

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria dei Sistemi

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale



**PROPRIETÀ SPETTRALI DELLE MATRICI DI
CORRELAZIONE PER TASSI D'INTERESSE**

Tesi di Laurea Specialistica di:

Jacopo Chiesa

Matr. 708685

Relatore: Prof. Carlo Sgarra

Anno Accademico 2009/2010

Abstract

Interest rates, described in terms of their yield curve, are valued by their correlation matrix and the most used tool is the principal component analysis (PCA); through this methodology it is possible to identify the factors which can explain the evolution of yield curve. These factors, which are the eigenvectors of the correlation matrix, are known as shift, slope and curvature due to the peculiar structure that characterizes them.

This work, initially, summarizes the basic definitions for the analysis of yield curves, of correlation matrices and the principal eigenvectors: shift, slope and curvature. Furthermore, defines the properties of correlation and in particular the total positivity and characteristics of totally positive matrices. Later on, proposes a detailed analysis of relationship between the characteristics of correlation and the existence of shift, slope and curvature: in case that it is only relevant the sign of their components, "Weak SSC", in case that it is also considered the ordering of eigenvectors' components, SSC.

The results shows how the presence of SSC, excluding some cases with particular behavior related to the low dimension, cannot be directly related to the classical assumption about the correlation structure of interest rates. Furthermore, the results provide estimates for the first eigenvector in the particular case of equality of all its elements, analyzing the properties of equicorrelation. Finally has proved the existence of the WSSC for a significant class of models, derived from a generalization of the exponential model.

Structure of Work:

- Chapter 1. Introduction;
- Chapter 2. Bond markets, yields, discount rates and time indexes;
- Chapter 3. Yield curves, measurement of yield curves and changes over time through principal components analysis (PCA);
- Chapter 4. Correlation matrices, key eigenvectors (shift, slope and curvature) and total positivity;
- Chapter 5. Model on the correlations behavior and the existence of non-homogeneous SSC in relation to total positivity. Estimate of the first eigenvector of the correlation matrix. Proof of total positivity in an extension of the exponential model;
- Chapter 6. Concluding remarks and possible future developments of the proposed work;
- Chapter 7. Bibliographic review.

Abstract

I tassi d'interesse, descritti attraverso la loro curva dei rendimenti, sono valutati in base alla relativa matrice delle correlazioni e lo strumento più utilizzato per l'analisi delle componenti principali (PCA), attraverso questa metodologia è possibile individuare i fattori che spiegano l'evoluzione della curva dei rendimenti. Questi fattori, che sono gli autovalori della matrice di correlazione, prendono il nome di *shift*, *slope* e *curvature* a causa della struttura peculiare che li caratterizza.

Questo lavoro inizialmente propone una sintesi delle definizioni di base per l'analisi delle curve di rendimento, delle matrici di correlazione e degli autovettori principali: *shift*, *slope* e *curvature*. Inoltre, definisce le proprietà delle matrici di correlazione ed in particolare la totale positività e le caratteristiche delle matrici totalmente positive. In seguito propone un'analisi dettagliata delle relazioni tra le caratteristiche delle matrici di correlazione e l'esistenza di *shift*, *slope* e *curvature*: nel caso in cui sia rilevante solo il segno delle componenti, "Weak SSC", e nel caso in cui sia considerato anche l'ordinamento delle componenti degli autovettori, SSC.

I risultati mostrano come la presenza della SSC, esclusi alcuni casi con comportamento particolare collegabile alla piccola dimensione considerata, non possa essere direttamente connessa alle classiche assunzioni sulla struttura delle correlazioni dei tassi d'interesse. Inoltre, i risultati forniscono le stime per il primo autovettore nel caso particolare di uguaglianza di tutti i suoi elementi, analizzando le proprietà dell'equicorrelazione. In fine è dimostrata l'esistenza della WSSC per una rilevante classe di modelli, che deriva da una generalizzazione del modello esponenziale.

Struttura del lavoro:

- Capitolo 1. Introduzione;
- Capitolo 2. Mercati obbligazionari, rendimenti, dei tassi di sconto e gli indici temporali;
- Capitolo 3. Curve di rendimento, misurazione delle curve di rendimento e l'evoluzione nel tempo per mezzo dell'analisi delle componenti principali (PCA);
- Capitolo 4. Matrici di correlazione, autovettori principali (*shift*, *slope* e *curvature*) e totale positività;
- Capitolo 5. Modello riguardante il comportamento non omogeneo delle correlazioni e l'esistenza della SSC in relazione alla totale positività. Stima del primo autovettore della matrice di correlazione. Dimostrazione della totale positività per l'estensione del modello esponenziale;
- Capitolo 6. Riflessioni conclusive e possibili futuri sviluppi del lavoro proposto;
- Capitolo 7. Rassegna bibliografica.

Indice

1.	Introduzione	3
2.	Le obbligazioni: caratteristiche generali	7
2.1.	Le grandezze fondamentali	7
2.1.1.	<i>L'interesse, il montante e l'intensità</i>	7
2.1.2.	<i>I titoli obbligazionari</i>	9
2.2.	I prezzi e i rendimenti di un flusso di pagamenti	13
2.2.1.	<i>Introduzione al "pricing"</i>	13
2.2.2.	<i>La classificazione dei tassi</i>	14
2.2.3.	<i>Gli indici temporali</i>	18
3.	La struttura per scadenza dei tassi d'interesse	24
3.1.	Descrizione della struttura per scadenza	24
3.1.1.	<i>Le strutture per scadenza a pronti</i>	24
3.1.2.	<i>Le strutture per scadenza implicite</i>	26
3.1.3.	<i>Gli scadenziari discreti o continui</i>	27
3.2.	Misurazione della struttura per scadenza	29
3.2.1.	<i>Metodi basati sul tasso interno di rendimento</i>	30
3.2.2.	<i>Metodi basati sull'algebra lineare</i>	31
3.2.3.	<i>Metodi basati sulla stima di un modello</i>	33
3.2.4.	<i>Modelli basati sulla dinamica di mercato</i>	34
3.2.5.	<i>Modelli basati su spline</i>	34
3.3.	Evoluzione, nel tempo, della struttura per scadenza	35
3.3.1.	<i>Il modello di analisi delle componenti principali</i>	37

4.	Le proprietà delle matrici di correlazione e la totale positività	41
4.1.	Le matrici di correlazione	41
4.2.	Le tre componenti principali	45
4.2.1.	<i>Lo shift</i>	48
4.2.2.	<i>Lo slope e curvature</i>	49
4.3.	La positività totale nelle matrici di correlazione WSSC	49
5.	L'analisi proposta delle strutture di correlazione	57
5.1.	Oltre la totale positività.....	57
5.2.	Il puro " <i>shift</i> "	65
5.2.1.	<i>Una proprietà ottimale del puro "shift"</i>	69
5.3.	Il modello esponenziale	73
6.	Conclusioni	80
7.	Bibliografia	83

1. Introduzione

Le matrici di correlazione ricoprono un ruolo fondamentale nell'ambito della finanza, per esempio nel *pricing* dei derivati e nel *risk management*. L'accurata valutazione del paniere delle opzioni, derivati sul credito e prodotti a reddito fisso richiedono una conoscenza profonda e dettagliata delle strutture di correlazione fra gli *asset* sottostanti. In particolare, per i prodotti dei tassi d'interesse, le strutture di correlazione sono state studiate ampiamente nel corso degli ultimi anni e molti modelli d'interesse sono stati formulati descrivendo tali strutture (Longstaff *et al.*, 1999; Martellini *et al.*, 2003 e Rebonato, 2002).

I tassi d'interesse possono essere descritti attraverso la loro curva dei rendimenti e la matrice delle correlazioni permette di valutare la loro evoluzione. In letteratura si può riscontrare un grande interesse sia di accademici sia professionisti nello sviluppare metodi statistici adatti a descrivere i movimenti delle curve di rendimento e di giustificare empiricamente alcuni importanti modelli sulla dinamica dei tassi d'interesse basati su uno o più fattori.

Lo strumento più utilizzato quando la curva dei rendimenti è rappresentata da un vettore casuale è l'analisi delle componenti principali, attraverso questa metodologia è possibile individuare i fattori che spiegano l'evoluzione della curva dei rendimenti. L'analisi delle componenti principali permette di individuare quali siano i fattori che meglio possono spiegare la variabilità delle curve di rendimento, in particolare attraverso lo studio degli autovettori della matrice delle correlazioni associata. Partendo dal lavoro determinante di Litterman e Scheinkman (1991), in tutta la letteratura empirica relativa all'analisi delle componenti principali si enfatizza come le prime tre componenti principali riescano a spiegare la variabilità delle curve

di rendimento: a causa dell'interpretazione grafica e dal loro comportamento le prime tre componenti principali prendono il nome di: *shift*, *slope* e *curvature*. Diversi studi in letteratura si sono concentrati sulle caratteristiche peculiari di questi autovettori e delle componenti che li costituiscono.

L'analisi delle caratteristiche teoriche degli autovalori dominanti delle matrici di correlazione, quindi delle componenti principali, è quindi molto rilevante per lo studio dell'andamento delle curve di rendimento, inoltre risulta fondamentale analizzare la struttura di correlazione delle curve di rendimento che è strettamente collegata all'esistenza di *shift*, *slope* e *curvature*. Recentemente Salinelli e Sgarra (2006) e Lord e Pelsser (2007) hanno affrontato questo problema: in base ad appropriate ipotesi sulla positività dei minori delle matrici di correlazione, hanno dimostrato alcuni risultati riguardanti i cambi di segno dei primi tre autovettori, analizzando le relazioni tra le assunzioni di positività e le particolari caratteristiche delle strutture di correlazione. Inoltre, entrambe le proprietà di cambio di segno e della monotonicità delle componenti degli autovalori sono rilevanti per un'interpretazione realistica di *shift*, *slope* e *curvature* ed introducono le seguenti nozioni: sulla base dei cambi di segno, si ricava la *weak shift*, *slope* e *curvature* e sulla base di entrambe le proprietà si ricava la *shift*, *slope* e *curvature*. In Salinelli e Sgarra (2007) sono presentati alcuni modelli rilevanti, nei quali i coefficienti di correlazione diminuiscono esponenzialmente in base alle differenze nelle scadenze. Ad ogni modo è assente una più generale e sistematica ricerca sui legami tra le precedenti relazioni.

Questo lavoro si propone di colmare questa lacuna, ponendo chiarezza sulle relazioni principali e sulle proprietà standard dei modelli di correlazione e la presenza di *shift*, *slope* e *curvature*. Si adottano le ipotesi sulle strutture di correlazione considerate in Rebonato (2002), Lord e Pelsser (2007) e le definizioni formali

presenti in Salinelli e Sgarra (2006) sull'esistenza di *shift*, *slope* e *curvature* in senso sia stretto che debole. I risultati mostrano come la presenza della *shift*, *slope* e *curvature*, escludendo alcuni casi con comportamento particolare e strettamente collegabile alla piccola dimensione considerata, non possa essere direttamente connessa alle classiche assunzioni sulla struttura delle correlazioni dei tassi d'interesse e possano essere una base di partenza per la ricerca di proprietà sulle strutture di correlazione fondamentali e più generalizzabili. Inoltre si forniscono stime per il primo autovettore nel caso particolare di uguaglianza di tutti i suoi elementi, analizzando le proprietà dell'equicorrelazione. In fine si dimostra l'esistenza della *Weak Shift, Slope e Curvature* per una rilevante classe di modelli, per i quali non risulta che esista una simile analisi: questa classe di modelli prende origine da una generalizzazione del modello esponenziale, in modo da superare la limitazione imposta dalla omogeneità nel tempo.

Struttura del lavoro. Nel secondo capitolo si forniscono gli strumenti e le nozioni per l'analisi dei mercati obbligazionari, le principali caratteristiche dei rendimenti e dei tassi di sconto e gli indici temporali. Nel terzo capitolo sono descritte le curve di rendimento, successivamente sono analizzati i diversi metodi di misurazione atti a ricavare le curve di rendimento per un zero-coupon bond, in fine è descritta l'evoluzione nel tempo delle curve di rendimento con particolare attenzione all'analisi delle componenti principali. Nel quarto capitolo sono introdotte le definizioni di base per l'analisi delle matrici di correlazione le proprietà degli autovalori principali: *shift*, *slope* e *curvature*, successivamente è definita la totale positività e le caratteristiche delle matrici totalmente positive. Nel quinto capitolo si considera inizialmente l'estensione in un modello più generale (evidenziando il ruolo della dimensione) riguardante il comportamento non omogeneo delle correlazioni,

l'esistenza della *shift*, *slope* e *curvature* in relazione alla totale positività. In seguito si focalizzerà l'analisi sul primo autovettore della matrice di correlazione dei tassi di interesse, proponendo stime sulla forma e una descrizione rilevante di un caso particolare. In conclusione di capitolo si considerano alcuni modelli finanziari rilevanti tra cui la dimostrazione della totale positività per l'estensione del modello esponenziale. In fine nel sesto capitolo sono proposte le riflessioni conclusive e possibili futuri sviluppi del lavoro proposto.

2. Le obbligazioni: caratteristiche generali

Questo capitolo tenta di dare gli strumenti per l'analisi dei mercati obbligazionari, definendo le principali variabili, le varie relazioni e dipendenze e infine l'andamento dinamico. Inizialmente saranno introdotte le grandezze fondamentali che permetteranno in seguito di descrivere le obbligazioni, le principali caratteristiche dei rendimenti e dei tassi di sconto e gli indici temporali.

2.1. Le grandezze fondamentali

2.1.1. *L'interesse, il montante e l'intensità*

Con riferimento ad una generica funzione valore $W(t)$, a valori reali positivi e definita per $t \geq 0$, è possibile definire i principali tipi di grandezze solitamente utilizzati nella matematica finanziaria¹. Siano dunque t e $t' = t + \tau$, con $\tau > 0$, due arbitrari istanti di tempo. Si definisce *interesse* nel periodo da t a $t + \tau$ l'incremento:

$$\Delta W(t) = W(t + \tau) - W(t) \quad [1.1]$$

subito dalla funzione nello stesso periodo. Si tratta di una quantità positiva misurata in unità monetarie.

Il *fattore di capitalizzazione*, o fattore montante, relativo al periodo da t a $t + \tau$, è la quantità:

$$m(t, t + \tau) = \frac{W(t + \tau)}{W(t)}, \quad [1.2]$$

¹ Al fine di rendere più naturale l'interpretazione delle definizioni, supporremo che $W(t)$ sia una funzione monotona crescente nel tempo.

cioè il rapporto tra il valore nell'istante finale e quello nell'istante iniziale del periodo. In altri termini, m è il fattore per cui va moltiplicato $W(t)$ per ottenere il valore a fine periodo detto anche valore capitalizzato o *montante*. Essendo il rapporto tra due quantità monetarie, cioè tra due grandezze aventi stesse dimensioni, m è una grandezza adimensionale e per le ipotesi di crescita continua è sempre $m(t, t+\tau) > 1$.

Il *fattore di sconto* $v(t, t+\tau)$ sul periodo da t a $t+\tau$ è il reciproco del fattore di capitalizzazione, cioè il rapporto tra il valore iniziale e il valore finale:

$$v(t, t + \tau) = \frac{W(t)}{W(t+\tau)}. \quad [1.3]$$

Moltiplicando quindi il valore $W(t+\tau)$ per il fattore di sconto si ottiene il valore di inizio periodo, o valore scontato. Se si ipotizza t come l'istante di tempo attualmente corrente, allora $W(t)$ è il valore attuale, in t , di $W(t+\tau)$ secondo il fattore di sconto $v(t, t+\tau)$. Anche il fattore di sconto è una grandezza adimensionale e sarà sempre $v(t, t+\tau) < 1$.

Sempre con riferimento all'intervallo di tempo $[t, t+\tau]$, si definisce *tasso di interesse*, o tasso di rendimento, il rapporto tra l'interesse maturato nel periodo ed il valore nell'istante iniziale:

$$j(t, t + \tau) = \frac{\Delta W(t)}{W(t)}. \quad [1.4]$$

Utilizzando le definizioni di fattore montante e fattore di sconto, si ha anche:

$$j(t, t + \tau) = m(t, t + \tau) - 1 = \frac{1}{v(t, t+\tau)} - 1. \quad [1.5]$$

Se si divide l'interesse per il valore di fine periodo si ottiene il *tasso di sconto*, o tasso di interesse anticipato, relativo al periodo da t a $t+\tau$. In questo caso valgono le relazioni:

$$\frac{\Delta W(t)}{W(t+\tau)} = 1 - v(t, t + \tau) = j(t, t + \tau) v(t, t + \tau). \quad [1.6]$$

Sia il tasso di interesse che il tasso di sconto rappresentano degli incrementi percentuali e, quindi, come rapporto tra grandezze aventi le stesse dimensioni, sono grandezze adimensionali. Evidentemente sono sempre positivi e solitamente sono espressi in termini percentuali.

Se si riporta un tasso alla lunghezza del periodo di riferimento, dividendolo quindi per τ , si ottiene un'*intensità*, che è una grandezza positiva che ha per dimensioni il reciproco del tempo. L'intensità di interesse relativa al periodo da t a $t+\tau$ sarà definita come:

$$\gamma(t, t + \tau) = \frac{\Delta W(t)}{\tau W(t)} = \frac{j(t, t + \tau)}{\tau}. \quad [1.7]$$

Analogamente, l'intensità di sconto sullo stesso periodo sarà data da:

$$\frac{\Delta W(t)}{\tau W(t+\tau)}. \quad [1.8]$$

2.1.2. *I titoli obbligazionari*

Un prestito obbligazionario è un'operazione di scambio monetario con la quale aziende o istituzioni pubbliche si finanziano indebitandosi nei confronti di un grande numero di investitori. L'ammontare complessivo dell'operazione di prestito è generalmente d'ingenti dimensioni, se paragonato al patrimonio tipico del singolo individuo investitore, e viene quindi ripartito tra un numero molto grande di contratti elementari tutti uguali fra loro, detti *obbligazioni*, che vengono emessi sul mercato.

L'investitore effettua un acquisto di titoli obbligazionari, con riferimento al fatto acquisisce il diritto a ricevere nel futuro un flusso programmato di versamenti a fronte del pagamento, nell'istante corrente, di un importo coincidente con il prezzo del titolo. Fra la grande varietà di emissioni obbligazionarie saranno definite due tipologie semplici di titoli, che risultano di importanza fondamentale sia per il valore teorico che per la grande diffusione sui mercati finanziari: i titoli a cedola nulla e i titoli a cedola fissa.

