

# POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in  
Ingegneria Meccanica



## SVILUPPO DI UN CRITERIO A FATICA MULTIASSIALE PER LA GHISA NODULARE

Relatore: Prof. Ioannis PAPADOPOULOS

Co-relatore: Ing. Stefano FOLETTI

Tesi di Laurea di:

Giovanni BONFA' Matr. 707479

Amedeo CANU Matr. 709044

Anno Accademico 2009 – 2010

# Indice Generale

<b>Sommario</b> .....	1
<b>Abstract</b> .....	2
<b>Introduzione</b> .....	3
<b>1 Identificazione degli sforzi in coordinate sferiche</b> .....	6
1.1 Regione fuori dal contorno sferico: calcolo di spostamenti, deformazioni e sforzi.....	8
1.2 Regione dentro dal contorno sferico: calcolo di spostamenti, deformazioni e sforzi.....	11
1.3 Stato di sforzo uniforme a trazione lungo l'asse z in coordinate sferiche .....	15
1.4 Calcolo delle costanti .....	18
<b>2 Stato di sforzo a trazione lungo z nell'intorno dell'inclusione</b> .....	22
2.1 Formulazione generale .....	23
2.2 Microcavità .....	28
2.3 Inclusione perfettamente rigida.....	29
2.4 Passaggio da coordinate sferiche a cartesiane.....	31
2.4.1 Calcolo punti notevoli microcavità .....	33
2.4.2 Calcolo punti notevoli inclusione perfettamente rigida .....	34
<b>3 Stato di sforzo a compressione lungo y nell'intorno dell'inclusione</b> .....	39
3.1 Formulazione generale .....	40
3.2 Microcavità – Inclusione perfettamente rigida .....	41
3.3 Passaggio da coordinate sferiche a cartesiane.....	42
3.3.1 Calcolo punti notevoli microcavità .....	44
3.3.2 Calcolo punti notevoli inclusione perfettamente rigida .....	46
3.4 Rotazione dello stato di sforzo.....	48
<b>4 Sovrapposizione degli effetti: trazione su “z” compressione su “y”</b> .....	55
4.1 Micro cavità .....	56
4.2 Inclusione perfettamente rigida .....	58
<b>5 Stato di sforzo dovuto al taglio</b> .....	61
5.1 Micro cavità .....	65
5.2 Inclusione perfettamente rigida .....	68

<b>6</b>	<b>Criterio a fatica</b> .....	71
6.1	Materiale “Cast Iron” .....	75
6.2	Materiale “GGG 40” .....	83
6.3	Materiale “GTS 45” .....	91
6.4	Materiale “GGG 60 ZHB” .....	98
6.5	Materiale “GGG 60 ” .....	105
6.6	Materiale “GRP 500 ” .....	111
6.7	Conclusioni .....	117
	<b>Appendice A</b> .....	122
	<b>Appendice B</b> .....	131
	<b>Appendice C</b> .....	140
	<b>Appendice D</b> .....	157
	<b>Bibliografia</b> .....	172

## Elenco delle Figure

1.0	Micrografia ottica Ghisa nodulare ferritica 200x e ghisa grigia 500x .....	4
1.1	Sistema di riferimento in coordinate sferiche .....	6
2.1	Stato di sforzo a trazione lungo z.....	22
3.1	Stato di sforzo a compressione lungo z' .....	39
3.2	Sistemi di riferimento .....	49
4.1	Sollecitazione a trazione lungo z e compressione lungo y .....	55
5.1	Stato di sforzo di taglio nel sistema xyz .....	61
5.2	Trazione lungo z e compressione lungo y .....	62
5.3	Stato di sforzo di taglio equivalente a 45° .....	62
5.4	Stato di sforzo di sforzo di taglio nel sistema xyz .....	62
5.5	Trazione lungo z' e compressione lungo y' .....	63
5.6	Stato di sforzo di sforzo di taglio nel sistema xyz .....	63
5.7	Sistema di riferimento x'y'z' ruotato di 45° rispetto a xyz.....	63
5.8	Stato di sforzo di sforzo di taglio nel sistema xyz .....	64

## Elenco dei Grafici

6.1.1a	Valori di $\sigma_{equiv}$ – Cast Iron Microcavità .....	79
6.1.1b	Valori di $\sigma_{equiv}$ – Cast Iron Materiale reale .....	80
6.1.1c	Valori di $\sigma_{equiv}$ – Cast Iron Inclusione perfettamente rigida .....	80
6.1.2a	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il Cast Iron – Microcavità .....	81
6.1.2b	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il Cast Iron – Materiale reale .....	81
6.1.2c	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il Cast Iron – Inclusione perfettamente rigida .....	82
6.2.1a	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 40 Microcavità .....	87
6.2.1b	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 40 Materiale reale .....	88
6.2.1c	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 40 Inclusione perfettamente rigida .....	88
6.2.2a	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 40 – Microcavità .....	89
6.2.2b	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 40 – Materiale reale .....	89
6.2.2c	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 40 – Inclusione perfettamente rigida .....	90
6.3.1a	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GTS 45 Microcavità .....	95
6.3.1b	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GTS 45 Materiale reale .....	95
6.3.1c	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GTS 45 Inclusione perfettamente rigida .....	96
6.3.2a	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GTS 45 – Microcavità .....	96
6.3.2b	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GTS 45 – Materiale reale .....	97
6.3.2c	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GTS 45 – Inclusione perfettamente rigida .....	97
6.4.1a	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 60 H.R.Z Microcavità .....	101
6.4.1b	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 60 H.R.Z Materiale reale .....	101
6.4.1c	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 60 H.R.Z Inclusione perfettamente rigida .....	102

6.4.2a	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 H.R.Z – Microcavità .....	103
6.4.2b	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 H.R.Z – Materiale reale .....	103
6.4.2c	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 H.R.Z – Inclusione perfettamente rigida .....	104
6.5.1a	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 60 G.S. Microcavità .....	107
6.5.1b	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 60 G.S. Materiale reale .....	108
6.5.1c	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GGG 60 G.S. Inclusione perfettamente rigida .....	108
6.5.2a	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 G.S. – Microcavità .....	109
6.5.2b	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 G.S. – Materiale reale .....	109
6.5.2c	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 G.S. – Inclusione perfettamente rigida	110
6.6.1a	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GRP 500 Microcavità .....	113
6.6.1b	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GRP 500 Materiale reale .....	114
6.6.1c	Valori di $\sigma_{equiv}$ – GRP 500 Inclusione perfettamente rigida .....	114
6.6.2a	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GRP 500 – Microcavità .....	115
6.6.2b	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GRP 50 – Materiale reale .....	115
6.6.2c	Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GRP 500 – Inclusione perfettamente rigida ....	116
6.7.1	Istogramma dell'errore percentuale complessivo di tutte le prove per il Materiale reale .....	121

## Elenco delle Tabelle

6.1	Valori dei coefficienti di Poisson $\nu_b$ per matrice e $\nu_t$ per inclusione, dei rispettivi moduli di Young $E_b$ ed $E_t$ , delle costanti di Lamè $\mu_b$ e $\mu_t$ e del loro rapporto $\mu_b/\mu_t$ .....	74
6.1.1	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $S_{-1}$ .....	75
6.1.2	Valori del coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata $S_{-1}$ .....	76
6.1.3	Valori del coefficiente moltiplicativo “a” per la componente alternata $S_{-1}$ .....	76
6.1.4	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $t_{-1}$ .....	76
6.1.5	Valori del coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata $t_{-1}$ .....	77
6.1.6	Errore percentuale $err_{\%a}$ .....	77
6.1.7	Valori del coefficiente $\lambda$ .....	77
6.1.8	Valori dei dati delle prove sperimentali .....	78
6.1.9	Risultati ottenuti per i tre casi considerati .....	78
6.1.10	Valori di $\sigma_{equiv}$ , $\sigma_{amm}$ e $err_{\%}$ .....	79
6.2.1	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $S_{-1}$ .....	83
6.2.2	Valori del coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata $S_{-1}$ .....	84
6.2.3	Valori del coefficiente moltiplicativo “a” per la componente alternata $S_{-1}$ .....	84
6.2.4	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $t_{-1}$ .....	84
6.2.5	Valori del coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata $t_{-1}$ .....	85
6.2.6	Errore percentuale $err_{\%a}$ .....	85
6.2.7	Valori del coefficiente $\lambda$ .....	85
6.2.8	Valori dei dati delle prove sperimentali .....	86
6.2.9	Risultati ottenuti per i tre casi considerati .....	86
6.2.10	Valori di $\sigma_{equiv}$ , $\sigma_{amm}$ e $err_{\%}$ .....	86
6.3.1	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $S_{-1}$ .....	91
6.3.2	Valori del coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata $S_{-1}$ .....	91

6.3.3	Valori del coefficiente moltiplicativo “ $a$ ” per la componente alternata $S_{-1}$ .....	92
6.3.4	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $t_{-1}$ .....	92
6.3.5	Valori del coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata $t_{-1}$ .....	92
6.3.6	Errore percentuale $err_{\%a}$ .....	93
6.3.7	Valori del coefficiente $\lambda$ .....	93
6.3.8	Valori dei dati delle prove sperimentali.....	93
6.3.9	Risultati ottenuti per i tre casi considerati .....	94
6.3.10	Valori di $\sigma_{equiv}$ , $\sigma_{amm}$ e $err_{\%}$ .....	94
6.4.1	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $S_{-1}$ .....	98
6.4.2	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ e della componente media $\sigma_{n,m}$ per $S_0$ .....	99
6.4.3	Valori del coefficiente $k$ .....	99
6.4.4	Valori del coefficiente $\lambda$ .....	99
6.4.5	Valori dei dati delle prove sperimentali.....	99
6.4.6	Risultati ottenuti per i tre casi considerati .....	100
6.4.7	Valori di $\sigma_{equiv}$ , $\sigma_{amm}$ e $err_{\%}$ .....	100
6.5.1	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $S_{-1}$ .....	105
6.5.2	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ e della componente media $\sigma_{n,m}$ per $S_0$ .....	105
6.5.3	Valori del coefficiente $k$ .....	106
6.5.4	Valori del coefficiente $\lambda$ .....	106
6.5.5	Valori dei dati delle prove sperimentali.....	106
6.5.6	Risultati ottenuti per i tre casi considerati .....	106
6.5.7	Valori di $\sigma_{equiv}$ , $\sigma_{amm}$ e $err_{\%}$ .....	107
6.6.1	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ per $S_{-1}$ .....	111
6.6.2	Valori della componente alternata $\sigma_{n,a}$ e della componente media $\sigma_{n,m}$ per $S_0$ .....	111
6.6.3	Valori del coefficiente $k$ .....	112
6.6.4	Valori del coefficiente $\lambda$ .....	112
6.6.5	Valori dei dati delle prove sperimentali.....	112
6.6.6	Risultati ottenuti per i tre casi considerati .....	112
6.6.7	Valori di $\sigma_{equiv}$ , $\sigma_{amm}$ e $err_{\%}$ .....	113



# Notazione

$\left. \begin{array}{l} e_{rr} \\ e_{\theta\theta} \\ e_{\beta\beta} \\ e_{r\theta} \end{array} \right\}$	Deformazione in coordinate sferiche
$\left. \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{r\theta} \end{array} \right\}$	Sforzo in coordinate sferiche
$\Delta$	Dilatazione
$u_r$	Spostamento radiale in coordinate sferiche
$u_\theta$	Spostamento angolare lungo $\theta$ in coordinate sferiche
$\phi$	Funzione armonica
$\omega^{(n)}$	Funzione armonica
$\theta$	Angolo sul piano zy
$\beta$	Angolo sul piano xy
$E_b$	Modulo di Young della matrice
$E_t$	Modulo di Young dell'inclusione
$\nu_b$	Coefficiente di Poisson della matrice
$\nu_t$	Coefficiente di Poisson dell'inclusione
$\mu_b$	Costante di Lamè della matrice $\mu_b = \frac{\nu_b E_b}{(1 + \nu_b)(1 - 2\nu_b)}$
$\mu_t$	Costante di Lamè dell'inclusione $\mu_t = \frac{\nu_t E_t}{(1 + \nu_t)(1 - 2\nu_t)}$
$T = \Sigma$	Sollecitazione uniforme lontano dall'inclusione

## Sommario

Lo scopo della tesi riguarda lo sviluppo di un criterio di resistenza a fatica per la ghisa nodulare partendo da un approccio detto mesoscopico, che tiene conto della presenza di noduli di grafite nella struttura del materiale.

Il primo passo è cercare di definire lo stato di sforzo nell'intorno di un'inclusione, in funzione sia della sollecitazione che abbiamo lontano, sia delle proprietà elastiche della matrice che dell'inclusione.

Una volta noto lo stato di sforzo cercheremo di applicare a questo livello della scala mesoscopica un criterio a fatica. Poiché abbiamo espresso gli sforzi mesoscopici in funzione di quelli macroscopici anche il nostro criterio risulterà essere funzione degli sforzi usuali su scala macroscopica.

Nel caso più generale lo sforzo macroscopico può corrispondere ad una matrice degli sforzi piena. Comunque i dati sperimentali disponibili corrispondono a delle sollecitazioni di flessione e torsione, in modo che esistono soltanto le componenti macroscopiche  $\Sigma_{zz}$  e  $\Sigma_{yz}$ .

Andiamo ad affrontare il problema per gradi, prima di tutto consideriamo il caso a trazione lungo l'asse "z" in cui è presente solo lo sforzo  $\Sigma_{zz} = T$  (sforzo uniforme lontano dall'inclusione), tutti gli altri elementi della matrice sono nulli. Lo step successivo è quello di studiare gli effetti di una sola sollecitazione lungo l'asse "y", ci fa comodo che questa sollecitazione sia a compressione, imponiamo quindi  $\Sigma_{yy} = -T$ . Tale condizione, essendo in campo lineare, può essere sovrapposta a quella calcolata precedentemente lungo l'asse "z". In particolare sappiamo che la sovrapposizione di uno stato di sforzo a trazione lungo "z" e di uno a compressione lungo "y" equivale ad uno stato di taglio ruotato di 45°. Procedendo con lo stesso ragionamento al contrario, sappiamo che se vogliamo uno stato di sforzo di taglio nel sistema "xyz", dovremo partire dalla sovrapposizione di uno stato di sforzo a trazione e a compressione nel sistema "x'y'z'" e successivamente ruotarlo di 45° intorno a x'.

La sovrapposizione di quest'ultimo stato di sforzo e del precedente stato di trazione lungo z, crea lo stato di sforzo macroscopico di flessione e torsione  $\Sigma_{zz}$  e  $\Sigma_{yz}$  di interesse nella presente tesi.

L'applicazione ai dati sperimentali raccolti del criterio a fatica proposto ha fornito risultati accettabili anche se esiste un ampio margine di miglioramento.

**Parole chiave:** scala mesoscopica, scala macroscopica, sforzo, fatica, ghisa nodulare

## Abstract

The aim of the thesis is the development of a criterion of fatigue strength for the nodular cast iron. This development is based on a so-called mesoscopic approach, which takes into account the presence of graphite nodules (inclusions) in the micro-structure of nodular cast iron.

The first step is to try to define the stress state in the neighbourhood of such an inclusion as a function of the remote macroscopic stresses and the elastic properties of both the inclusion and the surrounding material (matrix).

Once the local stress state close to the inclusion is known a mesoscopic scale fatigue criterion is introduced.

Given that we expressed the mesoscopic stresses in function of those macroscopic, the fatigue criterion is finally expressed in function of the usual macroscopic scale stresses.

In the most general case the macroscopic stress state can be such that the remote stress matrix is full. However, the available experimental data correspond to a remote stress state of bending and torsion; hence only the macroscopic components  $\Sigma_{zz}$  and  $\Sigma_{yz}$  exist.

To tackle the problem step by step, first we deal with the case of traction along the "z" axis  $\Sigma_{zz} = T$  (uniform stress far from the inclusion) all other elements of the stress matrix being zero.

The next step is to study the effects of a single compressive stress along the "y" axis  $\Sigma_{yy} = -T$ . This condition, since we are dealing with a linear case can be superimposed on the previously calculated along the "z" axis. In particular we know that the superposition of a state of tensile stress along z and a compressive stress along "y" is equivalent to a shear stress state rotated 45°. Proceeding with the same reasoning to the contrary, we know that if we want a state of shear in the system "xyz", we will start from the superposition of a state of tensile stress along z' and a compressive stress along y' in the system "x'y'z'" and afterwards rotate it 45 degrees counter clockwise around x'. The superposition of this last state and of the previous state of remote traction along z creates the most general remote stress state of bending and torsion  $\Sigma_{zz}$  and  $\Sigma_{yz}$  with which we dealt with in the present thesis. The application of the proposed criterion to fatigue test data collected from the literature yielded acceptable predictions, although ample space for improvement exists.

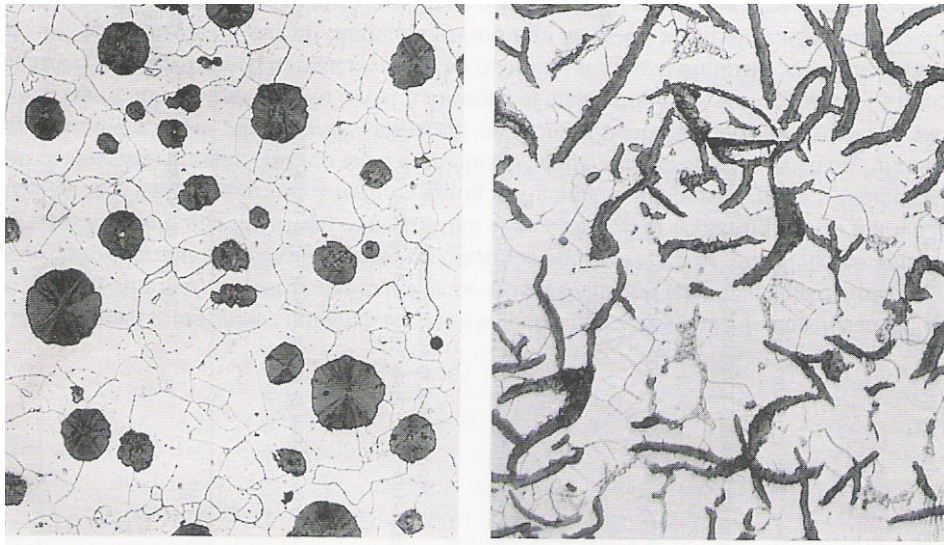
**Keywords:** mesoscopic scale, macroscopic scale, stress, fatigue, nodular cast iron

## Introduzione

La ghisa nodulare è un particolare tipo di ghisa, quindi è una lega di ferro e carbonio. La particolarità sta nel fatto che il carbonio è presente sotto forma di noduli o particelle sferoidali, che vengono ottenute grazie all'aggiunta di piccole quantità di magnesio e di cerio, insieme ad altri elementi che ne esaltano le caratteristiche sferoidizzanti. La matrice che circonda le particelle di carbonio caratterizza la tipologia di ghisa e le relative proprietà meccaniche, in particolare abbiamo 3 tipologie piuttosto comuni:

- Ghisa nodulare ferritica: i noduli sono immersi in una matrice costituita da ferro alfa, ottenuta attraverso un raffreddamento lento; si ottiene una ghisa con buona duttilità e con resistenza a trazione e carico di snervamento paragonabili a quelli di un acciaio non legato. Solitamente si esegue un trattamento termico di ricottura (che avviene al di sotto dell'eutettoide A1, quindi circa a 700° per alcune ore), per aumentare le caratteristiche di duttilità e tenacità.
- Ghisa nodulare ferritico-perlitica: è la forma più frequente in cui si presentano le ghise nodulari, i cui noduli sono immersi in una matrice mista di ferrite e perlite. Si ottiene con un raffreddamento normale del getto, presenta buona lavorabilità e bassi costi di produzione. Le caratteristiche meccaniche sono intermedie tra quelle delle ghise nodulari ferritiche e perlitiche.
- Ghisa nodulare perlitica: la matrice in cui sono immersi i noduli è quasi completamente composta da perlite, ottenuta con un moderato raffreddamento. Presentano elevata resistenza a trazione e all'usura, però sono meno duttili rispetto alle ferritiche, tuttavia a parità di resistenza hanno una migliore lavorabilità degli acciai. I trattamenti termici effettuabili sono: normalizzazione se si vuole mantenere la matrice perlitica e affinarla, oppure ricottura se si vuole passare dalla struttura perlitica a quella ferritica.

Le ghise sono caratterizzate da buone proprietà di fusibilità, quindi sono facilmente lavorabili in fonderia, tuttavia i getti sono piuttosto fragili; la ghisa nodulare, oltre a mantenere la buona fusibilità, produce getti resistenti e molto più duttili rispetto alle ghise classiche, con risultati paragonabili a quelli degli acciai non legati.



**Figura 1.0:** Micrografia ottica Ghisa nodulare ferritica 200x, ghisa grigia 500x

La scala di osservazione dei materiali metallici si divide sostanzialmente in 3 livelli di “profondità”:

- Scala macroscopica usata dagli ingegneri per definire sforzi e deformazioni in un volume elementare;
- Scala microscopica usata dai fisici per osservare dislocazioni, difetti puntuali, atomi mancanti;

In mezzo a queste due scale vi è la scala mesoscopica, dove si osservano i cristalli, i grani materiali e le inclusioni metalliche, che sono proprio il caso da noi preso in esame per la ghisa nodulare.

Fino ad ora il materiale presente in letteratura riguardante il comportamento a fatica delle ghise è espresso tutto in scala macroscopica; (a parte ci sono altri studi, soprattutto quelli di Murakami [1] e Beretta [2], che non riguardano le ghise nodulari ma piuttosto il “cast iron” che presenta dei difetti assomiglianti più a delle cricche che a dei noduli).

Anche per le ghise nodulari gli studi effettuati sono espressi in scala macroscopica, cioè vengono utilizzati gli sforzi e le deformazioni calcolati normalmente, senza però tenere conto della microstruttura del volume elementare, per poi proporre dei criteri e delle equazioni che esprimono la resistenza del materiale; noi scenderemo di un livello cioè effettueremo il nostro studio alla scala mesoscopica.

Le soluzioni dell'equazione di elasticità vengono applicate per individuare l'effetto di disturbo dovuto a piccole inclusioni sferiche, in una situazione che altrimenti presenterebbe uno stato di sforzo uniforme. Il problema di

un'inclusione sferica di materiale elastico, immersa in una matrice anch'essa elastica e sottoposta a una trazione uniforme, è stato risolto da Goodier nel 1933 [3]. Nello stesso articolo viene presentato anche il principio per la soluzione del problema delle sollecitazioni di taglio. Nel presente lavoro, sfruttando il principio di sovrapposizione delle soluzioni elastiche, viene estesa la soluzione di Goodier nel campo delle sollecitazioni complesse, ad esempio per il caso di trazione e taglio. Risultati numerici sono stati trovati per inclusioni gassose (difetti), per inclusioni perfettamente rigide e per sistemi che, ad esempio, possono essere approssimativamente rappresentati da globuli di impurità (grafite) nella ghisa sferoidale.

Per i calcoli, in prima analisi, si supponga che il solido intorno all'inclusione sia di dimensione infinita e soggetto ad uno stato di sforzo uniforme posto a distanza infinita; inoltre il materiale ha proprietà ideali per elasticità, isotropia e omogeneità

Conosciamo in anticipo, grazie al principio di De Saint Venant, che il disturbo sarà solo nell'intorno dell'inclusione; infatti si sa che ad una distanza dall'inclusione di circa 4 volte il diametro della stessa, la distribuzione degli sforzi, che sarebbe uniforme senza l'inclusione, non varia più dell'1%. Di conseguenza i risultati di De Saint Venant sono validi per inclusioni che sono, diciamo, quattro diametri o più lontano da un bordo, da inclusioni o da altri difetti.

La soluzione per il caso delle inclusioni solide potrebbe essere di interesse nello studio di inclusioni non metalliche nei metalli. Gli effetti dovuti alla presenza di sollecitazioni simili, nella misura della resistenza a fatica, non sono facilmente quantificabili.

B.P. Haigh suggerì che l'effetto principale delle inclusioni è rappresentato dalla concentrazione di sforzo che generano e l'azione distruttiva che si crea potrebbe essere incrementata da altri due effetti: l'infragilimento chimico da inclusione e gli sforzi residui locali dovuti alle differenti contrazioni termiche della matrice metallica e dell' inclusioni in fase di raffreddamento (tensioni residue).

Le concentrazioni degli sforzi, per alcuni esempi di particolare interesse sono sviluppate nei seguenti capitoli.

## Capitolo 1

### Identificazione degli sforzi in coordinate sferiche

Descriviamo gli effetti in un'inclusione sferica di raggio  $a$ , soggetta ad uno stato di sforzo uniforme applicato ad una distanza infinita rispetto all'inclusione. Seguendo la soluzione di Goodier [3], ripresa anche da Bilgien [4] troviamo in prima analisi lo stato di sforzo nella matrice e successivamente lo stato di sforzo all'interno dell'inclusione sferica.

La figura 1.1 mostra la geometria del problema in coordinate sferiche, dove gli spostamenti sono limitati ai piani meridiani.

La componente degli spostamenti lungo il raggio  $r$  è denominata  $u_r$  e la componente lungo la direzione angolare  $\theta$  è denominata  $u_\theta$ .

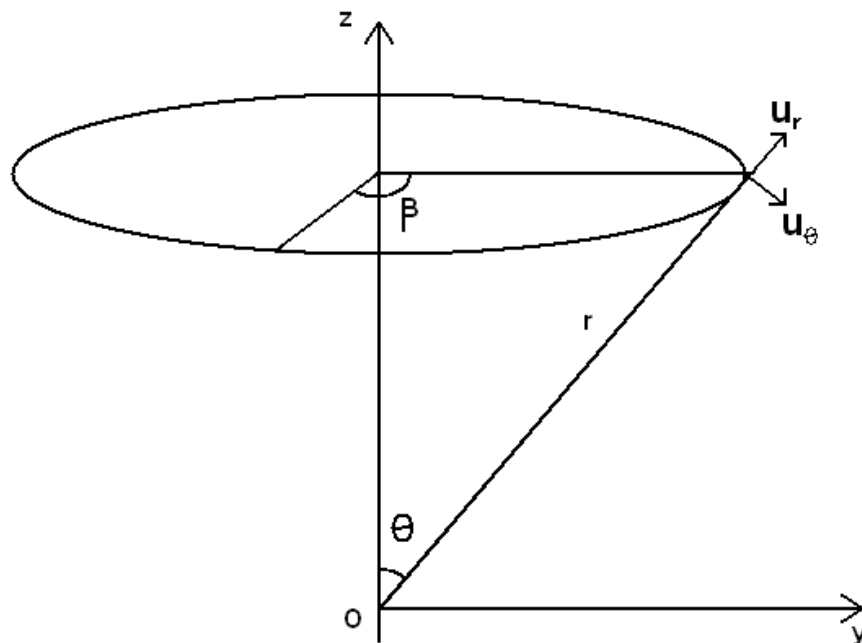


Figura 1.1: Sistema di riferimento in coordinate sferiche

Le componenti delle deformazioni lungo il raggio e lungo la direzione angolare e della deformazione tangenziale sono state trovate dai rispettivi spostamenti usando le seguenti equazioni:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (1.1)$$

La deformazione lungo  $\beta$  è stata calcolata tramite  $e_{\beta\beta} = \Delta - e_{rr} - e_{\theta\theta}$  dove  $\Delta$  è la dilatazione ed equivale alla somma delle tre deformazioni:

$$\Delta = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\beta\beta} \quad (1.2)$$

Le componenti di sforzo sono legate alle componenti di deformazione tramite le equazioni costitutive

$$(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\beta\beta}) = 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta + (e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{\beta\beta}) \right] \quad \sigma_{r\theta} = \mu e_{r\theta} \quad (1.3)$$

dove  $\nu$  è il coefficiente di Poisson e  $\mu$  è il modulo di taglio o costante di Lamè. La soluzione per uno spostamento radiale ed uno angolare è data da due tipi di soluzione.

Il primo deriva dal gradiente di una soluzione armonica  $\phi$ ,

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (1.4)$$

queste soluzioni corrispondono allo spostamento dovuto alla distribuzione della singolarità e sono puramente in direzione radiale. Per tale soluzioni la dilatazione  $\Delta$  nella (1.3) svanisce,  $\Delta = 0$ .

Il secondo tipo di soluzione per gli spostamenti è dato da:

$$u_r = r^2 \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial r} + \alpha_n r \omega^{(n)} \quad u_\theta = r \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial \theta} \quad (1.5)$$

dove  $\omega^{(n)}$  è una funzione omogenea solida armonica di grado  $n$ . Il parametro  $\alpha_n$  viene ottenuto da:

$$\alpha_n = -2 \left( \frac{3n+1-2(2n+1)\nu}{n+5-4\nu} \right) \quad (1.6)$$



e la dilatazione per questa soluzione è data da

$$\Delta = [2n + (3 - n)\alpha_n] \omega^{(n)} \quad (1.7)$$

Per avere lo spostamento globale in direzione radiale e angolare sommiamo i rispettivi spostamenti della (1.4) e della (1.5) così da ottenere:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial r} + \alpha_n r \omega^{(n)} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + r \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial \theta} \quad (1.8)$$

## 1.1 Regione fuori dal contorno sferico: spostamenti, deformazioni e sforzi

Per calcolare la soluzione relativa alla regione fuori dal contorno sferico sono state scelte le seguenti funzioni armoniche:

Per i passaggi matematici presenti in questo paragrafo si rimanda all'appendice A.

$$\phi = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{A_1}{r} + \frac{B_1}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (1.1.1)$$

$$\omega^{(-3)} = \frac{1}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{C_1}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

In cui vengono introdotte le costanti  $A_1$   $B_1$   $C_1$  da determinare successivamente tramite le condizioni al contorno.

Dalla (1.8) si può una volta definite le funzioni armoniche calcolare gli spostamenti.

Definiamo con il pedice “b” la regione fuori dal contorno sferico.

Per prima cosa troviamo la  $u_\theta^b$  sempre dalla (1.8), che vale:

$$u_\theta^b = - \left[ \frac{3}{2} \frac{B_1}{r^4} + \frac{3}{2} \frac{C_1}{r^2} \right] \sin 2\theta$$

Definiamo le costanti  $A_1 = A$ ,  $B_1 = 4B$  e  $C_1 = \frac{4}{3}C$  in modo da ottenere delle funzioni armoniche che valgono:

$$\phi = \frac{A}{r} + \frac{2B}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) \quad \omega^{(-3)} = \frac{2}{3} \frac{C}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) \quad (1.1.2)$$

quindi lo spostamento in direzione angolare  $\theta$  diventa:

$$u_\theta^b = -\left[\frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2}\right] \sin 2\theta \quad (1.1.3)$$

Lo spostamento dovuto alla componente radiale  $u_r^b$  è sempre dato dalla (1.8), come funzioni armoniche consideriamo quelle della (1.1.2)

$$u_r^b = -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} + \frac{C}{3r^2} \left[ \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] + \left[ -\frac{9B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \quad (1.1.4)$$

Una volta trovati gli spostamenti  $u_r^b$  e  $u_\theta^b$  possiamo calcolare le deformazioni  $e_{rr}^b$ ,  $e_{\theta\theta}^b$  e  $e_{r\theta}^b$ .

Calcoliamo le deformazioni dalla (1.1):

$$e_{rr}^b = \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} - \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ \frac{36B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \quad (1.1.5)$$

$$e_{\theta\theta}^b = -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{C}{3r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \left( \frac{1+4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \quad (1.1.6)$$

$$e_{r\theta}^b = \left[ \frac{48B}{r^5} - \frac{(1+\nu_b)}{(1-2\nu_b)} \frac{4C}{r^3} \right] \sin 2\theta \quad (1.1.7)$$

A questo punto si hanno tutte le informazioni per poter calcolare gli sforzi

$\sigma_{rr}^b$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^b$ ,  $\sigma_{\beta\beta}^b$  e  $\sigma_{r\theta}^b$  usando la (1.3).

$$\bullet \quad \sigma_{rr}^b = 2\mu_b \left[ \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta + e_{rr}^b \right] \quad (1.1.8)$$

dato che, come visto in precedenza per la (1.4) il  $\Delta$  svanisce, la dilatazione globale dipende solo dall'armonica (-3):  $\Delta = \Delta_{(-3)}$  per cui bisogna calcolare  $\Delta_{(-3)}$  dalla (1.7), che vale

$$\Delta = \Delta_{(-3)} = -\frac{4C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = -\frac{2C}{r^3} - \frac{6C}{r^3} \cos 2\theta \quad (1.1.9)$$

Resta solo da calcolare  $\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta$  per poi sommarlo a  $e_{rr}^b$  ottenendo:

$$\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta = -\frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \cos 2\theta - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \quad (1.1.10)$$

prendendo la (1.1.10) e la (1.1.5) otteniamo  $\sigma_{rr}^b$ :

$$\sigma_{rr}^b = 2\mu_b \left\{ \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} - \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ \frac{36B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \quad (1.1.11)$$

$$\bullet \quad \sigma_{\theta\theta}^b = 2\mu_b \left[ \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta + e_{\theta\theta}^b \right] \quad (1.1.12)$$

utilizzando la (1.1.10) e la (1.1.6) possiamo calcolare  $\sigma_{\theta\theta}^b$ :

$$\sigma_{\theta\theta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{5}{3} \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (1.1.13)$$

Per il calcolo della  $\sigma_{\beta\beta}^b$  dobbiamo prima ricavare la corrispondente deformazione  $e_{\beta\beta}^b$  partendo dalla (1.2):

$e_{\beta\beta}^b = \Delta - e_{rr}^b - e_{\theta\theta}^b$  quindi sottraiamo alla (1.1.9) la (1.1.5) e la (1.1.6) in modo da ottenere:

$$e_{\beta\beta}^b = -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{8\nu_b - 1}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3}{1 - 2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \quad (1.1.14)$$

$$\bullet \quad \sigma_{\beta\beta}^b = 2\mu_b \left[ \frac{\nu_b}{1 - 2\nu_b} \Delta + e_{\beta\beta}^b \right] \quad (1.1.15)$$

Prendendo la (1.1.10) e la (1.1.14) si ottiene:

$$\sigma_{\beta\beta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (1.1.16)$$

per concludere la caratterizzazione dello stato di sforzo fuori dall'inclusione calcoliamo la  $\sigma_{r\theta}^b$  usando sempre la (1.3). Si tratta di sostituire la (1.1.7) in questa equazione ottenendo:

$$\bullet \quad \sigma_{r\theta}^b = \mu_b \left[ \frac{48B}{r^5} - \left( \frac{1 + \nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{4C}{r^3} \right] \sin 2\theta \quad (1.1.17)$$

## 1.2 Regione dentro al contorno sferico: spostamenti, deformazioni e sforzi

Per calcolare la soluzione nella regione dentro al contorno sferico (identificata col pedice "t), sono state scelte le seguenti funzioni armoniche:

Per i passaggi matematici presenti in questo paragrafo si rimanda all'appendice B.

$$\phi = \frac{1}{2} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{F_1}{2} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\omega^{(2)} = \frac{1}{2} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{G_1}{2} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (1.2.1)$$

più una soluzione idrostatica  $\omega^{(0)} = \text{costante}$

$$\omega^{(0)} = H_1$$

Vengono introdotte le costanti  $H_1$   $F_1$   $G_1$  da determinare successivamente tramite le condizioni al contorno.

Abbiamo tutti gli elementi e si può procedere con il calcolo degli spostamenti.

Lo spostamento dovuto alla componente radiale  $u_r^t$  è sempre dato dalla (1.8), come funzioni armoniche consideriamo quelle scelte nella (1.2.1).

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{1}{2} F_1 r + \left( \frac{3\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 + \left[ \frac{3}{2} F_1 r + \left( \frac{9\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 \right] \cos 2\theta$$

Definiamo le costanti  $F_1 = 2F$   $G_1 = \frac{2(7-4\nu_t)}{3} G$  e  $H_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{5-4\nu_t}{1-2\nu_t} \right) H$  in modo da ottenere delle funzioni armoniche di questo tipo:

$$\phi = Fr^2(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\omega^{(2)} = \frac{(7-4\nu_t)}{3} Gr^2(3\cos^2\theta - 1) \quad (1.2.2)$$

$$\omega^{(0)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{5-4\nu_t}{1-2\nu_t} \right) H$$

Lo spostamento in direzione radiale  $r$  diventa:

$$u_r^t = Hr + Fr + 2G\nu_t r^3 + [3Fr + 6G\nu_t r^3] \cos 2\theta \quad (1.2.3)$$

Troviamo la  $u_\theta^t$  dalla (1.8), che vale:

$$u_\theta = -[3Fr + (7-4\nu_t)r^3 G] \sin 2\theta \quad (1.2.4)$$

Una volta trovati gli spostamenti  $u_r^t$  e  $u_\theta^t$  possiamo calcolare le deformazioni  $e_{rr}^t$ ,  $e_{\theta\theta}^t$  e  $e_{r\theta}^t$ .

Calcoliamo le deformazioni dalla (1.1):

$$e'_{rr} = H + F + 6\nu_t r^2 G + [3F + 18\nu_t r^2 G] \cos 2\theta \quad (1.2.5)$$

$$e'_{\theta\theta} = H + F + 2G\nu_t r^2 + [-3F - 2(7 - 7\nu_t)r^2 G] \cos 2\theta \quad (1.2.6)$$

$$e'_{r\theta} = -[6F + (14 - 4\nu_t)r^2 G] \sin 2\theta \quad (1.2.7)$$

Adesso abbiamo tutte le informazioni per poter ricavare gli sforzi  $\sigma'_{rr}$ ,  $\sigma'_{\theta\theta}$ ,  $\sigma'_{\beta\beta}$  e  $\sigma'_{r\theta}$  dalla (1.3).

$$\bullet \quad \sigma'_{rr} = 2\mu_t \left[ \frac{\nu_t}{1 - 2\nu_t} \Delta + e'_{rr} \right] \quad (1.2.8)$$

la dilatazione globale dipende dall'armoniche (2) e (0), quindi  $\Delta = \Delta_{(0)} + \Delta_{(2)}$ .  
Calcoliamo separatamente  $\Delta_{(0)}$  e  $\Delta_{(2)}$  dalla (1.7)

$$\Delta_{(2)} = \frac{21}{3} (2\nu_t - 1) r^2 G + [21(2\nu_t - 1) r^2 G] \cos 2\theta \quad (1.2.9)$$

$$\Delta_{(0)} = [2*(0) + (3+0)\alpha_0] \omega^{(0)} = \left[ 3(-2) \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right] \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{5-4\nu_t}{1-2\nu_t} H$$

$$\Delta_{(0)} = 3H \quad (1.2.10)$$

sommiamo la (1.2.9) e la (1.2.10)

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_2 = 3H + \frac{21}{3} (2\nu - 1) r^2 G + [21(2\nu - 1) r^2 G] \cos 2\theta$$

Ora calcoliamo  $\frac{\nu_t}{1-2\nu_t} \Delta$  per poi sommarlo a  $e'_{rr}$

$$\frac{\nu_t}{1-2\nu_t} \Delta = 3H \frac{\nu_t}{1-2\nu_t} - 7\nu_t r^2 G - [21\nu_t r^2 G] \cos 2\theta \quad (1.2.11)$$

prendendo la (1.2.11) e la (1.2.5) calcoliamo la  $\sigma_{rr}^t$  :

$$\sigma_{rr}^t = 2\mu_t \left[ H \left( \frac{1+\nu_t}{1-2\nu_t} \right) + F - \nu_t r^2 G + [3F - 3\nu_t r^2 G] \cos 2\theta \right] \quad (1.2.12)$$

- $\sigma_{\theta\theta}^t = 2\mu_t \left[ \frac{\nu_t}{1-2\nu_t} \Delta + e_{\theta\theta}^t \right] \quad (1.2.13)$

prendendo la (1.2.11) e la (1.2.6) calcoliamo la  $\sigma_{\theta\theta}^t$  :

$$\sigma_{\theta\theta}^t = 2\mu_t \left[ \left( \frac{1+\nu_t}{1-2\nu_t} \right) H + F - 5\nu_t r^2 G - [3F + 7(2+\nu_t)r^2 G] \cos 2\theta \right] \quad (1.2.14)$$

- $\sigma_{\beta\beta}^t = \sigma_{\beta\beta}^b$

per concludere la caratterizzazione dello stato di sforzo all'interno dell'inclusione calcoliamo la  $\sigma_{r\theta}^b$  sempre dalla (1.3), quindi sostituiamo la (1.2.7) in questa equazione ottenendo:

- $\sigma_{r\theta}^t = -\mu_t [6F + (14 - 4\nu_t)r^2 G] \sin 2\theta \quad (1.2.15)$

### 1.3 Stato di sforzo uniforme a trazione lungo l'asse z in coordinate sferiche

Sottoponiamo un solido di dimensione “infinita” ad uno sforzo di trazione uniforme lungo l'asse z esprimendolo con le coordinate sferiche rappresentate qui sotto:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_x \sin^2 \theta \cos^2 \beta + \sigma_y \sin^2 \theta \sin^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin^2 \theta \sin \beta \cos \beta + \\ &\quad + 2\sigma_{yz} \sin \theta \cos \theta \sin \beta + 2\sigma_{zx} \sin \theta \cos \theta \cos \beta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_x \cos^2 \theta \cos^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \theta \sin^2 \beta + \sigma_z \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \cos^2 \theta \sin \beta \cos \beta + \\ &\quad - 2\sigma_{yz} \sin \theta \cos \theta \sin \beta - 2\sigma_{zx} \sin \theta \cos \theta \cos \beta \\ \sigma_{\beta\beta} &= \sigma_x \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \cos \beta \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_x \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \beta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta \sin^2 \beta - \sigma_z \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \sin \beta \cos \beta - \sigma_{yz} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin \beta + \\ &\quad - \sigma_{zx} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \cos \beta \\ \sigma_{\theta\beta} &= -\sigma_x \cos \theta \sin \beta \cos \beta + \sigma_y \cos \theta \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} \cos \theta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ &\quad - \sigma_{yz} \sin \theta \cos \beta + \sigma_{zx} \sin \theta \sin \beta \\ \sigma_{\beta r} &= -\sigma_x \sin \theta \sin \beta \cos \beta + \sigma_y \sin \theta \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} \sin \theta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ &\quad + \sigma_{yz} \cos \theta \cos \beta - \sigma_{zx} \cos \theta \sin \beta\end{aligned}$$

l'unico stato di sforzo presente è  $\sigma_z = T$ , quindi

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = T \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_{zx} = 0$$

Sostituendo  $\sigma_z = T$  nella formulazione in coordinate sferiche otteniamo:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= T \cos^2 \theta & \sigma_{\theta\theta} &= T \sin^2 \theta & \sigma_{r\theta} &= -T \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{\beta\beta} &= 0 & \sigma_{\theta\beta} &= 0 & \sigma_{\beta r} &= 0\end{aligned}$$



Ricordando che  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

e che  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$  otteniamo:

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{T}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{T}{2}\sin 2\theta \quad (1.3.1)$$

dalla legge di Hooke ricaviamo le deformazioni :

$$e_r = \frac{1}{E}[\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta})] \quad (1.3.2)$$

sostituendovi gli sforzi trovati in precedenza otteniamo:

$$e_r = \frac{1}{E}[\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}]$$

$$e_r = \frac{1}{E}\left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\cos 2\theta - \nu\frac{T}{2} + \nu\frac{T}{2}\cos 2\theta\right] = \frac{T}{2E}[1 + \cos 2\theta - \nu + \nu\cos 2\theta]$$

$$e_r = \frac{T}{2E}[(1 - \nu) + (1 + \nu)\cos 2\theta] \quad (1.3.3)$$

lo stesso procedimento viene seguito per  $e_\theta$

$$e_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]$$

$$e_\theta = \frac{1}{E}\left[\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\cos 2\theta - \nu\frac{T}{2} - \nu\frac{T}{2}\cos 2\theta\right] = \frac{T}{2E}[1 - \cos 2\theta - \nu - \nu\cos 2\theta]$$

$$e_\theta = \frac{T}{2E}[(1 - \nu) - (1 + \nu)\cos 2\theta] \quad (1.3.4)$$

Dalle deformazioni possiamo risalire agli spostamenti integrando lungo  $r$  per la  $u_r$  e lungo  $\theta$  per la  $u_\theta$

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad u_r = \int_0^r e_r dr$$

$$u_r = \frac{Tr}{2E} [(1-\nu) + (1+\nu) \cos 2\theta] + C_1$$

Per determinare la costante  $C_1$  imponiamo le seguenti condizioni al contorno

$$u_r(r=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$u_r = \frac{Tr}{2E} [(1-\nu) + (1+\nu) \cos 2\theta] \quad (1.3.5)$$

$$e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r e_\theta - u_r \quad \Rightarrow \quad u_\theta = \int_0^\theta r e_\theta d\theta - \int_0^\theta u_r d\theta$$

$$u_\theta = \int_0^\theta \frac{Tr}{2E} [(1-\nu) - (1+\nu) \cos 2\theta] d\theta - \int_0^\theta \frac{Tr}{2E} [(1-\nu) + (1+\nu) \cos 2\theta] d\theta$$

$$u_\theta = \int_0^\theta \frac{Tr}{2E} (1-\nu) d\theta - \int_0^\theta \frac{Tr}{2E} (1+\nu) \cos 2\theta d\theta +$$

$$- \int_0^\theta \frac{Tr}{2E} (1-\nu) d\theta - \int_0^\theta \frac{Tr}{2E} (1+\nu) \cos 2\theta d\theta$$

$$u_\theta = - \int_0^\theta \frac{Tr}{E} (1+\nu) \cos 2\theta d\theta = - \left[ \frac{Tr}{E} (1+\nu) \frac{\sin 2\theta}{2} \right] + C_2$$

Per determinare la costante  $C_2$  imponiamo le seguenti condizioni al contorno

$$u_\theta(r=0) = 0 \quad C_2 = 0$$

$$u_\theta = - \frac{Tr}{2E} (1+\nu) \sin 2\theta \quad (1.3.6)$$

## 1.4 Calcolo delle costanti

Una volta trovati gli spostamenti e gli sforzi possiamo calcolare le costanti A, B, C, F, G e H imponendo le condizioni al contorno per  $r = a$ .

