

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di ingegneria industriale
Corso di laurea in Ingegneria Aeronautica



Analisi del PVC in un getto ad elevato grado
di swirl mediante immagini TR-PIV

Relatore: Prof. Aldo Coghe

Tesi di Laurea di:
Fabio Capelli
Matr. 682543

Anno Accademico 2009/2010

Sommario

Nel presente lavoro di tesi è stata svolta un'analisi sperimentale su un getto fluido attraverso la tecnica della Particle Image Velocimetry ad alta frequenza (TR-PIV). Il getto libero in aria, sottoposto ad una forte rotazione, presentava una zona di ricircolazione instazionaria ed instabilità fluidodinamiche tipiche delle camere di combustione aeronautiche. Tra queste instabilità si è studiato il comportamento del Precessing Vortex Core, la struttura principale dal punto di vista dinamico. L'analisi si è focalizzata sulla struttura di grande scala del campo turbolento. Una campagna di misura TR-PIV a 1500 Hz ha permesso di ricavare mappe vettoriali istantanee di due componenti della velocità su due piani perpendicolari all'asse del getto. Sono state esplorate e confrontate diverse metodologie di elaborazione di immagini PIV riguardo all'eliminazione delle misure spurie. Le mappe vettoriali risultanti sono state sottoposte a tecniche di *media condizionata* e decomposizione ortogonale propria, implementate *ad hoc*, al fine di mettere in luce la struttura di grande scala. Sono stati analizzati e confrontati, sia alle mappe istantanee che a quelle mediate, vari metodi per l'identificazione di vortici in un campo turbolento. È stato sviluppato un modello minimale di vortice in precessione, al fine di validare le metodologie implementate e rappresentare alcune caratteristiche del vortice reale. Infine sono stati confrontati i risultati di un'analisi statistica sulla posizione del centro del vortice in precessione, tra le mappe vettoriali istantanee e un loro opportuno filtraggio.

Indice

Indice	ii
Elenco delle figure	vi
Elenco delle tabelle	viii
1 Introduzione	1
1.1 Motivazioni	1
1.2 Obbiettivi	1
2 Vortex Breakdown	3
2.1 Parametri Caratteristici	3
2.1.1 Numero di Reynolds	3
2.1.2 Numero di swirl	4
2.1.3 Modello di <i>plug flow</i>	4
2.1.4 Flussi a basso grado di swirl	6
2.2 Instabilità del getto	6
2.2.1 Modello di instabilità del getto	7
2.2.2 Configurazione dell'instabilità	10
3 Apparato sperimentale	15
3.1 Generazione del moto di swirl	15
3.2 Linea pneumatica	16
3.3 Inseminazione	17
3.4 Sistema di misura	17
4 Generazione delle mappe vettoriali	19
4.1 Particle Image Velocimetry	19
4.1.1 Principio	20
4.1.2 Dimensioni dell'area di interrogazione	20
4.2 Algoritmo di cross-correlazione	22
4.2.1 Finestratura	22
4.2.2 Sovrapposizione delle aree di interrogazione	24
4.3 Velocità spurie	25
4.3.1 Altezza relativa del picco	25

INDICE

4.3.2	Modulo della velocità	25
4.3.3	Media mobile	26
4.4	Mappe vettoriali	28
4.5	Valutazione delle derivate parziali nel piano	30
4.5.1	Approccio alle differenze finite	30
4.5.2	Approccio integrale	32
4.6	Ricostruzione della pressione	34
5	Identificazione di vortici	35
5.1	Definizione di vortice	35
5.2	Minimo locale della pressione	36
5.3	Traiettorie e linee di flusso	38
5.4	Momento delle quantità di moto locali	38
5.4.1	Momento delle quantità di moto locali, versione invariante	39
5.5	Modulo della vorticità	40
5.6	Approcci locali basati sul gradiente della velocità	40
5.6.1	Autovalori complessi di $\nabla\mathbf{u}$	41
5.6.2	Swirling strength	41
5.6.3	Condizioni sul secondo invariante di $\nabla\mathbf{u}$	42
5.6.4	Due autovalori negativi per $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$	43
5.6.5	Un fondamento comune per i criteri basati su $\nabla\mathbf{u}$	44
5.6.6	Campo di moto piano	45
5.6.7	Misure piane in un campo di moto 3D	46
5.7	Approccio non locale	46
5.8	Criteri applicati	48
6	Elaborazioni	49
6.1	Campo di moto medio	49
6.1.1	Profili medi radiali	50
6.2	Analisi spettrale	52
6.3	Analisi statistica della posizione del centro del vortice	52
6.4	Media Condizionata	54
6.4.1	Decomposizione di Reynolds	56
6.5	Analisi POD	60
6.5.1	Ricostruzione troncata	60
6.5.2	Analisi statistica della posizione del centro del vortice	61
6.6	Confronto con un modello di vortice	64
7	Risultati più significativi	67
7.1	Analisi di vortici instazionari in un campo turbolento	67
7.2	Struttura del Precessing Vortex Core	68
7.3	Sviluppi futuri	68

A	Modello di vortice piano	71
A.1	Vortice di Lamb	71
A.2	Vortice di Rankine	72
B	Decomposizione Ortogonale Propria	75
B.1	Caratteristiche fondamentali	75
B.1.1	Domini	76
B.2	Applicazione ad uno spazio a dimensione finita	76
B.2.1	Decomposizione ai valori singolari	77
	Bibliografia	79

Elenco delle figure

2.1	Instabilità di tipo <i>bolla</i>	6
2.2	Instabilità di tipo <i>spirale</i>	7
2.3	Configurazione schematica di un <i>breakdown</i> conico	8
2.4	Rappresentazione dell'asse delle strutture vorticose e della ziona di ricircolazione	11
2.5	Schema tridimensionale della configurazione di un getto ad elevato grado di swirl	11
2.6	Configurazione dell'instabilità: visualizzazione in sezione	12
3.1	Fotografia del bruciatore da laboratorio utilizzato nell'esperimento	16
3.2	Dimensioni dell'ugello	17
4.1	Effetto delle particelle che sfuggono all'area di interrogazione	22
4.2	Correlazioni spurie generate dalla FFT	23
4.3	Diverse elaborazioni della stessa mappa vettoriale, $z/D = 0$	29
4.4	Diverse elaborazioni della stessa mappa vettoriale, $z/D = 0.208$	31
5.1	Equilibrio radiale in un vortice piano strazionario e inviscido	36
5.2	Differenza di scala tra vorticità e pressione in un vortice di Lamb	37
5.3	Effetti di relatività Galileiana sulle linee di flusso	38
5.4	Effetti di relatività galileiana sul massimo del momento delle quantità di moto locali	39
5.5	Identificazione del centro del vortice su una mappa tipo $z/D = 0$ e visualizzazione del campo di vorticità assiale	48
6.1	Mappa media, alle due quote considerate	49
6.2	Profili medi di velocità, $z/D = 0$	50
6.3	Profili medi di velocità, $z/D = 0$	51
6.4	Profili medi di velocità, $z/D = 0.208$	51
6.5	Profili medi di velocità, $z/D = 0.208$	51
6.6	Densità spettrale di potenza di una componente di velocità sull'asse medio del getto.	52
6.7	Distribuzione dei centri dei vortici identificati con il metodo Γ_1	53

ELENCO DELLE FIGURE

6.8	Densità di probabilità della posizione radiale del centro del vortice.	53
6.9	Mappa media condizionata, $z/D = 0$	55
6.10	Profili radiali lungo l'asse di riferimento per la media condizionata, $z/D = 0$	56
6.11	Mappa media condizionata, $z/D = 0.208$	56
6.12	Profili radiali lungo l'asse di riferimento per la media condizionata, $z/D = 0.208$	57
6.13	Mappa media condizionata delle fluttuazioni di velocità, $z/D = 0$	58
6.14	Profili radiali di velocità e vorticità lungo un raggio passante per il centro del vortice, $z/D = 0$	58
6.15	Mappa media condizionata delle fluttuazioni di velocità, $z/D = 0.208$	59
6.16	Profili radiali di velocità e vorticità lungo un raggio passante per il centro del vortice, $z/D = 0.208$	59
6.17	Caratteristiche energetiche della POD	61
6.18	Prime funzioni di base della decomposizione ai valori singolari	62
6.19	Mappa tipo	63
6.20	Mappa tipo ricostruita con i primi 3 modi	63
6.21	Mappa tipo ricostruita con i primi 10 modi	63
6.22	Densità di probabilità della posizione radiale del centro del vortice per le mappe ricostruite con i soli primi 10 modi della decomposizione ortogonale propria	64
6.23	Modello di vortice in precessione	65
6.24	Modello di vortice in precessione: media condizionata	65
6.25	Modello di vortice in precessione: media condizionata della decomposizione di Reynolds	65
A.1	Velocità tangenziale adimensionale in funzione del raggio e del tempo adimensionali in un vortice di Lamb	72
A.2	Modello di Lamb e di Rankine di un vortice piano a circolazione e raggio unitari	73

Elenco delle tabelle

4.1	Proprietà degli operatori alle differenze finite.	32
4.2	Propagazione dell'incertezza nella misura della vorticità	33
6.1	Media e varianza di ρ_{pvc}/R	54
7.1	Struttura del PVC a $z/D = 0$	68

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Motivazioni

I flussi ad alto numero di Reynolds, elevata intensità di turbolenza, fortemente instazionari con zone di ricircolazione trovano ampia applicazione tecnica e costituiscono tutt'ora una sfida dal punto di vista della modellizzazione e della simulazione. I flussi in forte rotazione (*swirl*) costituiscono un'importante categoria tra questi, in quanto caratterizzano il funzionamento dei separatori a ciclone e dei bruciatori presenti, ad esempio, nelle camere di combustione aeronautiche. Da un punto di vista energetico, un flusso ad elevato grado di *swirl* permette di migliorare il miscelamento tra i reagenti e stabilizzare più facilmente una fiamma, aumentando di conseguenza il rendimento e diminuendo gli inquinanti prodotti da un sistema.

È noto come, in alcune condizioni, questo tipo di flussi sia soggetto ad instabilità, comunemente note come *vortex breakdown*, che possono deteriorare le prestazioni quando esistono accoppiamenti con le frequenze proprie del sistema propulsivo. I fenomeni di *vortex breakdown* sono tutt'ora oggetto di ricerca dopo decenni dalla loro scoperta, a causa delle complesse strutture che possono generarsi, tra cui un vortice di grande scala in precessione regolare intorno all'asse del getto, noto come Precessing Vortex Core, o PVC, che si manifesta ad elevati numeri di Reynolds, in flussi sottoposti ad una forte rotazione.

1.2 Obiettivi

Il presente lavoro di tesi si occupa dell'identificazione e dell'analisi del PVC, tramite misure del campo di moto in sezioni di un getto libero, svolte con la tecnica della Particle Image Velocimetry ad alta frequenza. Ci si propone di identificare le dinamiche di grande scala del getto, di ottenere informazioni

sulla morfologia del PVC e sul suo moto di precessione. In mancanza di una metodologia universalmente condivisa per l'analisi di immagini TR-PIV, ci si propone di confrontare tra loro diverse tecniche di acquisizione, filtraggio e analisi delle mappe vettoriali, per determinare quali siano le più efficaci.

Capitolo 2

Vortex Breakdown

2.1 Parametri Caratteristici

I flussi dotati in rotazione, interessanti per l'applicazione tecnica e studiati in letteratura, possono avere caratteristiche molto diverse, sia per quanto riguarda la struttura globale del campo di moto, sia per i fenomeni legati alla turbolenza. E' dunque necessario analizzare almeno due parametri caratteristici della corrente per definirne il comportamento: il numero di Reynolds (Re) ed il numero di swirl (S).

2.1.1 Numero di Reynolds

Il numero di Reynolds viene definito come:

$$Re = \frac{u_0 D}{\nu} \quad (2.1)$$

dove

- $D = 2R$ è la lunghezza caratteristica: nel caso di un getto libero che si origina da un condotto circolare pari al diametro della sezione di efflusso;
- ν è la viscosità cinematica del fluido in esame;
- u_0 è la velocità media integrale sulla portata che transita attraverso la sezione considerata.

In un sistema di riferimento cilindrico di coordinate (z, r, θ) , con direzione assiale z , è possibile esprimere il vettore velocità \mathbf{u} nelle sue tre componenti (u, v, w) ,

dove u rappresenta la componente assiale. In questo caso u_0 si ottiene da una media integrale sulla sezione circolare di raggio R alla quota \bar{z} :

$$u_0 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} u(\bar{z}, r, \theta) r dr d\theta \quad (2.2)$$

2.1.2 Numero di swirl

Il numero di *swirl* è definito da Gupta *et al.* [1] come rapporto:

$$S = \frac{G_\theta}{G_z R} \quad (2.3)$$

dove

$$G_\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (\rho u w + \overline{\rho u' w'}) r^2 dr d\theta \quad (2.4)$$

è il flusso assiale del momento di quantità di moto tangenziale, calcolato considerando anche gli sforzi turbolenti, mentre

$$G_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (\rho u^2 + \overline{\rho u'^2} + (p - p_\infty)) r dr d\theta \quad (2.5)$$

rappresenta il flusso assiale della quantità di moto assiale, calcolato considerando anche gli sforzi turbolenti nella direzione assiale e la differenza tra il valore locale della pressione e quello esterno al getto.

Si può immediatamente osservare come S sia valutabile direttamente solo disponendo delle componenti assiale e tangenziale della velocità, risolte nel tempo, alla sezione di efflusso, oltre che di informazioni sul valore locale della pressione. Il numero di *swirl*, tuttavia, dovrebbe essere costante una volta fissate la geometria del problema e le velocità assiali e tangenziali nel condotto a monte della sezione di efflusso. Allo scopo di stimare S a partire da un numero ridotto di dati e di avere una panoramica generale sulle caratteristiche di un flusso con *swirl* moderato, si introduce il modello di *plug flow*.

2.1.3 Modello di *plug flow*

Nel modello di *plug flow* il flusso si comporta come un “cilindro fluido” in rotazione rigida intorno all’asse con velocità angolare Ω , che trasla lungo l’asse stesso con velocità u_0 . Esiste una perfetta simmetria radiale e tutti i profili di velocità si ripetono uguali a se stessi in direzione assiale, dunque le uniche variazioni si hanno lungo la direzione radiale:

$$u(r) = u_0 \quad \text{e} \quad w(r) = w_{max} \frac{r}{R} \quad (2.6)$$

In analogia con un corpo rigido in rotazione, il profilo di velocità tangenziale vale:

$$w(r) = \Omega r \quad \text{da cui} \quad w_{max} = \Omega R \quad (2.7)$$

La pressione all'interno del flusso sarà governata dall'equilibrio radiale:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho w^2}{r} \quad (2.8)$$

Sostituendo quanto ricavato per un *plug flow* nella definizione del numero di *swirl* si ottiene, per il flusso assiale di quantità di moto assiale:

$$G_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho \left(u^2 + \frac{w^2 - w_{max}^2}{2} \right) r dr d\theta \quad (2.9)$$

Nel modello considerato, il rapporto tra la massima velocità tangenziale e la massima velocità assiale all'efflusso, definito *parametro di swirl* (G), vale semplicemente:

$$G = \frac{\Omega R}{u_0} \quad (2.10)$$

Sostituendo la definizione del parametro di *swirl* nell'eq. 2.9, ed esplicitando G_θ si ottiene:

$$G_\theta = \frac{\pi}{2} \rho u_0 w_{max} R^3 \quad (2.11)$$

$$G_z = \frac{\pi}{2} \rho u_0^2 R^2 [1 - (G/2)^2] \quad (2.12)$$

da cui è possibile ricavare il valore del *numero di swirl*, in funzione del solo *parametro di swirl*:

$$S = \frac{G_\theta}{G_z R} = \frac{G/2}{1 - (G/2)^2} \quad (2.13)$$

In questo modo il numero di informazioni necessarie alla valutazione di S si riduce alle sole velocità assiali e tangenziali, oltre al raggio della sezione di efflusso.

Il modello considerato rappresenta una buona stima rispetto al comportamento reale del fluido solo per bassi valori del numero (e del parametro) di *swirl*. In particolare, la relazione 2.13 riportata da [1] vale solo per $G < 0.4$, cioè per valori di $S \leq 0.2$. Al di sopra di questo limite i profili assiali e tangenziali si scostano da quanto indicato dal modello di *plug-flow* ed è necessario applicare correzioni empiriche alla relazione, che si basano sulla misura dei profili di velocità all'efflusso. È altresì possibile considerare il problema dal solo punto di vista del parametro di *swirl* G , a patto che Ω sia ottenuta per integrazione del profilo reale di velocità tangenziale.

2.1.4 Flussi a basso grado di swirl

I flussi con $S < 0.4$, definiti a “basso grado di swirl”, sono caratterizzati da una struttura regolare, in cui la rotazione del getto dà luogo ad un aumento dell’estensione radiale e dell’*entrainment*, mentre la velocità assiale è ridotta per effetto dell’equilibrio radiale, ma non sono presenti fenomeni di ricircolazione. L’angolo di apertura del getto cresce in modo regolare con S , mentre il profilo di velocità assiale all’efflusso è uniforme¹ e tende ad una forma Gaussiana più a valle. Il profilo di velocità tangenziale all’efflusso è caratteristico di un moto rigido, mentre più a valle il nucleo rigido si restringe e la configurazione assomiglia ad un vortice di Rankine. Come già ricordato in precedenza, il comportamento è ricostruito con buona approssimazione dal modello di *plug-flow*.

2.2 Instabilità del getto

All’aumentare del numero di *swirl*, il flusso raggiunge una condizione critica che permette lo svilupparsi di instabilità (*vortex breakdown*). Le modalità con cui l’instabilità si manifesta possono essere piuttosto diverse e vengono descritte da Billant *et al.* [2] come una “evoluzione della struttura vorticoso principale ad una configurazione più stabile, più ampia, simile a quella causata dalla presenza di un ostacolo all’interno della corrente”. Anche Lucca-Negro e O’Doherty [3] descrivono il *vortex breakdown* come un fenomeno di “bloccaggio aerodinamico”. Una caratteristica comune alle varie forme di instabilità è la forte decelerazione del getto, unita alla formazione di almeno un punto di ristagno nella corrente, generalmente posto in corrispondenza dell’asse. Tra i diversi modi di instabilità osservati, gli unici ritenuti possibili ai Re elevati tipici dei flussi in aria, secondo [3], sono i seguenti:

- una “bolla” assialmmetrica e stazionaria (vedi fig. 2.1);
- una “spirale” fortemente instazionaria, la cui periodicità è legata al parametro di *swirl*(vedi fig. 2.2).

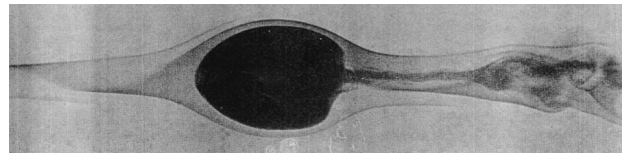


Figura 2.1: Instabilità di tipo *bolla* (tratto da [4])

¹Al di fuori dello strato limite generato dalle pareti del condotto

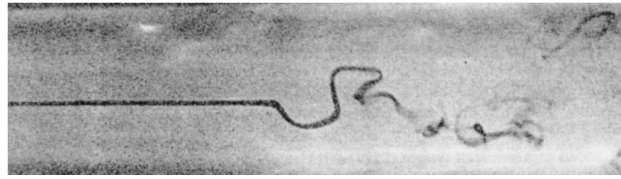


Figura 2.2: Instabilità di tipo *spirale* (tratto da [5])

2.2.1 Modello di instabilità del getto

Al fine di studiare le condizioni in cui si realizzano tali instabilità² Billant *et al.* [2] considerano un modello molto semplice, che definisce una condizione teorica *necessaria* per lo sviluppo di un fenomeno di *breakdown* in un getto libero.

Tale modello si basa prima di tutto sulle considerazioni di Benjamin [8], che, in analogia con il comportamento delle pompe idrauliche, caratterizzò il *breakdown* come un fenomeno di transizione brusca, dissipativa e assialsimmetrica tra due stati inviscidi distinti:

- lo stato “supercritico” a monte della transizione, dove possono propagarsi solo onde infinitesime;
- lo stato “subcritico” a valle della transizione, che permette l’esistenza di onde stazionarie.

Nelle ipotesi di Benjamin il flusso assiale della quantità di moto nello stato subcritico doveva essere sempre superiore rispetto alla sua controparte nello stato supercritico, dunque era necessario che nella transizione si attraversasse una zona di turbolenza molto intensa.

Nonostante si tratti di osservazioni valide sulla natura del fenomeno, la conclusione rispetto alle caratteristiche dissipative non è stata supportata dai lavori sperimentali successivi, che hanno ritrovato una transizione progressiva senza evidente dissipazione.

Come dimostrato da Escudier e Keller [9] per via variazionale, la differenza tra i flussi di quantità di moto può scomparire, ed un criterio di incipiente *breakdown* può essere costruito proprio attorno alla conservazione di tale quantità di moto. Escudier e Keller [9] hanno sviluppato anche un semplice criterio di transizione, considerando un vortice libero che realizzi un *breakdown* a geometria conica stazionaria³ in un getto libero (vedi fig.2.3).

L’idea di base, come mostrato da [10], è la seguente: se il raggio del vortice aumenta in direzione z , la conservazione della circolazione impone un aumento

²Valutate da numerosi lavori sperimentali (vedi [2], [6] e [7])

³Questo tipo di instabilità è osservato da Billant *et al.*[2], in forma stazionaria assialsimmetrica ed instazionaria non assialsimmetrica in flusso con numero di Reynolds minore di 1200.

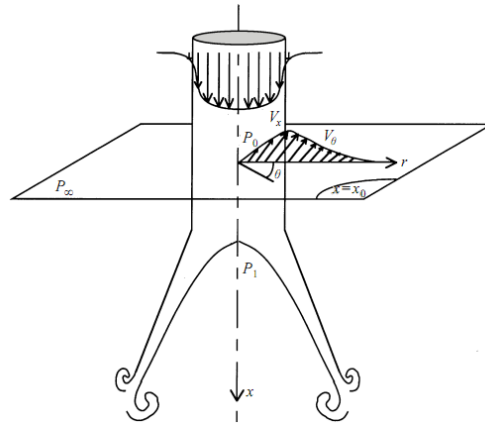


Figura 2.3: Configurazione schematica di un *breakdown* conico (tratto da [2])

assiale della pressione nel nucleo del vortice, che induce una diminuzione della velocità. Quando questo aumento di pressione è sufficiente a portare a zero la velocità assiale, si genera un punto di ristagno e possono aver luogo fenomeni di *vortex breakdown*. Si consideri un vortice libero infinitamente esteso a monte, che presenta un punto di ristagno stazionario sull'asse, per aprirsi a valle in un cono. Applicando il teorema di Bernoulli sulla linea di flusso sull'asse del vortice, per la simmetria radiale del problema, possiamo dire che:

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}u^2(z_0, 0) = \frac{P_1}{\rho} \quad (2.14)$$

dove

- P_0 è la pressione sull'asse del vortice alla coordinata z_0 , localizzata ben a monte del punto di ristagno;
- ρ è la densità del fluido;
- $u(z_0, 0)$ è la velocità assiale a monte, valutata sull'asse del vortice alla coordinata z_0 ;
- P_1 è la pressione nel punto di ristagno.

