rotorica, diventa:

$$\int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh_3}}\cdot M_{ts_gh_2}{}^{-}\right)\cdot \\ \cdot\, cos\left[(\omega + n_p h_3\Omega_m)t + (h_2 - n_p h_3)\theta + \left(\angle\,\bar{y} + n_p h_3\theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta \\ = \int_0^{2\pi}\left(\widehat{M_{trh^*}}\cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-}\right)\cdot \\ \cdot\, cos\left[(\omega + n_p h^*\Omega_m)t + \left(\angle\,\bar{y}_{(n_p h^*)} + n_p h^*\theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right]d\theta \tag{7.38}$$

Pertanto, il risultato finale del secondo integrale dell' eq. (7.36) vale:

$$\int_0^{2\pi} \left(\widehat{M_{trh_3}} \cdot M_{ts_g h_2}{}^{-}\right) \cdot \\ \cdot \cos\left[(\omega + n_p h_3 \Omega_m)t \ + \ (h_2 - n_p h_3)\theta \ + \ \left(\angle \bar{y} + \ n_p h_3 \theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\theta \\ = \ 2\pi \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-}\right) \cdot \\ \cdot \cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m)t \ + \ \left(\angle \bar{y}_{(n_p h^*)} + \ n_p h^* \theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{7.39}$$

Quindi, per concludere, l'integrale del doppio prodotto tra il campo statorico inverso $M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t)$ e il campo rotorico $M_{tr}(\theta, t)$ vale:

$$\int_0^{2\pi} 2M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t) \cdot M_{tr}(\theta, t)\, d\theta \\ = \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-}\right) \cdot \\ \cdot \cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m)t \ + \ \left(\angle \bar{y}_{(n_p h^*)} + \ n_p h^* \theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{7.40}$$

Gli integrali ottenuti finora si riferiscono al particolare caso dei campi rotanti per la macchina sana (in cui $\angle \bar{m}_{(n_p h^*)}$ = fase del campo statorico diretto $M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)$ a macchina sana, $\angle \bar{y}_{(n_p h^*)}$ = fase del campo statorico inverso $M_{ts_g}{}^{-}(\theta, t)$ a macchina sana).

Tuttavia, il ragionamento fatto finora è immediatamente estendibile al generico caso della macchina in generiche condizioni operative (i.e. sana o guasta, indipendentemente dalla distinzione del tipo di guasto) fatte le seguenti premesse:

1. Considerando il generico sviluppo in serie di Fourier del campo rotante diretto $M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)$:

$$M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t) \ = \sum_{h_1=1}^{+\infty} M_{ts_g h_1}{}^{+} \cdot \cos\left[\omega t \ - \ h_1 \theta \ + \ (\angle \bar{M}_{ts_g h_1}{}^{+})\right] \tag{7.41}$$

   in cui $\bar{M}_{ts_g h_1}{}^{+}$= fasore della fmm statorica diretta al traferro $M_{ts_g}{}^{+}(\theta, t)$ all'armonica h_1; $\bar{M}_{ts_g h_1}{}^{+} \ = \ M_{ts_g h_1}{}^{+} \angle \bar{M}_{ts_g h_1}{}^{+}$, in cui l'ampiezza $M_{ts_g h_1}{}^{+}$ può assumere anche valori negativi per come è stata definita;

2. Considerando il generico sviluppo in serie di Fourier del campo rotante inverso $M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)$:

$$M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t) = \sum_{h_2=1}^{+\infty} M_{ts_g h_2}{}^{-} \cdot cos\left[\omega t + h_2\theta + (\angle \bar{M}_{ts_g h_2}{}^{-})\right] \tag{7.42}$$

in cui $\bar{M}_{ts_g h_2}{}^{-}$ = fasore della fmm statorica inversa al traferro $M_{ts_g}{}^{-}(\theta,t)$ all'armonica h_2; $\bar{M}_{ts_g h_2}{}^{-} = M_{ts_g h_2}{}^{-} \angle \bar{M}_{ts_g h_2}{}^{-}$, in cui l'ampiezza $M_{ts_g h_2}{}^{-}$ può assumere anche valori negativi per come è stata definita;

3. L'integrale del quadrato della fmm risultante al traferro $F_g(\theta,t)$ vale:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F_g{}^2(\theta,t)\,d\theta = &\sum_{h_1=1}^{+\infty} \pi \cdot \left(M_{ts_g h_1}{}^{+}\right)^2 + \sum_{h_2=1}^{+\infty} \pi \cdot \left(M_{ts_g h_2}{}^{-}\right)^2 + \sum_{h_3=1}^{+\infty} \pi \cdot \left(\widehat{M_{trh_3}}\right)^2 \\ &+ \sum_{h_{12}=1}^{+\infty} \left(M_{ts_g h_{12}}{}^{+} \cdot M_{ts_g h_{12}}{}^{-}\right) \cdot 2\pi \cdot cos(2\omega t) \\ &+ \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+}\right) \cdot \\ &\cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m)t + \left(\angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &+ \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-}\right) \cdot \\ &\cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m)t + \left(\angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} + n_p h^* \theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{7.43}$$

In cui, $h_3 = h^*$ = armonica rotorica, invece $h_1 = h_2 = h_{12}$ = armonica statorica.

In caso di macchina sana:

$$\angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} = \angle \bar{m}_{(n_p h^*)} \text{ e } \angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} = \angle \bar{y}_{(n_p h^*)} \tag{7.44}$$

In caso di macchina con via parallela a1 disconnessa:

$$\angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} = \angle \bar{d}_{(n_p h^*)} \text{ e } \angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} = \angle \bar{e}_{(n_p h^*)} \tag{7.45}$$

In caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse:

$$\angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} = \angle \bar{s}_{(n_p h^*)} \text{ e } \angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} = \angle \bar{f}_{(n_p h^*)} \tag{7.46}$$

7.3. Forza magnetomotrice risultante sulla corona circolare di magneti permanenti e l'integrale del suo quadrato per $\theta \in [0, 2\pi]$

Con un ragionamento analogo all'ottenimento dell'integrale del quadrato della forza magnetomotrice risultante al traferro è possibile ricavare anche l'integrale del quadrato della forza magnetomotrice risultante sulla corona circolare di magneti permanenti.

Ricordando che la fmm rotorica rotante sulla corona circolare di magneti permanenti è $M_{corona_{PM}}(\theta, \mathrm{t})$, la cui ampiezza alla sua h_3-esima armonica è $\widehat{M}_{corona_{PM}h_3}$, è possibile ricavare anche la fmm risultante sulla corona circolare di magneti permanenti $F_{PM}(\theta, t)$.

L'integrale del quadrato di $F_{PM}(\theta, t)$ nel generico caso della macchina in generiche condizioni operative (i.e. sana o guasta, indipendentemente dalla distinzione del tipo di guasto) può essere ottenuto fatte le seguenti premesse:

1. Considerando il generico sviluppo in serie di Fourier del campo rotante diretto $M_{ts_{PM}}{}^{+}(\theta, t)$:

$$M_{ts_{PM}}{}^{+}(\theta, t) = \sum_{h_1=1}^{+\infty} M_{ts_{PM}h_1}{}^{+} \cdot cos\left[\omega t - h_1\theta + (\angle \bar{M}_{ts_{PM}h_1}{}^{+})\right] \tag{7.47}$$

   in cui $\bar{M}_{ts_{PM}h_1}{}^{+}$= fasore della fmm statorica diretta sulla corona circolare di magneti permanenti $M_{ts_{PM}}{}^{+}(\theta, t)$ all'armonica h_1;

   $\bar{M}_{ts_{PM}h_1}{}^{+} = M_{ts_{PM}h_1}{}^{+} \angle \bar{M}_{ts_{PM}h_1}{}^{+}$, in cui l'ampiezza $M_{ts_{PM}h_1}{}^{+}$ può assumere anche valori negativi per come è stata definita;

2. Considerando il generico sviluppo in serie di Fourier del campo rotante inverso $M_{ts_{PM}}{}^{-}(\theta, t)$:

$$M_{ts_{PM}}{}^{-}(\theta,t) = \sum_{h_2=1}^{+\infty} M_{ts_{PM}h_2}{}^{-} \cdot cos\left[\omega t + h_2\theta + (\angle \bar{M}_{ts_{PM}h_2}{}^{-})\right] \tag{7.48}$$

in cui $\bar{M}_{ts_{PM}h_2}{}^{-}$ = fasore della fmm statorica inversa sulla corona circolare di magneti permanenti $M_{ts_{PM}}{}^{-}(\theta,t)$ all'armonica h_2;

$\bar{M}_{ts_{PM}h_2}{}^{-} = M_{ts_{PM}h_2}{}^{-} \angle \bar{M}_{ts_{PM}h_2}{}^{-}$, in cui l'ampiezza $M_{ts_{PM}h_2}{}^{-}$ può assumere anche valori negativi per come è stata definita;

3. L'integrale del quadrato della fmm risultante sulla corona circolare di magneti permanenti $F_{PM}(\theta,t)$ vale:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} F_{PM}{}^2(\theta,t)\, d\theta \\
&= \sum_{h_1=1}^{+\infty} \pi \cdot \left(M_{ts_{PM}h_1}{}^{+}\right)^2 + \sum_{h_2=1}^{+\infty} \pi \cdot \left(M_{ts_{PM}h_2}{}^{-}\right)^2 + \sum_{h_3=1}^{+\infty} \pi \cdot \left(\hat{M}_{corona_{PM}h_3}\right)^2 \\
&+ \sum_{h_{12}=1}^{+\infty} \left(M_{ts_{PM}h_{12}}{}^{+} \cdot M_{ts_{PM}h_{12}}{}^{-}\right) \cdot 2\pi \cdot cos(2\omega t) \\
&+ \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(\hat{M}_{corona_{PM}h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+}\right) \cdot \\
&\cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m)t + \left(\angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&+ \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(\hat{M}_{corona_{PM}h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-}\right) \cdot \\
&\cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m)t + \left(\angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} + n_p h^* \theta_{m0} + \frac{\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{7.49}$$

In cui, $h_3 = h^*$ = armonica rotorica, invece $h_1 = h_2 = h_{12}$ = armonica statorica.

