

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

**Corso di Laurea in
Ingegneria Aeronautica**



**Elementi Finiti Energetici per la Previsione del
Campo Vibratorio di Strutture Aeronautiche**

Relatore: Prof. Gian Luca GHIRINGHELLI

Tesi di laurea di:

Marco Jonathan BASSETTI Matr.720957

Anno accademico 2009/2010

Sommario

Scopo di questa tesi è sia acquisire capacità di utilizzo del metodo degli Elementi Finiti Energetici (EFEM) che valutarne i limiti di applicabilità nell'ambito della previsione del campo vibratorio in strutture aeronautiche. Le equazioni energetiche vengono risolte numericamente grazie all'implementazione agli elementi finiti. Il metodo viene sviluppato prima per sistemi isolati, poi vengono introdotti i concetti che permettono l'accoppiamento di diversi sistemi tra di loro. Un approccio ibrido viene implementato per migliorare la descrizione spaziale del campo vibrazionale ad alte frequenze. Le soluzioni ricavate da analisi sulle piastre isolate confrontate con le soluzioni ricavate con metodi classici mostrano che in generale l'EFEM fornisce una buona approssimazione dell'andamento globale della soluzione, nonostante possa deviare significativamente a livello locale. Per sistemi di piastre collegate l'approssimazione diventa meno precisa ma riesce comunque a fornire una stima accettabile dell'andamento globale dell'energia.

Parole chiave: Elementi Finiti Energetici, acustica, elicottero, alta frequenza, piastre, vibrazioni

Abstract

The aim of this thesis is to acquire the capacity to use the Energy Finite Element Method (EFEM) and to assess the limits of applicability in the prediction of the vibrational field in aeronautical structures. The energy equations are solved numerically by implementing them into a finite element model. First the method is developed for isolated systems, then the concepts that allows the coupling of different systems together are introduced. A hybrid approach is implemented to improve the spatial description of the vibrational field at high frequencies. The solutions derived from analysis of isolated plates compared to solutions obtained with classical methods show that in general the EFEM provides a good approximation of the global solution, although it may locally deviate significantly. For built-up plate structures the approximation become less accurate but it still manage to provide an acceptable estimate of the overall energy.

Keywords: Energy Finite Element Method, acoustic, helicopter, high frequency, plates, vibration

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Rumore di un elicottero	1
1.2	Motivazioni	2
1.3	Organizzazione	3
2	Stato dell'arte	5
2.1	Bassa Frequenza	5
2.1.1	FEM e BEM	5
2.2	Alta Frequenza	6
2.2.1	Giustificazione dell'approccio statistico per le alte frequenze	7
2.2.2	SEA	11
2.2.3	Power Flow Analysis	12
2.2.4	General Energy Formulation Method	13
2.2.5	Energy Flow Analysis	13
2.3	Conclusioni	15
3	Sviluppo del metodo EFEM	17
3.1	Sviluppo analitico del metodo energetico per piastre	17
3.1.1	Equazioni dell'Intensità	17
3.1.2	Equazioni Energetiche per le Piastre Infinite	19
3.1.3	Equazioni Energetiche per le Piastre Finite	24
3.2	Sviluppo analitico del metodo energetico per cavità acustiche	27
3.2.1	Equazioni Energetiche per le Cavità Acustiche	27
3.3	Implementazione Elementi Finiti	30
3.3.1	Equazione Differenziale	30
3.3.2	Formulazione Debole	30
3.3.3	Condizioni al Contorno	31
4	Analisi EFEM di piastre isolate	33
4.1	Metodi Tradizionali	35
4.1.1	Sviluppo Analitico	35
4.1.2	Analisi agli Elementi Finiti (FEM)	35
4.1.3	Passaggio alle Variabili Energetiche	35
4.2	EFEM	40
4.3	Risultati	41

5	Approccio Ibrido HEFEM per piastre	55
5.1	Ipotesi	55
5.2	Campo Riverberante	55
5.3	Campo Diretto	56
5.4	Risultati	59
6	Analisi di strutture complesse	67
6.1	Sviluppo Analitico	67
6.2	Implementazione Elementi Finiti	69
6.3	Confronto EFEM-FEM	71
6.4	Risultati	75
6.5	Considerazioni	79
7	Analisi di una struttura cubica composta da piastre	81
7.1	Modelli FEM e EFEM	81
7.2	Configurazioni di Carico	82
7.3	Vincoli	83
7.4	Risultati	83
7.5	Considerazioni	90
8	Conclusioni e sviluppi futuri	91

Elenco delle figure

2.1	Configurazione e parametri dell'analisi	7
2.2	Mean square velocity in 9 punti selezionati casualmente sulla piastra - frequenze da 0 a 10 kHz	8
2.3	Mean square velocity in 9 punti selezionati casualmente sulla piastra - frequenze da 0 a 10 kHz	9
2.4	Confronto della mean square velocity nei 9 punti della piastra con la stessa grandezza mediata sulla superficie e rispetto ai punti di eccitazione	9
2.5	Mean square velocity mediata sulla superficie e rispetto ai punti di eccitazione	10
2.6	Campo di utilizzazione dei diversi metodi	15
3.1	Densità di energia nella piastra infinita. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	23
4.1	34
4.2	Densità di energia mediata lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	34
4.3	Spostamento trasversale lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, η $= 0.05$	37
4.4	Spostamento trasversale lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, η $= 0.05$	38
4.5	Spostamento trasversale lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, η $= 0.025$	38
4.6	Partecipazione modale nello spostamento sulla diagonale della pias- tra per vari smorzamenti, 5000 Hz.	39
4.7	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	40
4.8	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.1 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	41
4.9	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.001 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	41
4.10	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	42
4.11	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	42

4.12	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	43
4.13	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	44
4.14	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	45
4.15	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	45
4.16	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.1. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	46
4.17	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.05. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	47
4.18	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.01. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	47
4.19	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.005. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	47
4.20	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.1. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	48
4.21	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.05. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	48
4.22	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.01. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	48
4.23	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.005. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	49
4.24	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.001. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	49
4.25	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.1. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	49
4.26	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.05. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	50
4.27	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.01. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	50
4.28	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.005. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	51
4.29	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.001. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	51
4.30	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	52
4.31	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	53
4.32	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	53
4.33	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	54
4.34	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	54

5.1	Elemento sul contorno della piastra	57
5.2	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	59
5.3	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	60
5.4	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	60
5.5	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	60
5.6	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	61
5.7	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	61
5.8	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.1 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	62
5.9	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.05 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	62
5.10	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.01 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	63
5.11	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta =$ 0.005 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	63
5.12	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.1 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	63
5.13	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.05 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	64
5.14	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.01 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	64
5.15	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.005 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	64
5.16	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta =$ 0.001 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	65
5.17	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.1 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	65
5.18	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.05 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	65
5.19	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.01 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	66
5.20	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.005 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	66
5.21	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta =$ 0.001 . La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	66
6.1	Piastre inclinate a diversi angoli	71
6.2	Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	72
6.3	Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, η $= 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	73

6.4	Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	74
6.5	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	75
6.6	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	76
6.7	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	76
6.8	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	77
6.9	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	77
6.10	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	77
6.11	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	78
6.12	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	78
6.13	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	78
6.14	$\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	79
7.1	Mesh	81
7.2	Modello FEM	82
7.3	Modello FEM, vincoli sulla struttura. Il numero rappresenta il grado di libertà vincolato; 1: traslazione direzione x ; 2: traslazione direzione y ; 3: traslazione direzione z ;	83
7.4	La linea rossa indica i punti dove vengono confrontati i risultati	83
7.5	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	84
7.6	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	85
7.7	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	86
7.8	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	87
7.9	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	87
7.10	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	88
7.11	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	88
7.12	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	89
7.13	Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$	89

Elenco delle tabelle

4.1	Parametri dell'analisi	33
6.1	Parametri dell'analisi	71
6.2	Frequenze e smorzamenti delle analisi	72
7.1	Parametri dell'analisi	82
7.2	Frequenze e smorzamenti delle analisi	82

Elenco dei simboli

η	Smorzamento o fattore di perdita del materiale
ν	Modulo di Poisson
ϕ_j	Funzione di forma Lagrangiana
π_{diss}	Potenza dissipata
π_{in}	Potenza in ingresso
ρ	Densità del materiale
σ	Tensore di sforzo
\vec{I}	Intensità o flusso di energia
\vec{u}	Vettore spostamento
a, b	Lati della piastra
c	Velocità di fase
c_g	Velocità di gruppo
E	Modulo di Young
e	Densità di energia
e_d	Densità di energia del campo diretto
e_r	Densità di energia del campo riverberante
F	Ampiezza della forzante armonica
f	Frequenza
h	Spessore della piastra
k	Numero d'onda
$m(f)$	Fattore di sovrapposizione modale
$n(f)$	Densità modale
T	Energia cinetica

U	Energia potenziale
w	Spostamento trasversale
Z	Impedenza meccanica

Capitolo 1

Introduzione

L'elicottero è una macchina complessa, caratterizzata dall'essere soggetta a forze dinamiche variabili nel tempo, sbilanciamenti e altri fenomeni che portano alla nascita di vibrazioni e di rumore. Insieme alle vibrazioni, la rumorosità è una caratteristica peculiare degli elicotteri. Mentre il rumore è un problema per le persone che si trovano all'interno o all'esterno di un elicottero, le vibrazioni sono un problema rilevante per la funzionalità e la manutenzione del velivolo.

Una caratteristica dell'elicottero è il forte accoppiamento tra l'aerodinamica, le prestazioni e la meccanica del volo. Questo comporta che fin dall'inizio della progettazione debbano essere tenute in conto tutta una serie di problematiche relative ai diversi ambiti, compreso quello della riduzione del rumore interno.

Il livello interno del rumore influisce sulla qualità delle comunicazioni radio che avvengono tra il pilota, gli altri aeromobili in volo e gli enti di controllo del traffico aereo. La facilità di comunicazione garantisce un adeguato livello di sicurezza e semplifica il lavoro del pilota. Inoltre un ambiente rumoroso può compromettere una pronta comprensione tra l'equipaggio e i passeggeri in caso debbano essere tramessi messaggi relativi alla sicurezza in volo. Infine, un alto livello di rumorosità interna pregiudica il raggiungimento di elevati standard di abitabilità e comfort degli occupanti. [1]

1.1 Rumore di un elicottero

Il rumore prodotto da un elicottero viene percepito sia dall'equipaggio e dai passeggeri all'interno del velivolo (rumore interno) che al di fuori del velivolo (rumore esterno). Nell'ambito di questa tesi ci si occupa delle problematiche legate al rumore interno. Le fonti, la propagazione e le metodologie per la riduzione del rumore esterno sono diverse rispetto a quelle del rumore interno [2], e non vengono qui trattate.

Le sorgenti di rumore interno sono molteplici: la trasmissione, la struttura (che si deforma e vibra), il rotore, la scatola di riduzione, ecc.

Una fonte significativa di rumore interno è la trasmissione, a causa del rumore generato dagli organi meccanici in moto che possono operare nell'intervallo di frequenze alle quali l'orecchio umano è più sensibile. Essendo il progetto meccanico degli ingranaggi delle ruote limitato da numerosi fattori non direttamente legati al

rumore, un contributo alla diminuzione del livello di rumore può venire ad esempio dall'isolamento meccanico della zona d'installazione della trasmissione.

Uno dei metodi per combattere il rumore interno in cabina è l'uso di materiali fonoassorbenti, posti in particolare in corrispondenza dei pannelli che compongono le pareti della cabina piloti e passeggeri. L'uso di questi materiali risolve solo in parte il problema e a fronte di una riduzione del livello di rumore di pochi dB si ha un aggravio di peso non indifferente. Un aiuto può venire dalla cura con la quale si allestiscono gli interni dell'elicottero, prestando particolare attenzione alle finiture e ai collegamenti tra i pannelli che compongono l'allestimento di un interno di una cabina. Qualora i condotti dell'impianto di ventilazione e riscaldamento/condizionamento fossero un canale preferenziale per la propagazione del rumore, lungo i condotti stessi si possono porre dei dispositivi studiati appositamente per impedirne la propagazione (*soppressori di rumore*).

Il problema del contenimento del rumore interno va posto anche in relazione alle caratteristiche della percezione del rumore stesso da parte dell'orecchio umano, come messo in evidenza in [3].

Queste considerazioni in merito alla differenza tra il rilievo sperimentale e il giudizio sulla percezione del rumore da parte delle persone, è materia di studio della *psicoacustica*. Un miglioramento della correlazione tra i dati sperimentali e i giudizi qualitativi deve essere ottenuto tramite un aggiornamento dei sistemi di acquisizione e dei modelli numerici di elaborazione del segnale, che devono avvicinarsi il più possibile alle caratteristiche dell'orecchio umano.

1.2 Motivazioni

Per i motivi espressi precedentemente risulta evidente che un obiettivo estremamente importante nella progettazione di un elicottero sia la diminuzione del rumore all'interno della cabina. Prima ancora di interrogarsi su quali metodologie mettere in atto per attuare questa riduzione è necessario disporre di modelli previsionali che siano in grado di anticipare le problematiche e poi di verificare le possibili azioni correttive. Per ridurre il rumore è necessario possedere degli strumenti che permettano di prevedere il livello vibrazionale e il campo acustico all'interno della struttura.

Questi modelli previsionali devono mostrarsi compatibili non solo con la natura del problema stesso, ma anche con i procedimenti e le operazioni necessarie a modificare il comportamento del sistema nella direzione voluta. Dal punto di vista della propagazione acustica all'interno della cabina di un elicottero, a causa delle alte frequenze in gioco anche piccoli dettagli strutturali possono diventare fondamentali nella propagazione delle vibrazioni e del rumore, e gli stessi trattamenti per la riduzione del rumore sono spesso localizzati in zone ben definite nella struttura. Un'analisi di dettaglio, per esempio agli elementi finiti tradizionali, risulta assolutamente impraticabile sia per le alte frequenze in gioco sia per l'impossibilità generale di modellare con questi approcci quei fenomeni complessi che avvengono localmente in corrispondenza di collegamenti e delle giunzioni, e che sono fondamentali nell'ambito del problema acustico.

Ad oggi il metodo più utilizzato in questo senso è il SEA (Analisi Statistico Energetica) che si basa però su una modellazione a parametri concentrati e si rivela particolarmente deficitaria quando ci si trova di fronte proprio a problematiche locali (trattamenti localizzati ad esempio) e che non permette di conoscere l'andamento delle grandezze di interesse a livello locale.

L'EFEM (Energy Finite Element Method), che si è sviluppato negli ultimi anni, si propone come un metodo anch'esso energetico e parzialmente statistico ma che permette di mantenere traccia del comportamento locale delle grandezze di interesse, e che quindi può potenzialmente modellare quegli aspetti locali legati alla produzione e alla trasmissione del rumore e delle vibrazioni che sono tanto importanti ad alte frequenze.

In questo lavoro ci si propone di studiare la formulazione e il comportamento dell'EFEM rispetto al problema puramente strutturale della propagazione dell'energia vibratoria in piastre e insiemi di piastre, elementi strutturali che sono sia componenti fondamentali della cabina di un elicottero che principali emettitori dell'energia acustica del sistema stesso. L'attenzione è stata quindi concentrata prima alle piastre isolate, e poi a insiemi di piastre collegate tra di loro.

Essendo l'EFEM un metodo energetico è necessario comprendere come la sua formulazione sia compatibile con le peculiarità del problema vibrazionale che caratterizza il comportamento delle strutture interessate.

Ovviamente lo sviluppo di metodi che permettano di affrontare le problematiche relative al rumore è di interesse non solo per il campo elicotteristico, ma anche per altri campi sia in ambito aeronautico che non. Aeroplani, navi, veicoli terrestri: per quanto meno pressante che per gli elicotteri, la riduzione del rumore interno rimane sempre una problematica che con gli strumenti adatti può essere affrontata fin dalle prime fasi della progettazione.

1.3 Organizzazione

Questo documento è organizzato nel modo seguente: nel capitolo 2 vengono brevemente analizzati i metodi utilizzati al giorno d'oggi, la loro classificazione, il loro campo di utilizzo. Inoltre vengono riassunti i passati sviluppi del metodo degli elementi finiti energetici. Nel capitolo 3 viene mostrato lo sviluppo analitico delle equazioni energetiche che, implementate con il metodo degli elementi finiti, portano alla formulazione dell'EFEM (Energy Finite Element Method). Nel capitolo 4 vengono confrontati i risultati delle analisi eseguite su piastre isolate con diversi modelli e approcci, nel capitolo 5 viene mostrato un metodo ibrido e vengono eseguiti nuovi confronti su piastre isolate. Nel capitolo 6 viene mostrato lo sviluppo analitico del metodo per tener conto dei collegamenti tra elementi strutturali, la sua implementazione nel metodo agli elementi finiti e il confronto dei risultati di analisi eseguite su piastre collegate a diversi angoli. Nel capitolo 7 a essere analizzata è una struttura cubica composta da diverse piastre, mentre nel capitolo 8 sono raccolte le conclusioni del lavoro.

Capitolo 2

Stato dell'arte

In questo capitolo viene discusso lo stato dell'arte dei metodi per la predizione delle vibrazioni strutturali e del rumore da esse generato, così come i vantaggi e gli svantaggi di ciascun metodo.

Attualmente non esiste un metodo semplice per predire le vibrazioni strutturali e il campo acustico da queste derivato in strutture complesse, come aerei, navi, elicotteri, nell'intero campo di frequenze udibili (circa da 20 Hz a 20 kHz).

Esistono diversi strumenti specificatamente concepiti per analizzare, in situazioni semplificate, la risposta dinamica di un sottosistema composto di aste, travi, piastre e cavità acustiche. Ognuno di questi strumenti ha delle caratteristiche che lo rendono particolarmente applicabile per certi tipi di problemi.

I metodi attualmente disponibili per queste analisi sono classificati in funzioni di tre bande di frequenza: bassa, media, e alta frequenza.

2.1 Bassa Frequenza

In bassa frequenza vengono eccitati solamente i primi modi di vibrare (al limite poche decine) e si ottiene uno spettro della risposta caratterizzato da dei picchi massimi in corrispondenza delle frequenze di risonanza della struttura. La risposta della struttura è dominata da quella dei singoli modi. Lo spettro varia molto al variare della posizione dell'eccitazione e/o del punto di misura e anche dalle condizioni di vincolo. In questo range di frequenze possono essere utilizzati il metodo degli elementi finiti (FEM) e il metodo degli elementi a contorno (BEM).

2.1.1 FEM e BEM

Due metodi numerici molto utilizzati in questo range di frequenza sono gli elementi finiti (FEM) e gli elementi di contorno (BEM). Un confronto dei due metodi è presente in Atalla e Bernard [4], dove vengono anche descritte le limitazioni reciproche. Nelle analisi FEM tutto il volume viene discretizzato, mentre nei BEM viene discretizzata solamente la superficie. Entrambi i metodi sono normalmente utilizzati per eseguire analisi dettagliate alle basse frequenze. Sono in grado di determinare le risposte di sistemi dinamici soggetti a eccitazioni mecca-

niche (forze concentrate o distribuzioni di pressione) in termini di spostamenti, velocità, accelerazioni.

Per assicurare una previsione accurata è necessario discretizzare il modello con un numero minimo di elementi per lunghezza d'onda. Di conseguenza quando le frequenze diventano medie o alte diventa necessario utilizzare un numero elevato di elementi, il che rende il costo computazionale delle analisi di un sistema complesso proibitivo.

Gli elementi di contorno sono stati sviluppati come un'alternativa agli elementi finiti in certi casi come ad esempio per domini che si estendono all'infinito (piastrine che irradiano all'infinito). La più importante caratteristica dei BEM è che richiedono la discretizzazione solamente della superficie piuttosto che del volume. Seguendo ancora Atalla e Bernhard [4], esistono 3 classi principali di elementi al contorno: il Direct Boundary Element Method (DBEM) basato sull'equazione integrale di Helmholtz, l'Indirect Boundary Element Method (IBEM) derivato dalla teoria del potenziale e il Variational Boundary Element Method (VBEM), formulato sia in termini diretti che indiretti utilizzando un approccio variazionale per l'errore della soluzione sul contorno.

Come per gli elementi finiti è necessario un numero di elementi sempre più elevato all'aumentare della frequenza, il che rende il metodo difficilmente applicabile alle alte frequenze.

2.2 Alta Frequenza

In alta frequenza lo spettro non presenta più picchi significativi ma ha un andamento più smussato, poiché si ha un effetto di sovrapposizione (overlapping) dei modi, che tendono a interagire con i loro vicini in maniera sempre più significativa al crescere della frequenza. Conoscendo la densità modale di un sistema (cioè il numero di modi nell'unità di frequenza) è possibile calcolare il fattore di sovrapposizione modale (che aumenta all'aumentare della frequenza). Quando questo fattore supera l'unità ci si avvicina al range di alta frequenza. La densità modale di una piastra sottile (per quanto riguarda le onde trasversali) può essere scritta come

$$n(f) = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} \quad (2.1)$$

dove a e b sono i lati della piastra, ρ è la densità, ν è il modulo di Poisson, E quello di Young e h lo spessore.

Il fattore di sovrapposizione modale è

$$m(f) = fn(f)\eta(f) \quad (2.2)$$

dove f è la frequenza e η lo smorzamento.

Inoltre in questo range le forme modali e le frequenze proprie sono sensibili a piccole variazioni della geometria o delle proprietà dei materiali. A causa di queste caratteristiche dei metodi a base statistica sono appropriati per questo range. In questo campo infatti le dimensioni caratteristiche degli elementi strutturali sono

grandi rispetto alle lunghezze d'onda in gioco. Ad alta frequenza la risposta di un qualunque punto della struttura è rappresentativo per caratterizzare la risposta di tutta la struttura. Quindi le risposte mediate spazialmente sono rappresentative del comportamento degli elemento strutturali e delle cavità acustiche. Infatti a causa delle dimensioni ridotte delle lunghezze d'onda i massimi e minimi locali sono così vicini che la percezione del suono, o di altre simili performance, sono ben stimate dalle medie.

2.2.1 Giustificazione dell'approccio statistico per le alte frequenze

Per giustificare queste considerazioni viene riportata l'analisi della risposta di una piastra sottile eccitata puntualmente da una forzante armonica, in un range di frequenze da 0 a 10 kHz. La piastra è rettangolare, di materiale isotropo e semplicemente appoggiata sul contorno. In figura 2.1 sono riportate le caratteristiche della piastra.

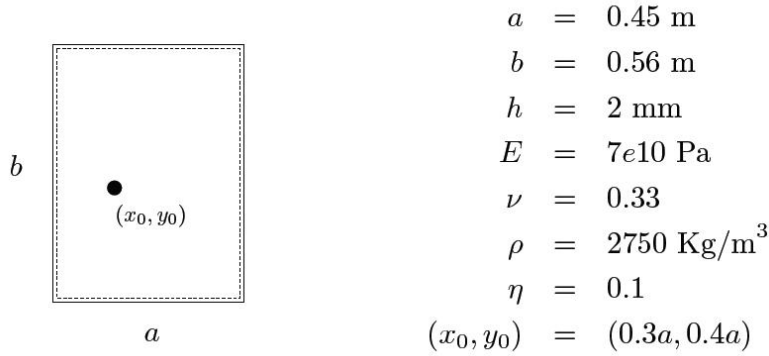


Figura 2.1: Configurazione e parametri dell'analisi

La velocità trasversale di un generico punto di coordinate (x, y) della piastra alla pulsazione ω può essere scritta con un sviluppo modale come

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{4j\omega F \phi_{mn}(x_0, y_0) \phi_{mn}(x, y)}{\rho h a b [\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} \quad (2.3)$$

dove le forme modali sono

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.4)$$

e le frequenze proprie

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{Eh^3}{\rho h 12 (1 - \nu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]} \quad (2.5)$$

dove F è l'ampiezza della forzante, ρ la densità del materiale, a e b i lati della piastra, M e N il numero dei modi utilizzati nella sommatoria, E il modulo di Young del materiale, ν quello di Poisson, h lo spessore della piastra e η lo smorzamento.

Nello stesso punto può essere scritta la mean square velocity, che a meno di una costante legata alla densità è l'energia cinetica della piastra

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{4j\omega F \phi_{mn}(x_0, y_0) \phi_{mn}(x, y)}{\rho hab [\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{4j\omega F \phi_{mn}(x_0, y_0) \phi_{mn}(x, y)}{\rho hab [\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} = \\ &= \frac{16\omega^2 F^2}{(\rho hab)^2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{mn}^2(x_0, y_0) \phi_{mn}^2(x, y)}{[(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_{mn}^4]} \quad (2.6) \end{aligned}$$

In figura 2.2 è riportato l'andamento della mean square velocity per alcuni punti selezionati casualmente sulla piastra in un range di frequenze tra 0 e 10 kHz. Si nota come al di sopra di una certa frequenza le risposte dei diversi punti siano molto simili.

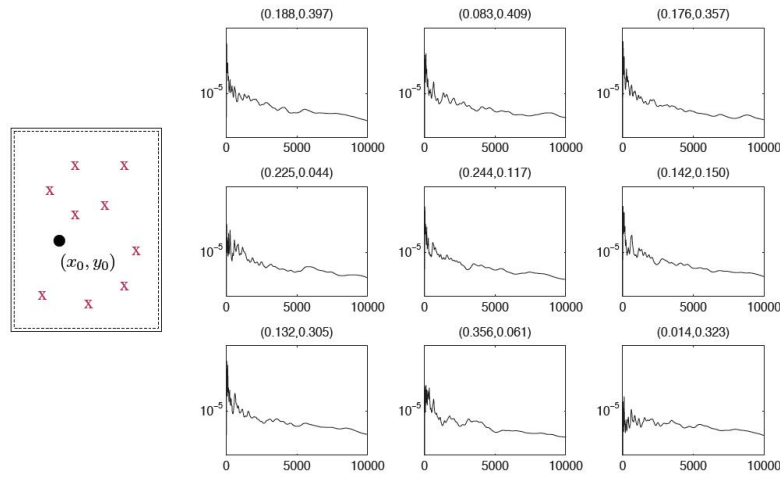


Figura 2.2: Mean square velocity in 9 punti selezionati casualmente sulla piastra - frequenze da 0 a 10 kHz

In figura 2.3 le risposte sono riportate sullo stesso grafico. A basse frequenza la risposta dei diversi punti cambia notevolmente tra l'uno e l'altro, mentre a medie e alte frequenze le risposte tendono a essere molto simili, a causa dei picchi che si sovrappongono, e di conseguenza può essere utilizzata una sola quantità per caratterizzare la risposta di tutta la piastra.

Integrando sulla superficie viene eseguita una media spaziale della mean square velocity

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \langle v^2 \rangle dx dy = \frac{4\omega^2 F^2}{(\rho hab)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{mn}^2(x_0, y_0)}{[(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_{mn}^4]} \quad (2.7)$$

Questa grandezza viene ancora mediata rispetto alle coordinate (x_0, y_0) del punto di applicazione della forzante

$$\langle \bar{\bar{v}}^2 \rangle = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \langle \bar{v}^2 \rangle dx dy = \frac{\omega^2 F^2}{(\rho hab)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{[(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_{mn}^4]} \quad (2.8)$$

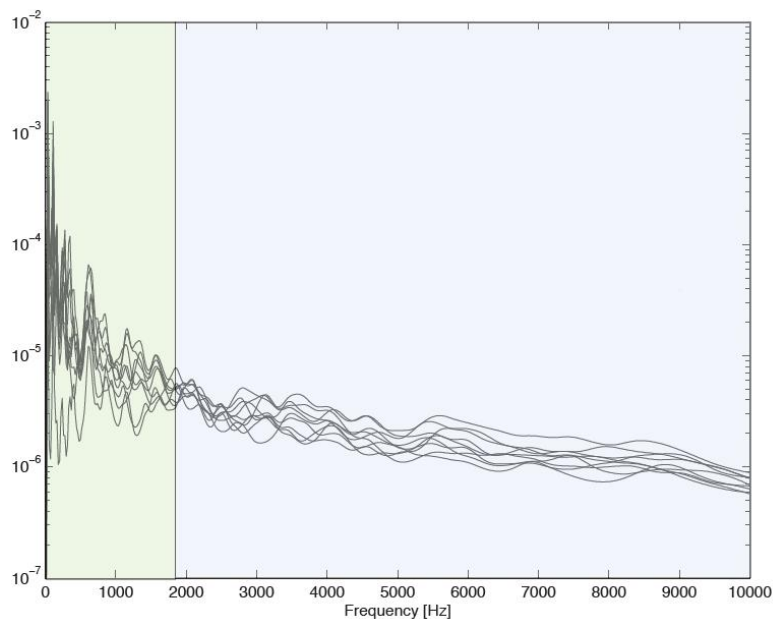


Figura 2.3: Mean square velocity in 9 punti selezionati casualmente sulla piastra - frequenze da 0 a 10 kHz

Questa grandezza può essere usata come quantità che descrive il comportamento di tutta la piastra per le medie e le alte frequenze. E' interessante notare come questa non dipenda dalle forme modali, che le operazioni di media hanno eliminato dall'espressione. In figura 2.4 è riportato il confronto di questa grandezza mediata con le mean square velocity calcolate prima, come si vede per le medie e alte frequenze il comportamento di tutta la piastra può essere ben approssimato da una sola grandezza grazie alle operazioni di media spaziale svolte.

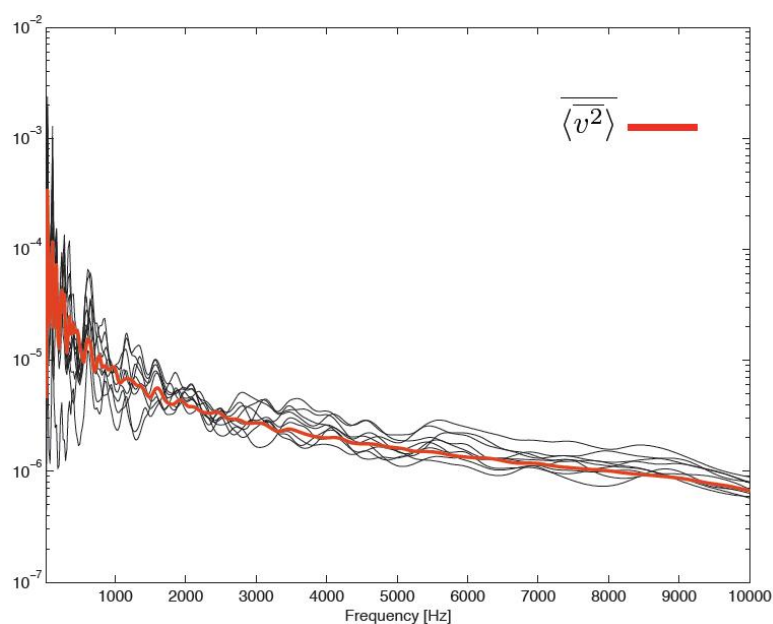


Figura 2.4: Confronto della mean square velocity nei 9 punti della piastra con la stessa grandezza mediata sulla superficie e rispetto ai punti di eccitazione

In conclusione quindi, riferendosi alla figura 2.5, vengono confermate le osservazioni fatte precedentemente sull'andamento delle risposte a bassa e alta frequenza, e diventa chiaro come l'utilizzo di metodi statistici sia appropriato per le alte frequenze.

Infatti,

- a bassa frequenza la risposta è caratterizzata da un forte comportamento modale, che comporta sia una grande variazione spaziale della risposta stessa sia una forte dipendenza dalla geometria, dalle caratteristiche del materiale e dalle condizioni di vincolo.
- ad alta frequenza la risposta ha un andamento più smussato, a causa dell'alto fattore di sovrapposizione modale: la risposta è molto simile per tutta la piastra ed è poco dipendente dalla geometria, dalle caratteristiche del materiale e dalle condizioni di vincolo.

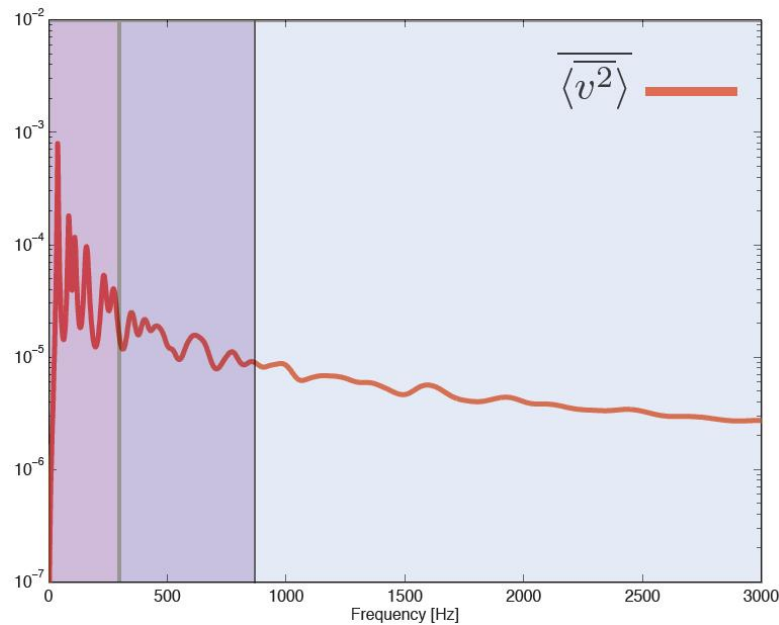


Figura 2.5: Mean square velocity mediata sulla superficie e rispetto ai punti di eccitazione

A questo punto vengono presi in esame i diversi metodi utilizzati per le analisi ad alta frequenza.

2.2.2 SEA

Il SEA è stato il primo metodo sviluppato come un metodo approssimato analitico per strutture composte ad alta frequenza. Teoricamente il SEA può essere usato a tutte le frequenze, tuttavia a basse frequenze l'incertezza nelle predizioni è elevata e la distribuzione statistica dell'energia è troppo ampia per rendere il metodo un approccio conveniente. E' un metodo a parametri concentrati e perciò modella il comportamento del singolo sottosistema come un singolo parametro, di conseguenza non è in grado di modellare comportamenti locali. Questa caratteristica rende lo sviluppo di modelli difficile, e richiede notevole esperienza.

Usando l'Analisi Statistico-Energetica è possibile ottenere una stima della risposta della struttura in termini di energie medie vibrazionali. Un valore discreto di energia è predetto per ogni sottosistema. Viene creato un modello (modello SEA) della struttura reale che ne rappresenta il comportamento vibroacustico sotto il profilo energetico. Questo modello è formato da sottosistemi, ciascuno dei quali rappresenta una tipologia di modi di vibrare di ogni elemento strutturale che compone la struttura. Per essere modellato come sottosistema, la parte deve essere in grado di vibrare quasi indipendentemente dagli altri elementi e deve esistere nel sottosistema un campo riverberante. In realtà è ovvio che non è necessario modellare tutti gli elementi strutturali, poiché ve ne possono essere alcuni che o non interessano, o non vengono sufficientemente eccitati, oppure comunque non trasmettono energia agli altri sottosistemi e quindi non influenzano la risposta. Lo stesso discorso vale per i modi di ciascun elemento che si è deciso di modellare: ve ne possono essere alcune tipologie che possono essere trascurate, per cui non costituiranno un sottosistema del modello.

In sintesi l'analisi SEA consiste nell'applicare un'equazione di bilancio energetico su ciascun sottosistema che costituisce il modello. L'energia può:

- fluire all'interno di un sottosistema (flusso di energia entrante)
- venire dissipata dal sottosistema (flusso di energia uscente)
- venire trasmessa dal sottosistema ad un sottosistema contiguo (flusso di energia uscente)

Il flusso di energia entrante in un sottosistema può provenire o da una fonte esterna, quindi dalla forzante, o da un altro sottosistema. Questo flusso di energia può essere quantificato come proporzionale alla differenza di energia modale tra i due sottosistemi. Inoltre, l'energia dissipata in ogni sottosistema è proporzionale al totale dell'energia nei sottosistemi.

Nelle equazioni di bilancio dell'energia compaiono vari termini i quali vengono definiti parametri SEA, e sono i parametri che caratterizzano compiutamente i sottosistemi che compongono il modello. Essi sono:

- la densità modale n_i (numero di modi presenti in ciascuna banda)

- il termine adimensionale η_i , associato all'energia dissipata, che viene denominato fattore di perdita per dissipazione, in inglese dissipation loss factor o più semplicemente loss factor
- il termine adimensionale η_{ij} che viene denominato fattore di perdita per accoppiamento, in inglese coupling loss factor

Questi parametri di accoppiamento non sono predefiniti per la maggior parte dei sistemi accoppiati, e per determinarli è necessaria molta esperienza.

Il SEA è uno strumento computazionalmente leggero, perché ogni sistema è un solo elemento nella matrice di risoluzione, inoltre, essendo basato su un modello statistico predice una risposta mediata, non deterministica, il che si accorda con le caratteristiche della banda di alta frequenza.

D'altra parte presenta numerosi svantaggi: spesso ci sono effetti locali del sottosistema che devono essere modellati, come eccitazioni localizzate, smorzamenti o parziali connessioni tra sottosistemi. Come detto precedentemente il metodo fornisce come risultato i livelli discreti di energia per i sottosistemi, il che non tiene conto della variazione di energia all'interno dei sottosistemi stessi. Un'altra problematica del metodo è il fatto che, basandosi su una serie di parametri che dipendono da prove sperimentali, diventa difficile utilizzarlo nello sviluppo di nuovi progetti. Inoltre non è affidabile a basse frequenze per le quali l'approccio statistico non ha senso.