I *titoli a cedola nulla* garantiscono al portatore il pagamento, da parte dell'emittente, di una somma di un importo fissato N a una stabilita data futura s . Per acquisire questo diritto l'investitore deve pagare nell'istante corrente t un prezzo P , che va versato all'emittente se t è anche la data di emissione dell'obbligazione, oppure al detentore del titolo se l'emissione è avvenuta prima di t . Si può dire che l'emittente garantisce al detentore di questa obbligazione il flusso di pagamenti x costituito dall'unico importo N , definito sullo scadenziario t formato dall'unica data s , detta *maturity* (o scadenza) del titolo. In altre parole, l'acquisto di un titolo a cedola nulla configura un'operazione finanziaria di scambio che, vista dall'investitore, può essere formalizzata dalla coppia di vettori:

$$\mathbf{y/s} = \{-P, N\}/\{t, s\}, \quad [1.9]$$

essendo $P, N > 0$ e $t < s$. Un titolo di questo tipo viene in alternativa indicato, con la denominazione anglosassone, *zero coupon bond*. L'importo N è noto come *valore nominale*, o di rimborso, del titolo. La somma P rappresenta il *prezzo di acquisto* (più precisamente, *corso* o *quotazione*), o prezzo di emissione se comprata direttamente dall'emittente. La durata $s - t$ rappresenta la vita residua del titolo, da non confondere con la scadenza s . L'operazione di scambio monetario costituita

dall'acquisto di un titolo a cedola nulla può essere rappresentata tramite una funzione valore che, per contratto è definita da:

$$W(t) = P, \quad W(t, t + \tau) = N, \quad [1.10]$$

essendo $\tau = s - t$ la vita residua (in t) del titolo.

I *titoli a cedola fissa* garantiscono al portatore un flusso di m pagamenti periodici, i primi $m - 1$ tutti uguali ad un importo fissato $I > 0$ (*coupon* o *cedola*) e l'ultimo espresso da $N + I$, con $N > 0$ (*capitale* o *valore nominale*). Se si indica con τ il periodo intercorrente tra un pagamento e il successivo, il flusso dovuto dall'emittente al detentore del titolo è espresso dal vettore importi:

$$\mathbf{x} = \{I, I, \dots, N + I\}, \quad [1.11]$$

sullo scadenziario:

$$\mathbf{t} = \{t_1, t_1 + \tau, \dots, t_1 + (m - 1)\tau\}. \quad [1.12]$$

L'istante finale $t_m = t_1 + (m - 1)\tau$ rappresenta la scadenza del titolo. Se il titolo è acquistato alla data $t < t_1$ al prezzo $P > 0$, l'operazione finanziaria di scambio effettuata dall'investitore è rappresentata dal vettore importi:

$$\mathbf{y} = \{-P, I, I, \dots, N + I\}, \quad [1.13]$$

alle date:

$$\mathbf{s} = \{t, t_1, t_1 + \tau, \dots, t_1 + (m - 1)\tau\}. \quad [1.14]$$

La vita a scadenza dell'obbligazione è data da $(m - 1)\tau$. Per le obbligazioni a cedola fissa viene spesso usata la terminologia anglosassone che le definisce: *coupon bond*, *bullet bond* o *straight bond*. Il valore nominale N , che è convenzionalmente posto pari a 100, identifica il "valore parità" del titolo. Se il prezzo di acquisto P è uguale a N si dice che il titolo è quotato *alla pari*. Se invece è $P < N$, oppure $N > C$, il

titolo è quotato *sotto la pari*, o *sopra la pari*, rispettivamente. Il rapporto $I / N = c$ è il *tasso cedolare* del titolo. Se si sommano le cedole pagate in un anno e si divide il risultato per N si ottiene il cosiddetto *tasso nominale* (annuo) dell'obbligazione. Il tasso nominale si può anche ottenere moltiplicando il tasso cedolare per il numero annuo di coupon. Si consideri un coupon bond di cui sia trattato l'acquisto in un istante t successivo alla data di emissione. La prossima cedola che sarà esigibile nell'istante t_1 è spesso chiamata "cedola in corso" e l'intervallo di tempo che va dalla data $t_0 = t_1 - \tau$ alla data t_1 costituisce il "periodo di godimento" della cedola in corso. Si definisce allora *rateo d'interesse* (o semplicemente *rateo*) al tempo t l'importo A ottenuto moltiplicando il valore della cedola I per la frazione del periodo di godimento cedola già trascorso alla data:

$$A = I \frac{t-t_0}{t_1-t_0}, \quad [1.15]$$

che si può anche scrivere:

$$A = I \left(1 - \frac{t_1-t}{\tau}\right). \quad [1.16]$$

Per come è stato definito, il rateo è uguale a 0 se la quotazione è stata effettuata nell'istante immediatamente successivo al pagamento di una cedola ($t = t_0$), è uguale ad I se ci si pone nell'istante immediatamente precedente ($t = t_1$) e cresce linearmente muovendosi all'interno del periodo "intercedola". Nel mercato azionario secondario, invece che fare riferimento al prezzo effettivamente dovuto P , chiamato "*corso tel quel*", è solito effettuare le transazioni al cosiddetto *corso secco* Q , che è un prezzo fittizio ottenuto sottraendo il rateo dal corso tel quel; quindi la quotazione sui listini non è P ma il corso $Q = P - A$. Questo rende più facile il confronto fra i prezzi di titoli che richiedono differenti periodi precedentemente allo stacco della

prima cedola. Ovviamente il prezzo del titolo e il corso secco coincidono all'emissione e immediatamente dopo il pagamento della cedola.

2.2. I prezzi e i rendimenti di un flusso di pagamenti

2.2.1. Introduzione al "pricing"

Il pricing delle obbligazioni può essere valutato come un processo a tre distinte fasi: ottenere i flussi di cassa del detentore del titolo; ottenere i tassi di sconto per le scadenze relative alle date dei flussi di cassa (*cash-flows*); ottenere il prezzo dell'obbligazione come valore scontato dei flussi di cassa. Per assunzione, si considerano dei flussi di cassa certamente pagati e noti *ex ante*, alla data del processo di pricing (*default-free* e *fixed-coupon bond*). In generale, i due parametri, già introdotti nel paragrafo precedente, che sono necessari per descrivere completamente i flussi di cassa di un titolo obbligazionario sono la data di scadenza (*maturity*), il valore nominale del titolo all'acquisto e a scadenza. Successivamente è necessario applicare una delle tipologie di calcolo del valore scontato per ottenere il valore corrente dell'obbligazione. Dato che i flussi di cassa sono noti con certezza *ex ante*, solo il valore del tempo deve essere valutato, usando la regola del valore attuale (*present-value*), che può essere scritta come la seguente relazione:

$$PV(CF_t) = B(0, t)CF_t \quad [1.17]$$

dove $PV(CF_t)$ è il valore attuale dei flussi di cassa CF_t ricevuti alla data t e $B(0, t)$, detto *fattore di sconto*, è il prezzo alla data 0 (attuale) per ricevere alla data t un'unità di valuta monetaria (€1, o \$1, o £1, ...). Una diversa formulazione del valore attuale è la seguente:

$$PV(CF_t) = \frac{CF_t}{[1+R(0,t)]^t} \quad [1.18]$$

dove $R(0,t)$ è il tasso di sconto annuale (*annual spot rate* o *discount rate*) alla data 0 per un investimento alla data t . Per sommare i differenti contributi dei flussi di cassa si utilizza, semplicemente, la somma pesata per i differenti tassi di sconto di ciascun termine:

$$PV(Bond) = \sum_{t=1}^T B(0,t)CF_t = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{[1+R(0,t)]^t} \quad [1.19]$$

2.2.2. *La classificazione dei tassi*

In questo paragrafo saranno prese in considerazione le modalità di definizione dei tassi, la base temporale e la frequenza di composizione. Un capitale investito x al tasso d'interesse R_n , espresso su base annuale e composto n volte l'anno, cresce in T anni al seguente valore:

$$x \left(1 + \frac{R_n}{n}\right)^{nT} \quad [1.20]$$

e l'effettivo tasso annuale $R_{T=R}$ è definito come soluzione della:

$$x \left(1 + \frac{R_n}{n}\right)^{nT} = x(1 + R)^T \quad [1.21]$$

$$\circ \quad R = \left(1 + \frac{R_n}{n}\right)^n - 1 \quad [1.22]$$

è possibile definire il rendimento annuale effettivo (*effective annual yield EAY*) che è il tasso di interesse espresso in base e composizione annuali.

Per avere una convenzione omogenea in termini della frequenza di composizione si introduce il concetto di *composizione continua* (o legge

esponenziale). Se ipotizziamo che la frequenza di composizione possa aumentare senza vincoli, otteniamo la composizione continua espressa dalla seguente formula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{R_n}{n} \right)^{nT} = x e^{R^c T} \quad [1.23]$$

dove R^c , espresso su base annuale, è il tasso di composizione continua. Questa espressione è utile poiché permette di ottenere il valore attuale o futuro per ogni flusso di cassa:

$$FV_t(CF_0) = CF_0 e^{R^c t} \quad [1.24]$$

$$PV(CF_t) = CF_t e^{-R^c t} \quad [1.25]$$

dove $FV_t(CF_0)$ è il valore futuro alla data t per un flusso di cassa CF_0 investito alla data 0 ad un tasso di composizione continua R^c , e $PV(CF_t)$ è il valore attuale alla data 0 di un flusso di cassa CF_t ricevuto alla data t .

Come era stato introdotto nel paragrafo 1.1.2, il tasso cedolare è il tasso di interesse dichiarato su un titolo, riferito come percentuale annuale sul valore nominale. Ogni cedola dà diritto ad un pagamento al portatore ogni qualvolta una data stabilita è raggiunta. Il tasso cedolare è solitamente utilizzato per ottenere i flussi di cassa e non si deve confondere con l'effettivo *rendimento corrente* (*current yield*), che indicato con y_c , si ottiene con la seguente formula:

$$y_c = \frac{cN}{P} \quad [1.26]$$

dove c è il tasso cedolare (*coupon rate*), N il valore nominale e P il prezzo attuale.

Il rendimento a scadenza (*yield to maturity YTM*) è il tasso unico che pone la somma del valore attuale dei flussi di cassa pari al prezzo del *bond*. Più precisamente il prezzo dell'obbligazione P è ricavato dalla somma dei *cash flow*

scontati al loro valore attuale, ma come si evince dalle seguenti formule dipende dalla frequenza delle cedole:

$$P = \sum_{t=1}^{2T} \frac{CF_t}{\left(1 + \frac{y_2}{2}\right)^t} \quad [1.27]$$

$$P = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+y)^t} \quad [1.28]$$

dove nella [1.27] si assumono cedole pagate semestralmente e il rendimento y_2 è espresso su base annuale con composizione semestrale, dove $2T$ è il numero totale di semestri; mentre nella [1.28] si assumono cedole pagate annualmente e il rendimento y è espresso su base annuale e composto annualmente, dove T è il numero totale di anni. In altre parole YTM è il tasso di rendimento interno (*internal rate of return IRR*) della serie di flussi di cassa. In breve, il *IRR* è un tasso di sconto medio che si assume costante per le diverse scadenze.

Il tasso di sconto di un'obbligazione a cedola nulla a pronti (*spot zero-coupon rate*), è teoricamente molto importante poiché coincide con il rendimento a scadenza (YTM) per un titolo a cedola nulla. In pratica, quando conosciamo la curva dei rendimenti *spot zero-coupon*, siamo in grado di ottenere i prezzi a pronti per tutti i titoli a reddito fisso con flussi di cassa futuri noti. Inoltre, i tassi *zero-coupon* permettono di trovare altri tassi *forward* molto utili e rendimenti alla pari (*par yield*). Se $R(0,t)$ è il tasso al quale è possibile investire oggi in un'obbligazione di tempo t , è possibile definire un relativo tasso *forward* (a volte chiamato *forward zero-coupon rate*) tra gli anni x e y come:

$$F(0, x, y - x) = \left[\frac{(1+R(0,y))^y}{(1+R(0,x))^x} \right]^{\frac{1}{y-x}} - 1 \quad [1.29]$$

$F(0,x,x-y)$ è il tasso *forward* valutato alla data $t = 0$, con inizio alla data $t = x$ e per una vita residua di $y - x$. In pratica, $F(0,x,x-y)$ è il tasso al quale è possibile firmare un contratto oggi per prestare (o prendere in prestito) un capitale tra le date x e y . Esiste un particolare tasso *forward*: il tasso *forward* istantaneo $f(t,s)$ è valutato alla data t , con inizio alla data s e una scadenza successiva per un periodo infinitamente piccolo. È un tasso composto nel continuo, ed è definito dalla seguente equazione:

$$f(t, s) = \lim_{T-s \rightarrow 0} F^c(t, s, T - s). \quad [1.30]$$

Si noti che $f(t,t) = r(t)$ è il tasso di interesse a breve per la data t . Tipicamente, è il tasso con una scadenza 1-giorno nel mercato. Facendo variare s tra un giorno e trenta anni, è possibile tracciare il livello dei tassi *forward* istantanei a date scaglionate nel tempo: questo è chiamata “curva dei rendimenti *forward* istantanei” (*instantaneous forward yield curve*). In fine definiamo la *par yield curve* (curva dei rendimenti alla pari), che tipicamente è utilizzata per determinare il livello della cedola per un’obbligazione quotata alla pari. La curva YTM subisce gli effetti delle cedole: due titoli aventi la stessa *maturity* ma differente tasso cedolare non necessariamente hanno lo stesso YTM. Per sopperire a questo problema degli effetti dei coupon, si traccia la curva dei rendimenti alla pari. Richiamando che un bond alla pari ha un coupon identico al rendimento a scadenza. Quindi è possibile definire il rendimento alla pari $c(n)$ in modo tale che un’obbligazione fissa con scadenza n -anni che paga un tasso cedolare di $c(n)$, con un valore nominale di 100 quoti alla pari:

$$\frac{100 \times c(n)}{1+R(0,1)} + \frac{100 \times c(n)}{[1+R(0,2)]^2} + \dots + \frac{100+100 \times c(n)}{[1+R(0,n)]^n} = 100 \quad [1.31]$$

Si ottiene:

$$c(n) = \frac{1 - \frac{1}{[1+R(0,n)]^n}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{[1+R(0,i)]^i}} . \quad [1.32]$$

2.2.3. *Gli indici temporali*

In molti casi è significativo utilizzare una rappresentazione semplificata della struttura temporale del flusso di pagamenti $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ estraendo dall'insieme delle date dello scadenziario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ un indice sintetico che riassume le caratteristiche in modo sufficiente per certe specifiche applicazioni.

L'indice sintetico più immediato è la scadenza t_m (*maturity*), già utilizzata nei paragrafi precedenti. Si definisce anche la vita a scadenza o vita residua (*time to maturity*) come la differenza $t_m - t$. La maturity indica la data in cui il contratto si può considerare definitivamente concluso; la relativa vita a scadenza rappresenta la complessiva durata dell'operazione di scambio. È evidente che questi indici trascurano l'effetto finanziario dei flussi di pagamento intermedi e caratterizzano la distribuzione temporale dei flussi di cassa solo nel caso di titoli senza cedole.

Se si suppone che la somma dei flussi di cassa sia strettamente positiva e che nessuno dei singoli pagamenti sia negativo, si può definire la scadenza media aritmetica come:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^m (t_k - t) x_k}{\sum_{k=1}^m x_k} \quad [1.33]$$

che rappresenta quindi la media ponderata delle vite a scadenza $t_k - t$ di tutti i flussi di cassa, con i pesi:

$$p_k = \frac{x_k}{\sum_{j=1}^m x_j}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad [1.34]$$

espressi dai valori lì relativi dei singoli importi. La scarsa significatività di questo indice è legata al fatto che non venga considerata nessuna legge di valutazione finanziaria: non viene correttamente considerato l'effetto di trasformazione del valore indotto dal fattore tempo né è riflessa la situazione di mercato in t .

La durata media finanziaria, o *duration*, introdotta da Macaulay (1938) e indipendentemente da Hicks (1939), costituisce un indice sintetico di grande importanza, sia teorica sia empirica. Sia $v(t,s)$ la struttura dei prezzi a pronti in vigore sul mercato al tempo t . sempre facendo riferimento ad un flusso di poste non negative, la *duration* al tempo t di \mathbf{x}/t è definita come:

$$D(t, \mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^m (t_k - t) x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^m x_k v(t, t_k)} , \quad [1.35]$$

con $v(t, t_k)$ il prezzo in t del *zero-coupon bond* unitario con scadenza t_k . Per il teorema di linearità dei prezzi² e il teorema di indipendenza dall'importo³ la [1.35] si può anche scrivere:

$$D(t, \mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^m (t_k - t) PV(t, x_k)}{PV(t, \mathbf{x})} , \quad [1.36]$$

o anche:

$$D(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m (t_k - t) p_k , \quad [1.37]$$

essendo:

$$p_k = \frac{PV(t, x_k)}{PV(t, \mathbf{x})} , k = 1, 2, \dots, m. \quad [1.38]$$

² Teorema di linearità del prezzo. Per evitare arbitraggi non rischiosi deve essere:

$$PV(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m x_k v(t, t_k)$$

³ Teorema di indipendenza dall'importo. Per evitare arbitraggi non rischiosi deve essere:

$$PV(t, x_k) = x_k v(t, t_k)$$

Quindi $D(t, \mathbf{x})$ è la media aritmetica ponderata delle vite residue dei flussi di cassa misurata in unità temporali, essendo in questo caso i pesi p_k calcolati come valori attuali delle singole poste normalizzati (cioè espressi come frazione della somma dei valori attuali e perciò a somma 1). È rilevante che i valori attuali che determinano i pesi p_k sono calcolati in base alla struttura per scadenza in vigore sul mercato al tempo t .

Se la struttura dei tassi d'interesse è costante ad un livello i , cioè $i(t, s) = i$ costante per $t \leq s$, si ha la *duration* a struttura piatta (*flat yield curve duration*):

$$D(t, \mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^m (t_k - t) x_k (1+i)^{-(t_k - t)}}{\sum_{k=1}^m x_k (1+i)^{-(t_k - t)}} \quad . \quad [1.39]$$

Questa espressione è rilevante in quanto è utilizzata come versione semplificata della [1.35]; nel caso in cui è possibile ricavare il tasso interno di rendimento i^* del flusso \mathbf{x}/t , la *duration* a struttura piatta fornisce una buona approssimazione della [1.35].

Per considerare il caso di rendite a rate costanti, si ponga per semplicità $t=0$, e una rendita r (immediata) posticipata di m anni, con rate annue costanti pari a R . Si ha in questo caso: $x_k = R$ e $t_k = k$, per $k=1, 2, \dots, m$. La *flat yield curve duration* ad un livello di tasso annuo i , risulta:

$$D(0, \mathbf{r}) = \frac{\sum_{k=1}^m k(1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^m (1+i)^{-k}} \quad [1.40]$$

ed è indipendente dal valore della rata R . Il denominatore è una rendita a rate costanti e utilizzando le proprietà delle serie geometriche può essere espresso come:

$$PV(0, \mathbf{r}) = den = v \frac{1-v^m}{1-v} \quad , \quad [1.41]$$

essendo $v=1 / (1 + i)$. Anche il numeratore (num) può essere espresso in modo esplicito:

$$\begin{aligned}
 num &= \sum_{k=1}^m k v^k = \frac{1}{1-v} \sum_{k=1}^m (1-v) k v^k \\
 &= \frac{1}{1-v} [\sum_{k=1}^m (k v^k - k v^{k+1})] \\
 &= \frac{1}{1-v} [\sum_{k=1}^m v^k - m v^{m+1}] \\
 &= \frac{1}{1-v} \left[v \frac{1-v^m}{1-v} - m v^{m+1} \right] \\
 &= \frac{v}{1-v} \left[\frac{1-v^m}{1-v} - m v^m \right] . \tag{1.42}
 \end{aligned}$$

Quindi la [1.40] assume la forma:

$$\begin{aligned}
 D(0, r) &= \frac{num}{den} = \frac{\frac{(1-v^m)}{(1-v)} - m v^m}{1-v^m} = \\
 &= \frac{1}{1-v} - \frac{m v^m}{1-v^m} , \tag{1.43}
 \end{aligned}$$

o in termini di tasso:

$$D(0, r) = \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^{m-1}} . \tag{1.44}$$

Dalla [1.44] si deduce che la *duration* della rendita r è una funzione decrescente del tasso ed è crescente in funzione al numero di rate (o della *maturity* del flusso r). al crescere della durata m la *duration* è limitata in quanto:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{(1+i)^{m-1}} = 0 \tag{1.45}$$

infatti nel grafico della *duration* in funzione della durata è presente un asintoto orizzontale al livello $(1 + i) / i$.

