

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in
Ingegneria Aeronautica



Metodo dei domini fittizi per problemi di interazione fluido-struttura

Relatore: Dott. Fabio NOBILE
Co-Relatore: Prof. Luca FORMAGGIA

Tesi di laurea di:
Luca CASSANI Matr. 720942

Anno Accademico 2008–2009

A Mamma e Papà

Indice

1	Introduzione e Motivazioni	3
1.1	Problema affrontato	3
1.2	Il metodo risolutivo	5
1.3	Metodologie alternative	8
2	Le equazioni di Navier-Stokes	13
2.1	Navier-Stokes ed elementi finiti	13
2.2	Analisi di stabilità	18
2.3	Discretizzazione temporale	19
2.4	Stabilizzazione	20
3	Il metodo dei domini fittizi	25
3.1	Descrizione generale del metodo	25
3.2	Discretizzazione ad elementi finiti	29
3.3	Precondizionamento del sistema algebrico	32
3.4	Dinamica del corpo	34
3.5	Gestione dei contatti	37
3.6	Implementazione tramite FreeFem++	39
4	Validazione del codice	43
4.1	Analisi del preconditionatore	43
4.2	Flusso attorno ad un cilindro fisso	49
4.2.1	Simulazioni senza griglia di strato limite	50
4.2.2	Analisi di sensibilità al passo temporale	56
4.2.3	Analisi di sensibilità alla discretizzazione del cilindro	58
4.2.4	Simulazioni con griglia di strato limite	60
4.3	Cilindro elasticamente sospeso	65
5	La valvola aortica artificiale	73
5.1	Caratteristiche del flusso e problematiche	73
5.2	Schema fluido-struttura quasi-implicito	77

5.3	Risultati numerici	83
5.3.1	Schema di accoppiamento esplicito	86
5.3.2	Schema di accoppiamento quasi-implicito	91
5.3.3	Schema di accoppiamento quasi-implicito e limitazione sulle coppie repulsive	93
6	Conclusioni	103
A	Metodo di Newmark	107
	Ringraziamenti	109
	Bibliografia	111

Sommario

Questo lavoro di tesi riguarda la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes attorno a corpi rigidi eventualmente in movimento. Obiettivo finale è quello di simulare il flusso sanguigno attorno ad una geometria semplificata di valvola cardiaca artificiale. Il problema di interazione fluido-struttura viene modellato tramite un metodo dei domini fittizi, presentato inizialmente in [25] per la soluzione di problemi ellittici su domini complessi cui sono applicate condizioni al contorno di Dirichlet. La derivazione di tale metodo applicato alle equazioni di Navier-Stokes e la sua discretizzazione ad elementi finiti sono ampiamente trattate in questa tesi, seguendo i lavori [22], [21] e [20]. Inoltre, viene proposto un preconditionatore efficiente per il sistema algebrico derivante dal problema discreto. Il solutore numerico è stato sviluppato tramite la libreria a elementi finiti FreeFem++ ed è stato per prima cosa validato tramite comparazione con il benchmark in [40] per la corrente 2D attorno ad un cilindro fermo a Reynolds $Re = 100$. Successivamente viene validato il solutore fluido-struttura simulando il flusso attorno ad un cilindro elasticamente sospeso, sempre in 2D e a $Re = 100$. Una volta validato il codice si passa alla simulazione di una geometria semplificata 2D di una valvola cardiaca artificiale. Le simulazioni vengono effettuate a numeri di Reynolds moderati ($Re_{MAX} = 500$), inferiori ai valori reali di $Re_{MAX} = 7000$ che vengono indicati in [17]. Per queste simulazioni si è resa necessaria la derivazione di un nuovo schema di accoppiamento fluido-struttura quasi-implicito e viene mostrato come quest'ultimo schema garantisca maggior stabilità sulla soluzione rispetto allo schema implementato per la soluzione del cilindro elasticamente sospeso. Infine, vengono comparati i risultati ottenuti utilizzando diverse funzioni per la modellazione delle azioni repulsive per la gestione dei contatti.

Parole chiave: equazioni di Navier-Stokes incomprimibili, interazione fluido-struttura, metodo dei domini fittizi, grandi spostamenti, cilindro fermo e oscillante, valvola cardiaca artificiale.

Abstract

This thesis is focussed on the solution of the Navier-Stokes equations in presence of immersed rigid bodies, eventually in motion inside the fluid. The final goal is the simulation of the blood flow around a simplified geometry of an artificial cardiac valve. The fluid-structure interaction problem is modelled through a fictitious domain method, firstly introduced in [25] for the solution of elliptic problems on complex domain with Dirichlet boundary conditions. The derivation of such a method applied to the Navier-Stokes equations and its finite element discretization is widely reported in this thesis, following [22], [21] and [20]. Moreover, an efficient preconditioner for the algebraic system deriving from the discretized problem is presented as well. The numerical solver has been developed with FreeFem++ and was firstly validated through comparison with the benchmark in [40] for the 2D flow around a fixed cylinder with a Reynolds number $Re = 100$. Afterwards the fluid-structure interaction solver has been validated through the simulation of the flow around a cylinder free to oscillate spanwise, again in 2D and again at a Reynolds number $Re = 100$. Once the solver has been validated we move to the simulation of a simplified

2D geometry of an artificial cardiac valve. The simulations have been run at a moderate Reynolds number ($Re_{MAX} = 500$), lower than the real one of $Re = 7000$ reported in [17]. For these simulations the derivation of a new quasi-implicit fluid-structure coupling scheme was needed and the solution obtained with the latter method has been compared with the ones obtained with the former one, used also for the simulation of the free-oscillation of the cylinder. Finally, the results obtained using different modelling of the repulsive actions for the contact has been compared each other.

Keywords: incompressible Navier-Stokes equations, fluid-structure interaction, fictitious domain method, large displacements, fixed and free cylinder, artificial cardiac valve.

Capitolo 1

Introduzione e Motivazioni

“Nessun ingegnere aerospaziale serio oggi considererebbe l’idea di progettare un nuovo aereo senza un’ampia fase di test e ottimizzazione numerica. Il potenziale della fluidodinamica computazionale nel giocare un ruolo simile nelle operazioni legate al sistema cardiocircolatorio è altissimo”, da [29].

1.1 Problema affrontato

Obiettivo finale di questo lavoro di tesi è quello di sviluppare una metodologia efficace per simulare numericamente il flusso sanguigno nella arteria aorta in presenza di una valvola artificiale.

Il problema si inquadra pertanto nella classe dei problemi di interazione fluido-struttura con grandi spostamenti, di notevole interesse applicativo in molti campi. Esempi tipici di questo tipo di problemi sono ad esempio le vibrazioni di cavi sospesi indotte da vortici, di notevole interesse in campo edilizio (si pensi ad esempio ai tiranti dei ponti sospesi). In campo aeronautico, l’evoluzione dei materiali e la necessità di leggerezza hanno portato a strutture sempre più leggere, che spesso si traducono in deformazioni e spostamenti considerevoli sotto l’azione dei carichi. Risulta pertanto fondamentale essere in grado di valutare questi effetti sull’aerodinamica, sia a livello statico (*divergenza aerodinamica*) che dinamico (fenomeni di *flutter*). La crucialità della leggerezza in campo aerospaziale, unita alle odierne potenzialità di calcolo, ha portato a includere lo studio dei fenomeni di interazioni fluido-struttura (fenomeni *aeroelastici* in questo caso) fin dai primi passi della progettazione.

Il caso affrontato in questa tesi si limita allo studio di interazione tra fluidi incomprimibili e corpi rigidi in movimento. Tali corpi rigidi possono avere moto imposto oppure più in generale muoversi sotto l’azione delle forze

viscose e di pressione che il fluido esercita su di essi. Vastissimi sono gli esempi di queste applicazioni, citiamo tra gli altri lo studio della caduta di particelle solide in un fluido, presentato in [22], lo studio di profili in flappeggio, il flusso attorno a pale rotanti, etc.

Infine citiamo il campo dell'emodinamica numerica oggetto peculiare di questa tesi, è un campo in rapida espansione oggi. La vasta disponibilità di modelli di fenomeni fisici, insieme con le disponibilità di risorse computazionali odierne, ha portato la matematica applicata ad indagare anche in campo medicale.

Fin dall'antichità, le più brillanti menti di ogni tempo si sono interessate del corpo umano e in particolar modo del sistema cardiocircolatorio. I primi lavori in termini realistici in questo campo si devono a Nico Westerhoff negli anni '60, che sfruttò l'analogia tra l'albero arterioso e le reti elettriche.

Oggi, le tecniche di *medical imaging* come il Doppler, la Risonanza Magnetica, la Tomografia Assiale o l'Angiografia consentono al medico di avere una visione molto accurata delle geometrie, dei fenomeni e delle grandezze in gioco nel sistema cardiovascolare. Nonostante questi strumenti estremamente utili, persistono difficoltà oggettive legate per esempio alla misurazione degli sforzi a parete, alla valutazione di quali siano le variabili importanti in gioco per l'indagine e/o la prevenzione di determinate patologie. Queste difficoltà vanno a sommarsi con problemi etici legati all'impossibilità di effettuare troppi test clinici sul paziente e alla necessità che questi test siano *in-vivo*.

Per questo motivo la simulazione numerica risulta essere di grande interesse nel campo dell'emodinamica, non solo come strumento integrativo alle tecniche attuali ma anche per l'apertura di nuove frontiere. Possiamo sintetizzare l'applicazione della simulazione numerica all'emodinamica in 3 punti (da [41]):

1. Comprensione delle condizioni fisiopatologiche individuali. Rielaborando le immagini ottenute tramite *medical imaging* è possibile ricostruire le informazioni mancanti al completamento del quadro diagnostico del singolo paziente.
2. Previsione e Design. Utilizzando le simulazioni come strumento di prototipazione virtuale è possibile non solo evitare la costruzione di costosi prototipi reali, ma anche scegliere la migliore soluzione a livello medico per un determinato paziente, basandosi sui risultati quantitativi ottenuti dalle simulazioni virtuali effettuate.
3. Ottimizzazione. Il passo successivo è quello di trascendere il carattere predittivo per poter ottenere soluzioni ottimali in base a parametri pre-

fissati, da applicarsi ad esempio al dosaggio di una certa sostanza o alla forma associata ad un intervento chirurgico.

E' doveroso citare l'importante ruolo svolto dal Politecnico di Milano nel campo. L'istituto universitario è infatti, tramite il laboratorio MOX del dipartimento di Matematica, parte del progetto MathCard, un progetto dell'European Research Council (ERC) iniziato nel Gennaio 2009, cui partecipa oltre all'istituto milanese anche l'Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (EPFL). Obiettivo del progetto è quello di descrivere e simulare la struttura anatomica e la risposta fisiologica del sistema cardiovascolare umano sia in condizioni di salute normali che in presenza di patologie. I problemi di questo campo che il progetto si prefigge di studiare sono svariati, tra gli altri citiamo la microcircolazione, la regolazione metabolica, l'attività elettrica e meccanica del cuore con relative interazioni, la modellazione e l'ottimizzazione della distribuzione dei farmaci nel corpo umano. Peculiarità del progetto è quella di concentrarsi sui modelli matematici per il sistema cardiovascolare, sull'analisi numerica e sugli algoritmi per risolvere tali modelli matematici, con tutto ciò che ne consegue a livello di programmazione, ottimizzazione delle prestazioni computazionali e validazione dei risultati.

Infine, va certamente menzionato il fatto che, sebbene l'interesse finale del lavoro di questa tesi sia l'analisi di valvole cardiache artificiali in geometrie realistiche, in questa tesi verranno presentati solo risultati di simulazioni più semplici, quali ad esempio flussi 2D attorno a corpi rigidi eventualmente mobili. Questo perchè, come si vedrà in seguito, l'obiettivo è più sulla formulazione e l'implementazione di un metodo efficiente che possa risolvere questi problemi di fluido-struttura, piuttosto che sull'ottimizzazione della geometria di valvole reali.

1.2 Il metodo risolutivo

Tra i diversi metodi possibili per affrontare problemi di interazione tra corpi rigidi in moto all'interno di un fluido, in questa tesi è stato scelto di fare uso del cosiddetto metodo dei *domini fittizi*, detto anche metodo di *domain embedding*. Il metodo venne introdotto inizialmente in [25] come metodo per la soluzione di problemi ellittici su domini complessi, mentre il termine metodo dei domini fittizi venne coniato in [35]. Esso è stato ampiamente trattato in [13] e [19].

L'idea di base del metodo è di estendere un problema differenziale con condizioni al contorno di Dirichlet definito su un dominio complesso a un dominio più vasto ma più semplice, il 'dominio fittizio' per l'appunto. Questa tecnica ha 2 sostanziali vantaggi:

- Il ‘dominio fittizio’ ha una geometria più semplice, quindi permette l’uso di mesh più regolari e possibilmente strutturate, le quali possono permettere l’uso di algoritmi specifici di migliori prestazioni in termini di tempo di calcolo
- In problemi dinamici, il ‘dominio fittizio’ può essere tempo-invariante, anche nel caso in cui il dominio originario sia tempo-variante. Questo consente di definire la mesh una sola volta, evitando la necessità di eseguire una nuova mesh ad ogni passo temporale.

Estendendo il dominio non sarà più possibile, in generale, imporre in maniera classica tutte le condizioni al contorno di Dirichlet. Queste vengono pertanto imposte tramite delle equazioni di vincolo all’equazione o al sistema di equazioni differenziali che descrivono il problema in esame, in maniera tale che la soluzione calcolata sul ‘dominio fittizio’ coincida con la ‘soluzione reale’, intesa come la soluzione che si otterrebbe discretizzando il dominio reale su cui è descritto il problema.

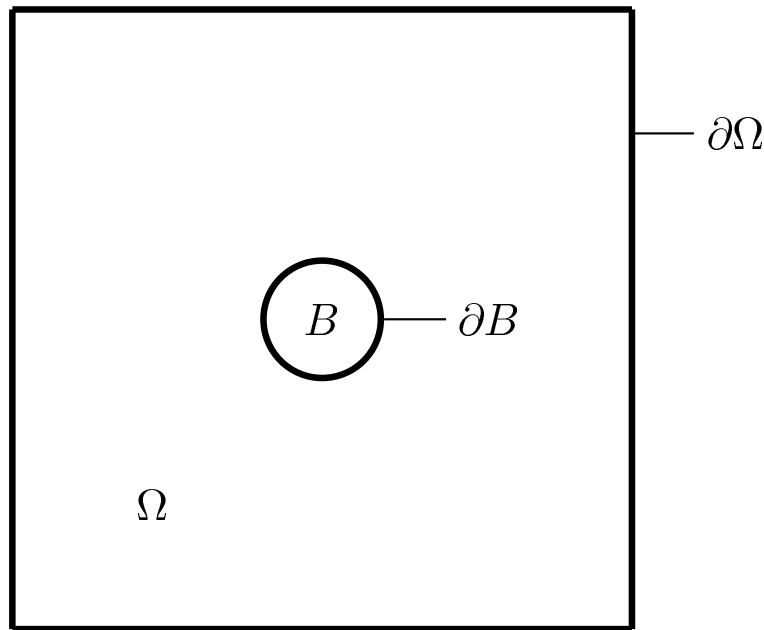


Figura 1.1: Generico Dominio

Proponiamo qui un esempio di una possibile applicazione del metodo. In Fig.1.1 è rappresentato un generico dominio quadrato Ω , sul quale è definito un qualsiasi problema differenziale. All'interno di Ω è presente un'inclusione B , sul cui bordo ∂B è definita una condizione di Dirichlet. Un esempio di questo problema potrebbe essere quello di un flusso in Ω attorno a un cilindro fermo

B . In Fig.1.2 vengono proposte sia la discretizzazione classica del dominio, sia quella a domini fittizi.

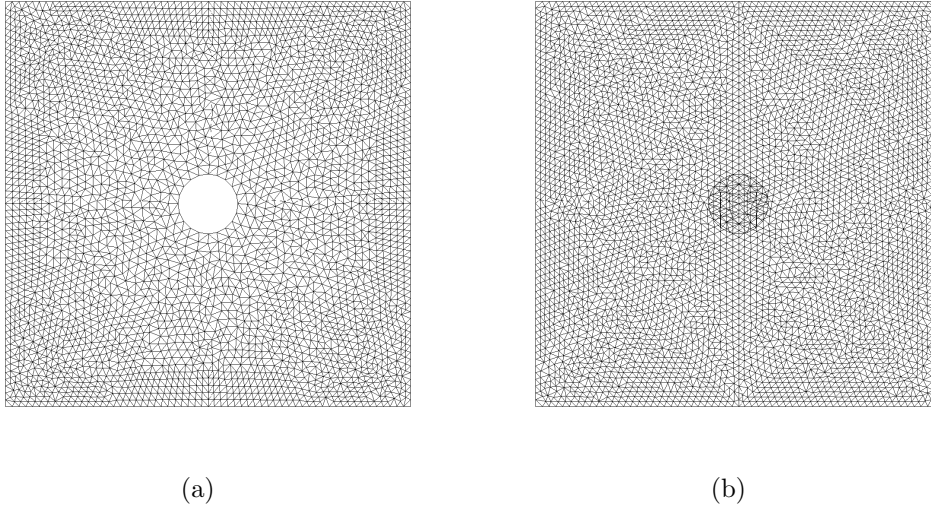


Figura 1.2: Possibili discretizzazioni del dominio. *a*- Discretizzazione classica in cui è rappresentato il bordo ∂B su cui si impongono le condizioni di Dirichlet. *b*- Discretizzazione a domini fittizi in cui le condizioni al contorno su ∂B vengono imposte tramite equazioni di vincolo definite sulla discretizzazione del corpo B .

La soluzione di questo problema tramite il metodo dei domini fittizi consiste nel discretizzare il dominio definito dall'interno dall'unione delle chiusure di Ω e B $int(\bar{\Omega} \cup \bar{B})$, risolvere su questo nuovo dominio il problema differenziale di partenza con condizioni al contorno di Dirichlet e/o Neumann definite su $\partial\Omega$, ed imporre delle equazioni di vincolo definite sul dominio B tali che vengano soddisfatte le condizioni di Dirichlet definite su ∂B del problema originario. Il sistema finale avrà pertanto dimensione maggiore delle dimensioni originarie (equazione di vincolo aggiuntive), ma come già visto sarà permesso l'uso di solver più veloci.

Inoltre, qualora si sia in presenza di domini mobili, l'assoluta generalità del metodo permette di gestire il problema in maniera semplice ed efficiente, non richiedendo una griglia conforme al bordo ∂B (si è già accennato alla possibilità di avere domini fittizi tempo-invarianti). Ecco pertanto che il metodo dei domini fittizi risulta essere particolarmente indicato per problemi di interazione fluido-struttura con grandi spostamenti che sono oggetto di questa tesi. Esempi di applicazione del metodo in questo campo sono tra gli altri [22] e [21].

Tuttavia il metodo è di più generale validità e ha potenziale di applicabilità a qualsiasi fenomeno descritto da equazioni alle derivate parziali, risultando particolarmente indicato per tutti quei casi in cui condizioni al contorno di Dirichlet siano imposte su bordi di geometria complessa e/o mobili. Esempi ne sono l'applicazione allo studio dei conduttori elettrici perfetti in [14], allo studio delle equazioni di Helmholtz in [23], allo studio dell'accoppiamento acustico-strutturale in [31].

1.3 Metodologie alternative

Riferendosi al metodo dei domini fittizi come un generico metodo della classe di decomposizione dei domini, risulta facile trovare formulazioni alternative alla soluzione del problema. In generale, è possibile considerare problemi di interazione fluido-struttura come problemi di decomposizione dei domini eterogenei, definendo un dominio globale che include una regione dove è definito il problema fluidodinamico e una regione dove è definito il problema strutturale. La decomposizione dei domini entra in gioco al momento della soluzione, quando è necessario legare tra loro le soluzioni dei due sottoproblemi.

A seconda delle strategie utilizzate per collegare i due sottoproblemi, esistono diversi metodi, tra i quali citiamo

- Metodo del *complemento di Schur*.

Il problema differenziale viene partizionato in sotto-domini e le incognite interne ai sottodomini vengono formalmente eliminate, mentre viene risolto il complemento di Schur associato ai gradi di libertà sulle interfacce.

I principali vantaggi di questo metodo sono:

- L'eliminazione delle incognite interne ai sottodomini, cui sono legati i problemi di Dirichlet, può essere eseguita in parallelo
- L'utilizzo del complemento di Schur riduce il numero di condizionamento del sistema, quindi porta a una riduzione delle iterazioni per raggiungere la convergenza sulla soluzione in caso di solver iterativi.

Nel caso di problemi di interazione fluido-struttura un metodo del complemento di Schur corrisponde ad accoppiare il problema fluidodinamico e quello strutturale tramite equivalenze della velocità sull'interfaccia dei sottodomini. Citiamo a riguardo [15].

- Metodo della *lacerazione e interconnessione degli elementi finiti* (FETI).

E' un metodo iterativo per la soluzione di sistemi lineari derivanti da problemi differenziali tramite sottostrutturazione del dominio che richiede la soluzione di un problema di Neumann su ogni sotto-dominio e di un problema di griglia derivante dai sottospazi nulli di ogni sottostruttura.

Nel caso di applicazione a problemi di interazione fluido-struttura, questo metodo corrisponde all'accoppiamento dei problemi fluidodinamico e strutturale tramite imposizione degli sforzi all'interfaccia dei sottodomini.

Infine, va citato certamente il metodo dei *bordi immersi*, in quanto simile al metodo dei domini fittizi. Il termine venne coniato per la prima volta in [33] per riferirsi a un metodo per la simulazione della meccanica cardiaca e del flusso sanguigno. Da allora numerose modifiche sono state apportate e numerose sono le varianti del metodo esistenti, si veda tra gli altri [6]. Inoltre esiste una classe di metodi, i cosiddetti metodi delle *griglie cartesiane*, originariamente creati per la simulazione di flussi non viscosi in presenza di bordi immersi complessi su griglie cartesiane (citiamo tra gli altri [1]), che sono stati estesi alla simulazione di flussi viscosi non stazionari in [43], risultando di fatto equivalenti ai metodi di bordi immersi.

Il metodo dei bordi immersi, sebbene non del tutto equivalente al metodo dei domini fittizi, può essere visto in analogia a un caso limite di quest'ultimo metodo in cui il dominio su cui vengono imposti i vincoli (il dominio B di Fig.1.1) sia degenerato a un bordo (nel caso di problema $2D$ B degenera in una linea, mentre nel caso $3D$ B degenera in una superficie).

Questa analogia è evidente nell'approccio al problema. Nel metodo dei bordi immersi, anzichè costruire una mesh conforme al corpo, si genera una mesh più estesa e generalmente più regolare di quella conforme al corpo. Poichè a questo punto la mesh non è conforme ai bordi, diventa fondamentale essere in grado di modificare le equazioni di governo del problema in corrispondenza dei nodi della mesh che corrispondono ai bordi fisici del problema di partenza.

Una completa trattazione dell'imposizione delle condizioni al contorno può essere trovata in [30]. In breve, le condizioni al contorno nel metodo dei bordi immersi si traducono in termini forzanti al problema differenziale. Le forzanti saranno definite solo sui nodi della mesh che intersecano i bordi fisici del problema di partenza, in una maniera del tutto analoga al metodo dei domini fittizi. Tuttavia, differenze della formulazione per l'imposizione delle condizioni al contorno esistono nel caso di bordi elastici e nel caso di bordi rigidi e fermi. Una semplificazione a questa differenza di trattazione consiste nel considerare il corpo rigido e fermo come ancora elastico (quindi mantenere la stessa formulazione) ma con costante di rigidità estremamente elevata.

La trattazione alternativa (e differente da quella del caso di corpo elastico) è quella di considerare la struttura come se fosse in equilibrio con una molla, come proposto in [4]. In questo caso però la necessità di avere un'elevata rigidità della molla può dare origine a problemi di stiffness e quindi a possibili problemi di stabilità.

Più tardi in questo lavoro verrà presentata una trattazione completa del metodo dei domini fittizi. Tuttavia, a titolo comparativo con il metodo dei bordi immersi, osserviamo come le equazioni di vincolo del metodo dei domini fittizi fungano di fatto da termini forzanti per le equazioni di governo del problema attraverso l'introduzione di moltiplicatori di Lagrange, in una maniera del tutto analoga al metodo dei bordi immersi. Le differenze principali tra i due metodi possono essere viste quindi in termini di applicazioni, in quanto il metodo dei bordi immersi non può essere applicato in caso di corpi spessi (anche se qualche generalizzazione è stata proposta da [24]), mentre il metodo dei domini fittizi è in grado di risolvere anche questo tipo di problemi.

Va sottolineato che, in applicazioni di interazione fluido-struttura con strutture elastiche, particolari problemi possono insorgere nel caso in cui il campo di deformazione della struttura fosse in contrasto con alcune equazioni di governo del fluido. Citiamo ad esempio il caso di un corpo immerso in un flusso incomprimibile. Qualora la deformazione del corpo non fosse a volume costante, le equazioni di vincolo porterebbero a violare l'incomprimibilità nella regione del corpo, creando difficoltà nella formulazione del metodo.

Infine, citiamo l'algoritmo Chimera, presentato per la prima volta in [37] e [2]. Sebbene questo sia un metodo di generazione di griglia e non un metodo di decomposizione dei domini come il metodo dei domini fittizi, esso è di vasta applicazione nel campo dell'interazione fluido-struttura. E' stato ad esempio utilizzato per la soluzione di flussi attorno a corpi mobili in [42] e in [28] o attorno a pale rotanti in [32]. Tale metodo consiste nel poter generare in maniera efficiente e poco costosa griglie accurate per problemi di accoppiamento fluido-struttura.

In sostanza, si generano diverse griglie con diversi gradi di raffinamento. Queste sono sostanzialmente una griglia di background per la discretizzazione dell'intero dominio fluido e una o più griglie di strato limite, oltre a definire le geometrie dei corpi immersi. Ciascuna griglia è dotata di un indice di priorità. L'algoritmo procede come segue

1. Sovrapposizione delle griglie.
2. Eliminazione dei nodi in corrispondenza dei corpi rigidi e interpolazione sui nodi adiacenti al corpo rigido per poter imporre le condizioni al contorno (operazione di *hole cutting*).

3. Interpolazione tra i gradi di libertà al bordo di griglie in sovrapposizione tra di loro.
4. Eliminazione in corrispondenza di regioni con più griglie in sovrapposizione dei nodi appartenenti alle griglie con minor indice di priorità se non appartenenti ai nodi di interpolazione.

Queste operazioni sono sinteticamente rappresentate in Fig.1.3 e portano alla generazione di una singola griglia finale su cui viene risolto il problema fluidodinamico.

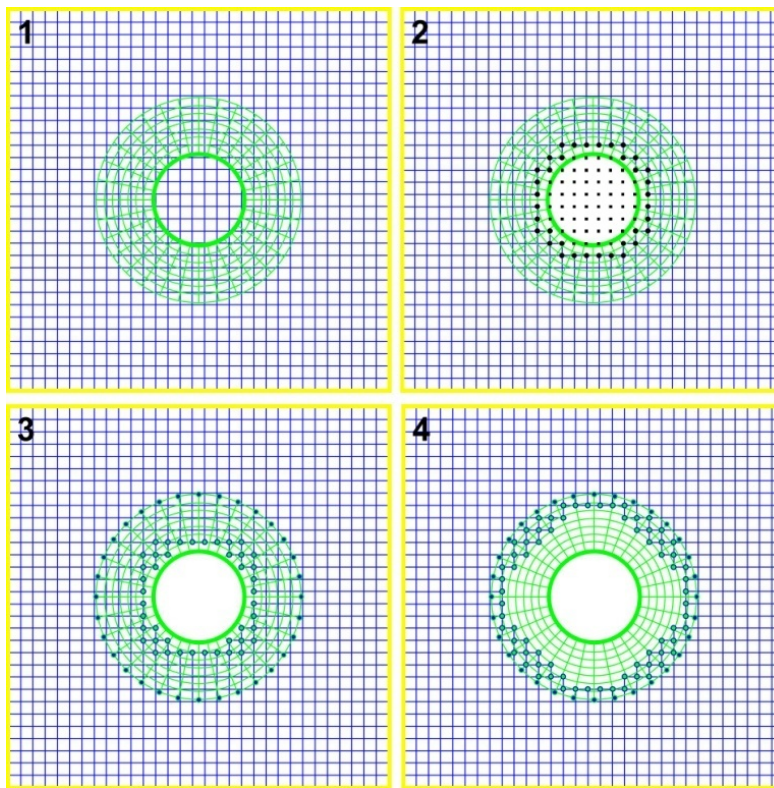


Figura 1.3: Principali passi per la generazione di griglia mediante un metodo Chimera.

Come verrà mostrato successivamente nell'analisi dei risultati delle simulazioni numeriche effettuate in questa tesi, uno dei problemi maggiori dell'applicazione del metodo dei domini fittizi a problemi fluidodinamici è la difficoltà di rappresentare correttamente gli strati limite nel dominio fittizio. Da questa problematica nasce l'idea di combinare tra loro il metodo dei domini fittizi e l'algoritmo Chimera.

Infatti, si può pensare di applicare una strategia di tipo Chimera (generazione indipendente delle griglie di background e strato limite) e di risolvere su di esse i problemi in esame tramite un metodo a domini fittizi (imposizione di equazioni di vincolo nelle regioni in cui si ha sovrapposizione di più griglie). Sebbene questo sembri un'estensione abbastanza naturale del metodo dei domini fittizi, non è stato trovato in letteratura alcun esempio di questo tipo.

Capitolo 2

Le equazioni di Navier-Stokes

In questo capitolo vengono introdotte le equazioni di Navier-Stokes. Il particolare problema in esame fa riferimento al caso di un flusso incomprimibile e laminare. Essendo in questa tesi esaminato anche il caso di un flusso sanguigno si partirà col presentare le equazioni generali per la fluidodinamica, analizzando poi in dettaglio le equazioni di Navier-Stokes per il caso di fluidi Newtoniani e specificando in quali situazioni il sangue può essere modellato come tale. Dopo aver introdotto le equazioni verrà analizzata la loro formulazione debole e la discretizzazione tramite elementi finiti. Infine, tra le peculiarità della discretizzazione, verrà presentato il metodo di stabilizzazione che è stato adottato in questo lavoro.

2.1 Le equazioni di Navier-Stokes e la loro discretizzazione tramite elementi finiti

Sia dato un dominio $\Omega \subset R^d$ con $d = 2, 3$ avente contorno Γ Lipschitziano e sia $T \in R$, $T > 0$ il tempo finale considerato. Siano definiti un campo di forze esterno (per unità di superficie se $d = 2$, per unità di volume se $d = 3$) $\mathbf{f} \in L^2(0, T) \otimes [L^2(\Omega)]^d$, un dato al bordo $\Phi \in L^2(0, T) \otimes [H^{1/2}(\Gamma_D)]^d$, dove Γ_D è la porzione del contorno Γ su cui sono definite delle condizioni al contorno di Dirichlet e un dato al bordo $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T) \otimes [H^{-1/2}(\Gamma_N)]^d$, dove Γ_N è la porzione di Γ su cui sono definite condizioni al contorno di Neumann con $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, e un dato iniziale \mathbf{u}_0 a divergenza nulla ($\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$). Le equazioni della dinamica di un continuo deformabile cercano un campo di velocità $\mathbf{u} \in L^2(0, T) \otimes [H^1(\Omega)]^d$ e un campo di pressione $p \in L^2(0, T) \otimes [L^2(\Omega)]$ ($p \in L^2(0, T) \otimes [L_0^2(\Omega)]$ nel caso in cui $|\Gamma_N| = 0$) tali che sia soddisfatto

il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \mathbf{u} = \Phi & \text{su } (0, T) \times \Gamma_D \\ \mathbf{T}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} & \text{su } (0, T) \times \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{in } \{0\} \times \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

dove $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$, mentre con \mathbf{T} si è indicato il tensore degli sforzi viscosi e di pressione, che sarà in generale funzione dei campi di velocità $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ e di pressione $p(t, \mathbf{x})$.