2.2.3 Power Flow Analysis

Il Power flow analysis (PFA) nasce dal lavoro di Rybak [5],[6],[7] e di Belov e Rybak [8]. Il loro lavoro iniziale proponeva che il campo di energia totale fosse composto da onde incidenti e onde riflesse. Il risultante campo di energia incoerente permette di passare da una descrizione deterministica del campo di energia ad una approssimata. Il campo coerente diventa trascurabile e rende possibile approssimare la distribuzione di intensità con un'equazione di diffusione.

Belov, Rybak, e Tartakovskii [9] estesero il power flow ulteriormente, derivando un'equazione differenziale simile a quella della conduzione del calore per modellare il flusso di energia vibrazionale. Ipotizzarono che il flusso fosse proporzionale al gradiente della densità di energia. Fu inoltre assunto che la potenza dissipata in un sottosistema fosse proporzionale al totale dell'energia nel sottosistema. Le costanti di proporzionalità furono derivate usando metodi di trasmissione di onde e assumendo condizioni di campo lontano.

Nefske and Sung [10] estesero il PFA implementandolo in una formulazione ad elementi finiti.

Questo approccio usa molte delle stesse approssimazioni del SEA ma fa un passo ulteriore rispetto ad esso predicendo le variazioni spaziali dell'energia all'interno di ciascun sottosistema e la direzione del flusso di energia locale. L'implementazione numerica permise di dimostrare che il PFA poteva essere usato per predire la risposta di una trave vibrante a frequenze dove l'uso degli elementi finiti era troppo dispendioso.

2.2.4 General Energy Formulation Method

LeBot [11] derivò una formulazione matematica esatta per modellare la densità di energia e l'intensità in un sistema dinamico. Questo metodo produce un'equazione differenziale esatta per il flusso di energia senza approssimazioni. Vengono usate la densità di energia totale, somma dell'energia cinetica e di quella potenziale, e la densità di energia Lagrangiana, cioè la differenza tra la cinetica e la potenziale, e anche l'intensità attiva e quella reattiva come variabili per modellare il flusso di energia. Tutte le componenti dell'energia vengono tenute in conto, così come il campo vicino, quello lontano, le componenti armoniche, quella attiva e quella reattiva dell'intensità.

L'equazione differenziale del GEF è una descrizione esatta del sistema energetico, ma non è facilmente risolvibile a causa del numero di condizioni al contorno necessarie e dell'alto ordine della equazione differenziale. La formulazione è valida per sistemi 1,2 e 3D.

Lebot ha sviluppato anche un SEF (smooth energy formulation) per predire una distribuzione di energia approssimata. Il SEF è una semplificazione del GEF e usa solo la densità di energia totale e il flusso di energia attivo. Le semplificazioni sono introdotte eseguendo localmente una media spaziale sull'energia totale e trascurando le variabili reattive dell'energia.

Il SEF può essere usato per predire la risposta a livello energetico di sottosistemi con alta densità modale e alta sovrapposizione modale.

Inoltre è consistente con l'analisi successiva proposta da Wohlever [12] e [13].

2.2.5 Energy Flow Analysis

L'energy flow analysis (EFA) è stata sviluppata negli ultimi anni e ha ricevuto i contributi di numerosi ricercatori. Gli studi di Wohlever [12] sono cominciati in parallelo a quelli del PFA di Nefske e Sung [10] che modellarono il flusso di energia vibrazionale per descrivere la risposta dinamica di strutture ad alte frequenze. Questo metodo è usato per modellare il flusso di energia \vec{I} , usando modelli che sono analoghi al flusso di energia termica in un problema di conduzione del calore del tipo:

$$\vec{I} \propto \nabla e. \quad (2.9)$$

Wohlever ha usato questo metodo per predire il livello di densità di energia in aste e travi uniformi. Per le aste dimostrò che in condizioni di smorzamento isteretico sufficientemente piccolo, il flusso di energia è proporzionale al gradiente della densità di energia. Usando questa relazione di proporzionalità tra intensità e densità di energia, e un bilancio di energia su un volume di controllo differenziale, fu sviluppata un'equazione differenziale che modella il comportamento della distribuzione di energia nelle aste. Questa equazione è risolta numericamente con gli elementi finiti.

In seguito questo metodo è stato esteso all'analisi delle travi. L'equazione delle travi è un'equazione del 4° ordine che da luogo a effetti di campo vicino che complicano la soluzione.

L'assunzione che il flusso di energia sia proporzionale al gradiente della densità di energia dipende dal fatto di eseguire una media spaziale. E' anche necessario

limitare l'analisi alla regione di campo lontano e ignorare gli effetti vicini (detti anche onde evanescenti, che possono essere ignorati siccome i loro effetti sono di solito limitati a una frazione di lunghezza d'onda dalle discontinuità o dal punto di applicazione del carico[14]). Le predizioni sono migliori alle alte frequenze dove la lunghezza della trave è lunga relativamente alle lunghezze d'onda. Il range di alte frequenze è dove i termini di campo vicino si possono trascurare, e la soluzione di campo lontano mediata può essere assunta come rappresentativa della risposta media. Ignorare il campo vicino permette la formulazione di una semplice relazione di trasmissione tra il flusso di energia e la densità di energia.

Questo metodo energetico è stato ulteriormente esteso a sistemi multi-dimensionali (membrane, piastre, cavità acustiche) da Bouthier [13], che ne ha anche implementato una approssimazione agli elementi finiti.

In tutti i 3 casi (membrane, piastre e cavità acustiche), le equazioni differenziali e la relazione di trasmissione dell'energia sono le stesse. La similitudine è dovuta all'utilizzo della media spaziale e dal fatto di trascurare il campo vicino. Per derivare le equazioni differenziali governanti vengono utilizzati una relazione di trasmissione dell'energia, una relazione di bilancio di energia e una relazione di potenza dissipata. Questa equazione è in seguito risolta tramite gli elementi finiti.

Elementi di Collegamento

A questo punto l'ostacolo per l'EFEM (Energy Finite Element Method, cioè l'implementazione a elementi finiti delle equazioni dell'EFA) era quello di accoppiare diversi sottosistemi. Era necessario un metodo di accoppiamento che potesse essere usato con gli elementi finiti per modellare i vari collegamenti come trave-trave, piastra-piastra, e piastra-cavità acustica.

Cho [15] ha sviluppato un metodo per accoppiare basato sulla conservazione del flusso di potenza attraverso i contorni. L'idea fondamentale è quella che il flusso di potenza attraverso il collegamento è continuo, mentre la densità di energia non lo è. L'intensità netta in uscita da uno dei sottosistemi deve eguagliare l'intensità netta in entrata nel sottosistema ricevente. Cho ha usato la conservazione del flusso di energia e un principio di sovrapposizione dell'energia per accoppiare i sottosistemi strutturali. Inoltre ha derivato la metodologia necessaria a accoppiare i modelli di elementi strutturali all'interno di una formulazione a elementi finiti.

Questa nuova tecnica di accoppiamento richiede la conoscenza dei coefficienti di trasmissione di potenza e di potenza riflessa per l'accoppiamento tra le strutture.

Parametri dell'EFEM

Il nuovo metodo proposto da Cho per accoppiare sottosistemi richiede la conoscenza del coefficiente di trasmissione di potenza, τ , e del coefficiente di potenza riflessa, r . Questi coefficienti devono essere definiti per modellare il collegamento. Altri parametri sono richiesti per modellare il sottosistema, come la velocità di gruppo del materiale c_g e il fattore di smorzamento del materiale η . Questi parametri possono essere presi dalla letteratura oppure possono essere misurati sperimentalmente.

2.3 Conclusioni

Le caratteristiche delle formulazioni energetiche sono in generale consistenti con i requisiti delle analisi ad alta frequenza. Esse predicono la risposta di strutture vibranti in una maniera approssimata senza scartare l'andamento generale spaziale della risposta e senza il problema di dover ridurre una struttura continua a un modello a parametri concentrati. L'accuratezza dello schema tipicamente migliora all'aumentare della frequenza e dello smorzamento. Buona parte del dettaglio della soluzione esatta non è presente in quella approssimata, ma viene preservato l'andamento generale.

L'EFEM utilizza la densità di energia mediata come variabile primaria per formare le equazioni differenziali governanti e fornisce un pratico approccio per valutare la risposta strutturale ad alta frequenza, che è difficile da raggiungere con i tradizionali metodi ad elementi finiti a causa del costo computazionale.

L'EFEM come il SEA predice l'energia meccanica basandosi su equazioni di equilibrio energetiche, ma a differenza di quest'ultimo è in grado di predire le variazioni spaziali all'interno dei sottosistemi, inoltre è in grado di modellare ingressi localizzati e trattamenti locali di smorzamento. Un altro vantaggio rispetto al SEA è legato al fatto che i modelli FEM per le basse frequenze possono essere direttamente usati come modelli per l'approccio EFEM, a differenza di quelli SEA.

I risultati ricavati in questa tesi confermano la bontà dell'approssimazione del metodo degli elementi finiti energetici in sistemi di piastre ad alta frequenza, nonostante siano stati evidenziati dei limiti della formulazione che ne limitano il campo di utilizzo e che richiedono cautela nell'utilizzazione.

In figura 2.6 è riportato indicativamente il campo di utilizzo dei diversi metodi.

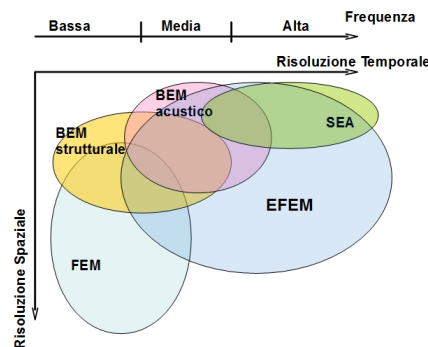


Figura 2.6: Campo di utilizzazione dei diversi metodi

Su un asse è riportata la risoluzione spaziale, cioè il livello di dettaglio fino al quale il metodo può essere utilizzato. Sull'altro asse è presente la risoluzione temporale, ossia il campo di frequenze di utilizzabilità del metodo. Gli elementi finiti tradizionali, ad esempio, possono operare fino a un'alta risoluzione spaziale, ma solamente per frequenze basse. Il SEA, al contrario, opera solamente per alte frequenze e su un livello di risoluzione spaziale basso. L'EFEM si pone su un'ampia zona in media/alta frequenza e con la capacità di operare a risoluzioni spaziali maggiori di quelle del SEA.

Capitolo 3

Sviluppo del metodo EFEM

In questo capitolo viene sviluppato l'EFEM (Energy Finite Element Method). Prima vengono ricavate le equazioni energetiche per le piastre, poi per le cavità acustiche e infine le equazioni vengono implementate col metodo degli elementi finiti.

Ogni volta che si parla di energia in questo capitolo si parla di energia vibrazionale.

3.1 Sviluppo analitico del metodo energetico per piastre

In questa sezione vengono derivate le espressioni che regolano il flusso dell'energia in piastre vibranti trasversalmente, sia finite che infinite. Nella prima parte della sezione vengono presi in esame i concetti fondamentali sul flusso di energia, in seguito viene espresso in termini energetici il moto trasversale di una piastra infinita e infine si passa alla piastra finita.

La derivazione di queste equazioni energetiche si basa su tre relazioni:

- un'equazione di trasmissione che lega densità di energia e intensità.
- un bilancio energetico
- una relazione di perdita di energia, dove la potenza dissipata è legata alla densità di energia locale della struttura attraverso un fattore di smorzamento.

Queste tre relazioni sono accoppiate per sviluppare le equazioni che governano la densità di energia nelle piastre.

3.1.1 Equazioni dell'Intensità

Il punto di partenza è l'equazione di conservazione dell'energia. Il flusso di energia attraverso la superficie del volume di controllo è equivalente alla variazione dell'energia totale all'interno del volume di controllo stesso [16]

$$\iiint \frac{\partial e}{\partial t} dV = \iint \left(\sigma \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \cdot dA + \iiint (\pi_{in} - \pi_{diss}) dV \quad (3.1)$$

dove e è la densità di energia nel volume di controllo, \vec{u} è il vettore spostamento dei punti del contorno del volume di controllo, π_{in} è la densità di potenza in ingresso (oppure l'energia in ingresso per unità di volume per unità di tempo), π_{diss} è la densità di potenza dissipata (o l'energia per unità di volume per unità di tempo), dA è il vettore normale alla superficie del volume di controllo per un dato punto sulla superficie mentre σ , il tensore di sforzo, è

$$\sigma = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La variazione di densità di energia all'interno del volume di controllo è dovuta al lavoro dello sforzo. In termini di sforzi e velocità, il flusso uscente di densità di energia dal volume di controllo è

$$\vec{I} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Le dimensioni di \vec{I} sono potenza per unità di area, cioè intensità.

L'equazione (3.3) è valida per qualsiasi mezzo. Le analisi di questo capitolo si limitano al caso di vibrazioni flessionali nelle piastre, siccome sono il componente strutturale di maggior interesse per l'acustica.

Le componenti del tensore degli sforzi per un volume elementare di un elemento di piastra giacente nel piano $x - y$ dovute a uno spostamento trasversale w , sono [17]

$$\tau_{xx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\tau_{zz} = 0 \quad (3.6)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.7)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (3.8)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (3.9)$$

dove E è il modulo di Young, h è lo spessore della piastra, ν è il coefficiente di Poisson, w lo spostamento trasversale. Il vettore velocità è [17]

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Per quanto riguarda le vibrazioni di piastre sottili, l'intensità non è uniforme attraverso lo spessore della piastra, siccome lo sforzo varia nello spessore con la coordinata z . In questo ambito l'interesse è per il flusso di energia nel piano della piastra. Il flusso in direzione perpendicolare al piano è in generale trascurabile nella dinamica strutturale. Per cui, l'intensità totale viene calcolata integrando lungo lo spessore

$$\bar{I} = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{I} dz \quad (3.11)$$

Sostituendo le equazioni (3.4)-(3.9) nell'equazione (3.2) si ricava il tensore degli sforzi in termini di spostamento. Poi, sostituendo le equazioni (3.10) e (3.2) nell'equazione (3.3) si ricava il campo di intensità in una piastra sottile. Eseguendo l'integrazione lungo lo spessore dell'equazione (3.11) si ricava il campo di intensità in termini di spostamenti [14]

$$\bar{I}_x = -M_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + Q_x \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.12)$$

$$\bar{I}_y = -M_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - M_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + Q_y \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.13)$$

dove

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.14)$$

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.15)$$

$$M_{xy} = -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.16)$$

$$M_{xy} = M_{yx} \quad (3.17)$$

e

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.18)$$

Le componenti dell'intensità nelle equazioni (3.12) e (3.13) hanno le dimensioni di potenze per unità di lunghezza.

3.1.2 Equazioni Energetiche per le Piastre Infinite

Lo scopo di questa sezione è quello di mostrare che le vibrazioni di una piastra sottile infinita possono essere descritte in termini energetici. La derivazione delle equazioni energetiche usa tre relazioni:

1. Equazione di trasmissione che lega la densità di energia all'intensità
2. Equazione di bilancio dell'energia
3. Relazione di perdita di energia dove la potenza dissipata è legata alla densità di energia locale tramite un fattore di smorzamento.

Queste tre relazioni vengono accoppiate per sviluppare le equazioni che governano la densità di energia in vari sistemi vibranti. L'equazione che governa la risposta (in termini di velocità o di spostamenti) di una piastra sottile vibrante è un'equazione del quarto ordine [18]. In questa sezione verrà mostrato come un'equazione differenziale del primo ordine nei termini della densità di energia è sufficiente a modellare la risposta di una piastra infinita vibrante eccitata in un punto.

L'equazione di moto per una piastra sottile, che vibra trasversalmente in seguito a un'eccitazione armonica localizzata in un punto è

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\delta(r) e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

dove ρ è la densità della piastra e h lo spessore. Per una piastra infinita eccitata da una forza puntuale la soluzione sarà uniforme nella direzione circonferenziale. La soluzione generale dell'equazione (3.19) è una combinazione lineare di funzioni di Hankel

$$w = \frac{F\omega}{8Dk^2} \left(H_0^{(2)}(kr) - H_0^{(2)}(-ikr) \right) e^{i\omega t} \quad (3.20)$$

dove k è il numero d'onda

$$k = \left(\omega^2 \frac{\rho h}{D} \right)^{1/4} \quad (3.21)$$

Per questo studio viene considerata l'espansione asintotica di campo lontano dell'equazione (3.20) ottenendo la soluzione appunto di campo lontano [19]

$$w = \frac{iF}{8Dk^2} \left(\frac{2}{k\pi r} \right)^{1/2} e^{i(\omega t - kr + \pi/4)} \quad (3.22)$$

A livello pratico, se la lunghezza d'onda caratteristica è indicata con λ , si può parlare di campo lontano a $\lambda/2$ di distanza dai contorni, dalle discontinuità e dai punti di eccitazione [14]. Come si vede dall'equazione (3.22) la propagazione dell'energia avviene in onde cilindriche in direzione radiale. In questo caso la relazione tra energia e intensità radiale è (3)

$$I_r = c_g e \quad (3.23)$$

dove

$$c_g = 2 \left(\omega^2 \frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} \quad (3.24)$$

Essendo il caso in esame assialsimmetrico, la componente tangenziale dell'intensità è zero.

A questo punto, applicando il teorema della divergenza, l'intensità dell'equazione (3.1) può essere riscritta come

$$\iint_A \vec{I} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{I} dV \quad (3.25)$$

da cui l'equazione (3.1) diventa

$$\iiint_V \frac{\partial e}{\partial t} dV = \iiint_V \left(\pi_{in} - \pi_{diss} - \nabla \cdot \vec{I} \right) dV \quad (3.26)$$

oppure

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \pi_{in} - \pi_{diss} - \nabla \cdot \vec{I} \quad (3.27)$$

L'equazione (3.27) è valida per qualsiasi mezzo elastico e sia per analisi stazionarie che non. Per analisi stazionarie può essere riscritta come

$$\pi_{in} = \pi_{diss} + \nabla \cdot \vec{I} \quad (3.28)$$

A questo punto bisogna introdurre un'espressione per esprimere la potenza dissipata. La deformazione di un punto di un mezzo elastico che vibra armonicamente con pulsazione ω è

$$\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \cos(\omega t) \quad (3.29)$$

dove $\hat{\epsilon}$ è la massima deformazione di quel punto. Per un modello di smorzamento isteretico, Cremer e Heckl [20] hanno mostrato che la densità di energia dissipata nel periodo τ di un'oscillazione è

$$e_{diss} = \int_t^{t+\tau} \pi_{diss} dt = \pi \eta D \hat{\epsilon}^2 \quad (3.30)$$

L'energia potenziale U , scritta in termini delle deformazioni è

$$U = \frac{1}{2} D \epsilon^2 = \frac{1}{4} D \hat{\epsilon}^2 (1 + \cos(2\omega t)) \quad (3.31)$$

La densità di energia potenziale mediata nel tempo (cioè nel periodo dell'oscillazione) è

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} D \hat{\epsilon}^2 \quad (3.32)$$

Mediamente nel periodo, considerando il campo lontano¹, la densità di energia cinetica e quella potenziale si equivalgono approssimativamente [21]

$$\langle U \rangle_l \approx \langle T \rangle_l \quad (3.33)$$

Quindi la densità di energia totale, mediata nel tempo, che è la somma della densità potenziale e di quella cinetica può essere scritta come

$$\langle e \rangle = \langle U \rangle + \langle T \rangle \approx 2 \langle U \rangle \quad (3.34)$$

Di conseguenza la densità di energia mediata nel tempo può essere scritta come

$$\langle e \rangle \approx \frac{1}{2} D \hat{\epsilon}^2 \quad (3.35)$$

Dall'equazione (3.35) la massima deformazione può essere scritta in termini della densità di energia come

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{2}{D} \langle e \rangle \quad (3.36)$$

¹il pedice l sta per campo lontano

A questo punto la densità di energia dissipata in un periodo può essere scritta in termini della densità di energia mediata nel tempo sostituendo l'equazione (3.36) nella (3.30) così che

$$e_{diss} = 2\pi\eta \langle e \rangle \quad (3.37)$$

Siccome il periodo dell'oscillazione è $\tau = 2\pi/\omega$, la potenza dissipata mediata nel tempo, π_{diss} , è

$$\langle \pi_{diss} \rangle = \frac{e_{diss}}{\tau} = \eta\omega \langle e \rangle \quad (3.38)$$

L'equazione (3.38) è stata ricavata con il modello di smorzamento isteretico assumendo $\eta \ll 1$.

Combinando l'equazione di trasmissione dell'energia ((3.23)), l'equazione di bilancio ((3.28)), e l'equazione della dissipazione dell'energia ((3.38)) si ricava l'equazione che governa la densità di energia in una piastra sottile infinita eccitata in un punto da una forzante armonica

$$\frac{d}{dr} (r \langle e \rangle) + \frac{\eta\omega}{c_g} (r \langle e \rangle) = r \frac{\langle \pi_{in} \rangle}{c_g} \quad (3.39)$$

Per una eccitazione puntuale, la forzante è moltiplicata per una delta di Dirac. La funzione di Green dell'equazione (3.39) è

$$\langle e \rangle = \frac{A}{r} e^{-\eta\omega r/c_g} \quad (3.40)$$

Per ricavare A si sfrutta il fatto che la potenza in ingresso deve uguagliare la potenza in direzione radiale a una certa distanza r_0 vicino al punto di eccitazione. Usando l'equazione (3.23) si ricava

$$\langle \pi_{in} \rangle = \lim_{r_0 \rightarrow 0} 2\pi r_0 \langle I_r \rangle = 2\pi c_g A \quad (3.41)$$

Da cui

$$A = \frac{\langle \pi_{in} \rangle}{2\pi c_g} \quad (3.42)$$

Dalle equazioni (3.39) e (3.42) si ricava l'espressione della densità di energia

$$\langle e \rangle = \frac{\langle \pi_{in} \rangle}{2\pi r c_g} e^{-\eta\omega r/c_g} \quad (3.43)$$

In base alle caratteristiche del problema la potenza in ingresso può essere assegnata, misurata oppure ricavata a partire dall'impedenza. La potenza in ingresso di una forzante armonica puntuale può essere espressa in funzione dell'impedenza meccanica Z come

$$\langle \pi_{in} \rangle = \frac{1}{2} |F|^2 \text{Real} \left\{ \frac{1}{Z} \right\} \quad (3.44)$$

L'impedenza meccanica di una piastra infinita è [20]

$$Z = \frac{8\omega\rho h}{k^2} \quad (3.45)$$

Quindi,

$$\langle \pi_{in} \rangle = \frac{k^2 |F|^2}{16\omega\rho h} \quad (3.46)$$

E infine la densità di energia per una piastra infinita eccitata in un punto da una forzante armonica è

$$\langle e \rangle = \frac{|F|^2}{64\pi D} \frac{e^{-\eta\omega r/c_g}}{kr} \quad (3.47)$$

Questa espressione è identica a quella che sarebbe stata ricavata a partire dalla soluzione in termini di spostamenti.

Risultati Analitici

A questo punto vengono mostrati alcuni risultati analitici per evidenziare l'importanza dello smorzamento nell'equazione (3.47). Il caso preso in esame è quello di una piastra di alluminio infinita soggetta ad una forzante puntuale armonica, la piastra ha uno spessore di 1 mm e smorzamento η pari a 0.001. L'ampiezza della forzante è 1 N. Riportando la densità di energia in funzione di kr (con k che dipende dalla frequenza) la frequenza della forzante stessa è irrilevante.

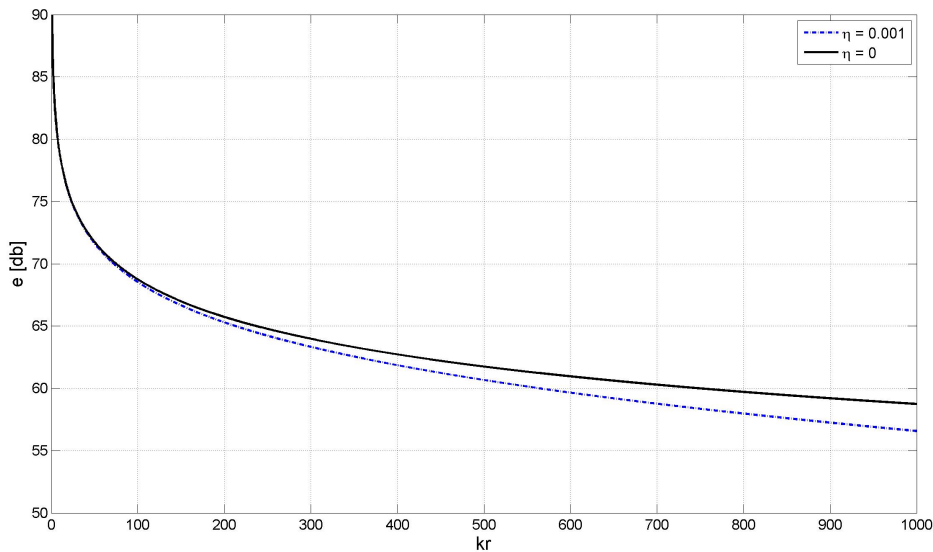


Figura 3.1: Densità di energia nella piastra infinita. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Conclusioni

Le ipotesi chiave che sono state fatte per ricavare le equazioni che governano la distribuzione della densità di energia in una piastra infinita sono

1. forzante puntuale e armonica
2. analisi stazionaria

3. approssimazione di campo lontano

Queste ipotesi saranno utilizzate anche per derivare le equazioni della densità di energia nel caso delle piastre finite, dove saranno necessarie altre ipotesi e approssimazioni.

Conoscendo la densità di energia nel campo lontano di una piastra infinita, è possibile risalire alla velocità (o meglio alla sua ampiezza) ricordando che l'energia potenziale mediata nel tempo è circa uguale a quella cinetica. Per cui si può scrivere che l'energia totale mediata nel periodo è

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \rho h v v^* \quad (3.48)$$

Dalla quale è immediato ricavare la velocità v .

3.1.3 Equazioni Energetiche per le Piastre Finite

Prima di procedere con lo sviluppo delle equazioni energetiche per le piastre finite è necessario fare delle considerazioni sul modello di piastra che viene utilizzato in questo ambito. Il modello utilizzato è quello di piastra sottile di Kirchoff, che assume come ipotesi fondamentale che la deformazione della piastra soggetta a flessione sia completamente descrivibile dalla sola componente di spostamento trasversale w e dalle sue derivate. Esistono altri modelli di piastra di ordine superiore, come quello di Mindlin, che descrive il fenomeno ammettendo oltre alla deformabilità laterale anche la possibilità di deformazione del generico elemento di volume per scorrimento nel piano normale. Ne consegue che nello spessore le componenti di spostamento u e v non dipendono più linearmente dalle sole derivate di w nelle direzioni x e y , come per la piastra di Kirchoff, ma anche dalle rotazioni della normale alla superficie media; questi elementi rappresentano pertanto parametri di deformazione indipendenti.

Quando le frequenze sono alte, entrano in gioco le dinamiche associate agli effetti di taglio: il modello di Kirchoff utilizzato per lo sviluppo delle equazioni energetiche può quindi non essere in grado di modellare correttamente il fenomeno vibratorio, in quanto la semplice flessione non descrive più accuratamente la dinamica del fenomeno. L'estensione del metodo energetico ad altri modelli di piastra non fa parte degli obiettivi di questa tesi, ma è necessario tenere presente che quello che le equazioni energetiche approssimano, cioè il modello di Kirchoff, è di per sé un modello del comportamento delle piastre che può andare in difetto alle alte frequenze.

Un'altra problematica legata alle alte frequenze che può mettere in crisi il modello di piastra sottile è quello del polmonamento, cioè di quei modi di vibrare della piastra nei quali lo spostamento trasversale non è più uniforme lungo lo spessore ma è nullo in corrispondenza del piano medio; questi modi di vibrare non possono essere presenti nel modello di Kirchoff in quanto lo spostamento trasversale è considerato uniforme nello spessore e preso pari al valore nel piano medio. In realtà è stato verificato tramite delle analisi a elementi finiti utilizzando mesh molto fitte di elementi solidi che le dinamiche del polmonamento entrano in gioco a frequenze estremamente più alte di quelle del range dell'udibile per piastre delle caratteristiche di quelle prese in esame in questo lavoro.

Sviluppo delle equazioni energetiche

La riflessione delle onde ai contorni delle piastre finite complica notevolmente il problema.

La procedura utilizzata per ricavare le equazioni della densità di energia è molto simile a quella utilizzata per il caso della piastra infinita. L'equazione che governa il moto in una piastra sottile è

$$D(1 + i\eta) \nabla^4 w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.49)$$

dove η è il coefficiente di smorzamento. In letteratura sono presenti le soluzioni di questa equazione per diverse condizioni al contorno [22],[23],[24].

Scrivendo lo spostamento trasversale come

$$w = W e^{i\omega t} \quad (3.50)$$

l'equazione (3.49) può essere riscritta come

$$\nabla^4 W - \frac{\rho h}{D} \omega^2 (1 - i\eta) W = 0 \quad (3.51)$$

per $\eta \ll 1$. L'equazione (3.51) può essere fattorizzata nella forma

$$(\nabla^2 + k^2) \cdot (\nabla^2 - k^2) W = 0 \quad (3.52)$$

dove k è il numero d'onda. A questo punto introduciamo come per la piastra infinita la soluzione di campo lontano dell'equazione (3.49) [14]

$$w_l = (A_x e^{-ik_x x} + B_x e^{ik_x x}) \cdot (A_y e^{-ik_y y} + B_y e^{ik_y y}) e^{i\omega t} \quad (3.53)$$

Le costanti $A_x, B_x, A_y,$ e B_y sono da determinarsi in funzione delle condizioni al contorno. La soluzione di campo lontano soddisfa solamente la parte sinistra dell'equazione (3.52). Di conseguenza w_l non è la soluzione completa della (3.49). Questa approssimazione è necessaria per ricavare la relazione tra densità di energia e intensità e di conseguenza esprimere il problema dal punto di vista energetico.

Le componenti del numero d'onda k sono

$$k_x = k_{x1} (1 - i\eta/4) \quad k_y = k_{y1} (1 - i\eta/4) \quad (3.54)$$

dove

$$(k_{x1}^2 + k_{y1}^2)^2 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 \quad (3.55)$$

deve essere soddisfatta affinché la soluzione dell'equazione (3.53) soddisfi la (3.49).

La densità di energia in una piastra sottile vibrante è la somma della densità di energia cinetica e di quella potenziale. La densità di energia mediata nel periodo dell'oscillazione è [17]

$$\begin{aligned} \langle e \rangle = & \frac{D}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^* + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^* + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^* \right. \\ & \left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^* + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^* \right] \quad (3.56) \end{aligned}$$

La densità di energia con le ipotesi di campo lontano può essere ricavata sostituendo l'equazione (3.53) nella (3.56), mentre l'intensità può essere ricavata sostituendo (3.53) nelle (3.12) e (3.13). L'espressione completa della densità di energia e dell'intensità è estremamente complicata ed è presente in [13]. Queste espressioni non mostrano nessun legame apparente tra la densità di energia e l'intensità. Quando queste due grandezze vengono però mediate spazialmente è possibile individuare una relazione. Per eseguire questa operazione introduciamo un operatore di media definito come

$$\underline{q} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{x-\lambda_x/2}^{x+\lambda_x/2} \int_{y-\lambda_y/2}^{y+\lambda_y/2} q \, dy \, dx \quad (3.57)$$

dove

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \quad (3.58)$$

Questa è un'operazione che va ad eseguire una media spaziale in direzione x e in direzione y sulle dimensioni della lunghezza d'onda.

Il risultato di questa operazione per la densità di energia è

$$\begin{aligned} \langle \underline{e} \rangle = & \frac{D}{4} \left(|k_x|^2 + |k_y|^2 + 2\nu k_x^2 (k_y^2)^* + 2(1-\nu) |k_x k_y|^* + \frac{\rho h \omega^2}{D} \right) \\ & \cdot \{ |A_x|^2 |A_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y)} + |A_x|^2 |B_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y)} \\ & + |B_x|^2 |A_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x-k_{y1}y)} + |B_x|^2 |B_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x+k_{y1}y)} \} \quad (3.59) \end{aligned}$$

per le componenti dell'intensità

$$\begin{aligned} \langle \bar{I}_x \rangle = & k_x \frac{\omega}{2} (k_x^2 + k_y^2 + |k_x|^2 + \nu k_y^2 + (1-\nu) |k_y|^2) \\ & \cdot \{ |A_x|^2 |A_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y)} + |A_x|^2 |B_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y)} \\ & - |B_x|^2 |A_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x-k_{y1}y)} - |B_x|^2 |B_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x+k_{y1}y)} \} \quad (3.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{I}_y \rangle = & k_y \frac{\omega}{2} (k_y^2 + k_x^2 + |k_y|^2 + \nu k_x^2 + (1-\nu) |k_x|^2) \\ & \cdot \{ |A_x|^2 |A_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y)} - |A_x|^2 |B_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y)} \\ & + |B_x|^2 |A_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x-k_{y1}y)} - |B_x|^2 |B_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x+k_{y1}y)} \} \quad (3.61) \end{aligned}$$

La relazione tra le variabili mediate $\langle \underline{e} \rangle$ e $\langle \bar{I} \rangle$ è

$$\langle \bar{I} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle \underline{e} \rangle \quad (3.62)$$

Un'espressione che esprime la potenza dissipata per una piastra soggetta a un certo smorzamento η era l'equazione (3.38). Il bilancio di energia dell'equazione (3.28) è valido anche per il caso delle piastre finite. Combinando l'equazione di bilancio (3.28), l'equazione di potenza dissipata (3.38) e l'equazione (3.62) si ricava l'equazione che governa la densità di energia in una piastra sottile finita vibrante

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \underline{e} \rangle + \eta\omega \langle \underline{e} \rangle = \langle \underline{\pi}_{in} \rangle \quad (3.63)$$

L'equazione (3.63) è un'equazione differenziale del secondo ordine che governa la distribuzione mediata della densità di energia in una piastra vibrante. Basandosi sull'ipotesi di campo lontano questa distribuzione può ritenersi valida alla distanza di circa metà lunghezza d'onda ($\lambda/2$) dalle discontinuità, dai contorni e dalle forzanti.

3.2 Sviluppo analitico del metodo energetico per cavità acustiche

Lo scopo di questa sezione è quello di ricavare l'equazione che governa la distribuzione della densità di energia all'interno di una cavità acustica. Questa equazione verrà ricavata seguendo un procedimento simile a quello usato precedentemente per le piastre. Lo spostamento trasversale nella piastra e la pressione nella cavità acustiche sono governate da equazioni simili, in questo caso però l'analisi è da svolgersi in tre dimensioni invece che una.

3.2.1 Equazioni Energetiche per le Cavità Acustiche

L'equazione che governa la variazione di pressione in una cavità acustica è

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.64)$$

dove p è la pressione, c la velocità del suono nel fluido e τ il tempo di rilassamento. Fisicamente le perdite nel mezzo acustico si manifestano come generazione di calore.

Se esprimiamo la variazione nel tempo della pressione come

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (3.65)$$

l'equazione (3.64) si riduce all'equazione di Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) P = 0 \quad (3.66)$$

dove k è il numero d'onda complesso che può essere scritto come

$$k \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - i \frac{\eta}{2}\right) \quad (3.67)$$

dove

$$\eta = \omega\tau \quad (3.68)$$

L'equazione (3.66) è espressa in termini numero d'onda complesso e il fattore di perdita η . Questo η non è il coefficiente di smorzamento isteretico delle piastre descritto nella sezione precedente.

Per una cavità acustica tridimensionale, il numero d'onda può essere separato nelle tre componenti

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.69)$$

dove

$$k_x = k_{x1} \left(1 - i\frac{\eta}{2}\right) \quad k_y = k_{y1} \left(1 - i\frac{\eta}{2}\right) \quad k_z = k_{z1} \left(1 - i\frac{\eta}{2}\right) \quad (3.70)$$

e

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + k_{z1}^2 \quad (3.71)$$

La soluzione dell'equazione (3.66) è

$$P = (A_x e^{-ik_x x} + B_x e^{ik_x x}) \cdot (A_y e^{-ik_y y} + B_y e^{ik_y y}) \cdot (A_z e^{-ik_z z} + B_z e^{ik_z z}) \quad (3.72)$$

La soluzione d'onda dell'equazione (3.72) è una rappresentazione matematica accettabile del campo sonoro ma le costanti sono generalmente difficili da ricavare esplicitamente. Viene utilizzato quindi un approccio modale per la soluzione dell'equazione (3.72) nel quale le costanti $A_x \dots B_z$ non sono richieste e che è più adatto alla derivazione delle equazioni energetiche.

