

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in
Ingegneria Aeronautica



Schemi ibridi agli elementi/volumi finiti su reticoli non strutturati in coordinate curvilinee ortogonali

Relatore: Prof. Alberto GUARDONE

Tesi di Laurea di:
Dante DE SANTIS Matr. 708603
Gianluca GERACI Matr. 711443

Anno Accademico 2009 - 2010

Indice

Sommario e Abstract	1
Introduzione	3
1 Leggi di conservazione in coordinate curvilinee ortogonali	7
1.1 La forma integrale e la forma differenziale	7
1.2 Le equazioni di Eulero	8
1.2.1 Termodinamica	9
1.2.2 Condizioni iniziali e al contorno	11
1.3 Sistemi di coordinate curvilinee ortogonali	12
1.3.1 Sistema di coordinate cartesiane	15
1.3.2 Sistema di coordinate cilindriche	15
1.3.3 Sistema di coordinate sferiche	17
1.3.4 Operatori divergenza e gradiente in una e due dimensioni . . .	19
1.4 L'equazione scalare in coordinate ortogonali	22
1.4.1 Equazione scalare bidimensionale	23
1.4.2 Equazione scalare monodimensionale	24
1.5 Le equazioni di Eulero in coordinate ortogonali	25
1.5.1 Coordinate cartesiane	25
1.5.2 Coordinate cilindriche	29
1.5.3 Coordinate sferiche	34
2 Equivalenza volumi/elementi finiti in coordinate cilindriche	41
2.1 Il caso tridimensionale	41
2.1.1 Discretizzazione agli elementi finiti	42
2.1.2 Discretizzazione ai volumi finiti	48
2.1.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM	50
2.2 Caso assialsimmetrico $Z-R$	53
2.2.1 Discretizzazione a elementi finiti	53
2.2.2 Discretizzazione a volumi finiti	55
2.2.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM	55
2.3 Caso polare $R-\theta$	57
2.3.1 Discretizzazione a elementi finiti	57
2.3.2 Discretizzazione a volumi finiti	58
2.3.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM	58
2.4 Caso monodimensionale	59
2.4.1 Discretizzazione a elementi finiti	60
2.4.2 Discretizzazione a volumi finiti	61

2.4.3	Condizione di equivalenza FEM-FVM	63
3	Equivalenza volumi/elementi finiti in coordinate sferiche	65
3.1	Il caso tridimensionale	65
3.1.1	Discretizzazione a elementi finiti	65
3.1.2	Discretizzazione a volumi finiti	67
3.1.3	Condizione di equivalenza FEM-FVM	68
3.2	Il caso sferico bidimensionale $r-\phi$	69
3.2.1	Discretizzazione a elementi finiti	69
3.2.2	Discretizzazione a volumi finiti	71
3.2.3	Condizione di equivalenza FEM-FVM	71
3.3	Il caso monodimensionale	72
3.3.1	Discretizzazione a elementi finiti	72
3.3.2	Discretizzazione a volumi finiti	74
3.3.3	Condizione di equivalenza FEM-FVM	75
4	La forma discreta delle equazioni di Eulero	77
4.1	La discretizzazione node-pair in coordinate cilindriche	77
4.1.1	Il caso tridimensionale	77
4.1.2	Caso assialsimmetrico $Z-R$	79
4.1.3	Caso polare $R-\theta$	80
4.1.4	Caso monodimensionale	81
4.2	Coordinate sferiche	81
4.2.1	Il caso tridimensionale	82
4.2.2	Il caso sferico bidimensionale $r-\phi$	83
4.2.3	Caso monodimensionale	84
4.3	Le condizioni al contorno	85
4.4	Lo schema TVD ad alta risoluzione	85
4.4.1	La linearizzazione di Roe	86
4.4.2	Lo schema upwind del primo ordine	88
4.4.3	Lo schema ad alta risoluzione	89
4.5	La discretizzazione in tempo	90
5	Risultati numerici	93
5.1	Il problema dell'esplosione e dell'implosione	93
5.2	Il problema monodimensionale	94
5.2.1	Accuratezza del metodo numerico	96
5.3	Il problema bidimensionale	99
5.3.1	Risultati in coordinate cilindriche	99
5.3.2	Risultati in coordinate sferiche	105
5.4	Urti convergenti su ostacoli	115
6	Conclusioni e sviluppi futuri	127
A	L'autostruttura delle equazioni di Eulero	131

B Operatori divergenza nei sistemi curvilinei ortogonali	133
--	-----

Elenco delle figure

1.1	Superfici coordinate u, v e w insieme alla base ortogonale $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$. . .	13
1.2	Sistemi di coordinate cartesiane (a), cilindriche (b). In blu sono indicati i versori del sistema di riferimento, in rosso sono indicati i valori delle coordinate.	16
1.3	Sistemi di coordinate sferiche. In blu sono indicati i versori del sistema di riferimento, in rosso sono indicati i valori delle coordinate.	17
1.4	Domini monodimensionali (blu), bidimensionali (tratteggiato) e tridimensionali (rosso), per sistemi di coordinate cilindriche (a) e sferiche (b).	20
2.1	Intersezione Ω_{ik} dei supporti Ω_i e Ω_k dei nodi i e k	43
2.2	Interfaccia di cella $\partial\mathcal{C}_{ik}$ tra le celle \mathcal{C}_i e \mathcal{C}_k	49
2.3	Esempio di dominio monodimensionale con griglia a spaziatura non uniforme. Sono riportate a titolo esemplificativo le funzioni di forma Lagrangiane in corrispondenza di un generico nodo i all'interno del dominio e un generico nodo k posto invece sul bordo; per entrambe le funzioni di forma φ_i e φ_k sono evidenziati anche i supporti.	61
2.4	Esempio di dominio monodimensionale con in evidenza le celle associate ai generici nodi FVM i -esimo, appartenente al dominio, e j -esimo, appartenente al bordo.	62
4.1	La struttura estesa dei node-pair per lo schema ad alta risoluzione. I nodi i^* e k^* sono i nodi degli stati upwind.	90
5.1	Rappresentazione schematica del problema dell'esplosione, (a), e del problema dell'implosione, (b).	94
5.2	Nella prima riga: pressione (a) e densità (b) per il problema dell'esplosione nel sistema di coordinate cilindriche. Nella prima riga: pressione (c) e densità (d) per il problema dell'esplosione nel sistema di coordinate sferiche.	95
5.3	Nella prima riga: pressione (a) e densità (b) per il problema dell'implosione nel sistema di coordinate cilindriche. Nella prima riga: pressione (c) e densità (d) per il problema dell'implosione nel sistema di coordinate sferiche.	96
5.4	Raggio dell'urto convergente al variare del tempo calcolato dalle simulazioni numeriche monodimensionali confrontato con quello calcolato dalla relazione di similarità di Guderley: (a) problema cilindrico, (b) problema sferico.	97

5.5	Curve di convergenza in tempo per il problema dell'implosione per il caso cilindrico (a) e per il caso sferico (b).	98
5.6	Curve di convergenza in spazio per il problema dell'implosione per il caso cilindrico (a) e per il caso sferico (b).	99
5.7	Esempio di griglia usata per il problema dell'esplosione e implosione. Nel caso assisimmetrico l'asse è rappresentato dal bordo allineato con l'asse x della figura. La griglia mostrata è la più rada tra quelle usate.	100
5.8	Isolinee della densità per il problema dell'esplosione cilindrica in coordinate $R-\theta$: (a) $t = 0.05$; (b) $t = 0.16$; (c) $t = 0.20$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, cilindrica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.	102
5.9	Isolinee della densità per il problema dell'esplosione cilindrica in coordinate $Z-R$: (a) $t = 0.05$; (b) $t = 0.16$; (c) $t = 0.20$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.	103
5.10	Confronto del segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ per il problema dell'esplosione al tempo $t = 0.16$ per griglie con diverse risoluzioni spaziali. Il segnale è confrontato con la soluzione monodimensionale cilindrica e quella sferica, rispettivamente nel caso polare, (a), e in quello assisimmetrico, (b).	104
5.11	Confronto del segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ per il problema dell'esplosione al tempo $t = 0.16$ per diversi passi temporali. Il segnale è confrontato con la soluzione monodimensionale cilindrica e quella sferica, rispettivamente nel caso polare, (a), e in quello assisimmetrico, (b).	104
5.12	Isolinee della densità per il problema dell'implosione cilindrica in coordinate $R-\theta$: (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.12$; (c) $t = 0.16$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, cilindrica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.	106
5.13	Isolinee della densità per il problema dell'implosione cilindrica in coordinate $Z-R$: (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.12$; (c) $t = 0.16$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.	107
5.14	Confronto del segnale della densità lungo l'asse x al tempo $t = 0.16$ tra lo schema con equivalenza FVE e quello modificato FVE* per lo schema cilindrico $R-\theta$. In (b) è riportato un particolare del segnale.	108

5.15	Confronto del segnale della densità lungo l'asse x al tempo $t = 0.16$ tra lo schema con equivalenza FVE e quello modificato FVE* per il caso cilindrico $Z-R$. In (b) è riportato un particolare del segnale.	108
5.16	Isolinee della densità per il problema dell'esplosione sferica: (a) $t = 0.05$; (b) $t = 0.16$; (c) $t = 0.20$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.	109
5.17	Confronto del segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ per il problema dell'esplosione in coordinate sferiche al tempo $t = 0.16$ per griglie con diverse risoluzioni spaziali, (a), e per diversi passi temporali (b). Il segnale è confrontato con la soluzione monodimensionale sferica.	110
5.18	Isolinee della densità per il problema dell'implosione sferica: (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.12$; (c) $t = 0.16$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.	111
5.19	Contours della pressione (a), (c) e della densità (b), (d) per il problema dell'esplosione a due diversi istanti di tempo: $t = 0.1$ prima riga, $t = 0.16$ seconda riga. Sul piano orizzontale di ogni immagine è riportata la soluzione bidimensionale sferica nelle coordinate $r-\phi$ mentre sul piano verticale è riportata la soluzione cilindrica assisimmetrica nel piano $Z-R$	112
5.20	Contours della pressione (a), (c) e della densità (b), (d) per il problema dell'implosione a due diversi istanti di tempo: $t = 0.1$ prima riga, $t = 0.32$ seconda riga. Sul piano orizzontale di ogni immagine è riportata la soluzione bidimensionale sferica nelle coordinate $r-\phi$ mentre sul piano verticale è riportata la soluzione cilindrica assisimmetrica nel piano $Z-R$	113
5.21	Confronto del segnale della densità lungo l'asse x al tempo $t = 0.16$ tra lo schema con equivalenza FVE e quello modificato FVE* nel caso sferico. In (b) è riportato un particolare del segnale.	114
5.22	Il dominio computazionale cilindrico usato per lo studio delle onde convergenti su quattro ostacoli. La circonferenza tratteggiata indica la posizione della discontinuità iniziale della pressione e della densità.	116
5.23	Schlieren numerica del problema dell'implosione cilindrica su quattro ostacoli cilindrici a diversi istanti di tempo. Le figure (a)-(c) mostrano l'urto convergente prima di raggiungere l'origine, le figure (d)-(f) mostrano l'urto dopo la riflessione sull'origine.	118
5.24	Confronto della soluzione dell'urto convergente su quattro ostacoli usando lo schema numerico in coordinate cilindriche con la soluzione dello schema numerico in coordinate cartesiane. In quest ultimo caso solo un quarto dell'intero dominio è stato discretizzato.	119

- 5.25 Particolare della Schlieren numerica al tempo $t = 0.18$. Si nota la struttura del punto triplo composta dall'urto di Mach, dall'urto convergente e dall'urto riflesso dal cilindro. Nella simulazione il flusso è diretto da sinistra a destra. 120
- 5.26 Dominio per la simulazione dell'interazione tra l'urto convergente e otto ostacoli cilindrici. Viene indicato in rosso anche l'effettivo dominio utilizzato per la simulazione, ridotto in accordo alla simmetria geometrica. 121
- 5.27 Confronto tra i risultati numerici ($t = 0.30$, figura 5.27(a) e $t = 0.46$, figura 5.27(b)) dello schema in coordinate cilindriche presentato in questo lavoro (settore circolare da 0° a 45°) e quello impiegante le coordinate cartesiane (settore circolare da 45° a 90°). 122
- 5.28 Schlieren numerica del problema dell'implosione cilindrica su otto ostacoli cilindrici a diversi istanti di tempo. Le figure (a)–(c) mostrano l'urto convergente prima di raggiungere l'origine, le figure (d)–(f) mostrano l'urto dopo la riflessione sull'origine. 123
- 5.29 Il dominio computazionale usato per lo studio dell'urto cilindrico/sferico su un ostacolo cilindrico/sferico. La linea tratto-punto indica l'asse di simmetria nel caso del problema assisimmetrico. La circonferenza tratteggiata indica la posizione della discontinuità iniziale della pressione e della densità. 124
- 5.30 Schlieren numerica a diversi istanti di tempo del problema dell'implosione con due ostacoli; solo uno ne è mostrato in virtù della simmetria del problema. In tutte le immagini la metà superiore rappresenta l'urto cilindrico che converge su un ostacolo cilindrico, la metà inferiore rappresenta l'urto sferico che converge su un ostacolo sferico. 125

Sommario

Nel presente lavoro viene presentato uno schema numerico misto elementi/volumi finiti per la discretizzazione delle leggi di conservazione in coordinate curvilinee ortogonali. Vengono ricavate delle condizioni di equivalenza che legano le metriche dello schema ai volumi finiti agli integrali dello schema agli elementi finiti in sistemi di coordinate cilindriche e sferiche, come già fatto in altri lavori nel caso di coordinate cartesiane e per problemi assisimetrici. A differenza di questi casi, però, qui non vengono trascurati i termini di ordine superiore nell'ottenere le metriche dei volumi finiti da quelle degli elementi finiti. L'uso combinato dei due schemi permette di utilizzare le tecniche usuali di stabilizzazione dei volumi finiti e gli schemi ad alta risoluzione nella risoluzione di problemi descritti in coordinate curvilinee ortogonali. Lo schema proposto viene utilizzato per la simulazione numerica di problemi di esplosione ed implosione per una corrente comprimibile di fluido non viscoso. Per il problema dell'implosione, viene studiato anche l'effetto della presenza di ostacoli cilindrici su urti cilindrici convergenti: questa tecnica è stata recentemente proposta per modificare la forma degli urti convergenti al fine di incrementare la stabilità del fronte d'onda. Infine viene simulata numericamente l'interazione di urti convergenti sferici con ostacoli sferici e i risultati sono confrontati con la loro controparte cilindrica.

