

POLITECNICO DI MILANO
Seconda facoltà - Ingegneria dei Sistemi

Interpolazione 3D di immagini tramite
traiettorie nello spazio tangente
basata sul parallelismo di piani

Tesi di Laurea in Ingegneria Matematica



Relatore:
Prof.
Marco Marcon

Presentata da:
Vitaliano Nobile
matr.708178

Sessione di Luglio
Anno Accademico 2009/10

*Ad Amélie,
sperando che un giorno sia orgogliosa di suo papà...*

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutti coloro che hanno contribuito, con consigli e critiche, alla realizzazione di questa tesi, in particolar modo il professor Marco Marcon e Antonio Canclini per la disponibilità e l'aiuto anche nei mesi in cui sono stato lontano dall'Italia. Ringrazio inoltre tutti coloro che mi hanno accompagnato e sostenuto per tutto il percorso dei miei studi e tutti coloro con cui ho diviso momenti importanti in questi anni della mia vita al Politecnico e all'Ecole Centrale de Lille. Un particolare ringraziamento va ai miei genitori che hanno sempre creduto in me e alla mia famiglia, a Maria e alla piccola Amélie che mi hanno dato la forza di portare a termine questo lavoro.

Vitaliano Nobile

Sommario

Lo scopo principale di questo lavoro è di fornire una tecnica che permetta un'interpolazione fluida tra immagini scattate da punti di osservazione diversi senza tuttavia passare attraverso la ricostruzione completa dello spazio. Questo è possibile considerando che in matematica il movimento rigido di un oggetto (in questo caso della macchina fotografica) è modellizzabile per mezzo di particolari matrici che appartengono ad un gruppo di Lie detto gruppo speciale euclideo. Tale gruppo gode di particolari proprietà che permettono di calcolare per mezzo della mappa esponenziale una traiettoria interpolante tra la posizione e l'orientamento di una fotocamera prima e dopo uno spostamento. In teoria, dato lo spostamento della fotocamera, è possibile costruire una matrice di proiezione e creare un'immagine virtuale proiettando i punti nello spazio. Purtroppo, solamente a partire da una coppia di fotografie, non è possibile in generale ricavare né lo spostamento relativo né le coordinate spaziali dei punti. Usando un modello piano-parallasse, la struttura affine relativa, siamo però in grado di stimare l'omografia indotta dal piano all'infinito e di dare una ricostruzione affine della geometria. Ciò permette di costruire una nuova matrice appartenente al gruppo speciale proiettivo e legata al gruppo speciale euclideo da un morfismo tra gruppi di Lie. Esponenziando tale matrice si può calcolare una traiettoria interpolante nello spazio proiettivo e costruire una matrice di proiezione che, applicata alla ricostruzione affine, fornisce la stessa immagine che otterremmo nel caso euclideo.

Summary

The main purpose of this work is to provide a technique that allows a smooth interpolation between images taken from different viewpoints without going through the complete reconstruction of the space. This is possible because in mathematics the rigid motion of an object (in this case of the camera) is modeled with special matrices that belong to a Lie group called special euclidean group. This group has particular properties that allow to calculate a trajectory interpolating between the positions and orientations of a camera before and after a rigid motion by matrix exponentiation. In theory, given the relative displacement of cameras, it's possible to build a virtual projection matrix and create a new image by projecting real 3D points. Unfortunately we can't recover the relative displacement nor the 3D points configuration because we can't access to the euclidean frame from an image pair. Using a plane-parallax model and plane parallelism, we are able to recover the homography induced by the plane at infinity and to give an affine reconstruction of the 3D geometry. This allows us to build a new matrix belonging to the special projective group and related to the special euclidean group by a Lie group homomorphism. Exponentiating this matrix we can calculate a trajectory in the projective space and build a new projection matrix which, applied to the affine reconstruction, gives the same image as if the euclidean frame was known.

Indice

Introduzione	1
1 Cenni di Geometria proiettiva	5
1.1 Lo spazio proiettivo	6
1.2 Punti e rette nel piano proiettivo	7
1.3 Modello del piano proiettivo	9
1.4 Lo spazio proiettivo \mathbb{P}^3	10
1.5 Trasformazioni proiettive	11
1.6 La retta proiettiva \mathbb{P}^1 ed il cross-ratio	15
2 Modello di Fotocamera Proiettiva	17
2.1 Costruzione del modello	17
2.2 Matrice di calibrazione	18
2.3 Modello generale	20
2.4 Il centro della fotocamera	20
2.5 Proiezione di punti all'infinito	21
2.6 Le righe e le colonne di P	22
3 Geometria epipolare	25
3.1 La matrice fondamentale	25
3.2 Ambiguità proiettiva nella ricostruzione	28
3.3 Omografia indotta dal piano all'infinito	32
3.4 Struttura affine relativa	33
3.5 Ricostruzione della geometria epipolare	37
4 Gruppi di Lie Lineari	41
4.1 Definizioni preliminari	41
4.2 Operatori lineari	46
4.3 Mappa esponenziale	51
4.4 Logaritmo di matrici	56
4.5 Sottogruppi ad un parametro	59
4.6 Gruppi di Lie lineari	61
4.7 Movimenti rigidi e gruppo speciale euclideo	68
4.8 Il gruppo speciale proiettivo	84

5 Sintesi di Viste Virtuali	87
5.1 Il problema della sintesi di nuove viste	87
5.2 Sintesi a partire dalla ricostruzione	89
5.3 La matrice di calibrazione della scena	90
5.4 Calcolo dell'omografia infinita	95
5.5 Posizione dei centri delle fotocamere	99
6 Applicazioni	105
6.1 Simulazione con dati esatti	105
6.2 Simulazione con rumore gaussiano	108
6.3 Applicazione a foto reali	110
Conclusioni	116
A Codici Matlab	119
A.1 Codici per la simulazione	119
A.2 Codice per la stima degli errori	137
Bibliografia	140

Introduzione

La visione artificiale consiste in un insieme di tecniche mirate in qualche modo a costruire un modello approssimato di oggetti tridimensionali estraendo informazioni da immagini bidimensionali come fotografie o sequenze video. Tale settore è stato protagonista di un rapido sviluppo in seguito al veloce progresso delle tecnologie informatiche perchè permette di dare un'interpretazione il più possibile automatica da parte delle macchine in seguito all'acquisizione di immagini, risultando molto utile ad esempio nella progettazione di sistemi di controllo di processo, di sicurezza, di rilevamento di eventi o anche per la modellizzazione di strutture come nel settore topografico. La visione artificiale è dunque in un certo senso l'inverso della computer grafica, o anche grafica digitale, che consiste nello studio e nella generazione di immagini a partire da modelli tridimensionali in forma digitale. Nei videogiochi di ultima generazione, ad esempio, spesso viene creato un mondo virtuale tridimensionale che poi viene proiettato sullo schermo del computer con opportune tecniche. La visione artificiale percorre la strada opposta estraendo informazioni sul mondo tridimensionale a partire dalle proiezioni. Come in tutte le tecniche di reverse engineering il problema della ricostruzione è in generale più complesso perché gran parte delle informazioni vengono perse nel processo di proiezione mentre quelle disponibili devono essere ricavate con stime spesso difficoltose, imprecise ed onerose dal punto di vista computazionale. Per tale motivo, quando possibile, si cerca di ridurre al minimo la fase di ricostruzione cercando in qualche modo di aggirarla sfruttando informazioni parziali del modello tridimensionale. Si considerino ad esempio gli ultimi sistemi di navigazione virtuale (ad esempio Street View di Google Maps o GeoSynth di Microsoft). Diverse fotografie dello stesso luogo vengono scattate da diverse angolazioni, in qualche modo sono incollate tra loro e l'utente può passeggiare virtualmente per le vie di alcune città. Tali sistemi prescindono dalla ricostruzione tridimensionale completa di tutti gli oggetti dello spazio, ma presentano come limite il fatto che l'immagine ruota sempre attorno ad un punto di vista fisso ed il passaggio da un punto di osservazione ad un altro non è continuo come lo sarebbe ad esempio in un videogioco.

Lo scopo principale di questo lavoro è di fornire una tecnica che permetta un'interpolazione fluida tra immagini scattate da punti di osservazione di-

versi senza tuttavia passare attraverso la ricostruzione completa dello spazio. Questo è possibile considerando che in matematica il movimento rigido di un oggetto (in questo caso della macchina fotografica) è modellizzabile per mezzo di matrici che appartengono ad un particolare gruppo detto *gruppo speciale euclideo*. Tale gruppo è un gruppo di Lie e gode di proprietà che permettono di calcolare una traiettoria interpolante tra la posizione e l'orientamento iniziale e finale di una fotocamera che si è mossa da un punto ad un altro dello spazio. In via teorica, esponenziando la matrice che descrive la posizione relativa della fotocamera prima e dopo lo spostamento, si può costruire un modello di macchina fotografica che si trova in un punto dello spazio tra le posizioni della macchina fotografica nel momento in cui sono state scattate le foto. Tale modello è rappresentabile per mezzo di un'applicazione lineare dallo spazio tridimensionale allo spazio bidimensionale la cui matrice associata è detta *matrice di proiezione* perchè proietta tutti i punti dello spazio nel piano della fotografia (in particolare si tratta di una proiezione centrale).

In pratica, però, questo non è possibile a partire da una coppia di immagini perchè non si ha modo di calcolare lo spostamento relativo, né le coordinate spaziali dei punti degli oggetti ritratti nelle fotografie. In termini tecnici non si ha accesso al sistema euclideo e si deve dunque lavorare nel sistema proiettivo che tiene conto appunto delle proiezioni effettuate. Per questo motivo si deve cercare di estendere il procedimento adattandolo alle informazioni ottenibili dalle immagini. La relazione tra le proiezioni di uno stesso punto sulle due immagini è descrivibile per mezzo di una trasformazione lineare affine in cui il termine lineare è dato dalla trasformazione indotta da un piano di riferimento presente in entrambe le fotografie. Tale trasformazione indotta non è altro la trasformazione che si ottiene retro-proiettando un punto da una fotografia nello spazio, intersecando il raggio che determina la proiezione centrale con il piano ed in seguito proiettando l'intersezione nella seconda immagine. Il termine affine dipende invece dal parallasse del punto rispetto al piano, cioè dalla distanza tra il punto ed il piano stesso, e per questo è detta *struttura affine relativa*. A partire da tale modello è possibile generare una ricostruzione dei punti nello spazio legata alla configurazione vera da una trasformazione proiettiva ed in seguito calcolare l'omografia indotta da un particolare piano detto *piano all'infinito*. Effettuando i passaggi per la ricostruzione con il modello con la struttura affine relativa, utilizzando questa volta il piano all'infinito come riferimento, si ottiene una ricostruzione affine dei punti, cioè una configurazione legata a quella vera da una trasformazione affine. A questo punto siamo in grado di ricavare lo spostamento della fotocamera nel sistema proiettivo che è espresso da una matrice appartenente ad un nuovo gruppo, detto per l'appunto *gruppo speciale proiettivo*, e legata allo spostamento euclideo da un'applicazione che ne conserva le proprietà. Si giunge così ad un modello di fotocamera che, applicato alla ricostruzione, genera un'immagine virtuale identica a quella

che si otterrebbe avendo accesso al sistema euclideo.

Come è intuibile dalla presentazione data, per realizzare tutto questo non è possibile utilizzare la geometria euclidea classica, ma bisogna porsi in una nuova geometria detta *proiettiva*, che ne estende e generalizza tutti i risultati e permette di modellizzare elementi come punti di fuga e orizzonti che sono fondamentali nell'elaborazione di immagini.

Si introdurranno dunque nel primo capitolo i concetti di base sulla geometria proiettiva. Nel secondo e nel terzo capitolo si descriverà il modello matematico di macchina fotografica ed alcune nozioni di visione stereo. In seguito si esporrà nel quarto capitolo la teoria dei gruppi di Lie lineari facendo particolare riferimento al caso di interesse. Infine nel quinto capitolo verrà spiegato come generare nuove viste interpolanti, come ricavare le quantità necessarie a tale scopo basandosi su piani paralleli e nel sesto capitolo si presenteranno alcune simulazioni ed applicazioni pratiche.

Capitolo 1

Cenni di Geometria proiettiva

In questo capitolo verranno introdotte alcune nozioni riguardanti la geometria proiettiva, introdotta per la prima volta dal matematico francese Girard Desargues nel XVII secolo e sviluppata fortemente nel XIX secolo, che consiste in una generalizzazione della geometria analitica e permette di includere molti casi particolari ed eccezioni, oltre che semplificare innumerevoli teoremi. Ad esempio nello spazio proiettivo \mathbb{P}^2 che generalizza lo spazio euclideo \mathbb{R}^2 due rette hanno sempre un punto di intersezione che, nel caso di parallelismo, ha una forma particolare ed è detto *all'infinito* in quanto tiene conto dell'idea intuitiva che due rette parallele si incontrino all'infinito. Analogamente in \mathbb{P}^3 , che estende lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 , due piani si intersecano sempre in una retta che, nel caso di piani paralleli, sarà costituita da punti all'infinito. La geometria proiettiva permette dunque di arricchire la geometria analitica classica introducendo concetti fondamentali nell'elaborazione di immagini, quali ad esempio i punti di fuga e gli orizzonti, che diventano parte integrante dello spazio geometrico e non sono più casi limite e ideali.

Si consideri ad esempio una fotografia che ritrae una ferrovia che si estende fino all'orizzonte. E' possibile modellizzare nello spazio i binari come due rette parallele che quindi in \mathbb{P}^3 hanno intersezione in un punto all'infinito. Nella fotografia invece, cioè nel piano modellizzato da \mathbb{P}^2 i binari si intersecano in un punto che in prospettiva è indicato come *punto di fuga* e che non è altro che la proiezione, tramite un'opportuna mappa da \mathbb{P}^3 a \mathbb{P}^2 del punto di intersezione dei due binari (fig.1.1).

L'idea chiave della geometria proiettiva consiste nel passare dalle coordinate cartesiane di uno spazio vettoriale ad un nuovo tipo di coordinate dette *omogenee* che tengono in considerazione che, ponendo il proprio occhio, o una macchina fotografica, in un punto dello spazio e osservando gli elementi che ci circondano, non siamo in grado di distinguere tutti i punti che giacciono su uno stesso raggio che interseca la retina o la pellicola. In altre parole non abbiamo informazioni riguardo alla profondità degli oggetti che ci circondano. Nello spazio proiettivo tutti questi punti sono considerati

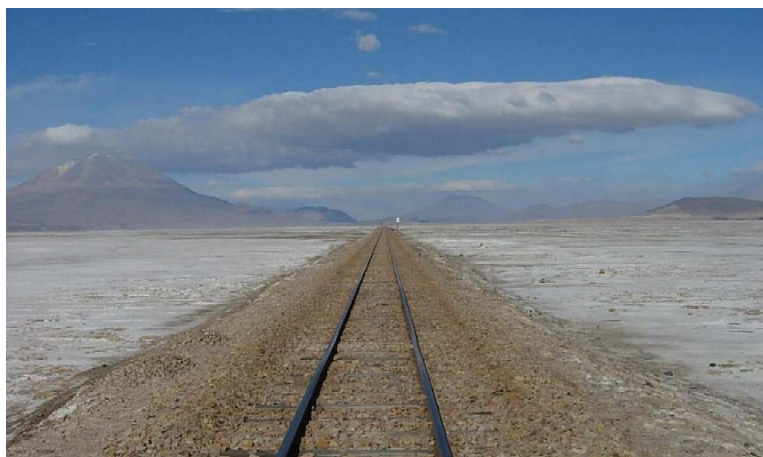


Figura 1.1: In geometria proiettiva due rette parallele nello spazio si intersecano in un punto all'infinito. L'immagine del punto all'infinito in una foto è un punto di fuga.

allo stesso modo e rappresentano la stessa entità, cioè lo stesso punto dello spazio proiettivo. Nel seguito verranno introdotti gli spazi \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^3 con alcune nozioni basilari utili allo sviluppo di questo lavoro, per maggiori informazioni si rimanda a [1].

1.1 Lo spazio proiettivo

Si consideri uno spazio vettoriale \mathbb{K}^n di dimensione finita n definito su un campo \mathbb{K} . Si definisce lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ come l'insieme di tutte le rette dello spazio \mathbb{K}^{n+1} passanti per l'origine. Più formalmente, si consideri la seguente relazione di equivalenza: dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$\mathbf{x} \cong \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$ non nullo. Due punti giacciono sulla stessa retta passante per l'origine in \mathbb{K}^{n+1} se e solo se sono equivalenti, cioè se sono multipli.

Definizione 1.1 (Spazio proiettivo) *Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è l'insieme delle classi di equivalenza di \mathbb{K}^{n+1} rispetto alla relazione \cong cioè lo spazio quoziente*

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} / \{\mathbf{0}\}) / \cong$$

Nel seguito si indicherà l'uguaglianza a meno di un fattore moltiplicativo con \cong .

Ad ogni punto $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n$ è possibile associare un elemento \mathbf{x} dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ attraverso la mappa

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) | \tilde{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x} \cong [\tilde{\mathbf{x}}, 1]^T$$

dove 1 è l'elemento neutro del campo \mathbb{K} . Ovviamente \mathbf{x} è un rappresentante della classe di equivalenza rappresentata dall'elemento dello spazio proiettivo, quindi qualunque multiplo di \mathbf{x} è associato allo stesso vettore $\tilde{\mathbf{x}}$. Nel seguito diremo che \mathbf{x} è il vettore $\tilde{\mathbf{x}}$ in *coordinate omogenee* se è un elemento della classe di equivalenza di $[\tilde{\mathbf{x}}, 1]^T$, mentre diremo che $\tilde{\mathbf{x}}$ è lo stesso punto in *coordinate euclidee*.

Viceversa, dato un elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ in coordinate omogenee, è possibile passare allo spazio \mathbb{K}^n riscalandolo \mathbf{x} in modo tale che abbia la forma $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{x}}, 1]^T$ e considerando le prime n coordinate. Tuttavia si noti che questo non è possibile per ogni punto dello spazio proiettivo. Se infatti $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{x}}, 0]^T$, non esistono elementi nella classe di equivalenza di \mathbf{x} che abbiano come ultima coordinata 1 . Tali punti sono detti *punti all'infinito* di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ perchè, come si vedrà in seguito, sono intersezioni di rette parallele.

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è dunque 'più grande' dello spazio euclideo \mathbb{K}^n in quanto è l'unione dell'insieme $\varphi(\mathbb{K}^n)$ e dell'insieme dei punti all'infinito.

Notiamo infine l'elemento neutro rispetto alla somma dello spazio vettoriale, cioè il vettore nullo $\mathbf{0} \in \mathbb{K}^{n+1}$ non appartiene a $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Nel seguito considereremo solamente gli spazi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che verranno indicati semplicemente con \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^3 anche se la maggior parte dei risultati potranno essere estesi a casi più generali.

1.2 Punti e rette nel piano proiettivo

Si consideri l'equazione di una retta nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 .

$$ax + by + c = 0$$

Passando alle coordinate omogenee come descritto nel precedente paragrafo si può esprimere l'equazione della retta come

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x} = 0$$

dove $\mathbf{l} = [a, b, c]^T$ e $\mathbf{x} = [x, y, 1]^T$. Si noti che, date due costanti reali λ, γ si ha che

$$(\lambda \mathbf{l})^T (\gamma \mathbf{x}) = 0.$$

In altre parole qualunque multiplo di \mathbf{x} individua lo stesso punto di $[x, y]^T$ di \mathbb{R}^2 come qualunque multiplo di \mathbf{l} rappresenta la stessa retta di \mathbb{R}^2 . Dunque sia \mathbf{l} che \mathbf{x} sono entrambi elementi dello spazio proiettivo \mathbb{P}^2 dove l'equazione di una retta si esprime semplicemente per mezzo del prodotto scalare. Si può osservare subito che nello spazio proiettivo vi è una dualità tra punti e rette del piano. Inoltre si noti che per via dell'omogeneità, nonostante formalmente vi sia una coordinata in più, i gradi di libertà di punti e rette sono sempre pari a due. Infatti, dati $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ e $\mathbf{l} = [a, b, c]$, qualunque multiplo si consideri il punto e la retta sono individuati dai rapporti $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ e $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}\right)$.

Enunciamo ora alcune proprietà elementari della geometria del piano. Prima però si ricorda che il prodotto vettoriale tra due elementi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ può essere espresso in forma matriciale come

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\times} \mathbf{y}$$

dove $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ e

$$[\mathbf{x}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposizione 1.1 *Due rette $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ nel piano si intersecano sempre in uno e un solo punto*

$$\mathbf{x} = [\mathbf{l}_1]_{\times} \mathbf{l}_2.$$

Se \mathbf{l}_1 e \mathbf{l}_2 sono parallele, allora il punto di intersezione è un punto

$$\mathbf{x} = [\mathbf{d}^T, 0]^T$$

all'infinito dove \mathbf{d} è la direzione delle due rette.

Dimostrazione. Sia \mathbf{x} il punto di intersezione tra \mathbf{l}_1 ed \mathbf{l}_2 . Tale punto deve appartenere a entrambe le rette.

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1^T \mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{l}_2^T \mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

In altre parole \mathbf{x} è un vettore in \mathbb{R}^3 ortogonale sia a \mathbf{l}_1 che a \mathbf{l}_2 , ed è dunque un multiplo del prodotto vettoriale $[\mathbf{l}_1]_{\times} \mathbf{l}_2$ e possiamo porre $\mathbf{x} \cong [\mathbf{l}_1]_{\times} \mathbf{l}_2$. Se inoltre le rette sono parallele, allora hanno la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= [a, b, c]^T \\ \mathbf{l}_2 &= [\gamma a, \gamma b, d]^T \end{aligned}$$

con $[a, b]^T \in \mathbb{R}^2$ vettore normale ad entrambe le rette. Dunque

$$\mathbf{x} \cong [\mathbf{l}_1]_{\times} \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma a \\ \gamma b \\ d \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

La proposizione (1.1) dice due cose molto importanti: tutte le rette parallele fra loro si intersecano nel medesimo punto all'infinito e si possono interpretare i punti all'infinito come delle direzioni.

Definizione 1.2 (Retta all'infinito) *Tutti i punti all'infinito giacciono sulla retta*

$$l_\infty \cong [0, 0, 1]^T$$

detta appunto retta all'infinito. Una qualunque retta $l = [a, b, c]^T$ interseca l_∞ in un punto $[d^T, 0]^T$ dove d è la direzione della retta.

Dimostrazione. E' banale verificare che per ogni punto all'infinito vale $l_\infty^T \mathbf{x} = 0$. Inoltre

$$[l_\infty]_\times \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Proposizione 1.2 *Per due punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{P}^2$ passa sempre una ed una sola retta $l \cong [\mathbf{x}_1]_\times \mathbf{x}_2$.*

Dimostrazione. Entrambi i punti giacciono sulla retta l , cioè

$$l^T \mathbf{x}_1 = 0$$

$$l^T \mathbf{x}_2 = 0$$

Dunque l è un vettore di \mathbb{R}^3 ortogonale a \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , per cui $l \cong [\mathbf{x}_1]_\times \mathbf{x}_2$.

□

1.3 Modello del piano proiettivo

Ritornando alla definizione di \mathbb{P}^2 come insieme delle rette di \mathbb{R}^3 passanti per l'origine si può costruire il seguente modello di piano proiettivo. Si considerino tutti i punti di \mathbb{P}^2 riscaldati in modo tale che la terza coordinata sia 1. Il piano proiettivo è in tal caso il piano di \mathbb{R}^3 avente equazione $x_3 = 1$, mentre un punto $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{x}}^T, 1] \in \mathbb{P}^3$ rappresenta in \mathbb{R}^3 un raggio per l'origine che interseca il piano proiettivo in \mathbf{x} . Analogamente una retta $l \in \mathbb{P}^2$ rappresenta in \mathbb{R}^3 un piano passante per l'origine e per la retta l . I punti all'infinito, cioè tutti i punti di \mathbb{R}^3 aventi terza coordinata nulla saranno i punti sul piano $x_3 = 0$. Facendo un passo in avanti allo spazio proiettivo \mathbb{P}^3 , tale piano è parallelo al piano $x_3 = 1$ e lo intersecherà in una retta all'infinito che è proprio la retta all'infinito di \mathbb{P}^2 (fig.1.2).

Dunque il fatto che in \mathbb{P}^2 due rette hanno sempre un punto di intersezione equivale al fatto che in \mathbb{R}^3 due piani passanti per l'origine si intersecano sempre in una retta. Se le due rette sono parallele, l'intersezione tra i due piani giace sul piano di equazione $x_3 = 0$ e si ritrova che l'intersezione è un punto all'infinito. Analogamente il fatto che in \mathbb{P}^2 per due punti distinti passi una ed una sola retta equivale al fatto che in \mathbb{R}^3 due rette distinte per l'origine individuano uno ed un solo piano.

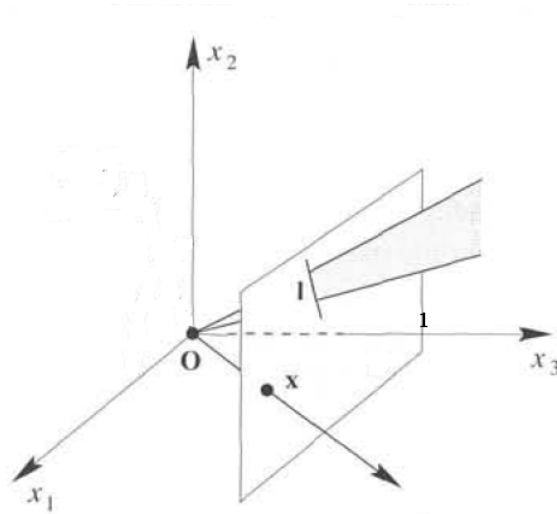


Figura 1.2: Modello del piano proiettivo

1.4 Lo spazio proiettivo \mathbb{P}^3

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per il piano proiettivo, si ha che in \mathbb{P}^3 ogni piano può essere espresso tramite un vettore omogeneo π . L'equazione di un piano è della forma

$$\pi^T \mathbf{X} = 0$$

dove π e \mathbf{X} sono elementi di \mathbb{P}^3 . In particolare, ponendo $\pi = [\mathbf{v}^T, c]^T$ e $\mathbf{X} = [\tilde{\mathbf{X}}^T, 1]$, si ritrova l'equazione 'classica'

$$\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{X}} + c = 0$$

e si può osservare subito che $\frac{c}{\|\mathbf{v}\|}$ è la distanza con segno tra l'origine ed il piano. Anche in questo caso le proprietà principali dei piani nello spazio sono preservate:

1. tre punti non allineati individuano univocamente un piano;
2. tre piani distinti si intersecano in un solo punto;
3. una retta ed un punto non sulla retta individuano univocamente un piano;
4. due rette parallele individuano univocamente un piano;
5. due piani distinti si intersecano in una retta e nel caso siano paralleli l'intersezione è la retta all'infinito dei due piani.

Basta considerare infatti che in \mathbb{P}^3 un piano, come anche un punto, ha 3 gradi di libertà e che punti e piani hanno un ruolo duale. Quindi si può calcolare il piano π passante per tre punti $\mathbf{X}_i \in \mathbb{P}^3$ risolvendo il sistema lineare

$$\pi^T \mathbf{X}_i = 0, i = 1, 2, 3$$

che è non singolare dal momento che i punti non sono collineari. Viceversa, si può calcolare il punto di intersezione \mathbf{X} tra tre piani π_i risolvendo

$$\pi_i^T \mathbf{X} = 0, i = 1, 2, 3$$

che è un sistema lineare non singolare se i piani sono distinti. Il terzo punto è intuitivo pensando da due rette parallele si possono estrarre tre punti non collineari, mentre per quel che riguarda il terzo ed il quarto punto la questione si complica per il fatto che non vi è una forma semplice per esprimere una retta in \mathbb{P}^3 . Ad ogni modo i risultati sono estendibili direttamente dalla geometria euclidea a parte per il caso di piani paralleli. In tal caso si possono considerare due rette parallele, ognuna su uno dei due piani. Tali rette individuano a loro volta un piano e si intersecano in un punto all'infinito che sarà anche un punto all'infinito di \mathbb{P}^3 . Prendendo altre due rette e procedendo allo stesso modo si avrà come intersezione un altro punto all'infinito che con il primo individua la retta all'infinito intersezione dei due piani.

Analogamente al caso di \mathbb{P}^2 tutti i punti all'infinito giacciono su di un piano $\pi_\infty = [0, 0, 0, 1]^T$, detto *piano all'infinito*, e rappresentano delle direzioni nello spazio. Ogni fascio di rette parallele si interseca in un punto $[\mathbf{d}^T, 0]^T$ sul piano all'infinito, dove \mathbf{d} è la direzione del fascio.

1.5 Trasformazioni proiettive

Introduciamo ora il concetto di trasformazione proiettiva (detta anche omografia).

Definizione 1.3 (Trasformazione proiettiva) *Una trasformazione proiettiva (o omografia) in \mathbb{P}^n è una mappa invertibile*

$$h : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$$

tale che se tre punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sono collineari, anche le immagini $h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2), h(\mathbf{x}_3)$ sono collineari.

Si enuncia senza dimostrazione il seguente teorema.

Teorema 1.1 *La mappa invertibile $h : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ è un'omografia se e solo se esiste una matrice $H \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ non singolare tale che $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$ si ha $h(\mathbf{x}) \cong H\mathbf{x}$.*

Nel caso $n = 2$ la dimostrazione della necessità è semplice. Sia $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ non singolare e definiamo $h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x}$. Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ tre punti collineari sulla retta \mathbf{l} . Allora, per ogni $i = 1, 2, 3$

$$0 = \mathbf{l}^T \mathbf{x}_i = (\mathbf{l}^T H^{-1})(H\mathbf{x}_i) = (H^{-T}\mathbf{l})^T h(\mathbf{x}_i)$$

cioè le immagini $h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2), h(\mathbf{x}_3)$ sono collineari sulla retta $H^{-T}\mathbf{l}$.

Nel caso $n > 2$ la dimostrazione è più complessa perchè non si può scrivere l'equazione di una retta con il prodotto scalare. Ad ogni modo è intuitivo dal momento che H individua una trasformazione lineare e quindi preserva la linearità.

□

Si noti che H è una matrice omogenea, infatti qualunque suo multiplo rappresenta la stessa omografia:

$$h(\mathbf{x}) \cong H\mathbf{x} \cong (\lambda H)\mathbf{x}.$$

In generale un 'omografia in \mathbb{P}^2 ha 8 gradi di libertà, mentre in \mathbb{P}^3 ne ha 15. Inoltre dalla dimostrazione si ricava subito che tramite H le rette nel piano si trasformano secondo

$$h(\mathbf{l}) = H^{-T}\mathbf{l}$$

dove con H^{-T} si indica l'inversa trasposta della matrice H . Analogamente i piani in \mathbb{P}^3 si trasformano secondo

$$h(\pi) = H^{-T}\pi$$

Come si vedrà nel seguito l'insieme delle matrici quadrate invertibili di dimensione n è un gruppo che viene indicato con $GL(n, \mathbb{R})$ detto *gruppo lineare generale*. L'insieme delle trasformazioni proiettive è invece l'insieme quoziente di $GL(n, \mathbb{R})$ rispetto alla relazione \cong ed è indicato con $PL(n, \mathbb{R})$ e prende il nome di *gruppo proiettivo lineare*. E' possibile classificare le omografie specializzando di volta in volta la forma della trasformazione per ottenere sottogruppi uno incluso nell'altro. Dalle più specializzate alle più generali si hanno isometrie, similarità, affinità e proiettività. Le caratteristiche, i gradi di libertà e le quantità invarianti di ognuno di questi gruppi sono riassunte nelle figure (1.3) e (1.4).

Isometrie

Le isometrie sono omografie che hanno forma

$$H_i = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

dove $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice ortogonale, cioè $RR^T = R^T R = I$, e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. L'ortogonalità di R implica che il determinante ha valore assoluto uguale a 1. Se tale determinante è positivo si ha il caso particolare delle rototraslazioni. Si indica tali omografie con il termine 'isometria' perchè conservano le distanze dei punti. In generale le isometrie hanno 3 gradi di libertà per $n = 2$ (un angolo di rotazione e due componenti di traslazione) e 6 gradi di libertà per $n = 3$ (tre angoli di rotazione e tre componenti di traslazione). Si ritornerà a parlare di isometrie più dettagliatamente nel paragrafo (4.7).

Similarità

Le similarità sono omografie esprimibili nella forma

$$H_s = \begin{bmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

e si differenziano dalle isometrie per il termine s che effettua un riscaldamento isotropico. Le similarità dunque 'conservano' la forma degli oggetti ed i rapporti tra le distanze tra punti ed in generale hanno un grado di libertà in più rispetto alle isometrie (4 gradi di libertà per $n = 2$ e 7 gradi di libertà per $n = 3$).

Affinità

Le affinità, o trasformazioni affini, sono la composizione di una trasformazione lineare non singolare e di una traslazione. Sono cioè rappresentate da matrici della forma

$$H_a = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. La proprietà più importante delle trasformazioni affini è la seguente.

Proposizione 1.3 *La retta all'infinito in \mathbb{P}^2 ed il piano all'infinito sono invarianti rispetto a trasformazioni affini. Viceversa se un'omografia H porta la retta (o il piano) all'infinito in sé stesso, allora è un'affinità.*

Dimostrazione. E' banale da verificare dal momento che \mathbf{l}_∞ e π_∞ sono della forma $[\mathbf{0}^T, 1]^T$, si trasformano secondo H_a^{-T} e dal momento che l'inversa di un'affinità è ancora un'affinità. Dunque

$$H_a^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ (-A^{-1}\mathbf{t})^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$




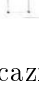
Group	Matrix	Distortion	Invariant properties
Projective 8 dof	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$		Concurrency, collinearity, order of contact : intersection (1 pt contact); tangency (2 pt contact); inflections (3 pt contact with line); tangent discontinuities and cusps. cross ratio (ratio of ratio of lengths).
Affine 6 dof	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Parallelism, ratio of areas, ratio of lengths on collinear or parallel lines (e.g. midpoints), linear combinations of vectors (e.g. centroids). The line at infinity, \mathbf{l}_∞ .
Similarity 4 dof	$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Ratio of lengths, angle. The circular points, \mathbf{I}, \mathbf{J} (see section 2.7.3).
Euclidean 3 dof	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Length, area

Figura 1.3: Classificazione delle omografie in \mathbb{P}^2 .

Viceversa sia

$$H = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix}$$

una trasformazione proiettiva che porta la retta (o il piano) all'infinito in sè stesso. Allora trasponendo $\mathbf{l}_\infty \cong H^{-T}\mathbf{l}_\infty$ (o $\pi_\infty \cong H^{-T}\pi_\infty$) si traduce in

$$[\mathbf{0}^T \mathbf{1}] \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{0}^T \mathbf{1}],$$

cioè $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

□

Dunque un'affinità porta ogni punto all'infinito in un altro punto all'infinito, anche se non necessariamente lo stesso. In generale una trasformazione affine ha 6 gradi di libertà nel caso $n = 2$ e 12 gradi di libertà nel caso $n = 3$.

Proiettività

Le proiettività, ovvero le omografie, sono il caso più generale in cui H è semplicemente una matrice invertibile ed ha dunque forma

$$H = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Decomposizione di un'omografia

Si dimostra che è sempre possibile scomporre una trasformazione proiettiva in una sequenza di trasformazioni più specializzate $H = H_s H_a H_p$ della forma

$$H = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sR & \mathbf{t}' \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T & v \end{bmatrix}$$





Group	Matrix	Distortion	Invariant properties
Projective 15 dof	$\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & v \end{bmatrix}$		Intersection and tangency of surfaces in contact. Sign of Gaussian curvature.
Affine 12 dof	$\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$		Parallelism of planes, volume ratios, centroids. The plane at infinity, π_∞ , (see section 3.5).
Similarity 7 dof	$\begin{bmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$		The absolute conic, Ω_∞ , (see section 3.6).
Euclidean 6 dof	$\begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$		Volume.

Figura 1.4: Classificazione delle omografie in \mathbb{P}^3 .

dove $A = sRK + \mathbf{t}\mathbf{v}^T$ è non singolare, K è triangolare superiore invertibile e $\mathbf{t} = \mathbf{v}\mathbf{t}'$. Questo fatto è utile quando si deve cercare di ricostruire una configurazione geometria a partire da una configurazione proiettivamente equivalente. In altre parole, conoscendo di ogni punto una trasformata tramite un'omografia H incognita, si vuole ritrovare il punto originale. E' possibile risolvere questo problema procedendo per gradi ed individuando per mezzo di opportune procedure ognuna delle tre trasformazioni in cui è decomposta H . Ad esempio è possibile ricostruire la geometria a meno di un'affinità se conosciamo la retta od il piano all'infinito. Tale procedimento è detto *stratificazione*.

