

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio



**SOLUZIONE ANALITICA PER LO STUDIO DELLA
DINAMICA DI UNA CORRENTE DI TORBIDITÀ E
SVILUPPO DI UN MODELLO NUMERICO AVANZATO**

Relatore: Prof. Ing. Alberto BIANCHI

Correlatore: Dott. Ing. Ramon PACHECO

Tesi di Laurea Specialistica di:

Valeria CATTANEO Matr. 724654

Anno Accademico 2009/2010

Alla mia famiglia

SOMMARIO

INDICE DELLE FIGURE	1
INDICE DELLE TABELLE.....	2
INDICE DEI GRAFICI.....	3
Abstract.....	5
ELENCO DEI SIMBOLI	6
INTRODUZIONE	10
1 INTERPRETAZIONE FISICO MATEMATICA DELLA DINAMICA DI UNA CORRENTE DI TORBIDITÀ.....	13
1.1 GENERALITÀ SULLE CORRENTI DI DENSITÀ E TORBIDITÀ.....	13
1.2 LE EQUAZIONI ALLA BASE DELLE CORRENTI DI TORBIDITÀ.....	15
1.3 INTERPRETAZIONE FISICO MATEMATICA DEI MECCANISMI DI EQUILIBRIO DELLE CORRENTI DI TORBIDITÀ	28
2 ANALISI DIMENSIONALE PER UNA CORRENTE VISCOSA E PSEUDO - VISCOSA.....	32
2.1 VARIABILI DI CONTROLLO	32
2.2 APPLICAZIONE DEL “TEOREMA π ”	33
2.2.1 <i>NUMERO DI OLDROYD</i>	33
2.2.2 <i>NUMERO DI RICHARDSON</i>	34
2.2.3 <i>NUMERO DI REYNOLDS</i>	34
2.2.4 <i>NUMERO DI HEDSTRÖM</i>	35
2.3 SIMILITUDINE DI REYNOLDS GRAVITAZIONALE PER UNA MISCELA VISCOSA	35
2.4 SIMILITUDINE DI REYNOLDS PER UNA MISCELA VISCOSA	37
3 MODELLO ANALITICO PROPOSTO PER LO STUDIO DELLA DINAMICA DI UNA CORRENTE DI TORBIDITÀ DI NATURA VISCOSA	39
3.1 INTRODUZIONE	39
3.2 PRESENTAZIONE DEL PROBLEMA	39

3.3	REOLOGIA.....	40
3.4	SULLA VELOCITÀ E LA PRESSIONE IN UNA CORRENTE DI DENSITÀ SOMMERSA LAMINARE E VISCOSA.....	41
3.5	MOTO VARIO GRADUALMENTE VARIATO PER UN FLUIDO VISCOSO	43
3.6	TEORIA DELLA PERTURBAZIONE	43
3.7	SOLUZIONE ANALITICA BASATA SULLA TEORIA DELLA PERTURBAZIONE.....	44
3.7.1	<i>SOLUZIONE ESTERNA</i>	45
3.7.2	<i>SOLUZIONE INTERNA</i>	51
3.7.3	<i>SOLUZIONE COMPLETA</i>	54
3.8	RISULTATI DI ALCUNE SIMULAZIONI CONDOTTE CON LA SOLUZIONE ANALITICA E CONFRONTI CON I RISULTATI NUMERICI PRESENTI IN LETTERATURA	55
3.9	AGGIUNTA DEL TERMINE SORGENTE SULLA CONSERVAZIONE DELLA MASSA	62
3.9.1	<i>SOLUZIONE ESTERNA</i>	63
3.9.2	<i>SOLUZIONE INTERNA</i>	66
3.9.3	<i>SOLUZIONE COMPLETA</i>	68
3.10	CONFRONTO DELLA SOLUZIONE ANALITICA CON I DATI SPERIMENTALI	68
3.10.1	<i>CASO PARTICOLARE DI CORRENTE DI TORBIDITÀ ALTAMENTE STRATIFICATA</i>	70
3.11	ALCUNI ACCORGIMENTI SUI CONFRONTI CON LE SOLUZIONI SPERIMENTALI DI CARATTERE NUMERICO E FISICHE.....	71
4	MODELLISTICA NUMERICA E CONFRONTO CON DEI DATI SPERIMENTALI DI LABORATORIO.....	73
4.1	GENERALITÀ DEI MODELLI NUMERICI	73
4.2	MODELLO NUMERICO GENERALIZZATO.....	74
4.2.1	<i>EQUAZIONI DEL MODELLO</i>	75
4.2.2	<i>CONDIZIONI AL CONTORNO</i>	78
4.3	MODELLO SEMPLIFICATO	81
4.4	INSTALLAZIONE SPERIMENTALE	83
4.5	CARATTERISTICHE DEL MODELLO NUMERICO	85
4.5.1	<i>GEOMETRIA DELLA CANALETTA 2D NUMERICA</i>	85
4.5.2	<i>RETICOLO DI CALCOLO</i>	85
4.5.3	<i>DATI FISICI</i>	86
4.5.4	<i>DISCRETIZZAZIONE TEMPORALE</i>	87
4.6	CONFRONTO TRA I RISULTATI DEI MODELLI NUMERICI E SPERIMENTALI	88
5	CONCLUSIONI	100
	APPENDICE.....	103
A.1	SULLA VELOCITÀ E LA PRESSIONE IN UNA CORRENTE DI DENSITÀ SOMMERSA LAMINARE E VISCOSA.....	103
A.2	MOTO VARIO GRADUALMENTE VARIATO PER UN FLUIDO VISCOSO	106

<i>A.2.1 SOLUZIONE ESTERNA</i>	107
<i>A.2.2 SOLUZIONE INTERNA</i>	113
<i>A.2.3 SOLUZIONE COMPLETA</i>	121
A.3 AGGIUNTA DEL TERMINE SORGENTE SULLA CONSERVAZIONE DELLA MASSA	121
<i>A.3.1 SOLUZIONE ESTERNA</i>	121
<i>A.3.2 SOLUZIONE INTERNA</i>	127
<i>A.3.3 SOLUZIONE COMPLETA</i>	135
BIBLIOGRAFIA	136

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1.1: schematizzazione di una corrente di torbidità con densità ρ che scorre immersa in un fluido di densità ρ_a su un fondo inclinato di un angolo θ .	17
Figura 1.2: volume di controllo preso nella corrente di densità	18
Figura 1.3: schematizzazione di una generica sezione trasversale	21
Figura 1.4: illustrazione dell'effetto dell'ingresso di acqua dall'alto	27
Figura 1.5: illustrazione dell'effetto dell'ingresso di sedimenti dal fondo	27
Figura 3.1: schema del moto laminare in alveo di larghezza indefinita	40
Figura 3.2: dinamica di una corrente di torbidità e definizione delle sue grandezze	45
Figura 3.3: schematizzazione delle grandezze coinvolte nella soluzione esterna di una corrente di torbidità	46
Figura 3.4: schema delle grandezze coinvolte nella soluzione interna di una corrente di torbidità	51
Figura 4.1: Schema dell'impianto sperimentale	83
Figura 4.2: vista longitudinale dell'impianto sperimentale	84
Figura 4.3: Mesh di calcolo per la canaletta 2D numerica	86
Figura 4.4: confronto tra i risultati del modello numerico semplificato, $\mu=10$ Pa s, e la simulazione sperimentale per i diversi istanti temporali, 4-12 secondi ($\Delta t \approx 1$ s)	90
Figura 4.5: Differente modalità d'immissione dei sedimenti nella canaletta tra il modello numerico (a sinistra) e il set up sperimentale (a destra)	91
Figura 4.6: confronto tra il modello numerico semplificato, con viscosità 10 Pa s, nella colonna di destra, e quello generalizzato di natura turbolenta, nella colonna di sinistra	99

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 3.1: dati per la simulazione estratti da Jiang <i>et al.</i> [29].....	56
Tabella 3.2: dati per la simulazione del modello presi da Huang X. & Garcia M. [24].....	57
Tabella 3.3: dati per la simulazione del modello presi da Imran <i>et al.</i> [27].....	59
Tabella 3.4: dati dell'esperimento eseguito da Mohirig <i>et al.</i> [34].	69
Tabella 3.5: dati dell'esperimento eseguito da Aguirre <i>et al.</i> [1].....	70
Tabella 4.1: Valori caratteristici della miscela usata nelle prove.	84
Tabella 4.2: Condizioni d'ingresso della miscela acqua e sedimenti nella canaletta.....	86

INDICE DEI GRAFICI

Grafico 3.1: distanza raggiunta dal fronte d'onda a diversi istanti temporali al variare della viscosità cinematica.	50
Grafico 3.2: relazione fra l'ascissa x_s raggiunta dal fronte d'onda e la velocità di propagazione al variare della viscosità cinematica.	50
Grafico 3.3: soluzioni esterne, interne e complete per due istanti temporali.	54
Grafico 3.4: propagazione della corrente di densità con i dati proposti da Jiang <i>et al.</i> [29] per gli istanti temporali: 2, 4 e 6 secondi.	56
Grafico 3.5: simulazione numerica proposta da Jiang <i>et al.</i> [29] a confronto con la soluzione analitica per $t=2s$, $t=6s$ e $t=14s$. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.	57
Grafico 3.6: simulazione propagazione della corrente di densità con i dati di Huang X. & Garcia M. [24] per gli istanti temporali: 2, 4 e 6 secondi.	58
Grafico 3.7: simulazione numerica proposta da Huang X. & Garcia M. [24] a confronto con la soluzione analitica per $t=25s$ e $t=1min\ 15s$. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.	59
Grafico 3.8: simulazione della propagazione della corrente di densità con i dati di Imran <i>et al.</i> [27] per gli istanti temporali: 2, 4 e 6 secondi.	60
Grafico 3.9: simulazione numerica proposta da Imran <i>et al.</i> [27] a confronto con la soluzione analitica per $t=2\ min$ e $t=22\ min$. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.	61
Grafico 3.10: simulazione numerica proposta da Imran <i>et al.</i> [27] a confronto con la soluzione analitica con viscosità cinematica pari a $2\ m^2/s$ per $t=2\ min$ e $t=22\ min$. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.	61
Grafico 3.11: sviluppo temporale dell'ascissa del fronte dell'onda x_s al variare della viscosità cinematica ν per un fissato valore del coefficiente d'ingresso dell'acqua e_w	65

Grafico 3.12: relazione fra l'ascissa x_s e la velocità del fronte dell'onda al variare della viscosità cinematica ν per un fissato valore del coefficiente d'ingresso dell'acqua e_w	66
Grafico 3.13: confronto simulazione modello e dati sperimentali di Mohirig <i>et al.</i> [34].	69
Grafico 3.14: confronto dei dati sperimentali relativi all'andamento del profilo dell'onda ricostruito mediante la soluzione analitica adottando i dati riportati da Aguirre <i>et al.</i> [1].....	71
Grafico 4.1: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 4 s.....	92
Grafico 4.2: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 5 s.....	93
Grafico 4.3: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 6 s.....	93
Grafico 4.4: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 7 s.....	94
Grafico 4.5: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 8 s.....	94
Grafico 4.6: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 9 s.....	95
Grafico 4.7: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 10 s.....	95
Grafico 4.8: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 11 s.....	96
Grafico 4.9: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 12 s.....	96

Abstract

La tesi riguarda lo sviluppo di una soluzione analitica per lo studio della dinamica di una corrente di torbidità di carattere iperconcentrato, di natura newtoniana e viscosa.

In particolare, si è condotta un'analisi teorica delle equazioni fisico matematiche utilizzate per la trattazione di una corrente di torbidità di natura turbolenta o laminare e di carattere conservativo o non conservativo. Si sono identificati i limiti dei modelli concettuali atti alla rappresentazione dei processi d'inglobamento del materiale solido presente sul fondo in relazione all'energia turbolenta necessaria per garantire l'esistenza fisica di una corrente di torbidità. Sulla base di tale analisi si sono create le premesse per l'elaborazione della soluzione analitica.

La soluzione analitica è stata sviluppata sulla base della teoria della perturbazione e facendo ricorso alle equazioni delle acque basse, applicate a una miscela omogenea, newtoniana, conservativa e viscosa. I risultati ottenuti della soluzione analitica sono stati messi a confronto con dati sperimentali numerici riportati in letteratura e con dati sperimentali di laboratorio.

Inoltre, al fine di verificare in forma indiretta la bontà delle ipotesi alla base della soluzione analitica proposta, è stato sviluppato, a partire da un modello numerico generalizzato bidimensionale mediato nella verticale, un modello numerico semplificato retto sulle medesime ipotesi della soluzione analitica; suddetto modello è in grado di riprodurre il processo dinamico di una corrente di densità all'interno di un serbatoio e i risultati delle simulazioni effettuate sono stati messi a confronto con dati sperimentali di laboratorio.

Dal sopraccitato confronto, si può affermare che la simulazione della dinamica di una corrente di torbidità tramite il modello numerico semplificato, come quello proposto, non può prescindere dall'incremento della viscosità dinamica di diversi ordini di grandezza rispetto a quella dell'acqua, come dimostrato anche dalla soluzione analitica.

Lo studio dimostra che è possibile simulare dei casi reali facendo ricorso a delle semplificazioni fisico-matematiche tali per cui risulti vantaggioso utilizzare modelli numerici semplificati piuttosto che fisici, diminuendo i tempi di calcolo e le risorse economiche necessarie senza ridurre la precisione con cui viene ricostruito il fenomeno.

ELENCO DEI SIMBOLI

Lettere romane

A	area;
b	larghezza del canale;
B	forza di galleggiamento;
$c(z)$	variazione verticale della concentrazione;
c_b	concentrazione di sedimenti in prossimità del fondo;
C	valore medio della concentrazione;
D	diametro idraulico;
$D(p)$	deposizione del sedimento a una distanza p dal fondo;
D_s	diametro dei grani;
E	parametro di rugosità;
e_w	coefficiente di trascinamento del fluido circostante;
$E(p)$	erosione dei sedimenti valutata a una distanza p ;
E_s	coefficiente di trascinamento dei sedimenti dal fondo del letto;
f_0	tasso medio di dissipazione turbolenta viscosa;
F_a	forza di lift e di massa virtuale del sedimento sull'acqua;
F_{as}	forza di drag del sedimento sull'acqua;
F_f	forza dovuta all'attrito;
F_g	forza dovuta alla gravità;
F_p	forza dovuta alla pressione;
Fr	numero di Froude;
F_s	forza di lift dell'acqua sul sedimento;
F_{sa}	forza di drag dell'acqua sul sedimento;
g'	accelerazione di gravità ridotta;
g	accelerazione di gravità;
h	spessore della corrente o tirante idrico della corrente;
h_0	variazione significativa di spessore della corrente h in una certa lunghezza l ;
h_a	spessore del fluido che costituisce l'ambiente all'interno del quale scorre la corrente;
h_c	spessore della corrente ricavato dalla soluzione completa;
h_s	spessore della corrente in corrispondenza del fronte d'onda;
h_t	altezza alla quale la velocità u si annulla;
H	spessore della corrente ricavato tramite la soluzione interna;

H_a	spessore del fluido che costituisce l'ambiente all'interno del quale scorre la corrente, nella regione interna;
H_0	altezza del profilo dell'onda interna in corrispondenza della coordinata $\xi=0$;
H_e	numero di Hedström;
I	l'intensità di turbolenza;
k	energia turbolenta;
K	turbolenza;
l	lunghezze che caratterizzano il dominio;
ΔM	variazione di quantità di moto in un intervallo di tempo;
M	portata massica;
M_f	flusso netto di quantità di moto;
O_d	numero di Oldroyd;
p	pressioni che agiscono sul sistema;
p'	pressione comune alle due fasi, calcolata con l'operazione di media alla Reynolds ed alla sottrazione del termine idrostatico;
P	perimetro bagnato;
P_a	pressione dell'acqua;
P_{kb}	energia turbolenta prodotta dalle forze di galleggiamento
P_s	pressione dovuta ai sedimenti;
P_{Ta}	produzione di turbolenza a causata dalle forze viscosse e di galleggiamento;
q	portata per unità di profondità;
q_i	portata in ingresso nella corrente per unità di larghezza;
q_o	portata in uscita dalla corrente per unità di larghezza;
Q	portata;
Q_i	portata entrante nella corrente;
Q_m	portata volumetrica della miscela acqua e sedimento;
Q_o	portata uscente dalla corrente;
r	frazione di volume che compone la corrente;
R	peso specifico immerso;
Ri	numero di Richardson;
Re	numero di Reynolds;
Rg	numero di Reynolds gravitazionale;
R_p	numero di Reynolds per la particella;
S	pendenza fondo;
S_f	angolo d'attrito;
t	coordinate temporali;
T	coordinata temporale nella regione interna;
U	velocità media del flusso;
U_{in}	velocità di inflow nella sezione di ingresso;
U_n	vettore velocità perpendicolare alla parete;
U_w	vettore velocità parallelo alla parete;
U_0	velocità media del flusso in caso di moto uniforme;

u	componente della velocità nella direzione x ;
$u(z)$	velocità puntuale nella verticale;
u^*_b	velocità d'attrito sul fondo;
v	componente della velocità in direzione y ;
v_s	velocità di sedimentazione delle particelle;
V	velocità media del flusso nella soluzione interna;
w_e	velocità di trascinamento dell'acqua pulita per mezzo della corrente di torbidità;
x_s	posizione del fronte dell'onda lungo la coordinata x ;
y_0^+	spessore dello strato limite viscoso;
z_b	quota del fondo;

Lettere greche

δ	distanza del fronte d'onda della soluzione interna dall'origine del sistema di riferimento $\zeta=0$;
ε	ripidità dell'onda, nei paragrafi 3.7.1 e 3.9.1; parametro adimensionale che permette di riscalarlo il sistema di riferimento per la soluzione interna, nei paragrafi 3.7.2 e 3.9.2.
ε_t	tasso di dissipazione;
θ	angoli che caratterizzano il dominio;
κ	costante di Von Karman;
λ	fattore di scala;
μ	viscosità dinamica;
μ_{eff}	viscosità dinamica efficace;
μ_L	viscosità laminare;
μ_T	viscosità turbolenta;
ν	viscosità cinematica;
ζ	ascissa di riferimento per le coordinate del profilo dell'onda nella soluzione interna;
ρ	densità della miscela solido-liquido;
ρ_a	densità del fluido ambientale;
ρ_s	densità del solido;
τ	sforzo;
τ_c	sforzo critico;
τ_w	sforzo alla parete;

Indici

a	fluido ambientale;
m	modello;
p	prototipo;
s	sedimento;
*	variabili adimensionali;

Vettori e matrici

(O, x, y, z) coordinate di riferimento cartesiane;

$\bar{g} = [0; 9.81; 0]^T$ vettore dell'accelerazione di gravità;

$U = [U_x, U_y, U_z]^T$ vettore velocità;

$X = [x, y, z]^T$ vettore delle coordinate cartesiane.

INTRODUZIONE

Il presente lavoro di carattere teorico riguarda lo sviluppo di una soluzione analitica per lo studio della dinamica di una corrente di torbidità. L'analisi è supportata dalla messa a punto di un modello numerico avanzato e da dati sperimentali di laboratorio in scala ridotta. La ricerca è stata sviluppata presso lo Studio Pacheco di Milano per il conseguimento della Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio con indirizzo Difesa del Suolo e Prevenzione dai Rischi Naturali presso il Politecnico di Milano nell'anno accademico 2009-2010.

Le correnti di torbidità, di grande impatto ambientale e ingegneristico, trovano un vasto campo di applicazione sia nell'idraulica marittima che in quella fluviale. Sebbene lo studio della loro dinamica sia stato oggetto di grande interesse negli ultimi decenni, ci sono tuttora diversi interrogativi non ancora completamente risolti: quali il perché si formano le correnti di torbidità, il loro comportamento idrodinamico, la loro capacità di diluirsi o inglobare sedimenti, il limite per il loro funzionamento laminare e turbolento e particolarmente la possibilità di "gestirle" in modo ingegneristico, cioè quanto è plausibile ridurre il loro impatto dal punto di vista ambientale ed economico. Inoltre, è pertinente anche citare la loro importanza di carattere geomorfologico e marino con particolare riguardo al settore della ricerca degli idrocarburi.

Le correnti di torbidità normalmente hanno una massa specifica superiore alla corrente recettrice, viaggiano sommerse e possono avere natura newtoniana o non newtoniana, defluire in condizione laminare o turbolenta ed essere di natura conservativa o non conservativa. È assodato il fatto che il loro comportamento laminare o turbolento dipende dalla concentrazione del materiale solido in sospensione. Correnti di torbidità con bassa concentrazione sono prevalentemente turbolente, mentre, con alte concentrazioni di materiale e in particolare coesivo, le correnti sono di natura laminare. In quest'ultimo caso la reologia delle miscele può rispondere a un comportamento non newtoniano e il movimento della corrente è possibile solo quando lo sforzo di taglio gravitazionale è superiore allo sforzo di taglio reologico ($\tau > \tau_c$).

Nella prassi ingegneristica si ricorre anche alla modellistica fisica in scala ridotta, adottando normalmente criteri di similitudine di Froude densimetrico che permettono di valutare in forma pseudo - qualitativa la dinamica idromorfologica di una corrente di torbidità. La modellistica fisica richiede una serie di semplificazioni che in certe condizioni possono

innescare indeterminanze per una corretta valutazione dei fenomeni idrosedimentologici e per la loro gestione.

In questo contesto compare come alternativa la modellistica numerica che ricorre a strumenti della fluidodinamica computazionale, permettendo un livello di dettaglio molte volte superiore all'informazione disponibile *in loco* per la ricostruzione o la calibrazione della dinamica dei fenomeni idrosedimentologici coinvolti. La difficoltà in ambedue le alternative, cioè fisica e numerica, è la possibilità di avere una corretta taratura di tali fenomeni; compito ovviamente di non facile soluzione.

Inoltre, la modellistica numerica in molte situazioni ha un livello di complessità incompatibile con i tempi di calcolo, che la rendono un'alternativa improponibile, nel contesto dell'ingegneria, per affrontare i problemi inerenti la dinamica delle correnti di torbidità. Infatti, data le scale temporali e spaziali dei fenomeni correlati alle correnti di torbidità, è molto difficile poter simulare numericamente e in forma completa tali fenomeni con vere ricadute pratiche o ingegneristiche.

Questa ricerca si occupa delle correnti di torbidità di carattere iperconcentrato e di natura newtoniana o quasi newtoniana ma viscosa come avviene spesso per le correnti di densità che si propagano all'interno di un serbatoio. La tesi si prefigge di indagare quali semplificazioni fisicamente basate possono essere introdotte nelle equazioni della fisica matematica in modo tale da poter simulare i fenomeni reali adottando modelli numerici di un alto livello di concettualizzazione teorica che permettano di riprodurre i fenomeni reali con tempi di calcolo compatibili con gli scopi delle indagini dal punto di vista ingegneristico ed economico.

Sulla base di tale premesse si è sviluppata una soluzione analitica basata sulla teoria della perturbazione che usa le equazioni delle acque basse, applicata a una miscela omogenea, newtoniana, conservativa e viscosa e adotta alcune ipotesi di natura fisica che vengono convalidate mettendo a confronto i risultati della soluzione analitica con dati sperimentali di laboratorio o con dati sperimentali numerici riportati in letteratura. Sulla base dell'interpretazione dei risultati, le ipotesi fisiche adottate per lo sviluppo della soluzione analitica sono applicate a un modello numerico di fluidodinamica computazionale avanzata, il quale è messo a confronto con dati sperimentali di laboratorio con il fine di validare la bontà delle ipotesi assunte.

La tesi è articolata in cinque capitoli, come di seguito:

nel Capitolo 1 viene condotta l'interpretazione fisico matematica di una corrente di torbidità basata sugli studi teorici riportati in letteratura;

nel Capitolo 2 viene presentata un'analisi dimensionale per una corrente di densità di natura viscosa e pseudo - viscosa. Tale analisi si prefigge l'identificazione dei parametri dominanti nella dinamica propagatoria di una corrente di torbidità;

nel Capitolo 3 viene illustrata in forma dettagliata la soluzione analitica proposta, la quale integra le equazioni delle acque basse ricorrendo alla teoria della perturbazione. La soluzione analitica viene descritta dettagliatamente dal punto di vista fisico matematico;

nel Capitolo 4 è presentata la teoria del modello numerico sviluppato in 2D, nel piano verticale, basato sull'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes. I risultati ottenuti sono messi a confronto con dati sperimentali di laboratorio riguardanti una corrente di torbidità che si propaga all'interno di un serbatoio;

nel Capitolo 5 vengono riportati i commenti ai risultati esposti nei capitoli precedenti, dai quali si estraggono considerazioni e conclusioni sul lavoro svolto e spunti per nuove ricerche inerenti all'argomento trattato.

In **Appendice** vengono illustrati tutti gli accorgimenti matematici adottati nell'elaborazione della soluzione analitica.

1 INTERPRETAZIONE FISICO MATEMATICA DELLA DINAMICA DI UNA CORRENTE DI TORBIDITÀ

1.1 GENERALITÀ SULLE CORRENTI DI DENSITÀ E TORBIDITÀ

Una *corrente di densità* è un moto bifasico di due o più fluidi caratterizzati da densità diverse; il moto è provocato essenzialmente dal rapporto fra la differenza di densità e la forza di gravità. Si definisce quindi, con la seguente espressione, la forza motrice di una corrente di densità che corrisponde alla gravità ridotta:

$$g' = g \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho_a} \right) \quad 1.1$$

dove ρ è la densità della miscela o del fluido immesso e ρ_a è quella del fluido circostante.

Le variazioni di densità, considerando l'acqua come fluido circostante, possono essere causate da una differenza di temperatura, di salinità oppure di torbidità.

Nel caso particolare di una *corrente di torbidità*, questa è una corrente di densità in cui il moto è costituito da un fluido di densità ρ , caratterizzato dalla presenza di materiale in sospensione di densità ρ_s , di natura coesiva o non coesiva e con comportamento newtoniano o non newtoniano. La quantità totale di sedimenti in sospensione varia in base all'iterazione esistente tra la corrente e il fondo per mezzo dei fenomeni di erosione e deposizione, come illustrato in Figura 1.1. Inoltre, la concentrazione del materiale in sospensione può cambiare in funzione dell'incremento della sua diluizione causato dall'ingresso all'interno della corrente di torbidità del fluido ambientale circostante (acqua).

Le correnti di torbidità, in termini generali, sono definite come un fluido subacqueo carico di sedimenti che ha luogo non solo nelle correnti fluviali ma anche in ambiente marino e lacuale (Chikita [9]; Garcia [20]). Queste correnti costituiscono un importante meccanismo per il trasporto dei sedimenti litoranei verso le acque profonde e sono in grado, in ambiente marittimo, di creare canyon subacquei (Fukushima *et al.*[18]). La prima prova della capacità di queste correnti di percorrere una notevole distanza e della loro elevata velocità è stata

fornita dalle registrazioni di un terremoto nel 1929 nei pressi di Terranova, che ebbe come conseguenza la rottura dei cavi sottomarini per le comunicazioni telefoniche e telegrafiche. In un primo tempo s'ipotizzò che le rotture fossero dovute al terremoto stesso, ma analizzando in dettaglio i dati, si notò che solo alcuni dei cavi si tranciarono contemporaneamente al terremoto, gli altri s'interruppero a vari intervalli e l'ultimo circa 13 ore dopo, a una distanza di circa 700 km dall'epicentro del sisma. Analizzando nel dettaglio anche la disposizione e l'ordine in cui i cavi si tranciarono, si notò che i primi a rompersi erano quelli più vicini all'ipocentro, ma anche posti vicino all'inizio della scarpata continentale, mentre tutti gli altri erano disposti via via più vicini alla piana abissale. Quindi come causa plausibile si pensò subito a una corrente di torbidità, innescata dal sisma che, precipitando lungo il pendio oceanico a una velocità di circa 50 km/h, ha tranciato la sequenza dei cavi che via via incontrava.

È evidente quindi che le correnti scorrono nei canyon sottomarini con velocità considerevoli, di circa 8-14 m/s; queste velocità elevate, insieme con il loro alto potenziale di trasporto di sedimenti e la loro capacità di erosione, mostrano come la dinamica delle correnti di torbidità sia un importante elemento da considerare nella progettazione d'installazioni subacquee offshore (Dengler e Wilde [14]).

In ambiente fluviale e, in particolare, negli invasi artificiali, lo sviluppo di una corrente di densità costituisce un problema d'enorme importanza ambientale ed economica (Fischer *et al.* [17]; Alavian *et al.* [5]).

Un corso d'acqua che sfocia all'interno di un serbatoio può trasportare sedimenti, nutrienti e sostanze chimiche per mezzo di una corrente di torbidità che può incidere sulla qualità iniziale dell'acqua presente nell'invaso. La sorte dei sedimenti e delle altre sostanze trasportate dipende dalle caratteristiche della corrente di torbidità stessa, in particolare dalla sua velocità, dall'intensità della miscelazione con l'acqua presente nel serbatoio e dal tasso di sedimentazione e risospensione dei sedimenti. Questi fattori, come già menzionato, sono fondamentali per la qualità dell'acqua invasata nel serbatoio (Graf [22]).

Un altro problema inerente alle correnti di torbidità riguarda la perdita di volume utile all'interno del serbatoio causate dalla capacità di trasporto di sedimenti della corrente stessa (Fan e Morris, [16]). Durante il movimento della corrente di torbidità verso valle, una parte dei sedimenti sospesi all'interno di essa si assesterà al di fuori della corrente, depositandosi su tutta la lunghezza del serbatoio.

In certe condizioni, una corrente di torbidità è in grado di viaggiare per decine di chilometri trasportando sedimenti sottili prima di incontrare una struttura idraulica, ad esempio una diga, in grado di arrestarla, almeno parzialmente (Garcia [21]). A questo punto, si creerà un lago fangoso di acqua carica di sedimenti, che gradualmente sedimentano e si assestano andando a formare un deposito di materiale che occupa parte del volume utile dello sbarramento, senza citare, ovviamente, i problemi indotti al macchinario idraulico presente nel caso di una centrale idroelettrica ed i problemi di gestione dell'invaso relativi all'apertura degli scarichi di fondo.

La manovra di “fluitazione” (*venting*), praticata al fine di prevenire la perdita di volume utile di un serbatoio, è una tecnica che richiede la conoscenza circa la propagazione di queste correnti; ed è appunto da qui che prende inizio il presente lavoro.

Vi sono innumerevoli studi numerici sulle correnti di torbidità in moto stazionario (Fukushima *et al.*[18]; Parker *et al.* [38] [39]; Akiyama e Stefan [3][4]; Garcia [21]), ma in realtà la maggior parte di esse, in natura, si muovono con moto non stazionario. Finora pochi sforzi sono stati fatti per modellare con moto vario il fenomeno delle correnti di densità in ambiente naturale. Ciò dipende dall'intrinseca difficoltà nell'integrazione delle equazioni che governano la dinamica dei fenomeni in moto non stazionario rispetto a quelle del moto stazionario. Inoltre, la ricostruzione dei fenomeni fisici dominanti nella propagazione di una corrente di torbidità di natura newtoniana o non newtoniana è di grande complessità fisico-numerica.

Lo scopo della simulazione numerica di una corrente di torbidità è quello di ottenere le caratteristiche della corrente stessa, cioè le altezze, le velocità, la concentrazione lungo il suo percorso, il tempo di arrivo e in particolare la sua dinamica all'interno del serbatoio.

Senza un approccio numerico, è molto difficile riuscire a determinare nella prassi ingegneristica, i meccanismi temporali coinvolti nella dinamica di una corrente di densità.

1.2 LE EQUAZIONI ALLA BASE DELLE CORRENTI DI TORBIDITÀ

L'energia delle correnti di torbidità è generata dal lavoro svolto dalla forza di gravità sui sedimenti sospesi. Si pensi a un canyon sottomarino il cui letto è coperto da sabbia sciolta sopra la quale scorre una corrente di torbidità la cui sabbia sospesa ha una composizione simile a quella depositata sul fondo (tale ragionamento è facilmente estrapolabile anche nel caso di un serbatoio artificiale). Se la corrente è “accelerata”, essa può facilmente inglobare molti sedimenti dal letto, incrementando così la quantità di lavoro svolto dalla forza di gravità. Ne risulta un'accelerazione della corrente e quindi un incremento dell'ingresso di sedimenti dal fondo e si crea pertanto un ciclo di auto-accrescimento. Occorre anche sottolineare che il carattere “accelerato” della corrente può indurre l'ingresso del fluido circostante, acqua con basse concentrazioni di sedimento, alla corrente di torbidità con conseguente abbattimento della sua concentrazione.

Diverse concettualizzazioni teoriche dei fenomeni indotti dalle correnti di densità sono stati fatti a oggi per definire le equazioni del moto che governano i flussi di densità subacquei, in particolare le correnti di torbidità, nelle quali i sedimenti sospesi sono liberi di scambiarsi con i sedimenti depositati sul fondo. Questi scambi vengono quantificati con i termini di erosione del fondo e deposizione da Pantin [36] e Parker [37] e rendono possibile il meccanismo di

auto-accelerazione a causa dell'inglobamento dei sedimenti presenti sul fondo all'interno della massa della corrente.

Per la deduzione delle equazioni alla base della dinamica di una corrente di torbidità, si consideri un fluido stratificato indotto dalla sola presenza di materiale solido in sospensione di concentrazione molto superiore a quella del fluido circostante e che si propaga su un fondo ipotizzato a pendenza costante. Come mostrato in Figura 1.1, la corrente è essenzialmente bidimensionale nella verticale, ma l'approccio qui adottato è di natura monodimensionale.

Siano h lo spessore della corrente di torbidità, U la sua velocità media, C il valore medio della concentrazione, come definiti dalle seguenti relazioni per i valori medi:

$$Uh = \int_0^h u(z) dz \quad 1.2$$

$$U^2 h = \int_0^h u^2(z) dz \quad 1.3$$

$$CUh = \int_0^h u(z)c dz \quad 1.4$$

dove $u(z)$ è la velocità puntuale nella verticale, $h(x)$ è l'altezza puntuale alla quale la velocità u si annulla e $c(z)$ è la variazione verticale della concentrazione.

La corrente si sposta lungo la direzione x , su un fondo con pendenza S .

S'ipotizza che l'acqua contenuta nel serbatoio sia in quiete, abbia una profondità $h_a \gg h$ e una densità costante ρ_a , la densità della miscela sia ρ , di poco superiore a ρ_a , ma tale per cui valga l'approssimazione $\rho \approx \rho_a$.

Viene presentata di seguito la deduzione delle equazioni idrodinamiche nel caso di flusso non stazionario, monodimensionale, per un canale prismatico ($A=bh$).

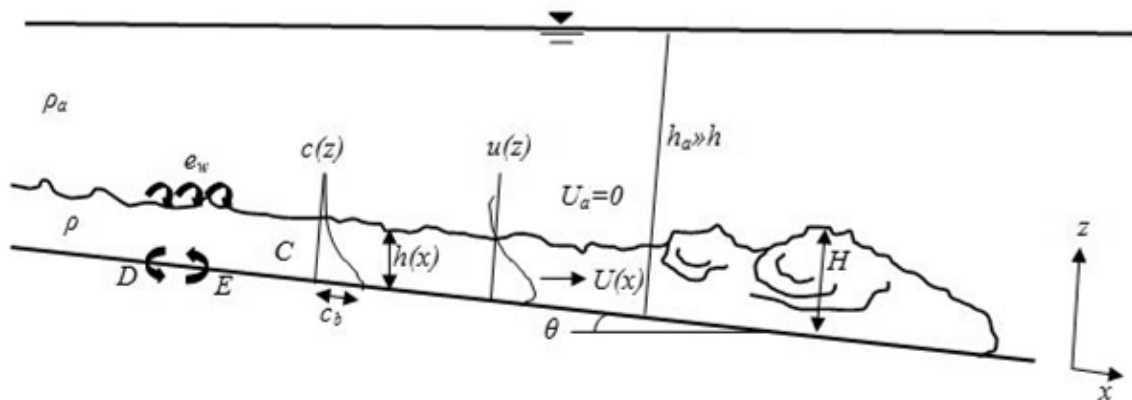


Figura 1.1: schematizzazione di una corrente di torbidità con densità ρ che scorre immersa in un fluido di densità ρ_a su un fondo inclinato di un angolo θ .

Le ipotesi alla base del modello teorico sono:

- flusso monodimensionale;
- distribuzione di pressione idrostatica;
- l'attrito sul fondo è dedotto dalle condizioni di moto uniforme;
- la pendenza del fondo è piccola in modo che $\text{sen } \theta \approx \text{tan } \theta$, dove θ è l'angolo del fondo;
- le densità dell'acqua e dei sedimenti sono costanti, tali che:

$$\rho_s - \rho_a = \left(\frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a} \right) \rho_a \cong \left(\frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a} \right) \rho \quad 1.5$$

dove ρ_s è la densità dei sedimenti in sospensione, ρ_a la densità dell'acqua e ρ quella della miscela.

Per descrivere il comportamento della corrente si ricorre ai bilanci di massa della miscela, della sola fase solida e della conservazione della quantità di moto della miscela.

Il bilancio della massa della miscela in un volume di controllo preso nella corrente di torbidità è definito come differenza tra la quantità di massa che entra attraverso la sezione x_1 di monte nel tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e la massa che esce dalla sezione x_2 di valle nel medesimo istante temporale, si veda Figura 1.2.

Si definisce il flusso di massa come:

$$(\rho AU)_{x_1} \text{ e } (\rho AU)_{x_2}$$

dove A è l'area della sezione $A(h) = bh$ con b larghezza e h altezza della corrente nella sezione considerata.

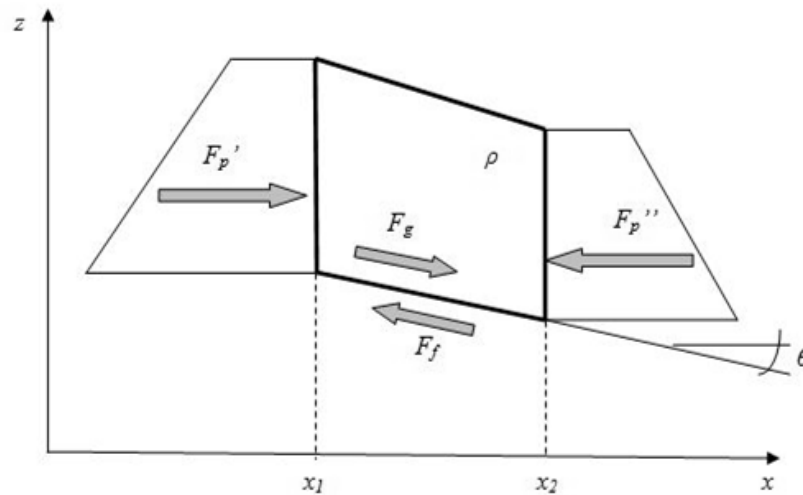


Figura 1.2: volume di controllo preso nella corrente di densità.

Il flusso netto di massa sarà quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho AU)_{x_1} - (\rho AU)_{x_2}] dt \quad 1.6$$

e dovrà essere uguale alla variazione di massa presente nel volume nello stesso intervallo di tempo, cioè:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx \quad 1.7$$

Di conseguenza la conservazione della massa diventa:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho AU)_{x_1} - (\rho AU)_{x_2}] dt = 0 \quad 1.8$$

La relazione (1.8) dovrà essere opportunamente modificata, in virtù del fatto che:

- per la miscela: esiste un ingresso di acqua proveniente dal mezzo acquoso in quiete verso la corrente di torbidità sottostante. Tale processo è causato dalla differenza di pressione esistente tra il mezzo acquoso e la corrente in movimento;
- per la fase solida: esiste una variazione della quantità di sedimenti trasportati dalla corrente a causa dell'interazione letto-corrente che si manifesta in un'alternanza di erosione e/o deposizione di sedimenti sul fondo.

L'equazione di continuità per la miscela, tenendo conto dei precedenti accorgimenti, diventa:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho AU)_{x_1} - (\rho AU)_{x_2}] dt = \iiint_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} \rho Q_i dx dt \quad 1.9$$

dove con Q_i si è indicata la portata di acqua entrante nella corrente, in direzione perpendicolare alla linea d'asse del flusso.

L'equazione di continuità per la fase solida diviene:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho_s CA)_{t_2} - (\rho_s CA)_{t_1}] dx - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho_s CAU)_{x_1} - (\rho_s CAU)_{x_2}] dt = \iiint_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} \rho_s (Q_i - Q_o) dx dt \quad 1.10$$

dove Q_i rappresenta la portata di sedimenti entrante nella corrente (portata di erosione) e Q_o la portata in uscita (portata di deposizione).

Tenendo presente le ipotesi fatte ($\rho_a = costante$, sezione prismatica di area $A=bh$), le (1.9) e (1.10) vengono semplificate nelle seguenti forme:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(h)_{t_2} - (h)_{t_1}] dx - \int_{t_1}^{t_2} [(Uh)_{x_1} - (Uh)_{x_2}] dt = \iint_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} q_i dx dt \quad 1.11$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [(Ch)_{t_2} - (Ch)_{t_1}] dx - \int_{t_1}^{t_2} [(CUh)_{x_1} - (CUh)_{x_2}] dt = \iint_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} (q_i - q_o) dx dt \quad 1.12$$

dove q_i e q_o rappresentano le portate per unità di larghezza.

I criteri adottati per l'applicazione dell'equazione di conservazione della quantità di moto, sono come di seguito:

- il flusso della quantità di moto attraverso una sezione di passaggio è considerato come il prodotto tra il flusso di massa e la sua velocità; né risulta quindi: $\rho UAU = \rho U^2 A$;
- il flusso netto della quantità di moto nel volume di controllo è considerato come differenza tra il flusso entrante nella sezione x_1 , $(\rho AU^2)_{x_1}$ e il flusso uscente dalla sezione x_2 , $(\rho AU^2)_{x_2}$;

- il flusso netto della quantità di moto nell'intervallo di tempo considerato:

$$M_f = \int_{t_1}^{t_2} [(\rho U^2 A)_{x_1} - (\rho U^2 A)_{x_2}] dt \quad 1.13$$

La quantità di moto entro il volume di controllo è quindi data da:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho U A dx \quad 1.14$$

e la variazione ΔM netta nell'intervallo di tempo è:

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} [(\rho U A)_{t_2} - (\rho U A)_{t_1}] dx \quad 1.15$$

S'ipotizza che le sole forze agenti sul volume di controllo nella direzione x siano la gravità, l'attrito e la pressione.