I risultati precedenti possono essere utilizzati anche nel caso di titoli obbligazionari a cedola fissa. Si consideri uno *straight bond* con scadenza m , valore nominale N , cedole annuali uguali a I e ponendo $t=0$. La *flat yield curve duration* calcolata per il tasso i , è:

$$D(0, \mathbf{x}) = \frac{I \sum_{k=1}^m k(1+i)^{-k} + mN(1+i)^{-m}}{I \sum_{k=1}^m (1+i)^{-k} + N(1+i)^{-m}}, \quad [1.46]$$

utilizzando le [1.41] e [1.42] si ottiene:

$$D(0, \mathbf{x}) = \frac{I \cdot \text{num} + mN(1+i)^{-m}}{I \cdot \text{den} + N(1+i)^{-m}}. \quad [1.47]$$

Il titolo a cedola fissa \mathbf{x} è equivalente ad un portafoglio composto da una rendita I posticipata con m rate annue I e da un titolo a *zero-coupon* unitario con *maturity* m e valore nominale N . Il denominatore della [1.47], che rappresenta il valore attuale $PV(0, \mathbf{x})$ del *coupon bond*, può essere scomposto in un primo termine che rappresenta il valore attuale $PV(0, I)$ della rendita derivante dai flussi delle cedole ed in un secondo termine che rappresenta il valore di uno *zero-coupon bond*: $Nv(0, m)$.

Riassumendo:

$$PV(0, \mathbf{x}) = PV(0, I) + Nv(0, m) \quad [1.48]$$

Grazie alla [1.48], la [1.47] diventa:

$$D(0, \mathbf{x}) = D(0, I) \frac{PV(0, I)}{PV(0, \mathbf{x})} + m \frac{Nv(0, m)}{PV(0, \mathbf{x})}. \quad [1.49]$$

Quindi la *duration* del titolo a cedola fissa può essere calcolata come media pesata della *duration* $D(0, I)$ del flusso cedolare I , calcolata secondo la [1.44], e della *duration* m del titolo *zero-coupon* che corrisponde al rimborso del valore nominale N . Come pesi si devono utilizzare i valori attuali di I e dello *zero-coupon bond*, calcolati col tasso di valutazione i ed espressi come frazione del valore attuale di \mathbf{x} . Si

possono, inoltre ricavare interessanti indicazioni sul comportamento della *duration* al variare dei parametri del titolo. Se $I=0$, il titolo si riduce a uno *zero-coupon bond* con valore nominale N e *duration* pari a m . Se il titolo ha un flusso cedolare la *duration* risulta funzione decrescente sia del tasso di valutazione i , che del tasso cedolare $c = I / N$. Inoltre la *duration* è caratterizzata da un andamento asintotico al variare della *maturity* m , con asintoto $(1 + i) / i$. Al variare di m l'andamento della *duration* non è sempre monotono: questo dipende dalla relazione tra il tasso cedolare e il tasso di valutazione. Se $i \leq c$ la *duration* risulta avere un andamento strettamente crescente, invece per valori più bassi della cedola, per cui $i > c$ la *duration* del titolo arriva a superare il livello asintotico, raggiungendo un valore massimo per poi decrescere avvicinandosi dall'alto all'asintoto (nei casi pratici difficilmente si riscontra una diminuzione della *duration*).

3. La struttura per scadenza dei tassi d'interesse

In questo capitolo sono descritte le curve di rendimento per i tassi d'interesse, partendo dalla descrizione teorica delle strutture e delle differenti tipologie, poi sono analizzati i diversi metodi di misurazione atti a ricavare le curve di rendimento per uno zero-coupon bond, in fine è descritta l'evoluzione nel tempo delle curve di rendimento con particolare attenzione all'analisi delle componenti principali che costituisce un valido strumento per la valutazione delle strutture per scadenza.

3.1. Descrizione della struttura per scadenza

3.1.1. *Le strutture per scadenza a pronti*

Supponiamo che nell'istante di osservazione t il mercato si strutturato in m periodi, con scadenze $t_k = t + k$, $k=1,2,\dots,m$. Quindi ipotizziamo che le operazioni di scambio monetario possano avvenire tra le date appartenenti al seguente insieme: $\mathbf{s} = \{t, t+1, t+2, \dots, t+m\}$, che contiene le date di apertura del mercato. Tutti i titoli obbligazionari trattati al tempo t possono generare pagamenti solo alle date dello scadenziario: $\mathbf{t} = \{t+1, t+2, \dots, t+m\}$. Si supponga che in questo mercato siano osservati in t gli m prezzi spot: $\{PV(t, x_k), k=1,2,\dots,m\}$ per gli zero-coupon di tutte le scadenze. Per la proprietà di indipendenza dell'importo vale la seguente relazione:

$$v(t, t_k) = \frac{PV(t, x_k)}{x_k}, k = 1, 2, \dots, m \quad [2.1]$$

che permette di ricavare i prezzi a pronti di tutti i titoli senza cedole unitari. L'insieme $\{v(t, t_k), k=1,2,\dots,m\}$ rappresenta la cosiddetta struttura per scadenza dei prezzi a pronti e descrive completamente il mercato al tempo t . Ogni contratto stipulato in t dovrà garantire un flusso d'importi della forma:

$$\frac{z}{t} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} / \{t + 1, t + 2, \dots, t + m\} \quad [2.2]$$

sulla base del principio di arbitraggio dovrà avere un prezzo dato da:

$$PV(t, z) = \sum_{k=1}^m z_k v(t, t_k) \quad [2.3]$$

La disponibilità degli m titoli con prezzi $PV(t, x_k)$ rende il mercato completo: sulla base di questa quotazione vengono ricavati i prezzi $v(t, t_k)$ degli m titoli elementari e qualsiasi altra tipologia di titolo trattata in t è ridondante: può essere sempre replicata con un portafoglio equivalente di titoli elementari e valutata sulla base della [2.3].

La struttura per scadenza dei tassi d'interesse a pronti in vigore al tempo t si ricava dai prezzi a pronti ed ha lo stesso contenuto informativo, ma nel linguaggio finanziario si utilizza più comunemente il riferimento ai tassi d'interesse.:

$$i(t, t_k) = \left[\frac{x_k}{PV(t, x_k)} \right]^{1/k} - 1 = \left[\frac{1}{v(t, t_k)} \right]^{1/k} - 1 \quad . \quad [2.4]$$

È talvolta utilizzata la struttura delle intensità di rendimento a scadenza, ed è espressa dalle seguenti relazioni:

$$h(t, t_k) = \frac{-1}{k} \log \left[\frac{PV(t, x_k)}{x_k} \right] = \frac{-1}{k} \log v(t, t_k) \quad [2.5]$$

e

$$h(t, t_k) = \log[1 + i(t, t_k)]. \quad [2.6]$$

3.1.2. Le strutture per scadenza implicite

Se si fissano arbitrariamente i prezzi *spot* per due titoli senza cedole con diversa scadenza è sempre possibile⁴ ricavare il prezzo a termine relativo all'orizzonte di scambio che ha per estremi le due scadenze assegnate. Se si effettua il calcolo del prezzo a termine, o implicito, relativamente ad ogni coppia di date contigue dello scadenziario \mathbf{s} , si ottiene la struttura per scadenza dei prezzi impliciti al tempo t :

$$v(t, t + k - 1, t + k) = \frac{v(t, t+k)}{v(t, t+k-1)}, k = 1, 2, \dots, m \quad [2.7]$$

La struttura dei tassi impliciti in vigore al tempo t si ottiene calcolando, per $k=1, 2, \dots, m$, i tassi d'interesse a termine uniperiodali:

$$i(t, t + k - 1, t + k) = \frac{v(t, t+k-1)}{v(t, t+k)} - 1. \quad [2.8]$$

Tra la struttura dei tassi a pronti e quella dei tassi impliciti intercorre una significativa relazione di dominanza: la struttura dei tassi impliciti domina la (è dominata dalla) struttura dei tassi a pronti nei periodi in cui la struttura a pronti è crescente (decescente). Ne consegue che in tutte le zone in cui la struttura a pronti ha un comportamento monotono, passando da un andamento crescente ad uno decrescente (o viceversa) tra due periodi successivi, la le due curve si incontrano. Analoga proprietà vale per le strutture, a pronti e implicite, degli *yield to maturity* (YTM).

⁴ Per il teorema dei prezzi impliciti. Per evitare arbitraggi non rischiosi deve sussistere l'uguaglianza:

$$v(t, T, s) = \frac{v(t, s)}{v(t, T)}, t \leq T \leq s$$

Con t la data in cui sono trattati i titoli, mentre T e s sono le date di scadenza.

3.1.3. *Gli scadenziari discreti o continui*

Fin ora è stato preso in considerazione un mercato strutturato su uno scadenziario definito e periodico, dove tutte le date sono distanziate da un intervallo unitario e costante. Per rimuovere l'ipotesi di periodicità si deve supporre che i titoli trattati al tempo t garantiscano un pagamento monetario limitatamente alle date: $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ con l'ipotesi $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$. La struttura per scadenza dei prezzi *spot* si ricava osservando i prezzi $PV(t, x_m)$ di m di *zero-coupon bond* che coprano tutte le scadenze. Tutte le altre strutture per scadenza per i tassi e intensità, *spot* e implicite, si possono ricavare dalla struttura dei prezzi a pronti; la struttura per scadenza dei tassi a pronti è espressa dalla:

$$i(t, t_k) = \left[\frac{1}{v(t, t_k)} \right]^{1/(t_k - t)} - 1. \quad [2.9]$$

L'ipotesi che il mercato sia strutturato su un numero finito di scadenze non risulta essere particolarmente restrittiva ed è molto utilizzata nelle applicazioni, dove è possibile assumere un numero relativamente grande m di scadenze.

Nei modelli di struttura per scadenza dei tassi di interesse nel tempo continuo, si ipotizza che il mercato dei titoli obbligazionari sia strutturato sulle date di un intervallo avente come estremo inferiore t e come estremo superiore H , sufficientemente grande. In un mercato continuo l'insieme dei prezzi a pronti dei titoli *zero-coupon* in vigore è: $\{ v(t, s), t \leq s \}$. La corrispondente struttura dei tassi di interesse su base annua si ricava dalla relazione:

$$i(t, s) = \left[\frac{1}{v(t, s)} \right]^{1/(s - t)} - 1 \quad [2.10]$$

e la struttura a pronti delle intensità di rendimento a scadenza è:

$$h(t, s) = \frac{-1}{s-t} \log v(t, s). \quad [2.11]$$

La rappresentazione grafica della funzione $i(t, t + \tau)$ (o della $h(t, t + \tau)$) in funzione della vita a scadenza $\tau = s - t$ descrive l'andamento dei tassi (intensità) in vigore sul mercato al tempo t e fornisce la cosiddetta curva dei tassi, o curva dei rendimenti (*yield curve*). La struttura implicita, in un mercato *continuous trading*, viene solitamente definita in riferimento ad intervalli di scambio infinitesimi $[s, s + ds]$ con $s \geq t$. In una griglia temporale con intervalli infinitesimi le strutture implicite dei prezzi e dei tassi risultano non significative: dato che i prezzi a termine son tutti pari ad uno mentre i tassi a termine son tutti nulli. Invece, è espressiva la funzione di intensità istantanea di interesse $\delta(t, s)$, che in questo contesto può essere definita come: struttura per scadenza delle intensità di interesse implicite. La funzione $\delta(t, s)$ è ricavata come il limite cui tende l'intensità d'interesse a termine $\gamma(t, s, s + \tau)$, fissata in t per l'orizzonte $[s, s + \tau]$, quando l'ampiezza τ dell'orizzonte di scambio tende a zero:

$$\delta(t, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - v(t, s, s + \tau)}{v(t, s, s + \tau)\tau}. \quad [2.12]$$

Anche nel caso continuo il contenuto informativo della struttura a pronti e dalla struttura implicita sono identici; l'equivalenza è resa operativa dalle seguenti relazioni:

$$\delta(t, s) = -\frac{\partial}{\partial s} \log v(t, s), \quad t \leq s \quad [2.13]$$

$$v(t, s) = e^{-\int_t^s \delta(t, u) du}, \quad t \leq s \quad [2.14]$$

la [2.13] e la [2.14] consentono sempre di ricavare la funzione intensità istantanea dalla funzione prezzo e viceversa.

In un mercato definito su uno scadenziario discreto è possibile formalmente immaginare l'esistenza di una funzione intensità istantanea di interesse sottostante. Equivale a supporre che tutte le grandezze finanziarie siano determinate in base ad un meccanismo di formazione degli interessi che si sviluppa con continuità nel tempo, ma l'osservazione della situazione di mercato e i relativi interventi di *trading* possano essere effettuati solo su uno scadenziario discreto t . Per effettuare il *pricing* di queste obbligazioni secondo la [2.3] si può immaginare il mercato con l'aggiunta di titoli *zero-coupon bond* unitari con scadenza s diversa da quelle di t . Questo modello consente di effettuare delle estensioni dello spettro delle scadenze senza dover riformulare delle ipotesi *ad hoc*. In base alla funzione $\delta(t,s)$ che descrive il mercato possono essere rappresentati prezzi, tassi e intensità, *spot* e a termine, relativi alle date dello scadenziario periodico $\{t+1, t+2, \dots, t+m\}$, le relazioni si ricavano come proprietà additiva degli integrali, per cui risultano:

$$v(t, t+k-1, t+k) = e^{-\int_{t+k-1}^{t+k} \delta(t,u) du}; \quad [2.15]$$

$$i(t, t+k) = e^{\frac{1}{k} \int_t^{t+k} \delta(t,u) du} - 1; \quad [2.16]$$

$$i(t, t+k-1, t+k) = e^{\int_{t+k-1}^{t+k} \delta(t,u) du} - 1; \quad [2.17]$$

$$h(t, t+k) = \frac{1}{k} \int_t^{t+k} \delta(t, u) du; \quad [2.18]$$

$$h(t, t+k-1, t+k) = \int_{t+k-1}^{t+k} \delta(t, u) du. \quad [2.19]$$

3.2. Misurazione della struttura per scadenza

La situazione dei mercati finanziari permette di confermare solo con un certo grado di significatività le ipotesi teoriche caratteristiche dei modelli. L'ostacolo più

rilevante a una diretta misurazione della struttura per scadenza è costituito dalla non disponibilità di titoli senza cedola per un ampio spettro di *maturity*. Per ricavare una determinazione della struttura per scadenza che sia abbastanza significativa ed estesa è necessario ricavare i prezzi dei titoli a cedola nulla (*zero-coupon bond*) dai titoli obbligazionari con il flusso di pagamenti cedolari (*coupon bond*) presenti sul mercato.

3.2.1. *Metodi basati sul tasso interno di rendimento*

Si supponga che in t siano osservabili i prezzi PV_j , $j=1,2,\dots,n$, di n titoli a cedola fissa; per ciascuno di questi *coupon bond* è sempre possibile ricavare il tasso di rendimento interno (*IRR*) i_j^* . Poiché l'orizzonte di scambio che caratterizza l'operazione di acquisto di un titolo con cedola è rappresentato dalla vita a scadenza del titolo, si può ottenere una rappresentazione approssimata della curva dei tassi facendo corrispondere il tasso interno del j -esimo titolo con la sua vita a scadenza τ_j e interpolando gli n punti rappresentativi così ottenuti nel piano (τ, i^*) con una curva di raccordo opportunamente scelta. Questa metodologia trascura l'effetto cedola, semplifica la struttura cedolare dei titoli assimilando ogni *coupon bond* ad uno *zero-coupon bond* con lo stesso rendimento e la stessa vita a scadenza. Un modo per compensare parzialmente questa distorsione consiste nell'utilizzare come "longness" di ciascun titolo la *duration* di Macaulay, calcolata in base al corrispondente tasso interno di rendimento. Esprimendo i tassi in funzione della *duration*, invece che della *maturity*, si provoca un accorciamento della curva dei tassi in corrispondenza dei punti rappresentativi dei titoli con cedola.

3.2.2. *Metodi basati sull'algebra lineare*

Per ottenere approssimazioni di qualità controllabile della struttura cedolare dei titoli si deve utilizzare un metodo di misurazione differente dal precedente. Si supponga che al tempo t siano osservabili sul mercato n titoli obbligazionari, non necessariamente a cedola nulla. Lo scadenziario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ comune a tutti i titoli è ottenuto come insieme unione degli n scadenziari caratteristici dei singoli titoli. Con $\mathbf{x}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$ si indichi il flusso dei pagamenti generati dall' i -esimo titolo, ridefinito sullo scadenziario comune aggiungendo poste nulle sulle date di \mathbf{t} che non rientrano tra le scadenze specifiche del titolo. Siano $PV_i = PV(t, \mathbf{x}_i)$, con $i=1,2,\dots,m$, i prezzi degli n titoli osservati sul mercato al tempo t . Secondo questa impostazione del problema, si tratta di ricavare gli m prezzi (o fattori di sconto):

$$v_k = v(t, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad [2.20]$$

tali che:

$$PV_i = \sum_{k=1}^m x_{ik} v_k, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad [2.21]$$

Le [2.20] e [2.21] costituiscono un sistema di n equazioni lineari (una per ciascun titolo) in m incognite v_k (una per ogni scadenza). I coefficienti x_{ik} e i termini noti PV_i rappresentano i dati del problema. Si indichi con \mathbf{X} la matrice a n righe ed m colonne delle poste pagate dai titoli, e si rappresenti con \mathbf{V} il vettore colonna degli n prezzi e con \mathbf{v} il vettore colonna degli m fattori di sconto. Il sistema lineare formato dalle [2.20] e [2.21] può essere rappresentato nella forma matriciale:

$$\mathbf{X}\mathbf{v} = \mathbf{V}. \quad [2.22]$$

Comunque assegnata una matrice \mathbf{M} , è sempre possibile definire il rango $r(\mathbf{M})$ come l'ordine massimo dei suoi minori non nulli, cioè come la dimensione della più grande

matrice quadrata contenuta in M avente determinante diverso da zero. Nel caso della matrice X , il rango $r(X)$ individua il numero massimo di flussi di cassa x_i linearmente indipendenti fra loro. Ne consegue che la differenza $n - r(X)$ indica quanti fra gli n titoli possono essere considerati ridondanti, in altre parole possono essere ottenuti come portafogli costruiti con i restanti $r(X)$ titoli. Se si suppone che le ipotesi di mercato siano rispettate, ci si può ricondurre al caso $r(X) = n \leq m$. Per il teorema di Rouché – Capelli, la [2.22] ammette soluzioni se e solo se la matrice X e la matrice $X|V$, ottenuta aggiungendo alla X il vettore V come $(m + 1)$ -esima colonna, hanno lo stesso rango ($r(X) = r(X|V)$). Avendo supposto $r(X) = n$, la condizione non sufficiente di compatibilità è data da $r(X|V)=n$; la condizione sufficiente si ottiene aggiungendo la condizione $n = m$, ipotizzando che il numero di titoli non ridondanti equivalga al numero delle scadenze. Nelle situazioni pratiche il problema della determinazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse tramite questo modello risulta indeterminato. È proprio l'alto grado di arbitrarietà con cui il problema può essere risolto che rende elevato il numero dei metodi esistenti per la misurazione della struttura per scadenza.