Parole chiave: Flussi comprimibili, Onde d'urto, Problema di esplosione/implosione, Coordinate curvilinee ortogonali, metodo agli elementi/volumi finiti.

Abstract

A numerical scheme based on a mixed finite element/finite volume method for the conservation laws in orthogonal curvilinear references is presented. Equivalence conditions relating the finite volume and the finite element metrics are derived for the cylindrical and spherical coordinate systems, similarly to what have been done in literature for the Cartesian and axisymmetric cases. Differently from these references, equivalence conditions are derived here without introducing any approximation to determine the finite volume metric quantities from finite element ones. The combined use of both schemes allow to use standard finite volume stabilisation techniques and high-resolution schemes in the computation of problems in orthogonal curvilinear references. The presented method is used to carry out numerical simulations of explosion and implosion problems for inviscid compressible flows. For the implosion problem, numerical simulations include also the effect of the presence of cylindrical obstacles in the flow field, which have been recently proposed as a mean to modify the shape of a cylindrical converging shock to increase the shock front stability. The interaction between spherical converging shocks and spherical obstacle is also computed and the solution is compared to its cylindrical counterpart. **Keywords:** Compressible flows, Shock waves, Explosion/Implosion problem, Orthogonal curvilinear coordinates, Finite Element/Volume Methods.

Introduzione

Diversi problemi in gasdinamica presentano una distribuzione simmetrica (cilindrica o sferica) delle grandezze che li caratterizzano. Tali simmetrie possono essere sfruttate per semplificare le equazioni di governo qualora queste siano scritte in sistemi di coordinate cilindrici o sferici. Tra queste tipologie di flussi quelli di maggior interesse risultano essere: flussi convergenti o divergenti in detonazioni, flussi astrofisici, applicazioni di fusione a confinamento inerziale, fenomeni di sonoluminescenza, problemi di *laser breakdown*, esplosioni nucleari e flussi in ugelli assialsimmetrici. I primi sviluppi in questo campo di ricerca si ebbero con gli scienziati al lavoro sui dispositivi nucleari durante la seconda guerra mondiale e sono associati ai nomi di Taylor, von Neumann, Sedov, Landau, Bethe e molti altri, si veda il lavoro di Sachdev [38].

Nel 1955 Goldstine e von Neumann [14] e Brode [4] furono i primi a risolvere numericamente le equazioni di Eulero in coordinate sferiche per problemi monodimensionali utilizzando la tecnica della viscosità artificiale. Nel 1957, Payne [29] usò un'approssimazione a differenze finite per risolvere il problema dell'implosione sferica. Venti anni dopo, Sod [43] applicò per la prima volta una tecnica di risoluzione basata su un solutore di Riemann. Nel 1999, Liu e collaboratori [26] utilizzarono una tecnica *Total Variation Diminishing* (TVD) basata sul lavoro di Harten [21], nella quale lo schema numerico era ottenuto da un'opportuna combinazione di un metodo numerico di ordine elevato con uno di ordine inferiore da utilizzarsi in corrispondenza delle discontinuità del flusso.

Nell'ambito degli schemi TVD per la risoluzione delle equazioni di Eulero, una possibilità interessante è rappresentata dall'utilizzo di un approccio misto elementi/volumi finiti [11, 40], nel quale uno schema *upwind* del primo ordine a volumi finiti (FVM) è usato per catturare le discontinuità senza oscillazioni spurie, mentre uno schema a elementi finiti (FEM), con funzioni di forma Lagrangiane lineari, è utilizzato nelle regioni di flusso continuo. L'uso combinato di questi due differenti approcci è reso possibile dall'introduzione di opportune condizioni di equivalenza che permettono di collegare le metriche FVM agli integrali FEM. Nei correnti viscosi, è anche possibile utilizzare lo schema FEM per discretizzare i contributi addizionali alle equazioni dovuti all'azione della viscosità e della conduttività termica [41]. Tale possibilità potrebbe essere utilizzata, ad esempio, nello studio degli effetti della viscosità sulla formazione di fronti di urti stabili in problemi con simmetrie cilindriche o sferiche.

L'idea fondamentale nella determinazione dell'equivalenza tra gli schemi FVM e FEM consiste nell'introduzione di una struttura a coppia di nodi o *node-pair*. Nell'ambito dei volumi finiti, con il termine *node-pair* si indica una coppia di nodi i quali condividono una parte del contorno del volume di controllo, detta interfaccia.

Dal punto di vista degli elementi finiti invece, un node-pair è una coppia di nodi ai quali sono associate delle funzioni di forma Lagrangiane aventi una parte del supporto delle funzioni test in comune. Di conseguenza, l'idea di definire delle opportune quantità metriche associate ai node-pair o ai nodi della griglia di calcolo permette di sviluppare algoritmi notevolmente efficienti, in quanto le quantità metriche possono essere calcolate una sola volta all'inizio della simulazione numerica. Si nota in merito che come quantità metriche sono da intendersi sia gli integrali contenuti nella discretizzazione FEM, sia le entità geometriche associate alla formulazione FVM.

L'obiettivo del presente lavoro è di derivare per la prima volta le condizioni di equivalenza correlanti gli schemi FEM/FVM per le equazioni di Eulero multidimensionali per correnti descritte in sistemi di coordinate cilindriche e sferiche senza trascurare i termini di ordine superiore nella discretizzazione dell'operatore divergenza nello schema FEM. Nei lavori di Selmin [41], per sistemi di coordinate cartesiane, e Guardone e Vigevano [19], nel caso di correnti assialsimmetriche, i contributi di ordine superiore derivanti dalla discretizzazione dell'operatore di divergenza erano stati sempre trascurati. Questa tesi prende le mosse proprio dai lavori appena citati i quali avevano già ispirato la tesi di Manuel Pasta [28] sulla determinazione della condizione di equivalenza in coordinate curvilinee ortogonali. Nel lavoro di Pasta si era effettuata una scelta di coordinate che non costituiscono un sistema ortogonale compromettendo pertanto quanto poi sviluppato, a rigore valido solo per sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Nel presente lavoro, pertanto, sono state ricavate delle nuove condizioni di equivalenza utilizzando soltanto sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Questo lavoro ha inoltre beneficiato della disponibilità di un codice di calcolo, già in uso nel Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale del Politecnico di Milano, che ha costituito la base per l'estensione ai sistemi di coordinate cilindriche e sferiche effettuata in questo lavoro.

Il lavoro è organizzato come segue. Nel Capitolo 1 sono descritti i sistemi di coordinate curvilinee ortogonali (cartesiano, cilindrico e sferico) e gli operatori divergenza e gradiente. In questi sistemi di coordinate viene anche scritta l'equazione di conservazione scalare mostrando esplicitamente i casi tridimensionali, bidimensionali cilindrico (polare e assialsimmetrico) e sferico, e quelli monodimensionali. In accordo a quanto mostrato per l'equazione scalare viene fornita l'estensione relativa al sistema delle equazioni di Eulero.

Nel Capitolo 2 e nel Capitolo 3 viene ricavata la forma discreta dell'equazione scalare in coordinate cilindriche e sferiche. Per i casi multidimensionali e monodimensionale sono ricavate le discretizzazioni, dell'equazione scalare, agli elementi e volumi finiti in forma node-pair. Vengono anche ricavate le condizioni di equivalenza tra i due schemi.

Una volta descritte le formulazioni node-pair per le equazioni di Eulero nei vari sistemi di coordinate, nel Capitolo 4 viene illustrato lo schema TVD ad alta risoluzione implementato nel codice di calcolo adottato per le simulazioni numeriche. Questo è uno schema ibrido dato da un'opportuna combinazione dello schema del prim'ordine FVM upwind elaborato da Roe, con lo schema FVM centrato del second'ordine qui trattato. Ovviamente le quantità metriche ai volumi finiti sono state ottenute da quelle agli elementi finiti applicando la condizione di equivalenza. Vie-

ne quindi brevemente descritta la discretizzazione della derivata temporale presente nelle equazioni di Eulero.

Nel Capitolo 5 gli schemi numerici proposti vengono utilizzati per la simulazione dei problemi di implosione ed esplosione in coordinate cilindriche e sferiche bidimensionali e monodimensionali, dopo aver verificato le caratteristiche di convergenza in spazio e in tempo. Come ulteriore applicazione è stato affrontato il problema dell'interazione dell'urto convergente, cilindrico o sferico con ostacoli.

Leggi di conservazione in coordinate curvilinee ortogonali

In questo capitolo vengono introdotte le leggi di conservazione multidimensionali sia per il problema scalare che per quello vettoriale, in particolare vengono riportate le leggi di conservazione che governano il moto di un fluido ideale non viscoso, che costituiscono il così detto sistema delle equazioni di Eulero. Tali leggi possono essere scritte in forma vettoriale compatta attraverso l'operatore *divergenza* ($\nabla \cdot (\cdot)$), così che abbiano la stessa espressione formale in ogni sistema di coordinate ortogonali, in osservanza al principio di invarianza delle leggi della fisica rispetto ad un cambiamento del sistema di riferimento. Dopo aver introdotto i sistemi di coordinate ortogonali, le equazioni di Eulero vengono scritte in modo esplicito in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche.

1.1 La forma integrale e la forma differenziale

Sia dato un volume di controllo $\Omega \in \mathbb{R}^d$ con superficie di contorno $\partial\Omega$, indipendente dal tempo, dove d è il numero di dimensioni spaziali. La legge di conservazione in forma integrale per una grandezza scalare $u(\mathbf{x}, t)$ risulta [25]

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0, \quad (1.1)$$

dove il flusso $\mathbf{f}(u) \in \mathbb{R}^d$ è una data funzione vettoriale dell'incognita $u(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}^+$ e $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ vettore normale al contorno $\partial\Omega$. Se la grandezza u è continua sia in spazio che in tempo, l'Eq. (1.1) può essere riscritta in forma differenziale come

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(u) = 0, \quad (1.2)$$

ottenendo così un'equazione differenziale alle derivate parziali tempo-dipendente. Come noto la forma differenziale ha una validità meno generale della forma integrale in quanto richiede che la variabile conservativa sia continua in spazio e tempo. Di conseguenza nell'Eq. (1.2) non sono contemplate soluzioni che presentino discontinuità come ad esempio onde d'urto o discontinuità di contatto.

Affinchè il problema risulti ben posto, la legge di conservazione deve essere

completata con opportune condizioni iniziali e al contorno [13]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(u) = 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \\ u|_{\partial\Omega_{in}} = b(s, t), \quad s \in \partial\Omega_{in}, \end{cases}$$

dove $u_0(\mathbf{x})$ è il valore della grandezza u assegnato all'istante iniziale su tutto il dominio Ω , mentre $b(s, t)$ è il valore di u assegnato ad ogni istante temporale sul contorno di ingresso (inflow), ovvero,

$$\partial\Omega_{in} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(u(\mathbf{x}, t)) < 0\},$$

con il vettore normale al contorno $\mathbf{n}(x)$ orientato verso l'esterno del dominio e con la velocità di advezione definita come

$$\mathbf{a}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{f}}{du}.$$

Si noti come la definizione di $\partial\Omega_{in}$ dipenda dal valore della soluzione $u(\mathbf{x}, t)$ sul contorno, quindi in generale il bordo di ingresso varia nel tempo. La restante porzione del bordo ($\partial\Omega_{out}$) viene definita come bordo di uscita (outflow), tale che $\partial\Omega = \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out}$.

La legge di conservazione per una grandezza vettoriale $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ è formalmente simile a quella scalare, in questo caso però il flusso non è più un vettore ma è un tensore, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. La legge di conservazione in forma differenziale per il caso vettoriale risulta quindi

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0.$$

1.2 Le equazioni di Eulero

Si consideri un flusso comprimibile di fluido ideale, cioè con viscosità e conducibilità termica nulle, si ritiene valida l'ipotesi del continuo e si assume che il fluido sia monocomponente, all'equilibrio termodinamico, con irraggiamento nullo e forze di volume assenti o comunque trascurabili. Il fluido può essere modellato dalle equazioni di Eulero che rappresentano la formalizzazione matematica della conservazione della massa, del bilancio della quantità di moto e dell'energia totale sotto le ipotesi introdotte. Per un generico volume di controllo si ha [13]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \rho \, d\mathcal{C} + \oint_{\partial\mathcal{C}} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\mathcal{C} = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{m} \, d\mathcal{C} + \oint_{\partial\mathcal{C}} \mathbf{m} \left(\frac{\mathbf{m}}{\rho} \cdot \mathbf{n} \right) \, d\partial\mathcal{C} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathcal{C} \subset \Omega \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} E^t \, d\mathcal{C} + \oint_{\partial\mathcal{C}} (E^t + \Pi) \left(\frac{\mathbf{m}}{\rho} \cdot \mathbf{n} \right) \, d\partial\mathcal{C} = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

dove $\rho \in \mathbb{R}^+$ è la densità del fluido, $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$ è il vettore quantità di moto, $E^t \in \mathbb{R}^+$ è l'energia totale per unità di volume, Π è la pressione espressa funzione delle variabili conservative

$$\Pi(\rho, \mathbf{m}, E^t) = P(e, \rho) = P\left(\frac{E^t}{\rho} - \frac{|\mathbf{m}|^2}{2\rho^2}, \rho\right),$$

in cui P è la pressione funzione dell'energia interna e per unità di massa e della densità. Il vettore \mathbf{n} è il vettore normale uscente dal contorno $\partial\mathcal{C}$.

Anche in questo caso se si considera il volume di controllo indipendente dal tempo e si ipotizza che la soluzione sia continua in spazio e tempo, il sistema di equazioni precedenti può essere riscritto in forma differenziale come

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{\rho} + P\mathbf{I}^d \right) = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \nabla \cdot \left((E^t + \Pi) \frac{\mathbf{m}}{\rho} \right) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

dove \mathbf{I}^d è la matrice identità $d \times d$ ed il simbolo \otimes indica il prodotto diretto.

Introducendo il vettore delle variabili conservative $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+2}$

$$\mathbf{u} = (\rho, \mathbf{m}, E^t)^T,$$

e il corrispondente iper-vettore dei flussi $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{d+2} \times \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_\rho, \mathbf{f}_m, \mathbf{f}_{E^t})^T = \left(\mathbf{m}, \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{\rho} + P\mathbf{I}^d, (E^t + \Pi) \frac{\mathbf{m}}{\rho} \right)^T,$$

il sistema delle equazioni di Eulero può essere riscritto in forma vettoriale compatta

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Si noti come la funzione del flusso di Eulero $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ sia stata chiamata iper-vettore in quanto formata dall'accostamento del vettore flusso associato all'equazione scalare della massa, del tensore flusso associato all'equazione vettoriale della quantità di moto e del vettore flusso associato all'equazione scalare dell'energia.