Questa forma delle equazioni per la dinamica di continui deformabili appena presentata è assolutamente generale e applicabile anche ad un fluido *non-Newtoniano*, per cui il tensore degli sforzi viscosi è una funzione non lineare del gradiente della velocità di deformazione. A rigore questo è il caso del sangue, un fluido contenente una parte di particolato solido che si comporta come un fluido plastico di Bingham per velocità di deformazione inferiori ai $60 \div 100s^{-1}$. Il comportamento non-newtoniano dovuto sostanzialmente alla presenza dei globuli rossi si manifesta in maniera accentuata nella rete capillare, dove il diametro dei vasi è paragonabile a quello dei globuli rossi e della loro distanza media. Nella rete arteriosa (ricordiamo che l'oggetto finale di questa tesi è il flusso attorno ad una valvola aortica artificiale), invece, le velocità di deformazione risulta essere ampiamente maggiore di $60 \div 100s^{-1}$ e la risposta reologica del sangue è ben approssimata dal modello di fluido newtoniano. Pertanto d'ora in poi si farà sempre riferimento a questo caso. Nel caso di fluido Newtoniano il tensore degli sforzi \mathbf{T} si riscrive come $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\nu\mathbf{D}(\mathbf{u})$, dove $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ rappresenta la parte simmetrica del gradiente di velocità, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$. Inoltre d'ora in avanti verrà adottata l'ipotesi di proprietà (densità e viscosità) costanti nel tempo e uniformi nello

spazio. In questo particolare caso il sistema (2.1) si riscrive come

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + 2\nu \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \mathbf{u} = \Phi & \text{su } (0, T) \times \Gamma_D \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} & \text{su } (0, T) \times \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{in } \{0\} \times \Omega. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Notiamo che il sistema (2.2) può essere interpretato in termini adimensionali, in cui p è da leggersi come un pressione adimensionalizzata con le forze d'inerzia per unità di volume ρU_∞^2 e ν è da leggersi come $\nu = \frac{1}{Re}$, essendo Re il numero di Reynolds, definito come

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} \quad (2.3)$$

con U_∞ modulo della velocità asintotica del flusso e D una dimensione caratteristica (per un canale l'altezza, per un tubo il diametro, etc.).

Ricaveremo ora la formulazione debole del sistema (2.2). Introduciamo gli spazi \mathbf{V} e Q definiti come

$$\mathbf{V} = L^2(0, T) \otimes [H_{\Gamma_D}^1(\Omega)]^d = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(0, T) \otimes [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = 0 \right\},$$

$$Q = C^0(0, T) \otimes L^2(\Omega) = \{q \in C^0(0, T) \times L^2(\Omega)\}.$$

A questo punto si moltiplichi la prima equazione di (2.2) per una funzione test \mathbf{v} e si integri sul dominio Ω

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} 2\nu (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.4)$$

e si utilizzi la formula di Green sul terzo e sul quarto termine di (2.4) come segue

$$- \int_{\Omega} 2\nu (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad (2.5)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (2.6)$$

Analogamente si moltiplichi la seconda equazione di (2.2) per una funzione test q e si integri sul dominio Ω

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q d\Omega = 0, \quad (2.7)$$

ottenendo la seguente formulazione debole del problema:

trovare $\mathbf{u} \in L^2(0, T) \otimes [H_{\Phi}^1(\Omega)]^d$ e $p \in L^2(0, T) \otimes L^2(\Omega)$ tali che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega + \\ \quad - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q d\Omega = 0 \quad \forall q \in Q \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad t = 0, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

dove $[H_{\Phi}^1]^d = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1]^d : \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \Phi \right\}$.

La formulazione debole in (2.8) è il punto di partenza per la discretizzazione di Galerkin ad elementi finiti. Presenteremo ora la discretizzazione in spazio del sistema (2.8), lasciando per ora invariata la derivata temporale che verrà invece trattata successivamente.

Si considerino i due sottospazi \mathbf{V}_h e Q_h dei rispettivi spazi funzionali \mathbf{V} e Q che diventino densi negli spazi funzionali nel limite di $h \rightarrow 0$. Lo spazio $[H_{\Phi}^1]^d$ viene approssimato in maniera del tutto analoga a \mathbf{V} , essendo i due spazi differenti solo per le condizioni al bordo di Dirichlet, risultando a livello discreto $\mathbf{V}_{\Phi h}$.

La formulazione ad elementi finiti alla Galerkin si scrive: trovare $\mathbf{u}_h \in L^2(0, T) \otimes \mathbf{V}_{\Phi h}$ e $p_h \in L^2(0, T) \otimes Q_h$ tali che

$$\left\{ \begin{array}{l} c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0h} \quad t = 0, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

dove si definiscono le *forme bilineari*

$$c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega + \int_{\Omega} 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_h q_h d\Omega$$

e il *funzionale lineare*

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}_h d\Gamma.$$

Si costruisca ora una base $\{\phi_i \ i = \dots, N\}$ di ciascuno degli spazi \mathbf{V}_h e Q_h , dove N rappresenta la dimensione dello spazio considerato (N_v per \mathbf{V}_h , N_q per Q_h). Qualsiasi possibile funzione test appartenente al sottospazio sarà allora esprimibile come combinazione lineare delle funzioni di base, ad esempio $\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_v} v_i \phi_i(\mathbf{x})$. Pertanto per soddisfare le condizioni di testare le equazioni in (2.9) $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ e $\forall q_h \in Q_h$, risulta sufficiente scegliere come funzioni test le funzioni di base dei sottospazi \mathbf{V}_h e Q_h per ottenere N_v e N_q equazioni linearmente indipendenti per ottenere la soluzione del sistema (2.8). Il sistema algebrico risultante si scrive come

$$\begin{cases} \mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \nu \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{N}(\mathbf{U}^*) \mathbf{U} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{f} \\ \mathbf{B} \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

dove \mathbf{M} è la matrice di massa definita come

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega,$$

\mathbf{K} è la matrice di rigidità definita come

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{D}(\phi_i) : \mathbf{D}(\phi_j) d\Omega,$$

mentre $\mathbf{N}(\mathbf{U}^*)$ è il termine derivante dal termine di trasporto che può assumere diverse forme a seconda della discretizzazione che si sceglie di adottare e che verrà meglio discusso successivamente in §2.2.

Infine, \mathbf{B} rappresenta l'equivalente algebrico dell'operatore di divergenza, con

$$b_{ij} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \phi_j \psi_i d\Omega$$

e ψ_j una generica funzione di base del sottospazio Q_h . Trasponendo \mathbf{B} si ottiene invece l'equivalente algebrico dell'operatore di gradiente.

2.2 Analisi di stabilità

In questa sezione di analizzerà brevemente la stabilità e le proprietà di convergenza della versione stazionaria del sistema (2.10), in cui il termine di derivata temporale si annulla. L'analisi condotta sarà assolutamente standard, pertanto si rimanda il lettore interessato a una più esaustiva trattazione a [39], [27].

Le forme $a(\cdot, \cdot) = \int_{\Omega} 2\nu \mathbf{D}(\cdot) : \mathbf{D}(\cdot) d\Omega$ e $b(\cdot, \cdot)$ soddisfano le seguenti proprietà:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C_1 \|\nabla \mathbf{u}\|^2, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq C_2 \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{v}\|, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V}$$

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\nabla \mathbf{v}\| \|q\|} \geq \beta > 0, \quad b(\mathbf{v}, q) \leq \sqrt{d} \|\nabla \mathbf{v}\| \|q\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall q \in Q,$$

dove la condizione *inf-sup*, detta anche condizione LBB, è quella che garantisce di non avere oscillazioni spurie sulla soluzione di pressione. Questa condizione, naturalmente soddisfatta a livello continuo, si traduce nello scegliere adeguatamente i sottospazi discreti \mathbf{V}_h e Q_h .

Analizzando ora la forma trilineare del termine convettivo

$$\hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega.$$

Si può dimostrare che questa è continua per un Teorema di immersione di Sobolev:

$$\forall v \in H^1(\Omega) \implies v \in L^4(\Omega), \quad \|v\|_{L^4} \leq C_s \|\nabla v\|,$$

da cui si ottiene

$$\hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \hat{C} \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{w}\| \|\nabla \mathbf{v}\|, \quad \hat{C} = \sqrt{d} C_s^2.$$

Si consideri ora il caso di $\Gamma_N \equiv \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ con $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$

$$\begin{aligned} \hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \sum_{ij} \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i d\Omega \\ &= - \sum_{ij} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (w_j v_i) d\Omega + \sum_{ij} \int_{\partial\Omega} u_i w_j v_i n_i d\Gamma \\ &= - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega}_{=0} - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma}_{=0} \\ &= -\hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}), \end{aligned}$$

cioè la forma $\hat{c}(\cdot, \cdot, \cdot)$ è emisimmetrica rispetto agli ultimi due argomenti, il che implica

$$\hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (2.11)$$

Questo risultato è fondamentale per lo studio di buona posizione del problema, il cui risultato finale è in generale che la soluzione del sistema di Navier-Stokes stazionario con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee esiste e soddisfa la seguente condizione di stabilità

$$\|\nabla \mathbf{u}\| + \|p\| \leq C(f), \quad (2.12)$$

ma tale soluzione NON è unica.

Nell'ipotesi di piccolezza dei dati, se il termine forzante è sufficientemente piccolo, cioè

$$\frac{\hat{C} \|f\|_{H^{-1}}}{\nu^2} < 1,$$

allora la soluzione è anche unica. Questa conclusione si applica al solo caso 2D ($d = 2$), mentre il risultato di unicITÀ nel caso generale 3D è ancora un problema aperto.

2.3 Discretizzazione temporale

L'analisi appena effettuata in §2.2 continua a valere anche nel caso delle equazioni di Navier-Stokes non stazionarie. Il trattamento del termine di derivata temporale può essere effettuato tramite schemi multi-step lineari (ad esempio tutta la classe dei θ -metodi, i metodi *BDF*, etc.). Come noto, si possono scegliere schemi di discretizzazione impliciti o espliciti, facendo attenzione alla pressione che va sempre e comunque valutata al tempo t^{n+1} (quindi in maniera implicita) per garantire di soddisfare la condizione di incomprimibilità.

Nel presente lavoro si è optato per una discretizzazione temporale tramite uno schema *BDF2* con trattamento semi-implicito del termine convettivo. Tale discretizzazione porta al seguente sistema finale, ad ogni passo temporale t^n la soluzione per $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$ è calcolata risolvendo

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2\Delta t} - \nu \Delta \right) \mathbf{u}^{n+1} - \nabla p^{n+1} + (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} + \\ \quad + \frac{1}{2\Delta t} (4\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

dove $2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}$ è un'estrapolazione del secondo ordine del termine convettivo, necessaria per mantenere la convergenza di ordine 2 in tempo del metodo.

Grazie alla proprietà di emisimmetria della forma trilineare (2.11), cioè

$$\int_{\Omega} (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

In questo caso questa proprietà significa che il trattamento semi-implicito del termine convettivo non pone alcuna restrizione sulla stabilità della discretizzazione temporale, pertanto il metodo BDF2 presentato in 2.13 continua ad essere assolutamente stabile permettendo di scegliere il passo temporale Δt solo in base alle esigenze di accuratezza sulla soluzione e non in funzione di esigenze di stabilità.

La scelta di una discretizzazione semi-implicita del termine convettivo piuttosto di una formulazione completamente implicita

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1}$$

presenta l'indubbio vantaggio di generare un sistema lineare nell'incognita \mathbf{u}^{n+1} , sebbene i coefficienti della matrice globale legata ai gradi di libertà della velocità vadano aggiornati ad ogni passo temporale e tale matrice non sia simmetrica (precludendo l'utilizzo del gradiente coniugato per la soluzione del problema in velocità).

La formulazione completamente implicita porta invece ad un sistema non lineare in \mathbf{u}^{n+1} da risolvere con iterazioni di punto fisso o con un metodo di Newton, cosa che risulta avere un costo computazionale troppo elevato.

2.4 Stabilizzazione

In questa sezione vengono brevementi discussi i problemi di stabilità legati al problema di diffusione-trasporto delle equazioni di Navier-Stokes e viene presentato il metodo di stabilizzazione che è stato utilizzato.

Quando il problema è a trasporto dominante, cioè, per le equazioni di Navier-Stokes, $Re \gg 1$, la formulazione di Galerkin può soffrire di oscillazioni spurie qualora la griglia non sia sufficientemente raffinata. Il parametro che governa questo fenomeno è il numero di *Péclet*, definito localmente come

$$Pe_h = \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty} h}{2\nu}. \quad (2.14)$$

Come si può notare il numero di *Péclet* è analogo al numero di Reynolds. Quando $Pe_h > 1$ la soluzione alla Galerkin del problema può presentare oscillazioni spurie. Per risolvere questo problema senza raffinare eccessivamente la

griglia (si noti che raffinando è sempre possibile in generale ottenere $Pe_h < 1$ e quindi soluzioni accurate, a costo però di un eccessivo costo computazionale) è necessario stabilizzare le equazioni aggiungendo termini che aumentano artificialmente la diffusione.

In generale i metodi di stabilizzazione più semplici, basati in vario modo sul numero di Péclet, degradano la convergenza della soluzione di Galerkin che risulta essere molto più diffusiva della soluzione reale. Per questo motivo, una grande ricerca è in corso per sviluppare metodi di stabilizzazione che siano *fortemente consistenti*, cioè che stabilizzino le equazioni senza peggiorare la convergenza del metodo risolutivo.

In questa tesi si è deciso di fare uso del metodo di stabilizzazione *interior penalty*. Questo metodo, di recente formulazione, è stato scelto perchè è fortemente consistente e perchè la sua implementazione in **FreeFem++** (software usato per la soluzione dei vari problemi affrontati) risulta essere particolarmente agevole.

Verrà ora presentato in breve il metodo di stabilizzazione interior-penalty. Per una trattazione completa, con la dimostrazione delle proprietà di convergenza del metodo si rimanda a [10].

Si consideri la formulazione debole delle equazioni di Navier-Stokes (2.9). Si consideri una triangolazione τ_h del dominio Ω ; si definisce per ogni elemento $K \in \tau_h$:

$$h_K = \max_{e \in \partial K} h_e$$

dove h_e è la lunghezza del lato e .

La triangolazione deve avere le seguenti caratteristiche:

- deve essere regolare, cioè

$$\frac{h_K}{\text{diam}(K)} \leq C, \quad \forall K \in \tau_h$$

dove C è una costante fissata e $\text{diam}(K)$ è il diametro del cerchio inscritto all'elemento di triangolazione K (detto anche sfericità),

- Deve esistere un ρ , con $\rho > 0$ che dipende dalla regolarità della mesh, tale che, presi 2 elementi della triangolazione che abbiano almeno un nodo comune, deve valere $h_K \leq \rho h_{K'}$.

Sia $\varphi \in \{\varphi \in C^0(K) : \forall K \in \tau_h\} = C_K$, si definisce salto su un lato la seguente espressione

$$[[\varphi]]_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} (\varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{n}_e) - \varphi(\mathbf{x} - t\mathbf{n}_e)), & \text{se } e \notin \partial\Omega, \\ 0, & \text{se } e \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.15)$$

dove \mathbf{n}_e è la normale uscente al lato e considerato.

Definendo lo spazio

$$\mathbf{W}_h^k = \mathbf{P}_h^k \times Q_h^k,$$

il metodo stabilizzato si scrive come: trovare la coppia $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{W}_h^k$ tale che

$$\mathbf{A}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \mathbf{F}((\mathbf{v}_h, q_h)), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{W}_h^k \quad (2.16)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{A}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(p_h, \mathbf{v}_h) - b(q_h, \mathbf{u}_h) + \\ &\quad + j_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + j_p(p_h, q_h). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Per quanto riguarda i termini di salto $j_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ e $j_p(p_h, q_h)$ diverse formulazioni sono presenti in letteratura. Queste, sebbene simili tra loro, differiscono leggermente nell'efficacia della stabilizzazione a seconda del problema in esame. Qui di seguito riportiamo alcune possibili versioni su $j_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$. Maggiori dettagli possono essere trovati in [10], [7], [12], [9], [11] [8], relativi anche al termine $j_p(p_h, q_h)$ che verrà trascurato in quanto non utilizzato in questo lavoro per motivi che verranno spiegati in seguito. In [10] viene proposto

$$\begin{aligned} j_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{K \in \tau_h} \gamma_\beta \frac{h_K^2}{\|\mathbf{u}_h^*\|_{0,\infty,K}} \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h^* \cdot [[\nabla \mathbf{u}_h]]) \cdot (\mathbf{u}_h^* \cdot [[\nabla \mathbf{v}_h]]) ds + \\ &\quad + \sum_{K \in \tau_h} \gamma_{div} h_K^2 \|\mathbf{u}_h^*\|_{0,\infty,K} \int_{\partial K} [[\nabla \cdot \mathbf{u}_h]] [[\nabla \cdot \mathbf{v}_h]] ds, \end{aligned} \quad (2.18)$$

mentre in [7] viene proposto

$$j_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} \gamma Re_K h_K [[\nu \nabla \mathbf{u}_h]] : [[\nabla \mathbf{v}_h]] ds, \quad (2.19)$$

dove

$$Re_K = \frac{\|\mathbf{u}_h^*\|_{0,\infty,K} h_K}{\nu}.$$

Per \mathbf{u}_h^* è stata scelta l'estrapolazione di velocità utilizzata per il termine convettivo, in questo caso

$$\mathbf{u}_h^* = 2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}.$$

Le due formulazioni (2.18) e (2.19) differiscono sostanzialmente solo per la direzione in cui si sta controllando il salto dei gradienti. Infatti, dalla definizione di Re_K si nota che

$$Re_K h_K \nu = \|\mathbf{u}_h^*\|_{0,\infty,K} h_K^2$$

ed inoltre vale la seguente uguaglianza

$$[[\nabla \cdot \mathbf{u}_h]][[\nabla \cdot \mathbf{v}_h]] = [[\nabla \mathbf{u}_h]] : [[\nabla \mathbf{v}_h]].$$

Le differenze risiedono pertanto nel fatto che in (2.18) il gradiente viene proiettato in direzione del flusso, fornendo di fatto un termine stabilizzante per salti di gradiente in direzione del flusso (*streamwise*). Nella formulazione (2.19), invece, il salto di gradiente non viene proiettato e pertanto la stabilizzazione agisce in tutte le direzioni indistintamente. Va ricordato infine che, per funzioni continue su τ_h (in questo caso continue e lineari a tratti) e per griglie conformi, i salti di gradiente in direzione tangenziale a qualsiasi bordo del generico elemento di triangolazione è nullo, pertanto il termine $[[\nabla \mathbf{u}_h]]$ rappresenta solo il salto del gradiente in direzione normale al generico bordo dell'elemento di triangolazione considerato

$$[[\nabla \mathbf{u}_h]] = [[\nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]],$$

in cui \mathbf{n} è la normale uscente al bordo.

Poichè i problemi di stabilità incontrati durante questo lavoro insorgevano principalmente in direzione trasversale al flusso (*crosswind* o *spanwise*), si è preferita la formulazione (2.19), che ha inoltre il vantaggio di avere una sola costante da dover regolare.

Per completezza di esposizione, riportiamo di seguito il termine $j_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ utilizzato

$$j_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} \gamma Re_K h_K [[\nu \nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]] \cdot [[\nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]] ds,$$

mentre una possibile scelta per $j_p(p_h, q_h)$ (ricordiamo ancora che in questo caso j_p non è mai stato utilizzato) è

$$j_p(p_h, q_h) = \sum_{K \in \tau_h} \gamma_p \xi(Re_K) \frac{h_K^2}{\|\mathbf{u}^*\|_{0,\infty,K}} \int_{\partial K} [[\nabla p_h]] \cdot [[\nabla q_h]] ds, \quad (2.20)$$

con

$$Re_K = \frac{\|\mathbf{u}^*\|_{0,\infty,K} h_K}{\nu}, \quad \xi(\lambda) = \min \{1, \lambda\}.$$

I termini contenenti i salti tra i gradienti e/o le divergenze servono per 3 diversi scopi:

- stabilizzare i termini convettivi (la prima sommatoria in (2.18))
- dare un controllo artificiale all'incompressibilità del flusso (la seconda sommatoria in (2.18))

- garantire la condizione *inf-sup* anche per coppie di spazi che non sono LBB compatibili (il salto definito in (2.20)).

Ovviamente le prime due funzioni risultano essere inglobate nell'unico termine presente nella formulazione utilizzata (2.19).

In tutte le simulazioni eseguite in questa tesi è stata utilizzata la coppia di spazi **P1bolla**, **P1** per velocità e pressione rispettivamente, dove

$$\mathbf{P1} = \{v \in H^1(\Omega) | \forall K \in \tau_h \ v|_K \in P^1\},$$

è lo spazio delle funzioni continue e lineari a tratti su Ω .

$$\mathbf{P1bolla} = \{v \in H^1(\Omega) | \forall K \in \tau_h \ v|_K \in P^1 \oplus \text{Span}(\lambda_0^K \lambda_1^K \lambda_2^K)\},$$

dove λ_i^K per $i = 0, 1, \dots, d$ sono le $d+1$ coordinate del baricentro dell'elemento K , è lo spazio **P1** aggiunto delle bolle.

Poichè questi spazi sono già LBB compatibili, j_p non è stato implementato come già anticipato.

Infine, per completezza di esposizione dell'argomento, citiamo il fatto che un metodo di stabilizzazione così fatto (così come anche lo schema *SUPG*), possono essere visti come dei possibili modelli LES. Sebbene l'accettazione della stabilizzazione interior-penalty come modello LES sia ancora in discussione, si possono certamente osservare delle analogie sul carattere multiscala di entrambe le metodologie (interior-penalty e LES). Inoltre, in [9] viene risolto il problema di un mixing-layer a $Re = 10000$ utilizzando proprio un metodo di stabilizzazione interior-penalty in analogia con un metodo LES.

Capitolo 3

Il metodo dei domini fittizi

In questo capitolo viene analizzato in dettaglio il metodo dei domini fittizi, che costituisce il metodo utilizzato in questa tesi per la soluzione dei problemi fluidodinamici analizzati. Oltre alla descrizione del metodo dei domini fittizi, dettaglieremo il problema del preconditionamento del sistema algebrico risolvibile, necessario all'ottenimento di un solutore efficiente in termini di prestazioni di calcolo. Infine, verranno forniti i dettagli relativi all'implementazione con `FreeFem++` di un siffatto metodo.

3.1 Descrizione generale del metodo

Si consideri di nuovo il dominio già presentato in Fig.1.1 e qui riproposto per comodità. Siano Ω e B disgiunti, così che l'intero dominio risulti essere $\Omega_B = \text{int}(\bar{\Omega} \cup \bar{B})$, cioè l'interno dell'unione delle chiusure di Ω e di B . Sia definito su Ω un problema di Navier-Stokes come descritto nel sistema (2.2), dove in questo caso $\Gamma \equiv \partial\Omega$. Sul bordo ∂B siano definite solo condizioni di Dirichlet, del tipo

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \quad \text{se } \mathbf{x} \in \partial B. \quad (3.1)$$

$\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ in (3.1) rappresenta una velocità imposta all'oggetto B , la quale deve almeno soddisfare

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 0,$$

il che è sempre verificato per moti rigidi che saranno oggetto di questa tesi.

Come già accennato in precedenza, è sempre possibile risolvere univocamente un problema di questo tipo in maniera classica, cioè costruendo una triangolazione del solo dominio Ω e risolvere su di essa la discretizzazione ad elementi finiti delle equazioni di Navier-Stokes presentata in (2.9). Tuttavia la costruzione della triangolazione di Ω può risultare complessa in termini di

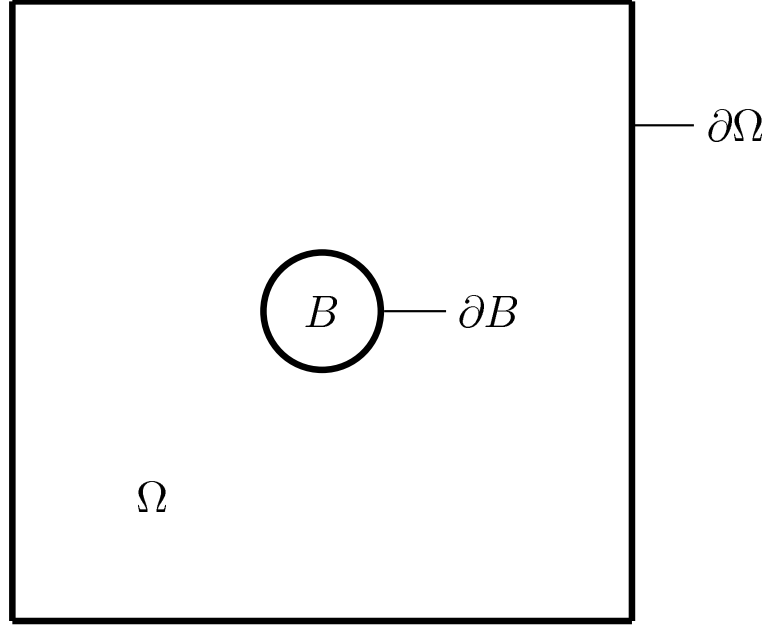


Figura 3.1: Generico Dominio

implementazione e computazionalmente onerosa, oltre al fatto che la triangolazione ottenuta può risultare non sufficientemente regolare. Inoltre, qualora l'inclusione B fosse mobile nel tempo, i problemi di generazione della triangolazione di Ω sopracitati si presenterebbero ad ogni passo temporale, in quanto la triangolazione va modificata ad ogni passo temporale.

Il metodo dei domini fittizi, invece, estende il dominio Ω al dominio Ω_B . Su questo nuovo dominio, detto per l'appunto dominio fittizio, viene esteso il problema, in questo caso il problema di Navier-Stokes. Fisicamente è come se il *corpo* B sia stato riempito dal fluido che era presente in Ω . Essendo Ω_B geometricamente più semplice di Ω , la generazione della triangolazione risulta essere meno onerosa, mentre il risultato finale sarà una triangolazione più regolare su cui eventualmente sarà possibile impiegare solutori dedicati di migliori prestazioni computazionali. L'estensione del dominio a Ω_B richiede la ridefinizione degli spazi funzionali in cui ricercare le soluzioni, oltre a una riformulazione della forma debole del problema. In sostanza si utilizzano i seguenti nuovi spazi funzionali:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= L^2(0, T) \otimes [H_{\Gamma_D}^1]^d = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(0, T) \otimes [H^1(\Omega_B)]^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \right\}, \\ \mathbf{V}_\Phi &= L^2(0, T) \otimes [H_{\Gamma_D}^1]^d = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(0, T) \otimes [H^1(\Omega_B)]^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \Phi \right\}, \\ Q &= \{L^2(0, T) \otimes L^2(\Omega_B)\}. \end{aligned}$$

Per contro, la stessa estensione del dominio Ω a Ω_B non consente ora di imporre le condizioni di Dirichlet su ∂B . Queste condizioni vengono pertanto reintrodotte nel metodo dei domini fittizi tramite equazioni di vincolo. Come qualsiasi problema vincolato, anche il sistema ottenuto dal metodo dei domini fittizi può essere reso libero tramite l'uso dei moltiplicatori di Lagrange che generano nelle equazioni di governo dei termini forzanti aggiuntivi. Tralasciando per il momento i dettagli legati alla formulazione matematica delle equazioni di vincolo aggiuntive, il sistema che governa il problema risulta avere ora la seguente forma debole:

trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_\Phi$, $p \in Q$, $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}(t)$ tali che

$$\begin{cases} c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} \rangle_{\boldsymbol{\Lambda}(t)} = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in Q \\ \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u} \rangle_{\boldsymbol{\Lambda}(t)} = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{g} \rangle_{\boldsymbol{\Lambda}(t)} & \forall \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\Lambda}(t) \\ \mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.2)$$

dove \mathbf{U}_0 è una qualsiasi estensione di \mathbf{u}_0 su Ω_B tale che $\nabla \cdot \mathbf{U}_0 = 0$ e $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}_0$ su Ω , mentre le forme bilineari e il funzionale lineare sono stati ridefiniti sul dominio Ω_B come segue

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega_B} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega_B} 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega, \\ b(\mathbf{u}, q) &= - \int_{\Omega_B} \nabla \cdot \mathbf{u} q d\Omega, \\ (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_B} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \end{aligned}$$

dove $\tilde{\mathbf{f}}$ è una qualsiasi estensione di \mathbf{f} su Ω_B tale che $\tilde{\mathbf{f}} \in L^2(0, T) \otimes [L^2(\Omega_B)]^d$.

Analizziamo ora il vincolo che è stato imposto. A rigore, come presentato in [19] e [22], qualora si decidesse di imporre il vincolo sull'intero corpo $B(t)$ (cosa sempre fatta in questa tesi), $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ dovrebbe essere lo spazio duale a \mathbf{V} su B , in questo caso $\boldsymbol{\Lambda}(t) = [H^1(B(t))']^d$, dove con $B(t)$ si è evidenziato che il dominio $B(t)$ è mobile all'interno del dominio Ω . In questo modo $\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle_{\boldsymbol{\Lambda}(t)}$ è l'applicazione di dualità tra $\mathbf{V}_{B(t)}$ e $\boldsymbol{\Lambda}(t)$, dove $\mathbf{V}_{B(t)}$ è lo spazio \mathbf{V} ristretto al dominio $B(t)$.

A questo punto è possibile affermare che il problema (2.2) sottoposto alle condizioni al contorno di Dirichlet (3.1), e il problema (3.2) sono equivalenti nel senso che hanno la stessa soluzione (\mathbf{u}, p) in Ω .

Poichè è sempre possibile costruire una corrispondenza biunivoca tra spazi duali, nel senso che $\forall \lambda \in \Lambda(t)$ esiste un elemento $I_\lambda \in \Lambda(t)'$ tale che $\langle \lambda, v \rangle = (I_\lambda, v)_{\Lambda(t)'}$, lo spazio $\Lambda(t)$ può essere rappresentato dal suo duale (ad esempio se $\Lambda(t) = [H^1(B(t))']^d$ può essere rappresentato da $[H^1(B(t))]^d$). Questo permette un'enorme semplificazione a livello pratico/implementativo, poichè non si sarebbe altrimenti in grado di rappresentare lo spazio $H^1(B(t))'$.

E' possibile ora definire l'applicazione $\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle_{\Lambda(t)}$. La scelta più naturale è, come mostrato in [21] e [22], il prodotto scalare in $\Lambda(t)$. Quindi, scegliendo di sfruttare la corrispondenza biunivoca tra $H^1(B(t))'$ e $H^1(B(t))$, si ottiene che $\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle_{\Lambda(t)}$ può essere rappresentato con

$$\int_{B(t)} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\Omega, \quad \begin{cases} \forall \boldsymbol{\mu} \in [H^1(B(t))]^d \\ \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega_B)]^d. \end{cases}$$

Alternativamente, è può scegliere di rappresentare $\Lambda(t)$ con $[L^2(B(t))]^d$, sfruttando il fatto che $[H^1(B(t))]^d$ è denso in $[L^2(B(t))]^d$, il quale coincide con il suo duale che è a sua volta denso in $[H^1(B(t))']^d$. In questo caso $\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle_{\Lambda(t)}$ è rappresentato da

$$\int_{B(t)} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \quad \begin{cases} \forall \boldsymbol{\mu} \in [L^2(B(t))]^d \\ \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega_B)]^d, \end{cases}$$

tenendo ben presente che a livello discreto per $h \rightarrow 0$ non ci si può aspettare che i $\boldsymbol{\lambda}$ convergano a una funzione di $[L^2(B(t))]^2$.

Come si può osservare da quanto presentato in questa sezione, fin dall'inizio della nostra trattazione abbiamo incluso nel modello la possibilità che il corpo rigido immerso potesse avere un moto imposto ($\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ in (3.1)) senza la necessità di dover modificare la formulazione di Navier-Stokes (dovendo per esempio passare alla cosiddetta formulazione A.L.E.). Questo perchè di fatto è come se lo spazio occupato dal corpo rigido venisse occupato dal fluido. Questa interessante proprietà della formulazione mediante domini fittizi la rende particolarmente indicata per problemi di interazione fluido-struttura, come quelli oggetto di questa tesi.

Come affermato in [22], usando la terminologia della Fisica Quantistica i moltiplicatori di Lagrange associati alle equazioni di vincolo $\boldsymbol{\lambda}$ possono essere visti come dei *gluoni* il cui ruolo è quello di costringere B ad essere rigido.

In termini di fisica di base, invece, le risultanti dei $\boldsymbol{\lambda}$ in termini di forze e momenti rappresentano l'integrale degli sforzi viscosi e di pressione che il fluido esercita sul corpo, pertanto possono essere utilizzate per estendere il

metodo dei domini fittizi al caso in cui il moto del corpo rigido B non sia noto a priori ma sia determinato dal moto del fluido, introducendole direttamente nelle equazioni della dinamica del corpo rigido. Maggiori dettagli relativi alla soluzione delle equazioni di moto del corpo rigido saranno forniti in §3.4.

3.2 Discretizzazione ad elementi finiti

In questa sezione verranno discussi i dettagli salienti della discretizzazione del metodo dei domini fittizi tramite elementi finiti che è stato oggetto di questa tesi.