1.6 La retta proiettiva \mathbb{P}^1 ed il cross-ratio

Si consideri adesso lo spazio proiettivo \mathbb{P}^1 , cioè la retta proiettiva dove i punti in coordinate omogenee sono della forma $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$. Ripercorrendo tutti il discorso fatto per il caso \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^3 si può definire il *punto all'infinito* $\mathbf{x}_\infty = [0, 1]^T$ ed una gerarchia di trasformazioni sulla retta. Dati due punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{P}^1$ indichiamo con $|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|$ la quantità

$$|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2| = \det [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2].$$

Il determinante di tale matrice è proporzionale alla distanza tra i due punti sulla retta. Infatti riscalandoli in modo tale che $\mathbf{x}_1 = [x_1, 1]^T$ e $\mathbf{x}_2 = [x_2, 1]^T$ allora $|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2| = d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Si considerino ora quattro punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ e si

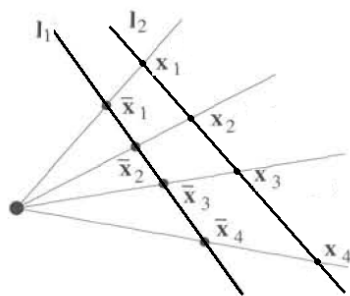


Figura 1.5: Il cross-ratio è invariante rispetto a trasformazioni proiettive della retta

definisca la seguente quantità, detta *cross-ratio*:

$$cross(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2| |\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4|}{|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3| |\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4|}.$$

Il cross-ratio non è altro che il rapporto del rapporto fra le distanze dei quattro punti e si dimostra che è invariante rispetto a omografie della retta. Si considerino ad esempio quattro raggi su un piano e le rispettive intersezioni su due rette l_1 e l_2 (fig.1.5).

La mappa $\mathbf{x}_i \mapsto \bar{\mathbf{x}}_i$ è un'omografia della retta e si ha che

$$cross(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = cross(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\mathbf{x}}_4)$$

Capitolo 2

Modello di Fotocamera Proiettiva

Dal punto di vista matematico una fotocamera è un oggetto che ‘trasferisce’ i punti dal mondo tridimensionale sul piano della fotografia ed è modellizzabile per mezzo di una mappa $P : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ che ad ogni punto \mathbf{X} nello spazio proiettivo \mathbb{P}^3 associa una proiezione $\mathbf{x} \cong P\mathbf{X}$ su di un certo piano (cioè su \mathbb{P}^2) detto *piano focale*. La mappa P è dunque una matrice di dimensione 3×4 detta *matrice di proiezione* e per l’omogeneità è definita a meno di costanti moltiplicative. I modelli di fotocamera si dividono in due grandi classi: le fotocamere finite e le fotocamere infinite. Le prime effettuano una proiezione centrale rispetto ad un punto detto proprio *centro* della fotocamera, ovvero l’immagine che si forma è ottenuta intersecando i raggi provenienti dall’oggetto e passanti per il centro con il piano focale (fig.2.1). La distanza tra il centro ed il piano focale è detta *distanza focale* mentre la retta ortogonale al piano focale e passante per il centro è detto *asse principale* della fotocamera. Una fotocamera infinita è invece un approssimazione di una fotocamera finita la cui distanza focale è molto grande. In tal caso i raggi di proiezione tendono ad essere paralleli all’asse principale e la proiezione da centrale diventa ortogonale rispetto al piano focale. Nelle fotocamere infinite il centro è dunque un punto all’infinito di \mathbb{P}^3 . Nel seguito si studierà nel dettaglio solo il modello di fotocamera finita.

2.1 Costruzione del modello

Si consideri per il mondo un sistema di riferimento in cui l’origine degli assi coincida con il centro della fotocamera e in cui l’asse z coincida con l’asse principale e si consideri per l’immagine un sistema di riferimento avente origine nell’intersezione \mathbf{p} tra il piano focale e l’asse principale (detto *punto principale*) e assi paralleli agli assi x e y del mondo (fig.2.2). Il piano parallelo al piano focale e passante per il centro è detto *piano principale*.

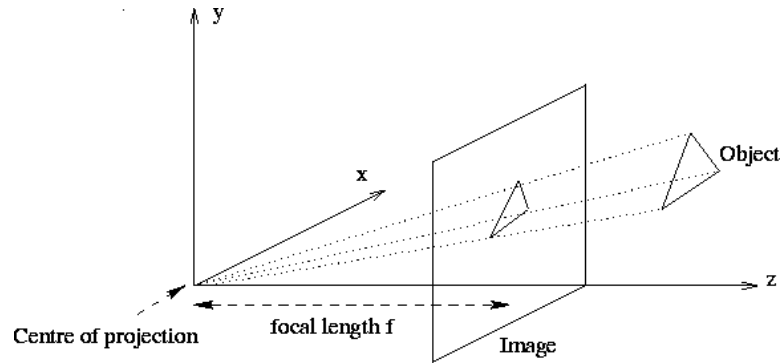


Figura 2.1: Modello di fotocamera finita

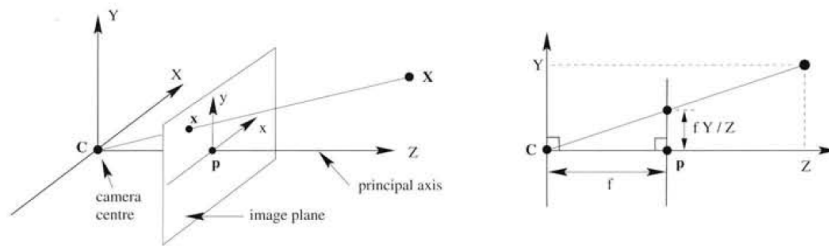


Figura 2.2: Modello in cui il sistema di riferimento è associato alla fotocamera

Il piano parallelo al piano focale e passante per il centro è detto *piano principale*. Nel sistema di riferimento scelto la matrice di proiezione è della forma

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Infatti se il punto \mathbf{X} ha coordinate omogenee $\mathbf{X} = [X, Y, Z, 1]^T$ e la sua proiezione ha coordinate omogenee $\mathbf{x} = [x, y, 1]^T$, dal disegno in sezione è chiaro che $\frac{x}{f} = \frac{X}{Z}$ e $\frac{y}{f} = \frac{Y}{Z}$ e dunque si avrà

$$\mathbf{x} \cong \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fX}{Z} \\ \frac{fY}{Z} \\ 1 \end{bmatrix} \cong P\mathbf{X}$$

2.2 Matrice di calibrazione

Se l'origine del sistema di riferimento dell'immagine non coincide con il punto principale, quest'ultimo avrà coordinate (p_x, p_y) . Dunque la proiezione \mathbf{x} di un punto \mathbf{X} avrà coordinate

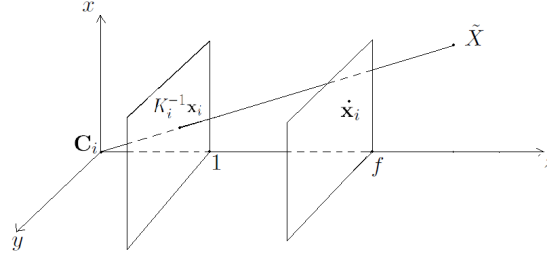


Figura 2.3: Effetto della matrice di calibrazione

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{fX}{Z} + p_x \\ \frac{fY}{Z} + p_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di proiezione avrà dunque la forma

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = K[I|\mathbf{0}]$$

dove

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è detta *matrice di calibrazione*. Per tener conto della possibilità che i pixel non siano perfettamente quadrati la forma più generale della matrice di calibrazione è

$$K = \begin{bmatrix} m_x f & s & m_x p_x \\ 0 & m_y f & m_y p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

dove m_x e m_y sono fattori non nulli di scala per gli assi x e y mentre s è non nullo per pixel che hanno forma di rettangolo (cosa che non avviene praticamente mai). Si noti che la matrice $[I|\mathbf{0}]$ proietta un punto \mathbf{X} su un piano focale avente distanza focale pari a 1. L'effetto di K è dunque quello di riportare l'immagine da tale piano al piano avente distanza focale f e di aggiustare l'immagine secondo le distorsioni dovute alla fotocamera. Se \mathbf{x} è la proiezione di \mathbf{X} tramite $P = K[I|\mathbf{0}]$, allora $K^{-1}\mathbf{x}$ è la proiezione di \mathbf{X} sul piano di coordinate $z = 1$ (fig.2.3).

2.3 Modello generale

Si consideri ora un sistema di riferimento generico per il mondo. Sia $\mathbf{X}^T = [\tilde{\mathbf{X}}^T, 1]$ un punto qualunque e $\mathbf{C}^T = [\tilde{\mathbf{C}}^T, 1]$ il centro della fotocamera. La trasformazione che porta \mathbf{X} da questo sistema di riferimento a quello precedente associato alla fotocamera è esprimibile come

$$\mathbf{X}_{cam} = \begin{bmatrix} R(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\tilde{\mathbf{X}} & -R\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

dove R è la matrice di rotazione che porta l'asse z nell'asse principale della fotocamera. Si avrà dunque

$$\mathbf{x} = K[I|0]\mathbf{X}_{cam} = K[R|\tilde{\mathbf{C}}]\mathbf{X}$$

ovvero

$$P = K[R|\mathbf{t}] = [M|\mathbf{p}_4] \quad (2.2)$$

con $\mathbf{t} = -R\tilde{\mathbf{C}}$, $M = KR$, $\mathbf{p}_4 = -KR\tilde{\mathbf{C}}$. L'equazione (2.2) rappresenta la forma più generale della matrice di proiezione di una fotocamera. Si noti che la matrice $M = KR$ è invertibile, dunque P è una matrice di rango 3 avente nel caso più generale 11 gradi di libertà (6 per la matrice di calibrazione, 3 per la rotazione, 3 per il centro meno un grado di libertà per l'omogeneità).

2.4 Il centro della fotocamera

In questo paragrafo mostreremo che il centro \mathbf{C} di una fotocamera finita avente matrice di proiezione $P = [M, \mathbf{p}_4]$ è l'unico punto per cui la proiezione non è definita e che la fotocamera è finita, cioè ha centro finito, se e solo se la matrice M è non singolare.

Proposizione 2.1 *Sia P la matrice di proiezione di una fotocamera finita avente centro \mathbf{C} . Il nucleo di P è generato dal vettore \mathbf{C} . Cioè*

$$\ker(P) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3 | P\mathbf{X} = 0\} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3 | \mathbf{X} = \alpha\mathbf{C}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

In particolare si avrà $P\mathbf{C} = 0$.

Dimostrazione. Siccome P è finita, $P = [M|\mathbf{p}_4]$ con M non singolare. Dunque P ha rango 3 ed il suo nucleo ha dimensione 1. Supponiamo che $\ker(P)$ sia generato da un vettore $\mathbf{V} \in \mathbb{P}^3$. Allora si avrà $P\mathbf{V} = 0$. Mostriamo che \mathbf{V} è il centro della fotocamera, cioè che tutti i punti su una generica retta passante per \mathbf{V} hanno la stessa proiezione. Sia $\mathbf{Y} \in \mathbb{P}^3$, la retta congiungente \mathbf{V} e \mathbf{Y} è

$$\mathbf{X}(\lambda) = \lambda\mathbf{Y} + (1 - \lambda)\mathbf{V}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Proiettando tramite P si ha

$$P\mathbf{X}(\lambda) = \lambda P\mathbf{Y} + (1 - \lambda)P\mathbf{V} = \lambda P\mathbf{Y} \cong P\mathbf{Y}$$

per ogni λ non nullo.

□

Si noti che come conseguenza del teorema (2.1) la proiezione del centro della fotocamera non è definito in quanto $P\mathbf{C} = \mathbf{0}$ non appartiene allo spazio proiettivo \mathbb{P}^2 .

Proposizione 2.2 *Una fotocamera $P = [M|\mathbf{p}_4]$ è finita se e solo se la matrice M è non singolare.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se una fotocamera è finita allora $M = KR$ è non singolare perché è prodotto di due matrici non singolari. Per assurdo sia invece M non singolare e il centro della fotocamera sia un punto all'infinito $\mathbf{C} = [\tilde{\mathbf{C}}^T, 0]^T$. Per la proposizione precedente, siccome M è non singolare il centro appartiene al nucleo di P , dunque $P\mathbf{C} = M\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$. Allo stesso tempo essendo M non singolare, $M\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ implica che $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ che è assurdo perché $\mathbf{C} = [0, 0, 0, 0]^T \notin \mathbb{P}^3$. Quindi M deve essere necessariamente singolare.

□

2.5 Proiezione di punti all'infinito

Sia $P = [M|\mathbf{p}_4]$ la matrice di proiezione di una fotocamera finita. Per capire come vengono proiettati i punti all'infinito consideriamo due rette parallele in \mathbb{P}^3 . Queste si intersecheranno in un punto $\mathbf{X} = [\mathbf{d}^T, 0]$ all'infinito, in cui \mathbf{d} è la direzione delle rette. In generale le rispettive proiezioni si intersecano nell'immagine in un punto \mathbf{p} finito che è detto *punto di fuga* delle rette. Infatti

$$\mathbf{p} = P\mathbf{X} = M\mathbf{d}$$

Ogni fascio di rette parallele si interseca nello stesso punto all'infinito, quindi nell'immagine tutte le rette del fascio avranno lo stesso punto di fuga. In pratica il raggio proveniente dal punto all'infinito $\mathbf{X} = [\mathbf{d}^T, 0]$ è una retta passante per il centro della fotocamera e avente direzione \mathbf{d} e il punto di fuga \mathbf{p} è l'intersezione tra tale raggio ed il piano focale. Le uniche rette parallele le cui proiezioni non si intersecano in un punto finito dell'immagine sono le rette parallele al piano focale. Analogamente due piani paralleli si intersecano in una retta all'infinito e nell'immagine la proiezione di tale retta è detta *retta di fuga*. Quest'ultima risulta essere l'intersezione tra un piano parallelo ai due piani paralleli e passante per il centro della fotocamera ed il piano focale. I piani paralleli al piano focale invece avranno come retta di fuga la retta all'infinito dell'immagine.

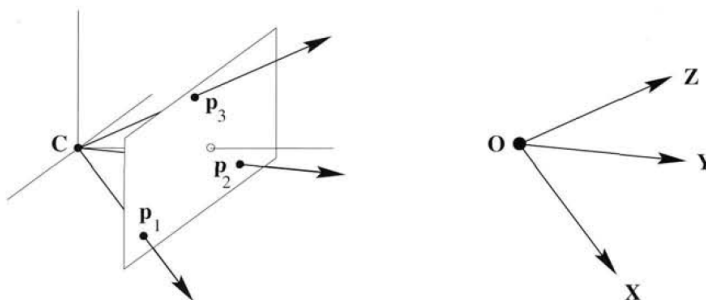


Figura 2.4: Le colonne di P sono i punti di fuga relativi alle direzioni degli assi cartesiani

2.6 Le righe e le colonne di P

Si considerino adesso le righe della matrice di proiezione $P = KR[0 | -\tilde{C}]$ di una fotocamera finita.

$$P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4]$$

Abbiamo già visto che \mathbf{p}_4 è legata al centro della fotocamera dalla relazione $\mathbf{p}_4 = -KR\tilde{C}$. Le colonne $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ e \mathbf{p}_3 sono invece i punti di fuga relativi alle direzioni degli assi cartesiani del sistema di riferimento scelto. Si consideri infatti la base canonica di \mathbb{R}^3 . Le direzioni degli assi cartesiani sono rappresentate dai punti all'infinito

$$\mathbf{D}_1 = [1, 0, 0, 0]$$

$$\mathbf{D}_2 = [0, 1, 0, 0]$$

$$\mathbf{D}_3 = [0, 0, 1, 0]$$

e le rispettive proiezioni sono proprio

$$P\mathbf{D}_1 = \mathbf{p}_1$$

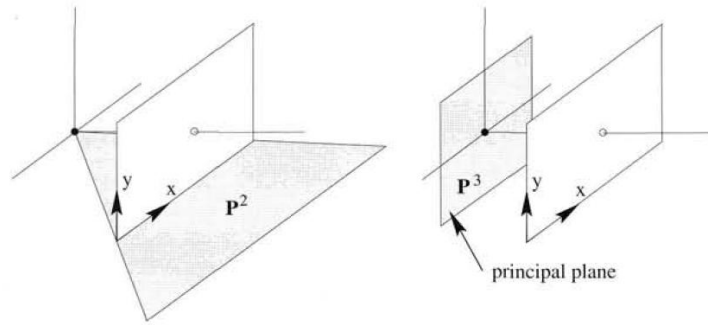
$$P\mathbf{D}_2 = \mathbf{p}_2$$

$$P\mathbf{D}_3 = \mathbf{p}_3$$

Si considerino ora le righe della matrice P .

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{1T} \\ \mathbf{p}^{2T} \\ \mathbf{p}^{3T} \end{bmatrix}$$

I vettori $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3$ possono essere considerati come rappresentanti di particolari piani in \mathbb{P}^3 . Innanzi tutto si noti che $P\mathbf{C} = 0$ implica che il centro

Figura 2.5: I piani corrispondenti alle righe di P

della fotocamera giace su tutti e tre i piani. Sia ora \mathbf{X} un punto sul piano \mathbf{p}^1 , cioè $\mathbf{p}^2\mathbf{X} = 0$. Allora

$$P\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{1T}\mathbf{X} \\ \mathbf{p}^{2T}\mathbf{X} \\ \mathbf{p}^{3T}\mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}^{2T}\mathbf{X} \\ \mathbf{p}^{3T}\mathbf{X} \end{bmatrix}$$

Ciò significa che tutti i punti sul piano \mathbf{p}^1 sono proiettati sull'asse y dell'immagine. Analogamente tutti i punti sul piano \mathbf{p}^2 sono proiettati sull'asse x dell'immagine, quindi le prime due righe di P rappresentano i piani passanti per gli assi del sistema di riferimento dell'immagine e per il centro della fotocamera (fig.2.5). Per quel che riguarda il piano \mathbf{p}^3 si osservi che ogni punto \mathbf{X} su tale piano viene proiettato in un punto all'infinito dell'immagine. Infatti

$$P\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{1T}\mathbf{X} \\ \mathbf{p}^{2T}\mathbf{X} \\ \mathbf{p}^{3T}\mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{1T}\mathbf{X} \\ \mathbf{p}^{2T}\mathbf{X} \\ 0 \end{bmatrix},$$

ma i punti aventi proiezioni all'infinito sono tutti e soli quelli appartenenti al piano principale della fotocamera (fatta eccezione per il centro) perchè i raggi sono paralleli al piano focale. Quindi \mathbf{p}^3 rappresenta il piano principale della fotocamera (fig.2.5).

Capitolo 3

Geometria epipolare

Supponiamo ora di avere a disposizione due fotocamere P_i e P_j che scattano una foto dello stesso soggetto da due angolazioni diverse. Uno stesso punto \mathbf{X} sarà proiettato rispettivamente in due punti $\mathbf{x}_i = P_i\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}_j = P_j\mathbf{X}$. Una prima osservazione che si può fare è che \mathbf{X} forma con i centri \mathbf{C}_i e \mathbf{C}_j un piano detto *piano epipolare* del punto \mathbf{X} . Su tale piano giace anche la retta che congiunge i due centri che è detta *baseline*. Inoltre i due punti \mathbf{e}_{ij} e \mathbf{e}_{ji} di intersezione tra tale retta e i due piani focali prendono il nome di *epipoli*. Si ha che $\mathbf{e}_{ji} = P_j\mathbf{C}_i$ è la proiezione del centro della fotocamera i sull'immagine j e viceversa $\mathbf{e}_{ij} = P_i\mathbf{C}_j$ è la proiezione del centro della fotocamera j sull'immagine i . Le rette congiungenti gli epipoli e le proiezioni del punto \mathbf{X} sono dette *rette epipolari* del punto \mathbf{X} (fig.3.1).

E' chiaro che al variare di \mathbf{X} tutti i possibili piani epipolari formano un fascio passante per la baseline e che nelle due immagini tutte le rette epipolari formano un fascio passante per i rispettivi epipoli (fig.3.2).

3.1 La matrice fondamentale

Sia \mathbf{x}_i un punto sul piano focale della prima fotocamera. Tutti i punti sul raggio passante per \mathbf{x}_i e \mathbf{C}_i hanno la stessa retta epipolare sulla seconda immagine che indichiamo con \mathbf{l}_j . Viceversa, dato un punto \mathbf{x}_j sul piano focale della seconda fotocamera, tutti i punti sul raggio passante per \mathbf{x}_j e \mathbf{C}_j hanno la stessa retta epipolare \mathbf{l}_i sulla prima. L'applicazione $F : \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{l}_j$ è rappresentata da una matrice di dimensione 3×3 che prende il nome di *matrice fondamentale*. Per derivare una forma di F si consideri l'omografia indotta da un generico piano π , cioè l'omografia $A_{ij}(\pi)$ che si ottiene proiettando sulla seconda immagine il punto \mathbf{X} di intersezione tra π ed il raggio passante per \mathbf{x}_i (fig.3.3).

Tramite $A_{ij}(\pi)$ il punto \mathbf{x}_i viene portato in un punto $\mathbf{x}_j = A_{ij}(\pi)$ e la retta epipolare associata a \mathbf{x}_i è la retta passante per l'epipolo \mathbf{e}_{ji} e \mathbf{x}_j . Si avrà dunque, utilizzando la forma matriciale per il prodotto vettoriale, che

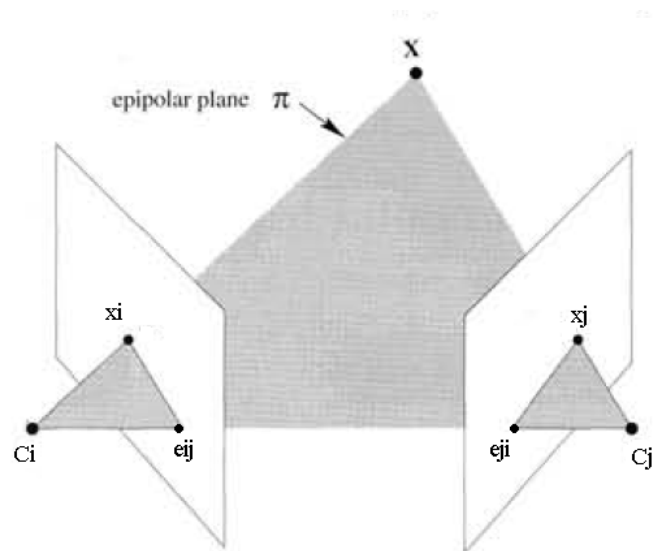


Figura 3.1: Geometria epipolare

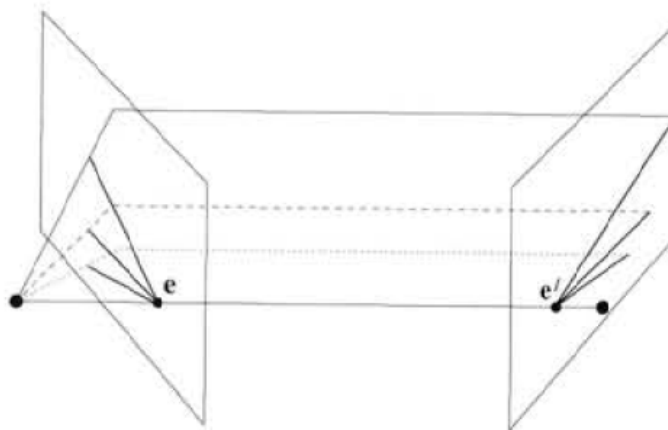
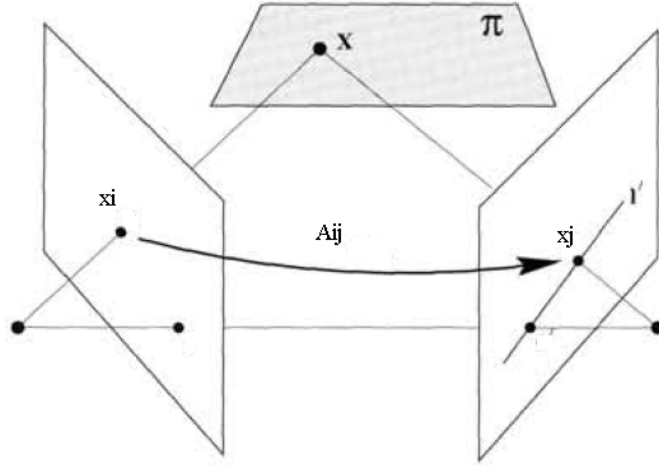


Figura 3.2: Fasci di piani e rette epipolari

Figura 3.3: Omografia indotta da un piano π

$$\mathbf{l}_j = [\mathbf{e}_{ji}]_{\times} \mathbf{x}_j = [\mathbf{e}_{ji}]_{\times} A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i.$$

La matrice fondamentale è dunque della forma

$$F = [\mathbf{e}_{ji}]_{\times} A_{ij}(\pi)$$

con $A_{ij}(\pi)$ omografia indotta da un generico piano π . Si noti che F è indipendente dalla scelta del piano in quanto \mathbf{x}_j è sempre la proiezione di un punto sul raggio passante per \mathbf{x}_i e dunque $\mathbf{x}_j = A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i$ è sempre un punto sulla retta epipolare di \mathbf{x}_i .

Si considerino ora due punti \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j sulle rispettive immagini. Si dice che i due punti sono corrispondenti se sono le proiezioni di uno stesso punto \mathbf{X} .

Proposizione 3.1 (Condizione di corrispondenza) *Per ogni coppia di punti corrispondenti $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ si ha $\mathbf{x}_j^T F \mathbf{x}_i = 0$.*

Dimostrazione. Siccome i due punti sono corrispondenti \mathbf{x}_j giace sulla retta epipolare di \mathbf{x}_i , dunque $\mathbf{x}_j^T \mathbf{l}_j = 0$. Ma $\mathbf{l}_j = F \mathbf{x}_i$ da cui si ricava la tesi $\mathbf{x}_j^T F \mathbf{x}_i = 0$.

□

Si noti che il viceversa non è vero, cioè che due punti qualsiasi che soddisfano la condizione di corrispondenza sono uno nella retta epipolare dell'altro, ma non necessariamente sono proiezione di uno stesso punto \mathbf{X} . Possiamo dare dunque la seguente definizione equivalente di matrice fondamentale.

Definizione 3.1 (Matrice fondamentale) *La matrice fondamentale è l'unica matrice $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ di rango 2 tale che $\mathbf{x}_j^T F \mathbf{x}_i = 0$ per ogni coppia di punti corrispondenti $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$.*

Anche in questo caso l'unicità è ovvia considerando che se non fosse unica allora, data una coppia di matrici fondamentali F e F' , si avrebbe $\mathbf{x}_j^T (F - F') \mathbf{x}_i = 0$ per ogni coppia di punti corrispondenti, cioè $F - F' = \mathbf{0}$. Enunciamo due importanti proprietà della matrice fondamentale.

Proposizione 3.2 *Sia F la matrice fondamentale di una coppia di fotocamere (P_i, P_j) .*

1. *La matrice fondamentale della coppia (P_j, P_i) è F^T . Come conseguenza dati due punti corrispondenti $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ le rispettive rette epipolari sono date da $\mathbf{l}_j = F \mathbf{x}_i$ e $\mathbf{l}_i = F^T \mathbf{x}_j$.*
2. *Gli epipoli \mathbf{e}_{ji} e \mathbf{e}_{ij} generano rispettivamente il nucleo di F^T e di F .*

Dimostrazione

1. Trasponendo la condizione di corrispondenza si ha che $\mathbf{x}_i^T F^T \mathbf{x}_j = 0$ per ogni coppia di punti corrispondenti.
2. Innanzi tutto notiamo che, siccome F ha rango 2, il nucleo di F (e dunque anche di F^T) ha dimensione 1. Ogni retta epipolare sull'immagine j passa per l'epipolo \mathbf{e}_{ji} dunque $\lambda \mathbf{e}_{ji}^T F \mathbf{x}_i = 0$ per $\forall \lambda, \forall \mathbf{x}_i \neq \mathbf{e}_{ij}$. Quindi $F^T \mathbf{e}_{ji} = 0$. Analogamente ogni retta epipolare sull'immagine i passa per l'epipolo \mathbf{e}_{ij} dunque $\lambda \mathbf{e}_{ij}^T F^T \mathbf{x}_j = 0$ per $\forall \lambda, \forall \mathbf{x}_j \neq \mathbf{e}_{ji}$ e $F \mathbf{e}_{ij} = 0$.

□

Si noti infine che la matrice fondamentale è definita a meno di una costante moltiplicativa ed ha rango 2 perchè è il prodotto di due matrici $[\mathbf{e}_{ji}]_{\times}$ e $A_{ij}(\pi)$ di cui la prima ha rango 2 per costruzione e la seconda, essendo una omografia, è invertibile. F ha dunque 7 gradi di libertà e sono necessarie almeno 4 coppie di punti corrispondenti per fornire una stima di F (ogni coppia fornisce 2 gradi di libertà).

3.2 Ambiguità proiettiva nella ricostruzione

Abbiamo visto che data una coppia di fotocamere (P_i, P_j) esiste un'unica matrice fondamentale che lega le due viste. Il viceversa non è vero, infatti vedremo che esistono infinite coppie di fotocamere aventi la stessa matrice fondamentale F .

Definizione 3.2 (Ricostruzione) *Siano sia (P_i, P_j) una coppia di fotocamere e siano \mathbf{X}^k con $k = 1, \dots, n$ dei punti in \mathbb{P}^3 aventi proiezioni $(\mathbf{x}_i^{(k)}, \mathbf{x}_j^{(k)})$. Si dice che la coppia (\hat{P}_i, \hat{P}_j) e i punti $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ con $k = 1, \dots, n$ sono una ricostruzione della geometria epipolare data se ogni k si ha*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i^{(k)} &\cong \hat{P}_i \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \\ \mathbf{x}_j^{(k)} &\cong \hat{P}_j \hat{\mathbf{X}}^{(k)}\end{aligned}$$

Si noti che, essendo la matrice fondamentale definita solamente a partire dalle coppie di punti corrispondenti, qualunque ricostruzione ha la stessa matrice fondamentale. Vedremo che partendo solamente da punti corrispondenti nelle due immagini è possibile risalire ad una ricostruzione della geometria che sarà legata alla configurazione ‘vera’ dei punti da un’omografia.

Proposizione 3.3 *Sia $H : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ un’omografia dello spazio proiettivo \mathbb{P}^3 , cioè una matrice invertibile di dimensione 4×4 e sia $(P_i, P_j, \mathbf{X}^{(k)})$ una geometria epipolare. Allora $(P_i H^{-1}, P_j H^{-1}, H \mathbf{X}^{(k)})$, è una ricostruzione di $(P_i, P_j, \mathbf{X}^{(k)})$ e di conseguenza ha la stessa matrice fondamentale.*

Dimostrazione E’ immediato dal momento che

$$\begin{aligned}P_i \mathbf{X}^{(k)} &= (P_i H^{-1})(H \mathbf{X}^{(k)}) \\ P_j \mathbf{X}^{(k)} &= (P_j H^{-1})(H \mathbf{X}^{(k)})\end{aligned}$$

□

Al variare di tutte le omografie si hanno quindi infinite coppie di fotocamere aventi la stessa matrice fondamentale. In particolare ve ne è sempre una particolare detta *forma canonica*.

Definizione 3.3 (Forma canonica) *Due coppie (P_i, P_j) di fotocamere sono in forma canonica se $P_i = [I | \mathbf{0}]$.*

E’ sempre possibile passare da una coppia generica (P_i, P_j) alla sua forma canonica considerando l’omografia

$$H = \begin{bmatrix} P_i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

che è invertibile perchè consideriamo solo fotocamere finite. Infatti $[I | \mathbf{0}]H = P_i$ ed ogni $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$

$$P_i \mathbf{X} = [I | \mathbf{0}]H \mathbf{X}$$

quindi $[I | \mathbf{0}] = P_i H^{-1}$.

Proposizione 3.4 *Sia*

$$P_i = [I|0] \quad (3.1)$$

$$P_j = [M|\mathbf{p}_4] \quad (3.2)$$

una coppia di fotocamere in forma canonica. Allora \mathbf{p}_4 è l'epipolo dell'immagine j e la matrice fondamentale è $F = [\mathbf{e}_{ji}]_{\times} M$.

Dimostrazione. Riscriviamo P_j come $P_j = KR[I|-\tilde{\mathbf{C}}_j]$ e notiamo che nel sistema di riferimento associato alla fotocamera j , in cui $P_j = K_j[I|0]$ il centro C_j ha proprio coordinate $-R\tilde{\mathbf{C}}_j$. Dunque

$$\mathbf{e}_{ji} = K_j[I|0] \begin{bmatrix} -R\tilde{\mathbf{C}}_j \\ 1 \end{bmatrix} = -K_jR\tilde{\mathbf{C}}_j = \mathbf{p}_4$$

Si può scrivere la matrice fondamentale come $F = [\mathbf{e}_{ji}]_{\times} A_{ij}^{\infty}$ dove, come vedremo più avanti, $A_{ij}^{\infty} = K_jR = M$ è in questo caso l'omografia indotta dal piano all'infinito.

□

Vediamo ora il viceversa della proposizione (3.3). Anteponiamo il seguente lemma.

Lemma 3.1 *Sia $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ di rango 2 decomponibile in due modi distinti come $F = [\mathbf{a}]_{\times} A = [\tilde{\mathbf{a}}]_{\times} \tilde{A}$. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo ed esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}} &= \lambda \mathbf{a} \\ \tilde{A} &= \frac{1}{\lambda}(A + \mathbf{a}\mathbf{v}^T) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si ha che $\mathbf{a}^T B = \tilde{\mathbf{a}}^T B = \mathbf{0}^T$ perchè per via del prodotto vettoriale \mathbf{a} e $\tilde{\mathbf{a}}$ sono ortogonali alle colonne di F , che generano un piano perchè F ha rango 2. Dunque sia \mathbf{a} che $\tilde{\mathbf{a}}$ sono ortogonali ad uno stesso piano, cioè $\tilde{\mathbf{a}} = \lambda \mathbf{a}$ per un certo $\lambda \neq 0$. Inoltre

$$[\mathbf{a}]_{\times} A = [\tilde{\mathbf{a}}]_{\times} \tilde{A} = [\lambda \mathbf{a}]_{\times} \tilde{A} = [\mathbf{a}]_{\times} (\lambda \tilde{A})$$

che implica

$$[\mathbf{a}]_{\times} (\lambda \tilde{A} - A) = 0$$

Cioè \mathbf{a} è proporzionale alle colonne di $\lambda \tilde{A} - A$, che si traduce in $\lambda \tilde{A} - A = \mathbf{a}\mathbf{v}^T$ per un certo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

□

Teorema 3.1 (Ricostruzione proiettiva) *Siano $(P_i, P_j, \mathbf{X}^{(k)})$ e $(\hat{P}_i, \hat{P}_j, \hat{\mathbf{X}}^{(k)})$ due ricostruzioni della geometria epipolare. Allora esiste un'omografia*

$$H : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

tale che

$$\begin{aligned}\hat{P}_i &= P_i H^{-1} \\ \hat{P}_j &= P_j H^{-1}\end{aligned}$$

e tale che $\hat{\mathbf{X}}^{(k)} \cong H \mathbf{X}^{(k)}$ fatta eccezione per i k tali che $\mathbf{x}_j^{(k)} \cong \mathbf{e}_{ji}$ e $\mathbf{x}_i^{(k)} \cong \mathbf{e}_{ij}$.

Dimostrazione. Essendo $(P_i, P_j, \mathbf{X}^{(k)})$ e $(\hat{P}_i, \hat{P}_j, \hat{\mathbf{X}}^{(k)})$ due ricostruzioni della stessa geometria hanno la stessa matrice fondamentale che indichiamo con F . Si consideri dapprima il caso in cui le due coppie di fotocamere siano in forma canonica. Allora $P_i = [I|\mathbf{0}]$, $P_j = [M|\mathbf{p}_4]$, $\hat{P}_i = [I|\mathbf{0}]$, $\hat{P}_k = [\hat{M}|\hat{\mathbf{p}}_4]$. La matrice fondamentale di entrambe le coppie è

$$F = [\mathbf{p}_4]_{\times} M = [\hat{\mathbf{p}}_4]_{\times} \hat{M},$$

per cui esiste λ non nullo ed un vettore \mathbf{v} tale che

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_4 &= \lambda \mathbf{p}_4 \\ \hat{M} &= \frac{1}{\lambda}(M + \mathbf{p}_4 \mathbf{v}^T)\end{aligned}$$

Dunque avremo

$$\hat{P}_j = \left[\frac{1}{\lambda}(M + \mathbf{p}_4 \mathbf{v}^T) \quad \lambda \mathbf{p}_4 \right] = P_j H^{-1}$$

dove

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} I & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\lambda} \mathbf{v}^T & \lambda \end{bmatrix}$$

. Inoltre si ha che

$$P_i H^{-1} = \frac{1}{\lambda} \hat{P}_i$$

Nel caso in cui le due coppie non siano in forma canonica si considerino le due omografie

$$H_1 = \begin{bmatrix} P_i \\ \mathbf{0}^T \quad 1 \end{bmatrix}$$

e

$$H_2 = \begin{bmatrix} P_j \\ \mathbf{0}^T \quad 1 \end{bmatrix}$$

Le coppie $(P_i H_1^{-1}, P_j H_1^{-1})$ e $(\hat{P}_i H_2^{-1}, \hat{P}_j H_2^{-1})$ sono in forma canonica e hanno la stessa matrice fondamentale delle coppie iniziali. Dunque esiste un'omografia H_3 tale che $\hat{P}_i H_2^{-1} = P_i H_1^{-1} H_3^{-1}$ e $\hat{P}_j H_2^{-1} = P_j H_1^{-1} H_3^{-1}$. Posto $H = H_2^{-1} H_3 H_1$ si ha $\hat{P}_i = P_i H^{-1}$ e $\hat{P}_j = P_j H^{-1}$. Per quel che riguarda la seconda parte del teorema si consideri che ogni k

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\cong P_i \mathbf{X}^{(k)} = \hat{P}_i (H \mathbf{X}^{(k)}) \\ \mathbf{x}_i &\cong \hat{P}_i \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \end{aligned}$$

cioè $\hat{P}_i \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \cong \hat{P}_i (H \mathbf{X}^{(k)})$, che implica che $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ e $H \mathbf{X}^{(k)}$ sono sullo stesso raggio passante per il centro della fotocamera \hat{P}_i . Analogamente si mostra che $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ e $H \mathbf{X}^{(k)}$ sono sullo stesso raggio passante per il centro della fotocamera \hat{P}_j . I casi possibili sono due: $\hat{\mathbf{X}}^{(k)} \cong H \mathbf{X}^{(k)}$ oppure $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ e $H \mathbf{X}^{(k)}$ giacciono sulla baseline e quindi $\mathbf{x}_i^{(k)} \cong \mathbf{e}_{ij}$ e $\mathbf{x}_j^{(k)} \cong \mathbf{e}_{ji}$.