In alcune applicazioni è possibile ricondurre il problema ad uno schema di algebra lineare riducendo artificialmente il numero delle scadenze t fissando arbitrariamente un nuovo scadenzario $T = \{T_1, T_2, \dots, T_l\}$, caratterizzato da un'estensione temporale analoga a quella di t ma con un numero di date l minore di m , e ridefinendo i flussi di cassa dei titoli attribuendo ogni posta alla data di T che risulta più vicina all'effettiva data di scadenza. Per effettuare correttamente la traslazione delle date delle scadenze è necessario scontare/capitalizzare i flussi di cassa per il tasso interno di rendimento i_j^* , calcolato rispetto al prezzo PV_j del titolo j -esimo.

3.2.3. *Metodi basati sulla stima di un modello*

Dato che la struttura dei fattori di sconto che determina le quotazioni \mathbf{V} secondo le [2.20] e [2.21] non può essere individuata in modo unico, si può cercare di determinare \mathbf{v} come l'insieme dei prezzi che produce la migliore approssimazione (*best fit*) $\tilde{\mathbf{V}}$ dei prezzi osservati \mathbf{V} sulla base di un opportuno criterio. I criteri di approssimazione più diffusi sono basati su un modello parametrico per la funzione di sconto definito nel tempo continuo. Si assume come valida la specifica forma funzionale $v(t, s; \mathbf{a})$, con $t \leq s$, per rappresentare il fattore di sconto sull'orizzonte $[t, s]$, inteso come funzione di s fissata in t e dipendente da un vettore di p parametri $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$. Si possono definire per gli n titoli che formano la matrice \mathbf{X} , i prezzi del modello:

$$\tilde{V}_i(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m x_{ik} v(t, t_k; \mathbf{a}), \quad [2.23]$$

che sono delle funzioni di forma nota dei parametri \mathbf{a} . Successivamente si calcola il vettore dei parametri di \mathbf{a} che rende minima la somma dei quadrati degli scarti tra i prezzi teorici e i prezzi di mercato:

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \sum_{i=1}^n [\tilde{V}_i(\mathbf{a}) - PV_i]^2, \quad [2.24]$$

essendo \mathbf{A} un opportuno intervallo di variazione dei parametri.

Un modello semplice per l'approssimazione della struttura per scadenza è la funzione di sconto esponenziale:

$$v(t, s; \mathbf{a}) = e^{-\delta \cdot (s-t)}, \quad [2.25]$$

in cui il vettore \mathbf{a} è composto dall'unico parametro $a_1 = \delta$, l'intensità istantanea di interesse costante. Per trovare la legge esponenziale che meglio approssima i prezzi

osservati al tempo t , è necessario trovare il punto δ^* di minimo assoluto della funzione:

$$S(\delta) = \sum_{i=1}^n [\tilde{V}_i(\delta) - PV_i]^2 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^m e^{-\delta \cdot (t_k - t)} - PV_i \right]^2, \quad [2.26]$$

sull'intervallo $\delta > 0$. Questo modello produce una curva dei tassi piatta (*flat yield curve*) al livello:

$$i^* = e^{\delta^*} - 1. \quad [2.27]$$

3.2.4. Modelli basati sulla dinamica di mercato

Il modello per la funzione $v(t, s; \mathbf{a})$ può essere scelto sulla base di ipotesi economiche sui meccanismi che regolano l'evoluzione del mercato obbligazionario. Ad esempio nei modelli stocastici per la struttura per scadenza dei tassi d'interesse definiti nel tempo continuo si assume che il mercato sia completamente determinato da un numero di variabili base, le quali evolvono in modo non prevedibile. Il caso più studiato è quello in cui le variabili base seguono traiettorie aleatorie continue. Nei modelli cosiddetti univariati, l'unica variabile base è l'intensità di rendimento a scadenza di uno *zero-coupon bond* con vita a scadenza infinitesima:

$$r(t) = \lim_{s \rightarrow t} h(t, s). \quad [2.28]$$

nota come *spot rate* (tasso istantaneo a breve).

3.2.5. Modelli basati su spline

Si può considerare conveniente suddividere ogni intervallo delle scadenze in sottointervalli contigui, ciascuno rappresentativo di un "segmento di mercato". Può quindi risultare appropriato utilizzare, anziché un'unica forma funzionale, differenti

modelli per ogni singolo sottointervallo. Per queste esigenze si utilizzano particolari tecniche di interpolazione, consistenti nell'approssimare la curva dei rendimenti con una funzione detta *spline* componendo più tratti di curva, nel rispetto dei vincoli di regolarità (coincidenza delle derivate). Le tipologie più note sono quella di tipo “cubico”, costituita da polinomi di terzo grado, e quella introdotta da Vasicek e Fong (1982) per studiare appositamente per i problemi di stima della struttura per scadenza, le spline esponenziali.

3.3. Evoluzione, nel tempo, della struttura per scadenza

Studi empirici sull'evoluzione della curva dei rendimenti nel tempo, si veda ad esempio Rebonato (2002), hanno permesso di enfatizzare le seguenti caratteristiche:

- I tassi di interesse non sono negativi;
- I tassi sono soggetti agli effetti della *mean-reversion*;
- I cambiamenti dei tassi di interesse non sono perfettamente correlati;
- La volatilità dei tassi a breve termine è più alta rispetto ai tassi a lungo termine;
- Tre fattori principali spiegano più del 90% dei cambiamenti nella curva dei rendimenti.

Mentre i tassi di interesse reali possono essere negativi, in un contesto dove il tasso di inflazione cresce esponenzialmente per effetto di *shock* esterni come una crisi petrolifera, così come l'economia non può supportare tassi nominali troppo alti per il rischio di una forte riduzione dei consumi e quindi della crescita, i tassi nominali

non possono essere negativi, inoltre per questo non si può assumere che i tassi abbiano una distribuzione “normale”.

Dall’analisi dei dati storici si evince che quando i tassi raggiungono alti livelli, successivamente tendono a diminuire piuttosto che aumentare ancora di più, gli effetti della *mean-reversion* si possono anche osservare quando i tassi si riducono eccessivamente. Per questa ragione i tassi di interesse sono spesso descritti per mezzo di modelli di *mean-reversion*, come quello presentato da Vasicek (1977) che considera il processo Ornstein – Uhlenbeck per il tasso a breve $r(t)$ descritto dall’equazione:

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma dW(t), \quad [2.29]$$

dove $W(t)$ è un moto Browniano che considera gli *shock* casuali della struttura a termine dei tassi di interesse. Il parametro b è la media di lungo periodo, del tasso di interesse a breve, nell’intorno della quale $r(t)$ si muove. Quando $r(t)$ è distante da b il cambiamento istantaneo atteso è $a(b-r(t))$ e risulta negativo per $r(t)>b$. Per mantenere il vincolo di positività dei tassi di interesse si considera un processo quadratico o l’equazione proposta da Cox, Ingersol e Ross (1985):

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \quad [2.30]$$

Un risultato intuitivo dell’analisi delle correlazioni dei movimenti dei tassi di interesse è che tutti i coefficienti di una matrice delle correlazioni sono positivi e diminuiscono all’aumentare della differenza di *maturity*. In molti casi, principalmente per le scadenze a breve termine i coefficienti sono prossimi al valore unitario, per cui, attraverso un modello a fattore unico basato sui tassi a breve, è possibile costruire una copertura per il rischio di prezzo, invece per coperture di lungo periodo è conveniente utilizzare modelli a multifattoriali.

La volatilità della struttura a termine è una funzione decrescente in funzione della *maturity*, in alcuni casi è crescente per scadenze inferiori ad un anno e decrescente per le successive scadenze (*humped form*).

Nei recenti studi sulla struttura a termine dei tassi di interesse l'utilizzo dell'analisi delle componenti principali (*Principal Components Analysis – PCA*) è diventato molto comune poiché permette di considerare il rischio in modo non arbitrario. I principi alla base della PCA sono principalmente due. Primo, i diversi tassi di interesse per differenti scadenze sono variabili fortemente correlate. Nonostante non siano perfettamente correlati (questo è dimostrato dalle traslazioni non parallele delle curve di rendimento), i vari tassi d'interesse lungo la curva subiscono gli effetti da un numero limitato di *shock* economici, monetari e finanziari. Infatti i diversi tassi d'interesse tendono a muoversi nella stessa direzione. In secondo luogo, variabili fortemente correlate forniscono informazioni ridondanti l'una rispetto all'altra. La PCA tenta di identificare un insieme di fattori indipendenti che possano spiegare al meglio le informazioni contenute nella serie temporale delle variazioni dei tassi d'interesse.

3.3.1. *Il modello di analisi delle componenti principali*

La PCA di una serie temporale consiste nello studiare la matrice di correlazione di *shock* successivi, si propone di spiegare il comportamento delle variabili osservate utilizzando un insieme più piccolo di variabili implicite. In altre parole, consiste nel trasformare un insieme di K variabili correlate in un insieme di

variabili tra loro ortogonali che riproducano le informazioni originali della struttura di correlazione. Si definisce \mathbf{X} la seguente matrice⁵:

$$\mathbf{X} = (X_{tk}), \quad 1 \leq t \leq T, \quad 1 \leq k \leq K \quad [2.31]$$

con K sono le variabili (tassi a pronti per K differenti scadenze) e T sono le osservazioni di queste variabili; le osservazioni possono essere giornaliere, settimanali o mensili. Si descriva ogni variabile come funzione lineare di un ridotto numero di fattori, come segue:

$$X_{tk} = \sum_{i=1}^I s_{ik} F_{ti} + \varepsilon_{tk} \quad [2.32]$$

dove s_{ik} è la sensitività della k -esima variabile all' i -esimo fattore ed è definita come:

$$\frac{\Delta(X_{tk})}{\Delta(F_{ti})} = s_{ik} \quad [2.33]$$

che equivale ad applicare un 1 per cento di variazione di ciascun fattore e calcolando la sensitività assoluta di ogni curva dei rendimenti degli zero-coupon nei confronti di tale variazione di unità. F_{ti} è il valore dell' i -esimo fattore alla data t . Notando che $I < K$, ε_{tk} è la parte residua di X_{tk} non spiegata dal modello.

La PCA permette di scomporre come segue:

$$\begin{aligned} X_{tk} &= \sum_{i=1}^K \sqrt{\lambda_i} U_{ik} V_{ti} = \\ X_{tk} &= \sum_{i=1}^I \sqrt{\lambda_i} U_{ik} V_{ti} + \sum_{i=I+1}^K \sqrt{\lambda_i} U_{ik} V_{ti}, \end{aligned} \quad [2.34]$$

$$X_{tk} = \sum_{i=1}^I \sqrt{\lambda_i} U_{ik} V_{ti} + \varepsilon_{tk} = \sum_{i=1}^I s_{ik} F_{ti} + \varepsilon_{tk} \quad [2.35]$$

⁵ La forma della X_{tk} dipende dalle ipotesi e dalle differenti metodologie che vengono utilizzate per applicare la PCA, Lardic *et al.* (2003).

dove:

$\mathbf{U} = (U_{ik}), 1 \leq i, k \leq K$ è la matrice dei K autovettori di $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$

$\mathbf{U}^T = (U_{ki}), 1 \leq i, k \leq K$ è la matrice trasposta di \mathbf{U}

$\mathbf{V} = (V_{ti}), 1 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq K$ è la matrice dei K autovettori di $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$

Si noti che i K autovettori sono ortonormali; λ_i è l'autovalore (ordinati in ordine di grandezza) corrispondente all'autovettore U_i . Si può inoltre indicare:

$$s_{ik} = \sqrt{\lambda_i} U_{ik} \quad , \quad [2.36]$$

$$V_{it} = F_{ti} \quad [2.37]$$

dove s_{ik} è definita come la sensitività della componente principale della k -esima variabile al i -esimo fattore.

La varianza totale dell'insieme di dati spiegata dai primi I fattori è data da:

$$\frac{\sum_{i=1}^I \lambda_i}{\sum_{i=1}^K \lambda_i} \quad , \quad [2.38]$$

mentre il grado in cui il fattore i -esimo spiega la varianza della variabile k -esima è:

$$R_{ik}^2 = \frac{s_{ik}^2}{\sum_{i=1}^K s_{ik}^2} \quad , \quad [2.39]$$

Negli ultimi anni si sono susseguiti gli studi sul tema della PCA delle curve dei tassi di interesse, in particolare Lardic, Priaulet e Priaulet (2003) hanno investigato sulle diverse metodologie che possono essere adottate quando si usa la PCA. Considerando sia i differenti mercati che diversi periodi di tempo, è risultato che gli studi utilizzano metodologie talvolta completamente differenti. I valori di input possono essere i livelli dei tassi di interesse, come hanno utilizzato Kanony e Mokrane (1992)

mentre altri autori hanno preferito i cambiamenti dei tassi di interesse. La matrice da diagonalizzare può essere la matrice delle correlazioni, Bühler e Zimmerman (1996), o la matrice varianza-covarianza come è stata utilizzata da Barber e Copper (1996). Le osservazioni considerate possono differire per il numero di input e scadenza, per esempio Golub e Tilman (1997) hanno considerato l'intero insieme di *maturity*, utilizzando 10 variabili con scadenze da 3 mesi fino a 30 anni.

Utilizzando sia valori storici che simulati Lardic *et al.* (2003) hanno concluso che la PCA dovrebbe essere implementata con i cambiamenti dei tassi di interesse, che sono stazionari, e che queste variabili dovrebbero essere centrate ridotte della varianza:

$$X_{tk} = \frac{\Delta R(t, t_k) - \overline{\Delta R(., t_k)}}{\sqrt{T} \cdot \sigma_{\Delta R(., t_k)}} \quad [2.40]$$

con $R(t, t_k)$ il tasso *zero-coupon* con *maturity* t_k alla data t e $\Delta R(t, t_k) = R(t+1, t_k) - R(t, t_k)$. Inoltre il numero di variabili e le scadenze considerate nel modello possono modificare significativamente la percentuale di varianza del set di dati spiegata dai fattori principali, mentre l'accuratezza dei risultati è proporzionale alla frequenza delle date osservate. In fine hanno dimostrato che le differenze di sensitività delle variazioni dei tassi ai primi tre fattori esistono e possono potenzialmente influenzare un portafoglio a reddito fisso di copertura strategica basata sulla *duration* delle componenti principali.

4. Le proprietà delle matrici di correlazione e la totale positività

In questo capitolo sono descritte le proprietà delle matrici di correlazione, dei relativi autovalori e la teoria della totale positività. In un primo paragrafo sono introdotte le definizioni di base per l'analisi delle matrici di correlazione le proprietà degli autovalori principali: *shift*, *slope* e *curvature*, successivamente è definita la totale positività e le caratteristiche delle matrici totalmente positive.

4.1. Le matrici di correlazione

Un'importante caratteristica delle matrici di correlazione sono le proprietà strutturali, già introdotte precedentemente (paragrafo 2.3), che hanno un'immediata interpretazione finanziaria:

- a. I tassi d'interesse a diverse scadenze sono sempre positivamente correlati;
- b. I coefficienti di correlazione diminuiscono quando le distanze fra gli indici aumentano: è una conseguenza della diminuzione del grado di correlazione quando le variabili sono più distanti nel tempo
- c. La precedente riduzione della correlazione fra le variabili corrisponde a una riduzione inferiore degli indici se le scadenze di entrambi le variabili aumentano.

Le prime due ipotesi hanno un'interpretazione molto intuitiva: i tassi d'interesse con scadenze relativamente lontane nel tempo tendono a muoversi nella stessa direzione, mentre i tassi con *maturity* relativamente più vicine si muovono nella stessa direzione e in modo più simile. La terza ipotesi spiega la dipendenza non

omogenea delle correlazioni nel tempo, in altre parole la correlazione per i tassi a termine per lo stesso differenziale di *maturity* non è costante per ogni scadenza, ma se l'intervallo tra le *maturity* è costante la correlazione aumenta al crescere della scadenza osservata. Questo dipende dal fatto che sia più facile, interpretando le informazioni derivanti di mercati, prevedere il comportamento dei tassi d'interesse in un futuro prossimo e distinguere le differenze tra i tassi a termine per scadenze tra loro più vicine, mentre risulta più difficile analizzare il comportamento dei tassi a termine per la stessa differenza di *maturity*, ma lontane nel tempo.

Si definisce con $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]$ una matrice di correlazione di dimensione n . \mathbf{R} è una matrice simmetrica semidefinita positiva con $\rho_{ij} \in [-1, 1]$ e $\rho_{ii} = 1$ per ogni i . È possibile considerare la matrice delle correlazioni con le seguenti proprietà, in base alle ipotesi formulate precedentemente:

$$\rho_{ij} > 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad [\text{P0}]$$

$$1 \leq j < s < i \leq n \Rightarrow \rho_{ij} < \rho_{sj} \quad [\text{P1}]$$

$$1 \leq s < i < j \leq n \Rightarrow \rho_{sj} < \rho_{ij} \quad [\text{P2}]$$

la **[P0]** è definita positività, la **[P1]** definisce che gli elementi delle colonne sottodiagonali sono strettamente decrescenti, mentre la **[P2]** definisce che gli elementi delle colonne superiori alla diagonale principale sono strettamente crescenti, per la proprietà simmetrica le [P1]-[P2] possono essere espresse anche in termini di righe. Le proprietà [P0]-[P2] esprimono la positività e il comportamento monotono delle correlazioni fra i tassi *forward* rispetto alle scadenze (che sono stati espressi in precedenza nei punti a. e b.). È possibile considerare un'ulteriore proprietà **[P3]** per la quale gli elementi superiori alla diagonale secondaria sono

strettamente crescenti, in altri termini, dato un valore arbitrario $p > 0$ allora $\rho_{i,i+p}$ cresce all'aumentare di i . Inoltre, l'assunzione che \mathbf{R} sia una matrice di correlazione non può essere attenuata in quanto le proprietà [P0]-[P3] non garantiscono che una matrice simmetrica con elementi diagonali pari a 1 sia semidefinita positiva.

