

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica



**MODELLAZIONE DEI TERMINI DI
SORGENTE NELLO SVILUPPO DI
UN CODICE CFD MERIDIANO PER
L'ANALISI E IL PROGETTO DI
TURBOMACCHINE**

Relatore:

Prof. Giacomo Bruno PERSICO

Tesi di Laurea di
Federica VIGNATI
Matr. 725165

Anno Accademico 2009-2010

Ringraziamenti

Giungemmo: è il Fine.

... è quanto secondo Pascoli pensò Alessandro Magno, mio coetaneo, guardandosi indietro una volta giunto fino agli estremi confini del mondo, conscio di aver compiuto un'impresa senza pari. Mi è sempre piaciuto immaginarmelo solo, in piedi sull'orlo di un promontorio inondato dall'ultimo sole, mentre ammira l'oceano di fronte a sé: gode del suo successo ma, sottosotto, si domanda anche cosa sarà della sua vita, ora che ha raggiunto l'unico suo obiettivo, combattuto fra la soddisfazione e la nostalgia, una punta di panico a pungergli le piante dei piedi...

Un po' è così che mi sento anch'io, dopotutto non ho quasi mai fatto altro che studiare... lo so, non ho conquistato le terre emerse, e non mi mancano certo gli impegni per il futuro, ma sto pur sempre lasciandomi alle spalle una vita in cui mi sono sistemata comodamente. Percepisco come così naturale il mio status di studentessa, che fa uno strano effetto rendersi conto di cosa significhi essere a due passi dalla laurea soprattutto guardando le facce degli altri, con quel misto di solidarietà, benevola compassione e un po' di diffidenza dovuta forse alla palpebra ballerina e alla pettinatura leonina, sintomi di n notti consecutive trascorse al computer. Devo ancora abituarli all'idea che a breve, dopo essere stata Fedeperfetta, Valenæ, Jessica, ecc sarò anche *Ing!*

E quindi... vai coi ringraziamenti! Non sono una formalità, sento davvero di dover molto a molti, in primis ai miei genitori, i famosi Fuchi, che in tutti questi anni hanno supportata & sopportata, anche se molto probabilmente l'idea di una figlia *Ing* li lascia piuttosto perplessi... Però è bello realizzare che nonostante tutto hanno fatto propri i miei sogni, anche se magari è difficile trovare punti di incontro: giusto qualche giorno fa, curiosando fra i gradienti e gli jacobiani in modalità "viso di cemento", piuttosto che rimanere senza nulla da dire sono riusciti ad apprezzare la scala cromatica delle figure del capitolo 2...

Sono grata anche a tutti coloro che mi hanno seguita per questo lavoro di tesi, soprattutto il mio relatore, ufficialmente noto come il professionale prof. Persico, in realtà colui che, dotato di infinita pazienza, ha assecondato le mie follie in questi mesi e reso piacevole il lavoro. Ringrazio anche il prof. Dossena, che con il corso di "Macchine e sistemi energetici" di ormai quattro anni fa mi ha fatto scoprire e apprezzare il mondo delle macchine a fluido, e il prof. Osnaghi, che a "Turbo-macchine" ha completato l'opera, ma anche tutti gli insegnanti, passati e futuri (*blink!*) che mi hanno trasmesso la loro cultura e fatta appassionare allo studio. Mao ha detto: "Trova un lavoro che ti piace e non lavorerai un solo giorno in vita tua": proprio gratis non è stato, ma non mi posso lamentare!

E come dimenticare tutta la mia numerosa famiglia? Senza i loro continui stimoli la mia vita non sarebbe la stessa! Davvero grazie alle mie sorelle, Aurora (mia inconsapevole consulente estetica... dovrò a lei se non discuterò la tesi in infradito!) e Diletta (cui devo la revisione della grammatica di questo lavoro... non offenderti se però lascio a qualcun altro quella inglese!), elementi di continuità al

di là di tutto, anche quando, in perfetto accordo alla definizione di affetto fraterno, ci caveremmo volentieri gli occhi a vicenda... E grazie anche ai miei nonni Giorgio, Rosa, Lucia e Gianni, ai miei zii e cugini, ai loro zii e cugini e agli zii e cugini di questi ultimi, insomma a quei pochi intimi con cui si passa abitualmente il Natale in casa Vignati... non offendetevi se non vi cito tutti, ma devo restare entro le 150 pagine! *Tuttavia, per una descrizione completa si rimanda all'appendice Z, che riporta nomi, età e gradi di parentela. È inoltre attualmente in fase di sviluppo, nonchè possibile oggetto di un altrui lavoro di tesi, l'implementazione di un applicativo che aggiorna automaticamente l'ingresso nel dominio "famiglia", allo stabile ritmo di uno all'anno, di nuovi elementi...*

Ma soprattutto grazie ai miei amici, compagni di avventura, continue fonti di allegria e incoraggiamento: sono fortunata ad avervi al mio fianco, a poter contare su di voi anche quando gli impegni e le distanze ci tengono lontani. Grazie al gruppo storico: Squizzo, Guarny, Giovanna, Terence (sperando che nominarlo non mi porti sfortuna), Fungo, Sara, Alex, il principe Giorgio, per cui non occorrono altre parole (e visto che questa pagina è in un documento pubblico, forse è meglio così!), e ad Annamaria... ci pensi? Ci conosciamo da 20 anni! Un abbraccio va anche a chi ha affrontato con me gli anni dell'università, è anche grazie a voi se sono stata così bene: Christian, Pisa, Tricchio, Simona, un imprecisato numero di Andrei, Luchi, Stefani e Marchi, Sidita, Giorgio, Dario, Ilaria e via via fino a Lele e agli altri dei primi anni... Penso anche ai giocatori di *D&D* del venerdì sera e alla cricca di Legnano e dintorni, ospiti e volontari CSG inclusi (per le serate in cui, garantito, l'incidenza è l'ultimo dei miei pensieri!), in particolare a Bonny, divenuto inconsapevolmente determinante per la discussione della tesi avendomi posta, nell'epica autogestione del 2002, di fronte alla consapevolezza che è il caso di esercitarmi parecchio se voglio esporre in pubblico! È stato bello scoprire che anche le *new entries* sono subito diventate importanti: mi riferisco ai ragazzi con cui ho condiviso il mio *cm²* di Politecnico nei mesi della tesi: Luca, Francesco, Damiano, Lino, i *tatini*, Christian, Pietro, *quelli del pranzo del giovedì*, l'altro acquario, il mio alter-ego maschile Andrea (che ai tempi mi introdusse ai segreti di quella cosa misteriosa chiamata *strato limite...*). Mi è piaciuto condividere con voi i momenti impegnativi, quelli drammatici (in cui l'entropia diminuiva), quelli divertenti (*ping-pong rulez!*) e le giornate di lavoro. Certo però che per equità, se cito i compagni delle mie giornate, non posso trascurare chi era al mio fianco nelle sere (e ultimamente notti – per la cronaca sono le ore 05.19) di lavoro: il mio esercito di gatti, la Nutella, il cactus che nonostante tutto continua a sopravvivere sulla mia scrivania, chi ha cantato dal pc per tenermi sveglia (illusi musicisti dei tempi moderni, come potevano inseguire il mito dell'autodistruzione senza essere iscritti a ingegneria?), la caffeina, la coperta rossa,... e vai col delirio!

Infine grazie a Federico: tre anni di grazie, il resto lo sai tu...

Aiuto, il margine della pagina si avvicina! Quindi facciamo così:

```
do (j=1,n_tot amici) print*, 'GRAZIE A TUTTI!' enddo
```

.....

Indice

Introduzione	1
1 Modello Matematico	5
1.1 Equazioni di moto	6
1.2 Assialsimmetria e periodicità	14
1.3 Chiusura del sistema	19
1.4 Trattamento dei termini di sorgente	19
2 Nuova soluzione per il trattamento di incidenza	31
2.1 Criticità della trattazione bidimensionale - assialsimmetrica nel calcolo dell'incidenza	32
2.2 Soluzioni esplorate	33
2.3 Trattamento di incidenza: equazioni	40
2.4 Risultati applicativi	49
3 Modellazione del termine dissipativo	55
3.1 Espressione della forza	55
3.2 Correlazioni di perdita	59

3.3	Deduzione dei termini di sorgente dissipativi	65
3.4	Gradiente di entropia al bordo: orlatura su tutto il dominio e modellazione dello strato limite	79
3.5	Esempio di calcolo non viscoso dissipativo	88
4	Risultati e possibili sviluppi futuri	93
4.1	Breve dettaglio sugli aspetti numerici	93
4.2	Risultati	96
4.3	Possibili sviluppi futuri	111
	Conclusioni	115
	Bibliografia	117
A	Generalità sugli operatori differenziali	A-1
A.1	Operatori differenziali cartesiani e loro interpretazione fisica .	A-1
A.2	Teoremi di trasformazione	A-4
B	Operatori differenziali in coordinate cilindriche	B-1
C	Formulazioni alternative del principio di conservazione della quantità di moto	C-1
C.1	Equazioni di Navier-Stokes	C-1
C.2	Equazione di Crocco	C-2
D	Complementi sulle derivate termodinamiche	D-1

Elenco delle figure

1.1	<i>Superfici salienti nella teoria di Wu</i>	17
1.2	<i>Profilo nel piano ($x-\theta$)</i>	21
1.3	<i>Esempio di evoluzione della rigidità durante il time-marching</i>	25
1.4	<i>Esempio di accoppiamento geometria – mesh che richiede l’u- tilizzo del metodo di immersed boundary: le celle più chiare vedono compresenza di entrambi i domini</i>	26
2.1	<i>Adattamento del flusso alla presenza di ostacoli: campo bi- dimensionale; campo tridimensionale; campo assialsimetri- co con swirl (le traiettorie modellate devono essere parallele anche quando nella realtà non potrebbero)</i>	33
2.2	<i>Principio di funzionamento del metodo di deformazione della geometria delle pale</i>	35
2.3	<i>Principio di funzionamento del metodo di indebolimento del vincolo</i>	36
2.4	<i>Principio di funzionamento del metodo di proiezione delle for- ze: la geometria resta invariata, ma si impone localmente la direzione d’azione della forza aerodinamica</i>	39
2.5	<i>Nuova definizione del vettore \mathbf{n} utile al trattamento di inci- denza: esso è disallineato rispetto al gradiente del vincolo, e non ha più modulo unitario</i>	41
2.6	<i>Grandezze geometriche e cinematiche utilizzate nel trattamen- to di incidenza</i>	42

2.7	<i>Dominio simulato</i>	50
2.8	<i>Risultato sullo statore a: in assenza di trattamento di incidenza; b: con trattamento attivo: la direzione del flusso è più graduale (la scala cromatica non abbraccia tutto il range di angoli ma è stata ridotta per apprezzare meglio la diversa ripartizione di incidenza)</i>	51
2.9	<i>Risultato sul rotore a: in assenza di trattamento di incidenza; b: con trattamento attivo: la direzione del flusso è più graduale</i>	51
2.10	<i>Distribuzione di entropia</i>	52
3.1	<i>Distribuzione dei nodi su una mesh meridiana</i>	67
3.2	<i>Funzioni di $x^{1/7}$ con e senza offset verso le ascisse negative</i> . .	85
3.3	<i>Restrizioni al campo di accettabilità della soluzione y_0</i>	87
3.4	<i>Distribuzione dell'entropia con perdite e trattamento di incidenza attivi</i>	89
3.5	<i>Distribuzione dell'entropia con sole perdite attive</i>	90
3.6	<i>Profilo di entropia senza l'aggiunta delle correlazioni a: con trattamento di incidenza attivo b: senza nessun intervento</i> . .	91
4.1	<i>Mesh (turbina Fanco Tosi)</i>	96
4.2	<i>Aspetto tridimensionale della palettatura Franco Tosi</i>	97
4.3	<i>Mach assoluto nel canale Tosi</i>	98
4.4	<i>Linee di flusso</i>	99
4.5	<i>Mesh a quadrilateri del ventilatore CBI</i>	101
4.6	<i>Andamento dell'entropia al diametro esterno</i>	102
4.7	<i>Profili di entropia del ventilatore CBI con trattamento di incidenza a perdite a: nulle; b: attivate</i>	103

4.8	<i>Profili di entropia del ventilatore CBI senza trattamento di incidenza a perdite a: nulle; b: attivate</i>	104
4.9	<i>Angolo relativo rispettivamente senza e con trattamento di incidenza attivato</i>	105
4.10	<i>Angolo assoluto rispettivamente senza e con trattamento di incidenza attivato</i>	105
4.11	<i>Confronto fra gli angoli fluidodinamici (relativo in blu; assoluto in verde) e quelli geometrici (in rosso) con trattamento di incidenza attivo; sezione di midspan</i>	106
4.12	<i>Confronto fra β_{fl} e β_{geo} sul rotore; $\frac{p_{out}}{p_{in}} = 1.015$</i>	107
4.13	<i>Confronto fra β_{fl} e β_{geo} sul bordo d'uscita del rotore</i>	108
4.14	<i>Confronto fra α_{fl} e α_{geo} sullo statore; $\frac{p_{out}}{p_{in}} = 1.045$</i>	109

Sommario

I codici CFD meridiani sfruttano l'ipotesi di flusso assialsimmetrico con swirl e riescono a fornire una descrizione del flusso accurata pur impostando un approccio bidimensionale al problema: ciò li rende uno strumento di progetto e di verifica di turbomacchine fondamentale, soprattutto in una fase preliminare, e vede una continua evoluzione rispetto ai primi metodi, fondati sull'equilibrio radiale e sulla *streamline curvature*. Una delle strategie ad oggi più seguite si basa sulla soluzione delle equazioni di Eulero instazionarie, perchè offrono il grande vantaggio di costituire un sistema differenziale iperbolico, valido in tutti i regimi: il comportamento a regime si ricava come soluzione asintotica.

Il limite principale dei modelli basati sulle equazioni di Eulero, tuttavia, reside nella modellazione dei termini di sorgente volti a simulare la palettatura (il cui effetto principale sul fluido è proprio in direzione tangenziale) e le dissipazioni (in assenza di uno specifico termine viscoso).

In questo lavoro viene presentato un modello innovativo per introdurre la forza aerodinamica della pala basato sulla riformulazione della condizione di tangenza: il profilo viene ora modellato come un vincolo elastico, che va ad allineare il flusso alla pala con un effetto tanto maggiore quanto più è alta la rigidità equivalente. Il duplice vantaggio è sia in termini di qualità del risultato, che dal punto di vista modellistico, poichè si può eliminare l'equazione associata al vincolo di tangenza, altrimenti indispensabile qualora non sia esplicitato il modulo della forza (ad esempio nei modelli che correlano solo la sua variazione temporale al grado di non soddisfacimento del vincolo). La direzione della forza, invece, viene alterata in corrispondenza del *leading edge* e del *trailing edge* per considerare l'incidenza e la deviazione, procedimento denominato *trattamento di incidenza*. La rigidità, nell'ottica di una maggior stabilità del metodo, viene progressivamente incrementata durante il *time-marching* (progresso temporale fittizio), fino a convergenza.

Il termine dissipativo è invece descritto grazie all'equazione di Crocco, che correla la forza dissipativa al gradiente di entropia, ricavabile da correlazioni empiriche tra cui Craig e Cox [1].

L'apparato numerico consiste in una griglia ibrida volumi finiti – elementi finiti e un metodo implicito per la discretizzazione temporale, implementati sul codice zFlow, già impiegato e validato.

Parole chiave: codice meridiano, turbomacchine, CFD, incidenza, vincolo elastico, dissipazioni

Abstract

By exploiting the hypothesis of axisymmetric swirling flow field, CFD through-flow codes can provide an accurate flow description, even formulating a two-dimensional approach to the problem: this makes of them a turbomachine design and analysis key-tool, especially during a preliminary stage. Moreover, these methods have been continuously evolving from the first ones, based upon radial equilibrium and streamline curvature, up to nowadays. One of the most widespread strategies consists on the solution of unsteady Euler equations, since they offer the great advantage of being a hyperbolic system of differential equations: this can be solved in all flow regimes and the steady solution may be simply found in the asymptotic one.

Nevertheless, the main limitation of Euler-based models is the possibility of providing a suitable definition of the source terms related to the blade (whose prime interaction with the flow rises along the tangential direction) and the losses, as the Euler equations are lacking of viscosity.

A novel method for simulating the aerodynamic force is presented here, and it's based upon a just new model of the tangency condition: the blade is described as an elastic constraint, which realizes the alignment between the flow and the blade, and that produces an effect as strong as the equivalent rigidity is. The double advantage lies in the quality both of the result and of the model itself, since there is no need of adding a further equation, the tangency condition one; in other models, which don't provide an explicit correlation between the force modulus and the constraint satisfaction degree, that's unavoidable, for instance if the condition involves only the rate of variation of the force. On the other hand, the blade force direction is modified at leading edge and trailing edge in order to consider incidence and deviation: this procedure is called *incidence treatment*. The rigidity, in order to improve the stability of the method, is little-by-little increased during the simulated time-marching, until convergence.

The loss term is simulated according to Crocco equation, that expresses the link between the viscous force and the entropy gradient; the latter comes from various sets of empirical correlations, such as Craig and Cox [1].

The numerical setup is an hybrid finite volumes – finite elements mesh and an implicit technique for the time step discretization; they are implemented on the zFlow code, already used and validated.

Key words: throughflow code, turbomachines, CFD, incidence, elastic constraint, losses

Introduzione

Le equazioni della fluidodinamica generiche presentano, ad eccezione di casi molto particolari, un'intrinseca non linearità che ne rende impossibile la soluzione per via analitica: è pertanto indispensabile lo sviluppo di tecniche numeriche.

Anche prescindendo dalla descrizione della turbolenza e degli effetti viscosi in generale, il campo di moto nelle turbomacchine risente di molti effetti tridimensionali: la soluzione proposta da Wu [2] prevede di abbandonare la modellazione 3D, pur possibile e diffusa anche se molto dispendiosa in termini di risorse di calcolo, e di studiare separatamente il flusso su tre superfici notevoli, dette S_1 o *blade-to-blade*, S_2 o *meridiana* e S_3 o *secondaria*, imponendo una condizione di periodicità circonferenziale fra i canali palari. Tale periodicità e la geometria delle turbomacchine permettono la formulazione dell'ipotesi di *assialsimmetria con swirl*, in cui non possono esserci variazioni in senso tangenziale delle grandezze; tale simmetria differisce dall'assialsimmetria pura perchè vincola solo le derivate, mentre le quantità vettoriali (forze, velocità, ...) continuano a possedere un componente lungo θ .

Si definisce quindi il sistema di riferimento in coordinate assialsimmetriche con swirl (m, n, θ) : m assume il significato di coordinata lungo la linea di flusso, di forma variabile con il raggio e l'asse ma costante in senso circonferenziale, e n è la normale punto per punto alle altre due coordinate. Le superfici assumono quindi i domini di analisi del flusso in condizioni rispettivamente di $(m, n = \bar{n}, \theta)$, $(m, n, \theta = \bar{\theta})$, e $(m = \bar{m}, n, \theta)$.

Un'analisi lungo la superficie meridiana è sicuramente molto vantaggiosa, perchè consente di carpire i fenomeni di trasporto (ovvero che avvengono nella direzione principale di flusso), gli effetti dell'equilibrio radiale, delle interazioni con pareti solide qualora la modellazione lo preveda (strati limite) e dello sviluppo delle grandezze termodinamiche nella direzione del *mainstream*, il tutto senza dover ricorrere ad una simulazione tridimensionale, computazionalmente più pesante.

L'importante assunto alla base dei codici *throughflow* o meridiani è che la descrizione dei fenomeni che avvengono in direzione circonferenziale è l'unica che parrebbe perdersi di vista. Si sfrutta quindi nuovamente l'*assialsimmetria con swirl*, che mantiene il problema di fatto tridimensionale, ma ne fornisce una descrizione formalmente bidimensionale. Questa ipotesi non è esatta (basti pensare alle variazioni, indispensabili per il funzionamento delle macchine, fra *pressure side* e *suction side*), pertanto occorre operare una media in senso circonferenziale di tutte le grandezze termofluidodinamiche: le grandezze mediate sono ora costanti lungo θ .

In corrispondenza delle schiere è poi necessaria una condizione ausiliaria: anziché descrivere la deflessione e la contrazione della sezione disponibile causata dallo spessore delle pale, che richiederebbero proprio una formulazione lungo θ , si appropria il problema di dinamica inversa, calcolando piuttosto la forza aerodinamica in grado di imporre una determinata direzione al flusso.

Il presente lavoro, è focalizzato sulla modellazione e sull'implementazione di un codice di fluidodinamica computazionale (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) applicato alla simulazione delle turbomacchine basato sull'analisi del flusso nella superficie meridiana. È stata sviluppata in particolare la modellazione di due termini di sorgente: uno associato alla forza aerodinamica, l'altro alle dissipazioni, le cui criticità sono mutuamente influenti.

Infatti, sebbene l'efficacia e l'efficienza dei codici *throughflow* siano state comprovate negli ultimi sessant'anni, ci sono ancora dei limiti all'applicazione dei metodi classici, soprattutto nella simulazione dei fenomeni caratteristici dei flussi transonici.

Si è assistito all'evoluzione, a partire da codici basati sull'equilibrio radiale semplice, fino a quelli fondati sul *channel method* e sul *streamline curvature method*: entrambi ricercano iterativamente nel piano meridiano alcune linee di flusso, il primo limitandosi a risolvere le equazioni negli *annulus*, il secondo addentrandosi anche nei canali palari; di fatto affrontano il problema ricercando i profili dei tubi di flusso sui quali viene rispettato il bilancio di massa in accordo con le altre equazioni.

Questi metodi, tutt'oggi utilizzati, sono rimasti preponderanti fino all'avvento della CFD (anni '70) che, basata principalmente su metodi con elementi o volumi finiti, ha permesso l'utilizzo delle equazioni di Navier-Stokes o di Eulero, e un decisivo salto di qualità nella simulazione soprattutto dei flussi viscosi e transonici.

Queste ultime in particolare sono le più utilizzate in virtù della loro maggior semplicità e della natura iperbolica, e in letteratura si trovano numerosi esempi di codici raffinati che le sfruttano: in particolare si trovano accoppiamenti dei *throughflow* euleriani a modelli localmente monodimensio-

nali (Escuret e Garnier [3], 1994), *blade-to-blade* (Spurr[4], 1980), 3D viscosi (Dawes[5], 1992) o integrati alle correlazioni (Koiro *et al.*[6], 1999), e codici ibridi Eulero – Navier-Stokes (Yao e Hirsch[7], 1995). Damle, Dand e Reddy[8] (1997) si sono limitati all'utilizzo del modello euleriano, analizzando però le potenzialità a tutti i regimi di flusso. Come sottolineato da Denton e Dawes[9] (1999) e Horlock[10] *et al.* (2005), l'analisi meridiana costituisce uno strumento preliminare di verifica e di progetto fondamentale.

Il limite dei codici basati sulle equazioni di Eulero e di Navier-Stokes è principalmente legato ad un'accurata modellazione dei termini di sorgente: da un lato le prime sono fortemente legate a correlazioni sperimentali per la modellazione delle perdite fluidodinamiche, dall'altro entrambe necessitano di imporre un vincolo forte (teoricamente di rigidità infinita) ad un problema tempo-evolutivo con condizione iniziale stimata ma non nota.

La trattazione di Simon[11] (2007) approccia entrambe queste limitazioni introducendo un modello di solutore Navier-Stokes di ordine elevato (basato su una serie di medie, non solo in senso circonferenziale, che permette di ottimizzare anche la trattazione viscosa), dall'altro concentrandosi sul miglioramento della definizione del modulo della forza aerodinamica, responsabile sia della stabilità che della qualità del risultato proposto dal codice. Simon introduce una formulazione evolutiva della forza aerodinamica (teoricamente imposta dalla palettatura sulla superficie *blade-to-blade*), correlata al grado di soddisfacimento della condizione di tangenza fra fluido e pala, introducendo già un effetto stabilizzante rispetto al lavoro di Baralon[12], che si era concentrato sulla sola componente tangenziale. L'evoluzione sperimentata in questa tesi prevede di correlare direttamente la forza al grado di non soddisfacimento della condizione di tangenza, con risultati illustrati in seguito.

Questa tesi è articolata in quattro capitoli: nel primo viene presentato il modello matematico del problema, basato sulle equazioni di Eulero *quasi omogenee* (in cui gli unici termini di sorgente sono quelli dovuti al sistema di riferimento cilindrico), inviscide e comprimibili, ricavate secondo l'approccio euleriano alla descrizione di un continuo deformabile in condizioni di moto assialsimmetriche. Tali equazioni vengono poi adattate alla descrizione del flusso nelle turbomacchine tramite l'introduzione di tre ulteriori termini di sorgente volti a modellare gli effetti rispettivamente aerodinamico, dissipativo e di ingombro delle pale: in particolare, i primi due effetti sono modellati con un approccio innovativo.

Il secondo capitolo analizza nel dettaglio la soluzione adottata per la modellazione efficace dell'effetto aerodinamico della pala, vera criticità del calcolo *throughflow*. Infatti la condizione di tangenza, e di conseguenza la

direzione della forza aerodinamica, prettamente normale alla superficie della pala e quindi alla velocità relativa di parete, è descritta da un'equazione non evolutiva, che mal si adatta ad integrarsi con il modello *time-marching* con cui sono risolte le altre equazioni di governo. Si è scelto quindi di imporre la direzione della forza normale alla superficie della pala, e di esprimere il suo modulo in proporzione al *grado di non soddisfacimento* del campo di velocità del fluido nei confronti del vincolo costituito dalla pala. Questa soluzione, analoga alla tecnica dell'*immersed boundary* usata in CFD, permette allo stesso tempo di omettere l'ulteriore equazione altrimenti necessaria a definire la *condizione di tangenza* del fluido sulla superficie della pala, ma anche di stabilizzare il metodo numerico, irrigidendo progressivamente il vincolo durante il *time-marching* computazionale.

È stata in seguito attuata una miglioria a tale espressione della forza, per evitare sia che il codice interpretasse la rigidità finita del vincolo come un grado di libertà aggiuntivo, sia che la presenza della pala fosse percepita senza continuità anche in regime fortemente subsonico, siccome su S_2 il fluido non percepisce l'ostacolo tramite un Δv_θ ; infine è stata introdotta la deviazione al *trailing edge* sfruttando la stessa strategia impiegata per l'incidenza. Tale correzione è stata denominata *trattamento di incidenza*.

Il terzo capitolo prende in considerazione l'effetto delle perdite fluidodinamiche senza addentrarsi in una descrizione viscosa, ma introducendo delle forze di volume proporzionali al gradiente di entropia stimato attraverso i canali palari. Il gradiente di entropia è stato ricavato dalle perdite di pressione totale fornite da svariati set di correlazioni ampiamente accettate.

Il quarto capitolo presenta tre risultati del funzionamento del nuovo codice dotato delle due innovazioni presentate nei capitoli precedenti. Oltre ad uno stadio di turbina con funzione didattica, vengono analizzati due casi: il primo è uno stadio di ventilatore assiale, il secondo un canale di turbina di bassa pressione con forte svergolatura delle pale e flaring marcato. Nel presentare i risultati, vengono sottolineati i miglioramenti apportati ai risultati ottenuti con il codice arricchito del trattamento di incidenza e delle dissipazioni rispetto a quello base.

Infine le conclusioni illustrano i possibili sviluppi futuri del codice, nell'ottica della modellazione di gas soggetti a scambio termico, di analisi di sensitività al funzionamento off-design delle macchine o di una descrizione completa, comprensiva della viscosità.

Capitolo 1

Modello Matematico

L'approccio generale alla risoluzione di un problema di fluidodinamica si basa sull'impostazione di bilanci di alcune grandezze fisiche. Successive ipotesi riguardanti la geometria, la tipologia di fluido, le condizioni del flusso o il peso relativo dei vari termini porteranno alla formulazione definitiva delle equazioni di governo del modello matematico del sistema. Tali equazioni differenziali generalmente non possiedono una soluzione in forma chiusa, ma la loro struttura porta già a stabilire a priori il tipo di condizioni, iniziali o al contorno, da imporre per definire univocamente la tipologia di problema.

Nel caso del presente lavoro, la geometria delle turbomacchine comporta la presenza di complessi effetti tridimensionali, che apportano una difficoltà di modellazione aggiuntiva dovuta: si rendono quindi necessarie alcune ipotesi sulla natura del fluido, nonché sul suo comportamento in prima approssimazione. Si assume in questo caso di lavorare con un fluido inviscido, comprimibile e ascrivibile alla categoria del gas perfetti; ciò non esclude a priori l'applicabilità del codice a macchine che elaborano altri fluidi, poichè la generalizzazione interesserebbe solo quegli aspetti in cui si entra nel merito delle equazioni di stato. L'evoluzione del flusso in un canale palettato presenta componenti di velocità sicuramente tridimensionali, ma dotate di periodicità rispetto alla direzione circonferenziale. Nell'ottica di ricercare un modello semplificato del flusso, e quindi di una risoluzione più veloce, si può sfruttare tale periodicità estremizzandola fino a considerare il flusso assial-simmetrico (seppure con componenti di swirl).

Tutti i simboli differenziali, la loro espressione in diversi sistemi di riferimento e l'eventuale significato fisico sono riportati nelle appendici A e B.

1.1 Equazioni di moto

1.1.1 Ipotesi di modellazione

Innanzitutto occorre scegliere se seguire l'approccio Euleriano o Lagrangiano; il primo prevede di esplicitare i bilanci su di un volume finito e determinato, detto volume di controllo, e ben si presta alla descrizione globale di un modello continuo. Nel secondo approccio, viceversa, l'osservatore si pone solidale all'oggetto della modellazione (una particella fluida, in questo caso) e ne segue l'evoluzione lungo la sua traiettoria, descrivendo perciò il moto locale rispetto ad una terna fissa, di riferimento nel sistema relativo della particella: questa procedura è più adatta alla descrizione di un sistema discreto, in cui le interazioni fra i corpi sono ben identificabili.

Nella maggior parte dei problemi di fluidodinamica tradizionale, quale quello in esame, il libero cammino medio delle particelle è trascurabile rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema, proprietà che identifica i fluidi come mezzi continui, descrivibili con un approccio Euleriano; in caso contrario i principi della dinamica, esplicitabili con facilità per la singola particella, andrebbero poi integrati su tutto il volume, con evidenti difficoltà di modellazione delle interazioni fra le particelle se non si vuole ricorrere a una trattazione statistica.

Pertanto si impostano i bilanci sul volume di controllo, che discendono dall'applicazione di quattro principi fisici ai mezzi continui:

1. Conservazione della massa (*Equazione di Continuità*)
2. Teorema della quantità di moto (*Secondo principio della Dinamica*)
3. Teorema del momento della quantità di moto
4. Conservazione dell'energia (*Primo principio della Termodinamica per sistemi fluenti*)

Tali principi si formalizzano ricorrendo alla derivata di una funzione composta $z(u(v), v)$: la derivata esprime la variazione della funzione z , dipendente, rispetto alla variabile completamente indipendente v , e si costruisce come rapporto degli incrementi virtuali delle due variabili. Fisicamente nella formulazione euleriana il tempo è la variabile indipendente perchè lo spazio occupato dal fluido, istante per istante, si trasforma seguendo il movimento

del fluido stesso, e lo spazio \mathbf{x} diviene dunque la variabile intermedia ($u(v)$, nell'esempio):

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \cdot dt \quad (1.1)$$

da cui la variazione temporale totale si esprime, dividendo ambo i membri per dt , come

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi \quad (1.2)$$

È utile introdurre il *Teorema del trasporto*, che verrà impiegato per la stesura delle cinque equazioni di governo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \phi \cdot d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega(t)} \nabla(\phi\mathbf{v}) d\Omega \quad (1.3)$$

Di questo teorema non si riporta la dimostrazione completa, tuttavia in appendice A si trova un esempio applicato al bilancio di massa che ne verifica la correttezza.

1.1.2 Conservazione della massa

L'equazione di Continuità afferma che, scelto un volume di controllo Ω , la sua massa m debba conservarsi, ovvero che $\frac{dm}{dt} = 0$. Se ρ è la densità, in virtù del Teorema del trasporto,

$$m = \int_{\Omega(t)} \rho \cdot d\Omega \quad (1.4)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \cdot d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial\rho}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega(t)} \nabla(\rho\mathbf{v}) \cdot d\Omega \quad (1.5)$$

Se la soluzione è una funzione di classe almeno \mathcal{C}^1 , la (1.5) vale a prescindere dal volume di controllo, pertanto deve essere identicamente nulla proprio la funzione integranda: la (1.6) è l'espressione dell'equazione di Continuità valida a livello locale.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (1.6)$$

Applicando invece il teorema della divergenza (appendice A) alla (??), si esplicita l'equazione di conservazione della massa nella *forma ai flussi*

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{S=\partial^+\Omega(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = 0 \quad (1.7)$$

che evidenzia come, se una data massa deve mantenersi costante nel tempo, una variazione instazionaria della densità contenuta nel volume di controllo va compensata con un flusso attraverso le pareti stesse $S = \partial^+\Omega$ del dominio, identificate dal versore \mathbf{n} uscente.

1.1.3 Conservazione della quantità di moto

Il secondo principio della dinamica sancisce il legame fra le forze applicate ad un sistema e il loro effetto sulla cinematica:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad (1.8)$$

Attraverso l'espressione della quantità di moto $m \cdot \mathbf{v}$, si giunge a:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \mathbf{a} \quad (1.9)$$

che grazie all'ipotesi di continuità annulla il primo addendo del membro di destra, riconducendolo a quello di (1.8). Nello specifico,

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega(t)} \mathbf{f} \cdot d\Omega = \int_{\Omega(t)} \mathbf{f}_{vol} \cdot d\Omega + \int_{S(t)} \mathbf{f}_{sup} \cdot dS \quad (1.10)$$

Le forze di volume sono costituite sia da sforzi interni, in equilibrio fra loro per il terzo principio della dinamica, sia da forze esterne, come il peso, mentre le forze di superficie sono riconducibili ai soli sforzi agenti sul contorno;

$$\mathbf{f}_{sup} = \boldsymbol{\sigma}_n = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} \quad (1.11)$$

è utile scomporre tale tensore degli sforzi $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ nelle sue componenti idrostatica e deviatorica:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.12)$$

Questo evidenzia la definizione della pressione p come $\frac{1}{3} \cdot \sum_{i,j=1,3} (\sigma_{ij} \cdot \delta_{ij})$, dove δ_{ij} è la funzione δ di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases} \quad (1.13)$$

Proprietà fondamentale di p è che agisce sempre in direzione parallela alla normale entrante alla superficie locale dS del dominio. Viceversa $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ è detto *extratensore deviatorico degli sforzi* e contiene sicuramente gli sforzi giacenti sulla superficie dS , ma anche quelli ad essa normali, complementari di p alle componenti σ_{ii} ; la modellazione di $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ è oggetto dell'appendice C, e dipende fortemente dalle ipotesi fatte circa la reologia del fluido.

Prescindendo ora dall'esplicitare i termini deviatorici, si procede in analogia a quanto fatto per la conservazione della massa:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (\rho\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{d(\rho\mathbf{v})}{dt} \cdot d\Omega + \int_{\Omega(t)} \rho\mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \left[\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right] + (\rho\mathbf{v}) \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \right\} \cdot d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \left[\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right] + \nabla(\rho\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right\} \cdot d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v}) \right] \cdot d\Omega \tag{1.14}
 \end{aligned}$$

Tale termine va eguagliato alle forze esterne

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_{\Omega(t)} \mathbf{f}_{\text{vol}} \cdot d\Omega + \int_{S(t)} (-p\underline{\mathbf{I}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{n} dS = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \mathbf{f}_{\text{vol}} \cdot d\Omega + \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot (-p\underline{\mathbf{I}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}) d\Omega \tag{1.15}
 \end{aligned}$$

ottenendo così

$$\int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{f}_{\text{vol}} + \nabla \cdot (p\underline{\mathbf{I}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}) \right] \cdot d\Omega = 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v} + p) = \mathbf{f}_{\text{vol}} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \tag{1.17}$$

1.1.4 Conservazione del momento della quantità di moto

L'esistenza di p nei termini sopra descritti, ovvero come invariante rispetto all'orientazione del sistema di riferimento, è garantita dall'aver scelto di modellare la distribuzione degli sforzi secondo il modello di Cauchy: la

conseguenza più immediata è che il tensore risultante, di dimensioni 3×3 del second'ordine, possiede traccia costante, ovvero non modifica $\sum_{i=1,3} \sigma_{ii}$.

La modellazione del comportamento della massa fluida come un continuo di Cauchy porta anche ad imporre che su particelle fluide di dimensioni infinitesime possano permanere delle forze interne (il termine $\rho \mathbf{f}$ della (1.17)), come ad esempio la forza peso, ma non delle coppie, che devono necessariamente annullarsi.

Il principio di conservazione del momento della quantità di moto asserisce che la derivata temporale di quest'ultimo uguaglia la risultante dei momenti esterni. La formulazione è analoga a quella riportata al paragrafo 1.1.3 e porta a concludere che il tensore degli sforzi deve essere simmetrico per bilanciare gli sforzi di taglio sull'elemento infinitesimo.