La densità di energia mediata nel tempo nel mezzo acustico può essere separata in densità di energia cinetica e potenziale. La risultante somma può essere scritta come [21]

$$\langle e \rangle = \frac{1}{4} \left(\rho \vec{U} \cdot \vec{U}^* + \frac{1}{\rho c^2} P P^* \right) \quad (3.73)$$

dove \vec{U} è il vettore velocità delle particelle di fluido e può essere ottenuto dall'equazione linearizzata

$$\vec{U} = \frac{i}{\omega \rho} \nabla P \quad (3.74)$$

L'intensità acustica (potenza per unità di superficie) può essere ricavata utilizzando l'equazione (3.3) dove il tensore degli sforzi è definito come

$$\sigma = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Le componenti dell'intensità mediate nel tempo sono

$$\langle I_x \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ P U_x^* \} \quad \langle I_y \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ P U_y^* \} \quad \langle I_z \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ P U_z^* \} \quad (3.76)$$

Per le cavità acustiche l'intensità non è pari al prodotto della velocità di gruppo per la densità di energia come nelle piastre. La soluzione del campo di pressione dell'equazione (3.72) viene sostituita insieme alla velocità ricavata dalla (3.74) nella (3.73) per determinare le espressioni della densità di energia e dell'intensità. Queste espressioni sono estremamente laboriose e sono riportate in [13]. Eseguendo un'operazione di media simile a quella dell'equazione (3.57) ma estesa a tre dimensioni tutti i termini che includono funzioni armoniche spaziali nelle densità di energia e nell'intensità sono eliminate. I termini che rimangono sono quelli che decadono o crescono. La densità di energia che rimane come risultato dell'operazione di media

è

$$\begin{aligned}
 \langle e \rangle = & \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\rho\omega^2} (|k_x|^2 + |k_y|^2 + |k_z|^2) + \frac{1}{\rho c^2} \right\} \\
 & \cdot \left\{ |A_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} + |A_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} + \right. \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y+k_{z1}z)} + |B_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} + \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} + |B_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} + \\
 & \left. |B_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} + |B_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} \right\} \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

Le componenti mediate dell'intensità sono

$$\begin{aligned}
 \langle I_x \rangle = & \frac{1}{2} \left(\frac{k_x}{\rho\omega^2} \right) \\
 & \cdot \left\{ |A_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} - |A_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} + \right. \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y+k_{z1}z)} - |B_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} + \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} - |B_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} + \\
 & \left. |B_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} - |B_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} \right\} \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle I_y \rangle = & \frac{1}{2} \left(\frac{k_y}{\rho\omega^2} \right) \\
 & \cdot \left\{ |A_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} + |A_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} + \right. \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y+k_{z1}z)} - |B_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} + \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} + |B_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} + \\
 & \left. |B_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} - |B_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} \right\} \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle I_z \rangle = & \frac{1}{2} \left(\frac{k_z}{\rho\omega^2} \right) \\
 & \cdot \left\{ |A_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} + |A_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} + \right. \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y+k_{z1}z)} + |B_x|^2 |A_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} + \\
 & |A_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{-\eta(k_{x1}x-k_{y1}y-k_{z1}z)} - |B_x|^2 |A_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} + \\
 & \left. |B_x|^2 |B_y|^2 |A_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y-k_{z1}z)} - |B_x|^2 |B_y|^2 |B_z|^2 e^{+\eta(k_{x1}x+k_{y1}y+k_{z1}z)} \right\} \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

La relazione tra intensità mediata e densità di energia mediata è

$$\langle \vec{I} \rangle = -\frac{c^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \quad (3.81)$$

L'equazione (3.81) è identica all'equazione (3.62) siccome c è la velocità di gruppo per un mezzo acustico.

Eseguendo le stesse operazioni svolte per le piastre nella sezione precedente si ricava l'equazione governante la distribuzione della densità di energia nella cavità acustica

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla^2 \langle \underline{e} \rangle + \eta\omega \langle \underline{e} \rangle = \langle \underline{\pi}_{in} \rangle \quad (3.82)$$

Con l'eccezione della definizione del fattore di perdita η e della velocità di gruppo, l'equazione (3.82) è identica alla (3.63).

3.3 Implementazione Elementi Finiti

In questa sezione viene implementata con il metodo degli elementi finiti l'equazione (3.63) per le piastre. La procedura può essere estesa alle cavità acustiche, alle travi e alle membrane dando origine al metodo dell'EFEM (Energy Finite Element Method). In questo modo è possibile applicare le equazioni energetiche sviluppate nelle sezioni precedenti a sistemi complessi composti da più componenti. [25]

3.3.1 Equazione Differenziale

In generale l'equazione che governa la distribuzione della densità di energia in una piastra finita ha la stessa forma di quella per una cavità acustica, (per comodità verranno omessi d'ora in poi i simboli $\langle \rangle$ e $\underline{\quad}$ che indicavano la media temporale sul periodo di un'oscillazione e la media spaziale su una lunghezza d'onda)

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega}\nabla^2 e + \eta\omega e = \pi_{in} \quad (3.83)$$

Per semplificare gli aspetti numerici dell'implementazione viene introdotta la variabile $\hat{e} = c_g e$. L'equazione (3.83) diventa

$$-\frac{c_g}{\eta\omega}\nabla^2 \hat{e} + \frac{\eta\omega}{c_g}\hat{e} = \pi_{in} \quad (3.84)$$

3.3.2 Formulazione Debole

Integrando sul volume di interesse e moltiplicando per una funzione test v si ha

$$\int_D v \cdot \left(-\frac{c_g}{\eta\omega}\nabla^2 \hat{e} + \frac{\eta\omega}{c_g}\hat{e} - \pi_{in} \right) dD = 0 \quad (3.85)$$

Col teorema della divergenza si ricava

$$\int_{\Gamma} v \left(-\frac{c_g}{\eta\omega}\nabla \hat{e} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_D \left(\frac{c_g}{\eta\omega}\nabla v \cdot \nabla \hat{e} \right) dD + \int_D v \left(\frac{\eta\omega}{c_g}\hat{e} \right) dD - \int_D v \pi_{in} dD = 0 \quad (3.86)$$

Il vettore normale \vec{n} è definito come la normale uscente del contorno, Γ , che racchiude il dominio D . Per implementare il metodo di Galerkin, introduciamo l'interpolazione

$$\hat{e} = \sum_{j=1}^n \hat{e}_j \phi_j \quad (3.87)$$

dove ϕ_j è una funzione di forma Lagrangiana. La stessa funzione di forma è usata anche come funzione test

$$v = \phi_i \quad (3.88)$$

Si ottiene un'equazione lineare del tipo

$$P_i + \sum \hat{e}_j K_{ij} + \sum \hat{e}_j M_{ij} - F_i = 0 \quad (3.89)$$

i cui termini sono, la condizione al contorno P_i

$$P_i = \int_{\Gamma} \phi_i \left(-\frac{c_g}{\eta\omega} \nabla \hat{e} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi_i \left(\vec{I} \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad (3.90)$$

la matrice di rigidezza K_{ij}

$$K_{ij} = \int_D \left(\frac{c_g}{\eta\omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \right) dD \quad (3.91)$$

la matrice di massa M_{ij}

$$M_{ij} = \int_D \left(\frac{\eta\omega}{c_g} \phi_i \phi_j \right) dD \quad (3.92)$$

e il vettore delle forzanti F_i

$$F_i = \int_D \phi_i \pi_{in} dD \quad (3.93)$$

Assemblando queste matrici e questi vettori per tutta la struttura si ricava il sistema lineare

$$[K + M] \hat{e} + P - F = 0 \quad (3.94)$$

3.3.3 Condizioni al Contorno

Nella derivazione dell'equazione differenziale (3.83) il flusso di energia uscente dal sistema è stato definito positivo nel bilancio dell'energia. Per cui $\vec{I} \cdot \vec{n}$ è definito positivo come uscente dal sistema al nodo i . P_i è l'intensità o il flusso uscente dal sistema al nodo i . P_i viene utilizzato in due ambiti. Il primo è l'incorporazione della condizione al contorno di intensità, il secondo è legato alla relazione di collegamento tra diversi componenti, e sarà analizzato nei capitoli seguenti. Per semplicità, P_i viene riscritto come

$$P_i = \int_{\Gamma} \phi_i \left(-\frac{c_g}{\eta\omega} \nabla \hat{e} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma = P_{i,Cont} + P_{i,Acc} = \int_{\Gamma} \phi_i \left[\left(\vec{I} \cdot \vec{n} \right)_{Cont} + \left(\vec{I} \cdot \vec{n} \right)_{Acc} \right] d\Gamma \quad (3.95)$$

dove con $P_{i,Cont}$ ci si riferisce alla parte di flusso legato all'incorporazione della condizione al contorno di intensità, mentre con $P_{i,Acc}$ alla parte di flusso legata ai collegamenti che sarà sviluppata nei capitoli successivi.

Condizioni al Contorno di Intensità

Per poter applicare numericamente la condizione al contorno viene espressa come

$$\left(\vec{I} \cdot \vec{n}\right)_{Cont} = c_1 \hat{e} - c_2 \quad (3.96)$$

Il primo termine, $c_1 \hat{e}$, viene interpretato come un termine dissipativo, che rappresenta una possibile dissipazione al contorno. Viene aggiunto alla matrice di rigidità generale con le appropriate sostituzioni. Il secondo termine, c_2 , viene interpretato come una intensità che fluisce nel sistema ed è aggiunto al vettore delle forzanti globale. Per modellare l'assorbimento al contorno (valido solo per elementi acustici), il primo termine viene espresso come $c_1 = \frac{1}{4}\alpha$, dove α è il coefficiente di assorbimento del suono o delle vibrazioni. Il secondo termine viene espresso come $c_2 = I_{cont}$.

Utilizzando lo schema dei residui pesati di Galerkin e le appropriate funzioni Lagrangiane, è possibile eseguire la seguente approssimazione

$$P_{i,Cont} = \int_{\Gamma} \phi_i \left(\vec{I} \cdot \vec{n}\right)_{Cont} d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi_i \left(\frac{\alpha}{4} \hat{e} - I_{Cont}\right) d\Gamma \quad (3.97)$$

che porta all'equazione lineare

$$P_{i,Cont} = \sum K B_{ij} \hat{e}_j - F B_i \quad (3.98)$$

dove

$$K B_{ij} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\alpha}{4} \phi_i \phi_j\right) d\Gamma \quad (3.99)$$

e

$$F B_i = \int_{\Gamma} I_{Cont} \phi_i d\Gamma \quad (3.100)$$

Con le opportune sostituzioni il sistema lineare dell'equazione (3.94) diventa

$$[K + M + KB] \hat{e} + P_{Acc} = F + FB \quad (3.101)$$

Questo è il sistema lineare completo per un sottosistema isolato. Come i sistemi di più componenti vengano collegati sarà mostrato nel capitolo 6.

Capitolo 4

Analisi EFEM di piastre isolate

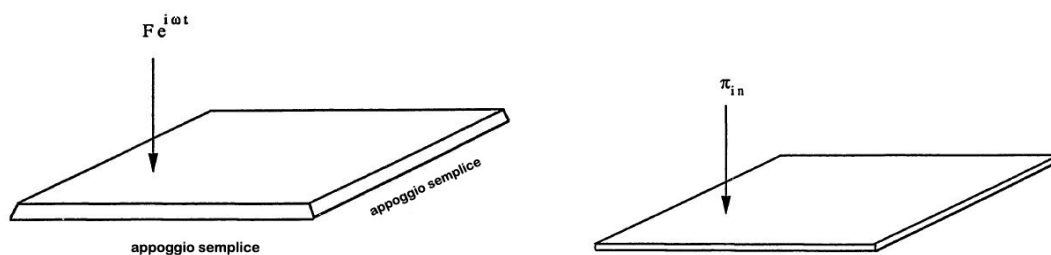
In questo capitolo vengono analizzate con il metodo dell'EFEM delle piastre isolate. Nel capitolo 3 sono state sviluppate le equazioni energetiche che governano la distribuzione di densità di energia all'interno di una piastra sottile che vibra trasversalmente a causa di una forzante armonica concentrata o distribuita.

La piastra presa in esame è una piastra di materiale isotropo di $1m \times 1m$ soggetta ad una forzante armonica localizzata nel punto centrale della piastra. Le caratteristiche delle analisi sono riportate nella tabella 4.1, l'analisi viene svolta per frequenze da $239 Hz$ a $2000 Hz$ e smorzamenti da 0.1 a 0.001 .

$E = 7.1 \cdot 10^{10} N/m^2$
$\rho = 2700 Kg/m^3$
$h = 0.001 m$
$F = 0.01 N$
$a = b = 1.00 m$

Tabella 4.1: Parametri dell'analisi

L'analisi EFEM delle piastre viene eseguita sia con il software EnFlow della Comet Technology Corporation sia con un software sviluppato nell'ambito di questo progetto di tesi che risolve le equazione dell'EFEM limitatamente ai casi di piastre isolate. I risultati vengono confrontati con la soluzione analitica e con i risultati delle analisi ricavate tramite gli elementi finiti tradizionali. Per quanto riguarda la soluzione analitica e le analisi FEM la piastra è considerata semplicemente appoggiata sul contorno, mentre per l'analisi EFEM non è possibile imporre un vincolo degli spostamenti sul contorno, siccome il problema è formulato in termini energetici. La condizione di piastra isolata è semplicemente quella nella quale non c'è flusso di energia entrante dal contorno (figura 4.1b) In figura 4.2 viene confrontato l'andamento della densità di energia sulla diagonale del pannello per un'analisi a elementi finiti tradizionali (FEM) nel caso di vincolo di appoggio semplice e di incastro sul contorno. Come si vede a parte nelle vicinanze del contorno stesso il livello della densità di energia è molto simile. Tutte le analisi ad elementi finiti tradizionali e le soluzioni analitiche seguenti sono state fatte considerando le piastre semplicemente appoggiate.



(a) Piastra sottile semplicemente appoggiata (b) Piastra isolata con un ingresso di potenza eccitata da una forzante armonica
eccitata da una forzante armonica
vibrazionale

Figura 4.1

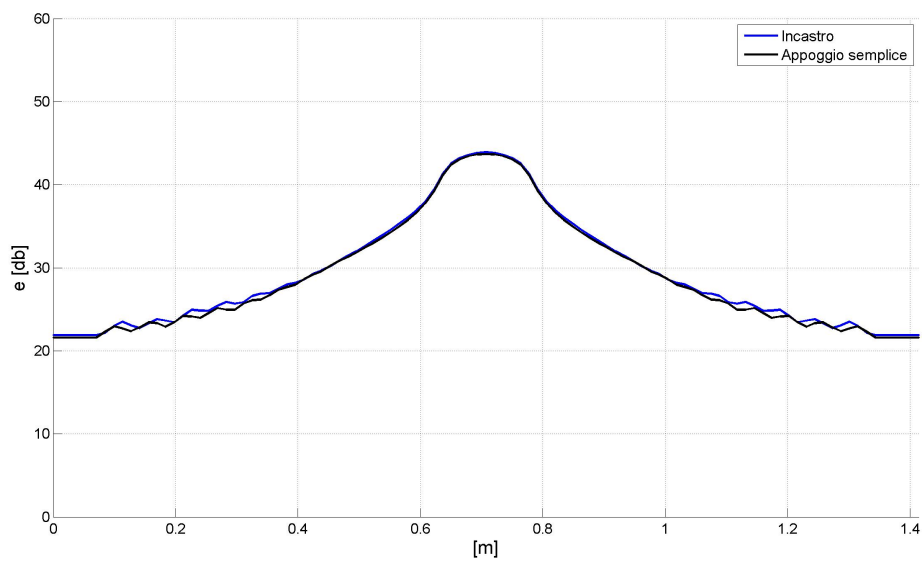


Figura 4.2: Densità di energia mediata lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

4.1 Metodi Tradizionali

4.1.1 Sviluppo Analitico

Lo spostamento trasversale in una piastra sottile di forma rettangolare, semplicemente appoggiata sul contorno e eccitata da una forzante armonica distribuita (o concentrata) può essere espresso analiticamente tramite uno sviluppo nel dominio della frequenza [26]. La soluzione è esatta quando i modi presi in considerazione nello sviluppo sono infiniti; per ovvie ragioni è necessario troncare lo sviluppo ad un numero finito di modi. Data la semplicità di calcolo della soluzione è possibile utilizzare un numero sufficiente di modi per avere convergenza anche a frequenze molto alte. La soluzione viene calcolata su una griglia di 400x400 nodi, il numero di modi utilizzato è 100 in direzione x e 100 in direzione y , per un totale di 10000 modi. Lo spostamento trasversale può essere scritto come

$$w(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x, y) F_r}{M_r (\omega_r^2 (1 + in) - \omega^2)} \quad (4.1)$$

dove F_r è la forza modale, data da

$$F_r = \int_{\bar{x}} \int_{\bar{y}} p_z(x, y) \phi_r(x, y) dx dy \quad (4.2)$$

dove \bar{x} e \bar{y} sono la zona di applicazione della forzante.

Le frequenze proprie e le forme modali per una piastra sottile semplicemente appoggiata di massa modale $M_r = \rho abh$ sono

$$\omega_r = \sqrt{\frac{D}{m} \left[\left(\frac{r_1 \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{r_2 \pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (4.3)$$

e

$$\phi_r(x, y) = 2 \sin \left(\frac{r_1 \pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{r_2 \pi y}{b} \right) \quad (4.4)$$

dove r_1 e r_2 sono gli indici dell' r -esimo modo e

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.5)$$

4.1.2 Analisi agli Elementi Finiti (FEM)

Con Nastran viene eseguita un'analisi diretta in frequenza (SOL SEDFREQ) su un modello di piastra sottile appoggiato al contorno e eccitato da una forzante armonica nel punto centrale del pannello. Il numero di elementi utilizzato varia in funzione della frequenza e dello smorzamento dai 100x100 ai 300x300, quindi da 10000 elementi a 90000.

4.1.3 Passaggio alle Variabili Energetiche

Le soluzioni dello sviluppo analitico e delle analisi agli elementi finiti sono in termini di spostamento trasversale w . Per poter essere confrontati con le soluzioni

EFEM è necessario calcolare la densità di energia a partire dalla conoscenza dello spostamento nella piastra.

Noto lo spostamento trasversale $w(x, y)$ è possibile calcolare la densità di energia totale, somma di quella cinetica e di quella potenziale [13]

$$\begin{aligned} \langle e \rangle = \frac{D}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^* + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^* + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^* \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^* + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^* \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

Questa operazione permette di calcolare la densità di energia mediata nel periodo dell'oscillazione. Nello sviluppo analitico del metodo EFEM è anche presente un'operazione di media spaziale sulla dimensione di una lunghezza d'onda. La soluzione dello sviluppo analitico e del FEM viene confrontata sia senza l'operazione di media spaziale che con. Per eseguire la media spaziale viene applicato lo stesso procedimento usato nello sviluppo delle equazioni energetiche nel capitolo 3. L'operatore di media spaziale è

$$\underline{q} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{x-\lambda_x/2}^{x+\lambda_x/2} \int_{y-\lambda_y/2}^{y+\lambda_y/2} q \, dy \, dx \quad (4.7)$$

dove

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \quad (4.8)$$

All'aumentare della frequenza diminuisce la lunghezza d'onda apparente e quindi diminuisce l'area sulla quale viene eseguita la media. Per quanto nella definizione della lunghezza d'onda apparente rientri anche lo smorzamento η la sua influenza sulla variazione d'area sulla quale eseguire la media è trascurabile.

Sia la soluzione dello sviluppo analitico che quella del FEM sono soluzioni discrete, per cui non viene eseguita l'integrazione ma la media dei valori della densità di energia su un certo numero di nodi/elementi attorno al punto per il quale viene calcolata la media.

Nelle figure 4.3, 4.4 e 4.5 viene riportato il confronto tra la soluzione analitica e la soluzione FEM (in termini di spostamento) per alcuni casi di frequenza e smorzamento. Nella prima è riportato l'andamento dello spostamento trasversale su tutta la diagonale del pannello, mentre nelle altre due immagini è riportato solamente l'andamento sulla semidiagonale. Come accennato in precedenza la soluzione analitica non ha i problemi di convergenza della soluzione FEM, come si vede dalle immagini infatti le soluzioni a elementi finiti convergono all'aumentare del numero degli elementi alla soluzione analitica (che invece è già a convergenza). Evidentemente all'aumentare della frequenza è necessario un numero maggiore di elementi nella mesh a elementi finiti per rappresentare correttamente la soluzione.

Un fenomeno simile accade alla diminuzione dello smorzamento. Per smorzamenti alti un numero elevato di modi aventi frequenza propria vicina a quella dell'eccitazione rispondono con ampiezza simile; questo comporta che le valli e i picchi dei diversi modi tendano ad elidersi e come risultato rimanga solo l'andamento spaziale medio dei modi. Questo andamento ha una piccola variazione

spaziale e richiede quindi un numero cospicuo di elementi per essere approssimato. Quando lo smorzamento invece è piccolo, un numero molto piccolo di modi con frequenza propria estremamente vicina a quella dell'eccitazione risponde con ampiezza decisamente maggiore rispetto a quella degli altri modi, e di conseguenza la soluzione mantiene una forte variazione spaziale propria dei singoli modi (vedere figura 4.6). Di conseguenza in questi casi diventa necessario utilizzare un numero elevato di elementi per arrivare a convergenza.

Quando si ha sia alta frequenza che basso smorzamento diventa quindi necessario utilizzare una mesh talmente fine da rendere impraticabile l'utilizzo degli elementi finiti a causa del costo computazionale eccessivo (questo peraltro è proprio il problema principale degli elementi finiti nell'ambito delle analisi in alta frequenza). Di conseguenza, in questo capitolo, è stata sempre usata come confronto agli EFEM la soluzione ricavata dallo sviluppo analitico, che essendo più semplice da calcolare non dà problemi di convergenza. Sotto questo punto di vista un vantaggio della soluzione analitica è che quando si è interessati alla soluzione non mediata spazialmente è possibile calcolare lo spostamento trasversale e quindi poi l'energia solamente sulla diagonale, mentre nel caso si sia interessati alla soluzione mediata (ma la si voglia comunque solo sulla diagonale) è necessario calcolare la soluzione anche su una banda di larghezza della lunghezza d'onda apparente attorno alla diagonale per poter effettuare l'operazione di media.

Ovviamente quando si ha a che fare con sistemi più complicati non è disponibile una soluzione analitica ed è necessario forzatamente eseguire il confronto con gli elementi finiti.

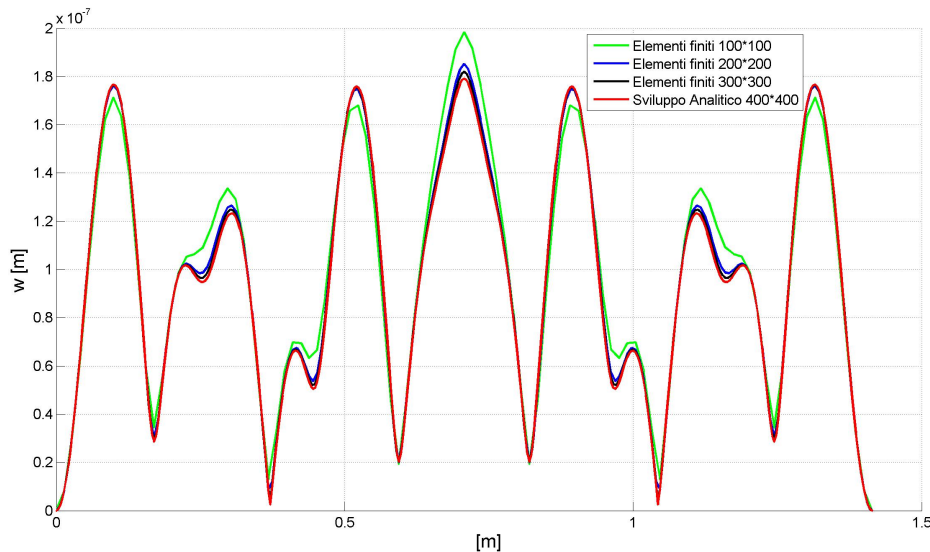


Figura 4.3: Spostamento trasversale lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.05$.

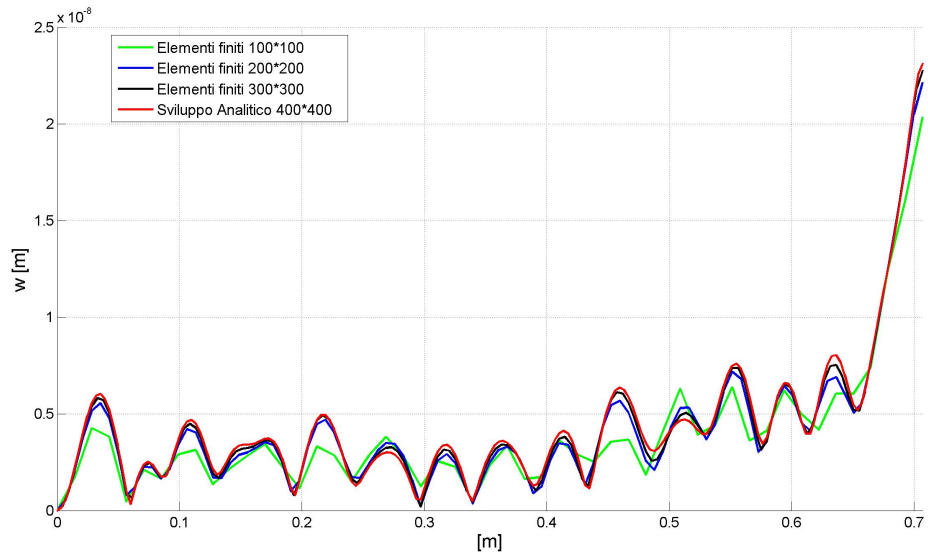


Figura 4.4: Spostamento trasversale lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.05$.

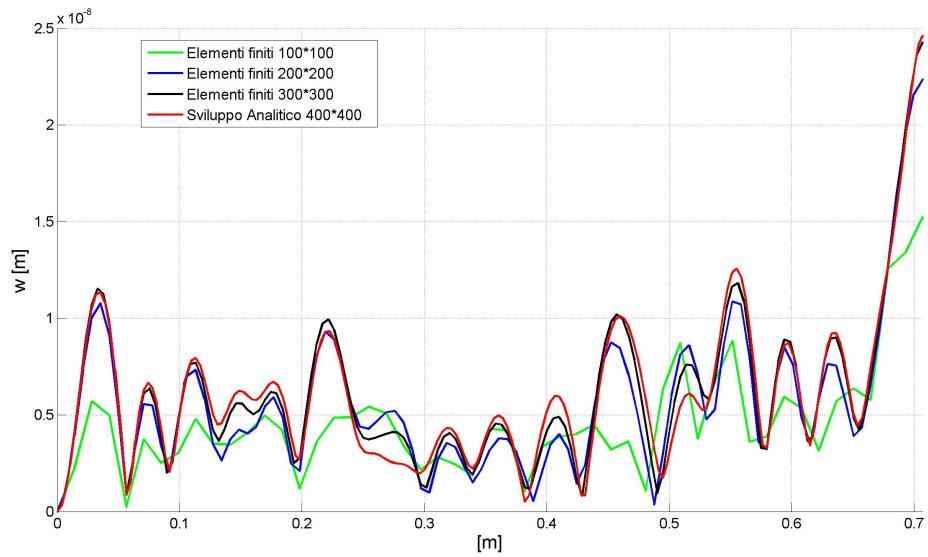


Figura 4.5: Spostamento trasversale lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.025$.

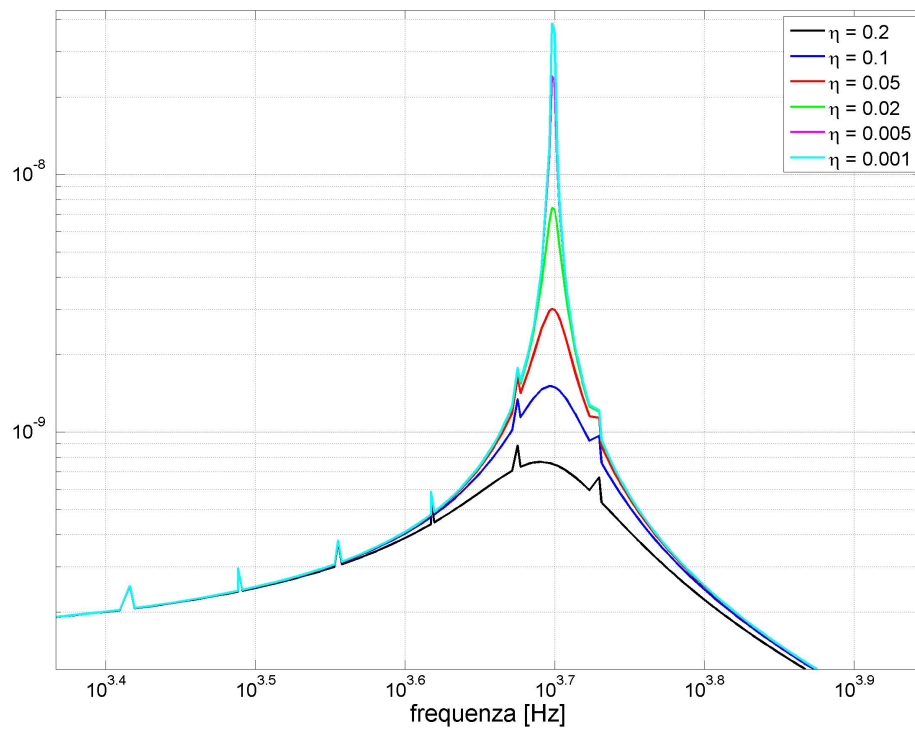


Figura 4.6: Partecipazione modale nello spostamento sulla diagonale della piastra per vari smorzamenti, 5000 Hz.

4.2 EFEM

L'analisi EFEM delle piastre viene eseguita sia con il software EnFlow della Comet Technology Corporation sia con un software sviluppato nell'ambito di questo progetto di tesi per i casi semplici delle piastre isolate. Si è deciso di sviluppare questo software nonostante la disponibilità di EnFlow per comprendere a fondo il metodo fino alla sua implementazione.

Il numero di elementi utilizzati per la mesh è estremamente ridotto rispetto agli elementi finiti tradizionali. Bastano infatti 20x20 elementi per avere una soluzione che è a convergenza anche per le frequenze più alte e gli smorzamenti più bassi. Nel nodo centrale della piastra è localizzato l'ingresso di potenza, calcolato a partire dall'ampiezza della forza con l'equazione (3.44). Essendo la piastra isolata non c'è flusso di energia entrante o uscente dal contorno stesso. Calcolando le matrici elemento per elemento e assemblandole secondo la tradizionale tecnica degli elementi finiti si arriva all'equazione (3.101), che risolta fornisce la distribuzione della densità di energia mediata sulla piastra.

Come detto in precedenza l'operazione di media spaziale è insita nello sviluppo delle equazioni energetiche su cui si basano gli elementi finiti energetici. Questa operazione è l'aspetto chiave dello sviluppo degli elementi finiti energetici: da una parte la soluzione perde tutta la variabilità spaziale locale legata al contenuto modale della soluzione, e mantiene solamente l'andamento generale (perlappunto mediato) sulla totalità della piastra; dall'altra proprio questo procedimento semplifica la risoluzione del problema e rende necessario un numero molto esiguo di elementi per la convergenza della soluzione rispetto agli elementi finiti tradizionali. Il numero di elementi necessari per la convergenza è di più di due ordini di grandezza inferiore per l'EFEM rispetto al FEM.

Nelle figure 4.7, 4.8, e 4.9 vengono confrontati alcuni risultati di EnFlow con quelli del nostro codice, come si può vedere i risultati sono identici.

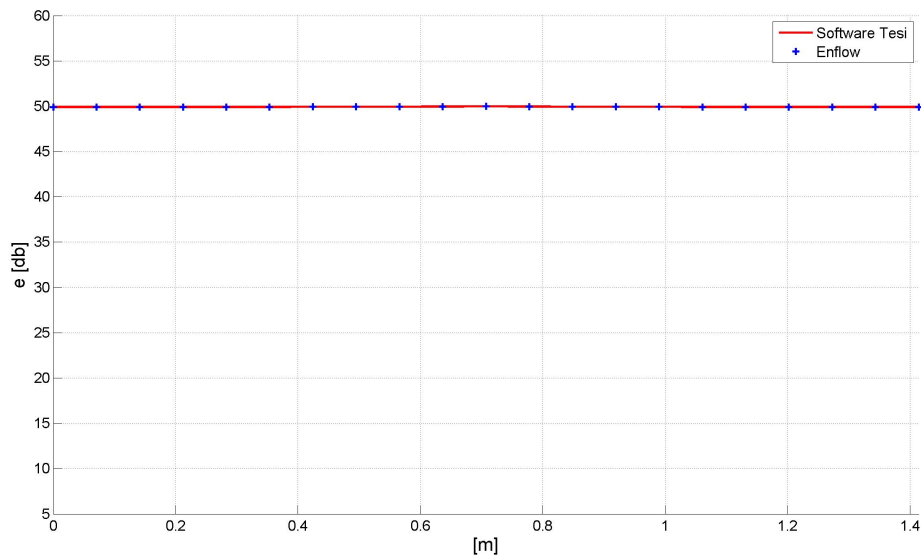


Figura 4.7: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

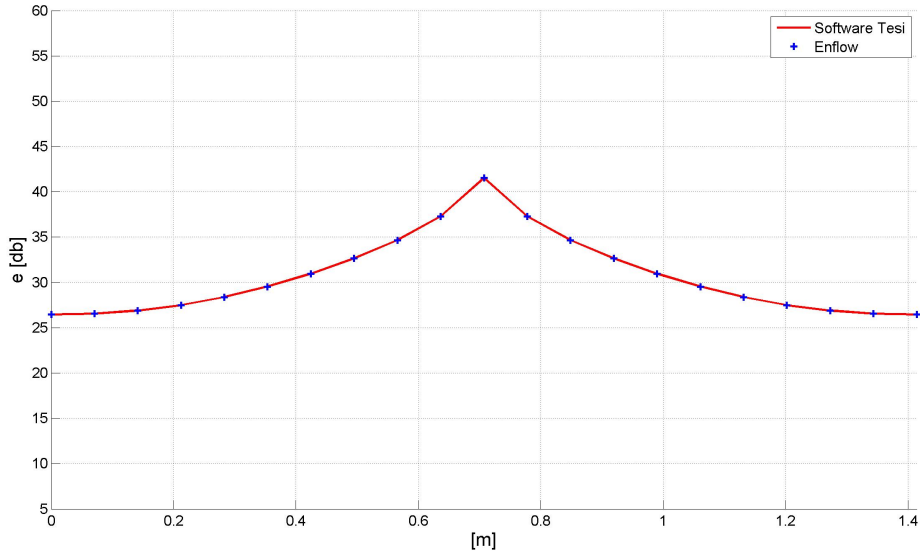


Figura 4.8: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

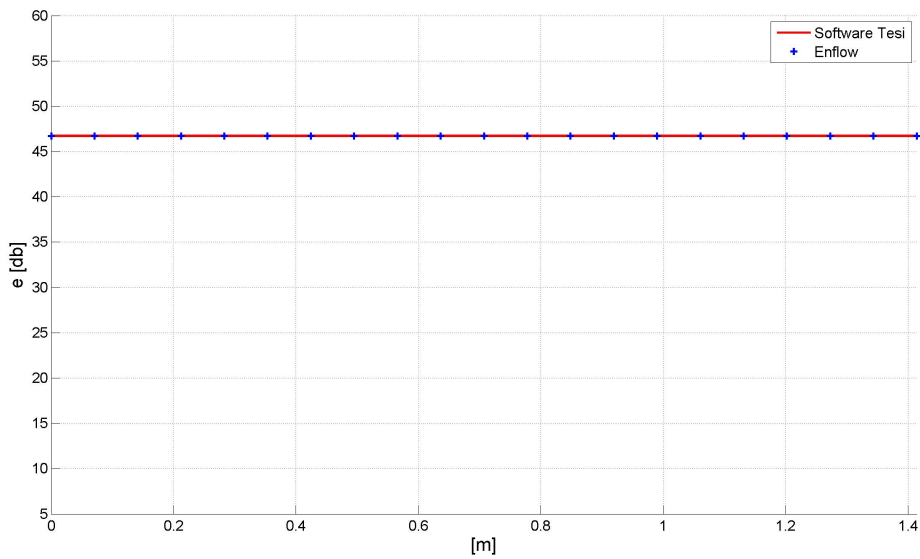
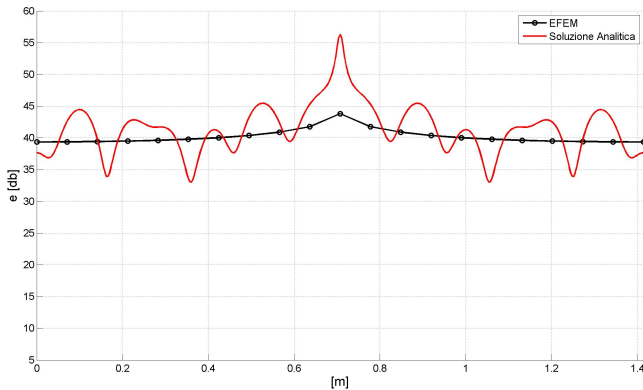


Figura 4.9: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.001$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

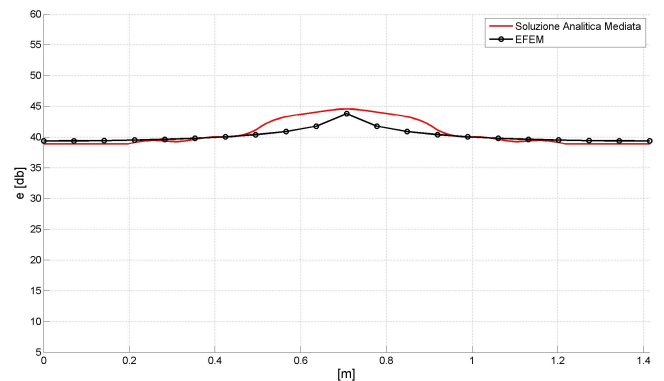
4.3 Risultati

I risultati sono presentati sia in forma mediata che non. E' opportuno ricordare che le soluzioni EFEM sono sempre *mediate*, in quanto l'operazione di media è insita nello sviluppo delle equazioni energetiche ed è una delle basi del metodo energetico stesso. Tutti i risultati sono in decibel e sono riferiti alla densità di energia di $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$.

