

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in
Ingegneria Meccanica



Analisi sperimentale e numerica
di elementi criccati in condizioni di contatto Hertziano
ed in presenza di fluido lubrificante

Relatore: Prof. Mario GUAGLIANO

Co-relatore: Prof. Michele SANGIRARDI

Tesi di Laurea di:

Giacomo VAZZANA Matr. 712310

Anno Accademico 2009 - 2010

Indice

Parte I – Analisi di Contatto

I	Stato di sforzo nel contatto Hertziano.....	1
1.1	Introduzione.....	7
1.2	Contatto Hertziano.....	7
1.2.1	Soluzione analitica.....	8
1.2.2	Validità della soluzione.....	12
1.2.3	Andamento degli sforzi.....	12
1.3	Risultati e commenti.....	15
1.3.1	Caso a) Disco con carico concentrato.....	15
1.3.1	Caso b) Disco su disco.....	17
1.3.2	Caso c) Carico concentrato su piano.....	19
1.3.3	Caso d) Disco su piano.....	20
1.4	Tensioni lungo l'asse al centro del contatto.....	22
1.4.1	Pitting.....	24
II	Meccanica della frattura lineare elastica.....	25
2.1	Introduzione.....	26
2.2	Teoria della meccanica della frattura.....	26
2.2.1	Fattore d'intensificazione degli sforzi.....	28
2.2.2	Limitazioni della meccanica della frattura lineare elastica.....	30
2.3	Valutazione del fattore di intensificazione degli sforzi nel caso in esame..	31
2.3.1	Sistema analizzato.....	31
2.3.2	Ipotesi di comportamento del fluido e della cricca.....	32
2.4	Effetti del fluido sulla velocità di propagazione delle discontinuità.....	32
2.4.1	Effetto pumping.....	33
2.4.2	Effetto friction.....	34
2.5	Risultati analitici e commenti.....	36
2.5.1	Modo I.....	36
2.5.2	Influenza dell'angolo di inclinazione della cricca sul KI.....	39
2.5.3	Modo II.....	40
2.5.4	Influenza dell'angolo di inclinazione della cricca sul KII.....	44
2.5.6	Influenza del coefficiente d'attrito sul valore di KI.....	45

III	Analisi fotoelastiche di contatto Hertziano.....	46
3.1	Introduzione.....	47
3.2	Fotoelasticità.....	47
	3.2.1 Caratteristiche del sistema di misura.....	48
	3.2.2 Caratteristiche dell'emissione luminosa.....	48
3.3	Equazioni fondamentali della fotoelasticità.....	49
	3.3.1 Intensità luminosa.....	51
3.4	Verifica dell'ipotesi di contatto hertziano su provino circolare e piano.....	53
3.5	Verifica dell'ipotesi di contatto hertziano sul modello sferico.....	56
	3.5.1 Analisi del modello scarico.....	57
	3.5.2 Verifica di contatto statico in assenza di fluido.....	60
	3.5.3 Verifica di contatto dinamico in assenza di fluido.....	61
	3.5.4 Verifica di contatto statico in presenza di fluido.....	62
	3.5.5 Verifica di contatto dinamico in presenza di fluido.....	63
3.6	Considerazioni finali sulla verifica di contatto.....	64
IV	Allestimento del modello e del sistema di carico.....	65
4.1	Introduzione.....	66
4.2	Materiale del modello.....	66
4.3	Realizzazione del modello.....	67
4.4	Distensione del policarbonato.....	70
4.5	Adesivo.....	71
4.6	Discontinuità nel materiale.....	74
	4.6.1 Nucleazione ed accrescimento della cricca.....	74
	4.6.2 Formazione di cricche su superfici di organi a contatto.....	75
	4.6.3 Realizzazione della cricca.....	75
4.7	Metodo di taratura del policarbonato.....	77
4.8	Sistema di carico.....	80
<u>Parte II – Valutazione dei fattori di intensificazione degli sforzi</u>		
V	Considerazioni teoriche sulla lubrificazione nelle discontinuità.....	82
5.1	Introduzione.....	83
5.2	Lubrificazione idrostatica e idrodinamica.....	83
5.3	Viscosità.....	84
5.4	Andamento effettivo della pressione nella lubrificazione idrostatica.....	86
5.5	Andamento effettivo della pressione nella lubrificazione idrodinamica.....	86
5.6	KII nella lubrificazione idrostatica e idrodinamica.....	88
5.7	Riassunto.....	91
VI	Analisi numerica ad elementi finiti.....	92
6.1	Introduzione.....	93
6.2	Analisi di contatto: distribuzione delle tensioni.....	93
6.3	Analisi in presenza di sforzi tangenziali.....	97

VII	Determinazione fotoelastica dei fattori di intensificazione degli sforzi.	98
7.1	Introduzione.....	99
7.2	Elaborazione del valore di KI.....	99
7.2.1	Metodo di Irwin.....	101
7.2.1.1	Rilevazioni di ki tramite metodo di Irwine.....	105
7.2.2	Metodo di Bradley e Kobayashi.....	107
7.2.2.1	Rilevazioni di KI tramite metodo di Bradley e Kobayashi.....	108
7.2.3	Metodo di Schoroedl e Smith.....	109
7.2.3.1	Rilevazioni di KI tramite metodo di Schoroedl e Smith... ..	110
7.3	Elaborazione del valore di KII nel caso di modo misto.....	112
7.3.1	Metodo Riley e Dally	113
7.3.1.1	Rilevazioni di KI e KII tramite metodo di Dally e Riley... ..	116
7.3.2	Metodo parametrico.....	118
7.3.2.1	Risultati metodo parametrico.....	123
7.4	Validazioni degli approcci.....	123
VIII	Conclusioni e sviluppi futuri.....	126
8.1	Introduzione.....	127
8.2	Valutazione dell'ipotesi di contatto hertziano.....	127
8.2.1	Contatto statico su un provino circolare.....	128
8.2.2	Contatto statico sul modello.....	129
8.2.3	Contatto dinamico non mediato da fluido.....	130
8.2.4	Contatto viscoso statico e dinamico.....	131
8.3	Valutazione dei coefficienti di intensificazione degli sforzi relativi al modo I.....	132
8.4	Valutazione dei coefficienti di intensificazione degli sforzi relativi al modo II.....	134
8.5	Confronto dell'andamento delle differenza delle tensioni principali in una cricca.....	136
8.6	Sviluppi futuri:.....	137
	Appendice A) Il polariscopio	140
	Appendice B) Analisi del telaio di carico	148
	Appendice C) Raccolta routines di calcolo	153
	Bibliografia	174

INTRODUZIONE

La rilevazione della presenza di difetti o cricche e la capacità di valutare la possibilità di una loro eventuale propagazione stanno acquisendo una sempre crescente importanza nella fase progettuale e di manutenzione preventiva, permettendo il passaggio da criteri di dimensionamento e verifica basati sull'analisi piuttosto che sulle norme. In particolare, lo sviluppo di approcci quali *damage tolerant* [1] propongono il controllo dell'evoluzione delle cricche grazie a periodiche ispezioni con tecniche di rilevazione non distruttive atte a stimare la vita residua del componente.

Uno dei procedimenti più significativi proposto dalla meccanica delle fratture lineare elastica (MFLE) per valutare l'effettiva criticità di un elemento in presenza di cricche o discontinuità assimilabili a cricche, è rappresentato dal confronto fra il fattore di intensificazione degli sforzi K_I ed il rispettivo valore di soglia, detto tenacità alla frattura K_{Ic} .

Per la determinazione dei fattori di intensificazione degli sforzi, si possono considerare soluzioni analitiche o utilizzare metodi numerici come gli elementi finiti [2]. La soluzione analitica, tuttavia, non è sempre di immediata determinazione: nei casi complessi, come quello proposto, occorre dunque affidarsi a tecniche numeriche e/o ricorrere a validazioni sperimentali della bontà dei risultati.

Nelle pagine seguenti si è focalizzata l'attenzione sulla valutazione del comportamento di discontinuità site in componenti sollecitati da un contatto mediato da fluido sulle quali agisce una distribuzione della pressione di tipo Hertziano.

È il caso tipico di contatto viscoso presente in macchine con organi in movimento reciproco con interposto un fluido a bassa pressione (generalmente pressione ambiente o poco più) e basse velocità relative. In queste condizioni non si arriva al distacco delle superfici di trasmissione del moto come richiesto nei casi di lubrificazione perfetta.

Si è scelto di dedicare comunque un capitolo, il quinto, a considerazioni teoriche qualitative rispetto al valore della pressione agente all'imbocco della cricca e al valore di K_I e K_{II} per i casi di lubrificazione idrostatica ed idrodinamica, nell'attesa di poterle confrontare con risultati sperimentali futuri.

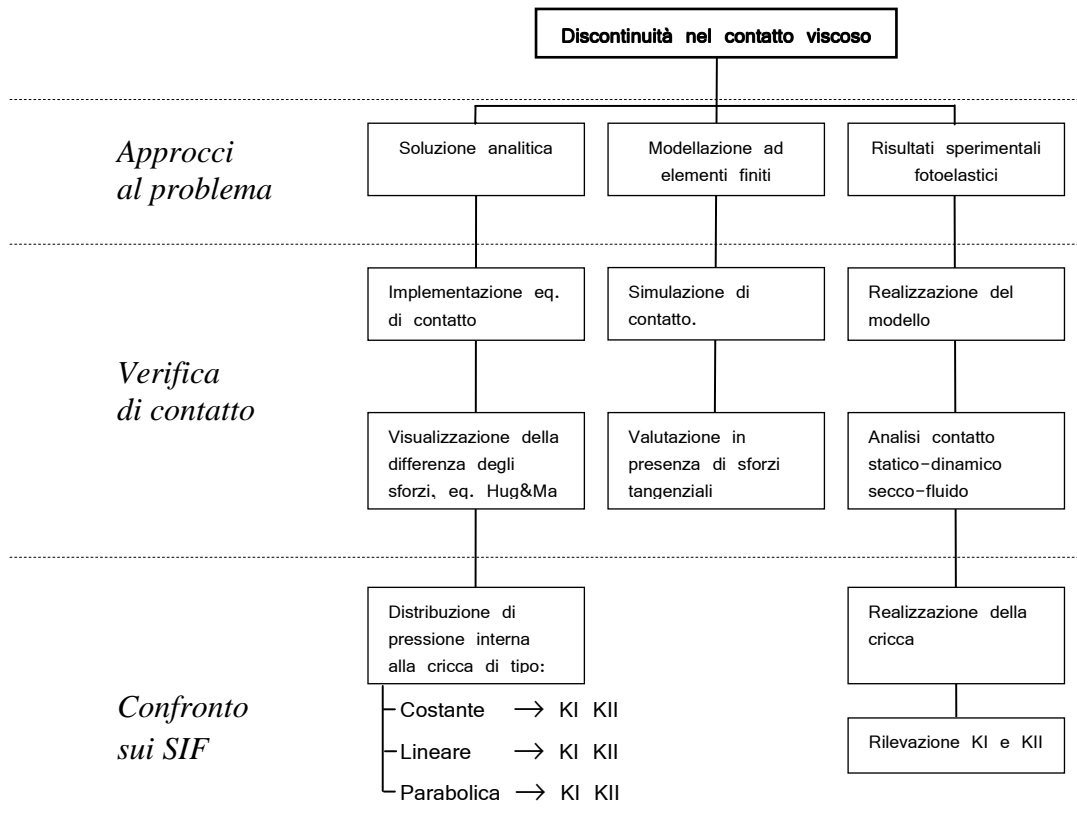


Figura I.1) Schema logico dello sviluppo del lavoro affrontato.

Come illustrato in figura I.1 il lavoro si è articolato in due parti, la prima ha lo scopo di valutare l'effettivo andamento della pressione di contatto ed il relativo stato tensionale che questa genera nel componente, la seconda si prefigge di risalire ai valori di K_I e K_{II} nel contatto mediato da fluido. Le due analisi sono strettamente dipendenti poiché una corretta analisi del campo di pressione esterna è di fondamentale importanza per valutare il carico agente all'imbocco della cricca il che corrisponde ad una delle condizioni al contorno necessarie per risalire ai valori del fattore di intensificazione degli sforzi nell'approccio di tipo analitico [3].

Oltre al citato approccio analitico si sono sviluppati in parallelo una modellazione ad elementi finiti e l'analisi sperimentale dei risultati utilizzando tecniche di rilevamento fotoelastiche. Al fine di permettere un confronto fra i diversi approcci si sono ricavati andamenti e risultati in termini di differenza fra le tensioni principali.

Nello sviluppo analitico si sono implementate in ambiente Matlab[®] le equazioni di Hug e Ma [4] le quali permettono di ricavare il campo degli sforzi principali in componenti bidimensionali una volta noto il valore e la distribuzione della pressione di contatto a sua volta valutata tramite le equazioni delle teoria della distribuzione

Hertziana [5]. In merito al calcolo dei fattori di intensificazione degli sforzi in questa fase, si è modellizzata la cricca come una discontinuità rettilinea affiorante in superficie, mentre per la modellizzazione del fluido si è ipotizzato che la sua presenza origini una distribuzione di pressione interna alla discontinuità avente uno dei seguenti andamenti: costante, parabolica o lineare e per ognuna di queste distribuzioni si sono valutati i relativi valori di K_I e K_{II} . Rispetto al caso di propagazione della cricca in assenza di fluido, per la valutazione di K_I si è tenuto conto dell'effetto Pumping assimilabile ad un aumento di pressione interna dovuto al fluido, mentre per la valutazione di K_{II} si è tenuto conto della variazione del coefficiente d'attrito fra le superfici della cricca, effetto friction [3]. Si è infine indagata l'influenza dell'angolo di propagazione della cricca e della viscosità del fluido in funzione degli stessi valori di K_I e K_{II} .

Per l'analisi sperimentale si è scelto di utilizzare tecniche di rilevamento fotoelastiche dettagliatamente descritte negli studi di R. J. Sandford, J. W. Dally [6] e J. M. Etheridge[7] le quali, da un lato permettono di visualizzare l'andamento delle tensioni su un vasto campo di materiale, ma dall'altro hanno limitato la scelta ai soli materiali del modello che godano della proprietà di birifrangenza ottica. Oltre a questa caratteristica inerente al materiale, il modello realizzato prevede un sistema di contenimento del fluido unito ad una geometria che consenta sia l'insinuazione del fluido nella cricca che l'aumento della sua pressione. Richieste soddisfatte grazie alla realizzazione di un componente sandwich a tre strati composto da una fetta centrale di policarbonato fotoelasticamente sensibile supportato ai lati da 2 elementi in polimetilmetacrilato; un modello siffatto permette una visualizzare fotoelastica unicamente degli stati di sforzo bidimensionali poiché si sono scaricati sugli elementi laterali poco fotosensibili gli effetti 3D presenti sui bordi laterali della cricca.

Dopo distensione termica e taratura del policarbonato si sono eseguite analisi fotoelastiche di contatto sul modello e su provini di policarbonato. Dal confronto dei risultati si è stabilito se gli spessori di polimetilmetacrilato influenzassero in maniera significativa o meno il segnale fotoelastico, se la presenza del collante influenzasse la distribuzione del carico e se la presenza di fluidi a diverse viscosità influenzassero la distribuzione delle tensioni. Il passaggio dalla visualizzazione della differenza delle tensioni principali al valore di intensificazione degli sforzi è stato permesso dallo sviluppo dei seguenti metodi: per i casi di modo I puro, implementando il metodo di G.

R. Irwin [9,10] detto anche metodo dell'apogeo, il metodo di Bradley e Kobayashi [8] e il metodo di Schroedl e Smith [12] tutti originati dalla equazione di Westergaard [13]; mentre per il modo misto in presenza di K_I e K_{II} si sono sfruttati i metodi sviluppati da J. W. Dally, e W. F. Riley [11] ed un metodo parametrico sviluppato sempre da Riley [11]. Tutte queste tecniche si adattano a casi bidimensionali ed hanno il vantaggio di richiedere un numero limitato di frange all'apice, altre tecniche (anche più precise) sono presenti in letteratura [14-16], ma esigono un buon numero di dati fotoelastici, ovvero di disporre di un sufficiente numero di frange di ordine intero nell'intorno dell'apice della cricca, non realizzabile nel modello a disposizione a causa del raggiungimento del campo plastico.

Per velocizzare l'analisi ed il confronto si è implementato un programma in ambiente Matlab[®] che permette il calcolo automatico del valore di frangia in qualsiasi punto selezionato di una immagine fotoelastica caricata.

In letteratura si trovano numerosi approcci numerici ad elementi finiti volti a trovare soluzioni a problemi simili, tra questi, quello dovuta a Kaneta e Muratami [17] basato sul Body Force Method (BFM) permette di calcolare il valore di K_I, K_{II}, K_{III} per cricche circolari interne in un semispazio infinito soggetto ad una distribuzione di pressione normale e tangenziale di tipo hertziano: tuttavia, i valori che vengono riportati si riferiscono ad una casistica limitata di difficile generalizzazione. La soluzione proposta da Bastias [18] utilizza modelli 2D ad elementi finiti ed ha il vantaggio di considerare differenti profondità, coefficienti d'attrito tra le facce della cricca e diverse giaciture dei difetti. L'approccio numerico ad elementi finiti svolto nel presente lavoro, oltre alla simulazione di contatto, è stato utile per valutare il comportamento degli sforzi in presenza di azioni tangenziali.

Alla luce di quanto è stato svolto è possibile affermare che le tecniche fotoelastiche permettono di valutare dettagli importanti del campo di sforzo, soprattutto nell'ambito della meccanica della frattura, e possono essere adoperate come complemento ai metodi di analisi comunemente usati.

Capitolo I

Stato di sforzo nel contatto Hertziano

1.1 INTRODUZIONE

Attraverso le equazioni sviluppate da H. R. Hertz si è valutato l'andamento e la distribuzione della pressione di contatto nei casi di forza concentrata e distribuita sia inerente al caso di superficie piana che su disco. Ciò ha permesso di inizializzare le equazioni Hondros [4] (poi riprese da di Hug e Ma) le quali permettono di ricavare lo stato di sforzo in componenti bidimensionali una volta noto il valore e la distribuzione della pressione di contatto.

Le equazioni ricavate si sono esplicitate nei confronti della differenza delle tensioni principali σ_1 - σ_2 e visualizzate per mezzo della loro implementazione in ambiente Matlab[®]. Il passaggio alla differenza di tensioni principali è necessario per un successivo confronto sperimentale al polariscopio [A.A] utile a stabilire se la distribuzione di pressione esterna da noi ipotizzata Hertziana sia effettivamente tale.

Infine si è approfondito lo stato di sollecitazione nella sezione sollecitata dal massimo valore di pressione separando i contributi di ogni sforzo principale e concludendo con brevi considerazioni sulla loro influenza riguardo al fenomeno del *pitting*.

1.2 CONTATTO HERTZIANO

Come primo approccio all'analisi fotoelastica si è deciso ricavare il campo degli sforzi nel caso di superfici a contatto sotto carico. I risultati osservati nel modello fotoelastico si sono confrontati con la teoria di contatto Hertziano della quale esistono parecchi studi in letteratura [5].

I sistemi analizzati sono i seguenti:

- a. Sistema a disco singolo con carico diametrale concentrato (fig. 1.1.a);
- b. Sistema di 2 dischi a contatto sotto carico (fig. 1.1.b);
- c. Carico concentrato sul piano (fig. 1.1.c);
- d. Sistema disco su piano (fig. 1.1.d);

Si sono assunti i seguenti sistemi di riferimento:

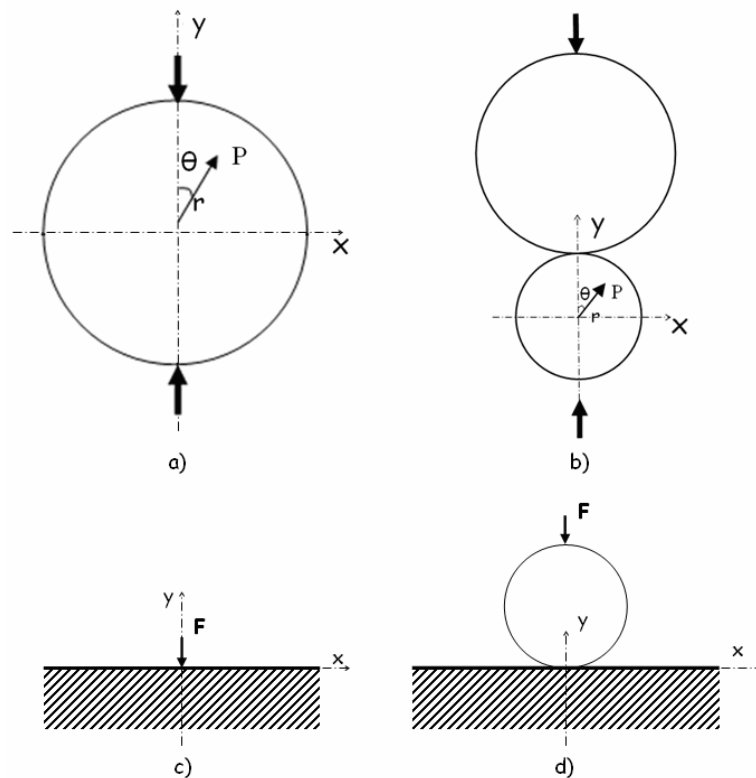


Figura 1.1) Rappresentazione dei sistemi di carico analizzati: a) disco singolo con carico distribuito; b) disco su disco; c) carico concentrato su piano; d) disco su piano.

Tutti i sistemi si sono considerati bidimensionali:

$$\sigma_z = \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0 \quad (1.1)$$

1.2.1 SOLUZIONE ANALITICA

La teoria formulata da Hertz (1880) [5] inerente al contatto non conforme, pone come obiettivo la valutazione di forma e dimensione dell'area di contatto, nonché la quantificazione del valore di pressione nei punti della medesima area, relativamente a solidi in campo elastico a contatto fra loro e carichi lungo la normale.

Le ipotesi di validità sono:

- Corpi elastici, omogenei ed isotropi.

- Sollecitazioni sempre in campo elastico.
- Superfici a contatto lisce.
- Tensioni tangenziali d'attrito nulle.

A causa della deformazione elastica, per corpi tridimensionali, il contatto non è più assimilabile come puntiforme ma avviene su superfici; nel caso bidimensionale su archi di circonferenza o linee (fig. 1.2).

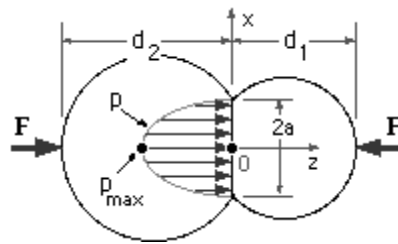


Figura 1.2) Distribuzione della pressione sulla linea di contatto nel caso bidimensionale.

Nel caso particolare di corpi cilindrici con raggi di curvatura differenti l'area di contatto risulta ellittica e le dimensioni a e b , rispettivamente del semiasse maggiore e minore dell'ellisse avente equazione

equazione ellisse:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.2)$$

valgono:

asse minore
$$a = m \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot F \cdot \frac{k_1 + k_2}{B + A}} \quad (1.3)$$

asse maggiore
$$b = n \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot F \cdot \frac{k_1 + k_2}{B + A}}$$

le costanti k_1 e k_2 sono funzioni del materiale dei cilindri:

costante del materiale:
$$k_i = \frac{1 - \nu_i}{\pi E_i} \quad (1.4)$$

con: E : modulo elastico

ν : *modulo di Poisson*

Mentre i parametri A e B sono funzioni dei raggi dei cilindri (r_1, r_2) e dei raggi degli stessi nella configurazione deformata ($r_{1,t}$ e $r_{2,t}$):

$$A + B = \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{1,t}} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{2,t}}}{2} \quad (1.5)$$

$$A - B = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{1,t}}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{2,t}}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{1,t}}\right) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{2,t}}\right) \cos(2\psi)}}{2}$$

Le costanti m ed n sono tabulate in base all'angolo:

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{B - A}{B + A}\right) \quad (1.6)$$

Tabella 1.1) tabella dei coefficienti 'm' ed 'n'.

Θ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
m	2.731	2.397	2.136	1.926	1.754	1.611	1.456	1.378	1.284	1.202	1.128	1.061	1
n	0.493	0.530	0.567	0.604	0.641	0.678	0.717	0.759	0.802	0.846	0.893	0.944	1

Tramite la tabella 1.1, per interpolazione lineare, si ottengono i parametri m e n . Noti tutti i parametri, la pressione di contatto ha una distribuzione superficiale pari a:

$$P(x, y) = \left(\frac{3N}{2\pi ab}\right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{con } (x, y) \in A^0$$

$$P(x, y) = 0 \quad \text{con } (x, y) \notin A^0 \quad (1.7)$$

dove A^0 rappresenta l'impronta di contatto.

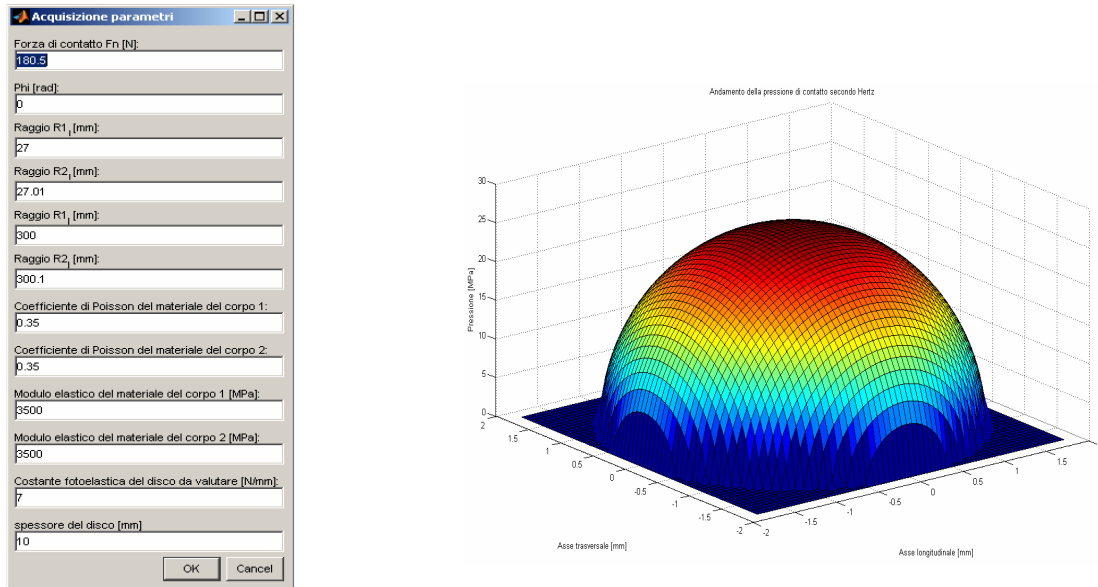


Figura 1.3) Distribuzione della pressione contatto secondo hertz con i relativi dati implementati.

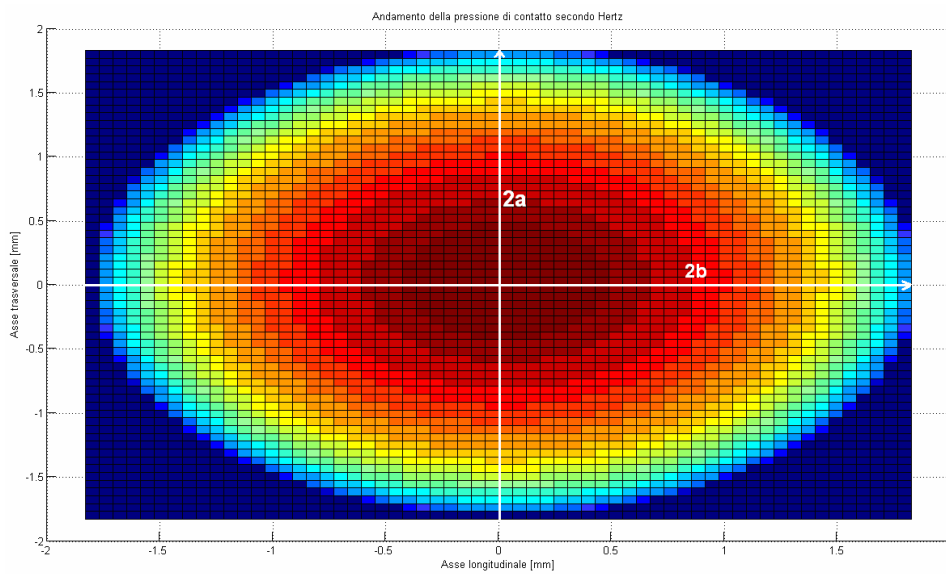


Figura 1.4) Area di contatto: visualizzazione bidimensionale.

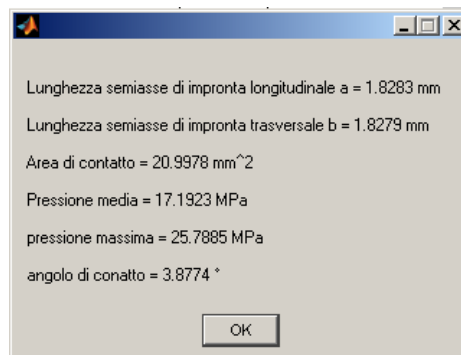


Figura 1.5) Risultati dell'analisi di contatto Hertziano.

1.2.2 VALIDITA' DELLA SOLUZIONE

L'accettabilità della soluzione analitica proposta è in funzione del grado di approssimazione richiesto dai risultati. In generale il modello di Hertz è un modello analitico ben applicabile a tutti i sistemi rispondenti alle ipotesi iniziali mentre risulta essere limitante rispetto ai casi con:

- ordine di grandezza dei raggi di curvatura paragonabile a quello della zona di contatto;
- presenza di forze tangenziali, specialmente se causate dalla rugosità delle superfici a contatto;
- usura eccessiva tale da far cedere l'ipotesi di superfici lisce.

In questi casi la distribuzione delle pressioni risulterà irregolare e anche lo stato di sforzo sub-superficiale sarà differente rispetto a quello calcolabile applicando le relazioni di Hertz. E' perciò necessario l'impiego di una soluzione analitica differente.

1.2.3 ANDAMENTO DEGLI SFORZI

Una volta ricavata la distribuzione di pressione, si è valutato l'andamento degli sforzi principali che questa genera grazie alle equazioni ricavate da Hug e Ma [4] analizzate di seguito valide sotto le ipotesi di:

- dischi o piano a comportamento elastico isotropico;
- piccolo spessore degli elementi a contatto (sistema bidimensionale);
- carico unicamente di compressione;
- distribuzione del carico diametralmente distribuito lungo l'arco di contatto definito dall'angolo α come mostrato in figura 1.6;
- doppia simmetria rispetto agli assi del sistema di riferimento (figura 1.6).

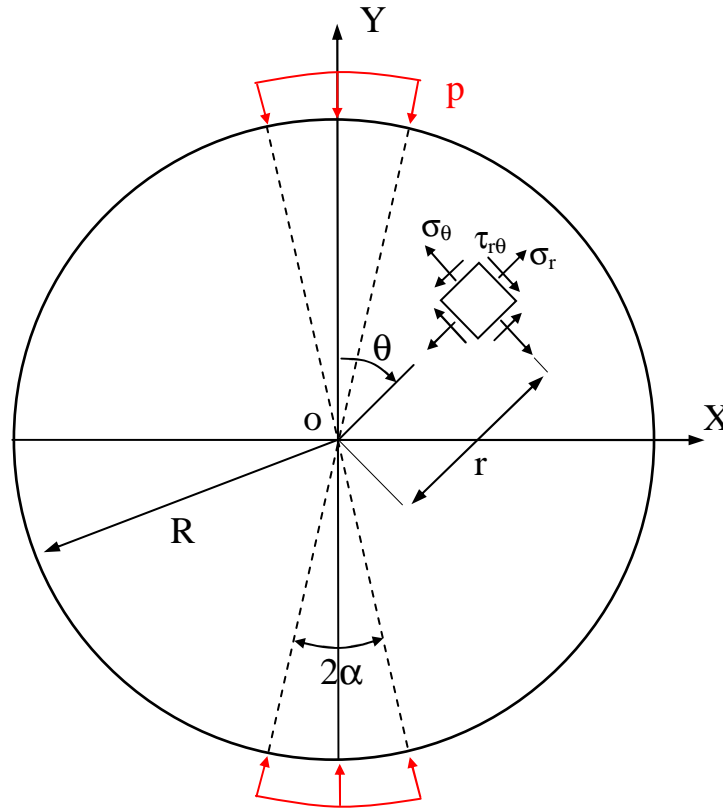


Figura 1.6) Rappresentazione dello schema di carico e degli assi cartesiani e polari adottati nel caso di disco con carico distribuito .

Per ricavare il campo degli sforzi si è partiti dalle equazioni di equilibrio generali per problemi a due dimensioni in coordinate polari:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0$$

Equazioni di equilibrio

(1.8)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Per il problema illustrato nella figura precedente si assumono le seguenti condizioni al contorno:

$$\sigma_r(R, \theta) = -p \quad |\theta| \leq \alpha \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Condizioni al contorno} \quad \sigma_r(R, \theta) = 0 \quad & |\theta| > \alpha \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (1.9) \\
\tau_{r,\theta}(R, \theta) = 0 \quad & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Lo sviluppo del campo degli sforzi ottenuti da Hondros [4] in coordinate polari risulta:

$$\begin{aligned}
\text{sforzo radiale} \quad \sigma_r &= \frac{-P}{\alpha\pi R t} \left\{ \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{2n-2} \sin 2n\alpha \cdot \cos 2n\vartheta \right\} \\
\text{circonferenziale} \quad \sigma_\theta &= \frac{-P}{\alpha\pi R t} \left\{ \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{2n-2} \sin 2n\alpha \cdot \cos 2n\vartheta \right\} \\
& \hspace{15em} (1.10)
\end{aligned}$$

$$\text{tangenziale} \quad \tau_{r,\theta} = \frac{-P}{\alpha\pi R t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{2n-2} \sin 2n\alpha \cdot \cos 2n\vartheta \right\}$$

dove σ_r è lo sforzo lungo la coordinata radiale 'r', σ_θ è lo sforzo lungo la coordinata 'θ', mentre $\tau_{r,\theta}$ è lo sforzo di taglio rispetto a r-θ; P è lo sforzo di compressione ricavato dalle equazioni Hertz distribuito lungo l'arco di contatto definito dall'angolo 2α .

Hug e Ma derivarono ed esplicitarono le equazioni (1.10) arrivando alla soluzione in forma chiusa per problemi con disco circolare rappresentata dalla relazione:

$$\begin{aligned}
\sigma_1, \sigma_2 = -\frac{p}{\pi} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \tan(\alpha+\theta) \right] + \tan^{-1} \left[\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \tan(\alpha-\theta) \right] + \Phi \right\} \\
\pm \frac{2p}{\pi} (1-\rho^2) \sin 2\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2(\alpha+\theta) + 1} \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2(\alpha-\theta) + 1}}
\end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\text{caso piano: } \sigma_3 = 0; \rho = \frac{r}{R}.$$

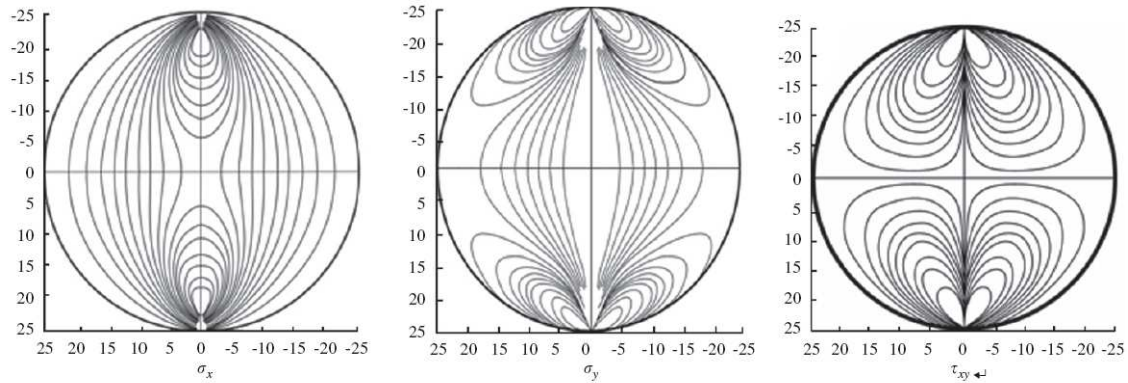


Figura 1.7) Distribuzione analitica degli sforzi ottenuti con le equazioni di Hug e Ma .

Diversamente dai grafici di fig. 1.7, le isocromatiche visibili in fotoelasticità permettono di visualizzare unicamente il luogo dei punti del campo in cui la differenza degli sforzi principali è costante; analiticamente queste posizioni si trovano con la seguente equazione:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{2p}{\pi} (1 - \rho^2) \sin 2\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2(\alpha + \theta) + 1} \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2(\alpha - \theta) + 1}} \quad (1.12)$$

è inoltre possibile valutare il campo di sforzo in condizioni di carico concentrato inserendo un valore di α nullo.

1.3 RISULTATI E COMMENTI

Tramite il programma [Hertz.m] implementato in ambiente Matlab[®] e riportato in appendice, si è tracciato l'andamento della differenza degli sforzi principali nei casi di contatto su disco e su piano sia per carichi concentrati che distribuiti.

1.3.1 CASO A) DISCO CON CARICO CONCENTRATO

Nel caso di carico concentrato, si raggiungono elevati valori di sforzo solo in prossimità del punto di applicazione del carico, per visualizzare questo elevato gradiente ripartito su un'area che tende a collassare in un punto si è reso necessario un ingrandimento nella zona interessata, figure 1.8 e 1.9.

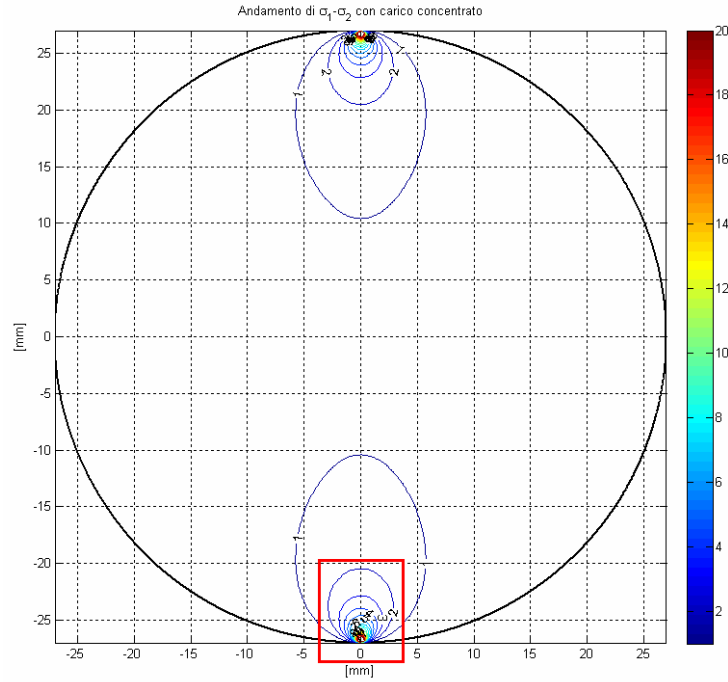


Figura 1.8) Differenza delle tensioni principali nel caso di disco con carico concentrato in cui è visibile l'area di zoom .

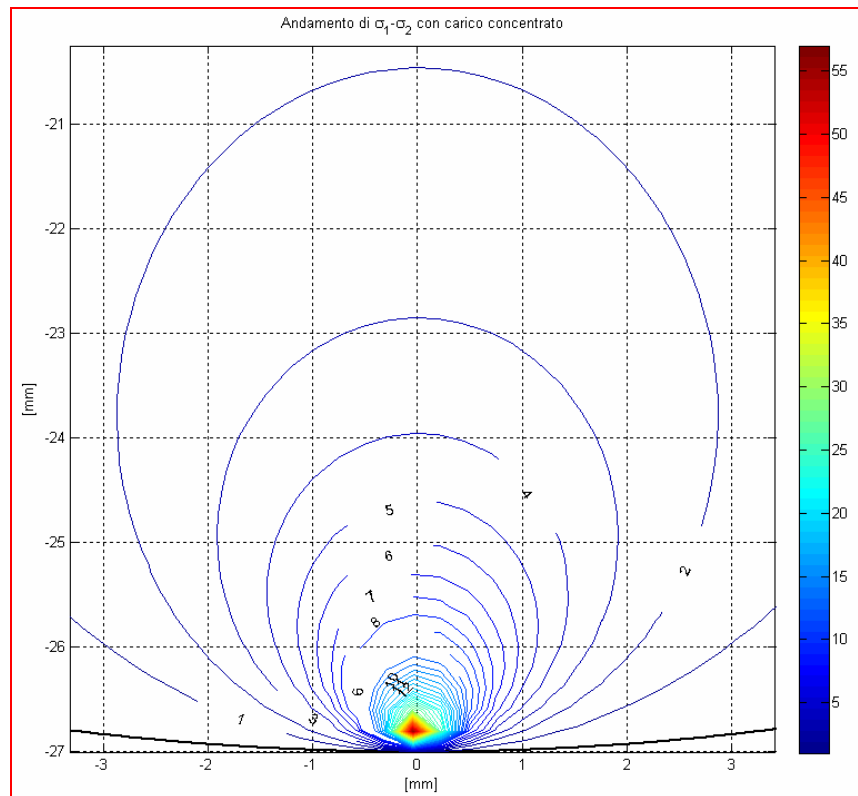


Figura 1.9) Ingrandimento dell'andamento di $\sigma_1 - \sigma_2$.

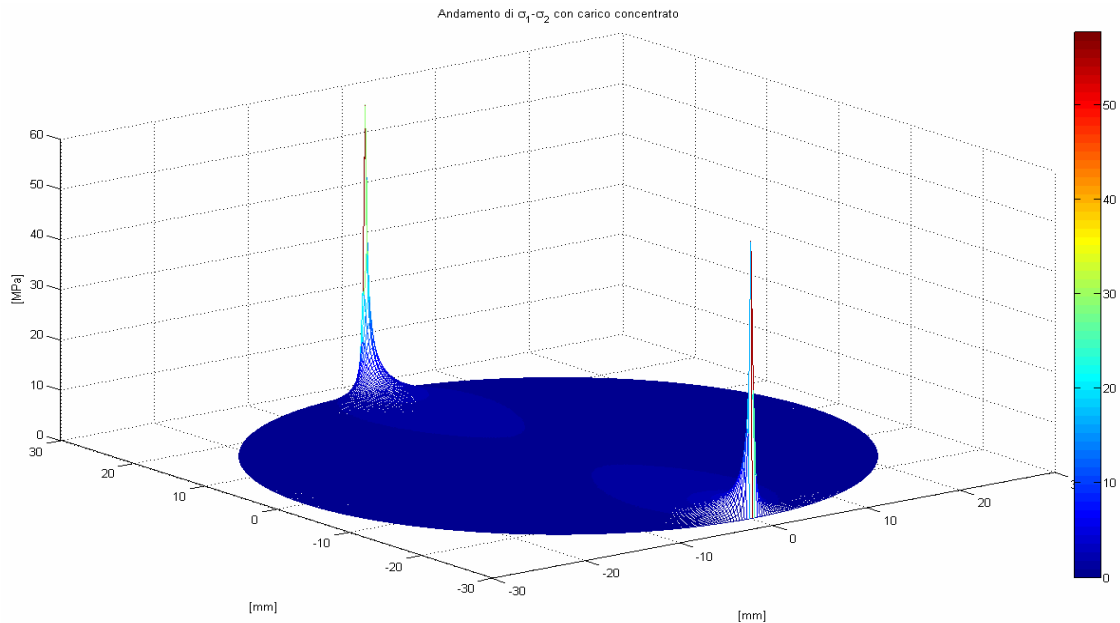


Figura 1.10) Visualizzazione tridimensionale dello stato di sforzo .

Il caso di carico concentrato ha una valenza per lo più teorica poiché in tutti i casi reali la superficie di contatto fra disco e forzante, per quanto piccola, non sarà mai puntiforme, ciò comporta una visualizzazione delle frange al polariscopio che difficilmente raggiungerà valori e concentrazioni così elevate a ridosso del punto d'applicazione come mostrato in fig. 1.9-1.10.

1.3.2 CASO B) DISCO SU DISCO

Nel caso B si considera l'effetto di deformazione delle superfici dei due dischi nella zona di contatto, questo genera una distribuzione della pressione su una superficie ellittica nel caso tridimensionale e su un arco di circonferenza nel caso bidimensionale analizzato. Il valore della pressione è costante e approssimato al valor medio della pressione valutata con le equazioni di Hertz, ciò è ritenuto valido per piccoli valori dell'angolo di distribuzione della pressione α :

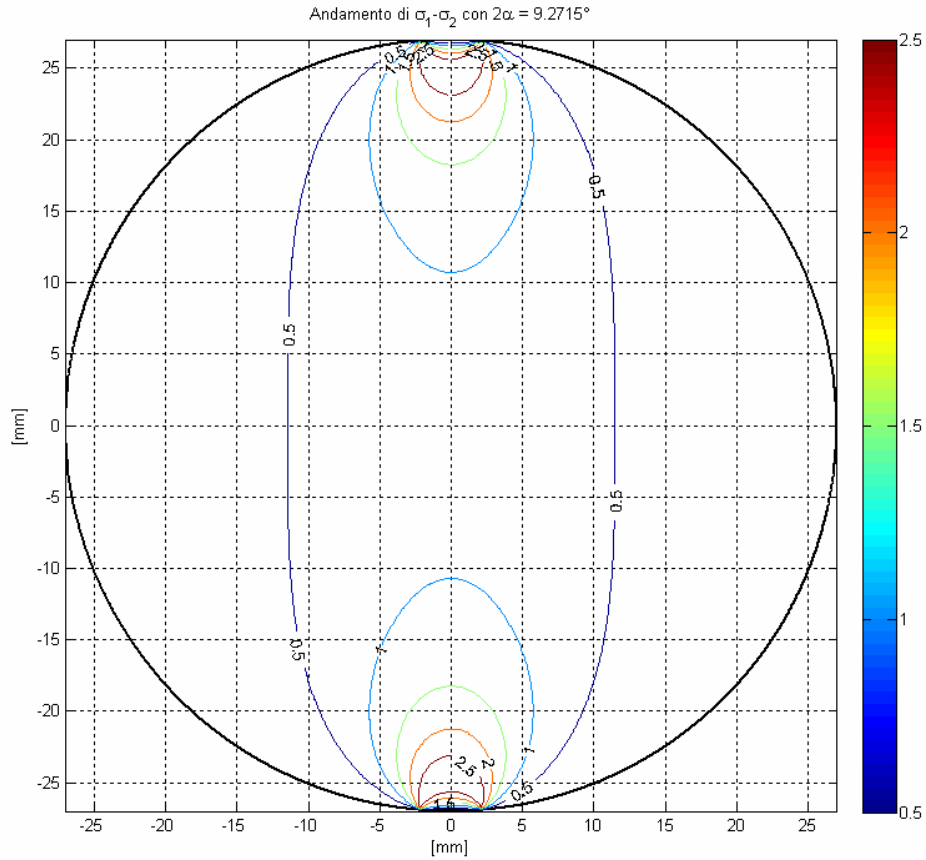


Figura 1.11) Andamento della differenza di $\sigma_1 - \sigma_2$ nel contatto disco su disco.

Nella figura 1.11 è mostrato l'andamento della differenza delle tensioni principali ottenuto con i dati mostrati in fig. 1.3.

Il relativo andamento tridimensionale è il seguente:

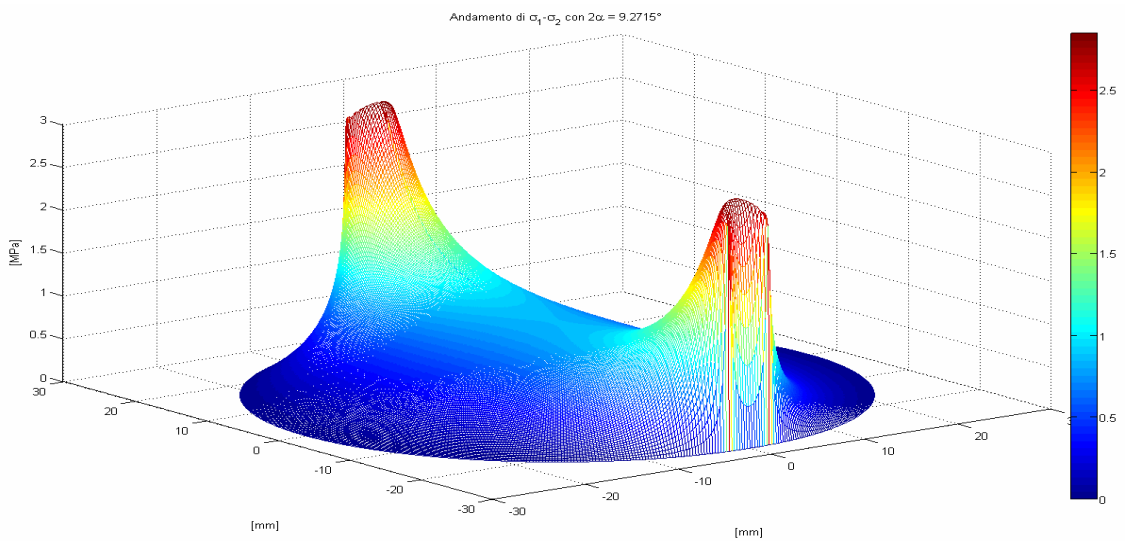


Figura 1.12) Visualizzazione dello stato di sforzo nel contatto disco su disco.