□

3.3 Omografia indotta dal piano all'infinito

Consideriamo una generica coppia di fotocamere aventi matrici di proiezione

$$\begin{aligned} P_i &= K_i [R_i | \mathbf{t}_i] \\ P_j &= K_j [R_j | \mathbf{t}_j] \end{aligned}$$

Sia \mathbf{x}_i un punto sull'immagine i . Nel sistema di riferimento associato alla fotocamera i , in cui $P_i = K_i [I | \mathbf{0}]$, il versore avente direzione del raggio passante per \mathbf{x}_i è

$$\mathbf{d}_i = \frac{K_i^{-1} \mathbf{x}_i}{\|K_i^{-1} \mathbf{x}_i\|}$$

Il punto di intersezione tra il raggio ed il piano all'infinito sarà dunque $[\mathbf{d}_i^T, 0]^T$. Nel sistema di riferimento associato alla fotocamera j , in cui $P_j = K_j [I | \mathbf{0}]$ tale direzione sarà data da $\mathbf{d}_j = R_{ij} \mathbf{d}_i$, con $R_{ij} = R_j R_i^{-1}$ rotazione relativa tra le due fotocamere. Quindi il punto all'infinito sarà $[\mathbf{d}_j^T, 0]^T$. Proiettando sulla seconda immagine si ottiene:

$$\mathbf{x}_j \cong K_j [I | \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{d}_j \\ 0 \end{bmatrix} = K_j \mathbf{d}_j \cong (K_j R_{ij} K_i^{-1}) \mathbf{x}_i$$

Da cui osserviamo subito che l'omografia indotta dal piano all'infinito è

$$A_{ij}^\infty = K_j R_{ij} K_i^{-1}$$

Proposizione 3.5 *Data $(P_i, P_j, \mathbf{X}^{(k)})$ sia $(\hat{P}_i, \hat{P}_j, \hat{\mathbf{X}}^{(k)})$ una ricostruzione della geometria epipolare tale che*

$$\begin{cases} \hat{P}_i = [I | \mathbf{0}] \\ \hat{P}_j = [A_{ij}^\infty | \mathbf{t}] \end{cases}$$

Allora la ricostruzione è affine, cioè l'omografia H tale che

$$\begin{cases} \hat{P}_i \cong P_i H^{-1} \\ \hat{P}_j \cong P_j H^{-1} \\ \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \cong H \mathbf{X} \end{cases}$$

è un'affinità

Dimostrazione. Si consideri la forma più generale di un omografia

$$H = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix}.$$

Se H porta P_i e P_j in \hat{P}_i e \hat{P}_j si avrà

$$P_i = [K_i R_i | \mathbf{p}_i] \cong \hat{P}_i H = [I | \mathbf{0}] \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = [A | \mathbf{b}]$$

$$P_j = [K_j R_j | \mathbf{p}_j] \cong \hat{P}_j H = [A_{ij}^\infty | \mathbf{t}] \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = [A_{ij}^\infty A + \mathbf{t} \mathbf{c}^T | A_{ij}^\infty \mathbf{b} + d \mathbf{t}]$$

La prima equazione fornisce

$$K_i R_i \cong A$$

cioè $A = \lambda K_i R_i$ per qualche λ reale non nullo. Sostituito nella seconda

$$K_j R_j \cong (K_j R_j R_i^{-1} K_i^{-1}) A + \mathbf{t} \mathbf{c}^T = \lambda K_j R_j + \mathbf{t} \mathbf{c}^T$$

Si ricava dunque che \mathbf{c} deve essere necessariamente nullo e che H è un'affinità. \square

3.4 Struttura affine relativa

In questa sezione mostreremo che la relazione tra punti corrispondenti in due immagini è esprimibile per mezzo dell'omografia indotta da un piano qualunque preso come riferimento più un termine affine che moltiplica l'epipolo della seconda immagine. Per prima cosa verrà mostrato che questo è valido nel caso del piano all'infinito π_∞ ed in seguito il risultato verrà esteso ad un generico piano π . Allo stesso tempo si ricaverà l'espressione dell'omografia indotta $A_{ij}(\pi)$. Si considerino dunque due fotocamere aventi matrici di proiezione $P_i = K_i [R_i | \mathbf{t}_i]$ e $P_j = K_j [R_j | \mathbf{t}_j]$. La *profondità* di un punto rispetto ad una fotocamera è la distanza con segno del punto dal piano principale, con segno positivo se il punto si trova 'di fronte' alla fotocamera.

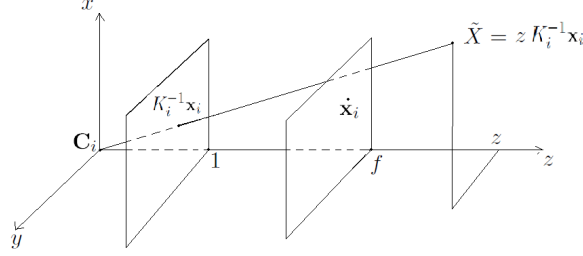


Figura 3.4: $zK_i^{-1}\mathbf{x}_i$ è il punto \mathbf{X} in coordinate eucldee nel sistema di riferimento associato alla fotocamera i .

Teorema 3.2 Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ avente come proiezioni $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Esiste uno scalare μ tale che

$$\mathbf{x}_j \cong A_{ij}^\infty \mathbf{x}_i + \mu \mathbf{e}_{ji} \quad (3.3)$$

Inoltre se A_{ij}^∞ è riscalata in modo tale che $\mu = 1$ per un dato $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{P}^3$, allora

$$\mu = \frac{z_i^0}{z_i}$$

dove z_i^0 e z_i sono le profondità dei punti \mathbf{X}^0 e \mathbf{X} rispetto alla fotocamera i .

Il termine μ prende il nome di *struttura affine relativa* dove si intende relativa al piano di riferimento che in questo caso è il piano all'infinito π_∞ . Si noti che $\mu = 0$ per ogni punto all'infinito, cioè per ogni punto sul piano di riferimento π_∞ , infatti in tal caso z_i tende all'infinito e $\mathbf{x}_j \cong A_{ij}^\infty \mathbf{x}_i$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}_i = [\tilde{\mathbf{x}}_i^T, 1]^T$. Allora $z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i$ è il punto \mathbf{X} in coordinate eucldee nel sistema di riferimento in cui $P_i = K_i[I|\mathbf{0}]$ (fig.3.4). Infatti

$$K_i[I|\mathbf{0}] \begin{bmatrix} z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i \\ 1 \end{bmatrix} = z \mathbf{x}_i \cong \mathbf{x}_i$$

Lo stesso punto nel sistema di riferimento in cui $P_j = K_j[I|\mathbf{0}]$ ha coordinate eucldee $R_{ij}(z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i) + \mathbf{t}$, dove $\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{C}}_i - \tilde{\mathbf{C}}_j$ è il vettore congiungente i centri delle fotocamere ed è indipendente dal sistema di riferimento scelto come R_{ij} . Proiettando sulla seconda immagine si ottiene

$$\mathbf{x}_j \cong K_j[I|\mathbf{0}] \begin{bmatrix} (R_{ij}(z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i) + \mathbf{t}) \\ 1 \end{bmatrix} = z_i A_{ij}^\infty \mathbf{x}_i - K_j \mathbf{t} \cong A_{ij}^\infty \mathbf{x}_i + \frac{1}{z_i} K_j \mathbf{t}$$

Notiamo adesso che sempre nello stesso sistema di riferimento $\tilde{\mathbf{C}}_j = \mathbf{0}$ dunque $\tilde{\mathbf{C}}_i = \mathbf{t}$ e l'epipolo \mathbf{e}_{ji} è dunque

$$\mathbf{e}_{ji} \cong K_j[I|\mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} = K_j \mathbf{t}$$

cioè $\lambda \mathbf{e}_{ji} = K_j \mathbf{t}$ per un certo λ reale non nullo. Si ottiene così

$$\mathbf{x}_j \cong A_{ij}^\infty \mathbf{x}_i + \mu \mathbf{e}_{ji}$$

con $\mu = \frac{\lambda}{z_i}$. Se si riscalda l'omografia infinita in modo tale che $\mu = 1$ per un certo punto finito \mathbf{X}^0 si ricava infine

$$1 = \mu = \frac{\lambda}{z_i^0}$$

cioè, $\lambda = z_i^0$ e $\mu = \frac{z_i^0}{z_i}$.

□

Passiamo adesso al caso generale.

Teorema 3.3 *Sia $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ avente come proiezioni $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Esiste uno scalare μ tale che*

$$\mathbf{x}_j \cong A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i + \mu \mathbf{e}_{ji} \quad (3.4)$$

dove $A_{ij}(\pi)$ è l'omografia indotta dal piano π e $\mu \cong \frac{d}{z_i}$. Inoltre se $A_{ij}(\pi)$ è riscaldata in modo tale che $\mu = 1$ per un dato $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{P}^3$, allora

$$\mu = \frac{d}{d^0} \frac{z_i^0}{z_i}$$

dove z_i^0 , z_i e d^0, d sono rispettivamente le profondità rispetto alla fotocamera i e le distanze con segno dal piano π dei punti \mathbf{X}^0 e \mathbf{X} .

Dimostrazione. Sia $\pi = [\mathbf{v}^T, c]^T$. Per l'omogeneità possiamo riscalare tale vettore in modo tale che $\pi = [\mathbf{n}^T, -d_\pi]^T$ dove $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ è il versore normale al piano e $-d_\pi = \frac{c}{\|\mathbf{v}\|}$ è la distanza con segno del piano dall'origine degli assi. Per convincersene è sufficiente notare che per un qualunque punto $\tilde{\mathbf{Y}}$ sul piano π si ha $\pi^T \tilde{\mathbf{Y}} = 0$ cioè

$$d_\pi = \frac{\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{Y}}}{\|\mathbf{v}\|} = -\frac{c}{\|\mathbf{v}\|}$$

Dal teorema precedente si ha

$$\mathbf{x}_j \cong K_j R_{ij} K_i^{-1} \mathbf{x}_i + \frac{K_j \mathbf{t}}{z_i} \quad (3.5)$$

Si consideri ancora una volta il punto \mathbf{X} in coordinate euclidee nel sistema di riferimento in cui $P_i = K_i [I | \mathbf{0}]_2$ cioè $z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i$. In tale sistema di riferimento l'origine degli assi è il centro \mathbf{C}_i della fotocamera i .

- Nel caso in cui il punto \mathbf{X} giaccia sul piano π si ha che

$$d_\pi = \mathbf{n}^T(z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i)$$

è la distanza del piano dal centro $\tilde{\mathbf{C}}_i$. Si può dunque esprimere l'equazione (3.5) come

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j &\cong K_j R K_i^{-1} \mathbf{x}_i + \frac{K_j \mathbf{t}}{z} \frac{d_\pi}{d_\pi} = \\ &= K_j R K_i^{-1} \mathbf{x}_i + K_j \frac{\mathbf{t} \mathbf{n}^T}{d_\pi} K_i^{-1} \mathbf{x}_i = \\ &= K_j \left(R + \frac{\mathbf{t} \mathbf{n}^T}{d_\pi} \right) K_i^{-1} \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da (3.6) riconosciamo che l'omografia indotta dal piano π è proprio

$$A_{ij}(\pi) \cong K_j \left(R + \frac{\mathbf{t} \mathbf{n}^T}{d_\pi} \right) K_i^{-1} \quad (3.7)$$

e si ha la tesi in quanto in tal caso $d = 0$ e dunque $\mu \cong \frac{d}{z_i} = 0$.

- Sia ora \mathbf{X} un punto non giacente su π .

Sommando e sottraendo a (3.5) la quantità $\frac{1}{d_\pi} K_j \mathbf{t} \mathbf{n}^T K_i^{-1} \mathbf{x}_i$ si ottiene

$$\mathbf{x}_j \cong K_j R_{ij} K_i^{-1} \mathbf{x}_i + \frac{\mathbf{e}_{ji}}{z_i} = A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i + \left(\frac{d_\pi - \mathbf{n}^T(z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i)}{d_\pi z_i} \right) \mathbf{e}_{ji}$$

Siccome $d = d_\pi - \mathbf{n}^T(z_i K_i^{-1} \mathbf{x}_i)$ è la distanza con segno di \mathbf{X} da π si ricava:

$$\mathbf{x}_j \cong A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i + \mu \mathbf{e}_{ji}$$

dove

$$\mu = \frac{d}{z_i d_\pi}.$$

che è la tesi. Infine imponendo $\mu = 1$ per il punto \mathbf{X}^0 si ricava

$$\mu = \frac{d}{z_i} \frac{z_i^0}{d^0}$$

□

Anche in questo caso la struttura affine relativa μ è nulla per ogni punto sul piano di riferimento π . Infatti per tali punti $d_i = 0$ e $\mathbf{x}_j \cong A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i$. Inoltre se π è il piano all'infinito, allora $d, d_0, d_\pi \rightarrow \infty$. Per cui $\frac{d}{d_0} \rightarrow 1$ e

$$A_{ij}(\pi) \rightarrow A_{ij}^\infty$$

$$\mu(\mathbf{X}) \rightarrow \frac{z_0}{z}$$

Si ottiene dunque

$$\mathbf{x}_j \cong A_{ij}^\infty \mathbf{x}_i + \frac{z_0 \mathbf{e}_{ji}}{z}$$

che è esattamente la tesi del teorema (3.2). Si noti infine che la struttura lineare affine μ dipende dalla distanza di \mathbf{X} rispetto al piano di riferimento e dalla posizione della fotocamera i , ma è indipendente dalla fotocamera j .

Un'ultima osservazione che sarà molto utile nel seguito è che l'omografia indotta da $\pi = [\mathbf{v}^T, c]^T \cong [\mathbf{n}^T, -d_\pi]^T$ è esprimibile come

$$A_{ij}(\pi) \cong A_{ij}^\infty + (K_j \mathbf{t}) \frac{\mathbf{n}^T K_i^{-1}}{d_\pi} = A_{ij}^\infty - \mathbf{e}_{ji} \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i} \quad (3.8)$$

Infatti, se \mathbf{n} e \mathbf{t} sono espressi nel sistema di riferimento in cui $P_i = K[I|\mathbf{0}]$ allora $[\mathbf{v}_i^T, c_i] \cong [\mathbf{n}^T K_i^{-1}, -d_\pi]$ è il vettore del piano π nel sistema di riferimento in cui $P_i = [I|\mathbf{0}]$ e $K\mathbf{t}$ è l'epipolo \mathbf{e}_{ji} .

$$\frac{\mathbf{v}_i}{c_i} = -\frac{\mathbf{n}^T K_i^{-1}}{d_\pi}$$

Si noti anche che per qualunque omografia indotta da un piano π si ha $\mathbf{e}_{ji} \cong A_{ij}(\pi) \mathbf{e}_{ij}$. Infatti gli epipoli sono sempre le proiezioni dei punti di intersezione tra il piano e la baseline.

3.5 Ricostruzione della geometria epipolare

A partire dal modello di struttura affine relativa

$$\mathbf{x}_j \cong A_{ij}(\Pi) \mathbf{x}_i + \mu \mathbf{e}_{ji}$$

dove $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i$ sono le proiezioni tramite due fotocamere con matrici P_i, P_j del punto \mathbf{X} . si può ricavare la seguente ricostruzione della geometria epipolare:

$$\left(\tilde{P}_i, \tilde{P}_j, \mathbf{X}^P \right)$$

con

$$\begin{cases} \tilde{P}_i \cong [I|\mathbf{0}] \\ \tilde{P}_j \cong [A_{ij}(\pi)|\mathbf{e}_{ji}] \\ \mathbf{X}^P \cong [\mathbf{x}_i^T, \mu]^T \end{cases} \quad (3.9)$$

dove notiamo che la coppia $(\tilde{P}_i, \tilde{P}_j)$ è in forma canonica.

Supponendo di individuare un numero sufficiente di coppie di punti corrispondenti nelle due viste, la matrice fondamentale F della geometria è individuata univocamente ed è la stessa sia per la geometria 'vera' (P_i, P_j, \mathbf{X})

che per la ricostruzione $(\tilde{P}_i, \tilde{P}_j, \mathbf{X}^P)$. Dunque per il teorema di ricostruzione proiettiva (3.1) si ha che esiste un'omografia H tale che:

$$\begin{aligned} P_i &\cong \tilde{P}_i H^{-1} \\ P_j &\cong \tilde{P}_j H^{-1} \\ \mathbf{X} &\cong H \mathbf{X}^P \end{aligned}$$

Inoltre, dalla proposizione (3.5), nel caso in cui il piano di riferimento π sia il piano all'infinito si ha che la ricostruzione è affine. Questo avviene perché scegliendo il piano di riferimento all'infinito si aggiunge alla ricostruzione l'informazione necessaria a collocare il piano all'infinito che è invariante rispetto a trasformazioni affini.

Nella pratica per ottenere la ricostruzione si può procedere utilizzando il seguente algoritmo.

1. da un insieme sufficientemente numeroso di coppie punti corrispondenti $(\mathbf{x}_i^{(k)}, \mathbf{x}_j^{(k)})$ si calcola la matrice fondamentale F e in seguito gli epipoli risolvendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{(k)T} F \mathbf{x}_i^{(k)} &= 0 \\ F^T \mathbf{e}_{ji} &= 0 \\ F \mathbf{e}_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

2. si determina il piano di riferimento π e quindi la matrice associata $A_{ij}(\pi)$ scegliendo anche a caso tre coppie di punti corrispondenti e imponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{(k)} &\cong A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i^{(k)}, k = 1, 2, 3 \\ \mathbf{e}_{ji} &\cong A_{ij}(\pi) \mathbf{e}_{ij} \end{aligned}$$

3. si riscalda $A_{ij}(\pi)$ in modo tale che per una coppia di punti corrispondenti $(\mathbf{x}_i^{(0)}, \mathbf{x}_j^{(0)})$ si abbia

$$\mathbf{x}_j^{(0)} \cong A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i^{(0)} + \mathbf{e}_{ji}$$

4. per ogni altra coppia di punti corrispondenti si calcola la struttura affine relativa μ_k risolvendo

$$\mathbf{x}_j^{(k)} = A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i^{(k)} + \mu_k \mathbf{e}_{ji}$$

cioè con la formula

$$\mu_k = - \frac{\left([\mathbf{x}_j^{(k)}]_{\times} \mathbf{e}_{ji} \right)^T \left([\mathbf{x}_j^{(k)}]_{\times} \left(A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i^{(k)} \right) \right)}{\left\| [\mathbf{x}_j^{(k)}]_{\times} \mathbf{e}_{ji} \right\|^2}$$

che si ottiene moltiplicando a sinistra entrambi i membri dell'equazione per $[\mathbf{x}_j^{(k)}]_\times$ e ricavando μ_k ;

5. si ricostruiscono tutti i punti nello spazio come

$$\mathbf{X}_k^P \cong \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^{(k)} \\ \mu_k \end{bmatrix}.$$

Si osservi infine che l'unico caso in cui questo procedimento non funziona è quello in cui le due fotocamere siano legate da una rotazione pura. In tal caso gli epipoli non sono definiti perché i due centri coincidono (sarebbero entrambi il vettore nullo $\mathbf{0}^T$) e non ha senso neanche definire la matrice fondamentale. Ad ogni modo si può notare che in questo caso particolare tutte le coppie di punti corrispondenti soddisfano

$$x_j \cong A_{ij}^\infty \mathbf{x}_i \tag{3.10}$$

cioè possono essere considerate come proiezioni di punti all'infinito. Se dunque la condizione (3.10) è verificata dai dati, si può stimare direttamente l'omografia infinita A_{ij}^∞ e ricavare la seguente ricostruzione affine

$$\begin{cases} \hat{P}_i \cong [I | \mathbf{0}] \\ \hat{P}_j \cong [A_{ij}^\infty | \mathbf{0}] \\ \mathbf{X}^P = [\mathbf{x}_i^T, 0]^T \end{cases}$$

che formalmente è identica a (3.9), a patto di porre $\mathbf{e}_{ji} = \mathbf{0}$ e $\mu = 0$ per ogni punto perchè tutti possono essere considerati appartenenti al piano di riferimento π_∞ .

Capitolo 4

Gruppi di Lie Lineari

In questa parte verranno introdotte alcune nozioni basilari riguardanti le algebre di Lie e i gruppi di Lie i cui elementi sono matrici. Tali gruppi vengono detti gruppi di Lie lineari. In realtà la trattazione sui gruppi di Lie è molto più ampia e complessa e richiede strumenti di topologia, algebra e geometria differenziale che vanno oltre gli scopi di questo lavoro. Il discorso seguente segue in linea di massima l'esposizione di Kosmann-Schwarzbach [5] con qualche riferimento a Sattinger-Weaver [6]. Per ulteriori informazioni sui gruppi di Lie si rimanda a [12],[13]. Al principio verranno introdotte alcune nozioni basilari di algebra, in seguito si introdurranno i concetti di algebra di Lie ed esponenziazione di matrici per poi introdurre i gruppi di Lie lineari e studiare la relazione tra gruppi e algebre di Lie. Si presenta in particolare l'esempio del gruppo delle rototraslazioni $SE(n, \mathbb{R})$ che serve per generare viste virtuali da immagini scattate da una o più fotocamere .

4.1 Definizioni preliminari

Diamo innanzi tutto alcune nozioni che saranno utili nel seguito.

Definizione 4.1 (Gruppo) *Un gruppo $(\mathcal{G}, *)$ è una coppia formata da insieme \mathcal{G} e da un operazione binaria $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

- *(proprietà associativa)*
 $\forall x, y, z \in \mathcal{G}, x * (y * z) = (x * y) * z$
- *(esistenza dell'elemento neutro)*
 $\exists e \in \mathcal{G} \text{ t.c. } \forall x \in \mathcal{G} x * e = e * x = x$
- *(esistenza dell'inverso)*
 $\forall x \in \mathcal{G}, \exists y \in \mathcal{G} \text{ t.c. } x * y = y * x = e$

Se $*$ soddisfa anche la proprietà commutativa, cioè se $\forall x, y \in \mathcal{G}, x * y = y * x$, il gruppo è detto commutativo o abeliano. La cardinalità di \mathcal{G} è detta ordine del gruppo. Un gruppo è finito se ha ordine finito, altrimenti è detto infinito.

Proposizione 4.1 *L'elemento neutro di un gruppo $(\mathcal{G}, *)$ è unico ed ogni $x \in \mathcal{G}$ l'inverso di x è unico.*

Dimostrazione. Siano per assurdo $e_1 \neq e_2$ due elementi neutri del gruppo. Allora: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$. Siano invece $y_1 \neq y_2$ due elementi inversi di $x \in \mathcal{G}$. Allora per la proprietà associativa: $y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2$.

□

Esempio Le coppie $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sono gruppi commutativi con elemento neutro 0. Le coppie (\mathbb{Q}^*, \times) , (\mathbb{R}^*, \times) , (\mathbb{C}^*, \times) cioè gli insiemi dei numeri razionali, reali e complessi privati dello zero sono gruppi commutativi rispetto alla moltiplicazione con elemento neutro l'unità. L'insieme delle matrici reali, quadrate e invertibili di dimensione $n \in \mathbf{N}$ munito della moltiplicazione riga per colonna è un gruppo con elemento neutro dato dalla matrice unità I_n , ma non è commutativo. Tale gruppo prende il nome di *gruppo lineare* e nel seguito verrà indicato con $GL(n, \mathbb{R})$. L'insieme delle matrici quadrate reali di dimensione n , che verrà indicato con $gl(n, \mathbb{R})$ non forma un gruppo perchè non tutte le matrici sono invertibili.

In generale si dice, anche se non è formalmente corretto, che l'insieme \mathcal{G} dotato dell'operazione binaria $*$ è un gruppo e spesso si sottintende l'operazione binaria. Ad esempio, quando nel seguito diremo che $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo si intende che la coppia $(GL(n, \mathbb{R}), \bullet)$ è un gruppo.

Definizione 4.2 (Sottogruppo) *Sia $(\mathcal{G}, *)$ un gruppo. La coppia $(\mathcal{H}, *)$ dove $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ è un sottogruppo di $(\mathcal{G}, *)$ se contiene l'elemento neutro di \mathcal{G} ed è chiuso rispetto all'operazione binaria $*$ e rispetto all'inversione. Cioè se*

- $e \in \mathcal{H}$
- $\forall x, y \in \mathcal{H}, x * y \in \mathcal{H}$
- $\forall x \in \mathcal{H}, x^{-1} \in \mathcal{H}$

Esempio. L'insieme delle matrici con determinante unitario e l'insieme delle matrici ortogonali sono sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$. Prendono rispettivamente il nome di *gruppo lineare speciale* e *gruppo lineare ortogonale* e vengono indicati con $SL(n, \mathbb{R})$ e $O(n, \mathbb{R})$. La loro intersezione è a sua volta un sottogruppo detto *gruppo speciale ortogonale* ed è indicato con $SO(n, \mathbb{R})$.

Esempio. Un gruppo di particolare importanza nell'ambito della costruzione di viste virtuali è il *gruppo speciale euclideo*, indicato con $SE(n, \mathbb{R})$, cioè il sottogruppo di $SL(n+1, \mathbb{R})$ le cui matrici sono della forma:

$$A = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

dove $R \in SO(n, \mathbb{R})$ è una matrice di rotazione, cioè è ortogonale con determinante unitario, e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore. Come vedremo in seguito, $SE(n, \mathbb{R})$ è il gruppo delle rototraslazioni di \mathbb{R}^n e corrisponde al gruppo delle isometrie in \mathbb{R}^n che preservano l'orientazione degli assi cartesiani. Sia infatti $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$ un punto nello spazio proiettivo riscalo in modo tale che $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{x}}, 1]^T$, allora $\tilde{\mathbf{x}}$ sono le coordinate euclidee di \mathbf{x} e applicando una matrice $A \in SE(n, \mathbb{R})$ si ottiene:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mostriamo dunque che $SE(n, \mathbb{R})$ è un sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{R})$. Innanzi tutto è ovvio che $SE(n, \mathbb{R}) \subset SL(n+1, \mathbb{R}) \subset GL(n+1, \mathbb{R})$ poiché ogni matrice di tale forma ha determinante pari a uno ed è dunque invertibile. Inoltre è anche ovvio che contiene l'elemento neutro I_{n+1} . Mostriamo la chiusura rispetto alla moltiplicazione matriciale e l'esistenza dell'inverso. Siano:

$$A = \begin{bmatrix} R_A & \mathbf{t}_A \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} R_B & \mathbf{t}_B \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$AB = \begin{bmatrix} R_A & \mathbf{t}_A \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_B & \mathbf{t}_B \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A R_B & R_A \mathbf{t}_B + \mathbf{t}_A \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Siccome $R_A R_B$ è a sua volta una matrice di rotazione e $R_A \mathbf{t}_B + \mathbf{t}_A \in \mathbb{R}^n$ possiamo concludere che $AB \in SE(n, \mathbb{R})$. Sia invece

$$A = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Ricordando che $R^{-1} = R^T$, è facile verificare che l'inversa di A è:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

che è ancora un elemento di $SE(n, \mathbb{R})$.

Definizione 4.3 (Morfismo tra gruppi) Siano $(\mathcal{G}_1, *)$, (\mathcal{G}_2, \bullet) due gruppi. Un morfismo da \mathcal{G}_1 in \mathcal{G}_2 è una mappa $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ tale che per ogni $g, g' \in \mathcal{G}_1$

$$\varphi(g * g') = \varphi(g) \bullet \varphi(g')$$

Se φ è biettiva prende il nome di isomorfismo. Se inoltre è biettiva e $(\mathcal{G}_1, *) = (\mathcal{G}_2, \bullet)$, prende il nome di automorfismo.

Proposizione 4.2 Sia $(\mathcal{G}_1, *)$ un gruppo avente elemento neutro e_1 e (\mathcal{G}_2, \bullet) un gruppo avente elemento neutro e_2 . Allora, dato un morfismo $\phi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ si ha:

$$\begin{aligned} e_2 &= \varphi(e_1) \\ \varphi(x^{-1}) &= \varphi(x)^{-1} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di morfismo e di elemento neutro si ha per ogni $x \in \mathcal{G}_1$

$$\varphi(x) = \varphi(x * e_1) = \varphi(x) \bullet \varphi(e_1)$$

$$\varphi(x) = \varphi(e_1 * x) = \varphi(e_1) \bullet \varphi(x)$$

dunque $\varphi(x) = \varphi(x) \bullet \varphi(e_1) = \varphi(e_1) \bullet \varphi(x)$. Cioè $\varphi(e_1) = e_2$. Inoltre si ha:

$$e_2 = \varphi(e_1) = \varphi(x * x^{-1}) = \varphi(x) \bullet \varphi(x^{-1})$$

$$e_2 = \varphi(e_1) = \varphi(x^{-1} * x) = \varphi(x^{-1}) \bullet \varphi(x)$$

e quindi $e_2 = \varphi(x) \bullet \varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1}) \bullet \varphi(x)$ che implica $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

□

Proposizione 4.3 Sia $\varphi : (\mathcal{G}_1, *) \rightarrow (\mathcal{G}_2, \bullet)$ un morfismo tra gruppi. Allora ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(g^k) = \varphi(g)^k$$

dove con x^k si indica la composizione dell'operazione binaria con se stessa ripetuta k volte.

Dimostrazione. La proposizione è vera per $k = 1$ e per $k = 0$ se si pone che $g^0 = e_1$ e $g'^0 = e_2$. Procedendo per induzione sia $\varphi(g^k) = \varphi(g)^k$ vero per un generico k . Allora

$$\varphi(g^{k+1}) = \varphi(g^k * g) = \varphi(g^k) \bullet \varphi(g) = \varphi(g)^{k+1}$$

□

Definizione 4.4 (Spazio vettoriale) *Uno spazio vettoriale (o spazio lineare) sul campo \mathbb{R} è una tripletta $(\mathcal{V}, +, \bullet)$ in cui $(\mathcal{V}, +)$ è gruppo commutativo e*

$$\bullet : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V} | (x, \lambda) \mapsto \lambda x$$

è un'applicazione binaria tale che $1x = x$ e $\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1 \lambda_2)x$ per ogni $x \in \mathcal{V}$ e ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e tale che valgano le leggi distributive $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$, $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$. L'applicazione $+$ viene detta addizione mentre l'applicazione \bullet viene detta moltiplicazione per scalare. L'elemento neutro dell'addizione viene indicato con $\mathbf{0}$.

Anche in questo caso spesso si dice impropriamente che \mathcal{V} è uno spazio vettoriale sottointendendo quali operazioni vengono definite su di esso.

Definizione 4.5 (Insieme linearmente indipendente e base) *Sia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ un sottoinsieme di uno spazio vettoriale. Si dice che \mathcal{U} è linearmente indipendente se $\forall \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{U}$ finito si ha*

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_j = 0, \forall j = 1, \dots, k$$

Una base di \mathcal{V} è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathcal{V} massimale, cioè che non è contenuto propriamente in un altro sottoinsieme linearmente indipendente.

E' facile verificare che ogni elemento di \mathcal{V} può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base e che ogni base ha la stessa cardinalità che è detta *dimensione* dello spazio vettoriale.

Esempio. \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale di dimensione n . Lo spazio $gl(n, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione n^2 .

Definizione 4.6 (Sottospazio vettoriale) *Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $(\mathcal{V}, +, \bullet)$ è un sottoinsieme di \mathcal{V} chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per scalare e contenente lo $\mathbf{0}$.*

Definizione 4.7 (Algebra) *Un algebra è uno spazio vettoriale $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ dotato di un'altra operazione binaria $[,] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ bilineare. Cioè tale che per ogni $x, y, z \in \mathcal{A}$ e ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:*

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$$

$$[\lambda_1 x, y] = \lambda_1 [x, y]$$

$$[x, \lambda_2 y] = \lambda_2 [x, y]$$

L'operazione $[,]$ in genere prende il nome di moltiplicazione.

Esempio. \mathbb{R}^3 con somma, moltiplicazione per scalare e prodotto vettoriale è un'algebra. $gl(n, \mathbb{R})$ con somma, moltiplicazione per scalare e moltiplicazione matriciale è un'algebra.

Definizione 4.8 (Algebra di Lie) *Un algebra di Lie è un'algebra $(\mathcal{A}, +, \bullet, [,])$ la cui operazione binaria $[,]$ è antisimmetrica e soddisfa la condizione di Jacobi. Ovvero*

$$[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathcal{A}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{A}$$

Nel caso di algebre di Lie l'operazione $[,]$ viene indicata generalmente con il nome di 'Lie bracket' o solo 'bracket' e in genere si dice che \mathcal{A} è un'algebra di Lie sottointendendo le operazioni di addizione e moltiplicazione per scalare. Nel caso in cui $[x, y] = 0, \forall x, y \in \mathcal{A}$ l'algebra di Lie è detta abeliana.

Definizione 4.9 (Sottoalgebra di Lie) *Sia \mathcal{A} un'algebra di Lie con bracket $[,]$. Un sottospazio vettoriale $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ è una sottoalgebra di Lie di \mathcal{A} se è chiuso rispetto a $[,]$.*

Definizione 4.10 (Morfismo tra algebre di Lie) *Siano \mathcal{A}, \mathcal{B} due algebre di Lie con rispettivi brackets $[,]_{\mathcal{A}}, [,]_{\mathcal{B}}$. Un morfismo da \mathcal{A} in \mathcal{B} è un'applicazione $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tale che*

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, [\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathcal{B}} = \varphi([x, y]_{\mathcal{A}})$$

Se φ è biettiva prende il nome di isomorfismo. Un isomorfismo da \mathcal{A} in se stesso prende il nome di automorfismo.

4.2 Operatori lineari

Si riportano alcuni fatti sugli operatori lineari che serviranno in seguito ad introdurre il concetto di esponenziale di una matrice quadrata.

Definizione 4.11 (Operatore) *Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale munito di una norma $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty)$. Un operatore $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ è un'applicazione da \mathcal{V} in se.*

Si definiscono sull'insieme degli operatori l'addizione e la moltiplicazione per scalare come:

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x)$$

$$(\lambda T)(x) = \lambda \cdot T(x)$$

Definizione 4.12 (Operatore lineare) *Un operatore T è lineare se $\forall x, y \in \mathcal{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha*

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y).$$

In genere nel caso degli operatori lineari si indica Tx al posto di $T(x)$ e la composizione $T \circ S$ si indica semplicemente con TS . Si indica con $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ l'insieme degli operatori lineari su \mathcal{V} che risulta essere per definizione uno spazio vettoriale.

Si può definire una norma su $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ nel seguente modo:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Definizione 4.13 (Operatore lineare limitato) *Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale normato. Un operatore lineare $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ si dice limitato se esiste una costante $M > 0$ tale che*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \|Tx\| \leq M \|x\|$$

Si può dimostrare inoltre che T è limitato se e solo se è un'applicazione continua (cft. [4, pag.58]), cioè se ogni $x \in \mathcal{V}$

$$\lim_{y \rightarrow x} \|Tx - Ty\| = 0.$$

Dunque si parla indifferentemente di operatori lineari o continui.

Proposizione 4.4 *Un operatore T è limitato se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq M$.*

Dimostrazione. Sia T limitato. Allora:

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} M \|x\| = M.$$

Viceversa sia $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq M$. Allora ogni $x \in \mathcal{V}$

$$\left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq M,$$

cioè $\|Tx\| \leq M \|x\|$.

□

Proposizione 4.5 *$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}$ è la più piccola costante $M > 0$ che verifica $\|Tx\| \leq M \|x\|$.*

Dimostrazione Dalla dimostrazione del teorema precedente si deduce che $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}$ è minore di qualunque costante $M > 0$ tale che $\|Tx\| \leq M \|x\|$. D'altra parte si ha che:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

Per cui per ogni $x \in \mathcal{V}$ non nullo si ha

$$\left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}$$

e quindi $\|Tx\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|x\|$.

□

Proposizione 4.6 .

Siano $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ due operatori limitati. TS è limitato e $\|TS\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}$. In particolare componendo T per se stesso k volte si ha $\|T^k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione

$$\|TSx\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|Sx\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|x\|$$

quindi TS è ancora limitato e dalla proposizione 4.5 si ha che $\|TS\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}$. Come caso particolare si ha $\|T^2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}^2$. Inoltre $\|T^0\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}^0 = 1$. La seconda parte della proposizione si verifica facilmente per induzione.