1.2.1 Termodinamica

Per la chiusura del sistema delle equazioni di Eulero è necessario modellare il comportamento termodinamico del fluido, in particolare si deve definire l'espressione della pressione in funzione delle variabili conservative, $\Pi(\mathbf{u})$.

Se si considera un flusso all'equilibrio termodinamico è possibile introdurre una relazione fondamentale entropica da cui si possono ricavare tutte le grandezze termodinamiche [5], in particolare per un fluido monocomponente essa è esprimibile come

$$S = S(E, V, M),$$

in cui l'entropia S del sistema è legata all'energia per unità di volume E , al volume V e alla massa M del sistema. La relazione fondamentale gode delle seguenti proprietà

- i)* L'entropia del sistema è una funzione omogenea del primo ordine delle variabili estensive.
- ii)* L'entropia è una funzione superadditiva, cioè l'entropia di un sistema composto è minore o al più uguale alla somma dell'entropia dei sottosistemi che ne fanno parte.
- iii)* L'entropia è una funzione continua e differenziabile ed è strettamente monotona rispetto all'energia interna. Quindi la relazione fondamentale è invertibile in

$$E = E(S, V, M).$$

Si consideri ora il differenziale dell'energia

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V,M} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,M} dV + \left(\frac{\partial E}{\partial M} \right)_{S,V} dM, \quad (1.6)$$

le derivate parziali nell'equazione precedente sono dette parametri intensivi

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V,M}, \quad P \stackrel{\text{def}}{=} - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,M}, \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial E}{\partial M} \right)_{S,V},$$

e definiscono rispettivamente la temperatura, la pressione e un potenziale. Queste grandezze intensive sono funzione di S, V , e M ed è possibile scrivere

$$\begin{aligned} T &= T(S, V, M) = T(s, v), \\ P &= P(S, V, M) = P(s, v), \\ \mu &= \mu(S, V, M) = \mu(s, v), \end{aligned}$$

dove è stato fatto uso dell'omogeneità di ordine zero delle variabili estensive, derivante dall'omogeneità di ordine uno della relazione fondamentale, per scrivere le variabili intensive in funzione delle variabili estensive per unità di massa: s, v . Le relazioni tra le grandezze intensive e le grandezze estensive, come quelle appena scritte, sono dette equazioni di stato.

La conoscenza di una sola delle equazioni di stato non fornisce una descrizione completa della termodinamica del sistema, mentre la conoscenza di due equazioni di stato equivale alla conoscenza completa della funzione fondamentale. Bastano quindi solo due delle tre equazioni di stato per descrivere completamente lo stato termodinamico del sistema, ad esempio

$$P = P(e, \rho) \quad \text{e} \quad T = T(e, \rho).$$

Nel sistema delle equazioni di Eulero (1.5) l'incognita è costituita dal vettore \mathbf{u} delle variabili conservative ed è quindi necessario scrivere anche le variabili termodinamiche in funzione di \mathbf{u}

$$P = \Pi(\mathbf{u}) = P(e(\mathbf{u}), \rho) = P\left(\frac{E^t}{\rho} - \frac{|\mathbf{m}|^2}{2\rho^2}, \rho\right),$$

$$T = \Theta(\mathbf{u}) = T(e(\mathbf{u}), \rho) = T\left(\frac{E^t}{\rho} - \frac{|\mathbf{m}|^2}{2\rho^2}, \rho\right).$$

Si consideri il caso particolare di gas ideale politropico, le due equazioni di stato che lo caratterizzano sono

$$P(T, \rho) = RT\rho, \quad \text{e} \quad e(T) = \frac{RT}{\gamma - 1},$$

dove $R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$ con \mathcal{R} costante universale dei gas e \mathcal{M} massa molecolare del gas. Il parametro $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante rispettivamente, che per un gas politropico è costante. Sfruttando le equazioni di stato è possibile scrivere la pressione in funzione delle variabili conservative come

$$\Pi(\mathbf{u}) = (\gamma - 1) \left(E^t - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho} \right).$$

1.2.2 Condizioni iniziali e al contorno

Affinchè il sistema delle equazioni di Eulero sia ben posto deve essere completato con le condizioni iniziali e le condizioni al contorno [13].

Le condizioni iniziali specificano il valore all'istante iniziale della variabile conservativa $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ in tutto il dominio. L'imposizione delle condizioni al contorno presenta la complicazione che la definizione dei bordi di inflow e di outflow non è nota a priori, ma dipende dal valore della soluzione sul bordo. Inoltre nel caso del sistema iperbolico, come quello delle equazioni di Eulero, il vettore delle incognite ha più di una componente e quindi su ogni parte del bordo può essere specificato un numero diverso di condizioni al contorno. A queste difficoltà si aggiunge un altro elemento di complessità dovuto al fatto che l'imposizione delle condizioni al contorno per le leggi di conservazione viene tenuta in conto solo attraverso il valore del flusso sul contorno. Quindi, a differenza delle condizioni al contorno di Dirichlet, per le equazioni iperboliche non è richiesto che l'incognita assuma un determinato valore sul contorno, di conseguenza il valore che l'incognita assume sul contorno sarà solo un'approssimazione di quello che dovrebbe effettivamente assumere.

Per la trattazione dell'imposizione delle condizioni al contorno per i problemi iperboliche non lineari nell'ambito degli schemi ibridi FVM/FEM in formulazione node-pair si veda il lavoro di Guardone e Quartapelle [15].

1.3 Sistemi di coordinate curvilinee ortogonali

Un sistema riferimento viene utilizzato per individuare la posizione di un generico punto P nello spazio. A volte invece di individuare la posizione di un punto nello spazio attraverso le sue componenti in un sistema cartesiano può essere utile utilizzare altri sistemi di coordinate che permettano di semplificare la descrizione matematica del problema. Vengono qui introdotti i sistemi di coordinate ortogonali, in particolare quello cilindrico e quello sferico, successivamente vengono ricavate le espressioni del gradiente e della divergenza in questi sistemi di coordinate seguendo la trattazione di Adams [1].

Dato un sistema cartesiano nello spazio \mathbb{R}^3 xyz di coordinate $[x, y, z]$, si può definire uno spazio differente $\xi\eta\psi$ di coordinate $[\xi, \eta, \psi]$ tramite una trasformazione biunivoca

$$x = x(\xi, \eta, \psi), \quad y = y(\xi, \eta, \psi), \quad z = z(\xi, \eta, \psi),$$

dalla regione D dello spazio uvw alla regione R dello spazio xyz . Tale trasformazione permette di individuare un punto P di R da una terna $[\xi, \eta, \psi]$ tramite le coordinate del punto Q di D che la trasformazione porta in P . La trasformazione definisce un sistema di coordinate curvilinee in R e $[\xi, \eta, \psi]$ sono le coordinate curvilinee di P nello spazio xyz . In genere si richiede che la trasformazione sia biunivoca solo localmente, mentre i punti in cui la trasformazione non è biunivoca nemmeno localmente vengono detti punti singolari del sistema di riferimento.

Dato il sistema di coordinate curvilinee $[\xi, \eta, \psi]$ e un punto P_0 non singolare, le coordinate curvilinee del punto P_0 sono $[\xi_0, \eta_0, \psi_0]$. Un piano di equazione $\xi = \xi_0$ nello spazio $\xi\eta\psi$ viene trasformato in una superficie nello spazio xyz passante per P_0 , detta ξ -superficie e le sue equazioni parametriche sono

$$x = x(\xi_0, \eta, \psi), \quad y = y(\xi_0, \eta, \psi), \quad z = z(\xi_0, \eta, \psi),$$

nei parametri η e ψ . In modo analogo vengono definite la η -superficie $\eta = \eta_0$ e la ψ -superficie $\psi = \psi_0$ passanti per P_0 e corrispondenti ai piani $\eta = \eta_0$ e $\psi = \psi_0$ nello spazio ξ_0, η, ψ . Il sistema di coordinate curvilinee $[\xi, \eta, \psi]$ viene detto ortogonale se per ogni punto non singolare P_0 dello spazio xyz le tre superfici coordinate, $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ e $\psi = \psi_0$ si intersecano in P_0 formando angoli retti. In questo caso i tre vettori unitari $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\psi}$, passanti per il punto P_0 e tangenti rispettivamente alla ξ -curva, alla η -curva e alla ψ -curva nel punto P_0 sono ortogonali tra di loro. Tali vettori formano quindi una base locale nel punto P_0 , si veda la figura 1.1.

Si consideri il caso in cui i vettori $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\psi}$ formano una terna destrorsa. Dato un punto P nello spazio xyz , il vettore posizione scritto in termini delle coordinate curvilinee è

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x(\xi_0, \eta, \psi)\hat{\mathbf{x}} + y(\xi_0, \eta, \psi)\hat{\mathbf{y}} + z(\xi_0, \eta, \psi)\hat{\mathbf{z}} \\ &= \xi\hat{\xi} + \eta\hat{\eta} + \psi\hat{\psi} \end{aligned}$$

Prendendo $\eta = \eta_0$ e $\psi = \psi_0$ costanti, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta_0, \psi_0)$ definisce una ξ -curva nello spazio xyz , lungo ogni punto della quale il vettore

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\hat{\mathbf{z}}$$

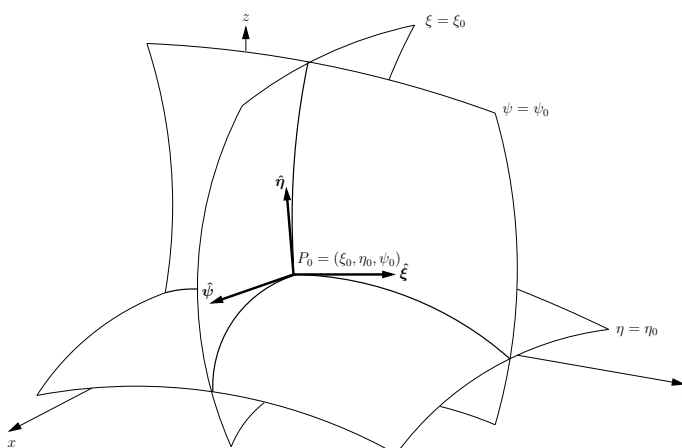


Figura 1.1: Superfici coordinate u, v e w insieme alla base ortogonale $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$.

è tangente alla ξ -curva. Facendo variare a turno anche η e ψ è possibile definire i tre vettori $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}$, rispettivamente tangenti alla ξ -curva, η -curva e ψ -curva passanti per P_0 e ortogonali tra di loro. Le lunghezze di questi vettori vengono definiti fattori di scala

$$h_\xi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right|, \quad h_\eta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right|, \quad h_\psi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} \right|,$$

attraverso i quali è quindi possibile riscrivere

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = h_\xi \hat{\xi}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = h_\eta \hat{\eta}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = h_\psi \hat{\psi}.$$

Si noti come nel caso di sistema cartesiano i fattori di scala risultino tutti unitari.

L'elemento di volume infinitesimo nel sistema di coordinate curvilinee è il volume racchiuso dalle coppie di superfici coordinate corrispondenti a ξ e $\xi + d\xi$, η e $\eta + d\eta$, ψ e $\psi + d\psi$, quindi risulta

$$dV = h_\xi h_\eta h_\psi d\xi d\eta d\psi,$$

essendo le superfici coordinate ortogonali tra loro per ipotesi. Le aree delle superfici coordinate definiscono le superfici infinitesime

$$dS_\xi = h_\eta h_\psi d\eta d\psi, \quad dS_\eta = h_\xi h_\psi d\xi d\psi, \quad dS_\psi = h_\xi h_\eta d\xi d\eta,$$

mentre le lunghezze delle curve coordinate definiscono gli elementi di lunghezza infinitesimi

$$ds_\xi = h_\xi d\xi, \quad ds_\eta = h_\eta d\eta, \quad ds_\psi = h_\psi d\psi.$$

Definiti gli elementi fondamentali dei sistemi di coordinate ortogonali è ora possibile ricavare gli operatori differenziali utilizzati nella scrittura vettoriale compatta delle leggi di conservazione nei sistemi di coordinate curvilinee ortogonali; l'utilizzo dei fattori di scala definiti sopra permette di giungere ad una scrittura unificata degli operatori differenziali nei diversi sistemi di coordinate. Vengono considerati di seguito l'operatore gradiente e l'operatore divergenza.

Si vuole ora esprimere il gradiente ∇f di un campo scalare f , in ogni punto P di coordinate curvilinee $[\xi, \eta, \psi]$, tramite la base locale di tale sistema di coordinate

$$\nabla f = G_\xi \hat{\boldsymbol{\xi}} + G_\eta \hat{\boldsymbol{\eta}} + G_\psi \hat{\boldsymbol{\psi}}.$$

Per determinare i coefficienti G_ξ , G_η e G_ψ si confrontano due espressioni delle derivate direzionali di f lungo una generica curva dello spazio xyz .

Data una curva \mathcal{C} parametrizzata tramite la lunghezza d'arco s , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, la derivata direzionale di f lungo \mathcal{C} è

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{ds}. \quad (1.7)$$

La derivata direzionale di f è anche data da $df/ds = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{t}}$, dove $\hat{\mathbf{t}}$ è il vettore tangente a \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} \frac{d\psi}{ds} \\ &= h_\xi \frac{d\xi}{ds} \hat{\boldsymbol{\xi}} + h_\eta \frac{d\eta}{ds} \hat{\boldsymbol{\eta}} + h_\psi \frac{d\psi}{ds} \hat{\boldsymbol{\psi}}, \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{t}} = G_\xi h_\xi \frac{d\xi}{ds} + G_\eta h_\eta \frac{d\eta}{ds} + G_\psi h_\psi \frac{d\psi}{ds}. \quad (1.8)$$

Confrontando l'Eq. (1.7) e l'Eq. (1.8) si ottiene

$$G_\xi h_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad G_\eta h_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad G_\psi h_\psi = \frac{\partial f}{\partial \psi},$$

per cui il gradiente in coordinate curvilinee ortogonali risulta

$$\nabla f = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \hat{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \hat{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{h_\psi} \frac{\partial f}{\partial \psi} \hat{\boldsymbol{\psi}}. \quad (1.9)$$

Si vuole ora calcolare la divergenza di un campo vettoriale \mathbf{F} espresso per mezzo delle coordinate curvilinee

$$\mathbf{F}(\xi, \eta, \psi) = F_u(\xi, \eta, \psi) \hat{\boldsymbol{\xi}} + F_v(\xi, \eta, \psi) \hat{\boldsymbol{\eta}} + F_w(\xi, \eta, \psi) \hat{\boldsymbol{\psi}}$$

Il flusso di \mathbf{F} uscente dal volume infinitesimo è la somma dei flussi uscenti dalle tre coppie di facce coordinate che lo delimitano. Il flusso uscente dalle ξ -superfici corrispondenti a ξ e $\xi + d\xi$ è

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(\xi + d\xi, \eta, \psi) \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} dS_\xi - \mathbf{F}(\xi, \eta, \psi) \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} dS_\xi \\ &= (F_\xi(\xi + d\xi, \eta, \psi)) h_\eta(\xi + d\xi, \eta, \psi) h_\psi(\xi + d\xi, \eta, \psi) \\ &\quad - (F_\xi(\xi, \eta, \psi)) h_\eta(\xi, \eta, \psi) h_\psi(\xi, \eta, \psi) d\eta d\psi \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\psi F_\xi) d\xi d\eta d\psi. \end{aligned}$$

Espressioni simili si ricavano per i flussi uscenti attraverso le altre due coppie di facce coordinate.

