

POLITECNICO DI MILANO  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE  
CORSO DI STUDI IN  
INGEGNERIA AERONAUTICA



TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

STUDIO DELLA STABILITÀ DEL FILM LIQUIDO IN  
COMBUSTIBILI PARAFFINICI PER APPLICAZIONI PROPULSIVE  
AEROSPAZIALI

candidato:

FILIPPO FRANCHI

matr. 711559

relatore:

prof. LUCIANO GALFETTI

correlatori:

prof. PAOLO BARBANTE

dott. LORENZO TAMELLINI

ANNO ACCADEMICO 2008-2009

## Sommar

Il presente lavoro si colloca nell'ambito disciplinare della propulsione ibrida. Si concentra in particolare sullo studio dell'instabilità di un sottile strato liquido che, per certi combustibili e sotto determinate condizioni termofluidodinamiche, si genera all'interno di questi sistemi propulsivi, in corrispondenza dell'interfaccia tra il grano solido e il flusso gassoso di ossidante.

Dopo aver implementato un programma capace, sotto opportune approssimazioni, di risolvere le equazioni di moto di un fluido a superficie libera, sono state svolte alcune simulazioni riguardanti uno strato liquido di paraffina, sottoposto a condizioni affini a quelle ritrovabili all'interno di un propulsore. Tali simulazioni sono mirate a determinare l'effetto dei principali parametri in gioco sull'instabilità del flusso. I risultati di maggiore interesse riguardano la variazione del parametro di amplificazione in funzione della velocità (indisturbata) del flusso di ossidante, della velocità di soffiamento dello strato limite, delle forze di volume e dello spessore del film.

## Summary

The present work is about hybrid propulsion. It is mainly focused on the stability's evaluation for a thin liquid film that takes place in these types of propulsion systems at the solid - liquid interface, for a range of propellants combinations, under specific fluid-dynamic conditions.

After implementing a numeric code for the solution of the motion equations of free surface flows, some simulations about a thin paraffine film have been developed, using conditions close to the typical ones of hybrid propulsion. The objective is to evaluate the effects of the main parameters on the flow stability. The most interesting results concern the variations of the amplification parameter, function of the oxidizer flow velocity, the blowing parameter, the volume forces and the film thickness.

## Ringraziamenti

Prima di tutto vorrei ringraziare il professor Luciano Galfetti e il professor Paolo Barbante per il tempo dedicatomi. Un particolare ringraziamento anche al dottor Lorenzo Tamellini e al professor Edie Miglio, l'apporto dei quali è stato fondamentale per questo lavoro.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>15</b>
1.1	Motivazioni del lavoro . . . . .	16
1.2	Obiettivi della tesi . . . . .	17
1.3	Piano di presentazione . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Introduzione al problema</b>	<b>20</b>
2.1	Il propulsore ibrido . . . . .	20
2.2	La fenomenologia dell' <i>entrainment</i> . . . . .	23
2.3	Lavori precedenti . . . . .	26
2.3.1	L'approccio di Craik . . . . .	26
2.3.2	L'approccio di Karabeyoglu . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Equazioni, metodo risolutivo e implementazione</b>	<b>33</b>
3.1	Le equazioni di governo . . . . .	33
3.2	<i>STRATOS<sub>2D</sub></i> . . . . .	35
3.2.1	Condizioni iniziali . . . . .	38
3.2.2	Condizioni a contorno . . . . .	39
3.2.3	Condizione integrale della superficie libera . . . . .	44

---

3.3	Discretizzazione in tempo . . . . .	45
3.4	Formulazione debole . . . . .	48
3.5	Discretizzazione in spazio . . . . .	54
3.6	Aspetti operativi . . . . .	57
3.6.1	Costruzione del problema algebrico . . . . .	67
3.6.2	Aspetti implementativi . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>73</b>
4.1	Sistemi di postprocessing e visualizzazione . . . . .	75
4.1.1	La visualizzazione <i>PlotStratos</i> . . . . .	76
4.1.2	Il fattore di amplificazione . . . . .	77
4.1.3	Lo spettro in frequenza . . . . .	79
4.2	Caratterizzazione della Paraffina . . . . .	80
4.2.1	Numeri d'onda . . . . .	80
4.2.2	Tensione superficiale . . . . .	87
4.2.3	Effetto della velocità . . . . .	91
4.2.4	Effetto dello spessore . . . . .	96
4.2.5	Effetto del soffiamento . . . . .	100
4.2.6	Assenza di gravità . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>111</b>
5.1	Sviluppi futuri . . . . .	113

# Elenco delle figure

2.1	Schema tipico dei propulsori ibridi. . . . .	21
2.2	Schema di combustione in caso di entrainment. . . . .	25
3.1	Posizione dei gradi di libertà per le incognite $u$ $w$ $q$ rispetto alla griglia. . . . .	56
3.2	Approssimazione della curvatura. . . . .	61
3.3	Discretizzazione dei nodi sul fondo. . . . .	62
3.4	Geometria per condizioni periodiche. . . . .	63
3.5	Legame velocità del vento - sforzo tangenziale. . . . .	66
3.6	Pattern della matrice $\mathcal{A}$ . . . . .	69
4.1	Visualizzazione <i>PlotStratos</i> . . . . .	77
4.2	Visualizzazione in frequenza. . . . .	80
4.3	Fattore di amplificazione per paraffina. . . . .	83
4.4	Spettro in frequenza per $\alpha_d=3 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	84
4.5	Spettro in frequenza per $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	85
4.6	Spettro in frequenza per $\alpha_d=35 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	86
4.7	Effetto della tensione superficiale. . . . .	87

---

4.8	Spettro in frequenza in presenza di tensione superficiale per $\alpha_d=3 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	88
4.9	Spettro in frequenza in presenza di tensione superficiale per $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	89
4.10	Spettro in frequenza in presenza di tensione superficiale per $\alpha_d=35 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	90
4.11	Effetto della velocità. . . . .	92
4.12	Spettro in frequenza per $U_{Lsup} = 331 \text{ mm/s}$ per $\alpha_d=3 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	93
4.13	Spettro in frequenza per $U_{Lsup} = 331 \text{ mm/s}$ per $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	94
4.14	Spettro in frequenza per $U_{Lsup} = 331 \text{ mm/s}$ per $\alpha_d=35 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	95
4.15	Effetto dello spessore. . . . .	96
4.16	Spettro in frequenza per $h_{rif} = 0.15 \text{ mm}$ per $\alpha_d=3 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	97
4.17	Spettro in frequenza per $h_{rif} = 0.15 \text{ mm}$ per $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	98
4.18	Spettro in frequenza per $h_{rif} = 0.15 \text{ mm}$ per $\alpha_d=35 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	99
4.19	Effetto del soffiamento. . . . .	102
4.20	Spettro in frequenza per $b = 0.8$ per $\alpha_d=3 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	103
4.21	Spettro in frequenza per $b = 0.8$ per $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	104
4.22	Spettro in frequenza per $b = 0.8$ per $\alpha_d=35 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	105
4.23	Effetto della gravità. . . . .	107
4.24	Spettro in frequenza per $Fr = 0$ per $\alpha_d=3 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	108
4.25	Spettro in frequenza per $Fr = 0$ per $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	109
4.26	Spettro in frequenza per $Fr = 0$ per $\alpha_d=30 \text{ cm}^{-1}$ . . . . .	110



# Elenco delle tabelle

4.1	Proprietà della Paraffina. . . . .	74
4.2	Condizioni di prova. . . . .	81
4.3	Numeri d'onda. . . . .	82
4.4	Condizioni di prova con soffiamento. . . . .	101

# Nomenclatura

$\alpha$	Numero d'onda
$\alpha_d$	Numero d'onda del disturbo iniziale
$\beta_d$	Parametro di amplificazione del disturbo iniziale
$\beta_d^i$	Parte immaginaria di $\beta_d$
$\beta_d^r$	Parte reale di $\beta_d$
$\Delta t$	Passo temporale
$\delta t$	Sottopasso temporale euleriano
$\Delta x$	Passo spaziale in direzione $x$
$\Delta z$	Passo spaziale lungo $z$
$\delta_d$	Ampiezza iniziale del disturbo
$\dot{r}$	Velocità di regressione
$\dot{r}_{entr}$	Velocità di regressione per entrainment
$\dot{r}_{evap}$	Velocità di regressione per evaporazione

---

$\eta$	Altezza del pelo libero rispetto allo spessore di riferimento
$\eta_0$	Altezza iniziale del pelo libero rispetto al riferimento
$\lambda$	Lunghezza d'onda
$\mathbb{P}^i$	Polinomio di grado $i$ -esimo
$\mathcal{A}$	Matrice del problema
$\mathbf{A}$	Modulo del prodotto vettoriale tra $\mathbf{L}$ e $\mathbf{Q}$
$\mathbf{F}$	Vettore dei termini noti
$\mathbf{g}$	Accelerazione gravitazionale
$\mathbf{L}$	Vettore che indica la distanza tra due punti $i$ e $i+1$ di una circonferenza
$\mathbf{n}$	Versore normale alla superficie
$\mathbf{Q}$	Vettore che indica la distanza tra due punti $i-1$ e $i+1$ di una circonferenza
$\mathbf{t}$	Versore tangente alla superficie
$\mathbf{u}$	Vettore dei gradi di libertà della velocità orizzontale
$\mathbf{V}$	Velocità (vettoriale)
$\mathbf{w}$	Vettore dei gradi di libertà della velocità verticale
$\mathbf{x}$	Vettore delle incognite
$\mu$	Viscosità dinamica

---

$\nu$	Viscosità cinematica del liquido
$\bar{\eta}$	Valore massimo di $\eta$
$\rho$	Densità del liquido
$\rho_g$	Densità del gas
$\sigma$	Tensione superficiale
$\underline{\underline{\tau}}$	Tensore degli sforzi del liquido
$\underline{\underline{\tau}}_g$	Tensore degli sforzi del gas
$A$	Modulo di $\mathbf{A}$ , ovvero area del triangolo di vertici $i - 1, i, i + 1$
$b$	Parametro di soffiamento
$BC$	Matrice che accoppia $\eta$ e $w$ per la condizione in superficie libera
$c$	Velocità dell'onda
$C_w$	Coefficiente di attrito del gas
$D_x^T$	Matrice che rappresenta la componente $x$ del gradiente discreto
$D_z^T$	Matrice che rappresenta la componente $z$ del gradiente discreto
$E^T$	Matrice che rappresenta l'equivalente discreto di $\partial_x \int_z u$
$F_v$	Forze di volume
$fa$	Funzione per lo sforzo tangenziale dovuto al gas
$Fr$	Numero di Froude

---

$h$	Quota del fondale
$H^1$	Spazio di Sobolev
$h_{rif}$	Altezza di riferimento del film liquido
$k$	Curvatura
$k_o$	Periodo dell'onda iniziale
$K_u$	Matrice di rigidità per $u$
$K_w$	Matrice di rigidità per $w$
$L$	Modulo di $\mathbf{L}$
$L^2$	Spazio delle funzioni a seconda potenza integrabile secondo Lebesgue
$M_\eta$	Matrice di massa per $\eta$
$M_u$	Matrice di massa per $u$
$M_w$	Matrice di massa per $w$
$N_\delta$	Numero di sottopassi temporali
$N_{elem}$	Numero di elementi
$N_n$	Numero di nodi
$P$	Posizione del punto materiale
$p$	Pressione del liquido
$p_g$	Pressione del gas

---

$Q$	Modulo di $\mathbf{Q}$
$q$	Pressione idrodinamica
$R$	Raggio di curvatura
$r$	Vettore posizione delle particelle di fluido in superficie
$Re$	Numero di Reynolds
$t$	Tempo
$U_{Lsup}$	Velocità del pelo libero
$W$	Velocità indisturbata del flusso gassoso
$W_c$	Velocità limite del gas
$w_{evap}$	Velocità verticale di evaporazione
$w_{fus}$	Velocità verticale di fusione
$w_{vert}$	Velocità verticale dovuto alla fusione
$x$	Asse orizzontale
$x_{in}$	Limite sinistro del dominio
$x_{out}$	Limite destro del dominio
$z$	Asse verticale

HTPB Polibutadiene a terminazione idrossilica

# Capitolo 1

## Introduzione

Il lavoro si inserisce nel campo della propulsione aerospaziale, la quale comprende tutti i propulsori presenti in campo aeronautico e spaziale. Si distinguono in due classi:

- esoreattori: sono motori atmosferici, ovvero prelevano ossidante dall'atmosfera; utilizzati per i velivoli;
- endoreattori: sono in grado di sviluppare spinta senza prelevare nulla dall'esterno; in questo gruppo sono compresi tutti i propulsori spaziali.

Gli endoreattori si suddividono in alcuni sottogruppi, a seconda del sistema utilizzato per generare gas di scarico caldi, i quali attraversando l'ugello producono la spinta:

- endoreattori chimici: comprendono i propulsori a solido, a liquido e quelli ibridi, sfruttano processi chimici di combustione per generare spinta;

- endoreattori elettrici: utilizzano archi elettrici per scaldare i gas o campi elettromagnetici per accelerare i gas precedentemente ionizzati;
- endoreattori nucleari: il riscaldamento dei gas di scarico avviene attraverso reazioni di fissione nucleare.

Questo studio prende in considerazione la propulsione chimica e, in particolare, il sottogruppo dei propulsori ibridi, in cui combustibile e ossidante sono già presenti all'interno del motore stesso, ma in diversi stati di aggregazione.

## 1.1 Motivazioni del lavoro

I propulsori più diffusi a livello commerciale, in particolare per l'utilizzo come lanciatori spaziali, sono gli endoreattori chimici. Attualmente vengono usati principalmente propulsori a solido o a liquido, mentre quelli ibridi, in passato poco sviluppati, sono tornati ad essere oggetto di studio negli ultimi anni. Questi ultimi presentano numerose somiglianze con l'architettura dei propulsori a solido, ma offrono anche molti vantaggi, soprattutto in termini di controllo e sicurezza, propri di quelli a liquido; tuttavia fino ad oggi gli svantaggi, principalmente bassa velocità di regressione, hanno prevalso nella loro valutazione.

Ciò che si prefigge oggi lo studio della propulsione ibrida è la ricerca di una valida alternativa, dal punto di vista delle prestazioni, agli endoreattori a solido, attualmente indispensabili per lanci spaziali. E' importante quindi concentrare l'attenzione proprio sui suoi maggiori limiti, andando a sviluppare sistemi che permettano un miglioramento della qualità di combustione e un incremento della velocità di regressione del combustibile.



## 1.2 Obiettivi della tesi

In questo lavoro viene preso in considerazione l'entrainment, fenomeno legato all'instabilità del sottile strato liquido che tipicamente si genera all'interno dei propulsori ibridi, in corrispondenza dell'interfaccia tra l'ossidante gassoso e il grano solido, per alcuni tipi di combustibili. Questo fenomeno, come evidenziano i risultati sperimentali, è capace di incrementare notevolmente la velocità di regressione del grano solido, ovvero la velocità con cui si consuma il combustibile. Questo parametro regola la portata massica del propulsore, e quindi influisce fortemente sulla spinta.

E' stato sviluppato un programma scritto in linguaggio `Matlab`, capace di risolvere le equazioni di moto per un qualsiasi fluido sottoposto a diverse condizioni a contorno. Questo programma è stato poi utilizzato per studiare il campo di moto di un film liquido composto da paraffina, utilizzando come condizioni quelle tipiche presenti all'interno di un propulsore ibrido. La scelta di considerare la paraffina come combustibile è dettata dal fatto che, tra le sostanze capaci di generare lo strato liquido, questa è facile da produrre, non presenta particolari problemi di stoccaggio e ha proprietà strutturali abbastanza buone.

Dopo aver completato il codice in modo che tutte le condizioni di interesse potessero essere correttamente inserite nel calcolo, è stata sviluppata una caratterizzazione del campo di moto del liquido al variare di alcuni parametri ritenuti di interesse, quali velocità del flusso di ossidante, spessore del film, velocità di fusione ed evaporazione del combustibile, forze di volume. Sempre attraverso `Matlab`, sono stati implementati alcuni sistemi di postprocessing e visualizzazione dei risultati, in modo da poter presentare

chiaramente gli aspetti di maggiore interesse, in particolare l'effetto di alcuni importanti parametri sul fattore di amplificazione dei disturbi iniziali, indice di instabilità.

## 1.3 Piano di presentazione

### *Capitolo 1*

Viene presentato il lavoro inquadrando i termini generali del problema e le motivazioni dello studio.

### *Capitolo 2*

Si definiscono le caratteristiche principali della propulsione ibrida, viene presentata una spiegazione teorica del fenomeno dell'entrainment, vengono riportati brevemente alcuni interessanti risultati dei principali lavori precedenti presi in considerazione.

### *Capitolo 3*

Si riportano le equazioni che regolano il fenomeno fisico, le approssimazioni che hanno portato a scrivere le equazioni effettivamente usate nel codice e alcuni importanti aspetti implementativi.

*Capitolo 4*

Dopo una breve spiegazione dei sistemi di postprocessing e visualizzazione utilizzati, si riportano e si commentano i risultati di maggiore interesse.

*Capitolo 5*

Sono esposte brevemente alcune considerazioni sul lavoro svolto e sui risultati ottenuti, prevedendo anche alcuni possibili sviluppi futuri.

# Capitolo 2

## Introduzione al problema

### 2.1 Il propulsore ibrido

I propulsori ibridi fanno parte degli endoreattori chimici; questa classe comprende tutti i propulsori in cui i prodotti di una reazione di combustione costituiscono il fluido di lavoro, ovvero quello che viene accelerato ed espulso dall'ugello per ottenere la spinta. Il termine *ibridi* sta ad indicare che i reagenti che prendono parte alla reazione chimica si presentano in diversi stati di aggregazione; la configurazione più diffusa e meglio funzionante vede il combustibile allo stato solido e l'ossidante allo stato liquido. La struttura tipica di questi propulsori è costituita da (figura 2.1):

- un serbatoio di ossidante, pressurizzato da un gas inerte o da una turbopompa;
- una cartuccia cilindrica perforata inserita nel booster che costituisce il grano di combustibile solido;

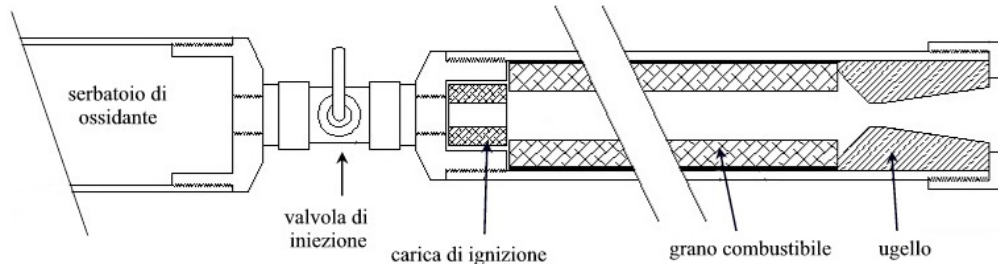


Figura 2.1: Schema tipico dei propulsori ibridi.

- una valvola interposta tra serbatoio e cartuccia, che permette di regolare la spinta intervenendo sul flusso di ossidante;
- un ugello di scarico, che sfrutta i gas caldi per fornire la spinta.

Una volta innescata la combustione, parte del calore sviluppato viene trasferito al combustibile, permettendone il passaggio dallo stato solido a quello gassoso; col progredire della combustione la cartuccia si consuma progressivamente, causando la variazione della geometria stessa del grano e quindi del flusso di calore. La velocità con cui questo avviene, detta *velocità di regressione* del combustibile, è un parametro importante nello studio dei propulsori ibridi, e viene generalmente valutata come media temporale. Un buon funzionamento prevede il consumo del grano in direzione radiale. Si sviluppa quindi uno strato limite “soffiato” in prossimità del grano, ossia una zona in cui il combustibile soggetto a evaporazione si inserisce nel flusso gassoso di ossidante. All’interno di questo strato si genera un fronte di fiamma, in prossimità della zona in cui i reagenti sono presenti in rapporto stechiometrico. Il grande interesse sviluppatosi negli ultimi anni attorno alla propulsione ibri-

da è motivato dai suoi punti di forza; questa infatti mette assieme le migliori qualità dei propulsori a solido e di quelli a liquido:

- sicurezza dovuta all'utilizzo di soli materiali inerti e possibilità di spegnimento del motore in caso di emergenza (infatti non si sono mai verificati incidenti catastrofici né accensioni accidentali);
- flessibilità di funzionamento: spinta modulabile e possibilità di accensioni e spegnimenti multipli;
- affidabilità di funzionamento: semplicità costruttiva, ridotta sensibilità termica rispetto ai propulsori a solido, tolleranza del grano combustibile a problemi di manifattura o funzionamento;
- versatilità della scelta dei propellenti (materiali polimerici come HTPB, Polietilene, Paraffina, combustibili criogenici come Pentano, Idrogeno, ecc);
- costi contenuti;
- basso impatto ambientale;
- buone (anche se non eccezionali) prestazioni propulsive.

Nonostante tutte queste ottime qualità, questi sistemi propulsivi presentano alcuni importanti problemi che ne limitano l'utilizzo:

- velocità di regressione bassa e poco sensibile alle condizioni operative;
- variazione del rapporto di miscela durante il funzionamento;
- instabilità longitudinale di funzionamento;

- difficoltà a operare su grande scala

In particolare il maggiore problema è la bassa velocità di regressione, poiché questo parametro limita la spinta massima ottenibile; per avere motori a grande spinta è necessario ricorrere a espedienti, spesso complicati, che possono comportare ulteriori problemi (ad esempio una possibilità è utilizzare complesse geometrie del grano combustibile, che aumentano la superficie di combustione ma sono di difficile realizzazione e presentano variazioni molto alte del rapporto di miscela).

Le principali applicazioni per cui potrebbe essere interessante l'utilizzo della tecnologia ibrida sono i booster per lanciatori spaziali, i lanciatori suborbitali, i motori per piccoli satelliti, quelli ad alta energia per missioni nello spazio e motori a grande spinta.

## 2.2 La fenomenologia dell'*entrainment*

Il maggiore limite all'utilizzo su larga scala dei propulsori ibridi è la spinta modesta che possono fornire. Questo parametro è fortemente legato alla portata massica passante attraverso l'ugello di scarico, che a sua volta dipende dalla velocità di regressione del grano solido  $\dot{r}$ . La ricerca di metodi che permettano di incrementare questa grandezza è quindi di primario interesse.

Un sistema con cui è possibile ottenere questo risultato è utilizzare combustibili che abbiano un basso calore di vaporizzazione. Questo metodo però non fornisce risultati eccezionali, anche perché il numero di sostanze utilizzabili come combustibili è limitato.

Un'altra possibilità è quella di utilizzare combustibili che formano un sottile

strato liquido in corrispondenza della superficie solida esposta all'ossidante. Questo sistema ha fornito miglioramenti molto più marcati: a pari condizioni, essi forniscono valori di  $\dot{r}$  anche 3 o 4 volte superiori rispetto a quelli relativi ai combustibili polimerici classici (tra i quali il più diffuso è HTPB). La spiegazione di questo ottimo risultato è legata all'instabilità dello strato liquido. Se le condizioni operative sono tali da generare fenomeni di instabilità all'interfaccia liquido - gas, ovvero la superficie non rimane piatta ma vede l'insorgere di fenomeni oscillatori più o meno periodici, è possibile che delle goccioline di liquido si separino dal film e vengano trascinate dal flusso di ossidante (figura 2.2). Questo fenomeno viene definito con il termine *entrainment*. L'*entrainment* è stato scoperto studiando combustibili criogenici; l'obiettivo era inizialmente valutare i miglioramenti delle prestazioni dei propulsori in termini di impulso specifico  $I_{sp}$ , ma la sperimentazione evidenziò un aumento inatteso della velocità di regressione del grano; successivamente si testarono quindi combustibili non criogenici, ma che, al pari di questi ultimi, presentassero la peculiarità di formare un sottile strato liquido all'interfaccia solido - gas; i risultati confermarono le previsioni, accreditando la teoria dell'*entrainment*.