Per i passaggi matematici presenti in questo paragrafo si rimanda all'appendice C.

Il sistema da prendere in considerazione è:

$$\begin{cases} u_r^t = u_r^b + u_r^T \\ u_\theta^t = u_\theta^b + u_\theta^T \\ \sigma_{rr}^t = \sigma_{rr}^b + \sigma_{rr}^T \\ \sigma_{r\theta}^t = \sigma_{r\theta}^b + \sigma_{r\theta}^T \end{cases} \quad (1.4.1)$$

$$u_r^t = u_r^b + u_r^T \quad (1.4.2)$$

$$u_\theta^t = u_\theta^b + u_\theta^T \quad (1.4.3)$$

$$\sigma_{rr}^t = \sigma_{rr}^b + \sigma_{rr}^T \quad (1.4.4)$$

$$\sigma_{r\theta}^t = \sigma_{r\theta}^b + \sigma_{r\theta}^T \quad (1.4.5)$$

La (1.4.2) diventa:

$$\begin{aligned} -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} + \frac{C}{3r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ -\frac{9B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta + \\ + \frac{Tr}{2E} [(1-\nu_b) + (1+\nu_b) \cos 2\theta] = Hr + Fr + 2\nu_t Gr^3 + \\ + (3Fr + 6\nu_t Gr^3) \cos 2\theta \end{aligned}$$

la (1.4.3) diventa:

$$-\left( \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} \right) \sin 2\theta - \frac{Tr}{2E} (1+\nu_b) \sin 2\theta = -[3Fr + (7-4\nu_t)Gr^3] \sin 2\theta$$

la (1.4.4) diventa:

$$2\mu_b \left\{ \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} + \frac{2C}{3r^3} \left( \frac{v_b - 5}{1 - 2v_b} \right) + \left[ \frac{36B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \left( \frac{v_b - 5}{1 - 2v_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\} + \frac{T}{2} (1 + \cos 2\theta) = 2\mu_t \left[ H \left( \frac{1 + v_t}{1 - 2v_t} \right) + F - v_t r^2 G + (3F - 3v_t r^2 G) \cos 2\theta \right]$$

ed infine la (1.4.5) diventa:

$$2\mu_b \left[ \frac{24B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{1 + v_b}{1 - 2v_b} \right) \sin 2\theta \right] - \frac{T}{2} \sin 2\theta = -2\mu_t [3F + (7 - 4v_t)r^2 G] \sin 2\theta$$

Scomponiamo la (1.4.4) e la (1.4.2) in 2 equazioni, in base alla presenza o meno del  $\cos 2\theta$ , la parte senza coseno viene indicata con il singolo apice “'” mentre la parte col coseno col doppio apice “''”

$$\begin{aligned} \frac{4\mu_b A}{r^3} + \frac{24\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{3r^3} \left( \frac{v_b - 5}{1 - 2v_b} \right) + \frac{T}{2} &= \\ &= 2\mu_t H \left( \frac{1 + v_t}{1 - 2v_t} \right) + 2\mu_t F - 2\mu_t v_t r^2 G \end{aligned} \quad (1.4.4')$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{72\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{v_b - 5}{1 - 2v_b} \right) + \frac{T}{2} \right] \cos 2\theta &= \\ &= (6\mu_t F - 6\mu_t v_t r^2 G) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.4.4'')$$

$$\begin{aligned} -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} + \frac{C}{3r^2} \left( \frac{5 - 4v_b}{1 - 2v_b} \right) + \frac{Tr}{2E} (1 - v_b) &= \\ &= Hr + Fr + 2v_t Gr^3 \end{aligned} \quad (1.4.2')$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{Tr}{2E} (1 + v_b) - \frac{9B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{5 - 4v_b}{1 - 2v_b} \right) \right] \cos 2\theta &= \\ &= (3Fr + 6v_t Gr^3) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.4.2'')$$

Ora abbiamo 6 equazioni in 6 incognite senza la dipendenza da  $\theta$ , che sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} + \frac{C}{3r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{Tr}{2E} (1-\nu_b) = Hr + Fr + 2\nu_t Gr^3 \quad (1.4.2') \\ \frac{Tr}{2E} (1+\nu_b) - \frac{9B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) = (3Fr + 6\nu_t Gr^3) \quad (1.4.2'') \\ -\left( \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} \right) - \frac{Tr}{2E} (1+\nu_b) = -[3Fr + (7-4\nu_t)Gr^3] \quad (1.4.3) \\ \frac{4\mu_b A}{r^3} + \frac{24\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{3r^3} \left( \frac{\nu_b-5}{1-2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} = 2\mu_t H \left( \frac{1+\nu_t}{1-2\nu_t} \right) + 2\mu_t F - 2\mu_t \nu_t r^2 G \quad (1.4.4') \\ \frac{72\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{\nu_b-5}{1-2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} = (6\mu_t F - 6\mu_t \nu_t r^2 G) \quad (1.4.4'') \\ 2\mu_b \left[ \frac{24B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] - \frac{T}{2} = -2\mu_t [3F + (7-4\nu_t)r^2 G] \quad (1.4.5) \end{array} \right.$$

Le costanti A, B, C, F, G e H vengono ricavate al contorno dell'inclusione per  $r = a$  con  $a =$  raggio dell'inclusione.

$$A = \left[ \frac{(-1-\nu_b+2\nu_t)\mu_b + (1-2\nu_b+\nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b-\mu_t)}{6\mu_b(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b + (1+\nu_t)\mu_t]} \right] Ta^3 \quad (1.4.6)$$

$$B = \frac{Ta^5(\mu_b-\mu_t)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \quad (1.4.7)$$

$$C = \frac{5Ta^3(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \quad (1.4.8)$$

$$F = \frac{5T(1-\nu_b)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \quad (1.4.9)$$

$$H = \frac{(1 - \nu_b)(1 - 2\nu_t)}{2(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} T \quad (1.4.10)$$

$$G = 0 \quad (1.4.11)$$

## Capitolo 2

### Stato di sforzo a trazione lungo z nell'intorno dell'inclusione

Una volta trovate le costanti, andiamo a sostituirle nelle equazioni delle  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{r\theta}$ , così da definire lo stato di sforzo dentro e fuori l'inclusione.

Quello che a noi interessa è lo stato di sforzo al contorno.

Per i passaggi matematici presenti in questo capitolo si rimanda all'appendice D.

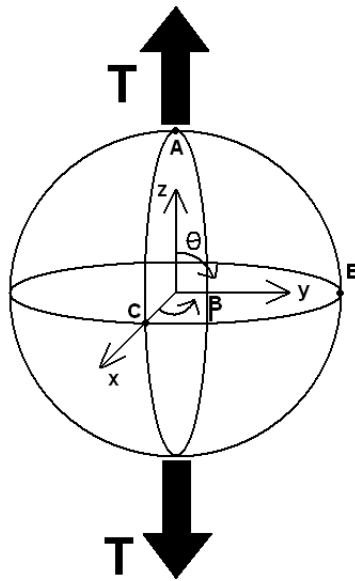


Figura 2.1: Stato di sforzo a trazione lungo z

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^t &= \sigma_{rr}^b + \sigma_{rr}^T \\ \sigma_{\theta\theta}^t &= \sigma_{\theta\theta}^b + \sigma_{\theta\theta}^T \\ \sigma_{\beta\beta}^t &= \sigma_{\beta\beta}^b + \sigma_{\beta\beta}^T \\ \sigma_{r\theta}^t &= \sigma_{r\theta}^b + \sigma_{r\theta}^T \end{cases}$$

## 2.1 Formulazione generale

Troviamo la  $\sigma_{rr}^b$  dalla (1.1.11) sostituendo le costanti A, B e C trovate in precedenza:

$$\sigma_{rr}^b = 2\mu_b \left\{ \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} + \frac{2C}{3r^3} \left( \frac{v_b - 5}{1 - 2v_b} \right) + \left[ \frac{36B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \left( \frac{v_b - 5}{1 - 2v_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\}$$

svolgendo i passaggi arriviamo ad ottenere:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4[(-1 - v_b + 2v_t)\mu_b + (1 - 2v_b + v_t)\mu_t + 2v_b v_t (\mu_b - \mu_t)]}{6(1 + v_b)[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t][(2 - 4v_t)\mu_b + (1 + v_t)\mu_t]} \right] \times \right. \\ \times \frac{[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t]}{6(1 + v_b)[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t][(2 - 4v_t)\mu_b + (1 + v_t)\mu_t]} + \\ \left. + \frac{5(\mu_b - \mu_t)(v_b - 5)(1 + v_b)[(2 - 4v_t)\mu_b + (1 + v_t)\mu_t]}{6(1 + v_b)[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t][(2 - 4v_t)\mu_b + (1 + v_t)\mu_t]} \right] + \\ + \frac{a^5}{r^5} \frac{12(\mu_b - \mu_t)}{4[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t]} + \\ + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b - \mu_t)}{[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(v_b - 5)}{2[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\} \end{aligned}$$

lo stato di sforzo uniforme lontano dall'inclusione vale:

$$\sigma_{rr}^T = \frac{T}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sigma_{rr}^t = \sigma_{rr}^b + \sigma_{rr}^T$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^t = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4[(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)]}{6(1+v_b)[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t][(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \times \right. \right. \\
\times \frac{[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]}{6(1+v_b)[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t][(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} + \\
+ \left. \frac{5(\mu_b-\mu_t)(v_b-5)(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]}{6(1+v_b)[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t][(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] + \\
+ \frac{a^5}{r^5} \frac{12(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
+ \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b-\mu_t)}{[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \right. \\
\left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(v_b-5)}{2[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\} + \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Troviamo la  $\sigma_{\theta\theta}^b$  dalla (1.1.13) e sostituendo le costanti A, B, C:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{5C}{3r^3} + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{\theta\theta}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)]}{12(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t][(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \times \right. \right. \\
\times \frac{[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]}{12(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t][(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
+ \left. \frac{25(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]}{12(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t][(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] + \\
- \frac{a^5}{r^5} \frac{3(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
+ \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{21(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right. \\
\left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\}
\end{aligned}$$

lo stato di sforzo uniforme vale:

$$\sigma_{\theta\theta}^T = \frac{T}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^t = \sigma_{\theta\theta}^b + \sigma_{\theta\theta}^T$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^t = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1 - \nu_b + 2\nu_t)\mu_b + (1 - 2\nu_b + \nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b - \mu_t)]}{12(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t][(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \times \right. \right. \\ \times \frac{[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]}{12(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t][(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \\ \left. \left. + \frac{25(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]}{12(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t][(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] + \right. \\ \left. - \frac{a^5}{r^5} \frac{3(\mu_b - \mu_t)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \left[ - \frac{a^5}{r^5} \frac{21(\mu_b - \mu_t)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\} + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Troviamo la  $\sigma_{\beta\beta}^b$  (1.1.16) e sostituendo anche qui le costanti A, B, C:

$$\sigma_{\beta\beta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^b = T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1-\nu_b+2\nu_t)\mu_b+(1-2\nu_b+\nu_t)\mu_t+2\nu_b\nu_t(\mu_b-\mu_t)]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \times \right. \right. \\ \times \frac{[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \\ \left. - \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] - \\ - \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \\ - \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{15(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right]^+ \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{15(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\}$$

dato che la  $\sigma_{\beta\beta}^T = 0$  si ha che:

$$\sigma_{\beta\beta}^t = \sigma_{\beta\beta}^b + \sigma_{\beta\beta}^T = \sigma_{\beta\beta}^b$$

$$\sigma_{\beta\beta}^t = T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1-\nu_b+2\nu_t)\mu_b+(1-2\nu_b+\nu_t)\mu_t+2\nu_b\nu_t(\mu_b-\mu_t)]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \times \right. \right. \\ \times \frac{[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \\ \left. - \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] - \\ - \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \\ - \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{15(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right]^+ \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{15(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\} \quad (2.1.3)$$

Troviamo la  $\sigma_{r\theta}^b$  (1.1.17) sostituendo le costanti B e C:

$$\sigma_{r\theta}^b = \mu_b \left[ \frac{48B}{r^5} - \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{4C}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{6(\mu_b - \mu_t)}{[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(1+\nu_b)}{2[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \sin 2\theta$$

lo stato di sforzo uniforme vale:

$$\sigma_{r\theta}^T = -\frac{T}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^t = \sigma_{r\theta}^b + \sigma_{r\theta}^T$$

$$\sigma_{r\theta}^t = T \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{6(\mu_b - \mu_t)}{[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(1+\nu_b)}{2[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \sin 2\theta - \frac{T}{2} \sin 2\theta \quad (2.1.4)$$

Fin qui abbiamo trovato la soluzione generale delle  $\sigma_{rr}^t, \sigma_{\theta\theta}^t, \sigma_{\beta\beta}^t$  e  $\sigma_{r\theta}^t$ , in funzione di “r”.

## 2.2 Microcavità

Consideriamo adesso il caso della “**microcavità**”, cioè quando  $\mu_t = 0$  e  $\nu_t = 0$ . Sostituiamo questi valori nelle  $\sigma_{rr}^t, \sigma_{\theta\theta}^t, \sigma_{\beta\beta}^t$  e  $\sigma_{r\theta}^t$ , considerando  $r = a$ .

La  $\sigma_{rr}^t$  è data dalla somma dello sforzo fuori dall'inclusione e dello sforzo uniforme per cui si somma la (D10) e la (1.3.1) e si ottiene:

$$\sigma_{rr}^t = 0 \quad (2.2.1)$$

per qualsiasi valore di  $\theta$ .

Analogamente per ottenere la  $\sigma_{\theta\theta}^t$  sommiamo la (D12) e la (1.3.1):

$$\sigma_{\theta\theta}^t = T \left\{ \frac{12 - 15\nu_b}{2(7 - 5\nu_b)} - \frac{15}{2(7 - 5\nu_b)} \cos 2\theta \right\} \quad (2.2.2)$$

La  $\sigma_{\beta\beta}^t$  risulta essere uguale alla  $\sigma_{\beta\beta}^b$  della (D14) in quanto lo sforzo uniforme  $\sigma_{\beta\beta}^T = 0$  quindi:

$$\sigma_{\beta\beta}^t = -T \left\{ \frac{3}{2(7 - 5\nu_b)} + \frac{15\nu_b}{2(7 - 5\nu_b)} \cos 2\theta \right\} \quad (2.2.3)$$

La  $\sigma_{r\theta}^t$  è data dalla somma della (D15) e della (1.3.1) così da ottenere

$$\sigma_{r\theta}^t = 0 \quad (2.2.4)$$

per qualsiasi valore di  $\theta$ .

## 2.3 Inclusione perfettamente rigida

Consideriamo adesso il caso della “**inclusione perfettamente rigida**”, che è un caso puramente teorico, dove la resistenza del nodulo risulta essere infinita, infatti si considera  $\frac{\mu_b}{\mu_t} \rightarrow 0$ .

Quindi sostituiamo questi valori nelle  $\sigma_{rr}^t, \sigma_{\theta\theta}^t, \sigma_{\beta\beta}^t$  e  $\sigma_{r\theta}^t$ .

La  $\sigma_{rr}^t$  è data dalla somma dello sforzo fuori dall'inclusione e dello sforzo uniforme per cui si sommano la (D17) e la (1.3.1):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^t &= \left[ \frac{75\nu_b^2 - 102\nu_b + 39}{6(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] T - \left[ \frac{7 - 5\nu_b}{2(8 - 10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta + \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{rr}^t &= \left[ \frac{75\nu_b^2 - 102\nu_b + 39}{6(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} + \frac{1}{2} \right] T - \left[ \frac{7 - 5\nu_b}{2(8 - 10\nu_b)} - \frac{1}{2} \right] T \cos 2\theta \\ \sigma_{rr}^t &= \left[ \frac{75\nu_b^2 - 84\nu_b + 57 - 18 - 18\nu_b + 24 - 30\nu_b + 24\nu_b - 30\nu_b^2}{6(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] T + \\ &\quad - \left[ \frac{18 + 5\nu_b - 25 - 8 + 10\nu_b}{2(8 - 10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta \\ \sigma_{rr}^t &= \left[ \frac{45\nu_b^2 - 108\nu_b + 63}{6(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] T + \left[ \frac{15(1 - \nu_b)}{2(8 - 10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta \\ \sigma_{rr}^t &= T \left[ \frac{45\nu_b^2 - 108\nu_b + 63}{6(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} + \frac{15(1 - \nu_b)}{2(8 - 10\nu_b)} \cos 2\theta \right] \tag{2.3.1}\end{aligned}$$

Analogamente per ottenere la  $\sigma_{\theta\theta}^t$  sommiamo la (D19) e la (1.3.1):

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^t &= \left[ \frac{-30\nu_b^2 + 138\nu_b - 48}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] T + \left[ \frac{16 + 10\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}^t &= \left[ \frac{-30\nu_b^2 + 138\nu_b - 48}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} + \frac{1}{2} \right] T + \left[ \frac{16 + 10\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} - \frac{1}{2} \right] T \cos 2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^t &= \left[ \frac{-30\nu_b^2 + 138\nu_b - 48 + 48 - 60\nu_b + 48\nu_b - 60\nu_b^2}{12(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] T + \\ &+ \left[ \frac{16 + 10\nu_b - 16 + 20\nu_b}{4(8-10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}^t &= -T \left[ \frac{90\nu_b^2 - 126\nu_b}{12(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} - \frac{30\nu_b}{4(8-10\nu_b)} \cos 2\theta \right]\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

La  $\sigma_{\beta\beta}^t$  risulta essere uguale alla  $\sigma_{\beta\beta}^b$  della (D21) in quanto lo sforzo uniforme  $\sigma_{\beta\beta}^T = 0$ .

$$\sigma_{\beta\beta}^t = -T \left[ \frac{90\nu_b^2 - 126\nu_b}{12(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} - \frac{30\nu_b}{4(8-10\nu_b)} \cos 2\theta \right]\quad (2.3.3)$$

La  $\sigma_{r\theta}^t$  è data dalla somma della (D22) e della (1.3.1):

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^t &= -T \left( \frac{7-5\nu_b}{2(8-10\nu_b)} \right) \sin 2\theta - \frac{T}{2} \sin 2\theta \\ \sigma_{r\theta}^t &= -T \left( \frac{7-5\nu_b}{2(8-10\nu_b)} + \frac{1}{2} \right) \sin 2\theta \\ \sigma_{r\theta}^t &= -T \left( \frac{7-5\nu_b + 8-10\nu_b}{2(8-10\nu_b)} \right) \sin 2\theta \\ \sigma_{r\theta}^t &= -T \left( \frac{15(1-\nu_b)}{2(8-10\nu_b)} \right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (2.3.4)$$

Ad ora abbiamo trovato il valore degli sforzi in coordinate sferiche nel caso generale cioè in funzione di  $\mu_b, \mu_t, \nu_b$  e  $\nu_t$ , sia per il caso di microcavità  $\mu_t = 0$  e  $\nu_t = 0$  che per il caso di inclusione perfettamente rigida  $\frac{\mu_b}{\mu_t} \rightarrow 0$ .

## 2.4 Passaggio da coordinate sferiche a cartesiane

Passiamo dagli sforzi  $\sigma_{rr}^t, \sigma_{\theta\theta}^t, \sigma_{\beta\beta}^t$  e  $\sigma_{r\theta}^t$  in coordinate sferiche a quelli in coordinate cartesiane nel sistema x,y,z.

$$[\sigma_{r\theta\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^t & \sigma_{r\theta}^t & 0 \\ \sigma_{r\theta}^t & \sigma_{\theta\theta}^t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\beta\beta}^t \end{bmatrix} \rightarrow [\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Per passare dalle coordinate sferiche a quelle cartesiane moltiplichiamo la matrice  $[\sigma_{r\theta\beta}]$  per una matrice  $[R]$  di rotazione e per la sua trasposta  $[R^T]$

$$[R] = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \cos \theta \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \sin \beta & \cos \beta \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R^T] = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \beta & \cos \theta \sin \beta & -\sin \theta \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = [R] \times [\sigma_{r\theta\beta}] \times [R^T]$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \cos \theta \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \sin \beta & \cos \beta \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^t & \sigma_{r\theta}^t & 0 \\ \sigma_{r\theta}^t & \sigma_{\theta\theta}^t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\beta\beta}^t \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \beta & \cos \theta \sin \beta & -\sin \theta \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix}$$



$$\left[ \sigma_{xyz} \right] = \begin{bmatrix}
 \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \cos^2 \beta + & \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin \beta \cos \beta + & \\
 + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \cos^2 \beta + & + \sigma_{\theta\theta}^t \sin \beta \cos^2 \theta \cos \beta + & (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \sin \beta \cos \theta + \\
 + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta \cos^2 \beta + & + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin \beta \cos \theta \cos \beta + & + \sigma_{r\theta}^t \cos \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 + \sigma_{\beta\beta}^t \sin^2 \beta & - \sigma_{\beta\beta}^t \sin \beta \cos \beta & \\
 \\
 \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin \beta \cos \beta + & \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin^2 \beta + & \\
 + \sigma_{\theta\theta}^t \sin \beta \cos^2 \theta \cos \beta + & + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \sin^2 \beta + & (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \cos \theta \sin \beta + \\
 + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin \beta \cos \theta \cos \beta + & + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin^2 \beta \cos \theta + & + \sigma_{r\theta}^t \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 - \sigma_{\beta\beta}^t \sin \beta \cos \beta & + \sigma_{\beta\beta}^t \cos^2 \beta & \\
 \\
 (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \sin \beta \cos \theta + & (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \cos \theta \sin \beta + & \sigma_{rr}^t \cos^2 \theta + \\
 + \sigma_{r\theta}^t \cos \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & + \sigma_{r\theta}^t \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & + \sigma_{\theta\theta}^t \sin^2 \theta + \\
 & & - 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta
 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \cos^2 \beta + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \cos^2 \beta + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta \cos^2 \beta + \sigma_{\beta\beta}^t \sin^2 \beta$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin^2 \beta + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \sin^2 \beta + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin^2 \beta \cos \theta + \sigma_{\beta\beta}^t \cos^2 \beta$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr}^t \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta}^t \sin^2 \theta - 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin \beta \cos \beta + \sigma_{\theta\theta}^t \sin \beta \cos^2 \theta \cos \beta + \\
 &+ 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin \beta \cos \theta \cos \beta - \sigma_{\beta\beta}^t \sin \beta \cos \beta
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \sin \beta \cos \theta + \sigma_{r\theta}^t \cos \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \cos \theta \sin \beta + \sigma_{r\theta}^t \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

## 2.4.1 Calcolo dei punti notevoli per microcavità

Sulla sfera si possono individuare dei punti notevoli, che sono: A( $\theta=0$ ;  $\beta=90$ ), B( $\theta=90$ ;  $\beta=90$ ) e C( $\theta=90$ ;  $\beta=0$ ). Ricaviamo i valori degli sforzi in coordinate cartesiane per il caso della microcavità:

- A ( $\theta=0$ ;  $\beta=90$ )

$$\sigma_{xx} = -\frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma_{yy} = -\frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma_{zz} = 0$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa:

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} -\frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- B( $\theta=90$ ;  $\beta=90$ )

$$\sigma_{xx} = \frac{15\nu_b - 3}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{zz} = \frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \frac{15\nu_b - 3}{2(7-5\nu_b)}T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \end{bmatrix}$$

- C( $\theta=90$ ;  $\beta=0$ )

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \sigma_{yy} = \frac{15\nu_b - 3}{2(7 - 5\nu_b)} T \quad \sigma_{zz} = \frac{27 - 15\nu_b}{2(7 - 5\nu_b)} T$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.  
La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15\nu_b - 3}{2(7 - 5\nu_b)} T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27 - 15\nu_b}{2(7 - 5\nu_b)} T \end{bmatrix}$$

## 2.4.2 Calcolo dei punti notevoli per inclusione rigida

Ricaviamo i valori degli sforzi in coordinate cartesiane per i punti notevoli A( $\theta=0$ ;  $\beta=90$ ) B( $\theta=90$ ;  $\beta=90$ ) e C( $\theta=90$ ;  $\beta=0$ ) nel caso di inclusione rigida,

- A ( $\theta=0$ ;  $\beta=90$ )

$$\sigma_{xx} = T \left[ \frac{126\nu_b - 90\nu_b^2}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} + \frac{30\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} \right] = \left[ \frac{126\nu_b - 90\nu_b^2 + 90\nu_b + 90\nu_b^2}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = T \left[ \frac{216\nu_b}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = T \left[ \frac{18\nu_b}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = T \left[ \frac{126\nu_b - 90\nu_b^2}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} + \frac{30\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} \right] = \left[ \frac{126\nu_b - 90\nu_b^2 + 90\nu_b + 90\nu_b^2}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = T \left[ \frac{216v_b}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = \left[ \frac{45v_b^2 - 108v_b + 63}{6(1+v_b)(8-10v_b)} + \frac{15(1-v_b)}{2(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{zz} = \left[ \frac{45v_b^2 - 108v_b + 63 + 45 - 45v_b^2}{6(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{zz} = \left[ \frac{108 - 108v_b}{6(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{zz} = \left[ \frac{18(1-v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[ \frac{18(1-v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T \end{bmatrix}$$

- B( $\theta=90$ ;  $\beta=90$ )

$$\sigma_{xx} = T \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} - \frac{30v_b}{4(8-10v_b)} \right] = \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2 - 90v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{xx} = -T \left[ \frac{12(15v_b^2 - 3v_b)}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{xx} = -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \left[ \frac{45v_b^2 - 108v_b + 63}{6(1+v_b)(8-10v_b)} - \frac{15(1-v_b)}{2(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{yy} = \left[ \frac{45v_b^2 - 108v_b + 63 - 45 + 45v_b^2}{6(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{yy} = \left[ \frac{90v_b^2 - 108v_b + 18}{6(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{yy} = \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{zz} = T \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} - \frac{30v_b}{4(8-10v_b)} \right] = \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2 - 90v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -T \left[ \frac{12(15v_b^2 - 3v_b)}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.  
La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix}$$

- $C(\theta=90; \beta=0)$

$$\sigma_{xx} = \left[ \frac{45v_b^2 - 108v_b + 63}{6(1+v_b)(8-10v_b)} - \frac{15(1-v_b)}{2(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{xx} = \left[ \frac{45v_b^2 - 108v_b + 63 - 45 + 45v_b^2}{6(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{xx} = \left[ \frac{90v_b^2 - 108v_b + 18}{6(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{xx} = \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T$$

$$\sigma_{yy} = T \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} - \frac{30v_b}{4(8-10v_b)} \right] = \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2 - 90v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = -T \left[ \frac{12(15v_b^2 - 3v_b)}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = T \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} - \frac{30v_b}{4(8-10v_b)} \right] = \left[ \frac{126v_b - 90v_b^2 - 90v_b - 90v_b^2}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -T \left[ \frac{12(15v_b^2 - 3v_b)}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix}$$

## Capitolo 3

### Stato di sforzo a compressione lungo $y$ nell'intorno dell'inclusione

Per calcolare lo stato di sforzo a compressione lungo “ $y$ ”, consideriamo un sistema di riferimento “ $x'y'z'$ ” ruotato di  $90^\circ$  in senso orario rispetto al sistema “ $xyz$ ”

La compressione lungo “ $y$ ” del vecchio sistema “ $xyz$ ” avviene adesso lungo “ $z'$ ” del nuovo sistema “ $x'y'z'$ ”.

Quindi lo stato di sforzo nel sistema “ $x'y'z'$ ” è uguale allo stato di sforzo del  $xyz$  a meno del segno in quando nel sistema “ $xyz$ ” consideriamo uno sforzo lontano uniforme a trazione mentre nel sistema “ $x'y'z'$ ” lo sforzo è a compressione.

Nel sistema “ $x'y'z'$ ” indichiamo gli sforzi con l'apice “'” per fare la distinzione con il sistema “ $xyz$ ”.

Ora vediamo gli sforzi in coordinate polari  $r', \theta'$  e  $\beta'$ .

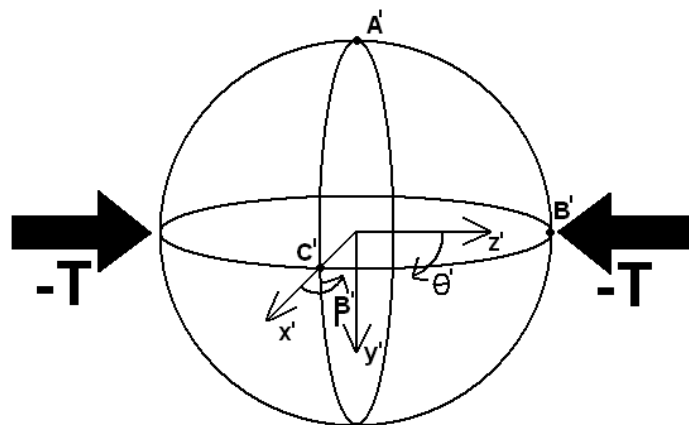


Figura 3.1: Stato di sforzo a compressione lungo  $z'$



### 3.1 Formulazione Generale

La soluzione generale risulta essere uguale a quella del caso a trazione lungo “z” a meno del segno di T, in quanto lo stato di sforzo in questione è a compressione. Calcoliamo le  $\sigma'_{rr}$ ,  $\sigma'_{\theta\theta}$ ,  $\sigma'_{\beta\beta}$  e  $\sigma'_{r\theta}$  dalle  $\sigma_{rr}^t$  (2.1.1),  $\sigma_{\theta\theta}^t$  (2.1.2),  $\sigma_{\beta\beta}^t$  (2.1.3) e  $\sigma_{r\theta}^t$  (2.1.4) che sono uguali ma di segno opposto visto che lo stato in esame è a compressione:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} = -T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4[(-1 - \nu_b + 2\nu_t)\mu_b + (1 - 2\nu_b + \nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b - \mu_t)]}{6(1 + \nu_b)[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t][(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} \right] \times \right. \\ \times \frac{[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]}{6(1 + \nu_b)[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t][(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} + \\ \left. + \frac{5(\mu_b - \mu_t)(\nu_b - 5)(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]}{6(1 + \nu_b)[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t][(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} \right] + \\ + \frac{a^5}{r^5} \frac{12(\mu_b - \mu_t)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \\ + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b - \mu_t)}{[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(\nu_b - 5)}{2[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\} + \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{\theta\theta} = -T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1 - \nu_b + 2\nu_t)\mu_b + (1 - 2\nu_b + \nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b - \mu_t)]}{12(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t][(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] \times \right. \\ \times \frac{[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]}{12(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t][(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \\ \left. + \frac{25(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]}{12(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t][(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] + \\ - \frac{a^5}{r^5} \frac{3(\mu_b - \mu_t)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \\ + \left[ - \frac{a^5}{r^5} \frac{21(\mu_b - \mu_t)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right. \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\} + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned}
\sigma''_{\beta\beta} = -T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1-\nu_b+2\nu_t)\mu_b+(1-2\nu_b+\nu_t)\mu_t+2\nu_b\nu_t(\mu_b-\mu_t)]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \times \right. \\
\left. \times \frac{[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] - \\
\left. - \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{15(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right]^+ \right. \\
\left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{15(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right\} \cos 2\theta \quad (3.1.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma''_{r\theta} = T \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{6(\mu_b-\mu_t)}{[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\
\left. - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1+\nu_b)}{2[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \sin 2\theta - \frac{T}{2} \sin 2\theta \quad (3.1.4)
\end{aligned}$$

### 3.2 Microcavità – Inclusione perfettamente rigida

Anche per la “microcavità” gli sforzi a compressione lungo “z” sono uguali al caso a trazione lungo “z” a meno del segno, quindi prendiamo la (2.2.1), la (2.2.2), la (2.2.3) e la (2.2.4) cambiate di segno:

$$\begin{aligned}
\sigma''_{rr} &= 0 \\
\sigma''_{\theta\theta} &= -T \left\{ \frac{12-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} - \frac{15}{2(7-5\nu_b)} \cos 2\theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\sigma''_{\beta\beta} = T \left\{ \frac{3}{2(7-5\nu_b)} + \frac{15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma''_{r\theta} = 0$$

La stessa situazione si presenta per “l’inclusione perfettamente rigida” in cui gli sforzi a compressione lungo “z” sono uguali al caso a trazione lungo “z” a meno del segno, quindi prendiamo la (2.3.1), la (2.3.2), la (2.3.3) e la (2.3.4) cambiate di segno:

$$\sigma'_{rr} = -T \left[ \frac{45\nu_b^2 - 108\nu_b + 63}{6(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} + \frac{15(1 - \nu_b)}{2(8 - 10\nu_b)} \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = T \left[ \frac{90\nu_b^2 - 126\nu_b}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} - \frac{30\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma'_{\beta\beta} = T \left[ \frac{90\nu_b^2 - 126\nu_b}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} - \frac{30\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma'_{r\theta} = T \left( \frac{15(1 - \nu_b)}{2(8 - 10\nu_b)} \right) \sin 2\theta$$

Una volta trovati gli sforzi per il caso della “microcavità” e “dell’inclusione perfettamente rigida” in coordinate sferiche  $r', \theta'$  e  $\beta'$ , passiamo alle coordinate cartesiane “x'y'z'”.

Il procedimento è identico a quello fatto nel caso della trazione lungo “z”

### 3.3 Passaggio da coordinate sferiche a cartesiane

Passaggio dagli sforzi  $\sigma'_{rr}, \sigma'_{\theta\theta}, \sigma'_{\beta\beta}$  e  $\sigma'_{r\theta}$  in coordinate sferiche a quelli in coordinate cartesiane nel sistema “xyz”.

$$[\sigma_{r\theta\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma'_{rr} & \sigma'_{r\theta} & 0 \\ \sigma'_{r\theta} & \sigma'_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{\beta\beta} \end{bmatrix} \rightarrow [\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Per passare dalle coordinate sferiche a quelle cartesiane moltiplichiamo la matrice  $[\sigma_{r\theta\beta}]$  per una matrice  $[R]$  di rotazione e per la sua trasposta  $[R^T]$

$$[R] = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \cos \theta \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \sin \beta & \cos \beta \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R^T] = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \beta & \cos \theta \sin \beta & -\sin \theta \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = [R] \times [\sigma_{r\theta\beta}] \times [R^T]$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \cos \theta \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \sin \beta & \cos \beta \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^t & \sigma_{r\theta}^t & 0 \\ \sigma_{r\theta}^t & \sigma_{\theta\theta}^t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\beta\beta}^t \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta & \sin \theta \sin \beta & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \beta & \cos \theta \sin \beta & -\sin \theta \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \sigma_{xyz} \right] = \begin{bmatrix}
 \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \cos^2 \beta + & \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin \beta \cos \beta + & \\
 + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \cos^2 \beta + & + \sigma_{\theta\theta}^t \sin \beta \cos^2 \theta \cos \beta + & (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \sin \beta \cos \theta + \\
 + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta \cos^2 \beta + & + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin \beta \cos \theta \cos \beta + & + \sigma_{r\theta}^t \cos \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 + \sigma_{\beta\beta}^t \sin^2 \beta & - \sigma_{\beta\beta}^t \sin \beta \cos \beta & \\
 \\
 \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin \beta \cos \beta + & \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin^2 \beta + & \\
 + \sigma_{\theta\theta}^t \sin \beta \cos^2 \theta \cos \beta + & + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \sin^2 \beta + & (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \cos \theta \sin \beta + \\
 + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin \beta \cos \theta \cos \beta + & + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin^2 \beta \cos \theta + & + \sigma_{r\theta}^t \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 - \sigma_{\beta\beta}^t \sin \beta \cos \beta & + \sigma_{\beta\beta}^t \cos^2 \beta & \\
 \\
 (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \sin \beta \cos \theta + & (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \cos \theta \sin \beta + & \sigma_{rr}^t \cos^2 \theta + \\
 + \sigma_{r\theta}^t \cos \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & + \sigma_{r\theta}^t \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & + \sigma_{\theta\theta}^t \sin^2 \theta + \\
 & & - 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta
 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \cos^2 \beta + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \cos^2 \beta + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta \cos^2 \beta + \sigma_{\beta\beta}^t \sin^2 \beta$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin^2 \beta + \sigma_{\theta\theta}^t \cos^2 \theta \sin^2 \beta + 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin^2 \beta \cos \theta + \sigma_{\beta\beta}^t \cos^2 \beta$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr}^t \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta}^t \sin^2 \theta - 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \sigma_{rr}^t \sin^2 \theta \sin \beta \cos \beta + \sigma_{\theta\theta}^t \sin \beta \cos^2 \theta \cos \beta + \\ &+ 2\sigma_{r\theta}^t \sin \theta \sin \beta \cos \theta \cos \beta - \sigma_{\beta\beta}^t \sin \beta \cos \beta \end{aligned}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \sin \beta \cos \theta + \sigma_{r\theta}^t \cos \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = (\sigma_{rr}^t - \sigma_{\theta\theta}^t) \sin \theta \cos \theta \sin \beta + \sigma_{r\theta}^t \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

### 3.3.1 Calcolo dei punti notevoli per microcavità

Calcoliamo gli sforzi nel sistema “x'y'z'” nei punti notevoli A'( $\theta=-90$ ;  $\beta=90$ ) B'( $\theta=$ ;  $\beta=90$ ) e C'( $\theta=90$ ;  $\beta=0$ ) per la “microcavità”

Il punto  $A'(\theta=-90; \beta=90)$  è uguale al punto  $B(\theta=90; \beta=90)$  del sistema “xyz”, i valori risultano essere uguali alla compressione, si ha quindi:

- $A'(\theta=-90; \beta=90)$

$$\sigma'_{xx} = \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma'_{yy} = 0 \quad \sigma'_{zz} = -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma'_{xyz}] = \begin{bmatrix} \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \end{bmatrix}$$

In  $B'(\theta=0; \beta=90)$  è uguale al punto  $A(\theta=0; \beta=90)$  del sistema “xyz”, i valori risultano essere uguali alla compressione, si ha quindi:

- $B'(\theta=0; \beta=90)$

$$\sigma'_{xx} = \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma'_{yy} = \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma'_{zz} = 0$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma'_{xyz}] = \begin{bmatrix} \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In  $C'(\theta=90; \beta=0)$  è uguale al punto  $C(\theta=90; \beta=0)$  del sistema “xyz”, i valori risultano essere uguali alla compressione, si ha quindi:

- $C'(\theta=90; \beta=0)$

$$\sigma'_{xx} = 0 \quad \sigma'_{yy} = \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T \quad \sigma'_{zz} = -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma'_{xyz}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T \end{bmatrix}$$

### 3.3.2 Calcolo dei punti notevoli per inclusione rigida

Per i punti notevoli  $A'(\theta=-90, \beta=90)$   $B'(\theta=0, \beta=90)$  e  $C'(\theta=90, \beta=0)$  nel caso di inclusione rigida, ricaviamo i valori degli sforzi in coordinate cartesiane

Il punto  $A'(\theta=-90; \beta=90)$  è uguale al punto  $B(\theta=90; \beta=90)$  del sistema “xyz”, i valori risultano essere uguali alla compressione, si ha quindi:

- $A'(\theta=-90; \beta=90)$

$$\sigma'_{xx} = T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma'_{yy} = -T \left[ \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma'_{zz} = T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.  
La matrice degli sforzi diventa:

$$[\sigma'_{xyz}] = \begin{bmatrix} T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & -T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right] \end{bmatrix}$$

In B'( $\theta=0$ ;  $\beta=90$ ) è uguale al punto A( $\theta=0$ ;  $\beta=90$ ) del sistema “xyz”, i valori risultano essere uguali alla compressione, si ha quindi:

- B'( $\theta=0$ ;  $\beta=90$ )

$$\sigma'_{xx} = -T \left[ \frac{18v_b}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right]$$

$$\sigma'_{yy} = -T \left[ \frac{18v_b}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right]$$

$$\sigma'_{zz} = -T \left[ \frac{18(1 - v_b)}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right]$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.  
La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma'_{xyz}] = \begin{bmatrix} -T \left[ \frac{18v_b}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & -T \left[ \frac{18v_b}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -T \left[ \frac{18(1 - v_b)}{(1 + v_b)(8 - 10v_b)} \right] \end{bmatrix}$$

In C'( $\theta=90$ ;  $\beta=0$ ) è uguale al punto C( $\theta=90$ ;  $\beta=0$ ) del sistema “xyz”, i valori risultano essere uguali alla compressione, si ha quindi:



- $C'(\theta=90; \beta=0)$

$$\sigma'_{xx} = -T \left[ \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma'_{yy} = T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma'_{zz} = T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

Gli sforzi di taglio sono tutti nulli.