1.3.3 CASO C) CARICO CONCENTRATO SU PIANO

Nella figura 1.13 è evidenziato il caso di un piano sollecitato da una forzante concentrata:

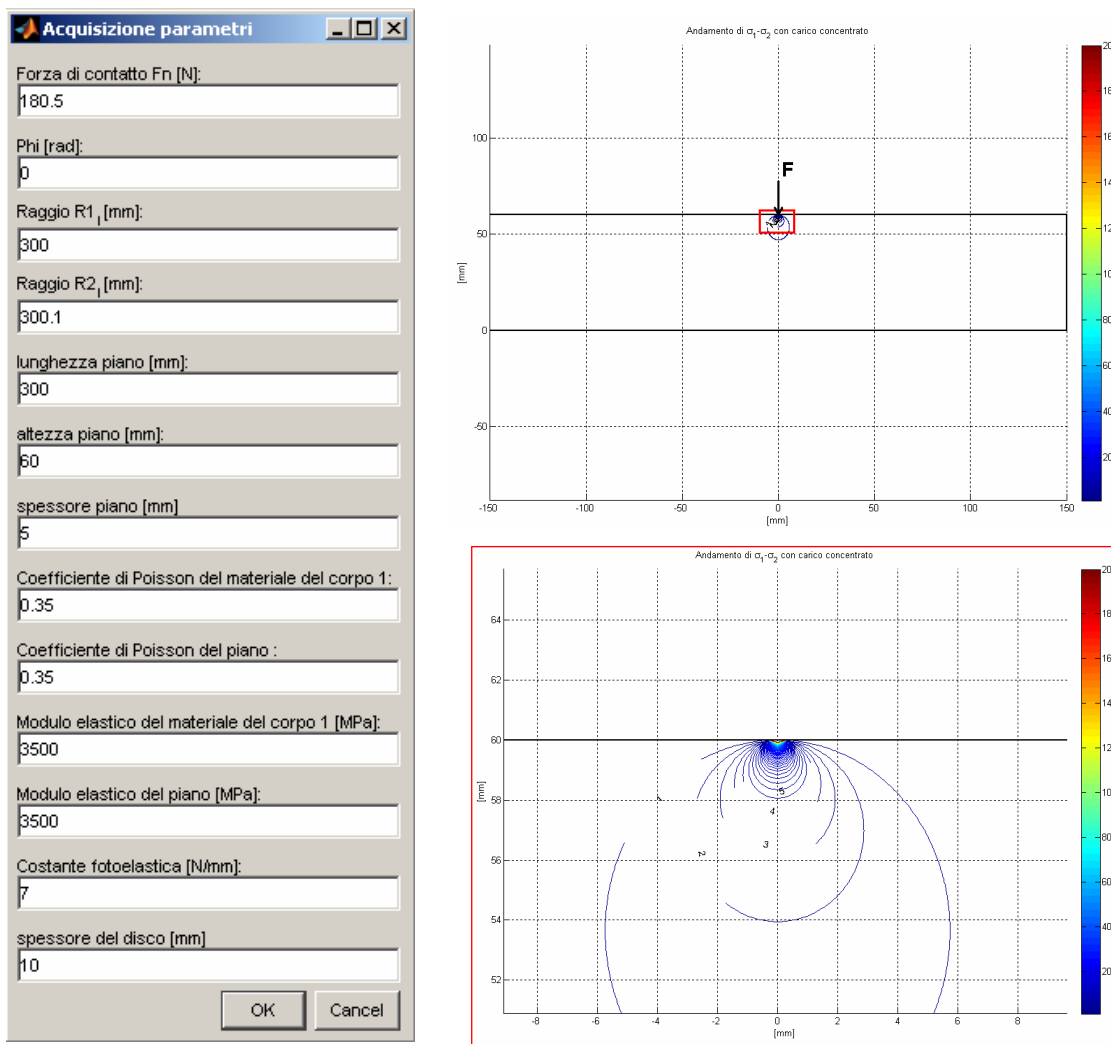


Figura 1.13) A sinistra: i dati relativi all'implementazione del caso di carico concentrato sul piano. In alto: la visualizzazione dell'andamento della differenza degli sforzi principale per il quale è stato necessario uno zoom mostrato nella figura in basso.

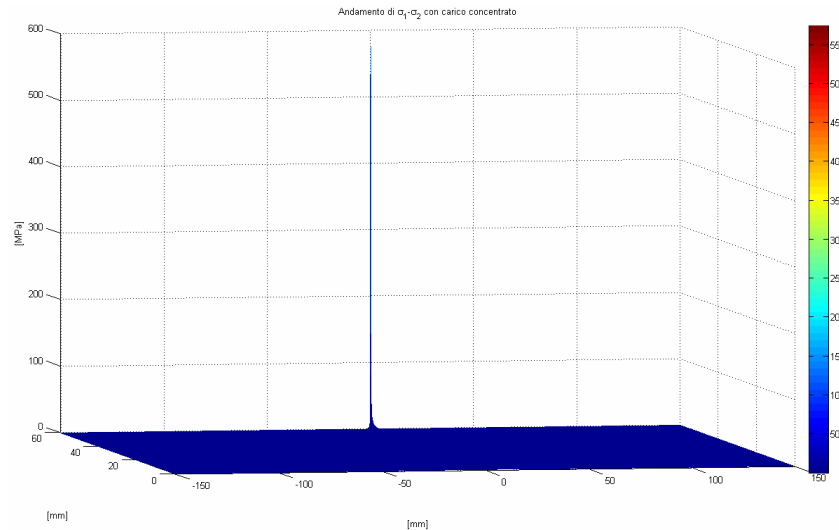


Figura 1.14) Visualizzazione dello stato di sforzo nel caso di carico concentrato su piano.

Come per il caso A) anche questa è una situazione unicamente teorica, poiché qualsiasi carico che agisse su una superficie tendente a zero genererebbe uno sforzo tendente al valore infinito. Questo causerebbe se non la rottura, sicuramente plasticizzazione del materiale e quindi farebbe cadere l'ipotesi di comportamento elastico fondamentale per il successivo confronto col caso reale analizzato al polariscopio e richiesto nelle ipotesi di validità dell'equazione dello stato di sforzo (1.12).

1.3.4 CASO D) DISCO SU PIANO

Analiticamente corrisponde a considerare un contatto disco su disco con il raggio di uno dei 2 infinito.

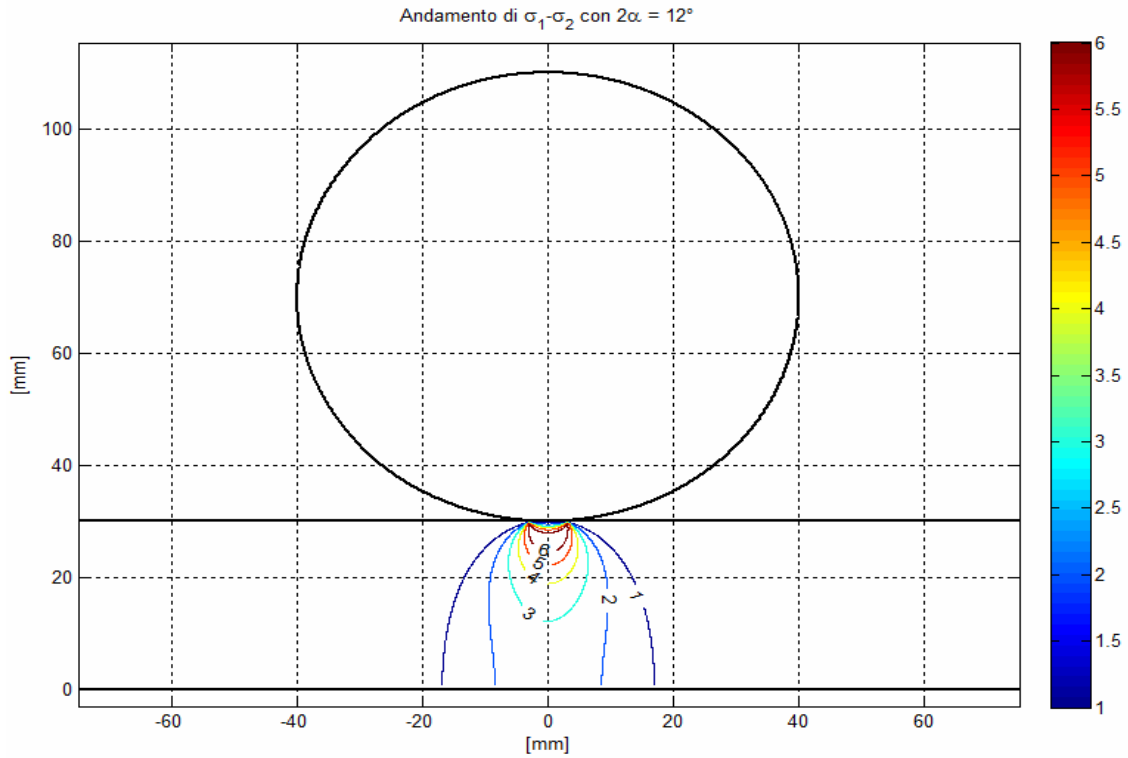


Figura 1.15) Andamento della differenza di $\sigma_1 - \sigma_2$ nel contatto disco su piano.

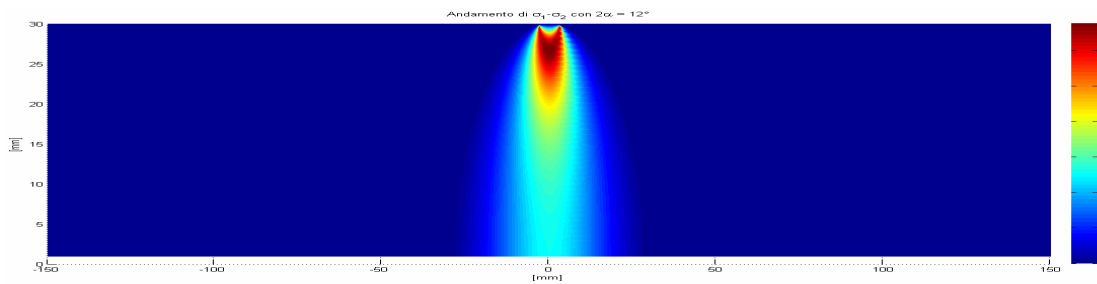


Figura 1.16) Andamento della differenza di $\sigma_1 - \sigma_2$ in tutto lo spessore (finito) del piano.

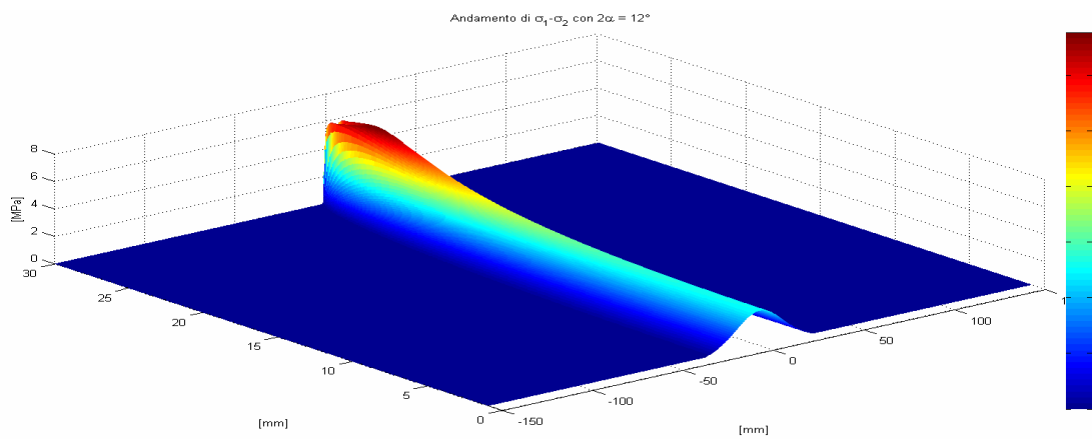


Figura 1.17) Visualizzazione dello stato di sforzo nel caso di contatto disco su piano.

Nel caso rappresentato in figura non si è considerato lo sforzo generato dalla reazione del piano col suolo, ciò accade solo per altezze del piano tanto alte da ritenere che lo sforzo generato dal contatto col disco resti distinto e non influenzato dallo sforzo dovuto alla reazione d'appoggio.

1.4 TENSIONI LUNGO L'ASSE AL CENTRO DEL CONTATTO

Dalla teoria di Hertz si deduce come il valore massimo di pressione si raggiunga al centro dell'area di contatto, si è quindi indagato l'andamento delle tensioni interne in corrispondenza di questo massimo adottando un sistema di riferimento avente origine al centro dell'ellisse di contatto, l'asse z in direzione ortogonale, l'asse x nella direzione longitudinale ed asse y in quella trasversale, fig. 1.18.

Le tensioni lungo gli assi x , y , z risultano principali. In particolare le tensioni in direzione z sono di compressione quindi negative, così come lo sono lungo y perché il materiale, compresso in direzione z , tenderebbe ad espandersi per effetto Poisson, ma il materiale limitrofo lo impedisce.

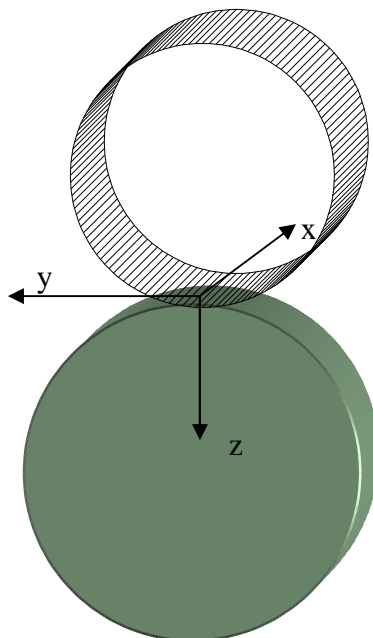


Figura 1.18) Sistema di riferimento adottato per la valutazione delle tensioni lungo l'asse.

Le equazioni delle tensioni lungo la sezione di massima sollecitazione sono:

$$\begin{aligned} \text{Sforzo in direzione radiale} \quad \sigma_z &= \frac{-p_{\max}}{\sqrt{1+z^2/a^2}} \\ \text{Sforzo in direzione longitudinale} \quad \sigma_x &= -2\nu p_{\max} \left(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\text{Sforzo in direzione tangenziale} \quad \sigma_y = p_{\max} \left[\left(2 - \frac{1}{1+z^2/a^2} \right) \sqrt{1+z^2/a^2} - 2\frac{z}{a} \right]$$

Tensione tangenziale massima nel paioo zy:

$$\text{Sforzo di taglio} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.14)$$

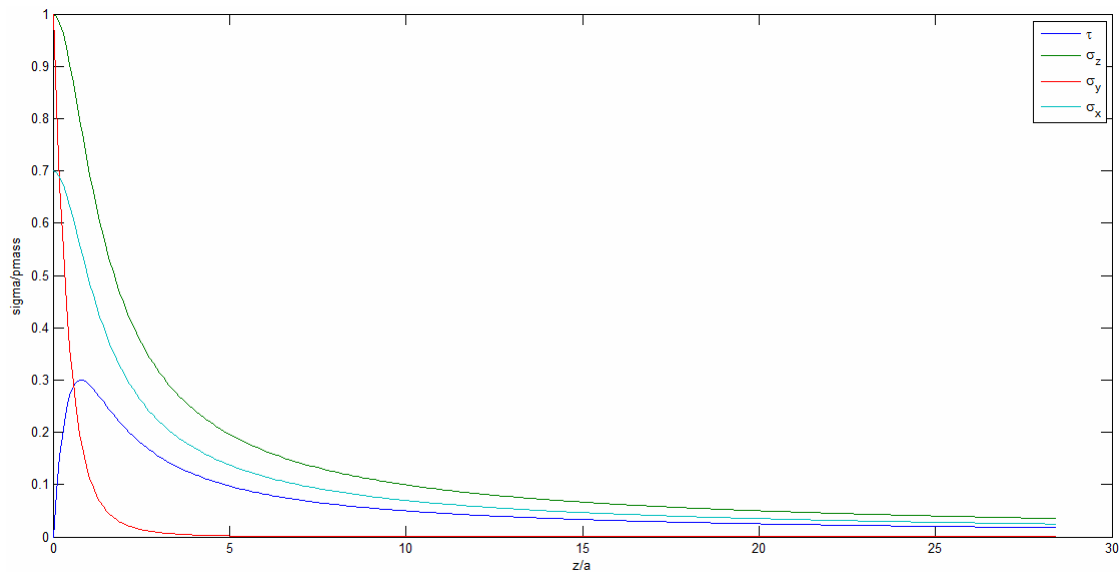


Figura 1.19) Andamento delle tensioni lungo l'asse al centro del contatto.

1.4.1 PITTING

Come si può notare dal grafico in figura 1.19 la tensione tangenziale raggiunge il suo valore massimo (circa $0.3 p_{\max}$) non in superficie ($z/a=0$), ma ad una distanza pari a $z/a=0.79$. Questa sollecitazione sottopelle può portare, per organi a contatto ciclico, alla nucleazione di una cricca la quale propagandosi fino in superficie può causare il distacco di porzioni di materiale definiti 'pit' delle dimensioni di qualche decimo di mm.

È questo un fenomeno di fatica superficiale che prende il nome di *pitting* il quale può manifestarsi anche per un contatto tra le superfici non diretto, ma mediato da fluido. Anzi il lubrificante favorisce il trasporto delle particelle metalliche distaccate causando danneggiamenti anche in zone o organi non interessati direttamente da pitting.

Questo danneggiamento è favorito dagli ingranaggi con acciaio bonificato e con trattamenti di indurimento superficiale (cementazione, nitrurazione).

Capitolo II

Meccanica della frattura lineare elastica

2.1 INTRODUZIONE

Dopo aver ripreso i concetti alla base della meccanica della frattura e aver definito il fattore di intensificazione degli sforzi (*SIF*) si è proceduto alla sua valutazione analitica nel caso di fluido interposto fra le superfici della cricca.

Si è modellizzata la cricca come una discontinuità rettilinea affiorante in superficie, mentre per la modellizzazione del fluido si è ipotizzato che possa essere in pressione o meno e con una distribuzione costante, parabolica o lineare. Infine il per il comportamento della discontinuità al passaggio del carico si è ipotizzato che resti aperta in superficie oppure il caso che si richiuda intrappolando il fluido al suo interno.

Rispetto al caso di propagazione della cricca in assenza di fluido per la valutazione di KI si è tenuto conto dell'effetto Pumping generato dall'aumento di pressione interna dovuto al fluido, mentre per la valutazione di KII si è tenuto conto della variazione del coefficiente d'attrito fra le superfici della cricca. I risultati ottenuti saranno confrontati nel CAP.VIII con i risultati sperimentali per valutare se, e quale, modellizzazione rispecchi maggiormente il caso reale.

2.2 TEORIA DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA

Un approccio progettuale tradizionale, basato sul dimensionamento o sulla verifica strutturale con i criteri di resistenza classici (Von mises, Guest-Treska, Ros Eichinger...) risulta essere inefficace in presenza di discontinuità nel materiale, in questi casi si può raggiungere il cedimento strutturale o il malfunzionamento anche qualora lo sforzo effettivo sia inferiore a limite ammissibile calcolato.

La meccanica della frattura ha, tra le finalità principali, proprio quella di definire quantitativamente la condizione critica di propagazione della discontinuità (o *cricca* se il raggio di curvatura all'estremità tende a zero), la quale può essere generata all'interno della matrice metallica da fenomeni indesiderati che avvengono durante la realizzazione del pezzo (quali il ritiro, la

permeabilità del metallo ai gas alle alte temperature, ecc..) oppure si può formare successivamente secondo la teoria delle dislocazioni.

Tramite l'approccio suggerito nella Meccanica della frattura è possibile determinare le espressioni del campo degli sforzi nell'intorno dell'apice della cricca sotto le ipotesi di materiale con comportamento isotropo e lineare elastico considerando come parametri di influenza del cedimento lo sforzo applicato (che viene calcolato), la dimensione del difetto (che viene misurata) e le caratteristiche del materiale (determinate sperimentalmente).

Se si assume un sistema di coordinate polari con l'origine posta in corrispondenza dell'apice della cricca (fig. 2.1) lo stato di sforzo ha l'espressione mostrata nell'equazione 2.1:

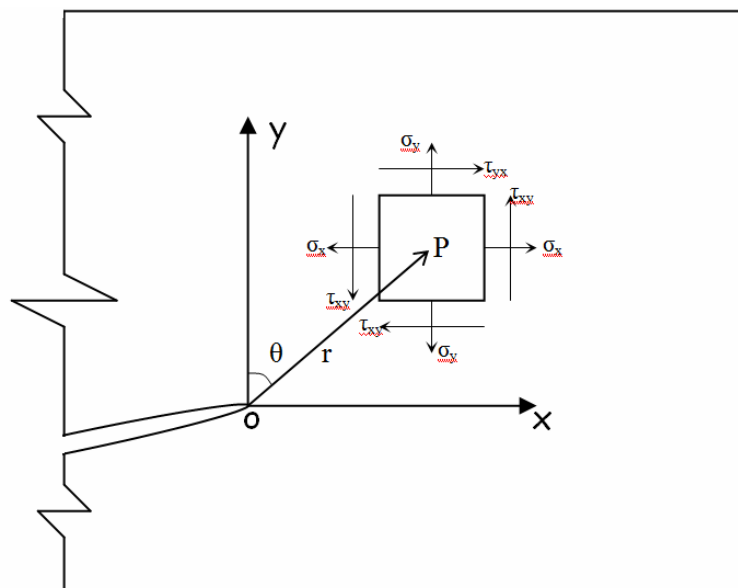


Fig. 2.1) Rappresentazione del sistema polare e cartesiano utilizzato per la rappresentazione dello stato di sforzo nel punto generico P.

$$\text{Tensori degli sforzi} \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + Cr + Dr^{1/2} + o \quad (2.1)$$

Dove:

r e θ identificano le componenti del sistema di coordinate polari.

K costante moltiplicativa.

- f_{ij} funzione di variabile θ .
 C, D costanti dello sviluppo in serie.
 o infinitesimi di ordine superiore.

2.2.1 FATTORE D'INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI

Il *Fattore di intensificazione degli sforzi* 'K' è un parametro funzione della forma e dimensione della cricca, dei vincoli presenti e di uno sforzo di riferimento cui è soggetta la struttura. È quindi possibile esprimere K come (eq.2.2):

$$\text{Fattore d'intensificazione degli sforzi} \quad K_i = \beta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.2)$$

in cui:

- β è una costante adimensionale chiamata *funzione di forma* che tiene conto della geometria del corpo, di quella del difetto e dei vincoli.
- $\sqrt{\pi a}$ è un fattore geometrico caratteristico del cricca.
- i è relativo al modo di apertura della cricca:

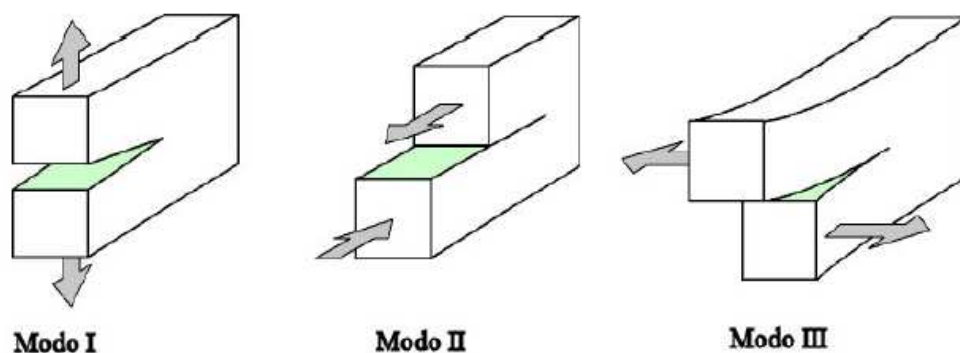


Fig. 2.2) Rappresentazione dei modi di apertura e propagazione di una cricca.

Nella meccanica della frattura l'apertura e la conseguente propagazione della cricca è classificata in base ai differenti modi di carico mostrati in figura (2.2). Nello specifico si distinguono:

- modo primo: in cui la forza agente è normale sia al piano della frattura che all'apice.
- modo secondo: in cui la forza agente sull'apice della frattura è parallela al piano della frattura e normale all'apice.
- modo terzo: in cui la forza agente sull'apice della frattura è parallela all'apice.

Partendo dall'equazione (2.2) arrestata al primo termine dello sviluppo in serie, si può definire il campo degli sforzi in maniera diversa per ognuno dei tre casi sopra citati i quali a loro volta rappresentano tre possibili modi di propagazione del fronte della cricca:

$$\begin{aligned}
 \text{Stato di sforzo d'apertura:} \quad \sigma_{ij}^{(I)} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}^{(I)}(\theta) \\
 \text{Stato di sforzo di scorrimento:} \quad \sigma_{ij}^{(II)} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}^{(II)}(\theta) \\
 \text{Stato di sforzo di lacerazione:} \quad \sigma_{ij}^{(III)} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}^{(III)}(\theta)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

In presenza di un modo misto, lo stato di sforzo totale è combinazione dei precedenti:

$$\text{stato di sforzo misto} \quad \sigma_{ij}^{totale} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \tag{2.4}$$

Nelle equazioni seguenti vengono riportate le espressioni che descrivono il campo degli sforzi completo, ovvero esplicitando la funzione di $f_{ij}(\theta)$ nell'intorno dell'apice della cricca caricata in modo I e in modo II.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} + \dots \\
 \sigma_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \dots \\
 \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dalle equazioni (2.1) e (2.3) si nota come tutti termini fuorché K si possono ricavare dal materiale o dalla geometria del problema, si può quindi ricondurre al solo SIF (*Stress Intensity Factor*) il parametro significativo per tutti i problemi con discontinuità, infatti se è noto K è noto anche il campo degli sforzi vicino all'apice della cricca.

Come criterio di verifica della resistenza si afferma che la frattura avviene quando i SIF superano un ben determinato valore critico K_{ic} denominato *tenacità alla frattura* ricavato sperimentalmente. Quando il fattore di intensificazione K raggiunge questo valore K_{ic} gli sforzi vicino all'apice della cricca sono troppo alti affinché il materiale li possa sopportare e si può arrivare al cedimento della struttura causato dall'avanzamento del fronte di cricca.

La tenacità alla frattura è dunque il più alto valore del fattore di intensificazione degli sforzi K che può essere sopportato da una qualunque struttura criccata realizzata con quel determinato materiale.

L'unità di misura della tenacità nel sistema internazionale è $MPa/m^{1/2}$.

2.2.2 LIMITAZIONI DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA LINEARE ELASTICA

Nell'apice della cricca si osserva come per $r \rightarrow 0$ (eq. 2.3) gli sforzi tenderebbero all'infinito. Nella realtà il materiale entra in campo plastico nell'intorno dell'apice; questa zona plasticizzata schematizzabile come un cilindro che corre lungo tutto il perimetro dell'apice, introduce una forte limitazione all'applicazione della MFLE (cade l'ipotesi di campo lineare elastico), la quale può essere applicata solo ai casi in cui questa zona non sia molto estesa.

La valutazione dello sforzo in caso di plasticizzazione marcata, darebbe risultati attendibili solo se non ci si troncasse ai primi termini dello sviluppo in serie dell'equazione 2.1.

Le prove sperimentali effettuate sono state condotte con carichi non eccessivamente alti avendo cura di non superare il limite di validità della teoria della meccanica della frattura lineare elastica, convenzionalmente definito per

ogni $r < 0.1a$ (dove r è il raggio del cilindro di plasticizzazione ed a è la semilunghezza della cricca).

2.3 VALUTAZIONE DEL FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI NEL CASO IN ESAME

Il presente studio verte ad analizzare gli effetti che la presenza di un fluido intrappolato nell'apertura creata dalla propagazione di una cricca genera sullo stato tensionale all'apice e lungo la cricca stessa. Lo schema del problema è quello di fig.2.2.

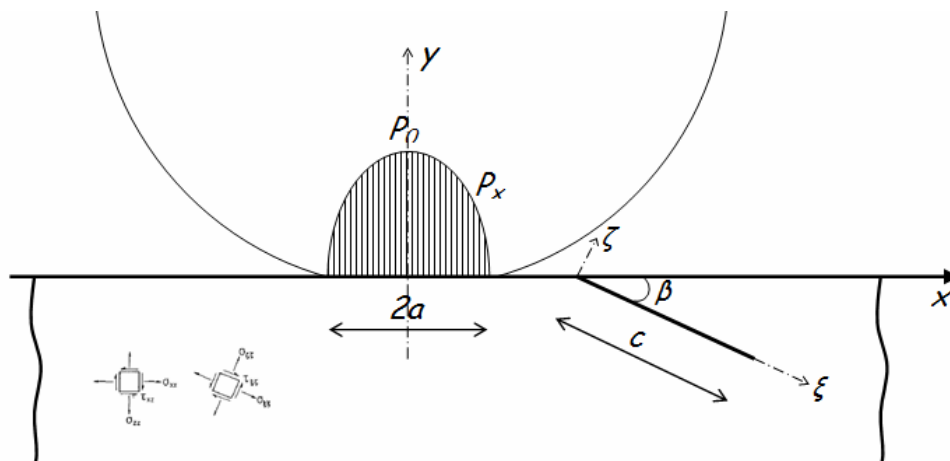


Fig. 2.2) Schematizzazione del problema affrontato: è visibile il carico hertziano, la giacitura della cricca, ed il sistema di riferimento assoluto e relativo adottato.

2.3.1 SISTEMA ANALIZZATO

Il caso analizzato è inerente a cricche affioranti su superfici piane sollecitate da un contatto volvente.

Alla rotazione antioraria del disco (fig 2.2) corrisponde una traslazione del piano lungo la direzione positiva delle ascisse. La distribuzione della pressione di contatto ' P_x ' è supposta essere di tipo Hertziano con pressione massima ' P_0 ' e lunghezza di contatto pari a ' $2a$ '. Si è avuta la necessità di un

sistema di riferimento assoluto e uno relativo orientato secondo la direzione di propagazione della discontinuità.

2.3.2 IPOTESI DI COMPORTAMENTO DEL FLUIDO E DELLA CRICCA

La difficoltà di previsione del comportamento del fluido interno alla cricca ha portato alla formulazione di 3 ipotesi differenti (fig 2.3):

- fluido sottoposto ad una pressione appena sufficiente alla sua insinuazione nella discontinuità (fig 2.3a);
- fluido sottoposto ad una pressione tale da esercitare uno sforzo sulle pareti della discontinuità che resta aperta in superficie (fig 2.3b);
- pressione esterna che tende a chiudere i lembi esterni della discontinuità lasciando il fluido intrappolato al suo interno. (fig 2.3c).

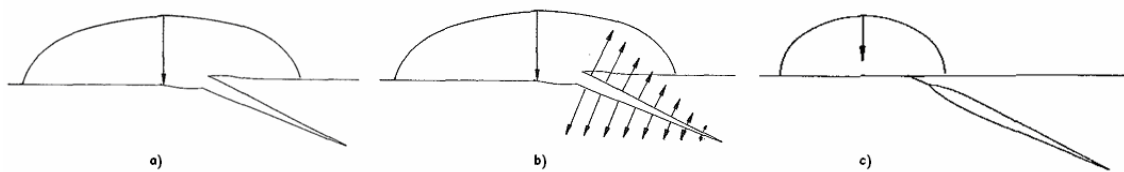


Figura 2.3) Schematizzazione delle ipotesi di comportamento del fluido e della cricca: caso a) pressione del fluido nulla e cricca aperta; caso b) fluido in pressione e cricca aperta; caso c) cricca chiusa.

2.4 EFFETTI DEL FLUIDO SULLA VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DELLE DISCONTINUITA'.

Studi in letteratura [3] sono unanimi nell'affermare che la presenza di un fluido tende ad accelerare il processo di propagazione della cricca rispetto al caso di contatto a secco a parità di carico, e questo anche nel caso di fluido inerte rispetto al materiale.

Nel caso bidimensionale, nel quale non si considera il modo terzo di apertura della cricca, fra le cause principali di questo aumento della velocità di propagazione vi sono l'effetto 'pumping' e l'effetto 'friction'.

2.4.1 FFETTO PUMPING

Detto anche ‘pompaggio’ consiste in uno sforzo aggiuntivo rispetto al carico di contatto, causato dalla pressione del fluido sulle pareti interne della cricca che tende quindi ad allontanarle aumentando il fattore di intensificazione degli sforzi KI (propagazione per apertura). Situazione visibile in figura 2.3b.

Per valutarne l’entità dal punto di vista analitico si è assunta come condizione al contorno che la pressione all’ingresso della cricca (bocca) sia pari al carico hertziano che istante per istante vi si affaccia [3], questa ipotesi si è assunta per tutti i casi sopracitati (fig 2.3), mentre per ciò che concerne la distribuzione della pressione all’interno della cricca si sono assunte le seguenti modellizzazioni (riassunte nello schema di fig. 2.6):

caso a) valore della pressione interna del fluido nulla per cui $P_{int}=0$.

caso b) pressione interna non nulla. Si sono ipotizzati a sua volta 3 diversi andamenti di distribuzione:

- caso b.1) uniforme (fig 2.4a);
- caso b.2) parabolica (fig 2.4b);
- caso b.3) lineare (fig 2.4c);

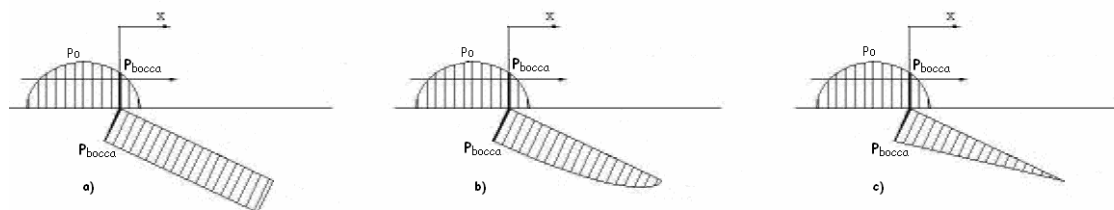


Figura 2.4) Modellizzazioni dell’andamento della pressione interna assunte nel caso di fluido in pressione e cricca aperta: a)costante; b)parabolica; c)lineare.

Caso c) fluido intrappolato nella discontinuità (fig. 2.5). In questo caso si ha un doppio comportamento della distribuzione di pressione: fintanto che la cricca rimane aperta in superficie si è imposta la pressione interna uniforme e pari a quella del carico hertziano che vi si affaccia; successivamente alla chiusura della cricca il valore di pressione è

calcolato in funzione della deformazione della sacca che si viene a creare [3].

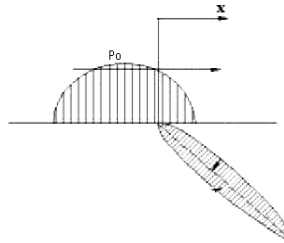


Figura 2.5) Visualizzazione del caso di cricca chiusa.

2.4.2 EFFETTO FRICTION

L'attrito lungo le pareti interne della cricca ostacola lo spostamento relativo fra le due superfici il che favorisce la diminuzione del fattore di intensificazione degli sforzi KII in quanto parte dell'energia generata dal carico esterno è utile a contrastare le forze d'attrito e solo l'eventuale parte rimanente si trasmette all'apice della cricca favorendo la propagazione per scorrimento.

La presenza di un fluido diminuisce il coefficiente d'attrito e favorisce lo scorrimento delle superfici e quindi la propagazione della cricca. I parametri che maggiormente influiscono sul fattore d'attrito sono la pressione e la viscosità del fluido, si è quindi studiato come questi influiscano sul valore di KII. Per fare ciò è stato necessario riportare gli sforzi lungo il sistema di riferimento relativo orientato secondo la giacitura della cricca, successivamente si è ipotizzato un attrito di tipo Coulombiano:

$$\text{Attrito:} \quad |\tau_{\xi\xi}| = +\mu |\sigma_{\xi\xi}| \quad (2.6)$$

- $\tau_{\xi\xi}$ rappresenta il valore limite dello sforzo di scorrimento oltre il quale si ha spostamento relativo fra le superfici.

- $\sigma_{\xi\xi}$ rappresenta lo sforzo di generato dalla pressione esterna di contatto riportato lungo la direzione normale alla superficie della cricca. Se di compressione contribuisce positivamente alla diminuzione di KII.
- μ è il coefficiente d'attrito inerente alle superfici interne della cricca.

La (2.6) rappresenta quindi la condizione limite; per evitare lo scorrimento dovrà essere:

$$\text{Condizione di stabilità} \quad |\tau_{\xi\xi}| < \mu |\sigma_{\xi\xi}| \quad (2.7)$$

Per la determinazione di KII dal punto di vista analitico si assumono nulli o comunque trascurabili gli sforzi tangenziali che il moto del fluido trasmette alle superfici della cricca, ciò corrisponde al caso in cui il fluido sia in quiete o al caso di cricche corte in genere $c < 4a$ (lunghezza cricca più corta del doppio della lunghezza di contatto) [19]. L'effetto della pressione si è tenuto conto unicamente per confrontare il caso analitico di cricca aperta o chiusa, perciò non si è reso necessario valutare la sua distribuzione.

Il valore di KII lo si è ricavato da:

$$\text{SIF scorrimento} \quad K_{II} = \tau_{\xi\xi} \sqrt{\pi a} \quad (2.8)$$

2.5 RISULTATI ANALITICI E COMMENTI

Nello schema di figura 2.6 si sono riassunte le modellizzazioni effettuate per lo studio analitico del problema:

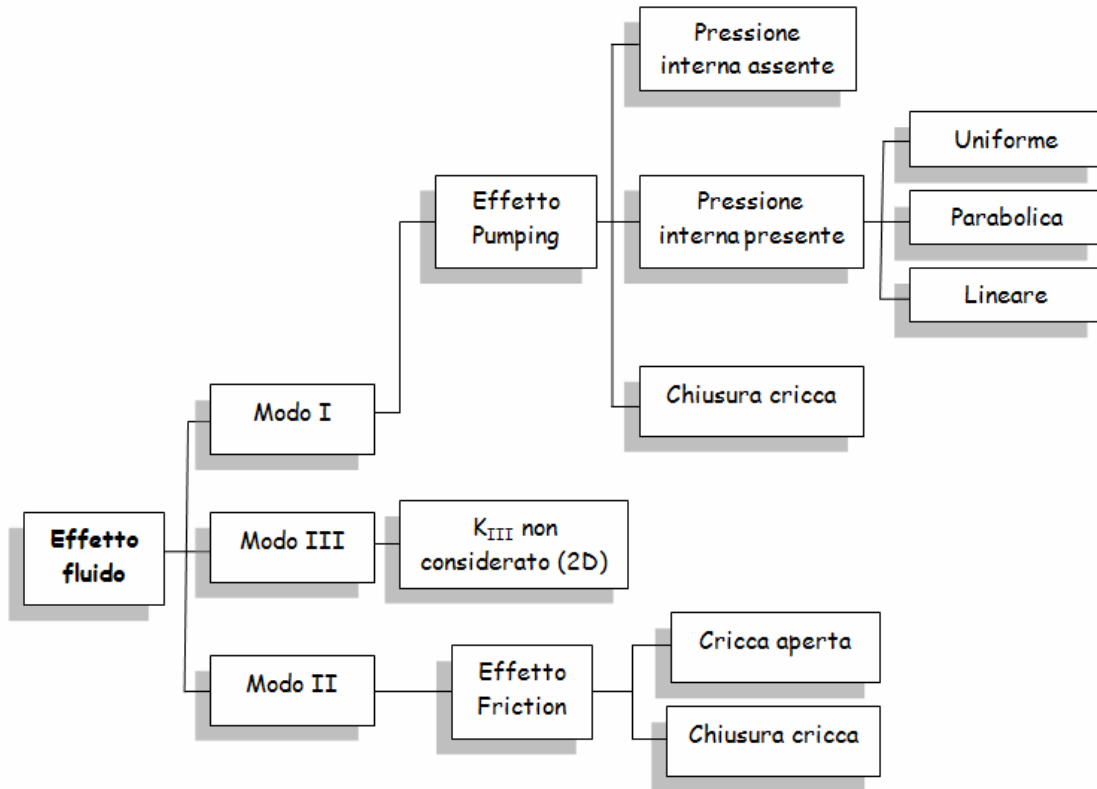


Figura 2.6) Schema delle modellizzazioni analitiche considerate.

2.5.1 MODO I

Caso a)

Pressione interna nulla

Nella condizione di pressione interna nulla il contributo del fluido relativo al modo I è trascurabile: $\Delta K_I < 0.005$ [20] si ha solo effetto friction.

Caso b)

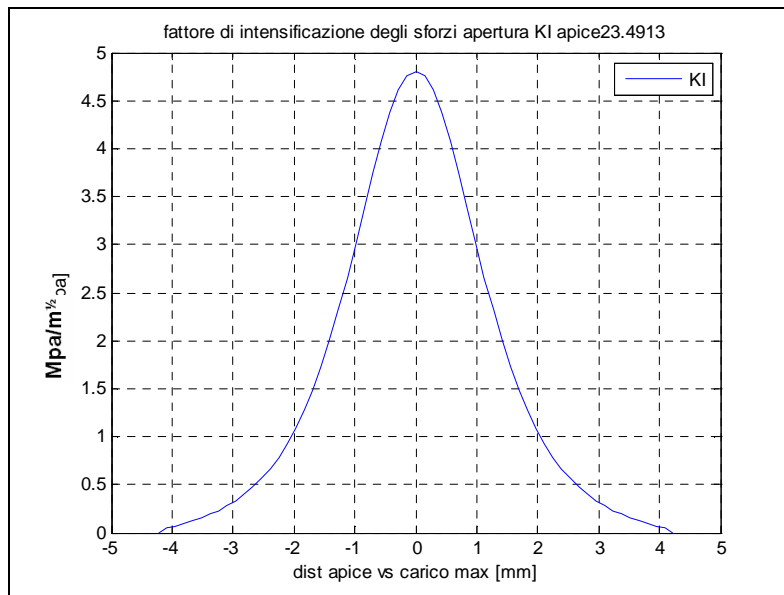
b.1) Pressione uniformemente distribuita

Figura 2.7) Andamento di KI per pressione interna alla cricca uniformemente distribuita.

L'applicazione di una distribuzione di pressione uniforme tra le facce della cricca provoca un effetto di apertura che si traduce in un picco di KI, che si ottiene quando il valore di pressione massima del fluido p_0 giunge in prossimità dell'imbocco della cricca.

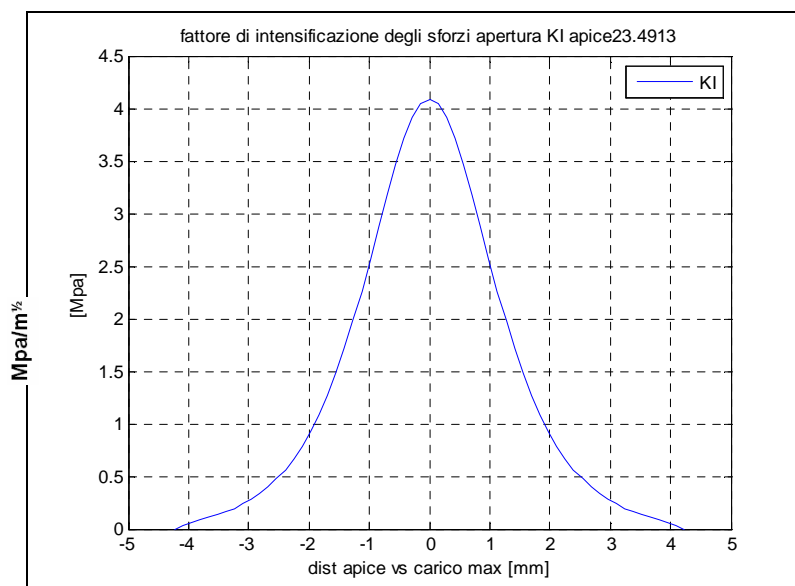
b.2) pressione con distribuzione parabolica

Figura 2.8) Andamento di KI per pressione interna alla cricca con distribuzione parabolica.

Una prima modifica per tener conto delle perdite di carico lungo le facce della cricca è stata effettuata considerando una distribuzione di pressioni parabolica [3], che decresce dalla bocca fino ad annullarsi all' apice (fig.2.4b). L'effetto di apertura risulta di minor entità rispetto al caso di distribuzione di pressione uniforme.

B.3) pressione con distribuzione lineare

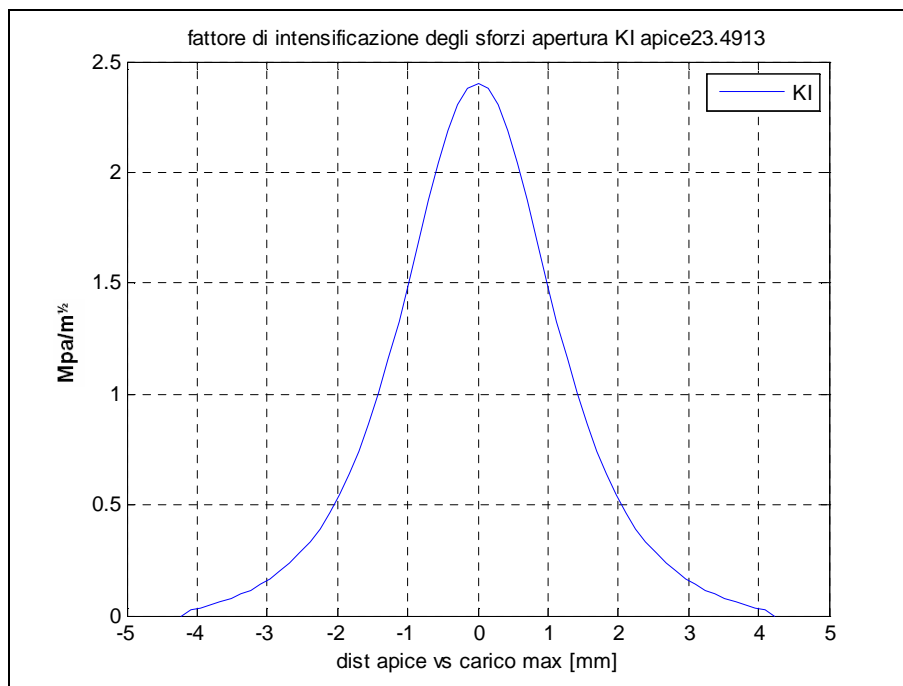


Figura 2.9) Andamento di KI per pressione interna alla cricca linearmente distribuita.

Si è infine analizzata la distribuzione di pressioni linearmente decrescente dalla bocca all'apice, distribuzione che, insieme a quella uniforme, trova maggior riscontri in letteratura[20]. I minori valori della pressione che si hanno in questo caso rispetto a quelli precedenti, soprattutto nella zona vicino all'apice, fanno sì che i valori di KI risultino ulteriormente attenuati, come si può osservare nella fig.2.9.

2.5.2 INFLUENZA DELL'ANGOLO DI INCLINAZIONE DELLA CRICCA SUL KI

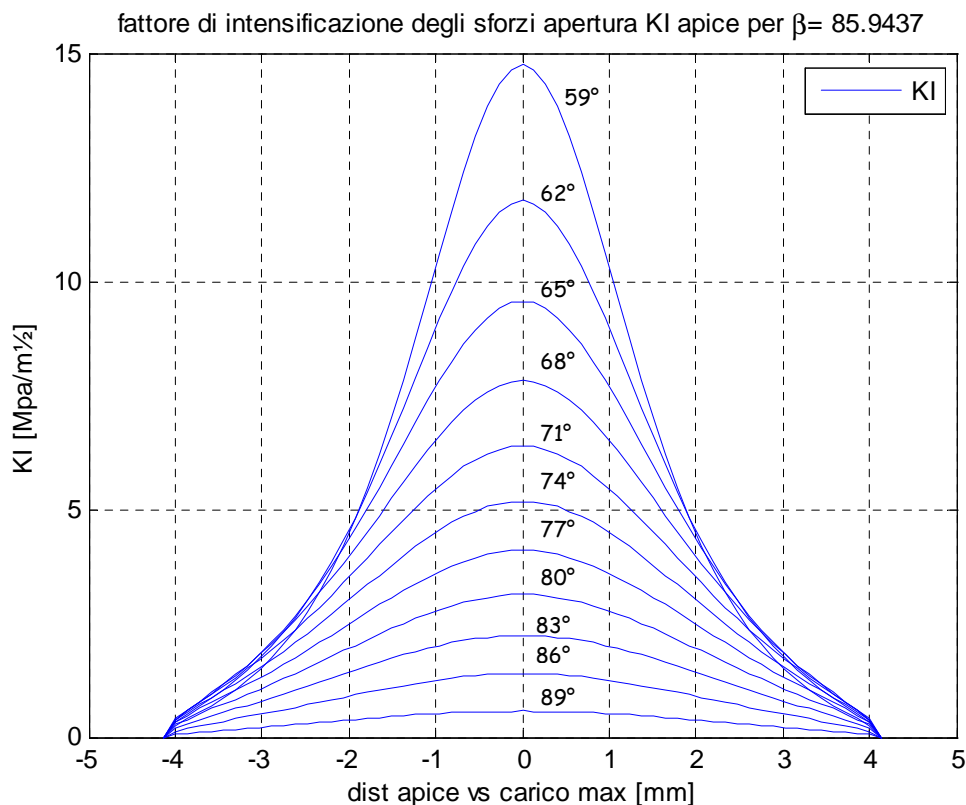


Figura 2.10) Andamento di KI diagrammato per differenti valori di inclinazione della cricca.

Il valore di KI in tutti e tre i casi varia sensibilmente a seconda dell' orientazione della cricca stessa: le cricche poco inclinate rispetto alla superficie di contatto subiscono maggiormente questo effetto, in quanto, a pari lunghezza, è minore la rigidità flessionale della parte di materiale che le sovrasta. KI presenta di conseguenza un andamento simile ad un' iperbole in funzione dell' angolo di inclinazione, come si evince dalla fig.2.10.

Il diagramma di fig. 2.11, che rappresenta i valori massimi di KI al variare di β , non si è fatto partire da zero sia perché un angolo nullo fisicamente corrisponderebbe a far coincidere la cricca stessa con la superficie del piano e soprattutto perché analiticamente per $\beta=0$ si ha un punto di discontinuità con valori di KI che tendono a valori infiniti il ché non ha riscontro nel caso reale.

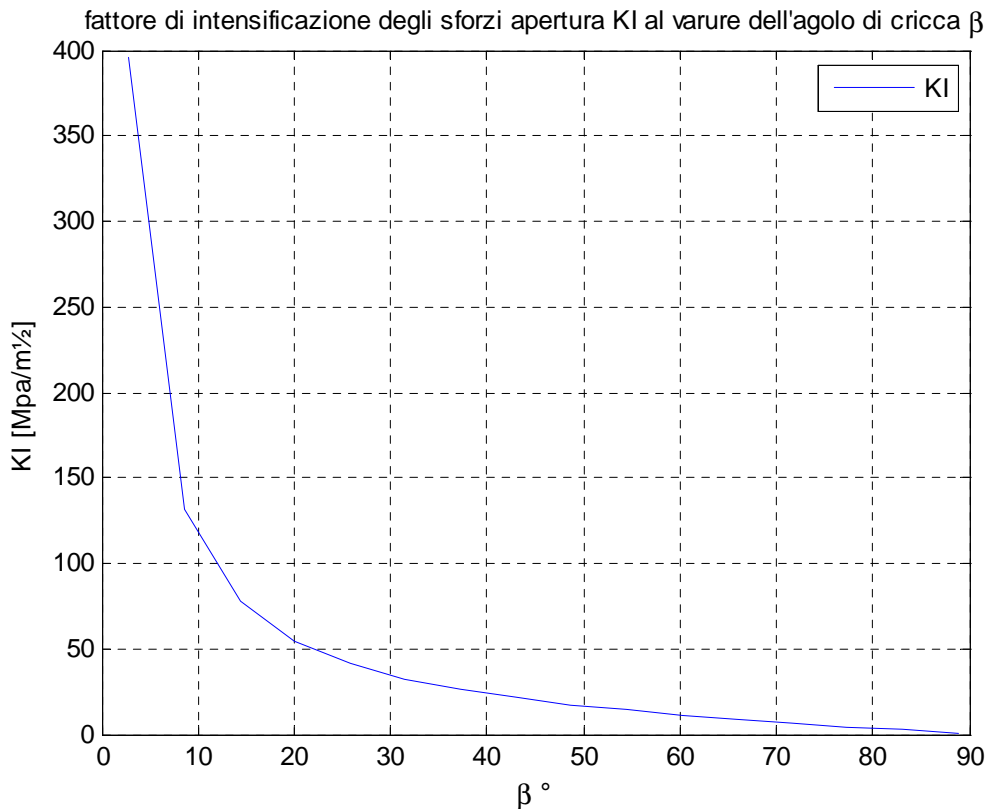


Figura 2.11) Andamento di KI massimo rispetto all'angolo di inclinazione della cricca.