La divergenza di \mathbf{F} è definita come il flusso per unità di volume uscente dal volume infinitesimo in P

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(\xi, \eta, \psi) = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\psi} & \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\psi F_\xi(\xi, \eta, \psi)) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\psi F_\eta(\xi, \eta, \psi)) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \psi} (h_\xi h_\eta F_\psi(\xi, \eta, \psi)) \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Gli operatori gradiente e divergenza vengono ora scritti in forma estesa per il caso di coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche.

1.3.1 Sistema di coordinate cartesiane

Il sistema di coordinate cartesiane è definito dalle variabili $[x, y, z]$ di \mathbb{R}^3 , si veda la figura 1.2(a). Il vettore posizione può essere espresso come $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ da cui si evince che i fattori di scala risultano tutti unitari. Si riportano le espressioni dei ben noti operatori di gradiente e divergenza in coordinate cartesiane applicati, rispettivamente, ad un campo scalare $f^\square(x, y, z)$ e vettoriale $\mathbf{F}^\square = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}$:

$$\begin{aligned} \nabla^\square f^\square &= \frac{\partial f^\square}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f^\square}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f^\square}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}, \\ \nabla^\square \cdot \mathbf{F}^\square &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

dove l'apice \square è stato utilizzato per indicare, sull'operatore, la sua forma nello spazio cartesiano tridimensionale, mentre sui flussi indica la presenza delle componenti (f_x, f_y, f_z) .

1.3.2 Sistema di coordinate cilindriche

Il sistema di coordinate cilindrico è definito dalle variabili $[Z, R, \theta]$ di \mathbb{R}^3 attraverso la seguente trasformazione

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = Z,$$

con $R \geq 0$ (figura 1.2(b)). Si noti che i punti dell'asse Z sono punti singolari poichè la trasformazione $[Z, 0, \theta]$ non è biunivoca, infatti rappresenta lo stesso punto per qualunque valore di θ .

Il vettore posizione in coordinate cilindriche è $\mathbf{r} = R \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + Z \hat{\mathbf{z}}$, quindi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -R \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + R \cos \theta \hat{\mathbf{y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \hat{\mathbf{z}},$$

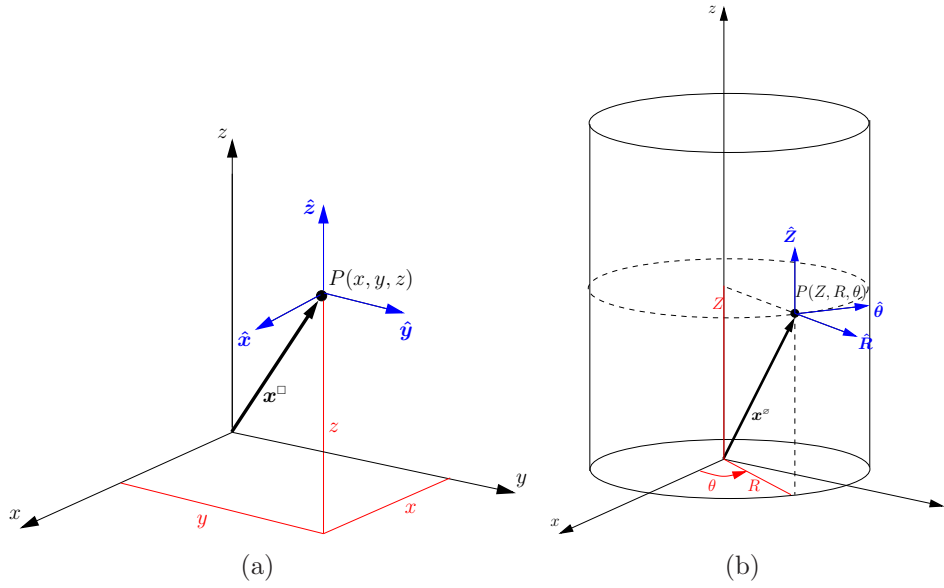


Figura 1.2: Sistemi di coordinate cartesiane (a), cilindriche (b). In blu sono indicati i versori del sistema di riferimento, in rosso sono indicati i valori delle coordinate.

da cui si ricava che i fattori di scala per il sistema di coordinate cilindriche sono

$$h_Z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Z} \right| = 1, \quad h_R = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \right| = 1, \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = R. \quad (1.11)$$

La base locale è formata dai vettori

$$\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{\mathbf{R}}(\theta) = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}},$$

che costituiscono una terna destrorsa, con $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dipendenti da θ

$$\frac{d\hat{\mathbf{R}}(\theta)}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta), \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)}{d\theta} = -\hat{\mathbf{R}}(\theta). \quad (1.12)$$

Dai fattori di scala per le coordinate cilindriche (1.11) si ottiene che l'elemento di volume risulta

$$dV = h_Z h_R h_\theta dZ dR d\theta = R dZ dR d\theta,$$

mentre gli elementi infinitesimi di superficie sono

$$dS_Z = R dR d\theta, \quad dS_R = R dZ d\theta, \quad dS_\theta = dZ dR.$$

Dalle definizioni di gradiente, Eq. (1.9), e divergenza, Eq. (1.10), in coordinate curvilinee ortogonali, si ricava che il gradiente di un campo scalare $f^\varphi(Z, R, \theta)$ in coordinate cilindriche è

$$\nabla^\varphi f^\varphi = \frac{\partial f^\varphi}{\partial Z} \hat{\mathbf{Z}} + \frac{\partial f^\varphi}{\partial R} \hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{R} \frac{\partial f^\varphi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.13)$$

mentre la divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{F}^\varnothing = F_Z \hat{\mathbf{Z}} + F_R \hat{\mathbf{R}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ è

$$\begin{aligned} \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{F}^\varnothing &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial Z}(RF_Z) + \frac{\partial}{\partial R}(RF_R) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{\partial F_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RF_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove l'apice \varnothing è stato utilizzato per indicare, sull'operatore, la sua forma nello spazio cilindrico tridimensionale, mentre sui flussi indica la presenza delle componenti (f_Z, f_R, f_θ) .

1.3.3 Sistema di coordinate sferiche

Il sistema di coordinate sferiche è definito dalle variabili $[r, \theta, \phi]$ di \mathbb{R}^3 attraverso la seguente trasformazione

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

con $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ (figura 1.3). La trasformazione non è biunivoca nei punti appartenenti all'asse z , infatti un punto di coordinate cartesiane $[0, 0, z]$ può essere rappresentato in coordinate sferiche da $[0, \theta, \phi]$ per qualunque valore di θ e ϕ se $z = 0$, da $[z, 0, \phi]$ o $[|z|, \pi, \phi]$ per qualunque valore di ϕ se $z > 0$ o $z < 0$ rispettivamente. Quindi i punti dell'asse z sono punti singolari per il sistema di coordinate sferiche.

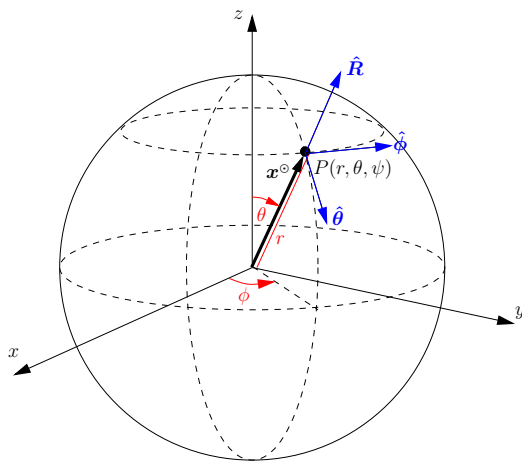


Figura 1.3: Sistemi di coordinate sferiche. In blu sono indicati i vettori del sistema di riferimento, in rosso sono indicati i valori delle coordinate.

Il vettore posizione è $\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$, quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + r \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - r \sin \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

da cui si ricava che i fattori di scala per il sistema di coordinate sferiche sono

$$h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r, \quad h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta.$$

La base locale è formata dai vettori

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi) &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \phi) &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi) &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

che costituiscono una terna destrorsa, con i primi due versori dipendenti da θ e ϕ , il terzo dipendente solo da ϕ

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi)}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \phi), \quad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \phi)}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi), \quad (1.15a)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi)}{\partial \phi} = \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi), \quad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \phi)}{\partial \phi} = \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi), \quad (1.15b)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi)}{d\phi} = -\sin \theta \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi) - \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \phi). \quad (1.15c)$$

Dai fattori di scala per le coordinate cilindriche si ottiene che l'elemento di volume risulta

$$dV = h_r h_\theta h_\phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

mentre gli elementi infinitesimi di superficie sono

$$dS_r = h_\theta h_\phi d\theta d\phi = r^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

$$dS_\theta = h_r h_\phi dr d\phi = r \sin \theta dr d\phi,$$

$$dS_\phi = h_r h_\theta dr d\theta = r dr d\theta.$$

Dalle definizioni di gradiente, Eq. (1.9), e divergenza, Eq. (1.10), in coordinate curvilinee ortogonali, si ricava che il gradiente di un campo scalare $f^\odot(r, \theta, \phi)$ in coordinate sferiche è

$$\nabla^\odot f^\odot = \frac{\partial f^\odot}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\odot}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f^\odot}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (1.16)$$

mentre la divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{F}^\odot = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ è

$$\begin{aligned} \nabla^\odot \cdot \mathbf{F}^\odot &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r F_\phi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

dove l'apice \odot è stato utilizzato per indicare, sull'operatore, la sua forma nello spazio sferico tridimensionale, mentre sui flussi indica la presenza delle componenti (f_r, f_θ, f_ϕ) .

1.3.4 Operatori divergenza e gradiente in una e due dimensioni

Viene ora affrontato il problema relativo alla definizione degli operatori differenziali gradiente e divergenza, in coordinate curvilinee ortogonali, coerentemente con quanto presentato in precedenza, nel caso in cui il problema presenti particolari simmetrie e possa essere descritto in uno spazio mono o bidimensionale, quindi ad esempio è il caso delle correnti a simmetria sferica, delle correnti piane e di quelle a simmetria assiale.

Non è inutile ricordare che qui, come molto spesso in letteratura, si abusa del termine bidimensionale intendendo talune volte un problema che trova la sua rappresentazione naturale su un piano come potrebbe essere ad esempio il moto di un corpo puntiforme su una superficie piana descritto completamente da due coordinate libere; talune altre volte, invece, con il termine bidimensionale si intende la rappresentazione su un piano, di un fenomeno che in realtà conserva tutte le caratteristiche di tridimensionalità, ma che presenta una simmetria (intesa come indipendenza della soluzione) rispetto ad una delle coordinate spaziali. Questa considerazione è estendibile in modo diretto al caso monodimensionale dove la simmetria deve invece esistere rispetto a due delle tre coordinate spaziali. L'utilizzo di sistemi di coordinate cilindriche e sferiche permette di rendere più agevole l'individuazione delle simmetrie in particolari classi di fenomeni fluidodinamici, per questo motivo, in questo lavoro, i termini bidimensionale e monodimensionale sono da ritenersi, quando associati a sistemi di coordinate cilindrico e sferico nell'accezione di fenomeno tridimensionale con presenza di simmetria rispetto a una o due delle coordinate spaziali. Concettualmente le equazioni bidimensionali in coordinate cilindriche o sferiche sono sempre tridimensionali in quanto tridimensionale risulta l'elemento di volume sulle quali le leggi di conservazione sono valide (si veda la figura 1.4). Questa considerazione non deve apparire una semplice precisazione, ma deve essere chiaro che vi si cela una più profonda conseguenza: operativamente le simulazioni numeriche di problemi in simmetria sono sempre eseguite sul numero ridotto di coordinate spaziali, altrimenti risulterebbe vana l'introduzione delle ipotesi di simmetria ricadendo sempre nel caso tridimensionale. Le equazioni devono quindi essere trattate come bidimensionali (pure) solo dopo che esse, partendo dalla forma tridimensionale sono state ridotte introducendo, in esse, le ipotesi di simmetria. Le equazioni così ottenute saranno (in generale) differenti da quelle ottenibili scrivendo direttamente l'equazione di conservazione (1.2) nel sistema ridotto considerato. Si faccia riferimento all'Appendice B per un elenco di tutti gli operatori divergenza in coordinate cilindriche e sferiche; vengono, inoltre, riportate esplicitamente le espressioni degli operatori nei casi bidimensionali e monodimensionali evidenziandone il legame con la controparte tridimensionale dopo l'imposizione delle condizioni di simmetria.