La matrice degli sforzi diventa

$$[\sigma'_{xyz}] = \begin{bmatrix} -T \left[ \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] \end{bmatrix}$$

### 3.4 Rotazione dello stato di sforzo

Una volta trovati gli sforzi nei punti A', B' e C' del sistema "x'y'z'" ruotiamo il sistema di riferimento di 90° in senso antiorario per tornare nel sistema "xyz" in tal modo otteniamo lo stato di sforzo a compressione lungo "y".

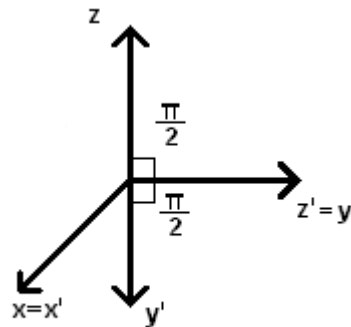


Figura 3.2: Sistemi di riferimento

La matrice di rotazione  $[R']$  è pari a:

$$[R'] = \begin{bmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{bmatrix}$$

$$[R'] = \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & \cos 0 \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \pi & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \quad [R'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad [R'^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Passiamo da  $x'y'z'$  a  $xyz$  attraverso la matrice di rotazione.

$$[\sigma'_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{yx} & \sigma'_{yy} & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{zx} & \sigma'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow [\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = [R'] \times [\sigma'_{xyz}] \times [R'^T]$$

Calcoliamo gli sforzi nel sistema “xyz” nei punti notevoli per la “microcavità”.

Si noti che una volta ruotato il sistema “primo” i punti A', B' e C' coincideranno con A, B, e C nel sistema “xyz”

**Punto A**

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T \quad \sigma_{yy} = -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T \quad \sigma_{zz} = 0$$

**Punto B**

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{zz} = \frac{3+15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T$$

### Punto C

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \sigma_{yy} = -\frac{27-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T \quad \sigma_{zz} = \frac{3-15\nu_b}{2(7-5\nu_b)}T$$

In modo analogo vediamo il caso “dell’inclusione perfettamente rigida” per i punti A,B e C

### Punto A

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & -T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

### Punto B

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & -T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -T \left[ \frac{18(1-v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & -T \left[ \frac{18(1-v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = -T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = -T \left[ \frac{18(1-v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -T \left[ \frac{18v_b}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right]$$

### Punto C

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T \left[ \frac{15v_b^2 - 18v_b + 3}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & T \left[ \frac{(15v_b^2 - 3v_b)}{(1+v_b)(8-10v_b)} \right] \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = -T \left[ \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma_{yy} = T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = T \left[ \frac{(15\nu_b^2 - 3\nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right]$$

## Capitolo 4

### Sovrapposizione degli effetti: trazione su “z” compressione su “y”

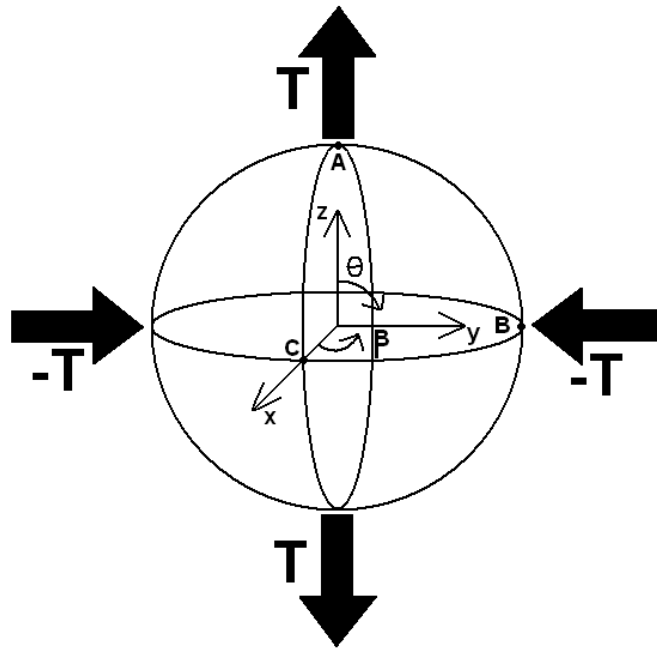


Figura 4.1: Sollecitazione a trazione lungo z ed a compressione lungo y

Consideriamo il caso in cui si sovrappongono gli effetti degli sforzi a trazione lungo “z” e a compressione lungo “y”. Calcoliamo i valori degli sforzi nell’intorno dell’inclusione per i punti A, B e C sia per la “microcavità” che per “l’inclusione perfettamente rigida”.



## 4.1 Microcavità

Sommiamo le componenti dello stato di sforzo dovute alla trazione lungo “z” con quelle dovute alla compressione lungo “y” nei punti A,B e C, in modo da ottenere uno stato di sforzo globale.

### Punto A

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(T)} + \sigma_{xx}^{(-T)} \quad \sigma_{xx} = -\left(\frac{3+15\nu_b}{14-10\nu_b}\right)T + \left(\frac{3-15\nu_b}{14-10\nu_b}\right)T \quad \sigma_{xx} = -\frac{30\nu_b}{14-10\nu_b}T$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(T)} + \sigma_{yy}^{(-T)} \quad \sigma_{yy} = -\left(\frac{3+15\nu_b}{14-10\nu_b}\right)T + \left(\frac{3-15\nu_b}{14-10\nu_b}\right)T \quad \sigma_{yy} = -\frac{30}{14-10\nu_b}T$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(T)} + \sigma_{zz}^{(-T)} \quad \sigma_{zz} = 0$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{30\nu_b}{14-10\nu_b}T & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{30}{14-10\nu_b}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Punto B

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(T)} + \sigma_{xx}^{(-T)} \quad \sigma_{xx} = \left(\frac{15\nu_b-3}{14-10\nu_b}\right)T + \left(\frac{3+15\nu_b}{14-10\nu_b}\right)T \quad \sigma_{xx} = \frac{30\nu_b}{14-10\nu_b}T$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(T)} + \sigma_{yy}^{(-T)} \quad \sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(T)} + \sigma_{zz}^{(-T)} \quad \sigma_{zz} = \left(\frac{27-15\nu_b}{14-10\nu_b}\right)T + \left(\frac{3+15\nu_b}{14-10\nu_b}\right)T \quad \sigma_{zz} = \frac{30}{14-10\nu_b}T$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30\nu_b}{14-10\nu_b}T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{14-10\nu_b}T \end{bmatrix}$$

### Punto C

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(T)} + \sigma_{xx}^{(-T)} \quad \sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(T)} + \sigma_{yy}^{(-T)} \quad \sigma_{yy} = \left( \frac{15\nu_b - 3}{14 - 10\nu_b} \right) T - \left( \frac{27 - 15\nu_b}{14 - 10\nu_b} \right) T \quad \sigma_{yy} = \frac{30\nu_b - 30}{14 - 10\nu_b} T$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(T)} + \sigma_{zz}^{(-T)} \quad \sigma_{zz} = \left( \frac{27 - 15\nu_b}{14 - 10\nu_b} \right) T + \left( \frac{3 - 15\nu_b}{14 - 10\nu_b} \right) T \quad \sigma_{zz} = \frac{30 - 30\nu_b}{14 - 10\nu_b} T$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{30\nu_b - 30}{14 - 10\nu_b} T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30 - 30\nu_b}{14 - 10\nu_b} T \end{bmatrix}$$

## 4.2 inclusione perfettamente rigida

Sommiamo le componenti dello stato di sforzo dovute alla trazione lungo z con quelle dovute alla compressione lungo y nei punti A,B e C, in modo da ottenere uno stato di sforzo globale.

### Punto A

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(T)} + \sigma_{xx}^{(-T)} \quad \sigma_{xx} = \frac{18\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T + \frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{xx} = \frac{18\nu_b + 15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T \quad \sigma_{xx} = \frac{15\nu_b(1+\nu_b)}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{xx} = \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(T)} + \sigma_{yy}^{(-T)} \quad \sigma_{yy} = \frac{18\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T + \frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{18\nu_b + 15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T \quad \sigma_{yy} = \frac{15\nu_b(1+\nu_b)}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(T)} + \sigma_{zz}^{(-T)} \quad \sigma_{zz} = \frac{18 - 18\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T - \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{zz} = \frac{18 - 18\nu_b - 15\nu_b^2 + 18\nu_b - 3}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T \quad \sigma_{zz} = \frac{15 - 15\nu_b^2}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{zz} = \frac{15(1+\nu_b)(1-\nu_b)}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T \quad \sigma_{zz} = \frac{15(1-\nu_b)}{(8-10\nu_b)} T$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b}T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b}T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15(1-\nu_b)}{8-10\nu_b}T \end{bmatrix}$$

**Punto B**

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(T)} + \sigma_{xx}^{(-T)} \quad \sigma_{xx} = -\frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T - \frac{18\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{18\nu_b + 15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T \quad \sigma_{xx} = -\frac{15\nu_b(1+\nu_b)}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{15\nu_b}{8-10\nu_b}T$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(T)} + \sigma_{yy}^{(-T)} \quad \sigma_{yy} = \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T - \frac{18 - 18\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3 - 18 + 18\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T \quad \sigma_{yy} = \frac{15\nu_b^2 - 15}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{15(1-\nu_b^2)}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T \quad \sigma_{yy} = -\frac{15(1+\nu_b)(1-\nu_b)}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{15(1-\nu_b)}{(8-10\nu_b)}T$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(T)} + \sigma_{zz}^{(-T)} \quad \sigma_{zz} = -\frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T - \frac{18\nu_b}{(1+\nu_b)(8-10\nu_b)}T$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{18\nu_b + 15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T \quad \sigma_{zz} = -\frac{15\nu_b(1 + \nu_b)}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{15\nu_b}{8 - 10\nu_b} T$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15\nu_b}{8 - 10\nu_b} T & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15(1 - \nu_b)}{8 - 10\nu_b} T & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15\nu_b}{8 - 10\nu_b} T \end{bmatrix}$$

### Punto C

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(T)} + \sigma_{xx}^{(-T)} \quad \sigma_{xx} = \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T - \frac{15\nu_b^2 - 18\nu_b + 3}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(T)} + \sigma_{yy}^{(-T)} \quad \sigma_{yy} = -\frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T + \frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(T)} + \sigma_{zz}^{(-T)} \quad \sigma_{zz} = -\frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T + \frac{15\nu_b^2 - 3\nu_b}{(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} T$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Capitolo 5

### Stato di sforzo dovuto solo al taglio

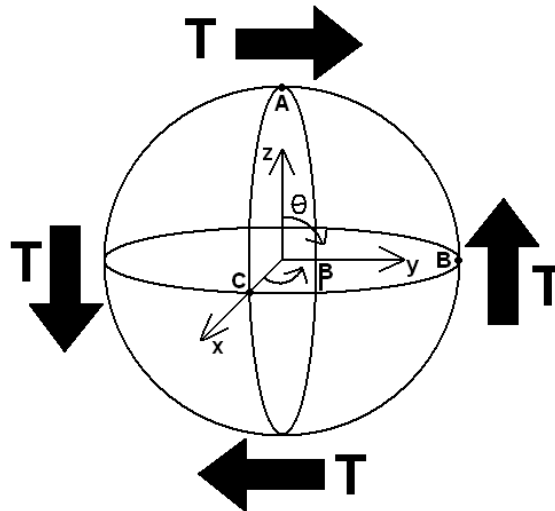
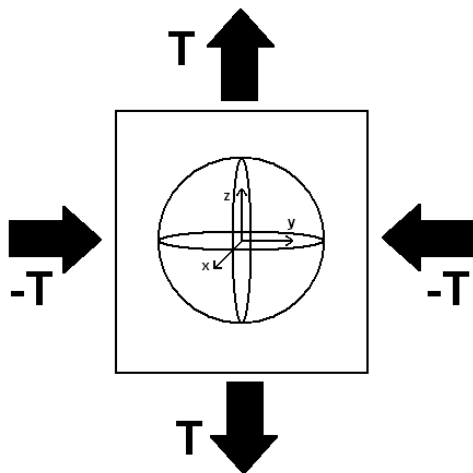
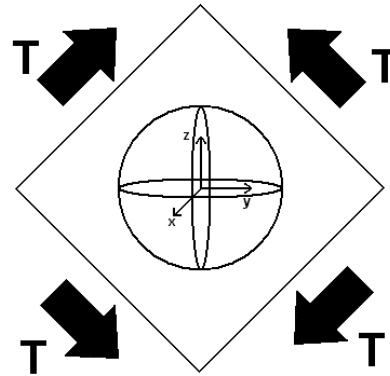


Figura 5.1: Stato di sforzo di taglio nel sistema  $xyz$

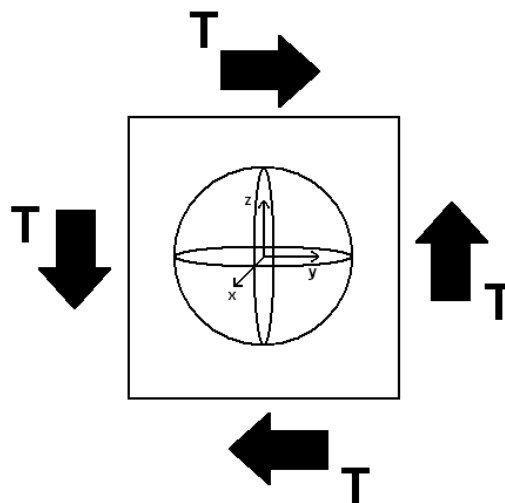
Per trovare lo stato di sforzo dovuto al solo taglio consideriamo il caso della sovrapposizione degli effetti in cui si ha uno stato di sforzo a trazione lungo  $z$  e lo stesso stato di sforzo a compressione lungo  $y$ . Questa situazione corrisponde ad uno stato di sforzo di taglio a  $45^\circ$ . Ruotando il cubetto di  $45^\circ$  otteniamo lo stato di sforzo desiderato.



**Figura 5.2:** Trazione lungo z e compressione lungo y

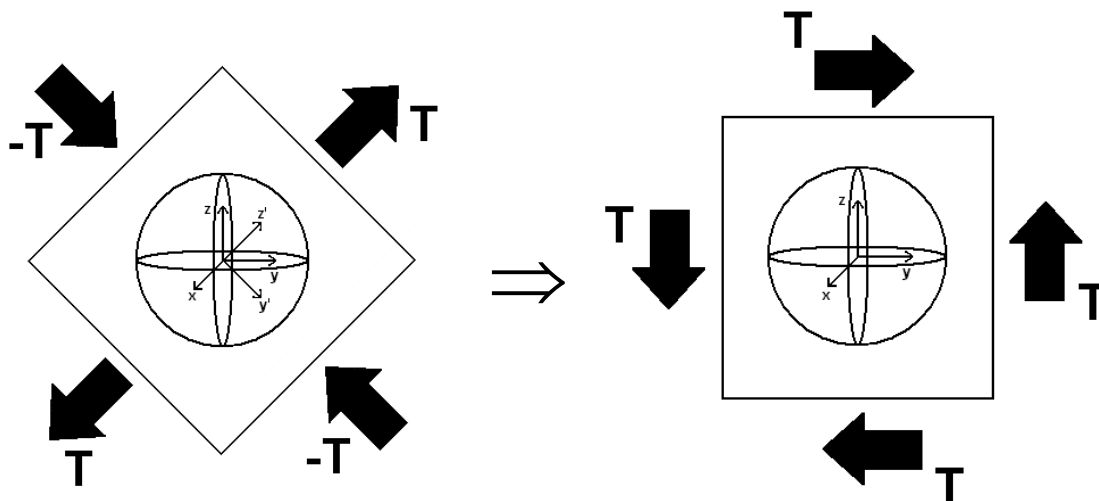


**Figura 5.3:** Stato di sforzo di taglio equivalente a  $45^\circ$



**Figura 5.4:** Stato di sforzo di taglio nel sistema xyz

Un'altra strada è quella di ruotare gli assi di  $45^\circ$  in senso antiorario rispetto a 'xyz' creando un nuovo sistema di riferimento definito con (' ' '). Applichiamo trazione lungo  $z'$  e compressione lungo  $y'$  in modo da ottenere una situazione equivalente di taglio in 'xyz'.

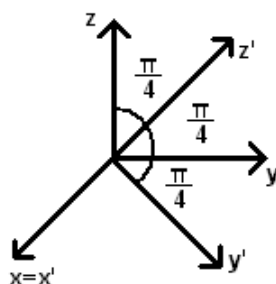


**Figura 5.5:** Trazione lungo  $z'$  e compressione lungo  $y'$

**Figura 5.6:** Stato di sforzo di taglio nel sistema  $xyz$

Definiamo col doppio pedice la matrice di rotazione  $[R'']$  e con  $[\sigma''_{xyz}]$  la matrice degli sforzi dovuti alla sovrapposizione degli effetti nel sistema di riferimento ( " ). La moltiplicazione  $[R''][\sigma''_{xyz}][R''^T]$  restituisce il caso dello sforzo di taglio  $[\sigma_{xyz}]$ .

La matrice di rotazione  $[R'']$  considerando il sistema in Figura 5.7 è pari a :



**Figura 5.7:** sistema di riferimento  $x'y'z'$  ruotato di  $45^\circ$  rispetto a  $xyz$

$$[R''] = \begin{bmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{bmatrix}$$



$$[R^n] = \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{3}{4}\pi & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \quad [R^n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad [R^{nT}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

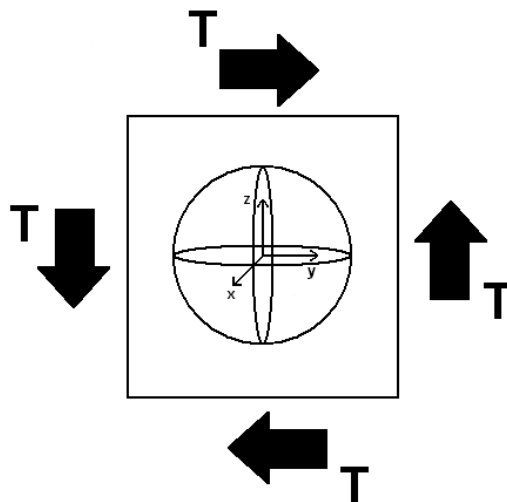
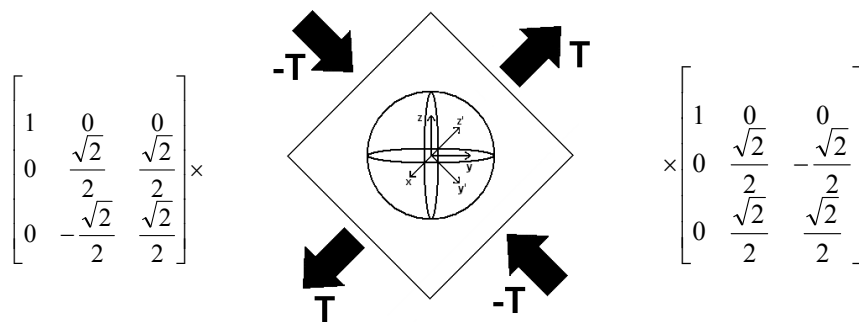


Figura 5.8: Stato di sforzo di taglio nel sistema xyz

## 5.1 Microcavità

Consideriamo i punti caratteristici A, B e C per il caso della “microcavità” e troviamo lo stato di sforzo dovuto alla sola componente di taglio.

### Punto A

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{xyz}] &= [R''] \times [\sigma''_{xyz}] \times [R''^T] \\
 [\sigma''_{xyz}] &= \begin{bmatrix} \sigma''_{xx} & \sigma''_{xy} & \sigma''_{xz} \\ \sigma''_{yx} & \sigma''_{yy} & \sigma''_{yz} \\ \sigma''_{zx} & \sigma''_{zy} & \sigma''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{30\nu_b}{14-10\nu_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{30}{14-10\nu_b} T'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [\sigma_{xyz}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{30\nu_b}{14-10\nu_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{30}{14-10\nu_b} T'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
 [\sigma_{xyz}] &= \begin{bmatrix} -\frac{30\nu_b}{14-10\nu_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{14-10\nu_b} T'' & \frac{15}{14-10\nu_b} T'' \\ 0 & \frac{15}{14-10\nu_b} T'' & -\frac{15}{14-10\nu_b} T'' \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Punto B**

$$[\sigma_{xyz}] = [R''] \times [\sigma''_{xyz}] \times [R''^T]$$

$$[\sigma''_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma''_{xx} & \sigma''_{xy} & \sigma''_{xz} \\ \sigma''_{yx} & \sigma''_{yy} & \sigma''_{yz} \\ \sigma''_{zx} & \sigma''_{zy} & \sigma''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30v_b}{14-10v_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{14-10v_b} T'' \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{0}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{30v_b}{14-10v_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{14-10v_b} T'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \frac{30v_b}{14-10v_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{14-10v_b} T'' & \frac{15}{14-10v_b} T'' \\ 0 & \frac{15}{14-10v_b} T'' & \frac{15}{14-10v_b} T'' \end{bmatrix}$$

**Punto C**

$$[\sigma_{xyz}] = [R''] \times [\sigma''_{xyz}] \times [R''^T]$$

$$[\sigma''_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma''_{xx} & \sigma''_{xy} & \sigma''_{xz} \\ \sigma''_{yx} & \sigma''_{yy} & \sigma''_{yz} \\ \sigma''_{zx} & \sigma''_{zy} & \sigma''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{30\nu_b - 30}{14 - 10\nu_b} T'' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30 - 30\nu_b}{14 - 10\nu_b} T'' \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{30\nu_b - 30}{14 - 10\nu_b} T'' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30 - 30\nu_b}{14 - 10\nu_b} T'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30 - 30\nu_b}{14 - 10\nu_b} T'' \\ 0 & \frac{30 - 30\nu_b}{14 - 10\nu_b} T'' & 0 \end{bmatrix}$$

## 5.2 Inclusione perfettamente rigida

Consideriamo i punti caratteristici A, B e C nel caso di “inclusione perfettamente rigida”

### Punto A

$$[\sigma_{xyz}'''] = [R'''] \times [\sigma_{xyz}'''] \times [R''']^T$$

$$[\sigma_{xyz}'''] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}'' & \sigma_{xy}'' & \sigma_{xz}'' \\ \sigma_{yx}'' & \sigma_{yy}'' & \sigma_{yz}'' \\ \sigma_{zx}'' & \sigma_{zy}'' & \sigma_{zz}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T'' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15(1-\nu_b)}{8-10\nu_b} T'' \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}'''] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T'' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15(1-\nu_b)}{8-10\nu_b} T'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2(8-10\nu_b)} T'' & \frac{15(1-2\nu_b)}{2(8-10\nu_b)} T'' \\ 0 & \frac{15(1-2\nu_b)}{2(8-10\nu_b)} T'' & \frac{15}{2(8-10\nu_b)} T'' \end{bmatrix}$$

**Punto B**

$$[\sigma_{xyz}] = [R''] \times [\sigma''_{xyz}] \times [R''^T]$$

$$[\sigma''_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma''_{xx} & \sigma''_{xy} & \sigma''_{xz} \\ \sigma''_{yx} & \sigma''_{yy} & \sigma''_{yz} \\ \sigma''_{zx} & \sigma''_{zy} & \sigma''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15(1-\nu_b)}{8-10\nu_b} T & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15(1-\nu_b)}{8-10\nu_b} T & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} \frac{15\nu_b}{8-10\nu_b} T'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2(8-10\nu_b)} T'' & -\frac{15(1-2\nu_b)}{2(8-10\nu_b)} T'' \\ 0 & -\frac{15(1-2\nu_b)}{2(8-10\nu_b)} T'' & \frac{15}{2(8-10\nu_b)} T'' \end{bmatrix}$$

**Punto C**

$$[\sigma_{xyz}] = [R''] \times [\sigma''_{xyz}] \times [R''^T]$$

$$[\sigma''_{xyz}] = \begin{bmatrix} \sigma''_{xx} & \sigma''_{xy} & \sigma''_{xz} \\ \sigma''_{yx} & \sigma''_{yy} & \sigma''_{yz} \\ \sigma''_{zx} & \sigma''_{zy} & \sigma''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xyz}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Capitolo 6

### Criterio a fatica

Il programma da noi scritto viene implementato dal software “Matlab”; il codice ricalca i passaggi fatti nella parte cartacea. Prima di tutto vengono richiesti all'utente i valori delle proprietà del materiale in esame e le sollecitazioni a cui è sottoposto, poi viene fatta una distinzione tra il caso della microcavità (rappresentante ad esempio una soffiatura) ed il caso in cui l'inclusione sia piena, questo perché si usano formulazioni differenti. Si procede quindi con il calcolo degli sforzi in coordinate sferiche, poi si passa dalle coordinate sferiche alle cartesiane; questo avviene per le tre tipologie di sollecitazione possibili (trazione/compressione lungo  $z$ , trazione/compressione lungo  $y$  e taglio). A questo punto si possono sommare i contributi delle varie sollecitazioni tramite una sovrapposizione degli effetti.

Per ogni tipo di sollecitazione il codice chiede all'utente se è interessato a conoscere i valori delle sollecitazioni in punti caratteristici (in tal caso l'utente dovrà inserire il valore degli angoli che identificano il punto ed il tempo a cui far visualizzare lo sforzo) e se vuole stampare i grafici delle sollecitazioni.

Una volta calcolate le matrici degli sforzi in coordinate cartesiane il codice cerca il punto sulla sfera dove c'è lo sforzo massimo (identificato da un valore di  $\theta$  e uno di  $\beta$ ), quindi cerca tra gli infiniti piani passanti per quel punto la combinazione di angoli ( $\theta_1$  e  $\beta_1$ ) e di tempo che presentano uno sforzo normale massimo. Una volta noto il punto dove si verifica lo sforzo massimo, identificato da una combinazione di  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\theta_1$  e  $\beta_1$ , codice cerca il valore minimo dello sforzo al variare del tempo. L'ultimo passaggio calcola i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  e della componente media  $\sigma_{n,m}$ .

Il criterio a fatica che utilizziamo per validare i risultati numerici consiste nel trovare una  $\sigma_{equiv}$  minore o uguale di uno sforzo limite  $\lambda$ .

La  $\sigma_{equiv}$  è funzione della  $\sigma_{n,a}$  e della  $\sigma_{n,m}$ :

$$\sigma_{equiv} = \sigma_{n,a} + k\sigma_{n,m} \leq \lambda = \sigma_{amm} \quad (6.1)$$

$k$  e  $\lambda$  li ricaviamo dalle prove sperimentali assiali a fatica alternata  $S_{-1}$  e pulsante  $S_0$  per ogni materiale considerato.



Definiamo una  $\sigma_{zz}(t) = S_{-1} \sin(\omega t)$  da cui ricaviamo attraverso il programma fatto con “Matlab” il valore della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_{-1})$  mentre la componente media risulta sempre  $\sigma_{n,m}(S_{-1}) = 0$ , in questo modo abbiamo la prima equazione.

$$\sigma_{n,a}(S_{-1}) \leq \lambda \quad (6.2)$$

Facciamo la stessa cosa utilizzando  $S_0$  cioè definiamo una  $\sigma_{zz}(t) = S_0 \sin(\omega t) + S_0$  da cui ricaviamo attraverso “Matlab” il valore della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_0)$  e della componente media  $\sigma_{n,m}(S_0)$  così da avere la seconda equazione.

$$\sigma_{n,a}(S_0) + k\sigma_{n,m}(S_0) \leq \lambda \quad (6.3)$$

Quindi abbiamo due equazioni nelle due incognite  $k$  e  $\lambda$  trovate con  $S_{-1}$  e  $S_0$ . Note le costanti  $k$  e  $\lambda$  per i vari materiali, dobbiamo trovare con “Matlab” le componenti alternate  $\sigma_{n,a}$  e le componenti medie  $\sigma_{n,m}$  per le prove sperimentali in nostro possesso.

Nel caso in cui in alcuni materiali non sia presente il valore di  $S_0$ , si può ricorrere ad una terza equazione in cui si utilizza la componente alternata torsionale  $t_{-1}$ , cioè definiamo una  $\sigma_{zy}(t) = t_{-1} \sin(\omega t)$  da cui ricaviamo tramite “Matlab” il valore della componente alternata  $\sigma_{n,a}(t_{-1})$ ; anche in questo caso la componente media risulta essere nulla.

$$\sigma_{n,a}(t_{-1}) \leq \lambda \quad (6.4)$$

Prendendo in considerazione la (6.2) e la (6.4) si vede che esse non dipendono dalla componente media. Si utilizza quindi la (6.2) per trovare la  $\sigma_{amm}$ , mentre utilizziamo la (6.4) per validare le ipotesi e trovare l'errore percentuale rispetto al valore numerico.

Dalla (6.2) si ricava che  $\sigma_{equiv} = A \cdot S_{-1} \leq \lambda = \sigma_{amm}$ , mentre dalla (6.4) troviamo  $\sigma_{equiv} = a \cdot t_{-1} \leq \lambda = \sigma_{amm}$ , l'ipotesi che soddisfa il nostro criterio è:

$$A \cdot S_{-1} = a \cdot t_{-1} \Rightarrow a = A \cdot \frac{S_{-1}}{t_{-1}} \quad (6.5)$$

quindi l'errore percentuale sul coefficiente moltiplicativo vale:

$$err_{\%a} = \frac{\bar{a} - a}{a} \times 100 \quad (6.6)$$

dove  $\bar{a}$  è il coefficiente moltiplicativo trovato numericamente inserendo il valore della componente alternata  $t_{-1}$  nel programma.

Attraverso un grafico funzione della  $\sigma_{equiv}$  e delle prove effettuate possiamo vedere se i valori delle prove sono o meno al di sopra del nostro criterio. In caso affermativo la discrepanza è a favore della sicurezza, infatti sottostimiamo la resistenza del materiale ponendo come limite il valore  $\sigma_{amm}$ , anche se sappiamo che il materiale resiste fino al valore  $\sigma_{equiv}$ .

Il rovescio della medaglia è rappresentato da dimensioni, pesi e costi più alti che il pezzo meccanico avrà per sopportare una sollecitazione al di sopra del valore limite posto dal nostro criterio.

Viceversa se il risultato della prova fosse al di sotto del valore ammissibile saremmo in una situazione di pericolo, perché il criterio permetterebbe di progettare fino ad uno sforzo non sostenibile dal materiale.

Andiamo quindi a calcolare l'errore percentuale come:

$$err_{\%} = \frac{\sigma_{equiv} - \sigma_{amm}}{\sigma_{amm}} \times 100 \quad (6.7)$$

Questo procedimento viene fatto per tutti i materiali disponibili e tutte le prove sia in caso di "microcavità" che di "inclusione perfettamente rigida" ed anche per il caso in cui sia presente un nodulo di grafite, che rappresenta proprio la situazione della ghisa nodulare.

Di seguito è riportata la tabella che riassume i coefficienti di Poisson  $\nu_b$  e  $\nu_t$  per i tre casi presi in considerazione, "microcavità", "materiale reale" [5], "inclusione perfettamente rigida", i rispettivi moduli di Young  $E_b$  ed  $E_t$ , le rispettive costanti di Lamé  $\mu_b$  e  $\mu_t$  ed il loro rapporto  $\mu_b/\mu_t$

**Tabella 6.1** Valori dei coefficienti di Poisson  $\nu_b$  per matrice e  $\nu_t$  per inclusione, dei rispettivi moduli di Young  $E_b$  ed  $E_t$ , delle costanti di Lamè  $\mu_b$  e  $\mu_t$  e del loro rapporto  $\mu_b/\mu_t$

	$\nu_b$	$\nu_t$	$E_b$	$E_t$	$\mu_b$	$\mu_t$	$\mu_b/\mu_t$
			(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
Microcavità	0,30	0,25	196000	0	113077	0	$\infty$
Materiale Reale	0,30	0,25	196000	15000	113077	6000	18,85
Inclusione Perfettamente Rigida	0,25	0,25	196000	$\infty$	113077	$\infty$	0

Osservando le tabelle notiamo che non sono mai presenti sollecitazioni lungo y. Per effettuare le prove a fatica dobbiamo usare una forza variabile nel tempo, sia per la sollecitazione lungo z che per il taglio; la funzione che abbiamo scelto per entrambe è sinusoidale, con frequenza 1 Hz ed un tempo di campionamento di 1 secondo, con passo 0,01. Per quanto riguarda l'intensità delle sollecitazioni e gli sfasamenti, ogni materiale presenta i suoi valori e combinazioni, per i quali si rimanda alle singole tabelle.

Il programma genera quindi la sollecitazione come:

$$T_{zz} = T_{zz,a} \sin(2\pi f t + \varphi_{zz}) + T_{zz,m}$$

$$T_{zy} = T_{zy,a} \sin(2\pi f t + \varphi_{zy}) + T_{zy,m}$$

In merito alla forza lungo z, nelle prove è sempre presente la componente alternata, lo sfasamento è sempre nullo ed in alcuni casi è presente anche una componente media.

Per quanto riguarda il taglio è ovviamente sempre presente la componente alternata, in alcuni casi è presente uno sfasamento e/o una componente media.

I contributi di entrambe le forze vengono sommati per poi trovare lo stato di sforzo.

Andiamo ora ad esaminare i singoli materiali.

## 6.1 Materiale “Cast Iron”, [6]

Prove di fatica ad alto numero di cicli in flessione e torsione con differenza di fase, sono state effettuate da Nishihara e Kawamoto nel 1945, [6]. Tra i materiali studiati, quello che Nishihara e Kawamoto denominano "cast iron" è sicuramente d'interesse. La microstruttura di questo materiale non si avvicina al modello di un'inclusione sferica immersa in una matrice, infatti il materiale usato potrebbe essere classificato come ghisa grigia. Nonostante ciò è stato considerato utile applicare la metodologia proposta a questo tipo di materiale.

Prendiamo quindi in esame il materiale “cast iron”, le cui proprietà sono descritte nella tabella 6.1 e calcoliamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  per i casi di “microcavità”, “materiale reale” e “inclusione perfettamente rigida”.

Inserendo in “Matlab” i valori di  $S_{-1} = 96,1 (MPa)$  e di  $t_{-1} = 91,2 (MPa)$ , il programma ci restituisce i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_{-1})$  e  $\sigma_{n,a}(t_{-1})$  mentre i valori delle componenti medie dovute a  $S_{-1}$  e  $t_{-1}$  risultano essere sempre nulle.

Dunque non è possibile identificare il parametro  $k$ , comunque questo non impedisce l'applicazione del criterio visto che i dati sperimentali disponibili si riferiscono a delle sollecitazioni alternate ( $R = -1$ ) che non introducono un valore medio  $\sigma_{n,m}$ .

Per delle sollecitazioni alternate il criterio diventa:

$$\sigma_{equiv} = \sigma_{n,a} \leq \lambda = \sigma_{amm} \quad (6.1.1)$$

I valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  dipendenti da  $S_{-1}$  sono riportati nella tabella 6.1.1

**Tabella 6.1.1** Valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  per  $S_{-1}$

	$\sigma_{n,a} (MPa)$
Microcavità	196,56
Materiale Reale	186,79
Inclusione Perfettamente Rigida	192,1

Tali valori sono uguali ad un coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata assiale  $S_{-1}$  (6.5), i valori relativi ai tre casi sono riportati nella tabella 6.1.2.

**Tabella 6.1.2** Valori del coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata  $S_{-1}$ 

	A
Microcavità	2,04
Materiale Reale	1,94
Inclusione Perfettamente Rigida	1,99

dalla (6.5) si può ricavare il valore del coefficiente moltiplicativo “a” tale per cui l’ipotesi risulta essere verificata. I valori sono riportati nella tabella 6.1.3.

**Tabella 6.1.3** Valori del coefficiente moltiplicativo “a” per la componente alternata  $S_{-1}$ 

	a
Microcavità	2,16
Materiale Reale	2,05
Inclusione Perfettamente Rigida	2,1

Analogamente a quanto fatto per  $S_{-1}$  riportiamo i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  dovuta a  $t_{-1} = 91,2 (MPa)$  nella tabella 6.1.4.

**Tabella 6.1.4** Valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  per  $t_{-1}$ 

	$\sigma_{n,a} (MPa)$
Microcavità	256,16
Materiale Reale	233,5
Inclusione Perfettamente Rigida	234,26

Tali valori sono uguali ad un coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata torsionale  $t_{-1}$ , i valori relativi ai tre casi sono riportati nella tabella 6.1.5.

**Tabella 6.1.5** Valori del coefficiente moltiplicativo " $\bar{a}$ " per la componente alternata  $t_{-1}$ 

	$\bar{a}$
Microcavità	2,80
Materiale Reale	2,56
Inclusione Perfettamente Rigida	2,57

Dalla (6.6) possiamo calcolare l'errore percentuale in modo che sia soddisfatta l'ipotesi di uguaglianza tra la (6.2) e la (6.4); i risultati sono riportati nella tabella 6.1.6, dove possiamo notare che l'errore percentuale medio si aggira intorno al 25% in favore della sicurezza.

**Tabella 6.1.6** Errore percentuale  $err_{\%a}$ 

	$err_{\%a}$
Microcavità	29,63
Materiale Reale	24,87
Inclusione Perfettamente Rigida	22,38

Trovato l'errore percentuale procediamo con l'analisi delle prove calcolando lo sforzo ammissibile, pari a  $\lambda$ , per i tre casi. Andiamo poi a confrontarlo con i valori degli sforzi equivalenti delle singole prove.

I valori di  $\lambda$  sono riportati nella tabella 6.1.7

**Tabella 6.1.7** Valori del coefficiente  $\lambda$ 

	$\lambda$ (MPa)
Microcavità	196,56
Materiale Reale	186,79
Inclusione Perfettamente Rigida	192,1

Dopo aver ridotto la (6.1) nella (6.1.1), cioè senza la dipendenza dal valore medio, applichiamo il nostro criterio utilizzando quest'ultima.

Inseriamo i dati delle prove sperimentali presenti nella tabella 6.1.8 in "Matlab".

**Tabella 6.1.8** Valori dei dati delle prove sperimentali

Prova	$\sigma_{zz,a}$	$\sigma_{zz,m}$	$\delta_{zz}$	$\sigma_{zy,a}$	$\sigma_{zy,m}$	$\delta_{zy}$
	(MPa)	(MPa)	(°)	(MPa)	(MPa)	(°)
1	52,6	0	0	63,6	0	0
2	63,8	0	0	77,2	0	60
3	67,6	0	0	81,8	0	90
4	79,8	0	0	39,9	0	0
5	90,3	0	0	45,15	0	60
6	93,7	0	0	46,85	0	90
7	90,6	0	0	19	0	0
8	95,2	0	0	20	0	90

Otteniamo i valori delle componenti alternate e medie dello sforzo normale massimo per i tre casi presi in esame.

