

**POLITECNICO DI MILANO**

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aeronautica



SOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI DI  
PRANDTL PER LO STRATO LIMITE A VALLE  
DI ONDE D'URTO E DI ESPANSIONE

Relatore: Prof. Alberto GUARDONE

Tesi di Laurea di:

Vincenzo SCERBO Matr. 724776

Alessandro SUPERBO Matr. 724736

Anno Accademico 2009-2010



## Sommario

Obiettivo del presente lavoro è sviluppare e verificare una nuova tecnica per la soluzione numerica delle *equazioni di Prandtl dello strato limite stazionario* su lastra piana. Il sistema di equazioni alle derivate parziali (in inglese: *partial differential equations*), che è di tipo parabolico, viene discretizzato in direzione longitudinale e ridotto a più sistemi di equazioni differenziali ordinarie (in inglese: *ordinary differential equations*), ciascuno valido su ogni singola stazione lungo la lastra. Il dominio di soluzione passa così da bidimensionale a monodimensionale, e di conseguenza le condizioni al contorno sul dominio bidimensionale si riducono a condizioni agli estremi. Il problema da risolvere diviene pertanto un *problema ai limiti monodimensionale* (in inglese: *two point boundary value problem*). La parabolicità del problema viene recuperata attraverso degli schemi alle *differenze finite*. Vengono presentate le soluzioni per fluidi incomprimibili e comprimibili, sia nel caso *laminare*, confrontandole con le soluzioni autosimilari, sia nel caso *turbolento*, ricercando un riscontro con i rilievi sperimentali. Si affronta inoltre il problema della predizione dell'attenuazione di un'onda d'urto in un tubo d'urto a partire dalla trattazione di Mirels, confrontandola con altri lavori presenti in letteratura e con i rilievi sperimentali. Il riscontro è ottimo nel caso laminare, mentre si evidenzia una leggera sovrastima dell'attenuazione in quello turbolento.

**Parole chiave:** strato limite, Prandtl, attenuazione, tubo d'urto, espansione

## Abstract

The purpose of this work is to develop and test a new technique for the numerical solution of the *Prandtl's boundary layer equations* on a stationary flat plate. The system of partial differential equations, which is parabolic, is discretized in the longitudinal direction and reduced in several systems of ordinary differential equations, each valid over a single station along the plate. The two-dimensional resolution domain becomes one-dimensional, and therefore the boundary conditions on two-dimensional domain are reduced to the boundary values. The problem to be solved thus becomes a *two point boundary value problem*. The parabolicity of the problem is recovered through *finite differences* schemes. It is presented the solution for incompressible and compressible fluids, both in the *laminar* case, compared with self-similar solutions, both in the *turbulent* case, seeking feedback with experimental findings. It is also presented the problem of the prediction of the shock wave attenuation in a shock tube based on the theory of Mirels, comparing with other work in literature and with experimental findings. The feedback was excellent in the laminar case, while it shows a slight overestimation of the attenuation in the turbulent one.

**Keywords:** boundary layer, Prandtl, attenuation, shock tube, expansion

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Le equazioni di Prandtl dello strato limite</b>	<b>7</b>
2.1	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	7
2.1.1	Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes	9
2.2	Equazioni di Prandtl per lo strato limite incomprimitibile . . . .	14
2.2.1	Soluzione interna . . . . .	16
2.2.2	Soluzione esterna . . . . .	18
2.2.3	Condizioni di raccordo . . . . .	19
2.3	Equazioni di Prandtl per lo strato limite comprimibile . . . . .	21
2.3.1	Soluzione interna . . . . .	23
2.3.2	Soluzione esterna . . . . .	26
2.3.3	Condizioni di raccordo . . . . .	26
<b>I</b>	<b>Strato limite incomprimitibile</b>	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>Strato limite incomprimitibile laminare</b>	<b>31</b>
3.1	Equazioni di Prandtl per lo strato limite incomprimitibile laminare	31
3.2	Soluzione simile di Blasius . . . . .	32
3.2.1	Ricerca della variabile di similarità . . . . .	33
3.2.2	Riduzione a sistema del primo ordine . . . . .	34
3.2.3	Soluzione numerica del problema di Blasius . . . . .	35
3.3	Soluzione equazioni di Prandtl . . . . .	37
3.3.1	Impostazione del problema . . . . .	37
3.3.2	Riduzione a sistema del primo ordine . . . . .	39
3.3.3	Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl . . . . .	40
3.4	Convergenza del metodo numerico . . . . .	41
3.5	Analisi e confronto dei risultati . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Strato limite incomprimibile turbolento</b>	<b>49</b>
4.1	Equazioni di Prandtl per lo strato limite incomprimibile turbolento . . . . .	49
4.2	Soluzione equazioni di Prandtl . . . . .	51
4.2.1	Impostazione del problema . . . . .	51
4.2.2	Riduzione a sistema del primo ordine . . . . .	51
4.2.3	Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl . . . . .	52
4.3	Analisi e confronto dei risultati . . . . .	54
<b>II</b>	<b>Strato limite comprimibile</b>	<b>59</b>
<b>5</b>	<b>Strato limite comprimibile laminare</b>	<b>61</b>
5.1	Equazioni di Prandtl per lo strato limite comprimibile laminare	61
5.2	Soluzione similare . . . . .	62
5.2.1	Funzione di corrente . . . . .	62
5.2.2	Trasformazione di Dorodnitsyn-Howarth . . . . .	62
5.2.3	Approssimazione per la viscosità e la conduttività termica . . . . .	63
5.2.4	Auto-similarità . . . . .	64
5.2.5	Profili di velocità e temperatura . . . . .	66
5.3	Riduzione a sistemi del primo ordine . . . . .	66
5.3.1	Soluzione numerica del problema similare per la velocità	67
5.3.2	Soluzione numerica del problema similare per la temperatura . . . . .	70
5.4	Soluzione equazioni di Prandtl . . . . .	71
5.4.1	Impostazione del problema . . . . .	71
5.4.2	Riduzione a sistema del primo ordine . . . . .	72
5.4.3	Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl . . . . .	73
5.5	Analisi e confronto dei risultati . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Strato limite comprimibile turbolento</b>	<b>83</b>
6.1	Equazioni di Prandtl per lo strato limite comprimibile turbolento	83
6.2	Soluzione equazioni di Prandtl . . . . .	85
6.2.1	Impostazione del problema . . . . .	85
6.2.2	Riduzione a sistema del primo ordine . . . . .	85
6.2.3	Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl . . . . .	87
6.3	Analisi dei risultati . . . . .	88

---

<b>III</b>	<b>Tubo d'urto</b>	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>Attenuazione di un'onda d'urto</b>	<b>97</b>
7.1	Introduzione . . . . .	97
7.2	Teoria dell'attenuazione di Mirels . . . . .	98
7.2.1	Generazione di onde dovute a sorgenti di massa . . . . .	99
7.2.2	Generazione di onde dovute allo strato limite non stazionario . . . . .	100
7.3	Analisi e confronto dei risultati . . . . .	102
7.3.1	Strato limite laminare . . . . .	103
7.3.2	Strato limite turbolento . . . . .	107
<b>IV</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>111</b>
<b>8</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>113</b>
<b>V</b>	<b>Appendici</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Soluzioni simili di Falkner-Skan</b>	<b>117</b>
A.1	Riduzione a sistema del primo ordine . . . . .	118
A.2	Soluzione equazioni di Prandtl . . . . .	119
A.2.1	Impostazione del problema . . . . .	119
A.2.2	Riduzione a sistema del primo ordine . . . . .	120
A.2.3	Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl . . . . .	120
A.2.4	Analisi e confronto dei risultati . . . . .	122
<b>B</b>	<b>Linear Multi-Point Method (LMPM)</b>	<b>125</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>129</b>





# Capitolo 1

## Introduzione

Verso la fine del diciannovesimo secolo la meccanica dei fluidi si ramificò in due direzioni molto differenti tra loro: da un lato vi era l'*idrodinamica teorica* che poneva le proprie fondamenta sulle equazioni di moto di Eulero e che era stata studiata approfonditamente. Tuttavia questa scienza aveva poca utilità dal punto di vista pratico, in quanto i suoi risultati erano in netto disaccordo con quelli dati dall'evidenza sperimentale, ad esempio per quanto riguardava le perdite di pressione all'interno dei tubi e dei canali e la resistenza all'avanzamento di corpi immersi in un fluido.

Dall'altro lato vi erano gli ingegneri che, confrontandosi quotidianamente con problemi di ordine pratico, svilupparono una propria scienza empirica, l'*idraulica*.

Il grande merito di Ludwig Prandtl, all'inizio del ventesimo secolo, fu quello di unificare questi due rami apparentemente divergenti della meccanica dei fluidi. Egli raggiunse difatti un alto grado di correlazione tra teoria e risultati sperimentali portando la fluidodinamica a dei successi fino a quel momento inimmaginabili.

Era già noto che la grande discrepanza tra i risultati della classica idrodinamica e la realtà era, nella maggior parte dei casi, dovuta all'aver trascurato gli effetti della viscosità del fluido. Le equazioni di moto di un flusso viscoso, ovvero le equazioni di Navier-Stokes, erano già note da tempo. Tuttavia, a causa delle grosse difficoltà matematiche presenti in tali equazioni, nessuno trovò un modo per trattare dal punto di vista teorico i termini viscosi (se non per qualche caso particolare).

Per fluidi di importanza rilevante dal punto di vista ingegneristico, quali aria e acqua, la viscosità è molto bassa, e quindi le risultanti forze viscose risultano piccole rispetto alle forze gravitazionali e di pressione. Questo è il motivo per il quale l'effetto della viscosità fu a lungo ignorato.

Nel suo lavoro *On Fluid Motion with Very Small Friction* presentato al *Heidelberg mathematical congress* nel 1904, Prandtl mostrò una trattazione teorica riguardante i flussi viscosi in casi di grande rilevanza pratica. Facendo

uso di considerazioni teoriche e di qualche semplice esperimento, egli mostrò che un flusso attorno a un corpo può essere diviso in due regioni: un strato molto sottile vicino al corpo (*strato limite*) nel quale gli effetti della viscosità sono rilevanti, ed una regione esterna a questo nella quale la viscosità può essere trascurata.

Questo concetto non solo fornì una spiegazione fisica convincente dell'importanza della viscosità nei problemi di resistenza, ma contemporaneamente, grazie alla grande riduzione delle difficoltà matematiche, tracciò la via per la trattazione teorica dei flussi viscosi. La teoria dello strato limite di Prandtl fu incredibilmente utile e apportò forti stimoli alla ricerca fluidodinamica.

Inizialmente la teoria dello strato limite fu principalmente sviluppata per flussi laminari di fluidi incomprimibili; successivamente la teoria fu estesa al caso di pratica importanza di flusso turbolento. Attorno al 1890 Reynolds introdusse il concetto di *sforzi turbolenti*, ma questo non permise tuttavia di avere un trattazione teorica completa dei flussi turbolenti. L'introduzione del concetto di lunghezza di mescolamento (*mixing length*) da parte di Prandtl, supportato dalla teoria dello strato limite e da prove sperimentali, permise di trattare per via teorica anche i flussi turbolenti. Tuttavia lo studio della turbolenza rimane tuttora un campo di ricerca aperto.

In seguito lo sviluppo tecnologico in campo aeronautico e il conseguente aumento delle velocità massime di volo causò la necessità di studiare anche i fluidi comprimibili, i quali presentano anche uno strato limite *termico*. Quest'ultimo è di grande importanza per l'analisi dello scambio termico tra il fluido e il corpo ivi immerso.

Al giorno d'oggi la potenza di calcolo è tale da permettere di risolvere le equazioni di Navier-Stokes per via numerica (*Direct Numerical Solution*, DNS); a livello ingegneristico, però, è ancora conveniente cercare di risolvere le più semplici equazioni di Prandtl dello strato limite. Esse sono equazioni alle derivate parziali (PDE) ed esistono numerose tecniche numeriche per la loro risoluzione.

Per il caso incomprimibile stazionario un metodo possibile è quello di Walter [27] [28], che, dopo aver applicato la trasformazione di Von Mises alle equazioni dello strato limite, riesce ad ottenere un problema di Cauchy discretizzando le derivate lungo le linee di corrente mediante schemi alle differenze finite. Un metodo alternativo sfrutta invece la trasformazione introdotta da Crocco [8], che riduce il sistema di equazioni di Prandtl ad una singola equazione quasi-lineare con condizioni al contorno non lineari. Per il caso incomprimibile instazionario, invece, un metodo basato su schemi alle differenze finite è stato proposto da Oleinik [20].

Scopo di questa trattazione è sviluppare e verificare una tecnica alternativa che riduce il sistema di PDE a più sistemi di equazioni differenziali

ordinarie (ODE), sia per il caso incomprimibile che per quello comprimibile.

Per quanto concerne la trattazione dello strato limite incomprimibile laminare, al Capitolo 2 ne verrà illustrata la risoluzione facendo uso dell'ipotesi di *similarità* formulata da Blasius [4] secondo cui è possibile osservare che, se si considera una lastra piana di estensione semi-infinita lambita da una corrente esterna uniforme e parallela alla lastra, viene meno una scala spaziale di riferimento e quindi il campo di moto nello strato limite non dipende dalla coordinata longitudinale che si sta considerando. Tuttavia, se questa ipotesi non è rispettata o comunque non viene ritenuta accettabile, risulta necessario risolvere direttamente le equazioni di Prandtl, implementando una qualche tecnica di calcolo e cercando di tener presente le proprietà matematiche e fisiche delle stesse al fine di scrivere un algoritmo corretto ed efficiente.

Le equazioni dello strato limite risultano essere *paraboliche*: questo fisicamente comporta che, se si assume che il moto della corrente in direzione parallela alla lastra abbia un unico verso, ciascun punto del campo di moto viene a dipendere unicamente dai punti antecedenti. Tenendo presente questa proprietà verrà allora mostrata una procedura di calcolo che risolverà un sistema di *equazioni differenziali ordinarie* su un dominio monodimensionale (perpendicolare alla lastra), e discretizzando le equazioni in direzione longitudinale mediante schemi alle differenze finite decentrati all'indietro, si recupererà la parabolicità. Non sarà pertanto possibile risolvere problemi che prevedono l'inversione del flusso, quali ad esempio la separazione dello strato limite.

Si risolveranno quindi dei *problemi ai limiti monodimensionali* (in inglese: *two point boundary value problem*, TPBVP), facendo uso di una routine MATLAB (*bvp4c*) dedicata alla soluzione di questo tipo di problemi.

Per la soluzione delle equazioni di Prandtl nel modo appena descritto, ovvero calcolando la soluzione in una coordinata assegnata a partire dalla conoscenza del campo di moto a monte, si pone il problema di fornire una soluzione di *ingresso* (*inlet solution*). Si potrebbe pensare di avviare il calcolo a partire dal bordo di attacco della lastra, utilizzando come soluzione di ingresso un campo di moto uniforme; questo, oltre a causare problemi numerici per la presenza di una singolarità sul bordo di attacco della lastra, sarebbe concettualmente sbagliato poichè in questa zona non valgono le equazioni di Prandtl dello strato limite.

Si presenta pertanto un primo svantaggio nell'utilizzo di questa tecnica rispetto alla soluzione diretta delle equazioni di Navier-Stokes, che invece valgono ovunque nel campo di moto. Tuttavia quest'ultime presentano un costo computazionale molto più alto, in quanto la risoluzione richiede l'adozione di una griglia di calcolo molto fitta laddove sono forti i gradienti delle quantità in gioco.

Si risolveranno perciò le equazioni di Prandtl ove queste saranno valide (ovvero più a valle del bordo d'attacco), e si fornirà come soluzione di ingresso quella ottenuta da Blasius sfruttando l'ipotesi di similarità. Le medesime considerazioni varranno anche per il caso di strato limite laminare comprimibile; le differenze di quest'ultimo con quello incomprimibile risiedono nella definizione della variabile di similarità e nel fatto che, oltre allo strato limite di quantità di moto, esiste anche uno strato limite termico.

Per quanto concerne lo strato limite turbolento (incomprimibile e comprimibile), non avendo a disposizione una soluzione simile, si utilizzeranno ancora come inlet le soluzioni simili dello strato limite laminare, e si riterrà valida la soluzione delle equazioni di Prandtl solo dopo un certo numero di stazioni lungo la lastra, in modo da avere una soluzione che sia poco influenzata dalla scelta delle condizioni di ingresso.

Il modello di turbolenza adottato sarà il semplice modello algebrico della *mixing length* di Prandtl; la scelta ricade su questo modello per la sua estrema semplicità di implementazione.

Un'immediata estensione del calcolo dello strato limite comprimibile (laminare e turbolento) riguarda il calcolo dello strato limite a valle di un'onda d'urto o di espansione; questo si traduce in un semplice cambio delle condizioni al contorno sulla velocità, in quanto, per la risoluzione, ci si porrà in un sistema di riferimento solidale con l'onda stessa.

Una possibile applicazione è quella del calcolo dell'attenuazione di un'onda d'urto all'interno di un tubo d'urto.

Sin dai primi anni del '900, periodo in cui fu inventato il tubo d'urto, questo si è dimostrato essere un semplice ed economico strumento per lo studio di flussi ad alta velocità; a causa del suo largo utilizzo è stato migliorato negli anni per quanto riguarda le sue prestazioni.

Il fenomeno di attenuazione dell'onda d'urto ha da sempre interferito con le predizioni teoriche riguardo alla velocità dell'urto stesso; negli anni '50 il Professor Mirels [17] [19] formulò una teoria nella quale l'attenuazione dell'onda d'urto era dovuta all'interazione con lo strato limite che si formava a valle della stessa. In particolare, questa attenuazione era dovuta a delle perturbazioni causate da un flusso di massa netto tra lo strato limite e la corrente ed esso esterna.

La trattazione di Mirels necessitava della conoscenza del campo di moto all'interno dello strato limite; per il caso laminare egli sfruttò l'ipotesi di similarità, mentre per il caso turbolento si riferì a rilievi sperimentali.

In questo lavoro verrà implementata la procedura di Mirels per il calcolo dell'attenuazione, con la differenza che il campo di moto all'interno dello strato limite verrà calcolato risolvendo le equazioni di Prandtl nel modo descritto in precedenza.

Si osservi che risolvere le equazioni di Prandtl con le tecniche usuali comporterebbe costi computazionali estremamente elevati, paragonabili a quelli di una DNS.

La tesi sarà quindi suddivisa in cinque parti: nella Parte I verrà affrontato il problema delle equazioni di Prandtl per lo strato limite *incomprimibile*, per il caso di flusso sia laminare che turbolento. Nella Parte II si tratteranno invece le equazioni per lo strato limite *comprimibile*, anche qui per entrambi i casi di flusso laminare e turbolento. Nella Parte III si utilizzeranno i risultati ottenuti nelle parti precedenti per calcolare l'attenuazione di un'onda d'urto in un tubo d'urto. Nella Parte IV verranno tratte le conclusioni del lavoro svolto ed illustrati i possibili sviluppi futuri. Infine, la Parte V sarà quella dedicata alle appendici.



## Capitolo 2

### Le equazioni di Prandtl dello strato limite

#### 2.1 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes sono un sistema di equazioni alle derivate parziali che descrivono il comportamento di un fluido dal punto di vista macroscopico.

Scritte in forma conservativa, in assenza di forze di volume, risultano:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{u}) \quad (2.1)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\rho, \mathbf{m}, E^t]^T \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \left[ \mathbf{m}, \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{\rho} + \mathbb{1}P(\mathbf{u}), \frac{\mathbf{m}}{\rho} (E^t + P) \right]^T \\ \mathbf{d}(\mathbf{u}) &= \left[ 0, \mathbb{S}(\mathbf{u}), \frac{\mathbf{m}}{\rho} \cdot \mathbb{S}(\mathbf{u}) - \mathbf{q}(\mathbf{u}) \right]^T \end{aligned} \quad (2.2)$$

e:

$\rho$	densità del fluido	
$P$	pressione	
$E$	energia interna per unità di volume	
$\mathbf{m} = \rho \mathbf{v}$	quantità di moto	
$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{m}}{\rho} = [u, v, w]$	velocità	(2.3)
$E^t = E + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v} ^2$	energia totale per unità di volume	
$\mathbb{S}$	tensore degli sforzi viscosi	
$\mathbf{q}$	potenza termica	

Sotto le ipotesi di *fluido newtoniano*, il tensore degli sforzi viscosi si scrive come:

$$\mathbb{S} = 2\mu(\mathbf{u})\mathbb{E} + \lambda\text{tr}(\mathbb{E})\mathbb{I} \quad (2.4)$$

Il tensore  $\mathbb{E}$  rappresenta la *velocità di deformazione*, ed è così definito:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \left( [\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{u})] + [\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{u})]^T \right) \quad (2.5)$$

mentre la sua traccia è:

$$\text{tr}(\mathbb{E}) = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.6)$$

Per quanto riguarda la potenza termica, essa è fornita dalla *legge di Fourier*:

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = -k(\mathbf{u})\nabla T(\mathbf{u}) \quad (2.7)$$

con il coefficiente  $k$  scalare (ovvero la potenza termica è allineata al gradiente di temperatura).

Ponendosi sotto le ipotesi di campo di moto bidimensionale si ha:

$$w = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

e le equazioni di N.S. divengono:



**Conservazione della massa**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (2.9)$$

**Conservazione della quantità di moto (componente  $x$ )**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.10)$$

**Conservazione della quantità di moto (componente  $y$ )**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + P) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (2.11)$$

**Conservazione dell'energia totale**

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u (E^t + P)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E^t + P)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu u \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu v \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

**2.1.1 Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes**

Sulle leggi della similitudine fluidodinamica si basa la possibilità di studiare i fenomeni che coinvolgono il moto dei fluidi anche alterandone la scala geometrica, e cioè scegliendo, caso per caso, in funzione della praticità, di aumentare o di ridurre le dimensioni dei contorni che delimitano la corrente o i corpi in essa immersi. Allo stesso modo, queste leggi consentono di sostituire il fluido oggetto dello studio con altri fluidi, anche molto diversi da quello originale, che possono risultare, di volta in volta, più convenienti (sebbene le leggi della similitudine possano essere soddisfatte anche usando un fluido con densità o viscosità diverse da quello originale, o addirittura un gas in luogo di un liquido, non è mai possibile sostituire ad un fluido newtoniano uno che non lo sia, o viceversa).

L'aspetto fondamentale è che, se rispettate, le leggi della similitudine fluidodinamica permettono di trasferire qualunque conoscenza acquisita sul

fenomeno così riprodotto a quello reale in modo diretto e perfettamente rigoroso. Realizzazioni pratiche di questa possibilità sono le simulazioni che vengono normalmente condotte nelle gallerie del vento o in quelle idrodinamiche. Questa, sebbene sia la funzione più diffusa della similitudine fluidodinamica, ne dà però una visione riduttiva, dal momento che le leggi della similitudine si applicano, ovviamente, non solo alla sperimentazione, ma anche alle soluzioni analitiche o numeriche dei vari modelli fisico-matematici dei fenomeni fluidodinamici.

Si vuole quindi riscrivere le equazioni di N.S. in forma adimensionale.

Se si indicano con il simbolo  $(\cdot)$  le grandezze dimensionali e con il simbolo  $(\cdot)_r$  quelle di riferimento, le grandezze adimensionali saranno:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\tilde{t}}{t_r} & x &= \frac{\tilde{x}}{x_r} & y &= \frac{\tilde{y}}{y_r} & \rho &= \frac{\tilde{\rho}}{\rho_r} & u &= \frac{\tilde{u}}{u_r} & v &= \frac{\tilde{v}}{v_r} \\ P &= \frac{\tilde{P}}{P_r} & E^t &= \frac{\tilde{E}^t}{E_r^t} & \mu &= \frac{\tilde{\mu}}{\mu_r} & \lambda &= \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_r} & k &= \frac{\tilde{k}}{k_r} & T &= \frac{\tilde{T}}{T_r} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si assume che  $x_r = y_r = L_r$ ,  $u_r = v_r = U_r$ ,  $P_r = E_r^t = P_r$ ,  $\mu_r = \lambda_r = \mu_r$ .

Sostituendo le espressioni delle grandezze dimensionali nelle equazioni di N.S. si ottiene:

### Conservazione della massa

$$\frac{\rho_r}{t_r} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho_r U_r}{L_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] = 0 \quad (2.14)$$

e moltiplicando per  $\frac{t_r}{\rho_r}$  si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{t_r U_r}{L_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] = 0 \quad (2.15)$$

### Conservazione della quantità di moto (componente $x$ )

$$\begin{aligned} \frac{\rho_r U_r}{t_r} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\rho_r U_r^2}{L_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) \right] + \frac{P_r}{L_r} \frac{\partial P}{\partial x} = \\ \frac{\mu_r U_r}{L_r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

e moltiplicando per  $\frac{t_r}{\rho_r U_r}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{t_r U_r}{L_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) \right] + \frac{t_r P_r}{\rho_r U_r L_r} \frac{\partial P}{\partial x} = \\ \frac{t_r \mu_r}{\rho_r L_r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

**Conservazione della quantità di moto (componente  $y$ )**

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_r U_r}{t_r} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\rho_r U_r^2}{L_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) \right] + \frac{P_r}{L_r} \frac{\partial P}{\partial y} = \\ & \frac{\mu_r U_r}{L_r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

e moltiplicando per  $\frac{t_r}{\rho_r U_r}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{t_r U_r}{L_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) \right] + \frac{t_r P_r}{\rho_r U_r L_r} \frac{\partial P}{\partial y} = \\ & \frac{t_r \mu_r}{\rho_r L_r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Conservazione dell'energia totale**

$$\begin{aligned} \frac{P_r}{t_r} \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{U_r P_r}{L_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [u (E^t + P)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E^t + P)] \right\} &= \frac{k_r T_r}{L_r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \\ & \frac{\mu_r U_r^2}{L_r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu u \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu v \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

e moltiplicando per  $\frac{t_r}{P_r}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{t_r U_r}{L_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [u (E^t + P)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E^t + P)] \right\} &= \frac{k_r T_r t_r}{P_r L_r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \\ & \frac{\mu_r U_r^2 t_r}{P_r L_r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu u \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu v \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Affinché le equazioni adimensionali siano scritte nella stessa forma di quelle dimensionali, per il teorema di Buckingham si dovrà avere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_r t_r}{L_r} = 1 \\ \frac{P_r t_r}{\rho_r U_r L_r} = 1 \\ \frac{\mu_r t_r}{\rho_r L_r^2} = 1 \\ \frac{k_r T_r t_r}{P_r L_r^2} = 1 \\ \frac{\mu_r U_r^2 t_r}{P_r L_r^2} = 1 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

La quarta e la quinta equazione del sistema (2.22) si riducono a:

$$k_r T_r = \mu_r U_r^2 \quad (2.23)$$

Si ha perciò un sistema di quattro equazioni in otto incognite; è necessario perciò fissare quattro parametri, quali ad esempio  $U_r$ ,  $L_r$ ,  $\rho_r$ ,  $T_r$ . Con questa scelta dei parametri si ha che:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_r = \frac{L_r}{U_r} \\ P_r = \rho_r U_r^2 \\ \mu_r = \rho_r U_r L_r \\ k_r = \frac{\rho_r U_r^3 L_r}{T_r} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Il legame tra le proprietà  $\mu$  e  $\lambda$  è dato da:

$$\frac{2}{3}\mu + \lambda = \mu_v \quad (2.25)$$

e introducendo l'*ipotesi di Stokes*, la quale prevede che la *bulk viscosity*  $\mu_v$  sia nulla, si ha che:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.26)$$

Sostituendo questa espressione, le equazioni adimensionali di N.S. diventano:

**Conservazione della massa**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] = 0 \quad (2.27)$$

**Conservazione della quantità di moto (componente  $x$ )**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) \right] + \frac{\partial P}{\partial x} = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

**Conservazione della quantità di moto (componente  $y$ )**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) \right] + \frac{\partial P}{\partial y} = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

**Conservazione dell'energia totale**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u (E^t + P)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E^t + P)] = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \left( \frac{1}{2} u \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Per la chiusura del problema è necessario fornire due equazioni di stato o una equazione canonica; nel caso qui analizzato di gas ideale politropico si ha:

$$\begin{cases} h = c_p T \\ P = \rho R T \end{cases} \quad (2.31)$$

Si assume inoltre che le viscosità e la conducibilità termica dipendono esclusivamente dalla temperatura, ipotesi valida per i gas:

$$\begin{cases} \mu = \mu(T) \\ \lambda = \lambda(T) \\ k = k(T) \end{cases} \quad (2.32)$$

## 2.2 Equazioni di Prandtl per lo strato limite incomprimibile

Per prima cosa si riportano le equazioni di Navier-Stokes adimensionali per un fluido a proprietà costanti ( $\rho = \text{cost}$ ,  $\mu = \text{cost}$ ), e quindi necessariamente incomprimibile, per una corrente stazionaria:

### Conservazione della massa

Dalla (2.27) e da  $\rho = \text{cost}$  segue immediatamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.33)$$

### Conservazione della quantità di moto (componente $x$ )

Dalla (2.28), tenendo conto dell'equazione (2.33) e dividendo ambo i membri per  $\rho$  si ottiene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\nu} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.34)$$

### Conservazione della quantità di moto (componente $y$ ):

Analogamente a quanto visto per la componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto si ha:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\nu} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.35)$$

Nel caso di fluido a proprietà costanti la pressione non rappresenta una variabile termodinamica, ma semplicemente un *moltiplicatore di Lagrange* che permette di soddisfare il vincolo di incomprimibilità. Per questo motivo, avendo un'incognita in meno (la densità), queste equazioni sono sufficienti alla risoluzione del campo di moto. Riassumendo il sistema di equazioni è:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (2.36)$$

Si introduce ora una opportuna scalatura delle incognite che viola il teorema di Buckingham ma che pone in evidenza la separazione delle scale nelle equazioni dello strato limite.