Sia data una matrice di correlazione $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]$ n -dimensionale e che soddisfi tutte le proprietà [P0]-[P3]. In base alla [P1] e/o alla [P2] si può ricavare che $\rho_{ij} < 1$ per ogni elemento non sulla diagonale principale ($i \neq j$). Dalla [P1] e [P2] si ricava che il minimo valore presente nella matrice di correlazione sia pari a ρ_{n1} e se si aggiunge anche la proprietà [P3] è possibile definire il valore massimo della matrice, escludendo la diagonale principale come $\rho_{n-1,n}$. Applicando [P1] e [P2] per ogni $i = 2, \dots, n$ e $j = 2, \dots, n-1$ si ottiene:

$$\rho_{ij} > \rho_{i-1,j} > \rho_{i-1,j+1} \quad [3.1]$$

che permette di considerare il comportamento monotono lungo le sottodiagonali secondarie che mostra come le correlazioni diminuiscano allontanandosi ortogonalmente dalla diagonale principale. Per le proprietà [P0]-[P3], per ogni $i < j$ e per l'identità che segue

$$\rho_{i+1,j+1} - \rho_{i,j+1} = (\rho_{i+1,j+1} - \rho_{i,j}) + (\rho_{i,j} - \rho_{i,j+1}) \quad [3.2]$$

si ricava

$$\rho_{i+1,j+1} - \rho_{i,j+1} > (\rho_{i+1,j+1} - \rho_{i,j}) \quad [3.3]$$

e

$$\rho_{i+1,j+1} - \rho_{i,j+1} > (\rho_{i,j} - \rho_{i,j+1}) \quad [3.4]$$

dalle disuguaglianze [3.3] e [3.4] si deduce che le correlazioni sulle colonne sopra la diagonale principale diminuiscano, dal basso verso l'alto, più velocemente rispetto

alle correlazioni sulle ricche sopra la diagonale principale. Inoltre, è possibile generalizzare le [3.3] e [3.4] per ogni $p > 0$:

$$\rho_{i+p,j+p} - \rho_{i,j+p} > (\rho_{i+p,j+p} - \rho_{i,j}) \quad [3.3b]$$

e

$$\rho_{i+p,j+p} - \rho_{i,j+p} > (\rho_{i,j} - \rho_{i,j+p}) . \quad [3.4b]$$

Quindi, fissata una *maturity*, le correlazioni tra i tassi a termine diminuiscono più velocemente se si procede all'indietro nel tempo rispetto a procedere in avanti; questa è a sua volta una conseguenza indiretta del comportamento non indipendente delle correlazioni rispetto alle traslazioni nel tempo.

Da una stima dimostrata da Ostrowski (1952) e dalle proprietà [P1] e [P2] si ricava che: se rispetto al variare di r_i si indicano con m_r e M_r , rispettivamente il valore minimo e massimo, e indicando con:

$$s = \sqrt{\frac{m_r - 1}{M_r - 1}} \quad [3.5]$$

allora una stima dell'autovalore dominante di \mathbf{R} è:

$$m_r + \left(\frac{1}{s} - 1\right) \rho_{n,1} \leq \lambda_1 \leq M_r - (1 - s) \rho_{n,1} \quad [3.6]$$

che grazie alla forma simmetrica è possibile esprimere come:

$$m_r \leq \lambda_1 \leq M_r \quad [3.7]$$

e la [3.7] permette di ottenere, in riferimento alle proprietà [P0]-[P3], la seguente disuguaglianza:

$$1 + (n - 1) \rho_{n,1} \leq \lambda_1 \leq 1 + (n - 1) \rho_{n,n-1} . \quad [3.8]$$

4.2. Le tre componenti principali

Dall'analisi delle componenti principali è stato ricavato che siano sufficienti le prime tre componenti principali a spiegare la variabilità totale. Come è stato osservato empiricamente da Rebonato (2002), se le tre componenti principali sono semplici:

- Il primo autovettore V_1 è formato da componenti approssimativamente uguali, è interpretato come il livello medio della curva dei rendimenti, è definito *pure shift* se è proporzionale a $\mathbf{1}=[1,1,\dots,1]^T$, *shift* se ha tutte le componenti positive, crescenti e poi decrescenti, *weak shift* se ha tutte le componenti positive;
- Il secondo autovettore V_2 ha elementi di grandezza approssimativamente uguale e con segni opposti agli estremi dell'intervallo di scadenza e un unico cambio di segno; è chiamato *slope* se i suoi elementi hanno un andamento crescente o decrescente, altrimenti *weak slope*;
- Il terzo autovettore V_3 ha componenti approssimativamente uguali agli estremi del periodo di *maturity* e di segno opposto e due volte maggiori nel mezzo, presenta due cambi di segno; è definito *curvature* se ha un andamento decrescente (crescente) e poi crescente (decrescente); se non presenta questo andamento è chiamato *weak curvature*.

La distinzione tra *shift*, *slope* e *curvature* (eventualmente in senso debole, *weak*) dipende dal numero di cambi di segno delle proprie componenti; è possibile definire il numero massimo e minimo di variazioni di segno: Dato un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ e con S_V^+ e S_V^- rispettivamente il numero massimo e minimo delle variazioni di segno

delle componenti di \mathbf{V} se $S_V^+ = S_V^-$ si definisce questo valore come “numero di cambi di segno” di \mathbf{V} . Si noti che il numero massimo e minimo di cambi di segno coincide solo se la prima e l’ultima componente del vettore sono diverse da zero e le componenti precedente e successiva ad uno zero son di segno opposto.

Si definisce correlazione perfetta nel caso in cui si abbia una matrice di correlazione data \mathbf{R} di dimensione n , $n \geq 2$, con $\rho_{ij} = 1$ per ogni i, j se e solo se $\lambda_1 = n$ e $\lambda_k = 0$, per $k=2,3,\dots,n$. In questo caso l’autovettore dominante è *pure shift*.

Si può definire equicorrelazione se $n \geq 2$ e $\rho_{ij} = \rho \in (0,1)$ per ogni elemento non sulla diagonale principale, $i \neq j$, allora \mathbf{R} ammette autovalori dominanti semplici:

$$\lambda_1 = 1 + (n - 1)\rho$$

con l’autovettore associato che è *pure shift*. I restanti $n-1$ autovalori $\lambda_k = 1 - \rho$, per $k=2,\dots,n$ hanno un corrispondente autovettore:

$$\mathbf{V}_k = \left[\overbrace{\frac{1}{\sqrt{k(k-1)}}}^{k-1 \text{ volte}}, \dots, -\frac{k-1}{\sqrt{k(k-1)}}, 0, \dots, 0 \right]^T \quad [3.9]$$

in particolare, dalla precedente [3.9] si può concludere che ogni matrice di correlazione di dimensione 2, con $\rho \in (0,1)$, ha l’autovettore dominante *pure shift* e come secondo autovettore *slope*.

Se $n = 3$ si può dimostrare facilmente che una matrice di correlazione \mathbf{R} positiva ha come autovettore dominante *pure shift* se e solo se $\rho_{ij} = \rho$ per ogni $i \neq j$; in questo caso il secondo e il terzo autovettori sono:

$$\mathbf{V}_2 = [-1, 0, 1]^T \quad [3.10]$$

$$\mathbf{V}_3 = [-1, 1, 0]^T \quad [3.11]$$

in accordo con il numero di cambi di segno, V_2 è *slope*, mentre V_3 , dato che ha un numero massimo di cambi di segno pari a 2 ed un numero minimo pari a 1, non è propriamente *curvature*. Si può concludere che non esiste una matrice di correlazione positiva tridimensionale con gli autovettori che sono *pure shift*, *slope* e *curvature*.

Per studiare il segno del primo autovettore si utilizza il teorema di Frobenius-Perron che permette di dimostrare che ogni matrice di correlazione positiva ha come autovettore dominante *weak shift*: se \mathbf{A} è una matrice quadrata $n \times n$, con tutti gli elementi strettamente positivi, allora ha un autovalore λ_1 di molteplicità algebrica e geometrica pari a 1, che è strettamente più grande in modulo di tutti gli autovalori di \mathbf{A} . Inoltre, l'unico autovettore associato può essere scelto in modo che tutte le sue componenti siano strettamente positive. In altri termini per la matrice \mathbf{A} esiste un numero reale e positivo λ_1 e un vettore positivo $V_1 \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$\mathbf{A}V_1 = \lambda_1 V_1$$

Se $\lambda \neq \lambda_1$ è ogni altro autovalore di \mathbf{A} , allora $|\lambda| < \lambda_1$ e λ_1 è un autovalore con molteplicità geometrica ed algebrica 1.

Se \mathbf{R} è una matrice di correlazione positiva e quadrata ($n \times n$) la proprietà [P1] implica che $r_n < r_{n-1}$ e la proprietà [P2] implica $r_1 < r_2$; quindi la matrice di correlazione dei tassi di interesse non può avere un autovalore dominante *pure shift*. Inoltre si può dimostrare che l'autovalore dominante V_1 di \mathbf{R} è *pure shift* se e solo se ogni somma r_i degli elementi dell' i -esima riga, della matrice di correlazione considerata, è uguale all'autovalore dominante λ_1 . Quindi è possibile concludere che se \mathbf{R} è una matrice di correlazione positiva che soddisfa la proprietà [P1] oppure la proprietà [P2] l'autovettore dominante darà diverso dal vettore unitario: $V_1 \neq \mathbf{1}$.

$$AV_1 = \lambda_1 V_1$$

4.2.1. *Lo shift*

In questo paragrafo si analizza la proprietà di monotonia del primo autovettore della matrice di correlazione:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad [M]$$

Come introdotto da Salinelli – Sgarra (2006) per ogni ρ appartenente all'intervallo (0,1) e con $n \geq 4$ la matrice di correlazione [M] ha come autovettore dominante V_1 che è *shift*. La proposizione che se R è una matrice di correlazione positiva di dimensione $n \geq 3$ e se soddisfa le proprietà [P1] e o [P2] allora $V_1 = \mathbf{1}$, unita al teorema Frobenius-Perron dimostra⁶ che R ha l'autovalore dominante semplice con il corrispondente autovettore dominante *weak shift* ma non *pure shift* (nel capitolo successivo sarà considerato il caso *pure shift*). È inoltre possibile estendere i risultati del precedente teorema ad un caso modello più generale:

$$\rho_{ij} = \exp \{-\beta |i - j|^q\}$$

La proposizione che segue fornisce un approfondimento sulle relazioni tra gli elementi dell'autovettore dominante della matrice di correlazione. Se $V_1 = [V_{11} \ V_{21} \ \dots \ V_{12} \ V_{22}]^T$ è l'autovettore dominante di R allora:

⁶ Per la dimostrazione si rimanda a Salinelli e Sgarra (2007)

$$\rho V_{m+1,1} - V_{m,1} < 0$$

per ogni ρ appartenente all'intervallo $(0,1)$ e per m tale che $1 \leq m < \varepsilon$.

4.2.2. *Lo slope e curvature*

Il secondo autovettore non è sempre *slope* per ogni valore di ρ ; infatti, con $n \geq 4$, esiste un ρ^* appartenente all'intervallo $(0,1)$ tale che la matrice di correlazione [M] ha il secondo autovettore che è *slope* (in senso stretto) per ogni ρ appartenente all'intervallo $(\rho^*,1)$. Invece per il terzo autovalore si può ricavare una congettura, dalle simulazioni numeriche, per cui: per ogni $n \geq 4$ esiste un ρ^{**} appartenente all'intervallo $(0,1)$ tale che $\rho^{**}(n) < \rho^*(n)$ e per ogni ρ appartenente all'intervallo $(\rho^{**}(n),1)$ il terzo autovettore sono curvature.

4.3. **La positività totale nelle matrici di correlazione**

WSSC

In questo paragrafo sono considerati i risultati delle analisi, delle caratteristiche *weak shift*, *slope* e *curvature* (WSSC) in riferimento alla teoria delle matrici totalmente positive, svolte indipendentemente da Salinelli e Sgarra (2006), da Lord e Pelsser (2007).

Una matrice \mathbf{A} $n \times n$ è definita:

- Totalmente positiva (*totally positive*) di ordine k , indicata con TP_k , se tutti i minori di ordine $\leq k$ sono non-negativi;
- Totalmente positiva, indicata con TP , se tutti i minori di ordine $\leq n$ sono non-negativi;

- Totalmente positiva strettamente (*strictly totally positive*) di ordine k , indicata con STP_k , se tutti i minori di ordine $\leq k$ sono positivi;
- Totalmente positiva strettamente, indicata con STP , se tutti i minori di ordine $\leq n$ sono positivi;
- Oscillatoria, indicata con O , se è TP ed esiste un numero naturale q , diverso da zero, ($q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) tale che \mathbf{A}^q sia STP.

Le principali proprietà spettrali sulle matrici TP e O utili per le successive analisi sono tratte da Gantmacher (1961), Gantmacher e Krein (1964) e Ando (1987). Una caratteristica fondamentale è che una data matrice oscillatoria n -dimensionale \mathbf{A} ha sempre n autovalori semplici e ordinati:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \geq \lambda_n > 0$$

L'autovettore V_k , per $k = 1, 2, \dots, n$, appartenente all'autovalore λ_k ha esattamente $k - 1$ cambi di segno. In altre parole, i primi tre autovettori di una matrice di correlazione oscillatoria sono WSSC, al contempo risulta palese che le ipotesi fatte siano troppo restrittive per il problema in esame.

È possibile proporre una variazione del teorema precedente proposta da Lord e Pellser (2007) : se si assume che \mathbf{A} sia una matrice $n \times n$ definita positiva, simmetrica, e sia totalmente positiva in modo stretto di grado k . Allora si hanno:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n > 0$$

e quindi almeno i primi k autovalori sono semplici. Per $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ l' s -esimo autovettore ha esattamente $s - 1$ cambi di segno. Quindi una matrice di correlazione strettamente positiva di terzo grado ha WSSC; inoltre l'inverso di questa relazione non è possibile, infatti una matrice *weak shift slope e curvature* non è detto che sia STP_3 o anche STP_2 . La condizione espressa nel precedente teorema, può essere

rilassata con l'introduzione del concetto di matrice oscillatoria, introdotta da Gantmacher e Krein. Il concetto di matrice oscillatoria si origina dallo studio di piccole oscillazioni, meccanica delle vibrazioni, di un continuo elastico lineare, come una stringa o una corda. Una matrice \mathbf{A} di dimensione $n \times n$ è una matrice oscillatoria se è totalmente positiva (TP) e se esistono potenze di essa che sono strettamente totalmente positive (STP). Quindi è possibile enunciare un ulteriore teorema sulle matrici oscillatorie di grado k : in modo simile alla definizione di matrice oscillatoria, si definisce matrice oscillatoria di grado k (O_k) una matrice \mathbf{A} n -dimensionale quadrata se:

- a) \mathbf{A} è totalmente positiva di grado k (TP_k);
- b) \mathbf{A} è una matrice non singolare
- c) Per ogni $i=1, \dots, n-1$ si ha $\rho_{i,i+1} > 0$ e $\rho_{i+1,i} > 0$

Per le matrici di oscillatorie di ordine k , si ha che \mathbf{A}^{n-1} è una matrice totalmente positiva in senso stretto di ordine k (STP_k).

È possibile dimostrare i precedenti teoremi se si assume che \mathbf{A} sia una matrice quadrata n -dimensionale definita positiva e simmetrica, dove \mathbf{A}^i è una matrice oscillatoria di ordine k ; se la matrice è invertibile è possibile scrivere $\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^T$, e quindi:

$$\mathbf{A}^{i(n-1)} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}^{i(n-1)} \mathbf{X}^T$$

allora $\mathbf{A}^{i(n-1)}$ ha gli stessi autovettori di \mathbf{A} . Dato che $\mathbf{A}^{i(n-1)}$ è una matrice strettamente e totalmente positiva di ordine k (STP_k) si può applicare il teorema precedente ottenendo che $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ l' s -esimo autovettore ha esattamente $s - 1$ cambi di segno. In fine se si ordinano gli autovalori come segue:

$$\lambda_1^{i(n-1)} > \dots > \lambda_1^{i(n-1)} \geq \dots \geq \lambda_n^{i(n-1)} > 0$$

si implica direttamente che i primi k autovalori siano semplici.

Si consideri un corollario al precedente teorema: date \mathbf{A} e \mathbf{B} due matrici quadrate n -dimensionali, dove \mathbf{A} è oscillatoria di ordine k mentre \mathbf{B} è invertibile e totalmente positiva di ordine k , allora \mathbf{AB} e \mathbf{BA} sono oscillatorie di ordine k . È possibile verificare questo corollario se analizzando le proprietà di definizione di una matrice oscillatoria di ordine k . Dato che le prime due proprietà, a) e b), sono soddisfatte per entrambi le matrici, resta da verificare il terzo criterio, c), che riguarda la positività degli elementi sopra e sottodiagonali; per la sopradiagonale si ha:

$$(\mathbf{AB})_{i,i+1} = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}^{\mathbf{A}} \rho_{j,i+1}^{\mathbf{B}} \quad [3.12]$$

che è certamente non negativo, dato che entrambe le matrici siano totalmente positive di ordine k . Per \mathbf{A} è noto che tutti gli elementi sopradiagonali sono positivi: Inoltre, dato che \mathbf{B} è invertibile, allora tutti i suoi elementi diagonali devono essere strettamente positivi, quindi si ricava chiaramente che la [3.12] è strettamente positiva.

Da questa dimostrazione del corollario, si può ricavare un'ultima considerazione: quando si analizzano i cambiamenti di segno delle matrici di oscillazione, non si valutano se si stia analizzando una matrice di correlazione o di covarianza. Si può provare che una matrice di covarianza è oscillatoria se e solo se la sua matrice di correlazione è oscillatoria a sua volta. Si supponga di avere una matrice di covarianza \mathbf{A} che possa essere scritta come $\mathbf{A} = \mathbf{SRS}$, dove \mathbf{S} è la matrice diagonale che contiene la deviazione standard strettamente positiva, e \mathbf{R} è la matrice di correlazione. Con \mathbf{S} invertibile in quanto anche \mathbf{A} è invertibile, una matrice diagonale invertibile con tutti gli elementi diagonali strettamente positivi è totalmente

positiva. Quindi se \mathbf{R} è oscillatoria per il corollario precedentemente enunciato anche $\mathbf{SRS} = \mathbf{A}$ è oscillatoria.

Un altro fattore di interesse concerne la relazione tra le proprietà [P0]-[P3] e la totale positività delle matrici di correlazione. In Salinelli e Sgarra (2006) è mostrato che le proprietà [P0]-[P2] non implicano che la matrice di correlazione \mathbf{R} possa essere oscillatoria o totalmente positiva di terzo ordine in modo stretto e neanche di un ordine inferiore (STP_2).