Caso c)

Per il caso di chiusura della cricca con fluido intrappolato al suo interno non si sono trovati in letteratura studi analitici che descrivessero il comportamento in funzione del carico hertziano.

2.5.3 MODO II

Caso a) cricca aperta.

Come già visto KII è influenzato dalla componente di sforzo tangenziale $\tau_{\xi\xi}$ dovuta al contatto hertziano e non dal moto del fluido (ipotesi di fluido in quiete), fluido che invece acquista rilevanza ai fini della valutazione di KII grazie alla sua viscosità che tende ad abbassare il coefficiente d'attrito dei lembi destro (LD) e sinistro (LS) della cricca qualora la pressione non sia tale da non permetterne il contatto reciproco.

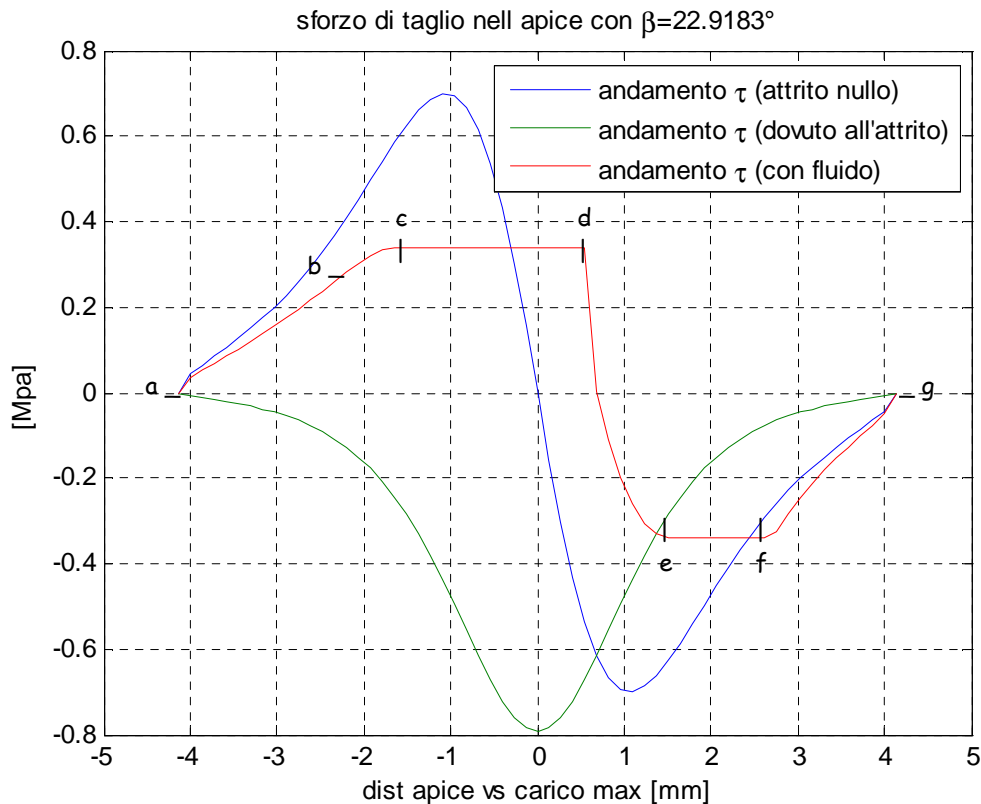


Figura 2.12) Andamento degli sforzi di taglio sulle superfici della cricca.

In fig. 2.12 in verde è rappresentato, al variare del carico, il valore già visto nell'eq.2.5:

$$\tau_{\xi\xi} = \mu\sigma_{\xi\xi} \quad (2.6)$$

Fisicamente è l'espressione della resistenza allo scorrimento relativo delle superfici della cricca. L'andamento è dovuto sia al coefficiente d'attrito che alla componente ortogonale (rispetto alla cricca) della pressione di contatto la quale ha il suo massimo nell'origine, ovvero in corrispondenza del passaggio del valore massimo del carico Hertziano, sempre negativa poiché di compressione.

In blu si ha l'andamento della tensione tangenziale nel caso di attrito nullo. Le superfici, non trovando ostacoli al loro scorrimento relativo, raggiungono i valori massimi di sforzo.

In rosso si ha l'andamento effettivo dello sforzo di scorrimento una volta che il fluido si è insinuato nella discontinuità; è ottenuta come differenza fra

l'energia disponibile trasmessa alle superfici della cricca dal contatto volvente (rappresentata dalla curva blu) e quella assorbita per vincere la forza di attrito (curva verde). Nel dettaglio:

Prima di a: sia il lembo di sinistra (LS) che quello di destra (LD) della cricca sono scarichi poiché non si è ancora in prossimità della superficie di contatto (fig. 2.13).

a→b lo sforzo normale alla superficie $\sigma_{\zeta\zeta}$ moltiplicato per il coefficiente d'attrito è minore rispetto alla tensione tangenziale, per cui si ha scorrimento del LS rispetto al LD, sui lembi agiscono sforzi tangenziali di segno opposto dovuti ad un differente modulo della pressione hertziana agente su essi.

b→c aumenta il modulo di $\sigma_{\zeta\zeta}$ e di conseguenza la forza d'attrito che impedisce lo scorrimento relativo fra i lembi. Poiché il coefficiente d'attrito non è costante lungo la cricca si inizieranno ad avere solo alcune zone in cui lo scorrimento è impedito mentre nelle restanti è ancora permesso.

c→d la forza d'attrito ha raggiunto valori tali per cui è sempre maggiore della forza di scorrimento. Lo spostamento relativo fra i lembi è impedito in tutti i punti della cricca. È interessante osservare che il valore di sforzo tangenziale massimo si mantiene anche dopo che il carico massimo ha attraversato l'imbocco della curva poiché l'attrito, se da un lato impedisce lo scorrimento delle superfici verso valori di $\tau_{\xi\zeta}$ crescenti, dall'altro ne impedisce il rilassamento quando si ha l'inversione delle direzioni di sollecitazione.

d→e il carico massimo ha superato l'apertura della cricca, il valore di $\sigma_{\zeta\zeta}$ diminuisce e le superfici ritornano a scorrere in alcuni punti, da qui in avanti la curva cambia di segno poiché si ha l'inversione della direzione degli sforzi tangenziali sui lembi.

e→f una volta che il carico massimo hertziano ha superato la bocca della cricca, la pressione che agiva sul fluido intrappolato inizia a diminuire e il fluido tende a fuoriuscire, ciò fa sì che in taluni punti della superficie interna venga a mancare l'effetto lubrificante di conseguenza tornerà ad agire il coefficiente d'attrito radente delle superfici 'a secco', (più gravoso) e quindi può capitare che le superfici siano di nuovo impedito nel loro scorrimento relativo. Questo può

anche non verificarsi e nel caso si avrebbe solo un punto di minimo e non un tratto a τ costante.

$f \rightarrow g$ la forza d'attrito tende a diminuire così come lo scorrimento e l'azione tangenziale sul LS e poi sul LD, ciò prosegue fino a quando la superficie di contatto del carico si è allontanata dall'imbocco della cricca e quindi fino a riportarci nella situazione iniziale di LS e LD scarichi.

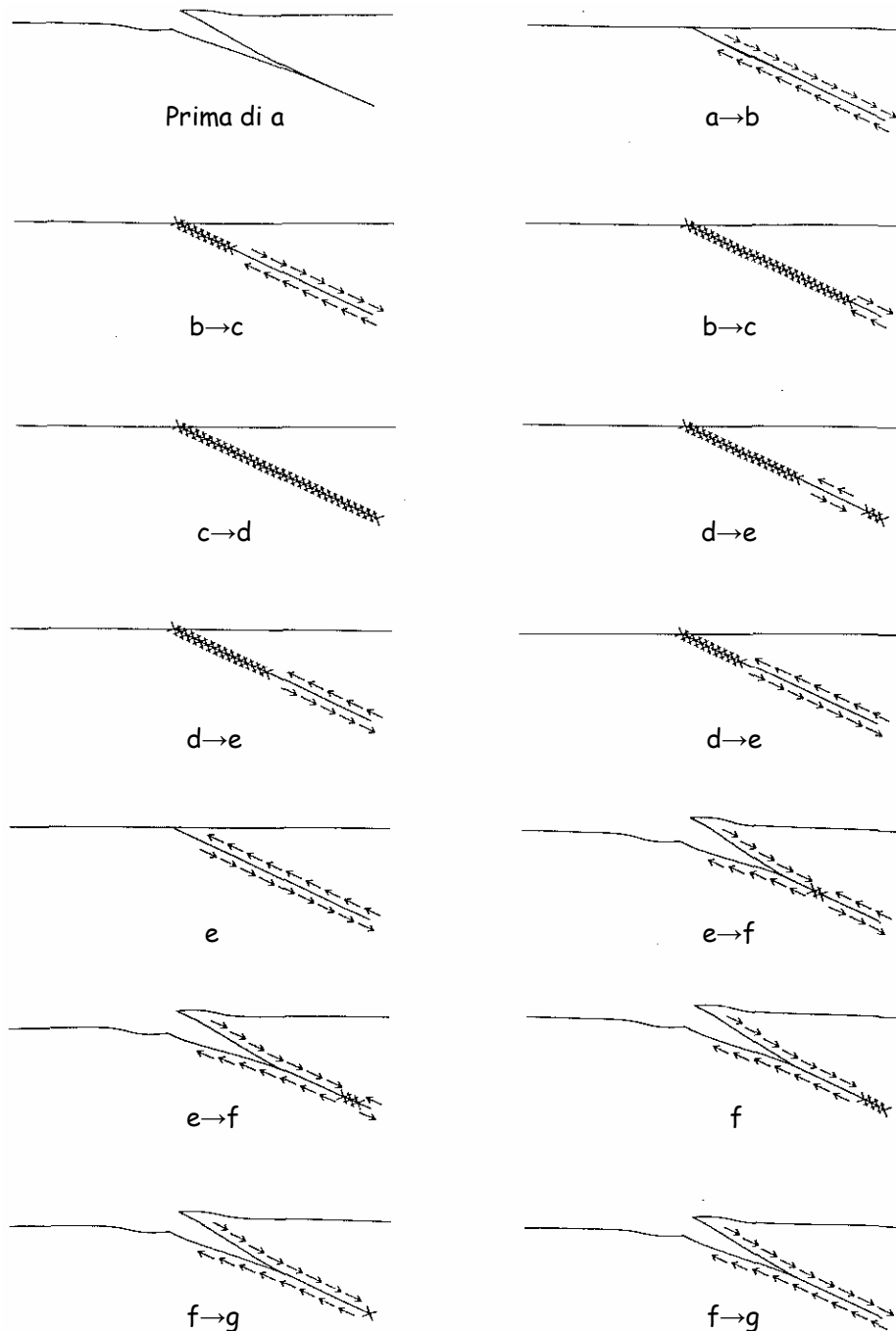


Figura 2.13) Andamento degli sforzi di taglio sui lembi della cricca durante il passaggio del carico hertziano.

2.5.4 INFLUENZA DELLA VARIAZIONE DELL'ANGOLO DI INCLINAZIONE DELLA CRICCA SUL KII

Anche in questo caso si è analizzato come la variazione dell'angolo di incidenza influenzi il valore di $\tau_{\xi\xi}$ e quindi di KII che ricordiamo essere pari a (eq. 2.8):

$$K_{II} = \tau_{\xi\xi} \sqrt{\pi a}$$

Nella 2.8 si è assunto un fattore di forma unitario [21].

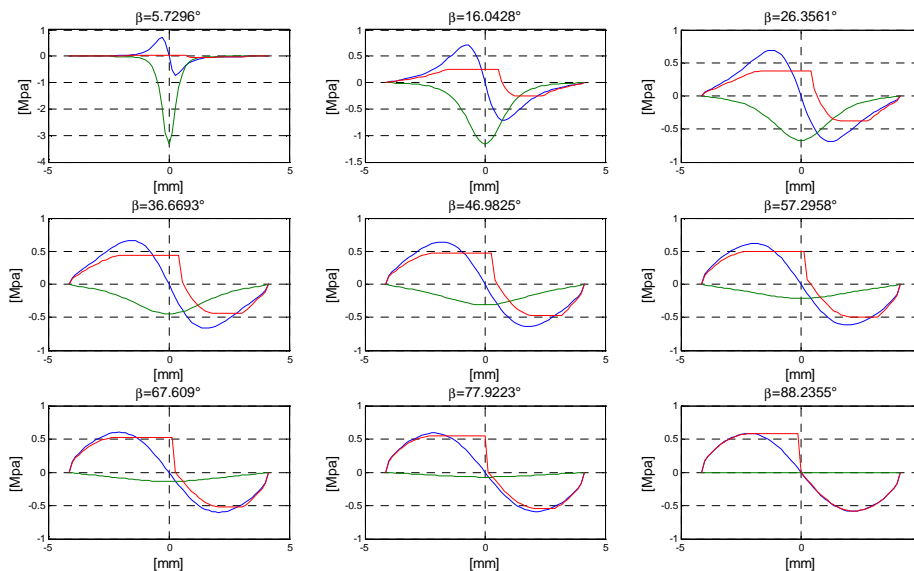


Figura 2.14) Andamento degli sforzi di taglio al variare dell'inclinazione della cricca rispetto al piano.

Dalla fig 2.14 si evince che, al contrario di KI, i valori massimi di KII si raggiungono per $\beta \rightarrow 90^\circ$, è questa la giacitura che minimizza l'effetto di attrito difatti la curva $\tau_{\xi\xi}$ per valori vicini all'angolo retto tende a coincidere con la curva di sforzo tangenziale in assenza di attrito.

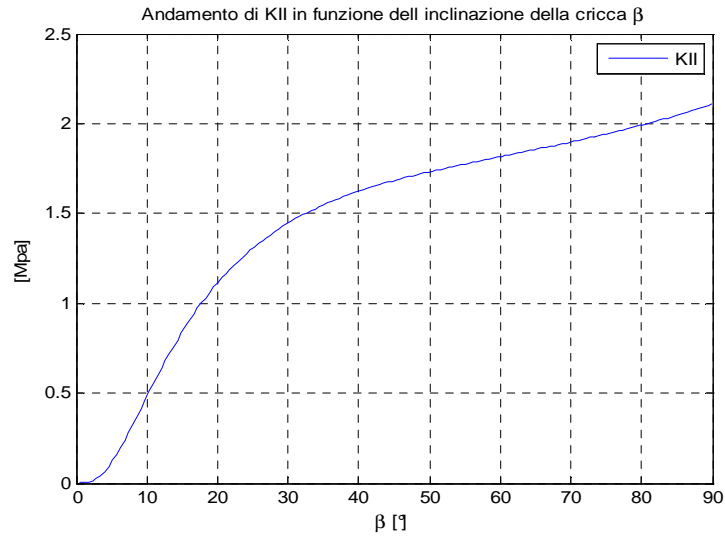


Figura 2.15) Andamento di KII massimo al variare dell'inclinazione della cricca rispetto al piano.

Il grafico di figura 2.15 conferma come il valore massimo di KII si ottenga in corrispondenza dell'angolo retto ovvero dove l'effetto d'attrito è meno sensibile.

2.5.6 INFLUENZA DEL COEFFICIENTE D'ATTRITO SUL VALORE DI KII

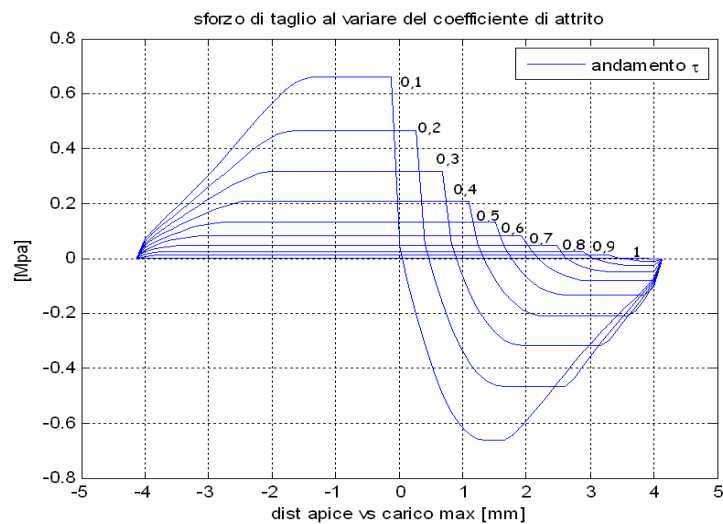


Figura 2.16) Andamento dello sforzo di taglio al variare del coefficiente.

All'aumentare del coefficiente d'attrito diminuisce $\tau_{\xi\xi}$ di conseguenza diminuisce anche KII. Al valore limite di $\mu=1$ nessuno slittamento delle superfici della cricca è permesso quindi non si ha scorrimento e di conseguenza KII=0. Per una valutazione di come la viscosità influenzi il coefficiente d'attrito si rimanda al capitolo 5.

Capitolo III

Analisi fotoelastiche di contatto Hertziano

3.1 INTRODUZIONE

Nel presente capitolo si è valutata la validità della teoria di contatto Hertziano nel descrivere l'andamento sperimentale delle tensioni nei casi di contatto disco su disco e disco su piano valutati in fotoelasticità, sia su provini di polycarbonato che sul modello sandwich realizzato.

L'applicabilità della soluzione si è confrontata per i casi di carico statico e carico dinamico sia in assenza che in presenza di fluido a diversa viscosità.

Per capire ed interpretare i dati ottenuti sperimentalmente si sono ripresi alcuni aspetti teorici della fotoelasticità e del fenomeno della birifrangenza e si sono ricavate le equazioni che legano gli indici di rifrazione alla differenza delle tensioni principali fino ad ottenere l'equazione fondamentale della fotoelasticità che lega la differenza degli sforzi principali alla costante fotoelastica.

3.2 FOTOELASTICITÀ

È un metodo di analisi sperimentale delle tensioni di tipo ottico e di campo, ovvero fornisce una rappresentazione di tutta una zona sottoposta ad indagine consentendo di fare rapidamente confronti fra le condizioni in punti differenti.

Pur non risentendo particolarmente delle condizioni d'ambiente, rientra nei metodi d'indagine da laboratorio in quanto sia la strumentazione che l'oggetto di misura (un modello del reale) ne impedisce spesso, ma non sempre, la sua applicabilità direttamente sul campo,.

La fotoelasticità si basa sul fenomeno della birifrangenza ottica osservabile in alcuni materiali cristallini trasparenti alla luce, nei quali un raggio luminoso incidente (n_i) si sdoppia in percorsi distinti (fig. 3.1) :

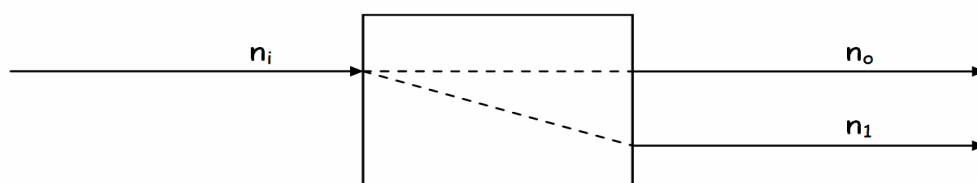


Figura 3.1) Schematizzazione del fenomeno della birifrangenza ottica.

Raggio ordinario n_0 e straordinario n_1 avranno, in uscita dal cristallo, assi di polarizzazione normali fra loro e due differenti velocità di propagazione che produrranno una differenza di fase relativa.

3.2.1 CARATTERISTICHE DEL SISTEMA DI MISURA:

La *sensibilità di soglia* rappresenta la minima entità misurabile da un determinato strumento. Nel caso di analisi in luce monocromatica questo limite è dato dalla costante fotoelastica del materiale, in luce bianca è invece possibile valutare anche frazioni di soglia grazie all'estinzione ciclica di determinate lunghezza d'onda e quindi aumentare l'accuratezza della misura [22].

Per le valutazioni sperimentali effettuate è risultato sufficiente la sensibilità offerta dalla luce monocromatica pari a 7 MPa per il polycarbonato.

Il *limite d'applicabilità*, definito come il massimo valore della grandezza misurabile, non è dato dal sistema d'acquisizione ma dal limite elastico del materiale corrispondente, per il polycarbonato adottato, a circa 90 N/mm².

3.2.2 CARATTERISTICHE DELL'EMISSIONE LUMINOSA:

Luce diffusa, ovvero distribuita uniformemente in un determinato campo, nel polariscopio utilizzato, la diffusione è permessa dalla presenza di un vetro opalino a monte della sorgente.

Luce monocromatica, quindi contraddistinta da una sola lunghezza d'onda, prodotta nel caso in esame tramite una lampada al sodio.

Luce polarizzata, cioè avente giacitura del vettore origine della vibrazione luminosa soggetta a qualche vincolo, i più diffusi danno origine a:

- polarizzazione lineare (o piana) nella quale la vibrazione è vincolata giacere lungo una superficie detta piano di polarizzazione ed a trasmettersi lungo l'asse di polarizzazione;
- polarizzazione ellittica dove l'asse di polarizzazione ruota nel tempo descrivendo un ellisse;

- polarizzazione circolare, nella quale l'asse di polarizzazione ruota nel tempo descrivendo una circonferenza

La polarizzazione è ottenuta tramite filtri polaroid costituiti da lunghe catene di idrocarburi disposti lungo una direzione preferenziale per stiramento e immersi in una soluzione iodica.

La configurazione adottata è di polarizzazione circolare (fig 3.2) ottenuta tramite coppie filtro+lamina a quarto d'onda affacciate che generano uno sfasamento fra i raggi luminosi di $\pi/2$ (la configurazione è mostrata nell'allegato relativo al polariscopio). La polarizzazione circolare (come anche quella ellittica) grazie all'asse di polarizzazione mobile permette di evitare la situazione di parallelismo con il sistema di riferimento degli sforzi e quindi di consentire l'annullamento dell'intensità dovuto alle isocline, come si vedrà in seguito.

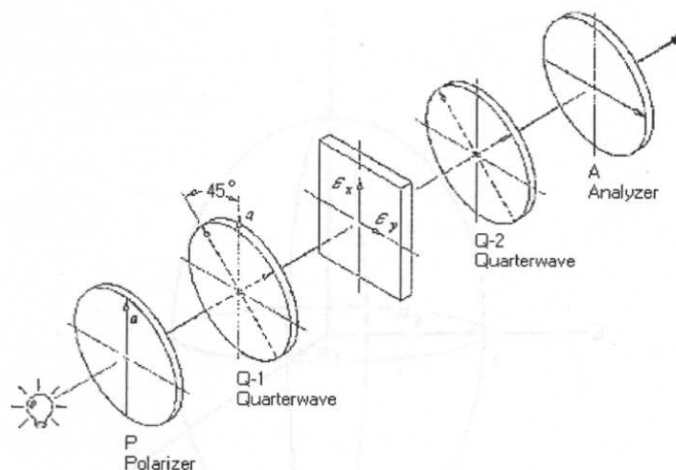


Figura 3.2) Schema di polarizzazione circolare.

3.3 EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA FOTOELASTICITÀ

Nei materiali birifrangenti sotto carico l'isotropia ottica si ha solo in assenza di carichi esterni, se al contrario si è in presenza di uno sforzo esterno la luce non si propaga con uguale velocità in tutte le direzioni, questa variazione delle velocità comporta la variazione degli indici di rifrazione n rappresentabili per mezzo di un ellissoide avente gli assi assimilabili agli indici di rifrazione principali nel punto considerato:

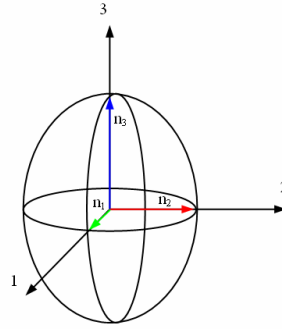


Figura 3.3) Ellissoide degli indici di rifrazione.

Maxwell, nel 1853, studiando la relazione esistente tra gli indici di rifrazione e gli sforzi riuscì a formulare le seguenti leggi:

- gli assi principali dell'ellissoide degli indici di rifrazione coincidono con gli assi degli sforzi principali;
- le variazioni degli indici di rifrazione sono legate alle variazioni degli sforzi principali da relazioni lineari:

$$\text{equazioni di Maxwell:} \quad \begin{cases} n_1 - n_0 = c_1 \sigma_1 + c_2 (\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 - n_0 = c_1 \sigma_2 + c_2 (\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_3 - n_0 = c_1 \sigma_3 + c_2 (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

Dove:

n_0 è l'indice di rifrazione del materiale scarico.

c_1 e c_2 sono coefficienti stress-ottici costanti.

σ_1 , σ_2 e σ_3 sforzi principali.

In uno stato piano di sforzo le tensioni nello spessore si possono trascurare, σ_{III} è nullo e le equazioni diventano:

$$\text{equazioni caso piano} \quad \begin{cases} n_1 - n_0 = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 \\ n_2 - n_0 = c_1 \sigma_2 + c_2 \sigma_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Un'ulteriore semplificazione del sistema di equazioni consiste nell'eliminazione del termine n_0 ricavando per sottrazione le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} n_2 - n_1 = (c_2 - c_1)(\sigma_1 - \sigma_2) = c(\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_3 - n_2 = (c_2 - c_1)(\sigma_2 - \sigma_3) = c(\sigma_2 - \sigma_3) \\ n_1 - n_2 = (c_2 - c_1)(\sigma_3 - \sigma_1) = c(\sigma_3 - \sigma_1) \end{cases} \quad (3.3)$$

Un materiale fotoelastico bidimensionale presenta una differenza fra gli indici di rifrazione proporzionale alla differenza tra gli sforzi principali, per un modello di spessore h il ritardo di fase tra le due componenti della birifrangenza vale:

$$\text{Ritardo di fase} \quad \Delta_{12} = \frac{2\pi h}{\lambda} C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.4)$$

Ponendo $N = \frac{\Delta}{2\pi}$ e $f_\sigma = \frac{\lambda}{C}$ il ritardo di fase si può esprimere come:

$$\text{Relazione fondamentale} \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (3.5)$$

N è il numero di frangia, mentre f_σ viene definita *costante fotoelastica del materiale*, entrambi i valori determinabili al polariscopio (A.A).

3.3.1 INTENSITÀ LUMINOSA

L'intensità luminosa I emergente da un polariscopio risulta:

$$\text{intensità luminosa} \quad I = K \text{sen}^2(2\alpha) \cdot \text{sen}^2 \frac{\Delta}{2} \quad (3.6)$$

Esistono quindi 2 termini di annullamento dell'intensità :

$$- \quad \text{sen}(2\alpha) = 0 \rightarrow 2\alpha = 0 + n\pi \rightarrow \alpha = 0 + n\frac{\pi}{2} \quad (3.7)$$

ovvero si ha annullamento quando gli assi dei polaroid d'ingresso e di uscita sono paralleli agli assi delle tensioni principali. L'intensità sarà massima per $\text{sen}(2\alpha) = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$. Le linee ottenute dall'estinzione di questo termine vengono dette *isocline* e, non dipendendo dalla lunghezza d'onda λ , si possono ottenere indifferentemente in luce bianca o in monocromatica.

$$- \quad \text{sen}\frac{\Delta}{2} = 0 \rightarrow \frac{\Delta}{2} = 0 + n\pi \rightarrow \Delta = 0 + 2n\pi \quad (3.8)$$

Sostituendo in questa relazione l'equazione (3.4) si ottiene:

$$\frac{2\pi h}{\lambda} c(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 + 2n\pi \rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2) = n \frac{\lambda}{hc} = na \quad (3.9)$$

Relazione che rappresenta l'annullamento dell'intensità dovuto alla differenza delle tensioni principali. Le linee ottenute dall'estinzione di questo termine sono dette isocromatiche per luce bianca e isointense per luce monocromatica. Sono termini dipendenti dal ritardo spaziale tra le due componenti della birifrangenza, per ogni determinato ritardo si avrà estinzione completa del colore caratterizzato da una lunghezza d'onda λ pari (o sottomultipla intera) al ritardo stesso. In luce bianca si osserverà, quindi, un colore ottenuto come complementare rispetto ai colore estinto, e la sequenza di colori osservati, seguendo lo stesso ordine presente nello spettro dei colori puri, risulta ciclica.

In luce monocromatica si possono avere solo condizioni di estinzione o ripristino di frange intere, in termini di misurazione ciò corrisponde ad una diminuzione di sensibilità della misura.

In luce polarizzata piana i due effetti si sovrappongono, in luce polarizzata circolarmente invece non ha luogo l'estinzione per condizioni di parallelismo con gli assi delle tensioni principali (eq. 3.7).

3.4 VERIFICA DELL'IPOTESI DI CONTATTO HERTZIANO SU PROVINO CIRCOLARE E PIANO.

Le ipotesi di contatto Hertziano si sono verificate sovrapponendo la soluzione analitica mostrata al capitolo I e implementata in ambiente Matlab[®] con le acquisizioni fotoelastiche a parità di carico e di dimensioni del provino, i risultati ottenuti sono mostrati nelle seguenti figure:

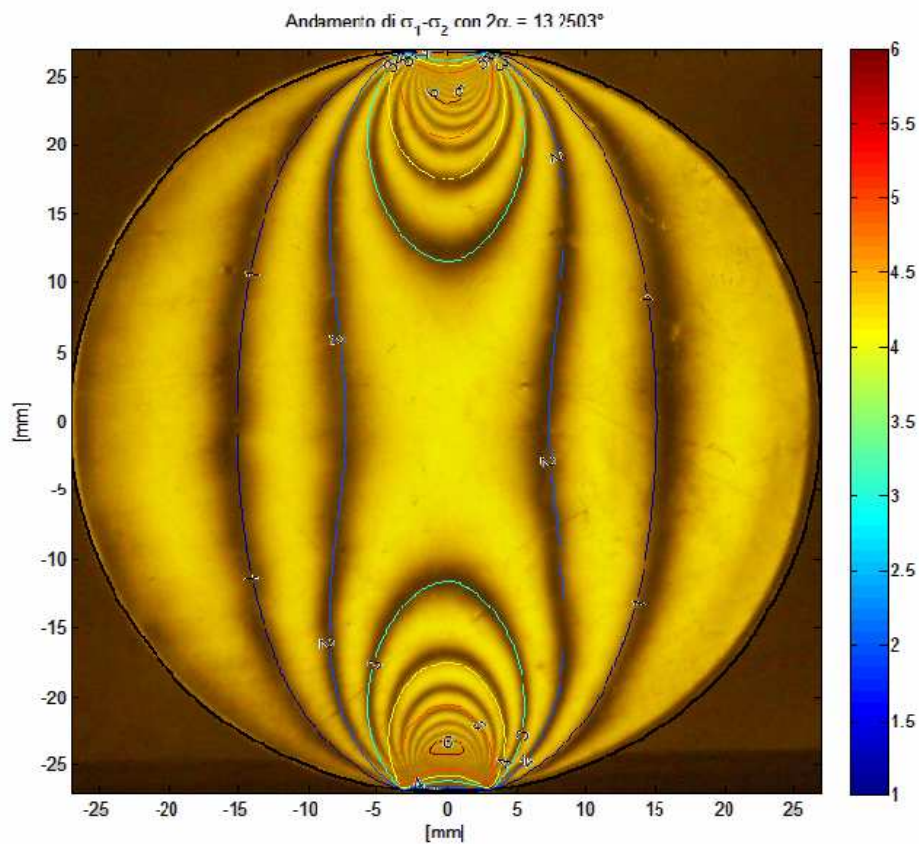


Figura 3.4) Soluzione analitica di contatto Hertziano a confronto con quella sperimentale fotoelastica.

$F=480,5N$, $d=54mm$, $h=5mm$, $a=7Mpa$, policarbonato.

Oltre ad una valutazione visiva mostrata dalla sovrapposizione della soluzione di contatto Hertziano con l'analisi fotoelastica, si sono confrontati quantitativamente le differenze massime delle tensioni principali ricavate analiticamente rispetto ai valori ottenuti sperimentalmente applicando la relazione fondamentale in fotoelasticità:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = n \cdot a \quad (3.10)$$

n numero di frange;

$a = f \lambda / h$ costante fotoelastica, per il policarbonato 7 MPa.

I risultati sono visibili nelle seguenti tabelle:

Tabella 3.1) Contatto disco su disco: confronto quantitativo sulla differenza degli stati di sforzo massimi.

CONTATTO DISCO SU DISCO											
CARICO [N]	30,5	80,5	130,5	180,5	230,5	280,5	330,5	380,5	430,5	480,5	530,5
Max ($\sigma_1 - \sigma_2$) [Mpa] analitici	15	28	40	50	58	68	76	84	94	98	104
Max ($\sigma_1 - \sigma_2$) [Mpa] sperim.	21 (3)	35 (5)	49 (7)	56 (8)	63 (9)	70 (10)	70 (10)	84 (12)	84 (12)	91 (13)	98 (14)
Differenza	6	7	9	6	5	2	6	0	10	7	6
Differenza media	5,8 < 7 Errore compreso nella risoluzione										

Lo stesso confronto, visivo e quantitativo, si è eseguito per il caso di contatto di tipo disco su piano figura 3.5 e tabella 3.2. Si è invece tralasciato il confronto con il caso di carico concentrato poiché, oltre ad una complessa realizzazione trova anche scarsa corrispondenza nelle applicazioni reali.

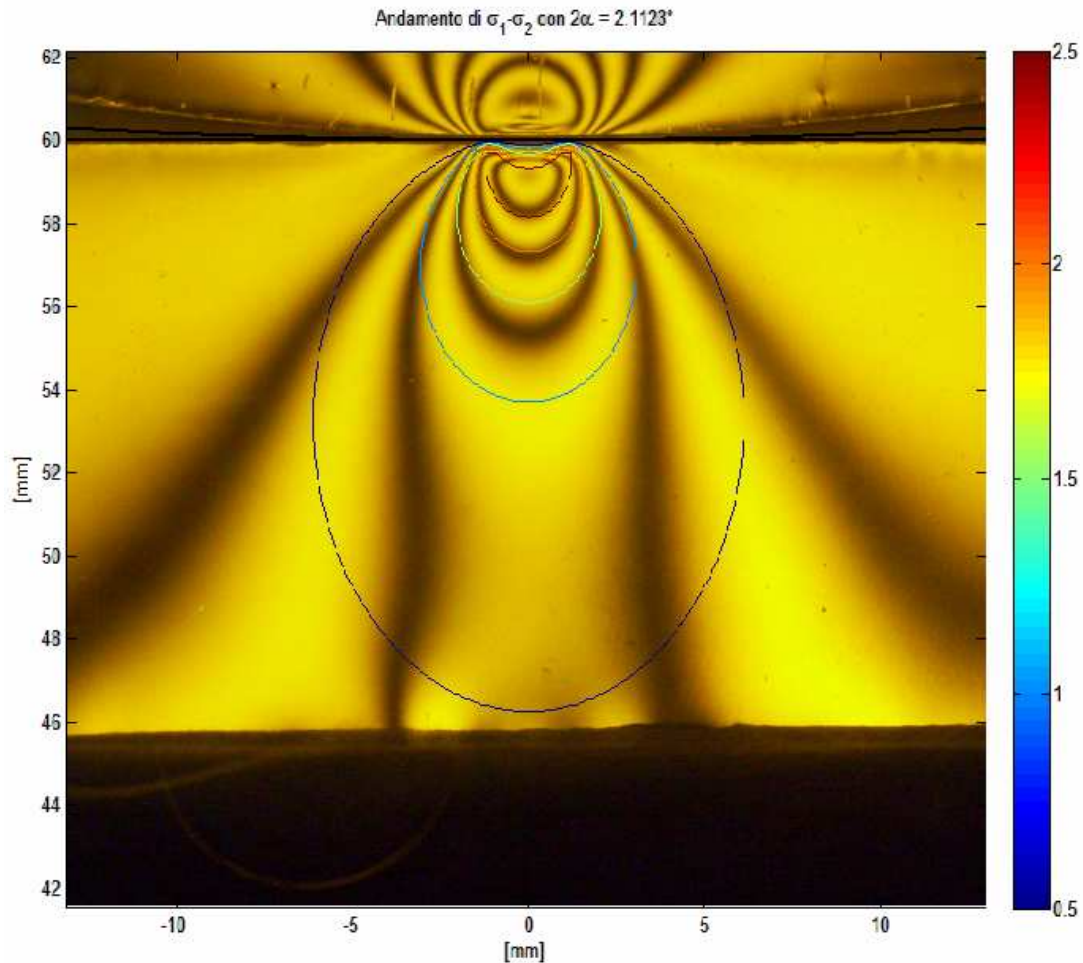


Figura 3.5) Soluzione analitica di contatto Hertziano a confronto con quella sperimentale fotoelastica.
 $F=530,5N$, $l=300mm$, $h=65mm$, $a=7Mpa$, policarbonato.

Tabella 3.2) Contatto disco su piano: confronto quantitativo sulla differenza degli stati di sforzo massimi.

CONTATTO DISCO SU PIANO											
CARICO [N]	30,5	80,5	130,5	180,5	230,5	280,5	330,5	380,5	430,5	480,5	530,5
Max ($\sigma_1 - \sigma_2$) [Mpa] analitici	6	12	16	21	24	28	31	34	37	40	42
Max ($\sigma_1 - \sigma_2$) [Mpa] sperim.	7 (1)	14 (2)	21 (3)	21 (3)	28 (4)	28 (4)	35 (5)	35 (5)	35 (5)	42 (6)	42 (6)
Differenza	1	2	5	0	4	0	4	1	2	2	0
Differenza media	$2 < 7$ Errore compreso nella risoluzione										

Dalle tabelle si nota come solo nel caso disco su disco si abbiano 2 valori che differiscono di una quantità superiore alla risoluzione offerta dalla natura fotoelastica del materiale (costante fotoelastica), per cui si può affermare che il

valore degli sforzi presenti nel caso sperimentale siano ben approssimati dall'ipotesi di contatto Hertziano.

Per ciò che concerne invece la loro distribuzione si nota un differente andamento della differenza delle tensioni principali nel caso di contatto disco su piano per le frange di ordine più basso, in particolare quelle visualizzate sperimentalmente tendendo ad aprirsi ed allungarsi rispetto all'andamento suggerito analiticamente, ciò è dovuto allo sforzo offerto dalla reazione impressa dal vincolo d'appoggio alla base. L'influenza di questo contributo può essere limitata aumentando l'altezza del provino, ma oltre un certo valore si è limitati sia dalla struttura del telaio utilizzato che dal rischio di inflessione del modello lungo il piano verticale. Come mostrano le immagini questo contributo non arriva ad influenzare le frange prossime alla superficie e quindi possiamo considerarlo trascurabile per le analisi su cricche che non raggiungano profondità elevate ($a > 10\text{mm}$).

3.5 VERIFICA DELL'IPOTESI DI CONTATTO HERTZIANO SUL MODELLO SPERIMENTALE.

Si è reso necessario una verifica del contatto Hertziano direttamente sul modello, poiché quest'ultimo presenta caratteristiche differenti rispetto ai provini piani e circolari per i quali la soluzione analitica Hertziana ha dato risultati accettabili, in particolare il modello:

- è un elemento sandwich nel quale sono presenti differenti rigidità le quali influenzano la distribuzione dei carichi. Mentre Policarbonato e polimetilmetacrilato hanno effettivamente un modulo elastico molto simile (2300N/mm^2 vs 2400N/mm^2), le caratteristiche del collante non sono note e quindi, senza una misura diretta sul componente, è difficile valutare se e quanto ciò influisca sulla distribuzione dei carichi e delle tensioni;

- è costituito da 2 starti di polimetilmetacrilato che alterano il segnale fotoelastico del policarbonato, si ritiene quindi necessario valutare se le misurazioni rientrino ugualmente nel campo di accettabilità.
- permette valutazioni dinamiche, ovvero di valutare se l'andamento delle tensioni risente dello spostamento del carico.
- permette valutazioni di contatto viscoso e quindi di valutare se la distribuzione delle tensioni risente della presenza del fluido sia per contatti statici che dinamici.

3.5.1 ANALISI DEL MODELLO SCARICO

Nelle figure 3.6 e 3.7 è visibile il modello scarico visto al polariscopio rispettivamente in luce bianca e monocromatica. Si nota la presenza di sfumature di fondo che vanno dal giallo al viola che, nella scala dello spettro dei colori (fig.3.8-b), evidenzia la presenza di tensioni residue che vanno da 0,6 a 0,9 il valore massimo della frangia cui appartengono, che nel migliore dei casi è la prima, ma anche in questa eventualità la misura delle tensioni si discosta da quella reale di un valore compreso fra 4 e 6,5 MPa (tab 3.8-a).

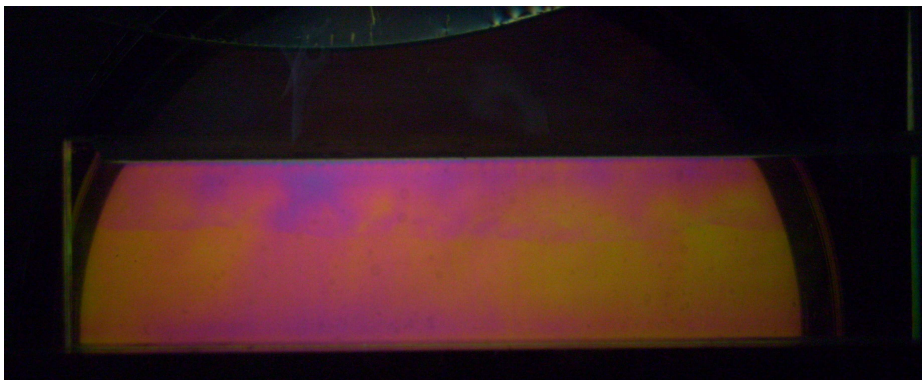


Figura 3.6) Visualizzazione al polariscopio in luce bianca del primo modello realizzato.

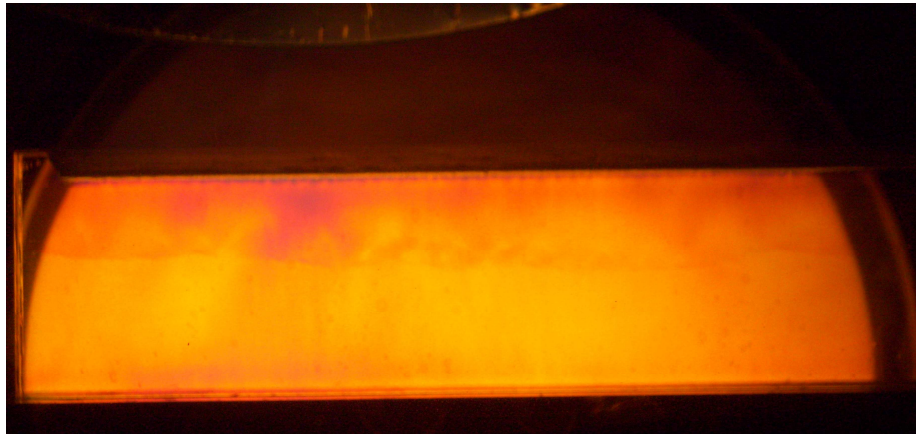


Figura 3.7) Visualizzazione al polariscopio in luce monocromatica del primo modello.

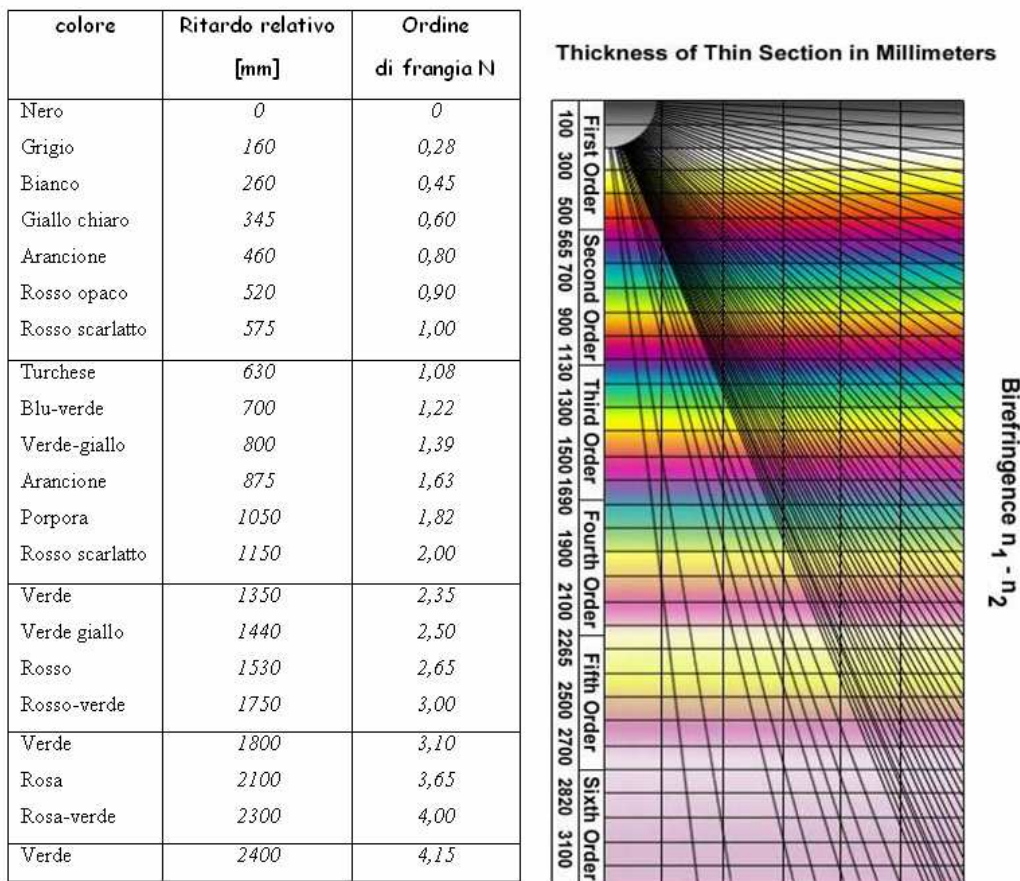


Figura 3.8) A destra è visibile la sequenza ciclica dei colori associati all'estinzione di una determinata λ per i primi ordini di frangia. A sinistra la tabella che quantifica la frazione di sforzo presente in base al colore visualizzato.

Dalle rilevazioni in fig. 3.6 e 3.7 non si riesce a valutare se gli sforzi residui siano di compressione o di trazione, ciò è invece possibile dalla prova di flessione mostrata in figura 3.9 nella quale è evidente un'asimmetria nella

ripetizione delle frange con un numero maggiore di queste nella parte di modello sollecitato a compressione, il che evidenzia la presenza di tensioni di compressione in modulo maggiore rispetto a quelli di trazione.

Questa ipotesi tende ad escludere che si siano formati a causa della pressione agente nella fase di incollaggio poiché il recupero delle deformazioni elastiche che si ha al cessare del carico, genererebbe tensioni interne di trazione, è da escludere anche la presenza di deformazioni plastiche formatesi sempre a causa della pressione di incollaggio poiché la sollecitazione impressa pari a circa 1 N/mm^2 è ben lontana dal limite plastico del materiale di circa 90 N/mm^2 .

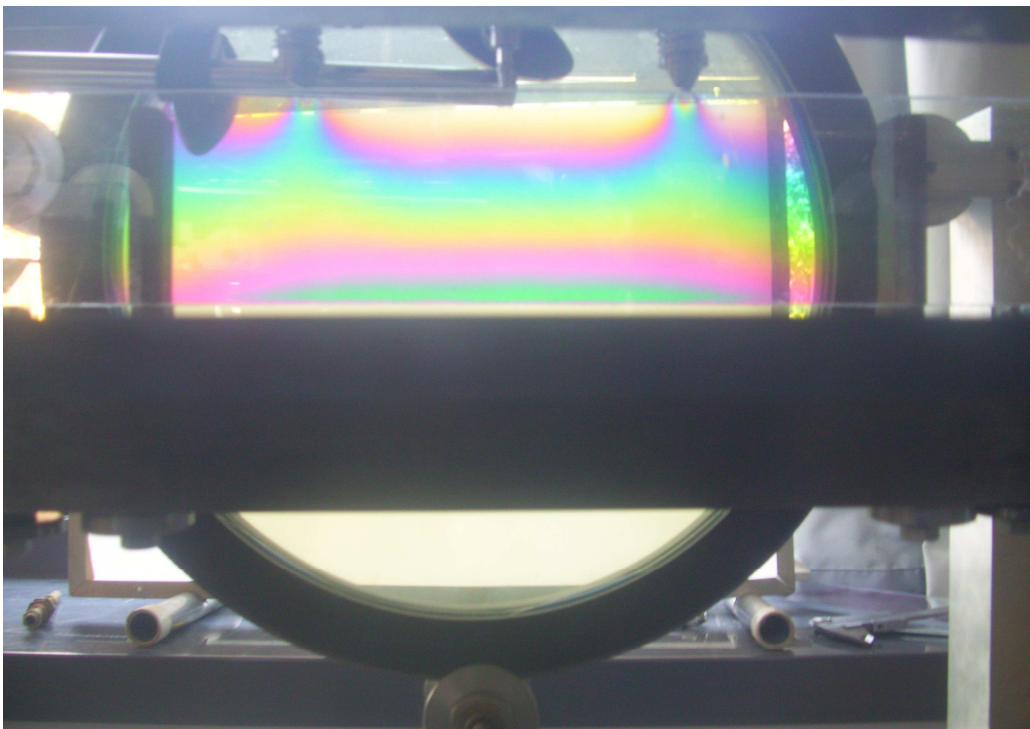


Figura 3.9) Prova di flessione su 4 punti sul modello non disteso.

Un ipotesi più accreditata, relativamente agli sforzi residui di compressione, è quella che li considera originati dal carico esercitato dal sistema di bloccaggio del pezzo sulla fresa nella fase di eliminazione dell'adesivo in eccesso. Questa ipotesi potrebbe spiegare anche la generazione della frangia abbastanza orizzontale e netta visibile nelle figure 3.6 e 3.7 che è situata ad un'altezza confrontabile con quella della ganasce di afferraggio della fresa.

Per eliminare o almeno diminuire l'entità di questi sforzi residui si è deciso di realizzare un secondo modello e di sottoporre il policarbonato (unico componente del sandwich nel quale si è riscontrata la presenza di tensioni) ad un trattamento termico di distensione prima della fase di incollaggio, il ciclo termico eseguito è illustrato al capito IV. La rimozione del collante in eccesso non verrà più effettuata per asportazione alle macchine utensili, ma bensì manualmente prima della solidificazione dello stesso, mentre la finitura delle superfici di interesse verrà realizzata per abrasione tramite carta vetrata.