Nel piano $z = z_0$ vale l'equilibrio radiale tra la forza centrifuga ed il gradiente di pressione, che integrato permette di scrivere:

$$P_0 = P_\infty - \int_0^\infty \rho \frac{w^2(z_0, r)}{r} dr \quad (2.15)$$

con $w(z_0, r)$ velocità tangenziale nel piano e $P_\infty = P(z_0, r \rightarrow \infty,)$ pressione all'infinito nel piano.

Possiamo assumere, in buona approssimazione, che le velocità all'interno della zona di ristagno siano pressochè nulle, anche se può esistere un moto di ricircolazione generato da particolari instabilità ed effetti viscosi. La presenza di una zona di ristagno stazionaria, aperta in direzione z , porta a concludere che non esiste un gradiente di pressione interno, e quindi

$$P_1 = P(z \rightarrow \infty, 0) = P_\infty \quad (2.16)$$

Utilizzando questa identità possiamo combinare le eq. 2.14 e 2.15, ottenendo una relazione del tipo:

$$\frac{\int_0^\infty \frac{w^2(z_0, r)}{r} dr}{u^2(z_0, 0)} = \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

Questa condizione dovrebbe rappresentare ciò che è *necessario* per l'instaurarsi di una instabilità conica in un getto. Nel caso particolare di un vortice di Rankine⁴, il criterio si semplifica ulteriormente:

$$\frac{w_{max}(z_0)}{u(z_0, 0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.18)$$

Si osservi come tale definizione coincida con il numero G , nel modello di *plug flow*, quando la dimensione del nucleo rigido del vortice di Rankine è pari al diametro della sezione di efflusso considerata a riferimento. Nel caso più generale, e più interessante per il fenomeno in esame, di una bolla di ricircolazione, la zona di ristagno non è direttamente collegata con l'infinito a valle e la condizione da porre è semplicemente $P_1 \leq P_\infty$.

Possiamo riassumere la condizione necessaria per l'esistenza di una bolla di ricircolazione, nell'ipotesi di *plug flow* a monte, attraverso il parametro di swirl, come:

$$G \geq 0.707 \quad (2.19)$$

Billant *et al.*[2] mostrano un'ottima corrispondenza del modello con analisi sperimentali di breakdown di tipo conico e a "bolla", di carattere stazionario, a numeri di Reynolds compresi tra 450 e 850. Nell'analisi sperimentale di un getto libero in aria⁵, caratterizzato da un'instabilità instazionaria non conica, invece, Martinelli *et al.* [11] trovano un valore critico di G pari a 1.17, che rispetta la condizione *necessaria*, ma indica quanto essa non costituisca un'ottima stima in tutti i casi. Si può associare questa discrepanza a diversi fattori:

- l'inadeguatezza del modello di *plug flow* riferito ad una corrente tutt'altro che stazionaria e assialsimmetrica;

⁴vedi Appendice A

⁵con $24400 < Re < 40000$

- le diverse modalità di manifestazione dell'instabilità, soprattutto nei casi instazionari;
- l'effettiva procedura sperimentale per la valutazione di G , che varia in modo sostanziale nei diversi lavori.

Per una panoramica sulle valutazioni del parametro G da parte degli autori citati si rimanda a [12, cap. 2].

2.2.2 Configurazione dell'instabilità

Le misure oggetto di questo lavoro di tesi riguardano un getto libero in aria, originato da un sistema ad ingressi assiali e tangenziali (come descritto in modo più completo nel cap. 3).

Sono disponibili diverse misure sperimentali, principalmente via *Laser Doppler Velocimetry*, anemometria a filo caldo e PIV realizzate sullo stesso modello di bruciatore da Martinelli [7], Martinelli *et.al* [11], Bottalico [13] e Mirelli [12]. Il fenomeno, su una geometria differente ma sempre in aria, è analizzato tramite misure LDV anche da Cala *et al.* [14].

Da un punto di vista qualitativo, tutti i lavori sopra citati concordano nell'individuare, al di sopra di un certo numero di swirl critico, una combinazione di strutture vorticosi tridimensionali instazionarie:

- una zona di ricircolazione centrale a geometria toroidale (CRZ);
- un vortice principale, con asse pressoché perpendicolare alla sezione di efflusso, in precessione ai margini di questa zona (PVC);
- una struttura vorticosi elicoidale interna, definita vortice secondario interno (HCRV);
- una seconda vorticosi struttura elicoidale, ai margini del getto, definita vortice secondario esterno (HOV).

Tali strutture sono schematizzate in fig. 2.4 e visualizzate in fig. 2.5⁶.

Zona di ricircolazione centrale

La zona di ricircolazione centrale rappresenta il fenomeno più interessante per l'applicazione dei flussi swirlati nei sistemi propulsivi. La sua configurazione media consiste in una bolla di ricircolazione toroidale, assialsimmetrica, che

⁶Si sottolinea come queste strutture non siano visibili da un'analisi dei campi di moto medi, poichè in rotazione intorno all'asse dell'ugello. In tutti i lavori sopracitati è stato necessario applicare una tecnica di *media in fase* per ottenere una rappresentazione pseudo-istantanea della topologia del fenomeno.

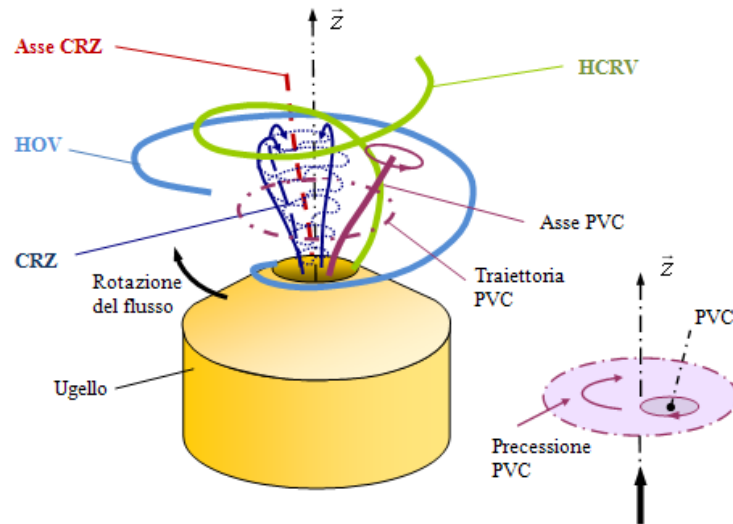


Figura 2.4: Rappresentazione dell'asse delle strutture vorticosi e della zona di ricircolazione(tratto da [13])

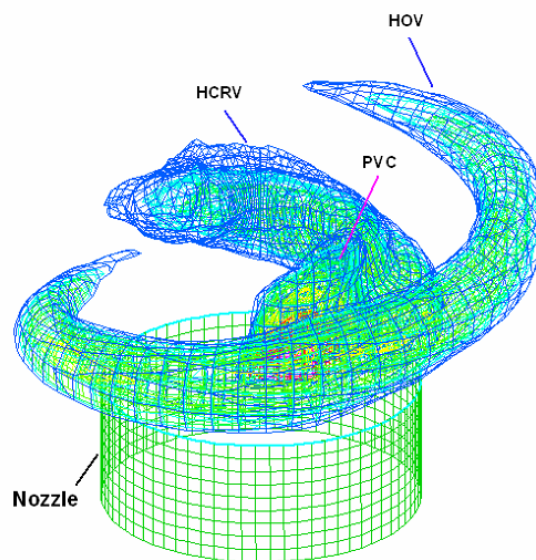


Figura 2.5: Schema tridimensionale della configurazione di un getto ad elevato grado di swirl(tratto da [14] e [15])

si estende anche per $5D$ in direzione assiale. Misure istantanee (o pseudo-istantanee) mettono in luce come questa struttura ruoti, in prossimità dell'efflusso, intorno all'asse del getto e diventi assialsimmetrica solo a valle. La rotazione della CRZ è concorde con il movimento del vortice principale che si colloca ai suoi margini.

Vortice principale

Il PVC è la struttura vorticoso principale del getto, che controlla l'intera dinamica del flusso e contiene gran parte della circolazione introdotta dagli ingressi tangenziali. L'asse del PVC è quasi allineato con l'asse del getto all'efflusso. Ponendosi in un piano perpendicolare all'asse del getto, a $z = 0.179D$ (fig. 2.6), è possibile osservare come il PVC lasci una traccia ellittica, indicando una leggera inclinazione rispetto al piano considerato. I versi di avvogliamento e di precessione

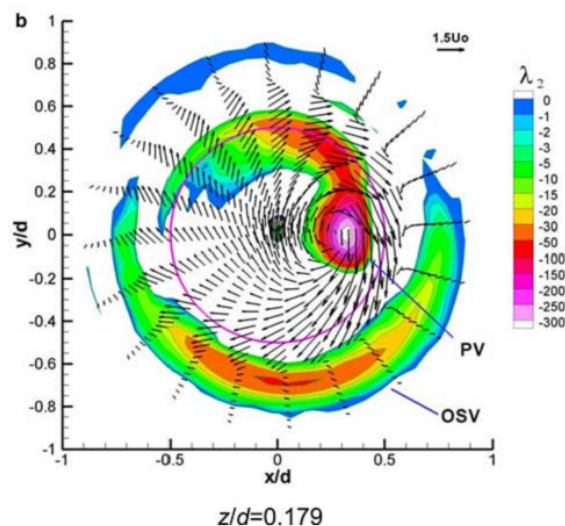


Figura 2.6: Configurazione dell'instabilità: visualizzazione in sezione (tratto da [14])

del PVC risultano concordi con la direzione dello swirl imposto dal bruciatore. Il vortice principale perde rapidamente di intensità in direzione assiale, fino a scomparire per quote $z/D > 0.6$.

Vortici secondari

All'interno del getto coesistono altre due strutture vorticoso con asse elicoidale, che si avvolgono intorno alla zona di ricircolazione centrale in senso opposto: il vortice secondario interno (HCRV) ed il vortice secondario esterno (HOV).

L'HCRV e l'HOV mantengono una struttura coerente fino a $z/D = 1.5$, probabilmente poichè costituiscono una struttura bipolare di tubi vorticosi controrotanti, intrinsecamente più stabile della struttura monopolare del PVC.

L'HCRV interagisce strettamente con il PVC ed in alcune condizioni è stato osservato unirsi ad esso e formare un'unica struttura. L'HOV, invece, si posiziona ai margini del getto ed è sede degli effetti di *entrainment*.

Capitolo 3

Apparato sperimentale

3.1 Generazione del moto di swirl

La componente di velocità tangenziale (o azimutale) che induce un moto spirale nelle particelle fluide del flusso in un condotto può essere generata e controllata in diversi modi:

- una serie di alette con inclinazione regolabile;
- una serie di ingressi tangenziali al flusso primario assiale, con portata regolabile;
- un condotto rotante di cui sia possibile variare la velocità.

Nel presente lavoro di tesi è stata utilizzata la seconda soluzione, dove il rapporto tra la portata tangenziale e quella assiale permette di ottenere i valori di S e Re desiderati.

Il flusso in rotazione è generato da un bruciatore da laboratorio con caratteristiche molto simili all'iniettore di una camera di combustione aeronautica, visibile in fig. 3.1.

Il bruciatore consiste in un condotto cilindrico con un diametro di 36mm, alla base del quale sono posti quattro ingressi di diametro 12mm, da cui fluisce la portata assiale. Tale flusso attraversa un nido d'ape con maglie inferiori al millimetro, di lunghezza pari a circa 5mm, e risulta laminarizzato e omogeneizzato in direzione assiale. Più in alto sul bruciatore sono ricavati quattro ingressi tangenziali, di diametro 12mm, da cui fluisce la portata destinata a generare il moto di *swirl*. L'effettivo getto in rotazione è il risultato della somma di questi due flussi e della miscela olio-gas che proviene dall'iniettore centrale. Al termine del condotto è posto un ugello semplicemente convergente, schematizzato in fig. 3.2, che restringe il condotto fino ad un diametro $D = 24\text{mm}$. Tale

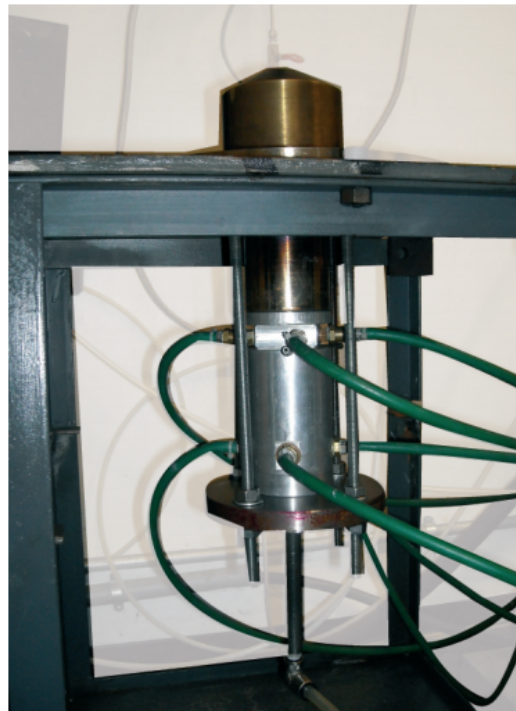


Figura 3.1: Fotografia del bruciatore da laboratorio utilizzato nell'esperimento

diametro costituisce la lunghezza caratteristica per il calcolo delle grandezze adimensionali del getto.

3.2 Linea pneumatica

La portata d'aria necessaria alla generazione del getto in rotazione viene fornita da una linea pneumatica alimentata da un compressore, che si divide in due rami regolati da flussimetri di tipo termico. Anche l'inseminante viene nebulizzato utilizzando aria proveniente da una linea corollaria, controllata da un flussimetro termico. I flussimetri sono tre Brooks Instrument thermal flowmeter controllati elettronicamente per regolare la portata al valore imposto per l'esperimento, con un fondoscala di 1000NI/min, 200NI/min e 50NI/min. Per lo svolgimento delle misure PIV sono state utilizzate le seguenti portate:

- $351.2 \pm 10\text{NI}/\text{min}$ in direzione tangenziale;
- $37.76 \pm 2\text{NI}/\text{min}$ in direzione assiale;
- $6 \pm 0.5\text{NI}/\text{min}$ nel sistema di inseminazione.

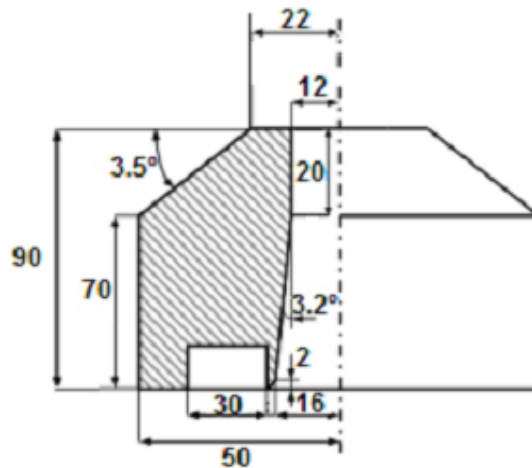


Figura 3.2: Dimensioni dell'ugello

Nelle stesse condizioni di portata, tramite misure LDV delle tre componenti della velocità, Mirelli [12] trova, come valore del numero di *swirl*, $S = 1.02$.

3.3 Inseminazione

Il sistema di inseminazione ha lo scopo di nebulizzare l'inseminante, comune olio d'oliva adatto a flussi isotermi, ed introdurre nel getto gocce abbastanza piccole da seguirne fedelmente la dinamica. L'aria in ingresso al nebulizzatore è accelerata da un piccolo convergente sopra ad un condotto capillare immerso nell'olio. La diminuzione di pressione dovuta all'incremento della velocità locale provoca il richiamo dell'olio posto sul fondo attraverso il capillare, causandone la nebulizzazione al contatto con il getto. In serie al nebulizzatore è posto un separatore a ciclone in grado di filtrare dalla corrente inseminata le particelle traccianti di diametro troppo grande. Il sistema di nebulizzazione così assemblato garantisce che le goccioline d'olio introdotte nel getto abbiano un diametro di $1 - 2\mu\text{m}$, con un tempo caratteristico $\tau_p \approx 10^{-5}\text{s}$, adeguato all'analisi del fenomeno.

3.4 Sistema di misura

La misura PIV è stata realizzata tramite:

- una telecamera IDT Motion Pro X3, da 1.3 Megapixel, con una risoluzione di 1280×1024 pixel;

- un laser Nd-Yag ad altra frequenza (fino a 10 kHz) a doppia cavità, accoppiato alla telecamera grazie ad un sistema di sincronizzazione;
- un personal computer per l'acquisizione delle immagini.

Il fascio laser, espanso tramite una lente cilindrica, è stato posizionato perpendicolarmente all'asse del getto, ad una distanza di circa 1mm dalla sezione di efflusso dell'ugello del bruciatore ($z/D \approx 0$). In questa configurazione un pixel sull'immagine corrispondeva ad un'area 0.4×0.4 mm nel piano di misura. Sono state acquisite 1000 coppie di immagini ad una frequenza di 1500Hz, con un intervallo tra le immagini della coppia pari a $\delta t = 10\mu s$. Il tempo totale di osservazione del fenomeno risulta $T = 0.6667s$.

Lo stesso tipo di misura è stato ripetuto ad una distanza di 5mm dalla sezione di efflusso ($z/D = 0.208$).

Il numero di Reynolds per entrambe le misure vale circa 24400.

Capitolo 4

Generazione delle mappe vettoriali

4.1 Particle Image Velocimetry

Le misure presentate in questo lavoro di tesi sono state ottenute mediante una tecnica di velocimetria ad immagini di particelle (comunemente nota come Particle Image Velocimetry o semplicemente PIV).

La Particle Image Velocimetry è una tecnica ottica, non intrusiva, per la visualizzazione e la misura di due componenti della velocità in un piano. L'effettiva velocità misurata è quella relativa a particelle *inseminanti*, inserite nel fluido come traccianti, che vengono illuminate dal laser e risultano visibili ad una telecamera. Supponendo di disporre di particelle (gocce d'olio) abbastanza piccole da seguire fedelmente la dinamica del fluido e abbastanza ben distribuite rispetto ai gradienti di velocità presenti, è lecito aspettarsi che il fluido reale si muova con la stessa velocità delle particelle. A differenza di altre tecniche di misura nei fluidi, come l'anemometria laser-doppler e l'anemometria a filo caldo, la Particle Image Velocimetry non è limitata a misure puntuali della velocità, ma permette di acquisire contemporaneamente l'intero campo di moto.

Una campagna di misure PIV convenzionale opera acquisendo una coppia di immagini a singola esposizione molto ravvicinate ($10 - 100\mu s$), eventualmente relative ad una regione dell'intero campo di moto, ad una frequenza di 10-15Hz. In questo lavoro di tesi, invece, sono state acquisite coppie di immagini dell'intero fenomeno ad una frequenza di 1500Hz, al fine di mettere in luce la precessione del centro del vortice, che avviene ad una frequenza di circa 500 Hz. La PIV ad alta frequenza (Time Resolved Particle Image Velocimetry) permette di ricostruire una correlazione spazio-tempo realistica e di colmare parte delle differenze con i metodi puntuali sopracitati, rendendo possibile un'analisi della dinamica del fenomeno.

4.1.1 Principio

Per la sintesi delle mappe vettoriali che rappresentano il campo di moto nel tempo ci si affida ad un approccio Lagrangiano. Disponendo di due immagini ravvicinate (A e B), destinate alla generazione della i -esima mappa, è possibile calcolare una velocità media nell'intervallo di tempo molto piccolo che intercorre tra A e B ($\Delta t = 10\mu s$) dallo spostamento di un punto \mathbf{X} :

$$\mathbf{u}(t_i, \mathbf{X}) \approx \frac{\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Data la densità di particelle tipica di immagini PIV, è possibile individuare la singola particella su di un'immagine, ma non è possibile seguirne singolarmente lo spostamento¹, dunque si ricorre ad un approccio statistico.

Il campo di moto viene prima di tutto diviso in *aree di interrogazione* (IA). Un'area di interrogazione non è altro che una zona di dimensione opportuna sull'immagine, tale da contenere un numero di particelle in generale maggiore di 6, a cui si cerca di associare un solo valore di velocità, rappresentativo del comportamento del fluido in quella zona. Supponendo di selezionare aree corrispondenti sulle immagini A e B, di dimensioni $M \times N$ (pixel), una misura dello spostamento medio delle particelle è data dalla cross-correlazione discreta tra le intensità di grigio g_A e g_B :

$$\phi_{AB}(m, n) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=i}^N g_A(i, j) g_B(i + m, j + n). \quad (4.2)$$

Un valore elevato di ϕ viene osservato quando diverse particelle vanno a moltiplicare la loro intensità di grigio sulla prima immagine con se stesse, traslate, sulla seconda immagine. Questo picco rappresenta lo spostamento più comune delle particelle presenti nell'area. Assegnando alle coordinate del picco (eventualmente interpolato con una superficie Gaussiana) lo spostamento medio \mathbf{s} è possibile calcolare una velocità propria dei punti nell'area di interrogazione, scalando tale spostamento alle dimensioni *reali* dell'area nel piano di misura e dividendolo per il tempo Δt . Ripetendo l'operazione su tutte le aree che compongono l'immagine si ottiene la mappa di velocità i -esima.

Si osservano anche picchi di cross-correlazione minori, che rendono conto delle relazioni tra particelle diverse sulle due immagini. Questi picchi sono di natura casuale e costituiscono il rumore nel piano di correlazione.

4.1.2 Dimensioni dell'area di interrogazione

La consistenza della procedura presentata si basa su almeno due ipotesi:

¹Come avviene, per esempio, nelle tecniche di Particle Tracking.

1. le particelle nell'area di interrogazione si muovono in modo sufficientemente uniforme, nella stessa direzione, durante l'intervallo di tempo Δt .
2. Il picco nel piano di cross-correlazione ha un significato fisico e non è originato da rumore;

Se sono presenti gradienti di velocità importanti all'interno dell'area di interrogazione si hanno effetti negativi sulla qualità del picco di cross-correlazione. All'aumentare dei gradienti, infatti, il picco diminuisce in altezza e diventa meno definito. Il rumore nel piano di correlazione non è direttamente relazionato a questi effetti, dunque c'è una diminuzione del rapporto segnale-rumore, che aumenta la probabilità di ottenere misure spurie. Per questa ragione si pone un limite *massimo* alle dimensioni dell'area di interrogazione, tali che:

$$\left\| \frac{\Delta \mathbf{u}}{\mathbf{u}} \right\| < 0.2 \quad (4.3)$$

La velocità massima misurabile, d'altra parte, pone un limite *minimo* alle dimensioni dell'area di interrogazione. Per ottenere una buona correlazione tra le immagini A e B gran parte delle particelle non deve sfuggire dall'area iniziale nel secondo fotogramma (vedi fig.4.1), dunque è consigliabile che:

$$L_{IA} = N S d_{pix} \geq 4 s_{max} = 4 u_{max} \Delta t \quad (4.4)$$

dove:

- L_{IA} è la lunghezza del lato di una IA quadrata, nel piano di misura;
- S è il rapporto di ingrandimento;
- d_{pix} è la distanza tra i centri pixel nella telecamera ($12\mu\text{m}$);
- N è il numero di pixel che compongono il lato della IA;
- u_{max} è la massima velocità prevista nel campo di moto.