Nel primo caso, la frequenza e lo smorzamento sono: $f = 239 \text{ Hz}$ e $\eta = 0.1$. Il confronto tra la distribuzione della densità di energia lungo la diagonale del pannello tra la soluzione EFEM e quella analitica è riportato nelle figure 4.10a e 4.10b. Nella prima è riportata la soluzione analitica non mediata, mentre nella seconda è stata effettuata l'operazione di media spaziale. La soluzione analitica ha un andamento che la porta a deviare localmente dalla soluzione EFEM, tuttavia quest'ultima è una buona approssimazione della soluzione analitica mediata spazialmente.



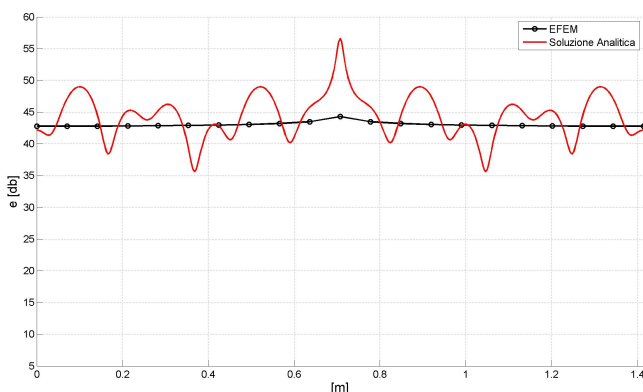
(a) Soluzione non mediata



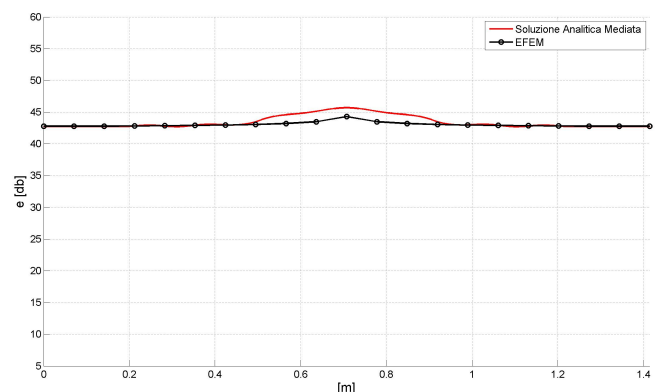
(b) Soluzione mediata

Figura 4.10: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^2$

Nel secondo caso lo smorzamento è diminuito a $\eta = 0.05$. Il confronto tra le due soluzioni è riportato nelle figure 4.11a e 4.11b. I risultati sono estremamente simili al primo caso, a parte un aumento del livello globale dell'energia dovuta alla diminuzione dello smorzamento (e quindi della dissipazione dell'energia).



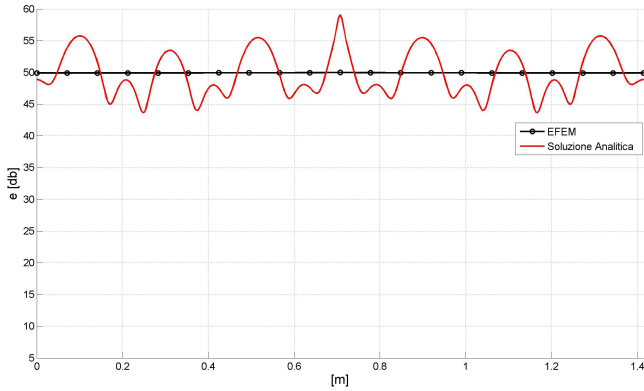
(a) Soluzione non mediata



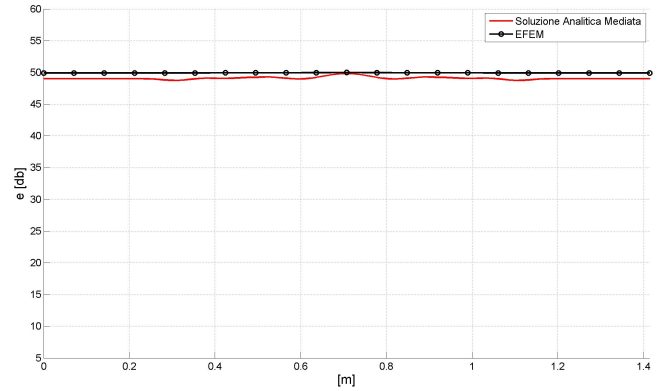
(b) Soluzione mediata

Figura 4.11: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^2$

Nel terzo caso lo smorzamento è ulteriormente diminuito fino a $\eta = 0.01$. I risultati sono mostrati nelle figure 4.12a e 4.12b. Si osserva un ulteriore aumento dell'energia dovuto alla diminuzione dello smorzamento.



(a) Soluzione non mediata

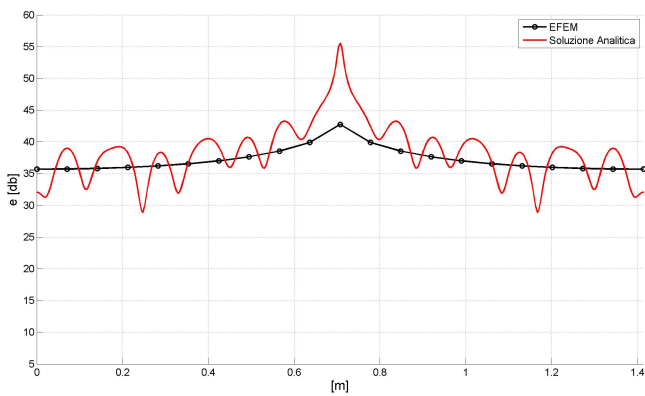


(b) Soluzione mediata

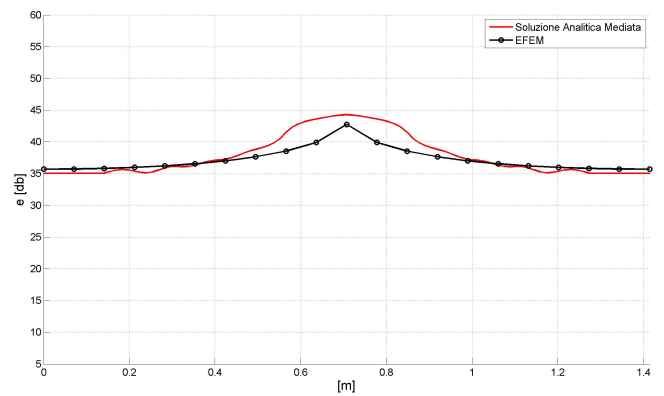
Figura 4.12: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

In questi primi tre esempi ($f = 239 Hz$) si può notare come mentre il livello globale dell'energia aumenta al diminuire dello smorzamento, la variazione globale dell'energia diminuisce con esso. Questa tendenza è visibile nella soluzione analitica, ma è più semplicemente osservabile nella soluzione EFEM: nei primi due casi ($\eta = 0.1$ e $\eta = 0.05$) è visibile un andamento globale della soluzione che aumenta avvicinandosi al centro del pannello, mentre nel terzo caso ($\eta = 0.01$) la soluzione è pressoché uniforme. Questo perché con smorzamento basso la dissipazione dell'energia è molto piccola e di conseguenza l'energia stessa si distribuisce uniformemente nella piastra.

Nei tre casi seguenti la frequenza di eccitazione è $f = 487 \text{ Hz}$. I risultati sono riportati nelle figure da 4.13a a 4.15b. Valgono ancora le considerazioni fatte per i casi precedenti a 239 Hz , ma in più si incomincia a notare che la soluzione EFEM approssima meglio la soluzione analitica mediata all'aumentare dello smorzamento. Inoltre, insieme al consueto aumento del livello globale dell'energia quando diminuisce lo smorzamento, è possibile osservare anche un aumento della variazione locale dell'energia nella soluzione analitica.

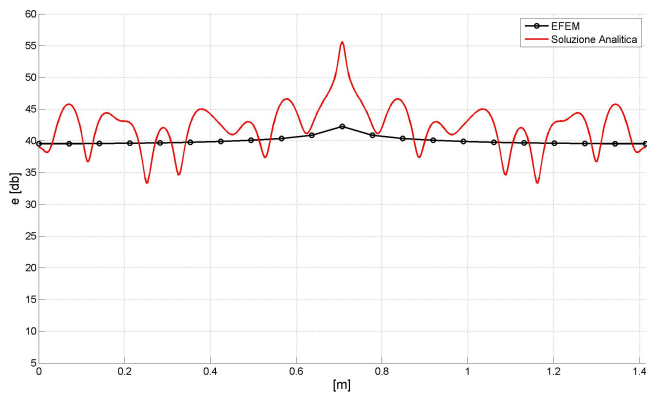


(a) Soluzione non mediata

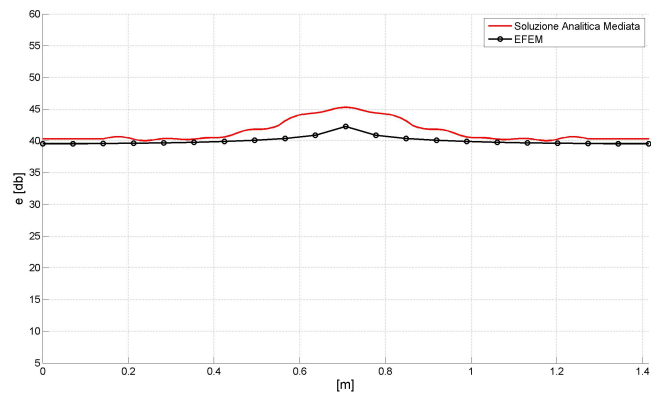


(b) Soluzione mediata

Figura 4.13: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz , $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^2$

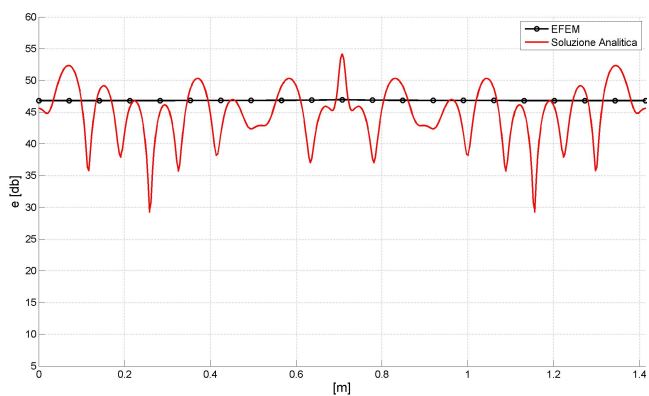


(a) Soluzione non mediata

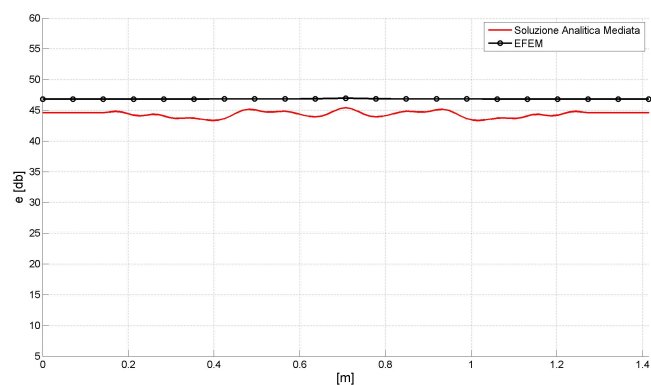


(b) Soluzione mediata

Figura 4.14: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$



(a) Soluzione non mediata



(b) Soluzione mediata

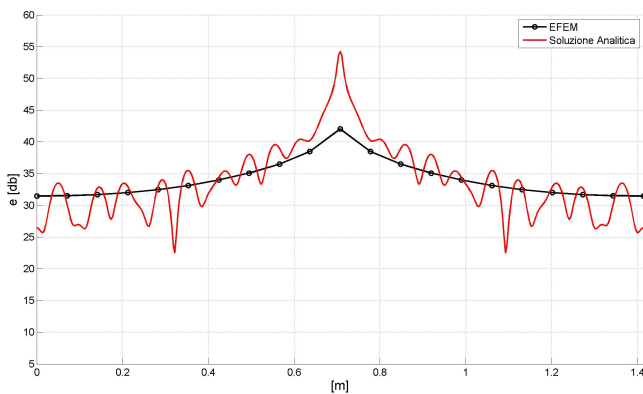
Figura 4.15: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Ricapitolando, al diminuire dello smorzamento a parità di frequenza:

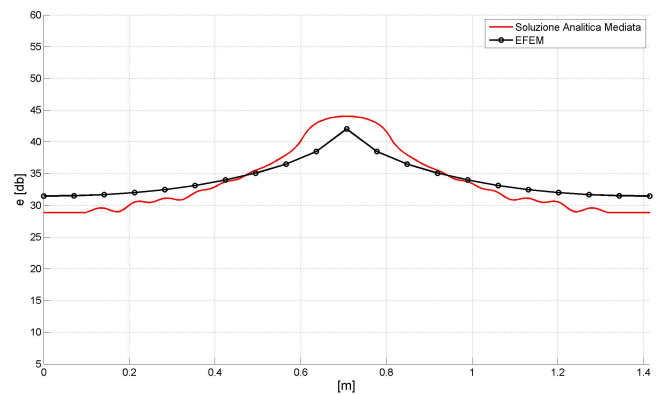
1. il livello globale dell'energia della soluzione analitica e della soluzione EFEM aumenta
2. la variazione globale dell'energia della soluzione analitica e della soluzione EFEM diminuisce
3. la variazione locale dell'energia della soluzione analitica aumenta
4. la soluzione EFEM approssima peggio la soluzione analitica mediata.

A questo punto vengono presi in considerazione i casi di alta frequenza, cioè 1000 Hz , 2000 Hz , e 5000 Hz . I risultati sono riportati dalla figura 4.16a alla figura 4.29b. Le osservazioni fatte per i casi precedenti rimangono valide. Si nota inoltre che a parità di smorzamento, all'aumentare della frequenza di eccitazione la variazione locale della densità di energia diminuisce, mentre la variazione globale aumenta (questo può essere osservato confrontando ad esempio la figura 4.16a con la figura 4.25a).

Si nota inoltre come per smorzamenti alti (vedi figura 4.20b) la soluzione EFEM tende a sovrastimare la soluzione analitica mediata in prossimità dei contorni, e a sottostimarla in prossimità del punto di eccitazione. Questo problema è insito nella formulazione stessa del problema energetico, e verrà risolto con l'approccio ibrido del capitolo 5.

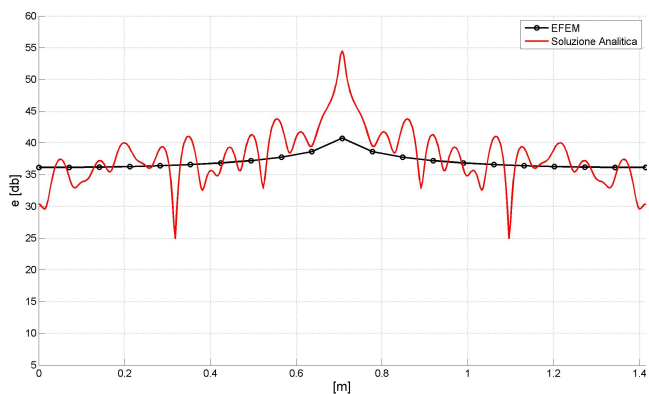


(a) Soluzione non mediata

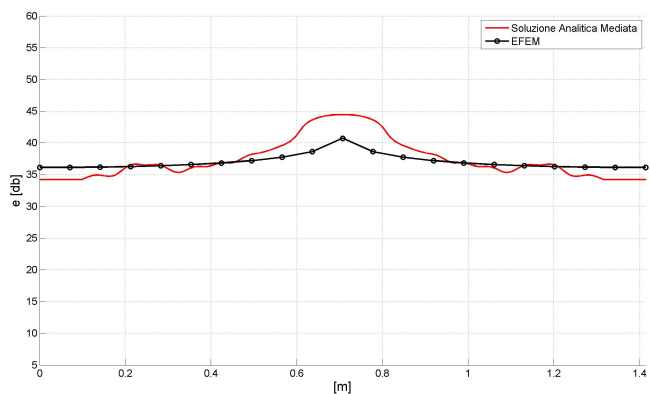


(b) Soluzione mediata

Figura 4.16: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz , $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12}\text{ J/m}^2$

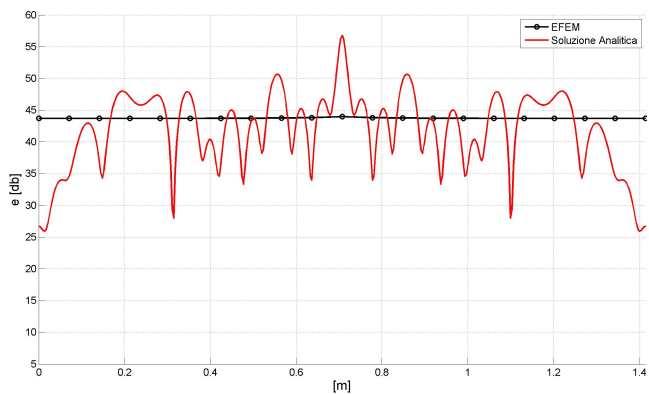


(a) Soluzione non mediata

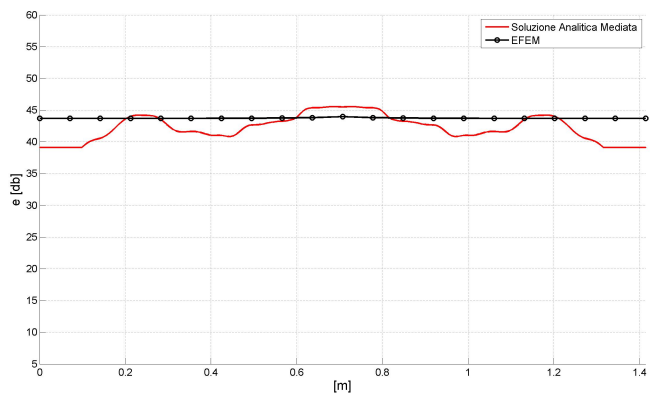


(b) Soluzione mediata

Figura 4.17: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

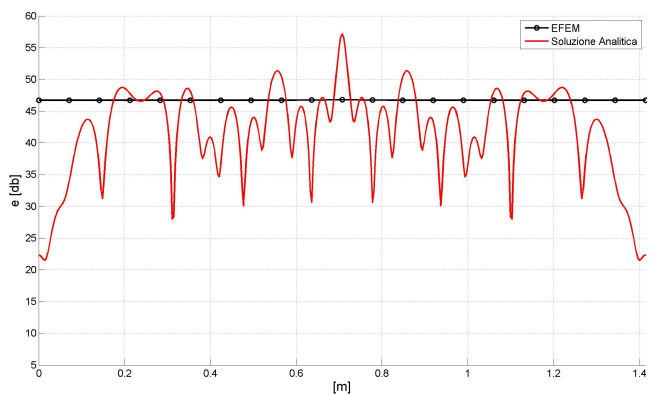


(a) Soluzione non mediata

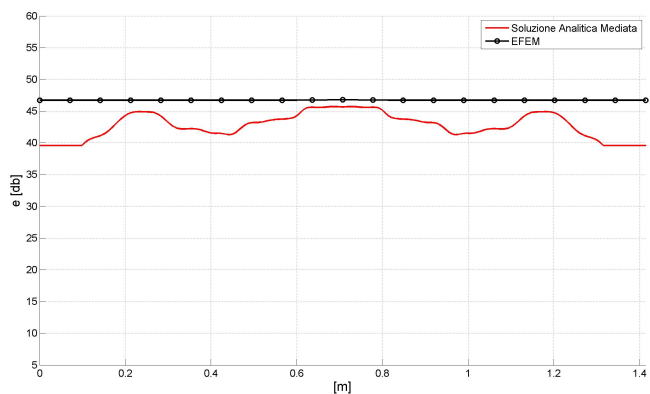


(b) Soluzione mediata

Figura 4.18: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

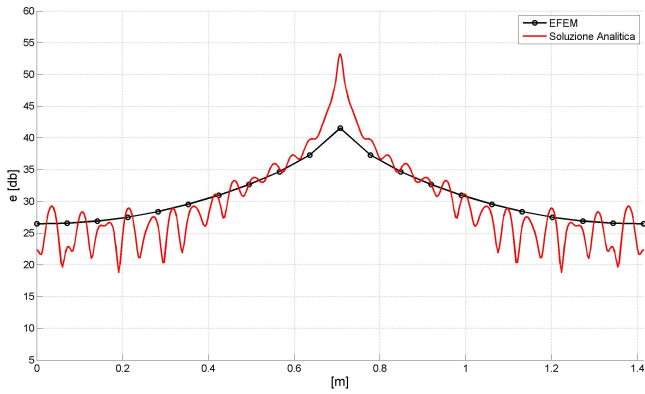


(a) Soluzione non mediata

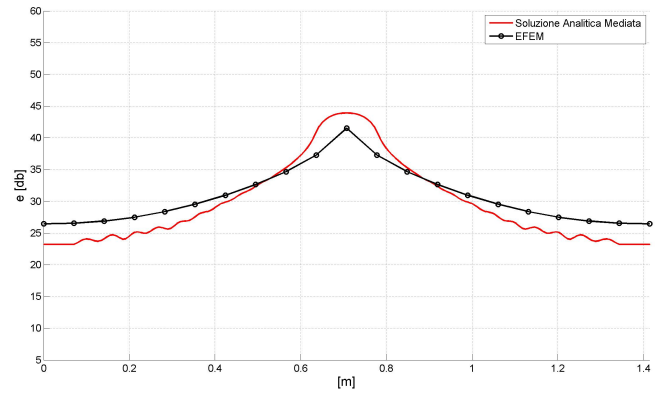


(b) Soluzione mediata

Figura 4.19: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.005$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

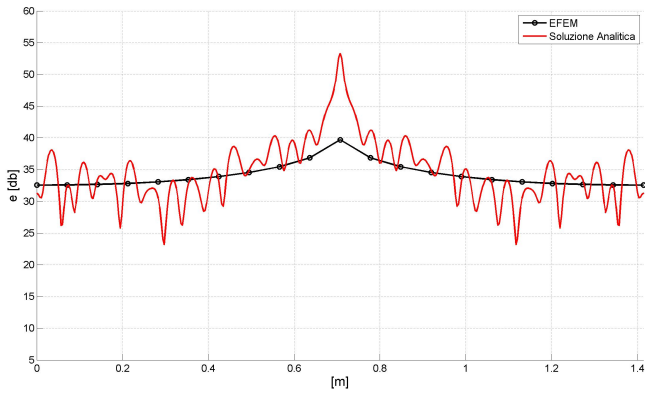


(a) Soluzione non mediata

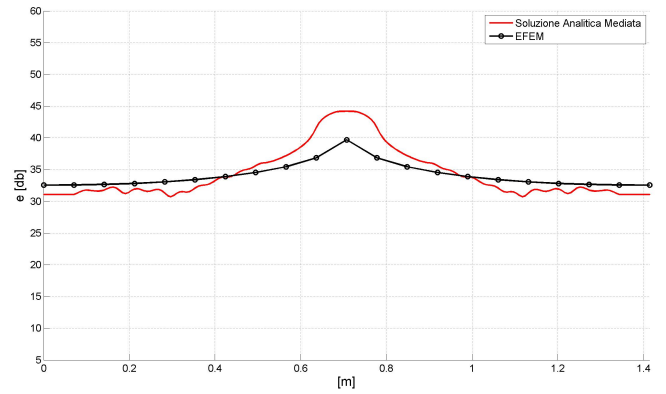


(b) Soluzione mediata

Figura 4.20: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

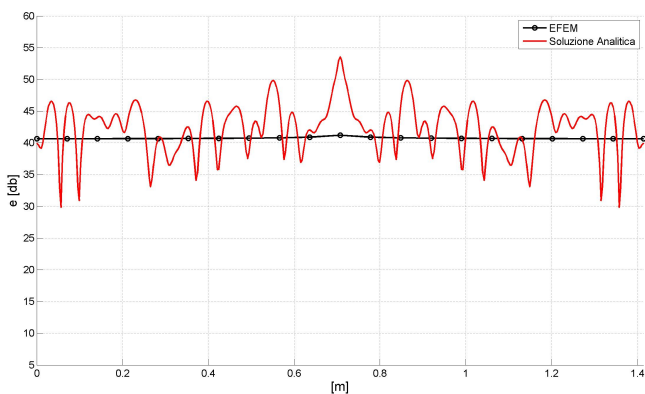


(a) Soluzione non mediata

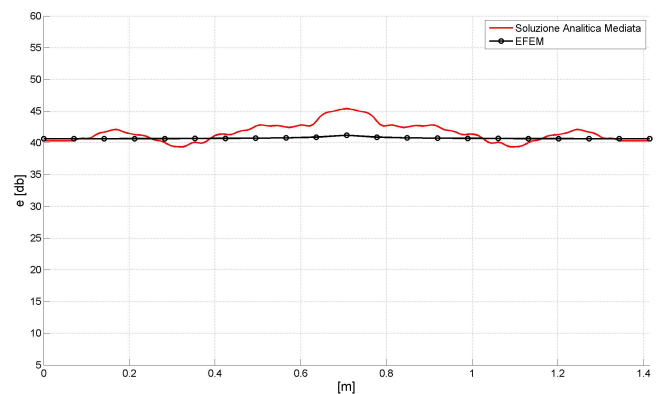


(b) Soluzione mediata

Figura 4.21: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

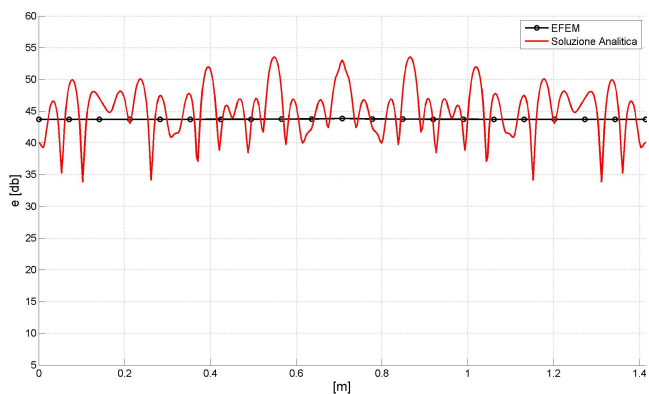


(a) Soluzione non mediata

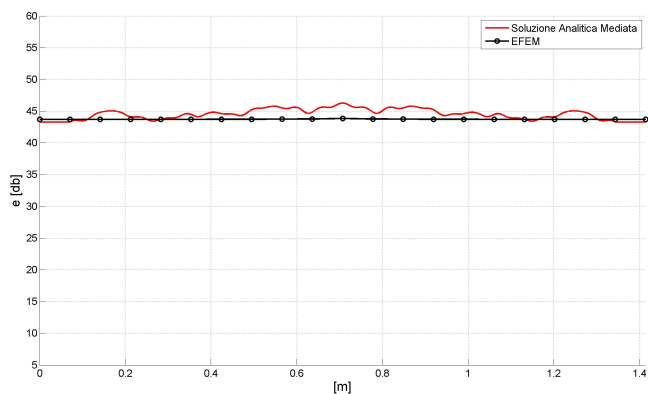


(b) Soluzione mediata

Figura 4.22: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

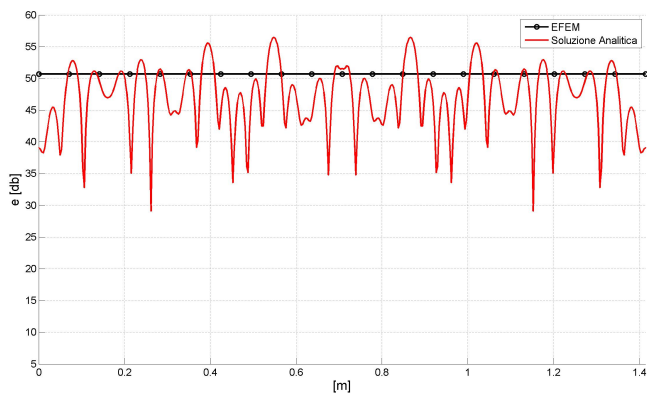


(a) Soluzione non mediata

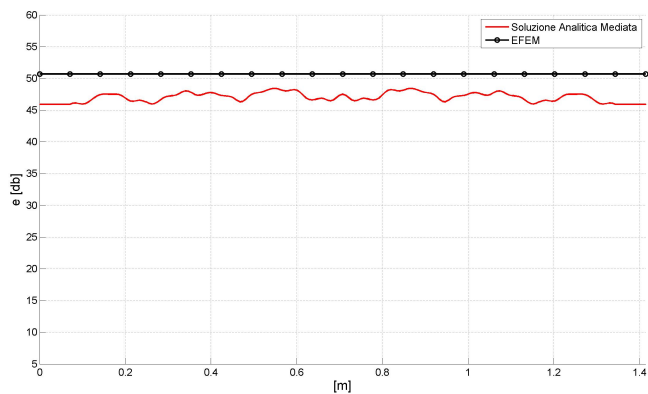


(b) Soluzione mediata

Figura 4.23: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.005$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

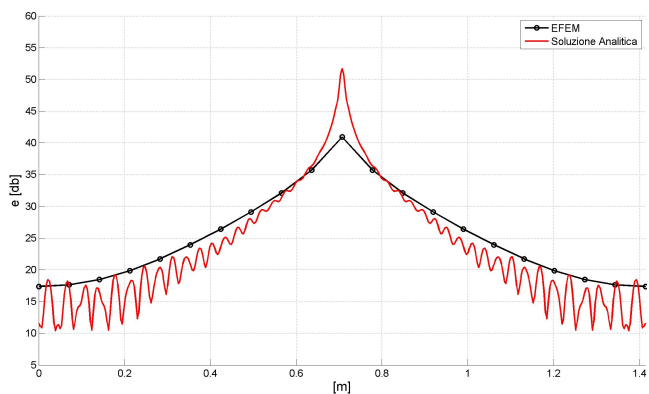


(a) Soluzione non mediata

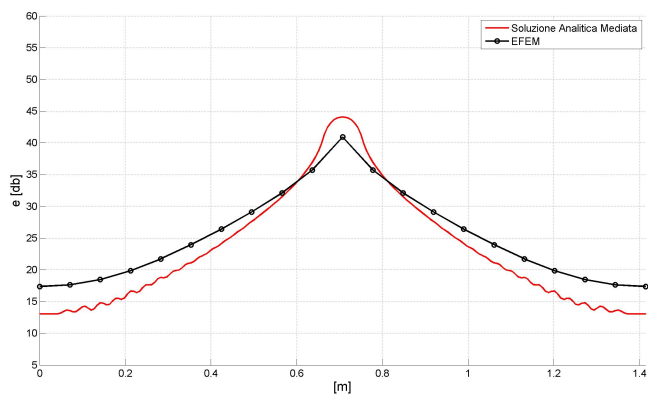


(b) Soluzione mediata

Figura 4.24: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.001$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

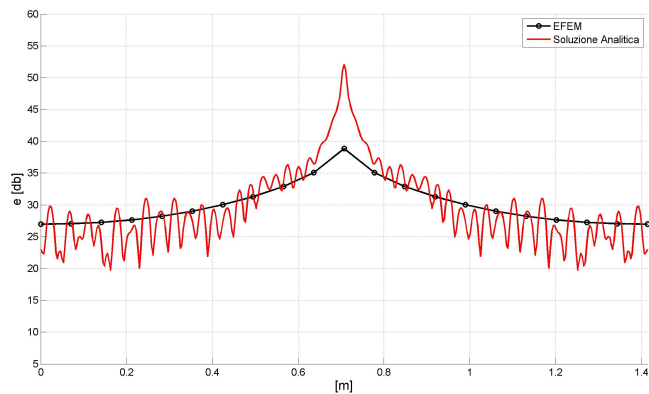


(a) Soluzione non mediata

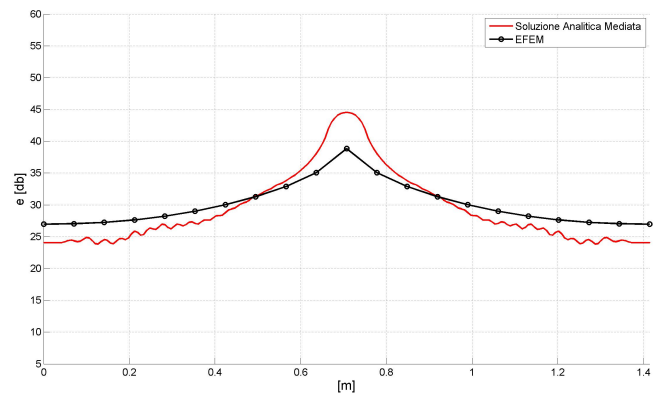


(b) Soluzione mediata

Figura 4.25: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

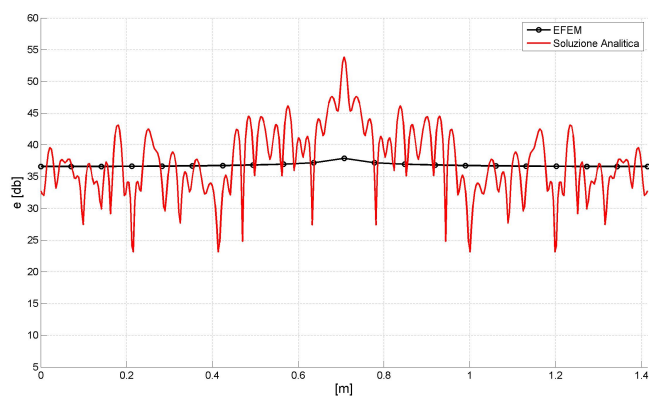


(a) Soluzione non mediata

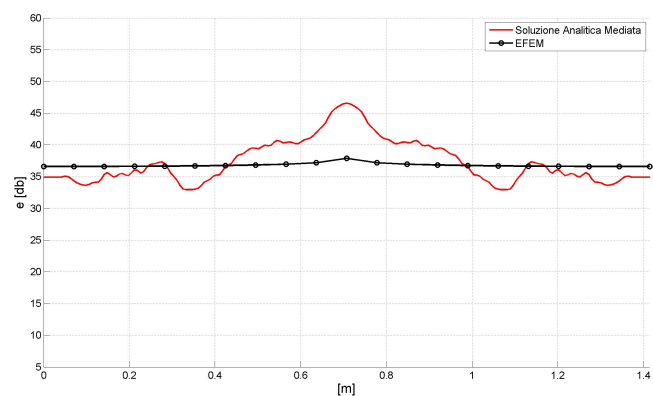


(b) Soluzione mediata

Figura 4.26: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

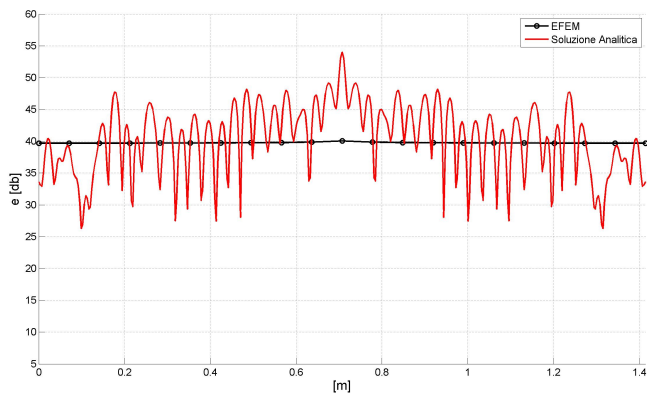


(a) Soluzione non mediata

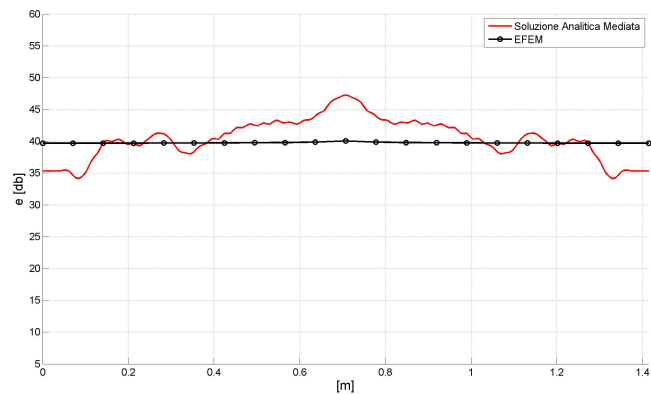


(b) Soluzione mediata

Figura 4.27: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

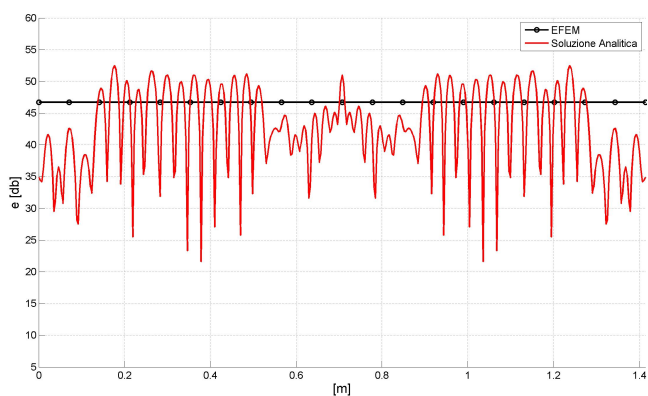


(a) Soluzione non mediata

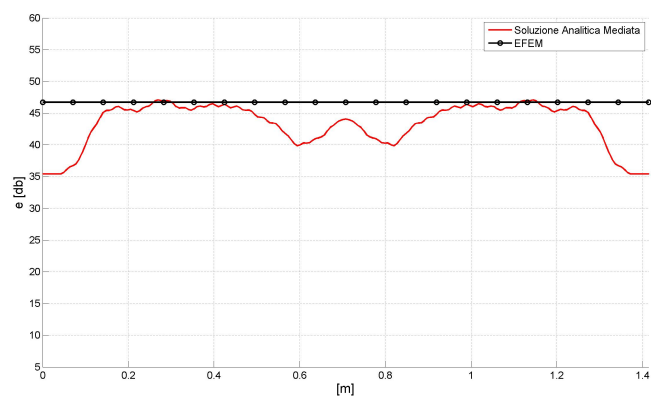


(b) Soluzione mediata

Figura 4.28: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.005$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$



(a) Soluzione non mediata



(b) Soluzione mediata

Figura 4.29: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.001$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Un ulteriore problema dell'EFEM è legato alla convergenza della soluzione al tendere a zero dello smorzamento. Con gli elementi finiti tradizionali e con l'approccio analitico è possibile calcolare una soluzione con smorzamento $\eta = 0$, e a questa soluzione convergono le soluzioni con smorzamento tendente a zero. Per quanto riguarda l'EFEM, a causa della struttura dell'equazione (3.63) al tendere a zero dello smorzamento la soluzione tende all'infinito. Questo effetto di divergenza della soluzione al diminuire dello smorzamento avviene tanto prima quanto più la frequenza è bassa. Per questo motivo per i casi a bassa frequenza ci si è fermati ad uno smorzamento $\eta = 0.01$ mentre in alta frequenza si è arrivati a $\eta = 0.001$. In figura 4.30 sono riportate le soluzioni analitiche e EFEM per una frequenza di 239 Hz e diversi smorzamenti, come si vede la soluzione analitica (e analogamente farebbe quella ad elementi finiti tradizionali) converge verso quella a $\eta = 0$ mentre quella EFEM diverge. Nelle figure seguenti (da 4.31 a 4.34) sono riportati gli stessi confronti alle frequenze superiori. Come detto precedente a frequenza più alta e a parità di smorzamento il fenomeno è meno evidente. Di conseguenza è necessaria cautela nell'utilizzo dell'EFEM a frequenze medio-basse e smorzamenti bassi.