**Tabella 6.1.9** Risultati ottenuti per i tre casi considerati

Prova	Microcavità		Materiale Reale		Inclusione Perfettamente Rigida	
	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1	250,46	0	228,22	0	243,27	0
2	268,8	0	244,06	0	257,67	0
3	243,53	0	219,5	0	230,06	0
4	243,88	0	220,38	0	239	0
5	241,55	0	219,37	0	238,4	0
6	211,52	0	191,71	0	208,95	0
7	221,49	0	200,34	0	218,64	0
8	197,73	0	186,67	0	194,08	0

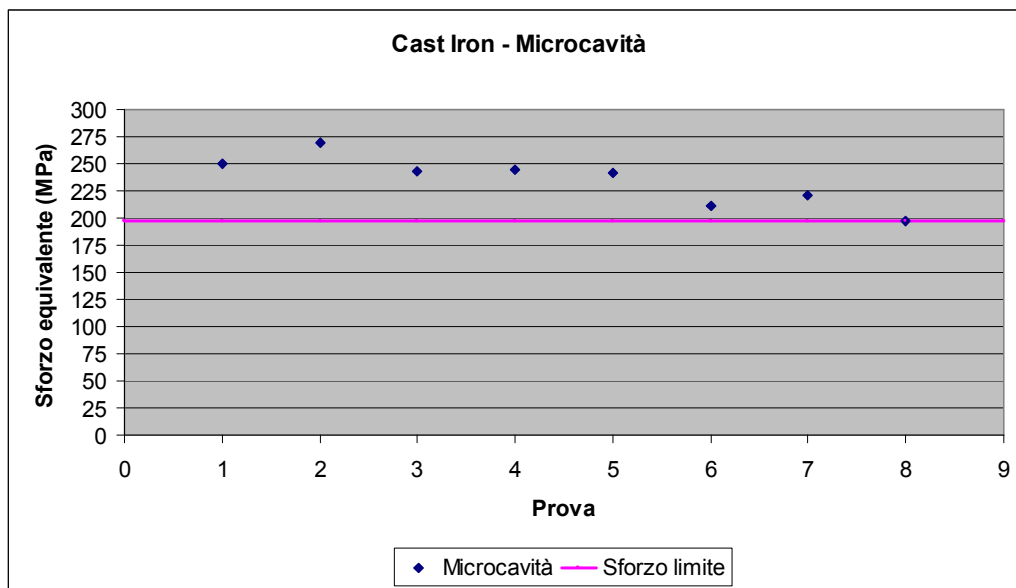
In tabella 6.1.10 troviamo i valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err_{\%}$  calcolato dalla (6.7), per i tre casi.

**Tabella 6.1.10** Valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err_{\%}$ 

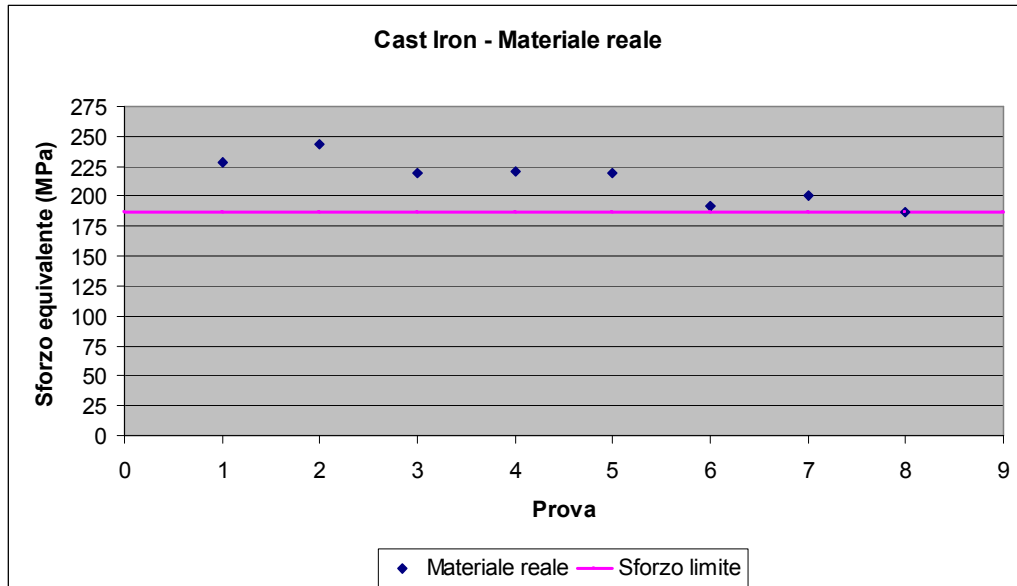
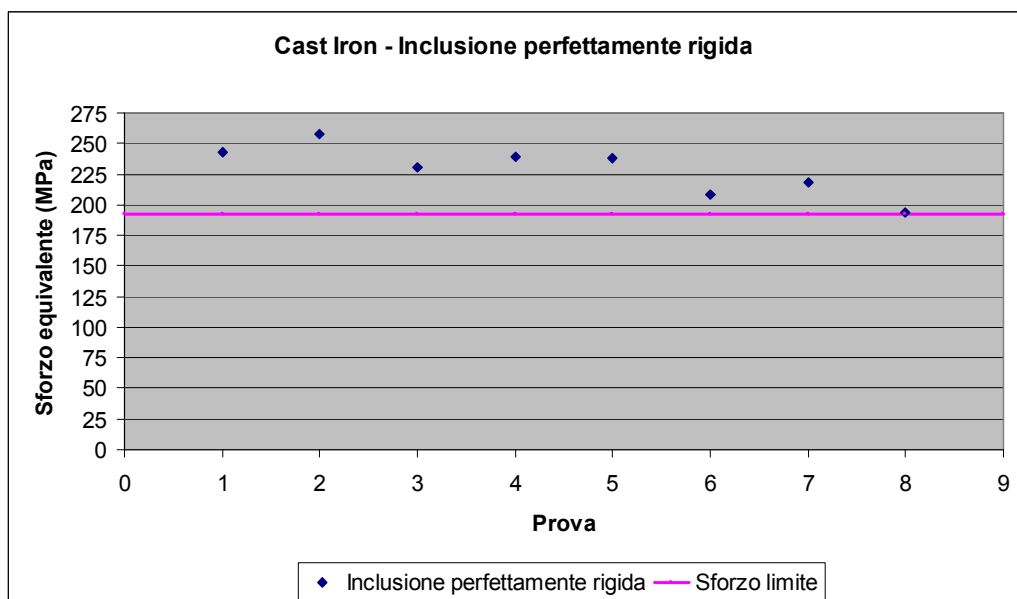
PROVE	Microcavità			Materiale Reale			Inclusione Perfettamente Rigida		
	$\sigma_{equiv}$ (MPa)	$\sigma_{amm}$ (MPa)	$err_{\%}$ %	$\sigma_{equiv}$ (MPa)	$\sigma_{amm}$ (MPa)	$err_{\%}$ %	$\sigma_{equiv}$ (MPa)	$\sigma_{amm}$ (MPa)	$err_{\%}$ %
1	250,46	196,56	27,42	228,22	186,79	22,18	243,27	192,1	26,64
2	268,8	196,56	36,75	244,06	186,79	30,63	257,67	192,1	34,13
3	243,53	196,56	23,90	219,5	186,79	17,51	230,06	192,1	19,76
4	243,88	196,56	24,07	220,38	186,79	17,98	239	192,1	24,41
5	241,55	196,56	22,89	219,37	186,79	17,44	238,4	192,1	24,10
6	211,52	196,56	7,61	191,71	186,79	2,63	208,95	192,1	8,77
7	221,49	196,56	12,68	200,34	186,79	7,25	218,64	192,1	13,82
8	197,73	196,56	0,60	186,67	186,79	-0,06	194,08	192,1	1,03

Rappresentiamo graficamente i valori della  $\sigma_{equiv}$  in funzione delle prove, in modo da visualizzare quali valori sono oltre lo sforzo limite  $\sigma_{amm}$ .

Microcavità, materiale reale, inclusione perfettamente rigida sono rappresentati rispettivamente nei grafici 6.1.1a, 6.1.1b e 6.1.1c.

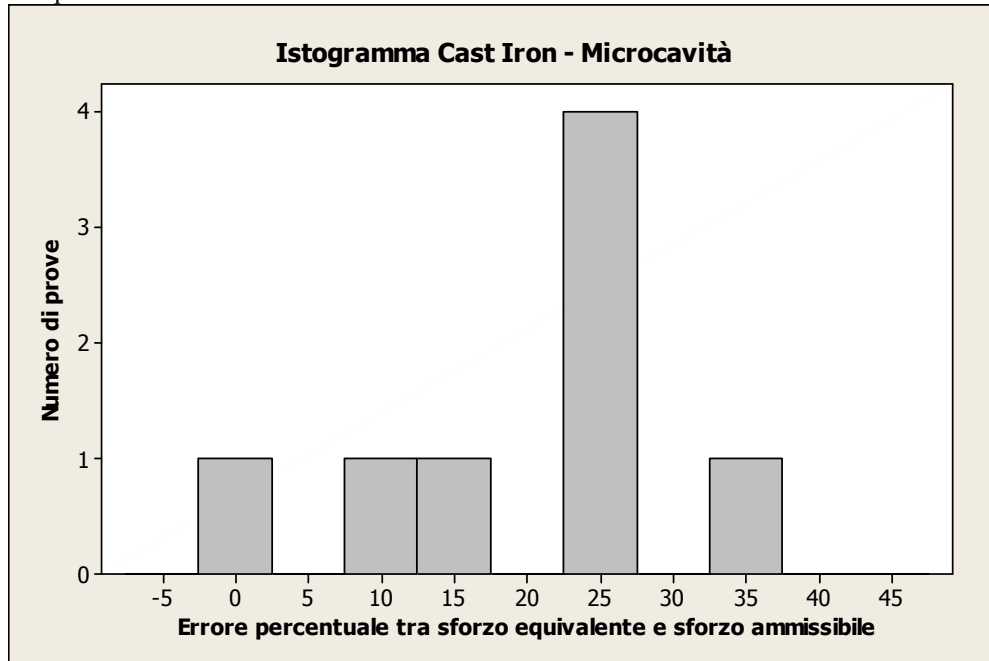
**Grafico 6.1.1a** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - Cast Iron - Microcavità




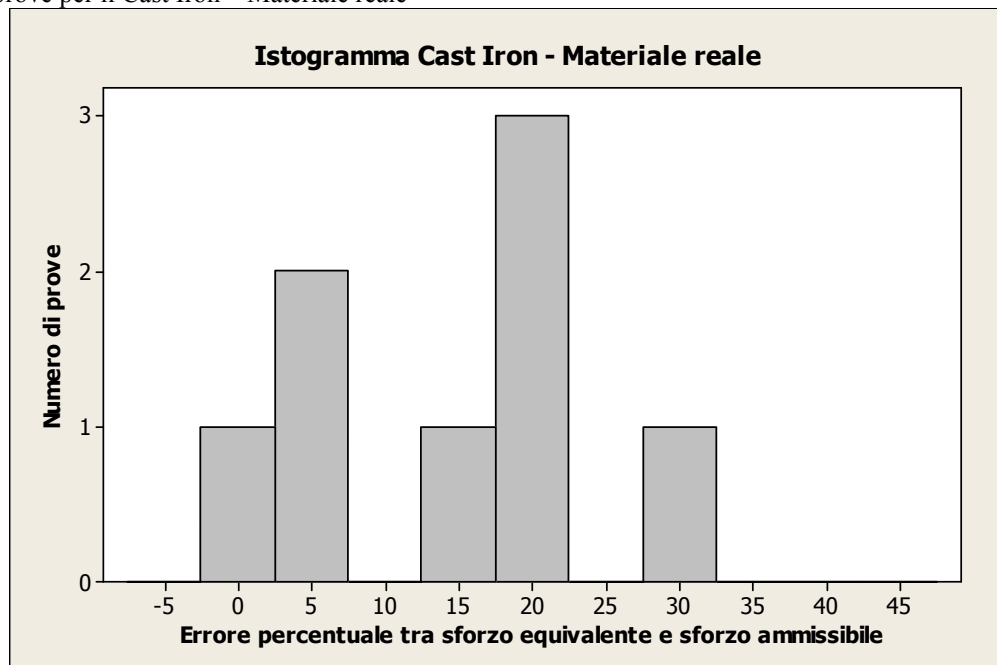
**Grafico 6.1.1b** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - Cast Iron - Materiale reale**Grafico 6.1.1c** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - Cast Iron - Inclusione perfettamente rigida

Rappresentiamo con un istogramma l'andamento di  $err_{\%}$  in funzione delle prove per i tre casi.

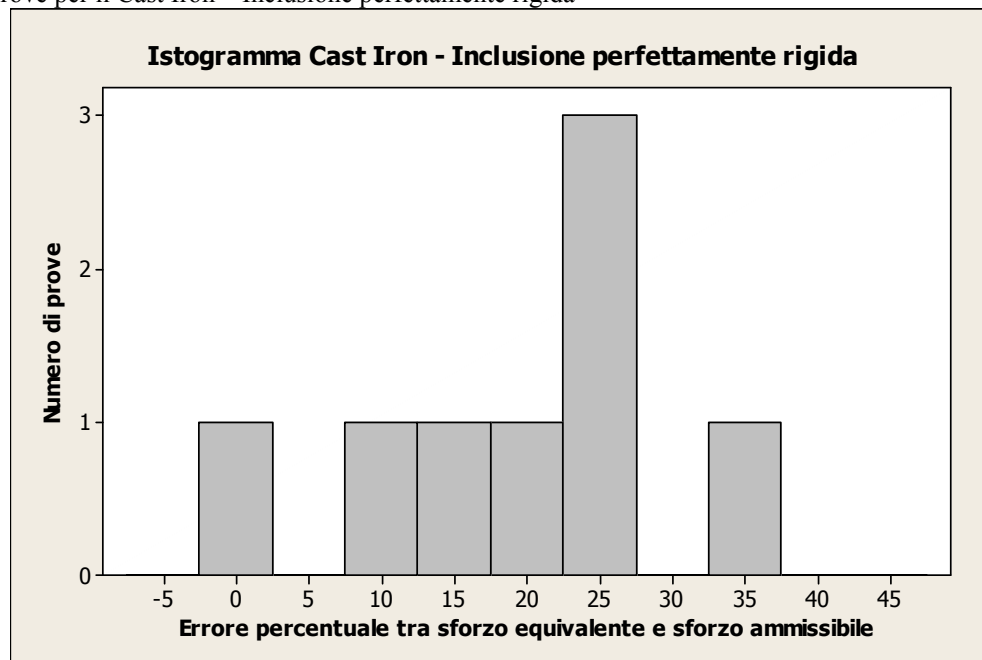
**Grafico 6.1.2a** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il Cast Iron - Microcavità



**Grafico 6.1.2b** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il Cast Iron - Materiale reale



**Grafico 6.1.2c** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il Cast Iron – Inclusione perfettamente rigida



Come si può notare dai grafici 6.1.1a, 6.1.1b e 6.1.1c, tutti i valori delle prove sono al di sopra del nostro criterio tranne che nella numero 8 che tende al valore ammissibile.

Analizzando l'andamento ed i valori nei i casi in cui si ha uno sfasamento, si osserva che all'aumentare di quest'ultimo, lo sforzo equivalente tende al valore dello sforzo ammissibile.

L'andamento dei tre casi è simile tra loro, considerando il caso di "Materiale reale" nella prova 2 è presente un errore intorno al 30% maggiore rispetto alle altre prove, nelle quali si trova tra il 22% ed un errore quasi nullo.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, con un errore accettabile nella maggior parte delle prove, a favore della sicurezza, il criterio per il cast iron fornisce risultati accettabili.

## 6.2 Materiale “GGG 40” , [7]

Prove di fatica a trazione-compressione e torsione fuori fase sono state eseguite da Neugebauer [7] su una ghisa con la denominazione GGG 40. Lo stesso autore ha effettuato prove simili anche sulla ghisa GTS 45. Quest'ultimo materiale verrà esaminato nel paragrafo seguente.

Prendiamo in esame il materiale “GGG 40”, le cui proprietà sono descritte sempre nella tabella 6.1 e calcoliamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  per i casi di “microcavità”, “materiale reale” e “inclusione perfettamente rigida”.

Inserendo in “Matlab” i valori di  $S_{-1} = 320(MPa)$  e di  $t_{-1} = 300(MPa)$ , il programma ci restituisce i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_{-1})$  e  $\sigma_{n,a}(t_{-1})$  mentre i valori delle componenti medie dovute a  $S_{-1}$  e  $t_{-1}$  risultano essere entrambe nulle.

Quindi l'identificazione del parametro  $k$  non è possibile, poiché i dati di flessione-torsione si riferiscono a delle sollecitazioni alternate ( $R = -1$ ). Il criterio assume la forma:

$$\sigma_{equiv} = \sigma_{n,a} \leq \lambda = \sigma_{amm} \quad (6.2.1)$$

Dunque la mancata conoscenza di  $k$  non impedisce l'applicazione del criterio. I valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  dipendenti da  $S_{-1}$  sono riportati nella tabella 6.2.1.

**Tabella 6.2.1** Valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  per  $S_{-1}$

	$\sigma_{n,a}(MPa)$
Microcavità	645,55
Materiale Reale	622
Inclusione Perfettamente Rigida	639,69

Tali valori sono uguali ad un coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata assiale  $S_{-1}$  (6.5), i valori relativi ai tre casi sono riportati nella tabella 6.2.2.

**Tabella 6.2.2** Valori del coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata  $S_{-1}$ 

	A
Microcavità	2,01
Materiale Reale	1,94
Inclusione Perfettamente Rigida	2,00

Dalla (6.5) si può ricavare il valore del coefficiente moltiplicativo “a” tale per cui l’ipotesi risulta essere verificata, i valori sono riportati nella tabella 6.2.3.

**Tabella 6.2.3** Valori del coefficiente moltiplicativo “a” per la componente alternata  $S_{-1}$ 

	a
Microcavità	2,15
Materiale Reale	2,07
Inclusione Perfettamente Rigida	2,13

Analogamente a quanto fatto per  $S_{-1}$  riportiamo i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  dovuta a  $t_{-1} = 300 (MPa)$  nella tabella 6.2.4.

**Tabella 6.2.4** Valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  per  $t_{-1}$ 

	$\sigma_{n,a} (MPa)$
Microcavità	842,63
Materiale Reale	768,11
Inclusione Perfettamente Rigida	770,6

Tali valori sono uguali ad un coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata torsionale  $t_{-1}$ , i valori relativi ai tre casi sono riportati nella tabella 6.2.5.

**Tabella 6.2.5** Valori del coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata  $t_{-1}$ 

	$\bar{a}$
Microcavità	2,80
Materiale Reale	2,56
Inclusione Perfettamente Rigida	2,56

Dalla (6.6) possiamo calcolare l'errore percentuale in modo che sia soddisfatta l'ipotesi di uguaglianza tra la (6.2) e la (6.4), i risultati sono riportati nella tabella 6.2.6, dove possiamo notare che l'errore percentuale medio si aggira intorno al 25% in favore della sicurezza.

**Tabella 6.2.6** Errore percentuale  $err_{\%a}$ 

	$err_{\%a}$
Microcavità	30,23
Materiale Reale	23,67
Inclusione Perfettamente Rigida	20,18

Trovato l'errore percentuale procediamo con l'analisi delle prove calcolando lo sforzo ammissibile, pari a  $\lambda$ , per i tre casi. Andiamo poi a confrontarlo con i valori degli sforzi equivalenti delle singole prove.

I valori di  $\lambda$  sono riportati nella tabella 6.2.7.

**Tabella 6.2.7** Valori del coefficiente  $\lambda$ 

	$\lambda$ (MPa)
Microcavità	645,55
Materiale Reale	622
Inclusione Perfettamente Rigida	639,69

Dopo aver ridotto la (6.1) nella (6.2.1) cioè senza la dipendenza dal valore medio applichiamo il nostro criterio utilizzando quest'ultima.

Inseriamo i dati delle prove sperimentali presenti nella tabella 6.2.8 in “Matlab”

**Tabella 6.2.8** Valori dei dati delle prove sperimentali

Prova	$\sigma_{zz,a}$	$\sigma_{zz,m}$	$\delta_{zz}$	$\sigma_{zy,a}$	$\sigma_{zy,m}$	$\delta_{zy}$
	(MPa)	(MPa)	(°)	(MPa)	(MPa)	(°)
1	190	0	0	190	0	0
2	205	0	0	205	0	45
3	190	0	0	190	0	90
4	255	0	0	146,6	0	0
5	290	0	0	166,8	0	45
6	250	0	0	143,8	0	90

Otteniamo i valori delle componenti alternate e medie dello sforzo normale massimo per i tre casi presi in esame.

**Tabella 6.2.9** Risultati ottenuti per i tre casi considerati

Prova	Microcavità		Materiale Reale		Inclusione Perfettamente Rigida	
	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1	808,7	0	729,7	0	785,98	0
2	807,33	0	730,92	0	784,58	0
3	586,47	0	530,62	0	560,12	0
4	824,91	0	740,45	0	802,36	0
5	868,48	0	782	0	847,52	0
6	582,42	0	528,92	0	575,45	0

In tabella 6.2.10 troviamo i valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err_{\%}$  calcolato dalla (6.7) per i tre casi.

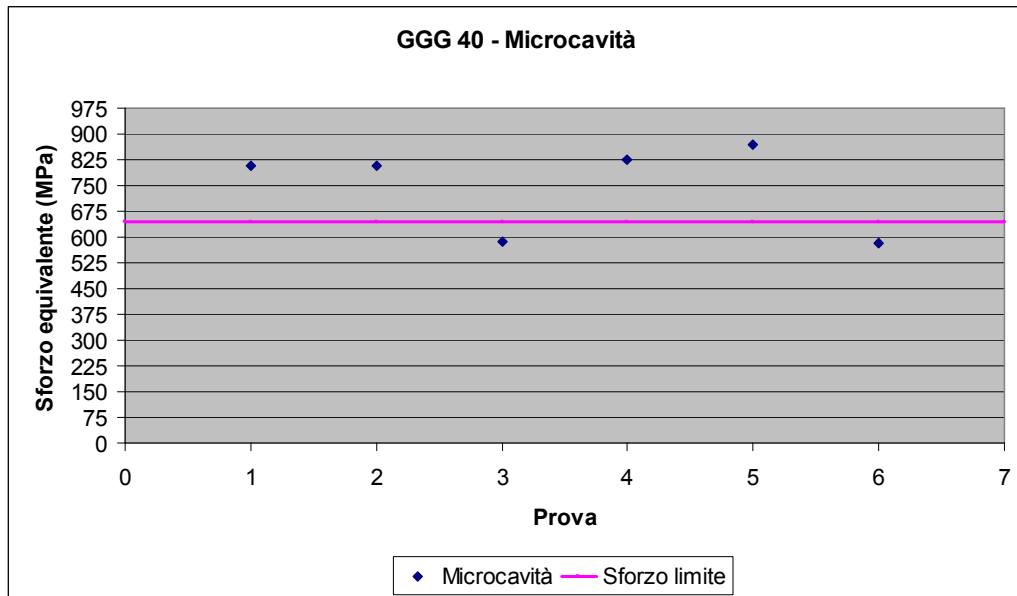
**Tabella 6.2.10** Valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err_{\%}$ 

PROVE	Microcavità			Materiale Reale			Inclusione Perfettamente Rigida		
	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err_{\%}$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err_{\%}$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err_{\%}$
	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%
1	808,7	645,55	25,27	729,7	622	17,31	785,98	639,69	22,87
2	807,33	645,55	25,06	730,92	622	17,51	784,58	639,69	22,65
3	586,47	645,55	-9,15	530,62	622	-14,69	560,12	639,69	-12,44
4	824,91	645,55	27,78	740,45	622	19,04	802,36	639,69	25,43
5	868,48	645,55	34,53	782	622	25,72	847,52	639,69	32,49
6	582,42	645,55	-9,78	528,92	622	-14,97	575,45	639,69	-10,04

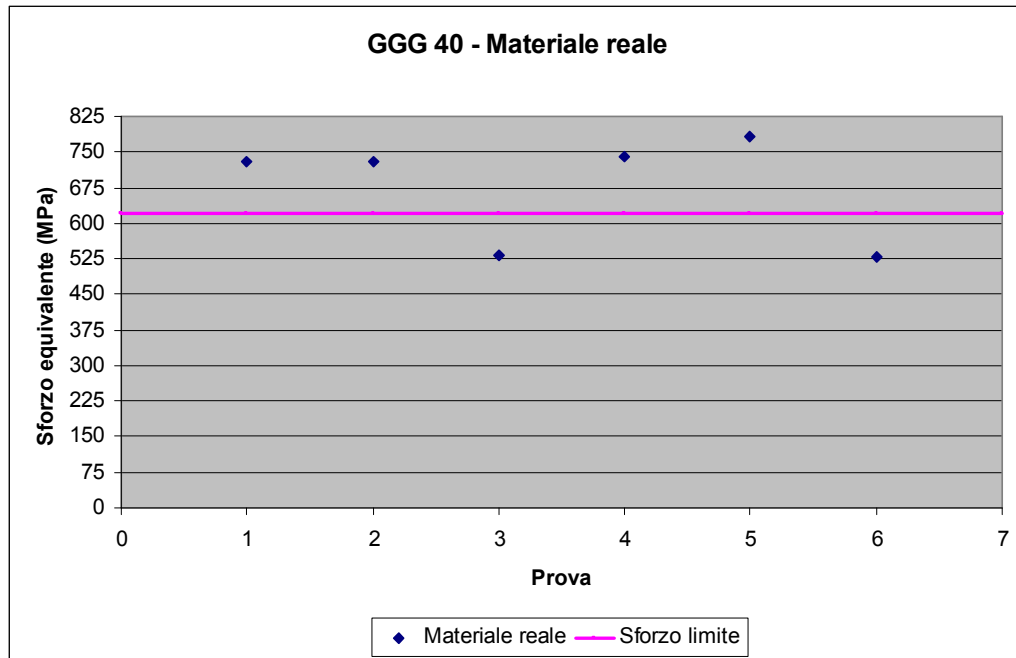
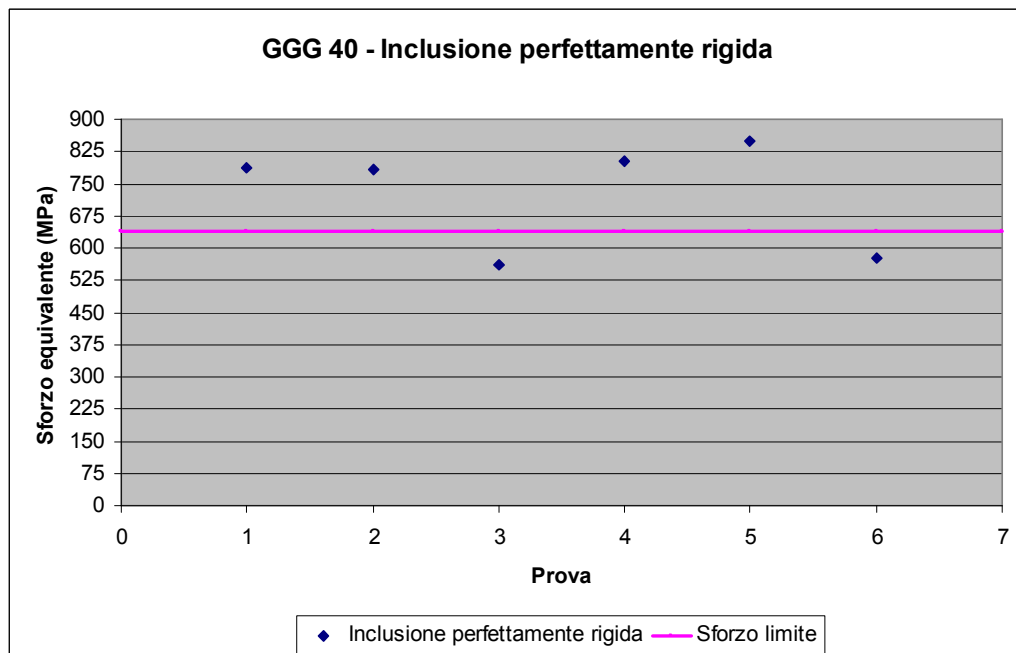
Rappresentiamo graficamente i valori della  $\sigma_{equiv}$  in funzione delle prove in modo da visualizzare quali valori sono oltre lo sforzo limite  $\sigma_{amm}$ .

Microcavità, materiale reale, inclusione perfettamente rigida sono rappresentati rispettivamente nei grafici 6.2.1a, 6.2.1b e 6.2.1c.

**Grafico 6.2.1a** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 40 Microcavità

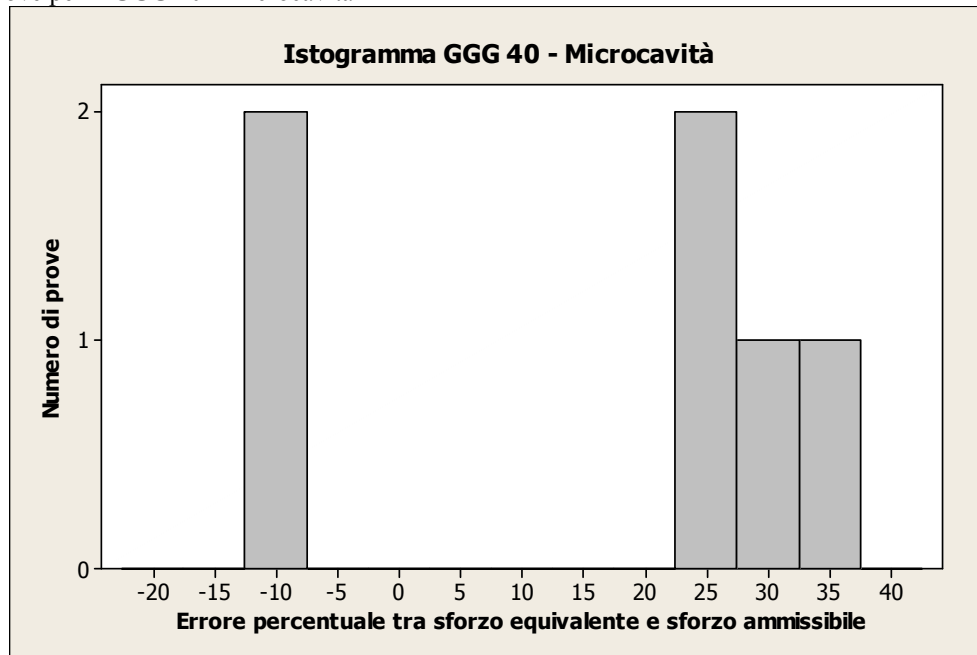




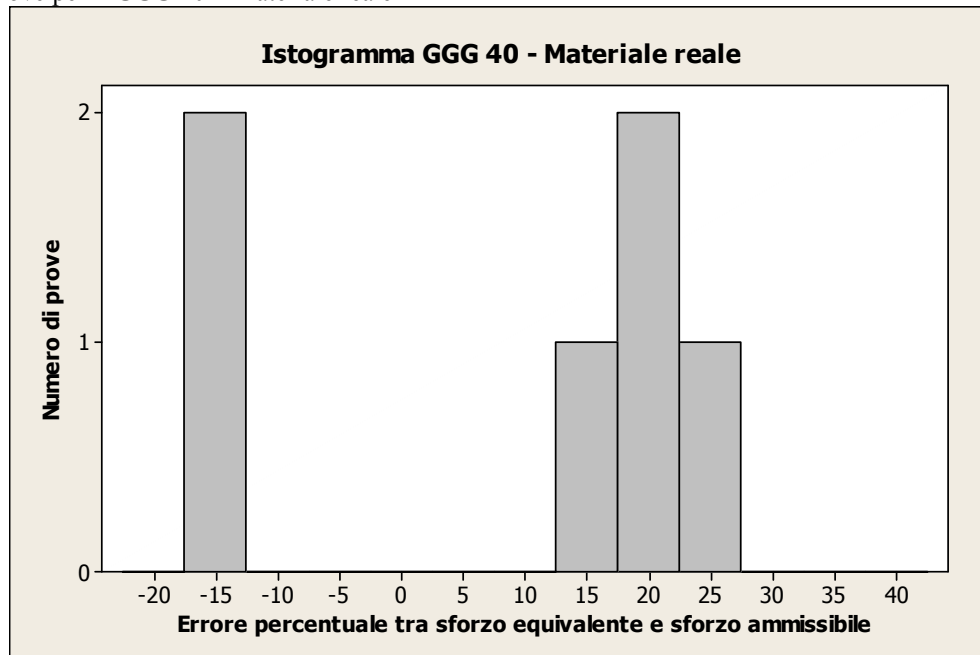
**Grafico 6.2.2b** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 40 Materiale reale**Grafico 6.2.1c** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 40 Inclusione perfettamente rigida

Rappresentiamo con un istogramma l'andamento dell'errore percentuale in funzione delle prove per i tre casi.

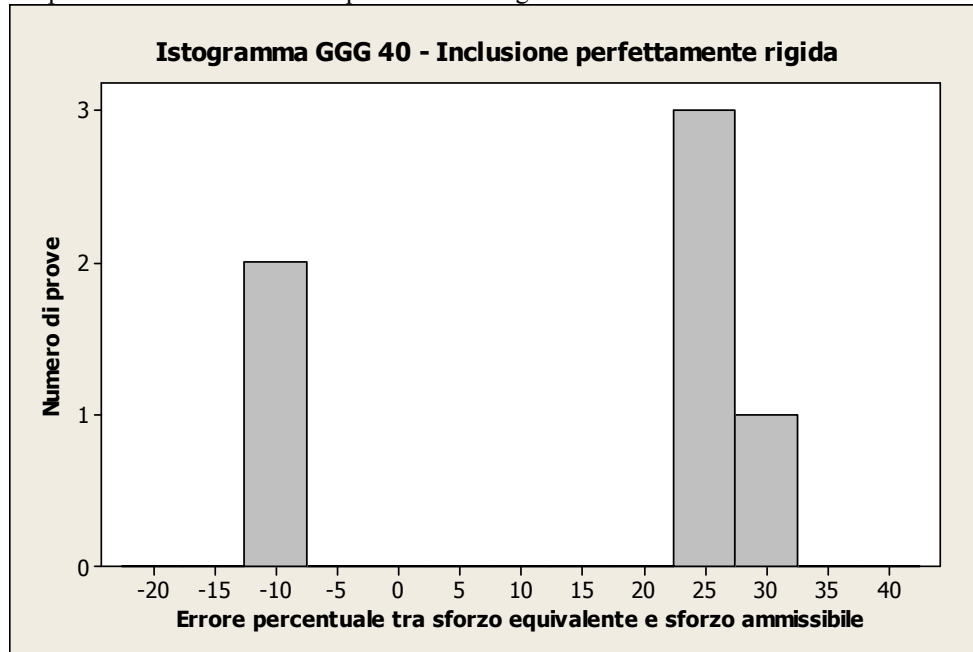
**Grafico 6.2.2a** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 40 - Microcavità



**Grafico 6.2.2b** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 40 - Materiale reale



**Grafico 6.2.2c** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 40 – Inclusione perfettamente rigida



Come si può notare dai grafici 6.2.1a, 6.2.1b e 6.2.1c, in due prove ci troviamo al di sotto dello sforzo ammissibile, entrambe sono sfasate di  $90^\circ$ . In quelle dove lo sfasamento è di  $45^\circ$  si ha un aumento dello sforzo equivalente, dovuto però all'aumento sia dello sforzo assiale che di quello di taglio; per cui a parità di condizioni, lo sfasamento abbassa lo sforzo equivalente con conseguente riduzione della resistenza del materiale.

Il materiale reale è quello che fornisce il miglior risultato, l'errore percentuale si aggira tra il 25% per la prova 5 e diminuisce sempre di più fino a raggiungere valori negativi quando lo sforzo equivalente passa al di sotto dello sforzo ammissibile.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, con un errore accettabile nella maggior parte delle prove, il criterio per il GGG 40 fornisce risultati accettabili.

### 6.3 Materiale “GTS 45”, [7]

Prendiamo in esame il materiale “GTS 45”, le cui proprietà sono descritte sempre nella tabella 6.1 e calcoliamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  per i casi di “microcavità”, “materiale reale” e “inclusione perfettamente rigida”. Come già accennato prima anche questo materiale, è stato studiato da Neugebauer [7].

Inserendo in “Matlab” i valori di  $S_{-1} = 295(MPa)$  e di  $t_{-1} = 240(MPa)$ , il programma ci restituisce i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_{-1})$  e  $\sigma_{n,a}(t_{-1})$  mentre i valori delle componenti medie dovute a  $S_{-1}$  e  $t_{-1}$  risultano essere sempre nulle.

Il parametro  $k$  non può essere identificato, verrà usata la forma del criterio per carichi alternati:

$$\sigma_{equiv} = \sigma_{n,a} \leq \lambda = \sigma_{amm} \quad (6.3.1)$$

Infatti le prove di flessione-torsione disponibili sono tutte alternate ( $R = -1$ )

I valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  dipendenti da  $S_{-1}$  sono riportati nella tabella 6.3.1.

**Tabella 6.3.1** Valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  per  $S_{-1}$

	$\sigma_{n,a} (MPa)$
Microcavità	603,41
Materiale Reale	573,42
Inclusione Perfettamente Rigida	589,72

Tali valori sono uguali ad un coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata assiale  $S_{-1}$  (6.5), i valori relativi ai tre casi sono riportati nella tabella 6.3.2.

**Tabella 6.3.2** Valori del coefficiente moltiplicativo “A” per la componente alternata  $S_{-1}$

	A
Microcavità	2,04
Materiale Reale	1,94
Inclusione Perfettamente Rigida	2

Dalla (6.5) si può ricavare il valore del coefficiente moltiplicativo “ $a$ ” tale per cui l’ipotesi è verificata, i valori sono riportati nella tabella 6.3.3.

**Tabella 6.3.3** Valori del coefficiente moltiplicativo “ $a$ ” per la componente alternata  $S_{-1}$

	$a$
Microcavità	2,51
Materiale Reale	2,39
Inclusione Perfettamente Rigida	2,45

Analogamente a quanto fatto per  $S_{-1}$  riportiamo i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  dovuta a  $t_{-1} = 240 (MPa)$  nella tabella 6.3.4.

**Tabella 6.3.4** Valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}$  per  $t_{-1}$

	$\sigma_{n,a} (MPa)$
Microcavità	712,93
Materiale Reale	614,48
Inclusione Perfettamente Rigida	608,53

Tali valori sono uguali ad un coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata torsionale  $t_{-1}$ , i valori relativi ai tre casi sono riportati nella tabella 6.3.5.

**Tabella 6.3.5** Valori del coefficiente moltiplicativo “ $\bar{a}$ ” per la componente alternata  $t_{-1}$

	$\bar{a}$
Microcavità	2,97
Materiale Reale	2,56
Inclusione Perfettamente Rigida	2,53

Dalla (6.6) possiamo calcolare l’errore percentuale in modo che sia soddisfatta l’ipotesi di uguaglianza tra la (6.2) e la (6.4), i risultati sono riportati nella tabella 6.3.6, dove possiamo notare che l’errore percentuale medio si aggira intorno al 10% in favore della sicurezza.

**Tabella 6.3.6** Errore percentuale  $err_{\%a}$ 

	$err_{\%a}$
Microcavità	18,32
Materiale Reale	7,11
Inclusione Perfettamente Rigida	3,26

Trovato l'errore percentuale procediamo con l'analisi delle prove calcolando lo sforzo ammissibile, pari a  $\lambda$ , per i tre casi. Andiamo poi a confrontarlo con i valori degli sforzi equivalenti delle singole prove.

I valori di  $\lambda$  sono riportati nella tabella 6.3.7.

**Tabella 6.3.7** Valori del coefficiente  $\lambda$ 

	$\lambda$ (MPa)
Microcavità	603,41
Materiale Reale	573,42
Inclusione Perfettamente Rigida	589,72

Dopo aver ridotto la (6.1) nella (6.3.1) cioè senza la dipendenza dal valore medio, applichiamo il nostro criterio utilizzando quest'ultima. Inseriamo i dati delle prove sperimentali presenti nella tabella 6.3.8 in "Matlab".

**Tabella 6.3.8** Valori dei dati delle prove sperimentali

Prova	$\sigma_{zz,a}$	$\sigma_{zz,m}$	$\delta_{zz}$	$\sigma_{zy,a}$	$\sigma_{zy,m}$	$\delta_{zy}$
	(MPa)	(MPa)	(°)	(MPa)	(MPa)	(°)
1	165	0	0	165	0	0
2	190	0	0	190	0	90
3	240	0	0	138	0	0
4	250	0	0	143,8	0	90

Otteniamo i valori delle componenti alternate e medie dello sforzo normale massimo per i tre casi presi in esame.