1.1.5 Conservazione dell'energia

Il principio di conservazione dell'energia impone che la variazione nel tempo dell'energia globalmente presente nel sistema sia bilanciata dai flussi attraverso le pareti del dominio. Alla definizione di energia totale E_t del sistema, funzione di stato, contribuiscono principalmente tre addendi:

1. l'energia interna $\int_{\Omega(t)} \rho e \cdot d\Omega$, microscopicamente dovuta, nel caso dei gas ideali, all'energia di agitazione molecolare, e macroscopicamente correlata alla temperatura T
2. il termine cinetico macroscopico $\int_{\Omega(t)} \rho \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \cdot d\Omega$
3. il potenziale geodetico $\int_{\Omega(t)} \rho g z \cdot d\Omega$

$$E_t = \int_{\Omega(t)} \rho \cdot \left(e + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} + gz \right) \cdot d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho \cdot (e_t + gz) \cdot d\Omega \quad (1.18)$$

Le grandezze fluenti invece, dipendenti dalla tipologia di trasformazione, si distinguono fra potenza meccanica e termica

$$\frac{dE_t}{dt} = \dot{L} + \dot{Q} \quad (1.19)$$

Sfruttando la (1.2), si espande l'espressione di ciascun termine:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_t}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho e_t \cdot d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{d\rho e_t}{dt} d\Omega + \int_{\Omega(t)} \rho e_t \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega(t)} \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho e_t) \cdot d\Omega + \int_{\Omega(t)} \rho e_t \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega(t)} [\mathbf{v} \cdot \nabla(\rho e_t) + \rho e_t \nabla \cdot \mathbf{v}] d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \mathbf{v}) \right] d\Omega
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{L} &= \int_{S(t)} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS = \int_{S(t)} (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \cdot dS \\
 &= \int_{S(t)} (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \cdot dS - \int_{S(t)} (p \underline{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \cdot dS = \\
 &= \int_{S(t)} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS - \int_{S(t)} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \cdot dS = \\
 &= \int_{S(t)} (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS - \int_{S(t)} (p \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

ma anche, definendo rispettivamente i domini S_p , S_f e S_m come le pareti fisiche, le superfici attraversate dal flusso per entrare nel dominio e quelle su cui avviene lo scambio energetico con la macchina (la palettatura):

$$\begin{aligned}
 \dot{L} &= \int_{S(t)} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS = \\
 &= \int_{S_p} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS + \int_{S_f} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS + \int_{S_m} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS = \\
 &= \underbrace{\int_{S_f} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \cdot dS}_{\dot{L}_p} + \underbrace{\int_{S_f} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS}_{\dot{L}_\tau} + \underbrace{\int_{S_m} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} \cdot dS}_{\dot{L}_m}
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\dot{Q} = \int_{S(t)} -\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \tag{1.23}$$

con $\dot{\mathbf{q}}$ flusso di potenza termica; quest'ultimo termine è di regola irrisorio nelle turbomacchine, e verrà di seguito omissa. Il termine di potenza meccanica

\dot{L}_p è detto lavoro di pulsione. Si può evidenziare l'entalpia $h = e + \frac{p}{\rho}$, il che permette di riscrivere la formulazione finale del principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v} \cdot h_t) = \nabla \cdot \dot{q} + \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}) + \dot{l} \quad (1.24)$$

dove \dot{l} rappresenta il lavoro scambiato fra il flusso e la superficie della pala.

Il lavoro degli sforzi viscosi non coincide interamente con la potenza dissipata, dal momento che una quota a parte di esso serve alle particelle per svolgere un'azione di trascinamento su quelle adiacenti, e rimane quindi presente nel sistema sotto forma di termine meccanico anzichè dissipativo.

1.1.6 Equazioni di Eulero

Le equazioni (1.6), (1.17), (1.24) e le ipotesi introdotte nel paragrafo 1.1.4 sono valide per la modellazione di qualsiasi sistema fluido che si comporti come un continuo di Cauchy; nella realtà però appare evidente che la risposta dei fluidi alle sollecitazioni di taglio è molto variabile, ed è principalmente questo il fattore di distinzione fra le varie categorie.

Nelle turbomacchine evolvono in ogni caso fluidi *newtoniani*, in cui cioè il legame fra gli sforzi deviatorici e la velocità di deformazione, rappresentata dal tensore $\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^T}{2}$, è lineare e isotropo attraverso la viscosità μ :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \mu \cdot \left[\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (1.25)$$

Questa modellazione porta alla riscrittura della (1.17) nella forma delle *equazioni di Navier Stokes* (appendice C.1).

In questo approccio alla risoluzione del flusso nelle turbomacchine, si riterranno trascurabili gli effetti della viscosità, annullando la componente deviatorica di $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ e il suo effetto su \dot{l} , per ricondurre la (1.17) alla forma più semplice:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho e_t \\ \rho \mathbf{v} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \cdot h_t \\ \rho(\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v}) + p \underline{\mathbf{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q} \\ \mathbf{f}_{\text{vol}} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Il termine \dot{q} nella maggior parte dei casi è trascurabile per le turbomacchine, per quanto siano presenti nella realtà impiantistica casi in cui il flusso termico è desiderato (ad esempio per il raffreddamento delle pale di turbina a

gas di alta pressione); in questa trattazione, viste le potenzialità attuali del software e i casi in cui è stato validato (si veda il capitolo 4) si ritiene di poter trascurare \dot{q} .

Un'ultima considerazione riguarda le forze di volume specifiche: in assenza di forze esterne, reazioni chimiche, nucleari o di attività elettromagnetica, l'unica altra forza cui sono sensibili le particelle è il peso proprio. In tal caso \mathbf{f}_{vol} assume la forma di $\rho \mathbf{g}$, dove \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità. La densità dei gas e vapori processati nelle macchine termiche è bassa, e pertanto tale termine è trascurabile rispetto agli altri; viceversa, pompe e turbine idrauliche elaborano fluidi a densità nettamente maggiore, ma in questo caso si può assumere che essa resti costante, e divengono lecite altre approssimazioni a scopo semplificativo.

A valle di tutte queste ipotesi, la formulazione definitiva, valida per fluidi inviscidi, comprimibili e non soggetti a forze esterne, delle equazioni del moto è la seguente

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho e_t \\ \rho \mathbf{v} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \cdot h_t \\ \rho(\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v}) + p \underline{\underline{\mathbf{I}}}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.27)$$

e prende il nome di set di *equazioni di Eulero*, riassumibile nella forma delle cosiddette *variabili conservative* \mathbf{q}

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (1.28)$$

$$\text{con } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho e_t \\ \rho \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \text{e } \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \cdot h_t \\ \rho(\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v}) + p \underline{\underline{\mathbf{I}}}} \end{bmatrix}$$

Questa forma sottolinea il concetto intuitivo secondo cui ad una variazione istazionaria $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$ di una generica variabile conservativa deve corrispondere un flusso attraverso le pareti del dominio $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathcal{B})$ per preservare il bilancio netto.

Si osservi infine come le equazioni, private del termine relativo alle forze di volume, risultino omogenee (peraltro lo sarebbero anche quelle viscosi).

Peraltro l'assenza di termini viscosi nelle equazioni di Eulero, se da un lato impedisce una modellazione integrata di tutti i fenomeni fluidodinamici, presenta il duplice vantaggio di:

1. costituire un sistema completamente iperbolico (a differenza del sistema Navier-Stokes che è misto parabolico - iperbolico);

2. accettare condizioni al contorno più semplici, quale l'adiabaticità e gestire meno fenomeni

il tutto con forti vantaggi dal punto di vista computazionale.

1.2 Assialsimmetria e periodicità

1.2.1 Assialsimmetria con swirl

Il presente modello è stato concepito per un'applicazione in campo delle turbomacchine: questa scelta porta ad orientarsi non solo su un certo tipo di fluido, ma anche su una descrizione geometrica intrinsecamente più idonea. Sorge spontaneo sfruttare l'assialsimmetria insita in una macchina di questo tipo, sebbene si renda necessaria una leggera correzione: infatti, dato un punto di una struttura perfettamente assialsimmetrica, è possibile ritrovarne le stesse proprietà in un altro punto che risulti da una sua rotazione di un angolo generico ζ intorno al centro della simmetria.

Nelle turbomacchine ζ non può variare con continuità, ma solo valere multipli del passo angolare: si parla allora di *condizione di periodicità*. Inoltre occorre specificare una peculiarità di questa relazione topologica nella sua versione turbomacchinistica: una definizione alternativa di assialsimmetria è che, dato un punto di una struttura perfettamente assialsimmetrica, è possibile ritrovarne le stesse proprietà in un altro punto che risulti da una sua riflessione rispetto ad un raggio qualsiasi. Unendo le due definizioni si ha

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{df}{d\theta} \Big|_{\theta^+} = \frac{df}{d\theta} \Big|_{\theta^-} & \text{per def.1} \\ \frac{df}{d\theta} \Big|_{\theta^+} = -\frac{df}{d\theta} \Big|_{\theta^-} & \text{per def.2} \end{array} \right. \implies \frac{df}{d\theta} \Big|_{\theta} = 0$$

e analogamente dovrebbe valere per le componenti dei vettori lungo la direzione tangenziale.

Se nello specifico si analizza il vettore velocità, è immediato vedere come l'ultima condizione non sia rispettata, dal momento che la componente tangenziale non solo è presente, ma è anche fondamentale per il funzionamento della macchina. Si preferisce quindi specificare che il corrente modello è caratterizzato da *assialsimmetria con swirl*, in cui il flusso può avere componenti tangenziali di velocità, ma non variazioni delle sue proprietà in tale

direzione.

Il moto di swirl in generale risulta dalla composizione di un moto traslatorio e di uno nel piano ad esso normale (il moto elicoidale ne è un esempio): in questo caso il flusso possiede una componente assiale, o *di portata* ed una tangenziale più, eventualmente, una radiale risultante dall'equilibrio radiale degli sforzi.

Un'importante conseguenza dell'ipotesi di assialsimmetria è che le pale possono essere rappresentate solo attraverso la loro linea media, o comunque attraverso un profilo cu cui si immagina che “collassi” la pala durante la media circonferenziale. Ciò comporterà conseguenze marcate nel momento in cui il flusso incidente è disallineato rispetto alla pala: nella realtà fisica sfrutterebbe anche il tratto iniziale del canale palare per ruotare deflettere fino alla direzione imposta, nel calcolo meridiano non è possibile gestire due direzioni diverse (geometrica e fluidodinamica nello stesso punto). Inoltre lo spessore delle pale, un parametro non trascurabile alla definizione del tipo di moto, richiede di essere inserito a parte come distanza, punto per punto, fra *suction side* e *pressure side* in senso tangenziale. Entrambi gli effetti verranno dettagliati più avanti: lo spessore viene discusso al termine di questo capitolo, per la soluzione al problema dell'incidenza si rimanda invece al capitolo 2.

1.2.2 Coordinate cilindriche

In seguito alle considerazioni svolte al punto precedente, appare più comodo descrivere il moto nelle turbomacchine in coordinate ortogonali cilindriche (x, r, θ) o assialsimmetriche (x, m, n) (dove m è la coordinata che segue la *streamline*, e n la normale ad essa): la scelta ricade sulle prime perchè sono note a priori.

L'espressione degli operatori differenziali in questo nuovo sistema di riferimento si trova in appendice B, mentre le equazioni assumono l'aspetto illustrato di seguito:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[r \begin{pmatrix} \rho \\ \rho e_t \\ \rho v_x \\ \rho v_r \\ \rho v_\theta \end{pmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[r \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x \cdot h_t \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_r \\ \rho v_x v_\theta \end{pmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \begin{pmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r \cdot h_t \\ \rho v_r v_x \\ \rho v_r^2 + p \\ \rho v_r v_\theta \end{pmatrix} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\begin{pmatrix} \rho v_\theta \\ \rho v_\theta \cdot h_t \\ \rho v_\theta v_x \\ \rho v_\theta v_r \\ \rho v_\theta^2 + p \end{pmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\rho v_\theta^2 + p) \\ \rho v_r v_\theta \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

oppure, nelle variabili conservative definite in (1.28)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[r \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[r \begin{pmatrix} q_3 \\ q_3 \cdot h_t \\ q_3^2/q_1 + p \\ q_3 q_4/q_1 \\ q_3 q_5/q_1 \end{pmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \cdot h_t \\ q_4 q_3/q_1 \\ q_4^2/q_1 + p \\ q_4 q_5/q_1 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\begin{pmatrix} q_5 \\ q_5 \cdot h_t \\ q_5 q_3/q_1 \\ q_5 q_4/q_1 \\ q_5^2/q_1 + p \end{pmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(q_5^2/q_1 + p) \\ q_4 q_5/q_1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Gli argomenti delle derivate sono tutti moltiplicati per r , ad eccezione di $\frac{\partial}{\partial \theta}$; l'interpretazione è duplice: si può ricondurre la presenza della r all'espressione dell'elementino generico di volume (si veda l'appendice B), che scompare quando si passa dai bilanci globali alla formulazione differenziale delle equazioni di Eulero, oppure si considera che le conclusioni tratte per le equazioni espresse in coordinate cartesiane devono valere (in quanto dettate dalla fisica) anche in coordinate cilindriche. In questo caso, per evitare di introdurre una singolarità in $r = 0$ occorre eliminare r dal denominatore delle equazioni, essendo tale singolarità dettata solo dalla parametrizzazione e non dalla fisica del fenomeno.

Tutte le considerazioni svolte in questa sezione sono la vera base del calcolo meridiano: l'assunto fondamentale prevede di seguire il flusso lungo la superficie *meridiana* o S_2 , data dall'involuppo delle *streamline*, o linee di flusso, lungo la direzione normale. Tale approccio, risalente ai modelli di Wu, si può integrare con gli altri due metodi bidimensionali (quelli basati sull'osservazione lungo le superfici *blade-to-blade* S_1 e *secondaria* S_3), al fine di ricavare una soluzione approssimata quasi 3D.

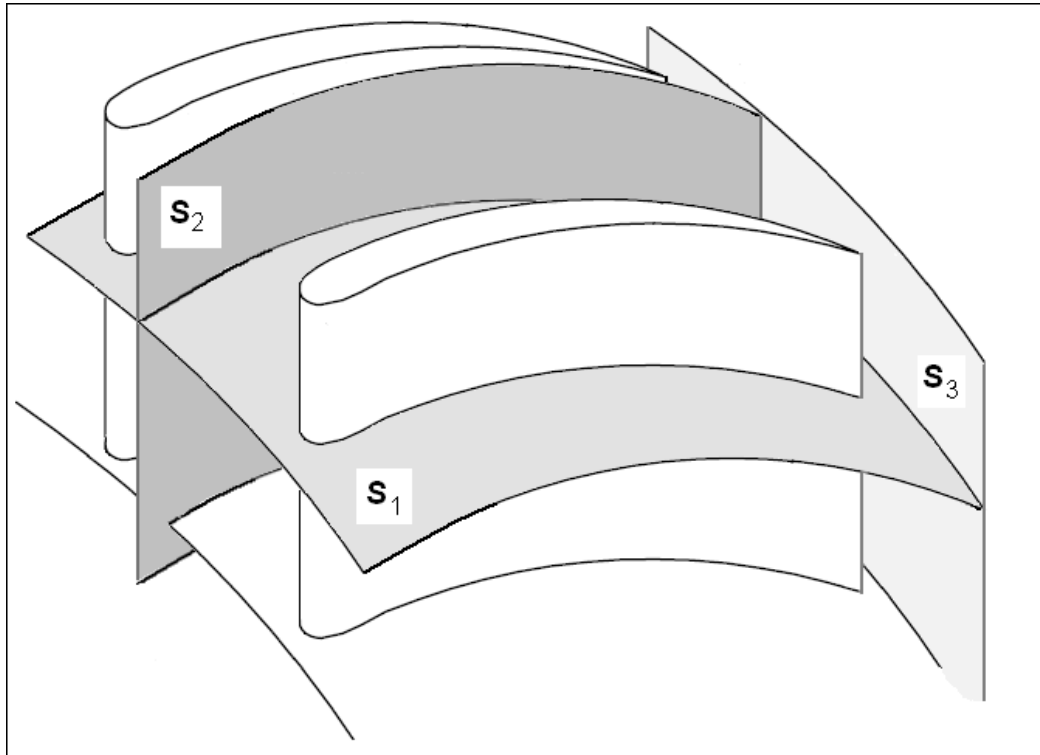


Figura 1.1: *Superfici salienti nella teoria di Wu*

La superficie S_2 risulta curva, a priori con diverse forme a seconda del valore di anomalia da cui far uscire la *streamline*, basti pensare alle diverse curvature seguite dal flusso a seconda che si trovi sul *pressure side* o sul *suction side* di una pala. Nell'ottica di semplificare il problema, ci si può ricondurre a una descrizione assialsimmetrica mediando tutte le grandezze cinematiche e termodinamiche lungo la direzione circonferenziale. Le loro derivate lungo tale direzione risultano pertanto identicamente nulle, e le equazioni si possono dunque scrivere come:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[r \begin{pmatrix} \rho \\ \rho e_t \\ \rho v_x \\ \rho v_r \\ \rho v_\theta \end{pmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[r \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x \cdot h_t \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_r \\ \rho v_x v_\theta \end{pmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \begin{pmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r \cdot h_t \\ \rho v_r v_x \\ \rho v_r^2 + p \\ \rho v_r v_\theta \end{pmatrix} \right] + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\rho v_\theta^2 + p) \\ \rho v_r v_\theta \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Questa formulazione evidenzia il grosso vantaggio offerto dal calcolo meridiano: si affronta un sistema differenziale dove le derivate parziali spaziali sono solo rispetto a due direzioni, mentre il problema rimane comunque tridimensionale.

Per via della conformazione del sistema di coordinate cilindriche, sorgono dei termini di sorgente anche in assenza di forze di volume: essi dovuti al fatto che le variabili spaziali in una terna cilindrica sono perpendicolari ma solo localmente, e non a livello globale. Quando si effettuano le derivate delle une rispetto alle altre variabili, emerge questa dipendenza relativa sotto forma di termini aggiuntivi: essi sono solo un effetto matematico, e non sono dei veri termini di sorgente da intendersi come “forzanti”.

Le vere forzanti verranno introdotte alla sezione 1.4, nel momento in cui si andranno a modellare le forze aerodinamica, dissipativa e la forza dovuta allo spessore delle pale.

1.3 Chiusura del sistema

In riferimento al sistema (1.31) e ai passaggi che hanno portato alla sua impostazione, il numero di equazioni non è bilanciato dal numero di incognite (ne compaiono nove: $v_x, v_r, v_\theta, p, \rho, e, h, e_t, h_t$).

In realtà si è provveduto a fornire il legame fra entalpia ed energia interna

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

e la definizione di entalpia totale o, equivalente, di energia totale

$$h_t = h + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}$$

$$e_t = e + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}$$

Le due equazioni rimanenti sono dettate dalla natura di fluido che viene fatto evolvere: in questo lavoro si assume che tutti i fluidi siano descrivibili dal modello di gas perfetto, ovvero che soddisfino contemporaneamente le ipotesi di

1. gas ideale: conforme all'equazione di stato $\frac{p}{\rho} = RT$; $c_v = c_v(T)$
2. gas ideale politropico: con calore specifico a volume costante c_v invariante con T , da cui si ha dipendenza lineare dell'energia interna rispetto alla temperatura $e = c_v T + k$.

I valori di R (costante dei gas) e di c_v sono noti in funzione del gas specifico, mentre k è una costante arbitraria (qui posta uguale a 0); il sistema non risulta sovradimensionato perchè, insieme all'ulteriore equazione, è stata introdotta anche la variabile T .

1.4 Trattamento dei termini di sorgente

L'ipotesi che permette di passare dal sistema (1.26) al (1.27) è, a meno delle perdite, valida negli *annulus*, ma non all'interno dei canali palari, dal momento che il fluido è soggetto ad uno scambio di forze con le pale. L'effetto principale di queste spinte è la deflessione, ovvero un cambiamento della

componente tangenziale del flusso, effetto che non può essere esplicitamente dichiarato sotto l'ipotesi di assialsimmetria con swirl. Il problema diviene quindi la necessità di esprimere un vincolo attivo lungo θ , vincolo non cinematico (deflessione imposta), ma dinamico (forza in grado di provocare la deflessione desiderata).

Di conseguenza, per modellare questa forza, occorre ricondursi al sistema (1.26) ed esplicitare il significato di \mathbf{f}_{vol} : esso raccoglie gli effetti del *lift*, del *drag*, ma anche del fattore geometrico "spessore delle pale". Per definizione i primi due termini agiscono in direzioni normali fra loro, e sono anche i più significativi: la forza scambiata fra fluido e paletta viene quindi modellata non nelle componenti assolute (x, r, θ) , ma secondo quelle del sistema intrinseco (t, n, b) , ed in seguito proiettata lungo le prime.

La terna locale si ottiene dall'espressione della superficie del vincolo in forma implicita: la linea media della pala sul piano *blade-to-blade* può essere espressa come

$$\theta_{\text{profilo}, r=\bar{r}} = \mathcal{G}_{\bar{r}}(x) \quad (1.32)$$

da cui, in generale, si ha

$$\theta_{\text{profilo}} = \mathcal{G}(x, r) \quad (1.33)$$

Risulta comodo esprimere tale funzione in forma implicita, ovvero come $g(x, r, \theta) = 0$, poichè il suo gradiente, opportunamente normalizzato, è il versore normale alla superficie (questo in virtù del significato fisico del gradiente, appendice A)

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{\left[-\frac{\partial g}{\partial x} \quad -\frac{\partial g}{\partial r} \quad +\frac{1}{r} \right]}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}}. \quad (1.34)$$

essendo

$$g(x, r, \theta) = \theta - \mathcal{G}(x, r) \quad (1.35)$$

Viceversa, il versore tangente è quello per definizione parallelo alla velocità, da cui

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \quad (1.36)$$

Come velocità si intende quella relativa \mathbf{w} poichè è quella che effettivamente deve seguire il percorso imposto dalla pala.

Il versore binormale non viene esplicitato, dal momento che non compare

nell'espressione di nessun termine di sorgente.

L'espressione delle forze aerodinamica e dissipativa assume quindi la forma

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B},\mathbf{D}} = \mathbf{B} + \mathbf{D}^* = B\mathbf{n} - D^*\mathbf{t} = B\mathbf{n} - (\rho D)\mathbf{t} \quad (1.37)$$

a cui si aggiungerà il termine di sorgente legato allo spessore delle pale, che però ha componenti in entrambe le direzioni normale e tangenziale, e sarà quindi oggetto di una trattazione a parte.

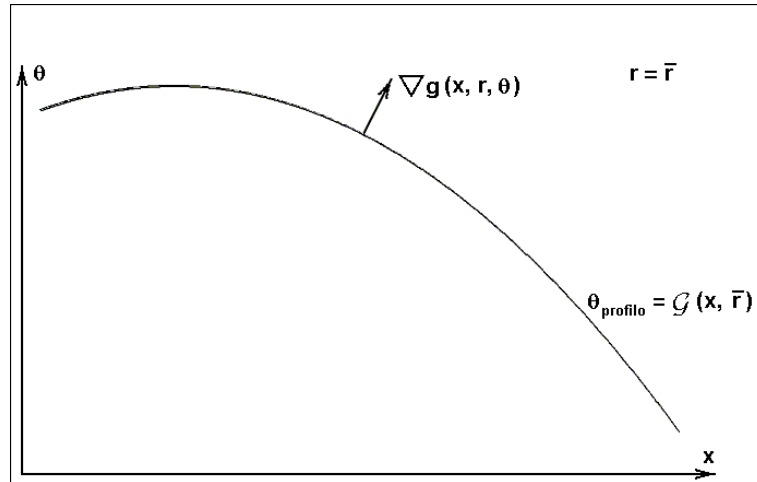


Figura 1.2: Profilo nel piano ($x-\theta$)

Nell'equazione (1.34), il gradiente conserva la sua componente di derivazione in direzione θ perchè va a rappresentare solo la componente circonferenziale del vettore normale che, come detto nella sezione 1.2.1, è ancora ammessa; peraltro la derivata è operata nel confronti del vincolo, un'entità geometrica, indipendente dall'ipotesi di assialsimmetria che ha effetti solo sulle grandezze trovate durante la soluzione.

1.4.1 Modellazione della forza aerodinamica

Il modulo della forza aerodinamica, normale alla pala, costituisce un'ulteriore incognita nelle equazioni di Eulero, dal momento che dipende in parte dalla soluzione. Il modo più immediato per provvedere alla chiusura del sistema consiste nel tornare ad imporre un vincolo cinematico, che agisca quindi

direttamente sulla direzione della velocità ma senza contraddire la condizione secondo cui $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$: si ricorre quindi alla *condizione di tangenza*, ovvero all'imporre che il profilo della pala sia impermeabile nei confronti del flusso

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.38)$$

Ciò si esplicita ricorrendo alle definizioni di cui sopra:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} &= [w_x \quad w_r \quad w_\theta]^T \cdot \left[-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \quad -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \quad +\frac{1}{r} \right] = \\ &= [v_x \quad v_r \quad v_\theta - \omega r]^T \cdot \left[-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \quad -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \quad +\frac{1}{r} \right] = \\ &= -v_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - v_r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + (v_\theta - \omega r) \frac{1}{r} = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

L'equazione

$$-v_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - v_r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} = \omega \quad (1.40)$$

risulta in questo approccio necessaria alla chiusura del sistema nel momento in cui si aggiunge l'effetto aerodinamico.

Tuttavia, se il sistema rimane scritto in questa forma, non solo non è più lecito esprimerlo nella forma ai flussi, ma cambia radicalmente la sua struttura, poichè l'equazione (1.40) non è evolutiva; i suoi termini continuano ad essere tempo-dipendenti, in primo luogo le velocità, ma l'assenza del termine instazionario rende il sistema risolvibile non più iperbolico, con alcune complicazioni risolutive.

1. La tecnica più immediata consiste nel sostituire la (1.40) con un'equazione evolutiva funzione della forza aerodinamica. Una delle prime strategie elaborate in questa direzione risale a Baralon *et al.*[12]: essa agisce direttamente sul termine critico, ovvero sulla componente tangenziale della forza, e correla la sua variazione temporale con il grado di non soddisfacimento del vincolo definito come $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$.

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = K \cdot (\rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.41)$$

K rappresenta il fattore di proporzionalità necessario sia a bilanciare dimensionalmente l'equazione (1.41) ($[K] = s^{-2}$), che a stabilire l'effettivo legame funzionale fra i termini.

2. Una soluzione alternativa, ma figlia della precedente, è stata sperimentata da Simon[11] nell'ottica di migliorare la convergenza del metodo. La differenza consiste nella proporzionalità fra il grado di non soddisfacimento del vincolo e la derivata temporale del modulo della forza anzichè della sua componente circonferenziale.

$$\frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial t} = K \cdot (\rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.42)$$

3. Le soluzioni precedenti presentano due inconvenienti: aggiungono una sesta equazione al sistema differenziale di Eulero innalzando il costo computazionale e non permettono di avere diretto controllo sull'evoluzione del sistema. Nell'ambito di questo lavoro si è adottata una strategia innovativa, ispirata alla tecnica dell'*immersed boundary*[13] (approfondita in seguito) che agisce direttamente sul modulo della forza:

$$\|\mathbf{B}\| = K \cdot (\rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.43)$$

L'interpretazione fisica di questo modello è che si assume che la parete solida si comporti come un vincolo elastico, deformabile durante il *time-marching*, finchè la forza impressa dall'interazione con il flusso e la deformazione subita non corrispondano tramite la rigidità K . Una volta esplicitato direttamente il modulo della forza aerodinamica, è sufficiente proiettarla lungo x , r e θ e sostituire tali componenti nelle equazioni.

Questo metodo ottimizza il calcolo perchè non altera il numero di equazioni dalle cinque originarie, e inoltre si dimostra più efficiente dal punto di vista computazionale, nè richiede di tarare la costante di proporzionalità K per adeguare il tasso di crescita della forza al grado di non soddisfacimento del vincolo di tangenza. Inoltre, con questa tecnica, si ha già un'espressione esplicita della forza aerodinamica, e il

sistema si può riscrivere nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (r\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (r\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) = \\ \hspace{15em} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (r\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x} (r\rho h_t v_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho h_t v_r) = \\ \hspace{15em} = r \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (r\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} [r(\rho v_x^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_x v_r) = \\ \hspace{15em} = r \cdot B_x = r \cdot \|\mathbf{B}\| \cos(\hat{n}x) \\ \frac{\partial}{\partial t} (r\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial x} (r\rho v_x v_r) + \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho v_r^2 + p)] - \rho v_\theta^2 = \\ \hspace{15em} = r \cdot B_r = r \cdot \|\mathbf{B}\| \cos(\hat{n}r) \\ \frac{\partial}{\partial t} (r\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (r\rho v_x v_\theta) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r v_\theta) + \rho v_r v_\theta = \\ \hspace{15em} = r \cdot B_\theta = r \cdot \|\mathbf{B}\| \cos(\hat{n}\theta) \end{array} \right. \quad (1.44)$$

(dove $\cos(\hat{n}\mathcal{B})$ è il coseno direttore fra la pala e la direzione \mathcal{B}) evitando l'aggiunta dell'ulteriore equazione, a scelta fra la (1.40), la (1.41) o la (1.42).

È automatico che, all'aumentare della rigidezza, la precisione con cui viene rispettata la condizione di tangenza migliora dal momento che, a pari forza, il grado di soddisfacimento del vincolo aumenta ($\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rightarrow 0$). Se tuttavia già il valore di K è alto fin dall'inizio del transitorio, il termine di sorgente è molto elevato e il metodo può divenire instabile: all'inizio del *time-marching*, in genere, il grado di non soddisfacimento del vincolo è alto ($\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \gg 0$), e l'andamento del flusso risente ancora molto delle condizioni iniziali, quindi una forza globalmente troppo elevata può essere incompatibile con la stabilità.

Di conseguenza, il valore della rigidezza viene fatto aumentare durante il procedere del calcolo, lasciandolo basso durante le prime iterazioni per poi aumentarlo all'avvicinarsi della convergenza: un buon metodo è quello di correlare anche K al grado di non soddisfacimento della condizione di tangenza.

Nel presente lavoro, ad esempio, si impone un andamento gaussiano variabile fra due valori estremi; tale andamento ha il vantaggio di mantenere bassa, all'inizio del calcolo, ovvero nella fase più critica, non solo la rigidezza ma anche la sua derivata, tutto a favore della stabilità.

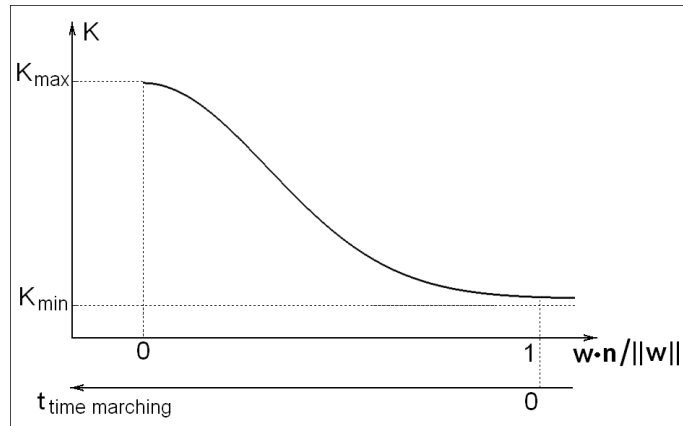


Figura 1.3: Esempio di evoluzione della rigidità durante il time-marching

Imprimere al fluido una forza tanto maggiore quanto meno è soddisfatta la condizione di tangenza è un metodo già noto in CFD, e si appoggia al già citato concetto dell'*immersed boundary*. Esso è una delle possibili soluzioni adottate per *meshare* geometrie complesse in problemi di fluidodinamica. Infatti la griglia può essere di tipo *conforme*, i cui nodi si dispongono in modo regolare su linee parallele agli assi coordinati (ad esempio una griglia a rettangoli in un problema cartesiano è conforme), oppure *non conforme*: in questo secondo caso la griglia viene costruita sulla base non solo del sistema di riferimento, ma anche della forma dei domini.

Una *mesh* non conforme si sviluppa a partire dai primi nodi, disposti lungo le pareti del dominio, generando via via i nodi successivi all'interno del dominio, e infine collegandoli; quest'ultima parte viene effettuata con l'ausilio di tecniche ottimizzanti come ad esempio l'avanzamento del fronte e lo scambio delle diagonali[20]. Il vantaggio nell'utilizzo di griglie non conformi è quindi che ciascuna cella è interamente situata in un solo dominio, e al massimo condivide alcuni lati con l'interfaccia; tuttavia la generazione della griglia presenta un alto costo computazionale e la dipendenza da algoritmi.

Una strada alternativa è quindi quella di ricoprire tutta la geometria, senza distinguere fra i vari domini fisici, con una griglia adatta (come nell'esempio, a rettangoli in coordinate cartesiane). Così facendo, la *meshatura* è immediata, e inoltre i nodi possono essere maggiormente infittiti, poiché il numero di celle su cui svolgere i calcoli cresce meno che proporzionalmente con l'infittimento. In questo modo, però, non è più assicurato che l'interfaccia fra i vari domini sia allineata con i lati delle celle: in altre parole, possono esserci delle celle lungo il contorno in cui coesistono i due domini fisici. Il contorno risulta quindi "immerso" nelle celle, fatto che rende difficile anche solo l'assegnazione del dominio alle celle disposte lungo l'interfaccia.

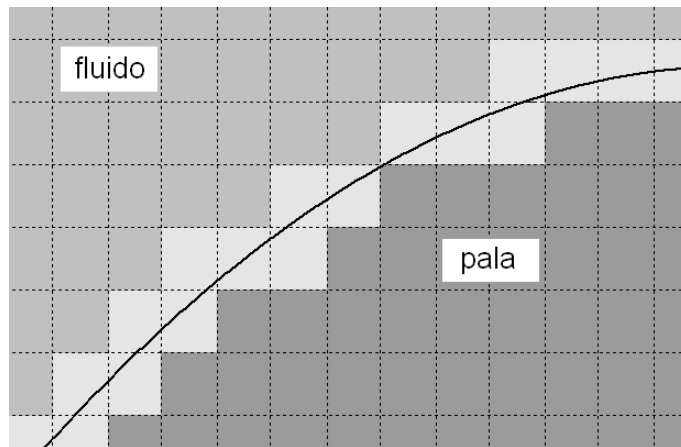


Figura 1.4: Esempio di accoppiamento geometria – mesh che richiede l'utilizzo del metodo di immersed boundary: le celle più chiare vedono compresenza di entrambi i domini

La soluzione ai problemi di *immersed boundary* viene ottenuta interpretando il corpo come un oggetto elastico ma, a convergenza raggiunta, infinitamente rigido: la sua forza su fluido dipende dalla deformazione (fittizia) subita. La forza si evolve quindi durante il *time marching*, e con essa la forma del contorno, e la situazione stazionaria consiste nel raggiungimento dell'equilibrio. Assegnando un valore di rigidità particolarmente elevato, si riesce a imporre al flusso di aderire alla direzione tangenziale alla pala, anche a fronte di piccoli spostamenti rispetto alla geometria teorica.

In questo lavoro non è stato necessario applicare questo metodo per la grigliatura e la conseguente imposizione delle condizioni, ma si è sfruttato il principio di vincolo elastico per schematizzare la forza aerodinamica, rendendo sufficienti l'implementazione delle sole cinque equazioni di Eulero e la definizione del modulo della forza tramite un'equazione algebrica anziché alle derivate parziali (equazione 1.43).

1.4.2 Modellazione della forza dissipativa

La forza dissipativa è la seconda componente della forza descritta come termine di sorgente aggiuntivo, e la sua modellazione è relativamente più semplice rispetto a quella della forza aerodinamica. Infatti in questo caso la forza agisce interamente sulla superficie meridiana, lungo la traiettoria, e, quindi, anche il suo effetto può essere modellato senza dover ricorrere ad artifici.

In particolare, occorre specificare che la forza dissipativa viene introdotta per tenere conto della perdite viscosi che altrimenti si perderebbero di vista con una trattazione basata sulle equazioni di Eulero. Tuttavia questo termine di sorgente non è una forza viscosa, dal momento che fra i vari effetti della viscosità riesce a tener conto solo del valore globale delle perdite, e non è possibile con essa modellare gli strati limite, la turbolenza, gli scambi di quantità di moto che intercorrono fra le particelle delle varie traiettorie ecc.

Ulteriore differenza rispetto alla forza aerodinamica è che quella dissipativa è una conseguenza di fenomeni propri del flusso, e quindi è presente anche nei gap interpalari; ciò che cambia fra le zone con le schere e quelle prive è la tipologia di fenomeni che causano le perdite: negli *annulus* delle turbine ci sono eventualmente espansioni mal guidate, e l'attrito con le pareti è solo sul mozzo e sulla cassa, mentre all'interno dei canali palari le superfici bagnate aumentano e occorre considerare problemi legati alla cattiva incidenza, ai trafiletti, ecc.

L'equazione di Crocco fornisce (tramite una procedura dimostrata nell'appendice C) un legame esplicito fra le forze di volume e il gradiente di entropia, in ipotesi di flusso omotermico e stazionario; il risultato cui si giunge premoltiplicando scalarmente per \mathbf{w} è

$$T\mathbf{w} \cdot \nabla s = \|\mathbf{f}_v\| \|\mathbf{w}\| \quad (1.45)$$

Se sono verificate le precedenti ipotesi, il legame diretto fra il modulo di quest'ultima e il gradiente di entropia è

$$D = T\nabla s \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\|\mathbf{D}^*\|}{\rho} \quad (1.46)$$

Come annunciato, la forza dissipativa agisce solo in direzione antiparallela alla velocità relativa, ed ha quindi un'azione rallentante sul campo di moto.

È quindi fondamentale avere una stima accurata del gradiente di entropia. Nel rappresentare correttamente il flusso sulla superficie meridiana, l'entropia prodotta nasce per effetto di irreversibilità, dal momento che gli scambi termici sono stati annullati: pertanto, se si conosce la perdita fluidodinamica, si può risalire direttamente al gradiente entropico necessario al calcolo della forza.

A questo scopo sono stati utilizzati vari set di correlazioni empiriche o numeriche; per una descrizione più accurata del modello, delle ipotesi e del calcolo si rimanda invece al capitolo 3.

Questo approccio è stato privilegiato perchè fornisce l'espressione della forza rapidamente e senza rischiare di destabilizzare il codice; tuttavia risente di alcuni limiti:

1. le correlazioni sono monodimensionali, ovvero descrivono la perdita solo lungo una traiettoria, e non modellano l'effetto di trascinamento relativo fra le varie *streamline*
2. risente pesantemente dell'affidabilità e dell'accuratezza delle correlazioni scelte
3. non può modellare gli strati limite, che in alcuni casi sono invece fondamentali per l'indagine sul funzionamento delle turbomacchine

Le risposte, perlomeno a questi ultimi due inconvenienti, sono state innanzitutto l'utilizzo di più set di dati per assicurarsi di coprire un *range* abbastanza vasto di casistiche, e il tentativo di una modellazione a sè stante dello strato limite.

La difficoltà in questo secondo caso è piuttosto elevata, sia perchè il codice fatica a gestire gli elevati gradienti tipici di questa zona, sia perchè così facendo occorre stabilire delle opportune condizioni per il flusso in ingresso, che non può essere uniforme.

Da ultimo, lo stesso spessore δ dello strato limite non è ricavabile analiticamente, nè numericamente per un codice inviscido, e pertanto va stimato ricorrendo ad altre correlazioni empiriche; inoltre, δ dipende da quanto a monte ha cominciato a svilupparsi lo strato limite, informazione tipicamente non posseduta.

Quindi una modellazione stabile ed accurata dei fenomeni di strato limite, per quanto possibile, è tutt'ora oggetto di sviluppo.