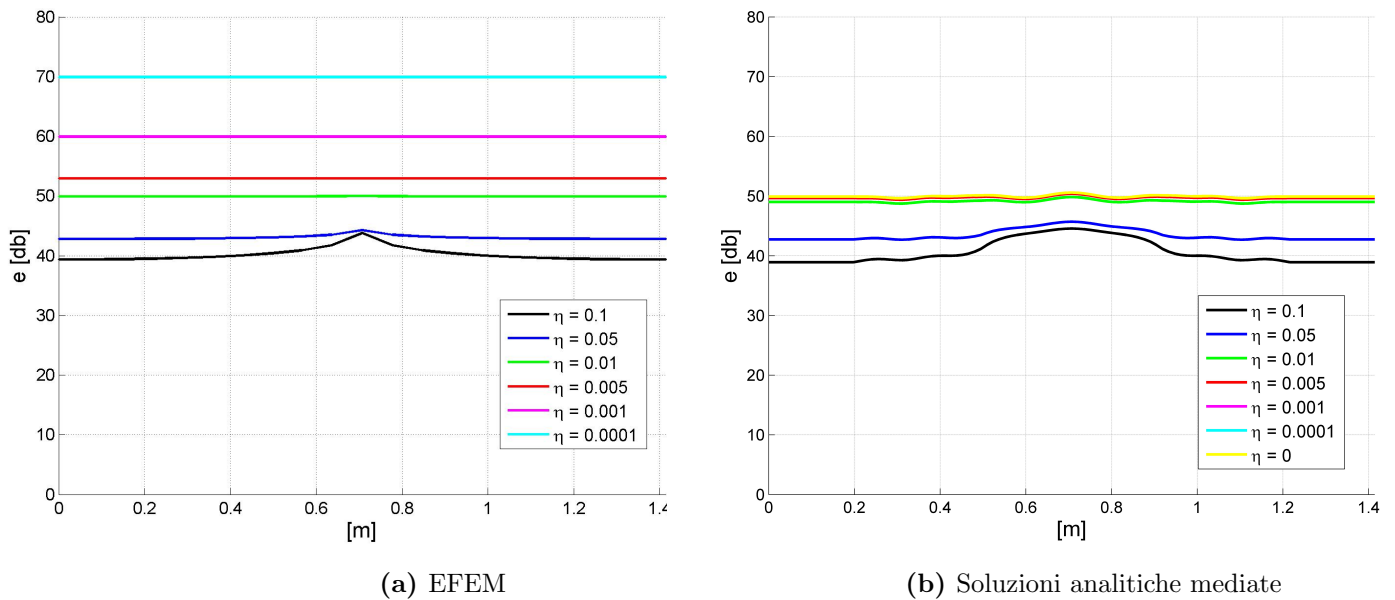
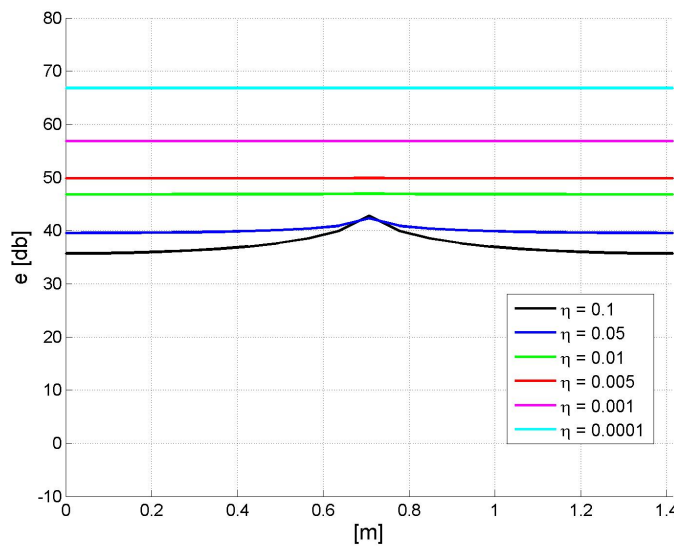
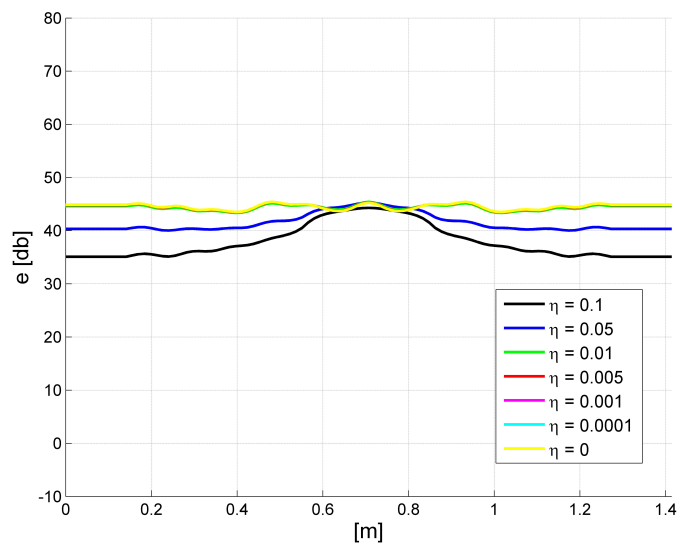


Figura 4.30: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^2$

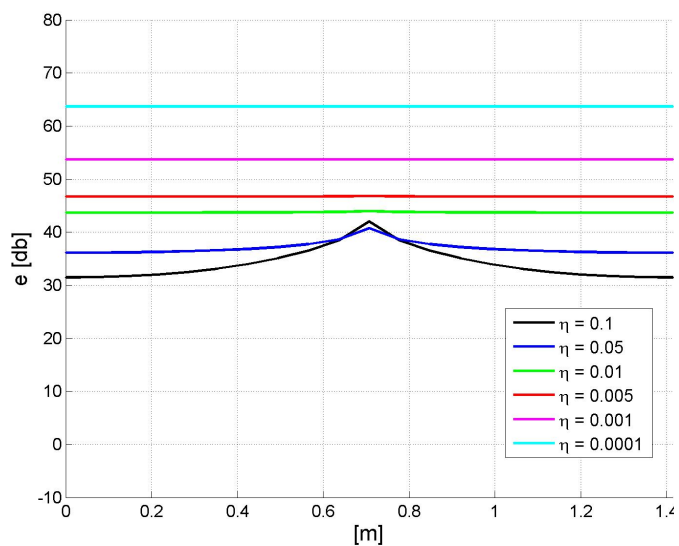


(a) EFEM

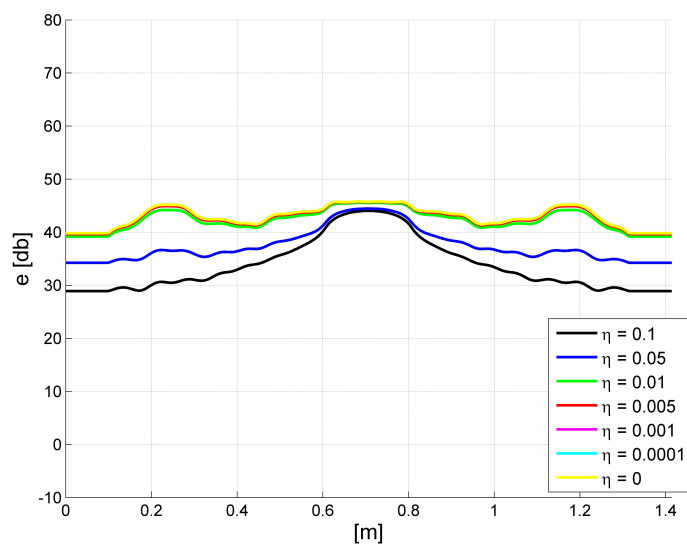


(b) Soluzioni analitiche mediate

Figura 4.31: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

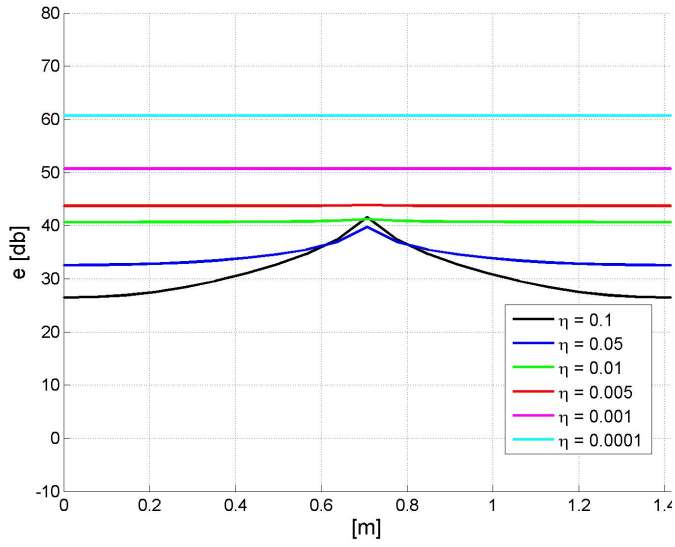


(a) EFEM

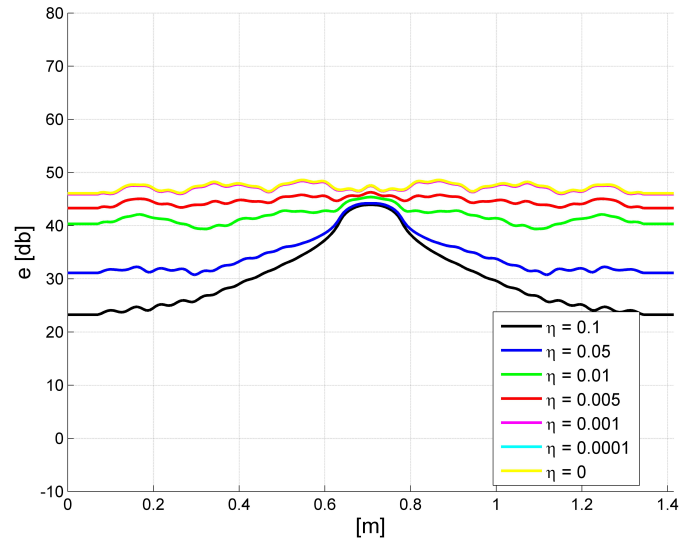


(b) Soluzioni analitiche mediate

Figura 4.32: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

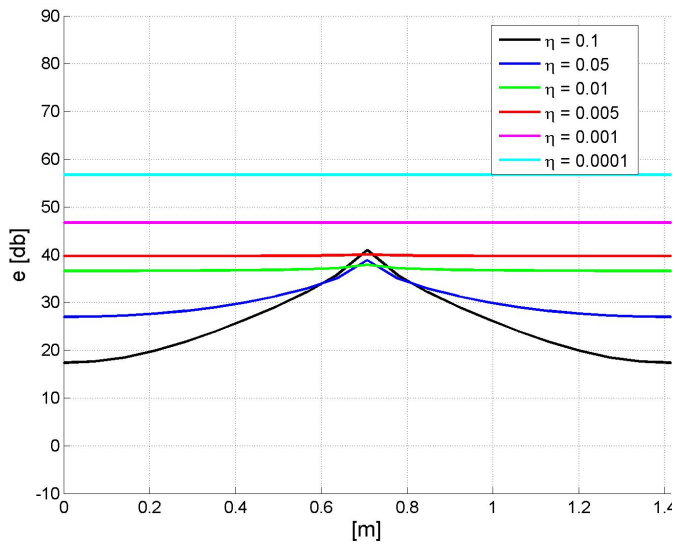


(a) EFEM

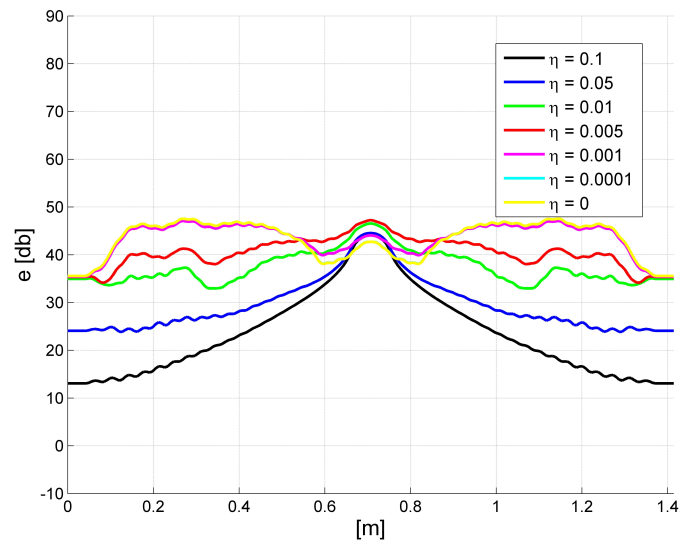


(b) Soluzioni analitiche mediate

Figura 4.33: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$



(a) EFEM



(b) Soluzioni analitiche mediate

Figura 4.34: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Capitolo 5

Approccio Ibrido HEFEM per piastre

In questo capitolo viene sviluppato l'HEFEM (Hybrid Energy Finite Element Method), un approccio ibrido degli elementi finiti energetici che consiste nella sovrapposizione alla soluzione EFEM della soluzione del campo diretto [27]. Questo è uno sviluppo del metodo che nonostante la semplicità dell'implementazione migliora notevolmente i risultati quando si prendono in considerazione piastre con uno smorzamento relativamente alto. Nel capitolo 4 si era visto come la soluzione EFEM tendesse con smorzamenti alti a sovrastimare la soluzione tradizionale (analitica o FEM) lontano dal punto di eccitazione, e a sottostimarla in corrispondenza della forzante; lo sviluppo di questo metodo ibrido permetterà di risolvere questo problema.

5.1 Ipotesi

L'ipotesi fondamentale è quella di considerare il campo vibrazionale all'interno della piastra come sovrapposizione di due componenti: il campo diretto e il campo riverberante. Il campo diretto è composto da onde cilindriche che si diramano dal punto applicazione della forzante. Il campo riverberante è dovuto alla riflessione e alla trasmissione dell'energia ai contorni della piastra. La densità di energia totale e può essere scritta come

$$e = e_d + e_r \quad (5.1)$$

dove e_d è la densità di energia del campo diretto e e_r è quella del campo riverberante.

5.2 Campo Riverberante

Nell'EFEM l'energia in ingresso entra nel campo riverberante (che è l'unico presente) direttamente dal punto di applicazione della forzante. Questo è un modello che funziona quando lo smorzamento è piccolo. Se lo smorzamento invece è grande l'equazione (3.63) non modella adeguatamente il decadimento dell'energia

all'allontanarsi dal punto di eccitazione. Ad esempio, considerando il caso di vibrazioni flessionali in una piastra sottile l'equazione (3.63) prevede un decadimento della densità di energia proporzionale a $1/\sqrt{r}$ mentre la soluzione esatta prevede un decadimento proporzionale a $1/r$, dove r è la distanza tra il punto di eccitazione e il punto dove la densità di energia viene valutata. Inoltre quando la dissipazione è elevata il campo diretto non può essere trascurato.

Invece nell'approccio ibrido (HEFEM) l'energia in ingresso entra nel campo diretto dal punto di applicazione della forzante, dopodiché l'energia del campo diretto viene riflessa ai contorni e entra dai contorni stessi nel campo riverberante. Il riverberante viene quindi risolto agli elementi finiti con le stesse equazioni sviluppate nei capitoli precedenti, tenendo semplicemente conto che la potenza in ingresso π_{in} è nulla e che sul contorno c'è dell'energia entrante espressa dal termine \vec{I}_d , che verrà calcolato in seguito. Questo significa che, riprendendo l'equazione (3.101) il termine della forzante F è nullo mentre il termine delle condizioni al contorno FB è diverso da zero ed è costruito tenendo conto che l'intensità in ingresso \vec{I}_d è legata alla densità di energia diretta in corrispondenza del contorno. Di conseguenza per risolvere il campo riverberante è necessario un calcolo accurato di \vec{I}_d che dipende dal campo diretto [28].

5.3 Campo Diretto

Come detto precedentemente il campo diretto è costituito da onde cilindriche che si propagano dal punto di applicazione della forzante. Di conseguenza il campo diretto è indipendente dalla posizione dei contorni e dal campo riverberante, e può essere calcolato analiticamente conoscendo semplicemente la distanza del punto nel quale viene valutato dal punto di eccitazione. L'equazione che governa la distribuzione di densità di energia nel campo diretto di una piastra sottile eccitata in un punto è

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r e_d) + \frac{\eta \omega}{c_g} (e_d) = 0 \quad (5.2)$$

dove e_d è la densità di energia del campo diretto e r la distanza radiale dall'eccitazione. La soluzione per la densità di energia nel campo diretto è

$$e_d = \frac{\pi_{in}}{2\pi h r c_g} e^{(-\eta \omega r / c_g)} \quad (5.3)$$

e l'intensità radiale è

$$I_{rad} = c_g e_d = \frac{\pi_{in}}{2\pi h r} e^{(-\eta \omega r / c_g)} \quad (5.4)$$

Dall'equazione (5.3) si avrebbe una densità di energia infinita nel punto di applicazione della forzante, un procedimento per rimuovere la singolarità è presente in [27].

Per questo approccio, l'unità di misura della densità di energia è stata generalizzata ai J/m^3 . Inoltre l'intensità è definita come flusso medio di energia attraverso la superficie unitaria normale alla direzione di propagazione (Kinsler et al., 1982 11). Le sue unità di misura sono Watt su metri quadri (W/m^2). Come esempio consideriamo una piastra come in figura 5.1.

L'intensità nel punto j a causa del campo diretto può essere espressa come

$$I_d^{(j)} = c_g e_d^{(j)} = \frac{\pi_{in}}{2\pi h r^{(j)}} e^{-\eta \omega r^{(j)} / c_g} \quad (5.5)$$

dove $r^{(j)}$ è la distanza del punto di eccitazione (x_0, y_0) dal centro dell'elemento $(x^{(j)}, y^{(j)})$, e si calcola

$$r^{(j)} = \sqrt{(x^{(j)} - x_0)^2 + (y^{(j)} - y_0)^2} \quad (5.6)$$

$r^{(j)}$ può essere espresso come una funzione dell'angolo ϑ come mostrato in figura 5.1

$$r^{(j)} = d / \cos \vartheta \quad (5.7)$$

dove d è la distanza ortogonale dal punto di eccitazione al contorno.

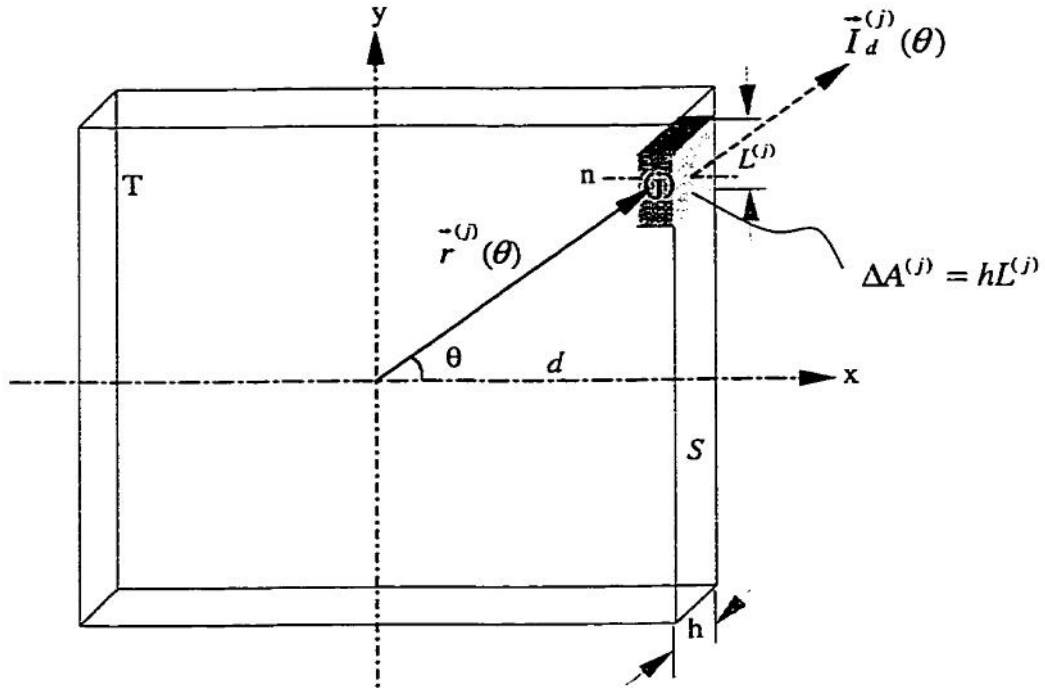


Figura 5.1: Elemento sul contorno della piastra

A questo punto viene calcolata la potenza riverberante [29], cioè la frazione della potenza in ingresso π_{in} che è non è stata dissipata nel campo diretto. La potenza riflessa nel campo riverberante nell'elemento j -esimo lungo il contorno è

$$\pi_v^{(j)}|_{\Gamma} = r_{11}(\vartheta) I_d^{(j)} \cos \vartheta \Delta A^{(j)} \quad (5.8)$$

dove $\Delta A^{(j)}$ è l'area di contorno dell'elemento, $\Delta A^{(j)} = h L^{(j)}$, e ϑ è l'angolo tra il vettore radiale che ha origine nel punto di eccitazione e la normale al contorno. Sostituendo le equazioni (5.5)-(5.7) nella (5.8) si ricava

$$\pi_v^{(j)}(\vartheta)|_{\Gamma} = r_{11}(\vartheta) D(\vartheta) \beta^{(j)} \pi_{in} \quad (5.9)$$

dove $D(\vartheta)$ è la funzione direttività espressa come

$$D(\vartheta) = \cos^2 \vartheta e^{-\eta - \omega d / c_g \cos \vartheta} \quad (5.10)$$

e $\beta^{(j)}$ è

$$\beta^{(j)} = L^{(j)} / 2\pi d \quad (5.11)$$

A questo punto la potenza riverberante elementare (che è funzione di ϑ) può essere incorporata nel vettore della potenza in ingresso nel sistema di matrici globale dell'EFEM. Risolvendolo si ricava la densità di energia riverberante e_r che dovrà essere sommata alla densità di energia diretta e_d calcolata dalla (5.3) per ricavare la densità di energia totale.

La potenza riverberante totale della piastra eccitata è

$$\pi_v = \sum_{j=1}^{N_b} \pi_v^{(j)}(\vartheta) |_{\Gamma} = \sum_{j=1}^{N_b} r_{11}(\vartheta) D(\vartheta) \beta^{(j)} \pi_{in} \quad (5.12)$$

dove N_b è il numero totale di elementi sul contorno della piastra eccitata. Siccome l'intensità *netta* normale al contorno è nulla per una piastra incastrata o semplicemente appoggiata, i contorni possono essere considerati completamente riflettenti. Di conseguenza, per tutti gli angoli di incidenza, la potenza totale riverberante è

$$\pi_v = \sum_{j=1}^{N_b} D(\vartheta) \beta^{(j)} \pi_{in} \quad (5.13)$$

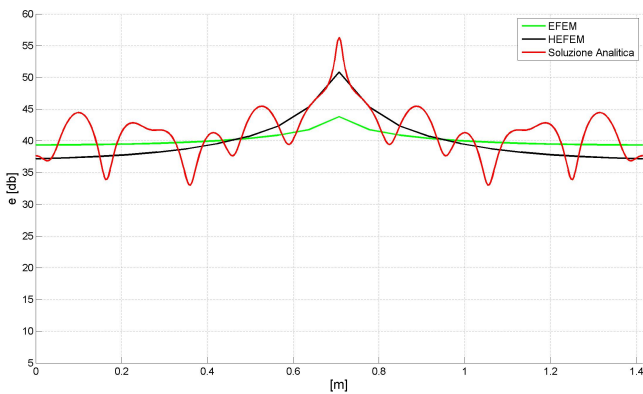
Questa potenza è identica alla potenza incidente sul contorno. Di conseguenza la potenza in ingresso si divide in due parti: una dissipata nel campo diretto, l'altra nel campo riverberante.

5.4 Risultati

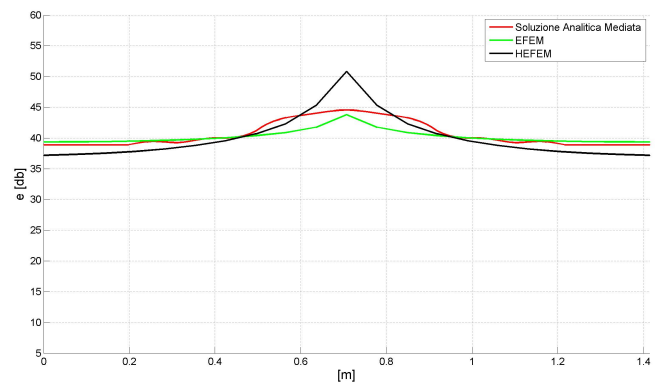
I risultati sono presentati sia in forma mediata che non. E' opportuno ricordare che le soluzioni EFEM sono sempre *mediate*, in quanto l'operazione di media è insita nello sviluppo delle equazioni energetiche ed è una delle basi del metodo energetico stesso. Tutti i risultati sono in decibel e sono riferiti alla densità di energia di $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$. Come nel capitolo precedente i risultati del metodo energetico vengono confrontati con la soluzione analitica; in questo capitolo nei grafici viene riportato oltre alla soluzione del metodo ibrido HEFEM anche quella del metodo tradizionale, per rendere possibile il confronto tra le due.

Come detto precedentemente questo metodo è stato sviluppato per migliorare le predizioni degli elementi finiti energetici per alte frequenze e alti smorzamenti. E' importante notare che l'approccio ibrido non comporta un miglioramento dell'approssimazione per tutti i casi di frequenza e smorzamento, e che quindi deve essere visto come un'alternativa da utilizzare solo in determinati casi.

Nelle figure da 5.2a 5.7b sono riportati i risultati per le frequenze di $239 Hz$ e $487 Hz$ per smorzamenti da $\eta = 0.1$ e $\eta = 0.01$. Come si vede in questi casi (figura 5.7b ad esempio) quando lo smorzamento è basso la soluzione HEFEM non apporta nessun miglioramento nell'approssimazione della soluzione analitica. La soluzione HEFEM tende ad avere inoltre un picco in corrispondenza del punto di eccitazione che non trova corrispondenza nella soluzione analitica. Anche quando lo smorzamento è alto (figura 5.2a) non c'è nessun miglioramento, ma anzi un peggioramento nell'approssimazione. Questo è coerente col fatto che siamo in un range di frequenze medio/basse.

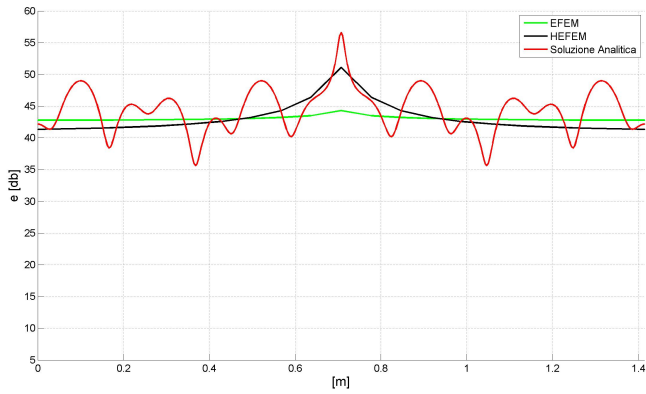


(a) Soluzione non mediata

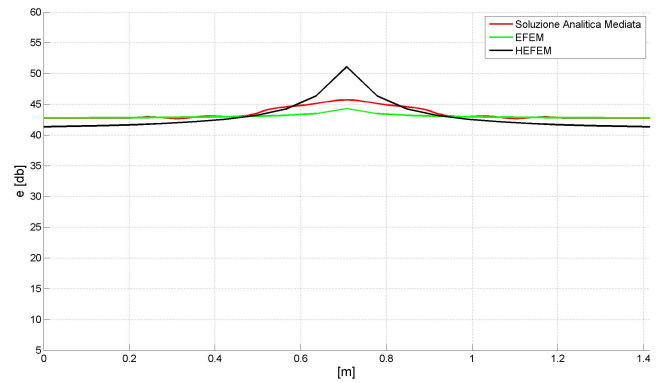


(b) Soluzione mediata

Figura 5.2: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, $239 Hz$, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

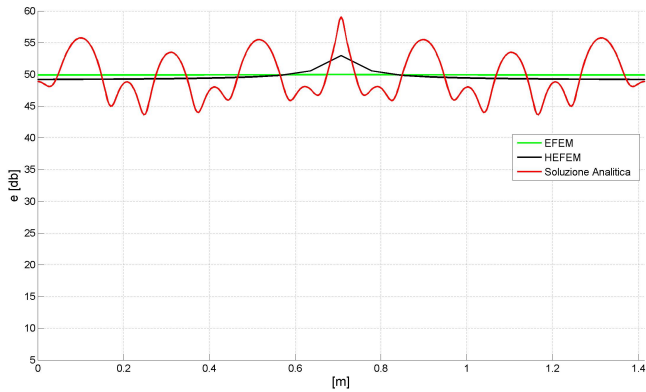


(a) Soluzione non mediata

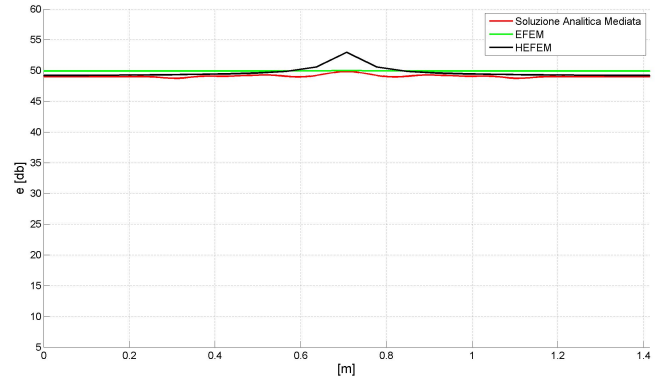


(b) Soluzione mediata

Figura 5.3: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

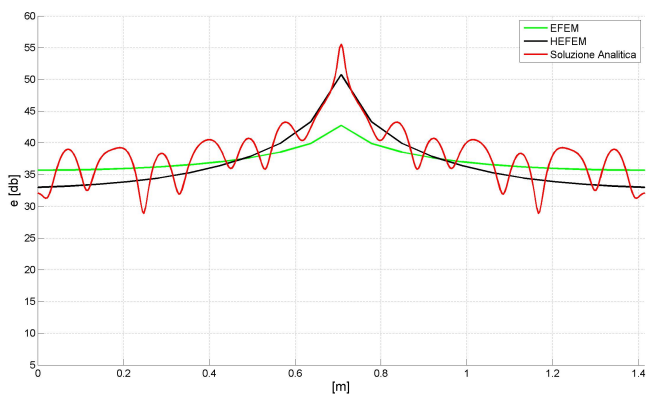


(a) Soluzione non mediata

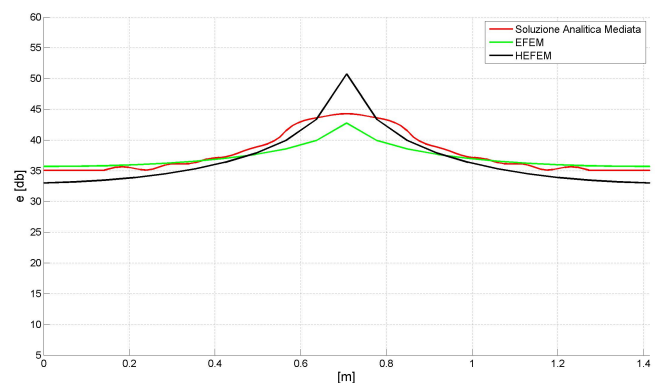


(b) Soluzione mediata

Figura 5.4: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

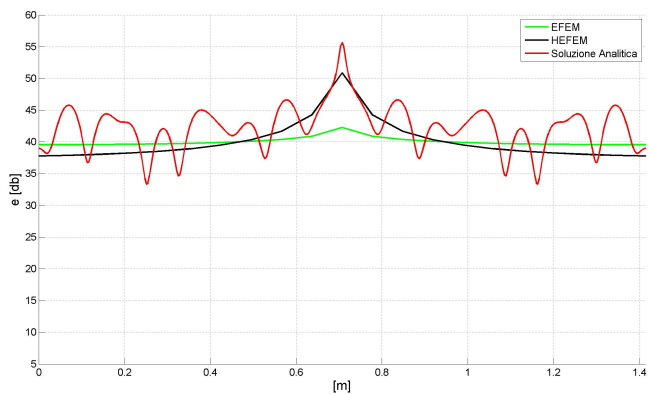


(a) Soluzione non mediata

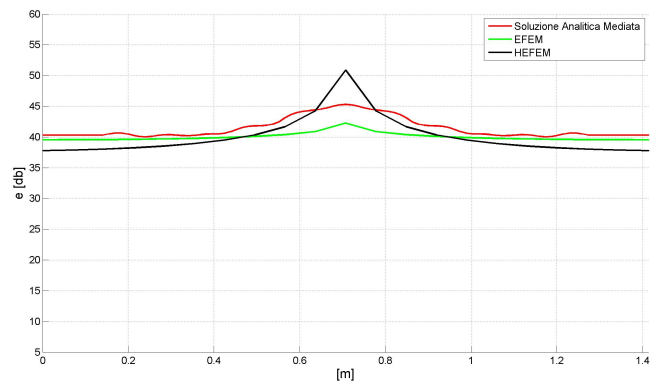


(b) Soluzione mediata

Figura 5.5: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

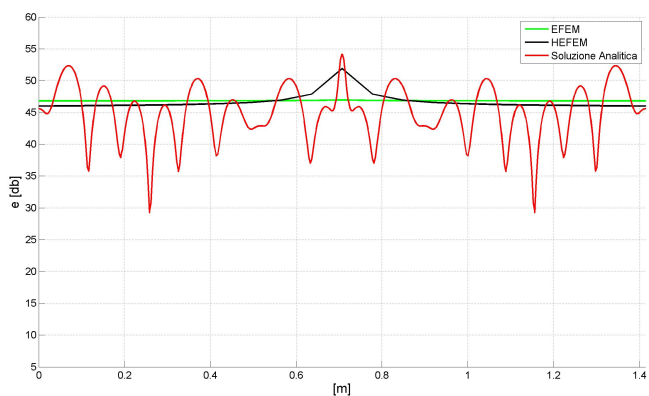


(a) Soluzione non mediata

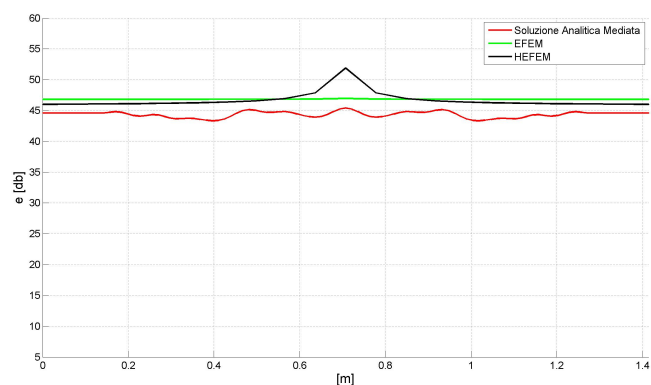


(b) Soluzione mediata

Figura 5.6: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$



(a) Soluzione non mediata

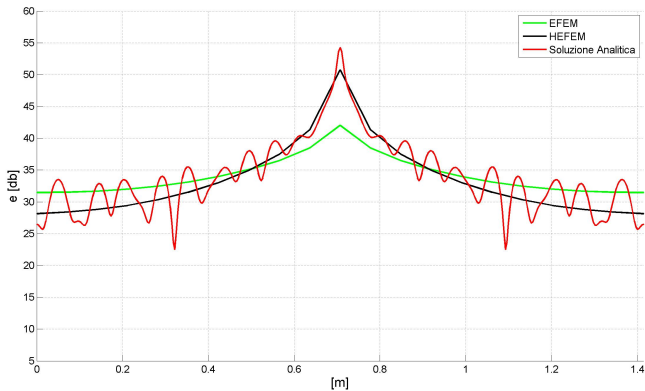


(b) Soluzione mediata

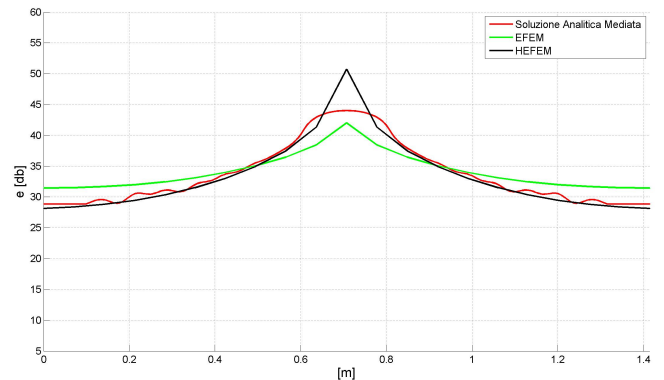
Figura 5.7: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Per frequenze medio/alte (da figura 5.8a a 5.21b) a smorzamenti alti il miglioramento nell'approssimazione è evidente. Il problema evidenziato nel capitolo precedente (cioè la sottostima della soluzione in corrispondenza del punto di eccitazione e la sovrastima lontano da esso) viene risolto come mostrato ad esempio in figura 5.12b e 5.17b. Quando lo smorzamento è basso anche ad alte frequenze non c'è nessun miglioramento della soluzione.