**Tabella 6.3.9** Risultati ottenuti per i tre casi considerati

Prova	Microcavità		Materiale Reale		Inclusione Perfettamente Rigida	
	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1	702,3	0	633,69	0	682,56	0
2	506,47	0	530,62	0	560,12	0
3	776,44	0	696,94	0	755,22	0
4	582,42	0	528,93	0	575,45	0

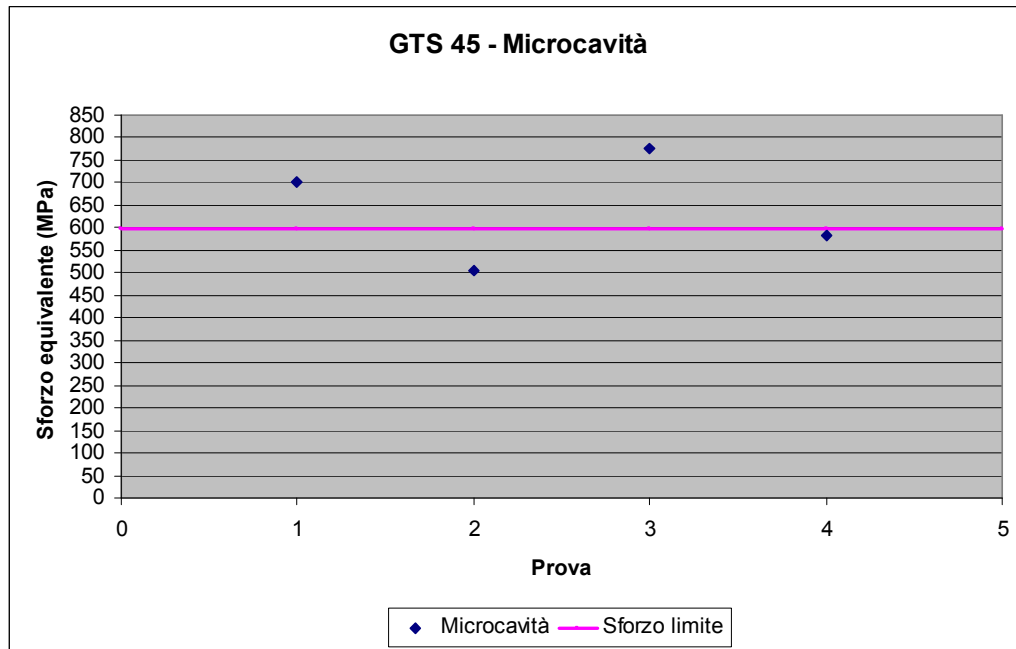
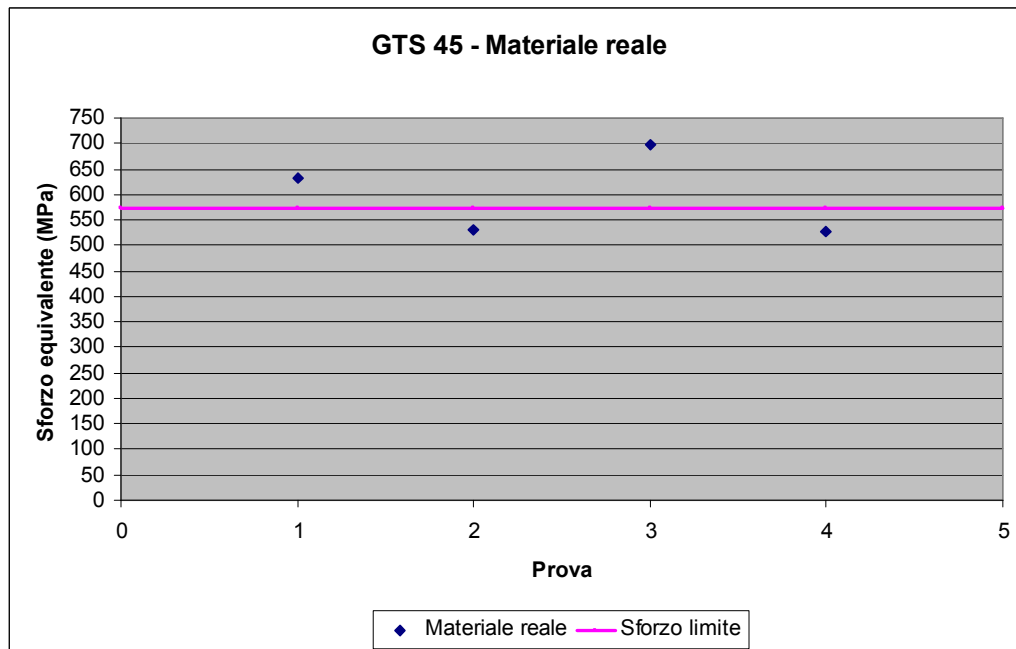
In tabella 6.3.10 troviamo i valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err\%$ , calcolato dalla (6.7), per i tre casi.

**Tabella 6.3.10** Valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err\%$ 

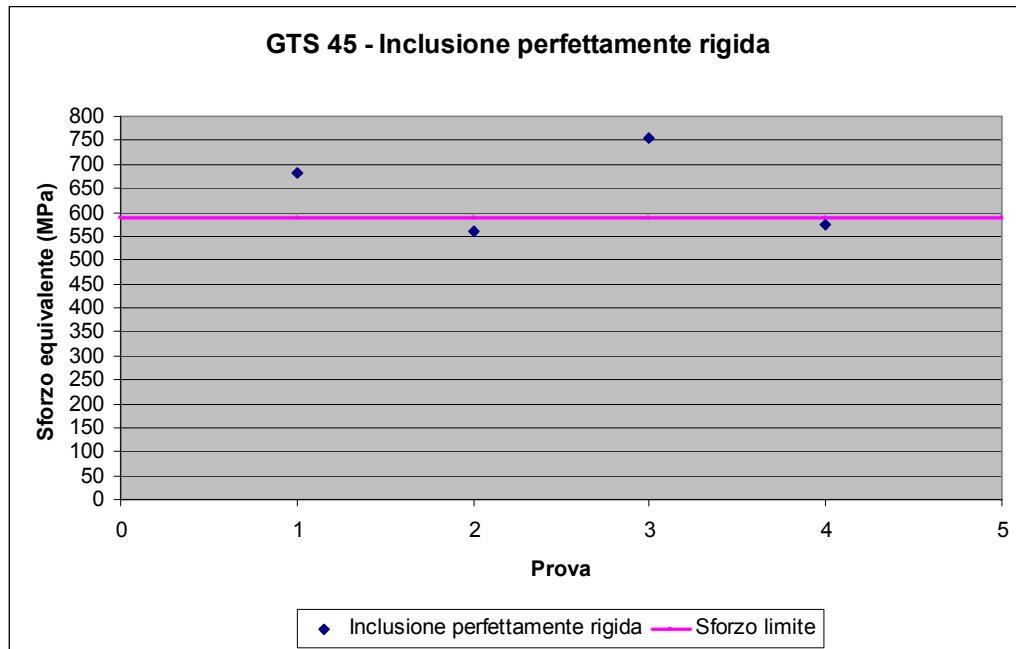
PROVE	Microcavità			Materiale Reale			Inclusione Perfettamente Rigida		
	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err\%$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err\%$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err\%$
	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%
1	702,3	603,41	16,39	633,69	573,42	10,51	682,56	589,72	15,74
2	506,47	603,41	-16,07	530,62	573,42	-7,46	560,12	589,72	-5,02
3	776,44	603,41	28,68	696,94	573,42	21,54	755,22	589,72	28,06
4	582,42	603,41	-3,48	528,93	573,42	-7,76	575,45	589,72	-2,42

Rappresentiamo graficamente i valori della  $\sigma_{equiv}$  in funzione delle prove in modo da visualizzare quali valori sono oltre lo sforzo limite  $\sigma_{amm}$ .

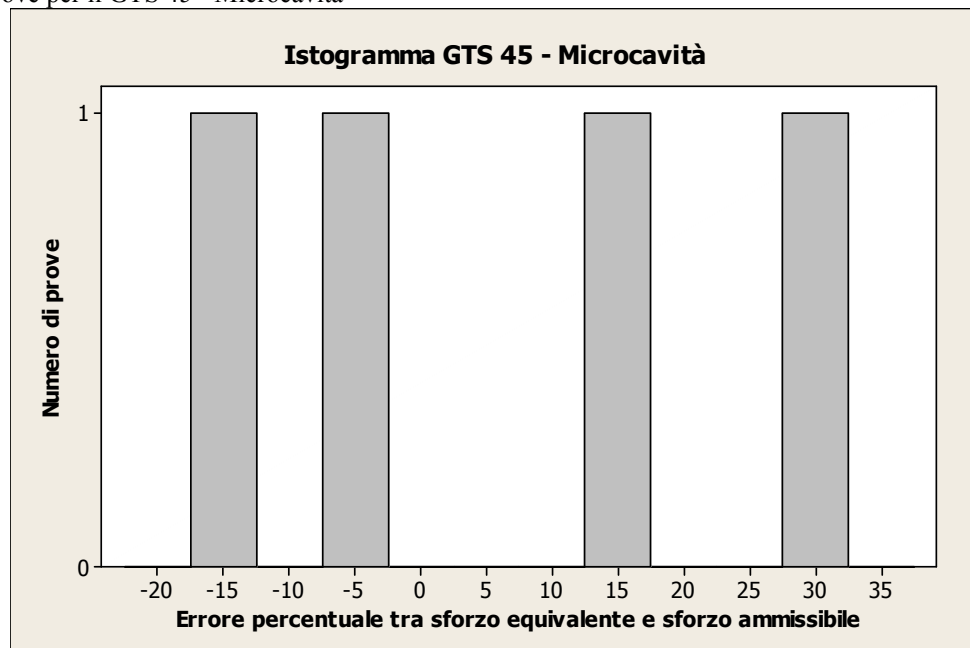
Microcavità, materiale reale, inclusione perfettamente rigida sono rappresentati rispettivamente nei grafici 6.3.1a, 6.3.1b e 6.3.1c.

Grafico 6.3.1a Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GTS 45 MicrocavitàGrafico 6.3.1b Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GTS 45 Materiale reale

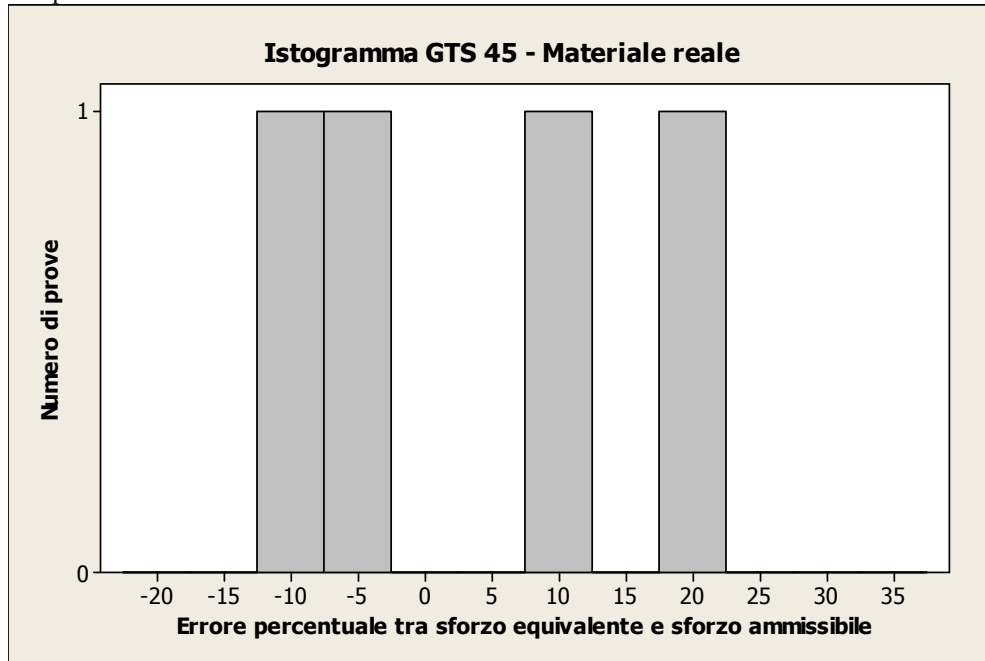


**Grafico 6.3.1c** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GTS 45 Inclusione perfettamente rigida

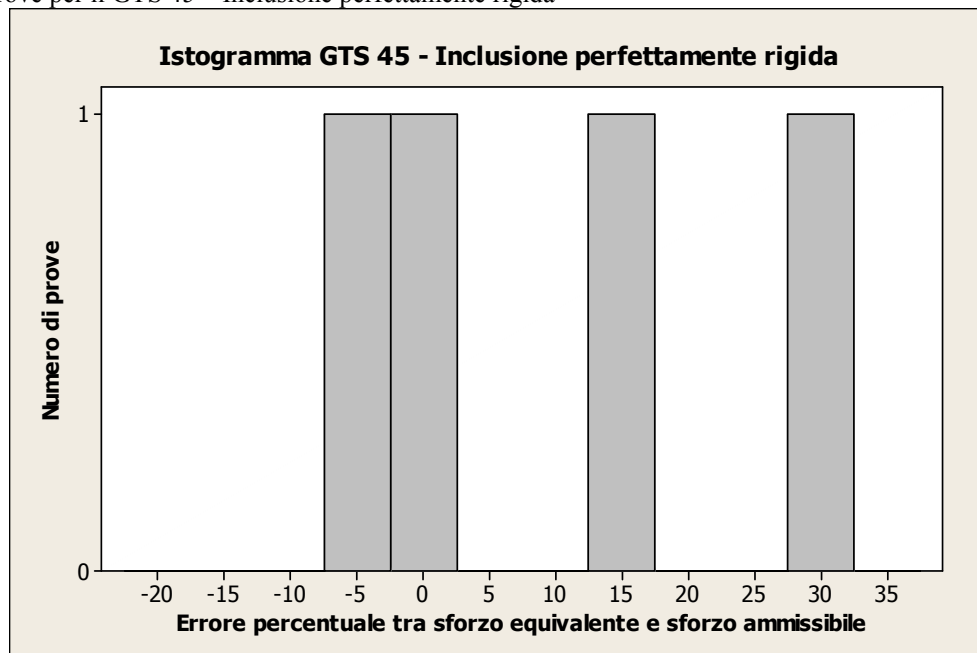
Rappresentiamo con un istogramma l'andamento dell'errore percentuale in funzione delle prove per i tre casi.

**Grafico 6.3.2a** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GTS 45 - Microcavità

**Grafico 6.3.2b** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GTS 45 – Materiale reale



**Grafico 6.3.2c** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GTS 45 – Inclusione perfettamente rigida



Come si può notare dai grafici 6.3.1a, 6.3.1b e 6.3.1c, l'andamento dello sforzo è fortemente influenzato dallo sfasamento, infatti nelle prove in cui vale  $90^\circ$  lo sforzo equivalente si abbassa oltre quello ammissibile, quindi lo sfasamento influisce negativamente sulla resistenza del materiale.

L'andamento dei tre casi è simile tra loro, considerando il caso di "Materiale reale" l'errore massimo si aggira intorno al 20% e va diminuendo fino ad arrivare a valori negativi, che sono dovuti alla presenza dello sfasamento di  $90^\circ$  nelle prove.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, con un errore accettabile in tutte le prove, per il GTS 45 il criterio fornisce risultati accettabili.

## 6.4 Materiale "GGG 60", [8]

Prove di flessione-torsione fuori fase per una ghisa sferoidale GGG 60 sono state effettuate da Heidenreich, Richter and Zenner [8]. Prendiamo in esame questo materiale, le cui proprietà sono descritte nella tabella 6.1 e calcoliamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  per i casi presi in considerazione.

In questo caso, data la conoscenza del limite pulsante  $S_0$ , utilizziamo le equazioni (6.2) e (6.3) per trovare i coefficienti  $k$  e  $\lambda$ .

Inserendo in "Matlab" i valori di  $S_{-1} = 275(MPa)$  e di  $S_0 = 196(MPa)$ , il programma ci restituisce i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_{-1})$  e  $\sigma_{n,a}(S_0)$  ed il valore della componente media  $\sigma_{n,m}(S_0)$ , la componente media relativa a  $S_{-1}$  risulta sempre nulla.

Sostituendo i valori delle tabella 6.4.1 e 6.4.2 nelle equazioni (6.2) e (6.3) ricaviamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  presenti rispettivamente in tabella 6.4.3 e 6.4.4.

**Tabella 6.4.1** Valori componente alternata  $\sigma_{n,a}$  per  $S_{-1}$

	$\sigma_{n,a}(MPa)$
Microcavità	562,5
Materiale Reale	534,54
Inclusione Perfettamente Rigida	549,74

**Tabella 6.4.2** Valori componente alternata  $\sigma_{n,a}$  e media  $\sigma_{n,m}$  per  $S_0$ 

	$\sigma_{n,a}$ (MPa)	$\sigma_{n,m}$ (MPa)
Microcavità	400,91	400,91
Materiale Reale	380,98	380,98
Inclusione Perfettamente Rigida	391,81	391,81

**Tabella 6.4.3** Valori del coefficiente  $k$ 

	$k$
Microcavità	0,4031
Materiale Reale	0,4031
Inclusione Perfettamente Rigida	0,4031

**Tabella 6.4.4** Valori del coefficiente  $\lambda$ 

	$\lambda$ (MPa)
Microcavità	562,5
Materiale Reale	534,54
Inclusione Perfettamente Rigida	549,74

Dopo aver trovato le costanti  $k$  e  $\lambda$  possiamo applicare il nostro criterio dato dalla (6.1).

Inseriamo i dati delle prove sperimentali presenti nella tabella 6.4.5 in “Matlab”

**Tabella 6.4.5** Valori dei dati delle prove sperimentali

Prova	$\sigma_{zz,a}$	$\sigma_{zz,m}$	$\delta_{zz}$	$\sigma_{zy,a}$	$\sigma_{zy,m}$	$\delta_{zy}$
	(MPa)	(MPa)	(°)	(MPa)	(MPa)	(°)
1	221	0	0	110,5	0	0
2	221	0	0	110,5	0	90
3	180	0	0	90	180	0
4	225	0	0	112,5	225	180
5	230	-115	0	115	115	0
6	271	-135,5	0	135,5	135,5	180

Otteniamo i valori delle componenti alternate e medie dello sforzo normale massimo per i tre casi presi in esame.

**Tabella 6.4.6** Risultati ottenuti per i tre casi considerati

Prova	Micro - Cavità		Materiale Reale		Inclusione Perfettamente Rigida	
	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1	675,41	0	610,34	0	661,89	0
2	498,89	0	452,18	0	492,83	0
3	505,3	491,28	476,88	428,83	534,49	420,25
4	306,99	613,98	158,46	536,03	181,76	554,34
5	645,66	147,99	609,35	106,28	621,73	129,63
6	425,12	351,24	221,31	239,12	276,29	261,36

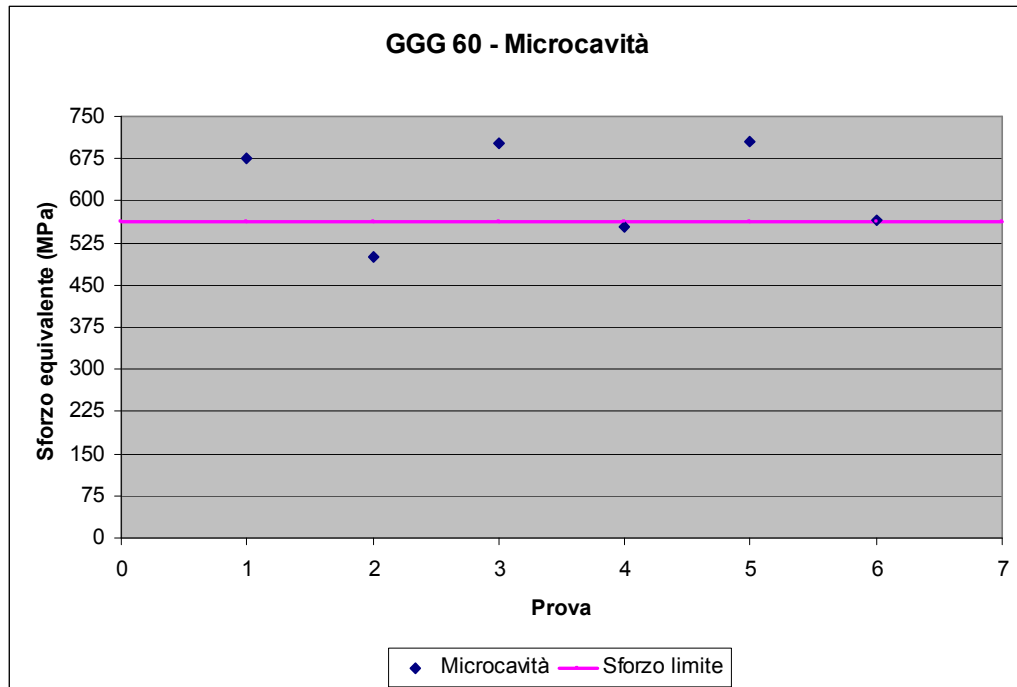
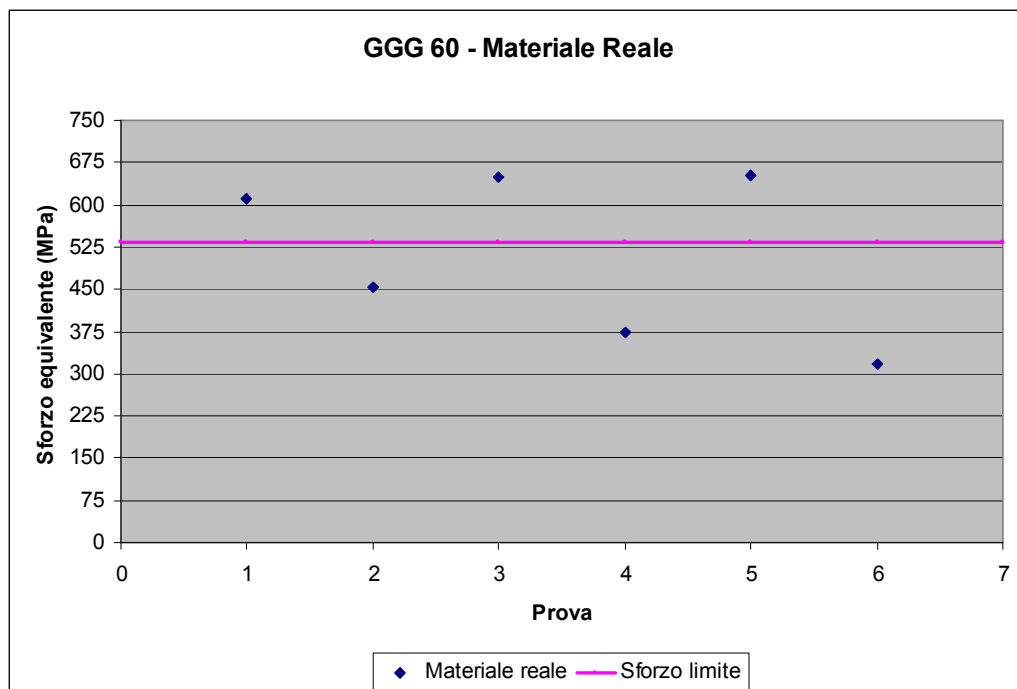
Infine si sostituiscono i valori della tabella 6.4.6 e delle tabelle 6.4.3 e 6.4.4 nell'equazione (6.1) così da trovare la  $\sigma_{equiv}$ . In tabella 6.4.7 sono riportati i valori delle  $\sigma_{equiv}$  per i tre casi, da confrontare con i rispettivi valori di  $\sigma_{amm}$  e di  $err\%$ .

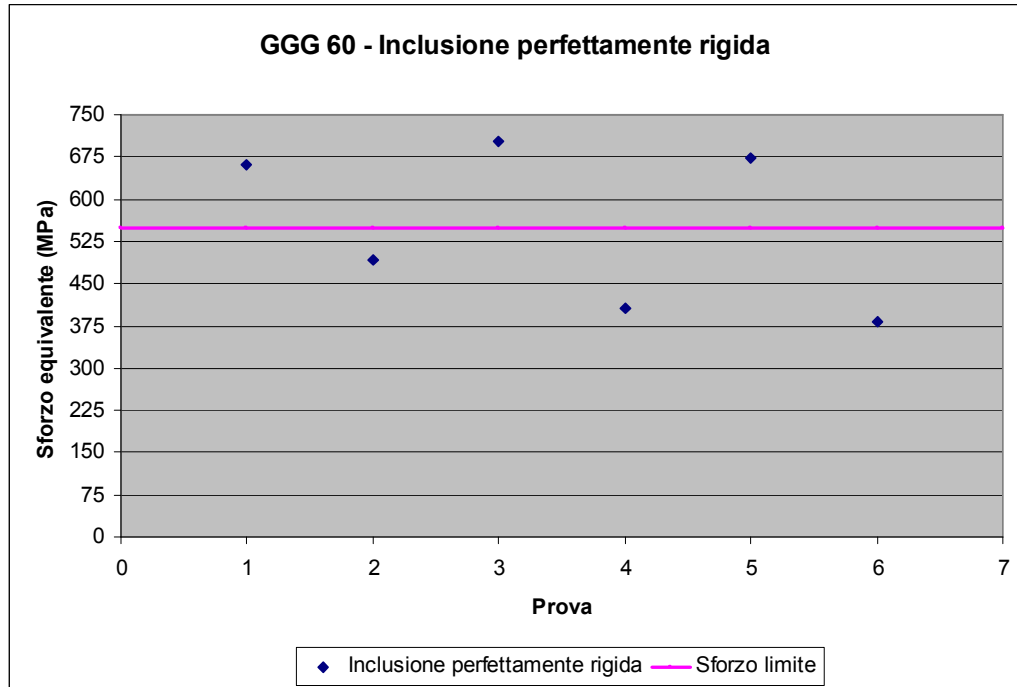
**Tabella 6.4.7** Valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err\%$ 

PROVE	Microcavità			Materiale Reale			Inclusione Perfettamente Rigida		
	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err\%$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err\%$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err\%$
	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%
1	675,41	562,5	20,07	610,34	534,54	14,18	661,89	549,74	20,40
2	498,89	562,5	-11,31	452,18	534,54	-15,41	492,83	549,74	-10,35
3	703,31	562,5	25,03	649,73	534,54	21,55	703,88	549,74	28,04
4	554,46	562,5	-1,43	374,52	534,54	-29,94	405,2	549,74	-26,29
5	705,31	562,5	25,39	652,19	534,54	22,01	673,98	549,74	22,60
6	566,69	562,5	0,74	317,69	534,54	-40,57	381,64	549,74	-30,58

Rappresentiamo graficamente i valori della  $\sigma_{equiv}$  in funzione delle prove in modo da visualizzare quali valori sono oltre lo sforzo limite  $\sigma_{amm}$ .

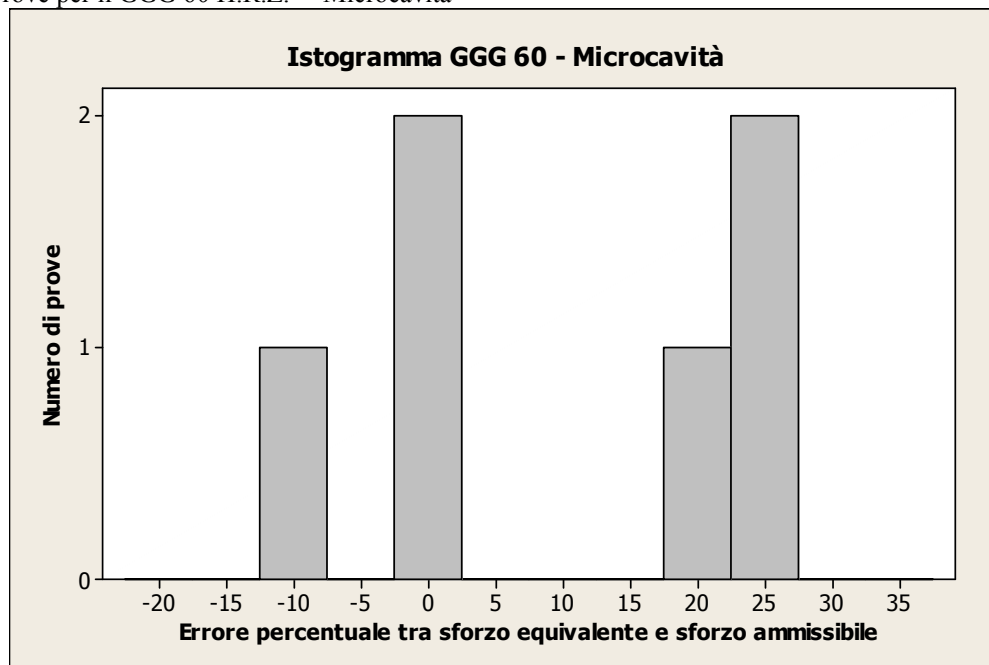
Microcavità, materiale reale, inclusione perfettamente rigida sono rappresentati rispettivamente nei grafici 6.4.1a, 6.4.1b e 6.4.1c.

**Grafico 6.4.1a** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 60 H.R.Z. Microcavità**Grafico 6.4.1b** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 60 H.Z.R. Materiale reale

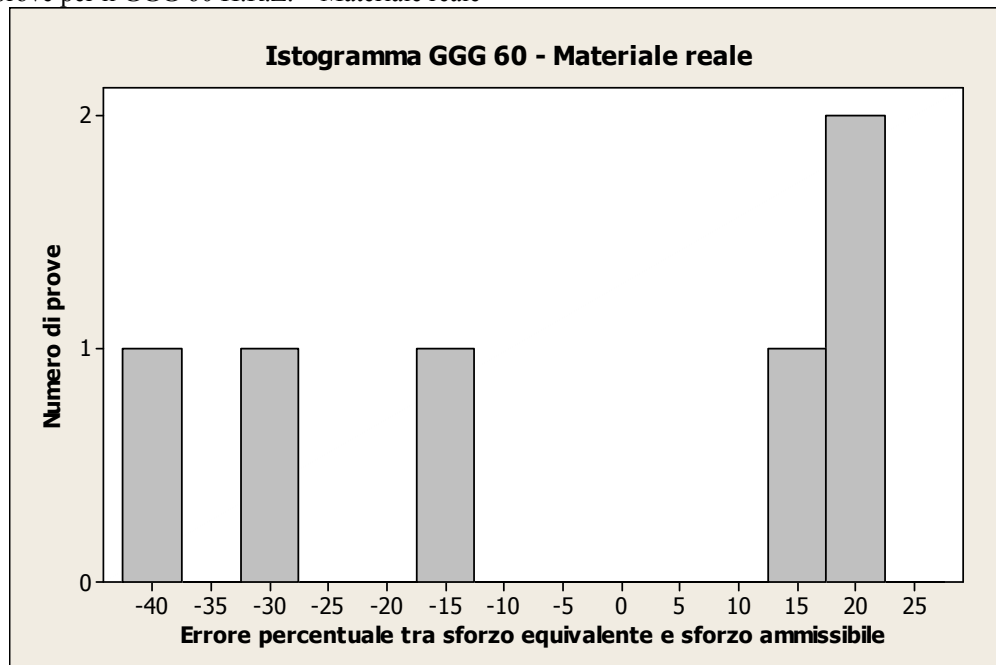
**Grafico 6.4.1c** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 60 H.R.Z. Inclusione perfettamente rigida

Rappresentiamo con un istogramma l'andamento di  $err_{\%}$  in funzione delle prove per i tre casi.

**Grafico 6.4.2a** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 H.R.Z. – Microcavità

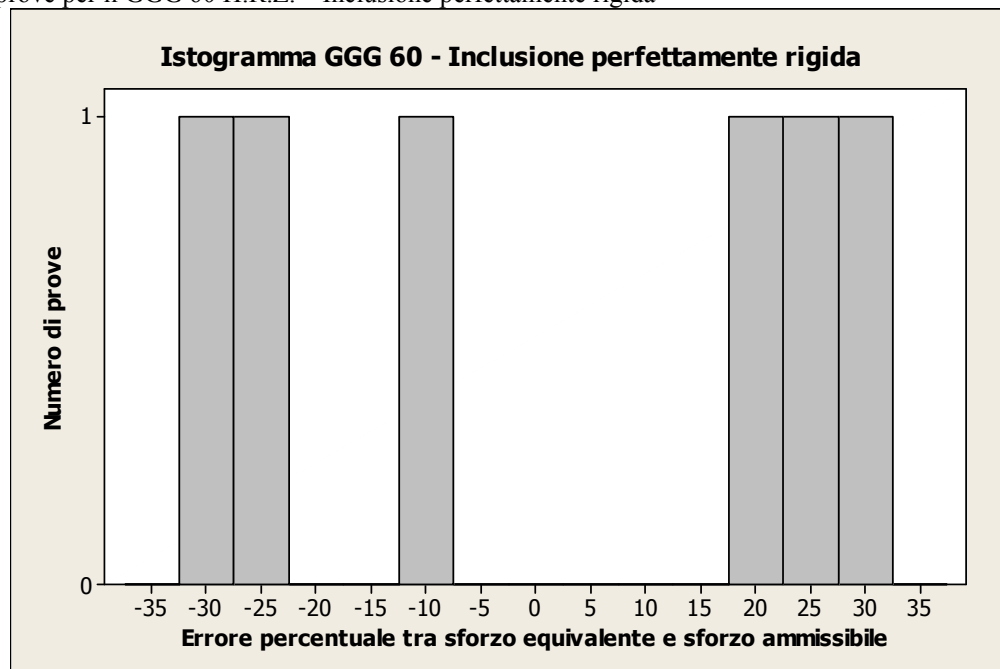


**Grafico 6.4.2b** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 H.R.Z. – Materiale reale





**Grafico 6.4.2c** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 H.R.Z. – Inclusione perfettamente rigida



Analizzando i grafici 6.4.1a, 6.4.1b e 6.4.1c notiamo che il 6.4.1a, che si riferisce alla microcavità, ha un andamento diverso rispetto agli altri due. Soffermandoci sul caso di Materiale reale osserviamo che, all'aumentare della fase, lo sforzo equivalente cala parecchio oltre lo sforzo ammissibile, questo influisce negativamente sulla resistenza del materiale e quindi anche sul nostro criterio; si riscontra un andamento simile anche per il caso di inclusione perfettamente rigida.

Per le prove in cui non è presente uno sfasamento, l'errore si aggira tra il 15 ed il 20% a favore della sicurezza. Tale valore aumenta notevolmente, a sfavore della sicurezza, quando è presente lo sfasamento. Si raggiungono valori dell'errore anche del 40%, nel caso di "Materiale reale", quando lo sfasamento è pari a 180°.

Vista l'ampia dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, per questo materiale il criterio non fornisce buoni risultati.

## 6.5 Materiale “GGG 60”, [9]

La ghisa sferoidale denominata GGG 60 è stata studiata anche da Grubisic e Sonsino. Benché formalmente si tratterebbe dello stesso materiale studiato da Heidenreich, Richter and Zenner [8], in realtà la variabilità delle proprietà meccaniche dei materiali presentati in [8] e [9] è tale che ci impone di studiare la ghisa GGG 60 di Grubisic e Sonsino come se fosse un materiale diverso.

Prendiamo quindi in esame il materiale “GGG 60” di Grubisic e Sonsino le cui proprietà sono descritte nella tabella 6.1 e calcoliamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  per i casi di “microcavità”, “materiale reale” e “inclusione perfettamente rigida”.

Data la conoscenza del limite pulsante  $S_0$  in questo caso rispetto a quelli visti in precedenza utilizziamo le equazioni (6.2) e (6.3) per trovare i coefficienti  $k$  e  $\lambda$ .

Inserendo in “Matlab” i valori di  $S_{-1} = 331,57$  (MPa) e di  $S_0 = 218,3$  (MPa), il programma ci restituisce i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_{-1})$  e  $\sigma_{n,a}(S_0)$  ed il valore della componente media  $\sigma_{n,m}(S_0)$ , la componente media relativa ad  $S_{-1}$  risulta essere nulla.

Sostituendo i valori trovati rispettivamente nelle tabella 6.5.1 e 6.5.2 attraverso le equazioni (6.2) e (6.3) ricaviamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  presenti rispettivamente in tabella 6.5.3 e 6.5.4.

**Tabella 6.5.1** Valori componente alternata  $\sigma_{n,a}$  e componente media  $\sigma_{n,m}$  per  $S_{-1}$

	$\sigma_{n,a}$ (MPa)
Microcavità	678,21
Materiale Reale	644,5
Inclusione Perfettamente Rigida	662,82

**Tabella 6.5.2** Valori componente alternata  $\sigma_{n,a}$  e componente media  $\sigma_{n,m}$  per  $S_0$

	$\sigma_{n,a}$ (MPa)	$\sigma_{n,m}$ (MPa)
Microcavità	446,52	446,52
Materiale Reale	424,33	424,33
Inclusione Perfettamente Rigida	436,39	436,39

**Tabella 6.5.3** Valori del coefficiente  $k$ 

	$k$
Microcavità	0,52
Materiale Reale	0,52
Inclusione Perfettamente Rigida	0,52

**Tabella 6.5.4** Valori del coefficiente  $\lambda$ 

	$\lambda$ (MPa)
Microcavità	678,21
Materiale Reale	644,5
Inclusione Perfettamente Rigida	662,82

Dopo aver trovato le costanti  $k$  e  $\lambda$  possiamo applicare il nostro criterio dato dalla (6.1).

Inseriamo i dati delle prove sperimentali presenti nella tabella 6.5.5 in “Matlab”

**Tabella 6.5.5** Valori dei dati delle prove sperimentali

Prova	$\sigma_{zz,a}$	$\sigma_{zz,m}$	$\delta_{zz}$	$\sigma_{zy,a}$	$\sigma_{zy,m}$	$\delta_{zy}$
	(MPa)	(MPa)	(°)	(MPa)	(MPa)	(°)
1	256,6	0	0	148,83	0	0
2	261,4	0	0	151,61	0	90
3	164	164	0	95,12	95,12	0
4	200	200	0	116	116	90

Otteniamo i valori delle componenti alternate e medie dello sforzo normale massimo per i tre casi presi in esame.

**Tabella 6.5.6** Risultati ottenuti per i tre casi considerati

Prova	Microcavità		Materiale Reale		Inclusione Perfettamente Rigida	
	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1	833,21	0	747,58	0	810,43	0
2	610,38	0	554,32	0	602,9	0
3	532,52	532,52	477,8	477,8	517,97	517,97
4	464,14	649,42	424,12	582,68	461,29	631,67

Infine si sostituiscono i valori della tabella 6.5.6 e delle tabelle 6.5.3 e 6.5.4 nell'equazione (6.1) così da trovare la  $\sigma_{equiv}$ . In tabella 6.5.7 sono riportati i

valori delle  $\sigma_{equiv}$  per i tre casi, da confrontare con i rispettivi valori di  $\sigma_{amm}$  e di  $err_{\%}$ .

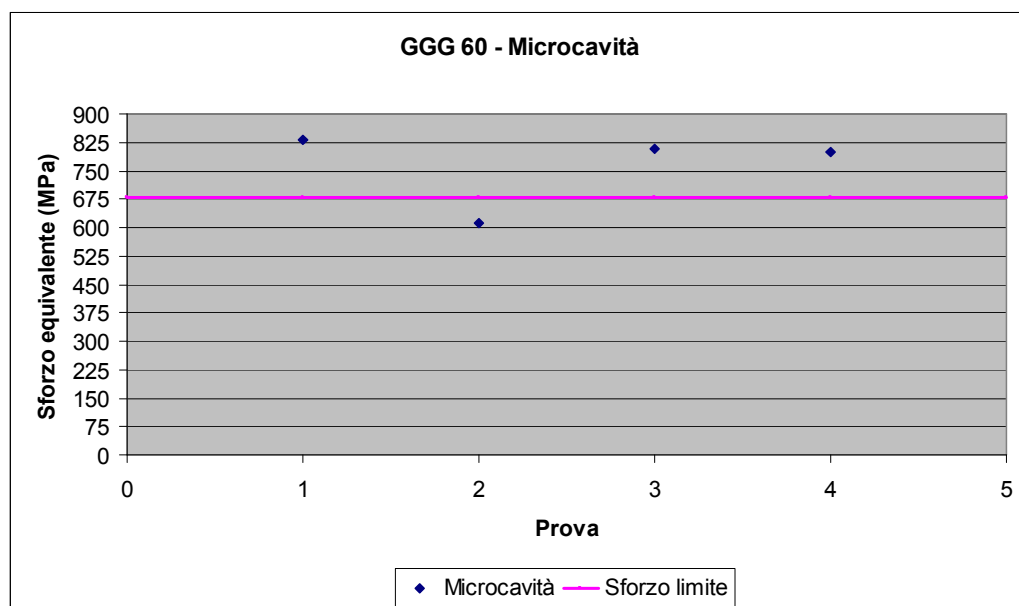
**Tabella 6.5.7** Valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err_{\%}$

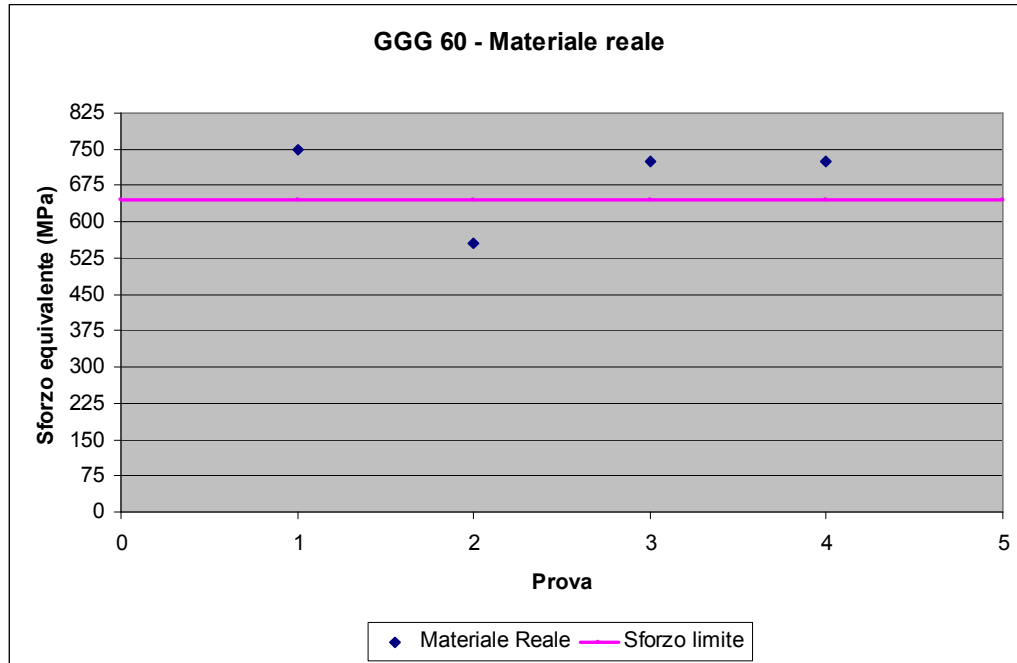
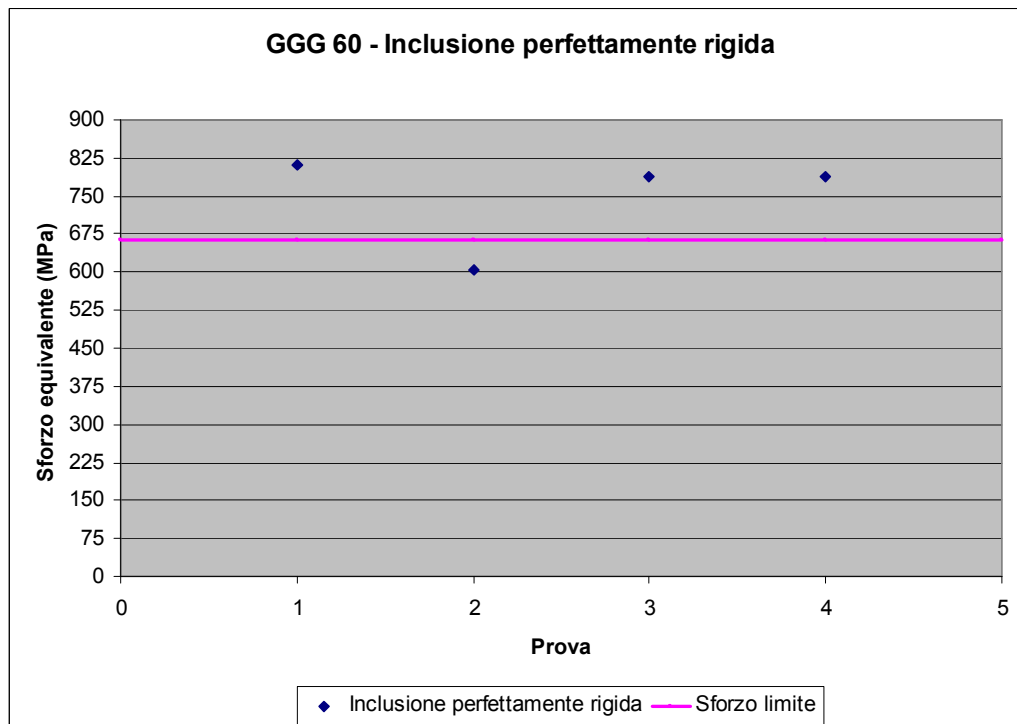
PROVE	Microcavità			Materiale Reale			Inclusione Perfettamente Rigida		
	$\sigma_{equiv}$ (MPa)	$\sigma_{amm}$ (MPa)	$err_{\%}$ %	$\sigma_{equiv}$ (MPa)	$\sigma_{amm}$ (MPa)	$err_{\%}$ %	$\sigma_{equiv}$ (MPa)	$\sigma_{amm}$ (MPa)	$err_{\%}$ %
1	833,21	678,21	22,85	747,58	644,50	15,99	810,43	662,82	22,27
2	610,38	678,21	-10,00	554,32	644,50	-13,99	602,90	662,82	-9,04
3	808,83	678,21	19,26	725,71	644,50	12,60	786,73	662,82	18,69
4	801,11	678,21	18,12	726,45	644,50	12,72	789,05	662,82	19,04

Rappresentiamo graficamente i valori della  $\sigma_{equiv}$  in funzione delle prove in modo da visualizzare quali valori sono oltre lo sforzo limite  $\sigma_{amm}$ .