In questa sezione sarà pertanto possibile cogliere la sostanziale differenza che sussiste tra il sistema di coordinate cartesiano e quelli cilindrico e sferico: quando si utilizza un sistema di coordinate di tipo cartesiano le coordinate utilizzate per individuare un punto nello spazio sono corrispondenti a tre lunghezze con i relativi coefficienti metrici unitari. È, dunque, facile intuire come queste coordinate siano assolutamente interscambiabili tra loro, permettendo la descrizione di un fenomeno

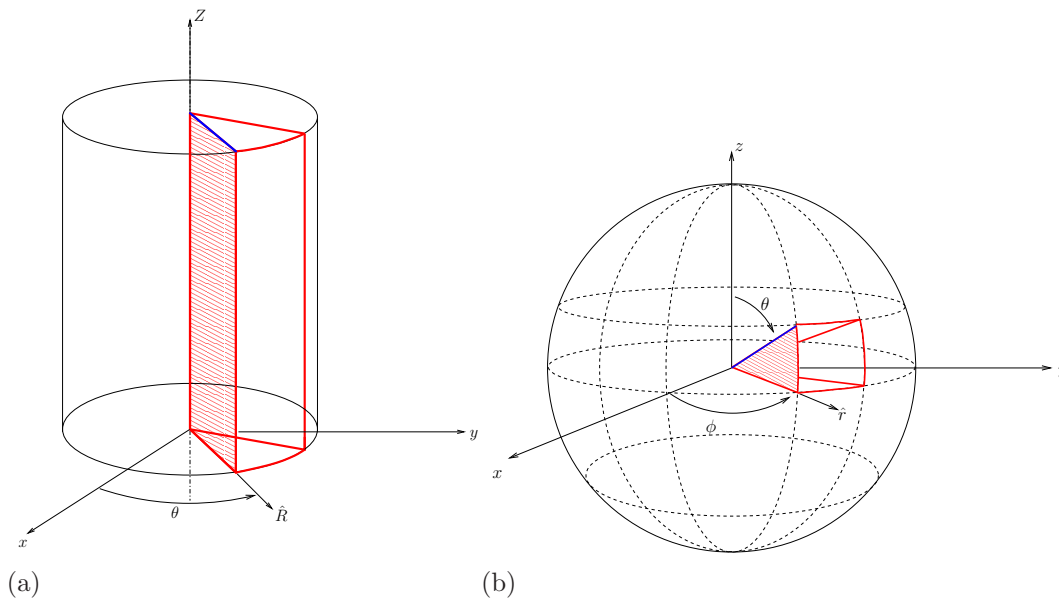


Figura 1.4: Domini monodimensionali (blu), bidimensionali (tratteggiato) e tridimensionali (rosso), per sistemi di coordinate cilindriche (a) e sferiche (b).

bidimensionale, in maniera formale del tutto equivalente, Per il sistema di coordinate cartesiano esiste formalmente una sola rappresentazione bidimensionale e l'operatore di divergenza cartesiano bidimensionale viene ottenuto direttamente eliminando la derivata relativa alla coordinata non utilizzata

$$\nabla^{xy} \cdot \mathbf{F}^{xy} = \frac{1}{h_x h_y} \left[\frac{\partial}{\partial x} (h_y F_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x F_y) \right] = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y},$$

dove si è mantenuta la consuetudine di scegliere il piano xy per il caso bidimensionale.

Si ricavano ora le forme assunte dall'operatore di divergenza nel caso di coordinate cilindriche e sferiche bidimensionali, infatti, è necessario distinguere tra questi due sistemi di coordinate. Ogni punto dello spazio nel sistema di coordinate cilindrico è definito utilizzando due lunghezze (Z e R) e un angolo (θ). Sarà, di conseguenza, possibile, eliminando una delle variabili, ottenere due sistemi bidimensionali di coordinate formalmente differenti in quanto costituiti o da due lunghezze o da una lunghezza e un angolo. I casi rilevanti risultano essere la descrizione di un fenomeno sul piano $Z-R$, ad esempio in presenza di simmetria assiale, oppure la scelta della coppia $R-\theta$ (caso polare) nel caso in cui si desideri la descrizione di un fenomeno bidimensionale in analogia con il caso cartesiano, ovvero riducendo un problema tridimensionale nel quale si possono ritenere nulle le variazioni della soluzione in una delle direzioni (Z nel caso qui in esame). Procedendo di conseguenza e ricordando che

$$h_Z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Z} \right| = 1, \quad h_R = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \right| = 1, \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = R,$$

è possibile scrivere

$$\begin{aligned}\nabla^{ZR} \cdot \mathbf{F}^{ZR} &= \frac{1}{h_Z h_R} \left[\frac{\partial}{\partial Z} (h_R F_Z) + \frac{\partial}{\partial R} (h_Z F_R) \right] = \frac{\partial F_Z}{\partial Z} + \frac{\partial F_R}{\partial R}, \\ \nabla^{R\theta} \cdot \mathbf{F}^{R\theta} &= \frac{1}{h_R h_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial R} (h_\theta F_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_R F_\theta) \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial (R F_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta},\end{aligned}$$

In analogia a quanto fatto per il caso delle coordinate cilindriche si possono effettuare le stesse considerazioni per il sistema sferico per il quale però, riducendosi ad un caso bidimensionale, si dovrà obbligatoriamente utilizzare una lunghezza (r) e uno a scelta degli angoli (ϕ o θ). A differenza del sistema di coordinate cilindriche qui le due rappresentazioni possibili ($r-\phi$ e $r-\theta$) forniscono le descrizioni della corrente su piani passanti per l'origine e, data la presenza di simmetria rispetto ad essa, devono risultare identiche. Per tale motivo si è assunto in questo lavoro di utilizzare la formulazione in $r-\phi$ che descrive il piano a θ costante e pari a $\pi/2$. L'impiego delle coordinate r e ϕ ricordando che

$$h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r, \quad h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta,$$

permette di esprimere l'operatore divergenza come:

$$\nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{F}^{r\phi} = \frac{1}{h_r h_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial R} (h_\phi F_R) + \frac{\partial}{\partial \phi} (h_R F_\phi) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}, \quad (1.18)$$

e imponendo un valore costante per θ pari a $\pi/2$:

$$\nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{F}^{r\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}. \quad (1.19)$$

Dopo aver mostrato la forma degli operatori differenziali di divergenza nei sistemi di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico per problemi bidimensionali è opportuno chiarire che, nel caso monodimensionale, l'operatore di divergenza si riduce alla derivata parziale rispetto all'unica coordinata spaziale presente. Pertanto, in questo lavoro si avranno $\partial/\partial x$, $\partial/\partial R$ e $\partial/\partial r$ rispettivamente per il sistema di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico.

Dopo aver presentato la forma assunta dagli operatori di divergenza nei sistemi di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico per le differenti scelte di coordinate bidimensionali e monodimensionali, si mostrano ora le espressioni assunte dagli operatori gradiente specializzando opportunamente l'Eq. (1.9).

Per il sistema di coordinate cartesiano bidimensionale si avrà, per una generica funzione scalare $f = f(x, y)$

$$\nabla^{xy} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}},$$

essendo i fattori di scala tutti unitari.

Per il sistema di coordinate cilindriche, nei casi bidimensionali $Z-R$ e $R-\theta$, per una generica funzione scalare $f = f(Z, R)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\nabla^{ZR}f &= \frac{\partial f}{\partial Z}\hat{\mathbf{Z}} + \frac{\partial f}{\partial R}\hat{\mathbf{R}}, \\ \nabla^{R\theta}f &= \frac{\partial f}{\partial R}\hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}},\end{aligned}$$

infatti, come mostrato, risultano unitari tutti i fattori di scala ad eccezione di $h_\theta = R$.

Nel caso di coordinate sferiche bidimensionali $r-\phi$, l'operatore gradiente applicato ad una generica funzione scalare $f = f(r, \phi)$ assume la forma

$$\nabla^{r\phi}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

in quanto l'unico fattore di scala differente da 1 è $h_\phi = 1/(r \sin\theta)$

Come già precisato per l'operatore di divergenza, anche l'operatore gradiente, espresso in un sistema di coordinate monodimensionali, si riduce alla derivata parziale rispetto all'unica coordinata spaziale presente, pertanto gli operatori gradiente in coordinate curvilinee ortogonali monodimensionali assumeranno la forma $\partial/\partial x \hat{\mathbf{x}}$, $\partial/\partial R \hat{\mathbf{R}}$ e $\partial/\partial r \hat{\mathbf{r}}$ rispettivamente nei casi cartesiano, cilindrico e sferico; i versori $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\mathbf{r}}$ sono mantenuti solo per analogia con i casi multidimensionali.

Per concludere questa breve nota in merito agli operatori differenziali è possibile far notare come, per l'operatore gradiente, sia possibile, nei sistemi di coordinate cilindrico e sferico senza incorrere in errore, generalizzare quanto permesso per tutti gli operatori differenziali in coordinate cartesiane: la riduzione di dimensioni spaziali è ottenibile eliminando direttamente le coordinate non utilizzate.

1.4 L'equazione scalare in coordinate ortogonali

L'equazione di conservazione scalare tridimensionale Eq. (1.2), scritta in forma compatta tramite l'operatore vettoriale di divergenza risulta indipendente dal sistema di coordinate considerato. Specificando l'operatore di divergenza nel generico sistema di coordinate curvilinee ortogonali $[\xi, \eta, \psi]$ possiamo riscrivere l'Eq. (1.2) come

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\psi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\psi f_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi h_\psi f_\eta) + \frac{\partial}{\partial \psi}(h_\xi h_\eta f_\psi) \right] = 0, \quad (1.20)$$

dove f_ξ , f_η e f_ψ sono le componenti del vettore flusso \mathbf{f} nel sistema di coordinate considerato.

Nel caso di sistema di coordinate cartesiane $\xi = x$, $\eta = y$ e $\psi = z$; i fattori di scala sono tutti unitari $h_x = h_y = h_z = 1$, quindi l'Eq. (1.20) per $u = u(z, y, z, t)$ diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 0. \quad (1.21)$$

Nel sistema di coordinate cilindriche $\xi = Z$, $\eta = R$ e $\psi = \theta$; i fattori di scala sono $h_Z = 1$, $h_R = 1$ e $h_\theta = R$, quindi l'Eq. (1.20) per $u = u(Z, R, \theta, t)$ diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R f_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (1.22)$$

Nel sistema di coordinate sferiche $\xi = r$, $\eta = \theta$ e $\psi = \phi$; i fattori di scala sono $h_r = 1$, $h_\theta = r$ e $h_\phi = r \sin \theta$, quindi l'Eq. (1.20) per $u = u(r, \theta, \phi, t)$ diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} = 0. \quad (1.23)$$

Pertanto, per quanto mostrato in §1.3.1, §1.3.2 e §1.3.3 le equazioni (1.21), (1.22) e (1.23) potranno scriversi in forma compatta vettoriale utilizzando il seguente formalismo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^\square \cdot \mathbf{f}^\square &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^\vartheta \cdot \mathbf{f}^\vartheta &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^\circ \cdot \mathbf{f}^\circ &= 0. \end{aligned}$$

1.4.1 Equazione scalare bidimensionale

Ricordando quanto mostrato in §1.3.4 si presenta ora l'equazione di conservazione scalare nei diversi sistemi di coordinate nella sua formulazione bidimensionale.

Per il caso cartesiano si utilizzeranno, come sempre in questo lavoro, le coordinate x e y , mentre per il caso cilindrico verranno mostrati entrambi i casi di simmetria assiale Z - R e il caso polare R - θ , infine, per il caso sferico, si procederà impiegando le coordinate r - ϕ nell'ipotesi di indipendenza dalla coordinata angolare θ .

Nel sistema di coordinate cartesiane si assume l'indipendenza della soluzione dalla coordinata z ($\partial/\partial z = 0$), pertanto partendo dall'equazione di conservazione tridimensionale (1.21) si giunge a scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0. \quad (1.24)$$

In forma vettoriale compatta, sfruttando quanto mostrato in §1.3.4, l'Eq. (1.24) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^{xy} \cdot \mathbf{f}^{xy} = 0. \quad (1.25)$$

Si noti come in questo caso, senza possibilità di generalizzazione, l'equazione di conservazione potrebbe essere scritta direttamente nel sistema di riferimento bidimensionale.

Nel sistema di coordinate cilindrico sono possibili due differenti scelte: assumere una simmetria attorno all'asse Z e quindi supporre la soluzione indipendente da

θ ($\partial/\partial\theta = 0$), oppure, riproducendo quanto fatto nel cartesiano bidimensionale, supporre tale soluzione indipendente dalla coordinata Z ($\partial/\partial Z = 0$). In entrambi i casi si parte dall'equazione di conservazione scalare in coordinate cilindriche tridimensionali e si introducono le condizioni di simmetria ottenendo per il caso $Z-R$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial(Rf_R)}{\partial R} = 0, \quad (1.26)$$

e per il caso $R-\theta$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial(Rf_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (1.27)$$

Sfruttando quanto mostrato in §1.3.4 le equazioni (1.26) e (1.27) sono esprimibili in forma vettoriale compatta come:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{f}^{ZR} + \frac{1}{R} f_R = 0, \quad (1.28)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^{R\theta} \cdot \mathbf{f}^{R\theta} = 0. \quad (1.29)$$

Similmente si può procedere nel caso di coordinate sferiche bidimensionali $r-\phi$, infatti, in questo caso, supponendo la soluzione indipendente dalla coordinata angolare θ si ottiene, partendo dall'Eq. (1.23)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} = 0. \quad (1.30)$$

Al fine di rendere indipendente l'equazione da θ è anche necessario specificarne un valore che selezionerà il piano sul quale verrà calcolata la soluzione. Si sceglierà ora e nel seguito di assegnare a θ il valore di $\pi/2$ ottenendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad (1.31)$$

che sfruttando quanto visto in §1.3.4 potrà scriversi in forma vettoriale compatta nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{f}^{r\phi} + \frac{1}{r} f_r = 0. \quad (1.32)$$

1.4.2 Equazione scalare monodimensionale

In stringente analogia con quanto appena presentato nel caso bidimensionale si procede qui mostrando la forma assunta dall'equazione di conservazione scalare nel caso monodimensionale, scegliendo come unica coordinata x per il caso cartesiano, R per il cilindrico e r per lo sferico.

Nel caso cartesiano il problema è esprimibile in forma monodimensionale qualora sia presente una indipendenza della soluzione da due coordinate (nel caso in

esame y e z). L'equazione di conservazione scalare scritta in coordinate cartesiane monodimensionali risulta, introdotte le opportune ipotesi nell'Eq. (1.21):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} = 0. \quad (1.33)$$

Per la scelta di coordinate cilindriche, qualora la soluzione sia indipendente dalla coordinata Z e dalla coordinata angolare θ , l'equazione di conservazione (1.20) si riduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_R}{\partial R} + \frac{1}{R} f_R = 0. \quad (1.34)$$

Allo stesso modo l'equazione di conservazione scalare scritta in coordinate sferiche, Eq. (1.23) con le ipotesi di indipendenza della soluzione dalle due variabili angolari θ e ϕ si riduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{2}{r} f_r = 0. \quad (1.35)$$

1.5 Le equazioni di Eulero in coordinate ortogonali

Il sistema di equazioni di Eulero scritto nella forma vettoriale compatta, Eq. (1.5), risulta indipendente dal sistema di coordinate utilizzato. Bisogna specificare l'espressione puramente formale $\nabla \cdot \mathbf{f}$ al particolare sistema di riferimento in cui sono formulate le equazioni. La divergenza risulta definita per vettori e tensori, mentre la funzione \mathbf{f} è un iper-vettore ottenuto dall'accostamento di due vettori e un tensore, quindi la definizione della divergenza deve essere applicata separatamente ai vettori e ai tensori che compongono l'iper-vettore. In questa sezione vengono riportate in maniera esplicita le equazioni di Eulero nei sistemi di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico.