Per quanto riguarda le equazioni di Navier-Stokes, la loro discretizzazione ad elementi finiti è già stata discussa in §2.1 e si farà riferimento alla formulazione in (2.10). In §2.2 invece si è discusso tra gli altri della discretizzazione temporale. Ricordiamo che in questa tesi è stato implementato un metodo BDF2 per la derivata temporale e il termine convettivo è stato trattato in maniera semi-implicita, vedi (2.13). Infine, si ricorda che qualora $Re \gg 1$ è necessario apportare stabilizzazione alle equazioni. In questa tesi, come discusso in §2.4, è stato adottato un metodo di stabilizzazione interior-penalty. Infine, riferendosi ad un metodo dei domini fittizi, il sistema risolvibile finale sarà della forma presentata in (3.2). Per agio di lettura, riportiamo ora il sistema completo discretizzato ad elementi finiti:

trovare $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_{\Phi_h}$, $p \in Q_h$, $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}_h^{n+1}$ tali che

$$\begin{cases} c_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) + \langle \boldsymbol{\lambda}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle_{\boldsymbol{\Lambda}_h^{n+1}} = (\tilde{\mathbf{f}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h \\ \langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle_{\boldsymbol{\Lambda}_h^{n+1}} = \langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{g}_h^{n+1} \rangle_{\boldsymbol{\Lambda}_h^{n+1}} & \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \boldsymbol{\Lambda}_h^{n+1}, \end{cases} \quad (3.3)$$

dove

$$\begin{aligned} c_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega_B} \frac{2}{3\Delta t} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_B} ((2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_B} 2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^{n+1}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) d\Omega + j_u(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h), \\ b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) &= - \int_{\Omega_B} \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} q_h d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{f}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega_B} \tilde{\mathbf{f}}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Gamma + \\ &\quad + \int_{\Omega_B} \frac{1}{2\Delta t} (4\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_h d\Omega. \end{aligned}$$

Seguendo ora una base $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_v}$ per \mathbf{V}_h (con N_v dimensione di \mathbf{V}_h) e una base $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_q}$ per Q_h (con N_q dimensione di Q_h) è possibile esprimere qualsiasi funzione in questi spazi tramite combinazioni lineari di queste funzioni, ad esempio $\mathbf{u}_h^{n+1} = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^{n+1} \phi_j$. Inoltre, testando le equazioni per ogni singola funzione di base si soddisfa la richiesta che le equazioni debbano essere verificate per ogni funzione test. In questo modo si ottiene la formulazione algebrica del problema di Navier-Stokes discretizzato con un'approssimazione alla Galerkin

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{n+1} + \langle \boldsymbol{\lambda}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Lambda_h^{n+1}} = \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{B}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{0} \\ \langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle_{\Lambda_h^{n+1}} = \langle \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{g}_h^{n+1} \rangle_{\Lambda_h^{n+1}} \quad \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \Lambda_h^{n+1}, \end{cases} \quad (3.4)$$

dove

$$\begin{aligned} C_{ij} &= c_h(\phi_j, \phi_i), \\ B_{ik} &= b_h(\phi_k, \psi_i), \\ F_i &= (\tilde{\mathbf{f}}_h^{n+1}, \phi_i). \end{aligned}$$

Concentriamoci ora sul termine derivante dalle equazioni di vincolo introdotte dalla formulazione a domini fittizi. Sebbene in §3.1 si siano discussi quali debbano essere gli spazi funzionali corretti per i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, in [22] si osserva come in realtà le cose a livello numerico siano più semplici. In altre parole si osserva che a livello numerico il metodo converge anche utilizzando un metodo di *collocazione*.

Sia ς_k una generica triangolazione di $B(t)$. Si sceglie come sottospazio $\Lambda_h(t)$ il seguente:

$$\Lambda_h^{n+1} = \{\mu_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \forall i = 1, \dots, N_\Lambda\},$$

che è il sottospazio delle *delta di Dirac* nei nodi di ς_k al tempo t^{n+1} .

Questa particolare scelta è possibile (sottolineiamo ancora una volta solo a livello numerico) in quanto le funzioni ad elementi finiti utilizzate sono continue su Ω_B e quindi anche su B , cosa che rende ben definito il funzionale di

Dirac. Si potrebbe obiettare che \mathbf{V}_h non converge a \mathbf{V} per $h \rightarrow 0$. Infatti, gli elementi di \mathbf{V} non sono necessariamente continui, tuttavia in molti casi reali (e sicuramente in quelli trattati in questo lavoro) la velocità risulta essere continua e sufficientemente regolare da giustificare la scelta fatta. Si fa notare ancora una volta che, per $h \rightarrow 0$, ci si deve aspettare che i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}^{n+1}$ convergano a una funzione di $[H^1(B(t))]^d$.

A questo punto l'equazione di vincolo, terza equazione del sistema (3.4), diventa

$$\begin{aligned} \langle \mu_i, \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle &= \int_{B_h^{n+1}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^{N_v} U_j^{n+1} \phi_j(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{N_v} U_j^{n+1} \phi_j(\mathbf{x}_i), \end{aligned}$$

che risulta essere equivalente all'imposizione puntuale del vincolo nei nodi della triangolazione di $B(t)$. Definiamo ora la matrice \mathbf{S} , i cui elementi

$$S_{ij} = \phi_j(\mathbf{x}_i) \quad (3.5)$$

rappresentano la valutazione delle funzioni di base di \mathbf{V}_h nei nodi della triangolazione ς_h di $B(t)$.

Analizzando ora il termine legato ai moltiplicatori di Lagrange comparso nella prima equazione di (3.4), questo diventa

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\lambda}_h^{n+1}, \phi_i \rangle &= \int_{B_h^{n+1}} \sum_{j=1}^{N_\Lambda} \Lambda_j^{n+1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \phi_i(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{N_\Lambda} \Lambda_j^{n+1} \phi_i(\mathbf{x}_j) \\ &= \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Lambda}^{n+1}. \end{aligned}$$

Si è giunti a questo punto alla formulazione algebrica globale del problema, che risulta essere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B}^T & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \\ \boldsymbol{\Lambda}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^{n+1} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ad ogni time-step questo problema viene risolto con un metodo iterativo per la soluzione di sistemi lineari non simmetrici (*LinearGMRES*). Dato che il trattamento semi-implicito del termine convettivo non introduce limitazioni sulla stabilità del metodo (vedi §2.3), lo schema è incondizionatamente stabile e pertanto è possibile scegliere Δt solo in funzione delle esigenze di accuratezza.

3.3 Precondizionamento del sistema algebrico

In questa sezione viene presentato il preconditionatore che è stato utilizzato per un'efficiente soluzione del sistema algebrico (3.6) tramite un metodo iterativo.

Innanzitutto va analizzata la buona posizione del sistema discreto ottenuto in (3.6). Per quanto riguarda i primi 2 blocchi (quelli relativi al sistema di equazioni di Navier-Stokes) tutte le considerazioni fatte in §2.2 e in §2.3 rimangono intaccate, pertanto continuano a valere. Per quanto riguarda invece il blocco aggiuntivo legato alle equazioni di vincolo, si osserva che in generale il numero di equazioni di vincolo deve essere minore del numero di gradi di libertà di velocità influenzati dal vincolo per evitare che il problema sia singolare. Ciò viene garantito costruendo opportunamente la triangolazione ς_h di $B(t)$ rispetto alla triangolazione τ_h di Ω_B , in modo tale che il numero di gradi di libertà di $\mathbf{\Lambda}_h(B(t))$ sia, al più, uguale al numero di gradi di libertà di $\mathbf{V}_h(\Omega_B)$ che hanno intersezione non nulla con ς_h . Qualora questa condizione non sia soddisfatta, il sistema delle equazioni di vincolo diventa sovradeterminato e quindi il problema è singolare.

L'esistenza di soluzioni per il sistema dipende dal termine \mathbf{g}^{n+1} presente nel termine noto di 3.6. Se $\mathbf{g}^{n+1} \in \text{Im}(\mathbf{S})$ (immagine di \mathbf{S}) allora esistono infinite soluzioni del sistema e il vettore $\mathbf{\Lambda}^{n+1}$ non è più unico. Viceversa, se $\mathbf{g}^{n+1} \notin \text{Im}(\mathbf{S})$ non esistono soluzioni del sistema algebrico. Nel caso di cilindro fermo (

$$\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{0}$$

) o in moto rigido, $\mathbf{g}^{n+1} \in \text{Im}(\mathbf{S})$ sempre, garanzia questa dell'esistenza di (almeno) una soluzione.

Dopo questo inciso sulla buona posizione del sistema discreto, ritorniamo al problema della ricerca di un buon preconditionatore e riportiamo ora brevemente alcuni passi di [18]. Osserviamo che dato un problema differenziale la cui discretizzazione porta a un sistema del tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{F},$$

l'applicazione del metodo dei domini fittizi per l'imposizione di condizioni al bordo di Dirichlet porta il sistema risolvibile a essere in generale nella forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix},$$

con \mathbf{A} non singolare.

Tale sistema può essere risolto costruendo un problema solo per i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ mediante complemento di Schur, che risulta essere

$$\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}^T.$$

Un preconditionatore ottimale per \mathbf{S}_λ deve avere la stessa rappresentazione spettrale dell'inverso della matrice che si sta preconditionando, così che $\mathbf{H}\mathbf{S}_\lambda$ abbia la stessa rappresentazione spettrale dell'identità. In particolare, si desidera che $\text{cond}(\mathbf{H}\mathbf{S}_\lambda)$ sia indipendente della dimensione della discretizzazione spaziale h (sia del fluido che del corpo B).

Al di là di questa proprietà teorica che riguarda in generale qualsiasi tipo di preconditionatore, [18] propone come buon preconditionatore per il blocco dei moltiplicatori di Lagrange l'uso di una matrice identica a quella che governa il problema (la matrice \mathbf{A} dell'esempio che si sta considerando), semplicemente valutata sulla triangolazione del dominio dove sono definiti i moltiplicatori di Lagrange. In altre parole si assume come buon preconditionatore

$$\mathbf{H}_\lambda = \mathbf{A}_B,$$

dove \mathbf{A}_B deriva dalla stessa forma bilineare che governa il problema in esame ma è stata valutata sulla triangolazione di $B(t)$.

Tenendo questo in mente, il preconditionatore per il sistema (3.6) è stato ricavato utilizzando la tecnica della decomposizione a blocchi **LU**. La decomposizione risulta essere

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B}^T & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & \\ \mathbf{B} & -\Sigma_p & \\ \mathbf{S} & -\mathbf{S}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T & -\Sigma_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{S}^T \\ & \mathbf{I} & \Sigma_p^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{S}^T \\ & & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

dove

$$\Sigma_p = \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T$$

e

$$\Sigma_\lambda = \mathbf{S}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{S}^T - \mathbf{S}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T\Sigma_p^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{S}^T.$$

Come preconditionatore viene presa una rappresentazione incompleta della matrice \mathbf{L} , in particolare

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & \\ \mathbf{B} & -\Sigma_p & \\ \mathbf{S} & & -\Sigma_\lambda \end{bmatrix},$$

approssimato come segue:

- Σ_p viene approssimato alla Cahouet-Chabard (risultando tempo-invariante per cui è possibile calcolarlo una sola volta)

$$\Sigma_p \cong \tilde{\Sigma}_p = \left(\nu M_p^{-1} + \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{K}_p^{-1} \right)^{-1}$$

- Σ_λ viene approssimato seguendo quanto affermato in precedenza, considerando solo il termine legato alla matrice \mathbf{C} , come

$$\Sigma_\lambda = \tilde{\Sigma}_\lambda \cong (\mathbf{C}_\lambda)^{-1},$$

cioè valutando sulla discretizzazione c_h di $B(t)$ la forma variazionale per la velocità $c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$, in cui sono presenti i termini di massa, diffusione e trasporto.

Analizzando ora la forma di \mathbf{P} osserviamo come il primo blocco

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{B} \quad -\tilde{\Sigma}_p \end{bmatrix}$$

risulti essere in analogia a quello del metodo di Chorin-Temam algebrico (metodo A.C.T.).

Con tale preconditionatore \mathbf{P} si ottengono buone prestazioni di convergenza del solutore iterativo, in termini di circa 50 iterazioni per raggiungere la soluzione con un criterio di arresto di 10^{-12} sul residuo per il calcolo di una corrente a basso Reynolds attorno a un cilindro in cui non si sia ancora sviluppato *vortex shedding*. Un'analisi più dettagliata delle prestazioni del preconditionatore, unitamente all'analisi di preconditionatori alternativi, è condotta in §4.1.

Il numero di iterazioni impiegate per raggiungere la soluzione risulta però essere dipendente dal rapporto tra la dimensione degli elementi della triangolazione di B rispetto a quelli della triangolazione di Ω_B , in particolare aumentando il numero di nodi della triangolazione in B a parità di numero di nodi della triangolazione di Ω_B il numero di iterazioni necessarie per raggiungere la soluzione aumenta. Questa caratteristica è peraltro prevedibile per quanto detto precedentemente, in quanto aumentando il numero di nodi della triangolazione di B ci si avvicina al caso di sovradeterminazione del sistema delle equazioni di vincolo, caso per cui il sistema diventa singolare (per i casi di corpo rigido trattati in questa tesi si ha sempre almeno una soluzione).

3.4 Dinamica del corpo

In questa sezione vengono proposti i dettagli riferiti alla soluzione della dinamica del corpo rigido.

Come già accennato in §3.1, il metodo dei domini fittizi risulta particolarmente indicato nel caso in cui il corpo immerso nel fluido sia libero, muovendosi sotto l'azione delle risultanti degli sforzi viscosi e di pressione. Si è visto che le risultanti in termini di forza e momento dei moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ legati alle equazioni di vincolo possono essere visti come le risultanti delle azioni del fluido sul corpo. Pertanto, è naturale utilizzare i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ come forzanti nelle equazioni di moto del corpo.

Si ricorda che in questo lavoro il corpo è rigido. Questo evita complicazioni di formulazioni legate al conflitto tra deformazioni elastiche a volume non costante e il vincolo di incomprimibilità sul flusso. Le equazioni di moto in questo caso si scrivono come

$$\begin{cases} m\dot{u}_{Gi} = \int_{B(t)} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{e}_i d\Omega \\ \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} = \int_{B(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \boldsymbol{\lambda} d\Omega, \end{cases} \quad (3.8)$$

dove m e \mathbf{I}_G sono rispettivamente la massa e il tensore dei momenti d'inerzia baricentrici del corpo rigido, \mathbf{x}_G è il vettore posizione del baricentro, u_{Gi} sono le componenti cartesiane di velocità del baricentro mentre con \mathbf{e}_i si indica il versore dell'asse cartesiano in direzione i , con $i = 1, 2$ per il caso 2D e $i = 1, 2, 3$ per il caso 3D.

Osservando come in (3.8) i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ rientrano nelle equazioni della dinamica del corpo rigido, è necessario stabilire come accoppiare tra loro i blocchi per la soluzione del sistema fluidodinamico e del corpo rigido. In questa tesi si è implementato un solutore fluido-struttura tramite un metodo disaccoppiato che risolve prima il sistema fluido e in seguito la struttura, come indicato in Fig.3.2.

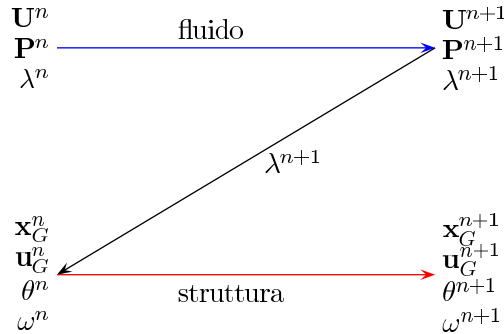


Figura 3.2: Schema di avanzamento temporale del solutore fluido-struttura.

Ad ogni passo temporale sono disponibili le soluzioni del sistema di Navier-Stokes tramite domini fittizi (3.6) e lo stato del corpo rigido (coordinate e velocità del baricentro, angolo di rotazione, velocità angolare). Velocità lineare del baricentro e velocità angolare del corpo rigido vengono combinate per creare il termine noto \mathbf{g}^{n+1} in (3.6), secondo

$$g_i(\mathbf{x}_j) = u_{Gi} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_G) \cdot \mathbf{e}_i, \quad (3.9)$$

dove con l'indice i si indica la i esima componente cartesiana, mentre con \mathbf{x}_j si indica un generico punto materiale sul corpo rigido.

Risolvendo (3.6), ad esempio tramite un solutore iterativo preconditionato come mostrato in precedenza, si ottiene la soluzione per il fluido al passo temporale t^{n+1} ($\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, \boldsymbol{\lambda}^{n+1}$). I moltiplicatori di Lagrange vengono quindi passati alle equazioni della dinamica del corpo rigido (3.8), che vengono risolte tramite un metodo di Newmark¹ usando come condizioni iniziali le soluzioni al passo precedente.

Il metodo di Newmark, per un oscillatore armonico smorzato del tipo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F},$$

si scrive come segue

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \\ \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}], \end{cases} \quad (3.10)$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione, \mathbf{v} è la velocità, \mathbf{d} è lo spostamento, tutti e 3 da ritenersi generalizzati sia per gradi di libertà lineari che angolari. (β, γ) sono i parametri che definiscono il particolare metodo di Newmark, riassunti in Tab.A.1. Notiamo sin d'ora che se $\beta \neq 0$ il metodo è implicito.

A livello implementativo, un possibile schema è quello basato su un passo di predizione e uno di correzione secondo quanto segue:

noti \mathbf{d}_n e \mathbf{v}_n si calcola prima l'accelerazione al passo n da

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_n = \mathbf{F}_n - \mathbf{C}\mathbf{v}_n - \mathbf{K}\mathbf{d}_n.$$

¹Alcune caratteristiche sulla stabilità del metodo di Newmark e alcune combinazioni di (β, γ) sono riportate in Appendice A

Questa accelerazione viene usata nel passo di predizione

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n \\ \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t (1 - \gamma) \mathbf{a}_n. \end{cases} \quad (3.11)$$

Con le predizioni di spostamento e velocità si calcola l'accelerazione al passo $n + 1$ tramite

$$(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{d}}_{n+1},$$

che viene usata nel passo di correzione

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{n+1} = \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \Delta t^2 \beta \mathbf{a}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \Delta t \gamma \mathbf{a}_{n+1}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Una volta ottenuto lo stato del corpo rigido, è possibile aggiornare la posizione di quest'ultimo, riaggiornare la matrice \mathbf{S} e reinizializzare i valori per il nuovo passo temporale.

3.5 Gestione dei contatti

In questa sezione si riporta il metodo utilizzato per gestire i contatti tra più corpi rigidi e/o tra corpo rigido e bordo $\partial\Omega$ del dominio Ω_B . La scelta è stata quella di implementare un campo di forze repulsive che saranno di valori trascurabili in tutto il dominio Ω_B , tranne in prossimità di $\partial\Omega$ (nel caso di contatto con il bordo) o quando 2 o più corpi rigidi siano prossimi alla collisione. Questa soluzione è la stessa presentata in [22] per la simulazione delle collisioni tra le particelle immerse nel fluido.

Si riporta ora lo schema dell'algoritmo di iterazione implementato. Il campo di forze repulsive può essere scelto in maniera arbitraria. Sebbene a rigore si dovrebbero scegliere forze normali alla direzione della parete (nel caso di simulazione di urto tra corpo rigido e parete) e forze allineate alla congiungente i baricentri nel caso di urti tra corpi rigidi liberi di muoversi, nulla vieta scelte differenti. Ad esempio, nel caso di corpi rigidi aventi solo il grado di libertà di rotazione, è possibile introdurre coppie repulsive, come si vedrà più avanti in questa tesi nell'applicazione ad una valvola aortica.

Il sistema di equazioni della dinamica del corpo rigido (3.8) si modifica come segue

$$\begin{cases} m\dot{u}_{Gi} = \int_{B(t)} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{e}_i + F_{rep,i}) d\Omega \\ \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} = \int_{B(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge (\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{F}_{rep}) d\Omega + \mathbf{C}_{rep}, \end{cases} \quad (3.13)$$

dove per la generica forza repulsiva in direzione i $F_{rep,i}$ (e analogamente per le coppie repulsive \mathbf{C}_{rep}) si è scelta una forma del tipo

$$F_{rep,i} = e^{-\frac{dist-c_2}{c_1}}, \quad (3.14)$$

dove $dist$ rappresenta la distanza del corpo dall'ostacolo. Nel caso di una parete, $dist$ è in sostanza la distanza del bordo del corpo dalla parete (oppure la distanza del baricentro cui viene sottratta la dimensione del corpo), mentre nel caso di più corpi rigidi $dist$ è la distanza tra i baricentri cui vengono sottratte le dimensioni dei corpi rigidi in esame (ad esempio i raggi nel caso di corpi cilindrici). Nel caso in cui si stia considerando una coppia repulsiva \mathbf{C}_{rep} , $dist$ rappresenta la differenza tra l'angolo di rotazione θ del corpo e un angolo stabilito a priori. Le costanti c_1 e c_2 sono da scegliere per ottenere le prestazioni desiderate tramite la forza repulsiva. In sostanza, tramite c_1 si controlla il valore dell'azione repulsiva in lontananza dalla parete e/o dal corpo, mentre con c_2 si controlla l'intensità dell'azione repulsiva in prossimità della parete/corpo. Regolando opportunamente il valore di c_2 è possibile simulare il caso di urto elastico (la quantità di moto del corpo risulta essere cambiata di segno dopo l'urto), quindi di fatto un rimbalzo, oppure di urto anelastico in cui il corpo si ferma nel caso di urto con la parete oppure nel caso di 2 corpi rigidi in collisione, questi procedono attaccati dopo l'urto con quantità di moto pari alla somma delle quantità di moto dei 2 corpi prima dell'urto.

Analizzando (3.14), si nota come questa espressione sia funzione della posizione (eventualmente generalizzata alla rotazione nel caso in cui si consideri una coppia repulsiva), che è a sua volta funzione del tempo. Risolvendo (3.13) tramite il metodo di Newmark (3.10), utilizzando la procedura di predizione-correzione descritta in (3.11) e (3.12), ci si scontra quindi con un problema *fortemente non-lineare*. Questo perchè la forza repulsiva è funzione della posizione che è l'incognita che si sta risolvendo con il metodo di Newmark.

Questo problema è stato risolto tramite un metodo iterativo di punto fisso sulla soluzione dello stato del corpo rigido. Ad ogni passo temporale è noto

lo stato del corpo rigido al tempo t^n

$$\mathbf{X}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_G^n \\ \boldsymbol{\theta}^n \\ \mathbf{u}_G^n \\ \boldsymbol{\omega}^n \end{bmatrix}.$$

Le iterazioni funzionano come segue:

1. Integrare tramite Newmark (3.13) a partire da \mathbf{X}^n , ottenendo una prima guess di $\hat{\mathbf{X}}^{n+1}$
2. Calcolare la forza (coppia) repulsiva (3.14) alla posizione $\hat{\mathbf{x}}^{n+1}$ (angolo di rotazione $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{n+1}$ appena calcolata)
3. Integrare tramite Newmark (3.13) a partire da \mathbf{X}^n , inserendo la forza (coppia) repulsiva appena calcolata e ottenendo una seconda guess di \mathbf{X}^{n+1}
4. Valutare la differenza tra le due guess ottenute tramite

$$\text{err} = \frac{\|\mathbf{X}^{n+1} - \hat{\mathbf{X}}^{n+1}\|}{\|\mathbf{X}^{n+1}\|} \quad (3.15)$$

5. Se $\text{err} < \text{toll}$, allora \mathbf{X}^{n+1} è lo stato finale ricercato e non viene eseguita alcuna ulteriore iterazione. Se $\text{err} \geq \text{toll}$ si pone

$$\hat{\mathbf{X}}^{n+1} = \mathbf{X}^{n+1}$$

e si riparte dal punto 2, iterando fino ad ottenere $\text{err} < \text{toll}$.

Come criterio di arresto si è scelta una tolleranza tra 2 iterate successive $\text{toll} = 10^{-12}$, insieme ad un numero massimo di iterazioni $n_{MAXiter}$.

3.6 Implementazione tramite FreeFem++

In questa sezione vengono riportati alcuni dettagli legati all'implementazione del metodo dei domini fittizi tramite FreeFem++. Questo software, sviluppato sotto la supervisione dei professori Olivier Pironneau e Frédéric Hecht al

Jacques-Louis Lions Laboratory² della Pierre and Marie Curie University, è un linguaggio in stile C++ dedicato al metodo degli elementi finiti.

In `FreeFem++` è possibile implementare direttamente le forme variazionali che governano il problema, estraendone le matrici derivanti una volta definiti gli spazi ad elementi finiti. Questa funzionalità risulta particolarmente utile nella definizione delle matrici \mathbf{C} e \mathbf{B} di (3.6). Gli spazi ad elementi finiti utilizzati sono `P1bolla` per la velocità e `P1` per la pressione (spazi già definiti in §2.4) ed entrambi gli spazi sono definiti sulla stessa mesh. Questa coppia di spazi ad elementi finiti permette di soddisfare la condizione *inf-sup*, garantendo quindi di non avere oscillazioni spurie sulla soluzione della pressione.

La chiave per l'implementazione del metodo ai domini fittizi risulta essere la generazione della matrice \mathbf{S} . Utilizzando `FreeFem++`, tale matrice può essere estratta semplicemente con il comando `interpolate`. La sintassi di questo comando è

$$\mathbf{S} = \text{interpolate}(\text{Lh}, \text{Vh})$$

e si ottiene in uscita la matrice di interpolazione lineare dallo spazio ad elementi finiti `Vh` allo spazio ad elementi finiti `Lh`. Qualora i due spazi fossero definiti su mesh diverse, le funzioni di base degli spazi ad elementi finiti vengono estese per continuità all'infuori del dominio di definizione. La matrice \mathbf{S} ha N_L righe e N_V colonne, cioè

$$\mathbf{S} \in R^{N_L \times N_V},$$

dove N_L è la dimensione dello spazio L_h e N_V è la dimensione dello spazio V_h .

A livello pratico, per ottenere la matrice descritta in (3.5), si definirà uno spazio `P1` sulla triangolazione ς_h di $B(t)$, in quanto i gradi di libertà di questo spazio coincidono con i nodi. In questo modo la funzione `interpolate` restituisce la matrice desiderata.

Per poter muovere il corpo $B(t)$ è necessario muovere la sua triangolazione ς_k . Questa operazione è di semplice implementazione tramite `FreeFem++` grazie al comando `movemesh`. La sintassi è la seguente

$$\text{Th} = \text{movemesh}(\text{Th}, [\Phi_1, \Phi_2]),$$

con Φ_i $i = 1, 2$ pari all' i -esima componente cartesiana della funzione di deformazione. $\Phi(\mathbf{x})$ va sempre espressa come

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{s}(\mathbf{x}),$$

con $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ che rappresenta il vettore spostamento dalla prima configurazione alla seconda (eventualmente funzione della posizione \mathbf{x}). Qualora $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, allora il comando `movemesh` restituisce la stessa triangolazione di partenza.

²<http://www.ann.jussieu.fr/>

Infine, per la soluzione del sistema lineare (3.6) si utilizza la routine `LinearGMRES`. Tale routine risolve iterativamente sistemi lineari, permettendo di impostare i criteri d'arresto di tolleranza sul residuo e il numero massimo di iterazioni. La sintassi del comando è la seguente

```
sol = LinearGMRES(A,x,f,precon=M,nbiter=imax,eps=toll),
```

dove \mathbf{A} è la matrice del sistema lineare da risolvere, \mathbf{x} è la guess iniziale della soluzione da cui inizieranno le iterazioni di `LinearGMRES`, \mathbf{f} è il termine noto del sistema lineare, \mathbf{M} è la matrice di preconditionamento, i_{MAX} è il numero massimo di iterazioni e $toll$ è la tolleranza usata come criterio d'arresto sul residuo.

Capitolo 4

Validazione del codice

In questo capitolo vengono presentati alcuni risultati di simulazioni effettuate per la validazione del codice. Per prima cosa si sono testati diverse varianti del preconditionatore del sistema algebrico al fine di scegliere la soluzione ottimale presentata in §3.3. In seguito è effettuata una validazione sui risultati di un flusso attorno ad un cilindro fermo risolto tramite metodo dei domini fittizi, per poter validare il metodo. Infine un'altra validazione è stata effettuata sul solutore di interazione fluido-struttura, ovviamente utilizzando ancora un metodo dei domini fittizi. Tale validazione è stata effettuata simulando il flusso attorno a un cilindro elasticamente supportato e libero di oscillare in direzione trasversale al flusso.

4.1 Analisi del preconditionatore

In questa sezione si presentano le caratteristiche di diversi preconditionatori per il sistema algebrico (3.6) in termini di numero di iterazioni per raggiungere la convergenza e di tempo computazionale. Scopo dell'analisi è quello di operare una scelta ottimale per il preconditionatore, che è risultata essere quella presentata in §3.3.

Il fenomeno analizzato è quello del flusso attorno a un cilindro fisso. Il dominio computazionale è lo stesso utilizzato in [40] e ha dimensioni 2.2×0.41 , all'interno del quale si trova un cilindro di diametro $D = 0.1$. Il centro del cilindro è in mezzzeria del canale e a una distanza dal bordo di inflow di 0.205. In Fig.4.1 sono rappresentate le discretizzazioni del canale e del cilindro.

Il numero di Reynolds basato sul diametro del cilindro è

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} = 100.$$

Le condizioni al contorno sono di velocità nulla sulle pareti del canale, mentre sul bordo di inflow è stato imposto un profilo parabolico di velocità a media unitaria con un profilo a rampa in tempo per $t < 1$

$$u_1 = \frac{y}{h} \left(3 - 1.5 \frac{y}{h} \right) \phi(t), \quad \phi(t) = \begin{cases} t & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

dove h è la metà dell'altezza del canale. Sul bordo di outflow è stata imposta una condizione di sforzo nullo (cioè una condizione di Neumann nulla). Il passo temporale utilizzato è $\Delta t = 10^{-3}s$. Essendo $D = 0.1$ e la velocità media unitaria $U_\infty = 1$, per ottenere $Re = 100$ è necessario scegliere $\nu = 10^{-3}$ come viscosità del fluido.

Le simulazioni sono state effettuate su una griglia strutturata presentata in Fig.4.1. Come si può notare dalla figura, la griglia risulta essere troppo

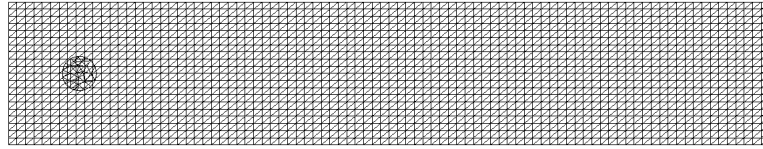


Figura 4.1: Griglia utilizzata per la discretizzazione del problema simulato al fine di scegliere il preconditionatore ottimale.

rada per poter simulare correttamente il flusso. Questo è infatti il caso test del benchmark presentato in [40], in cui vengono testate griglie troppo rade e mostrato come queste portino ad ottenere soluzioni stazionarie errate (la soluzione corretta è quella non-stazionaria con presenza di vortex shedding che verrà presentata più avanti). Tuttavia, essendo per questo momento interessati solo alle prestazioni del preconditionatore e non alla corretta riproduzione del fenomeno fisico, si è ritenuto opportuno optare per questa griglia per poter risparmiare tempo computazionale.

Le caratteristiche della griglia per il problema fluido, che è la triangolazione di Ω_B , sono riassunte in Tab.4.1.

Per la discretizzazione del cilindro, invece, si è scelto di utilizzare $n_3 = 15$ punti sul contorno, ottenendo quanto riassunto in Tab.4.2.

Essendo i moltiplicatori di Lagrange λ_h definiti nei nodi della triangolazione ζ_h di B , ed essendo il problema 2D, il numero dei gradi di libertà risulta semplicemente il doppio del numero dei vertici.

I diversi preconditionatori testati sono i seguenti:

N° Triangoli	3600
N° Vertici	1911
N° DOF (Velocità+Pressione)	11022+1911

Tabella 4.1: Caratteristiche della griglia utilizzata per la discretizzazione del dominio Ω_B .

N° Triangoli	39
N° Vertici	28
N° DOF	56

Tabella 4.2: Caratteristiche della griglia utilizzata per la discretizzazione del dominio B .