La forza F_g dovuta alla gravità si valuta supponendo che la pendenza del fondo sia sufficientemente piccola da poter considerare $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$:

$$S = \tan\theta = -\frac{\partial z_b}{\partial x}$$

con z_b la quota del fondo. La forza quindi vale:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_g dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (\rho_s - \rho_a) g C A S dx dt \quad 1.16$$

La forza dovuta all'attrito F_f viene considerata sull'intera sezione attraversata dal flusso; quindi l'integrale temporale delle forze di resistenza sul volume di controllo è:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_f dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} -\tau b dx dt \quad 1.17$$

La forza di pressione F_p è la differenza tra le forze, dovute alla pressione totale, applicate alle frontiere x_1 e x_2 del tratto considerato F_p' e F_p'' . La pressione totale viene calcolata come somma della pressione dell'acqua P_a e della pressione dovuta ai sedimenti P_s :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_p dt = \int_{t_1}^{t_2} (F_{p_1}' - F_{p_1}'') dt = g \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}] dt \quad 1.18$$

con $I_1 = \int_0^{h(x_1)} [P_a + P_s] \sigma(x, \eta) d\eta$

dove η è la variabile d'integrazione lungo l'asse z ; $h(x, t)$ è la profondità dell'acqua e $\sigma(x, \eta)$ è la larghezza generica della sezione trasversale per un assegnato valore di h , nel caso del canale prismatico $\sigma(x, h) = b =$ larghezza del pelo libero della sezione. Si veda Figura 1.3.

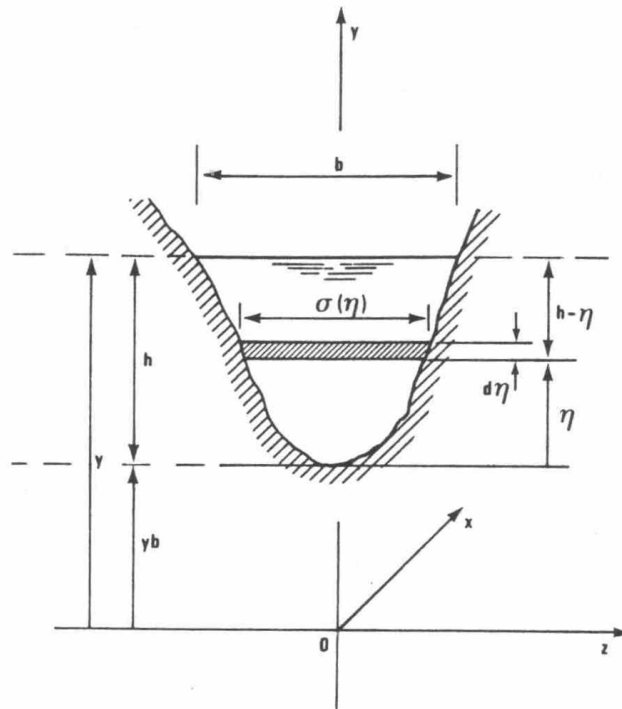


Figura 1.3: schematizzazione di una generica sezione trasversale.

Quanto sopra detto sulla conservazione della quantità di moto conduce alla seguente espressione:

$$\Delta M = M_f + \int_{t_1}^{t_2} F_p dt + \int_{t_1}^{t_2} F_g dt - \int_{t_1}^{t_2} F_f dt \quad 1.19$$

che, sostituendo le equazioni (1.16), (1.17) e (1.18) ricavate in precedenza, diventa:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [(\rho UA)_{t_2} - (\rho UA)_{t_1}] dx &= \int_{t_1}^{t_2} [(\rho U^2 A)_{x_1} - (\rho U^2 A)_{x_2}] dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}] dt &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (\rho_s - \rho_a) g C A S dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} -\tau b dx dt \end{aligned} \quad 1.20$$

Differenziando le equazioni ricavate in precedenza, si ottengono i seguenti risultati:

- L'equazione di continuità della massa della miscela (1.11) diventa:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} \right] dt dx = \iint_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} q_i dx dt \quad 1.21$$

- L'equazione di conservazione della fase solida (1.12) diventa:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial(C h)}{\partial t} + \frac{\partial(C U h)}{\partial x} \right] dt dx = \iint_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} (q_i - q_o) dx dt \quad 1.22$$

- Per l'equazione di conservazione della quantità di moto è utile eseguire tutti i passaggi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} [(\rho UA)_{t_2} - (\rho UA)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial(\rho UA)}{\partial t} dt dx$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} [(\rho U^2 A)_{x_1} - (\rho U^2 A)_{x_2}] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho U^2 A)}{\partial x} dx dt$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I_1}{\partial x} dx dt$$

ma poiché si è posto:

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [P_a + P_s] \sigma(x, \eta) d\eta$$

si ottiene:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x)} [(P_a + P_s) \sigma(x, \eta)] d\eta = \frac{\partial(P_a + P_s)}{\partial x} \int_0^{h(x)} \sigma(x, \eta) d\eta = \frac{\partial(P_a + P_s)}{\partial x} A$$

Si considera la pressione dell'acqua costante ($P_a = \rho_a g h + \rho_a g h_a$) e pertanto si semplifica la scrittura precedente nella forma:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = A \frac{\partial P_s}{\partial x} = A \frac{\partial}{\partial x} (\rho_s - \rho_a) C g h$$

La forma differenziale dell'equazione di conservazione della quantità di moto, alla luce delle precisazioni fatte sinora, si può ottenere da:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial(\rho U A)}{\partial t} dt dx &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho U^2 A)}{\partial x} dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A \frac{\partial}{\partial x} (\rho_s - \rho_a) C g h dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (\rho_s - \rho_a) C g A S dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} -\tau b dx dt \end{aligned}$$

Secondo le ipotesi iniziali, è valida la condizione $\rho \approx \rho_a$; pertanto dividendo per la densità $\rho_a = \text{costante}$ e per la larghezza b della sezione, si ottiene la forma definitiva:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial(U A)}{\partial t} dt dx &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(U^2 A)}{\partial x} dx dt - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a} \right) C g h^2 dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a} \right) C g h S dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} -u_{*b}^2 dx dt \end{aligned} \quad 1.23$$

Dove:

$$R = \left(\frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a} \right) \quad \text{è il peso specifico immerso;}$$

u_{*b}^2 rappresenta la velocità d'attrito sul fondo ed è legata allo sforzo τ mediante la seguente relazione:

$$u_{*b}^2 = \frac{\tau}{\rho} \cong \frac{\tau}{\rho_a}$$

Poiché le relazioni (1.21), (1.22) e (1.23) devono essere valide ovunque nel piano (x, t) e per ogni volume di controllo infinitamente piccolo, allora devono essere vere le relative equazioni differenziali:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = q_i \quad 1.24$$

$$\frac{\partial(Ch)}{\partial t} + \frac{\partial(CUh)}{\partial x} = q_i - q_o \quad 1.25$$

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial(U^2h)}{\partial x} = -\frac{1}{2}Rg \frac{\partial(Ch^2)}{\partial x} + RSCgh - u_{*b}^2 \quad 1.26$$

Per ritenere completa la formulazione del modello, è necessario fornire le relazioni per le portate q_i e q_o .

Nell'equazione (1.24), q_i rappresenta l'afflusso di acqua del mezzo in quiete che entra nella corrente. S'ipotizza che la velocità di trascinamento dell'acqua all'interno della corrente sia proporzionale alla velocità media U della corrente stessa; quindi si ha:

$$q_i = e_w U \quad 1.27$$

dove la costante di proporzionalità e_w è detta coefficiente di trascinamento del fluido circostante.

Nell'equazione (1.25), q_i rappresenta l'erosione di sedimenti del letto per opera della corrente. Si pone:

$$q_i = E(p) = v_s E_s \quad 1.28$$

dove $E(p)$ è l'erosione dei sedimenti valutata ad una distanza $z=p$ dal fondo del letto, E_s è il coefficiente di trascinamento dei sedimenti dal fondo del letto e v_s rappresenta la velocità di sedimentazione delle particelle.

Si pone quindi q_o come la portata di deposizione del materiale granulare sul fondo del letto, e cioè:

$$q_i = D(p) = v_s c_b \quad 1.29$$

dove $D(p)$ rappresenta la deposizione del sedimento a una distanza $z=p$ dal fondo e c_b la concentrazione di sedimenti in prossimità del fondo.

In conclusione, la forma definitiva delle tre leggi di conservazione è la seguente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = e_w U \quad 1.30$$

$$\frac{\partial(Ch)}{\partial t} + \frac{\partial(CUh)}{\partial x} = v_s(E_s - r_0 C) \quad 1.31$$

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial(U^2 h)}{\partial x} = -\frac{1}{2} Rg \frac{\partial(Ch^2)}{\partial x} + RSCgh - u_{*b}^2 \quad 1.32$$

dove:

$$r_0 = \frac{c_b}{C} \quad 1.33$$

$$e_w = \frac{w_e}{U} \quad 1.34$$

Le grandezze coinvolte sono le seguenti:

- U la velocità del flusso;
- h lo spessore dello strato;
- e_w coefficiente di trascinamento del fluido circostante;
- w_e velocità di trascinamento dell'acqua pulita per mezzo della corrente di torbidità;
- v_s velocità di sedimentazione delle particelle;
- c_b concentrazione di sedimenti sul fondo;
- C concentrazione volumetrica dei sedimenti sospesi;
- u_{*b} sforzo sul fondo;
- E_s coefficiente di trascinamento dei sedimenti dal fondo;
- R peso specifico sommerso;
- S pendenza del fondo;
- g accelerazione di gravità.

Il meccanismo di auto-accelerazione, che viene valutato nei termini della capacità della corrente di inglobare sedimenti, è associato al termine $v_s(E_s - c_b)$ dell'equazione (1.31). Se E_s è maggiore di c_b , la corrente ingloba più sedimenti di quelli che perde per sedimentazione, si ha quindi un aumento del peso della corrente e di conseguenza un incremento del termine $RgChS$ dell'equazione (1.32), che quantifica la forza motrice della corrente stessa; ne risulta quindi un'accelerazione. Tuttavia un aumento della velocità U provoca un accrescimento del tasso di trascinamento dei sedimenti E_s e, come si può comprendere, s'innescano un meccanismo di auto-accrescimento.

L'energia turbolenta viene spesa per mantenere il carico esistente in sospensione, ma anche per inglobare nuovi sedimenti dal fondo. Se ne deduce che un alto tasso di trascinamento di sedimenti dal fondo non può essere mantenuto, poiché può accadere che l'energia dissipata superi quella a disposizione fornita dalla corrente; in questo caso si verifica il collasso della turbolenza e i sedimenti in sospensione si depositano sul fondo, facendo così dissolvere la corrente stessa.

Questo vincolo energetico può essere quantificato con l'equazione del bilancio dell'energia cinematica turbolenta che ha la seguente forma:

$$\frac{\partial Kh}{\partial t} + \frac{\partial UKh}{\partial x} = u_*^2 U + \frac{1}{2} U^3 e_w - f_0 h - Rg v_s Ch - \frac{1}{2} Rg Ch U e_w - \frac{1}{2} Rgh v_s (E_s - r_0 C) \quad 1.35$$

I primi due termini a destra rappresentano il tasso di produzione dell'energia turbolenta, il termine f_0 , è il tasso di dissipazione dell'energia turbolenta dovuta alla viscosità. I tre termini finali rappresentano il tasso di consumo dell'energia turbolenta causata dalla sedimentazione, in particolare si ha che:

- $-Rg v_s Ch$ è il termine che rappresenta il lavoro necessario per mantenere in equilibrio una data sospensione ed evitare la sedimentazione;
- $-\frac{1}{2} Rg Ch U e_w$ si riferisce ad uno strato il cui spessore aumenta a causa dell'ingresso di acqua dall'alto. Quando lo strato si espande, la turbolenza fa alzare il centro di massa e, di conseguenza, l'energia potenziale della sospensione aumenta, dissipando però energia cinetica. Questo processo è illustrato in Figura 1.4.
Come si può notare, quello presentato in Figura 1.4 è un caso semplificato, in cui il centro di massa della sospensione è posto a $\frac{1}{2}h$ ed e_w è la percentuale con cui aumenta lo spessore dello strato in sospensione a causa dell'ingresso di acqua dall'alto.
- $-\frac{1}{2} Rgh v_s (E_s - r_0 C)$ quantifica l'energia spesa nel sollevare i sedimenti trascinati dalla corrente ed incorporarli nella sospensione. Questo termine può essere negativo o positivo a seconda che si abbia rispettivamente guadagno o perdita di energia cinetica. La variazione di energia cinetica dipende dalla relazione esistente tra il tasso di trascinamento dei sedimenti del fondo alveo $v_s E_s$ ed il tasso di deposizione $v_s c_b$; in

particolare, se $v_s E_s$ è maggiore di $v_s c_b$, l'energia cinetica della corrente aumenta ed il termine in questione è negativo. In Figura 1.5 è illustrato il processo descritto.

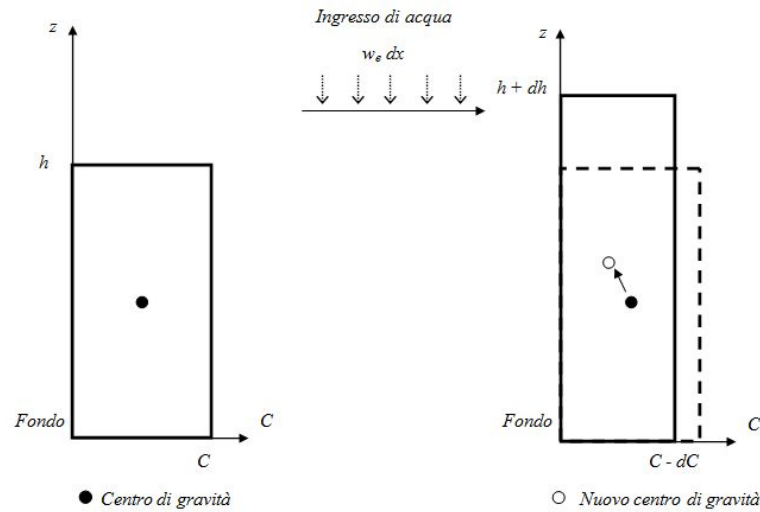


Figura 1.4: illustrazione dell'effetto dell'ingresso di acqua dall'alto.

Per semplicità è considerata una corrente verticalmente uniforme con concentrazione C e altezza h . Come l'acqua viene trascinata e mescolata nella sospensione tramite la turbolenza, il centro di massa si alza. Il conseguente aumento di energia potenziale della sospensione è ottenuto a spese di una perdita di energia cinetica turbolenta che ha reso possibile il mescolamento.

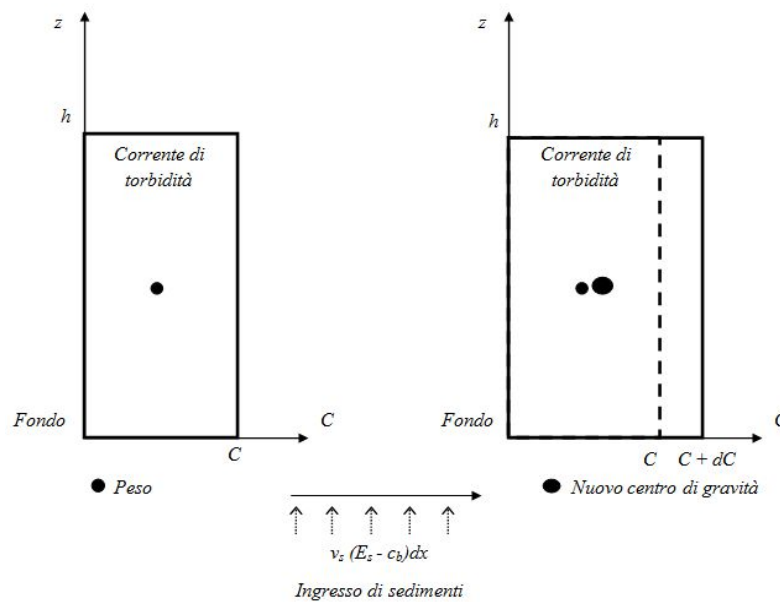


Figura 1.5: illustrazione dell'effetto dell'ingresso di sedimenti dal fondo.

Viene considerato il caso in cui $E_s > c_b$. Appena il sedimento è trascinato dal fondo viene mescolato nella sospensione per effetto della turbolenza. Ne risulta un aumento di peso della sospensione e quindi anche della sua energia potenziale. Questo aumento è ottenuto a spese dell'energia cinetica turbolenta che ha reso possibile il mescolamento.

In conclusione, considerando il bilancio dell'energia turbolenta media, si nota che vi sono quattro meccanismi che contribuiscono alla perdita della turbolenza K :

1. la dissipazione viscosa, " f_0 ";
2. il lavoro necessario per mantenere la concentrazione esistente di sedimenti in sospensione, " $-Rgv_sCh$ ";
3. il lavoro speso nel sollevare il centro di massa della sospensione quando viene diluita dall'ingresso di acqua dall'alto e quello speso nel sollevare i sedimenti presenti sul fondo per inglobarli nella sospensione, " $-\frac{1}{2}RgChUe_w$ " e " $-\frac{1}{2}Rghv_s(E_s - r_0C)$ ";
4. l'energia spesa nel caso in cui il tasso di trascinamento di sedimenti del fondo sia maggiore del tasso di deposizione, diversamente si ha guadagno di energia.

Riflettendo su questi termini, si può affermare che esiste un vincolo di energia associato alla dinamica di una corrente di densità. Infatti, se il tasso netto di energia fornita dalla turbolenza (rappresentata dai primi due termini a destra dell'equazione (1.35)) è minore della somma dei quattro termini che rappresentano l'energia consumata per mantenere in galleggiamento la corrente stessa (vedi i punti 1,2 3 e 4), in queste condizioni la turbolenza dovrà svanire e la corrente di torbidità con essa.

1.3 INTERPRETAZIONE FISICO MATEMATICA DEI MECCANISMI DI EQUILIBRIO DELLE CORRENTI DI TORBIDITÀ

Come primo approccio per l'interpretazione fisica dei meccanismi di equilibrio, si è assunta l'ipotesi di moto uniforme subcritico per una corrente di densità, la cui definizione si basa sul criterio del numero di Richardson (Turner [42]):

$$Ri = \frac{RgCh}{U^2} \tag{1.36}$$

Sulla base dell'equazione precedente si può identificare la natura della corrente, cioè se la corrente è supercritica o subcritica. Nel caso di corrente subcritica uniforme, l'ingresso d'acqua nella corrente di densità è piccolo, dato che la velocità di trascinamento è molto bassa e quindi w_e è trascurabile ed e_w è nullo (si veda equazione (1.34)). Con queste ipotesi le equazioni di base (1.30), (1.31), (1.32) e (1.35) hanno delle soluzioni d'equilibrio con valori costanti di U , C , h e K .

L'equazione di bilancio della quantità di moto (1.32) diventa:

$$u_*^2 = RSCgh \tag{1.37}$$

L'equazione di bilancio della massa solida (1.31) diventa:

$$E_s = c_b \quad 1.38$$

Il bilancio di energia turbolenta (1.35) diventa:

$$u_*^2 U = RSCghU = f_0 h + Rgv_s Ch \quad 1.39$$

Nell'equazione (1.39) il termine $RSCghU$ rappresenta l'energia fornita alla corrente a causa dell'incremento dei sedimenti trascinati dalla corrente stessa, per il fenomeno d'ingresso di materiale del fondo, e quindi dell'aumento della massa specifica della miscela. Questa energia deve essere dissipata attraverso l'equilibrio tra la somma del termine della dissipazione viscosa ($f_0 h$) e la componente verticale della forza di gravità ($Rgv_s Ch$) al fine di mantenere i sedimenti in sospensione.

Poiché f_0 è una quantità non nulla, ne deriva che la condizione necessaria per l'equilibrio di una corrente di torbidità subacquea caratterizzata da spessore costante è:

$$RgChUS > Rgv_s Ch \quad 1.40$$

e di conseguenza:

$$\frac{US}{v_s} > 1 \quad 1.41$$

Dall'espressione (1.41), si può osservare il paradosso indotto dall'approccio assunto, moto uniforme e condizione di corrente subcritica, per la rappresentazione della dinamica di una corrente di densità. Infatti, l'espressione (1.41), nota come criterio di Knapp-Bagnold (Bagnold [7]; Knapp [30]), mostra come, se $US > v_s$, la corrente ha sempre l'energia necessaria per integrare sedimenti, incrementare il loro peso e quindi la sua energia, propagandosi verso valle in forma inesauribile.

È evidente che il criterio espresso dalla disequazione (1.41) non è sufficiente per spiegare la dinamica di una corrente di torbidità accelerata. Quindi la (1.41) è generalizzata come una condizione necessaria se applicata a un flusso che si muove in corrente lenta e in condizione di moto uniforme.

La forma generale per l'interpretazione di una corrente di torbidità accelerata (come realmente avviene in natura) si può dedurre dalla seguente disuguaglianza, dedotta dal termine di destra dell'equazione del bilancio dell'energia turbolenta (1.35):

$$u_*^2 U + \frac{1}{2} U^3 e_w > Rgh \left[v_s C + \frac{1}{2} e_w UC + \frac{1}{2} v_s (E_s - r_0 C) \right] \quad 1.42$$

Se la (1.42) non è soddisfatta, la turbolenza cessa e con essa la corrente stessa. Il criterio rappresentato dalla disequazione (1.42) indica il “limite per l’auto-accelerazione”; essa infatti dimostra che una corrente con una forte accelerazione (cioè con un alto tasso d’inglobamento dei sedimenti E_s) intuitivamente dissipa più energia turbolenta di quella a disposizione allo scopo di mettere in sospensione i nuovi sedimenti, provocando l’incremento del termine a destra della disequazione e il conseguente esaurimento del movimento della corrente stessa.

L’analisi condotta nel presente capitolo 1 mette in luce, attraverso le equazioni della fisica matematica, le problematiche connesse alla dinamica di una corrente di densità prevalentemente turbolenta e non conservativa. Dallo studio si può desumere che la complessità di tale fenomeno richiede, dal punto di vista pratico, risorse molto elevate sia dal punto di vista computazionale che fisico matematico per una corretta rappresentazione. Inoltre, nella grande maggioranza delle situazioni, la possibilità di calibrare i modelli matematici atti alla rappresentazione matematica delle correnti di torbidità è molto difficile data l’incompatibilità tra le risorse numerico - computazionali e i dati sperimentali a scala di prototipo.

Lo studio, dettagliatamente descritto nel presente capitolo, ha fornito degli spunti per gli sviluppi che verranno illustrati nella presente tesi.

Il primo riguarda sia i meccanismi d’immissione dell’acqua circostante all’interno della corrente di torbidità che i problemi di deposizione e/o erosione e messa in sospensione del materiale depositato sul fondo. A oggi si ricorre ad approcci di natura nettamente empirica o basata su criteri classici della teoria degli sforzi che richiedono un rilevante impegno fisico numerico con dei risultati molto limitati.

Il secondo è la valutazione dei fenomeni turbolenti abbinati all’interazione tra fluido e particelle solide. Anche in questo caso la loro rappresentazione ha delle enormi limitazioni.

Sulla base delle precedenti conclusioni parziali si è cercato di affrontare le problematiche individuate considerando un nuovo approccio teorico per trattare in forma semplificata la dinamica di una corrente di torbidità.

Pertanto, per quanto riguarda i problemi d’immissione, si è considerata la possibilità di trattare l’ingresso d’acqua nella corrente di torbidità proporzionale al gradiente di velocità spaziale, come presentato nel paragrafo 3.9. Tale concetto può essere adottato anche per l’immissione del sedimento presente sul fondo nella corrente di torbidità (ma nella presente indagine sono state considerate solo correnti conservative e quindi il problema dell’interazione tra il fondo e il sedimento non è stato considerato).

La validità delle ipotesi assunte sarà verificata inizialmente tramite una soluzione analitica e successivamente adottando un modello numerico basato sulle equazioni di Navier-Stokes, di tipo bidimensionale nella verticale.

Nel prossimo capitolo viene illustrata un'analisi dimensionale allo scopo di definire i parametri dominanti nella dinamica di propagazione di una corrente di torbidità, sia in condizione laminare che turbolenta. A partire da tale analisi verranno individuati i parametri sui quali si potrà “intervenire” per la semplificazione delle equazioni che rappresentano l'idrodinamica delle correnti di torbidità.

2 ANALISI DIMENSIONALE PER UNA CORRENTE VISCOSA E PSEUDO - VISCOSA

Com'è noto, la descrizione analitica dei fenomeni fisici è basata sulle equazioni della fisica matematica, le quali sono costituite da termini dimensionalmente omogenei fra loro, che legano una generica variabile di stato ad altre grandezze caratterizzanti il fenomeno stesso.

Il numero di tali grandezze può essere definito a priori, ma vi è la possibilità di ridurlo, ad esempio, utilizzando il “teorema π ”. In questo modo, oltre a diminuire il numero delle variabili d'interesse, si sostituiscono alle grandezze iniziali numeri adimensionali invariati rispetto al sistema di misura tali da poter essere mutati semplicemente cambiando uno dei parametri che vi compaiono.

Inoltre, due sistemi fra loro meccanicamente confrontabili sono in similitudine se sono uguali i valori di alcuni gruppi adimensionali che rappresentano il fenomeno. L'analisi dimensionale permette di definire sotto quali condizioni due o più situazioni di moto apparentemente differenti possono essere considerate fisicamente equivalenti.

Si vuole nel seguito procedere alla definizione dei gruppi adimensionali più significativi cui è possibile fare riferimento per definire le equazioni fisiche che governano il comportamento di un fluido iperconcentrato di natura newtoniana come sono le correnti di torbidità trattate nella presente ricerca sperimentale.

Lo scopo della corrente trattazione è quello di definire i parametri adimensionali dominanti nella rappresentazione della dinamica dei fluidi iperconcentrati sia in similitudine di Reynolds gravitazionale che in similitudine di Reynolds viscoso.

2.1 VARIABILI DI CONTROLLO

In via del tutto generale, nel caso delle correnti di densità, la variabile di stato Z è funzione delle seguenti grandezze meccaniche:

$$Z = f(\tau, \mu, U, h, g, \rho, \theta, \nu, t, x, y, z, p, l) \quad 2.1$$

essendo:

τ	sforzo di taglio [Pa];
μ	viscosità dinamica [kg/ms];
U	velocità media del flusso [m/s];
h	tirante idrico della corrente [m];
g	accelerazione di gravità [m/s ²];
ρ	densità del fluido [kg/m ³];
θ	angoli d'inclinazione del piano [°];
ν	viscosità cinematica della miscela [m ² /s];
t	coordinate temporali [s].
x,y,z	coordinate spaziali [m];
p	pressioni che agiscono sul sistema [Pa];
l	lunghezze che caratterizzano il dominio in cui si verifica il fenomeno in esame [m].

2.2 APPLICAZIONE DEL “TEOREMA π ”

I gruppi adimensionali d'interesse possono essere ottenuti a partire dalla scelta di una terna base di “unità di misura”, che usualmente considera lunghezze [L], masse [M] e tempi [T]. Come variabili di controllo, dimensionalmente indipendenti le une dalle altre, si sono scelte:

Viscosità dinamica μ [L⁻¹ M T⁻¹];

Velocità media U [L T⁻¹];

Tirante idrico h [L].

2.2.1 Numero di Oldroyd

Si consideri lo sforzo di taglio τ [L⁻¹ M T⁻²]. Da un'analisi dimensionale risulta:

$$[L^{-1} M T^{-2}] = [\mu]^\alpha [U]^\beta [h]^\gamma = L^{(-1-\alpha+\beta+\gamma)} M^{(1+\alpha)} T^{(-2-\alpha-\beta)}$$

Ne segue che:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Di conseguenza si ottiene il seguente gruppo adimensionale:

$$O_d = \frac{\tau h}{\mu U} \quad 2.2$$

Il numero di Oldroyd O_d mette in relazione le caratteristiche reologiche, geometriche e cinematiche della sospensione considerata; in particolare esso rapporta lo sforzo di taglio alla viscosità dinamica. Operando in similitudine di Oldroyd si può scrivere:

$$\left(\frac{\tau h}{\mu U}\right)_m = \left(\frac{\tau h}{\mu U}\right)_p \quad 2.3$$

2.2.2 Numero di Richardson

Si consideri l'accelerazione di gravità g [$L T^{-2}$]. Da un'analisi dimensionale risulta:

$$[L T^{-2}] = [\mu]^\alpha [U]^\beta [h]^\gamma = L^{(1-\alpha+\beta+\gamma)} M^{(\alpha)} T^{(-2-\alpha-\beta)}$$

Ne segue che:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Di conseguenza si ottiene il seguente gruppo adimensionale:

$$Ri = \frac{gh}{U^2} \quad 2.4$$

Il numero di Richardson Ri esprime il rapporto tra l'energia potenziale e l'energia cinetica di un fluido; in particolare, esso misura l'importanza dell'effetto gravitazionale nel moto dei fluidi. Il numero di Richardson è equivalente all'inverso del quadrato del numero di Froude.

2.2.3 Numero di Reynolds

Si consideri la densità ρ [$M L^{-3}$]. Da un'analisi dimensionale risulta:

$$[M L^{-3}] = [\mu]^\alpha [U]^\beta [h]^\gamma = L^{(-3-\alpha+\beta+\gamma)} M^{(1+\alpha)} T^{(-\alpha-\beta)}$$

Ne segue che:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Di conseguenza si ottiene il seguente gruppo adimensionale:

$$Re = \frac{\rho U h}{\mu} \quad 2.5$$

Il numero di Reynolds Re esprime il rapporto tra la forza d'inerzia e le forze viscosi agenti sul fluido in esame; in particolare esso misura l'importanza dell'effetto viscoso nel moto dei fluidi.

2.2.4 Numero di Hedström

Esplicitando la (2.2) in funzione della velocità U :

$$U = \frac{\tau h}{\mu} \quad 2.6$$

Sostituendo la (2.6) appena definita nell'equazione (2.5) si ottiene il numero di Hedström:

$$He = \frac{\rho \tau h^2}{\mu^2} \quad 2.7$$

Anche il numero di Hedström, come quello di Reynolds, esprime il rapporto tra le forze d'inerzia e quelle viscosi.

2.3 SIMILITUDINE DI REYNOLDS GRAVITAZIONALE PER UNA MISCELA VISCOSA

Il numero di Reynolds gravitazionale comprende sia l'effetto delle forze viscosi (con il numero di Reynolds Re) che quello delle forze gravitazionali (con il numero di Richardson Ri) ed è definito dalla seguente relazione:

$$Rg = \frac{Fr^2}{Re} = \frac{1}{Re Ri} = \frac{U \mu}{g h^2}$$

Imponendo la similitudine di Reynolds gravitazionale, deve sussistere la seguente relazione:

$$\left(\frac{U\mu}{gh^2}\right)_p = \left(\frac{U\mu}{gh^2}\right)_m \quad 2.8$$

essendo il pedice “*p*” relativo al prototipo e il pedice “*m*” relativo al modello.

Dalla (2.8) deriva la seguente relazione tra le velocità in similitudine di Reynolds gravitazionale:

$$\frac{U_p}{U_m} = \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right) \lambda^2 \quad 2.9$$

Definendo λ come il rapporto di scala:

$$\lambda = \frac{h_p}{h_m} \quad 2.10$$

Dalla (2.9) si ricava la relazione sussistente tra le portate di un eventuale modello e di un ipotetico prototipo:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right) \lambda^3 \quad 2.11$$

Dalla similitudine di Oldroyd (2.3) si può scrivere la seguente relazione:

$$\left(\frac{\tau_p}{\mu_p}\right) \left(\frac{h_p}{h_m}\right) = \frac{U_p}{U_m} \quad 2.12$$

Sostituendo la relazione (2.12) nella (2.9), si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{\tau_p}{\tau_m} = \lambda \quad 2.13$$

La (2.13) definisce la relazione esistente tra gli sforzi tangenziali del modello e del prototipo; come si può notare, il rapporto tra gli sforzi dipende linearmente dal fattore di scala geometrico e non sussiste nessuna relazione con i parametri reologici.

2.4 SIMILITUDINE DI REYNOLDS PER UNA MISCELA VISCOSA

La similitudine di Reynolds, basata sull'uguaglianza $Re_p = Re_m$, viene adottata in tutti i fenomeni fisici caratterizzati dalla prevalenza delle forze viscosse rispetto a quelle di natura gravitazionale. Deve sussistere la seguente relazione:

$$\left(\frac{\rho U h}{\mu}\right)_p = \left(\frac{\rho U h}{\mu}\right)_m \quad 2.14$$

Dalla (2.14) si ottiene la scala delle velocità in similitudine di Reynolds:

$$\frac{U_p}{U_m} = \left(\frac{\frac{\rho_m}{\mu_m}}{\frac{\rho_p}{\mu_p}}\right) \left(\frac{h_m}{h_p}\right) \quad 2.15$$

Ricordando la seguente relazione per la viscosità cinematica:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

e la definizione del rapporto di scala (2.10), la (2.15) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\frac{U_p}{U_m} = \left(\frac{\nu_p}{\nu_m}\right) \frac{1}{\lambda} \quad 2.16$$

A partire dalla (2.16) si ottiene la relazione sussistente tra le portate del modello e quelle del prototipo:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \left(\frac{\nu_p}{\nu_m}\right) \lambda \quad 2.17$$

Sostituendo la (2.15) nell'equazione che definisce la relazione di Oldroyd (2.12) e svolgendo alcuni passaggi si ottiene:

$$\frac{\tau_p}{\tau_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{\nu_p}{\nu_m}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \quad 2.18$$

La (2.18) permette di determinare la relazione che deve sussistere fra gli sforzi sul fondo del modello e del prototipo in funzione dei parametri geometrici (rapporto di scala) e reologici della miscela utilizzata nel modello e di quella relativa al prototipo.

L'identificazione dei parametri che controllano la dinamica di una corrente di torbidità è funzione della prevalenza delle forze viscosse su quelle gravitazionali o viceversa. L'indagine teorica e numerica alla base della presente ricerca adotta come criterio la prevalenza delle forze viscosse su quelle gravitazionali, fatto che implica che i fenomeni rispondano a una natura prevalentemente viscosa condizionata dal numero di Reynolds.

L'analisi dimensionale ha indicato come in un fluido prevalentemente viscoso, sia di natura turbolenta che laminare, la viscosità sia sicuramente il parametro dominante che controlla e condiziona la dinamica di propagazione di una corrente di torbidità con un'alta concentrazione di materiale in sospensione.

Sulla base di quanto indicato, verranno introdotte delle ipotesi per la semplificazione delle equazioni che rappresentano il fenomeno dinamico di una corrente di torbidità (si veda capitolo 1 a pagina 25) e la validità di tali ipotesi verrà quantificata tramite una soluzione analitica ricavata sulla base della teoria della perturbazione.

Le equazioni, scritte in forma monodimensionale, sono quelle delle acque basse, dedotte per una corrente di torbidità turbolenta nel capitolo 1. Le ipotesi adottate sono quelle di un moto viscoso, monofase e stratificato, che si propaga all'interno di una massa fluida con densità inferiore a quella della corrente in ingresso. La corrente è conservativa dal punto di vista sedimentologico (non esiste deposito né erosione di sedimenti) e gli sforzi di taglio tra le correnti stratificate sono nulli permettendo così di trattare la miscela come una corrente omogenea.

Le ipotesi introdotte e trattate attraverso la teoria della perturbazione hanno la pretesa di essere estrapolate per correnti prevalentemente viscosse anche di natura turbolenta. La validazione della soluzione analitica tramite dati sperimentali e numerici di letteratura permetterà di quantificare il limite delle semplificazioni introdotte.

3 MODELLO ANALITICO PROPOSTO PER LO STUDIO DELLA DINAMICA DI UNA CORRENTE DI TORBIDITÀ DI NATURA VISCOSA

3.1 INTRODUZIONE

Nel presente capitolo viene sviluppata una soluzione analitica basata sulla teoria della perturbazione per una corrente di torbidità di natura viscosa che si propaga all'interno di un serbatoio. Il modello si basa sulle equazioni delle acque basse nell'ipotesi di moto omogeneo, monofase e di natura prevalentemente viscosa (Hunt [26], Huang & García [24]).

Lo scopo dello studio della soluzione analitica, è quello di quantificare il peso delle ipotesi semplificatrici introdotte nell'analisi del fenomeno in modo da interpretare fisicamente il problema e poter così estrapolare i concetti e le ipotesi ad applicazioni numeriche di livello di complessità superiore, come richiesto nella prassi ingegneristica.

La teoria della perturbazione, applicata per la soluzione delle equazioni della fisica matematica che rappresentano la dinamica del fenomeno, si basa sulla ricerca di una *soluzione asintotica* al problema, sfruttando il concetto di *espansione di una funzione* $f(x, \varepsilon)$ incognita, dipendente da x ed ε . La soluzione originale è vista come la combinazione di due soluzioni: interna ed esterna. La soluzione valida nella zona esterna, che corrisponde sostanzialmente al corpo dell'onda, corrisponde a un'approssimazione del primo ordine delle equazioni governanti il moto delle correnti di torbidità; mentre la soluzione valida nella zona interna, che corrisponde al fronte dell'onda, è ottenuta semplificando l'equazione iniziale per tenere conto solo degli elementi di uguale ordine di grandezza che definiscono il comportamento della soluzione analitica in tale zona.

3.2 PRESENTAZIONE DEL PROBLEMA

Si consideri un fluido viscoso, monofase sommerso e conservativo (non vi sono scambi di materiale con il fondo), di natura incompressibile e di densità ρ che defluisce sopra un piano di

larghezza infinita, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale e con un sistema di riferimento cartesiano (O, x, y, z) . Il fluido scorre all'interno di un serbatoio contenente un fluido di densità ρ_a , anch'esso incompressibile e in quiete. S'ipotizza che i due fluidi abbiano densità diverse, in particolare che ρ sia maggiore di ρ_a , e che non ci siano sforzi all'interfaccia (fluido omogeneo). Si veda in proposito Figura 3.1.

Lo scopo della trattazione riguarda la conoscenza della dinamica dell'onda che si propaga sul piano inclinato in condizione di moto laminare.

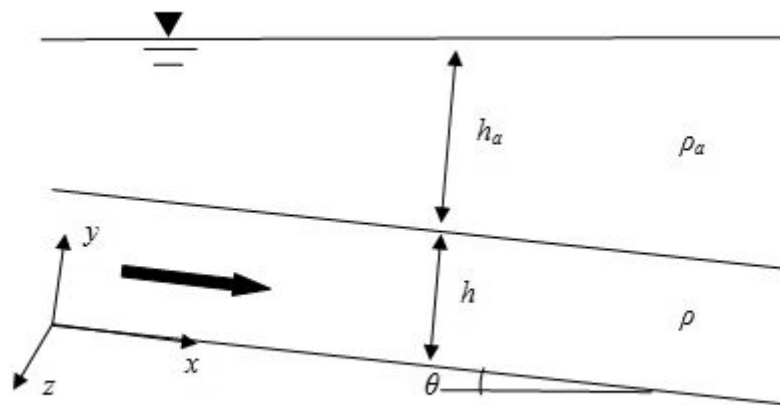


Figura 3.1: schema del moto laminare in alveo di larghezza indefinita.

3.3 REOLOGIA

Oltre alle ipotesi sopra elencate, si suppone anche che il fluido sia newtoniano e con moto prevalentemente laminare. Un fluido caratterizzato da questa reologia ha una viscosità definita che non varia al cambiare dello stato di sforzo applicato al fluido stesso. Matematicamente, questi fluidi presentano un legame di proporzionalità diretta tra il tensore degli sforzi viscosi e il tensore delle velocità di deformazione; la costante di proporzionalità è detta appunto viscosità.

Il comportamento di un fluido newtoniano viscoso laminare è descritto dalla seguente equazione:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{3.1}$$

dove:

τ è lo sforzo di deformazione esercitato dal fluido;

μ è la viscosità del fluido;
 du/dy è il gradiente di velocità perpendicolare alla direzione della deformazione.

Nelle applicazioni analitiche e numeriche della fluidodinamica, il fatto di lavorare con fluidi newtoniani permette di semplificare notevolmente le equazioni di Navier-Stokes che descrivono il campo di moto di quel tipo di fluido.

Di seguito viene illustrata una soluzione analitica basata, come sopra affermato, sulla teoria della perturbazione, che, adottando l'equazione delle acque basse in forma semplificata, permette di identificare, in condizione di moto vario, la dinamica di una corrente di densità laminare, monofase e omogenea. I passaggi matematici che conducono alle soluzioni di seguito illustrate sono riportati in forma dettagliata in **Appendice** (pagina 103).

3.4 SULLA VELOCITÀ E LA PRESSIONE IN UNA CORRENTE DI DENSITÀ SOMMERSA LAMINARE E VISCOSA

Al fine di determinare come variano, lungo la verticale, la pressione e la velocità all'interno della corrente di densità, si adottano le ipotesi di fluido newtoniano, stazionario, uniforme e laminare, il cui moto bidimensionale 2D nella verticale è rappresentato delle equazioni di Navier-Stokes e dall'equazione di continuità:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad 3.2$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad 3.3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 3.4$$

in cui:

u e v sono le componenti della velocità rispettivamente nella direzione x e y ;
 t è il tempo;
 ρ è la densità della corrente di torbidità;
 p è la pressione;
 μ è la viscosità dinamica;
 θ è la pendenza del canale, considerata costante.