In caso di macchina sana:

$$\angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} = \angle \bar{m}_{(n_p h^*)} \text{ e } \angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} = \angle \bar{y}_{(n_p h^*)} \tag{7.50}$$

In caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa:

$$\angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} = \angle \bar{d}_{(n_p h^*)} \text{ e } \angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} = \angle \bar{e}_{(n_p h^*)} \tag{7.51}$$

In caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse:

$$\angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} = \angle \bar{s}_{(n_p h^*)} \text{ e } \angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} = \angle \bar{f}_{(n_p h^*)} \tag{7.52}$$

7.4. Determinazione della coppia elettromagnetica a partire dalla coenergia magnetica totale nella macchina

Sostituendo gli integrali dei quadrati delle fmm risultanti al traferro e sulla corona circolare di magneti permanenti nell'espressione della coenergia totale della macchina, si ottiene che la coenergia magnetica totale $W_\mu{}'$ è funzione del tempo t e dell'angolo meccanico iniziale θ_{m0} (i.e. all'istante t=0) tra il sistema di riferimento solidale con lo statore ed il sistema di riferimento solidale con il rotore:

$$
\begin{aligned}
W'_{\mu}\,(\theta_{m0}\,,t) \;=\; & \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h_1=1}^{+\infty} \left(M_{ts_g h_1}{}^{+} \right)^2 + \sum_{h_2=1}^{+\infty} \left(M_{ts_g h_2}{}^{-} \right)^2 + \sum_{h_3=1}^{+\infty} \left(\widehat{M_{trh_3}} \right)^2 \right. \\
& + \sum_{h_{12}=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(M_{ts_g h_{12}}{}^{+} \cdot M_{ts_g h_{12}}{}^{-} \right) \cdot cos(2\omega t) \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g (n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \\
& \cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m) t + \left(\angle \bar{M}_{ts_g (n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g (n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m) t + \left(\angle \bar{M}_{ts_g (n_p h^*)}{}^{-} + n_p h^* \theta_{m0} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right) \\
& + \frac{\mu_{PM} \cdot \pi \cdot D_{PM} \cdot l}{4 h_{PM}} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h_1=1}^{+\infty} \left(M_{ts_{PM} h_1}{}^{+} \right)^2 + \sum_{h_2=1}^{+\infty} \left(M_{ts_{PM} h_2}{}^{-} \right)^2 + \sum_{h_3=1}^{+\infty} \left(\widehat{M}_{corona_{PM} h_3} \right)^2 \right. \\
& + \sum_{h_{12}=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(M_{ts_{PM} h_{12}}{}^{+} \cdot M_{ts_{PM} h_{12}}{}^{-} \right) \cdot cos(2\omega t) \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM} (n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \\
& \cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m) t + \left(\angle \bar{M}_{ts_{PM} (n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM} (n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m) t + \left(\angle \bar{M}_{ts_{PM} (n_p h^*)}{}^{-} + n_p h^* \theta_{m0} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right)
\end{aligned}
\tag{7.53}
$$

La coppia elettromagnetica C_e può essere, quindi, determinata tramite la derivata della coenergia magnetica totale della macchina $W_\mu{}'$ rispetto all'angolo meccanico iniziale θ_{m0} tra il sistema di riferimento solidale con lo statore ed il sistema di riferimento solidale con il rotore, valutata tenendo le correnti nelle tre fasi costanti:

$$C_e = \left.\frac{\partial W_\mu{}'}{\partial \theta_{m0}}\right|_{i_a,\, i_b,\, i_c\, =\, cost.} \tag{7.54}$$

L' eq. (7.54) equivale a valutare la derivata della coenergia magnetica totale della macchina $W_\mu{}'$ ad un istante di tempo $t = \bar{t}$ virtualmente congelato:

$$C_e = \left.\frac{\partial W_\mu{}'}{\partial \theta_{m0}}\right|_{t\, =\, \bar{t}\, =\, cost.} \tag{7.55}$$

Sviluppando i calcoli nell' eq. (7.55), si ottiene che la coppia elettromagnetica C_e vale:

$$
\begin{aligned}
C_e(\theta_{m0}\,,\bar{t}) \;=\; & n_p \cdot \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \right. \\
& \cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m)\bar{t} \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} \;-\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m)\bar{t} \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} \;+\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \right) \\
& + \; n_p \cdot \frac{\mu_{PM} \cdot \pi \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \right. \\
& \cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m)\bar{t} \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} \;-\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m)\bar{t} \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} \;+\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \right)
\end{aligned}
\tag{7.56}
$$

Osservando l'eq. (7.56) si nota che la coppia elettromagnetica C_e ha valore dipendente dall'angolo meccanico iniziale tra statore e rotore θ_{m0} e dall'istante di tempo $\bar{t}$ considerato.

Pertanto, la coppia elettromagnetica è esprimibile come $C_e \;=\; C_e(\theta_{m0}\,,\bar{t})$, quindi, in generale, in funzione del tempo t libero di scorrere, la coppia elettromagnetica è esprimibile come $C_e \;=\; C_e(\theta_{m0}\,,t)$ e la sua espressione è data dall'equazione (7.57):

$$
\begin{aligned}
C_e(\theta_{m0}\,,t) \;=\; & n_p \cdot \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \right. \\
& \cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m) t \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} \;-\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m) t \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} \;+\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \right) \\
& + \; n_p \cdot \frac{\mu_{PM} \cdot \pi \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \right. \\
& \cdot cos\left[(\omega - n_p h^* \Omega_m) t \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} \;-\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} (-\,h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(\omega + n_p h^* \Omega_m) t \;+\; \left(\angle\, \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} \;+\; n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \right)
\end{aligned}
\tag{7.57}
$$

Nell'eq. (7.57) si osserva che la coppia elettromagnetica C_e ha intensità variabile nel tempo, tuttavia, siccome per le ipotesi fatte la macchina opera a regime, l'armonica di coppia di contributo maggiore C_{e1} (i.e. per $h^* = 1$) risulta costante nel tempo.

Facendo riferimento all'espressione della coppia elettromagnetica C_e di eq. (7.57), si vuole ottenere l'equazione della coppia in funzione del tempo con armonica C_{e1} costante, espressa in funzione della sola pulsazione delle correnti di fase ω.

Ciò si ottiene per $\omega - n_p h^* \Omega_m \;=\; 0$ con $h^* = 1$.

Se, poi, in aggiunta, si volesse rendere massima la coppia elettromagnetica in valore assoluto, di valore di un segno o dell'altro, si potrebbe ottenere ciò per una delle due condizioni in alternativa $\left(\angle\, \bar{M}_{ts(n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} \right) = 0$ oppure $\left(\angle\, \bar{M}_{ts(n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} \right) = \pi$ (sempre con $h^* = 1$).

Ovvero, bisogna fare in modo che:

- $\omega \;=\; n_p \Omega_m \quad \leftarrow$ (tale condizione è già soddisfatta considerando le ipotesi fatte)

- $\theta_{m0} = \frac{\angle \bar{M}_{ts(n_p)}{}^{+}}{n_p}$ oppure $\theta_{m0} = \frac{\angle \bar{M}_{ts(n_p)}{}^{+} - \pi}{n_p}$

(7.58)

Apportando le sostituzioni illustrate dalle eq. (7.58) nell'eq. (7.57), si ottiene che l'equazione della coppia massima in valore assoluto in funzione del tempo vale:

$$
\begin{aligned}
C_e(\theta_{m0}, t) = {} & n_p \cdot \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h^*=1}^{+\infty} (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \right. \\
& \cdot cos\left[(1-h^*)\omega t + \left(\angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot M_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(1+h^*)\omega t + \left(\angle \bar{M}_{ts_g(n_p h^*)}{}^{-} + n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \right) \\
& + n_p \cdot \frac{\mu_{PM} \cdot \pi \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot \\
& \cdot \left(\sum_{h^*=1}^{+\infty} (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} \right) \cdot \right. \\
& \cdot cos\left[(1-h^*)\omega t + \left(\angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{+} - n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \\
& + \sum_{h^*=1}^{+\infty} (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot M_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} \right) \cdot \\
& \left. \cdot cos\left[(1+h^*)\omega t + \left(\angle \bar{M}_{ts_{PM}(n_p h^*)}{}^{-} + n_p h^* \theta_{m0} \right) \right] \right)
\end{aligned}
$$

(7.59)

Per completezza, qui di seguito, si riporta anche l'espressione della coppia costante, ovvero l'espressione in cui si rende costante l'armonica di coppia di contributo maggiore nella coppia elettromagnetica totale, cioè si riporta l'espressione di C_{e1} in funzione di θ_{m0}.

L'espressione della coppia costante C_{e1} vale:

$$
C_{e1} = n_p \cdot \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{tr1}} \cdot M_{ts_g(n_p)}{}^{+} \right) \cdot cos\left[\left(\angle \bar{M}_{ts_g(n_p)}{}^{+} - n_p \theta_{m0} \right) \right]
$$

$$+ n_p \cdot \frac{\mu_{PM} \cdot \pi \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM}1} \cdot M_{ts_{PM}(n_p)}{}^{+}\right) \cdot cos\left[\left(\angle \overline{M}_{ts_{PM}(n_p)}{}^{+} - n_p\theta_{m0}\right)\right] \tag{7.60}$$

Come si può osservare dall' equazione (7.60), il valore ed il segno della coppia dipendono dall'angolo meccanico iniziale tra statore e rotore θ_{m0}.

Assumendo l'angolo meccanico iniziale tra statore e rotore pari a $\theta_{m0} = \frac{\angle \overline{M}_{ts(n_p)}{}^{+}}{n_p}$ i grafici della coppia elettromagnetica C_{e1} costante in funzione del tempo vengono illustrati nel seguito per ciascun caso di:

1. Macchina sana
2. Macchina con via parallela a_1 disconnessa
3. Macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse.