Nei casi in cui è presente questo fenomeno, la velocità di regressione è la somma di due contributi:

$$\dot{r} = \dot{r}_{evap} + \dot{r}_{entr} \quad (2.1)$$

dove  $\dot{r}_{evap}$  indica il contributo dovuto all'evaporazione del grano solido, mentre  $\dot{r}_{entr}$  tiene conto del trasporto di massa dovuto appunto all'*entrainment*.



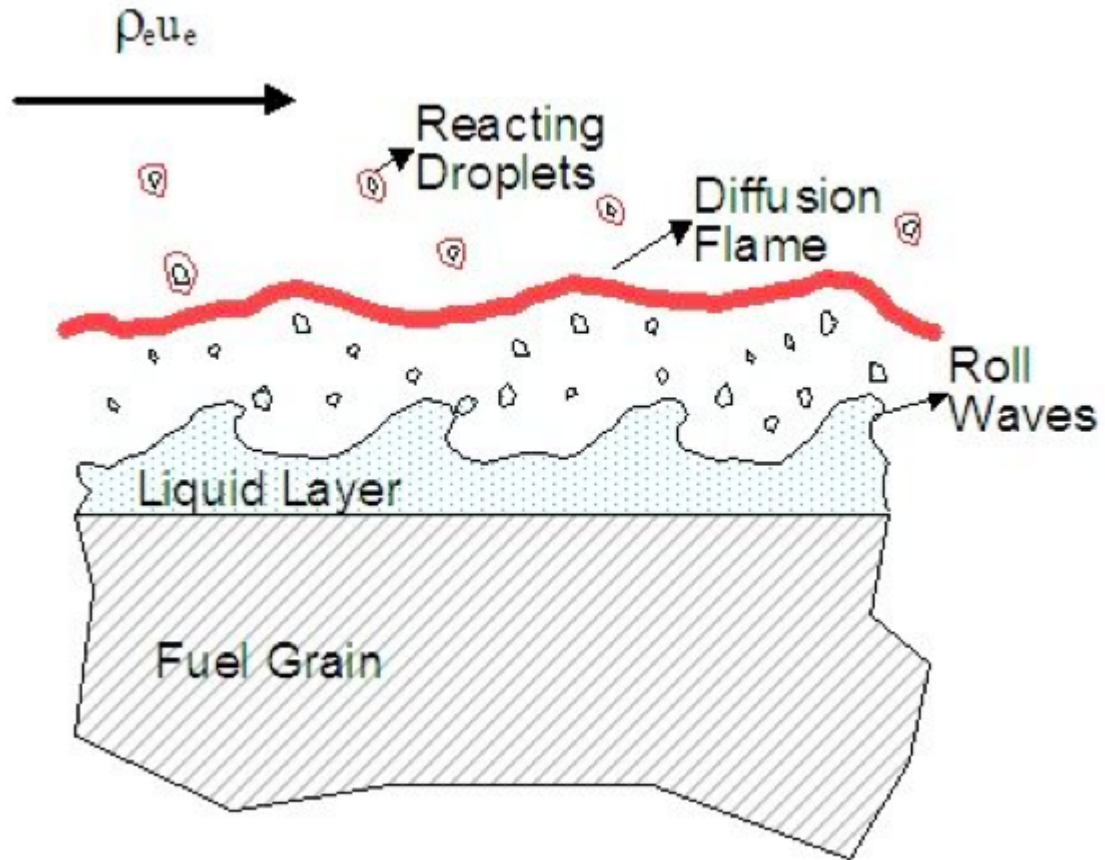


Figura 2.2: Schema di combustione in caso di entrainment.

Il legame tra l'instabilità e il valore di  $\dot{r}_{entr}$  non è ancora chiaro; evidenze sperimentali mostrano che esso dipende sicuramente sia dall'ampiezza che dalla lunghezza d'onda dell'instabilità, ma per quantificare questo parametro è ancora necessario ricorrere a formule empiriche che hanno un ristretto campo di validità. Ciò che è possibile fare, e che è stato fatto in questo lavoro, è invece studiare come cambia l'instabilità del film liquido al variare dei principali parametri fluidodinamici.

## 2.3 Lavori precedenti

Ai fini di questo lavoro sono utili e interessanti gli studi portati avanti da A.D.D. Craik e M.A. Karabeyoglu. Si riporta di seguito un breve riassunto dei loro lavori, mostrando sinteticamente i procedimenti seguiti e i risultati di maggiore interesse.

### 2.3.1 L'approccio di Craik

Il lavoro di Craik si propone di studiare il comportamento di un sottile film liquido sottoposto ad una corrente esterna. Benché il liquido considerato sia unicamente acqua, sostanza che non può essere usata come combustibile, alcune delle osservazioni e delle conclusioni tratte dall'autore possono essere considerate valide anche per altri liquidi, poiché i meccanismi fluidodinamici che regolano il campo di moto non dipendono dalla scelta del liquido.

Il fenomeno in esame è studiato con un approccio sperimentale; successivamente viene costruito un modello teorico che spiega le ragioni dei comportamenti ottenuti sperimentalmente.

L'esperimento portato avanti da Craik consiste in un sottile strato di acqua sottoposto a una corrente superficiale. L'obiettivo è identificare delle configurazioni stabili e delle configurazioni instabili, cercando di capire quali sono gli effetti di alcuni parametri fondamentali sulla stabilità del flusso. Il procedimento prevede quindi di fissare la velocità della corrente esterna e variare lo spessore dello strato liquido fino ad identificare il valore per il quale si ha la transizione da regime stabile a quello instabile. Questo viene ripetuto per diversi valori di velocità della corrente esterna.

Osservando i risultati ottenuti dagli esperimenti, l'autore ha sottolineato alcune importanti considerazioni:

1. mantenendo fisso il valore della velocità, aumentando progressivamente lo spessore dello strato liquido partendo da un valore molto piccolo, si identificano da tre "zone", ovvero tre intervalli del valore di spessore, in cui si ritrovano tre comportamenti differenti:
  - per valori molto bassi dello spessore si osserva la comparsa di onde chiamate "onde lente", con lunghezze dell'ordine di 10 cm e velocità di propagazione inferiore alla velocità del pelo libero. Sono fenomeni di natura non periodica, con fronte relativamente ripido e parte posteriore allungata;
  - quando lo spessore assume valori intermedi, il comportamento del fluido è stabile, la superficie appare piatta e liscia, senza rilevanti fenomeni di instabilità;
  - aumentando ancora lo spessore, si ritrovano nuovamente fenomeni instabili chiamati "onde veloci", con lunghezza non superiore al centimetro e velocità di propagazione superiore a quella del pelo libero. Sono fenomeni periodici, appaiono come onde sinusoidali;
2. aumentando la velocità del vento esterno, il campo di frequenze dei disturbi che tendono a smorzarsi si riduce;
3. al di sopra di un certo valore limite di velocità, la zona stabile scompare completamente; al suo posto compare una regione, sempre corrispon-

dente a valori intermedi dello spessore, in cui onde lente e onde veloci compaiono simultaneamente;

4. per ogni valore di velocità, abbassando lo spessore, è sempre possibile ricadere nella regione instabile occupata dalle onde lente. Ciò vuol dire che non esiste una velocità che garantisca sempre la stabilità del film;
5. esiste invece un valore preciso dello spessore del liquido che garantisce il massimo margine di stabilità (inteso come valore massimo della velocità della corrente esterna per cui il flusso rimane stabile);
6. se ci si trova nella zona di onde lente, riducendo ulteriormente lo spessore l'altezza delle onde aumenta.

Oltre a queste considerazioni, Craik evidenzia altri aspetti utili allo sviluppo e alla convalida della teoria matematica da lui sviluppata per modellare il fenomeno:

- il profilo di velocità media all'interno del fluido è con buona approssimazione lineare: si genera quindi un flusso principale simile a una corrente di Couette, al quale si sommano gli effetti dell'instabilità;
- la valutazione dello sforzo superficiale, legato alla corrente esterna, è molto complessa e allo stesso tempo molto importante per risolvere il problema matematico. Craik sfrutta gli esperimenti per valutare empiricamente il legame tra questi due parametri.

La teoria lineare sviluppata in questo articolo prevede di studiare l'instabilità del flusso attorno a una soluzione di equilibrio, rappresentata da un profilo

lineare di velocità, cioè una corrente di Couette; il campo di moto del fluido è dato dalla somma della corrente di Couette e del moto legato ai fenomeni oscillatori. Per poter applicare l'analisi lineare, è necessario considerare una perturbazione iniziale di tipo armonico, la cui ampiezza sia sufficientemente piccola da poter utilizzare equazioni linearizzate. Questa osservazione comporta una limitazione: l'ampiezza massima iniziale del disturbo dev'essere molto minore dello spessore del film liquido.

Il disturbo, o meglio l'evoluzione temporale del pelo libero, è espresso nella forma<sup>1</sup>:

$$\eta(x, t) = \delta_d e^{i\alpha(x-ct)} \quad (2.2)$$

dove  $\eta$  indica la variazione dell'altezza del pelo libero rispetto alla configurazione indisturbata,  $\delta_d$  rappresenta l'ampiezza del disturbo iniziale,  $c$  è la velocità dell'onda del disturbo, composta da una parte reale e una immaginaria, mentre  $\alpha$  è il numero d'onda adimensionale definito in precedenza. La parte immaginaria della velocità  $c_i$  indica il fattore di amplificazione del disturbo, ed è quindi il parametro di maggiore interesse in questo studio.

L'analisi teorica porta ad alcune importanti conclusioni:

1. l'instabilità compare quando gli sforzi superficiali sono sufficienti a vincere la forza di gravità e quella legata alla tensione superficiale, che tendono a dissipare l'energia del disturbo e quindi la sua ampiezza;

---

<sup>1</sup>La forma riportata è tratta da [4], pag. 379.

2. lo sforzo normale genera un contributo negativo in corrispondenza dei massimi e positivo in corrispondenza dei minimi, incrementando l'ampiezza dell'onda;
3. lo sforzo tangenziale agisce invece sui pendii dell'onda, con la tendenza a spingere il fluido dalle gole verso le creste adiacenti, dando vita quindi a un fenomeno diverso da quello legato allo sforzo normale ma con effetti simili;
4. più sottile è il film, più efficace è l'effetto dello sforzo tangente;
5. maggiore è la viscosità del liquido, minore è la quantità di liquido che migra verso le creste, e quindi l'instabilità si riduce.
6. Il fattore di amplificazione del disturbo è legato, quantomeno all'interno dell'analisi lineare, anche alla lunghezza d'onda del disturbo iniziale. Ciò vuol dire che considerando una certa configurazione, si può osservare un comportamento più o meno instabile a seconda della lunghezza d'onda del disturbo iniziale.

### 2.3.2 L' approccio di Karabeyoglu

Il lavoro di Karabeyoglu sviluppa ulteriormente quello precedentemente esposto. In particolare l'obiettivo è aggiungere elementi che permettano di generalizzare la teoria lineare, in modo da poterla applicare a liquidi che non siano acqua e a condizioni fluidodinamiche diverse da quelle previste da Craik.

L'importanza di questo lavoro deriva da evidenze sperimentali in esso riportate: un confronto tra la combustione di un classico combustibile polimerico

(HTPB) e alcune sostanze criogeniche (in particolare maggiore attenzione è rivolta al pentano criogenico Pe), mostra come, a parità di condizioni, il rateo di regressione  $\dot{r}$  nel secondo caso sia notevolmente maggiore rispetto al primo. La teoria classica per la definizione di  $\dot{r}$  giustificherebbe un aumento del 30 - 50%, dovuto alle diverse proprietà chimico - fisiche del combustibile, a fronte di un incremento misurato del 300 - 400%; è evidente quindi l'insorgenza nel secondo caso di un fenomeno il cui contributo non viene considerato nella teoria classica: secondo Karabeyoglu questo fenomeno è l'entrainment.

L'autore sottolinea che una completa valutazione dell'entrainment richiederebbe un'analisi pienamente non lineare, quindi molto complessa, mentre questo lavoro si limita ad un'analisi di tipo lineare, comunque utile per comprendere la sua dipendenza dai principali elementi in gioco.

L'entrainment è legato all'instabilità dello strato liquido, per cui la teoria lineare qui mostrata è affine a quella proposta da Craik. Le principali modifiche riguardano appunto l'aggiunta di alcuni termini, tipici di situazioni presenti all'interno dei propulsori, che possono influenzare sensibilmente la soluzione finale. Il metodo prevede la soluzione del sistema ottenuto dalla linearizzazione delle equazioni di Navier - Stokes. Come già visto, questo porta alla formulazione dell'equazione di Orr - Sommerfeld e di due espressioni per gli sforzi superficiali, una per quello normale e l'altra per quello tangenziale. Rispetto a Craik la differenza più significativa è la considerazione nel calcolo del "soffiamento" (ovvero un flusso verticale dovuto a fusione ed evaporazione); inoltre viene sviluppata una teoria valida per valori di Reynolds dell'ordine di qualche centinaia, mentre la teoria lineare fin qui considerata si applica solo per casi in cui  $Re \lesssim 10$ .

Karabeyoglu spiega come la teoria valida per i combustibili criogenici possa essere estesa anche a quelli non criogenici, ovvero che si presentano solidi a temperatura ambiente, ma che durante il processo di combustione formano comunque lo strato liquido superficiale; tra questi particolare attenzione è rivolta a un tipo di paraffina (Wax).

L'analisi presentata in questo lavoro mostra come la stabilità sia legata fortemente a viscosità e tensione superficiale: scegliendo combustibili con valori alti di queste due proprietà si hanno liquidi con alto margine di stabilità. Inoltre vengono per lo più trattati casi in cui la forza di gravità è assente, nei quali si ritrova una dipendenza dell'instabilità sia dal  $Re$  che dal numero d'onda adimensionale del disturbo iniziale  $\alpha$ . Fissate le condizioni di prova, si trova una zona instabile per valori di  $\alpha$  inferiori a un certo valore limite, al di sopra del quale il film risulta stabile. Aumentando il Reynolds aumenta l'intervallo di valori di  $\alpha$  per cui si hanno situazioni instabili così come aumenta il parametro di amplificazione per ciascun numero d'onda.



# Capitolo 3

## Equazioni, metodo risolutivo e implementazione

### 3.1 Le equazioni di governo

In questo lavoro si analizza il comportamento di un sottile film liquido a superficie libera, al di sopra del quale scorre un fluido gassoso. Al di sotto dello strato liquido si trova una parete solida. La corrente gassosa al di sopra del liquido non viene studiata, viene utilizzata solo come condizione a contorno per la risoluzione del campo di moto del film. L'obiettivo è quello di studiare questo film all'interno di un propulsore, durante il processo di combustione: è perciò necessario tenere conto anche della fusione del solido sul fondo (che rappresenta il grano di combustibile) e dell'evaporazione del liquido all'interfaccia con il gas.

Il problema così identificato è risolvibile attraverso le equazioni di Navier - Stokes, alle quali vanno aggiunte specifiche condizioni a contorno.

Più precisamente, le equazioni da cui si è partiti in questa analisi sono:

- equazione di continuità o bilancio di massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (3.1)$$

- equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

- condizione di adesione più fusione all'interfaccia solido - liquido (sul fondo dello strato liquido):

$$\mathbf{V}|_{fondo} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{fus} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

- continuità degli sforzi all'interfaccia liquido - gas:

$$\begin{cases} (p_g - p)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = [(\underline{\tau}_g - \underline{\tau}) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} \\ [(\underline{\tau}_g - \underline{\tau}) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{t} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

- condizione cinematica della superficie libera:

$$\frac{D\eta}{Dt} = w|_{\eta} - w_{evap} \quad (3.5)$$

In questa definizione si assume che la velocità del pelo libero coincida con la velocità verticale delle particelle di liquido che occupano questa posizione. Il segno negativo davanti a  $w_{evap}$  dipende dal fatto che questo termine è positivo per evaporazione, negativo per condensazione: in caso di evaporazione il liquido si consuma, perciò il pelo libero tende a spostarsi verso il basso, ovvero la sua velocità verticale ha segno negativo.

L'equazione di bilancio per l'energia può essere trascurata se si considerano trascurabili i gradienti di temperatura.

Il codice utilizzato non è in grado di risolvere le equazioni per domini tridimensionali, per cui invece delle equazioni sopra riportate vengono considerate le corrispondenti bidimensionali. Inoltre, andando a studiare un liquido e avendo per di più trascurato i gradienti termici, si può considerare costante la densità.

## 3.2 *STRATOS*<sub>2D</sub>

Per la risoluzione numerica delle equazioni si è utilizzato *STRATOS*<sub>2D</sub><sup>1</sup>. Questo è un programma in grado di risolvere le equazioni di Navier - Stokes per un fluido incomprimibile a superficie libera; come suggerito dal nome stesso, si utilizza una versione del codice applicabile esclusivamente a domini

---

<sup>1</sup>Il codice è stato sviluppato presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano; per maggiori dettagli si vedno [1],[2].

bidimensionali.

Il dominio di calcolo è contenuto nel piano verticale  $(x, z)$ , per cui una generica variabile  $g$  è definita come  $g = g(x, z, t)$ . La retta  $z = 0$  identifica la quota di riferimento; il codice prevede la possibilità di avere una parete inferiore non orizzontale e rettilinea, per cui il “fondo“ è definito attraverso una funzione  $h = h(x)$ . L’altezza del pelo libero è definita attraverso un valore di riferimento  $h_{rif}$ , che indica la quota corrispondente al fluido in quiete. La variazione di quest’ultima è definita dalla funzione  $\eta = \eta(x, t)$ ; l’altezza totale di liquido è quindi definita come  $h_{rif} + \eta$ .

Per quanto riguarda l’ascissa non è necessario inserire particolari condizioni geometriche, è sufficiente definire i limiti del dominio di calcolo  $x_{in}$  e  $x_{out}$ .

Complessivamente si può quindi esprimere il dominio come segue:

$$\begin{aligned} x &\in [x_{in}, x_{out}] \\ z &\in [h, h_{rif} + \eta] \end{aligned}$$

Lo studio di fluidi a superficie libera è molto complesso se ci si trova in presenza di fenomeni di instabilità che danno luogo a moti turbolenti. *STRATOS<sub>2D</sub>* non è stato pensato per risolvere problemi di questo tipo, quindi il suo campo di applicabilità è limitato a flussi laminari. I casi che verranno considerati sono tutti laminari, quindi possono essere risolti dal codice. Inoltre vengono trascurati dal codice i gradienti di velocità in direzione orizzontale; un’analisi dimensionale anche solo approssimativa evidenzia come i casi presi in esame in questo lavoro abbiano una lunghezza caratteristica in direzione verticale molto minore di quella orizzontale, e quindi i gradienti lungo  $x$  sono trascu-

rabili rispetto a quelli lungo  $z$ .

Il sistema di equazioni è composto, come già anticipato, dall'equazione di continuità, le equazioni di bilancio della quantità di moto nelle due direzioni e l'equazione relativa alla condizione cinematica per la superficie libera, che si può esprimere come:

$$w|_{\eta} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u|_{\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} + w|_{\eta} \frac{\partial\eta}{\partial z} \quad (3.6)$$

Come già detto, l'incognita  $\eta$  è indipendente da  $z$ , quindi il termine  $\frac{\partial\eta}{\partial z}$  è nullo.

E' quindi possibile scrivere il sistema di equazioni che il codice risolve nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial q}{\partial x} + g \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{Dw}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ w|_{\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u|_{\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Nelle 3.7 è stato utilizzato uno *splitting* della pressione, il quale ha permesso di isolare le diverse componenti della pressione:

$$p = p_g + g(\eta + h_{rif} - z) + q \quad (3.8)$$

Con questo sistema si evidenziano il termini di pressione idrostatica, ovvero  $g(\eta + h_{rif} - z)$ , quello idrodinamico  $q = q(x, z, t)$ , e quello della pressione

esterna del gas  $p_g$ . Come si può notare dal termine idrostatico, la pressione qui scritta è stata adimensionalizzata per la densità del liquido  $\rho$ , che per semplicità di notazione non è stata riportata. Da qui in avanti si tenga presente che i termini  $p$ ,  $p_{atm}$ ,  $q$ , contengono al loro interno questa adimensionalizzazione, seppur non riportata esplicitamente.

Per poter risolvere il sistema sono necessarie le condizioni iniziali e a contorno. Si riportano di seguito quelle scelte per ricreare le condizioni della camera di combustione.

### 3.2.1 Condizioni iniziali

I casi analizzati riguardano film liquidi sottoposti a un vento esterno. Se si considera una situazione stabile, in cui non viene imposto un disturbo iniziale (perturbazione del pelo libero), si può vedere il problema come quello dell'avvio impulsivo di una lastra (problema di Stokes), in cui il fluido, inizialmente in quiete, è compreso tra due lastre, una ferma, l'altra avviata all'istante iniziale. La soluzione di questo problema vede un transitorio iniziale, esaurito il quale si genera una corrente di Couette. Poiché ai fini di questo studio non interessa la risoluzione del transitorio iniziale, si è deciso di imporre come condizione iniziale direttamente quella a regime, cioè appunto una corrente di Couette, in modo da risparmiare il tempo necessario alla soluzione del transitorio. A questo flusso viene poi sommata la perturbazione iniziale. Questa consiste in un profilo sinusoidale imposto al pelo libero per  $t = 0$ . Se si impone un'ampiezza massima dell'onda iniziale  $\frac{1}{2}\eta_0$  (dove  $\eta_0$  rappresenta il valore della differenza tra massimo e minimo dell'onda) molto minore dello spessore di riferimento del liquido, ovvero  $\eta_0 \ll h_{rif}$ , vale la

teoria delle onde di piccola ampiezza, per cui è possibile applicare la teoria linearizzata. Il profilo iniziale del pelo libero è esprimibile come:

$$\eta(x, 0) = \delta_d \cos(k_o x) \quad (3.9)$$

dove  $\delta_d$  è l'ampiezza del disturbo inizialmente imposto e  $k_o$  è il periodo dell'onda.

Questo sistema, ovvero sommare alla corrente di Couette il flusso generato dal disturbo, è in perfetto accordo con la teoria su cui si basa il lavoro di Karabeyoglu, in cui viene identificato un flusso principale tipo Couette e un flusso secondario, legato alle instabilità, che si va a sommare al primo.

### 3.2.2 Condizioni a contorno

Per la risoluzione del sistema è necessaria l'imposizione di alcune condizioni a contorno in tutte le zone che delimitano il dominio di calcolo; si mostra di seguito che tipo di condizione è stata scelta per ciascuna zona.

#### Superficie libera

In questa zona la condizione che viene imposta è la continuità del tensore degli sforzi all'interfaccia fluido/gas; è necessario tenere anche in conto il contributo della tensione superficiale. Infatti questa ha un contributo del tutto trascurabile nel caso di bacini di dimensioni di alcuni metri, ma andando a studiare film liquidi di spessore inferiore al millimetro deve essere tenuta in

considerazione, poiché i suoi effetti possono diventare rilevanti.