Definendo il numero di Reynolds  $Re$ :

$$Re = \frac{\rho_r U_r L_r}{\mu_r} \quad (2.37)$$

e assumendo solo  $P_r = \rho_r U_r^2$ , si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (2.38)$$

Nelle equazioni di N.S. i termini viscosi sono moltiplicati per un fattore pari al reciproco del numero di Reynolds. Si potrebbe pensare che, al crescere di questo parametro adimensionale, l'effetto dei termini viscosi divenga sempre meno importante, fino a poter essere trascurato nel limite di  $Re \rightarrow \infty$ . In realtà se si cancellano semplicemente i termini viscosi dalle equazioni di N.S., l'ordine delle equazioni ne risulta abbassato dal secondo al primo: le condizioni al contorno (che nel caso viscoso comprendono anche quella di adesione del fluido alla parete) vengono ad essere in soprannumero.

Le condizioni che non possono essere più soddisfatte nel limite di numero di Reynolds infinito si recuperano in una regione molto sottile prossima alla parete, caratterizzata da scale spaziali nella direzione parallela alla parete molto diverse da quelle tipiche della direzione normale. Queste due scale stanno fra di loro proprio in un rapporto tale da rendere non più trascurabili i termini che invece si pensava di poter trascurare: infatti all'interno dello strato limite, che ha una scala spaziale molto piccola in direzione normale alla parete, le derivate seconde delle variabili fluidodinamiche sono elevate ed i termini viscosi, che sono dati da derivate seconde moltiplicate per la viscosità, non sono trascurabili anche nel limite di viscosità piccola.

Il campo di moto viene quindi diviso in due regioni: una *interna* in cui i termini viscosi non sono trascurabili, ed una *esterna* in cui invece lo sono. Viene illustrata di seguito la tecnica delle *espansioni asintotiche*, proposta per la prima volta da Van Dyke [26].

### 2.2.1 Soluzione interna

Si effettui il seguente cambio di coordinate in direzione  $y$ :

$$Y = \frac{y}{\epsilon} \quad (2.39)$$

in modo tale che la coordinata  $Y$  abbia ordine di grandezza paragonabile ad  $x$ .

Si indichi con la notazione  $(\cdot)^i$  il fatto che ci si sta riferendo alle variabili della soluzione interna.

#### Conservazione della massa

$$\frac{\partial u^i}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v^i}{\partial Y} = 0 \quad (2.40)$$

#### Conservazione della quantità di moto (componente $x$ ):

Con il cambio di variabile illustrato in precedenza si ha:

$$u^i \frac{\partial u^i}{\partial x} + \frac{v^i}{\epsilon} \frac{\partial u^i}{\partial Y} + \frac{\partial P^i}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 u^i}{\partial Y^2} \quad (2.41)$$

Affinchè i termini viscosi in direzione  $Y$  abbiano lo stesso ordine di grandezza dei termini di trasporto presenti al primo membro, è necessario quindi che:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (2.42)$$

da cui:

$$u^i \frac{\partial u^i}{\partial x} + \frac{v^i}{\epsilon} \frac{\partial u^i}{\partial Y} + \frac{\partial P^i}{\partial x} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial Y^2} \quad (2.43)$$

#### Conservazione della quantità di moto (componente $y$ ):

Con il cambio di variabile illustrato in precedenza si ha:

$$u^i \frac{\partial v^i}{\partial x} + \frac{v^i}{\epsilon} \frac{\partial v^i}{\partial Y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P^i}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 v^i}{\partial Y^2} \quad (2.44)$$

e, ricordando la (2.42), si ottiene:

$$u^i \frac{\partial v^i}{\partial x} + \frac{v^i}{\epsilon} \frac{\partial v^i}{\partial Y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P^i}{\partial Y} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial Y^2} \quad (2.45)$$



Si effettui ora uno sviluppo della soluzione interna in termini di potenze di  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} u^i &= u_0^i + \epsilon u_1^i + \epsilon^2 u_2^i + \dots \\ v^i &= v_0^i + \epsilon v_1^i + \epsilon^2 v_2^i + \dots \\ P^i &= P_0^i + \epsilon P_1^i + \epsilon^2 P_2^i + \dots \end{aligned} \tag{2.46}$$

Sostituendo lo sviluppo nell'equazione di conservazione della massa, e mantenendo per brevità solo i primi due termini dello sviluppo, si ottiene:

$$\frac{\partial u_0^i}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial u_1^i}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v_0^i}{\partial Y} + \frac{\partial v_1^i}{\partial Y} = 0 \tag{2.47}$$

ovvero, raccogliendo i termini dello stesso ordine di  $\epsilon$ :

$$\frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\partial v_0^i}{\partial Y} \right] + \left[ \frac{\partial u_0^i}{\partial x} + \frac{\partial v_1^i}{\partial Y} \right] + \epsilon \left[ \frac{\partial u_1^i}{\partial x} + \dots \right] = 0 \tag{2.48}$$

All'ordine  $\epsilon^{-1}$  si ha:

$$\frac{\partial v_0^i}{\partial Y} = 0 \tag{2.49}$$

ma essendo  $v_0^i = 0$  a parete ne consegue che:

$$v_0^i = 0 \tag{2.50}$$

All'ordine  $\epsilon^0$ , si ha:

$$\frac{\partial u_0^i}{\partial x} + \frac{\partial v_1^i}{\partial Y} = 0 \tag{2.51}$$

In questa trattazione non vengono analizzati i termini per potenze di  $\epsilon$  superiori all'ordine *zero* al fine di ottenere le *equazioni di Prandtl dello strato limite*.

Si passi ora alla componente  $x$  dell'equazione di conservazione della quantità di moto; sostituendo lo sviluppo e raccogliendo i termini di ordine *zero* si ha:

$$u_0^i \frac{\partial u_0^i}{\partial x} + v_1^i \frac{\partial u_0^i}{\partial Y} + \frac{\partial P_0^i}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0^i}{\partial Y^2} \tag{2.52}$$

Per quanto riguarda la componente  $y$  dell'equazione di conservazione della quantità di moto, effettuando gli stessi passaggi e considerando solo i termini di ordine *zero* si ha:

$$\frac{\partial P_0^i}{\partial Y} = 0 \quad (2.53)$$

Si è così ottenuto il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0^i}{\partial x} + \frac{\partial v_1^i}{\partial Y} = 0 \\ u_0^i \frac{\partial u_0^i}{\partial x} + v_1^i \frac{\partial u_0^i}{\partial Y} + \frac{\partial P_0^i}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0^i}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial P_0^i}{\partial Y} = 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

ovvero, tornando alla forma adimensionale originale, omettendo i pedici per alleggerire la notazione e notando che  $P = P(x)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^i}{\partial x} + \frac{\partial v^i}{\partial y} = 0 \\ u^i \frac{\partial u^i}{\partial x} + v^i \frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dP^i}{dx} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2.55)$$

### 2.2.2 Soluzione esterna

Si effettui ora uno sviluppo per la soluzione esterna:

$$\begin{aligned} u^e &= u_0^e + \epsilon u_1^e + \epsilon^2 u_2^e + \dots \\ v^e &= v_0^e + \epsilon v_1^e + \epsilon^2 v_2^e + \dots \\ P^e &= P_0^e + \epsilon P_1^e + \epsilon^2 P_2^e + \dots \end{aligned} \quad (2.56)$$

Sostituendolo nelle equazioni di Navier-Stokes, e ricordando che  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$ , all'ordine *zero* si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0^e}{\partial x} + \frac{\partial v_0^e}{\partial y} = 0 \\ u_0^e \frac{\partial u_0^e}{\partial x} + v_0^e \frac{\partial u_0^e}{\partial y} + \frac{\partial P_0^e}{\partial x} = 0 \\ u_0^e \frac{\partial v_0^e}{\partial x} + v_0^e \frac{\partial v_0^e}{\partial y} + \frac{\partial P_0^e}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

ovvero le equazioni di Eulero per il caso incomprimibile. Nella forma adimensionale originale si ha perciò:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0^e}{\partial x} + \frac{\partial v_0^e}{\partial y} = 0 \\ u_0^e \frac{\partial u_0^e}{\partial x} + v_0^e \frac{\partial u_0^e}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0^e}{\partial x} = 0 \\ u_0^e \frac{\partial v_0^e}{\partial x} + v_0^e \frac{\partial v_0^e}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0^e}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

### 2.2.3 Condizioni di raccordo

Dopo aver ricavato le equazioni per gli sviluppi interno ed esterno, occorre ora imporre che essi si raccordino con continuità l'uno con l'altro. Deve infatti esistere una regione (caratterizzata da valori piccoli di  $y$  ma valori grandi di  $Y$ ) in cui gli sviluppi sono entrambi validi e rappresentano la stessa funzione.

Occorre quindi considerare il limite dei due sviluppi in serie quando  $Re \rightarrow \infty$  ma in modo tale che  $y \rightarrow 0$  e contemporaneamente  $Y \rightarrow \infty$ .

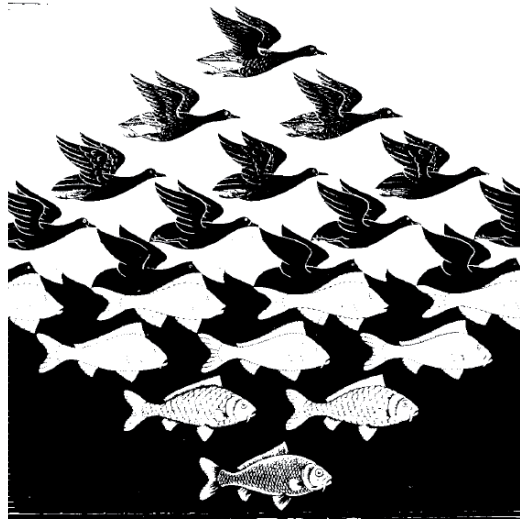


Figura 2.1: Sky and Water I, 1938, M. C. Escher

Per raccordare le due soluzioni, perciò, si espande in serie di Taylor la soluzione esterna a parete ( $y = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 u^e(x, y) &= u^e(x, 0) + \left(\frac{\partial u^e}{\partial y}\right)_{y=0} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial y^2}\right)_{y=0} y^2 + \dots \\
 v^e(x, y) &= v^e(x, 0) + \left(\frac{\partial v^e}{\partial y}\right)_{y=0} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v^e}{\partial y^2}\right)_{y=0} y^2 + \dots \\
 P^e(x, y) &= P^e(x, 0) + \left(\frac{\partial P^e}{\partial y}\right)_{y=0} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P^e}{\partial y^2}\right)_{y=0} y^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

La condizione di raccordo per la variabile  $u$  prevede che:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} [u^i(x, Y) - u^e(x, \epsilon Y)] = 0 \tag{2.60}$$

ovvero, sostituendo gli sviluppi:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \left[ (u_0^i + u_1^i \epsilon + \dots) - \left( u_0^e(x, 0) + u_1^e(x, 0) \epsilon + \dots + \left(\frac{\partial u_0^e}{\partial y}\right)_{y=0} \epsilon Y + \dots \right) \right] = 0 \tag{2.61}$$

All'ordine *zero* essa è pertanto:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} [u_0^i(x, Y) - u_0^e(x, 0)] = 0 \tag{2.62}$$

ovvero:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} u_0^i(x, Y) = u_0^e(x, 0) \tag{2.63}$$

La condizione per la pressione  $P$  si ricava esattamente nello stesso modo, perciò:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} P_0^i(x, Y) = P_0^e(x, 0) \tag{2.64}$$

Per quanto riguarda la componente  $v$  della velocità, invece:

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \left[ (v_1^i \epsilon + v_2^i \epsilon^2 + \dots) - \left( v_0^e(x, 0) + v_1^e(x, 0) \epsilon + \dots + \left(\frac{\partial v_0^e}{\partial y}\right)_{y=0} \epsilon Y + \dots \right) \right] = 0 \tag{2.65}$$

che all'ordine *zero* si traduce nella condizione di non penetrazione:

$$v_0^e(x, 0) = 0 \tag{2.66}$$

Da notare che, per la soluzione interna, non è necessario imporre una condizione *asintotica* per la variabile  $v$ , in quanto essa è già determinata una volta nota la soluzione delle variabili  $u$  e  $P$ .

Le equazioni dello strato limite incomprimibile per un fluido a proprietà costanti sono pertanto:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP^e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2.67)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U_e(x) \end{cases} \quad (2.68)$$

### 2.3 Equazioni di Prandtl per lo strato limite comprimibile

Si vuole estendere ora la tecnica delle espansioni asintotiche raccordate al caso di fluido comprimibile.

Per prima cosa si riportano le equazioni di N.S. stazionarie in una forma adimensionale tale da far comparire il numero di Reynolds  $Re$  e il numero di Prandtl  $Pr$ :

#### Conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.69)$$

#### Conservazione della quantità di moto (componente $x$ )

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (2.70)$$

e facendo uso della equazione di continuità si ottiene:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (2.71)$$

**Conservazione della quantità di moto (componente  $y$ )**

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + P) = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} \quad (2.72)$$

e facendo uso della equazione di continuità si ottiene:

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} \quad (2.73)$$

**Conservazione dell'energia totale**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [u (E^t + P)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E^t + P)] &= \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (2\mu + \lambda) u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u \frac{\partial v}{\partial y} + \mu v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ (2\mu + \lambda) v \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda v \frac{\partial u}{\partial x} + \mu u \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + \frac{1}{\text{RePr}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

Si analizzi il primo membro dell'equazione (2.74):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [u (E^t + P)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E^t + P)] &= \frac{\partial}{\partial x} [u H^t] + \frac{\partial}{\partial y} [v H^t] = \frac{\partial}{\partial x} [u \rho h^t] + \frac{\partial}{\partial y} [v \rho h^t] = \\ &= h^t \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \rho u \frac{\partial h^t}{\partial x} + h^t \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \rho v \frac{\partial h^t}{\partial y} = h^t \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right]}_{\text{continuità} = 0} + \rho u \frac{\partial h^t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h^t}{\partial y} = \\ &= \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left( c_p T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left( c_p T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = \\ &= c_p \left( \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \underbrace{\left[ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right]}_{\text{q. moto } x} + v \underbrace{\left[ \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} \right]}_{\text{q. moto } y} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Facendo a questo punto uso delle equazioni della quantità di moto e manipolando in maniera opportuna le equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} c_p \left( \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - u \frac{\partial P}{\partial x} - v \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. (2\mu + \lambda) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.76)$$

### 2.3.1 Soluzione interna

Nel caso comprimibile si hanno due strati limite: lo strato limite *cinematico* e lo strato limite *termico*; se lo spessore del primo è dell'ordine di

$$\delta \approx \sqrt{\text{Re}} \quad (2.77)$$

è evidente, dall'equazione di conservazione dell'energia, che lo spessore del secondo è dell'ordine di:

$$\delta_T \approx \sqrt{\text{RePr}} \quad (2.78)$$

Pertanto, affinché i due spessori abbiano lo stesso ordine di grandezza, è necessario che:

$$\text{Pr} = \mathcal{O}(1) \quad (2.79)$$

Per l'aria, ad esempio, si ha  $\text{Pr} = 0.72$ . Detto questo è possibile porre come in precedenza:

$$Y = \frac{y}{\epsilon} \quad (2.80)$$

con  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$ .

Sviluppando a questo punto le variabili in termini di potenze di  $\epsilon$  si ha:

$$\begin{aligned} \rho^i &= \rho_0^i + \epsilon \rho_1^i + \epsilon^2 \rho_2^i + \dots \\ u^i &= u_0^i + \epsilon u_1^i + \epsilon^2 u_2^i + \dots \\ v^i &= v_0^i + \epsilon v_1^i + \epsilon^2 v_2^i + \dots \\ T^i &= T_0^i + \epsilon T_1^i + \epsilon^2 T_2^i + \dots \\ P^i &= P_0^i + \epsilon P_1^i + \epsilon^2 P_2^i + \dots \\ \mu^i &= \mu_0^i + \epsilon \mu_1^i + \epsilon^2 \mu_2^i + \dots \\ \lambda^i &= \lambda_0^i + \epsilon \lambda_1^i + \epsilon^2 \lambda_2^i + \dots \\ k^i &= k_0^i + \epsilon k_1^i + \epsilon^2 k_2^i + \dots \end{aligned} \quad (2.81)$$

È necessaria una precisazione: lo sviluppo delle variabili  $P$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  e  $k$  non è immediato, in quanto queste variabili dipendono dalla temperatura e,

nel caso di  $P$ , anche dalla densità. Si riporta ad esempio lo sviluppo della variabile  $\mu = \mu(T)$ .

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots) \approx \mu(\epsilon = 0) + \left. \frac{d\mu}{dT} \right|_{\epsilon=0} (T(\epsilon) - T(\epsilon = 0)) + \\ &\frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mu}{dT^2} \right|_{\epsilon=0} (T(\epsilon) - T(\epsilon = 0))^2 = \mu(T_0) + \left. \frac{d\mu}{dT} \right|_{T_0} (\epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mu}{dT^2} \right|_{T_0} (\epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2)^2 \end{aligned} \quad (2.82)$$

e quindi:

$$\mu = \underbrace{\mu(T_0)}_{\mu_0} + \epsilon \underbrace{\left( \left. \frac{d\mu}{dT} \right|_{T_0} T_1 \right)}_{\mu_1} + \epsilon^2 \underbrace{\left( \left. \frac{d\mu}{dT} \right|_{T_0} T_2 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mu}{dT^2} \right|_{T_0} T_1 \right)}_{\mu_2} + \dots \quad (2.83)$$

Gli sviluppi per le variabili  $\lambda$  e  $k$  sono analoghi, come analogo è quello per la variabile  $P$ , con la sola differenza della comparsa delle derivate parziali nello sviluppo in serie, poichè  $P = P(\rho, T)$ .

Si riscrivono ora le equazioni di governo in termini di variabili *interne*  $(\cdot)^i$ , facendo uso della (2.80) e della (2.42).

### Conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho^i u^i) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} (\rho^i v^i) = 0 \quad (2.84)$$

### Conservazione della quantità di moto (componente $x$ )

$$\begin{aligned} \rho^i \left( u^i \frac{\partial u^i}{\partial x} + v^i \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^i}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P^i}{\partial x} = \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (2\mu^i + \lambda^i) \frac{\partial u^i}{\partial x} + \lambda^i \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v^i}{\partial Y} \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \mu^i \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^i}{\partial Y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.85)$$

### Conservazione della quantità di moto (componente $y$ )

$$\begin{aligned} \rho^i \left( u^i \frac{\partial v^i}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} v^i \frac{\partial v^i}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P^i}{\partial Y} = \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu^i \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^i}{\partial Y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \left[ (2\mu^i + \lambda^i) \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v^i}{\partial Y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.86)$$



### Conservazione dell'energia totale

$$c_p \left( \rho^i u^i \frac{\partial T^i}{\partial x} + \rho^i v^i \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial T^i}{\partial Y} \right) - u^i \frac{\partial P^i}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon} v^i \frac{\partial P^i}{\partial Y} = \epsilon^2 \left\{ \mu^i \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^i}{\partial Y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} \right)^2 + (2\mu^i + \lambda^i) \left[ \left( \frac{\partial u^i}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial Y} \right)^2 + 2 \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^i}{\partial x} \frac{\partial v^i}{\partial Y} \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k^i \frac{\partial T^i}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left( k^i \frac{\partial T^i}{\partial Y} \right) \right] \right\} \quad (2.87)$$

Si sostituiscono a questo punto gli sviluppi (2.81) nelle equazioni appena scritte.

I termini dell'equazione di conservazione della massa moltiplicati per  $\epsilon^{-1}$  forniscono:

$$\frac{\partial}{\partial Y} (\rho_0^i v_0^i) = 0 \quad (2.88)$$

e quindi:

$$\rho_0^i v_0^i = \text{cost} \quad (2.89)$$

Essendo  $v_0^i = 0$  in  $Y = 0$ , ed essendo la densità diversa da zero per ogni  $Y$ , si ha:

$$v_0^i = 0 \quad (2.90)$$

Le equazioni all'ordine zero risultano pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0^i u_0^i) + \frac{\partial}{\partial Y} (\rho_0^i v_0^i) = 0 \\ \rho_0^i u_0^i \frac{\partial u_0^i}{\partial x} + \rho_0^i v_0^i \frac{\partial u_0^i}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_0^i \frac{\partial u_0^i}{\partial Y} \right) \\ \frac{\partial P_0^i}{\partial Y} = 0 \\ c_p \rho_0^i \left( u_0^i \frac{\partial T_0^i}{\partial x} + v_0^i \frac{\partial T_0^i}{\partial Y} \right) - u_0^i \frac{\partial P_0^i}{\partial x} - \underbrace{v_0^i \frac{\partial P_0^i}{\partial Y}}_{=0} = \mu_0^i \left( \frac{\partial u_0^i}{\partial Y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial Y} \left( k_0^i \frac{\partial T_0^i}{\partial Y} \right) \\ P_0^i = \rho_0^i R T_0^i \end{array} \right. \quad (2.91)$$

### 2.3.2 Soluzione esterna

Si effettui ora, come fatto in precedenza, lo sviluppo per la soluzione esterna:

$$\begin{aligned}
 \rho^e &= \rho_0^e + \epsilon \rho_1^e + \epsilon^2 \rho_2^e + \dots \\
 u^e &= u_0^e + \epsilon u_1^e + \epsilon^2 u_2^e + \dots \\
 v^e &= v_0^e + \epsilon v_1^e + \epsilon^2 v_2^e + \dots \\
 T^e &= T_0^e + \epsilon T_1^e + \epsilon^2 T_2^e + \dots \\
 P^e &= P_0^e + \epsilon P_1^e + \epsilon^2 P_2^e + \dots \\
 \mu^e &= \mu_0^e + \epsilon \mu_1^e + \epsilon^2 \mu_2^e + \dots \\
 \lambda^e &= \lambda_0^e + \epsilon \lambda_1^e + \epsilon^2 \lambda_2^e + \dots \\
 k^e &= k_0^e + \epsilon k_1^e + \epsilon^2 k_2^e + \dots
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Sostituendo nelle equazioni di Navier-Stokes per un fluido comprimibile, ricordando che  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$  e mettendo in mostra solo i termini di ordine *zero* si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \rho_0^e u_0^e}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0^e v_0^e}{\partial y} = 0 \\
 \rho_0^e \left( u_0^e \frac{\partial u_0^e}{\partial x} + v_0^e \frac{\partial u_0^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial P_0^e}{\partial x} = 0 \\
 \rho_0^e \left( u_0^e \frac{\partial v_0^e}{\partial x} + v_0^e \frac{\partial v_0^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial P_0^e}{\partial y} = 0 \\
 c_p \left( \rho_0^e u_0^e \frac{\partial T_0^e}{\partial x} + \rho_0^e v_0^e \frac{\partial T_0^e}{\partial y} \right) - u_0^e \frac{\partial P_0^e}{\partial x} - v_0^e \frac{\partial P_0^e}{\partial y} = 0
 \end{array} \right. \tag{2.93}$$

che non sono nient'altro che le equazioni di Eulero per il caso comprimibile.

### 2.3.3 Condizioni di raccordo

Le condizioni di raccordo per il caso comprimibile sono le medesime di quelle del caso incomprimibile, con l'aggiunta del raccordo delle incognite  $\rho$ ,  $T$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $k$ .

In realtà è sufficiente aggiungere (rispetto al caso incomprimibile) la condizione di raccordo per la variabile  $T$ , e ricavare di conseguenza le altre facen-

do uso dell'equazione di stato  $P = \rho RT$  e sfruttando il fatto che  $\mu = \mu(T)$ ,  $\lambda = \lambda(T)$  e  $k = k(T)$ .

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} T_0^i(x, Y) = T_0^e(x, 0) \quad (2.94)$$

Le equazioni dello strato limite comprimibile sono perciò:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ P = \rho RT \end{array} \right. \quad (2.95)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = u_w \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e \quad v(x, 0) = 0 \\ T(x, 0) = T_w \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_e \end{array} \right. \quad (2.96)$$



## Parte I

# Strato limite incompressibile



## Capitolo 3

### Strato limite incomprimibile laminare

#### 3.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite incomprimibile laminare

In questo capitolo si affronterà il problema dello strato limite bidimensionale incomprimibile su lastra piana facendo uso delle equazioni di Prandtl per un fluido a proprietà costanti in assenza di gradienti di pressione:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(0, y) = U_{inflow} = U_e \\ u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U_e \end{cases} \quad (3.2)$$

Si osservi che è presente una discontinuità per la componente  $u$ : infatti all'inizio della lastra, per la condizione di inflow,  $u(0, 0^+) = U_e$ , mentre per la condizione di perfetta adesione si ha che  $u(0, 0^+) = 0$ .

Inizialmente verrà mostrata una loro soluzione sfruttando il concetto di *soluzione simile*: data l'assenza di una scala spaziale di riferimento (essendo la lastra piana di estensione infinita), è lecito pensare che l'andamento del profilo della velocità non dipenda dalla coordinata  $x$ , ovvero, al variare di  $x$ , vi sia soltanto una riscaltatura del profilo stesso. La soluzione di questo problema è dovuta a *Blasius*, che la ottenne nel suo lavoro di dottorato nel 1908.

Successivamente si procederà alla risoluzione del sistema di *equazioni di Prandtl* senza introdurre l'ipotesi di similarità.

Infine verrà mostrato il confronto tra i risultati ottenuti con i due differenti approcci al problema.

### 3.2 Soluzione simile di Blasius

Come accennato in precedenza, data l'assenza di una scala spaziale di riferimento, è lecito pensare che l'andamento del profilo della velocità non dipenda dalla coordinata  $x$ , ovvero, al variare di  $x$ , vi sia soltanto una riscalatura del profilo stesso.

Dal punto di vista matematico questo si traduce nel fatto che  $u$  non dipenda più da due variabili distinte  $x$  e  $y$ , ma da un'unica variabile, detta *variabile di similarità*  $\eta$  che, senza perdita di generalità, è possibile esprimere nel seguente modo:

$$\eta = \eta(x, y) = \frac{y}{g(x)} \quad (3.3)$$

dove  $g(x)$  è una funzione da determinare.

Si introduce pertanto una nuova incognita adimensionale,  $h$ , in modo tale che:

$$u(x, y) = U_e h(\eta) = U_e h\left(\frac{y}{g(x)}\right) \quad (3.4)$$

Sostituendo tale relazione nell'equazione di conservazione della massa, si ottiene che:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_e g'(x)}{g(x)} \eta h'(\eta) \quad (3.5)$$

Tale relazione, integrata rispetto ad  $y$  e con alcuni semplici passaggi matematici, porta a:

$$v(x, y) = U_e g'(x) \left[ \eta h(\eta) - \int_0^\eta h(\eta) d\eta \right] \quad (3.6)$$

Si introduce a questo punto una primitiva di  $h(\eta)$ , che viene indicata con  $f(\eta)$ , in modo tale che:

$$f'(\eta) = h(\eta) \quad (3.7)$$

e quindi:



$$\begin{cases} u(x, y) = U_e f'(\eta) \\ v(x, y) = U_e g'(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \end{cases} \quad (3.8)$$

Sostituendo nell'equazione della quantità di moto e semplificando, si giunge a:

$$f''' + \frac{U_e g g'}{\nu} f f'' = 0 \quad (3.9)$$

che è la ben nota *equazione del flusso di Blasius*.