1.4.3 Modellazione degli effetti di spessore della pala

Il terzo termine di sorgente torna ad essere attivo solo all'interno delle pale, perchè ne descrive l'effetto di spessore. In riferimento alla trattazione fatta per la fluidodinamica *quasi monodimensionale*, si impostano i bilanci di massa e quantità di moto

$$\rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

$$\rho_1 V_1^2 S_1 - \rho_2 V_2^2 S_2 = p_2 S_2 - p_1 S_1 - \int_{S_1} p dS = p_2 S_2 - p_1 S_1 - \int_{S_1} p \frac{\partial S}{\partial z} dz$$

$$(1.47)$$

dove il bilancio di quantità di moto diventa, in forma differenziale

$$\frac{\partial}{\partial z} [(\rho V^2 + p) S] - p \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (1.48)$$

Ora, mentre il primo addendo della (1.48) si può già identificare nel sistema (1.52) (a meno del fattore S), il secondo va aggiunto come termine di sorgente qualora ci sia una variazione nella geometria lungo una generica direzione z . In questo specifico lavoro, il fattore deputato a considerare la variazione di sezione dovuta allo spessore palare è la *funzione di bloccaggio* b , definita come

$$b = \frac{|\theta_{PS} - \theta_{SS}|}{\Delta\theta} = \frac{|\theta_{PS} - \theta_{SS}|}{2\pi/N_{pale}} \quad (1.49)$$

e che rappresenta il rapporto fra il $\Delta\theta$ effettivamente disponibile al flusso e quello teorico, per ciascun canale.

In realtà, se si assume che lo spessore possa variare e avendo definito così la funzione di bloccaggio, si nota che essa deve comparire anche come fattore moltiplicativo per qualsiasi grandezza F mediata in senso circonferenziale, poichè

$$\mathcal{F} = \frac{\int_0^T F dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T F dt}{T} = \frac{\int_0^{N_p(\theta_{PS}-\theta_{SS})/b} F \frac{N_p d\theta}{b}}{N_p(\theta_{PS}-\theta_{SS})/b} = \frac{\int_0^{\theta_{PS}-\theta_{SS}} F d\theta}{\theta_{PS}-\theta_{SS}}$$

dove T è il periodo su cui si effettua la media, che nello specifico diventa $\theta_{PS}-\theta_{SS}$. È quindi sufficiente traslare il periodo di integrazione per ottenere la definizione di media circonferenziale in presenza di spessore:

$$\mathcal{F} = \frac{\int_{\theta_{SS}}^{\theta_{PS}} F d\theta}{\theta_{PS}-\theta_{SS}} \quad (1.50)$$

da cui

$$\int_{\theta_{SS}}^{\theta_{PS}} F d\theta = \mathcal{F}(\theta_{PS}-\theta_{SS}) = \mathcal{F}b\Delta\theta \quad (1.51)$$

che è quanto compare nelle equazioni.

1.4.4 Espressione definitiva del sistema risolvente

Comprehensive di questi tre termini di sorgente, le equazioni di Eulero utilizzate nel calcolo meridiano assumono la forma

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (rb\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (rb\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial r} (rb\rho v_r) &= \\ &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (rb\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x} (rb\rho h_t v_x) + \frac{\partial}{\partial r} (rb\rho h_t v_r) &= \\ &= r \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\ \frac{\partial}{\partial t} (rb\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} [rb(\rho v_x^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial r} (rb\rho v_x v_r) &= \\ &= r \left(B_x - D_x + p \frac{\partial b}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} (rb\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial x} (rb\rho v_x v_r) + \frac{\partial}{\partial r} [rb(\rho v_r^2 + p)] - b\rho v_\theta^2 &= \\ &= r \left(B_r - D_r + p \frac{\partial b}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} (rb\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (rb\rho v_x v_\theta) + \frac{\partial}{\partial r} (rb\rho v_r v_\theta) + b\rho v_r v_\theta &= \\ &= r (B_\theta - D_\theta) \end{aligned} \right. \quad (1.52)$$

dove $F_B = \|\mathbf{F}\| \cos(\hat{n}\mathcal{B})$, $\|\mathbf{B}\| = K \cdot (\rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n})$ e $D = T \nabla s \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$

Capitolo 2

Nuova soluzione per il trattamento di incidenza

Questo capitolo è focalizzato sul *trattamento di incidenza*, ovvero su quel particolare accorgimento impiegato per considerare la differenza esistente fra l'angolo geometrico e quello cinematico al *leading edge*.

Il fenomeno dell'incidenza nella realtà fisica non dà necessariamente luogo a problemi, anzi, è il parametro chiave per modulare il carico affidato a ciascuna pala; può eventualmente essere responsabile dello stallo, nel caso in cui si imponga una differenza troppo marcata. Analogamente, nell'ambito degli adeguati codici tridimensionali, gli effetti dell'incidenza e della deviazione possono essere ben simulati.

Tuttavia un codice meridiano, basato sull'assunzione di assialsimmetria con swirl, non possiede sufficienti elementi per descrivere correttamente l'interazione fra il bordo d'attacco della pala e il flusso che la investe, non fosse altro che per l'impossibilità di discernere, in senso tangenziale, la pala dalla corrente.

La soluzione individuata per l'incidenza prevede di adattare progressivamente la direzione del flusso da quella assunta a monte della schiera a quella imposta dalla palettatura, modificando la direzione della forza aerodinamica e di conseguenza il suo modulo, proporzionale al grado di non soddisfacimento della condizione di tangenza.

Questa procedura verrà poi estesa, con gli opportuni accorgimenti, anche alla modellazione della deviazione; per omogeneità, tale soluzione prende il nome unico di *trattamento di incidenza*.

2.1 Criticità della trattazione bidimensionale - assialsimmetrica nel calcolo dell'incidenza

Quando una corrente inviscida investe un ostacolo impermeabile, il suo campo di moto subisce necessariamente una modifica per soddisfare la condizione di tangenza alla superficie dello stesso. Per via della conservazione della quantità di moto, una qualsiasi variazione in termini di velocità si traduce nell'insorgere di un campo di pressione che trasporta l'informazione circa la presenza dell'ostacolo, con una celerità di propagazione pari alla velocità del suono: l'informazione circa la presenza dell'ostacolo è in grado di risalire la corrente solamente nel caso in cui il regime di moto sia subsonico.

Entrando nel merito dell'applicazione turbomacchinistica del codice, un fluido comprimibile in moto subsonico avverte la presenza di ostacoli a valle, in questo caso le schiere palari, al cui profilo può adattarsi per tempo: al bordo d'attacco della pala, l'angolo cinematico può essere anche marcatamente diverso rispetto a quello di geometrico del profilo mentre, dopo aver percorso un certo tratto all'interno del canale, si riscontra in genere che la direzione del flusso si allinea con quella imposta dalla linea media della pala.

Analogamente, nel caso in cui la deviazione sia non nulla, anche allo scarico le traiettorie fluide possono non essere parallele al profilo delle pale, in questo caso perchè a valle mancherà la guida fornita dalla palettatura.

Quanto descritto sopra accade nella realtà tridimensionale e può essere rappresentato in modo rigoroso da un calcolo *blade-to-blade*; tuttavia il codice meridiano si trova in una via di mezzo fra i due casi. Infatti esso analizza un campo di moto tridimensionale, ma trattandolo con un approccio formalmente bidimensionale in virtù dell'ipotesi di assialsimmetria con swirl.

La conseguenza più immediata nella modellazione dell'incidenza è che lungo la direzione tangenziale le tre componenti di velocità non possono essere modificate dalla presenza dell'ostacolo; tuttavia, rispetto ad un flusso bidimensionale, la direzione tangenziale esiste, ma le derivate lungo essa vengono ignorate: l'intero campo di moto non ha quindi modo di adattarsi all'ostacolo, perchè "non lo vede" in senso tangenziale, anche nel caso di flussi subsonici.

La disparità fra la soluzione fisica e il problema in esame si concretizza nel modo scelto per esprimere l'interazione fra il fluido e la pala.

La condizione di tangenza, che analiticamente permette di tenere in considerazione la presenza e l'effetto delle pale, viene espressa solo all'interno della schiera, ma negli *annulus* la forza aerodinamica (definita come \mathbf{B} nel

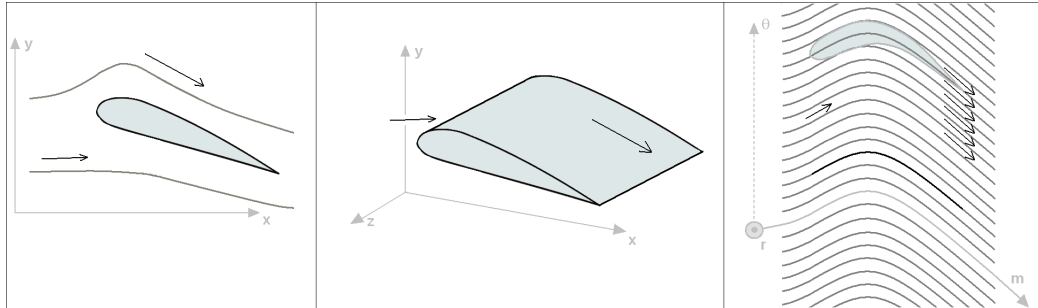


Figura 2.1: *Adattamento del flusso alla presenza di ostacoli: campo bidimensionale; campo tridimensionale; campo assialsimmetrico con swirl (le traiettorie modellate devono essere parallele anche quando nella realtà non potrebbero)*

paragrafo 1.4.1) viene forzata ad essere identicamente nulla.

Di conseguenza, se il flusso a monte possiede un angolo cinematico differente da quello imposto dalla pala, il codice non riesce ad adattarne la direzione se non dal punto in cui il flusso investe fisicamente la schiera; la condizione di tangenza impone poi che all'interno dei canali palari il flusso segua perfettamente la direzione imposta dal profilo della pala: il fluido ha a disposizione quindi soltanto una cella per deviare dalla direzione a monte all'angolo geometrico. Tale brusca deviazione, forzata ad avvenire nell'intervallo di una sola cella, è a tutti gli effetti percepita come una discontinuità, di origine puramente numerica. Fisicamente, una corrente subsonica non deve produrre urti in corrispondenza dell'ingresso in un canale palare o in prossimità di altri ostacoli solidi.

Dal punto di vista dei risultati, il codice senza incidenza non mostra scostamenti particolarmente forti rispetto a quello corretto: vengono prodotti urti relativamente deboli, e non emergono problemi sulla convergenza; tuttavia si è ritenuto di dover intervenire, dal momento che la soluzione così ottenuta non è accettabile.

2.2 Soluzioni esplorate

L'errore nella risposta del codice è intrinsecamente legato alle ipotesi più radicali circa il modello di fondo, ovvero l'assialsimmetria con swirl.

L'azione correttiva non può quindi interessare gli aspetti fluidodinamici

o le approssimazioni numeriche, ma deve essere un intervento *a posteriori*, che va ad agire sull'espressione del vincolo di tangenza, in modo tale da consentire al flusso di mutare direzione una volta giunto in corrispondenza delle pale, ma con gradualità.

Le soluzioni esplorate sono state tre: la *modifica dei coseni direttori*, l'*indebolimento del vincolo* e la *proiezione delle forze*. Importante ipotesi alla base di tutti e tre i metodi è che l'intervento interessa solo le direzioni tangenziale e meridiana, mentre si ipotizza che in direzione *spanwise* non occorre applicare il trattamento di incidenza.

2.2.1 Modifica della geometria

La prima soluzione descritta, proposta da Baralon *et al.*[14] non è stata sperimentata all'interno del codice meridiano, ma tuttavia è l'antenata delle due testate. Essa consiste nella modifica della geometria delle pale, in modo tale da costringerle ad assecondare il flusso. In una fase di *pre-processing* si impone la forma delle pale, che si considera completamente nota nell'evoluzione del codice.

I coseni direttori, tuttavia, descrivono solo la forma del profilo, poichè la forza aerodinamica \mathbf{B} viene posta normale ad esso attraverso la condizione di tangenza e il suo modulo viene fatto evolvere nel calcolo (si veda il paragrafo 1.4.1). Il resto della procedura si può schematizzare come segue:

1. ad ogni iterazione del *time-marching*, si ottiene la direzione del flusso in ingresso a ciascuna schiera;
2. si sceglie arbitrariamente la lunghezza del tratto di canale palare su cui agire;
3. a questo punto, si impone che la pala stessa (numericamente, i suoi coseni direttori) si deformi dalla configurazione originaria, immessa dall'utente, fino ad assecondare la direzione del flusso entrante; questa operazione viene effettuata solo all'interno del tratto selezionato al punto precedente, mentre il resto della pala viene lasciato invariato. La nuova configurazione deve comunque lasciare che la forma del profilo sia una funzione continua e derivabile (per esempio una *spline* cubica).

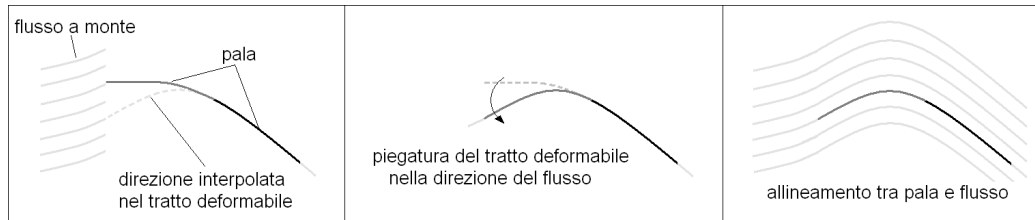


Figura 2.2: *Principio di funzionamento del metodo di deformazione della geometria delle pale*

Tale soluzione è stata scartata a priori perchè mostra vari limiti sia concettuali che applicativi.

Innanzitutto agisce sulla forma della palettatura: essa è un parametro definito a priori, che nel problema fisico rimane costante. Il campo di moto, nella realtà, è figlio della forma delle pale e, per flussi subsonici, risente degli angoli geometrici imposti anche a valle: in un intorno del bordo d'attacco, quindi, il flusso inizia già a curvare per assecondare l'inclinazione delle pale. Se invece tale inclinazione viene modificata proprio in funzione della direzione del flusso imperturbato, l'effetto della palettatura simulato viene "attenuato" rispetto a quello reale.

Modificare la geometria significa anche allungare i tempi di calcolo, dal momento che ad ogni iterazione occorre calcolare non solo l'effetto che essa ha sulla cinematica, ma anche il risultato inverso. Questo problema diventa rilevante nel caso di simulazioni di più schiere, dove ciascuna risente del peso delle precedenti e influenza quelle più a valle: l'interazione fra la cinematica e la geometria pesa sulla soluzione.

Infine occorre considerare che consentire la variabilità della geometria, e quindi rendere quest'ultima dipendente dalla soluzione, comporta necessariamente un deterioramento della stabilità di convergenza del sistema: è infatti rischioso attivare un'interdipendenza fra quantità nel corso di una soluzione iterativa, perchè tale operazione è l'analogo numerico di una retroazione, che può destabilizzare il calcolo.

2.2.2 Indebolimento del vincolo

La seconda soluzione esplorata, nonché la prima ad essere implementata, non tocca la forma delle pale, ma lavora solo sulle forze; in particolare queste ultime agiscono sempre nella direzione prefissata, normale al profilo, ma attenuando la rigidità del vincolo nel tratto iniziale della pala.

Infatti si concepisce il flusso a monte come se fosse soggetto ad una forza nulla, incapace di allinearne la direzione a quella della pala; anche in corrispondenza della prima cella, che vede a monte il flusso non deflesso e a valle l'angolo geometrico, la forza è nulla, per continuità.

Viceversa, dopo una certa distanza \bar{m} , l'effetto della pala avrà provveduto a deflettere opportunamente il flusso: ciò significa che da quel punto in poi la forza aerodinamica ha raggiunto il valore massimo, o comunque che il vincolo è sufficientemente rigido da far rispettare la condizione di tangenza.

Rimane da definire come raccordare questi due punti, ovvero da stabilire l'andamento della forza in modo tale che sia essa che l'angolo varino con continuità fra i due valori agli estremi, e che contemporaneamente la direzione fluidodinamica dipenda dal termine di sorgente aerodinamico: operativamente si impone alla rigidità una distribuzione lungo la *streamline* fino a \bar{m} , interpolando fra 0 (o comunque un valore molto basso) e $K(\bar{m})$.

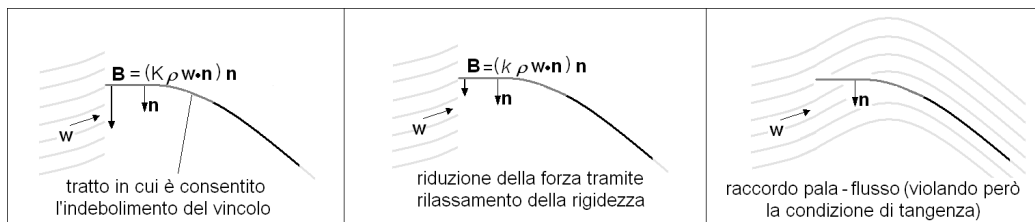


Figura 2.3: Principio di funzionamento del metodo di indebolimento del vincolo

Questo metodo è stato implementato originariamente, ma presenta un grosso limite: se applicato semplicemente in questo modo, il codice interpreta la bassa rigidità come un grado di libertà aggiuntivo. Si viene a creare infatti un disallineamento fra la direzione del flusso e la direzione di azione della forza (sebbene solo nel tratto iniziale e per quanto consentito dalla rigidità), con conseguenze inaccettabili: il risultato è che localmente avviene uno scambio di lavoro fra la pala e il flusso, con una differenza di pressione totale di parecchi punti percentuali (in turbina, l'effetto è confrontabile o superiore alle perdite). Per i rotori l'effetto è analogo, e questo problema si traduce in un incremento del lavoro scambiato.

2.2.2.1 Approcci *weak* e *strong*

Si è cercato di ovviare a quest'ultimo limite modificando l'espressione del lavoro scambiato fra i termini di sorgente del sistema (1.52): la formulazione

generale definisce la potenza meccanica specifica come $\dot{l} \propto \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ovvero, se si considera solo l'azione aerodinamica, come proporzionale a

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = B_x v_x + B_r v_r + B_\theta v_\theta \quad (2.1)$$

Se la condizione di tangenza (che rientra nel passaggio $\stackrel{*}{=}$ dell'equazione (2.2)) viene rispettata, si può riscrivere il tutto come

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{B}\| \mathbf{n} \cdot (\mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \|\mathbf{B}\| \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \|\mathbf{B}\| \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= \|\mathbf{B}\| \frac{\left[\begin{array}{ccc} -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial r} & \frac{1}{r} \end{array} \right]}{\|\nabla g\|} \cdot (\omega r) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\nabla g\|} \omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

In questo modo si evidenzia come negli statori non ci possa essere necessariamente scambio di lavoro.

In conseguenza, se nel codice si implementa la definizione di potenza scambiata secondo la (2.1), dove la condizione di tangenza è sensibilmente violata non è più valida l'uguaglianza $\stackrel{*}{=}$, e quindi non è più vero che la potenza scambiata è direttamente proporzionale alla velocità angolare: anche in corrispondenza degli statori si assiste ad uno scambio di lavoro. Tale approccio viene definito *weak*, poichè è generalizzabile in quanto direttamente discendente dalle equazioni di Eulero, ma risente della forte dipendenza dal soddisfacimento della condizione di tangenza: i risultati non presentano errori solo quantitativi o comunque tollerabili, ma descrivono un fenomeno fisicamente inaccettabile.

L'alternativa consiste nella formulazione *strong*, in cui si assume che la condizione di tangenza sia ovunque soddisfatta con buona approssimazione, e quindi che sia lecita l'uguaglianza $\stackrel{*}{=}$: nel codice viene direttamente implementata la definizione di $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$ come $\frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\nabla g\|} \omega$.

In questo caso non viene più scambiato lavoro a cavallo delle schiere statoriche, ma si assume di poter rispettare proprio quell'ipotesi (l'impermeabilità della pala) che in corrispondenza del *leading edge* diventa critica; l'abbinamento indebolimento del vincolo – approccio *strong*, non potendo modificare il lavoro scambiato, produce una variazione di entropia non fisica.

La possibilità di scelta fra gli approcci *weak* – *strong* non è una prerogativa del metodo di indebolimento del vincolo, infatti è stata implementata la tecnica di proiezione delle forze con la doppia formulazione; tuttavia in questo

caso emerge chiaramente il limite dell'approccio *weak* mentre, se la condizione di tangenza è ragionevolmente soddisfatta, questa strategia risulta preferibile in quanto più generalizzabile.

Inoltre si è anche rivelata più stabile nel processo di convergenza.

2.2.2.2 Conclusioni sul metodo di indebolimento del vincolo

Anche la strategia di rilassare la rigidità del vincolo elastico è stata scartata, dal momento che entrambe le formulazioni della potenza scambiata si sono rivelate inefficaci con tutte le varie distribuzioni spaziali tentate (lineare, sinusoidale, esponenziale).

2.2.3 Proiezione delle forze

Il terzo metodo considerato è un'evoluzione dei primi due: parte cioè anch'essa dalla constatazione che non è possibile distinguere la pala dal fluido in senso tangenziale per via della media, ma anche che occorre introdurre un termine che imponga al flusso di ruotare dalla direzione a monte fino a quella richiesta dalla pala.

La prima tecnica prevedeva di modificare la geometria della pala, così da adattare la geometria stessa alla direzione del flusso, mentre la seconda, visti i limiti della prima, lavorava nella direzione di lasciare costante la geometria, ma di agire solo sul suo effetto fluidodinamico consentendo un disallineamento fra le direzioni cinematica e geometrica grazie alla violazione della condizione di impermeabilità della pala.

Questo terzo metodo, che sarà effettivamente adottato nel codice per il trattamento di incidenza, prevede sempre di intervenire solo sull'effetto delle pale sul fluido, ma anche di non rilassare il vincolo di tangenza. Il risultato si ottiene ridefinendo e proiettando la forza aerodinamica locale lungo una direzione opportuna, che porti il flusso a raccordarsi alla pala, dalla direzione a monte, con gradualità.

Il metodo si può schematizzare nel seguente modo:

1. come nei casi precedenti, a ciascuna iterazione si analizza la direzione del flusso in ingresso alla schiera;
2. viene stabilita la lunghezza del tratto di canale palare su cui agire in termini di frazione di ascissa curvilinea;

3. si interpola con un andamento arbitrario fra la direzione del flusso a monte e quella del profilo al termine del tratto da modificare. Questa nuova distribuzione spaziale è la direzione su cui viene proiettata punto per punto la forza aerodinamica \mathbf{B} : la condizione di tangenza, da rispettarsi rigorosamente, provvede poi in fase di soluzione ad allineare a tale direzione anche il flusso, e quindi a raccordare l'angolo cinematico a monte con quello geometrico della pala.

Per la trattazione dettagliata, completa delle equazioni ricavate dal modello, si faccia riferimento alla sezione (2.3)

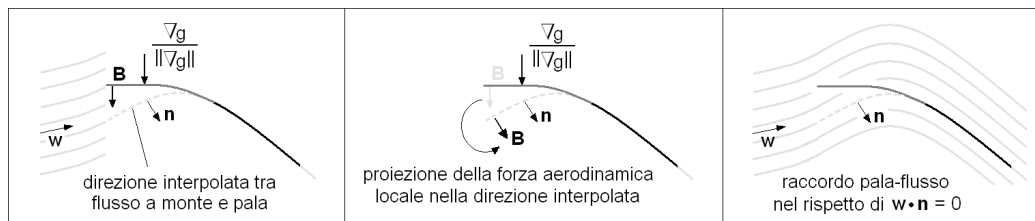


Figura 2.4: *Principio di funzionamento del metodo di proiezione delle forze: la geometria resta invariata, ma si impone localmente la direzione d'azione della forza aerodinamica*

Questo metodo consente all'atto pratico di agire solo sull'effetto della pallettatura, senza violare la condizione di tangenza o la geometria, e mostra risultati molto soddisfacenti (per il dettaglio si rimanda al capitolo 4 inerente ai risultati e al paragrafo 2.4). Rimangono comunque alcuni limiti alla soluzione adottata:

1. La funzione interpolante fra le due direzioni, cinematica e geometrica, nonché la lunghezza del tratto di canale lungo cui effettuare la modifica, sono stabilite arbitrariamente in fase di implementazione e non discendono da un calcolo;
2. Come per gli altri modelli, se l'incidenza è abbastanza marcata da provocare distacco di vena (nella realtà fisica) questo codice non può tenerne conto, sia per l'ipotesi di assialsimmetria, sia perchè in letteratura il fenomeno dello stallo è spesso osservato dal punto di vista delle perdite che provoca, mentre il termine di sorgente associato alla forza aerodinamica non è dissipativo.

In ogni caso, nonostante i limiti sopraccitati, questa tecnica si dimostra vincente rispetto alle altre due, ed è pertanto quella cui fare riferimento per il resto del presente lavoro, nella forma dell'approccio *weak*.

2.3 Trattamento di incidenza: equazioni

2.3.1 Forze

Quasi ovunque nel dominio osservato il flusso aderisce al profilo della pala, ovvero soddisfa perfettamente la condizione di tangenza $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$, dove \mathbf{n} è il versore normale al vincolo costituito dalla palettatura e \mathbf{w} la velocità relativa.

Al capitolo 1 è stato definito $\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$, ma ciò è valido solo se si accetta che, in presenza della pala, il flusso soddisfi la condizione di tangenza.

In questo caso occorre ridefinire il versore \mathbf{n} : esso non è più quello normale alla superficie della pala e in funzione del quale si definisce, in un secondo momento, la condizione di tangenza del flusso. La nuova definizione di \mathbf{n} è fatta *a posteriori* rispetto all'espressione del vincolo di tangenza, in modo tale che, a prescindere dall'angolo relativo flusso - pala, risulti verificata la condizione, ovvero

$$\mathbf{n} \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{2.3}$$

Ciò significa che, al *leading edge* e per incidenza non nulla, il versore non risulta più parallelo al gradiente del vincolo, ovvero

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} < 1 \tag{2.4}$$

\mathbf{n} va quindi ridefinito come somma del gradiente del vincolo normalizzato e di un versore correttivo \mathbf{n}_r :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + \mathbf{n}_r \tag{2.5}$$

Si noti che, essendo entrambi i vettori $\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ e \mathbf{n}_r di modulo unitario, la loro risultante \mathbf{n} avrà un modulo generalmente diverso da 1 (a meno dei casi particolari di incidenza pari in modulo a $\frac{\pi}{3}$), ma ciò non costituisce un problema: infatti viene effettuata questa ridefinizione di \mathbf{n} proprio perchè consente

di lasciare formalmente invariata l'espressione del vincolo di tangenza. Esso infatti è volto ad esprimere una relazione (di perpendicolarità) fra le direzioni dei vettori, e non si interessa di quali siano i loro moduli.

In questo modo, l'eventualità di incidenza nulla diventa solo un sottocaso nell'approccio più generale: l'eventuale differenza rispetto alla trattazione fatta nel capitolo 1 (in ipotesi di aderenza del flusso alla pala) costituita dal termine \mathbf{n}_r si annulla (per la dimostrazione si veda l'equazione (2.8)).

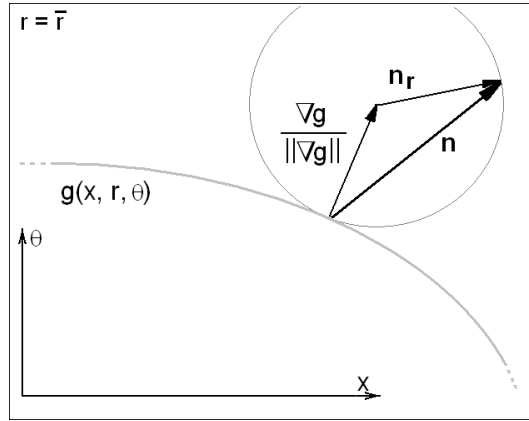


Figura 2.5: Nuova definizione del vettore \mathbf{n} utile al trattamento di incidenza: esso è disallineato rispetto al gradiente del vincolo, e non ha più modulo unitario

La nuova formulazione della forza aerodinamica al bordo d'attacco della pala si ricava quindi dall'espressione di $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$:

$$\mathbf{w} \cdot \left(\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + \mathbf{n}_r \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + \mathbf{n}_r \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + (\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_r = 0 \quad (2.8)$$

Come si nota, se non c'è incidenza, non occorre che il versore \mathbf{n}_r corregga la direzione di ∇g : la loro somma risulta quindi un vettore \mathbf{n} allineato con entrambi e di modulo non unitario, ma i due prodotti scalari $\nabla g \cdot \mathbf{w}$ e $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{w}$, e quindi anche la loro somma, risultano identicamente nulli, come vuole la condizione di tangenza.

Dei due addendi che compongono l'equazione (2.8), il primo è completamente noto, perchè contiene i termini cinematici ($\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$) e geometrici (i coseni direttori della pala in ∇g) già utilizzati nella prima definizione di condizione di incidenza. L'altro termine, invece, si ricava dalla soluzione *time-marching*. Infatti, vale per definizione che

$$\begin{cases} (\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_r = \|\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{n}_r\| \cdot \cos(\beta_w - \beta_{n_r}) = \|\mathbf{w}\| \cdot \cos \Delta\beta \\ \cos \Delta\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\beta\right) \end{cases} \quad (2.9)$$

Come si vede dalla figura (2.6), l'angolo $\varphi = \frac{\pi}{2} - \Delta\beta$ è calcolato fra la velocità relativa e la normale al gradiente della superficie. Tale gradiente, tuttavia, è a sua volta normale alla pala: φ è quindi l'angolo compreso fra \mathbf{w} e il profilo della pala e, a meno eventualmente del segno, coincide con l'incidenza i .

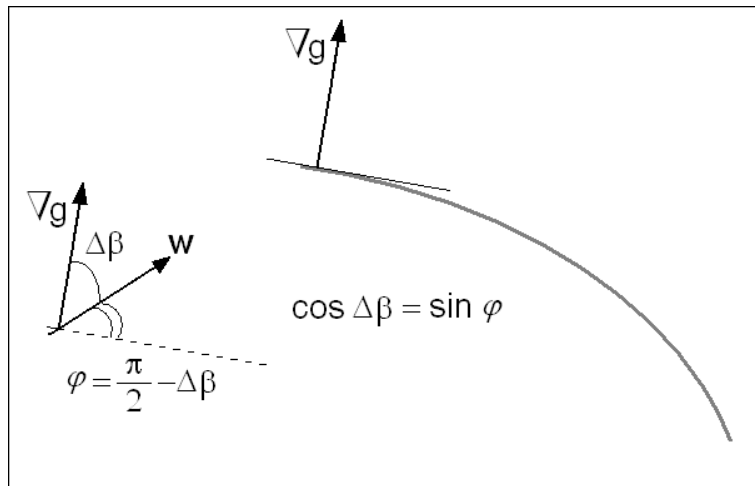


Figura 2.6: Grandezze geometriche e cinematiche utilizzate nel trattamento di incidenza

Si può ora riscrivere la condizione di tangenza in funzione di tutte grandezze note:

$$(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + \|\mathbf{w}\| \cdot \sin(\pm i) = 0 \quad (2.10)$$

dove il segno da dare all'incidenza va ancora determinato. Essa infatti si definisce in modulo come differenza fra gli angoli geometrico e fluidodinamico in ingresso, e per convenzione essa ha segno positivo se va ad aumentare la

deflessione del flusso fra ingresso e uscita; al contrario, la deviazione $\|\delta\| = \|\beta_{geo, TE} - \beta_{fl, TE}\|$ è positiva se diminuisce la deflessione.

In realtà in questo caso non occorre determinare l'effettivo segno di i e δ : semplicemente, per allineare correttamente la forza aerodinamica, basta avvicinare alla direzione fluidodinamica la sua normale (concetto che nel metodo di deformazione del vincolo porta a girare direttamente la pala), quindi $\varphi = \beta_{fl} - \beta_{geo}$.

Le grandezze utilizzate nelle equazioni seguenti, legate ai moduli di incidenza e deviazione, sono dunque definite come

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{LE} = \beta_{fl, LE} - \beta_{geo, LE} \\ \mathcal{D}_{TE} = \beta_{fl, TE} - \beta_{geo, TE} \end{cases} \quad (2.11)$$

La condizione di tangenza definitiva usata nel trattamento di incidenza (applicato anche per modellare la deviazione) viene formulata come segue:

$$(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + \|\mathbf{w}\| \cdot \sin(\mathcal{I}, \mathcal{D}) = 0 \quad (2.12)$$

A questo punto il modulo della forza aerodinamica, in coerenza con l'approccio di *immersed boundary*, si ricava dalla (2.12) ed è definito come

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\| &= K\rho \left[(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + \|\mathbf{w}\| \cdot \sin \mathcal{I} \right] = \\ &= K\rho \begin{bmatrix} v_x & v_r & (v_\theta - \omega r) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \cos \hat{n}x & \cos \hat{n}r & \cos \hat{n}\theta \end{bmatrix} + \\ &\quad + K\rho \|\mathbf{w}\| \sin \mathcal{I} = \\ &= K\rho \left[v_x \cos \hat{n}x + v_r \cos \hat{n}r + (v_\theta - \omega r) \cos \hat{n}\theta \right] + \\ &\quad + K\rho \sqrt{v_x^2 + v_r^2 + (v_\theta - \omega r)^2} \cdot \sin \mathcal{I} \end{aligned} \quad (2.13)$$

con

$$K = K \left((\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} + \|\mathbf{w}\| \cdot \sin \mathcal{I} \right) \quad (2.14)$$

Le sue componenti singole, però, non sono più semplicemente proporzionali ai coseni direttori della pala, ma risultano dalla rotazione di angolo pari a \mathcal{I} :

$$\begin{cases} B_x = \|\mathbf{B}\| \cdot (\cos \hat{n}x \cdot \text{COS } \mathcal{I} - \cos \hat{n}\theta \cdot \text{SIN } \mathcal{I}) = \|\mathbf{B}\| \cdot n_x \\ B_r = \|\mathbf{B}\| \cdot \cos \hat{n}r = \|\mathbf{B}\| \cdot n_r \\ B_\theta = \|\mathbf{B}\| \cdot (\cos \hat{n}x \cdot \text{SIN } \mathcal{I} + \cos \hat{n}\theta \cdot \text{COS } \mathcal{I}) = \|\mathbf{B}\| \cdot n_\theta \end{cases} \quad (2.15)$$

Questa espressione vale a rigore per macchine assiali: in realtà bisognerebbe applicare la correzione fra le direzioni meridiana e tangenziale, anziché assiale e tangenziale. Ciò si traduce in un'espressione di α_{fl} come

$$\alpha_{fl} = \frac{1}{\cos \hat{n}r} \arctan \frac{w_\theta}{w_x} \quad (2.16)$$

e in un diverso concetto di proiezione (anziché piana come nella (2.15), tridimensionale).

L'espressione del termine di sorgente nell'equazione dell'energia non viene modificato, ovvero rimane $r\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$, poiché tutte le modifiche sono già contenute all'interno di \mathbf{B} ; anche nel caso in cui si volesse utilizzare l'approccio *strong* è sufficiente ridefinire il modulo della forza aerodinamica.

2.3.2 Jacobiani

L'evoluzione temporale viene simulata attraverso un metodo implicito che, una volta discretizzati il dominio spaziale e il tempo, richiede la soluzione di un sistema non lineare e non disaccoppiabile: per questo motivo occorre calcolare lo jacobiano dei termini di sorgente $\underline{\underline{\mathbf{J}_B}}$.