La tensione superficiale è una proprietà che dipende dal tipo di fluido in esame; il suo effetto sul moto del fluido è legato alla curvatura della superficie libera. Quest'ultima è definita come l'inverso del raggio di curvatura della superficie stessa. Il termine da introdurre nella formulazione del problema vive esclusivamente in superficie, ed è dimensionalmente una pressione. Si può quindi considerare l'effetto della tensione superficiale modificando le condizioni a contorno per  $z = \eta$ , ovvero in corrispondenza del pelo libero, in cui la continuità degli sforzi tiene conto del termine  $\sigma k$ , dove  $\sigma$  è il valore di tensione superficiale, mentre  $k = 1/R$  rappresenta la curvatura del profilo superficiale ( $R$  è il raggio di curvatura).

Le due condizioni a contorno per la superficie libera sono quindi:

$$\begin{cases} p|_{sup} = p_g + \sigma k \iff q|_{sup} = \sigma k \\ \nu \frac{\partial u}{\partial z} = f_a(W) \end{cases} \quad (3.10)$$

La prima equazione delle 3.10 riguarda la continuità dello sforzo normale alla superficie, che deve essere bilanciato dalla pressione esterna e dalla tensione superficiale. La seconda equazione si riferisce invece allo sforzo tangenziale, eguagliando quest'ultimo a una funzione dipendente dalla velocità  $W$  del gas indisturbato al di sopra del fluido.

***Osservazione:** le equazioni sono adimensionalizzate rispetto alla densità del liquido  $\rho$ , quindi, come già evidenziato nella spiegazione dello splitting della pressione (equazione 3.8), l'incognita  $q$  corrisponde in realtà alla pres-*



sione dinamica divisa per la densità. Allo stesso modo la costante  $\sigma$  è da intendersi come  $\sigma/\rho$ .

### Condizioni sul fondo

La versione originale del codice offre una modellazione sperimentale dello strato limite; questo sistema permette di evitare la soluzione vera e propria di questo strato. Questo sistema non può essere considerato sempre soddisfacente, soprattutto per casi in cui lo spessore totale del liquido è molto piccolo, poiché lo strato limite diventa parte fondamentale della soluzione. I casi che si andranno a studiare sono proprio di questo tipo, è evidente quindi la necessità di una soluzione più precisa. L'idea che è stata sviluppata è quella di imporre sul fondo la condizione di adesione del fluido, ovvero velocità tangenziale nulla.

Assieme a questa condizione è necessario imporne una anche per la componente normale di velocità. I casi che si vogliono studiare con questo codice riguardano sottili strati liquidi di combustibile all'interno di endoreattori, durante il processo di combustione. Se si vuole avvicinarsi il più possibile alla realtà fisica del fenomeno, è necessario tener conto che esiste un flusso termico, sviluppato dalla reazione di combustione, diretto verso il combustibile. Questo flusso di energia provoca l'evaporazione del fluido in superficie così come la fusione del propellente solido al di sotto dello strato liquido. Non è scopo di questo lavoro valutare quantitativamente il rateo di fusione e quello di evaporazione, anche perché questo richiederebbe la conoscenza dettagliata della reazione di combustione e la risoluzione dell'equazione dell'energia. Tuttavia non c'è ragione che induca a trascurare a priori gli effetti di questi

fenomeni sulla stabilità dello strato fluido. In corrispondenza del fondale si è imposta quindi anche l'uguaglianza tra velocità verticale e rateo di fusione del combustibile.

Il complesso delle condizioni sul fondo è esprimibile quindi come:

$$\begin{cases} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = w_{evap} \Rightarrow w|_h = w_{evap} \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} = 0 \Rightarrow u|_h = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Attenzione: le equazioni così scritte non sono generalmente corrette; infatti la condizione di adesione coinvolge la velocità tangenziale, che potrebbe non coincidere con quella orizzontale; stesso ragionamento vale per la componente normale. I casi analizzati in questo lavoro sono però ristretti a bacini con fondale orizzontale e rettilineo, per i quali, poiché  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{t} = u$  e  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = w$ , le 3.11 sono corrette.

### Evaporazione

Come già detto si è tenuto conto nel calcolo della fusione e dell'evaporazione dovute al flusso termico diretto verso il fondo del bacino.

Dal punto di vista matematico i passaggi di stato coincidono con delle “sorgenti” sul fondo e dei “pozzi” in superficie.

Il rateo di evaporazione interviene nella condizione cinematica della superficie libera: questo infatti è un contributo aggiunto alla definizione della velocità del pelo libero, ovvero:

$$w|_\eta = \frac{D\eta}{Dt} + w_{evap} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + w_{evap} \quad (3.12)$$

dove  $w_{evap}$  indica il rateo di evaporazione.

### Condizioni periodiche

Questo lavoro si propone di studiare il comportamento di sottili film liquidi che si generano all'interno dei propulsori ibridi; questi film hanno uno spessore medio dell'ordine del millimetro (in direzione  $z$ ), ma potrebbero svilupparsi per tutta la lunghezza del propulsore (in direzione  $x$ ), la quale potrebbe essere anche di alcuni metri. Inoltre, come mostrato dai lavori di Craik e Karabeyoglu i fenomeni di instabilità si presentano sotto forma di onde con lunghezze comprese tra il decimo di millimetro e il centimetro. La discretizzazione lungo  $x$  deve essere adeguata allo studio di questi fenomeni, ovvero si può pensare di avere un numero minimo di nodi per onda di circa 10, per cui il  $\Delta x$  sarà indicativamente  $1/10$  delle lunghezze d'onda caratteristiche dei fenomeni di instabilità, ovvero non superiore a qualche centimetro. Ciò significa che analizzare l'intero dominio fisico richiederebbe un numero di celle spropositato, con un costo computazionale enorme.

Per questo motivo si è deciso di analizzare solo una sezione del film, riducendo così il numero totale di celle. La scelta più ovvia è considerare una sezione posta lontano dai bordi del dominio, ovvero dove gli effetti di questi ultimi (che potrebbero modificare la stabilità del flusso) sono trascurabili.

Per risolvere questo problema si è deciso quindi di operare delle modifiche al codice, in modo da definire delle condizioni "periodiche" nelle zone di inflow e outflow. Ciò significa che i valori di velocità orizzontale  $u$  sui nodi di inflow corrispondono a quelli sui nodi di outflow. Questo tipo di condizione a contorno è quindi del tipo Dirichlet, osservazione importante da tener presente nel passaggio alla formulazione debole.

### 3.2.3 Condizione integrale della superficie libera

L'equazione 3.12 così scritta è difficile da manipolare; per poterla utilizzare nel calcolo con più facilità è utile prima modificarla, ottenendo quella che verrà chiamata *condizione integrale della superficie libera*.

Essa si ottiene integrando lungo  $z$  l'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \int_z \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_z \frac{\partial w}{\partial z} dz &= \int_z \frac{\partial u}{\partial x} dz + \underbrace{w(x, \eta)}_{\text{cond. 3.12}} - \underbrace{w(x, h)}_{w_{fus}} = \\ &= \int_z \frac{\partial u}{\partial x} dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + w_{evap} - w_{fus} = 0 \end{aligned}$$

Si può scrivere più comodamente questa espressione sfruttando la regola di Leibniz, la quale afferma che:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} dr = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, r) dr + f(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta}{\partial x} - f(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

Ricordando che si sono analizzati esclusivamente casi in cui  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ , si può scrivere:

$$\int_z \frac{\partial u}{\partial x} dz + u|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_z u dz$$

In definitiva è possibile scrivere la condizione integrale della superficie libera come segue:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_z u dz = w_{fus} - w_{evap} \quad (3.13)$$

### 3.3 Discretizzazione in tempo

Le derivate materiali vengono discretizzate dal codice in modo esplicito, tramite approccio alle caratteristiche. Si indica con  $P(\bar{x}, \bar{z}, t^{n+1}, t^n)$  la posizione all'istante  $t^n$  del punto materiale che, all'istante  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , occupa la posizione  $(\bar{x}, \bar{z})$ . Un'approssimazione al primo ordine della derivata materiale è data da:

$$\frac{DV}{Dt} \simeq \frac{\mathbf{V}^{n+1} - (\mathbf{V}(P))^n}{\Delta t} \quad (3.14)$$

Per risalire le caratteristiche e calcolare  $P$  viene usato un metodo di Eulero esplicito, che prevede la suddivisione del passo temporale  $\Delta t$  in  $N_\delta$  sottopassi, in modo che il passo temporale euleriano sia  $\delta t = \Delta t/N_\delta$ . Viene risolto un problema ai valori finali del tipo:

$$\begin{cases} (x, z)^{s-1} = (x, z)^s - (u(x, z)^s, w(x, z)^s)^n \delta t & \text{per } s = N_\delta, N_\delta-1, \dots, 1 \\ (x, z)^{N_\delta} = (\bar{x}, \bar{z}) \end{cases} \quad (3.15)$$

Tutti gli altri termini del sistema vengono trattati in modo esplicito, ad eccezione di  $\eta$  che, nell'equazione della superficie libera, viene trattato in modo semi-implicito: infatti per linearizzare il termine contenente l'integrale lungo la verticale, si utilizzano gli estremi di integrazione tra  $h$  e  $\eta^n$ . Il sistema di equazioni (vettoriali) discretizzate relative all' $n$ -esimo passo temporale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{V}^{n+1} - (\mathbf{V}(P))^n}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \frac{\partial \mathbf{V}^{n+1}}{\partial z} \right] + g \nabla_{xz} (\eta^{n+1} - z) + \sigma \nabla_{xz} k^{n+1} + \nabla_{xz} q^{n+1} + F_v = 0 \\ \nabla_{xz} \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0 \\ \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_h^{\eta^n} u^{n+1} dz = w_{fus} - w_{evap} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

### Il problema del CFL: l'adattività del passo temporale

Quando ci si trova ad utilizzare un metodo esplicito di risoluzione, come il metodo di Eulero, la stabilità del codice è garantita solo se è soddisfatta la condizione imposta dal CFL. Il metodo di Eulero risolve problemi del tipo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

dove  $a = \frac{\partial x}{\partial t}$  indica la velocità. Il numero di CFL, adimensionale<sup>2</sup>, è  $a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ; la condizione che deve essere soddisfatta è:

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (3.17)$$

*Stratos<sub>2D</sub>* applica il metodo di Eulero ad ogni cella, una volta in direzione

<sup>2</sup>Definizione presa da [7], p.165.

verticale, una volta in orizzontale, in modo da risalire le caratteristiche con le due componenti di velocità separatamente. Ciò vuol dire che, per ogni cella di indici  $(i,j)$ , i limiti imposti dal CFL sono due:

$$\begin{cases} u_{i,j} \frac{\delta t}{\delta x_i} < 1 \\ w_{i,j} \frac{\delta t}{\delta z_j} < 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

I problemi più grossi sono rappresentati dalla seconda delle 3.18: mentre i  $\delta x$  sono costanti, i  $\delta z$  degli strati superficiali possono variare in base a  $\eta$ . Questo vuol dire che per rappresentare correttamente il dominio di calcolo, compresa la posizione reale del pelo libero, possono essere necessari  $\delta z$  molto piccoli, anche inferiori di alcuni ordini di grandezza rispetto a quelli imposti inizialmente nella griglia (si tenga conto che esiste un valore di tolleranza sotto cui il codice non vede la variazione di altezza, ovvero  $\delta z < toll \Rightarrow \delta z = 0$ ). Ovviamente questo, unito al fatto che le componenti della velocità variano a seconda dell'istante considerato, incide sul valore di CFL calcolato ad ogni passo, per cui è possibile che un  $\delta t$  accettabile al passo  $i$ , non lo sia più al passo  $i + 1$ . Per ovviare a questo problema si è pensato di variare il passo temporale laddove necessario, in modo che il valore massimo di CFL calcolato ad ogni istante in tutta la griglia sia sempre minore di 1.

La stabilità del metodo risolvete le caratteristiche è così garantita, ma è necessario un altro accorgimento legato al passo temporale: più piccolo è, più passi sono necessari per arrivare a un istante prefissato; è importante quindi aver sì un  $\delta t$  che garantisca la stabilità, ma si vuole avere contemporaneamente  $\Delta t$ , che ricordiamo è  $N_\delta \delta t$ , il più grande possibile. A questo

scopo non si controlla il CFL in modo che sia sempre minore di uno, ma lo si impone ad ogni istante esattamente pari a un valore prefissato, ad esempio 0.8, garantendo così un passo temporale solo di poco inferiore al massimo imposto dalla condizione di stabilità.

### 3.4 Formulazione debole

Il sistema di equazioni viene risolto attraverso un metodo a elementi finiti; prima di risolverlo è quindi necessario passare a una formulazione debole del problema.

Considerando la versione aggiornata del codice, le soluzioni che vengono cercate ad ogni passo temporale sono:

- $u(x, z) \in H_0^1(x_{in}, x_{out}) \times H_h^1(h, \eta)$ , perché ci sono condizioni di Dirichlet sul fondo (per  $z = h$ ) e di Neumann al pelo libero (per  $z = \eta$ ), mentre le condizioni periodiche sui bordi laterali possono essere viste come condizioni di Dirichlet;
- $w(x, z) \in H^1(x_{in}, x_{out}) \times H_0^1(h, \eta)$ , perché ci sono condizioni di Dirichlet sul fondo e sulla superficie libera, e di Neumann sulle pareti laterali;
- $\eta \in L^2(x_{in}, x_{out})$ ;
- $q \in L^2(x_{in}, x_{out}) \times L^2(h, \eta)$ .

Per ottenere la formulazione debole si utilizzano diverse funzioni test, ciascuna utile per una equazione. Si definiscono qui tutte le funzioni utilizzate:



- per la quantità di moto:

$$\mathbf{T} = (\delta, \varphi)^T \begin{cases} \delta(x, z) = \tau(x)\phi(z) \\ \varphi(x, z) = g(x)s(z) \end{cases} \quad (3.19)$$

con

$$\delta = \tau(x)\phi(z) \begin{cases} \tau(x) \in H_0^1(x_{in}, x_{out}) \\ \phi(z) \in H_h^1(h, \eta) \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\varphi(x, z) = r(x)s(z) \begin{cases} r(x) \in H^1(x_{in}, x_{out}) \\ s(z) \in H_0^1(h, \eta) \end{cases} \quad (3.21)$$

- per l'equazione del pelo libero:

$$\chi \in L^2([x_{in}, x_{out}]) \quad (3.22)$$

- per l'equazione di continuità:

$$\theta = \alpha(x)\beta(z) \begin{cases} \alpha(x) \in L^2([x_{in}, x_{out}]) \\ \beta(z) \in L^2([h, \eta]) \end{cases} \quad (3.23)$$

Le equazioni di partenza vanno quindi moltiplicate per le relative funzioni test e integrate sul dominio di calcolo. Per semplicità d'ora in poi verranno indicati solo gli indici temporali  $n$ , omettendo gli indici  $n+1$ . Verranno anche omessi i limiti di integrazione, poiché sempre uguali, quindi con la notazione  $\int_z$  si intenderà  $\int_h^{\eta^n}$ , mentre con  $\int_x$  si intenderà  $\int_a^b$ ; si noti che il limite verticale superiore  $\eta^n$  evidenzia un trattamento esplicito dell'interfaccia, mentre il resto del problema viene trattato in modo implicito.

Si mostra la formulazione debole di ogni equazione singolarmente, partendo da quella del momento.

Per prima cosa è necessario fare attenzione ai termini di pressione; per quello idrostatico si ha:

$$\int_x \int_z g \nabla x z (\eta - z) \cdot \mathbf{T} dx dy = \int_x \int_z g \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta dx dz - \int_x \int_z g \varphi dx dz \quad (3.24)$$

Controintegrando per parti solo il primo termine si ottiene:

$$\begin{aligned} g \int_x \int_z \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta dx dz &= g \int_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \int_z \delta dz \right) dx = \\ &= g \left[ \eta \left( \int_z \delta dz \right) \right]_a^b - g \int_x \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_z \delta dz \right) dx \end{aligned}$$

Per la definizione 3.20:

$$\tau(a) = \tau(b) = 0$$

per cui i termini di bordo sono nulli.

Il contributo idrodinamico va invece trattato diversamente, poiché questo dipende anche da  $z$ .

$$\begin{aligned} \int_x \int_z \nabla_{xz} q \cdot \mathbf{T} dx dz &= \int_{\Gamma_{inf} \cup \Gamma_{lat} \cup \Gamma_{sup}} q \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\gamma - \int_x \int_z q \nabla_{xz} \cdot \mathbf{T} dx dz = \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma_{inf}} q \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_{inf}}_{0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ su inf}} + \underbrace{\int_{h(a)}^{\eta(a)} q(a) \tau(a) \phi(a) dz}_{0, \tau(a) = 0} + \underbrace{\int_{h(b)}^{\eta(b)} q(b) \tau(b) \phi(b) dz}_{0, \tau(b) = 0} + \\ &+ \int_{\Gamma_{sup}} q \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_{sup} - \int_x \int_z q \nabla_{xz} \cdot \mathbf{T} dx dz \end{aligned}$$

Il termine di bordo superficiale ( $z = \eta$ ) va trattato tenendo conto della condizione 3.10, per cui  $q(x, \eta(x)) = \sigma k(x)$ :

$$\int_{\Gamma_{sup}} q \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_{sup} = \int_x q(x, \eta(x)) \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dx = \int_x \sigma k(x) \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dx = \sigma \int_x k \begin{pmatrix} \delta(x, \eta) \\ \varphi(x, \eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} dx$$

Sfruttando le definizioni delle funzioni test 3.20 e 3.21, si possono ottenere le loro espressioni per  $z = \eta$ :

$$\delta(x, \eta) = \tau(x) \underbrace{\phi(\eta)}_{=1} = \tau(x)$$

$$\varphi(x, \eta) = r(x) \underbrace{s(\eta)}_{=0} = 0$$

Ciò significa che la componente verticale del termine di bordo scompare, men-

tre quella orizzontale è:

$$\sigma \int_x k \tau n_x dx$$

Infine, contointegrando per parti in  $z$  il termine legato alla viscosità si ottiene la formulazione debole dell'equazione del momento:

$$\begin{aligned} & \int_x \int_z \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \mathbf{T} dx dz - \int_x \left[ \nu \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cdot \mathbf{T} \right]_h^{\eta_h} dx + \int_x \int_z \nu \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} dx dz + \\ & -g \int_x \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_z \delta dz \right) dx + \sigma \int_x k \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} dx - \int_x \int_z q \nabla_{xz} \cdot \mathbf{T} dx dz = 0 \end{aligned}$$

Utilizzando come funzioni test  $(\delta, 0)^T$  e  $(0, \varphi)^T$  si possono trovare le espressioni delle due equazioni del momento in direzione  $x$  e  $z$ .

Prima di riportarle però, si faccia attenzione al termine  $\int_x \left[ \nu \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cdot \mathbf{T} \right]_h^{\eta_h} dx$ : nell'equazione del momento in direzione  $x$ , ovvero per la componente  $u$  della velocità, utilizzando le condizioni al contorno 3.34 e 3.10 e la funzione test appena mostrata, si arriva a scrivere:

$$\int_x \left[ \nu \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cdot \mathbf{T} \right]_h^{\eta_h} dx = \int_x f_a(W) \delta dx - 0$$

Lo stesso termine va invece ad annullarsi nella seconda equazione del momento per via della scelta di  $s$ , ovvero:

$$s(h) = s(\eta) = 0$$

Si riporta quindi la formulazione debole finale delle due equazioni del momento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_x \int_z \frac{Du}{Dt} \delta dx dz - \int_x f_a(W) \delta dx + \int_x \int_z \nu \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta}{\partial z} dx dz - g \int_x \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_z \delta dz \right) dx + \\ + \sigma \int_x k \tau n_x dx - \int_x \int_z q \frac{\partial \delta}{\partial x} dx dz = 0 \\ \\ \int_x \int_z \frac{Dw}{Dt} \phi dx dz + \int_x \int_z \nu \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dx dz - \int_x \int_z q \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dz = 0 \end{array} \right.$$

Per scrivere la formulazione debole della condizione integrale della superficie libera si utilizza la funzione test  $\chi$ :

$$\int_x \frac{\partial \eta}{\partial t} \chi dx + \int_x \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_z u dz \right) \chi dx = \int_x (w_{fus} - w_{evap}) \chi dx$$

L'ultima equazione da considerare è quella relativa al bilancio di massa; in questo caso la funzione test da utilizzare è  $\theta$ :

$$\int_x \int_z \theta \nabla_{xz} \cdot \mathbf{V} dx dz = 0$$

### 3.5 Discretizzazione in spazio

Come già anticipato nel paragrafo riguardante le condizioni periodiche, la griglia utilizzata è rettangolare. Il dominio viene discretizzato con  $N$  punti e  $N - 1$  elementi sull'asse  $x$ , con  $M$  punti e  $M - 1$  elementi lungo  $z$ . Ogni nodo della griglia è quindi identificabile con due indici  $(i, j)$ , con  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, M$ . I passi spaziali  $\Delta x$  e  $\Delta z$  possono essere variabili, in modo da poter raffinare la griglia in zone di maggiore interesse o in zone in cui si possono prevedere più importanti gradienti delle grandezze in gioco; in modo particolare può essere utile ridurre la spaziatura tra i punti in direzione  $z$  nelle vicinanze del fondo e della superficie libera, utilizzando invece celle più grandi nella zona compresa tra queste, aumentando così la precisione laddove il calcolo risulta più delicato senza incrementare enormemente il tempo di calcolo. Grosse variazioni tra celle contigue possono generare problemi numerici, quindi si è deciso di far variare  $\Delta z$  in maniera progressiva, aumentandolo dal fondo fino a metà dell'altezza di riferimento e riducendolo da qui in su:

$$\begin{aligned} z_i &= A\Delta z_{i-1} \quad A = 1.05 \quad \text{per } 0 < z < h_{rif}/2 \\ z_i &= a\Delta z_{i-1} \quad a = 0.95 \quad \text{per } z > h_{rif}/2 \end{aligned}$$

Si sono scelti i seguenti spazi di approssimazione per le incognite (figura 3.1), dove  $\mathbb{P}^i(\Omega)$  indica lo spazio degli elementi finiti di grado  $i$ -esimo sulla griglia che discretizza  $\Omega$ :

- $\mathbb{P}^1([x_{in}, x_{out}]) \times \mathbb{P}^1([h, \eta])$  per  $u$ . I gradi di libertà di  $u$  sono posizionati su una griglia sfalzata, posti con ascissa corrispondente ai nodi e a me-

tà dell'altezza degli strati verticali. Questi punti intermedi si possono indicare come  $z_k = z_{j+1/2}$ , con  $k = 1, \dots, M-1$ , e quindi gli strati della nuova griglia hanno altezza  $\delta z_k = z_{j+1/2} - z_{j-1/2}$ ; si può scrivere quindi:

$$u_h(x, z, t) = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{i=1}^N u_{i,k}(t) \tau_i(x) \phi_k(z)$$

con  $\tau_i(x) \in \mathbb{P}^1([x_{in}, x_{out}])$ ,  $\phi_k(z) \in \mathbb{P}^1([h, \eta])$

- $\mathbb{P}^0([x_{in}, x_{out}]) \times \mathbb{P}^1([h, \eta])$  per  $w$ . La griglia utilizzata per la  $w$  è sfalzata in modo che i suoi nodi abbiano ordinata corrispondente ai nodi originali e ascissa intermedia. I punti intermedi si possono indicare come  $x_p = x_{i+1/2}$ , con  $p = 1, \dots, N-1$ ; si può scrivere quindi:

$$w_h(x, z, t) = \sum_{j=1}^M \sum_{p=1}^{N-1} w_{p,j}(t) \chi_p(x) \phi_j(z)$$

con  $\chi_p(x) \in \mathbb{P}^0([x_{in}, x_{out}])$ ,  $\phi_j(z) \in \mathbb{P}^1([h, \eta])$

- $\mathbb{P}^0([x_{in}, x_{out}])$  per  $\eta$ .  $\eta$  è funzione solo di  $x$ , quindi è definita solo sulla griglia orizzontale. I gradi di libertà sono posti nei punti medi degli elementi orizzontali, quindi:

$$\eta_h(x, t) = \sum_{p=1}^{N-1} \eta_p(t) \chi_p(x)$$

con  $\chi_p(x) \in \mathbb{P}^0([x_{in}, x_{out}])$

- $\mathbb{P}^0([x_{in}, x_{out}]) \times \mathbb{P}^0([h, \eta])$  per  $q$ . I gradi di libertà sono posti al centro degli elementi, sia in orizzontale che in verticale, quindi:

$$q_h(x, z, t) = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{p=1}^{N-1} q_{p,k}(t) \chi_p(x) \zeta_k(z)$$

con  $\chi_p(x) \in \mathbb{P}^0([a, b])$ ,  $\zeta_k \in \mathbb{P}^0([h, \eta])$

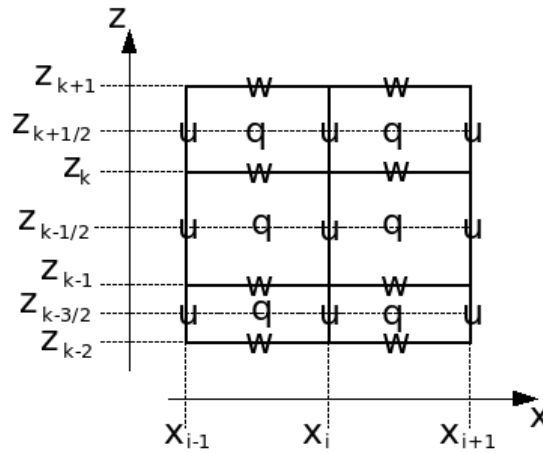


Figura 3.1: Posizione dei gradi di libertà per le incognite  $u$   $w$   $q$  rispetto alla griglia.