Dato che per il moto stazionario e uniforme u e p variano unicamente lungo la coordinata y mentre la componente v della velocità è nulla, le equazioni (3.2), (3.3) e (3.4) assumono la seguente forma:

$$\rho g \sin \theta + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad 3.5$$

$$-\frac{dp}{dy} - \rho g \cos \theta = 0 \quad 3.6$$

Per integrare le equazioni (3.5) e (3.6) sono necessarie le seguenti condizioni al contorno:

$$u(y = 0) = 0 \quad 3.7$$

$$p(y = h) = \rho_a g h_a \cos \theta \quad 3.8$$

dove ρ_a e h_a sono rispettivamente la densità e lo spessore del fluido che costituisce l'ambiente all'interno del quale scorre la corrente di torbidità.

$$\frac{du(y = h)}{dy} = 0 \quad 3.9$$

Dall'integrazione delle equazioni (3.5) e (3.6) si ottengono le seguenti relazioni:

$$u = \frac{g}{2\nu} \sin \theta [2hy - y^2] \quad 3.10$$

$$p = \rho g \cos \theta (h - y) + \rho_a g h_a \cos \theta \quad 3.11$$

Dall'equazione (3.10) si ricava la portata per unità di profondità:

$$q = \int_0^h u \, dy = \frac{gh^3}{3\nu} \sin \theta \quad 3.12$$

e di conseguenza la velocità media del flusso:

$$U_0 = \frac{q}{h} = \frac{gh^2}{3\nu} \sin \theta \quad 3.13$$

3.5 MOTO VARIO GRADUALMENTE VARIATO PER UN FLUIDO VISCOSO

Per un fluido newtoniano incomprimibile che si muove con moto stazionario e gradualmente variato lungo un piano inclinato, le equazioni del moto assumono la seguente forma:

- Equazione di continuità della miscela.

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad 3.14$$

- Equazione della quantità di moto.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad 3.15$$

Tenendo conto della (3.11) e applicando la relazione geometrica:

$$\frac{\partial h_a}{\partial x} = \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \quad 3.16$$

l'equazione (3.15) assume la seguente forma:

$$-g' \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + g' \sin \theta - 3\nu \frac{U}{h^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad 3.17$$

dove g' è la gravità ridotta definita dall'espressione:

$$g' = g \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho_a} \right)$$

Osservando le equazioni del moto (3.14) e (3.17) si nota che l'influenza dello strato soprastante di acqua si manifesta riducendo la forza di gravità effettiva di un fattore $(\rho - \rho_a)/\rho$.

3.6 TEORIA DELLA PERTURBAZIONE

Come sopra menzionato, la soluzione analitica delle equazioni del moto (3.14) e (3.17) si fonda sulla teoria della perturbazione, la quale si basa sulla ricerca di una *soluzione asintotica* al problema sfruttando il concetto di *espansione asintotica di una funzione* $f(x, \varepsilon)$ incognita, dipendente da x ed ε .

Nella fisica matematica si ha a che fare con *perturbazioni regolari* quando la soluzione del problema varia con continuità al variare del parametro ε . Mentre si parla di *perturbazioni singolari* quando l'annullarsi del parametro ε comporta una modifica della natura stessa delle equazioni, andando in genere a moltiplicare i termini dove sono presenti le derivate di ordine massimo che vengono così a scomparire dal quadro delle equazioni. In questi casi non esisterà un'unica espansione asintotica valida nell'intero dominio ma più espansioni, ognuna valida in una sottoregione dell'intero dominio.

Dal punto di vista matematico si assume l'esistenza di una regione "sottile" del dominio d'integrazione dove la soluzione del problema originale varia rapidamente per consentire di soddisfare la condizione al contorno imposta, mentre al di fuori di tale zona le variazioni della soluzione risultano minime.

La soluzione del problema originale è vista come la combinazione di due soluzioni. La soluzione valida fuori dal fronte, definita come zona *esterna*, coincide con la soluzione ottenibile per valore nullo del parametro ε e, nel caso in esame, corrisponde all'approssimazione dell'onda cinematica; mentre la soluzione valida nella zona interna al fronte è ottenuta semplificando l'equazione iniziale per tenere conto solo degli elementi di uguale ordine di grandezza che definiscono il comportamento della soluzione in tale zona, nel caso in studio tale semplificazione corrisponde al metodo diffusivo.

Ricavate le equazioni valide nei rispettivi sottodomini per i problemi interno ed esterno, e trovate le rispettive approssimazioni asintotiche, resta infine da studiare il problema della ricerca delle condizioni di raccordo tra le due soluzioni. Infatti, dovrà esistere una zona d'interfaccia, di sovrapposizione, dove si presuppone che valgano entrambe le soluzioni, in modo tale da passare in forma continua da una soluzione all'altra. Il raccordo viene sostanzialmente impostato in modo tale da richiedere che le soluzioni asintotiche presentino la stessa struttura funzionale nella zona di sovrapposizione.

La complessità nel modo di procedere viene compensata dall'indubbio vantaggio di semplificare l'equazione di partenza puntando a determinare la soluzione globale del sistema di equazioni differenziali mediante una soluzione quasi esatta in forma analitica.

3.7 SOLUZIONE ANALITICA BASATA SULLA TEORIA DELLA PERTURBAZIONE

La dinamica delle correnti di torbidità può essere separata, per quanto scritto nel paragrafo precedente, in due regioni: una regione chiamata "esterna" che rappresenta sostanzialmente il corpo dell'onda e una regione "interna" che tratta il fronte dell'onda. Si veda Figura 3.2.

Viene ipotizzato un punto sorgente che genera la perturbazione che si propaga verso valle; tale sorgente può essere concettualizzata come la massa fluida invasata che viene liberata tramite un rilascio istantaneo. La soluzione che verrà di seguito illustrata è ovviamente valida

solo a partire da una certa distanza dalla sorgente, data l'ipotesi di moto gradualmente variato. La distribuzione iniziale della massa ha scarsa influenza sulla dinamica verso valle della perturbazione, come ampiamente riportato in letteratura (Imram *et al.*[27]; Huang e García [24]).

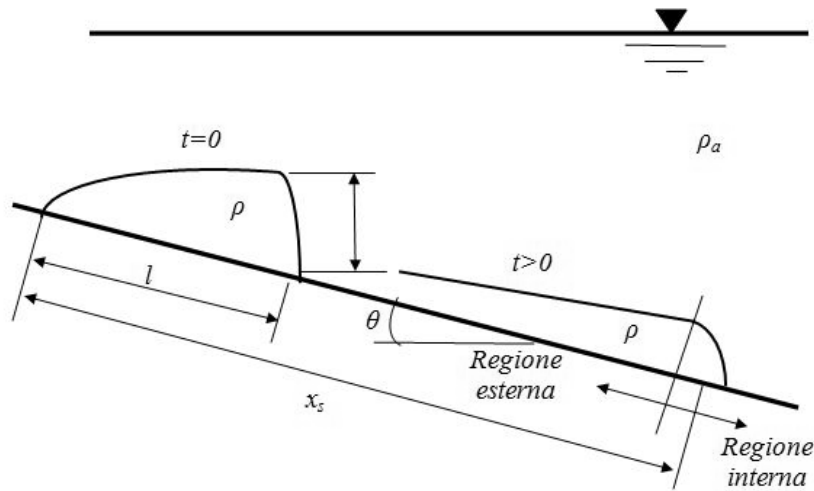


Figura 3.2: dinamica di una corrente di torbidità e definizione delle sue grandezze.

3.7.1 Soluzione esterna

In linea con la teoria della perturbazione, si ricorre all'adimensionalizzazione delle variabili dipendenti delle equazioni delle acque basse applicate per il moto viscoso, newtoniano, omogeneo e laminare per una lunghezza l in cui viene valutata una variazione significativa della perturbazione delle variabili di riferimento:

$$(h^*, U^*, x^*, t^*, \varepsilon, Fr) = \left(\frac{h}{h_0}, \frac{U}{U_0}, \frac{x}{l}, \frac{tU_0}{l}, \frac{h_0}{l}, \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} \right)$$

Come sopra menzionato, l è una lunghezza caratteristica per la quale vi è una variazione significativa, h_0 , dello spessore della corrente h ; mentre Fr è il numero di Froude; ε corrisponde alla ripidità dell'onda e deve sussistere la relazione: $\varepsilon \ll 1$. Si veda Figura 3.3.

Introducendo le variabili adimensionali nelle equazioni (3.14) e (3.17) si ottengono le seguenti equazioni adimensionalizzate:

$$\frac{\partial(U^*h^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \tag{3.18}$$

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) - \frac{U^*}{h^{*2}} \right] \sin \theta = \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \cos \theta + Fr^2 \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right) \right] \quad 3.19$$

Nell'ipotesi che ε sia piccolo (tendente a zero) e θ sufficientemente grande così che $\varepsilon/\sin\theta \ll 1$, allora l'equazione (3.19) si riduce all'approssimazione dell'onda cinematica:

$$U^* = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h^{*2} \quad 3.20$$

Quest'approssimazione sottintende che nella regione esterna lontano dal fronte dell'onda sia possibile trascurare, oltre ai termini inerziali, anche il termine $\partial h^*/\partial x^*$ (cioè la variazione spaziale della pressione) poiché molto più piccolo della pendenza del fondo θ ; ciò implica che la pendenza θ , come sopra accennato, deve essere sufficientemente elevata da permettere questa semplificazione.

Per quanto riguarda i termini inerziali (poiché dipendono dal gradiente spaziale e temporale della velocità con cui si propaga la perturbazione), se la variazione della velocità dell'onda è molto elevata, il loro valore cresce e potrebbe non essere più trascurabile.

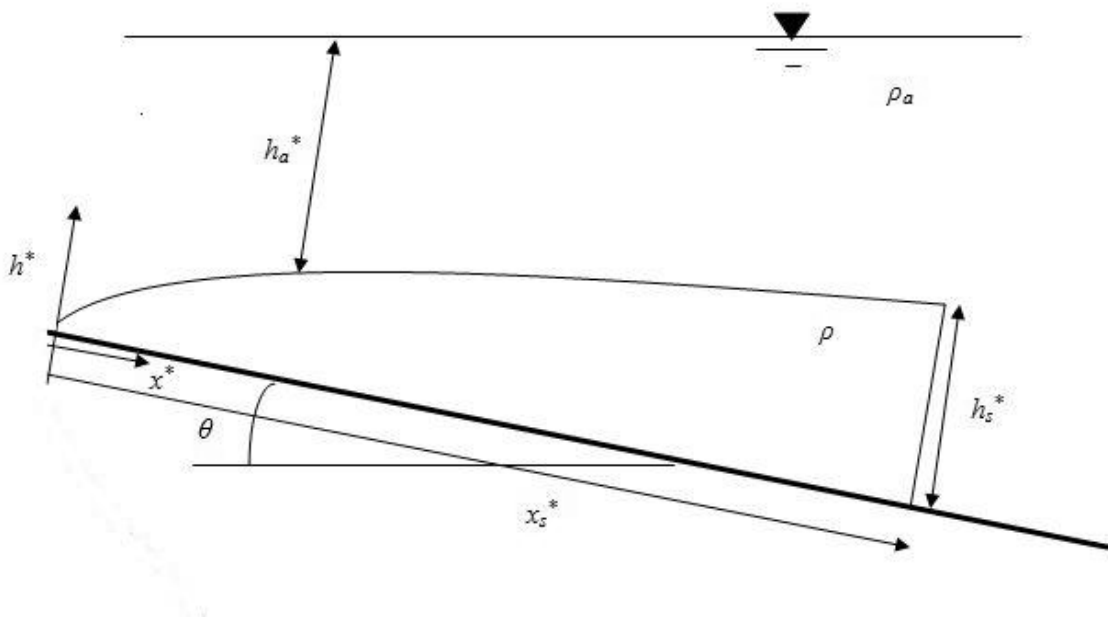


Figura 3.3: schematizzazione delle grandezze coinvolte nella soluzione esterna di una corrente di torbidità.

Sostituendo la (3.20) nell'equazione di continuità della massa (3.18) si ottiene:

$$3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad 3.21$$

Valendo la relazione:

$$\frac{dh^*}{dt^*} = \frac{dx^*}{dt^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*}$$

la (3.21) può essere riscritta come un sistema di due equazioni differenziali ordinarie dalle quali è possibile ricavare le curve caratteristiche nel piano (x^*, t^*) :

$$\begin{cases} \frac{dh^*}{dt^*} = 0 \\ \frac{dx^*}{dt^*} = 3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*2} \end{cases} \quad 3.22$$

La prima equazione del sistema (3.22) afferma che h^* è costante lungo ogni curva caratteristica, mentre la seconda dimostra che le linee caratteristiche sono rette con una pendenza (celerità della perturbazione) che dipende dal valore di h^{*2} e dal rapporto delle masse specifiche.

Se la corrente è originata da un punto sorgente $x^*=t^*=0$, allora tutte le curve caratteristiche con il valore di h^* non nullo passeranno attraverso l'origine dell'ipotetico piano (x^*, t^*) .

Integrando la seconda equazione del sistema (3.22) si ricava l'equazione del profilo della soluzione esterna:

$$h^* = \sqrt{\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \quad 3.23$$

La posizione del fronte d'onda x_s^* è fissata, in ogni istante, dalla conservazione della massa in un piano verticale orientato nella direzione del moto. Vale quindi la seguente relazione:

$$A^* = \int_0^{x_s^*} h^* dx^* \quad 3.24$$

in cui A^* è l'area iniziale occupata dalla massa, adimensionalizzata: $A^* = A/lh_0$.

Sostituendo l'equazione (3.23) nella (3.24) e integrando si ottiene la relazione che fissa la posizione del fronte d'onda in funzione del tempo:

$$x_s^* = \frac{3A^{*2/3} t^{*1/3}}{2^{2/3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{1/3} \quad 3.25$$

Si ricavano, di conseguenza, due relazioni alternative per l'altezza del fronte d'onda a partire dall'equazione (3.23) e dalla (3.25):

$$h_s^* = \sqrt{\frac{x_s^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \quad 3.26$$

$$h_s^* = \frac{3A^*}{2x_s^*} \quad 3.27$$

Eliminando t^* e A^* dalle equazioni (3.23), (3.25) e (3.27) si ottiene:

$$\frac{h_s^*}{h^*} = \sqrt{\frac{x_s^*}{x^*}} \quad 3.28$$

Infine, differenziando la (3.25) e facendo ricorso alla (3.26) si ricava la velocità con cui si propaga il fronte d'onda:

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h_s^{*2} \quad 3.29$$

Poiché le grandezze h_0 e l sono state definite con il solo scopo di permettere l'applicazione della teoria della perturbazione, le equazioni vengono riscritte nei termini delle variabili dipendenti delle equazioni di partenza.

L'equazione (3.23) che descrive il profilo dell'onda esterna, dimensionalizzata diventa:

$$h = \sqrt{\frac{x}{t} \frac{v}{g \sin \theta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \quad 3.30$$

L'equazione (3.25) che definisce la posizione del fronte d'onda, diventa:

$$x_s = \left(\frac{3A}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{gt}{v} \sin \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)\right)^{1/3} \quad 3.31$$

L'equazione (3.27) che esprima l'altezza dell'onda in corrispondenza del fronte d'onda, assume la seguente forma:

$$h_s = \frac{3 A}{2 x_s} \quad 3.32$$

L'equazione (3.28), diventa:

$$\frac{h_s}{h} = \sqrt{\frac{x_s}{x}} \quad 3.33$$

Mentre l'equazione (3.29) della velocità di propagazione del fronte d'onda si può esprimere come:

$$\frac{dx_s}{dt} = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h_s^2 \frac{g \sin \theta}{3\nu} \quad 3.34$$

Nel Grafico 3.1 e Grafico 3.2 sono riportate, per fluidi con diverse viscosità, la distanza raggiunta dal fronte d'onda in diversi istanti temporali e la sua relazione con la celerità della perturbazione. Le curve presentate sono state ricavate mediante le relazioni (3.31), (3.32) e (3.34) ipotizzando lo scorrimento di fluidi con determinate caratteristiche e con volume iniziale di massa pari a 0.05 m³/m. La massa fluida si propaga su un piano inclinato di 10° immerso in un serbatoio colmo d'acqua in quiete. Si noti che la velocità di propagazione della perturbazione, come ovvio, diminuisce significativamente all'aumentare della viscosità cinematica; inoltre la celerità dell'onda non è costante, bensì diminuisce progressivamente man mano che si propaga verso valle.

Nel caso del fluido con viscosità cinematica $\nu_1=0.155$ m²/s, le figure mostrano come a una distanza prefissata, ad esempio $x_1= 3$ m, la miscela non raggiunge, in una scala temporale compatibile con il grafico, il punto di riferimento x_1 (è probabile che la miscela si fermi prima), mentre per un fluido con viscosità un ordine di grandezza inferiore, $\nu_2=0.01$ m²/s, il fronte d'onda impiega circa 130 secondi, e per un fluido con viscosità di due ordini di grandezza inferiore rispetto a quello iniziale, $\nu_3=0.002$ m²/s, il fronte d'onda impiega circa 25 secondi. Vi è quindi una differenza di circa 100 secondi tra il tempo di arrivo del fronte dell'onda dei fluidi con viscosità ν_2 e ν_3 rispetto a un punto posto a 3 m dalla sorgente. Questo divario temporale aumenta al crescere della distanza dall'origine, come si può notare dal Grafico 3.1.

Calcolando le celerità con cui l'onda transita per il punto di osservazione scelto ($x_1= 3$ m), si trova che il fluido con viscosità $\nu_2=0.01$ m²/s ha una velocità di circa 0.01 m/s, mentre per il fluido con viscosità $\nu_3=0.002$ m²/s è di circa 0.05 m/s. Il divario esistente tra le velocità di propagazione in funzione delle viscosità tende a diminuire all'aumentare della distanza;

questo è dovuto chiaramente al rallentamento della massa fluida e all'abbattimento dell'altezza del fronte.

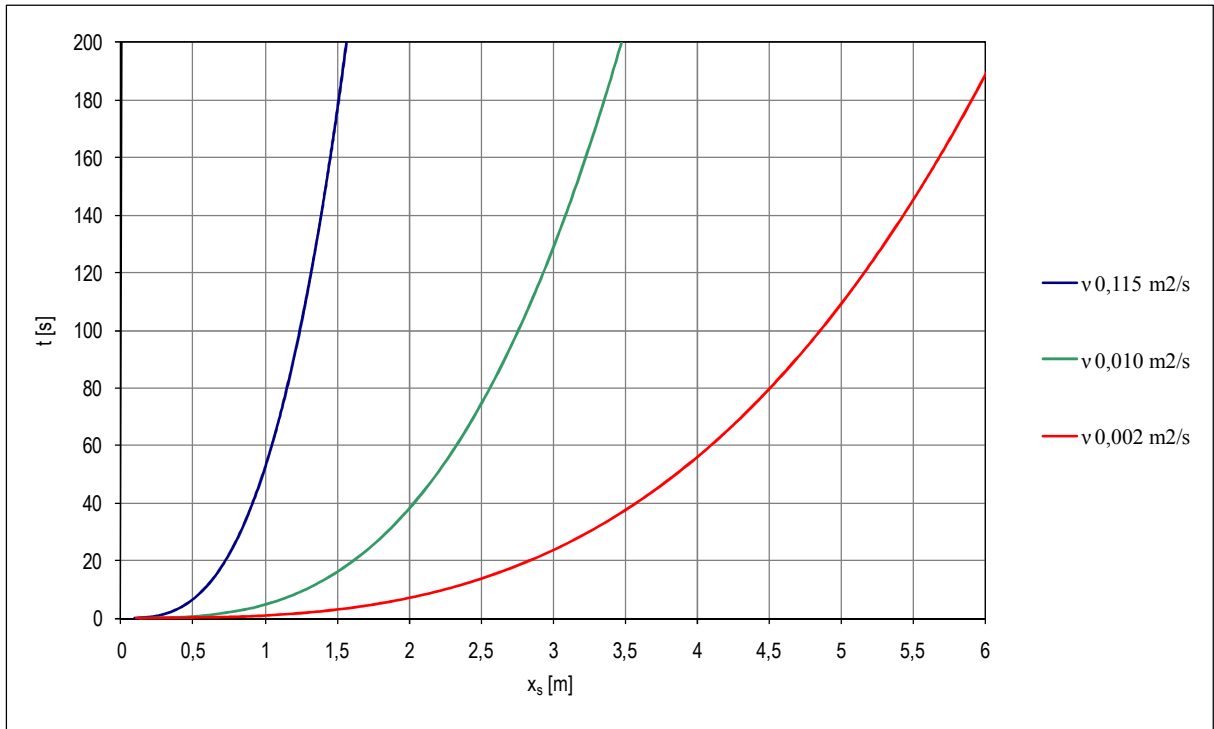


Grafico 3.1: distanza raggiunta dal fronte d'onda a diversi istanti temporali al variare della viscosità cinematica.

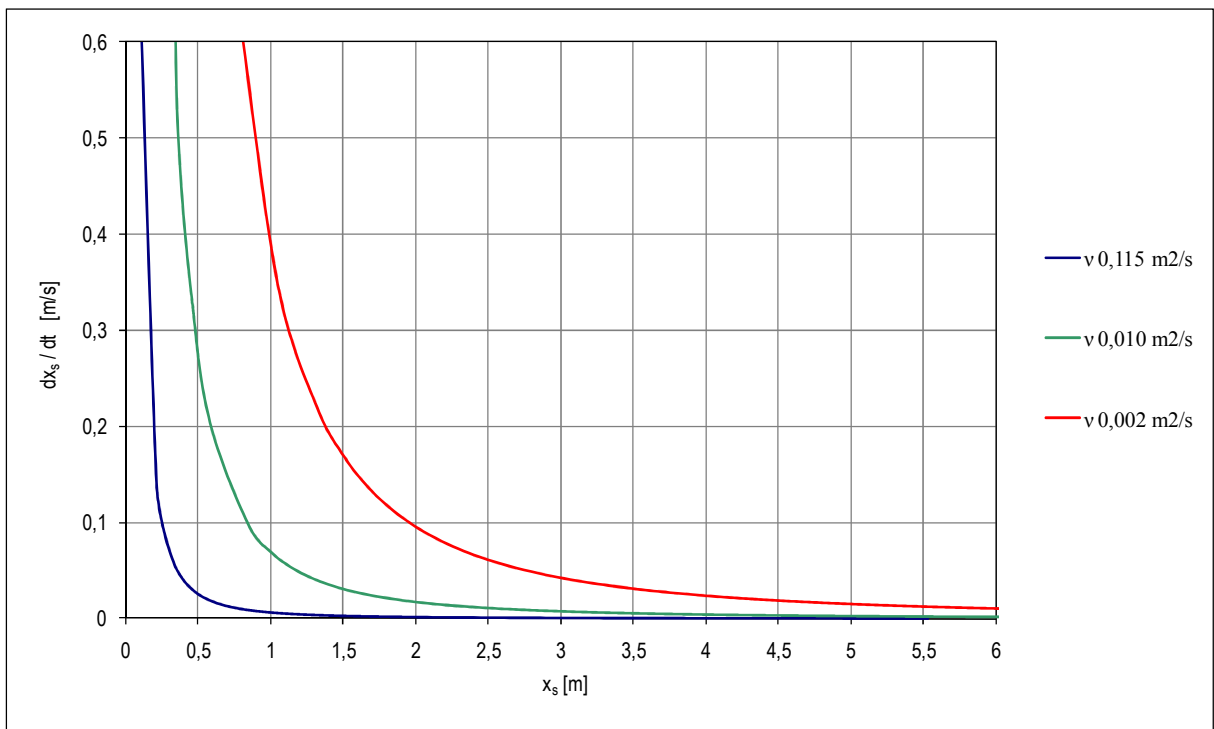


Grafico 3.2: relazione fra l'ascissa x_s raggiunta dal fronte d'onda e la velocità di propagazione al variare della viscosità cinematica.

3.7.2 Soluzione interna

Come accennato in precedenza, la soluzione esterna, che considera implicitamente l'approssimazione cinematica della corrente, è valida lungo il corpo dell'onda eccetto che in prossimità del fronte, dove il gradiente $\partial h^*/\partial x^*$ non è più trascurabile e le ipotesi alla base dell'adimensionalizzazione e delle semplificazioni adottate per le equazioni (3.18) e (3.19) non sono rigorosamente legittime.

Per correggere il profilo dell'onda in prossimità del fronte, dove la natura cinematica del fenomeno perde significato, si procede a ricalcolare il profilo longitudinale considerando il gradiente di pressione, cioè si ricorre a un approccio di natura diffusiva chiamato soluzione interna.

Per trovare una soluzione valida vicino al fronte sarà quindi necessario introdurre le seguenti variabili interne, tra le quali ζ^* ha lo scopo specifico di riscalarare spazialmente il sistema di riferimento in prossimità del fronte:

$$(H^*, V^*, \xi^*, T^*) = \left(h^*, U^*, \frac{x^* - x_s^*(t^*)}{\varepsilon}, t^* \right)$$

Si veda per maggior chiarezza lo schema presentato in Figura 3.4.

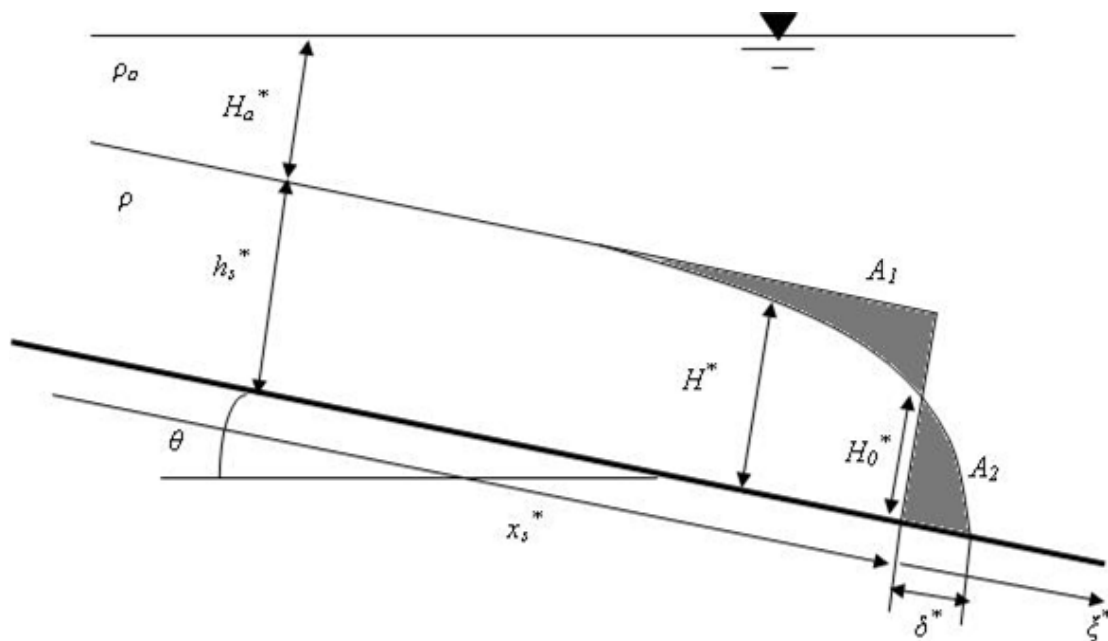


Figura 3.4: schema delle grandezze coinvolte nella soluzione interna di una corrente di torbidità.

Procedendo con l'adimensionalizzazione delle equazioni del moto (3.14) e (3.17) facendo uso delle nuove variabili sopra elencate, si ottengono le seguenti relazioni, rispettivamente per la continuità della massa e per la conservazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) + \varepsilon \frac{\partial H^*}{\partial T^*} = 0 \quad 3.35$$

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) - \frac{V^*}{H^{*2}} \right] \sin \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \cos \theta + Fr^2 \left[V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} + \varepsilon Fr^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \quad 3.36$$

Assumendo nell'equazione (3.35) che $\varepsilon \rightarrow 0$ (si trascura la variazione dello spessore della corrente nel tempo rispetto agli altri termini) si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) = 0$$

ed integrando si ottiene:

$$H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) = C \quad 3.37$$

Assumendo come condizione al contorno che il profilo del flusso si annulla in corrispondenza del fronte, si trova il valore della costante d'integrazione C ; infatti: per $x^* = x_s^* + \delta^*$ si ha $H^* = 0$ e quindi $C = 0$.

Di conseguenza la velocità del fluido per $x^* \neq x_s^* + \delta^*$ e $H^* \neq 0$ si può esprimere come:

$$V^* = \frac{dx_s^*}{dt^*} \quad 3.38$$

L'equazione (3.38) afferma che vicino al fronte le velocità variano nel tempo ma non lungo la verticale y . Richiamando l'equazione (3.29) si può concludere che la velocità del fronte per la soluzione interna è la medesima di quella trovata per la soluzione esterna:

$$V^* = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h_s^{*2} \quad 3.39$$

Sostituendo le equazioni (3.38) e (3.39), nell'equazione di conservazione della quantità di moto (3.36) si ottiene:

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) - \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \sin \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \cos \theta + Fr^2 \left[\frac{dx_s^*}{dt^*} - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} + \varepsilon Fr^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \quad 3.40$$

La (3.40), con le dovute semplificazioni e calcolando il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si riduce a un'equazione differenziale che descrive il profilo assunto dalla superficie libera vicino al fronte d'onda:

$$\left[1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}}\right] \tan \theta = \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \quad 3.41$$

Si noti che nella (3.41) non appaiono i termini inerziali ma, al contrario della soluzione esterna, è contenuto il gradiente di pressione così come previsto dal modello diffusivo.

Integrando la (3.41) e adottando la condizione $\zeta^* = 0$ dove $H^* = H_0^*$, come mostrato in Figura 3.4, si ottiene:

$$\xi^* \tan \theta = H^* - H_0^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* - H^*}{h_s^* + H^*} \frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}} \quad 3.42$$

Per il calcolo del parametro incognito H_0^* s'impone l'uguaglianza tra le aree A_1 e A_2 illustrate in Figura 3.4. Questa condizione di conservazione della massa può essere scritta nella seguente forma matematica:

$$\int_{-\infty}^0 (h_s^* - H^*) d\xi^* = \int_0^{\delta^*} H^* d\xi^* \quad 3.43$$

Dall'equazione (3.41) si ricava agilmente la seguente relazione:

$$d\xi^* = \frac{dH^*}{\left[1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}}\right] \tan \theta} \quad 3.44$$

che permette di effettuare un cambio di variabile nella relazione (3.43), che diventa:

$$\int_{h_s^*}^{H_0^*} \frac{(h_s^* - H^*)}{\left(1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}}\right) \tan \theta} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*}{\left(1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}}\right) \tan \theta} dH^* \quad 3.45$$

Svolgendo l'integrazione della (3.45) e modificando algebricamente il risultato si ottiene infine la seguente espressione, in forma implicita, di H_0^* :

$$-H_0^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}} = (\ln(4) - 1) \frac{h_s^*}{2} \quad 3.46$$

Il parametro H_0^* può essere eliminato dalla (3.42) sostituendovi la (3.46) così da ottenere la seguente forma finale:

$$\xi^* \tan \theta = H^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* - H^*}{h_s^* + H^*}} + (\ln(4) - 1) \frac{h_s^*}{2} \quad 3.47$$

Procedendo con la dimensionalizzazione, la (3.47) diventa:

$$\xi \tan \theta = H + h_s \ln \sqrt{\frac{h_s - H}{h_s + H}} + (\ln(4) - 1) \frac{h_s}{2} \quad 3.48$$

in cui $\zeta = x - x_s$.

Fissato quindi un istante di tempo t , si ricava x_s e h_s tramite le equazioni (3.30) e (3.32) e ricorrendo all'equazione (3.48) si determina il profilo dell'onda interna $H^*(x)$.

Tutti i passaggi descritti sono riportati in forma dettagliata nell'**Appendice** a pagina 103.

3.7.3 Soluzione completa

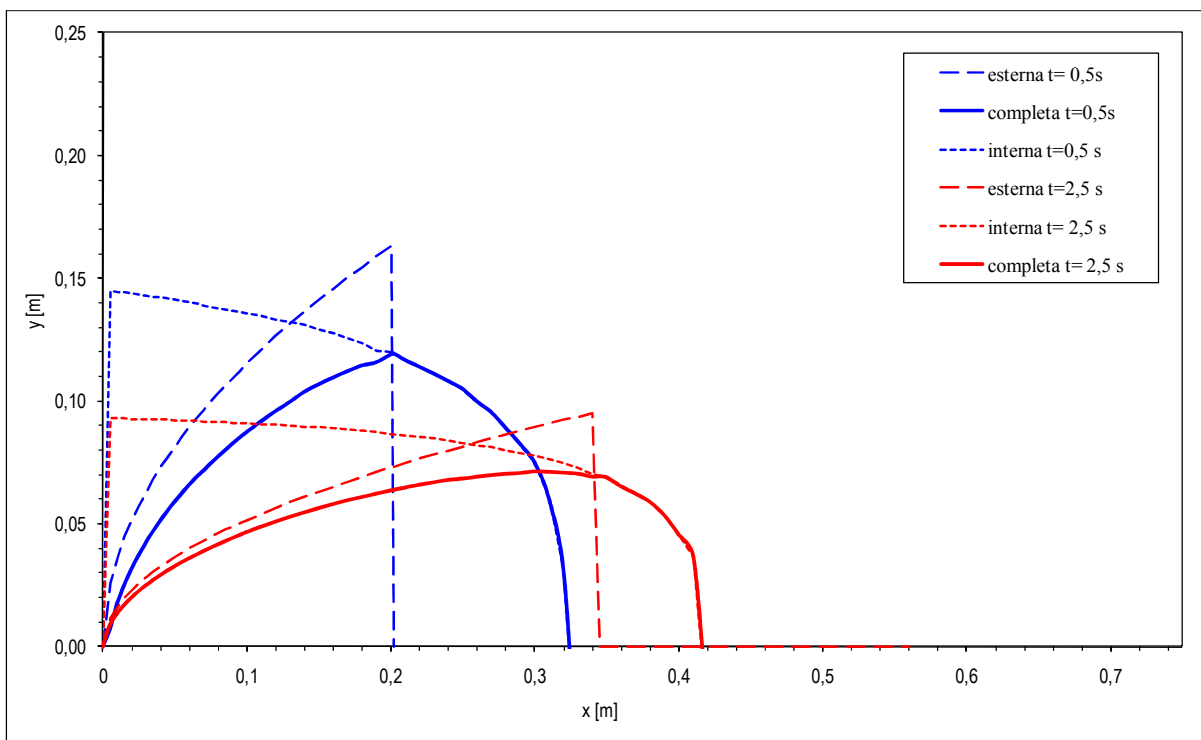


Grafico 3.3: soluzioni esterne, interne e complete per due istanti temporali.

Poiché la soluzione approssimata con l'onda cinematica nella regione esterna sovrastima lo spessore raggiunto dalla corrente vicino al fronte dell'onda; la soluzione completa può essere ottenuta tramite la seguente relazione:

$$h_c = \begin{cases} h + H - h_s & x \leq x_s \\ H & x > x_s \end{cases} \quad 3.49$$

Nel Grafico 3.3 è riportata, a titolo di esempio, la soluzione completa ricavata tramite la relazione (3.49) a partire dalle soluzioni esterne e interne per due istanti temporali differenti.

Sebbene il modello sia scritto per una corrente di torbidità originata da una sorgente puntuale, la distribuzione iniziale della massa ha un effetto trascurabile sulla propagazione dell'onda dopo che il fronte della perturbazione ha percorso una certa distanza verso valle (Huang e García [23]).

3.8 RISULTATI DI ALCUNE SIMULAZIONI CONDOTTE CON LA SOLUZIONE ANALITICA E CONFRONTI CON I RISULTATI NUMERICI PRESENTI IN LETTERATURA

Al fine di validare la soluzione analitica proposta nei paragrafi precedenti, sono state condotte delle simulazioni mediante l'implementazione di tale soluzione in un foglio di calcolo. I dati di partenza con cui sono state eseguite le simulazioni, riportati nelle tabelle delle prossime pagine, sono stati estrapolati da articoli scientifici presenti in letteratura nei quali vari autori hanno esposto i loro studi riguardanti una corrente di torbidità che si propaga all'interno di una massa d'acqua in quiete ed hanno presentato dei modelli numerici che mirano a riprodurre tale fenomeno. I risultati ottenuti dall'implementazione della soluzione analitica, per vari istanti temporali, sono di seguito illustrati e vengono confrontati con le soluzioni ottenute dai modelli numerici proposti dai vari autori. Dal raffronto si evidenziano le discrepanze tra le soluzioni derivanti da modelli di natura differente e che si basano su ipotesi diverse.

1. *Jiang L., LeBlond P.H. (1993) [29].*

I risultati ottenuti tramite la soluzione analitica, a partire dai dati scritti in Tabella 3.1, sono riportati nel Grafico 3.4 e nel Grafico 3.5. Nelle figure proposte viene messo in evidenza l'andamento longitudinale del profilo dell'onda lungo il piano di scorrimento, per diversi istanti temporali e, nel Grafico 3.5, esso viene confrontato con la soluzione numerica proposta dagli autori in [29] per un fluido di natura viscosa.

Nel Grafico 3.4, come sopra menzionato, è riportato l'andamento del profilo longitudinale dell'onda ricostruito con la soluzione analitica per diversi istanti temporali. I risultati mostrano come il fronte dell'onda inizia ad appiattirsi mentre la coda dell'onda tende ad avvicinarsi al fondo restando "incernierata" all'origine. La velocità del fronte diminuisce man mano che l'onda si propaga verso valle. Il volume sorgente si conserva nel tempo.

inclinazione	θ	4 °
pendenza	S	0.070
viscosità dinamica	μ	556.58 Pa·s
densità fluido circostante	ρ_a	1000 kg/m ³
densità miscela	ρ	2000 kg/m ³
viscosità cinematica	ν	0.2783 m ² /s
area iniziale	A	11282.63 m ³ /m

Tabella 3.1: dati per la simulazione estratti da Jiang *et al.* [29]

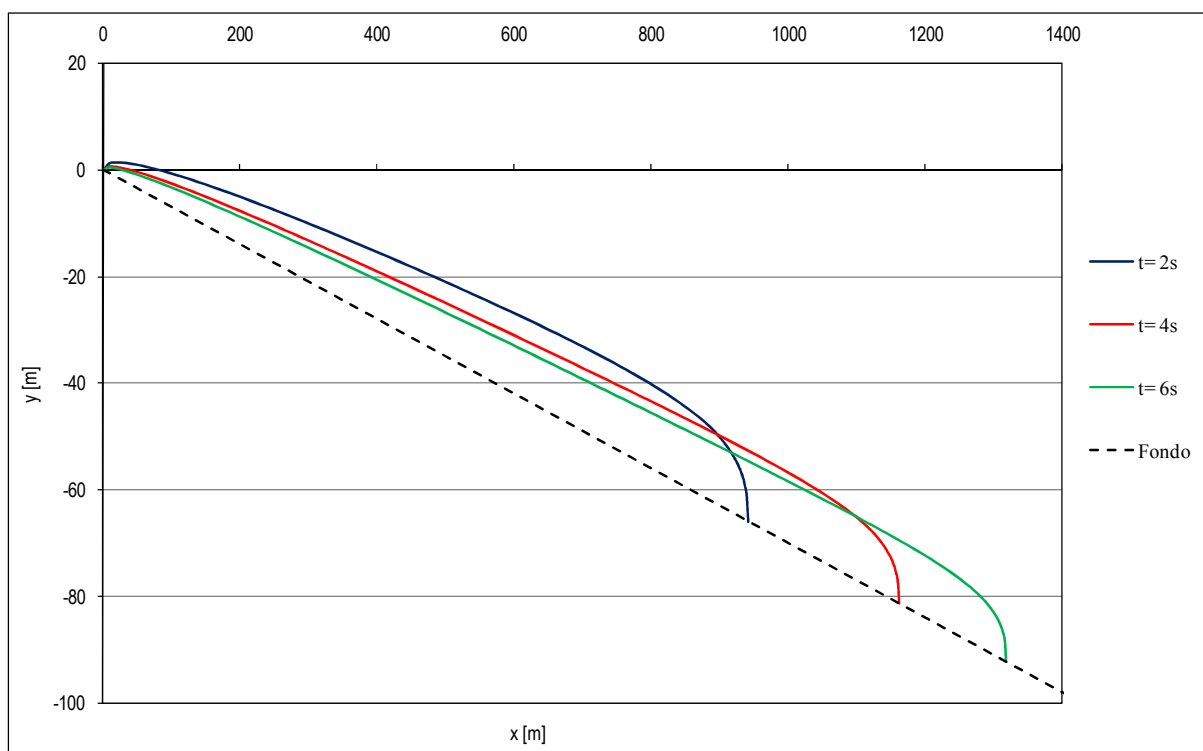


Grafico 3.4: propagazione della corrente di densità con i dati proposti da Jiang *et al.* [29] per gli istanti temporali: 2, 4 e 6 secondi.

Il Grafico 3.5 mostra come la soluzione analitica si discosti da quella numerica tanto più l'onda si propaga verso valle. Queste differenze sono imputabili al peso dei termini inerziali considerati nella soluzione numerica degli autori, [29], ma non in quella analitica; infatti, i

termini inerziali sono rilevanti nella dinamica del fenomeno, per il caso esaminato, dato che la pendenza del fondo è pari a 4° e quindi il piano di scorrimento è quasi orizzontale, condizione non rigorosamente compatibile con le ipotesi alla base della soluzione analitica proposta.