3.5.2 VERIFICA DI CONTATTO STATICO IN ASSENZA DI FLUIDO

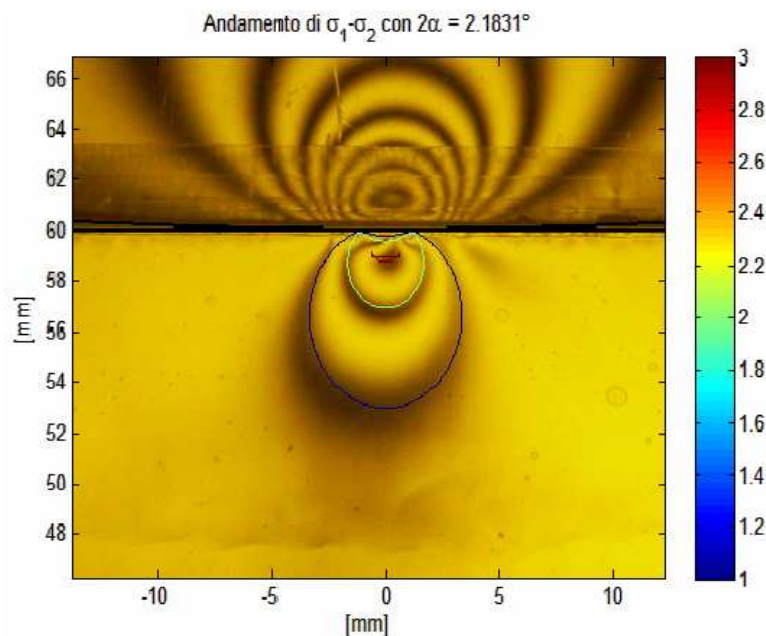


Figura 3.10) Soluzione analitica di contatto Hertziano a confronto con quella sperimentale fotoelastica relativamente al modello. $F=530,5N$, $l=300mm$, $h=65mm$, $a=7Mpa$, policarbonato.

Le frange visibili sul piano, pur generate da un uguale carico (530,5 N) e su una stessa lamina fotosensibile visibile in figura 3.5, sono ridotte in numero e dimensione, ciò è dovuto ad un aumento di rigidità acquisita dal policarbonato dopo l'incollaggio dei supporti laterali in polimetilmetacrilato. Ciò però non ha influito sulla precisione del modello Hertziano sia riguardo alla distribuzione

delle tensioni sia sul loro valore sperimentale il quale si discosta di solo 1 Mpa rispetto alla soluzione analitica.

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)_{sperimentale} &= 21 \text{ N/mm}^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)_{analitico} &= 22 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \right\} < 7 \text{ N/mm}^2$$

Da questo confronto si può constatare come l'effetto fotoelastico introdotto dagli spessori di polimetilmetacrilato lo si può considerare trascurabile.

3.5.3 VERIFICA DI CONTATTO DINAMICO IN ASSENZA DI FLUIDO

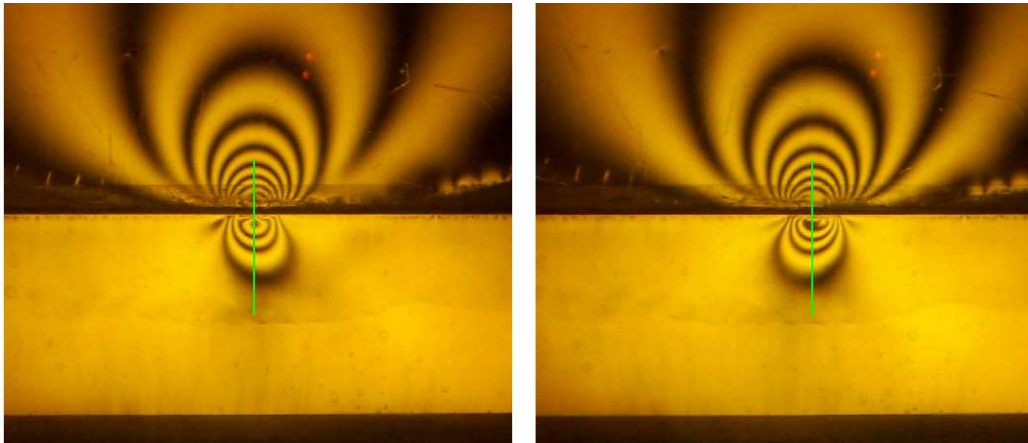


Figura 3.11) A sinistra: contatto traslante da destra verso sinistra. A destra carico traslante da sinistra a destra. In entrambe le immagini si nota il ritardo del valore massimo di frangia rispetto alla normale.

In fig. 3.11 si osserva come la distribuzione degli sforzi risenta dello spostamento del carico, il valore massimo di differenza delle tensioni non insiste sulla normale al punto di contatto ma pare essere in 'ritardo' ciò è probabilmente dovuto all'adesivo fra le superfici che genera un effetto viscoelastico o alla presenza di sforzi tangenziali non previsti dal modello analitico. Quest'ultima ipotesi di spiegazione del fenomeno sarà valutata nell'analisi ad elementi finiti mostrata al capitolo VI.

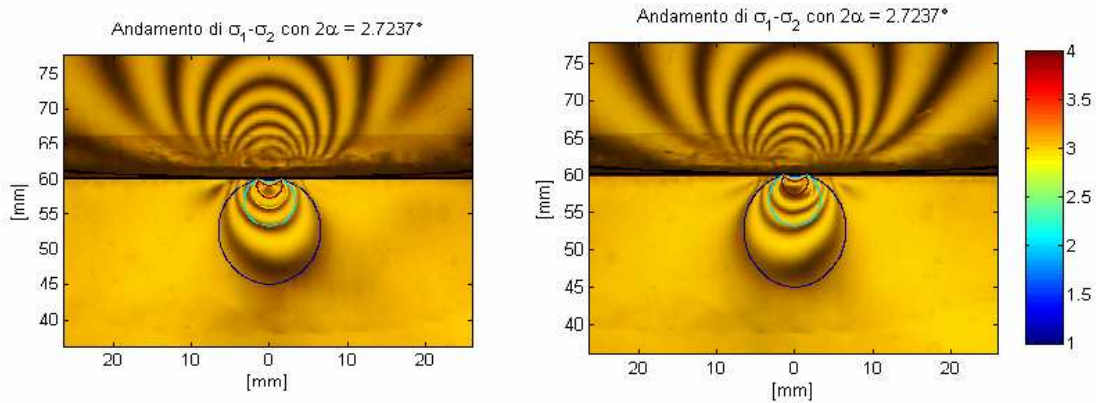


Figura 3.12) Soluzione analitica di contatto Hertziano a confronto con quella sperimentale fotoelastica relativamente al modello. $F=530,5N$, $l=300mm$, $h=65mm$, $a=7Mpa$, $v \approx 0,1$ m/s, policarbonato.

La differenza dei moduli delle tensioni nel caso sperimentale rispetto a quello analitico risulta ancora accettabile:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)_{sperimentale} &= 28 N/mm^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)_{analitico} &= 32 N/mm^2 \end{aligned} \right\} < 7 N/mm^2$$

3.5.4 VERIFICA DI CONTATTO STATICO IN PRESENZA DI FLUIDO



Figura 3.13) $F=530,5N$, $l=300mm$, $h=65mm$, $a=7Mpa$, policarbonato.

A sinistra: contatto con interposto olio 'Blasia 100 Agip[®]', $\eta=100$ mm²/s

Al centro: contatto con interposto olio 'Shell Tellus oil[®]', $\eta=46$ mm²/s

A destra: contatto senza fluido interposto.

Il contatto hertziano senza movimento del carico non è influenzato dalla presenza del fluido in quanto la pressione presente fra le superfici tende a 'spostare' il fluido stesso e a riportarsi all'analogo caso di contatto a secco. Le

frange mostrate in fig. 3.13 risultano uguali in numero e sovrapponibili per forma e dimensione.

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{analitico}} &= 22 \text{ N/mm}^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{Agip}} &= 21 \text{ N/mm}^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{Shell}} &= 21 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \right\} < 7 \text{ N/mm}^2$$

3.5.5 VERIFICA DI CONTATTO DINAMICO IN PRESENZA DI FLUIDO



Figura 3.14) $F=530,5\text{N}$, $l=300\text{mm}$, $h=65\text{mm}$, $a=7\text{Mpa}$, $v=0,1 \text{ m/s}$, policarbonato.

A sinistra: contatto con interposto olio 'Blasia 100 Agip[®]', $\eta=100 \text{ mm}^2/\text{s}$

Al centro: contatto con interposto olio 'Shell Tellus oil[®]', $\eta=46 \text{ mm}^2/\text{s}$

A destra: contatto senza fluido interposto.

Anche nel caso di carico mobile numero, dimensione e forma delle frange non risultano influenzate dalla presenza del fluido. In tutti i casi, in analogia con i risultati del contatto a secco, si presenta il ritardo di carico massimo rispetto a punto normale del contatto.

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{analitico}} &= 22 \text{ N/mm}^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{Agip}} &= 21 \text{ N/mm}^2 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{Shell}} &= 21 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \right\} < 7 \text{ N/mm}^2$$

3.6 COSIDERAZIONI FINALI SULLA VERIFICA DI CONTATTO

Si può concludere che l'ipotesi di contatto Hertziano sul modello sandwich:

- è valida indipendentemente dalla presenza di un fluido interposto e dalla sua viscosità;
- quantitativamente è indipendente dalla velocità di spostamento del carico fintanto che non si raggiunge la velocità di formazione del meato ovvero è valida nel caso di contatto viscoso, ma non nel caso di lubrificazione idrodinamica (caso analizzato al livello teorico al capitolo V);
- la velocità di spostamento del carico influenza la distribuzione delle frange che raggiungono il massimo in sezioni di poco antecedenti quella lungo la direzione di pressione massima. Al capitolo VI si confronterà la soluzione sperimentale con quella proposta ad elementi finiti per valutare se questo fenomeno dipenda dalla presenza di sforzi tangenziali.

Capitolo IV

Allestimento del modello e del sistema di carico

4.1 INTRODUZIONE

Lo scopo principale del lavoro svolto consiste nella valutazione del comportamento di discontinuità site in componenti sollecitati da un contatto mediato da fluido. È stato pertanto necessario realizzare un modello ‘criccato’ in superficie che prevedesse un sistema di contenimento del fluido unito ad un sistema di carico che offra la possibilità di simulare un contatto col modello e al tempo stesso permetta sia l’insinuazione del fluido nella cricca che l’aumento della sua pressione interna.

La valutazione sperimentale si è effettuata con tecniche fotoelastiche il che ha orientato la scelta su un materiale del modello che abbia caratteristiche birifrangenti sotto carico. In questo capitolo verranno illustrate le scelte realizzative del modello e del sistema di carico che hanno permesso di soddisfare le richieste descritte.

4.2 MATERIALE DEL MODELLO

Il Policarbonato è un generico [poliestere](#) dell'[acido carbonico](#). I primi studi su questo [polimero](#) risalgono al [1928](#) da parte di E.I. Carothers della [DuPont](#), ma l’inizio dello sfruttamento commerciale del materiale avvenne solo intorno al [1960](#) da parte della [Bayer](#) e della [General Electric](#).

Dal punto di vista produttivo i policarbonati hanno visto crescere il loro utilizzo grazie alle loro proprietà di trasparenza, resistenza termica e meccanica, oltre che per le buone proprietà elettriche e di [durezza](#). Oltre a queste posseggono alcune caratteristiche fondamentali per le quali trovano impiego in campo fotoelastico quali la trasparenza e la birifrangenza sotto carico.

La trasparenza e l’assenza di colore permettono una permeabilità alla luce dell’89% nello spettro del visibile. Mentre la birifrangenza è definita come quella proprietà che hanno alcuni materiali di scomporre un raggio di luce incidente in due (o più) raggi che lo attraversano con velocità e direzioni

differenti. Il policarbonato permette così di avere un differente comportamento rispetto ai raggi luminosi che lo attraversano:

- se il materiale non è sollecitato, un eventuale raggio incidente di luce polarizzata si propagherà attraverso esso scomponendosi in raggi che emergeranno dalla superficie in fase e con la stessa velocità;
- se il materiale è sollecitato i raggi uscenti presentano, invece, assi di polarizzazione coincidenti con le direzioni principali di tensione nel punto di incidenza. Per uno dei due raggi uscenti vale la [legge di Snell](#) (legge di rifrangenza): per questo viene chiamato *ordinario*; l'altro raggio, per cui essa non vale, viene chiamato *straordinario*. I due raggi uscenti risultano polarizzati linearmente e ortogonalmente l'uno all'altro, indipendentemente dalla polarizzazione del raggio di luce incidente. L'intensità dei due raggi segue la [legge di Malus](#).

Le caratteristiche tecniche del PC sono riportate nella tabella seguente [www.engineerplant.it]:

tabella 4.1) caratteristiche tecniche e meccaniche del policarbonato

materiale	Sigla	E [N/mm ²]	R _m [N/mm ²]	ρ [kg/dm ³]	α [mm/m/°C]	μ	k [kcal/m°C]
Policarbonato	PC	2300	65	1,2	0.065	0,50	0,18

In ordine: modulo elastico, carico di rottura a trazione, massa volumica, coefficiente di dilatazione termica, coefficiente d'attrito su acciaio secco e conducibilità termica.

4.3 REALIZZAZIONE DEL MODELLO

Il modello utilizzato per le prove sperimentali rappresentato in fig. 4.1 è formato da una struttura sandwich nella quale solo l'elemento centrale è in materiale fotoelastico (policarbonato), il suo spessore (ingombro lungo l'asse z) si è tenuto il più contenuto possibile per avvicinarci al caso bidimensionale nel quale si ipotizza nullo il gradiente tensionale nello spessore.

Esternamente (in azzurro) sono presenti 2 elementi in polimetilmetacrilato, (meglio noto col nome commerciale di Plexiglass[®]) i quali hanno diversi scopi:

- permettere di scaricare gli effetti tridimensionali presenti sulle sponde laterali della discontinuità su un materiale non fotoelastico (come descritto al paragrafo 4.3.1);
- sotto l'ipotesi di trascurabile inerzia fotoelastica del polimetilmetacrilato, permettono di visualizzare il segnale fotoelastico generato dalla fetta sensibile di policarbonato senza alterarlo;
- permettere la realizzazione di piccole sponde atte a contenere il fluido;
- irrigidire il componente che altrimenti rischierebbe di inflettersi con la conseguente formazione di frange dovute proprio a questa flessione nel piano x-y.

Il polimetilmetacrilato è stato adottato per la sua elevata trasparenza e per la scarsa birifrangenza, circa un decimo rispetto a quella del policarbonato.

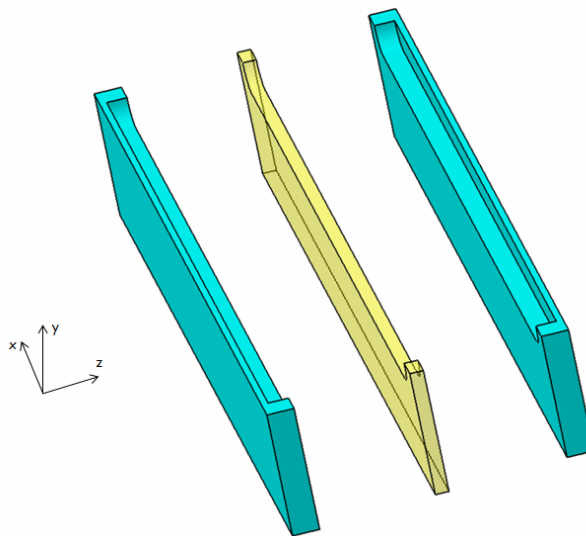


Figura 4.1) Elementi componenti il modello: in giallo policarbonato, in azzurro polimetilmetacrilato.

Tuttavia seppur bassi, gli effetti fotoelastici del polimetilmetacrilato, non sono nulli, perciò, affinché si possa trascurare il ritardo introdotto dalle tensioni nel Plexiglass[®], si è cercato di limitare il più possibile anche lo spessore (ingombro lungo l'asse z) degli elementi laterali.

L'ingombro del componente lungo l'asse y rappresenta una misura di compromesso fra la richiesta di bassi valori di altezza per evitare la formazione di frange dovute all'inflessione lungo il piano x - y , e la necessità di aumentare la stessa per evitare che le frange generate dal contatto col piano d'appoggio arrivino ad influenzare le frange generate dallo stato tensionale agente lungo la cricca.

Nella fig.4.2 sono rappresentate le dimensioni dei componenti del modello:

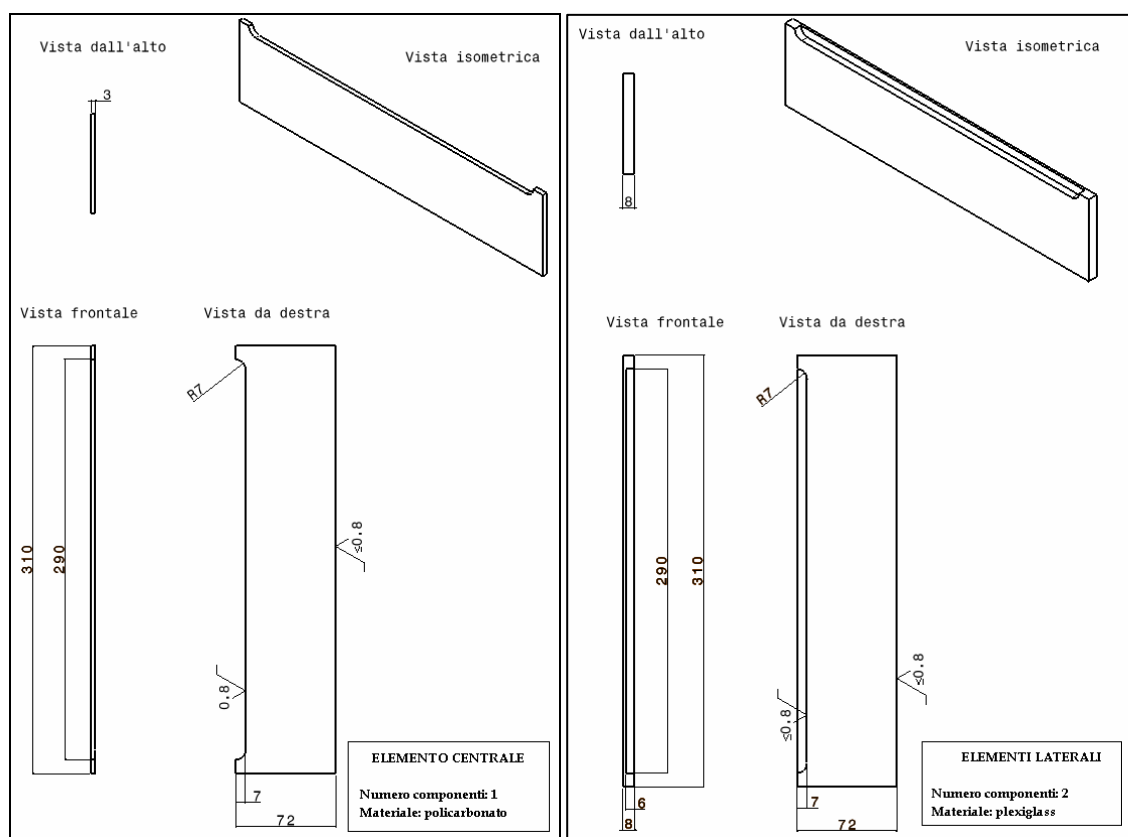


Figura 4.2) Tavole quotate dei componenti del modello.

Dalle tavole precedenti si nota come sia necessaria una finitura superficiale accurata sia sulla superficie interna, sulla quale avviene il contatto, sia alla base; poiché si è notato come, anche piccole asperità in queste zone creino delle concentrazioni di sforzo le quali danno origine a delle frange di disturbo che possono arrivare ad estendersi fino all'apice della discontinuità falsando la misura dell'effettivo sforzo generato dal carico sulla cricca.

Le lavorazioni si sono effettuate tutte per mezzo di una fresa a controllo numerico presente nel Laboratorio Macchine utensili C4 del Politecnico di Milano sede di Bovisa.

4.4 *DISTENSIONE DEL POLICARBONATO*

La distensione è un trattamento termico che permette di abbattere gran parte delle tensioni interne. Si è reso necessario in quanto nel modello di prova erano presenti di tensioni residue, fig 3.6 e 3.7. Prima della fase di incollaggio dei componenti è stato possibile notare al polariscopio che alcune tensioni erano già presenti nella lastra di polycarbonato, mentre quelle di polimetilmetacrilato risultavano scariche, perciò s'è scelto di rilassare unicamente le tensioni relative al polycarbonato.

Il trattamento termico effettuato è stato sviluppato e testato con buoni risultati presso il Politecnico di Milano [23] ed è rappresentato in figura 4.3:

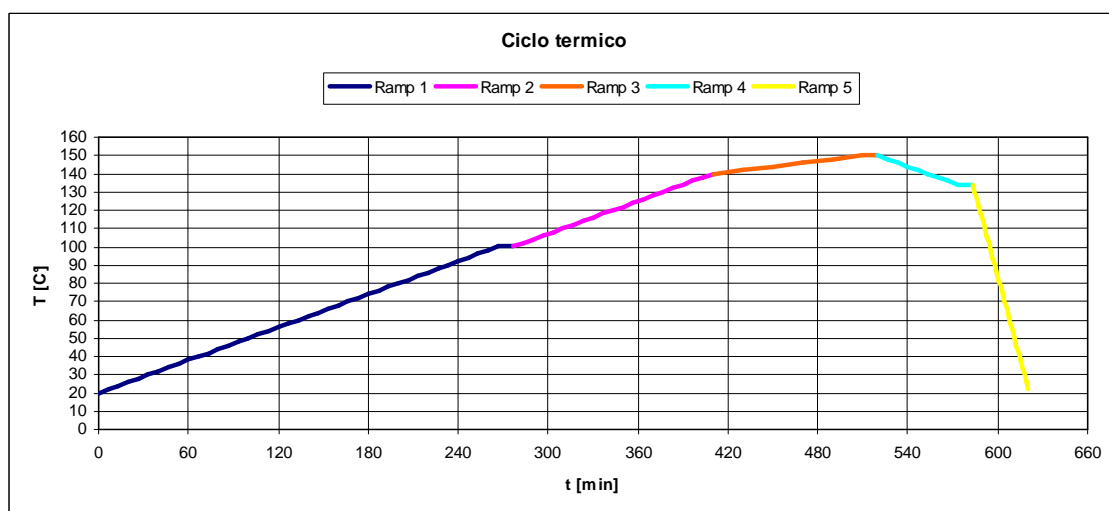


Figura 4.3) Ciclo termico di distensione per il polycarbonato.

Il ciclo fornito è stato tuttavia modificato per permettere a tutto lo spessore del polycarbonato di giungere alla temperatura di distensione, si è così passati dai 10 minuti di permanenza alla temperatura massima agli 80 minuti previsti dal nuovo ciclo.

I valori che caratterizzano il ciclo sono i seguenti:

Tabella 4.2) punti caratterizzanti il ciclo termico.

Punti	Temperatura [°C]	Tempo [min]
1	20	0
2	100	267
3	100	277
4	140	410
5	150	510
6	150	590
7	134	643
8	134	653
9	22	671

Per eseguire un corretto rilassamento è necessario posizionare il componente tra due lastre di vetro atte a contrastare la variazione di geometria del pezzo a seguito della rimozione degli sforzi residui. Le dimensioni del vetro devono essere contenute in modo che non imprima un elevato peso sul polimero. Una compressione di intensità troppo elevata potrebbe dar luogo a nuovi sforzi residui. A tal proposito, qualora si ritenesse elevata la massa del vetro superiore, è necessario aprire il forno mentre viene raggiunta la temperatura massima e spostare il vetro in un'altra zona del forno senza estrarlo completamente in quanto l'eccessivo gradiente termico lo porterebbe alla rottura. È inoltre opportuno muovere il modello per constatare che non sia vincolato al vetro inferiore.

4.5 ADESIVO

L'unione dei componenti a formare l'assieme mostrato in figura 4.4 si è effettuata utilizzando l'Araldite® 2028 come adesivo. "Araldite" è il nome commerciale dato ad una particolare resina epossidica dall'azienda svizzera "Vantico".

L'Araldite 2028[®] da noi utilizzata è un adesivo epossidico a 2 componenti a bassa viscosità il quale polimerizza a temperatura ambiente, è estremamente trasparente tanto da essere impiegato anche nell'unione del vetro. È anche adatto per unire un'ampia gamma di metalli, ceramiche, gomma e plastica rigida.

Le proprietà della resina dipendono fortemente dalle proporzioni dei componenti e dal tempo di polimerizzazione e quindi dal grado di reticolazione. Di seguito sono riportate le caratteristiche riportate dal fornitore:

tabella 4.3) caratteristiche tecniche dell'Araldite 2028[®]

Proprietà	2020/A	2020/B	2020 (miscelato)
Colore (visivo)	Trasparente	Trasparente	Trasparente
Peso specifico	ca 1,12	ca 0,95	ca 1,1
Viscosità (mPas)	ca 150	ca 150	ca 150
Durata lattina (100 gr a 25°C)	-	-	40 - 50 minuti
Indice di rifrazione	-	-	1,553

Il processo di incollaggio è formato dalle seguenti fasi:

- Pre-trattamento;
- Stesura dell'adesivo;
- Tempo di polimerizzazione;

Il pre-trattamento consiste nella preparazione delle superfici da unire rimuovendo qualsiasi traccia di sporco, olio o grasso evitando sgrassatori quali l'acetone che opacizzerebbero le superfici stesse.

Nella fase di applicazione resina indurente devono essere mescolati fino ad ottenere una miscela omogenea. Ciò è permesso grazie allo specifico applicatore fornito, il quale ha permesso anche un corretto dosaggio fra i componenti:

Tabella 4.4) rapporto di dosaggio resina (A) e catalizzatore (B)

Rapporto di miscelazione	Parti in peso	Parti in volume
<i>Araldite 2028/A</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
<i>Araldite 2028/B</i>	<i>30</i>	<i>35</i>

Successivamente alla stesura dello strato di adesivo i componenti sono stati sottoposti ad una pressione di contatto uniforme su tutta l'area, questo ha uniformato lo spessore del collante fra le superfici e permesso l'espulsione delle bolle d'aria presenti. Una parte di adesivo, come prevedibile, è fuoriuscita durante questa fase, per cui si è ritenuto necessario l'asportazione di un sottile strato di materiale per riportare le superfici interessate dal contatto alla finitura superficiale presente nelle tavole specifiche (figura 4.2).

I tempi di presa sono tabulati in base alla resistenza al taglio (LSS):

Tabella 4.5) tempi di polimerizzazione in funzione della resistenza al richiesta LSS:

Temperatura	°C	10	15	23	40	60	100
Tempo di indurimento per raggiungere	ore	24	20	16	3	-	-
LSS > 1N/mm ²	minuti	-	-	-	-	90	15
Tempo di indurimento per raggiungere	ore	60	48	25	7	2.5	-
LSS > 10N/mm ²	minuti	-	-	-	-	-	20

I valori di resistenza garantiti a polimerizzazione ultimata a 23°C sono:

- Resistenza al taglio 5 N/mm²;
- Resistenza alla flessione 74,9 MPa;
- Modulo di flessione 2497,9 MPa;
- Temperatura di transizione vetrosa 39,5°C.

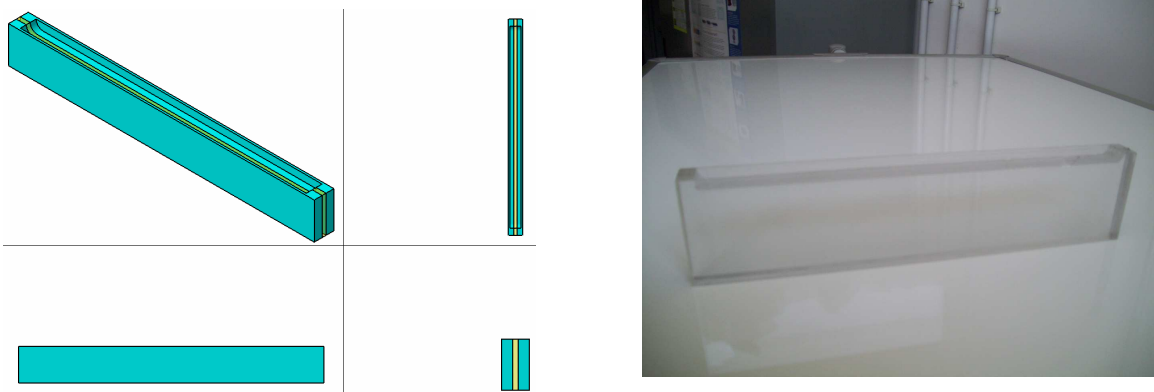


Figura 4.4) Assieme.

4.6 DISCONTINUITÀ NEL MATERIALE

La realizzazione della discontinuità non può prescindere da una conoscenza delle dinamiche di nucleazione e accrescimento di una generica cricca, questo poiché si ha necessità di riuscir a ricreare in laboratorio condizioni di sforzo il più possibile vicine a quelle reali, perciò nei paragrafi seguenti si sono ripresi alcuni concetti fondamentali della Teoria della Frattura.

4.6.1 NUCLEAZIONE ED ACCRESCIMENTO DELLA CRICCA

Per nucleazione di cricche si intende il processo che porta alla formazione di microscopiche fratture generate principalmente dopo un certo periodo di tempo o meglio dopo un certo numero di cicli di sforzo. La fase di nucleazione ha origine preferenziale in zone di concentrazione delle tensioni in corrispondenza di irregolarità o difettosità (anche a livello granulare) e non pregiudica la funzionalità del componente, infatti è nella fase di accrescimento della cricca che questa, propagandosi, può arrivare a ridurre la sezione resistente del pezzo causando a volte la rottura dello stesso. La nucleazione delle cricche dipende da numerosi parametri quali: lo stato di sforzo, l'ampiezza dei cicli di carico, la dimensione dei grani del materiale (influenzata a sua volta dal trattamento termico subito), la presenza di intagli, lo stato superficiale (ovvero la rugosità), le dimensioni del componente stesso.

La propagazione (o accrescimento) è caratterizzata dalla disgregazione dei legami che tengono uniti e coesi gli atomi costituenti il materiale. La cricca può propagarsi lungo il bordo dei grani (frattura intergranulare) o attraverso una frattura entro i grani stessi (frattura transgranulare). Ciò accade se la variazione del fattore di intensificazione degli sforzi (SIF) supera il corrispondente valore di soglia. Il percorso seguito dalla cricca può essere rettilineo (nel qual caso si parla di *crescita coplanare*), curvo o ramificato verso la superficie e verso l'interno, rispettivamente chiamati *pitting* o *deep spalling* [3]. È stato verificato sperimentalmente che una fase di contatto a secco seguita da una fase lubrificata

produce una maggiore incidenza dei difetti da contatto, tale fenomeno è stato attribuito all'effetto di plasticizzazione degli starti superficiale che avviene durante la prima fase, la quale favorisce la enucleazione di cricche orientate favorevolmente per la successiva penetrazione del fluido.

4.6.2 FORMAZIONE DI CRICCHE SU SUPERFICI DI ORGANI A CONTATTO

Nei casi di contatto volvente, come quello da noi analizzato, l'innescò si ha generalmente in corrispondenza del massimo delle tensioni tangenziali che, come visto in figura 1.19 per la teoria Hertziana, risulta essere sottopelle.

Se oltre al rotolamento consideriamo l'effetto di strisciamento, favorito dalla rugosità superficiale, la nucleazione tende a spostarsi verso la superficie. In base all'andamento delle tensioni tangenziali possiamo classificare la propagazione delle cricche in [3]:

- propagazione verso la superficie: la nucleazione è favorita da uno sforzo massimo di τ vicino alla superficie che genera un microcavità ad una profondità di 10-20 μm (pit), mentre la propagazione si sviluppa in genere ad una angolazione compresa tra 10 e i 60° rispetto alla superficie.
- propagazione verso l'interno: la nucleazione è favorita da uno sforzo massimo di τ lontano dalla superficie e si propaga in direzione tendenzialmente parallela o normale alla superficie del pezzo dando origine al fenomeno dello spalling.

4.6.3 REALIZZAZIONE DELLA CRICCA

Come visto al paragrafo precedente una precisa valutazione del punto di nucleazione e della direzione di propagazione di una cricca è difficilmente prevedibile visti i numerosi parametri di influenza. Tuttavia lo studio dell'effetto del fluido all'interno della discontinuità ha ridotto il campo di analisi a quelle discontinuità generate in superficie o propagatesi fino in superficie.

La larghezza di cricca, come mostrato in figura 4.5, è tale da coinvolgere tutti e 3 gli strati ma solo per policarbonato è passante, questo poiché sui lembi laterali della cricca si presenta uno stato tensionale tridimensionale, ma dal punto di vista fotoelastico si comporta come un modello piano poiché questi effetti 3D si sono scaricati sul plexiglass fotoelasticamente poco reattivo.

Una profondità di penetrazione adeguata non deve essere inferiore a 5mm, difatti è questo un valore che permette alle frange presenti all'apice di non risentire delle iso-intense generate dal carico sulla superficie di contatto alla data finitura. Al contrario una lunghezza di cricca superiore a 10mm rischierebbe di risentire delle frange dovuta alla reazione col piano d'appoggio.

Anche il valore di apertura di cricca è una misura di compromesso fra la necessità di avvicinarsi il più possibile ad una cricca reale, la quale richiederebbe un 'apertura tendente a zero, e la necessità di riuscir a far penetrare il fluido all'interno della cricca stessa.

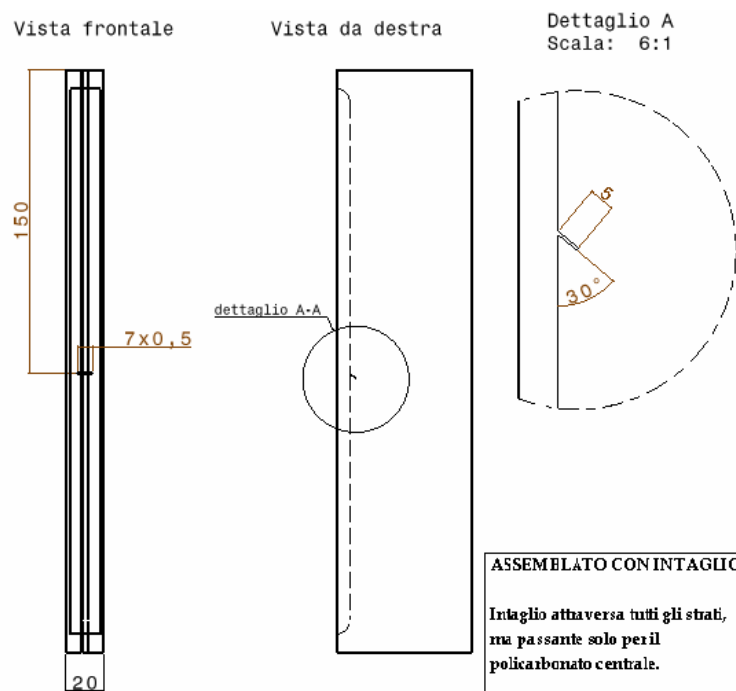


Figura 4.5) Dettaglio dimensioni della cricca.

Dopo numerosi tentativi di realizzazione di un cricca avente le caratteristiche elencate, si è osservato che il metodo più efficace consiste nella penetrazione di

una lama tipo STANLEY[®] opportunamente sagomata per avere la stessa larghezza della cricca (7mm), la penetrazione della lama è effettuata a caldo portando ad una temperatura di circa 800/1000°C la lama per mezzo di un bruciatore tipo 'pencil torce'. Temperature minori non permettono di raggiungere le profondità richieste in solo passaggio, mentre produrre l'intaglio a temperatura ambiente, costringendo la lama ad avanzare per mezzo di colpi, porta alla rottura fragile delle porzioni di polimetilmetacrilato a bordo cricca, il che non garantisce la tenuta del fluido interno alla cricca al passaggio del carico. Nell'intaglio creato dalla lama STANLEY[®] verrà alloggiata una seconda lama anch'essa avente larghezza di 7mm di tipo Rufin Professional[®] più fine della precedente e atta a creare l'apice di cricca per mezzo di un colpo secco e deciso impresso sul lato opposto all'apice.

Entrambe le lame per evitarne l'inflessione si sono tagliate tramite waterjet.

Gli inconvenienti di una penetrazione a caldo sono:

- deformazione superficiale del modello in superficie, il che ha richiesto una lavorazione superficiale di fresatura per riportarsi al grado di finitura iniziale;
- annerimento delle superfici della cricca, ma ciò non ha influenza sul comportamento della stessa sotto carico, l'unica attenzione richiesta è che il fluido penetri nella stessa.

4.7 METODO DI TARATURA DEL POLICARBONATO

La fotoelasticità permette di visualizzare le isointense ovvero i luoghi dei punti in cui la differenza delle tensioni principali è costante. In particolare ogni linea di livello corrisponde ad un determinato valore costante di $\sigma_I - \sigma_{II}$.

La costante di frangia corrisponde alla 'quantità di sforzo' presente fra due ordini di frangia successivi. Minore è il suo valore, più accurata sarà la risoluzione della misura effettuata. La taratura di un materiale è quel processo che porta a ricavare la costante di frangia 'a' della relazione fondamentale in fotoelasticità per problemi bidimensionali:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{n \cdot a}{h} \rightarrow a = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{n} h \quad (4.1)$$

n indice numerico dell'ordine di frangia

h spessore del modello di taratura

Per ricavare la costante di frangia bisogna quindi conoscere il valore teorico dello stato di sforzo in punti noti. Nel caso in esame la si è valutata su un provino circolare sottoposto a compressione diametrale, questo sistema di taratura permette una facile lettura degli ordini di frangia ed un facile allestimento del sistema di carico.

In letteratura [4] si trova la relazione analitica che fornisce la differenza degli sforzi principali in funzione del carico P nel punto centrale del disco di taratura.

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{8P}{\pi h D} \quad (4.2)$$

Dove:

$\sigma_I - \sigma_{II}$ è la differenza degli sforzi principali nel modello [N/mm^2]

h spessore del disco [mm]

P carico applicato [N]

D diametro del disco [mm]



Figura 4.6) Sistema di carico della prova di taratura.

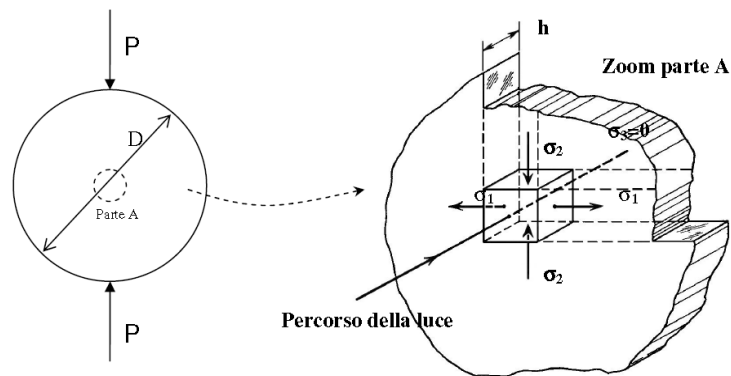


Figura 4.7) Stato di sforzo nel provino.

Il valore della forza P la si ricava indirettamente dal valore di deformazione misurata da un comparatore centesimale, mentre l'ordine di frangia corrisponde al numero di frange che si incontrano durante il transitorio di carico al centro del provino, ovvero nel punto a stato di sforzo noto.

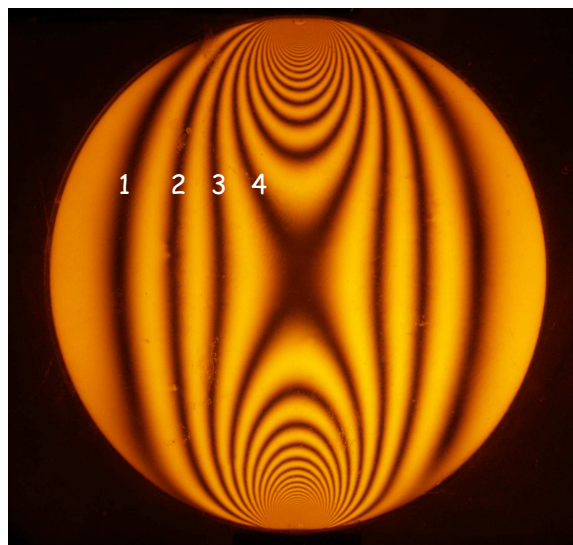


Figura 4.8) Frange di taratura.

Utilizzare unicamente la prima frangia che raggiunge il centro (quindi $n=1$) risulta sconveniente in quanto è contraddistinta da un basso campo tensionale, un'ampiezza elevata che unita ad una bassa definizione dei contorni può indurre ad errori nella valutazione accurata del carico corrispondente all'ordine 1,

all'opposto un numero di ordini di frangia troppo alti può portare il provino a plasticizzare per cui si è deciso di valutare gli ordini di frangia che vanno dal secondo al quinto.

Tabella 4.6) Risultati della prova di taratura.

n	P [N]	$\sigma_1 - \sigma_2$ [N/mm ²]	A [N/mm ²]	a [N/mm]	a_{med} [N/mm]
2	340	2.89	1.44	7.22	6,96
3	490	4.16	1.39	6.94	
4	650	5.52	1.38	6.90	
5	800	6.79	1.36	6.79	

4.8 SISTEMA DI CARICO

IL sistema di carico in figura 4.9 già presente al SIP Lab del Politecnico di Milano permette di ricreare la situazione di contatto disco su piano e quindi di sottoporre il modello ad una distribuzione di tipo Hertziana:

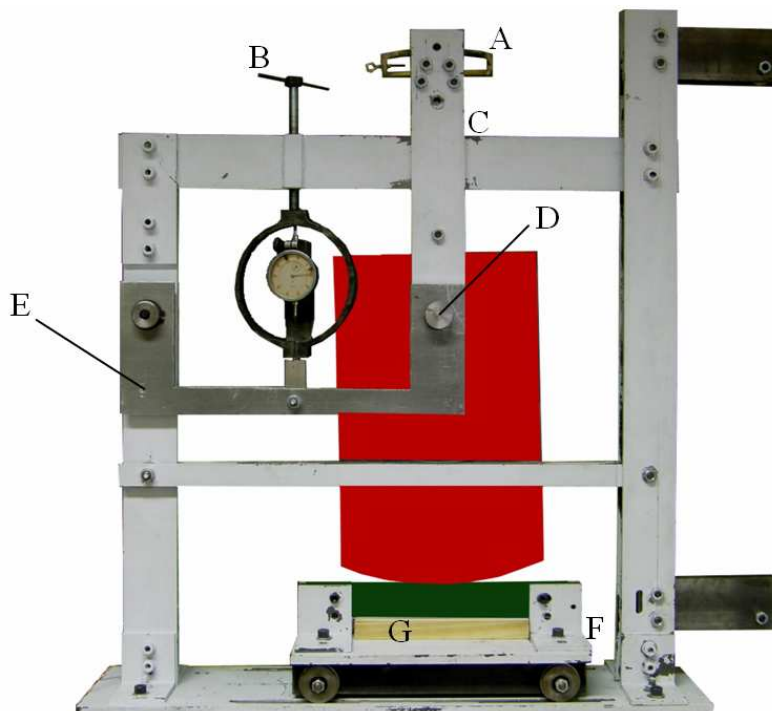


Figura 4.9) Sistema di carico.

Per mezzo della vite senza-fine B è possibile variare il carico verticale che andrà ad agire sul disco. È possibile quantificare questo carico per mezzo di un dinamometro posizionato tra il manovellismo in B e il braccio ad U (elemento E), il valore letto come si vedrà nell'allegato [A.A] risulta essere dimezzato rispetto al carico effettivamente agente in D . Il modello è posizionato su un carrello il quale è libero di spostarsi orizzontalmente, questo movimento permette la traslazione del contatto hertziano lungo la superficie d'appoggio del modello. Le cerniere in E ed in D permettono al disco di ruotare seguendo la traslazione del carrello e allo stesso tempo di mantenere costante il carico.

Qualora volessimo assimilare questo sistema di carico ad un contatto ruota rotaia sarebbe da tener presente che a differenza del caso reale la componente di spostamento orizzontale è imposta alla rotaia e non alla ruota; questo permette di semplificare notevolmente la sperimentazione.

Capitolo V

Considerazioni teoriche sulla lubrificazione nelle discontinuità

5.1 *INTRODUZIONE*

L'introduzione di un fluido atto a mediare il contatto fra le superfici non si limita a generare effetti quali pumping e friction analizzati al capitolo II, ma apporta ulteriori conseguenze non trascurabili come può essere l'aumento di pressione sulle superfici degli elementi in moto relativo dovuto alla dinamica del fluido (in questo caso cade ad esempio l'ipotesi di pressione all'imbocco della cricca coincidente con il carico Hertziano istantaneamente affacciato). Nel presente capitolo si sono analizzati alcuni di questi effetti, ma solo a livello teorico, in quanto il caso sperimentale analizzato al polariscopio si può classificare unicamente come contatto viscoso e non come lubrificazione a fluido perfetta poiché non si arriva alla separazione del contatto fra le superfici e ciò è dovuto da un lato alle ridotte velocità relative che non permettono la generazione del meato come accade nella lubrificazione idrodinamica, dall'altro non si ha a disposizione un circuito di lubrificazione in grado di inviare fluido in pressione tra le superfici come richiesto nella lubrificazione idrostatica. Per questi motivi gli unici effetti valutabili in fotoelasticità sono i già citati effetti pumping e friction.

5.2 *LUBRIFICAZIONE IDROSTATICA E IDRODINAMICA*

Una *lubrificazione a fluido perfetta* non consente alle superfici un contatto diretto, ma instaura uno strato di lubrificante in grado di reagire alle forze normali che i corpi si trasmettono, affinché ciò avvenga occorre che all'interno del meato esista una pressione superiore a quella agente dall'esterno. Tale pressione si può ottenere in diversi modi:

- inviando lubrificante sotto pressione tra le due superfici S_1 e S_2 a contatto (vedi Figura 1.1a); se la pressione è adeguatamente elevata, le due superfici si allontanano una dall'altra ed il fluido fuoriesce lungo i bordi che delimitano le superfici stesse. Lo strato di lubrificante, che permane finché continua l'invio di lubrificante in pressione, è sottoposto ad una

pressione variabile tra il valore della pressione di immissione ed il valore della pressione esterna. La risultante delle pressioni fa equilibrio alla forza W che tende a portare a contatto le due superfici. Questo tipo di lubrificazione prende il nome di *lubrificazione idrostatica* (figura 5.1a).

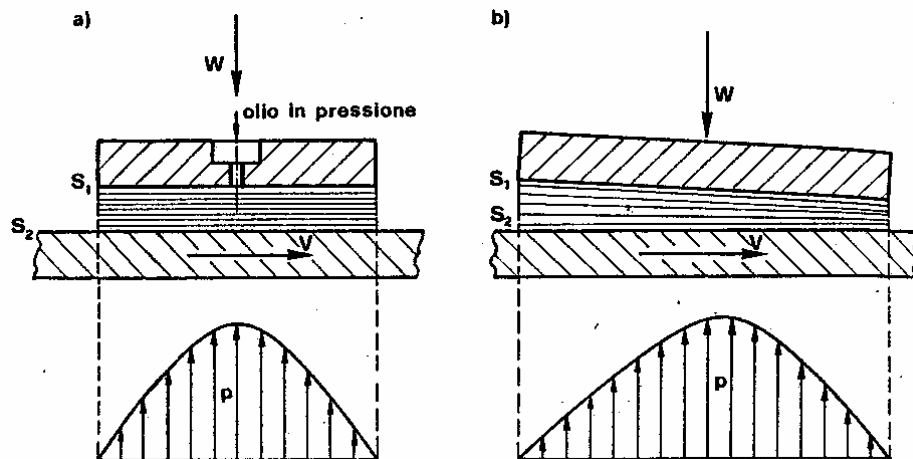


Figura 5.1) A sinistra: lubrificazione idrostatica, a destra idrodinamica.

- La seconda consiste nell'utilizzare lo stesso moto relativo tra le superfici per costringere il lubrificante ad interporsi come un 'cuneo' tra le superfici stesse. Lungo i bordi del meato la pressione raggiunge il valore della pressione esterna. Questo secondo tipo di lubrificazione prende il nome di *lubrificazione idrodinamica* (Figura 5.1 b).

5.3 VISCOSITA'

La viscosità è una grandezza fisica che misura la resistenza opposta dal fluido alle forze tangenziali che tendono a farlo scorrere.

Si consideri uno strato di fluido compreso tra due superfici piane S_1 e S_2 , (figura 5.2). La superficie S_2 si consideri ferma, mentre S_1 si muova di moto uniforme con velocità U . Nel caso in cui, dopo un certo tempo il fluido raggiunga condizioni di regime laminare (basso Numero di Reynolds) si può ipotizzare che il moto avvenga per slittamento di superfici piane.

Lo strato direttamente a contatto con la superficie S_2 è privo di moto, mentre quello a contatto con S_1 si muove alla velocità U . La velocità degli strati intermedi varia (linearmente) tra il valore zero e il valore U .

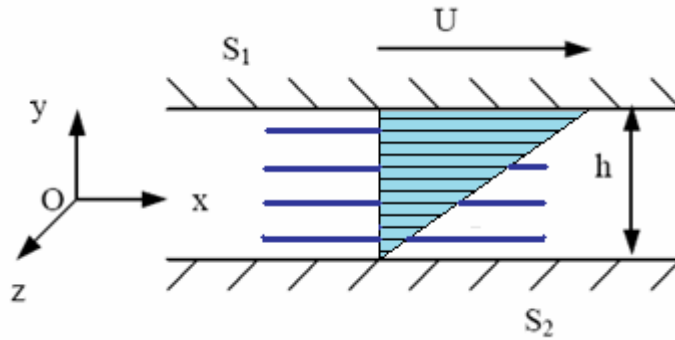


Figura 5.2) Campo di velocità nel fluido interposto fra superfici in moto relativo.

Newton affermò che la forza F necessaria per mantenere alla velocità U la superficie S_1 era proporzionale all'area della sup. S_1 , al gradiente di velocità (in direzione normale a quella di scorrimento) e ad un coefficiente caratteristico, a parità di temperatura e pressione, per ogni fluido considerato:

$$\text{Relazione di Newton} \quad F = \eta \cdot A \cdot \frac{du}{dy} \quad (5.1)$$

$$\text{Tensione di scorrimento} \quad \tau = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{du}{dy} \quad (5.2)$$

La relazione (5.2) prende il nome di legge di Newton e la costante di proporzionalità η tra la tensione di scorrimento τ e il gradiente di velocità prende il nome di *viscosità* (dinamica) del fluido.

È bene ricordare che il moto del fluido è a regime laminare se il numero di Reynolds Re della corrente fluida risulta relativamente basso.

$$\text{Reynolds in regime laminare} \quad Re = \frac{Uh\delta}{\eta} < 2000 \quad (5.3)$$

Con δ = massa volumica del fluido.

Nel caso di lubrificazione idrodinamica il moto del lubrificante è in genere a regime laminare: il numero di Reynolds risulta infatti basso sia per i piccoli valori dello spessore di lubrificante sia per i valori relativamente elevati della viscosità dei lubrificanti generalmente impiegati.

Per molti fluidi la viscosità è funzione unicamente della temperatura e della pressione, mentre è indipendente dal gradiente di velocità. Questi fluidi sono detti Newtoniani. Per essi la viscosità è una variabile di stato e la (5.2) è una legge fisica.