**Osservazione:** gli estremi degli integrali lungo la verticale sono definiti tra  $h$  e  $\eta$ , quindi sarebbe necessario ridefinire la griglia ad ogni passo temporale, in modo da tener conto della variazione temporale di  $\eta$ . Per ovviare a questo problema si è deciso di definire al primo passo una griglia fissa, di altezza massima sufficiente per tutta l'evoluzione temporale del fenomeno (ad esempio si può immaginare che il pelo libro non superi mai il doppio dell'altezza di riferimento, quindi  $z_{max} = 2h_{rif}$ ), valutando poi istante per istante quali sono gli strati attivi, ovvero in cui è presente il liquido, sfruttando solo



*questi nel calcolo. Per non perdere la vera altezza del pelo libero, l'altezza dell'ultimo strato di ciascuna colonna di elementi viene definita da  $\eta$  ad ogni istante, ovvero  $\Delta z_K = \eta - z_K$ .*

## 3.6 Aspetti operativi

Verranno mostrati di seguito i metodi utilizzati per introdurre nel codice le modifiche apportate alla versione aggiornata, evidenziandone problemi e limitazioni.

### Tensione superficiale

Si è visto come il termine legato alla tensione superficiale richieda la valutazione della curvatura. La curvatura di una superficie è definita come il modulo della derivata del versore tangente alla superficie stessa. Per il calcolo del versore tangente è necessaria la derivata spaziale della superficie a cui si riferisce; nel caso in esame la superficie (che lavorando in due dimensioni si riduce a una curva) da considerare è definita dalla funzione  $\eta = \eta(x)$ , dove è stata eliminata la dipendenza dal tempo, poiché la valutazione della curvatura va ripetuta istante per istante. Il vettore posizione  $r$ , ovvero il vettore che definisce la posizione di una particella di fluido rispetto all'intersezione degli assi di riferimento, e le sue derivate  $r'$  e  $r''$ , possono quindi essere espressi come:

$$r = \begin{bmatrix} x \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad r' = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta' \\ 0 \end{bmatrix} \quad r'' = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta'' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

con  $r' = \frac{\partial r}{\partial x}$  e  $r'' = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ . Si può calcolare il versore tangente come:

$$\mathbf{t}(x) = \frac{r'}{\|r'\|} \quad (3.26)$$

La curvatura è definita come  $k(x) = \|\mathbf{t}'(x)\|$ , che può essere riscritta nella forma  $k(x) = \frac{\|r' \wedge r''\|}{\|r'\|^3}$ . Sfruttando quindi le definizioni 3.25 si arriva a scrivere:

$$k = \frac{\frac{d^2 \eta}{dx^2}}{\left(1 + \frac{d\eta}{dx}\right)^{3/2}} \quad (3.27)$$

La 3.27 mostra la necessità di conoscere l'espressione di  $\eta = \eta(x)$  ad ogni istante. Il pelo libero però è noto attraverso una sua discretizzazione, per cui non si conosce a priori questa espressione; una possibilità è quella di utilizzare algoritmi capaci di identificare la curva interpolante relativa alla serie di punti in esame. Operativamente però è costoso utilizzare queste funzioni, inoltre prove specifiche hanno mostrato che, se ci si trova in situazioni in cui i nodi della curva che definisce il pelo libero sono molto vicini tra loro sia in direzione orizzontale che in verticale, l'interpolazione che fornisce l'espressione polinomiale del profilo genera errori non trascurabili.

Si è preferito quindi sostituire l'espressione della curvatura con una formula approssimata ma più veloce e sicura.

Essendo in presenza di una curva di cui è nota una sua discretizzazione in  $N+1$  punti, è possibile definire alcune grandezze vettoriali utili per un'espressione alternativa della curvatura. L'unico parametro necessario è il vettore posizione  $\mathbf{r}$  relativo ad ogni punto della discretizzazione. Noto questo parametro, si possono valutare le seguenti grandezze, con riferimento alla figura 3.6:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} \quad , \quad L_i = \|\mathbf{L}_i\| \\ \mathbf{Q}_i &= \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_{i-1} \quad , \quad Q_i = \|\mathbf{Q}_i\| \\ \mathbf{A}_i &= \|\mathbf{L}_i \wedge \mathbf{L}_{i+1}\| \quad , \quad A_i = \|\mathbf{A}_i\| \end{aligned} \tag{3.28}$$

La curvatura in ciascun  $i$ -esimo punto della discretizzazione può quindi essere valutata semplicemente sfruttando i vettori  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}_{i-1}$ ,  $\mathbf{r}_{i+1}$ ; infatti avendo una sezione di curva composta da tre punti soltanto, il modo più semplice per valutarne la curvatura è vedere questa grandezza come l'inverso del raggio della circonferenza passante per i suddetti punti. Sfruttando i termini sopra definiti si può quindi scrivere<sup>3</sup>:

$$K_i = \frac{2A_i}{L_i L_{i+1} Q_i} \tag{3.29}$$

che è la formula per il calcolo della curvatura che è stata utilizzata nel codice. Come si è visto nella formulazione debole, è necessario anche valutare il versore normale alla curva  $\eta(x)$  in ogni punto della discretizzazione. Un modo semplice per farlo è trovare il versore tangente  $\mathbf{t}$ , identificando poi  $\mathbf{n}$  come vettore perpendicolare a questo.

Si prenda in esame il punto di indice  $i$ , le cui coordinate sono  $x_i$  e  $\eta_i$ ; il

---

<sup>3</sup>Formula presa da [11], p. 18.

versore tangente  $\mathbf{t}_i$  può essere calcolato sfruttando le 3.25 e 3.26:

$$\mathbf{t}_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (\eta'_i)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta'_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Per il calcolo della derivata prima  $\eta'_i$  è facile e comodo utilizzare un'approssimazione alle differenze finite centrate, ovvero:

$$\eta'_i = \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (3.31)$$

A questo punto si possono definire le componenti del versore tangente (si considerano solo quelle in direzione  $x$  e  $y$ , essendo in un dominio bidimensionale):

$$\begin{cases} t_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\eta'_i)^2}} \\ t_{y_i} = \frac{\eta'_i}{\sqrt{1 + (\eta'_i)^2}} \end{cases} \quad (3.32)$$

Per la perpendicolarità tra  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ , il versore  $\mathbf{n}_i$  è:

$$\mathbf{n}_i = \begin{cases} n_{x_i} = -t_{y_i} = -\frac{\eta'_i}{\sqrt{1 + (\eta'_i)^2}} \\ n_{y_i} = t_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\eta'_i)^2}} \end{cases} \quad (3.33)$$

L'utilizzo delle differenze finite centrate è semplice e veloce, inoltre garantisce un'approssimazione del secondo ordine, pari a quella della formula approssimata utilizzata per la curvatura. Inoltre utilizzando un modello periodico

non è necessario sfruttare algoritmi non centrati per i nodi di bordo.

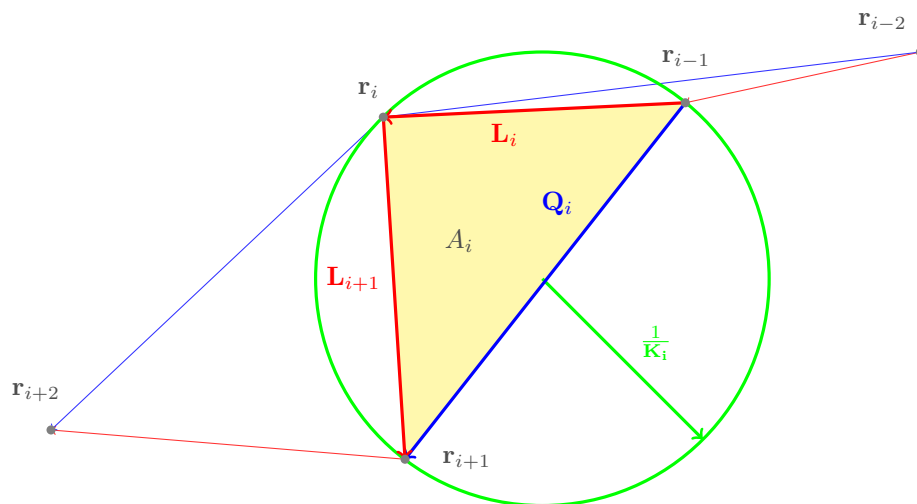


Figura 3.2: Approssimazione della curvatura.

### Condizione di adesione

L'implementazione di questa condizione è stata complicata dalla particolare struttura decentrata della mesh; infatti gli elementi (rettangolari) in prossimità del fondale del bacino hanno il lato inferiore corrispondente con la parete fisica (per un fondale rettilineo orizzontale), ma i punti di discretizzazione per la velocità orizzontale sono posti a metà dei lati perpendicolari al fondo, ovvero i lati verticali degli elementi. Ciò significa che i nodi più vicini al fondale utili per la definizione della velocità orizzontale non coincidono esattamente con la parete fisica; per aggirare questo problema sono state considerate due possibilità:

- imporre  $u = 0$  nei nodi più vicini al fondale, commettendo un errore che, in presenza di mesh sufficientemente fitta, può essere considerato trascurabile;
- imporre la velocità sui suddetti nodi tramite interpolazione lineare tra i valori di velocità dei nodi a loro sovrastanti e il valore nullo sul fondo; con riferimento alla figura 3.3 si può esprimere l'interpolazione lineare come:

$$u_1 = \frac{u_2 - 0}{dz_1 + dz_2/2} \frac{dz_1}{2} \quad \text{ovvero} \quad u_1 = u_2 \frac{dz_1/2}{dz_1 + dz_2/2} \quad (3.34)$$

Anche questa è un'approssimazione, è quindi opportuno contenere le dimensioni della mesh anche in questo caso per non commettere errori importanti.

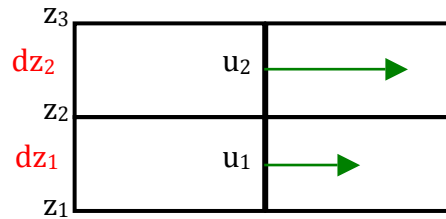


Figura 3.3: Discretizzazione dei nodi sul fondo.

Si è scelto di implementare la condizione di adesione nel secondo modo, poichè più vicino alla realtà, pur se non del tutto scevro da errori di approssimazione.

### Condizioni periodiche

Si mostra di seguito come è stato possibile ottenere condizioni a contorno di tipo periodico.

Si prenda una griglia composta da  $N_n$  nodi lungo  $x$ , si generano così  $N_{elem} = N_n - 1$  elementi. In questo modo il primo e l'ultimo elemento sarebbero quelli di indice 1 e  $N_{elem}$ ; le condizioni periodiche definiscono gli elementi di indice 0 e  $N_{elem} + 1$ , imponendoli uguali rispettivamente all'ultimo e al primo, ovvero  $elem(0) = elem(N_{elem})$  e  $elem(N_{elem} + 1) = elem(1)$  (figura 3.4). Ciò significa che il codice può risolvere il campo di velocità orizzontale ai bordi con le stesse equazioni utilizzate al centro del dominio di calcolo, senza richiedere particolari imposizioni. Il risultato che implicitamente si ottiene con questo procedimento è che il campo di velocità orizzontale sui nodi di inflow coincide con quello sui nodi di outflow; in altre parole il dominio di calcolo si ripete periodicamente lungo  $x$ .

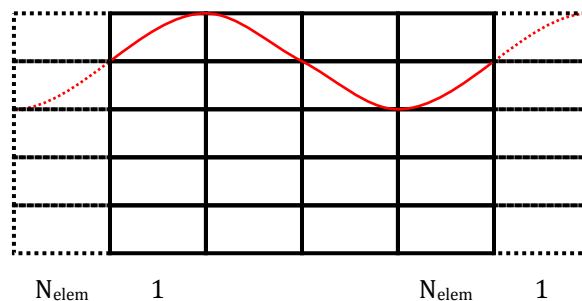


Figura 3.4: Geometria per condizioni periodiche.

L'utilizzo di questa condizione, molto semplice dal punto di vista implementa-

tivo, è però delicato; sono necessari alcuni accorgimenti per poterla sfruttare senza incorrere in errori:

- la modellazione del problema non può differire dalla realtà fisica del fenomeno analizzato: per poter utilizzare delle condizioni a contorno periodiche è necessario che il campo di moto del fluido presenti un comportamento periodico (o al più costante). In caso contrario non è lecito pensare che il dominio studiato si ripeta periodicamente, quindi condizioni a contorno di questo tipo falsano la soluzione sui nodi di inflow e outflow, creando degli effetti di bordo che potrebbero modificare sensibilmente il calcolo in tutto il dominio considerato;
- pur ammettendo di essere in presenza di fenomeni periodici, la finestra di osservazione spaziale non può essere presa casualmente, ma deve essere un multiplo della lunghezza d'onda caratteristica del fenomeno. Infatti l'utilizzo di una finestra diversa comporta delle discontinuità nella soluzione dell'inflow e dell'outflow, che, come sopra, generano effetti inesistenti nella realtà. Poiché la condizione iniziale assegnata è la somma di una corrente di Couette e di un disturbo imposto come profilo sinusoidale del pelo libero, la scelta della finestra di osservazione non è difficile; il progredire della soluzione però potrebbe generare fenomeni, seppur periodici, con frequenze spaziali per i quali la dimensione del dominio utilizzata non è corretta. Non potendo prevedere questo comportamento, è necessario tenerne conto nel momento in cui si vanno ad analizzare i risultati.



### Contributo del vento

Il contributo del vento era già stato considerato nella versione originale del programma dal punto di vista teorico (equazione 3.10), ma non era prevista la reale possibilità di utilizzarlo nei calcoli. Nella versione aggiornata quindi si è provveduto a implementare una formula che potesse essere utilizzata nella seconda equazione delle 3.10 come funzione del vento. Ciò significa che il contributo della corrente indisturbata al di sopra dello strato di fluido considerato rientra nelle equazioni attraverso la definizione dello sforzo viscoso superficiale in direzione tangente. In una prima fase si è scelto di utilizzare una legge empirica ritrovata in letteratura:

$$fa = \frac{\rho_g}{\rho} C_w W |W| \quad (3.35)$$

con

$$C_w = \begin{cases} 1.2e - 6 & \text{se } |W| \leq W_c \\ 1.2e - 6 + 2.25e - 6 \left(1 - \frac{W_c}{|W|}\right) & \text{se } |W| > W_c \end{cases}$$

dove le  $\rho$  sono ovviamente le densità di liquido e gas,  $W$  è la velocità del vento esterno, e  $W_c = 5.6 \text{ m/s}$ .

Questa legge è stata presa da scritti riguardanti lo studio delle onde oceaniche, quindi, essendo empirica, non ci si può assicurare che sia valida anche per le condizioni che questo lavoro si prefigge di analizzare (ovvero strati di fluido di spessore dell'ordine del millimetro). Si è ritenuto quindi più corretto sfruttare dei valori provenienti da lavori più simili a quello qui sviluppato. In

particolare l'articolo di Craik<sup>4</sup>, che mostra uno studio sperimentale dell'instabilità per strati sottili di fluido, offre un grafico, riportato in figura 3.5, che mostra il legame *velocità del vento - sforzo superficiale* che è stato utilizzato come riferimento per la definizione del parametro  $fa$ . In realtà il grafico non riporta i valori di sforzo bensì quelli del parametro  $U_{Lsup}/h_{rif}$ , dove  $U_{Lsup}$  è la velocità del pelo libero. Moltiplicando questo valore per la viscosità del liquido  $\nu$  si ottiene il valore di sforzo a cui si è interessati.

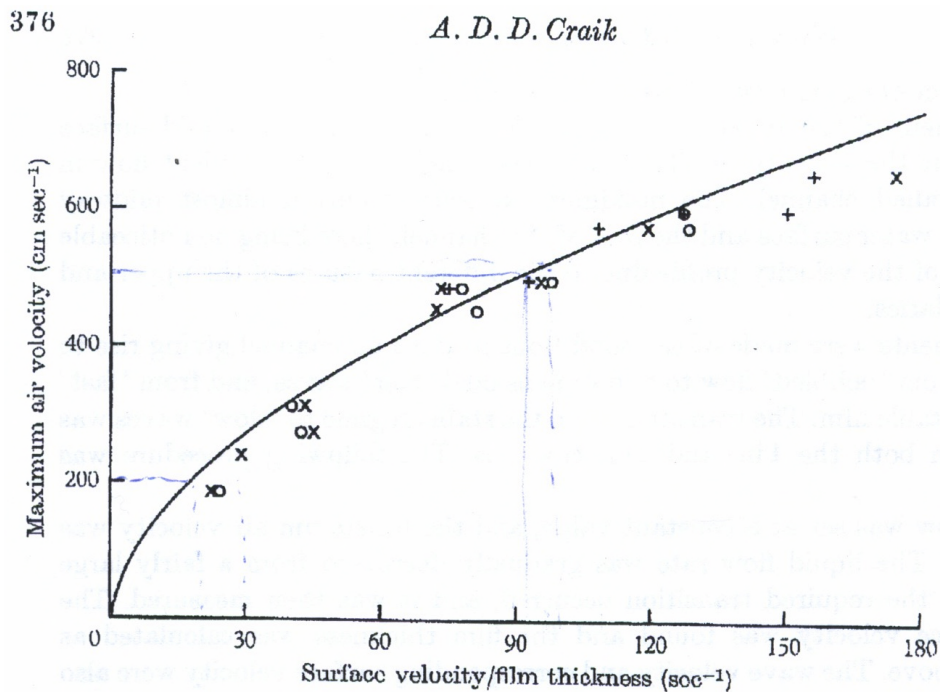


Figura 3.5: Legame velocità del vento - sforzo tangenziale.

<sup>4</sup>Grafico preso da [4], p. 376.

### 3.6.1 Costruzione del problema algebrico

Prima di passare alla soluzione vera e propria del problema, è necessario assemblare tutte le sottomatrici in una unica più grossa. Infatti è più comodo costruire separatamente tutti i “pezzi” del sistema, per poi metterli insieme. Il vantaggio di questo approccio è la possibilità di andare a modificare un termine qualsiasi senza grosse complicazioni. L’assemblaggio però è abbastanza complesso: prima di tutto le griglie utilizzate per le diverse variabili sono sfalsate; inoltre la necessità di seguire l’evoluzione temporale del pelo libero genera due complicazioni:

- ad ogni passo temporale il numero di strati “attivi”, ovvero occupati dal fluido, cambia; ciò vuol dire che è necessario per ogni istante rivalutare il numero di celle e il numero di gradi di libertà di ciascuna incognita;
- le celle attive in prossimità del pelo libero vengono adattate in modo da avere il lato superiore coincidente con il pelo libero stesso; ciò vuol dire che i  $\Delta z$  di queste celle possono essere molto diversi da quelli delle altre, per le quali questa dimensione è imposta dalla griglia iniziale. La conseguenza è che la posizione dei gradi di libertà delle variabili relativi alle celle di confine non sono note a priori e costanti, ma variano in funzione dell’evoluzione temporale di  $\eta$ .

Scegliendo il vettore delle incognite come  $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \eta, \mathbf{w}, \mathbf{q})^T$ , dove ciascun termine rappresenta il vettore dei gradi di libertà, si ottiene un sistema lineare “monolitico”, del tipo  $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{F}$ , per cui la matrice  $\mathcal{A}$  è definita come segue:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_u + K_u & -gE^T & \mathbf{0} & D_x^T \\ E & \frac{1}{\Delta t} M_\eta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & BC & \frac{1}{\Delta t} M_w + K_w & D_z^T \\ D_x & \mathbf{0} & D_z & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

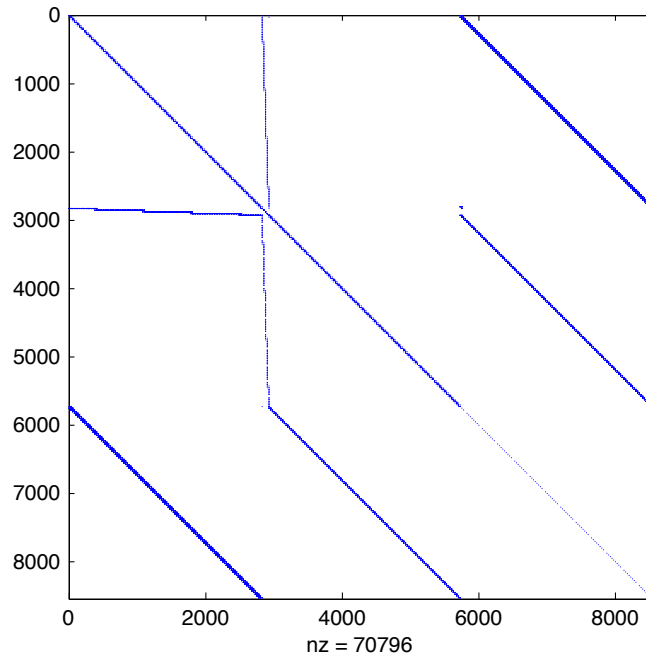
dove  $M$  sono le matrici di massa,  $K$  quelle di *stiffness*,  $D_x^T$  e  $D_z^T$  rappresentano le due componenti del gradiente discreto ed  $E$  è l'equivalente discreto del termine integrale  $\partial_x \int_z u$  che compare nell'equazione per la superficie libera.  $BC$  è invece la matrice che accoppia  $\eta$  a  $w$  per imporre la condizione 3.6 sulla superficie libera. L'ultimo gruppo di equazioni viene poi modificato per imporre la condizione valida per la  $q$  in superficie: nelle righe corrispondenti a questi gradi di libertà compaiono solo coefficienti unitari in corrispondenza dei termini diagonali.