Tutte le altre osservazioni fatte sulla soluzione del metodo energetico nel capitolo 4 rimangono valide.

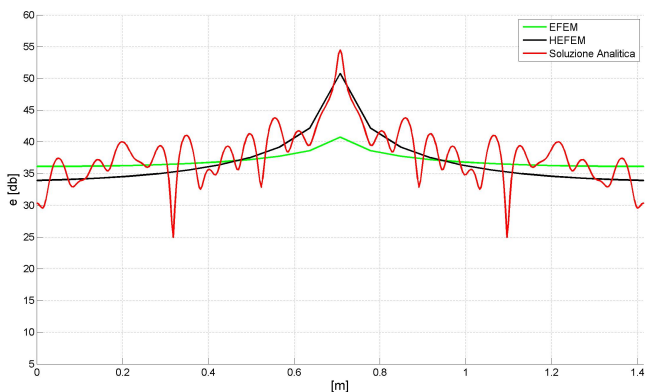


(a) Soluzione non mediata

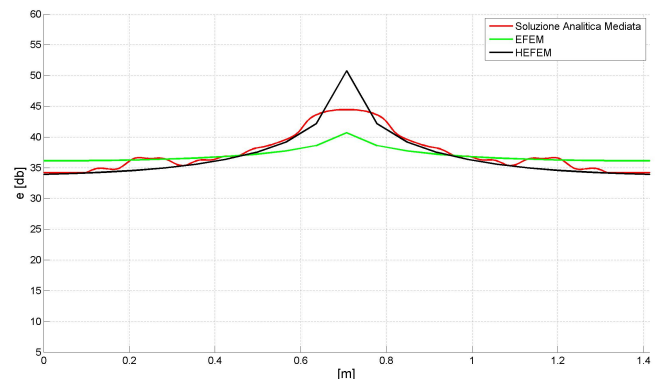


(b) Soluzione mediata

Figura 5.8: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

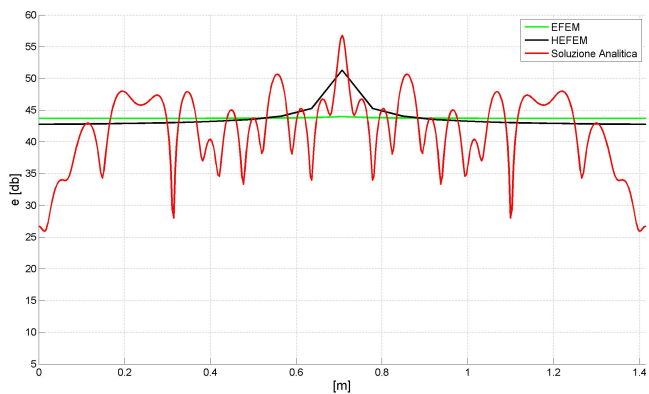


(a) Soluzione non mediata

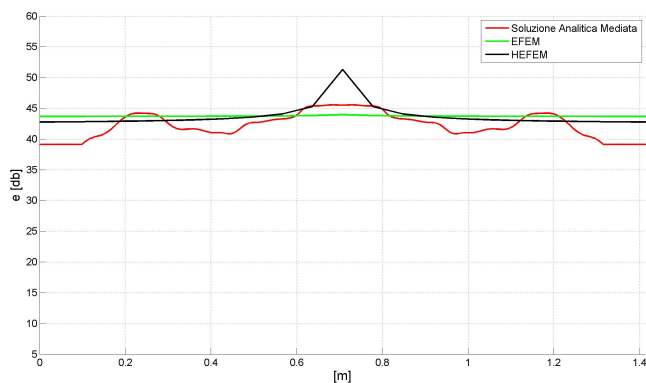


(b) Soluzione mediata

Figura 5.9: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

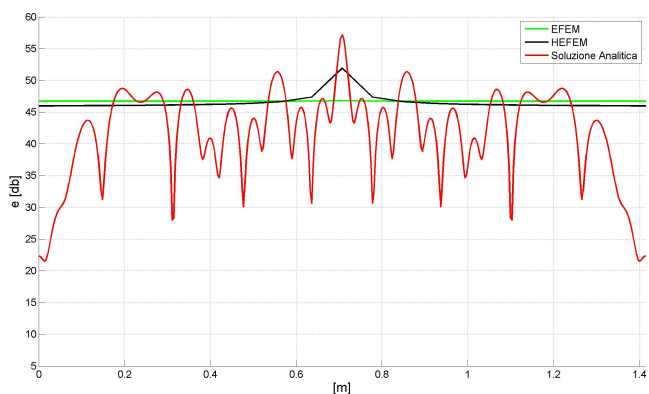


(a) Soluzione non mediata

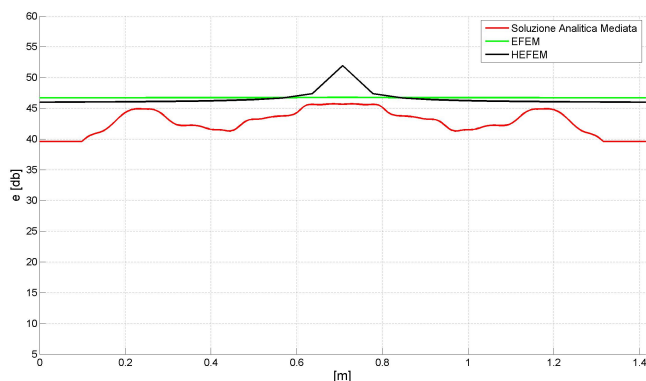


(b) Soluzione mediata

Figura 5.10: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

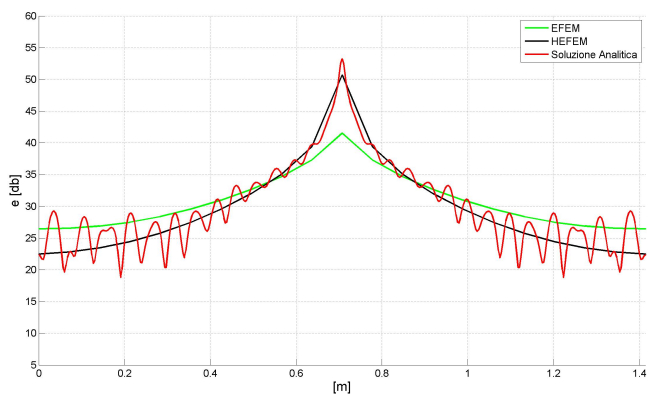


(a) Soluzione non mediata

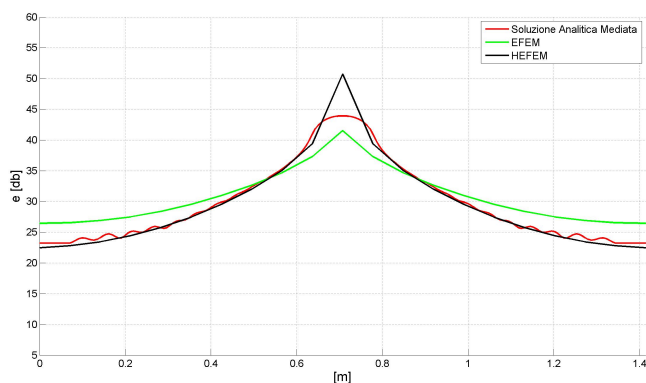


(b) Soluzione mediata

Figura 5.11: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.005$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

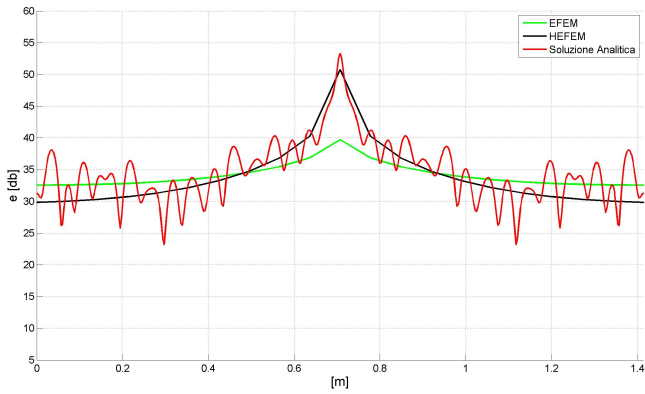


(a) Soluzione non mediata

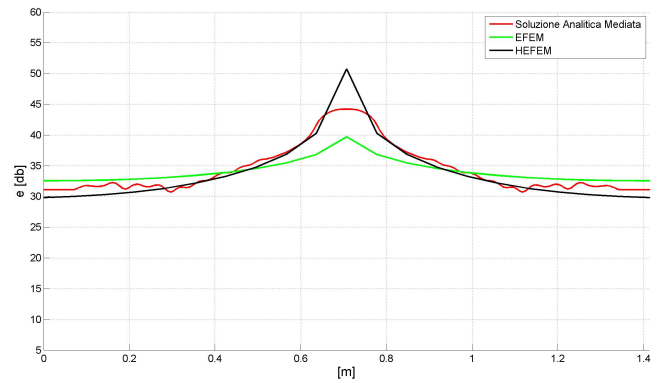


(b) Soluzione mediata

Figura 5.12: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

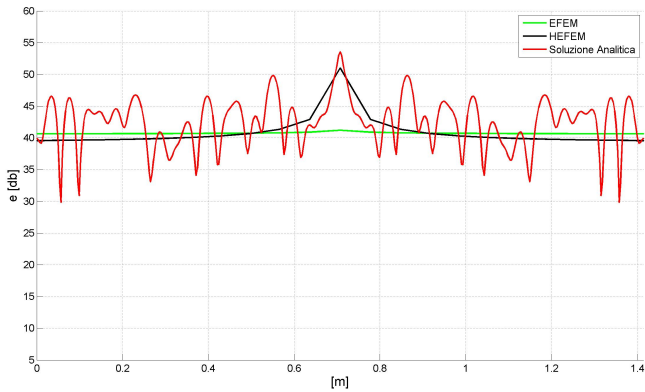


(a) Soluzione non mediata

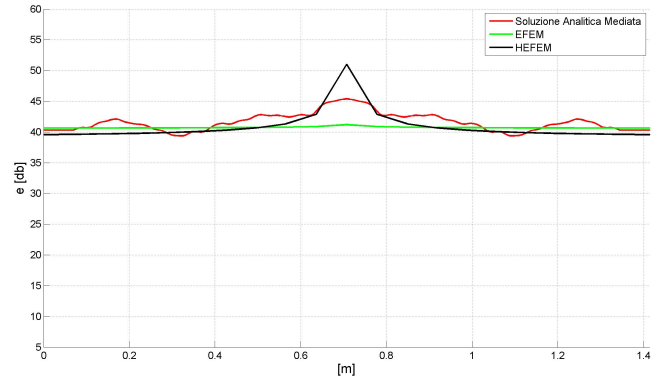


(b) Soluzione mediata

Figura 5.13: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

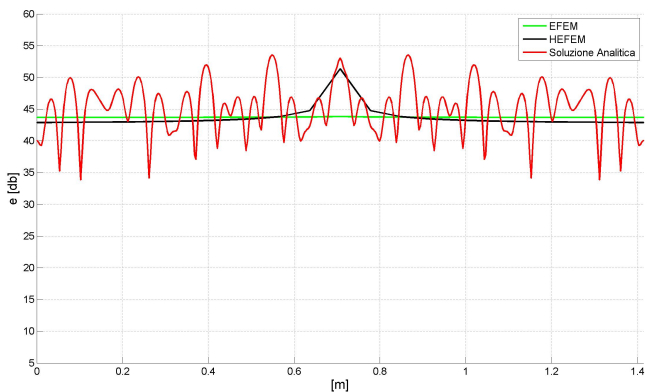


(a) Soluzione non mediata

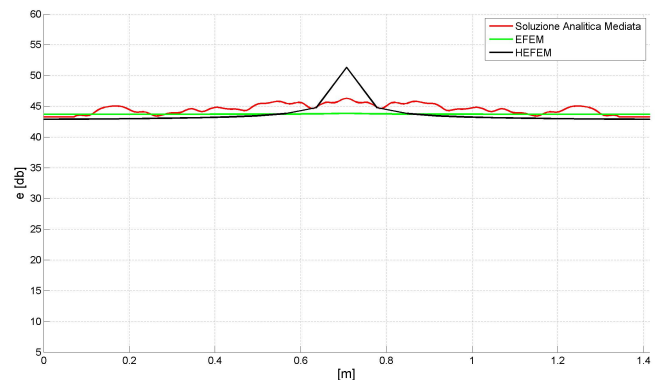


(b) Soluzione mediata

Figura 5.14: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

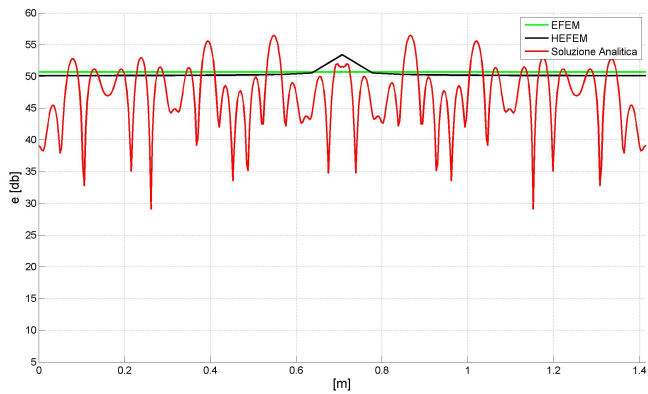


(a) Soluzione non mediata

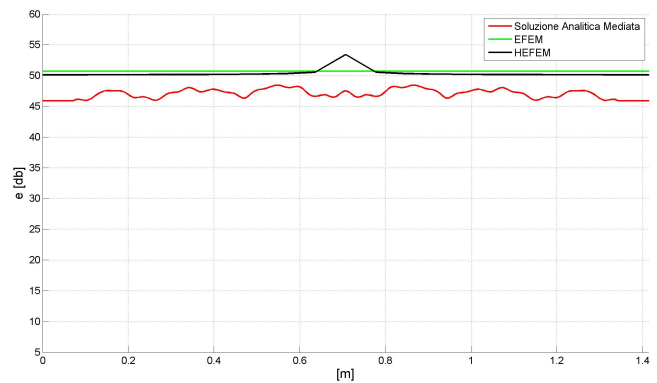


(b) Soluzione mediata

Figura 5.15: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.005$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

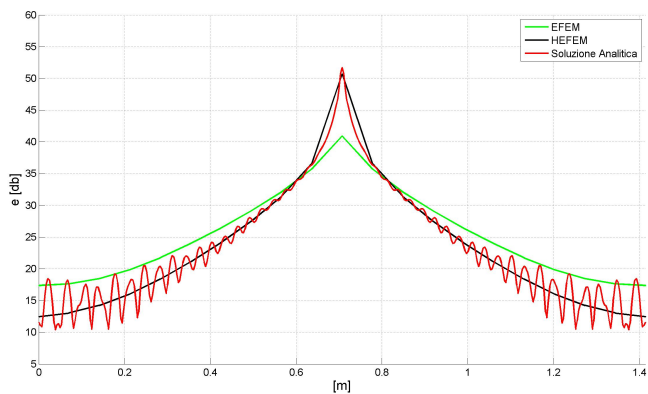


(a) Soluzione non mediata

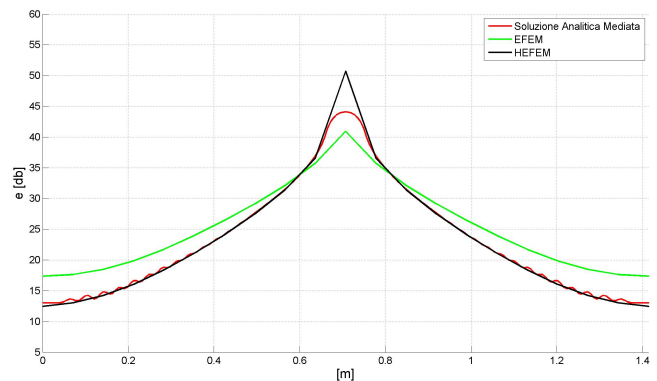


(b) Soluzione mediata

Figura 5.16: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.001$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

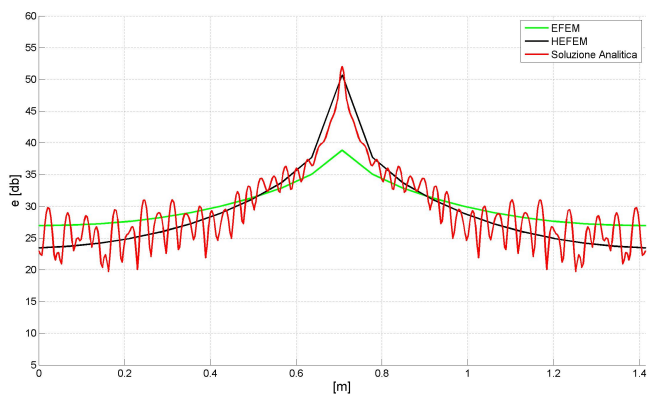


(a) Soluzione non mediata

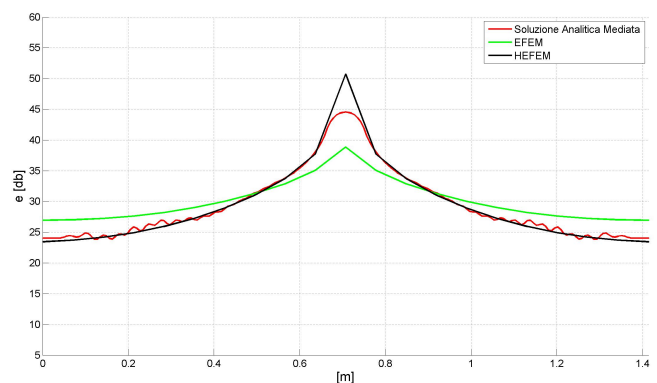


(b) Soluzione mediata

Figura 5.17: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

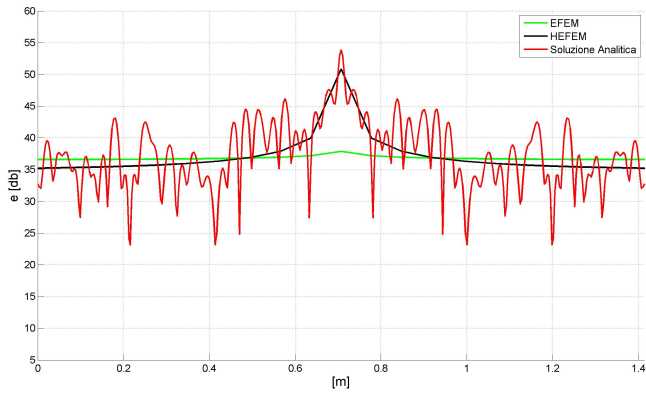


(a) Soluzione non mediata

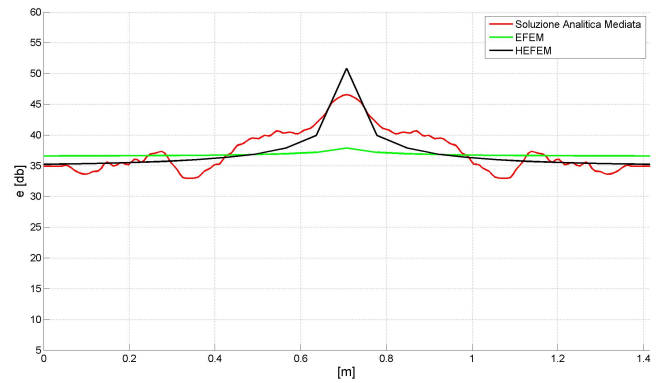


(b) Soluzione mediata

Figura 5.18: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

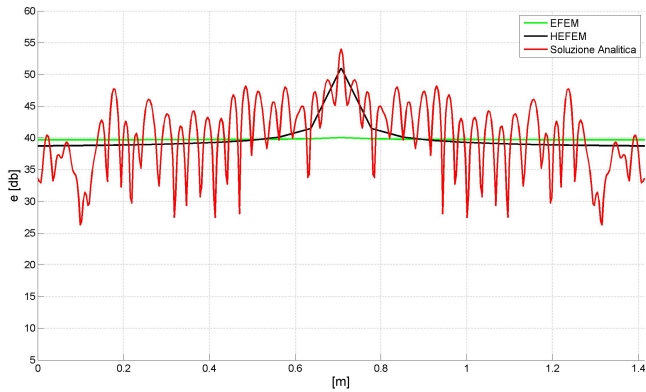


(a) Soluzione non mediata

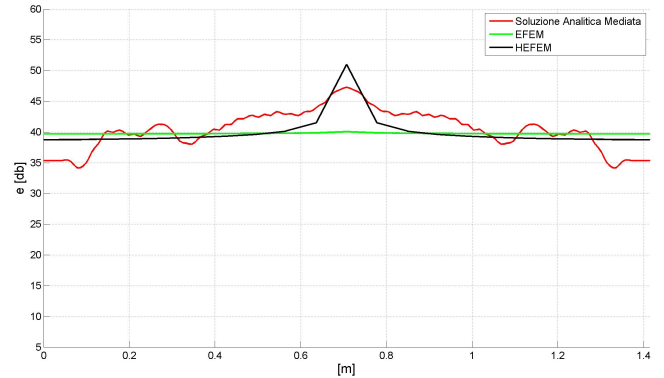


(b) Soluzione mediata

Figura 5.19: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

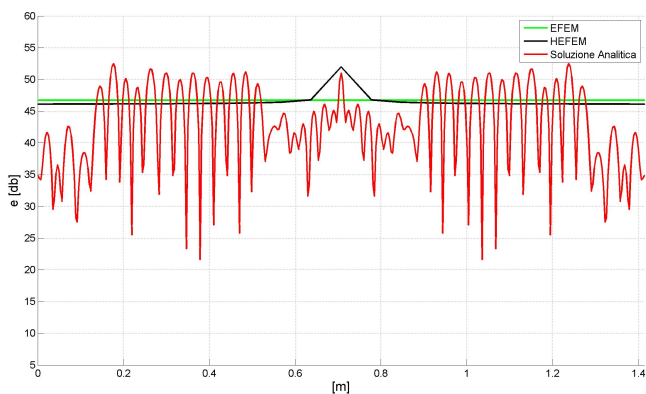


(a) Soluzione non mediata

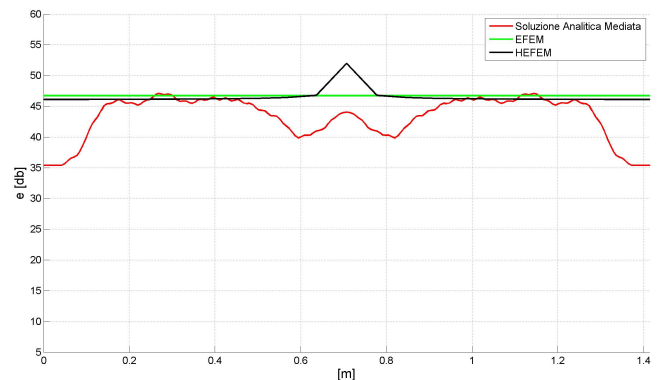


(b) Soluzione mediata

Figura 5.20: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.005$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$



(a) Soluzione non mediata



(b) Soluzione mediata

Figura 5.21: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.001$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Capitolo 6

Analisi di strutture complesse

Per sviluppare un metodo analitico basato su delle equazioni energetiche è necessario poter specificare le condizioni al contorno e le relazioni di collegamento tra i sottosistemi di una struttura complessa (piastre, cavità acustiche . . .). Per i classici problemi di condizioni al contorno, in corrispondenza del collegamento viene generalmente imposta la continuità del flusso di una certa grandezza e qualche sorta di condizione di compatibilità su una grandezza di interesse. In questo caso il flusso è un flusso energetico (o di potenza). Il flusso di energia che esce da un sottosistema deve entrare interamente in un sottosistema adiacente. Questa condizione è relativamente facile da formulare, mentre per la relazione di compatibilità le cose sono più difficili. La densità di energia mediata è discontinua in prossimità dei collegamenti quando cambiano le proprietà geometriche o del materiale. Per rendere questo metodo utilizzabile per tutte le applicazioni è necessario specificare questa condizione di compatibilità in termini di densità di energia locale al collegamento.

Questo può essere fatto separando la densità di energia e l'intensità nelle componenti incidenti e in quelle riflesse in corrispondenza dei collegamenti [15]. La componente dell'intensità riflessa ai collegamenti può essere espressa in funzione di due coefficienti (coefficiente di riflessione della potenza e coefficiente di trasmissione della potenza), e dell'intensità incidente dai due sottosistemi a cavallo del collegamento. In questo capitolo, il metodo per sviluppare queste relazioni di compatibilità ai collegamenti viene descritto per un sistema strutturale relativamente semplice con due sottosistemi collegati insieme e un solo tipo di onda che si propaga nei due elementi. La stessa procedura può essere seguita per ricavare queste relazioni di compatibilità per casi con più di due sottosistemi collegati insieme e/o casi con più di un tipo d'onda in ogni elemento.

6.1 Sviluppo Analitico

Consideriamo un collegamento tra due sottosistemi strutturali, il primo indicato dal pedice $_1$ e il secondo dal pedice $_2$. Gli apici $-$ e $+$ indicano rispettivamente le componenti riflesse e quelle incidenti. Con dq si intende il flusso di energia attraverso l'area infinitesima di un collegamento. Il flusso riflesso nel sottosistema numero uno è la combinazione del flusso incidente del sottosistema uno moltiplicato per il coefficiente di riflessione e del flusso incidente del sottosistema due moltiplicato per

il coefficiente di trasmissione. La stessa cosa può essere scritta per il sottosistema due, cioè

$$-dq_1^- = rdq_1^+ + \tau dq_2^+ \quad (6.1a)$$

$$-dq_2^- = rdq_2^+ + \tau dq_1^+ \quad (6.1b)$$

dove r è il coefficiente di riflessione al collegamento e τ è il coefficiente di trasmissione attraverso il collegamento. [30]

Il flusso di energia attraverso l'area infinitesima del collegamento dq può essere scritto rispetto all'intensità come

$$dq = (\vec{n} \cdot \vec{I}) dS = |\vec{I}| dS \quad (6.2)$$

dove \vec{I} è il vettore intensità e dS il contorno infinitesimo del collegamento. Utilizzando la relazione $|\vec{I}| = c_g e$ si possono esprimere le componenti riflessa e incidente del flusso di energia alla densità di energia

$$-dq^- = c_g e^- d\Gamma \text{ e } -dq^+ = c_g e^+ d\Gamma \quad (6.3)$$

quindi l'equazioni (6.1) possono essere riscritte come

$$-dq_1^- = c_{g1} e_1^- d\Gamma_1 = rc_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 + \tau c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 \quad (6.4a)$$

$$-dq_2^- = c_{g2} e_2^- d\Gamma_2 = rc_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 + \tau c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 \quad (6.4b)$$

A questo punto si applica il principio di sovrapposizione degli effetti alla densità di energia scrivendo

$$c_g e d\Gamma = c_g e^+ d\Gamma + c_g e^- d\Gamma \quad (6.5)$$

Quindi le densità di energia nel sottosistema uno e nel sottosistema due possono essere espresse rispetto alla densità di energia incidente

$$c_{g1} e_1 d\Gamma_1 = c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 + rc_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 + \tau c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 \quad (6.6a)$$

$$c_{g2} e_2 d\Gamma_2 = c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 + rc_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 + \tau c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 \quad (6.6b)$$

da cui si può scrivere

$$c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 = \frac{1+r}{4r} c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 - \tau c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 \quad (6.7a)$$

$$c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 = \frac{1+r}{4r} c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 - \tau c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 \quad (6.7b)$$

Il flusso di energia totale può essere scritto come

$$dq = dq^- + dq^+ \quad (6.8)$$

Da cui

$$dq_1 = c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 - rc_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 - \tau c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 \quad (6.9a)$$

$$dq_2 = c_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 - rc_{g2} e_2^+ d\Gamma_2 - \tau c_{g1} e_1^+ d\Gamma_1 \quad (6.9b)$$

L'equazione (6.7) può essere usata nell'equazione (6.9) per ricavare una relazione tra il flusso di energia netto e le densità di energia. In particolare

$$dq_1 = \frac{\tau}{2r} (c_{g1}e_1d\Gamma_1 - c_{g2}e_2d\Gamma_2) \quad (6.10a)$$

$$dq_2 = \frac{\tau}{2r} (-c_{g1}e_1d\Gamma_1 + c_{g2}e_2d\Gamma_2) \quad (6.10b)$$

Il calcolo dei coefficienti τ e r dipende dal singolo caso specifico ed è trattato in (CHO).

6.2 Implementazione Elementi Finiti

L'equazione (3.101) rappresenta l'equazione matriciale globale per un sottosistema isolato (che sia una piastra, una membrana, una cavità acustica, una trave). Il termine P_{Acc} è il termine che accoppia tra di loro i sottosistemi collegati. Possiamo scrivere

$$P_{Acc1} = \int_{\Gamma} \phi_i dq_1 d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi_i \left(\left(\frac{\tau}{2r} \right) (c_{g1}e_1d\Gamma - c_{g2}e_2d\Gamma) \right) \quad (6.11a)$$

$$P_{Acc2} = \int_{\Gamma} \phi_i dq_2 d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi_i \left(\left(\frac{\tau}{2r} \right) (-c_{g1}e_1d\Gamma + c_{g2}e_2d\Gamma) \right) \quad (6.11b)$$

Dove i pedici $_1$ e $_2$ indicano i rispettivi sottosistemi collegati tra di loro. Ricordando che $\hat{e} = c_g e$ e $\hat{e} = \sum_{j=1}^n \hat{e}_j \phi_j$ si può scrivere [25]

$$\begin{Bmatrix} P_{Acc1} \\ P_{Acc2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{\tau}{2r} \phi_{1i} \sum \hat{e}_{1j} \phi_{1j} d\Gamma & - \int_{\Gamma} \frac{\tau}{2r} \phi_{1i} \sum \hat{e}_{2j} \phi_{2j} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} \frac{\tau}{2r} \phi_{2i} \sum \hat{e}_{1j} \phi_{1j} d\Gamma & \int_{\Gamma} \frac{\tau}{2r} \phi_{2i} \sum \hat{e}_{2j} \phi_{2j} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

o come

$$\begin{Bmatrix} P_{Acc1} \\ P_{Acc2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau}{2r} [J_{11}] & -\frac{\tau}{2r} [J_{12}] \\ -\frac{\tau}{2r} [J_{21}] & \frac{\tau}{2r} [J_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_{11} \\ \vdots \\ \hat{e}_{1n} \\ \hat{e}_{21} \\ \vdots \\ \hat{e}_{2n} \end{Bmatrix} = [KJ] \{\hat{e}\} \quad (6.13)$$

Quando c'è esatta corrispondenza tra la mesh da una parte e dall'altra del collegamento (che è la condizione normale) $\phi_{1i} = \phi_{2i}$ e $J_{11} = J_{12} = J_{21} = J_{22}$.

Scrivendo l'equazione (3.101) per due sottosistemi accoppiati si ha

$$\begin{bmatrix} K_1 + M_1 + KB_1 & 0 \\ 0 & K_2 + M_2 + KB_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{Bmatrix} + \{P_{Acc}\} = \begin{Bmatrix} F_1 + FB_1 \\ F_2 + FB_2 \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Nella quale sostituendo l'espressione appena ricavata di P_{Acc} si ricava

$$\left[\begin{bmatrix} K_1 + M_1 + KB_1 & 0 \\ 0 & K_2 + M_2 + KB_2 \end{bmatrix} + [KJ] \right] \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{Bmatrix} + \{P_{Acc}\} = \begin{Bmatrix} F_1 + FB_1 \\ F_2 + FB_2 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Dove il termine $[KJ]$ accoppia i due sottosistemi.

E' importante ricordare che non c'è bisogno di questa matrice di accoppiamento $[KJ]$ e più in generale dei collegamenti se non ci sono discontinuità nelle proprietà geometriche o del materiale tra due sottosistemi.