- <u>Macchina sana</u>

Come ci si dovrebbe aspettare la coppia $|C_{e1}| = 12$ Nm, pari alla coppia nominale della macchina.

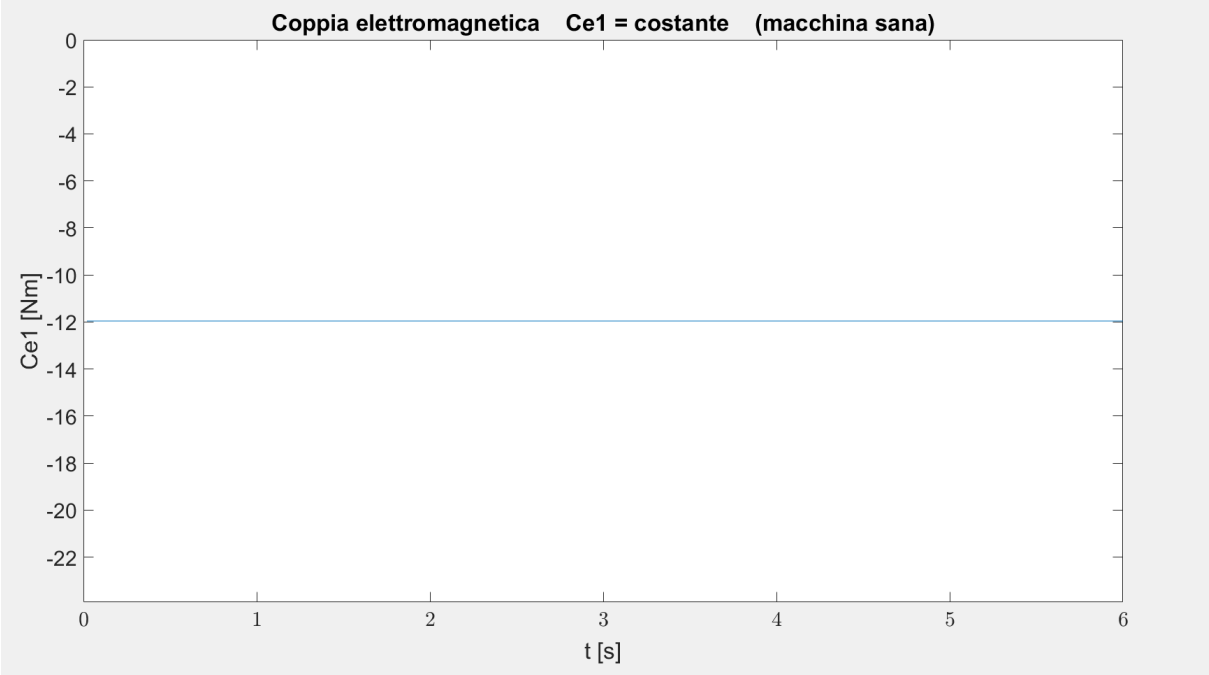


Figura 59: Coppia elettromagnetica C_{e1} = costante in funzione del tempo t (macchina sana)

- <u>Macchina con via parallela a1 disconnessa</u>

Nel caso della via parallela a1 disconnessa, in Figura 60 si mostra che non è possibile mantenere l'armonica di coppia C_{e1} costante in funzione del tempo, ma all'armonica $h^* = 1$ è presente un ripple di coppia causato dalla presenza di un'armonica di coppia dovuta al campo rotante statorico inverso diversa da zero, infatti l'ampiezza delle oscillazioni è pari ad 1 Nm e la pulsazione delle oscillazioni è pari a $2\omega = 2n_p\Omega_m = 2 \cdot 5 \cdot 471.24\ \frac{rad}{s} = 4712.4\ \frac{rad}{s}$ corrispondente ad un periodo delle oscillazioni $T = \frac{2\pi}{2n_p\Omega_m} = 0.0013\ s = 1.3 \cdot 10^{-3}\ s$.

Inoltre, si nota una sensibile riduzione del valore medio della coppia rispetto al caso di macchina sana.

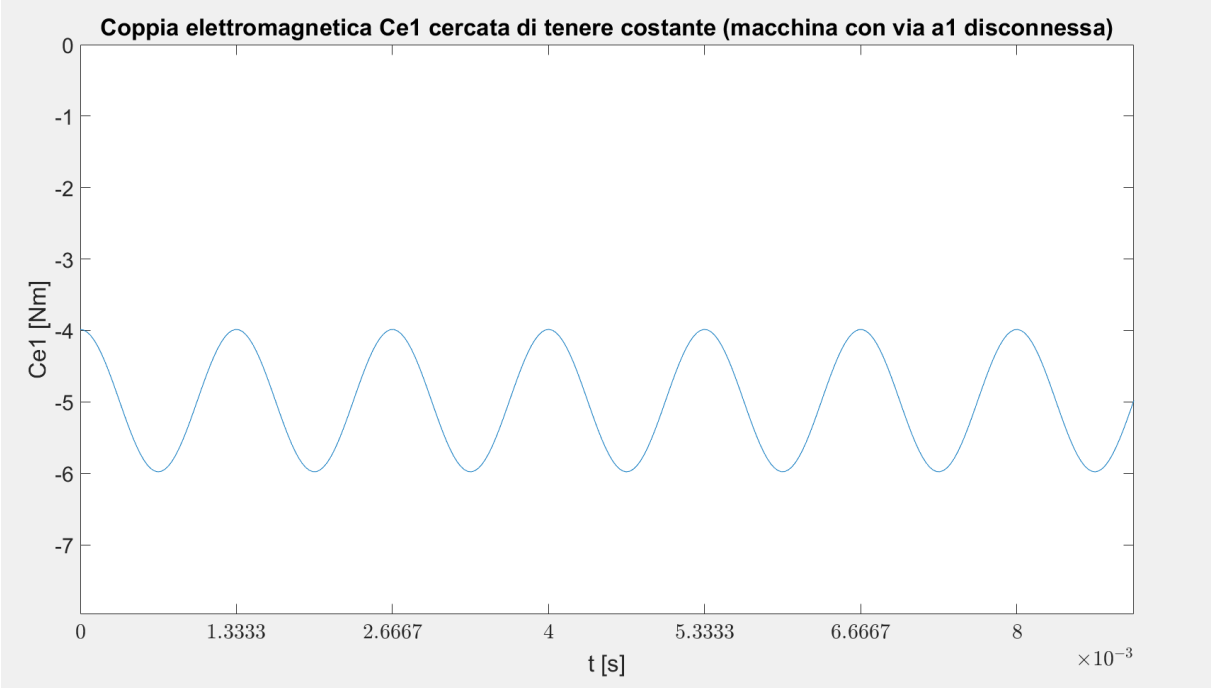


Figura 60: Coppia elettromagnetica C_{e1} cercata di tenere costante in funzione del tempo t (macchina con via a_1 disconnessa)

- <u>Macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse</u>

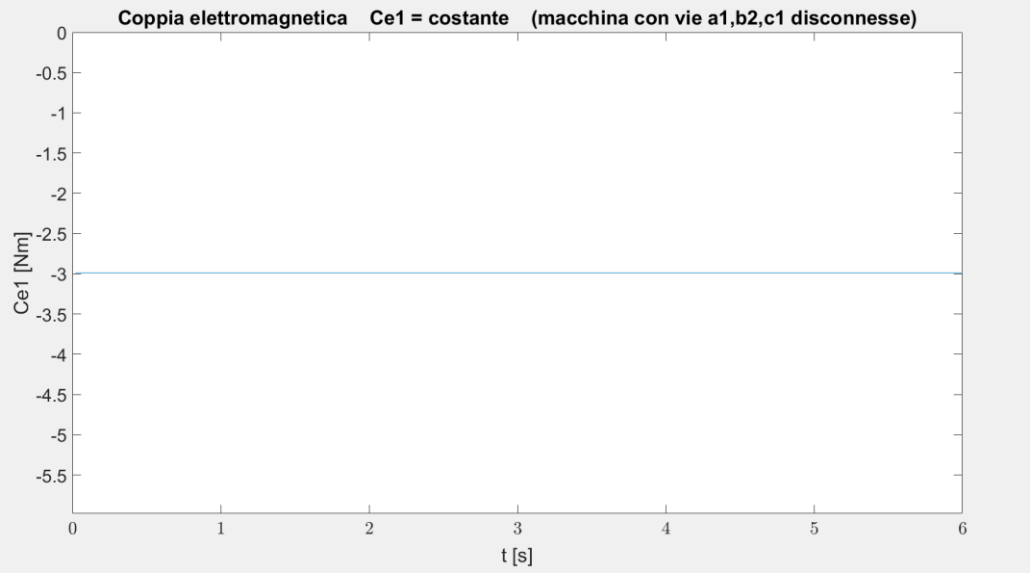


Figura 61: Coppia elettromagnetica $C_{e1} =$ costante in funzione del tempo t (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

In questo caso, la coppia viene sensibilmente ridotta rispetto al caso di macchina con via a_1 disconnessa, tuttavia il vantaggio rispetto al caso precedente è quello di riuscire a mantenere la coppia costante in seguito al guasto.

7.5. Armoniche di coppia elettromagnetica nella macchina SPMSM

Con riferimento all'equazione (7.57) della coppia elettromagnetica $C_e(\theta_{m0}, t)$ in funzione del tempo t libero di scorrere, le armoniche di coppia dovute al campo rotante statorico diretto ${C_{eh^*}}^+$ in funzione dell'ordine dell'armonica rotorica h^* valgono:

$$
\begin{aligned}
{C_{eh^*}}^+ = {} & n_p \cdot \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot {M_{ts_g(n_p h^*)}}^+\right) \\
& + n_p \cdot \frac{\mu_{PM} \cdot \pi \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot {M_{ts_{PM}(n_p h^*)}}^+\right)
\end{aligned}
\tag{7.61}
$$

Con riferimento all'equazione (7.57) della coppia elettromagnetica $C_e(\theta_{m0}, t)$ in funzione del tempo t libero di scorrere, le armoniche di coppia dovute al campo rotante statorico inverso ${C_{eh^*}}^-$ in funzione dell'ordine dell'armonica rotorica h^* valgono:

$$
\begin{aligned}
{C_{eh^*}}^- = {} & n_p \cdot \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D_g \cdot l}{4g} \cdot (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M_{trh^*}} \cdot {M_{ts_g(n_p h^*)}}^-\right) \\
& + n_p \cdot \frac{\mu_{PM} \cdot \pi \cdot D_{PM} \cdot l}{4h_{PM}} \cdot (-h^*) \cdot \left(2 \cdot \widehat{M}_{corona_{PM} h^*} \cdot {M_{ts_{PM}(n_p h^*)}}^-\right)
\end{aligned}
\tag{7.62}
$$

A titolo illustrativo, in questo paragrafo vengono mostrati i grafici delle armoniche di coppia dovute al campo statorico diretto ed inverso per ciascun caso di:

1. Macchina sana
2. Macchina con via parallela a_1 disconnessa
3. Macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse.