A partire da considerazioni di questo tipo, è stato scelto $N = 32$, cioè ogni area di interrogazione composta da 32×32 pixel. Sul piano di misura ciò corrisponde ad un'area di $1.26 \times 1.26 \text{mm}$. Applicando la relazione 4.4, ci aspettiamo di ottenere una buona correlazione per velocità inferiori a 31.5m/s .

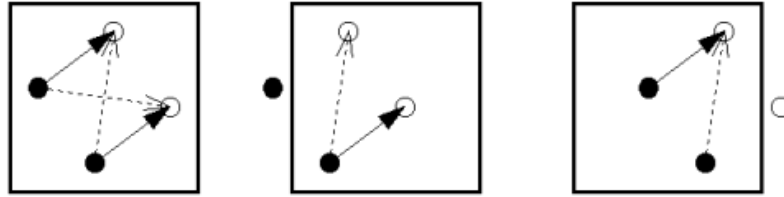


Figura 4.1: Effetto delle particelle che sfuggono all'area di interrogazione (tratto da [16])

4.2 Algoritmo di cross-correlazione

Per eseguire la procedura di cross-correlazione tra le 1000 coppie di immagini e per l'applicazione dei criteri di rigetto è stato utilizzato il software Dantec FlowManager.

Al fine di contenere il costo computazionale della cross-correlazione non è consigliabile calcolare ϕ_{AB} in modo esplicito, in quanto richiede una convoluzione su tutti i punti delle aree di interrogazione. La cross-correlazione può essere valutata attraverso la sua trasformata di Fourier, la cross-densità spettrale di potenza, che equivale al prodotto della trasformata di Fourier discreta di g_A , moltiplicata per il coniugato della trasformata di Fourier discreta di g_B .

Un semplice algoritmo per il calcolo di ϕ_{AB} su di una IA può quindi basarsi sui seguenti passaggi:

1. trasformata di Fourier discreta 2D delle intensità di grigio g_A e g_B nelle due immagini, attraverso l'algoritmo di *Fast Fourier Transformation*:

$$G_A = \text{FFT}_{2D}(g_A), \quad G_B = \text{FFT}_{2D}(g_B) \quad (4.5)$$

2. prodotto tra la trasformata della prima intensità di grigio e il coniugato della seconda, per ottenere la cross-densità spettrale di potenza.

$$\Phi_{AB} = G_A \cdot G_B^* \quad (4.6)$$

3. antitrasformata discreta di Φ_{AB}

$$\phi_{AB} = \text{FFT}_{2D}^{-1}(\Phi_{AB}) \quad (4.7)$$

4.2.1 Finestratura

L'algoritmo di FFT presume che le g_A e g_B siano funzioni periodiche nello spazio. Come è possibile osservare in fig.4.2, la presenza di particelle *fantasma*, al di

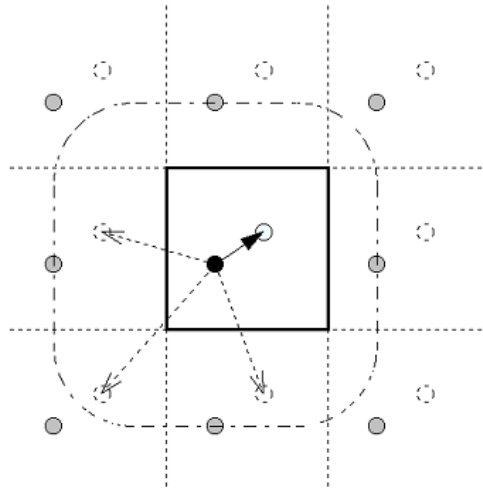


Figura 4.2: Correlazioni spurie generate dalla FFT (tratto da [16])

fuori dell'area di interrogazione originale, può generare correlazioni spurie, che si traducono in rumore nel piano di correlazione.

Per ovviare a questo problema vengono utilizzate finestre dell'area di interrogazione, che attenuano o annullano l'intensità di grigio vicino ai bordi, riducendo il rumore a spese di una perdita di informazione e di una riduzione della massima velocità misurabile.

Finestre "top hat"

Una semplice finestra "top hat" rettangolare può essere realizzata azzerando l'intensità di grigio dell'area di interrogazione oltre una certa distanza dal suo centro. In un sistema di riferimento (m, n) con origine nel centro dell'area di interrogazione ed estremi $\pm M/2$ e $\pm N/2$, le immagini filtrate \tilde{g} si ottengono come:

$$\begin{cases} \tilde{g}_A = W \cdot g_A \\ \tilde{g}_B = W \cdot g_B \end{cases}$$

con

$$W(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{per } \begin{cases} -1/2kM \leq m \leq 1/2kM \\ -1/2kN \leq n \leq 1/2kN \end{cases} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Finestrature Gaussianhe

Le finestre di tipo “top hat” non risolvono il problema di una particella a cavallo del bordo dell’area di interrogazione, traducendolo nello stesso problema a cavallo del bordo della finestra. In tal caso il vettore spostamento ha origine o fine al di fuori dell’area $W = 1$, ma il metodo non è a conoscenza della seconda metà della particella, dunque assegna uno spostamento più breve, che differisce di quello reale di metà del diametro della particella stessa².

Per risolvere questo problema è stata utilizzata una finestra di tipo Gaussiano, questa volta circolare, sulle funzioni g_A e g_B , a monte della FFT, secondo cui $W(m, n)$ diventa:

$$W(m, n) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{k} \right)^2 \left[\left(\frac{2m}{M} \right)^2 + \left(\frac{2n}{N} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.8)$$

con $k = 1.19$, che corrisponde a

$$d \leq 0.85L_{IA} \quad \text{in cui} \quad W > 0.6 \quad (4.9)$$

4.2.2 Sovrapposizione delle aree di interrogazione

La cross-correlazione su aree di interrogazione sottoposte ad opportune finestre scarta l’informazione relativa alle particelle periferiche della IA al fine di ridurre il rumore ciclico generato dalla FFT. Anche in assenza di finestre, l’informazione sulla correlazione di punti vicini al bordo delle IA si traduce facilmente in rumore, poichè il punto nell’immagine B può sfuggire all’area di interrogazione iniziale (“loss-of-pairs”), e non contribuisce al contenuto complessivo della mappa.

Per recuperare tale informazione è pratica comune scegliere aree di interrogazione parzialmente sovrapposte (*Overlapping*), poichè sovrapponendo le IA si aumenta la probabilità di trovare entrambe le posizioni di una particella nella coppia di immagini A e B, senza che essa sfugga ai limiti dell’area stessa.

Utilizzare tale tecnica produce campi vettoriali più ricchi, ma non permette di aumentare la risoluzione definita in precedenza. Si tratta in sostanza di una interpolazione naturale del campo di moto, che genera una dipendenza tra le misure adiacenti. Tale interpolazione è basata sulle immagini grezze, ed è dunque più significativa di un’elaborazione a posteriori.

Per tutte le analisi effettuate è stata scelta una sovrapposizione del 50%, sia per incrementare la ricchezza dei campi data la limitata risoluzione spaziale

²Si sottolinea come la dimensione della particella su di un’immagine PIV sia tutt’altro che trascurabile. Per ottimizzare la cross-correlazione le particelle dovrebbero avere un diametro di almeno 2-3 pixel, dunque l’errore introdotto può superare il 5% su una IA 32x32 pixel.

disponibile, sia perchè è pratica comune e consolidata nell'analisi di immagini PIV.

4.3 Velocità spurie

Nonostante gli sforzi volti ad ottenere un picco di cross-correlazione ben definito, corrispondente allo spostamento fisico delle particelle, è inevitabile incorrere in picchi spuri, generati dagli effetti sopracitati. La velocità assegnata all'area di interrogazione viene dedotta da tale picco, indipendentemente dalla sua natura, e può essere priva di significato fisico. Un numero anche limitato di velocità spurie nel campo di moto ha effetti negativi sulle valutazioni, anche di tipo statistico, che vengono svolte sulle mappe. Per questo motivo è necessario rimuovere le misure che, con grande probabilità, non corrispondono allo spostamento medio delle particelle.

Sono state applicate diverse procedure, classiche per l'analisi di immagini PIV, che costituiscono i *criteri di validazione* delle nostre mappe.

4.3.1 Altezza relativa del picco

In una mappa ideale il picco di cross-correlazione rappresenta lo spostamento medio delle particelle ed è nettamente superiore al rumore. Nell'applicazione pratica può accadere che esistano diversi massimi per la funzione ϕ_{AB} con altezze paragonabili. In questo caso è impossibile discernere la misura dal rumore ed è probabile che il picco più alto non sia significativo. I picchi originati da rumore, inoltre, si presentano spesso in configurazioni multiple (simmetriche nel caso di rumore ciclico della FFT), mentre la misura con significato fisico, per quanto possa essere poco definita, è unica.

Dati i due picchi più alti, ϕ_{max} e $\phi_{max,2}$, il criterio di *Peak-height validation* stabilisce che la misura è valida se:

$$\frac{\phi_{max}}{\phi_{max,2}} \geq k \quad (4.10)$$

con $k = 1.2$, come suggerito da Keane e Adrian [17].

4.3.2 Modulo della velocità

Le velocità spurie generate da picchi di rumore corrispondono molto spesso a valori in modulo molto elevati. E' possibile implementare un semplice criterio di

rigetto, che scarti le misure di velocità troppo alte per essere realistiche.

Nel caso in esame si dispone di analisi provenienti da altre fonti (LDV, anemometria a filo caldo) che indicano un valore massimo plausibile per le velocità di circa 30m/s, da cui è stato scelto:

$$\|\mathbf{u}\| \leq V_{lim} = 50\text{m/s} \quad (4.11)$$

4.3.3 Media mobile

Un possibile criterio di rigetto e sostituzione dei vettori spuri è detto *Moving Average* o media mobile. Dato un generico vettore collocato nel punto (x, y) è possibile calcolare una media dei vettori circostanti su un supporto quadrato di dimensione $n \times n$ come:

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=x-\frac{n-1}{2}}^{x+\frac{n-1}{2}} \sum_{j=x-\frac{n-1}{2}}^{x+\frac{n-1}{2}} \mathbf{u}(i, j) \quad (4.12)$$

Il criterio di validazione richiede che il vettore $\mathbf{u}(x, y)$ non si discosti troppo dalla media dei vettori circostanti, cioè che:

$$\|\mathbf{u}(x, y) - \bar{\mathbf{u}}(x, y)\| < k \quad (4.13)$$

Si ricorda come le aree di interrogazione siano sovrapposte (in questo caso del 50%) e dunque sia necessario attendersi una certa dipendenza di una misura dalle misure vicine, essendo esse basate sullo spostamento di un insieme di particelle condiviso.

Nell'algoritmo implementato da FlowManager il valore di k dipende dalle caratteristiche della mappa. Ad una prima iterazione, infatti, vengono valutate le differenze locali tra la velocità e la media nell'intorno, fino a trovare un massimo globale $\max_{x,y} \|\mathbf{u}(x, y) - \bar{\mathbf{u}}(x, y)\|$. La costante k viene posta pari a:

$$k = \alpha \max_{x,y} \|\mathbf{u}(x, y) - \bar{\mathbf{u}}(x, y)\| \quad (4.14)$$

dove $\alpha \in [0, 1]$ è definito *acceptance factor*, e determina lo scostamento limite dalla media oltre al quale i vettori vengono scartati, in funzione dello scostamento massimo. Nell'analisi è stato scelto un valore elevato tra quelli consigliati, $\alpha = 0.1$, permettendo quindi un certo scostamento dalla media sull'intorno. Operativamente la sostituzione viene svolta per via iterativa, eliminando per primi i vettori con grande scostamento, per poi valutare nuovamente le medie e procedere fino al limite imposto.

Sostituzione di misure scartate

Il metodo della media mobile risulta anche il più adatto a sostituire le misure rigettate dagli altri criteri, principalmente poichè la media dei valori circostanti potrebbe costituire una soluzione valida per la cross-correlazione di aree sovrapposte. Per questa ragione, in luogo del vettore scartato da uno dei criteri sopra elencati, viene inserito nella mappa $\bar{u}(x, y)$.

4.4 Mappe vettoriali

Il risultato delle procedure descritte è costituito da una serie di 1000 mappe vettoriali. Per evidenziare eventuali dipendenze dall'arbitrarietà dei metodi di validazione sono state applicate quattro differenti procedure per la prima serie di immagini ($z/D = 0$):

1.
 - Cross-correlazione 32x32 pixel con sovrapposizione del 50%;
 - *peak-height validation* con $k = 1.2$;
 - *range validation* con $V_{lim} = 40\text{m/s}$.
2.
 - Cross-correlazione 32x32 pixel con sovrapposizione del 50%;
 - *peak-height validation* con $k = 1.2$;
 - *range validation* con $V_{lim} = 40\text{m/s}$;
 - *moving average validation* con $\alpha = 0.1$, supporto 3x3 e 3 iterazioni.
3.
 - Cross-correlazione ricorsiva, da 64x64 a 16x16 pixel con sovrapposizione del 50%, 2 iterazioni;
 - *peak-height validation* con $k = 1.2$;
 - *range validation* con $V_{lim} = 40\text{m/s}$;
 - *moving average validation* con $\alpha = 0.1$, supporto 3x3 e 3 iterazioni.
4.
 - Finestratura gaussiana sulle aree di interrogazione, $1/k^2 = 0.7$;
 - cross-correlazione 32x32 pixel con sovrapposizione del 50%;
 - *peak-height validation* con $k = 1.2$;
 - *range validation* con $V_{lim} = 40\text{m/s}$;
 - *moving average validation* con $\alpha = 0.1$, supporto 3x3 e 3 iterazioni.

Si riporta la stessa mappa vettoriale a seguito delle diverse elaborazioni proposte in figura 4.3.

Per le immagini a quota più elevata ($z/D = 0.208$), anche a causa dell'allargamento del getto, sono state portate avanti solo due strategie:

1.
 - Finestratura gaussiana sulle aree di interrogazione, $1/k^2 = 0.7$;
 - cross-correlazione 32x32 pixel con sovrapposizione del 50%;
 - *peak-height validation* con $k = 1.2$;
 - *range validation* con $V_{lim} = 40\text{m/s}$;
 - *moving average validation* con $\alpha = 0.1$, supporto 3x3 e 3 iterazioni.

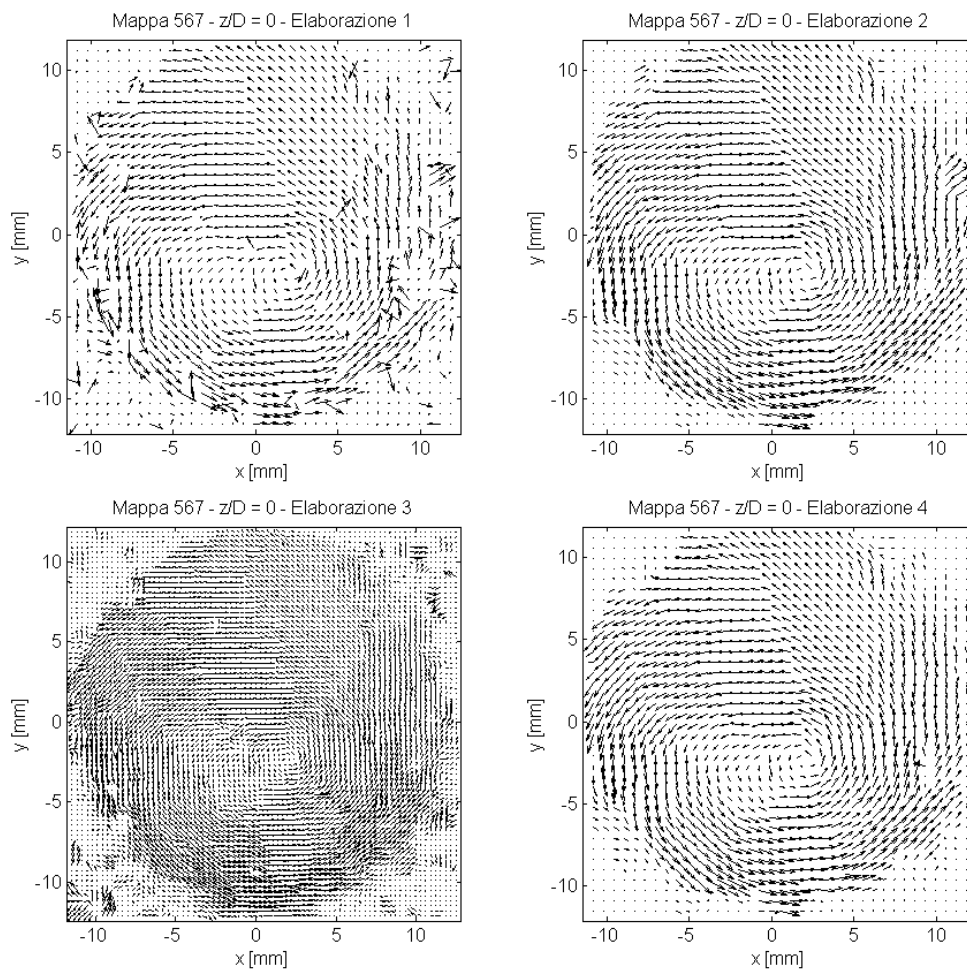


Figura 4.3: Diverse elaborazioni della stessa mappa vettoriale, $z/D = 0$

2.
 - Cross-correlazione ricorsiva, da 64x64 a 16x16 pixel con sovrapposizione del 50%, 2 iterazioni;
 - *peak-height validation* con $k = 1.2$;
 - *range validation* con $V_{lim} = 40\text{m/s}$;
 - *moving average validation* con $\alpha = 0.1$, supporto 3x3 e 3 iterazioni.

Si riporta la stessa mappa vettoriale a seguito delle due elaborazioni in fig.4.4.

4.5 Valutazione delle derivate parziali nel piano

4.5.1 Approccio alle differenze finite

Per la stima delle derivate spaziali che compongono il tensore gradiente di velocità $\nabla \mathbf{u}$ nel piano, si può ricorrere ad uno schema alle differenze finite. La misura PIV fornisce una mappa vettoriale bidimensionale equispaziata di velocità \mathbf{u}_i , in generale disturbate da un'incertezza ϵ_u . È possibile paragonare vari schemi alle differenze finite, come indicato da [18, cap. 6], rispetto all'errore di troncamento e alla propagazione dell'incertezza ϵ_u , assumendo che le misure adiacenti siano disaccoppiate. I metodi implementati, per dati u equispaziati di Δx lungo l'asse x , sono i seguenti:

- Un classico schema di differenze finite centrate di second'ordine

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4.15)$$

- Uno schema di estrapolazione di Richardson, con supporto a quattro nodi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} \quad (4.16)$$

- Un approccio ai minimi quadrati, con supporto a quattro nodi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{2u_{i+2} + u_{i+1} - u_{i-1} + 2u_{i-2}}{10\Delta x} \quad (4.17)$$

Le proprietà di accuratezza e propagazione dell'errore sono riassunte in tab.4.1.

Pur avendo lo stesso supporto, l'estrapolazione di Richardson e l'approccio ai minimi quadrati differiscono, in quanto il primo metodo è progettato per minimizzare l'errore di troncamento e risulta del terzo ordine, mentre il secondo tenta di ridurre l'effetto degli errori casuali ϵ_u . In particolare, per mappe con aree

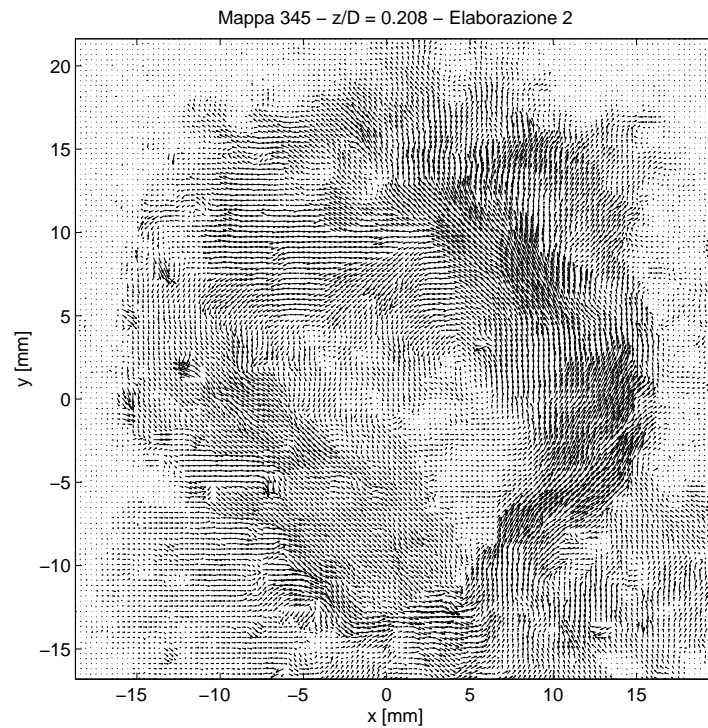
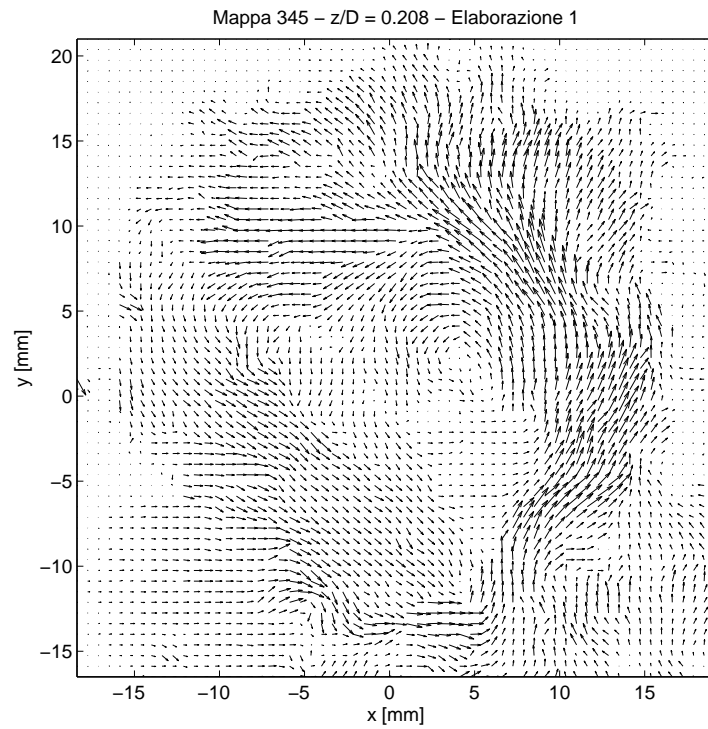


Figura 4.4: Diverse elaborazioni della stessa mappa vettoriale, $z/D = 0.208$

Schema	Accuratezza	Incertezza
Differenze finite centrate	$O(\Delta x^2)$	$\approx 0.7 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$
Estrapolazione di Richardson	$O(\Delta x^3)$	$\approx 0.95 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$
Minimi quadrati	$O(\Delta x^2)$	$\approx 1.0 \frac{\epsilon_u}{\Delta x}$

Tabella 4.1: Proprietà degli operatori alle differenze finite.

di interrogazione sovrapposte, dove viene a cadere l'ipotesi di disaccoppiamento tra le misure adiacenti, l'approccio ai minimi quadrati si comporta molto meglio dell'estrapolazione di Richardson, che mostra oscillazioni anche su dati regolari. È da sottolineare come anche il metodo alle differenze finite centrate si comporti bene per *Overlapping* pari o inferiori al 50%, poichè le misure u_{i+1} e u_{i-1} rimangono scorrelate.