Microcavità, materiale reale, inclusione perfettamente rigida sono rappresentati rispettivamente nei grafici 6.5.1a, 6.5.1b e 6.5.1c.

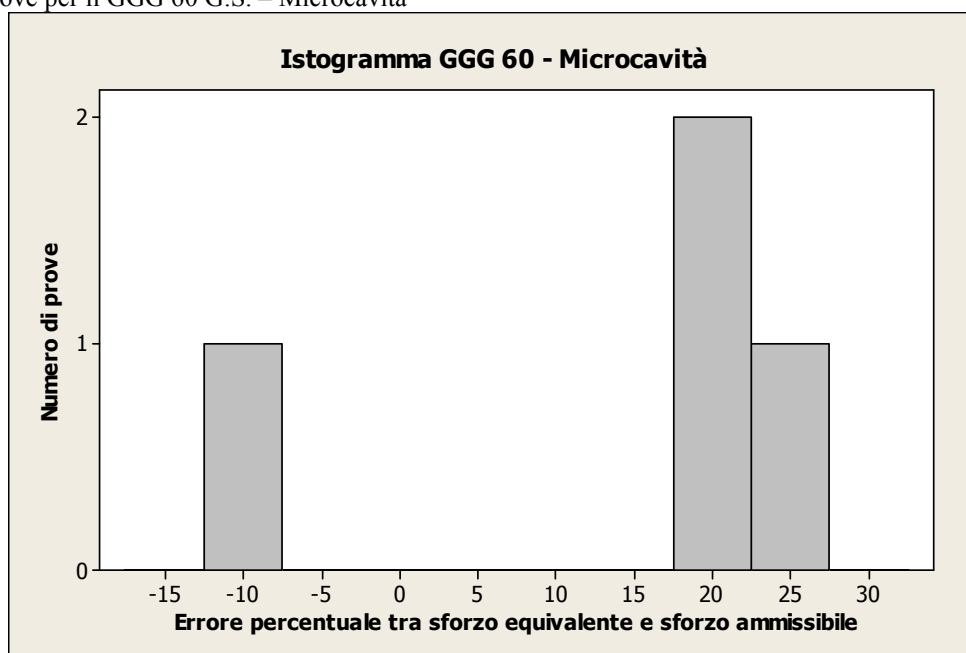
**Grafico 6.5.1a** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 60 G.S. - Microcavità



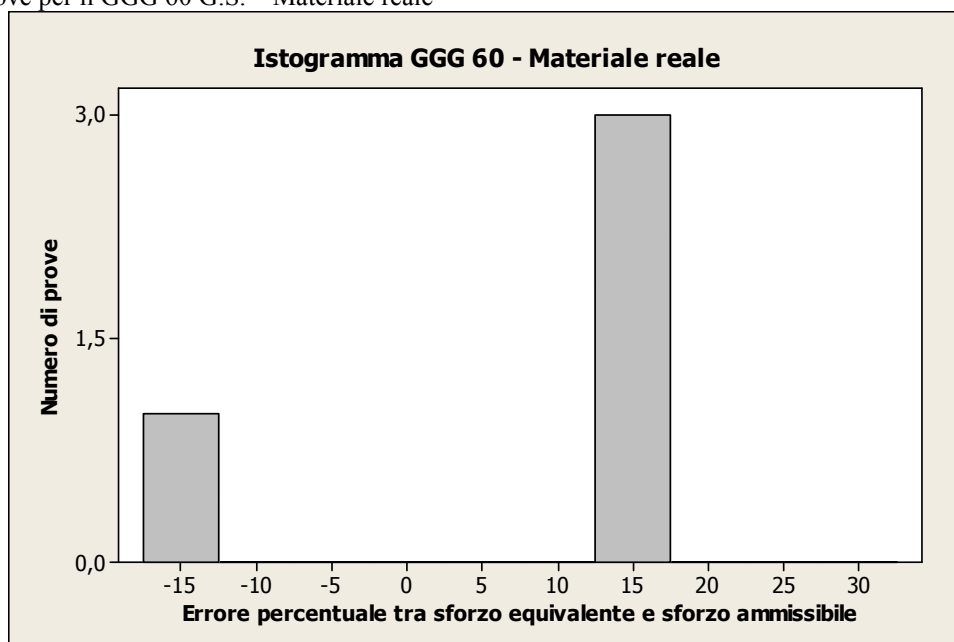
**Grafico 6.5.1b** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 60 G.S. Materiale reale**Grafico 6.5.1c** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GGG 60 G.S. Inclusione perfettamente rigida

Rappresentiamo con un istogramma l'andamento di  $err_{\%}$  in funzione delle prove per i tre casi.

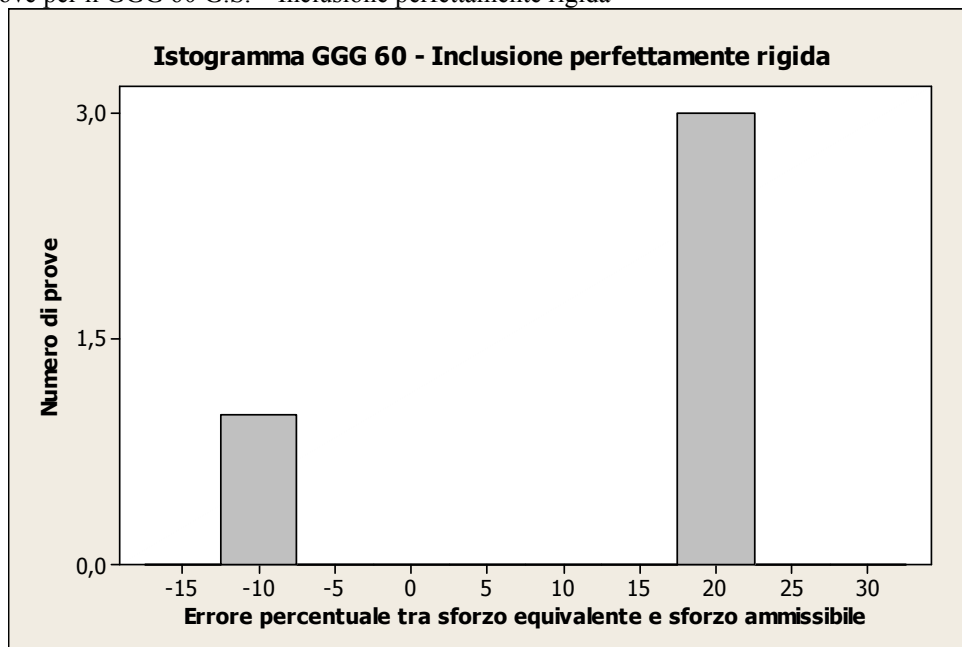
**Grafico 6.5.2a** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 G.S. – Microcavità



**Grafico 6.5.2b** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 G.S. – Materiale reale



**Grafico 6.5.2c** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GGG 60 G.S. – Inclusione perfettamente rigida



Come si può notare dai grafici 6.5.1a, 6.5.1b e 6.5.1c, risulta solo una prova al di sotto dello sforzo ammissibile.

Anche in questo materiale, nella prova 2, osserviamo che la presenza dello sfasamento fa abbassare lo sforzo equivalente al di sotto dello sforzo ammissibile per tutti e tre i casi. Un'anomalia è presente nella prova 4, infatti lo sforzo equivalente rimane allo stesso livello della prova 3 dove non è presente sfasamento; questo è dovuto alla presenza di una componente media più elevata che contrasta in modo benefico la presenza dello sfasamento.

I tre casi presentano un andamento piuttosto simile, considerando il "Materiale reale" l'errore massimo si aggira intorno al 15% e va diminuendo fino a raggiungere valori negativi, comunque accettabili, dovuti alla presenza di uno sfasamento di  $90^\circ$ .

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile ed il valore dell'errore che è accettabile, per questo materiale il criterio fornisce buoni risultati.

## 6.6 Materiale “GRP 500”, [10]

La ghisa sferoidale denominata GRP 500 è stata studiata da Marquis e Solin [10]. Questo lavoro, benché approfondito, si limita a uno studio del comportamento a fatica assiale e a torsione applicate separatamente, cioè senza eseguire delle prove con sollecitazioni combinate.

Prendiamo quindi in esame il materiale “GRP 500 “ le cui proprietà sono descritte nella tabella 6.1 e calcoliamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  per i casi di “microcavità”, “materiale reale” e “inclusione perfettamente rigida”.

Data la conoscenza del limite pulsante  $S_0$  in questo caso rispetto a quelli visti in precedenza utilizziamo le equazioni (6.2) e (6.3) per trovare i coefficienti  $k$  e  $\lambda$ .

Inserendo in “Matlab” i valori di  $S_{-1} = 220(MPa)$  e di  $S_0 = 140(MPa)$ , il programma ci restituisce i valori della componente alternata  $\sigma_{n,a}(S_{-1})$  e  $\sigma_{n,a}(S_0)$  ed il valore della componente media  $\sigma_{n,m}(S_0)$ , la componente media relativa ad  $S_{-1}$  risulta essere sempre nulla.

Sostituendo i valori trovati rispettivamente nelle tabella 6.6.1 e 6.6.2 attraverso le equazioni (6.2) e (6.3) ricaviamo i valori di  $k$  e  $\lambda$  presenti rispettivamente in tabella 6.6.3 e 6.6.4.

**Tabella 6.6.1** Valori componente alternata  $\sigma_{n,a}$  e componente media  $\sigma_{n,m}$  per  $S_{-1}$

	$\sigma_{n,a} (MPa)$
Microcavità	450
Materiale Reale	427,63
Inclusione Perfettamente Rigida	439,79

**Tabella 6.6.2** Valori componente alternata  $\sigma_{n,a}$  e componente media  $\sigma_{n,m}$  per  $S_0$

	$\sigma_{n,a} (MPa)$	$\sigma_{n,m} (MPa)$
Microcavità	286,36	286,36
Materiale Reale	272,13	272,13
Inclusione Perfettamente Rigida	279,87	279,87



**Tabella 6.6.3** Valori del coefficiente  $k$ 

	$k$
Microcavità	0,57
Materiale Reale	0,57
Inclusione Perfettamente Rigida	0,57

**Tabella 6.6.4** Valori del coefficiente  $\lambda$ 

	$\lambda$ (MPa)
Microcavità	450
Materiale Reale	427,63
Inclusione Perfettamente Rigida	439,79

Dopo aver trovato le costanti  $k$  e  $\lambda$  possiamo applicare il nostro criterio dato dalla (6.1).

Inseriamo i dati delle prove sperimentali presenti nella tabella 6.6.5 in “Matlab”.

**Tabella 6.6.5** Valori dei dati delle prove sperimentali

Prova	$\sigma_{zz,a}$	$\sigma_{zz,m}$	$\delta_{zz}$	$\sigma_{zy,a}$	$\sigma_{zy,m}$	$\delta_{zy}$
	(MPa)	(MPa)	(°)	(MPa)	(MPa)	(°)
1	118	260	0	0	0	0
2	137,5	182,5	0	0	0	0
3	0	0	0	125	125	0

Otteniamo i valori delle componenti alternate e medie dello sforzo normale massimo per i tre casi presi in esame.

**Tabella 6.6.6** Risultati ottenuti per i tre casi considerati

	Microcavità		Materiale Reale		Inclusione Perfettamente Rigida	
Prova	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$	$\sigma_{n,a}$	$\sigma_{n,m}$
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1	241,36	531,82	229,37	505,38	235,89	519,75
2	281,25	373,3	267,27	354,74	274,38	364,17
3	349,43	349,43	320,04	320,04	321,08	321,08

Infine si sostituiscono i valori della tabella 6.5.6 e delle tabelle 6.5.3 e 6.5.4 nell'equazione (6.1) così da trovare la  $\sigma_{equiv}$ . In tabella 6.5.7 sono riportati i

valori delle  $\sigma_{equiv}$  per i tre casi, da confrontare con i rispettivi valori di  $\sigma_{amm}$  e di  $err_{\%}$ .

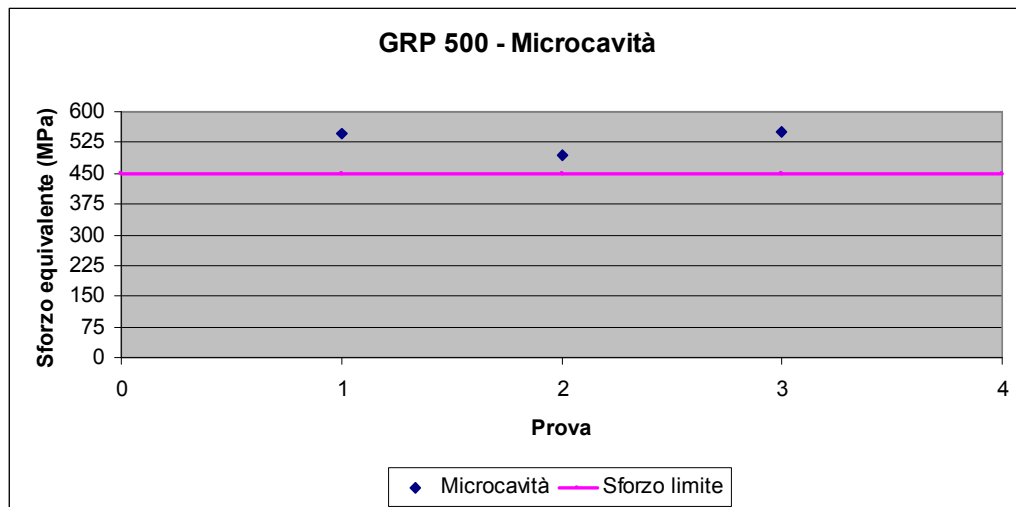
**Tabella 6.6.7** Valori di  $\sigma_{equiv}$ ,  $\sigma_{amm}$  e  $err_{\%}$

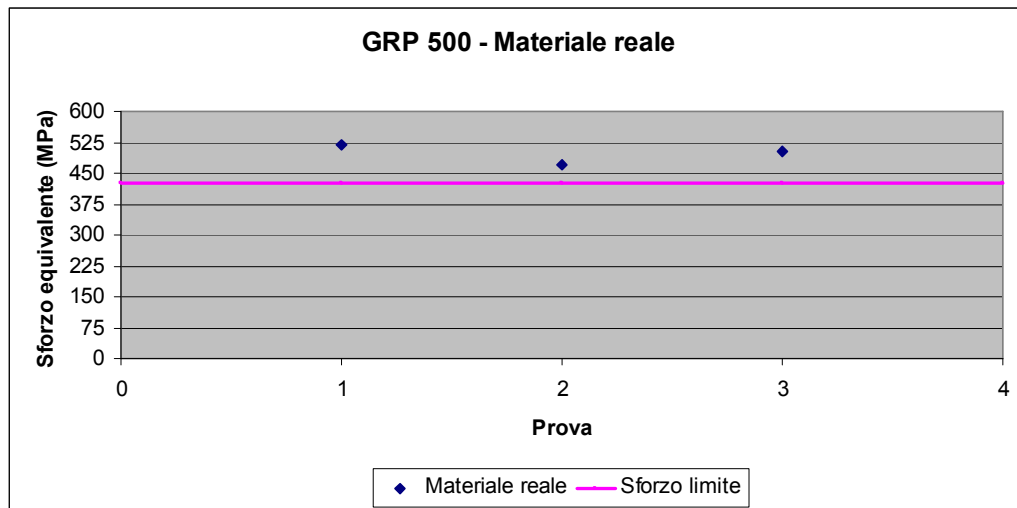
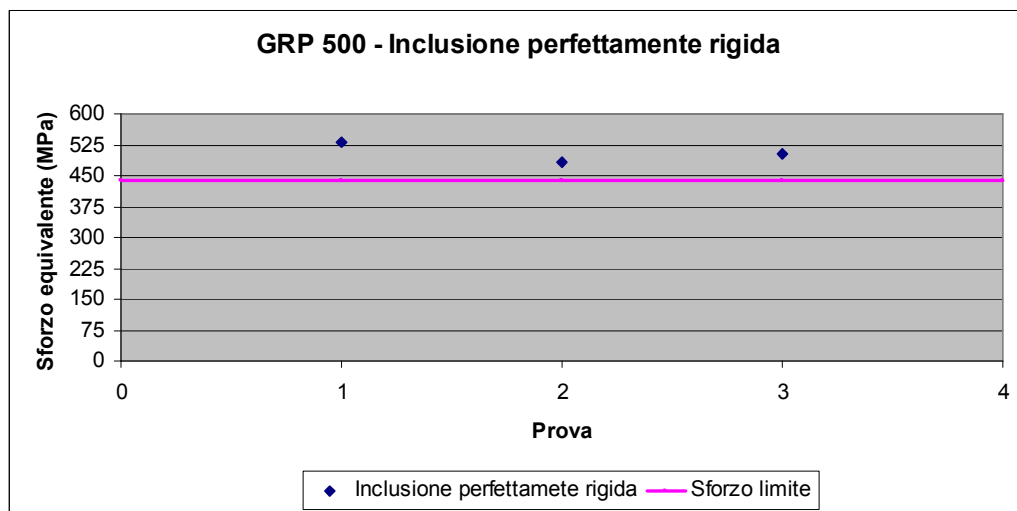
PROVE	Microcavità			Materiale Reale			Inclusione Perfettamente Rigida		
	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err_{\%}$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err_{\%}$	$\sigma_{equiv}$	$\sigma_{amm}$	$err_{\%}$
	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%	(MPa)	(MPa)	%
1	545,27	450	21,17	518,15	427,63	21,17	532,88	439,79	21,17
2	494,57	450	9,90	469,97	427,63	9,90	482,47	439,79	9,70
3	549,11	450	22,02	502,92	427,63	17,61	504,55	439,79	14,72

Rappresentiamo graficamente i valori della  $\sigma_{equiv}$  in funzione delle prove in modo da visualizzare quali valori sono oltre lo sforzo limite  $\sigma_{amm}$ .

Microcavità, materiale reale, inclusione perfettamente rigida sono rappresentati rispettivamente nei grafici 6.5.1a, 6.5.1b e 6.5.1c.

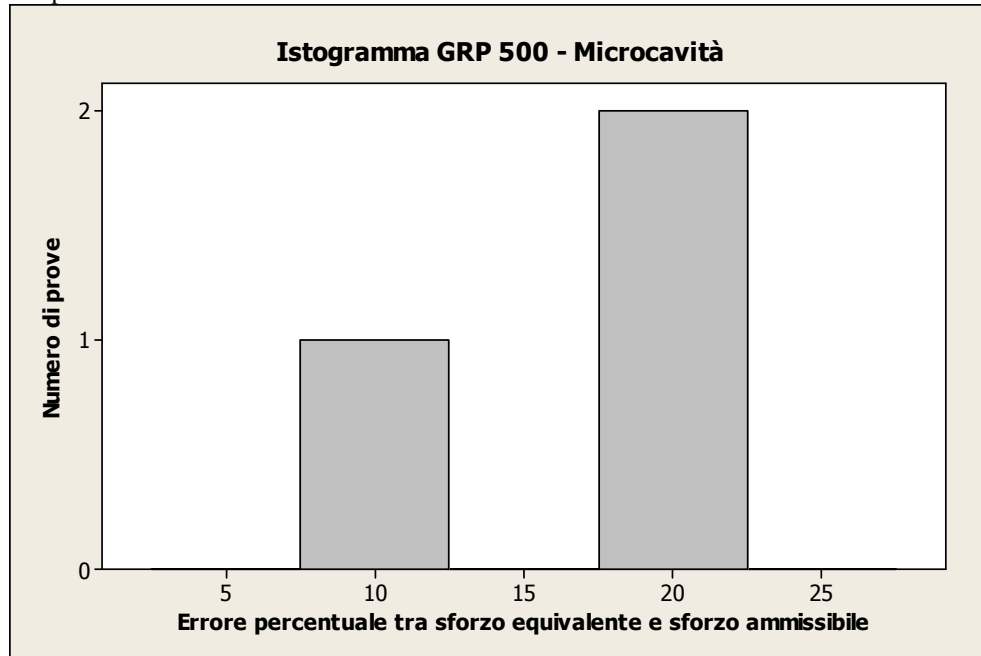
**Grafico 6.6.1a** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GRP 500 Microcavità



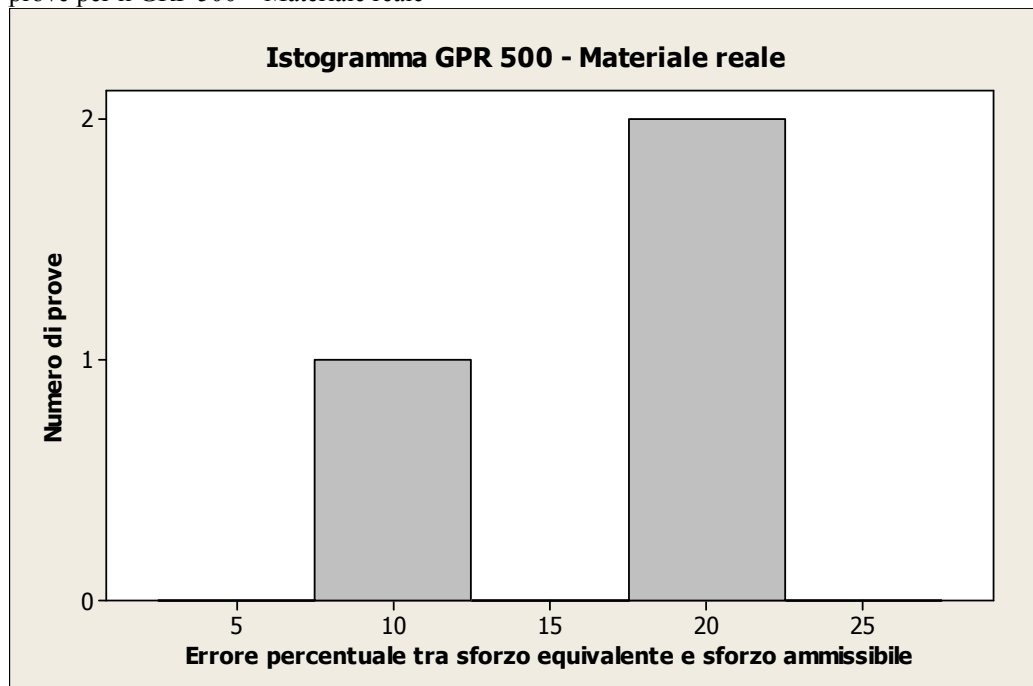
**Grafico 6.6.1b** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GRP 500 Materiale reale**Grafico 6.6.1c** Valori di  $\sigma_{equiv}$  - GRP 500 Inclusione perfettamente rigida

Rappresentiamo con un istogramma l'andamento di  $err_{\%}$  in funzione delle prove per i tre casi.

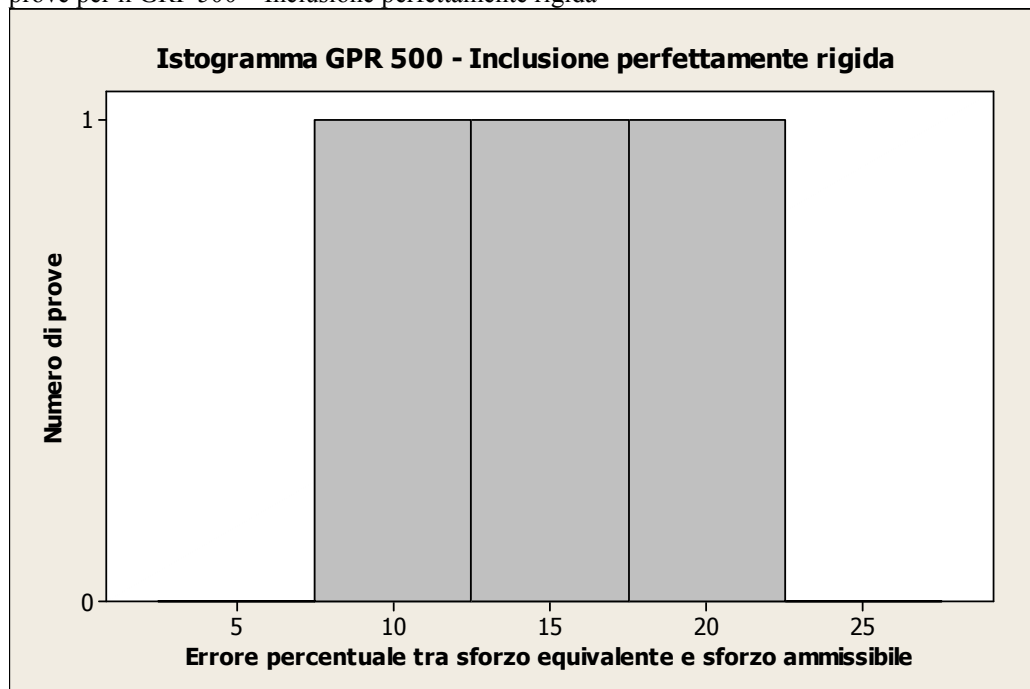
**Grafico 6.6.2a** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GRP 500 - Microcavità



**Grafico 6.6.2b** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GRP 500 - Materiale reale



**Grafico 6.6.2c** Istogramma tra l'andamento dell'errore percentuale e la frequenza del numero di prove per il GRP 500 – Inclusione perfettamente rigida



Come si può notare dai grafici 6.6.1a, 6.6.1b e 6.6.1c, tutti i valori delle prove sono al di sopra del nostro criterio. Il criterio approssima bene il materiale in tutte le prove ed in particolare nella prova 2.

Purtroppo non sono presenti prove con combinazioni di sollecitazione assiale, taglio e sfasamento.

Si noti come la sola sollecitazione di taglio (prova 3) sia più gravosa di una sollecitazione a trazione, anche di valore più elevato (prova 2).

Si presuppone, come accaduto per gli altri materiali, che la presenza di uno sfasamento abbasserebbe lo sforzo equivalente al di sotto dello sforzo ammissibile, con conseguenze negative per la bontà del criterio.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile ed un valore dell'errore accettabile (intorno al 10-20%), per il GRP 500 il criterio fornisce buoni risultati.

## 6.7 Conclusioni

Lo scopo del lavoro fatto in questa tesi è stato quello di analizzare lo stato di sforzo nell'intorno di un'inclusione, sottoponendo il materiale ad uno sforzo uniforme lontano da essa. In tal modo è stato possibile individuare un criterio a fatica.

Partendo dal concetto di scala “mesoscopica” descritto nel sommario, abbiamo analizzato lo stato di sforzo nell'intorno di un'inclusione sferica sottoposta a degli stati di sforzo uniformi lontani assiali e di taglio per casi di “microcavità”, “inclusione perfettamente rigida” e “materiale reale”, cioè quando è presente un nodulo di grafite, caratteristica propria della ghisa nodulare.

Trovato lo stato di sforzo multi-assiale intorno all'inclusione sferica, abbiamo condotto le prove per i diversi materiali in cui, sperimentalmente, non si è verificata rottura per un numero di cicli considerato infinito. Abbiamo eseguito l'analisi numerica utilizzando “Matlab”, che alla fine di ogni prova restituisce le componenti di sforzo alternato  $\sigma_{n,a}$  e media  $\sigma_{n,m}$  nel piano in cui agisce lo sforzo normale massimo; questi valori vengono utilizzati dal nostro criterio nell'equazione (6.1).

Per la metà dei materiali (Cast Iron, GGG40 e GTS 45), a causa della mancanza del limite assiale pulsante  $S_0$ , non è stato possibile identificare il parametro  $k$  del criterio.

Comunque dato che le prove in flessione-torsione combinate per questi materiali sono tutte alternate, la conoscenza del parametro  $k$  non è necessaria per l'applicazione del criterio, infatti  $\sigma_{n,m}$  risulta sempre uguale a zero per le sollecitazioni alternate.

Il resto dei materiali analizzati (GGG 60 ZHB, GGG 60 e GRP 500), vista la conoscenza del limite assiale pulsante  $S_0$ , il parametro  $k$  è stato trovato numericamente combinando la (6.1) per i casi di fatica alternata  $S_{-1}$  e fatica pulsante  $S_0$ .

Commentiamo singolarmente i risultati ottenuti nelle prove per i sei materiali utilizzati:

- **CAST IRON**

Come si può notare dai grafici 6.1.1a, 6.1.1b e 6.1.1c, tutti i valori delle prove sono al di sopra del nostro criterio tranne che nella numero 8 che tende al valore ammissibile.

Analizzando l'andamento ed i valori nei i casi in cui si ha uno sfasamento, si osserva che all'aumentare di quest'ultimo, lo sforzo equivalente tende al valore dello sforzo ammissibile.

L'andamento dei tre casi è simile tra loro, considerando il caso di "Materiale reale" nella prova 2 è presente un errore intorno al 30% maggiore rispetto alle altre prove, nelle quali si trova tra il 22% ed un errore quasi nullo.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, con un errore accettabile nella maggior parte delle prove, a favore della sicurezza, il criterio per il Cast Iron fornisce risultati accettabili.

- **GGG 40**

Come si può notare dai grafici 6.2.1a, 6.2.1b e 6.2.1c, in due prove ci troviamo al di sotto dello sforzo ammissibile, entrambe sono sfasate di 90°. In quelle dove lo sfasamento è di 45° si ha un aumento dello sforzo equivalente, dovuto però all'aumento sia dello sforzo assiale che di quello di taglio; per cui a parità di condizioni, lo sfasamento abbassa lo sforzo equivalente con conseguente riduzione della resistenza del materiale.

Il materiale reale è quello che fornisce il miglior risultato, l'errore percentuale si aggira tra il 25% per la prova 5 e diminuisce sempre di più fino a raggiungere valori negativi quando lo sforzo equivalente passa al di sotto dello sforzo ammissibile.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, con un errore accettabile nella maggior parte delle prove, il criterio per il GGG 40 fornisce risultati accettabili.

- **GTS 45**

Come si può notare dai grafici 6.3.1a, 6.3.1b e 6.3.1c, l'andamento dello sforzo è fortemente influenzato dallo sfasamento, infatti nelle prove in cui vale 90° lo sforzo equivalente si abbassa oltre quello ammissibile, quindi lo sfasamento influisce negativamente sulla resistenza del materiale.

L'andamento dei tre casi è simile tra loro, considerando il caso di "Materiale reale" l'errore massimo si aggira intorno al 20% e va diminuendo fino ad arrivare a valori negativi, che sono dovuti alla presenza dello sfasamento di 90° nelle prove.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, con un errore accettabile in tutte le prove, per il GTS 45 il criterio fornisce risultati accettabili.

- **GGG 60 (H.R.Z.)**

Analizzando i grafici 6.4.1a, 6.4.1b e 6.4.1c notiamo che il 6.4.1a, che si riferisce alla microcavità, ha un andamento diverso rispetto agli altri due. Soffermandoci sul caso di Materiale reale osserviamo che, all'aumentare della fase, lo sforzo equivalente cala parecchio oltre lo sforzo ammissibile, questo influisce negativamente sulla resistenza del materiale e quindi anche sul nostro criterio; si riscontra un andamento simile anche per il caso di inclusione perfettamente rigida.

Per le prove in cui non è presente uno sfasamento, l'errore si aggira tra il 15 ed il 20% a favore della sicurezza. Tale valore aumenta notevolmente, a sfavore della sicurezza, quando è presente lo sfasamento. Si raggiungono valori dell'errore anche del 40%, nel caso di "Materiale reale", quando lo sfasamento è pari a 180°.

Vista l'ampia dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile, per questo materiale il criterio non fornisce buoni risultati.

- **GGG 60 (G.S.)**

Come si può notare dai grafici 6.5.1a, 6.5.1b e 6.5.1c, risulta solo una prova al di sotto dello sforzo ammissibile.

Anche in questo materiale, nella prova 2, osserviamo che la presenza dello sfasamento fa abbassare lo sforzo equivalente al di sotto dello sforzo ammissibile per tutti e tre i casi. Un'anomalia è presente nella prova 4, infatti lo sforzo equivalente rimane allo stesso livello della prova 3 dove non è presente sfasamento; questo è dovuto alla presenza di una componente media più elevata che contrasta in modo benefico la presenza dello sfasamento.

I tre casi presentano un andamento piuttosto simile, considerando il "Materiale reale" l'errore massimo si aggira intorno al 15% e va diminuendo fino a raggiungere valori negativi, comunque accettabili, dovuti alla presenza di uno sfasamento di 90°.

Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile ed il valore dell'errore che è accettabile, per questo materiale il criterio fornisce buoni risultati.



- **GRP 500**

Come si può notare dai grafici 6.6.1a, 6.6.1b e 6.6.1c, tutti i valori delle prove sono al di sopra del nostro criterio. Il criterio approssima bene il materiale in tutte le prove ed in particolare nella prova 2.

Purtroppo non sono presenti prove con combinazioni di sollecitazione assiale, taglio e sfasamento.

Si noti come la sola sollecitazione di taglio (prova 3) sia più gravosa di una sollecitazione a trazione, anche di valore più elevato (prova 2).

Si presuppone, come accaduto per gli altri materiali, che la presenza di uno sfasamento abbasserebbe lo sforzo equivalente al di sotto dello sforzo ammissibile, con conseguenze negative per la bontà del criterio.

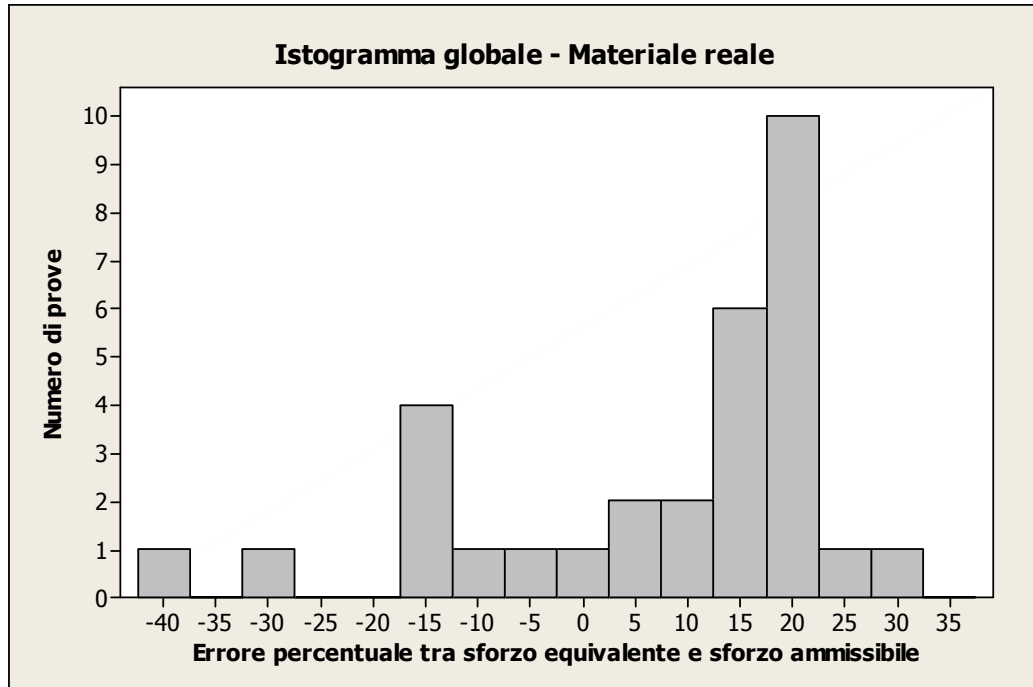
Vista la dispersione dei dati intorno allo sforzo ammissibile ed un valore dell'errore accettabile (intorno al 10-20%), per il GRP 500 il criterio fornisce buoni risultati.

Dai risultati ottenuti dalle prove effettuate possiamo concludere che per i tre materiali sottoposti a delle sollecitazioni combinate alternate (cioè tutti i componenti dello sforzo hanno un rapporto  $R = -1$ ) e quindi dove non c'è la dipendenza dalla componente media  $\sigma_{n,m}$ , il criterio offre risultati accettabili; tra i tre quello più attendibile è il GTS 45.

Considerando invece i tre materiali in cui è presente uno stato di sforzo medio quello che sfrutta meglio il criterio è il GPR 500, che ha un errore percentuale medio per il materiale reale di circa il 16%.

Riportiamo di seguito un istogramma dell'errore percentuale di tutte le prove effettuate per il materiale reale.

**Grafico 6.7.1** Istogramma dell'errore percentuale complessivo di tutte le prove per il Materiale reale



L'andamento globale dell'errore percentuale si aggira intorno al 15-20% a favore di sicurezza.

Anche se globalmente le previsioni del criterio sono accettabili esiste ampio margine di miglioramento, in particolare si nota che la presente formulazione del criterio non permette di tener conto delle dimensioni dei noduli di grafite; mentre dalla sperimentazione sappiamo che influenzano il comportamento a fatica delle ghise sferoidali.

Tale effetto dimensionale potrebbe essere introdotto nel criterio considerando il gradiente dello sforzo normale massimo.