Le armoniche di coppia vengono illustrate in funzione dell'ordine dell'armonica rotorica h^*, ma bisogna ricordare che l'armonica corrispondente ad $h^* = 1$ è quella che si cerca di tenere costante.

- Macchina sana

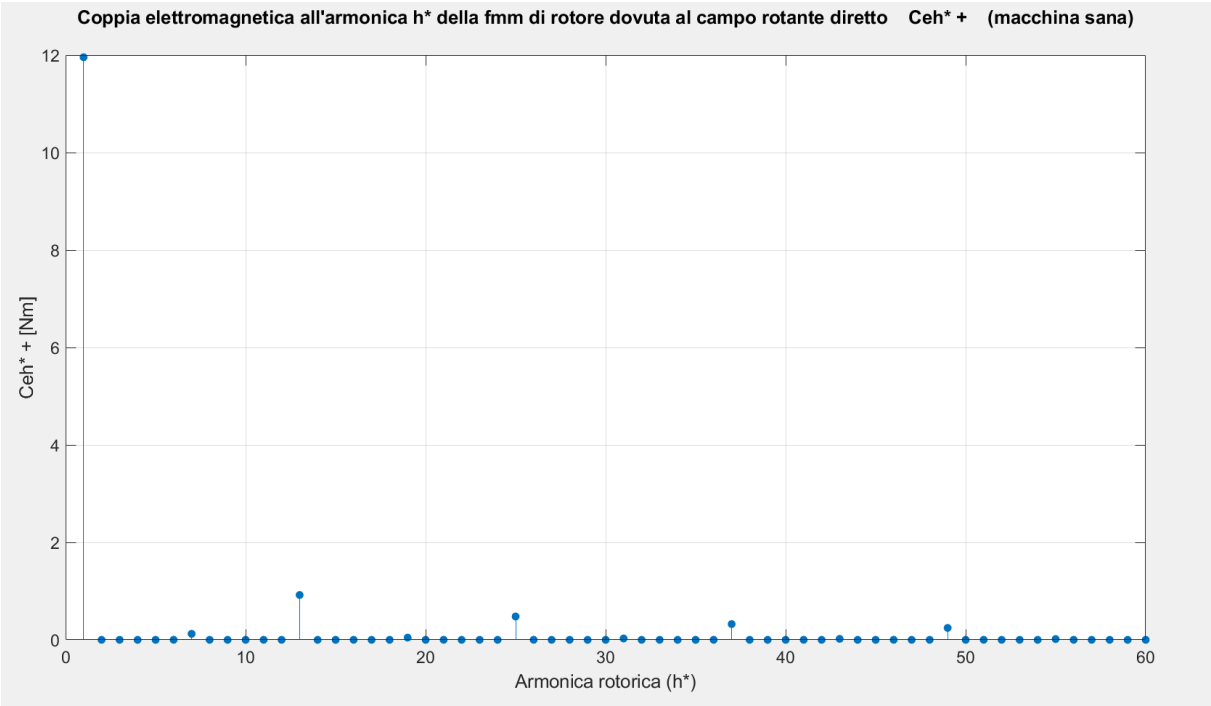


Figura 62: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico diretto (macchina sana)

Come ci si aspettava, il contributo di coppia maggiore è quello relativo all'armonica C_{e1} la quale è diversa da zero nello spettro delle armoniche di coppia relative al campo rotante diretto per via della scelta della terna di correnti di alimentazione effettuata in questo elaborato ed uguale a zero nello spettro delle armoniche di coppia relative al campo rotante inverso.

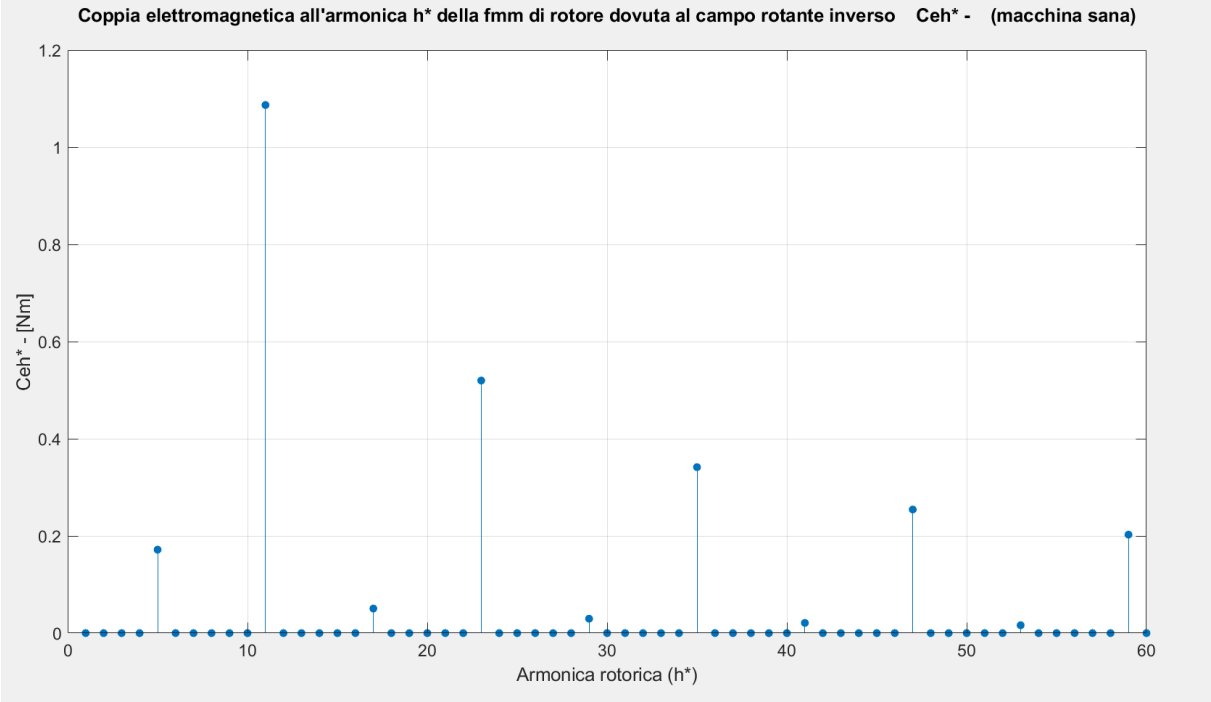


Figura 63: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico inverso (macchina sana)

- <u>Macchina con via parallela a_1 disconnessa</u>

Dai grafici si nota che l'armonica C_{e1} relativa al campo rotante diretto subisce una drastica riduzione (i.e. viene più che dimezzata rispetto al caso di macchina sana).

Invece, per quanto riguarda le armoniche di coppia relative al campo rotante inverso, le armoniche di entità maggiore risultano essere la prima e la terza con ampiezza approssimativamente uguale alle due armoniche di coppia inverse di entità maggiore nel caso della macchina sana, con la differenza che con la disconnessione della via parallela a_1 esse risultano essere molto più ravvicinate tra di loro e confinate verso i più bassi indici armonici in cui si vorrebbe che sia presente solo l'armonica C_{e1} dovuta al campo rotante diretto.

Inoltre, si nota che tutte le armoniche di coppia di ordine pari dirette e inverse risultano nulle, siccome tutte le armoniche pari della fmm rotante rotorica risultano nulle.

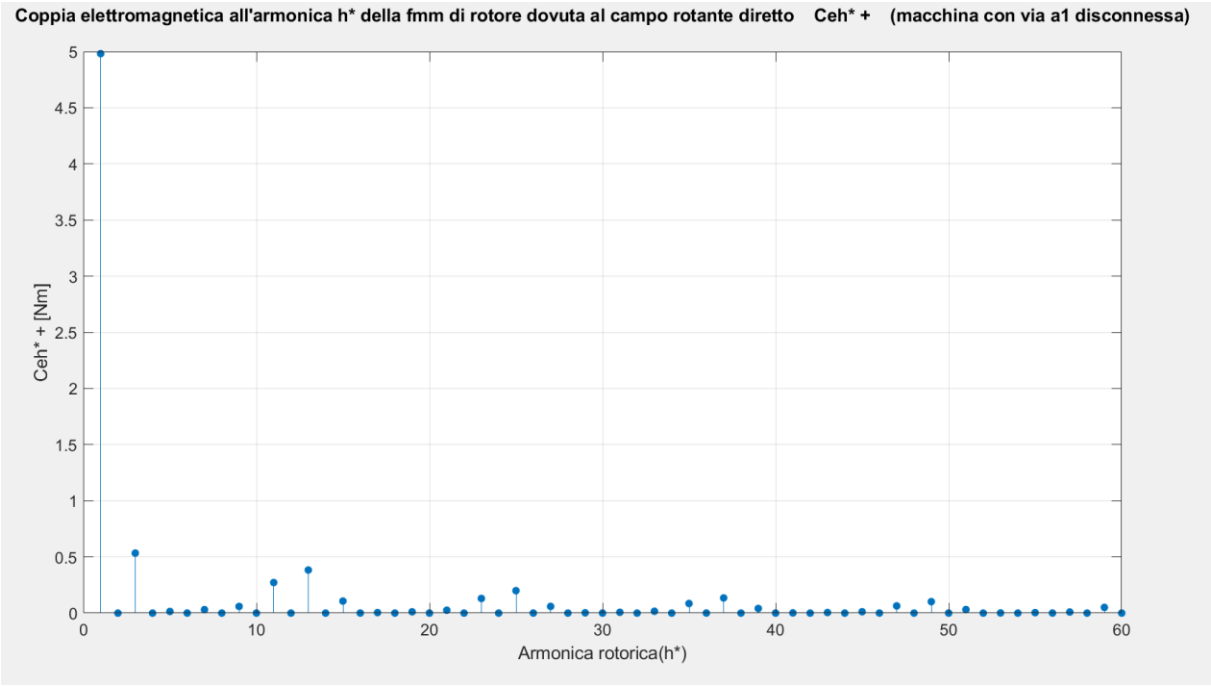


Figura 64: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico diretto (macchina con via a_1 disconnessa)