I metodi presentati, applicati ad alle componenti u, v della velocità nel piano, lungo le direzioni x, y , permettono di ricostruire il gradiente $\nabla \mathbf{u}$.

4.5.2 Approccio integrale

Come discusso ampiamente nel cap.5, $\nabla \mathbf{u}$ può essere scomposto in parte simmetrica e antisimmetrica e di conseguenza espresso in funzione della sola deformazione nel piano (4 componenti) e della vorticità assiale. Basandosi su tale osservazione, Raffel *et al.* [18] propongono un approccio integrale al problema, in cui vorticità e sforzi vengono valutati come medie integrali su di un'area opportuna.

Vorticità

La vorticità è legata alla circolazione dal teorema di Stokes:

$$\Gamma = \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int \omega d\mathbf{S} \quad (4.18)$$

dove \mathbf{l} descrive la linea chiusa che delimita la superficie \mathbf{S} . La vorticità di un elemento fluido viene ricavata facendo tendere a zero la superficie \mathbf{S} , e con essa la linea \mathbf{l} :

$$\omega \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int \mathbf{u} d\mathbf{l} \quad (4.19)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie \mathbf{S} .

Lo stesso principio di media integrale può essere applicato ai dati di una mappa PIV, in dimensione finita:

$$(\bar{\omega}_z)_{i,j} = \frac{1}{A} \Gamma_{i,j} = \frac{1}{A} \int_{\mathbf{l}(x,y)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.20)$$

dove $(\bar{\omega}_z)_{i,j}$ rappresenta la vorticità media all'interno dell'area A.
Operativamente è necessario:

1. scegliere una linea chiusa Γ che racchiuda il punto (i, j) , ad esempio il quadrato formato dagli 8 punti adiacenti;
2. calcolare la circolazione lungo questa linea integrando la velocità $\mathbf{u} = (u, v)$;
3. dividere per l'area racchiusa dalla linea Γ .

$$(\omega_z)_{i,j} = \frac{\Gamma_{i,j}}{4\Delta x\Delta y} \quad (4.21)$$

Se si opera l'integrazione con il metodo dei trapezi, la circolazione risulta:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j} \approx & \frac{1}{2}\Delta x (u_{i-1,j-1} + 2u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}) \\ & + \frac{1}{2}\Delta y (v_{i+1,j-1} + 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1}) \\ & - \frac{1}{2}\Delta x (u_{i+1,j+1} + 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\ & - \frac{1}{2}\Delta y (v_{i-1,j+1} + 2v_{i-1,j} + v_{i-1,j-1}) \end{aligned}$$

Questo metodo si comporta meglio dei precedenti relativamente alla robustezza a campi di velocità con misure correlate, principalmente perché introduce più informazioni nella valutazione della vorticità³. L'incertezza associata alla stima di ω_z è presentata in tab. 4.2.

Schema	$\frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_u} \Delta x$
Differenze finite centrate	≈ 1.00
Estrapolazione di Richardson	≈ 1.34
Metodo integrale	≈ 0.61

Tabella 4.2: Propagazione dell'incertezza nella misura della vorticità

Velocità di deformazione

In modo analogo è possibile valutare la velocità di distorsione:

$$(\gamma_z)_{i,j} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i,j} \quad (4.22)$$

³La valutazione della vorticità tramite i metodi mono-dimensionali richiede solo 4 o 8 valori di velocità, mentre questa espressione ne utilizza 12.

con una media integrale sullo stesso supporto utilizzato in precedenza, da cui

$$\begin{aligned}
 (\gamma_z)_{i,j} &\cong -\frac{1}{8\Delta y} (u_{i-1,j-1} + 2u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}) \\
 &\quad + \frac{1}{8\Delta y} (u_{i+1,j+1} + 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\
 &\quad - \frac{1}{8\Delta x} (v_{i-1,j+1} + 2v_{i-1,j} + v_{i-1,j-1}) \\
 &\quad + \frac{1}{8\Delta x} (v_{i+1,j-1} + 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1})
 \end{aligned}$$

4.6 Ricostruzione della pressione

Per dare conto di alcune osservazioni riguardo alla presenza di un minimo di pressione all'interno del nucleo di un vortice, è stata implementata una semplice metodologia per la ricostruzione della pressione stessa, proposta da [18].

- Vengono stimati i gradienti di pressione $\frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{\partial p}{\partial y}$ attraverso le equazioni di Navier-Stokes stazionarie di un campo di moto piano incomprimibile:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.23)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.24)$$

- Scelto un punto di riferimento vicino al centro della mappa, a cui è assegnata una pressione $p_0 = 0$, i gradienti vengono integrati con il metodo dei trapezi con due ordini differenti:
 1. *column-major*, in cui si integra prima in direzione orizzontale e poi verticale;
 2. *row-major*, in cui si integra prima in direzione verticale e poi orizzontale.
- Il campo di pressione viene valutato come la media algebrica dei risultati dei due metodi di integrazione.

Tale approccio non ha caratteristiche di elevata accuratezza, in quanto il nostro campo di moto non è stazionario, ma permette di calcolare in modo semplice un campo di pressione istantaneo, senza coinvolgere direttamente i termini di accelerazione. Da un punto di vista numerico, il metodo tende a propagare i disturbi dovuti a dati rumorosi o errati a valle, cioè verso i bordi della mappa.

Capitolo 5

Criteri per l'identificazione di vortici

5.1 Definizione di vortice

Il concetto di vortice è antico almeno quanto i primi studi di fluidodinamica. Nonostante ciò non esiste ancora un modo uniformemente accettato per definire il vortice come entità fisica all'interno di un campo turbolento. La mancanza di una definizione accurata non ha scoraggiato la comunità scientifica dal modellizzare una vasta gamma di fenomeni fluidodinamici attraverso la dinamica di vortici, tra cui: il miscelamento, la trasmissione del calore e lo scambio di massa tra fluidi, le reazioni chimiche proprie dei processi di combustione, le forze aerodinamiche agenti sui velivoli¹, fino alle *coherent structures*, strutture spazialmente coerenti in un campo turbolento, che evolvono nel tempo con moti vorticosi.

Una prima possibile definizione di vortice, estremamente chiara anche se non esaustiva, potrebbe essere quella data da Lugt [19]: “una moltitudine di particelle materiali che ruotano intorno ad un centro comune”. Circa dieci anni più tardi, Robinson [20] entra maggiormente nello specifico, affermando che “un vortice esiste quando le linee di flusso istantanee nel piano normale al nucleo del vortice, posto un osservatore in movimento insieme al centro del nucleo stesso, esibiscono un movimento approssimativamente circolare o spirale”. A partire da risultati di analisi DNS lo stesso Robinson riscontra che molte strutture vorticosi sono caratterizzate da un minimo di pressione nel loro nucleo.

Un vortice può essere una struttura molto complessa ed estesa nello spazio, mentre numerosi studi confermano che il nucleo delle strutture coerenti in un flusso turbolento è generalmente ben localizzato e dunque si presta ad essere oggetto di criteri di identificazione. La strada più seguita negli ultimi anni consiste nell'applicare definizioni operative, locali e non-locali, basate sul campo

¹Con particolare riferimento alla portanza generata da un'ala a delta.

di velocità e sulle sue derivate.

Esiste sostanziale accordo nel ritenere che un vortice, per essere tale, debba possedere un nucleo con almeno queste due caratteristiche:

1. diametro finito;
2. vorticità netta diversa da zero.

Un criterio che agisca nel rispetto di tali ipotesi dovrà essere insensibile a fenomeni irrotazionali (come i vortici potenziali con nucleo puntiforme). Le osservazioni di Robinson riguardo all'osservatore del campo di moto mantengono particolare importanza, dunque un buon criterio per l'identificazione di vortici dovrà essere anche invariante Galileiano.

5.2 Minimo locale della pressione

Un criterio basato sul minimo locale della pressione trova fondamento nell'analisi di un vortice piano, stazionario in un fluido non viscoso. In tali condizioni, infatti, per mantenere un certo raggio di curvatura della traiettoria, la forza centrifuga sull'elementino di fluido deve essere bilanciata da un gradiente positivo di pressione (come osservabile in fig. 5.1).

Ponendosi sull'asse del vortice si ottiene un gradiente radiale positivo in ogni direzione, dunque tale punto è un minimo locale per la pressione.

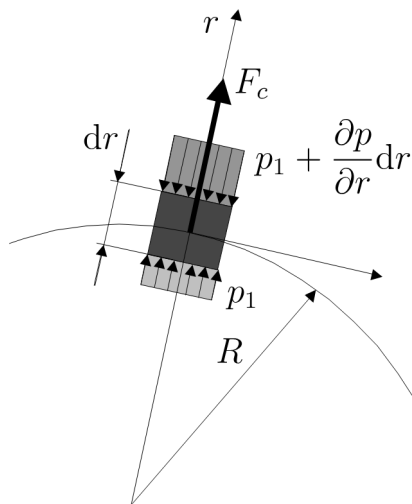


Figura 5.1: Equilibrio radiale in un vortice piano stazionario e inviscido (tratto da [21])

Quanto osservato non è necessariamente vero se le ipotesi non sono rispettate:

- può esistere un minimo della pressione in un campo di moto potenziale a causa di effetti puramente instazionari;
- in un fluido reale la forza centrifuga può essere bilanciata dagli sforzi viscosi.²

Si può anche notare come la pressione appartenga ad una scala più grande rispetto alla vorticità, essendo governata dall'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 p = -\rho u_{i/j} u_{j/i} \quad (5.1)$$

Ad esempio, in un vortice di Lamb (vedi fig. 5.2), la vorticità è quasi scomparsa (1.8% rispetto al valore massimo) ad una coordinata radiale $r = 4\sqrt{\nu t}$, mentre la pressione mantiene ancora un valore significativo ($\sim 25\%$ del valore minimo), e raggiunge un valore prossimo a quello esterno ad una distanza molto superiore.

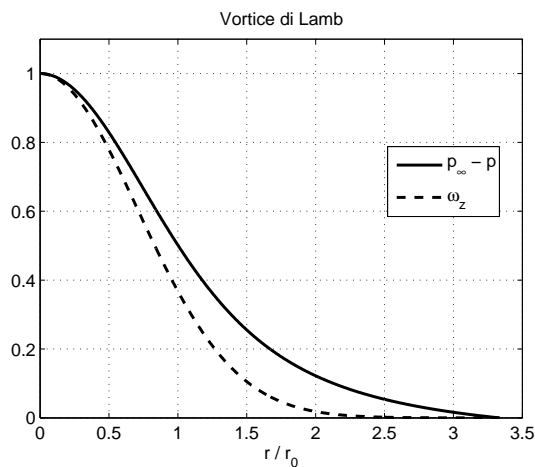


Figura 5.2: Differenza di scala tra vorticità e pressione in un vortice di Lamb

In conclusione: la presenza di un minimo della pressione locale può essere correlata a fenomeni vorticosi, ma non è condizione necessaria né sufficiente alla loro identificazione.

²Ad esempio, in una corrente di von Kàrmàn, gli sforzi viscosi bilanciano completamente la forza centrifuga e la pressione è costante nel piano perpendicolare all'asse del vortice, che risulta invisibile al criterio.

5.3 Traiettorie e linee di flusso

Un criterio intuitivo per indicare il nucleo di un vortice, suggerito dallo stesso Lugt [19], potrebbe essere dato dalla presenza di particelle con traiettoria circolare o spirale. L'analisi della traiettoria e delle linee di flusso non ha le caratteristiche di un invariante Galileiano: un vortice che si muova in un campo convettivo con velocità paragonabile a quella di rotazione intorno al nucleo potrebbe non presentare affatto linee di flusso circolari, come evidente in figura 5.3.

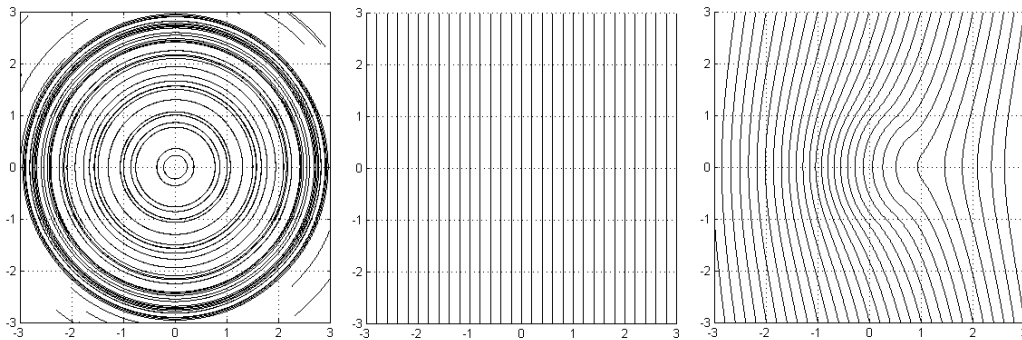


Figura 5.3: Linee di flusso di un vortice di Rankine centrato nell'origine (a), di un campo di moto uniforme (b) e della somma dei due campi di moto (c)

Non è garantito, inoltre, che le particelle di un vortice compiano una rotazione completa intorno ad un centro comune. Questo genere di problemi è tipico dei processi non lineari di accoppiamento e rottura di vortici in cui le particelle fluide possono lasciare il nucleo prima di una rotazione completa intorno ad esso. In sintesi, il criterio è basato su un'osservazione corretta, ma presenta gravi difficoltà di applicazione in molti casi reali.

5.4 Momento delle quantità di moto locali

Un criterio concettualmente simile al precedente può basarsi su una valutazione quantitativa della tendenza delle particelle a ruotare intorno ad un centro comune, calcolando, ad esempio, il momento delle quantità di moto intorno ad un punto, come suggerito da Grosjean *et al.* [22]. Considerando un insieme di N punti M_j appartenenti ad un opportuno intorno del punto P , si può valutare il momento delle quantità di moto normalizzato $\Gamma_1(P) \in [-1, 1]$ come:

$$\Gamma_1(P) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{(M_j - P) \times \mathbf{u}(M_j)}{\|M_j - P\| \cdot \|\mathbf{u}(M_j)\|} \quad (5.2)$$

Tale momento sarà massimo sull'asse del vortice, poichè le particelle vicine ruotano in modo regolare intorno ad esso. Un metodo che identifichi i nuclei vorticosi con valori sufficientemente elevati di Γ_1 risulta particolarmente robusto su dati sperimentali, ma non è comunque invariante galileiano.

Al fine di illustrare nuovamente questa problematica, consideriamo nuovamente il campo di moto generato nel piano da un vortice di Rankine di raggio e circolazione unitaria collocato nell'origine (fig. 5.4-a). Il criterio di massimo Γ_1 identifica correttamente la posizione dell'asse del vortice, indicata da un cerchietto rosso. Se andiamo a sovrapporre a questo vortice un moto uniforme verso l'alto, il campo di moto varia, come osservabile in fig.5.4-c. Il criterio applicato al risultato di questa sovrapposizione trova un centro del vortice traslato rispetto a quello reale, a causa di fenomeni di relatività del moto. Tale spostamento, però, non ha significato fisico, poichè il vortice di Rankine è sempre collocato nell'origine.

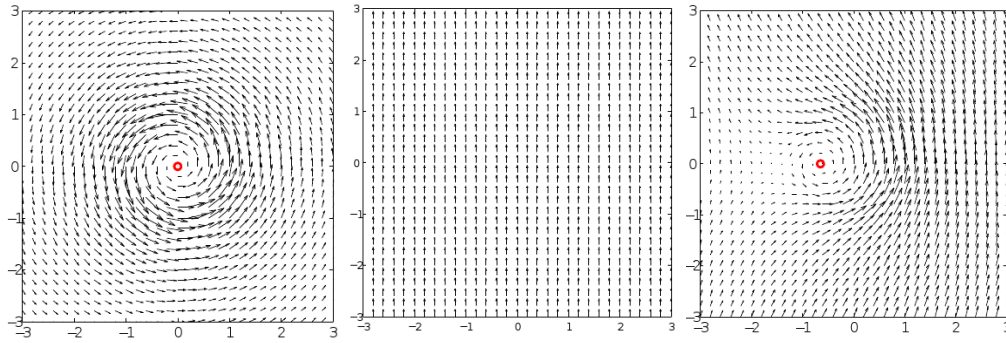


Figura 5.4: Effetti di relatività galileiana sul massimo del momento delle quantità di moto locali

5.4.1 Momento delle quantità di moto locali, versione invariante

E' possibile porre rimedio al problema di relatività Galileiana del criterio precedente riformulando il momento delle quantità di moto normalizzato, come indicato da Grafiteaux *et al.* [23]

$$\Gamma_2(P) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{(M_j - P) \times (\mathbf{u}(M_j) - \tilde{\mathbf{u}}(P))}{\|M_j - P\| \cdot \|\mathbf{u}(M_j) - \tilde{\mathbf{u}}(P)\|} \cdot \mathbf{i}_z \quad (5.3)$$

dove

$$\tilde{\mathbf{u}}(P) = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{u} \, dS. \quad (5.4)$$

rappresenta la media integrale della velocità in un intorno di P .

In un flusso piano incomprimibile, al limite per $S \rightarrow 0$, la funzione Γ_2 dipende

unicamente da Ω e μ , dove Ω è la velocità di rotazione corrispondente alla parte antisimmetrica del tensore $\nabla \mathbf{u}$ calcolato in P , mentre μ è l'autovalore della parte simmetrica dello stesso tensore (trattati più diffusamente nella sezione 5.6).

In queste condizioni, la zona localmente dominata dalla rotazione, identificata come nucleo del vortice, sarà definita da:

$$|\Gamma_2| > 2/\pi \quad (5.5)$$

5.5 Modulo della vorticità

Un valore elevato del modulo della vorticità sembra essere un criterio ragionevole per identificare un vortice, ha trovato ampia applicazione nella ricerca di strutture coerenti ed è un invariante Galileiano. Tuttavia, in una corrente parallela di Couette o di Stokes il valore della vorticità è tutt'altro che nullo, ma non sono presenti vortici. In altre situazioni in cui i vortici sono effettivamente presenti, potrebbero essere oscurati dal livello di vorticità di fondo del moto, causato da interazioni viscosi importanti, come in uno strato limite. Una possibile soluzione al problema consiste nello stabilire un livello di soglia per $|\omega|$, pari alla velocità di distorsione caratteristica dei fenomeni viscosi in gioco:

$$|\omega| > |\gamma| \quad (5.6)$$

In tal modo possiamo rendere il criterio insensibile ad una corrente parallela di Couette o di Stokes, dove $|\omega| = |\gamma|$, ma rimane il problema di identificare il livello di soglia corretto su tutto il campo di moto.

Seguendo quanto esposto da [24], è *necessario* che esista una certa superficie ad un livello abbastanza alto $|\omega|$ per definire il nucleo di un vortice, ma ciò non si traduce in un criterio affidabile di identificazione.

5.6 Approcci locali basati sul gradiente della velocità

Questa ampia famiglia di criteri si basa sulla valutazione degli autovalori e degli invarianti tensoriali del gradiente della velocità $\nabla \mathbf{u}$. In un generico campo di moto tridimensionale, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y, z) tale gradiente vale:

$$\mathbf{D} = \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u/x & u/y & u/z \\ v/x & v/y & v/z \\ w/x & w/y & w/z \end{pmatrix}$$

dove (u, v, w) sono le componenti di \mathbf{u} nel sistema di assi scelto³.

³Si utilizza una notazione compatta per le derivate parziali: $(\cdot)_{/x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$

Tutti i metodi fanno riferimento a valutazioni puntuali delle derivate della velocità e sono invarianti galileiani.

5.6.1 Autovalori complessi di $\nabla\mathbf{u}$

Chong *et al.* [25] propongono un criterio che trova fondamento sulla presenza di linee di flusso circolari o spirali nel campo di moto. Le linee di flusso, a differenza del criterio intuitivo, vengono calcolate in ogni punto con un riferimento locale in moto insieme al punto stesso, eliminando i problemi di relatività Galileiana. Operativamente non è necessario integrare il moto delle particelle fluide nel tempo, in quanto le informazioni istantanee sulla curvatura locale sono contenute nel tensore gradiente di velocità $\nabla\mathbf{u}$. Se gli autovalori di tale tensore sono complessi in una regione del campo di moto, allora le linee di flusso locali in quella regione sono chiuse o spirali, quindi compatibili con la presenza del nucleo di un vortice.

Gli autovalori σ di $\nabla\mathbf{u}$ sono soluzione dell'equazione caratteristica:

$$\sigma^3 - P\sigma^2 + Q\sigma - R = 0 \quad (5.7)$$

Dove P, Q e R sono i tre invarianti tensoriali di $u_{i/j}$, definiti come:

$$P = -\nabla \cdot \mathbf{u} = -u_{i/i} \quad (5.8)$$

$$Q = \frac{1}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \text{tr}(\nabla\mathbf{u}^2)] = \frac{1}{2}(u_{i/i}^2 - u_{i/j}u_{j/i}) \quad (5.9)$$

$$R = \det(\nabla\mathbf{u}) \quad (5.10)$$

L'equazione caratteristica ha radici complesse quando il suo discriminante Δ è positivo. Per fluidi incomprimibili, dove $P = 0$, l'indicatore locale della presenza di un nucleo vorticoso risulta:

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 > 0 \quad (5.11)$$

5.6.2 Swirling strength

Elaborando ulteriormente il criterio precedente, Zhou *et al.* [26] propongono di utilizzare la parte immaginaria degli autovalori coniugati di $\nabla\mathbf{u}$ come criterio per l'identificazione dei vortici.