□

Definizione 4.14 (Operatore lineare invertibile) Un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ è invertibile se esiste un operatore $S \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ tale che $STx = TSx = x, \forall x \in \mathcal{V}$ (cioè $TS = ST = I$ è l'operatore identità su \mathcal{V}). Se T è invertibile l'operatore inverso è indicato con T^{-1} .

Proposizione 4.7 Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ un operatore limitato sullo spazio vettoriale \mathcal{V} . Se la serie di Neumann

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k \tag{4.1}$$

converge. Allora l'operatore $I - T$ è invertibile e

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

dove I è l'operatore identità tale che $Ix = x, \forall x \in V$. In particolare se $\|T\| < 1$ e lo spazio vettoriale \mathcal{V} è completo, la serie (4.1) è convergente perchè è assolutamente convergente. Infatti per la proposizione 4.6 $\|T^k\| \leq \|T\|^k < 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo

$$S_m = \sum_{k=0}^m T^k,$$

$$P_m = (I - T)S_m = S_m(I - T).$$

Se la serie di Neumann converge allora per $m \rightarrow \infty$ si ha $S_m \rightarrow S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ e $\|T^m\| \rightarrow 0$. Inoltre

$$P_m = S_m - TS_m = I + T + T^2 + \dots + T^m - (T + T^2 + \dots + T^{m+1}) = I - T^{m+1}$$

Dunque $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m - I\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^{m+1}\| = 0$. Cioè

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = I$$

Ma $P_m = (I - T)S_m = S_m(I - T)$, dunque per la continuità del prodotto matriciale si può passare al limite per $m \rightarrow \infty$ ottenendo $I = (I - T)S = (I - T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ e $I = S(I - T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(I - T)$. Cioè $I - T$ è invertibile e

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

□

Proposizione 4.8 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ è un'algebra di Lie rispetto al bracket:

$$[T, S] = TS - ST.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente la bilinearità di $[\cdot, \cdot]$.

$$\begin{aligned} [T + S, P] &= (T + S)P - P(T + S) = \\ &= TP - PT + SP - PS = [T, P] + [S, P] \\ [T, S + P] &= T(S + P) - (S + P)T = \\ &= TS - ST + TP - PT = [T, S] + [T, P] \\ [\lambda T, S] &= [T, \lambda S] = \lambda(TS - ST) = \lambda[T, S] \end{aligned}$$

Inoltre $[\cdot, \cdot]$ è antisimmetrica, infatti:

$$\begin{aligned} [S, T]x &= (ST - TS)x = STx - TSx = -(TSx - STx) = \\ &= -(TS - ST)x = -[T, S]x, \forall x \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

Infine $[\cdot, \cdot]$ soddisfa la condizione di Jacobi:

$$\begin{aligned} &([T, [S, P]] + [S, [P, T]] + [P, [T, S]])x = \\ &([T, SP - PS] + [S, PT - TP] + [P, TS - ST])x = \\ &(TSP - TPS - SPT + PST + SPT - STP - PTS + \\ &+ TPS + PTS - PST - TSP + STP)x = 0, \forall x \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

cioè $[T, [S, P]] + [S, [P, T]] + [P, [T, S]]$ è l'operatore identicamente nullo.

□

Proposizione 4.9 Sia $gl(\mathcal{V})$ l'insieme degli operatori lineari limitati su \mathcal{V} . $gl(\mathcal{V})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Dimostrazione. $gl(\mathcal{V})$ è ancora un sottospazio vettoriale ed è chiuso rispetto al bracket $[T, S] = TS - ST$. Infatti l'operatore identicamente nullo è limitato :

$$\begin{aligned} \forall T, S \in gl(\mathcal{V}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{V} \\ \|(T + \lambda S)x\| = \|Tx + \lambda Sx\| \leq \|Tx\| + |\lambda| \|Ts\| \\ \leq M \|x\| + |\lambda| N \|x\| = (M + |\lambda| N) \|x\| = \tilde{M} \|x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall T, S \in gl(\mathcal{V}), \forall x \in V \\ \|[T, S]x\| = \|TSx - STx\| \leq \|T(Sx)\| + \|S(Tx)\| \\ \leq M \|Sx\| + N \|Tx\| \leq MN \|x\| + NM \|Tx\| = \\ = (MN + NM) \|x\| = \tilde{M} \|x\| \end{aligned}$$

□

In particolare se $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ lo spazio degli operatori lineari $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ non è altro che l'insieme $gl(n, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate di dimensione n . Dunque $gl(n, \mathbb{R})$ è un algebra di Lie con bracket

$$[A, B] = AB - BA$$

dove l'addizione, la moltiplicazione per scalare si riducono rispettivamente all'addizione e alla moltiplicazione elemento per elemento e la composizione si riduce alla moltiplicazione riga per colonna. Ricordando uno spazio finito dimensionale di dimensione n è isomorfo a \mathbb{R}^n (cioè esiste un'applicazione biettiva tra i due spazi che sono dunque indistinguibili dal punto di vista topologico) e che tutte le norme su uno spazio finito dimensionale sono equivalenti (cft.[pag.50,59][4]) si può dimostrare la seguente

Proposizione 4.10 Ogni matrice in $gl(n, \mathbb{R})$ è un operatore limitato su \mathbb{R}^n . Cioè $gl(n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = gl(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Due norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ su uno spazio vettoriale \mathcal{V} si dicono equivalenti se esistono due costanti $N, M > 0$ tali che

$$N \|x\|_* \leq \|\cdot\| \leq M \|x\|_*, \forall x \in \mathcal{V}.$$

Si considerino dunque le seguenti norme su $gl(n, \mathbb{R})$:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

E' chiaro che la seconda norma è finita per ogni matrice A , cioè ogni $A \in gl(n, \mathbb{R})$ esiste una costante $M_A > 0$ tale che $\|A\|_{\infty} \leq M_A$. Essendo le due norme equivalenti esiste anche una costante $N > 0$ tale che:

$$\|A\| \leq N \|A\|_{\infty}, \forall A \in gl(n, \mathbb{R})$$

Dunque per ogni $A \in gl(n, \mathbb{R})$ esiste una costante positiva $M = NM_A$ tale $\|A\| \leq M$ e dalla proposizione 4.4 si conclude che ogni matrice $A \in gl(n, \mathbb{R})$ è un operatore limitato su R^n .

□

Infine si nota che ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale di dimensione finita è chiuso (cft.[4, pag.60]).

4.3 Mappa esponenziale

Si consideri l'algebra di Lie $gl(n, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate di dimensione n con bracket $[A, B] = AB - BA$ e dotata della norma

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Proposizione 4.11 *La serie*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{4.2}$$

è convergente ogni $A \in gl(n, \mathbb{R})$. La somma di tale serie è detta matrice esponenziale di A .

Dimostrazione. Siccome ogni matrice quadrata di dimensione n è un operatore limitato, dalla proposizione 4.6 si ha che $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} \leq e^M < +\infty$$

Essendo finito dimensionale, $gl(n, \mathbb{R})$ è isomorfo a R^{n^2} e quindi è completo. In tal caso la convergenza assoluta implica la convergenza della serie (cft.[4, pag.45-48]).

□

Si enunciano e dimostrano alcune proprietà che saranno utili nel seguito.

Proposizione 4.12 .

Siano $A, B \in gl(n, \mathbb{R})$ e $t, s \in \mathbb{R}$.

1. Sia $\mathbf{0} \in gl(n, \mathbb{R})$ la matrice nulla, Allora $e^{\mathbf{0}} = I$;
2. $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$
3. se $AB = BA$ allora $e^{(A+B)} = e^Ae^B$ e $Be^A = e^AB$;
4. e^A è invertibile e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, dunque la mappa esponenziale è un'applicazione da $gl(n, \mathbb{R})$ nel gruppo delle matrici invertibili $GL(n, \mathbb{R})$;
5. se B è invertibile allora $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$;
6. $e^{A^T} = (e^A)^T$;
7. se λ_i con $i = 1, \dots, n$ sono gli autovalori di A allora e^{λ_i} sono gli autovalori di e^A . Di conseguenza $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$;
8. se $A = \text{diag}\{A_1, \dots, A_p\}$, $p < n$ è una matrice diagonale a blocchi, allora e^A è ancora una matrice diagonale a blocchi e $e^A = \text{diag}\{e^{A_1}, \dots, e^{A_p}\}$.

Dimostrazione.

1. La tesi segue direttamente dal fatto che $A^0 = I$ e $0! = 1$. Dunque:

$$e^{\mathbf{0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \frac{A^0}{0!} = I.$$

2. Essendo le serie che definiscono e^{tA} e e^{sA} assolutamente convergenti si può scrivere il loro prodotto alla Cauchy e risulta:

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k \frac{(tA)^h}{h!} \frac{(sA)^{k-h}}{(k-h)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (tA)^h (sA)^{k-h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA + sA)^k}{k!} = e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

3. Utilizzando di nuovo il prodotto alla Cauchy:

$$\begin{aligned} e^Ae^B &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k \frac{A^h}{h!} \frac{B^{k-h}}{(k-h)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} A^h B^{k-h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = e^{A+B} \end{aligned}$$

dove la formula del binomio di Newton è valida perchè A e B commutano. Sempre per lo stesso motivo vale $BA^k = A^k B$ da cui si ricava:

$$Be^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B}{k!} = e^A B.$$

4. Per il punto 1 e 2, ponendo $s = -t$ si ha

$$I = e^0 = e^{(t-t)A} = e^{tA} e^{-tA}$$

e dunque $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

5. Sia $C = BAB^{-1}$. Si ha che $C^0 = I = BA^0 B^{-1}$ e per induzione $C^k = BA^k B^{-1}, \forall k \in \mathbb{N}$. Infatti

$$C^k = BA^k B^{-1} \Rightarrow C^{k+1} = C^k C = BA^k B^{-1} BAB^{-1} = BA^{k+1} B^{-1}.$$

Dunque

$$e^{BAB^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k B^{-1}}{k!} = B \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B^{-1} = Be^A B^{-1}.$$

6. Siccome ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $(A^T)^k = (A^k)^T$, allora

$$e^{A^T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^T)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)^T}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right)^T = (e^A)^T$$

7. Si dimostra facilmente nel caso di matrici con elementi complessi e come conseguenza vale anche per matrici reali. Ogni matrice complessa di dimensione $n \times n$ può essere espressa come $A = PUP^T$ dove U è una matrice triangolare superiore con elementi diagonali $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ uguali agli autovalori di A (decomposizione di Schur) e P è una matrice unitaria, cioè ha determinante di modulo pari a 1. La definizione di matrice esponenziale complessa è identica a quella data per matrici reali ed è immediato verificare che gli elementi diagonali di e^U sono $\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\}$. Essendo P invertibile, per il punto 5 si ha

$$e^A = Pe^U P^T$$

Dunque e^{λ_i} sono gli autovalori di e^A e

$$\det(e^A) = \det(e^U) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\text{tr}(U)} = e^{\text{tr}(A)}.$$

8. La dimostrazione è immediata osservando che $A^k = \text{diag} \{A_1^k, \dots, A_p^k\}$.

□

Proposizione 4.13 Sia $A \in gl(n, \mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ la mappa definita da $f(t) = e^{At}$. Allora f è differenziabile e $f'(t) = Ae^{At} = e^{At}A$. In particolare si ha $f'(0) = A$.

Dimostrazione Derivando la serie elemento per elemento si ha:

$$\frac{de^{At}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{dt^k}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

Scomponendo A^k come $A^k = AA^{k-1} = A^{k-1}A$ si ottiene rispettivamente:

$$\frac{de^{At}}{dt} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = A \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{h!} t^h = Ae^{At}.$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} A = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{h!} t^h A = e^{At}A.$$

Infine $f'(0) = \left. \frac{de^{At}}{dt} \right|_{t=0} = Ae^0 = A$.

□

Si ricorda ora che, dato uno spazio normato \mathcal{V} , una mappa $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ è differenziabile nel punto $x \in \mathcal{V}$ se esiste un operatore lineare $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tale che

$$f(x+h) - f(x) = Th + O(\|h\|^2). \quad (4.3)$$

In tal caso si dice che T è il differenziale di f in x e si pone $f'(x) = T$. La condizione 4.3 è verificata se

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

Proposizione 4.14 La mappa esponenziale $f : gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) | A \mapsto e^A$ è differenziabile in 0 ed il suo differenziale nell'origine è la matrice identità.

Dimostrazione. Sviluppando e^A in serie si ha

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Dunque

$$e^A - I - A = A^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^{k-2}}{k!} = A^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{(m+2)!}.$$

La serie nel secondo membro è convergente. Infatti la norma gli elementi della serie può essere maggiorata da

$$\left\| \frac{A^m}{(m+2)!} \right\| = \frac{\|A^m\|}{(m+2)!} \leq \frac{\|A\|^m}{m!}$$

che abbiamo visto essere i termini di una serie convergente. Prendendo la norma di entrambi i membri, per la:

$$\|e^A - I - A\| = \left\| A^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^{k-2}}{k!} \right\| \leq \|A\|^2 \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^{k-2}}{k!} \right\|$$

Posto

$$\epsilon(A) = \|A\| \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^{k-2}}{k!} \right\|$$

si ha che

$$\lim_{\|A\| \rightarrow 0} \frac{\|e^A - e^0 - IA\|}{\|A\|} = \lim_{\|A\| \rightarrow 0} \epsilon(A) = 0$$

che dimostra che la mappa esponenziale $A \mapsto e^A$ è differenziabile in 0 e il suo differenziale è l'identità.

□

Proposizione 4.15 Per ogni coppia di matrici $X, Y \in gl(n, \mathbb{R})$ vale

$$e^{Xt} e^{Yt} = e^{(X+Y)t + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Ricordando che $\frac{de^{Xt}}{dt} = X e^{Xt}$ e $\frac{de^{Xt}}{dt} \Big|_{t=0} = X$, si sviluppa e^{Xt} e e^{Yt} in serie di Taylor in $t = 0$.

$$\begin{aligned} e^{Xt} &= I + Xt + \frac{1}{2}X^2t^2 + O(t^3) \\ e^{Yt} &= I + Yt + \frac{1}{2}Y^2t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} e^{Xt} e^{Yt} &= \left(I + Xt + \frac{1}{2}X^2t^2 + O(t^3) \right) \left(I + Yt + \frac{1}{2}Y^2t^2 + O(t^3) \right) = \\ &= I + (X + Y)t + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2)t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

D'altra parte si ha che

$$\begin{aligned} e^{(X+Y)t + \frac{1}{2}[X,Y]t^2 + O(t^3)} &= \\ = e^{(X+Y)t + \frac{1}{2}(XY - YX)t^2 + O(t^3)} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((X+Y)t + \frac{1}{2}(XY - YX)t^2 + O(t^3) \right)^k}{k!} = \\
&= I + (X+Y)t + \frac{1}{2}(XY - YX)t^2 + \frac{1}{2}(X+Y)^2 t^2 + O(t^3) = \\
&= I + (X+Y)t + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2)t^2 + O(t^3)
\end{aligned}$$

□

Corollario 4.1 *Siano $X, Y \in gl(n, \mathbb{R})$. Allora l'esponenziale della somma $X + Y$ può essere espresso come*

$$e^{X+Y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} \right)^k.$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente, ponendo $t = \frac{1}{k}$, si ha

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} = e^{\frac{1}{k}(X+Y) + \frac{1}{k^2}[X,Y] + O(\frac{1}{k^3})}.$$

Dunque

$$\left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} \right)^k = e^{(X+Y) + \frac{1}{k}[X,Y] + O(\frac{1}{k^2})}$$

Passando al limite, per la continuità della mappa esponenziale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(X+Y) + \frac{1}{k}[X,Y] + O(\frac{1}{k^2})} = e^{X+Y}.$$

□

4.4 Logaritmo di matrici

Abbiamo visto che per ogni matrice $X \in gl(n, \mathbb{R})$ esiste ed è ben definita la matrice esponenziale e^X . Ci interessiamo adesso al problema inverso. In altre parole, data una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$, ci chiediamo sotto quali condizioni esiste una matrice reale $X \in gl(n, \mathbb{R})$ che sia soluzione dell'equazione

$$A = e^X.$$

Se tale matrice esiste, prende il nome di *logaritmo* della matrice A e si indica con $\ln(A)$. Inoltre, analogamente al caso dei numeri reali, se G ammette logaritmo si può definire l'esponenziale G^t per ogni $t \in \mathbb{R}$ come

$$G^t := e^{\ln(G)t}.$$

Per definizione G^t ammette un logaritmo reale e si ritrova la familiare proprietà dei logaritmi: $\ln(G^t) = \ln(G)t$.

Per la proposizione 4.14 la mappa esponenziale è differenziabile nell'origine. Siccome $e^0 = I$ il teorema di inversione garantisce l'esistenza e la differenziabilità del logaritmo localmente in un intorno della matrice identità. Si ha infatti che per ogni matrice nell'intorno $\|A - I\| \leq 1$ si può calcolare il logaritmo di una matrice come

$$\ln(A) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(I - A)^k}{k}$$

Per quanto riguarda matrici non vicine all'identità il problema è più complesso e a tale scopo si richiamano alcune nozioni di algebra lineare riguardanti le matrici di Jordan.

Definizione 4.15 (Blocco di Jordan) *Un blocco di Jordan di ordine k è una matrice triangolare superiore $J_k(\lambda) \in gl(k, \mathbb{C})$ di dimensione $k \times k$ della forma*

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Ovvero è una matrice con elementi diagonali $\lambda \in \mathbb{C}$ e elementi sulla diagonale superiore uguali a 1.

Un blocco di Jordan ha sempre un unico autovalore uguale a λ con molteplicità algebrica k e molteplicità geometrica 1. Infatti l'autospazio relativo all'autovalore λ , cioè il nucleo (lo spazio nullo) di $J(\lambda) - \lambda I$ ha dimensione 1.

$$\ker(J(\lambda) - \lambda I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid (J(\lambda) - \lambda I)x = 0 \right\} = \text{span}([1, 0, \dots, 0]^T)$$

Definizione 4.16 (Matrice di Jordan) *Una matrice di Jordan è una matrice diagonale a blocchi $J \in gl(n, \mathbb{C})$ del tipo*

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_N(\lambda_N) \end{bmatrix}$$

in cui $J_i(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, N$ sono blocchi di Jordan di ordine k_i e $k_1 + \dots + k_N = n$.

In particolare gli autovalori di J sono gli autovalori λ_i dei blocchi di Jordan, che non sono necessariamente distinti da un blocco all'altro. Dato un autovalore λ , ogni blocco di Jordan avente $\lambda_i = \lambda$ contribuisce all'autospazio di λ con uno spazio vettoriale di dimensione 1. Dunque la molteplicità geometrica di λ è pari al numero di blocchi aventi $\lambda_i = \lambda$ e la molteplicità algebrica è pari alla somma degli ordini dei blocchi aventi $\lambda_i = \lambda$.

Dal teorema di diagonalizzabilità, una matrice $A \in gl(n, \mathbb{C})$ è diagonalizzabile se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è pari a n e le molteplicità algebriche e geometriche di ogni autovalore coincidono. Dunque ogni blocco di Jordan non è diagonalizzabile a meno che non sia di ordine 1 e una matrice di Jordan non è diagonalizzabile a meno che non sia composta da blocchi di Jordan di ordine 1 e che sia dunque già diagonale.

Il teorema di Jordan afferma che una matrice $A \in gl(n, \mathbb{K})$ a valori in un campo \mathbb{K} è simile ad una matrice di Jordan J (esiste cioè una matrice invertibile $P \in gl(n, \mathbb{K})$ tale che $A = PJP^{-1}$) se tutti i suoi autovalori appartengono al campo \mathbb{K} . Dunque ogni matrice $A \in gl(n, \mathbb{C})$ (e dunque ogni matrice a valori reali se considerata come caso particolare di una matrice complessa) è simile ad una matrice di Jordan. Se inoltre A è diagonalizzabile, la matrice di Jordan associata ad A è diagonale. Gli autovalori di A sono gli autovalori della matrice di Jordan e quando si parlerà di blocchi di Jordan relativi all'autovalore λ si intenderanno i relativi blocchi della matrice di Jordan simile ad A .

Ritornando al problema dell'esistenza del logaritmo di una matrice reale, si enunciano senza dimostrazione i seguenti teoremi (le dimostrazioni sono presentate in [9, pag. 1146-1151] e in [10, pag.131-142]).

Teorema 4.1 *Sia $A \in gl(n, \mathbb{R})$. Esiste una soluzione reale dell'equazione $e^X = A$ se e solo se A è non singolare e ad ogni autovalore reale negativo corrisponde un numero pari di blocchi di Jordan.*

Corollario 4.2 *Se una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ non ha autovalori reali negativi allora ammette un logaritmo reale.*

Il teorema 4.1 non garantisce l'unicità del logaritmo reale. Infatti in generale una matrice ha un numero infinito di logaritmi, ma uno solo ha autovalori aventi parte immaginaria contenuta in $[-\pi, \pi]$. Quest'ultimo prende il nome di *logaritmo principale*.

Teorema 4.2 *Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$. A ammette un unico logaritmo reale se e solo se tutti i suoi autovalori sono reali positivi e corrispondono ognuno ad un solo blocco di Jordan.*

4.5 Sottogruppi ad un parametro

Definizione 4.17 (Sottogruppo ad un parametro) Sia $(\mathcal{G}, *)$ un gruppo. Un sottogruppo ad un parametro di \mathcal{G} è una mappa continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ tale che $\forall t, s \in \mathbb{R}$

$$f(t+s) = f(t) * f(s)$$

Il nome *sottogruppo* deriva dal fatto che l'immagine di \mathbb{R} tramite f è un sottogruppo di \mathcal{G} . Sia infatti $\mathcal{S} = f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$. Allora

$$\mathcal{S} = \{g \in \mathcal{G} \mid f(t) = g, t \in \mathbb{R}\}.$$

L'elemento neutro e di \mathcal{G} appartiene a \mathcal{S} perchè $e = f(0)$. Infatti dalla definizione di sottogruppo ad un parametro, per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t+0) = f(t) * f(0) \\ f(t) &= f(0+t) = f(0) * f(t). \end{aligned}$$

Ogni $g \in \mathcal{S}$ l'inverso g^{-1} appartiene a \mathcal{S} . Infatti $g = f(t)$ e $g^{-1} = f(-t)$:

$$f(t) * f(-t) = f(-t) * f(t) = f(t-t) = f(0) = e$$

Infine \mathcal{S} è chiuso rispetto all'operazione binaria $*$ perchè per definizione

$$f(t) * f(s) = f(t+s) \in \mathcal{S}.$$

Proposizione 4.16 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo ad un parametro di $GL(n, \mathbb{R})$. Allora f è differenziabile.

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Per la continuità di f esiste l'integrale $\int_0^a f(t) dt$. Per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_s^{s+a} f(t) dt = \int_0^a f(t+s) dt = \int_0^a f(t) f(s) dt = f(s) \int_0^a f(t) dt$$

Se si dimostra che esiste una costante $a > 0$ tale che $\int_0^a f(t) dt$ è una matrice invertibile si può scrivere

$$f(s) = \int_s^{s+a} f(t) dt \left(\int_0^a f(t) dt \right)^{-1}$$

e dunque f è differenziabile perchè l'integrale $\int_s^{s+a} f(t) dt$ è differenziabile rispetto ad s . La mappa f è continua e $f(0) = I$, per cui esiste un intorno $[-a, a]$ di 0 tale che $\|f(t) - f(0)\| = \|f(t) - I\| < \frac{1}{2}$ per ogni $t \in [-a, a]$. Siccome

$$\int_0^a I dt = aI$$

si ha

$$\left\| \frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt - I \right\| = \left\| \frac{1}{a} \int_0^a (f(t) - I) dt \right\| \leq \frac{1}{2} < 1$$

Essendo le matrici $n \times n$ operatori limitati su \mathbb{R}^n che è completo, per la proposizione 4.7 si ha che

$$I - \left(\frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt - I \right) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt$$

è invertibile.

□

Proposizione 4.17 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo ad un parametro di $GL(n, \mathbb{R})$. Allora $\exists! X \in gl(n, \mathbb{R})$ t.c. $f(t) = e^{Xt}, \forall t \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'esistenza. Dalla proposizione 4.16 f è differenziabile. Dunque

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t+s) - f(t)}{s} = f(t) \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - I}{s} \right) = \\ &= f(t) \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s} \right) = f(t) f'(0). \end{aligned}$$

Cioè f è soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} f'(t) = f(t)X \\ f(0) = I \end{cases}$$

dove $X = f'(0)$ e dalla proposizione 4.13 è immediato verificare che $f(t) = e^{Xt}$ è soluzione di tale sistema. Volendo ora dimostrare l'unicità, siano $X_1, X_2 \in gl(n, \mathbb{R})$ due matrici tali che $f(t) = e^{X_1 t} = e^{X_2 t}$. Allora si ha che $f'(0) = X_1 = X_2$.

□

Alla luce della proposizione precedente si può dare la seguente definizione.

Definizione 4.18 (Generatore infinitesimale) . *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo ad un parametro di $GL(n, \mathbb{R})$. Si definisce generatore infinitesimale di f l'unico elemento $X \in gl(n, \mathbb{R})$ tale che $f(t) = e^{Xt}, \forall t \in \mathbb{R}$ e $X = f'(0)$.*

In particolare siccome $f(t)$ è invertibile e $f'(t) = Xf(t) = f(t)X$ si può esprimere il generatore infinitesimale come

$$X = (f(t))^{-1} f'(t) = f'(t) (f(t))^{-1}.$$

4.6 Gruppi di Lie lineari

Diamo la seguente definizione di gruppo di Lie lineare.

Definizione 4.19 (Gruppo di Lie lineare) *Un gruppo di Lie lineare è un sottogruppo chiuso di $GL(n, \mathbb{R})$.*

In seguito quando parleremo di gruppi di Lie verrà sottointeso che si tratta di gruppi di Lie lineari. In realtà il concetto di gruppo di Lie è più generale e non si limita al caso di gruppi di matrici. Infatti un gruppo di Lie è un insieme che è simultaneamente un gruppo e una varietà differenziabile, cioè una generalizzazione del concetto di curva e superficie differenziabile in spazi diversi da \mathbb{R}^n . Essendo interessati solo al caso matriciale possiamo limitarci alla definizione data. E' bene però tenere in considerazione la nozione di gruppo di Lie come varietà per poter dare anche solo intuitivamente un'interpretazione geometrica. Ad esempio, considerando il gruppo di Lie $GL(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo ad un parametro definisce una curva differenziabile $f(t) = e^{Xt}$ nella varietà delle matrici invertibili che in $t = 0$ passa per la matrice identità e in $t = 1$ passa per la matrice $A = e^X$. Inoltre tale curva è geodetica, ovvero è il cammino 'più breve' tra tutti quelli congiungenti le due matrici e si può interpretare come curva 'interpolante' [11],[14].

Vedremo che ad ogni gruppo di Lie \mathcal{G} è associata un'algebra di Lie \mathcal{A} che non è altro che l'insieme dei differenziali in $t = 0$ di tutte le curve γ differenziabili sulla varietà tali che $\gamma(0) = I$. Ad esempio tutti i generatori infinitesimali di sottogruppi ad un parametro a valori nel gruppo appartengono all'algebra. Si potrà quindi interpretare l'algebra di Lie come lo spazio tangente alla varietà nella matrice identità.

Sia dunque \mathcal{G} un gruppo di Lie e si consideri il seguente insieme:

$$\mathcal{A} = \{X = \gamma'(0) | \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}, \gamma(0) = I, \gamma \in C^1, 0 \in [a, b]\} \quad (4.4)$$

Ovvero \mathcal{A} è l'insieme di tutti i differenziali in 0 di tutte le curve differenziabili su intervalli di \mathbb{R} contenenti lo 0 e passanti nella matrice identità in $t = 0$.

Teorema 4.3 *Sia \mathcal{G} un gruppo di Lie e sia \mathcal{A} l'insieme definito da (4.4). Allora*

1. \mathcal{A} è un sottospazio vettoriale di $gl(n, \mathbb{R})$;
2. $X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{Xt} \in \mathcal{G}$;
3. $X \in \mathcal{A}, G \in \mathcal{G} \Rightarrow GXG^{-1} \in \mathcal{A}$;
4. \mathcal{A} è chiuso rispetto alla commutazione di matrici $[\cdot, \cdot]$.

Dimostrazione.

1. Vogliamo dimostrare che \mathcal{A} è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici quadrate di dimensione n . Dobbiamo mostrare dunque che \mathcal{A} contiene la matrice nulla ed è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare.

- Si consideri la curva costante $\gamma(t) = I$. Tale curva passa in I per $t = 0$, è differenziabile ovunque e $\gamma'(0) = 0$, dunque $0 \in \mathcal{A}$;
- sia $X \in \mathcal{A}$. Allora esiste una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{G}$ differenziabile tale che $0 \in [a, b]$ e $\gamma(0) = I$ e $X = \gamma'(0)$. Sia ora $\psi : [a, b] \rightarrow \mathcal{G}$ tale che $\psi(t) = \gamma(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora ψ è differenziabile e $\psi(0) = \gamma(0) = I$ e $\psi'(0) \in \mathcal{A}$. Considerando che $\psi'(t) = \lambda\gamma'(t)$, si ha che $\lambda X = \psi'(0) = \lambda\gamma'(0) \in \mathcal{A}$;
- siano $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$. Allora esistono due curve $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathcal{G}$ differenziabili tali che $0 \in [a, b]$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I$ e $X_1 = \gamma_1'(0), X_2 = \gamma_2'(0)$. Si ponga ora $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. γ è differenziabile e $\gamma(0) = I$, dunque $\gamma'(0) \in \mathcal{A}$. Ma

$$\gamma'(0) = \left. \frac{d}{dt} \gamma_1(t)\gamma_2(t) \right|_{t=0} = [\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)]_{t=0} = X_1 + X_2$$

Dunque $X_1 + X_2 \in \mathcal{A}$.

2. Sia $X \in gl(n, \mathbb{R})$ tale che $e^{Xt} \in \mathcal{G}, \forall t \in \mathbb{R}$. Allora $\gamma(t) = e^{Xt}$ è un sottogruppo ad un parametro di \mathcal{G} . Dunque γ è differenziabile e $\gamma(0) = I$, cioè $X = \gamma'(0) \in \mathcal{A}$. Viceversa sia $X \in \mathcal{A}$. Allora esiste una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{G}$ differenziabile tale che $\gamma(0) = I$, $0 \in [a, b]$ e $X = \gamma'(0)$. Sviluppando γ in serie di Taylor in $t = 0$ si ha, per ogni $k > 0$:

$$\gamma\left(\frac{t}{k}\right) = \gamma(0) + \gamma'(0)\frac{t}{k} + O\left(\frac{t^2}{k^2}\right) = I + X\frac{t}{k} + O\left(\frac{t^2}{k^2}\right).$$

Dunque

$$\gamma\left(\frac{t}{k}\right) = e^{X\frac{t}{k} + O\left(\frac{t^2}{k^2}\right)}$$

Essendo la mappa esponenziale continua, elevando entrambi i membri alla k e passando al limite per $k \rightarrow \infty$ si ottiene :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right) \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{Xt + O\left(\frac{t^2}{k}\right)} = e^{Xt}$$

Siccome \mathcal{G} è un gruppo rispetto alla moltiplicazione matriciale, $\gamma\left(\frac{t}{k}\right) \in \mathcal{G}$ implica che $\left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k \in \mathcal{G}, \forall k > 0$. Infine, essendo \mathcal{G} un insieme chiuso, il limite della successione appartiene \mathcal{G} e quindi $e^{Xt} \in \mathcal{G}$.

3. Siano $X \in \mathcal{A}, G \in \mathcal{G}$. Per il punto 2 si ha che $e^{Xt} \in \mathcal{G}$ ed inoltre g è invertibile perchè $\mathcal{G} \subset GL(n, \mathbb{R})$. Dunque ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che $Ge^{Xt}G^{-1} \in \mathcal{G}$. Per le proprietà della matrice esponenziale $Ge^{Xt}G^{-1} = e^{t(GXG^{-1})}$. Di nuovo dal punto due segue che $GXG^{-1} \in \mathcal{A}$.
4. Vogliamo dimostrare ora la chiusura rispetto al bracket $[\cdot, \cdot]$, ovvero che ogni $X, Y \in \mathcal{A}$, la matrice $[X, Y] = XY - YX \in \mathcal{A}$. Dal punto 2 segue che $e^{Xt}, e^{Yt} \in \mathcal{G}$. Inoltre quest'ultime matrici sono invertibili e hanno inverse $e^{-Xt}, e^{-Yt} \in \mathcal{G}, \forall t \in \mathbb{R}$. Si ponga

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= e^{Xt}, & \psi_1 &= e^{-Xt} \\ \gamma_2 &= e^{Yt}, & \psi_2 &= e^{-Yt}.\end{aligned}$$

Tali funzioni sono differenziabili infinite volte e

$$\begin{aligned}\gamma_1' &= Xe^{Xt}, & \psi_1' &= -Xe^{-Xt} \\ \gamma_2' &= Ye^{Yt}, & \psi_2' &= -Ye^{-Yt}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1'' &= X^2e^{Xt}, & \psi_1'' &= X^2e^{-Xt} \\ \gamma_2'' &= Y^2e^{Yt}, & \psi_2'' &= Y^2e^{-Yt}.\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor al secondo ordine in $t = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = I + Xt + \frac{1}{2}X^2t^2 + O(t^3) \\ \gamma_2(t) = I + Yt + \frac{1}{2}Y^2t^2 + O(t^3) \\ \psi_1(t) = I - Xt + \frac{1}{2}X^2t^2 + O(t^3) \\ \psi_2(t) = I - Yt + \frac{1}{2}Y^2t^2 + O(t^3) \end{cases}$$

Ponendo $h(\tau) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)\psi_1(t)\psi_2(t)$ con $\tau = t^2$ si ha che h è definita su ogni intervallo $[0, b]$ e che $h(0) = I$. Inoltre:

$$h(\tau) = I + [X, Y]\tau + o(\tau)$$

Cioè $h(\tau)$ è differenziabile in $\tau = 0$ e

$$[X, Y] = \left. \frac{dh(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}.$$

Dunque $[X, Y] \in \mathcal{A}$.

□

I punti 1 e 4 del teorema 4.3 implicano che \mathcal{A} è una sottoalgebra di Lie di $gl(n, \mathbb{R})$. Il punto 2 caratterizza invece la relazione tra il gruppo di Lie \mathcal{G} e l'algebra di Lie \mathcal{A} permettendo dunque di dare la seguente definizione e la seguente proposizione.

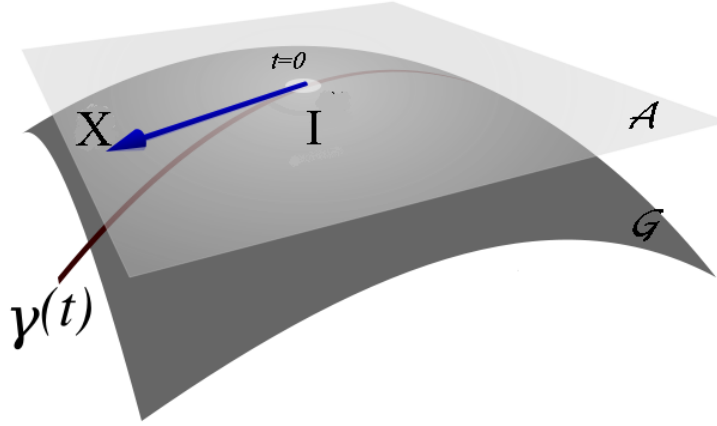


Figura 4.1: L'algebra di Lie di un gruppo di Lie è lo spazio tangente nella matrice identità.

Definizione 4.20 (Algebra di Lie di un gruppo di Lie) . Sia \mathcal{G} un gruppo di Lie. L'algebra di Lie \mathcal{A} definita da (4.4) è detta algebra di Lie del gruppo \mathcal{G} (o spazio tangente a \mathcal{G} nell'identità). La dimensione del gruppo di Lie \mathcal{G} è la dimensione dello spazio vettoriale \mathcal{A} e coincide con il numero di parametri necessari a parametrizzare gli elementi del gruppo. La dimensione di \mathcal{G} è anche la dimensione del gruppo di Lie inteso come varietà differenziabile.

Proposizione 4.18 Sia \mathcal{G} un gruppo di Lie. Un'algebra di Lie \mathcal{A} è l'algebra del gruppo \mathcal{G} se e solo se

$$X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{Xt} \in \mathcal{G}.$$

Dalla definizione è evidente che non esiste una corrispondenza biunivoca tra un gruppo di Lie e la sua algebra. Infatti per ogni matrice $X \in \mathcal{A}$ esistono infinite matrici e^{Xt} appartenenti al gruppo \mathcal{G} . Per di più la mappa esponenziale in genere non è nè iniettiva nè suriettiva perchè diverse matrici possono avere lo stesso esponenziale e viceversa non è detto una matrice ammetta un logaritmo reale. In altre parole non è detto che il punto G sulla varietà differenziabile giaccia su qualche curva differenziabile della forma $\gamma(t) = e^{Xt}$.

Esempio. L'algebra di Lie $gl(n, \mathbb{R})$ è l'algebra di Lie del gruppo di Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Infatti abbiamo già visto che se $X \in gl(n, \mathbb{R})$ allora e^{Xt} è invertibile e dunque appartiene a $GL(n, \mathbb{R})$. Viceversa se una matrice invertibile $g \in GL(n, \mathbb{R})$ può essere espressa come $g = e^{Xt}$ per qualche $t \in \mathbb{R}$ (cioè se ammette un logaritmo reale), allora $X \in gl(n, \mathbb{R})$. Il gruppo di Lie $GL(n, \mathbb{R})$

ha dimensione n^2 .