## APPENDICE A

### Calcolo di spostamenti – deformazioni – sforzi fuori dal contorno sferico

Spostamenti  $u_\theta^b$ ,  $u_r^b$  e  $u_{r\theta}^b$  calcolati dalla (1.8):

$$\bullet \quad u_\theta^b = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + r \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial \theta}$$

calcoliamo la  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$  e la  $\frac{\partial \omega^{(-3)}}{\partial \theta}$  dalle funzioni armoniche (1.1.1)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \frac{B_1}{r^3} (-2 \sin \theta \cos \theta) = -\frac{3}{2} \frac{B_1}{r^3} \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial \omega^{(-3)}}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \frac{C_1}{r^3} (-2 \sin \theta \cos \theta) = -\frac{3}{2} \frac{C_1}{r^3} \sin 2\theta$$

$$u_\theta^b = \frac{1}{r} \left( -\frac{3}{2} \frac{B_1}{r^3} \sin 2\theta \right) + r \left( -\frac{3}{2} \frac{C_1}{r^3} \sin 2\theta \right)$$

$$u_\theta^b = - \left[ \frac{3}{2} \frac{B_1}{r^4} + \frac{3}{2} \frac{C_1}{r^2} \right] \sin 2\theta \quad (A1)$$

$$\bullet \quad u_r^b = \frac{\partial \phi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial r} + \alpha_n r \omega^{(n)}$$

calcoliamo la  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$  e la  $\frac{\partial \omega^{(-3)}}{\partial r}$  dalle funzioni armoniche (1.1.2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} + 2B(3 \cos^2 \theta - 1) * (-3) \frac{1}{r^4} \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} - \frac{6B}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\frac{\partial \omega^{(-3)}}{\partial r} = \frac{2}{3} C(3 \cos^2 \theta - 1)(-3) \frac{1}{r^4} \quad \frac{\partial \omega^{(-3)}}{\partial r} = \frac{2}{r^4} C(3 \cos^2 \theta - 1)$$

Il parametro  $\alpha_{(-3)}$  preso dalla (1.6) vale :

$$\alpha_{(-3)} = -2 \left( \frac{3 * (-3) + 1 - 2(2 * (-3) + 1)\nu_b}{-3 + 5 - 4\nu_b} \right) \quad \alpha_{(-3)} = 2 \left( \frac{4 - 5\nu_b}{1 - 2\nu_b} \right)$$

per cui:

$$\alpha_{(-3)} r \omega^{(-3)} = 2 \left( \frac{4 - 5\nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) r \frac{2C}{3r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\alpha_{(-3)} r \omega^{(-3)} = \left( \frac{4 - 5\nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{4C}{3r^2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

quindi  $u_r^b$  vale:

$$u_r^b = -\frac{A}{r^2} - \frac{18B}{r^4} \cos^2 \theta + \frac{6B}{r^4} - \frac{6C}{r^2} \cos^2 \theta + \frac{2C}{r^2} + \\ + \left( \frac{4 - 5\nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{4C}{r^2} \cos^2 \theta - \left( \frac{4 - 5\nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{4C}{3r^2}$$

considerando che il  $\cos 2\theta = (2 \cos^2 \theta - 1)$  si ha:  $\cos^2 \theta = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right)$

che va sostituito nell'equazione precedente:

$$u_r^b = -\frac{A}{r^2} - \frac{18B}{r^4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + \frac{6B}{r^4} - \frac{6C}{r^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + \frac{2C}{r^2} + \\ + \left( \frac{4 - 5\nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{4C}{r^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \left( \frac{4 - 5\nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{4C}{3r^2}$$

$$\begin{aligned}
u_r^b &= -\frac{A}{r^2} - \frac{9B}{r^4} - \frac{9B}{r^4} \cos 2\theta + \frac{6B}{r^4} - \frac{3C}{r^2} - \frac{3C}{r^2} \cos 2\theta + \frac{2C}{r^2} + \\
&\quad + \left( \frac{4-5\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{2C}{r^2} + \left( \frac{4-5\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{2C}{r^2} \cos 2\theta - \left( \frac{4-5\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{4C}{3r^2} \\
u_r^b &= -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} - \frac{C}{r^2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{4-5\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] + \left[ -\frac{9B}{r^4} - \frac{3C}{r^2} + \left( \frac{4-5\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{2C}{r^2} \right] \cos 2\theta \\
u_r^b &= -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} - \frac{C}{r^2} \left[ \left( \frac{3(1-2\nu_b) - 2(4-5\nu_b)}{3(1-2\nu_b)} \right) \right] + \\
&\quad + \left[ -\frac{9B}{r^4} - \frac{C}{r^2} \left( \frac{3(1-2\nu_b) - 2(4-5\nu_b)}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \\
u_r^b &= -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} + \frac{C}{3r^2} \left[ \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] + \left[ -\frac{9B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \quad (A2)
\end{aligned}$$

**Deformazioni  $e_{rr}^b$  e  $e_{\theta\theta}^b$  ed  $e_{r\theta}^b$  calcolati dalla (1.1):**

- $e_{rr}^b = \frac{\partial u_r^b}{\partial r}$

$$e_{rr}^b = \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} - \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ \frac{36B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \quad (A3)$$

- $e_{\theta\theta}^b = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^b}{\partial \theta} + \frac{u_r^b}{r}$

di cui calcoliamo la  $\frac{\partial u_\theta^b}{\partial \theta}$  e la  $\frac{u_r^b}{r}$

$$\frac{\partial u_\theta^b}{\partial \theta} = -2 \left( \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\frac{u_r^b}{r} = -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{C}{3r^3} \left[ \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] + \left[ -\frac{9B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta$$

quindi si ottiene:

$$e_{\theta\theta}^b = -2 \left( \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} \right) \cos 2\theta - \frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{C}{3r^3} \left[ \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] +$$

$$+ \left[ -\frac{9B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$e_{\theta\theta}^b = -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{C}{3r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \left( \frac{1+4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \quad (\text{A4})$$

- $e_{r\theta}^b = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^b}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta^b}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^b}{\partial \theta} + r \frac{\partial u_\theta^b}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{u_\theta^b}{r}$

$$e_{r\theta}^b = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^b}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^b}{\partial r} - \frac{u_\theta^b}{r}$$

calcoliamo prima  $\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^b}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial u_\theta^b}{\partial r}$  e  $\frac{u_\theta^b}{r}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^b}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \left[ -\frac{9B}{r^4} + \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^2} \right] 2 \sin 2\theta = \left[ \frac{18B}{r^5} - \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{2C}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial u_\theta^b}{\partial r} = \left( \frac{24B}{r^5} + \frac{4C}{r^3} \right) \sin 2\theta$$

$$\frac{u_\theta^b}{r} = -\left[ \frac{6B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

che vanno sostituiti nell'equazione  $e_{r\theta}^b$

$$e_{r\theta}^b = \left[ \frac{18B}{r^5} - \frac{(5-4\nu_b) 2C}{(1-2\nu_b) r^3} + \frac{24B}{r^5} + \frac{21C}{r^3} + \frac{6B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

$$e_{r\theta}^b = \left[ \frac{48B}{r^5} + \frac{6(1-2\nu_b) - 2(5-4\nu_b)}{(1-2\nu_b)} \frac{C}{r^3} \right] \sin 2\theta$$

$$e_{r\theta}^b = \left[ \frac{48B}{r^5} - \frac{(1+\nu_b)}{(1-2\nu_b)} \frac{4C}{r^3} \right] \sin 2\theta \quad (\text{A5})$$

**Sforzi  $\sigma_{rr}^b$   $\sigma_{\theta\theta}^b$   $\sigma_{\beta\beta}^b$  e  $\sigma_{r\theta}^b$  dalla (1.3):**

$$\bullet \quad (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\beta\beta}) = 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta + (e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{\beta\beta}) \right] \quad \sigma_{r\theta} = \mu e_{r\theta}$$

la dilatazione globale dipende solo dall'armonica (-3) in quanto per la (1.4), come visto in precedenza il  $\Delta$  svanisce, quindi  $\Delta = \Delta_{(-3)}$  calcolato dalla (1.7)

$$\bullet \quad \Delta_{(-3)} = [2 * (-3) + (3-3)\alpha_n] \omega^{(-3)} = -6\omega^{(-3)}$$

$$\omega^{(-3)} \text{ vale: } \omega^{(-3)} = \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \text{ quindi si ha che } \Delta_{(-3)} \text{ vale:}$$

$$\Delta_{(-3)} = -6 \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = -\frac{4C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\Delta = \Delta_{(-3)} = -\frac{4C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = -\frac{2C}{r^3} - \frac{6C}{r^3} \cos 2\theta \quad (\text{A6})$$

calcoliamo  $\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta$  per poi sommarlo alle deformazioni a  $e_{rr}^b$  e  $e_{\theta\theta}^b$   $e_{\beta\beta}^b$

$$\bullet \quad \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta = \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \left[ -\frac{4C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] = -\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{12C}{r^3} \cos^2 \theta + \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{4C}{r^3}$$

$$\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta = -\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{12C}{r^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{4C}{r^3} =$$

$$\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta = -\frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} - \frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \cos 2\theta + \frac{4\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3}$$

$$\frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta = -\frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \cos 2\theta - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \quad (\text{A7})$$

prendendo la (A7) e la (A3) otteniamo la  $\sigma_{rr}^b$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sigma_{rr}^b &= 2\mu_b \left[ \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta + e_{rr}^b \right] \\ \sigma_{rr}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \cos 2\theta - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} + e_{rr} \right\} \\ \sigma_{rr}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \cos 2\theta - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} + \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} - \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{36B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{rr}^b &= 2\mu_b \left\{ \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} - \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{36B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) - \frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{rr}^b &= 2\mu_b \left\{ \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} - \frac{2}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{3} + \nu_b \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{36B}{r^5} - \frac{2}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} (5-4\nu_b + 3\nu_b) \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{rr}^b &= 2\mu_b \left\{ \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} - \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ \frac{36B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \quad (\text{A8}) \\ \bullet \quad \sigma_{\theta\theta}^b &= 2\mu_b \left[ \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta + e_{\theta\theta}^b \right] \end{aligned}$$



prendendo la (A7) e la (A4) possiamo calcolare la  $\sigma_{\theta\theta}^b$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \cos 2\theta - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} + \frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{3r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \left( \frac{1+4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{C}{3r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \left( \frac{1+4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) - \frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{1}{(1-2\nu_b)} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{3} - 2\nu_b \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{1}{(1-2\nu_b)} \frac{C}{r^3} (1+4\nu_b - 6\nu_b) \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{1}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-10\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{1-2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{5}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{1-2\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{5}{3} \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \end{aligned} \quad (A9)$$

Per il calcolo della  $\sigma_{\beta\beta}^b$  dobbiamo calcolare prima la corrispondente deformazione  $e_{\beta\beta}$  partendo dalla (1.1):

- $e_{\beta\beta}^b = \Delta - e_{rr}^b - e_{\theta\theta}^b$

quindi sottraiamo dalla (A7) la (A3) e la (A4) e otteniamo:

$$\begin{aligned}
e_{\beta\beta}^b &= -\frac{2C}{r^3} - \frac{6C}{r^3} \cos 2\theta - \frac{2A}{r^3} - \frac{12B}{r^5} + \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \\
&\quad + \left[ -\frac{36B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta + \frac{A}{r^3} + \frac{3B}{r^5} - \frac{C}{3r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \\
&\quad + \left[ \frac{21B}{r^5} - \frac{C}{r^3} \left( \frac{1+4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \\
e_{\beta\beta}^b &= -\frac{2A}{r^3} + \frac{A}{r^3} - \frac{12B}{r^5} + \frac{3B}{r^5} + \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) - \frac{2C}{r^3} - \frac{C}{3r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \\
&\quad + \left[ -\frac{36B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{21B}{r^5} - \frac{C}{r^3} \left( \frac{1+4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) - \frac{6C}{r^3} \right] \cos 2\theta \\
e_{\beta\beta}^b &= -\frac{2A}{r^3} + \frac{A}{r^3} - \frac{12B}{r^5} + \frac{3B}{r^5} + \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - \frac{2C}{r^3} + \\
&\quad + \left[ -\frac{36B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{21B}{r^5} - \frac{C}{r^3} \left( \frac{1+4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) - \frac{6C}{r^3} \right] \cos 2\theta \\
e_{\beta\beta}^b &= -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} - \frac{2C}{r^3} + \\
&\quad + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{1}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} (10-8\nu_b-1-4\nu_b-6+12\nu_b) \right] \cos 2\theta \\
e_{\beta\beta}^b &= -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{5-4\nu_b-6+12\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \\
e_{\beta\beta}^b &= -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{8\nu_b-1}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \quad (A10)
\end{aligned}$$

lo sforzo  $\sigma_{\beta\beta}^b$  vale:

- $\sigma_{\beta\beta}^b = 2\mu_b \left[ \frac{\nu_b}{1-2\nu_b} \Delta + e_{\beta\beta}^b \right]$

prendendo la (A7) e la (A10) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta\beta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \cos 2\theta - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} + \frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{8\nu_b-1}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{\beta\beta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{8\nu_b-1}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} - \frac{2\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} - \frac{6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{\beta\beta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} + \frac{1}{3} \left( \frac{8\nu_b-1-6\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3-6\nu_b}{1-2\nu_b} \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{\beta\beta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} - \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3C}{r^3} \left( \frac{1-2\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{\beta\beta}^b &= 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \tag{A11}
\end{aligned}$$

per concludere la caratterizzazione dello stato di sforzo fuori dall'inclusione, calcoliamo la  $\sigma_{r\theta}^b$ , partiamo dalla (1.3)  $\sigma_{r\theta}^b = \mu_b e_{r\theta}^b$ , in cui sostituiamo la (A5) ottenendo:

$$\bullet \quad \sigma_{r\theta}^b = \mu_b \left[ \frac{48B}{r^5} - \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{4C}{r^3} \right] \sin 2\theta \tag{A12}$$

## APPENDICE B

### Calcolo di spostamenti – deformazioni – sforzi dentro al contorno sferico

Spostamenti  $u_r^t$ ,  $u_\theta^t$  e  $u_{r\theta}^t$  calcolati dalla (1.8):

$$\bullet \quad u_r^t = \frac{\partial \phi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial r} + \alpha_n r \omega^{(n)}$$

calcoliamo le derivate rispetto ad r dalle funzioni armoniche (1.2.1)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = F_1 r (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial r} = G_1 r (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial r} = 0$$

I parametri  $\alpha_{(2)}$  e  $\alpha_{(0)}$  presi dalla (1.6) valgono :

$$\alpha_{(2)} = -2 \left( \frac{3(2) + 1 - 2(2(2) + 1)\nu}{2 + 5 - 4\nu} \right) \Rightarrow \alpha_{(2)} = -2 \left( \frac{7 - 10\nu}{7 - 4\nu} \right)$$

$$\alpha_{(0)} = -2 \left( \frac{3(0) + 1 - 2(2(0) + 1)\nu}{0 + 5 - 4\nu} \right) \Rightarrow \alpha_{(0)} = -2 \left( \frac{1 - 2\nu}{5 - 4\nu} \right)$$

per cui:

$$\alpha_{(2)} r \omega^{(2)} = -2r \left( \frac{7 - 10\nu_t}{7 - 4\nu_t} \right) G_1 \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\alpha_{(0)} r \omega^{(0)} = -2 \left( \frac{1-2\nu}{5-4\nu} \right) r H_1$$

$u_r^t$  vale:

$$u_r^t = F_1 r (3 \cos^2 \theta - 1) + r^2 G_1 r (3 \cos^2 \theta - 1) - \\ - 2r \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) G_1 \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) - 2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + 3F_1 r \cos^2 \theta - F_1 r + 3r^3 G_1 \cos^2 \theta - r^3 G_1 - \\ - 3 \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 \cos^2 \theta + \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1$$

considerando che il  $\cos 2\theta = (2 \cos^2 \theta - 1)$ ,  $\cos^2 \theta = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right)$  che va sostituito nell'equazione precedente:

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + 3F_1 r \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - F_1 r + 3r^3 G_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \\ - r^3 G_1 - 3 \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{3}{2} F_1 r + \frac{3}{2} F_1 r \cos 2\theta - F_1 r + \frac{3}{2} r^3 G_1 + \frac{3}{2} r^3 G_1 \cos 2\theta - \\ - r^3 G_1 - \frac{3}{2} \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 - \frac{3}{2} \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 \cos 2\theta + \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{1}{2} F_1 r + \frac{3}{2} F_1 r \cos 2\theta + \frac{1}{2} r^3 G_1 + \frac{3}{2} r^3 G_1 \cos 2\theta - \\ - \frac{3}{2} \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 \cos 2\theta - \frac{1}{2} \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{1}{2} F_1 r + \frac{1}{2} r^3 G_1 - \frac{1}{2} \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 + \\ + \left[ \frac{3}{2} F_1 r + \frac{3}{2} r^3 G_1 - \frac{3}{2} \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 \right] \cos 2\theta$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{1}{2} F_1 r + \frac{1}{2} r^3 G_1 \left[ 1 - \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) \right] + \\ + \left[ \frac{3}{2} F_1 r + \frac{3}{2} r^3 G_1 \left[ 1 - \left( \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) \right] \right] \cos 2\theta$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{1}{2} F_1 r + \frac{1}{2} r^3 G_1 \left( \frac{7-4\nu_t-7+10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) + \\ + \left[ \frac{3}{2} F_1 r + \frac{3}{2} r^3 G_1 \left( \frac{7-4\nu_t-7+10\nu_t}{7-4\nu_t} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{1}{2} F_1 r + \frac{1}{2} r^3 G_1 \left( \frac{6\nu_t}{7-4\nu_t} \right) + \\ + \left[ \frac{3}{2} F_1 r + \frac{3}{2} r^3 G_1 \left( \frac{6\nu_t}{7-4\nu_t} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$u_r^t = -2 \left( \frac{1-2\nu_t}{5-4\nu_t} \right) r H_1 + \frac{1}{2} F_1 r + \left( \frac{3\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 + \\ + \left[ \frac{3}{2} F_1 r + \left( \frac{9\nu_t}{7-4\nu_t} \right) r^3 G_1 \right] \cos 2\theta$$

(B1)

- $u_\theta^t = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + r \frac{\partial \omega^{(n)}}{\partial \theta}$

calcoliamo la  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ , la  $\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \theta}$  e la  $\frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial \theta}$  dalle funzioni armoniche (1.2.2):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 3Fr^2(-2 \sin \theta \cos \theta) = -3Fr^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \theta} = (7 - 4\nu)r^2G(-2 \sin \theta \cos \theta) = -(7 - 4\nu)r^2G \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial \theta} = 0$$

$$u'_\theta = \frac{1}{r}(-3Fr^2 \sin 2\theta) + r(-(7 - 4\nu)r^2G \sin 2\theta)$$

$$u'_\theta = -3Fr \sin 2\theta - (7 - 4\nu)r^3G \sin 2\theta$$

$$u'_\theta = -[3Fr + (7 - 4\nu)r^3G] \sin 2\theta \quad (\text{B2})$$

**Deformazioni  $e'_{rr}$  e  $e'_{\theta\theta}$  ed  $e'_{r\theta}$  calcolate dalla (1.1):**

- $e'_{rr} = \frac{\partial u'_r}{\partial r}$

$$e'_{rr} = H + F + 6\nu r^2G + [3F + 18\nu r^2G] \cos 2\theta \quad (\text{B3})$$

- $e'_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{u'_r}{r}$

calcoliamo la  $\frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta}$  e la  $\frac{u'_r}{r}$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} = -[6Fr + 2(7 - 4\nu)r^3G] \cos 2\theta$$

$$\frac{u'_r}{r} = H + F + 2G\nu r^2 + [3F + 6G\nu r^2] \cos 2\theta$$

quindi si ottiene:

$$\begin{aligned}
e'_{\theta\theta} &= -[6F + 2(7 - 4\nu_t)r^2G]\cos 2\theta + H + F + 2G\nu_t r^2 + \\
&\quad + [3F + 6\nu_t r^2G]\cos 2\theta \\
e'_{\theta\theta} &= H + F + 2G\nu_t r^2 + [3F + 6\nu_t r^2G - 6F - 2(7 - 4\nu_t)r^2G]\cos 2\theta \\
e'_{\theta\theta} &= H + F + 2G\nu_t r^2 + [-3F - 2(7 - 7\nu_t)r^2G]\cos 2\theta \quad (B4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad e'_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u'_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{u'_\theta}{r} \\
e'_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} - \frac{u'_\theta}{r}
\end{aligned}$$

calcoliamo  $\frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial u'_\theta}{\partial r}$  e  $\frac{u'_\theta}{r}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} [(3Fr + 6\nu_t r^3G)2 \sin 2\theta] = -(6F + 12\nu_t r^2G) \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial r} = -[3F + 3(7 - 4\nu_t)r^2G] \sin 2\theta$$

$$\frac{u'_\theta}{r} = -[3F + (7 - 4\nu_t)r^2G] \sin 2\theta$$

che sostituiamo nell'equazione  $e'_{r\theta}$

$$e'_{r\theta} = [-6F - 12\nu_t r^2G - 3F - 3(7 - 4\nu_t)r^2G + 3F + (7 - 4\nu_t)r^2G] \sin 2\theta$$

$$e'_{r\theta} = [-6F - 12\nu_t r^2G - 21r^2G + 12\nu_t r^2G + 7r^2G - 4\nu_t r^2G] \sin 2\theta$$

$$e'_{r\theta} = -[6F + (14 - 4\nu_t)r^2G] \sin 2\theta \quad (B5)$$



**Sforzi  $\sigma'_{rr}$ ,  $\sigma'_{\theta\theta}$ ,  $\sigma'_{\beta\beta}$  e  $\sigma'_{r\theta}$  dalla (1.3):**

$$\bullet \quad (\sigma'_{rr}, \sigma'_{\theta\theta}, \sigma'_{\beta\beta}) = 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta + (e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{\beta\beta}) \right] \quad \sigma'_{r\theta} = \mu e_{r\theta}$$

la dilatazione globale dipende dall'armoniche (2) e (0),  $\Delta = \Delta_{(0)} + \Delta_{(2)}$ .  
Calcoliamo separatamente  $\Delta_{(0)}$  e  $\Delta_{(2)}$  dalla (1.7)

$$\bullet \quad \Delta_{(2)} = [2(2) + (3+2)\alpha_2] \omega^{(2)} = \left[ 4 - 10 \frac{7-10\nu_t}{7-4\nu_t} \right] \frac{7-4\nu_t}{3} r^2 G (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\Delta_{(2)} = \frac{4}{3} (7-4\nu_t) r^2 G (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{10}{3} (7-10\nu_t) r^2 G (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\Delta_{(2)} = 4(7-4\nu_t) r^2 G \cos^2 \theta - \frac{4}{3} (7-4\nu_t) r^2 G -$$

$$-10(7-10\nu_t) r^2 G \cos^2 \theta + \frac{10}{3} (7-10\nu_t) r^2 G$$

considerando che il  $\cos 2\theta = (2 \cos^2 \theta - 1)$   $\cos^2 \theta = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right)$  che  
va sostituito nell'equazione precedente

$$\Delta_{(2)} = 4(7-4\nu_t) r^2 G \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \frac{4}{3} (7-4\nu_t) r^2 G -$$

$$-10(7-10\nu_t) r^2 G \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + \frac{10}{3} (7-10\nu_t) r^2 G$$

$$\Delta_{(2)} = 2(7-4\nu_t) r^2 G - \frac{4}{3} (7-4\nu_t) r^2 G - 5(7-10\nu_t) r^2 G + \frac{10}{3} (7-10\nu_t) r^2 G +$$

$$+ [2(7-4\nu_t) r^2 G - 5(7-10\nu_t) r^2 G] \cos 2\theta$$

$$\Delta_{(2)} = \left[ 2(7 - 4\nu_t) - \frac{4}{3}(7 - 4\nu_t) - 5(7 - 10\nu_t) + \frac{10}{3}(7 - 10\nu_t) \right] r^2 G + \\ + [2(7 - 4\nu_t) - 5(7 - 10\nu_t)] r^2 G \cos 2\theta$$

$$\Delta_{(2)} = \left[ \frac{42 - 24\nu_t - 28 + 16\nu_t + 70 - 100\nu_t - 105 + 150\nu_t}{3} \right] r^2 G + \\ + [14 - 8\nu_t - 5 + 50\nu_t] r^2 G \cos 2\theta$$

$$\Delta_{(2)} = \left( \frac{42\nu_t - 21}{3} \right) r^2 G + [42\nu_t - 21] r^2 G \cos 2\theta$$

$$\Delta_{(2)} = \frac{21}{3} (2\nu_t - 1) r^2 G + [21(2\nu_t - 1) r^2 G] \cos 2\theta \quad (\text{B6})$$

$$\bullet \quad \Delta_{(0)} = [2^*(0) + (3 + 0)\alpha_0] \omega^{(0)} = \left[ 3(-2) \frac{1 - 2\nu_t}{5 - 4\nu_t} \right] \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{5 - 4\nu_t}{1 - 2\nu_t} H$$

$$\Delta_{(0)} = 3H \quad (\text{B7})$$

sommiamo (B6) e (B7) per ottenere:

$$\bullet \quad \Delta = \Delta_0 + \Delta_2$$

$$\Delta = 3H + \frac{21}{3} (2\nu - 1) r^2 G + [21(2\nu - 1) r^2 G] \cos 2\theta$$

calcoliamo  $\frac{\nu_t}{1 - 2\nu_t} \Delta$  per poi sommarlo a  $e_{rr}^t$

$$\bullet \quad \frac{\nu_t}{1 - 2\nu_t} \Delta = 3H \frac{\nu_t}{1 - 2\nu_t} + \frac{\nu_t}{1 - 2\nu_t} \frac{21}{3} (2\nu_t - 1) r^2 G + \\ + \left[ \frac{\nu_t}{1 - 2\nu_t} 21(2\nu_t - 1) r^2 G \right] \cos 2\theta$$

$$\frac{v_t}{1-2v_t}\Delta = 3H\frac{v_t}{1-2v_t} - 7v_t r^2 G - [21v_t r^2 G]\cos 2\theta \quad (\text{B8})$$

prendendo la (B8) e la (B3) calcoliamo la  $\sigma_{rr}^t$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sigma_{rr}^t &= 2\mu_t \left[ \frac{v_t}{1-2v_t}\Delta + e_{rr}^t \right] \\ \sigma_{rr}^t &= 2\mu_t \left[ 3H\frac{v_t}{1-2v_t} - 7v_t r^2 G - [21v_t r^2 G]\cos 2\theta \right] + \\ &\quad + 2\mu_t [H + F + 6v_t r^2 G + [3F + 18v_t r^2 G]\cos 2\theta] \\ \sigma_{rr}^t &= 2\mu_t \left[ H\left(\frac{3v_t}{1-2v_t} + 1\right) - v_t r^2 G - [21v_t r^2 G]\cos 2\theta \right] + \\ &\quad + 2\mu_t [F + [3F + 18v_t r^2 G]\cos 2\theta] \\ \sigma_{rr}^t &= 2\mu_t \left[ H\left(\frac{3v_t + 1 - 2v_t}{1-2v_t}\right) + F - v_t r^2 G + [3F - 3v_t r^2 G]\cos 2\theta \right] \\ \sigma_{rr}^t &= 2\mu_t \left[ H\left(\frac{1+v_t}{1-2v_t}\right) + F - v_t r^2 G + [3F - 3v_t r^2 G]\cos 2\theta \right] \quad (\text{B9}) \end{aligned}$$

prendendo la (B8) e la (B4) calcoliamo la  $\sigma_{\theta\theta}^t$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sigma_{\theta\theta}^t &= 2\mu_t \left[ \frac{v_t}{1-2v_t}\Delta + e_{\theta\theta}^t \right] \\ \sigma_{\theta\theta}^t &= 2\mu_t \left[ 3H\frac{v_t}{1-2v_t} - 7v_t r^2 G - [21v_t r^2 G]\cos 2\theta \right] + \\ &\quad + 2\mu_t [H + F + 2Gv_t r^2 + [-3F - 2(7-7v_t)r^2 G]\cos 2\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\theta\theta} &= 2\mu_t \left[ H \left( \frac{3\nu_t}{1-2\nu_t} + 1 \right) + F - 5\nu_t r^2 G \right] + \\
&\quad + 2\mu_t \left[ -3F - (14 - 14\nu_t + 21\nu_t) r^2 G \right] \cos 2\theta \\
\sigma'_{\theta\theta} &= 2\mu_t \left[ H \left( \frac{3\nu_t + 1 - 2\nu_t}{1 - 2\nu_t} \right) + F - 5\nu_t r^2 G - \left[ 3F + (14 + 7\nu_t) r^2 G \right] \cos 2\theta \right] \\
\sigma'_{\theta\theta} &= 2\mu_t \left[ \left( \frac{1 + \nu_t}{1 - 2\nu_t} \right) H + F - 5\nu_t r^2 G - \left[ 3F + 7(2 + \nu_t) r^2 G \right] \cos 2\theta \right] \quad (\text{B10})
\end{aligned}$$

Il  $\sigma'_{\beta\beta}$  risulta essere uguale a  $\sigma^b_{\beta\beta}$  in quanto  $\sigma^T_{\beta\beta} = 0$

Per concludere la caratterizzazione dello stato di sforzo fuori dall'inclusione, calcoliamo la  $\sigma^b_{r\theta}$ , partiamo sempre dalla (1.3)  $\sigma^t_{r\theta} = \mu_t e^t_{r\theta}$ , in cui sostituiamo la (B5) otterremo:

- $\sigma^t_{r\theta} = -\mu_t \left[ 6F + (14 - 4\nu_t) r^2 G \right] \sin 2\theta \quad (\text{B11})$

## APPENDICE C

### Calcolo della costanti

Abbiamo 6 equazioni nelle 6 incognite senza la dipendenza da  $\theta$ , che sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{A}{r^2} - \frac{3B}{r^4} + \frac{C}{3r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{Tr}{2E} (1-\nu_b) = Hr + Fr + 2\nu_t Gr^3 \quad (C1') \\ \left[ \frac{Tr}{2E} (1+\nu_b) - \frac{9B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] = (3Fr + 6\nu_t Gr^3) \quad (C1'') \\ -\left( \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} \right) - \frac{Tr}{2E} (1+\nu_b) = -[3Fr + (7-4\nu_t)Gr^3] \quad (C2) \\ \frac{4\mu_b A}{r^3} + \frac{24\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{3r^3} \left( \frac{\nu_b-5}{1-2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} = 2\mu_t H \left( \frac{1+\nu_t}{1-2\nu_t} \right) + 2\mu_t F - 2\mu_t \nu_t r^2 G \quad (C3') \\ \left[ \frac{72\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{\nu_b-5}{1-2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} \right] = (6\mu_t F - 6\mu_t \nu_t r^2 G) \quad (C3'') \\ 2\mu_b \left[ \frac{24B}{r^5} - \frac{2C}{r^3} \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right] - \frac{T}{2} = -2\mu_t [3F + (7-4\nu_t)r^2 G] \quad (C4) \end{array} \right.$$

Prendiamo la (C4) e la (C3''):

dalla (C4) ricaviamo  $6F\mu_t$

$$6F\mu_t = -\frac{48\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} - 14\mu_t r^2 G + 8\mu_t \nu_t r^2 G$$

che andiamo a sostituire nella (C3'')

$$\begin{aligned}
\frac{72\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{v_b - 5}{1 - 2v_b} \right) + \frac{T}{2} &= \\
&= -\frac{48\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{1 + v_b}{1 - 2v_b} \right) + \frac{T}{2} - 14\mu_t r^2 G + 8\mu_t v_t r^2 G - 6\mu_t v_t r^2 G \\
\frac{120\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{-6}{1 - 2v_b} \right) + (14\mu_t r^2 - 2\mu_t v_t r^2) G &= 0 \quad (C3'')
\end{aligned}$$

Mentre dalla (C4) ricaviamo:

$$F = -\frac{8\mu_b B}{\mu_t r^5} + \frac{2\mu_b C}{3\mu_t r^3} \left( \frac{1 + v_b}{1 - 2v_b} \right) + \frac{T}{12\mu_t} - \left( \frac{7}{3} r^2 - \frac{4}{3} v_t r^2 \right) G$$

Sostituiamo F nella (C2) e nella (C1'')

$$\begin{aligned}
\frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} + \frac{Tr}{2E} (1 + v_b) - (7 - 4v_t) Gr^3 &= \\
&= -\frac{24\mu_b B}{\mu_t r^4} + \frac{2\mu_b C}{\mu_t r^2} \left( \frac{1 + v_b}{1 - 2v_b} \right) + \frac{Tr}{4\mu_t} - (7 - 4v_t) r^3 G \quad (C2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} + \frac{Tr}{2E} (1 + v_b) - (7 - 4v_t) Gr^3 + 6v_t r^3 G &= \\
&= \frac{Tr}{2E} (1 + v_b) - \frac{9B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{5 - 4v_b}{1 - 2v_b} \right) \quad (C1'')
\end{aligned}$$

$$\frac{15B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{2 - 4v_b - 5 + 4v_b}{1 - 2v_b} \right) - (7 - 10v_t) Gr^3 = 0 \quad (C1''')$$

Quindi nella (C1'') nella (C3'') e nella (C2) abbiamo 3 equazioni nelle 3 incognite B, C e G

$$\frac{15B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{2 - 4v_b - 5 + 4v_b}{1 - 2v_b} \right) - (7 - 10v_t) Gr^3 = 0 \quad (C1''')$$

$$\frac{15B}{r^4} + \frac{C}{r^2} \left( \frac{3}{1-2\nu_b} \right) - (7-10\nu_t)Gr^3 = 0 \quad (C1'')$$

$$\left( 6 + \frac{24\mu_b}{\mu_t} \right) \frac{B}{r^4} + \left[ 1 - \frac{\mu_b(1+\nu_b)}{\mu_t(1-2\nu_b)} \right] \frac{2C}{r^2} + Tr \left( \frac{1+\nu_b}{2E} - \frac{1}{4\mu_t} \right) - (7-4\nu_t)Gr^3 + (7-4\nu_t)Gr^3 = 0 \quad (C2)$$

$$\frac{120\mu_b B}{r^5} - \frac{24\mu_b C}{r^3(1-2\nu_b)} + (14\mu_t r^2 - 2\mu_t \nu_t r^2)G = 0 \quad (C3'')$$

Dalla (C2) troviamo B in funzione di C

$$\left( \frac{6\mu_t + 24\mu_b}{\mu_t} \right) \frac{B}{r^4} = - \left[ 1 - \frac{\mu_b(1+\nu_b)}{\mu_t(1-2\nu_b)} \right] \frac{2C}{r^2} - Tr \left( \frac{1+\nu_b}{2E} - \frac{1}{4\mu_t} \right)$$

Sviluppiamo i passaggi

$$B = - \left[ 1 - \frac{\mu_b(1+\nu_b)}{\mu_t(1-2\nu_b)} \right] \left( \frac{\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} \right) \frac{2r^4 C}{r^2} - Tr \left( \frac{1+\nu_b}{2E} - \frac{1}{4\mu_t} \right) \left( \frac{\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} \right) r^4$$

$$B = - \left[ \frac{2\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{2\mu_b(1+\nu_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1-2\nu_b)} \right] r^2 C - Tr^5 \left[ \frac{(1+\nu_b)\mu_t}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{1}{24\mu_t + 96\mu_b} \right]$$

Sostituiamo la B appena trovata nella (C1'') e nella (C3'')

$$- \frac{15r^2}{r^4} \left[ \frac{2\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{2\mu_b(1+\nu_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1-2\nu_b)} \right] C - \frac{15r^5}{r^4} Tr \left[ \frac{(1+\nu_b)\mu_t}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{1}{24\mu_t + 96\mu_b} \right] - \frac{3C}{r^2(1-2\nu_b)} - (7-10\nu_t)Gr^3 = 0 \quad (C1''')$$

$$\frac{C}{r^2} \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1-2v_b)} - \frac{30\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{3}{(1-2v_b)} \right] -$$

$$- Tr \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{24\mu_t + 96\mu_b} \right] = (7-10v_t)Gr^3 \quad (C1'')$$

$$G = \frac{C}{(7-10v_t)r^5} \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1-2v_b)} - \frac{30\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{3}{(1-2v_b)} \right] -$$

$$- \frac{T}{(7-10v_t)r^2} \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{24\mu_t + 96\mu_b} \right] \quad (C5)$$

Prendiamo la (C3'')

$$- \frac{120r^2\mu_b}{r^5} \left[ \frac{2\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{2\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1-2v_b)} \right] C -$$

$$- \frac{120r^5\mu_b}{r^5} T \left[ \frac{(1+v_b)\mu_t}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{1}{24\mu_t + 96\mu_b} \right] -$$

$$- \frac{24\mu_b C}{r^3(1-2v_b)} + (14\mu_t r^2 - 2\mu_t v_t r^2)G = 0 \quad (C3'')$$

Adesso sostituiamo G nella (C3'')

$$\frac{C}{r^3} \left[ - \frac{240\mu_t\mu_b}{6\mu_t + 24\mu_b} + \frac{240\mu_b^2(1+v_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1-2v_b)} - \frac{24\mu_b}{(1-2v_b)} \right] -$$

$$- T \left[ \frac{120\mu_t\mu_b(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{120\mu_b}{4(6\mu_t + 24\mu_b)} \right] +$$

$$+ \frac{Cr^2(14\mu_t - 2\mu_t v_t)}{(7-10v_t)r^5} \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1-2v_b)} - \frac{30\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{3}{(1-2v_b)} \right] -$$

$$- \frac{Tr^2(14\mu_t - 2\mu_t v_t)}{(7-10v_t)r^5} \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{24\mu_t + 96\mu_b} \right] = 0$$



I termini tra le parentesi sono uguali a coppie a meno di un numero moltiplicativo, come si vede sotto possiamo mettere in evidenza  $8\mu_b$  nel termine in  $\frac{C}{r^3}$  e in  $T$  così da ottenere:

$$\begin{aligned} & \frac{8C\mu_b}{r^3} \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t+24\mu_b)(1-2v_b)} - \frac{30\mu_t}{(6\mu_t+24\mu_b)} - \frac{3}{(1-2v_b)} \right] + \\ & + \frac{C(14\mu_t-2\mu_t v_t)}{r^3(7-10v_t)} \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t+24\mu_b)(1-2v_b)} - \frac{30\mu_t}{(6\mu_t+24\mu_b)} - \frac{3}{(1-2v_b)} \right] - \\ & - 8T\mu_b \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t+24\mu_b)} - \frac{15}{(24\mu_t+96\mu_b)} \right] - \\ & - \frac{T(14\mu_t-2\mu_t v_t)}{(7-10v_t)} \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t+24\mu_b)} - \frac{15}{(24\mu_t+96\mu_b)} \right] = 0 \end{aligned}$$

Che possiamo anche vedere come:

$$\frac{8C\mu_b}{r^3} X + \frac{C(14\mu_t-2\mu_t v_t)}{r^3(7-10v_t)} X - 8T\mu_b Y - \frac{T(14\mu_t-2\mu_t v_t)}{(7-10v_t)} Y = 0$$

$$\frac{C}{r^3} X \left[ 8\mu_b + \frac{(14\mu_t-2\mu_t v_t)}{(7-10v_t)} \right] - TY \left[ 8\mu_b + \frac{(14\mu_t-2\mu_t v_t)}{(7-10v_t)} \right] = 0$$

dividendo entrambi i termini per  $\left[ 8\mu_b + \frac{(14\mu_t-2\mu_t v_t)}{(7-10v_t)} \right]$  otteniamo:

$$\frac{C}{r^3} X - TY = 0 \Rightarrow CX - Tr^3 Y = 0$$

$$C = Tr^3 \frac{Y}{X} \quad (C6)$$

Avendo definito X pari a:

$$X = \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t+24\mu_b)(1-2v_b)} - \frac{30\mu_t}{(6\mu_t+24\mu_b)} - \frac{3}{(1-2v_b)} \right]$$

$$X = \frac{1}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)} [30\mu_b(1 + v_b) - 30\mu_t(1 - 2v_b) - 3(6\mu_t + 24\mu_b)]$$

$$X = \frac{3}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)} [10\mu_b(1 + v_b) - 10\mu_t(1 - 2v_b) - (6\mu_t + 24\mu_b)]$$

$$X = \frac{3}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)} [-14\mu_b + 10\mu_b v_b - 16\mu_t + 20\mu_t v_b]$$

$$X = \frac{6[(5v_b - 7)\mu_b + (10v_b - 8)\mu_t]}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)}$$

ed Y pari a:

$$Y = \left[ \frac{15\mu_t(1 + v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{4(6\mu_t + 24\mu_b)} \right]$$

$$Y = \frac{1}{(6\mu_t + 24\mu_b)} \left[ \frac{15\mu_t(1 + v_b)}{2E} - \frac{15}{4} \right]$$

Ricordando che:  $E = 2\mu_b(1 + v_b)$

$$Y = \frac{1}{(6\mu_t + 24\mu_b)} \left[ \frac{15\mu_t(1 + v_b)}{4\mu_b(1 + v_b)} - \frac{15}{4} \right]$$

$$Y = \frac{15}{4(6\mu_t + 24\mu_b)} \left[ \frac{\mu_t}{\mu_b} - 1 \right]$$

il rapporto  $\frac{Y}{X}$  vale:

$$\frac{Y}{X} = \frac{15}{4(6\mu_t + 24\mu_b)} \left[ \frac{\mu_t}{\mu_b} - 1 \right] \frac{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)}{6[(5v_b - 7)\mu_b + (10v_b - 8)\mu_t]}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{5}{4} \left[ \frac{\mu_t - \mu_b}{\mu_b} \right] \frac{(1 - 2v_b)}{2[(5v_b - 7)\mu_b + (10v_b - 8)\mu_t]}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{5(\mu_t - \mu_b)(1 - 2v_b)}{8\mu_b[(5v_b - 7)\mu_b + (10v_b - 8)\mu_t]}$$

dalla (C6) ricaviamo C

$$C = \frac{5Tr^3(\mu_b - \mu_t)(1 - 2v_b)}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t]} \quad (C7)$$

Vedendo come è strutturata G nella (C5) risulta più comodo sostituire la C della formulazione (C6):

$$C = Tr^3 \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{4(6\mu_t + 24\mu_b)} \right] \times \\ \times \left[ \frac{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)}{30\mu_b(1+v_b) - 30\mu_t(1 - 2v_b) - 3(6\mu_t + 24\mu_b)} \right]$$

Che va sostituita nella (C5):

$$G = \frac{C}{(7 - 10v_t)r^5} \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)} - \frac{30\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{3}{(1 - 2v_b)} \right] - \\ - \frac{T}{(7 - 10v_t)r^2} \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{24\mu_t + 96\mu_b} \right]$$

$$G = Tr^3 \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{4(6\mu_t + 24\mu_b)} \right] \times \\ \times \left[ \frac{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)}{30\mu_b(1+v_b) - 30\mu_t(1 - 2v_b) - 3(6\mu_t + 24\mu_b)} \right] \frac{1}{(7 - 10v_t)r^5} \times \\ \times \left[ \frac{30\mu_b(1+v_b)}{(6\mu_t + 24\mu_b)(1 - 2v_b)} - \frac{30\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} - \frac{3}{(1 - 2v_b)} \right] - \\ - \frac{T}{(7 - 10v_t)r^2} \left[ \frac{15\mu_t(1+v_b)}{2E(6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{15}{24\mu_t + 96\mu_b} \right]$$

$$G = \left[ \frac{15\mu_t(1+\nu_b)}{2E(6\mu_t+24\mu_b)} - \frac{15}{4(6\mu_t+24\mu_b)} \right] \frac{T}{(7-10\nu_t)r^2} - \frac{T}{(7-10\nu_t)r^2} \left[ \frac{15\mu_t(1+\nu_b)}{2E(6\mu_t+24\mu_b)} - \frac{15}{4(6\mu_t+24\mu_b)} \right]$$

$$G = 0 \tag{C8}$$

Trovate C e G le sostituiamo nella (C2) e troviamo B

$$\frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} + \frac{Tr}{2E}(1+\nu_b) - (7-4\nu_t)Gr^3 =$$

$$= -\frac{24\mu_b B}{\mu_t r^4} + \frac{2\mu_b C}{\mu_t r^2} \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{Tr}{4\mu_t} - (7-4\nu_t)r^3 G$$

sviluppando i passaggi si ottiene B in funzione di C

$$\frac{B}{r^4} \left( 6 + 24 \frac{\mu_b}{\mu_t} \right) + \frac{C}{r^2} \left( 2 - 2 \frac{\mu_b}{\mu_t} \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right) + Tr \left( \frac{1+\nu_b}{2E} - \frac{1}{4\mu_t} \right) = 0$$

$$\frac{B}{r^4} \left( 6 + 24 \frac{\mu_b}{\mu_t} \right) + \frac{C}{r^2} \left( 2 - 2 \frac{\mu_b}{\mu_t} \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \right) + Tr \left( \frac{(1+\nu_b)}{4(1+\nu_b)\mu_b} - \frac{1}{4\mu_t} \right) = 0$$

$$\frac{B}{r^4} \left( \frac{6\mu_t+24\mu_b}{\mu_t} \right) + \frac{C}{r^2} \left( \frac{2\mu_t(1-2\nu_b) - 2\mu_b(1+\nu_b)}{\mu_t(1-2\nu_b)} \right) + Tr \left( \frac{1}{4\mu_b} - \frac{1}{4\mu_t} \right) = 0$$

$$B = -\frac{Cr^4}{r^2} \frac{\mu_t}{6\mu_t+24\mu_b} \left( \frac{2\mu_t(1-2\nu_b) - 2\mu_b(1+\nu_b)}{\mu_t(1-2\nu_b)} \right) -$$

$$-Tr^5 \frac{\mu_t}{6\mu_t+24\mu_b} \left( \frac{1}{4\mu_b} - \frac{1}{4\mu_t} \right)$$