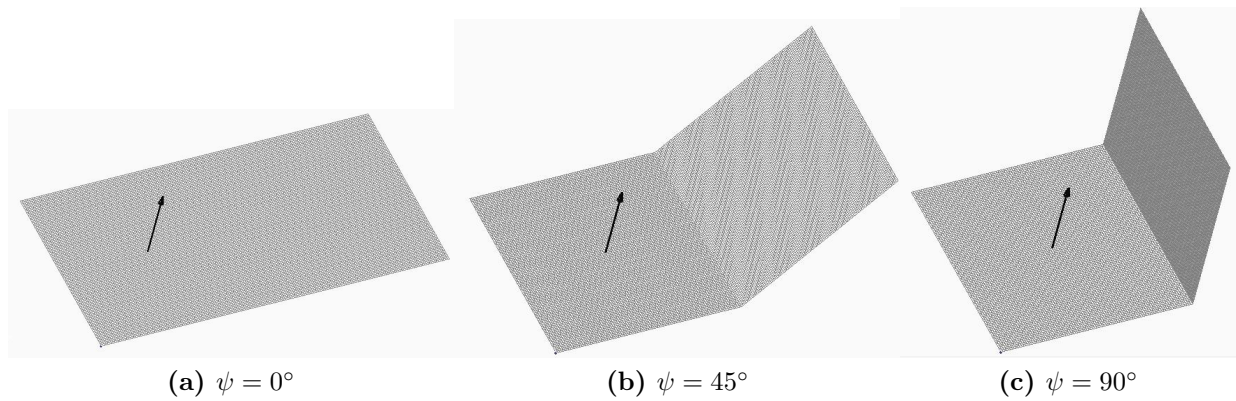


Figura 6.1: Piastre inclinate a diversi angoli

6.3 Confronto EFEM-FEM

A questo punto vengono eseguiti dei confronti tra gli elementi finiti tradizionali e quelli energetici. Vengono prese in considerazione due piastre quadrate di $1m \times 1m$ affiancate e inclinate tra di loro di diversi angoli ψ (6.1). Le proprietà delle due piastre sono presenti nella tabella 6.1. L'eccitazione avviene nel punto centrale di una delle due piastre. L'obiettivo di queste analisi è di valutare l'approssimazione degli elementi finiti energetici in presenza di collegamenti tra diverse piastre.

$E = 7.1 \cdot 10^{10} N/m^2$
$\rho = 2700 Kg/m^3$
$h = 0.001 m$
$F = 0.01 N$
$a = b = 1.00 m$

Tabella 6.1: Parametri dell'analisi

La soluzione EFEM viene calcolata tramite EnFlow ed è confrontata non più con la soluzione analitica ma con la soluzione ad elementi finiti. Per questo motivo per evitare problemi di convergenza degli elementi finiti le analisi sono state limitate a valori di smorzamento più alti rispetto a quelli dei capitoli 4 e 5. L'analisi viene svolta per le frequenze e gli smorzamenti presenti nella tabella 6.2. In questo capitolo la soluzione a elementi finiti viene riportata solamente nella forma non mediata.

Vengono considerate piastre inclinate tra di loro di diversi angoli ψ , da 0 a 90 gradi. Nel primo caso, cioè 0° , ovviamente la formulazione EFEM non prevede collegamenti tra le due piastre, e quindi il problema agli elementi finiti energetici viene risolto esattamente come per le piastre quadrate isolate dei capitoli precedenti (si tratta di fatto di una piastra rettangolare di $1m \times 2m$). Nel caso di piastre coplanari infatti, a meno che le proprietà geometriche o del materiale siano diverse tra le due, la formulazione EFEM non prevede collegamenti. Nei casi considerati in seguito, le due piastre collegate hanno sempre le stesse proprietà geometriche e dei materiali. Il software EnFlow inserisce automaticamente i collegamenti tra

Caso	Frequenza (Hz)	η
1	239	0.1
2	239	0.05
3	487	0.1
4	487	0.05
5	1000	0.1
6	1000	0.05
7	2000	0.1
8	2000	0.05

Tabella 6.2: Frequenze e smorzamenti delle analisi

due piastre quando queste hanno proprietà diverse e/o sono inclinate a più di 45° . Questo significa che fino a quell'inclinazione il problema viene risolto considerando le piastre come se fossero complanari. Quando l'inclinazione supera i 45° viene inserito il collegamento, che mantiene la stessa formulazione indipendentemente dall'angolo di inclinazione. Riassumendo, la formulazione EFEM non prevede una continuità del comportamento delle piastre in funzione dell'angolo, ma un comportamento discreto, caratterizzato dall'assenza di collegamenti per angoli al di sotto dei 45° e presenza del collegamento per angoli superiori. In figura 6.2 è riportato per $f = 1000 \text{ Hz}$ e $\eta = 0.1$ l'andamento della soluzione degli elementi finiti energetici per un angolo $\psi \geq 45^\circ$ e $\psi < 45^\circ$, sia per la soluzione EFEM che per quella HEFEM. Come si può notare in entrambi i casi la presenza del collegamento provoca un salto della densità di energia a cavallo del collegamento stesso.

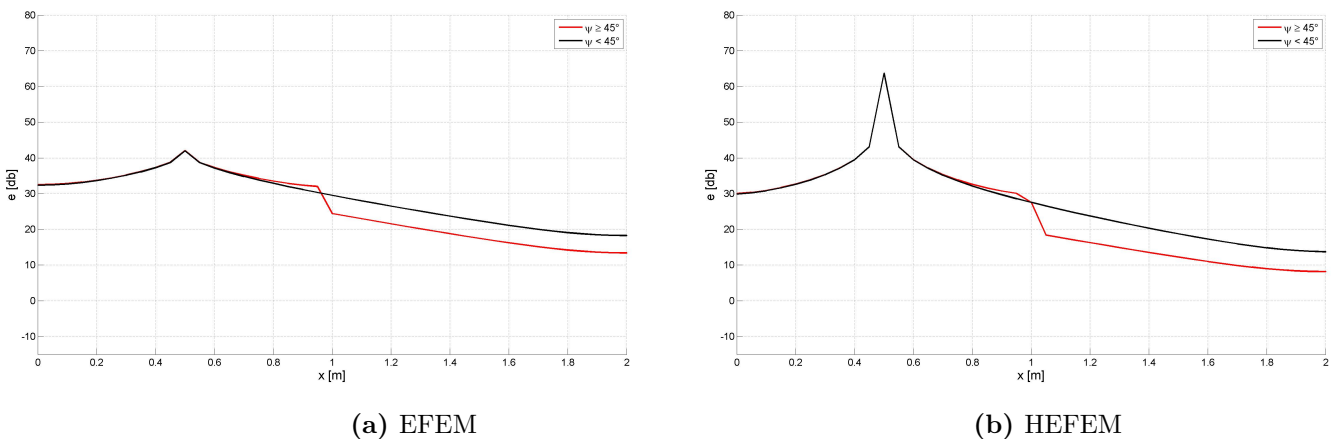


Figura 6.2: Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^2$

Le analisi eseguite con gli elementi finiti tradizionali (FEM) giustificano parzialmente questo approccio: infatti, al di sopra di una certa inclinazione ψ_{crit} la linea di unione tra le piastre agisce come un appoggio semplice, annullando lo spostamento trasversale della piastra in corrispondenza dello stesso. Una volta che questo spostamento è annullato il flusso di energia attraverso la giunzione avviene attraverso le derivate dello spostamento, e di conseguenza non importa la reale inclinazione

delle piastre. In figura 6.3 viene confrontata la soluzione FEM di due piastre inclinate di 90° e di 45° con quella di due piastre complanari con un vincolo di appoggio in corrispondenza della linea di unione delle due piastre. Come si vede dalla figura le soluzioni sono pressoché identiche, a dimostrazione del fatto che un'inclinazione tra le due piastre superiore a un determinato valore è equivalente a un vincolo di appoggio sulla linea di giunzione di due piastre complanari.

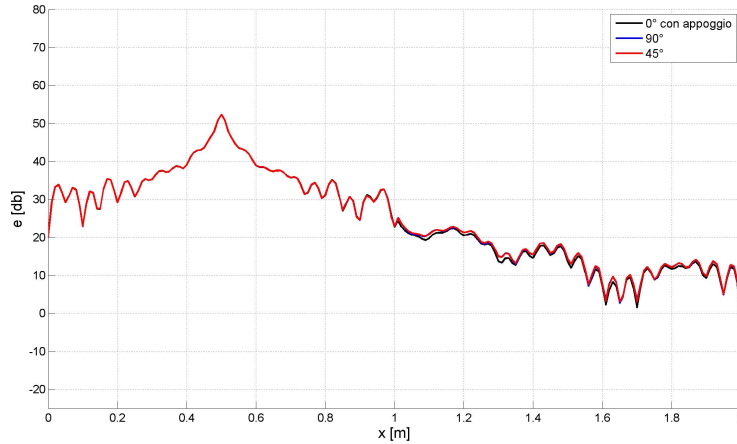


Figura 6.3: Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Questa inclinazione critica ψ_{crit} non è costante, ma dipende dalla frequenza di eccitazione, dallo smorzamento e dalle proprietà geometriche delle piastre prese in esame. Di fatto è sempre un valore inferiore (anche notevolmente) ai 45° dell'EFEM.

Ricapitolando,

- $\psi < \psi_{crit} \Rightarrow$ Sia nel modello FEM che in quello EFEM le piastre si comportano come se fossero complanari (quindi con un'inclinazione di 0°)
- $\psi_{crit} < \psi < 45^\circ \Rightarrow$ Nel modello EFEM le piastre si comportano ancora come se fossero complanari, mentre nel FEM il comportamento è quello di piastre con un vincolo di appoggio semplice in corrispondenza della linea di giunzione
- $\psi > 45^\circ \Rightarrow$ Nel modello EFEM vengono inseriti i collegamenti e la soluzione mostra il salto di densità di energia in corrispondenza del collegamento.

La situazione in cui $\psi_{crit} < \psi < 45^\circ$ è quella che può rivelarsi problematica: in questa zona infatti il modello EFEM, trascurando la presenza dell'inclinazione tra le piastre, sovrastima la densità di energia dopo la zona di collegamento (come si vede ad esempio in figura 6.4, dove le piastre sono inclinate di un angolo $\psi = 30^\circ$).

Il software EnFlow permette di modificare l'angolo ψ oltre il quale viene inserito il collegamento, che può quindi essere diminuito rispetto ai 45° di default. Ricordando però che l'inclinazione ψ_{crit} del FEM non è costante (e che dipendendo dalla frequenza difficilmente può essere stimata a priori per sistemi complessi), è evidente come non sia possibile eliminare il problema della differenza tra i due modelli per certe inclinazioni delle piastre. È necessario quindi porre cautela nell'utilizzo dell'EFEM quando si è di fronte a piastre debolmente inclinate tra di loro, per evitare sovrastime del livello energetico nel sistema analizzato.

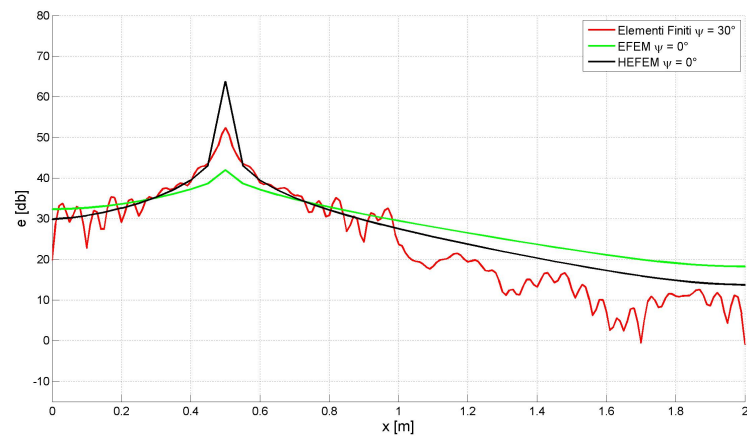


Figura 6.4: Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

6.4 Risultati

A questo punto vengono riportati i risultati del confronto tra le soluzioni degli elementi finiti energetici (EFEM e HEFEM) con le soluzioni FEM. Per ogni caso di frequenza e smorzamento vengono riportati i confronti di due piastre inclinate di 90° .

Nel primo caso, la frequenza e lo smorzamento sono: $f = 239 \text{ Hz}$ e $\eta = 0.1$. Il confronto tra la distribuzione della densità di energia lungo la linea mediana del pannello tra le soluzioni a elementi finiti energetici e quella a elementi finiti tradizionali è riportato nella figura 6.5. Sulla piastra di sinistra, quella sulla quale è applicata la forzante nel punto centrale, valgono sostanzialmente le stesse osservazioni fatte nei capitoli precedenti sulle piastre isolate. In corrispondenza della linea di giunzione tra le due piastre, le soluzioni energetiche presentano un salto nella densità di energia. La diminuzione è maggiore per quanto riguarda la formulazione ibrida. La soluzione FEM invece non presenta un salto netto, e l'andamento della densità di energia dopo la giunzione viene approssimato grossolanamente dalle soluzioni energetiche.

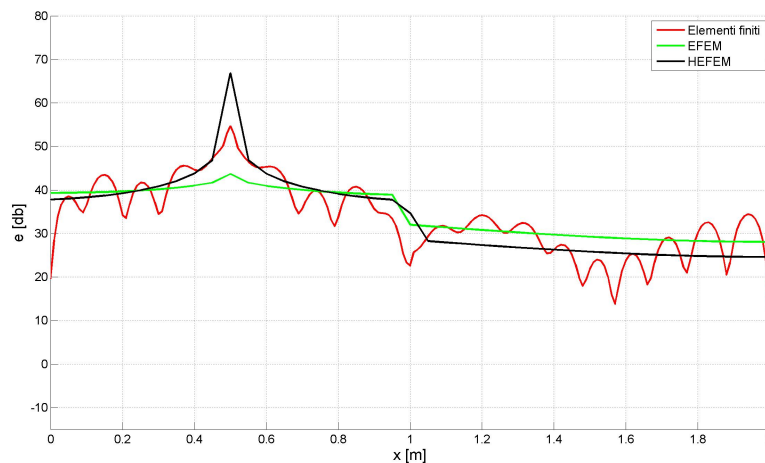


Figura 6.5: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^2$

Nel secondo caso lo smorzamento è diminuito a $\eta = 0.05$. Il confronto tra le soluzioni è riportato nella figura 6.6. La diminuzione dello smorzamento ha provocato una minore diminuzione della densità di energia a cavallo del collegamento.

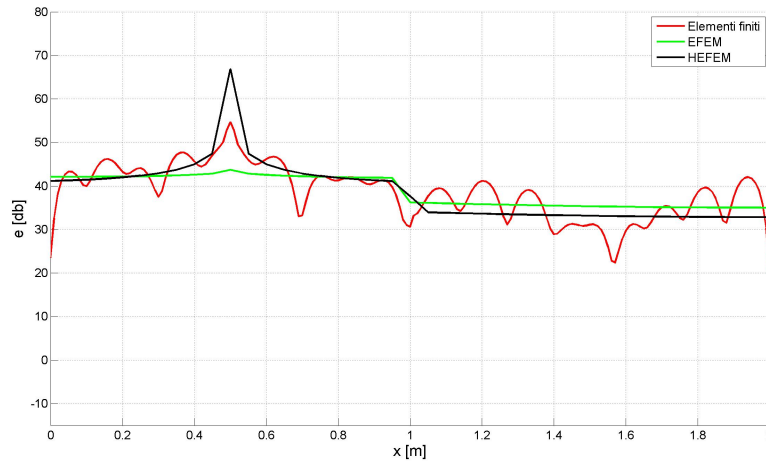


Figura 6.6: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 239 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Nei due casi seguenti la frequenza di eccitazione è $f = 487 Hz$. I risultati sono riportati nelle figure da 6.7 a 6.8. Rispetto al caso precedente, la diminuzione della soluzione FEM dopo la giunzione lungo la seconda piastra è più evidente, e viene perciò approssimata meglio dalle soluzioni energetiche.

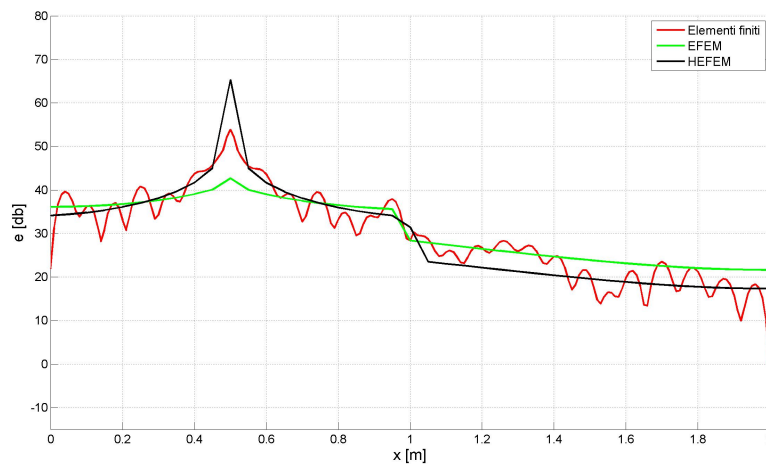


Figura 6.7: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Continuando ad aumentare la frequenza, mentre la soluzione FEM sulla prima piastra viene approssimata sempre meglio dalla soluzione HEFEM (6.13,6.14), sulla seconda piastra nessuno dei due approcci energetici approssima in maniera soddisfacente la soluzione FEM, che anzi rimane tipicamente sovrastimata dall'EFEM e sottostimata dall'HEFEM (6.13).

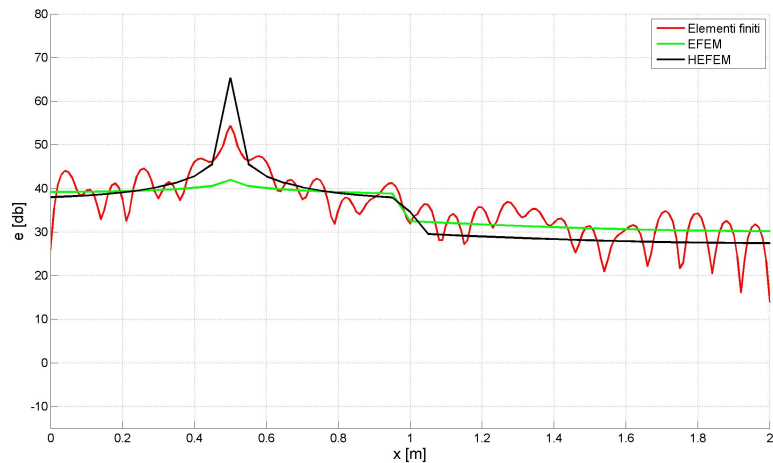


Figura 6.8: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

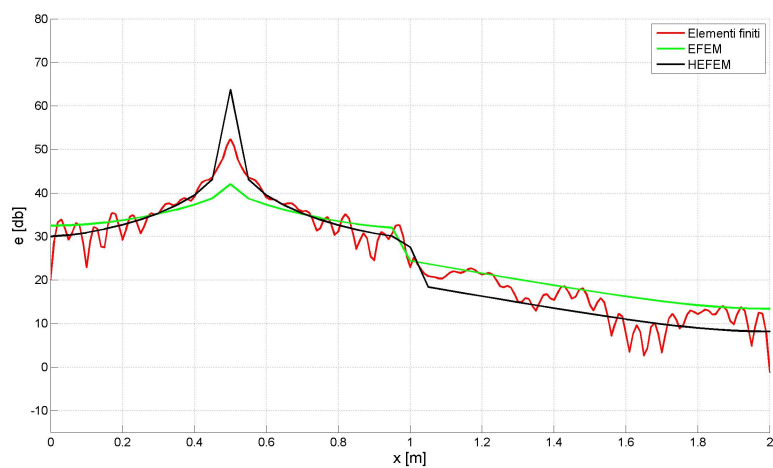


Figura 6.9: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

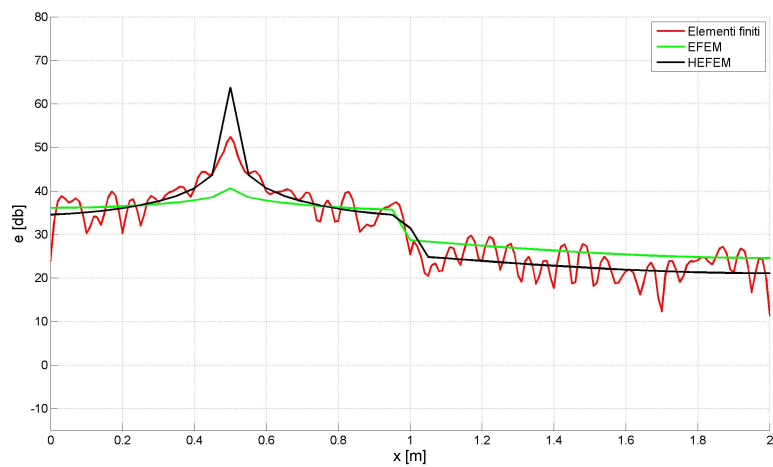


Figura 6.10: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

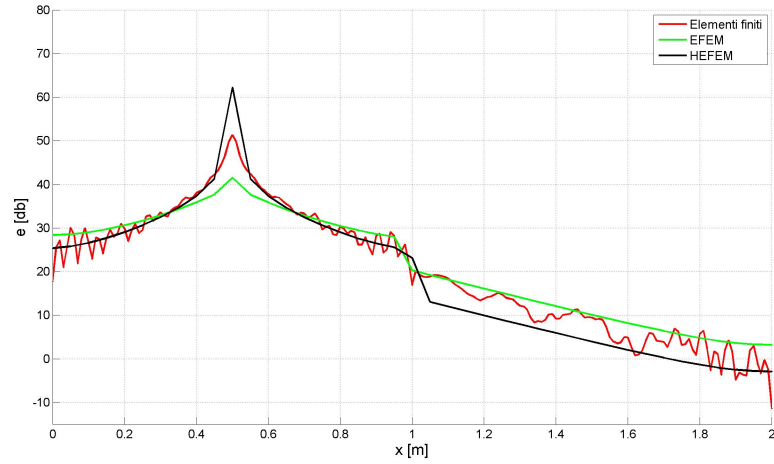


Figura 6.11: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

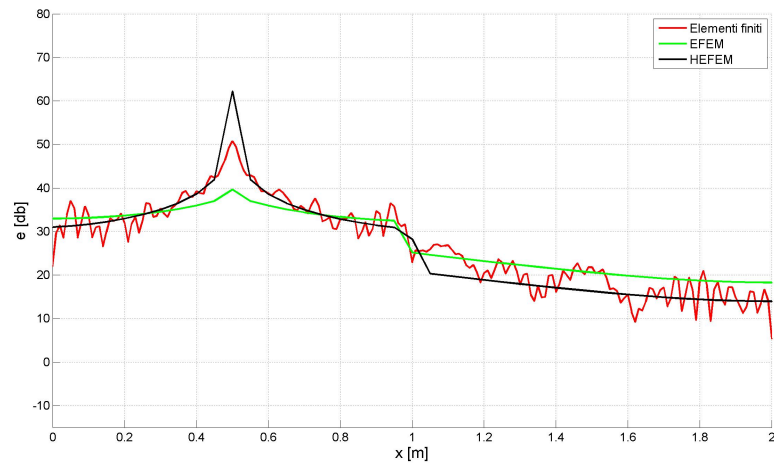


Figura 6.12: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

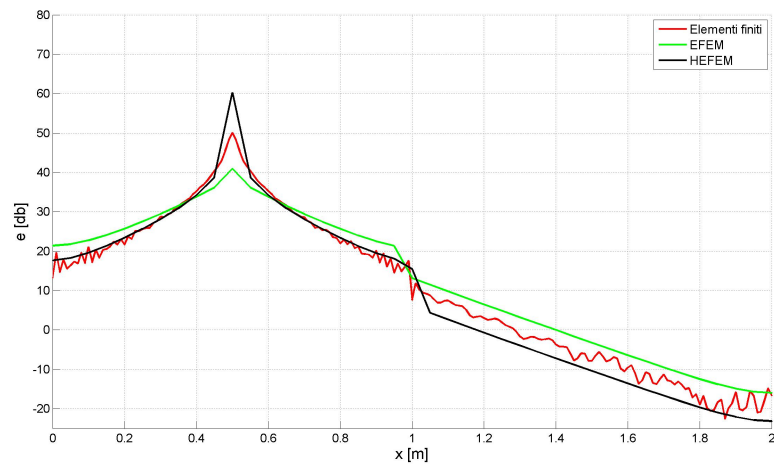


Figura 6.13: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

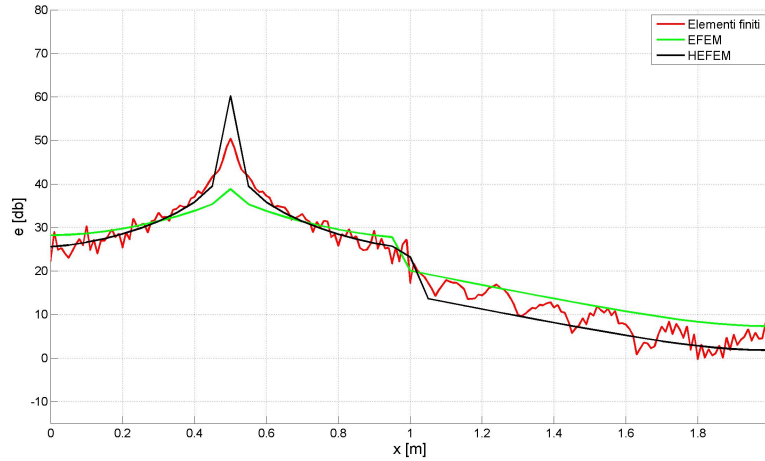


Figura 6.14: $\psi = 90^\circ$, Densità di energia lungo la linea mediana del pannello, 5000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

6.5 Considerazioni

I risultati mostrano evidentemente che la presenza di un'inclinazione tra due piastre deteriora notevolmente la precisione dell'approssimazione energetica, perlomeno sulle piastre non direttamente eccitate. Questo anche nei casi ad elevata frequenza ed elevato smorzamento, dove per le piastre isolate la soluzione HEFEM era invece un'ottima approssimazione. A questo punto diventa necessario comprendere se la presenza di più di due piastre (e quindi di più di due collegamenti) comporti un ulteriore peggioramento dell'approssimazione; a questo è dedicato il capitolo seguente.

Capitolo 7

Analisi di una struttura cubica composta da piastre

In questo capitolo viene eseguita un'analisi con gli elementi finiti energetici di una struttura cubica composta da pannelli di materiale isotropo, i cui risultati vengono confrontati con un'analisi agli elementi finiti tradizionali. Le analisi sono svolte a diverse frequenze e a diversi smorzamenti, inoltre diverse configurazioni di carico sono prese in considerazione.

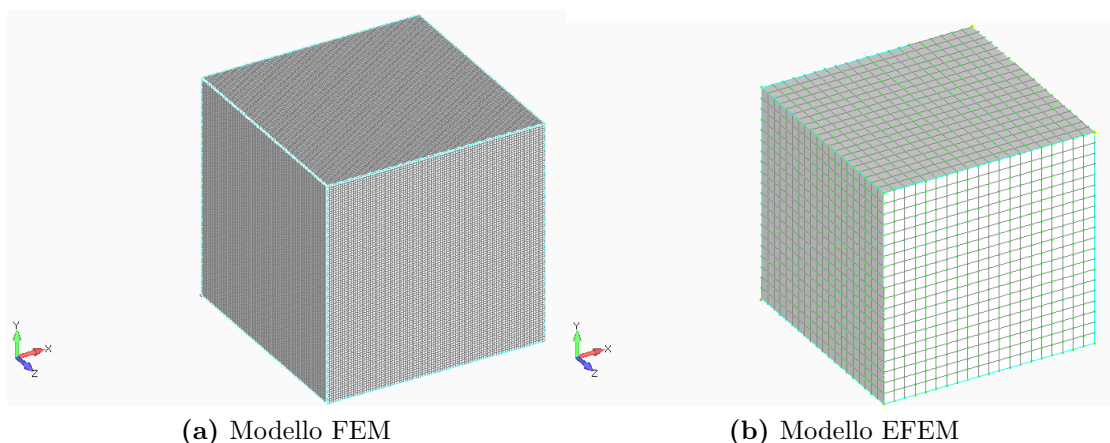


Figura 7.1: Mesh

7.1 Modelli FEM e EFEM

Nelle figure 7.1a e 7.1b sono mostrati rispettivamente il modello FEM e il modello EFEM della struttura analizzata, una scatola cubica formata da 6 pannelli quadrati di un metro di lato ciascuno. Il primo è composto da 60000 elementi, il secondo da 2400. Le caratteristiche delle analisi sono riportate nella tabella 7.1, l'analisi viene svolta per le frequenze e gli smorzamenti presenti nella tabella 7.2.

$E = 7.1 \cdot 10^{10} N/m^2$
$\rho = 2700 Kg/m^3$
$h = 0.001 m$
$F = 0.01 N$
$a = b = 1.00 m$

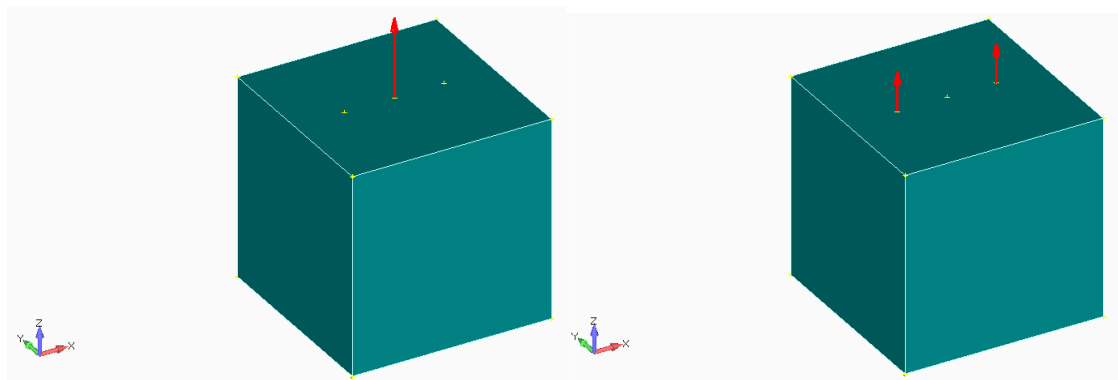
Tabella 7.1: Parametri dell'analisi

Caso	Frequenza (Hz)	η
1	487	0.1
2	487	0.05
3	487	0.01
4	1000	0.1
5	1000	0.05
6	1000	0.01
7	2000	0.1
8	2000	0.05
9	2000	0.01

Tabella 7.2: Frequenze e smorzamenti delle analisi

7.2 Configurazioni di Carico

Vengono analizzate due diverse configurazioni di carico, nella prima (figura 7.2a) la forzante armonica è applicata nel punto centrale del pannello superiore ($x = 0.5 m, y = 0.5 m, z = 1 m$), mentre nella seconda configurazione (figura 7.2b) le forzanti sono due, di ampiezza pari alla metà del caso precedente¹ e applicate in due punti ($x = 0.25 m, y = 0.5 m, z = 1 m$ e $x = 0.75 m, y = 0.5 m, z = 1 m$).



(a) Punto di applicazione carico numero 1

(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.2: Modello FEM

¹quindi in questo caso avremo due forzanti di ampiezza $F = 0.005 N$ ciascuna

7.3 Vincoli

Il modello FEM della struttura è vincolato isostaticamente come in figura 7.3, la struttura è appoggiata rispetto al piano XY tramite i vincoli dei quattro vertici della faccia inferiore ($z = 0$), mentre gli altri vincoli hanno la funzione di eliminare le labilità degli altri gradi di libertà rigidi.

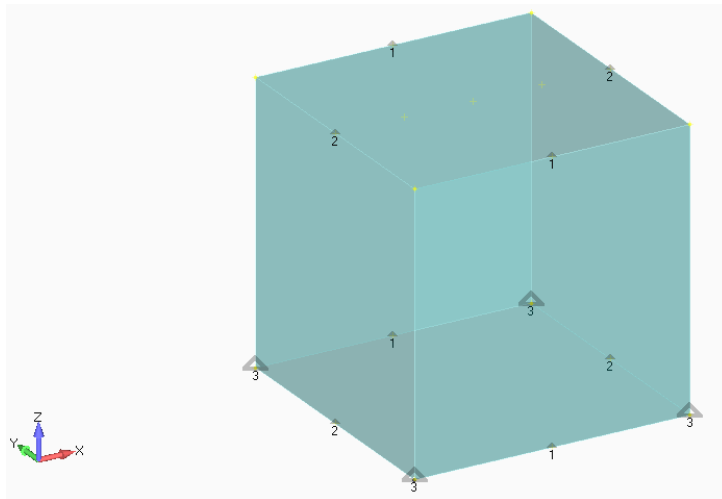


Figura 7.3: Modello FEM, vincoli sulla struttura. Il numero rappresenta il grado di libertà vincolato; 1: traslazione direzione x ; 2: traslazione direzione y ; 3: traslazione direzione z ;

7.4 Risultati

In figura 7.4 è mostrata in rosso la linea spezzata lungo la quale viene effettuato il confronto tra gli elementi finiti e gli elementi finiti energetici. Rispetto al piano sul quale giace questa linea c'è simmetria della struttura, dei carichi, e dei vincoli.

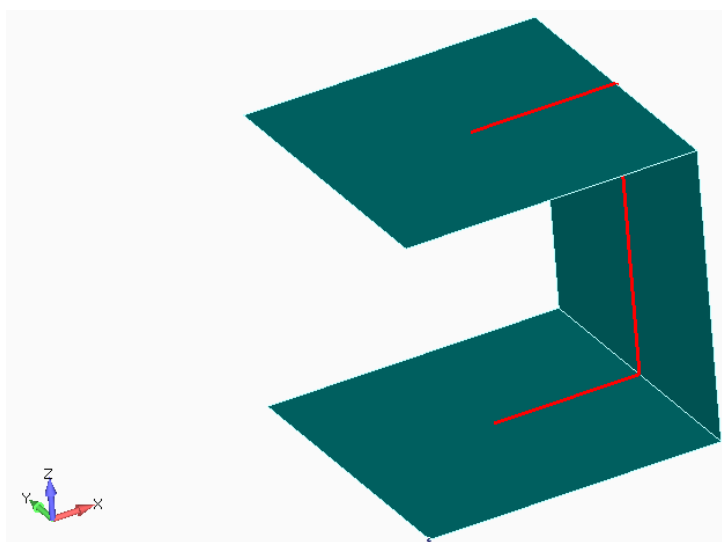
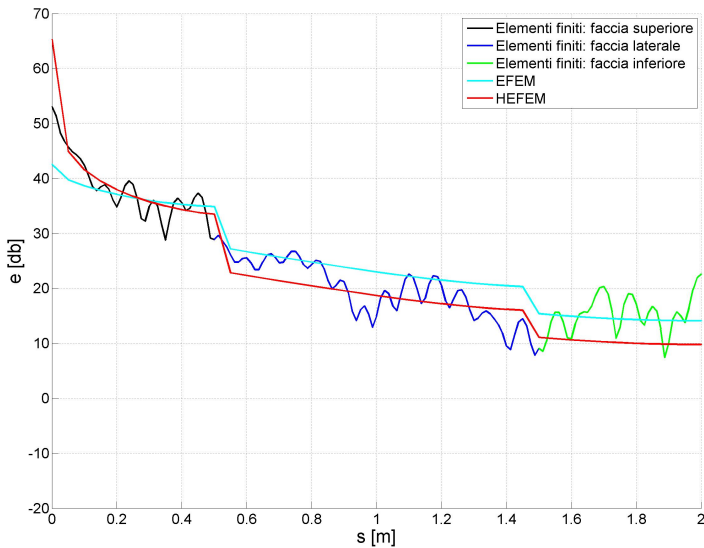


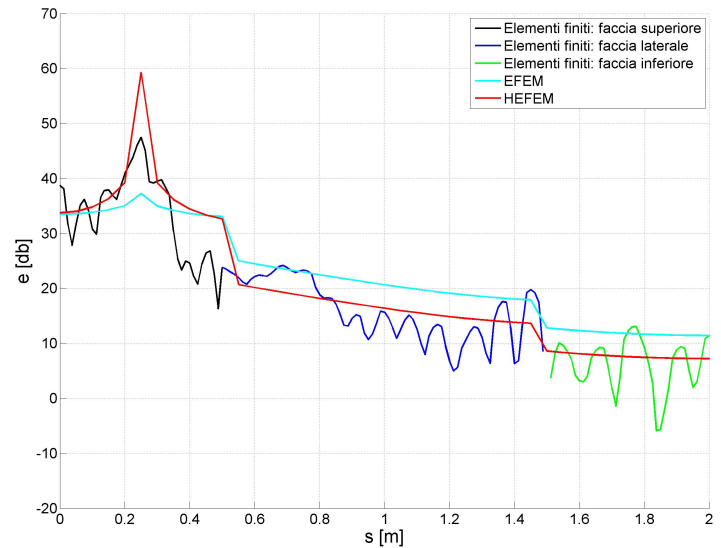
Figura 7.4: La linea rossa indica i punti dove vengono confrontati i risultati

Sono state eseguite in tutto diciotto analisi, nove per ciascuna delle due configurazioni di carico.

Nel primo caso la frequenza e lo smorzamento sono : $f = 487 \text{ Hz}$ e $\eta = 0.1$. La distribuzione di densità di energia del modello FEM e di quello EFEM sono riportate nelle figure 7.5a e 7.5b, rispettivamente per la prima configurazione di carico e per la seconda. Sono riportate sia la soluzione degli elementi finiti energetici trazionali che quella con l'approccio ibrido. Le soluzioni EFEM deviano significativamente dalla soluzione FEM localmente, ma forniscono una buona approssimazione dell'andamento generale mediato spazialmente. Il salto della densità di energia della soluzione EFEM in corrispondenza dei collegamenti è significativo.