Spostando l'interesse sulle relazioni tra le proprietà [P0]-[P2] e la totale positività è possibile concludere che una matrice di correlazione $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]$ n -dimensionale ha positività totale stretta di secondo grado, STP_2 . Infatti, se \mathbf{R} è STP_2 e $\rho_{ij} > 0$ per ogni i e j , inoltre la positività dei minori principali di ordine 2 implica, per ogni i diversa da j , $\rho_{ij} < 1$. Sempre se \mathbf{R} è STP_2 , si considerino i minori:

$$\mathbf{R}[i_1, i_2 | j_1, j_2]$$

$$\text{con } 1 \leq i_1 < i_2 = j_1 < j_2 \leq n$$

allora si ricava:

$$\rho_{i_1, j_1} \cdot \rho_{i_2, j_2} - \rho_{i_1, j_2} > 0 \quad , \quad [3.13]$$

quindi per $\rho_{ij} \in (0,1)$ per $i \neq j$ la [3.13] implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < j_1 < j_2 \leq n \Rightarrow \rho_{i_1, j_2} < \rho_{i_1, j_1} \Leftrightarrow P1 \\ e \\ 1 \leq i_1 < i_2 < j_2 \leq n \Rightarrow \rho_{i_1, j_2} < \rho_{i_2, j_2} \Leftrightarrow P2 \end{array} \right. . \quad [3.14]$$

Un risultato simile alla [3.14] partendo dalla condizione: \mathbf{R} è STP_2 e $\rho_{ij} < 1$ per $i \neq j$, in questo caso non è possibile escludere che qualche elemento della matrice possa essere uguale ad uno:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < j_1 < j_2 \leq n \Rightarrow \rho_{i_1, j_2} \leq \rho_{i_1, j_1} \leq 1 \\ e \\ 1 \leq i_1 < i_2 < j_2 \leq n \Rightarrow \rho_{i_1, j_2} \leq \rho_{i_2, j_2} \leq 1 \end{array} \right. \quad [3.15]$$

Data una matrice di correlazione \mathbf{R} n -dimensionale con $n \geq 3$, che soddisfi le proprietà [P0]-[P2] ha tutti i minori positivi $\mathbf{R} [i_1, i_2 | j_1, j_2]$ per le seguenti tipologie:

- a) $i_1 = j_1$ e $i_2 = j_2$
- b) $i_1 = j_1$ oppure $i_2 = j_2$
- c) $i_1 < j_1$ e $i_2 > j_2$ oppure $i_1 > j_1$ e $i_2 < j_2$

Una matrice di correlazione \mathbf{R} n -dimensionale con $n \geq 3$, che soddisfi la proprietà [P0] e tale che per $i = 2, \dots, n-1$ e $s = 2, \dots, i-1$ abbia minori di ordine due $\mathbf{R} [s, s+1 | i, i+1]$ positivi, è STP_2 . Per completezza si sottolinea che STP_2 e STP_3 non implicano anche la validità della [P3]. D'altra parte una matrice di correlazione che soddisfi le proprietà [P0]-[P2] ma non la condizione per cui possa essere una matrice totalmente positiva in modo stretto di terzo grado, potrebbe non presentare *weak slope* e *weak curvature*.

La matrice di correlazione su cui si basano le successive considerazioni è la matrice di Green. Con l'obiettivo di verificare la totale positività: data una matrice di Green \mathbf{A} di dimensione $n \times n$, con elementi:

$$a_{ij} = \begin{cases} u_i v_j & i \geq j \\ u_j v_i & i \leq j \end{cases} \quad [3.16]$$

dove tutti u_i e v_j sono diversi da zero, è totalmente non-negativa se e solo se tutti u_i e v_j hanno lo stesso segno e:

$$\frac{v_1}{u_1} \leq \dots \leq \frac{v_n}{u_n} \quad [3.17]$$

Il rango di \mathbf{A} è equivoale al numero di volte che la disuguaglianza [3.17] è esatta (<) più uno. Inoltre, si può notare che nella forma di correlazione il concetto della matrice di Green non è più generale della matrice Schoenmakers – Coffey (2003).

In base alle seguenti ipotesi:

- $b_i, i = 1, \dots, n$, che è una sequenza arbitraria crescente in valore assoluto, con $b_0 = b_1 = 1$;
- $a_1 = 1$ mentre a_i è $a_i = \sqrt{b_i^2 - b_{i-1}^2}$;
- con $Z_i, i = 1, \dots, n$, che è una variabile casuale scorrelata con varianza unitaria;

la matrice Schoenmakers – Coffey definita come:

$$Y_i = \operatorname{sgn}(b_i) \cdot \sum_{k=1}^i a_k Z_k \quad [3.18]$$

e la covarianza tra Y_i e Y_j per $i \leq j$ è uguale a:

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \operatorname{sgn}(b_i b_j) \cdot \sum_{k=1}^i a_k^2 = \operatorname{sgn}(b_i b_j) b_i^2 \quad [3.19]$$

ciò implica che la loro correlazione sia pari a:

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \frac{b_i}{b_j} = \operatorname{sgn}(b_i b_j) \cdot \frac{\min(|b_i|, |b_j|)}{\max(|b_i|, |b_j|)} \quad [3.20]$$

La corrispondente matrice di correlazione \mathbf{R} della matrice di Green \mathbf{A} dal precedente teorema ha come elementi:

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{u_i v_j}{\sqrt{u_i v_i u_j v_j}} = \frac{\sqrt{u_i v_j}}{\sqrt{u_j v_i}} & i \geq j \\ \frac{u_j v_i}{\sqrt{u_i v_i u_j v_j}} = \frac{\sqrt{u_j v_i}}{\sqrt{u_i v_j}} & i \leq j \end{cases} \quad [3.21]$$

Infatti, ponendo $b_i = v_i / u_i$ si dimostra che la matrice di correlazione di Green e la matrice di correlazione estesa di Schoenmakers e Coffey sono equivalenti. Questo induce il seguente corollario sull'oscillatorietà della matrice Schoenmakers – Coffey: la matrice di correlazione Schoenmakers – Coffey nelle sue forme generali [3.19] e [3.20] è oscillatoria purchè tutte le correlazioni sopra la diagonale principale siano positive e minori di 1. Quindi la matrice presenta *shift*, *slope* e *curvature*.

Per concludere, l'interpretazione finanziaria della positività totale della matrice di correlazione sia di interesse teorico può non essere semplice. Una dettagliata analisi del significato finanziario e una giustificazione empirica ben affermata di positività totale per le matrici di correlazione dei tassi di interesse rimangono una questione ancora aperta.

5. L'analisi proposta delle strutture di correlazione

In questo capitolo sono descritte le analisi ed i modelli proposti per sviluppare il tema delle matrici di correlazione, in relazione alla totale positività e a *shift*, *slope* e *curvature*.

5.1. Oltre la totale positività

Come illustrato nel capitolo precedente, la totale positività di ordine 3 è condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza del *weak shift slope* e *curvature* (WSSC), d'altra parte non è né sufficiente né necessaria per lo *shift slope* e *curvature* (SSC). Questo, unitamente ad alcuni dubbi sul significato finanziario delle assunzioni fatte sulla totale positività emerse nei capitoli precedenti, giustificano il tentativo di utilizzare strumenti di diverso tipo con lo scopo di collegare l'esistenza di SSC con altre proprietà significative della struttura di correlazione dei tassi di interesse.

Questo paragrafo a fronte delle domande che sono state poste si pone di chiarire le relazioni tra le proprietà [P0]-[P3] e le proprietà spettrali che si stanno analizzando. A questo scopo sono proposti i successivi esempi. Dal precedente capitolo deriva che le proprietà [P0]-[P3] non siano necessarie per WSSC: si dimostrerà successivamente che non sono neanche sufficienti.

La matrice di correlazione R n -dimensionale, che soddisfa le proprietà [P0]-[P3]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.65 & 0.45 \\ 0.8 & 1 & 0.81 & 0.77 \\ 0.65 & 0.81 & 1 & 0.9 \\ 0.45 & 0.77 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

non ha *weak curvature*:

$$\mathbf{V}_3 = [0.304 \quad -0.74 \quad 0.589 \quad -0.113]^T$$

È anche possibile dimostrare l'esistenza di matrici di correlazione n -dimensionali che soddisfano le proprietà [P0]-[P3] e che abbiano WSSC. Dato che SSC implica WSSC, il risultato precedente dimostra che le proprietà [P0]-[P3] non sono sufficienti per l'esistenza della SSC, e non sono necessarie:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 & 0.71 & 0.6 \\ 0.9 & 1 & 0.89 & 0.8 & .72 \\ 0.7 & 0.89 & 1 & 0.94 & 0.79 \\ 0.71 & 0.8 & 0.94 & 1 & 0.78 \\ 0.6 & 0.72 & 0.79 & 0.78 & 1 \end{bmatrix}$$

che non rispetta le proprietà [P0]-[P3] e ha SSC:

$$\mathbf{V}_1 = [0.422 \quad 0.466 \quad 0.468 \quad 0.458 \quad 0.419]^T$$

$$\mathbf{V}_2 = [0.688 \quad 0.346 \quad -0.224 \quad -0.268 \quad -0.534]^T$$

$$\mathbf{V}_3 = [0.245 \quad 8.31 \times 10^{-3} \quad -0.433 \quad -0.462 \quad 0.734]^T$$

Inoltre esistono matrici di correlazione n -dimensionali che soddisfano le proprietà [P0]-[P3] e che abbiano SSC, infatti la matrice di correlazione

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.86 & 0.85 & 0.82 \\ 0.86 & 1 & 0.89 & 0.87 \\ 0.85 & 0.89 & 1 & 0.9 \\ 0.82 & 0.87 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

che soddisfa le [P0]-[P3], ha SSC:

$$\mathbf{V}_1 = [0.49 \quad 0.504 \quad 0.506 \quad 0.499]^T$$

$$\mathbf{V}_2 = [0.795 \quad 3.43 \times 10^{-2} \quad -0.269 \quad -0.542]^T$$

$$\mathbf{V}_2 = [0.348 \quad -0.837 \quad 8.96 \times 10^{-2} \quad 0.412]^T$$

In fine matrici di correlazione n -dimensionali che soddisfano le proprietà [P0]-[P3] e che hanno WSSC, non possono essere SSC: infatti le seguenti matrici di correlazione

$$\mathbf{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.67 & 0.65 & 0.45 \\ 0.8 & 1 & 0.83 & 0.79 & .77 \\ 0.67 & 0.83 & 1 & 0.85 & 0.8 \\ 0.65 & 0.79 & 0.85 & 1 & 0.9 \\ 0.45 & 0.77 & 0.8 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.59 & 0.58 \\ 0.6 & 1 & 0.92 & 0.805 \\ 0.59 & 0.92 & 1 & 0.93 \\ 0.58 & 0.805 & 0.93 & 1 \end{bmatrix}$$

che soddisfano le [P0]-[P3], hanno WSSC ma non hanno *shift* e *slope* rispettivamente:

$$\mathbf{V}_1^{(1)} = [0.393 \quad 0.466 \quad 0.464 \quad 0.468 \quad 0.44]^T$$

$$\mathbf{V}_2^{(2)} = [0.908 \quad -0.189 \quad -0.278 \quad -0.25]^T$$

Riassumendo, l'analisi effettuata evidenzia come le proprietà [P0]-[P3] ed anche la positività totale non sono abbastanza per giustificare la presenza, empiricamente

osservata, di *shift*, *slope* e *curvature* per le matrici di correlazione dei tassi a termine. Per l'esistenza della SSC deve essere considerato dei requisiti ulteriori attraverso qualche proprietà nascosta della struttura di correlazione.

Per completare l'analisi, si considera il caso 3-dimensionale: che è il numero minimo per avere tutti gli autovettori che si stanno considerando; si dimostra che le proprietà [P0]-[P3] sono sufficienti per SSC. Una matrice \mathbf{R} , definita, positiva e tridimensionale che soddisfa [P0]-[P2] ha tre autovalori semplici che corrispondono a SSC. Per dimostrare la precedente proposizione, si consideri la matrice di correlazione:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad [4.1]$$

che soddisfa le [P0]-[P2]. Con:

$$0 < \rho_{13} < \min\{\rho_{12}, \rho_{23}\} < 1$$

e

$$3 - \|\boldsymbol{\rho}\|^2 > 0 \quad \boldsymbol{\rho} = [\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}]^T$$

dato che il determinante di \mathbf{R} è maggiore di zero, e per la regola del segno di Descartes, il polinomio caratteristico

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + (3 - \|\boldsymbol{\rho}\|^2)\lambda - \det\mathbf{R}$$

ha tre soluzioni reali positive, cioè i tre autovalori sono semplici.

Il primo autovettore $\mathbf{V}_1 = [V_{11} \ V_{21} \ V_{31}]^T$ di \mathbf{R} è *weak shift*, sottraendo la prima riga alla seconda nell'identità $\mathbf{R} \mathbf{V}_1 = \lambda_1 \mathbf{V}_1$ si ottiene:

$$V_{31}(\rho_{23} - \rho_{13}) = (\lambda_1 + \rho_{12} - 1)(V_{21} - V_{11}). \quad [4.2]$$

Dalla proprietà [P2] il lato sinistro è positivo, allora $V_{21} > V_{11}$, $\lambda_1 > 1$ e $\rho_{12} > 0$.

Sottraendo la terza riga dalla seconda, attraverso la [P1], si dimostra che $V_{21} > V_{31}$

,quindi \mathbf{V}_1 è lo *shift*.

Il secondo autovettore $\mathbf{V}_2 = [V_{12} \ V_{22} \ V_{32}]^T$ dovendo essere ortogonale a \mathbf{V}_1 deve avere un elemento negativo e non può avere due zeri. Si è dimostrato che \mathbf{V}_2 non abbia elementi nulli. Supponendo il contrario che, per esempio, $V_{32} = 0$. Dalle prime due relazioni in $\mathbf{R} \mathbf{V}_2 = \lambda_2 \mathbf{V}_2$ è semplice dedurre $V_{22} = -V_{12}$ che è incoerente con la terza relazione e con $\rho_{13} \leq \rho_{23}$. Gli stessi ragionamenti si possono applicare agli altri elementi di \mathbf{V}_2 . Dati:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{13} ; \\ \delta &= \rho_{23} - \rho_{13} > 0 ; \\ \varepsilon &= \rho_{12} - \rho_{13} > 0\end{aligned}$$

osservando che $\delta > \varepsilon$, come segue dalle [3.3] e [3.4], si può riscrivere \mathbf{R} come:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \delta \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

dove (dalla proprietà di equicorrelazione):

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{A}) &= 1 + 2\rho ; \\ \lambda_2(\mathbf{A}) &= \lambda_3(\mathbf{A}) = 1 - \rho\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{B}) &= \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2} ; \\ \lambda_2(\mathbf{B}) &= 0 ; \\ \lambda_3(\mathbf{B}) &= -\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2} .\end{aligned}$$

Sottraendo la seconda relazione dalla prima da:

$$\begin{pmatrix} V_{12} + \rho V_{32} + V_{22}(\varepsilon + \rho) \\ V_{22} + V_{12}(\varepsilon + \rho) V_{32}(\delta + \rho) \\ V_{32} + \rho V_{12} + V_{22}(\delta + \rho) \end{pmatrix} \equiv \lambda_2 \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$(\lambda_2 - 1 + \rho + \varepsilon)(V_{22} - V_{12}) = \delta V_{32} .$$

Dalla proprietà di monotonia degli autovalori si ricava:

$$\lambda_2(\mathbf{R}) \geq \lambda_3(\mathbf{A}) + \lambda_2(\mathbf{B}) = 1 - \rho$$

quindi:

$$\lambda_2 - 1 + \rho + \varepsilon > 0 .$$

Allora:

$$V_{32} > 0 \Leftrightarrow V_{22} > V_{12} . \quad [4.2]$$

Per completare l'analisi si sottrae la seconda relazione alla terza ottenendo:

$$(\lambda_2 - 1 + \rho + \delta)(V_{32} - V_{22}) = -\varepsilon V_{12}$$

e

$$V_{12} > 0 \Leftrightarrow V_{32} < V_{22} . \quad [4.3]$$

Inoltre, sottraendo la prima relazione alla terza si ottiene:

$$(\lambda_2 - 1 + \rho)(V_{32} - V_{12}) = (\delta - \varepsilon)V_{22}$$

e dato che $\delta > \varepsilon$:

$$V_{22} > 0 \Leftrightarrow V_{32} > V_{12} . \quad [4.4]$$

Si assuma che $V_{12} > 0$. Dalla [4.3] segue che $V_{32} < V_{22}$: se $V_{22} < 0$ allora $V_{32} < 0$ e l'autovettore V_2 è *slope*; se $V_{22} > 0$ allora per la [4.4] $V_{32} > V_{12} > 0$ che è in contrasto alla presenza di almeno un elemento negativo. Agendo allo stesso modo è possibile

verificare che se $V_{12} < 0$, l'unico caso ammissibile è per $V_{22} > 0$ e $V_{32} > 0$, perciò l'autovettore \mathbf{V}_2 è *slope*. Dato che non è restrittivo successivamente si assumerà che $V_{12} < 0 < V_{22} < V_{32}$.

Il terzo autovettore $\mathbf{V}_3 = [V_{13} \ V_{23} \ V_{33}]^T$ per l'ortogonalità a \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 ha almeno un cambiamento di segno ed i suoi elementi non possono avere la configurazione di segni $(+, -, -)$ e $(-, +, +)$. Per dimostrare che \mathbf{V}_3 sia *curvature* si deve ricavare che anche le configurazioni $(+, +, -)$ e $(-, -, +)$ non possano esistere. Per questo scopo, si osservi che se si opera come per \mathbf{V}_2 si ottiene solo:

$$V_{23} > 0 \Leftrightarrow V_{33} < V_{13} . \quad [4.5]$$

Assumendo che gli elementi di \mathbf{V}_3 abbiano segno $(+, +, -)$. Dalla [4.5], la disuguaglianza $0 < V_{22} < V_{32}$ e l'ortogonalità tra \mathbf{V}_2 e \mathbf{V}_3 , deriva $|V_{23}| > |V_{33}|$ ma ciò implica $|V_{23} \ V_{21}| > |V_{33} \ V_{31}|$ contrariamente all'ortogonalità tra \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_3 . Per dimostrare l'ultima affermazione basta invertire il ragionamento utilizzato per dimostrare \mathbf{V}_1 come *shift*.

Dalla precedente dimostrazione è possibile concludere che per $n = 3$ l'esistenza dello *shift* sia una diretta conseguenza delle [P0]-[P2], mentre la presenza di *slope* e *curvature* sia una conseguenza della proprietà di ordinamento del primo autovettore e l'ortogonalità nei confronti di esso. Si noti che la proprietà [P3] non giochi alcun ruolo, dando solo informazioni sulla forma dello *shift* e sul numero degli elementi positivi dello *slope*.