Il pattern della matrice  $\mathcal{A}$  così ottenuta è riportato in figura 3.6.

Il termine noto viene costruito tenendo conto delle derivate temporali delle componenti della velocità e dell'elevazione di  $\eta$ , quindi:

$$\mathbf{F} = \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^n(p), \frac{1}{\Delta t} \eta^n, \frac{1}{\Delta t} \mathbf{w}^n(p), \mathbf{0} \right)^T \quad (3.37)$$

Successivamente vengono aggiunti i termini relativi ai contributi di tensione superficiale, vento esterno, fusione ed evaporazione.

Figura 3.6: Pattern della matrice  $A$ .

### 3.6.2 Aspetti implementativi

Il linguaggio usato per l'implementazione è `Matlab`, che garantisce flessibilità, efficienza e facilità di utilizzo.

Come è stato già spiegato, il problema più grosso è dato dalla variazione della superficie libera, che fa variare numero e posizione delle celle e dei gradi di libertà ad ogni passo temporale. Per poter gestire facilmente questi elementi, il codice prevede l'utilizzo di una memorizzazione tipo `CRS`, in cui vengono definiti tre vettori per ogni gruppo di incognite, raggruppati come campi di una `structure`. Prendendo ad esempio in considerazione la  $u$  si ha:

- `u.val_u`, che memorizza i valori che l'incognita  $u$  assume in tutti i nodi

in cui sono posti i gradi di libertà; questi vengono ordinati partendo dal nodo inferiore dell'inflow, scorrendo tutti gli strati relativi ad ogni nodo dal basso verso l'alto;

- $u.i_u$ , che ha dimensione  $N_n + 1$ ; per il nodo di indice  $i$ ,  $i$  gradi di libertà attivi sono numerati da  $u.i_u(i)$  a  $u.i_u(i+1)-1$ . In pratica questo vettore contiene gli indici, secondo la numerazione utilizzata da  $u.val_u$ , corrispondenti ai gradi di libertà appartenenti al limite inferiore del dominio di calcolo;
- $u.j_u$ , di dimensione pari a  $u.val_u$ , che memorizza lo strato di appartenenza del valore corrispondente presente in  $u.val_u$ .

Noti i valori e gli indici dei gradi di libertà, è necessario richiamare strutture che li associno a un punto preciso all'interno del dominio, ovvero alla griglia utilizzata. A questo scopo si utilizzano strutture molto simili: prendendo ad esempio ancora l'incognita  $u$ , si utilizza `griglia_u`, costituita dai campi `griglia_u.i` e `griglia_u.j`, che hanno lo stesso significato di  $u.i_u$  e  $u.j_u$  (di fatto coincidono), `griglia_u.x` e `griglia_u.z` che definiscono le coordinate rispetto al sistema di riferimento originale dei gradi di libertà. Strutture affini a queste appena elencate si utilizzano per ogni gruppo di variabili.

La costruzione del termine noto non dà particolari problemi; il componente più delicato è l'implementazione del metodo di Eulero, il quale richiede la ricostruzione, ad ogni passo temporale, dei valori di  $u$  e  $w$ . Nel caso in cui risalendo la caratteristica si finisca fuori dal dominio, il calcolo si blocca e restituisce il valore calcolato all'iterazione precedente. Ovviamente è stato

necessario modificare anche questo calcolo per imporre correttamente le condizioni periodiche: se risalendo le caratteristiche si esce dall'inflow, si rientra dall'outflow, ovvero se il punto considerato avrà  $x(P) < x_{in}$ , si va a definire un nuovo punto  $\bar{P}$ :

$$\bar{P} := \left[ x(\bar{P}) = x_{out} - (x_{in} - x(P)), y(\bar{P}) = y(P) \right];$$

in virtù della periodicità del dominio,  $u(P) = u(\bar{P})$  e  $w(P) = w(\bar{P})$ , per cui si può assumere di essere arrivati, tramite la caratteristica, al punto  $\bar{P}$ . Un ragionamento del tutto analogo si ha nel caso in cui si esca dall'outflow; in questo caso il punto  $\bar{P}$  è definito come:

$$\bar{P} := \left[ x(\bar{P}) = x_{in} + (x(P) - x_{out}), y(\bar{P}) = y(P) \right].$$

Come già detto la matrice  $\mathcal{A}$  viene costruita assemblando sottomatrici implementate separatamente; la memorizzazione di tutte le sottomatrici così come della matrice complessiva è in formato sparso, accorgimento che permette di ridurre molto il costo computazionale di ogni operazione che le riguarda.

Il solutore utilizzato dal codice originale è il metodo `\` di `Matlab`; questo si è rivelato inadeguato per i casi qui analizzati; con tutta probabilità il motivo è che la matrice  $\mathcal{A}$  ha un numero di condizionamento molto alto, per cui il modello così costruito dei fenomeni studiati è mal condizionato. Nonostante numerosi tentativi di migliorare il condizionamento della matrice  $\mathcal{A}$ , non è stato possibile ottenere una buona soluzione tramite questo solutore. Si è deciso quindi di sfruttare un solutore iterativo: `gmres`. Per velocizzare la

convergenza e migliorare l'accuratezza della soluzione, è stata utilizzata una matrice di preconditionamento, simile alla matrice  $\mathcal{A}$ , ma con il blocco diagonale aumentato di tre ordini di grandezza. In questo modo è stato possibile ottenere risultati corretti con tempi di calcolo accettabili.

La soluzione di sistemi mal condizionati è comunque un processo molto delicato; infatti durante questo lavoro si è osservato come piccole variazioni degli elementi in gioco (ad esempio del preconditionatore o della soluzione di partenza per il calcolo iterativo) danno variazioni non trascurabili sulla soluzione.



# Capitolo 4

## Risultati

Lo studio dell'instabilità qui riportato si prefigge di caratterizzare il comportamento di un sottile strato liquido al variare dei principali parametri fluidodinamici. Le osservazioni e i risultati principali riportati da Craik e Karabeyoglu sono stati utili per capire quali siano i parametri più influenti su cui concentrare l'attenzione. Come già detto, questi evidenziano una forte dipendenza dell'instabilità da:

- tipo di fluido, esprimibile attraverso densità, viscosità e tensione superficiale;
- lunghezza d'onda del disturbo iniziale;
- velocità superficiale del fluido, la quale è legata alla velocità del vento esterno;
- spessore dello strato liquido;

- rateo di fusione e di evaporazione, ovvero velocità del flusso verticale generato dalla regressione del combustibile;
- forze di volume: Karabeyoglu mostra i risultati ottenuti considerando l'accelerazione di gravità in direzione verticale (parallela a  $z$ ) e quelli in cui questa grandezza è nulla (l'assenza di gravità è una condizione interessante poiché coincide con il funzionamento del propulsore nello spazio).

Il combustibile più interessante per questo studio è la paraffina, la quale possiede la peculiarità di generare il film liquido durante il funzionamento del propulsore al pari delle sostanze criogeniche, ma rispetto a queste è più semplice da ottenere e presenta minori problemi di conservazione e stoccaggio; questi aspetti la rendono di più facile utilizzo pratico.

Le proprietà di questo materiale<sup>1</sup> sono riportate in tabella 4.1. Prima di pre-

Proprietà	Simbolo e unità di misura	Paraffina
Densità	$\rho$ [ $kg/m^3$ ]	654.4
Viscosità dinamica	$\mu$ [ $mPa \cdot s$ ]	0.65
Viscosità cinematica	$\nu$ [ $mm^2/s$ ]	0.993
Tensione superficiale	$\sigma$ [ $N/m$ ]	0.0071

Tabella 4.1: Proprietà della Paraffina.

sentare i risultati è necessaria una precisazione: il modello utilizzato prevede che l'ampiezza massima del disturbo sia molto minore sia della sua lunghezza d'onda che dello spessore di riferimento dello strato liquido. I disturbi

<sup>1</sup>Le proprietà sono prese da [?], tabella 1: il tipo di paraffina considerato viene chiamato Wax

considerati hanno lunghezze d'onda che vanno da valori leggermente superiori al millimetro fino a qualche centimetro, mentre lo spessore è in quasi tutti i casi inferiore al millimetro (solo in alcune prove è di poco superiore a questa grandezza). La condizione più stringente è quindi quella che impone l'ampiezza del disturbo molto minore dello spessore del film. Ciò vuol dire che mantenendo fisso lo spessore  $h_{rif}$  e variando la lunghezza d'onda del disturbo  $\lambda$  varia il rapporto  $\delta_d/\lambda$ , dove  $\delta_d$  è l'ampiezza del disturbo; stessa cosa succede se si mantiene fissa  $\lambda$  e si varia  $h_{rif}$ . Ciò che rimane costante in tutte le prove è il rapporto  $\delta_d/h_{rif}$ , che è stato imposto pari a 1/1000. Questo significa che facendo variare  $\lambda$  o  $h_{rif}$  si ottengono onde di forma differente; non è noto come la forma dell'onda influisca sul calcolo di stabilità, è però possibile che il suo effetto non sia del tutto trascurabile. Andando ad operare una caratterizzazione del comportamento del fluido al variare di questi due parametri, è quindi necessario tener conto del fatto che gli andamenti potrebbero dipendere anche dalla forma dell'onda.

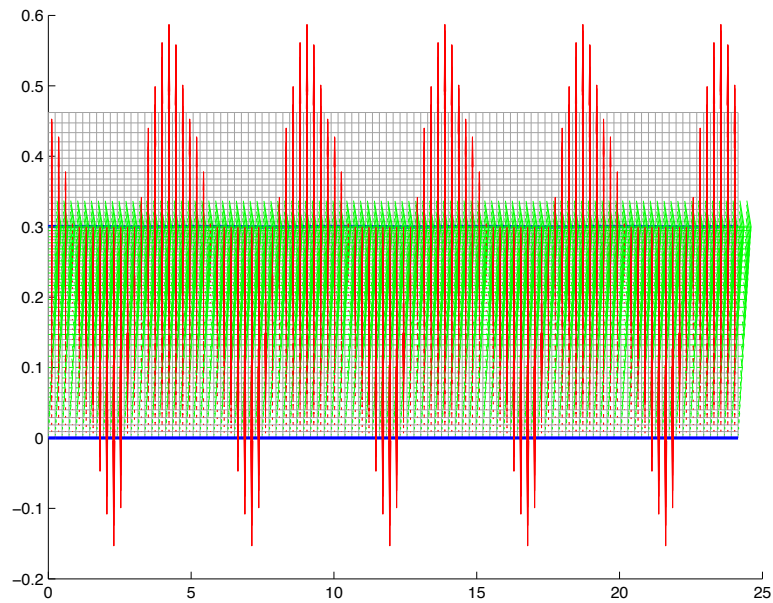
## 4.1 Sistemi di postprocessing e visualizzazione

Il codice alloca i valori delle incognite del problema in strutture che vengono aggiornate ad ogni passo temporale. Per poter visualizzare e analizzare i risultati, è stato necessario pensare adeguati sistemi di visualizzazione, in modo da poter presentare chiaramente le variabili di interesse. Si sono implementati tre diversi sistemi; ciascuno è mirato all'analisi di una particolarità del comportamento del liquido.

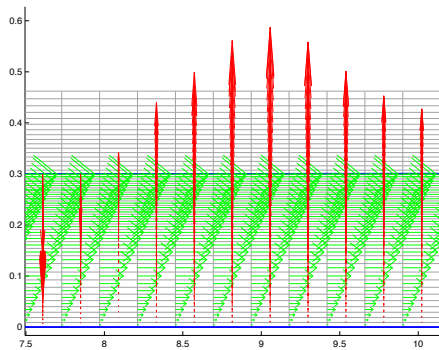
### 4.1.1 La visualizzazione *PlotStratos*

Il primo grafico disponibile è ottenuto attraverso una parte del codice già presente nella versione originale: la funzione *PlotStratos*. Questa crea una rappresentazione del dominio di calcolo e della griglia principale, e inoltre mette in evidenza l'altezza del pelo libero in ogni cella, sia al passo considerato che al passo precedente. Vengono anche rappresentati, attraverso dei vettori, i valori di velocità orizzontale e verticale in ogni nodo in cui sono valutate. Un esempio di questa visualizzazione è riportato in figura 4.1. Mentre le dimensioni geometriche hanno valore esatto, i vettori hanno valenza solo indicativa; essi sono corretti da un punto di vista qualitativo, ovvero sono utili per visualizzare gli andamenti delle due componenti di velocità, ma la lunghezza di ciascun vettore non ha alcun legame col reale valore dell'incognita corrispondente.

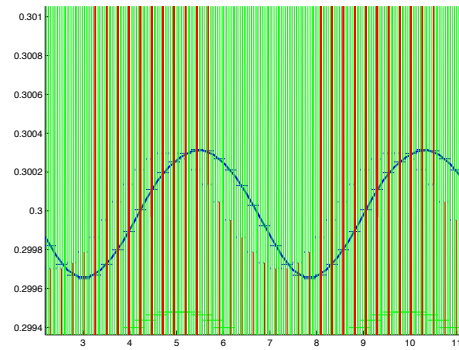
Questo tipo di visualizzazione è essenziale per avere un'idea di quello che succede al fluido ad ogni passo temporale, ma non fornisce alcuna informazione sull'instabilità del film. Per questo motivo è stato necessario sviluppare altri metodi che fornissero grafici più adatti a questo studio.



(a) Vista generale



(b) Particolare: profili di velocità



(c) Particolare: pelo libero

Figura 4.1: Visualizzazione *PlotStratos*.

### 4.1.2 Il fattore di amplificazione

Il parametro più importante per lo studio della stabilità è il fattore di amplificazione del disturbo. Per la sua definizione si parte dall'equazione 2.2, che

però è più comodo riscrivere nella forma<sup>2</sup>:

$$\eta = \delta_d e^{i(\alpha x - \beta_d t)} \quad (4.1)$$

in cui  $\eta$  è l'altezza del pelo libero rispetto alla condizione indisturbata,  $\alpha$  è il numero d'onda e  $\beta_d$  è il parametro di amplificazione. Quest'ultimo è composto da una parte reale e una immaginaria: la prima determina lo spostamento temporale del disturbo, mentre la seconda è l'indice a cui è legata la sua amplificazione. Dividendo la parte reale  $\beta_d^r$  da quella immaginaria  $\beta_d^i$  si può scrivere:

$$\eta = \delta_d e^{i\alpha x} e^{-i\beta_d^r t} e^{\beta_d^i t} \quad (4.2)$$

Per determinare  $\beta_d^i$  si considera il valore massimo di  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$ ; se non ci fosse smorzamento né amplificazione, ad ogni istante questo valore cambierebbe posizione spaziale, ma rimarrebbe comunque lo stesso, coincidente al valore iniziale. Si può scrivere quindi:

$$\bar{\eta} = A e^{\beta_d^i t} \quad (4.3)$$

Il valore  $A$  coincide con  $\bar{\eta}$  per  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= A = \bar{\eta}_0 && \text{per } t = 0 \\ \bar{\eta} &= A e^{\beta_d^i T} = \bar{\eta}_T && \text{per } t = T \end{aligned} \quad (4.4)$$

---

<sup>2</sup>Forma riportata in [6], pag. 623.

Dalle 4.4 è infine possibile ricavare l'espressione di  $\beta_d^i$ :

$$\beta_d^i = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{\bar{\eta}_T}{\bar{\eta}_0} \right) \quad (4.5)$$

Essendo di primaria importanza, è stato previsto un metodo per calcolare questo valore e inserirlo in alcuni grafici come ordinata; l'ascissa dipende dalla particolare proprietà che si sta analizzando caso per caso.

### 4.1.3 Lo spettro in frequenza

Il fattore di amplificazione è un indice del comportamento del film, ma non è del tutto esaustivo. Esso infatti non dà alcuna informazione riguardo al tipo di disturbo che si sta smorzando o amplificando col passare del tempo. La lunghezza d'onda del disturbo iniziale è nota, poiché viene imposta come condizione iniziale, ma è possibile che col passare del tempo si generino onde con lunghezze diverse. Per questo motivo può essere utile, soprattutto laddove ci si trova in condizioni di instabilità, operare un'analisi in frequenza, in modo da capire se le frequenze instabili siano quelle imposte all'inizio o se l'instabilità si "sposti" su delle altre.

L'analisi in frequenza è stata operata utilizzando l'algoritmo *Discrete Fourier Transform*, già presente in `Matlab` con il nome `FFT`; un esempio della visualizzazione dei risultati così trovati è rappresentato in figura 4.2. La precisione del calcolo in frequenza dipende dal numero di punti utilizzati per discretizzare un periodo completo del disturbo. Minore è il numero di punti,

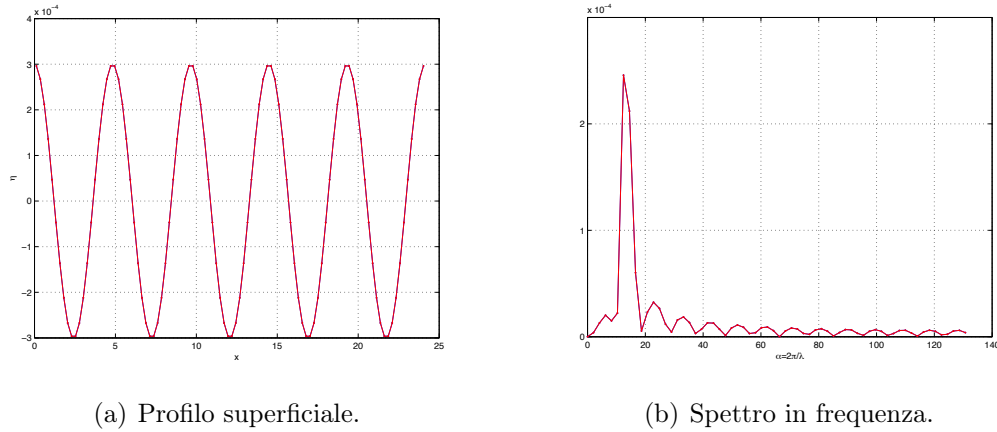


Figura 4.2: Visualizzazione in frequenza.

maggiore è l'aliasing, quindi l'energia si disperde maggiormente su frequenze inesistenti nella realtà fisica.

## 4.2 Caratterizzazione della Paraffina

Per la caratterizzazione del comportamento di un sottile film liquido composto da paraffina, sono state effettuate numerose prove facendo variare un solo parametro per volta, cercando così di identificare l'influenza di ciascuno di questi sulla stabilità.

### 4.2.1 Numeri d'onda

Come punto di partenza, seguendo Karabeyoglu [6], si sono effettuate diverse prove con le stesse condizioni, in cui però si sono fatte variare le caratteristiche del disturbo iniziale. Le condizioni scelte sono riportate nella tabella 4.2. I numeri di Reynolds e di Froude (adimensionali), sono così definiti:



Condizioni di Prova	Simbolo e Unità di Misura	Valori
Altezza di riferimento	$h_{rif}$ [mm]	0.3
Forza di gravità	$g$ [m/s <sup>2</sup> ]	9.81
Velocità superficiale	$U_{Lsup}$ [mm/s]	165.55
Numero di Reynolds	$Re$ [ ]	50
Numero di Froude	$Fr$ [ ]	9.31

Tabella 4.2: Condizioni di prova.

$$Re = \frac{\rho U_{Lsup} h_{rif}}{\mu} \quad (4.6)$$

$$Fr = \frac{U_{Lsup}^2}{gh_{rif}}$$

I diversi disturbi testati hanno la stessa ampiezza, pari a un millesimo di  $h_{rif}$ , ma numeri d'onda differenti; i numeri d'onda considerati e le corrispondenti lunghezze d'onda sono riportati nella tabella 4.3.

La visualizzazione più adeguata è quella che mostra l'andamento del fattore di amplificazione  $\beta_d^i$  al variare del numero d'onda del disturbo iniziale  $\alpha_d$ , riportato in figura 4.3; l'asse delle ordinate è invertito, ovvero i valori corrispondono a  $-\beta_d^i$ , in modo da ottenere grafici simili quelli riportati da Karabeyoglu<sup>3</sup>.

Dal grafico si evince che il parametro  $\alpha_d$  (numero d'onda del disturbo iniziale) ha una grande influenza sulla stabilità del liquido: si nota una zona stabile per valori intermedi del numero d'onda, al di fuori della quale il di-

<sup>3</sup>I grafici a cui ci si riferisce sono presenti in [6], pp. 627 - 630.

Numero d'onda $\alpha = 2\pi/\lambda$ [ $cm^{-1}$ ]	Lunghezza d'onda $\lambda$ [ $mm$ ]
3	20.94
7	8.98
13	4.83
15	4.19
20	3.14
30	2.09
35	1.79
40	1.57

Tabella 4.3: Numeri d'onda.

sturbo iniziale tende ad amplificarsi.

Questo grafico è ottenuto in assenza di tensione superficiale, in modo da poterla considerare separatamente e valutare il suo effetto.

Per meglio capire la natura del comportamento del liquido, si mostrano i grafici del comportamento in frequenza, ottenuti con il terzo metodo di visualizzazione, per i più significativi casi considerati (figure 4.4, 4.5, 4.6).