Esso è una matrice ottenuta derivando il vettore dei termini di sorgente $\mathbf{f}_B = [0 \quad r\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \quad rB_x \quad rB_r \quad rB_\theta]^T$ rispetto alle variabili conservative \mathbf{q} :

$$\underline{\underline{\mathbf{J}_B}} = \frac{\partial \mathbf{f}_B}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.17)$$

Esprimere la forza introducendo una sua dipendenza dall'incidenza obbliga a ridefinirne anche lo jacobiano; è quindi fondamentale iniziare esprimendo

\mathbf{f}_B e ciò che la compone in funzione delle variabili conservative:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= \mathcal{I}_{LE} \cdot f(x) = (\beta_{fl, LE} - \beta_{geo, LE}) \cdot f(x) = \\
 &= \left(\arctan \frac{w_\theta}{w_x} - \beta_{geo, LE} \right) \cdot f(x) = \\
 &= \left(\arctan \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_3} - \beta_{geo, LE} \right) \cdot f(x) \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{B}\| &= K q_1 \left[\frac{q_3}{q_1} \quad \frac{q_4}{q_1} \quad \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \right]^T \cdot [\cos \hat{n}x \quad \cos \hat{n}r \quad \cos \hat{n}\theta]^T + \\
 &K q_1 \sqrt{\left(\frac{q_3}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{q_4}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1}\right)^2} \sin \mathcal{I} = \\
 &= K \left[\cos \hat{n}x q_3 + \cos \hat{n}r q_4 + \cos \hat{n}\theta (q_5 - q_1 \omega r) \right] + \\
 &K \sqrt{q_3^2 + q_4^2 + (q_5 - q_1 \omega r)^2} \sin \mathcal{I} = \\
 &= B_1 + B_2 \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{f}_B(1) = f_{B1} = 0 \\
 \mathbf{f}_B(2) = f_{B2} = r \|\mathbf{B}\| \left[n_x \quad n_r \quad n_\theta \right] \cdot \left[\frac{q_3}{q_1} \quad \frac{q_4}{q_1} \quad \frac{q_5}{q_1} \right]^T = \\
 \qquad \qquad \qquad = r \|\mathbf{B}\| \left(n_x \frac{q_3}{q_1} + n_r \frac{q_4}{q_1} + n_\theta \frac{q_5}{q_1} \right) \\
 \mathbf{f}_B(3) = f_{B3} = r \|\mathbf{B}\| \cdot n_x \\
 \mathbf{f}_B(4) = f_{B4} = r \|\mathbf{B}\| \cdot n_r \\
 \mathbf{f}_B(5) = f_{B5} = r \|\mathbf{B}\| \cdot n_\theta
 \end{array} \right. \tag{2.20}$$

In forma compatta:

$$\mathbf{f}_B = r \|\mathbf{B}\| \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \frac{q_3}{q_1} + n_r \frac{q_4}{q_1} + n_\theta \frac{q_5}{q_1} \\ n_x \\ n_r \\ n_\theta \end{bmatrix} = r \|\mathbf{B}\| \cdot \mathbf{s}_B \tag{2.21}$$

Le derivate pertanto si esprimono come:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{5 \times 5} = \mathbf{s}_{\mathbf{B}} \left|_{5 \times 1} \odot \left. \frac{\partial (r \|\mathbf{B}\|)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{1 \times 5} + \left. \frac{\partial \mathbf{s}_{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{5 \times 5} \cdot r \|\mathbf{B}\| \left|_{\in \mathbb{R}} \right. \quad (2.22)$$

La derivata del primo addendo dà luogo ad un vettore che in riferimento alla (2.19) vale

$$\frac{\partial (r \|\mathbf{B}\|)}{\partial \mathbf{q}} = r \left(\frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{q}} = K \begin{bmatrix} -\omega r \cos \hat{n}\theta \\ 0 \\ \cos \hat{n}x \\ \cos \hat{n}r \\ \cos \hat{n}\theta \end{bmatrix}^T \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} = K \frac{\partial (q_1 \|\mathbf{w}\| \cdot \sin \mathcal{I})}{\partial \mathbf{q}}$$

Poichè comparirà anche in seguito, è opportuna una valutazione preliminare di $\|\mathbf{w}\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\| &= \sqrt{w_x^2 + w_r^2 + w_\theta^2} = \sqrt{v_x^2 + v_r^2 + (v_\theta - \omega r)^2} = \\ &= \frac{1}{q_1} \sqrt{q_3^2 + q_4^2 + (q_5 - q_1 \omega r)^2} = \frac{1}{q_1} \sqrt{\underbrace{q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_1^2 \omega^2 r^2 - 2q_1 \omega r q_5}_{\mathcal{K}}} \\ &= \frac{\mathcal{K}^{1/2}}{q_1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

e delle sue derivate:

$$\frac{\partial \|\mathbf{w}\|}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\omega r q_1 \cdot \mathcal{K}^{-1/2} (q_1 \omega r - q_5) - \mathcal{K}^{1/2}}{q_1^2} =: dw1 \\ 0 =: dw2 \\ \frac{q_3}{\mathcal{K}^{1/2} q_1} =: dw3 \\ \frac{q_4}{\mathcal{K}^{1/2} q_1} =: dw4 \\ \frac{q_5 - q_1 \omega r}{\mathcal{K}^{1/2} q_1} =: dw5 \end{bmatrix}^T = \mathbf{dw}^T \quad (2.26)$$

Lo stesso vale per \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{q}} &= f(x) \cdot \frac{\partial \arctan \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_3}}{\partial \mathbf{q}} = \\ &= f(x) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_3} \right)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-\omega r}{q_3} \\ 0 \\ -\frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_3^2} \\ 0 \\ \frac{1}{q_3} \end{bmatrix}^T =: \begin{bmatrix} d\mathcal{I}1 \\ d\mathcal{I}2 \\ d\mathcal{I}3 \\ d\mathcal{I}4 \\ d\mathcal{I}5 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

Procedendo quindi con l'espressione della derivata di B_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} &= K \frac{\partial (q_1 \|\mathbf{w}\| \cdot \sin \mathcal{I})}{\partial \mathbf{q}} = \\ &= K \begin{bmatrix} \|\mathbf{w}\| \cdot \sin \mathcal{I} + q_1 dw1 \cdot \sin \mathcal{I} + q_1 \|\mathbf{w}\| \cdot \cos \mathcal{I} \cdot d\mathcal{I}1 \\ 0 \\ q_1 dw3 \cdot \sin \mathcal{I} + q_1 \|\mathbf{w}\| \cdot \cos \mathcal{I} \cdot d\mathcal{I}3 \\ q_1 dw4 \cdot \sin \mathcal{I} \\ q_1 dw5 \cdot \sin \mathcal{I} + q_1 \|\mathbf{w}\| \cdot \cos \mathcal{I} \cdot d\mathcal{I}5 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.29)$$

Occorre ora esprimere per esteso la derivata del secondo addendo della (2.22): essa è una matrice di forma

$$\frac{\partial \mathbf{s}_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots & \frac{\partial s_{B,i}}{\partial q_j} & \dots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_{B,1}}{\partial q_1} & \frac{\partial s_{B,1}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial s_{B,1}}{\partial q_5} \\ \frac{\partial s_{B,2}}{\partial q_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_{B,5}}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial s_{B,5}}{\partial q_5} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

le cui componenti risultano (esprimendo $s_{B,2}$ in funzione delle altre componenti)

$$\begin{aligned}
 & \bullet s_{B,1} = 0 \implies \frac{\partial s_{B,1}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \\
 & \bullet s_{B,3} = n_x \implies \frac{\partial s_{B,3}}{\partial \mathbf{q}} = - \left(\cos \hat{n}x \cdot \text{SIN } \mathcal{I} + \cos \hat{n}\theta \cdot \text{COS } \mathcal{I} \right) \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{q}} \\
 & \bullet s_{B,4} = n_r \implies \frac{\partial s_{B,4}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \\
 & \bullet s_{B,5} = n_\theta \implies \frac{\partial s_{B,5}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\cos \hat{n}x \cdot \text{COS } \mathcal{I} - \cos \hat{n}\theta \cdot \text{SIN } \mathcal{I} \right) \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{q}} \\
 & \bullet s_{B,2} = s_{B,3} \frac{q_3}{q_1} + s_{B,4} \frac{q_4}{q_1} + s_{B,5} \frac{q_5}{q_1} \implies \\
 & \implies \begin{cases} \frac{\partial s_{B,2}}{\partial q_1} = \left(\frac{\partial s_{B,3}}{\partial q_1} \frac{q_3}{q_1} + \frac{\partial s_{B,4}}{\partial q_1} \frac{q_4}{q_1} + \frac{\partial s_{B,5}}{\partial q_1} \frac{q_5}{q_1} \right) - \left(s_{B,3} \frac{q_3}{q_1^2} + s_{B,4} \frac{q_4}{q_1^2} + s_{B,5} \frac{q_5}{q_1^2} \right) \\ \frac{\partial s_{B,2}}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial s_{B,2}}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial s_{B,3}}{\partial q_3} \frac{q_3}{q_1} + \frac{\partial s_{B,4}}{\partial q_3} \frac{q_4}{q_1} + \frac{\partial s_{B,5}}{\partial q_3} \frac{q_5}{q_1} \right) + \frac{s_{B,3}}{q_1} \\ \frac{\partial s_{B,2}}{\partial q_4} = \left(\frac{\partial s_{B,3}}{\partial q_4} \frac{q_3}{q_1} + \frac{\partial s_{B,4}}{\partial q_4} \frac{q_4}{q_1} + \frac{\partial s_{B,5}}{\partial q_4} \frac{q_5}{q_1} \right) + \frac{s_{B,4}}{q_1} \\ \frac{\partial s_{B,2}}{\partial q_5} = \left(\frac{\partial s_{B,3}}{\partial q_5} \frac{q_3}{q_1} + \frac{\partial s_{B,4}}{\partial q_5} \frac{q_4}{q_1} + \frac{\partial s_{B,5}}{\partial q_5} \frac{q_5}{q_1} \right) + \frac{s_{B,5}}{q_1} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

La formulazione precedente era basata sull'approccio *weak*: in caso si voglia adottare il metodo *strong*, occorre esprimere $f_{B,2} = r \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$ come $\frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\nabla g\|} \omega r$: in $s_{B,2}$ rimane solo $\frac{\omega}{\|\nabla g\|}$, costante rispetto a \mathbf{q} . Di conseguenza, nell'equazione (2.22) resta solo il termine $s_{B,2} \frac{\partial(r\|\mathbf{B}\|)}{\partial \mathbf{q}}$, per un'espressione finale del tipo

$$\frac{\partial f_{B,2}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\omega r}{\|\nabla g\|} r \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{q}} \tag{2.32}$$

Per quanto riguarda il tratto di pala non trattato e quello soggetto alla deviazione, tutti i termini vengono adattati ponendo $d\mathcal{I}j = 0 \forall j$.

Nel primo caso, infatti, $\mathcal{I} = 0$, nel secondo (in cui più propriamente si dovrebbe parlare di \mathcal{D}) \mathcal{I} è imposta e quindi costante rispetto a \mathbf{q} .

2.4 Risultati applicativi

2.4.1 Peso sul calcolo del trattamento di incidenza

In questo paragrafo non si vuole entrare nel dettaglio del costo computazionale, ma solo accennare ad alcuni effetti causati dall'utilizzo del trattamento sulla convergenza.

Il metodo di proiezione delle forze non sembra appesantire il calcolo in modo significativo; è però possibile che, avendo introdotto un termine di perturbazione al vincolo dipendente alla soluzione transitoria, il codice incontri difficoltà di convergenza e in tal caso occorre adottare alcuni accorgimenti tra cui:

1. l'adozione di una griglia piuttosto fitta al *leading edge*, questo per evitare gradienti troppo alti nella distribuzione dell'incidenza \mathcal{I} dal valore assunto al leading edge fino al punto di raccordo fra il flusso e la pala. Non si evidenzia tuttavia nessuna dipendenza del risultato dal tipo di griglia (uniformemente fitta, con infittimento localizzato, con infittimento progressivo, ...) Al *trailing edge* non si è mostrato necessario un infittimento particolarmente spinto, sia perchè i valori della deviazione sono generalmente più conetnuti rispetto a quelli di incidenza, sia perchè questa è imposta dalle correlazioni (che dipendono debolmente dalla soluzione), ed è quindi quasi una costante dal punto di vista del calcolo degli jacobiani;
2. talvolta, l'abbassamento del valore del parametro di CFL: questa soluzione è però operativamente molto delicata (per i dettagli sul CFL si veda il paragrafo 4.1);
3. una diminuzione del valore di K_{max} , soprattutto durante le prime iterazioni, per non forzare troppo la gestione delle forze nel tratto critico di *leading edge*; questo intervento si è mostrato il più efficace (in molti casi è stato possibile evitare gli altri due accorgimenti), sebbene si debba procedere a tentativi nello stabilire il valore di rigidità che realizzi il compromesso fra raggiungimento della convergenza e qualità del risultato.

Questa metodologia dimostra ulteriormente i vantaggi dell'approccio a *immersed boundary*, che garantisce una maggior flessibilità al metodo, al prezzo di un'indagine preliminare per ottimizzare il valore di K_{max} .

4. talvolta, l'esecuzione di un primo calcolo in assenza di trattamento, che va attivato in un secondo momento inizializzando il conto con il risultato della prima simulazione.

2.4.2 Un esempio di calcolo

In questo paragrafo si vuole fornire un esempio di funzionamento del codice in un caso semplice, tuttavia sufficientemente completo. Si tratta di uno stadio di turbina con grado di reazione $\chi = 0.5$, con effetto tridimensionale molto contenuto per via del basso rapporto altezza di pala – diametro medio e operante in condizioni subsoniche: viene imposta un'incidenza volutamente molto elevata (-40° sullo statore) per illustrare l'effetto del trattamento di incidenza. L'incidenza e la deviazione sono state ripartite linearmente ciascuna lungo un tratto pari al 20 % della corda assiale; nel 10 % iniziale è stato raddoppiato il numero di celle, mantenendo i nodi equispaziati.

I dati geometrici sono riportati nella seguente tabella:

	$\beta_{LE} [^\circ]$	$\beta_{TE} [^\circ]$	$C_{ax} [mm]$	$r_{int} [m]$	$r_{est, med x} [m]$	$\delta [^\circ]$
STAT	0	50	90	10	10.175	-1.4
ROT	0	-50	90	10	10.210	1.5

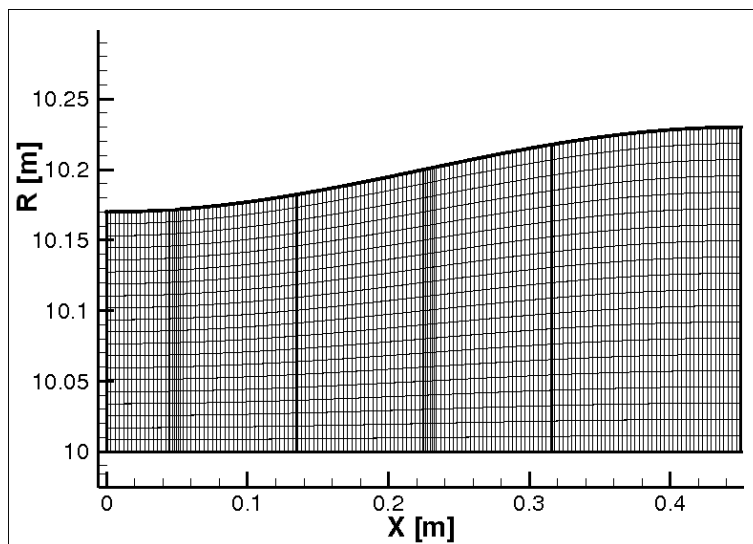


Figura 2.7: *Dominio simulato*

Le figure (2.8) e (2.9) mostrano un ingrandimento in corrispondenza del bordo d'attacco dello statore e del rotore (in particolare al tip, ma il risultato

non cambia lungo il raggio): si tratta dello stesso calcolo, effettuato con trattamento di incidenza rispettivamente disattivato e attivato, sia al *leading edge* che al *trailing edge*.

In entrambi i casi si è mantenuto il CFL pari a 10^9 , ma in presenza di trattamento di incidenza è stato necessario abbassare la rigidità massima da 10^4 a 10^3 .

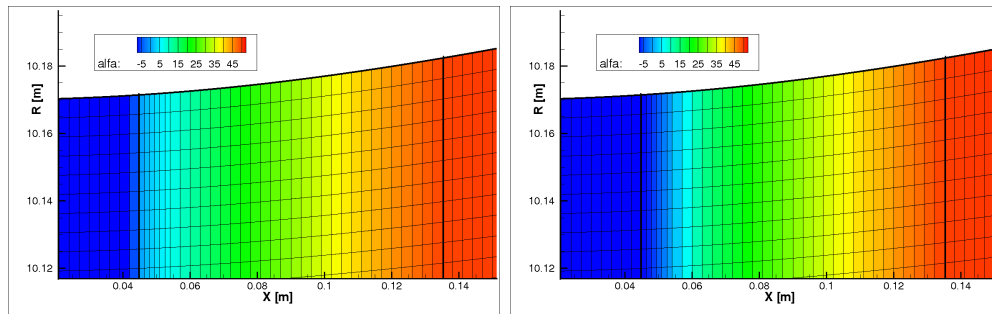


Figura 2.8: Risultato sullo statore **a:** in assenza di trattamento di incidenza; **b:** con trattamento attivo: la direzione del flusso è più graduale (la scala cromatica non abbraccia tutto il range di angoli ma è stata ridotta per apprezzare meglio la diversa ripartizione di incidenza)

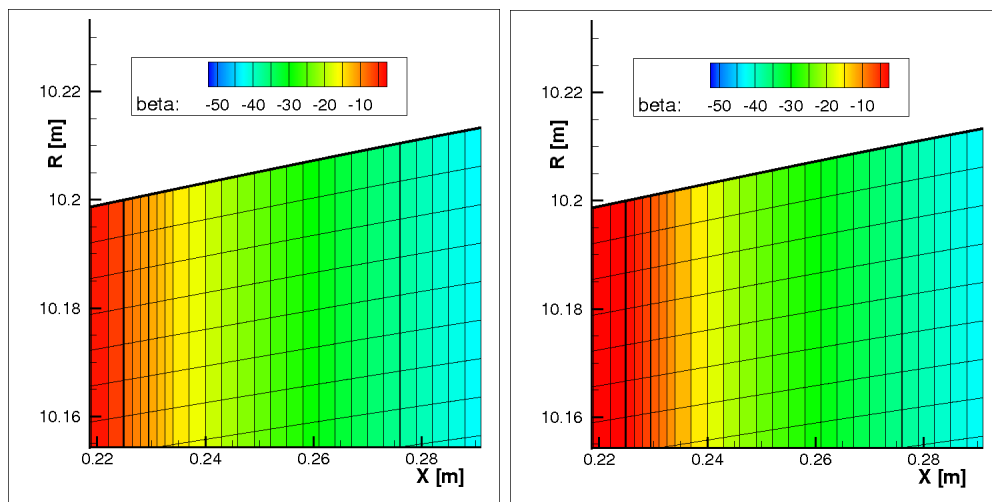


Figura 2.9: Risultato sul rotore **a:** in assenza di trattamento di incidenza; **b:** con trattamento attivo: la direzione del flusso è più graduale

Dalla figura 2.10 si ricava la distribuzione di entropia nei due casi: con il trattamento di incidenza non si rilevano perdite per urti fittizi che causano l'aumento di entropia, quindi anche dal punto di vista energetico il metodo si mostra vincente.

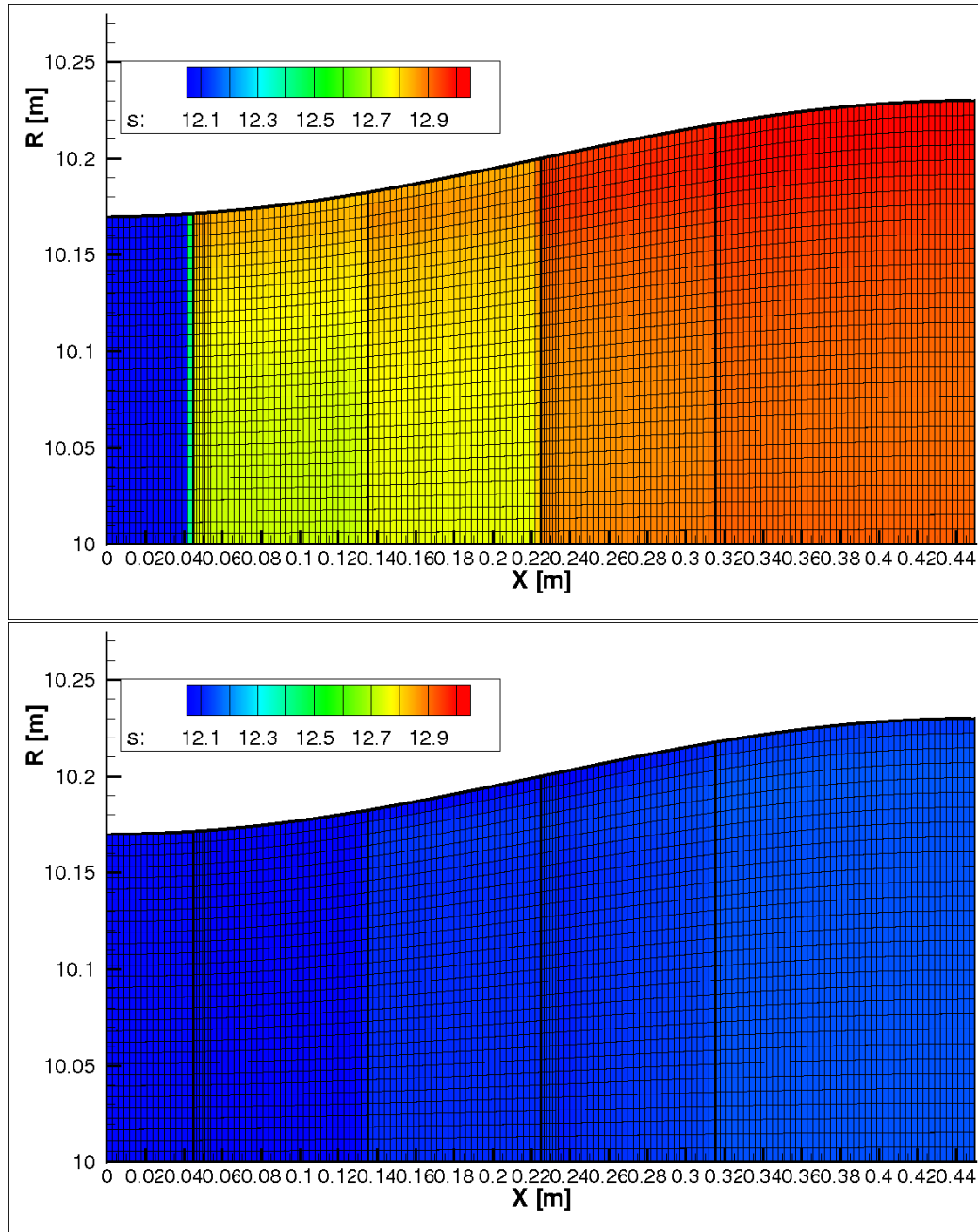


Figura 2.10: Distribuzione di entropia

Si riporta infine un confronto fra gli angoli cinematici restituiti dalla simulazione arricchita del trattamento di incidenza e gli stessi angoli calcolati analiticamente ¹:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{LE} - \frac{\mathcal{I}_{LE}}{tot\ cellule} \cdot (ind_{nodo} - 1)$$

$$\beta_{fl, teo} = \beta_{geo} + \mathcal{I}$$

nodo	1	2	3	4	5	6	7
$\beta_{geo} [^\circ]$	0	2.27	4.54	6.79	11.23	13.40	14.01
$\mathcal{I} [^\circ]$	-40.0	-33.3	-26.7	-20.0	-13.3	-6.7	0.0
$\beta_{fl, teo} [^\circ]$	-40.00	-31.03	-22.16	-13.21	-2.07	6.7	14.01
$\beta_{fl, calc} [^\circ]$	-39.8	-30.01	-22.15	-13.20	-2.06	6.7	14.01

¹ conteggio dei nodi effettuato trascurando aggiunti per infittimento

Capitolo 3

Modellazione del termine dissipativo

3.1 Espressione della forza

Il secondo termine di sorgente che occorre modellare è quello legato alle dissipazioni: nel contesto assialsimmetrico non viscoso tali effetti vengono modellati con una forza, definita $\mathbf{D}^* = \rho\mathbf{D}$ nella sezione 1.4.

Scopo di questo primo paragrafo è dimostrare che si può esprimere nella forma

$$\mathbf{D}^* = \rho\mathbf{D} = -\rho D \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \quad (3.1)$$

e ricavare il valore di D .

\mathbf{D} deve operare in modo tale da avere una azione frenante sul campo di moto: l'effetto meccanico delle dissipazioni è infatti una diminuzione di energia meccanica (misurata dalla pressione totale). Ciò permette di disporre questa forza antiparallela rispetto al campo di moto. La direzione della forza dissipativa va imposta tangente alla velocità relativa, perchè i fenomeni viscosi sintetizzati in questo termine (strati limite, scie, vortici) sono legati alla palettatura ed è dunque intuitivo ricondurli al moto relativo alla palettatura stessa, sia essa fissa o mobile.

Inoltre, un rallentamento in termini di $\Delta\mathbf{v}$ significa esattamente anche $\Delta(\mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, ovvero $\Delta\mathbf{w} + \Delta(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Fissate la geometria e la velocità

angolare, però, il secondo addendo non può variare, e quindi tutto il $\Delta \mathbf{v}$ si scarica sulla velocità relativa (come ovvio, dal momento che l'entità della perdita non può dipendere dal sistema di riferimento scelto per osservare il fenomeno).

Il modulo della forza può essere ricavato in svariati modi; nell'ottica di questa trattazione risulta una buona scelta quella di esprimerlo in funzione del gradiente di entropia, poichè

1. non essendoci il termine di viscosità, non è nemmeno possibile definire direttamente il termine $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}\nabla\mathbf{v}$, che è quello altrimenti responsabile delle perdite;
2. tale gradiente verrà stimato attraverso delle correlazioni, a cui comunque si dovrebbe ricorrere, ad esempio per stimare la deviazione;
3. anche in un modello viscoso, alcuni tipi di perdita non potrebbero essere calcolati: tutti i fenomeni che interessano le variazioni tangenziali delle grandezze (scie delle pale, flussi secondari) devono essere trascurati, quindi per apprezzare tutte le perdite dovute alla deflessione dello strato limite occorrerebbe un'interazione con codici *blade-to-blade* o focalizzati sul piano secondario.

Il legame effettivo fra queste due grandezze è dato dall'equazione di Crocco (approfondita nell'appendice C):

- per la velocità assoluta:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla h_t - T \nabla s + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} - \mathbf{f}_v \quad (3.2)$$

- per la velocità relativa:

$$\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\omega}) = \nabla h_r - T \nabla s + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} - \mathbf{f}_v \quad (3.3)$$

In particolare, il termine di forzante si suddivide fra forzante puramente aerodinamica \mathbf{B} , normale alla pala a meno del trattamento di incidenza, e forza dissipativa \mathbf{D} . Inoltre per l'ipotesi di fluido inviscido, si omette il

termine $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$.

La seconda equazione, quella più generale, assume dunque la forma

$$\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\omega}) = \nabla h_r - T\nabla s + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \left(\frac{B}{\rho} \mathbf{n} - D \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right) \quad (3.4)$$

dove \mathbf{n} può coincidere con la normale alla pala o essere il risultato del trattamento di incidenza; in ogni caso, esso risulta normale alla velocità relativa \mathbf{w} per definizione della condizione di tangenza ($\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$).

Premoltiplicando scalarmente ambo i membri della (3.4) per \mathbf{w} , si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot [\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\omega})] &= \\ = \mathbf{w} \cdot \nabla h_r - \mathbf{w} \cdot (T\nabla s) + \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{w} \cdot \frac{B}{\rho} \mathbf{n} + \mathbf{w} \cdot D \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si consideri ora che

1. la rotalpia si conserva lungo una *streamline*, pertanto ogni sua variazione deve essere nella direzione normale ad essa: il gradiente è quindi punto per punto perpendicolare alla velocità relativa, da cui $\mathbf{w} \cdot \nabla h_r = 0$
2. il fluido è tangente al vincolo (e quindi normale a $\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$); anche dove è attivo il trattamento di incidenza, avendo adottato il metodo di proiezione delle forze (si veda il capitolo 2), si definisce la forza aerodinamica $B\mathbf{n}$ localmente normale alla velocità relativa: $\mathbf{w} \cdot B\mathbf{n} = 0$.

Peraltro, si noti che, mentre \mathbf{B} contiene già la densità insita nella definizione, \mathbf{D} costituisce la componente tangenziale del vettore \mathbf{f}_v , definito nell'equazione (C.3) dell'appendice C come $\frac{\mathbf{f}_{\omega 1}}{\rho}$: occorrerà quindi moltiplicare a posteriori per ρ per avere l'espressione completa.

3. al primo membro compare il prodotto scalare fra \mathbf{w} e

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\omega}) \quad (3.6)$$

$f(\mathbf{w})$, in quanto risultante da un prodotto vettoriale che coinvolge la velocità relativa, è anch'esso normale a \mathbf{w} , e il loro prodotto scalare identicamente nullo;

4. vige l'ipotesi di regime stazionario: $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0$.

Le uniche componenti dell'equazione di Crocco trasformata che non si annullano sono quindi quella entropica e quella legata alla componente tangenziale della forza. Ciò significa che essa esiste solo se cambia l'entropia e, poichè sono stati trascurati i flussi termici, l'unico modo per assistere ad un ∇s è per effetto delle irreversibilità: la forza tangenziale \mathbf{D}^* è quindi esclusivamente dissipativa.

Tornando agli aspetti quantitativi, si ottiene una relazione fra il modulo della forza dissipativa e il gradiente di entropia e, contemporaneamente, si verifica la correttezza dell'ipotesi circa il verso della forza dissipativa (il coefficiente di proporzionalità fra le due grandezze, $\frac{T}{\|\mathbf{w}\|}$, è positivo):

$$\mathbf{w} \cdot T \nabla s = \mathbf{w} \cdot D \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = D \cdot \|\mathbf{w}\| \quad (3.7)$$

$$D = T \nabla s \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = T \frac{\begin{bmatrix} w_x & w_r & w_\theta \end{bmatrix}}{\sqrt{w_x^2 + w_r^2 + w_\theta^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Tale espressione si semplifica in virtù dell'ipotesi di assialsimmetria che annulla tutte le derivate in senso tangenziale:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= -D \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = -\frac{T \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot w_x + \frac{\partial s}{\partial r} \cdot w_r \right)}{\sqrt{w_x^2 + w_r^2 + w_\theta^2}} \cdot \frac{\begin{bmatrix} w_x & w_r & w_\theta \end{bmatrix}}{\sqrt{w_x^2 + w_r^2 + w_\theta^2}} = \\ &= -\frac{T \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot w_x + \frac{\partial s}{\partial r} \cdot w_r \right)}{w_x^2 + w_r^2 + w_\theta^2} \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Delle grandezze che definiscono questa forza:

1. T e \mathbf{w} si possono ricavare dalle condizioni iniziali o, per accelerare e assicurare la convergenza, da una precedente simulazione non viscosa: in questo secondo caso esse non rappresentano la temperatura e la velocità relativa effettivamente presenti, ma sono tanto più vicine a quelle reali quanto più basse sono le perdite. In turbina queste sono dell'ordine di una piccola percentuale, ma anche nei compressori, dove sono maggiori, raggiungono comunque valori numericamente accettabili: T e \mathbf{w} costituiscono quindi una buona soluzione di primo tentativo e, se anche così non fosse, sarebbe sufficiente prolungare il *time-marching* per giungere a convergenza.

2. s è l'entropia specifica all'unità di massa, che in questo caso coincide, come già detto, con la sola entropia prodotta per scadimento dell'efficienza: questa è una notevole semplificazione, poichè le tecniche per la stima di ∇s , quali ad esempio le correlazioni, tengono separati i due termini. Si rende pertanto necessaria solo la stima dell'entropia generata per irreversibilità; in realtà alla definizione di ∇s concorrono sia il valore globale di s che la sua distribuzione punto per punto: come si vedrà nei paragrafi successivi, la scelta di stimare l'entropia tramite le correlazioni preclude la possibilità di stabilire con precisione l'effettiva distribuzione di s .

Si procede quindi con la ricerca di un metodo efficace per stimare ∇s : si inizierà ricavando l'entropia prodotta globalmente a cavallo di una *streamline* sfruttando alcune correlazioni empiriche, per poi distribuire il salto entropico cercando il modello il più possibile aderente alla realtà.

3.2 Correlazioni di perdita

La scelta di effettuare la trattazione partendo dalla schematizzazione di una forza, piuttosto che di una perdita energetica o di un campo di velocità effettivo, è dettata principalmente dalla relativa semplicità modellistica: anzichè ricorrere ad un modello di sforzo come nelle equazioni di Navier-Stokes, ci si focalizza esclusivamente sul loro effetto.

Tale strategia, peraltro simile a quella sottesa al trattamento di incidenza basato sulla proiezione delle forze, prevede l'utilizzo di correlazioni empiriche che consentono di stimare immediatamente le perdite di energia cinetica o di pressione totale.

Questo vantaggio si paga in termini di esattezza dei risultati, dal momento che:

1. le correlazioni possono derivare da dati sperimentali o da simulazioni numeriche: nel primo caso i risultati sono intrinsecamente soggetti ad errore, mentre la seconda strada può essere impraticabile per varie ragioni. Infatti il modello disponibile può essere molto semplificato, il che porterebbe comunque ad un calo dell'accuratezza, oppure al contrario molto preciso, ma contemporaneamente pesante (uno dei vantaggi del calcolo meridiano è la snellezza computazionale, pregio che andrebbe vanificato se richiedesse comunque una serie eccessiva di calcoli a monte).

2. nel caso di mappe di perdita di origine sperimentale, le prove utili alla loro determinazione sono state eseguite in specifiche condizioni geometriche, cinematiche e termodinamiche, ragionevolmente diverse da quelle di esercizio, e non è sempre possibile lavorare anche in queste ultime con precisione.
3. spesso le correlazioni sono concepite per uso tecnico: i risultati sono pertanto espressi in forma di grafici, ovvero si assume implicitamente che le variabili indipendenti siano al massimo due (l'ascissa e il parametro). Si può ricorrere all'*escamotage* di utilizzare, al posto di semplici variabili, delle loro combinazioni, così da ampliare il ventaglio dei fattori effettivamente influenti sulle perdite, ma anche questo porta con sé lo svantaggio di perdere di vista quale sia il peso effettivo di tali fattori. In ogni caso occorre interpolare fra i vari punti misurati, e quindi anche la scelta della funzione analitica influisce sul risultato ottenuto: in una turbina, dove le prestazioni si giocano su piccolissime percentuali, si rischia di produrre risultati inaccurati.

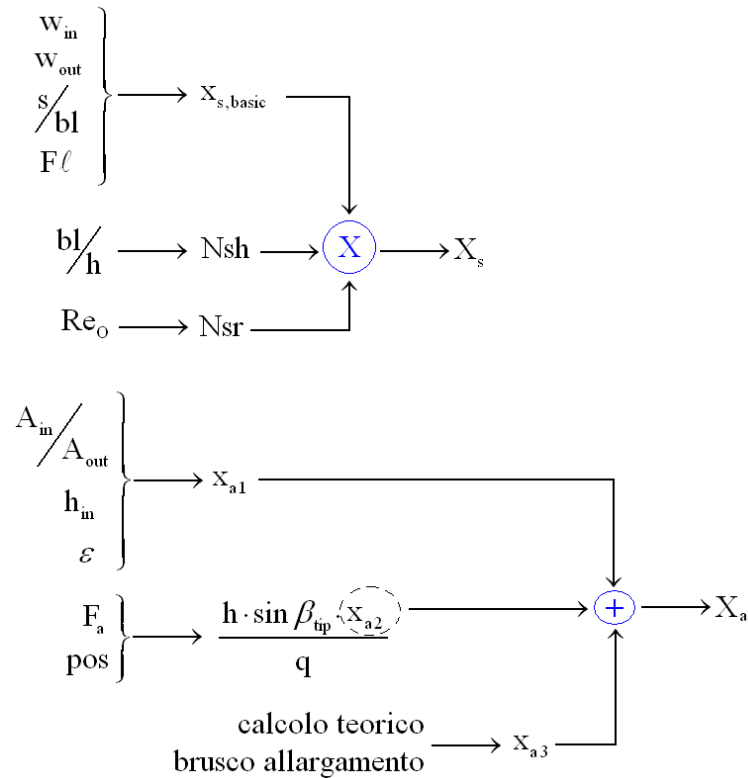
Gli apparati implementati nell'ambito di questo lavoro sono quattro: per le turbine sono state utilizzate le correlazioni di Craig e Cox[1] e di Ainley e Mathieson[16, 17], per i compressori compare il lavoro di Lieblein[18] (con integrazioni da parte di Howell[19]) e si lascia per tutte le analisi la possibilità all'utente di introdurre una mappa di perdite definita esternamente.

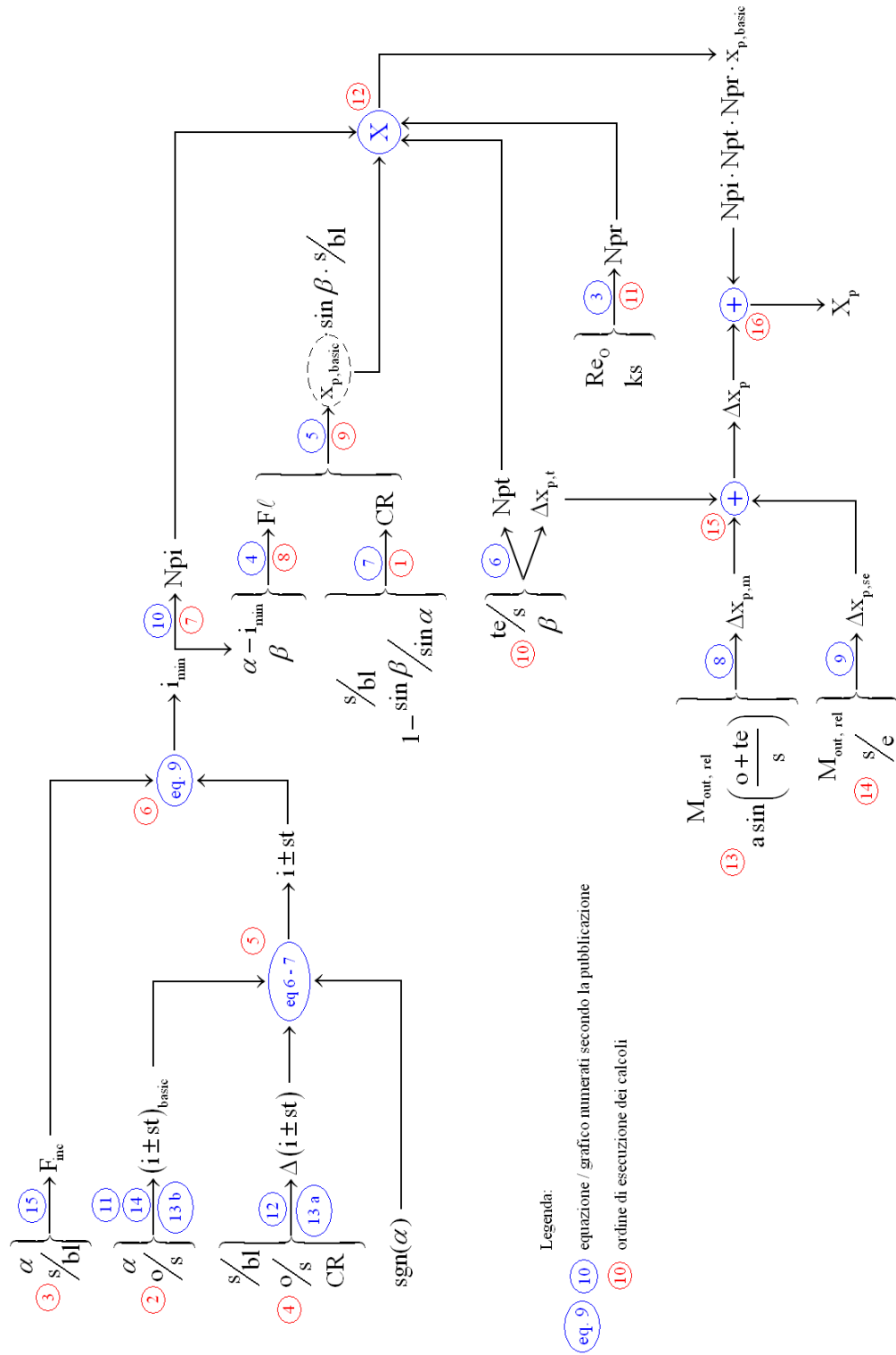
Concentrandosi sulle perdite in turbina, sono stati analizzati due apparati perchè quello di Ainley e Mathieson è indubbiamente semplice e organico (comprende anche la stima della deviazione a valle), ma più approssimativo e incapace di scindere le perdite di profilo, secondarie, di *annulus*, ... Inoltre l'affidabilità della stima delle perdite interne decresce rapidamente al diminuire dell'altezza di pala, fino a perdere completamente significato fisico al di sotto di un certo valore.

Infine, per l'utilizzo di questo set occorre conoscere a priori quantità come lavoro euleriano e grado di reazione stimabili però solo a posteriori, e quindi tramite un processo iterativo annidato che appesantisce il calcolo.