Supponendo che gli autovalori di $\nabla\mathbf{u}$ valgano:

$$\sigma_1 = \lambda_r \quad (5.12)$$

$$\sigma_2 = \lambda_{cr} + i\lambda_{ci} \quad (5.13)$$

$$\sigma_3 = \lambda_{cr} - i\lambda_{ci} \quad (5.14)$$

è possibile definire un sistema di coordinate curvilinee locali (y_1, y_2, y_3) , definito dai vettori $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{cr}, \mathbf{u}_{ci})$ che trasla localmente insieme alle particelle fluide. Tali direzioni sono ottenute dagli autovettori di $\nabla \mathbf{u}$: $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{cr} + \mathbf{u}_{ci}, \mathbf{u}_{cr} - \mathbf{u}_{ci})$.

Le linee di flusso istantanee, in questo sistema di riferimento, saranno date da:

$$y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_r t}, \quad (5.15)$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_{cr} t} [y_2(0) \cos(\lambda_{ci} t) + y_3(0) \sin(\lambda_{ci} t)], \quad (5.16)$$

$$y_3(t) = e^{\lambda_{cr} t} [y_3(0) \cos(\lambda_{ci} t) - y_2(0) \sin(\lambda_{ci} t)], \quad (5.17)$$

Il flusso localmente ruota nel piano definito da $(\mathbf{u}_{cr}, \mathbf{u}_{ci})$, per espandersi o comprimersi lungo \mathbf{u}_r . L'autovalore λ_{ci} (*Swirling strength*) rappresenta una misura della velocità di rotazione all'interno del vortice⁴, mentre l'intensità di compressione o estensione nella direzione assiale è data dal valore di λ_r .

E' possibile utilizzare λ_{ci} come criterio per l'identificazione di vortici:

- nel caso si ricerchino tutte le strutture vorticose il criterio coincide col precedente, poichè $\lambda_{ci} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$;
- nel caso si voglia distinguere tra le strutture vorticose, valori maggiori di λ_{ci} indicano strutture più intense, ed in generale $\lambda_{ci} \neq \Delta$.

5.6.3 Condizioni sul secondo invariante di $\nabla \mathbf{u}$

Hunt *et al.* [27] definiscono vortici le regioni in cui Q , il secondo invariante tensoriale di $\nabla \mathbf{u}$, è positivo. Come condizione addizionale la pressione in quella regione del campo di moto deve essere minore di quella ambiente. Questo criterio risulta più restrittivo del precedente e richiede formalmente una condizione addizionale sulla pressione reale, che dunque deve essere misurata o ricostruita. Il termine Q compare come sorgente nell'equazione di Poisson per la pressione (dalle equazioni di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili):

$$\nabla^2 p = 2 \rho Q \quad (5.18)$$

Per il principio del massimo, avremo che:

- se $Q \geq 0$ i *massimi* della pressione possono essere solo al bordo;
- se $Q \leq 0$ i *minimi* della pressione possono essere solo al bordo.

In generale il solo $Q \geq 0$ non implica necessariamente la presenza di minimi di pressione nella zona considerata, anche se tale fenomeno si manifesta in molti casi di reale applicazione del criterio.

⁴Il periodo di rivoluzione lungo la linea di flusso vale $2\pi/\lambda_{ci}$

5.6.4 Due autovalori negativi per $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$

Jeong e Hussain [24] definiscono come nucleo del vortice la regione connessa in cui il tensore $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$ ha due autovalori negativi.

\mathbf{S} e Ω non sono altro che la parte simmetrica e antisimmetrica di $\nabla \mathbf{u}$:

$$\begin{cases} \mathbf{S} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \\ \Omega &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) \end{cases}$$

Gli autori si propongono di utilizzare il principio del minimo della pressione, analizzando le varie cause che concorrono alla generazione di questo minimo. Le informazioni sugli estremi locali della pressione sono contenute nell'Hessiano $\nabla(\nabla p)$ che può essere ricavato applicando l'operatore gradiente alle equazioni di Navier-Stokes:

$$a_{i/j} = -\frac{1}{\rho}p_{/ij} + \nu u_{i/jkk} \quad (5.19)$$

dove $a_{i/j}$ è il gradiente di accelerazione, che può essere scomposto in parte simmetrica e antisimmetrica come:

$$a_{i/j} = \underbrace{\left[\frac{DS_{ij}}{Dt} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} \right]}_{\text{simmetrico}} + \underbrace{\left[\frac{D\Omega_{ij}}{Dt} + \Omega_{ik}S_{kj} + S_{ik}\Omega_{kj} \right]}_{\text{antisimmetrico}} \quad (5.20)$$

La parte simmetrica dell'equazione 5.19 risulta⁵:

$$\underbrace{\frac{DS_{ij}}{Dt}}_{\text{instazionario}} - \underbrace{\nu S_{ij/kk}}_{\text{viscoso}} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} = -\frac{1}{\rho}p_{/ij} \quad (5.21)$$

In generale se $p_{/ij}$ ha due autovalori positivi esiste un minimo della pressione nel piano definito dagli autovettori associati. Dall'equazione 5.21 è possibile notare come i minimi locali della pressione, esclusi gli effetti instazionari e viscosi, dipendano dagli autovalori di $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$.

Il tensore $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$, simmetrico per costruzione, avrà tre autovalori reali (λ_i) che possiamo mettere in ordine crescente:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad (5.22)$$

Il criterio richiede che nel nucleo di un vortice $\lambda_2 < 0$, cioè che l'Hessiano della pressione in assenza di fenomeni instazionari e viscosi *avrebbe* presentato due autovalori positivi e di conseguenza un minimo.

⁵La parte antisimmetrica non è altro che l'equazione di trasporto della vorticità:
 $\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \nu \Delta \omega + (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$

5.6.5 Un fondamento comune per i criteri basati su $\nabla \mathbf{u}$

I tensori \mathbf{S} e $\mathbf{\Omega}$, utilizzati nell'ultimo criterio, sono determinanti in ogni tipo di analisi del gradiente della velocità, come illustrato da [28] e [29]. E' possibile riscrivere l'invariante Q come:

$$Q = \frac{1}{2}(\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2) \quad (5.23)$$

dove

$$\|\mathbf{S}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^T) \quad (5.24)$$

$$\|\mathbf{\Omega}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^T) \quad (5.25)$$

Facendo riferimento agli elementi di \mathbf{S} e $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \epsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$Q = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - \left[(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \frac{1}{2} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right] \quad (5.26)$$

E' evidente dall'equazione 5.26 come Q rappresenti un bilancio nel volume locale tra tutte le componenti della velocità di rotazione e della velocità di deformazione. Un criterio che richieda $Q > 0$ implica che, in una certa misura, la velocità rotazione del flusso nel nucleo del vortice sia superiore alla velocità di deformazione.

Lo stesso tipo di analisi può essere effettuato sugli autovalori del gradiente di velocità e del tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$. Se scriviamo $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ in un sistema di riferimento con assi paralleli agli autovettori, ne otterremo una forma diagonale del tipo:

$$\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \cdot \mathbf{u}_{/1} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla u_2 \cdot \mathbf{u}_{/2} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla u_3 \cdot \mathbf{u}_{/3} \end{pmatrix}$$

Gli elementi diagonali, autovalori del tensore, possono essere riscritti come:

$$\nabla u_1 \cdot \mathbf{u}_{/1} = [\epsilon_1^2 + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)] - (\omega_2^2 + \omega_3^2) = \lambda_1 \quad (5.27)$$

$$\nabla u_2 \cdot \mathbf{u}_{/2} = [\epsilon_2^2 + (\gamma_1^2 + \gamma_3^2)] - (\omega_1^2 + \omega_3^2) = \lambda_2 \quad (5.28)$$

$$\nabla u_3 \cdot \mathbf{u}_{/3} = [\epsilon_3^2 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] - (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \lambda_3 \quad (5.29)$$

In un vortice con asse allineato in direzione x_1 , si otterranno $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 < 0$. Se $\lambda_2 > \lambda_3$, allora ω_1^2 dovrà essere sufficientemente superiore a γ_1^2 per garantire la validità del criterio, cioè la velocità di rotazione locale dovrà eccedere la velocità di distorsione. Tale metodo realizza lo stesso principio del precedente ma, data la natura dell'operatore, opera il bilancio tra velocità di rotazione e di distorsione nel solo piano perpendicolare all'asse del vortice.

5.6.6 Campo di moto piano

Nel caso di un moto piano a divergenza nulla, il gradiente di velocità risulta semplicemente:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u/x & u/y \\ v/x & -u/x \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica per il calcolo degli autovalori diventa di secondo ordine:

$$\sigma^2 - u_{/x}^2 - u_{/y}v_{/x} = 0 \quad (5.30)$$

dunque gli autovalori possono essere entrambi reali o immaginari puri. In particolare la seconda condizione si ottiene quando:

$$\Delta = u_{/x}^2 + u_{/y}v_{/x} < 0 \quad (5.31)$$

Nelle stesse ipotesi di moto piano possiamo calcolare l'invariante Q come:

$$Q = \frac{1}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \text{tr}(\nabla \mathbf{u}^2)] \quad (5.32)$$

Sotto le ipotesi di flusso a divergenza nulla il primo termine è nullo, mentre il secondo vale:

$$-\frac{1}{2} \text{tr}(\nabla \mathbf{u}^2) = -\frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} u_{/x}^2 + u_{/y}v_{/x} & 0 \\ 0 & u_{/x}^2 + u_{/y}v_{/x} \end{pmatrix}$$

dunque

$$Q = -\Delta = -(u_{/x}^2 + u_{/y}v_{/x}) \quad (5.33)$$

Il tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$, invece, vale:

$$\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} u_{/x}^2 + u_{/y}v_{/x} & 0 \\ 0 & u_{/x}^2 + u_{/y}v_{/x} \end{pmatrix}$$

La forma diagonale di $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ implica che la direzione per l'asse del vortice identificato con questo modello è perpendicolare al piano, mentre le direzioni coordinate x e y definiscono il piano del vortice. Gli autovalori di $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ sono coincidenti e portano a concludere che:

$$\lambda_2 = -Q = \Delta = u_{/x}^2 + u_{/y}v_{/x} \quad (5.34)$$

mentre

$$\lambda_{ci} = \sqrt{-u_{/x}^2 - u_{/y}v_{/x}} = \sqrt{Q} \quad (5.35)$$

5.6.7 Misure piane in un campo di moto 3D

Nel caso dell'analisi delle mappe PIV, disponiamo di misure su di un piano, che rappresentano la proiezione di un moto fortemente tridimensionale. La naturale restrizione del tensore gradiente di velocità è rappresentata da:

$$\nabla \mathbf{u}^{2-D} = \begin{pmatrix} u/x & u/y \\ v/x & v/y \end{pmatrix}$$

I criteri basati su $\nabla \mathbf{u}$ tornano, almeno in via teorica, a differenziarsi, in quanto:

$$\Delta = \frac{1}{4} (u/x - v/y)^2 + u/y v/x \quad (5.36)$$

$$Q = u/x v/y - u/y v/x \quad (5.37)$$

mentre per la valutazione di λ_2 è necessario ricostruire il tensore $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ a partire da un gradiente di velocità a quattro componenti indipendenti. Il risultato di tale operazione non coincide con i due precedenti.

5.7 Approccio non locale

Tutti i metodi di analisi basati sul gradiente della velocità sono caratterizzati (ed in parte limitati) dal carattere locale dell'operatore. Se siamo alla ricerca di una *struttura* nel campo di moto, possiamo immaginare che esista una certa relazione tra il comportamento di un elementino fluido e quello di un altro elementino che giace in una regione dello spazio di estensione comparabile con la dimensione del vortice. Un metodo *locale* trascura a priori questo tipo di informazione, disponibile ad un metodo *non-locale*.

Un esempio di criterio *non-locale* per l'identificazione di vortici è la ricerca di traiettorie o linee di flusso chiuse o spirali, che però non ha le caratteristiche di invariante Galileiano.

Un criterio *non-locale* invariante Galileiano, proposto da Cucitore *et al.*[28], può basarsi sulla considerazione intuitiva secondo cui le particelle all'interno di un vortice mostrano limitate variazioni nella loro distanza relativa anche se seguono traiettorie completamente diverse. Tale considerazione viene indicata da vari autori come *compatezza orbitale*.

Consideriamo una coppia di particelle fluide (a, b) , rappresentate da punti materiali di coordinate $\mathbf{x}_a(t)$ e $\mathbf{x}_b(t)$, che venga trascinato dal campo di moto $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ con equazione di moto:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (5.38)$$

Se le velocità delle particelle della coppia sono \mathbf{u}_a e \mathbf{u}_b , possiamo introdurre uno scalare $R(\mathbf{x}, t)$ che definisca il rapporto tra la distanza tra le particelle al tempo t e la differenza cumulativa tra le loro traiettorie come:

$$R(\mathbf{x}_m, t) = \frac{|\int_0^t \mathbf{u}_a(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{u}_b(\tau) d\tau|}{\int_0^t |\mathbf{u}_a(\tau) - \mathbf{u}_b(\tau)| d\tau} \quad (5.39)$$

Quando il rapporto R rimane inferiore ad una certa soglia R_{th} , allora la distanza tra a e b rimane piccola rispetto alla differenza tra la traiettoria di a e quella di b . In questo caso il punto \mathbf{x}_m si trova in una zona del campo di moto che ha le caratteristiche di una *struttura* vorticoso. Tale punto viene valutato semplicemente come la media tra le coordinate iniziali di a e b :

$$\mathbf{x}_m = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_a(0) + \mathbf{x}_b(0)) \quad (5.40)$$

Un criterio con queste caratteristiche elimina autonomamente le correnti parallele di Couette e di Stokes, oltre ai flussi puramente radiali, poichè in entrambi i casi numeratore e denominatore dell'eq. 5.39 coincidono e $R = 1$. Il valore di R risulta indipendente dal livello di vorticità di fondo del campo di moto.

Si può notare, però, come R possa rimanere molto piccolo in caso di flussi che non hanno caratteristiche di un vortice, per cui Cucitore *et al.* [28] propongono di utilizzare questo criterio in combinazione con una richiesta locale: $\Delta > 0$. Formalmente si tratta di identificare il sottoinsieme della regione localmente vorticoso (con $\Delta > 0$) per cui il rapporto R rimane inferiore alla soglia R_{th} .

Un criterio locale di compattezza orbitale

Un approccio non-locale ha un costo computazionale intrinsecamente più elevato rispetto ad un criterio locale. Al fine di ridurre tale costo, Chakraborty *et al.* [29] hanno sviluppato una *approssimazione* locale che aggiunge ai requisiti minimi di vortice il principio di compattezza orbitale.

Tale approssimazione (“enhanced swirling strength”) si basa sull’analisi dei tre autovalori del gradiente di velocità in un campo di moto tridimensionale, dunque non può essere applicata ai campi di moto bidimensionali disponibili in questo lavoro di tesi.

5.8 Criteri applicati

Disponendo di una serie di mappe vettoriali in cui è piuttosto semplice localizzare visivamente⁶ una struttura di grande scala a carattere vorticoso, sono stati implementati ed applicati tre dei metodi descritti in precedenza, al fine di identificare il centro del vortice ed analizzarne il moto:

1. il massimo di Γ_1 , momento delle quantità di moto normalizzato nell'intorno di un punto;
2. il minimo di λ_2 , secondo autovalore di $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$;
3. il massimo della *swirling strength* o λ_{ci} ;

I metodi λ_2 e λ_{ci} , formalmente coincidenti in un moto piano, sono soggetti all'incertezza amplificata dalle misure differenziali e producono frequentemente risultati poco coerenti rispetto all'osservazione della mappa vettoriale. Al fine di rendere più robusta l'identificazione viene introdotto il metodo Γ_1 che, seppur influenzato dagli effetti di relatività Galileiana, non è di natura differenziale e risulta poco sensibile alla presenza di un numero limitato di misure spurie.

Si riporta una mappa di velocità tipica, con la posizione fornita dai tre metodi per il centro del vortice, in fig. 5.5-a. Coerentemente con quanto riportato nella sez. 5.5, gli indicatori di carattere differenziale identificano il centro del vortice in una zona di intensa vorticità, come evidenziato in fig. 5.5-b.

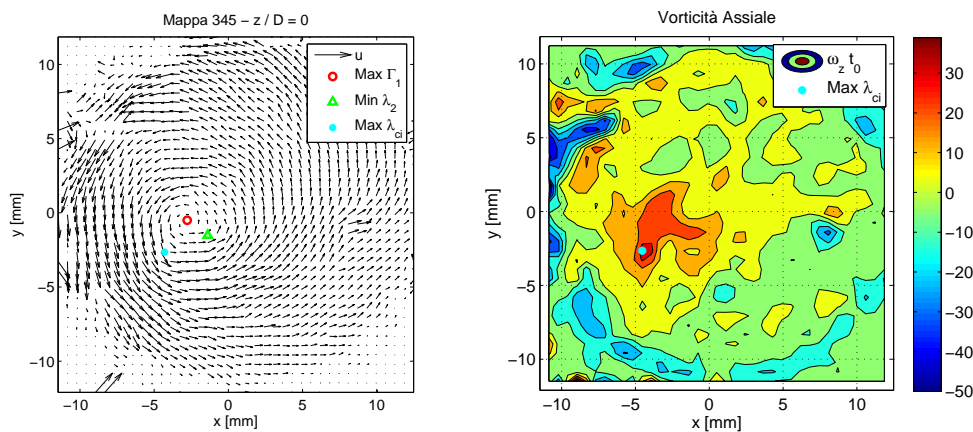


Figura 5.5: Identificazione del centro del vortice su una mappa tipo $z/D = 0$ e visualizzazione del campo di vorticità assiale

⁶Individuare visivamente un vortice non ha le caratteristiche di un metodo invariante Galileiano.

Capitolo 6

Elaborazioni

6.1 Campo di moto medio

La prima analisi eseguita sulle di mappe vettoriali è una media d'insieme punto per punto definita semplicemente come:

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k(x, y) \quad (6.1)$$

Il flusso medio, ad entrambe le quote considerate, è con buona approssimazione assial-simmetrico, come è possibile osservare in fig.6.1. Il punto centrale della struttura media ad ogni quota è stato anche utilizzato, in tutte le elaborazioni presentate, come origine del sistema di riferimento.

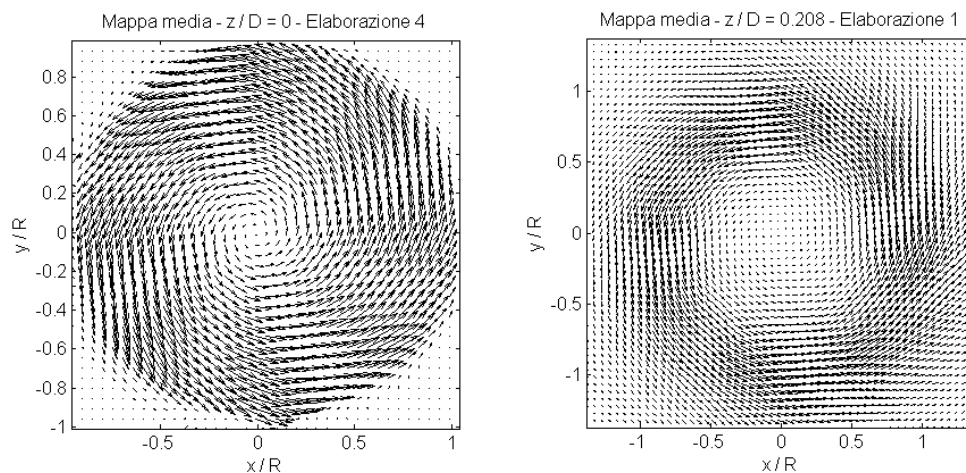


Figura 6.1: Mappa media, alle due quote considerate

6.1.1 Profili medi radiali

Si riportano anche i profili radiali di velocità (fig 6.2 e 6.4) e vorticità (fig. 6.3 e 6.5) in un sistema di riferimento cilindrico, centrato sull'asse di simmetria del vortice medio. Per realizzare tali profili si è scelta una direzione arbitraria, da cui le velocità tangenziali e radiali sono calcolate a partire dalle corrispondenti in coordinate cartesiane. Vengono messe in evidenza le differenze causate dai vari metodi di filtraggio, più evidenti sui profili di velocità tangenziale. Insieme al profilo di vorticità viene presentato il valore di λ_2 , stimatore della presenza di un nucleo vorticoso. È possibile osservare come la zona con $\lambda_2 < 0$ sia molto vasta, indicando per la struttura media un unico vortice di raggio $\simeq 0.7R$. Si può osservare, inoltre, come il profilo di velocità tangenziale sia convesso per $z/D = 0$ e di conseguenza la vorticità presenti un massimo sull'asse per poi decrescere verso la periferia, con una struttura paragonabile ad un vortice di Lamb (vedi appendice A). Nel caso $z/D = 0.208$, invece, la velocità tangenziale è concava e la vorticità aumenta allontanandosi dall'asse fino ad un punto di massimo a circa $r/R = 0.65$.