5.4 ANDAMENTO EFFETTIVO DELLA PRESSIONE NELLA LUBRIFICAZIONE IDROSTATICA

Nel caso di lubrificazione idrostatica la pressione agente sulla superficie (eq.5.4), e quindi all'imbocco della cricca, è ottenuta sommando la pressione di immissione del fluido (valore costante una volta a regime) a quella Hertziana dovuta al contatto.

$$\textit{Pressione idrostatica} \quad P_{\text{sup}} = P_{\text{imm}} + P_{\text{Hertz}} \quad (5.4)$$

Un aumento di pressione costante non varia gli andamenti dei grafici di KI ottenuti al capitolo II, ma sposta unicamente le curve verso l'alto ovvero verso valori di intensificazione degli sforzi maggiori.

5.5 ANDAMENTO EFFETTIVO DELLA PRESSIONE NELLA LUBRIFICAZIONE IDRODINAMICA

Per ricavare l'andamento della pressione nel caso di lubrificazione idrodinamica [24] si applicano le equazioni di equilibrio, di continuità e di Reynolds rispetto all'elemento infinitesimo di fluido P mostrato in fig. 5.3:

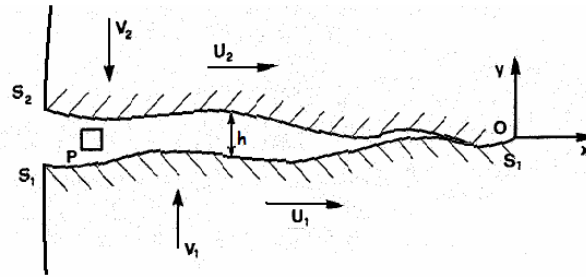


Figura 5.3) Schematizzazione cricca con moto relativo fra le superfici interne.

$$\text{Equazioni d'equilibrio:} \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\text{Equazione di continuit\`a:} \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (5.6)$$

$$\text{Equazione di Reynolds:} \quad \begin{cases} q_x = \int_0^h u \, dy \\ q_z = \int_0^h w \, dy \end{cases} \quad (5.7)$$

Integrando e sostituendo con le componenti della velocit\`a ricavate dalle equazioni 5.5 integrate due volte si ricava:

$$\begin{cases} q_x = -\frac{1}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h^3 + (U_1 - U_2) \frac{h}{2} \\ q_z = -\frac{1}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} h^3 \end{cases} \quad (5.8)$$

Le relazioni ricavate si possono sostituire nell'equazione di continuit\`a 5.6 ed infine esplicitarla rispetto alla variazione di pressione lungo x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\eta(U_1 - U_2)}{h^2}(1 - m) \quad (5.9)$$

m è un parametro che confronta $h(x)$ (distanza fra le superfici nella sezione a distanza x dall'apice) con un'altezza media di riferimento denominata genericamente h .

In conclusione nella lubrificazione idrodinamica la pressione interna alla cricca non è più coincidente con il solo carico Hertziano ma è anche linearmente dipendente dalla velocità relativa fra le superfici e dalla viscosità.

La modellizzazione sperimentale da noi adottata non permette di raggiungere velocità tali da instaurare un regime idrodinamico con la conseguente formazione del meato.

5.6 ***KII NELLA LUBRIFICAZIONE IDROSTATICA E IDRODINAMICA***

Analogamente a quanto visto per il KI anche KII risente della variazione di pressione esterna come visto al paragrafo 5.4, ma, oltre a questo, l'introduzione del fluido influenza anche il coefficiente d'attrito fra le superfici della cricca che possiamo riassumere in comportamenti differenti a seconda che le superfici interne alla discontinuità si mantengano separate o all'opposto restino anche parzialmente in contatto fra loro.

Nel caso in cui nella discontinuità si instauri un valore di pressione interna che mantiene sempre separate le due superfici è la sola viscosità che si oppone agli sforzi tangenziali lungo la cricca sostituendosi all'azione che nel caso a secco spettava all'attrito superficiale, si parla quindi di attrito viscoso [rif]. Se il flusso resta in regime laminare la forza d'attrito è opposta e proporzionale alla velocità del corpo nel fluido come mostra la legge di Stokes:

$$\text{Forza d'attrito (flux. laminare)} \quad F_a = -6 \cdot \pi \cdot R_s \cdot v = -\chi \cdot v \quad (5.10)$$

R_s dimensione caratteristica dell'oggetto;

v velocità relativa fra superficie e fluido.

Se la velocità del corpo è superiore (regime di transizione o turbolento), la forza d'attrito è approssimabile a:

$$\text{Forza d'attrito (flux.sso turbolento)} F_a = \frac{1}{2} \cdot c_r \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 = \chi \cdot v^2 \quad (5.11)$$

c_r coefficiente aerodinamico di resistenza funzione del profilo superficie;

ρ densità del fluido;

S area della sezione frontale.

In entrambi i casi il prodotto dei termini che legano la forza d'attrito alla velocità χ corrisponde al coefficiente d'attrito viscoso.

Nel caso in cui le superfici della cricca siano anche solo in parte a contatto, l'opposizione al moto relativo fra le superfici è offerta sia dalla viscosità che dall'attrito superficiale. Non riuscendo a trovare in letteratura un legame che legasse queste due grandezze lo si è cercato per via sperimentale interponendo fra due superfici in pressione fra loro differenti fluidi a viscosità nota e valutando come variava il coefficiente d'attrito valutato come rapporto fra la forza normale e quella di scorrimento (equazione 5.12 e figura 5.4):

$$\text{def. d'attrito radente statico} \quad \mu = \frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} \quad (5.12)$$

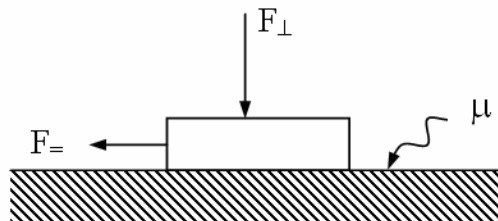


Figura 5.3) Schematizzazione del sistema per il calcolo dell'attrito radente.

Tabella 5.1) Tabella coefficienti d'attrito ottenuti per differenti valori di viscosità e di carico.

Aria			Mobil DTE 25			Shell Tellus oil ST 46			Blasia 100 Agip		
F _⊥ [N]	F _z [N]	μ	F _⊥ [N]	F _z [N]	μ	F _⊥ [N]	F _z [N]	μ	F _⊥ [N]	F _z [N]	μ
130	110	0,85	130	90	0,69	130	90	0,69	130	70	0,54
110	85	0,77	110	80	0,73	110	70	0,64	110	60	0,55
105	80	0,76	105	65	0,62	105	80	0,76	105	60	0,57
90	65	0,72	90	50	0,56	90	50	0,56	90	50	0,56
85	60	0,71	85	60	0,71	85	50	0,59	85	50	0,59
media		0,76	media		0,66	media		0,65	media		0,56

Tabella 5.2) Tabella riassuntiva per i diversi fluidi analizzati.

	Viscosità η [mm ² /s]	Coefficiente d'attrito μ
Aria	2,5	0,76
Mobil DTE 25	44,2	0,66
Shell Tellus oil ST 46	46	0,65
Blasia 100 Agip	100	0,56

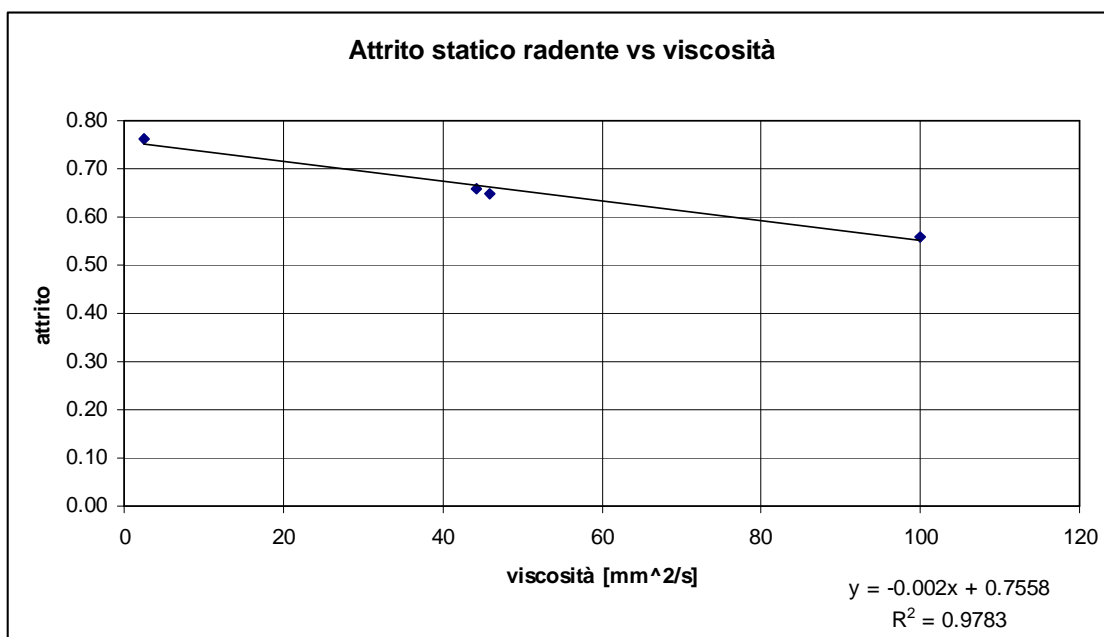


Figura 5.4) Variazione del coefficiente d'attrito μ nei confronti della viscosità η

L'andamento rappresentato in fig. 5.4 conferma come un aumento di viscosità del fluido tende a diminuire l'effetto d'attrito, è infatti questa una delle principali finalità della lubrificazione fluida.

Il valore di R^2 prossimo all'unità potrebbe far pensare che ci sia una proporzionalità lineare inversa, tuttavia bisogna considerare che un campione di soli 4 valori unito ad una prova non normalizzata non può risultare significativa per delle considerazioni di tipo quantitativo.

5.7 RIASSUNTO

Gli effetti che generano regimi di lubrificazione idrostatica e idrodinamica nei confronti dei fattori di intensificazione degli sforzi nel caso bidimensionale si sono riassunti nello schema a blocchi di figura 5.5. Un confronto sperimentale con gli aumenti di pressione e le forze d'attrito valutate analiticamente non è stato possibile realizzarlo, ma può essere un possibile sviluppo futuro del lavoro intrapreso.

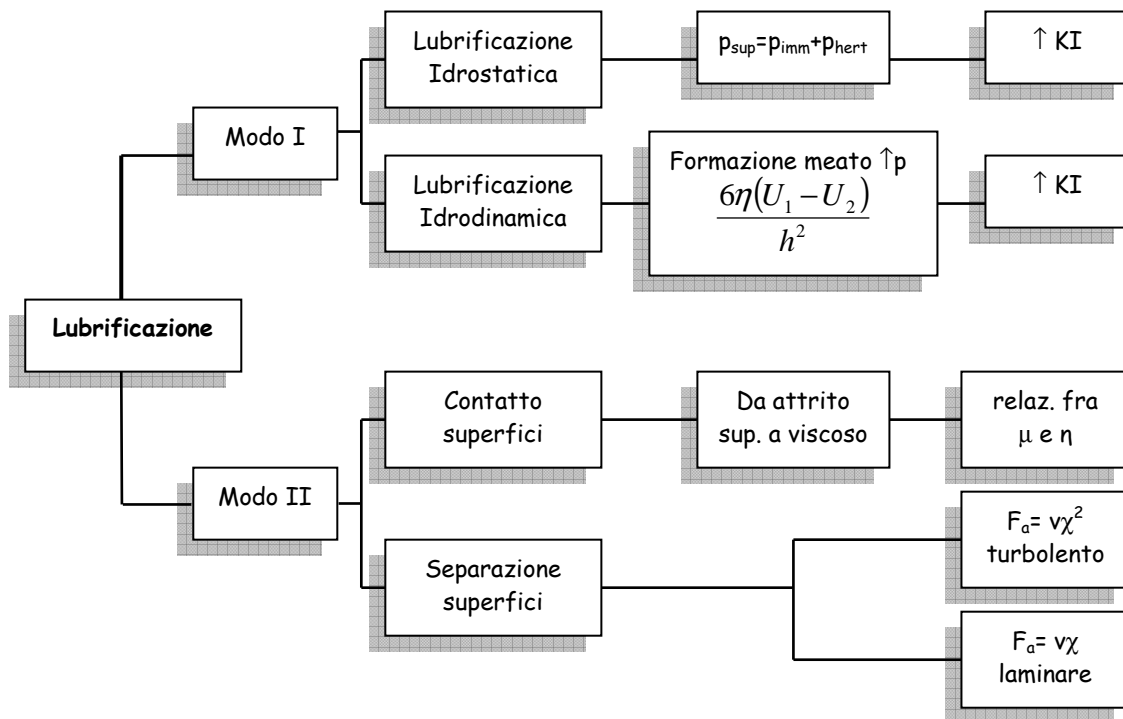


Figura 5.5) Schema a blocchi dell'ipotesi di comportamento di KI e KI2 in problemi bidimensionali di lubrificazione idrostatica e idrodinamica

Capitolo VI

Analisi numerica ad elementi finiti.

6.1 INTRODUZIONE

Il confronto con l'analisi numerica ad elementi finiti si prefigge due differenti scopi: il primo consiste nella rilevazione dell'andamento delle tensioni dovute al solo contatto fra disco e modello per poi effettuare un confronto con la soluzione analitica proposta da Hertz.

Una seconda analisi numerica si è svolta in presenza di tensioni tangenziali durante il contatto, lo scopo di questa analisi è di verificare l'ipotesi che siano quest'ultime a generare il ritardo di frangia rispetto al carico mobile.

6.2 ANALISI DI CONTATTO: DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI

In ambiente Abaqus[®] si è cercato di ricreare le medesime condizioni di carico agente nel contatto reale analizzato sperimentalmente, i parametri implementati sono i seguenti:

- Modulo Parts: si sono effettuati gli sketches in scala 1:1 degli elementi ruota e modello, entrambi bidimensionali. Raggio disco 300mm, lastra 300x65mm.
- Modulo Materials: ad entrambi gli elementi si sono assegnati i valori relativi al policarbonato eliminando gli elementi laterali in plexiglass i quali oltre ad aumentare notevolmente i tempi di calcolo necessiterebbero di una simulazione tridimensionale. $E=2300 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.35$, $\rho=80\text{Kg/m}$.
- Modulo Assembly: si è impostata la mesh del problema tramite elementi XXX con dimensione di riferimento dell'analisi pari a 4. Sebbene l'analisi interessi solo il modello piano si è scelto di meshare anche la parte di ruota in prossimità del contatto per avere una soluzione più accurata. Nella terza analisi, nella quale si è introdotta la cricca, si è reso necessario infittire la mesh in prossimità dell'apice con elementi a sviluppo radiale aventi centro nell'apice stesso, vedi l'esempio di fig. 6.1.

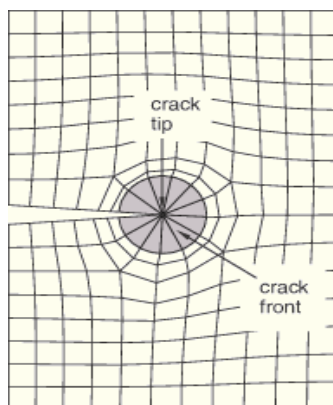


Figura 6.1) esempio di mesh in prossimità dell'apice di cricca.

- Modulo interactions: si è imposto il contatto fra disco e piano di tipo surface to surface contact, friction coefficient 0,3.
- modulo constraints: si è implementato il vincolo di rotazione al centro del disco, e il vincolo di incastro alla base del piano.
- modulo loads: al centro della ruota si è imposto sia uno spostamento orizzontale costante che una forza uniforme e anch'essa costante diretta verso il basso.

Di seguito (figure 6.2 e 6.3) è mostrato un confronto visivo fra le frange visualizzate in fotoelasticità e quelle ricavate tramite l'analisi ad elementi finiti.

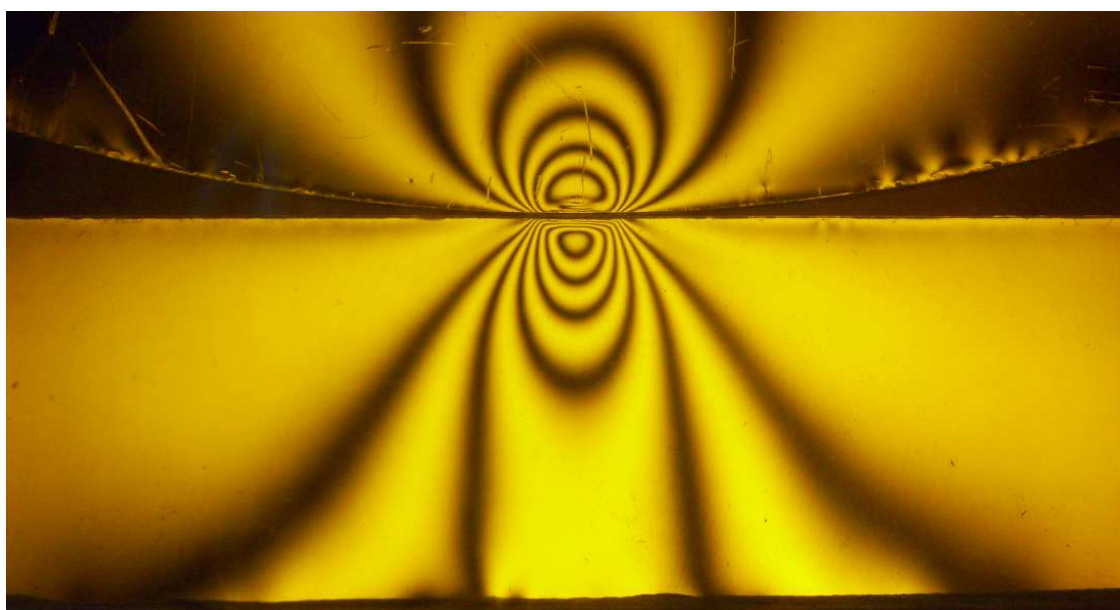


Figura 6.2) Andamento delle differenze degli sforzi in fotoelasticità, $F=530N$, policarbonato.

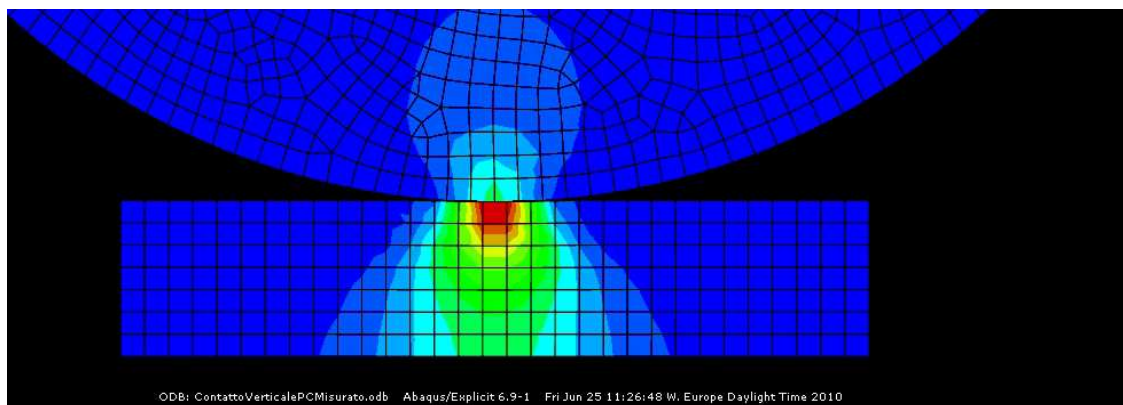


Figura 6.3) Andamento delle differenze degli sforzi con approccio FEM, $F=530\text{N}$, policarbonato.

L'andamento delle iso-intense risulta molto simile al caso sperimentale ed, a differenza della soluzione analitica, l'analisi numerica considera anche la reazione col piano di appoggio per cui si ha un allargamento delle frange di ordine più basso ed un avvicinamento a quello che è l'andamento reale. Il confronto con l'andamento analitico è visibile in figura 6.4.

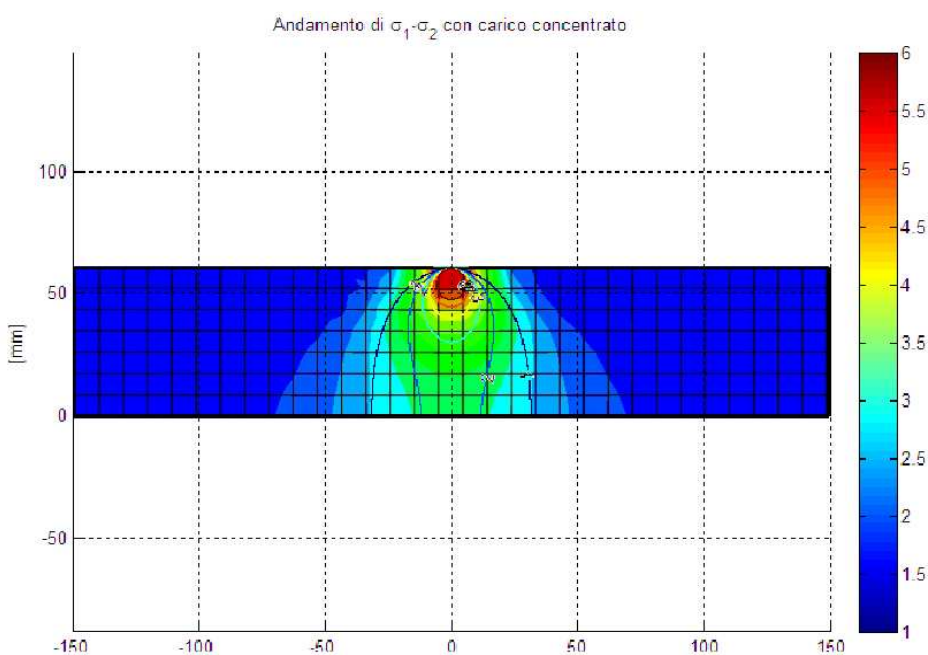


Figura 6.5) Confronto fra la soluzione analitica e quella ad elementi finiti..

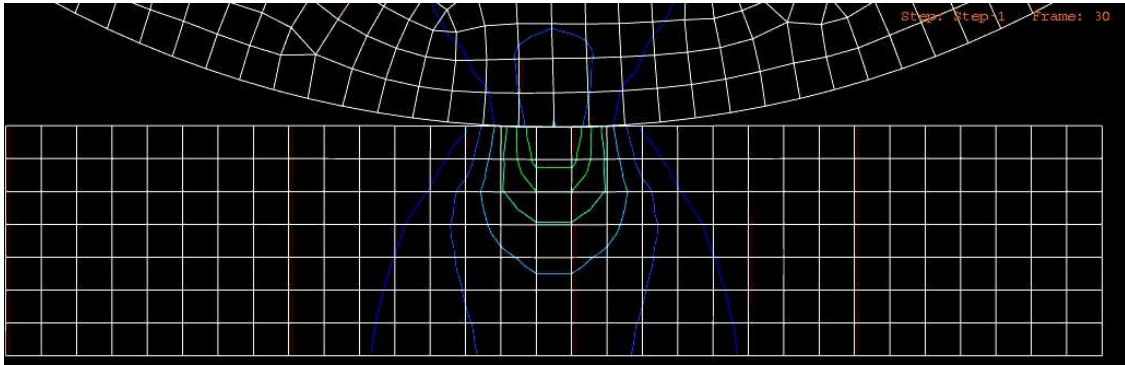


Figura 6.6) Isolamento delle frange nell'approccio ad elementi finiti.

Dal punto di vista quantitativo il valore di frangia rappresentato in output da Abaqus[®] è la sigma equivalente di Guess-Tresca che risulta essere uguale a:

$$\sigma_{GT} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (6.1)$$

Per risalire alla differenza degli sforzi bisogna quindi moltiplicare x 2 i valori di frangia calcolati in Abaqus[®], si trova quindi:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma_{GT} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_2)_{FEM} = 43MPa \\ (\sigma_1 - \sigma_2)_{sperimentale} = 42MPa \end{cases} \quad (6.3)$$

Dai risultati ottenuti si può affermare che l'analisi numerica di contatto risulta essere in linea con i risultati sperimentali ed analitici, è questa un'ulteriore conferma della buona approssimazione della distribuzione di pressione valutata dalla teoria di Hertz.

6.3 ANALISI IN PRESENZA DI SFORZI TANGENZIALI:

Nell'analisi ad elementi finiti svolta si è imposto un valore d'attrito non nullo fra le superfici della ruota e del piano, ne consegue che, una volta messi in movimento relativo, si scambieranno delle azioni tangenziali, visualizzate nella figura 6.6 con il colore grigio.

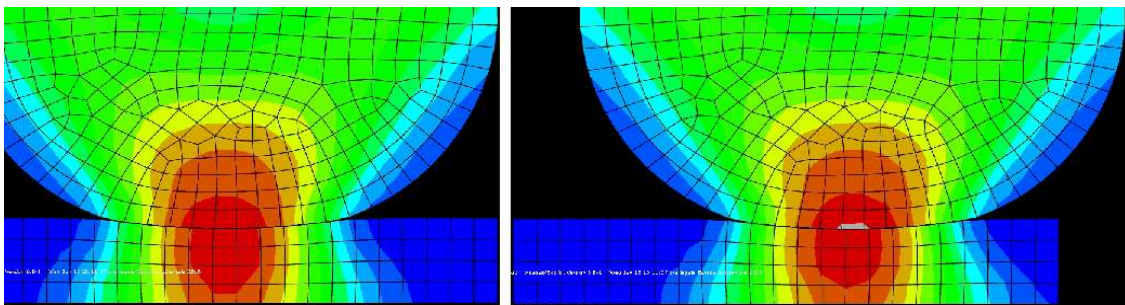


Figura 6.7) A sinistra: rotazione disco nulla sforzi tangenziali nulli.
A destra: disco in rotazione con generazione di sforzi tangenziali.

Come è ben evidente dalla figura precedente la presenza degli sforzi tangenziali non ha generato nessun ritardo delle frange rispetto al carico.

Alla medesima considerazione si è giunti anche per via sperimentale sottoponendo la sola lastra di policarbonato al medesimo carico mobile agente sul modello sandwich, si è così potuto constatare che “l'effetto ritardo” si ha unicamente nel modello, per cui l'ipotesi più accreditata vuole che sia dovuto ad un comportamento viscoelastico dell'adesivo.

A seguito di queste considerazioni si è realizzato un secondo modello il quale, rispetto al precedente, ha subito il trattamento termico di distensione del policarbonato e sul quale si è steso in modo molto più omogeneo l'adesivo grazie ad un pennello. Come risultato si è avuta la scomparsa di questo effetto.

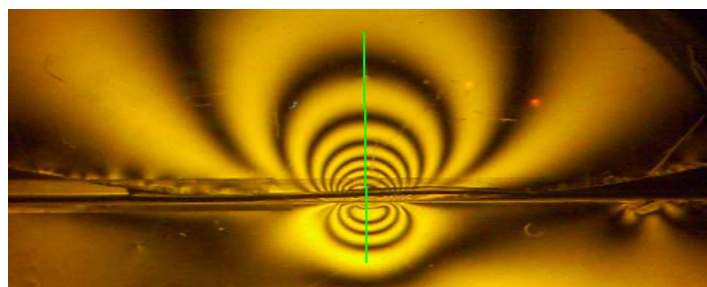


Figura 6.8) Coassialità fra distribuzione delle tensioni e carico massimo dopo distensione incollaggio.

Capitolo VII

Determinazione fotoelastica

dei fattori di

intensificazione degli sforzi

7.1 INTRODUZIONE

Il capitolo illustra le tecniche utilizzate per passare dalle differenze delle tensioni principali, visualizzate in fotoelasticità, al calcolo dei fattori di intensificazione degli sforzi per problemi bidimensionali. In letteratura sono disponibili diversi metodi di calcolo per KI e KII , [14], [15], [16], ma in molte di queste si ha l'esigenza di avere a disposizione un buon numero di dati fotoelastici, cioè di disporre di un numero sufficiente di frange di ordine intero nell'intorno dell'apice della cricca. Questa richiesta contrasta con l'elevata rigidità assunta dal modello dopo l'incollaggio, ne consegue che, per ottenere un buon numero di frange, bisognerebbe imporre pressioni di contatto tali da portare il componente a ridosso del campo plastico. Al contempo però aumentare il numero di frange considerate, aumenta anche dati a disposizione e con essi l'accuratezza del risultato. E' quindi necessario adottare procedure di calcolo che garantiscano un buon compromesso fra le richieste descritte, nel caso in esame si sono implementati le seguenti tecniche:

- a) Metodo di G. R. Irwin (o dell'Apogeo [11]) sviluppato per il calcolo di KI , relativo ai modi di pura apertura.
- b) Metodo Bradley & Kobayashi [8] anch'esso per il calcolo in presenza di KI puro.
- c) Metodo Schroedl e Smith [12] è un'evoluzione del metodo precedente, è sviluppato anch'esso per l'analisi di KI puro.
- d) Metodo Riley e Dally [11] sviluppato per presenza contemporanea di KI e KII .
- e) Metodo parametrico [11], anch'esso sviluppato per l'analisi in modo misto.

7.2 ELABORAZIONE DEL VALORE DI KI :

Tutti i metodi citati per l'analisi di KI puro sono miglioramenti della tecnica dell'Apogeo descritta per la prima volta da Irwine [10], la quale a sua volta,

trova origine dall'analisi dello stato di sforzo all'apice di una cricca descritto dalle equazioni di Westergaard (eq. 7.1)

Il sistema di riferimento a cui si rifanno le equazioni è mostrato in figura 7.1:

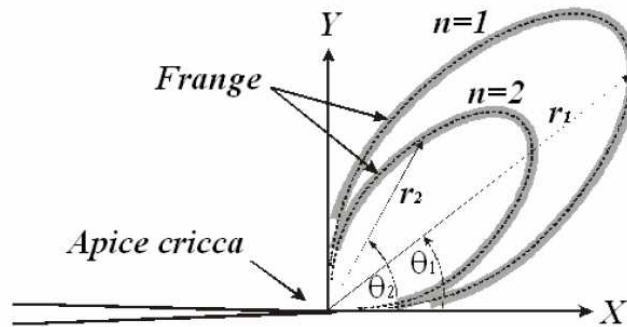


Figura 7.1) Rappresentazione del riferimento adottato per il calcolo del campo degli sforzi.

Le equazioni di Westergaard riportate [13] considerano un modello fotoelastico bidimensionale sottoposto ad uno stato di sollecitazione composto:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} + \dots \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \dots \quad (7.1) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} + \dots\end{aligned}$$

In cui:

r , θ sono coordinate polari;

ν coefficiente di Poisson.

Nelle esecuzioni delle analisi fotoelastiche esposte di seguito si sono acquisite immagini e sequenze video delle frange generate dal contatto mobile, il carico è costante per tutte le prove effettuate ed è pari a 530,5N.

I valori dei fattori di intensificazione degli sforzi sono ricavati nella situazione più gravosa riscontrata nella simulazione analitica, ovvero quando il carico

massimo della distribuzione di pressione si trova in corrispondenza dell'apertura superficiale della cricca.

7.2.1 METODO DI IRWIN

Si fa riferimento al sistema mostrato in figura 8.1, con origine sul bordo della cricca la quale è assimilabile ad una discontinuità semiretta avente all'origine un riferimento cartesiano e uno polare secondo la giacitura mostrata di seguito in figura 7.2.

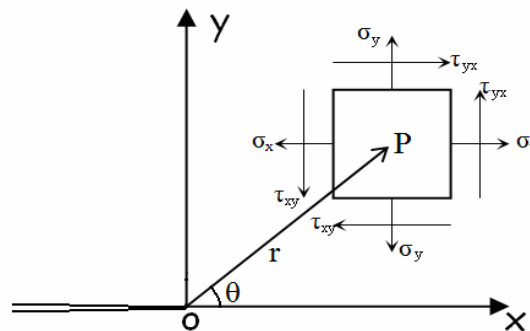


Figura 7.2) Rappresentazione dello stato di sforzo nel punto generico P.

Lo stato di sforzo presente nel punto P in condizioni di apertura dei lembi (modo I), può essere descritto dalle equazioni di Westergaard troncate al primo termine:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \end{cases} \quad (7.2)$$

Lo stato di sforzo in P è rappresentabile tramite cerchi di Mohr (vedi figura 7.3):

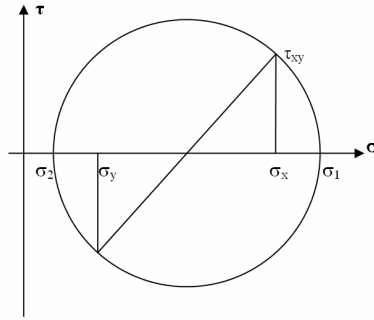


Figura 7.3) Rappresentazione dello stato di sforzo in P tramite cechi di Mohr.

Si ricordano le espressioni dello sforzo tangenziale:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (7.3)$$

$$\tau_{\max}^2 = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)^2}{2^2} + \tau_{xy}^2 \Rightarrow (2\tau_{\max})^2 = (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (2\tau_{xy})^2 \quad (7.4)$$

Per la misurazione di KI Irwin adopera un'espressione degli sforzi ottenuta sommando ai termini singolari la più semplice modificazione non singolare rappresentata dal termine σ_{ox} in modo da non modificare le condizioni al contorno.

$$\text{Campo asintotico modificato} \begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] - \sigma_{ox} \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \end{cases} \quad (7.5)$$

σ_{ox} prende il nome di T-stress e la sua presenza si può notare visivamente nella perdita di simmetria delle frange rispetto all'asse y (figura 7.4).

La fotoelasticità fornisce la differenza degli sforzi principali, tuttavia per arrivare a valutare $\sigma_1 - \sigma_2$ dall'eq. (7.3), bisogna prima ricavare le incognite σ_x , σ_y e σ_{ox} dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}\sigma_y - \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[-2 \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] - \sigma_{ox} \\ (\sigma_y - \sigma_x)^2 &= \frac{K_I^2}{2\pi r} \sin^2 \vartheta \sin^2\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) + \sigma_{ox}^2 + \frac{2K_I \sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \vartheta \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \\ (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (2\tau_{xy})^2 &= \frac{K_I^2}{2\pi r} \sin^2 \vartheta + \sigma_{ox}^2 + \frac{2K_I \sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \vartheta \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) = (2\tau_{\max})^2\end{aligned}\quad (7.6)$$

Osservando la forma delle isointense in prossimità dell'apogeo, Irwin concluse che la τ_{\max} è stazionaria rispetto all'angolo θ nell'apogeo della frangia stessa:

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{in } r_m \text{ e } \vartheta_m \quad (7.7)$$

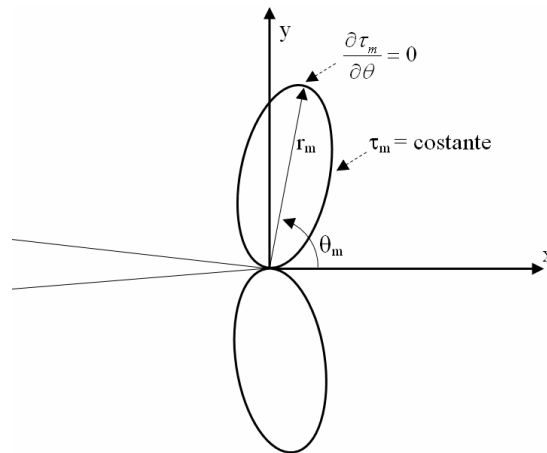


Figura 7.4) Parametri considerati nel metodo di Irwin..

All'apogeo (r_m, θ_m) quindi:

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial \vartheta} = \frac{K_I^2}{2\pi r} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \sigma_{ox}^2 + \frac{2K_I \sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \vartheta \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) + \frac{3}{2} \sin \vartheta \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] = 0 \quad (7.8)$$

Da cui si ricava:

$$\sigma_{ox} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{\sin \vartheta_m \cos \vartheta_m}{\cos \vartheta_m \sin\left(\frac{3\vartheta_m}{2}\right) + \frac{3}{2} \sin \vartheta_m \cos\left(\frac{3\vartheta_m}{2}\right)} \quad (7.9)$$

Infine sfruttando la relazione fondamentale della fotoelasticità:

$$\tau_m = \frac{Nf_\sigma}{2h} \tag{7.10}$$

e sostituendola nell'equazione (7.8) separando le due incognite, si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{ox} &= \frac{-\tau_{\max} \cos \vartheta_m}{\cos\left(\frac{3\vartheta_m}{2}\right) \left[\cos^2 \frac{\vartheta_m}{2} + \frac{9}{4} \text{sen}^2 \vartheta_m \right]^{1/2}} \\ K_I &= \frac{2\tau_{\max} \sqrt{2\pi r}}{\sin \vartheta_m} \left[1 + \left(\frac{2}{3 \tan \vartheta_m} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[1 + \frac{2 \tan\left(\frac{3\vartheta_m}{2}\right)}{3 \tan \vartheta_m} \right] \end{aligned} \right. \tag{7.11}$$

Questo metodo, il quale permette di ricavare i valori di KI e di T-stress unicamente da misurazioni geometriche delle frange visualizzate in fotoelasticità, risulta dare soluzioni accettabili sotto le seguenti ipotesi:

- soluzione asintotica, ovvero tanto più ci si allontana dall'apice tanto più la soluzione si discosta da quella reale.
- modo di apertura puro;
- condizioni al contorno sul bordo cricca: in $\theta = \pm\pi \rightarrow \sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Implementando le formulazioni precedenti in ambiente Matlab[®], è possibile ricavare gli andamenti degli sforzi in presenza o in assenza del termine di σ_{0x} , figure 7.5 e 7.6.

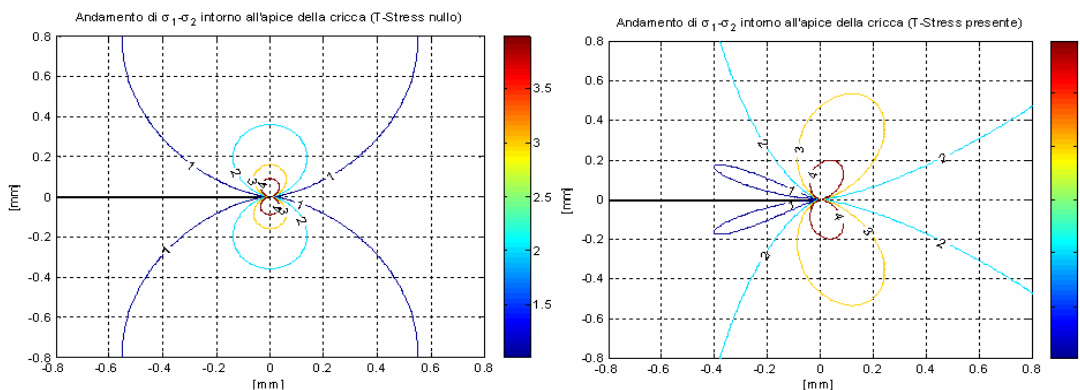


Figura 7.4) $KI=3 \text{ MPa/m}^{1/2}$, T-stress nullo. Figura 7.6) $KI =3 \text{ MPa/m}^{1/2}$, T-stress=1,5 MPa.
7.2.1.1 RILEVAZIONI DI KI TRAMITE METODO DI IRWINE

Nella figura seguente sono visibili i parametri utilizzati per implementare il metodo di Irwine:

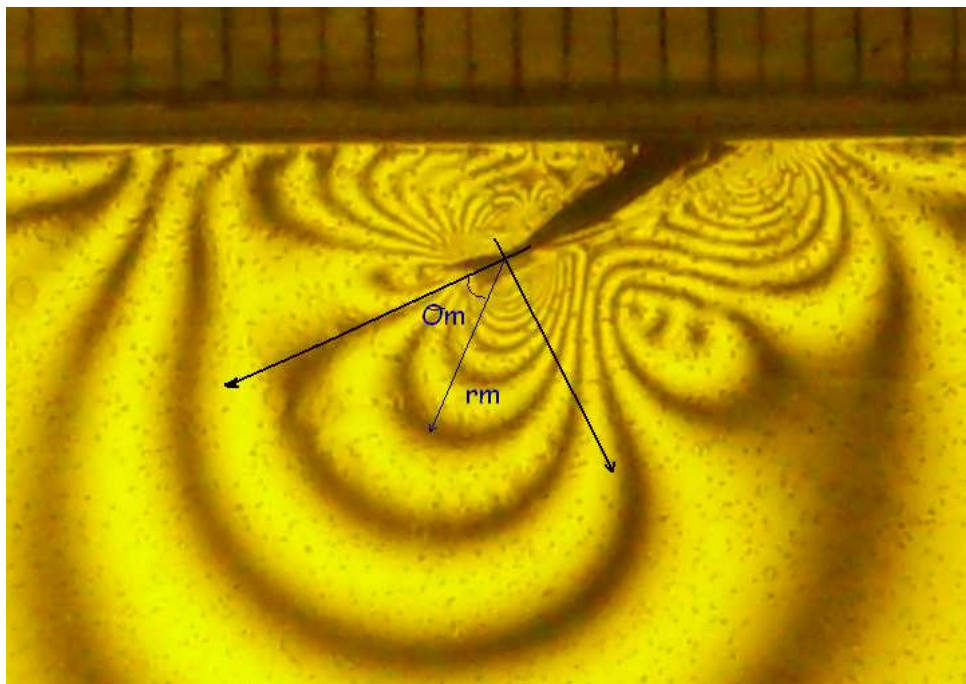


Figura 7.7) Parametri rilevati per implementare il metodo di Irwine.

Tabella 7.1) Tabella dei risultati ricavati dal metodo di Irwine

FLUIDO	Viscosità [mm ² /s]	θ_m [°]	r_m [mm]	N	T-stress	KI [MPa/m ^{1/2}]
Aria	2,5	40,40	3,23	4	-3,21	3,26
Agip 100	100	53,70	2,43	3	-5,06	3,83
Tellus 46	46	42,47	4,51	4	-3,38	3,85

Nelle figure seguenti è invece possibile osservare gli andamenti fotoelastici per i casi analizzati:

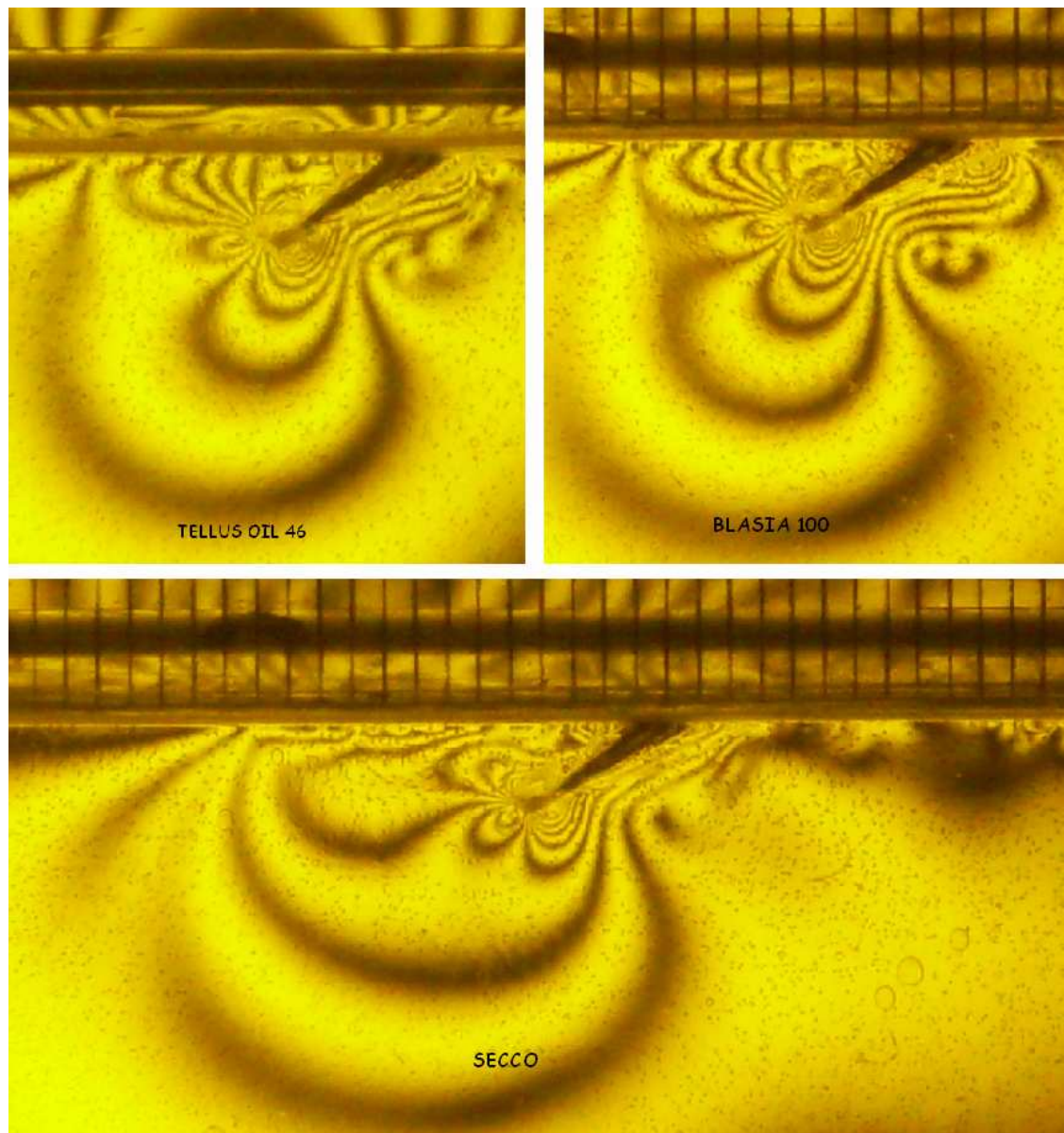


Figura 7.8) andamento delle frange per i casi indicati, carico mobile, forzante 530,5N.

L'accuratezza dei risultati dipende dalla possibilità di misurare con precisione r_m , θ_m , τ_{max} . Il metodo si basa sul rilevamento di una sola frangia per cui se la scelta ricade su frange di ordine minore (le più grandi e distanti) diminuisce la precisione di valutazione di r_m in quanto è variabile sullo spessore della frangia stessa, al contrario per frange di ordine elevato aumenta la definizione della frangia, ma aumenta anche l'errore sulla valutazione della direzione effettiva dell'apice e quindi di θ_m . Per questi motivi si sono sviluppati altri approcci che considerano più frange, alcuni dei quali esposti di seguito.

7.2.2 METODO D BRADLEY E KOBAYASHI

Il metodo sviluppato da Bradley e Kobayashi [8] consiste in una modificazione del metodo di Irwin al fine di considerare più frange ed aumentare la precisione dei risultati.

Si riscrive la componente di sforzo costante secondo la seguente relazione:

$$\sigma_{0x} = \frac{\delta K_I}{\sqrt{\pi a}} \quad (7.12)$$

In questo modo è possibile effettuare la seguente semplificazione:

$$2\tau_m = K_I g(\theta, r, a) \quad (7.13)$$

Con

$$g(\theta, r, a) = \left[\sin^2 \theta + 2\delta \left(\frac{2r}{a} \right)^{1/2} \sin \theta \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{2r\delta^2}{a} \right]^{1/2} \quad (7.14)$$

Dove

a è la lunghezza di cricca.

Sostituendo e risolvendo secondo il termine K_I si ha la seguente espressione:

$$K_I = \frac{f_\sigma (2\pi r_1 r_2)^{1/2} (N_2 - N_1)}{h(g_2 \sqrt{r_1} + g_1 \sqrt{r_2})} \quad (7.15)$$

L'equazione è risolvibile imponendo un valore di δ unitario, anche se questa semplificazione non è stata completamente giustificata. Come si può notare si ha il vantaggio di considerare 2 frange e non più una sola.

7.2.2.1 RILEVAZIONI DI KI TRAMITE METODO DI BRADLEY E KOBAYASHI

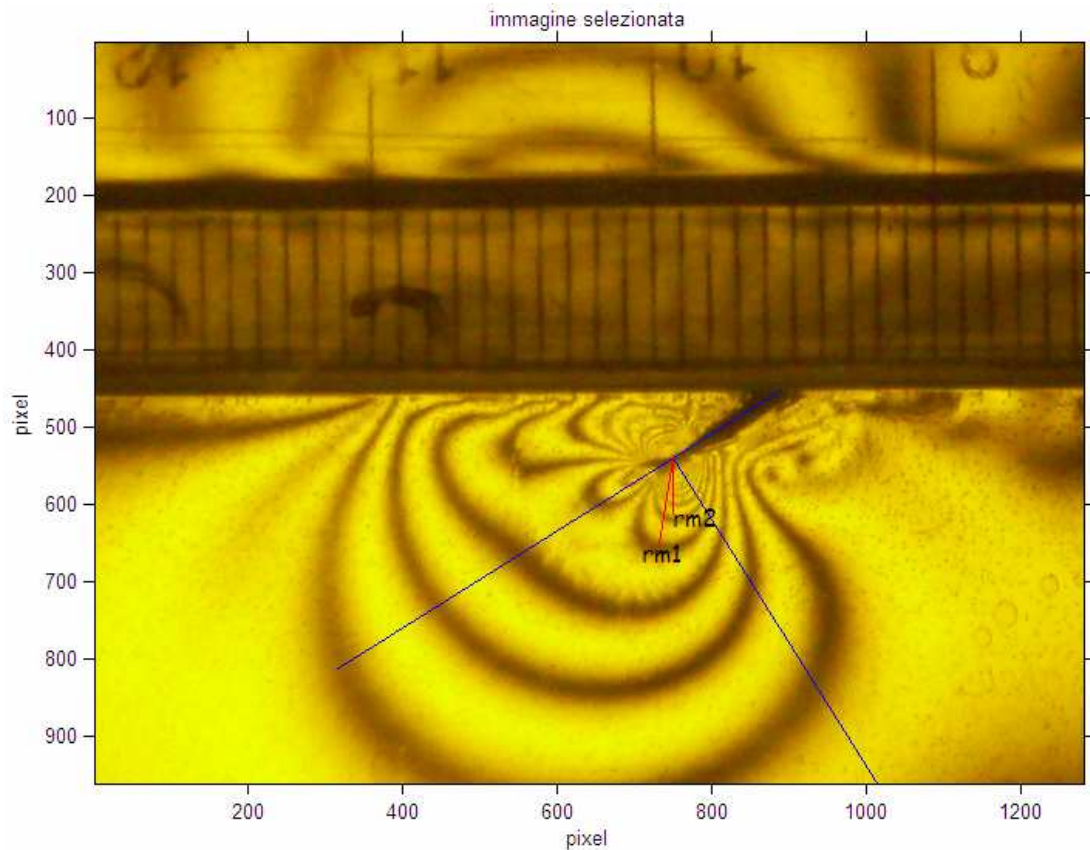


Figura 7.9) Parametri rilevati per implementare il metodo di Bradley e Kobayashi.

Tabella 7.2) Tabella dei risultati ricavati dal metodo di Bradley e Kobayashi.