1. Fattorizzazione LU inesatta e incompleta della matrice del sistema algebrico (3.6)

$$P = \begin{bmatrix} C \\ B & -\tilde{\Sigma}_p \\ S & & -\tilde{\Sigma}_\lambda \end{bmatrix},$$

dove

$$\Sigma_p \cong \tilde{\Sigma}_p = \left(\nu M_p^{-1} + \frac{3}{2\Delta t} K_p^{-1} \right)^{-1}$$

e

$$\Sigma_\lambda = \tilde{\Sigma}_\lambda \cong (C_\lambda)^{-1},$$

come già presentato in §3.3.

2. Fattorizzazione LU inesatta completa della matrice del sistema algebrico

$$P = \begin{bmatrix} C \\ B & -\tilde{\Sigma}_p \\ S & -SC^{-1}B^T & -\tilde{\Sigma}_\lambda \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{\Sigma}_p$ e $\tilde{\Sigma}_\lambda$ sono le stesse del caso precedente.

3. Fattorizzazione LU inesatta e incompleta della matrice del sistema algebrico

$$P = \begin{bmatrix} C \\ B & -\tilde{\Sigma}_p \\ & & -\tilde{\Sigma}_\lambda \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{\Sigma}_p$ e $\tilde{\Sigma}_\lambda$ sono le stesse dei casi precedenti.

4. Blocchi diagonali della matrice \mathbf{L} derivante dalla fattorizzazione \mathbf{LU} della matrice del sistema algebrico

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & \\ & -\tilde{\Sigma}_p & \\ & & -\tilde{\Sigma}_\lambda \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{\Sigma}_p$ e $\tilde{\Sigma}_\lambda$ sono le stesse dei casi precedenti.

5. Blocchi diagonali della matrice \mathbf{L} derivante dalla fattorizzazione \mathbf{LU} della matrice del sistema algebrico

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & \\ & -\tilde{\Sigma}_p & \\ & & -\hat{\Sigma}_\lambda \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{\Sigma}_p$ è la stessa dei casi precedenti, mentre $\hat{\Sigma}_\lambda$ è la valutazione sulla griglia ς_h del cilindro B di

$$\tilde{\Sigma}_\lambda = \left(\frac{3}{2\Delta t} \mathbf{M}_\lambda + \nu \mathbf{K}_\lambda \right)^{-1}.$$

6. Blocchi diagonali della matrice \mathbf{L} derivante dalla fattorizzazione \mathbf{LU} della matrice del sistema algebrico

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & & \\ & -\tilde{\Sigma}_p & \\ & & -\tilde{\Sigma}_\lambda \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{\Sigma}_p$ è la stessa dei precedenti casi, $\tilde{\Sigma}_\lambda$ è la stessa del caso 5 e $\tilde{\mathbf{C}}$ è la valutazione sulla griglia τ_h del dominio Ω_B

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{M} + \nu \mathbf{K}.$$

7. Fattorizzazione \mathbf{LU} incompleta della matrice del sistema algebrico

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & \\ \mathbf{B} & -\tilde{\Sigma}_p & \\ \mathbf{S} & & -\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{\Sigma}_p$ è la stessa dei casi precedenti.

8. Fattorizzazione \mathbf{LU} incompleta della matrice del sistema algebrico

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & & \\ \mathbf{B} & -\tilde{\Sigma}_p & & \\ \mathbf{S} & & -\tilde{\Sigma}_\lambda & \end{bmatrix},$$

dove $\tilde{\Sigma}_p$ è la stessa dei casi precedenti, mentre $\tilde{\Sigma}_\lambda$ è la stessa dei casi 5 e 6.

L'analisi è stata effettuata mediando su 10 passi temporali a partire dalla soluzione ottenuta a $t = 1.5s$. In questo modo il transitorio iniziale è completo ($t > 1s$) e il fatto che la mesh sia più rada di quanto necessario per simulare il vortex shedding garantisce che la soluzione sia stazionaria.

I risultati dell'analisi sono riportati in Tab.4.3.

Precondizionatore	N° Iterazioni	Tempo Computazionale
1	48	28.156s
2	57	42.859s
3	126	49.5s
4	184	66.188s
5	184	66.984s
6	186	43.578s
7	42	26.297s
8	50	28.36s

Tabella 4.3: Prestazioni dei vari preconditionatori testati. Il numero di iterazioni è ottenuto mediando su 10 passi temporali. La soluzione del problema è stazionaria a causa della scarsa raffinatezza della griglia utilizzata. Il tempo computazionale si riferisce al tempo impiegato per eseguire tutti e 10 i passi temporali.

Come si evince dai risultati, l'utilizzo dei soli blocchi diagonali della matrice \mathbf{L} derivante dalla fattorizzazione \mathbf{LU} della matrice del sistema algebrico (3.6) (casi 4, 5 e 6) ha i risultati peggiori. Il numero di iterazioni di *GMRES* necessario per ottenere la soluzione è eccessivo rispetto agli altri casi. Il tempo computazionale è comparabile per i casi 4 e 5, mentre nel caso 6 è sensibilmente minore. Questo perchè nel caso 6 il blocco di preconditionamento per il problema in velocità è tempo invariante (non c'è la presenza dei termini convettivi) ed è stato quindi salvato in forma fattorizzata una volta per tutte. Questa scelta tuttavia non è applicabile qualora si utilizzassero griglie di discretizzazione più rifinite, in quanto il salvataggio della matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ richiederebbe troppa memoria (la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ è sparsa ma la sua fattorizzazione in generale è piena).

L'aggiunta dei blocchi extra-diagonali arricchisce la rappresentazione della matrice del sistema lineare (3.6) e quindi migliora le prestazioni del preconditionatore. In particolare, particolarmente rilevanti sono i blocchi \mathbf{B} e \mathbf{S} . La loro assenza provoca un netto peggioramento nelle prestazioni (cf. casi 1-3 e 3-4). Il termine $\mathbf{SC}^1\mathbf{B}^T$, invece, provoca addirittura un peggioramento nelle prestazioni (cf. casi 1-2). Questo comportamento è imputabile alla particolare rappresentazione di $\tilde{\Sigma}_\lambda$, in cui si è deciso di trascurare il termine derivante dalla pressione (vedi §3.3).

Infine, il caso 7 (in cui Σ_λ è stato approssimato con la matrice identità) risulta essere l'ottimo. Tuttavia si è preferito utilizzare il preconditionatore 1 in quanto in flussi non stazionari questo ha migliori prestazioni. A conferma di ciò, si è effettuato il calcolo del transitorio iniziale utilizzando i preconditionatori 1 e 7. I risultati in termini di numero di iterazioni necessario per ottenere la soluzione del singolo passo temporale sono riassunti in Tab.4.4.

Precondizionatore	N° Iterazioni
1	59
7	165

Tabella 4.4: Prestazioni dei preconditionatori 1 e 7 per problemi non stazionari. Il numero di iterazioni è ottenuto mediando sul transitorio iniziale ($0s < t < 1s$).

Per quanto appena mostrato, si deduce che il miglior preconditionatore per il sistema algebrico (3.6) derivante dalla modellazione a domini fittizi del problema di Navier-Stokes è quello del caso 1, come già anticipato in §3.3.

A questo punto è stata eseguita una breve analisi di sensibilità del preconditionatore ottimale appena ottenuto alla discretizzazione utilizzata. In particolare, si è analizzata per prima cosa la sensibilità del preconditionatore alla griglia di discretizzazione del cilindro B , utilizzando $n_3 = 10$ e $n_3 = 20$ punti sul contorno ∂B in luogo degli $n_3 = 15$ punti utilizzati in tutte le precedenti simulazioni. In questi casi la griglia di discretizzazione del dominio fittizio Ω_B è rimasta invariata. Per ultimo si è quindi provato a raddoppiare il numero di punti utilizzati per la discretizzazione di ciascun bordo nel caso test per la scelta del preconditionatore ottimale, cioè dimezzando circa la dimensione degli elementi sia della triangolazione del dominio Ω_B che del corpo B ma mantenendo invariato il rapporto tra le loro dimensioni. I risultati di quest'ultima analisi sono riportati in Tab.4.5.

Come si può notare da Tab.4.5, il preconditionatore ottimale è sensibile soprattutto al rapporto tra la dimensione degli elementi utilizzati per discretizzare il corpo rigido B e gli elementi utilizzati per la discretizzazione del dominio fittizio Ω_B . In particolare, incrementando la dimensione degli elementi di

Caso	N° Iterazioni
$n_3 = 10$	35
$n_3 = 20$	63
Raffinamento globale	52

Tabella 4.5: Prestazioni del preconditionatore 1 (ottimale) al variare della discretizzazioni dei domini. n_3 è il numero di punti utilizzati per la discretizzazione del contorno del corpo ∂B . Con raffinamento globale si fa riferimento al raddoppio del numero di punti utilizzati per la discretizzazione di ciascun bordo nel caso test per la scelta del preconditionatore ottimale. Il numero di iterazioni è ottenuto mediando su 10 iterazioni a partire da $t = 1.5s$.

discretizzazione di B rispetto a quelli di Ω_B il numero di iterazioni decresce (in questo caso si sta imponendo un minor numero di equazioni di vincolo). Inoltre, il preconditionatore ottimale non risulta essere particolarmente sensibile a un raffinamento globale di entrambe le griglie di discretizzazione, caratteristica quest'ultima particolarmente desiderabile. Infatti, qualora si rendesse necessario un raffinamento della griglia di discretizzazione per esigenze di accuratezza sulla soluzione del problema, si ha garanzia che le prestazioni del preconditionatore non degradano.

4.2 Flusso attorno ad un cilindro fisso

In questa sezione si presentano i risultati di un flusso a $Re = 100$ attorno ad un cilindro fisso. La simulazione di riferimento utilizzata per la validazione è quella presentata in [40].

Il fenomeno è lo stesso utilizzato per la scelta di un preconditionatore ottimale. Il dominio computazionale è un canale di dimensioni 2.2×0.41 , all'interno del quale si trova un cilindro di diametro $D = 0.1$. Il centro del cilindro è in mezzzeria del canale e ad una distanza dal bordo di inflow di 0.205. Il numero di Reynolds è basato sul diametro del cilindro, quindi

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} = 100.$$

Le condizioni al contorno sono di velocità nulla sulle pareti del canale, mentre sul bordo di inflow è stato imposto un profilo parabolico di velocità a media unitaria con un profilo a rampa in tempo per $t < 1$

$$u_1 = \frac{y}{h} \left(3 - 1.5 \frac{y}{h} \right) \phi(t), \quad \phi(t) = \begin{cases} t & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

dove h è la metà dell'altezza del canale. Sul bordo di outflow è stata imposta una condizione di sforzo nullo (cioè una condizione di Neumann nulla). Essendo $D = 0.1$ e la velocità media unitaria $U_\infty = 1$, per ottenere $Re = 100$ è necessario scegliere $\nu = 10^{-3}$ come viscosità del fluido.

Le simulazioni sono state effettuate con e senza griglia di strato limite attorno al cilindro, inoltre è stata effettuata un'analisi di sensibilità del metodo al passo di discretizzazione temporale Δt e al variare del numero di punti usati nella discretizzazione del cilindro, mantenendo invece sempre fissa la discretizzazione del dominio fluido.

Infine, tutte le simulazioni sono state effettuate utilizzando una discretizzazione in tempo di tipo BDF2 presentata in §2.3.

4.2.1 Simulazioni senza griglia di strato limite

Poichè uno dei vantaggi del metodo dei domini fittizi è quello di poter utilizzare griglie strutturate o in generale più semplici di quelle che sarebbero necessarie con una formulazione classica, ed essendo lo scopo di queste simulazioni quello di validare i risultati ottenuti col metodo dei domini fittizi, sono state effettuate simulazioni senza l'utilizzo di griglie di strato limite.

La simulazione di riferimento per questo caso è stata effettuata sulle griglie presentate in Fig.4.2 e 4.3. Le caratteristiche della griglia per il problema fluido, che è la triangolazione di Ω_B , sono riassunte in Tab.4.6.

N° Triangoli	25594
N° Vertici	12878
N° DOF (Velocità+Pressione)	76944+12878

Tabella 4.6: Caratteristiche della griglia utilizzata per la discretizzazione del dominio Ω_B .

Questi valori rimarranno sempre gli stessi per tutte le simulazioni che verranno presentate, cioè si è risolto il problema utilizzando sempre la stessa griglia per discretizzare Ω_B .

Per la discretizzazione del cilindro, invece, si è scelto di utilizzare $n_3 = 150$ punti sul contorno, ottenendo quanto riassunto in Tab.4.7.

Essendo i moltiplicatori di Lagrange λ_h definiti nei nodi della triangolazione ς_h di B , ed essendo il problema 2D, il numero dei gradi di libertà risulta semplicemente il doppio del numero dei vertici.

L'intervallo di discretizzazione temporale Δt della simulazione di riferimento è $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

I risultati principali di questa simulazione sono riassunti in Tab.4.8.

N° Triangoli	3908
N° Vertici	2030
N° DOF	4060

Tabella 4.7: Caratteristiche della griglia utilizzata per la discretizzazione del dominio B .

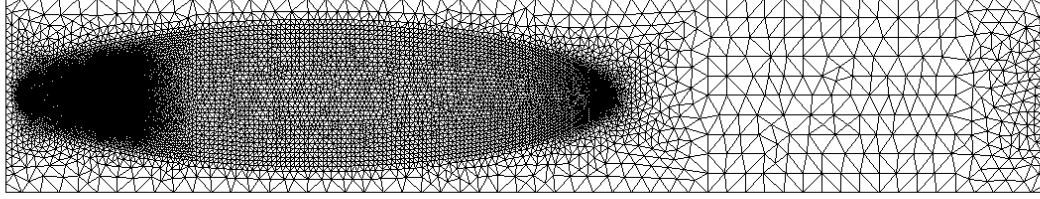


Figura 4.2: Griglia utilizzata per la discretizzazione del dominio Ω_B nella simulazione di riferimento senza griglia di strato limite. Dimensioni del dominio 2.2×0.41

	$C_{D,MAX}$	$C_{L,MAX}$	St
Upper bound	3.2400	1.0100	0.3050
Lower bound	3.2200	0.9900	0.2950
Simulazione	3.3310	1.1110	0.2933

Tabella 4.8: Validazione della simulazione di riferimento. I limite superiori e inferiori per i valori sono tratti da [40].

St è il numero di Strohal, definito come

$$St = \frac{f_s D}{U_\infty},$$

con f_s frequenza di shedding. C_D è il coefficiente di resistenza ed è stato calcolato come segue

$$C_D = \frac{\sum (\boldsymbol{\lambda}_h \cdot \mathbf{e}_1)}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D},$$

mentre C_L è il coefficiente di portanza calcolato come

$$C_L = \frac{\sum (\boldsymbol{\lambda}_h \cdot \mathbf{e}_2)}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D},$$

dove in questo caso $\rho = 1$ e $U_\infty = 1$.

Si fa notare qui che i coefficienti aerodinamici sono stati calcolati come sommatoria dei moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_h$ e non come integrale su B degli

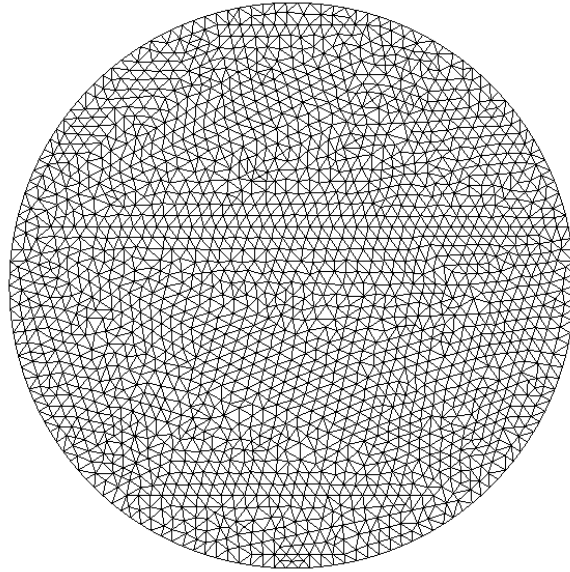


Figura 4.3: Griglia utilizzata per la discretizzazione del cilindro B nella simulazione di riferimento senza griglia di strato limite. Diametro del cilindro $D = 0.1$, numero di punti sul contorno $n_3 = 150$.

stessi perchè si è scelto di utilizzare un metodo di collocazione per la formulazione del metodo dei domini fittizi, come specificato in §3.2. A causa di questa particolare scelta, i moltiplicatori di Lagrange λ_h risultano essere definiti solo nei nodi della triangolazione ς_h di B , e pertanto si ritiene più corretto ottenere i coefficienti aerodinamici come appena mostrato.

In Fig.4.4 e 4.5 sono riportati rispettivamente gli andamenti in funzione del tempo del coefficiente di resistenza C_D e del coefficiente di portanza C_L . Analizzando queste figure si può osservare il caratteristico fenomeno di *vortex shedding*, che era proprio il comportamento che si voleva riprodurre con questa simulazione.

Il vortex shedding è una particolare soluzione periodica della corrente attorno a corpi tozzi. In breve, la scia è inizialmente formata da due vortici simmetrici controrotanti. A causa di instabilità nello strato limite, questa soluzione simmetrica e stazionaria, che si può osservare bene per $t < 3$ eccezion fatta per il transitorio iniziale, degenera in una soluzione asimmetrica e periodica. In questa soluzione vortici controrotanti si staccano periodicamente dal cilindro alternativamente da lati opposti. Questi vortici vengono poi trasportati a valle del cilindro per convezione e man mano vedono ridurre la loro intensità a causa degli effetti viscosi. Una delle problematiche maggiori del vortex shedding è legata all'elevata escursione del coefficiente di portanza C_L ,

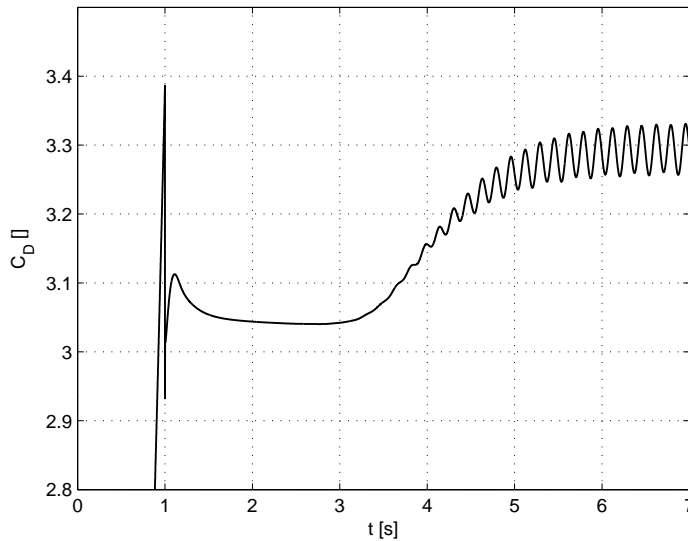


Figura 4.4: Andamento del coefficiente di resistenza C_D in funzione del tempo per la simulazione di riferimento del cilindro fermo senza l'uso di griglie di strato limite.

che può provocare ampie oscillazioni in direzione trasversale al flusso qualora il corpo fosse libero. In aggiunta, la frequenza propria di shedding (che è legata alla dimensione caratteristica del corpo e alla velocità della corrente) può provocare problemi di risonanza in problemi di interazione fluido-struttura. Citiamo, ad esempio, i problemi di risonanza di ponti sospesi, di cui la testimonianza più nota è il crollo del ponte sul canale di Tacoma Narrow negli Stati Uniti il 7 Novembre del 1940.

Infine, riportiamo alcune visualizzazioni della soluzione del flusso ottenuta tramite il metodo dei domini fittizi.

In Fig.4.7 e 4.6 sono riportate rispettivamente le linee di flusso e il campo di pressione. E' evidente che la soluzione del problema è quella di vortex shedding sviluppato (infatti fa riferimento a $t = 7s$), testimoniate in Fig.4.6 dalle zone scure che corrispondono ai vortici di scia che vengono trasportati a valle dalla corrente fluida e in Fig.4.7 dall'andamento sinuoso della scia.

Soffermandosi più attentamente sulla soluzione della pressione, si può notare la regione di sovrappressione in prossimità della prua del cilindro (la cui posizione si evince meglio in Fig.4.7) dovuta al punto di ristagno. Questa regione si estende anche all'interno del cilindro. Infatti, tramite il metodo dei domini fittizi, si è esteso il problema di Navier-Stokes al dominio Ω_B rappresentato in Fig.4.2, come già accennato in precedenza. Le equazioni di vincolo

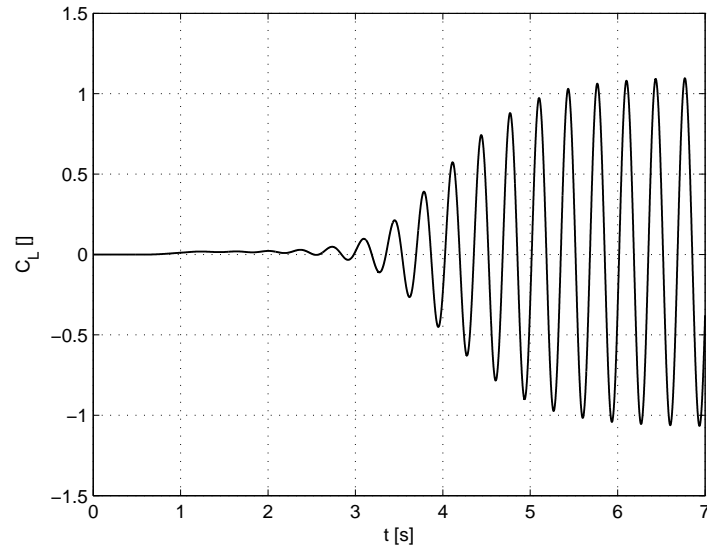


Figura 4.5: Andamento del coefficiente di resistenza C_D in funzione del tempo per la simulazione di riferimento del cilindro fermo senza l'uso di griglie di strato limite

aggiunte interessano solo la velocità. La pressione è continua a livello discreto per la scelta degli spazi a elementi finiti che è stata fatta, quindi la soluzione di pressione nella regione B interna al cilindro risulta essere accoppiata alla soluzione sulla regione esterna Ω dal fatto che la pressione deve uniformarsi internamente al cilindro B ai valori presenti sul contorno ∂B . Questo comportamento è causa di risultati non fisici sui moltiplicatori di Lagrange, come verrà analizzato più avanti in questa sezione.

Soffermandosi maggiormente invece sulle linee di flusso, si nota come sia più chiara la presenza del cilindro rispetto alla soluzione della pressione in Fig.4.6. Questo perchè le equazioni di vincolo sono di velocità nulla imposta



Figura 4.6: Campo di pressione a $t = 7s$. La scala dei valori va dal minimo di $-5.76 \cdot 10^{-5}$ associato al colore blu, passando per un valore di 1.1635 associato al colore verde, arrivando al massimo di 2.327 associato al colore rosso.

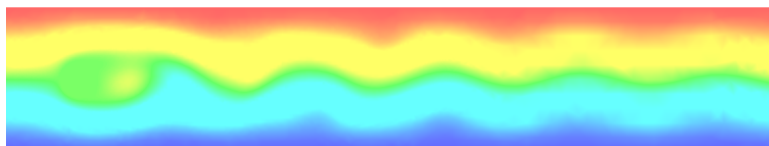


Figura 4.7: Linee di flusso per $t = 7s$.

nella regione del cilindro. Dalla figura si nota inoltre il comportamento tipico del vortex shedding. Al tempo cui la soluzione fa riferimento ($t = 7s$), il vortice in scia al cilindro sta venendo rilasciato dalla zona bassa (soluzione asimmetria) ed ha una rotazione antioraria (ragione del valore negativo di C_L mostrato in Fig.4.5). Questa soluzione si alterna con il caso in cui un vortice rotante in senso orario viene rilasciato in scia dalla regione superiore del cilindro, generando un coefficiente di portanza C_L positivo.

Infine, in Fig.4.8 sono riportati i moltiplicatori di Lagrange sul contorno del cilindro ∂B . Questi equivalgono alla risultante degli sforzi viscosi e di pressione che il fluido esercita sul cilindro. In figura si possono riconoscere chiaramente il punto di ristagno, che si trova nella regione della prua del cilindro (la zona a sinistra in figura) in cui si notano i Moltiplicatori di Lagrange assumere direzioni opposte muovendosi verso poppa a dalla parte superiore o inferiore. Inoltre si nota la presenza di shedding nella soluzione. Infatti, osservando la zona di poppa, è evidente che il punto di distacco della scia (che si manifesta con lo stesso comportamento di inversione nella direzione dei moltiplicatori di Lagrange del punto di ristagno a prua) non è in mezzeria bensì spostato verso il basso. Questo significa, come già anticipato analizzando le linee di flusso, che la soluzione visualizzata in figura fa riferimento al momento in cui in prossimità del cilindro è presente un vortice che si stacca dalla parte inferiore dello stesso e ruota in senso antiorario.

A scopo dimostrativo, si riportano anche i moltiplicatori di Lagrange su tutto il cilindro B in Fig.4.9. Tale soluzione è priva di alcun senso fisico, in quanto all'interno del corpo i moltiplicatori assumono valori non nulli per effetto della pressione. Infatti, imporre la condizione di velocità nulla sul contorno è condizione necessaria e sufficiente a garantire¹ velocità nulla su tutto il cilindro e quindi ad avere moltiplicatori di Lagrange nulli all'interno del cilindro. Tuttavia la pressione crea un accoppiamento tra le soluzioni interna ed ester-

¹Per il secondo corollario al teorema di Gauss, il quale afferma che se una funzione f armonica e regolare nel volume τ è uniforme sul bordo σ del dominio τ , essa assume valore uniforme su tutto il dominio τ .

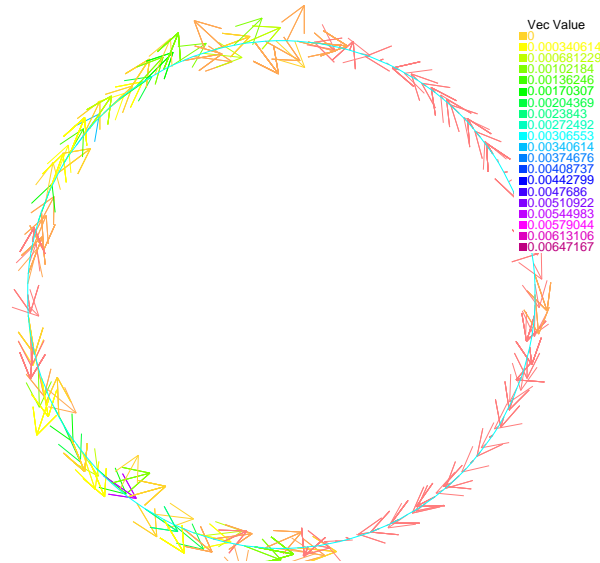


Figura 4.8: Moltiplicatori di Lagrange sul contorno del cilindro per $t = 7s$.

na al dominio, come già anticipato analizzando il campo di pressione, e per questo motivo i moltiplicatori non risultano essere nulli. Peraltro è possibile osservare che l'accoppiamento dovuto alla pressione è maggiore nella regione di prua, dove è presente la sovrappressione dovuta al punto di ristagno, mentre spostandosi a poppa l'accoppiamento è più debole e i valori dei moltiplicatori di Lagrange si riducono.

4.2.2 Analisi di sensibilità al passo temporale

In questa sezione si presentano i risultati delle simulazioni effettuate cambiando il passo temporale Δt . La discretizzazione spaziale utilizzata rimane la stessa presentata in Fig.4.2, 4.3.

I passi temporali testati sono $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}s$, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}s$, oltre a quello già presentato di $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}s$ nella sezione precedente. In Tab.4.9 sono riassunti i principali risultati ottenuti dalle varie simulazioni.

	$\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}s$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}s$	$\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}s$
$C_{D,MAX}$	3.3310	3.3313	3.3426
$C_{L,MAX}$	1.1110	1.1116	1.1324
St	0.2933	0.2935	0.2935

Tabella 4.9: Analisi di sensibilità al passo temporale Δt .

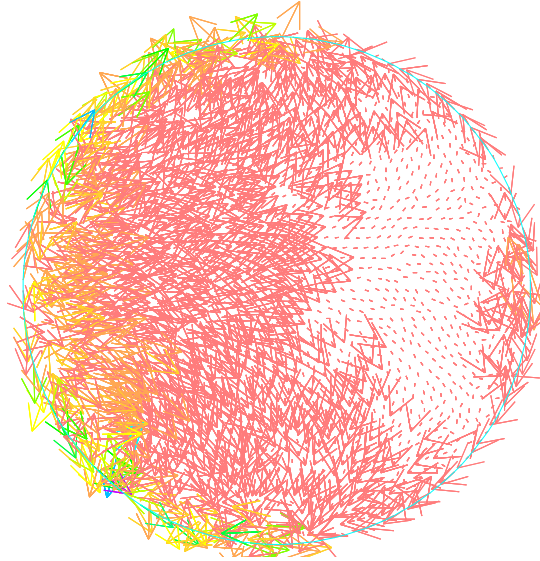


Figura 4.9: Moltiplicatori di Lagrange su tutto il cilindro B a $t = 7s$.

Gli andamenti temporali dei coefficienti aerodinamici, in termini di C_D e C_L , sono poi mostrati in Fig.4.10 e 4.11 rispettivamente.

Come si evince dai risultati riportati in Tab.4.9 e ancor di più dalle figure, i risultati della simulazione con passo temporale $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ sono di fatto a convergenza con i risultati della simulazione di riferimento.

L'effetto del passo temporale Δt è principalmente quello di provocare una sovrastima del coefficiente di portanza C_L , il quale in un problema di vortex shedding è determinato da effetti locali legati alla separazione dello strato limite e alla generazione dei vortici in scia (problema di risoluzione sia spaziale che temporale). Il comportamento ottenuto è in accordo con quanto mostrato in [3] per la soluzione tramite un metodo *non-splitted* con complemento di Schur sulla matrice di pressione. D'altra parte, il metodo utilizzato in questa tesi di formulazione tramite domini fittizi è un metodo monolitico come mostrato in §3.2 (cioè tutte le incognite \mathbf{u} , p , $\boldsymbol{\lambda}$ vengono calcolate risolvendo un unico sistema), quindi analogo al metodo risolvete in [3] in cui invece viene discretizzato semplicemente il solo dominio fluido Ω .

Nonostante non sia stato testato in questa tesi, ci si aspetta che qualora Δt cresca ulteriormente fino a violare le ipotesi del teorema del campionamento², cioè $\Delta t > \frac{1}{2f_s}$ con f_s frequenza di shedding, la soluzione periodica presenti aliasing. Questo si traduce in una frequenza propria del fenomeno più bassa

²Il teorema del campionamento afferma che, dato un segnale periodico di frequenza \tilde{f} , la frequenza minima di campionamento per poter risolvere correttamente il segnale è $f_c = 2\tilde{f}$.

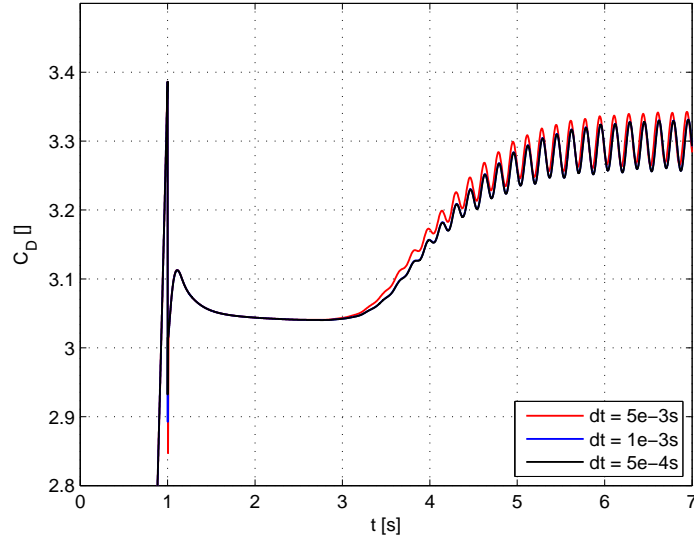


Figura 4.10: Andamento del coefficiente di resistenza C_D in funzione del tempo per diversi passi temporali Δt .

di quella reale, e quindi in un errore sensibile nel Numero di Strohal St . Inoltre, l'aumento del Δt causa l'aumento della dissipazione introdotta dalla matrice di massa \mathbf{M} , per cui si può arrivare al limite che per Δt eccessivi la soluzione del sistema sia quella fisicamente errata di flusso stazionario.

4.2.3 Analisi di sensibilità alla discretizzazione del cilindro

In questa sezione si analizza la sensibilità dei risultati al raffinamento della griglia utilizzata per discretizzare il cilindro.