1.5.1 Coordinate cartesiane

Si consideri la scrittura delle equazioni di Eulero nel sistema di coordinate cartesiane. Il vettore flusso di massa in coordinate cartesiane risulta

$$\mathbf{f}_\rho^\square = \mathbf{m}^\square = (m_x, m_y, m_z)^\text{T},$$

con m_x , m_y e m_z componenti della quantità di moto in direzione x , y e z rispettivamente. Usando la definizione di divergenza di un vettore in coordinate cartesiane come già fatto per l'equazione di conservazione scalare, Eq. (1.21), l'equazione di conservazione della massa diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} = 0. \quad (1.36)$$

Il flusso della quantità di moto è un tensore

$$\mathbf{f}_m^\square = \frac{\mathbf{m}^\square \otimes \mathbf{m}^\square}{\rho} + \Pi \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{m_x^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_x m_y}{\rho} & \frac{m_x m_z}{\rho} \\ \frac{m_y m_x}{\rho} & \frac{m_y^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_y m_z}{\rho} \\ \frac{m_z m_x}{\rho} & \frac{m_z m_y}{\rho} & \frac{m_z^2}{\rho} + \Pi \end{pmatrix}.$$

La divergenza di un tensore \mathbf{f} è definita come

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial e_i} (f_{ij} \hat{e}_j), \quad (1.37)$$

dove f_{ij} sono le componenti del tensore \mathbf{f} , invece \hat{e} rappresenta la base del sistema di coordinate considerato. Si noti che nella definizione di divergenza sono presenti anche le derivate spaziali dei versori.

Per il sistema cartesiano $\hat{e} = \hat{e}^\square = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e come noto i versori sono costanti nello spazio. Esplicitando la divergenza del tensore \mathbf{f} si ha

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{f})^\square &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y m_x}{\rho} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m_z m_x}{\rho} \right) \hat{x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x m_y}{\rho} \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m_z m_y}{\rho} \right) \hat{y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x m_z}{\rho} \right) \hat{z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y m_z}{\rho} \right) \hat{z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m_z^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{z}. \end{aligned}$$

In cui non compaiono le derivate spaziali dei versori dal momento che i versori cartesiani sono costanti. Le tre equazioni scalari che esprimono la conservazione della quantità di moto in coordinate cartesiane sono

$$\begin{cases} \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x^2}{\rho} + \Pi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y m_x}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m_z m_x}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial m_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x m_y}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y^2}{\rho} + \Pi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m_z m_y}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial m_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x m_z}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y m_z}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m_z^2}{\rho} + \Pi \right) = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

Infine, per l'equazione di conservazione dell'energia, definito il vettore funzione di flusso

$$\mathbf{f}_{E^t}^\square = \frac{\mathbf{m}^\square}{\rho} (E^t + \Pi) = \left(\frac{m_x}{\rho} (E^t + \Pi), \frac{m_y}{\rho} (E^t + \Pi), \frac{m_z}{\rho} (E^t + \Pi) \right)^\top,$$

applicando la definizione di divergenza di un vettore in coordinate cartesiane si ottiene

$$\frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{m_x}{\rho} (E^t + \Pi) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{m_y}{\rho} (E^t + \Pi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{m_z}{\rho} (E^t + \Pi) \right] = 0. \quad (1.39)$$

Introducendo il vettore delle variabili conservative in coordinate cartesiane

$$\mathbf{u}^\square(x, y, z, t) = (\rho, \mathbf{m}^\square, E^t)^\top,$$

con $\mathbf{m}^\square = (m_x, m_y, m_z)^\top$ e l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate cartesiane

$$\mathbf{f}^\square(\mathbf{u}^\square) = \begin{pmatrix} m_x & m_y & m_z \\ \frac{m_x^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_y m_x}{\rho} & \frac{m_z m_x}{\rho} \\ \frac{m_x m_y}{\rho} & \frac{m_y^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_z m_y}{\rho} \\ \frac{m_x m_z}{\rho} & \frac{m_y m_z}{\rho} & \frac{m_z^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_x}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_y}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_z}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

possiamo riscrivere il sistema di equazioni di Eulero nel sistema di coordinate cartesiane in forma compatta come

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\square}{\partial t} + \nabla^\square \cdot \mathbf{f}^\square = \mathbf{0}. \quad (1.40)$$

La scrittura in forma estesa e poi in forma compatta delle equazioni di Eulero in coordinate cartesiane può sembrare inutile in quanto l'espressione formale (1.5) o quella relativa al caso cartesiano (1.40) sono uguali. In effetti il sistema cartesiano è un caso particolare in cui i versori sono costanti. Nei sistemi di coordinate cilindriche o sferiche la dipendenza spaziale dei versori porterà invece alla presenza di un termine sorgente di natura geometrica.

Coordinate cartesiane bidimensionali

Perseguendo lo stesso approccio riservato all'equazione di conservazione scalare in §1.4 si vuole ora mostrare la forma assunta dal sistema di equazioni di Eulero qualora esso sia scritto per un problema bidimensionale utilizzando le coordinate cartesiane. Le ipotesi che permettono di ridurre il problema tridimensionale al caso bidimensionale analizzato sul piano x - y sono:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad m_z = 0. \quad (1.41)$$

Introducendo queste ipotesi semplificative nelle equazioni scalari di conservazione della massa (1.36), delle componenti di quantità di moto nelle direzioni x e y (1.38)

e dell'energia totale (1.39) si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x^2}{\rho} + \Pi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y m_x}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial m_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x m_y}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y^2}{\rho} + \Pi \right) = 0 \\ \frac{\partial m_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x m_z}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m_y m_z}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{m_x}{\rho} (E^t + \Pi) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{m_y}{\rho} (E^t + \Pi) \right] = 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

Ancora una volta si ribadisce che il sistema Eq. (1.42) è, senza possibilità di generalizzazione ai sistemi di coordinate cilindrico e sferico, ottenibile interpretando la versione compatta Eq. (1.40) del sistema di Eulero direttamente nelle due dimensioni spaziali senza la necessità di scriverne la forma tridimensionale per poi procedere all'introduzione delle ipotesi semplificative precedentemente riportate. In virtù, dunque, di quanto discusso in §.1.3.4 si può scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{xy}}{\partial t} + \nabla^{xy} \cdot \mathbf{f}^{xy} = \mathbf{0}, \quad (1.43)$$

dove si è fatto uso del vettore delle variabili conservative $\mathbf{u}^{xy}(x, y, t) = (\rho, \mathbf{m}^{xy}, E^t)$ con il vettore quantità di moto $\mathbf{m}^{xy} = (m_x, m_y)^T$ e dell'iper-vettore dei flussi

$$\mathbf{f}^{xy} = \begin{pmatrix} m_x & m_y \\ \frac{m_x^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_y m_x}{\rho} \\ \frac{m_x m_y}{\rho} & \frac{m_y^2}{\rho} \\ \frac{m_x m_z}{\rho} & \frac{m_y m_z}{\rho} \\ \frac{m_x}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_y}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix}.$$

Coordinate cartesiane monodimensionali

A partire dal sistema di equazioni di Eulero scritto per la corrente tridimensionale e descritto per mezzo di coordinate cartesiane, imponendo l'indipendenza della soluzione dalle variabili y e z è possibile ridurre il problema da tridimensionale a monodimensionale. Le ipotesi semplificative risultano essere:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = 0, \quad (1.44)$$

che permettono di semplificare le equazioni scalari di conservazione della massa (1.36), della componente di quantità di moto nella direzione x (1.38) e dell'energia totale (1.39) nel sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_x^2}{\rho} + \Pi \right) = 0 \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{m_x}{\rho} (E^t + \Pi) \right] = 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

La scrittura compatta del sistema (1.45) è:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^x}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (1.46)$$

dove sono stati definiti i vettori delle variabili conservative $\mathbf{u}^x(x, t) = (\rho, m_x, E^t)^T$ e dei flussi $\mathbf{f}^x(\mathbf{u}^x) = (m_x, m_x/\rho + \Pi, m_x/\rho(E^t + \Pi))$.

1.5.2 Coordinate cilindriche

Si consideri la scrittura delle equazioni di Eulero nel sistema di coordinate cilindrico. Il vettore flusso di massa in coordinate cilindriche è espresso come

$$\mathbf{f}_\rho^\varnothing = \mathbf{m}^\varnothing = (m_Z, m_R, m_\theta)^T,$$

con m_Z , m_R e m_θ componenti della quantità di moto in direzione Z , R e θ rispettivamente. Usando la definizione di divergenza di un vettore in coordinate cilindriche come già fatto per l'equazione scalare, Eq. (1.22), l'equazione di conservazione della massa diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R m_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (1.47)$$

Il flusso associato alla quantità di moto è il seguente tensore

$$\mathbf{f}_m^\varnothing = \frac{\mathbf{m}^\varnothing \otimes \mathbf{m}^\varnothing}{\rho} + \Pi \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_Z m_R}{\rho} & \frac{m_Z m_\theta}{\rho} \\ \frac{m_R m_Z}{\rho} & \frac{m_R^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_R m_\theta}{\rho} \\ \frac{m_\theta m_Z}{\rho} & \frac{m_\theta m_R}{\rho} & \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \end{pmatrix}.$$

Ricordando la definizione di divergenza di un tensore, Eq. (1.37), qui riproposta per convenienza

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial e_i} (f_{ij} \hat{e}_j),$$

con $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}^\vartheta = (\hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{R}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, in cui $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sono funzioni della coordinata θ , si ottiene la seguente espressione per il flusso della quantità di moto

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{f})^\vartheta &= \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R m_Z}{\rho} \right) \right] \hat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta m_Z}{\rho} \right) \hat{\mathbf{Z}} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z m_R}{\rho} \right) \hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{m_\theta m_R}{\rho} \right) \hat{\mathbf{R}} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z m_\theta}{\rho} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R m_\theta}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right], \end{aligned}$$

ricordando le relazioni (1.12) tra i versori $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e la variabile θ possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{f})^\vartheta &= \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R m_Z}{\rho} \right) \right] \hat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta m_Z}{\rho} \right) \hat{\mathbf{Z}} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z m_R}{\rho} \right) \hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta m_R}{\rho} \right) \hat{\mathbf{R}} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z m_\theta}{\rho} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R m_\theta}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \frac{1}{R} \left(\frac{m_\theta m_R}{\rho} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{R} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

Si possono quindi scrivere le tre equazioni scalari per la conservazione della quantità di moto

$$\begin{cases} \frac{\partial m_Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{m_R m_Z}{\rho} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta m_Z}{\rho} \right) = 0 \\ \frac{\partial m_R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z m_R}{\rho} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta m_R}{\rho} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \\ \frac{\partial m_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z m_\theta}{\rho} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{m_R m_\theta}{\rho} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{m_\theta m_R}{\rho} \right) \end{cases} \quad (1.48)$$

Per la legge di conservazione dell'energia, dato il vettore flusso associato all'energia totale

$$\mathbf{f}_{E^t}^\vartheta = \frac{\mathbf{m}^\vartheta}{\rho} (E^t + \Pi) = \left(\frac{m_Z}{\rho} (E^t + \Pi), \frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi), \frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) \right)^T, \quad (1.49)$$

si ottiene che l'equazione scalare della conservazione dell'energia totale è

$$\frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{m_Z}{\rho} (E^t + \Pi) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) \right] = 0.$$

Introducendo il vettore delle variabili conservative in coordinate cilindriche

$$\mathbf{u}^\vartheta(Z, R, \theta, t) = (\rho, \mathbf{m}^\vartheta, E^t)^T,$$

con $\mathbf{m}^\varnothing = (m_Z, m_R, m_\theta)^\top$ e l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate cilindriche

$$\mathbf{f}^\varnothing(\mathbf{u}^\varnothing) = \begin{pmatrix} m_Z & m_R & m_\theta \\ \frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_R m_Z}{\rho} & \frac{m_\theta m_Z}{\rho} \\ \frac{m_Z m_R}{\rho} & \frac{m_R^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_\theta m_R}{\rho} \\ \frac{m_Z m_\theta}{\rho} & \frac{m_R m_\theta}{\rho} & \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_Z}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

e il vettore di sorgente geometrica

$$\mathbf{s}^\varnothing = \left(0, 0, \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi, \frac{m_\theta m_R}{\rho}, 0 \right)^\top,$$

si può riscrivere il sistema di equazioni di Eulero nel sistema di coordinate cartesiane in forma compatta come

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\varnothing}{\partial t} + \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{f}^\varnothing = \frac{1}{R} \mathbf{s}^\varnothing. \quad (1.50)$$

Rispetto all'Eq. (1.5), nell'Eq. (1.50) si nota la comparsa di un termine sorgente dovuto alla derivazione dei versori rispetto alla variabile angolare.

Qui si coglie meglio il significato di riscrivere in forma vettoriale le equazioni di Eulero dopo aver scritto le equazioni scalari in maniera estesa, infatti l'Eq. (1.50) rappresenta solo una forma più compatta per riscrivere le equazioni scalari di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia. La divergenza dell'iper-vettore in questo caso si intende solo come una derivazione degli elementi di \mathbf{f}^\varnothing senza derivare i versori poichè la dipendenza dei versori dallo spazio viene tenuta in conto dal termine sorgente.