FLUIDO	Viscosità [mm ² /s]	rm1 [mm]	rm2 [mm]	N1	N2	KI [MPa/m ^{1/2}]
Aria	2,5	2,7	1,8	4	5	3,53
Agip 100	100	1,56	1,42	3	4	4,52
Tellus 46	46	1,79	1,28	3	4	4,48

Il metodo prevede ancora di ricavare due parametri come quello di Irwine, ma su due frange distinte, in particolare si elimina il problema di rilevazione dell'angolo θ_m .

7.2.3 METODO DI SCHOROEDL E SMITH

Un ulteriore modifica al metodo di Irwine è quella apportata da Schoroedl e Smith [SS], che considera come direzione di rilevamento dei dati la normale alla direzione di sviluppo della cricca, con questa restrizione l'equazione (7.3) si riduca a:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r} + \frac{\sqrt{2}K_I\sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r}} + \sigma_{ox}^2 \quad (7.16)$$

Risolviendo l'equazione (7.16) quadratica in K_I , rispetto alla soluzione positiva si trova:

$$K_I = \sqrt{\pi r} \left[(8\tau_m^2 - \sigma_{ox}^2)^{1/2} - \sigma_{ox} \right] \quad (7.17)$$

Smith semplificò l'equazione considerando trascurabile il valore quadratico di T-stress se confrontato con τ_m^2 . Infine sfruttando la relazione alle differenze vista per il metodo Bradley-Kobayashi (relativamente a K_I e σ_{ox}) e calcolando τ_m relativo alla i-esima e j-esima frangia si ricava K_I come:

$$K_I = \sqrt{2\pi r_i} \frac{(2\tau_m)_i - (2\tau_m)_j}{1 - (r_i/r_j)^{1/2}} \quad (7.18)$$

7.2.3.1 RILEVAZIONI DI KI TRAMITE METODO DI SCHOROEDL E SMITH

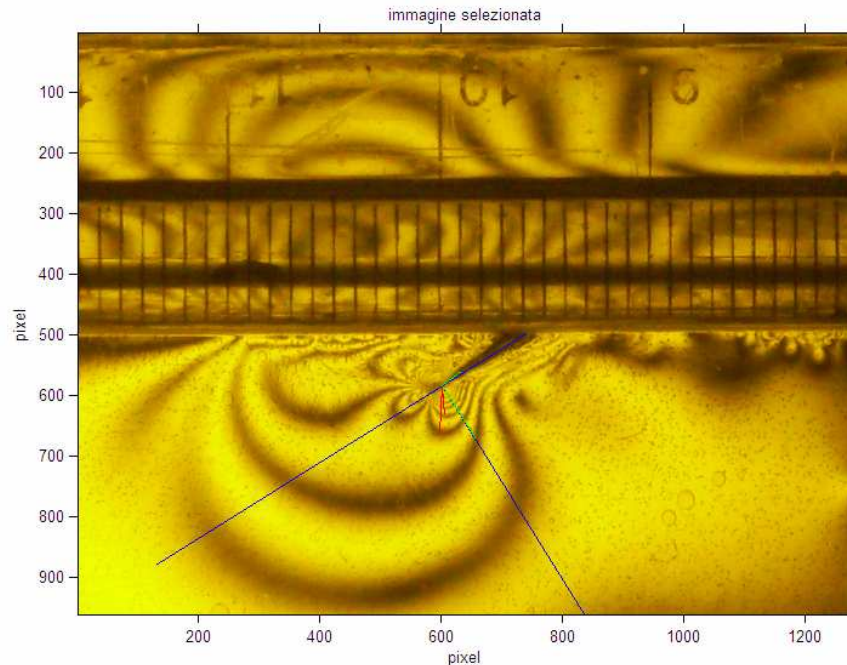


Figura 7.10) Parametri rilevati per implementare il metodo di Schoroedl e Smith.

Tabella 7.3) Tabella dei risultati ricavati dal metodo di Schoroedl e Smith.

FLUIDO	Viscosità [mm ² /s]	rm1 [mm]	rm2 [mm]	N1	N2	KI [MPa/m ^{1/2}]
Aria	2,5	2,4	1,47	4	5	5,59
Agip 100	100	1,92	1,35	4	5	6,76
Tellus 46	46	2,33	1,27	3	4	6,34

Questo metodo considera 2 frange, come quello sviluppato da Bradley-Kobayashi, valuta anche i medesimi parametri, ma ha il vantaggio di avere come direzione di raggio di frangia la normale rispetto allo sviluppo della cricca ed è quindi tendenzialmente più facilmente rilevabile rispetto alla direzione di apogeo.

Da studi eseguiti da Bradley e Kobayashi [8], la soluzione dei metodi illustrati è valida nell'intorno di $r_m < 0.03a$ e per $17^\circ < \theta_m < 59^\circ$. In particolare l'errore è limitato se esiste un'accuratezza nella misura dei raggi che permetta di avere un errore non superiore al 2%, bisogna, inoltre, considerare le limitazioni dovute

alla validità della condizione di stato piano di sforzo secondo la quale $0,03a < r_m < h/2$.

La seguente figura mostra l'area in cui è possibile effettuare la misurazione:

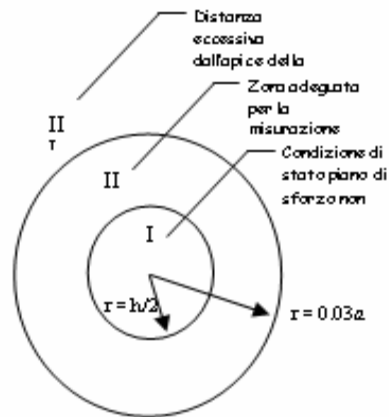


Figura 7.11) Campo di accettabilità della soluzione di KII.

Le rilevazioni effettuate con tutti i criteri si possono ricavare tramite il programma [rilevaz.m] in allegato.

7.3 ELABORAZIONE DEL VALORE DI K_{II} NEL CASO DI MODO MISTO

Si analizza di seguito il caso più generale inerente alla presenza simultanea del modo di scorrimento e di apertura. Grazie al programma [cricca.m] in allegato è possibile mostrare l'andamento analitico della differenza degli sforzi principali nei casi di K_I e K_{II} non nulli.

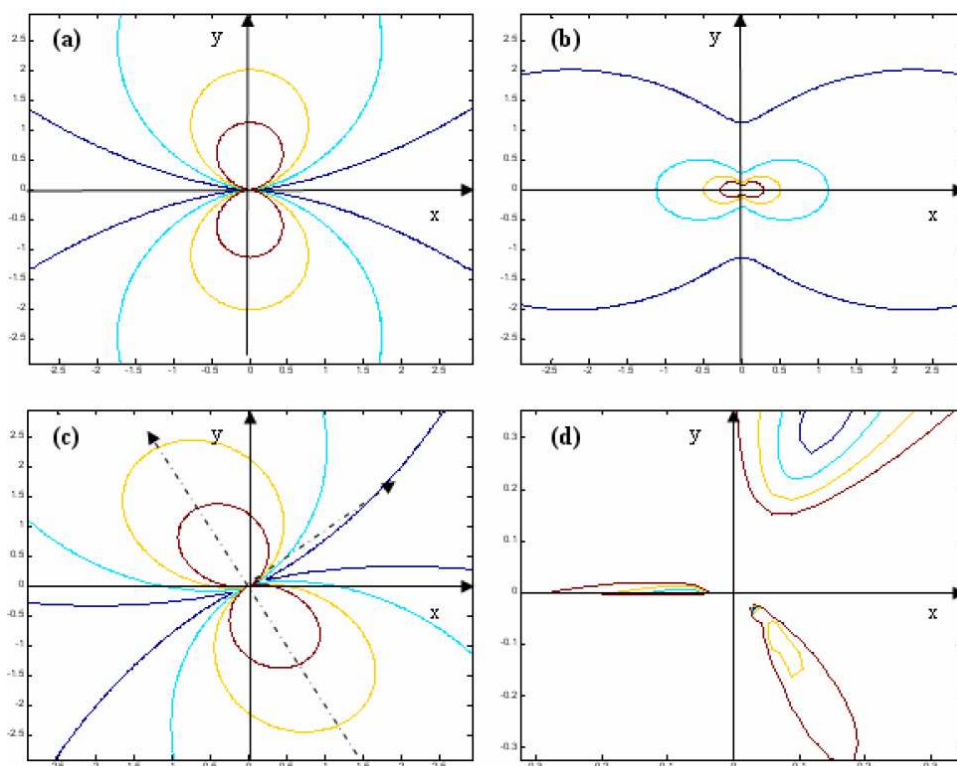


Figura 7.12) a- K_I puro, b- K_{II} puro, c- K_I e K_{II} , d- K_I , K_{II} e T.stress.

Nel caso di apertura in modo I puro con T-stress nullo, le frange godono di una doppia simmetria rispetto agli assi cartesiani, tendono a chiudersi in prossimità dell'apice ed hanno l'asse ortogonale rispetto alla direzione della cricca. Nel caso di modo II puro e T-stress nullo, le frange mantengono la doppia simmetria, ma sono disposte parallelamente al fronte della cricca.

La presenza contemporanea di K_I e K_{II} ruota l'asse di simmetria di una quantità che cresce all'aumentare del rapporto di K_I/K_{II} . [12]. La presenza di T-stress invece elimina ogni genere di simmetria.

Un approccio per la descrizione del modo misto di sollecitazione è ripreso dagli studi di Riley e Dally [11] nel quale si descrive il campo modificato degli sforzi (eq. 7.19) tramite i parametri incogniti KI, KII, e σ_{ox} .

7.3.1 METODO RILEY E DALLY

Anche in questa analisi il punto di partenza sono le equazioni di Westergaard [13] relative al campo modificato degli sforzi, arretrate però al secondo termine:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} - \sigma_{ox} \\ \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \dots \\ \tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{II} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \right\} + \dots \end{cases} \quad (7.19)$$

Analogamente a quanto visto per il metodo dell'apogeo si sostituiscono sia l'equazione fondamentale della fotoelasticità (eq.7.10) che l'espressione della τ_{max} nella prima equazione del sistema (7.19):

$$\begin{aligned} \left(\frac{Nf_\sigma}{h} \right) &= \frac{1}{2\pi r} \left[(K_I \sin \vartheta + 2K_{II} \cos \vartheta)^2 + (K_{II} \sin \vartheta)^2 \right] + \dots \\ &+ \frac{2\sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left[K_I \sin \vartheta (1 + 2 \cos \vartheta) + K_{II} (1 + 2 \cos^2 \vartheta) + \cos \vartheta \right] + \sigma_{ox}^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

L'equazione precedente è una relazione non lineare tra gli ordini di frangia e le incognite KI, KII e σ_{ox} . Il numero di incognite si riduce a due qualora si sia in presenza di modo I o modo II puro, ma nel caso generale di modo misto è necessario porre a sistema tre equazioni del tipo 7.20 ottenute da tre diverse coppie di valori di r e θ .

Nel caso particolare di $\theta = \pi$, ovvero lungo lo sviluppo della cricca, l'equazione 7.20 diventa:

$$\left(\frac{N_1 f_\sigma}{h}\right)^2 = \frac{4K_{II}^2}{2\pi r_1} + \frac{4K_{II}^2 \sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r_1}} + \sigma_{ox}^2 \quad (7.21)$$

Questa equazione è indipendente da KI e può essere riscritta come:

$$\left(\frac{N f_\sigma}{h}\right)^2 = \pm \left(\frac{4K_{II}^2}{\sqrt{2\pi r}} + \sigma_{ox} \right) \quad (7.22)$$

dalla quale si può esplicitare il termine di T-stress:

$$\sigma_{ox} = - \left(\frac{N_1 f_\sigma}{h} \right) - \left(\frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi r_1}} \right) \quad (7.23)$$

La scelta del segno rispecchia il caso in cui le frange isocromatiche intersecano la direzione $\theta = \pi$ nel caso di $K_{II} < 0$, mentre intersecano $\theta = -\pi$ quando $K_{II} > 0$.

Si considerino due differenti frange $N_1 > N_2$ e le rispettive distanze r_1 e r_2 di intersezione delle iso-intense col bordo della cricca (fig. 7.13).

Si consideri l'equazione 7.22 col segno negativo e si elimini σ_{ox} per sostituzione nel sistema ottenuto variando le coppie di parametri $(r_1; \theta)$ e $(r_2; \theta)$:

$$K_{II} = \frac{f_\sigma}{h} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}} \right) (N_1 - N_2) \quad (7.24)$$

Analogamente, per il caso di K_{II} positivo, ovvero avente intersezioni delle frange N_1 e N_2 sul bordo inferiore della cricca, si considera la soluzione positiva dell'equazione (7.15) e si ricava:

$$K_{II} = \frac{f_{\sigma}}{h} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}} \right) (N_1 - N_2) \quad (7.25)$$

$$\sigma_{ox} = \left(\frac{N_1 f_{\sigma}}{h} \right) - \left(\frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi r_1}} \right) \quad (7.26)$$

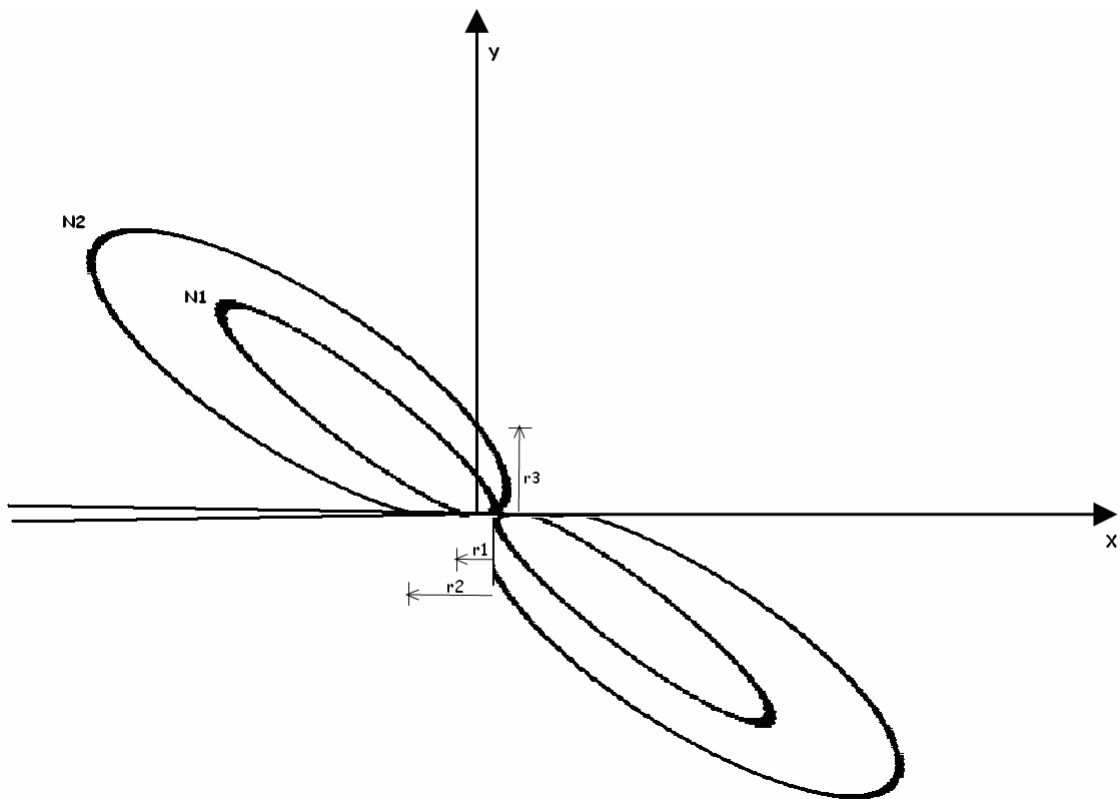


Figura 7.13) Parametri per la valutazione di K_{II} .

Per ricavare K_I si rivaluta l'equazione 7.20 in $\theta=\pi/2$ ottenendo:

$$\left(\frac{N_3 f_{\sigma}}{h} \right)^2 = \frac{1}{2\pi r_3} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{\sigma_{ox}}{\sqrt{\pi r_3}} (K_I + K_{II}) + \sigma_{ox}^2 \quad (7.27)$$

La 7.27 è un'equazione di secondo grado rispetto a K_I la cui soluzione risulta:

$$K_I = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7.28)$$

Nella quale:

$$a = \frac{1}{2\pi r_3}; \quad b = \frac{\sigma_{ox}}{\sqrt{\pi r_3}}; \quad c = \frac{K_{II}^2}{2\pi r_3} + \frac{K_{II} \sigma_{ox}}{\sqrt{\pi r_3}} + \sigma_{ox}^2 - \left(\frac{N_3 f_\sigma}{h} \right)^2 \quad (7.29)$$

KI non è mai negativo perciò è accettabile unicamente la soluzione positiva dell'equazione 7.28.

7.3.1.1 RILEVAZIONI DI KI e KII TRAMITE METODO DI DALLY e RILEY

Nell'immagine seguente è mostrato il sistema di riferimento adottato per il rilevamento dei parametri utili al calcolo di KI e KII. Per evitare errori di misura dovuti ad una diversa proporzione di scala a seguito dell'operazione di zoom dell'immagine, tutte le lunghezze (r_m , r_1 , r_2) sono state valutate per confronto con un riferimento millimetrato mostrato nella parte superiore della figura 7.14.

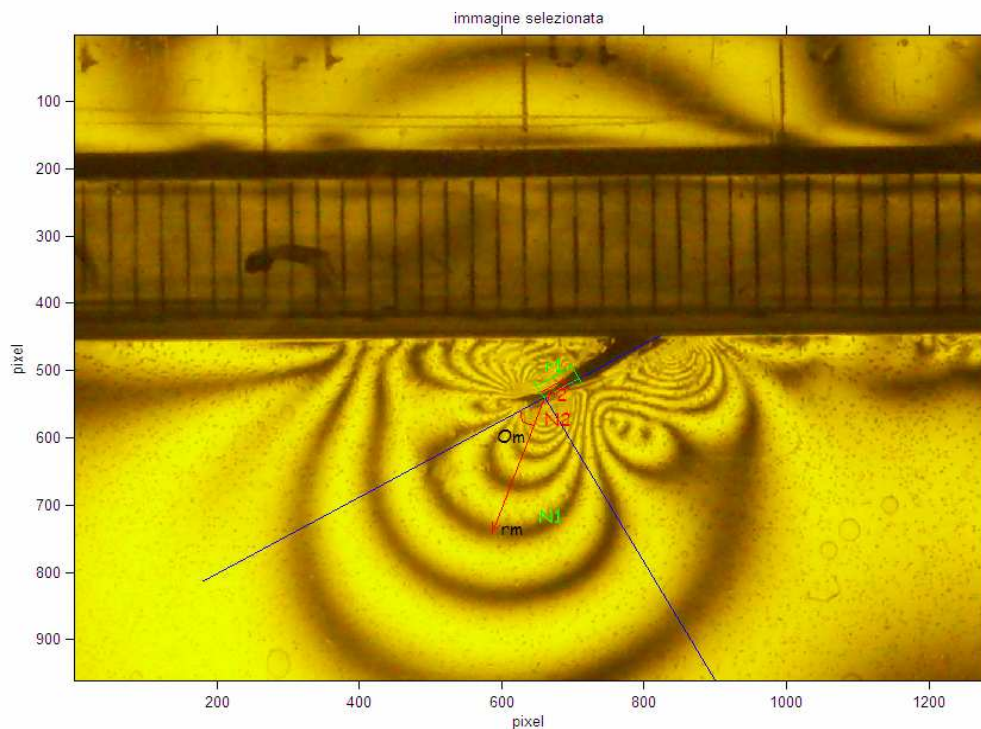


Figura 7.14) Visualizzazione frange in assenza difluido.

Si è sviluppato in ambiente Matlab[®] un programma che elabora in automatico i valori di intensificazione degli sforzi e di T-stress una volta cliccato sui parametri mostrati in figura 7.14. in output si ottengono i risultati:

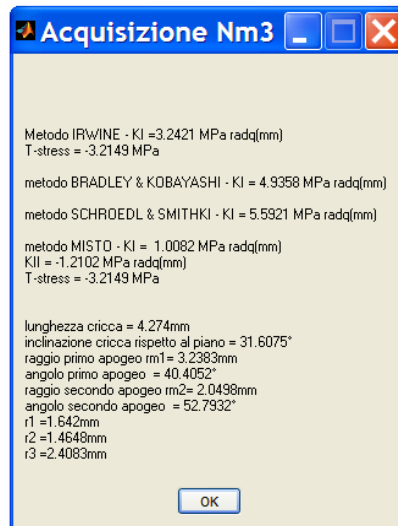


Figura 7.15) Output dei risultati in uscita dalla routine implementata, KII è calcolato in base alle convenzioni di segno adottate nel sistema di riferimento.

Tabella 7.4) Dati riassuntivi metodo di Dally e Riley:

r_1 [mm]	r_2 [mm]	N1	N2	KI [MPa/m ^{1/2}]	KII [MPa/m ^{1/2}]	σ_{ox} [MPa]
Assenza di fluido						
1,71	1,37	4	5	2,39	-0,63	-3,57
Agip Blasia 100 [®]						
1,66	1,17	4	5	5,04	-0,37	-4,93
Shell Telluso 46 [®]						
2,05	1,58	4	5	3,71	-0,56	-3,14

Il metodo di calcolo appena visto è fortemente instabile, ovvero bastano piccole variazioni sui parametri iniziali per avere grandi variazioni sul risultato finale. Per questo motivo i risultati ottenuti non possono considerarsi attendibili in quanto andrebbero rilevati con un sistema di acquisizione immagini che permetta ingrandimenti maggiori senza una sensibile perdita di risoluzione.

Per ottenere risultati più attendibili per il modo misti si è sviluppato un ulteriore approccio di tipo parametrico.

7.3.2 METODO PARAMETRICO

Un modello multiparametro [23] che permette di ricavare la distribuzione degli sforzi in una situazione che prevede la combinazione del Modo I e del Modo II è stato introdotto da Atluri e Kobayashi:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{In} r^{\frac{n-2}{2}} \begin{Bmatrix} \left\{ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ \left\{ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ - \left\{ (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) \sin\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \end{Bmatrix} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{II n} r^{\frac{n-2}{2}} \begin{Bmatrix} \left\{ 2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) \sin\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ \left\{ 2 + (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right) \sin\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \\ - \left\{ (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta\right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Dove:

$$A_{I1} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}; A_{II1} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \quad (7.31)$$

Mentre il termine di sforzo correttivo σ_{0x} è ricavabile dal secondo termine del Modo I come:

$$4A_{I2} = -\sigma_{0x} \quad (7.32)$$

Per poter risolvere il sistema di equazioni non lineare nei coefficienti incogniti che ne risulta è necessario applicare il seguente metodo. Dalla relazione fondamentale della fotoelasticità:

$$\frac{N \cdot f_{\sigma}}{t} = \sigma_1 - \sigma_2$$

per un problema di sforzo piano, gli sforzi principali sono i seguenti:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + (\tau_{xy})^2} \quad (7.33)$$

È possibile definire la seguente equazione dipendente dal punto in cui si vuole calcolare la differenza tra gli sforzi principali:

$$g_m = \left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}_m^2 + (\tau_{xy})_m^2 - \left\{ \frac{N_m \cdot f_{\sigma}}{2 \cdot t} \right\}^2 \quad (7.34)$$

Sostituendo l'equazione che descrive l'andamento degli sforzi intorno all'apice della cricca si ricava un'equazione non lineare nei coefficienti incogniti A_{I1} , A_{I2}, \dots, A_{Ik} e A_{II1} , A_{II2}, \dots, A_{III} dove k è il numero dei parametri che caratterizzano il Modo I mentre l è il numero di parametri caratterizzanti il Modo II. Per poter risolvere il sistema è necessario imporre un valore iniziale ai coefficienti ed utilizzare un processo iterativo.

A tal proposito si stima il valore approssimato di tali coefficienti per mezzo di una serie di Taylor:

$$(g_m)_{i+1} = (g_m)_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{I1}} (\Delta A_{I1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{I2}} (\Delta A_{I2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{Ik}} (\Delta A_{Ik})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II1}} (\Delta A_{II1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II2}} (\Delta A_{II2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{III}} (\Delta A_{III})_i \quad (7.35)$$

dove il pedice i si riferisce al numero di iterazioni raggiunte e ΔA_{I1} , $\Delta A_{I2}, \dots, \Delta A_{Ik}$ e ΔA_{II1} , $\Delta A_{II2}, \dots, \Delta A_{III}$ sono le correzioni delle precedenti stime dei parametri A_{I1} , A_{I2}, \dots, A_{Ik} e A_{II1} , A_{II2}, \dots, A_{III} . Le correzioni vengono determinate

imponendo $(g_m)_{i+1} = 0$ in quanto dall'equazione fondamentale della fotoelasticità si deduce la seguente relazione:

$$\left\{ \frac{N_m \cdot f_\sigma}{2 \cdot t} \right\}^2 = \left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}_m^2 + (\tau_{xy})_m^2 \quad (7.36)$$

La quale impone, qualora ci sia una corretta corrispondenza tra i parametri presenti all'interno e quindi sia verificata l'uguaglianza, che:

$$g_m = \left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}_m^2 + (\tau_{xy})_m^2 - \left\{ \frac{N_m \cdot f_\sigma}{2 \cdot t} \right\}^2 = 0 \quad (7.37)$$

ad ogni iterazione è quindi possibile determinare le correzioni dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} -(g_m)_i = & \frac{\partial g_m}{\partial A_{I1}} (\Delta A_{I1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{I2}} (\Delta A_{I2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{Ik}} (\Delta A_{Ik})_i \\ & + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II1}} (\Delta A_{II1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II2}} (\Delta A_{II2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{III}} (\Delta A_{III})_i \end{aligned} \quad (7.38)$$

Per poter implementare il sistema in un programma di calcolo matriciale è necessario tradurre in matrici quanto detto; è possibile riscrivere il sistema come segue:

$$\{g\}_i = -[b]_i \{\Delta A\}_i \quad (7.40)$$

Dove

$$\{g\}_i = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \\ \vdots \\ g_M \end{Bmatrix}_i ; [b]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial A_{I1}} & \frac{\partial g_1}{\partial A_{I2}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial A_{Ik}} & \frac{\partial g_1}{\partial A_{II1}} & \frac{\partial g_1}{\partial A_{II2}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial A_{III}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial A_{I1}} & \frac{\partial g_2}{\partial A_{I2}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial A_{Ik}} & \frac{\partial g_2}{\partial A_{II1}} & \frac{\partial g_2}{\partial A_{II2}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial A_{III}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial A_{I1}} & \frac{\partial g_M}{\partial A_{I2}} & \dots & \frac{\partial g_M}{\partial A_{Ik}} & \frac{\partial g_M}{\partial A_{II1}} & \frac{\partial g_M}{\partial A_{II2}} & \dots & \frac{\partial g_M}{\partial A_{III}} \end{bmatrix}_i ; \{\Delta A\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta A_{I1} \\ \Delta A_{I2} \\ \vdots \\ \Delta A_{Ik} \\ \Delta A_{II1} \\ \Delta A_{II2} \\ \vdots \\ \Delta A_{III} \end{Bmatrix}_i \quad (7.41)$$

La derivazione per l'm-esimo punto rispetto al coefficiente A_{In} è la seguente:

$$\frac{\partial g_m}{\partial A_{In}} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)_m \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial A_{In}} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial A_{In}} \right)_m + 2 \left(\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{In}} \right)_m \quad (7.42)$$

mentre quella rispetto al coefficiente A_{IIn} è:

$$\frac{\partial g_m}{\partial A_{IIn}} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)_m \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial A_{IIn}} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial A_{IIn}} \right)_m + 2 \left(\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{IIn}} \right)_m \quad (7.43)$$

In seguito è quindi possibile calcolare il vettore delle correzioni come segue:

$$\{\Delta A\}_i = -[c]_i^{-1} \{d\}_i \quad (7.44)$$

dove:

$$[c]_i = [b]_i^T [b]_i \text{ e } [d]_i = [b]_i^T \{g\}_i \quad (7.45)$$

Derivando le relazioni di Atluri e Kobayashi rispetto ai coefficienti incogniti si ricavano le seguenti relazioni:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial A_{In}} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial A_{In}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{In}} \end{pmatrix} = \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \begin{pmatrix} \left\{ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left\{ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ - \left\{ (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial A_{IIn}} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial A_{IIn}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{IIn}} \end{pmatrix} = -\frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \begin{pmatrix} \left\{ 2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left\{ 2 + (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ - \left\{ (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

È possibile notare che le derivate degli sforzi sono indipendenti dai coefficienti incogniti quindi non variano con il progredire delle iterazioni. Questo non vale per le derivate della funzione g_m , quindi della matrice [b].

L'implementazione viene fatta nel seguente modo. Inizialmente i vettori del tipo $\partial \sigma_x / \partial A_{In}$ vengono calcolati per ogni A_I e A_{II} . In seguito vengono ricavati i valori degli sforzi σ_x , σ_y e τ_{xy} con i parametri A_{In} e A_{IIn} . A questo punto è possibile ricavare la matrice [b] e quindi i valori delle correzioni $\{\Delta A\}_i$ nonché i parametri corretti da utilizzare nell'iterazione successiva.

Particolare attenzione deve essere fatta nell'adottare il corretto metodo di convergenza. Nel presente lavoro si è considerato l'errore dato dalla differenza del numero di frangia ricavato sperimentalmente e quello valutato analiticamente:

$$errore = \frac{\sum |N_{teoriche} - N_{anl}|}{numero\ totale\ di\ dati\ acquisiti} \quad (7.48)$$

Il processo iterativo viene fermato quando l'errore così calcolato è < 0.1 .

Il programma è riportato in appendice sotto il nome di [rilevaz.m].

7.3.2.1 RISULTATI METODO PARAMETRICO

Punti selezionati	Perametri equazione	Errore	KI [MPa/m ^{1/2}]	KII [MPa/m ^{1/2}]	σ_{ox} [MPa]
Assenza di fluido					
3	4	0,048	3,51	-0,42	-4
Agip Blasias 100 [®]					
5	4	0,072	4,42	-0,54	-3,93
Shell Telluso 46 [®]					
5	4	0,064	4,47	-0,49	-3,14

Qualora fosse richiesta una maggior precisione dei risultati ottenuti è necessario aumentare i parametri dell'equazione 7.30 di conseguenza aumenteranno anche il numero dei coefficienti incogniti da ricavare e si avrà la necessità di selezionare un maggior numero di punti appartenenti alla frangia. Come visto dalla tabella precedente, le equazioni 7.31 arrivano a convergenza anche con soli 3 punti rilevati.

7.4 VALIDAZIONI DEGLI APPROCCI

Per verificare la correttezza dei metodi sopra elencati si esegue il processo inverso, ovvero imponendo i risultati delle analisi effettuate si risale al campo completo degli sforzi così come appare in fotoelasticità e si valuta quanto questo rispecchi l'andamento effettivo delle isointense.

Nel caso dei modelli implementati per il solo modo I hanno tutti origine dalle equazioni di Westergaard per cui si è applicato il sistema visto nell'equazione 7.1 utilizzando come parametri proprio i valori di KI e σ_{ox} in uscita dal metodo di Irwine (delle altre due non è noto il valore di T-Stress), la soluzione si è diagrammata in funzione della differenza delle tensioni principali e si è sovrapposta a quella sperimentale:

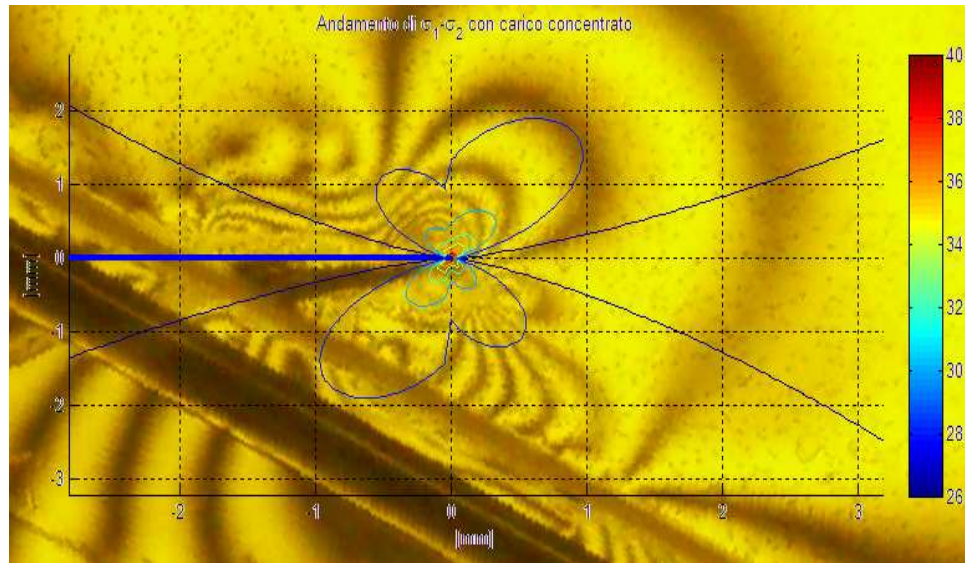


Figura 7.16) Andamento sperimentale ed analitico del modo di carico misto a confronto.

Pur con una direzione di sviluppo delle frange molto simile, si nota come gli andamenti facciano fatica a sovrapporsi, soprattutto nella parte inferiore compresa fra la cricca e il piano, in tale zone infatti la soluzione reale è fortemente alterata dalle frange di contatto.

La stessa sovrapposizione si è effettuata per la soluzione a parametri concentrati, in questo caso è da implementare lo sviluppo di Atluri e Kobayashi con tutti i coefficienti del sistema ricavato dell'equazione 7.30:

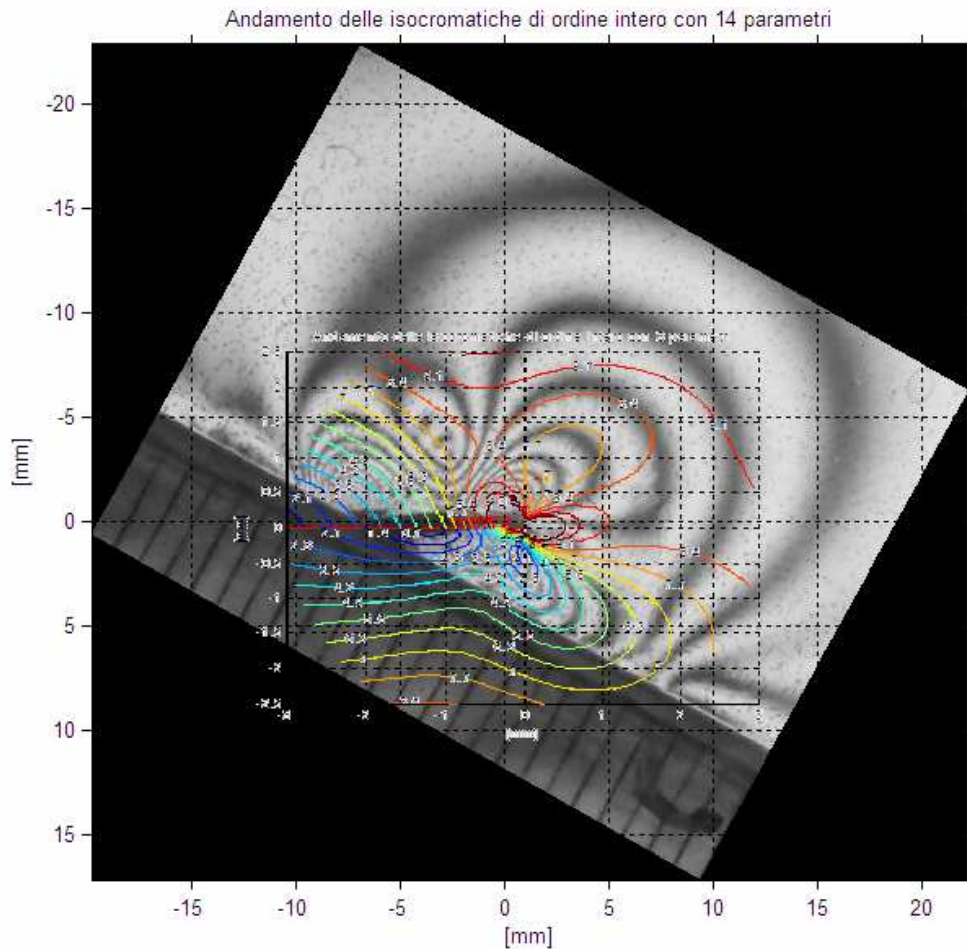


Figura 7.17) Andamento sperimentale ed analitico a confronto per modo multiparametro.

Seppur a bassa risoluzione, l'immagine 7.17, permette di osservare come il metodo riesca ad approssimare meglio le frange reali di quanto visto in precedenza, la soluzione può essere ulteriormente migliorata aumentando il numero di parametri e di acquisizioni.

Il programma utilizzato per passare dalla rilevazione dei parametri alla visualizzazione delle frange è stato implementato presso il Politecnico di Milano dall'illustriss.mo A. Sciuccati.

In un caso reale non si conosce il numero di parametri che permette una corretta approssimazione delle isocromatiche in quanto questo valore dipende dalla distanza a cui si vuole caratterizzare il campo, distanza che, nonostante i numerosi studi, non è ancora completamente ben definita, infatti, diverse pubblicazioni riportano limiti non coerenti tra loro.

Capitolo VIII

Conclusioni e sviluppi futuri

8.1 INTRODUZIONE

Per la stesura delle conclusioni si segue lo schema mostrato nel capitolo introduttivo e riportato in figura 7.1. Vengono confrontate le soluzioni ricavate per via analitica, numerica e sperimentale inerenti al problema del contatto e della valutazione dei fattori di intensificazione degli sforzi.

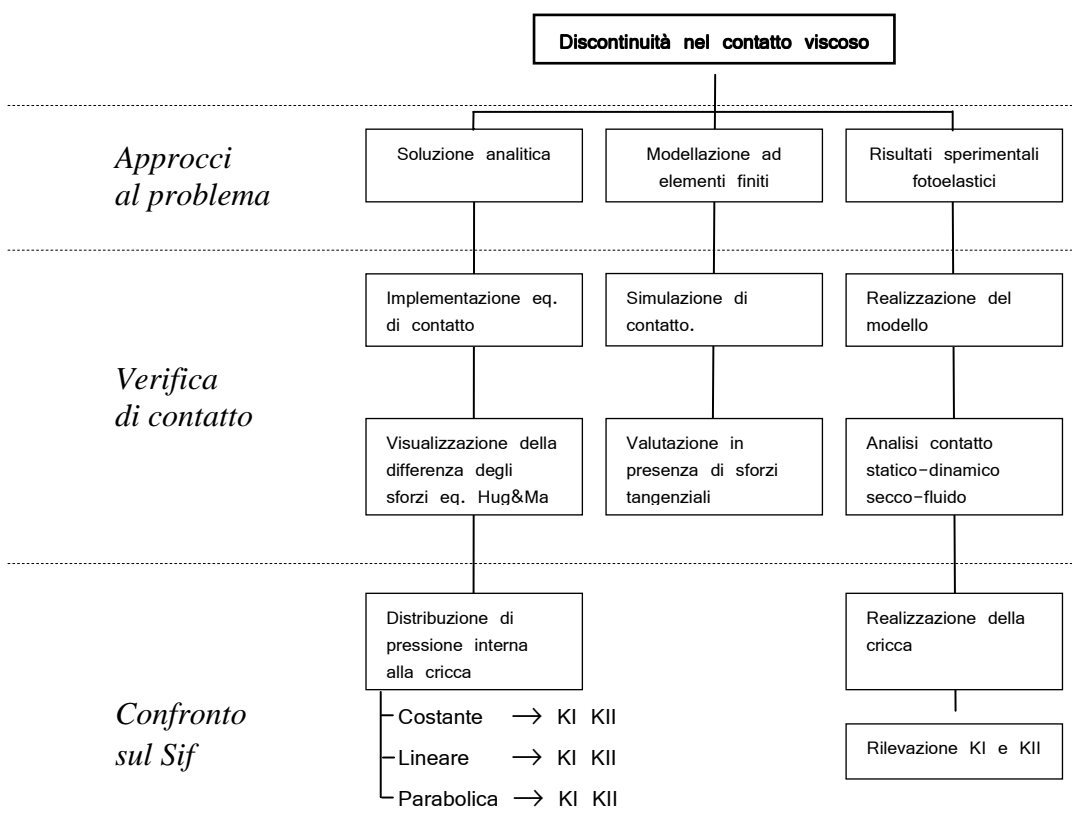


Figura 8.1) Schema logico dello sviluppo del lavoro affrontato.

8.2 VALUTAZIONE DELL'IPOTESI DI CONTATTO HERTZIANO:

La soluzione di contatto analitica deriva dalle equazioni Hondronos [4] riprese in seguito da di Hug e Ma, le quali offrono in output i valori della differenza delle tensioni principali, ma necessitano di essere implementate con l'andamento della pressione agente sulla superficie, nel caso in esame si sono inizializzate con i valori descritti dalla teoria di contatto Hertziano [5].

Alle immagini ottenute in fotoelasticità si sono sovrapposti i risultati analitici per un confronto visivo e diretto sugli andamenti.

Il confronto quantitativo si è invece svolto sul valore massimo di frangia a cui è associata la massima differenza degli sforzi principali. Si è assunto come scostamento massimo di accettabilità tra la soluzione analitica e quella sperimentale il valore di risoluzione minima offerto del sistema sperimentale stesso, pari a 7Mpa. Di seguito sono mostrati i confronti.

8.2.1 CONTATTO STATICO SU UN PROVINO CIRCOLARE:

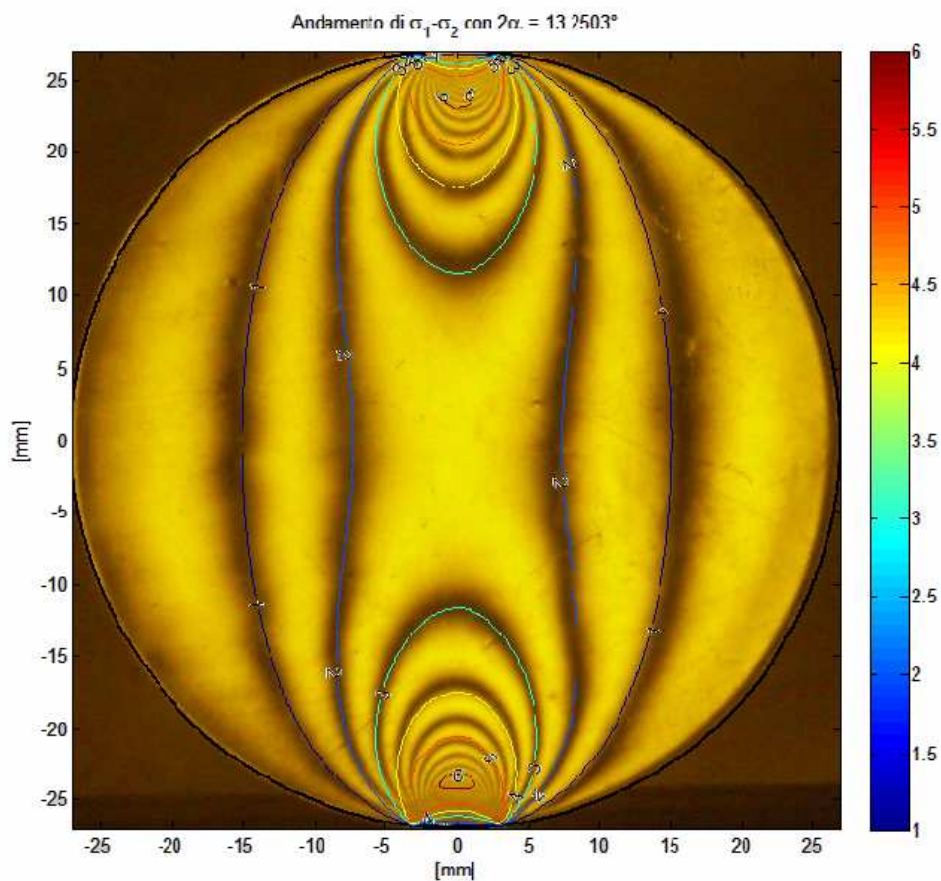


Figura 8.2) Soluzioni di contatto analitica e sperimentale a confronto.

Gli andamenti analitici seguono bene quelli sperimentali e la differenza dei valori di tensione valutata nei 2 casi è inferiore a 1 MPa.

Per cui si può concludere che per un provino circolare la distribuzione delle pressioni derivante da un contatto statico non mediato da fluido è ben rappresentata dalle equazioni di Hertz.

8.2.2 *CONTATTO STATICO SUL MODELLO:*

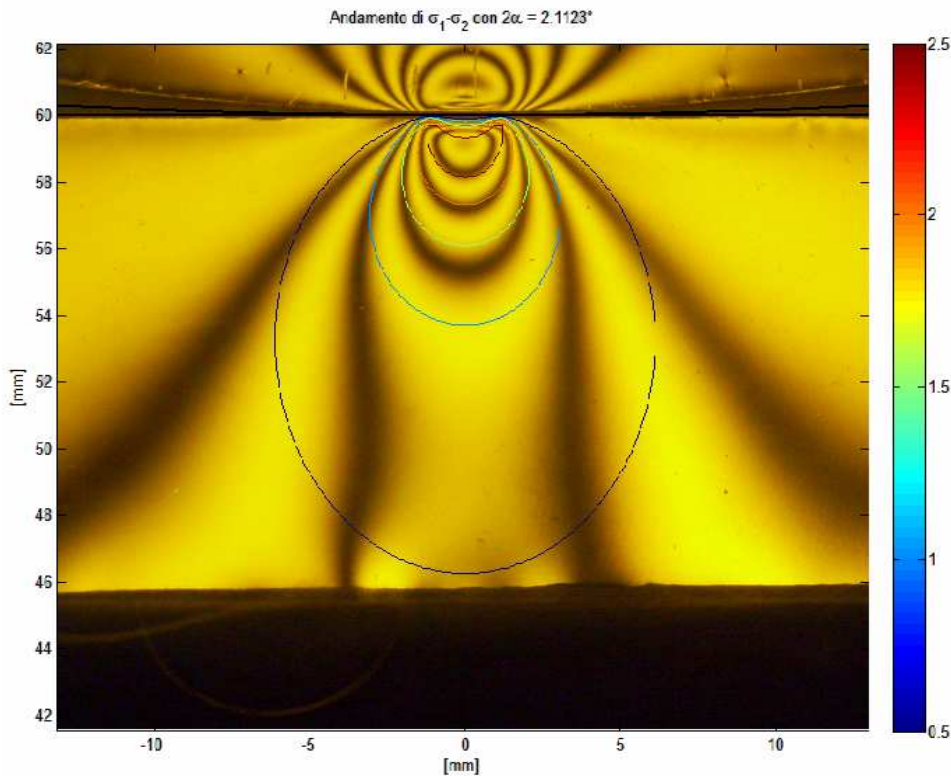


Figura 8.3) Soluzioni di contatto analitica e sperimentale a confronto sul modello.

L'andamento analitico della differenza degli sforzi non considera la reazione vincolare alla base del modello, perciò la soluzione si discosta da quella reale per gli ordini di frangia più bassi.

Quantitativamente, su 10 prove a carichi differenti, si trova uno scostamento medio di 2 Mpa. Si conclude che dal punto di vista quantitativo la soluzione di contatto statico non mediato da fluido approssima bene il caso sperimentale, ma dal punto di vista dell'andamento delle distribuzioni l'approssimazione è soddisfacente solo per punti abbastanza lontani dalla superficie d'appoggio. Il raggio di accettabilità della soluzione è funzione del carico, dell'altezza del modello e dell'attrito presente tra modello e piano. La cricca realizzata nel

modello ha una lunghezza tale da rientrare nel campo di accettabilità della soluzione analitica.

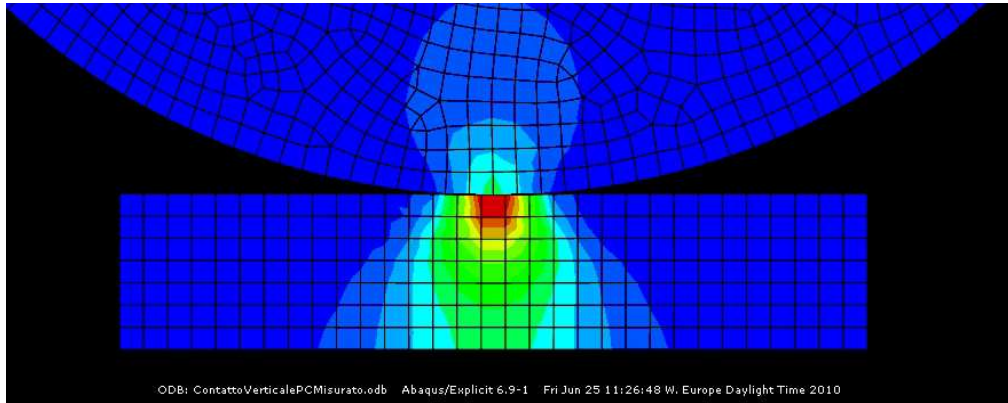


Figura 8.4) Modellazione di contatto statico ad analisi FEM.

La simulazione ad elementi finiti effettuata imponendo un vincolo di incastro alla base del modello riesce, invece, ad approssimare anche le frange di ordine inferiore come mostrato dall'ampliamento delle iso-intense in figura 8.4.

8.2.3 CONTATTO DINAMICO NON MEDIATO DA FLUIDO:

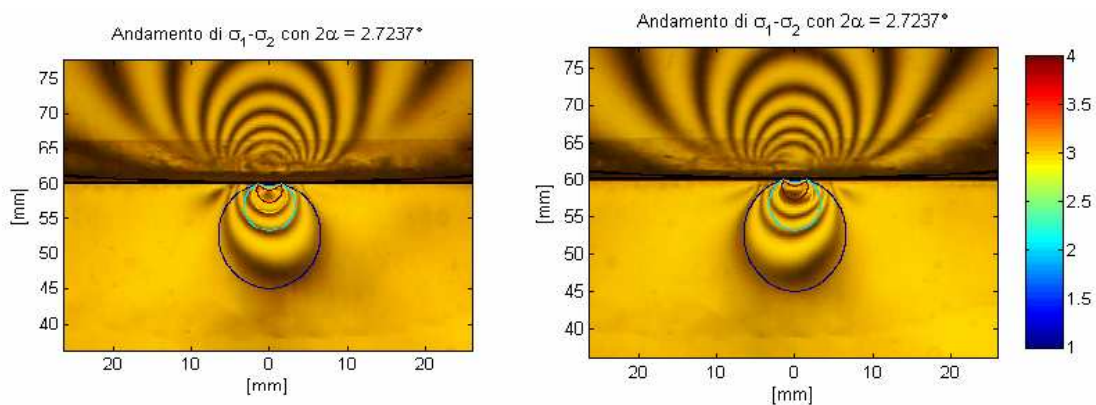


Figura 8.5) Soluzioni di contatto analitica e sperimentale a confronto nel contatto dinamico.

La differenza media fra la soluzione analitica e sperimentale è di 3 MPa, quindi accettabile, è però visibile un particolare fenomeno di ritardo delle tensioni

rispetto al carico massimo. È stato ipotizzato potesse dipendere dalle sollecitazioni tangenziali, ma un'analisi numerica ad elementi finiti (figura 8.6) unita ad alcune prove sperimentali ha smentito questa ipotesi.