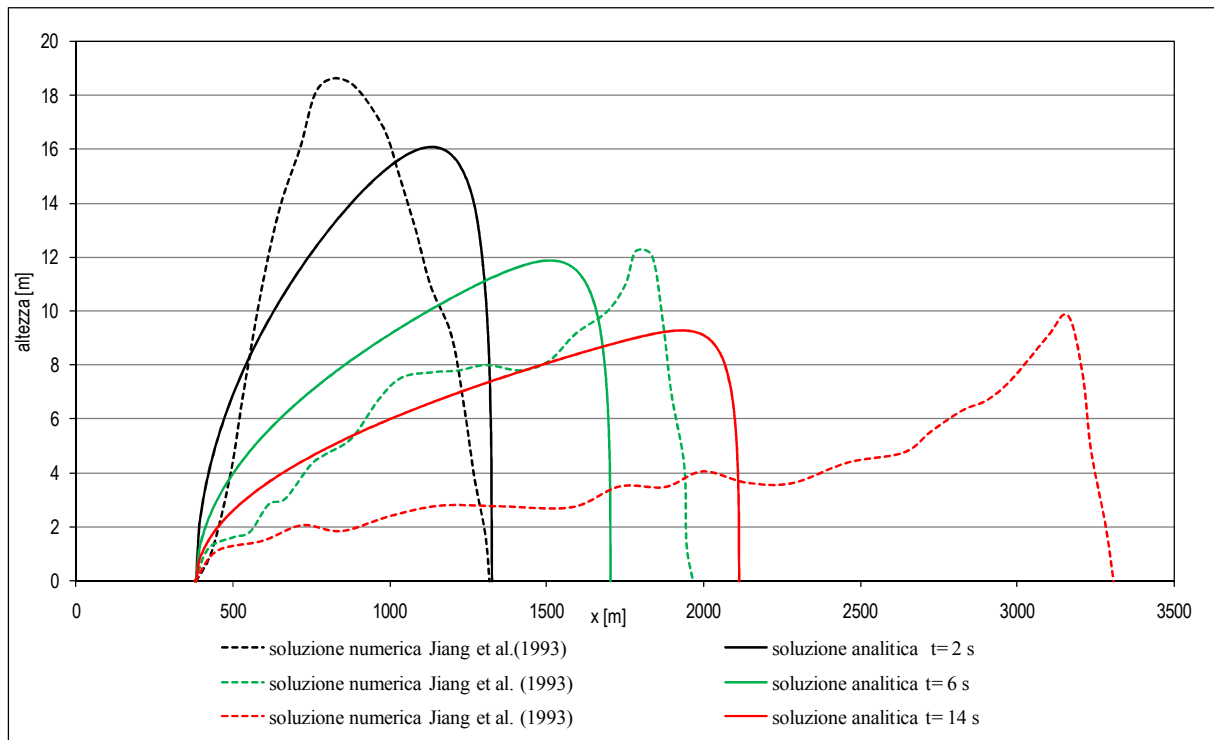


Grafico 3.5: simulazione numerica proposta da Jiang *et al.* [29] a confronto con la soluzione analitica per $t= 2s$, $t= 6s$ e $t=14 s$. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.

2. Huang X. & Garcia M. (1999) [24].

inclinazione	θ	2°
pendenza	S	0,035
viscosità dinamica	μ	10 kg/ms
densità fluido circostante	ρ_a	1000 kg/m ³
densità miscela	ρ	2000 kg/m ³
viscosità cinematica	ν	0,005 m ² /s
area iniziale	A	752,6 m ³ /m

Tabella 3.2: dati per la simulazione del modello presi da Huang X. & Garcia M. [24].

Anche per questa simulazione è stato condotto il confronto tra la soluzione analitica e quella numerica proposta in [24]. Diversamente dal caso precedente, la miscela è di natura

viscoplastica, tipo Bingham, ma è stata considerata nella soluzione analitica come una miscela newtoniana con la medesima viscosità indicata dagli autori.

Nel Grafico 3.6 si osserva l'andamento longitudinale del profilo dell'onda con le medesime caratteristiche della simulazione precedente: abbattimento del fronte, diminuzione della velocità di propagazione durante lo spostamento verso valle e appiattimento della coda.

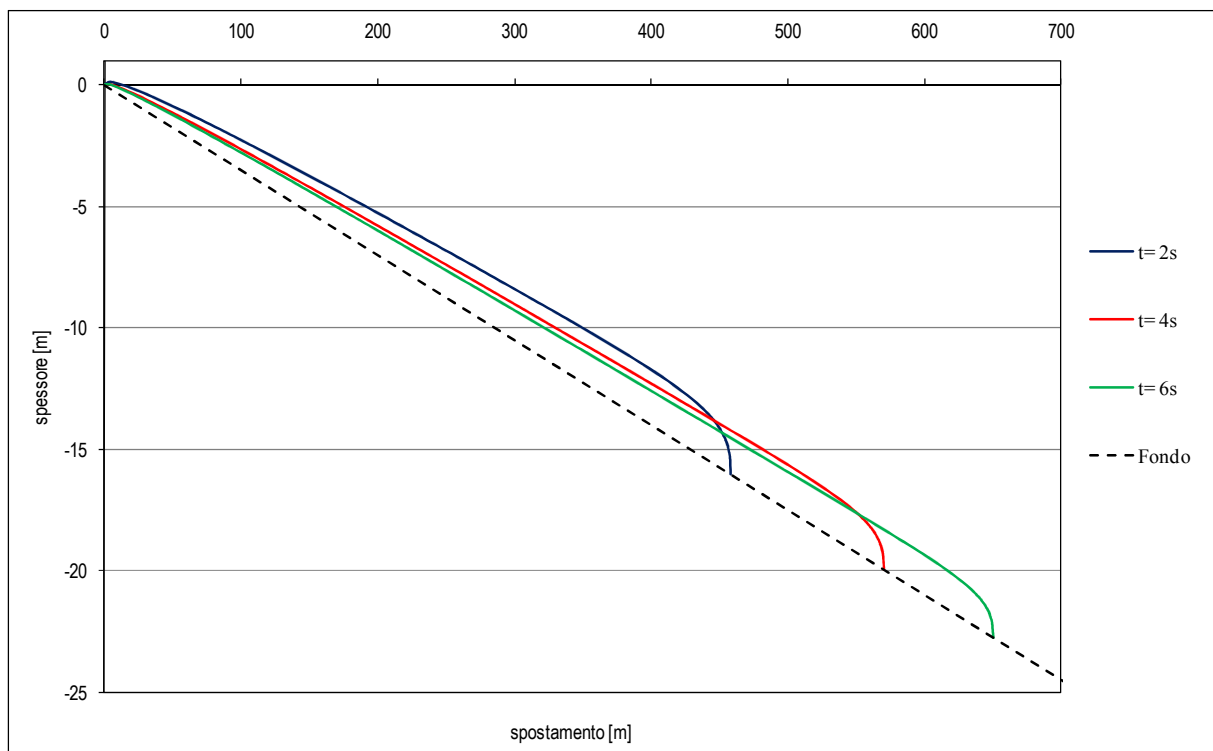


Grafico 3.6: simulazione propagazione della corrente di densità con i dati di Huang X. & Garcia M. [24] per gli istanti temporali: 2, 4 e 6 secondi.

Nel Grafico 3.7 è presentato il confronto, per diversi istanti, tra la soluzione analitica e i profili risultanti dal modello numerico proposto dagli autori in [24]; si può notare come la soluzione analitica si discosti da quella numerica ma, contrariamente alla simulazione precedente, fin dai primi istanti della simulazione.

La soluzione analitica, infatti, ricostruisce il profilo dell'onda con una velocità di propagazione superiore a quella numerica; questo è imputabile alla differente reologia della miscela, la quale è stata considerata, come già detto, di natura viscoplastica nelle simulazioni numeriche elaborate da Huang e García [24].

In questo caso, la natura reologica della miscela è predominante rispetto all'effetto della pendenza del fondo in relazione alla dinamica di propagazione dell'onda. Pertanto il motivo del discostamento delle soluzioni è sostanzialmente di natura reologica.

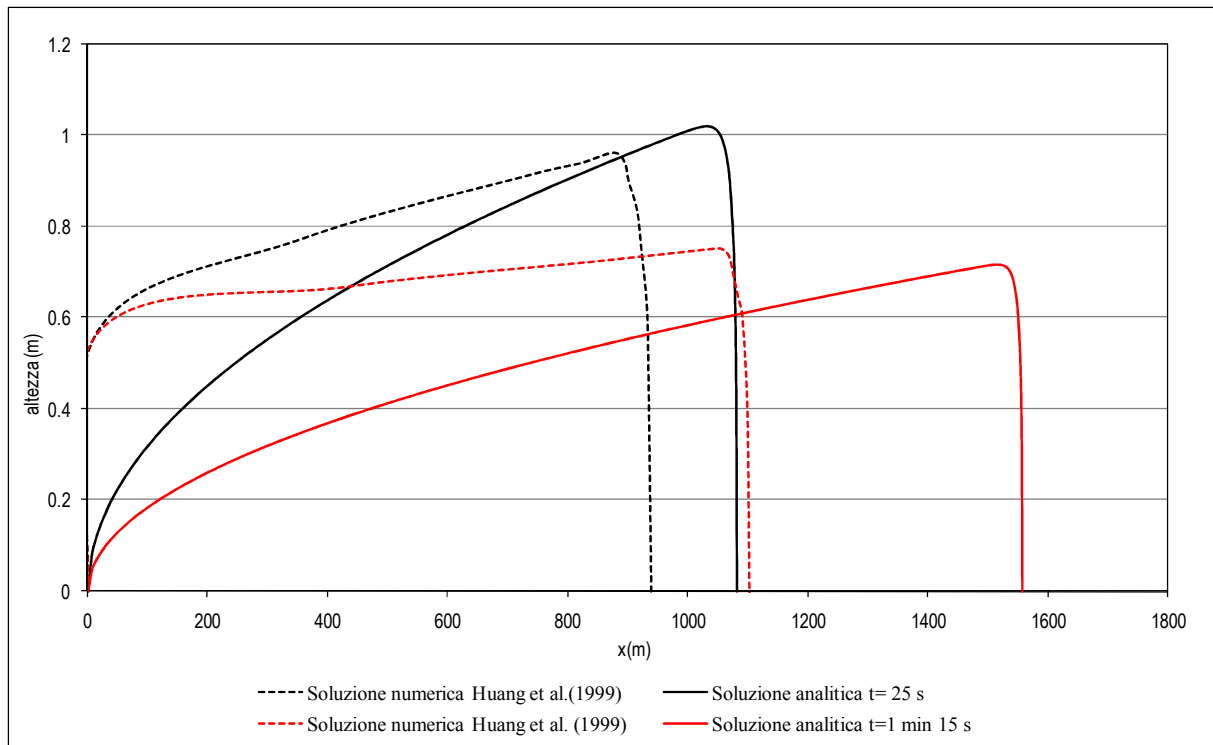


Grafico 3.7: simulazione numerica proposta da Huang X. & Garcia M. [24] a confronto con la soluzione analitica per $t= 25s$ e $t= 1\text{ min }15s$. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.

3. Imran J., Parker G., Locat J., Lee H. (2001) [27]

inclinazione	θ	2,862 °
pendenza	S	0,050
viscosità dinamica	μ	400 Pa·s
densità fluido circostante	ρ_a	1000 kg/m ³
densità miscela	ρ	1500 kg/m ³
viscosità cinematica	ν	0,2667 m ² /s
area iniziale	A	9600 m ³ /m

Tabella 3.3: dati per la simulazione del modello presi da Imran *et al.* [27].

Come per le precedenti, anche per questa simulazione si è condotto il confronto tra la soluzione analitica e quella numerica proposta in [27]. Come nel caso precedente la miscela è di natura viscoplastica non lineare, tipo Herschel-Bulkley, ma è stata considerata nella soluzione analitica come una miscela newtoniana con la medesima viscosità indicata dagli autori.

Nel Grafico 3.8 si osserva l'andamento longitudinale del profilo dell'onda con le medesime caratteristiche delle situazioni illustrate in precedenza: abbattimento del fronte, diminuzione

della velocità di propagazione durante lo spostamento verso valle e appiattimento della coda del corpo dell'onda.

Il confronto, illustrato nel Grafico 3.9, tra la soluzione analitica e quella numerica proposta da Imran *et al.* [27], mostra come i risultati delle due simulazioni si discostino ampiamente tra loro. È evidente come la velocità di propagazione della soluzione analitica sia molto superiore a quella numerica; questa differenza è imputabile, ancora una volta, alla natura reologica della miscela modellata in [27], la quale, come affermato dagli autori, è di natura viscoplastica non lineare (Herschel-Bulkley).

La soluzione analitica di carattere newtoniano e viscoso richiede necessariamente un incremento della viscosità cinematica e/o dinamica per riprodurre in forma migliore la dinamica del fenomeno e il profilo dell'onda ottenuto con la modellazione numerica. Infatti, nel Grafico 3.10, si mostra il confronto della soluzione analitica con quella numerica adottando una viscosità di circa un ordine di grandezza superiore a quella iniziale, quindi pari a $2.5 \text{ m}^2/\text{s}$.

L'incremento della viscosità rende la miscela newtoniana viscosa reologicamente confrontabile con la miscela viscoplastica, eccetto nel caso in cui la pendenza del fondo sia inferiore a quella imposta dallo sforzo critico τ_c , condizione per la quale il fluido viscoplastico rimarrà fermo mentre per il materiale viscoso vi sarà sempre movimento.

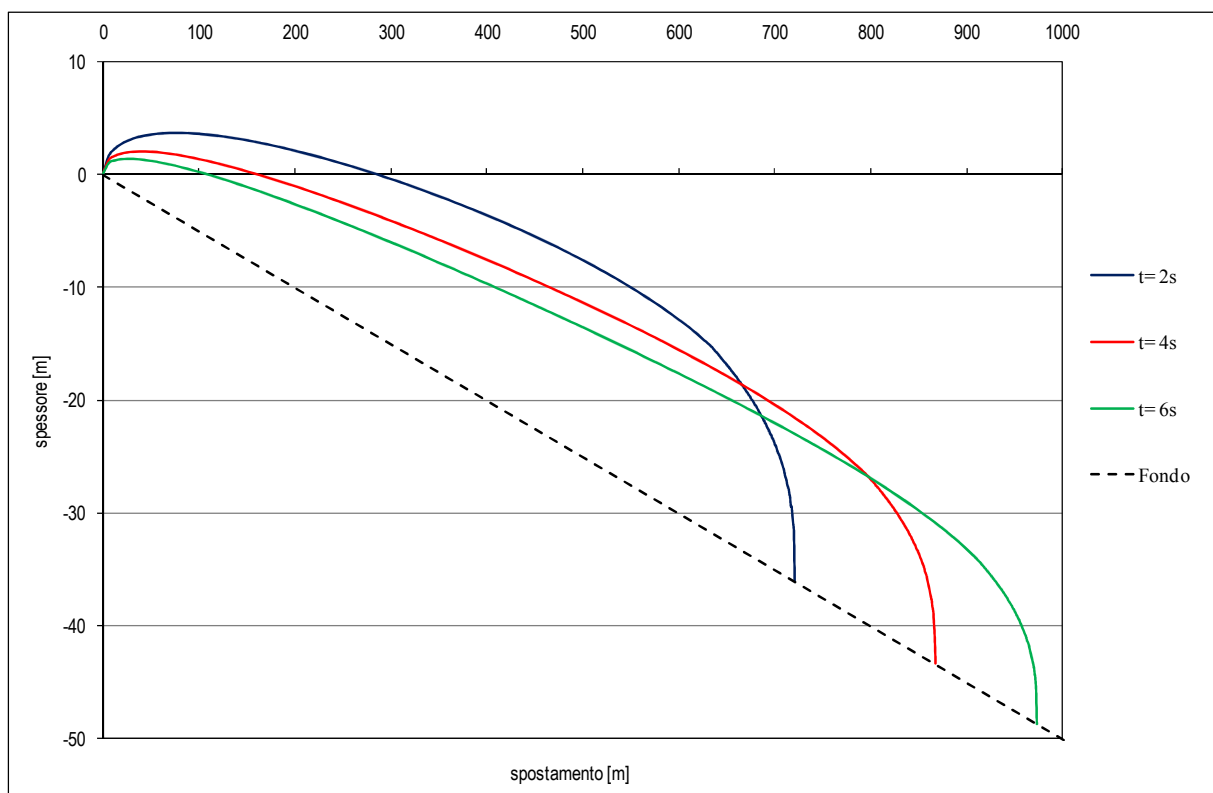


Grafico 3.8: simulazione della propagazione della corrente di densità con i dati di Imran *et al.* [27] per gli istanti temporali: 2, 4 e 6 secondi.

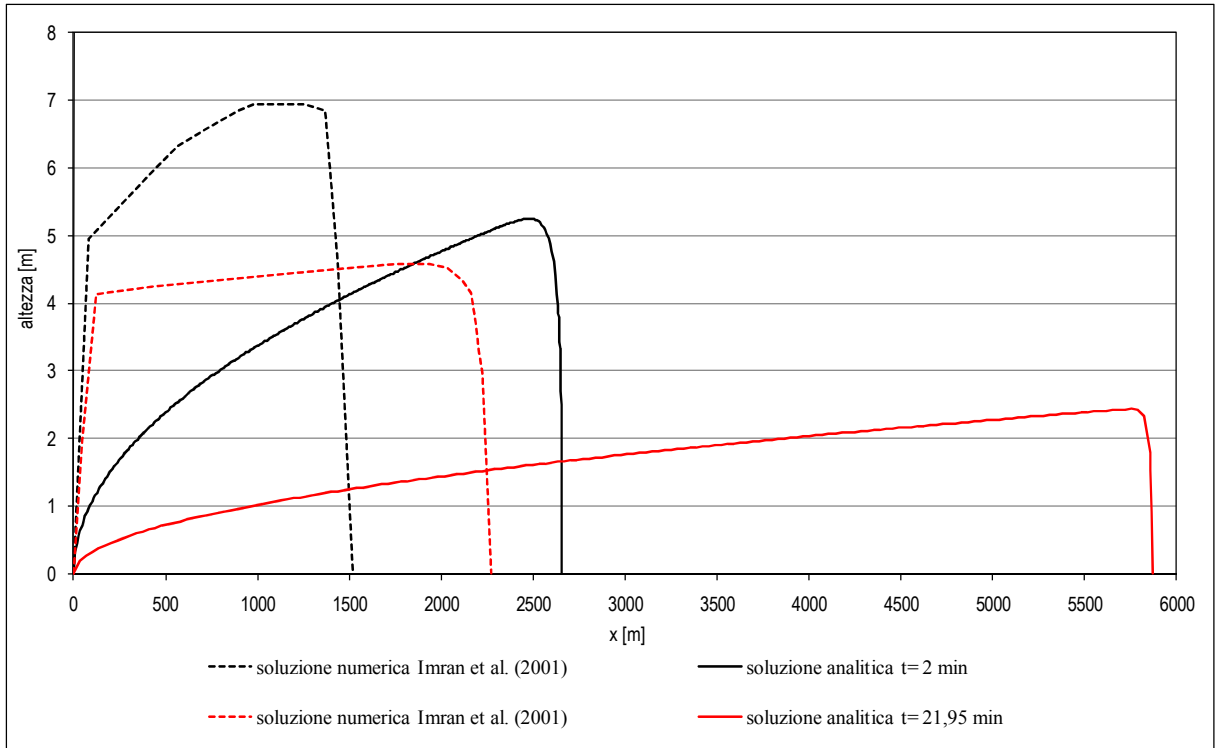


Grafico 3.9: simulazione numerica proposta da Imran *et al.* [27] a confronto con la soluzione analitica per $t=2$ min e $t=22$ min. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.

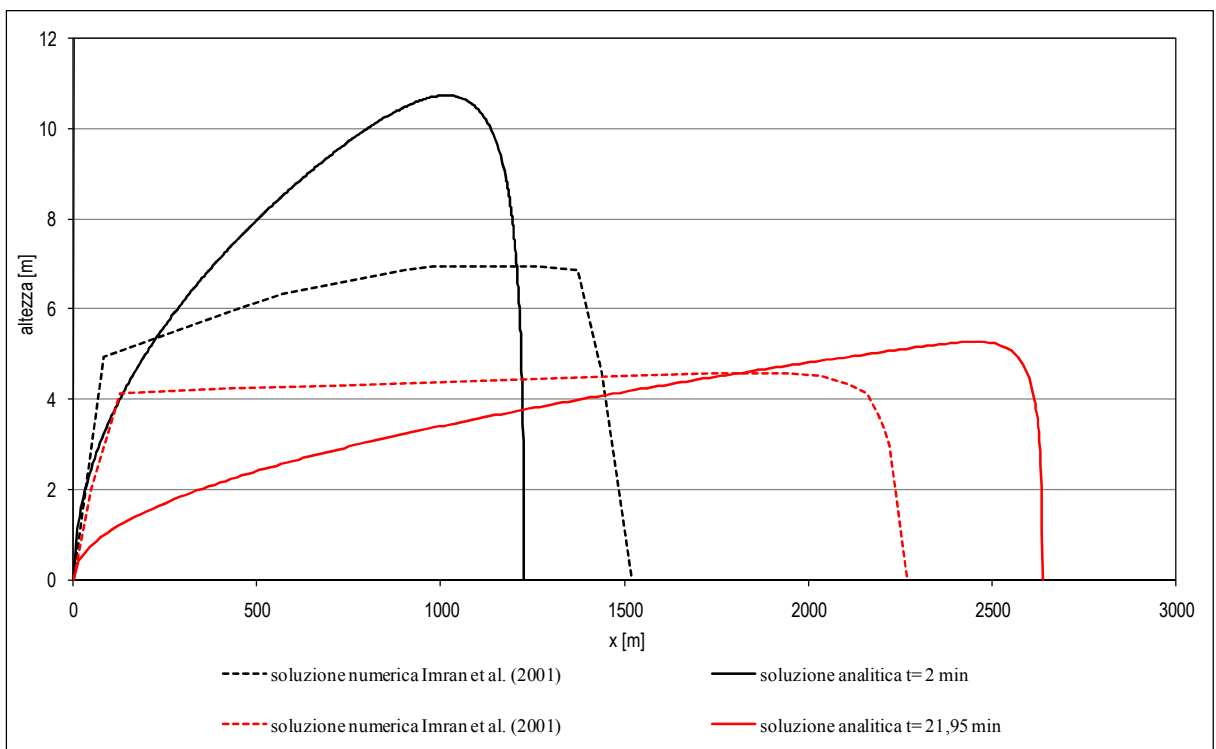


Grafico 3.10: simulazione numerica proposta da Imran *et al.* [27] a confronto con la soluzione analitica con viscosità cinematica pari a $2 \text{ m}^2/\text{s}$ per $t=2$ min e $t=22$ min. Rappresentazione dell'andamento longitudinale del corpo dell'onda.

3.9 AGGIUNTA DEL TERMINE SORGENTE SULLA CONSERVAZIONE DELLA MASSA

L'introduzione del termine sorgente all'interno dell'equazione di conservazione della massa ha lo scopo di simulare l'ingresso di acqua all'interno della corrente di densità; tale fenomeno è causato dalla pressione idrostatica dello strato di acqua soprastante, infatti, all'interno di un mezzo acquoso in quiete la pressione statica è maggiore di quella all'interno della corrente in movimento e, di conseguenza, il gradiente di pressione causa l'immissione dell'acqua all'interno della corrente di torbidità.

Tale principio d'immissione e/o di erogazione di massa fluida può essere esteso concettualmente all'interazione del materiale solido depositato sul fondo e la corrente di densità in movimento. Infatti, in forma originale viene proposta all'interno della soluzione analitica una legge d'ingresso funzione del gradiente di velocità spaziale.

A partire dalle equazioni della quantità di moto e della conservazione della massa:

$$-g' \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + g' \sin \theta - 3v \frac{U}{h^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad 3.17$$

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = e_w \frac{\partial(Uh)}{\partial x} \quad 3.50$$

dove il termine sorgente è una frazione della variazione spaziale della portata, scritta nei termini di altezza e velocità:

$$e_w \frac{\partial(Uh)}{\partial x}$$

e_w corrisponde al coefficiente di trascinamento dell'acqua da parte della corrente.

Poiché e_w è un coefficiente adimensionale, il segno del termine a destra dell'equazione di continuità della massa sarà legato al gradiente spaziale della portata che dipende dalla velocità. Ne consegue che, per una corrente accelerata, il gradiente spaziale della portata è positivo e nei termini del bilancio di massa della corrente si ha un'immissione d'acqua; al contrario se la corrente è decelerata, il gradiente avrà segno negativo e quindi si avrà un'erogazione d'acqua dalla corrente di torbidità verso l'esterno.

L'acqua inglobata, teoricamente, incrementa la massa della corrente e abbatte la concentrazione del materiale solido. Nel caso della soluzione teorica però, una delle ipotesi alla base della stessa è che la corrente sia conservativa, perciò il processo d'interazione del

materiale solido con il fondo, cioè il deposito e/o l'inglobamento, non viene esaminato ed esula dagli scopi della presente ricerca.

Il valore sperimentale del termine e_w può, in prima istanza, essere assunto pari a circa 0.05, García [19].

3.9.1 Soluzione esterna

Procedendo analogamente a quanto fatto nel paragrafo 3.7.1, e partendo dalle equazioni della quantità di moto (3.17) e della conservazione della massa (3.50) si ottengono i risultati esposti di seguito.

In **Appendice** a pagina 103 è possibile seguire dettagliatamente i passaggi svolti per ottenere i risultati illustrati.

Le equazioni adimensionalizzate sono le seguenti:

- L'equazione di continuità della quantità di moto

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) - \frac{U^*}{h^{*2}} \right] \sin \theta = \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \cos \theta + Fr^2 \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right) \right] \quad 3.20$$

- L'equazione di continuità della massa (3.50), diventa:

$$(1 - e_w) \frac{\partial(U^* h^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad 3.51$$

L'equazione del profilo della soluzione esterna:

$$h^* = \sqrt{\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right)}} \quad 3.52$$

Per il calcolo della posizione del fronte dell'onda si ricorre alle medesime ipotesi fatte nel paragrafo 3.7.1 e si ricava:

$$x_s^* = \frac{3A^{*2/3} t^{*1/3}}{2^{2/3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right)^{1/3} (1 - e_w)^{1/3} \quad 3.53$$

A partire dall'equazione (3.52) e dalla (3.53) si ottiene l'altezza d'acqua corrispondente al fronte d'onda in due forme alternative:

$$h_s^* = \sqrt{\frac{x_s^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)}} \quad 3.54$$

$$h_s^* = \frac{3A^*}{2x_s^*} \quad 3.55$$

Eliminando t^* e A^* dalle equazioni (3.52), (3.53) e (3.55) si ottiene:

$$\frac{h_s^*}{h^*} = \sqrt{\frac{x_s^*}{x^*}} \quad 3.56$$

Infine si desume la velocità con cui si propaga il fronte d'onda:

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w) h_s^{*2} \quad 3.57$$

Dimensionalizzando le soluzioni trovate si hanno le seguenti relazioni:

$$h = \sqrt{\frac{x}{t} \frac{v}{g \sin \theta} \frac{1}{(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \quad 3.58$$

$$x_s = \left(\frac{3A}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{gt}{v} \sin \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)\right)^{1/3} \quad 3.59$$

$$h_s = \frac{3A}{2x_s} \quad 3.60$$

$$\frac{h_s}{h} = \sqrt{\frac{x_s}{x}} \quad 3.61$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w) h_s^2 \frac{g \sin \theta}{3v} \quad 3.62$$

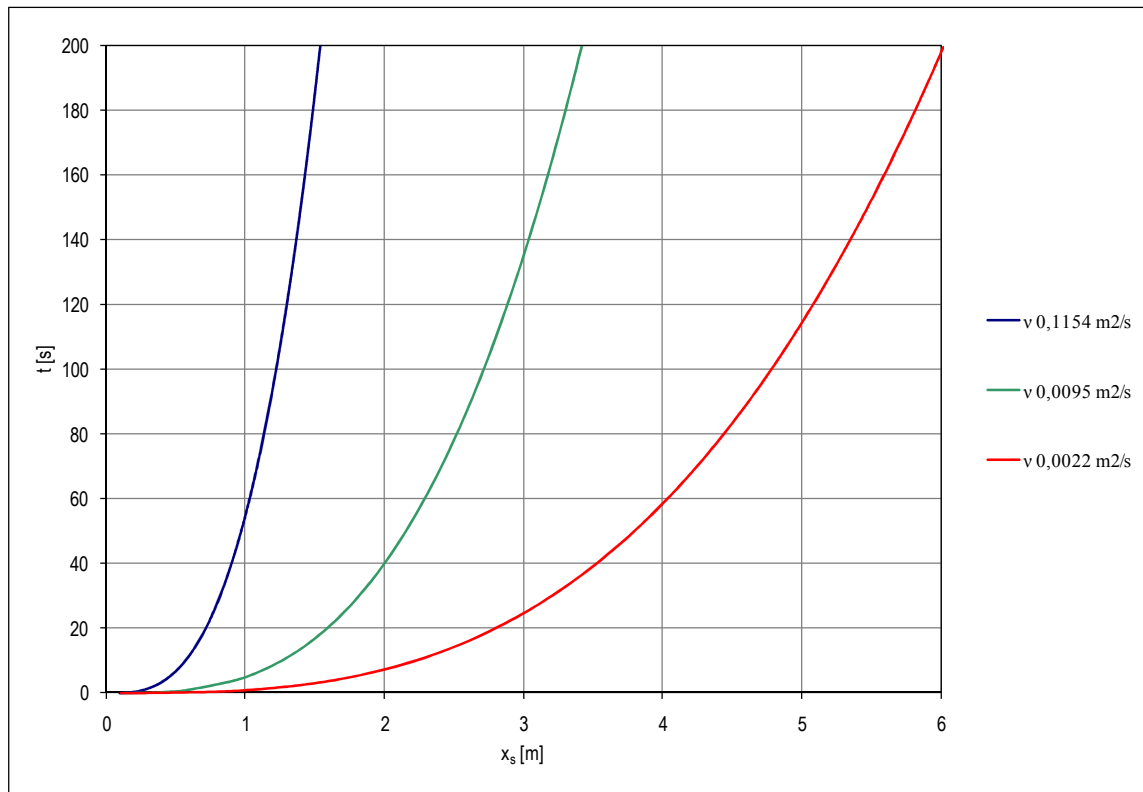


Grafico 3.11: sviluppo temporale dell'ascissa del fronte dell'onda x_s al variare della viscosità cinematica v per un fissato valore del coefficiente d'ingresso dell'acqua e_w .

Nel Grafico 3.11 e nel Grafico 3.12 sono riportate, per fluidi con diverse viscosità, la distanza raggiunta dal fronte d'onda a diversi istanti temporali e la sua relazione con la celerità della perturbazione. Le curve sono state ricavate ipotizzando un volume iniziale di massa pari a $0.05 \text{ m}^3/\text{m}$ e diverse viscosità cinematiche.

La celerità di propagazione della perturbazione, dal modello, risulta diminuire all'aumentare della viscosità cinematica e, fissato un certo valore di viscosità, non è costante bensì diminuisce progressivamente man mano che il fronte d'onda si propaga verso valle. Questo comportamento è equivalente a quanto avviene nell'ipotesi in cui il termine sorgente dell'equazione di conservazione della massa è considerato nullo (caso trattato nel precedente paragrafo 3.7.1).

Si può notare che, nel caso in cui si è considerato l'ingresso di acqua all'interno della massa della corrente, la velocità di propagazione del fronte d'onda, per un medesimo valore di viscosità cinematica, risulta minore rispetto al caso in cui tale fenomeno non viene considerato (si veda paragrafo 3.7.1). Ne consegue che una corrente in cui vi è ingresso di acqua a causa della differenza di pressione esistente, richieda un tempo superiore per raggiungere un determinato valore di x_s rispetto a una corrente in cui il coefficiente d'ingresso e_w è nullo.

In conclusione, si può affermare che l'ingresso di acqua all'interno della corrente di torbidità ne provoca un rallentamento.

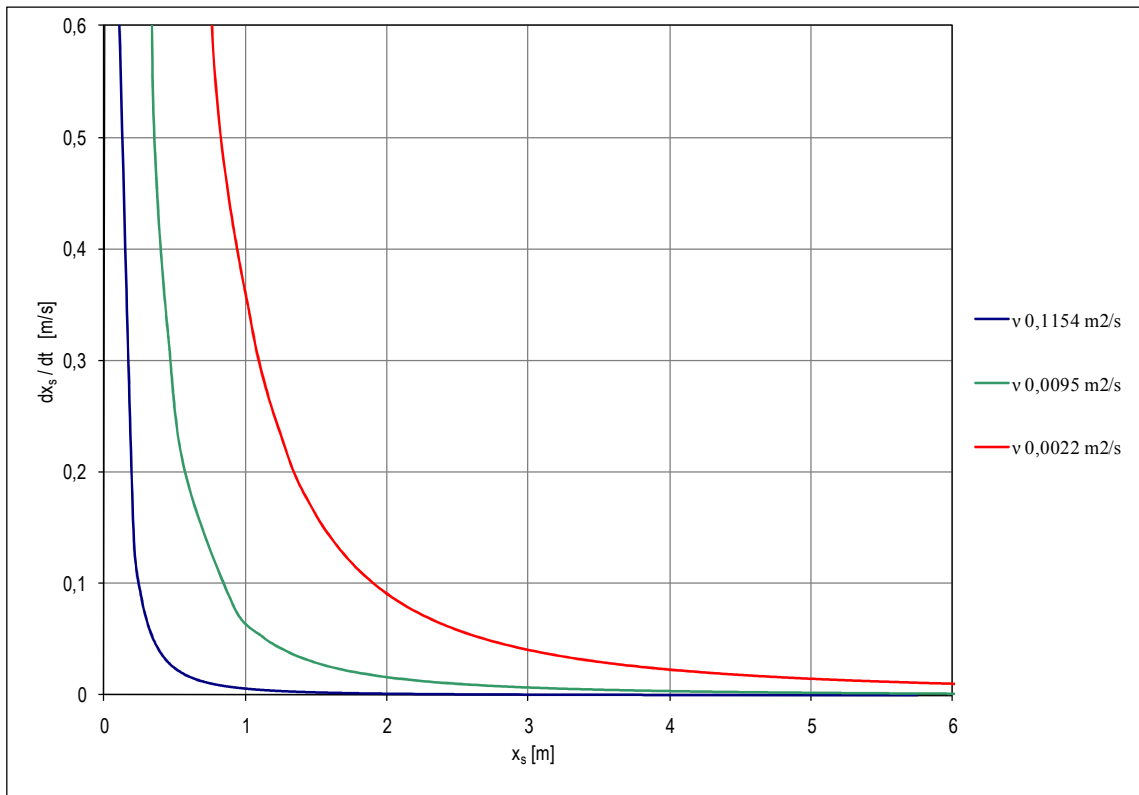


Grafico 3.12: relazione fra l'ascissa x_s e la velocità del fronte dell'onda al variare della viscosità cinematica ν per un fissato valore del coefficiente d'ingresso dell'acqua e_w .

3.9.2 Soluzione interna

A partire sempre dalle equazioni (3.17) e (3.50), si procede con il calcolo della soluzione interna.

Nell'**Appendice** a pagina 103, sono riportati in forma dettagliata tutti i passaggi effettuati.

Per il risultato dell'adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto si richiama il paragrafo 3.7.2:

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) - \frac{V^*}{H^{*2}} \right] \sin \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \cos \theta + Fr^2 \left[V^* - \frac{dx_s^*}{dT^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} + \varepsilon F^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \quad 2.37$$

Mentre l'equazione di conservazione della massa (3.51) assume la seguente forma:

$$(1 - e_w) \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) + \varepsilon \frac{\partial H^*}{\partial T^*} = 0 \quad 3.63$$

Dopo una serie di passaggi e le dovute semplificazioni, si giunge a un'equazione differenziale che descrive il profilo assunto dalla superficie libera vicino al fronte d'onda:

$$\left[1 - \frac{(1 - e_w)h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \tan \theta = \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \quad 3.64$$

Integrando la (3.64) con la condizione che per $\xi^*=0$ si abbia $H^*=H_0^*$, come mostrato in Figura 3.4, si ottiene:

$$\xi^* \tan \theta = H^* - H_0^* + \sqrt{1 - e_w} h_s^* \ln \frac{\sqrt{1 - e_w} h_s^* - H^* \sqrt{1 - e_w} h_s^* + H_0^*}}{\sqrt{1 - e_w} h_s^* + H^* \sqrt{1 - e_w} h_s^* - H_0^*}} \quad 3.65$$

Per il calcolo del parametro incognito H_0^* s'impone, come nel paragrafo 3.7.2, l'uguaglianza tra le aree A_1 e A_2 illustrate in Figura 3.4.

$$\int_{-\infty}^0 (\sqrt{1 - e_w} h_s^* - H^*) d\xi^* = \int_0^{\delta^*} H^* d\xi^* \quad 3.66$$

Integrando la (3.66) e modificando algebricamente il risultato si ottiene la seguente espressione, in forma implicita, di H_0^* :

$$-H_0^* + \sqrt{1 - e_w} h_s^* \ln \frac{\sqrt{1 - e_w} h_s^* + H_0^*}}{\sqrt{1 - e_w} h_s^* - H_0^*}} = (\ln(4) - 1) \frac{\sqrt{1 - e_w} h_s^*}}{2} \quad 3.67$$

Mettendo a sistema le equazioni (3.65) e (3.67), si trova l'equazione per il calcolo del profilo dell'onda interna:

$$\xi^* \tan \theta = H^* + \sqrt{1 - e_w} h_s^* \ln \frac{\sqrt{1 - e_w} h_s^* - H^*}}{\sqrt{1 - e_w} h_s^* + H^*}} + (\ln(4) - 1) \frac{\sqrt{1 - e_w} h_s^*}}{2} \quad 3.68$$

Dimensionalizzando, la (3.68) diventa:

$$\xi \tan \theta = H + \sqrt{1 - e_w} h_s \ln \frac{\sqrt{1 - e_w} h_s - H}{\sqrt{1 - e_w} h_s + H} + (\ln(4) - 1) \frac{\sqrt{1 - e_w} h_s}{2} \quad 3.69$$

in cui $\xi = x - x_s$.

3.9.3 Soluzione completa

Come descritto nel paragrafo 3.7.3, il profilo finale dell'onda della corrente è dato dalla combinazione delle soluzioni esterna (3.58) e interna (3.69) trovate, secondo la seguente regola di compatibilità:

$$h_c = \begin{cases} h + H - h_s & x \leq x_s \\ H & x > x_s \end{cases} \quad 3.70$$

Anche nel presente caso, con l'aggiunta del termine sorgente, valgono le considerazioni sulla validità della soluzione fatte nel precedente paragrafo 3.7.3.

3.10 CONFRONTO DELLA SOLUZIONE ANALITICA CON I DATI SPERIMENTALI

Dopo aver introdotto, nei paragrafi precedenti, il termine che simula lo scambio di acqua tra la corrente di torbidità e il fluido circostante, rendendo quindi il modello più assimilabile al comportamento reale della corrente, è stata condotta un'applicazione della soluzione analitica allo scopo di confrontare i risultati con i dati sperimentali presenti in letteratura ottenuti a seguito di esperimenti eseguiti da Mohirig *et al.*, riportati in [34], per un fluido viscoplastico di tipo Bingham. Questa serie di dati sperimentali con cui si effettua il confronto, sono gli unici in nostro possesso a essere stati acquisiti nel corso di un esperimento che ha riprodotto una situazione affine a quella che il presente studio si propone di modellare. Tramite il confronto, si vuole validare la soluzione analitica, cioè capire come si comporta la soluzione proposta e quali accorgimenti adottare per "tararla".

I dati di base per la simulazione della soluzione analitica sono riportati nella Tabella 3.4. Per la simulazione con la soluzione analitica si pone $e_w = 0.05$.

inclinazione	θ	6 °
pendenza	S	0.11
viscosità dinamica	μ	0.035 kg/ms
densità acqua	ρ_a	1000 kg/m ³
densità miscela	ρ	1600 kg/m ³
viscosità cinematica	ν	0.00002 m ² /s
area iniziale	A	0.15 m ³ /m
istante temporale	t	4.5 s

Tabella 3.4: dati dell'esperimento eseguito da Mohirig *et al.* [34].

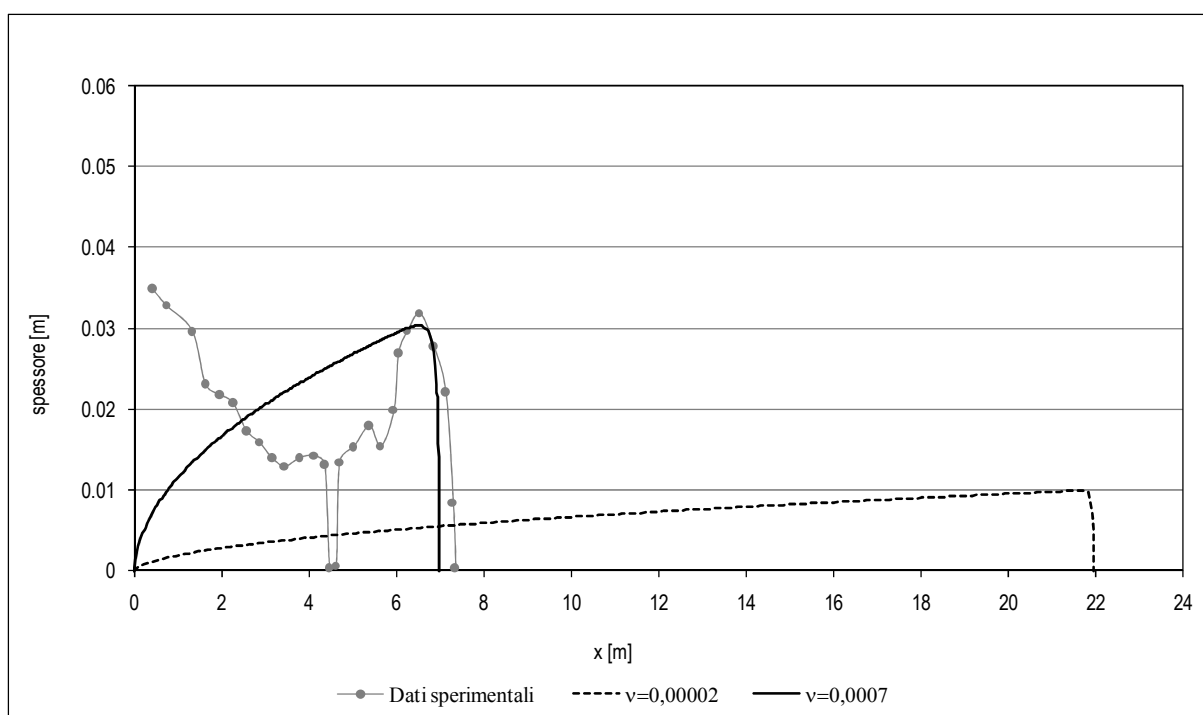


Grafico 3.13: confronto simulazione modello e dati sperimentali di Mohirig *et al.* [34].