Per $n = 4$, operando come nella prima parte della precedente dimostrazione, è semplice dimostrare che \mathbf{V}_1 sia *shift*, nel caso in cui la matrice \mathbf{R} è definita, positiva e soddisfa [P0]-[P2], il primo autovalore è positivo, $V_{11} < V_{21}$ e $V_{41} < V_{31}$. Tuttavia, le

sole proprietà [P0]-[P3] non permettono di concludere se $V_{21} \geq V_{31}$, come si illustra nel seguente esempio: le matrici di correlazione

$$\mathbf{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.65 & 0.6 \\ 0.7 & 1 & 0.8 & 0.75 \\ 0.65 & 0.8 & 1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.75 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.72 & 0.65 & 0.6 \\ 0.72 & 1 & 0.8 & 0.78 \\ 0.65 & 0.8 & 1 & 0.82 \\ 0.6 & 0.78 & 0.82 & 1 \end{bmatrix}$$

sono definite, positive e soddisfano [P0]-[P3] e hanno come *shift* i vettori:

$$\mathbf{V}_1^{(1)} = [0.454 \quad 0.508 \quad 0.525 \quad 0.51]^T$$

$$\mathbf{V}_1^{(2)} = [0.461 \quad 0.519 \quad 0.515 \quad 0.504]^T$$

Le relazioni rispetto alle diverse proprietà delle matrici di correlazione dei rendimenti con dimensione $n \geq 4$ sono schematizzate nella figura (4.1)

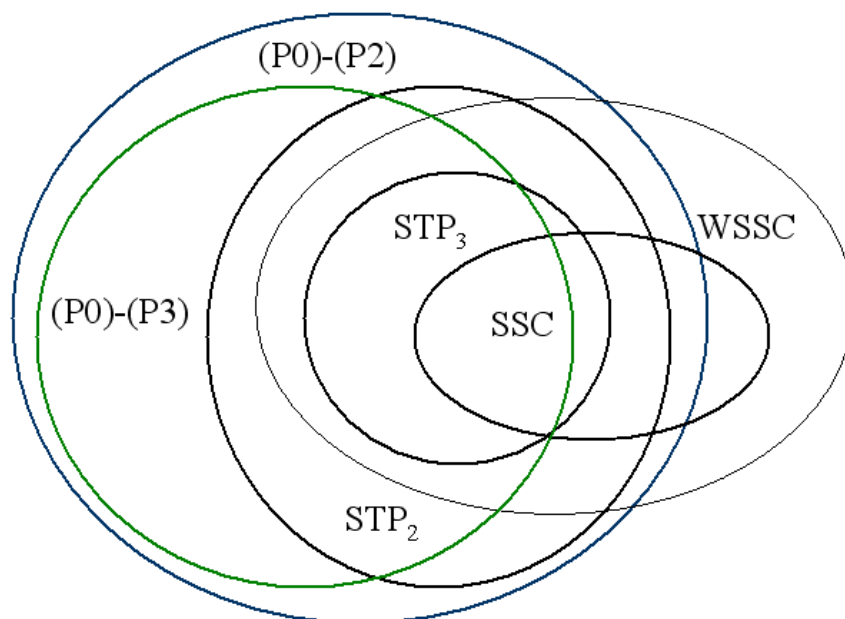


Figura 4.1: Relazioni fra le proprietà delle matrici di correlazione dei rendimenti.

La totale positività in senso stretto di ordine 3 implica la totale positività in senso stretto di ordine 2 (per definizione) e quest'ultima implica le proprietà [P0]-[P2] ma non le proprietà [P0]-[P3] (come è dimostrato nel paragrafo 3.3). Le proprietà [P0]-[P3] non implicano STP₂ o STP₃. La STP₃ implica (paragrafo 3.3) l'esistenza di WSSC che però non implica le [P0]-[P3]; per quanto concerne SSC non si può considerare alcuna inclusione negli altri insiemi (come è dimostrato in questo capitolo) a parte l'implicazione per definizione di WSSC.

5.2. Il puro “*shift*”

La letteratura empirica di finanza ha attribuito il nome di *shift* al primo autovettore della matrice di correlazione dei tassi di interesse e rappresenta lo spostamento principale della curva dei rendimenti come una traslazione rigida. L'idea che è formalizzata in questo lavoro dà concetto al *pure shift*, che indica che tutti gli elementi danno lo stesso contributo alla prima componente principale. Solo nel caso

speciale di tassi a termine perfettamente correlati, cioè $\rho = 1$, questa traslazione rigida è l'unico movimento della curva dei rendimenti compatibile con il modello. Questa casistica capita nei modelli ad un solo fattore, come in Vasicek (1977), Ho – Lee (1986) e Hull – White (1990).

In modo analogo ai modelli ad un fattore, i modelli a due fattori (e così via) sono quelli in cui la matrice delle correlazioni ha solo due autovettori. Questo significa che la matrice sia singolare, che possa essere ridotta in forma canonica che consiste in due blocchi di sottomatrici quadrate aventi il valore unitario sulle rispettive diagonali e con zeri altrove: ciò esprime la perfetta correlazione tra i tassi a pronti dello stesso gruppo e la correlazione nulla tra i tassi appartenenti a diversi gruppi.

In questo paragrafo si descriveranno inizialmente che le proprietà realistiche [P0]-[P3] non siano compatibili con l'esistenza del *pure shift*. Nonostante questo risultato negativo, si descriverà successivamente come questo caso limite possa rappresentare un punto di riferimento per studiare una data matrice di correlazione dei tassi di interesse.

Si può osservare che la presenza del *pure shift* sia strettamente connessa al comportamento delle somme sulle righe della matrice. Più precisamente una matrice di correlazione positiva ha il primo autovettore V_1 *pure shift* se e solo se le somme delle sue righe:

$$r_i = \sum_j \rho_{ij}$$

sono mutualmente uguali: $r_i = r_j$ per ogni i diversa da j . In questo caso $\lambda_1 = r_i$ per ogni i . Dalle [P1] e [P2] segue che $r_1 < r_2$ e $r_n < r_{n-1}$, si deduce che il primo autovettore di una matrice di correlazione R definita, positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P2] non possa essere *pure shift*, cioè $V_1 \neq \mathbf{1}$.

Se $\mathbf{V}_1 = [V_{11} \ V_{21} \ V_{31}]^T$ è il primo autovettore di \mathbf{R} (definita,positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P2]) con $n \geq 3$ allora:

$$V_{11} < V_{12} \quad e \quad V_{1,n-1} > V_{1n}$$

Per dimostrare questa proposizione si procede analogamente al precedente paragrafo 4.1: sottraendo la seconda riga alla prima nell'identità $\mathbf{R} \mathbf{V}_1 = \lambda_1 \mathbf{V}_1$ si ottiene:

$$\sum_3^n V_{1j}(\rho_{2j} - \rho_{1j}) = (\lambda_1 + \rho_{12} - 1)(V_{21} - V_{11}).$$

essendo $\lambda_1 > 1$ e $\rho_{12} > 0$ si ha $(\lambda_1 - 1 + \rho_{12} > 0)$; inoltre da $V_{1j} > 0$ per ogni j e dalla proprietà [P2] che garantisce $\rho_{2j} > \rho_{1j}$ per ogni $j \geq 3$ si prova $V_{11} < V_{12}$. Allo stesso modo si dimostra la seconda diseguaglianza, (rispetto alla proprietà [P1]).

È possibile ottenere lo stesso risultato studiando il vettore $\mathbf{1}$. Quindi, dato che $\mathbf{1}$ non è un autovettore di \mathbf{R} (definita,positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P2]), utilizzando il metodo delle potenze (Isaacson e Keller, 1994), si può concludere che:

$$\|\mathbf{R}^p \mathbf{1}\| \mathbf{R}^p \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{V}_1 \quad \text{come } p \rightarrow +\infty$$

vale denotando con $r_i^{(p)}$ la somma dell' i -esima riga di $\|\mathbf{R}^p \mathbf{1}\| \mathbf{R}^p \mathbf{1}$.

Data una matrice di correlazione \mathbf{R} (definita,positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P2]), per ogni intero p valgono le seguenti conclusioni:

$$r_n^{(p)} < r_{n-1}^{(p)} \tag{4.6}$$

e

$$r_1^{(p)} < r_2^{(p)} \tag{4.7}$$

La dimostrazione per $p = 1$ è ovvia. Assumendo la [4.6] per un dato p ponendo

$$\gamma^{(p+1)} = \|\mathbf{R}^p \mathbf{1}\|^{-1} \|\mathbf{R}^{p+1} \mathbf{1}\|$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \gamma^{(p+1)} \left(r_n^{(p+1)} - r_{n-1}^{(p+1)} \right) &= (1 - \rho_{n-1,n}) \left(r_n^{(p)} - r_{n-1}^{(p)} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n r_j^{(p)} (\rho_{n,j} - \rho_{n-1,j}) \end{aligned}$$

le conclusioni derivano dalle ipotesi di induzione e dalla proprietà [P1], la dimostrazione per la [4.7] è equivalente.

La validità della proprietà [P3] inoltre, permette di dimostrare che r_1 sia minimo delle somme righe. Infatti per una matrice di correlazione \mathbf{R} (definita,positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P3]), per la simmetria di \mathbf{R} si ottiene:

$$\sum_{j=1}^i (\rho_{i,j} - \rho_{1,j}) = \sum_{j=1}^i (\rho_{i-j+1,i} - \rho_{1,j}) = \sum_{j=2}^{i-1} (\rho_{i-j+1,i} - \rho_{1,j})$$

E quindi per $i > 1$:

$$r_i - r_1 = \sum_{j=2}^{i-1} (\rho_{i-j+1,i} - \rho_{1,j}) + \sum_{j=1+1}^n (\rho_{i,j} - \rho_{1,j}) .$$

La positività delle due sommatorie segue rispettivamente la proprietà [P3] e la [P2]. Per $n > 3$ non è possibile prevedere la riga con il valore massimo in sommatoria per una matrice di correlazione \mathbf{R} (definita,positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P3]), mentre con $n = 3$, si ricava con semplicità dalle precedenti proposizioni che $\max r_i = r_2$.

L'approccio utilizzato nell'ultima dimostrazione unito al metodo delle potenze, sono utili per lo studio dell'esistenza di SSC nel modello esponenziale (paragrafo 4.3).

Come è stato evidenziato il primo autovettore di una matrice di correlazione dei tassi di interesse solitamente mostra delle non-uniformità nei propri elementi: il comportamento canonico, definito come *shift*, è solitamente caratterizzato da componenti centrali leggermente più grandi, più piccole agli estremi con un

andamento a “gobba”. Sebbene il *pure shift* non possa rappresentare un contesto finanziariamente realistico (cioè compatibile con le proprietà [P0]-[P3]), è un riferimento utile per studiare la forma e gli spostamenti in termini di valori della matrice di correlazione. Infatti, ottenere un’indicazione quantitativa riguardo a quanto sia pronunciata la gobba è equivalente a misurare quanto questo autovettore differisca dal *pure shift*. Una quantità utile per esprimere questa distanza è data dal seguente indicatore γ originariamente introdotto da Ledermann (1960):

$$\gamma = \max_{i,j} \frac{V_{1,i}}{V_{1,j}}$$

si noti che $\gamma \geq 1$ e $\gamma = 1$ se e solo se $\mathbf{V}_1 = \mathbf{1}$.

Diverse stime su γ si possono trovare in letteratura: Brauer (1957), Minc (1970), Ostrowski (1952, 1960).

5.2.1. *Una proprietà ottimale del puro “shift”*

Si consideri ora un modello di correlazione che mostri come primo autovalore *pure shift* (Jolliffe, 2004). Nel modello, già definito di equicorrelazione nel paragrafo 3.2, i tassi di interesse mostrano la stessa correlazione fra di loro, e l’unica componente principale significativa risulta essere la prima, che descrive lo spostamento rigido della curva dei rendimenti in una direzione comune. Il modello di equicorrelazione rappresenta il caso limite in cui tutte le proprietà [P1]-[P3] possiedono lo stesso segno, così si trova sul confine dell’insieme delle matrici di correlazione \mathbf{R} (definite, positive e soddisfacenti le proprietà [P0]-[P3]) che possono essere considerate finanziariamente rilevanti. In seguito si propone la proprietà ottimale per questa classe di matrici.

Data una matrice di correlazione \mathbf{R} (definita, positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P3]), ponendo $\lambda_1(\mathbf{R})$ il suo autovalore dominante, è semplice verificare che esistano diverse altre matrici di correlazione \mathbf{R}_s (definite, positive e soddisfacenti la proprietà [P0]) aventi l'autovalore dominante *pure shift*: $\lambda_1(\mathbf{R}_s) = \lambda_1(\mathbf{R})$, infatti se \mathbf{R} ha dimensione $n \geq 3$ il sistema lineare $\mathbf{R} \mathbf{1} = \lambda \mathbf{1}$ ha $n(n-3)/2$ gradi di libertà. Quindi, per $n = 3$ si ha un'unica matrice di correlazione con autovalore dominante *pure shift* (dal caso dell'equicorrelazione), mentre per $n \geq 4$ si hanno infinite altre matrici: l'insieme di queste matrici è indicato con $\mathbf{S}(n, \lambda_1)$.

Per lo svolgimento dell'analisi è utile la seguente definizione: data una matrice di correlazione \mathbf{R} , la correlazione media è definita come:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \rho_{ij}.$$

Ricordando che $\mathbf{R} \in \mathbf{S}(n, \lambda_1)$ quindi $\lambda_1 = r_i$ per ogni i , si può esprimere l'autovalore dominante in termini della correlazione media:

$$\lambda_1 = 1 + (n - 1)\bar{\rho} \quad [4.8]$$

mentre, come in Friedman (1981), se $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{1}$ il lato destro della [4.8] può solo essere il limite inferiore:

$$\lambda_1 \geq 1 + (n - 1)\bar{\rho} \quad [4.9]$$

Dati due elementi in $\mathbf{S}(n, \lambda_1)$ le loro norma-2, norma-1 e norma- ∞

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|}$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i r_i$$

Coincide con λ_1 . La scelta della norma di Frobenius

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

sembra essere la più adatta per questo contesto. Data una matrice di correlazione n -dimensionale ($n \geq 4$) $\mathbf{R}=[\rho_{ij}]$ in $\mathbf{S}(n, \lambda_1)$ si ha:

$$\|\mathbf{A}\|_F = n(n-1)\text{Var}[\rho_{ij}] + n[1 + (n-1)\bar{\rho}^2]$$

dove

$$\text{Var}[\rho_{ij}] = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} (\rho_i - \bar{\rho})^2.$$

Dato che n e $\bar{\rho}$ sono fissati, minimizzare $\|\mathbf{R}\|_F$ equivale a minimizzare $\text{Var}[\rho_{ij}]$ e questo capita per $\rho_{ij} = \bar{\rho} = (\lambda_1 - 1)/(n-1)$ per $i \neq j$ dove l'ultima uguaglianza segue la [4.8].

Infine, data una matrice $\mathbf{R}=[\rho_{ij}]$ (definita, positiva e soddisfacente le proprietà [P0]-[P2]), con $n > 3$ e autovalore dominante λ_1 e correlazione media $\bar{\rho}$, l'unica matrice di correlazione positiva \mathbf{R}^* in $\mathbf{S}(n, \lambda_1)$ che è la più vicina ad \mathbf{R} nella norma di Frobenius ha valori, per $i \neq j$, dati da:

$$\rho_{ij}^* = \rho_{ij} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \left[(n-2)\lambda_1 + n\lambda_1^E - (n-1)(r_i + r_j) \right]$$

[4.10]

dove

$$\lambda_1^E = 1 + (n-1)\bar{\rho}.$$

La precedente proposizione si dimostra minimizzando la seguente funzione, dato che \mathbf{R} e \mathbf{R}^* sono matrici di correlazione:

$$f(\rho_{ij}^*) = 2 \sum_{i < j} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^*)^2$$

sotto gli n vincoli

$$\sum_{j=1}^n \rho_{ij}^* = \lambda_1 \quad i = 1, \dots, n \quad [4.11]$$

La funzione obiettivo è convessa e i vincoli sono lineari, quindi è sufficiente valutare la stazionarietà della Lagrangiana:

$$L = 2 \sum_{i < j} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^*)^2 - \sum_{i=1}^n \mu_i (\sum_{j=1}^n \rho_{ij}^* - \lambda_1)$$

Differenziando rispetto a ρ_{ij}^* e ponendo le derivate a zero, si trova:

$$\rho_{ij}^* = \rho_{ij} + \frac{1}{4} (\mu_i - \mu_j) \quad i < j \quad [4.12]$$

Sostituendo la [4.12] nella [4.11] si ottiene il sistema lineare:

$$M\boldsymbol{\mu} = 4(\lambda_1 I_n - \mathbf{R})\mathbf{1}$$

dove, ($\hat{\mathbf{R}}$ la matrice di equicorrelazione):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n]^T \\ M &= (n-1)\hat{\mathbf{R}} \\ \hat{\rho}_{ij} &= (n-1)^{-1} \quad \text{per } i \neq j. \end{aligned}$$

Dati $\lambda_1(M) = 2(n-1)$ e $\lambda_k = n-2$, per $n > 3$ la matrice M è invertibile, con inversa:

$$M^{-1} = \frac{1}{2(n-1)(n-2)} \begin{bmatrix} 2n-3 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2n-3 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 2n-3 \end{bmatrix}.$$

Attraverso un calcolo lineare si ottiene:

$$\mu_i = \frac{2}{(n-1)(n-2)} [(n-2)(\lambda_1 + \lambda_1^E - 2r_i) + 2(\lambda_1^E - r_i)]$$

E sostituendolo nella [4.11] il risultato della [4.10] torna.

5.3. Il modello esponenziale

I risultati del paragrafo 4.1 mostrano come per $n \geq 5$ le consuete proprietà riconosciute per caratterizzare la struttura di correlazione delle curve di rendimento non sono in grado di giustificare la presenza di SSC. Con lo scopo di ampliare la conoscenza in queste strutture di correlazione è di interesse studiare alcuni rilevanti modelli che descrivono le correlazioni dei tassi di interesse.

In questo paragrafo, sono riassunti i risultati già ottenuti per il modello esponenziale e sono presentati alcuni nuovi risultati riguardanti altri modelli generali proposti in letteratura, allo scopo di ricercare le implicazioni della proprietà [P3] sulle caratteristiche delle componenti principali delle matrici di correlazione.

In Rebonato (2002) è dimostrato che le matrici di correlazione dei rendimenti \mathbf{R} possono essere descritte approssimativamente dalla seguente funzione di correlazione per le scadenze $t_s > 0$:

$$\rho_{i,j} = \exp\{-\beta |t_j - t_i|\} \quad \beta > 0 \quad [4.13]$$

per l'assunzione di omogeneità rispetto al tempo, i tassi d'interesse con le stesse differenze di *maturity* mostrano le stesse correlazioni. Questo modello detto esponenziale, malgrado sia troppo semplice per essere realistico, coglie bene le principali caratteristiche delle matrici di correlazione dei tassi di interesse e per questo è assunto come base di partenza per molte analisi insieme alla sua controparte a tempo continuo (Kletskin *et al.*, 2004).

Ponendo $\rho = e^{-\beta}$, si ottiene la corrispondente matrice delle correlazioni:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [4.14]$$

che soddisfa le [P0]-[P2] ma non la [P3], essendo una matrice di Toeplitz. Questa è un'importante proprietà per poter ricavare la sua totale positività. In Salinelli e Sgarra (2006) la proprietà oscillatoria di questa classe di matrici è stata provata, fornendo sufficienti condizioni per l'esistenza di WSSC, mentre in Salinelli e Sgarra (2007) è stato provato il seguente teorema sull'esistenza di *shift* e *slope*:

- Per ogni ρ appartenente a $(0,1)$ e con $n \geq 4$, la matrice di correlazione [4.14] ha l'autovettore dominante \mathbf{V}_1 che è *shift*.
- Per ogni $n \geq 4$, esiste un ρ^* appartenente a $(0,1)$ tale che la matrice di correlazione [4.14] ha il secondo autovettore che è *slope* (in senso stretto) per ogni $\rho \in (\rho^*, 1)$.