Definizione 4.21 (Morfismo tra gruppi di Lie) . Siano $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ due gruppi di Lie lineari. Un morfismo tra \mathcal{G} e \mathcal{G}' è un morfismo continuo tra i due gruppi. Cioè un'applicazione continua $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ tale che $f(GG') = f(G)f(G')$.

Teorema 4.4 Sia $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ un morfismo tra i gruppi di Lie \mathcal{G} e \mathcal{G}' e siano $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ le rispettive algebre di Lie.

1. $\forall X \in \mathcal{A}$ la mappa $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}' | h(t) = f(e^{Xt})$ è un sottogruppo ad un parametro di \mathcal{G}' .

2. Sia

$$\varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{Xt}) \right|_{t=0}.$$

Allora $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha che $f(e^{Xt}) = e^{\varphi(X)t}$. Dunque $\varphi(X) \in \mathcal{A}'$.

3. La mappa $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ è lineare.

4. La mappa $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ è un morfismo tra le algebre di Lie \mathcal{A} e \mathcal{A}'

Dimostrazione.

1. Si vuole dimostrare che h è un sottogruppo ad un parametro di \mathcal{G}' , cioè che è un'applicazione continua e vale $h(t+s) = h(t)h(s), \forall t, s \in \mathbb{R}$. La continuità è garantita dal fatto che h è composizione del morfismo f e della mappa esponenziale che sono funzioni continue. Inoltre, per la definizione di morfismo:

$$h(t+s) = f(e^{X(t+s)}) = f(e^{Xt}e^{Xs}) = f(e^{Xt})f(e^{Xs}) = h(t)h(s).$$

2. Dal punto 1 h è un sottogruppo ad un parametro e $\varphi(X)$ è il suo generatore infinitesimale. Infatti

$$\varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{Xt}) \right|_{t=0} = h'(0).$$

Dunque $h(t) = f(e^{Xt}) = e^{\varphi(X)t} \in \mathcal{G}', \forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{A}$. Dal punto 2 del teorema (4.3) per ogni matrice X nell'algebra di Lie \mathcal{A} la matrice $\varphi(X) \in \mathcal{A}'$.

3. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $h(t) = f(e^{t(\lambda X)})$. Siccome $\lambda X \in \mathcal{A}$, dai punti 1 e 2 si ha che h è un sottogruppo ad un parametro di \mathcal{G}' con generatore $\varphi(\lambda X)$, ma

$$\varphi(\lambda X) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{\lambda(Xt)}) \right|_{t=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{df(A)}{dA} \Big|_{A=e^{\lambda(Xt)}} \frac{d}{dt} e^{\lambda(tX)} \right]_{t=0} = \\
&= \lambda \left[\frac{df(A)}{dA} \Big|_{A=e^{\lambda(Xt)}} X e^{\lambda(tX)} \right]_{t=0} = \\
&= \lambda \left[\frac{df(A)}{dA} \Big|_{A=e^{X(t\lambda)}} \frac{d}{d(t\lambda)} e^{\lambda(tX)} \right]_{t\lambda=0} = \\
&= \lambda \frac{d}{d(t\lambda)} f(e^{X(t\lambda)}) \Big|_{t\lambda=0} = \lambda \varphi(X).
\end{aligned}$$

Siano ora $X, Y \in \mathcal{A}$ e sia $h(t) = f(e^{(X+Y)t})$. Sempre per i punti 1 e 2 si ha che h è un sottogruppo ad un parametro di \mathcal{G}' con generatore infinitesimale $\varphi(X+Y)$. Dunque

$$f(e^{(X+Y)t}) = e^{\varphi(X+Y)t}$$

Dal corollario (4.1) si può esprimere l'esponenziale della somma $X+Y$ come

$$e^{(X+Y)t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} \right)^k.$$

Dunque, per la continuità di f e dell'esponenziale, per la definizione e le proprietà di morfismo e per il punto 2 si ha:

$$\begin{aligned}
f\left(e^{(X+Y)t}\right) &= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{k}Xt} e^{\frac{1}{k}Yt}\right)^k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\left(e^{\frac{1}{k}Xt} e^{\frac{1}{k}Yt}\right)^k\right) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(e^{\frac{1}{k}Xt} e^{\frac{1}{k}Yt}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f\left(e^{\frac{1}{k}Xt}\right) f\left(e^{\frac{1}{k}Yt}\right)\right)^k = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{k}\varphi(X)t} e^{\frac{1}{k}\varphi(Y)t}\right)^k = e^{(\varphi(X)+\varphi(Y))t}
\end{aligned}$$

Eguagliando le due espressioni di $f(e^{(X+Y)t})$ si ottiene che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$e^{\varphi(X+Y)t} = e^{(\varphi(X)+\varphi(Y))t},$$

che implica $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$.

4. Per dimostrare che φ è un morfismo tra le algebre di Lie \mathcal{A} e \mathcal{A}' dobbiamo mostrare che

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}, [\varphi(X), \varphi(Y)] = \varphi([X, Y])$$

cioè che $\varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X) = \varphi(XY - YX)$. Verifichiamo innanzi tutto che $\forall G \in \mathcal{G}, \forall X \in \mathcal{A}$ vale $\varphi(GXG^{-1}) = f(G)\varphi(X)f(G^{-1})$. Dal punto 3 del teorema (4.3) $GXG^{-1} \in \mathcal{A}$ e dunque $e^{GXG^{-1}} \in \mathcal{G}$. Inoltre

$$f\left(e^{tGXG^{-1}}\right) = f\left(e^{G(Xt)G^{-1}}\right) = f\left(Ge^{Xt}G^{-1}\right) = f(G)f\left(e^{Xt}\right)f(G^{-1}).$$

Differenziando in $t = 0$:

$$\varphi(GXG^{-1}) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{tGXG^{-1}}) \right|_{t=0} = f(G)\varphi(X)f(G^{-1}).$$

Siano ora $X, Y \in \mathcal{A}$. Allora $G = e^{Yt} \in \mathcal{G}$ e si ha

$$\varphi(e^{Yt}Xe^{-Yt}) = f(e^{Yt})\varphi(X)f(e^{-Yt})$$

Differenziando entrambi i membri in $t = 0$ si ha che per la linearità di φ il primo risulta essere

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi(e^{Yt}Xe^{-Yt}) \right|_{t=0} = \varphi \left(\left. \frac{d}{dt} e^{Yt}Xe^{-Yt} \right|_{t=0} \right) = \varphi(YX - XY) = \varphi([Y, X])$$

ed il secondo, ricordando che $f(I) = I$ risulta

$$\left. \frac{d}{dt} f(e^{Yt})\varphi(X)f(e^{-Yt}) \right|_{t=0} = \varphi(Y)\varphi(X) - \varphi(X)\varphi(Y) = [\varphi(Y), \varphi(X)].$$

Dunque $\varphi([Y, X]) = [\varphi(Y), \varphi(X)]$.

□

Alla luce del teorema 4.4 si può dare la seguente

Definizione 4.22 (Differenziale di un morfismo tra gruppi di Lie) .

Sia $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ un morfismo tra i gruppi di Lie \mathcal{G} e \mathcal{G}' e siano \mathcal{A} e \mathcal{A}' le rispettive algebre di Lie. Allora il morfismo tra algebre di Lie

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' \mid \varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{Xt}) \right|_{t=0}$$

è detto differenziale del morfismo tra gruppi f e viene indicato con Df :

$$Df(X) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{Xt}) \right|_{t=0}.$$

Il teorema 4.4 è molto importante perché fornisce una connessione tra diversi gruppi di Lie. Ad esempio se $G \in \mathcal{G}$ è una matrice che ammette logaritmo $\ln(G) = X$ nell'algebra di Lie \mathcal{A} allora per ogni t reale possiamo definire l'esponenziale $G^t := e^{Xt}$ ottenendo così una curva nella varietà costituita dal gruppo \mathcal{G} . Se in un'applicazione la matrice G è incognita, ma si conosce una matrice H in un altro gruppo di Lie \mathcal{G}' legata a G dal morfismo f , per il teorema precedente si ha che $H = f(G) = f(e^X) = e^{Df(X)}$. Cioè $\ln(H) = Df(X)$ appartiene all'algebra di Lie del gruppo \mathcal{G}' . Dunque $H^t = e^{Df(X)t}$ è a sua volta una curva nella varietà costituita dal gruppo \mathcal{G}' (fig.4.5). Si sottolinea che questo è possibile solo se il logaritmo di G appartiene all'algebra di Lie del gruppo \mathcal{G} .

$$\begin{array}{ccc} G^t & \xrightarrow{f} & H^t \\ \uparrow e^{Xt} & & \uparrow e^{Df(X)t} \\ X & \xrightarrow{Df} & Df(X) \end{array} \quad (4.5)$$

4.7 Movimenti rigidi e gruppo speciale euclideo

Si consideri il gruppo speciale euclideo $SE(n, \mathbb{R})$, cioè il sottogruppo di $SL(n+1, \mathbb{R})$ le cui matrici sono della forma:

$$G = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

dove $R \in SO(n, \mathbb{R})$ è una matrice di rotazione, cioè è ortogonale con determinante unitario, e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ è un vettore. Abbiamo già visto che ogni trasformazione del tipo (4.6) è una rototraslazione in \mathbb{R}^3 , infatti dato $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$ nello spazio proiettivo riscalo in modo tale che $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{x}}, 1]^T$ con $\tilde{\mathbf{x}}$ coordinate euclidee di \mathbf{x} .

$$G\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tale gruppo è importante perchè rappresenta tutti gli spostamenti rigidi nello spazio R^3 . Infatti intuitivamente lo spostamento di un corpo rigido da una posizione ad un'altra nello spazio è rappresentabile da una trasformazione che porta un insieme \mathcal{O} dei punti dell'oggetto in un insieme $f(\mathcal{O})$ preservando la distanza tra ogni punto dell'oggetto. In matematica tale trasformazione è detta *isometria*. Non tutte le isometrie però rappresentano spostamenti rigidi perchè alcune di esse 'ribaltano' l'oggetto. A seguito della trasformazione si cioè ha un oggetto non più uguale a quello iniziale, ma speculare come lo si vedrebbe in uno specchio. Tecnicamente dunque uno spostamento rigido è una isometria che conserva l'orientazione degli assi, cioè una trasformazione che applicata alla base ortonormale destrorsa di \mathbb{R}^3 da ancora una terna destrorsa. Ci limitiamo nel seguito a presentare il caso di \mathbb{R}^3 , ma quasi tutti i risultati sono estendibili ad ogni spazio vettoriale finito dimensionale munito di un prodotto scalare e della norma indotta dal prodotto scalare.

Si prenda in considerazione dapprima il gruppo $O(3, \mathbb{R})$, cioè il gruppo delle matrici ortogonali.

$$O(3, \mathbb{R}) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I\}.$$

Proposizione 4.19 *Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 munito della norma euclidea $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. $A \in O(3, \mathbb{R})$.
2. Le colonne (e le righe) di A sono una base ortonormale di \mathbb{R}^3 .
3. $(A\mathbf{x})^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.
4. $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Dimostrazione.

- (1 \Leftrightarrow 2). Sia $A = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3]$ dove \mathbf{c}_i sono le colonne di A . Allora $A^T A = I$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2^T \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2^T \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_3^T \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3^T \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovvero $\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = 0$ ogni $i \neq j$ e $\|\mathbf{c}_i\| = \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i = 1$. Dunque $A^T A = I$ se e solo se le colonne di A sono ortogonali e hanno norma unitaria e costituiscono quindi una base ortonormale di \mathbb{R}^3 . Analogamente, sia $A = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]^T$ dove \mathbf{r}_i sono le righe di A . Allora $AA^T = I$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cioè se e solo se anche le righe di A sono una base ortonormale di \mathbb{R}^3 .

- (1 \Leftrightarrow 3). Sia $A \in O(3, \mathbb{R})$. Allora $A^T A = I$ e ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ay}) = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{Ay} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Viceversa se $(\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ay}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ allora $\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$.
Dunque

$$\mathbf{x}^T (A^T A - I) \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

e trasponendo

$$\mathbf{x}^T (AA^T - I) \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Cioè $A^T A - I = AA^T - I = 0$.

- (3 \Leftrightarrow 4). Sia $(\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ay}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Viceversa sia $\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Siccome $\|\cdot\|$ è la norma indotta dal prodotto scalare si ha

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y})^T (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Dunque

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \right)$$

$$(\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ay}) = \frac{1}{2} \left(\|A(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{Ax}\|^2 - \|\mathbf{Ay}\|^2 \right)$$

dove i due secondi membri sono uguali per ipotesi. Dunque $(\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ay}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$.

□

Definizione 4.23 Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale munito di una norma $\|\cdot\|$. Una isometria è una trasformazione suriettiva $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tale che

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}.$$

In altre parole è una trasformazione che ‘conserva’ le distanze nella metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|$.

Una isometria è necessariamente continua e iniettiva infatti $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ implica che $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = 0$, cioè $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dunque ogni isometria è una trasformazione invertibile e l’inversa è ancora un’isometria. Inoltre la composizione di isometrie f e g è a sua volta una isometria, infatti $\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{y}))\| = \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

In particolare, dal punto (4) della proposizione (4.19), ogni applicazione $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$ con $A \in O(3, \mathbb{R})$ e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ è un’isometria rispetto alla norma euclidea. Infatti

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

e tale mappa è suriettiva poichè A è invertibile.

Proposizione 4.20 Se λ è un autovalore di $A \in O(3, \mathbb{R})$ allora $|\lambda| = 1$ e di conseguenza $|\det(A)| = 1$.

Dimostrazione. Siccome $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ è un’isometria la dimostrazione è immediata. Infatti per ogni autovettore \mathbf{x} associato a λ si ha $\|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

Vogliamo mostrare ora che ogni isometria $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è della forma $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$. A tale scopo premettiamo il seguente

Lemma 4.1 Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un’isometria rispetto alla norma euclidea tale che $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Allora:

1. $f(\mathbf{x})^T f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$;
2. f è lineare.

Si noti che la linearità implica che f è della forma $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A \in O(3, \mathbb{R})$. Infatti essendo f un’isometria si ha che $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ e dalla proposizione 4.19 segue l’ortogonalità di A .

Dimostrazione.

1. Se $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ allora $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Sempre dal fatto che $\|\cdot\|$ è la norma indotta dal prodotto scalare si ha che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Quindi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right)$$

$$f(\mathbf{x})^T f(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\|f(\mathbf{x})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 \right)$$

dove i secondi membri sono uguali. Dunque $f(\mathbf{x})^T f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$.

2. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Mostriamo che $\|f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = 0$

$$\begin{aligned} & \|f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 = \\ & = (f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}))^T (f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) = \\ & = \|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|f(\mathbf{x})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2 + \\ & - 2f(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T f(\mathbf{x}) - 2f(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T f(\mathbf{y}) + 2f(\mathbf{x})^T f(\mathbf{y}) = \\ & = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \\ & - 2f(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T f(\mathbf{x}) - 2f(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T f(\mathbf{y}) + 2f(\mathbf{x})^T f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Dal punto uno si ha quindi

$$\begin{aligned} & \|f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 = \\ & = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T \mathbf{y} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \\ & = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \\ & = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0. \end{aligned}$$

Dunque $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$. Sia ora $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \|f(\lambda \mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x})\| & = (f(\lambda \mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x}))^T (f(\lambda \mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x})) = \\ & = \|f(\lambda \mathbf{x})\|^2 + \lambda^2 \|f(\mathbf{x})\|^2 - 2\lambda f(\lambda \mathbf{x})^T f(\mathbf{x}) = \\ & = \|\lambda \mathbf{x}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2 - 2\lambda (\lambda \mathbf{x})^T \mathbf{x} = \\ & = 2\lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2 - 2\lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2 = 0. \end{aligned}$$

E quindi $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$.

□

Proposizione 4.21 *Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria rispetto alla norma euclidea. Allora esistono una matrice $A \in O(3, \mathbb{R})$ ed un vettore $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ tali che*

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostrazione. Si ponga $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$. g è ancora un'isometria infatti $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ed è suriettiva perchè è invertibile. Inoltre $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e per il lemma precedente esiste una matrice $A \in O(3, \mathbb{R})$ tale che $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Dunque, posto $\mathbf{t} = f(\mathbf{0})$.

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

□

Abbiamo detto che il fatto che f sia una isometria non è sufficiente a descrivere lo spostamento di un corpo rigido. Infatti alcune isometrie invertono l'orientazione degli assi cartesiani e trasformano ogni configurazione di punti in una configurazione speculare. Si consideri per esempio l'isometria $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per ogni punto $\mathbf{x} = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$, l'immagine $A\mathbf{x} = [x, y, -z]^T$ è simmetrica rispetto al piano $z = 0$. Quindi, considerato un oggetto come un insieme di punti \mathcal{O} , l'immagine $f(\mathcal{O})$ è riflessa rispetto tale piano (come in uno specchio). Non esiste dunque nessun movimento rigido dentro \mathbb{R}^3 che porti \mathcal{O} in $f(\mathcal{O})$. E' evidente che, data una generica isometria $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$, ciò che determina se questa produce una riflessione è la matrice A perchè \mathbf{t} contribuisce solo con una traslazione. Sia dunque $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. In particolare per il lemma 4.1 l'isometria f porta ogni base ortonormale in una base ortonormale. Viceversa ogni cambiamento di base tra basi ortonormali è esprimibile come una isometria $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Se la prima è destrorsa e la seconda è sinistrorsa o viceversa allora l'isometria non conserva l'orientazione e dunque non rappresenta un movimento rigido. Volendo formalizzare questo discorso diamo la seguente

Definizione 4.24 *Siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ due basi ortonormali di \mathbb{R}^3 . Si dice che \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 definiscono la stessa orientazione se il determinante della matrice di cambiamento di base A è positivo. In tal caso si pone $\mathcal{B}_1 \approx \mathcal{B}_2$.*

Il cambio tra basi ortonormali è dato dalla isometria $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ e il valore assoluto del determinante di A è pari a uno. Le due basi definiscono quindi la stessa orientazione solo se $\det(A) = 1$. Si verifica facilmente che \approx è una relazione di equivalenza. Ogni base ortonormale è equivalente a se stessa perchè in tal caso $A = I$. La matrice inversa A^{-1} è la matrice di

cambiamento di base da \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_1 e $\det(A^{-1}) = \det(A)$ e vale la proprietà riflessiva. Infine date tre basi ortonormali $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$, sia A_1 il cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 e A_2 il cambiamento di base da \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_3 . La matrice di cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_3 è A_1A_2 e $\det(A_1A_2) = \det(A_1)\det(A_2)$, dunque se $\mathcal{B}_1 \approx \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2 \approx \mathcal{B}_3$ anche $\mathcal{B}_1 \approx \mathcal{B}_3$.

Definizione 4.25 (Orientazione) *Un orientazione di \mathbb{R}^3 è una classe di equivalenza di \approx . Lo spazio \mathbb{R}^3 si dice orientato una volta scelta una orientazione.*

Esistono solo due orientazioni di \mathbb{R}^3 perchè ogni base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ è equivalente o alla base canonica $\mathcal{C} = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ che è destrorsa o alla base $\mathcal{C}^* = \{[-1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ che è sinistrorsa. Infatti i cambiamenti di base da \mathcal{C} e \mathcal{C}^* a \mathcal{B} sono dati da

$$A = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$$

$$A^* = [-\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$$

e dunque $\det(A) = 1 \Leftrightarrow \det(A^*) = -1$. Si dice dunque che una base ortonormale è destrorsa se è equivalente a \mathcal{C} e sinistrorsa se è equivalente a \mathcal{C}^* .

Si consideri ora l'isometria $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ che porta la base ortonormale $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2^1, \mathbf{b}_3^1\}$ in $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{b}_1^2, \mathbf{b}_2^2, \mathbf{b}_3^2\}$. Si può scomporre la matrice di cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 come $A = A_1A_2$ dove $A_1 = [\mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2^1, \mathbf{b}_3^1]^{-1}$ porta \mathcal{B}_1 nella base canonica \mathcal{C} e $A_2 = [\mathbf{b}_1^2, \mathbf{b}_2^2, \mathbf{b}_3^2]$ porta la base canonica \mathcal{C} in \mathcal{B}_2 . Le due basi hanno la stessa orientazione se sono entrambe equivalenti a \mathcal{C} o entrambe equivalenti a \mathcal{C}^* . Cioè se $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2) = 1$.

Possiamo concludere dunque che un'isometria $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$ rappresenta uno spostamento rigido nello spazio \mathbb{R}^3 se A è ortogonale e ha determinante pari a 1, cioè se

$$A \in SO(3, \mathbb{R}) = \{R \in O(3, \mathbb{R}) \mid \det(R) = 1\}.$$

In tal caso A è matrice di rotazione e dunque se f è una rototraslazione. Infine, lavorando sullo spazio proiettivo \mathbb{P}^3 , ritroviamo che ogni spostamento rigido è esprimibile come

$$f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \mid f(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}$$

con $G \in SE(3, \mathbb{R})$, cioè

$$G = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

dove $R \in SO(3, \mathbb{R})$ e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$.

Proposizione 4.22 $SE(3, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie lineare.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che è un sottogruppo di $GL(4, \mathbb{R})$. Per completare la dimostrazione si deve mostrare che è un insieme chiuso. Sia dunque $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di matrici in $SE(3, \mathbb{R})$ convergente ad una matrice G . Per mostrare la chiusura si deve mostrare che $G \in SE(3, \mathbb{R})$. Ricordando che la convergenza di matrici implica la convergenza elemento per elemento, essendo ogni G_k della forma

$$G_k = \begin{bmatrix} R_k & \mathbf{t}_k \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

il limite G è a sua volta della forma

$$G = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Dove $\mathbf{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{t}_k \in \mathbb{R}^3$ e $R = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k$. Per mostrare che $G \in SE(3, \mathbb{R})$ è sufficiente mostrare che R è una matrice di rotazione. La mappa $A \mapsto \det(A)$ è continua perchè è un polinomio nei coefficienti della matrice A . Dunque

$$\det(R) = \det(\lim_{k \rightarrow \infty} R_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(R_k) = 1.$$

Inoltre, anche nel caso matriciale, il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti. Quindi

$$R^T R = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} R_k^T \right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} R_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k^T R_k) = I$$

$$R R^T = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} R_k \right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} R_k^T \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k R_k^T) = I$$

Dunque $R R^T = R^T R = I$.

□

Essendo $SE(3, \mathbb{R})$ un gruppo di Lie ha senso considerare la sua algebra di Lie che indicheremo con $se(3, \mathbb{R})$ e ha senso dare un'interpretazione geometrica al concetto di curva in $SE(3, \mathbb{R})$. Una matrice $G \in SE(3, \mathbb{R})$ rappresenta uno spostamento di un corpo rigido da un punto ad un altro dello spazio, quindi una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow SE(3, \mathbb{R}) | t \mapsto \gamma(t)$ può essere interpretata come il movimento di un corpo rigido nello spazio al variare del tempo t . Se γ è differenziabile, $\gamma(0) = I$ e $0 \in [a, b]$ allora $\gamma'(0)$ è un elemento dell'algebra di Lie $se(3, \mathbb{R})$. In particolare

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} R(t) & \mathbf{t}(t) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix},$$

e la derivata $\gamma'(0)$ rappresenta fisicamente la velocità angolare e di traslazione del corpo rigido all'istante $t = 0$ (cfr. [14]):

$$\gamma'(0) = \begin{bmatrix} R'(0) & \mathbf{t}'(0) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix},$$

dove $\Omega = [\mathbf{w}]_{\times}$ è la rappresentazione matriciale della velocità angolare $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque caratterizzare l'algebra di Lie $se(3, \mathbb{R})$ come l'insieme delle matrici X di dimensione 4×4 della forma

$$X = \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

con Ω matrice antisimmetrica (cioè $\Omega^T = -\Omega$) e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Si ottiene come caso particolare il gruppo delle rotazioni considerando $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. L'algebra di Lie di tale gruppo sarà composto dallo spazio vettoriale delle matrici della forma (4.7) con $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e Ω antisimmetrica. Volendo formalizzare questo fatto si consideri la seguente proposizione

Proposizione 4.23 *L'esponenziale di una matrice antisimmetrica è una matrice di rotazione.*

Dimostrazione. $\Omega = -\Omega^T$ implica che Ω e Ω^T commutano. Allora utilizzando le proprietà della matrice esponenziale:

$$I = e^{\Omega + \Omega^T} = e^{\Omega} e^{\Omega^T} = e^{\Omega} (e^{\Omega})^T$$

$$I = e^{\Omega^T + \Omega} = e^{\Omega^T} e^{\Omega} = (e^{\Omega})^T e^{\Omega}.$$

$$\det(e^{\Omega}) = e^{\text{tr}(\Omega)} = e^0 = 1.$$

Dunque e^{Ω} è una matrice di rotazione.

□

Si definisca dunque l'insieme

$$se(3, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mid \Omega^T = -\Omega, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Proposizione 4.24 *$se(3, \mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di $SE(3, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Si deve verificare che, dato $X \in se(3, \mathbb{R})$ l'esponenziale

$$e^{Xt} \in SE(3, \mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sia dunque

$$X = \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{v} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in se(3, \mathbb{R}).$$

Allora ogni $k \in \mathbb{N}, k > 0$

$$X^k = \begin{bmatrix} \Omega^k & \Omega^{k-1} \mathbf{v} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} e^{Xt} &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{(\Omega t)^k}{k!} & \frac{\Omega^{k-1} t^k \mathbf{v}}{k!} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Omega t)^k}{k!} & t \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m t^m}{(m+1)!} \right) \mathbf{v} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\Omega t} & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dove per ogni $t \in \mathbb{R}$, la matrice $e^{\Omega t}$ è una matrice di rotazione perchè è l'esponenziale di una matrice antisimmetrica, e

$$\mathbf{t} = t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m t^m}{(m+1)!} \mathbf{v}$$

è un vettore di \mathbb{R}^3 . Infatti la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m t^m}{(m+1)!}$ è convergente perchè

$$\left\| \frac{\Omega^m t^m}{(m+1)!} \right\| \leq \frac{\|\Omega^m t^m\|}{m!} \leq \frac{\|\Omega t\|^m}{m!}.$$

□

Proposizione 4.25 *Ogni matrice $G \in SE(3, \mathbb{R})$ ammette almeno un logaritmo reale.*

Dimostrazione. Sia dunque

$$G = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Siccome G è triangolare superiore a blocchi gli autovalori di G sono gli autovalori dei blocchi diagonali, di cui uno è il solo elemento [1]. Quindi $\lambda = 1$ è sempre un autovalore di G . I restanti autovalori sono quelli della matrice di rotazione e hanno modulo unitario. In particolare uno di essi è sempre reale e due sono complessi coniugati. Siccome $\det(R) = 1$ si ha necessariamente che un autovalore di R è $\lambda = 1$ e l'autospazio corrispondente è l'asse di rotazione (infatti per ogni \mathbf{x} sull'asse si ha $R\mathbf{x} = \mathbf{x}$). Gli altri due autovalori

sono i complessi coniugati $e^{\vartheta i}, e^{-\vartheta i}$, dove ϑ è l'angolo della rotazione. Per ogni $\vartheta \neq (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ non vi sono autovalori negativi. Se $\vartheta = (k+1)\pi$, allora $e^{\vartheta i} = e^{-\vartheta i} = -1$. In tal caso $\lambda = -1$ è un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a due. Infatti l'autospazio corrispondente è il piano ortogonale all'asse di rotazione e passante per l'origine nel quale $R\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Di conseguenza a $\lambda = -1$ corrispondono due blocchi di Jordan e per il teorema 4.1 si può concludere che G ammette sempre un logaritmo reale.

□

Il fatto che ogni matrice $G \in SE(3, \mathbb{R})$ ammetta un logaritmo reale non è sufficiente ad affermare che $\ln(G)$ appartiene all'algebra di Lie $se(3, \mathbb{R})$. Per dimostrare che $\ln(G) \in se(3, \mathbb{R})$, infatti, si deve mostrare che $\ln(G)$ è della forma (4.7). In alternativa si può mostrare che $G^t = e^{\ln(G)t} \in SE(3, \mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}$ e per il punto 2 del teorema 4.3 si ha che il logaritmo di G appartiene all'algebra. La via più semplice consiste nel dimostrare che la mappa $\exp : se(3, \mathbb{R}) \rightarrow SE(3, \mathbb{R})$ è suriettiva. In tal caso ogni $G \in SE(3, \mathbb{R})$ ammette un logaritmo appartenente a $se(3, \mathbb{R})$ e di conseguenza $G^t = e^{\ln(G)t} \in SE(3, \mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}$.

Prima di tutto verifichiamo la suriettività nel caso particolare delle rotazioni.

Proposizione 4.26 *Sia $\Omega = [\mathbf{w}]_{\times} \in gl(3, \mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Si ponga*

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\|\mathbf{w}\|}$$

$$\vartheta_t = \|\mathbf{w}\| t$$

Ogni $t \in \mathbb{R}$ la matrice di rotazione $R_t = e^{\Omega t}$ è

$$R_t = e^{\Omega t} = e^{\tilde{\Omega} \vartheta_t} = I + \tilde{\Omega} \sin(\vartheta_t) + \tilde{\Omega}^2 (1 - \cos(\vartheta_t))$$

Dimostrazione. Dal punto di vista cinematico $\|\mathbf{w}\|$ è il modulo della velocità angolare in $t = 0$ e la matrice $\tilde{\Omega}$ individua solo l'asse di rotazione $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$. Interpretando la variabile t come tempo, l'angolo $\vartheta_t = \|\mathbf{w}\| t$ è l'angolo di rotazione all'istante t di un corpo rigido che ruota a velocità angolare costante pari a \mathbf{w} . E' immediato verificare che la successione delle potenze di $\tilde{\Omega}$ è

$$(I, \tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}^2, -\tilde{\Omega}, -\tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}^2, -\tilde{\Omega}, -\tilde{\Omega}^2, \dots)$$

Si consideri lo sviluppo in serie di $e^{\tilde{\Omega} \vartheta}$ e si raggruppino i termini di grado pari e di grado dispari:

$$R_t = e^{\tilde{\Omega} \vartheta_t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Omega}^k \vartheta_t^k}{k!} = I + \tilde{\Omega} \vartheta_t + \frac{\tilde{\Omega}^2 \vartheta_t^2}{2!} + \frac{\tilde{\Omega}^3 \vartheta_t^3}{3!} + \frac{\tilde{\Omega}^4 \vartheta_t^4}{4!} + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= I + \tilde{\Omega} \left(\vartheta_t - \frac{\vartheta_t^3}{3!} + \frac{\vartheta_t^5}{5!} - \frac{\vartheta_t^7}{7!} + \dots \right) + \tilde{\Omega}^2 \left(\frac{\vartheta_t^2}{2!} - \frac{\vartheta_t^4}{4!} + \frac{\vartheta_t^6}{6!} - \frac{\vartheta_t^8}{8!} \dots \right) = \\
&= I + \tilde{\Omega} \sin(\vartheta_t) + \tilde{\Omega}^2 (1 - \cos(\vartheta_t)).
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.27 (Formula di Rodrigues) *Sia R una matrice di rotazione di dimensione 3×3 . Sia \mathbf{a} il versore che individua l'asse di rotazione e ϑ l'angolo della rotazione. Allora*

$$R = I + [\mathbf{a}]_{\times} \sin(\vartheta) + [\mathbf{a}]_{\times}^2 (1 - \cos(\vartheta)) = e^{[\mathbf{a}]_{\times} \vartheta}.$$

Di conseguenza ogni matrice di rotazione ammette come logaritmo una matrice reale antisimmetrica.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Innanzi tutti si consideri il caso in cui \mathbf{x} è ortogonale ad \mathbf{a} . Scomponendo $R\mathbf{x}$ nel piano della rotazione lungo le direzioni di \mathbf{x} e di $[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x}$ si ha

$$\begin{aligned}
R\mathbf{x} &= \|\mathbf{x}\| \cos(\vartheta) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + \|\mathbf{x}\| \sin(\vartheta) \frac{[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x}}{\|[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x}\|} = \\
&= \cos(\vartheta)\mathbf{x} + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Dato un generico \mathbf{x} si può scomporlo come $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b})\mathbf{b}$ dove \mathbf{b} è un versore ortogonale ad \mathbf{a} . Dunque

$$R\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{a})R\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b})R\mathbf{b} = (\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b}) \cos(\vartheta)\mathbf{b} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b}) \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b}.$$

Aggiungendo e sottraendo $(\mathbf{x}^T \mathbf{b}) \cos(\vartheta)\mathbf{a}$ e ricordando che $[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{a} = 0$:

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) \cos(\vartheta)\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b}) \cos(\vartheta)\mathbf{b} - (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) \cos(\vartheta)\mathbf{a} + \\
&\quad + (\mathbf{x}^T \mathbf{b}) \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b}) \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b} = \\
&= (\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + \cos(\vartheta) [(\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b})\mathbf{b}] - (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) \cos(\vartheta)\mathbf{a} + \\
&\quad + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times} [(\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{x}^T \mathbf{b})\mathbf{b}] = \\
&= (\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + \cos(\vartheta)\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) \cos(\vartheta)\mathbf{a} + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x} = \\
&= \cos(\vartheta)\mathbf{x} + (1 - \cos(\vartheta))(\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Infine, siccome

$$[\mathbf{a}]_{\times}^2 \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} - (\mathbf{a}^T \mathbf{a})\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} - \mathbf{x}$$

si può sostituire

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{x} + [\mathbf{a}]_{\times}^2 \mathbf{x}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} R\mathbf{x} &= \cos(\vartheta)\mathbf{x} + (1 - \cos(\vartheta))\mathbf{x} + (1 - \cos(\vartheta))[\mathbf{a}]_{\times}^2\mathbf{x} + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x} + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{x} + (1 - \cos(\vartheta))[\mathbf{a}]_{\times}^2\mathbf{x} = \\ &= (I + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times} + (1 - \cos(\vartheta))[\mathbf{a}]_{\times}^2)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Siccome l'uguaglianza vale per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si conclude che

$$R = I + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times} + (1 - \cos(\vartheta))[\mathbf{a}]_{\times}^2.$$

Infine dalla proposizione precedente con $t = 1$ si ha che

$$R = I + \sin(\vartheta)[\mathbf{a}]_{\times} + (1 - \cos(\vartheta))[\mathbf{a}]_{\times}^2 = e^{[\mathbf{a}]_{\times}\vartheta}$$

Dunque $\ln(R) = [\mathbf{a}]_{\times}\vartheta$.

□

Nel caso delle rotazioni dunque la mappa esponenziale è suriettiva perchè, data

$$G = \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice di rotazione è esprimibile come $R = e^{[\mathbf{a}]_{\times}\vartheta}$, dove \mathbf{a} è un versore che individua l'asse e ϑ è l'angolo di rotazione. Dunque

$$X = \begin{bmatrix} [\mathbf{a}]_{\times}\vartheta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

è un logaritmo di G appartenente all'algebra di Lie $se(3, \mathbb{R})$. Più precisamente si ha che $SO(3, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie con algebra $so(3, \mathbb{R})$ costituita dalle matrici antisimmetriche e che la mappa $\exp : so(3, \mathbb{R}) \rightarrow SE(3, \mathbb{R})$ è suriettiva.

Proposizione 4.28 *Sia $R \in SO(3, \mathbb{R})$ una rotazione con asse individuato dal versore \mathbf{a} e angolo ϑ . Allora ogni $S \in SO(3, \mathbb{R})$ la matrice SRS^{-1} è una rotazione con asse $S\mathbf{a}$ e angolo ϑ .*

Dimostrazione. Ricordiamo innanzi tutto la seguente proprietà del prodotto vettoriale. Data una matrice invertibile S si ha che

$$S\mathbf{x} \times S\mathbf{y} = \det(S)S^{-T}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$$

Nel caso in cui S sia una rotazione $S^{-T} = S$ e $\det(S) = 1$. Dunque $S\mathbf{x} \times S\mathbf{y} = S(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. In forma matriciale si può esprimere tale relazione come $[S\mathbf{x}]_{\times}S\mathbf{y} = S[\mathbf{x}]_{\times}\mathbf{y}$. Essendo valido per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $[S\mathbf{x}]_{\times}S = S[\mathbf{x}]_{\times}$, cioè $[S\mathbf{x}]_{\times} = S[\mathbf{x}]_{\times}S^{-1}$. Abbiamo visto che la rotazione R è esprimibile come $R = e^{[\mathbf{a}]_{\times}\vartheta}$. Allora

$$SRS^{-1} = Se^{[\mathbf{a}]_{\times}\vartheta}S^{-1} = e^{S[\mathbf{a}]_{\times}S^{-1}\vartheta} = e^{[S\mathbf{a}]_{\times}\vartheta}$$

Dunque SRS^{-1} è una rotazione con asse $S\mathbf{a}$ e angolo ϑ .

□

Prima di verificare la suriettività nel caso generale si enunciano i seguenti lemmi.