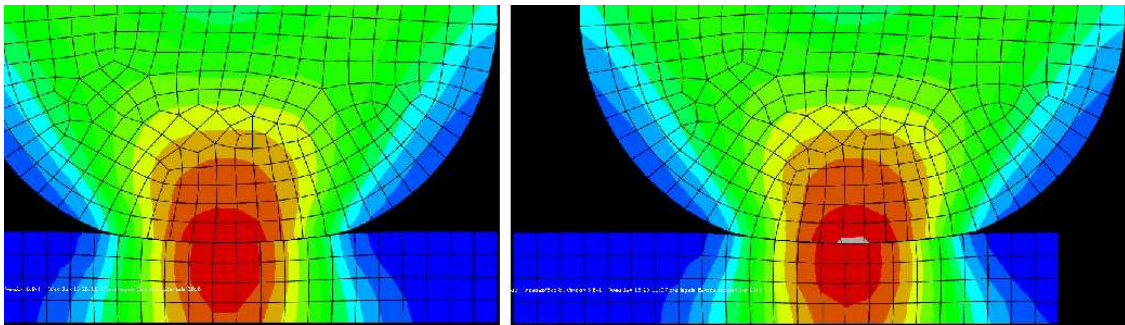


Figura 8.6) Introduzione delle forze tangenziali nel contatto dinamico.

Si tratta presumibilmente di un comportamento viscoelastico dovuto all'adesivo, infatti una stesura dello stesso molto più uniforme ha annullato completamente la presenza del suddetto fenomeno.

8.2.4 CONTATTO VISCOSO STATICO E DINAMICO:

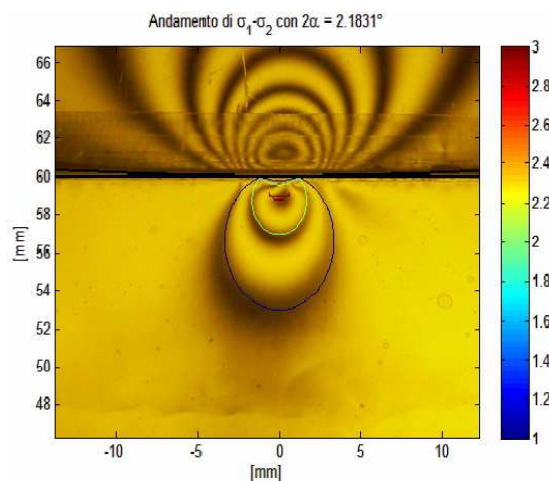


Figura 8.7) Soluzioni di contatto analitica e sperimentale a confronto nel contatto dinamico viscoso.

Analisi sperimentali svolte con fluidi a diversa viscosità hanno dato uno scostamento massimo rispetto alla soluzione analitica di 1 Mpa.

L'andamento delle frange segue molto bene quello reale per cui si può concludere che per il contatto piano statico mediato da fluido la soluzione

analitica approssima in maniera soddisfacente l'andamento sperimentale. Le medesime considerazioni valgono per il contatto dinamico mostrato in figura 8.8.

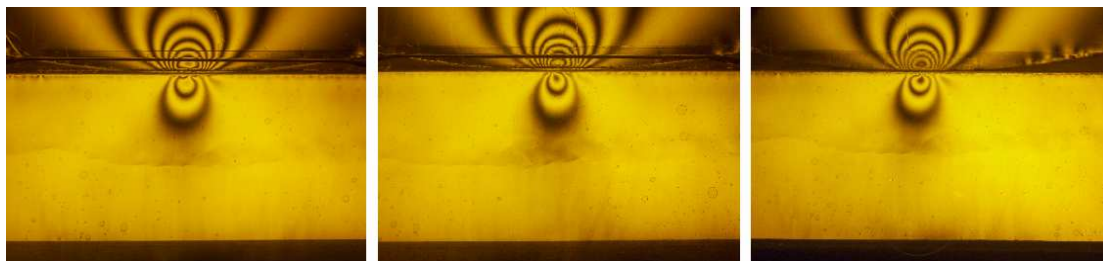


Figura 8.8) distribuzione delle tensioni a confronto.

A sinistra: contatto con interposto olio 'Blasia 100 Agip[®]', $\eta=100 \text{ mm}^2/\text{s}$

Al centro: contatto con interposto olio 'Shell Tellus oil[®]', $\eta=46 \text{ mm}^2/\text{s}$

A destra: contatto senza fluido interposto.

8.3 VALUTAZIONE DEI COEFFICIENTI DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI RELATIVI AL MODO I:

Nella soluzione analitica per il KI si è tenuto conto del fenomeno di *pumping* il quale porta il fluido ad avere una pressione interna alla cricca diversa da zero ed ipotizzata pari alla pressione esterna all'imbocco con distribuzione costante, lineare o parabolica lungo lo sviluppo fino all'apice. Gli andamenti dei KI per le tre distribuzioni sono riportati di seguito:

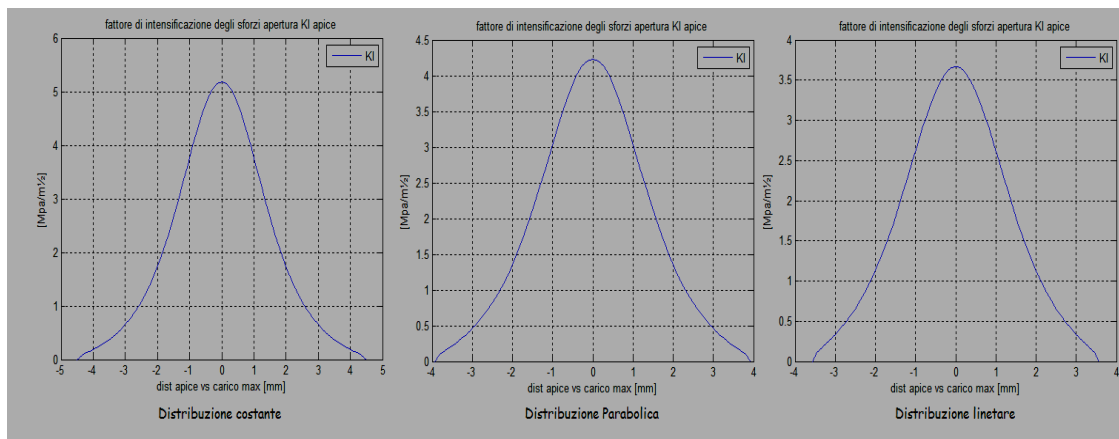


Figura 8.9) Andamento di KI in presenza di contatto viscoso nelle 3 distribuzioni previste.

Di seguito si riporta il confronto con i valori sperimentali ottenuti tramite diverse tecniche di rilevazione:

Tabella 8.1) Confronto analitico- sperimentale sui valori di KI

KI [MPa/m ^½]	Irvine	Bradley e Kobayashi	Schroedl e Smith	Riley e Dally	Metodo parametrico
Costante KI = 5,2 [MPa/m^½]					
Aria	3,26 (-37%)	3,53 (-32%)	4,48 (-14%)	2,4 (-54%)	3,51 (-32%)
Agip®	3,83 (-26%)	4,52 (-13%)	6,76 (+30%)	5,4 (+4%)	4,42 (-15%)
Tellus®	3,85 (-26%)	4,48 (-14%)	6,34 (+22%)	7,1 (+37%)	4,47 (-14%)
Parabolica KI = 4,2 [MPa/m^½]					
Aria	3,26 (-22%)	3,53 (-16%)	4,48 (+7%)	2,4 (-43%)	3,51 (-16%)
Agip®	3,83 (-15%)	4,52 (+7%)	6,76 (+60%)	5,4 (+7%)	4,42 (+5%)
Tellus®	3,85 (-8%)	4,48 (+7%)	6,34 (+50%)	7,1 (+69%)	4,47 (+6%)
Lineare KI = 3,7 [MPa/m^½]					
Aria	3,26 (-11%)	3,53 (-5%)	4,48 (+21%)	2,4 (-35%)	3,51 (-5%)
Agip®	3,83 (+3%)	4,52 (+22%)	6,76 (+82%)	5,4 (+45%)	4,42 (+19%)
Tellus®	3,85 (+4%)	4,48 (+21%)	6,34 (+71%)	7,1 (+91%)	4,47 (+20%)

Dalla analisi si nota come il metodo di Riley e Dally sia decisamente instabile, infatti si passa da scostamenti minimi di pochi punti percentuali a scostamenti superiori al 50% e un caso anche al 90%, questo è presumibilmente dovuto al fatto che i parametri valutati sono tutti soggetti ad esponenziali per cui anche un eventuale errore sulla misura si amplifica esponenzialmente. Tali risultati, per essere significativi, andrebbero ricavati tramite sistemi di acquisizioni più precisi di quelli a disposizione.

Dall'analisi incrociata dei dati si nota come la distribuzione costante comporti valori di KI sempre maggiori rispetto al caso sperimentale, per cui se ne deduce

che, per il caso considerato, la distribuzione della pressione non si mantenga uniforme lungo tutta la cricca ma subisca delle perdite di carico, ipotesi supportata anche dal confronto con la distribuzione parabolica e lineare. Ciò è spiegabile sia considerando la possibilità di perdite di carico distribuite lungo la cricca (le quali aumentano con la lunghezza della cricca e con la velocità del fluido interno), sia alla difficoltà che ha il fluido di raggiungere tutti i punti interni, soprattutto in prossimità dell'apice. Perciò l'integrale della pressione lungo la cricca è tendenzialmente minore del carico generato da una pressione esterna costante.

Dalla teoria della fluidodinamica si trova che le perdite distribuite seguono il quadrato della velocità per cui è facile ipotizzare che aumentando la velocità del fluido nella cricca (ciò avviene se si aumenta la velocità del carico mobile) aumentino le perdite distribuite e quindi ci si avvicini alla distribuzione parabolica.

8.4 VALUTAZIONE DEI COEFFICIENTI DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI RELATIVI AL MODO II:

Dall'analisi analitica di KII mostrata in figura 8.10 si nota come questo sia fortemente dipendente dal coefficiente d'attrito presente sulle superfici della cricca.

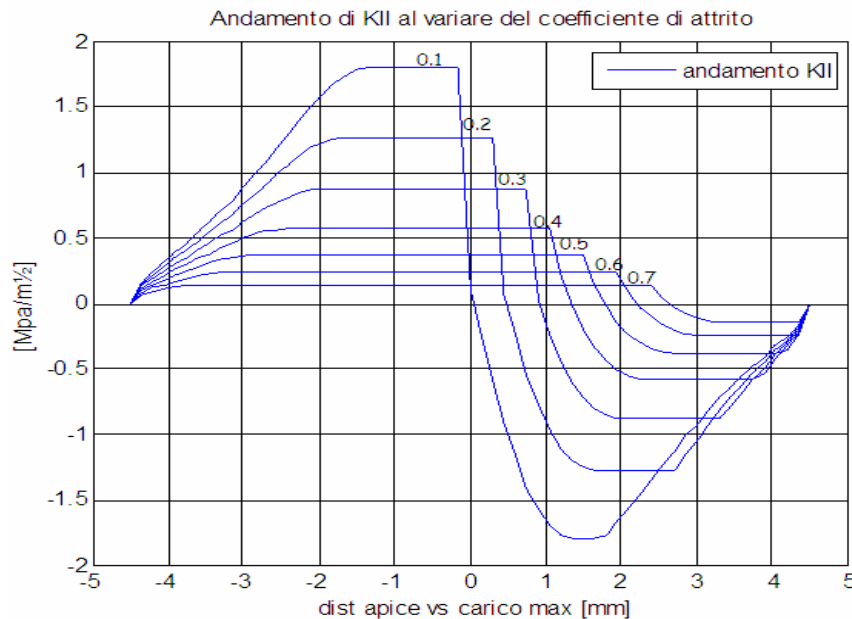


Figura 8.10) Andamento analitico di KII al variare del coefficiente d'attrito.

I risultati sperimentali relativi al KII mostrati in tabella 8.2 rientrano nel campo delle soluzioni analitiche diagrammate al variare del coefficiente di attrito, ma analisi più accurate non si possono eseguire, in quanto non si conosce l'effettivo coefficiente di attrito all'interno della cricca.

Tabella 8.2) Confronto analitico- sperimentale sui valori di KI

Fluido	KII [MPa/m ^{1/2}]
Aria	-1,05
Agip 100	-1,35
Tellus 46	-1,23

Si è effettuato un tentativo sperimentale per ricavare il legame fra la variazione di viscosità del fluido e il relativo coefficiente d'attrito delle superfici lambite. L'esperimento si è basato sull'applicazione della definizione di attrito radente statico, ovvero nota la forza di contatto fra due superfici si è misurata la forza da contrastare per vincere l'attrito variando il fluido interposto, i risultati sono diagrammati di seguito:

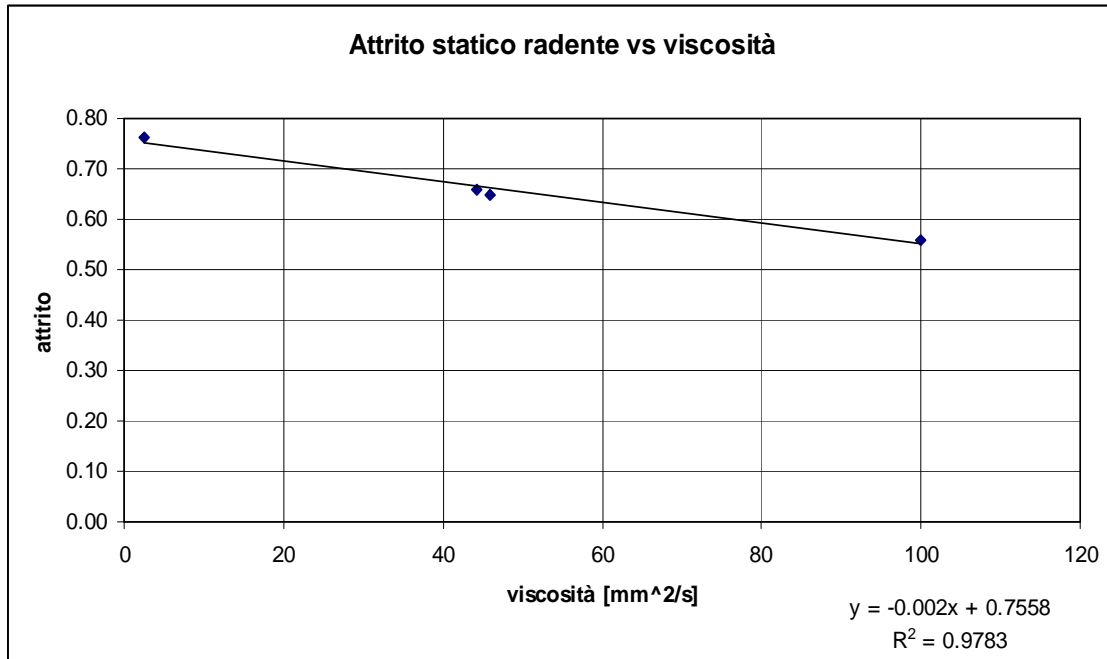


Figura 8.11) Relazione fra attrito e viscosità ottenuta sperimentalmente.

L'andamento rappresentato conferma la tendenza alla diminuzione del coefficiente d'attrito all'aumentare della viscosità, è infatti questa una delle principali finalità della lubrificazione fluida. Tuttavia, un campione troppo ristretto di prove associato a delle condizioni di esecuzione non normalizzate non ha permesso di effettuare considerazioni di tipo quantitativo affidabili.

Una considerazione che si può comunque fare è che all'aumentare della viscosità corrisponde un aumento del valore di KII il che fa presumere che effettivamente le superfici riescano a scorrere con meno difficoltà l'una rispetto all'altra e questo rafforza l'ipotesi che il coefficiente di attrito possa essere effettivamente diminuito da un aumento di viscosità.

8.5 CONFRONTO DELL'ANDAMENTO DELLE DIFFERENZA DELLE TENSIONI PRINCIPALI IN UNA CRICCA:

Nelle immagini seguenti è mostrato il confronto sulla validazione dei metodi effettuato risalendo al campo completo degli sforzi così come appare in fotoelasticità. Nel caso dei modelli implementati per il solo modo I hanno tutti origine dalle equazioni di Westergaard per cui si è applicato il sistema visto

nell'equazione 7.1 utilizzando come parametri proprio i valori di KI e σ_{ox} in uscita dal metodo di Irwine, per il modo misto si sono implementate le equazioni parametriche. Le soluzioni si sono diagrammate in funzione della differenza delle tensioni principali e si sono sovrapposte agli andamenti sperimentali:

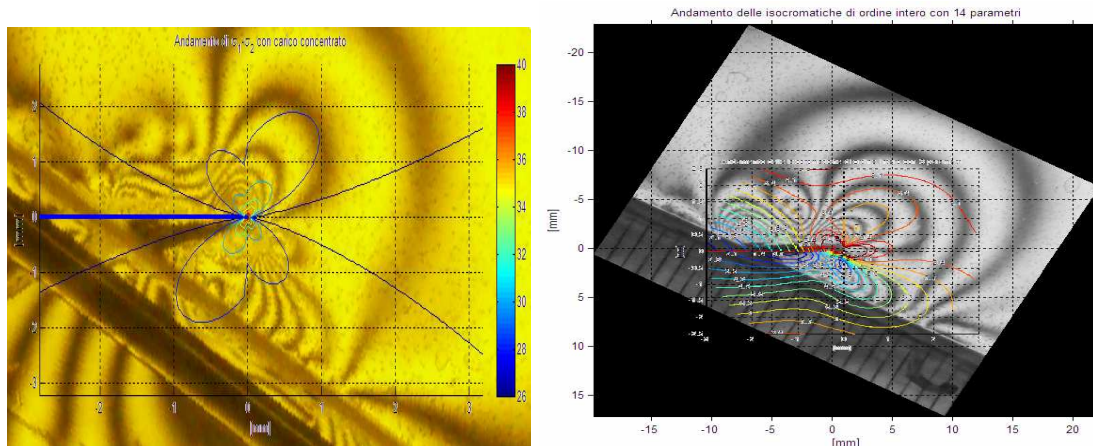


Figura 8.12) Andamento sperimentale ed analitico del modo di carico misto a confronto.

Nel caso delle equazioni di Westergaard la discordanza fra la soluzione analitica e sperimentale è dovuta alla natura dei metodi utilizzati, i quali si basano su poche osservazioni per ricavare i parametri KI e T-stress (1 sola frangia per KI e 2 frange per KII) e quindi aumenta l'incidenza degli errori di valutazione di θ_m , piuttosto che dei raggi di frangia, inoltre sono metodi arrestati al primo membro dello sviluppo in serie. Qualora siano richiesti andamenti più precisi conviene utilizzare equazioni di ordine superiore come quelle sviluppate da Atluri e Kobayashi o l'approccio a parametrico il quale permette una migliore approssimazione specie in prossimità dell'apice, entro il raggio di accettabilità circa $1/3$ della lunghezza di cricca al di fuori del quale è consigliabile un approccio tridimensionale come mostrato da Riley e Dally[11]

8.6 SVILUPPI FUTURI:

Il campo della meccanica della frattura nel contatto mediato da fluido è ancora in gran parte inesplorato, questo lavoro vuole muovere i primi passi di un cammino che si spera possa arrivare a ricavare equazioni in forma chiusa per problemi quali la nucleazione e sviluppo di cricche in regimi di lubrificazione idrostatica

ed idrodinamica. Procedendo per gradi si elencano i futuri sviluppi e migliorie, alcuni dei quali già si stanno portando avanti, relativamente al problema di contatto viscoso:

- Migliorie di realizzazione del modello e della cricca, evitando ad esempio l'alterazione delle superfici interne causata dalla penetrazione in temperatura.

Modellazione tramite simulazione ad elementi finiti del caso di cricca chiusa con fluido al suo interno, in quanto non sono presenti in letteratura studi analitici a riguardo.

Implementazione di equazioni che permettano una maggiore accuratezza sulla previsione di KI e KII e dei rispettivi andamenti. In tale direzione si stanno portando avanti presso il Politecnico di Milano studi basati sul metodo empirico-analitico delle weight-functions.

Valutare l'influenza sperimentale sui valori di KI e KII di parametri quali la direzione di propagazione della cricca, la viscosità del fluido e la sua velocità.

Valutazione di stati di sforzo tridimensionali.

APPENICE A

Polariscopio

A.1 STRUMENTI OTTICI: IL POLARISCOPIO

Il polariscopio è uno strumento che permette di polarizzare la luce, è costituito da 2 elementi: un polarizzatore ed un analizzatore. Il provino da analizzare deve essere posizionato fra questi 2 elementi, mentre una sorgente luminosa posta a monte del polarizzatore illumina tutto il sistema.

Si possono classificare in due tipi principali, polariscopio piano e circolare. Il nome definisce il tipo di luce che viene prodotto.

A.1.2 PIANI POLARIZZATI

Quando un'onda di luce incide su un piano polarizzato si genera una scissione del raggio luminoso in due componenti perpendicolari:

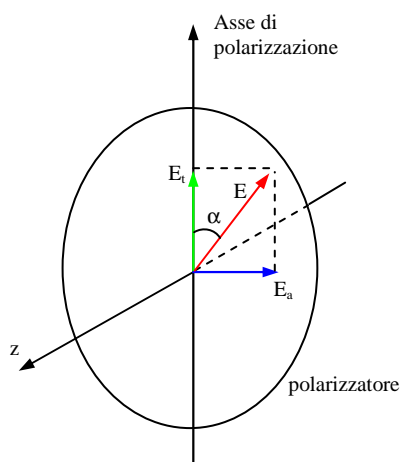


Figura A.1) Scomposizione di un'onda luminosa su un piano polarizzato.

La componente parallela all'asse di polarizzazione viene trasmessa mentre quella perpendicolare viene assorbita. Il raggio luminoso emergente dal polarizzatore ha espressione:

eq. onda luminosa $E = a \cdot \cos(2\pi ft) = a \cdot \cos(\omega t)$ (A.1)

conseguentemente quando il raggio entra nel provino viene scomposto in 2 componenti parallelamente alle direzioni principali di sforzo:

$$\begin{cases} E_a = a \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\alpha) \\ E_t = a \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \quad (A.2)$$

I filtri polarizzati si usano nel polariscopio per produrre luce polarizzata.

A.1.3 PIANI D'ONDA

Un piano d'onda è un elemento che permette di scomporre il vettore della luce incidente in due componenti ortogonali e di trasmetterle a velocità diverse. È possibile distinguere due assi principali; sull'asse 1 la trasmissione procede ad una velocità c_1 mentre sull'asse 2 si ha una velocità c_2 .

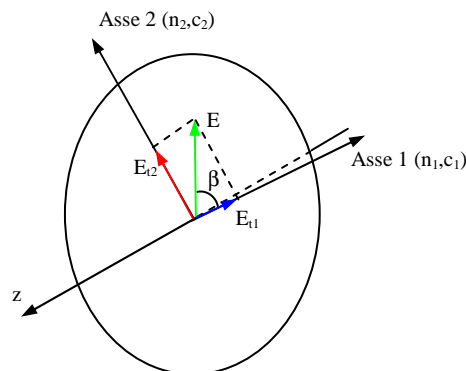


Figura A.2) Scomposizione di un'onda luminosa su asse veloce e lento.

Qualora c_1 fosse maggiore di c_2 l'asse 1 verrebbe denominato asse veloce e l'asse 2 asse lento. Un raggio luminoso polarizzato che impattasse una lamina con queste caratteristiche genererebbe due componenti:

$$\begin{cases} E_{t1} = a \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = k \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\beta) \\ E_{t2} = a \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = k \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\beta) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Siccome le due componenti viaggiano nella lamina per un determinato tempo, dipendente dalla velocità dell'onda e dallo spessore del piano, i vettori escono dal lamina in tempi diversi. Rispetto ad un'onda che si è propagata in aria il ritardo delle due componenti è:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= h(n_1 - n) \\ \delta_2 &= h(n_2 - n) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dove n è l'indice di rifrazione in aria.

La fase relativa tra i due vettori è:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = h(n_2 - n_1) \Rightarrow \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_2 - n_1) \quad (\text{A.5})$$

Quando la lamina viene prodotta in modo da avere uno sfasamento di $\Delta = 2/\pi$ viene denominata *quarto d'onda*.

In uscita da una lamina di questo tipo le componenti hanno il seguente ritardo di fase:

$$\begin{aligned} E_{t1} &= k \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\beta) \\ E_{t2} &= k \cdot \cos(\omega t - \Delta) \cdot \sin(\beta) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.2 POLARISCOPIO PIANO

Il polariscopio piano è costituito da una sorgente luminosa e da due polarizzatori disposti come nello schema seguente:

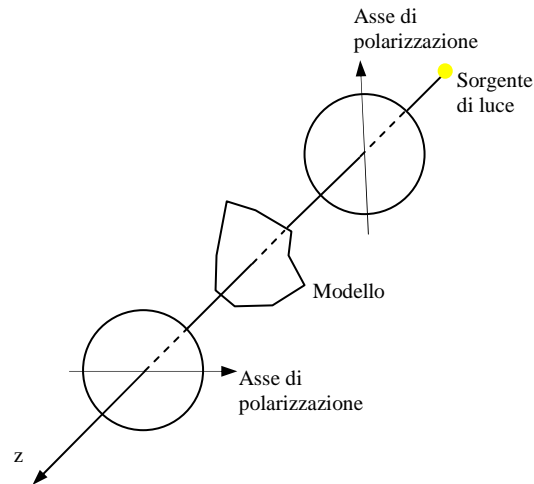


Figura A.3) Schematizzazione di un polariscopio piano.

Il polarizzatore posto vicino alla sorgente luminosa è chiamato polarizzatore mentre quello più lontano, posto poco prima dell'osservatore è chiamato analizzatore.

A.3 POLARISCOPIO CIRCOLARE

Il polariscopio circolare è uno strumento che permette di avere luce polarizzata circolarmente. Gli elementi principali di un tale sistema si possono riassumere nella seguente figura:

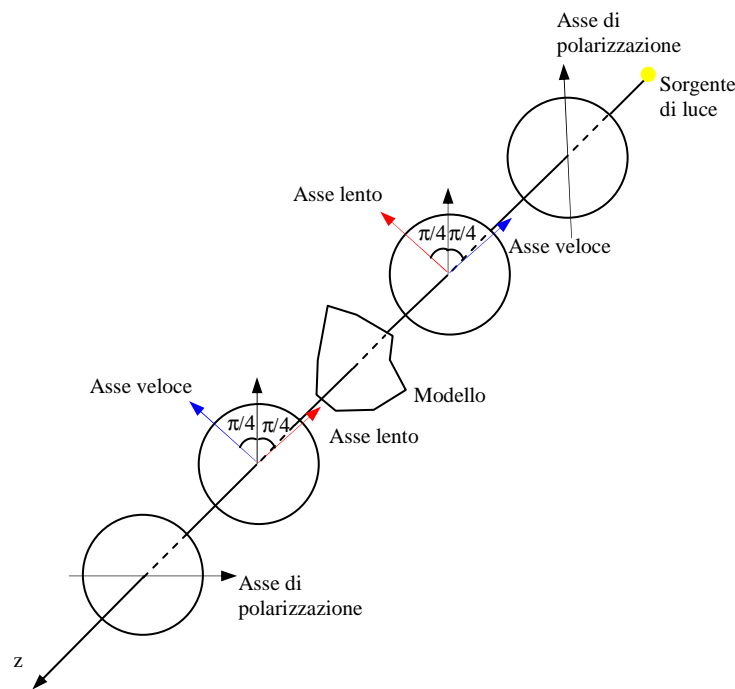


Figura A.4) Schematizzazione di un polariscopio circolare.

Gli elementi in più introdotti rispetto al caso precedentemente analizzato sono delle lamine tipo quarto d'onda. Il primo quarto d'onda permette di convertire la luce da polarizzata piana a polarizzata circolarmente. Il secondo quarto d'onda presenta l'inversione degli assi lento e veloce rispetto al precedente; in questo modo è possibile avere la riconversione della luce polarizzata circolarmente in luce polarizzata piana. Il polariscopio presente al Politecnico di Milano permette di avere luce polarizzata circolarmente; è inoltre possibile ottenere luce polarizzata piana girando i fogli ed escludendo i quarti d'onda. In questi studi viene comunque utilizzata solo luce monocromatica polarizzata circolarmente; questa scelta permette di eliminare le isocline e visualizzare solamente le isocromatiche.

A.3.1 ANALISI DEL MODELLO IN UN POLARISCOPIO CIRCOLARE

Si consideri il modello di polariscopio circolare precedentemente riportato. In uscita dal polarizzatore il vettore luminoso si riduce alla seguente componente:

$$E_{py} = k \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{A.7})$$

Se gli assi del primo quarto d'onda sono orientati a 45° rispetto all'asse di polarizzazione il vettore luminoso si scompone nelle seguenti componenti:

$$\begin{cases} E_f = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \cos(\omega t) \\ E_s = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \cos(\omega t) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

inoltre, propagando nel quarto d'onda, i vettori luminosi sviluppano un ritardo angolare relativo pari a $\pi/2$ e le componenti emergenti dalla lamina saranno sfasate:

$$\begin{cases} E'_f = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \cos(\omega t) \\ E'_s = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \sin(\omega t) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

I due vettori luminosi entrano quindi nel modello che, nel quale avviene una scomposizione della luce avviene come mostrato in figura:

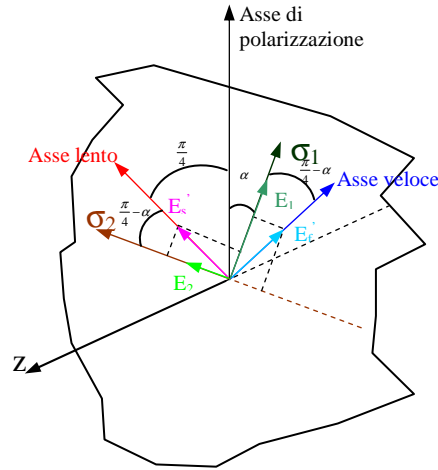


Figura A.5) Scomposizione onda luminosa all'interno del modello.

I corrispettivi vettori all'ingresso del modello sono:

$$\begin{cases} E_1 = E'_f \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + E'_s \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ E_2 = E'_s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - E'_f \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Propagando nel modello i due vettori E_1 ed E_2 subiscono un ritardo tra loro e in uscita dal modello si risolvono nelle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} E_1' = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ E_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} k \cdot \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Nel passaggio attraverso il secondo quarto d'onda i vettori subiscono un'ulteriore divisione secondo i nuovi assi lento e veloce del foglio:

$$\begin{cases} E_f = E_1' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + E_2' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ E_s = E_1' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - E_2' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

per sostituzione:

$$\begin{cases} E_f = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \\ E_s = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

In seguito alla propagazione nel secondo quarto d'onda si ha la seguente variazione di fase tra i due vettori luminosi:

$$\begin{cases} E_f = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \\ E_s = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Nel passaggio attraverso l'analizzatore le componenti verticali di E_f' ed E_s' vengono assorbite mentre le componenti orizzontali sono trasmesse e danno:

$$E_{ax} = \frac{\sqrt{2}}{2} (E_s' - E_f') = k \cdot \sin\left(\omega t + 2\alpha - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (\text{A.15})$$

L'intensità della luce emergente da un polariscopio circolare è:

$$I = K \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (\text{A.16})$$

Si nota che l'angolo α non è presente nella relazione; questo significa che l'intensità luminosa dipende solamente dalla differenza tra gli sforzi principali. Questo indica che le isocline non sono visualizzabili in queste condizioni.

A causa del valore $\sin^2(\Delta/2)$ si raggiunge l'estinzione (e quindi la visualizzazione delle isocromatiche) per $\Delta/2 = n\pi$ dove $n=0,1,2,3\dots$

APPENICE B

Analisi del telaio di carico

5.1 CALCOLO DELLE FORZE INTRODOTTE

Per risalire dal carico impresso dal telaio e misurato tramite il dinamometro (figura B.1) a quello effettivamente impresso al modello si è reso necessario una analisi strutturale del sistema di carico

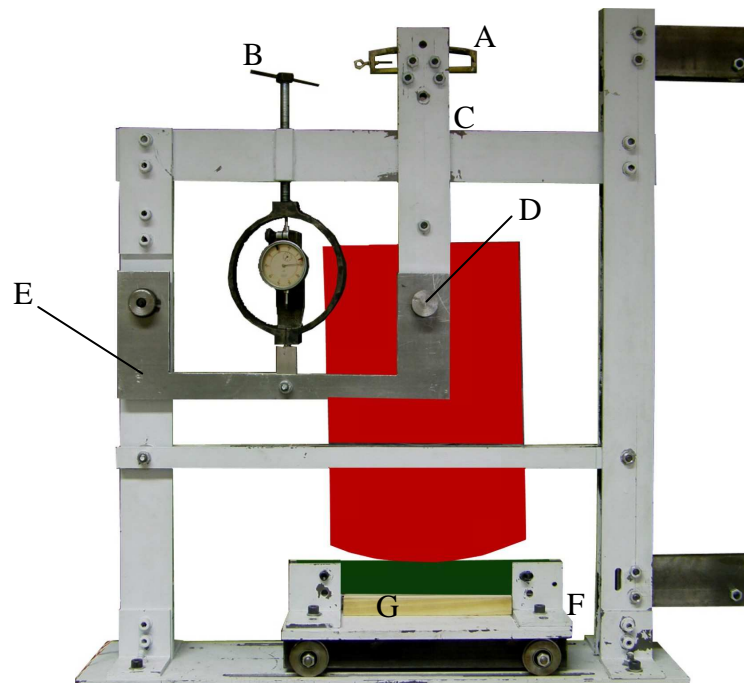


Figura B.1) sistema di carico.

La seguente schematizzazione mostra l'andamento delle forze nel sistema.

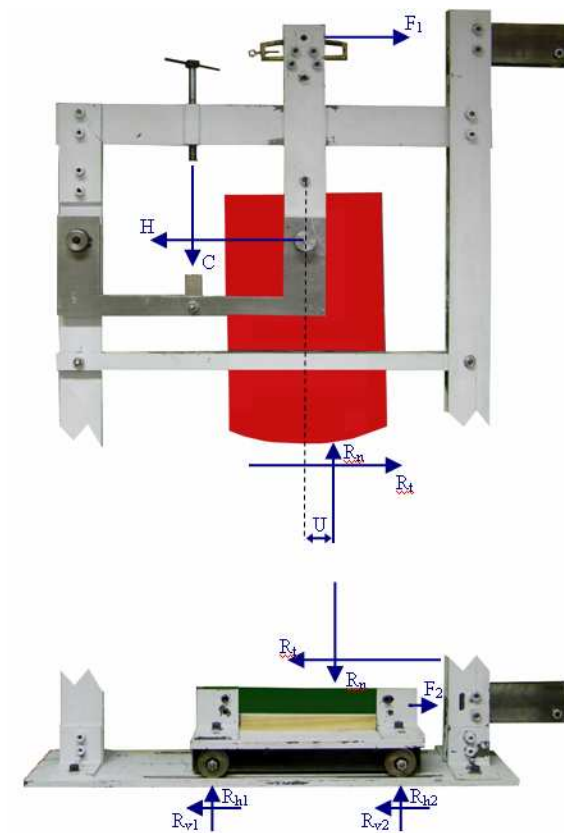


Figura B.2) struttura aperta per visualizzare le reazioni esterne ed interne.

Si isola l'elemento E (fig. B.3) e si calcolano le reazioni ad esso associate:

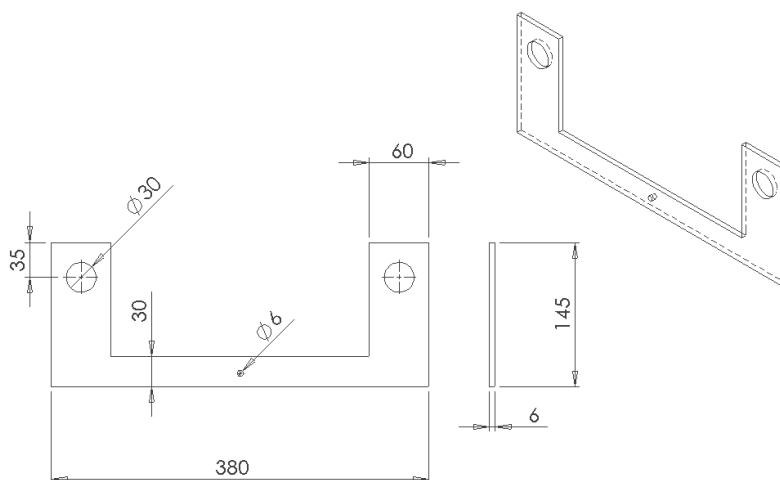


Figura B.3) Quote costruttive del braccio E relativo al telaio di carico.

Ipotizzando di imporre il carico C e la forza tangenziale O come mostrato in figura B.3, si valuta graficamente l'andamento dei carichi l'ungo la struttura:

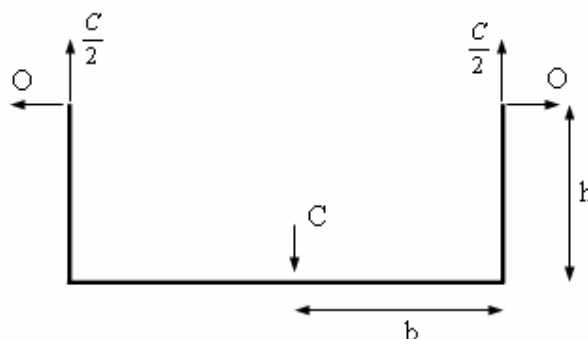


Figura B.3) Andamento dei carichi esterni nell'elemento E.

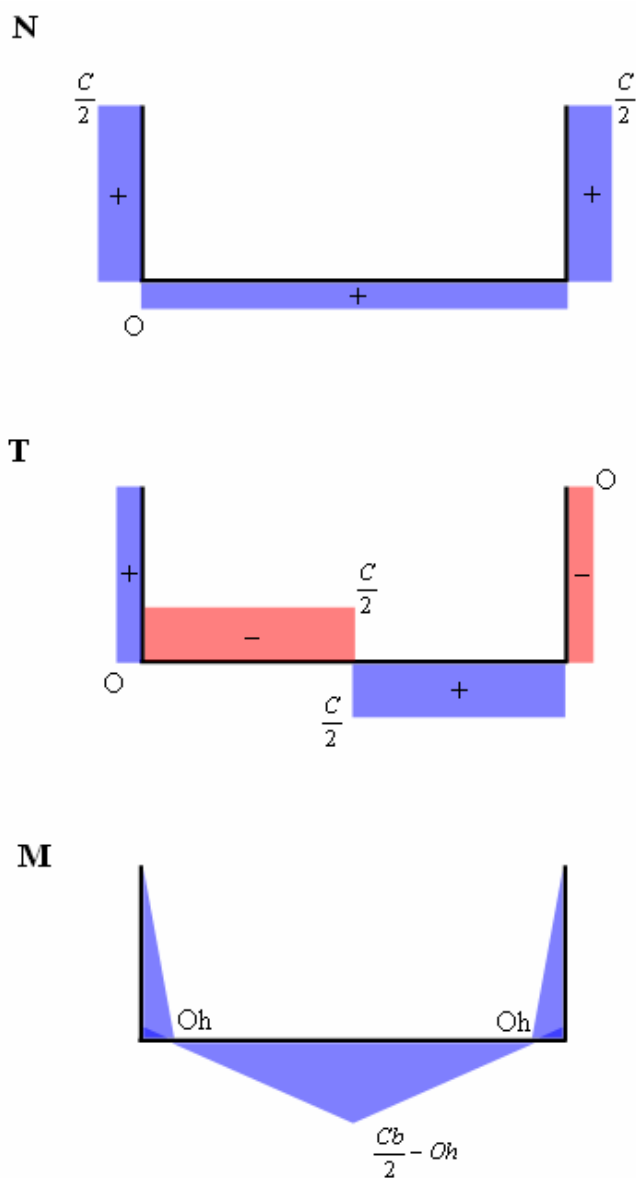


Figura B.4) Andamento delle azioni interne nell'elemento E.

È possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$C = P_m \quad (\text{B.1})$$

$$O = \frac{H}{2} \quad (\text{B.2})$$

Le azioni interne si calcolano come segue:

$$O = \frac{F_1 + R_T}{2} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{C}{2} = \frac{P}{2} \quad (\text{B.4})$$

Per cui conoscendo il carico C valutato dal dinamometro e non applicando azioni tangenziali esterne, si può risalire al carico agente nel centro di rotazione della ruota (cerniera D) che sarà la metà di C , a questo valore va però aggiunto il peso della ruota (figura B.5) e della parte di telaio che si scarica nella cerniera in D , valutato (dopo misura con dinamometro in D e telaio scarico) essere pari a $30,5N$.

Per cui chiamando con X il carico agente sul provino sarà:

$$X = \frac{C}{2} + 30,5N \quad (\text{B.6})$$

Le caratteristiche geometriche della porzione di ruota usata nell'analisi fotoelastica vengono riportate nell'immagine seguente:

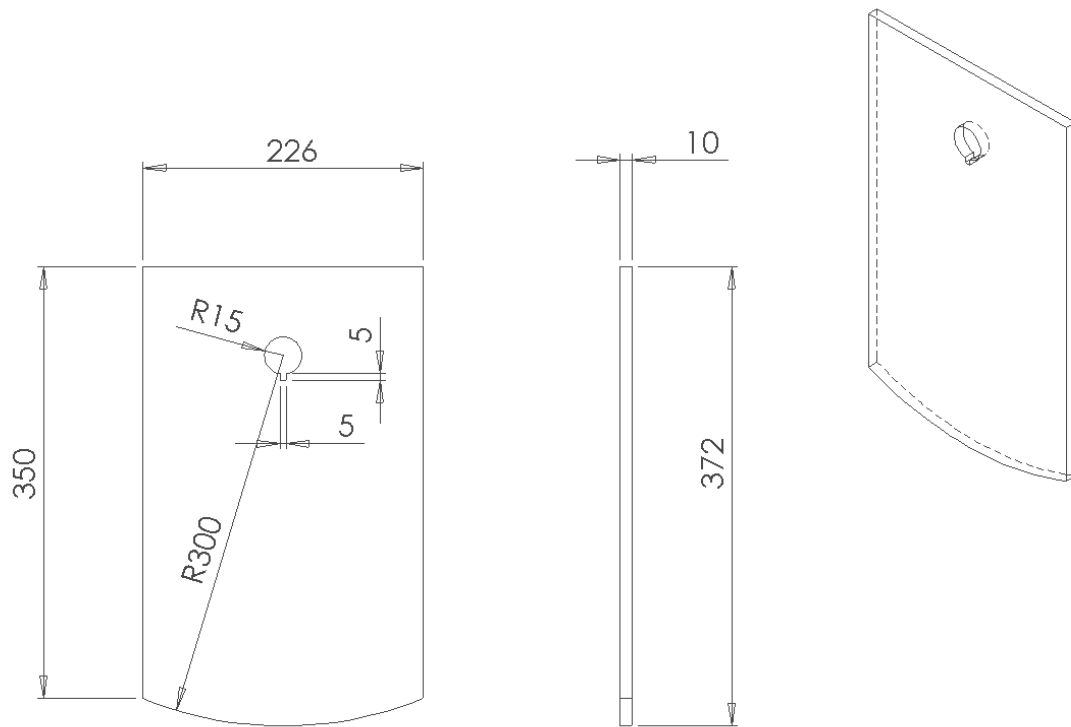


Figura B.5) Disegni costruttivi della ruota in policarbonato alloggiata sul telaio

Appendice C

Raccolta routines di calcolo

%programma per la rilevazione automatica del numero di frangia e del valore di sforzo in qualsiasi punto dell'immagine selezionata%

```
%acquisizione dei dati%
clear all
close all
clc
prompt={'Diametro disco d [mm]',...
        'spessore s [mm]:'...
        'costante fotoelastica materiale alfa',...
        };
name='Acquisizione parametri';
numlines=1;
defaultanswer= {'80','10','18'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
d = str2num(char(answer(1)));
s = str2num(char(answer(2)));
alfa = str2num(char(answer(3)));

%acquisizione immagine%
finestra0=questdlg('selezionare immagine fotoelastica da
analizzare','seleziona da file','scegli', 'annulla','default');

switch finestra0
case 'scegli',

        [filename,pathname] = uigetfile({'*.jpg'; '*.tif'; '*.bmp'}, 'Selezionare
1'immagine principale');

        if isequal(filename,0)
            disp('User selected Cancel')
        else
            disp(['User selected', fullfile(pathname, filename)])
        end
        cd(pathname);
        [I,map]=imread(filename);
        figure                                %figura 1 acquisita%
        imshow(I);
        title ('immagine selezionata')
        axis on
        xlabel('pixel')
        ylabel('pixel')

%discretizzo immagine%
[poi,map] = rgb2ind(I,4,'nodither');
figure
imshow(poi, map);
title ('immagine discretizzata1')

%seleziona pixel desiderato%
figure
[xi,yi,P] = impixel(I)
pixelx=xi
pixely=yi

%valuta numero di frangia%
nfrangex=0;
nfrangey=0;
for selezpixel=0:1:xi
    if impixel(poi,selezpixel,yi)==impixel(poi,selezpixel+1,yi)
```

```

        nfrangex=nfrangex;
    else    if impixel(poi,selezpixel+1,yi)==impixel(poi,xi,yi)
            nfrangex=nfrangex+1;
        else nfrangex=nfrangex;
        end
    end
end
for selezpixel=0:1:yi
    if impixel(poi,xi,selezpixel)==impixel(poi,xi,selezpixel+1)
        nfrangey=nfrangey;
    else if impixel(poi,xi,selezpixel+1)==impixel(poi,xi,yi)
        nfrangey=nfrangey+1;
    else nfrangey=nfrangey;
    end
end
end
if nfrangex>nfrangey
    nfrange=nfrangey-1;
else nfrange=nfrangex-1;
end
DeltaSigma=nfrange*alfa
DeltaSigmaAdimensionalizzata= nfrange*alfa*s
prompt={['numero di frange nel punto ', num2str(nfrange)],...
        ',...
        ['numero frange x= ', num2str(nfrangex)],...
        ',...
        ['numero frange y= ', num2str(nfrangey)],...
        ',...
        ['differenza degli sforzi nel punto ', num2str(DeltaSigma),'
N/mm2'],...
        ',...
        ['differenza degli sforzi adimensionalizzata ',
num2str(DeltaSigmaAdimensionalizzata),' N/mm2'],...
        ''};
stop3=msgbox(prompt);
waitfor(stop3)
end

```

```
%programma per la visualizzazione della distribuzione di pressione di tipo  
Hertziana nel caso di contatto su disco e su piano%
```

```
clear all  
close all  
clc
```

```
finestra0=questdlg('selezionare tipologia di contatto da analizzare','il  
vazz','disco su piano', 'disco su disco','annulla');
```

```
%acquisizione parametri disco su disco%
```

```
switch finestra0  
case 'disco su disco',  
prompt={'Forza di contatto Fn [N]:',...  
        'Phi [rad]:'...  
        'Raggio R1_i [mm]:',...  
        'Raggio R2_i [mm]:',...  
        'Raggio R1_j [mm]:',...  
        'Raggio R2_j [mm]:',...  
        'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 1:',...  
        'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 2:',...  
        'Modulo elastico del materiale del corpo 1 [MPa]:',...  
        'Modulo elastico del materiale del corpo 2 [MPa]:',...  
        };  
    name='Acquisizione parametri';  
    numlines=1;  
    defaultanswer=  
    {'800','0','63','63.05','600','600.2','0.35','0.35','3500','3500'};  
    options.Resize='on';  
    options.WindowStyle='normal';  
    options.Interpreter='tex';  
    answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);  
    Fn= str2num(char(answer(1)));  
    Phi=str2num(char(answer(2)));  
    R1_i=str2num(char(answer(3)));  
    R2_i=str2num(char(answer(4)));  
    R1_j=str2num(char(answer(5)));  
    R2_j=str2num(char(answer(6)));  
    nu_i=str2num(char(answer(7)));  
    nu_j=str2num(char(answer(8)));  
    E_i=str2num(char(answer(9)));  
    E_j=str2num(char(answer(10)));  
    ApB=1/2*(1/R1_j+1/R2_j+1/R1_i+1/R2_i)  
    AmB=1/2*sqrt((1/R1_i-1/R2_i)^2+(1/R1_j-1/R2_j)^2+2*((1/R1_i-1/R2_i)*(1/R1_j-  
    1/R2_j))*cos(2*Phi))  
    K1=(1-(nu_i)^2)/E_i  
    K2=(1-(nu_j)^2)/E_j  
    invEc=K1+K2  
    Rc= sqrt(R1_i*R1_j)  
    Ra=1/(ApB-AmB)  
    Rb=1/(ApB+AmB)  
end
```

```
%acquisizione parametri disco su piano%
```

```
switch finestra0  
case 'disco su piano',  
    prompt={'Forza di contatto Fn [N]:',...  
        'Phi [rad]:'...  
        'Raggio R1_i [mm]:',...  
        'Raggio R2_i [mm]:',...  
        'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 1:',...  
        'Coefficiente di Poisson del piano :',...  
        'Modulo elastico del materiale del corpo 1 [MPa]:',...  
        'Modulo elastico del piano [MPa]:',...  
        };  
    name='Acquisizione parametri';  
    numlines=1;
```

```

defaultanswer= {'88000','0','400','400.2','0.33','0.33','206000','206000'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
Fn= str2num(char(answer(1)));
Phi=str2num(char(answer(2)));
R1_i=str2num(char(answer(3)));
R2_i=str2num(char(answer(4)));
nu_i=str2num(char(answer(5)));
nu_j=str2num(char(answer(6)));
E_i=str2num(char(answer(7)));
E_j=str2num(char(answer(8)));
ApB=1/2*(1/R1_i+1/R2_i)
AmB=1/2*sqrt((1/R1_i-1/R2_i)^2*cos(2*Phi))
K1=(1-(nu_i)^2)/E_i
K2=(1-(nu_j)^2)/E_j
invEc=K1+K2
Rc=R1_i
Ra=1/(ApB-AmB)
Rb=1/(ApB+AmB)
end

%calcolo andamento pressione di contatto%
f1=1-((Ra/Rb)^0.0602-1)^1.456
f2=1-((Ra/Rb)^0.0684-1)^1.531
cmax=(3*Fn*Rc*invEc/4)^(1/3)*f1
e2=1-(Rb/Ra)^(4/3)
a=cmax*(1-e2)^(-1/4)
b=cmax*(1-e2)^(1/4)
x=[-abs(a):abs(a)/30:abs(a)];
y=[-abs(b):abs(b)/30:abs(b)];
for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        p(i,j)=3*Fn/(2*pi*a*b)*sqrt(1-(x(i)/a)^2-(y(j)/b)^2);
    end
end
p(imag(p)>0)=0;
area_di_contatto=2*pi*a*b
pressione_media=Fn/(pi*a*b)
pmass=1.5*pressione_media;
figure
surf(x,y,p)
xlabel('Asse longitudinale [mm]')
ylabel('Asse trasversale [mm]')
zlabel('Pressione [MPa]')
title('Andamento della pressione di contatto secondo Hertz');
prompt={'Lunghezza semiasse di impronta longitudinale a = ', num2str(a),'
mm'},...
'',...
['Lunghezza semiasse di impronta trasversale b = ',
num2str(b),' mm'],...
'',...
['Area di contatto = ', num2str(area_di_contatto),'
mm^2'],...
'',...
['Pressione media = ', num2str(pressione_media),' MPa'],...
'',...
['pressione massima = ', num2str(pmass),' MPa'],...
''};
stop3=msgbox(prompt);
waitfor(stop3)

%andamento sforzi in profondità%
n=0;
for int=0:0.1:R1_i/10;
    n=n+1;