Dai risultati della simulazione presentati nel Grafico 3.13 si vede che la soluzione analitica, ricavata a partire dai dati con cui sono state svolte le prove sperimentali, non riesce a simulare ciò che in realtà accade durante la prova; infatti, sia il profilo dell'onda che la velocità di propagazione si discostano ampiamente da quelli sperimentali. Accrescendo la viscosità cinematica e, in particolare, aumentandone il valore fino a $\nu = 0.0007 \text{ m}^2/\text{s}$, si ottiene un'onda che meglio approssima la disposizione dei dati sperimentali, soprattutto in prossimità del fronte, anche se non riesce a cogliere completamente la forma assunta dall'onda.

Un'eventuale spiegazione della scarsa rappresentazione della forma dell'onda, oltre alla diversa reologia della miscela considerata (viscoplastica tipo Bingham nell'esperimento e

newtoniana viscosa per la soluzione analitica), può essere attribuita al fenomeno dell'*hydroplaning* in prossimità del fronte della corrente di torbidità, come riportato dagli autori stessi. È lecito supporre che la pressione dinamica esercitata dal fronte dell'onda che si muove velocemente all'interno di un fluido ambientale sia sufficientemente grande da causare un sollevamento del fronte. Questo sollevamento permette l'intrusione di un cuneo di acqua tra il fronte stesso e il fondo sottostante su cui scorre, che funziona quindi da lubrificante in corrispondenza della testa dell'onda. Questo fenomeno, in certe condizioni, causa una drammatica riduzione dell'attrito alla base del fronte d'onda, che si muove quindi con una velocità superiore rispetto al corpo e può provocare una "decapitazione" del fronte d'onda della corrente di torbidità. È a causa di questo fenomeno che i dati sperimentali registrati durante la simulazione assumono l'andamento irregolare presentato nel Grafico 3.13.

3.10.1 Caso particolare di corrente di torbidità altamente stratificata

Un altro tipo di soluzione, che può essere considerato un caso particolare della soluzione analitica presentata, riguarda la simulazione della propagazione di una corrente di densità con una densità $\rho \gg \rho_a$, corrispondente alla densità del fluido soprastante. In queste condizioni la soluzione analitica indica che la celerità di propagazione, avente la seguente espressione:

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h_s^{*2}$$

dipende solo dal valore dell'altezza, o spessore, della corrente. Questa condizione può essere paragonabile alla propagazione su fondo asciutto di una miscela viscosa che defluisce su un piano inclinato avente aria come fluido comprimibile circostante ($\rho_a = 1 \text{ kg/m}^3$).

La soluzione analitica è stata messa a confronto con i dati sperimentali di laboratorio proposti da Aguirre *et al.* [1]. Lo studio è stato eseguito in una canaletta in vetro con un fluido viscoso e laminare avente le caratteristiche riportate in Tabella 3.5.

inclinazione	θ	5.7 °
pendenza	S	0.10
viscosità dinamica	μ	1.21 kg/ms
densità aria	ρ_a	1 kg/m ³
densità miscela	ρ	904.2 kg/m ³
viscosità cinematica	ν	0.0013 m ² /s
area iniziale	A	0.05 m ³ /m

Tabella 3.5: dati dell'esperimento eseguito da Aguirre *et al.* [1].

Il Grafico 3.14 mostra il confronto tra i profili dell'onda ricavati tramite la soluzione analitica e quelli ricostruiti dai dati sperimentali di laboratorio per diversi istanti temporali. Dal raffronto, si può affermare che la soluzione analitica coglie abbastanza bene i risultati quando $\rho \gg \rho_a$, condizione corrispondente a una corrente di densità altamente stratificata e quindi quasi sicuramente laminare. Questo esito positivo è prodotto dalla circostanza che la miscela usata nella prova sperimentale, come già detto, è viscosa e laminare; questi requisiti si adattano perfettamente alle ipotesi alla base della soluzione analitica.

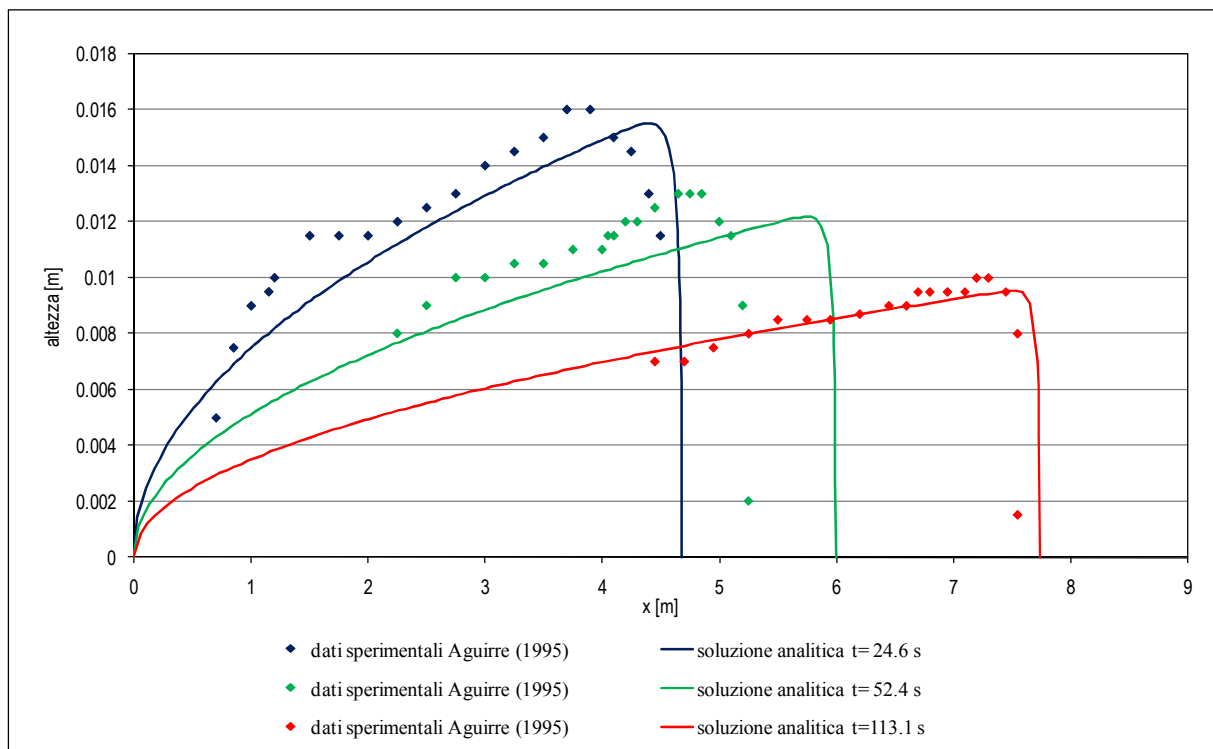


Grafico 3.14: confronto dei dati sperimentali relativi all'andamento del profilo dell'onda ricostruito mediante la soluzione analitica adottando i dati riportati da Aguirre *et al.* [1].

3.11 ALCUNI ACCORGIMENTI SUI CONFRONTI CON LE SOLUZIONI SPERIMENTALI DI CARATTERE NUMERICO E FISICHE

Dall'esame dell'unico confronto eseguito tra la simulazione della soluzione numerica e dati sperimentali reperiti in letteratura (Mohirig *et al.* [34]), si può affermare che la soluzione analitica sembra non riuscire a simulare la posizione del fronte che risulta dai dati sperimentali se non si facesse ricorso a un aumento artificioso della viscosità cinematica. Questo fatto può essere spiegato ricordando le ipotesi alla base del modello e principalmente le condizioni

necessarie per le semplificazioni adottate. In particolare l'approssimazione a onda cinematica per la soluzione esterna richiede che θ assuma un valore più elevato sia dei termini inerziali $\frac{\partial U}{g\partial t}$ e $\frac{U\partial U}{g\partial x}$ che del termine del gradiente di pressione $\frac{\partial h}{\partial x}$.

Occorre sottolineare che nella prova sperimentale effettuata dagli autori riportata in [34], la pendenza del piano di scorrimento ha un'inclinazione di 6° non compatibile con le ipotesi adottate nella ricerca della soluzione analitica tramite la teoria della perturbazione.

Inoltre, la soluzione analitica stima, per ipotesi, la propagazione di un fluido newtoniano viscoso che, a parità di viscosità, avrà una dinamica differente e si propagherà più velocemente di un fluido viscoplastico, tipo Bingham, come quello della miscela utilizzata nella prova sperimentale. La differente reologia può essere un ulteriore motivo alla base dell'incongruenza tra dati sperimentali e soluzione analitica.

La soluzione analitica è stata anche confrontata, nel paragrafo 3.8, con dati sperimentali di carattere numerico desunti da letteratura [29], [24] e [27]. Le differenze evidenti riscontrate, come sopra menzionato, sono imputabili all'incompatibilità tra le ipotesi numeriche e quelle alla base della soluzione analitica svolta.

Dai confronti effettuati tra i profili ottenuti dalla soluzione analitica proposta e i dati sperimentali (paragrafo 3.10) o i profili tracciati mediante i modelli numerici presentati da vari autori (paragrafo 3.8), si deduce che la soluzione analitica necessita di un incremento della viscosità di circa due ordini di grandezza per ottenere dei risultati che meglio approssimano i dati con i quali sono comparati.

Visto la scarsa disposizione di dati sperimentali acquisiti in condizioni compatibili con le ipotesi alla base della soluzione analitica proposta (in particolare pendenza sufficientemente elevata e fluido viscoso), si è deciso di validare indirettamente la soluzione analitica adottando un modello numerico bidimensionale nella verticale, con un alto livello di complessità. Tale modello numerico è stato semplificato, a partire da un modello numerico generalizzato, tramite l'assunzione delle medesime ipotesi alla base del modello analitico svolto: fluido incomprimibile, omogeneo (sforzi di taglio tra i fluidi stratificati sono nulli), conservativo, viscoso, newtoniano e laminare.

I risultati ottenuti tramite il modello numerico semplificato saranno confrontati con i dati di laboratorio ottenuti in condizione di moto vario e in presenza di una corrente iperconcentrata che si propaga su un piano di scorrimento a pendenza variabile.

4 MODELLISTICA NUMERICA E CONFRONTO CON DEI DATI SPERIMENTALI DI LABORATORIO

4.1 GENERALITÀ DEI MODELLI NUMERICI

Nel presente capitolo viene illustrata un'applicazione di carattere numerico la quale è messa a confronto con dei dati sperimentali. Il fine è di verificare, in forma indiretta, la bontà delle ipotesi alla base della soluzione analitica precedentemente descritta, applicandole a un modello numerico in grado di riprodurre il processo dinamico di una corrente di densità all'interno di un serbatoio.

La modellistica numerica permette, infatti, di trattare in forma rigorosa, a livello tridimensionale, la dinamica di una corrente di torbidità adottando schemi euleriani e lagrangiani per la valutazione del fenomeno. In ambedue i tipi di schema si può ricorrere a maglie di calcolo altamente dettagliate che permettono di quantificare i fenomeni d'interazione acqua-sedimenti a un livello fisico-matematico di precisione piuttosto elevato. Purtroppo nella realtà una corrente di torbidità all'interno di un serbatoio può percorrere decine di chilometri a velocità comprese tra 0.3 e 0.6 m/s. In presenza di queste scale spaziali e temporali risulta improponibile trattare dal punto di vista numerico tale fenomeno, almeno nelle condizioni di dettaglio sopra descritte. È in questa situazione che la modellistica numerica semplificata assume importanza e può diventare una vera alternativa alla modellistica fisica e un concreto strumento a supporto della progettazione e gestione di un vaso.

In questa ricerca sono stati messi a punto due modelli per la trattazione della dinamica di una corrente di torbidità in un serbatoio. Entrambi i modelli sono bifasici, di carattere bidimensionale mediato sulla verticale, 2D-V, e si basano sull'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes per un moto turbolento o laminare. Essi sono stati messi a punto sulla base della modellistica del codice di calcolo commerciale CFX-5. Tale codice è un sistema software "general-purpose" per la fluidodinamica computazionale (CFD-Computational Fluid Dynamics), con ambito di applicazioni estremamente ampio che si estendono dalla fluidodinamica alla termodinamica comprimibile e incomprimibile.

Il primo modello numerico corrisponde a un modello “generalizzato” che considera in dettaglio sia la dinamica del sedimento nella corrente che quella della corrente fluida. Il modello considera gli effetti turbolenti abbinati alla frazione solida e a quella liquida, tramite il *modello k-epsilon*.

Il secondo modello sviluppato è una semplificazione del primo e si basa sulle ipotesi della soluzione analitica.

Nei paragrafi successivi saranno confrontati i risultati delle simulazioni effettuate con entrambi i modelli allo scopo di verificare la possibilità dell’utilizzo del modello semplificato in alternativa a quello generalizzato diminuendo i tempi di calcolo e le risorse economiche necessarie ma senza ridurre la precisione con cui viene ricostruito il fenomeno.

4.2 MODELLO NUMERICO GENERALIZZATO

Le assunzioni alla base del modello numerico generalizzato sono le di seguenti:

1. La corrente è bifasica caratterizzata da una fase liquida (acqua) e da una solida (sedimento);
2. La fase acqua è assunta continua cioè occupa regioni di spazio connesse mentre la fase sedimento è assunta dispersa, cioè occupa porzioni di spazio disconnesse;
3. Ciascuna fase è incomprimibile;
4. Il sedimento è assunto monogranulare cioè caratterizzato da una singola dimensione significativa;
5. In un dato volume la quantità delle due fasi presenti è data dalla loro frazione di volume;
6. La turbolenza, complesso fenomeno dipendente dallo spazio e dal tempo, è descritta secondo l’approccio delle medie temporali alla Reynolds. L’operazione di media alla Reynolds, consiste nello scomporre le grandezze che compaiono nelle equazioni di Navier-Stokes della fluidodinamica come somma di un valore medio nel tempo e di una parte fluttuante. La parte fluttuante è modellata mediante un modello di turbolenza;
7. I campi di velocità, turbolenza, ecc. hanno una variabilità spaziale tridimensionale e temporale, cioè sono campi non stazionari;
8. La posizione della superficie libera è considerata fissa, con la massa entrante di acqua uguale a quella uscente;
9. Il problema è assunto isoterma;
10. La fase liquida è turbolenta mentre la fase dei sedimenti è turbolenta a seguito della turbolenza indotta dall’acqua;
11. La turbolenza dell’acqua e del sedimento è anisotropica ed è descritta mediante il concetto di *eddy viscosity*. Il valore dell’*eddy viscosity* è calcolato sommando due

contributi: la viscosità laminare e la viscosità turbolenta calcolata, ad esempio, con il modello *k-epsilon*;

12. Si trascura l'interazione tra le singole particelle di sedimento;
13. La condizione al contorno di fondo è trattata mediante il concetto di funzione di parete dello strato limite turbolento.
14. Le dimensioni e le caratteristiche del modello sperimentale fanno in modo tale che gli effetti di erosione e deposito nel tempo del transitorio esaminato siano trascurabili, così come proposto nella soluzione analitica ed imposto anche nel modello numerico (corrente di torbidità conservativa).

4.2.1 Equazioni del modello

Le equazioni alla base del modello bifasico generalizzato sono di seguito riportate. In esse vengono indicati con *a* e *s* rispettivamente le grandezze che riguardano la fase liquida e la fase solida.

Equazioni di continuità

$$\frac{\partial}{\partial t}(r_a \rho_a) + \nabla \cdot (r_a \rho_a U_a) = 0 \quad 4.1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r_s \rho_s) + \nabla \cdot (r_s \rho_s U_s) = 0 \quad 4.2$$

Dove:

r frazione di volume, con $r_a + r_s = 1$;

ρ densità;

U vettore velocità.

Equazioni della quantità di moto

$$\frac{\partial}{\partial t}(r_a \rho_a U_a) + \nabla \cdot \left(r_a \left(\rho_a U_a \times U_a - \mu_{a,eff} (\nabla U_a + (\nabla U_a)^T) \right) \right) = r_a (-\nabla p') + F_{as} + F_a \quad 4.3$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r_s \rho_s U_s) + \nabla \cdot \left(r_s \left(\rho_s U_s \times U_s - \mu_{s,eff} (\nabla U_s + (\nabla U_s)^T) \right) \right) = r_s (B - \nabla p') + F_{sa} + F_s \quad 4.4$$

I vari parametri che compaiono nelle equazioni (4.3) e (4.4), sono così definiti:

- $\mu_{a,eff} = \mu_L + \mu_{Ta}$ è la viscosità dinamica efficace dell'acqua. Si ricava facendo la somma della viscosità laminare μ_L e della viscosità turbolenta μ_T .

La viscosità turbolenta è calcolata mediante un modello di turbolenza, in questo caso si è usato il *modello k-epsilon*:

$$\mu_{Ti} = C_\mu \rho_i \frac{k_i^2}{\varepsilon_{ti}} \quad 4.5$$

con il pedice i pari ad a e s , a seconda che si calcoli la viscosità dinamica turbolenta dell'acqua o dei sedimenti, e C_μ una costante.

Per il calcolo dell'energia turbolenta k_i , che dipende dalle fluttuazioni turbolente della velocità, e del tasso di dissipazione ε_{ti} si risolve il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial t} (r_a \rho_a k_a) + \nabla \cdot \left(r_a \left(\rho_a U_a k_a - \left(\mu + \frac{\mu_{Ta} + \mu_{Ts}}{\sigma_k} \right) \nabla k_a \right) \right) = r_a (P_{Ta} - \rho_a \varepsilon_{ta}) \quad 4.6$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (r_a \rho_a \varepsilon_a) + \nabla \cdot \left(r_a \left(\rho_a U_a \varepsilon_a - \left(\mu + \frac{\mu_{Ta} + \mu_{Ts}}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon_a \right) \right) \\ & = r_a \frac{\varepsilon_{ta}}{k_a} (C_{1\varepsilon} P_{Ta} - C_{2\varepsilon} \rho_a \varepsilon_{ta}) \end{aligned} \quad 4.7$$

in cui:

P_{Ta} rappresenta la produzione di turbolenza causata dalle forze viscosi e di galleggiamento ed è modellata secondo la seguente espressione:

$$P_{Ta} = \mu_T \nabla U_a \cdot (\nabla U_a + \nabla U_a^T) + P_{kb}$$

dove P_{kb} è la parte di energia turbolenta prodotta dalle forze di galleggiamento ed è espressa con la seguente relazione:

$$P_{kb} = -\frac{\mu_T}{\rho} g \cdot \nabla \rho$$

I restanti parametri presenti sono delle costanti:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 1; \\ C_\mu &= 0.09; \\ C_{1\varepsilon} &= 1.44; \end{aligned}$$

$$C_{2\varepsilon} = 1.92;$$

$$\sigma_z = \frac{\kappa^2}{(C_1 - C_2)\sqrt{C_\mu}};$$

$\kappa = 0.4187$ è la costante di Von Karman;

- $\mu_{s,eff}$ è la viscosità dinamica efficace dei sedimenti e si ricava a partire dalla viscosità efficace dell'acqua mediante la seguente relazione:

$$\mu_{s,eff} = \mu_{a,eff} \frac{\rho_s}{\rho_a} \quad 4.8$$

- B è la forza di galleggiamento per unità di volume, diretta solo nella direzione verticale y della gravità e si calcola come:

$$B = (\rho_s - \rho_a)\bar{g} \quad 4.9$$

con \bar{g} vettore dell'accelerazione di gravità, con direzione verticale y .

- p' pressione comune alle due fasi, calcolata in seguito all'operazione di media alla Reynolds ed alla sottrazione del termine idrostatico, come di seguito riportato:

$$p' = p_a + \frac{2}{3}\rho_a k_a - \rho_a \bar{g} \cdot X \quad 4.10$$

con:

p_a pressione statica;
 X vettore delle coordinate cartesiane.

- F_{sa} è la forza di trascinamento dell'acqua sul sedimento, per unità di volume, e la si calcola mediante la seguente relazione:

$$F_{sa} = \frac{3 C_D}{4 D_s} r_s \rho_a |U_s - U_a| (U_a - U_s) \quad 4.11$$

in cui:

D_s è il diametro della particella di sedimento;

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}) \quad \text{per } 0 \leq Re \leq 500$$

$$C_D = 0.007 \quad \text{per } Re \geq 500$$

Re numero di Reynolds pari a:
$$Re = \frac{\rho_a U D_s}{\mu_a}$$

- F_{as} analogamente alla relazione precedente (4.11), è la forza di trascinamento del sedimento sull'acqua, per unità di volume.

$$F_{as} = \frac{3 C_D}{4 D_s} r_s \rho_a |U_s - U_a| (U_s - U_a) \quad 4.12$$

- F_s è la somma della forza di sollevamento per unità di volume e della forza di massa virtuale dell'acqua sul sedimento, per unità di volume; si calcola con la seguente espressione:

$$F_s = r_s \rho_a C_L (U_a - U_s) \times \nabla \times U_a + r_s \rho_a C_{VM} \left(\frac{D}{Dt} U_a - \frac{D}{Dt} U_s \right) \quad 4.13$$

con:

$$C_L = 0.03;$$

$$C_{VM} = 0.5 \quad (\text{assumendo il valore valido per singole particelle di forma sferica});$$

D/Dt è la derivata totale.

- F_a analogamente alla precedente equazione (4.13), è la somma della forza di sollevamento e della forza di massa virtuale del sedimento sull'acqua, per unità di volume:

$$F_a = r_s \rho_a C_L (U_s - U_a) \times \nabla \times U_a + r_s \rho_a C_{VM} \left(\frac{D}{Dt} U_s - \frac{D}{Dt} U_a \right) \quad 4.14$$

4.2.2 Condizioni al contorno

Condizione al contorno di fondo:

Come condizioni al contorno sul fondo vengono imposte le seguenti grandezze:

- $U_n \equiv 0$ il vettore velocità perpendicolare alla parete è nullo.
- Nel caso di fondo fisso, lo sforzo di attrito esercitato dal fondo sull'acqua è dato dalla seguente relazione (omettendo il pedice a):

$$\tau_w = T_M (-U_w) \quad 4.15$$

in cui:

τ_w è lo sforzo alla parete;
 U_W è il vettore velocità parallelo alla parete.

Assumendo quale modello di turbolenza il *modello k-epsilon* (descritto in precedenza) risulta:

$$T_M = \begin{cases} \frac{\mu_{a,eff}}{y} & \text{per } y^+ \leq y_0^+ \\ \frac{\rho_a C_\mu^{1/4} k^{1/2} \kappa}{\ln(Ey^+)} & \text{per } y^+ \geq y_0^+ \end{cases} \quad 4.16$$

in cui si ha:

y è la distanza perpendicolare alla parete;
 $\kappa = 0.4187$ è la costante di Von Karman;
 u_{*b} è la velocità di attrito sul fondo;
 y^+ è la distanza adimensionale ottenuta secondo l'espressione:

$$y^+ = \frac{\rho_a u_{*b} y}{\mu_{a,eff}}$$

$E = 9.79$ è il parametro di rugosità;
 $y_0^+ = 11.2$ è lo spessore, adimensionale, dello strato limite viscoso. Per valori inferiori di y_0^+ il moto è laminare mentre per valori superiori il moto è turbolento;
 $\mu_{a,eff}$ è la viscosità dinamica efficace e si ottiene mediante la somma della viscosità laminare e della viscosità turbolenta. Quest'ultima si ottiene dal modello di turbolenza *k-epsilon* descritta dalla precedente equazione (4.5).

- k l'energia cinetica turbolenta in corrispondenza del fondo si calcola mediante la relazione:

$$k = \frac{u_*^2}{C_\mu^{1/2}} \quad 4.17$$

- ε_t è il tasso di dissipazione nello strato limite sul fondo e si ricava mediante la seguente relazione:

$$\varepsilon_t = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad 4.18$$

Condizione al contorno di entrata

Per le condizioni al contorno all'ingresso, vengono definiti i valori delle frazioni di volume entranti rispettivamente di acqua e sedimento:

$$r_a = \bar{r}_a$$

$$r_s = \bar{r}_s$$

e di conseguenza si ottengono, con le seguenti relazioni, i valori di portata massica per le due fasi considerate:

$$M_a = r_a \rho_a Q_m \quad 4.19$$

$$M_s = r_s \rho_s Q_m \quad 4.20$$

dove Q_m è la portata volumetrica della miscela acqua e sedimento.

Si definisce inoltre l'energia cinetica turbolenta k mediante la seguente relazione:

$$k = 1.5(IU_{in})^2 \quad 4.21$$

dove:

I è l'intensità di turbolenza;

U_{in} è la velocità nella sezione d'ingresso e si ottiene dalla relazione:

$$U_{in} = \frac{Q_m}{A}$$

in cui A è l'area bagnata della sezione di ingresso;

Conseguentemente si ricava il valore del tasso di dissipazione ε tramite la relazione:

$$\varepsilon_t = \frac{k^{3/2}}{0.3 D} \quad 4.22$$

con D pari al diametro idraulico calcolabile come:

$$D = 4 \frac{A}{P}$$

dove P è il perimetro bagnato della sezione d'ingresso.

Condizioni al contorno di uscita

Come condizioni al contorno di uscita si definisce il valore della pressione statica: $p = \bar{p}$ e si pone pari a zero il valore di:

$$\frac{dG_n}{dn} = 0$$

dove G_n assume il valore sia della velocità, sia del termine di energia cinetica turbolenta che del tasso di dissipazione nelle frazioni di volume perpendicolari alla sezione di uscita.

4.3 MODELLO SEMPLIFICATO

A partire dal modello bifasico completo e generalizzato descritto nei paragrafi precedenti, si sono introdotte, nelle equazioni della fisica matematica, delle ipotesi semplificative dedotte dal modello analitico proposto nel Capitolo 3.

In primo luogo si assume che entrambe le fasi (liquida e solida) che compongono il dominio in cui si propaga la corrente di torbidità siano descritte con un'unica equazione della quantità di moto, in modo tale da avere lo stesso campo di velocità. In sostanza, il flusso è considerato come una miscela omogenea, caratterizzata da densità variabile nello spazio e nel tempo in funzione della frazione dei volumi liquidi e solidi e che non ci siano sforzi all'interfaccia. Le forze di sollevamento (*lift*) e di trascinamento (*drag*) che agiscono sulle singole particelle, presenti nel modello completo, perdono di significato all'interno dell'equazione del moto e non vengono quindi considerate. La corrente, anche in questo caso, è di natura conservativa.

Inoltre, la turbolenza viene considerata assente e di conseguenza i modelli di turbolenza vengono trascurati. La viscosità effettiva è una proprietà della miscela e il moto è viscoso.

Con le semplificazioni apportate, le fasi che costituiscono la corrente hanno la stessa quantità di moto, vi è assenza di turbolenza, il moto è viscoso, non esistono termini di scambio tra i diversi strati a densità diverse e gli sforzi tra gli strati sono nulli, come nella soluzione analitica.

Pertanto, nel modello semplificato in esame, si utilizzano le seguenti equazioni:

Equazioni di continuità

Per quanto riguarda le equazioni di continuità, esse sono ancora risolte separatamente per le due differenti fasi.

$$\frac{\partial}{\partial t}(r_a \rho_a) + \nabla \cdot (r_a \rho_a U_a) = 0 \quad 4.1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r_s \rho_s) + \nabla \cdot (r_s \rho_s U_s) = 0 \quad 4.2$$

Equazioni della quantità di moto

L'equazione della conservazione della quantità di moto, come accennato in precedenza, è unica per entrambe le fasi che costituiscono la corrente di torbidità:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \times U - \mu) = B - \nabla p' \quad 4.23$$

in cui:

ρ è la densità della miscela ricavabile dalla relazione:

$$\rho = r_a \rho_a + r_s \rho_s$$

U è il vettore velocità;

B è la forza di galleggiamento per unità di volume, si calcola con la relazione (4.9);

p' pressione calcolata con l'equazione (4.10);

μ è la viscosità dinamica della miscela ricavabile tramite la relazione:

$$\mu = r_a \mu_a + r_s \mu_s$$

In cui μ_a e μ_b sono le viscosità dinamiche per moto laminare rispettivamente dell'acqua e del sedimento.

Le condizioni al contorno, per il modello semplificato, sono analoghe a quelle definite nel precedente paragrafo 4.2.2.

4.4 INSTALLAZIONE SPERIMENTALE

Le simulazioni numeriche condotte a partire dalla struttura fisico-matematica precedentemente descritta sono state messe a confronto con i risultati sperimentali di laboratorio provenienti un'indagine di laboratorio condotta dall'ex Polo Idraulico e Strutturale di Enel Hydro nell'ambito della Ricerca di Sistema, finanziata dal Ministero dell'Industria: progetto COMPA attività INTESE F (Modelli tridimensionali di trasporto di sedimenti in un invaso) da ex CESI Ricerca oggi ERSE s.p.a..

L'impianto sperimentale funzionava a ricircolo chiuso, con portata costante, ed era costituito da:

- una vasca di carico della miscela iperconcentrata (fango essiccato frantumato e acqua in proporzioni variabili);
- un serbatoio di accumulo della miscela iperconcentrata;
- un canale a pendenza variabile che rappresenta l'ipotetico serbatoio artificiale (Figura 4.1).

Il serbatoio è stato realizzato con un canale di larghezza 200 mm, che rappresenta una fetta verticale di un serbatoio dove il moto è prevalentemente bidimensionale nella verticale. Il primo tratto della canaletta è orizzontale e si estende per 500 mm, la profondità è di 400 mm rispetto alla quota superiore della sponda. Il tratto intermedio è di lunghezza 1000 mm e ha una pendenza del 50%, raggiungendo, nella parte finale, una profondità di 900 mm. Il tratto finale a pendenza nulla è lungo 1000 mm.

A monte l'apparato sperimentale è regolato da una paratoia 200 x 100 mm, che intercetta l'apertura di immissione della miscela, mentre a valle è stata inserita una saracinesca che funziona come uno scarico di fondo, la cui apertura è regolata per permettere di mantenere costante un livello di massimo invaso corrispondente alla profondità di 900 mm.

Si vedano Figura 4.1 e Figura 4.2.

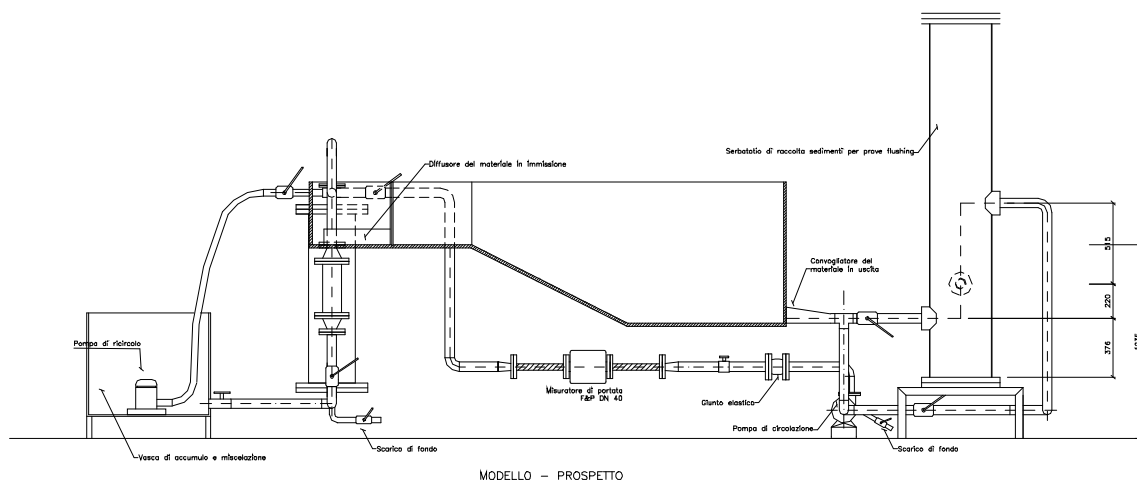


Figura 4.1: Schema dell'impianto sperimentale.

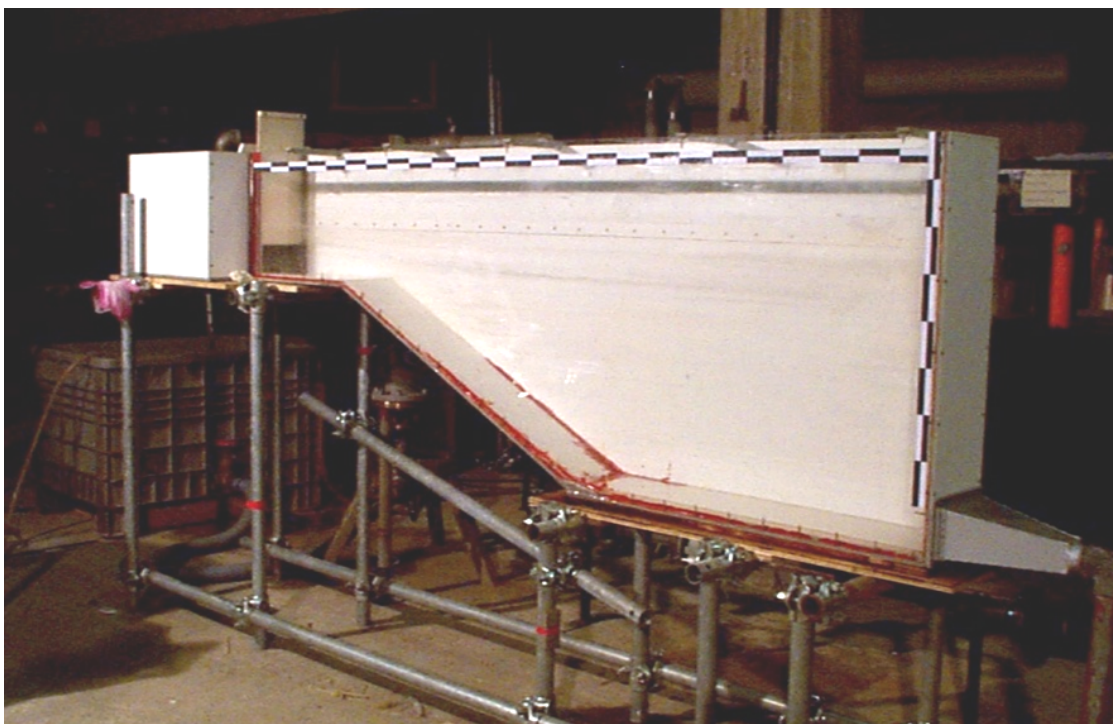


Figura 4.2: vista longitudinale dell'impianto sperimentale.

Per la realizzazione della miscela iperconcentrata da utilizzare nello studio delle correnti di torbidità, si è scelto un sedimento coesivo estratto dal serbatoio artificiale della diga di Pozzillo (Sicilia) in quanto proveniente da una condizione analoga a quella teorica dello studio.

Le prove geotecniche di densità e granulometriche eseguite hanno fornito per il materiale in esame le seguenti caratteristiche:

- Densità $\rho_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$;
- Granulometria (μm) argilla ($d < 2$) 43%, limo ($2 < d < 20$) 38%, sabbia ($d > 20$) 19%.

Il materiale di partenza era quindi un'argilla limosa.

La simulazione è stata condotta con una corrente avente le seguenti caratteristiche:

Concentrazione in volume del solido	3 %
Frazione volumetrica	0.03 m^3/m^3
Densità della miscela	1049.5 kg/m^3
Concentrazione volumetrica	79.5 g/l ($=\text{kg}/\text{m}^3$)
Portata di ricircolo	4 l/s

Tabella 4.1: Valori caratteristici della miscela usata nelle prove.

4.5 CARATTERISTICHE DEL MODELLO NUMERICO

Nel presente paragrafo vengono presentate le caratteristiche alla base delle simulazioni svolte con il modello numerico semplificato e quello generalizzato, descritti nei paragrafi 4.2.1 e 4.3.

4.5.1 Geometria della canaletta 2D numerica

Il dominio utilizzato per lo studio numerico comprende:

1. un tratto del diffusore d'ingresso;
2. la canaletta;
3. un tratto convergente nel boccale di uscita;

Non è stato preso in considerazione il resto dell'impianto esterno alla canaletta. L'interazione tra il dominio numerico e il resto del sistema avviene attraverso l'assegnazione delle condizioni al contorno nel modello numerico.

Le caratteristiche geometriche della canaletta numerica sono tali da consentire lo studio di flussi bidimensionali nel piano verticale.

4.5.2 Reticolo di calcolo

La creazione del reticolo di calcolo è stata effettuata suddividendo l'area di studio in blocchi, successivamente discretizzati mediante volumi finiti costituiti da elementi lineari esaedrici.

La suddivisione in blocchi utilizzata consente di avere una maggiore risoluzione di calcolo solo dove necessaria, in modo da rendere più efficiente l'esecuzione delle prove numeriche e la visualizzazione dei risultati.

La risoluzione spaziale adottata è variabile tra circa 0.01 m e 0.04 m. Gli elementi vicino al fondo presentano un'altezza di 0.01 m.

Complessivamente il reticolo di calcolo è costituito da 11 blocchi e da 3696 elementi. In direzione z , il reticolo non è discretizzato, in quanto il flusso studiato è bidimensionale nel piano verticale x - y .

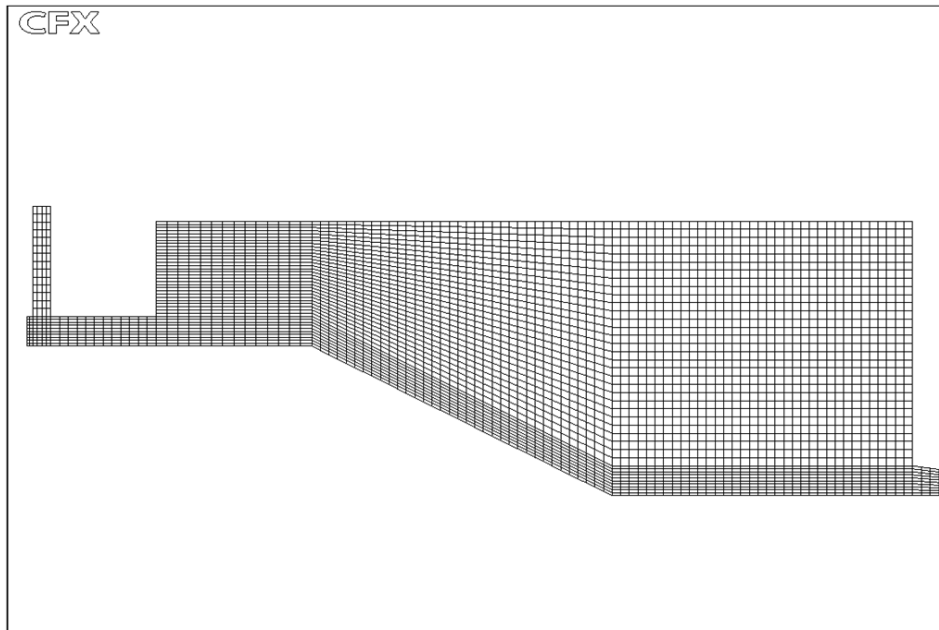


Figura 4.3: Reticolo di calcolo per la canaletta 2D numerica.

4.5.3 Dati fisici

<i>Descrizione</i>	<i>Valore</i>
Velocità	0.2 m/s
Portata volumetrica	4 l/s
Frazione volumetrica	0.03 m ³ /m ³
Concentrazione volumetrica	79.5 g/l
Concentrazione massica	0.079 kg/kg
Densità sedimenti	2650 kg/m ³
Diametro medio sedimenti	3 μm
Densità acqua pulita	1000 kg/m ³
Viscosità dinamica (laminare) dell'acqua	0.0001 Ns/m ²
Intensità di turbolenza	3.7 %
Scala di dissipazione turbolenza (diametro idraulico)	0.13 m
Densità miscela acqua + sedimento	1050 kg/m ³

Tabella 4.2: Condizioni d'ingresso della miscela acqua e sedimenti nella canaletta

Il livello della superficie libera è posto a 0.30 m dal fondo (misurato nel tratto a fondo orizzontale subito a valle del diffusore d'ingresso).

Nella canaletta viene immessa, attraverso l'apertura di monte, una corrente d'acqua carica di sedimenti in sospensione con concentrazione costante. La stessa corrente è fatta uscire integralmente dall'apertura di valle in modo da mantenere il livello della canaletta costante. I dati fisici caratteristici dell'acqua entrante nella canaletta sono sintetizzati nella Tabella 4.2.

Come precedentemente descritto, le simulazioni numeriche sono state condotte nella condizione di flusso laminare, newtoniano, viscoso con un numero di $Re < 1000$ e di carattere conservativo per il modello semplificato; mentre nel caso del modello generalizzato o completo è stata adottata l'ipotesi di moto turbolento e i termini dell'energia turbolenta k e ε , per il calcolo della viscosità effettiva nell'equazione di Navier-Stokes, sono stati calcolati tramite un modello di turbolenza a due equazioni.

Nel primo caso, schema semplificato, il modello numerico viscoso è stato calibrato confrontando l'andamento temporale del profilo dell'onda nel modello fisico con quello risultante dal modello matematico. La calibrazione è stata condotta aumentando il valore della viscosità dinamica nel modello numerico fino a ottenere una somiglianza accettabile tra l'avanzamento temporale dell'onda simulata e quella reale. In particolare il valore di viscosità di calibrazione varia in un campo che si estende tra 1.12 e 10 Pa s. Occorre sottolineare che il valore di 1.12 Pa s corrisponde in linea di massima al valore fisico reale, poiché la miscela sembra avere un comportamento laminare e viscoplastico.