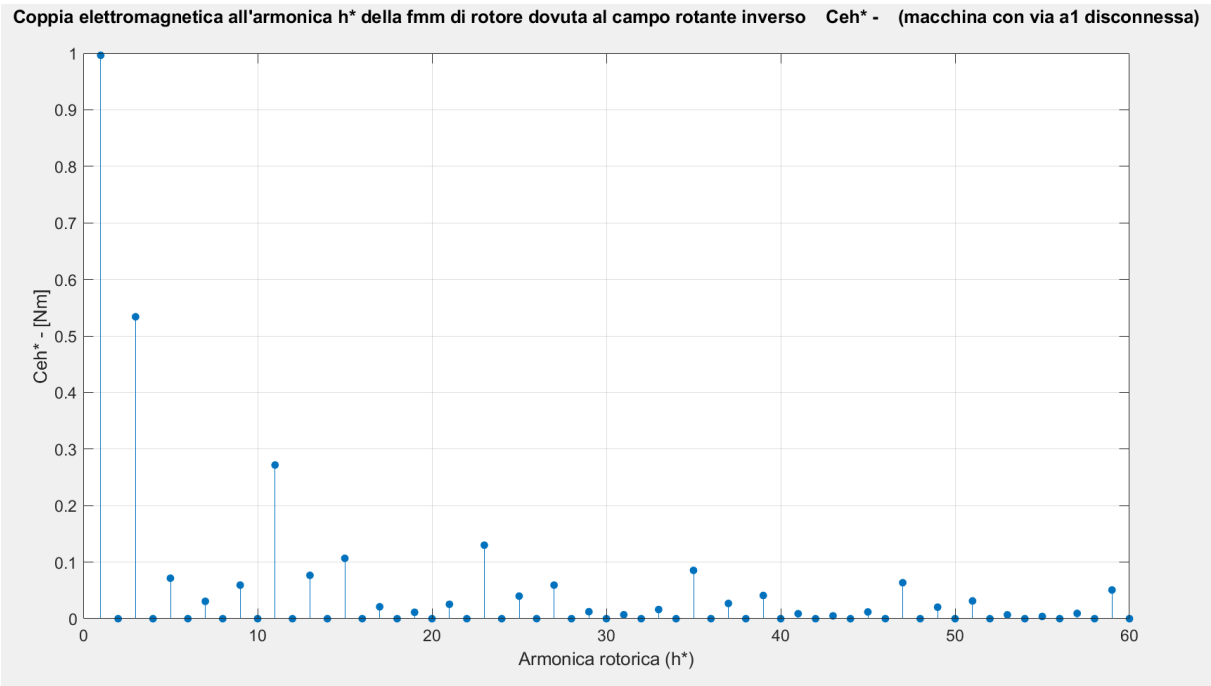


Figura 65: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico inverso (macchina con via a_1 disconnessa)

- Macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 disconnesse

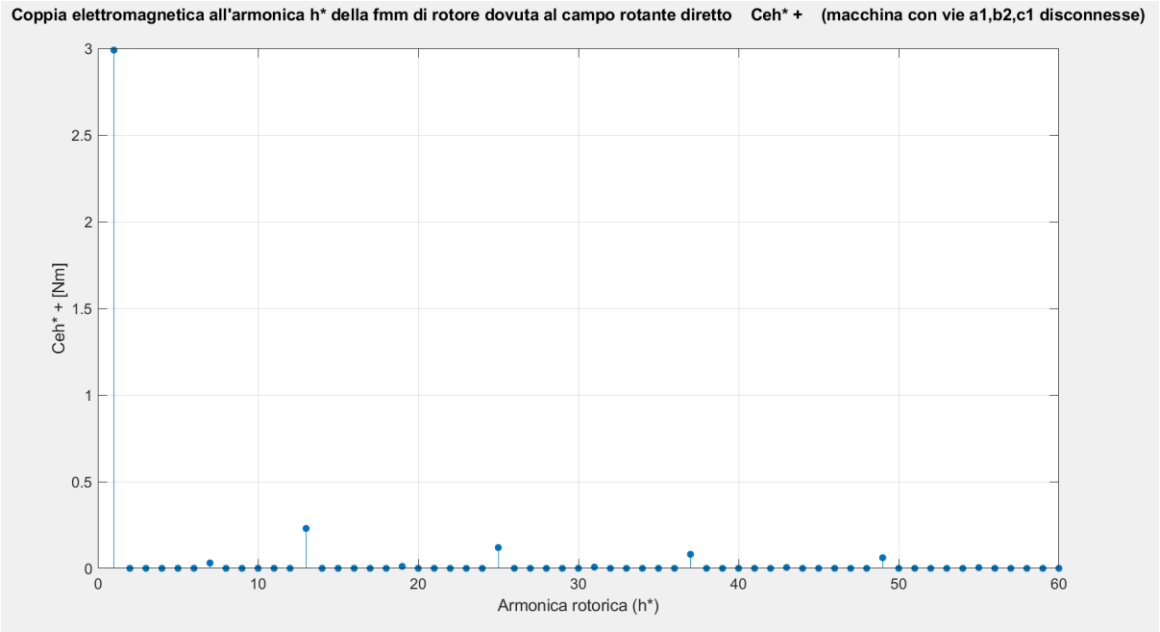


Figura 66: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico diretto (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

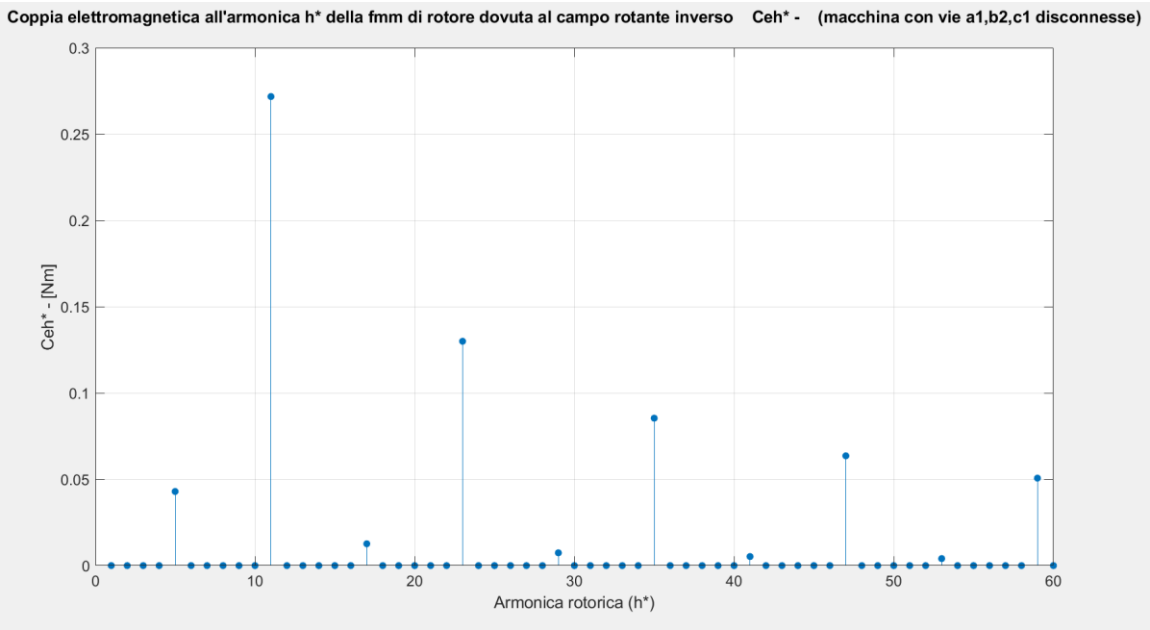


Figura 67: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico inverso (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse)

Anche in questo caso l'armonica di coppia C_{e1} dovuta al campo rotante diretto risulta sensibilmente ridotta rispetto al caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa, tuttavia l'armonica di coppia più elevata dovuta al campo rotante inverso risulta molto più bassa rispetto a quella più elevata del campo rotante inverso nel caso di via a_1 disconnessa.

Contemporaneamente, l'armonica di coppia più elevata dovuta al campo rotante inverso risulta confinata verso indici armonici più elevati.

Per il resto, l'andamento dei grafici delle armoniche di coppia dovute al campo rotante diretto ed al campo rotante inverso nel caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse sembra essere identico al caso della macchina sana, con la differenza che le ampiezze di ciascuna armonica risultano scalate.

8 Conclusioni

L'obiettivo del presente elaborato è quello di valutare le prestazioni di una SPMSM interessata da un guasto di corto-circuito tra spire sfociato in un guasto bobina-massa, in cui la via parallela contenente il guasto viene scollegata per preservare il funzionamento della macchina a prestazioni ridotte.

Bisogna precisare che lo scollegamento della via parallela guasta non è sufficiente ad arrestare la propagazione del guasto alle parti sane della macchina in quanto, anche scollegando la via parallela guasta, il flusso magnetico che si concatena con le spire cortocircuitate dal guasto continuerebbe a determinare il passaggio di corrente nel punto di guasto.