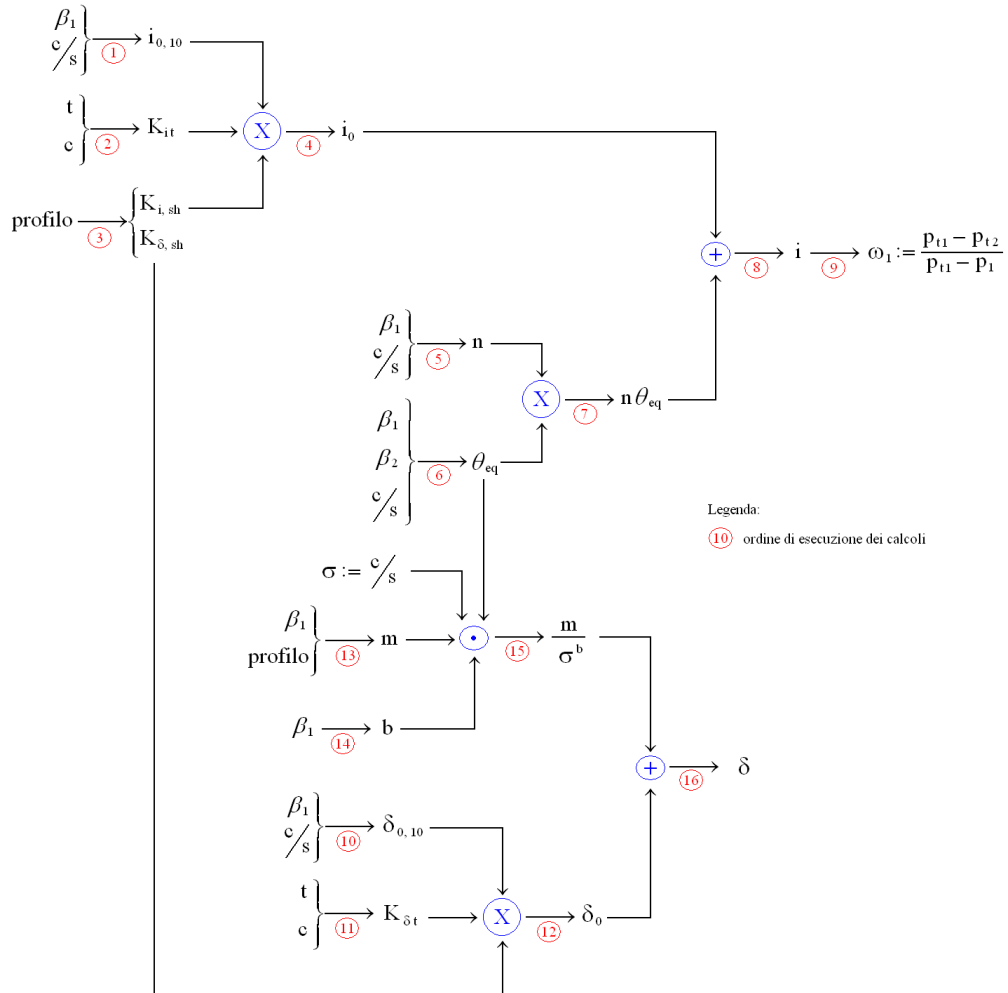
Il lavoro di Craig e Cox, viceversa, è notevolmente più complesso, ma anche più preciso e dettagliato, e di conseguenza i suoi risultati sono stati privilegiati, mentre il calcolo della deviazione a valle viene effettuato integrando le correlazioni di Ainley e Mathieson. La procedura di calcolo è schematizzata nei seguenti prospetti:

A	area corona anulare	ks	scabrezza superficiale
α	angolo _{geo, in} dalla dir. tan.	$M_{out, rel}$	$Mach_{out}$ rispetto a $\ \mathbf{w}\ $
bl	lunghezza linea media	N	correttivo moltiplicativo
β	angolo _{geo, out} dalla dir. tan.	p	perimetro cavità <i>annulus</i>
CR	fattore bloccaggio per spessore	pos	posizione cavità : • dopo rotore • dopo statore
Δx	correttivo additivo	q	apertura gola cavità
e	raggio di curvatura dorso pala	Re_o	Reynolds (sez. di gola)
ϵ	angolo dell' <i>annulus</i> (semicono)	s	passo
F_a	$\frac{0.020 \cdot p}{q \cdot \cos \beta_{tip}}$	te	spessore <i>trailing edge</i>
h	altezza pala	w	veocità relativa
i_{min}	<i>incidenza</i> _{min} <i>perdite</i>	$X_{p,s,a}$	perdite compressive : • profilo • secondarie • <i>annulus</i>
$i \pm st$	<i>inc</i> _{stallo} (\pm dipende da α)	$x_{p,s,a, basic}$	perdite in condizioni std





Le correlazioni di Lieblein invece si basano principalmente sull'effetto dell'incidenza e stimano anche la deviazione, come riportato nel seguente prospetto:



Una volta ricavate le tre perdite, di profilo, di *annulus* e secondarie, si sommano dopo aver ricondotto la seconda alla velocità assoluta, per ottenere una perdita percentuale di energia cinetica (a titolo informativo, gli autori delle correlazioni suggeriscono di dividere tale risultato per $2g$ per esprimere la perdita in m di colonna d'acqua, e per J , fattore che permette di ricondurre la perdita meccanica a una termodinamica).

Questo termine X in ogni caso permette solo di quantificare le perdite più propriamente fluidodinamiche (denominate dagli autori *perdite di primo gruppo*), mentre per quelle dovute a trafilemanti (*tip clearance*, fori di equilibramento, ...) o a scadimenti generici di rendimento (legatura, condensa,

ventilazione, parzializzazione, ...), ovvero *di secondo gruppo*, si rimanda nella maggior parte dei casi a lavori altrui.

Nell'ottica del presente lavoro, molte di queste ultime perdite interessano fenomeni "invisibili" rispetto agli obiettivi di un codice meridiano, e pertanto sono state trascurate.

Note ora le perdite X di energia cinetica, è sufficiente convertirle in perdite di pressione totale Y tramite:

$$Y = \left[\left(1 - X \cdot M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} - 1 \right] \cdot \frac{rapp_p}{rapp_p - 1} \quad (3.10)$$

dove

$$rapp_p = \left(1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.11)$$

Si può ora ricavare dalla definizione di Y , note la pressione totale ideale e quella statica, la pressione totale effettiva a valle delle schiera:

$$Y = \frac{p_{t,in} - p_{t,out}}{p_{t,in} - p} \quad \implies \quad p_{t,out} = p_{t,in} - Y \cdot (p_{t,in} - p) \quad (3.12)$$

dove p è la pressione statica inferiore, in modo tale che il denominatore rappresenti il salto di pressione teorico: per una turbina è quella allo scarico, p_{out} , per un compressore quella di aspirazione p_{in} .

Infine si passa dai valori di pressione totale all'entropia generata per irreversibilità: invertendo l'equazione (C.9), si ottiene

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{dp}{T\rho} \quad (3.13)$$

che per gas ideali diventa

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (3.14)$$

Integrando l'equazione 3.14 rispetto a una condizione di riferimento (qui si assume che sia quella della sezione a monte, cui il flusso giunge senza riscontrare perdite, caratterizzata da condizioni $T_{-\infty}, p_{-\infty}, \dots$), si ottiene

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T}{T_{-\infty}} - R \ln \frac{p}{p_{-\infty}} \quad (3.15)$$

o meglio, utilizzando le grandezze totali,

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T_t}{T_{-t\infty}} - R \ln \frac{p_t}{p_{t,-\infty}} \quad (3.16)$$

A questo punto si conosce il salto entropico totale a cavallo della schiera, procedimento da ripetersi per ogni *streamline*, il che consente, a fronte dell'utilizzo di un breve ciclo che passa in rassegna le *streamline*, di valutare già la distribuzione radiale effettiva della generazione di entropia.

Viceversa, tale salto è noto solo a livello globale in senso assiale e andrà ripartito lungo la *streamline* per stimare puntualmente ∇s .

3.3 Deduzione dei termini di sorgente dissipativi

3.3.1 Stima del gradiente di entropia

Non disponendo di indicazioni a riguardo, si è ipotizzata una distribuzione arbitraria del Δs fornito dalle correlazioni lungo l'ascissa curvilinea delle varie *streamline*, per ricavare un modello di produzione entropica locale, ovvero definito in ciascuna cella della *mesh* come differenza fra le entropie associate ai nodi adiacenti.

Le distribuzioni ipotizzate sono state in primo luogo quattro, scritte rispondendo agli unici vincoli di rispettare il salto netto e di monotonia. Definita z l'ascissa curvilinea normalizzata della *streamline*

$$z = \frac{m_{n=\bar{n}} - \bar{m}_{in, n=\bar{n}}}{\bar{m}_{out, n=\bar{n}} - \bar{m}_{in, n=\bar{n}}} \quad (3.17)$$

si hanno:

- lineare: $s(z) = \Delta s \cdot z$
- logaritmica: $s(z) = \Delta s \cdot \ln [(e - 1) z + 1]$
- esponenziale: $s(z) = \Delta z \cdot \frac{1}{e-1} \cdot e^z$
- sinusoidale: $s(z) = \Delta s \cdot [-\cos(\pi z)]$

Per la scelta della distribuzione ottimale si è tenuto conto che in realtà la maggior parte del Δs , strato limite a parte (comunque assente nel codice inviscido), è prodotto nelle zone dove si raggiungono le massime velocità: per una turbina questa coincide con il *trailing edge* per effetto della deviazione, e quindi risulta preferibile la funzione esponenziale, che massimizza la derivata nel tratto finale, mentre quella lineare la mantiene costante, la logaritmica la diminuisce e la sinusoidale l'annulla.

Per i compressori, viceversa, sarebbe opportuno il contrario, mentre per profili simmetrici i bordi sono equiparabili: è stata quindi adottata una funzione versatile che stabilisce automaticamente quale distribuzione utilizzare a seconda delle caratteristiche geometriche e fluidodinamiche della macchina:

$$s(z) = (\lambda^2 - 1) + \Delta s \cdot \left\{ \left(1 - \lambda^2 + \frac{\lambda}{e^{wgt} - 1} \right) \cdot \exp \left[wgt \cdot \lambda \left(\frac{\lambda - 1}{2} + z \right) + (1 - \lambda^2) \cdot \ln(z + 1) \right] \right\} \quad (3.18)$$

dove wgt è un coefficiente usato per modulare il raggio di curvatura della funzione (con $wgt = 1$ si ha un'esponenziale standard) e λ è il parametro che gestisce appunto il tipo di macchina, e vale

$$\lambda = int \left[3 \cdot \left| int \left[1 - \left(\frac{|\beta_\infty|}{1000} \right) \right] - 1 \right| \cdot \left(1.5 - \frac{2}{|floor(-1 - \frac{\beta_\infty}{1000})|} \right) \right] \quad (3.19)$$

Questa funzione ripartisce l'entropia secondo un esponenziale crescente, un esponenziale negativo e una retta a seconda che β_∞ sia rispettivamente positivo, negativo o nullo. Il capitolo 4 riporta a titolo di esempio il profilo di entropia calcolato al diametro di *shroud* di uno stadio di ventilatore: è evidente l'andamento di entropia crescente con l'ascissa, ma con rapidità decrescente, in accordo con la funzione (3.19) che prevede un esponenziale a parametro negativo per le macchine operatrici.

In ogni caso, tutte le espressioni vedono la differenza di entropia a cavallo della schiera solo come fattore moltiplicativo della funzione spaziale: il Δs infatti dipende sicuramente dalla geometria e dalle dimensioni della schiera, ma solo in un primo momento inerente all'uso delle correlazioni.

Una volta stimato il Δs , questo è una costante spaziale (lungo la *streamline*, si intende) e temporale: la funzione estropia si può esprimere come

$$s(m, n) = \Delta s(n) \cdot f_z(m) \quad (3.20)$$

e di conseguenza le sue derivate diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial m} = \Delta s \cdot \frac{\partial f_z}{\partial m} \\ \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial \Delta s}{\partial n} \cdot f_z \end{cases} \quad (3.21)$$

Un procedimento di questo tipo consente di avere una stima immediata delle derivate dell'entropia nelle direzioni m e n , ma può essere generalizzato al calcolo con differenze finite nel caso in cui la distribuzione spaziale venga scelta diversamente, e non si possano più separare le variabili:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial m} \approx \frac{s(i,j+1) - s(i,j-1)}{m(i,j+1) - m(i,j-1)} \\ \frac{\partial s}{\partial n} \approx \frac{s(i+1,j) - s(i-1,j)}{n(i+1,j) - n(i-1,j)} \end{cases} \quad (3.22)$$

per $(i, j) \in [(2, 2), (i_{max} - 1, j_{max} - 1)]$

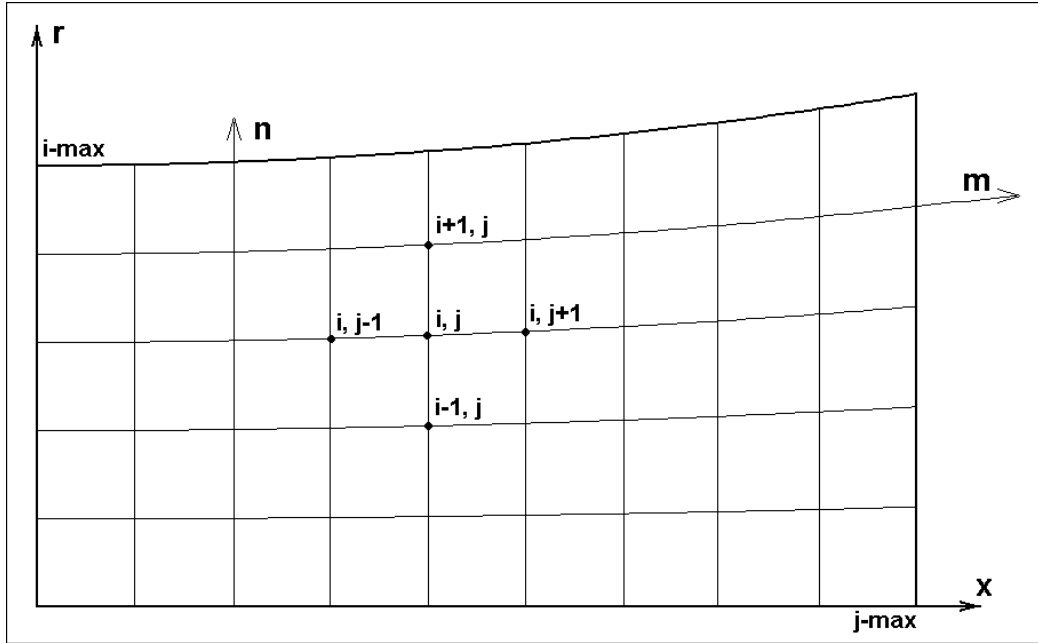


Figura 3.1: Distribuzione dei nodi su una mesh meridiana

Tuttavia questi risultati non sono le componenti del gradiente di s , dal momento che esso va valutato rispetto al sistema di riferimento in coordinate

cilindriche: in realtà i termini differenziali ricavati dalle correlazioni vanno riproiettati nelle direzioni assiale e radiale per valutare i termini da usare nelle forze di volume dissipative.

Poichè per definizione vale che $\nabla s \cdot \mathbf{n}_y = \|\nabla s\| \cdot \cos \alpha_y$, con α_y angolo compreso fra i due vettori, si verifica che il prodotto scalare fra ∇s e un generico versore in direzione y (ovvero la proiezione di ∇s lungo la medesima direzione) è la derivata dell'entropia rispetto a y .

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \nabla s \cdot \mathbf{n}_m = \frac{\partial s}{\partial m} \\ \nabla s \cdot \mathbf{n}_n = \frac{\partial s}{\partial n} \end{array} \right. \implies \\ & \implies \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial r} \right] \cdot \left[\cos \alpha_m \quad \sin \alpha_m \right] = \frac{\partial s}{\partial m} \\ \left[\frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial r} \right] \cdot \left[\cos \alpha_n \quad \sin \alpha_n \right] = \frac{\partial s}{\partial n} \end{array} \right. \implies \\ & \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\frac{\partial s}{\partial m} \sin \alpha_n - \frac{\partial s}{\partial n} \sin \alpha_m}{\sin(\alpha_n - \alpha_m)} \\ \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\frac{\partial s}{\partial n} \cos \alpha_m - \frac{\partial s}{\partial m} \cos \alpha_n}{\sin(\alpha_n - \alpha_m)} \end{array} \right. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Il gradiente cercato vale quindi

$$\nabla s = \frac{1}{\sin(\alpha_n - \alpha_m)} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial m} \sin \alpha_n - \frac{\partial s}{\partial n} \sin \alpha_m \right) \quad \left(\frac{\partial s}{\partial n} \cos \alpha_m - \frac{\partial s}{\partial m} \cos \alpha_n \right) \right] \quad (3.24)$$

Esso sicuramente esiste, poichè per scelta le direzioni m e n sono perpendicolari, o esattamente (per definizione di n), o approssimativamente (se si usa la direzione radiale in sua vece).

Quest'ultima circostanza potrebbe dare problemi se l'approccio venisse utilizzato invariato per geometrie (ragionevolmente diverse da quelle riscontrabili nelle turbomacchine) che fanno coincidere localmente le direzioni m e r ; tuttavia l'analisi matematica garantisce che una simile irregolarità parametrica renderebbe impossibili l'espressione o l'uso di molte funzioni o operazioni, evidenziando immediatamente il problema (della stessa entità di una patologia topologica), a monte dell'utilizzo scorretto della presente modellazione.

Gli angoli necessari alle proiezioni si valutano approssimativamente sempre ricorrendo alla definizione di rapporto incrementale:

$$\begin{cases} \alpha_m(i, j) \approx \arctan \left(\frac{r(i, j+1) - r(i, j-1)}{x(i, j+1) - x(i, j-1)} \right) \\ \alpha_m(i, j) \approx \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{x(i+1, j) - x(i-1, j)}{r(i+1, j) - r(i-1, j)} \right) \end{cases} \quad (3.25)$$

sempre per $(i, j) \in [(2, 2), (i_{max} - 1, j_{max} - 1)]$

3.3.2 Scrittura funzionale dei termini dissipativi

Si procede ora illustrando l'uso della forza dissipativa nella soluzione del sistema: essa rientra nelle equazioni di bilancio di massa, energia e quantità di moto nella forma

$$\mathbf{f}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ (\rho r) \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ (\rho r) D_x \\ (\rho r) D_r \\ (\rho r) D_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ f_{D3} \\ f_{D4} \\ f_{D5} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Il codice, tuttavia, richiede di lavorare in variabili conservative \mathbf{q} , e di conseguenza si riscrive il vettore in una forma funzionale al suo inserimento nel programma:

1. La generica formulazione dei termini è:

$$\begin{aligned}
 f_{D2} &= \rho r (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{D} = \rho r (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \left(-D \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right) = \\
 &= -\rho r D \left[\frac{[0 \ 0 \ \omega r] \cdot [w_x \ w_r \ w_\theta]}{\|\mathbf{w}\|} \right] = \\
 &= -\rho r D \left(\frac{\omega r \cdot w_\theta}{\|\mathbf{w}\|} \right) = \\
 &= -\rho r \frac{T}{\|\mathbf{w}\|} \left(\frac{\partial s}{\partial x} w_x + \frac{\partial s}{\partial r} w_r \right) \cdot \left(\frac{\omega r \cdot w_\theta}{\|\mathbf{w}\|} \right) = \\
 &= -r T \cdot \omega r \frac{q_5}{q_1 \cdot \|\mathbf{w}\|^2} \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

2. Definendo $F_D = -r T \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right)$, si riscrive $f_{D2} = F_D \cdot \omega r \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1 \|\mathbf{w}\|^2}$.

3. Lo stesso approccio usato per f_{D2} è valido anche per gli altri termini:

$$\begin{aligned}
 f_{D3}, f_{D4}, f_{D5} \rightarrow f_{Di} &= \rho r T \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x} w_x + \frac{\partial s}{\partial r} w_r \right)}{\|\mathbf{w}\|^2} = \\
 &= \left[r T \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right)}{\|\mathbf{w}\|^2} \right] \frac{q_{i, rel}}{q_1} = \\
 &= \begin{cases} F_D \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \frac{q_i}{q_1} & i = 3, 4 \\ F_D \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \frac{q_i - q_1 \omega r}{q_1} & i = 5 \end{cases} \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

4. Infine si ritorna a esprimere $f_{D2} = \omega r q_5$.

Il termine $\|\mathbf{w}\|$ è stato riportato invariato poichè la sua espressione funzionale alle variabili conservative e le relative derivate sono reperibili già al capitolo 2 nelle equazioni (2.25) e (2.26).

3.3.3 Jacobiani

La scrittura del vettore \mathbf{f}_D nella forma piuttosto unificata illustrata al capitolo precedente mostra tutta la sua forza nel calcolo degli jacobiani rispetto alle variabili conservative:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_D &= \begin{bmatrix} f_{D1} = 0 \\ f_{D2} = (\rho r) \cdot \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ f_{D3} = (\rho r) \cdot D_x \\ f_{D4} = (\rho r) \cdot D_r \\ f_{D5} = (\rho r) \cdot D_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_D \cdot \omega r \frac{q_5 - q_1 \omega r}{\|\mathbf{w}\|^2} \\ F_D \cdot \frac{q_3}{\|\mathbf{w}\|^2} \\ F_D \cdot \frac{q_4}{\|\mathbf{w}\|^2} \\ F_D \cdot \frac{q_5 - q_1 \omega r}{\|\mathbf{w}\|^2} \end{bmatrix} = \\
 &= F_D \begin{bmatrix} 0 & =:s_{D1} \\ \omega r \frac{q_5 - q_1 \omega r}{\|\mathbf{w}\|^2} & =:s_{D2} \\ \frac{q_3}{\|\mathbf{w}\|^2} & =:s_{D3} \\ \frac{q_4}{\|\mathbf{w}\|^2} & =:s_{D4} \\ \frac{q_5 - q_1 \omega r}{\|\mathbf{w}\|^2} & =:s_{D5} \end{bmatrix} = F_D \cdot \mathbf{s}_D \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Così facendo risulta più agevole la derivazione poichè, analogamente a quanto fatto per il trattamento di incidenza, si suddivide la funzione in componenti più trattabili; questa procedura, oltre a semplificare l'implementazione, agevola eventuali futuri interventi e riduce il rischio di errore.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}_D}{\partial \mathbf{q}} \right|_{5 \times 5} = \mathbf{s}_D \left|_{5 \times 1} \odot \left. \frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{q}} \right|_{1 \times 5} + \left. \frac{\partial \mathbf{s}_D}{\partial \mathbf{q}} \right|_{5 \times 5} \cdot F_D \left|_{\in \mathbb{R}} \tag{3.30}$$

La struttura delle matrici, poi, è analoga a quella descritta nell'ambito del trattamento di incidenza (2.30).

Si esplicitano ora i due addendi:

1.

$$\left(\frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_D}{\partial q_1} = -r \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \frac{\partial T}{\partial q_1} \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_2} = -r \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \frac{\partial T}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_3} = -rT \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_4} = -rT \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_5} = 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Le derivate parziali della temperatura rispetto alle variabili ρ e ρe_t meritano una considerazione a parte e verranno quindi approfondite nell'apposito paragrafo 3.3.4.

2. Per quanto riguarda la seconda derivata, $s_{D1} = 0$ e quindi tutte le sue derivate sono identicamente nulle, mentre gli altri termini valgono rispettivamente:

(a)

$$s_{D3} = \frac{q_3}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \implies \tag{3.32}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_{D3}}{\partial q_1} = -\frac{q_3}{q_1^2} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{q_3}{q_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) = \\ \qquad = -\frac{q_3}{q_1^2} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} + \frac{q_3}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw1 \right) \\ \frac{\partial s_{D3}}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial s_{D3}}{\partial q_3} = \frac{1}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{q_3}{q_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) = \\ \qquad = \frac{1}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{q_3}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw3 \right) \\ \frac{\partial s_{D3}}{\partial q_4} = \frac{q_3}{q_1} \frac{\partial}{\partial q_4} \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) = \frac{q_3}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw4 \right) \\ \frac{\partial s_{D3}}{\partial q_5} = \frac{q_3}{q_1} \frac{\partial}{\partial q_5} \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) = \frac{q_3}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw5 \right) \end{array} \right.$$

(b)

$$s_{D4} = \frac{q_4}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \implies \quad (3.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_{D4}}{\partial q_1} = -\frac{q_4}{q_1^2} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{q_4}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw1 \right) \\ \frac{\partial s_{D4}}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial s_{D4}}{\partial q_3} = \frac{q_4}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw3 \right) \\ \frac{\partial s_{D4}}{\partial q_4} = \frac{1}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{q_4}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw4 \right) \\ \frac{\partial s_{D4}}{\partial q_5} = \frac{q_4}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw5 \right) \end{array} \right.$$

(c)

$$s_{D5} = \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} = \left(\frac{q_5}{q_1} - \omega r \right) \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \implies \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_{D5}}{\partial q_1} = -\frac{q_5}{q_1^2} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \left(\frac{q_5}{q_1} - \omega r \right) \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw1 \right) \\ \frac{\partial s_{D5}}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial s_{D5}}{\partial q_3} = \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw3 \right) \\ \frac{\partial s_{D5}}{\partial q_4} = \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw4 \right) \\ \frac{\partial s_{D5}}{\partial q_5} = \frac{1}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \left(-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|^3} dw5 \right) \end{array} \right.$$

(d)

$$s_{D2} = \omega r \cdot s_{D5} \implies \quad (3.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_{D2}}{\partial q_1} = -\frac{q_5}{q_1^2} \frac{\omega r}{\|\mathbf{w}\|^2} + \left(\frac{q_5}{q_1} - \omega r \right) \left(-\frac{2\omega r}{\|\mathbf{w}\|^3} dw1 \right) \\ \frac{\partial s_{D2}}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial s_{D2}}{\partial q_3} = \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \left(-\frac{2\omega r}{\|\mathbf{w}\|^3} dw3 \right) \\ \frac{\partial s_{D2}}{\partial q_4} = \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \left(-\frac{2\omega r}{\|\mathbf{w}\|^3} dw4 \right) \\ \frac{\partial s_{D2}}{\partial q_5} = \frac{\omega r}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \left(-\frac{2\omega r}{\|\mathbf{w}\|^3} dw5 \right) \end{array} \right.$$

Al netto di tutto lo jacobiano risulta quindi esprimibile come

$$\underline{\underline{\mathbf{J}_D}} = \frac{\partial (F_D \cdot \mathbf{s}_D)}{\partial \mathbf{q}} = \underbrace{\mathbf{s}_D \odot \frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{q}}}_{=: \underline{\underline{\mathbf{J}_{D1}}} + \underbrace{F_D \frac{\partial \mathbf{s}_D}{\partial \mathbf{q}}}_{=: \underline{\underline{\mathbf{J}_{D2}}} \quad (3.36)$$

dove

$$\underline{\underline{\mathbf{J}_{D1}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega r (q_5 - q_1 \omega r)}{q_1 \|\mathbf{w}\|^2} \\ \frac{q_3}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \\ \frac{q_4}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \\ \frac{q_5 - q_1 \omega r}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \end{bmatrix}_{5 \times 1} \cdot \begin{bmatrix} -r \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \frac{\partial T}{\partial q_1} \\ -r \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \frac{\partial T}{\partial q_2} \\ -r T \frac{\partial s}{\partial x} \\ -r T \frac{\partial s}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix}_{1 \times 5} \quad (3.37)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}_{D2}}} = F_D \cdot \left[-\frac{2}{\|\mathbf{w}\|} (\mathbf{s}_D \cdot \mathbf{dw}) + \frac{1}{q_1} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}_{5 \times 5}}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \right] \quad (3.38)$$

La matrice $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ di correttivi compare perchè q_1 è contenuto in tutti i termini, e pertanto altera la simmetria delle matrici, ma anche perchè sia s_{D2} che s_{D5} sono composti anche da somme oltre che da prodotti, e quindi le loro derivate risultano più ricche.

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \frac{1}{q_1} \cdot \begin{bmatrix} s_{D1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(s_{D5} + \frac{\omega r}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \omega r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{D3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{D4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{D5} + \frac{\omega r}{\|\mathbf{w}\|^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

3.3.4 Derivate termodinamiche

Come già accennato, occorre fare una precisazione riguardo alle due derivate della temperatura rispettivamente rispetto alla massa e all'energia totale volumiche: nel codice specifico, esse sono calcolate in un modulo apposito in cui si è scelto di esprimere le variabili termodinamiche temperatura, pressione ed entropia massica in funzione dell'energia interna e del volume specifici, a seconda del tipo di fluido considerato.

Ciò è sensato dal punto di vista fisico (la legge di Gibbs prevede che le variabili indipendenti da utilizzare siano infatti $22 + n_{specie\ chimiche} - n_{fasi} = 2$, *qui*), ma causa qualche problema nell'espressione esplicita delle funzioni, dal momento che il codice è scritto in termini di variabili conservative.

Non si hanno quindi il volume specifico ma il suo reciproco, nè l'energia interna massica ma il suo prodotto per la densità, il tutto sommato al termine cinetico.

Quanto appena detto è valido per ogni tipo di fluido, e per stimare gli jacobiani è necessario fare uso delle equazioni di stato del fluido. Il comportamento termodinamico reale dei fluidi è tuttavia complesso e sicuramente non riconducibile ad un unico set di equazioni di stato. Se, tuttavia, il fluido di interesse è ben approssimabile come gas ideale politropico (o *PIG*), ricavare i legami e le derivate è immediato.

$$\begin{aligned}
 T = \frac{e}{c_v} \implies \frac{\partial T}{\partial \rho e_t} &= \frac{\partial \left(T_T - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2c_v} \right)}{\partial q_2} = \\
 &= \frac{\partial \frac{e_t}{2c_v}}{\partial q_2} - \frac{1}{2c_v} \frac{\partial [(q_3^2 + q_4^2 + q_5^2) / q_1]}{\partial q_2}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

relazione in cui il sottraendo è identicamente nullo, in quanto le variabili conservative sono tutte indipendenti fra loro. Si ha quindi

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial \left(\frac{\rho e_t}{\rho} \right)}{\partial \rho e_t} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial \left(\frac{q_2}{q_1} \right)}{\partial q_2} = \frac{1}{\rho c_v} \tag{3.41}$$

Questa espressione permette anche di ricavare che T è in realtà indipendente dalla densità (anche passando attraverso l'equazione di stato dei gas non si ricava alcun legame, dal momento che anche p va espressa in funzione della stessa e dell'energia interna), e che quindi la derivata rispetto ad essa è identicamente nulla.

Se invece il fluido opera in condizioni lontane da quella di gas ideale, le uniche relazioni che rimangono valide sono le definizioni delle grandezze:

$$\begin{cases}
 h = e + \frac{p}{\rho} \\
 h_t = h + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \\
 de = T \cdot ds - p \cdot dv = \frac{\partial e}{\partial s} ds - \frac{\partial e}{\partial v} dv
 \end{cases} \tag{3.42}$$

da cui

$$T = \frac{\partial e}{\partial s} + p \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial e}{\partial s} + p \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial s} \tag{3.43}$$

Ma se $(T, p, s) = (T, p, s)(\rho, e)$, allora

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \quad (3.44)$$

e perciò

$$T = \frac{\partial e}{\partial s} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial s} \quad (3.45)$$

Le due derivate parziali sono note a patto che siano diverse da 0, e valgono

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial \rho}} \\ \frac{\partial e}{\partial s} = \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial e}} \end{cases} \quad (3.46)$$

Se è noto il legame fra la temperatura e le due grandezze indipendenti, è sufficiente verificare che non sia nulla la derivata rispetto alla densità: se questa condizione è verificata, si può calcolare l'altra derivata come

$$\frac{\partial T}{\partial \rho e_t} = \frac{\partial T}{\partial [\rho(e + \|\mathbf{v}\|^2/2)]} = \frac{1}{\frac{\partial [\rho(e + \|\mathbf{v}\|^2/2)]}{\partial \rho e_t}} = \frac{1}{\frac{\partial \rho e}{\partial T} + \frac{\partial \rho \|\mathbf{v}\|^2}{2 \partial T}} = \frac{1}{\frac{\partial \rho e}{\partial T}} \quad (3.47)$$

essendo la energia cinetica indipendente dalla temperatura (una è una grandezza essenzialmente fluidodinamica, l'altra termica).

L'ultimo *step*, esprime finalmente la derivata ricercata come

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{1}{\rho \frac{\partial e}{\partial T} + e \frac{\partial \rho}{\partial T}} \quad (3.48)$$

ed evidenzia la necessità dell'ipotesi sopraccitata, dal momento che per un gas ideale politropico, dove la temperatura e densità sono indipendenti, l'ultima equazione presenta uno zero a denominatore: la derivata della densità rispetto alla temperatura va valutata a parte. Non è corretto nè sostituirla con il reciproco della derivata parziale della funzione inversa (appunto per evitare una frazione impossibile), nè tantomeno considerare singolare il legame fra le due grandezze. Per un approfondimento si faccia riferimento all'appendice D.

L'equazione (3.31) può quindi essere completata nella forma

$$\left(\frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial F_D}{\partial q_1} = -r \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \frac{\partial T}{\partial q_1} \stackrel{\text{PIG}}{=} 0 \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_2} = -r \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \frac{\partial T}{\partial q_2} \stackrel{\text{PIG}}{=} -r \left(\frac{\partial s}{\partial x} q_3 + \frac{\partial s}{\partial r} q_4 \right) \frac{1}{c_v} \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_3} = -rT \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_4} = -rT \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{\partial F_D}{\partial q_5} = 0 \end{array} \right] \quad (3.49)$$

3.4 Gradiente di entropia al bordo: orlatura su tutto il dominio e modellazione dello strato limite

L'ipotesi effettuata per le equazioni (3.22) e (3.25) riguardante il dominio in cui calcolare le derivate dell'entropia e gli angoli è piuttosto critica: infatti sul contorno del dominio manca uno dei due nodi adiacenti necessari al calcolo della differenza finita.

Il problema del calcolo del gradiente di entropia al contorno, peraltro, è duplice: se in senso assiale esso si riduce alla semplice ricerca di una tecnica numerica sostitutiva, in senso radiale si è cercato un metodo che potesse simulare anche l'effetto dello strato limite.

Infatti, mancando i nodi esterni necessari al calcolo del rapporto incrementale, occorre comunque intervenire con una definizione a parte di ∇s , e quindi sono state esplorate varie soluzioni, nel tentativo di trovarne una che fornisse una descrizione più completa dei fenomeni che si verificano vicino alle pareti.

Prima di addentrarsi nella descrizione delle tecniche specifiche, è utile una considerazione: tentare di modellare lo strato limite, per definizione la zona in cui gli effetti viscosi diventano preponderanti su quelli inerziali, nell'ambito di un calcolo inviscido può sembrare incoerente. In realtà il presente studio non indaga le cause che fisicamente conducono allo sviluppo dello strato limite, ricadendo necessariamente in un problema viscoso, ma si limita ad introdurre nel calcolo delle altre grandezze termofluidodinamiche gli effetti dell'entropia localmente accresciuta. Il contributo dovuto al solo strato limite è stato stimato sulla base di correlazioni sperimentali e di considerazioni generali.

Tale forzatura è comunque giustificata, se si pensa che nello strato limite avviene una cospicua generazione di entropia, e che quindi un modello dissipativo che non ne tenga conto è incompleto (sebbene quantitativamente l'errore pare tollerabile).

Nello specifico, le soluzioni esplorate in questo lavoro, sia per la stima delle differenze finite su tutti i contorni, sia per sovrapporre l'effetto dello strato limite, sono state le seguenti:

1. *Imposizione di derivata nulla al contorno* Questa è una soluzione rapida ma priva di reale fondamento: tuttavia, in virtù della sua semplicità, e a patto di avere una griglia sufficientemente fine, si può adottare per la derivata lungo m dell'entropia sui nodi con $i = 0$ e $i = i_{max}$, ovvero sul contorno in senso assiale, ma non può assolutamente essere impiegata per quelli con $j = 0$ o $j = j_{max}$.

Infatti in senso radiale la frontiera è data da pareti fisiche, sulle quali nella realtà si genera uno strato limite, forte reponsabile della produzione di entropia entro uno spazio ridotto.

2. *Calcolo ibrido delle derivate (analitiche e numeriche)* Altra soluzione adattabile solo all'orlatura delle derivate in senso assiale è il calcolo delle derivate analitiche rispetto a m , qualora $s(z)$ sia espressa solo nella già citata forma $s(m, n) = \Delta s(n) \cdot f_z(m)$.

Così facendo, è nota la derivata della funzione spaziale in ogni punto, *inflow* e *outflow* inclusi, ed è sufficiente moltiplicarla per il Δs competente a ciascuna *streamline* per ricondursi alla derivata dell'entropia.

Poichè le derivate vengono calcolate analiticamente in fase di implementazione anzichè dal software, non c'è nessun costo computazionale aggiunto, mentre la precisione aumenta: questa soluzione è quella adottata per risolvere la questione della componente lungo m del gradiente di entropia.

3. *Declassamento dell'accuratezza del metodo di calcolo della derivata* La tecnica utilizzata finora è la cosiddetta *differenza finita centrata*, basata sulla media aritmetica dei due rapporti incrementali destro e sinistro; così facendo si vede che, senza aggiungere costo computazionale, si riduce l'errore.

Esprimendo difatti la derivata della generica funzione $y = y(x)$ come *differenza finita asimmetrica* (destra in questo caso), e sostituendo a y la sua espansione completa in serie di Taylor, si vede che

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y'(x_0) \approx y'^*(x_0) = \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} \\ y(x_0 + h) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} h^i \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} h^i \right) + o(h^n) \end{cases} \implies \\ \implies y'^*(x_0) &= \frac{[y(x_0) + y'(x_0) \cdot h + y''(x_0) \cdot h^2/2 + o(h)] - y(x_0)}{h} = \\ &= y'(x_0) + \frac{y''(x_0) h^2}{h} + \frac{o(h)^2}{h} = \\ &= y'(x_0) + \frac{O(h^2)}{h} = y'(x_0) + k \frac{h^2}{h} \implies \\ \implies \text{errore} &= y' - y'^* = k \cdot h = O(h) \end{aligned} \tag{3.50}$$

e analogamente per una differenza finita asimmetrica sinistra.