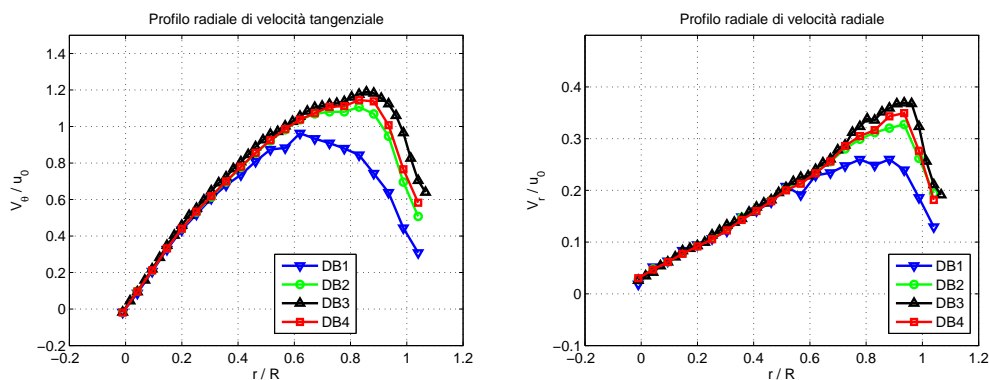


Figura 6.2: Profili medi di velocità, $z/D = 0$

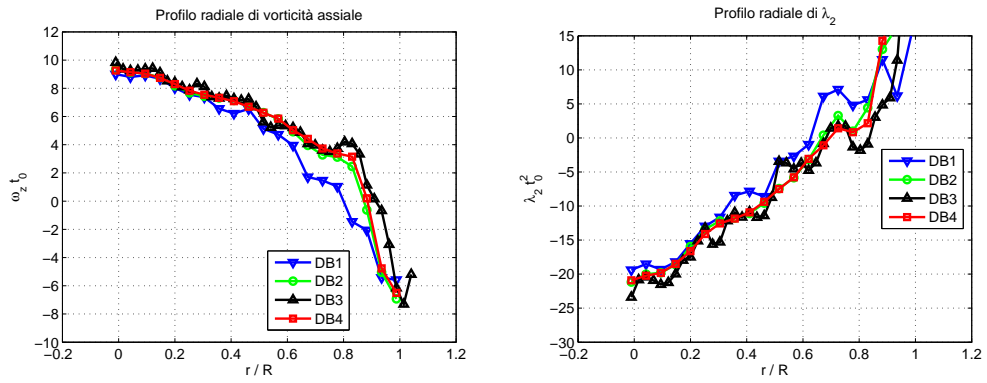


Figura 6.3: Profili medi di velocità, $z/D = 0$

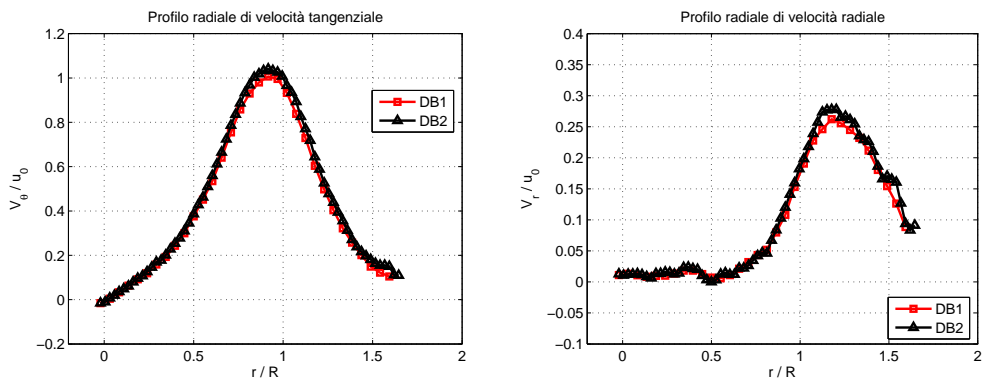


Figura 6.4: Profili medi di velocità, $z/D = 0.208$

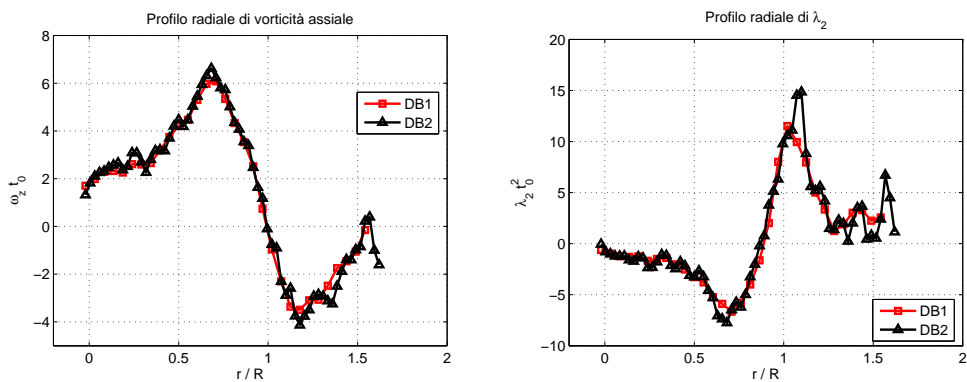


Figura 6.5: Profili medi di velocità, $z/D = 0.208$

6.2 Analisi spettrale

Al fine di esplorare il contenuto in frequenza della serie di mappe vettoriali, si osservano le fluttuazioni di una componente della velocità sull'asse medio del getto. Scelta la componente v diretta come l'asse y , si ricava la densità spettrale di potenza di v attraverso un algoritmo di FFT, riportata in fig. 6.6

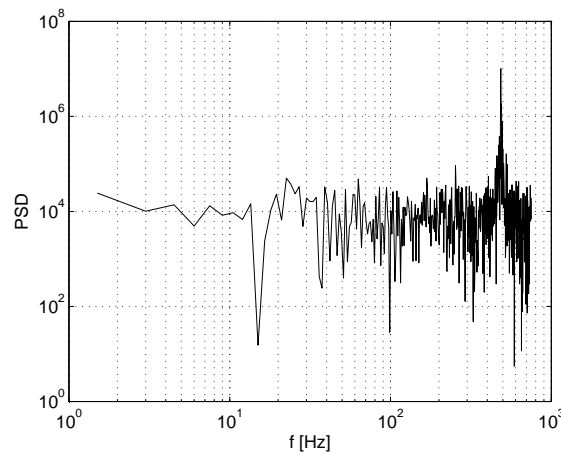


Figura 6.6: Densità spettrale di potenza di una componente di velocità sull'asse medio del getto.

La densità spettrale di potenza di v mostra chiaramente un picco per

$$f = 486 \pm 1.5\text{Hz} \quad (6.2)$$

Tale picco non rappresenta esaustivamente il contenuto in frequenza del segnale, che conserva energia elevata anche ad altre frequenze, rendendo evidente che ci si trova di fronte ad un fenomeno *quasi-periodico*. In ogni caso gli effetti instazionari più intensi sono da ricondurre al moto del PVC, in quanto fenomeno periodico dominante nel campo di moto.

Misure LDV su un getto libero generato dallo stesso bruciatore, a parità di S e Re , svolte da Mirelli [12], indicano un valore di $f_{pvc} = 470\text{Hz}$, inferiore del 3.4% a quanto qui ottenuto.

6.3 Analisi statistica della posizione del centro del vortice

Una volta raccolte le mappe vettoriali ad una data quota, si è svolta un'analisi statistica sulla posizione istantanea del centro del vortice rispetto al centro del vortice medio, origine del sistema di riferimento adottato. Avendo osserato una

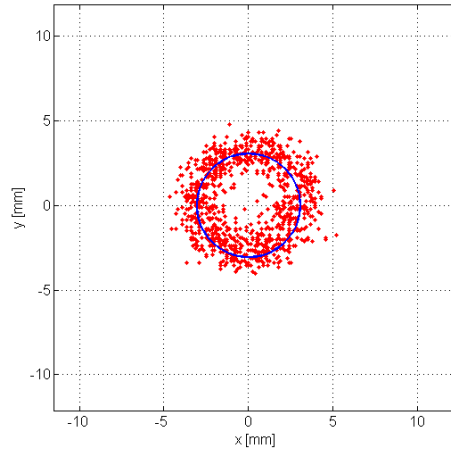


Figura 6.7: Distribuzione dei centri dei vortici identificati con il metodo Γ_1 .

distribuzione approssimativamente circolare delle posizioni del centro del vortice (vedi fig. 6.7), l'analisi è stata condotta sulla coordinata radiale ρ_{pvc} (fig. 6.8). I valori medi e le relative deviazioni standard sono riportate in tabella 6.1.

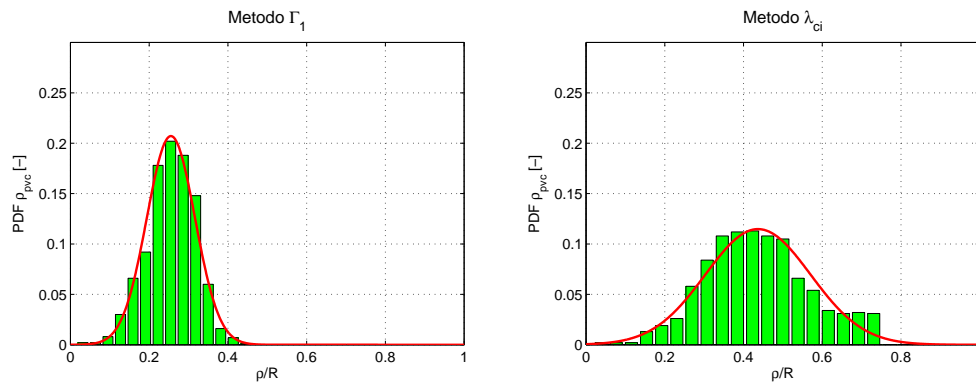


Figura 6.8: Densità di probabilità della posizione radiale del centro del vortice.

Le distribuzioni di probabilità della posizione del centro del vortice differiscono notevolmente in funzione del metodo adottato. Da un punto di vista teorico, è prevedibile che il metodo Γ_1 sottostimi la distanza ρ_{pvc} , in quanto il vortice si avvolge e precede nello stesso senso, dando luogo a fenomeni di relatività Galileiana. Il metodo λ_{ci} , d'altra parte, si rivela drammaticamente poco robusto rispetto alle mappe vettoriali provenienti da misure PIV. Nonostante esso fornisca un valore medio a priori plausibile, la distribuzione di probabilità lascia intendere

Metodo	μ_ρ/R	σ_ρ/R
Γ_1	0.2553	0.0613
λ_{ci}	0.4368	0.1337

Tabella 6.1: Media e varianza di ρ_{pvc}/R

che il centro del vortice potrebbe trovarsi ovunque all'interno del getto¹. L'analisi statistica dei risultati prodotti dai criteri di identificazione del centro del vortice non fornisce dunque risultati di facile interpretazione.

6.4 Media Condizionata

Come evidente dall'analisi fin qui condotta, nel flusso esistono strutture di grande scala che evolvono con periodicità abbastanza regolare. A causa della turbolenza, però, tali strutture risultano irregolari nelle mappe istantanee.

Allo scopo di identificare una struttura media realistica del PVC, che non tenga conto della turbolenza, ma consideri i parametri fondamentali della dinamica di un vortice in precessione (come il suo diametro, la sua distanza dall'asse del getto e la sua circolazione) si introduce un particolare tipo di *media condizionata*.

Seguendo quanto sviluppato da Garcìa-Villalba *et al.* [30], il metodo consiste nel definire un sistema di riferimento in rotazione insieme alla struttura, e nell'operare la media rispetto a questo sistema.

Se ci si trovasse di fronte ad un fenomeno perfettamente periodico, sarebbe sufficiente una rotazione regolare del sistema di riferimento alla velocità angolare caratteristica. Nel caso reale, invece, la precessione del PVC è *quasi-periodica*, ed effettuare una rotazione cieca alle reali variazioni può produrre un errore molto elevato e compromettere il significato della media.

La procedura proposta da [30] si può riassumere in tre fasi:

1. identificazione del centro del PVC in ogni mappa istantanea, di cui si calcola la posizione angolare rispetto ad un asse di riferimento

$$\theta_k = \arctan\left(\frac{y_{c,k}}{x_{c,k}}\right) \quad (6.3)$$

2. rotazione del sistema di riferimento, a sovrapporre l'asse di riferimento con il centro del vortice

$$\mathbf{u}_k^R = R(-\theta_k)\mathbf{u}_k \quad (6.4)$$

¹Gli altri metodi basati su grandezze differenziali mostrano le stesse problematiche, quando applicati alle mappe istantanee

3. media di insieme delle mappe ruotate

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^R \quad (6.5)$$

In tal modo non è più necessaria una definizione *a priori* della frequenza del fenomeno. Diventa invece fondamentale definire un metodo di identificazione di tale centro, che sia il più possibile accurato ed affidabile. Nella pratica della *media condizionata* sono stati utilizzati diversi metodi, tra cui: il minimo locale delle fluttuazioni di pressione ([30], LES) e il massimo della *swirling strength* ([31], misure PIV).

In questo lavoro di tesi, il centro del vortice è stato valutato calcolando il massimo della *swirling strength*, poichè invariante galileiano e indipendente da una ricostruzione della pressione. Tale metodo è soggetto all'amplificazione degli errori sperimentali sulle derivate della velocità, che sono stati attenuati con un approccio alle differenze finite di tipo integrale (sez. 4.5.2).

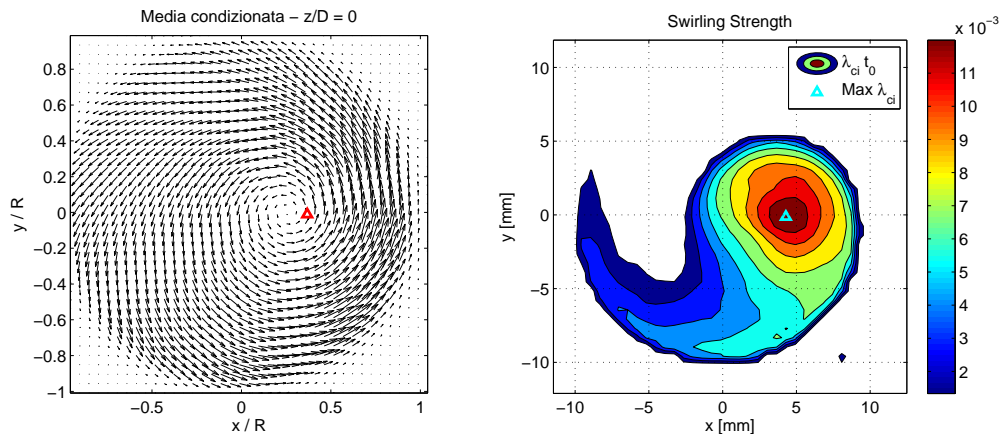


Figura 6.9: Mappa media condizionata, $z/D = 0$

La media condizionata alla quota $z/D = 0$ (fig. 6.9) rivela una intensa struttura vorticoso monopolare di grande scala, con centro ad una distanza di circa 5mm dall'asse del getto. Tale struttura ha un diametro dell'ordine del raggio del bruciatore e presenta una lunga coda nella direzione opposta a quella di precessione. Come osservato da Cala *et al.* [14], il vortice è allungato in direzione tangenziale, soprattutto nella direzione opposta al verso di precessione. Alla quota $z/D = 0.208$ (fig. 6.11) il nucleo del PVC si restringe e la zona vorticoso forma un anello completo attorno all'asse del getto. Coerentemente con quanto ipotizzato il PVC si allontana dall'asse del getto all'aumentare della quota, posizionandosi ora intorno a 7.5mm da esso. Il nucleo del vortice, ora

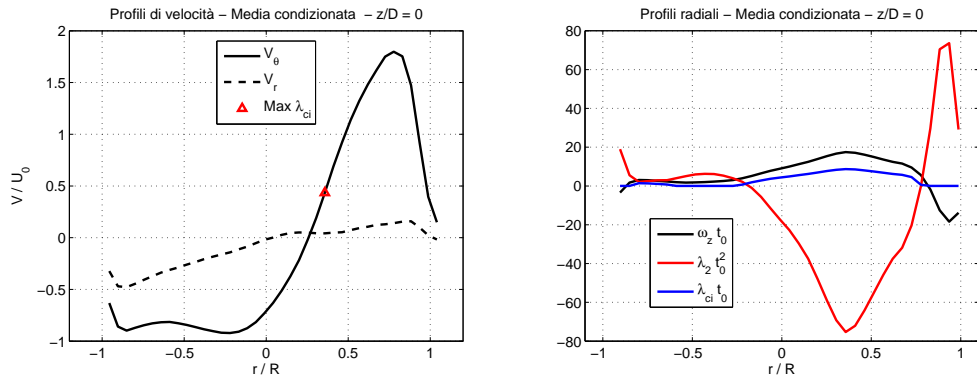


Figura 6.10: Profili radiali lungo l'asse di riferimento per la media condizionata, $z/D = 0$

decisamente compatto, mostra anche un allungamento in direzione radiale. È possibile osservare, inoltre, come il valore della swirling strength nel centro del vortice (λ_{ci} nelle fig. 6.10-b e 6.12-b) diminuisca notevolmente all'aumentare della quota, confermando la rapida dissipazione del PVC in direzione assiale.

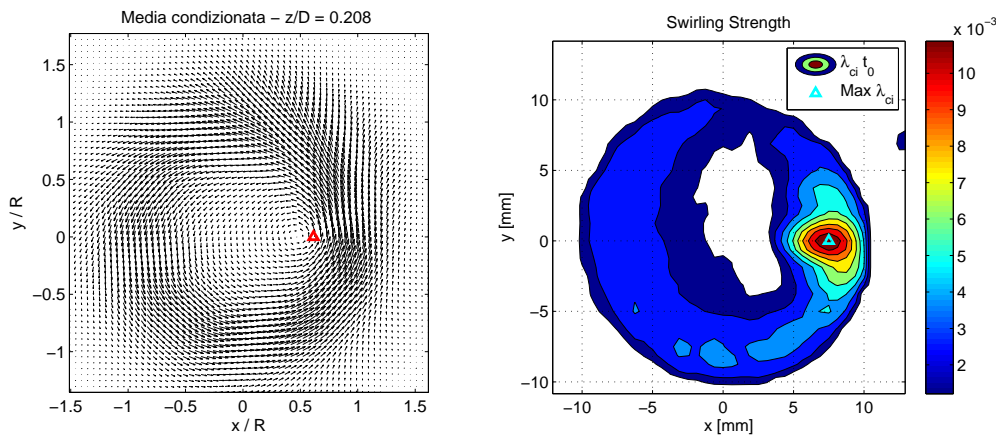


Figura 6.11: Mappa media condizionata, $z/D = 0.208$

6.4.1 Decomposizione di Reynolds

Un'alternativa per la realizzazione di una media condizionata, portata avanti da Midgley *et al.* [31] e Spencer *et al.* [32], consiste nell'applicare una decomposizione di Reynolds a monte delle operazioni descritte nella sez.6.4. A tale scopo, la velocità \mathbf{u} , in ogni punto della mappa vettoriale i -esima, viene suddivisa in due contributi:

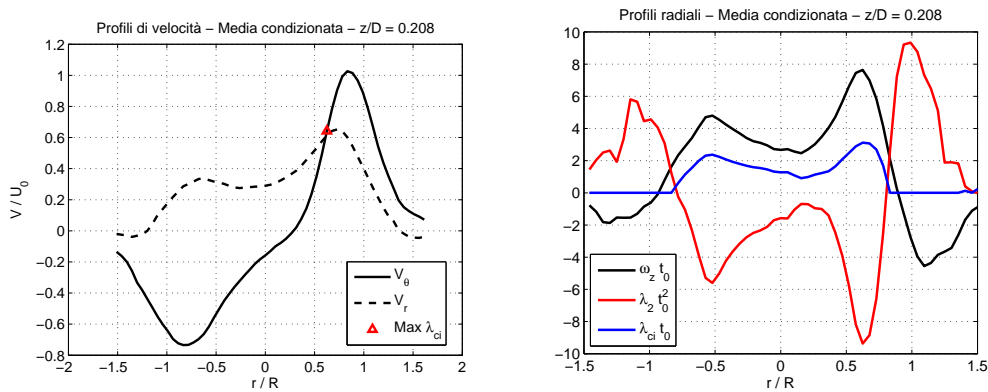


Figura 6.12: Profili radiali lungo l'asse di riferimento per la media condizionata, $z/D = 0.208$

- una velocità media $\bar{\mathbf{u}}$, valutata sulle N mappe come:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n) \quad (6.6)$$

- una variazione di velocità rispetto alla media, \mathbf{u}' , ricavata come differenza tra la velocità istantanea e la media:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (6.7)$$

Operando la media condizionata sulle sole velocità \mathbf{u}' , si ottiene una rappresentazione indipendente dalla media del fenomeno. Il campo di moto considerato non è stazionario, dunque nella componente fluttuante della velocità saranno racchiusi sia gli effetti della turbolenza che quelli relativi alla precessione del vortice. L'operazione di *media condizionata* andrà in seguito ad eliminare la turbolenza, mettendo in luce le caratteristiche medie del vortice in precessione².

Il campo vettoriale risultante dalla *media condizionata* su \mathbf{u}' alla quota $z/D = 0$ (fig. 6.13) mostra ancora una volta un vortice ben localizzato sull'asse di riferimento (asse x , positivo). Tale vortice non ha una struttura circolare, ma risulta ancora una volta allungato in direzione tangenziale. Nel campo di moto è presente anche un altro vortice, molto più debole, con circolazione di segno opposto rispetto al PVC (simile a quanto osservato da Midgley *et al.* [31]). La mappa di λ_{ci} , mostra una geometria del nucleo del vortice qualitativamente simile a quanto trovato in fig. 6.9, anche se la posizione del centro del vortice e l'estensione spaziale del nucleo non sono coincidenti.

²Nel caso in esame la mappa media temporale è pressochè assialsimmetrica, dunque tale procedura equivale a realizzare una media condizionata su \mathbf{u} per poi sottrarre la mappa media $\bar{\mathbf{u}}$ a posteriori.