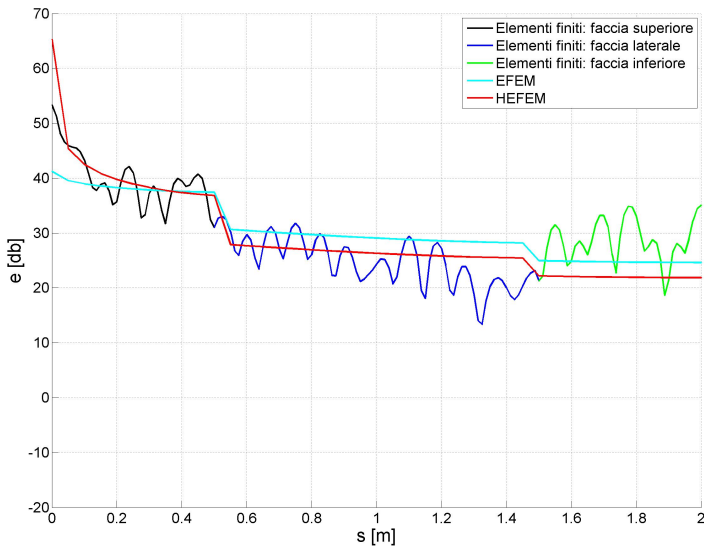
(a) Punto di applicazione carico numero 1



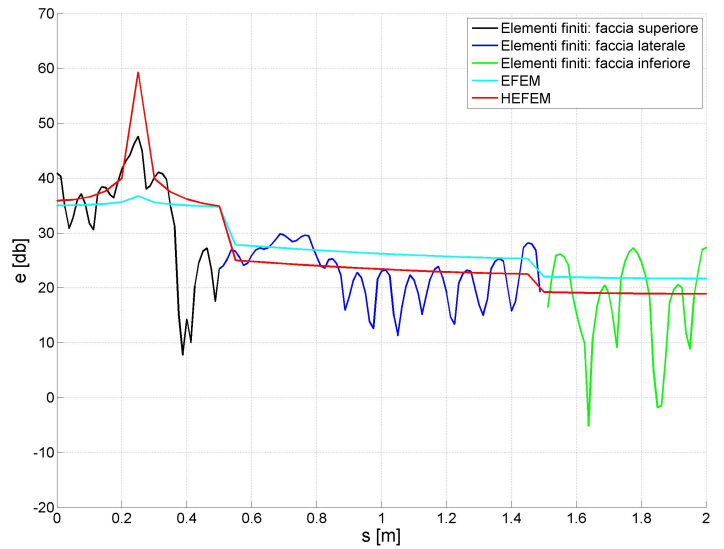
(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.5: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz , $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^2$

Nel secondo caso lo smorzamento è diminuito fino a $\eta = 0.05$. Le distribuzioni di densità di energia FEM e EFEM sono mostrate in figure 7.6a e 7.6b (rispettivamente per la prima configurazione di carico e per la seconda). La soluzione EFEM si è leggermente allontanata da quella FEM rispetto al caso precedente e il salto di densità di energia in corrispondenza del collegamento è diminuito.



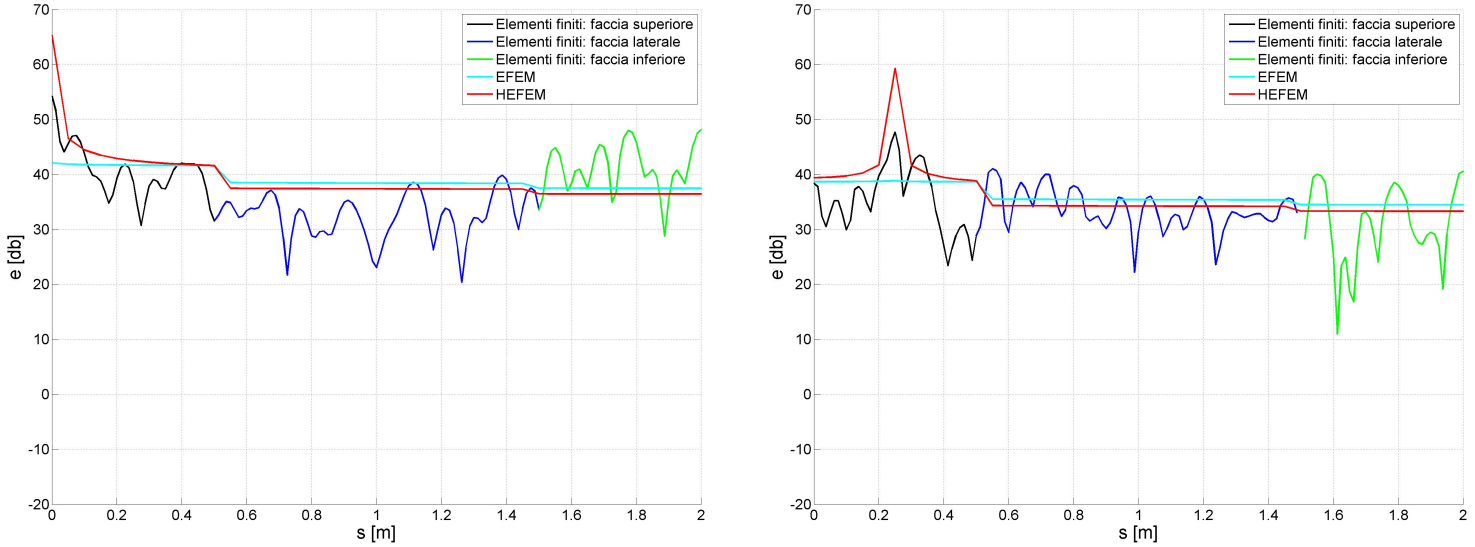
(a) Punto di applicazione carico numero 1



(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.6: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

Nel terzo caso lo smorzamento è diminuito fino a $\eta = 0.01$. Le distribuzioni di densità di energia FEM e EFEM sono mostrate in figure 7.7a e 7.7b (rispettivamente per la prima configurazione di carico e per la seconda). La soluzione EFEM si è ulteriormente allontanata da quella FEM rispetto ai casi precedente e il salto il corrispondenza del collegamento è ulteriormente diminuito.



(a) Punto di applicazione carico numero 1

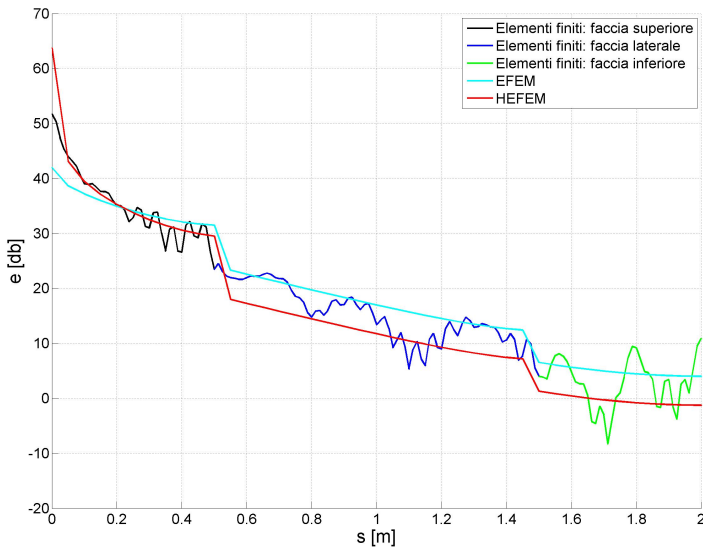
(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.7: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 487 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

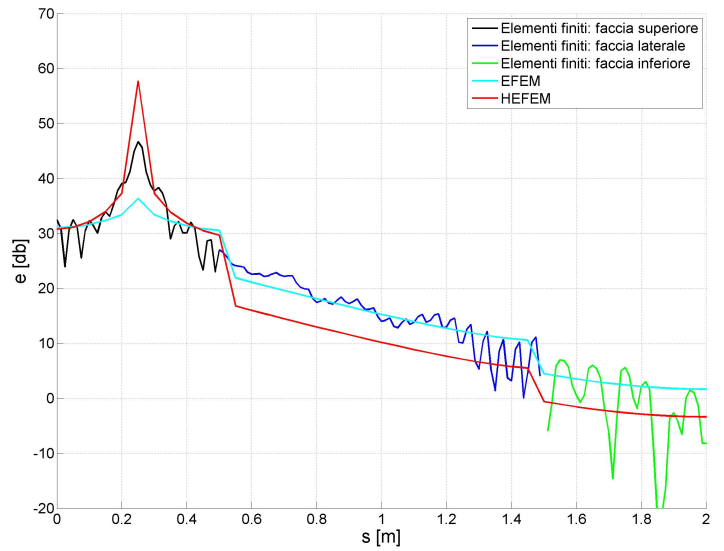
In questi primi tre esempi ($f = 487 Hz$) la soluzione EFEM approssima meglio quella FEM all'aumentare dello smorzamento. Quando lo smorzamento è basso c'è globalmente una piccola variazione della densità di energia, come si vede in figura 7.7a. Inoltre il salto di densità di energia della soluzione EFEM (sia tradizionale che ibrida) in corrispondenza dei collegamenti tra le piastre diminuisce al diminuire dello smorzamento, il che significa che a diminuire è la quantità di energia riflessa al collegamento.

Osservando i casi seguenti ($f = 1000 Hz$ e $f = 2000 Hz$) si osserva ancora che all'aumentare dello smorzamento diminuisce la variazione locale della soluzione FEM mentre ne aumenta la variazione globale. Inoltre, la variazione locale della densità di energia diminuisce all'aumentare della frequenza di eccitazione per un valore fissato di smorzamento. La variazione globale di densità di energia aumenta all'aumentare della frequenza di eccitazione. Queste variazioni possono essere osservando confrontando le figure 7.5a,7.8a e 7.11a oppure ad esempio le figure 7.5b,7.8b e 7.11b.

Per quanto riguarda le differenze tra la soluzione EFEM tradizionale e quella ibrida si possono fare le seguenti considerazioni: fissata la frequenza di eccitazione, al variare dello smorzamento, sulla piastra eccitata la differenza tra i due approcci EFEM rimane sostanzialmente invariata, con la soluzione ibrida che approssima tanto meglio la soluzione FEM all'aumentare dello smorzamento. Sulle altre piastre è la soluzione EFEM tradizionale ad approssimare meglio la soluzione FEM,

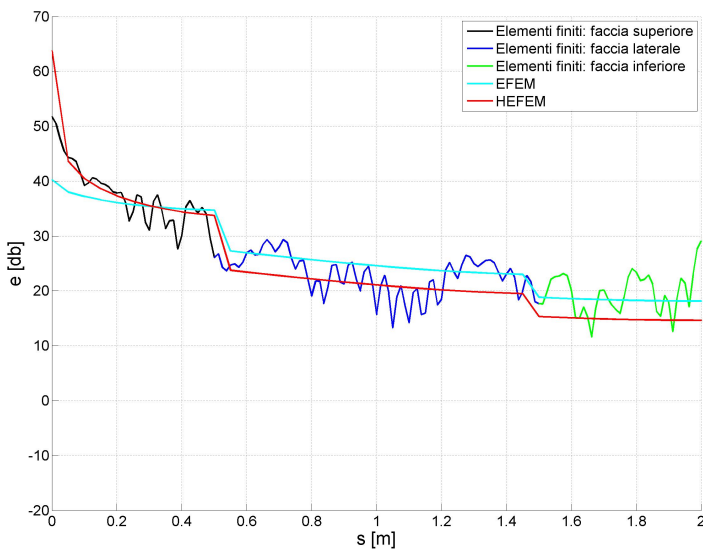


(a) Punto di applicazione carico numero 1

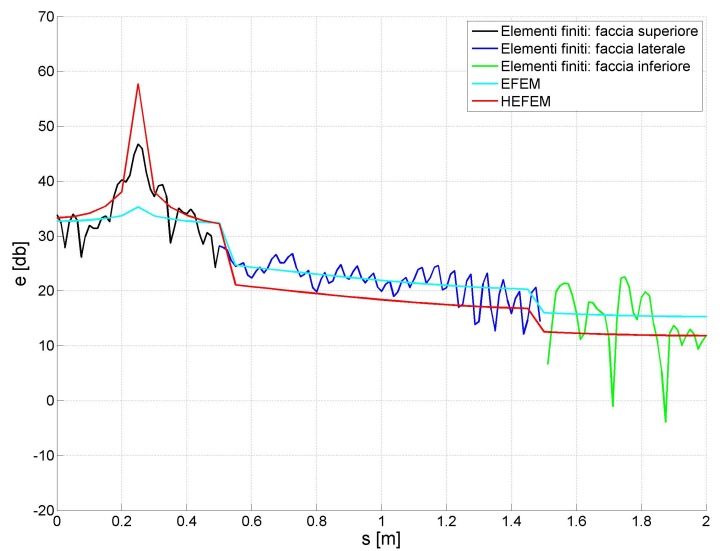


(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.8: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

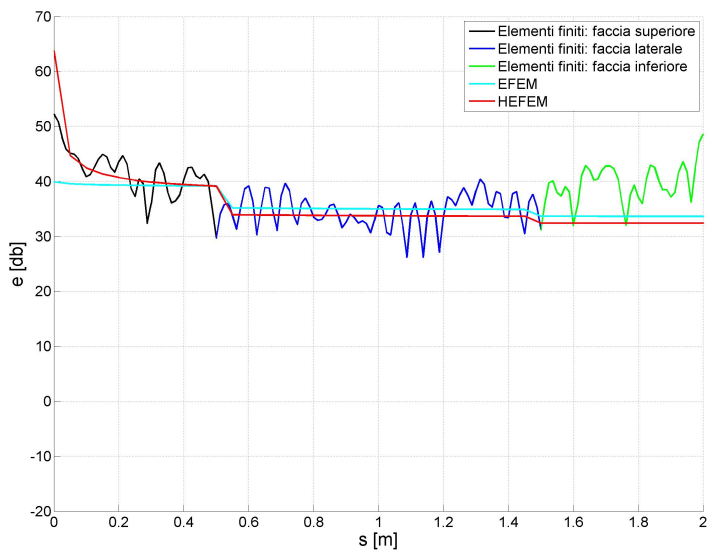


(a) Punto di applicazione carico numero 1

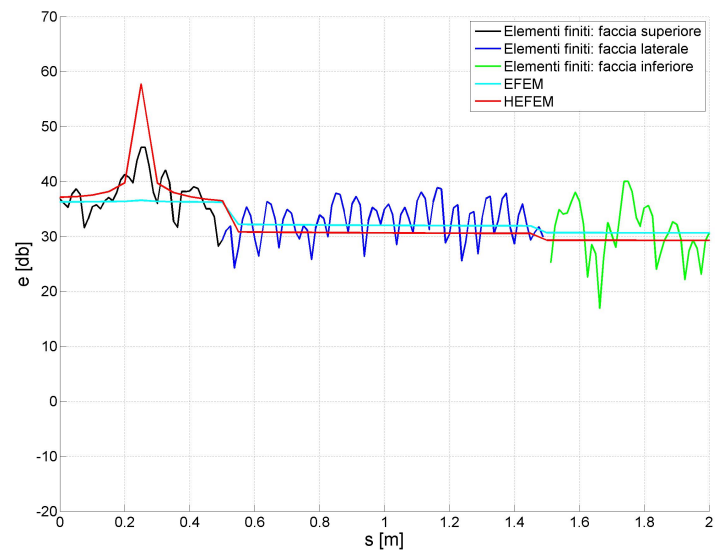


(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.9: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$



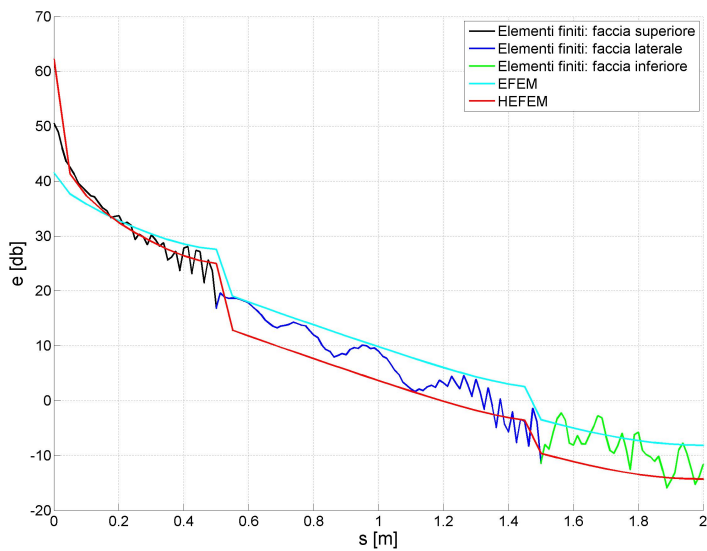
(a) Punto di applicazione carico numero 1



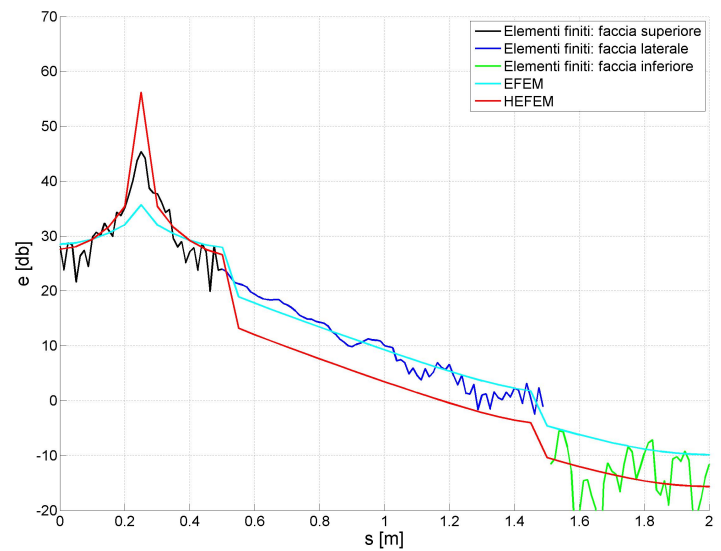
(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.10: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 1000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

e al diminuire dello smorzamento si riduce la differenza tra la soluzione EFEM tradizionale e quella ibrida. Vedi ad esempio le figure 7.11b, 7.12b e 7.13b

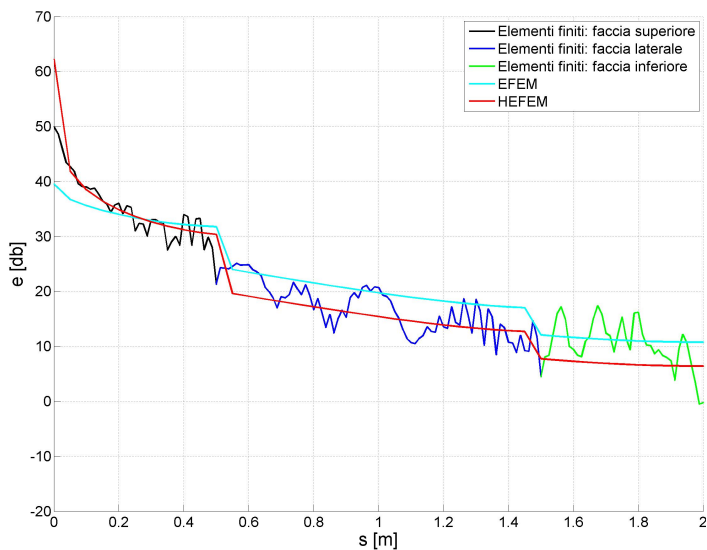


(a) Punto di applicazione carico numero 1

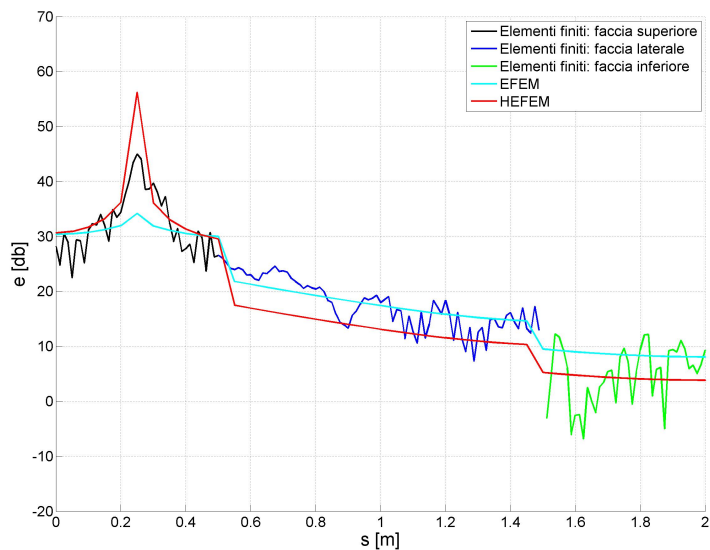


(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.11: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.1$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

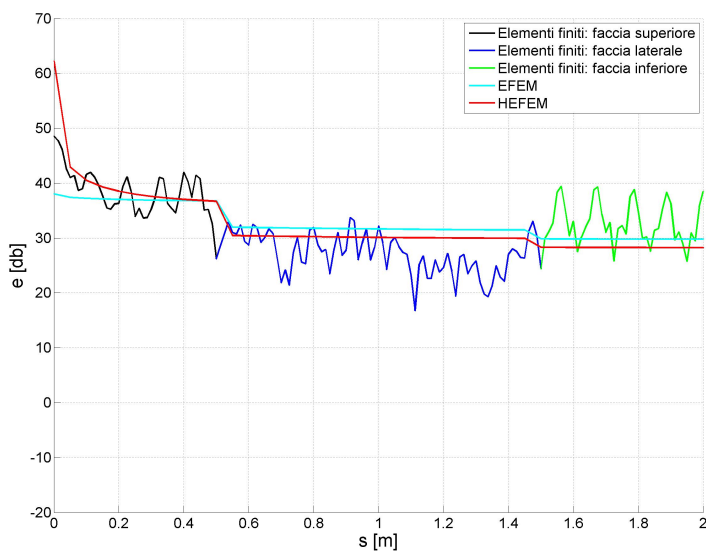


(a) Punto di applicazione carico numero 1

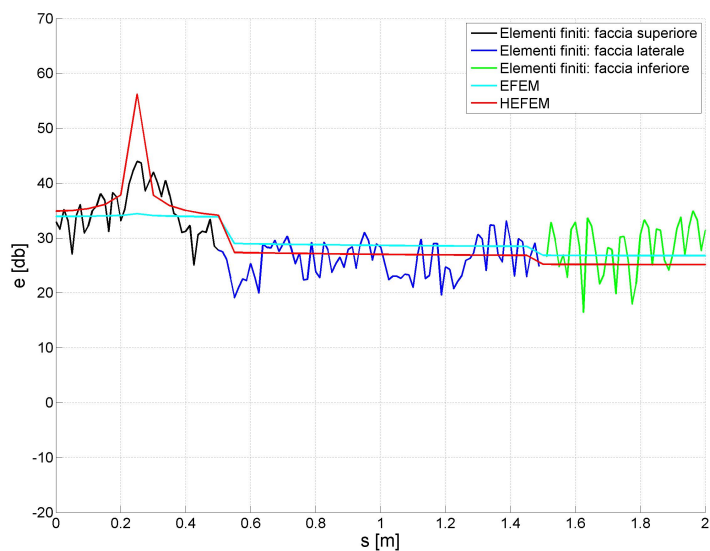


(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.12: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.05$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$



(a) Punto di applicazione carico numero 1



(b) Punto di applicazione carico numero 2

Figura 7.13: Densità di energia lungo la diagonale del pannello, 2000 Hz, $\eta = 0.01$. La densità di energia di riferimento è $1 \cdot 10^{-12} J/m^2$

7.5 Considerazioni

I risultati ottenuti in questo capitolo sono simili a quelli ottenuti nei capitoli precedenti. In particolare le osservazioni fatte nel capitolo 6 sulla soluzione energetica in presenza di collegamenti tra le piastre sono state confermate da queste analisi. Sulla piastra direttamente eccitata dalla forzante la soluzione ibrida fornisce una buona approssimazione della media spaziale della soluzione FEM, specialmente nei casi dove la frequenza e lo smorzamento sono più alti. Anche in questi casi però, nelle piastre non direttamente eccitate, si assiste a un deterioramento nell'approssimazione della soluzione, che spesso viene sovrastimata dall'EFEM e sottosistamata dall'HEFEM. Sulla faccia opposta a quella eccitata la situazione è peggiore rispetto a quella della faccia laterale, a dimostrazione del fatto che in corrispondenza di ogni collegamento tra piastre l'approssimazione dei metodi energetici peggiora, fornendo comunque una stima accettabile dell'andamento medio spaziale. Un altro aspetto da tenere in considerazione è la natura dei collegamenti tra le diverse piastre. Nella realtà infatti i pannelli metallici di una struttura sono tipicamente collegati tra di loro tramite elementi di collegamento (correnti) inchiodati alle piastre. E' necessario quindi comprendere come questi elementi di collegamento modifichino il passaggio dell'energia tra una piastra e l'altra e come questi effetti possano essere modellati negli elementi finiti energetici.

Capitolo 8

Conclusioni e sviluppi futuri

La necessità di avere a disposizione nuovi strumenti per predire il campo vibroacustico in alta frequenza è stata discussa brevemente nell'introduzione. L'obiettivo di questo lavoro era quello di acquisire le capacità di utilizzo degli elementi finiti energetici e valutarne le caratteristiche e i limiti di applicabilità, per comprendere come questi possano essere utili nell'ambito della progettazione di un elicottero, allo scopo di diminuire il rumore in cabina.

In seguito sono elencate le conclusioni ricavate capitolo per capitolo:

- Nel capitolo 4 la soluzione approssimata dell'EFEM per piastre isolate è stata confrontata con la soluzione analitica. I risultati hanno mostrato che la soluzione energetica non approssima sempre in maniera accettabile la soluzione *esatta*, e non solamente per i casi a frequenza più bassa, che sono in qualche modo al di fuori del campo di utilizzo dell'EFEM stesso. Per smorzamenti bassi è stata evidenziata la tendenza della soluzione EFEM a divergere, tendenza che è tanto più marcata quanto più la frequenza è bassa, ma che anche per frequenze alte porta a una sovrastima della soluzione. Inoltre, per smorzamenti bassi, la soluzione analitica, pur essendo mediamente uniforme sulla piastra, presenta un'elevata variabilità a livello locale che la soluzione EFEM per la sua stessa formulazione non è in grado di riprodurre. Sotto questo punto di vista sarà necessario determinare quanta informazione riguardo al campo acusto irradiato dalla piastra venga persa considerando solamente l'andamento medio. Se è verosimile ipotizzare che a una certa distanza dalla piastra il campo acustico dipenda dal valore medio dell'energia sulla piastra, in prossimità della stessa è verosimile che sia importante anche il livello locale di energia.
- Nel capitolo 5 è stato ripercorso lo sviluppo dell'approccio ibrido HEFEM. Quando la frequenza e lo smorzamento sono alti, risalta un'altra problematica della soluzione EFEM. Infatti, trascurando il campo diretto e considerando la potenza in ingresso nel campo riverberante, l'approssimazione tende a sovrastimare la soluzione lontano dal punto di applicazione della forzante, e a sottostimarla in corrispondenza dello stesso: introducendo il campo diretto e considerando come ingresso del campo riverberante l'intensità del campo diretto riflessa dai contorni, e quindi avvicinandosi alla fisica del problema, è

stato possibile migliorare notevolmente l'approssimazione per alte frequenze e alti smorzamenti, eliminando i problemi di sottostima e sovrastima.

- Nel capitolo 6 sono state trattate due piastre collegate a diversi angoli. Si è visto come la formulazione EFEM del software EnFlow inserisca le relazioni collegamento tra due piastre solo quando queste sono inclinate di più di 45° , o abbiano caratteristiche del materiale o della geometria diverse. Questo modello è stato in parte giustificato dalle analisi agli elementi finiti tradizionali: infatti è vero che dopo un certo angolo di inclinazione le piastre si comportano come se ci fosse un vincolo di appoggio semplice in corrispondenza della linea di giunzione, e che quindi l'inclinazione reale (che siano 45 o 90 gradi) non importa, ma è anche vero che questo angolo dipende dalle caratteristiche del problema in esame e può essere notevolmente inferiore ai 45° . Di conseguenza esiste una certa fascia di inclinazioni tra le piastre per le quali c'è necessariamente una discrepanza tra FEM e EFEM. Inoltre, anche quando l'inclinazione è tale da non avere questo problema, risulta evidente come ci sia una degradazione della qualità dell'approssimazione nelle piastre che non sono direttamente eccitate. Mentre per le piastre sulle quali è applicata la forzante l'approssimazione energetica ha le stesse caratteristiche che aveva per i casi isolati, dopo i collegamenti l'approssimazione tende ad allontanarsi anche in valore medio dalla soluzione FEM, e anche nei casi di frequenza e smorzamento alti la soluzione HEFEM non comporta un miglioramento rispetto a quella EFEM.
- Nel capitolo 7 sono state prese in considerazione non più due semplici piastre collegata ma una struttura cubica composta da sei piastre. Anche in questo caso, nelle piastre non direttamente eccitate, le due soluzioni energetiche hanno un certo scarto rispetto alla soluzione FEM. È chiaro che per comprendere quanto questo effetto possa essere più o meno importante, sarà necessario valutare il campo acustico all'interno della struttura, e quanto ogni singola piastra partecipi nella creazione dello stesso. Bisognerà anche valutare quanto l'accoppiamento con la cavità acustica modifichi il contenuto di energia vibratoria delle piastre stesse. Basandosi sui nostri risultati, che come detto non comprendono l'accoppiamento acustico, è possibile comunque fare delle considerazioni su quanto il fatto di non approssimare la soluzione sulle piastre non eccitate con precisione possa influire sul campo acustico all'interno della cavità. Al diminuire dello smorzamento la variazione globale della soluzione dal punto eccitato al punto più lontano dell'eccitazione diminuisce. Quindi per smorzamenti alti la piastra eccitata ha una densità di energia molto più alta rispetto a tutte le altre piastre, mentre man mano che lo smorzamento scende, il livello di energia diventa sempre più uniforme tra le piastre. È evidente quindi che l'errore nell'approssimazione della soluzione sulle piastre non eccitate sarà tanto più influente sul livello del campo acustico, quanto più il livello di energia su queste piastre sia vicino a quello della piastra eccitata. Per frequenze e smorzamenti alti la piastra eccitata irradianza buona parte del campo acustico, e di conseguenza l'errore commesso sulle altre piastre potrà verosimilmente essere considerato più o meno trascurabile.

Gli elementi finiti energetici si sono rivelati uno strumento in grado di stimare l'andamento medio dell'energia vibratoria in piastre e in sistemi di piastre, ma sono state evidenziate una serie di problematiche che devono essere approfondite e che devono essere tenute in considerazione nell'utilizzo del metodo stesso. Gli sforzi futuri dovrebbero concentrarsi sull'accoppiamento tra le piastre e le cavità acustiche, con lo scopo anche di determinare quanto i problemi qui evidenziati possano diventare più o meno decisivi nella predizione del rumore all'interno di una cabina. Un altro punto da approfondire, come accennato nelle considerazioni del capitolo 7 è la capacità degli elementi finiti energetici di modellare la presenza di elementi strutturali di collegamento tra diverse piastre. Inoltre sarà necessario valutare la correlazione numerico-sperimentale degli elementi finiti energetici confrontandone i risultati con quelli di prove di laboratorio.

Bibliografia

- [1] Arra M. *L'elicottero*. Hoepli, Milano, 2001.
- [2] Damongeot A., D'Ambra F., and Masure B. Towards a better understanding of helicopter external noise. AHS-American Helicopter Society, Annual Forum, St. Louis, Missouri, 9-11 maggio 1983.
- [3] Genuit K. and Gierlich H.W. *Investigation of the Correlation Between Objective Noise Measurement and Subjective Classification*. SAE Conference, 16-18 maggio 1989.
- [4] Atalla N. and Bernhard R.J. Review of numerical solutions for low frequency structural acoustic problems. *Applied Acoustics*, 43(3):271–294, 1994.
- [5] Rybak S.A. Waves in Plate containing Random Inhomogeneities. *Soviet Physics-Acoustics*, 17(3):345–349, 1972.
- [6] Rybak S.A. Randomly Coupled Flexural and Longitudinal Vibrations of Plates. *Soviet Physics-Acoustics*, 18(1):76–79, 1972.
- [7] Rybak S.A. Sound Scattering by a randomly inhomogeneous plate. *Soviet Physics-Acoustics*, 21(1):96–97, 1975.
- [8] Rybak S.A. and Belov V.D. Applicability of the transport equation in the one-dimensional wave-propagation problem. *Soviet Physics-Acoustics*, 21(2):110–114, 1975.
- [9] Rybak S.A., Belov V.D., and Tartakovskii B.D. Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Soviet Physics-Acoustics*, 23(2):115–119, 1977.
- [10] Nefske D.J. and Sung S.H. Power flow finite element analysis of dynamic systems: Basic theory and applications to beams. In *Statistical Energy Analysis: Presented at the Winter Annual Meeting of ASME*, pages 47–54, 1987.
- [11] Le Bot A. *Equations energetiques en mecanique vibratoire. Application au domaine des moyennes et hautes frequencys*. Doctoral dissertation, L'Ecole Centrale De Lyon, 1994.
- [12] Wohlever J.C. *Vibrational Power Flow Analysis of Rods and Beams*. Master thesis, Purdue University, 1988.
- [13] Bouthier O.M. *Energetics of Vibrating Systems*. Doctoral dissertation, Purdue University, 1992.

- [14] Noiseux D.U. Measurement of Power Flow in Uniform Beams and Plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47(1):238–247, 1970.
- [15] Cho P. *Energy Flow Analysis of Coupled Structures: Numerical Models of High Frequency Structure-Borne Noise*. Doctoral dissertation, Purdue University, 1993.
- [16] Morse P.M. and Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [17] Timoshenko S. and Young D.H. *Vibration Problems in engineering*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [18] Timoshenko S. *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [19] Goyder H.G.D and White R.G. Vibrational Power Flow from Machines into Built-up Structures, Part 1: Introduction and Approximate Analysis of Beam and Plate-like Foundations. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1):59–75, 1980.
- [20] Cremer L. and Heckl M. *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [21] Maysenholder W. Rigorous Computation of Plate-Wave Intensity. *Acustica*, 72(3):166–179, 1990.
- [22] Soedel W. *Vibrations of Shells and Plates*. Marcel Dekker, New York, 1981.
- [23] Leissa A.W. *Vibration of Plates*. NASA SP-160, U.S. Government Printing Office, Washington DC, 1969.
- [24] Gorman D.J. *Free Vibration analysis of Rectangular Plates*. Elsevier, New York, 1982.
- [25] Bitsie F. *The Structural-Acoustic Energy Finite Element Method and Energy Boundary Element Method*. Doctoral dissertation, Purdue University, 1996.
- [26] Fahy F. and Gardonio P. *Sound and Structural Vibration*. Elsevier, second edition, 2007.
- [27] Smith M.J. A Hybrid Energy Method for Predicting High Frequency Vibrational Response of Point-loaded Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 202:375–394, 1997.
- [28] Hardy P., Ichchou M., Jézéquel L., and Trentin D. A hybrid local energy formulation for plates mid-frequency flexural vibrations. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 28:121–130, 2009.
- [29] Wang S. *High Frequency Energy Flow Analysis Methods: Numerical Implementation, Applications, and Verification*. Doctoral dissertation, Purdue University, 2000.

- [30] Bernhard R.J. and J.E. Huff. Structural-Acoustic Design at High Frequency Using the Energy Finite Element Method. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121:295–301, 1999.
- [31] Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [32] Sun J.C., Lalor N., and Richards E.J. Power Flow and Energy Balance of Non Conservatively Coupled Structures, I:Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 112(2):321–330, 1987.
- [33] Yan X. *Energy Finite Element Analysis Developments for High Frequency Vibration Analysis of Composite Structures*. Doctoral dissertation, University of Michigan, 2008.
- [34] Bouthier O.M. and Bernhard R.J. Simple Models of energy FLOW in Vibrating Membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):129–147, 1995.
- [35] Bouthier O.M. and Bernhard R.J. Simple Models of the energetics of Transversely Vibrating Plates . *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):149–166, 1995.
- [36] Zhang W., Wang A., and Vlahopoulos N. An alternative energy finite element formulation based on incoherent orthogonal waves and it's validation for marine structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38:1095–1113, 2002.
- [37] Zhang W., Wang A., Vlahopoulos N., and Wu K. High-frequency vibration of thin elastic plates under heavy fluid loading by an energy finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 263:21–46, 2003.
- [38] Zhang W., Vlahopoulos N., and Wu K. An energy finite element formulation for high-frequency vibration analysis of externally fluid-loaded cylindrical shells with periodic circumferential stiffeners subjected to axi-symmetric excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 282:679–700, 2005.
- [39] Zhang W. and Raveendra S.T. Interior Noise Prediction Based on Energy Finite Element Method. Comet Technology Corporation, ann Arbor, MI 48108, USA, 2005.
- [40] Moens I., Vandepitte D., and Sas P. Vibro-acoustic energy flow models implemented by finite elements. Department of Mechanical Engineering, division PMMA, K.U. Leuven, Belgium.
- [41] Zhang W. and Raveendra S.T. Sound Package Analysis using Energy Finite Element Method. Comet Technology Corporation, ann Arbor, MI 48108, USA, 2007.