Come si può notare, l'incremento della viscosità dinamica nel modello matematico si discosta ampiamente da quella fisica (nel modello matematico la viscosità è circa un ordine di grandezza più grande di quella fisica), come avviene anche nei confronti eseguiti tra la soluzione analitica e i dati sperimentali di letteratura nel paragrafo 3.10. I risultati della calibrazione del modello numerico semplificato sono riportati nel successivo paragrafo 4.6.

Nel caso del modello generalizzato o completo, il modello di turbolenza riproduce i meccanismi di produzione e dissipazione di sforzi generati dalla corrente e quindi non è necessario procedere con una calibrazione del modello. Nel paragrafo 4.6 successivo, viene riportato un confronto tra la soluzione ottenuta con il modello numerico semplificato, calibrato sui dati sperimentali, e quella ottenuta con il modello numerico generalizzato.

Comunque occorre sottolineare che, in termini di velocità e di altezza del corpo dell'onda, il comportamento della miscela nella prova di laboratorio è prevalentemente viscoso, come può avvenire in un caso reale.

4.5.4 Discretizzazione temporale

La simulazione del transitorio di ciascuna prova sperimentale viene effettuata adottando un passo di tempo variabile, che s'incrementa col procedere del calcolo $\Delta t = 0.001 \div 0.1$ s per la prova.

I passi di tempo adottati consentono di seguire la fisica temporale del problema, e di contenere eventuali inaccuranze sul calcolo dei termini convettivi nelle equazioni di bilancio.

4.6 CONFRONTO TRA I RISULTATI DEI MODELLI NUMERICI E SPERIMENTALI

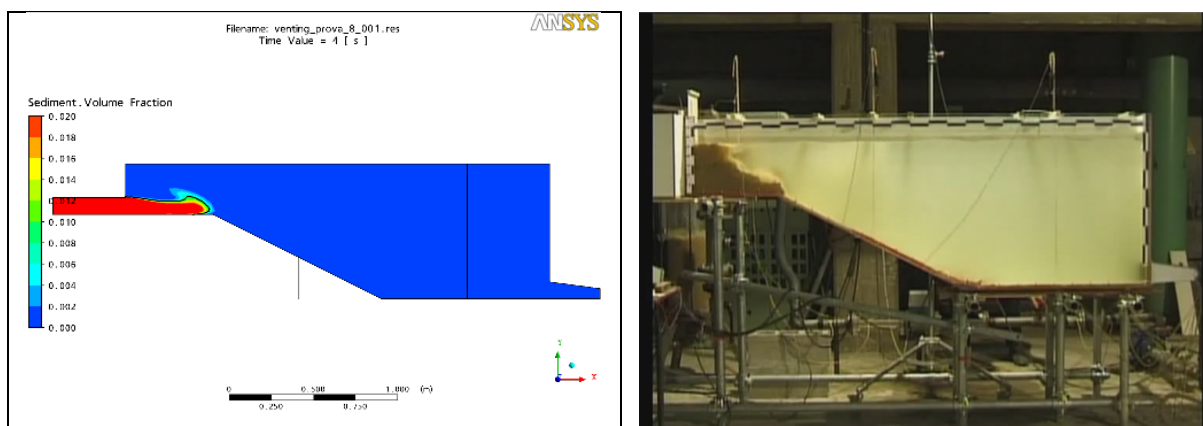
In Figura 4.4 vengono riportate le immagini estratte dal filmato della simulazione sperimentale per vari istanti temporali ($\Delta t \approx 1$ s), messe a confronto con i risultati ottenuti dall'implementazione del modello numerico semplificato, dopo esser stato calibrato ed aver quindi imposto nel modello una viscosità dinamica di 10 Pa s.

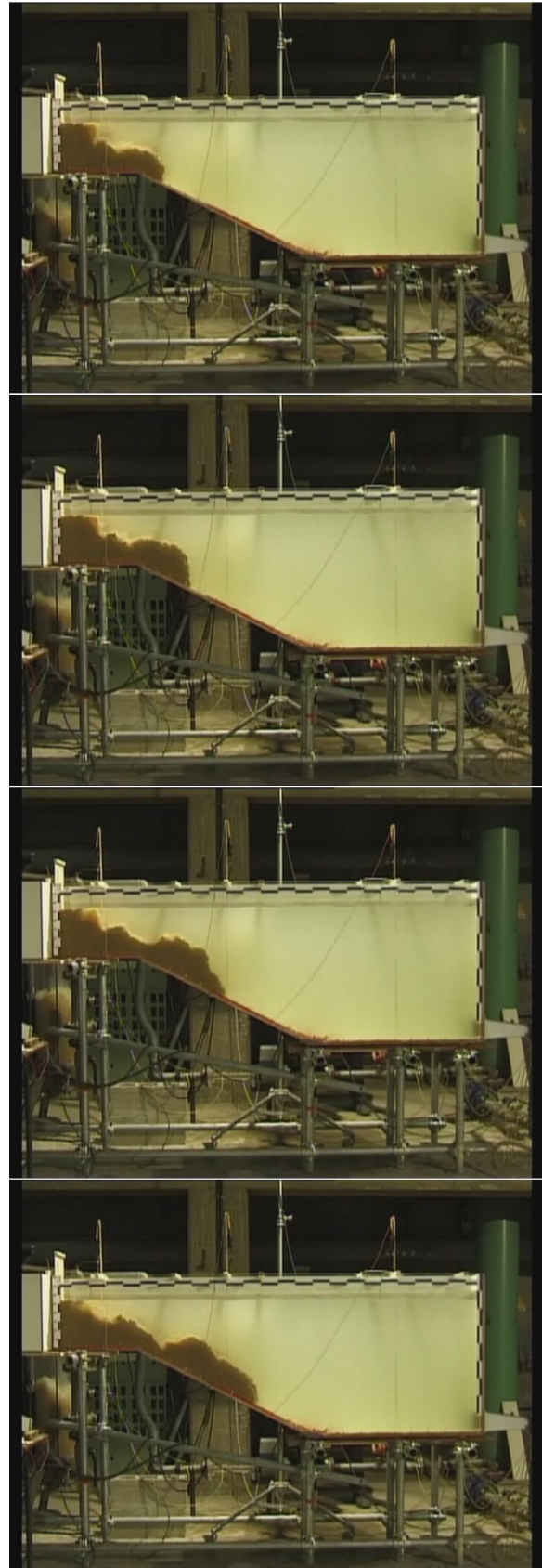
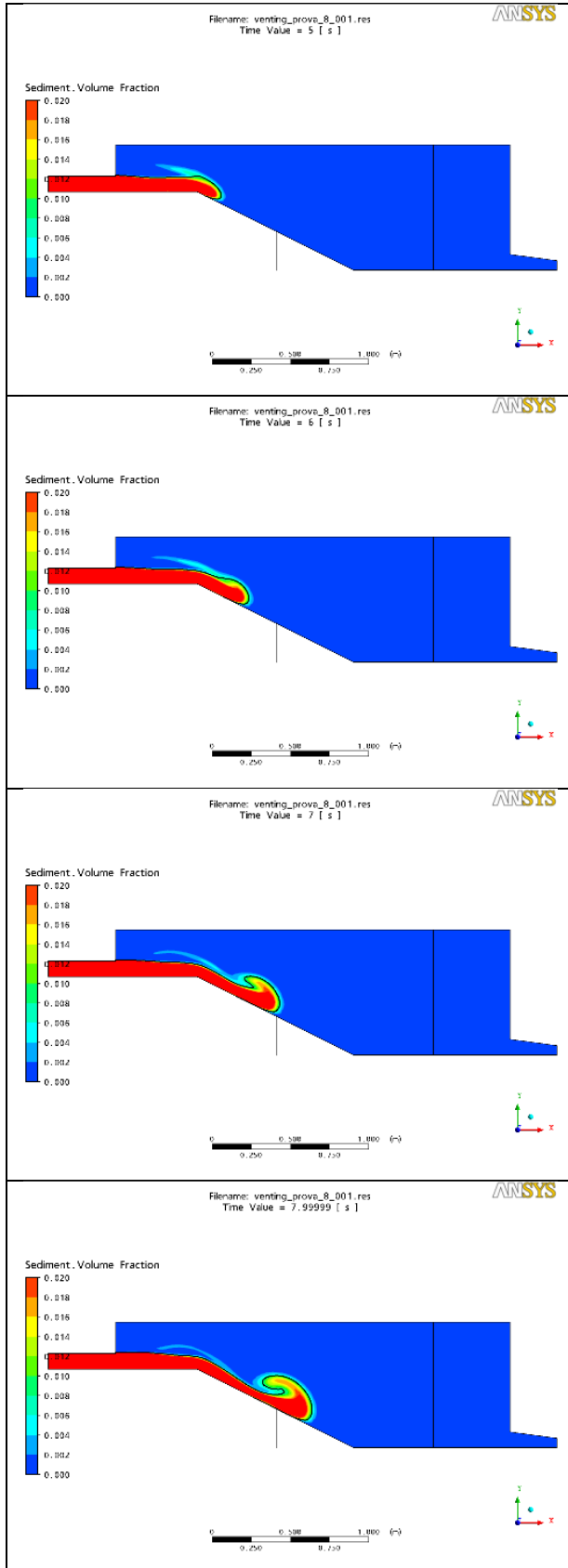
Nelle figure che riportano i risultati delle simulazioni numeriche (colonna di destra), la corrente di torbidità viene tracciata in funzione della concentrazione del materiale solido in sospensione, assumendo colorazioni differenti in base al valore di concentrazione.

Il confronto è stato eseguito a partire da 4 s dall'inizio della simulazione fino all'istante in cui il fronte dell'onda è prossimo allo "scarico di fondo", ma senza considerare l'impatto della corrente sulla parete di chiusura, che avviene a circa 12 s dall'inizio dell'immissione.

La simulazione numerica è stata comunque effettuata in un tempo di transitorio superiore a 12 s considerando anche l'impatto della corrente sulla parete e il fenomeno di ricircolo generato.

Il confronto con la prova sperimentale è stato però limitato all'intervallo del transitorio in cui il fenomeno propagatorio dipende solo dalle forze inerziali e gravitazionali (e non da quelle d'impatto con la parete di chiusura) per renderlo in linea con la soluzione analitica.





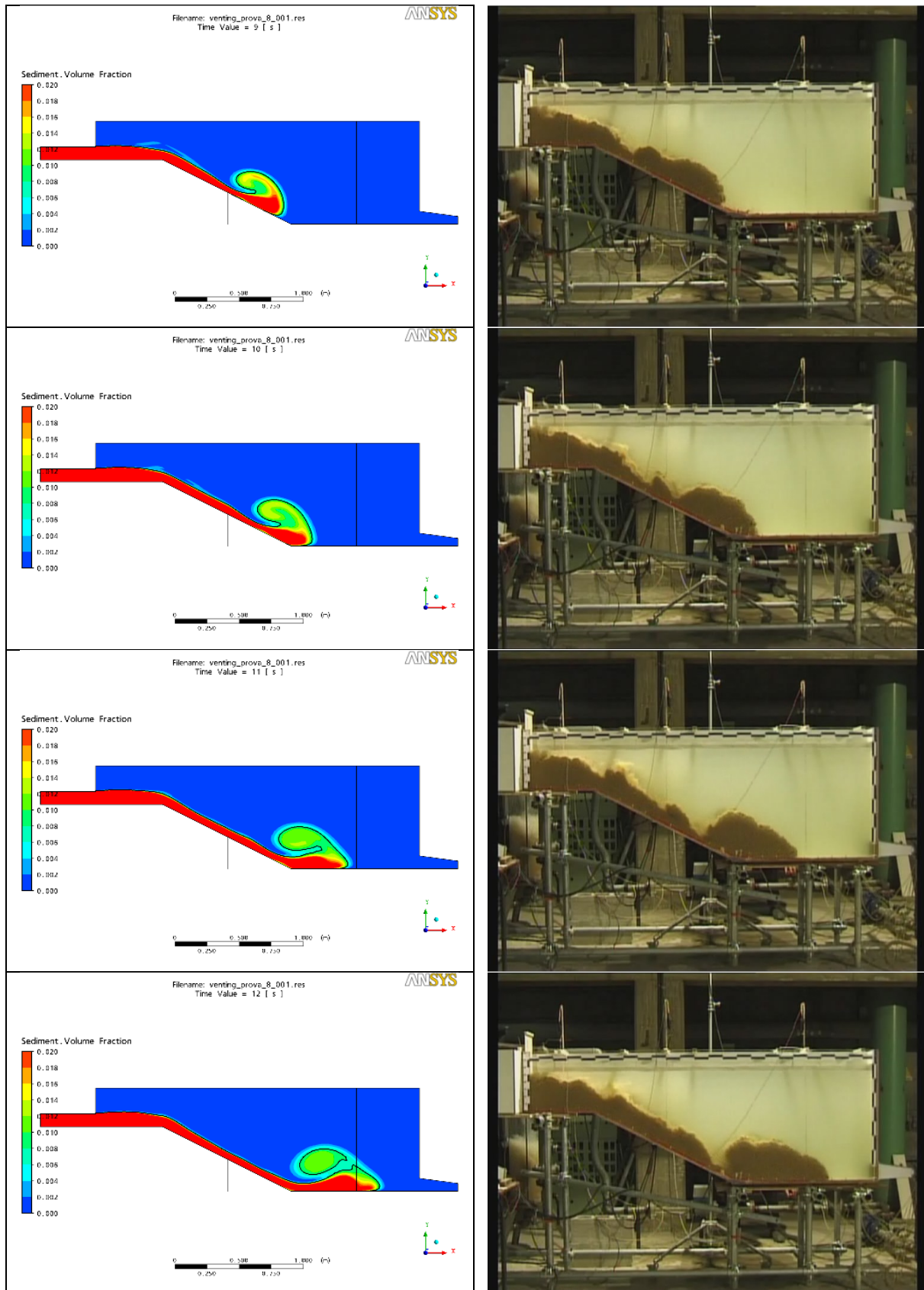


Figura 4.4: confronto tra i risultati del modello numerico semplificato, $\mu=10$ Pa s, e la simulazione sperimentale per i diversi istanti temporali, 4-12 secondi ($\Delta t \approx 1$ s).

Dal confronto tra i risultati numerici ottenuti con il modello semplificato (ma anche per quello generalizzato, riportati in Figura 4.6) e quelli sperimentali, si osserva una diversità del comportamento della corrente in prossimità del punto d'immissione. Questa discrepanza è prodotta dal modo in cui è stata simulata numericamente l'immissione della miscela all'ingresso dell'apparato sperimentale.

In particolare, la corrente di sedimenti è immessa nel modello numerico come un getto a velocità orizzontale entrante nella canaletta attraverso il diffusore. Tale getto è confinato nella zona inferiore della canaletta. Al contrario, nella prova sperimentale, viene immessa una corrente di sedimenti con una componente di velocità verticale indotta da bolle di aria provenienti dall'impianto esterno (si veda Figura 4.5). L'effetto di diffusione verso l'alto dei sedimenti a causa delle bolle, all'immissione nella canaletta, non è preso in considerazione dalla simulazione numerica.

Questo giustifica quindi la mancata corrispondenza nel tratto iniziale tra il profilo simulato e quello risultante dalla prova.

La comparazione, in Figura 4.4, dei fotogrammi tratti dal filmato della prova sperimentale con i risultati ottenuti adottando il modello numerico semplificato calibrato con viscosità dinamica dell'ordine dei 10 Pa s, mostra la bontà del modello numerico nel ricostruire la dinamica del profilo dell'onda durante il transitorio esaminato.

Per quanto riguarda la propagazione e la forma dell'onda nel fronte si può affermare che il modello numerico, con una viscosità di 10 Pa s, riesce a riprodurre correttamente il fenomeno. Analizzando in particolare il corpo dell'onda, si nota che la corrente di torbidità sembra "rompersi" in diversi punti, mentre la soluzione numerica sembra quasi parallela al fondo. Questa differenza potrebbe essere spiegata dall'innescarsi del già citato fenomeno dell'*hydroplaning*; questo avvenimento implica l'ingresso dell'acqua circostante al di sotto del profilo con conseguente incremento della diluizione e separazione del fronte dal corpo dell'onda. Tale fenomeno non viene colto correttamente dal modello numerico.

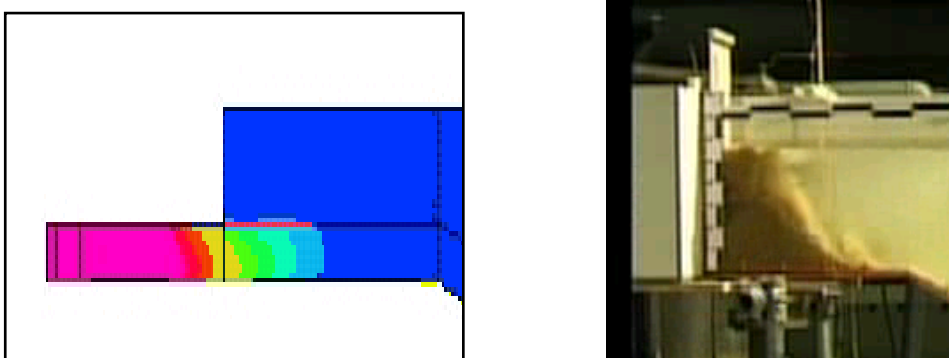


Figura 4.5: Differenti modalità d'immissione dei sedimenti nella canaletta tra il modello numerico (a sinistra) e l'installazione sperimentale (a destra).

Dal Grafico 4.1 al Grafico 4.9 vengono presentati il profilo della corrente sperimentale e quello numerico semplificato, utilizzando diversi valori di viscosità, 1.12, 3 e 10 Pa s. Si osserva come, con le viscosità più elevate, si riesca a ricostruire con maggiore precisione il profilo sperimentale.

Occorre evidenziare che la viscosità adottata, come quella fisica, $\mu=1.12$ Pa s, è molto grande e rappresenta la reologia di un moto viscoplastico piuttosto che quella di un moto laminare viscoso.

Come sopra menzionato, si può affermare che la miglior rappresentazione del profilo dell'onda e del tempo di propagazione del fronte è ottenuta con la viscosità più elevata di 10 Pa s; ma occorre sottolineare che anche negli altri casi, con la viscosità più bassa, il modello numerico coglie correttamente la dinamica del fenomeno.

Si può quindi concludere che una buona rappresentazione del fenomeno implica l'incremento della viscosità dinamica di tre o quattro ordini di grandezza rispetto a quella dell'acqua. Infatti, la corretta rappresentazione numerica della dinamica di una corrente di torbidità simulata in laboratorio ha richiesto un incremento della viscosità della miscela tale per cui reologicamente la si possa paragonare al miele. Perciò una valida simulazione della dinamica di un moto viscoso, laminare e newtoniano sembra non poter prescindere dall'incremento della viscosità dinamica di diversi ordini di grandezza rispetto a quella dell'acqua, come già dimostrato anche dal confronto della soluzione analitica con i dati sperimentali di letteratura, presentato nel precedente paragrafo 3.10.

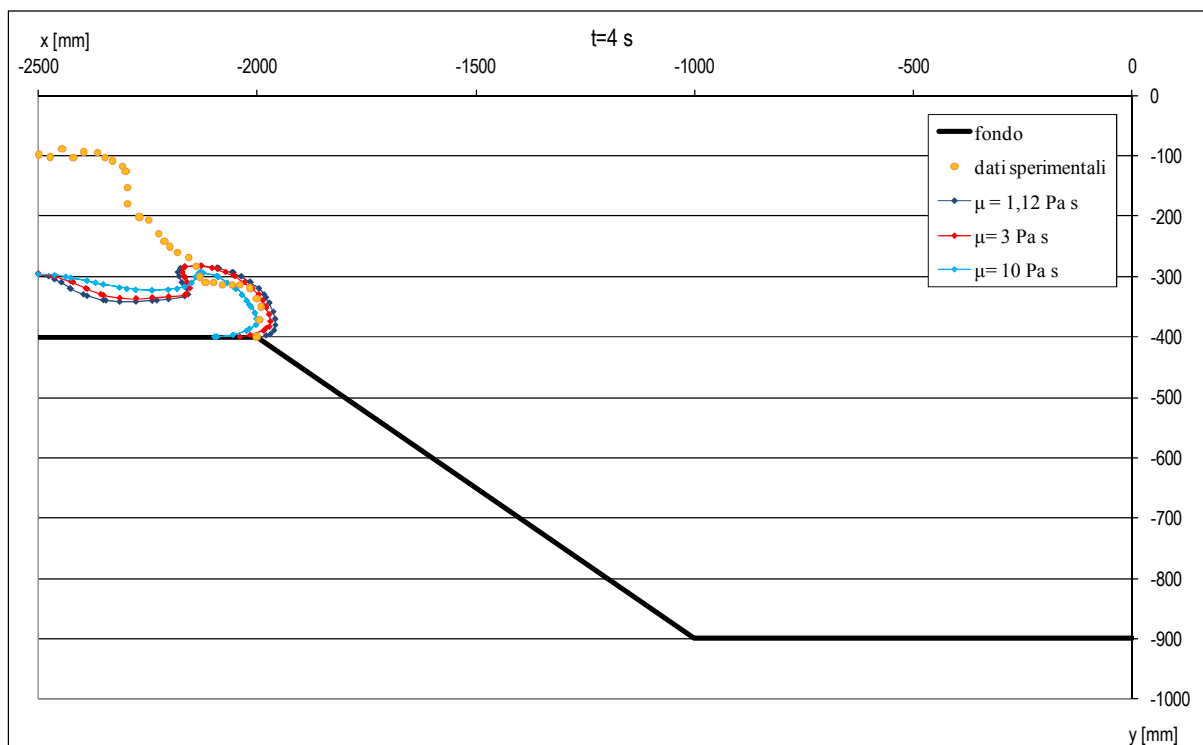


Grafico 4.1: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 4 s.

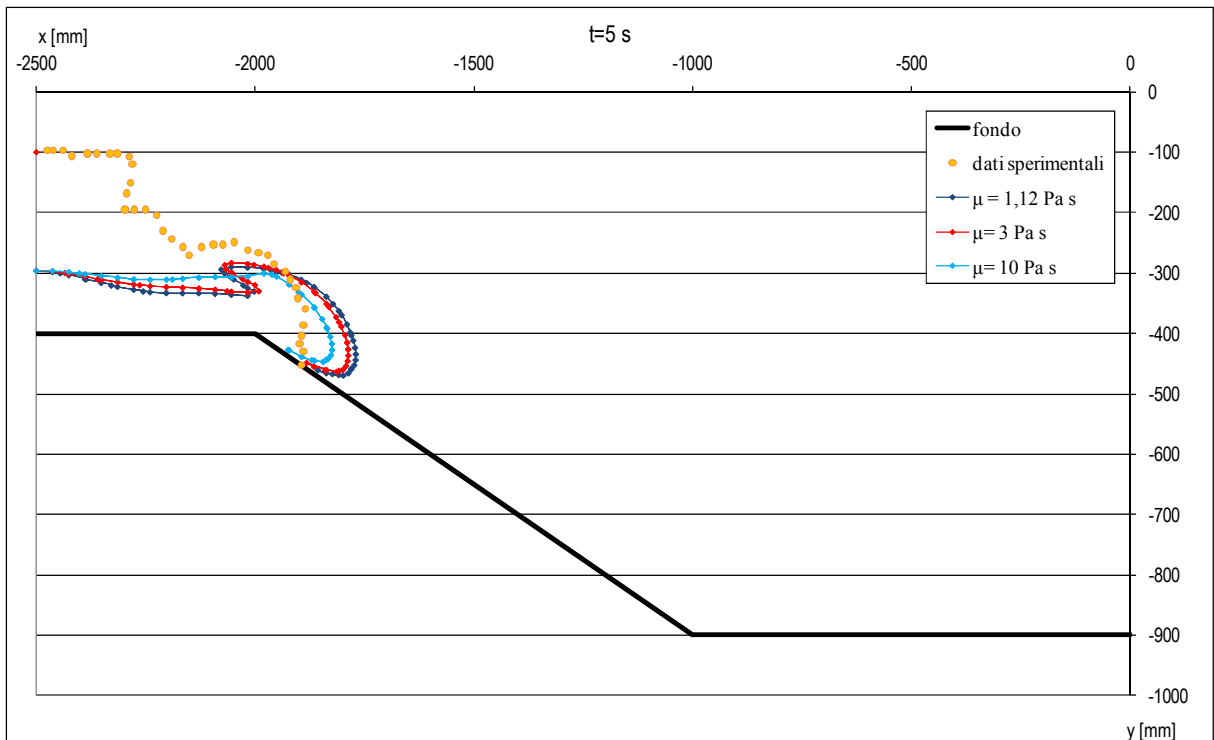


Grafico 4.2: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 5 s.

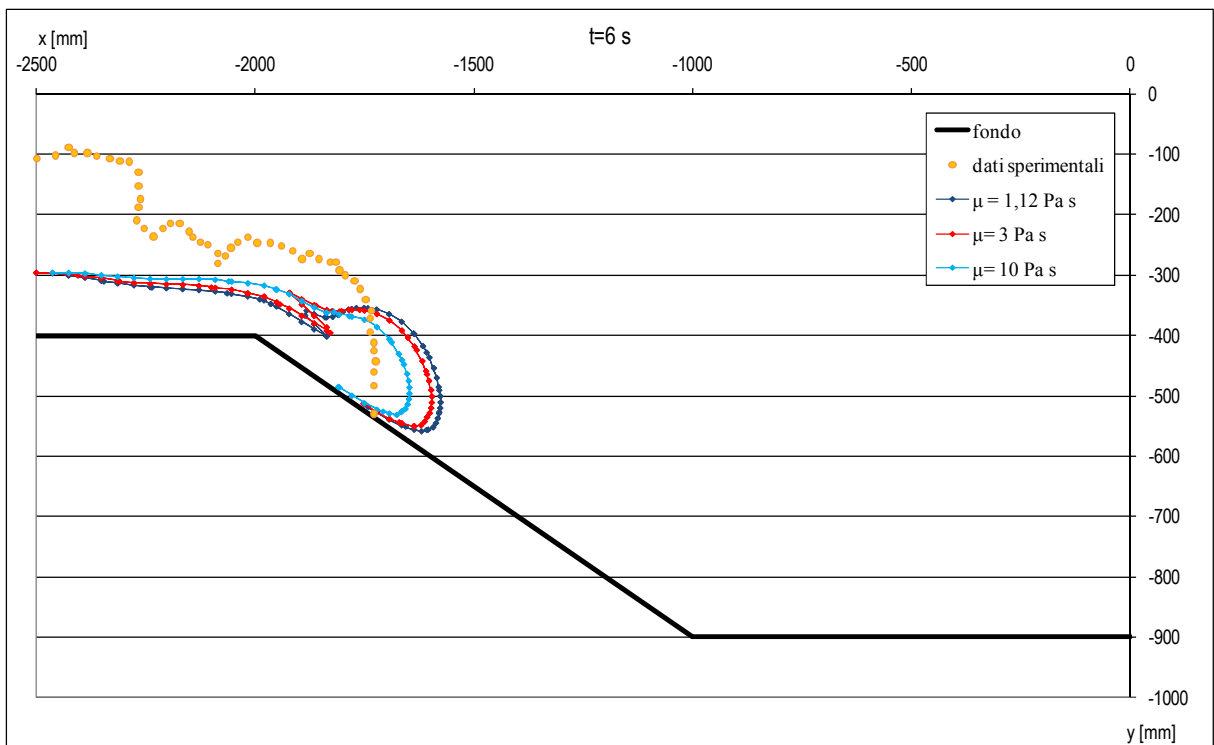


Grafico 4.3: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 6 s.

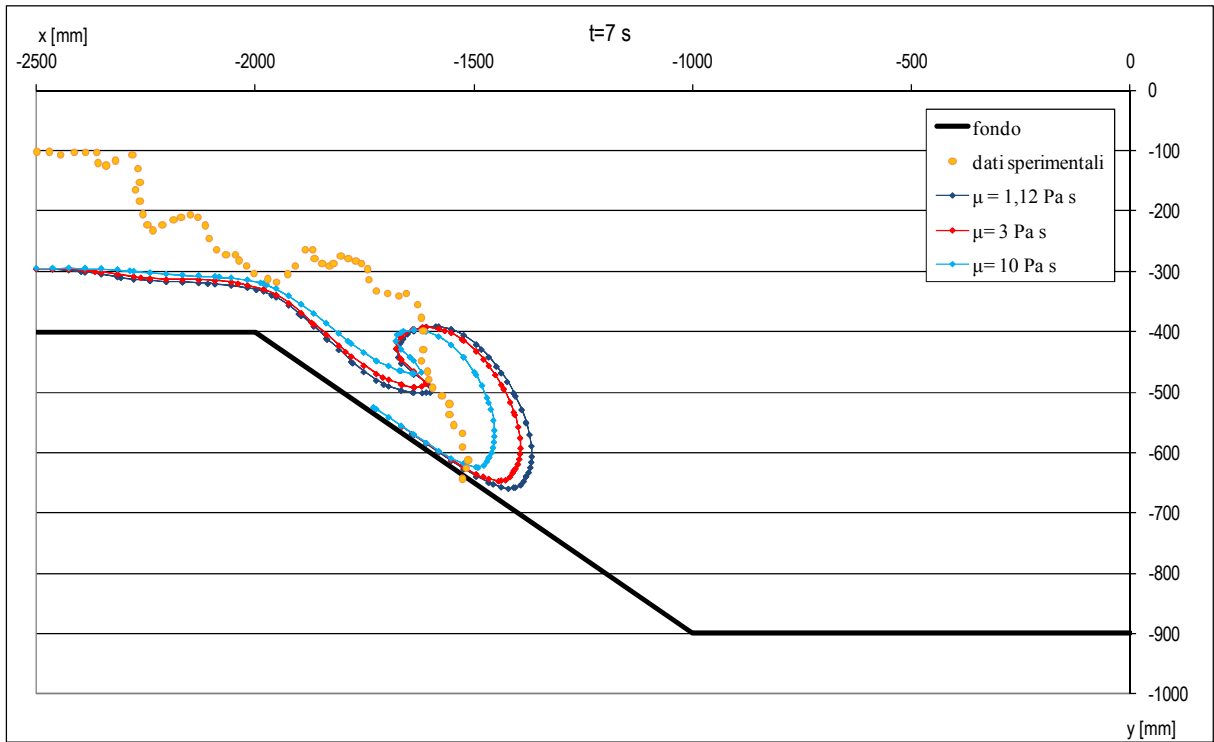


Grafico 4.4: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 7 s.

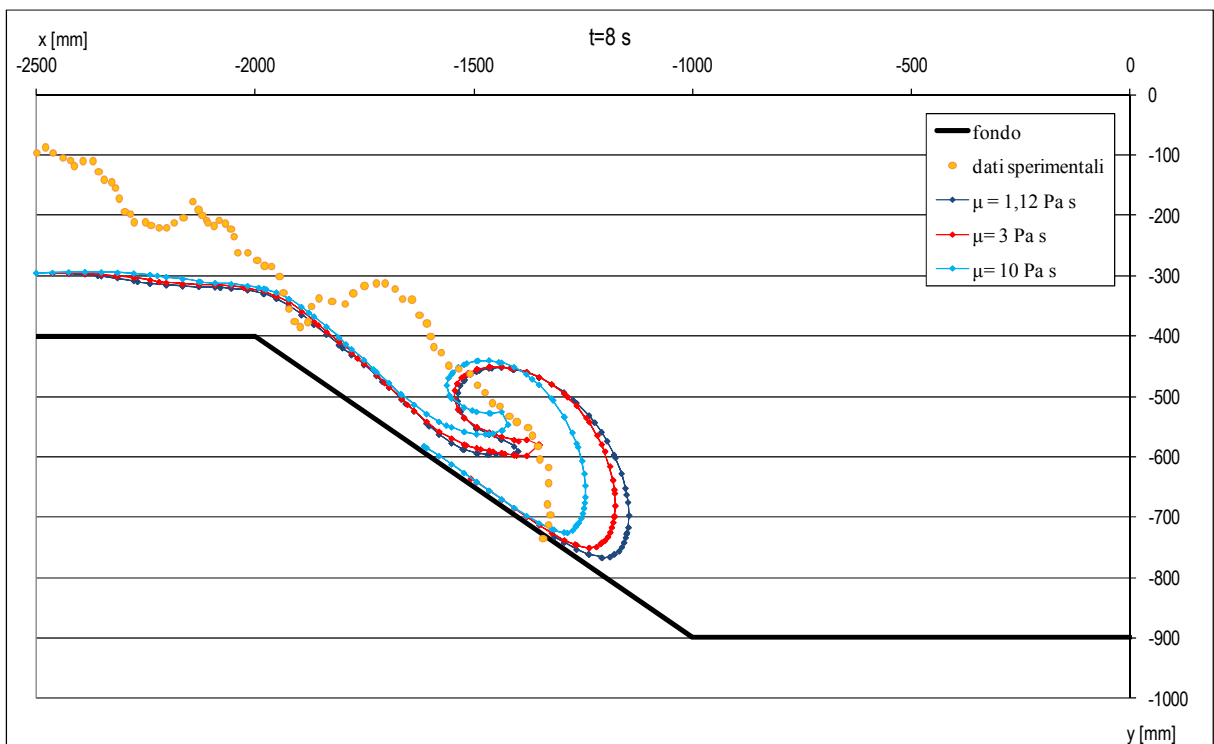


Grafico 4.5: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 8 s.

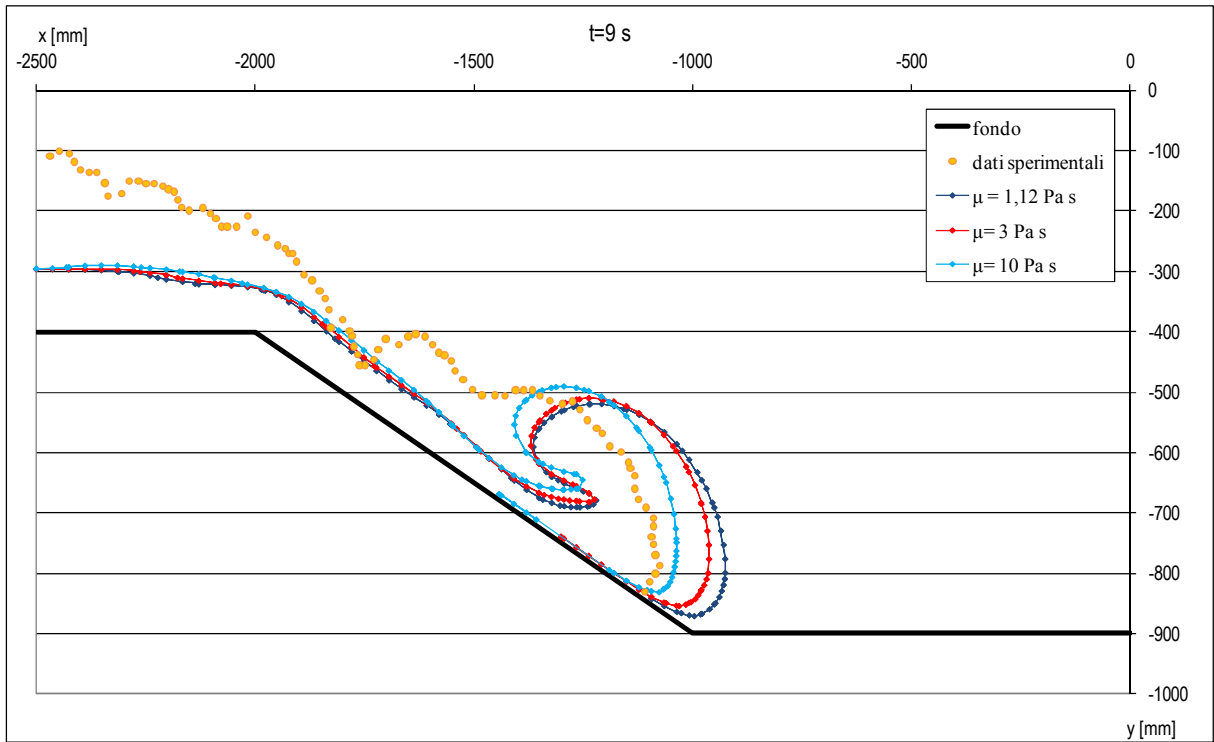


Grafico 4.6: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 9 s.

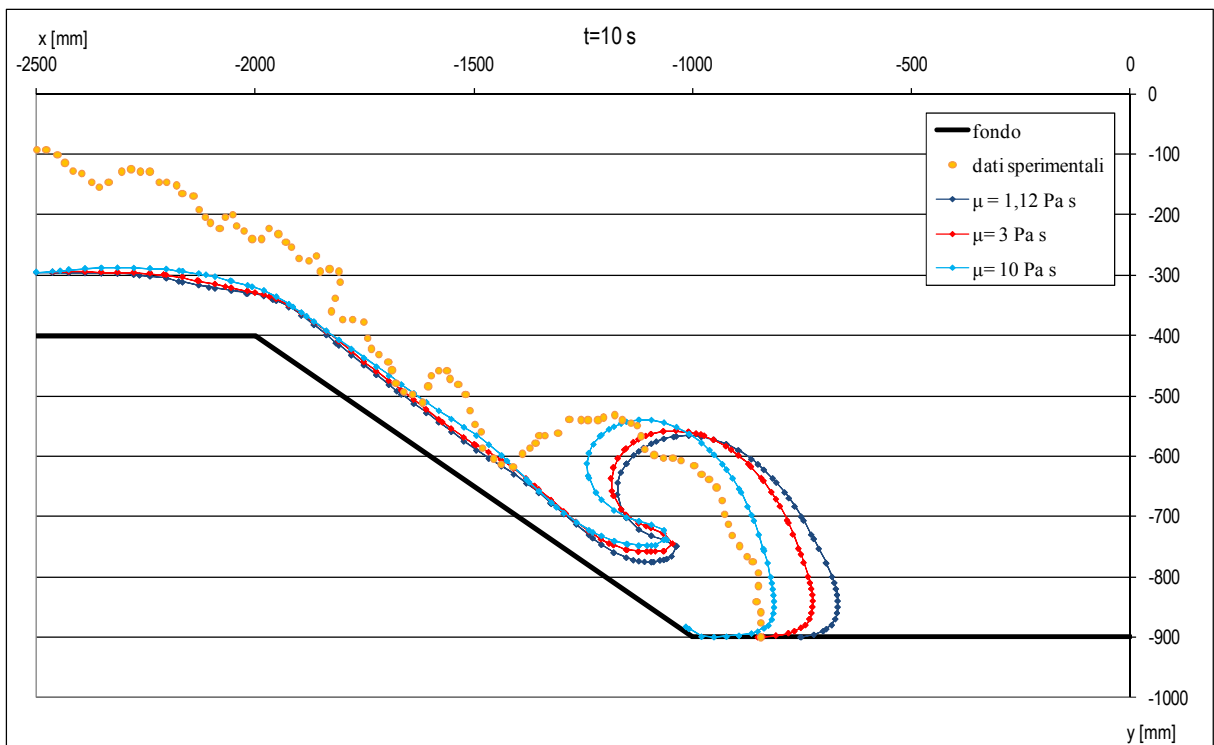


Grafico 4.7: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 10 s.

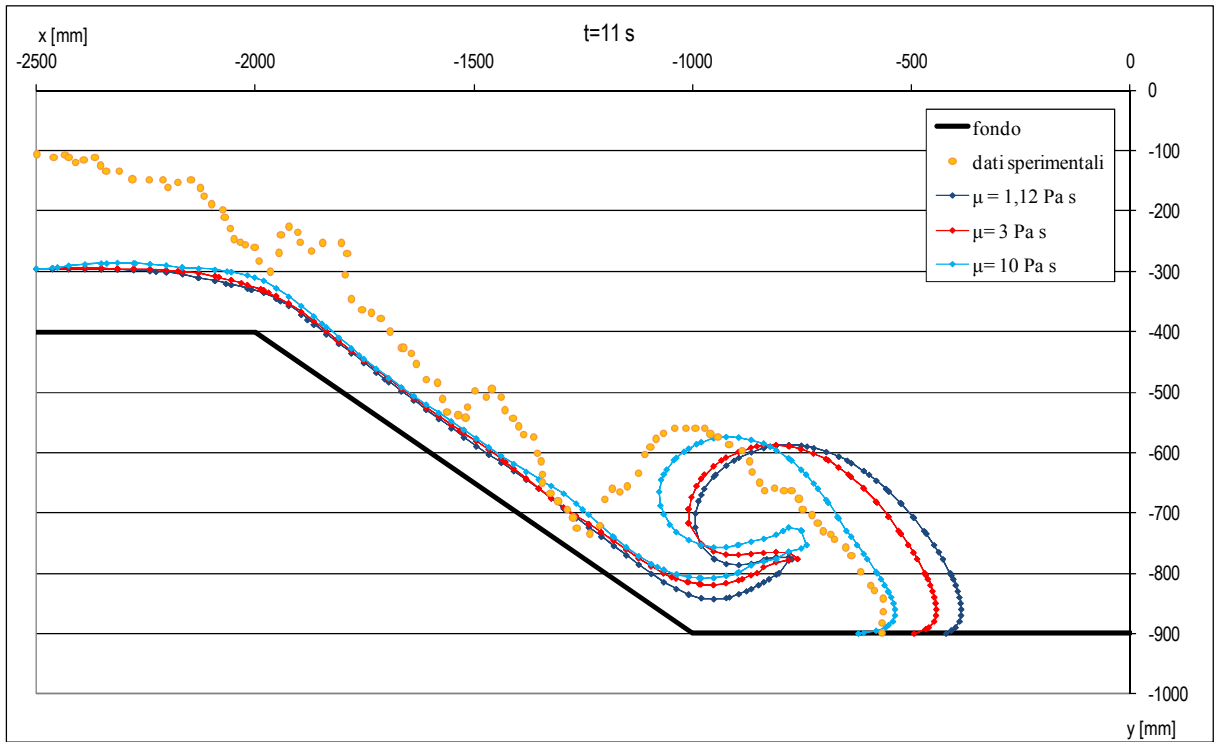


Grafico 4.8: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 11 s.