Se invece si approssima la derivata con la *differenza finita centrata*, si ha

$$\begin{aligned} y'^*(x_0) &= \frac{y'_d x(x_0) - y'_d x(x_0)}{2} = \\ &= \frac{[y(x_0 + h) - y(x_0)] + [y(x_0) - y(x_0 - h)]}{2h} = \\ &= \frac{y(x_0 + h) - y(x_0 - h)}{2h} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &[y(x_0) + y'(x_0) \cdot h + y''(x_0) \cdot h^2/2 + o(h^2)] - \\ &[y(x_0) + y'(x_0) \cdot (-h) + y''(x_0) \cdot (-h)^2/2 + o(h^2)] \end{aligned} \right\}}{2h} = \\
 &= y'(x_0) + \frac{o(h^2)}{h} \implies \\
 &\implies \text{errore} = y' - y'^* = k \cdot h^2 = O(h^2) \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

Il valore di h , essendo in questo caso il passo di discretizzazione della *mesh*, è sicuramente inferiore a 1, il che garantisce una miglior convergenza del metodo centrato. Combinando globalmente entrambi i metodi su tutta la griglia di calcolo, prevale l'errore maggiore, quindi rinunciare all'accuratezza in favore di questo metodo, pur semplice, pare poco interessante.

Si utilizza però per sopperire alla mancanza di nodi nel calcolo degli angoli: è vero che si abbassa la precisione, ma solo nel calcolo di un termine marginale come l'angolo di inclinazione dell'asse coordinato, e non della grandezza fisica effettiva. Inoltre dalle precedenti espressioni si nota che il fattore di proporzionalità dell'errore è circa metà della derivata seconda, comunque piccola per m e n (in quest'ultimo caso perchè l'angolo è calcolato sempre rispetto all'asse x , ma passando attraverso una sorta di cambio di coordinate).

Di fatto, mostrandosi instabili le tecniche più raffinate, l'attuale versione del codice contiene questo tipo di derivate al bordo in senso radiale, anche perchè con una serie di validazioni si è constatato che l'effettivo scadimento di accuratezza è impercettibile.

4. *Estrapolazione* Si calcolano comunque le differenze finite asimmetriche ma fino a un ordine superiore, e si usano per costruire un'approssimazione in serie di Taylor dell'andamento della generazione di entropia, il che consente di correggere il valore sui nodi di contorno, stimato con il metodo asimmetrico. Questa strategia è la duale dell'interpolazione polinomiale secondo Lagrange, che offre una miglior qualità rispetto alle tecniche precedenti, ma entrambi i metodi richiedono un maggior costo computazionale (si aggiungono tutte le differenze finite di ordine superiore in un caso, e si deve eseguire l'interpolazione nell'altro): tale spesa appare peraltro ingiustificata se si osservano le ultime due soluzioni, che evidenziano un'ulteriore criticità.
5. *Andamento del profilo di entropia imposto* La stima della generazione

di entropia grazie alle correlazioni empiriche, per quanto accurate, risente di un forte vincolo, ovvero l'incapacità di definire lo strato limite, dal momento che il semplice numero fornito dai grafici dipende solo dalla geometria, dal tipo di fluido e solo secondariamente dal campo di moto globale. In altre parole, a parità di input è impossibile sapere se la *streamline* su cui si calcola la perdita sia immersa nello strato limite o meno, e cioè se gli sforzi viscosi realmente presenti, molto forti nello strato limite, contribuiscano effettivamente alla caduta di pressione totale. È ragionevole aspettarsi, perlomeno per semplicità sperimentale, che le prove siano state eseguite su sezioni lontane dalle pareti della macchina, e che quindi le perdite siano dovute solo ad altri effetti.

Diviene quasi indispensabile affrontare a parte l'effetto dello strato limite, poichè esso gioca un ruolo non trascurabile nella generazione di entropia per irreversibilità: il modello matematico di fluido inviscido sarebbe già completo anche senza considerarlo, ma per una stima realistica delle prestazioni delle turbomacchine il suo effetto va aggiunto, alla stregua degli altri termini di sorgente.

Questo è il vero motivo per cui ha poco senso ricorrere al metodo precedente per stimare le derivate dell'entropia sul contorno radiale, poichè anche l'interpolazione più accurata viene effettuata su valori forniti dalle correlazioni, appunto insufficienti, e pertanto non può mostrare questo effetto.

Da altre simulazioni ed esperimenti precedentemente condotti, si è stimato che per un flusso turbolento in un condotto la pressione totale cresca come la radice settima della distanza da parete nella zona prossima al bordo (in analogia con gli stati limite riscontrati nei flussi esterni). Il problema si sposta quindi alla stima dello spessore dello strato limite ma, essendo impossibile conoscere questo dato, dal momento che dipende dalla lunghezza del canale a monte dello stadio considerato e dalla geometria nel suo complesso, si assume che esso si sia esaurito alla distanza i_{str} di una *streamline* o poco più da parete (fatto certo se la griglia non è molto spinta come di norma avviene nei calcoli meridiani). Si sfrutta quindi il fatto che la derivata della pressione statica in direzione normale alla parete sia identicamente nulla nello strato limite (stato limite isobaro in direzione trasversale), il che consente di conoscere i valori di pressione totale agli estremi (sulla parete coincide con quella statica poichè $\|\mathbf{w}\| = 0$, sulla *streamline* immersa si inizializza con il risultato di un precedente calcolo senza strato limite). Ulteriore condizione eventualmente verificabile è il raccordo non solo di p_t , ma anche della sua derivata spaziale. In ogni caso la soluzione

del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} p_t(y) = a + b \cdot \sqrt[7]{y} \\ p_t(0) = p(i = 1) \vee p(i = n_{str}) \\ p_t(\delta_{BL}) = p_t(i = i_{str}) \vee p_t(i = n_{str} - i_{str} + 1) \\ \delta_{BL} = \left| r(i = n_{str}) - r(i = n_{str} - i_{str} + 1) \right| \vee \left| r(i = i_{str}) - r(i = 1) \right| \end{array} \right. \quad (3.52)$$

porta a determinare il profilo nello strato limite di p_t :

$$p_t = p_{y=0} + (p_{t,\delta} - p_{y=0}) \cdot \sqrt[7]{\frac{y}{\delta_{BL}}} \quad (3.53)$$

Come detto sopra, il valore puntuale dell'entropia può essere scritto come $s(i, j) = \Delta s(i) \cdot f_z(j)$, e la sua derivata radiale coinvolge solo $\Delta s(i)$. Si ha quindi (rispettivamente all'*hub* e allo *shroud*):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta s}{\partial n} = \frac{\partial \left[R \cdot \ln(p_{t,-\infty}) - R \cdot \ln \left(p_{n=0} + (p_{t,\delta H} - p_{n=0}) \cdot \sqrt[7]{\frac{n}{n_{\delta H}}} \right) \right]}{\partial n} \\ \frac{\partial \Delta s}{\partial n} = \frac{\partial \left[R \cdot \ln(p_{t,-\infty}) - R \cdot \ln \left(p_{n=n_{est}} + (p_{t,\delta S} - p_{n=n_{est}}) \cdot \sqrt[7]{\frac{n_{est}-n}{n_{est}-n_{\delta S}}} \right) \right]}{\partial n} \end{array} \right. \quad (3.54)$$

cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial n} = f_z \cdot \frac{\partial \Delta s}{\partial n} = f_z \frac{-R \cdot \text{dot}(p_{t,\delta H} - p_{n=0})}{\left(p_{n=0} + (p_{t,\delta H} - p_{n=0}) \cdot \sqrt[7]{\frac{n}{n_{\delta H}}} \right) \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{n}{n_{\delta H}} \right)^6} \cdot 7 n_{\delta H}} \\ \frac{\partial s}{\partial n} = f_z \cdot \frac{\partial \Delta s}{\partial n} = f_z \frac{-R \cdot \text{dot}(p_{t,\delta S} - p_{n=n_{est}})}{\left(p_{n=n_{est}} + (p_{t,\delta S} - p_{n=n_{est}}) \cdot \sqrt[7]{\frac{n_{est}-n}{n_{est}-n_{\delta S}}} \right) \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{n_{est}-n}{n_{est}-n_{\delta S}} \right)^6} \cdot 7 (n_{est} - n_{\delta S})} \end{array} \right. \quad (3.55)$$

6. *Alternativa al profilo imposto* Osservando le ultime due formule appare immediato un problema: a parete, dove i radicandi si annullano, il

gradiente di entropia mostra la tipica cuspidè delle funzioni radicali, rendendo numericamente inaccettabile che la derivata tenda a infinito. Ciò che si può fare è usare altri profili, sperimentalmente meno precisi, ma almeno gestibili: sono stati fatti tentativi innanzitutto raccordando con un segmento, soluzione rapida e immediata, per poi allacciare i valori di pressione tramite un arco di seno. Questa seconda soluzione è leggermente più raffinata, perchè prevede un raccordo migliore all'interfaccia fra strato limite e flusso esterno anche fra le derivate (funzione complessivamente \mathcal{C}^1).

Un ultimo tentativo prevede sempre di utilizzare la funzione radice settima, ma fornendo un *offset* all'ascissa: poichè il radicando è una distanza, deve essere sempre positivo per avere senso fisico, e allo stesso modo deve fare il risultato; ciò rende il radicale di tipo aritmetico e assimila il suo dominio a un radicale di indice pari. Questi hanno la particolarità di avere sicuramente la cuspidè nell'origine, ma anche di essere altrove derivabili con continuità: in altre parole, appartengono allo spazio \mathcal{L}^2 ma non ad \mathcal{H}^1 (a differenza delle due funzioni sopraccitate che si trovano in entrambi), il che garantisce che è sufficiente escludere l'origine per non incappare più in problemi legati alla divergenza della derivata.

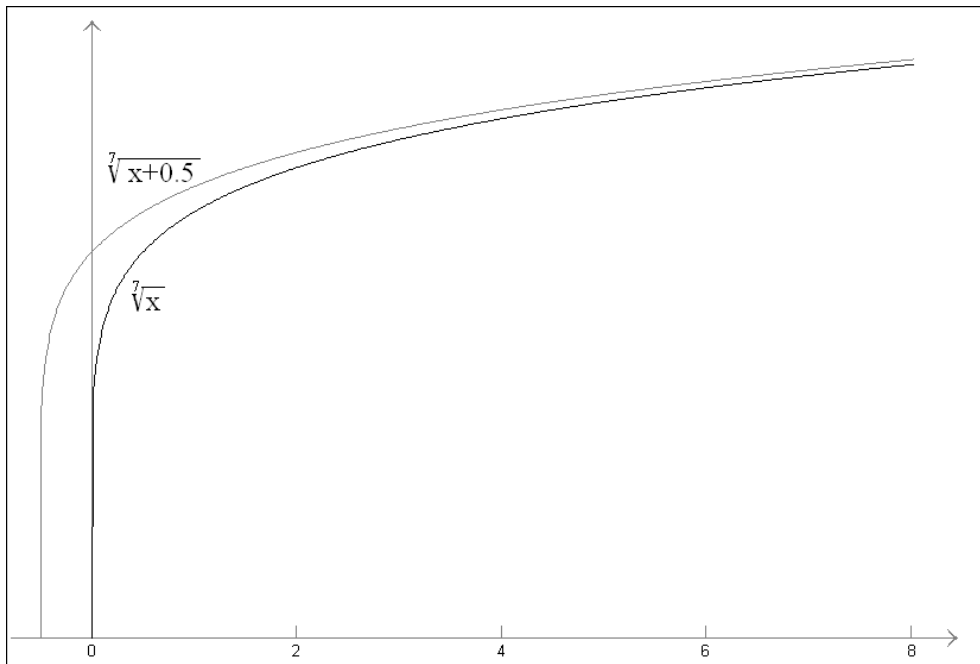


Figura 3.2: Funzioni di $x^{1/7}$ con e senza *offset* verso le ascisse negative

Si reimposta quindi il problema alla luce dei nuovi parametri:

$$p_t(y) = (p - \tilde{p}) + (p_{t,\delta} - p) \cdot \sqrt[7]{\frac{y + y_0}{\delta_{BL}}} \quad (3.56)$$

con

$$\tilde{p} = (p_{t,\delta} - p) \cdot \sqrt[7]{\frac{y_0}{\delta_{BL}}} \quad (3.57)$$

L'interpolazione ora è precisa solo nel raccordo con la pressione statica, a parete, ma l'errore fra le funzioni decresce rapidamente allontanandosi dall'origine.

La derivata diviene ora

$$\frac{\partial s}{\partial y} = f_z \cdot \frac{\partial \Delta s}{\partial y} = f_z \frac{\frac{(p_{t,\delta} - p)}{7\delta_{BL}}}{\left[(p - \tilde{p}) + (p_{t,\delta} - p) \cdot \sqrt[7]{\frac{y + y_0}{\delta_{BL}}} \right] \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{y + y_0}{\delta_{BL}} \right)^6}} \quad (3.58)$$

e, definendo $N = (p_{t,\delta} - p)/7\delta_{BL}$:

$$\left. \frac{\partial \Delta s}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{N}{p \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{y_0}{\delta_{BL}} \right)}} = \left(\frac{N \cdot \delta_{BL}^{6/7}}{p} \right) \cdot \frac{1}{y_0^{6/7}} < \infty \quad (3.59)$$

Purtroppo non ci sono indizi per stimare correttamente l'*offset*, ma si possono fare delle considerazioni numeriche:

- (a) Siccome la traslazione in ascissa si fa proprio per rimpicciolire la derivata nell'origine, si può porre una soglia di accettabilità alla pendenza del profilo α_{max} . In termini quantitativi, ciò corrisponde alla disequazione

$$\left| \frac{\partial \ln p_{t,out}}{\partial y} \right|_0 < \alpha_{max} \quad (3.60)$$

che permette di limitare inferiormente l'*offset* a

$$y_0 > \delta_{BL} \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{N}{p \cdot \alpha_{max}} \right)^6} \quad (3.61)$$

- (b) Il profilo effettivamente riscontrato sperimentalmente ha *offset* nullo ,pertanto all'aumentare di esso cresce anche l'errore fra la funzione di pressione vera e quella fittizia: occorre fissare un tetto

all'errore, e ricavare di conseguenza l'*offset* massimo compatibile con esso:

$$|p_{t,out} - p_{t,out,offset}| < \gamma \quad (3.62)$$

Definendo la variabile di supporto Q come

$$Q = \frac{\gamma \sqrt[7]{\delta_{BL}}}{p_{t,\delta} - p} \sqrt[7]{y} \quad (3.63)$$

si perviene alla disuguaglianza

$$\sqrt[7]{y + y_0} + \sqrt[7]{y_0} > Q \quad \forall y \leq \delta_{BL} \quad (3.64)$$

che richiede una soluzione non solo numerica, ma valida contemporaneamente per tutto lo strato limite.

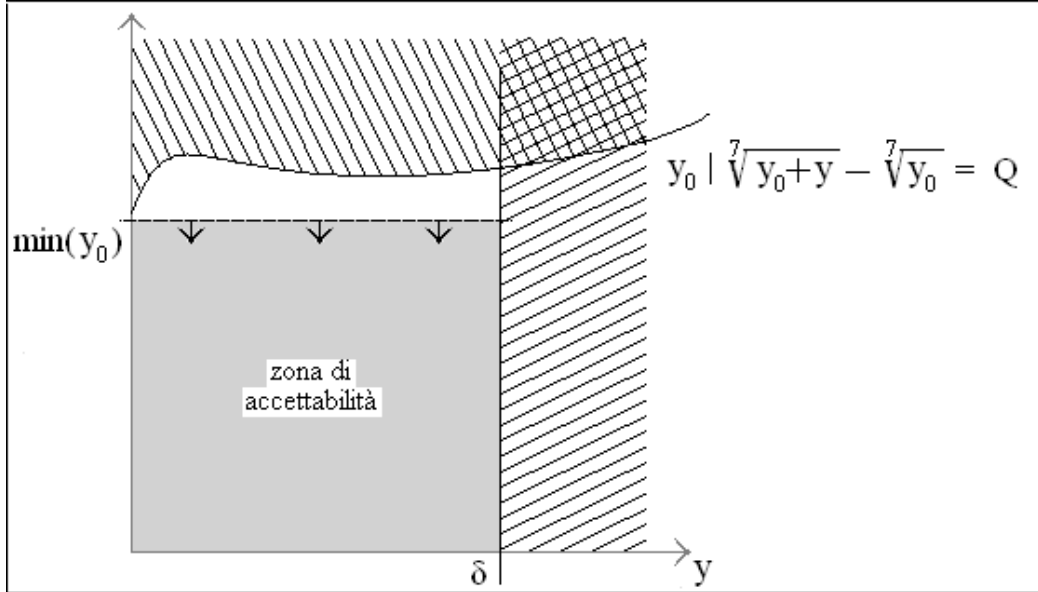


Figura 3.3: Restrizioni al campo di accettabilità della soluzione y_0

Alla fine si ricondurrà il problema alla ricerca della soluzione dell'equazione associata, per poi scegliere l'intervallo delimitato superiormente dal minimo di tali risultati. Questa considerazione finale, l'unica fattibile a priori, è motivata sia dalla considerazione intuitiva che senza *offset* la funzione concorderebbe pienamente con quella sperimentale, sia da un rapido calcolo dei valori asintotici degli errori (0 per *offset* nullo, il carico cinetico per *offset* infinito).

Questa sesta soluzione, in particolare quando si va ad imporre ancora un profilo dalla legge “alla un settimo”, mostra come anche una soluzione più raffinata, che rispetti l’andamento della pressione totale, introduce non solo necessariamente degli errori, ma appesantisce notevolmente il calcolo, richiedendo di risolvere ogni volta una serie di iterazioni supplementari.

Inoltre non è garantita l’esistenza delle soluzioni, dipendendo gli estremi di accettabilità da condizioni molto diverse. È quindi conveniente, se si vuole percorrere questa strada, usare profili di pressione totale e di energia imposti, ma scegliendo tra funzioni più semplici, quali retta e sinusoidi.

3.5 Esempio di calcolo non viscoso dissipativo

3.5.1 Risultati simulati

Anche in questo capitolo è stato analizzato lo stadio di turbina (semplificato per scopi didattici) a grado di reazione 0.5 descritto nel capitolo 2: in questo frangente si vuole indagare solo l’effetto delle dissipazioni, il che comporta di mantenere attivo il trattamento di incidenza, così da appoggiare il calcolo delle perdite su un flusso ben simulato.

Le perdite sono state calcolate ricorrendo alle correlazioni di Craig e Cox: mediamente il coefficiente di perdita di pressione totale si aggira intorno al 6% per lo statore e al 7.5% per il rotore, e presenta una scarsa variabilità radiale.

In particolare si è ritenuto opportuno presentare i profili di entropia per due ragioni: la prima è che s è la grandezza più significativa per individuare l’azione delle perdite, la seconda è che così è possibile attuare un confronto fra i pesi relativi dell’incidenza e delle perdite sullo scadimento di rendimento.

La figura 3.4 illustra la condizione di flusso più realistica: è stata generata tenendo attivi sia il trattamento di incidenza che le perdite. Si può chiaramente vedere la crescita graduale dell’entropia con l’asse della macchina, nonché l’accentuamento di s (particolarmente marcato nella zona di *outflow*) verso la base delle pale, per via della distribuzione di pressione. In questo stadio, peraltro, vista la geometria poco incurvata, tale effetto non è nemmeno particolarmente rilevante.

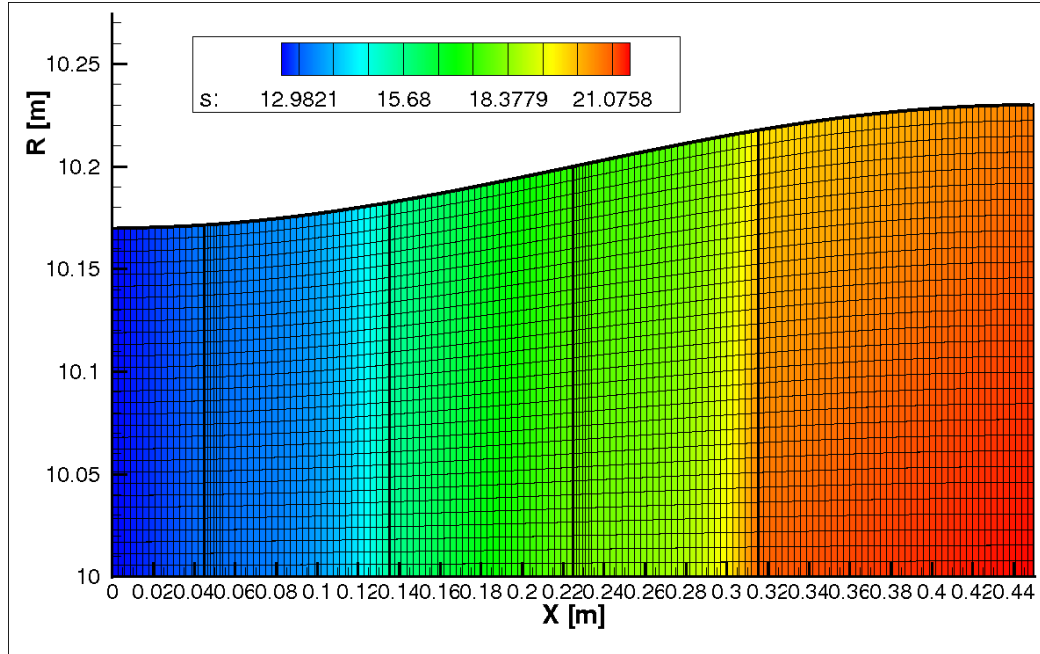


Figura 3.4: *Distribuzione dell'entropia con perdite e trattamento di incidenza attivi*

La figura 3.5 è l'analogia della precedente, ma senza l'applicazione del trattamento di incidenza: si intuisce una situazione entropica peggiore (lo statore è leggermente più chiaro), ma senza intaccare l'effetto delle perdite. Questa prima analisi può già costituire una risposta alla questione sulle effettive entità degli interventi attuati con i termini di sorgente: in questo caso (in cui comunque l'incidenza raggiunge valori di -40°) la produzione entropica è quasi interamente dovuta al termine puramente dissipativo, come ci si aspetterebbe.

Le due immagini di figura 3.6 si riferiscono al calcolo esposto nel capitolo 2: l'analisi è stata condotta *senza* l'introduzione del termine dissipativo, e viene riportata per confermare che la produzione entropica dovuta alla modellazione non ottimale dell'incidenza è trascurabile se paragonata a quella prodotta per irreversibilità. Le immagini sono estremamente simili perchè rappresentate con la stessa scala di quelle riportate in figure 3.4 e 3.5, anzichè nel range effettivo, ma derivano dallo stesso calcolo che ha prodotto le figure del paragrafo 2.4.

In quel frangente, la differenza nei due profili entropici era percettibile solo perchè non veniva coperta dall'effetto molto più consistente delle perdite fluidodinamiche: è sufficiente osservare la legenda per notare che in

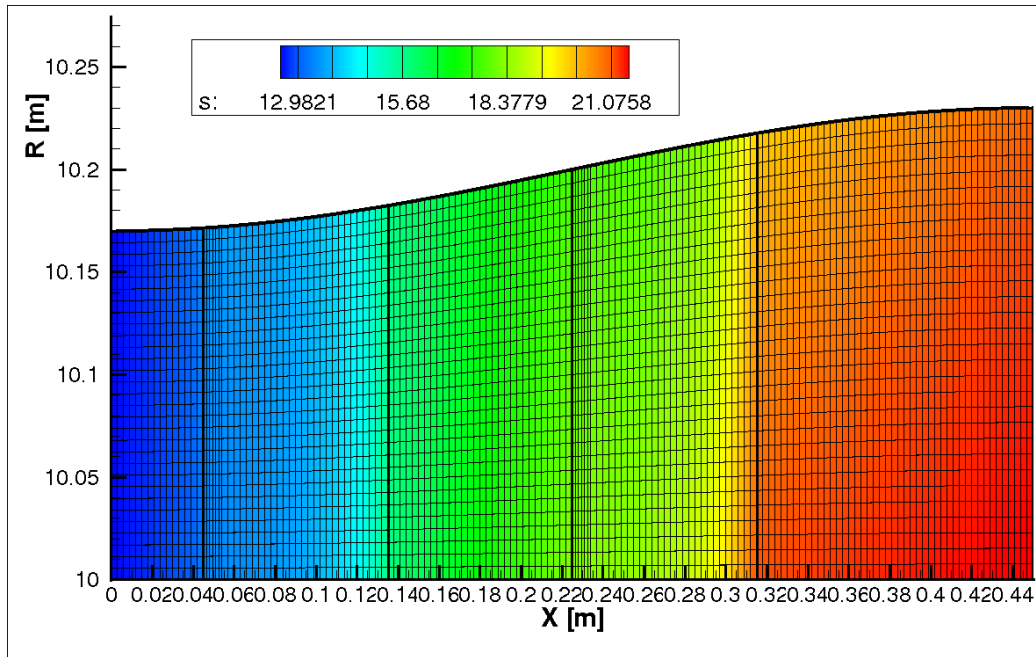


Figura 3.5: *Distribuzione dell'entropia con sole perdite attive*

quest'ultimo caso l'intero range viene condensato in meno di un *contour*.

È interessante notare che, sebbene l'effetto delle dissipazioni sia rilevante nella determinazione del risultato, dal punto di vista del costo computazionale (a parte che per il discorso delle correlazioni) non sembra appesantire particolarmente il codice: i grafici riportati sono stati ottenuti senza alterare la rigidità o il CFL.

3.5.2 Modellazione dello strato limite

Come detto in precedenza, è stato effettuato un tentativo di modellazione dello strato limite sovrapponendo, con un intervento dall'esterno, il suo effetto dissipativo alla soluzione. Tuttavia i risultati non sono quasi mai stati accettabili: si assiste ad uno sviluppo di due fasce, all'*hub* e allo *shroud*, in cui l'entropia è marcatamente superiore che nel resto del dominio e, di conseguenza, il carico cinetico sensibilmente inferiore.

Tuttavia, questo si è reso possibile solo per geometrie e condizioni di fun-

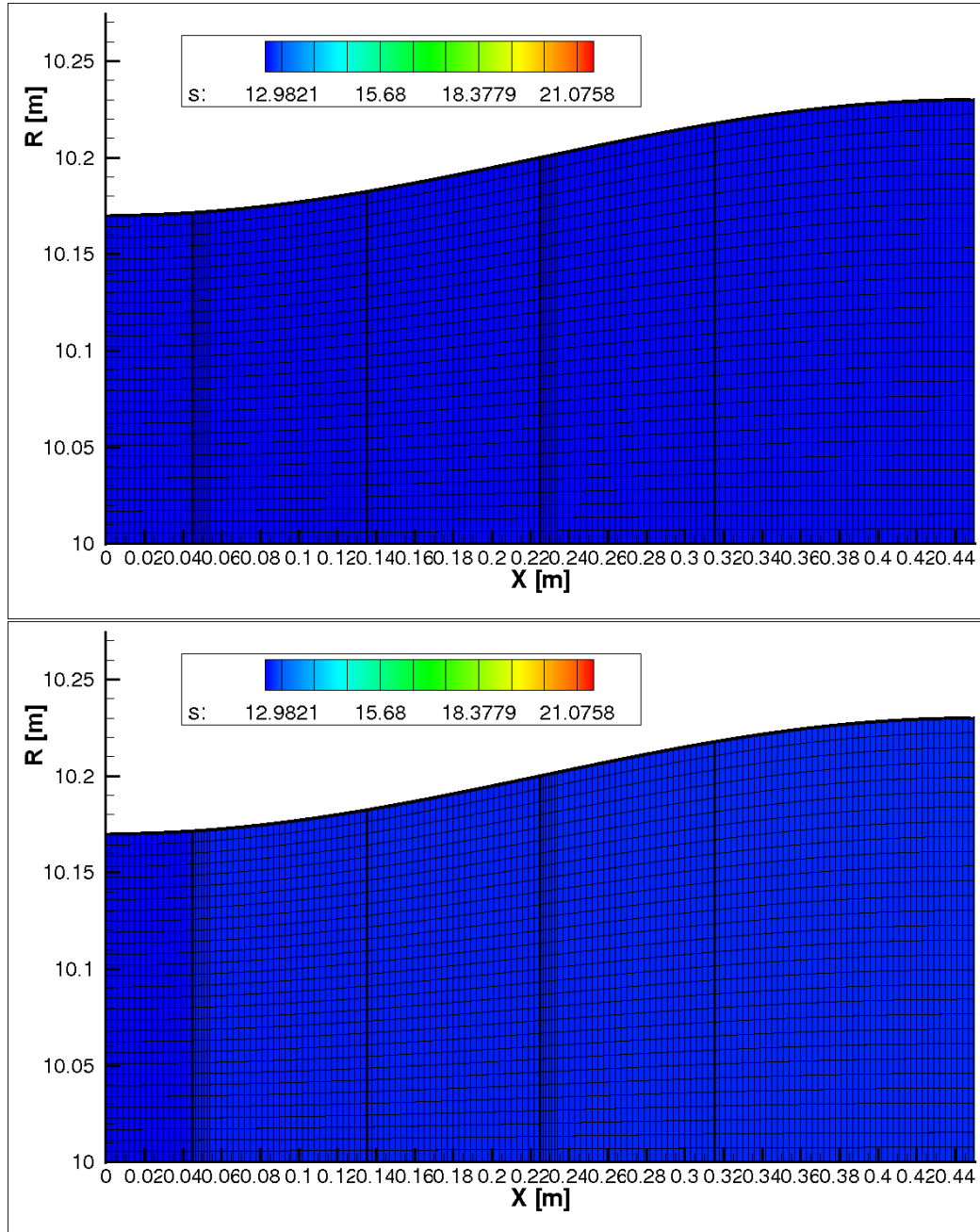


Figura 3.6: Profilo di entropia senza l'aggiunta delle correlazioni **a:** con trattamento di incidenza attivo **b:** senza nessun intervento

zionamento particolarmente favorevoli, come lo stadio riportato sopra, dal momento che la convergenza non è mai stata certa: anche nei casi migliori, i residui si sono mantenuti significativamente alti (10^2 o 10^3), e il numero di iterazioni necessarie è quasi decuplicato.

Sicuramente il motivo non dipende dall'accuratezza del codice in generale, ma da difetti modellistici: essi sono stati già individuati, ma l'implementazione di una versione concettualmente corretta e operativamente accettabile si è mostrata troppo complessa per esaurirsi nell'ambito di questa tesi, e si inserisce fra i possibili sviluppi futuri del codice meridiano.

Capitolo 4

Risultati e possibili sviluppi futuri

4.1 Breve dettaglio sugli aspetti numerici

Come già dichiarato nel capitolo 1, lo scopo di questa tesi consiste nella modellazione dei termini di sorgente nelle equazioni di Eulero deputati alla simulazione delle dissipazioni e al trattamento di incidenza, correttivo della forza aerodinamica.

Il calcolo si è appoggiato sul persistente codice *zFlow*, sviluppato dall'Università di Brescia allo scopo di simulare flussi con forti effetti di gas reali. L'evoluzione è stata l'integrazione delle equazioni di Eulero in geometria cartesiana, per calcoli 2D piani e 3D, con quelle 2D assialsimmetriche; tale adattamento ha reso il codice capace di calcoli meridiani per le turbomacchine.

Caratteristiche dello *zFlow* sono:

1. Dal punto di vista della discretizzazione spaziale, il codice non è dotato di un grigliatore, e gestisce solo griglie fisse.
2. I calcoli vengono svolti con una tecnica ibrida volumi finiti - elementi finiti.
3. Il funzionamento è in variabili adimensionali; ciò significa che occorre specificare pressione, temperatura e volume specifico di riferimento, così da poter effettuare le adimensionalizzazioni e contemporaneamente

rendere noto al codice il tipo di fluido (ad esempio se è soddisfatta l'uguaglianza $\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}} = R_{gas}T_{ref}$ si sta operando con un gas ideale).

4. Le condizioni al contorno devono essere generalizzabili, ovvero devono essere valide per ogni regime di flusso: si dichiarano pertanto p_t , T_t , α e χ in ingresso e p all'*outflow* più alle pareti. Sta poi al solutore adattare le opportune condizioni a seconda del regime di flusso.
5. Le condizioni iniziali sono di flusso uniforme; ciò significa che nell'ottica del *time-marching* il vincolo di tangenza è marcatamente violato durante le prime iterazioni.
6. Per accelerare e stabilizzare la convergenza, è possibile effettuare una serie di iterazioni al prim'ordine di accuratezza, che abbattano i residui molto rapidamente (si arriva senza difficoltà a 10^{-14} e per le geometrie più semplici si guadagna quasi un ordine di grandezza per iterazione). La qualità della soluzione ottenuta con il metodo al prim'ordine, tuttavia, non è sufficiente, e si rende quindi necessaria anche una serie di iterazioni al second'ordine di accuratezza; il vantaggio di questa operazione è che questo secondo gruppo di calcoli viene inizializzato con il risultato del primo, anziché con flusso uniforme.
7. La strategia del *time-marching* obbliga ad attuare una doppia discretizzazione, sia nello spazio che nel tempo; il costo computazionale del conto è poi determinato dallo specifico metodo scelto per calcolare il *time-marching*[20].
 - (a) Un approccio esplicito prevede di esprimere lo stato del sistema all'istante n_{t+1} come funzione dello stato all'istante n_t : di conseguenza ciascun istante può essere simulato semplicemente conoscendo le condizioni all'istante precedente, perchè il problema disaccoppia le equazioni fra loro. Tuttavia occorre limitare superiormente il passo temporale, in particolare correlandolo alle dimensioni delle celle tramite opportune funzioni.

Il principio su cui è basata la soluzione è *l'integrazione temporale progressiva*; nel presente codice è implementato il metodo di Runge–Kutta, basato sull'espansione in serie delle derivate temporali, corretta eventualmente da alcuni parametri di ordine elevato.

Il metodo al prim'ordine è del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} \ddot{y} = \ddot{y}(\dot{y}, y, t) \implies \ddot{y}_0 = \ddot{y}_0(\dot{y}_0, y_0, 0) \\ \searrow \dot{y}_{\Delta t} = \dot{y}_0 \cdot \Delta t \\ \searrow y_{\Delta t} = \dot{y}_{\Delta t} \cdot \Delta t \\ \searrow \ddot{y}_{\Delta t} = \ddot{y}_{\Delta t}(\dot{y}_{\Delta t}, y_{\Delta t}, \Delta t) \\ \searrow \dot{y}_{2\Delta t} = \dot{y}_{\Delta t} \cdot \Delta t \\ \searrow y_{2\Delta t} = \dots \end{array}$$

$$y_{nt+1} = y_{nt} + \dot{y}_{nt} \cdot \Delta t \implies y_{nt+1} = y_{nt+1}(y_{nt}) \quad (4.1)$$

(b) L'altra possibilità consiste nell'utilizzo di un metodo implicito, in cui è lo stato all'istante n_t a dipendere dallo stato all'istante n_{t+1} :

$$y_{nt+1} = y_{nt} + \dot{y}_{nt+1} \cdot \Delta t \implies y_{nt+1} = y_{nt+1}(y_{nt+1}) \quad (4.2)$$

Nello *zFlow* si trova il metodo di Eulero implicito, che svolge semplicemente quanto esposto nella (4.2).

Per risolvere il problema occorre quindi stabilire a priori il t_{tot} da simulare, ed esprimere ogni y_{nt} in funzione del valore della soluzione agli istanti successivi, il tutto in ogni punto del dominio spaziale. Ciò significa che, all'aumentare dell'ordine di derivazione, delle variabili, della non linearità del sistema, ..., la soluzione del sistema prevederà l'inversione di matrici grandi e sparse.

Questo approccio sicuramente innalza il costo computazionale del calcolo, ma possiede il vantaggio di una maggior stabilità (i metodi impliciti applicati a sistemi lineari sono incondizionatamente stabili): il vincolo sul passo temporale, funzione del *numero di Carrant* o CFL, è meno severo, e quindi i solutori permettono di utilizzare *time step* di due ordini di grandezza superiori di quelli per metodi espliciti, anche all'inizio del calcolo, ad esaurire il *time-marching* in tempi estremamente più brevi.

Per questo motivo si è scelto di condurre le simulazioni utilizzando il metodo implicito: i tempi di calcolo riportati si riferiscono a questa condizione.

8. La soluzione del problema differenziale tramite l'utilizzo del metodo 7b richiede il calcolo analitico degli jacobiani dei termini di sorgente, che sono stati infatti illustrati nei paragrafi 2.3.2 e 3.3.3 dei precedenti capitoli.

4.2 Risultati

In questa sezione il codice viene utilizzato per simulare due casi reali, scelti perchè rappresentativi delle criticità riscontrabili in fase di calcolo. Inoltre sono state analizzate sia una macchina motrice che una operatrice, il che consente di verificare la versatilità del codice; il problema è di verifica su un disegno già presente in entrambi i casi.

4.2.1 Turbina Franco Tosi

La prima applicazione è su una turbina a vapore Franco Tosi. Sono stati simulati gli ultimi due stadi, dove la bassa pressione consente di mantenere valida l'ipotesi di gas ideale politropico; non è stata quindi tenuta in considerazione l'eventuale presenza di una fase liquida che spesso si verifica negli stadi di bassa pressione delle turbine a vapore, dovuta all'ingresso nella campana di Andrews.