Di conseguenza, l'isolamento dell'avvolgimento nel punto di guasto procederebbe ad usurarsi e anche gli isolamenti degli avvolgimenti adiacenti spazialmente al punto di guasto verrebbero a degradarsi costringendo le protezioni della sorgente di alimentazione della macchina ad interrompere l'alimentazione alla SPMSM in quanto rileverebbero un guasto tra fase e terra in una delle vie parallele rimanenti collegate.

Per ovviare a tale problema e continuare a far operare la macchina a prestazioni ridotte (senza attendere il guasto tra fase e terra), un'idea potrebbe essere quella di corredare la macchina in fase progettuale di un sistema meccanico in grado di recidere la bobina guasta lungo tutta l'altezza della bobina.

Così facendo, il flusso che si concatena ad essa non sarebbe più in grado di continuare a far passare corrente nel punto di guasto, consentendo così il proseguo dell'operazione della macchina a prestazioni ridotte.

Un'ulteriore osservazione su accorgimenti utili per aumentare il valore medio della coppia in caso di macchina con via parallela a_1 disconnessa merita di essere fatta.

In questa trattazione, la macchina che si è analizzata è sprovvista del neutro, quindi si è costretti a limitare fortemente la corrente anche nelle fasi sane al fine rispettare il vincolo che prevede che la somma delle correnti di fase sia nulla.

Se, però, si impiegasse una SPMSM provvista del conduttore neutro, si potrebbe continuare a tenere la corrente nelle fasi sane al valore della corrente nominale a macchina sana e limitare solo la corrente nella fase guasta.

Viene fornito ora un riepilogo dei punti salienti affrontati in questo elaborato.

Nel (Cap. 1) è stata fatta una panoramica dello stato dell'arte sulle possibili strategie di controllo tolleranti al guasto di una macchina sincrona a magneti permanenti soggetta ad un guasto nell'avvolgimento statorico.

Nel (Cap.2) sono stati forniti i dettagli costruttivi e gli schemi di connessione degli avvolgimenti della macchina SPMSM considerata in questo elaborato, con un'introduzione sui parametri geometrici che nei capitoli successivi sono stati impiegati per sviluppare la trattazione contenuta nella presente tesi.

Nel (Cap.3) è stato introdotto il modello circuitale del singolo magnete permanente, ottenuto approssimando la caratteristica d'isteresi del magnete permanente con la linea di ritorno.

Nel (Cap.4) sono state ottenute le espressioni delle fmm di fase sullo spessore traferro + magneti e si è osservato come il fattore di avvolgimento di una generica fase cambi dall'avere entrambe le vie parallele connesse all'averne una sola connessa.

A partire dalle fmm di fase sullo spessore traferro + magneti ottenute, si è proceduto nel (Cap.5) ad ottenere le espressioni dei campi statorici rotanti di fmm sullo spessore traferro + magneti per ciascun caso concernente le vie parallele connesse analizzato in questo testo, mostrando anche il contenuto armonico di entrambi i campi statorici diretto e inverso, caso per caso.

A partire dai campi statorici rotanti sullo spessore traferro + magneti, nel (Cap.6) è stata fornita una metodologia per ottenere le espressioni dei campi statorici rotanti su ciascuna porzione di macchina considerata individualmente, ovvero il traferro e la corona circolare di magneti permanenti.

Dai campi statorici rotanti sul traferro e sulla corona circolare di magneti permanenti, nel (Cap. 7) si è mostrato come derivare l'espressione della coppia elettromagnetica sviluppata dalla macchina in funzione della coenergia totale immagazzinata nella macchina.

Con tale approccio è stato possibile ottenere l'espressione della coppia elettromagnetica totale vista come composizione di più armoniche di coppia riferite all'indice dell'armonica rotorica h^*.

Considerando l'ipotesi di macchina elettrica operante a regime, da tale trattazione si è evinto che le armoniche statoriche che contribuiscono alla generazione di coppia sono esclusivamente quelle aventi un numero di poli pari ai poli di ciascuna armonica rotorica.

Bibliografia

[1] J. Zhang, W. Zhan, M. Ehsani: Fault-Tolerant Control of PMSM With Inter-Turn Short-Circuit Fault, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 34, 2019, pp. 123-130.

[2] J. Hang, S. Ding, X. Ren, Q. Hu: Integration of Interturn Fault Diagnosis and Torque Ripple Minimization Control for Direct-Torque-Controlled SPMSM Drive System, IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 36, NO.10, 2021, pp. 11124-11134 .

[3] G. Forstner, A. Kugi, W. Kemmtmüller: Fault-tolerant torque control of a three-phase permanent magnet synchronous motor with inter-turn winding short circuit, Elsevier Control Engineering Practice, vol. 113, 2021, pp. 1-11.

[4] S. Cheng , R. Zhou, Z. Li: Robust Model-Free Fault-Tolerant Predictive Control for PMSM Drive System, IEEE Access, vol. 11, 2023, pp. 1-10.

[5] M. Hadef, M.R. Mekideche, A. Djerdir: Vector Controlled Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM) Drive with Stator Turn Fault, XIX International Conference on Electrical Machines - ICEM 2010, Rome, Italy, 7-10 Sept. 2010.

[6] V. Lešic, M. Vašak, T. M. Wolbank: Fault-tolerant Control of Permanent Magnet Synchronous Generator in Wind Turbines, Conference: European Wind Energy Association 2014 Annual Event, EWEA 2014, 2014.

[7] Foitzik, S., Doppelbauer, M.: Fault tolerant control of a three-phase PMSM by limiting the heat of an inter-turn fault. IET Electr. Power Appl. 1–11 (2021). https://doi.org/10.1049/ elp2.12142

[8] S. Wei, S. Huang, J. Gao: Research on the Internal Short Circuit Fault Tolerant Operation of the PMSM, ITEC Asia-Pacific 2014, 2014.

[9] https://castellidezza.faculty.polimi.it/wp-content/uploads/Azionamenti-brushless_w.pdf

[10] Fitzgerald, Kingsley, Umans: Electric Machinery, sixth edition, McGraw-Hill Companies

[11] Correggiari, Di Gerlando, Foglia: Lecture Notes of Construction and Design of Electrical Machines

A Appendice A

A.1. Fattore di passo di una bobina a macchina sana k_{ph} e a macchina con via parallela a_1 disconnessa $k_{ph\alpha}$

Considerando come riferimento per la valutazione della forza magnetomotrice sullo spessore traferro + magneti la fmm prodotta da un lato attivo di bobina, in cui si considera che la corrente che fluisce nel lato attivo di bobina nella posizione periferica in cui tale lato si trova si richiuda fittiziamente attraverso tutta la parte di periferia in cui tale lato attivo non sia presente, la fmm di lato attivo di bobina sullo spessore traferro + magneti $M_{as}(\theta)$ ha la seguente forma d'onda:

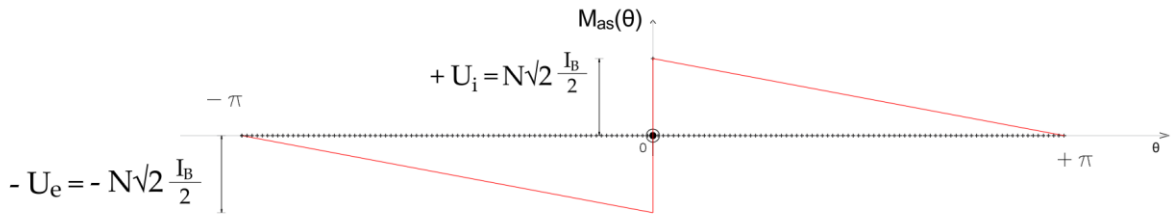


Figura 68: fmm di lato attivo di bobina sullo spessore traferro + magneti

Lo sviluppo in serie di Fourier associato a $M_{as}(\theta)$ è:

$$M_{as}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{\pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot sin[h \cdot (\theta)] \tag{A.1}$$

Siccome la singola bobina ha due lati attivi che distano rispetto all'origine $\frac{\beta}{2}$, si può ottenere che la fmm di bobina di generico passo β sullo spessore traferro + magneti $M_{BOBINA}(\theta)$ vale:

$$M_{BOBINA}(\theta) = M_{as}\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right) - M_{as}\left(\theta - \frac{\beta}{2}\right) \tag{A.2}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene che:

$$M_{BOBINA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{\pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot sin\left[h \cdot \left(\theta + \frac{\beta}{2}\right)\right] - \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{\pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot sin\left[h \cdot \left(\theta - \frac{\beta}{2}\right)\right] \tag{A.3}$$

Raggruppando il termine comune si ottiene:

$$M_{BOBINA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{\pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left\{sin\left[h \cdot \left(\theta + \frac{\beta}{2}\right)\right] - sin\left[h \cdot \left(\theta - \frac{\beta}{2}\right)\right]\right\} \tag{A.4}$$

Infine, lo sviluppo in serie di Fourier associato a $M_{BOBINA}(\theta)$ è:

$$M_{BOBINA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot \cos[h \cdot (\theta)] \tag{A.5}$$

In cui il numero 2 dentro la parentesi quadra può essere visto come il numero di lati attivi della singola bobina $N_{asc} = 2$.

Il fattore di passo k_{ph} fornisce un'indicazione di quanto si attenua l'ampiezza della generica h-esima armonica della fmm di bobina $M_{BOBINA}(\theta)$ per una determinata scelta del passo di bobina β rispetto all'ampiezza della stessa armonica che si otterrebbe tenendo il passo di bobina β = π.

Definendo $\overline{M}_{BOBINA_h} = M_{BOBINA_h} \angle \overline{M}_{BOBINA_h}$ il fasore associato all'h-esima armonica della fmm di bobina di passo β e definendo $\overline{M}_{as_h} = M_{as_h} \angle \overline{M}_{as_h}$ il fasore associato all'h-esima armonica della fmm di lato attivo di bobina, dal rapporto tra l'ampiezza M_{BOBINA_h} e il numero di lati attivi N_{asc} moltiplicato per l'ampiezza M_{ash} (poiché se il passo di bobina è $\beta = \pi$ allora i fasori delle fmm di ciascun lato attivo di bobina risultano in fase ed equiversi) si ottiene l'espressione del fattore di passo k_{ph}:

$$k_{ph} = \frac{M_{BOBINA_h}}{N_{asc} \cdot M_{ash}} = \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right]}{2 \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{\pi} \cdot \frac{1}{h}} = sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right) \tag{A.6}$$

Nel caso analizzato in questa macchina, le bobine hanno passo β uguale al passo di cava α_u.