Lemma 4.2 *Sia Ω una matrice antisimmetrica di dimensione $n \times n$. Allora esiste una matrice ortogonale P tale che $\Omega = PDP^T$, dove D è una matrice diagonale a blocchi della forma*

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_p \end{bmatrix}$$

con $p \leq n$ ed ogni blocco D_i di dimensione 1×1 nullo o di dimensione 2×2 della forma

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta_i \\ \vartheta_i & 0 \end{bmatrix}, \vartheta_i > 0.$$

Inoltre gli autovalori di Ω sono gli autovalori dei blocchi D_i . Sono dunque nulli o coppie di immaginari puri $\pm \vartheta_i i$.

La dimostrazione è un corollario del teorema spettrale in spazi finito dimensionali per operatori lineari normali, cioè gli operatori lineari su uno spazio vettoriale tali che $TT^* = T^*T$, cioè tali che T e l'operatore aggiunto di T commutano. Le matrici antisimmetriche sono un caso particolare, infatti se Ω è antisimmetrica allora $\Omega^* = \Omega^T = -\Omega$ e $\Omega\Omega^T = \Omega^T\Omega$. Le dimostrazioni del teorema spettrale e del corollario sono presentate in [15, pag.317-322,326].

Lemma 4.3 *Sia D una matrice antisimmetrica di dimensione 2×2 , cioè una matrice della forma*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{bmatrix}, \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Allora la matrice di rotazione e^D è

$$e^D = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella della proposizione 4.26. Infatti, posto

$$I^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

per induzione si verifica che le potenze di D sono date da

$$D^{2m+1} = (-1)^m \vartheta^{2m+1} I^*$$

$$D^{2m} = (-1)^m \vartheta^{2m} I$$

Dunque

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} (-1)^m \vartheta^{2m} I + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} (-1)^m \vartheta^{2m+1} I^* = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Proposizione 4.29 *La mappa esponenziale $\exp : se(3, \mathbb{R}) \rightarrow SE(3, \mathbb{R})$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Ripetendo i calcoli della dimostrazione del teorema 4.24 con $t = 1$ la mappa esponenziale è suriettiva se ogni $G \in SE(3, \mathbb{R})$ può essere espressa come

$$G = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \exp \left\{ \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{v} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} e^{\Omega} & \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m}{(m+1)!} \right) \mathbf{v} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo visto che esiste sempre una matrice antisimmetrica Ω tale che $e^{\Omega} = R$ (Ω è esprimibile in funzione dell'asse e dell'angolo di rotazione come $\Omega = [\mathbf{a}]_{\times} \vartheta$). La matrice Ω non è unica, ad esempio per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la matrice

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} 0 & -2k\pi & 0 \\ 2k\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è un logaritmo antisimmetrico della matrice identità. Infatti dal lemma precedente

$$e^{\Omega_k} = \begin{bmatrix} \cos(2k\pi) & -\sin(2k\pi) & 0 \\ \sin(2k\pi) & \cos(2k\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Mostriamo che esiste sempre un logaritmo antisimmetrico di R tale che la matrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m}{(m+1)!} \tag{4.8}$$

è invertibile. Di conseguenza esiste sempre un vettore \mathbf{v} tale che

$$\mathbf{t} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m}{(m+1)!} \right) \mathbf{v}$$

e dunque esiste sempre un logaritmo di G in $se(3, \mathbb{R})$.
Guardando la serie (4.8) si è tentati di esprimerla come

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m}{(m+1)!} = \Omega^{-1}(e^{\Omega} - I),$$

ma dato che nessuna matrice antisimmetrica di dimensione 3×3 è invertibile questo non è possibile e si deve trovare un'altra via. Utilizzando la decomposizione del lemma 4.2 e ricordando che P è ortogonale si ottiene

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Omega^m}{(m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(PDP^T)^m}{(m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{PD^m P^T}{(m+1)!} = P \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^m}{(m+1)!} \right) P^T.$$

Siccome $\det(P) = 1$ si ha che (4.8) è invertibile se e solo se è invertibile la matrice

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m}{(m+1)!} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^m}{(m+1)!}$$

A questo punto si noti che $D = \text{diag}\{D_1, \dots, D_p\}$ è diagonale con blocchi diagonali di dimensione 1×1 nulli oppure di dimensione 2×2 della forma

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta_i \\ \vartheta_i & 0 \end{bmatrix}, \vartheta_i > 0.$$

Di conseguenza anche $W = \text{diag}\{W_1, \dots, W_p\}$ è diagonale a blocchi con

$$W_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_i^m}{(m+1)!} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_i^m}{(m+1)!}.$$

ed è invertibile se e solo se tutti i blocchi W_i sono invertibili.

Nel caso che $D_i = [0]$ allora $W_i = 1$. Se invece D_i ha dimensione 2×2 allora è invertibile perchè ha determinante $\vartheta_i^2 > 0$ e dunque ora si può scrivere

$$W_i = D_i^{-1}(e^{D_i} - I).$$

Quindi W_i è invertibile se e solo se $\lambda = 1$ non è un autovalore della matrice di rotazione e^{D_i} . Dal lemma precedente

$$e^{D_i} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_i) & -\sin(\vartheta_i) \\ \sin(\vartheta_i) & \cos(\vartheta_i) \end{bmatrix}$$

ed ha autovalori $e^{\pm\vartheta_i}$. Si può concludere dunque che W_i è invertibile se e solo se $e^{\pm\vartheta_i} \neq 1$, cioè se e solo se $\vartheta_i \neq 2k\pi, \forall k \in \mathbb{N}, k > 0$. Si noti che se $\vartheta = 2k\pi$ allora $e^{D_i} = I$.

Nel caso in questione $\Omega = PDP^T$ è una matrice di dimensione 3×3 e sono possibili solo due casi:

1. $D_i = [0], \forall i = 1, 2, 3$. In tal caso $W = I$ e $\Omega = D = \mathbf{0}$, dunque $R = e^\Omega = I$ e (4.8) è invertibile. Si noti che questo è il caso di traslazioni pure.
2. $D_1 = [0]$ e

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{bmatrix}, \vartheta > 0$$

In tal caso, se $\vartheta \neq 2k\pi, \forall k \in \mathbb{N}, k > 0$, la matrice (4.8) è invertibile. Se invece $\vartheta = 2k\pi$ allora $R = e^\Omega = Pe^D P^T = I$. Quindi si giunge a questa situazione solo quando data la matrice di rotazione $R = I$ si sceglie un logaritmo di I diverso dalla matrice nulla. Scegliendo $\tilde{\Omega} = \mathbf{0}$ ci si riconduce al caso 1 in cui (4.8) è invertibile.

□

Siccome data una generica rototraslazione $G \in SE(3, \mathbb{R})$, esiste sempre un logaritmo di G appartenente all'algebra di Lie $se(3, \mathbb{R})$ si ha che $G^t = e^{\ln(G)t}$ è una curva nella varietà costituita dal gruppo di Lie $SE(3, \mathbb{R})$ passante nell'identità per $t = 0$ e in G per $t = 1$. Come già sottolineato tale curva è la più breve congiungente le due matrici per cui si può interpretare G^t come un'interpolazione tra l'identità e G per valori di $t \in [0, 1]$, ed eventualmente come un'estrapolazione per $t \notin [0, 1]$. In particolare, dato un morfismo tra gruppi di Lie $f : SE(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{G}$ tale che $f(G) = H$, è sempre vero che $\ln(H) = Df(\ln(G))$ appartiene all'algebra di Lie di \mathcal{G} e che H^t è una curva in \mathcal{G} interpolante l'identità e H . Infine si può notare che G^t è in qualche modo regolare. Infatti se G è costituita da una rotazione di un angolo ϑ attorno ad un asse con versore \mathbf{a} , e da una traslazione \mathbf{t} .

$$G = \begin{bmatrix} e^{[\mathbf{a}] \times \vartheta} & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

allora

$$X = \ln(G) = \begin{bmatrix} [\mathbf{a}] \times \vartheta & \mathbf{v} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

per qualche $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ripetendo i calcoli della dimostrazione della proposizione 4.24

$$G^t = e^{Xt} = e^{\ln(G)t} = \begin{bmatrix} e^{[\mathbf{a}] \times \vartheta t} & t\Omega(e^{\Omega t} - I)\mathbf{v} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Dove imponendo $G^1 = G$ si ottiene $\Omega(e^\Omega - I)\mathbf{v} = \mathbf{t}$. Dunque G^t è una rotazione di un angolo ϑt attorno lo stesso asse di G e una traslazione di un vettore $t\mathbf{t}$ che sono funzioni regolari in t .

4.8 Il gruppo speciale proiettivo

Sia ora $K \in GL(3, \mathbb{R})$ una matrice triangolare superiore invertibile. Si consideri l'insieme

$$SP_K(3, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} KRK^{-1} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mid R \in SO(3, \mathbb{R}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Proposizione 4.30 $SP_K(3, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie lineare con algebra

$$sp_K(3, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} K\Omega K^{-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mid \Omega^T = -\Omega, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

L'insieme quoziente di $SP_K(3, \mathbb{R})$ rispetto alla relazione \cong è detto gruppo speciale proiettivo.

Dimostrazione. Si ponga

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Ogni elemento $T \in SP_K(3, \mathbb{R})$ è esprimibile come

$$T = \tilde{K}G\tilde{K}^{-1}$$

con

$$G = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3, \mathbb{R})$$

Mostriamo che $SP_K(3, \mathbb{R})$ è un sottogruppo chiuso di $GL(3, \mathbb{R})$. E' un sottogruppo, infatti contiene l'identità ed è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalare e all'inversione. Se

$$T_1 = \begin{bmatrix} KR_1K^{-1} & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} KR_2K^{-1} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

allora

$$T_1T_2 = \begin{bmatrix} KR_1R_2K^{-1} & KR_1K^{-1}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_k$$

Inoltre, dato

$$T = \begin{bmatrix} KRK^{-1} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

il suo inverso è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} KR^{-1}K^{-1} & -KRK^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SP_k(3, \mathbb{R})$$

E' un insieme chiuso, infatti presa una successione in $SP_k(3, \mathbb{R})$

$$T_n = \begin{bmatrix} KR_nK^{-1} & \mathbf{t}_n \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \tilde{K}G_n\tilde{K}^{-1}$$

convergente a T . Per la continuità del prodotto matriciale si ha che

$$T = \lim T_n = \tilde{K} \lim_n G_n \tilde{K}^{-1} \in SP_K(3, \mathbb{R})$$

perchè $\lim_n G_n \in SE(3, \mathbb{R})$.

Per quel che riguarda l'algebra di Lie di $SP_K(3, \mathbb{R})$ si noti che ogni elemento nell'insieme $sp_K(3, \mathbb{R})$ è esprimibile come

$$X = \tilde{K}\tilde{X}\tilde{K}^{-1}$$

con $\tilde{X} \in se(3, \mathbb{R})$. Dunque $\forall t \in \mathbb{R}$

$$e^{Xt} = e^{(\tilde{K}\tilde{X}\tilde{K}^{-1})t} = \tilde{K}e^{\tilde{X}t}\tilde{K}^{-1} \in SP(3, \mathbb{R})$$

□

Proposizione 4.31 *Sia $K \in GL(3, \mathbb{R})$ una matrice triangolare superiore invertibile e \tilde{K} definita come in precedenza. Allora l'applicazione*

$$\varphi_K : SE(3, \mathbb{R}) \rightarrow SP_K(3, \mathbb{R})$$

è un morfismo tra gruppi di Lie con differenziale

$$D\varphi_K(X) = \tilde{K}X\tilde{K}^{-1}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata dal momento che

$$\varphi_K(G_1G_2) = \tilde{K}G_1G_2\tilde{K}^{-1} = \tilde{K}G_1\tilde{K}^{-1}\tilde{K}G_2\tilde{K}^{-1} = \varphi_K(G_1)\varphi_K(G_2)$$

e

$$D\varphi_K(X) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_K(e^{Xt}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{K}e^{Xt}\tilde{K}^{-1} \right|_{t=0} = \tilde{K}X\tilde{K}^{-1}$$

□

Dunque dato un generico elemento $T \in SP_K(3, \mathbb{R})$ esiste sempre un logaritmo di T nell'algebra di Lie $sp_K(3, \mathbb{R})$ e la traiettoria $T^t = e^{(\ln T)t}$ interpola tra l'identità e T .

Capitolo 5

Sintesi di Viste Virtuali

5.1 Il problema della sintesi di nuove viste

Una volta ottenuta la ricostruzione della geometria per mezzo del modello di struttura affine relativa, si pone il problema di come utilizzarla per generare nuove viste ‘virtuali’. A tale riguardo si osservi che, date le fotocamere $P_i = K_i[R_i|\mathbf{t}_i]$ e $P_j = K_j[R_j|\mathbf{t}_j]$ le proiezioni di un punto \mathbf{X} possono essere scritte come

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i &\cong [I|\mathbf{0}] T_i \mathbf{X} \\ \mathbf{x}_j &\cong [I|\mathbf{0}] T_j \mathbf{X}\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}T_i &= \begin{bmatrix} P_i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\ T_j &= \begin{bmatrix} P_j \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Essendo le fotocamere finite, le matrici T_i e T_j sono invertibili e, posti

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_i &= T_i \mathbf{X} \\ \mathbf{X}_j &= T_j \mathbf{X} \\ T_{ij} &= T_j T_i^{-1}\end{aligned}$$

si ha $\mathbf{X}_j = T_{ij} \mathbf{X}_i$ e

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i &\cong [I|\mathbf{0}] \mathbf{X}_i \\ \mathbf{x}_j &\cong [I|\mathbf{0}] T_{ij} \mathbf{X}_i\end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente T_{ij} si ha

$$T_i^{-1} = \begin{bmatrix} R_i^{-1} K_i^{-1} & -R_i^{-1} \mathbf{t}_i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} K_j R_j R_i^{-1} K_i^{-1} & -K_j R_j R_i^{-1} \mathbf{t}_i + K_j \mathbf{t}_j \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo ora che $-K_j R_j R_i^{-1} \mathbf{t}_i + K_j \mathbf{t}_j = \mathbf{e}_{ji}$. Infatti, considerando che

$$\begin{aligned} P_i &= K_i R_i [I] - \tilde{\mathbf{C}}_i \\ P_j &= K_j R_j [I] - \tilde{\mathbf{C}}_j, \end{aligned}$$

il centro della fotocamera i è $\tilde{\mathbf{C}}_i = -R_i^{-1} \mathbf{t}_i$. Quindi proiettando sulla seconda immagine

$$\mathbf{e}_{ji} \cong K_j [R_j | \mathbf{t}_j] \begin{bmatrix} -R_i^{-1} \mathbf{t}_i \\ 1 \end{bmatrix} = -K_j R_j R_i^{-1} \mathbf{t}_i + K_j \mathbf{t}_j$$

Quindi

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^\infty & \mathbf{e}_{ji} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Nel caso in cui le due matrici di calibrazione siano entrambe uguali possiamo considerare che le due immagini siano scattate dalla stessa fotocamera che si è spostata da un punto all'altro dello spazio riprendendo una scena statica. In tal caso T_{ij} appartiene al gruppo $SP_K(3, \mathbb{R})$ e possiamo generare una vista virtuale esponenziando la matrice T_{ij} :

$$\mathbf{x}(t) \cong [I | \mathbf{0}] T_{ij}^t \mathbf{X}_i \quad (5.2)$$

Al variare di t in $[0, 1]$ l'immagine virtuale sarà data dalla fotocamera che dalla posizione iniziale di P_i per $t = 0$ si muove in modo regolare lungo la traiettoria esponenziale fino a giungere a P_j per $t = 1$. Il problema è che in generale non si conosce nè T_{ij} nè il punto \mathbf{X} , ma solamente la ricostruzione ottenuta con il modello di struttura affine relativa.

Si noti prima di proseguire che, avendo matrici di calibrazione identiche, la quantità

$$K \left(R_{ij} + \frac{\mathbf{t} \mathbf{n}^T}{d_\pi} \right) K^{-1} = A_{ij}^\infty - \mathbf{e}_{ji} \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i}$$

è indipendente dal fattore di scala scelto per le matrici di proiezione. Per questioni di chiarezza, nel seguito si farà riferimento a questa scala per l'omografia indotta dal piano indicando tale matrice con $A_{ij}^R(\pi)$. Nel caso particolare dell'omografia infinita si avrà $A_{ij}^{R\infty} = K R_{ij} K^{-1}$. Analogamente si indicherà con \mathbf{e}_{ji}^R l'epipolo riscalato in modo tale che $e_{ji}^R = P_j C_i$ con $C_i = [\tilde{\mathbf{C}}_i, 1]$, il quale dipende però dalla scelta della scala di P_j . Si indicherà invece con \mathbf{e}_{ji} l'epipolo scalato come è stato utilizzato nel calcolo della ricostruzione per mezzo della struttura affine relativa e con $A_{ij}(\pi)$ l'omografia riscalata in modo tale da soddisfare il vincolo sul punto di riferimento $\mathbf{x}_j^0 \cong A_{ij}(\pi) + \mathbf{e}_{ji}$. Dunque si avrà

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{R\infty} & \mathbf{e}_{ji}^R \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

5.2 Sintesi a partire dalla ricostruzione

Consideriamo dunque la ricostruzione $(\tilde{P}_i, \tilde{P}_j, \mathbf{X}^P)$ ottenuta con il modello di struttura affine relativa:

$$\begin{cases} \tilde{P}_i = [I|0] \\ \tilde{P}_j = [A_{ij}(\pi)|\mathbf{e}_{ji}] \\ \mathbf{X}^P = [\mathbf{x}_i^T, \mu]^T \end{cases}$$

In analogia a come abbiamo calcolato T_{ij} , le proiezioni \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j possono essere scritte come

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\cong [I|0] S_i \mathbf{X}^P \\ \mathbf{x}_j &\cong [I|0] S_j \mathbf{X}^P \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} S_i &= \begin{bmatrix} \tilde{P}_i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = I \\ S_j &= \begin{bmatrix} \tilde{P}_j \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}(\pi) & \mathbf{e}_{ji} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In questa forma si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\cong [I|0] \mathbf{X}^P \\ \mathbf{x}_j &\cong [I|0] S_{ij} \mathbf{X}^P. \end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente S_{ij} , questa volta si ottiene immediatamente

$$S_{ij} = S_j S_i^{-1} = S_j = \begin{bmatrix} A_{ij}(\pi) & \mathbf{e}_{ji} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

dove l'omografia indotta dal piano π e l'epipolo sono noti e riscalati nello stesso modo in cui sono utilizzati per la ricostruzione tramite la struttura affine relativa a differenza di T_{ij} dove la scala di A_{ij} e \mathbf{e}_{ji} è incognita ed è legata alla scala delle matrici di proiezione P_i e P_j .

A differenza del caso precedente adesso si conosce sia S_{ij} che $\mathbf{X}_i^P = \mathbf{X}^P$ e sarebbe bello poter generare una nuova vista ponendo

$$\mathbf{x}(t) \cong [I|0] S_{ij}^t \mathbf{X}^P.$$

Questo purtroppo non è sempre possibile perchè, anche se S_{ij} appartenesse ad un gruppo di Lie (al limite possiamo considerare direttamente $GL(4, \mathbb{R})$) ed anche se $K_i = K_j$, in generale non esiste un morfismo da $SE(3, \mathbb{R})$ o da $SP(3, \mathbb{R})$ che permetta di ottenere S_{ij} e quindi non si può garantire l'esistenza di un logaritmo nell'opportuna algebra di Lie e le buone proprietà

dell'eventuale traiettoria S_{ij}^t . Questo avviene perchè il termine $A_{ij}(\pi)$ della matrice a blocchi S_{ij} è proporzionale a

$$K \left(R_{ij} + \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^T}{d_\pi} \right) K^{-1} = A_{ij}^\infty - \mathbf{e}_{ji} \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i}$$

dove il termine dovuto al piano di riferimento crea problemi. Si potrebbe pensare di procedere in questo modo se il piano di riferimento π è all'infinito. In tal caso il termine $\frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^T}{d_\pi}$ (e di conseguenza anche $\mathbf{e}_{ji} \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i}$) è nullo e

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^\infty & \mathbf{e}_{ji} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Allora si potrebbe scomporre S_{ij} come

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda}K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \mathbf{e}_{ji} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}K^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

con $A_{ij}^\infty = \lambda A_{ij}^\infty$. Purtroppo non è ancora detto che S_{ij} appartenga ad un gruppo speciale proiettivo perchè il fattore di scala tra λ può essere negativo. Ad ogni modo bisogna notare anche che la proiezione ottenuta esponenziando S_{ij} sia la stessa ottenuta esponenziando T_{ij} per via della trasformazione proiettiva che lega la ricostruzione alla scena originale. Qualora sia possibile farlo, procedendo in questo modo si perderebbe il significato geometrico del problema.

5.3 La matrice di calibrazione della scena

Nel paragrafo (3.4) è stata introdotto il concetto di struttura affine relativa facendo riferimento alla fotocamera i . Allo stesso modo si può ottenere una ricostruzione scambiando il ruolo delle due fotocamere ottenendo quindi una nuova ricostruzione che sarà differente dalla prima. Si considerino dunque tali ricostruzioni.

$$\begin{cases} \tilde{P}_i = [I|0] \\ \tilde{P}_j = [A_{ij}(\pi)|\mathbf{e}_{ji}] \\ \mathbf{X}_i^P = [\mathbf{x}_i^T, \mu_i]^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{P}_i = [A_{ji}(\pi)|\mathbf{e}_{ij}] \\ \hat{P}_j = [I|\mathbf{0}] \\ \mathbf{X}_j^P = [\mathbf{x}_j^T, \mu_j]^T \end{cases}$$

Per il teorema di ricostruzione proiettiva esiste un'omografia \tilde{H} tale che

$$\begin{aligned}\tilde{P}_i &\cong [I|0] \cong P_i \tilde{H}^{-1} \\ \tilde{P}_j &\cong [A_{ij}(\pi)|\mathbf{e}_{ji}] \cong P_j \tilde{H}^{-1} \\ \mathbf{X}_i^P &\cong \tilde{H} \mathbf{X}\end{aligned}$$

D'altra parte si ha che $\mathbf{X} \cong T_i^{-1} \mathbf{X}_i$. Si ponga $H_i = \tilde{H} T_i^{-1}$ e si avrà

$$\mathbf{X}_i^P \cong H_i \mathbf{X}_i.$$

Inoltre si ha che per un punto \mathbf{X} la struttura affine relativa μ_i è

$$\mu_i = \frac{d}{d^0} \frac{z_i^0}{z_i} = \frac{\pi^T \mathbf{X}}{\pi^T \mathbf{X}^0} \frac{z_i^0}{z_i}$$

Infatti la distanza di un punto $\mathbf{X} = [\tilde{\mathbf{X}}^T, x_4]^T$ da un piano $\pi = [\mathbf{v}^T, c]^T$ è

$$d = \frac{|\pi^T \mathbf{X}|}{|x_4| \|\mathbf{v}\|} \cong \pi^T \mathbf{X}.$$

Per l'invarianza del prodotto scalare rispetto al sistema di riferimento si ha che

$$\mu_i = \frac{\pi_i^T \mathbf{X}_i z_i^0}{\pi_i^T \mathbf{X}_i^0 z_i}.$$

D'altra parte, ponendo $\mathbf{x}_i = [x, y, 1]^T$, il punto \mathbf{X}_i ha coordinate euclidee $z_i I^{-1} \mathbf{x}_i$, cioè

$$z_i \mathbf{x}_i = [I|0] \mathbf{X}_i$$

Dunque

$$\mathbf{X}_i^P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_i} [I|0] \\ \frac{\pi_i^T}{\pi_i^T \mathbf{X}_i^0} \frac{z_i^0}{z_i} \end{bmatrix} \mathbf{X}_i \cong \begin{bmatrix} [I|0] \\ \frac{z_i^0}{\pi_i^T \mathbf{X}_i^0} \pi_i^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_i$$

Da cui osserviamo che

$$H_i \cong \begin{bmatrix} [I|0] \\ \frac{z_i^0}{\pi_i^T \mathbf{X}_i^0} \pi_i^T \end{bmatrix}$$

Con un discorso del tutto analogo si ha che per la seconda ricostruzione esiste una matrice H_j tale che $\mathbf{X}_j^P \cong H_j \mathbf{X}_j$ e che ha forma

$$H_j \cong \begin{bmatrix} [I|0] \\ \frac{z_j^0}{\pi_j^T \mathbf{X}_j^0} \pi_j^T \end{bmatrix}.$$

Dunque, siccome $\mathbf{X}_j \cong T_{ij} \mathbf{X}_i$, si avrà

$$\mathbf{X}_j^P \cong H_j T_{ij} H_i^{-1} \mathbf{X}_i^P$$

Ponendo $D_{ij} \cong H_j T_{ij} H_i^{-1}$, $\pi_i = [\mathbf{v}_i^T, c_i]^T$ e $\pi_j = [\mathbf{v}_j^T, c_j]^T$ si può calcolare esplicitamente tale prodotto giungendo così a

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{R\infty} - \mathbf{e}_{ji}^R \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i} & \mathbf{e}_{ji}^R \frac{1}{c_i} \frac{\pi_i^T \mathbf{X}_i^0}{z_i^0} \\ \mathbf{0}^T & \frac{z_j^0}{z_i^0} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Si noti che il termine $A_{ij}^{R\infty} - \mathbf{e}_{ji}^R \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i}$ è proprio l'omografia indotta dal piano $\pi = [\mathbf{v}_i^T, c_i]^T$ e che, avendo a disposizione un numero sufficiente di coppie (X_i^P, X_j^P) di punti ricostruiti, la matrice D_{ij} è osservabile a meno di una costante. Si normalizzi dunque la matrice D_{ij}^* osservata in modo tale che abbia la forma

$$D_{ij}^* = \begin{bmatrix} A_{ij}^*(\pi) & \mathbf{e}_{ji}^* \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

dove $A_{ij}^*(\pi)$ è un opportuno multiplo di $A_{ij}^R(\pi)$ e \mathbf{e}_{ji}^* è un multiplo di \mathbf{e}_{ji}^R . Si avrà la seguente proporzionalità

$$\begin{bmatrix} A_{ij}^*(\pi) & \mathbf{e}_{ji}^* \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A_{ij}^{R\infty} - \mathbf{e}_{ji}^R \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i} & \mathbf{e}_{ji}^R \frac{1}{c_i} \frac{\pi_i^T \mathbf{X}_i^0}{z_i^0} \\ \mathbf{0}^T & \frac{z_j^0}{z_i^0} \end{bmatrix}$$

da cui si ricava che

$$A_{ij}^*(\pi) = \frac{z_i^0}{z_j^0} \left(A_{ij}^{R\infty} - \mathbf{e}_{ji}^R \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i} \right). \quad (5.6)$$

In particolare, se il piano di riferimento è all'infinito si avrà

$$A_{ij}^{*\infty} = \frac{z_i^0}{z_j^0} A_{ij}^{R\infty}.$$

Notiamo ora un fatto molto utile per il calcolo di D_{ij}^* . Scrivendo esplicitamente l'equazione $\mathbf{X}_j^P \cong D_{ij}^* X_i^P$ si ottiene per ogni coppia di punti corrispondenti il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_j \cong A_{ij}^*(\pi) \mathbf{x}_i + \mu_i \mathbf{e}_{ji}^* \\ \mu_j \cong \mu_i \end{cases}$$

In particolare, per la coppia $(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{x}_j^0)$ si avrà $\mu_i = 1$, quindi anche A_{ij}^* e \mathbf{e}_{ji}^* sono riscritti in modo da soddisfare il vincolo sul punto di riferimento esattamente come $A_{ij}(\pi)$ e \mathbf{e}_{ji} . Siano dunque b_π e δ le costanti tali che

$$\begin{cases} A_{ij}(\pi) = b_\pi A_{ij}^*(\pi) \\ \mathbf{e}_{ji} = \delta \mathbf{e}_{ji}^* \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$\mathbf{x}_j \cong \frac{1}{b_\pi} A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i + \frac{\mu_i}{\delta} \mathbf{e}_{ji} \cong A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i + \frac{\mu_i b_\pi}{\delta} \mathbf{e}_{ji}$$

da cui, considerando il punto di riferimento \mathbf{X}^0 , si osserva subito che $\delta = b_\pi$. Sia ora c la costante tale che

$$\begin{cases} cb_\pi \mathbf{x}_j = A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i + \mu_i \mathbf{e}_{ji} \\ c\mu_j = \mu_i \end{cases} \quad (5.7)$$

Si ha che

$$c = \frac{\mu_i}{\mu_j} = \frac{z_i^0 z_j}{z_j^0 z_i} \quad (5.8)$$

è indipendente dal piano di riferimento π e vale 1 per la coppia $(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{x}_j^0)$. Quindi la costante b_π è subito nota da

$$b_\pi \mathbf{x}_j^0 = A_{ij}(\pi) \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{e}_{ji}$$

In altre parole si può calcolare direttamente D_{ij}^* con

$$D_{ij}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_\pi} A_{ij}(\pi) & \frac{1}{b_\pi} \mathbf{e}_{ji} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

senza doverla stimare dalle coppie $(\mathbf{X}_i^P, \mathbf{X}_j^P)$. Ad ogni modo sperimentalmente si nota che in caso di misurazioni imprecise il procedimento risulta meno robusto.

Proposizione 5.1 (Matrice di calibrazione della scena) *Si consideri la matrice $V_j = H_i H_j^{-1}$ e si ponga $\hat{D}_{ij} = V_j D_{ij}$. Allora l'applicazione*

$$\varphi : SP_K(3, \mathbb{R}) \rightarrow GL(4, \mathbb{R}) | \hat{D}_{ij} = \varphi(T_{ij}) = H_i T_{ij} H_i^{-1}$$

è un morfismo tra gruppi di Lie con differenziale

$$D\varphi(X) = H_i X H_i^{-1}.$$

Inoltre $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x}(t) \cong [I | \mathbf{0}] \hat{D}_{ij}^t \mathbf{X}_i^P \cong [I | \mathbf{0}] T_{ij}^t \mathbf{X}_i$$

La matrice V_j è detta matrice di calibrazione della scena.

Dimostrazione. E' chiaro che \hat{D}_{ij} è invertibile perchè

$$\hat{D}_{ij} = V_j D_{ij} = H_i H_j^{-1} H_j T_{ij} H_i^{-1} = H_i T_{ij} H_i^{-1}$$

è il prodotto di matrici invertibili. Dunque $\hat{D}_{ij} \in GL(4, \mathbb{R})$. Inoltre l'applicazione

$$\varphi : SP_K(3, \mathbb{R}) \rightarrow GL(4, \mathbb{R}) | \hat{D}_{ij} = \varphi(T_{ij}) = H_i T_{ij} H_i^{-1}$$

è un morfismo tra gruppi di Lie perchè

$$\varphi(T_1) \varphi(T_2) = H_i T_1 H_i^{-1} H_i T_2 H_i^{-1} = H_i T_1 T_2 H_i^{-1} = \varphi(T_1 T_2).$$

Dunque esiste sempre un logaritmo di \hat{D}_{ij} nell'algebra $gl(3, \mathbb{R})$, cioè semplicemente un logaritmo reale. Il differenziale di φ è

$$D\varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(e^{Xt}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} H_i e^{Xt} H_i^{-1} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} H_i e^{Xt} H_i^{-1} \right|_{t=0} = H_i X H_i^{-1}$$

Dunque

$$\hat{D}_{ij}^t = e^{\ln(\hat{D}_{ij})t} = H_i e^{\ln(T_{ij})t} H_i^{-1} = H_i T_{ij}^t H_i^{-1}$$

Infine, osservando che $[I|\mathbf{0}]H_i = [I|\mathbf{0}]$ e che $X_i^P \cong H_i \mathbf{X}_i$

$$\mathbf{x}(t) \cong [I|\mathbf{0}]T_{ij}^t \mathbf{X}_i = [I|\mathbf{0}]H_i T_{ij}^t H_i^{-1} \mathbf{X}_i^P = [I|\mathbf{0}]\hat{D}_{ij}^t \mathbf{X}_i^P$$

□

La proposizione (5.1) è importante perchè fornisce un modo per generare una proiezione virtuale esattamente come se conoscessimo la ricostruzione 'vera' della scena e la matrice T_{ij} , rispettando così l'interpretazione geometrica dello spostamento rigido delle fotocamere. Inoltre, siccome D_{ij} non è nota la matrice che si dovrà esponenziare sarà $V_j D_{ij}^*$ che comunque è proporzionale a \hat{D}_{ij} . Questo però è possibile solo a patto di conoscere la matrice $V_j = H_i H_j^{-1}$. Calcolando esplicitamente tale matrice si ha

$$V_j = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \frac{z_i^0}{\pi_i^T \mathbf{X}_i^0} \left(\mathbf{v}_i^T - \frac{c_i}{c_j} \mathbf{v}_j^T \right) & \frac{c_i}{c_j} \frac{z_i^0}{z_j^0} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

V_i dipende solo dal piano di riferimento π espresso negli opportuni sistemi di riferimento e dal punto \mathbf{X}^0 e per questo prende il nome di matrice di calibrazione della scena. Purtroppo si può osservare subito che tali elementi non sono in generale noti a meno che il piano di riferimento π sia all'infinito. In tal caso $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ e $c_i = c_j$ e le matrici (5.9) e (5.5) si semplificano in

$$V_j = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \frac{z_i^0}{z_j^0} \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{R\infty} & \mathbf{e}_{ji}^R \frac{X_{4i}^0}{z_i^0} \\ \mathbf{0}^T & \frac{z_j^0}{z_i^0} \end{bmatrix}.$$

dove X_{4i}^0 è la coordinata di scala del punto di riferimento. Inoltre in tal caso

$$V_j D_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{R\infty} & \mathbf{e}_{ji}^R \frac{X_{4i}^0}{z_i^0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

La matrice D_{ij} osservata sarà invece

$$D_{ij}^* = \begin{bmatrix} A_{ij}^{\star\infty} & \mathbf{e}_{ji}^* \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_i^0}{z_j^0} A_{ij}^{R\infty} & \mathbf{e}_{ji}^* \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

poichè dall'equazione (5.6) si ha $A_{ij}^{\star\infty} = \frac{z_i^0}{z_j^0} A_{ij}^{R\infty}$. Dunque la matrice che si può ottenere per generare nuove viste sarà

$$V_j D_{ij}^* = \begin{bmatrix} A_{ij}^{\star\infty} & \mathbf{e}_{ji}^* \\ \mathbf{0}^T & \frac{z_i^0}{z_j^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_i^0}{z_j^0} A_{ij}^{R\infty} & \mathbf{e}_{ji}^* \\ \mathbf{0}^T & \frac{z_i^0}{z_j^0} \end{bmatrix} \cong V_j D_{ij} \quad (5.11)$$

Comparando (5.10) e (5.11) si osserva subito che la costante di proporzionalità tra le due matrici è proprio il rapporto $\frac{z_i^0}{z_j^0}$, per cui

$$V_j D_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{R\infty} & \mathbf{e}_{ji}^R \frac{X_{4i}^0}{z_i^0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{R\infty} & \frac{z_j^0}{z_i^0} \frac{1}{b_\infty} \mathbf{e}_{ji} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Per riassumere, prendendo come riferimento il piano all'infinito, si utilizzerà una matrice A_{ij}^∞ nella ricostruzione, che è $A_{ij}^{R\infty}$ riscalata in modo tale da soddisfare il vincolo sul punto di riferimento. In seguito si può ricavare il rapporto $\frac{z_i^0}{z_j^0}$ dalla matrice $A_{ij}^{\star\infty}$ osservata notando che con matrici di calibrazione identiche si ha $\det(A_{ij}^\infty) = \det(KR_{ij}K^{-1}) = 1$.

Ancora una volta, dunque, il problema si riconduce a ricavare in qualche modo l'omografia $A_{ij}^{R\infty}$ oltre che il rapporto $\frac{z_i^0}{z_j^0}$.

5.4 Calcolo dell'omografia infinita

In letteratura vi sono molti articoli riguardo al calcolo dell'omografia infinita. Avendo a disposizione tre punti di fuga, che sono proiezioni di punti all'infinito, la matrice A_{ij}^∞ è ottenibile risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{p}_j \cong A_{ij}^\infty \mathbf{p}_i \\ \mathbf{e}_{ji} \cong A_{ij}^\infty \mathbf{e}_{ij} \end{cases}$$

Questo purtroppo non è sempre possibile in quanto in generale non vi sono nelle immagini gli elementi necessari per il calcolo di tre punti di fuga e spesso, qualora sia possibile ottenerli, gli errori numerici sono considerevoli perchè si deve calcolare intersezioni di rette quasi parallele tra loro. Al contrario è molto più frequente che in una foto si incontrino dei piani paralleli che racchiudono di per sé gran parte delle informazioni riguardo al posizionamento del piano all'infinito. Due piani paralleli infatti si intersecano in una

retta all'infinito e calcolando un solo punto di fuga si hanno tutte le informazioni necessarie. In alternativa due coppie di piani paralleli individuano due rette all'infinito che a loro volta individuano il piano all'infinito. Altre vie sono state proposte in [16] e [17].