Come già accennato in precedenza, la griglia utilizzata per la discretizzazione del dominio Ω_B rimane la stessa in tutte le simulazioni, quindi con le caratteristiche presentate in Tab.4.6.

Per la discretizzazione del cilindro B , invece, si sceglie un numero di punti n_3 sul contorno del cilindro che varia da 130 a 170 con passo 20. Il caso $n_3 = 150$ rappresenta la stessa discretizzazione spaziale utilizzata nella simulazione di riferimento. Tuttavia, in luce di quanto mostrato nella sezione precedente, si è scelto $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}s$ come passo temporale in luogo del $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}s$ della simulazione di riferimento per risparmiare in tempo di simulazione. Le caratteristiche delle diverse discretizzazioni del cilindro B sono riassunte in Tab.4.10.

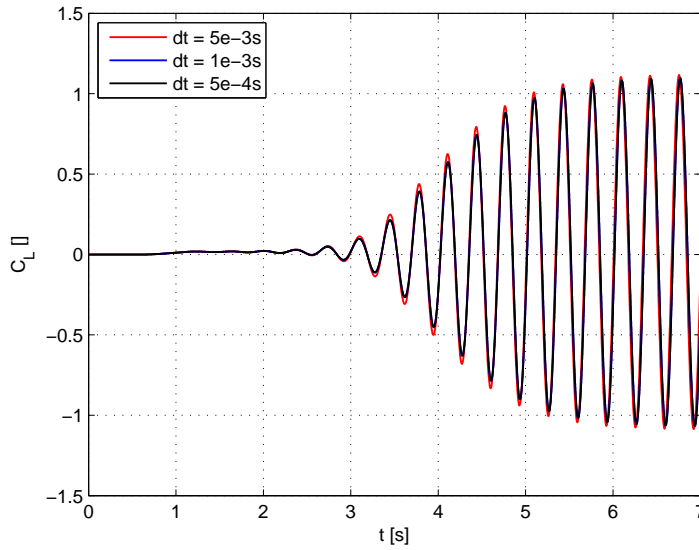


Figura 4.11: Andamento del coefficiente di portanza C_L in funzione del tempo per diversi passi temporali Δt .

	$n_3 = 130$	$n_3 = 150$	$n_3 = 170$
N° Triangoli	2950	3908	5038
N° Vertici	1541	2030	2605
N° DOF	3082	4060	5210

Tabella 4.10: Caratteristiche delle griglie utilizzate per l'analisi di sensibilità della soluzione al raffinamento della discretizzazione del dominio B .

In Tab.4.11 sono riassunti i principali risultati ottenuti dalle varie simulazioni.

	$n_3 = 130$	$n_3 = 150$	$n_3 = 170$
$C_{D,MAX}$	3.3080	3.3313	3.3214
$C_{L,MAX}$	1.0890	1.1116	1.1141
St	0.2935	0.2935	0.2935

Tabella 4.11: Analisi di sensibilità della soluzione alla raffinatezza della discretizzazione del dominio B .

Gli andamenti temporali dei coefficienti aerodinamici, in termini di C_D e C_L , sono poi mostrati in Figg.4.12 e 4.13 rispettivamente.

Come si evince dalle figure, all'aumentare del numero di punti n_3 sul contorno ∂B del cilindro si osserva per prima cosa un'anticipo dell'instaurazione

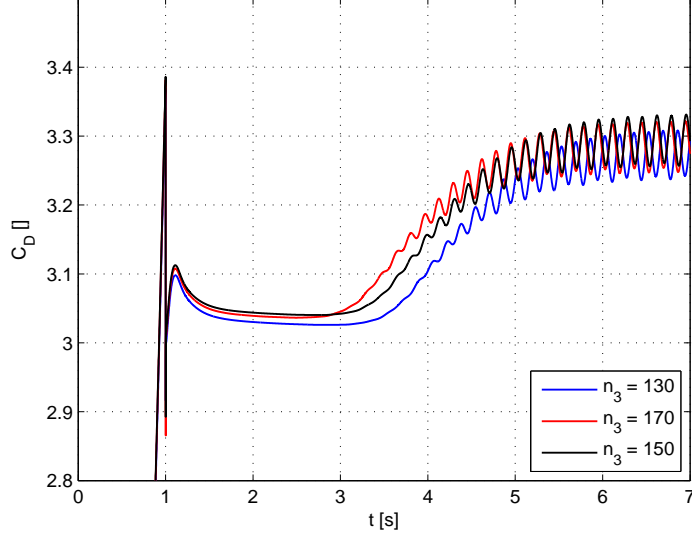


Figura 4.12: Andamento del coefficiente di resistenza C_D in funzione del tempo per diversi numeri di punti n_3 sul contorno ∂B del cilindro.

del fenomeno di vortex shedding. Questo perchè, avendo mantenuto fissa la griglia di discretizzazione di Ω_B su cui è definito il problema di Navier-Stokes, ridurre n_3 significa imporre un numero minore di equazioni di vincolo (il numero di nodi della griglia diminuisce con n_3 come mostrato in Tab.4.10) e quindi si sta imponendo in maniera più debole il vincolo di velocità nulla sul cilindro. In sostanza, questa situazione si traduce in un leggero “spillamento” di fluido nel cilindro (è come se il cilindro fosse poroso) e quindi in un ritardo nell’instaurazione del vortex shedding.

Nel caso $n_3 = 170$, invece, si osserva un sensibile aumento del numero di iterazioni di *GMRES* necessario ad ottenere la convergenza alla soluzione di ogni passo temporale. Questo conferma quanto già anticipato in §3.3 sul peggioramento delle proprietà del preconditionatore all’aumentare del numero di nodi con cui viene discretizzato B , che corrisponde al numero di equazioni di vincolo che vengono introdotte con la formulazione a domini fittizi.

4.2.4 Simulazioni con griglia di strato limite

Poichè i risultati della simulazione senza griglia di strato limite in Tab.4.8 non rientrano nei limiti fissati nel benchmark [40], si è ritenuto opportuno eseguire una simulazione con griglia di strato limite per poter verificare l’effettiva correttezza della formulazione tramite domini fittizi. La griglia di discretiz-

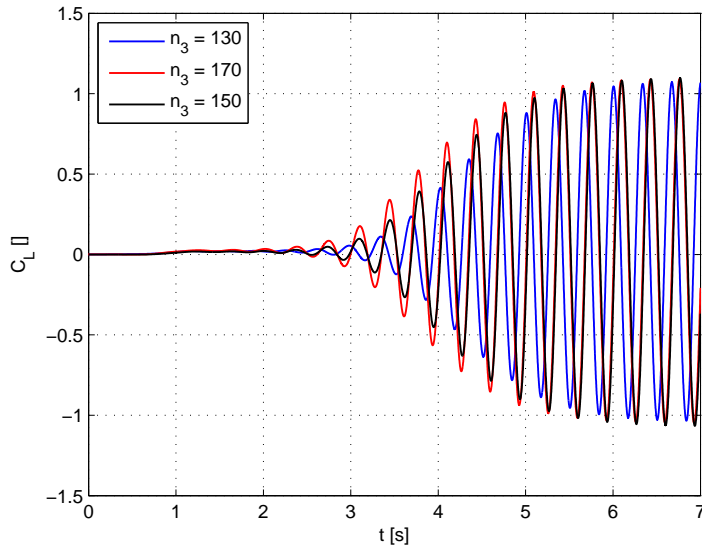


Figura 4.13: Andamento del coefficiente di portanza C_L in funzione del tempo per diversi numeri di punti n_3 sul contorno ∂B del cilindro.

zazione di Ω_B è stata costruita prendendo come esempio quella utilizzata in [3] per eseguire la stessa simulazione. Di fatto l'unica differenza tra il caso presentato in [3] è quello qui presentato è il fatto che il cilindro viene discretizzato conformemente al resto della griglia (nel senso che la discretizzazione del contorno del cilindro è presente nella griglia di discretizzazione di Ω_B). In questo caso la soluzione del problema ottenuta tramite la formulazione a domini fittizi coincide sul dominio Ω alla soluzione ottenuta tramite la soluzione classica del sistema di Navier-Stokes sul solo dominio Ω con l'imposizione forte della condizione $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ su ∂B .

La griglia di strato limite viene introdotta calcolando in maniera approssimata lo spessore dello strato limite stesso. Si è scelto di approssimare il cilindro con una lastra piana e di fare riferimento ad una coordinata curvilinea corrispondente a un angolo di $\pi/2$ rispetto alla direzione del flusso asintotico. Lo spessore di strato limite su lastra piana risulta essere proporzionale a

$$\delta = \frac{x}{\sqrt{Re_x}},$$

dove in questo caso è

$$x = R \frac{\pi}{2}$$

con R raggio del cilindro.

Lo spessore di strato limite è stato quindi diviso in 3 intervalli aventi ampiezza crescente secondo un profilo parabolico

$$h_i = \delta (it)^2 \quad t = \frac{1}{3} \quad i = 1, 2, 3.$$

Con i parametri del problema in esame di $R = 0.05$, $\nu = 10^{-3}$, risulta essere

$$h_1 = 0.001 \quad h_2 = 0.0039 \quad h_3 = 0.0089.$$

In Fig.4.14 è riportata la mesh utilizzata per la simulazione, insieme ad un ingrandimento nella regione del cilindro per mostrare la griglia di strato limite.

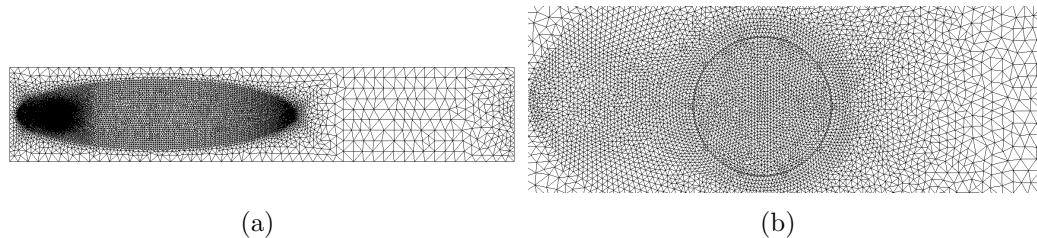


Figura 4.14: Griglia di discretizzazione del dominio Ω_B per la simulazione con griglia di strato limite. (a) Griglia intera. (b) Ingrandimento in prossimità del cilindro.

Le caratteristiche della griglia mostrata in Fig.4.14 sono riassunte in Tab.4.12.

N° Triangoli	21308
N° Vertici	10725
N° DOF (Velocità+Pressione)	64066+10725

Tabella 4.12: Caratteristiche della griglia per la simulazione con griglia di strato limite.

Si può immediatamente osservare da Tab.4.12 che il numero di gradi di libertà utilizzato nella simulazione con griglia di strato limite è minore del numero di gradi di libertà utilizzato nella simulazione senza griglia di strato limite. Questo è dovuto al fatto che il numero di punti utilizzato per la discretizzazione del contorno $\partial\Omega$ nel caso di griglia di strato limite è lo stesso utilizzato in [3], ed è minore rispetto a quello utilizzato nella simulazione senza griglia di strato limite, risultando in un minor numero di gradi di libertà

di velocità e pressione nonostante l'infittimento derivante dall'utilizzo della griglia di strato limite. Questa scelta è stata effettuata per avere dei risultati il più possibili confrontabili con le soluzioni in [3] e quindi verificare l'equivalenza tra una formulazione a domini fittizi ed una tradizionale.

Per la griglia di discretizzazione del cilindro B , si è scelto di usare $n_3 = 130$ punti sul contorno ∂B del cilindro stesso. Questo perchè la stessa discretizzazione è stata utilizzata nella griglia in Fig.4.14 per la costruzione della griglia di strato limite. Le caratteristiche di questa griglia sono mostrate in Tab.4.13.

N° Triangoli	2950
N° Vertici	1541
N° DOF	3082

Tabella 4.13: Caratteristiche della griglia di discretizzazione del cilindro B per la simulazione con griglia di strato limite.

Il passo temporale utilizzato è $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} s$ per le ragioni già mostrate in precedenza.

Le simulazioni eseguite su queste griglie hanno avuto risultati migliori rispetto a quelli ottenuti sulle griglie mostrate in precedenza. In Tab.4.14 sono riassunti i principali risultati in paragone con i valori del benchmark [40] e con i valori ottenuti senza l'uso di griglia di strato limite, mentre in Figg.4.15 e 4.16 sono mostrati gli andamenti temporali dei coefficienti aerodinamici in paragone con i risultati ottenuti per le simulazioni senza griglie di strato limite.

	$C_{D,MAX}$	$C_{L,MAX}$	St
Upper bound	3.2400	1.0100	0.3050
Lower bound	3.2200	0.9900	0.2950
Simulazione con griglia di strato limite	3.2527	0.9999	0.2965
Simulazione senza griglia di strato limite	3.3080	1.0890	0.2935

Tabella 4.14: Risultati delle simulazioni con e senza griglia di strato limite con passo temporale $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} s$. I limite superiori e inferiori per i valori sono tratti da [40].

Come si evince sia dalla tabella che dalle figure, l'utilizzo di una griglia di strato limite risulta assolutamente necessario per la simulazione del vortex shedding in scia ad un cilindro. Questo perchè, come già accennato in precedenza, il vortex shedding ha origine a causa di instabilità proprio nello strato

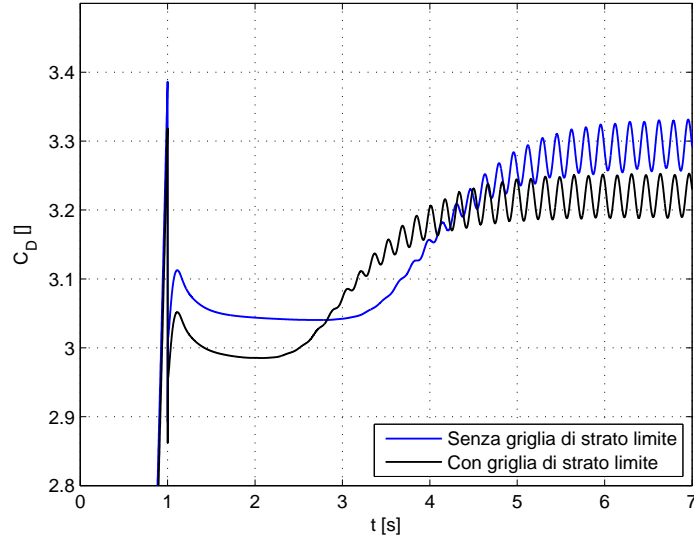


Figura 4.15: Andamento temporale del coefficiente di resistenza C_D per le simulazioni con e senza griglia di strato limite utilizzando un passo temporale $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} s$

limite. Per questo motivo risulta importante essere in grado di risolvere con buona accuratezza la soluzione in questa regione.

Una possibile soluzione di compromesso a questo problema (e più in generale a tutti i problemi governati da fenomeni locali che avvengono nello strato limite) potrebbe essere quello di introdurre una griglia di strato limite da far muovere solidalmente al corpo rigido $B(t)$, utilizzando la strategia di ‘fusione’ tra metodo dei domini fittizi e metodi Chimera già accennata in §1.3.

Inoltre, è possibile osservare come il coefficiente di resistenza $C_{D,MAX}$ sia ancora fuori dai limiti posti da [40], cosa che invece non accade per il coefficiente di portanza $C_{L,MAX}$. Questo comportamento è da imputarsi principalmente al fatto che, per la corrente analizzata (vortex shedding in scia al cilindro), il coefficiente di portanza C_L è determinato da effetti locali che prendono luogo all’interno dello strato limite (instabilità, punto di distacco del vortice, etc...), mentre il coefficiente di resistenza C_D è determinato anche dalla discretizzazione dell’intera scia a valle del cilindro. In sostanza, qualora la discretizzazione a valle del cilindro fosse troppo rada, la soluzione risulterebbe eccessivamente diffusiva risultando in un maggiore valore del coefficiente di resistenza. Si ritiene, anche in luce della griglia presentata in Fig.4.14 e del numero di vertici utilizzato per la definizione del benchmark in [40], che in questo caso il problema di un eccessivo valore di $C_{D,MAX}$ sia proprio da imputare a questo

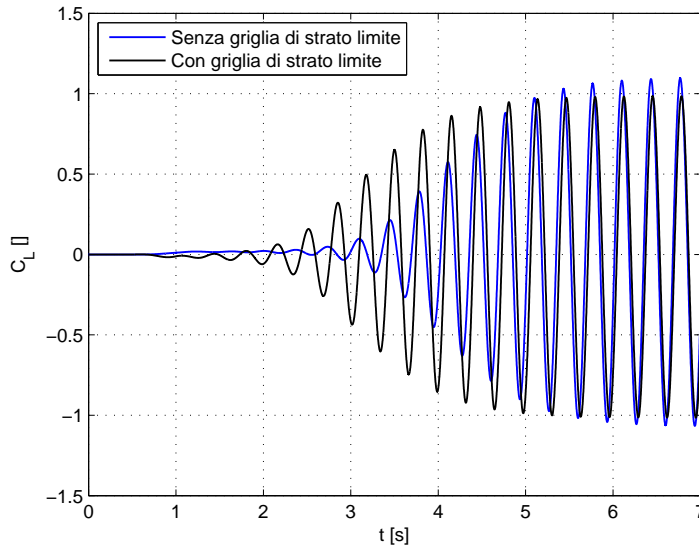


Figura 4.16: Andamento temporale del coefficiente di resistenza C_L per le simulazioni con e senza griglia di strato limite utilizzando un passo temporale $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}s$

problema.

A puro titolo dimostrativo, si riportano in Fig.4.17 le soluzioni per $t = 7s$ ottenute dalla simulazione con utilizzo di griglia di strato limite in termini di campo di pressione, moltiplicatori di Lagrange sul contorno e linee di corrente. Le stesse osservazioni fatte in precedenza per le soluzioni della simulazione di riferimento senza l'utilizzo di griglia di strato limite posso essere fatte anche a questi risultati.

4.3 Flusso attorno ad un cilindro elasticamente sospeso

In questa sezione si presentano i risultati della simulazione di un flusso a $Re = 100$ attorno ad un cilindro elasticamente sospeso, libero di oscillare in direzione trasversale al flusso sotto l'effetto della portanza (è stata invece del tutto trascurata nel modello la forza gravitazionale).

Scopo di questa simulazione è quello di validare il solutore dell'accoppiamento fluido-struttura, mostrando come questo sia in grado di predire correttamente il fenomeno del *lock-in*. Tale fenomeno consiste in una situazione di risonanza della risposta del cilindro alle forze aerodinamiche. L'oscillazio-

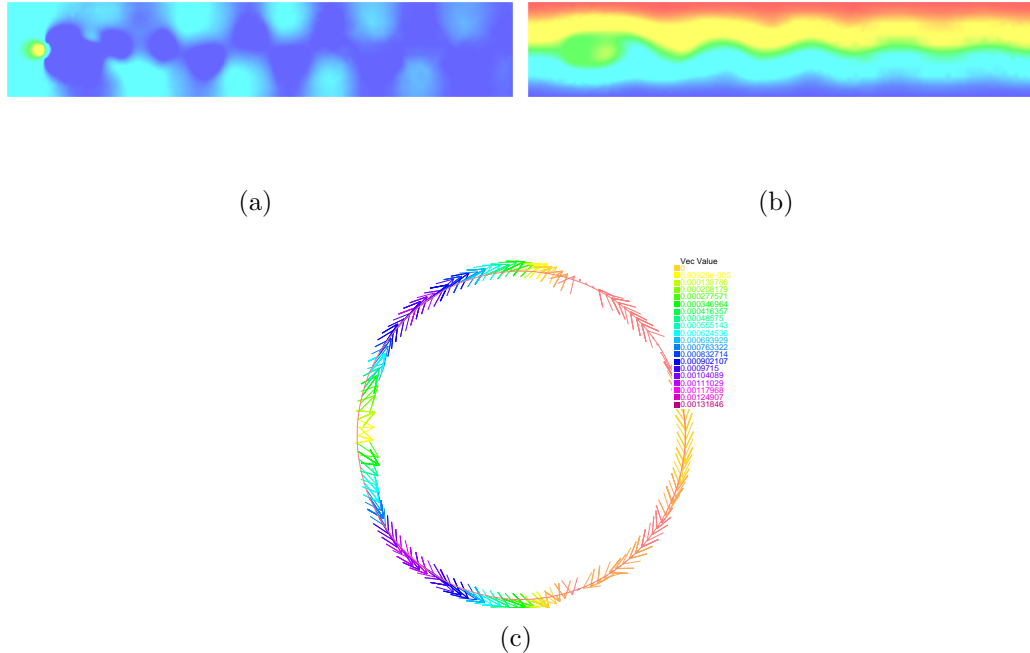


Figura 4.17: Soluzioni per $t = 7s$ ottenute con uso di griglia di strato limite e $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}s$. (a)-Campo di pressione all'interno del canale. La scala dei valori va dal minimo di $-1.8501 \cdot 10^{-4}$ associato al colore blu, passando per il valore di 1.1660 associato al colore verde fino ad arrivare al massimo di 2.3322 associato al colore rosso. (b)-Linee di flusso della corrente. (c)-Moltiplicatori di Lagrange sul contorno ∂B del cilindro, che equivalgono agli sforzi viscosi e di pressione esercitati dal fluido sul cilindro.

ne del cilindro e il vortex shedding avvengono alla stessa frequenza, che è in generale diversa sia dalla frequenza di shedding a cilindro fermo che dalla frequenza di oscillazione del cilindro nel vuoto.

Il dominio computazionale è un canale di dimensioni 3×1 , in cui si trova un cilindro di diametro $D = 0.1$. Il centro del cilindro in condizioni di riposo è in mezzera del canale e a una distanza dal bordo di inflow pari a 0.4. Il numero di Reynolds è basato sul diametro del cilindro, quindi

$$Re = \frac{U_{\infty} D}{\nu} = 100.$$

Le condizioni al contorno sono di velocità nulla sulle pareti del canale, mentre sul bordo di inflow è stato imposto un profilo parabolico di velocità a media

unitaria con un profilo a rampa in tempo per $t < 1$

$$u_1 = \frac{y}{h} \left(3 - 1.5 \frac{y}{h} \right) \phi(t), \quad \phi(t) = \begin{cases} t & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

dove h è la metà dell'altezza del canale. Sul bordo di outflow è stata imposta una condizione di sforzo nullo (cioè una condizione di Neumann nulla). Essendo $D = 0.1$ e la velocità media unitaria $U_\infty = 1$, per ottenere $Re = 100$ è necessario scegliere $\nu = 10^{-3}$ come viscosità del fluido.

Le simulazioni sono effettuate utilizzando lo schema di discretizzazione in tempo BDF2 con un passo temporale $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} s$, per le ragioni già mostrate nella sezione precedente.

Il cilindro è sospeso elasticamente ed il sistema meccanico ha una frequenza propria f_n valutata nel vuoto pari a

$$f_n = 0.837 f_s,$$

con f_s frequenza di shedding del flusso a cilindro fermo.

L'equazione della dinamica del cilindro si scrive come

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - 0.51) = \frac{L}{m},$$

dove ζ è lo smorzamento del sistema meccanico ed è stato posto pari a $8 \cdot 10^{-3}$, $\omega_n = 2\pi f_n$ è la pulsazione naturale, L è la componente trasversale al flusso delle forze aerodinamiche sul cilindro e m è la massa del cilindro pari a

$$m = \rho\pi \frac{D^2}{4},$$

con ρ densità del cilindro. Tale densità è stata scelta 20 volte superiore a quella del fluido.

La griglia di discretizzazione del canale non contiene griglie di strato limite ed è riportata in Fig.4.18, mentre le sue caratteristiche sono riassunte in Tab.4.15.

N° Triangoli	37644
N° Vertici	18903
N° DOF (Velocità+Pressione)	113094+18903

Tabella 4.15: Caratteristiche della griglia utilizzata per la discretizzazione del dominio Ω_B .

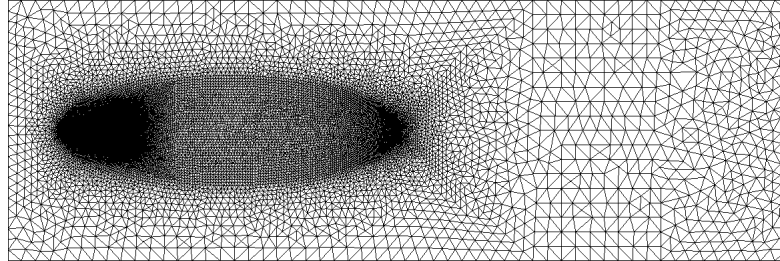


Figura 4.18: Griglia di discretizzazione del dominio Ω_B per la simulazione del flusso attorno a un cilindro elasticamente sospeso. Dimensioni del dominio 3×1 .

N° Triangoli	2562
N° Vertici	1342
N° DOF	2684

Tabella 4.16: Caratteristiche della griglia utilizzata per la discretizzazione del cilindro $B(t)$.

Per la discretizzazione del cilindro invece sono stati scelti $n_3 = 130$ punti sul contorno ∂B , ottenendo quanto riassunto in Tab.4.16.

Come prima cosa si è effettuata una simulazione del flusso attorno al cilindro fermo, in maniera del tutto analoga a quanto mostrato nella sezione precedente. Questo perchè si è voluto far sviluppare completamente il fenomeno del vortex shedding a cilindro fisso, di modo da poter analizzare l'influenza su di esso del moto del cilindro. I risultati, in termini di C_D e C_L , per lo sviluppo completo del vortex shedding sono riportati in Fig.4.19.

Come si può notare, l'assenza di griglie di strato limite comporta una sovrastima dei coefficienti aerodinamici, coerentemente con quanto mostrato nella sezione precedente. Tuttavia, volendo sfruttare le potenzialità del metodo dei domini fittizi, cioè di evitare il bisogno di rigenerazione della griglia per problemi dinamici di accoppiamento fluido-struttura, non si è ritenuto opportuno utilizzare tali griglie di strato limite.

La frequenza di shedding a cilindro fermo è $f_s = 2.9354Hz$, cui corrisponde un numero di Strohual $St = 0.2935$. Conseguentemente, la frequenza propria del cilindro a fluido fermo è pari a $f_n = 2.4569Hz$.

Una volta sviluppato completamente il vortex shedding, si è rilasciato il

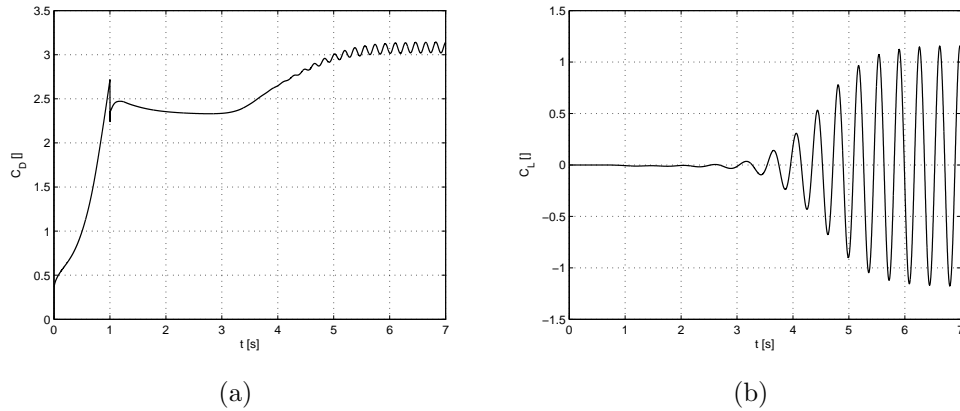


Figura 4.19: Coefficienti aerodinamici in funzione del tempo durante il transitorio di sviluppo completo del vortex shedding. (a)- Coefficiente di resistenza C_D . (b)- Coefficiente di portanza C_L

cilindro da una situazione di quiete

$$\begin{cases} y_0 = 0.5 \\ \dot{y}_0 = 0 \end{cases}$$

nel momento in cui $C_L = 0$.

In Fig.4.20 sono riportati gli andamenti in tempo dei coefficienti aerodinamici di resistenza (C_D) e portanza (C_L), mentre in Fig.4.21 sono riportati gli andamenti in tempo dello spostamento ($y - h$) e della velocità \dot{y} del baricentro del cilindro.

Dall'analisi delle figure 4.20 e 4.21 non si può concludere se si sia raggiunta la situazione del lock-in, sebbene si sia ottenuta una frequenza di oscillazione pari a quella di shedding

$$f_{oscillazione} = 2.7325 Hz,$$

che è un valore intermedio alle singole frequenze di shedding a cilindro fermo f_s e di oscillazione del cilindro a fluido fermo f_n . Tuttavia, la presenza di oscillazioni di ampiezza non stazionaria (come si può notare in Fig.4.21) potrebbe essere causata dalla sovrapposizione tra il moto libero del cilindro (con frequenza f_n) e il moto forzato (con frequenza f_s).

Nonostante ciò, i risultati ottenuti presentano i grandi spostamenti tipici della risonanza di sistemi oscillanti, situazione che in parecchie applicazioni pratiche è pericolosa. Si pensi, ad esempio, ai tiranti di ponti sospesi esposti

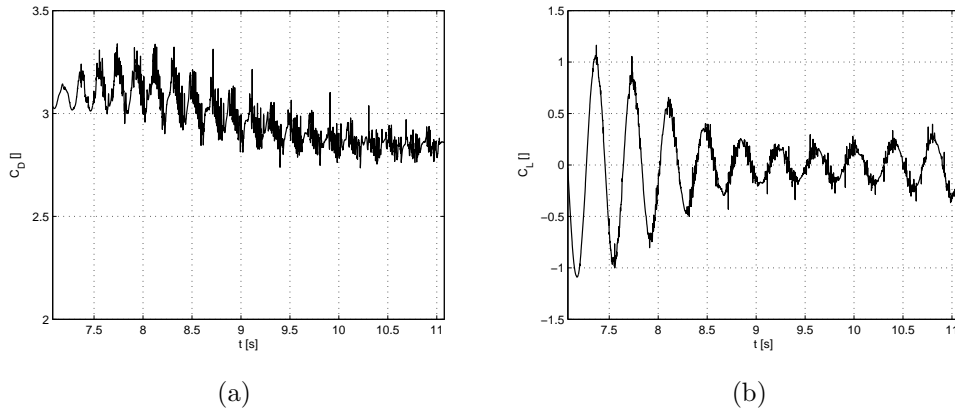


Figura 4.20: Coefficienti aerodinamici in funzione del tempo dopo che il cilindro è stato rilasciato dalla quiete. (a)- Coefficiente di resistenza C_D . (b)- Coefficiente di portanza C_L

al vento, oppure in applicazioni più aeronautiche a protuberanze della fusoliera come le antenne. La progettazione della rigidità di questi dispositivi va sempre eseguita valutando gli effetti del vortex shedding in maniera tale da prevenire il fenomeno di lock-in e più in generale oscillazioni di grande ampiezza.

Analizzando con più attenzione la Fig.4.20, si notano immediatamente le oscillazioni spurie presenti sulle soluzioni. Queste oscillazioni sono da imputarsi ad oscillazioni dei valori dei moltiplicatori di Lagrange λ . L'accoppiamento fluido-struttura presentato in §3.4 è esplicito e pertanto pone limitazioni sul Δt . Tuttavia le oscillazioni spurie non sono divergenti, segno questo che il passo temporale Δt scelto è sufficiente a garantire la stabilità del metodo. Inoltre sono da escludere problemi di stabilità legati al numero di Peclet. Infatti, sebbene in questa simulazione non sia stato implementato il metodo di stabilizzazione interior-penalty presentato in §2.4, la velocità del cilindro è molto minore di quella del flusso per avere effetti rilevanti. Ciò è confermato dall'analisi del campo di velocità, che non presenta oscillazioni spurie. Si ritiene pertanto che le oscillazioni siano dovute semplicemente ai valori che i moltiplicatori di Lagrange λ assumo all'interno del cilindro $B(t)$. Come già affermato nella sezione precedente, la pressione crea un accoppiamento tra i campi di moto all'esterno e all'interno del cilindro, ragione per cui i moltiplicatori di Lagrange hanno valori non nulli internamente al cilindro. Questi valori sono la causa delle oscillazioni nei coefficienti aerodinamici che si osservano in figura.