Coordinate cilindriche bidimensionali

Anche quando si sceglie di descrivere un flusso impiegando le coordinate cilindriche può essere utile ricorrere ad una rappresentazione bidimensionale del fenomeno semplificando la scrittura del sistema di equazioni di Eulero ottenendone benefici in termini di costo computazionale. Scegliendo di analizzare un flusso con simmetria assiale e in assenza di swirl si devono introdurre le ipotesi:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad m_\theta = 0. \quad (1.51)$$

Si ottiene la rappresentazione della corrente sul piano Z - R per cui introducendo le ipotesi appena presentate nelle equazioni scalari di conservazione della massa Eq. (1.47), della quantità di moto per le componenti Z e R Eq. (1.48) e dell'energia

totale Eq. (1.49) si giunge alla scrittura del sistema di equazioni di Eulero per la corrente bidimensionale sul piano Z - R :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R m_R) = 0 \\ \frac{\partial m_Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R m_Z}{\rho} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial m_R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{m_Z m_R}{\rho} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \right) \right] = \frac{1}{R} \Pi \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{m_Z}{\rho} (E^t + \Pi) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (1.52)$$

In analogia a quanto mostrato nel caso tridimensionale, apportando le dovute semplificazioni, si possono introdurre il vettore delle variabili conservative in coordinate cilindriche

$$\mathbf{u}^{ZR}(Z, R, t) = (\rho, \mathbf{m}^{ZR}, E^t)^T,$$

con $\mathbf{m}^{ZR} = (m_Z, m_R)^T$, l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate cilindriche

$$\mathbf{f}^{ZR}(\mathbf{u}^{ZR}) = \begin{pmatrix} m_Z & m_R \\ \frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_R m_Z}{\rho} \\ \frac{m_Z m_R}{\rho} & \frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_Z}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

e il vettore di sorgente geometrica

$$\mathbf{s}^{ZR} = (0, 0, \Pi, 0)^T.$$

Si può pervenire ad una scrittura compatta del sistema sulla base di quanto mostrato in §.1.3.4. Definendo il vettore delle componenti R di ogni vettore flusso che costituisce una delle righe dell'iper-vettore $\mathbf{f}^{ZR}(\mathbf{u}^{ZR})$ come

$$\mathbf{f}_R^{ZR} = \begin{pmatrix} m_R \\ \frac{m_R m_Z}{\rho} \\ \frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

si perviene alla riscrittura del sistema di equazioni di Eulero nel sistema di coordinate cilindriche Z - R in forma compatta come:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{ZR}}{\partial t} + \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{f}^{ZR} + \frac{1}{R} \mathbf{f}_R^{ZR} = \frac{1}{R} \mathbf{s}^{ZR}, \quad (1.53)$$

dove l'operatore di divergenza nelle coordinate Z e R è già stato presentato in §.1.3.4.

Facendo uso delle coordinate cilindriche è già stato mostrato come sia possibile una rappresentazione bidimensionale sul piano R - θ . Introducendo le ipotesi di indipendenza della soluzione dalla variabile Z :

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial Z} = 0 \quad \text{e} \quad m_Z = 0, \quad (1.54)$$

le equazioni scalari di conservazione della massa Eq. (1.47), delle componenti R e θ della quantità di moto Eq. (1.48) e dell'energia totale Eq. (1.49) assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R m_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial m_R}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta m_r}{\rho} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \\ \frac{\partial m_\theta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R m_\theta}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{m_\theta m_R}{\rho} \right) \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) \right] = 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

Definendo come sempre il vettore delle variabili conservative

$$\mathbf{u}^{R\theta}(R, \theta, t) = (\rho, \mathbf{m}^{R\theta}, E^t)^T,$$

con $\mathbf{m}^{R\theta} = (m_R, m_\theta)^T$, l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate cilindriche

$$\mathbf{f}^{R\theta}(\mathbf{u}^{R\theta}) = \begin{pmatrix} m_R & m_\theta \\ \frac{m_R^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_\theta m_r}{\rho} \\ \frac{m_R m_\theta}{\rho} & \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

e il vettore di sorgente geometrica

$$\mathbf{s}^{R\theta} = \left(0, \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi, \frac{m_\theta m_R}{\rho}, 0 \right)^T$$

si può passare alla formulazione compatta del sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{R\theta}}{\partial t} + \nabla^{R\theta} \cdot \mathbf{f}^{R\theta} = \frac{1}{R} \mathbf{s}^{R\theta}, \quad (1.56)$$

dove l'operatore di divergenza in coordinate R e θ è stato utilizzato in accordo a quanto discusso in §.1.3.4.

Coordinate cilindriche monodimensionali

Per problemi che presentano una simmetria rispetto alle coordinate longitudinale Z e angolare θ è possibile una rappresentazione monodimensionale imponendo, come sempre, le ipotesi semplificative al sistema di equazioni tridimensionale. Le ipotesi da utilizzarsi saranno:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial Z} = 0, \quad m_Z = 0, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad m_\theta = 0, \quad (1.57)$$

che introdotte nelle equazioni di conservazione della massa Eq. (1.47), nell'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione R , Eq. (1.48), e di conservazione dell'energia totale, Eq. (1.49), portano alla riscrittura del sistema delle equazioni di Eulero come:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R m_R) = 0 \\ \frac{\partial m_R}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \right) \right] = \frac{1}{R} \Pi \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (1.58)$$

Seguendo quanto più volte fatto precedentemente definendo il vettore delle variabili conservative

$$\mathbf{u}^R(R, t) = (\rho, m_R, E^t)^T,$$

l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate cilindriche

$$\mathbf{f}^R(\mathbf{u}^R) = \begin{pmatrix} m_R \\ \frac{m_R^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

e il vettore di sorgente geometrica

$$\mathbf{s}^R = (0, \Pi, 0)^T,$$

è possibile riformulare il sistema utilizzando la forma vettoriale compatta:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^R}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^R}{\partial R} + \frac{1}{R} \mathbf{f}^R = \frac{1}{R} \mathbf{s}^R. \quad (1.59)$$

1.5.3 Coordinate sferiche

Si consideri, infine, la scrittura delle equazioni di Eulero nel sistema di coordinate sferico. Il vettore flusso di massa in coordinate sferiche è espresso come

$$\mathbf{f}_\rho^\ominus = \mathbf{m}^\ominus = (m_r, m_\theta, m_\phi)^T,$$

con m_r , m_θ e m_ϕ componenti della quantità di moto in direzione r , θ e ϕ rispettivamente. Usando la definizione di divergenza di un vettore in coordinate sferiche come già fatto per l'equazione scalare, Eq. (1.23), l'equazione di conservazione della massa diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 m_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta m_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial m_\phi}{\partial \phi} = 0. \quad (1.60)$$

Il flusso associato alla quantità di moto è il seguente tensore

$$\mathbf{f}_m^\odot = \frac{\mathbf{m}^\odot \otimes \mathbf{m}^\odot}{\rho} + \Pi \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{m_r^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_r m_\theta}{\rho} & \frac{m_r m_\phi}{\rho} \\ \frac{m_\theta m_r}{\rho} & \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_\theta m_\phi}{\rho} \\ \frac{m_\phi m_r}{\rho} & \frac{m_\phi m_\theta}{\rho} & \frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \end{pmatrix}.$$

Usando la definizione di divergenza di un tensore, Eq. (1.37), con $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}^\odot = (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$, in cui $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dipendono da θ e ϕ , mentre $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ dipende solo dalla variabile ϕ , si ottiene che

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{f})^\odot &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta m_r}{\rho} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r m_\theta}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r m_\phi}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta m_\phi}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}, \end{aligned}$$

ricordano le relazioni (1.15) tra i versori $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ e le variabili θ e ϕ possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{f})^\odot &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta m_r}{\rho} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r m_\theta}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r m_\phi}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta m_\phi}{\rho} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &+ \frac{r}{\sin \theta} \left(\frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \frac{m_\theta m_r}{\rho} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{r} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r \tan \theta} \frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &- \frac{1}{r} \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r \tan \theta} \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Si possono quindi scrivere le tre equazioni scalari per la conservazione della quantità di moto

$$\begin{cases} \frac{\partial m_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta m_r}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ \frac{\partial m_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r m_\theta}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{m_\theta m_r}{\rho} \right) + \frac{1}{r \tan \theta} \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ \frac{\partial m_\phi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r m_\phi}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta m_\phi}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) - \frac{1}{r \tan \theta} \left(\frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \right) \end{cases} \quad (1.61)$$

Per la legge di conservazione dell'energia, dato il vettore flusso associato all'energia totale

$$\mathbf{f}_{E^t}^\circ = \frac{\mathbf{m}^\circ}{\rho} (E^t + \Pi) = \left(\frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi), \frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi), \frac{m_\phi}{\rho} (E^t + \Pi) \right)^\top,$$

si ottiene che l'equazione scalare della conservazione dell'energia totale è

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(\frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{m_\phi}{\rho} (E^t + \Pi) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Introducendo il vettore delle variabili conservative in coordinate sferiche

$$\mathbf{u}^\circ(r, \theta, \phi, t) = (\rho, \mathbf{m}^\circ, E^t)^\top,$$

con $\mathbf{m}^\circ = (m_r, m_\theta, m_\phi)^\top$ e l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate sferiche

$$\mathbf{f}^\circ(\mathbf{u}^\circ) = \begin{pmatrix} m_r & m_\theta & m_\phi \\ \frac{m_r^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_\theta m_r}{\rho} & \frac{m_\phi m_r}{\rho} \\ \frac{m_r m_\theta}{\rho} & \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \\ \frac{m_r m_\phi}{\rho} & \frac{m_\theta m_\phi}{\rho} & \frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_\phi}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

e il vettore di sorgente geometrica

$$\mathbf{s}^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) + \sin \theta \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ - \sin \theta \left(\frac{m_\theta m_r}{\rho} \right) + \cos \theta \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ - \sin \theta \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) - \cos \theta \left(\frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

si può riscrivere il sistema di equazioni di Eulero nel sistema di coordinate sferiche in forma compatta come

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\circ}{\partial t} + \nabla^\circ \cdot \mathbf{f}^\circ = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{s}^\circ. \quad (1.63)$$

Coordinate sferiche bidimensionali

Come già fatto per le coordinate cartesiane in §1.5.1 e per le coordinate cilindriche in §1.5.2 si procede qui alla scrittura del sistema di equazioni di Eulero in maniera esplicita per problemi bidimensionali utilizzando le coordinate r e ϕ . Le ipotesi semplificative da introdurre partendo dalle equazioni di conservazione in forma tridimensionale sono:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta} = 0, \quad m_\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \pi/2. \quad (1.64)$$

Procedendo alla semplificazione delle equazioni di conservazione scalari della massa Eq. (1.60), delle componenti della quantità di moto r e ϕ Eq. (1.61) e dell'energia totale Eq. (1.62) si ottiene in sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 m_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial m_\phi}{\partial\phi} = 0 \\ \frac{\partial m_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) = \frac{1}{r} \Pi + \frac{1}{r} \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ \frac{\partial m_\phi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r m_\phi}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left[\frac{m_\phi}{\rho} (E^t + \Pi) \right] = 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

In analogia con i casi precedentemente analizzati è possibile definire il vettore delle variabili conservative

$$\mathbf{u}^{r\phi}(r, \phi, t) = (\rho, \mathbf{m}^{r\phi}, E^t)^T,$$

con $\mathbf{m}^{r\phi} = (m_r, m_\phi)^T$, l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate sferiche

$$\mathbf{f}^{r\phi}(\mathbf{u}^{r\phi}) = \begin{pmatrix} m_r & m_\phi \\ \frac{m_r^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_\phi m_r}{\rho} \\ \frac{m_r m_\phi}{\rho} & \frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_\phi}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

e il vettore di sorgente geometrica

$$\mathbf{s}^{r\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi + \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ - \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il vettore formato dalla componente r dei vettori flusso che costituiscono l'iper-vettore flusso $\mathbf{f}^{r\phi}(\mathbf{u}^{r\phi})$:

$$\mathbf{f}_r^{r\phi} = \begin{pmatrix} m_r \\ \frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

si può riscrivere il sistema di equazioni di Eulero nel sistema di coordinate sferiche per un problema bidimensionale in forma compatta come

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{r\phi}}{\partial t} + \nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{f}^{r\phi} + \frac{1}{r} \mathbf{f}_r^{r\phi} = \frac{1}{r} \mathbf{s}^{r\phi}, \quad (1.66)$$

dove l'operatore di divergenza in coordinate r e ϕ è stato definito in §1.3.4.

Coordinate sferiche monodimensionali

Per il problema monodimensionale in coordinate sferiche imponendo le condizioni

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = 0, \quad m_\theta = 0, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial \phi} = 0 \quad \text{e} \quad m_\phi = 0, \quad (1.67)$$

nelle equazioni di conservazione della massa, Eq. (1.60), della componente r della quantità di moto, Eq. (1.61), e dell'energia totale, Eq. (1.62), si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 m_r) = 0 \\ \frac{\partial m_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \right) \right] = \frac{2\Pi}{r} \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi) \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (1.68)$$

Partendo dall'Eq. (1.68) definendo il vettore delle variabili conservative

$$\mathbf{u}^r(r, t) = (\rho, m_r, E^t)^T,$$

l'iper-vettore flusso nel sistema di coordinate sferiche

$$\mathbf{f}^r(\mathbf{u}^r) = \begin{pmatrix} m_r \\ \frac{m_r^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_r}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix},$$

e il vettore di sorgente geometrica

$$\mathbf{s}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

si può riscrivere il sistema di equazioni di Eulero nel sistema di coordinate sferiche per un problema monodimensionale in forma compatta come

$$\frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^r}{\partial r} + \frac{2}{r} \mathbf{f}^r = \frac{1}{r} \mathbf{s}^r. \quad (1.69)$$

Equivalenza volumi/elementi finiti in coordinate cilindriche

In questo capitolo, seguendo l'approccio proposto da Selmin [40, 41], viene mostrato come una classe di schemi agli elementi finiti (FEM) per le leggi di conservazione possa essere interpretata come uno schema ai volumi finiti (FVM) node-centred così da ottenere un'equivalente discretizzazione FEM/FVM delle equazioni. L'idea centrale nella determinazione dell'equivalenza FEM/FVM è l'introduzione della struttura node-pair che coinvolge quantità metriche di due tipi: quelle FEM associate alla coppia di nodi il cui supporto delle funzioni di forma ha un'intersezione e quelle FVM associate alla coppia di nodi che condividono la stessa interfaccia tra volumi finiti.

La condizione di equivalenza per le equazioni scritte in coordinate cartesiane qui viene estesa ai sistemi di coordinate cilindriche. La formulazione adottata permette di trattare in maniera unificata non solo il caso multidimensionale e quello monodimensionale, ma permette anche trattare facilmente il caso di flusso assialsimmetrico (Z - R) e quello polare (R - θ).

La presentazione in forma esplicita dei suddetti schemi si rende necessaria trattandosi non di una semplice riscrittura delle equazioni private delle coordinate inutilizzate, ma di una reinterpretazione delle stesse in coerenza con l'assunzione, da parte della divergenza, di una forma differente al variare, non solo della dimensione spaziale, ma anche delle coordinate scelte come mostrato in §1.3.4.

Per semplicità di trattazione la discretizzazione node-pair FEM/FVM viene ricavata nel caso multidimensionale per l'equazione scalare in quanto l'estensione al caso vettoriale è immediata.