### 3.2.1 Ricerca della variabile di similarità

È necessario a questo punto riuscire a determinare la funzione  $g(x)$ ; affinché l'equazione di Blasius possa diventare una equazione differenziale ordinaria, è necessario che il termine  $\frac{U_e g g'}{\nu}$  sia costante. Senza perdita di generalità, si sceglie:

$$\frac{U_e g g'}{\nu} = \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

Da cui è immediato ricavare:

$$g g' = \frac{\nu}{2U_e} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} g^2 = \frac{\nu}{2U_e} \quad (3.11)$$

che integrata fornisce immediatamente:

$$g(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} \quad (3.12)$$

Da notare che la costante di integrazione è stata posta a zero in modo da localizzare la singolarità nell'origine della lastra.

La variabile di similarità  $\eta$  risulta perciò:

$$\eta(x, y) = y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \quad (3.13)$$

È possibile pertanto riscrivere il problema di Blasius nel seguente modo:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (3.14)$$

mentre le condizioni al contorno sono ricavabili facilmente dalle (3.2):

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Una volta risolta questa equazione differenziale, è immediato ricavare il campo di moto:

$$\begin{cases} u(x, y) = U_e f' \left( y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \right) \\ v(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} \left[ y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} f' \left( y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \right) - f \left( y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \right) \right] \end{cases} \quad (3.16)$$

La soluzione di Blasius non è che un caso particolare delle soluzioni di Falkner-Skan (vedi Appendice A).

### 3.2.2 Riduzione a sistema del primo ordine

Per risolvere l'equazione di Blasius (3.14), la tecnica qui utilizzata richiede la riduzione dell'ordine del problema. Introducendo le due variabili ausiliarie  $u = f'$  e  $\zeta = u' = f''$ , il problema di Blasius diviene:

$$\begin{cases} \zeta' = -\frac{1}{2}\zeta f \\ u' = \zeta \\ f' = u \end{cases} \quad (3.17)$$

con le relative condizioni al contorno:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(\infty) = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Da notare come non vi sia alcuna condizione al contorno per la variabile ausiliaria  $\zeta$ , mentre la  $u$  ne ha addirittura due; grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, però:

$$\int_0^\infty \frac{du(\eta)}{d\eta} d\eta = u(\infty) - u(0) = 1 \quad (3.19)$$

ovvero:

$$\int_0^{\infty} \zeta(\eta) d\eta = 1 \quad (3.20)$$

Come condizioni al contorno, quindi, oltre a porre  $f(0) = 0$ , è possibile scegliere due tra le seguenti:

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1 \quad \text{oppure} \quad \int_0^{\infty} \zeta(\eta) d\eta = 1 \quad (3.21)$$

poichè la terza sarà soddisfatta automaticamente.

### 3.2.3 Soluzione numerica del problema di Blasius

Il sistema di tre equazioni differenziali ordinarie accoppiate tra loro, corredato da condizioni al contorno di tipo puntuale e/o integrale, va risolto numericamente.

Si introduca ora la seguente notazione vettoriale:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \zeta \\ u \\ f \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\zeta f \\ \zeta \\ u \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Il problema di Blasius può quindi essere scritto nella forma compatta:

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (3.24)$$

mentre per quanto riguarda le condizioni al contorno è necessario sottolineare come, ovviamente, la condizione all'infinito debba essere imposta in realtà nell'estremo superiore di una griglia di dimensioni finite.

La soluzione di questo problema la si ottiene con un metodo iterativo che necessita dello Jacobiano del sistema, così definito:

$$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}f & 0 & -\frac{1}{2}\zeta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

mentre le condizioni al bordo utilizzate sono le seguenti:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(\eta_{max})) = \begin{pmatrix} u(\eta_{max}) - 1 \\ u(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

Il metodo numerico richiede inoltre delle matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema; esse risultano pertanto nell'estremo inferiore:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

e in quello superiore:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=\eta_{max}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Come condizione iniziale per il metodo iterativo, almeno inizialmente, si è scelta la soluzione del problema linearizzato.

Risolvendo con una griglia di 100 nodi equispaziati sino ad  $\eta = 7$  si ottiene il risultato riportato in Figura 3.1.

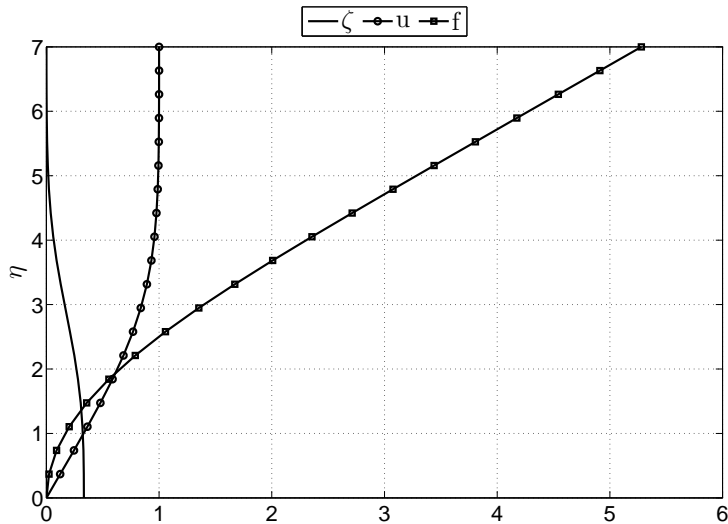


Figura 3.1: Soluzione di Blasius

### 3.3 Soluzione equazioni di Prandtl

#### 3.3.1 Impostazione del problema

Nel seguente paragrafo si risolverà il sistema di equazioni (3.1) senza ricorrere all'utilizzo di soluzioni simili quali quella di Blasius (che nel caso di lastra piana coincide con quella di Falkner-Skan, come si vede in Appendice A).

Il primo passo è definire il sistema di riferimento: se ne scelga uno centrato nell'origine della lastra semi-infinita, con asse  $x$  diretto lungo la lastra stessa ed asse  $y$  ortogonale a quest'ultimo (vedi Figura 3.2).



Figura 3.2: Sistema di riferimento

L'idea che sta alla base della risoluzione del sistema di equazioni di Prandtl che verrà mostrata nel seguito nasce dallo sfruttare la natura parabolica del problema, e quindi dall'osservare che il campo di velocità che si ha in una data stazione della lastra dipende unicamente dal campo di velocità a monte della stazione stessa.

L'ipotesi che ne sta alla base è che non vi sia un flusso inverso (*reverse flow*).

Sulla linea di questa considerazione sarà pertanto possibile discretizzare le derivate in  $x$  con derivate decentrate all'indietro, e trasformare perciò il problema da un sistema di *PDE* per tutto il campo di moto ad un sistema di *ODE* per una singola stazione.

Ovviamente, a seconda del numero di punti con cui si costruirà la molecola per il calcolo della derivata decentrata all'indietro, sarà necessario conoscere uno o più profili di velocità a monte della stazione considerata (in particolare sarà sufficiente conoscere i profili  $u(y)$  in quanto la variabile  $v(x, y)$  non compare mai derivata per  $x$  nel sistema (3.1)).

Si pone pertanto un problema: conoscere le condizioni di *inlet*, ovvero le condizioni di *ingresso*, per poter iniziare la risoluzione del sistema alla prima stazione.

Se si scegliesse come prima stazione quella posta in  $x = 0$  non si avrebbero problemi dal punto di vista della scelta dei profili di velocità  $u(y)$  a monte (in quanto sarebbero profili uniformi e di intensità pari alla velocità esterna adimensionalizzata), ma purtroppo l'origine della lastra è un punto di singolarità e quindi sede di problemi di tipo teorico e computazionale.

Si sceglie pertanto di partire più a valle dell'origine della lastra e di utilizzare come condizioni di ingresso i profili di velocità  $u(y)$  forniti dalla soluzione di Blasius (ovviamente opportunamente riscaldati sulla coordinata  $y$ ).

Si è adottata una griglia di calcolo equispaziata lungo  $x$  (con lunghezza dell'intervallo pari a  $h_x$ ) ma non lungo  $y$ : difatti si è scelta una distribuzione di nodi del tipo  $1-\cos$  in modo da avere una griglia più fitta in corrispondenza della parete per meglio catturare i forti gradienti. Inoltre, avendo utilizzato lo stesso numero di punti per ogni stazione, gli intervalli lungo  $y$  tendono a dilatarsi (vedi Figura 3.3) crescendo lo strato limite di stazione in stazione.

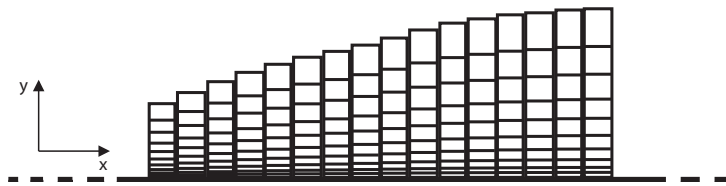


Figura 3.3: Griglia di calcolo

Ovviamente, qualora la soluzione di Blasius ad una stazione precedente fosse disponibile solo fino ad una certa  $\bar{y}$ , è sufficiente orlare i punti alle  $y > \bar{y}$  con la velocità esterna (in quanto già la soluzione di Blasius, seppur asintoticamente, ha raggiunto il valore di velocità cui compete la velocità esterna).

Una volta definita la griglia di calcolo il problema (3.1) può essere riscritto in forma *semi-discreta*; in base alle considerazioni fatte sinora, fissata una stazione  $x_i$ , la dipendenza funzionale delle incognite del problema *semi-discreto* diviene:

$$\begin{aligned} u_i(y) &= u(x_i, y) \\ v_i(y) &= v(x_i, y) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Come detto in precedenza, le derivate in  $y$  del sistema (3.1) diventano quindi derivate ordinarie; indicando con  $D_x(\cdot)$  le derivate parziali (discretizzate) rispetto alla variabile  $x$  ed inserendo le definizioni (3.29) nelle (3.1) si ottiene:

$$\begin{cases} u_i D_x(u_i) + v_i \frac{du_i}{dy} = \nu \frac{d^2 u_i}{dy^2} \\ D_x(u_i) + \frac{dv_i}{dy} = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

Per completare il sistema (3.30) bisogna anche scrivere le condizioni al contorno tenendo conto delle definizioni in (3.29):

$$\begin{cases} u(x_{inlet}, y) = u_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\ u_i(0) = v_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) = U_e & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Lo schema alle differenze finite (decentrato all'indietro) scelto per la discretizzazione delle derivate in  $x$  è uno schema del quarto ordine basato su una molecola a cinque punti [11]:

$$D_x(u_i) = \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} \quad (3.32)$$

da cui si evince che, per risolvere il problema in una assegnata stazione, è necessario conoscere il profilo di velocità  $u(y)$  nelle quattro stazioni precedenti.

Sostituendo la (3.32) nel problema *semi-discreto* (3.30) si ottiene:

$$\begin{cases} u_i \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} + v_i \frac{du_i}{dy} = \nu \frac{d^2u_i}{dy^2} \\ \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} + \frac{dv_i}{dy} = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Il sistema (3.33) permette di recuperare la parabolicità del problema, a patto di essere in grado di risolvere il sistema lungo  $y$  una volta che sia stata assegnata l'ascissa della stazione.

### 3.3.2 Riduzione a sistema del primo ordine

Per risolvere il sistema (3.33) è necessario passare ad un sistema di ODE del primo ordine.

A tal fine si definisce una variabile ausiliaria  $w(x_i, y)$  per consentire la riduzione dell'equazione della quantità di moto lungo  $x$  a due equazioni differenziali del primo ordine:

$$w(x_i, y) = \nu \frac{du(x_i, y)}{dy} \quad (3.34)$$

La variabile ausiliaria viene quindi definita per il problema *semi-discreto* come fatto in precedenza con le (3.29):

$$w_i(y) = w(x_i, y) \quad (3.35)$$

Definita la variabile ausiliaria  $w_i(y)$  per il problema *semi-discreto* è possibile riscrivere il sistema (3.33) come un sistema di ODE del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{dw_i}{dy} = \frac{w_i v_i}{\nu} + \frac{25}{12} \frac{u_i^2}{h_x} - 4 \frac{u_i u_{i-1}}{h_x} + 3 \frac{u_i u_{i-2}}{h_x} - \frac{4}{3} \frac{u_i u_{i-3}}{h_x} + \frac{1}{4} \frac{u_i u_{i-4}}{h_x} \\ \frac{dw_i}{dy} = \frac{w_i}{\nu} \\ \frac{dv_i}{dy} = -\frac{25}{12} \frac{u_i}{h_x} + 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} - 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} + \frac{4}{3} \frac{u_{i-3}}{h_x} - \frac{1}{4} \frac{u_{i-4}}{h_x} \end{cases} \quad (3.36)$$

con le relative condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(x_{inlet}, y) = u_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\ u_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) = U_e & \text{per } x > 0 \\ v_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

### 3.3.3 Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl

Il problema (3.36) può essere scritto nella seguente forma vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dy} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_i) \quad (3.38)$$

una volta che siano stati definiti  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_i)$ :

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} w_i \\ u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} \frac{w_i v_i}{\nu} + \frac{25}{12} \frac{u_i^2}{h_x} - 4 \frac{u_i u_{i-1}}{h_x} + 3 \frac{u_i u_{i-2}}{h_x} - \frac{4}{3} \frac{u_i u_{i-3}}{h_x} + \frac{1}{4} \frac{u_i u_{i-4}}{h_x} \\ \frac{w_i}{\nu} \\ -\frac{25}{12} \frac{u_i}{h_x} + 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} - 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} + \frac{4}{3} \frac{u_{i-3}}{h_x} - \frac{1}{4} \frac{u_{i-4}}{h_x} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

La matrice Jacobiana del sistema è:



$$\mathbf{J}(\mathbf{q}_i, y) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_i, y)}{\partial \mathbf{q}_i} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{\nu} & \frac{25}{6} \frac{u_i}{h_x} - 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} + 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} - \frac{4}{3} \frac{u_{i-3}}{h_x} + \frac{1}{4} \frac{u_{i-4}}{h_x} & \frac{w_i}{\nu} \\ \frac{1}{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{12h_x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

mentre le condizioni al contorno si rappresentano nella seguente forma:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(y \rightarrow \infty)) = \begin{pmatrix} \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) - U_e \\ u_i(0) \\ v_i(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

Si definiscono inoltre le matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema; nell'estremo inferiore ( $y = 0$ ) si ha:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}_i} \right|_{y=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

mentre in quello superiore ( $y \rightarrow \infty$ ):

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}_i} \right|_{y \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

L'intera procedura sviluppata richiede per prima cosa la definizione della griglia di calcolo: bisogna perciò fissare gli estremi del dominio  $[x_a, x_b]$  in direzione longitudinale e  $[0, \eta_{max}]$  in direzione trasversale, il numero di nodi  $n$  lungo  $y$  e il numero di stazioni  $N_S$  lungo  $x$ .

Definita la griglia, il problema viene risolto per ogni stazione. Come per il problema similare è richiesta la definizione di una soluzione iniziale con cui avviare il calcolo iterativo: si è scelto, per ridurre i tempi di calcolo, di utilizzare la soluzione di Blasius opportunamente riscalata.

### 3.4 Convergenza del metodo numerico

Si mostrano di seguito i risultati di convergenza del metodo numerico utilizzato per la soluzione dei *tpbvp*. L'analisi è stata effettuata risolvendo il

problema similare di Blasius facendo uso della routine del quarto ordine di MATLAB *bvp4c*. Definendo il passo di discretizzazione in direzione  $y$ :

$$h_y = \frac{\eta_{max}}{n} \quad (3.45)$$

ed effettuando due simulazioni con  $n = 100$  e  $n = 800$ , si è verificato che il metodo è effettivamente di ordine 4, come si può evincere dalle Figure 3.4, 3.5, 3.6.

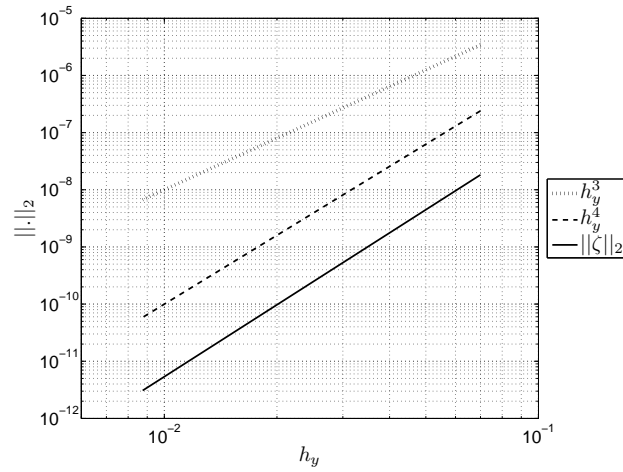


Figura 3.4: Convergenza della variabile  $\zeta$

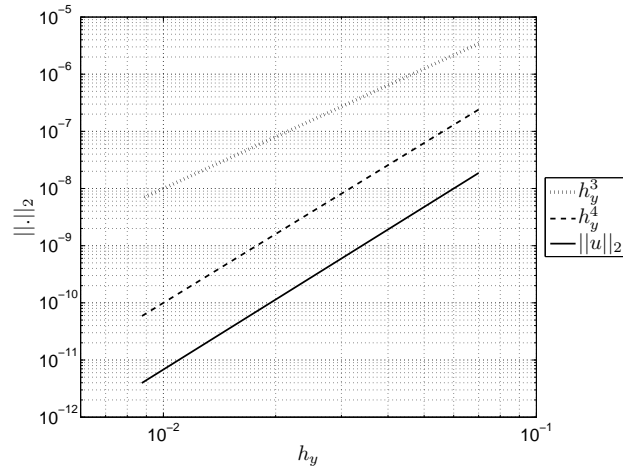
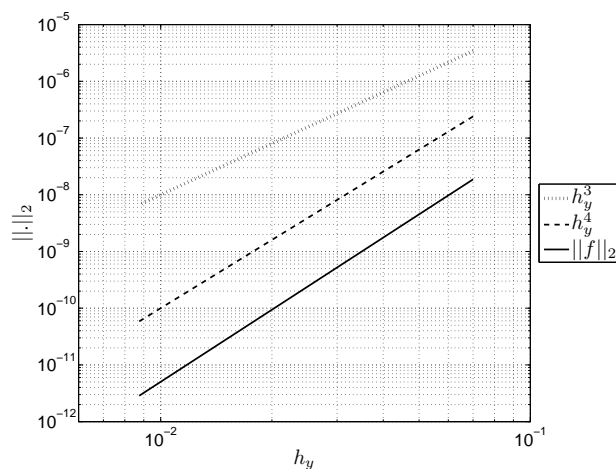


Figura 3.5: Convergenza della variabile  $u$


 Figura 3.6: Convergenza della variabile  $f$ 

### 3.5 Analisi e confronto dei risultati

Assumendo come soluzione esatta del problema dello strato limite incomprimibile, bidimensionale, senza gradiente di pressione, su lastra piana, la soluzione di Blasius, per validare la procedura di calcolo appena descritta è sufficiente confrontare gli andamenti delle variabili del problema di Prandtl con la soluzione di Blasius.

In particolare i diagrammi si riferiscono ad una simulazione effettuata con i seguenti parametri:

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$
7	100	0.5	2	30

Tabella 3.1: Dati simulazione

Nelle Figure 3.7, 3.8, 3.9 si osserva una completa sovrapposizione tra la soluzione calcolata risolvendo le equazioni di Prandtl e quella similare di Blasius.

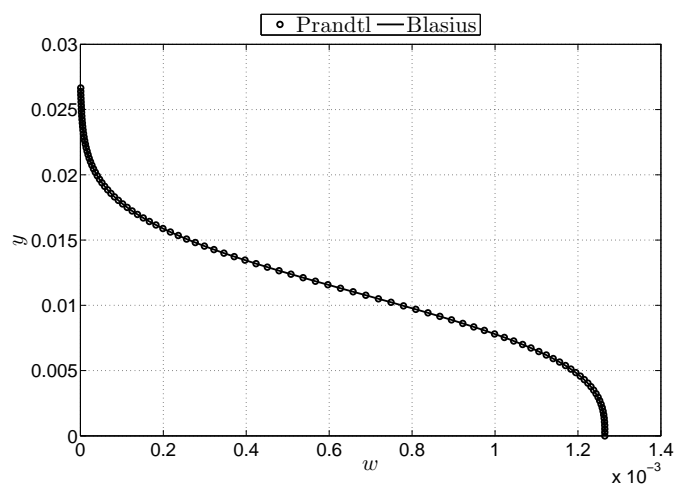


Figura 3.7: Confronto di  $w(y)$ , ultima stazione

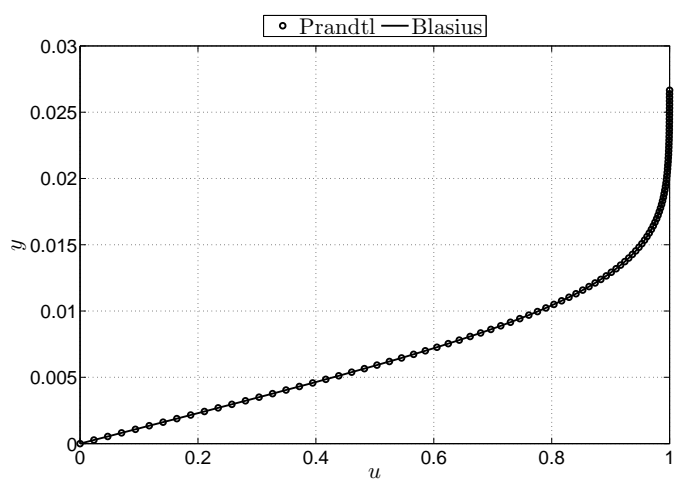


Figura 3.8: Confronto di  $u(y)$ , ultima stazione

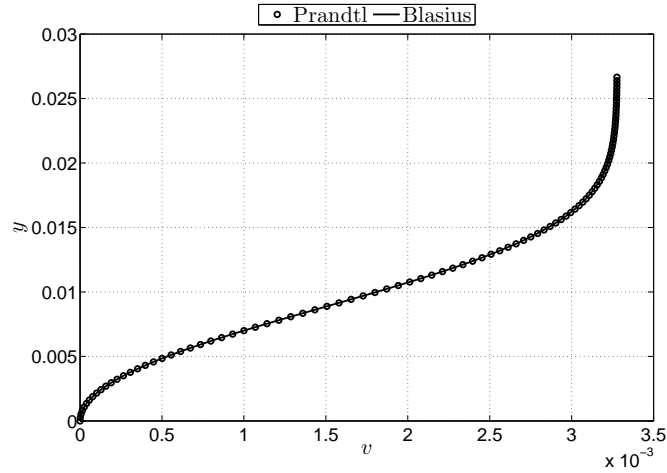


Figura 3.9: Confronto di  $v(y)$ , ultima stazione

Bisogna ricordare inoltre che il sistema di equazioni di Prandtl presenta una singolarità nel bordo d'attacco; pertanto non ha senso effettuare la risoluzione del problema nell'intorno di essa, in quanto vengono a cadere le ipotesi alla base delle equazioni stesse.

Una ulteriore verifica è stata effettuata confrontando il valore della vorticità a parete: l'errore massimo commesso è risultato essere di circa lo 0.08%; inoltre si è anche valutato il coefficiente di attrito  $c_f$ ; esso è definito nel modo seguente:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e u_e} \quad (3.46)$$

dove  $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w$ ; il risultato esatto è ricavabile direttamente dalla soluzione (numerica) di Blasius, e porta a:

$$c_{f,th} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (3.47)$$

Nella Figura 3.10 si nota una ottima sovrapposizione tra i due.

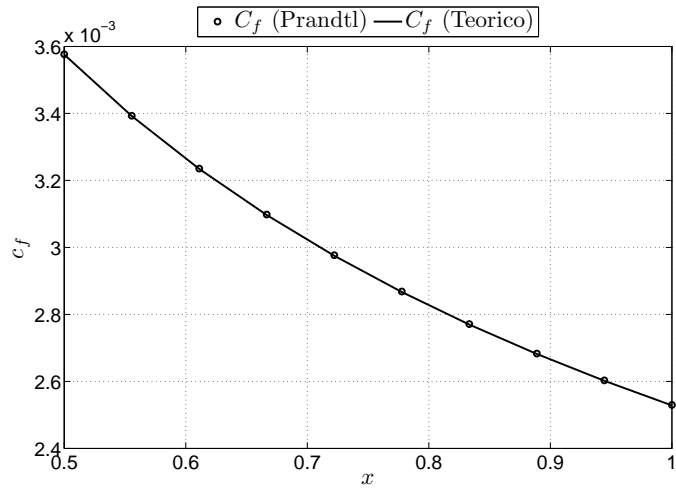


Figura 3.10: Confronto dei valori di  $c_f$

Si mostrano infine i risultati dell'ordine di convergenza della tecnica risolutiva al variare della discretizzazione lungo  $x$ ; si è assunta come soluzione esatta la soluzione similare di Blasius, e si è calcolato l'errore in *norma 2* delle tre variabili del problema di Prandtl ( $w, u, v$ ) al variare di  $h_x$ :

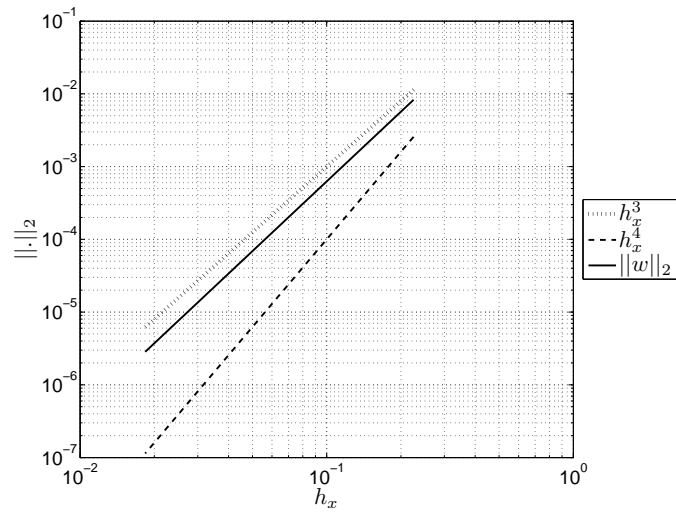


Figura 3.11: Convergenza della variabile  $w$

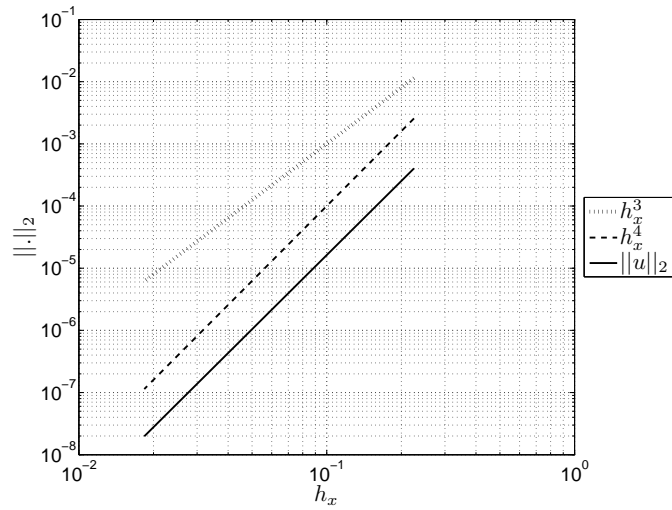


Figura 3.12: Convergenza della variabile  $u$

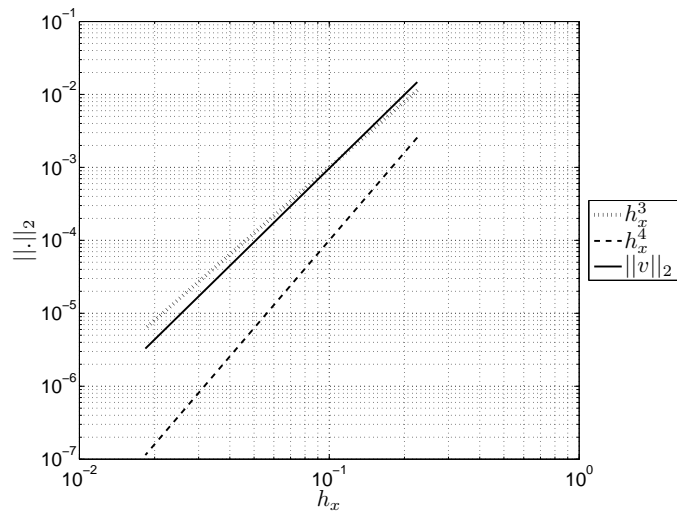


Figura 3.13: Convergenza della variabile  $v$

Avendo discretizzato le derivate lungo  $x$  con uno schema del quarto ordine è normale aspettarsi una convergenza dell'ordine di  $h_x^4$ ; questo risulta ampiamente verificato per la variabile  $u$  (Figura 3.12), mentre per le altre variabili si osserva un ordine di convergenza comunque maggiore di  $h_x^3$  (Figure 3.11 e 3.13).