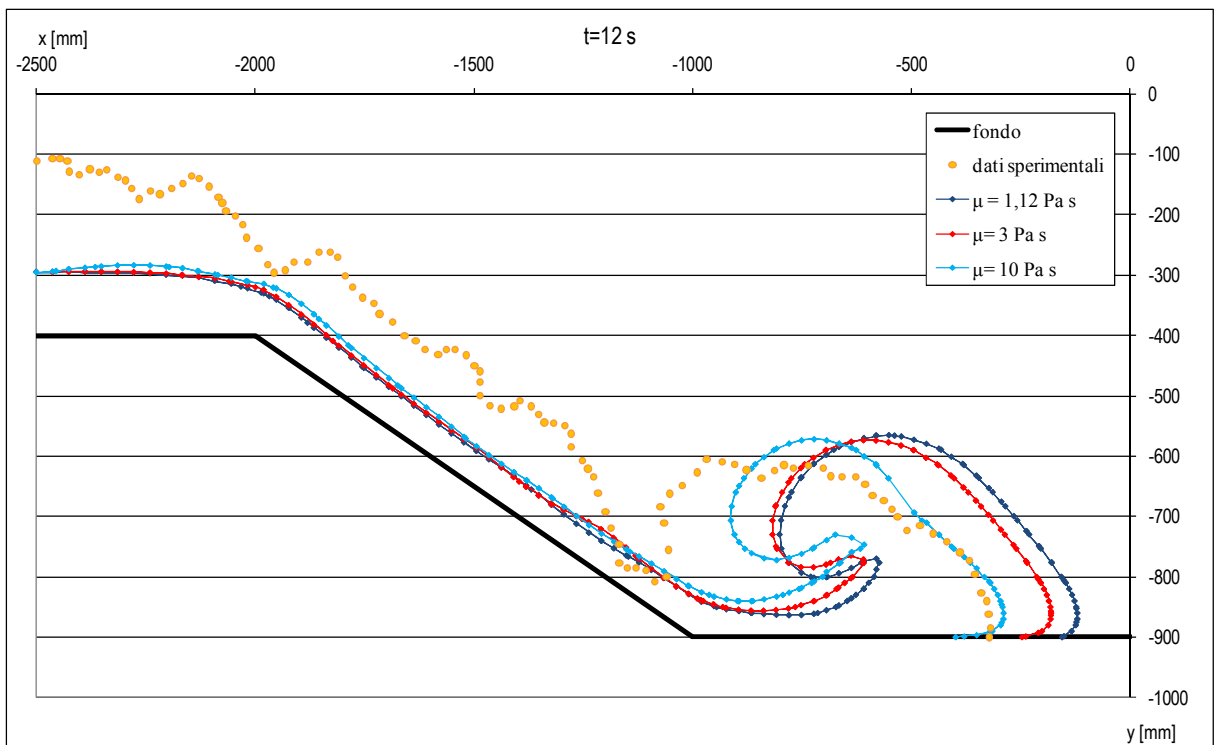
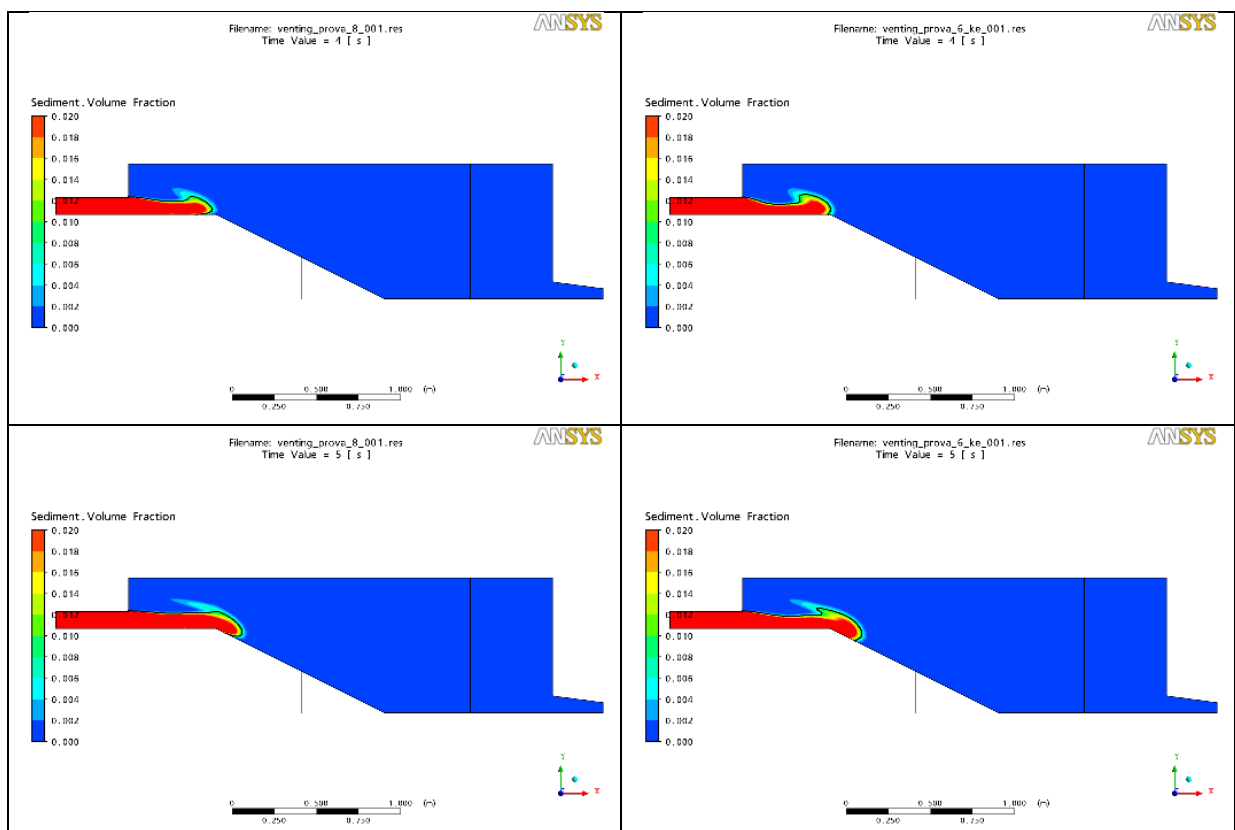


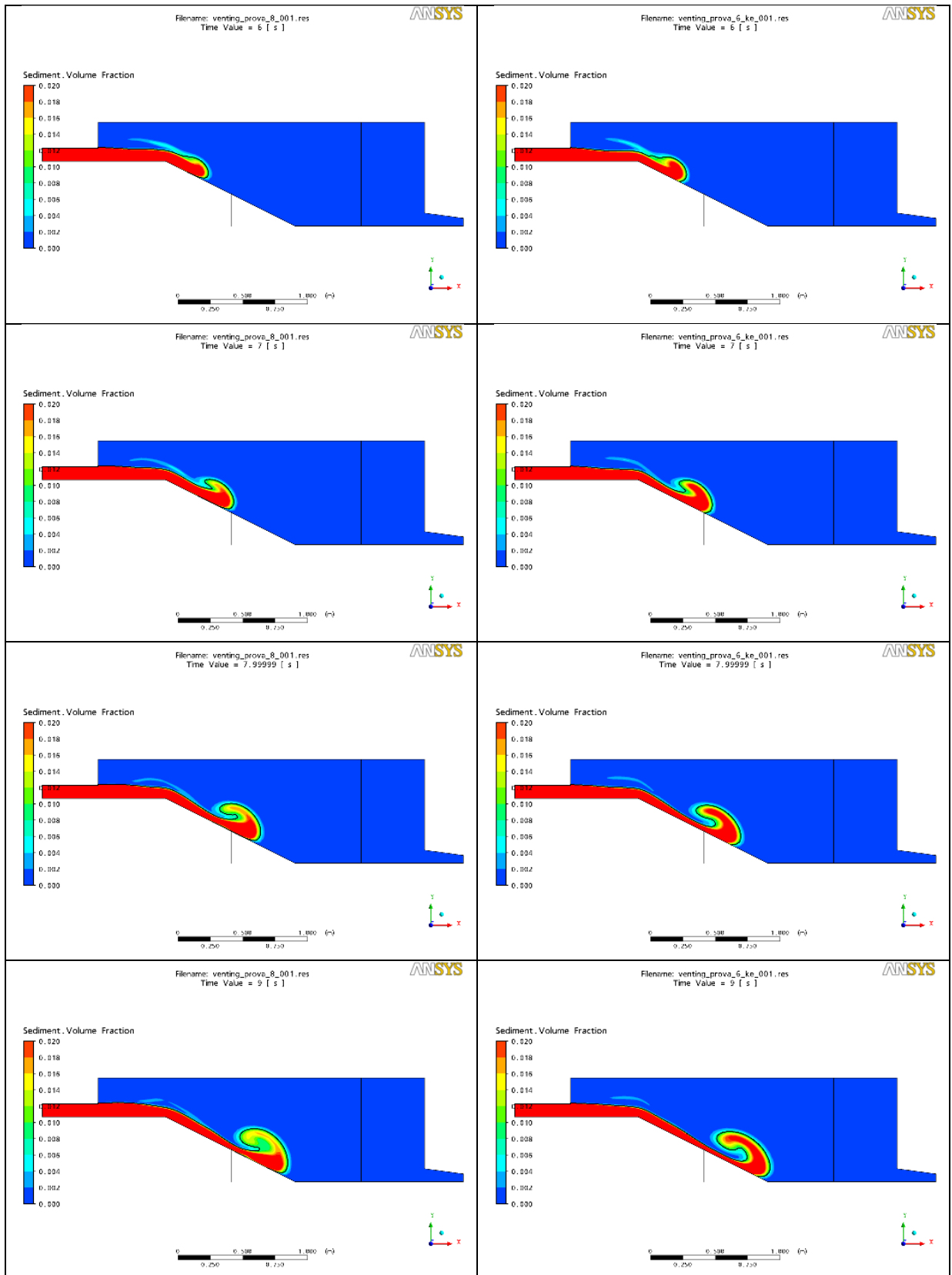
Grafico 4.9: confronto tra i dati sperimentali e il modello semplificato adottando diverse viscosità. Tempo del transitorio 12 s.

Nella Figura 4.6 viene presentato il raffronto tra il modello numerico semplificato, con viscosità 10 Pa s, e quello generalizzato di natura turbolenta. Ambedue i modelli ricostruiscono correttamente la dinamica del fenomeno; ma i risultati del modello numerico semplificato, basato sulle ipotesi desunte dalla soluzione analitica, sono incoraggianti sia dal punto di vista della qualità dei risultati che da quello dei tempi di calcolo impiegati per condurre le simulazioni.

Per quanto riguarda quest'ultimo punto, nelle simulazioni eseguite, visto le dimensioni ridotte del reticolo di calcolo, il transitorio è molto piccolo e non si notano differenze rilevanti tra la simulazione del modello generalizzato e quello semplificato. Quest'ultimo però è costituito da un numero minore di equazioni rispetto al modello numerico generalizzato e, se applicato a un dominio di calcolo esteso, intuitivamente richiederà dei tempi di calcolo inferiore per trovare la soluzione, avendo meno equazioni da risolvere.

Sono quindi evidenti i vantaggi, dal punto di vista numerico, dell'utilizzo di un modello semplificato rispetto a uno generalizzato completo. Questo fatto apre la possibilità di simulare casi reali con degli accorgimenti fisico matematici che rendano attraenti gli approcci numerici rispetto a quelli fisici, sia dal punto di vista dei tempi computazionali che dei costi, con la possibilità di non perdere in precisione nella ricostruzione fisica del fenomeno.





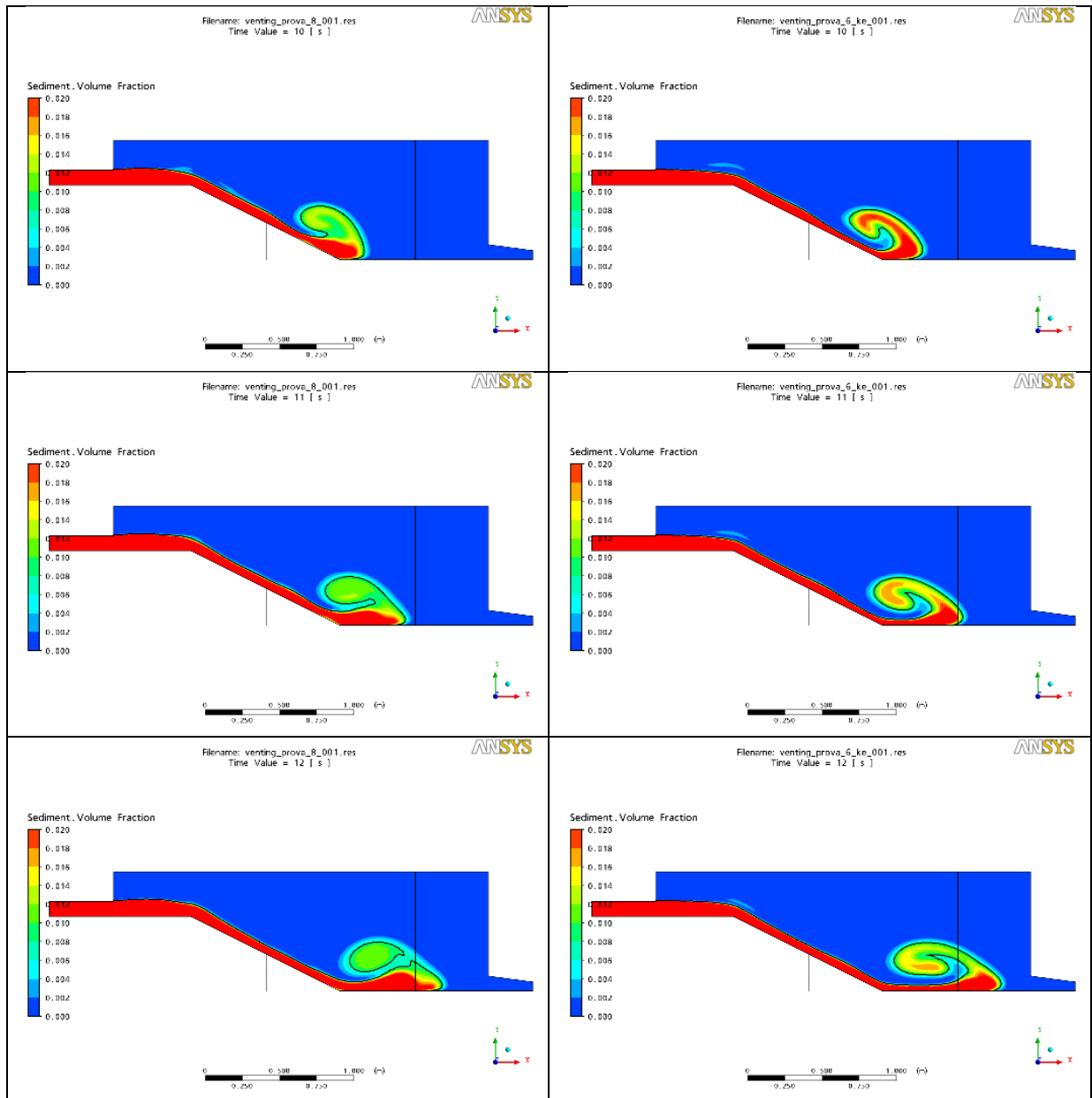


Figura 4.6: confronto tra il modello numerico semplificato, con viscosità 10 Pa s, nella colonna di destra, e quello generalizzato di natura turbolenta, nella colonna di sinistra.

5 CONCLUSIONI

Nel presente capitolo vengono riportati i risultati più significativi a cui si è giunti durante lo svolgimento del lavoro ed esposti già in forma diffusa nei precedenti capitoli; inoltre, si forniscono degli spunti per ulteriori ricerche e futuri approfondimenti sull'argomento.

Innanzitutto, è stata condotta un'analisi teorica delle equazioni fisico matematiche utilizzate per la trattazione di una corrente di torbidità di natura turbolenta o laminare e di carattere conservativo o non conservativo. In particolare si sono identificati i limiti dei modelli concettuali atti alla rappresentazione dei processi d'inglobamento del materiale solido presente sul fondo in relazione all'energia turbolenta necessaria per garantire l'esistenza fisica di una corrente di torbidità. Sulla base di tale analisi si sono create le premesse per l'elaborazione della soluzione analitica, che corrisponde al fulcro della ricerca.

L'analisi dimensionale svolta, ha indicato come in un fluido prevalentemente viscoso, sia di natura turbolenta che laminare, la viscosità sia il parametro dominante che controlla e condiziona la dinamica di propagazione di una corrente di torbidità.

La soluzione analitica è stata sviluppata per una corrente di torbidità di natura viscosa che si propaga all'interno di un serbatoio, senza deposito né inglobamento di materiale solido presente sul fondo, cioè una corrente conservativa. La soluzione si basa sulle equazioni delle acque basse nell'ipotesi di moto omogeneo, newtoniano, considerando anche l'eventuale immissione dell'acqua soprastante tramite un criterio originale che considera la capacità d'ingresso in funzione del gradiente della velocità spaziale.

Lo scopo della soluzione analitica è stato quello di quantificare il peso delle ipotesi semplificatrici nell'analisi del fenomeno, in modo tale da interpretare fisicamente il problema e poter così estrapolare i concetti e le ipotesi ad applicazioni numeriche di livello di complessità superiore, come richiesto nella prassi ingegneristica.

L'approccio analitico ricorre alla teoria della perturbazione che si basa sulla ricerca di una *soluzione asintotica* al problema, sfruttando il concetto di *espansione di una funzione* $f(x, \varepsilon)$ incognita, dipendente da x ed ε .

La soluzione analitica proposta è stata confrontata con dati sperimentali di carattere numerico desunti da letteratura. In linea generale essa non coglie l'andamento temporale del profilo dell'onda quando vengono adottati nelle elaborazioni i medesimi dati utilizzati nella

modellistica numerica di letteratura. La soluzione analitica, infatti, richiede un incremento della viscosità cinematica e/o dinamica di circa due ordini di grandezza allo scopo di riprodurre più adeguatamente sia la dinamica del fenomeno che quella del profilo dell'onda quando messa a confronto con i casi sperimentali numerici.

Le differenze riscontrate sono imputabili, da una parte alla presenza dei termini non lineari nelle soluzioni numeriche, ovviamente non considerati nella soluzione analitica, e dall'altra alla reologia delle miscele considerate che, in alcune situazioni, sono di natura viscosa ma non newtoniana, rendendo in questo modo incompatibili le soluzioni analitiche con quelle numeriche.

Nella soluzione analitica, l'incremento della viscosità fa sì che la miscela sia reologicamente assimilabile con una miscela viscoplastica, come quelle proposte in letteratura, eccetto che nel caso in cui la pendenza del fondo sia inferiore a quella imposta dallo sforzo reologico critico τ_c . Per quest'ultima condizione, il fluido viscoplastico rimarrà fermo, mentre per il materiale viscoso vi sarà sempre movimento.

Il confronto della soluzione analitica con risultati sperimentali di laboratorio riportati in letteratura mostra la necessità di aumentare la viscosità cinematica per ottenere un'onda che si adatti maggiormente alla disposizione dei dati sperimentali. Occorre sottolineare che, oltre alla differente reologia della miscela, un altro fenomeno non considerato dalla soluzione analitica, cioè lo svolgersi dell'*hydroplaning* in prossimità del fronte della corrente di torbidità, incrementa il discostamento tra i profili dell'onda sperimentale e quello risultante dall'analisi teorica.

Applicando, invece, la soluzione analitica a una corrente altamente stratificata, per la quale vale la condizione $\rho \gg \rho_a$, si è potuto constatare che i profili teorici colgono bene i risultati sperimentali. Per questa condizione particolare, paragonabile alla propagazione su fondo asciutto di una miscela viscosa avente aria come fluido comprimibile circostante, o altrimenti una situazione in cui la stratificazione sia molto spinta per l'alta concentrazione del materiale solido in sospensione, la soluzione analitica è una buona rappresentazione della dinamica del fenomeno.

Grazie alla soluzione analitica ottenuta si è potuto dimostrare che la velocità della corrente è, ovviamente, proporzionale alla viscosità della miscela considerata e che la celerità di propagazione dell'onda dipende dal quadrato dell'altezza, o spessore, della corrente e dal rapporto tra le densità dei due fluidi. Dalle simulazioni svolte e dai confronti effettuati con dati sperimentali o soluzioni numeriche di altri autori, si è potuto comprendere che la viscosità della miscela è il parametro che si può modificare per trattare come un fluido newtoniano e viscoso una miscela che in realtà ha una reologia differente. Inoltre, le ipotesi adottate sembrano compatibili con la dinamica del fenomeno di propagazione di una corrente di torbidità all'interno di un serbatoio: numero di Reynolds inferiore a 1000, alte concentrazioni del sedimento in sospensione che rendono la corrente reologicamente viscosa o viscoplastica

e incrementano la stratificazione. Resta aperto il problema della natura non conservativa della corrente non trattata nella presente indagine.

Al fine di verificare, in forma indiretta, la bontà delle ipotesi alla base della soluzione analitica sopra descritta, è stato sviluppato anche un modello numerico bidimensionale mediato nella verticale e basato su tali ipotesi; tale modello è in grado di riprodurre il processo dinamico di una corrente di densità all'interno di un serbatoio ed è stato messo a confronto con dati sperimentali di laboratorio con un alto livello di dettaglio.

Dal suddetto confronto si può affermare che la simulazione della dinamica di una corrente di torbidità tramite un modello semplificato, come quello proposto, non può prescindere dall'incremento della viscosità dinamica di diversi ordini di grandezza rispetto a quella dell'acqua, come già dimostrato anche dalla soluzione analitica.

Inoltre, dal raffronto tra il modello numerico semplificato e quello generalizzato di natura turbolenta, sviluppato nel contesto della tesi e descritto nel paragrafo 4.2.1, si può concludere che ambedue i modelli ricostruiscono correttamente la dinamica del fenomeno. A ogni buon conto, per ottenere i risultati dal modello numerico semplificato, con un livello di precisione accettabile, sono richiesti tempi di calcolo inferiori rispetto a quelli del modello generalizzato. Risulta quindi vantaggioso l'utilizzo del modello semplificato, al quale sono state applicate le ipotesi dedotte dalla soluzione analitica, rispetto a quello generalizzato completo.

Il presente lavoro dimostra quindi che è possibile simulare dei casi reali facendo ricorso a delle semplificazioni fisico matematiche (cioè le ipotesi alla base della soluzione analitica che valgono anche per il modello numerico semplificato) tali per cui risulti vantaggioso utilizzare modelli numerici semplificati piuttosto che fisici, diminuendo i tempi di calcolo e le risorse economiche necessarie senza ridurre la precisione con cui viene ricostruito il fenomeno.

Un ulteriore sviluppo del modello numerico semplificato proposto potrebbe essere rappresentato dall'inserimento, nelle equazioni di continuità della massa, del termine sorgente e_w , così da poter simulare lo scambio d'acqua all'interno del corpo della corrente. Inoltre, il medesimo concetto può essere applicato per l'interazione tra la corrente di torbidità e il fondo per quanto riguarda lo scambio del materiale solido, in altre parole per lo studio delle correnti non conservative.

APPENDICE

A.1 SULLA VELOCITÀ E LA PRESSIONE IN UNA CORRENTE DI DENSITÀ SOMMERSA LAMINARE E VISCOSA

Adottano le ipotesi di fluido newtoniano, stazionario, uniforme e laminare, il cui moto bidimensionale 2D nella verticale è rappresentato dalle equazioni di Navier-Stokes:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad \text{A.1}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad \text{A.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{A.3}$$

Dato che il moto è permanente e uniforme si ha: $u=u(y)$, $p=p(y)$ e $v=0$.
Ne consegue che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Le equazioni (A.1), (A.2) e (A.3) assumono la seguente forma:

$$\rho g \sin \theta + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad \text{A.4}$$

$$-\frac{dp}{dy} - \rho g \cos \theta = 0 \quad \text{A.5}$$

$$0 = 0 \quad \text{A.6}$$

Dall'integrazione dell'equazione (A.4) si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho}{\mu} g \sin \theta y + A \quad \text{A.7}$$

Integrando nuovamente per y :

$$u = -\frac{1}{2\nu} g \sin \theta y^2 + Ay + B \quad \text{A.8}$$

Integrando l'Equazione (A.5) si ha:

$$p = -\rho g \cos \theta y + C \quad \text{A.9}$$

Per trovare le costanti d'integrazione delle equazioni (A.8) e (A.9) sono necessarie le seguenti condizioni al contorno:

$$u(y = 0) = 0 \quad \text{A.10}$$

$$p(y = h) = \rho_a g h_a \cos \theta \quad \text{A.11}$$

$$\frac{du(y = h)}{dy} = 0 \quad \text{A.12}$$

Imponendo la condizione (A.10) nell'equazione (A.8) ottengo $B=0$ e di conseguenza la (A.8) si riduce alla seguente:

$$u = -\frac{1}{2\nu} g \sin \theta y^2 + Ay \quad \text{A.13}$$

Con la condizione (A.11) nell'equazione (A.9) si ottiene la relazione che descrive l'andamento della pressione con la profondità:

$$\rho_a g h_a \cos \theta = -\rho g \cos \theta h + C$$

$$C = g \cos \theta (\rho_a h_a + \rho h)$$

$$p = \rho g \cos \theta (h - y) + \rho_a g \cos \theta h_a \quad \text{A.14}$$

Con la condizione al contorno (A.12) nell'equazione (A.7) si ricava il valore della costante A:

$$A = \frac{\rho}{\mu} g \sin \theta h \quad \text{A.15}$$

Valendo la definizione di viscosità cinematica: $\nu = \rho/\mu$, la (A.15) diventa:

$$A = \frac{g}{\nu} \sin \theta h \quad \text{A.16}$$

Infine, sostituendo la (A.16) nella (A.13) si ottiene la relazione per la velocità:

$$u = -\frac{1}{2\nu} g \sin \theta y^2 + \frac{g}{\nu} \sin \theta hy$$

$$u = \frac{g}{\nu} \sin \theta \left[hy - \frac{y^2}{2} \right]$$

$$u = \frac{g}{2\nu} \sin \theta [2hy - y^2] \quad \text{A.17}$$

Integrando l'equazione (A.17) si ricava la portata per unità di profondità:

$$q = \int_0^h u dy$$

$$\begin{aligned} q &= \int_0^h \frac{g}{2\nu} \sin \theta [2hy - y^2] dy = \frac{g}{2\nu} \sin \theta \int_0^h [2hy - y^2] dy = \frac{g}{2\nu} \sin \theta \left[hy^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^h \\ &= \frac{g}{3\nu} \sin \theta h^3 \end{aligned}$$

A.18

e di conseguenza la velocità media del flusso:

$$U = \frac{q}{h} = \frac{gh^2}{3\nu} \sin \theta \quad \text{A.19}$$

A.2 MOTO VARIO GRADUALMENTE VARIATO PER UN FLUIDO VISCOSO

Per un fluido Newtoniano incomprimibile che si muove con moto stazionario e gradualmente variato lungo un piano inclinato, le equazioni del moto assumono la seguente forma:

- Equazione di continuità della miscela.

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{A.20}$$

- Equazione di continuità della quantità di moto.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad \text{A.21}$$

Tenendo conto della (A.14) si ha che:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \rho_a g \cos \theta \frac{\partial h_a}{\partial x} \quad \text{A.22}$$

Applicando la relazione geometrica seguente:

$$\frac{\partial h_a}{\partial x} = \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{A.23}$$

l'equazione (A.21) assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} & - \left(\rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \rho_a g \cos \theta \frac{\partial h_a}{\partial x} \right) + \rho g \sin \theta - 3\rho\nu \frac{U}{h^2} = \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ & - \left(\rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \rho_a g \cos \theta \left(\tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) + \rho g \sin \theta - 3\rho\nu \frac{U}{h^2} = \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ & - \left(\rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \rho_a g \sin \theta - \rho_a g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \rho g \sin \theta - 3\rho\nu \frac{U}{h^2} = \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ & - g \cos \theta (\rho - \rho_a) \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \theta (\rho - \rho_a) - 3\rho\nu \frac{U}{h^2} = \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ & - g \cos \theta \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \theta \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho} \right) - 3\nu \frac{U}{h^2} = \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Ponendo: $g \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho} \right) = g'$, chiamata gravità ridotta, si ha in definitiva:

$$-g' \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + g' \sin \theta - 3\nu \frac{U}{h^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{A.24}$$

A.2.1 Soluzione esterna

Si procede con l'adimensionalizzazione delle equazioni (A.20) e (A.24) facendo ricorso alle seguenti variabili adimensionalizzate:

$$(h^*, U^*, x^*, t^*, \varepsilon, Fr) = \left(\frac{h}{h_0}, \frac{U}{U_0}, \frac{x}{l}, \frac{tU_0}{l}, \frac{h_0}{l}, \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} \right)$$

Con U_0 definita dalla relazione: $U_0 = \frac{gh_0^2}{3\nu} \sin \theta$.

- Equazione di continuità della massa:

$$\frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial(U^* h^*)}{\partial x^*} + \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0$$

Con le opportune semplificazioni si ottiene:

$$\frac{\partial(U^* h^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad \text{A.25}$$

- Equazione di continuità della quantità di moto:

$$-g' \cos \theta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \frac{h_0}{l} + g' \sin \theta - 3\nu \frac{U^* U_0}{h^{*2} h_0^2} = U^* \frac{U_0^2}{l} \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{U_0^2}{l} \frac{\partial U^*}{\partial t^*}$$

$$-g' \cos \theta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \varepsilon + g' \sin \theta - 3\nu \frac{U^*}{h^{*2}} \frac{1}{h_0^2} \frac{gh_0^2}{3\nu} \sin \theta = \frac{U_0^2}{l} \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right)$$

$$-g' \cos \theta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \varepsilon + g' \sin \theta - \frac{U^*}{h^{*2}} g \sin \theta = \frac{Fr^2 gh_0}{l} \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right)$$

$$-\frac{g'}{g} \cos \theta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \varepsilon + \frac{g'}{g} \sin \theta - \frac{U^*}{h^{*2}} \sin \theta = \frac{Fr^2 h_0}{l} \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right)$$

$$\text{Poiché } \frac{g'}{g} = \frac{g \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho} \right)}{g} = \frac{\rho - \rho_a}{\rho} = 1 - \frac{\rho_a}{\rho}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \cos \theta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \varepsilon + \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \sin \theta - \frac{U^*}{h^{*2}} \sin \theta = Fr^2 \varepsilon \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right) \\
 & -\varepsilon \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \cos \theta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{U^*}{h^{*2}} \right] \sin \theta = Fr^2 \varepsilon \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right) \\
 & \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{U^*}{h^{*2}} \right] \sin \theta = \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \cos \theta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + Fr^2 \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right) \right] \quad A.26
 \end{aligned}$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'equazione (A.26) si riduce a:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{U^*}{h^{*2}} \right] \sin \theta = 0 \\
 & \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) = \frac{U^*}{h^{*2}} \\
 & U^* = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*2} \quad A.27
 \end{aligned}$$

Sostituendo l'equazione (A.27) nell'equazione della continuità della massa (A.25) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*3}}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \\
 & 3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad A.28
 \end{aligned}$$

Ricordando la seguente regola del calcolo differenziale:

$$\frac{dh^*}{dt^*} = \frac{dx^*}{dt^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*}$$

la (A.28) può essere riscritta come un sistema di due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{dh^*}{dt^*} = 0 \\ \frac{dx^*}{dt^*} = 3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*2} \end{cases} \quad A.29$$

Integrando la seconda equazione del sistema (A.29) si ricava l'equazione del profilo della soluzione esterna:

$$\frac{x^*}{t^*} = 3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*2}$$

$$h^* = \sqrt{\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \quad \text{A.30}$$

La posizione del fronte d'onda x_s^* è fissata, in ogni istante, dalla seguente relazione:

$$A^* = \int_0^{x_s^*} h^* dx^* \quad \text{A.31}$$

Andando a sostituire l'equazione del profilo dell'onda esterna (A.30) e svolgendo l'integrale (A.31) si ottiene la posizione del fronte dell'onda per i vari istanti temporali.

$$A^* = \int_0^{x_s^*} \left(\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} dx^*$$

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{3t^* \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \int_0^{x_s^*} (x^*)^{\frac{1}{2}} dx^*$$

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{3t^* \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \frac{2}{3} x_s^{* \frac{3}{2}}$$

$$x_s^* = \left(\frac{A^*(t^*)^{1/2}}{2} 3^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{\rho_a}{\rho}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$x_s^* = \frac{3A^{* \frac{2}{3}} t^{* \frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{A.32}$$

Si ricavano, in seguito, le relazioni per l'altezza in corrispondenza del fronte d'onda:

$$h_s^* = \sqrt{\frac{x_s^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \quad \text{A.33}$$

In alternativa, a partire dalla (A.33) si esplicita t^* :

$$t^* = \left(\frac{x_s^*}{3h_s^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \right) \quad \text{A.34}$$

Si sostituisce (A.34) nella (A.32) e si ottiene:

$$x_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x_s^*}{3h_s^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Con le dovute semplificazioni si arriva a un'espressione alternativa alla (A.33) per l'altezza dell'onda in corrispondenza del fronte:

$$\frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} x_s^*}{3A^{*\frac{2}{3}} x_s^{*\frac{1}{3}}} = \frac{1}{h_s^{*\frac{2}{3}}}$$

$$h_s^* = \left(\frac{3^{\frac{2}{3}} A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} x_s^{*\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$h_s^* = \frac{3A^*}{2x_s^*} \quad \text{A.35}$$

A partire dalla (A.30) si esplicita t^* :

$$t^* = \left(\frac{x^*}{3h^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \right) \quad \text{A.36}$$

Si sostituisce (A.36) nella (A.32) e si ottiene:

$$x_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^*}{3h^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Con le dovute semplificazioni si arriva alla seguente espressione:

$$A^{*\frac{2}{3}} = x_s^* \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \left(\frac{3h^{*2}}{x^*}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$A^* = \frac{2h^* x_s^{*\frac{3}{2}}}{3 x^{*\frac{1}{2}}} \tag{A.37}$$

Sostituendo la (A.37) nella (A.35) si ottiene:

$$h_s^* = \frac{3}{2x_s^*} \frac{2h^* x_s^{*\frac{3}{2}}}{3 x^{*\frac{1}{2}}}$$

Semplificando si ricava:

$$h_s^* = \frac{h^* x_s^{*\frac{1}{2}}}{x^{*\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{h_s^*}{h^*} = \frac{x_s^{*\frac{1}{2}}}{x^{*\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{x_s^*}{x^*}} \tag{A.38}$$

Differenziando la (A.32) si ricava il seguente risultato:

$$dx_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{3} t^{*-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} dt^*$$

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = \frac{A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} t^{*\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{A.39}$$

Sostituendo la (A.34) nella (A.39) e tenendo conto della (A.35) così da ottenere la velocità del fronte d'onda:

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = \frac{A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}x_s^{*\frac{2}{3}}} 3^{\frac{2}{3}}h_s^{*\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = h_s^{*\frac{6}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)$$

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = h_s^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \tag{A.40}$$

Dimensionalizzando le equazioni ricavate, si hanno i seguenti risultati:

- Equazione del profilo della soluzione esterna.

$$h^* = \sqrt{\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}}$$

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{x}{l} \frac{l}{tU_0} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}}$$

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{x}{t} \frac{3\nu}{gh_0^2 \sin \theta} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}}$$

$$h = \sqrt{\frac{x}{t} \frac{\nu}{g \sin \theta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \tag{A.41}$$

- Equazione della posizione del fronte d'onda.

$$x_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}t^{*\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x_s}{l} = \frac{3}{2} \frac{A^{\frac{2}{3}}}{(lh_0)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{tU_0}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x_s}{l} = \frac{3}{2} \frac{A^{\frac{2}{3}}}{(lh_0)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{t}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{gh_0^2}{3\nu} \right)^{\frac{1}{3}} (\sin \theta)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_s = \left(\frac{3A}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{gt}{\nu} \sin \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{A.42}$$

- Equazione dell'altezza dell'onda in corrispondenza del fronte.

$$h_s^* = \frac{3A^*}{2x_s^*}$$

$$\frac{h_s}{h_0} = \frac{3}{2} \frac{A}{lh_0} \frac{l}{x_s}$$

$$h_s = \frac{3}{2} \frac{A}{x_s} \quad \text{A.43}$$

A.2.2 Soluzione interna

Si procede con l'adimensionalizzazione delle equazioni (A.20) e (A.24) facendo ricorso alle seguenti variabili adimensionalizzate:

$$(H^*, V^*, \xi^*, T^*) = \left(h^*, U^*, \frac{x^* - x_s^*(t^*)}{\varepsilon}, t^* \right)$$

- L'equazione di continuità della quantità di moto:

$$-g' \cos \theta \frac{\partial H^*}{\partial x^*} \frac{h_0}{l} + g' \sin \theta - 3\nu \frac{U_0}{h_0^2 H^{*2}} V^* = V^* \frac{U_0^2}{l} \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{U_0^2}{l} \frac{\partial V^*}{\partial T^*}$$

$$-g' \cos \theta \frac{\partial H^*}{\partial x^*} \varepsilon + g' \sin \theta - 3\nu \frac{gh_0^2}{3\nu} \sin \theta \frac{V^*}{h_0^2 H^{*2}} = V^* \frac{U_0^2}{l} \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{U_0^2}{l} \frac{\partial V^*}{\partial T^*}$$

$$-\frac{g'}{g} \cos \theta \frac{\partial H^*}{\partial x^*} \varepsilon + \frac{g'}{g} \sin \theta - \sin \theta \frac{V^*}{H^{*2}} = \frac{U_0^2}{lg} \left(V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Poiché } \frac{g'}{g} &= \frac{g\left(\frac{\rho-\rho_a}{\rho}\right)}{g} = \frac{\rho-\rho_a}{\rho} = 1 - \frac{\rho_a}{\rho} \\
 -\left(\frac{\rho-\rho_a}{\rho}\right) \cos \theta \frac{\partial H^*}{\partial x^*} \varepsilon + \left(\frac{\rho-\rho_a}{\rho}\right) \sin \theta - \sin \theta \frac{V^*}{H^{*2}} &= \frac{Fr^2 g h_0}{lg} \left(V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \right) \\
 -\varepsilon \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \cos \theta \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \sin \theta - \sin \theta \frac{V^*}{H^{*2}} &= Fr^2 \varepsilon \left(V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \right) \\
 \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{V^*}{H^{*2}} \right] \sin \theta &= \varepsilon \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial x^*} \cos \theta + \varepsilon Fr^2 V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \varepsilon Fr^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*}
 \end{aligned}$$

Risolviendo il primo termine a destra:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \cos \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial x^*} &= \varepsilon \cos \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} \\
 \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \cos \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \left[\frac{\partial x^*}{\partial x^*} - \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right] &= \cos \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*}
 \end{aligned}$$

Risolviendo il secondo termine a destra:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon Fr^2 V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} &= \varepsilon Fr^2 V^* \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} Fr^2 V^* \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} \left[\frac{\partial x^*}{\partial x^*} - \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right] \\
 &= Fr^2 \left[V^* - V^* \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} \\
 Fr^2 \left[V^* - \frac{\partial x^*}{\partial T^*} \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} &= Fr^2 \left[V^* - \frac{dx_s^*}{dT^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*}
 \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni trovate si ricava l'equazione della quantità di moto in forma adimensionale:

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{V^*}{H^{*2}} \right] \sin \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \cos \theta + Fr^2 \left[V^* - \frac{dx_s^*}{dT^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} + \varepsilon Fr^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \quad \text{A.44}$$

- Equazione di continuità della massa:

$$\begin{aligned}
 \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial(V^* H^*)}{\partial x^*} + \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= 0 \\
 \frac{\partial(V^* H^*)}{\partial \xi^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(V^* H^*)}{\partial \xi^*} \left(\frac{\partial x^*}{\partial x^*} - \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{\partial x^*}{\partial T^*} \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right) \right) + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) + \varepsilon \frac{\partial H^*}{\partial T^*} = 0 \quad \text{A.45}$$

Ponendo nell'equazione (A.45) $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) = 0$$

e integrando si ottiene:

$$H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) = C \quad \text{A.46}$$

Per trovare la costante d'interazione C , si fa ricorso alla condizione al contorno:

$$H^*(x^* = x_s^* + \delta^*) = 0$$

Ne risulta che $C=0$, e di conseguenza la velocità del fluido per $x^* \neq x_s^* + \delta^*$ e $H^* \neq 0$ si può esprimere come:

$$V^* = \frac{dx_s^*}{dt^*} \quad \text{A.47}$$

Ricordando l'equazione (A.40) si conclude che:

$$V^* = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h_s^{*2} \quad \text{A.48}$$

Tenendo presente le uguaglianze appena definite nelle equazioni (A.47) e (A.48), l'equazione della continuità della quantità di moto (A.44) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \sin \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \cos \theta + Fr^2 \left[\frac{dx_s^*}{dt^*} - \frac{dx_s^*}{d\tau^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} + \varepsilon F^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \quad A.49$$

Con le dovute semplificazioni e ponendo $\varepsilon \rightarrow 0$, si riduce a un'equazione differenziale:

$$\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \left[1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \tan \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*}$$

$$\left[1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \tan \theta = \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \quad A.50$$

L'equazione differenziale (A.50) s'integra nel seguente modo:

$$\int_0^{\xi^*} \tan \theta d \xi^* = \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}}}$$