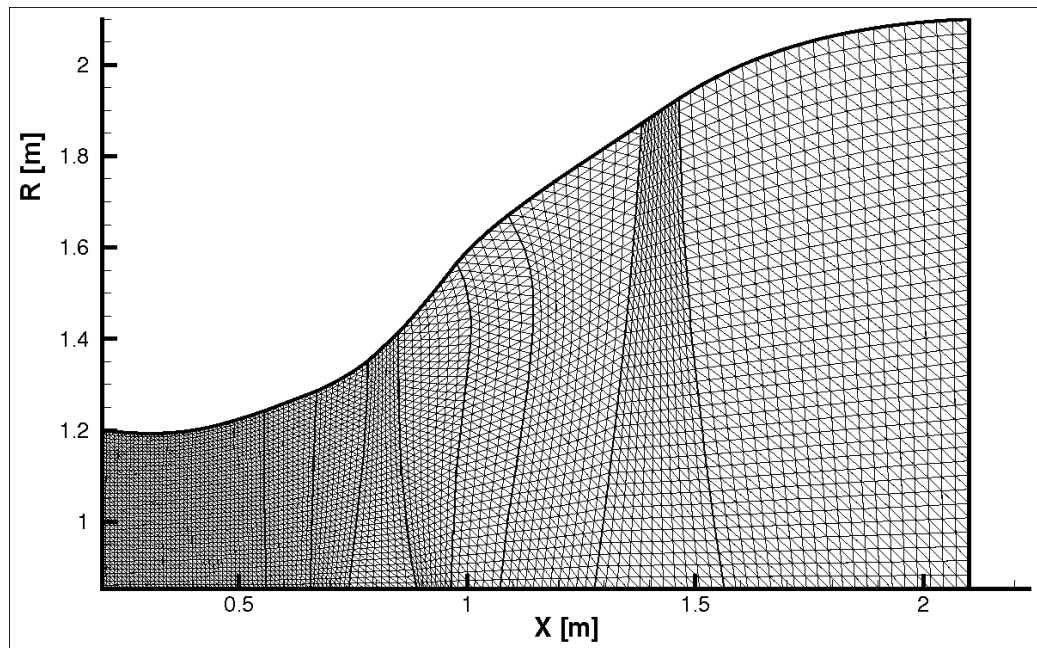


Figura 4.1: Mesh (turbina Franco Tosi)

In aggiunta al fatto che la macchina è multistadio, il caso è interessante soprattutto per la complessità della geometria: il diametro esterno infatti è

soggetto a forte variazione per via del *flaring* marcato, le pale sono molto svergolate e inoltre ci sono punti in cui l'incidenza supera i 30° , come si può vedere dalle figure 4.1 e 4.2.

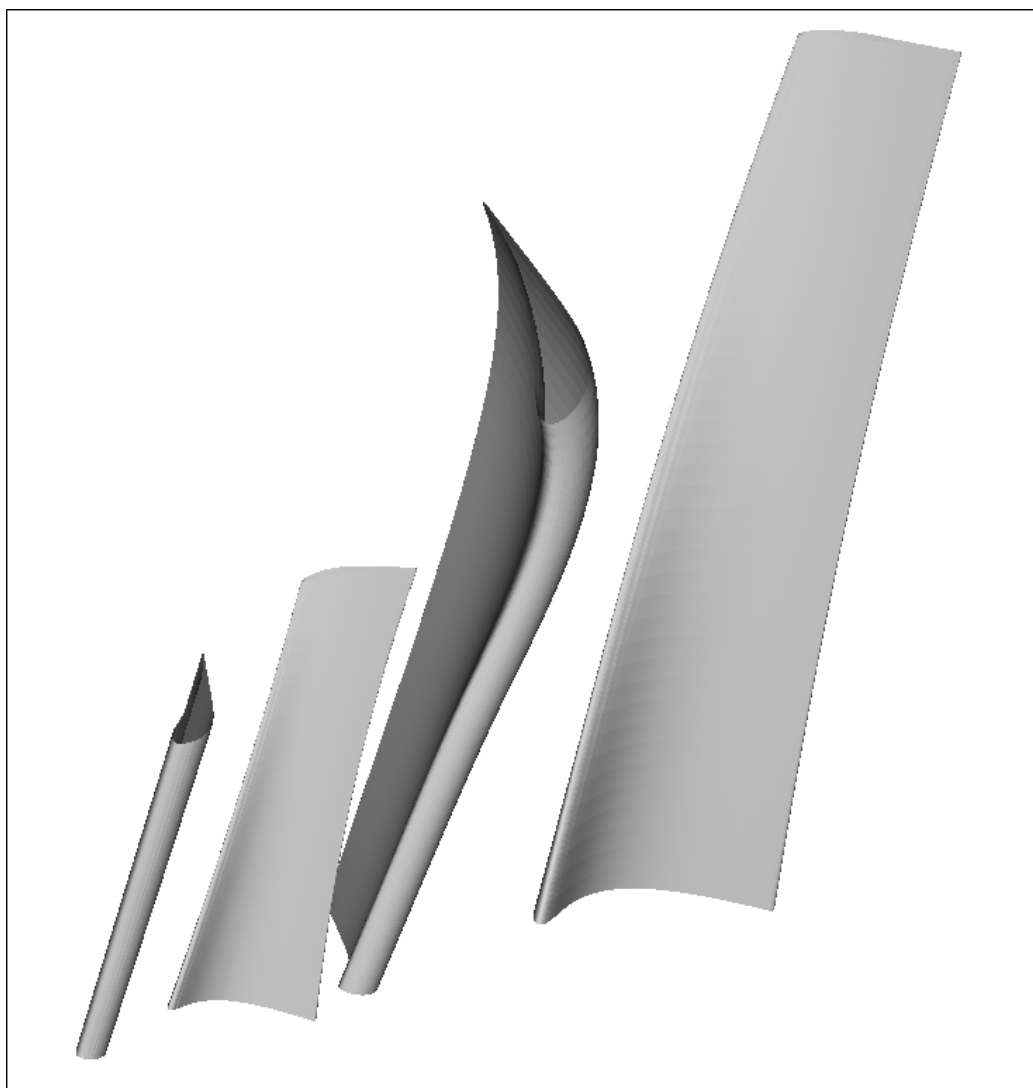


Figura 4.2: *Aspetto tridimensionale della palettatura Franco Tosi*

	S_1	R_1	S_2	R_2
α_{out}	$\approx 70^\circ$	$\approx 30^\circ$	$\approx (30^\circ \div 35^\circ)$	$\approx 30^\circ$ alla base, molto svergolato

Il calcolo meridiano restituisce una portata massica relativamente bassa (intorno ai $76.6 \frac{kg}{s}$): ciò comporta una v_x piuttosto bassa, e un funzionamento non ottimizzato (che è quanto succede all'ultima schiera). Da simulazioni precedenti emerge che occorre innalzare parecchio la portata per adeguare il flusso alla geometria anche del secondo rotore: tale risultato è stato ottenuto però come conseguenza all'azione sull'angolo di scarico dello statore a monte, che nel caso di geometria invariata causa flusso sonico in uscita.

Il numero di Mach assoluto riferito alla geometria invariata è riportato in figura 4.3

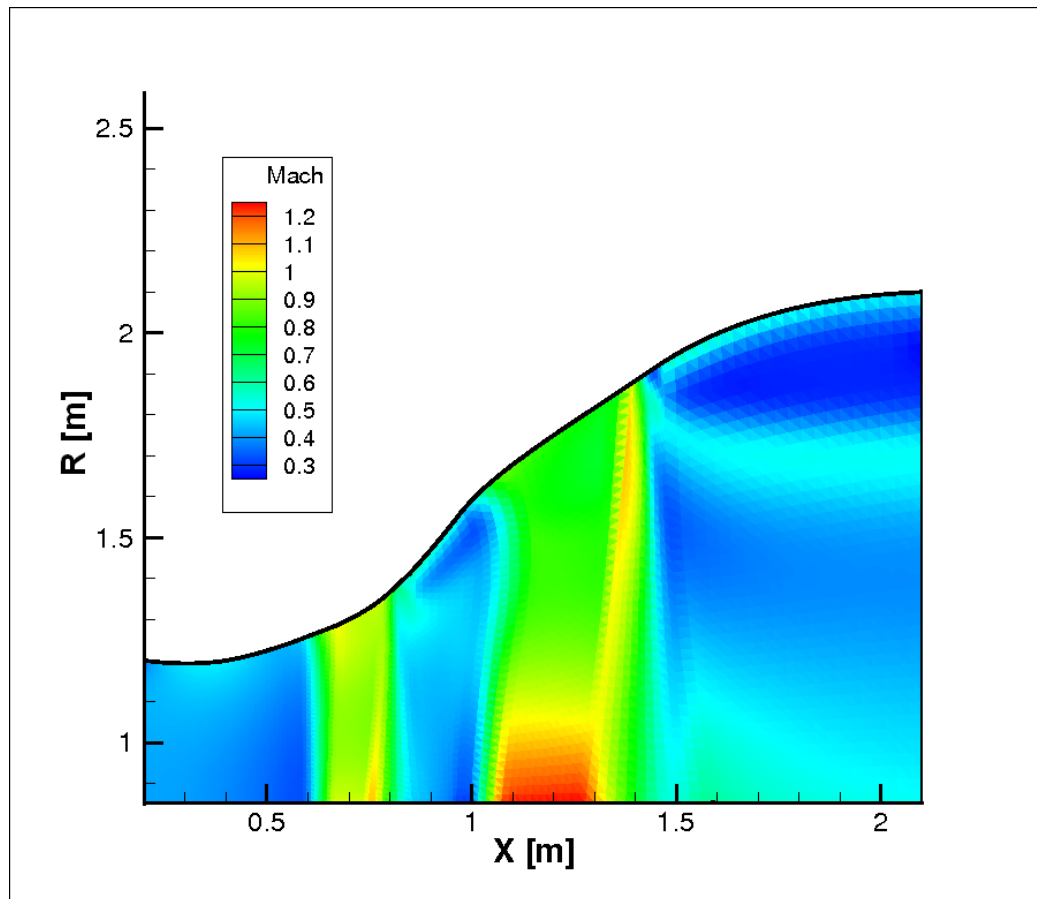


Figura 4.3: *Mach* assoluto nel canale Tosi

Infine, per questa macchina si riportano alcune *streamline*: lo scopo è evidenziare come la superficie di flusso S_1 sia effettivamente ben lontana dal rappresentare una superficie cilindrica, per via di vari fenomeni. Nel caso in esame si nota facilmente l'allargamento delle linee di flusso in corrispondenza delle schiere, per via dell'equilibrio radiale.

Se a tale complicazione geometrica si aggiungono il fatto che la superficie meridiana stessa è definita con swirl, piuttosto che i fenomeni secondari, si capisce facilmente la reale complessità di un flusso tridimensionale.

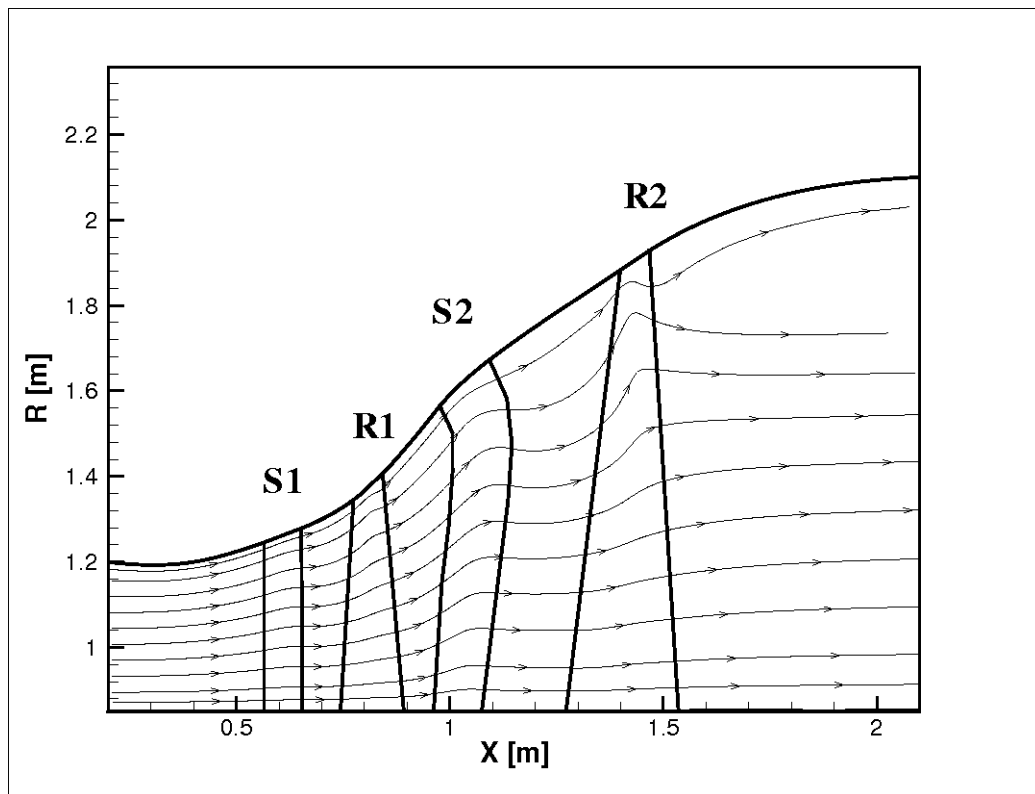


Figura 4.4: *Linee di flusso*

4.2.2 Compressore CBI

Il secondo caso esaminato è un ventilatore assiale CBI dall'elevato rapporto di compressione: le caratteristiche fluidodinamiche sono piuttosto spinte rispetto a un ventilatore standard, poichè localmente si raggiungono numeri di Mach anche superiori a 0.3.

Inoltre il ventilatore è dotato di pale rotoriche a calettamento variabile: ciò consente di ottimizzare l'angolo di *stagger* in funzione della portata; dal punto di vista del codice l'ottimizzazione viene fatta a monte e quindi tale angolo è un dato geometrico al pari degli altri, ma si rendono necessarie delle simulazioni indipendenti a seconda delle condizioni al contorno.

In questa sezione si riporta nel dettaglio il caso con $\beta = \frac{p_{out}}{p_{in}} = 1.015$ e portata volumetrica calcolata di progetto di $393.27 \frac{m^3}{s}$ mentre viene rapidamente illustrata, a titolo di esempio, la soluzione per il caso con $\beta = 1.045$, con incidenza maggiore.

I prospetti seguenti contengono i dati e i risultati con una griglia composta da 8159 nodi. Nel primo caso, illustrato nella tabella 4.3, si è impiegata una griglia a triangoli: questi si rivelano migliori dal punto di vista dell'entità dei residui, che scendono fino circa a $5 \cdot 10^{-6}$, ma presentano tempi di calcolo più lunghi (a parità di nodi il numero di celle raddoppia) e richiedono una *mesh* con un *aspect ratio* meno spinto per convergere.

TRI: $198 \times 48(\times 2)$ celle; portata volumetrica restituita = $393.2711 \frac{m^3}{s}$ (4.3)

$\beta = 1.015$	it. 1° ord.	it. 2° ord.	tot. it.	K_{max}	residui	tempo tot
1° SERIE	40	80	120	10^3	10^{-6}	3'49''
2° SERIE	0	60	180	10^4	$5 \cdot 10^{-6}$	7'49''

Per quanto riguarda la mesh a quadrilateri, i residui rimangono circa di un ordine di grandezza superiori, ma in compenso i tempi di calcolo diminuiscono radicalmente, la stabilità è maggiore e si avverte di meno la sensibilità al rapporto altezza-larghezza delle celle, come riportato in tabella 4.4.

Nel caso in esempio sono state effettuate solo 120 iterazioni contro le 180 del caso a triangoli perchè al di sopra di tale numero di iterazioni non si assiste ad una ulteriore riduzione dei residui (in ogni caso, comunque, accettabili); in compenso, a conferma di quanto detto sopra, si è potuto innalzare prima

il valore della K_{max} senza destabilizzare il calcolo.

$$\text{QUAD: } 198 \times 40 \text{ celle; portata volumetrica restituita} = 393.2798 \frac{m^3}{s} \quad (4.4)$$

$\beta = 1.015$	it. 1° ord.	it. 2° ord.	tot. it.	K_{max}	residui	tempo tot
1° SERIE	40	20	60	10^3	10^{-5}	1'24"
2° SERIE	0	60	120	10^4	$4 \cdot 10^{-5}$	2'55"

La figura 4.5 mostra il dominio *meshato* del ventilatore e i dati geometrici:

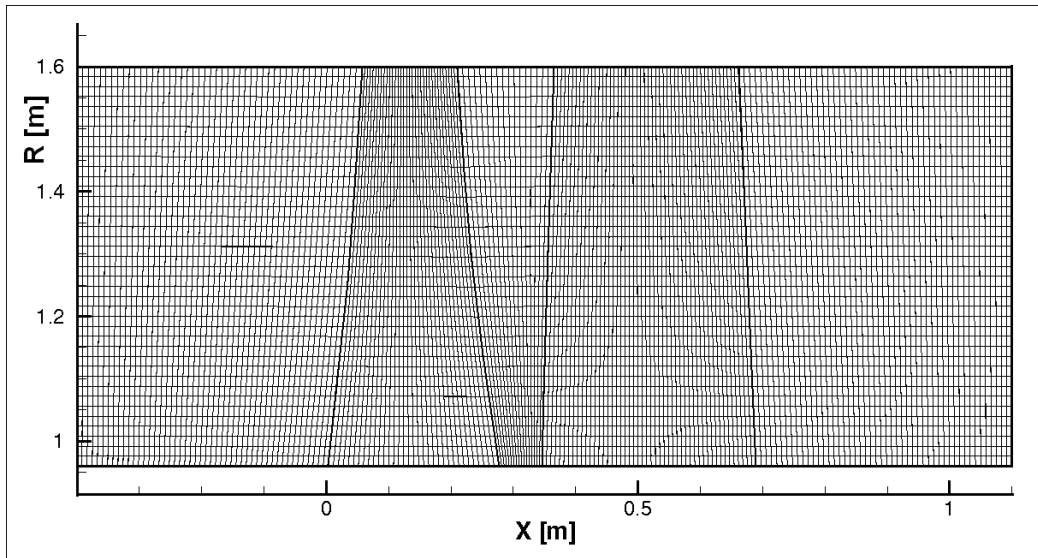


Figura 4.5: Mesh a quadrilateri del ventilatore CBI

Si riportano di seguito i risultati ottenuti: le figure 4.7 illustrano il profilo di entropia rispettivamente a dissipazioni nulle e con perdite reali stimate da correlazioni costruite sulla base di simulazioni *blade-to-blade*, il tutto con i trattamenti di incidenza attivo: si può vedere nel secondo caso l'aumento di s con l'ascissa curvilinea della macchina. La figura 4.7 b illustra la stima più realistica della condizione del fluido, poichè considera l'effetto delle perdite e non risente dell'errore nella stima dell'incidenza.

Le figure 4.8 sono le duali delle 4.7, ma senza aver introdotto il correttivo dell'incidenza: sia in assenza che in presenza di dissipazioni, ciascuna imma-

gine di questa coppia mostra uno sviluppo di entropia più marcato rispetto alla sua corrispondente calcolata con il trattamento di incidenza. Inoltre, confrontando queste ultime due immagini, è evidente come nel caso senza modello dissipativo l'entropia prodotta sia maggiore allo *shroud*, mentre nella maggior parte dei casi reali, a fronte di coefficienti di perdita confrontabili radialmente, l'entropia risente della differenza di pressione all'*hub*: la distribuzione radiale di entropia riportata in figura 4.8.a mostra proprio che in questo caso le perdite non derivano dalle correlazioni, ma da altri fenomeni, in questo caso numerici. Anche il brusco salto che avviene in corrispondenza dei due *leading edge* è sintomo che è un'errata modellazione dell'incidenza a causare tale risultato.

Come ulteriore conferma della correttezza del calcolo delle perdite, si riporta in figura 4.6 l'andamento dell'entropia in funzione della coordinata assiale, in corrispondenza del diametro esterno.

È significativo notare che tale profilo, perlomeno all'interno delle zone palettate, ricopre effettivamente la funzione esponenziale negativa usata per modellare le perdite in macchine operatrici, come illustrato al capitolo 3.

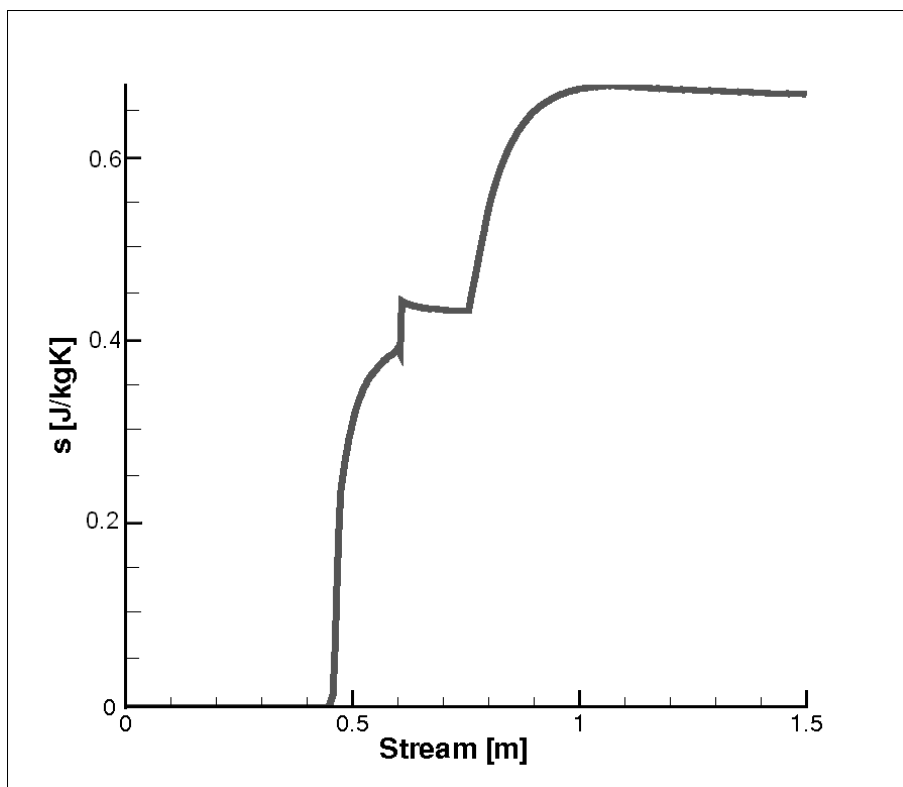


Figura 4.6: Andamento dell'entropia al diametro esterno

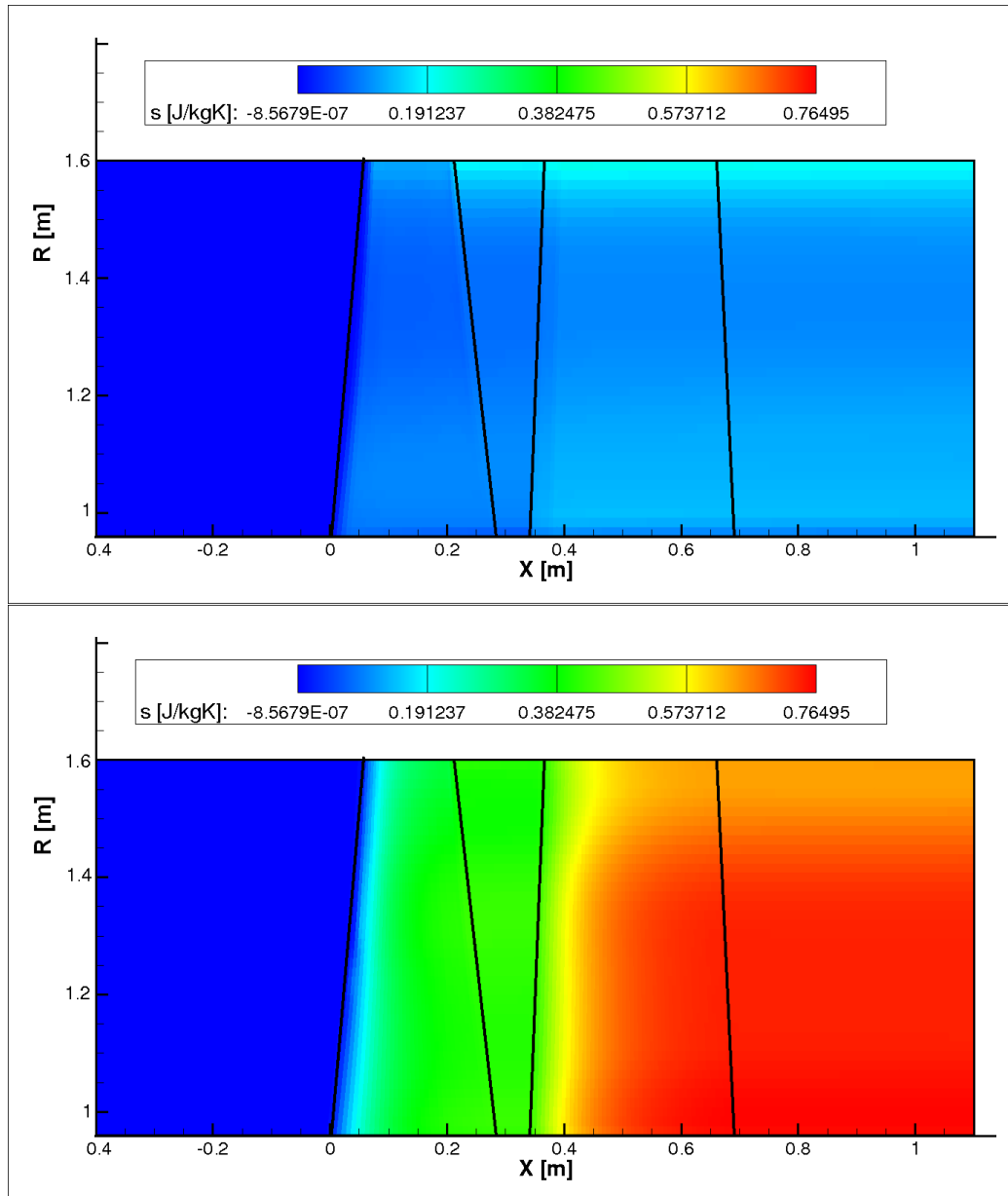


Figura 4.7: *Profili di entropia del ventilatore CBI con trattamento di incidenza a perdite a: nulle; b: attivate*

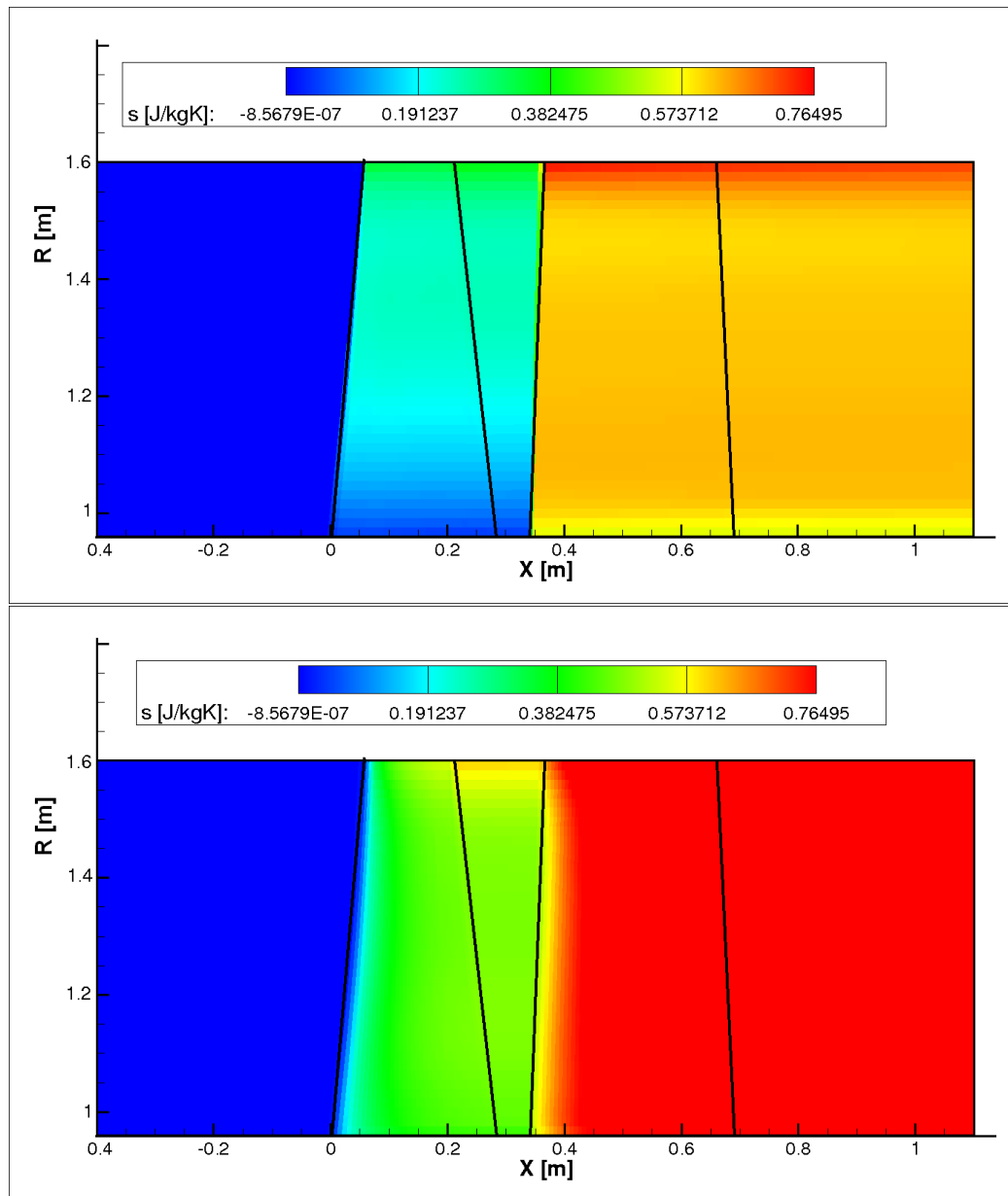


Figura 4.8: *Profili di entropia del ventilatore CBI senza trattamento di incidenza a perdite a: nulle; b: attivate*

Le figure 4.9 e 4.10 si riferiscono ancora al caso con $\beta = 1.015$ e illustrano l'effetto del trattamento di incidenza rispettivamente sull'angolo relativo del rotore e su quello assoluto dello statore.

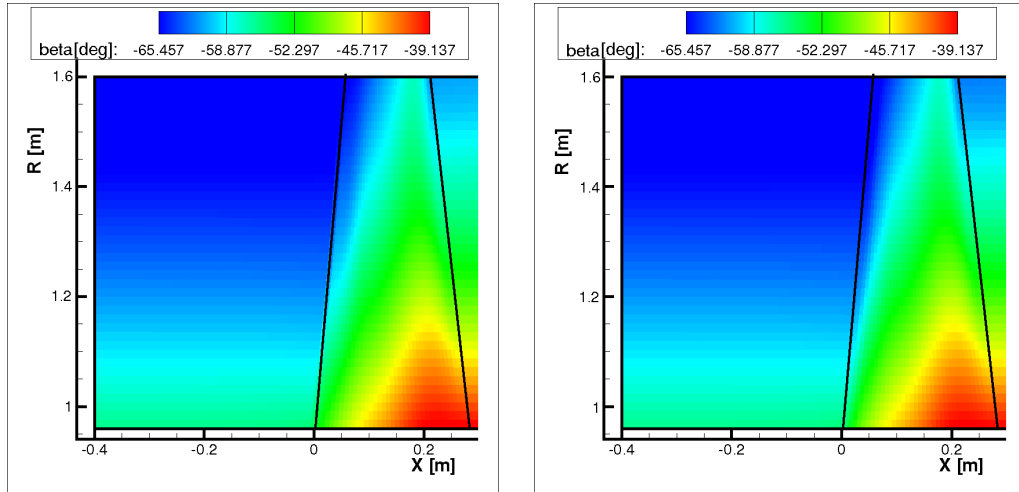


Figura 4.9: Angolo relativo rispettivamente senza e con trattamento di incidenza attivato

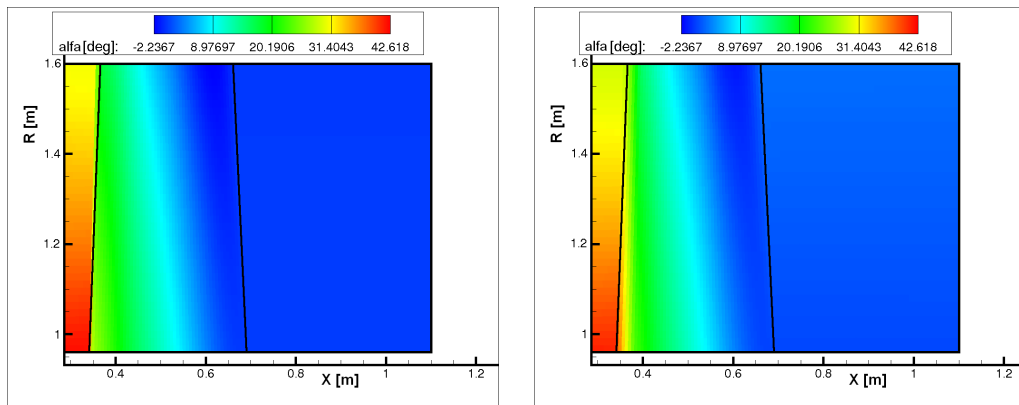


Figura 4.10: Angolo assoluto rispettivamente senza e con trattamento di incidenza attivato

La figura 4.11 illustra il confronto fra gli angoli geometrici e quelli fluidodinamici a *midspan*: si vede che nei tratti centrali delle pale gli angoli geometrici e fluidodinamici coincidono, mentre nel 20% iniziale e finale c'è uno scostamento dovuto all'attivazione del trattamento di incidenza.

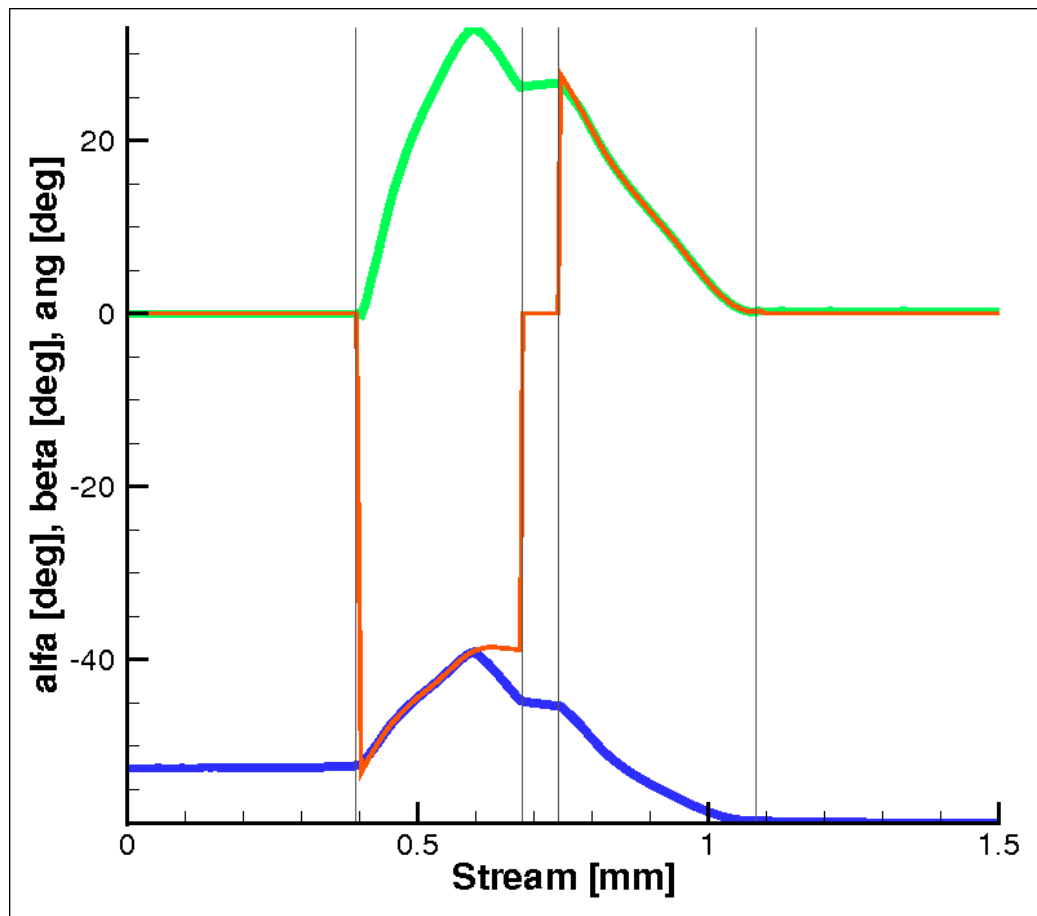


Figura 4.11: Confronto fra gli angoli fluidodinamici (relativo in blu; assoluto in verde) e quelli geometrici (in rosso) con trattamento di incidenza attivo; sezione di *midspan*

Tale discrepanza rappresentativa dell'incidenza e della deviazione si ricava anche dalla figura 4.12, che illustra i profili dell'angolo relativo in tutta la superficie meridiana (*contours*) confrontato con quello geometrico (isolinee).

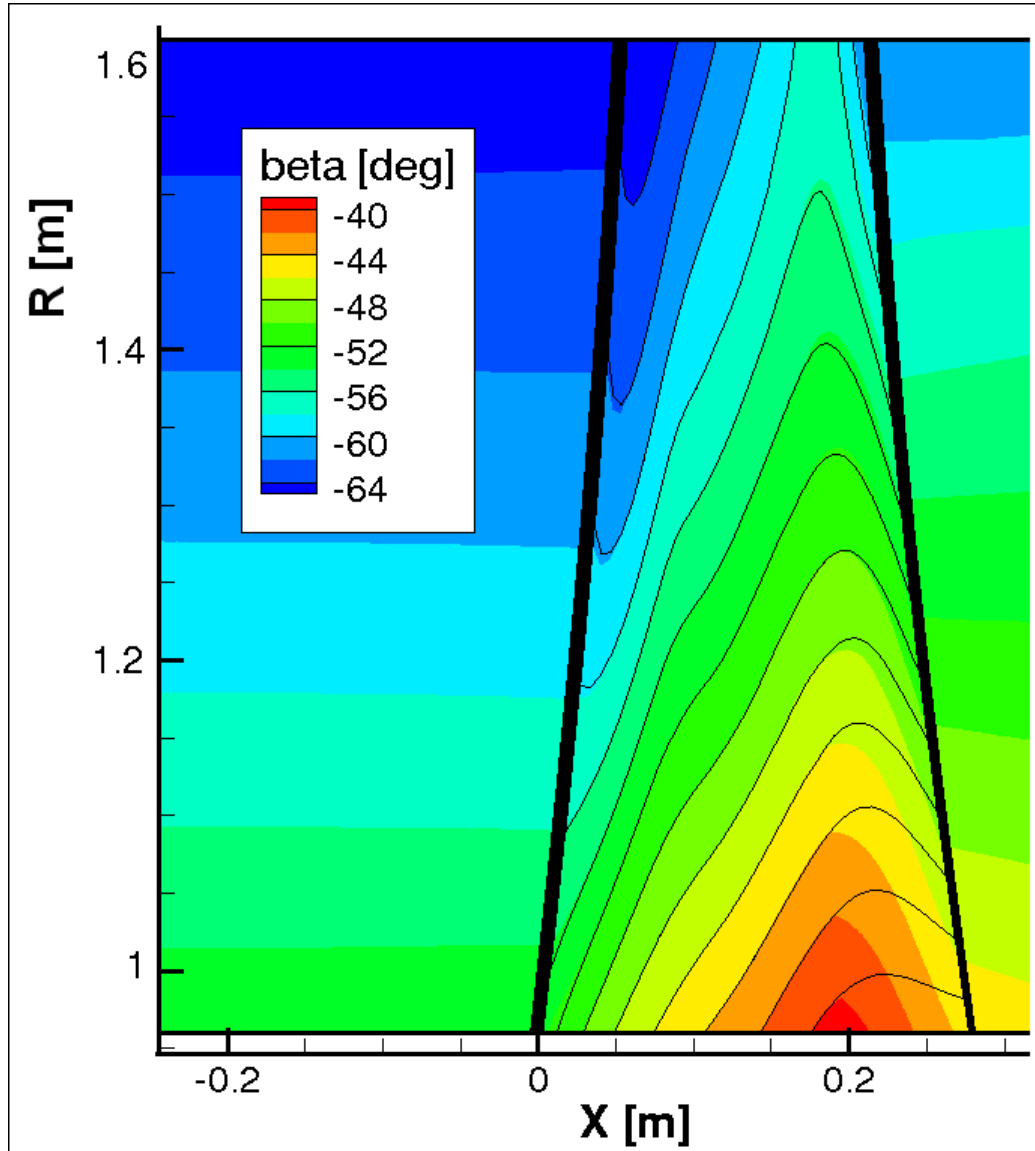


Figura 4.12: Confronto fra β_{fl} e β_{geo} sul rotore; $\frac{p_{out}}{p_{in}} = 1.015$

Si noti come in questo caso la macchina lavori in condizioni di buona incidenza, soprattutto nella zona di mezzeria. Tuttavia si possono apprezzare gli effetti della deviazione a valle, che risultano molto significativi nella zona

di base della pala, e che hanno notevole effetto sullo scambio energetico tra fluido e macchina (nel caso dei rotori).