In conclusione, è possibile affermare che la tecnica risolutiva delle equazioni di Prandtl dello strato limite qui implementata, nel caso *incomprimibile laminare* si è dimostrata efficace.



## Capitolo 4

### Strato limite incomprimibile turbolento

#### 4.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite incomprimibile turbolento

In questo capitolo verranno risolte le *equazioni mediate di Reynolds* (RANS) per uno strato limite bidimensionale, incomprimibile a proprietà costanti. L'idea che ne sta alla base è quella di decomporre ogni grandezza in una *componente media* e in una *componente fluttuante*, in modo da confinare la non-stazionarietà (intrinseca nei fenomeni turbolenti) in quest'ultima, modellandola poi in maniera opportuna. Per la componente di velocità longitudinale si ha ad esempio:

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \quad (4.1)$$

dove  $\bar{u}$  indica la componente media, mentre  $u'$  quella fluttuante. Si applica quindi tale decomposizione (detta *decomposizione di Reynolds*) alle equazioni di Navier-Stokes.

Nel caso di flusso incomprimibile a proprietà costanti, le equazioni dello strato limite turbolento (in assenza di gradienti di pressione) risultano essere:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

Si vuole perciò trovare un modo per modellare il termine  $\overline{u'v'}$ : a tal fine si è scelto di utilizzare l'ipotesi di *viscosità turbolenta*. Tale ipotesi assume che il tensore degli sforzi di Reynolds (per unità di massa) sia allineato con il gradiente di velocità media:

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'^T} = -\nu_t \nabla \bar{\mathbf{u}} \quad (4.3)$$

che nella presente trattazione equivale a porre:

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.4)$$

Non rimane che scegliere un modello per la viscosità turbolenta  $\nu_t$ .

Si consideri uno dei modelli algebrici più diffusi, il modello della *mixing length* di Prandtl [7]. Questo assume che la viscosità turbolenta è data dal prodotto di una *lunghezza di mescolamento*  $l_m$  per una velocità caratteristica  $u^*$ ; come scala di velocità viene assunta la seguente:

$$u^* = \sqrt{|u'v'|} \quad (4.5)$$

Sostituendo si ottiene perciò:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (4.6)$$

Non rimane che definire la lunghezza di mescolamento:

$$l_m = \begin{cases} \kappa y \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right] & y < \frac{\lambda}{\kappa} \delta \\ \lambda \delta & y \geq \frac{\lambda}{\kappa} \delta \end{cases} \quad (4.7)$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A^+ \nu_w}{\sqrt{\tau_w \rho_w}} \\ \lambda &= 0.085 \\ \kappa &= 0.41 \quad \text{costante di Von Karman} \\ A^+ &= 26 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Questa modellazione di  $l_m$  si è osservato essere accurata in entrambi i casi di flusso incomprimibile e comprimibile [5].

Le equazioni di Prandtl per lo strato limite incomprimibile turbolento risultano essere perciò:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ l_m^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (4.9)$$

dove per alleggerire la notazione si è ommesso il simbolo di  $\overline{(\cdot)}$  per indicare le quantità medie.

Si osservi che è stato ommesso il modulo dal termine  $\frac{\partial u}{\partial y}$  poiché, essendo la lastra ferma, nel sistema di riferimento adottato esso è sempre positivo.

## 4.2 Soluzione equazioni di Prandtl

### 4.2.1 Impostazione del problema

Per quanto riguarda l'impostazione del problema, essa è la stessa già vista nel Capitolo 3. Discretizzando le equazioni (4.9) si ha:

$$\begin{cases} D_x(u_i) + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \\ u_i D_x(u_i) + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ l_m^2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (4.10)$$

dove la derivata lungo  $x$  è sempre discretizzata con uno schema del quarto ordine.

Il sistema (4.10) va completato con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(x_{inlet}, y) = u_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\ u_i(0) = v_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) = U_e & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

### 4.2.2 Riduzione a sistema del primo ordine

Si passa ora ad affrontare la questione della riduzione a sistema del primo ordine. Ancora una volta è necessario definire la variabile ausiliaria:

$$w_i(y) = w(x_i, y) = \nu \frac{du_i}{dy} \quad (4.12)$$

Dal sistema di equazioni (4.10) si passa al seguente sistema di ODE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_i}{dy} = u_i D_x(u_i) + \frac{w_i v_i}{\nu} - 2l_{m,i} \frac{dl_{m,i}}{dy} \left(\frac{w_i}{\nu}\right)^2 \left[1 + 2 \left(\frac{l_{m,i}^2 w_i}{\nu^2}\right)\right]^{-1} \\ \frac{du_i}{dy} = \frac{w_i}{\nu} \\ \frac{dv_i}{dy} = -D_x(u_i) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

e, con il solito schema alle differenze finite per la derivata lungo  $x$ :

$$D_x(u_i) = \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} \quad (4.14)$$

si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_i}{dy} = u_i \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} + \\ \frac{w_i v_i}{\nu} - 2l_{m,i} \frac{dl_{m,i}}{dy} \left(\frac{w_i}{\nu}\right)^2 \left[1 + 2 \left(\frac{l_{m,i}^2 w_i}{\nu^2}\right)\right]^{-1} \\ \frac{du_i}{dy} = \frac{w_i}{\nu} \\ \frac{dv_i}{dy} = -\frac{25}{12} \frac{u_i}{h_x} + 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} - 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} + \frac{4}{3} \frac{u_{i-3}}{h_x} - \frac{1}{4} \frac{u_{i-4}}{h_x} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

mentre le relative condizioni al contorno sono le stesse del caso laminare:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x_{inlet}, y) = u_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\ u_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) = U_e & \text{per } x > 0 \\ v_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

### 4.2.3 Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl

Anche in questo caso il problema può essere scritto nella seguente forma vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dy} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_i) \quad (4.17)$$

una volta che siano stati definiti  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_i)$ :

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} w_i \\ u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} u_i D_x(u_i) + \frac{w_i v_i}{\nu} - 2l_{m,i} \frac{dl_{m,i}}{dy} \left(\frac{w_i}{\nu}\right)^2 \left[1 + 2\left(\frac{l_{m,i}^2 w_i}{\nu^2}\right)\right]^{-1} \\ \frac{w_i}{\nu} \\ -\frac{25}{12} \frac{u_i}{h_x} + 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} - 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} + \frac{4}{3} \frac{u_{i-3}}{h_x} - \frac{1}{4} \frac{u_{i-4}}{h_x} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Le colonne della matrice Jacobiana del sistema sono:

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_i, y) = \begin{pmatrix} -\left[\frac{2\frac{l_m^2}{\nu^2}}{\left(1 + 2\frac{l_m^2 w}{\nu^2}\right)^2}\right] \left[u_i D_x(u_i) + \frac{v_i w_i}{\nu} - 2l_m \frac{dl_m}{dy} \left(\frac{w}{\nu}\right)^2\right] + \frac{\frac{v}{\nu} - 4l_m \frac{dl_m}{dy} \frac{w}{\nu^2}}{1 + 2\frac{l_m^2 w}{\nu^2}} \\ \frac{1}{\nu} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_i, y) = \begin{pmatrix} \left[1 + 2\left(\frac{l_m^2 w}{\nu^2}\right)\right]^{-1} (D_x(u_i) + \frac{25}{12h_x}) \\ 0 \\ -\frac{25}{12h_x} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{J}_3(\mathbf{q}_i, y) = \begin{pmatrix} \left(1 + 2\frac{l_m^2 w}{\nu^2}\right)^{-1} \frac{w_i}{\nu} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

mentre le condizioni al contorno si rappresentano nella seguente forma:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(y \rightarrow \infty)) = \begin{pmatrix} \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) - U_e \\ u_i(0) \\ v_i(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

Restano invariate le matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema; si ha ancora nell'estremo inferiore ( $y = 0$ ):

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}_i} \right|_{y=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

e in quello superiore ( $y \rightarrow \infty$ ):

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}_i} \right|_{y \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

### 4.3 Analisi e confronto dei risultati

Si riportano di seguito i risultati ottenuti da una simulazione effettuata con i seguenti parametri:

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$
100	300	0.5	2	20

Tabella 4.1: Dati simulazione

Nella Figura 4.1 sono riportati gli andamenti delle variabili  $w$ ,  $u$ ,  $v$  in funzione della quota  $y$ ; si può osservare che la componente  $v$  della velocità presenta delle oscillazioni in prossimità della parete: queste sono dovute alla necessità di soddisfare la condizione al contorno di perfetta adesione sulla stessa.

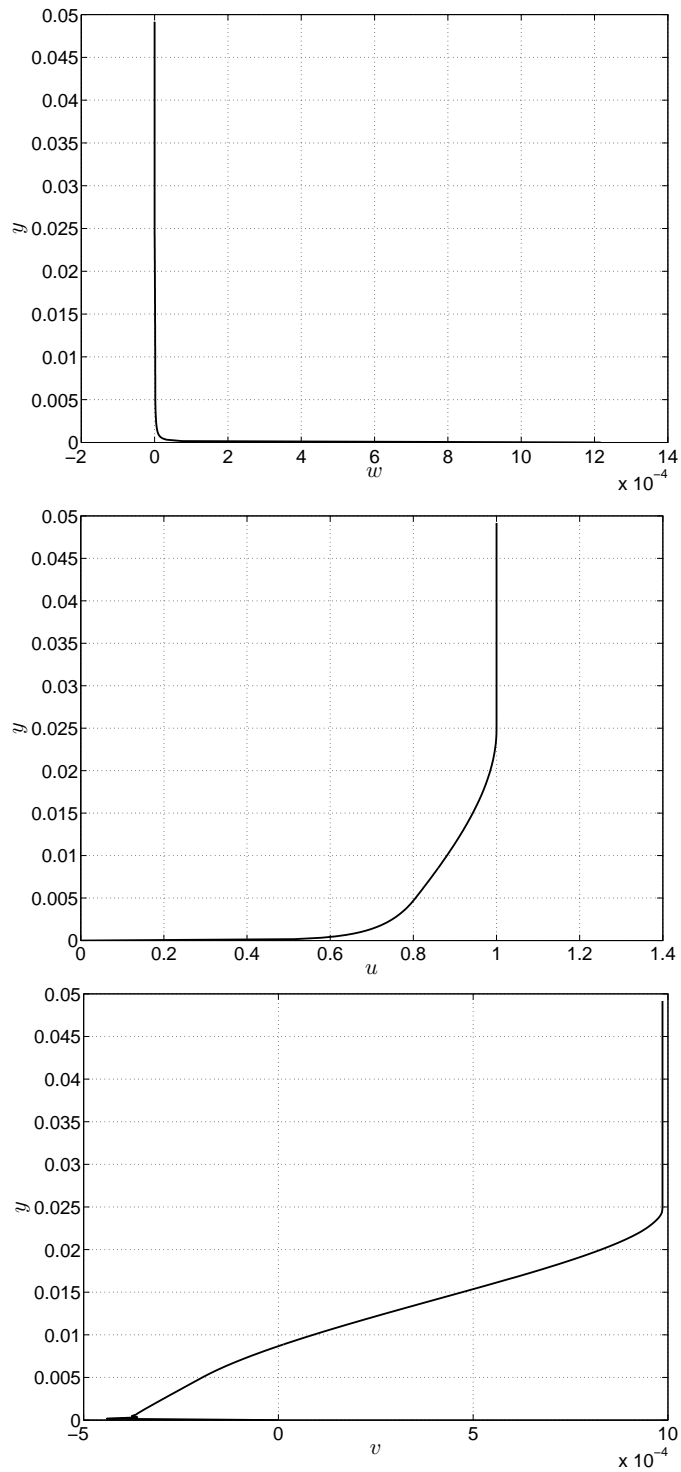


Figura 4.1: Andamenti di  $w(y)$ ,  $u(y)$ ,  $v(y)$ , ultima stazione

È necessario allontanarsi sufficientemente dai profili di ingresso affinché la soluzione si assesti: questo è dovuto al fatto che i profili di *inlet* per le prime stazioni sono quelli del caso laminare, mentre le equazioni sono scritte per un flusso turbolento (come si evince dalla Figura 4.2).

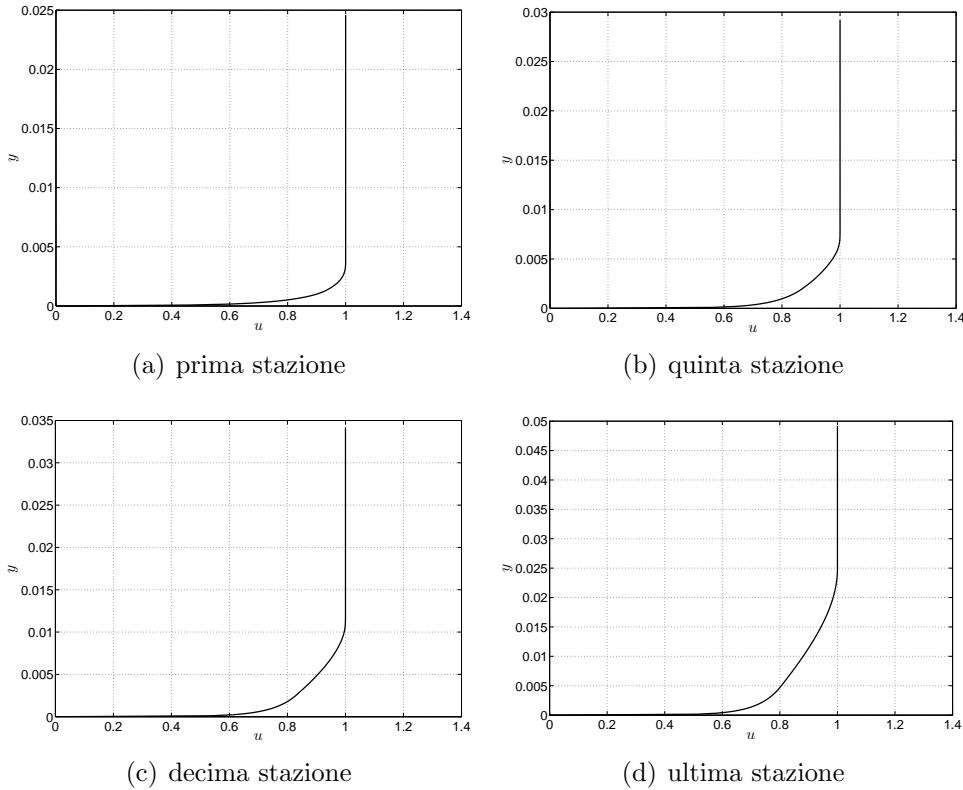


Figura 4.2: Evoluzione del profilo di velocità  $u(y)$

Per quanto riguarda il *coefficiente di attrito*, nel caso turbolento ovviamente non si ha a disposizione un risultato esatto. Il valore teorico di riferimento è stato calcolato mediante il *metodo della temperatura di riferimento* di *Meador-Smart* ([2], pag. 926).

Quest'ultimo è basato sull'idea di utilizzare le formule ottenute dalla teoria del flusso laminare, nelle quali le proprietà termodinamiche e di trasporto sono valutate ad una temperatura di riferimento, la quale è indicativa della temperatura presente all'interno dello strato limite.

Secondo Meador e Smart perciò si ha che:

$$c_{f,th} = \frac{0.02296}{(\text{Re}_x)^{0.139}} \tag{4.26}$$



In Figura 4.3 si ha il confronto con il valore calcolato a partire dalla soluzione delle equazioni di Prandtl, secondo la definizione (3.46), in funzione di una coordinata  $x$  adimensionalizzata con lo spessore dello strato limite nell'ultima stazione:

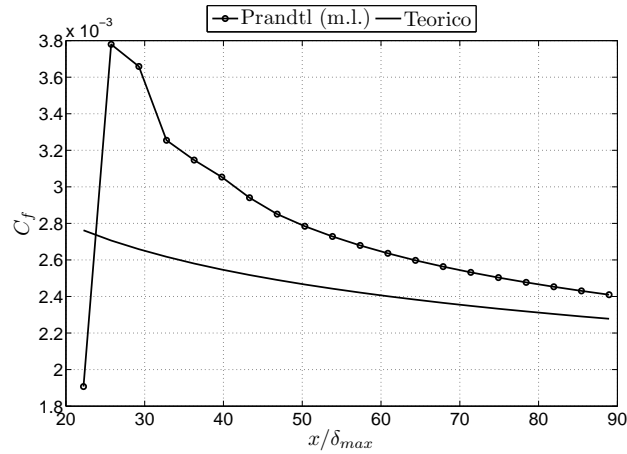


Figura 4.3: Confronto dei valori di  $c_f$

Si osservi che la forte differenza dei  $c_f$  nelle prime stazioni è dovuta al fatto che la corrente turbolenta non si è del tutto sviluppata; nonostante ciò i valori successivi tendono sempre più a quelli teorici. All'ultima stazione si commette un errore relativo di circa il 5%, risultato da ritenere buono se si considera la semplicità del modello di turbolenza utilizzato ed il fatto che la legge (4.26) è comunque un'approssimazione.

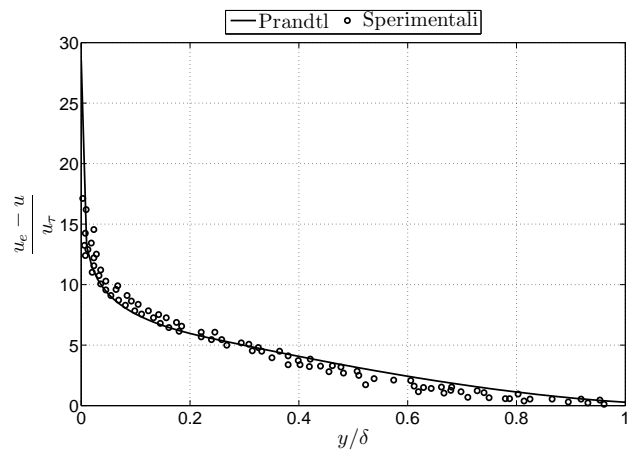


Figura 4.4: Confronto di  $u$  con i dati sperimentali

Si riporta infine in Figura 4.4 il confronto della velocità longitudinale  $u$  con i rilievi sperimentali [7]. Esso è espresso in termini di difetto di velocità rispetto a quella asintotica, ed è adimensionalizzato con la *velocità d'attrito*  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ . Il riscontro, nonostante il modello sia incomprimibile, risulta abbastanza buono.

## Parte II

# Strato limite comprimibile



## Capitolo 5

### Strato limite comprimibile laminare

#### 5.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite comprimibile laminare

In questo capitolo si affronterà il problema dello strato limite bidimensionale comprimibile su lastra piana posta in movimento facendo uso delle equazioni di Prandtl per un *gas ideale politropico* in assenza di gradienti di pressione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ P = \rho R T \end{array} \right. \quad (5.1)$$

con  $c_p = \text{cost}$  e  $c_v = \text{cost}$ .

Sostituendo la quinta equazione del sistema (5.1) nella terza, si ottiene un'unica equazione differenziale:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial y} R T + \rho R \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.2)$$

da cui:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} R T + \rho R \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (5.3)$$

Si ha pertanto un sistema di quattro equazioni differenziali nelle quattro incognite  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $T$ .

Le condizioni al contorno nel caso di lastra piana isoterma posta in movimento risultano:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_w & \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e & v(x, 0) = 0 \\ T(x, 0) = T_w & \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_e \end{cases} \quad (5.4)$$

dove  $T_w$  e  $u_w$  sono rispettivamente la temperatura e la velocità della lastra, mentre  $T_e$  e  $u_e$  sono la temperatura e la velocità della corrente esterna.

## 5.2 Soluzione similare

### 5.2.1 Funzione di corrente

Come avviene in molti problemi bidimensionali è utile introdurre la *funzione di corrente*  $\psi(x, y)$ , così definita:

$$\rho u = \rho_w \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \rho v = -\rho_w \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.5)$$

dove è puramente arbitraria la scelta di usare  $\rho_w$  nel lato destro delle equazioni.

Sostituendo le (5.5) nelle (5.1) si può immediatamente osservare che l'equazione di continuità è identicamente soddisfatta e pertanto non verrà considerata successivamente.

Si ricordi che una *linea*  $\psi(x, y) = \text{cost}$  è una *linea di corrente*.

### 5.2.2 Trasformazione di Dorodnitsyn-Howarth

Questa è la prima trasformazione che verrà applicata; tale trasformazione è in grado di rimuovere (quasi completamente) la densità  $\rho$  dalle equazioni riducendole essenzialmente ad una forma incomprimibile.

Si definisca la seguente variabile  $\bar{y}$ :

$$\bar{y} = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_w} dy \quad (5.6)$$

dove l'integrazione è effettuata ad  $x$  fissata.

Fisicamente,  $\rho_w \bar{y}$  è la massa di fluido presente nell'intervallo  $[0, y]$ , per unità di area di parete. Sostanzialmente si può interpretare  $\bar{y}$  come una *coordinata  $y$  dilatata*.

Le equazioni del momento della quantità di moto lungo  $x$  e dell'energia possono essere riscritte in termini di  $\psi(\bar{y}, x)$  e  $T(\bar{y}, x)$ .

Derivando la (5.6) si ottiene:

$$\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right)_x = \frac{\rho}{\rho_w} \quad (5.7)$$

Gli operatori di derivate parziali divengono:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x &= \frac{\rho}{\rho_w} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)_x \\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\bar{y}} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)_x \end{aligned} \quad (5.8)$$

D'ora in avanti verranno omessi i pedici delle derivate parziali, tenendo presente, ad esempio, che  $\frac{\partial}{\partial x}$  è l'espressione della derivata rispetto a  $x$  effettuata a  $\bar{y}$  costante.

Le componenti di velocità risultano:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \quad v = -\frac{\rho_w}{\rho} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + u \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)_y \right] \quad (5.9)$$

Quindi l'equazione del momento della quantità di moto lungo  $x$  e dell'energia divengono rispettivamente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \bar{y}} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\rho \mu}{\rho_w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{\rho \mu}{\rho_w^2 c_p} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\rho k}{\rho_w^2 c_p} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right) \quad (5.11)$$

e le condizioni al contorno (5.4) diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}(x, 0) = u_w & \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}(x, y) = u_e & \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = 0 \\ T(x, 0) = T_w & \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_e \end{cases} \quad (5.12)$$

### 5.2.3 Approssimazione per la viscosità e la conduttività termica

Si introduce a questo punto l'ipotesi che  $\rho \mu = \text{cost}$  e  $\rho k = \text{cost}$ ; questa approssimazione, di fatto molto usata nell'aerodinamica, corrisponde alla *legge di viscosità di Chapman-Rubensin* lineare [23] e si basa sul porre  $\mu \propto T$ :

$$\frac{\mu}{\mu_w} = \frac{T}{T_w} \quad (5.13)$$

dove  $\mu_w(T_w)$  è nota.

Se  $P = \text{cost}$ , la (5.13) si può riscrivere come:

$$\rho\mu = \rho_w\mu_w \quad (5.14)$$

che risulta essere appunto l'approssimazione ricercata.

Riguardo  $\rho k$ , se il numero di Prandtl  $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$  è in buona approssimazione indipendente dalla temperatura, essendo come detto in precedenza  $c_p = \text{cost}$ , allora:

$$\frac{\rho k}{c_p} = \frac{\rho\mu}{\text{Pr}} = \frac{\rho_w\mu_w}{\text{Pr}} = \text{cost} \quad (5.15)$$

Facendo uso delle espressioni approssimate (5.14) e (5.15), le equazioni della quantità di moto lungo  $x$  e dell'energia divengono infine:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}} \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial\bar{y}} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{y}^2} = \nu_w \frac{\partial^3\psi}{\partial\bar{y}^3} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial\bar{y}} = \frac{\nu_w}{c_p} \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{y}^2} \right)^2 + \frac{\nu_w}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial\bar{y}^2} \quad (5.17)$$

dove  $\nu_w = \frac{\mu_w}{\rho_w}$  è la *viscosità cinematica* a parete.

#### 5.2.4 Auto-similarità

Innanzitutto è possibile osservare che le equazioni (5.16) e (5.17) e le condizioni al contorno (5.12) sono esattamente nella forma che si è ottenuta in precedenza per un fluido incomprimibile a proprietà costanti; infatti il problema, per come è stato appena descritto, è identico al problema di Blasius per uno strato limite incomprimibile su una lastra piana eccetto per la prima condizione al contorno delle (5.12) che, nel caso particolare di Blasius, risulta essere  $u_w = 0$  (lastra ferma).

Si può inoltre notare che l'equazione della quantità di moto (5.16) è ora disaccoppiata dall'equazione dell'energia (5.17): la prima ha come unica incognita  $\psi$  e può pertanto essere risolta (con le opportune condizioni al contorno) indipendentemente dalla seconda.



In modo analogo a quanto fatto per il problema di Blasius, si ricerca la soluzione in termini di:

$$\eta \equiv \frac{\bar{y}}{\sqrt{\frac{2\nu_w x}{u_e}}} \quad (5.18)$$

$$f(\eta) \equiv \frac{\psi}{\sqrt{2u_e\nu_w x}} \quad (5.19)$$

La formulazione di similarità può essere testata verificando se le equazioni differenziali e le condizioni al contorno del problema sono puramente esprimibili in termini delle variabili di similarità.

A tal fine si definisce:

$$\hat{T}(\eta) \equiv \frac{T}{T_e} \quad (5.20)$$

che risulta essere uguale a  $\frac{T_w}{T_e}$  a parete e pari ad 1 in corrispondenza della corrente esterna.

Sostituendo a questo punto la (5.18) e la (5.19) nelle equazioni del moto (5.16) e (5.17) si ottiene:

$$f''' + ff'' = 0 \quad (5.21)$$

$$\hat{T}'' + (\text{Pr}) f\hat{T}' = -(\gamma - 1)(\text{Pr}) M^2 (f'')^2 \quad (5.22)$$

dove  $(\cdot)'$  indica la derivata rispetto ad  $\eta$ ,  $M = \frac{u_e}{c_e}$  e  $c_e = \sqrt{\gamma RT_e}$ .

Le equazioni differenziali sono perciò nella forma auto-similare.

Allo stesso modo, le condizioni al contorno (5.12) si riducono, per  $f(\eta)$  e  $\hat{T}(\eta)$ , a:

$$\begin{cases} f'(0) = \frac{u_w}{u_e} & \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 & f(0) = 0 \\ \hat{T}(0) = \frac{T_w}{T_e} & \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{T}(\eta) = 1 \end{cases} \quad (5.23)$$

La formulazione di similarità è pertanto valida.

L'equazione (5.21) è formalmente identica a quella trovata per il caso incomprimibile (problema di Blasius), anche se la condizione al contorno a parete è differente. Questa equazione, una volta risolta, fornisce  $f$ ; solo dopo sarà possibile risolvere l'equazione (lineare) dell'energia (in quanto dipende da  $f$ ).

### 5.2.5 Profili di velocità e temperatura

Le componenti di velocità sono, dalle (5.9), (5.18) e (5.19):

$$\begin{cases} u = u_e f'(\eta) \\ v = -u_e \frac{\rho_w}{\rho} \sqrt{\frac{\nu_w}{2u_e x}} \left[ f + 2x f' \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_y \right] \end{cases} \quad (5.24)$$

Per ricavare un profilo di velocità o di temperatura in funzione della quota  $y$ , è necessario trovare come  $y$  varia con  $\eta$ . Dalle definizioni (5.6) e (5.18) si ha:

$$\sqrt{\frac{2\nu_w x}{u_e}} \eta = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_w} dy \quad (5.25)$$

Differenziando:

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\nu_w x}{u_e}}} \frac{\rho}{\rho_w} \quad (5.26)$$

con  $dy = \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_x d\eta$  a  $x$  costante,

$$y = \int_0^\eta \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_x d\eta = \sqrt{\frac{2\nu_w x}{u_e}} \int_0^\eta \frac{\rho_w}{\rho} d\eta \quad (5.27)$$

Infine, essendo  $\frac{\rho_w}{\rho} = \frac{T}{T_w} = \frac{T}{T_e}$ , si ottiene:

$$\frac{y}{\sqrt{\frac{2\nu_w x}{u_e}}} = \frac{T_e}{T_w} \int_0^\eta \tilde{T} d\eta \quad (5.28)$$

dove l'integrale è noto una volta nota la soluzione  $\tilde{T}(\eta)$ .