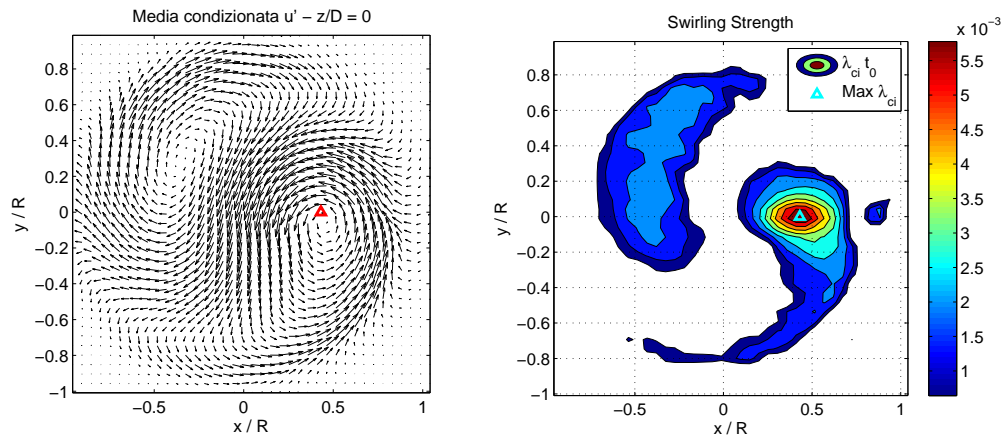


Figura 6.13: Mappa media condizionata delle fluttuazioni di velocità, $z/D = 0$

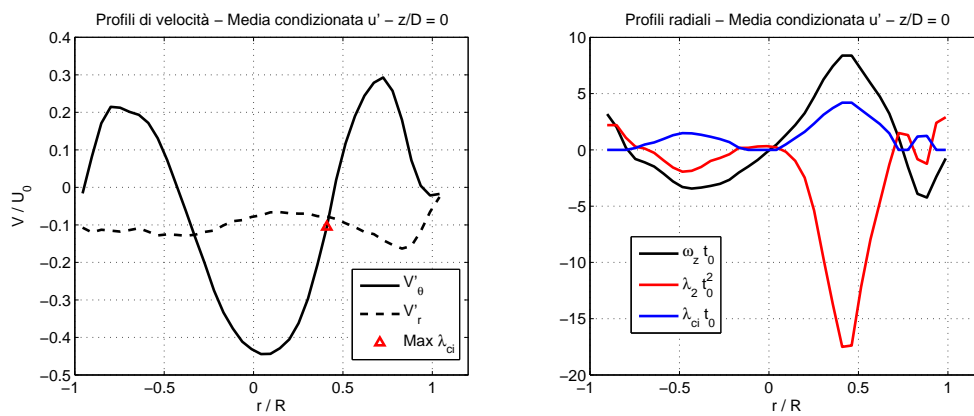


Figura 6.14: Profili radiali di velocità e vorticità lungo un raggio passante per il centro del vortice, $z/D = 0$

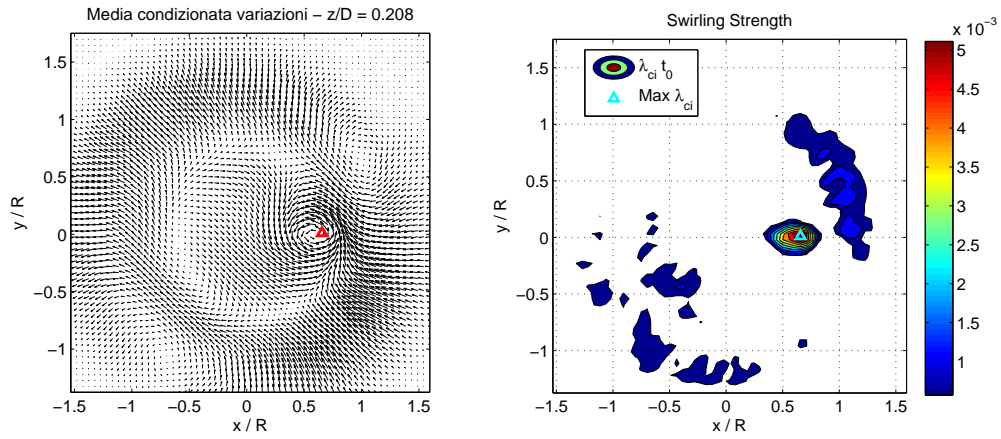


Figura 6.15: Mappa media condizionata delle fluttuazioni di velocità, $z/D = 0.208$

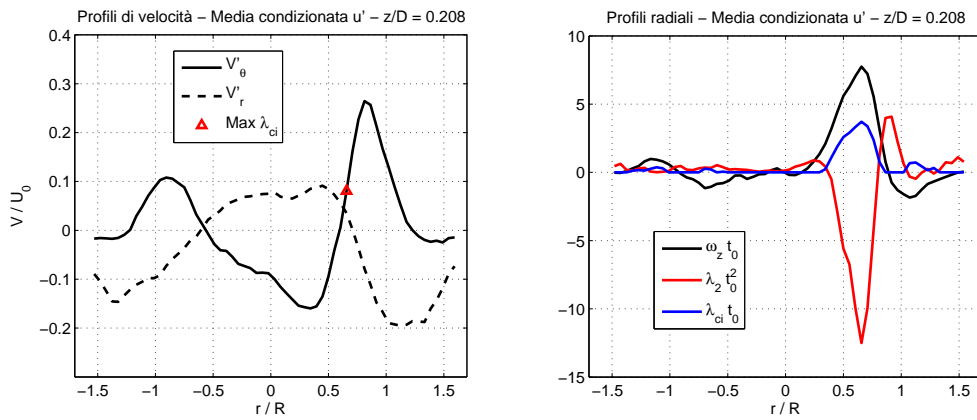


Figura 6.16: Profili radiali di velocità e vorticità lungo un raggio passante per il centro del vortice, $z/D = 0.208$

Alla quota $z/D = 0.208$ (fig. 6.15), il nucleo del vortice risulta compatto e privo di code, o dell'anello circolare osservato in precedenza. Nel campo di moto è presente un secondo vortice, molto più ampio e di intensità inferiore, che però si colloca più lontano dall'asse del getto, rispetto al PVC. È interessante osservare come, una volta rimosso il moto medio, l'intensità del PVC non risulti diminuire in modo così drastico con la quota, e come, nel caso a quota superiore, sia effettivamente superiore a quanto trovato in precedenza.

6.5 Analisi POD

Il campo di velocità che stiamo analizzando è composto da una fluttuazione di grande scala, relativamente regolare, a media non nulla, che rappresenta il moto del PVC e da una serie di fluttuazioni di scala più piccola generate dalla turbolenza (ed eventualmente da errori di misura). Idealmente si può dividere la velocità in un punto in questi due contributi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{pvc} + \mathbf{u}_t \quad (6.8)$$

Seguendo il lavoro di Grafiteaux *et al.* [23], ci si propone mettere in luce la componente di grande scala attraverso una Decomposizione Ortogonale Propria (vedi appendice B) del campo di moto.

La POD è stata sviluppata sulle due componenti della velocità, nel discreto, con il metodo delle "istantanee", attraverso una decomposizione ai valori singolari dell'insieme di dati che costituiscono le mappe vettoriali. Come osservabile in fig. 6.17-a, la decomposizione necessita di moltissimi modi per convergere all'energia totale delle mappe reali, fenomeno tipico dei campi di moto turbolenti. Analizzando l'energia delle fluttuazioni del singolo modo (fig.6.17-b), è possibile osservare come gran parte di essa sia contenuta nei primi 3 modi, per poi distribuirsi in modo pressochè uniforme in tutti i modi successivi. Questi tre modi permettono di ricostruire una struttura vorticoso ad una certa distanza dal centro della mappa e costituiscono il modello minimo per l'approssimazione di un vortice di grande scala.

Vengono presentate in fig. 6.18, a titolo di confronto, le prime sei forme modali della decomposizione, la prima delle quali è strettamente legata al moto medio.

6.5.1 Ricostruzione troncata

Al fine di illustrare le potenzialità di una ricostruzione troncata ad un numero ridotto di modi, si considera una mappa istantanea a $z/D = 0$, rappresentata in fig. 6.19 con la relativa distribuzione di *swirling strength*.

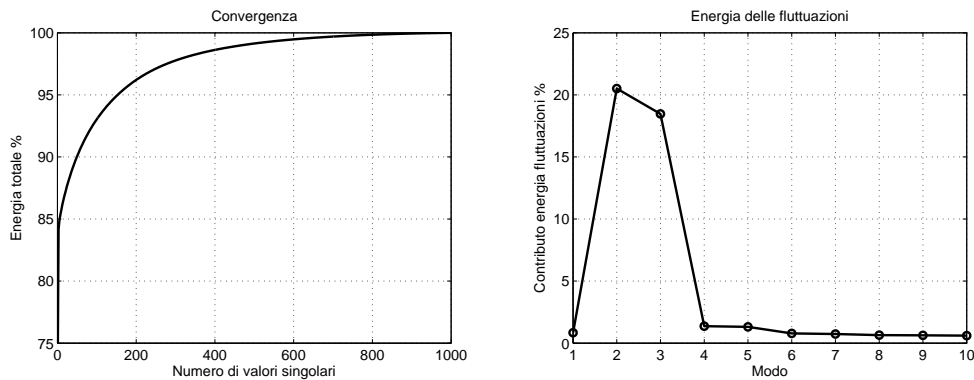


Figura 6.17: Caratteristiche energetiche della POD

Una ricostruzione troncata ai primi 3 modi (fig. 6.20) rappresenta correttamente un vortice di grande scala nella stessa posizione della struttura reale, e mostra una distribuzione di *swirling strength* regolare e molto simile a quanto ottenuto attraverso una procedura di media condizionata (vedi fig. 6.9).

Aumentando a 10 il numero di funzioni di base coinvolte nella ricostruzione (fig. 6.21), la mappa vettoriale si avvicina a quella reale e la distribuzione di λ_{ci} diventa meno regolare, anche se non sono stati inclusi effetti turbolenti di piccola scala.

La ricostruzione troncata si presenta dunque come un filtro regolabile in grado di isolare le componenti energeticamente preponderanti nell'insieme di dati analizzati, che almeno nel caso in esame corrispondono con le strutture di grande scala presenti nel campo di moto.

6.5.2 Analisi statistica della posizione del centro del vortice

In modo del tutto analogo a quanto svolto nella sez. 6.3, si è cercata la distribuzione di probabilità della posizione radiale del centro del vortice sulle 1000 mappe $z/D = 0$, ricostruite utilizzando solo i primi 10 modi della POD. Nonostante queste mappe contengano molte meno informazioni rispetto a quelle reali, l'analisi con il metodo Γ_1 dà sostanzialmente lo stesso risultato, ad ulteriore conferma della buona ricostruzione della struttura di grande scala. L'identificazione del centro del vortice con il metodo λ_2 non è più vittima degli effetti di amplificazione degli errori sperimentali, data la regolarità del campo di moto e delle sue derivate, e mostra una varianza decisamente ridotta rispetto al caso reale.

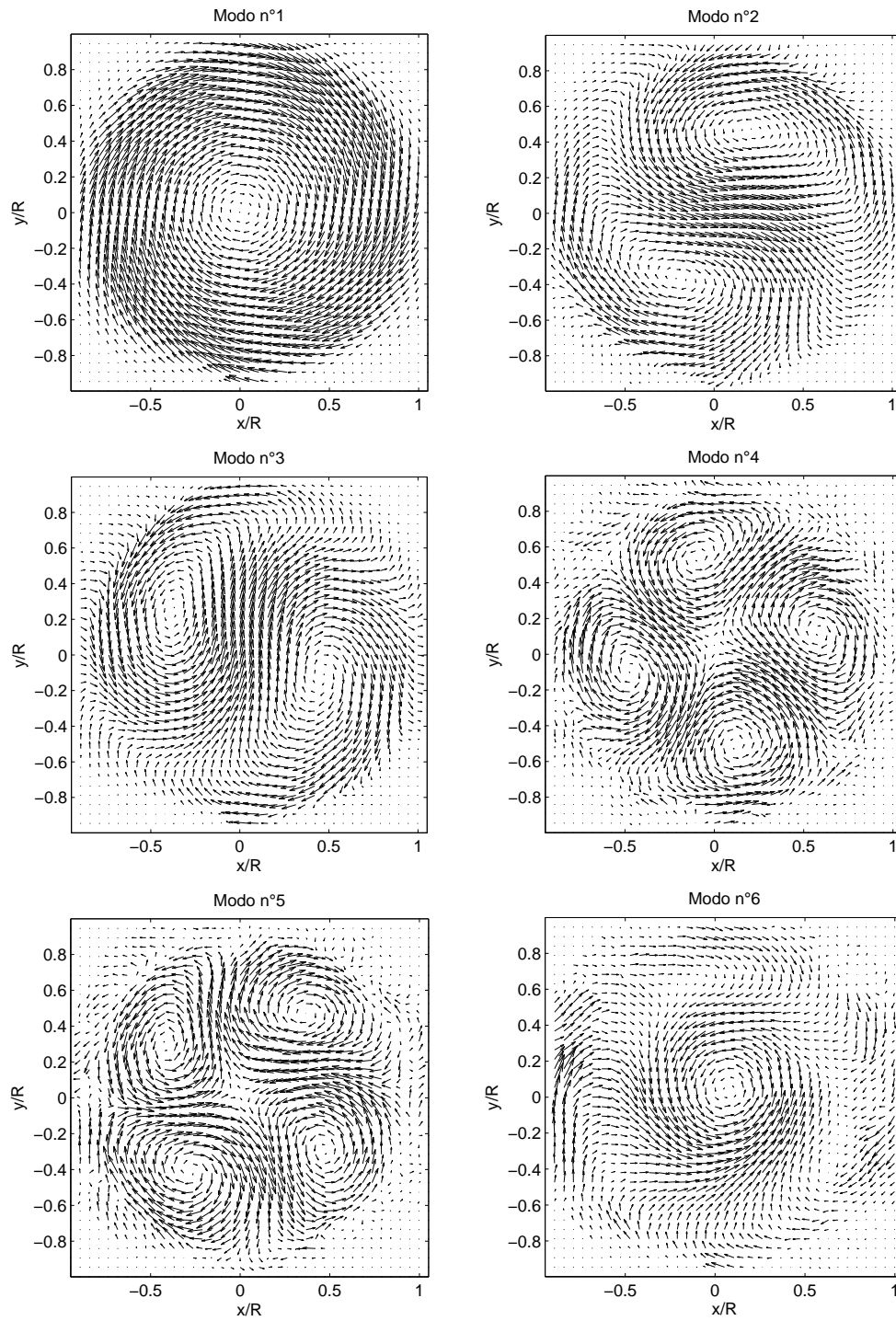


Figura 6.18: Prime funzioni di base della decomposizione ai valori singolari

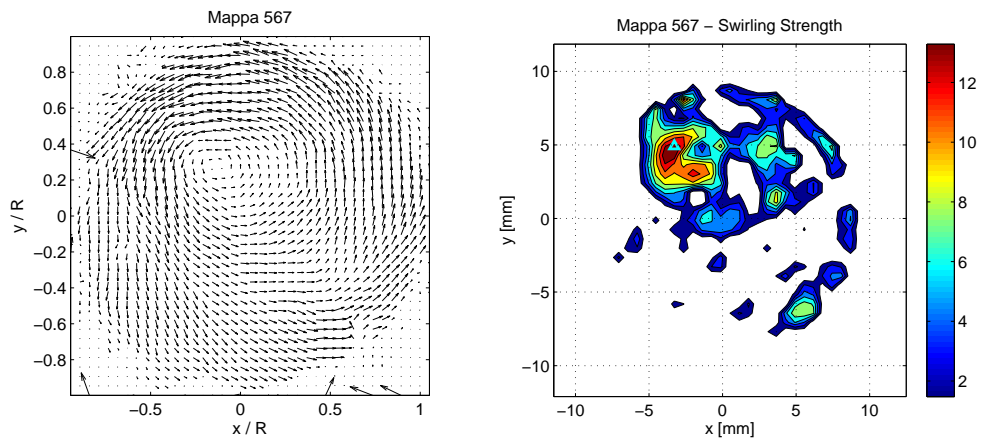


Figura 6.19: Mappa tipo

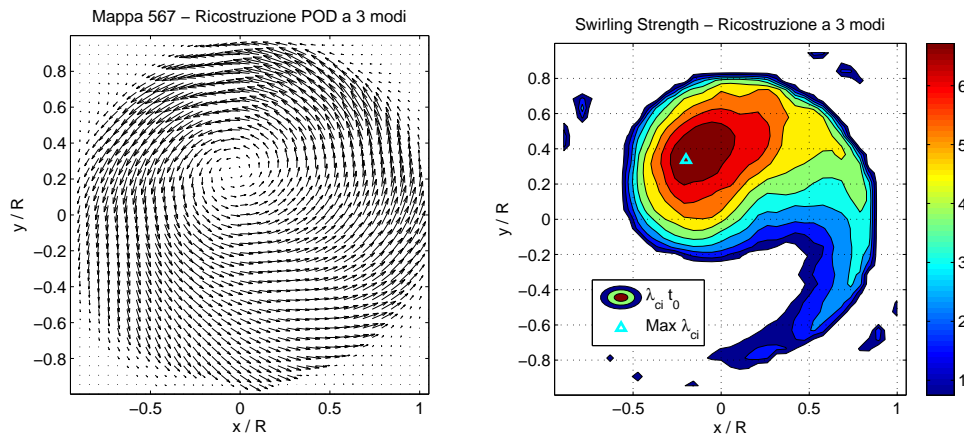


Figura 6.20: Mappa tipo ricostruita con i primi 3 modi

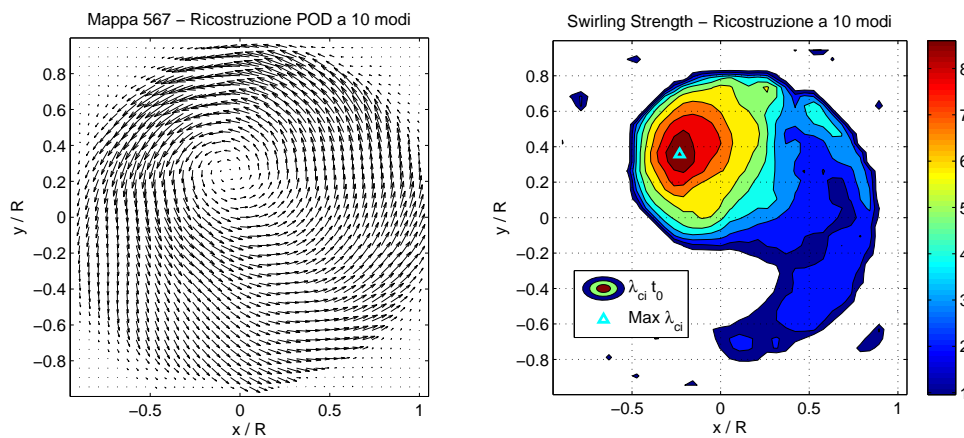


Figura 6.21: Mappa tipo ricostruita con i primi 10 modi

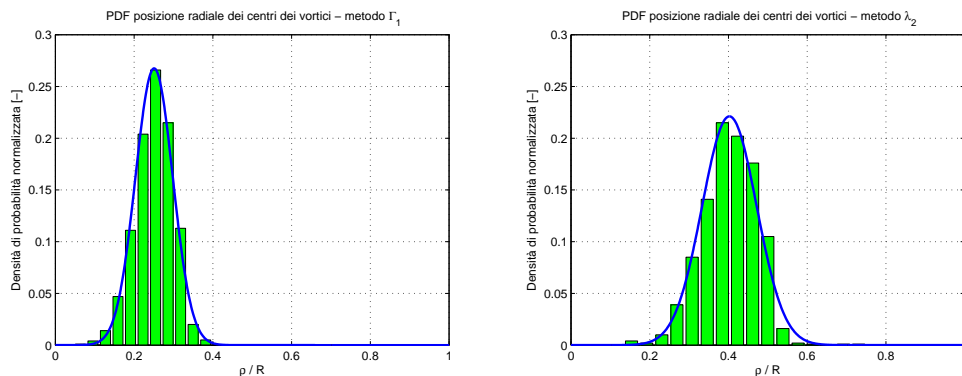


Figura 6.22: Densità di probabilità della posizione radiale del centro del vortice per le mappe ricostruite con i soli primi 10 modi della decomposizione ortogonale propria

6.6 Confronto con un modello di vortice

Al fine di verificare i metodi di analisi delle mappe vettoriali e di osservare le differenze tra il comportamento del PVC e quello di un fenomeno semplice, è stato implementato un modello minimale di precessione, composto da soli due vortici:

- un vortice di Lamb, di posizione, circolazione e raggio pari a quanto ricavato dalla media condizionata del fenomeno reale;
- un vortice rigido, collocato al centro della mappa, con velocità angolare tale da far precedere il centro del vortice di Lamb alla frequenza di 486Hz.

La somma dei due vortici produce il campo di moto e la distribuzione di swirling strength presentati in fig.6.23.

Ruotando effettivamente il sistema di vortici secondo la velocità imposta dall'atto di moto rigido e generando una serie di 1000 mappe vettoriali intervallate da un tempo di $0.667\mu s$, è stato generato un insieme di dati del tutto simile al caso reale. Tale insieme di dati è stato analizzato tramite la procedura della media condizionata con e senza decomposizione di Reynolds a monte (fig.6.25 e 6.24 rispettivamente).

Oltre a costituire un interessante caso test per i metodi di identificazione e media, l'analisi della media condizionata di un fenomeno semplice mostra come entrambe le procedure colgano correttamente il posizionamento del vortice nel campo di moto. La media condizionata su u restituisce esattamente la configurazione originaria, con una vorticità di fondo dovuta all'atto di moto rigido, ed un picco di λ_{ci} nel nucleo del vortice di Lamb. La media condizionata su u' mostra un secondo vortice, di intensità minore, che non è stato inserito nel

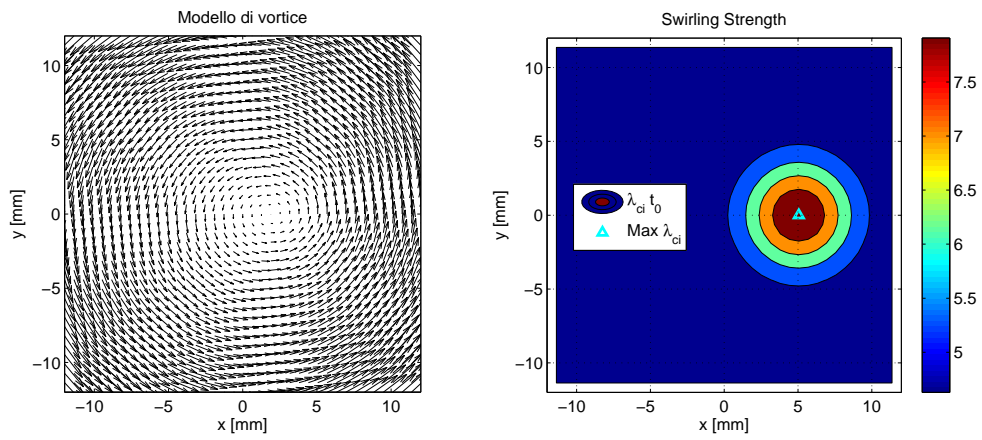


Figura 6.23: Modello di vortice in precessione

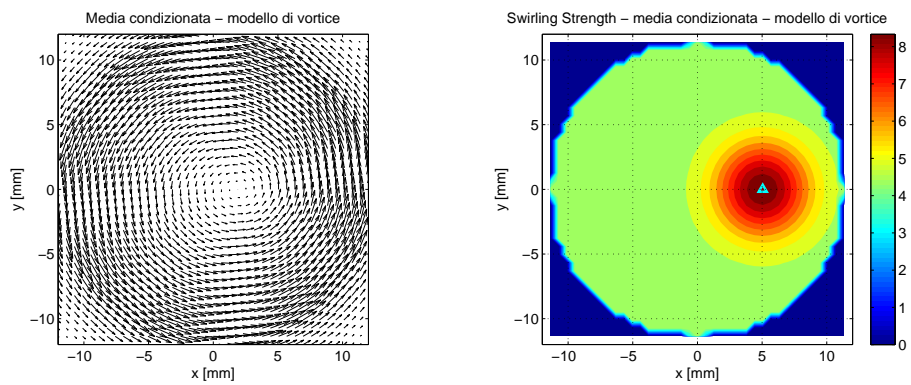


Figura 6.24: Modello di vortice in precessione: media condizionata

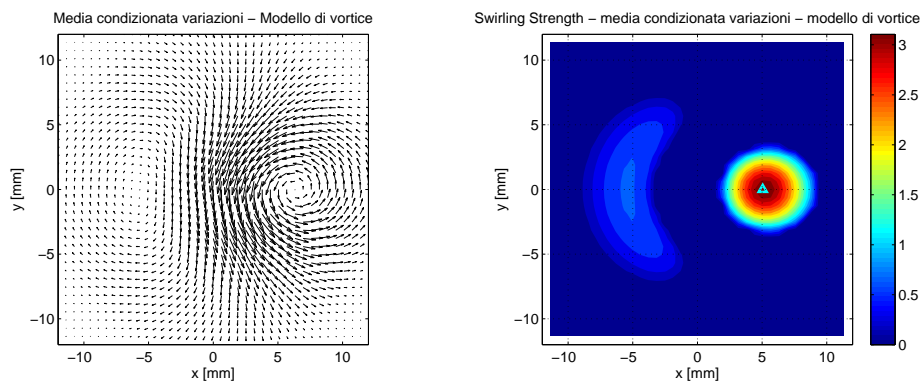


Figura 6.25: Modello di vortice in precessione: media condizionata della decomposizione di Reynolds

campo di moto, ma è tipico dell'applicazione di questo metodo. A parte questo fenomeno, la seconda metodologia elimina la vorticità di fondo e restituisce una visione più definita del nucleo vorticoso del PVC, dunque sembra essere la più promettente per determinare le effettive dimensioni del vortice. Le dimensioni e le caratteristiche dinamiche del modello sono state regolate sulle mappe a $z/D = 0$, ma è possibile verificare come anche le misure reali a $z/D = 0.208$ siano qualitativamente simili a quanto trovato.