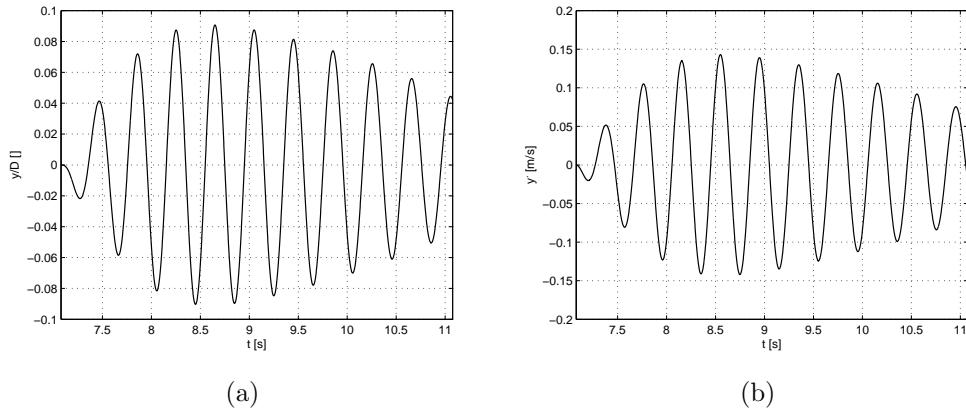


Figura 4.21: Spostamento e velocità del cilindro in funzione del tempo dopo che il cilindro è stato rilasciato dalla quiete. (a)- Spostamento dalla posizione di equilibrio adimensionalizzato rispetto al diametro del cilindro $(y - h)/D$. (b)- Velocità di oscillazione \dot{y} .

Infine, confrontando i risultati ottenuti con quelli in [3], si osserva come anche in questo caso il coefficiente di portanza C_L si riduca a un valore di circa $1/3$ rispetto a quello riferito al cilindro fermo quando il cilindro oscilla.

Capitolo 5

La valvola aortica artificiale

In questo capitolo si analizza in maniera dettagliata il problema di una valvola aortica artificiale. In particolar modo, maggiore attenzione verrà riposta alla valvola meccanica, che è oggetto finale di questa tesi.

In primo luogo sono individuate le principali caratteristiche dei flussi sanguigni in prossimità di una valvola e le problematiche tipiche legate alle valvole aortiche artificiali (trombosi, rottura, riflusso, ...), in modo da introdurre in maniera esaustiva il problema fluidodinamico analizzato. Secondariamente, invece, vengono presentati i risultati di alcune simulazioni numeriche effettuate risolvendo il problema di interazione fluido-struttura con una formulazione a domini fittizi.

5.1 Caratteristiche del flusso sanguigno attorno a una valvola aortica artificiale e problematiche ad esso legate

In questa sezione vengono presentate le caratteristiche tipiche del flusso sanguigno attorno ad una valvola cardiaca artificiale. In particolar modo, vengono sottolineati i problemi clinici che derivano da queste peculiarità del flusso. Particolare attenzione viene data anche a come le tecniche di analisi numerica ad oggi disponibili possano essere impiegate per prevedere ed eventualmente prevenire i problemi clinici, unitamente agli sviluppi futuri necessari per ottenere risultati più accurati. Per questa ragione la sperimentazione *in vitro* continua a ricoprire un importante ruolo di guida e di validazione per le tecniche numeriche.

Per oltre 50 anni valvole cardiache soggette a patologie sono state rimpiazzate con valvole artificiali che vengono trapiantate nel paziente. Gli svariati

tipi di valvole artificiali esistenti possono essere sostanzialmente classificati in due grandi gruppi:

- Le valvole artificiali meccaniche, in cui un dispositivo meccanico viene utilizzato per riprodurre le funzioni della valvola cardiaca che è stata sostituita. Ad oggi la valvola meccanica più utilizzata è quella a doppia lamella. Sebbene queste ultime abbiano prestazioni nettamente migliori delle valvole meccaniche di prima generazione in termini di miglior flusso sanguigno, di minore caduta di pressione e di maggiori aree degli orifizi, queste continuano a soffrire di problemi legati alla deposizione di trombi su di esse. Per questa ragione, i pazienti che hanno subito un impianto di questo tipo di valvole devono spesso subire trattamenti di anticoagulanti che si protraggono a lungo nel tempo.
- Le valvole cardiache biologiche. Queste valvole sono valvole biologiche di derivazione animale (solitamente suina) che vengono impiantate al posto della valvola affetta da patologia. Queste valvole, contrariamente a quelle meccaniche, non sono causa dei problemi di trombosi, bensì accusano un deterioramento delle proprietà strutturali della valvola stessa. Questo riduce il loro tempo di vita a una media di 10-12 anni, dopo i quali si rende necessario una sostituzione della valvola cardiaca.

Riportiamo in Fig.5.1 l'evoluzione della geometria delle valvole meccaniche. Si parte dalle primissime valvole cosiddette *caged ball*, il cui primo impianto è datato 1952 e che restarono in uso fino alla metà degli anni '60. In queste valvole il flusso è regolato da una sfera che occlude l'aorta e il cui movimento è limitato da una gabbia metallica (da cui il nome *caged ball*). Intorno alla metà degli anni '60 si passa quindi alle valvole a disco rotante, nate come evoluzione delle valvole *caged ball* in grado di imitare più fedelmente il flusso naturale del sangue in una valvola cardiaca umana. In queste valvole il flusso è regolato da un disco rotante appunto, il cui movimento è dettato da una struttura metallica (che sostanzialmente detta la posizione di chiusura). Infine si arriva alle odierne valvole a doppia lamella, costituite da due sottili membrane a forma di semicerchio incernierate in prossimità della mezzeria dell'aorta. Le due lamelle sono libere di ruotare, raggiungendo un angolo di apertura tale da essere quasi parallele all'asse del vaso arterioso quando completamente aperte.

Le caratteristiche del flusso sanguigno in prossimità di una valvola cardiaca sono particolari e necessitano di un'adeguata attenzione nel progetto di una valvola artificiale. Per prima cosa, tipicità del flusso sanguigno in prossimità di una valvola è la natura pulsante. La velocità del sangue nell'aorta raggiunge

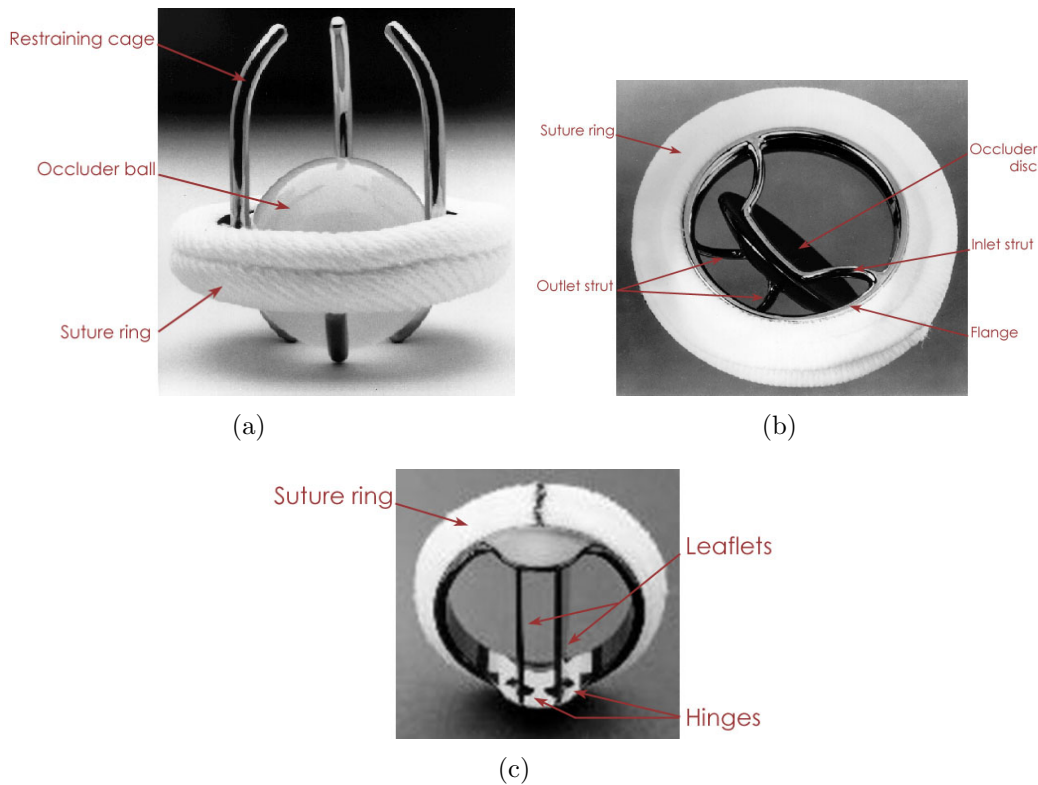


Figura 5.1: Evoluzione delle valvole cardiache. *a*- Valvola cardiaca del tipo caged ball (anni '50-'60). *b*- Valvola cardiaca a disco rotante (dalla metà degli anni '60). *c*- Valvola cardiaca a doppia lamella (primo impianto nel '79).

valori di 1.35m/s durante il picco sistolico e il Numero di Reynolds

$$Re = \frac{U_{\infty} D}{\nu}$$

basato sul diametro D dell'aorta e sulla viscosità ν del sangue assume valori da 0 (nessun flusso a valvola chiusa) a 7000 (durante il picco sistolico), come riportato in [17]. Ciò significa che il flusso sanguigno subisce periodicamente una transizione da regime laminare a turbolento, seguita da una successiva rilaminarizzazione quando la valvola si richiude e il numero di Reynolds cala di conseguenza. Lo stesso flusso laminare, tuttavia, risulta attraversare una situazione di confine in cui una o più frequenze (modi) sono eccitati sebbene il flusso non manifesti turbolenza completamente sviluppata. Inoltre, il flusso attraverso una valvola a doppia lamella presenta un tipico profilo a triplo getto, in cui sono evidenti asimmetrie soprattutto allontanandosi a valle della valvola.

Limitando l'attenzione alle valvole meccaniche, si è accennato al rischio di trombosi nei pazienti che ne subiscono un trapianto. In [26] è stato mostrato come, in pazienti cui erano state impiantate valvole meccaniche di prima generazione, la vita media delle piastrine fosse dimezzata rispetto a quella di un individuo sano. Le cause di questo dimezzamento possono essere attribuite principalmente a 2 fenomeni:

- La collisione delle piastrine contro la struttura della valvola che è causa di traumi meccanici diretti
- Gli elevati sforzi viscosi derivanti dal flusso sanguigno attorno alla valvola.

Gli stessi sforzi viscosi possono portare al danneggiamento e/o alla distruzione dei globuli rossi e del tessuto endoteliale che riveste i vasi sanguigni. Sotto l'azione di elevati sforzi viscosi, le cellule endoteliali vengono strappate dal loro sottostrato biologico e l'esposizione delle proteine extra-cellulari che ne consegue può portare ad adesione, attivazione e aggregazione delle piastrine.

E' quindi evidente che, per simulare numericamente in maniera corretta il flusso sanguigno attorno ad una valvola meccanica, è necessario uno strumento particolare e particolarmente sofisticato. Questo deve essere in grado di gestire correttamente i fenomeni di transizione descritti in precedenza in presenza di domini 3D mobili. Secondo [17], ad oggi non esistono metodi numerici che hanno dimostrato in maniera convincente di poter simulare la successione di transizione da laminare a turbolento e la conseguente rilaminarizzazione del flusso (neanche per casi stazionari) ai numeri di Reynolds tipici del problema in esame.

Per questo motivo si accettano spesso soluzioni di compromesso a seconda dello scopo del lavoro che si sta affrontando. Ad esempio, sono state effettuate simulazioni 2D del flusso turbolento in [38] (simulazione stazionaria con l'utilizzo di un modello $k-\epsilon$) e in [5] (simulazione di un flusso turbolento pulsante attorno ad una valvola meccanica a doppia lamella utilizzando un modello $k-\omega$). Tuttavia la complessità della geometria di una valvola cardiaca e la non simmetria del flusso suggeriscono che migliori risultati sono ottenuti simulando il flusso 3D, come effettuato in [17], dove si voleva predire in maniera accurata il flusso turbolento 3D e per questo ci si è dovuti accontentare di una simulazione a valvola ferma alla massima apertura. Il flusso turbolento è stato però investigato tramite l'uso di statistiche non stazionarie e utilizzando 2 differenti metodi:

- le equazioni mediate di Reynolds non stazionarie (*URANS*)

- detached-eddy simulation (*DES*), un approccio ibrido presentato in [36] che si comporta sostanzialmente come le URANS in prossimità di pareti/ostacoli solidi, mentre lontano da essi si converte in un metodo LES.

Dal paragone tra queste due differenti tecniche emerge come l'approccio DES sia in grado di riprodurre maggiormente la dinamica delle strutture turbolente del flusso, indicando una strada per il futuro sviluppo di schemi numerici per la simulazione del flusso attorno a valvole cardiache.

Parallelamente alle simulazioni numeriche, un gran numero di lavori sperimentali viene effettuato per avere maggiori informazioni riguardo al flusso sanguigno, utili sia a scopi medici sia come validazione dei metodi numerici che via via si vanno sviluppando. In queste prove sperimentali, solitamente effettuate *in vitro*, vengono utilizzate tecniche quali *Laser Doppler Velocimetry* (LDV), *Particle Image Velocimetry* (PIV) al fine di misurare in maniera accurata il campo di velocità, l'intensità degli sforzi turbolenti, la presenza di separazioni e la generazione di vortici. Citiamo tra i vari lavori [44] e [16] in cui vengono misurati i flussi sanguigni sia stazionari che pulsanti.

Le simulazioni che saranno presentate successivamente non utilizzano un modello RANS, tuttavia è possibile reinterpretare la stabilizzazione interior-penalty come un possibile modello LES, come proposto in [9] e come già introdotto in §2.4. Questa interpretazione del metodo di stabilizzazione interior-penalty come modello LES è ancora in discussione, tuttavia in questo lavoro non verrà ulteriormente approfondito l'argomento.

5.2 Uno schema quasi-implicito per la soluzione dell'accoppiamento fluido-struttura

In questa sezione viene ricavato uno schema per risolvere in maniera *quasi-implicita* l'accoppiamento fluido-struttura. L'utilizzo del termine quasi-implicito risulterà più chiaro nel corso della sezione quando il metodo verrà presentato. La derivazione di tale schema si è resa necessaria per la soluzione del moto della valvola artificiale, in quanto in prossimità dei picchi di velocità di apertura e/o chiusura la soluzione calcolata con lo schema presentato in §3.4 presenta oscillazioni spurie, come verrà mostrato inseguito nella sezione dei risultati.

Per semplicità di notazione ci si riferirà ad un caso generale di corpo rigido avente arbitrari gradi di libertà (al più 3 per il caso 2D o 6 per il caso 3D), specificando eventualmente alcuni dettagli al caso di corpo rigido a sola rotazione libera, essendo questo il caso cui fa riferimento la singola lamella di una valvola cardiaca artificiale. Per lo schema della valvola artificiale a doppia la-

mella si rimanda a Fig.5.3 e alla sezione §5.3 per le convenzioni sulle rotazioni utilizzati. Essendo i gradi di libertà di più corpi rigidi indipendenti tra loro, il metodo che verrà qui presentato è immediatamente estendibile al caso in cui siano presenti più corpi rigidi, caso peraltro utilizzato nella soluzione della valvola essendo questa del tipo a doppia lamella.

In generale, il moto di un corpo rigido è governato dal sistema di equazioni differenziali ordinarie in tempo in (3.13), in cui si è già esplicitata la distinzione tra i carichi (forze e coppie) esercitati dal fluido sul corpo e le azioni repulsive utilizzate per gestire i contatti. A livello discreto, il sistema (3.13) deve essere valutato al tempo t^{n+1} per avere uno schema implicito (quindi incondizionatamente stabile), che si scrive come

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^{n+1} = \mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1})\boldsymbol{\lambda}^{n+1} + \mathbf{F}_{rep}(\mathbf{X}^{n+1}), \quad (5.1)$$

dove si sono esplicitate le dipendenze dalla posizione generalizzata (posizione del baricentro e angolo di rotazione) del corpo rigido. \mathbf{M} è la matrice delle inerzie del corpo rigido. $\mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1})$ è l'operatore che esegue l'integrazione del moltiplicatore di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ in funzione del grado di libertà considerato ($\mathbf{R} \in R^{N_{gal} \times N_{\Lambda}}$) e dipende da \mathbf{X}^{n+1} solo per le rotazioni come si può notare in (3.13).

Per semplicità di notazione e per ottenere uno schema monolitico per l'accoppiamento fluido-struttura, esplicitiamo l'accelerazione del corpo $\ddot{\mathbf{X}}^{n+1}$ sfruttando la particolare formulazione tramite predictor-corrector del metodo di Newmark (3.10) presentata in §3.4. In particolare, sfruttiamo le relazioni del passo di correzione (3.12), ottenendo

$$\ddot{\mathbf{X}}^{n+1} = \frac{\dot{\mathbf{X}}^{n+1} - \dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1}}{\gamma\Delta t}, \quad (5.2)$$

dove $\dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1}$ è la velocità calcolata al passo di predizione (3.11), da cui si ottiene per il passo di correzione 3.12 per lo spostamento

$$\mathbf{X}^{n+1} = \tilde{\mathbf{X}}^{n+1} + \Delta t \left[\left(1 + \frac{\beta}{\gamma}\right) \dot{\mathbf{X}}^{n+1} + \frac{\beta}{\gamma} \dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1} \right], \quad (5.3)$$

dove $\tilde{\mathbf{X}}^{n+1}$ è lo spostamento calcolato al passo di predizione (3.11).

Il sistema algebrico per la soluzione del problema di Navier-Stokes modellato tramite un metodo ai domini fittizi è stato presentato in (3.6). Tale sistema può essere esteso per tenere conto anche del moto di un eventuale corpo rigido, ottenendo lo schema monolitico ricercato che risolve contemporaneamente il fluido e la struttura. La formulazione algebrica di tale schema

risulta essere la seguente

$$\mathbf{A}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} \\ \dot{\mathbf{X}}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

dove la matrice \mathbf{A}^{n+1} risulta essere

$$\mathbf{A}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B}^T & \mathbf{S}^T(\mathbf{X}^{n+1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\mathbf{X}^{n+1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1}) & \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M} - \frac{\mathbf{F}_{rep}^{n+1}}{\dot{\mathbf{X}}^{n+1}} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

in cui sono state esplicitate le dipendenze dei vari termini dalla posizione generalizzata del corpo rigido \mathbf{X}^{n+1} .

Come si può notare, il sistema in (5.4) è fortemente non-lineare poichè i coefficienti della matrice \mathbf{A}^{n+1} dipendono dalla soluzione stessa del sistema. Una possibile soluzione a questo problema è quella di eseguire delle sottoiterazioni fino a convergenza. Questa tecnica, seppur garantisca l'incondizionata stabilità dell'accoppiamento fluido-struttura e preservi l'ordine di convergenza di entrambi degli schemi per la soluzione del fluido e della struttura, risulta essere troppo onerosa a livello di tempo computazionale, e pertanto è scarsamente perseguita.

Lo schema di accoppiamento già presentato in §3.4 equivale ad introdurre la seguente decomposizione della matrice

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{N}^{n+1},$$

con

$$\mathbf{P}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B}^T & \mathbf{S}^T(\mathbf{X}^{n+1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\mathbf{X}^{n+1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M} - \frac{\mathbf{F}_{rep}^{n+1}}{\dot{\mathbf{X}}^{n+1}} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{N}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Quindi, a ciascun passo temporale si risolve il sistema

$$\mathbf{P}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} \\ \dot{\mathbf{X}}^{n+1} \end{bmatrix} = -\mathbf{N}^n \begin{bmatrix} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{P}^n \\ \Lambda^n \\ \dot{\mathbf{X}}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}^{n+1} \end{bmatrix},$$

il che equivale a risolvere in sequenza:

1. Problema strutturale

$$\left(\frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M} - \frac{\mathbf{F}_{rep}^{n+1}}{\dot{\mathbf{X}}^{n+1}} \right) \dot{\mathbf{X}}^{n+1} = \mathbf{R}(\mathbf{X}^n) \Lambda^n$$

tramite metodo di Newmark.

2. Problema fluido (3.6) dove si impone

$$\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1}) \dot{\mathbf{X}}^{n+1},$$

con $\dot{\mathbf{X}}^{n+1}$ e \mathbf{X}^{n+1} soluzioni del problema strutturale al punto 1.

Ovviamente questo risulta in uno schema esplicito, in cui si perde l'incondizionata stabilità del sistema fluido-struttura accoppiato anche se singolarmente i solutori del fluido e della struttura sono incondizionatamente stabili. Inoltre, la particolare scelta di accoppiamento presentata in Fig.3.2, degrada la convergenza della soluzione al primo ordine in tempo, anche se i solutori di fluido e struttura sono singolarmente di ordine più elevato.

Lo schema quasi-implicito di soluzione dell'accoppiamento fluido-struttura viene ottenuto a questo punto eseguendo combinazioni lineari delle equazioni del sistema (5.4). In particolare, sostituisce la terza riga in (5.4) con la somma della terza riga stessa più la quarta riga, la quale è stata premoltiplicata per $\frac{\gamma\Delta t}{\mathbf{M}} \mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1})$. Il risultato di tale operazione è un nuovo schema monolitico che si scrive

$$\tilde{\mathbf{A}}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} \\ \dot{\mathbf{X}}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

dove la matrice $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ risulta essere

$$\tilde{\mathbf{A}}^{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11}^{n+1} & \tilde{\mathbf{A}}_{12}^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21}^{n+1} & \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

dove

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B}^T & \mathbf{S}^T(\mathbf{X}^{n+1}) \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\mathbf{X}^{n+1}) & \mathbf{0} & -\frac{\gamma\Delta t}{\mathbf{M}}\mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1})\mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_{12}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{\gamma\Delta t}{\mathbf{M}}\mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1})\mathbf{F}_T(\mathbf{X}^{n+1}) - \mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1})\dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21}^{n+1} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1})], \\ \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{n+1} &= \frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{M} - \frac{\mathbf{F}_{rep}^{n+1}}{\dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1}},\end{aligned}$$

in cui sono state esplicitate le dipendenze dei vari termini dalla posizione generalizzata del corpo rigido \mathbf{X}^{n+1} .

Il sistema in (5.6) è del tutto equivalente a quello in (5.4). Anche in questo caso è possibile eseguire una decomposizione

$$\tilde{\mathbf{A}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{P}}^{n+1} + \mathbf{N}^{n+1},$$

dove

$$\tilde{\mathbf{P}}^{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11}^{n+1} & \tilde{\mathbf{A}}_{12}^{n+1} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{n+1} \end{bmatrix},$$

mentre

$$\mathbf{N}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21}^{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

è lo stesso del caso precedente.

Lo schema quasi-implicito si ottiene risolvendo a ciascun passo temporale il sistema

$$\tilde{\mathbf{P}}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} \\ \dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1} \end{bmatrix} = -\mathbf{N}^n \begin{bmatrix} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{P}^n \\ \Lambda^n \\ \dot{\tilde{\mathbf{X}}}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{M}\dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1} \end{bmatrix},$$

il che equivale a risolvere in sequenza:

1. Problema strutturale

$$\left(\frac{1}{\gamma\Delta t}\mathbf{M} - \frac{\mathbf{F}_{rep}^{n+1}}{\dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1}} \right) \dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{n+1} = \mathbf{R}(\mathbf{X}^n)\Lambda^n$$

tramite metodo di Newmark.

2. Problema fluido, che in questo caso si scrive

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \\ \boldsymbol{\Lambda}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\gamma \Delta t}{M} \mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1}) \mathbf{F}_T(\mathbf{X}^{n+1}) + \mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1}) \dot{\mathbf{X}}^{n+1} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

con $\dot{\mathbf{X}}^{n+1}$ e \mathbf{X}^{n+1} soluzioni del problema strutturale al punto 1.

Lo schema così ottenuto è esplicito, tuttavia include nella soluzione del fluido tramite domini fittizi (5.8) una stima del moto del corpo rigido tramite il blocco $-\frac{\gamma \Delta t}{M} \mathbf{R}^T(\mathbf{X}^{n+1}) \mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1})$ che va a moltiplicare i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}^{n+1}$, nonchè una stima delle forze repulsive al passo precedente che va a modificare il termine noto. Provando a risolvere numericamente il sistema (5.8) si è osservato come il blocco aggiuntivo di stima del moto del corpo rigido non incida in maniera rilevante sul condizionamento del sistema algebrico, pertanto si è mantenuto lo stesso preconditionatore presentato in §3.3.

Infine, si può notare che i blocchi $\tilde{\mathbf{A}}_{21}$ e $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$ sono identici a quelli dello schema esplicito presentato in §3.4. Questo significa che lo schema per la soluzione del moto della struttura dello schema quasi-implicito è identico a quello dello schema esplicito, e cioè i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}^{n+1}$ calcolati da (5.8) diventano le forzanti del moto del corpo rigido. Per questo motivo, anche questo schema di accoppiamento è del primo ordine in tempo.

Nel caso di corpo rigido 2D libero di ruotare, caso questo della lamella di una valvola cardiaca meccanica che sarà oggetto delle simulazioni, risultano essere

$$\begin{cases} X^{n+1} = \theta^{n+1} \\ \dot{X}^{n+1} = \omega^{n+1}, \end{cases}$$

angolo di rotazione e velocità angolare rispettivamente,

$$M = I_0,$$

momento d'inerzia rispetto al centro d'istantanea rotazione, mentre

$$\mathbf{R}(\theta^n) = [\dots \quad -(y_i - y_0) \quad (x_i - x_0) \quad \dots],$$

con (x_i, y_i) per $i = 1, \dots, N_\Lambda$ coordinate dell' i -esimo nodo della triangolazione ζ_h di $B(t)$ e (x_0, y_0) coordinate del centro di istantanea rotazione. È stata utilizzato questo ordinamento in quanto **FreeFem++** esporta funzioni ad

elementi finiti bidimensionali in vettori incasellando successivamente le componenti in direzione x e y riferite allo stesso nodo. In questo modo risulta essere

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda} = \sum_{i=n_1}^{N_\Lambda} (x_i - x_0)\lambda_{i,y} - (y_i - y_0)\lambda_{i,x},$$

che è proprio l'operazione di integrazione che restituisce la coppia risultante esercitata dai moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}$ attorno al centro di istantanea rotazione.

E' semplice osservare che \mathbf{R}^T applicato alla velocità angolare ω restituisce le componenti di velocità lineare nei nodi della triangolazione ς_h di $B(t)$

$$\mathbf{R}^T \omega = \begin{cases} u_{i,x} = -(y_i - y_0)\omega \\ u_{i,y} = (x_i - x_0)\omega \end{cases}$$

necessarie all'imposizione del vincolo nel metodo dei domini fittizi.

5.3 Risultati numerici

In questa sezione vengono presentati i risultati numerici delle simulazioni effettuate su una geometria semplificata 2D di una valvola cardiaca a doppia lamella. Verranno presentati per primi i risultati delle simulazioni effettuate con lo schema di accoppiamento fluido-struttura esplicito, evidenziando i problemi che tale schema soffre in questa applicazione e che giustificano quindi l'utilizzo dello schema quasi-implicito presentato nella sezione precedente, i cui risultati saranno presentati in seguito.

La geometria utilizzata è quella di un canale di dimensioni 2.2×0.41 , che è il dominio Ω_B . Le due lamelle sono dei corpi rigidi sottili di lunghezza $l = 1.1111$ e spessore $s = 8 \cdot 10^{-3}$, incernierati a un quarto della loro lunghezza partendo dalla mezzeria del canale. In configurazione completamente chiusa le lamelle formano un angolo $\Theta_0 = 18^\circ.4349$ rispetto alla verticale. In Fig.5.2 e 5.3 sono riportate rispettivamente la griglia di discretizzazione τ_h del dominio Ω_B e la griglia di discretizzazione $\varsigma_{h,1}$ e $\varsigma_{h,2}$ delle due lamelle.

Le caratteristiche delle griglie in termini di numero di triangoli, numero di vertici e numero di gradi di libertà sono riportate in Tab.5.1 e 5.2.

Le simulazioni sono state effettuate a un numero di Reynolds riferito al picco sistolico $Re = 500$, inferiore al caso reale di $Re = 7000$ riportato in [17]. D'altra parte, il solutore sviluppato in questa tesi si riferisce al caso di flusso laminare e risulta pertanto impossibile simulare un flusso turbolento. Il numero di Reynolds è basato sulla velocità media al picco sistolico sul bordo

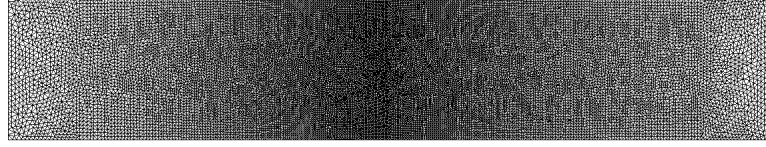


Figura 5.2: Griglia di discretizzazione τ_h del dominio Ω_B . Dimensioni del dominio 2.2×0.41 .

N° Triangoli	38452
N° Vertici	19554
N° DOF (Velocità+Pressione)	116012+19554

Tabella 5.1: Caratteristiche della griglia τ_h utilizzata per la discretizzazione del dominio Ω_B .

N° Triangoli	130
N° Vertici	100
N° DOF	200

Tabella 5.2: Caratteristiche della griglia $\varsigma_{h,i}$ con $i = 1, 2$ utilizzata per la discretizzazione della singola lamella.

di inflow (assunta uguale a $U_\infty = 1$) e sull'altezza del canale. La viscosità del fluido risultante per queste condizioni è

$$\nu = 8.2 \cdot 10^{-4}.$$

In tutte le simulazioni è stato implementato il metodo di stabilizzazione interior-penalty presentato in §2.4, utilizzando una costante

$$\gamma = 10^{-2},$$

valore scelto usando come riferimento le simulazioni effettuate in [9] per il flusso laminare attorno ad un cilindro.

Le lamelle hanno dimensioni $l = 1.1111$ e $s = 8 \cdot 10^{-3}$ come già anticipato. Inoltre è stato scelto come materiale l'acciaio, la cui densità risulta

$$\rho_{acciaio} = 7.5474 \rho_{sangue}.$$

Le posizioni dei centri di istantanea rotazione delle due lamelle sono

$$\begin{cases} x_{0,1} = 0.8950 \\ y_{0,1} = 0.1538, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{0,2} = 0.8950 \\ y_{0,2} = 0.2562, \end{cases}$$

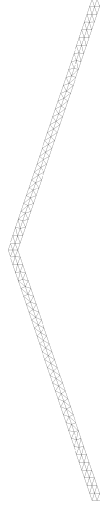


Figura 5.3: Griglie di discretizzazione $\varsigma_{h,1}$ (lamella inferiore) e $\varsigma_{h,2}$ (lamella superiore). Ogni lamella ha lunghezza $l = 1.1111$ e spessore $s = 8 \cdot 10^{-3}$. La configurazione è quella di valvola completamente chiusa, in cui le lemelle formano un angolo $\Theta_0 = 18^\circ.4349$ rispetto alla verticale.

corrispondenti come già detto a un quarto della lunghezza della valvola a partire dalla mezzeria. Il momento d'inerzia rispetto al centro d'istantanea rotazione risulta quindi essere

$$I_0 = 3.1133 \cdot 10^{-5}.$$

Come riferimento per le rotazioni si è scelta la posizione completamente chiusa, con verso positivo in senso antiorario.

Per la gestione del contatto si è scelto di utilizzare delle coppie repulsive nello schema presentato in §3.5, aventi le espressioni

$$C_{rep,i} = -1^i \psi_i(\theta) \quad i = 1, 2,$$

con θ angolo di rotazione della lamella e dove $i = 1$ si riferisce alla lamella inferiore mentre $i = 2$ si riferisce alla lamella superiore. Le funzioni $\psi_{1,i}$ e $\psi_{2,i}$ sono state scelte come

$$\psi_1 = e^{-\frac{\theta-0.0256}{0.0027}}, \quad \psi_2 = e^{\frac{\theta+0.0256}{0.0027}}.$$

In Fig.5.4 viene riportato l'andamento delle coppie repulsive in prossimità della configurazione completamente chiusa.

Infine, tutte le simulazioni sono state condotte utilizzando un passo temporale $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}s$.

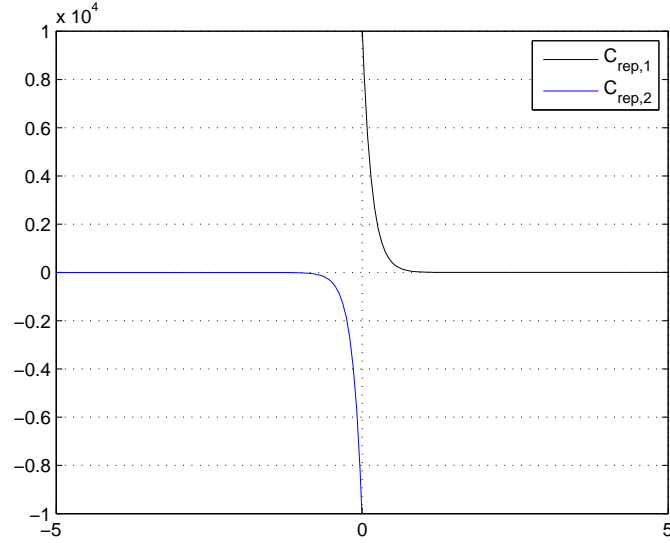


Figura 5.4: Andamento delle coppie repulsive in prossimità della configurazione completamente chiusa. L'indice $i = 1$ si riferisce alla lamella inferiore, $i = 2$ si riferisce alla lamella superiore.