L'approssimazione di parete isoterma non è esattamente riproducibile in laboratorio, dato che necessariamente viene a crearsi un flusso di calore a parete. Degli studi, però, mostrano che l'incremento di temperatura della parete è molto ridotto, in genere minore dell' 1% [19].

## 5.3 Riduzione a sistemi del primo ordine

Come visto in precedenza, per risolvere le equazioni (5.21) e (5.22) è necessario ridurre gli ordini dei due problemi.

L'equazione (5.21) non è nient'altro che l'equazione di Blasius scritta in funzione di una variabile simile differente e con condizioni al contorno

differenti. Introducendo perciò le variabili ausiliarie  $u = f'$  e  $\zeta = u' = f''$ , il problema simile per la velocità si può riscrivere come:

$$\begin{cases} \zeta' = -\zeta f \\ u' = \zeta \\ f' = u \end{cases} \quad (5.29)$$

con le relative condizioni al contorno:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ u(0) = \frac{u_w}{u_e} \\ u(\infty) = 1 \end{cases} \quad (5.30)$$

Per ridurre l'ordine del problema per la temperatura si introduce la variabile ausiliaria  $\xi = \hat{T}'$ :

$$\begin{cases} \xi' = -(\text{Pr}) f \xi - (\gamma - 1) (\text{Pr}) M^2 (f'')^2 \\ \hat{T}' = \xi \end{cases} \quad (5.31)$$

Le relative condizioni al contorno risultano:

$$\begin{cases} \hat{T}(0) = \frac{T_w}{T_e} \\ \hat{T}(\infty) = 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

### 5.3.1 Soluzione numerica del problema simile per la velocità

Per risolvere numericamente il sistema (5.29) corredato dalle condizioni al contorno (5.30) si introduce la usuale notazione vettoriale:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \zeta \\ u \\ f \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -\zeta f \\ \zeta \\ u \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

In forma compatta si ha perciò:

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (5.35)$$

Lo Jacobiano del sistema così definito risulta:

$$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -f & 0 & -\zeta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

e le relative condizioni al contorno:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(\eta_{max})) = \begin{pmatrix} u(\eta_{max}) - 1 \\ u(0) - \frac{u_w}{u_e} \\ f(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.37)$$

dove  $\eta_{max}$  indica l'estremo superiore della griglia di calcolo.

Si riportano infine di seguito le matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=\eta_{max}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Risolviendo con una griglia di 100 nodi equispaziati sino ad  $\eta = 6.3$  con una rapporto di velocità  $\frac{u_w}{u_e} = 0$  e confrontando i dati da noi ottenuti con i risultati ottenuti da Mirels [17] si ottiene un'ottima sovrapposizione dei risultati, come mostrato nelle Figure 5.1, 5.2, 5.3.

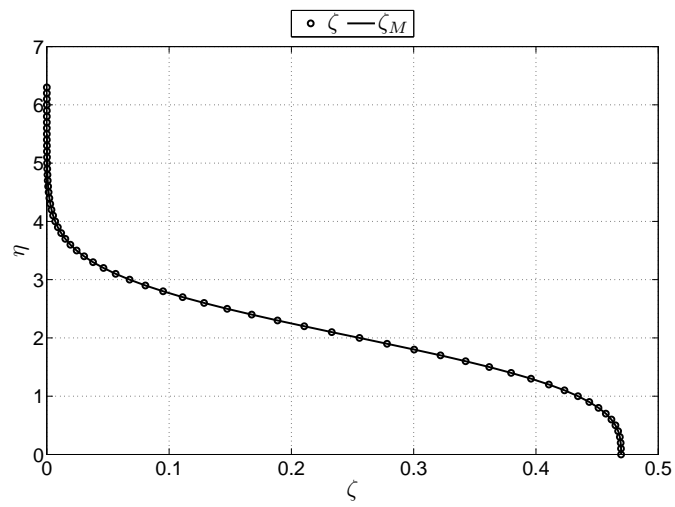


Figura 5.1: Soluzione problema della velocità, variabile  $\zeta$

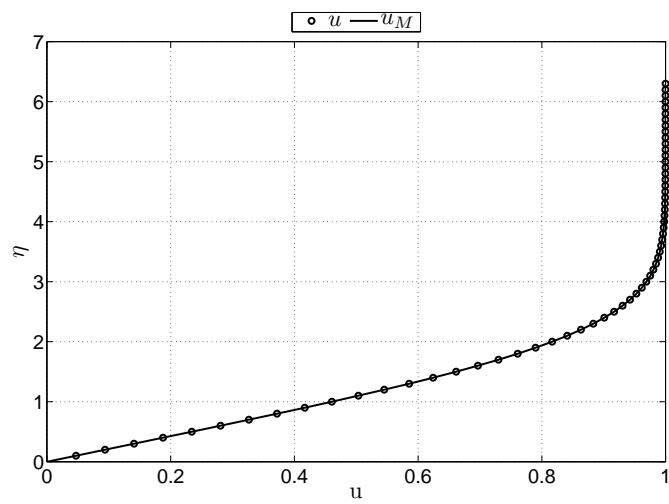


Figura 5.2: Soluzione problema della velocità, variabile  $u$

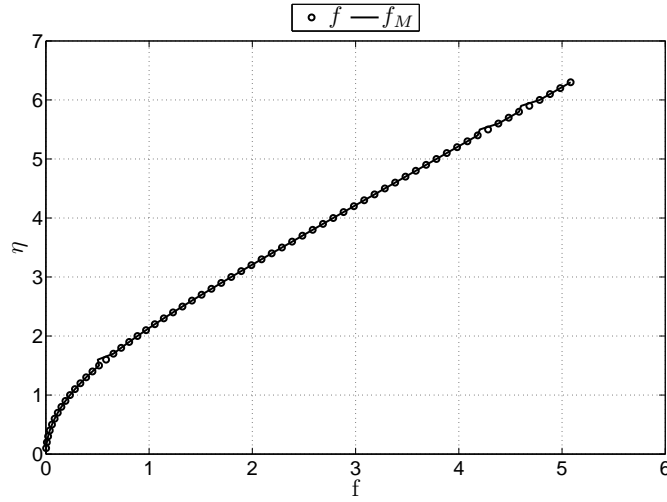


Figura 5.3: Soluzione problema della velocità, variabile  $f$

### 5.3.2 Soluzione numerica del problema simile per la temperatura

Una volta che sia stata calcolata  $f$  si può passare alla risoluzione del sistema (5.31) con le relative condizioni al contorno (5.32), che in notazione vettoriale assume la seguente forma:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \xi \\ \hat{T} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -(\text{Pr}) f \xi - (\gamma - 1) (\text{Pr}) M^2 (f'')^2 \\ \xi \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (5.42)$$

Lo Jacobiano per questo problema è così definito:

$$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -(\text{Pr}) f & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

e le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(\eta_{max})) = \begin{pmatrix} \hat{T}(\eta_{max}) - 1 \\ \hat{T}(0) - \frac{T_w}{T_e} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.44)$$

Le matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema risultano:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=\eta_{max}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Risolvendo con una griglia di 100 nodi equispaziati sino ad  $\eta = 6.3$  con una rapporto di temperature  $\frac{T_w}{T_e} = 0.347$  e confrontando i dati da noi ottenuti con i risultati ottenuti da Mirels [17] si ottiene anche per questo problema un'ottima sovrapposizione dei risultati (Figura 5.4).

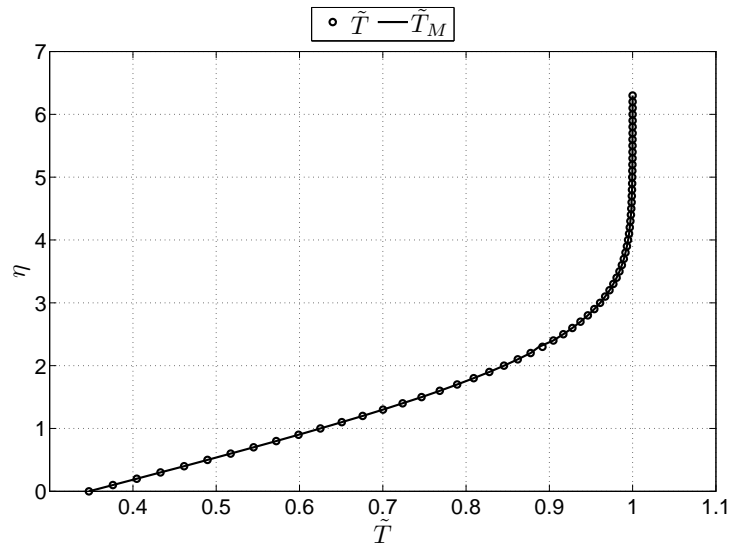


Figura 5.4: Soluzione problema della temperatura, variabile  $\hat{T}$

## 5.4 Soluzione equazioni di Prandtl

### 5.4.1 Impostazione del problema

L'impostazione del problema rimane ovviamente la stessa vista nel Capitolo 3. Per quanto visto in precedenza, in particolare facendo riferimento alle equazioni (5.13) e (5.15), è possibile esprimere:

$$\begin{aligned}\mu &= C_\mu T \\ k &= C_k T\end{aligned}\tag{5.47}$$

e quindi la discretizzazione delle equazioni (5.1) porta a:

$$\left\{\begin{aligned}D_x(\rho_i u_i) + \frac{d\rho_i v_i}{dy} &= 0 \\ \rho_i \left( u_i D_x(u_i) + v_i \frac{du_i}{dy} \right) &= C_\mu \frac{d}{dy} \left( T_i \frac{du_i}{dy} \right) \\ \frac{d\rho_i}{dy} T_i + \rho_i \frac{dT_i}{dy} &= 0 \\ \rho_i c_p \left( u_i D_x(T_i) + v_i \frac{dT_i}{dy} \right) &= \mu_i \left( \frac{du_i}{dy} \right)^2 + C_k \frac{d}{dy} \left( T_i \frac{dT_i}{dy} \right)\end{aligned}\right.\tag{5.48}$$

dove le derivate lungo  $x$  vengono sempre discretizzate con il solito schema del quarto ordine all'indietro.

### 5.4.2 Riduzione a sistema del primo ordine

Per risolvere il sistema (5.48) è necessario passare ad un sistema di ODE del primo ordine.

A tal fine si definiscono le due variabili ausiliarie:

$$\begin{aligned}w_i &= \nu_i \frac{du_i}{dy} = \frac{C_\mu T_i}{\rho_i} \frac{du_i}{dy} \\ z_i &= -k_i \frac{dT_i}{dy} = -C_k T_i \frac{dT_i}{dy}\end{aligned}\tag{5.49}$$

E quindi il sistema di equazioni può essere scritto nel seguente modo:



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dw_i}{dy} = u_i \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} + \frac{\rho_i v_i w_i}{C_\mu T_i} - \frac{w_i z_i}{C_k T_i^2} \\
 \frac{du_i}{dy} = \frac{w_i \rho_i}{C_\mu T_i} \\
 \frac{dT_i}{dy} = -\frac{z_i}{C_k T_i} \\
 \frac{dz_i}{dy} = \frac{w_i^2 \rho_i^2}{C_\mu T_i} - \rho_i c_p u_i \frac{\frac{25}{12}T_i - 4T_{i-1} + 3T_{i-2} - \frac{4}{3}T_{i-3} + \frac{1}{4}T_{i-4}}{h_x} + \rho_i c_p \frac{v_i z_i}{C_k T_i} \\
 \frac{d\rho_i}{dy} = \frac{\rho_i z_i}{C_k T_i^2} \\
 \frac{dv_i}{dy} = -\frac{v_i z_i}{C_k T_i^2} - \frac{1}{\rho_i} \frac{\frac{25}{12}\rho_i u_i - 4\rho_{i-1}u_{i-1} + 3\rho_{i-2}u_{i-2} - \frac{4}{3}\rho_{i-3}u_{i-3} + \frac{1}{4}\rho_{i-4}u_{i-4}}{h_x}
 \end{array} \right. \quad (5.50)$$

con le relative condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u(x_{inlet}, y) = u_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\
 T(x_{inlet}, y) = T_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\
 \rho(x_{inlet}, y) = \frac{P}{RT_{inlet}(y)} & \text{per } y > 0 \\
 u_i(0) = u_w & \text{per } x > 0 \\
 \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) = U_e & \text{per } x > 0 \\
 v_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \\
 T_i(0) = T_w & \text{per } x > 0 \\
 \lim_{y \rightarrow \infty} T_i(y) = T_e & \text{per } x > 0 \\
 \rho_i(0) = \frac{P}{RT_w} & \text{per } x > 0
 \end{array} \right. \quad (5.51)$$

### 5.4.3 Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl

Il problema può essere facilmente scritto nella seguente forma vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dy} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_i) \quad (5.52)$$

una volta che siano stati definiti  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_i)$ :

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} w_i \\ u_i \\ T_i \\ z_i \\ \rho_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} u_i \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} + \frac{\rho_i v_i w_i}{C_\mu T_i} - \frac{w_i z_i}{C_k T_i^2} \\ \frac{w_i \rho_i}{C_\mu T_i} \\ -\frac{z_i}{C_k T_i} \\ \frac{w_i^2 \rho_i^2}{C_\mu T_i} - \rho_i c_p u_i \frac{\frac{25}{12}T_i - 4T_{i-1} + 3T_{i-2} - \frac{4}{3}T_{i-3} + \frac{1}{4}T_{i-4}}{h_x} + \rho_i c_p \frac{v_i z_i}{C_k T_i} \\ \frac{\rho_i z_i}{C_k T_i^2} \\ -\frac{v_i z_i}{C_k T_i^2} - \frac{1}{\rho_i} \frac{\frac{25}{12}\rho_i u_i - 4\rho_{i-1}u_{i-1} + 3\rho_{i-2}u_{i-2} - \frac{4}{3}\rho_{i-3}u_{i-3} + \frac{1}{4}\rho_{i-4}u_{i-4}}{h_x} \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Le colonne della matrice Jacobiana del sistema sono:

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_i v_i}{C_\mu T_i} - \frac{z_i}{C_k T_i^2} \\ \frac{\rho_i}{C_\mu T_i} \\ 0 \\ 2 \frac{w_i \rho_i^2}{C_\mu T_i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{25}{12}u_i - 4u_{i-1} + 3u_{i-2} - \frac{4}{3}u_{i-3} + \frac{1}{4}u_{i-4}}{h_x} + u_i \frac{25}{12h_x} \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_i c_p \frac{\frac{25}{12}T_i - 4T_{i-1} + 3T_{i-2} - \frac{4}{3}T_{i-3} + \frac{1}{4}T_{i-4}}{h_x} \\ 0 \\ -\frac{25}{12h_x} \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{J}_3(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_i v_i w_i}{C_\mu T_i^2} + 2 \frac{w_i z_i}{C_k T_i^3} \\ -\frac{w_i \rho_i}{C_\mu T_i^2} \\ \frac{z_i}{C_k T_i^2} \\ -\frac{w_i^2 \rho_i^2}{C_\mu T_i^2} - \rho_i c_p u_i \frac{25}{12h_x} - \rho_i c_p \frac{v_i z_i}{C_k T_i^2} \\ -2 \frac{\rho_i z_i}{C_k T_i^3} \\ 2 \frac{v_i z_i}{C_k T_i^3} \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{J}_4(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} -\frac{w_i}{C_k T_i^2} \\ 0 \\ -\frac{1}{C_k T_i} \\ \rho_i c_p \frac{v_i}{C_k T_i} \\ \frac{\rho_i}{C_k T_i^2} \\ -\frac{v_i}{C_k T_i^2} \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

$$\mathbf{J}_5(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} \frac{v_i w_i}{C_\mu T_i} \\ \frac{w_i}{C_\mu T_i} \\ 0 \\ 2 \frac{w_i^2 \rho_i}{C_\mu T_i} - c_p u_i \frac{\frac{25}{12} T_i - 4 T_{i-1} + 3 T_{i-2} - \frac{4}{3} T_{i-3} + \frac{1}{4} T_{i-4}}{h_x} + c_p \frac{v_i z_i}{C_k T_i} \\ \frac{z_i}{C_k T_i^2} \\ \frac{1}{\rho_i^2} \frac{\frac{25}{12} \rho_i u_i - 4 \rho_{i-1} u_{i-1} + 3 \rho_{i-2} u_{i-2} - \frac{4}{3} \rho_{i-3} u_{i-3} + \frac{1}{4} \rho_{i-4} u_{i-4}}{h_x} - \frac{25}{12 h_x} \frac{u_i}{\rho_i} \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

$$\mathbf{J}_6(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_i w_i}{C_\mu T_i} \\ 0 \\ 0 \\ \rho_i c_p \frac{z_i}{C_k T_i} \\ 0 \\ -\frac{z_i}{C_k T_i^2} \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Le condizioni al contorno si rappresentano nella seguente forma:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(y \rightarrow \infty)) = \begin{pmatrix} u_i(0) - u_w \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) - U_e \\ v_i(0) \\ T_i(0) - T_w \\ \lim_{y \rightarrow \infty} T_i(y) - U_e \\ \rho_i(0) - \frac{P}{RT_w} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

Si definiscono inoltre le matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema; nell'estremo inferiore ( $y = 0$ ) si ha:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{dq_i} \right|_{y=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

mentre in quello superiore ( $y \rightarrow \infty$ ):

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{dq_i} \right|_{y \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Come guess iniziale per il calcolo iterativo si fornisce, anche in questo caso, la soluzione similare opportunamente riscalata.

## 5.5 Analisi e confronto dei risultati

Si mostrano i confronti tra gli andamenti ottenuti risolvendo le equazioni di Prandtl e quelli ottenuti risolvendo i problemi similari visti in precedenza; in particolare, le due simulazioni si riferiscono alle seguenti condizioni:

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$	$u_w/u_e$	$T_w/T_e$
10	100	1.1	2	10	0	1.388

Tabella 5.1: Dati simulazione 1

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$	$u_w/u_e$	$T_w/T_e$
10	100	1.1	2	10	2.667	0.5926

Tabella 5.2: Dati simulazione 2

La simulazione 1 è stata effettuata imponendo semplicemente  $T_w = 400K$  e  $T_e = 288.15K$ , mentre la simulazione 2 è stata effettuata imponendo la presenza di un'onda d'urto con condizioni a monte di  $M = 2$ ,  $T = 288.15K$  e  $P = 101325Pa$  e temperatura della parete pari a  $T_w = 288.15K$ . Tutto questo in previsione del calcolo dell'attenuazione dell'onda d'urto che verrà presentato nel Capitolo 7.

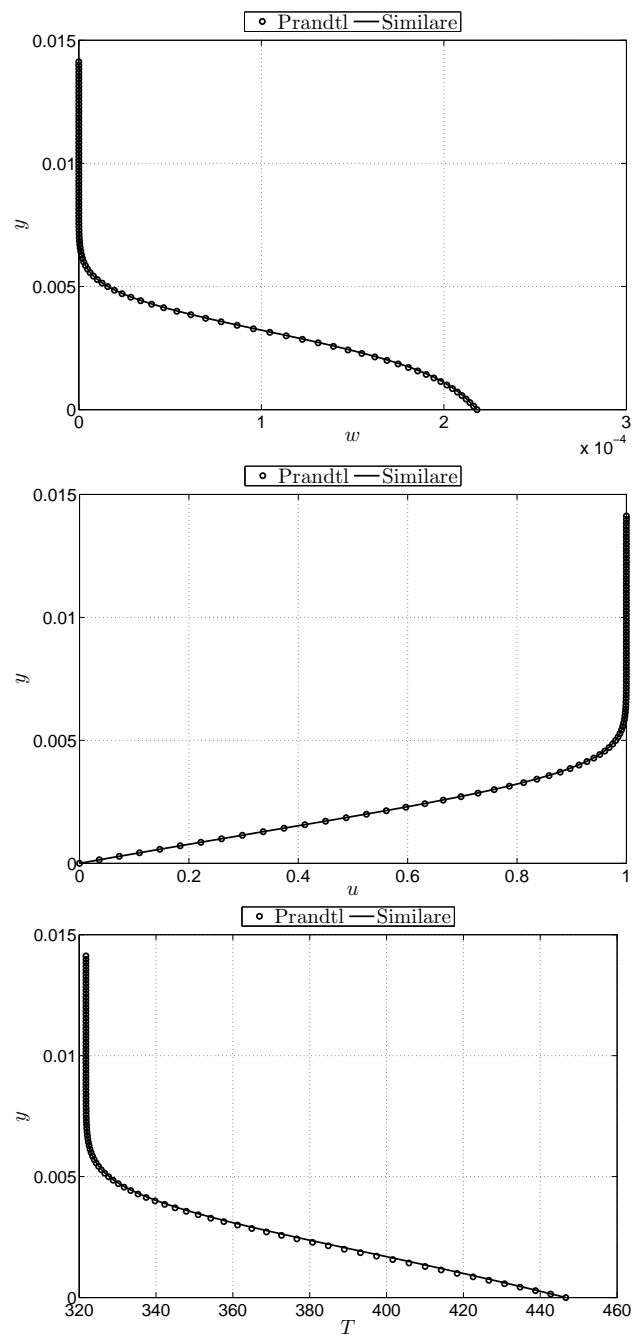


Figura 5.5: Confronto di  $w(y)$ ,  $u(y)$ ,  $T(y)$ , ultima stazione, simulazione 1

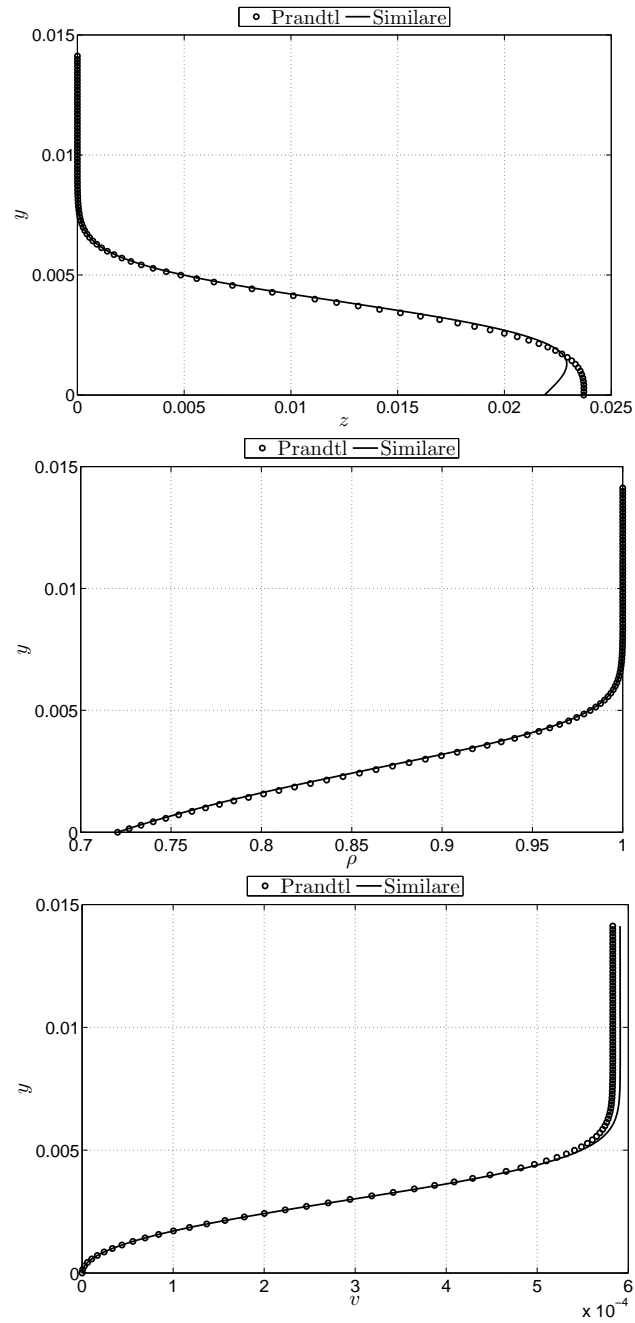


Figura 5.6: Confronto di  $z(y)$ ,  $\rho(y)$ ,  $v(y)$ , ultima stazione, simulazione 1

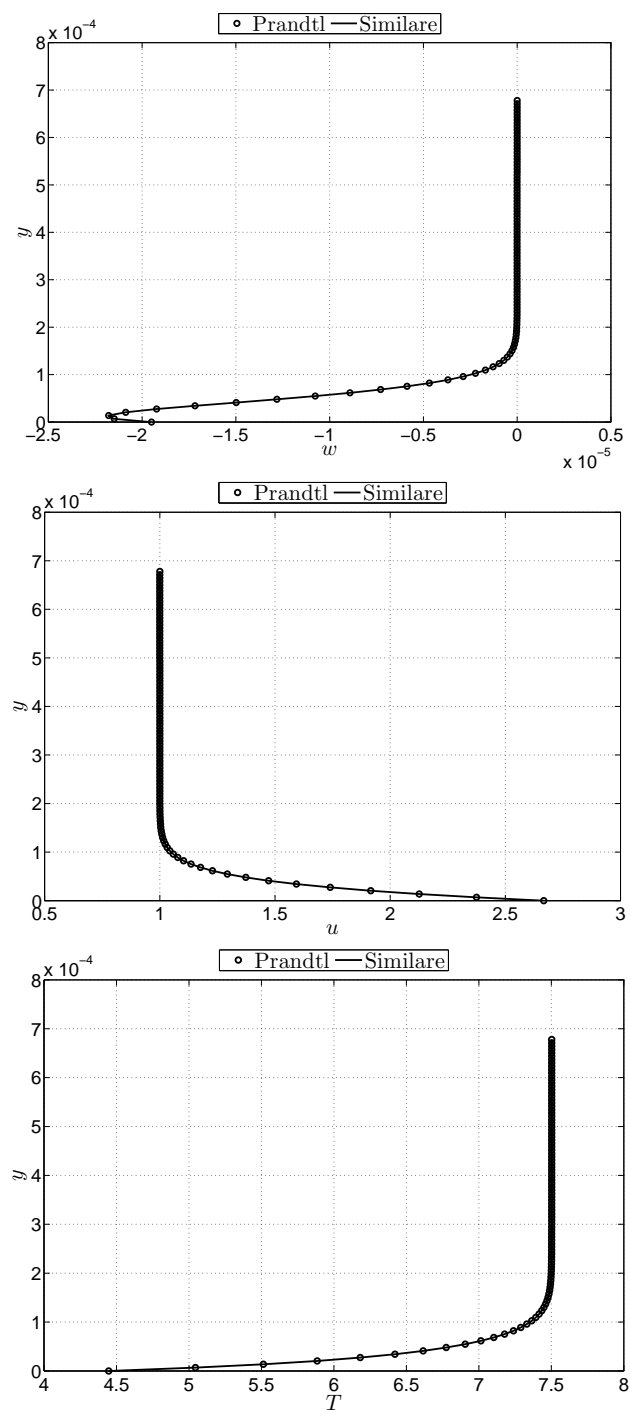


Figura 5.7: Confronto di  $w(y)$ ,  $u(y)$ ,  $T(y)$ , ultima stazione, simulazione 2



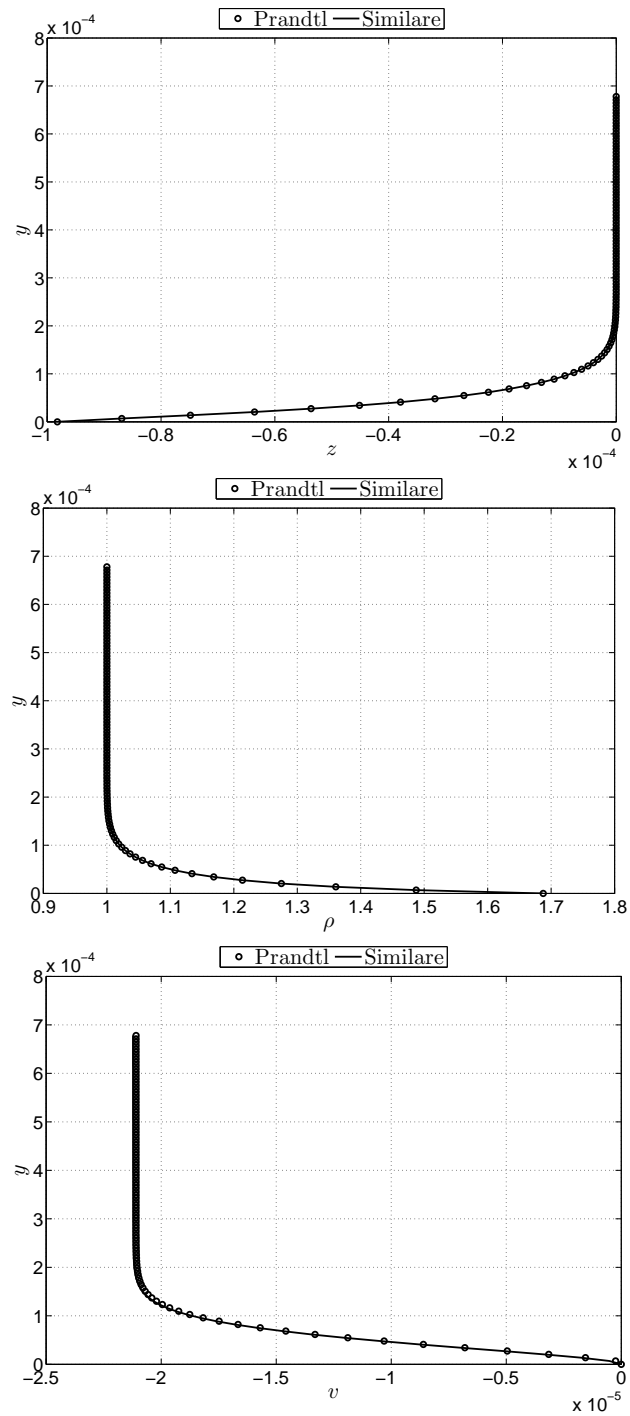


Figura 5.8: Confronto di  $z(y)$ ,  $\rho(y)$ ,  $v(y)$ , ultima stazione, simulazione 2

I risultati ottenuti sono ottimi, eccetto per le variabili  $z$  e  $v$  nella simulazione 1.