```



```

    profondit(n)=int;
    sigmaz(n)= 1/sqrt(1+(int/a)^2);
%a=asse perpendicolare a quello del cilindro%
    sigmay(n)=sqrt(1+int^2/a^2)*(2-(1/(1+int^2/a^2)))-2*int/a;
    tauprof(n)=(sigmaz(n)-sigmay(n))/2;
    sigmax(n)=2*nu_i*(1/sqrt(1+int^2/a^2));
end
figure
plot(profondit./a,tauprof,profondit./a,sigmaz,profondit./a,sigmay,profondit./a
,sigmax)
legend('\tau','\sigma_z','\sigma_y','\sigma_x')
xlabel('z/a')
ylabel('sigma/pmass')

%calcolo analitico andamento tensioni%
al=atan(a/Rl_i);
i=0;
j=0;
te=[0:2*pi/50:2*pi];
erro=[0.1:Rl_i/50:Rl_i];
maxdelta=0;
for u=1:length(erro)
    ro=erro/Rl_i;
    for v=1:length(te)
        if or (pi/2+al >te>pi/2-al, 3/2*pi-al<te<3/2*pi+al)
            fi=pi;
        else fi =0;
        end
        i =i+1;
        j=j+1;
        xc(i)=ro(u)*cos(te(v));
        yc(j)=ro(u)*sin(te(v));
        roo=sqrt(xc(i)^2+yc(i)^2);
        tet=atan(yc(i)/xc(i));
        vari=abs(2*pressione_mediana/pi*(1-roo^2)*sin(2*al)*1/(sqrt(roo^4-
2*roo^2*cos(2*(al+tet))+1)*sqrt(roo^4-2*roo^2*cos(2*(al-tet))+1)));
        sigma12(i,j)=2*vari;
        if sigma12(i,j)>maxdelta
            maxdelta=sigma12(i,j);
            xmasss=xc(i);
            ymasss=yc(j);
            raggio=roo*Rl_i;
            angolo=tet;
        end
    end
end
figure
surf(xc,yc,sigma12)
xlabel('r/Rmax')
ylabel('r/Rmax')
zlabel('differenza sigma principali')

prompt={['sigma1 - sigma2 massima', num2str(maxdelta),' MPa'],...
        '\tau',...
        ['teta rispetto asse carico ', num2str(angolo),' rad'],...
        '\sigma_z',...
        ['raggio punto di massimo = ', num2str(raggio),' mm'],...
        '\sigma_y'];
stop3=msgbox(prompt);
waitfor(stop3)

```

%programma per la rilevazione degli andamenti analitici di KI e KII generati da una distribuzione Hertziana traslante in superficie%

```

clear all
close all
clc
finestra0=questdlg('selezionare tipologia di contatto da analizzare','il vazz','disco su piano', 'disco su disco','annulla');

%acquisizione parametri disco su disco%
switch finestra0
case 'disco su disco',
prompt={'Forza di contatto Fn [N]:',...
'Forza di tangenziale [N]:',...
'Phi [rad]:'...
'Raggio R1_i [mm]:',...
'Raggio R2_i [mm]:',...
'Raggio R1_j [mm]:',...
'Raggio R2_j [mm]:',...
'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 1:',...
'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 2:',...
'Modulo elastico del materiale del corpo 1 [MPa]:',...
'Modulo elastico del materiale del corpo 2 [MPa]:',...
};
name='Acquisizione parametri';
numlines=1;
defaultanswer=
{'800','0','0','63','63.05','600','600.2','0.35','0.35','3500','3500'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
Fn= str2num(char(answer(1)));
Ft= str2num(char(answer(2)));
Phi=str2num(char(answer(3)));
R1_i=str2num(char(answer(4)));
R2_i=str2num(char(answer(5)));
R1_j=str2num(char(answer(6)));
R2_j=str2num(char(answer(7)));
nu_i=str2num(char(answer(8)));
nu_j=str2num(char(answer(9)));
E_i=str2num(char(answer(10)));
E_j=str2num(char(answer(11)));
ApB=1/2*(1/R1_j+1/R2_j+1/R1_i+1/R2_i)
AmB=1/2*sqrt((1/R1_i-1/R2_i)^2+(1/R1_j-1/R2_j)^2+2*((1/R1_i-1/R2_i)*(1/R1_j-1/R2_j))*cos(2*Phi))
K1=(1-(nu_i)^2)/E_i
K2=(1-(nu_j)^2)/E_j
invEc=K1+K2
Rc= sqrt(R1_i*R1_j)
Ra=1/(ApB-AmB)
Rb=1/(ApB+AmB)
end

%acquisizione parametri disco su piano%
switch finestra0
case 'disco su piano',
prompt={'Forza di contatto Fn [N]:',...
'Forza di tangenziale [N]:',...
'Phi [rad]:'...
'Raggio R1_i [mm]:',...
'Raggio R2_i [mm]:',...
'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 1:',...
'Coefficiente di Poisson del piano :',...
'Modulo elastico del materiale del corpo 1 [MPa]:',...
'Modulo elastico del piano [MPa]:',...
};

```

```

name='Acquisizione parametri';
numlines=1;
defaultanswer= {'530.5','0','0','300','300.1','0.35','0.35','2300','2300'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
Fn= str2num(char(answer(1)));
Ft= str2num(char(answer(2)));
Phi=str2num(char(answer(3)));
R1_i=str2num(char(answer(4)));
R2_i=str2num(char(answer(5)));
nu_i=str2num(char(answer(6)));
nu_j=str2num(char(answer(7)));
E_i=str2num(char(answer(8)));
E_j=str2num(char(answer(9)));
ApB=1/2*(1/R1_i+1/R2_i)
AmB=1/2*sqrt((1/R1_i-1/R2_i)^2*cos(2*Phi))
K1=(1-(nu_i)^2)/E_i
K2=(1-(nu_j)^2)/E_j
invEc=K1+K2
Rc=R1_i
Ra=1/(ApB-AmB)
Rb=1/(ApB+AmB)
end

%calcolo andamento pressione di contatto%
f1=1-((Ra/Rb)^0.0602-1)^1.456
f2=1-((Ra/Rb)^0.0684-1)^1.531
cmax=(3*Fn*Rc*invEc/4)^(1/3)*f1
e2=1-(Rb/Ra)^(4/3)
a=cmax*(1-e2)^(-1/4)
b=cmax*(1-e2)^(1/4)
x=[-abs(a):abs(a)/30:abs(a)];
for i=1:length(x)
    p(i)=3*Fn/(2*pi*a*b)*sqrt(1-(x(i)/a)^2);
end
p(imag(p)>0)=0;
lunghezza_di_contatto=a
pressione_media=Fn/(pi*a*b)
pmass=max(p);
figure
plot(x,p)
xlabel('Asse longitudinale [mm]')
ylabel('P [Mpa]')
title('Andamento della pressione di contatto secondo Hertz');
prompt={['Lunghezza semiasse di impronta longitudinale a = ', num2str(a),'
mm'],...
        '' ,...
        ['Pressione media = ', num2str(pressione_media),' MPa'],...
        '' ,...
        ['pressione massima = ', num2str(pmass),' MPa'],...
        ''};
stop3=msgbox(prompt);
waitfor(stop3)

%acquisizione cricca%
prompt={'inserisci lunghezza cricca [mm]',...
        'inserisci angolazione rispetto all orizzontale [grad]:'...
        'inserisci viscosità fluido [N*s/m^2]:'...
        };
name='Acquisizione cricca';
numlines=1;
defaultanswer= {'5','30','0.25'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';

```

```

answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
l= str2num(char(answer(1)))
tetagrad=str2num(char(answer(2)))
mu= str2num(char(answer(3)))
teta=tetagrad*pi/180;
h=l*sin(teta);

%andamento KII%
for i=1:length(x)
sigmay(i)=-2*p(i)/(pi*h*(1+(x(i)/h)^2)^2)*cos(teta)*(1+(Ft/h));
tauxy(i)=-2*p(i)*(x(i)/h)/(pi*h*(1+(x(i)/h)^2)^2)*sin(teta)*(1+(Ft/h));
end
attrito=mu*sigmay;
tauc(1)=tauxy(1)+attrito(1);
for i=1:length(x)
    somma(i)=tauxy(i)+attrito(i);
    differenza(i)=tauxy(i)-attrito(i);
end
[fmax,ics1]=max(somma)
[fmin,ics3]=min(differenza)
for i=1:ics1
    tauc(i)=tauxy(i)+attrito(i);
end
for i=ics1:ics3
    if abs(tauxy(i))<-attrito(i)
        ics2=i;
    end
end
for i=ics3:length(x)
    if abs(tauxy(i)+attrito(i))>abs(fmin)
        ics4=i
    end
end
for i=1:ics1
    tauc(i)=tauxy(i)+attrito(i);
end
for i=ics1:ics2
    tauc(i)=fmax;
end
for i=ics2:ics3
    tauc(i)=tauxy(i)-attrito(i);
end
for i=ics3:ics4
    tauc(i)=fmin;
end
for i=ics4+1:length(x)
    tauc(i)=tauxy(i)+attrito(i);
end
plot(x,tauxy,x,attrito,x,tauc)
legend('andamento \tau (fluido assente)','andamento \tau (dovuto
all''attrito)','andamento \tau (con fluido)')
xlabel ('dist apice vs carico max [mm]')
ylabel ('[Mpa]')
title ('sforzo di taglio apice')
hold on
grid on
KII=tauc*sqrt(pi*a);
KI=-sigmay*sqrt(pi*a);

figure
plot(x,KI)
legend('KI')
xlabel ('dist apice vs carico max [mm]')
ylabel ('[Mpa/m½]')
title ('fattore di intensificazione degli sforzi apertura KI apice')
grid on

```

```

figure
plot(x,KII)
legend('KII')
xlabel ('dist apice vs carico max [mm]')
ylabel ('[Mpa/m1/2]')
title ('fattore di intensificazione degli sforzi a scorrimento KII apice')
grid on

%programma per la rilevazione delle frange %

clear all
close all
clc
finestra0=questdlg('selezionare tipologia di contatto da analizzare','il
vazz','disco su piano', 'disco su disco','annulla');

%acquisizione parametri disco su disco%
switch finestra0
case 'disco su disco',
prompt={'Forza di contatto Fn [N]:',...
'Phi [rad]:',...
'Raggio R1_i [mm]:',...
'Raggio R2_i [mm]:',...
'Raggio R1_j [mm]:',...
'Raggio R2_j [mm]:',...
'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 1:',...
'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 2:',...
'Modulo elastico del materiale del corpo 1 [MPa]:',...
'Modulo elastico del materiale del corpo 2 [MPa]:',...
'Costante fotoelastica del disco da valutare [N/mm]:',...
'spessore del disco [mm]',...
};
name='Acquisizione parametri';
numlines=1;
defaultanswer=
{'180.5','0','27','27.01','300','300.1','0.35','0.35','3500','3500','7','8'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
Fn= str2num(char(answer(1)));
Phi=str2num(char(answer(2)));
R1_i=str2num(char(answer(3)));
R2_i=str2num(char(answer(4)));
R1_j=str2num(char(answer(5)));
R2_j=str2num(char(answer(6)));
nu_i=str2num(char(answer(7)));
nu_j=str2num(char(answer(8)));
E_i=str2num(char(answer(9)));
E_j=str2num(char(answer(10)));
Cf=str2num(char(answer(11)));
h=str2num(char(answer(12)));
ApB=1/2*(1/R1_j+1/R2_j+1/R1_i+1/R2_i)
AmB=1/2*sqrt((1/R1_i-1/R2_i)^2+(1/R1_j-1/R2_j)^2+2*((1/R1_i-1/R2_i)*(1/R1_j-
1/R2_j))*cos(2*Phi))
K1=(1-(nu_i)^2)/E_i
K2=(1-(nu_j)^2)/E_j
invEc=K1+K2
coeff=acos((-AmB)/(-ApB));
n=0.0105*coeff^2-0.2809*coeff+2.9293;
n=0.0415*coeff+0.4386;
Rc= sqrt(R1_i*R1_j)
Ra=1/(ApB-AmB)
Rb=1/(ApB+AmB)
f1=1-((Ra/Rb)^0.0602-1)^1.456
f2=1-((Ra/Rb)^0.0684-1)^1.531

```

```

cmax=(3*Fn*Rc*invEc/4)^(1/3)*f1
e2=1-(Rb/Ra)^(4/3)
b=m*((3/4*pi*Fn*invEc/ApB)^(1/3));
a=n*((3/4*pi*Fn*invEc/ApB)^(1/3));
alpha_grad_2=2*180/pi*atan((b/2)/R1_i);
D=2*R1_i;
x=[-R1_i:R1_i/1000:R1_i];
y=[-R1_i:R1_i/1000:R1_i];
y_circ=sqrt(R1_i^2-x.^2);
r=[0:0.2:R1_i];
theta=[0:0.01:2*pi];
alpha_grad=alpha_grad_2/2;
alpha_rad=alpha_grad*(2*pi/360);
alpha_rad_2=alpha_grad_2*(2*pi/360);
arco_contatto=alpha_rad_2*R1_i;
Sup_contatto=alpha_rad_2*R1_i*h;
pressione=Fn/Sup_contatto;
sigma_distr=Fn/(pi*h*R1_i);

% Sforzi lungo y:
sigma_x_y=(2*Fn/(pi*D*h)).*ones(1,length(x));
sigma_y_y=-(2*Fn/(pi*h)).*((2./(D-2.*y))+(2./(D+2.*x))-1/D);
tau_xy=0;
tau_max_y=sqrt(((sigma_x_y-sigma_y_y)./2).^2+(tau_xy).^2);
figure
plot(sigma_x_y,y,'r')
hold on
plot(sigma_y_y,y,'g')
plot(tau_max_y,y,'b')
legend('\sigma_x','\sigma_y','\tau_m_a_x')
title('Andamento degli sforzi lungo il diametro verticale')
xlabel('[MPa]')
ylabel('[mm]')
grid on
axis([-max(sigma_x_y)*100 max(sigma_x_y)*100 -R1_i R1_i])
hold off

% Sforzi lungo x:
sigma_x_x=(2*Fn/(pi*D*h)).*((D^2-4.*x.^2)/(D^2+4.*x.^2)).^2;
sigma_y_x=-(2*Fn/(pi*D*h)).*(((4*D^4)/(D^2+4.*x.^2).^2)-1);
tau_xy=0;
tau_max_x=sqrt(((sigma_x_x-sigma_y_x)./2).^2+(tau_xy).^2);
diff=sigma_x_x-sigma_y_x;
figure
plot(x,sigma_x_x,'r')
hold on
plot(x,sigma_y_x,'g')
plot(x,tau_max_x,'b')
plot(x,diff,'k')
legend('\sigma_x=\sigma_1','\sigma_y=\sigma_2','\tau_m_a_x',...
       ('\sigma_1-\sigma_2'))
title('Andamento degli sforzi lungo il diametro orizzontale (carico
concentrato)')
ylabel('[MPa]')
xlabel('[mm]')
grid on
hold off

% Soluzione con carico concentrato
i=sqrt(-1);
for k=1:length(theta)
    for j=1:length(r)
        r_tilde(k,j)=r(j)*exp(i*theta(k))*i;
        rho(j)=r(j)/R1_i;
        if (rho(j)^4+1-2*rho(j)^2*cos(2*theta(k)))=0;
            rho(j)=rho(j-1);
            theta(k)=theta(k+1);
        end
    end
end

```

```

end
sigma_1(k,j)=(Fn/(pi*R1_i*h))*((rho(j)^2-1)^2/...
    (rho(j)^4+1-2*rho(j)^2*cos(2*theta(k))));
sigma_2(k,j)=(Fn/(pi*R1_i*h))*((rho(j)^4+2*rho(j)^2-3)/...
    (rho(j)^4+1-2*rho(j)^2*cos(2*theta(k))));
sigma_diff_concentrato(k,j)=sigma_1(k,j)-sigma_2(k,j)+5;
sigma_1_x(j)=(Fn/(pi*R1_i*h))*((rho(j)^2-1)^2/...
    (rho(j)^4+1-2*rho(j)^2*cos(2*pi/2)));
sigma_2_x(j)=(Fn/(pi*R1_i*h))*((rho(j)^4+2*rho(j)^2-3)/...
    (rho(j)^4+1-2*rho(j)^2*cos(2*pi/2)));
sigma_diff_concentrato_x(j)=sigma_1_x(j)-sigma_2_x(j);

theta_p(k,j)=1/2*atan((2*rho(j)^2*sin(2*theta(k))-...
    rho(j)^4*sin(4*theta(k)))/(1-2*rho(j)^2*cos(2*theta(k))...
    +rho(j)^4*cos(4*theta(k))));
end
end
sigma_diff_isocromatiche=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12].*(Cf./h);
isocline=[0 10];
theta_p_grad=theta_p*360/(2*pi);

figure
plot(x,y_circ,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(x,-y_circ,'k','LineWidth',2)
axis equal
[C,h] = contour(real(r_tilde),imag(r_tilde),sigma_diff_concentrato);
set(h,'ShowText','on','TextStep',get(h,'LevelStep'))
title('Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con carico concentrato')
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid on
axis([-R1_i R1_i -R1_i R1_i])
colorbar

figure
mesh(real(r_tilde),imag(r_tilde),sigma_diff_concentrato)
title('Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con carico concentrato')
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
zlabel('[MPa]')
grid on
colorbar

figure
plot(x,y_circ,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(x,-y_circ,'k','LineWidth',2)
axis equal
[C,h] = contour(real(r_tilde),imag(r_tilde),sigma_diff_concentrato);
set(h,'ShowText','on','LevelList',sigma_diff_isocromatiche,'TextList'...
    ,sigma_diff_isocromatiche)
title('Andamento delle isocromatiche con carico concentrato')
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid on
axis([-R1_i R1_i -R1_i R1_i])

% Soluzione con carico distribuito
for k=1:length(theta)
    for j=1:length(r)
        r_tilde(k,j)=r(j)*exp(i*theta(k))*i;
        rho(j)=r(j)/R1_i;
        sigma_diff_distribuito(k,j)=((4*pressione/(pi))*...
            ((1-rho(j)^2)*sin(2*alpha_rad))*...
            (1/((sqrt(rho(j)^4-2*rho(j)^2*cos(2*(alpha_rad+theta(k))))+1))...
            *(sqrt(rho(j)^4-2*rho(j)^2*cos(2*(alpha_rad-theta(k))))+1))))+5;
    end
end

```

```

sigma_diff_distribuito_x(j)=((4*pressione/(pi))...
*(1-rho(j)^2)*sin(2*alpha_rad))*...
(1/((sqrt(rho(j)^4-2*rho(j)^2*cos(2*(alpha_rad+pi/2))+1))...
*(sqrt(rho(j)^4-2*rho(j)^2*cos(2*(alpha_rad-pi/2))+1))));

theta_p_dist(k,j)=1/2*atan((2*rho(j)^2*cos(2*alpha_rad)...
*sin(2*theta(k))-rho(j)^4*sin(4*theta(k)))/...
(1-2*rho(j)^2*cos(2*alpha_rad)*cos(2*theta(k))+...
rho(j)^4*cos(4*theta(k))));

end
end
theta_p_grad_dist=theta_p_dist*360/(2*pi);
v=[1:1:50];
figure
plot(x,y_circ,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(x,-y_circ,'k','LineWidth',2)
axis equal
[C,h] = contour(real(r_tilde),imag(r_tilde),sigma_diff_distribuito,v);
set(h,'ShowText','on','TextStep',get(h,'LevelStep'))
title(['Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con 2\alpha = ',
num2str(alpha_grad_2),'°'])
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid off
axis([-R1_i R1_i -R1_i R1_i])
colorbar

figure
mesh(real(r_tilde),imag(r_tilde),sigma_diff_distribuito*Cf*2)
title(['Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con 2\alpha = ',
num2str(alpha_grad_2),'°'])
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
zlabel('[MPa]')
grid on
colorbar

figure
plot(x,y_circ,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(x,-y_circ,'k','LineWidth',2)
axis equal
[C,h] = contour(real(r_tilde),imag(r_tilde),sigma_diff_distribuito);
set(h,'ShowText','on','LevelList',sigma_diff_isocromatiche,...
'TextList',sigma_diff_isocromatiche)
title(['Andamento delle isocromatiche di ordine intero con 2\alpha = '...
, num2str(alpha_grad_2),'°'])
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid on
axis([-R1_i R1_i -R1_i R1_i])

end

%acquisizione parametri disco su piano%
switch finestra0
case 'disco su piano',
prompt={'Forza di contatto Fn [N]:',...
'Phi [rad]:'...
'Raggio R1_i [mm]:',...
'Raggio R2_i [mm]:',...
'lunghezza piano [mm]:',...
'altezza piano [mm]:',...
'spessore piano [mm]',...
'Coefficiente di Poisson del materiale del corpo 1:',...

```



```

    'Coefficiente di Poisson del piano :',...
    'Modulo elastico del materiale del corpo 1 [MPa]:',...
    'Modulo elastico del piano [MPa]:',...
    'Costante fotoelastica [N/mm]:',...
    'spessore del disco [mm]',...
};

name='Acquisizione parametri';
numlines=1;
defaultanswer=
{'180.5','0','300','300.1','300','60','5','0.35','0.35','3500','3500','7','10'
};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
Fn= str2num(char(answer(1)));
Phi=str2num(char(answer(2)));
R1_i=str2num(char(answer(3)));
R2_i=str2num(char(answer(4)));
L=str2num(char(answer(5)));
altezza=str2num(char(answer(6)));
spessore=str2num(char(answer(7)));
nu_i=str2num(char(answer(8)));
nu_j=str2num(char(answer(9)));
E_i=str2num(char(answer(10)));
E_j=str2num(char(answer(11)));
Cf=str2num(char(answer(12)));
h=str2num(char(answer(13)));
ApB=(1/R1_i+1/R2_i);
AmB=sqrt((1/R1_i-1/R2_i)^2);
K1=(1-(nu_i)^2)/E_i;
K2=(1-(nu_j)^2)/E_j;
coeff=acos((-AmB)/(-ApB));
m=0.0105*coeff^2-0.2809*coeff+2.9293;
n=0.0415*coeff+0.4386;
invEc=K1+K2
Rc= sqrt(R1_i)
Ra=1/(ApB-AmB)
Rb=1/(ApB+AmB)
% ??????????????
% sforzi piamo
f1=1-((Ra/Rb)^0.0602-1)^1.456;
f2=1-((Ra/Rb)^0.0684-1)^1.531;
cmax=(3*Fn*Rc*invEc/4)^(1/3)*f1;
e2=1-(Rb/Ra)^(4/3);
b=m*((3/4*pi*Fn*invEc/ApB)^(1/3));
a=n*((3/4*pi*Fn*invEc/ApB)^(1/3));
alpha_grad_2=2*180/pi*atan((b/2)/R1_i);
x=[-R1_i:R1_i/1000:R1_i];
%y=[-R1_i:R1_i/1000:R1_i];
y_circ=sqrt(R1_i^2-x.^2);
r=[0:0.2:altezza];
theta=[0:0.01:2*pi];
alpha_grad=alpha_grad_2/2;
alpha_rad=alpha_grad*(2*pi/360);
alpha_rad_2=alpha_grad_2*(2*pi/360);
arco_contatto=alpha_rad_2*R1_i;
Sup_contatto=alpha_rad_2*R1_i*h;
pressione=Fn/Sup_contatto;
sigma_distr=Fn/(pi*h*R1_i);
lu=[-L/2:L/1000:L/2];
al=[1:altezza/1000:altezza];

% Soluzione con carico concentrato
for k=1:length(lu)
    for j=1:length(al)

```

```

ro=sqrt(lu(k)^2+al(j)^2);
if ro>altezza
    sigma_diff_concentrato(k,j)=0;
else
    theta=atan(lu(k)/al(j));
    rho=ro/altezza;
    sigma_1(k,j)=(Fn/(pi*altezza*h))*((rho^2-1)^2/...
        (rho^4+1-2*rho^2*cos(2*theta)));
    sigma_2(k,j)=(Fn/(pi*altezza*h))*((rho^4+2*rho^2-3)/...
        (rho^4+1-2*rho^2*cos(2*theta)));
    sigma_diff_concentrato(k,j)=sigma_1(k,j)-sigma_2(k,j);
    sigma_1_x(j)=(Fn/(pi*altezza*h))*((rho^2-1)^2/...
        (rho^4+1-2*rho^2*cos(2*pi/2)));
    sigma_2_x(j)=(Fn/(pi*altezza*h))*((rho^4+2*rho^2-3)/...
        (rho^4+1-2*rho^2*cos(2*pi/2)));
    sigma_diff_concentrato_x(j)=sigma_1_x(j)-sigma_2_x(j);

    theta_p(k,j)=1/2*atan((2*rho^2*sin(2*theta)-...
        rho^4*sin(4*theta))/(1-2*rho^2*cos(2*theta)...
        +rho^4*cos(4*theta)));
    end
end
end
sigma_diff_concentratot=sigma_diff_concentrato';
sigma_diff_isocromatiche=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12].*(Cf./h);
isocline=[0 10];
theta_p_grad=theta_p*360/(2*pi);
figure
hold on
rectangle('Position',[-L/2,0,L,altezza],'LineWidth',2);
axis equal
[C,h] = contour(lu,al,sigma_diff_concentratot);
set(h,'ShowText','on','TextStep',get(h,'LevelStep'))
title('Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con carico concentrato')
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid on
colorbar

figure
mesh(lu,al,sigma_diff_concentratot)
title('Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con carico concentrato')
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
zlabel('[MPa]')
grid on
colorbar

figure
plot(x,y_circ+Rl_i+altezza,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(x,-y_circ+Rl_i+altezza,'k','LineWidth',2)
rectangle('Position',[-L/2,0,L,altezza],'LineWidth',2);
axis equal
[C,h] = contour(lu,al,sigma_diff_concentratot);
set(h,'ShowText','on','LevelList',sigma_diff_isocromatiche,'TextList'...
    ,sigma_diff_isocromatiche)
title('Andamento delle isocromatiche con carico concentrato')
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid on

% Soluzione con carico distribuito
for k=1:length(lu)
    for j=1:length(al)
        ro=sqrt(lu(k)^2+al(j)^2);
        if ro>altezza

```

```

        sigma_diff_distribuito(k,j)=0;
    else
        theta=atan(lu(k)/al(j));
        rho=ro/altezza;
        rho=ro/altezza;
        sigma_diff_distribuito(k,j)=((4*pressione/(pi))*...
            ((1-rho^2)*sin(2*alpha_rad))*...
            (1/((sqrt(rho^4-2*rho^2*cos(2*(alpha_rad+theta))+1))...
            *(sqrt(rho^4-2*rho^2*cos(2*(alpha_rad-theta))+1)))));

        sigma_diff_distribuito_x(j)=((4*pressione/(pi))...
            *((1-rho^2)*sin(2*alpha_rad))*...
            (1/((sqrt(rho^4-2*rho^2*cos(2*(alpha_rad+pi/2))+1))...
            *(sqrt(rho^4-2*rho^2*cos(2*(alpha_rad-pi/2))+1)))));

        theta_p_dist(k,j)=1/2*atan((2*rho^2*cos(2*alpha_rad)...
            *sin(2*theta)-rho^4*sin(4*theta))/...
            (1-2*rho^2*cos(2*alpha_rad)*cos(2*theta)+...
            rho^4*cos(4*theta)));
    end
end

theta_p_grad_dist=theta_p_dist*360/(2*pi);
sigma_diff_distribuitot=sigma_diff_distribuito';
v=[1:1:4];
figure
plot(x,y_circ+Rl_i+altezza,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(x,-y_circ+Rl_i+altezza,'k','LineWidth',2)
rectangle('Position',[-L/2,0,L,altezza],'LineWidth',2);
axis equal
[C,h] = contour(lu,al,sigma_diff_distribuitot,v);
set(h,'ShowText','on','TextStep',get(h,'LevelStep'))
title(['Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con 2\alpha = ',
num2str(alpha_grad_2),'°'])
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid off
colorbar

figure
mesh(lu,al,sigma_diff_distribuitot*Cf*2)
title(['Andamento di \sigma_1-\sigma_2 con 2\alpha = ',
num2str(alpha_grad_2),'°'])
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
zlabel('[MPa]')
grid on
colorbar

figure
plot(x,y_circ+Rl_i+altezza,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(x,-y_circ+Rl_i+altezza,'k','LineWidth',2)
rectangle('Position',[-L/2,0,L,altezza],'LineWidth',2);
axis equal
[C,h] = contour(lu,al,sigma_diff_distribuitot);
set(h,'ShowText','on','LevelList',sigma_diff_isocromatiche,...
'TextList',sigma_diff_isocromatiche)
title(['Andamento delle isocromatiche di ordine intero con 2\alpha = '...
, num2str(alpha_grad_2),'°'])
ylabel('[mm]')
xlabel('[mm]')
grid on
end

```

```

%Metodi di rilevazione frange a confronto %

%calcolo andamento pressione di contatto%
f1=1-((Ra/Rb)^0.0602-1)^1.456
f2=1-((Ra/Rb)^0.0684-1)^1.531
cmax=(3*Fn*Rc*invEc/4)^(1/3)*f1
e2=1-(Rb/Ra)^(4/3)
a=cmax*(1-e2)^(-1/4)
b=cmax*(1-e2)^(1/4)
x=[-abs(a):abs(a)/30:abs(a)];
y=[-abs(b):abs(b)/30:abs(b)];

for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        p(i,j)=3*Fn/(2*pi*a*b)*sqrt(1-(x(i)/a)^2-(y(j)/b)^2);
        tau(i,j)=p(i,j)*((0.303+0.0855*j/i-0.808*(j/i)^2));
        z(i,j)=j*(0.7929-0.3207*j/i);
    end
end

p(imag(p)>0)=0;
tau(imag(tau)~=0)=0;
z(imag(z)~=0)=0;
area_di_contatto=2*pi*a*b
pressione_media=Fn/(pi*a*b)
pmass=1.5*pressione_media;
angolocontatto=2*atan((b/2)/R1_i)*180/pi;
taumax=max(tau);
taumax=max(taumax)
tauminn=min(tau);
taumin=min(tauminn)

figure
surf(x,y,p)
xlabel('Asse longitudinale [mm]')
ylabel('Asse trasversale [mm]')
zlabel('Pressione [MPa]')
title('Andamento della pressione di contatto secondo Hertz');
prompt={['Lunghezza semiasse di impronta longitudinale a = ', num2str(a),'
mm'],...
        ' ',...
        ['Lunghezza semiasse di impronta trasversale b = ', num2str(b),'
mm'],...
        ' ',...
        ['Area di contatto = ', num2str(area_di_contatto),' mm^2'],...
        ' ',...
        ['Pressione media = ', num2str(pressione_media),' MPa'],...
        ' ',...
        ['pressione massima = ', num2str(pmass),' MPa'],...
        ' ',...
        ['angolo di conatto = ', num2str(angolocontatto),' °'],...
        ' '];
stop3=msgbox(prompt);
waitfor(stop3)

%andamento sforzi in profondità%
n=0;
for int=0:0.1:R1_i/10;
    n=n+1;
    profondit(int)=int;
    sigmaz(n)= 1/sqrt(1+(int/a)^2);
%a=asse perpendicolare a quello del cilindro%
    sigmay(n)=sqrt(1+int^2/a^2)*(2-(1/(1+int^2/a^2)))-2*int/a;
    tauprof(n)=(sigmaz(n)-sigmay(n))/2;
    sigmax(n)=2*nu_i*(1/sqrt(1+int^2/a^2));
end
figure

```

```

plot(profondit./a,tauprof,profondit./a,sigmaz,profondit./a,sigmay,profondit./a
,sigmax)
legend('\tau','\sigma_z','\sigma_y','\sigma_x')
xlabel('z/a')
ylabel('sigma/pmass')

%acquisizione dei dati%
clear all
close all
clc
%inizializzazione%
prompt={'spessore provino [mm]:',...
        'Costante fotoelastica:',...
        };
name='Acquisizione parametri';
numlines=1;
defaultanswer= {'5','7'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
h=str2num(char(answer(1)));
fs=str2num(char(answer(2)));
finestra0=questdlg('selezionare immagine fotoelastica da
analizzare','seleziona da file','scegli','annulla','default');
[filename,pathname] = uigetfile({'*.jpg'; '*.tif'; '*.bmp'}, 'Selezionare
l''immagine principale');
    if isequal(filename,0)
        disp('User selected Cancel')
    else
        disp(['User selected', fullfile(pathname, filename)])
    end
    cd(pathname);
    [I,map]=imread(filename);

    figure
    imshow(I);
    title ('immagine selezionata')
    axis on
    xlabel('pixel')
    ylabel('pixel')

%seleziona pixel desiderato%
finestra1=questdlg('clicca col destro su due punti a distanza di
1mm','acquisizione scala di riferimento','ok','annulla','default');
[xm1,ym1,P]=impixel
[xm2,ym2,P]=impixel

finestra2=questdlg('clicca col destro prima sulla base della cricca poi sull
apica','Acquisizione riferimento in apice','OK','annulla','default');
[xb,yb,B]=impixel;
[xa,ya,A]=impixel;

millimetro=abs(xm1-xm2);
a=sqrt(((xb-xa)/millimetro)^2+((yb-ya)/millimetro)^2)/1000;

%sistema di riferimento all'apice%
m=abs((yb-ya)/(xb-xa));
tetapiano=abs(atan(m));
tetapianograd=tetapiano*180/pi;
l=20*millimetro;
xc=-l*cos(tetapiano)+xb;
yc=l*sin(tetapiano)+yb;
line([xb xc],[yb yc]);
hold on
ycc=l*cos(tetapiano)+ya;

```

```

xcc=1*sin(tetapiano)+xa;
line([xa xcc],[ya ycc]);
hold on

%metodo dell'apogeo%
finestra2=questdlg('clicca col destro sul punto esatto di apogeo di 2 frange
distinte e inserisci i rispettivi numeri di frangia','metodo dellapogeo','OK',
'annulla','default');
[xapo,yapo,B]=impixel;
line([xa xapo],[ya yapo],'color','r');
[xapo2,yapo2,B]=impixel;
line([xa xapo2],[ya yapo2],'color','r');
tetamtot=atan(abs(yapo-ya)/abs(xapo-xa));
tetam=tetamtot-tetapiano;
tetamgrad=tetam*180/pi;
rm=sqrt(((xapo-xa)/millimetro)^2+((yapo-ya)/millimetro)^2)/1000;
tetamtot2=atan(abs(yapo2-ya)/abs(xapo2-xa));
tetam2=tetamtot2-tetapiano;
tetamgrad2=tetam2*180/pi;
rm2=sqrt(((xapo2-xa)/millimetro)^2+((yapo2-ya)/millimetro)^2)/1000;
prompt={'inserisci numero delle frangia N1:',...
        'inserisci numero della frangia N2:',...
        };
name='Acquisizione N';
numlines=1;
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
N1=str2num(char(answer(1)));
N2=str2num(char(answer(2)));
taum=fs*N1/2/h
KIir=2*taum*sqrt(2*pi*rm)/sin(tetam)*sqrt(1+(2/(3*tan(tetam)))^2)*(1+(2+tan(1.
5*tetam))/3*tan(tetam))
tsl=-taum*cos(tetam)/(sqrt(cos(tetam/2)^2+9/4*sin(tetam)^2)*cos(1.5*tetam));

%metodo BRADLEY % KOBAYASHI%
g1=sqrt((sin(tetam))^2+2*sqrt(2*rm/a)*sin(tetam)*sin(1.5*tetam)+2*rm/a);
g2=sqrt((sin(tetam2))^2+2*sqrt(2*rm2/a)*sin(tetam2)*sin(1.5*tetam2)+2*rm2/a);
KIbc=fs*sqrt(2*pi*rm*rm2)*abs(N1-N2)/(h*(g2*sqrt(rm)+g1*sqrt(rm2)))*100

%metodo SCHROEDL & SMITH%
taum2=fs*N2/2/h
KIsc=sqrt(2*pi*rm)+2*(taum-taum2)/(1-sqrt(rm/rm2))

%metodo misto%
finestra2=questdlg('clicca col destro sui punti di intersezione fra 2 frange
consecutive e lo sviluppo della cricca ed inserisci i rispettivi numeri di
frangia','metodo misto','OK', 'annulla','default');
[x1,y1,B]=impixel;
line([xa x1],[ya y1],'color','g');
[x2,y2,B]=impixel;
line([xa x2],[ya y2],'color','g');
r1=sqrt(((x1-xa)/millimetro)^2+((y1-ya)/millimetro)^2)/1000;
r2=sqrt(((x2-xa)/millimetro)^2+((y2-ya)/millimetro)^2)/1000;
prompt={'inserisci numero delle frangia N1m:',...
        'inserisci numero della frangia N2m:',...
        };
name='Acquisizione Nm';
numlines=1;
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
N1m=str2num(char(answer(1)));
N2m=str2num(char(answer(2)));

```

```

finestra2=questdlg('clicca col destro sul punto di intersezione fra l frangia
e la normale allo sviluppo della cricca passante per l apice ed inserisci il
rispettivo numeri di frangia','metodo misto','OK', 'annulla','default');
[x3,y3,B]=impixel;
line([xa x3],[ya y3],'color','g');
r3=sqrt(((x3-xa)/millimetro)^2+((y3-ya)/millimetro)^2)/1000;
prompt={'inserisci numero delle frangia N3m:',...
};
name='Acquisizione Nm3';
numlines=1;
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
N3m=str2num(char(answer(1)));
KII=fs/h*sqrt(pi/2)*sqrt(r1*r2)/(+sqrt(r1)-sqrt(r2))*(N1m-N2m)
ts2=-N1m*fs/h-2*KII/sqrt(2*pi*r1)
A=1/(2*pi*r3)
B=ts2/sqrt(pi*r3)
C=KII^2/(2*pi*r3)+KII*ts2/sqrt(pi*r3)+ts2^2-(N3m*fs/h)^2
KI=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A)
prompt={['Metodo IRWINE - KI = ', num2str(KIir),' MPa radq(mm)],...
['T-stress = ', num2str(ts1),' MPa'],...
'',...
['metodo BRADLEY & KOBAYASHI - KI = ', num2str(KIbc),' MPa
radq(mm)],...
'',...
['metodo SCHROEDL & SMITHKI - KI = ', num2str(KIsc),' MPa
radq(mm)],...
'',...
['metodo MISTO - KI = ', num2str(KI),' MPa radq(mm)],...
['KII = ', num2str(KII),' MPa radq(mm)],...
['T-stress = ', num2str(ts1),' MPa'],...
'',...
'',...
['lunghezza cricca = ', num2str(a*1000),'mm'],...
['inclinazione cricca rispetto al piano = ',
num2str(tetapianograd),'°'],...
['raggio primo apogeo rml= ', num2str(rm*1000),'mm'],...
['angolo primo apogeo = ', num2str(tetamgrad),'°'],...
['raggio secondo apogeo rm2= ', num2str(rm2*1000),'mm'],...
['angolo secondo apogeo = ', num2str(tetamgrad2),'°'],...
['r1 = ', num2str(r1*1000),'mm'],...
['r2 = ', num2str(r2*1000),'mm'],...
['r3 = ', num2str(r3*1000),'mm'],...
''}];
stop3=msgbox(prompt,name);
waitfor(stop3)

%metodo parametrico%
figure
imshow(I)
hold on
prompt={'per il metodo parametrico selezionane il numero di punti che si
vogliono considerare, PUNTI:',...
'Inserire il numero di parametri che si vogliono utilizzare:',...
'Inserire l''errore massimo di frangia tollerato:'};
name='Acquisizione punti';
numlines=1;
defaultanswer= {'3','14','0.1'};
options.Resize='on';
options.WindowStyle='normal';
options.Interpreter='tex';
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
punti=str2num(char(answer(1)));
num_par_modo=str2num(char(answer(2)));
errore_toll=str2num(char(answer(3)));

```

```

plot(xa,ya,'rx');
hold on
l=a*1000*millimetro;
x_min=[-1/3:1/3/50:1/3];
y_circ_min=sqrt((1/3)^2-x_min.^2);
plot(x_min+xa,y_circ_min+ya,'r--')
hold on
plot(x_min+xa,-y_circ_min+ya,'r--')
xlabel('mm')
ylabel('mm')
axis equal
finestra2=questdlg('selezionane col destro i punti che si vogliono considerare
entro la circonferenza di accettabilità della soluzione','metodo
parametrico','OK','annulla','default');
for i=1:punti
    [xp,yp,B]=impixel;

    prompt={'Numero di frangia N:',...
           };
    name='Acquisizione punti';
    numlines=1;
    options.Resize='on';
    options.WindowStyle='normal';
    options.Interpreter='tex';
    answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
    N(i)=str2num(char(answer(1)));
    Rho(i)=sqrt(((xp-xa)/millimetro)^2+((yp-ya)/millimetro)^2);
    Theta(i)= abs(atan(abs(yp-ya)/abs(xp-xa)))-tetapiano;
end
for n=1:num_par_mod0
    AI(n)=1.6;
    B(n)=1.6;
    C(n)=1.6;
    D(n)=1.6;
end
%AII(2)=0;
errore_di_frangia_totale=3
iterazioni=1;
while errore_di_frangia_totale>=errore_toll
    clear g
    for k=1:punti
        for n=1:num_par_mod0
            dsigmax_dAI(n,k)=n/2*Rho(k)^( (n-2)/2)*((2+(-1)^n+n/2)*cos((n/2-
1)*Theta(k))- (n/2-1)*cos((n/2-3)*Theta(k)));
            dsigmay_dAI(n,k)=n/2*Rho(k)^( (n-2)/2)*((2-(-1)^n-n/2)*cos((n/2-
1)*Theta(k))+ (n/2-1)*cos((n/2-3)*Theta(k)));
            dtauxy_dAI(n,k)=n/2*Rho(k)^( (n-2)/2)*(-((-1)^n+n/2)*sin((n/2-
1)*Theta(k))+ (n/2-1)*sin((n/2-3)*Theta(k)));

            dsigmax_dAII(n,k)=-n/2*Rho(k)^( (n-2)/2)*((2-(-1)^n+n/2)*sin((n/2-
1)*Theta(k))- (n/2-1)*sin((n/2-3)*Theta(k)));
            dsigmay_dAII(n,k)=-n/2*Rho(k)^( (n-2)/2)*((2+(-1)^n-n/2)*sin((n/2-
1)*Theta(k))+ (n/2-1)*sin((n/2-3)*Theta(k)));
            dtauxy_dAII(n,k)=-n/2*Rho(k)^( (n-2)/2)*(-((-1)^n-n/2)*cos((n/2-
1)*Theta(k))- (n/2-1)*cos((n/2-3)*Theta(k)));
            d(n,k)=(n-1/2)*AI(n)*Rho(k)^(n-1/2)*sin(Theta(k))*sin((n-
3/2)*Theta(k))+B(n)*Rho(k)^n*(n*sin(Theta(k))*sin(n*Theta(k))+cos(n*Theta(k)))
-C(n)*Rho(k)^(n-1/2)*((n-1/2)*sin(Theta(k))*cos((n-3/2)*Theta(k)))-
D(n)*Rho(k)^n*sin(Theta(k))*cos((n-1)*Theta(k));
            t(n,k)=- (n-1/2)*AI(n)*Rho(k)^(n-1/2)*sin(Theta(k))*cos((n-
3/2)*Theta(k))-
B(n)*Rho(k)^n*(n*sin(Theta(k))*cos(n*Theta(k))+sin(n*Theta(k)))+C(n)*Rho(k)^(n
-1/2)*(cos((n-1/2)*Theta(k))- (n-1/2)*sin(Theta(k))*sin((n-3/2)*Theta(k)))-
D(n)*Rho(k)^n*(n*sin(Theta(k))*sin((n-1)*Theta(k)));
            end
            D(k)=sum(d(:,k));
            T(k)=sum(t(:,k));
        end
    end
end

```



```

        N_teorica(k)=sqrt(D(k)^2+T(k)^2)*2*h/fs;
        errore_di_frangia(k)=abs(N_teorica(k)-N(k));
    end
    for k=1:punti
        g(k)=D(k)^2+T(k)^2-(N(k)*fs/(2*h))^2;
        for n=1:num_par_modo
            dg_dAI(k,n)=1/2*(sigmax(k)-sigmay(k))*(dsigmax_dAI(n,k)-
dsigmay_dAI(n,k))+2*(tauxy(k)*dtauxy_dAI(n,k));
            dg_C(k,n)=dg_dAI(k,n);
            dg_dAII(k,n)=1/2*(sigmax(k)-sigmay(k))*(dsigmax_dAII(n,k)-
dsigmay_dAII(n,k))+2*(tauxy(k)*dtauxy_dAII(n,k));
            dg_B=dg_dAII(k,n);
            dg_D=dg_dAII(k,n);
        end
    end
    g=g';
    b=cat(2,dg_dAI,dg_B,dg_C,dg_D);
    correzione=-b\g;
    for n=1:num_par_modo
        AI(n)=AI(n)+correzione(n);
        B(n)=B(n)+correzione(num_par_modo+n);
        C(n)=C(n)+correzione(n);
        D(n)=D(n)+correzione(num_par_modo+n);
    end
    errore=max(abs(correzione));
    errore_di_frangia_totale=sum(errore_di_frangia)/punti
    iterazioni=iterazioni+1;
    if iterazioni==10000,
        stop=errordlg(['Convergenza non raggiunta, si consiglia di variare
il numero di parametri o risSelectedionare i punti. L'errore di frangia è '...
        , num2str(errore_di_frangia_totale),''],'Attenzione')
        waitfor(stop)
        break,
    end
end
if iterazioni<10000,
    stop2=warndlg(['Convergenza raggiunta. L'errore di frangia è ',
num2str(errore_di_frangia_totale),''],'Attenzione')
    waitfor(stop2)
end
clear i
KI=max(AI)*(sqrt(2*pi))
KIIpc=-AII(n-1)*(sqrt(2*pi));
sigma0x=-4*AI(n);

prompt={['AI1 = ', num2str(AI(n)),' MPa radq(mm)'],...
'',...
['AII1 = ', num2str(AII(n)),' MPa radq(mm)'],...
'',...
['AI2 = ', num2str(AI(n)),' MPa radq(mm)'],...
'',...
['KI = ', num2str(KI),' MPa radq(mm)'],...
'',...
['KII = ', num2str(KIIpc),' MPa radq(mm)'],...
'',...
['sigma0x = ', num2str(sigma0x),' MPa'],...
''};
name='FIS';
stop3=msgbox(prompt,name);
waitfor(stop3)

```

Bibliografia

- [1] Colombo, Davoli, Gorla, Guagliano, *Appunti del corso di "Progettazione: metodi, strumenti applicazioni"*.
 - [2] L. Banks-Sills, *Use of three-dimensional finite elements in linear elastic fracture mechanics*, Analytical, Numerical and Experimental Aspects of Fracture Processes, 1988, 91, 89-97.
 - [3] D. Benuzzi¹, E. Bormetti², G. Donzella, *Modelli numerici per lo studio della propagazione di cricche superficiali da rolling contact fatigue in presenza di fluido*. Università degli Studi di Brescia – Dipartimento di Ingegneria Meccanica.
 - [4] Hondros G., *The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete*. Aust J Appl Sci 1959;10:243–68.
 - [5] Hertz, H., *Über die Berührung fester, elastischer Körper*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, 92, pp. 156-171.
 - [6] Sandford, R. J. and Dally, J. W., *A general method for determining mixed mode stress intensity factor*,. Engng Fracture Mech., 1972, 4, pp. 357-366.
 - [7] Etheridge, J. M. and Dally, J. W., *A critical review of methods for determining stress intensity factors from isochromatic fringes*, Exp. Mech., 1977, 17, pp. 248-254.
 - [8] Bradley, W. B., and A. S. Kobayashi, *An investigation of propagating Cracks by Dynamic Photoelasticity*, Exp. Mech. Vol. 10, pp 106-113, 1970.
 - [9] Irwin G. R., *Discussion of paper by A. Wells and D. Post, the dynamic stress distribution surrounding a running crack – A photoelastic analysis*, Proc. SESA, vol. XVI, n.1, pp 93-96, 1958.
 - [10] Irwin, G. R., *Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate*,. J. appl. Mech., 1957, pp. 361-364.
 - [11] J. W. Dally, and W. F. Riley, *Experimental stress analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1991
 - [12] Schroedl, M. A., and C. w. Smith, *Local stress near deep surface flaws under cylindrical bounding fields*, ASTM, STP 536, pp45-63, 1973.
 - [13]. Westergaard, H. M., *Bearing pressure and cracks*. Trans. ASME, J. appl. Mech., 1939, 44, A49-A53.
-

- [14] C.W. Smith, O. Olaosebikan, *On the Extraction of Stress-Intensity Factors from Near-Tip Photoelastic Data*, Experimental Mechanics , 1986, 313-318.
- [15] L. Cerioli, *Analisi numerica e fotoelastica di cricche interne in ruote ferroviarie*, Tesi di Laurea, Politecnico di Milano – Dipartimento di meccanica, 2003.
- [16] G. Lesma, P. Marangoni, *Analisi numerica e sperimentale di ruote ferroviarie criccate internamente*, 2005/2006
- [17] M. Kaneta, Y. Murakami, T. Ozaki, *Growth mechanism of subrface crack due to hertzian conctat*, Trans of ASME vol. 108 1986, 134-139
- [18] K. Iyer, G.T. Hahn, P.C. Bastias, C.A. Rubin, , *Analysis of fretting conditions in pinned connections*, Wear 181-183 (1995) 524-530
- [19] S. D. O'Regan, G. T. Hahn, C. A. Rubin, *The driving force for mode II crack growth under rolling contact*, Vanderbilt University, Nashville, 1985
- [20] A. F. Bower, *The influence of crake face friction and trapped fluid on surface initiated rolling contact fatigue cracks*, department of Engineering, University of Cambrige, ASME, 1998
- [21] P. C.Paris e G. C. Sih, *Stress analysis of cracks*
- [22] Sangirardi, M., *Dispensa del corso di Meccanica Sperimentale*. Politecnico di Milano.
- [23] A. Sciuccati, *Analisi fotoelastica multiparametrica di elementi criccati e caricati in modo misto ed in condizioni di contatto non conforme*, tesi di laurea, Politecnico di Milano
- [24] A. Rivola, *Lubrificazione*, , Università degli Studi di Bologna II Facoltà di Ingegneria, Meccanica applicata alle macchine.
- [25] Guagliano, M., Pau, M., *Analysis of internal cracks in railway wheels under experimentally determined pressure distributions. Tribology International*, 2007, 40, pp. 1147-1160.