5.3.1 Schema di accoppiamento esplicito

In questa sezione si presentano ora i risultati facenti riferimento alla simulazione effettuata con schema di accoppiamento fluido-struttura esplicito presentato in §3.4.

Le condizioni al contorno per questa simulazione sono di velocità nulla $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sulle pareti dell'aorta e di componente trasversale della velocità nulla $u_2 = 0$ sui bordi di inflow e outflow. Inoltre, sul bordo di inflow è stato imposto un profilo parabolico di velocità a media unitaria avente andamento periodico in tempo con periodo $T = 1s$

$$u_1 = \frac{y}{h} \left(3 - 1.5 \frac{y}{h} \right) \sin(2\pi t).$$

Inoltre, le condizioni iniziali per le lamelle della valvola al tempo $t = 0s$ sono le seguenti

$$\begin{cases} \theta_{0,1} = 7^\circ.5 \\ \omega_{0,1} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{0,1} = -7^\circ.5 \\ \omega_{0,1} = 0, \end{cases}$$

dove si è scelto di simulare l'apertura della valvola a partire da una configurazione già parzialmente aperta per evitare problemi di convergenza alla soluzione. Infatti, l'imposizione di una condizione di Dirichlet al bordo di

inflow, unitamente al particolare schema di accoppiamento fluido-struttura utilizzato (prima si aggiorna il fluido utilizzando la configurazione della struttura al passo precedente, quindi si aggiorna la struttura), non permette di ottenere una soluzione al primo passo in quanto si sta violando il vincolo di incomprimibilità.

In Fig.5.5 e 5.6 sono riportati rispettivamente gli andamenti dell'angolo di apertura θ in funzione del tempo e della velocità angolare ω in funzione del tempo.

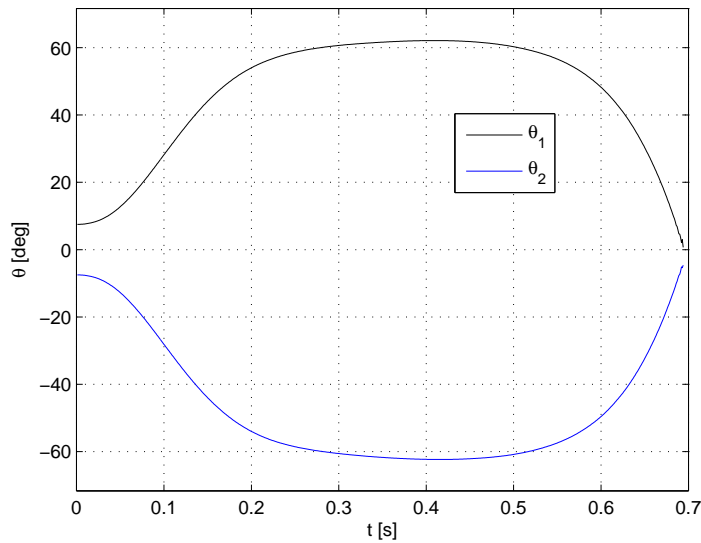


Figura 5.5: Andamento dell'angolo di apertura θ delle due lamelle in funzione del tempo t . L'indice 1 si riferisce alla lamella inferiore, l'indice 2 alla lamella superiore.

Come si può osservare dalle figure, le lamelle raggiungono un angolo di apertura massimo

$$\theta_{MAX,1} = 62^{\circ}.0903 \quad \theta_{MIN,2} = -62^{\circ}.3137,$$

che equivalgono rispettivamente a valori di $80^{\circ}.5252$ e $-80^{\circ}.7487$ rispetto alla verticale. Questi valori sono comparabile con il valore di apertura massima di 85° rispetto alla verticale riferito alla valvola artificiale Saint Jude Medical e riportato in [17].

Il moto delle lamelle risulta essere in anticipo rispetto alla condizione al contorno. infatti il massimo di velocità angolare in apertura avviene per $t \approx 0.1s$, in anticipo di $0.15s$ rispetto al massimo della velocità di inflow. La stessa cosa avviene per l'inversione di moto, che avviene a $t \approx 0.4s$ mentre

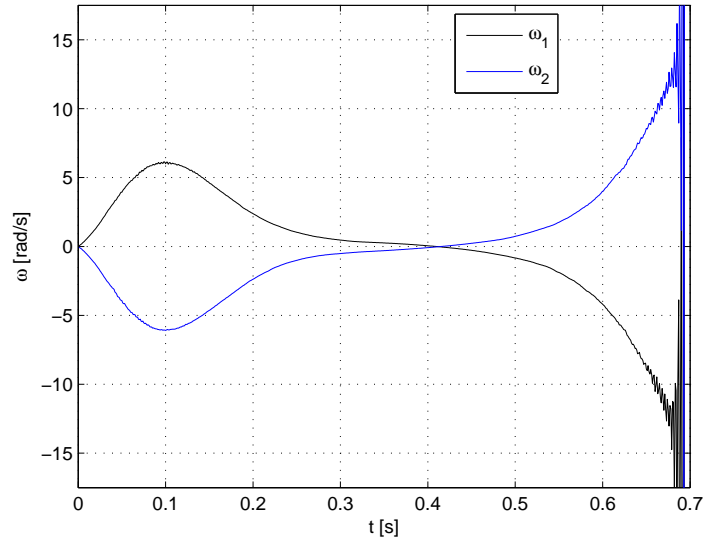


Figura 5.6: Andamento dell'angolo di apertura ω delle due lamelle in funzione del tempo t . L'indice 1 si riferisce alla lamella inferiore, l'indice 2 alla lamella superiore.

l'inversione del flusso (inizio del riflusso) avviene a $t = 0.5s$. Questo comportamento è dovuto al fatto che la valvola è incernierata a $1/4$ della lunghezza. Quando l'angolo di apertura della lamella è elevato, questa si comporta sostanzialmente come un profilo sottile a bassa incidenza (alla massima apertura la lamella ha un angolo di incidenza rispetto al flusso $\alpha \approx 10^\circ$). Dalla teoria dei profili sottili è noto che il centro aerodinamico è situato a $1/4$ della corda. Ciò significa, in questo caso, che la risultante delle forze aerodinamiche è applicata proprio nel centro di istantanea rotazione e, unitamente al fatto che la lamella è rettilinea e quindi il suo coefficiente di momento aerodinamico C_M è nullo, il momento risultante delle forze aerodinamiche sulla lamella si annulla. Per contro però, le due lamelle in questa configurazione formano un canale divergente (alla posizione di massima apertura il divergente ha un angolo $\beta \approx 20^\circ$) in cui la pressione cresce in direzione longitudinale al divergente. Per questo motivo la valvola inizia a chiudersi quando il flusso netto nel canale è ancora positivo.

Per quanto riguarda la chiusura, invece, si nota un andamento crescente monotono della velocità angolare di chiusura. Questo perchè in questo caso si ha la situazione opposta a quella di apertura massima. Infatti si forma un canale convergente tra le lamelle e la parete arteriosa, per cui il gradiente di pressione funge da forzante alla chiusura della valvola. Questo effetto è anche amplificato dal fatto che la velocità del flusso raggiunge valore massimo tra

l'estremità della lamella e la parete dell'aorta, pertanto in questa zona si ha un minimo di pressione che contribuisce ad accelerare la chiusura della valvola.

Osservando Fig.5.6 si possono notare delle oscillazioni nella velocità angolare delle lamelle per valori superiori a 5rad/s . Queste oscillazioni, già presenti in corrispondenza del picco di velocità angolare in apertura, si amplificano enormemente durante la chiusura quando il modulo della velocità angolare cresce monotonamente. Le instabilità sono dovute allo schema di accoppiamento fluido-struttura utilizzato (lo schema esplicito presentato in §3.4). Il meccanismo fisico all'origine dell'instabilità risiede nel fatto che ad elevate velocità angolari (cui corrispondono elevate velocità lineari dell'estremità della lamella) si genera un campo di sovrappressione all'estremità della lamella che tende a rallentare il moto. Quest'azione è opposta all'azione di 'risucchio' esercitata durante la chiusura dall'accelerazione del flusso nella regione tra la lamella e la parete dell'aorta, ed è proprio questo meccanismo che l'accoppiamento fluido-struttura esplicito non riesce a risolvere correttamente. Per questa ragione si è deciso di implementare anche lo schema di accoppiamento quasi-implicito presentato in §5.2.

Vengono ora presentati in Fig.5.7 gli andamenti della velocità media e della pressione media sul bordo di inflow in funzione del tempo.

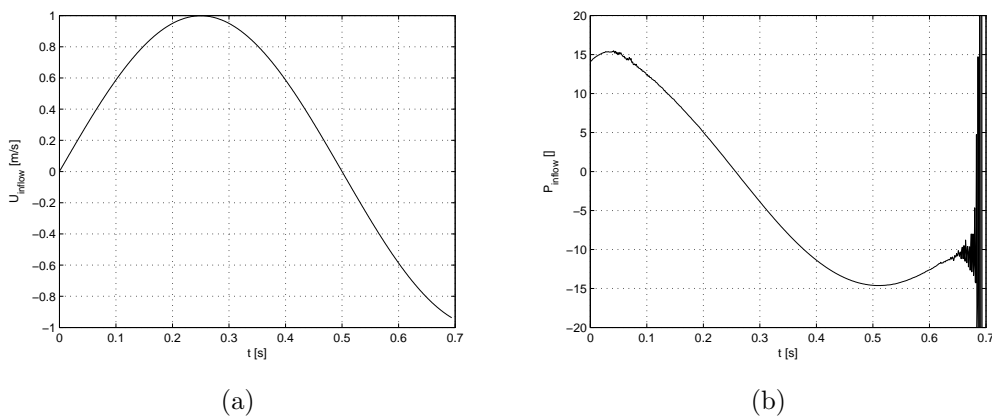


Figura 5.7: Andamenti della velocità media sul bordo di inflow U e della pressione media p sul bordo di inflow in funzione del tempo t . (a)- Velocità media U sul bordo di inflow. (b)- Pressione media p sul bordo di inflow.

L'andamento della velocità media U all'inflow è di poca rilevanza, essendo in sostanza il profilo sinusoidale a periodo $T = 1\text{s}$ imposto tramite la condizione al contorno di Dirichlet. L'andamento della pressione media p all'inflow, invece, risulta essere molto vicino a una funzione coseno in tempo. Il valore

massimo è

$$p \approx 15.75.$$

Inoltre, sono presenti oscillazioni spurie legate all'instabilità dello schema di accoppiamento esplicito che sono state spiegate precedentemente. E' possibile notare come, per $t > 0.65s$, queste oscillazioni divergono rendendo la soluzione totalmente irrealistica (la stessa cosa si può osservare anche per la velocità angolare ω in Fig.5.6).

Presentiamo infine in Fig.5.8 un profilo della componente longitudinale (streamwise) u_1 della velocità del flusso, calcolato appena a valle della valvola quando questa è completamente aperta, ad una distanza

$$x = 1.1111$$

dal bordo di inflow.

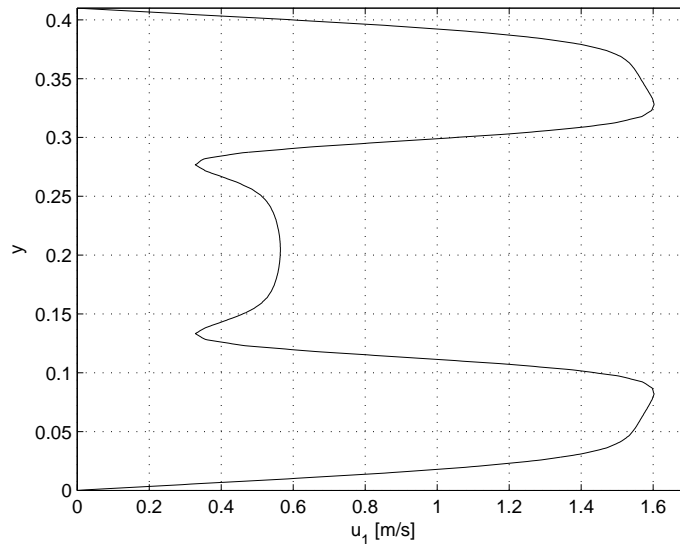


Figura 5.8: Profilo della componente longitudinale u_1 della velocità a $x = 1.1111$. Il profilo fa riferimento a $t = 0.3s$, cui corrisponde una velocità media al bordo di inflow $U = 0.9498m/s$.

E' possibile apprezzare la tipica struttura a triplo getto del flusso attraverso la valvola cardiaca presentata anche in [17]. I getti tra la lamella e la parete raggiungono le velocità più elevate (pari a circa 1.6 volte la velocità media U di inflow), mentre il valore massimo della velocità u_1 del getto centrale è decisamente inferiore. Questo comportamento è da imputare al fatto che in questa configurazione le lamelle formano un canale divergente con un angolo $\beta \approx 24^\circ$ in cui il fluido viene rallentato.

5.3.2 Schema di accoppiamento quasi-implicito

In questa sezione vengono presentati i risultati della simulazione effettuata sulla valvola cardiaca utilizzando lo schema di accoppiamento quasi-implicito presentato in §5.2.

Le condizioni al contorno applicate per questa simulazione sono ancora di velocità $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sulle pareti dell'aorta e di componente trasversale della velocità $u_2 = 0$ sui bordi di inflow e di outflow. Sul bordo di inflow, però, è stata imposta una condizione di Neumann per poter simulare meglio il caso di valvola completamente chiusa, per cui in questo caso è possibile trovare una soluzione di flusso nullo e salto di pressione sulle lamelle. Il profilo di questa condizione al contorno è stato scelto a partire dall'andamento della pressione media al bordo di inflow p ottenuto nella simulazione in cui è stata applicata la condizione di Dirichlet e che è riportato in Fig.5.7-b e risulta essere

$$\sigma = 15.75 \cos(2\pi t).$$

Si ricorda che in questo caso una stima di stabilità sul problema continuo non è disponibile, in quanto il termine trilineare $c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ fornisce un contributo non nullo e di segno non definito sul bordo. Questo potrebbe causare delle instabilità sullo schema numerico all'inflow che, tuttavia, non sono state osservate.

La condizione iniziale delle lamelle della valvola è ancora la stessa della simulazione con schema di accoppiamento fluido-struttura esplicito, cioè

$$\begin{cases} \theta_{0,1} = 7^\circ.5 \\ \omega_{0,1} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{0,1} = -7^\circ.5 \\ \omega_{0,1} = 0, \end{cases}$$

così come la gestione del contatto avviene con la stessa funzione per le coppie repulsive utilizzata nella simulazione precedente e presentata in Fig.5.4.

Gli andamenti dell'angolo di apertura θ e della velocità angolare ω delle lamelle in funzione del tempo sono riportati in Fig.5.9.

Anche in questo caso si possono fare tutte le considerazioni eseguite per il caso precedente sul moto della valvola. Gli angoli di apertura massimi sono

$$\theta_{MAX,1} = 61^\circ.3311 \quad \theta_{MIN,2} = -61^\circ.5122,$$

che equivalgono ad angoli rispetto alla verticale di $79^\circ.7661$ e $-79^\circ.9471$ rispettivamente, valori anche in questo caso in accordo con quanto riportato in [17].

Come si può osservare dall'andamento delle velocità angolari ω , le oscillazioni spurie presenti per valori superiori a $5rad/s$ nei risultati ottenuti con

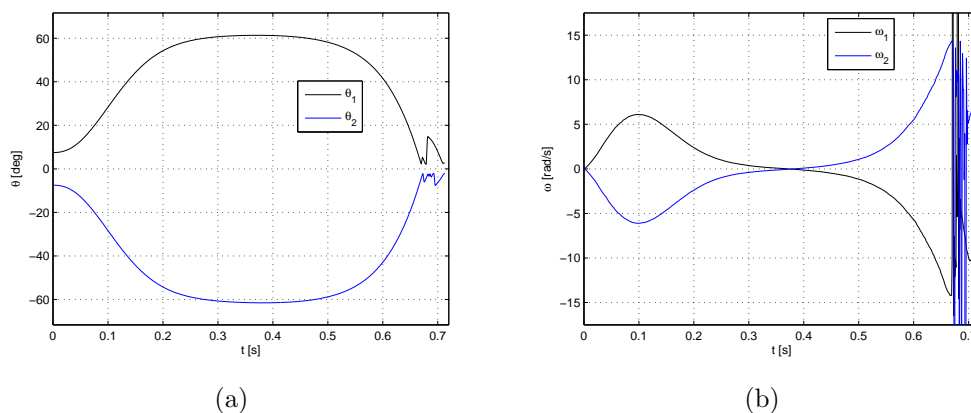


Figura 5.9: Andamenti dell'angolo di apertura θ e della velocità angolare ω delle lamelle in funzione del tempo. (a)- Angolo di apertura θ . (b)- Velocità angolare ω . L'indice 1 si riferisce alla lamella inferiore, l'indice 2 alla lamella superiore.

accoppiamento fluido-struttura esplicito sono assenti in questo caso. Questo conferma che le ipotesi fatte sull'origine di quelle instabilità e la soluzione adottata di implementare lo schema di accoppiamento quasi-implicito erano appropriate.

A $t \approx 0.67s$ l'angolo di apertura θ raggiunge il valore di circa 1° a cui diventa rilevante l'effetto delle coppie repulsive. Come si può osservare, le coppie arrestano la chiusura della valvola. Tuttavia il valore elevato che queste assumono in prossimità della chiusura è causa di rimbalzo eccessivo delle lamelle. Il rimbalzo avviene con grandi oscillazioni della velocità angolare ω , che assume valori talmente elevati da ritenere non corrette le soluzioni ottenute da questa simulazione per $t > 0.67s$. Per questa ragione, nella sezione successiva verranno presentati i risultati di una simulazione effettuata con funzioni diverse per le coppie repulsive che limitino il valore massimo delle stesse.

In Fig.5.10 sono infine presentati gli andamenti della velocità media U e della pressione media p al bordo di inflow. In questo caso ad avere scarso significato è la pressione p , in quanto l'andamento non è nient'altro che il profilo sinusoidale applicato tramite la condizione al contorno di Neumann.

Il profilo della velocità media U sul bordo di inflow approssima bene il profilo sinusoidale applicato nella simulazione precedente tramite la condizione al contorno di Dirichlet. Inoltre si nota come il picco di velocità sia molto prossimo all'unità, segno che la condizione di Neumann applicata è consistente con la simulazione presentata nella sezione precedente. Infine, si può osservare come per $t \approx 0.67s$ la velocità di riflusso (valori negativi di U) si attenui

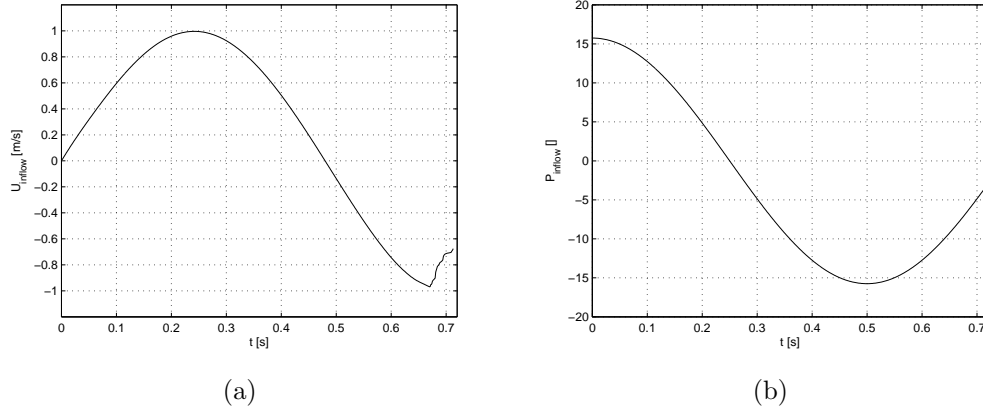


Figura 5.10: Andamenti della velocità media sul bordo di inflow U e della pressione media p sul bordo di inflow in funzione del tempo t . (a)- Velocità media U sul bordo di inflow. (b)- Pressione media p sul bordo di inflow.

notevolmente. Tuttavia sottolineiamo ancora come, per $t > 0.67s$, la soluzione ottenuta non è da ritenersi adeguata a causa dei rimbalzi causati dalle coppie repulsive e dagli elevati valori di velocità angolari ω che questi comportano.

5.3.3 Schema di accoppiamento quasi-implicito e limitazione sulle coppie repulsive

In questa sezione si ripete la simulazione numerica effettuata nella precedente sezione applicando solo una limitazione al valore massimo delle coppie repulsive.

Le condizioni al contorno applicate sono le stesse del caso precedente di velocità $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sulle pareti dell'aorta, di componente trasversale della velocità $u_2 = 0$ sui bordi di inflow e di outflow e di condizione di Neumann al bordo di inflow

$$\sigma = 15.75 \cos(2\pi t).$$

Le coppie repulsive vengono modificate dal caso precedente in modo da avere una limitazione sui valori di picco. L'espressione scelta in questo caso è

$$C_{rep,i} = -1^i \min(\psi_{1,i}(\theta), \psi_{2,i}(\theta)) \quad i = 1, 2,$$

dove

$$\begin{cases} \psi_{1,1} = |-11.25\theta + 0.9818| \\ \psi_{2,1} = e^{-\frac{\theta-0.0256}{0.0027}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_{1,2} = |11.25\theta + 0.9818| \\ \psi_{2,2} = e^{\frac{\theta+0.0256}{0.0027}}. \end{cases}$$

E' stato scelto di ottenere la limitazione tramite una retta in quanto, qualora l'angolo di apertura della lamella θ fosse tale da rendere la coppia repulsiva C_{rep} lineare sia possibile comunque ottenere un'azione più intensa delle coppie repulsive all'avvicinarsi della lamella alla parete dell'aorta. In Fig.5.11 viene riportato l'andamento delle coppie repulsive appena presentate in prossimità della configurazione completamente chiusa.

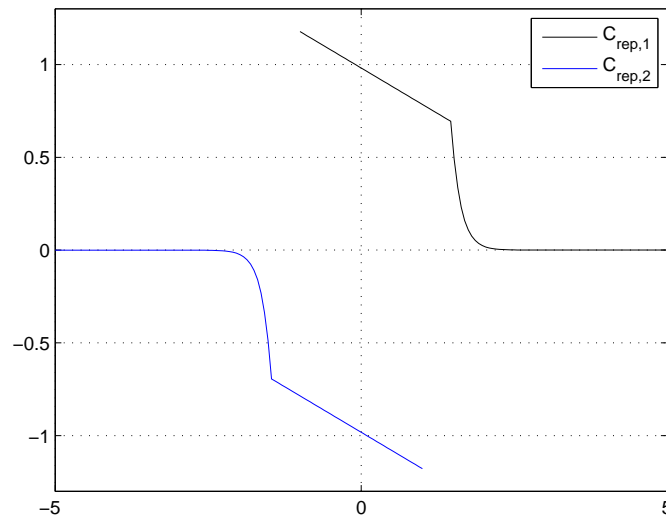


Figura 5.11: Andamento delle coppie repulsive in prossimità della configurazione completamente chiusa. L'indice $i = 1$ si riferisce alla lamella inferiore, $i = 2$ si riferisce alla lamella superiore.

I risultati di angoli di apertura θ e velocità angolari ω delle lamelle in funzione del tempo sono riportati in Fig.5.12.

I risultati ovviamente sono gli stessi della simulazione precedente per $t < 0.67s$ in quanto le coppie repulsive hanno valori trascurabili lontano dalla parete dell'aorta, come si può osservare in Fig.5.11. Infatti, gli angoli di apertura massimi sono

$$\theta_{MAX,1} = 61^{\circ}.3311 \quad \theta_{MIN,2} = -61^{\circ}.5122,$$

che equivalgono ad angoli rispetto alla verticale di $79^{\circ}.7661$ e $-79^{\circ}.9471$ rispettivamente, valori esattamente identici a quelli del caso precedente.

Per $t > 0.67s$, invece, si nota una differenza tra i risultati ottenuti in questa simulazione e quelli ottenuti in quella precedente in cui le coppie repulsive non erano state limitate. Osservando l'andamento dell'angolo di apertura θ si nota

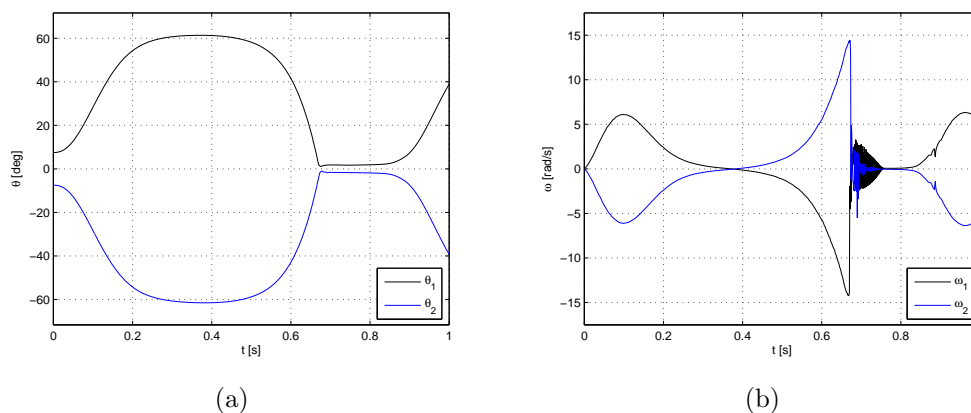


Figura 5.12: Andamenti dell'angolo di apertura θ e della velocità angolare ω delle lamelle in funzione del tempo. (a)- Angolo di apertura θ . (b)- Velocità angolare ω . L'indice 1 si riferisce alla lamella inferiore, l'indice 2 alla lamella superiore.

come questo raggiunga un valore minimo di circa

$$\theta_{chiuso} \approx \pm 1^\circ$$

per poi attestarsi ad un valore di circa $\pm 2^\circ$. Tuttavia, osservando l'andamento delle velocità angolari ω , si può notare che il rimbalzo delle lamelle è ancora presente, sebbene in modo decisamente minore. Le oscillazioni di velocità angolare in gioco sono decisamente minori rispetto al caso precedente (nell'ordine di 4 rad/s) e sono peraltro minori delle velocità angolari massime di chiusura, quindi in questo caso si ritengono accettabili i risultati anche per $t > 0.67 \text{ s}$.

Va sottolineato però che il criterio utilizzato in questa tesi di gestire il contatto tramite forze e/o coppie repulsive non è la soluzione ottimale per simulare un contatto con arresto, mentre risulta essere una buona scelta per la gestione di contatti con rimbalzo (come peraltro fatto in [22] per la simulazione dei rimbalzi tra particelle collidenti). La soluzione ottimale per questo problema è la gestione del contatto tramite disuguaglianza variazionale, in cui si impone un vincolo unilatero

$$\theta \leq 0$$

alle equazioni della dinamica delle lamelle.

Il problema può essere affrontato matematicamente introducendo dei moltiplicatori di Lagrange nell'equazione di moto del corpo rigido. I moltiplicatori saranno nulli quando il vincolo $\theta = 0$ non è attivo (cioè quando non si ha contatto), mentre avranno valore non nullo quando il vincolo $\theta = 0$ è attivo

(cioè quando si ha contatto). In quest'ultimo caso, il moltiplicatore di Lagrange rappresenta la reazione vincolare (positiva) della parete arteriosa sulla lamella, necessaria per mantenere il contatto.

In Fig.5.13 sono infine presentati gli andamenti della velocità media U e della pressione media p al bordo di inflow. Anche in questo caso la pressione p non è nient'altro che il profilo sinusoidale applicato tramite la condizione al contorno di Neumann.

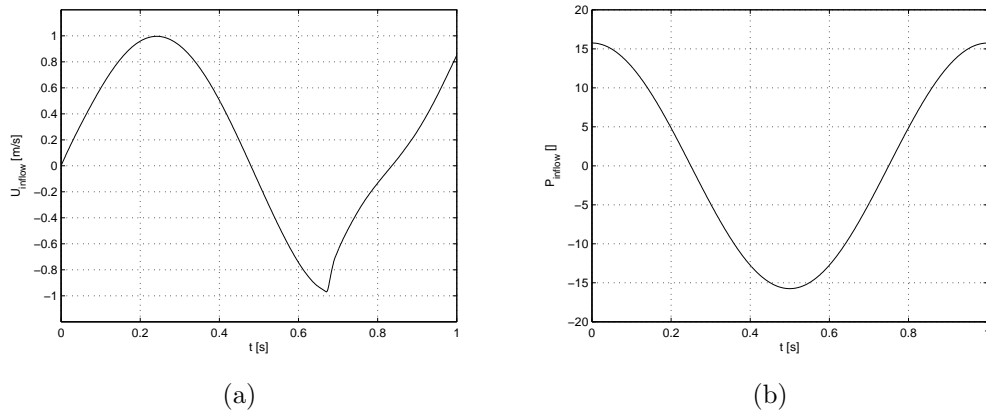


Figura 5.13: Andamenti della velocità media sul bordo di inflow U e della pressione media p sul bordo di inflow in funzione del tempo t . (a)- Velocità media U sul bordo di inflow. (b)- Pressione media p sul bordo di inflow.

In questo caso si osserva come il profilo della velocità media U sul bordo di inflow per $t > 0.67s$ non si annulli. Questo è dovuto al fatto che non si è riusciti a simulare la completa chiusura delle lamelle. Inoltre, la condizione al contorno di Neumann di profilo sinusoidale risulta essere troppo severa in questo senso. Infatti sarebbe stata più opportuna una condizione al contorno che provocasse un riflusso di minore intensità, cosa peraltro che avviene nella realtà.

Infine, riportiamo in Fig.5.14 il profilo di velocità longitudinale (streamwise) u_1 per $t = 0.28s$ calcolato ancora a

$$x = 1.1111.$$

Anche in questo caso si può osservare la struttura a triplo getto del profilo di velocità u_1 , in cui i getti di maggiore intensità sono quelli tra le lamelle e la parete dell'aorta, potendo effettuare tutte le considerazioni fatte per il risultato ottenuto tramite lo schema di accoppiamento fluido-struttura esplicito.

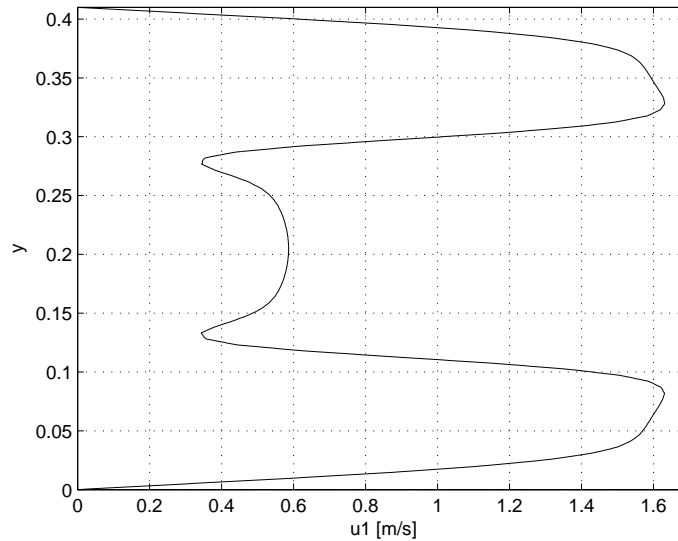


Figura 5.14: Profilo della componente longitudinale u_1 della velocità a $x = 1.1111$. Il profilo fa riferimento a $t = 0.28s$, cui corrisponde una velocità media al bordo di inflow $U = 0.9652m/s$.

Per questa simulazione vengono riportate anche le soluzioni del flusso per diversi istanti temporali. Sono stati scelti il primo istante temporale, un istante temporale prossimo al massimo della velocità angolare in apertura delle lamelle, un istante temporale prossimo al momento dell'inversione del moto delle lamelle, un istante temporale prossimo alla massima velocità angolare in chiusura delle lamelle, un istante in cui la valvola si è arrestata. Questi istanti temporali sono rispettivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0.001s \\ t = 0.16s \\ t = 0.44s \\ t = 0.661s \\ t = 0.8s. \end{array} \right.$$

In Fig.5.15 vengono riportate le linee di flusso (in realtà le figure riportano la funzione di flusso le cui isolinee sono le linee di flusso) ai diversi istanti temporali.