É possibile infatti osservare in Figura 5.6 che la variabile  $z$  si discosta dal valore della soluzione simile in prossimità della parete: questo problema numerico non presenta miglioramenti nè infittendo la griglia lungo  $x$  nè lungo  $y$ .

Riguardo la variabile  $v$  si nota invece una lieve differenza del valore asintotico, ovvero in corrispondenza dell'estremo superiore dello strato limite: si ha tuttavia un miglioramento proseguendo il calcolo nelle stazioni successive, come si denota dalle Figure 5.9 e 5.10.

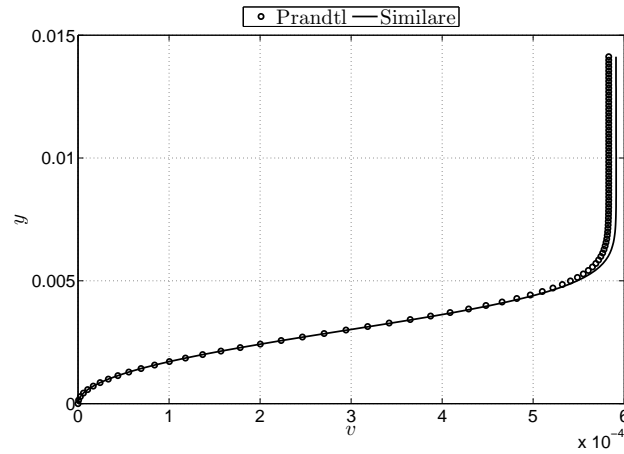


Figura 5.9: Variable  $v$  in  $x_b = 2$

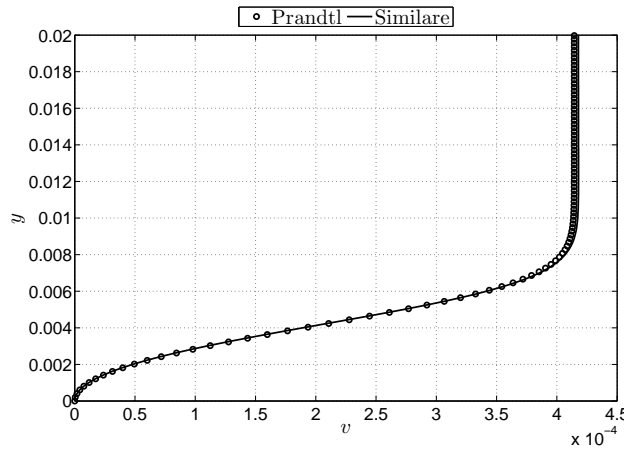


Figura 5.10: Variable  $v$  in  $x_b = 4$

## Capitolo 6

### Strato limite comprimibile turbolento

#### 6.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite comprimibile turbolento

In modo analogo a quanto visto nel Capitolo 4, si applica la decomposizione di Reynolds alle equazioni di Navier-Stokes, applicando però la *media di Favre*. Nel caso di flusso comprimibile le equazioni dello strato limite turbolento (in assenza di gradienti di pressione) risultano essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = 0 \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \tau - \dot{q}) \\ \bar{P} = \bar{\rho} R \bar{T} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{v} &= \bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'} \\ \tau &= \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} \\ \dot{q} &= -\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \overline{\rho v' h'} \\ \bar{H} &= \bar{h} + \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \approx \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \\ \bar{h} &= c_p \bar{T} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Le relative condizioni al contorno sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, 0) = \bar{v}(x, 0) = 0 \\ \bar{T}(x, 0) = T_{wall} \\ \bar{u}(x, \infty) = U_e \\ \bar{T}(x, \infty) = T_e \end{array} \right. \quad (6.3)$$

La prima ipotesi semplificativa che viene effettuata consiste nel trascurare le perturbazioni della densità in quanto risultano molto piccole rispetto al valore medio [7].

Come visto nel caso incomprimibile è possibile scrivere:

$$-\bar{\rho} \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6.4)$$

Analogamente è possibile scrivere anche:

$$\bar{\rho} c_p \overline{v'T'} = -k_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (6.5)$$

L'estensione della mixing length applicata al caso comprimibile è:

$$\begin{aligned} -\bar{\rho} \overline{u'v'} &= \bar{\rho} l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \bar{\rho} c_p \overline{v'T'} &= -\frac{\bar{\rho} c_p}{Pr_t} l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.6)$$

dove la modellazione per la lunghezza di mescolamento è la medesima vista al Capitolo 4. Per quanto riguarda il numero di Prandtl turbolento  $Pr_t$  lo si assume costante e pari a 0.89 [7].

Utilizzando per la viscosità dinamica e per la diffusività termica le relazioni (5.47), le equazioni di Prandtl per lo strato limite comprimibile turbolento risultano essere perciò:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{d\rho v}{dy} = 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left[ C_\mu T \frac{du}{dy} + \rho l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \right] \\ T \frac{d\rho}{dy} + \rho \frac{dT}{dy} = 0 \\ \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left( c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) + \rho v \frac{d}{dy} \left( c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) = \\ \frac{d}{dy} \left[ \left( u C_\mu T + u \rho l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \right) \frac{du}{dy} + \left( C_k T + \frac{\rho c_p l_m^2}{\text{Pr}_t} \left| \frac{du}{dy} \right| \right) \frac{dT}{dy} \right] \end{array} \right. \quad (6.7)$$

dove per alleggerire la notazione si è ommesso il simbolo di  $(\bar{\cdot})$  per indicare le quantità medie.

## 6.2 Soluzione equazioni di Prandtl

### 6.2.1 Impostazione del problema

Discretizzando le equazioni (6.7) si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x(\rho_i u_i) + \frac{d\rho_i v_i}{dy} = 0 \\ \rho_i u_i D_x(u_i) + \rho_i v_i \frac{du_i}{dy} = \frac{d}{dy} \left[ C_\mu T_i \frac{du_i}{dy} + \rho_i l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{du_i}{dy} \right] \\ T_i \frac{d\rho_i}{dy} + \rho_i \frac{dT_i}{dy} = 0 \\ \rho_i u_i D_x \left( c_p T_i + \frac{1}{2} u_i^2 \right) + \rho_i v_i \frac{d}{dy} \left( c_p T_i + \frac{1}{2} u_i^2 \right) = \\ \frac{d}{dy} \left[ \left( u_i C_\mu T_i + u_i \rho_i l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \right) \frac{du_i}{dy} + \left( C_k T_i + \frac{\rho_i c_p l_m^2}{\text{Pr}_t} \left| \frac{du_i}{dy} \right| \right) \frac{dT_i}{dy} \right] \end{array} \right. \quad (6.8)$$

dove le derivate lungo  $x$  vengono sempre discretizzate con il solito schema del quarto ordine all'indietro.

### 6.2.2 Riduzione a sistema del primo ordine

Per risolvere il sistema (6.8) è necessario passare ad un sistema di ODE del primo ordine.

A tal fine, come fatto in precedenza, si definiscono le due variabili ausiliarie:

$$\begin{aligned}
 w_i &= \nu_i \frac{du_i}{dy} = \frac{C_\mu T_i}{\rho_i} \frac{du_i}{dy} \\
 z_i &= -k_i \frac{dT_i}{dy} = -C_k T_i \frac{dT_i}{dy}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

e quindi il sistema di equazioni può essere scritto nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{du_i}{dy} &= \frac{\rho_i w_i}{C_\mu T_i} \\
 \frac{dT_i}{dy} &= -\frac{z_i}{C_k T_i} \\
 \frac{d\rho_i}{dy} &= \frac{\rho_i z_i}{C_k T_i^2} \\
 \frac{dv_i}{dy} &= \frac{1}{\rho_i} \left[ D_x(\rho_i u_i) + v_i \frac{d\rho_i}{dy} \right] \\
 \frac{dw_i}{dy} &= \left( \rho_i + 2\rho_i l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{\rho_i}{C_\mu T_i} \right)^{-1} \left[ \rho_i u_i D_x(u_i) + \rho_i v_i \frac{du_i}{dy} - w_i \frac{d\rho_i}{dy} - \frac{d\rho_i}{dy} l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{du_i}{dy} + \right. \\
 &\quad \left. - 2\rho_i l_m \frac{dl_m}{dy} \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{du_i}{dy} - 2\rho_i l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \left( \frac{w_i}{C_\mu T_i} \frac{d\rho_i}{dy} - \frac{\rho_i w_i}{C_\mu T_i^2} \frac{dT_i}{dy} \right) \right] \\
 \frac{dz_i}{dy} &= \left( 1 + \frac{\rho_i c_p l_m^2}{Pr_t} \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{1}{C_k T_i} \right)^{-1} \left[ -\rho_i u_i D_x(H_i) - \rho_i v_i \frac{dH_i}{dy} + u_i \frac{d\tau_i}{dy} + \tau_i \frac{du_i}{dy} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{c_p}{Pr_t} \frac{d\rho_i}{dy} l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{dT_i}{dy} + 2 \frac{\rho_i c_p}{Pr_t} l_m \frac{dl_m}{dy} \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{dT_i}{dy} + \frac{\rho_i c_p}{Pr_t} l_m^2 \frac{d}{dy} \left( \left| \frac{du_i}{dy} \right| \right) \frac{dT_i}{dy} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\rho_i c_p}{Pr_t} l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{z_i}{C_k T_i^2} \frac{dT_i}{dy} \right]
 \end{aligned} \right. \tag{6.10}$$

dove:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dH_i}{dy} &= c_p \frac{dT_i}{dy} + u_i \frac{du_i}{dy} \\
 \frac{d\tau_i}{dy} &= \rho_i u_i D_x(u_i) + \rho_i v_i \frac{du_i}{dy} \\
 \frac{d^2 u_i}{dy^2} &= \frac{\rho_i}{C_\mu T_i} \frac{dw_i}{dy} + \frac{w_i}{C_\mu T_i} \frac{d\rho_i}{dy} - \frac{\rho_i w_i}{C_\mu T_i^2} \frac{dT_i}{dy}
 \end{aligned} \right. \tag{6.11}$$

con le relative condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x_{inlet}, y) = u_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\ T(x_{inlet}, y) = T_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\ \rho(x_{inlet}, y) = \frac{P}{RT_{inlet}(y)} & \text{per } y > 0 \\ u_i(0) = u_w & \text{per } x > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) = U_e & \text{per } x > 0 \\ v_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \\ T_i(0) = T_w & \text{per } x > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} T_i(y) = T_e & \text{per } x > 0 \\ \rho_i(0) = \frac{P}{RT_w} & \text{per } x > 0 \end{array} \right. \quad (6.12)$$

### 6.2.3 Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl

Anche in questo caso il problema può essere scritto nella forma vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dy} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_i) \quad (6.13)$$

una volta che siano stati definiti  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_i)$  (dove le derivate rispetto ad  $x$  sono da intendersi discrete, e quelle rispetto ad  $y$  corrispondono alle definizioni date dalle equazioni (6.10) e (6.11)):

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} w_i \\ u_i \\ T_i \\ z_i \\ \rho_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_i) = \left( \begin{array}{c} \left( \rho_i + 2\rho_i l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{\rho_i}{C_\mu T_i} \right)^{-1} \left[ \rho_i u_i D_x(u_i) + \rho_i v_i \frac{du_i}{dy} - w_i \frac{d\rho_i}{dy} - \frac{d\rho_i}{dy} l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{du_i}{dy} + \right. \\ \left. - 2\rho_i l_m \frac{dl_m}{dy} \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{du_i}{dy} - 2\rho_i l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \left( \frac{w_i}{C_\mu T_i} \frac{d\rho_i}{dy} - \frac{\rho_i w_i}{C_\mu T_i^2} \frac{dT_i}{dy} \right) \right] \\ \hline \frac{\rho_i w_i}{C_\mu T_i} \\ \hline - \frac{z_i}{C_k T_i} \\ \hline \left( 1 + \frac{\rho_i c_p}{Pr_t} l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{1}{C_k T_i} \right)^{-1} \left[ -\rho_i \left( u_i D_x(H_i) + v_i \frac{dH_i}{dy} \right) + \frac{d}{dy} (u_i \tau_i) + \right. \\ \left. \frac{c_p}{Pr_t} \frac{d\rho_i}{dy} l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{dT_i}{dy} + 2 \frac{\rho_i c_p}{Pr_t} l_m \frac{dl_m}{dy} \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{dT_i}{dy} + \frac{\rho_i c_p}{Pr_t} l_m^2 \frac{d}{dy} \left( \left| \frac{du_i}{dy} \right| \right) \frac{dT_i}{dy} + \right. \\ \left. \frac{\rho_i c_p}{Pr_t} l_m^2 \left| \frac{du_i}{dy} \right| \frac{z_i}{C_k T_i^2} \frac{dT_i}{dy} \right] \\ \hline \frac{\rho_i z_i}{C_k T_i^2} \\ \hline \frac{1}{\rho_i} \left[ D_x(\rho_i u_i) + v_i \frac{d\rho_i}{dy} \right] \end{array} \right) \quad (6.15)$$

Per non appesantire ulteriormente la trattazione non si riportano le matrici dello Jacobiano e delle derivate delle condizioni al contorno.

### 6.3 Analisi dei risultati

Si riportano di seguito i risultati ottenuti da una simulazione effettuata con i seguenti parametri:

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$	$u_w/u_e$	$T_w/T_e$
50	120	0.5	1	20	0	1.215

Tabella 6.1: Dati simulazione





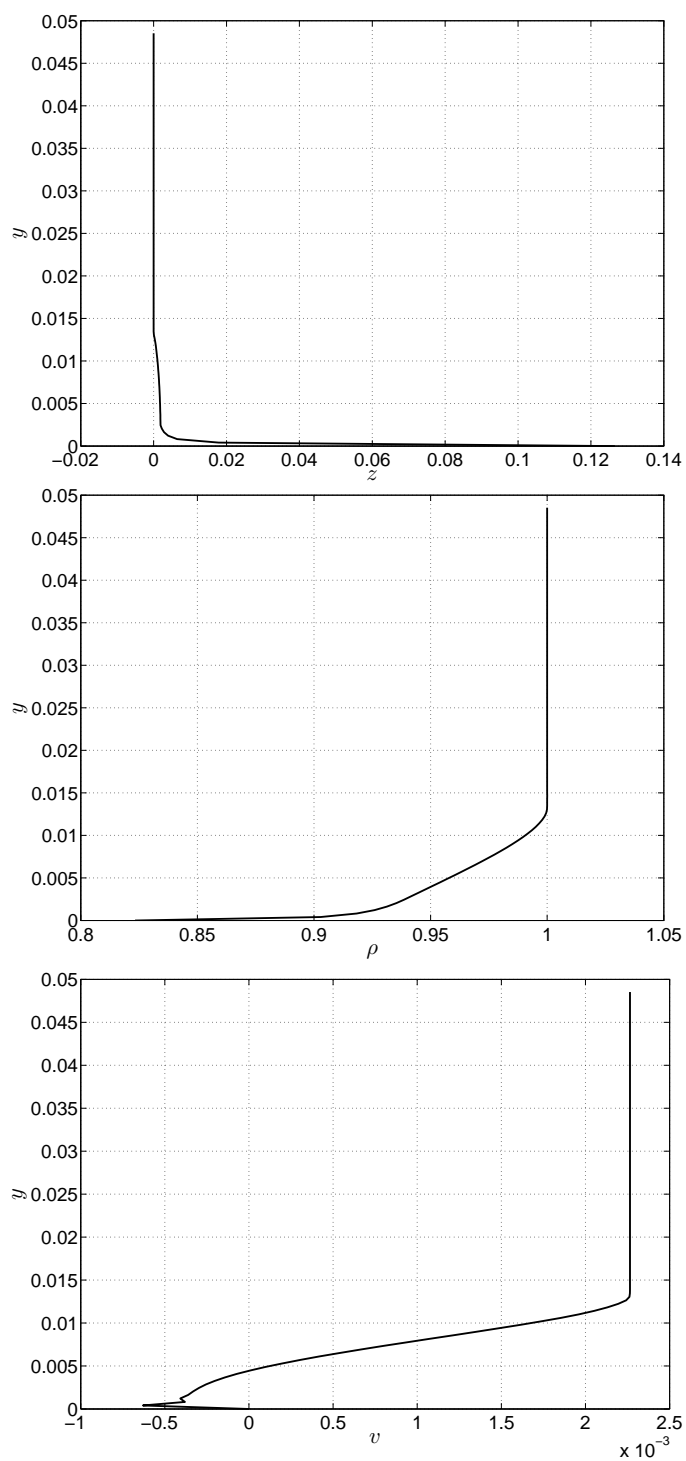


Figura 6.2: Andamenti di  $z(y)$ ,  $\rho(y)$ ,  $v(y)$ , ultima stazione

Nelle Figure 6.1 e 6.2 si hanno gli andamenti delle variabili del problema in funzione della coordinata  $y$ . Per quanto riguarda la variabile  $v$  si nota nuovamente in prossimità della parete la presenza di oscillazioni.

Anche per il caso comprimibile è necessario allontanarsi dai profili di inlet affinché la soluzione si assesti, come mostrato in Figura 6.3.

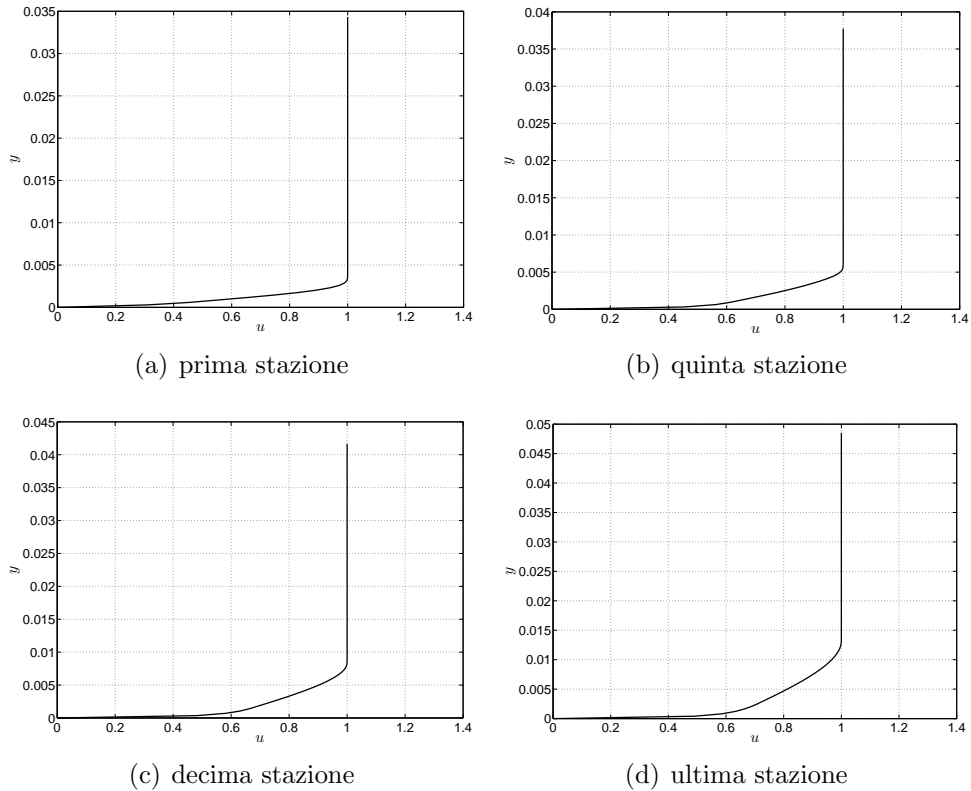


Figura 6.3: Evoluzione del profilo di velocità  $u(y)$

Si riporta in Figura 6.4 il confronto della velocità longitudinale  $u$  con i rilievi sperimentali, come fatto nel Capitolo 4.

Si nota una buona sovrapposizione con i dati sperimentali; gli scostamenti massimi li si hanno nell'intorno della metà dello spessore dello strato limite ( $y/\delta \approx 0.5$ ).

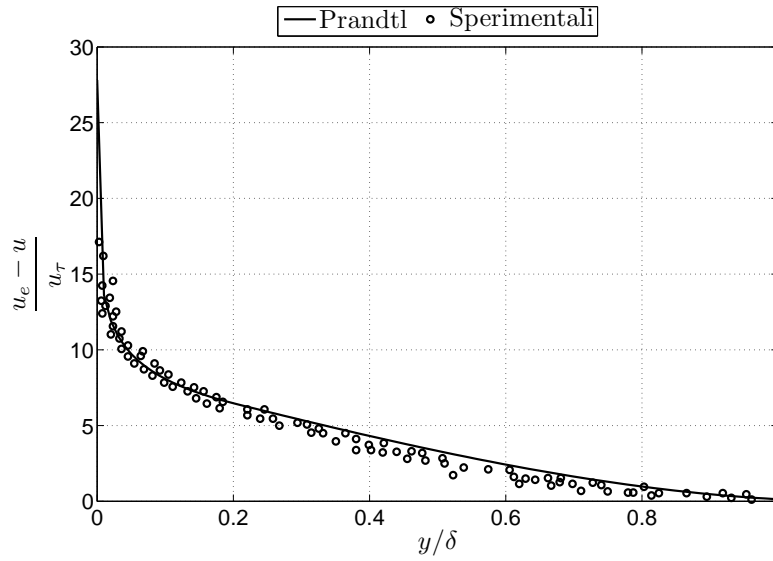


Figura 6.4: Confronto di  $u$  con i dati sperimentali

Infine, è stato effettuato un confronto per quanto riguarda il profilo di temperatura per la seguente simulazione:

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$	$u_w/u_e$	$T_w/T_e$	$M_\infty$
50	220	0.5	0.8	10	0	1.02	3.5

Tabella 6.2: Dati simulazione Meier [16]

In Figura 6.5 è riportato l'andamento della grandezza adimensionale:

$$T^* = \frac{\tilde{T}_0 - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_{0,\infty} - \tilde{T}_w} \quad (6.16)$$

in funzione della velocità adimensionale  $u$ .  $\tilde{T}_0$  è la *temperatura totale*, così definita:

$$\tilde{T}_0 = \tilde{T} \left( 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right) \quad (6.17)$$

mentre il pedice  $\infty$  indica la condizione asintotica a monte.

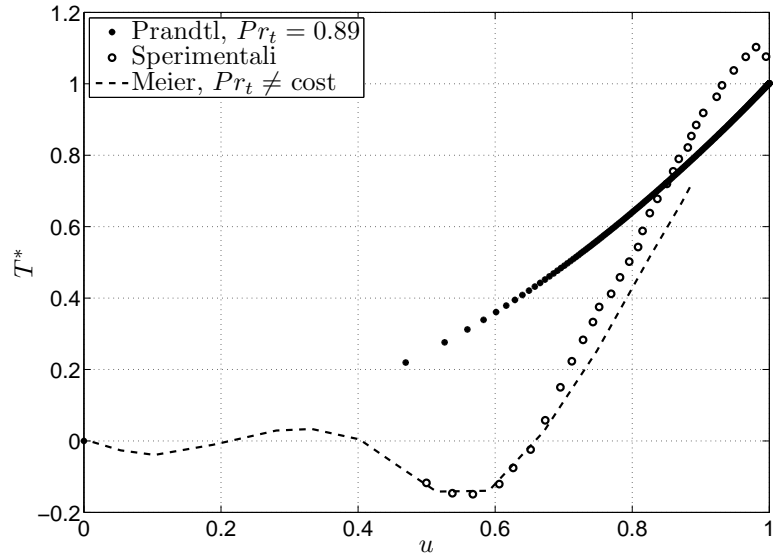


Figura 6.5: Confronto di  $T^*$  con i dati sperimentali

In Figura 6.5 si può notare come i dati sperimentali presentino un andamento molto diverso rispetto alla curva qui ottenuta; tuttavia, essi si correlano abbastanza bene con la curva ottenuta da Meier [16], il quale adotta la *legge di parete* a Prandtl turbolento  $Pr_t$  variabile. In particolare egli assume che:

$$\begin{aligned} Pr_t &= 1.34 & y^+ \rightarrow 0 \\ Pr_t &= 0.8 & y^+ \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{6.18}$$

dove  $y^+ = y \frac{\sqrt{\tau_w \tilde{\rho}}}{\tilde{\mu}}$  e  $\tau_w$  sono gli sforzi di taglio a parete.

Si può quindi pensare di utilizzare l'approccio di Meier per ottenere una modellazione migliore della turbolenza nel caso comprimibile.



**Parte III**  
**Tubo d'urto**





## Capitolo 7

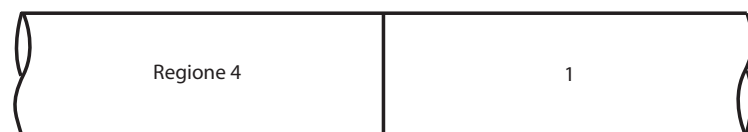
### Attenuazione di un'onda d'urto

In questo capitolo verrà trattato il problema del tubo d'urto al fine di calcolare l'attenuazione dell'onda d'urto in esso presente. Questa verrà calcolata attraverso la teoria dell'attenuazione proposta da Mirels [18].

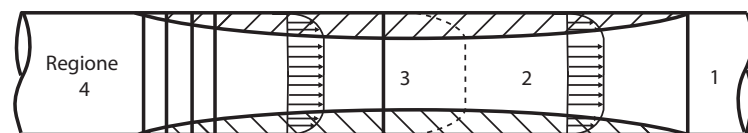
#### 7.1 Introduzione

Un tubo d'urto è costituito da un tubo contenente un fluido ad alta pressione (regione 4 della Figura 7.1) separato, mediante un diaframma, da un fluido a bassa pressione (regione 1). Quando il diaframma si rompe, nella regione 1 si propaga un'onda d'urto, mentre nella regione 4 si propaga un ventaglio di onde di espansione.

Il fluido nelle regioni 2 e 3 si trova alla stessa pressione e velocità, ma a temperature differenti; il confine tra queste due regioni è chiamato *discontinuità di contatto*.



(a) prima della rottura del diaframma



(b) dopo la rottura del diaframma

Figura 7.1: Tubo d'urto

É inoltre possibile rappresentare, in un diagramma spazio-tempo detto *piano caratteristico*, le posizioni delle onde e della discontinuità di contatto in ogni istante di tempo, nonché l'estensione delle diverse regioni (Figura 7.2).

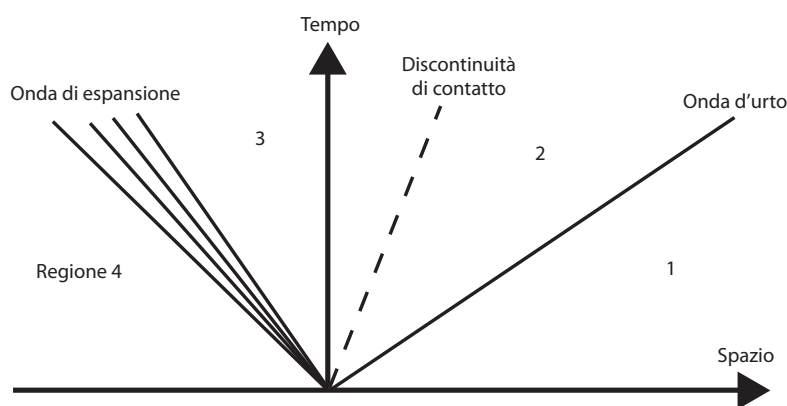


Figura 7.2: Piano caratteristico

## 7.2 Teoria dell'attenuazione di Mirels

Il problema del tubo d'urto ideale è di tipo *autosimilare* in  $x-t$ : date le condizioni iniziali, infatti, si può determinare una soluzione valida indefinitamente nel tempo.