Si supponga ora di avere a disposizione nelle due immagini una coppia di piani paralleli che nel sistema di riferimento della prima fotocamera avranno coordinate $\pi_i = [\mathbf{v}_i^T, c_i]^T$ e $\omega_i = [\mathbf{w}_i^T, d_i]^T$. Per ognuno dei due piani si avrà

$$\begin{aligned} A_{ij}^*(\pi) &= \frac{z_i^0}{z_j^0} \left(A_{ij}^{R\infty} - \mathbf{e}_{ji}^R \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i} \right) \\ A_{ij}^*(\omega) &= \frac{z_i^0}{z_j^0} \left(A_{ij}^{R\infty} - \mathbf{e}_{ji}^R \frac{\mathbf{w}_i^T}{d_i} \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima

$$A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega) = \frac{z_i^0}{z_j^0} \mathbf{e}_{ji}^R \left(\frac{\mathbf{w}_i^T}{d_i} - \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i} \right) \quad (5.13)$$

Si noti ora che, per qualunque coppia di piani π e ω la matrice $A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega)$ soddisfa

$$(A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega)) = \frac{\mathbf{e}_{ji} \mathbf{e}_{ji}^T}{\|\mathbf{e}_{ji}\|^2} (A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega))$$

cioè ha come colonne multipli dell'unico autovettore di $\frac{\mathbf{e}_{ji} \mathbf{e}_{ji}^T}{\|\mathbf{e}_{ji}\|^2}$, che è simmetrica definita strettamente positiva e ha rango unitario, un unico autovalore non nullo uguale a 1 ed è indipendente dalla scala dell'epipolo. Inoltre l'unico autovettore è proprio \mathbf{e}_{ji} . In altre parole la differenza tra le omografie indotte da due piani generici può essere sempre scritta come

$$(A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega)) = \mathbf{e}_{ji} \mathbf{y}^T$$

con $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

A questo punto si sfrutta il parallelismo tra i due piani, cioè $\mathbf{w}_i^T = \gamma \mathbf{v}_i^T$ e si ottiene

$$A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega) = \frac{z_i^0}{z_j^0} \mathbf{e}_{ji}^R \alpha \frac{\mathbf{v}_i^T}{c_i} \quad (5.14)$$

con

$$\alpha = c_i \left(\frac{\gamma}{d_i} - \frac{1}{c_i} \right) = \frac{\gamma c_i}{d_i} - 1 \quad (5.15)$$

Ricavando da (5.14) $\frac{v_i^T}{c_i}$ e sostituendolo in (5.12) si può esprimere l'omografia infinita nella forma seguente

$$\begin{aligned} A_{ij}^{R\infty} &= \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(A_{ij}^*(\pi) + \frac{1}{\alpha} \frac{\mathbf{e}_{ji} \mathbf{e}_{ji}^T}{\|\mathbf{e}_{ji}\|^2} \left(A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega) \right) \right) \\ &= \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(A_{ij}^*(\pi) + \frac{1}{\alpha} \left(A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

dove i termini il rapporto $\frac{z_j^0}{z_i^0}$ e $\frac{1}{\alpha}$ sono incogniti.

Imponendo il vincolo $\det(A_{ij}^{R\infty}) = 1$ si ha una equazione con due incognite ed è necessario fornire ulteriori vincoli per ricavare l'omografia infinita $A_{ij}^{R\infty}$. Intuitivamente, dato che due piani paralleli si intersecano in una retta all'infinito, è necessario fornire un punto all'infinito non giacente su tale retta o informazioni equivalenti. Ad esempio si può procedere ricercando nelle due immagini un punto di fuga che non sia sui piani oppure un'altra coppia di piani paralleli.

Innanzitutto si osservi che una volta ottenuta la matrice $A_{ij}^{R\infty}$, questa sarà riscalata rispetto al punto di riferimento, cioè si cercherà λ tale che

$$\mathbf{x}_j^0 \cong \lambda A_{ij}^{R\infty} \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{e}_{ji}$$

e poi per qualunque coppia di punti corrispondenti $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ si avrà

$$\gamma \mathbf{x}_j = \lambda A_{ij}^{R\infty} \mathbf{x}_i + \mu_\infty \mathbf{e}_{ji}. \quad (5.17)$$

Sostituendo (5.16) in (5.17)

$$\gamma \mathbf{x}_j = \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} A_{ij}^*(\pi) \mathbf{x}_i + \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \frac{1}{\alpha} \left(A_{ij}^*(\pi) - A_{ij}^*(\omega) \right) \mathbf{x}_i + \mu_\infty \mathbf{e}_{ji}. \quad (5.18)$$

Siano ora b_π e b_ω le costanti tali che

$$b_\pi A_{ij}^*(\pi) = A_{ij}(\pi)$$

$$b_\omega A_{ij}^*(\omega) = A_{ij}(\omega)$$

Per come sono riscalate le omografie $A_{ij}(\pi)$ e $A_{ij}(\omega)$ si ha

$$c_\pi \mathbf{x}_j = b_\pi A_{ij}^*(\pi) \mathbf{x}_i + \mu_\pi \mathbf{e}_{ji}$$

$$c_\omega \mathbf{x}_j = b_\omega A_{ij}^*(\omega) \mathbf{x}_i + \mu_\omega \mathbf{e}_{ji}$$

con $b_\pi, b_\omega, c_\pi, c_\omega, \mu_\pi$ e μ_ω note. Per comodità si ponga

$$\begin{aligned} C_\pi &= \frac{c_\pi}{b_\pi} & C_\omega &= \frac{c_\omega}{b_\omega} \\ M_\pi &= \frac{\mu_\pi}{b_\pi} & M_\omega &= \frac{\mu_\omega}{b_\omega} \end{aligned}$$

Facendo riferimento a (5.7) e (5.8) si osserva che, per ogni coppia di punti, le costanti C_π e C_ω sono uguali tra loro

$$C_\pi = C_\omega = \frac{z_i^0 z_j}{z_j^0 z_i}.$$

Ponendo dunque $C = C_\pi = C_\omega$ si ha

$$\begin{aligned} A_{ij}^*(\pi) \mathbf{x}_i &= C \mathbf{x}_j - M_\pi \mathbf{e}_{ji} \\ A_{ij}^*(\omega) \mathbf{x}_i &= C \mathbf{x}_j - M_\omega \mathbf{e}_{ji} \end{aligned}$$

e sostituendo in (5.18) si giunge a

$$\gamma \mathbf{x}_i = C \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \mathbf{x}_i + \left(\mu_\infty - \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(M_\pi + \frac{1}{\alpha} (M_\pi - M_\omega) \right) \right) \mathbf{e}_{ji} \quad (5.19)$$

da cui si ricava il seguente sistema

$$\begin{cases} \gamma = C \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \\ \mu_\infty = \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(M_\pi + \frac{1}{\alpha} (M_\pi - M_\omega) \right) \end{cases}$$

in cui la prima equazione non fornisce nessuna informazione utile. Si consideri dunque solo la seconda che è soddisfatta da ogni coppia di punti $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. In particolare, prendendo $(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{x}_j^0)$, per come sono riscalate tutte le omografie si ha che $\mu_\infty = \mu_\pi = \mu_\omega = 1$. Dunque

$$1 = \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(\frac{1}{b_\pi} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{b_\pi} - \frac{1}{b_\omega} \right) \right) \quad (5.20)$$

Usando due piani paralleli ed un punto di fuga non giacente sui piani

Si supponga ora di conoscere un punto all'infinito \mathbf{P} le cui proiezioni sono i punti di fuga \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_j . In generale si ha che solo il termine $\mu_\infty = 0$ e si ottiene dunque

$$\begin{cases} 0 = \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(M_\pi + \frac{1}{\alpha} (M_\pi - M_\omega) \right) \\ 1 = \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(\frac{1}{b_\pi} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{b_\pi} - \frac{1}{b_\omega} \right) \right) \end{cases} \quad (5.21)$$

che risolto fornisce

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} = \frac{-M_\pi}{M_\pi - M_\omega} \\ \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} = \left(\frac{1}{b_\pi} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{b_\pi} - \frac{1}{b_\omega} \right) \right)^{-1} \end{cases}$$

Si ottenengono così gli elementi per calcolare $\lambda A_{ij}^{R\infty}$ da (5.16). Infine, dal vincolo sul determinante si ha che

$$\det(\lambda A_{ij}^{R\infty}) = \lambda^3$$

per cui si può ricavare λ , $A_{ij}^{R\infty}$ ed il rapporto $\frac{z_j^0}{z_i^0}$. Si noti che in questo caso risolvere (5.21) in questo modo è equivalente a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \gamma \mathbf{p}_j = A_{ij}^\infty \mathbf{p}_i = \frac{z_j^0}{z_i^0} (A_{ij}(\pi) + \frac{1}{\alpha} (A_{ij}(\pi) - A_{ij}(\omega))) \mathbf{p}_i \\ \det(A_{ij}^\infty) = 1 \end{cases}$$

Se però il punto di fuga appartiene ai piani paralleli si ha $M_\pi = M_\omega = 0$ e non si ha modo di risolvere il sistema.

Usando due coppie di piani paralleli

Avendo a disposizione un'altra coppia di piani paralleli $\pi' = [\mathbf{v}'^T, c']^T$ e $\omega' = [\mathbf{w}'^T, d']^T$, procedendo in modo analogo a quanto fatto fin'ora si giunge a

$$\mu_\infty = \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(M_\pi + \frac{1}{\alpha} (M_\pi - M_\omega) \right) = \lambda \frac{z_j^0}{z_i^0} \left(M'_\pi + \frac{1}{\alpha'} (M'_\pi - M'_\omega) \right) \quad (5.22)$$

Si ha un'equazione di questa forma per ciascuna coppia di punti $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Per cui, avendo a disposizione almeno due coppie si può calcolare $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{\alpha'}$. Infine, sostituendo α in (5.16) il vincolo sul determinante di A_{ij}^∞ permette di ricavare $\frac{z_j^0}{z_i^0}$.

5.5 Posizione dei centri delle fotocamere

Si consideri l'espressione della costante α nell'equazione (5.15). Ricordando che, dati due piani $\pi = [\mathbf{v}^T, c]^T$ e $\omega = [\mathbf{w}^T, d]$, la loro distanza con segno dall'origine degli assi è data da

$$\begin{aligned} d(\pi, \mathbf{0}) &= -\frac{c}{\|\mathbf{v}\|} \\ d(\omega, \mathbf{0}) &= -\frac{d}{\|\mathbf{w}\|} \end{aligned}$$

Se i due piani sono paralleli, cioè se $\mathbf{w} = \gamma \mathbf{v}$, allora il rapporto fra le due distanze è

$$\frac{d(\pi, \mathbf{0})}{d(\omega, \mathbf{0})} = \frac{|\gamma| c}{d}.$$

Si consideri dunque

$$\alpha + 1 = \frac{\gamma c}{d}$$

In valore assoluto $\alpha + 1$ è uguale al valore assoluto rapporto fra le distanze $d(\pi, \mathbf{0})$ e $d(\omega, \mathbf{0})$. Per quel che riguarda il segno, invece, $\alpha + 1$ è negativo se l'origine si trova fra i due piani ed è positivo altrimenti (si tralasci il caso in cui giaccia su uno dei due piani). Infatti:

- se i due piani hanno la stessa orientazione, cioè se $\gamma > 0$, allora

$$\alpha + 1 = \frac{\gamma c}{d} = \frac{|\gamma| c}{d} = \frac{d(\pi, \mathbf{0})}{d(\omega, \mathbf{0})}$$

Dunque $\alpha + 1 < 0$ se l'origine si trova fra i due piani perchè le due distanze hanno segno opposto;

- se i due piani non hanno la stessa orientazione $\gamma < 0$, dunque

$$\alpha + 1 = \frac{\gamma c}{d} = -\frac{|\gamma| c}{d} = -\frac{d(\pi, \mathbf{0})}{d(\omega, \mathbf{0})}$$

che ancora una volta è negativo se l'origine si trova fra i due piani perchè questa volta le due distanze hanno lo stesso segno.

Dunque si può esprimere la costante α come

$$\alpha + 1 = s \left| \frac{d(\pi, \mathbf{0})}{d(\omega, \mathbf{0})} \right|$$

con $s < 0$ se l'origine degli assi è fra i due piani e $s > 0$ altrimenti. Infine, considerato che in (5.15) i piani π e ω sono espressi nel sistema di riferimento in cui l'origine degli assi coincide con il centro della fotocamera i , si può concludere che $\alpha + 1$ è in valore assoluto il rapporto delle distanze del centro della fotocamera i dai due piani paralleli ed è negativa se la fotocamera, al momento della foto, si trovava tra i due piani. Ciò permette di ricavare quantità metriche interessanti a partire dalle fotografie.

Si faccia riferimento ad esempio alla figura 5.1. I punti A' e B' giacciono sui piani paralleli π e ω e contemporaneamente su una retta ortogonale ai due piani. Nell'immagine tale retta interseca la retta all'infinito dei piani (o, meglio, la proiezione della retta all'infinito in cui si intersecano i piani) in un punto D . La retta all'infinito è l'intersezione di un piano parallelo ai due piani con il piano focale, dunque $\alpha + 1$ corrisponde al rapporto fra le lunghezze $|AD|$ e $|DB|$ (fig.5.2). Sia C' un qualunque punto sulla retta congiungente A' e B' . L'applicazione che porta A', B', C' e D' dallo spazio in A, B, C, D nell'immagine è un'omografia della retta \mathbb{P}^1 . Dunque si conserva il cross-ratio dei quattro punti:

$$C_{cross} = \frac{|AD| |AC|}{|DB| |CB|} = \frac{|A'D'| |A'C'|}{|D'B'| |C'B'|}$$



Figura 5.1: E' possibile ottenere informazioni metriche a partire dalla costante α

dove il termine a sinistra è noto perché sono rapporti di distanze misurabili dall'immagine, mentre nel termine a destra è noto il rapporto

$$\frac{|A'D'|}{|D'B'|} = s(\alpha + 1).$$

Dunque, conoscendo la posizione di C' si può calcolare la distanza fra i due piani π e ω . Viceversa, conoscendo la distanza tra i due piani è possibile posizionare il punto C' .

Lo stesso discorso è valido per qualunque retta che interseca i piani π e ω con l'unico accorgimento che in tal caso $|A'B'|$ non è più la distanza fra i due piani (fig.5.3,5.4). Infatti in tal caso sia ϑ l'angolo fra la retta dei quattro punti nello spazio e la retta per D' ortogonale ai piani. Allora

$$\frac{|A'D'|}{|D'B'|} = \frac{|A''D''| \cos(\vartheta)}{|D''B''| \cos(\vartheta)} = s(\alpha + 1).$$

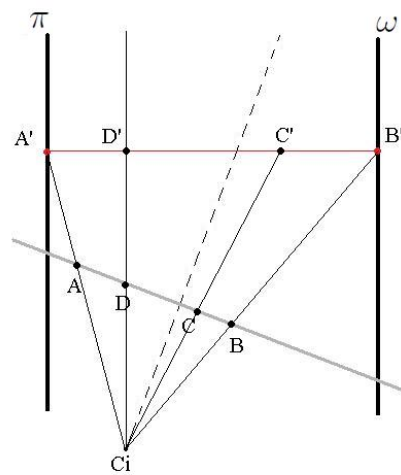


Figura 5.2: Il cross ratio tra A, B, C, D e A', B', C', D' si conserva.



Figura 5.3: E' possibile ottenere informazioni metriche a partire dalla costante α anche quando A e B non giacciono su una retta ortogonale ai piani

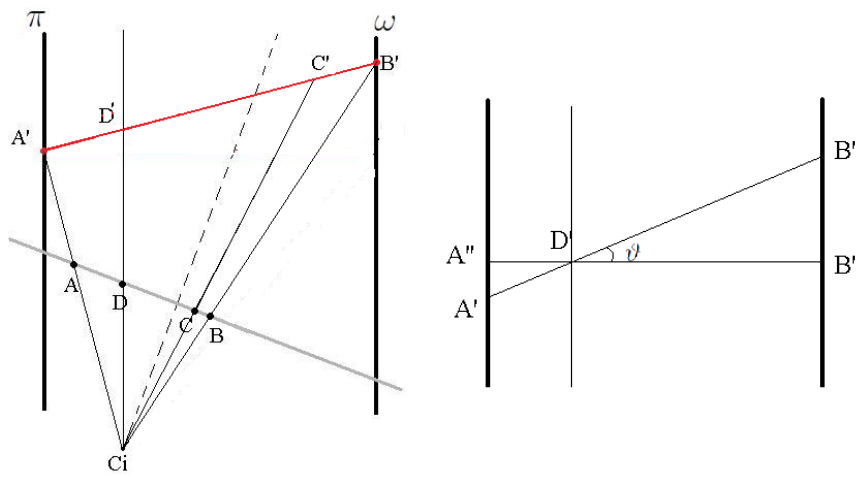


Figura 5.4: Lo stesso ragionamento vale per qualunque retta anche non ortogonale ai piani

Capitolo 6

Applicazioni

6.1 Simulazione con dati esatti

Per prima cosa si è verificato che la generazione di viste virtuali è effettivamente possibile per mezzo di una simulazione. E' stato generato un cubo di vertici

$$\begin{array}{cccc} (1, 1, 1) & (1, 1, -1) & (1, -1, 1) & (1, -1, -1) \\ (-1, 1, 1) & (-1, 1, -1) & (-1, -1, 1) & (-1, -1, -1) \end{array}$$

Le fotocamere sono state simulate fornendo i parametri di calibrazione, gli angoli di eulero per le rotazioni e i centri in coordinate euclidee. Le grandezze sono poi state tutte riscalate in pixel impostando un rapporto di 100 pixels per un'unità. Le proiezioni dei punti del cubo sono state visualizzate come se fossero effettivamente due fotografie di risoluzione 1024×768 con gli assi orientati come di consueto nelle immagini digitali ed il punto principale coincidente con il centro della fotografia. In seguito si sono definiti i piani $\pi = [\mathbf{v}^T, x]^T, \omega = [\gamma \mathbf{v}^T, d]^T$ dando il vettore \mathbf{v} e le costanti γ, c e d (quest'ultimi riscalati poi in pixels) e sono stati generati casualmente dei punti su tali piani. A seconda dei casi si fornisce un punto all'infinito $\mathbf{P} = [P_1, P_2, P_3, 0]^T$ a caso oppure un'altra coppia di piani paralleli π' e ω' come in precedenza. In particolare, nella simulazione che presentiamo si sono posti i parametri riportati nelle tabelle 6.1, 6.2, 6.3.

Pixel rate	$PR = 100$
Distanza focale	$f = 3PR$
Fattore scala asse x	$m_x = 1$
Fattore scala asse y	$m_y = 1$
Offset asse x	$p_x = 1024/2$
Offset asse y	$p_y = 768/2$

Tabella 6.1: Parametri di calibrazione delle fotocamere

α_i	0
β_i	0
γ_i	$-\pi/20$
\tilde{C}_i	$[3, 0, -4]^T PR$
α_i	0
β_i	$\pi/12$
γ_i	$\pi/20$
\tilde{C}_i	$[-3, 0, -4]^T PR$

Tabella 6.2: Angoli di Eulero e centri delle fotocamere

\mathbf{v}	$[1, 0, 0]^T$
c	$-4PR$
d	$15PR$
γ	1
\mathbf{v}'	$[0, 0, 1]^T$
c'	-4
d'	8
γ'	1
\mathbf{P}	$[1, 2, 3, 0]^T$

Tabella 6.3: Piani di riferimento e punto all'infinito

Con tali dati è possibile calcolare tutte le quantità utili per effettuare poi un riscontro con le stime. In particolare si calcola la matrice di calibrazione K , le matrici di rotazione delle fotocamere e la rotazione relativa R_{ij} , le matrici di proiezione P_i e P_j , le omografie indotte dai piani, l'omografia infinita $A_{ij}^{R\infty} = KR_{ij}K^{-1}$ e la matrice T_{ij} , gli epipoli e la matrice fondamentale. Inoltre, prendendo come punto di riferimento il punto $[1, 1, 1]^T$ del cubo si può calcolare anche il rapporto $\frac{z_i}{z_j}$. In particolare l'omografia infinita è

$$A_{ij}^{R\infty} = \begin{bmatrix} 1.0383 & -0.2416 & 58.6226 \\ -0.2519 & 0.5906 & 382.0459 \\ 0.0001 & -0.0009 & 1.2068 \end{bmatrix},$$

mentre la matrice $V_j D_{ij}$ da esponenziare è

$$V_j D_{ij} = \begin{bmatrix} 1.0383 & -0.2416 & 58.6226 & 592.6130 \\ -0.2519 & 0.5906 & 382.0459 & -93.8607 \\ 0.0001 & -0.0009 & 1.2068 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Proiettando i punti del cubo si ottengono le fotografie in figura (6.1) e (6.2).

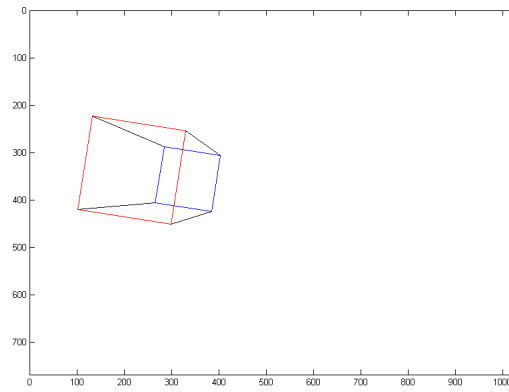


Figura 6.1: Fotografia del cubo presa dalla fotocamera i .

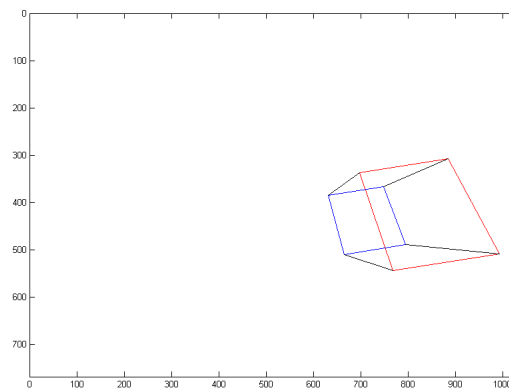


Figura 6.2: Fotografia del cubo presa dalla fotocamera j .

A questo punto dalle proiezioni dei punti del cubo e dei punti sui piani si può procedere alla stima dell'omografia infinita. Innanzi tutto viene stimata la matrice fondamentale F e gli epipoli che sono effettivamente proporzionali a quelli teorici. In seguito si stimano le omografie $A_{ij}(\pi), A_{ij}(\omega)$ e le inverse con un algoritmo DLT (Direct Linear Transformation) oppure con algoritmi non lineari presenti nella libreria *VGG MultiView Compute Library* per Matlab (cft.[1, pag.106],[27]). Tali omografie sono poi scalate in modo da soddisfare il vincolo sul punto di riferimento. Infine per tutti i punti si calcolano le ricostruzioni $\mathbf{X}_i^P(\pi), \mathbf{X}_j^P(\pi), \mathbf{X}_i^P(\omega), \mathbf{X}_j^P(\omega)$, si stimano la matrici $D_{ij}^*(\pi), D_{ij}^*(\omega), A_{ij}^*(\pi), A_{ij}^*(\omega)$, le costanti b_π, b_ω e le costanti M_π, M_ω per tutti i punti a disposizione come descritto nei paragrafi 5.3 e 5.4. Nel caso di due coppie di piani paralleli lo stesso viene effettuato per π' e ω' . A questo punto, se si ha a disposizione il punto all'infinito aventi proiezioni \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_j , si risolve il sistema (5.21) ottenendo così la costante α e da (5.16) si calcola il rapporto $\frac{z_i^0}{z_j^0}$ e l'omografia infinita che risulta uguale a quella teorica.

Se invece si è nel caso delle due coppie di piani paralleli, si risolve ai minimi quadrati (5.22) utilizzando tutti i punti a disposizione per calcolare α e si procede come nel caso precedente per ritrovare $A_{ij}^{R\infty}$. In entrambi i casi l'errore relativo in norma nella stima è dell'ordine di 10^{-9} .

A questo punto si calcolano le ricostruzioni di ogni punto utilizzando il piano di riferimento all'infinito, si stima $D_{ij}^{*\infty}$ usando tutti i punti a disposizione, si calcola $V_j D_{ij}$ e la si riscalda in modo che abbia autovalori di modulo unitario. Si generano infine nuove viste del cubo da

$$\mathbf{x}(t) \cong [I|\mathbf{0}](V_j D_{ij})^t \mathbf{X}_i^P$$

e si può riscontrare visivamente che, per $t \in [0, 1]$, la proiezione 'si muove' in modo continuo dalla vista i alla vista j esattamente come se la fotocamera si fosse mossa in modo continuo dalla posizione della fotocamera i alla posizione della fotocamera j lungo la traiettoria generata esponenziando la matrice T_{ij} (fig.6.3). La traiettoria descritta dal centro della fotocamera è rappresentata in figura (6.4).

Lo stesso risultato si ottiene invertendo il ruolo delle due fotocamere, stimando cioè $A_{ji}^{R\infty}, D_{ji}^{*\infty}$ e calcolando $V_i D_{ji}$. In tal caso la traiettoria parte dalla vista i per arrivare alla vista j ripercorrendo lo stesso percorso ottenuto in precedenza, ma in senso inverso.

6.2 Simulazione con rumore gaussiano

Si è ripetuto tutto il procedimento precedente sporcando i dati con errori gaussiani di media nulla e una deviazione standard variabile in pixel. Più precisamente, dopo aver generato tutti i punti del cubo e sui piani e dopo aver calcolato le proiezioni, queste ultime sono state modificate aggiungendo degli

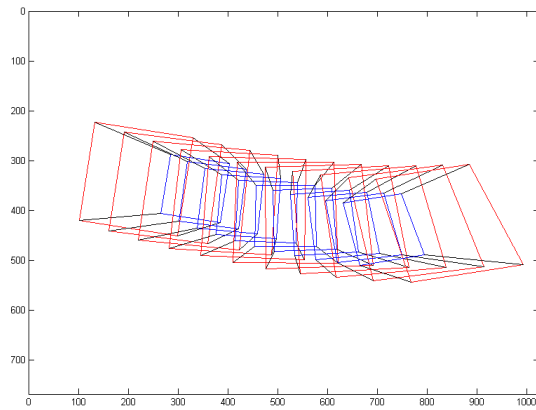


Figura 6.3: Interpolazione per $t \in [0, 1]$ delle due immagini. Il cubo si muove in modo continuo da una vista all'altra.

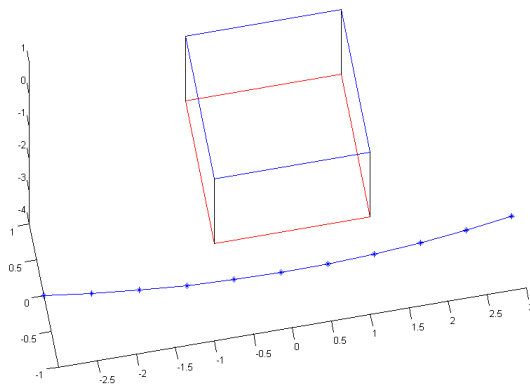


Figura 6.4: Traiettoria descritta dal centro della fotocamera che si sposta dalla posizione i alla posizione j .

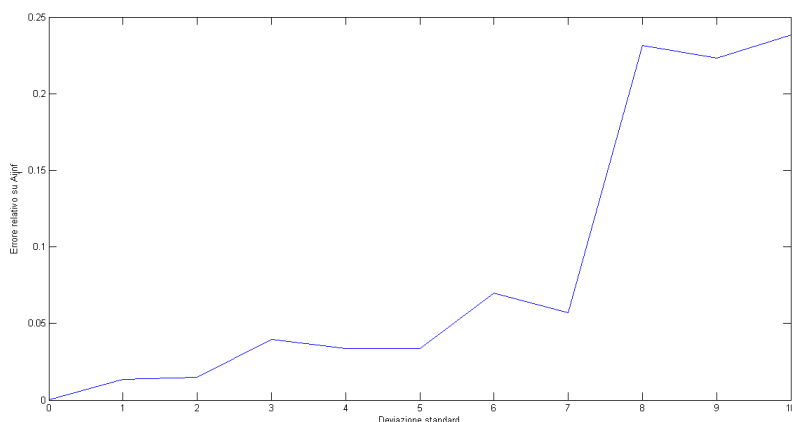


Figura 6.5: Errore relativo sulla stima di A_{ij}^{∞} al variare della deviazione standard dell'errore sulle misurazioni

errori che simulano gli errori di misura in una fotografia vera. Si tenga conto che in generale tali misurazioni hanno un errore medio di pochi pixels. Si è osservato che il procedimento è abbastanza robusto per deviazioni piccole. Lanciando delle simulazioni con diversi valori della deviazione standard si ottiene un errore relativo sulla stima di A_{ij}^{∞} che sembra crescere in modo esponenziale rispetto alla deviazione (fig.6.5).

Nonostante sia opportuno cercare di minimizzare tali errori di stima perché entreranno nell'esponenziale, un riscontro visivo sulla sintesi di nuove immagini permette di affermare che il procedimento dà buoni risultati (fig. 6.6,6.7,6.8).

Infine si nota che in generale il procedimento è più preciso se si hanno due coppie di piani paralleli, in tal caso si stima A_{ij}^{∞} con un numero maggiore di punti rispetto che un solo punto di fuga, il quale a sua volta deve essere calcolato come intersezione di diverse rette che a loro volta saranno affette da errori di misura.

6.3 Applicazione a foto reali

Per prima cosa si è applicato tutto il procedimento ad una coppia di foto sintetiche costruite in modo tale che avessero tutti gli elementi necessari all'interpolazione. Il problema principale consiste nella precisione nelle misure delle coordinate dei punti sulle immagini e la riorganizzazione dei dati che deve essere molto ordinata. Per questo motivo è preferibile misurare pochi punti, ma con accuratezza in modo da non ottenere risultati indesiderati. Inoltre, per minimizzare gli errori nella proiezione si è proceduto a interpolare le traiettorie ottenute utilizzando come riferimento prima una foto e poi

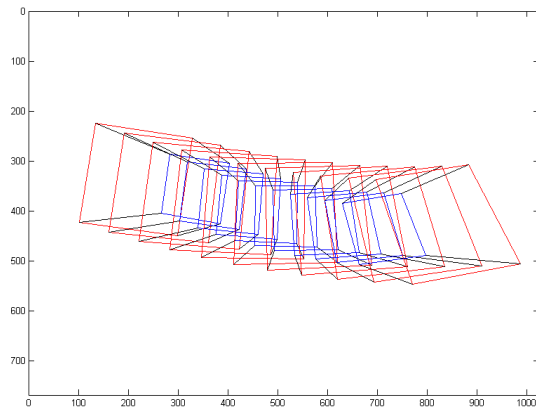


Figura 6.6: Traiettoria con errori sulle misurazioni con varianza 1pixel.

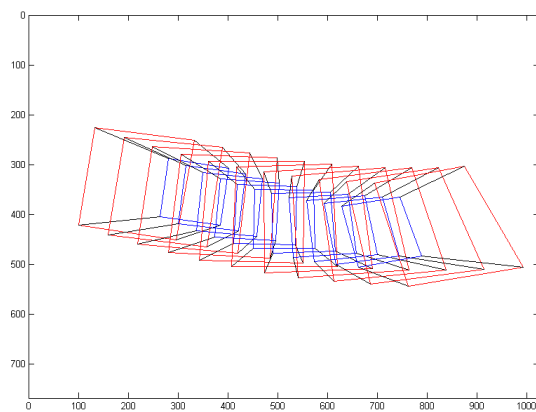


Figura 6.7: Traiettoria con errori sulle misurazioni con varianza 2pixel.

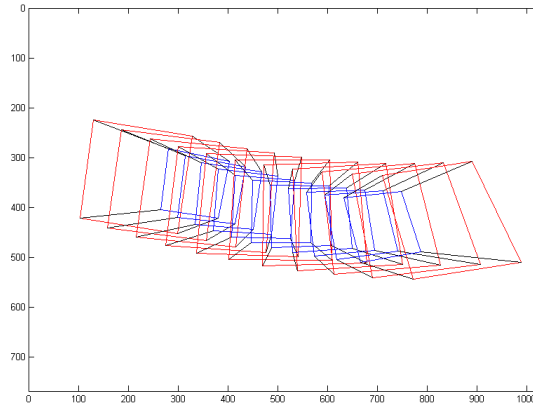


Figura 6.8: Traiettoria con errori sulle misurazioni con varianza 3pixel.

l'altra. In altre parole i punti risultanti sono dati da

$$\mathbf{x}(t) \cong (1-t)[I|\mathbf{0}](V_j D_{ij}^\infty)^t \mathbf{X}_i^P + t[I|\mathbf{0}](V_i D_{ji}^\infty)^{1-t} \mathbf{X}_j^P.$$

Se le misurazioni sono esatte la traiettoria di “andata” e di “ritorno” coincidono e sono uguali a $\mathbf{x}(t)$. In presenza invece di errori di misura è possibile ridurre l'errore commesso in prossimità delle due foto di riferimento, mentre l'errore è massimo per $t = \frac{1}{2}$. Nelle immagini 6.9 e 6.10 sono state misurate le coordinate dei vertici visibili del cubo e le coordinate di quattro punti su ognuno dei quattro piani presenti. Una volta stimata l'omografia indotta dal piano all'infinito e calcolate le matrici da esponenziare si è ottenuta la traiettoria del cubo in figura 6.11. Lo stesso è stato eseguito sulle foto reali 6.12 e 6.13 ottenendo la traiettoria in figura 6.14

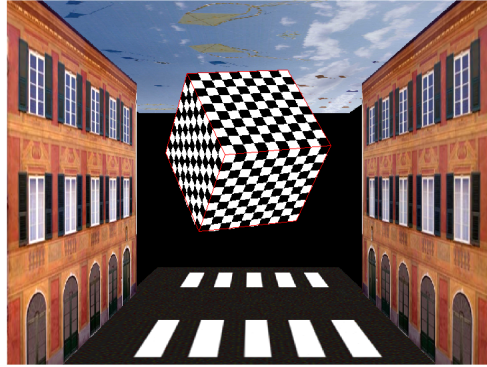


Figura 6.9: Foto *i* sintetica di un cubo

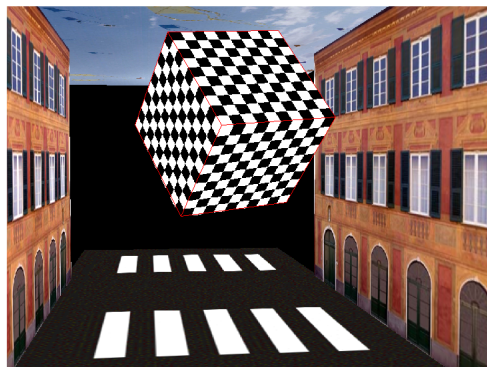


Figura 6.10: Foto *j* sintetica di un cubo

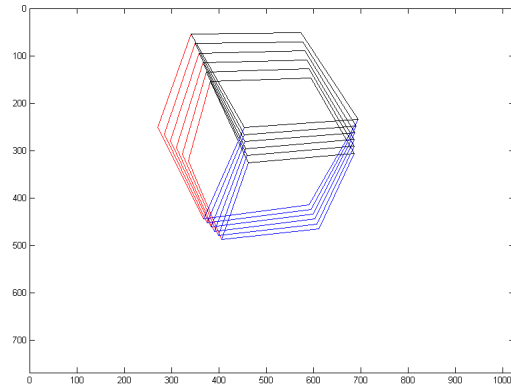


Figura 6.11: Traiettoria del cubo tra le due viste



Figura 6.12: Foto i di uno scatolone in un corridoio



Figura 6.13: Foto j di uno scatolone in un corridoio

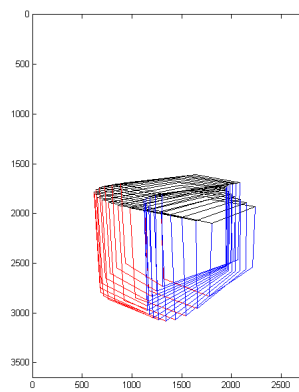


Figura 6.14: Proiezioni virtuali dello scatolone

Conclusione

Nel presente testo è stato mostrato come è possibile generare immagini virtuali avendo a disposizione due fotografie di una stessa scena scattate da una stessa fotocamera senza modificare l'ingrandimento. Questo è stato possibile perché la posizione e l'orientamento della macchina fotografica nello spazio sono esprimibili per mezzo di una matrice appartenente al gruppo speciale euclideo, che è un gruppo di Lie lineare in cui la mappa esponenziale dallo spazio tangente nel gruppo è suriettiva. In altre parole, data la posizione relativa G_{ij} di una fotocamera rispetto all'altra o, meglio, della fotocamera dopo che è stata mossa per scattare la seconda foto, si può esponenziare tale matrice generando una traiettoria ottimale nello spazio che porta da una posizione all'altra. Avendo però a disposizione solo le fotografie non si hanno a disposizione gli elementi necessari a procedere direttamente alla generazione di questa traiettoria, né le posizioni spaziali di tutti i punti degli oggetti ritratti nelle fotografie. Per questo motivo si deve procedere prima di tutto ad una ricostruzione proiettiva di tutti i punti, che è legata alla configurazione reale tramite un'omografia in \mathbb{P}^3 , ed in seguito proiettare i punti ricostruiti per mezzo di una matrice di proiezione (possiamo dire una fotocamera virtuale) che è legata alla matrice G_{ij} da un morfismo tra gruppi di Lie permettendo così di preservare le buone proprietà del gruppo speciale euclideo. Questo però è possibile solo a patto di ricavare in qualche modo l'omografia A_{ij}^∞ indotta dal piano all'infinito. In questo lavoro è proposta una tecnica per la stima di tale matrice qualora nelle due fotografie siano presenti due piani paralleli ed un punto di fuga oppure due coppie di piani paralleli, che sono frequentemente presenti in immagini scattate in città e in ambienti chiusi. Il vantaggio di utilizzare questa tecnica di sintesi di immagini consiste nel fatto che si può ottenere un'interpolazione fluida e continua da un'immagine all'altra ed ha molti sbocchi applicativi ad esempio nel campo della navigazione virtuale, dove fin'ora il passaggio da un punto di osservazione al successivo è discreto. Inoltre questo procedimento si limita a realizzare una ricostruzione affine della geometria spaziale ed evita di dover effettuare una ricostruzione completa che, quando possibile, richiede informazioni metriche più dettagliate spesso non ottenibili da fotografie. Infine le applicazioni pratiche mostrano che questa via è effettivamente percorribile e fornisce spunti per la ricerca a venire. In particolare si dovrà studiare più appropin-

ditamente quali elementi presenti nelle immagini influiscono maggiormente nella stima delle grandezze in gioco e in che modo. Si dovrà ottimizzare il procedimento per ridurre la propagazione degli errori tenendo conto per esempio della particolare forma delle matrici in gioco. Si dovranno adattare le tecniche già esistenti per il rilevamento automatico di punti corrispondenti e si dovranno individuare procedimenti per visualizzare nelle viste sintetiche tutti gli elementi presenti nelle fotografie in modo da rendere realistiche le immagini virtuali.