Risolvendo l'integrale di sinistra:

$$\int_0^{\xi^*} \tan \theta d \xi^* = \tan \theta \xi^* \quad A.51$$

Risolvendo l'integrale di destra:

$$\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{H^{*2}}{H^{*2} - h_s^{*2}} dH^* = \int_{H_0^*}^{H^*} dH^* + \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{h_s^{*2}}{H^{*2} - h_s^{*2}} dH^* = H^* - H_0^* + \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{\frac{H^{*2}}{h_s^{*2}} - 1} =$$

$$= H^* - H_0^* + \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{\left(\frac{H^*}{h_s^*} - 1\right)\left(\frac{H^*}{h_s^*} + 1\right)} = H^* - H_0^* + h_s^{*2} \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)}$$

$$\frac{1}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)} = \frac{A}{H^* - h_s^*} + \frac{B}{H^* + h_s^*} = \frac{H^*(A + B) + h_s^*(A - B)}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{h_s^*} \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2h_s^*} \\ B = -\frac{1}{2h_s^*} \end{cases}$$

$$H^* - H_0^* + h_s^{*2} \left[\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2h_s^* (H^* - h_s^*)} dH^* - \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2h_s^* (H^* + h_s^*)} dH^* \right]$$

$$H^* - H_0^* + \frac{h_s^*}{2} \left[\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{(H^* - h_s^*)} - \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{(H^* + h_s^*)} \right]$$

$$H^* - H_0^* + \frac{h_s^*}{2} \left\{ [\ln|H^* - h_s^*|]_{H_0^*}^{H^*} - [\ln|H^* + h_s^*|]_{H_0^*}^{H^*} \right\}$$

$$H^* - H_0^* + \frac{h_s^*}{2} \{ \ln(h_s^* - H^*) - \ln(h_s^* - H_0^*) - \ln(h_s^* + H^*) + \ln(h_s^* + H_0^*) \}$$

$$H^* - H_0^* + \frac{h_s^*}{2} \left\{ \ln \frac{(h_s^* - H^*)}{(h_s^* - H_0^*)} + \ln \frac{(h_s^* + H_0^*)}{(h_s^* + H^*)} \right\} = H^* - H_0^* + \frac{h_s^*}{2} \left\{ \ln \frac{(h_s^* - H^*) (h_s^* + H_0^*)}{(h_s^* - H_0^*) (h_s^* + H^*)} \right\} \quad \text{A.52}$$

Unendo i risultati dei due integrali svolti, (A.51) e (A.52), si arriva alla soluzione finale:

$$\xi^* \tan \theta = H^* - H_0^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* - H^* h_s^* + H_0^*}{h_s^* + H^* h_s^* - H_0^*}} \quad \text{A.53}$$

Per il calcolo del parametro incognito H_0^* s'impone la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^0 (h_s^* - H^*) d\xi^* = \int_0^{\delta^*} H^* d\xi^* \quad \text{A.54}$$

Dall'equazione (A.50) agilmente si ricava la seguente relazione:

$$d\xi^* = \frac{dH^*}{\left[1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \tan \theta} \quad \text{A.55}$$

che consente di effettuare un cambio di variabile nella relazione (A.54) che diventa:

$$\int_{h_s^*}^{H_0^*} \frac{(h_s^* - H^*)}{\left(1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}}\right) \tan \theta} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*}{\left(1 - \frac{h_s^{*2}}{H^{*2}}\right) \tan \theta} dH^*$$

$$\int_{h_s^*}^{H_0^*} \frac{-H^{*2}(H^* - h_s^*)}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^{*3}}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)} dH^*$$

$$\int_{H_0^*}^{h_s^*} \frac{H^{*2}}{(H^* + h_s^*)} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^{*3}}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)} dH^* \quad \text{A.56}$$

Risolve l'integrale di sinistra:

$$\int_{H_0^*}^{h_s^*} \frac{H^{*2} + h_s^{*2} - h_s^{*2}}{(H^* + h_s^*)} dH^* = \int_{H_0^*}^{h_s^*} \frac{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)}{(H^* + h_s^*)} dH^* + h_s^{*2} \int_{H_0^*}^{h_s^*} \frac{dH^*}{(H^* + h_s^*)}$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} - h_s^* H^* + h_s^{*2} \ln(H^* + h_s^*) \right]_{H_0^*}^{h_s^*} = \frac{h_s^{*2}}{2} - \frac{H_0^{*2}}{2} - h_s^{*2} + h_s^* H_0^* + h_s^{*2} \ln\left(\frac{2h_s^*}{H_0^* + h_s^*}\right) \quad \text{A.57}$$

Risolve l'integrale di destra:

$$\int_{H_0^*}^0 \frac{H^{*3}}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*(H^{*2} + h_s^{*2} - h_s^{*2})}{(H^{*2} - h_s^{*2})} dH^*$$

$$\int_{H_0^*}^0 \frac{H^*(H^{*2} - h_s^{*2}) + H^* h_s^{*2}}{(H^{*2} - h_s^{*2})} dH^* = \int_{H_0^*}^0 H^* dH^* + h_s^{*2} \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)} dH^*$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} \right]_{H_0^*}^0 + h_s^{*2} \left\{ \int_{H_0^*}^0 \frac{dH^*}{(H^* + h_s^*)} + \int_{H_0^*}^0 \frac{h_s^*}{(H^{*2} - h_s^{*2})} dH^* \right\}$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} \right]_{H_0^*}^0 + h_s^{*2} \left\{ [\ln(H^* + h_s^*)]_{H_0^*}^0 + h_s^* \int_{H_0^*}^0 \frac{dH^*}{(H^{*2} - h_s^{*2})} \right\}$$

Sviluppo dell'integrale:

$$\frac{1}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)} = \frac{A}{H^* - h_s^*} + \frac{B}{H^* + h_s^*} = \frac{H^*(A + B) + h_s^*(A - B)}{(H^* - h_s^*)(H^* + h_s^*)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{h_s^*} \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2h_s^*} \\ B = -\frac{1}{2h_s^*} \end{cases}$$

L'integrale quindi diventa:

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + h_s^{*2} \left\{ [\ln(H^* + h_s^*)]_{H_0^*}^0 + h_s^* \left[\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2h_s^*} \frac{dH^*}{(H^* - h_s^*)} - \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2h_s^*} \frac{dH^*}{(H^* + h_s^*)} \right] \right\}$$

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + h_s^{*2} \left\{ [\ln(H^* + h_s^*)]_{H_0^*}^0 + \frac{1}{2} \{ [\ln(H^* - h_s^*)]_{H_0^*}^0 - [\ln(H^* + h_s^*)]_{H_0^*}^0 \} \right\}$$

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + h_s^{*2} \left\{ \ln \left(\frac{h_s^*}{H_0^* + h_s^*} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{h_s^*}{h_s^* - H_0^*} \frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^*} \right) \right\} \right\}$$

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + h_s^{*2} \left[\ln \left(\frac{h_s^*}{H_0^* + h_s^*} \right) \sqrt{\frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}} \right]$$

A.58

Uguagliando la (A.57) con la (A.58) risulta:

$$-\frac{h_s^{*2}}{2} - \frac{H_0^{*2}}{2} + h_s^* H_0^* + h_s^{*2} \ln \left(\frac{2h_s^*}{H_0^* + h_s^*} \right) = -\frac{H_0^{*2}}{2} + h_s^{*2} \left[\ln \left(\frac{h_s^*}{H_0^* + h_s^*} \right) \sqrt{\frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}} \right]$$

Dividendo entrambi i membri per h_s^* si ha:

$$-\frac{h_s^*}{2} + H_0^* + h_s^* \ln \left(\frac{2h_s^*}{H_0^* + h_s^*} \right) - h_s^* \left[\ln \left(\frac{h_s^*}{H_0^* + h_s^*} \right) \sqrt{\frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}} \right] = 0$$

$$-\frac{h_s^*}{2} + H_0^* + h_s^* \ln \left(\frac{2h_s^*}{H_0^* + h_s^*} \frac{H_0^* + h_s^*}{h_s^*} \sqrt{\frac{h_s^* - H_0^*}{h_s^* + H_0^*}} \right) = 0$$

$$-\frac{h_s^*}{2} + H_0^* + h_s^* \ln \left(2 \sqrt{\frac{h_s^* - H_0^*}{h_s^* + H_0^*}} \right) = 0 \quad \text{A.59}$$

La (A.59) può essere riscritta in forma tale da risultare più agevole la sostituzione nell'equazione (A.53):

$$\begin{aligned} \frac{h_s^*}{2} \ln(4) - \frac{h_s^*}{2} &= -H_0^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}} \\ -H_0^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}} &= (\ln(4) - 1) \frac{h_s^*}{2} \end{aligned} \quad \text{A.60}$$

Riscrivendo la (A.53) nella seguente forma:

$$\xi^* \tan \theta - H^* - h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* - H^*}{h_s^* + H^*}} = -H_0^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* + H_0^*}{h_s^* - H_0^*}}$$

e mettendola a sistema con la (A.60), si può facilmente sostituire il termine destro con la relazione (A.60) ottenendo la soluzione finale sotto riportata:

$$\xi^* \tan \theta = H^* + h_s^* \ln \sqrt{\frac{h_s^* - H^*}{h_s^* + H^*}} + (\ln(4) - 1) \frac{h_s^*}{2} \quad \text{A.61}$$

Procedendo con la dimensionalizzazione, la (A.61) diventa:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x - x_s}{\frac{h_0}{l}} \right) \tan \theta &= \frac{H}{h_0} + \frac{h_s}{h_0} \ln \sqrt{\frac{h_s - H}{h_s + H}} + (\ln(4) - 1) \frac{h_s}{2h_0} \\ \xi \tan \theta &= H + h_s \ln \sqrt{\frac{h_s - H}{h_s + H}} + (\ln(4) - 1) \frac{h_s}{2} \end{aligned} \quad \text{A.62}$$

dove $\xi = x - x_s$.

A.2.3 Soluzione completa

$$h_c = \begin{cases} h + H - h_s & x \leq x_s \\ H & x > x_s \end{cases} \quad \text{A.63}$$

A.3 AGGIUNTA DEL TERMINE SORGENTE SULLA CONSERVAZIONE DELLA MASSA

La trattazione parte dalle equazioni del moto:

- L'equazione di continuità della massa, con aggiunta del termine sorgente:

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = e_w \frac{\partial(Uh)}{\partial x} \quad \text{A.64}$$

- L'equazione di continuità della quantità di moto:

$$-g' \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + g' \sin \theta - 3\nu \frac{U}{h^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

A.3.1 Soluzione esterna

Si procede con l'adimensionalizzazione delle equazioni (A.64) e (A.24) facendo ricorso alle seguenti variabili adimensionalizzate:

$$(h^*, U^*, x^*, t^*, \varepsilon, Fr) = \left(\frac{h}{h_0}, \frac{U}{U_0}, \frac{x}{l}, \frac{tU_0}{l}, \frac{h_0}{l}, \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} \right)$$

Con U_0 definita dalla relazione: $U_0 = \frac{gh_0^2}{3\nu} \sin \theta$.

- Equazione di continuità della massa:

$$\frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial(U^* h^*)}{\partial x^*} + \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = e_w \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial(U^* h^*)}{\partial x^*}$$

Con le opportune semplificazioni si ottiene:

$$\frac{\partial(U^*h^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = e_w \frac{\partial(U^*h^*)}{\partial x^*}$$

$$(1 - e_w) \frac{\partial(U^*h^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad \text{A.65}$$

- Equazione di continuità della quantità di moto, adimensionalizzata è l'equazione (A.26):

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) - \frac{U^*}{h^{*2}} \right] \sin \theta = \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \cos \theta + Fr^2 \left(U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial U^*}{\partial t^*} \right) \right]$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'equazione (A.26), sopra riportata, si riduce a:

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) - \frac{U^*}{h^{*2}} \right] \sin \theta = 0$$

$$\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) = \frac{U^*}{h^{*2}}$$

$$U^* = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h^{*2} \quad \text{A.66}$$

Si noti che la (A.66) è identica alla (A.27) ricavata in precedenza.

Sostituendo l'equazione (A.66) nell'equazione adimensionalizzata della continuità della massa (A.65) si ottiene:

$$(1 - e_w) \frac{\partial \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h^{*3}}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0$$

$$3(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) h^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad \text{A.67}$$

Ricordando la seguente regola del calcolo differenziale:

$$\frac{dh^*}{dt^*} = \frac{dx^*}{dt^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\partial h^*}{\partial t^*}$$

la (A.67) può essere riscritta come un sistema di due equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{dh^*}{dt^*} = 0 \\ \frac{dx^*}{dt^*} = 3(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*2} \end{cases} \quad \text{A.68}$$

Integrando la seconda equazione del sistema (A.68) si ricava l'equazione del profilo della soluzione esterna:

$$\frac{x^*}{t^*} = 3(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) h^{*2}$$

$$h^* = \sqrt{\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \quad \text{A.69}$$

La posizione del fronte d'onda x_s^* è fissata, anche in questo caso, dalla relazione (A.31), sotto riportata:

$$A^* = \int_0^{x_s^*} h^* dx^*$$

Andando a sostituire l'equazione del profilo dell'onda esterna (A.69) e svolgendo l'integrale si ottiene la posizione del fronte dell'onda per i vari istanti temporali.

$$A^* = \int_0^{x_s^*} \left(\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} dx^*$$

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{3t^*(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \int_0^{x_s^*} (x^*)^{\frac{1}{2}} dx^*$$

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{3t^*(1 - e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)}} \frac{2}{3} x_s^{*\frac{3}{2}}$$

$$x_s^* = \left(\frac{A^*}{2} 3^{\frac{2}{3}} \sqrt{t^*(1-e_w) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$x_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}t^{*\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} (1 - e_w)^{\frac{1}{3}} \quad \text{A.70}$$

Si ricavano, in seguito, le relazioni per l'altezza in corrispondenza del fronte d'onda:

$$h_s^* = \frac{x_s^*}{\sqrt{t^* \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)}}} \quad \text{A.71}$$

In alternativa, a partire dalla (A.71) si esplicita t^* :

$$t^* = \left(\frac{x_s^*}{3h_s^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)} \right) \quad \text{A.72}$$

Si sostituisce (A.72) nella (A.70) e si ottiene:

$$x_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} (1 - e_w)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x_s^*}{3h_s^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Con le dovute semplificazioni si arriva a un'espressione alternativa alla (A.71) per l'altezza dell'onda in corrispondenza del fronte:

$$\frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} x_s^*}{3A^{*\frac{2}{3}} x_s^{*\frac{1}{3}}} = \frac{1}{h_s^{*\frac{2}{3}}}$$

$$h_s^* = \left(\frac{3^{\frac{2}{3}} A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} x_s^{*\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$h_s^* = \frac{3A^*}{2x_s^*} \quad \text{A.73}$$

A partire dalla (A.69) si esplicita t^* :

$$t^* = \left(\frac{x^*}{3h^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)} \right) \quad \text{A.74}$$

Si sostituisce (A.74) nella (A.70) e si ottiene:

$$x_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} (1 - e_w)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^*}{3h^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Con le dovute semplificazioni si arriva alla seguente espressione:

$$A^{*\frac{2}{3}} = x_s^* \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \left(\frac{3h^{*2}}{x^*} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$A^* = \frac{2h^* x_s^{*\frac{3}{2}}}{3 x^{*\frac{1}{2}}} \quad \text{A.75}$$

Sostituendo la (A.75) nella (A.73) si ottiene:

$$h_s^* = \frac{3}{2x_s^*} \frac{2h^* x_s^{*\frac{3}{2}}}{3 x^{*\frac{1}{2}}}$$

Semplificando si ricava:

$$h_s^* = \frac{h^* x_s^{*\frac{1}{2}}}{x^{*\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{h_s^*}{h^*} = \frac{x_s^{*\frac{1}{2}}}{x^{*\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{x_s^*}{x^*}} \quad \text{A.76}$$

Differenziando la (A.70) si ricava il seguente risultato:

$$dx_s^* = \frac{3A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{3} t^{*-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} (1 - e_w)^{\frac{1}{3}} dt^*$$

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = \frac{A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}t^{*\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} (1 - e_w)^{\frac{1}{3}} \quad \text{A.77}$$

Sostituendo la (A.72) nella (A.77) e tenendo conto della (A.73) si ottiene la velocità del fronte d'onda:

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = \frac{A^{*\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}x_s^{*\frac{2}{3}}} 3^{\frac{2}{3}}h_s^{*\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} (1 - e_w)^{\frac{2}{3}}(1 - e_w)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = h_s^{*\frac{6}{3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)$$

$$\frac{dx_s^*}{dt^*} = h_s^{*2} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w) \quad \text{A.78}$$

Dimensionalizzando le equazioni ricavate, si hanno i seguenti risultati:

- Equazione del profilo della soluzione esterna.

$$h^* = \sqrt{\frac{x^*}{t^*} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)}}$$

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{x}{l} \frac{l}{t U_0} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)}}$$

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{x}{t} \frac{3\nu}{g h_0^2 \sin \theta} \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)}}$$

$$h = \sqrt{\frac{x}{t} \frac{\nu}{g \sin \theta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)}} \quad \text{A.79}$$

- Equazione della posizione del fronte d'onda.

$$x_s^* = \frac{3A^{*2/3}t^{*1/3}}{2^{2/3}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{1/3} (1 - e_w)^{1/3}$$

$$\frac{x_s}{l} = \frac{3}{2^{2/3}} \frac{A^2}{(lh_0)^{2/3}} \left(\frac{tU_0}{l}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{1/3} (1 - e_w)^{1/3}$$

$$\frac{x_s}{l} = \frac{3}{2^{2/3}} \frac{A^2}{(lh_0)^{2/3}} \left(\frac{t}{l}\right)^{1/3} \left(\frac{gh_0^2}{3v}\right)^{1/3} (\sin \theta)^{1/3} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)^{1/3} (1 - e_w)^{1/3}$$

$$x_s = \left(\frac{3A}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{gt}{v} \sin \theta \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w)\right)^{1/3} \quad \text{A.80}$$

- Equazione dell'altezza dell'onda in corrispondenza del fronte.

$$h_s^* = \frac{3A^*}{2x_s^*}$$

$$\frac{h_s}{h_0} = \frac{3}{2} \frac{A}{lh_0} \frac{l}{x_s}$$

$$h_s = \frac{3}{2} \frac{A}{x_s} \quad \text{A.81}$$

A.3.2 Soluzione interna

Si procede con l'adimensionalizzazione delle equazioni (A.24) e (A.64) facendo ricorso alle seguenti variabili adimensionalizzate:

$$(H^*, V^*, \xi^*, T^*) = \left(h^*, U^*, \frac{x^* - x_s^*(t^*)}{\varepsilon}, t^*\right)$$

- L'equazione di continuità della quantità di moto, adimensionalizzata:

$$\left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{V^*}{H^{*2}}\right] \sin \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \cos \theta + Fr^2 \left[V^* - \frac{dx_s^*}{dT^*}\right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} + \varepsilon Fr^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*}$$

- Equazione di continuità della massa:

$$\begin{aligned} \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial(V^* H^*)}{\partial x^*} + \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= e_w \frac{U_0 h_0}{l} \frac{\partial(U^* h^*)}{\partial x^*} \\ (1 - e_w) \frac{\partial(V^* H^*)}{\partial \xi^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= 0 \\ \frac{(1 - e_w)}{\varepsilon} \frac{\partial(V^* H^*)}{\partial \xi^*} \left(\frac{\partial x^*}{\partial x^*} - \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= 0 \\ \frac{(1 - e_w)}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{\partial x^*}{\partial T^*} \frac{\partial x_s^*}{\partial x^*} \right) \right) + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= 0 \\ \frac{(1 - e_w)}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) + \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= 0 \\ (1 - e_w) \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) + \varepsilon \frac{\partial H^*}{\partial T^*} &= 0 \end{aligned} \tag{A.82}$$

Ponendo nell'equazione (A.82) $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) \right) = 0$$

e integrando si ottiene:

$$H^* \left(V^* - \frac{dx_s^*}{dt^*} \right) = C \tag{A.83}$$

Per trovare la costante d'interazione C , si fa ricorso alla condizione al contorno:

$$H^*(x^* = x_s^* + \delta^*) = 0$$

Ne risulta che $C=0$, di conseguenza la velocità del fluido per $x^* \neq x_s^* + \delta^*$ e $H^* \neq 0$ si può esprimere come:

$$V^* = \frac{dx_s^*}{dt^*} \tag{A.84}$$

Ricordando l'equazione (A.78) si conclude che:

$$V^* = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w) h_s^{*2} \quad \text{A.85}$$

Tenendo presente le uguaglianze appena definite nelle equazioni (A.84) e (A.85), l'equazione della continuità della quantità di moto (A.44) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) - \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) (1 - e_w) h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \sin \theta \\ & = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \cos \theta + Fr^2 \left[\frac{dx_s^*}{dt^*} - \frac{dx_s^*}{dT^*} \right] \frac{\partial V^*}{\partial \xi^*} + \varepsilon Fr^2 \frac{\partial V^*}{\partial T^*} \end{aligned} \quad \text{A.86}$$

Con le dovute semplificazioni e ponendo $\varepsilon \rightarrow 0$, si riduce a un'equazione differenziale:

$$\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \left[1 - \frac{(1 - e_w) h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \tan \theta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*}$$

$$\left[1 - \frac{(1 - e_w) h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \tan \theta = \frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} \quad \text{A.87}$$

L'equazione differenziale (A.87) s'integra nel seguente modo:

$$\int_0^{\xi^*} \tan \theta d \xi^* = \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{1 - \frac{(1 - e_w) h_s^{*2}}{H^{*2}}}$$

Risolviendo l'integrale di sinistra:

$$\int_0^{\xi^*} \tan \theta d \xi^* = \tan \theta \xi^* \quad \text{A.88}$$

Risolviendo l'integrale di destra:

$$\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{H^{*2}}{H^{*2} - (1 - e_w) h_s^{*2}} dH^* = \int_{H_0^*}^{H^*} dH^* + \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{(1 - e_w) h_s^{*2}}{H^{*2} - (1 - e_w) h_s^{*2}} dH^*$$

$$H^* - H_0^* + \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{(1 - e_w)h_s^{*2}}{(1 - e_w)h_s^{*2} \left(\frac{H^{*2}}{(1 - e_w)h_s^{*2}} - 1 \right)} dH^*$$

$$H^* - H_0^* + (1 - e_w)h_s^{*2} \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{(H^* - \sqrt{1 - e_w}h_s^*)(H^* + \sqrt{1 - e_w}h_s^*)}$$

Sviluppo dell'integrale:

$$\frac{1}{(H^* - \sqrt{1 - e_w}h_s^*)(H^* + \sqrt{1 - e_w}h_s^*)} = \frac{A}{H^* - \sqrt{1 - e_w}h_s^*} + \frac{B}{H^* + \sqrt{1 - e_w}h_s^*}$$

$$\frac{H^*(A + B) + \sqrt{1 - e_w}h_s^*(A - B)}{(H^* - \sqrt{1 - e_w}h_s^*)(H^* + \sqrt{1 - e_w}h_s^*)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{\sqrt{1 - e_w}h_s^*} \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2\sqrt{1 - e_w}h_s^*} \\ B = -\frac{1}{2\sqrt{1 - e_w}h_s^*} \end{cases}$$

L'integrale quindi diventa:

$$H^* - H_0^* + (1 - e_w)h_s^{*2} \left[\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2\sqrt{1 - e_w}h_s^*} \frac{dH^*}{(H^* - \sqrt{1 - e_w}h_s^*)} - \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2\sqrt{1 - e_w}h_s^*} \frac{dH^*}{(H^* + \sqrt{1 - e_w}h_s^*)} \right]$$

$$H^* - H_0^* + \frac{\sqrt{1 - e_w}h_s^*}{2} \left[\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{(H^* - \sqrt{1 - e_w}h_s^*)} - \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{dH^*}{(H^* + \sqrt{1 - e_w}h_s^*)} \right]$$

$$H^* - H_0^* + \frac{\sqrt{1 - e_w}h_s^*}{2} \left\{ [\ln|H^* - \sqrt{1 - e_w}h_s^*|]_{H_0^*}^{H^*} - [\ln|H^* + \sqrt{1 - e_w}h_s^*|]_{H_0^*}^{H^*} \right\}$$

$$H^* - H_0^* + \frac{\sqrt{1 - e_w}h_s^*}{2} \left\{ \ln(\sqrt{1 - e_w}h_s^* - H^*) - \ln(\sqrt{1 - e_w}h_s^* - H_0^*) \right. \\ \left. - \ln(\sqrt{1 - e_w}h_s^* + H^*) + \ln(\sqrt{1 - e_w}h_s^* + H_0^*) \right\}$$

$$H^* - H_0^* + \frac{\sqrt{1 - e_w}h_s^*}{2} \left\{ \ln \frac{(\sqrt{1 - e_w}h_s^* - H^*)}{(\sqrt{1 - e_w}h_s^* - H_0^*)} + \ln \frac{(\sqrt{1 - e_w}h_s^* + H_0^*)}{(\sqrt{1 - e_w}h_s^* + H^*)} \right\}$$

$$H^* - H_0^* + \frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*}}{2} \left\{ \ln \frac{(\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H^*)(\sqrt{1 - e_w h_s^*} + H_0^*)}{(\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H_0^*)(\sqrt{1 - e_w h_s^*} + H^*)} \right\} \quad \text{A.89}$$

Unendo i risultati dei due integrali svolti, (A.88) e (A.89), si arriva alla soluzione finale:

$$\xi^* \tan \theta = H^* - H_0^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*} \ln \frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H^* \sqrt{1 - e_w h_s^*} + H_0^*}{\sqrt{1 - e_w h_s^*} + H^* \sqrt{1 - e_w h_s^*} - H_0^*} \quad \text{A.90}$$

Per il calcolo del parametro incognito H_0^* s'impone la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^0 (\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H^*) d\xi^* = \int_0^{\delta^*} H^* d\xi^* \quad \text{A.91}$$

Dall'equazione (A.87) agilmente si ricava la seguente relazione:

$$d\xi^* = \frac{dH^*}{\left[1 - \frac{(1 - e_w)h_s^{*2}}{H^{*2}} \right] \tan \theta} \quad \text{A.92}$$

che consente di effettuare un cambio di variabile nella relazione (A.91) che diventa:

$$\int_{\sqrt{1 - e_w h_s^*}}^{H_0^*} \frac{(\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H^*)}{\left(1 - \frac{(1 - e_w)h_s^{*2}}{H^{*2}} \right) \tan \theta} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*}{\left(1 - \frac{(1 - e_w)h_s^{*2}}{H^{*2}} \right) \tan \theta} dH^* \quad \text{A.93}$$

$$\int_{\sqrt{1 - e_w h_s^*}}^{H_0^*} \frac{-H^{*2}(\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H^*)}{(H^* - \sqrt{1 - e_w h_s^*})(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^{*3}}{H^{*2} - (1 - e_w)h_s^{*2}} dH^*$$

Risolvo l'integrale di sinistra:

$$\int_{H_0^*}^{\sqrt{1 - e_w h_s^*}} \frac{H^{*2} + (1 - e_w)h_s^{*2} - (1 - e_w)h_s^{*2}}{(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})} dH^*$$

$$\int_{H_0^*}^{\sqrt{1 - e_w h_s^*}} \frac{(H^* - \sqrt{1 - e_w h_s^*})(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})}{(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})} dH^* + \int_{H_0^*}^{\sqrt{1 - e_w h_s^*}} \frac{(1 - e_w)h_s^{*2}}{(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})} dH^*$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} - \sqrt{1-e_w}h_s^*H^* + (1-e_w)h_s^{*2} \ln(H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*) \right]_{H_0^*}^{\sqrt{1-e_w}h_s^*}$$

$$\frac{(1-e_w)h_s^{*2}}{2} - \frac{H_0^{*2}}{2} - (1-e_w)h_s^{*2} + \sqrt{1-e_w}h_s^*H_0^* + (1-e_w)h_s^{*2} \ln\left(\frac{2\sqrt{1-e_w}h_s^*}{H_0^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*}\right) \quad \text{A.94}$$

Risolve l'integrale di destra:

$$\int_{H_0^*}^0 \frac{H^{*3}}{(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2})} dH^* = \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2}) + (1-e_w)h_s^{*2}}{(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2})} dH^*$$

$$\int_{H_0^*}^0 \frac{H^*(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2}) + H^*(1-e_w)h_s^{*2}}{(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2})} dH^*$$

$$\int_{H_0^*}^0 H^* dH^* + (1-e_w)h_s^{*2} \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*}{(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2})} dH^*$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} \right]_{H_0^*}^0 + (1-e_w)h_s^{*2} \int_{H_0^*}^0 \frac{H^*}{(H^* - \sqrt{1-e_w}h_s^*)(H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*)} dH^*$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} \right]_{H_0^*}^0 + (1-e_w)h_s^{*2} \int_{H_0^*}^0 \frac{H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^* - \sqrt{1-e_w}h_s^*}{(H^* - \sqrt{1-e_w}h_s^*)(H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*)} dH^*$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} \right]_{H_0^*}^0 + (1-e_w)h_s^{*2} \left\{ \int_{H_0^*}^0 \frac{dH^*}{(H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*)} + \int_{H_0^*}^0 \frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{(H^* - \sqrt{1-e_w}h_s^*)(H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*)} dH^* \right\}$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} \right]_{H_0^*}^0 + (1-e_w)h_s^{*2} \left\{ \int_{H_0^*}^0 \frac{dH^*}{(H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*)} + \sqrt{1-e_w}h_s^* \int_{H_0^*}^0 \frac{dH^*}{(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2})} \right\}$$

$$\left[\frac{H^{*2}}{2} \right]_{H_0^*}^0 + (1-e_w)h_s^{*2} \left\{ \left[\ln(H^* + \sqrt{1-e_w}h_s^*) \right]_{H_0^*}^0 + \sqrt{1-e_w}h_s^* \int_{H_0^*}^0 \frac{dH^*}{(H^{*2} - (1-e_w)h_s^{*2})} \right\}$$

Sviluppo dell'integrale:

$$\frac{1}{(H^* - \sqrt{1 - e_w h_s^*})(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})} = \frac{A}{H^* - \sqrt{1 - e_w h_s^*}} + \frac{B}{H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*}}$$

$$\frac{H^*(A + B) + \sqrt{1 - e_w h_s^*}(A - B)}{(H^* - \sqrt{1 - e_w h_s^*})(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{\sqrt{1 - e_w h_s^*}} \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2\sqrt{1 - e_w h_s^*}} \\ B = -\frac{1}{2\sqrt{1 - e_w h_s^*}} \end{cases}$$

L'integrale quindi diventa:

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + (1 - e_w)h_s^{*2} \left\{ \left[\ln(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*}) \right]_{H_0^*}^0 + \sqrt{1 - e_w h_s^*} \left[\int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2\sqrt{1 - e_w h_s^*}(H^* - \sqrt{1 - e_w h_s^*})} dH^* \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{H_0^*}^{H^*} \frac{1}{2\sqrt{1 - e_w h_s^*}(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*})} dH^* \right] \right\}$$

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + (1 - e_w)h_s^{*2} \left\{ \left[\ln(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*}) \right]_{H_0^*}^0 + \frac{1}{2} \left\{ \left[\ln(H^* - \sqrt{1 - e_w h_s^*}) \right]_{H_0^*}^0 \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\ln(H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*}) \right]_{H_0^*}^0 \right\} \right\}$$

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + (1 - e_w)h_s^{*2} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*}}{H_0^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*}} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*}}{\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H_0^*} \frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*} + H_0^*}{\sqrt{1 - e_w h_s^*}} \right) \right\} \right\}$$

$$-\frac{H_0^{*2}}{2} + (1 - e_w)h_s^{*2} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*}}{H_0^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*}} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*} + H_0^*}{\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H_0^*}} \right]$$

A.95

Uguagliando la (A.94) con la (A.95) risulta:

$$\begin{aligned} & -\frac{(1-e_w)h_s^{*2}}{2} - \frac{H_0^{*2}}{2} + \sqrt{1-e_w}h_s^*H_0^* + (1-e_w)h_s^{*2} \ln\left(\frac{2\sqrt{1-e_w}h_s^*}{H_0^*+\sqrt{1-e_w}h_s^*}\right) \\ & = -\frac{H_0^{*2}}{2} + (1-e_w)h_s^{*2} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{H_0^*+\sqrt{1-e_w}h_s^*}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H_0^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H_0^*}} \right] \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri per h_s^* e $\sqrt{1-e_w}$ si ha:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{2} + H_0^* + \sqrt{1-e_w}h_s^* \ln\left(\frac{2\sqrt{1-e_w}h_s^*}{H_0^*+\sqrt{1-e_w}h_s^*}\right) \\ & - \sqrt{1-e_w}h_s^* \left[\ln\left(\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{H_0^*+\sqrt{1-e_w}h_s^*}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H_0^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H_0^*}} \right] = 0 \\ & -\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{2} + H_0^* + \sqrt{1-e_w}h_s^* \ln\left(\frac{2\sqrt{1-e_w}h_s^*}{H_0^*+\sqrt{1-e_w}h_s^*} \frac{H_0^*+\sqrt{1-e_w}h_s^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*} \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H_0^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H_0^*}}\right) = 0 \\ & -\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{2} + H_0^* + \sqrt{1-e_w}h_s^* \left\{ \ln(2) + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H_0^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H_0^*}} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{A.96}$$

La (A.96) può essere riscritta in forma tale da risultare più agevole la sostituzione nell'equazione (A.90):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{2} \ln(4) - \frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{2} = -H_0^* + \sqrt{1-e_w}h_s^* \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H_0^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H_0^*}} \\ & -H_0^* + \sqrt{1-e_w}h_s^* \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H_0^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H_0^*}} = (\ln(4) - 1) \frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*}{2} \end{aligned} \tag{A.97}$$

Riscrivendo la (A.90) nella seguente forma:

$$\xi^* \tan \theta - H^* - \sqrt{1-e_w}h_s^* \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H^*}} = -H_0^* + \sqrt{1-e_w}h_s^* \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1-e_w}h_s^*+H_0^*}{\sqrt{1-e_w}h_s^*-H_0^*}}$$

e mettendo a sistema con la (A.97), si può facilmente sostituire il termine destro con la relazione (A.97) ottenendo la soluzione finale sotto riportata:

$$\xi^* \tan \theta = H^* + \sqrt{1 - e_w h_s^*} \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*} - H^*}{\sqrt{1 - e_w h_s^*} + H^*}} + (\ln(4) - 1) \frac{\sqrt{1 - e_w h_s^*}}{2} \quad \text{A.98}$$

Procedendo con la dimensionalizzazione, la (A.98) diventa:

$$\left(\frac{x - x_s}{\frac{h_0}{l}} \right) \tan \theta = \frac{H}{h_0} + \frac{\sqrt{1 - e_w h_s}}{h_0} \ln \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{1 - e_w h_s}}{h_0} - \frac{H}{h_0}}{\frac{\sqrt{1 - e_w h_s}}{h_0} + \frac{H}{h_0}}} + (\ln(4) - 1) \frac{\sqrt{1 - e_w h_s}}{2h_0}$$

$$\xi \tan \theta = H + \sqrt{1 - e_w h_s} \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1 - e_w h_s} - H}{\sqrt{1 - e_w h_s} + H}} + (\ln(4) - 1) \frac{\sqrt{1 - e_w h_s}}{2} \quad \text{A.99}$$

dove $\xi = x - x_s$.

A.3.3 Soluzione completa

$$h_c = \begin{cases} h + H - h_s & x \leq x_s \\ H & x > x_s \end{cases} \quad \text{A.100}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] AGUIRRE-PE J., PLACHCO F.P., QUISCA S. (1995). *Test and numerical one-dimensional modeling of a high-viscosity fluid dam-break wave*. Journal of Hydraulic Research, Vol 33, N°1, 1995.
- [2] AKIYAMA J., FUKUSHIMA Y. (1985). *Entrainment of noncohesive bed sediment into suspension*. External Memorandum, No. 175, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, University of Minnesota, Minneapolis, USA.
- [3] AKIYAMA J., STEFAN H.G. (1985). *Turbidity current with erosion and deposition*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 111 (12).
- [4] AKIYAMA J., STEFAN H.G. (1988). *Turbidity current simulation in a diverging channel*. Water Resources Research, Vol. 24 (4), 1988.
- [5] ALAVIAN V., JIRKA G.H., DENTON R.A., JOHNSON M.C., STEFAN H.G. (1992). *Density currents entering lakes and reservoirs*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 118 (11), 1992.
- [6] ALTINAKAR S., GRAF W.H., HOPFINGER E.J. (1990). *Weakly depositing turbidity current on a small slope*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 28, N°1, 1990.
- [7] BAGNOLD R.A. (1962). *Auto-suspension of transported sediment, turbidity currents*. Proceeding of the Royal Society of London, Vol 265, January 1962.
- [8] CITRINI D., NOSEDA G. (1975). *Idraulica*. C.E.A., Milano, 1975.
- [9] CHIKITA K. (1989). *Field study on turbidity currents initiated from spring runoff*. Water Resources Research, Vol. 25 (2), 1989.
- [10] CHOW V.T. (1959). *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [11] CUNGE J.A., HOLLY F.M., VERWEY A. (1980). *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1980.

- [12] DENTON R.A. (1987). *Energy curves for multi-layer flow through obstructions*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 25, No. 3, 1987.
- [13] DENTON R.A. (1989). *Locating and identifying hydraulic controls for layered flow through an obstruction*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 27, No. 5, 1989.
- [14] DENGLER A.T., WILDE P. (1987). *Turbidity currents on a steep slopes: Application of an avalanche-type numerical model for ocean thermal energy conversion design*. Ocean Engineering, Vol. 14 (5), 1987.
- [15] ELLISON T.H., TURNER J.S. (1959). *Turbulent entrainment in stratified flows*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 6, October 1959.
- [16] FAN J., MORRIS G. (1992). *Reservoir sedimentation. II: Reservoir desiltation and long-term storage capacity*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 118 (3), 1992.
- [17] FISCHER H.B., LIST E.J., KOH R.C.Y., IMBERGER J., BROOKS N.H. (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, London.
- [18] FUKUSCHIMA Y., PARKER G., PANTIN H.M. (1985). *Prediction of ignitive turbidity currents in Scripps submarine canyon*. Marine Geology, Vol. 67, 1985.
- [19] GARCIA M. (1985). *Experimental study of turbidity currents*. M.S. thesis, Department of Civil and Mineral Engineering, University of Minnesota, USA.
- [20] GARCIA M. (1992). *Turbidity currents*. Encyclopedia of Earth System Science, Vol. 4, Academic Press, San Diego, California.
- [21] GARCIA M. (1993). *Hydraulic jumps in sediment-driven bottom current*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 119 (10), 1992.
- [22] GRAF W.H. (1983). *The behavior of silt-laden currents*. International Water Power and Dam Construction, September 1983.
- [23] HUANG X., GARCIA M. (1997). *A perturbation solution for Bingham-plastic mudflows*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 123, No. 11, November 1997.
- [24] HUANG X., GARCIA M. (1999). *Modeling of non-hydroplaning mudflows on continental slopes*. Marine Geology, Vol. 154, 1999.
- [25] HUNT B. (1984). *Perturbation solution for dam-break floods*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, August 1984.

- [26] HUNT B. (1994). *Newtonian fluid mechanics treatment of debris flows and avalanches*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 120, No. 12, December 1994.
- [27] IMRAN J., PARKER G., LOCAT J., LEE H. (2001). *1D numerical model of muddy subaqueous and subaerial debris flows*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 127, No. 11, November 2001.
- [28] INMAN D.L., NORDSTROM C.E., FLICK R.E. (1976). *Current in submarine canyons: an air-sea-land interaction*. Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 8, January 1976.
- [29] JIANG L., LEBLOND P.H. (1993). *Numerical modeling of an underwater Bingham plastic mudslide and the waves which it generate*. Journal of Geophysical Research, Vol. 98, June 1993.
- [30] KNAPP R.T. (1938). *Energy balance in streams carrying suspended load*. American Geophysical Transactions, Vol. 19.
- [31] KRAUSE D.C., WHITE W.C., PIPER D.J.W., HEEZEN B.C. (1970). *Turbidity currents and cable breaks in the western New Britain Trench*. Geological Society of America Bulletin, Vol. 81, July 1970.
- [32] L'ORFANO S. *La modellistica delle correnti di torbidità attraverso le equazioni del moto e della dispersione nella schematizzazione unidimensionale*. Tesi di Laurea, Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, Università degli Studi di Milano-Bicocca, A.A. 1999/2000.
- [33] MARCHI E., RUBATTA A. (1981). *Meccanica dei fluidi, principi e applicazioni idrauliche*. U.T.E.T., Bologna, 1981.
- [34] MOHRIG D., ELVERHOI A., PARKER G. (1999). *Experiments on the relative mobility of muddy subaqueous and subaerial debris flows, and the capacity to remobilize antecedent deposit*. Marine Geology, Vol. 154, 1999.
- [35] NAYFEH A.H. (1993). *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, Inc.
- [36] PANTIN H.M. (1979). *Interaction between velocity and effective density in turbidity flow: phase-plane analysis, with criteria of autosuspension*. Marine Geology, Vol. 31, April 1979.
- [37] PARKER G. (1982). *Conditions for the ignition of catastrophically erosive turbidity currents*. Marine Geology, Vol. 46, April 1982.
- [38] PARKER G., FUKUSHIMA Y., PANTIN H.M. (1986). *Self-accelerating turbidity currents*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 171, October 1986.

- [39] PARKER G., GARCIA M., FUKUSHIMA Y., YU W. (1987). *Experiments on turbidity currents over an erodible bed*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 25, 1987.
- [40] POGGI B. (1959). *Sul moto delle correnti stratificate (correnti di densità)*. L'Energia Elettrica, No. 3, 1959.
- [41] SALA F. *Studio delle correnti iperconcentrate secondo il modello visco-plastico laminare tipo Herschel-Bulkley*. Tesi di Laurea, Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento, Politecnico di Milano, A.A. 1999/2000.
- [42] TURNER J.S. (1973). *Buoyancy effects in fluid*. Cambridge University Press, 1973.
- [43] VAN DYKE M. (1964). *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic Press New York and London, 1964.
- [44] WRIGHT V., KRONE R.B. (1987). *Laboratory and numerical study of mud and debris flow*. Reportage 1 and 2, Department of Civil Engineering, University of California, Davis, California, 1987.