Quindi in questa macchina SPMSM il fattore di passo a macchina sana k_{ph} vale:

$$k_{ph} = sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$$

(A.7)

Il fattore di passo $k_{ph\alpha}$ in caso di macchina con via a_1 disconnessa risulta uguale al caso di macchina sana poiché esso non dipende dal numero di bobine rimanenti connesse per fase nella macchina ma solo dall'estensione angolare della singola bobina, quindi il fattore di passo $k_{ph\alpha}$ vale:

$$k_{ph\alpha} = sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$$

(A.8)

A.2. Fattore di distribuzione a macchina sana k_{dh}

Considerando come riferimento per la valutazione della forza magnetomotrice di fase sullo spessore traferro + magneti la fmm di bobina $M_{BOBINA}(\theta)$, la fmm della fase A sullo spessore traferro + magneti $M_{tsA}(\theta)$ vale:

$$M_{tsA}(\theta) = M_{BOBINA}(\theta) - M_{BOBINA}(\theta - \alpha_u) - M_{BOBINA}\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) + M_{BOBINA}\left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \alpha_u\right)$$

(A.9)

In cui m è il numero di cicli geometrici nella macchina.

Svolgendo ulteriormente i calcoli dell'eq. (A.9) si ottiene:

$$\begin{aligned} M_{tsA}(\theta) = & \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot \cos[h \cdot (\theta)] \\ & - \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot \cos[h \cdot (\theta - \alpha_u)] \\ & - \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)\right] \\ & + \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \alpha_u\right)\right] \end{aligned}$$

(A.10)

Raggruppando il termine comune si ottiene che:

$$M_{tsA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot \cdot \left\{\cos[h \cdot (\theta)] - \cos[h \cdot (\theta - \alpha_u)] - cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)\right] + cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \alpha_u\right)\right]\right\} \tag{A.11}$$

Infine, la fmm della fase A a macchina sana vale:

$$M_{tsA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot 4 \cdot sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right) \cdot cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) + \pi\right] \tag{A.12}$$

In cui il numero 4 può essere interpretato come il numero di bobine per fase che rimangono connesse nell'operazione a macchina sana $N_c = p \cdot q$.

Il fattore di distribuzione k_{dh} fornisce un'indicazione di quanto si attenua l'ampiezza della generica h-esima armonica della fmm di fase $M_{tsA}(\theta)$ con una determinata scelta di adozione della distanza angolare relativa tra gli assi delle bobine di passo β rispetto alla situazione in cui tutte le bobine siano disposte nelle stesse cave e quindi con assi di bobina sovrapposti.

Definendo $\bar{M}_{tsA_h} = M_{tsA_h} \angle \bar{M}_{tsA_h}$ il fasore associato all'h-esima armonica della fmm di fase A e definendo $\bar{M}_{BOBINA_h} = M_{BOBINA_h} \angle \bar{M}_{BOBINA_h}$ il fasore associato all'h-esima armonica della fmm di bobina di passo β , si ottiene che l'espressione del fattore di distribuzione a macchina sana k_{dh} vale:

$$k_{dh} = \frac{M_{tsA_h}}{N_c \cdot M_{BOBINA_h}} = \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)\right] \cdot 4 \cdot sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right)}{4 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)\right]} \tag{A.13}$$

Quindi, in conclusione, il fattore di distribuzione a macchina sana k_{dh} vale:

$$k_{dh} = sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right) \tag{A.14}$$

Bisogna notare che lo stesso procedimento applicato per ottenere k_{dh} a partire dalla fmm della fase A lo si sarebbe potuto applicare per una qualsiasi delle fmm di fase ottenendo gli stessi risultati.

A.3. Fattore di distribuzione a macchina con via parallela a_1 disconnessa $k_{dh\alpha}$

Una metodologia analoga al caso della macchina sana può essere adottata anche per la fmm sullo spessore traferro + magneti della fase A nel caso in cui una via parallela della fase A venga disconnessa (in questo elaborato si è scelto di disconnettere la via parallela a_1).

In tale situazione, la fmm della fase A $M_{tsA}(\theta)$ viene ottenuta a partire dalle fmm di bobina per tutte le bobine di passo β della fase A rimanenti connesse in seguito alla disconnessione della via parallela a_1 come segue:

$$M_{tsA}(\theta) = -M_{BOBINA}\left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right) + M_{BOBINA}\left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \alpha_u\right) \tag{A.15}$$

Svolgendo ulteriormente i calcoli dell'eq. (A.15) si ottiene:

$$\begin{aligned} M_{tsA}(\theta) = & -\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)\right] \\ & + \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \alpha_u\right)\right] \end{aligned} \tag{A.16}$$

Raggruppando il termine comune si ottiene che:

$$\begin{aligned} M_{tsA}(\theta) = & \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \\ & \cdot \left\{- cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m}\right)\right] + cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \alpha_u\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{A.17}$$

Infine, la fmm della fase A a seguito della disconnessione della via parallela a_1 vale:

$$M_{tsA}(\theta) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot 2 \cdot sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \cdot cos\left[h \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{m} - \frac{\alpha_u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

(A.18)

Siccome disconnettendo la via parallela a_1, la fase A ha $N_{cd} = 2$ bobine rimanenti connesse all'alimentazione, il fattore di distribuzione $k_{dh\alpha}$ in caso di scollegamento della via parallela a_1 vale:

$$k_{dh\alpha} = \frac{M_{tsA_h}}{N_{cd} \cdot M_{BOBINA_h}} = \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right] \cdot 2 \cdot sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)}{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{N\sqrt{2}\, I_B}{2} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[2sin\left(h \cdot \frac{\beta}{2}\right)\right]}$$

(A.19)

Per concludere, il fattore di distribuzione $k_{dh\alpha}$ in caso di scollegamento della via parallela a_1 vale:

$$k_{dh\alpha} = sin\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right)$$

(A.20)

Analogamente, per ciascuna fase a cui viene disconnessa una via parallela, il fattore di distribuzione è $k_{dh\alpha}$.

A.4. Fattore di avvolgimento a macchina sana k_{wh}

Il fattore di avvolgimento è un coefficiente che indica come varia e di quanto si attenua l'ampiezza di ciascuna armonica della fmm di fase sullo spessore traferro + magneti per diverse disposizioni dei conduttori dell'avvolgimento di fase.

In particolare, l'ampiezza di ciascuna armonica della fmm di fase risulta alterata al variare del passo di bobina β e al variare dello sfasamento degli assi di diverse bobine facenti parte della stessa fase.

Considerando il fattore di passo a macchina sana k_{ph} e il fattore di distribuzione a macchina sana k_{dh}, il fattore di avvolgimento a macchina sana k_{wh} vale:

$$k_{wh} = k_{ph} \cdot k_{dh} = sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \cdot sin\left(h \cdot \frac{\pi}{m}\right)$$

(A.21)

In generale, per qualsiasi fase non soggetta ad una disconnessione di una sua via parallela, il fattore di avvolgimento è k_{wh}.

Considerando il fattore di passo a macchina con via parallela a_1 disconnessa $k_{ph\alpha}$ e il fattore di distribuzione a macchina con via parallela a_1 disconnessa $k_{dh\alpha}$, il fattore di avvolgimento a macchina con via parallela a_1 disconnessa $k_{wh\alpha}$ vale:

$$k_{wh\alpha} = k_{ph\alpha} \cdot k_{dh\alpha} = sin^2\left(h \cdot \frac{\alpha_u}{2}\right) \tag{A.22}$$

In generale, per qualsiasi fase soggetta ad una disconnessione di una sua via parallela, il fattore di avvolgimento è $k_{wh\alpha}$.

Lista di Figure

Figura 1: Rappresentazione schematica della macchina sincrona a magneti permanenti 3
Figura 2: Esempio di macchina sincrona SPMSM a 2 poli (i magneti verdi hanno il Nord verso l'esterno mentre il Sud verso il rotore; i rossi viceversa) 3
Figura 3: Circuito equivalente della SPMSM soggetta ad un guasto interspira 8
Figura 4: Circuito equivalente della fase guasta 8
Figura 5: Schema di controllo per la minimizzazione del ripple di coppia a macchina guasta (come proposto in [1]) 12
Figura 6: Misura della ZSVC $u_{0,m}$ 14
Figura 7: Schema di controllo del ripple di coppia per macchina comandata tramite DTC 16
Figura 8: Inset Permanent Magnet Synchronous Machine IPMSM 17
Figura 9: Circuito Magnetico Equivalente MEC della IPMSM mostrata in Figura 8 .. 18
Figura 10: Schema elettrico di connessione degli avvolgimenti della IPMSM 19
Figura 11: Schema di controllo della coppia della IPMSM basato sul Model Predictive Control MPC 20
Figura 12: Schema di controllo tollerante al guasto di una PMSM soggetta a perturbazione dei suoi parametri 21
Figura 13: Schema di controllo vettoriale tollerante al guasto di una PMSM 21
Figura 14: Vettore di Clarke della tensione statorica [(a) macchina sana, (b) macchina guasta] 22
Figura 15: Vettore di Clarke della corrente statorica [(a) macchina sana, (b) macchina guasta] 22
Figura 16: Somma delle tensioni di fase [(a) macchina sana, (b) macchina guasta] 23
Figura 17: ripple della velocità angolare [(a) macchina sana, (b) macchina guasta] ... 23
Figura 18: Schema di controllo tollerante al guasto tramite limitazione del calore prodotto nel punto di guasto 26
Figura 19: Strategia di controllo tollerante al guasto in termini del luogo dei punti definito dalle correnti i_d-i_q 27

Figura 20: Macchina SPMSM a 12 cave, 10 poli e avvolgimenti concentrati a cave frazionarie con $q =$ 25 cave/(polo·fase) 29