L'analisi in frequenza evidenzia diversi comportamenti a seconda del disturbo iniziale:

- se il numero d'onda del disturbo  $\alpha_d$  è compreso nella prima zona di instabilità (corrispondente alla prima parte negativa della spezzata di figura 4.3), il profilo del pelo libero è la somma di molte onde differenti, tutte amplificate (figura 4.4);
- se  $\alpha_d$  appartiene alla zona stabile (corrispondente alla parte positiva

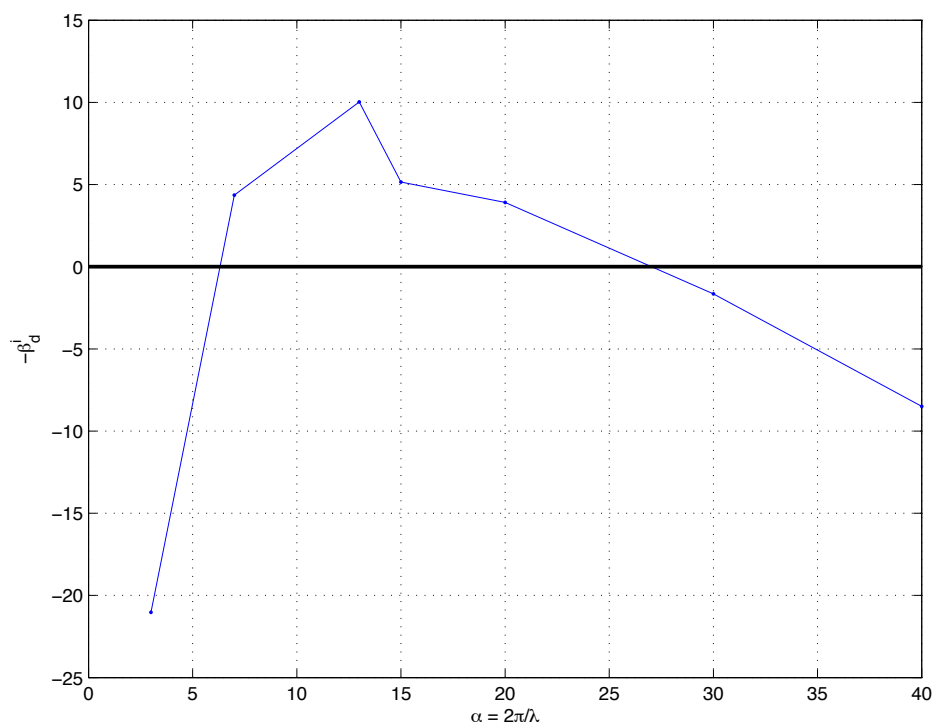
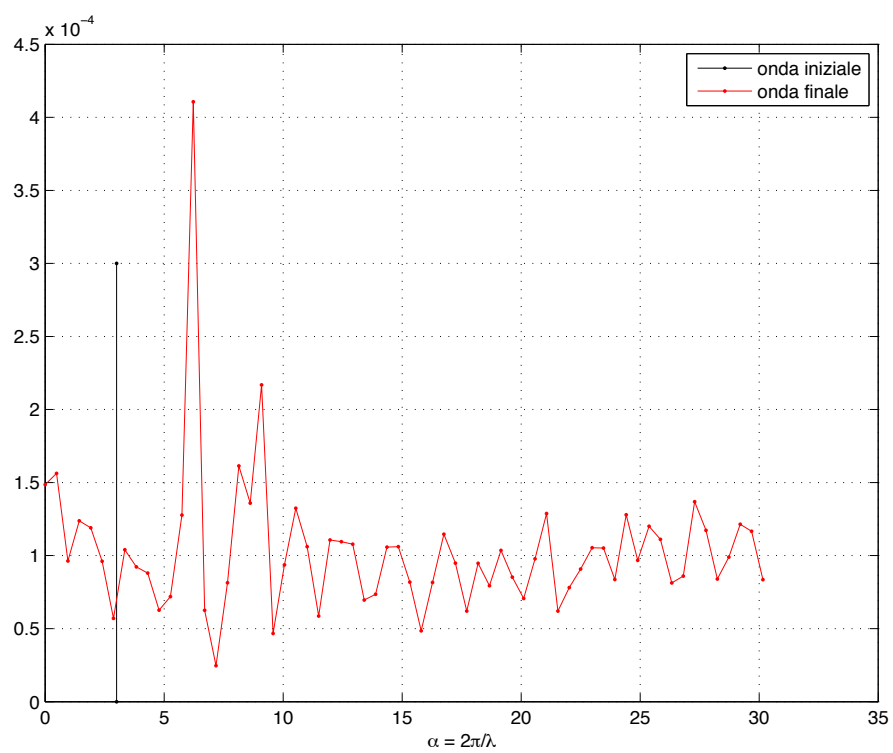


Figura 4.3: Fattore di amplificazione per paraffina.

della spezzata di figura 4.3), il disturbo si smorza senza generare altri rilevanti fenomeni (figura 4.5);

- se invece  $\alpha_d$  appartiene alla seconda zona instabile (corrispondente all'ultima parte negativa della spezzata di figura 4.3), l'instabilità si concentra su un'onda di lunghezza diversa da quella del disturbo iniziale, ma comunque appartenente alla stessa zona (figura 4.6).

Figura 4.4: Spettro in frequenza per  $\alpha_d=3 \text{ cm}^{-1}$ .

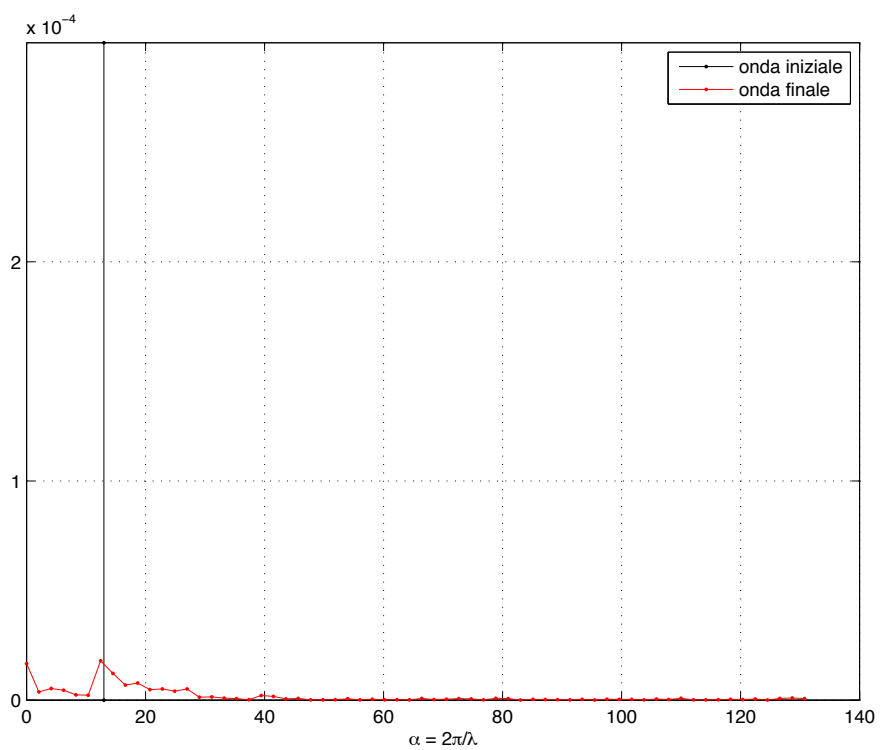
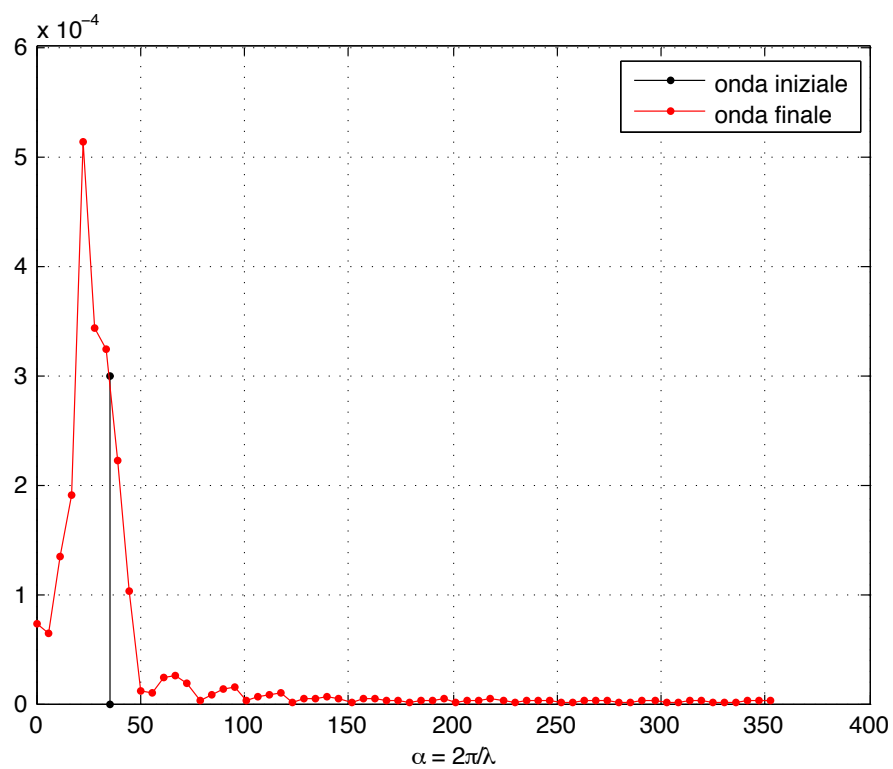


Figura 4.5: Spettro in frequenza per  $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ .

Figura 4.6: Spettro in frequenza per  $\alpha_d=35 \text{ cm}^{-1}$ .

### 4.2.2 Tensione superficiale

Per comprendere l'effetto della tensione superficiale sono state ripetute tutte le prove precedenti con l'aggiunta di questo parametro, in modo da evidenziarne il contributo. Il confronto tra i risultati è riportato in figura 4.7.

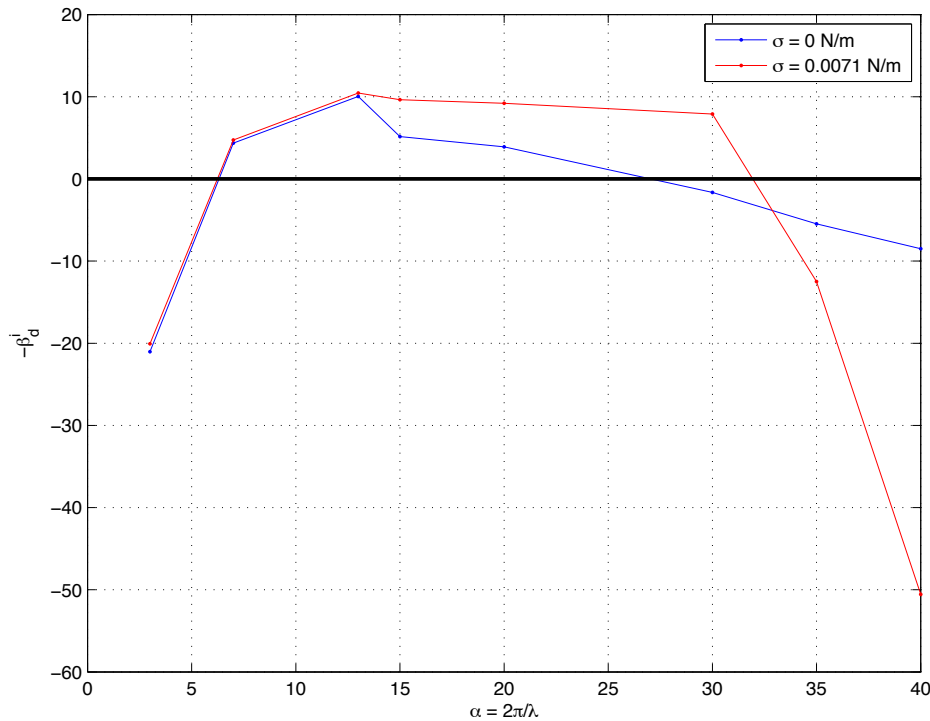


Figura 4.7: Effetto della tensione superficiale.

Dal grafico si nota che per disturbi con numeri d'onda bassi, la tensione superficiale ha un effetto stabilizzante molto leggero, trascurabile. Per valori maggiori di  $\alpha_d$  invece, l'effetto stabilizzante diventa progressivamente più consistente, facendo variare sia il margine di instabilità che il valore a cui corrisponde  $\beta_d^i = 0$ . La zona stabile è più estesa, alcuni disturbi capaci di

instaurare una leggera instabilità perdono questa caratteristica grazie all'effetto della tensione superficiale. Per valori molto alti di  $\alpha_d$  e quindi nella zona di piena instabilità, che corrisponde a disturbi con lunghezze d'onda molto piccole, la tensione superficiale ha l'effetto opposto, ovvero tende ad aumentare il fattore di amplificazione dell'onda.

Anche in questo caso si utilizza l'analisi in frequenza per identificare le frequenze a cui è maggiormente legata l'instabilità (figure 4.8, 4.9, 4.10).

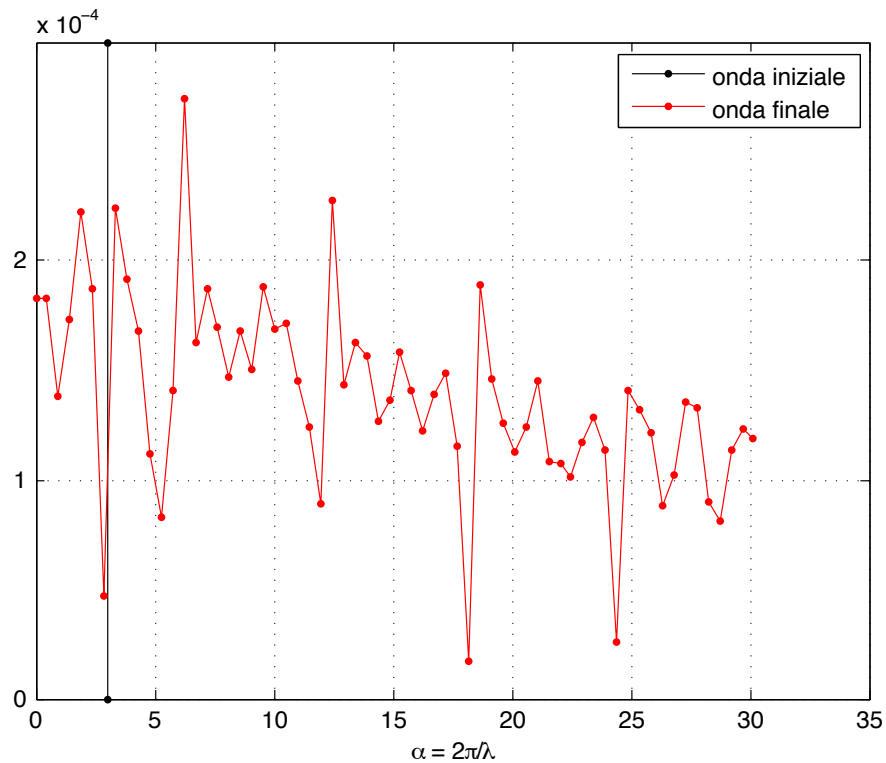


Figura 4.8: Spettro in frequenza in presenza di tensione superficiale per  $\alpha_d=3$   $cm^{-1}$ .



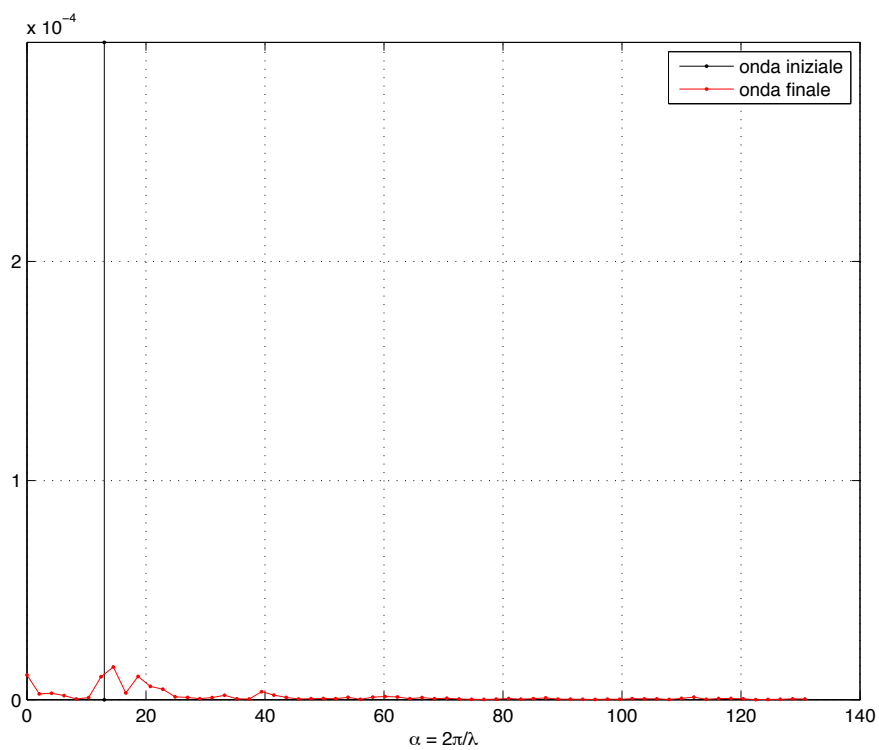


Figura 4.9: Spettro in frequenza in presenza di tensione superficiale per  $\alpha_d=13 \text{ cm}^{-1}$ .

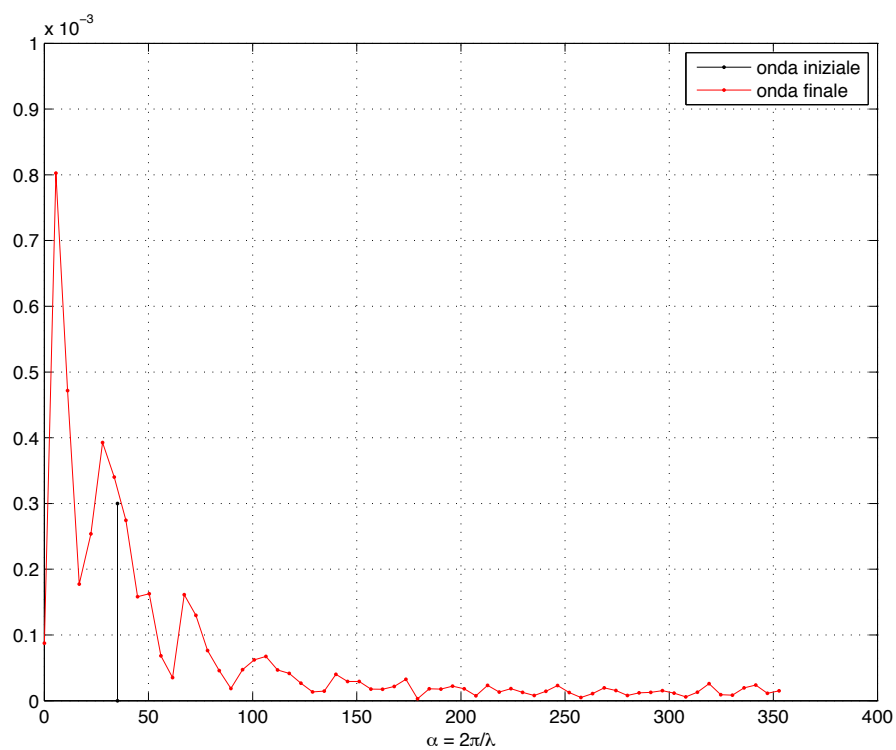


Figura 4.10: Spettro in frequenza in presenza di tensione superficiale per  $\alpha_d=35 \text{ cm}^{-1}$ .

I disturbi appartenenti alla zona stabile e alla prima instabile presentano un comportamento simile a quello visto in precedenza (in assenza di tensione superficiale). La figura 4.10 mostra invece come, in presenza di tensione superficiale, disturbi con alto numero d'onda generino onde instabili per frequenze molto diverse: si nota infatti un picco per un valore molto basso di  $\alpha$ , molto minore di quello del disturbo.

### 4.2.3 Effetto della velocità

La velocità superficiale del film  $U_{Lsup}$  è un parametro di primaria importanza. Come si è visto in precedenza, esistono diverse leggi semi empiriche che permettono di legare questo parametro a  $W$ , che indica la velocità indisturbata del flusso gassoso che scorre al di sopra del liquido. Tra tutti gli elementi che modificano il moto del fluido,  $W$  è uno di quelli più facilmente condizionabili dall'esterno, per cui può essere gestito e variato artificialmente senza grossi problemi. Questa caratterizzazione è quindi di grande interesse pratico.

Prendendo come riferimento le prove effettuate con  $Re = 50$ , sono stati considerati tre diversi disturbi iniziali, uno nella zona di instabilità per bassi numeri d'onda ( $\alpha_d = 3 \text{ cm}^{-1}$ ), uno appartenente la zona di instabilità per alti numeri d'onda ( $\alpha_d = 35 \text{ cm}^{-1}$ ) e quello più stabile in assoluto tra tutti quelli provati ( $\alpha_d = 13 \text{ cm}^{-1}$ ). L'obiettivo è vedere l'effetto della variazione di  $U_{Lsup}$  sia in generale, sia in relazione a diversi disturbi iniziali. I risultati ottenuti sono riportati in figura 4.11.

Si nota subito che riducendo la velocità superficiale il flusso tende a stabilizzarsi; questo è dovuto al fatto che l'energia trasferita dal gas al liquido sotto

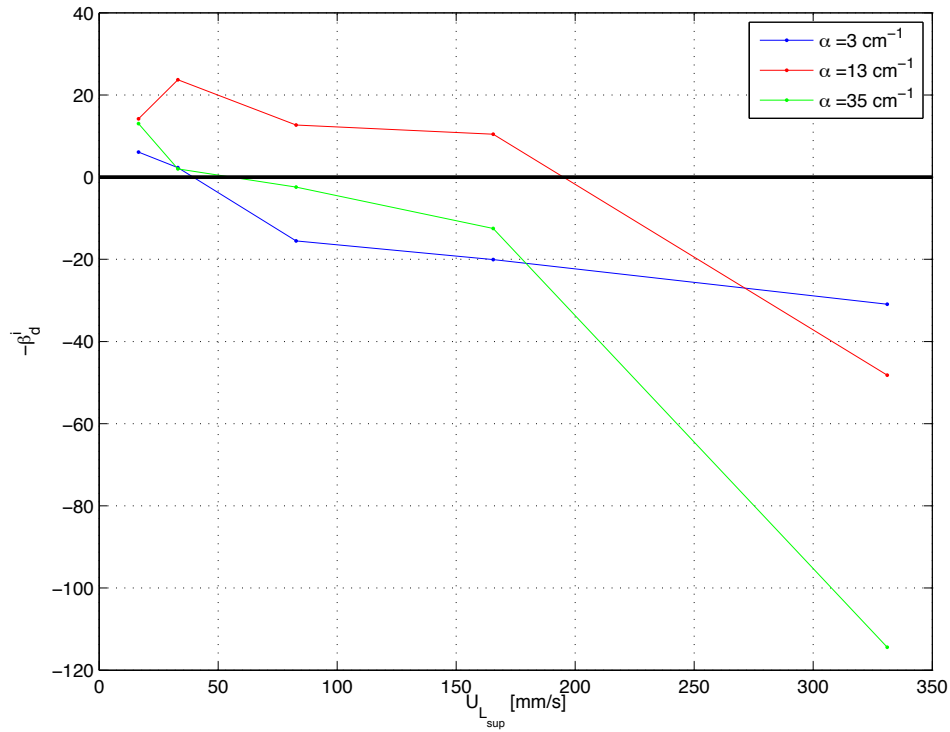


Figura 4.11: Effetto della velocità.

forma di sforzo superficiale è ridotta.

L'analisi in frequenza dei tre punti posti a  $U_{L\sup} = 331 \text{ mm/s}$  evidenzia che:

- per disturbo con numero d'onda basso (figura 4.12), l'instabilità si distribuisce su varie frequenze;
- per disturbo con numero d'onda intermedio (figura 4.13), si notano due frequenze maggiormente amplificate, quella pari al disturbo iniziale e una con numero d'onda alto;

- per disturbo con numero d'onda alto (figura 4.14), la maggior parte dell'instabilità è concentrata sull'onda con numero pari a quello iniziale.