Capitolo 7

Risultati più significativi

L'analisi delle misure PIV svolta in questo lavoro di tesi permette di trarre alcune conclusioni sull'efficacia delle metodologie utilizzate e sulla natura del vortice in precessione.

7.1 Analisi di vortici instazionari in un campo turbolento

I criteri più promettenti per la ricerca del centro del vortice, basati su grandezze differenziali, non si prestano all'analisi diretta di mappe PIV che non siano adeguatamente filtrate. La misura di due sole componenti di velocità in un moto fortemente tridimensionale, rende il problema ancora più critico. Al fine di estrapolare la struttura di grande scala del flusso è quindi necessario utilizzare procedure di *media condizionata* o *filtraggio*.

La *media condizionata* si rivela in grado di catturare tale struttura, eliminando la componente turbolenta dal campo di moto, in modo ancora più evidente quanto operata a valle di una decomposizione di Reynolds.

Una decomposizione ortogonale propria permette di ricostruire le mappe iniziali con un numero limitato di modi, realizzando un filtraggio ottimo dal punto di vista energetico. Il risultato della ricostruzione troncata su una singola mappa, almeno dal punto di vista della *swirling strength*, presenta una forte analogia con quanto trovato attraverso la *media condizionata*.

I criteri per l'identificazione dei vortici possono essere applicati correttamente a queste elaborazioni.

7.2 Struttura del Precessing Vortex Core

Per quanto riguarda la struttura del PVC, le caratteristiche chiave del vortice in precessione sono riassunte in tab. 7.1.

Metodo di analisi	Posizione (ρ/R)	Diametro (d/R)
Statistica mappe istantanee	0.437	—
Media condizionata \mathbf{u}	0.358	≈ 1
Media condizionata \mathbf{u}'	0.435	≈ 0.66
Ricostruzione POD a 3 modi	0.370	—
Ricostruzione POD a 10 modi	0.402	—

Tabella 7.1: Struttura del PVC a $z/D = 0$

I diversi criteri identificano il PVC ad una distanza media dall'asse compresa tra 4.3 e 5.3 mm. L'analisi statistica diretta delle mappe istantanee, nonostante la grande dispersione delle misure causata dalla poca robustezza degli stimatori differenziali, sembra restituire una posizione del centro del vortice in linea con le procedure che vanno a trascurare la struttura di piccola scala. La posizione del centro del vortice qui trovata differisce con quanto indicato da Martinelli *et al.* [11] ($r/R = 0.25$), probabilmente perchè tale misura era basata sui minimi della velocità e dunque non invariante Galileiana. La struttura generale del PVC, invece, è molto simile a quanto trovato da Cala *et al.* [14] attraverso misure LDV, così come il suo verso di avvolgimento e di precessione, che sono concordi con la rotazione del getto.

Un modello di vortice di Lamb in rotazione rigida intorno all'asse del getto non descrive compiutamente le caratteristiche dinamiche del fenomeno, anche esclusa la turbolenza. Nonostante ciò, esistono diverse analogie tra il comportamento del nucleo vorticoso reale e di quello modellizzato, soprattutto alla quota $z/D = 0.208$, dove tale nucleo si mostra, nella mappa media condizionata su \mathbf{u}' , compatto ed intenso, come nel caso modellizzato.

7.3 Sviluppi futuri

Nel presente lavoro di tesi sono state analizzate due sole componenti della velocità su due piani in un getto fortemente tridimensionale. Il naturale sviluppo di tale approccio, al fine di chiarire gli effetti che concorrono alla precessione del vortice, consisterebbe nell'applicare una PIV stereoscopica, in grado di misurare le tre componenti della velocità in un piano. Tale procedura, impegnativa per misure ad alta frequenza, non permetterebbe comunque di osservare le variazioni assiali delle grandezze in gioco e di ricostruire completamente il tensore $\nabla \mathbf{u}$. Una misura

PIV stereoscopica applicata in contemporanea su diversi piani ravvicinati, ad alta frequenza, garantirebbe una visione completa del campo di moto tridimensionale, ma al momento non costituisce una tecnologia consolidata, sia per la grande quantità di rilevatori e fasci laser necessari, sia per l'enorme mole di dati generata.

Appendice A

Modello di vortice piano

A.1 Vortice di Lamb

Il campo di moto in un vortice reale, piano, non stazionario e assialsimmetrico è caratterizzato da linee di flusso circolari concentriche e da una distribuzione continua della vorticità. Un vortice piano non stazionario si può produrre, almeno concettualmente, generando istantaneamente una circolazione Γ_0 in un punto di un piano (r, θ) dove, al passare del tempo, la vorticità associata a Γ_0 si diffonderà a raggi crescenti, fino a raggiungere l'infinito. La soluzione esatta delle equazioni differenziali che descrivono questa corrente viene denominata vortice di Lamb ([33]), Lamb-Oseen o Oseen-Hamel.

Le condizioni di simmetria assiale e di circolarità e concentricità delle linee di flusso comportano che la soluzione è perfettamente assial-simmetrica (indipendente da θ) e che la componente radiale della velocità v_r è ovunque nulla. Analizzando un moto bidimensionale si considera nulla ogni derivata in direzione z , così come la componente v_z della velocità.

Il campo di moto è descritto compiutamente dalla sola velocità azimutale v_θ che evolve nel tempo rispettando le equazioni di bilancio di massa e quantità di moto, notevolmente semplificate dalle ipotesi introdotte:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

Risolvendo il sistema si ottiene una distribuzione di velocità tangenziale crescente-decrescente, come osservabile in fig. A.1.

$$v_{\theta}(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right] \quad (\text{A.4})$$

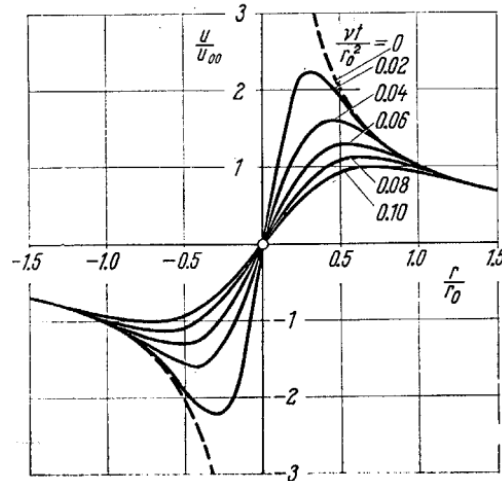


Figura A.1: Velocità tangenziale adimensionale in funzione del raggio e del tempo adimensionali in un vortice di Lamb

Dal rotore di tale distribuzione si ottiene la vorticità ω_z :

$$\omega_z(r, t) = \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad (\text{A.5})$$

Ad un dato tempo t , è possibile dividere il campo di moto in tre regioni:

- una regione *esterna*, per $r \gg \sqrt{4\nu t}$, dove il flusso è pressochè irrotazionale;
- una regione *interna*, per $r \ll \sqrt{4\nu t}$, dove la velocità aumenta linearmente con il raggio, come in una rotazione rigida;
- una regione di transizione, eventualmente ampia, intorno a $r = r_0 = \sqrt{4\nu t}$, che rappresenta il raggio del nucleo vorticoso in espansione nel tempo.

A.2 Vortice di Rankine

Il campo di moto in un vortice piano, stazionario o meno, può essere descritto con il modello approssimato di Rankine. Questo modello non è globalmente una soluzione dell'equazione di Navier-Stokes ma, tuttavia, esso è in grado di

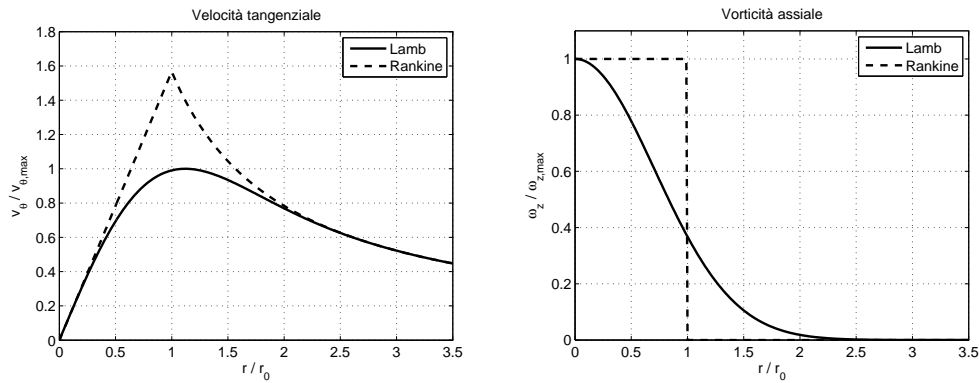


Figura A.2: Modello di Lamb e di Rankine di un vortice piano a circolazione e raggio unitari

approssimare in modo più che soddisfacente la soluzione esatta istantanea, almeno per quanto concerne il campo di velocità e di pressione indotti ad una certa distanza (dell'ordine di qualche diametro) dall'asse del vortice.

L'approssimazione consiste nel considerare solo due regioni del campo di moto:

- un nucleo di raggio r_0 , in cui l'atto di moto è di pura rotazione rigida, nel quale è concentrata tutta la circolazione Γ_0 ;
- una regione esterna completamente irrotazionale.

La soluzione per la velocità tangenziale, nel caso stazionario, diventa:

$$v_\theta(r) = \begin{cases} \Omega_1 r & \text{per } r < r_0 \\ \frac{\Omega_2}{r} & \text{per } r > r_0 \end{cases}$$

mentre la vorticità vale semplicemente:

$$\omega_z(r) = \begin{cases} 2\Omega_1 & \text{per } r < r_0 \\ 0 & \text{per } r > r_0 \end{cases}$$

dove, Ω_2 è legata alla circolazione complessiva del nucleo:

$$\Omega_2 = \frac{1}{2\pi} \Gamma_0 \tag{A.6}$$

mentre Ω_1 è la velocità angolare del moto rigido:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \omega_z = \frac{\Gamma_0}{2\pi r_0^2} \tag{A.7}$$

Appendice B

Decomposizione Ortogonale Propria

Si supponga di voler approssimare una serie di funzioni scalari dello spazio \mathbf{x} su un dominio Ω

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u^k(\mathbf{x})\} \in L^2(\Omega) \quad (\text{B.1})$$

attraverso la loro proiezione su di una base lineare a dimensione finita, $\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^M$. In generale si otterrà:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^M a_j \phi_j(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

Se le funzioni $\phi_j(\mathbf{x})$ sono tali da garantire la convergenza al valore esatto per $M \rightarrow \infty$, allora $\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^\infty$ costituisce una base per $L^2(\Omega)$. Una rappresentazione di questo tipo non è definita univocamente: si potrebbero utilizzare polinomi di Legendre o di Chebishev, o una serie di Fourier, o altri tipi di funzioni definite a priori.

B.1 Caratteristiche fondamentali

La Decomposizione Ortogonale Propria (d'ora in poi POD) si occupa di fornire una base $\phi_j(\mathbf{x})$ con due particolari caratteristiche:

1. *ortonormale*, cioè:

$$\int \phi_{j_1}(\mathbf{x}) \phi_{j_2}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } j_1 = j_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. base *ottima*, cioè tale da generare la migliore proiezione possibile per \mathbf{u} fissato il numero di termini, in media.

$$\frac{\langle |(u, \phi_j)|^2 \rangle}{\|\phi_j\|^2} = \max_{\phi \in L^2(\Omega)} \frac{\langle |(u, \phi)|^2 \rangle}{\|\phi\|^2} \quad (\text{B.3})$$

dove con la notazione $\langle \cdot \rangle$ si indica una media sulle funzioni della serie, mentre (\cdot, \cdot) è il prodotto scalare in L^2 .

La seconda condizione permette di concludere anche che una POD recupera la frazione maggiore di energia del segnale¹, dato il numero di funzioni di base, rispetto a qualsiasi altra decomposizione lineare. Tale metodologia si presta dunque alla realizzazione di modelli ridotti e all'analisi delle componenti più significative dal punto di vista energetico in un insieme di dati sperimentali.

Si sottolinea l'importanza dell'operatore di media, in quanto una base POD può rappresentare in modo arbitrariamente accurato solo gli elementi *rilevanti* del segnale, cioè le strutture (spaziali) che hanno energia finita in media.

B.1.1 Domini

Nel presente lavoro di tesi (ed in generale nell'analisi di fenomeni turbolenti) siamo interessati a decomporre un segnale funzione del tempo e dello spazio, $u(\mathbf{x}, t)$. Il dominio di tale segnale è dato dal prodotto cartesiano tra la sua estensione spaziale e quella temporale.

Ad esempio, se si avesse

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < t < T \end{cases}$$

allora

$$\Omega = [0, 1] \times [0, T] \quad (\text{B.4})$$

ed il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ coinvolgerebbe un'integrazione nel tempo. Dato il particolare interesse a sviluppare modelli di basso livello delle strutture turbolente e ad identificare la struttura istantanea di grande scala, è possibile conservare la formulazione precedente riducendo la base alla sola parte *spaziale* di Ω :

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \quad (\text{B.5})$$

dove gli $a_k(t)$, ora coordinate modali del problema, variano nel tempo.

Nel caso di un fenomeno *statisticamente stazionario* si può porre arbitrariamente:

$$u^k(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_k) \quad (\text{B.6})$$

applicando quanto sviluppato in precedenza.

B.2 Applicazione ad uno spazio a dimensione finita

Nell'analisi di mappe vettoriali si dispone di un insieme di m misure puntuali delle due componenti della velocità, ripetute ad N istanti di tempo. Come suggerito da

¹Nel caso fluidodinamico incomprimibile, energia cinetica del fluido.

Chatterjee [34], si ordinano tutti i dati relativi all'analisi PIV in una sola matrice $A_{N \times 2m}$, tale per cui l'elemento A_{ij} rappresenti la misura di una componente della velocità nel punto $\mathbf{x}(j)$ al tempo $t(i)$.

$$A = \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}_1, t_1) & \dots & u(\mathbf{x}_m, t_1) & v(\mathbf{x}_1, t_1) & \dots & v(\mathbf{x}_m, t_1) \\ u(\mathbf{x}_1, t_2) & \dots & u(\mathbf{x}_m, t_2) & v(\mathbf{x}_1, t_2) & \dots & v(\mathbf{x}_m, t_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(\mathbf{x}_1, t_N) & \dots & u(\mathbf{x}_m, t_N) & v(\mathbf{x}_1, t_N) & \dots & v(\mathbf{x}_m, t_N) \end{bmatrix}_{N \times 2m}$$

dove $N = 1000$ e

$$m = \begin{cases} 39 \times 39 = 1521 & \text{per } z/D = 0 \\ 61 \times 61 = 3721 & \text{per } z/D = 0.208 \end{cases}$$

B.2.1 Decomposizione ai valori singolari

A questo punto si effettua una decomposizione ai valori singolari (SVD) di A :

$$A = U \Sigma V^T \tag{B.7}$$

dove

- U è una matrice ortogonale $N \times N$;
- V è una matrice ortogonale $2m \times 2m$;
- Σ è una matrice $N \times 2m$ con elementi non nulli solo sulla diagonale.

Gli $r = \min(N, 2m)$ elementi Σ_{ii} di Σ , nel nostro caso 1000, costituiscono i valori singolari σ_i di A , sono univocamente definiti e non negativi.

Mettendo i valori singolari in ordine decrescente

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0 \tag{B.8}$$

è possibile osservare che:

- il rango di A equivale al numero di valori singolari non nulli;
- i quadrati dei valori singolari coincidono con i primi r autovalori di AA^T , ordinati allo stesso modo;
- se A è simmetrica definita positiva ² i suoi valori singolari coincidono con gli autovalori.

²Non è in generale il caso di misure sperimentali.

La rappresentazione ottenuta dalla SVD è del tutto equivalente ad una combinazione lineare di funzioni dello spazio: scegliendo infatti $Q = U\Sigma$, si può esplicitare la relazione:

$$A = Q V^T = \sum_{k=1}^{2m} q_k v_k^T \quad (\text{B.9})$$

quindi le coordinate $a_k(t)$ corrispondono alle colonne q_k di $U\Sigma$, mentre le funzioni di base $\phi_k(\mathbf{x})$ vengono estratte dalle righe v_k^T di V^T . La decomposizione ai valori singolari rispetta le proprietà fondamentali della POD, in quanto:

1. V è una matrice ortogonale, dunque le colonne v_k sono *ortonormali*;
2. restringendo Σ ai primi K valori singolari, si ottiene una approssimazione di A :

$$A_K = U\Sigma_K V^T \quad (\text{B.10})$$

È possibile dimostrare che non esiste un'altra matrice di rango K più vicina ad A di quanto sia A_K , nella norma di Frobenius³. Dunque la decomposizione è anche *ottima*.

³Somma dei quadrati di tutti gli elementi.

Bibliografia

- [1] A.K. Gupta, D.G. Lilley e N Syred: *Swirl Flows*. Energy & Engineering Science. Abacus press, 1984.
- [2] P. Billant, J.M. Chomaz e P. Huerre: *Experimental study of vortex breakdown in swirling jets*. Journal of Fluid Mechanics, 376:183–219, 1998.
- [3] O. Lucca-Negro e T. O’Doherty: *Vortex breakdown: a review*. Progress in Energy Combustion Science, 27(4):431–481, 2001.
- [4] T. Sarpkaya: *On stationary and traveling vortex breakdown phenomenon*. Journal of Fluid Mechanics, 45:545–559, 1971.
- [5] S. Leibovich: *The structure of vortex breakdown*. Annual Review of Fluid Mechanics, 10:221–246, 1978.
- [6] F. Novak e T. Sarpkaya: *Turbulent Vortex Breakdown at High Reynolds Numbers*. AIAA Journal, 38(5):825–834, 2000.
- [7] F. Martinelli: *Analysis of the precessing vortex core in a free swirling jet*. tesi di laurea, Politecnico di Milano, 2005.
- [8] T.B. Benjamin: *Theory of vortex breakdown phenomenon*. Journal of Fluid Mechanics, 14:593–629, 1962.
- [9] M.P. Escudier e J.J. Keller: *Vortex breakdown: a two-stage transition*. CP No.342 Aerodynamics of Vortical Flows in Three Dimensions Paper 25, AGARD, 1983.
- [10] M.G. Hall: *The structure of concentrated vortex cores*. Progress in Aerospace Sciences, 7:53–110, 1966.
- [11] F. Martinelli, A. Olivani e A. Coghe: *Experimental analysis of the precessing vortex core in a free swirling jet*. Experiments in Fluids, 42:827–839, 2007.
- [12] F. Mirelli: *Analisi sperimentale della struttura di un getto libero isoterma al variare del grado di swirl*. tesi di laurea, Politecnico di Milano, 2009.

BIBLIOGRAFIA

- [13] D.C. Bottalico: *Caratterizzazione sperimentale del fenomeno del PVC in un getto libero isoterma ad elevato grado di swirl*. tesi di laurea, Politecnico di Milano, 2007.
- [14] C.E. Cala, E.C. Fernandes, M.V. Heitor e S.I. Shtork: *Coherent structures in unsteady swirling jet flow*. *Experiments in Fluids*, 40:267–276, 2006.
- [15] C.E. Cala, E.C. Fernandes, M.V. Heitor e S.I. Shtork: *LDA analysis of PVC-central recirculation zone interaction in a model vortex burner*. Nel *12th International Symposium On Applications of Laser Techniques*, Lisbona, luglio 2004.
- [16] Dantec Measurement Technology: *FlowMap Particle Image Velocimetry Instrumentation - User Guide*, 1998.
- [17] R.D. Keane e R.J. Adrian: *Theory of cross-correlation analysis of PIV images*. *Applied Scientific Research*, 49:191–215, 1992.
- [18] M. Raffel, C.E. Willert, S.T. Wereley e J. Kompenhans: *Particle Image Velocimetry, A Pratical Guide*. Springer, Berlin, 2007.
- [19] H.J. Lugt: *Recent development of Theoretical and Experimental Fluid Mechanics*, capitolo The dilemma of defining a vortex. Springer, 1979. pp. 309-321.
- [20] S.K. Robinson: *Coherent motion in turbulent boundary layer*. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23:601–639, 1991.
- [21] A. Baron: *Dispense del corso di Fluidodinamica*. Politecnico di Milano, 2001.
- [22] N. Grosjean, L. Grafiteaux, M. Michard, W. Hubner, C. Tropea e J. Volkert: *Combining LDA and PIV for turbulence measurements in unsteady swirling flows*. *Measurement Science and Technology*, 8:1523–1532, 1997.
- [23] L. Grafiteaux, M. Michard e N. Grosjean: *Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows*. *Measurement Science and Technology*, 12:1422–1429, 2001.
- [24] J. Jeong e F. Hussain: *On the identification of a vortex*. *Journal of Fluid Mechanics*, 285:69–94, 1995.
- [25] M.S. Chong, A.E. Perry e B.J. Cantwell: *A general classification of three-dimensional flow fields*. *The Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 2(5):765–777, 1990.

-
- [26] J. Zhou, R.J. Adrian, S. Balachandar e T.M. Kendall: *Mechanism for generating coherent packets of hairpin vortices*. Journal of Fluid Mechanics, 387:353–396, 1999.
- [27] J.C.R. Hunt, A.A. Wray e P. Moin: *Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows*. report CTR-S88, Center for turbulence research, 1988. pp. 193-208.
- [28] R. Cucitore, M. Quadrio e A. Baron: *On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex*. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 18(2):261–282, 1999.
- [29] P. Chakraborty, S. Balachand e R.J. Adrian: *On the relationships between local vortex identification schemes*. Journal of Fluid Mechanics, 535(-1):189–214, 2005.
- [30] M. García-Villalba, J. Fröhlich e W. Rodi: *Numerical Simulations of Isothermal Flow in a Swirl Burner*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 129:377–386, 2007.
- [31] K. Midgley, A. Spencer e J.J. McGuirk: *Unsteady Flow Structures in Radial Swirler Fed Fuel Injectors*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 127:755–764, 2005.
- [32] A. Spencer, J.J. McGuirk e K. Midgley: *Vortex Breakdown in Swirling Fuel Injector Flows*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 130(021503), 2008.
- [33] H. Lamb: *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
- [34] A. Chatterjee: *An introduction to the proper orthogonal decomposition*. Current Science: Computational Science, 78(4):808–817, Aprile 2000.
- [35] P. Holmes, J.L. Lumley e G. Berkooz: *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press, 1996.