In un tubo d'urto reale, ovviamente, questo non può accadere; la presenza della viscosità e della diffusività termica, infatti, portano alla formazione di uno strato limite a parete. Una delle conseguenze più rilevanti della presenza dello strato limite è il fatto che esso genera delle deboli onde di pressione che, venendo a contatto con l'onda d'urto, la indeboliscono.

Questo fenomeno di attenuazione è stato molto studiato sperimentalmente e analiticamente [12], [9], [14]. Si riporta in particolare la teoria di Mirels [18].

Per prima cosa si riportano le ipotesi alla base della trattazione:

1. *Piccole perturbazioni*: le equazioni di moto sono linearizzate assumendo che il flusso a potenziale esterno allo strato limite subisce solo piccole perturbazioni.
2. *Strato limite sottile*: l'ipotesi di strato limite sottile (rispetto al diametro del tubo) è consistente con l'aver assunto piccole perturbazioni sul flusso a potenziale.

3. *Onde longitudinali monodimensionali*: l'ipotesi di problema monodimensionale è accettabile solo per urti non troppo intensi; per urti più forti, invece, è necessario considerare anche gli effetti di onde trasversali.
4. *Ventaglio di espansione di spessore nullo*: per semplificare la trattazione si assume che il ventagli di espansione non abbia spessore, in modo da poterlo trattare come un'onda di discontinuità e semplificare il calcolo dello strato limite dietro di esso. Questa approssimazione è accettabile per onde di espansione relativamente deboli, mentre viene a cadere per onde più forti. Tuttavia non è un grande problema, in quanto maggiore è l'intensità dell'espansione, minore è il contributo all'attenuazione dell'onda d'urto.

Introducendo l'attenuazione, però, il problema diventa necessariamente *non stazionario*, in quanto l'urto si indebolisce nel tempo, e questo si riflette sullo strato limite a valle.

Mirels, per trattare comunque il problema in modo *stazionario*, valuta lo strato limite a valle dell'urto in maniera stazionaria, come visto al Capitolo 5, ipotizzando che esso sia generato da un urto di intensità costante e pari a quella del caso ideale.

Ovviamente questa è una grossa approssimazione, e affinché i risultati possano essere accettabili, è necessario studiare l'attenuazione dell'urto per un intervallo di tempo molto ridotto, in modo che la sua intensità diminuisca di poco e renda accettabile l'ipotesi introdotta.

### 7.2.1 Generazione di onde dovute a sorgenti di massa

La presenza di uno strato limite sottile, e in particolare di una componente di velocità verticale, può essere vista dal flusso uniforme come una sorgente di massa; si consideri pertanto un flusso uniforme monodimensionale in un tubo a sezione costante e si assuma la presenza di una debole sorgente di massa, uniformemente distribuita in sezione, che perturbi il flusso. Indicando con  $\Delta$  le perturbazioni nette (rispetto al flusso uniforme) delle varie quantità, le equazioni di moto sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + u \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} = m \\ \rho \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + u \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \Delta P}{\partial x} \\ \Delta P = a^2 \Delta \rho \end{cases} \quad (7.1)$$

dove  $m = m(x, t)$  è il flusso di massa per unità di area di lunghezza  $x$  e  $a$  indica la velocità del suono. La presenza di queste sorgenti genera onde. Si indichino con gli apici  $+$  e  $-$  le perturbazioni associate a onde che si muovono, rispettivamente, in direzione  $x$  positiva e negativa. Se si indicano con  $\xi, \tau$  le variabili di integrazione per  $x, t$ , la soluzione per le perturbazioni in qualunque punto  $x, t$  si può esprimere come:

$$\Delta P = \Delta P^+ + \Delta P^- \quad (7.2)$$

$$\Delta u = \Delta u^+ + \Delta u^- = \frac{1}{\rho a} (\Delta P^+ - \Delta P^-) \quad (7.3)$$

$$\Delta \rho = \frac{1}{a^2} \Delta P \quad (7.4)$$

dove:

$$\Delta P^+(x, t) = \frac{a}{2(1+M)} \int_{-\infty}^x m \left( \xi, t - \frac{x-\xi}{a+u} \right) d\xi \quad (7.5)$$

$$\Delta P^-(x, t) = \frac{a}{2(1-M)} \int_x^{+\infty} m \left( \xi, t - \frac{\xi-x}{a-u} \right) d\xi \quad (7.6)$$

Gli integrali sono effettuati lungo le caratteristiche  $\tau = t - (x - \xi) / (a + u)$  e  $\tau = t - (\xi - x) / (a - u)$  nel piano  $\xi, \tau$ . Il limite superiore dell'integrale per  $\Delta P^-$  è  $+\infty$  o  $-\infty$  a seconda che sia  $M < 1$  o  $M > 1$ , rispettivamente. L'equazione (7.3) include le relazioni acustiche  $\Delta P^+ = \rho a \Delta u^+$  e  $\Delta P^- = -\rho a \Delta u^-$ .

### 7.2.2 Generazione di onde dovute allo strato limite non stazionario

Si consideri un tubo a sezione costante con pareti flessibili in modo che si possa generare a parete una componente  $v$  di velocità verticale. Questo equivale ad una sorgente di massa di intensità  $\oint \rho v dl$ , per unità di lunghezza  $x$ , dove l'integrale è effettuato sul perimetro della sezione del tubo. Se il flusso nel tubo si considera come monodimensionale, l'equivalente sorgente di massa è:

$$m = \frac{\rho v l}{A} = \frac{4\rho v}{d} \quad (7.7)$$

dove  $d = 4A/l$  è il diametro idraulico e  $v = v(x, t)$ . L'espressione per  $\Delta P$  può quindi essere riscritta come:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{2\gamma}{ad} \left[ \frac{1}{(1+M)} \int_{-\infty}^x v \left( \xi, t - \frac{x-\xi}{a+u} \right) d\xi + \frac{1}{(1-M)} \int_x^{\pm\infty} v \left( \xi, t - \frac{\xi-x}{a-u} \right) d\xi \right] \quad (7.8)$$

ed espressioni simili si possono facilmente ricavare per  $\Delta u$  e  $\Delta \rho$ .

Nel caso di onde dovute alla presenza di uno strato limite, la velocità  $v$  è quella all'estremo superiore dello strato limite.

L'equazione (7.8) può essere applicata per trovare l'attenuazione in un tubo d'urto.

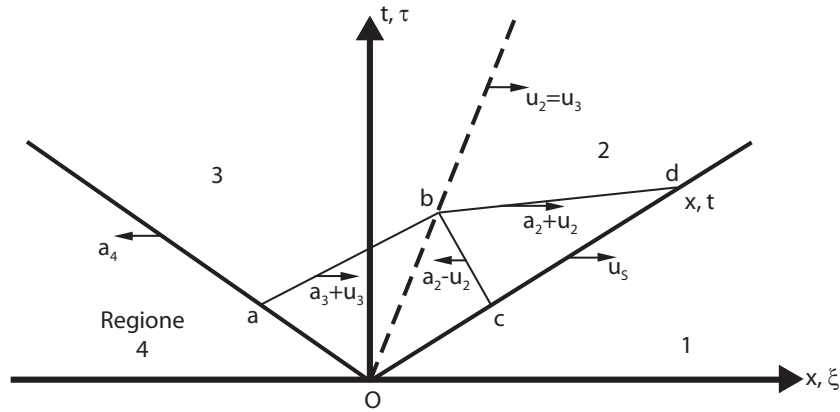


Figura 7.3: Calcolo dell'attenuazione - piano caratteristico

Con riferimento alla Figura 7.3, l'attenuazione dell'onda d'urto risulta:

$$\frac{1}{F} \frac{a_2 d}{2\gamma_2} \frac{\Delta P_2}{P_2} = \left[ \frac{1}{(1+M_2)} \int_{-\xi_b}^x v_2 d\xi + \frac{C}{(1-M_2)} \int_{\xi_b}^{\xi_c} v_2 d\xi + \frac{\gamma_{32} D}{a_{32}(1+M_3)} \int_{\xi_a}^{\xi_b} v_3 d\xi \right] \cdot \left( 1 - CE \frac{\Delta P_{2,c}}{\Delta P_{2,d}} \right)^{-1} \quad (7.9)$$

Le coordinate dei punti  $a$ ,  $b$  e  $c$ , in termini di variabili  $x, t$ , sono:

$$\begin{aligned}
 \xi_a &= -x \left[ \frac{1 + M_2 - \frac{u_s}{a_2}}{1 + M_3 + a_{43}} \right] \frac{a_4}{u_s} \\
 \tau_a &= t \left[ \frac{1 + M_2 - \frac{u_s}{a_2}}{1 + M_3 + a_{43}} \right] \\
 \xi_b &= x \left[ 1 + M_2 - \frac{u_s}{a_2} \right] \frac{u_2}{u_s} \\
 \tau_b &= t \left[ 1 + M_2 - \frac{u_s}{a_2} \right] \\
 \xi_c &= x \left[ \frac{1 + M_2 - \frac{u_s}{a_2}}{1 - M_2 + \frac{u_s}{a_2}} \right] \\
 \tau_c &= t \left[ \frac{1 + M_2 - \frac{u_s}{a_2}}{1 - M_2 + \frac{u_s}{a_2}} \right]
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

mentre i coefficienti  $C$ ,  $D$ ,  $E$  ed  $F$  sono:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\gamma_{32}a_{23} - 1}{\gamma_{32}a_{23} + 1}, & D &= \frac{1}{\gamma_{32}a_{23} + 1} \\
 E &= \frac{4\rho_{12}a_{12} \frac{M_s^3}{1+M_s^2} - 1}{2\rho_{12}a_{12} \frac{M_s^3}{1+M_s^2} + 1}, & F &= \frac{4\rho_{12}a_{12} \frac{M_s^3}{1+M_s^2}}{2\rho_{12}a_{12} \frac{M_s^3}{1+M_s^2} + 1}
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Infine, il rapporto  $\frac{\Delta P_{2,c}}{\Delta P_{2,d}}$  è pari a:

$$\frac{\Delta P_{2,c}}{\Delta P_{2,d}} = \sqrt{\frac{\xi_c}{x}} \tag{7.12}$$

### 7.3 Analisi e confronto dei risultati

In questo paragrafo verranno mostrati i risultati in termini di attenuazione dell'onda d'urto e confrontati con quanto ottenuto da Mirels. La differenza tra questo lavoro e la trattazione di Mirels sta nel calcolo delle velocità al bordo dello strato limite  $v_2$  e  $v_3$ .

Per il caso laminare Mirels parte dall'ipotesi di similarità, mentre per il caso turbolento, sulla base dell'evidenza sperimentale, parte dall'ipotesi che la componente di velocità  $u$  e la temperatura  $T$  siano proporzionali a un andamento esponenziale.

Si ricorda che la presente trattazione, invece, prevede di risolvere l'intero campo di moto con le equazioni di Prandtl. In particolare per lo strato limite turbolento si è fatto uso di una modellazione basata sulla teoria della *mixing length*.

Inoltre, sempre per il caso turbolento, verranno visualizzate anche le curve di attenuazione ottenute da McKenzie [15], il quale ha apportato una modifica al lavoro di Mirels tenendo conto degli effetti di attrito, scambio termico e gas reale.

Avendo risolto le equazioni dello strato limite stazionario è come se ci si fosse posti in un sistema di riferimento solidale con l'onda (d'urto o di espansione); è necessario pertanto effettuare un cambio di sistema di riferimento per calcolare l'integrale (7.9) (vedi Figura 7.4).

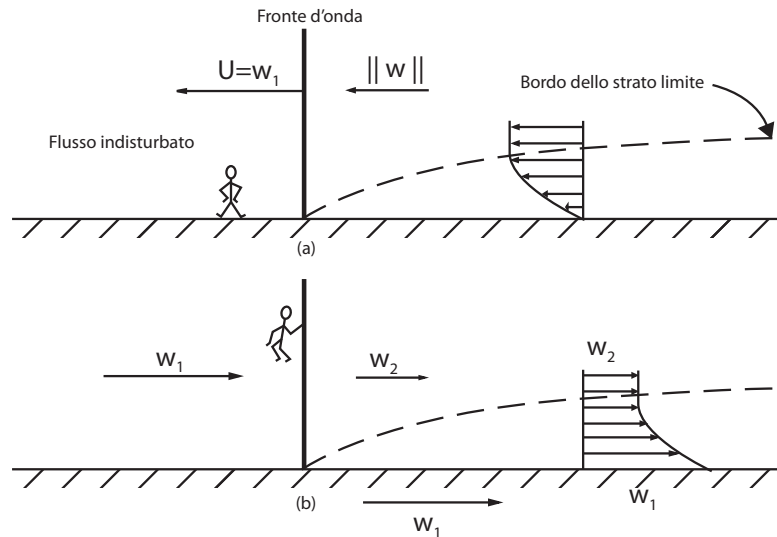
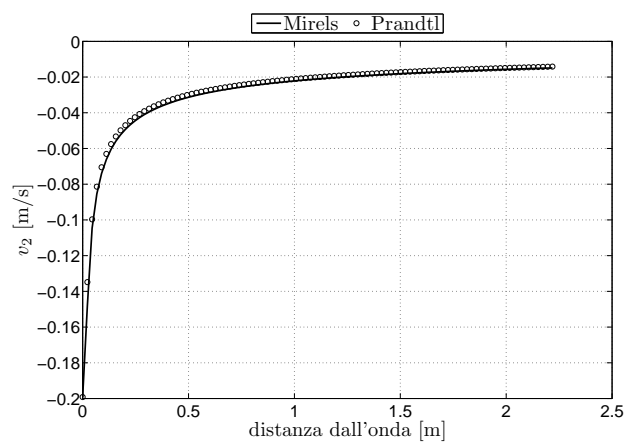


Figura 7.4: Cambio del sistema di riferimento

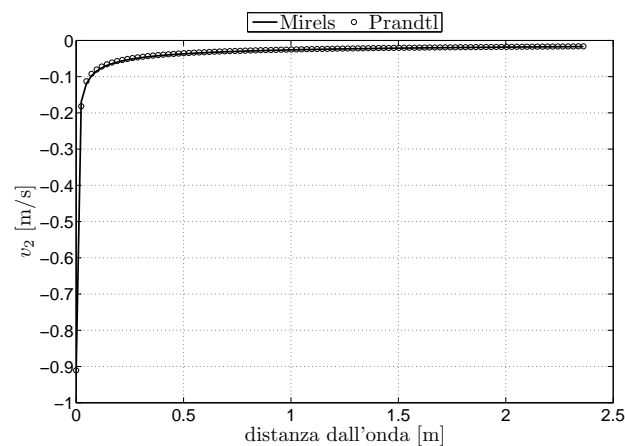
### 7.3.1 Strato limite laminare

Come si è visto nel Capitolo 5, risolvere lo strato limite comprimibile laminare con l'ipotesi di similarità o risolverlo attraverso la risoluzione delle equazioni di Prandtl, conduce al medesimo risultato.

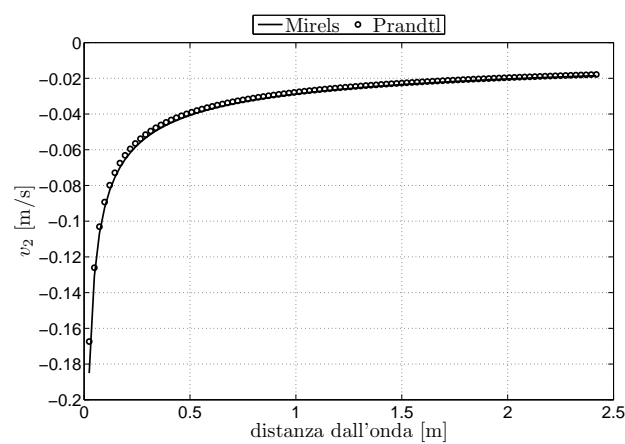
Si ha quindi sovrapposizione delle curve di velocità al bordo dello strato limite  $v_2$  e  $v_3$  e, di conseguenza, delle curve di attenuazione, come mostrato nelle Figure 7.5, 7.6, 7.7.



(a)  $P_{41} = 4.061$



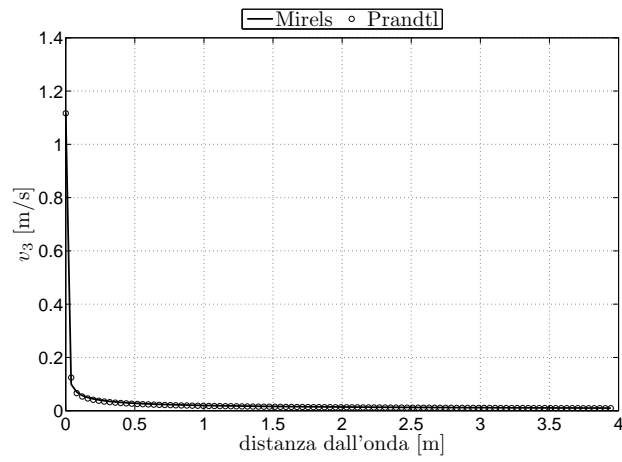
(b)  $P_{41} = 5.764$



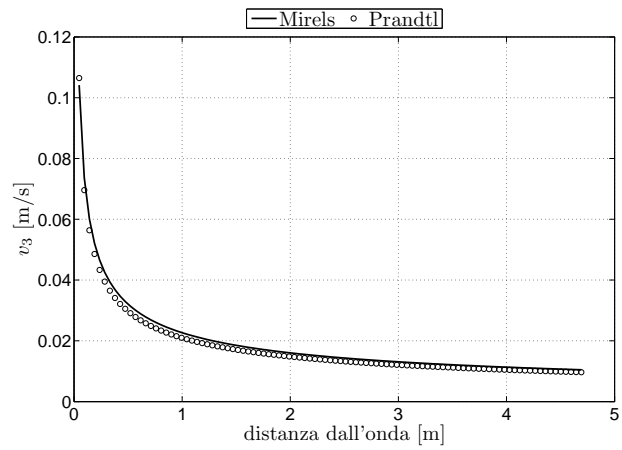
(c)  $P_{41} = 7.455$

Figura 7.5: Confronto di  $v_2$ , caso laminare

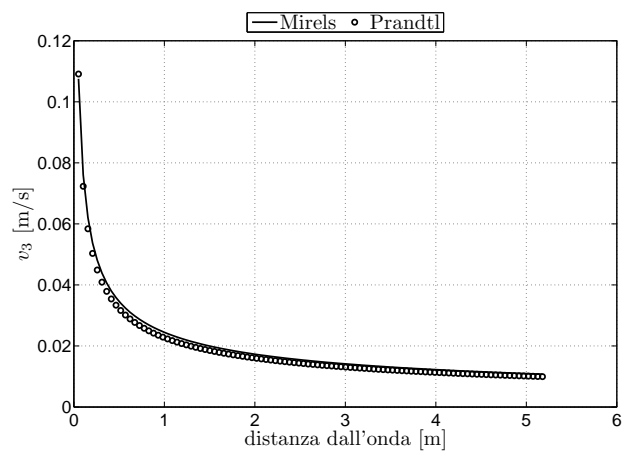




(a)  $P_{41} = 4.061$

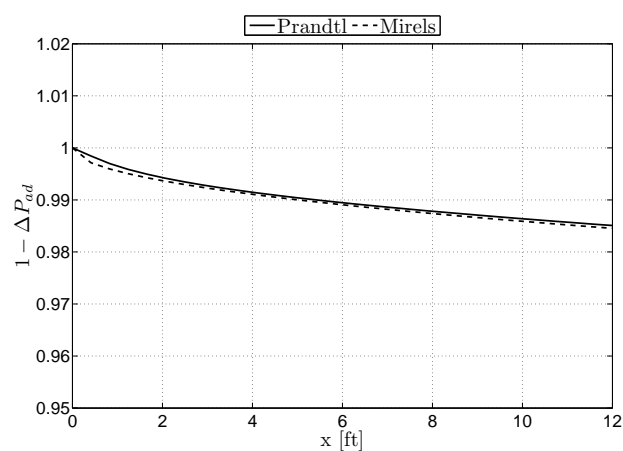


(b)  $P_{41} = 5.764$

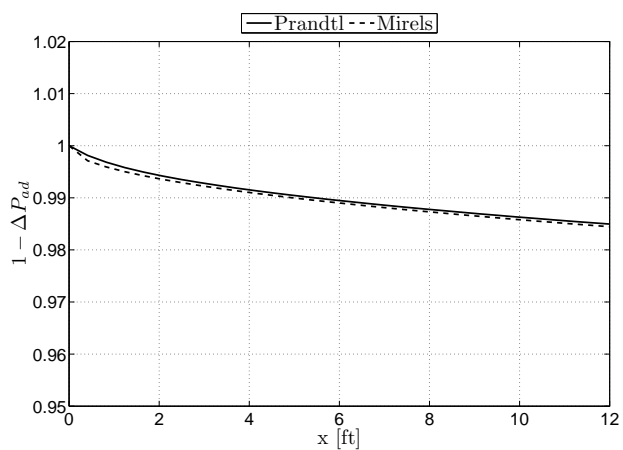


(c)  $P_{41} = 7.455$

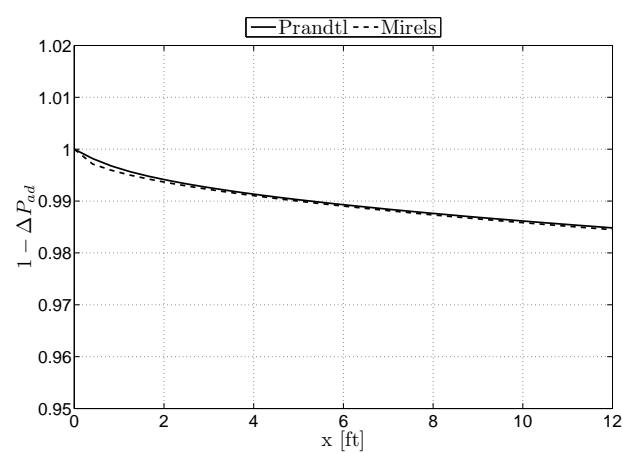
Figura 7.6: Confronto di  $v_3$ , caso laminare



(a)  $P_{41} = 4.061$



(b)  $P_{41} = 5.764$



(c)  $P_{41} = 7.455$

Figura 7.7: Confronto dell'attenuazione dell'urto, caso laminare

### 7.3.2 Strato limite turbolento

Nel caso laminare i risultati ottenuti attraverso la risoluzione delle equazioni di Prandtl erano stati confrontati con quelli derivanti dalla soluzione del problema similare ed era stato possibile effettuare tale confronto per *tutte* le variabili del problema.

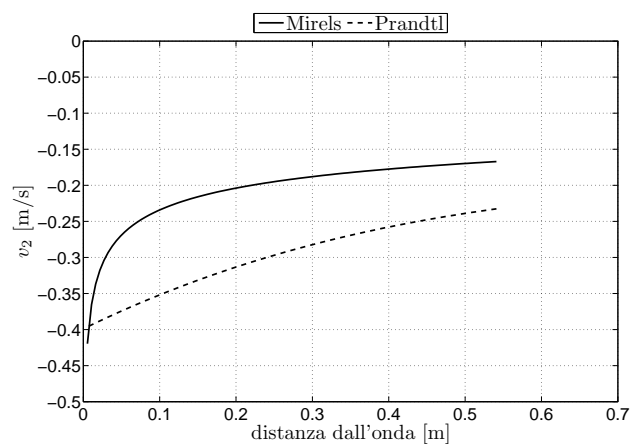
Nel caso turbolento questo non è stato possibile, in quanto il confronto si è limitato alle sole variabili  $u$  e  $T$ .

Il calcolo dell'attenuazione è pertanto un mezzo per trarre la seguente conclusione: la modellazione della mixing length sovrastima l'intensità della componente  $v$ , quantomeno sul bordo dello strato limite (Figure 7.8 e 7.9).

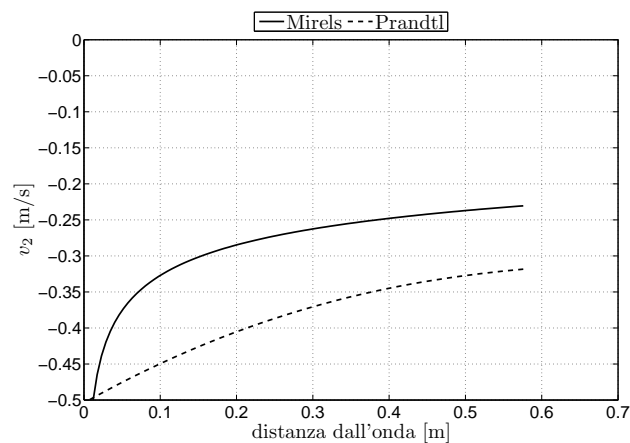
Questo comporta una sovrastima dell'attenuazione dell'onda d'urto. Tuttavia l'errore relativo percentuale è di circa il 4-5% (Figura 7.10), un risultato sorprendentemente buono se si considera la semplicità dei modelli di turbolenza adottati. Inoltre, non si è fatto ricorso a rilievi sperimentali di alcun tipo per la costruzione del campo di moto, ma si sono risolte direttamente le equazioni di Prandtl imponendo le sole ipotesi specifiche del problema in esame, a differenza delle curve ottenute da Mirels, le quali invece derivano da riscontri sperimentali.

È interessante notare anche che il lavoro di McKenzie [15], nato con l'idea di apportare un miglioramento alla teoria di Mirels considerando anche gli effetti di attrito e di scambio termico sull'attenuazione dell'onda d'urto, in realtà porta a risultati peggiori, sottostimando l'attenuazione, come si osserva sempre nella Figura 7.10.

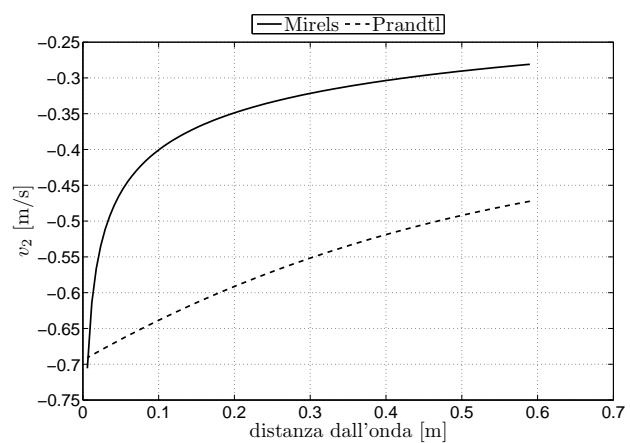
Si potrebbe cercare di ottenere risultati migliori implementando un diverso modello di turbolenza, ad esempio utilizzandone uno a  $Pr_t$  variabile o uno *differenziale* (ad esempio il  $k - \omega$ ).