In particolare il dettaglio sulla deviazione al *trailing edge* rotorico mostra lo scostamento fra gli angoli geometrico e fluidodinamico, e permette di apprezzare l'evoluzione radiale della loro differenza:

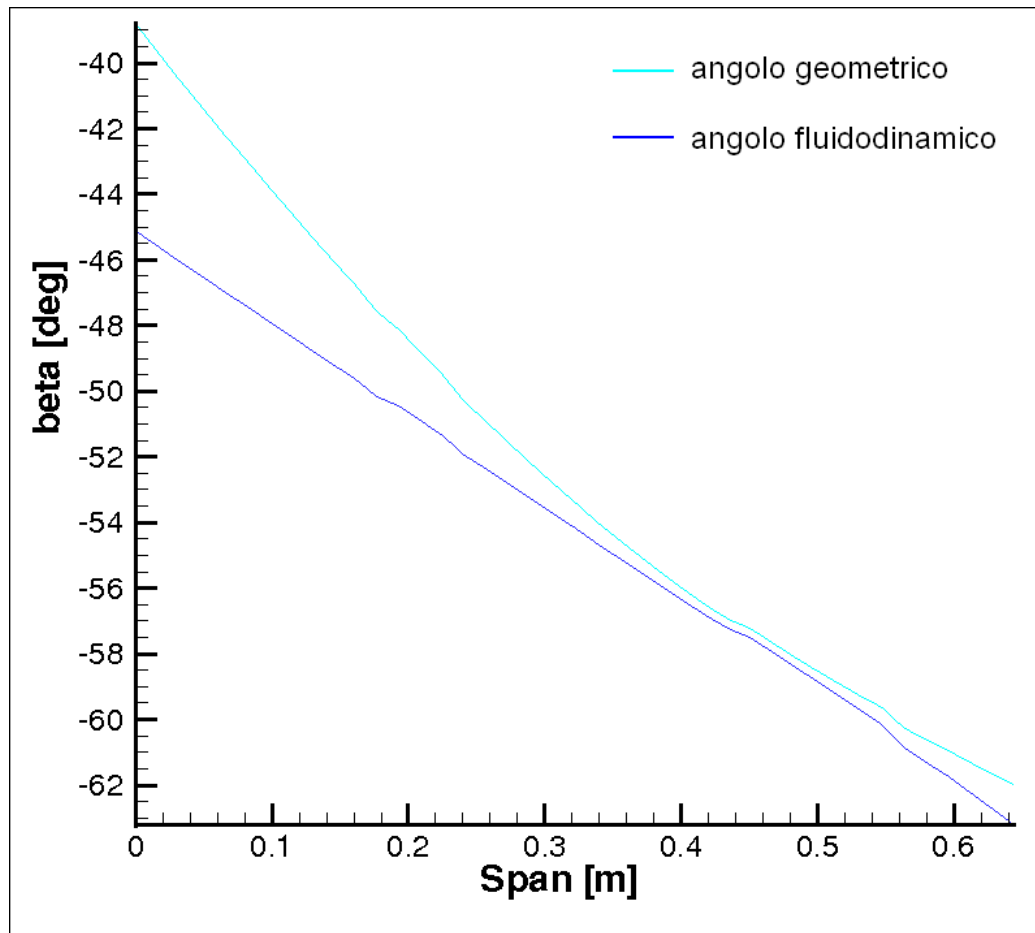


Figura 4.13: Confronto fra β_{fl} e β_{geo} sul bordo d'uscita del rotore

Un'analisi simile è stata condotta anche con griglia a triangoli e $\beta = 1.045$; variando il rapporto di compressione, cambia anche la portata e, insieme ad essa, la componente assiale di velocità. Ciò significa che dal punto di vista dello statore, calettato con un angolo fisso, il flusso arriva con incidenze diverse a seconda delle condizioni di esercizio, a differenza del rotore che può ottimizzare la fluidodinamica di volta in volta. In figura 4.14 si riporta il duale della figura 4.12 riferita allo statore.

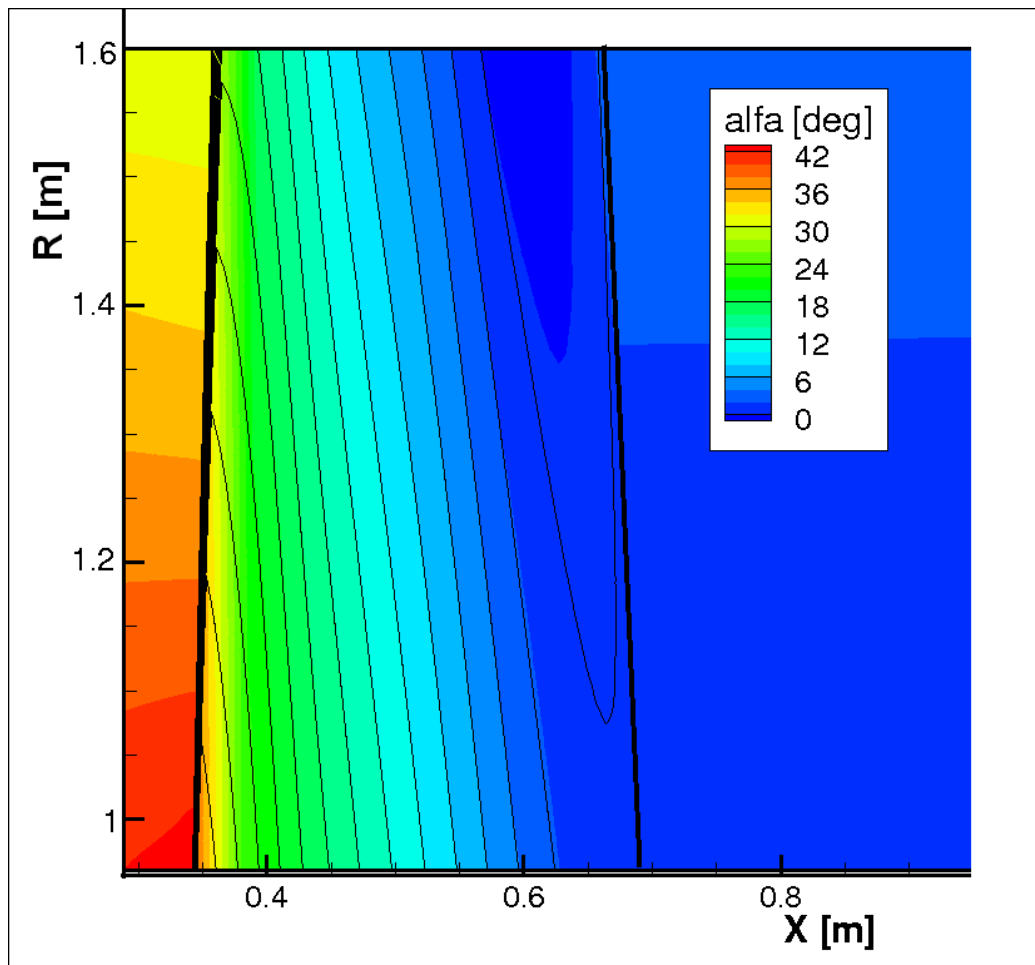


Figura 4.14: Confronto fra α_{fl} e α_{geo} sullo statore; $\frac{p_{out}}{p_{in}} = 1.045$

4.2.3 Effetti dei trattamenti sulla stabilità

L'attivazione del trattamento di incidenza, piuttosto che delle perdite, talvolta appesantisce il codice; tuttavia ciò non comporta un rallentamento nel calcolo, quanto più un'eventuale difficoltà di convergenza.

Si sono rese quindi necessarie alcune soluzioni:

1. eseguire un calcolo fino a convergenza con il codice privo del trattamento di incidenza e del termine di sorgente dissipativo, per poi usare questa soluzione per inizializzare il calcolo con il codice completo, attivando progressivamente l'uno e l'altro;
2. effettuare la simulazione con il codice completo, ma abbassando i valori relativi al *time-marching*, ovvero CFL_{max} soprattutto, ma anche CFL_{min} e il coefficiente che regola l'andamento esponenziale;
3. come al punto precedente, ma agendo sul K_{max} (per questo motivo fra i dati delle tabelle 4.3 e 4.4 compare anche questo parametro).

La soluzione vincente si è dimostrata essere l'ultima, per quanto talvolta si renda necessario anche diminuire il CFL , soprattutto per macchine multistadio o per grandi incidenze.

Invece, per quanto riguarda i tempi di calcolo, si riporta qui di seguito un'analisi sul tempo e il numero di iterazioni necessarie per raggiungere la convergenza al variare della tipologia di celle e del loro numero: il caso analizzato è lo stadio di turbina con $\chi = 0.5$ descritto già nei capitoli precedenti. Il numero di nodi in verticale (31) è stato lasciato invariato, mentre si è agito solo nella direzione assiale ($n = n_{celle\ x}$, a prescindere dall'infittimento adottato).

È interessante il fatto che raddoppiare le celle quadrate significa ricondursi al numero di celle triangolari, eppure i tempi di calcolo sono molto diversi fra i due casi.

$n = 150$	QUADRATI	TRIANGOLI
n	$t = 34'' ; n_{it} = 140$	$t = 2' 18'' ; n_{it} = 180$
$2n$	$t = 3' 22'' ; n_{it} = 140$	$t = 7' 36'' ; n_{it} = 180$
$4n$	$t = 10' 52'' ; n_{it} = 140$	$t = 13' 58'' ; n_{it} = 180$

L'ordine di grandezza dei residui tutte le simulazioni si è mantenuto intorno a $10^{-11} \div 10^{-13}$, quindi poco influente; anche il CFL_{max} impiegato è stato sempre di 10^5 .

4.3 Possibili sviluppi futuri

Allo stato attuale il codice può ancora essere elaborato per eseguire diverse simulazioni meridiane. Alcune risultano piuttosto interessanti, sia per la possibilità concreta di implementazione nello *zFlow* già esistente, sia per le svariate applicazioni ingegneristiche cui andrebbero incontro.

In particolare si vogliono sottolineare alcune evoluzioni, indicandone un'ipotesi circa l'effettiva fattibilità.

4.3.1 Lo *zFlow* integrale

Il codice meridiano discende da un codice già esistente, sviluppato allo scopo di simulare fluidi con pesanti effetti di gas reale. Per ragioni applicative, la versione del codice *throughflow* discussa in questa tesi è relativa all'applicazione ai gas ideali. Tuttavia, una versione estesa al trattamento dei gas reali è tutt'ora in fase di sviluppo e sarà presto messa a punto.

Inoltre non esiste una sola versione del codice capace di gestire tutti e tre i problemi (tridimensionale, piano e assialsimmetrico), sempre perchè lo sviluppo del meridiano è stato condotto separatamente.

Occorre quindi integrare il codice preesistente con la versione meridiana, sia dal punto di vista delle equazioni e delle librerie termodinamiche legate al tipo di fluido, sia in modo tale da rendere il calcolo *throughflow* non un codice a sè stante, ma uno dei possibili casi, considerando la dimensione del dominio spaziale.

4.3.2 Lo strato limite

Come descritto nel capitolo 3, la simulazione dello strato limite sarebbe molto interessante, sebbene siano presenti delle difficoltà legate all'utilizzo di dati basati su correlazioni, piuttosto che all'impossibilità di conoscere le effettive condizioni del flusso a monte, in realtà indispensabili.

A questi limiti si aggiungono quelli di natura più matematica legati alla gestione degli elevatissimi gradienti di velocità, temperatura, ... all'interno dello spessore dello strato limite, nonchè quelli che nascono nel momento in cui si deve modellare la condizione di aderenza sulle pareti.

Nel capitolo 3 si menziona ad esempio quanto accade nel tentativo basa-

to sull'imposizione del coefficiente di perdita di energia cinetica e vengono illustrate le criticità.

4.3.3 Modellazione di ugelli

Un'applicazione immediata delle integrazioni 4.3.1 e 4.3.2 consiste nella simulazione meridiana di ugelli, piani e assialsimmetrici, operanti con fluidi organici.

L'efflusso di gas densi infatti riveste un ruolo chiave nella determinazione dell'efficienza di svariati impianti ad energie rinnovabili, operanti con tecnologie ORC (*Organic Rankine Cycles*): essi operano con gas densi proprio perchè, rinunciando ai combustibili tradizionali, le temperature delle sorgenti a disposizione sono di solito molto più basse rispetto a quelle proprie degli impianti tradizionali, il che renderebbe difficile e in molti casi anti-economico l'utilizzo dell'acqua. I fluidi organici invece sono disponibili in una gamma talmente vasta che è possibile progettare l'impianto scegliendo il gas più adatto alle condizioni termodinamiche specifiche della sorgente.

Tuttavia le proprietà termofluidodinamiche di questi fluidi non sono facilmente generalizzabili, nè tantomeno del tutto note, e la ricerca si svilupperà in questo verso nel futuro prossimo, richiedendo gli opportuni strumenti di calcolo. Spesso non si conoscono con sufficiente precisione le proprietà al variare del regime di flusso, anche considerando che le turbomacchine in questi impianti sono supersoniche.

Il codice meridiano si inserirebbe come un adattamento del codice esistente, in cui però il componente simulato sarebbe privo di palettatura, progettato con una geometria critica per la risposta del fluido e, in particolar modo a *inflow* e *outflow*, tale da obbligare a ripensare l'assegnazione delle condizioni al contorno.

4.3.4 Generalizzazione a macchine radiali e miste

In realtà, sebbene l'attuale implementazione sia adatta solo a macchine assiali, eventualmente dotate di *flaring*, generalizzare l'approccio a macchine con componenti di velocità radiale marcata non è critico, poichè la scelta di un sistema di riferimento non cilindrico ma del tipo (m, n, θ) intrinsecamente risolve il problema lungo la *streamline*, quindi anche considerando un eventuale sviluppo radiale.

Tuttavia, in alcuni casi occorre rendere più robusto il calcolo dal punto di vista puramente numerico (si pensi al calcolo di $\alpha_{fl} = \frac{1}{\cos \hat{r}} \arctan \frac{w_\theta}{w_x}$, che rischia di introdurre una duplice divisione per 0 nelle macchine radiali).

Il nucleo centrale di questo intervento sarebbe però un'espressione dell'incidenza adatta a gestire questo tipo di flussi, come accennato nel capitolo 2 in corrispondenza del sistema 2.15. In questo caso occorre anche proiettare la forza aerodinamica nello spazio e non solo nel piano, e tale trasformazione può essere effettuata agevolmente ricorrendo a tecniche geometriche note come gli angoli di Cardano o di Eulero: occorre valutare il metodo più consono, anche nell'ottica dell'interazione con eventuali ulteriori sviluppi del codice.

4.3.5 Il codice viscoso

Un'ultima evoluzione potrebbe essere nella direzione di introdurre direttamente la viscosità, anzichè modellare separatamente i suoi effetti. Tale ipotesi risulta decisamente allettante, poichè consentirebbe di trattare lo strato limite, poichè esso è figlio della viscosità: una volta estese le equazioni alle Navier-Stokes complete, lo strato limite verrebbe automaticamente calcolato (sotto opportune condizioni, comunque), almeno sulle pareti di mozzo e cassa.

Inoltre questo porterebbe ad un allargamento del modello: infatti l'ipotesi alla base dell'espressione dell'equazione di conservazione dell'energia implementata è l'assoluta adiabaticità dei contorni; tuttavia potrebbe essere richiesta l'analisi del comportamento di componenti soggetti a spillamenti o a scambio termico.

Entrambi questi fenomeni si tradurrebbero nell'insorgere di due ulteriori termini di sorgente: il primo sarebbe un termine negativo dal punto di vista della conservazione della massa, il secondo invece verrebbe inserito nell'equazione di conservazione dell'energia sotto forma di $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$, dove $\dot{\mathbf{q}}$ rappresenta il flusso termico areico.

Tale vettore dovrebbe essere calcolato tramite la soluzione dell'equazione di Fourier ¹

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\mathcal{K}}{\rho c} \Delta T = \frac{q_{gen}}{\rho c} \\ \dot{\mathbf{q}} = -\mathcal{K} \cdot \nabla T \end{cases} \quad (4.5)$$

da aggiungere al sistema.

¹ \mathcal{K} = conducibilità termica [W/(m · K)]; c = calore specifico a volume costante [J/kg · K]; q_{gen} = potenza volumica generata [W/m³].

Tuttavia passare dal codice basato sulle equazioni di Eulero a un solutore Navier-Stokes comporterebbe forse più controindicazioni che vantaggi, tra cui:

1. una maggior complicazione della scelta delle condizioni al contorno, ad esempio per considerare gli effetti termici operanti nello strato limite;
2. l'impossibilità di gestire un sistema differenziale completamente iperbolico, poichè le tre equazioni di bilancio di quantità di moto andrebbero a contenere i termini aggiuntivi del second'ordine ($-\mu [\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})]$), divenendo paraboliche; è pur vero che tale problematica è ben nota ed è affrontabile con tecniche accurate.
3. l'azione su un aspetto fondamentale del codice, ovvero le equazioni differenziali, contrariamente all'intervento su aspetti più leggeri, peraltro dei soli termini di sorgente, operato dalle altre ipotesi di sviluppo.
4. il problema di come introdurre le perdite secondarie, ovvero come discernere fra le perdite generate automaticamente dal codice viscoso e quelle da introdurre come termini di sorgente.

Questo intervento è quindi decisamente delicato.

Conclusioni

Il presente lavoro di tesi in inserisce nel contesto più ampio di sviluppo di un codice meridiano per la simulazione fluidodinamica; nello specifico, la sua applicazione alle turbomacchine ha richiesto la modellazione di opportuni termini di sorgente che permettessero di simulare l'effetto della palettatura in termini sia geometrici che dinamici.

Essenzialmente tali termini di sorgente derivano dalle forze che nascono sulla superficie di separazione fluido - pala ma vengono trattate come forze di volume e non di superficie per via dell'ipotesi di *assialsimmetria con swirl*: infatti in un'ottica meridiana ogni derivata circonferenziale si annulla, e pertanto le pale collassano in superfici tangenzialmente indistinguibili dal fluido. In questo modo, si prescinde dall'analisi degli sforzi generati da queste forze, ma si osserva solo l'effetto che esse hanno sul flusso, alla stregua delle forze di volume appunto.

Sono state quindi analizzate separatamente le diverse componenti delle forze in relazione all'effetto fluidodinamico correlato: il modulo della componente normale alla superficie palare, di natura aerodinamica, è stato definito ricorrendo alla tecnica dell'*immersed boundary*, che modella la pala come un vincolo elastico, di rigidità proporzionale al grado di non soddisfacimento della condizione di tangenza (perpendicolarità fra la sua normale e la velocità relativa).

Tuttavia è stato necessario apportare una correzione a questo primo termine di sorgente in corrispondenza dei *leading edge* e *trailing edge* delle pale per gestire l'incidenza e la deviazione: l'ipotesi di assialsimmetria non consente di discernere le direzioni di flusso e pala, eventualmente ancora diverse. Oggetto del capitolo 2 è stata quindi la modellazione efficace e numericamente stabile di un metodo, detto *trattamento di incidenza*, che consentisse di raccordare la direzione del flusso in ingresso con quella imposta dalla palettatura con gradualità. Il metodo consiste nella modifica della forza aerodinamica all'ingresso e allo scarico, in termini di proiezione della stessa lungo una dire-

zione ricavata per interpolazione fra quella del flusso e quella geometrica nel tratto centrale della palettatura, in cui si assume che gli angoli cinematico e solido siano ormai allineati; occorre poi intervenire sul modulo per rispettarne il legame con la condizione di tangenza.

È stato quindi prodotto un modello opportuno (nella duplice forma *strong* e *weak*, preferibile in quanto più coerente), la cui implementazione all'interno del codice ne ha dimostrato l'efficacia; i risultati ottenuti sono stati soddisfacenti sia in termini di qualità che di costo computazionale, poichè l'intervento non sembra rallentare il calcolo, nè destabilizzarlo, per quanto il trattamento di incidenza introduce una dipendenza della forza dalla soluzione più forte che nel caso "base". La bontà del modello è confermata anche dal suo confronto con altre due possibili tecniche, scartate per motivi sia concettuali che applicativi.

Il capitolo 3 è stato invece dedicato alla modellazione della componente tangenziale della forza: si è dimostrata la sua natura esclusivamente dissipativa, e si è correlato il suo modulo con il gradiente di entropia. La definizione della forza si è articolata in due fasi: la prima è stata l'individuazione di correlazioni empiriche adeguate alla stima della produzione entropica (nell'ambito di un calcolo comunque inviscido), e la seconda ha interessato aspetti per lo più geometrici riguardanti la distribuzione spaziale di entropia, nonché e il calcolo del suo gradiente nel sistema di riferimento opportuno.

Anche in questo caso il termine dissipativo non affatica il processo di convergenza; si mostra, eventualmente, utile agire sulla velocità di avanzamento temporale, piuttosto che sulla rigidità del vincolo elastico per aumentare la stabilità dei calcoli condotti con geometrie o in condizioni termofluidodinamiche spinte.

Si è infine tentata la strada della simulazione separata dello strato limite, abbandonata però perchè mostra ancora forti limiti modellistici, nonché un effetto destabilizzante crescente con la complessità della macchina analizzata.

Tuttavia, essendo lo strato limite uno dei principali responsabili delle dissipazioni, è utile tentarne la modellazione per rendere i risultati sempre più realistici; altri possibili fronti di intervento riguardano l'integrazione di questo codice meridiano con modelli di gas reale, eventualmente viscoso (intervento però estremamente radicale), piuttosto che l'adattamento alla simulazione di una gamma di macchine più ampia, che includa anche ugelli e turbomacchine a flusso misto.

Queste prospettive sono discusse nel dettaglio all'interno del capitolo 4, dove si trova anche una raccolta di casistiche di calcoli condotto con il codice arricchito dei termini di sorgente così ottimizzati.

Bibliografia

- [1] H.R.M Craig, H.J.A Cox “*Performance estimation of axial flow turbines*”, Procs. Instn, Mechs. Engr., vol 185, pag 22-71, 1971
- [2] C.H. Wu “*A general theory for 3D flow in subsonic and supersonic turbomachines of Axial-, Radial- and Mixed-flow types*”, NACA Tr 2604, 1952
- [3] J.F. Escuret, V. Garnier “*Numreical simulation of Surge and Rotating stall in multistage axial flow compressors*” AIAA Paper 94-3202, 1994
- [4] A. Spurr “*The prediction of the 3D transonic flow in turbomachinery using a combined throughflow and blade-to-blade time marching method*” Int J Heat and fluid flow 2, 189-199, 1980
- [5] W.N.Dawes “*Toward improved throughflow capability: the use of 3D viscous solvers in a multistage environment*” Transaction of the ASME Jurnal of Turbomachinery 114, 8-17, 1992
- [6] M.J. Koiro, R.A. Myers, R.A. Delaney “*TADS – A CFD-based turbomachinery analisys and design system wuth GUI-vers. 2.0 – Methods and Results*” NASA/CR 1996-206603, 1999
- [7] Z. Yao, Ch. Hirsch “*Throughflow model using 3D Euler or Navier-Stokes solver*” Proc. 1st european conference on turbomachinery fluid dynamics and thermodynamics, Eerlangen, 1995
- [8] S.V. Damle, T.Q. Dang, D.R. Reddy “*Throughflow method for turbomachinery applicable for all regimes*” Transaction of the ASME Jurnal of Turbomachinery, 1997
- [9] J.D. Denton, W.N. Dawes “*Computational fluid dynamics for Turbomachinery design*” in: DENTON “*DEVELOPMENT OF TURBOMACHINERY DESIGN*”, Professional Engineering Publishing, 1999

- [10] H.J. Horlock, J.D. Denton “*A Review of some early design practice using computational fluid dynamics and current perspective*” Transaction of the ASME Journal of Turbomachinery, 2005
- [11] J.F. Simon “*Contribution to Throughflow modelling for axial flow turbomachines*” PhD thesis, Université de Liege, 2007
- [12] S. Baralon. L.E. Erikson, U. Hall “*Viscous throughflow modelling of transonic compressors using a time-marching – finite volumes solver*” 13th international symposium on airbreathing Engineers (ISABE), Chattanooga, USA, 1997
- [13] R. Mittal, G. Iaccarino “*Immersed Boundary Methods*” Annu. Rev. Journal Fluid Mech. 37, 239-261, 2005
- [14] S. Baralon. L.E. Erikson, U. Hall “*Validation of a throughflow time-marching – finite volume solver for transonic compressors*” ASME Paper 98-GT-47, 1998
- [15] G. Cornetti “*Macchine a fluido*” Il Capitello, 1989
- [16] D.G. Ainley, G.C.R. Mathieson “*A method for performance estimation for axial flow turbines*” NDTE Report R111, 1952
- [17] D.G. Ainley “*Performance estimation for axial flow turbines*” Procs. Instn. Mech. Engr, 1965
- [18] S. Lieblein “*The Aerodynamic design of Axial flow Compressors*” NASA, SP36, 1965
- [19] A.R. Howell “*Fluid dynamics of axial compressors*” Procs. Instn. Mech. Engr 153: 441-82, 1945
- [20] A. Quarteroni “*Modellistica numerica per problemi differenziali*” Springer, 2003
- [21] M. Bramanti, C.D. Pagani, S.Salsa “*Matematica, Calcolo infinitesimale e Algebra lineare*” Zanichelli, 2004
- [22] C. Osnaghi “*Teoria delle turbomacchine*” Progetto Leonardo, 2002

Appendice A

Generalità sugli operatori differenziali

A.1 Operatori differenziali cartesiani e loro interpretazione fisica

Tutti gli operatori differenziali [21] usati in fluidodinamica discendono dall'applicazione del vettore **nabla**, che in coordinate cartesiane si esprime come

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (\text{A.1})$$

A.1.1 Gradiente

Qualora sia applicato una sola volta ad uno scalare s , il risultato prende il nome di *gradiente*, ed ha il significato di direzione lungo cui s , funzione di (x, y, z) , cresce più rapidamente; si può dimostrare che ∇s è perpendicolare alle curve di livello di s , ovvero il luogo dei punti in cui $s = \text{cost}$.

$$\nabla s = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial y} \quad \frac{\partial s}{\partial z} \right] \quad (\text{A.2})$$

In generale, la dizione $\nabla \mathcal{B}$ indica gradiente di \mathcal{B} , sia che \mathcal{B} sia uno scalare, sia che esso sia un vettore. In quest'ultimo caso il risultato è un tensore detto

gradiente vettoriale

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Analiticamente il gradiente vettoriale si ottiene dall'operazione

$$\nabla \mathbf{v} \Big|_{3 \times 3} = \mathbf{v} \Big|_{3 \times 1} \odot \nabla \Big|_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \odot \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (\text{A.4})$$

dove \odot rappresenta il prodotto matriciale (effettivo, a differenza di \otimes che indica quello componente per componente).

In generale il gradiente aggiunge una direzione di sviluppo, trasforma cioè gli scalari in vettori e i vettori in tensori.

A.1.2 Divergenza

Se invece si applica ∇ ad un vettore \mathbf{v} tramite un prodotto scalare, si ottiene la *divergenza* di \mathbf{v} , uno scalare definito come

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.5})$$

Nel caso particolare in cui \mathbf{v} è il vettore velocità, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ indica la velocità di variazione di un volumetto infinitesimo $d\Omega$, normalizzata su $d\Omega$ stesso.

Ciò costituisce una verifica del teorema del trasporto: ad esempio, partendo dall'equazione di conservazione della massa 1.5 ed estraendo la funzione integranda, si ottiene esattamente quanto riportato nell'equazione 1.6

ricavata con il teorema del trasporto.

$$\begin{aligned}
 \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \cdot d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \frac{d\rho}{dt} \cdot d\Omega + \int_{\Omega(t)} \rho \frac{d(d\Omega)}{dt} = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega(t)} \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \cdot d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] \cdot d\Omega
 \end{aligned}$$

Contrariamente al gradiente, la divergenza di un tensore restituisce un vettore e la divergenza di un vettore uno scalare.

A.1.3 Laplaciano

L'applicazione consecutiva di ∇ per due volte ad uno scalare porta al *laplaciano* Δs o $\nabla^2 s$; analogamente si definisce il *laplaciano vettoriale* $\Delta \mathbf{v}$

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \tag{A.6}$$

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

È possibile riscrivere $\Delta \mathbf{v}$ come $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$

A.1.4 Rotore

Infine si osserva il significato del *rotore* di un vettore, derivante dall'applicazione del ∇ ad un vettore mediante le regole del prodotto vettoriale

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Si noti che $\nabla \times \mathbf{v}$ ha significato solo per vettori definiti in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{R}^3 , e ha significato ma è identicamente nullo in \mathbb{R} . La sua interpretazione fisica è associata alla vorticità, ovvero a $2\boldsymbol{\omega}$, dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità di rotazione di un elementino su sè stesso.

A.2 Teoremi di trasformazione

I teoremi di trasformazione stabiliscono delle uguaglianze fra integrali operanti su quantità differenziali. Essi si appoggiano sui medesimi assunti, ma per comodità si citano nel testo come distinti fra:

1. Teorema della divergenza

(a) per vettori:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega = \int_{S=\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot dS \quad (\text{A.9})$$

(b) per matrici:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot d\Omega = \int_{S=\partial\Omega} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{n}) \cdot dS \quad (\text{A.10})$$

(c) per scalari:

$$\int_{\Omega} \nabla s \cdot d\Omega = \int_{S=\partial\Omega} (s\mathbf{n}) \cdot dS \quad (\text{A.11})$$

poiché $\nabla s = \nabla \cdot s\underline{\underline{\mathbf{I}}}$

2. Teorema di Stokes o di Gauss-Green (bidimensionale):

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{L=\partial^+ S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{A.12})$$

dove \mathbf{n} indica il versore uscente dall'elementino locale di superficie dS e $\partial^+ V$ il contorno del dominio V percorso in modo tale da lasciarselo alla sinistra.

Appendice B

Operatori differenziali in coordinate cilindriche

La trasformazione di sistema di riferimento porta con sè una modifica dell'espressione degli operatori differenziali ed integrali, non fosse altro che per motivi dimensionali. Si ridefiniscono quindi, in coordinate cilindriche,

1. jacobiano di trasformazione:

$$j_{cart \rightarrow cil} = \left(\frac{\partial \mathbf{h}_{cart}}{\partial \mathbf{h}_{cil}} \right) = \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(z, r, \theta)} \right) = \left(\frac{\partial(r \cos \theta, r \sin \theta, z)}{\partial(z, r, \theta)} \right) = \quad (B.1)$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & r \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. gradiente:

$$\nabla_s = \left[\frac{\partial s}{\partial z} \quad \frac{\partial s}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \right] \quad (B.2)$$

3. divergenza:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} \quad (B.3)$$

4. elementino di dominio (volume o superficie):

$$dD = |\det(j_{cart \rightarrow cil})| \cdot \prod_{j=1,3} dh_{cil,j} = r \cdot dz dr d\theta \quad (B.4)$$

Appendice C

Formulazioni alternative del principio di conservazione della quantità di moto

C.1 Equazioni di Navier-Stokes

Ripartendo dal bilancio di quantità di moto $F = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, riscritta in forma integrale

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{f}_{\text{vol}} d\Omega + \int_{S(t)} \mathbf{f}_{\text{sup}} dS = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega \quad (\text{C.1})$$

sostituendo alle forze di superficie la loro espressione tensoriale

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{f}_{\text{vol}} d\Omega + \int_{S(t)} (-p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}) dS = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega \quad (\text{C.2})$$

e applicando il teorema della divergenza, si ottiene

$$\int_{\Omega(t)} \left[\rho \left(\mathbf{f}_{\mathbf{v}} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) - \nabla \cdot p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \right] d\Omega = 0 \quad (\text{C.3})$$

da cui

$$\rho \left(\mathbf{f}_{\mathbf{v}} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \nabla \cdot p \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{C.4})$$

In ipotesi di fluido newtoniano, si verifica sperimentalmente che, nel sistema di riferimento principale,

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}_p}} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx}d_{xx} + \alpha_{xy}d_{yy} + \alpha_{xz}d_{zz} \\ \alpha_{yx}d_{xx} + \alpha_{yy}d_{yy} + \alpha_{yz}d_{zz} \\ \alpha_{zx}d_{xx} + \alpha_{zy}d_{yy} + \alpha_{zz}d_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

dove $\alpha_{ij} = -f(\mu) - 2\mu\delta_{ij}$ e d_{ii} la componente del tensore delle velocità di deformazioni $\underline{\underline{\mathbf{D}_p}} = \frac{\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T}{2}$ espresso nel sistema di riferimento principale.

Poichè nel caso monodimensionale si verifica che $\tau_{iu} = -\mu\frac{\partial u}{\partial i}$, e che l'equazione C.5 si può riscrivere come $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}_p}} = -(f(\mu)\nabla\mathbf{v})\underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu\underline{\underline{\mathbf{D}_p}}$, si esprime quest'ultimo termine come

$$\begin{cases} \sigma_{xx} - p = \tau_{xx} = -f(\mu)\nabla\mathbf{v} - 2\mu d_{xx} \\ \sigma_{yy} - p = \tau_{yy} = -f(\mu)\nabla\mathbf{v} - 2\mu d_{yy} \\ \sigma_{zz} - p = \tau_{zz} = -f(\mu)\nabla\mathbf{v} - 2\mu d_{zz} \end{cases}$$

da cui, sommando membro a membro e ricordando la definizione di p , si ricava che $f(\mu) = -\frac{2}{3}\mu$. Si giunge quindi a

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{f}_v - \frac{d\mathbf{v}}{dt}) &= \nabla \cdot \left[\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2\mu\underline{\underline{\mathbf{D}_p}} \right] = \\ &= \nabla p + \frac{2}{3}\mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Delta\mathbf{v}] = \\ &= \nabla p - \mu\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

valida per ogni sistema di riferimento.

C.2 Equazione di Crocco

[22] La derivata euleriana del vettore velocità, già espressa nella forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{v})$$

può essere riscritta come

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\|\mathbf{v}\|^2 + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v} \quad (\text{C.7})$$

La C.4 diviene allora

$$\mathbf{f}_{\text{vol}} - \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla \|\mathbf{v}\|^2}{2} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v} \right) = \nabla p - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{C.8})$$

Dalla definizione di entalpia $h = e + pv$ (da cui $dh = de + pdv + vdp$) e dall'espressione differenziale dei principi della termodinamica

$$de = dq + dl = dq + d(l_{\text{utile}} + l_{\text{diss}}) = d(\text{effetto termico}) + dl_{\text{utile}} = Tds - pdv$$

si ottiene

$$dh = Tds + vdp \quad (\text{C.9})$$

ovvero $\nabla p = \rho \nabla h - \rho T \nabla s$.

Quest'ultima relazione permette di riscrivere la C.8 nella forma

$$\rho (\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f}_{\mathbf{v}} + \rho T \nabla s - \rho \left(\nabla h + \frac{\nabla \|\mathbf{v}\|^2}{2} \right) - \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{C.10})$$

Inoltre, se fra le $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}$ si considerano solo quelle, come l'accelerazione di gravità, dotate di potenziale, anche questo termine diventa $\nabla \phi$; infine, essendo il prodotto vettoriale anticommutativo, si ottiene

$$\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla h_t^* - T \nabla s + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{C.11})$$

essendo h_t^* la somma dell'entalpia totale $h + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}$ e del potenziale delle forze esterne ϕ , di regola trascurabile per fluidi comprimibili non soggetti a forzanti esterne. Tale relazione è detta *equazione di Crocco*.

Appendice D

Complementi sulle derivate termodinamiche

A conferma delle valutazioni fatte al capitolo 3, si prova a valutare la derivata della temperatura partendo dai risultati dell'equazione 3.46.

Infatti non solo $\frac{\partial T}{\partial \rho} = 0$, ma anche

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{\partial \left(\frac{p}{RT} \right)}{\partial T} = \frac{1}{R} \frac{\partial \frac{p}{T}}{\partial T} = \frac{1}{R} \frac{T \frac{\partial p}{\partial T} - p}{T^2} = \frac{1}{R} \frac{T \frac{p}{T} - p}{T^2} = 0 \quad (\text{D.1})$$

Questo verifica che

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{1}{\rho \frac{\partial e}{\partial T}} = \frac{1}{c_v} \quad (\text{D.2})$$

che corrisponde a quanto trovato nell'equazione 3.41 per altre vie, e costituisce un'ulteriore conferma di quanto detto.

Peraltro, al di là delle considerazioni fisiche, una derivata identicamente nulla significa assenza di dipendenza reciproca fra le variabili: la derivata della funzione inversa, coinvolgendo le medesime variabili, non può che essere altrettanto nulla in tutti i punti.

Diverso è il caso invece di quando la derivata si annulla solo localmente, poichè in questo caso è indice di sensibilità fra le variazioni delle variabili, essendo l'interdipendenza assodata.