Appendice A

Codici Matlab

Si riportano in appendice i codici matlab utilizzati per le simulazioni e per le applicazioni.

A.1 Codici per la simulazione

main.m

```
clear all
close all
clc

I=diag(ones(3,1));
zero=[0;0;0];

%Inserisco i dati acquisiti dalle immagini
dati

%Oppure li simulo
dati_simulazione
generazione_dati
generazione_cubo

%Disegno le due "foto" del cubo
figure
plot_cubo(xi,dim_foto,1);

figure
plot_cubo(xj,dim_foto,1);
```

```

%riunisco tutte le misurazioni

if CASE==2
tutti_xi=[xi,xi_pi,xi_omega,xi_pip,xi_omegap];
tutti_xj=[xj,xj_pi,xj_omega,xj_pip,xj_omegap];
else
tutti_xi=[xi,xi_pi,xi_omega];
tutti_xj=[xj,xj_pi,xj_omega];
end

%prendo come punto di riferimento
xi0=xi(:,1);
xj0=xj(:,1);

%Controllo su pura rotazione
[Control,temp]= controllo_rotazione(tutti_xi,tutti_xj,toll);
'Stima sul controllo di pura rotazione'
temp
'tolleranza'
toll

if Control==1

%caso pura rotazione
%Se si ha rotazione pura allora ogni punto è
%legato al corrispondente da %omografia infinita
%=> tutti i punti sono proiezioni di punti all'infinito

'CASO DI PURA ROTAZIONE'

Aij_inf=DLT_ND(tutti_xj,tutti_xi);

temp=det(Aij_inf);

if temp > 0
zisuzj=temp^(1/3);
else
zisuzj=-((-temp)^(1/3));
end

Aij_inf=Aij_inf./zisuzj;
temp=size(tutti_xi);
Xpi_inf=[tutti_xi;zeros(1,temp(2))];
VDi=[Aij_inf zero;zero' 1];

Aji_inf=DLT_ND(tutti_xi,tutti_xj);

temp=det(Aji_inf);

```

```

    if temp > 0
        zjsuzi=temp^(1/3);
    else
        zjsuzi=-((-temp)^(1/3));
    end

    Aji_inf=Aji_inf./zjsuzi;
    temp=size(tutti_xj);
    Xpj_inf=[tutti_xj;zeros(1,temp(2))];
    VDj=[Aji_inf zero;zero' 1];

else
    %CALCOLO EPIPOLI da F*ejj=0 e F'*eji=0
    F=fund_mat(tutti_xi,tutti_xj);
    eij=null(F);
    FT=fund_mat(tutti_xj,tutti_xi);
    eji=null(FT);

    if CASE==2
        'USO DUE COPPIE DI PIANI PARALLELI'
    else
        'USO DUE PIANI PARALLELI ED UN PUNTO DI FUGA'
    end
    main_calc %calcola le ricostruzioni
              %e le matrici VDi e VDj
end

%Calcolo la proiezione sulla nuova vista
% xt=[I|0]*VDi^t*Xpi
%hld=1 se voglio la scia della traiettoria

hld=1;
vel=0.00001;

figure
for t=0:0.1:1
    xt=project(Xpi_inf,VDi,t);
    plot_cubo(xt,dim_foto,hld);
end

% %per confrontare con la traiettoria "vera"
% figure
% for t=0:0.01:1
%     xt=project(Ti*X,Tij,t);
%     plot_cubo(xt,dim_foto,hld);
%     pause(vel)
% end

```

```

%Calcolo la proiezione sulla nuova vista
% xt=[I|0]*VDj^t*Xpj
figure
for t=0:0.1:1
    xt=project(Xpj_inf,VDj,t);
    plot_cubo(xt,dim_foto,hld);
    pause(vel)
end

% %per confrontare con la traiettoria "vera"
% figure
% for t=0:0.01:1
%     xt=project(Tj*X,Tji,t);
%     plot_cubo(xt,dim_foto,hld);
%     pause(vel)
% end
%

%Disegna la traiettoria del centro della fotocamera
% centro=[];
% Gij=[Rij,tildeCj-Rij*tildeCi;zero',1];
% Gi=[Ri,tildeCi;zero',1];
% Gj=[Rj,tildeCj;zero',1];
%
% for t=0:0.1:1
%     temp=expm(logm(Gij)*t)*Gi;
%     centro=[centro,temp(1:3,4)];
%     pause(vel)
% end
%
% close all;
% plot3_cubo(X);
% hold on
% plot3(centro(1,:),centro(2,:),centro(3,:),'*-');
% axis equal

```

dati simulazione.m

```

%CASE=1 se usa un punto di fuga
%CASE=2 se usa due coppie di piani paralleli

CASE=2;

%Se voglio il rumore noise=1;
%deviazione standard del rumore 1/NI*normalestd
noise=0;
dev_std_pix=4; %deviazione standard sulla
                %misurazione dei punti in pixel
NI=1/dev_std_pix;

```

```

%dimensione foto in pixels
altezza=768;
larghezza=1024;
dim_foto=[0 larghezza 0 altezza];

%rapporto scala tra 1unità e pixels
%1 unità di matlab = 100 pixel
pixel_rate=100;

%Matrice di calibrazione
f=3*pixel_rate; %focal length
mx=1; %scale factor on x axis
my=1; %scale factor on y axis
s=0; %skew
offset_x=larghezza/2; %offsets
offset_y=altezza/2;

%rotazioni angoli di eulero
alpha_i=0;
beta_i=0;
gamma_i=pi/9;

alpha_j=0;
beta_j=pi/12;
gamma_j=pi/20;

%centri euclidei delle fotocamere
tildeCi=[0,0,-4]*pixel_rate;
tildeCj=[0,0,-8]*pixel_rate;

%prima coppia di piani paralleli
% pi=[v;c], omega=[gamma*v,d]
v=[1,0,0]';
c=-4*pixel_rate;
d=15*pixel_rate;
gamma=1;

%seconda coppia di piani paralleli
% pi=[vp;cp], omega=[gammavp,dp]
if CASE==2
vp=[0,0,1]';
cp=-4*pixel_rate;
dp=8*pixel_rate;
gammavp=1;
end

%numero punti da generare sui piani
% campionando da uniforme [A,B]

```

```

N=25;
A=-20*pixel_rate;
B=20*pixel_rate;

%Punto all'infinito nel caso
% si utilizzino punti di fuga
if CASE==1
    Vanish=[1,2,3,0]';
end

```

generazione dati.m

```
%GENERAZIONE DI DATI SIMULATI
```

```

gen_cameras
gen_planes
gen_points

```

gen_cameras.m

```

%Genera la matrice di calibrazione
K=[mx*f, s, mx*offset_x; 0, my*f, my*offset_y; 0, 0, 1];

%Genera matrici di rotazione
Ri=gen_rotation(alpha_i,beta_i,gamma_i);
Rj=gen_rotation(alpha_j,beta_j,gamma_j);

%Genera le matrici di proiezione delle fotocamere
Pi=K*Ri*[I -tildeCi];
Pj=K*Rj*[I -tildeCj];

%Rotazione relativa
Rij=Rj*inv(Ri);
Rji=Ri*inv(Rj);

%Centri proiettivi
Ci=[tildeCi;1];
Cj=[tildeCj;1];

%Epipoli calcolati
eijR=Pi*Cj;
ejiR=Pj*Ci;

%Omografia infinita calcolata
Aij_infR=K*Rij*inv(K);
Aji_infR=K*Rji*inv(K);

```



```
%Matrice fondamentale calcolata
FR=cross(ejiR)*Aij_infR;
```

```
Ti=[Pi;zero',1];
Tj=[Pj;zero',1];
Tij=Tj*inv(Ti);
Tji=Ti*inv(Tj);
```

gen planes.m

```
PL_pi=[v;c];
PL_omega=[gamma*v;d];
```

```
if CASE==2
PL_pip=[vp;cp];
PL_omegap=[gammavp;dp];
%controllo sul parallelismo tra i quattro piani
'Se vengono tutti uguali i piano sono tutti paralleli'
vp./v
end
```

```
%calcolo omografie indotte dai piani
PLi_pi=inv(Ti)'*PL_pi;
PLi_omega=inv(Ti)'*PL_omega;
```

```
if CASE ==2
PLi_pip=inv(Ti)'*PL_pip;
PLi_omegap=inv(Ti)'*PL_omegap;
end
```

```
Aij_piR=Aij_infR-ejiR*(PLi_pi(1:3)/PLi_pi(4))';
Aij_omegaR=Aij_infR-ejiR*(PLi_omega(1:3)/PLi_omega(4))';
```

```
if CASE==2
Aij_pipR=Aij_infR-ejiR*(PLi_pip(1:3)/PLi_pip(4))';
Aij_omegapR=Aij_infR-ejiR*(PLi_omegap(1:3)/PLi_omegap(4))';
end
```

gen points.m

```
%Genero punti casuali nello spazio
% da una distribuzione uniforme su [A,B]
```

```
X=[];
```

```
for i=1:N
```

```

X(:,i)=[(B-A)*rand+A;(B-A)*rand+A;(B-A)*rand+A;1];
end

%Genero punti casuali appartenenti ai piani
for i=1:N
    xtemp=(B-A)*rand+A;
    ytemp=(B-A)*rand+A;
    ztemp=(B-A)*rand+A;
    wtemp=-PL_pi(1:3) '*[xtemp;ytemp;ztemp]/PL_pi(4);
    X_pi(:,i)=[xtemp;ytemp;ztemp;wtemp]/wtemp;
end
for i=1:N
    xtemp=(B-A)*rand+A;
    ytemp=(B-A)*rand+A;
    ztemp=(B-A)*rand+A;
    wtemp=-PL_omega(1:3) '*[xtemp;ytemp;ztemp]/PL_omega(4);
    X_omega(:,i)=[xtemp;ytemp;ztemp;wtemp]/wtemp;
end

if CASE==2
for i=1:N
    xtemp=(B-A)*rand+A;
    ytemp=(B-A)*rand+A;
    ztemp=(B-A)*rand+A;
    wtemp=-PL_pip(1:3) '*[xtemp;ytemp;ztemp]/PL_pip(4);
    X_pip(:,i)=[xtemp;ytemp;ztemp;wtemp]/wtemp;
end
for i=1:N
    xtemp=(B-A)*rand+A;
    ytemp=(B-A)*rand+A;
    ztemp=(B-A)*rand+A;
    wtemp=-PL_omegap(1:3) '*[xtemp;ytemp;ztemp]/PL_omegap(4);
    X_omegap(:,i)=[xtemp;ytemp;ztemp;wtemp]/wtemp;
end
end

%Proietto i punti
xi=Pi*X;
xj=Pj*X;

xi_pi=Pi*X_pi;
xj_pi=Pj*X_pi;

xi_omega=Pi*X_omega;
xj_omega=Pj*X_omega;

if CASE==2

```

```

xi_pip=Pi*X_pip;
xj_pip=Pj*X_pip;

xi_omegap=Pi*X_omegap;
xj_omegap=Pj*X_omegap;
end
%Riscalco tutte le proiezioni
for n=1:N
    xi(:,n)=xi(:,n)/xi(3,n);
    xj(:,n)=xj(:,n)/xj(3,n);
    xi_pi(:,n)=xi_pi(:,n)/xi_pi(3,n);
    xj_pi(:,n)=xj_pi(:,n)/xj_pi(3,n);
    xi_omega(:,n)=xi_omega(:,n)/xi_omega(3,n);
    xj_omega(:,n)=xj_omega(:,n)/xj_omega(3,n);
end

if CASE == 2
    for n=1:N
        xi_pip(:,n)=xi_pip(:,n)/xi_pip(3,n);
        xj_pip(:,n)=xj_pip(:,n)/xj_pip(3,n);
        xi_omegap(:,n)=xi_omegap(:,n)/xi_omegap(3,n);
        xj_omegap(:,n)=xj_omegap(:,n)/xj_omegap(3,n);
    end
end

%Sporco i dati con una normale di media 1
% e deviazione standard 1/NI
xi(1:2,:)=xi(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj(1:2,:)=xj(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xi_pi(1:2,:)=xi_pi(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_pi(1:2,:)=xj_pi(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xi_omega(1:2,:)=xi_omega(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_omega(1:2,:)=xj_omega(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;

if CASE == 2
xi_pip(1:2,:)=xi_pip(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_pip(1:2,:)=xj_pip(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xi_omegap(1:2,:)=xi_omegap(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_omegap(1:2,:)=xj_omegap(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
end

if CASE== 1
    vanish_i=Pi*Vanish;
    vanish_j=Pj*Vanish;
end

generazione cubo.m

```

```

A_cubo=[1;1;-1];
B_cubo=[-1;1;-1];
C_cubo=[-1;-1;-1];
D_cubo=[1;-1;-1];

E_cubo=[1;1;1];
F_cubo=[-1;1;1];
G_cubo=[-1;-1;1];
H_cubo=[1;-1;1];

X=[A_cubo B_cubo C_cubo D_cubo E_cubo F_cubo G_cubo H_cubo];
X=pixel_rate*X;
N=size(X);
N=N(2);
X=[X;ones(1,N)];

xi=Pi*X;
xj=Pj*X;

for n=1:N
    xi(:,n)=xi(:,n)/xi(3,n);
    xj(:,n)=xj(:,n)/xj(3,n);
end

xi(1:2,:)=xi(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj(1:2,:)=xj(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;

```

controllo rotazione.m

```

function [control,temp]=controllo_rotazione(xi,xj,toll);
%restituisce TRUE, cioè 1 se i punti xi, xj
%sono legati da una rotazione pura

```

```

Aprova=DLT_ND(xj,xi);
xjj=Aprova*xi;
temp=size(xjj);
temp=temp(2);
for n=1:temp
    xjj(:,n)=xjj(:,n)/xjj(3,n);
end

```

```

temp= norm(ones(3,temp)-xj./xjj);
control= temp < toll;

```

ricostruzione.m

```

function Xp=ricostruzione(xi,xj,A,e)
S=size(xi);
N=S(2);

```

```

temp=[];
for n=1:N
    mu=straff(xi(:,n),xj(:,n),A,e);
    temp=[temp, mu];
end
Xp=[xi;temp];

```

project.m

```

function xt=project(X,VD,t)
VDt=expm(logm(VD)*t);
It=[diag(ones(1,3)) zeros(3,1)];
N=size(X);
N=N(2);
xt=[];
for n=1:N
    xt(:,n)=It*VDt*X(:,n);
    xt(:,n)=xt(:,n)./xt(3,n);
end
xt=real(xt);

```

main calc.m

```

%Calcolo le omografie indotte dai piani corrispondenti
%con DLT_ND.m e le riscalo per soddisfare
%xj0 ~ Aij xi0+ eji

Aij_pi=DLT_ND(xj_pi,xi_pi);
mui0=straff(xi0,xj0,Aij_pi,eji);
Aij_pi=Aij_pi/mui0;

Aij_omega=DLT_ND(xj_omega,xi_omega);
mui0=straff(xi0,xj0,Aij_omega,eji);
Aij_omega=Aij_omega/mui0;

if CASE == 2
Aij_pip=DLT_ND(xj_pip,xi_pip);
mui0=straff(xi0,xj0,Aij_pip,eji);;
Aij_pip=Aij_pip/mui0;

Aij_omegap=DLT_ND(xj_omegap,xi_omegap);
mui0=straff(xi0,xj0,Aij_omegap,eji);;
Aij_omegap=Aij_omegap/mui0;
end

clear mui0

%e le inverse e le riscalo
Aji_pi=DLT_ND(xi_pi,xj_pi);

```

```

muj0=straff(xj0,xi0,Aji_pi,eij);
Aji_pi=Aji_pi/muj0;

Aji_omega=DLT_ND(xi_omega,xj_omega);
muj0=straff(xj0,xi0,Aji_omega,eij);
Aji_omega=Aji_omega/muj0;

if CASE == 2
Aji_pip=DLT_ND(xi_pip,xj_pip);
muj0=straff(xj0,xi0,Aji_pip,eij);
Aji_pip=Aji_pip/muj0;

Aji_omegap=DLT_ND(xi_omegap,xj_omegap);
muj0=straff(xj0,xi0,Aji_omegap,eij);
Aji_omegap=Aji_omegap/muj0;
clear muj0
end

%Calcolo i punti ricostruiti Xpi,Xpj
%relativi ad ognuno dei 4 piani

Xpi_pi=ricostruzione(tutti_xi,tutti_xj,Aij_pi,eji);
Xpj_pi=ricostruzione(tutti_xj,tutti_xi,Aij_pi,eij);
Xpi_omega=ricostruzione(tutti_xi,tutti_xj,Aij_omega,eji);
Xpj_omega=ricostruzione(tutti_xj,tutti_xi,Aij_omega,eij);

if CASE==2
Xpi_pip=ricostruzione(tutti_xi,tutti_xj,Aij_pip,eji);
Xpj_pip=ricostruzione(tutti_xj,tutti_xi,Aij_pip,eij);
Xpi_omegap=ricostruzione(tutti_xi,tutti_xj,Aij_omegap,eji);
Xpj_omegap=ricostruzione(tutti_xj,tutti_xi,Aij_omegap,eij);
end

%Stimo le matrici Dij tali che Xpj ~ Dij Xpi
Dij_pi=DLT_ND(Xpj_pi,Xpi_pi);
Dij_pi=Dij_pi/Dij_pi(4,4);

Dij_omega=DLT_ND(Xpj_omega,Xpi_omega);
Dij_omega=Dij_omega/Dij_omega(4,4);

Dji_pi=DLT_ND(Xpi_pi,Xpj_pi);
Dji_pi=Dji_pi/Dji_pi(4,4);

Dji_omega=DLT_ND(Xpi_omega,Xpj_omega);
Dji_omega=Dji_omega/Dji_omega(4,4);

if CASE==2
Dij_pip=DLT_ND(Xpj_pip,Xpi_pip);

```

```

Dij_pip=Dij_pip/Dij_pip(4,4);

Dij_omegap=DLT_ND(Xpj_omegap,Xpi_omegap);
Dij_omegap=Dij_omegap/Dij_omegap(4,4);

Dji_pip=DLT_ND(Xpi_pip,Xpj_pip);
Dji_pip=Dji_pip/Dji_pip(4,4);

Dji_omegap=DLT_ND(Xpi_omegap,Xpj_omegap);
Dji_omegap=Dji_omegap/Dji_omegap(4,4);
end

%Ricavo le matrici Aijstar
Aijstar_pi=Dij_pi(1:3,1:3);
Aijstar_omega=Dij_omega(1:3,1:3);
Ajistar_pi=Dji_pi(1:3,1:3);
Ajistar_omega=Dji_omega(1:3,1:3);

if CASE ==2
Aijstar_pip=Dij_pip(1:3,1:3);
Aijstar_omegap=Dij_omegap(1:3,1:3);
Ajistar_pip=Dji_pip(1:3,1:3);
Ajistar_omegap=Dji_omegap(1:3,1:3);
end

%calcolo i coefficienti che servono al sistema

bi_pi=mean(mean(Aij_pi./Aijstar_pi));
bi_omegap=mean(mean(Aij_omegap./Aijstar_omegap));
bj_pi=mean(mean(Aji_pi./Ajistar_pi));
bj_omegap=mean(mean(Aji_omegap./Ajistar_omegap));

if CASE==2
bi_pip=mean(mean(Aij_pip./Aijstar_pip));
bi_omegap=mean(mean(Aij_omegap./Aijstar_omegap));
bj_pip=mean(mean(Aji_pip./Ajistar_pip));
bj_omegap=mean(mean(Aji_omegap./Ajistar_omegap));
end

%prendo le strutture affini relative dalle ricostruzioni
mui_pi=Xpi_pi(4,:);
mui_omega=Xpi_omega(4,:);
muj_pi=Xpj_pi(4,:);
muj_omega=Xpj_omega(4,:);

Mi_pi=mui_pi/bi_pi;

```

```

Mi_omega=mui_omega/bi_omega;
Mj_pi=muj_pi/bj_pi;
Mj_omega=muj_omega/bj_omega;

if CASE==2
mui_pip=Xpi_pip(4,:);
mui_omegap=Xpi_omegap(4,:);
muj_pip=Xpj_pip(4,:);
muj_omegap=Xpj_omegap(4,:);

Mj_pip=muj_pip/bj_pip;
Mj_omegap=muj_omegap/bj_omegap;
Mi_pip=mui_pip/bi_pip;
Mi_omegap=mui_omegap/bi_omegap;
end

if CASE==2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Risolvo ai minimi quadrati il sistema..
%M_pi+x*(M_pi-M_omega)=M_pip+y*(M_pip-M_omegap)
% cioè
% x*(M_pi-M_omega)-y*(M_pip-M_omegap)=M_pip-M_pi
% usando tutti i punti a disposizione

A=[(Mi_pi-Mi_omega)',-(Mi_pip-Mi_omegap)'];
b=[(Mi_pip-Mi_pi)'];
temp=pinv(A)*b;
x=temp(1);
y=temp(2);

zAinf1=Aijstar_pi+x*(Aijstar_pi-Aijstar_omega);
temp=det(zAinf1);

if temp > 0
ziszuzj=temp^(1/3);
else
ziszuzj=-((-temp)^(1/3));
end

Aij_inf=1/ziszuzj*zAinf1;

A=[(Mj_pi-Mj_omega)',-(Mj_pip-Mj_omegap)'];
b=[(Mj_pip-Mj_pi)'];
temp=pinv(A)*b;
x=temp(1);

```



```

y=temp(2);

zAinf1=Ajistar_pi+x*(Ajistar_pi-Ajistar_omega);
temp=det(zAinf1);

if temp > 0
zjsuzi=temp^(1/3);
else
zjsuzi=-((-temp)^(1/3));
end
Aji_inf=1/zjsuzi*zAinf1;

end

if CASE==1
%Calcolo la ricostruzione del punto di fuga
Vanish_i_pi=ricostruzione(vanish_i,vanish_j,Aij_pi,eji);
Vanish_i_omega=ricostruzione(vanish_i,vanish_j,Aij_omega,eji);

Vanish_j_pi=ricostruzione(vanish_j,vanish_i,Aji_pi,eij);
Vanish_j_omega=ricostruzione(vanish_j,vanish_i,Aji_omega,eij);

%calcolo le costanti c tali che c pj= Aij pi+ mu eji
mui_pi=Vanish_i_pi(4);
mui_omega=Vanish_i_omega(4);
muj_pi=Vanish_j_pi(4);
muj_omega=Vanish_j_omega(4);

Mi_pi=mui_pi/bi_pi;
Mj_pi=muj_pi/bj_pi;

Mi_omega=mui_omega/bi_omega;
Mj_omega=muj_omega/bj_omega;

%Risolvo il sistema
x=-Mi_pi/(Mi_pi-Mi_omega);
zAinf=Aijstar_pi+x*(Aijstar_pi-Aijstar_omega);
temp=det(zAinf);

if temp > 0
zisuzj=temp^(1/3);
else
zisuzj=-((-temp)^(1/3));
end

Aij_inf=1/zisuzj*zAinf;

%Risolvo il sistema

```

```

x=-Mj_pi/(Mj_pi-Mj_omega);
zAinf=Ajistar_pi+x*(Ajistar_pi-Ajistar_omega);
temp=det(zAinf);

if temp > 0
zjsuzi=temp^(1/3);
else
zjsuzi=-((-temp)^(1/3));
end

Aji_inf=1/zjsuzi*zAinf;

end

%Calcolo le ricostruzioni usando
%l'omografia infinita

mui0=straff(xi0,xj0,Aij_inf,eji);
Aij_inf_risc=Aij_inf/mui0;
Xpi_inf=ricostruzione(tutti_xi,tutti_xj,Aij_inf_risc,eji);

muj0=straff(xj0,xi0,Aji_inf,eij);
Aji_inf_risc=Aji_inf/muj0;
Xpj_inf=ricostruzione(tutti_xj,tutti_xi,Aji_inf_risc,eij);

%Calcolo VDi, VDj

bi_inf=constant(xi0,xj0,Aij_inf_risc,eji,1);
bj_inf=constant(xj0,xi0,Aji_inf_risc,eij,1);

VDi=[Aij_inf, 1/bi_inf*1/zisuzj*eji; zero', 1];
VDj=[Aji_inf, 1/bj_inf*1/zjsuzi*eij; zero', 1];

```

project.m

```

function xt=project(X,VD,t)
VDt=expm(logm(VD)*t);
It=[diag(ones(1,3)) zeros(3,1)];
N=size(X);
N=N(2);
xt=[];
for n=1:N
    xt(:,n)=It*VDt*X(:,n);
    xt(:,n)=xt(:,n)./xt(3,n);
end
xt=real(xt);

```

fund mat.m

```

function F=fund_mat(x1,x2)

% trova la matrice fondamentale tale che
%x2(:,n)'F*x1(:,n) sia % identicamente nullo

[temp,N]=size(x1);

A=[];
for n=1:3
    temp1=x2(n,:).*x1(1,:);
    temp2=x2(n,:).*x1(2,:);
    temp3=x2(n,:).*x1(3,:);
    A=[A temp1' temp2' temp3'];
end

[U,S,V]=svd(A);

f=V(:,end);
f=f/norm(f,2);
F=[f(1:3)';f(4:6)';f(7:9)'];

```

```

[U,S,V]=svd(F);
S(3,3)=0;
F=U*S*V';

```

exponentiate.m

```

function At=exponentiate(A,t)
At=logmat(A)

```

DLT ND.m

```

function [H,err]=DLT_ND(Y,X)

% function H=DLT_ND(Y,X)
% calcola l'omografia N-dimensionale dalle corrispondenze
% Y e X sono matrici. Ogni colonna è un punto dello spazio
% proiettivo PN

% ragiono così:  $Y=cost \cdot H \cdot X$ , che posso scrivere come
%  $Y = XN \cdot h$ , dove h sono gli elementi di H letti per righe
% e XN è definita nel codice
% Lo spazio nullo di Y' mi dà Ndim-1 vettori riga ortogonali a Y
% Per ognuno di questi vettori, che chiamo Z, si ha
%  $Z \cdot XN \cdot h = 0$ .
% Da qui si vede anche perchè in P2 un punto dà due equazioni
% mentre in P3 ne dà 3

```

```

[Ndim,Np]=size(Y);

MAT=[];
for n=1:Np
    XN=kron(eye(Ndim),X(:,n)');
    [U,S,V]=svd(Y(:,n));
    MAT=[MAT; U(2:end,:)*XN];
end

[U,S,V]=svd(MAT);
h=V(:,end);
h=h/norm(h,2);
H=[];
for n=1:Ndim
    ind=[(n-1)*Ndim+1:(n-1)*Ndim+Ndim];
    H=[H;h(ind)'];
end

if nargout>1

% errore
Y2=H*X;

err=errore_geom_pro(Y,Y2);
else
    return
end

```

cross.m

```

%Dato un vettore x genera la matrice [x]_x
% per il prodotto vettoriale
function cr=cross(x)
cr=[0 -x(3) x(2);x(3) 0 -x(1);-x(2) x(1) 0];

```

costant.m

```

function c=costant(xi,xj,A,e,mu)
N=size(xi);
N=N(2);
c=[];
for n=1:N
    temp=(A*xi(:,n)+mu(n)*e)./xj(:,n);
    temp=mean(temp);
    c=[c,temp];
end

```

straff.m

```
function mu=straff(xi,xj,A,e)
%calcola la struttura affine per la coppia
%di punti corrispondenti (xi,xj)
%relativa all'omografia A e all'epipolo e

mu=-((cross(xj)*e)')*(cross(xj)*A*xi)/norm(cross(xj)*e)^2;
```

A.2 Codice per la stima degli errori

La differenza rispetto al caso precedente è che gli errori vengono generati in un file separato invece che nel file `genpoints.m`.

sporca dati.m

```
%Sporco i dati con una normale di media 1 e deviazione standard 1/NI
xi(1:2,:)= [xi_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise];
xi(3,:)=ones(1,length(xi(1,:)));
xj(1:2,:)=xj_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj(3,:)=ones(1,length(xj(1,:)));
xi_pi(1:2,:)=xi_pi_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xi_pi(3,:)=ones(1,length(xi_pi(1,:)));
xj_pi(1:2,:)=xj_pi_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_pi(3,:)=ones(1,length(xj_pi(1,:)));
xi_omega(1:2,:)=xi_omega_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xi_omega(3,:)=ones(1,length(xi_omega(1,:)));
xj_omega(1:2,:)=xj_omega_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_omega(3,:)=ones(1,length(xj_omega(1,:)));

if CASE == 2
xi_pip(1:2,:)=xi_pip_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xi_pip(3,:)=ones(1,length(xi_pip(1,:)));
xj_pip(1:2,:)=xj_pip_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_pip(3,:)=ones(1,length(xj_pip(1,:)));
xi_omegap(1:2,:)=xi_omegap_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xi_omegap(3,:)=ones(1,length(xi_omegap(1,:)));
xj_omegap(1:2,:)=xj_omegap_ref(1:2,:)+1/NI*randn(2,N)*noise;
xj_omegap(3,:)=ones(1,length(xj_omegap(1,:)));
end

if CASE==1
vanish_i=vanish_i_ref-1/NI*randn*noise;
vanish_j=vanish_j_ref-1/NI*randn*noise;
end
```

main robustezza

```
%GENERA UN SET DI PUNTI SUI PIANI E IL CUBO, POI SPORCA I DATI CON UNA
```

```
%NORMALE DI MEDIA ZERO E DEVIAZIONE STANDARD CRESCENTE E VALUTA L'ERRORE IN NO
%DELLE MATRICI VDi e VDj CHE POI DEVONO ESSERE ESPONENZIATE
```

```
clear all
close all
clc
```

```
%CASE=1 se usa un punto di fuga (generato a caso)
%CASE=2 se usa due coppie di piani paralleli (da inserire)
```

```
CASE=2;
```

```
%Se voglio il rumore noise=1;intensità del rumore 1/NI*normalestd
noise=1;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
I=diag(ones(3,1));
zero=[0;0;0];
dati
dati_simulazione
generazione_dati
```

```
dev_std_pix=0; %deviazione standard sulla misurazione dei punti in pixel
NI=1/dev_std_pix;
```

```
main
VDi_vera=VDi;
VDj_vera=VDj;
Aij_inf_vera=Aij_inf;
Aji_inf_vera=Aji_inf;
```

```
dev=[0];
errAij=norm(Aij_inf-Aij_inf_vera);
errAji=norm(Aji_inf-Aji_inf_vera);
errBi=norm(Dij_inf(1:3,1:3)-Aij_inf_vera);
errBj=norm(Dji_inf(1:3,1:3)-Aji_inf_vera);
errVDi=norm(VDi-VDi_vera);
errVDj=norm(VDj-VDj_vera);
```

```
for n=1:10
    dev_std_pix=n;
    NI=1/dev_std_pix;
    dev=[dev,n];
    tempAi=[];
```

```

tempAj=[];
tempVi=[];
tempVj=[];
tempBi=[];
tempBj=[];
for k=1:1
    sporca_dati
    main
    tempAi=[tempAi,norm(Aij_inf-Aij_inf_vera)];
    tempAj=[tempAj,norm(Aji_inf-Aji_inf_vera)];
    tempBi=[tempBi,norm(Dij_inf(1:3,1:3)-Aij_inf_vera)];
    tempBj=[tempBj,norm(Dji_inf(1:3,1:3)-Aji_inf_vera)];
    tempVi=[tempVi,norm(VDi-VDi_vera)];
    tempVj=[tempVj,norm(VDj-VDj_vera)];
end

errAij=[errAij,mean(tempAi)];
errAji=[errAji,mean(tempAj)];
errVDi=[errVDi,mean(tempVi)];
errVDj=[errVDj,mean(tempVj)];
errBi=[errBi,mean(tempBi)];
errBj=[errBj,mean(tempBj)];
end

errAij=errAij/norm(Aij_inf_vera);
errAji=errAji/norm(Aji_inf_vera);
errVDi=errVDi/norm(VDi_vera);
errVDj=errVDj/norm(VDj_vera);

plot(dev,errVDi);
figure
plot(dev,errVDj);

figure
plot(dev,errAij);
figure
plot(dev,errAji);

```


Bibliografia

- [1] R.Hartley, A.Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2003.
- [2] S.Tebaldini. *On View Synthesis from Uncalibrated Cameras through Linear Combinations in the Tangent Space*.
- [3] A.Shashua, N.Navab. *Relative Affine Structure: Canonical Model for 3D From 2D Geometry and Applications*. IEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. 18, No 9, September 1996.
- [4] V.Pata. *Appunti del Corso di Analisi Reale e Funzionale*. Quaderno del Dipartimento di Matematica F. Brioschi del Politecnico di Milano n.46/R, Febbraio 2005.
- [5] Y.Kosmann-Schwarzbach. *Groups and Symmetries. From Finite Groups to Lie Groups*. Springer,2009.
- [6] D.H. Sattinger, O.L.Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*. Springer-Verlag,1986.
- [7] W.Rudin. *Principi di Analisi Matematica*. McGraw-Hill Libri Italia,1992.
- [8] W.Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill,1970.
- [9] W.J.Culver. *On the Existence and Uniqueness of the Real Logarithm of a Matrix*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 17, No. 5. (Oct., 1966).
- [10] E.Morsy, N.Sherif. *Computing Real Logarithm of a Real Matrix*. International Journal of Algebra, Vol. 2, 2008, no. 3.
- [11] A.Fusiello. *Specifying Virtual Cameras in Uncalibrated View Synthesis*. IEEE Transaction On Circuits and Systems for Video Technology. Vol XX.No X.
- [12] R.Gilmore. *Lie groups: general theory*. Encyclopedia of Mathematical Physics, vol. EMP MS 425, Feb.2005.

- [13] R.Gilmore. *Lie groups, physics and geometry*.
<http://www.physics.drexel.edu/bob/LieGroups.html>.
- [14] M.Zefran, V.Kumar, C.Croke. *Metrics and Connections for Rigid Body Kinematics*.
International Journal of Robotic Research, May 1996.
- [15] J.Gallier. *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*. Springer, 2001.
- [16] J.S.Kim, I.S.Kweon. *Infinite Homography Estimation Using Two Arbitrary Planar Rectangles*. Computer Vision ACCV 2006. 7th Asian Conference on Computer Vision. Springer, 2006.
- [17] Y.Zhao, S.Wang, J.Wang, H.Ding *Linear Solving the Infinite Homography Matrix from Epipoles*. 2010 Second International Conference on Computer Modeling and Simulation, 2010.
- [18] C.Rother *Multi-View Reconstruction and Camera Recovery using a Real or Virtual Reference Plane*. Stockholm 2003, Doctoral Dissertation. Royal Institute of Technology
- [19] A. Criminisi, I. Reid, A. Zisserman *Single View Metrology*. Department of Engineering Science, University of Oxford.
- [20] J.H.Kim *Linear Stratified Approach for 3D Modelling and Calibration using Full Geometric Constraint*. Electronics and Telecommunications Research Institute (ETRI).
- [21] S.Tebaldini, M.Marcon, A.Sarti, S.Tubaro *Uncalibrated View Synthesis from Affine Relative Structure based on Planes Parallelism*. Dipartimento di Elettronica e Informazione - Politecnico di Milano.
- [22] A.Colombari, A.Fusiello, V.Murino *Uncalibrated Interpolation of Rigid Displacements for View Synthesis*. Dipartimento di Informatica - Università degli studi di Verona.
- [23] M.Alexa *Linear Combination of Transformations*. Interactive Graphics Systems Group, Technische Universität Darmstadt.
- [24] A.Colombari, A.Fusiello *Continuous Parallax Adjustment For 3D-TV*. Dipartimento di Informatica - Università degli studi di Verona.
- [25] A.Colombari, A.Fusiello *View Synthesis along a Curve from two Uncalibrated Views*. Dipartimento di Informatica - Università degli studi di Verona.

- [26] O.Faugeras,L.Robert *What can two images tell us about a third one?*
Institut National de Recherche en informatique et en Automatique.N
2018. June 1993.
- [27] D.Capel, A.Fitzgibbon, P.Kovesi, T.Werner, Y.Wexler,A.Zisserman
MATLAB Functions for Multiple View Geometry
<http://www.robots.ox.ac.uk/vgg/hzbook/code/>