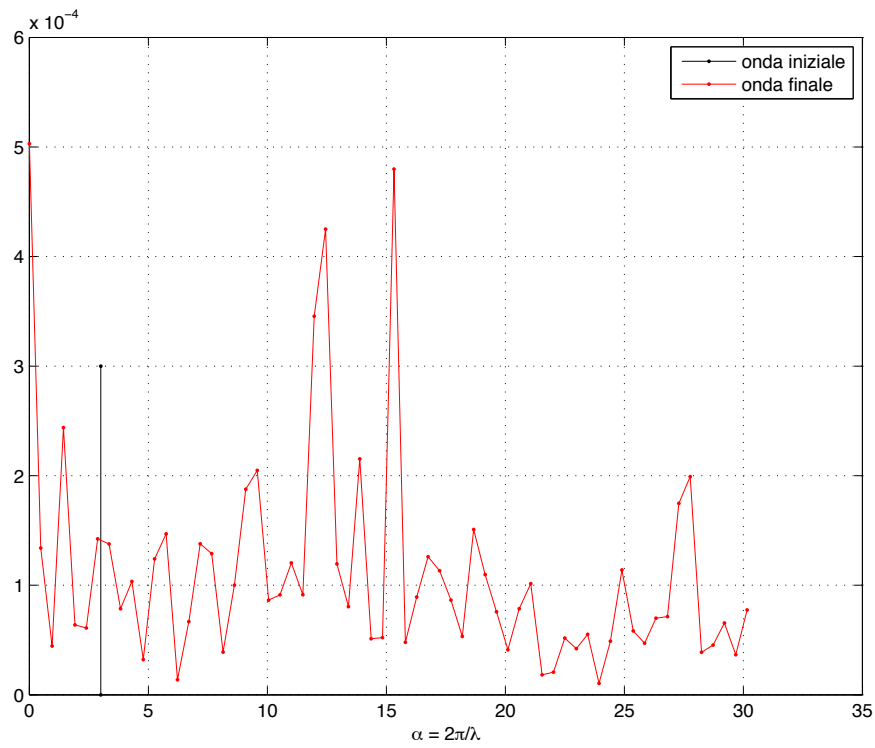


Figura 4.12: Spettro in frequenza per  $U_{Lsup} = 331 \text{ mm/s}$  per  $\alpha_d = 3 \text{ cm}^{-1}$ .

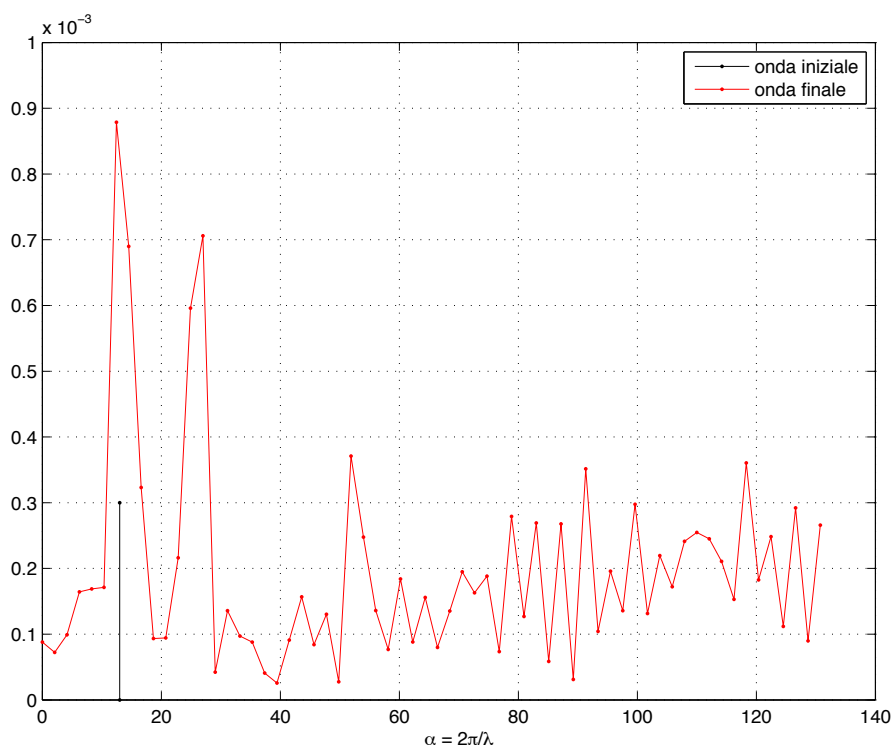


Figura 4.13: Spettro in frequenza per  $U_{Lsup} = 331 \text{ mm/s}$  per  $\alpha_d = 13 \text{ cm}^{-1}$ .

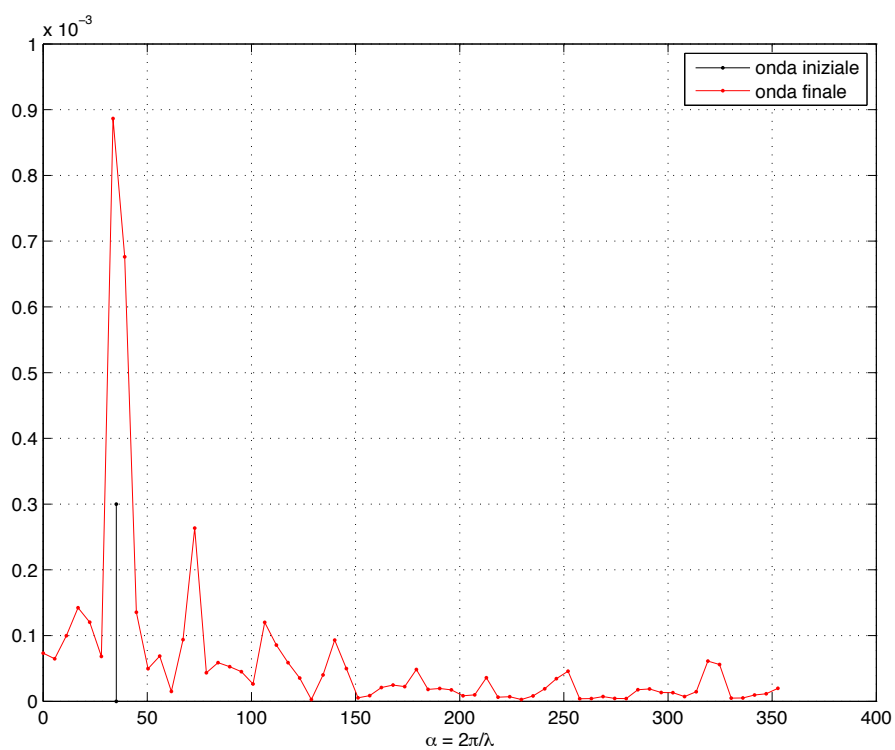


Figura 4.14: Spettro in frequenza per  $U_{Lsup} = 331 \text{ mm/s}$  per  $\alpha_d = 35 \text{ cm}^{-1}$ .

#### 4.2.4 Effetto dello spessore

Il lavoro di Craik [4] evidenzia come lo spessore giochi un ruolo importante sulla stabilità del liquido. In particolare la conclusione tratta dall'autore è che ogni situazione stabile può diventare instabile se lo spessore dello strato liquido viene ridotto sufficientemente.

Per la valutazione dell'effetto dello spessore sono stati scelti gli stessi disturbi utilizzati per la velocità, ovvero  $\alpha_d = 3, 13, 35 \text{ cm}^{-1}$ . I risultati sono riportati in figura 4.15.

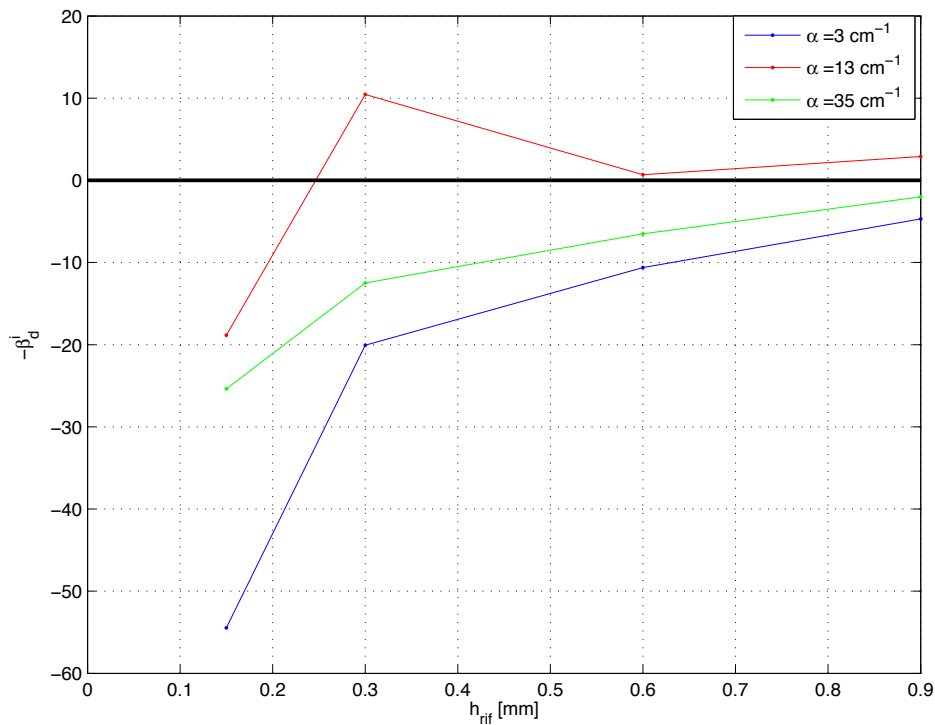


Figura 4.15: Effetto dello spessore.

Ciò che è stato osservato da Craik sull'acqua si ripresenta in modo simile



utilizzando paraffina: per bassi valori di  $h_{rif}$ , le condizioni stabili diventano instabili, mentre le condizioni instabili presentano un notevole aumento del parametro di amplificazione. Nell'analisi dei risultati è importante tener presente che l'altezza iniziale del disturbo è imposta sempre pari a un millesimo dello spessore, per motivi già enunciati; ciò vuol dire che a spessori piccoli corrispondono piccole ampiezze.

E' interessante vedere come si comporta l'instabilità per il minore valore di spessore tra quelli testati (figure 4.16, 4.17, 4.18): si osserva come, per tutti e tre i disturbi iniziali, non si trova un valore preciso del numero d'onda a cui corrisponde l'instabilità, bensì questa è distribuita su tutti quelli considerati.

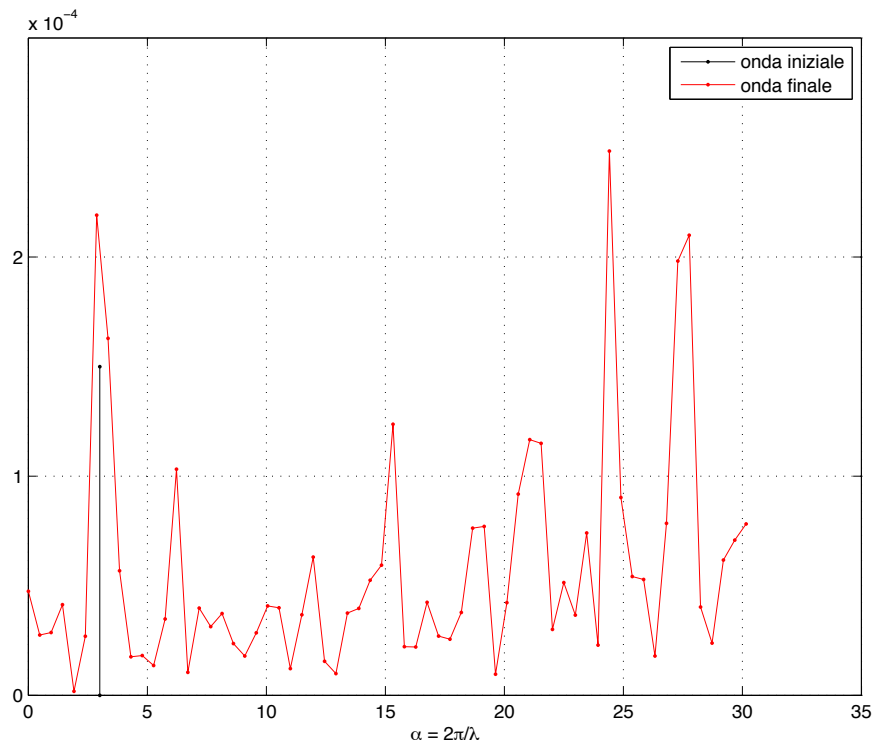


Figura 4.16: Spettro in frequenza per  $h_{rif} = 0.15 \text{ mm}$  per  $\alpha_d = 3 \text{ cm}^{-1}$ .

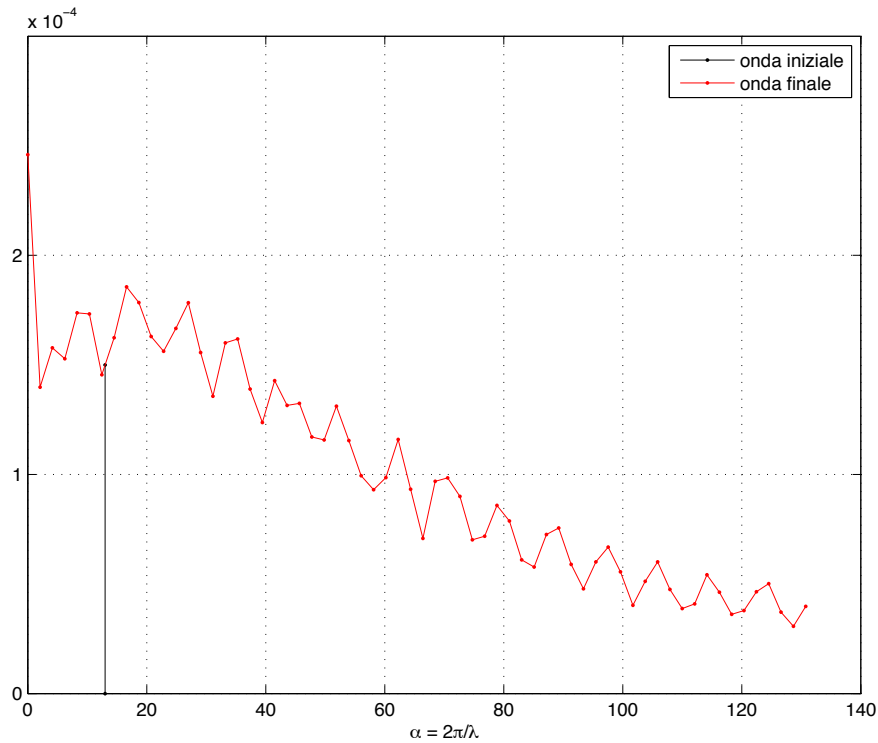


Figura 4.17: Spettro in frequenza per  $h_{rif} = 0.15 \text{ mm}$  per  $\alpha_d = 13 \text{ cm}^{-1}$ .

Intervenire sullo spessore dello strato liquido all'interno di un propulsore ibrido in funzionamento è piuttosto complesso, poiché esso dipende dal calore sviluppato dalla reazione di combustione e dai calori di fusione e evaporazione del combustibile. Regolare a piacimento questi parametri non è possibile, si può però modificarli leggermente andando ad agire sulla composizione chimica del combustibile (variando i calori specifici e modificando, ad esempio tramite catalizzatori, il calore di reazione) o sulla scelta dell'ossidante (che influenza la reazione chimica).

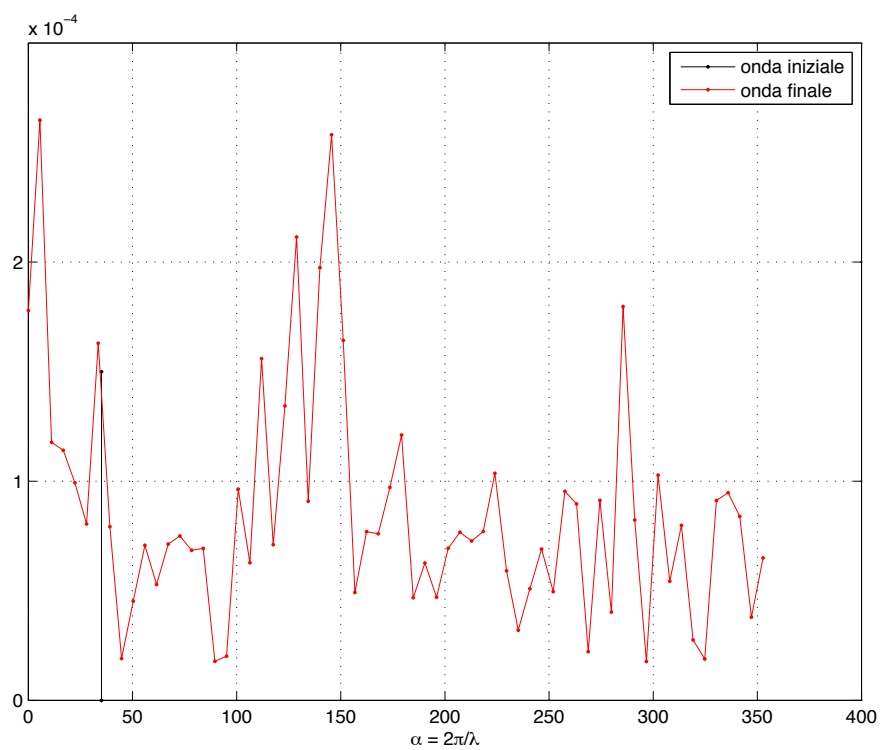


Figura 4.18: Spettro in frequenza per  $h_{rif} = 0.15 \text{ mm}$  per  $\alpha_d = 35 \text{ cm}^{-1}$ .

### 4.2.5 Effetto del soffiamento

Il film liquido presente all'interno dei propulsori è generato dal flusso termico entrante nel grano di combustibile. L'effetto combinato di fusione del solido ed evaporazione del liquido determinano lo spessore del film. In prima approssimazione si possono considerare uguali e costanti il rateo di fusione e di evaporazione, per cui anche lo spessore del liquido rimane costante. Si genera quindi un flusso di liquido in direzione verticale costante; è interessante vedere se e in che misura questo influisce sulla stabilità.

E' molto difficile prevedere quale siano i valori della velocità di fusione e di evaporazione, quindi per una prima caratterizzazione sono stati utilizzati quelli riportati da Karabeyoglu: costui definisce un parametro di soffiamento, attraverso il quale è possibile determinare la velocità del flusso verticale. Il parametro di soffiamento è definito come<sup>4</sup>:

$$b = \frac{w_{vert} h_{rif} \rho}{\mu} \quad (4.7)$$

dove  $w_{vert}$  è la velocità del flusso verticale generato dalla fusione del solido e smaltito dall'evaporazione, quindi  $w_{vert} = w_{fus} = w_{evap}$ . Sono state effettuate delle prove per caratterizzare questo effetto, con le condizioni riportate in tabella 4.4. Sono stati considerati tutti i numeri d'onda analizzati in precedenza; si riporta il confronto tra il caso senza soffiamento e i due casi con soffiamento in figura 4.19. Come si può vedere il flusso verticale aumenta l'instabilità per tutte le lunghezze d'onda, ma il suo effetto è sempre minore considerando disturbi con numeri d'onda progressivamente maggiori. Inoltre

<sup>4</sup>Definizione del parametro di soffiamento presente in [6].

Condizioni di Prova	Simbolo e Unità di Misura	Valori
Altezza di riferimento	$h_{rif}$ [mm]	0.3
Forza di gravità	$g$ [ $m/s^2$ ]	9.81
Velocità superficiale	$U_{Lsup}$ [mm/s]	165.55
Tensione superficiale	$\sigma$ [N/m]	0.0071
Numero di Reynolds	$Re$ [ ]	50
Numero di Froude	$Fr$ [ ]	9.31
Parametro di soffiamento 1	$b_1$ [ ]	0.4
Velocità verticale 1	$w_{vert1}$ [ mm/s]	1.32
Parametro di soffiamento 2	$b_2$ [ ]	0.8
Velocità verticale 2	$w_{vert2}$ [ mm/s]	2.64

Tabella 4.4: Condizioni di prova con soffiamento.

raddoppiando la velocità verticale, non si hanno grandi variazioni del rateo di amplificazione, anzi, le due curve sono molto vicine, per disturbi con bassi numeri d'onda addirittura si nota un'inversione di tendenza, ovvero il flusso verticale maggiore genera una condizione leggermente più stabile che quello minore.

Per l'analisi in frequenza è stato scelto il caso in cui  $b = 0.8$ , sono stati considerati tre disturbi con numeri d'onda differenti, come fatto in precedenza:

- per il primo disturbo (figura 4.20) l'instabilità si diffonde su tutto il pacchetto di numeri d'onda considerati ( $0 < \alpha < 30$ );
- per il secondo disturbo (figura 4.21) si nota un picco preciso in corrispondenza del numero d'onda del disturbo iniziale;

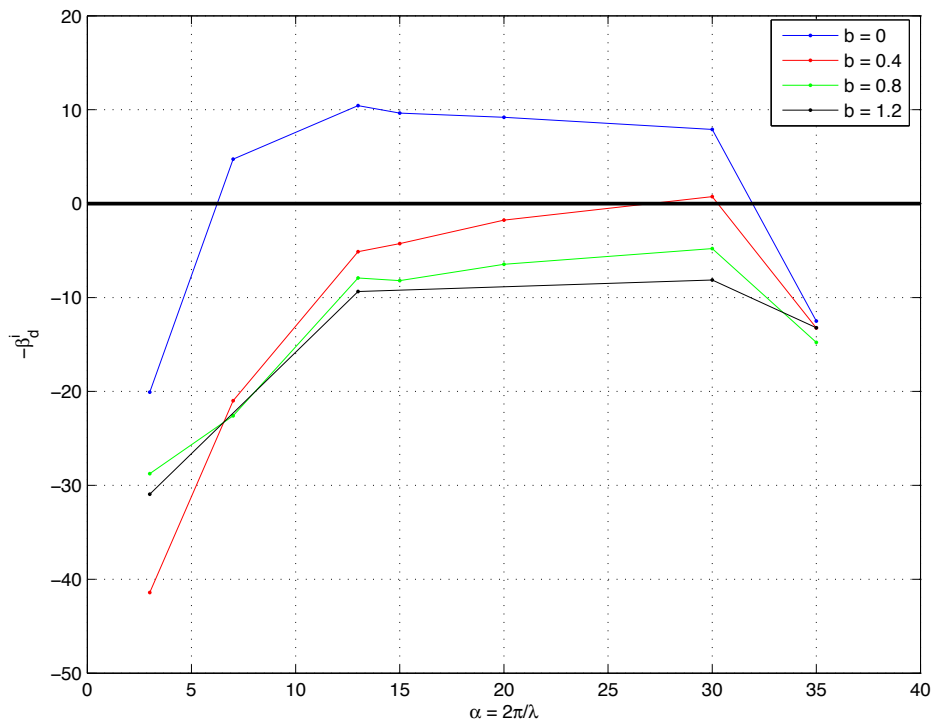


Figura 4.19: Effetto del soffiamento.

- per il terzo disturbo (figura 4.22) si osserva un comportamento simile al precedente, con la differenza che il picco di instabilità è su un numero d'onda leggermente inferiore a quello del disturbo.