Adesso sostituiamo la C presa dalla (C7) per ottenere B:

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{5Tr^3(\mu_b - \mu_t)(1 - 2v_b)}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t]} \frac{r^4}{r^2} \frac{\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} \times \\
&\quad \times \left( \frac{2\mu_t(1 - 2v_b) - 2\mu_b(1 + v_b)}{\mu_t(1 - 2v_b)} \right) - Tr^5 \frac{\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} \left( \frac{\mu_t - \mu_b}{4\mu_b\mu_t} \right) \\
B &= -\frac{5Tr^5(\mu_b - \mu_t)[2\mu_t(1 - 2v_b) - 2\mu_b(1 + v_b)]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} - \\
&\quad - Tr^5 \frac{\mu_t}{6\mu_t + 24\mu_b} \left( \frac{\mu_t - \mu_b}{4\mu_b\mu_t} \right) \\
B &= -\frac{5Tr^5(\mu_b - \mu_t)[2\mu_t - 4\mu_tv_b - 2\mu_b - 2\mu_bv_b]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} - \frac{Tr^5}{6\mu_t + 24\mu_b} \left( \frac{\mu_t - \mu_b}{4\mu_b} \right) \\
B &= -Tr^5 \left[ \frac{5(\mu_b - \mu_t)[2\mu_t - 4\mu_tv_b - 2\mu_b - 2\mu_bv_b]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right] - \\
&\quad - Tr^5 \left[ \frac{2(\mu_b - \mu_t)[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right] \\
B &= -Tr^5 \left[ \frac{(\mu_b - \mu_t)[10\mu_t - 20\mu_tv_b - 10\mu_b - 10\mu_bv_b]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right] + \\
&\quad + Tr^5 \left[ \frac{(\mu_b - \mu_t)[-14\mu_b + 10\mu_bv_b - 16\mu_t + 20\mu_tv_b]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right] \\
B &= -Tr^5 \left[ \frac{(\mu_b - \mu_t)[10\mu_t - 20\mu_tv_b - 10\mu_b - 10\mu_bv_b]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right] + \\
&\quad + Tr^5 \left[ \frac{(\mu_b - \mu_t)[-14\mu_b + 10\mu_bv_b - 16\mu_t + 20\mu_tv_b]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right] \\
B &= -Tr^5 \left[ \frac{(\mu_b - \mu_t)[-6\mu_t - 24\mu_b]}{8\mu_b[(7 - 5v_b)\mu_b + (8 - 10v_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right]
\end{aligned}$$

$$B = Tr^5 \left[ \frac{(\mu_b - \mu_t)(6\mu_t + 24\mu_b)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t](6\mu_t + 24\mu_b)} \right]$$

$$B = \frac{Tr^5(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \quad (C9)$$

Dalla (C4) troviamo F sostituendo le costanti trovate B, C e G

$$6F\mu_t = -\frac{48\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{1 + \nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} - 14\mu_t r^2 G + 8\mu_t \nu_t r^2 G$$

$$6F\mu_t = -\frac{48\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{1 + \nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) + \frac{T}{2}$$

$$6F\mu_t = -\frac{48\mu_b}{r^5} \frac{Tr^5(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} +$$

$$+ \frac{4\mu_b}{r^3} \frac{5Tr^3(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \left( \frac{1 + \nu_b}{1 - 2\nu_b} \right) + \frac{T}{2}$$

$$6F\mu_t = -\frac{48T(\mu_b - \mu_t)}{8[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} +$$

$$+ \frac{20T(\mu_b - \mu_t)(1 + \nu_b)}{8[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \frac{T}{2}$$

$$F = -\frac{48T(\mu_b - \mu_t)}{48\mu_t[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} +$$

$$+ \frac{20T(\mu_b - \mu_t)(1 + \nu_b)}{48\mu_t[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \frac{T}{12\mu_t}$$

$$F = T \left[ \frac{-48(\mu_b - \mu_t) + 20T(\mu_b - \mu_t)(1 + \nu_b)}{48\mu_t[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right.$$

$$\left. + \frac{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]}{12\mu_t} \right]$$

$$F = T \left[ \frac{-48\mu_b + 48\mu_t + 20\mu_b - 20\mu_t + 20\mu_b\nu_b - 20\mu_t\nu_b}{48\mu_t[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \frac{28\mu_b - 20\nu_b + 32\mu_t - 40\mu_t\nu_b}{48\mu_t[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \right]$$

$$F = T \left[ \frac{60\mu_t - 60\mu_t\nu_b}{48\mu_t[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \right]$$

$$F = T \left[ \frac{60\mu_t(1-\nu_b)}{48\mu_t[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \right]$$

$$F = \frac{5T(1-\nu_b)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} \quad (C10)$$

Dalla (C1') troviamo A che sostituiamo nella (C3') insieme alle costanti trovate in precedenza B, C, F e G

$$\frac{4\mu_b A}{r^3} + \frac{24\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{3r^3} \left( \frac{\nu_b - 5}{1-2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} = \\ = 2\mu_t H \left( \frac{1+\nu_t}{1-2\nu_t} \right) + 2\mu_t F - 2\mu_t \nu_t r^2 G \quad (C3')$$

$$A = -\frac{3B}{r^2} + \frac{C}{3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{Tr^3}{2E} (1-\nu_b) - Hr^3 - Fr^3 \quad (C1')$$

sostituiamo la A appena trovata nella (C3') così da ottenere un'equazione funzione delle costanti note B, C, F e G e dell'unica incognita H

$$-\frac{12\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{3r^3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{4\mu_b T}{2E} (1-\nu_b) - 4\mu_b Hr^3 - 4\mu_b Fr^3 + \\ + \frac{24\mu_b B}{r^5} + \frac{4\mu_b C}{3r^3} \left( \frac{\nu_b - 5}{1-2\nu_b} \right) + \frac{T}{2} - 2\mu_t H \left( \frac{1+\nu_t}{1-2\nu_t} \right) - 2\mu_t F = 0$$

sommiamo tutti i termini in B,C e F e svolgiamo i passaggi:

$$\frac{12\mu_b B}{r^5} - \frac{4\mu_b C}{3r^3} \left( \frac{3v_b}{1-2v_b} \right) + 2\mu_b T \frac{(1-v_b)}{2(1+v_b)\mu_b} + \frac{T}{2} -$$

$$- H \left( 4\mu_b + 2\mu_t \frac{(1+v_t)}{(1-2v_t)} \right) - 2F(2\mu_b + \mu_t) = 0$$

$$\frac{12\mu_b B}{r^5} - \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{v_b}{1-2v_b} \right) + T \left( \frac{(1-v_b)}{(1+v_b)} + \frac{1}{2} \right) -$$

$$- H \left( \frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)} \right) - 2F(2\mu_b + \mu_t) = 0$$

$$\frac{12\mu_b B}{r^5} - \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{v_b}{1-2v_b} \right) + T \left( \frac{2-2v_b+1+v_b}{(1+v_b)} \right) -$$

$$- H \left( \frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)} \right) - 2F(2\mu_b + \mu_t) = 0$$

$$\frac{12\mu_b B}{r^5} - \frac{4\mu_b C}{r^3} \left( \frac{v_b}{1-2v_b} \right) + T \left( \frac{3-v_b}{1+v_b} \right) -$$

$$- H \left( \frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)} \right) - 2F(2\mu_b + \mu_t) = 0$$

Adesso sostituiamo B presa dalla (C9) , C presa dalla (C7) e F presa dalla (C10) e svolgiamo i passaggi:

$$\frac{12\mu_b}{r^5} \frac{Tr^5(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} -$$

$$- \frac{4\mu_b}{r^3} \left( \frac{v_b}{1-2v_b} \right) \frac{5Tr^3(\mu_b - \mu_t)(1-2v_b)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} +$$

$$+ T \left( \frac{3-v_b}{1+v_b} \right) - H \left( \frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)} \right) -$$

$$- 2(2\mu_b + \mu_t) \frac{5T(1-v_b)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} = 0$$



$$\begin{aligned} & \frac{12\mu_b T(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} - \\ & - \frac{20\mu_b T(\mu_b - \mu_t)v_b}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\ & + T\left(\frac{3-v_b}{1+v_b}\right) - H\left(\frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)}\right) - \\ & - \frac{5T(1-v_b)(2\mu_b + \mu_t)}{2[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4\mu_b(\mu_b - \mu_t)(3-5v_b)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} T + \left(\frac{3-v_b}{1+v_b}\right) T - \\ & - \frac{5T(1-v_b)(2\mu_b + \mu_t)}{2[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} = H\left(\frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H\left(\frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)}\right) = \\ & = \left[ \frac{4\mu_b(\mu_b - \mu_t)(3-5v_b)(1+v_b) + (3-v_b)4\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t](1+v_b)} - \right. \\ & \left. - \frac{5(1-v_b)(2\mu_b + \mu_t)4\mu_b(1+v_b)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t](1+v_b)} \right] T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H\left(\frac{2(2-4v_t)\mu_b + 2(1+v_t)\mu_t}{(1-2v_t)}\right) = \\ & = \left[ \frac{4\mu_b(3\mu_b - 3\mu_t - 2\mu_b v_b + 2\mu_t v_b - 5\mu_b v_b^2 + 5\mu_t v_b^2)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t](1+v_b)} + \right. \\ & + \frac{4\mu_b(21\mu_b + 24\mu_t - 22\mu_b v_b - 38\mu_t v_b + 5\mu_b v_b^2 + 10\mu_t v_b^2)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t](1+v_b)} - \\ & \left. - \frac{4\mu_b(10\mu_b + 5\mu_t - 10\mu_b v_b^2 - 5\mu_t v_b^2)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t](1+v_b)} \right] T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{2(2-4\nu_t)\mu_b + 2(1+\nu_t)\mu_t}{(1-2\nu_t)}\right) &= \\
&= \left[ \frac{4\mu_b(14\mu_b + 16\mu_t - 24\mu_b\nu_b - 362\mu_t\nu_b + 10\mu_b\nu_b^2 + 20\mu_t\nu_b^2)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t](1+\nu_b)} \right] T \\
H\left(\frac{2(2-4\nu_t)\mu_b + 2(1+\nu_t)\mu_t}{(1-2\nu_t)}\right) &= \left[ \frac{4\mu_b[(14-10\nu_b)\mu_b + (16-20\nu_b)\mu_t](1-\nu_b)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t](1+\nu_b)} \right] T \\
H\left(\frac{2(2-4\nu_t)\mu_b + 2(1+\nu_t)\mu_t}{(1-2\nu_t)}\right) &= \left[ \frac{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t](1-\nu_b)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t](1+\nu_b)} \right] T \\
H\left(\frac{2(2-4\nu_t)\mu_b + 2(1+\nu_t)\mu_t}{(1-2\nu_t)}\right) &= \frac{1-\nu_b}{1+\nu_b} T \\
H &= \frac{(1-\nu_b)(1-2\nu_t)}{2(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b + (1+\nu_t)\mu_t]} T \tag{C11}
\end{aligned}$$

Sostituiamo le costanti trovate B,C,F,G e H nella A trovata in precedenza dalla (C1')

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{3B}{r^2} + \frac{C}{3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) + \frac{Tr^3}{2E} (1-\nu_b) - Hr^3 - Fr^3 \\
A &= -\frac{3}{r^2} \frac{Tr^5(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} + \\
&+ \frac{1}{3} \left( \frac{5-4\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{5Tr^3(\mu_b - \mu_t)(1-2\nu_b)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]} + \\
&+ \frac{Tr^3}{2E} (1-\nu_b) - \frac{(1-\nu_b)(1-2\nu_t)}{2(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b + (1+\nu_t)\mu_t]} Tr^3 - \\
&- \frac{5Tr^3(1-\nu_b)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b + (8-10\nu_b)\mu_t]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{3Tr^3(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
&\quad + \frac{5Tr^3(\mu_b - \mu_t)(5-4v_b)}{24\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} - \\
&\quad - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} Tr^3 + \\
&\quad + \frac{Tr^3}{4\mu_b} \left( \frac{1-v_b}{1+v_b} \right) - \frac{5(1-v_b)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} Tr^3 \\
\\
A &= \frac{Tr^3}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} [-3(\mu_b - \mu_t)] + \\
&\quad + \frac{Tr^3}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \left[ \frac{5}{3}(\mu_b - \mu_t)(5-4v_b) - 10\mu_b(1-v_b) \right] + \\
&\quad + \frac{Tr^3}{4\mu_b} \left( \frac{1-v_b}{1+v_b} \right) - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} Tr^3 \\
\\
A &= \frac{Tr^3[-9\mu_b + 9\mu_t + 25\mu_b - 25\mu_t - 20\mu_b v_b - 20\mu_t v_t - 30\mu_b + 30\mu_b v_b]}{24\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
&\quad + \frac{Tr^3}{4\mu_b} \left( \frac{1-v_b}{1+v_b} \right) - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} Tr^3 \\
\\
A &= \frac{Tr^3[-14\mu_b - 16\mu_t + 10\mu_b v_b + 20\mu_t v_t]}{24\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \frac{Tr^3}{4\mu_b} \left( \frac{1-v_b}{1+v_b} \right) - \\
&\quad - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} Tr^3 \\
\\
A &= -\frac{2Tr^3[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]}{24\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \frac{Tr^3}{4\mu_b} \left( \frac{1-v_b}{1+v_b} \right) - \\
&\quad - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} Tr^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{Tr^3}{12\mu_b} + \frac{Tr^3}{4\mu_b} \left( \frac{1-v_b}{1+v_b} \right) - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} Tr^3 \\
A &= \frac{-(1+v_b) + 3(1-v_b)}{12\mu_b(1+v_b)} Tr^3 - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{-1-v_b+3-3v_b}{12\mu_b(1+v_b)} - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{2(1-2v_b)}{12\mu_b(1+v_b)} - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{(1-2v_b)}{6\mu_b(1+v_b)} - \frac{(1-v_b)(1-2v_t)}{2(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{(1-2v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t] - 3\mu_b(1-v_b)(1-2v_t)}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{(1-2v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t] - 3\mu_b(1-v_b)(1-2v_t)}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{2\mu_b - 4\mu_b v_t - 4\mu_b v_b + 8\mu_b v_b v_t + \mu_t + \mu_t v_t}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\mu_t v_b + 2\mu_t v_b v_t + 3\mu_b - 6\mu_b v_t - 3\mu_b v_b + 6\mu_b v_b v_t}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{-\mu_b + 2\mu_b v_t - \mu_b v_b + 2\mu_b v_b v_t + \mu_t + \mu_t v_t - 2\mu_t v_b - 2\mu_t v_b v_t}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \\
A &= \left[ \frac{(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_b v_t(\mu_b - \mu_t)}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] Tr^3 \quad (C12)
\end{aligned}$$

Le costanti A, B, C, F, G e H vengono ricavate al contorno dell'inclusione per  $r=a$  con  $a$  = raggio dell'inclusione

$$A = \left[ \frac{(-1 - \nu_b + 2\nu_t)\mu_b + (1 - 2\nu_b + \nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b - \mu_t)}{6\mu_b(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} \right] Ta^3 \quad (C11)$$

$$B = \frac{Ta^5(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \quad (C9)$$

$$C = \frac{5Ta^3(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \quad (C7)$$

$$F = \frac{5T(1 - \nu_b)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \quad (C10)$$

$$H = \frac{(1 - \nu_b)(1 - 2\nu_t)}{2(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} T \quad (C11)$$

$$G = 0 \quad (C8)$$

## APPENDICE D

### Stato di sforzo a trazione lungo z nell'intorno dell'inclusione

#### Formulazione Generale

La soluzione che otterremo sarà funzione del raggio “r” e dell’angolo “ $\theta$ ” .

- Troviamo la  $\sigma_{rr}^b$  dalla (A8) sostituendo le costanti A,B e C trovate nell’appendice C.

$$\sigma_{rr}^b = 2\mu_b \left\{ \frac{2A}{r^3} + \frac{12B}{r^5} + \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \left( \frac{\nu_b - 5}{1 - 2\nu_b} \right) + \left[ \frac{36B}{r^5} + \frac{2C}{r^3} \left( \frac{\nu_b - 5}{1 - 2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \quad (D1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^b = 2\mu_b T \left\{ \frac{2a^3}{r^3} \left[ \frac{(-1 - \nu_b + 2\nu_t)\mu_b + (1 - 2\nu_b + \nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b - \mu_t)}{6\mu_b(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} \right] + \right. \\ + \frac{a^5}{r^5} \frac{12(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \\ + \frac{a^3}{r^3} \left( \frac{\nu_b - 5}{1 - 2\nu_b} \right) \frac{10(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)}{24\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \\ + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{36(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{10(\mu_b - \mu_t)(1 - 2\nu_b)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \left( \frac{\nu_b - 5}{1 - 2\nu_b} \right) \right] \cos 2\theta \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr}^b = 2\mu_b T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{(-1 - \nu_b + 2\nu_t)\mu_b + (1 - 2\nu_b + \nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b - \mu_t)}{3\mu_b(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} \right] + \right. \\ \left. + \frac{a^5}{r^5} \frac{12(\mu_b - \mu_t)}{8\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(\nu_b - 5)}{12\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b - \mu_t)}{2\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(\nu_b - 5)}{4\mu_b[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} 2 \left[ \frac{(-1 - \nu_b + 2\nu_t)\mu_b + (1 - 2\nu_b + \nu_t)\mu_t + 2\nu_b\nu_t(\mu_b - \mu_t)}{3(1 + \nu_b)[(2 - 4\nu_t)\mu_b + (1 + \nu_t)\mu_t]} \right] + \right. \\ \left. + \frac{a^5}{r^5} \frac{12(\mu_b - \mu_t)}{4[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(\nu_b - 5)}{6[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b - \mu_t)}{[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b - \mu_t)(\nu_b - 5)}{2[(7 - 5\nu_b)\mu_b + (8 - 10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4[(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)]}{6(1+v_b)[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t][(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \times \right. \right. \\
\times \frac{[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]}{6(1+v_b)[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t][(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} + \\
\left. \left. + \frac{5(\mu_b-\mu_t)(v_b-5)(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]}{6(1+v_b)[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t][(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] + \right. \quad (D2) \\
\left. + \frac{a^5}{r^5} \frac{12(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \right. \\
\left. + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b-\mu_t)}{[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(v_b-5)}{2[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\}
\end{aligned}$$

- Troviamo la  $\sigma_{\theta\theta}^b$  dalla (A9) e sostituiamo le costanti:

$$\sigma_{\theta\theta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{3B}{r^5} + \frac{5C}{3r^3} + \left[ -\frac{21B}{r^5} + \frac{C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (D3)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] T - \right. \\
-\frac{a^5}{r^5} \frac{3T(\mu_b-\mu_t)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
+\frac{a^3}{r^3} \frac{25T(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{24\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} - \\
-\left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{21T(\mu_b-\mu_t)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right. \\
\left. \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{5T(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^b = T & \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)}{3(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] - \right. \\
& -\frac{a^5}{r^5} \frac{3(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
& +\frac{a^3}{r^3} \frac{25(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{12[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} - \\
& -\left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{21(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right. \\
& \left. \left. +\frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{\theta\theta}^b = T & \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)]}{12(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t][(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \times \right. \\
& \times \frac{[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]}{12(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t][(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
& +\frac{25(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]}{12(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t][(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \left. \right] + \quad (D4) \\
& -\frac{a^5}{r^5} \frac{3(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\
& +\left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{21(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right. \\
& \left. +\frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\}
\end{aligned}$$

- Troviamo la  $\sigma_{\beta\beta}^b$  dalla(A11) e sostituiamo le costanti

$$\sigma_{\beta\beta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{A}{r^3} - \frac{9B}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{C}{r^3} + \left[ -\frac{15B}{r^5} + \frac{3C}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (D5)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^b = 2\mu_b \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)}{6\mu_b(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] T \right. \\ - \frac{a^5}{r^5} \frac{9T(\mu_b-\mu_t)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\ - \frac{1}{3} \frac{a^3}{r^3} \frac{5T(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\ \left. \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{15T(\mu_b-\mu_t)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{15T(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{8\mu_b[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^b = T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{(-1-v_b+2v_t)\mu_b + (1-2v_b+v_t)\mu_t + 2v_bv_t(\mu_b-\mu_t)}{3(1+v_b)[(2-4v_t)\mu_b + (1+v_t)\mu_t]} \right] \right. \\ - \frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\ - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{12[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \\ \left. \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{15(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^3}{r^3} \frac{15(\mu_b-\mu_t)(1-2v_b)}{4[(7-5v_b)\mu_b + (8-10v_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta\beta}^b = T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4[(-1-\nu_b+2\nu_t)\mu_b+(1-2\nu_b+\nu_t)\mu_t+2\nu_b\nu_t(\mu_b-\mu_t)]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \times \right. \right. \\
\left. \frac{[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \right. \\
\left. -\frac{5(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t]}{12(1+\nu_b)[(2-4\nu_t)\mu_b+(1+\nu_t)\mu_t][(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] - \\
\left. -\frac{a^5}{r^5} \frac{9(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} - \right. \\
\left. -\left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{15(\mu_b-\mu_t)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right]^+ \right. \\
\left. +\frac{a^3}{r^3} \frac{15(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)}{4[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \cos 2\theta \left. \right\} \quad (D6)
\end{aligned}$$

- Troviamo la  $\sigma_{r\theta}^b$  dalla (A12) sostituendo le costanti:

$$\sigma_{r\theta}^b = \mu_b \left[ \frac{48B}{r^5} - \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{4C}{r^3} \right] \sin 2\theta \quad (D7)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^b = \mu_b \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{48T(\mu_b-\mu_t)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\
\left. - \left( \frac{1+\nu_b}{1-2\nu_b} \right) \frac{a^3}{r^3} \frac{20T(\mu_b-\mu_t)(1-2\nu_b)}{8\mu_b[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \sin 2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{6(\mu_b-\mu_t)}{[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} + \right. \\
\left. - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\mu_b-\mu_t)(1+\nu_b)}{2[(7-5\nu_b)\mu_b+(8-10\nu_b)\mu_t]} \right] \sin 2\theta \quad (D8)
\end{aligned}$$

Fino ad ora è nota la soluzione generale delle  $\sigma_{rr}^b$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^b$ ,  $\sigma_{\beta\beta}^b$  e  $\sigma_{r\theta}^b$ .

## Microcavità

Consideriamo adesso il caso della “microcavità”, cioè quando  $\mu_t = 0$  e  $\nu_t = 0$ . Sostituiamo questi valori nelle  $\sigma_{rr}^b, \sigma_{\theta\theta}^b, \sigma_{\beta\beta}^b$  e  $\sigma_{r\theta}^b$  della soluzione generale:

- La  $\sigma_{rr}^b$  della (D2) si riduce a:

$$\sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4[(-1-\nu_b)\mu_b](7-5\nu_b)\mu_b}{6(1+\nu_b)(7-5\nu_b)\mu_b 2\mu_b} + \frac{5\mu_b(\nu_b-5)(1+\nu_b)2\mu_b}{6(1+\nu_b)(7-5\nu_b)\mu_b 2\mu_b} \right] + \right. \\ \left. + \frac{a^5}{r^5} \frac{12\mu_b}{4(7-5\nu_b)\mu_b} + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9\mu_b}{(7-5\nu_b)\mu_b} + \frac{a^3}{r^3} \frac{5\mu_b(\nu_b-5)}{2(7-5\nu_b)\mu_b} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{rr}^b = \frac{a^3}{r^3} \left[ -\frac{1}{3} + \frac{5(\nu_b-5)}{6(7-5\nu_b)} \right] T + \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(7-5\nu_b)} T + \\ + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(7-5\nu_b)} T + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(7-5\nu_b)} T \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_{rr}^b = \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-14-10\nu_b+5\nu_b-25}{6(7-5\nu_b)} \right] T + \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(7-5\nu_b)} T \\ + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(7-5\nu_b)} T + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(7-5\nu_b)} T \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_{rr}^b = \frac{a^3}{r^3} \frac{15\nu_b-39}{6(7-5\nu_b)} T + \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(7-5\nu_b)} T \\ + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(7-5\nu_b)} T + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(7-5\nu_b)} T \right] \cos 2\theta \quad (D9)$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{15\nu_b-39}{6(7-5\nu_b)} + \frac{3}{(7-5\nu_b)} + \left[ \frac{9}{(7-5\nu_b)} + \frac{5(\nu_b-5)}{2(7-5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^b &= T \left\{ \frac{15\nu_b - 39 + 18}{6(7 - 5\nu_b)} + \left[ \frac{18 + 5\nu_b - 25}{2(7 - 5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{rr}^b &= T \left\{ \frac{15\nu_b - 21}{6(7 - 5\nu_b)} + \left[ \frac{5\nu_b - 7}{2(7 - 5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{rr}^b &= T \left\{ -\frac{3(7 - 5\nu_b)}{6(7 - 5\nu_b)} + \left[ -\frac{7 - 5\nu_b}{2(7 - 5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{rr}^b &= -\frac{T}{2}(1 + \cos 2\theta) \tag{D10}\end{aligned}$$

- La  $\sigma_{\theta\theta}^b$  della (D4) si riduce a:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4(-1 - \nu_b)\mu_b(7 - 5\nu_b)\mu_b}{12(1 + \nu_b)2\mu_b(7 - 5\nu_b)\mu_b} + \frac{25\mu_b(1 - 2\nu_b)(1 + \nu_b)2\mu_b}{12(1 + \nu_b)2\mu_b(7 - 5\nu_b)\mu_b} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^5}{r^5} \frac{3\mu_b}{4(7 - 5\nu_b)\mu_b} + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{21\mu_b}{4(7 - 5\nu_b)\mu_b} + \frac{a^3}{r^3} \frac{5\mu_b(1 - 2\nu_b)}{4(7 - 5\nu_b)\mu_b} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{25(1 - 2\nu_b)}{12(7 - 5\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{4(7 - 5\nu_b)} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{21}{4(7 - 5\nu_b)} + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1 - 2\nu_b)}{4(7 - 5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{14 - 10\nu_b + 25 - 50\nu_b}{12(7 - 5\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{4(7 - 5\nu_b)} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{21}{4(7 - 5\nu_b)} + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1 - 2\nu_b)}{4(7 - 5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^b = & \frac{a^3}{r^3} \frac{39-60\nu_b}{12(7-5\nu_b)} T - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{4(7-5\nu_b)} T + \\ & + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{21}{4(7-5\nu_b)} T + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1-2\nu_b)}{4(7-5\nu_b)} T \right] \cos 2\theta \end{aligned} \quad (D11)$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^b = & T \left\{ \frac{3(13-20\nu_b)}{12(7-5\nu_b)} - \frac{3}{4(7-5\nu_b)} + \left[ -\frac{21}{4(7-5\nu_b)} + \frac{5(1-2\nu_b)}{4(7-5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b = & T \left\{ \frac{13-20\nu_b-3}{4(7-5\nu_b)} - \left[ \frac{21-5+10\nu_b}{4(7-5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b = & T \left\{ \frac{2(5-10\nu_b)}{4(7-5\nu_b)} - \frac{2(8+5\nu_b)}{4(7-5\nu_b)} \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^b = & T \left\{ \frac{5-10\nu_b}{2(7-5\nu_b)} - \frac{8+5\nu_b}{2(7-5\nu_b)} \cos 2\theta \right\} \end{aligned} \quad (D12)$$

- La  $\sigma_{\beta\beta}^b$  della (D6) si riduce a:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta}^b = & T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4(1+\nu_b)\mu_b(7-5\nu_b)\mu_b}{12(1+\nu_b)2\mu_b(7-5\nu_b)\mu_b} - \frac{5\mu_b(1-2\nu_b)(1+\nu_b)2\mu_b}{12(1+\nu_b)2\mu_b(7-5\nu_b)\mu_b} \right] + \right. \\ & \left. -\frac{a^5}{r^5} \frac{9\mu_b}{4(7-5\nu_b)\mu_b} + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{15\mu_b}{4(7-5\nu_b)\mu_b} + \frac{a^3}{r^3} \frac{15\mu_b(1-2\nu_b)}{4(7-5\nu_b)\mu_b} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\beta\beta}^b = & T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{1}{6} - \frac{5(1-2\nu_b)}{12(7-5\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{4(7-5\nu_b)\mu_b} + \right. \\ & \left. + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{15\mu_b}{4(7-5\nu_b)\mu_b} + \frac{a^3}{r^3} \frac{15\mu_b(1-2\nu_b)}{4(7-5\nu_b)\mu_b} \right] \cos 2\theta \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^b = T \left\{ -\frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{1}{6} - \frac{5(1-2\nu_b)}{12(7-5\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{4(7-5\nu_b)\mu_b} + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{15}{4(7-5\nu_b)} + \frac{a^3}{r^3} \frac{15(1-2\nu_b)}{4(7-5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (D13)$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\sigma_{\beta\beta}^t = T \left\{ \frac{1}{6} - \frac{5(1-2\nu_b)}{12(7-5\nu_b)} - \frac{9}{4(7-5\nu_b)\mu_b} + \left[ -\frac{15}{4(7-5\nu_b)} + \frac{15(1-2\nu_b)}{4(7-5\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^t = T \left\{ \frac{14-10\nu_b-5+10\nu_b-27}{12(7-5\nu_b)} + \frac{-15+15-30\nu_b}{4(7-5\nu_b)} \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^t = T \left\{ -\frac{18}{12(7-5\nu_b)} - \frac{30\nu_b}{4(7-5\nu_b)} \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^t = -T \left\{ \frac{3}{2(7-5\nu_b)} + \frac{15\nu_b}{2(7-5\nu_b)} \cos 2\theta \right\} \quad (D14)$$

- La  $\sigma_{r\theta}^b$  della (D8) si riduce a:

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{6\mu_b}{(7-5\nu_b)\mu_b} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5\mu_b(1+\nu_b)}{2(7-5\nu_b)\mu_b} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{6}{(7-5\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1+\nu_b)}{2(7-5\nu_b)} \right] \sin 2\theta \quad (D14)$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{6}{(7-5\nu_b)} - \frac{5(1+\nu_b)}{2(7-5\nu_b)} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{12-5-5\nu_b}{2(7-5\nu_b)} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{(7-5\nu_b)}{2(7-5\nu_b)} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^b = \frac{T}{2} \sin 2\theta \quad (D15)$$

## Inclusione perfettamente rigida

Consideriamo adesso il caso della “**inclusione perfettamente rigida**”, cioè quando  $\frac{\mu_b}{\mu_t} \rightarrow 0$  dividiamo così numeratore e denominatore per  $\mu_t$

Sostituiamo questi valori nelle  $\sigma_{rr}^b, \sigma_{\theta\theta}^b, \sigma_{\beta\beta}^b$  e  $\sigma_{r\theta}^b$  della soluzione generale.

- La  $\sigma_{rr}^b$  della (2.1.1) diventa:

$$\sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4(1-2\nu_b + \nu_t - 2\nu_b\nu_t)(8-10\nu_b)}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)(1+\nu_t)} - \frac{5(\nu_b-5)(1+\nu_b)(1+\nu_t)}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)(1+\nu_t)} \right] + \right. \\ \left. - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(8-10\nu_b)} + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(8-10\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4(1-2\nu_b)(1+\nu_t)(8-10\nu_b)}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)(1+\nu_t)} - \frac{5(\nu_b-5)}{6(8-10\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(8-10\nu_b)} + \right. \\ \left. - \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(8-10\nu_b)} + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{rr}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{4(1-2\nu_b)}{6(1+\nu_b)} - \frac{5(\nu_b-5)}{6(8-10\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(8-10\nu_b)} + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(8-10\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{(4-8\nu_b)(8-10\nu_b) - 5(\nu_b-5)(1+\nu_b)}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(8-10\nu_b)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(8-10\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{rr}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{32-40\nu_b-64\nu_b+80\nu_b^2-5\nu_b-5\nu_b^2+25+25\nu_b}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(8-10\nu_b)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(8-10\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\
\sigma_{rr}^b &= \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{75\nu_b^2-84\nu_b+57}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] T - \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{(8-10\nu_b)} T + \\
&\quad + \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{9}{(8-10\nu_b)} T - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(\nu_b-5)}{2(8-10\nu_b)} T \right] \cos 2\theta \tag{D16}
\end{aligned}$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^b &= \frac{75\nu_b^2-84\nu_b+57}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} T - \frac{3}{(8-10\nu_b)} T + \left[ -\frac{9}{(8-10\nu_b)} T - \frac{5(\nu_b-5)}{2(8-10\nu_b)} T \right] \cos 2\theta \\
\sigma_{rr}^b &= \left[ \frac{75\nu_b^2-84\nu_b+57-18-18\nu_b}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] T - \left[ \frac{18+5\nu_b-25}{2(8-10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta \\
\sigma_{rr}^b &= \left[ \frac{75\nu_b^2-102\nu_b+39}{6(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] T - \left[ \frac{7-5\nu_b}{2(8-10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta \tag{D17}
\end{aligned}$$

- La  $\sigma_{\theta\theta}^b$  della (D4) diventa:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4(1-2\nu_b+\nu_t-2\nu_b\nu_t)(8-10\nu_b)}{12(1+\nu_b)(1+\nu_t)(8-10\nu_b)} - \frac{25(1-2\nu_b)(1+\nu_b)(1+\nu_t)}{12(1+\nu_b)(1+\nu_t)(8-10\nu_b)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{4(8-10\nu_b)} + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{21}{4(8-10\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1-2\nu_b)}{4(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4(1-2\nu_b)(1+\nu_t)(8-10\nu_b)}{12(1+\nu_b)(1+\nu_t)(8-10\nu_b)} - \frac{25(1-2\nu_b)}{12(8-10\nu_b)} \right] + \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{4(8-10\nu_b)} + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{21}{4(8-10\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1-2\nu_b)}{4(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^b = T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4(1-2\nu_b)}{12(1+\nu_b)} - \frac{25(1-2\nu_b)}{12(8-10\nu_b)} \right] + \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{4(8-10\nu_b)} + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{21}{4(8-10\nu_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1-2\nu_b)}{4(8-10\nu_b)} \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^b = \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4(1-2\nu_b)}{12(1+\nu_b)} - \frac{25(1-2\nu_b)}{12(8-10\nu_b)} \right] T + \frac{a^5}{r^5} \frac{3}{4(8-10\nu_b)} T + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{21}{4(8-10\nu_b)} T - \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1-2\nu_b)}{4(8-10\nu_b)} T \right] \cos 2\theta \quad (D18)$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\sigma_{\theta\theta}^b = \left[ -\frac{4(1-2\nu_b)}{12(1+\nu_b)} - \frac{25(1-2\nu_b)}{12(8-10\nu_b)} + \frac{3}{4(8-10\nu_b)} \right] T + \left[ \frac{21}{4(8-10\nu_b)} - \frac{5(1-2\nu_b)}{4(8-10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}^b = \left[ \frac{-4(1-2\nu_b)(8-10\nu_b) - 25(1-2\nu_b)(1+\nu_b) + 9(1+\nu_b)}{12(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] T + \left[ \frac{21-5+10\nu_b}{4(8-10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}^b = \left[ \frac{-32+40\nu_b+64\nu_b-80\nu_b^2-25-25\nu_b+50\nu_b+50\nu_b^2+9+9\nu_b}{12(1+\nu_b)(8-10\nu_b)} \right] T + \left[ \frac{16+10\nu_b}{4(8-10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}^b = \left[ \frac{-30v_b^2 + 138v_b - 48}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T + \left[ \frac{16+10v_b}{4(8-10v_b)} \right] T \cos 2\theta \quad (D19)$$

- La  $\sigma_{\beta\beta}^b$  della (D6) diventa

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4(1-2v_b+v_t-2v_bv_t)(8-10v_b)}{12(1+v_b)(1+v_t)(8-10v_b)} + \frac{5(1-2v_b)(1+v_b)(1+v_t)}{12(1+v_b)(1+v_t)(8-10v_b)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{4(8-10v_b)} + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{15}{4(8-10v_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{15(1-2v_b)}{4(8-10v_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\beta\beta}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ \frac{-4(1-2v_b)(1+v_t)(8-10v_b)}{12(1+v_b)(1+v_t)(8-10v_b)} + \frac{5(1-2v_b)}{12(8-10v_b)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{4(8-10v_b)} + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{15}{4(8-10v_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{15(1-2v_b)}{4(8-10v_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{\beta\beta}^b &= T \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left[ -\frac{4(1-2v_b)}{12(1+v_b)} + \frac{5(1-2v_b)}{12(8-10v_b)} \right] + \frac{a^5}{r^5} \frac{9}{4(8-10v_b)} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{a^5}{r^5} \frac{15}{4(8-10v_b)} - \frac{a^3}{r^3} \frac{15(1-2v_b)}{4(8-10v_b)} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (D20) \end{aligned}$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta}^b &= \left[ -\frac{4(1-2v_b)}{12(1+v_b)} + \frac{5(1-2v_b)}{12(8-10v_b)} + \frac{9}{4(8-10v_b)} + \right] T \\ &\quad + \left[ \frac{15}{4(8-10v_b)} - \frac{15(1-2v_b)}{4(8-10v_b)} \right] T \cos 2\theta \\ \sigma_{\beta\beta}^b &= \left[ \frac{-4(1-2v_b)(8-10v_b) + 5(1-2v_b)(1+v_b) + 271+v_b}{12(1+v_b)(8-10v_b)} \right] T \\ &\quad + \left[ \frac{15-15+30v_b}{4(8-10v_b)} \right] T \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta\beta}^b &= \left[ \frac{-32 + 40\nu_b + 64\nu_b - 80\nu_b^2 + 5 + 5\nu_b - 10\nu_b - 10\nu_b^2 + 27 + 27\nu_b}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} \right] T \\ &\quad + \left[ \frac{30\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} \right] T \cos 2\theta \\ \sigma_{\beta\beta}^b &= -T \left[ \frac{90\nu_b^2 - 126\nu_b}{12(1 + \nu_b)(8 - 10\nu_b)} - \frac{30\nu_b}{4(8 - 10\nu_b)} \cos 2\theta \right]\end{aligned}\quad (D21)$$

- La  $\sigma_{r\theta}^b$  della (D8) diventa

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ -\frac{a^5}{r^5} \frac{6}{(8 - 10\nu_b)} + \frac{a^3}{r^3} \frac{5(1 + \nu_b)}{2(8 - 10\nu_b)} \right] \sin 2\theta$$

Per  $r=a$  si ha:

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ -\frac{6}{(8 - 10\nu_b)} + \frac{5(1 + \nu_b)}{2(8 - 10\nu_b)} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^b = T \left[ \frac{-12 + 5 + 5\nu_b}{2(8 - 10\nu_b)} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^b = -T \left( \frac{7 - 5\nu_b}{2(8 - 10\nu_b)} \right) \sin 2\theta \quad (D22)$$

## Bibliografia

- [1] Murakami, Y. and Endo, M. (1994) Effect of defect, inclusions and inhomogeneities on fatigue strength. *Int. J. Fatigue* **16**, 163-182
- [2] Beretta S. (2002) Application of multiaxial fatigue criteria to materials containing defects. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **26**, 551-559
- [3] Goodier J. N. (1933) Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws *Trans. ASME* **55** 39-44.
- [4] Mehmet Bilgen and Michael F. Insana (1997) Elastostatics of a spherical inclusion in homogeneous biological media, pp 17-20 .
- [5] Janowski K.R. and Rossi R.C. (1968) Elastic proprieties of isotropic graphite, *Phil. Mag.*, Vol. **17**, No **148**, pp 851-854
- [6] Nishihara T. and Kawamoto M. (1945) The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference, *Mémoires College of Engineering Kyoto Imperial University*, Vol **11**, No **5**, pp. 85-112.
- [7] Neugebauer J. (1986), Fatigue strength of cast iron materials under multiaxial stresses , Report **FB-175 Fraunhofer-Institute fur Betriebsfestigkeit (LBF)**, Darmstadt.
- [8] Heidenreich R., Richter I. and Zenner H. (1984), Schubspannung-sintensitaethypothese-weitere experimentelle und theoretische Untersuchungen, *Konstruktion*, vol. **36**, pp. 99-104.
- [9] Grubisic V. and Sonsino C.M. (1984), Mechanics of fatigue failure of cast alloys and sintered steels under multiaxial loading, *Journées Internationales de Printemps, Société Française de Métallurgie*, Paris, pp. s.1-s.16.
- [10] Marquis G. and Solin J., (2000), Long-life fatigue design of GPR 500 nodular cast iron components, *VTT Research Notes 2043*, Technical Research Centre of Finland.