(a)  $P_{41} = 4.061$

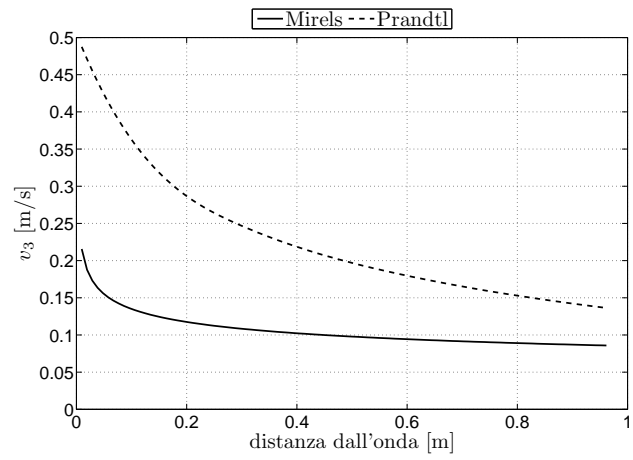


(b)  $P_{41} = 5.764$

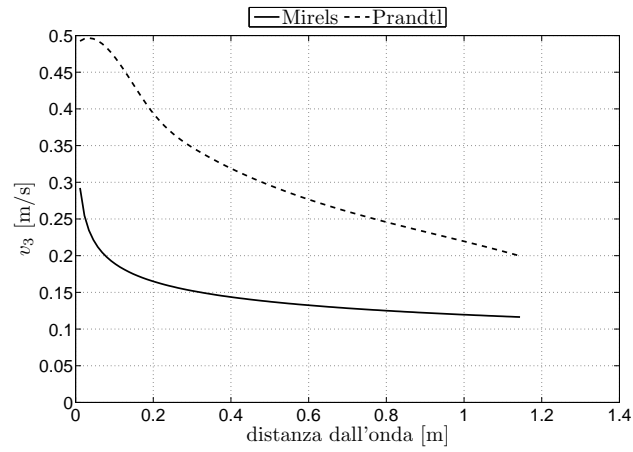


(c)  $P_{41} = 7.455$

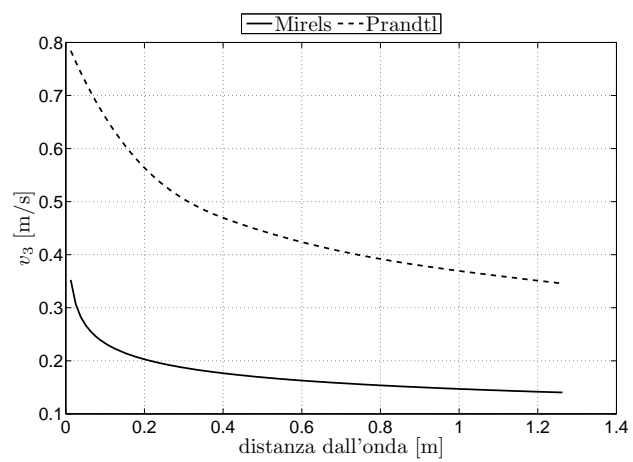
Figura 7.8: Confronto di  $v_2$ , caso turbolento



(a)  $P_{41} = 4.061$

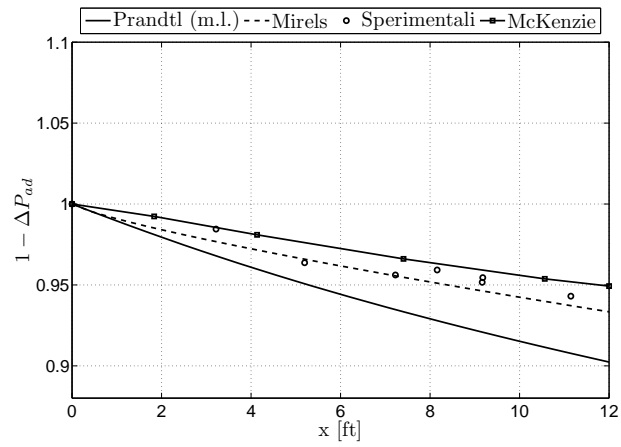


(b)  $P_{41} = 5.764$

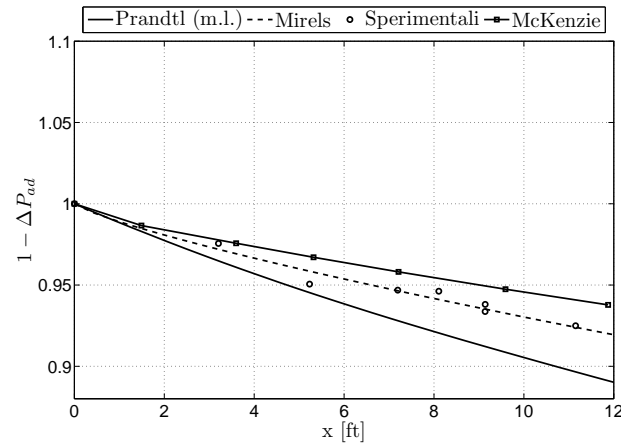


(c)  $P_{41} = 7.455$

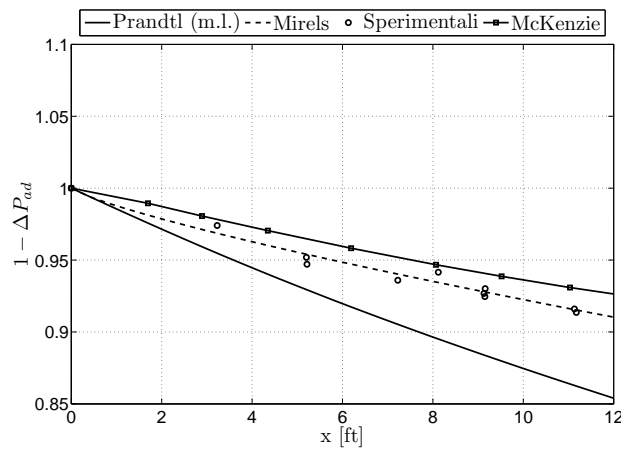
Figura 7.9: Confronto di  $v_3$ , caso turbolento



(a)  $P_{41} = 4.061$



(b)  $P_{41} = 5.764$



(c)  $P_{41} = 7.455$

Figura 7.10: Confronto dell'attenuazione dell'urto, caso turbolento

**Parte IV**  
**Conclusioni**





## Capitolo 8

### Conclusioni e sviluppi futuri

Scopo di questa tesi era quello di verificare la possibilità di risolvere le equazioni di Prandtl dello strato limite attraverso la risoluzione di diversi *two-point boundary value problems*, recuperando la parabolicità mediante schemi di derivazione alle differenze finite.

La tecnica si è dimostrata sicuramente efficace nei casi di strati limite laminari (sia incomprimibili che comprimibili, con o senza gradienti di pressione longitudinali): i risultati ottenuti, infatti, presentano un'ottima sovrapposizione con quelli presenti in letteratura, i quali sfruttano, per la risoluzione del problema, l'ipotesi di similarità.

Ovviamente questo ha portato ad un'ottima sovrapposizione anche per quanto riguarda le curve di attenuazione di onde d'urto, per diverse condizioni, nel caso laminare.

Per quanto riguarda la soluzione dello strato limite turbolento, ovviamente la soluzione dipende dal modello di turbolenza adottato. Utilizzare l'ipotesi di viscosità turbolenta, con il modello algebrico della mixing length di Prandtl, ha portato ad una buona sovrapposizione con i dati sperimentali del profilo di velocità longitudinale  $u$ , mentre si è visto sovrastimare la componente  $v$ , e di conseguenza l'attenuazione dell'onda d'urto nel caso turbolento. Nonostante ciò, la previsione dell'attenuazione dell'onda è comunque molto buona, scostandosi dai rilievi sperimentali di circa il 4-5%.

Un possibile sviluppo per questo lavoro riguarda perciò l'implementazione di un differente modello di turbolenza, ad esempio provando ad utilizzare un modello a  $Pr_t$  variabile come fatto da Meier [16], oppure utilizzando un modello *differenziale* quale il  $k - \omega$ .

Si potrebbe inoltre approfondire lo sviluppo del *Linear Multi-Point Method* [21] [22] per la soluzione numerica del problema, in modo da aumentarne l'ordine di convergenza.

Sarebbe inoltre interessante estendere la trattazione al caso di *gas reale*, ed affrontare il problema dell'attenuazione di un'onda d'urto di rarefazione.



**Parte V**  
**Appendici**



## Appendice A

### Soluzioni similari di Falkner-Skan

Le soluzioni di Falkner-Skan alle equazioni di Prandtl dello strato limite, sotto l'ipotesi di similarità, prevedono che la velocità esterna dipenda dalla coordinata  $x$ :

$$u(x, y) = U_e(x)h(\eta) = U_e(x)h\left(\frac{y}{g(x)}\right) \quad (\text{A.1})$$

A seguito di una opportuna trattazione matematica è possibile dimostrare che l'equazione di Falkner-Skan assume la seguente forma:

$$f''' + ff'' = \frac{2m}{m+1}(f'^2 - 1) \quad (\text{A.2})$$

dove  $m$  è un parametro che identifica la famiglia di soluzioni a seconda del tipo di problema che si vuole trattare.

Le relative condizioni al contorno risultano:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

È possibile ricavare anche la forma della velocità esterna in funzione di  $x$  al variare del parametro  $m$ :

$$U_e(x) = Ax^m \quad (\text{A.4})$$

È immediato verificare che porre il parametro  $m = 0$  corrisponde a trattare il problema di una lastra piana investita da una corrente uniforme; difatti:

$$U_e(x) = Ax^0 = A = U_e = \text{COST} \quad (\text{A.5})$$

Inoltre, sotto la medesima ipotesi, la (A.2) si riduce all'equazione di Blasius (a meno del fattore  $\frac{1}{2}$ ):

$$f''' + ff'' = 0 \quad (\text{A.6})$$

## A.1 Riduzione a sistema del primo ordine

Il sistema di tre equazioni differenziali ordinarie accoppiate tra loro, corredato da condizioni al contorno di tipo puntuale e/o integrale, va risolto numericamente.

Si definiscano il parametro  $\beta = \frac{2m}{m+1}$  e le due variabili ausiliarie  $u = f'$  e  $\zeta = u' = f''$ .

Si introduca ora la seguente notazione vettoriale:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \zeta \\ u \\ f \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -\zeta f - \beta(1-u^2) \\ \zeta \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Il problema di Falkner-Skan può quindi essere scritto nella forma compatta:

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (\text{A.9})$$

La soluzione di questo problema la si ottiene con un metodo iterativo che necessita dello Jacobiano del sistema, così definito:

$$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -f & 2\beta u & -\zeta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

mentre le condizioni al bordo utilizzate sono le seguenti:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(\eta_{max})) = \begin{pmatrix} u(\eta_{max}) - 1 \\ u(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.11})$$

Le matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema risultano nell'estremo inferiore:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

e in quello superiore:

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}} \right|_{\eta=\eta_{max}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Risolvendo con una griglia di 100 nodi equispaziati sino ad  $\eta = 7$  per  $\beta = 0.5$  si ottengono i risultati in Figura A.1.

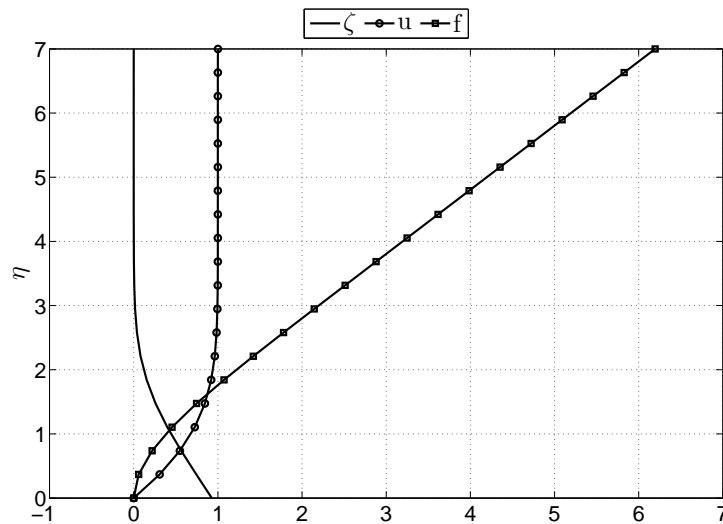


Figura A.1: Soluzione di Falkner-Skan

## A.2 Soluzione equazioni di Prandtl

### A.2.1 Impostazione del problema

Le equazioni di Prandtl con gradiente di pressione in direzione longitudinale scritte in forma *semi-discreta* risultano:

$$\begin{cases} u_i D_x(u_i) + v_i \frac{du_i}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP^e}{dx} + \nu \frac{d^2 u_i}{dy^2} \\ D_x(u_i) + \frac{dv_i}{dy} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

dove le derivate parziali rispetto ad  $x$  vengono discretizzate con il solito schema del quarto ordine (si ricorda che il gradiente di pressione esterna è un termine noto).

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} u(x_{inlet}, y) = u_{inlet}(y) & \text{per } y > 0 \\ u_i(0) = v_i(0) = 0 & \text{per } x > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) = U_e & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

### A.2.2 Riduzione a sistema del primo ordine

Anche in questo caso si definisce la variabile ausiliaria:

$$w(x_i, y) = \nu \frac{du(x_i, y)}{dy} \quad (\text{A.16})$$

e quindi  $w_i(y) = w(x_i, y)$ .

Il sistema di ODE del primo ordine risulta:

$$\begin{cases} \frac{dw_i}{dy} = \frac{w_i v_i}{\nu} + \frac{25 u_i^2}{12 h_x} - 4 \frac{u_i u_{i-1}}{h_x} + 3 \frac{u_i u_{i-2}}{h_x} - \frac{4 u_i u_{i-3}}{3 h_x} + \frac{1 u_i u_{i-4}}{4 h_x} + \frac{1}{\rho} \frac{dP^e}{dx} \\ \frac{du_i}{dy} = \frac{w_i}{\nu} \\ \frac{dv_i}{dy} = -\frac{25 u_i}{12 h_x} + 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} - 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} + \frac{4 u_{i-3}}{3 h_x} - \frac{1 u_{i-4}}{4 h_x} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

### A.2.3 Soluzione numerica delle equazioni di Prandtl

A questo punto il problema può essere facilmente scritto nella seguente forma vettoriale:

$$\frac{dq_i}{dy} = f(q_i) \quad (\text{A.18})$$



una volta che siano stati definiti  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_i)$ :

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} w_i \\ u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_i) = \begin{pmatrix} \frac{w_i v_i}{\nu} + \frac{25}{12} \frac{u_i^2}{h_x} - 4 \frac{u_i u_{i-1}}{h_x} + 3 \frac{u_i u_{i-2}}{h_x} - \frac{4}{3} \frac{u_i u_{i-3}}{h_x} + \frac{1}{4} \frac{u_i u_{i-4}}{h_x} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \\ \frac{w_i}{\nu} \\ -\frac{25}{12} \frac{u_i}{h_x} + 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} - 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} + \frac{4}{3} \frac{u_{i-3}}{h_x} - \frac{1}{4} \frac{u_{i-4}}{h_x} \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

La matrice Jacobiana del sistema è:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}_i, y) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_i, y)}{\partial \mathbf{q}_i} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{\nu} & \frac{25}{6} \frac{u_i}{h_x} - 4 \frac{u_{i-1}}{h_x} + 3 \frac{u_{i-2}}{h_x} - \frac{4}{3} \frac{u_{i-3}}{h_x} + \frac{1}{4} \frac{u_{i-4}}{h_x} & \frac{w_i}{\nu} \\ \frac{1}{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{12h_x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

mentre le condizioni al contorno si rappresentano nella seguente forma:

$$\mathbf{bc}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(y \rightarrow \infty)) = \begin{pmatrix} \lim_{y \rightarrow \infty} u_i(y) - U_e \\ u_i(0) \\ v_i(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.22})$$

Si definiscono le matrici rappresentanti le derivate delle condizioni al contorno nei due estremi rispetto alle variabili del problema nell'estremo inferiore ( $y = 0$ ):

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}_i} \right|_{y=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

e in quello superiore ( $y \rightarrow \infty$ ):

$$\left. \frac{d(\mathbf{bc})}{d\mathbf{q}_i} \right|_{y \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

### A.2.4 Analisi e confronto dei risultati

I diagrammi che seguono si riferiscono ad una simulazione effettuata con i seguenti parametri:

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$	$\beta$
7	100	0.5	1	20	0.5

Tabella A.1: Dati simulazione

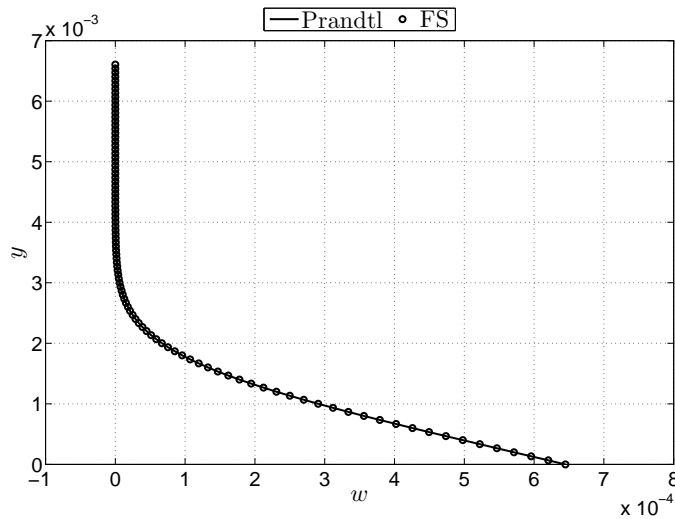


Figura A.2: Confronto di  $w(y)$ , ultima stazione

Si osserva nelle Figure A.2, A.3, A.4, un'ottima sovrapposizione tra la soluzione calcolata risolvendo le equazioni di Prandtl e quella similare di Falkner-Skan.

Questa tecnica di risoluzione, basandosi sul recupero della parabolicità del problema mediante differenze finite decentrate all'indietro, si è notato funzionare solo per correnti acceleranti.

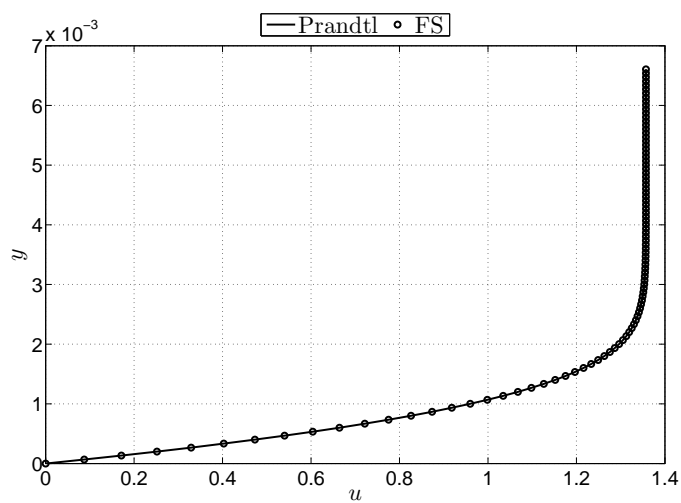


Figura A.3: Confronto di  $u(y)$ , ultima stazione

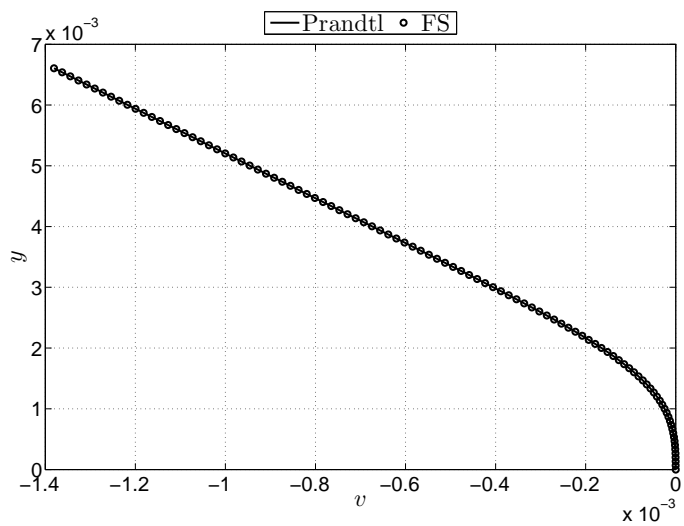


Figura A.4: Confronto di  $v(y)$ , ultima stazione



## Appendice B

### Linear Multi-Point Method (LMPM)

In questa appendice vengono risolte le equazioni di Prandtl per lo strato limite stazionario *incomprimibile laminare* utilizzando un *Linear Multi-Point Method (LMPM)*.

Quartapelle e Rebay [21] hanno sviluppato una strategia di discretizzazione basata su un'approssimazione lineare del sistema di ODE. Tale approssimazione è stata effettuata in modo da imporre e riprodurre a livello discreto il soddisfacimento del *teorema fondamentale del calcolo integrale*. Tale metodo è stato ulteriormente sviluppato da Quartapelle e Scandroglio [22].

Lo schema è basato sulla discretizzazione mediante una molecola a 4 punti per i punti interni, ed una speciale molecola a 5 punti per i punti agli estremi del dominio. È da sottolineare il fatto che il metodo presenta una *convergenza del sesto ordine*: esso quindi infrange la *prima barriera di Dahlquist*, che però vale per problemi ai valori iniziali (*initial value problem, IVP*) e non per i problemi ai limiti (*boundary value problem, BVP*).

Si consideri una simulazione effettuata con i seguenti parametri:

$\eta_{max}$	$n$	$x_a$	$x_b$	$N_S$	<i>tolerance</i>
7	100	0.5	1	10	$10^{-13}$

Tabella B.1: Dati simulazione

Come si nota dalle Figure B.1, B.2 e B.3, la soluzione ottenuta con il solutore LMPM e quella ottenuta grazie alla routine MATLAB *bvp4c* si sovrappongono molto bene (la differenza media relativa tra le due soluzioni è  $3.98 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.81 \cdot 10^{-7}$  e  $6.85 \cdot 10^{-6}$ , rispettivamente per le variabili  $w$ ,  $u$  e  $w$ ).

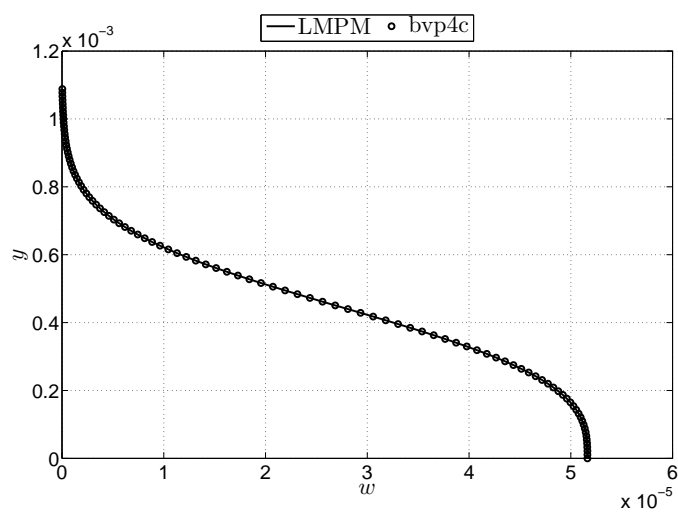


Figura B.1: Confronto di  $w(y)$ , ultima stazione

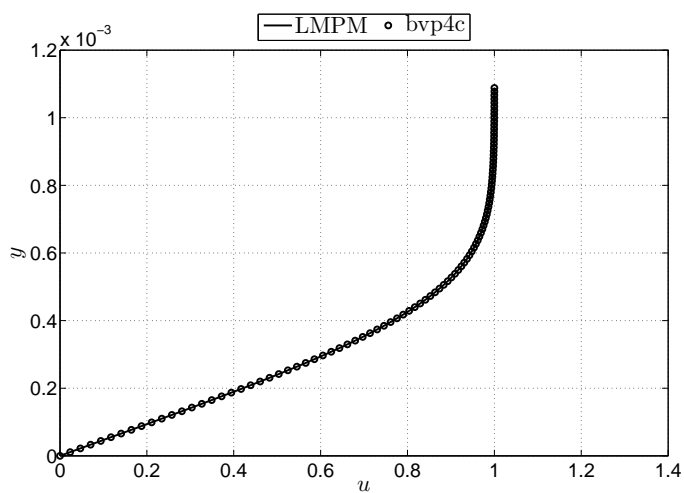


Figura B.2: Confronto di  $u(y)$ , ultima stazione

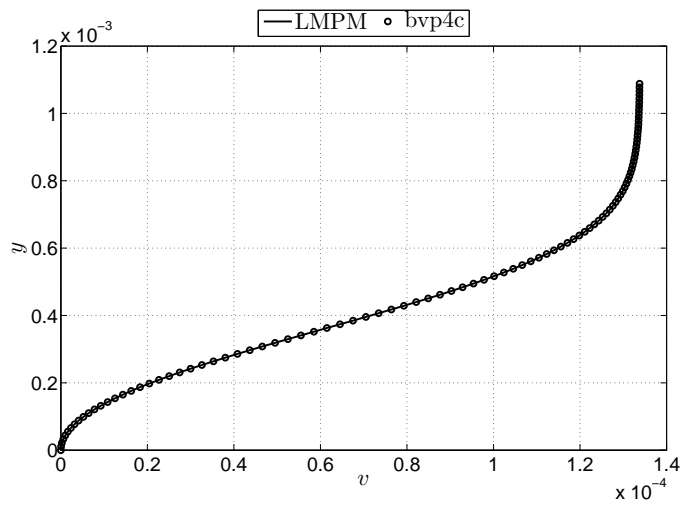


Figura B.3: Confronto di  $v(y)$ , ultima stazione

La grossa differenza tra le due procedure di risoluzione si avverte nei tempi di calcolo; si riporta nella seguente tabella il tempo medio impiegato per effettuare la simulazione descritta in Tabella B.1:

<i>LMPM</i>	<i>bvp4c</i>
22.8 s	30.9 s

Tabella B.2: Tempi simulazione

Si nota quindi che il solutore di MATLAB impiega circa il 35% di tempo in più per risolvere lo stesso problema.

Purtroppo, il grosso svantaggio riscontrato nell'utilizzo del LMPM è stato quello della poca robustezza del codice, che ne ha reso di fatto impossibile l'utilizzo in casi più complicati rispetto a quello incomprimibile laminare.





## Bibliografia

- [1] J. D. Anderson. *Modern Compressible Flow*. McGraw-Hill, 1990.
- [2] J. D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics - Fourth Edition*. McGraw-Hill, 2007.
- [3] R. Armellin and F. Topputo. A sixth-order accurate scheme for solving two-point boundary value problems in astrodynamics. *Celestial Mech Dyn Astr*, 2006.
- [4] H. Blasius. Grenzsichten in flussigkeiten mit kleiner reibung. *Z. Math. Phys.*, 56, 1908.
- [5] L. C. Burmeister. *Convective Heat Transfer*. Wiley - Interscience, 1983.
- [6] G. F. Carey and M. Sharma. Turbulent boundary-layer analysis using finite elements. *International journal for numerical methods in fluids*, 6, 1986.
- [7] T. Cebeci and J. Cousteix. *Modeling and computing of boundary layer equations - Second Revised and Extended Edition*. Springer, 2005.
- [8] L. Crocco. Sullo strato limite laminare nei gas lungo una lamina piana. *Rend. Math. Appl. Ser. 5*, 21:2, 1941.
- [9] C. Donaldson and R. D. Sullivan. *NACA TN 1942 - The Effect of Wall Friction on the Strength of Shock Waves in Tubes and Hydraulic Jumps in Channels*. 1949.
- [10] H. L. Evans. *Laminar boundary-layer theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [11] B. Fornberg. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics of computation*, 51, 1988.
- [12] I. I. Glass and G. N. Patterson. A theoretical and experimental study of shock-tube flows. *Jour. Aero. Sci.*, 22, 1955.

- [13] I. I. Glass and J. P. Sislan. *Nonstationary Flows and Shock Waves*. Oxford Science Publications, 1994.
- [14] R. N. Hollyer. *A study of Attenuation in the Shock Tube*. Eng. Res. Inst., University of Michigan, 1953.
- [15] N. R. McKenzie. *The Effect of Viscous Attenuation on Shock Tube Performance*. PhD thesis, University of Tennessee, 2007.
- [16] H. U. Meier. Temperature distributions using the law of the wall for compressible flow with variable turbulent prandtl numbers. *AIAA Paper*, 596, 1974.
- [17] H. Mirels. *NACA TN 3401 - Laminar boundary layer behind shock advancing into stationary fluid*. 1955.
- [18] H. Mirels. *NACA TN 3278 - Attenuation in a shock tube due to a unsteady-boundary-layer action*. 1956.
- [19] H. Mirels. *NACA TN 3712 - Boundary layer behind a shock or thin expansion wave moving into stationary fluid*. 1956.
- [20] O. A. Oleinik and V. N. Samokhin. *Mathematical Models in Boundary Layer Theory*. CHAPMAN and HALL/CRC, 1999.
- [21] L. Quartapelle and S. Rebay. Numerical solution of two-point boundary value problem. *Journal of computational physics*, 86, 1990.
- [22] L. Quartapelle and A. Scandroglio. Solution of the falkner-skane equation to determine reverse flow. *Scientific Report*, DIA SR 03-05, 2003.
- [23] D. F. Rogers. *Laminar flow analysis*. Cambridge University Press, 1992.
- [24] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary-Layer Theory - 8th Revised and Enlarged Edition*. Springer, 2000.
- [25] P. A. Thompson. *Compressible-fluid dynamics*. McGraw-Hill, 1984.
- [26] M. Van Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, 1975.
- [27] W. Walter. Die linienmethode bei nichtlinearen parabolischen differentialgleichungen. *Numer. Math.*, 12, 1968.
- [28] W. Walter. Ein existenzbeweis für nichtlineare parabolische differentialgleichungen aufgrund der linienmethode. *Math. Ztschr.*, 107, 1968.