Il primo risultato del precedente teorema può essere esteso in un modello più generale:

$$\rho_{ij} = \exp\{-\beta|i - j|^q\} \quad \beta \in \mathbb{R}_+, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad [4.15]$$

La corrispondente matrice di correlazione è TP, quindi ha WSSC. Questo modello descrive una struttura di correlazione con un decadimento molto rapido delle differenze di *maturity*, sebbene derivi le principali caratteristiche dal modello esponenziale (omogeneità).

Un modello più generale è stato considerato in Rebonato (2002) ed anche discusso in Brigo (2001):

$$\rho_{i,j} = \exp\{-\beta |t_j^\gamma - t_i^\gamma|\} \quad \beta \in \mathbb{R}_+, \gamma \in (0,1). \quad [4.16]$$

con la notazione usata precedentemente per identificare indici e scadenze:

$$\rho_{i,j} = \exp\{-\beta |j^\gamma - i^\gamma|\} \quad \beta \in \mathbb{R}_+, \gamma \in (0,1). \quad [4.17]$$

Infatti il modello [4.16] comporta un importante miglioramento rispetto al modello esponenziale considerato in precedenza: infrange il comportamento omogeneo nel tempo, descrivendo le correlazioni non solo nel rispetto delle [P0]-[P2] ma anche della [P3].

In entrambe gli articoli citati l'esistenza di SSC e WSSC sono assunte tacitamente senza proporre alcuna dimostrazione di queste importanti proprietà. Si ovvierà a questa lacuna per quanto concerne la WSSC, in relazione alla proprietà della totale positività. Dato che la matrice [4.17] non è più di Toeplitz, è necessario investigare la sua relazione con la totale positività con un'analisi più specifica e l'attenzione si focalizzerà sulle proprietà rilevanti di questa classe di modelli. Si dimostra la seguente proposizione:

- La matrice di correlazione con gli elementi dati dalla [4.17] è oscillatoria di ordine 3.

Si inizia discutendo dei minori di ordine 2. L'espressione generale di questi minori, ponendo $\rho = e^{-\beta}$, è data da:

$$\rho^{|i^\gamma - j^\gamma| + |(i+p)^\gamma - (j+k)^\gamma|} - \rho^{|(i+p)^\gamma - j^\gamma| + |i^\gamma - (j+k)^\gamma|}$$

È immediato verificare che tutti i minori aventi tutti i loro elementi dalla stessa parte rispetto alla diagonale principale sono nulli. Se gli elementi non appartengono alla stessa parte, possono essere di due tipi: un elemento da una parte e tre dall'altra oppure due elementi da entrambe le parti. Si esaminano in dettaglio le due classi in

seguito, sottolineando che, per ragioni di simmetria, si può restringere l'analisi ai casi $j < i < j + k < i + p$ e $j < i < i + p < j + k$. Per il primo caso si hanno minori che assumono la seguente forma:

$$\rho^{(i+p)^\gamma - j^\gamma} \cdot [\rho^{i^\gamma - (j+k)^\gamma} - \rho^{(j+k)^\gamma - i^\gamma}].$$

Dato che $j + k > i$ e $\gamma > 0$, nel secondo fattore dell'esponente del primo termine è positivo, mentre l'esponente del secondo è negativo, quindi la differenza è positiva.

Per il secondo caso si ha:

$$\rho^{(j+k)^\gamma - j^\gamma} \cdot [\rho^{i^\gamma - (i+p)^\gamma} - \rho^{(i+p)^\gamma - i^\gamma}]$$

per il quale si possono fare le medesime considerazioni.

Passando ai minori di ordine 3; l'espressione generale formulata come segue:

$$\begin{aligned} & \rho^{|i^\gamma - j^\gamma|} [\rho^{|(i+p)^\gamma - (j+k)^\gamma| + |(i+q)^\gamma - (j+l)^\gamma|} - \rho^{|(i+p)^\gamma - (j+l)^\gamma| + |(i+q)^\gamma - (j+k)^\gamma|}] + \\ & - \rho^{|i^\gamma - (j+k)^\gamma|} [\rho^{|(i+p)^\gamma - j^\gamma| + |(i+q)^\gamma - (j+l)^\gamma|} - \rho^{|(i+p)^\gamma - (j+l)^\gamma| + |(i+q)^\gamma - j^\gamma|}] + \\ & + \rho^{|i^\gamma - (j+l)^\gamma|} [\rho^{|(i+p)^\gamma - j^\gamma| + |(i+q)^\gamma - (j+k)^\gamma|} - \rho^{|(i+p)^\gamma - (j+k)^\gamma| + |(i+q)^\gamma - j^\gamma|}] \end{aligned}$$

dove $q > p$ e $l > k$. I minori che hanno tutti gli elementi dalla stessa parte rispetto alla diagonale principale sono nulli, dato che sono la combinazione lineare di minori nulli di ordine 2. I minori che hanno elementi da entrambe le parti posso essere raggruppati, sempre per ragioni di simmetria, in casi che saranno discussi separatamente:

$$\begin{aligned} & i < i + p < j < i + q < j + k < j + l \\ & i < j < i + p < i + q < j + k < j + l \\ & i < j < i + p < j + k < i + q < j + l \\ & i < j < i + p < j + k < j + l < i + q \end{aligned}$$

Nel caso 1. e 2., applicando l'espansione di Laplace dei determinanti rispetto alla prima colonna e alla terza riga, il risultato è facilmente riconducibile a zero. L'analisi del caso 3. richiede più attenzione:

$$\begin{aligned} & \rho^{j^Y-i^Y} [\rho^{(j+k)^Y-(i+p)^Y+(j+l)^Y-(i+q)^Y} - \rho^{(j+l)^Y-(i+p)^Y+(i+q)^Y-(j+k)^Y}] + \\ & -\rho^{(j+k)^Y-i^Y} [\rho^{(i+p)^Y-j^Y+(j+l)^Y-(i+q)^Y} - \rho^{(j+l)^Y-(i+p)^Y+(i+q)^Y-j^Y}] + \\ & +\rho^{(j+l)^Y-i^Y} [\rho^{(i+p)^Y-j^Y+(i+q)^Y-(j+k)^Y} - \rho^{(j+k)^Y-(i+p)^Y+(i+q)^Y-j^Y}] \end{aligned}$$

il quarto e il sesto termine che appaiono nella precedente somma si semplificano, i restanti elementi possono essere raccolti come segue:

$$\rho^{(j+l)^Y-i^Y} \cdot [\rho^{(j+k)^Y-(i+q)^Y} - \rho^{(i+q)^Y-(j+k)^Y}] \cdot [\rho^{j^Y-(i+p)^Y} - \rho^{(i+p)^Y-j^Y}]$$

Facilmente si può verificare che tutti i fattori siano positivi, guardando l'ordine corrispondente degli indici considerati. Per il caso 4. L'espressione dei 3 minori è la seguente:

$$\begin{aligned} & \rho^{j^Y-i^Y} [\rho^{(j+k)^Y-(i+p)^Y+(i+q)^Y-(j+l)^Y} - \rho^{(j+l)^Y-(i+p)^Y+(i+q)^Y-(j+k)^Y}] + \\ & -\rho^{(j+k)^Y-i^Y} [\rho^{(i+p)^Y-j^Y+(i+q)^Y-(j+l)^Y} - \rho^{(j+l)^Y-(i+p)^Y+(i+q)^Y-j^Y}] + \\ & +\rho^{(j+l)^Y-i^Y} [\rho^{(i+p)^Y-j^Y+(i+q)^Y-(j+k)^Y} - \rho^{(j+k)^Y-(i+p)^Y+(i+q)^Y-j^Y}] \end{aligned}$$

Questo caso è identico al precedente caso 3. il quarto e il sesto termine che appaiono nella precedente somma si semplificano, i restanti elementi possono essere raccolti come segue:

$$\rho^{(j+q)^Y-i^Y} \cdot [\rho^{(j+k)^Y-(j+l)^Y} - \rho^{(j+l)^Y-(j+k)^Y}] \cdot [\rho^{j^Y-(i+p)^Y} - \rho^{(i+p)^Y-j^Y}]$$

dove tutti i fattori sono positivi.

Si vuole sottolineare che i minori di entrambe gli ordini 2 e 3 con sulla diagonale principale è un caso specifico che rientra in ciò che abbiamo già dimostrato in

precedenza. Si è appena dimostrato che tutti i minori fino al tre non possono essere negativi. Dato che tutti gli elementi sulle diagonali subdiagonali adiacenti alla diagonale principale, son strettamente positive, invocando il criterio generale per una matrice k -TP in modo che sia k -oscillatoria (Lord – Pelsser, 2007), possiamo concludere che la matrice di correlazione data dalla [4.17] sia oscillatoria di ordine 3.

È ora possibile specificare la proprietà più rilevante del precedente modello come diretta conseguenza di quanto appena provato:

- Il modello di correlazione [4.17] per i tassi di interesse mostra WSSC per ogni scelta dei parametri.

Così come è di interesse l'ordinamento dei pesi dei fattori, dimostrare in modo standard l'ordine delle componenti degli autovettori è molto più complesso rispetto al modello esponenziale, anche per il primo autovettore. Nel caso dell'ultimo modello l'elevata simmetria della matrice di correlazione gioca un ruolo fondamentale dimostrando che il peso principale risulti al centro, è un passo importante da dimostrare che le componenti aumentino fino al centro e poi diminuiscano. La componente maggiore per il primo autovettore non può essere la centrale, ma un'altra (spesso sta tra la centrale e l'ultima), nonostante ciò il comportamento canonico (prima crescita e poi decrescita) sia rispettato, per dimostrare la proprietà di ordinamento la tecnica utilizzata per fornire le prove nel modello esponenziale non può essere usata.

Una rifinitura al modello precedente è proposta da Rebonato (2002) e Brigo (2001) :

$$\rho_{i,j} = \exp\left\{[-\beta + \alpha \max(t_i, t_j)]|t_j^\gamma - t_i^\gamma|\right\}$$

$$\text{con } \rho = e^{-\beta} \quad e \quad \xi = e^\alpha$$

Allora questa matrice di correlazione può essere scritta nel modo seguente:

$$\rho_{i,j} = \rho^{|i-j|} \xi^{|i-j|} \max(i, j)$$

Si può verificare immediatamente che questa matrice ha alcuni minori che sono negativi, perciò l'esistenza di WSSC non è garantita. Brigo (2001) sostiene, infine, che la matrice appena introdotta sia positiva e definita (potrebbe essere una matrice di correlazione) solo per alcuni particolari valori assunti dai parametri considerati.

6. Conclusioni

In questo lavoro è stata fornita un'analisi sulle relazioni tre *shift*, *slope* e *curvature* ed altre proprietà delle matrici di correlazione dei tassi di interesse. Dopo aver richiamato la definizione formale di tassi di cambio e di curve dei rendimenti dei tassi di cambio, sono stati presentati i modelli principali sullo studio dell'evoluzione nel tempo delle curve di rendimento. Questo lavoro si è soffermato con particolare interesse sulle metodologie di analisi delle componenti principali, questo è dipeso dal fatto che questi modelli permettono di analizzare con significativa precisione le variazioni delle curve dei tassi, consentendo una valida analisi empirica e una semplice ed intuitiva spiegazione finanziaria. In questo modo è stato possibile introdurre il concetto di *shift*, *slope* e *curvature* in relazione alle prime tre componenti principali; oltre alla semplicità intuitiva, l'analisi delle componenti principali considera all'interno del suo modello la matrice delle correlazioni delle curve di rendimento dei tassi d'interesse, che presentano particolari caratteristiche strutturali. Queste particolari caratteristiche hanno permesso di focalizzare lo studio delle dinamiche delle curve di rendimento partendo dalle relazioni ipotizzate tra queste matrici e le caratteristiche degli autovettori principali. Dopo una descrizione formale di *Shift*, *Slope* e *Curvature*, che si distinguono per le proprietà di cambiamento di segno e dell'ordinamento dei fattori, sono stati presentati diversi risultati conosciuti in letteratura, aggiungendo diverse considerazioni sulle proprietà delle matrici di correlazione. In seguito, è stata analizzata l'assunzione di omogeneità nel tempo delle correlazioni, mostrando che la rimozione di questa ipotesi non aggiunge informazioni riguardo l'esistenza di *Shift*, *Slope* e *Curvature*. In seguito ad una discussione dettagliata sulle proprietà spettrali in un caso "tridimensionale", in altre

parole con $n = 3$, dove tutti i collegamenti possono essere chiarificati con una relativa semplicità intuitiva, si è focalizzata l'attenzione sul primo autovettore e si è fornita una nuova interpretazione del caso dell' "equicorrelazione", basato su diverse proprietà ottimali in termini di norma di Frobenius. In fine si è investigato sulle proprietà spettrali di una nuova classe di modelli, nella quale l'assunzione di omogeneità del tempo non è più valida, e fornendo le prove dell'esistenza di tre autovettori caratteristici chiamati *Weak Shift*, *Slope* e *Curvature*; collegandoli alla proprietà di oscillatorietà di terzo ordine delle matrici collegate.

Questo lavoro evidenzia quanti sforzi debbano esser fatti prima di riuscire a caratterizzare completamente *Shift*, *Slope* e *Curvature* basandosi sulle proprietà strutturali delle matrici di correlazione. Dall'analisi effettuata, e dalla letteratura, è emerso che siano disponibili solo condizioni sufficienti o necessarie, mai entrambe (almeno per dimensioni significative del campione in esame, $n > 3$) anche per casi "weak". La positività totale è una proprietà importante che permette di spiegare i cambi di segno delle componenti degli autovettori, ma non è una condizione necessaria, inoltre non permette di spiegare le proprietà di ordinamento; è quindi solo una piccola parte di un'intera e molto più complessa tematica. Le proprietà di ordinamento del peso dei fattori possono essere giustificate sulla base di proprietà algebriche delle matrici di correlazione solo in un ristretto numero di casi: lo *shift*, e lo *slope* (ma solo per un *range* di valori dei parametri di correlazione) nel modello esponenziale. È stato possibile, infine, mostrare che le congetture formulate da Lord e Pelsser (2007) restino ancora aperte così come ciò che riguarda il secondo autovettore: sebbene l'analisi in questo lavoro abbia dimostrato un risultato definito sulla relazione tra le proprietà [P0]-[P3] e l'esistenza del *Shift*, *Slope* e *Curvature*, la sufficienza di tali proprietà per garantire l'esistenza del *weak slope* non è stata

ancora dimostrata. I propositi per futuri lavori sono di ricercare condizioni più generali che possano garantire l'esistenza dello *shift*, *slope* e *curvature* sia in senso stretto che debole (*weak*) in modo da fornire un quadro più completo e rigoroso di queste profonde interconnessioni tra proprietà empiriche e spettrali delle matrici di correlazione che si presentano nella modellazione dei tassi di interesse.

7. Bibliografia

- Ando T: "*Totally Positive Matrices*". Linear Algebra and its Applications, 1987, SO; 165-219. .
- Barber JR, Copper ML: "*Immunization Using Principal Component Analysis*". Journal of Portfolio Management, 1996; 23 (1); 99-105
- Brauer AT: "*The theorems of Ledermann and Ostrowski on positive matrices*". Duke. Math. Journal, 1957; 24; 265-274.
- Brigo D: "*A Note on Correlation and Rank Reduction*". Working Paper for Banca IMI, 2001.
- Bühler A, Zimmerman H: "*A statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany*", Journal of Fixed Income, 1996; 6 (3), 55-67.
- Cox JC, Ingersoll JE, Ross SA: "*A Theory of the Term Structure of Interest Rates*" Econometria, 1985; 53 (2), 385-407.
- Friedman S, Weisberg HF: "*Interpreting the first eigenvalue of a correlation matrix*". Educational and Psychological Measurement, 1981; 41; 11-21.
- Gantmacher FR: "*The Theory of Matrices. Chelsea Publishing Company*". New York, 1964.
- Gantmacher FR, Krein MG: "*Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*". Dept. of Commerce, Washington, 1961.
- Golub BW, Tilman LM: "*Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components Analysis*", Value at Risk, and Key Rate Durations. The Journal of Portfolio Management, 1997; 72-94.
- Ho T, Lee S: "*Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims*". Journal of Finance, 1986; 41; 1011-1029.
- Hull J, White A: "*Pricing Interest-Rate Derivative Securities*". The Review of Financial Studies, 1990; 3; 573-592.
- Isaacson E, Keller HB: "*Analysis of Numerical Methods*". Dover: New-York, 1994.
- Kanony C, Mokrane M: "*Reconstitution de la courbe des taux, analyse des facteurs d'évolution et couverture factorielle*". Cahiers de la Caisse Autonome de Refinancement, 1992; Vol. 1.
- Kletschin L, Lee SY, Li H, Li M, Tolmasky C, Wu Y: "*Correlation Structures Corresponding to Forward Rates*". Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2004; 12; n.3; 125-135.

- Kotz S, Pearn WL, Wichern DW: *“Eigenvalue – eigenvectors analysis for a class of patterned correlation matrices with an application”*. Statistics & Probability Letters, 1984; 2 ; 119-125.
- Johnson G: *“Government of Canada Yield-Curve Dynamics 1986-2003”*. Bank of Canada Review, 2005; 17-28.
- Jolliffe IT: *“Principal Component Analysis”*. Springer-Verlag: Berlin, 2004.
- Longstaff F: Santa-Clara P, Schwartz S: *“The Relative Valuation of Caps and swaptions: Theory and Empirical Evidence”*. UCLA Working Paper, 1999.
- Lardic S, Priaulet P, Priaulet S: *“PCA of the Yield Curve Dynamics: Questions of Methodologies”*. Journal of Bond Trading and Management, 2003; 1; 327-349.
- Ledermann W: *“Bounds for the greatest latent roots of a positive matrix”*. Journal of the London Mathematical Society, 1960; 35; 265-268.
- Litterman R, Scheinkman J: *“Common Factors Affecting Bond Returns”*. Journal of Fixed Income, 1991; 1; 54-61.
- Lord R, Pelsser A: *“Level, Slope and Curvature: Art or Artefact?”*. Applied Mathematical Finance, 2007; 14; 2; 105-130.
- Martellini L, Priaulet P, Priaulet S: *“Fixed-income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies”*. Wiley: Chichester, 2003.
- Minc H: *“On the maximal eigenvector of a positive matrix”*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1970; 7; 424-427.
- Ostrowski AM: *“Bounds for the greatest latent root. of a positive matrix”*. Journal of the London Mathematical Society, 1952; 27; 253-256.
- Ostrowski AM: *“On the eigenvector belonging to the maximal root of a non-negative matrices”*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1960/61; 12; 107-112.
- Rao CR. Rao MB: *“Matrix algebra and its applications to statistics and econometrics”*. World Scientific: Singapore, 1998.
- Rebonato R: *“Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives”*. Princeton University Press: Princeton, 2002.
- Salinelli E, Sgarra C: *“Correlation matrices of yields and total positivity”*. Algebra and its Applications, 2006; 418; 1-2; 682-692.
- Salinelli E, Sgarra C: *“Shift, Slope and Curvature for a Class of Yields Correlation Matrices”*. Linear Algebra and its Applications, 2007; 426; 1-2; 650-666.

Schoenmakers JGM, Coffey B: "*Systematic generation of correlation structures for the Libor market model*". International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2003; 6 (4); 1-13.

Vasicek O: "*An Equilibrium Characterization of the Term Structure*". Journal of Financial Economics, 1977; 5; 177-188.