Come già detto, il flusso verticale dipende dal bilancio termico all'interno del propulsore, ovvero dal calore liberato dalla reazione di combustione. Modificare questo parametro, potrebbe essere un buon sistema, anche se non molto semplice, per assicurarsi un comportamento instabile. Inoltre si noti che lo spessore dello strato è regolato dallo stesso fenomeno, quindi aumentare la velocità di fusione e di evaporazione potrebbe voler dire, in un caso reale, diminuire anche lo spessore del film, comportamenti che aumentano

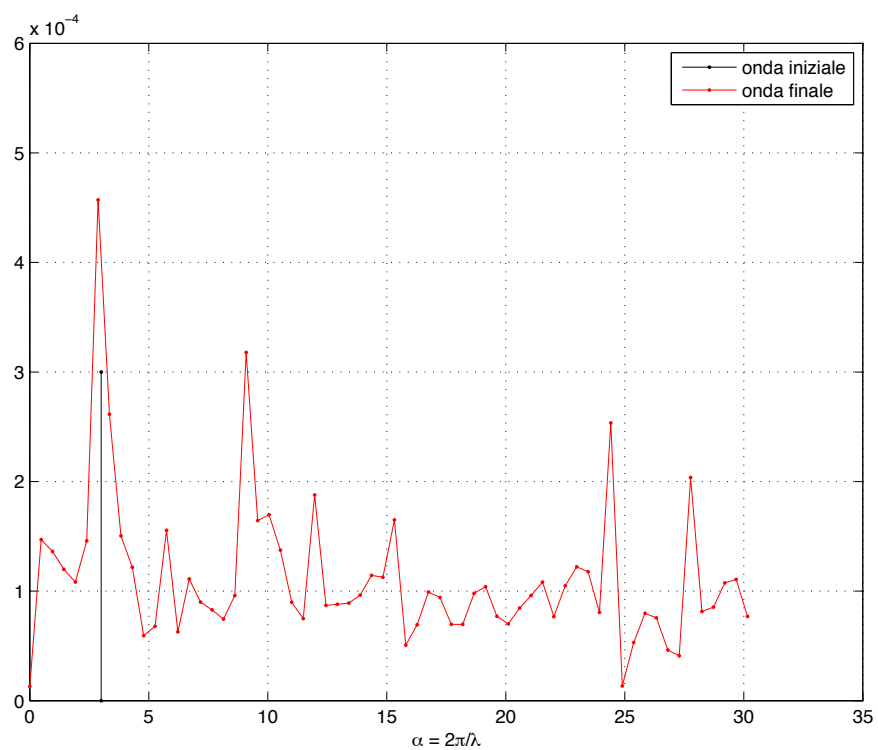


Figura 4.20: Spettro in frequenza per  $b = 0.8$  per  $\alpha_d = 3 \text{ cm}^{-1}$ .

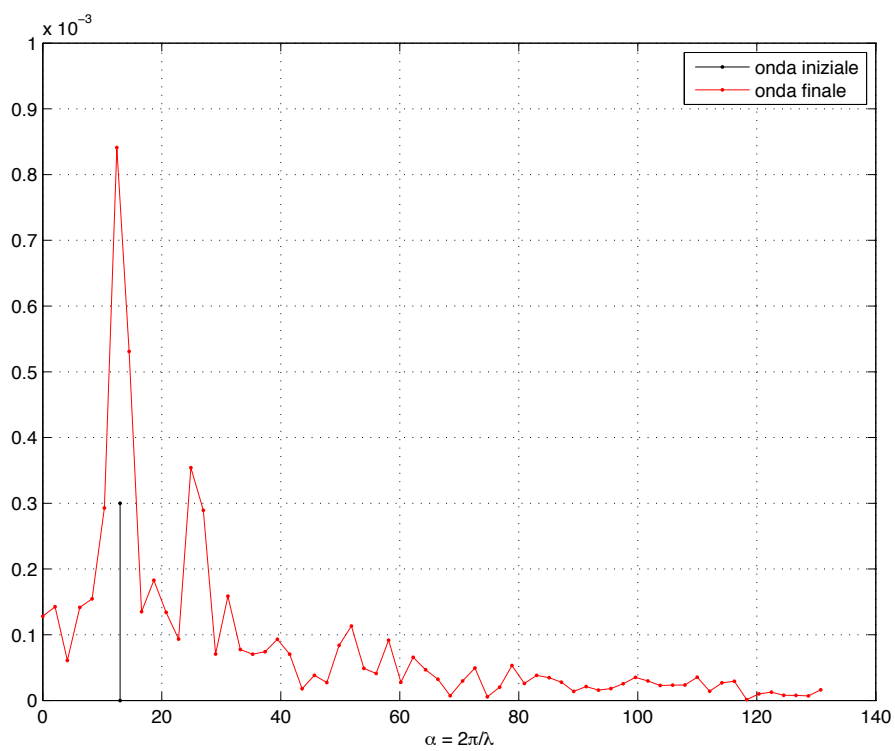


Figura 4.21: Spettro in frequenza per  $b = 0.8$  per  $\alpha_d = 13 \text{ cm}^{-1}$ .



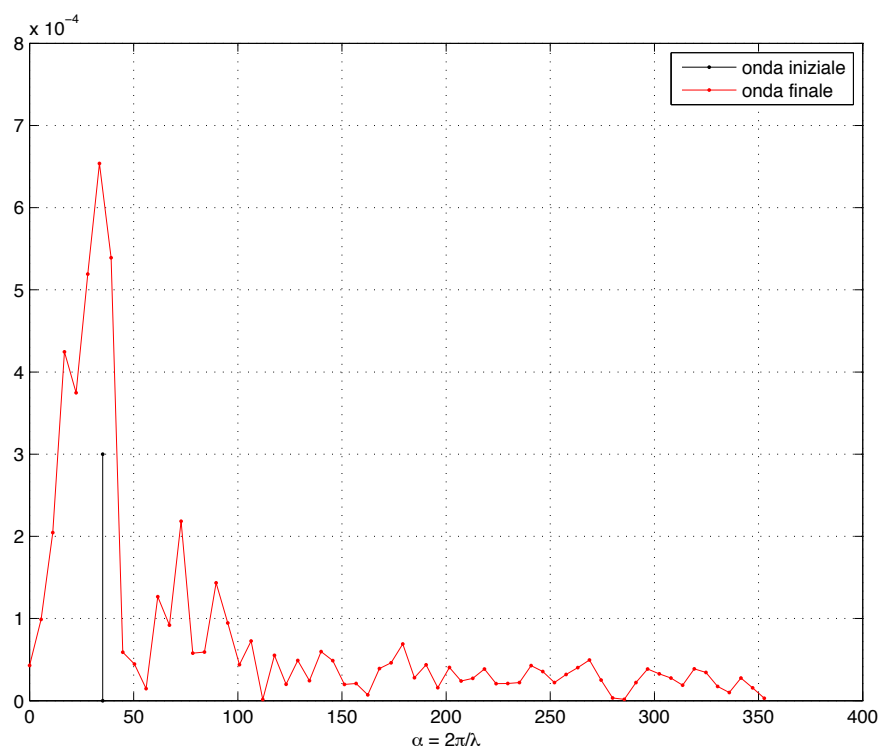


Figura 4.22: Spettro in frequenza per  $b = 0.8$  per  $\alpha_d = 35 \text{ cm}^{-1}$ .

entrambi l'instabilità, e quindi la possibilità di entrainment.

#### 4.2.6 Assenza di gravità

Durante il funzionamento di un propulsore ibrido, le forze di volume possono cambiare notevolmente: si pensi ad esempio ad un vettore spaziale che parte dalla Terra in direzione quasi verticale, quindi con il campo gravitazionale terrestre diretto come il proprio asse, successivamente si inclina e si allontana dalla Terra, per cui il campo di forze di volume si riduce e varia la sua inclinazione rispetto all'asse. Può essere interessante quindi avere un'idea di come le forze di volume agiscano sulla stabilità del film.

A questo scopo sono stati confrontati i risultati ottenuti con forza di gravità parallela all'asse  $z$  e in assenza di gravità. Il confronto viene fatto con le condizioni del paragrafo 4.2.1; i risultati sono mostrati in figura 4.23.

Si può notare come l'effetto della gravità sia stabilizzante per tutti i tipi di disturbi provati; al crescere del numero d'onda cresce questo effetto.

Nel funzionamento reale di un propulsore ibrido è improbabile trovarsi in una situazione di forze di volume nulle, poiché i flussi di ossidante sono normalmente dotati di swirl; questo genera forze centrifughe, quindi dirette perpendicolarmente all'asse del propulsore, che quindi, secondo questo studio, tendono a stabilizzare il film. Inoltre è possibile che in alcune fasi del funzionamento ci si trovi in presenza di campi gravitazionali diretti parallelamente all'asse (si pensi a un decollo verticale o quasi verticale, in cui il vettore di gravità terrestre ha una componente perpendicolare a  $z$ ), che sicuramente influenzano il campo di moto del fluido.

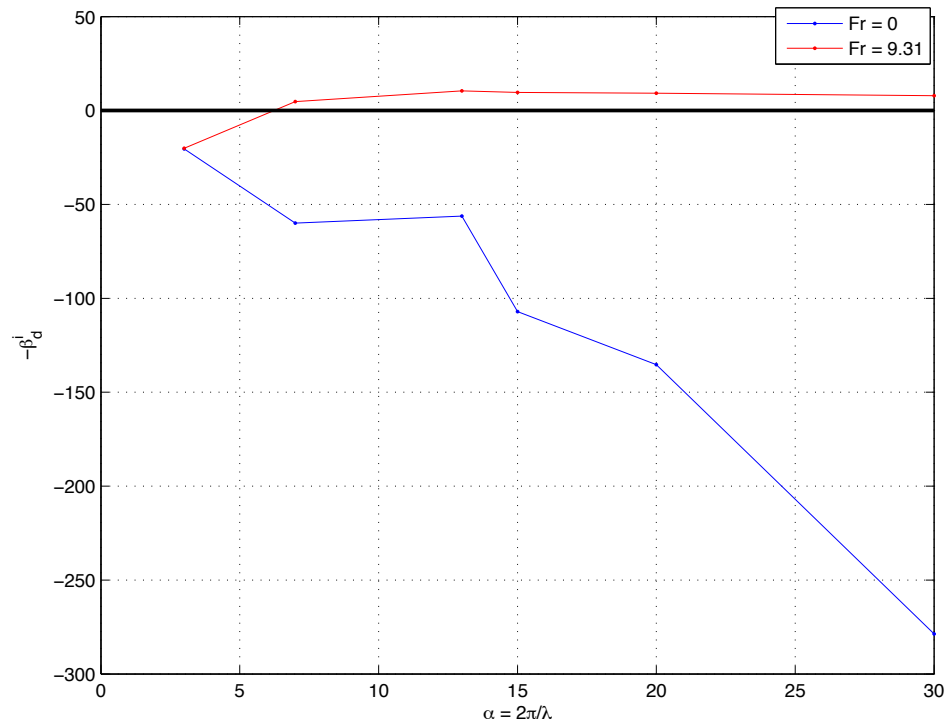


Figura 4.23: Effetto della gravità.

Si analizza ora qual'è l'effetto dell'assenza di gravità sulla forma del pelo libero:

- per il disturbo con  $\alpha_d = 3 \text{ cm}^{-1}$  (figura 4.24) si osserva lo stesso comportamento dei casi precedenti, ovvero l'instabilità è distribuita su un grande pacchetto di frequenze;
- anche per  $\alpha_d = 13 \text{ cm}^{-1}$  si nota un'instabilità diffusa, al contrario dei casi precedenti (figure 4.21, 4.17);
- per il disturbo con  $\alpha_d = 30 \text{ cm}^{-1}$  invece si osserva che l'instabilità si sposta su numeri d'onda molto più alti, ovvero il profilo del pelo libero è

dovuto principalmente alla somma di onde con lunghezza molto piccola.

L'osservazione generale che si può fare è che la gravità contribuisce a ridurre l'instabilità dovuta alle onde più corte, mentre non ha grande effetto sulle onde più lunghe.

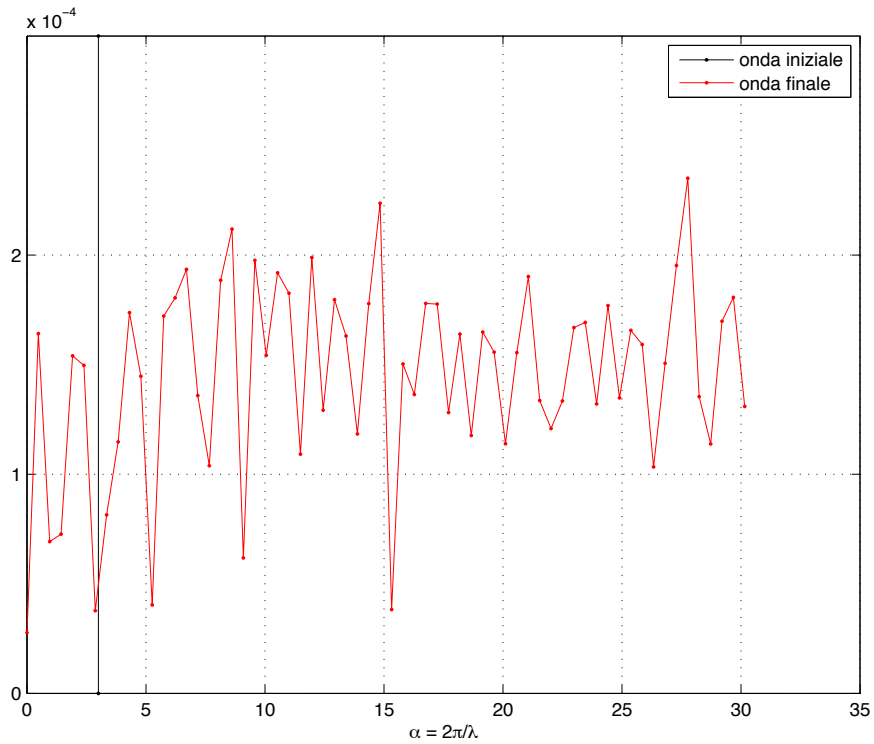


Figura 4.24: Spettro in frequenza per  $Fr = 0$  per  $\alpha_d = 3 \text{ cm}^{-1}$ .

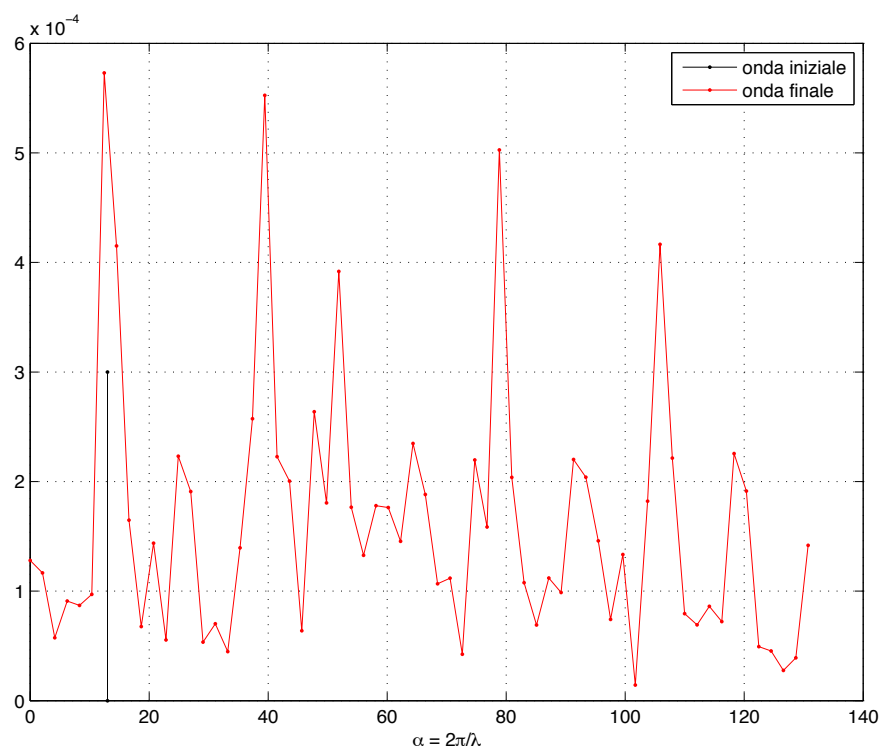


Figura 4.25: Spettro in frequenza per  $Fr = 0$  per  $\alpha_d = 13 \text{ cm}^{-1}$ .

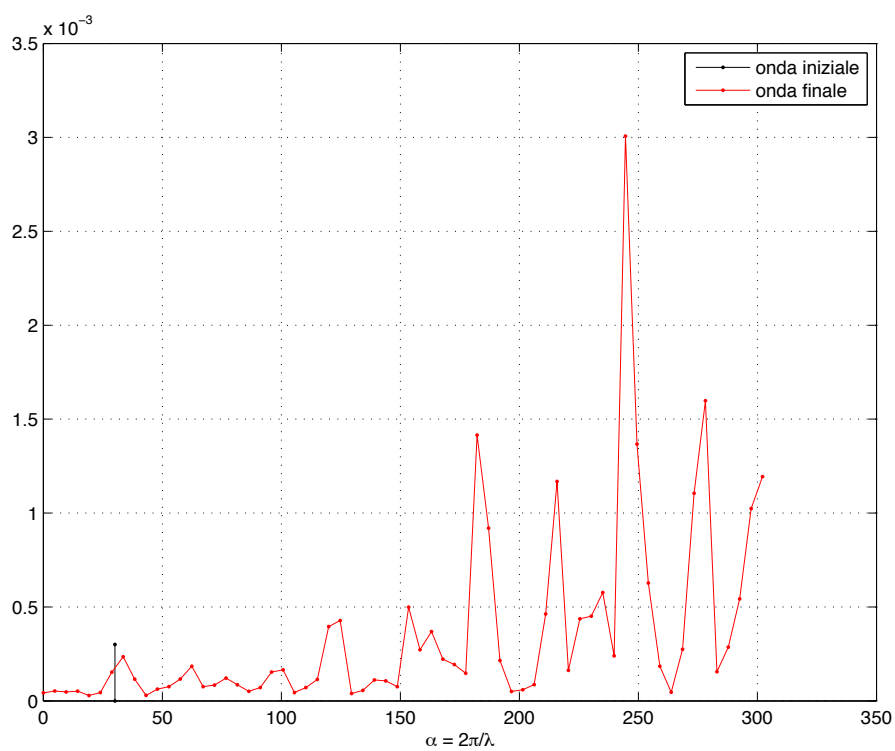


Figura 4.26: Spettro in frequenza per  $Fr = 0$  per  $\alpha_d = 30 \text{ cm}^{-1}$ .

# Capitolo 5

## Conclusioni

L'analisi dei risultati porta ad alcune interessanti osservazioni conclusive:

- a seconda del tipo di disturbo imposto il flusso si comporta diversamente: per disturbi con lunghezze d'onda molto basse o molto alte si osserva un comportamento instabile, per quelli con lunghezze intermedie invece il comportamento è stabile;
- disturbi con bassi numeri d'onda portano a un'instabilità diffusa, mentre quelli con alti numeri d'onda vedono l'instabilità concentrata su una frequenza principale;
- l'aumento della velocità provoca un aumento dell'instabilità per qualsiasi disturbo iniziale; maggiore è il numero d'onda di questo, maggiore è l'effetto;
- al di sotto di un valore limite dello spessore, si ritrova un comportamento instabile per qualsiasi valore di  $\alpha_d$ ;

- riducendo ulteriormente lo spessore l'instabilità aumenta, con effetti maggiori per  $\alpha_d$  minori;
- se si impone un valore sufficientemente basso dello spessore per cui tutti i disturbi risultano instabili, si osserva un'instabilità sempre distribuita su più frequenze;
- l'effetto combinato di fusione ed evaporazione contribuisce ad instabilizzare il film; questo effetto è però pressoché indipendente dal valore del soffiamento;
- in assenza di forze di volume l'instabilità aumenta; questo aumento è più marcato considerando disturbi con numeri d'onda maggiori;
- in assenza di forze di volume l'instabilità è distribuita su tutte le frequenze considerate; inoltre si nota un grande valore dell'instabilità per numeri d'onda molto alti, che in tutti gli altri casi presentano valori molto più bassi.

Da questa analisi si evince che i parametri che maggiormente accrescono l'instabilità del liquido sono la velocità del flusso di ossidante e lo spessore del film. Per aumentare l'entrainment è quindi utile aumentare il più possibile la velocità del flusso di ossidante e cercare di ottenere strati liquidi molto sottili. Si noti però che per aumentare la velocità superficiale è necessario un incremento progressivamente maggiore della velocità del flusso di ossidante, come evidenziato dalla figura 3.5. Non è corretto estrapolare da questa i valori relativi ai casi considerati, poiché al di fuori dei limiti del grafico. E' però evidente che man mano che questo parametro sale, l'aumento della velocità



superficiale del fluido è via via minore.

La forza di gravità non è ovviamente controllabile; in ogni caso questa, insieme ad altre eventuali forze di volume, è un parametro molto significativo da tenere in considerazione nella previsione del comportamento del liquido.

## 5.1 Sviluppi futuri

Per rendere la simulazione ancora più vicina alla realtà fisica del fenomeno in esame, e per estenderne il campo di validità, sarebbe interessante aggiungere alcuni elementi al sistema di equazioni:

- introdurre la soluzione dell'equazione dell'energia, in modo da poter considerare i flussi termici realmente esistenti che determinano lo spessore del film;
- modellare con maggiore dettaglio le forze di volume, prima tra tutte la gravità, considerando l'assetto del propulsore e quindi scomponendole in direzione assiale e radiale;
- introdurre la possibilità di considerare una soluzione doppia per l'altezza del pelo libero, ovvero con  $\eta = \eta(x, z, t)$ , potendo così considerare domini molteplici connessi e quindi il distacco di goccioline liquide;
- confrontare il codice con dei risultati sperimentali, sulla base dei quali cercare una legge in grado di legare l'instabilità all'insorgenza dell'entrainment.

# Bibliografia

- [1] Tamellini, *Un Modello Matematico per il Galleggiamento di Imbarcazioni*, Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 2008.
  
- [2] Miglio, Quarteroni, Saleri, *Mathematical Modelling of Free Surface Flows*, Quaderni di Matematica, Vol. 10.
  
- [3] Paradiso, *Un Approccio Variazionale per il Vincolo di Galleggiamento applicato alla Dinamica di Imbarcazioni*, Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 2006.
  
- [4] Craik, *Wind-generated waves in thin liquid films*, J. Fluid Mech., Vol. 26 part 2, 1966, pp. 369-392.
  
- [5] Karabeyoglu, Altman, Cantwell, *Combustion of Liquefying Hybrid Propellants: Part 1, General Theory*, Journal of Propulsion and Power,

- Vol. 18 No. 3, 2002, pp. 610-620.
- [6] Karabeyoglu, Cantwell, *Combustion of Liquefying Hybrid Propellants: Part 2, Stability of Liquid Films*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 18 No. 3, 2002, pp. 621-630.
- [7] Quarteroni, Saleri, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, MOX - Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, 2° edizione, 2003.
- [8] White, *Viscous Fluid Flow*, University of Rhode Island, 2nd edition, 1991.
- [9] Landau, Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Institute of Physical Problems, U.S.S.R. Academy of Scienze, 2nd edition, 1987.
- [10] Sapidis (a cura di), *Designing Fair Curves and Surfaces*, University Science Center, Philadelphia, 1994.
- [11] Cagnoni, *Uso di Spline nella Ricostruzione e nel Fairing di Curve e Superfici*, Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 2009.

- [12] De Luca, *Problemi Energetici in Propulsione Aerospaziale*, Appunti per studenti, Politecnico di Milano, 1996.
- [13] Franchi, Gipponi, *Indagine Sperimentale sulle Prestazioni di un Mini - Propulsore Ibrido da Laboratorio*, Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 2002.
- [14] Smith, *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, San Diego, California, 1997.