Figura 21: Schema di connessione delle vie parallele per ciascuna fase 29

Figura 22: Schema di connessione delle vie parallele per ciascuna fase a, b, c (si considera la corrente nei conduttori A, B, C come entrante nel piano del foglio e quella nei conduttori di ritorno A, B, C come uscente dal piano del foglio) 30

Figura 23: Lunghezze periferiche medie del traferro e dei magneti permanenti interni ed esterni al passo di bobina β 33

Figura 24: Forma e dimensioni dei magneti permanenti sulla superficie esterna del rotore 35

Figura 25: Curva d'isteresi effettiva (in linea continua) e la sua approssimazione tramite la linea di ritorno (in linea tratteggiata) 36

Figura 26: Circuito magnetico equivalente del magnete permanente PM 37

Figura 27: Posizione relativa tra il sistema di riferimento solidale con lo statore e il sistema di riferimento solidale con il rotore e notazioni riguardanti le coordinate angolari meccaniche prese rispetto a tali sistemi di riferimento 39

Figura 28: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta al rotore rispetto al sistema di riferimento solidale con il rotore 41

Figura 29: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta alla singola bobina nello statore 42

Figura 30: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta a ciascuna fase dello statore rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore (macchina sana) 45

Figura 31: Fattore di avvolgimento K_{wh} al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina sana) 47

Figura 32: Fattori di avvolgimento riferiti all'armonica principale $hm = 1$ (macchina sana) 47

Figura 33: Bobine in funzione per ciascuna fase nel caso di scollegamento della via parallela a_1 48

Figura 34: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta a ciascuna fase dello statore rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore (macchina con via a_1 disconnessa) 49

Figura 35: fmm sullo spessore traferro + magneti dovuta ad una coppia di bobine (ipotizzando il punto medio della cava comune alle due bobine centrato nell'origine del sistema di riferimento statorico) 50

Figura 36: Bobine in funzione per ciascuna fase nel caso di disconnessione delle vie parallele a_1, b_2, c_1 53

Figura 37: fmm sull'insieme del traferro e della corona circolare di magneti permanenti dovuta a ciascuna fase dello statore rispetto al sistema di riferimento solidale con lo statore (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 54

Figura 38: Fattore di avvolgimento K_{wh} al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 scollegate) 56

Figura 39: Fattori di avvolgimento riferiti all'armonica principale $hm = 1$ (caso di macchina con vie parallele a_1, b_2, c_1 scollegate) 57

Figura 40: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $Mtsh +$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina sana) 62

Figura 41: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $Mtsh -$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina sana) 63

Figura 42: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $Mtsh +$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica hm (caso di macchina sana) 64

Figura 43: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $Mtsh -$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica hm (caso di macchina sana) 64

Figura 44: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $Mtsh +$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con via a_1 disconnessa) 67

Figura 45: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $Mtsh -$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con via a_1 disconnessa) 68

Figura 46: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $Mtsh +$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica hm (caso di macchina con via a_1 disconnessa) 69

Figura 47: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $Mtsh -$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica hm (caso di macchina con via a_1 disconnessa) 69

Figura 48: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $Mtsh +$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 71

Figura 49: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $Mtsh -$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica h (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 72

Figura 50: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante diretta $Mtsh +$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica hm (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 73

Figura 51: Ampiezza delle armoniche della fmm statorica rotante inversa $Mtsh -$ sullo spessore traferro + magneti al variare dell'ordine dell'armonica statorica hm (caso di macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 73

Figura 52: Flusso magnetico nel traferro prodotto da un magnete permanente (ϕ_g = flusso utile di magnete PM, ϕ_{lr} = flusso di dispersione di magnete PM) 75

Figura 53: Circuito magnetico equivalente visto dalle linee di campo del flusso magnetico ϕ_{PM} passante per il magnete permanente Nord (rappresentato dal ramo centrale) 75

Figura 54: Circuito magnetico equivalente visto dal magnete Nord in forma ridotta 76

Figura 55: Linee di flusso magnetico prodotte da una bobina statorica (i lati attivi di bobina sono mostrati in rosso) 78

Figura 56: Diramazione del flusso magnetico di bobina ϕB in due parti attorno al suo asse di simmetria. 78

Figura 57: Circuito magnetico equivalente visto dalle linee di campo del flusso magnetico ϕ_B passante per la singola bobina statorica (la cui fmm di bobina M_B è rappresentata nel ramo centrale) 79

Figura 58: Circuito magnetico visto dalla bobina in forma ridotta. 80

Figura 59: Coppia elettromagnetica $Ce1 =$ costante in funzione del tempo t (macchina sana) 109

Figura 60: Coppia elettromagnetica $Ce1$ cercata di tenere costante in funzione del tempo t (macchina con via a_1 disconnessa) 110

Figura 61: Coppia elettromagnetica $Ce1 =$ costante in funzione del tempo t (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 110

Figura 62: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico diretto (macchina sana) 112

Figura 63: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico inverso (macchina sana) 113

Figura 64: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico diretto (macchina con via a_1 disconnessa) 114

Figura 65: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico inverso (macchina con via a_1 disconnessa) 114

Figura 66: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico diretto (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 115

Figura 67: Armoniche di coppia elettromagnetica dovute al campo rotante statorico inverso (macchina con vie a_1, b_2, c_1 disconnesse) 115

Figura 68: fmm di lato attivo di bobina sullo spessore traferro + magneti 125

Lista di Tabelle

Tabella 1: Determinazione della sequenza dei conduttori per uno strato 28
Tabella 2: Disallineamento tra gli strati di conduttori 28
Tabella 3: Dati geometrici della macchina SPMSM 31
Tabella 4: Dati di targa della macchina SPMSM 31

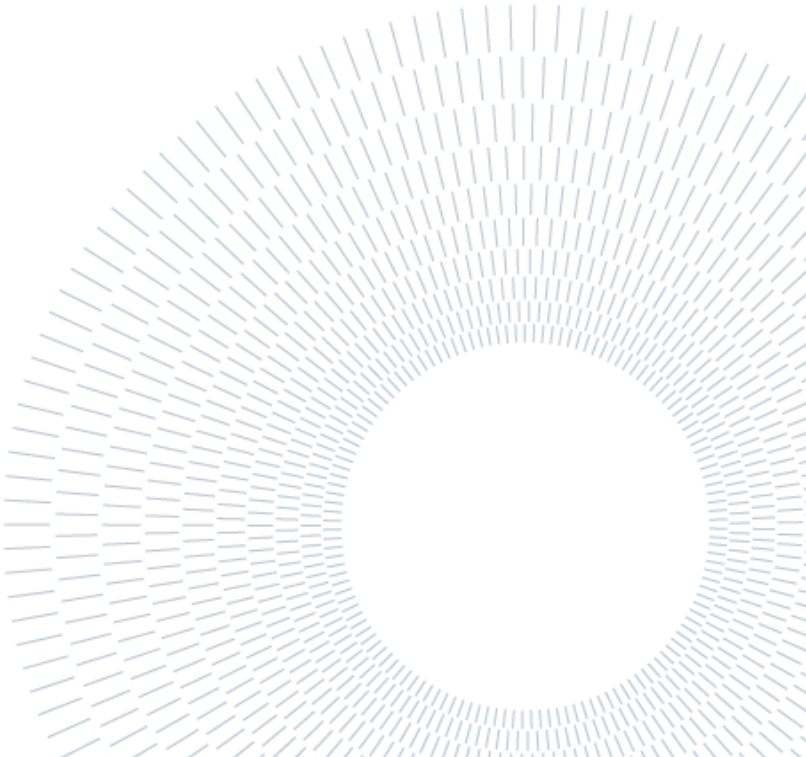
Lista di simboli

Variabile	Descrizione	Unità di misura
Q	Nº di cave	-
p	Nº di poli	-
q	Nº di cave/(polo·fase)	-
α_u	Passo di cava	[rad]
β	Passo di bobina	[rad]
N	Nº di spire per bobina	-
N_{asc}	Nº di lati attivi per bobina	-
N_c	Nº di bobine per la fase avente entrambe le vie parallele connesse	-
N_{cd}	Nº di bobine per la fase avente una via parallela disconnessa	-
a	Nº di vie parallele per fase	-
m	Nº di cicli geometrici	-
w_{PM}	Lunghezza periferica media del magnete permanente	[m]
w_g	Lunghezza periferica media del traferro di	[m]

	fronte al magnete permanente	
$w_{PM\beta}$	Lunghezza periferica media dei magneti permanenti interni a β	[m]
$w_{PM(1-\beta)}$	Lunghezza periferica media dei magneti permanenti esterni a β	[m]
$w_{g\beta}$	Lunghezza periferica media del traferro interno a β	[m]
$w_{g(1-\beta)}$	Lunghezza periferica media del traferro esterno a β	[m]
D_g	diametro medio del traferro	[m]
D_{PM}	diametro medio della corona circolare di magneti permanenti	[m]
g	Spessore del traferro	[m]
h_{PM}	Spessore dei magneti permanenti	[m]

B_r	Induzione magnetica residua del magnete permanente	[T]
H_0	Valore assoluto del punto di intersezione della linea di ritorno con l'asse H	$\left[\frac{A}{m}\right]$
M_{PM}	Fmm interna del magnete permanente	$[Asp]$
$\mathcal{R}_{PM}$	Riluttanza interna del magnete permanente	$[H^{-1}]$
μ_{PM}	Permeabilità magnetica assoluta del magnete permanente	$\left[\frac{H}{m}\right]$
μ_0	Permeabilità magnetica assoluta del vuoto	$\left[\frac{H}{m}\right]$
l	Lunghezza assiale della macchina	[m]
n_p	Nº di paia poli della macchina	-

Riconoscimenti

Ringrazio Matteo per avermi assistito nell'estenuante lavoro di verifica dei calcoli e in generale per essere stato presente durante tutto il periodo di scrittura di questo elaborato.

Un riconoscimento va anche al professor Perini per il suo lavoro di controllo ridondante circa il contenuto della presente tesi e la correttezza della metodologia esposta in questa trattazione.