Al primo istante temporale considerato $t = 0.001s$ il sistema si è appena mosso dalla quiete. Il flusso in inflow è molto basso, così come le velocità

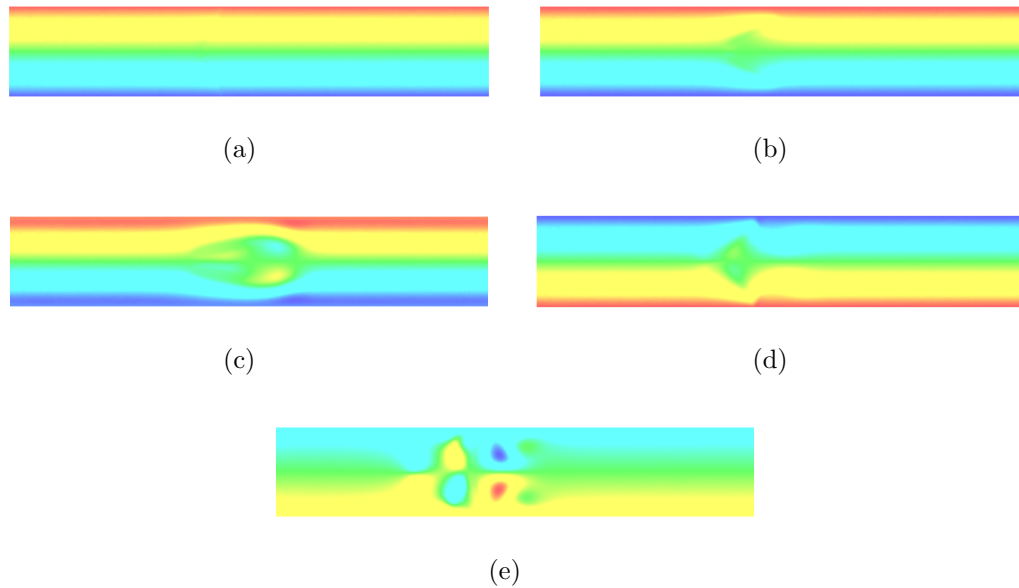


Figura 5.15: Funzione di flusso per i diversi istanti temporali scelti. (a)- $t = 0.001s$. (b)- $t = 0.16s$. (c)- $t = 0.44s$. (d)- $t = 0.661s$. (e)- $t = 0.8s$.

angolari ω delle lamelle. Le linee di flusso sono sostanzialmente parallele tra loro e allineate con l'asse dell'aorta.

Al secondo istante temporale considerato $t = 0.16s$ le lamelle sono ad un angolo di apertura $\theta \approx \pm 30^\circ$ e hanno velocità angolare ω prossima al valore massimo in apertura. Si nota la deviazione del flusso tra l'estremità delle lamelle e la parete dell'aorta. Gli elevati valori delle velocità angolari ω creano 2 vortici controrotanti in prossimità del centro di istantanea rotazione delle lamelle (rotazione del vortice oraria per la lamella superiore e antioraria per la lamella inferiore), vortici che si possono apprezzare nella figura *b* di 5.15.

Al terzo istante temporale considerato $t = 0.44s$ le lamelle hanno da poco invertito il loro moto e si stanno ora chiudendo. Il flusso è ancora positivo ed è diretto da sinistra a destra. Si nota ancora la deviazione del flusso tra l'estremità della lamella e la parete dell'aorta, anche se in maniera minore rispetto al caso precedente poichè le lamelle sono prossime al massimo angolo di apertura (quindi sono quasi a bassa incidenza rispetto al flusso). La principale caratteristica sono i 2 grandi vortici subito a valle della valvola, quello legato alla lamella superiore in rotazione oraria e quello legato alla lamella inferiore in rotazione antioraria. I due vortici sono creati proprio dall'inversione di moto delle lamelle.

Al quarto istante temporale considerato $t = 0.661s$ le lamelle sono molto prossime al picco di massima velocità angolare in chiusura. Le caratteristiche del flusso sono tutto sommato analoghe a quelle per $t = 0.16s$ in cui si ha la massima velocità angolare in apertura. Le differenze risiedono nel fatto che ora il flusso è negativo (da destra a sinistra, cioè riflusso), che le velocità angolari hanno segni opposti e valori assoluti maggiori, quindi i vortici generati in prossimità della cerniera sono di intensità maggiore. Il vortice legato alla lamella superiore ruota in senso antiorario, quello legato alla lamella inferiore in senso orario. Inoltre, le lamelle sono prossime alla configurazione completamente chiusa, cosa apprezzabile dall'accentuata deviazione del flusso tra l'estremità delle lamelle stesse e la parete dell'aorta.

Infine all'ultimo istante temporale considerato $t = 0.8s$ le lamelle sono quasi chiuse (oscillano intorno a un angolo di $\pm 2^\circ$) e il flusso è prossimo a tornare positivo. Si può apprezzare la vorticità diffusa nel campo di moto, presente sotto forma di più vortici controrotanti a monte e valle della valvola, in particolare 2 vortici di grande intensità formati dal fluido che fluendo da destra a sinistra si trova a essere ostacolato dalle lamelle. Va però detto che questa situazione non è fedele alla realtà, in quanto non si è riusciti a simulare la completa chiusura della valvola e quindi il completo arresto del riflusso. Inoltre, le oscillazioni della velocità angolare delle lamelle dovute alle coppie repulsive potrebbero aver introdotto della vorticità spuria nella soluzione che può aver falsato le linee di flusso.

Agli stessi istanti temporali cui fanno riferimento le soluzioni di Fig.5.15 vengono presentate anche le soluzioni del campo di pressione del flusso. Tali soluzioni sono riportate in Fig.5.16.

Al primo istante temporale $t = 0.001s$ la valvola quasi chiusa e il flusso è appena stato avviato. La pressione è al suo massimo valore, simulando il ventricolo che si contrae e pompa il sangue nell'aorta. Si riesce a notare la posizione delle lamelle notando un piccolo salto di pressione attraverso di loro.

Al secondo istante temporale considerato $t = 0.16s$ le lamelle hanno velocità angolare ω massima in apertura. Si notano due cali di pressione vicini al bordo di attacco delle lamelle, dovuti alla forte accelerazione che il flusso subisce attraversando questo orifizio. La pressione quindi cresce leggermente nella zona compresa tra le due lamelle, che come già detto stanno formando un canale divergente in questo momento.

Al terzo istante temporale considerato $t = 0.44s$ si ha, come già anticipato, l'inversione del moto delle lamelle. La pressione sta per raggiungere il massimo valore di gradiente longitudinale negativo che frena il flusso e contribuisce alla richiusura della valvola. Questa situazione simula l'espansione della camera ventricolare che si sta riempiendo di sangue.

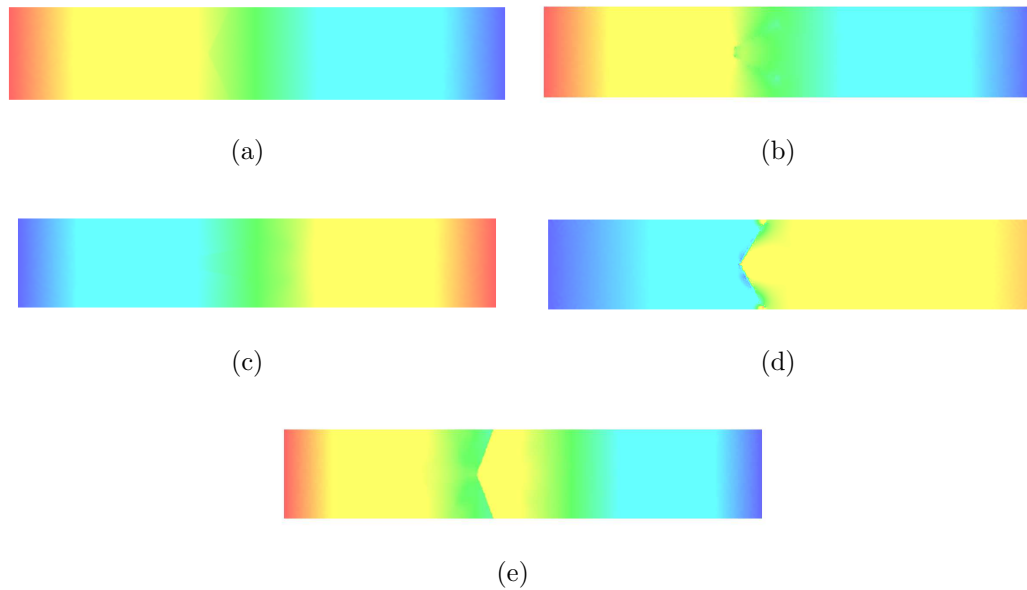


Figura 5.16: Campo di pressione per i diversi istanti temporali scelti. (a)- $t = 0.001s$. Scala di valori: blu corrisponde a $-1.5764 \cdot 10^{-3}$, verde corrisponde a 7.8749 , rosso corrisponde a 15.75 . (b)- $t = 0.16s$. Scala di valori: blu corrisponde a $-4.1402 \cdot 10^{-3}$, verde corrisponde a 4.2197 , rosso corrisponde a 8.4436 . (c)- $t = 0.44s$. Scala di valori: blu corrisponde a -14.655 , verde corrisponde a -7.3249 , rosso corrisponde a $4.6324 \cdot 10^{-3}$. (d)- $t = 0.661s$. Scala di valori: blu corrisponde a -8.3971 , verde corrisponde a -3.7948 , rosso corrisponde a $8.0756 \cdot 10^{-1}$. (e)- $t = 0.8s$. Scala di valori: blu corrisponde a $-4.1357 \cdot 10^{-3}$, verde corrisponde a 3.355 , rosso corrisponde a 6.7142 .

Al quarto istante temporale considerato $t = 0.661s$ si ha riflusso e le lamelle sono prossime alla chiusura e hanno velocità angolari elevate. Dall'analisi del campo di pressione si nota benissimo il salto attraverso le lamelle. Inoltre si può apprezzare un calo della pressione avvicinandosi all'estremità della lamella (colore verde) a causa delle maggiori velocità del flusso in questa zona. La grande deflessione del flusso tra l'estremità delle lamelle e la parete dell'aorta crea una zona di sovrappressione a valle della valvola. Infine, in prossimità delle cerniere si notano due regioni di bassa pressione (colore blu), in corrispondenza dei vortici notati in Fig.5.15-d.

All'ultimo istante temporale considerato $t = 0.8s$ la pressione sta per raggiungere nuovamente il suo valore di picco corrispondente alla contrazione ventricolare e il flusso sta per tornare ad essere da sinistra a destra. Si nota benissimo il salto di pressione attraverso le lamelle. Inoltre si può apprezzare una regione di sovrappressione a monte (destra) della valvola, dovuta al

ristagno del riflusso che si infrange contro la valvola chiusa.

Capitolo 6

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi era quello di sviluppare un metodo dei domini fittizi per applicazioni in problemi di fluido-struttura con grandi spostamenti a bassi numeri di Reynolds, quali la soluzione del flusso sanguigno attorno ad una valvola cardiaca meccanica.

Si è mostrato come sia possibile applicare il metodo dei domini fittizi a qualsiasi problema differenziale cui vengano imposte delle condizioni di Dirichlet. Il metodo dei domini fittizi consiste nel generare un dominio (fittizio per l'appunto) più esteso del dominio originario su cui era definito il problema differenziale e di recuperare le condizioni al contorno di Dirichlet che non si possono più imporre (il dominio fittizio non ha gli stessi bordi del dominio originario) tramite delle equazioni di vincolo. Legati alle equazioni di vincolo sono i moltiplicatori di Lagrange, che entrano in gioco nel problema differenziale definito sul dominio fittizio per far sì che nella regione equivalente al dominio originario la soluzione ottenuta con il metodo dei domini fittizi sia equivalente alla soluzione ottenuta imponendo in maniera classica le condizioni di Dirichlet sul dominio originario.

Si è inoltre mostrato come l'assoluta generalità del metodo consenta di gestire senza problemi domini mobili, rendendolo particolarmente adatto ad applicazioni di interazione fluido-struttura, eventualmente con grandi spostamenti. Si è tuttavia osservato che, per flussi incomprimibili, il metodo funziona bene quando si risolvono tramite domini fittizi corpi rigidi o al più deformabili con deformazioni isovolumiche. Questo perché, in particolare, l'equazione di conservazione della massa viene applicata a tutto il dominio fittizio. Essendo questa equazione l'espressione della conservazione dei volumi (divergenza nulla di velocità), l'imposizione di equazioni di vincolo che violino questa isovolumicità non sono ammesse.

Si è quindi passati attraverso una fase di validazione del metodo ottenuto tramite comparazione con i risultati ottenuti con altri codici e pubblicati come

benchmark di riferimento.

Per prima cosa si è svolta un'accurata analisi sulla scelta di un preconditionatore ottimale per il sistema algebrico ottenuto dalla modellazione tramite domini fittizi di problemi di interazione fluido-struttura. Si è scelto di ricavare i preconditionatori tramite una fattorizzazione a blocchi inesatta della matrice del sistema algebrico in esame, provando diverse soluzioni per il blocco derivante dalle equazioni di vincolo. La scelta finale è stata quella di utilizzare un preconditionatore di tipo Chorin-Temam Algebrico per i blocchi di velocità e pressione, mentre seguendo quanto mostrato in [18] si è scelto per il blocco derivante dalle equazioni di vincolo la matrice di velocità ristretta al corpo rigido.

In secondo luogo si è passati a verificare la correttezza dei risultati ottenuti tramite la modellazione a domini fittizi delle equazioni di Navier-Stokes. Si è scelto di analizzare la corrente intorno ad un cilindro fisso, utilizzando come metro di paragone i risultati in [40]. La comparazione è stata effettuata sui coefficienti aerodinamici del cilindro e sulla frequenza del fenomeno di shedding. Si è potuto notare come non si riescano ad ottenere risultati accurati per questo problema senza l'utilizzo di griglie di strato limite. Introducendo una griglia di strato limite, invece, i risultati sono in perfetto accordo con il benchmark. Si ritiene pertanto che una modellazione a domini fittizi non sia indicata per la soluzione di questo problema.

Infine, si è passati a verificare la correttezza dell'accoppiamento fluido-struttura. Si è scelto di riprodurre il fenomeno di lock-in di un cilindro elasticamente sospeso, per cui in caso di vicinanza nei valori della frequenza propria del sistema meccanico nel vuoto e della frequenza di shedding, il sistema accoppiato oscilla ad una nuova frequenza intermedia alle due di partenza. Si è utilizzato come riferimento quanto presentato in [3], risultati ottenuti in questo caso con formulazione A.L.E. I risultati ottenuti tramite domini fittizi, sebbene non accurati per l'assenza delle griglie di strato limite, mostrano la presenza di lock-in e non presentano instabilità sulla soluzione del moto del cilindro. Oscillazioni spurie sono presenti nei coefficienti aerodinamici e sono da imputarsi alla scarsa regolarità funzionale dei moltiplicatori di Lagrange, di cui portanza e resistenza sono le risultanti trasversale e longitudinale rispettivamente. Tuttavia si è ottenuta una riduzione del coefficiente di portanza a circa $1/3$ del valore ottenuto a cilindro fisso, come ottenuto anche in [3].

Dopo aver validato il codice, si è passati allo scopo ultimo di questa tesi, cioè la simulazione del flusso sanguigno attorno ad una valvola cardiaca meccanica a doppia lamella. Per questa applicazione è stato necessario sviluppare un metodo per la gestione dei contatti tra le lamelle e le pareti dell'aorta. Prendendo spunto da quanto fatto in [22], si è deciso di utilizzare un sistema di coppie repulsive che agissero in prossimità della configurazione completamente

chiusa della valvola. In letteratura è stato possibile notare che il flusso attraverso una valvola meccanica è turbolento in corrispondenza del picco sistolico e in generale viene effettuata mantenendo la valvola ferma alla posizione di massima apertura, come mostrato in [17]. In questa tesi si è scelto di simulare il movimento della valvola, accontentandosi valori di picco del numero di Reynolds $R = 500$ inferiori alla realtà.

L'analisi dei risultati numerici ha mostrato in primo luogo la necessità di modificare lo schema di accoppiamento fluido-struttura. Lo schema esplicito utilizzato nella simulazione del cilindro elasticamente sospeso, infatti, soffre di instabilità quando le velocità angolari ω delle lamelle diventano elevate. Per questo motivo si è derivato ed implementato uno schema di accoppiamento quasi-implicito, il quale modifica il sistema di Navier-Stokes modellato a domini fittizi introducendo un termine che stima il movimento del corpo mentre lascia inalterato il solutore per il moto della struttura. Questo nuovo schema di accoppiamento quasi-implicito funziona in maniera appropriata, come si è potuto notare dall'assenza di oscillazioni spurie sulle soluzioni ottenute con questo schema.

Alla luce di quanto presentato, possiamo concludere che il metodo dei domini fittizi risulta certamente un potenziale candidato alla soluzione di problemi fluidodinamici incomprimibili in presenza di corpi rigidi. La grande flessibilità del metodo si manifesta appieno nella possibilità di gestire in maniera efficiente anche i grandi spostamenti, come si è potuto apprezzare nelle simulazioni effettuate sulla valvola cardiaca.

Le criticità del metodo, invece, risiedono nell'impossibilità di includere griglie di strato limite nella discretizzazione del dominio fittizio. Infatti, sebbene sia teoricamente possibile creare discretizzazioni del dominio fittizio conformi ai corpi immersi e con utilizzo di griglie di strato limite, questa strategia non risulta di particolare utilità nel caso di corpi in movimento in quanto presuppone la necessità di rigenerare la triangolazione del dominio fittizio ad ogni passo temporale.

Inoltre, un'ulteriore problematica emersa in questa tesi è quella della gestione dei contatti. Questa criticità non è legata alla modellazione ad elementi finiti, ma è una criticità più generale di modellazione del problema fisico. L'utilizzo di azioni repulsive, utilizzate con successo per la gestione dei contatti con rimbalzo in [22], falliscono nel caso di contatto con arresto del corpo rigido. Questo perché si ha la necessità di non influenzare la soluzione quando non si è prossimi al contatto, cosa che si ottiene imponendo profili esponenziali alle azioni repulsive. Tali profili tuttavia hanno valori di picco estremamente elevati che provocano rimbalzo delle lamelle. Si è potuto apprezzare che limitare questi picchi migliora il comportamento al contatto, pur senza risolvere del tutto il problema dei rimbalzi.

Possibili sviluppi futuri del lavoro di questa tesi, e più in generale l'applicazione di un metodo a domini fittizi per la simulazione del flusso sanguigno attorno a una valvola cardiaca artificiale, sono pertanto riassumibili come:

1. Inclusione delle griglie di strato limite nel metodo, fondendo tra loro l'approccio a domini fittizi i metodi Chimera. L'idea di base è quella di generare griglie di strato limite solidali al corpo/i rigido/i come fatto nei metodi Chimera, le quali vengono però introdotte nel problema con un approccio a domini fittizi (cioè definendo su di esse il problema di Navier-Stokes e accoppiando la soluzione ottenuta su di esse con la griglia di background tramite equazioni di vincolo).
2. Introdurre formulazioni RANS e/o LES per la simulazione del flusso turbolento attraverso una valvola artificiale. Queste formulazioni non sono in contrasto con l'approccio a domini fittizi del problema di interazione fluido-struttura e non si ritiene pertanto che siano origine di particolari problemi.
3. Gestire i contatti in maniera diversa, utilizzando ad esempio disuguaglianze variazionali oppure passo temporale adattivo, cioè che vada a ridursi in prossimità del contatto.

Appendice A

Alcune caratteristiche del metodo di Newmark

In questa appendice vengono presentate alcune caratteristiche di stabilità del metodo di Newmark per l'integrazione di equazioni della dinamica. Per una completa trattazione sul metodo si rimanda, tra gli altri, a [34].

Riguardo la stabilità del metodo, per un sistema a un grado di libertà senza smorzamento, si ha stabilità se

$$\begin{cases} \gamma \geq \frac{1}{2} \\ \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega^2 \Delta t^2}, \end{cases}$$

dove ω è la frequenza propria del sistema dinamico. Alcune delle possibili combinazioni di (β, γ) sono riassunte in Tab.A.1 insieme con le caratteristiche di stabilità e con l'ordine di convergenza.

Metodo	Tipo	β	γ	Stabilità	Convergenza
Regola dei trapezi	Implicito	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Incondizionata	2
Accelerazione lineare	Implicito	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\omega \Delta t = 2\sqrt{3}$	2
Fox-Goodwing	Implicito	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\omega \Delta t = \sqrt{6}$	2
Differenze centrate	Esplicito	0	$\frac{1}{2}$	$\omega \Delta t = 2$	2

Tabella A.1: Alcuni possibili metodi di Newmark.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare prima di tutto il Dott. Fabio Nobile per avermi costantemente seguito durante questo lavoro. Preziosissime sono state le chiacchierate e le discussioni con lui e senza di esse questo lavoro non sarebbe stato possibile.

Ringrazio il Prof. Luca Formaggia per aver accettato la mia richiesta di tesi, per qualche prezioso consiglio e per aver consolidato in me la passione per l'analisi numerica con il corso di Modellistica.

Un pensiero va al Prof. Fausto Saleri, che per primo ha stimolato in me l'interesse per questo settore della matematica con il corso di Metodi.

Ringrazio il Prof. Arturo Baron, per avermi trasmesso la passione, insieme a tantissima conoscenza, per la fluidodinamica in tutti i suoi aspetti. È grazie a lui se ho seguito l'indirizzo in Aerodinamica.

Un grazie al Prof. Maurizio Quadrio, che ha continuato in maniera egregia il cammino iniziato dal Prof. Baron attraverso le bellezze della fluidodinamica. A lui devo anche la mia iniziazione al L^AT_EX.

Ringrazio i miei genitori, per avermi sostenuto sempre e comunque in tutte le mie scelte, per avermi permesso di vivere l'indimenticabile esperienza di studio all'estero e per avermi accompagnato fin qui. A loro dedico questo lavoro.

Ringrazio anche mia sorella Vivi. Gli scontri affettuosi con lei sulle relazioni tra il mondo ingegneristico e quello della psicologia sono stati un valido aiuto a non prendersi troppo sul serio e a ricordarsi del lato più umanistico della vita.

Ringrazio quei due malati di mente del Fede e del Gigi, perchè qualsiasi esperienza extra-universitaria con loro si trasforma sempre in un evento epico da ricordare ridendoci su per anni, dalle semplici serate insieme alle vacanze in Sardegna o alla fondazione de 'Gli Scassati Snowboarding Team Casuress' sulle nevi del Nord Italia, di cui Gigi è degno presidente onorario finchè qualcuno non supererà la soglia dell'operazione allo scafoide.

Come non ringraziare i compagni universitari, sopra a tutti il Catta, il Costa, il Biondo, il Chiozz, Filippo, la Jourawsky, Lapo, il Meno, il Gipo, che mi hanno accompagnato durante questo cammino rendendolo divertente e stimo-

lante sempre e comunque e con cui sono nate profonde amicizie (suggerite da eventi biblici, su tutti la conquista di Monaco tramite 'I Can't Sleep Tonight'.

Non posso dimenticare tutti i compagni di Unitech, sempre pieni di vitalità ed entusiasmo. Tra loro cito sicuramente la Robs, la Fra, Pol, Borja, Coia, Petter, Aron, Ellen, Chris, Daniel, Manu e Andreas che con me hanno trascorso il periodo di scambio a Delft. Sono sicuro che tutti gli altri non ne avranno a male.

Ultimi, ma solo in ordine di tempo, voglio ringraziare i ragazzi dell'aula tesisti di Matematica. Dave, Mitch, Matt, Andrea, Simon, Claudia, Cristina, Lucia hanno reso il periodo di lavoro a questa tesi più divertente e sono stati spesso fonte di preziosi scambi di idee e di preziosi consigli nell'uso di Linux e del \LaTeX .

Ringrazio anche:

... tutti i miei amici di sempre, che non cito per non fare torto a nessuno con malaugurate dimenticanze...

... i compagni di squadra perchè grazie a loro il calcio resta sempre e comunque un piacere e un divertimento...

... Cep perchè l'amicizia del liceo è più viva che mai anche se non ci vediamo più così spesso, perchè condividiamo gli stessi ideali e gli stessi sogni e nei momenti di sconforto è sempre lì a ricordarmelo...

... Charlie perchè forse nessuno lo capirà mai (o meglio ci capirà mai), ma ogni conversazione con lei è uno stimolo incredibile alla fantasia e una spinta alla coltivazione di 1000 interessi...

... Gi perchè se con Charlie si entra una dimensione parallela (e spesso anche più di una), lei è sempre lì a bacchettarci manco fosse una maestra venuta dall'800...

... Laura, perchè nelle ultime fasi di questa tesi ha saputo essere fonte, involontaria ovviamete, di alcune buone ispirazioni grazie ai brainstorming con lei.

Infine, mi concedo un grazie particolare a me stesso per la costanza, l'impegno e la passione che ho saputo mettere durante il cammino universitario senza cui non sarei arrivato qui oggi, fiero ed orgoglioso di me stesso.

Bibliografia

- [1] M.J. Aftosmis, M.J. Berger, and G. Adomavicius. Aspects (and aspect ratios) of cartesian mesh methods. In *Sixteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, volume 515/1998 of *Lecture Notes in Physics*, pages 1 – 12. Springer Berlin / Heidelberg, 1998.
- [2] J.A. Benek, J.L. Steger, and F.C. Dougherty. A flexible grid embedding technique with applications to the Euler equations. *AIAA Paper*, 83, 1983.
- [3] S.L. Beretta. Studio di uno schema numerico per la simulazione di un cilindro oscillante in una corrente fluida a bassi numeri di Reynolds. Master's thesis, Politecnico di Milano, 2006-2007.
- [4] R.P. Beyer and R.J. Leveque. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(2):332–364, 1992.
- [5] D. Bluestein, Y. Li, and I. Krukenkamp. Free Emboli Formation in Wake of Bi-Leaflet Mechanical Heart Valves and effects of Implantation Techniques. *J. Biomech. Eng.*, 35(12):1533–1540, 2002.
- [6] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. The finite element immersed boundary method: model, stability, and numerical results. In *Int. Conf. on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, 2005.
- [7] M. Braack, E. Burman, V. John, and G. Lube. Stabilized finite element methods for the generalized Oseen problem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 196:853–866, 2007.
- [8] E. Burman. An Interior Penalty Variational Multiscale Method for High Reynolds Number Flows. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, pages 779–787, 2006.

- [9] E. Burman. Interior penalty variational multiscale method for the incompressible Navier-Stokes equation: Monitoring artificial dissipation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 196:4045–4058, 2007.
- [10] E. Burman, M. A. Fernandez, and P. Hansbo. Edge stabilization for the incompressible Navier-Stokes equations: a continuous interior penalty finite element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2006.
- [11] E. Burman and M.A. Fernandez. Continuous interior penalty finite element method for the time-dependent Navier-Stokes equations: space discretization and convergence. *Numer. Math.*, 107:39–77, 2007.
- [12] E. Burman and P. Hansbo. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193:1437–1453, 2004.
- [13] B.L. Buzbee, F.W. Dorr, J.A. Goerge, and G.H. Golub. The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions. *SIAM J. Num. Anal.*, 8:722–736, 1971.
- [14] F. Collino, S. Garcés, and P. Joly. A Fictitious Domain Method for Conformal Modeling of the Perfect Electric Conductors in the FDTD Method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(10):1519–1526, 1998.
- [15] S. Deparis, M. Discacciati, G. Fourestey, and A. Quarteroni. Heterogeneous domain decomposition methods for fluid-structure interaction problems. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*, volume 55 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 41–52. Springer Berlin / Heidelberg, 2007.
- [16] R. Fatemi and K.B. Chandran. An In Vitro Comparative Study of St. Jude Medical and Edwards-Duromedics Bileaflet Valves Using Laser Anemometry. *J. Biomech. Eng.*, 111(4):782–797, 1989.
- [17] L. Ge, H.-L. Leo, F. Sotiropoulos, and A.P. Yoganathan. Flow in a Mechanical Bileaflet Heart Valve at Laminar and Near-Peak Systole Flow Rates: CFD Simulations and Experiments. *J. Biomech. Eng.*, pages 782–797, October 2005.
- [18] R. Glowinski and Y. Kuznetsov. On the solution of the Dirichlet problem for linear elliptic operators by a distributed Lagrange multiplier method. *C. R. Acad. Sci. - Series I - Mathematics*, 327(7):693 – 698, 1998.

- [19] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for dirichlet problem and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 111:283–303, 1994.
- [20] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 112:133–148, 1994.
- [21] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. Distributed lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow moving around rigid bodies. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 151:181–194, 1998.
- [22] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Tesla, D.D. Joseph, and J. Periaux. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of the flow around moving bodies: application to particulate flow. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 182:241–267, 2000.
- [23] E. Heikkola, T. Rossi, and T. Toivanen. A parallel fictitious domain method for the three-dimensional helmholtz equation. *J. Sci. Comput.*, B 9, 1999.
- [24] L. Heltai. On the stability of the finite element immersed boundary method. *Comput. Struct.*, 86(7-8):598–617, 2008.
- [25] M.A. Hyman. Non-iterative numerical solution of boundary value problems. *Appl. Sci. Res.*, B2:325–351, 1952.
- [26] I. Harker and S. Slichter. Studies of platelet and fibrinogen kinetics in patients with prosthetic heart valves. *N Engl. J. Med.*, 283:1302–1305, 1970.
- [27] O.A. Ladyzhenskaya. Mathematics and its applications. In *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, volume 2. Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris, second english edition, 1969. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu.
- [28] R. Löhner. Three-dimensional fluid-structure interaction using a finite element solver and adaptive remeshing. *Comp. Syst. Engin.*, 1:257–272, 1990.
- [29] R.W. Meltcafe. The promise of computational fluid dynamics as a tool for delineating therapeutic options in the treatment of aneurysms. *Am J. Neuroradiol.*, 24, 2003. Editorial.

- [30] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 35:239–261, 2005.
- [31] H. Nasir and T. Kako. Fictitious domain method for structural-acoustic coupling problem in unbounded region. *Theor. Appl. Mech.*, 50:391–401, 2001.
- [32] K. Pahlke and B.G. van der Wall. Chimera simulations of multibladed rotors in high-speed forward flight with weak fluid-structure-coupling. *Aer. Sci. Tech.*, 9:379–389, 2005.
- [33] C.S. Peskin. *Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion*. *Physiol.*, Abert Einstein Coll. Med., 1972. Univ. Microfilms 378:72-30.
- [34] D.J. Rixen. Numerical methods in engineering dynamics, 2007. Delft University of Technology, Faculty 3mE, Department of Precision and Microsystems Engineering.
- [35] V.K. Saul’ev. On solving boundary-value problems on high-performance computers by fictitious-domain methods. *Sib. Math. J.*, 4:912–925, 1963.
- [36] P.R. Spalart, W.H. Jou, M. Strelets, and S.R. Allmaras. Comments on the Feasibility of LES for Wings, and on Hybrid RANS/LES Approach. In *First AFORS International Conference on DNS/LES*, 1997. Ruston, LA.
- [37] J.L. Steger, F.C. Dougherty, and J.A. Benek. A Chimera grid scheme. *ASME Mini Symposium on Advances in Grid Generation*, June 1982. Houston, TX.
- [38] D. Stevenson, A.P. Yoganathan, and F. Williams. Numerical Simulation of Steady Turbulent-Flow Through Trileaflet Aortic Heart Valves. *J. Biomech. Eng.*, 18(12):909, 1985.
- [39] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. AMS Chelsea Publishing, Providence , RI, 2001. Reprint of the 1984 edition.
- [40] S. Turek and M. Schäfer. Recent Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 547–546, 1996.
- [41] A. Veneziani. La matematica “numerica” e la medicina “predittiva”. nuovi strumenti per la medicina, nuove sfide per la matematica.

- [42] Z.J. Wang and V. Parthasarathy. A fully automated Chimera methodology for multiple moving body problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 33:919–938, 2000.
- [43] T. Ye, R. Mittal, H.S. Udaykumar, and W. Shyy. An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries. *Journal of Computational Physics*, 156:209 – 240, 1999.
- [44] A.P. Yoganathan, Y. Woo, and H. Sung. Turbulent Shear STress Measurements in the Vicinity of Aortic Heart Valve Prostheses. *J. Biomech. Eng.*, 19:433–442, 1986.