2.1 Il caso tridimensionale

Si consideri la legge di conservazione scalare tridimensionale scritta nel sistema di coordinate cilindriche, Eq. (1.22), qui riproposta per comodità

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R f_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Moltiplicando l'equazione per R si ottiene

$$R \frac{\partial u}{\partial t} + R \frac{\partial f_Z}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial R} (R f_R) + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

L'equazione precedente può essere riscritta attraverso l'operatore divergenza come

$$\frac{\partial(Ru)}{\partial t} + R\nabla^\vartheta \cdot \mathbf{f}^\vartheta(u) = 0. \quad (2.1)$$

2.1.1 Discretizzazione agli elementi finiti

L'Eq. (2.1) è ora scritta in forma debole moltiplicando l'equazione differenziale per una funzione test Lagrangiana φ_h appartenente ad un opportuno spazio $V_h \subset H^1(\Omega)$ e integrando sul supporto Ω_i di ogni funzione test $\varphi_i \in V_h$ ottenendo

$$\int_{\Omega_i} R\varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega^\vartheta + \int_{\Omega_i} R\varphi_i \nabla^\vartheta \cdot \mathbf{f}^\vartheta(u) d\Omega^\vartheta = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (2.2)$$

dove \mathcal{N} indica l'insieme di tutti i nodi della triangolazione. Nel caso tridimensionale qui in esame il volume infinitesimo sarà esprimibile come

$$d\Omega^\vartheta = R dR d\theta dZ,$$

che nel seguito verrà sempre omesso, salvo avviso contrario, per evitare un appesantimento della notazione. Attraverso un'integrazione per parti è possibile scrivere il secondo integrale nell'espressione precedente come

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} R\varphi_i \nabla^\vartheta \cdot \mathbf{f}^\vartheta(u) &= - \int_{\Omega_i} \mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \nabla^\vartheta(R\varphi_i) + \oint_{\partial\Omega_i^\vartheta} R\varphi_i \mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \mathbf{n}^\vartheta \\ &= - \int_{\Omega_i} R\mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \nabla^\vartheta\varphi_i - \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \nabla^\vartheta R + \oint_{\partial\Omega_i^\vartheta} R\varphi_i \mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \mathbf{n}^\vartheta, \end{aligned}$$

con $\partial\Omega_i^\vartheta = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega$. Nell'equazione precedente, a seguito dell'applicazione del teorema della divergenza per trasformare l'integrale sul dominio in un contributo di contorno, è stato necessario introdurre il vettore $\mathbf{n}^\vartheta = n_Z \hat{\mathbf{Z}} + n_R \hat{\mathbf{R}} + n_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ normale al contorno del dominio. Quindi l'Eq. (2.2) diventa

$$\int_{\Omega_i} R\varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\Omega_i} R\mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \nabla^\vartheta\varphi_i + \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \nabla^\vartheta R - \oint_{\partial\Omega_i^\vartheta} R\varphi_i \mathbf{f}^\vartheta(u) \cdot \mathbf{n}^\vartheta \quad (2.3)$$

Si assume che la soluzione $u(\mathbf{x}^\vartheta, t)$, con il vettore posizione \mathbf{x}^ϑ in questo caso definito come $\mathbf{x}^\vartheta = Z\hat{\mathbf{Z}} + R\hat{\mathbf{R}}(\theta)$, sia approssimata dalla funzione $u_h(\mathbf{x}^\vartheta, t)$ ottenuta dall'espansione nello stesso spazio di φ_h

$$u(\mathbf{x}^\vartheta, t) \simeq u_h(\mathbf{x}^\vartheta, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} u_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta),$$

dove u_k è il valore della soluzione nel nodo k al tempo t . Sostituendo l'espansione di u_h nell'Eq. (2.3) si ottiene

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\vartheta \frac{du_k}{dt} = \int_{\Omega_i} R\mathbf{f}^\vartheta(u_h) \cdot \nabla^\vartheta\varphi_i + \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f}^\vartheta(u_h) \cdot \nabla^\vartheta R - \oint_{\partial\Omega_i^\vartheta} R\varphi_i \mathbf{f}^\vartheta(u_h) \cdot \mathbf{n}^\vartheta,$$

con \mathcal{N}_i l'insieme delle funzioni di forma φ_k il cui supporto Ω_k interseca il supporto Ω_i di φ_i e dove è stata introdotta la matrice di massa

$$M_{ik}^\varnothing \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R\varphi_i\varphi_k \, d\Omega^\varnothing,$$

con $\Omega_{ik} = \Omega_i \cap \Omega_k$. (figura 2.1)

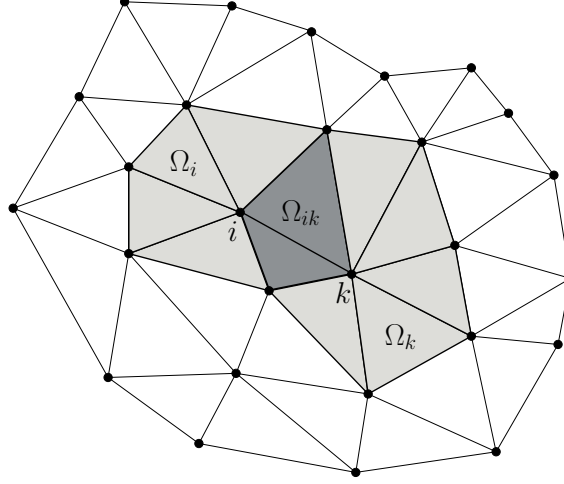


Figura 2.1: Intersezione Ω_{ik} dei supporti Ω_i e Ω_k dei nodi i e k .

Utilizzando l'approssimazione della interpolazione dei flussi si impiegano le valutazioni nodali della funzione di flusso $\mathbf{f}^\varnothing(u_h)$ e le stesse funzioni di base utilizzate per espandere la soluzione [7],

$$\mathbf{f}^\varnothing(u_h) = \mathbf{f}^\varnothing \left(\sum_{k \in \mathcal{N}} u_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\varnothing) \right) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\varnothing),$$

con $\mathbf{f}_k^\varnothing(t) = \mathbf{f}^\varnothing(u_k(t))$. In conclusione la formulazione Bubnov-Galerkin discreta dell'equazione scalare (1.22) diventa

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_k}{dt} &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \cdot \int_{\Omega_{ik}} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \nabla^\varnothing R \\ &\quad - \sum_{k \in \mathcal{N}_i^\partial} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R\varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing, \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove $\partial\Omega_{ik}^\partial = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k \cap \partial\Omega$, e \mathcal{N}^∂ indica l'insieme di tutti i nodi di bordo. L'utilizzo dell'interpolazione dei flussi permette di riscrivere tutti gli integrali presenti nell'Eq. (2.4) come prodotto scalare tra il vettore di flusso nodale $\mathbf{f}_k^\varnothing(t)$ e integrali che coinvolgono le funzioni di forma φ_i e φ_k e che dipendono solo dalla geometria della triangolazione. Di conseguenza il calcolo di tali integrali viene effettuato una volta per tutte in una fase di *pre-processing*, con risparmio di risorse computazionali.

L'Eq. (2.4) viene manipolata ulteriormente per scrivere i termini dei flussi in forma di node-pair. La controparte discreta dell'equazione scalare può quindi essere riscritta come

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_k}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right) + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing \\ & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\varnothing} - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove $\mathcal{N}_{i,\neq} = \mathcal{N}_i \setminus \{i\}$ e $\mathcal{N}_{i,\neq}^\partial = \mathcal{N}_i^\partial \setminus \{i\}$. Nell'equazione precedente sono state introdotte le seguenti quantità metriche

$$\begin{aligned} M_{ik}^\varnothing & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_i \varphi_k \, d\Omega^\varnothing, \\ \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R (\varphi_i \nabla^\varnothing \varphi_k - \varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i) \, d\Omega^\varnothing, \\ \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \widehat{\mathbf{R}} \, d\Omega^\varnothing, \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \widehat{\mathbf{R}} \, d\Omega^\varnothing = \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \widehat{\mathbf{R}} \, d\Omega^\varnothing, \\ \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\varnothing} & \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing \, d\partial\Omega^\varnothing \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \varphi_i \mathbf{n}^\varnothing \, d\partial\Omega^\varnothing, \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove si è indicato, qui e nel seguito, con la notazione $d\partial\Omega$ gli elementi infinitesimi di superficie negli integrali di bordo.

Forma node-pair dello schema FEM

L'Eq. (2.5) può essere ricavata a partire dalla forma discreta (2.4) attraverso le seguenti identità

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing + \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right) \\ & + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i^\partial} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} (\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\varnothing} + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing}. \quad (2.8)$$

Si consideri prima la dimostrazione della relazione (2.7). L'integrale nel membro a sinistra dell'Eq. (2.7) può essere riscritto assemblando i contributi provenienti da ogni elemento e della griglia.

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i = \sum_{e \in \mathcal{E}_i} \sum_{k \in \mathcal{N}^e} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega^e} R \varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i, \quad (2.9)$$

dove \mathcal{E}_i è l'insieme degli elementi che hanno il nodo i in comune e \mathcal{N}^e è l'insieme dei nodi dell'elemento e . La prima sommatoria nel membro di destra è limitata agli elementi nel supporto Ω_i del nodo i , gli unici che danno un contributo non nullo all'integrale contenente φ_i . Si noti che $\Omega_i = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_i} \Omega^e$. Si consideri la seguente identità fornita dal teorema di Gauss

$$\int_{\Omega^e} \nabla^\varnothing (R\varphi_i\varphi_k) d\Omega^\varnothing = \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing d\partial\Omega^\varnothing,$$

che permette di scrivere la seguente relazione

$$\int_{\Omega^e} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i = - \int_{\Omega^e} R\varphi_i \nabla^\varnothing \varphi_k - \int_{\Omega^e} \varphi_i\varphi_k \nabla^\varnothing R + \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing. \quad (2.10)$$

Grazie alla relazione appena ricavata è possibile dedurre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i + \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i + \frac{1}{2} \left(- \int_{\Omega^e} R\varphi_i \nabla^\varnothing \varphi_k - \int_{\Omega^e} \varphi_i\varphi_k \nabla^\varnothing R + \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing \right) \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} - \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varphi_i\varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing, \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove nell'ultima espressione è stato introdotto il contributo $\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing}$ dell'elemento e al vettore $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing$

$$\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik} \cap \Omega^e} R(\varphi_i \nabla^\varnothing \varphi_k - \varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i),$$

tale che $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing = \sum_{e \in (\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_k)} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing}$ e si è usato il fatto che $\nabla^\varnothing R = \hat{\mathbf{R}}$. Utilizzando la (2.11), l'integrale (2.9) diventa

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i = - \sum_{e \in \mathcal{E}_i} \sum_{k \in \mathcal{N}^e} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varphi_i\varphi_k \hat{\mathbf{R}} - \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing \right). \quad (2.12)$$

D'altro canto, sempre dall'Eq. (2.11) segue che

$$\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} = -2 \int_{\Omega^e} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i - \int_{\Omega^e} \varphi_i\varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing,$$

che, attraverso la (2.10), può essere riscritta come

$$\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} = 2 \int_{\Omega^e} R\varphi_i \nabla^\varnothing \varphi_k + \int_{\Omega^e} \varphi_i\varphi_k \hat{\mathbf{R}} - \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing.$$

Sommando quest'ultima espressione su tutti i nodi k appartenenti all'elemento Ω^e e sfruttando la proprietà che $\sum_{k \in \mathcal{N}^e} \nabla^\varnothing \varphi_k(\mathbf{x}^\varnothing) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x}^\varnothing \in \Omega^e$, si ottiene

$$\sum_{k \in \mathcal{N}^e} \left(\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} - \int_{\Omega^e} \varphi_i\varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \oint_{\partial\Omega^e} R\varphi_i\varphi_k \mathbf{n}^\varnothing \right) = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Sommando la relazione precedente su tutti gli elementi appartenenti a \mathcal{E}_i e moltiplicando, scalarmente, tutto per \mathbf{f}_i^\varnothing , si ottiene la seguente relazione

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_i} \sum_{k \in \mathcal{N}^e} \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \left(\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} - \int_{\Omega^e} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \oint_{\partial\Omega^e} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing \right) = \mathbf{0}.$$

Moltiplicando quest'ultima espressione per 1/2 e sottraendola al membro a destra nell'Eq. (2.12) si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i &= - \sum_{e \in \mathcal{E}_i} \sum_{k \in \mathcal{N}^e} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} + \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \int_{\Omega^e} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} \right) \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_i} \sum_{k \in \mathcal{N}^e} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \oint_{\partial\Omega^e} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing. \end{aligned}$$

Ricordando che $\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} = \mathbf{0}$ per $e \notin (\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_k)$, che $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing = \sum_{e \in (\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_k)} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing}$ e che $\boldsymbol{\eta}_{ii}^\varnothing = \mathbf{0}$, si può riscrivere il membro a destra dell'ultima equazione, così da ottenere

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i &= - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing + \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right) \\ &+ \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing, \end{aligned}$$

che è la relazione (2.7) che si voleva trovare.

Si consideri ora la dimostrazione della relazione (2.8). Nel membro di sinistra della (2.8) si mette in evidenza il contributo del nodo i

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i^\varnothing} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_i \mathbf{n}^\varnothing.$$

La quantità

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing,$$

è ora aggiunta e sottratta al membro a destra della relazione precedente ottenendo

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i^\varnothing} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} (\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \sum_{k \in \mathcal{N}_i^\varnothing} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing.$$

Ricordando che $\sum_{k \in \mathcal{N}_e} \varphi_k(\mathbf{x}^\varnothing) = 1$, $\mathbf{x}^\varnothing \in \Omega^e$, $\forall e \in \mathcal{E}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i^\varnothing} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} (\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_i^\varnothing} R \varphi_i \mathbf{n}^\varnothing \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} (\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\varnothing,\varnothing} + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\varnothing,\varnothing}, \end{aligned}$$

che è la relazione (2.8) cercata.

Attraverso le relazioni (2.7), (2.8) è possibile scrivere la (2.4) come segue

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_k}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing + \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right) + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} \\ & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}^\varnothing} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\varnothing, \varnothing} - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\varnothing, \varnothing}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

con le quantità metriche definite in (2.6). Nella relazione precedente è necessario scrivere in forma node-pair anche il secondo termine del membro a destra. Si consideri la seguente riscrittura

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} = \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}},$$

aggiungendo e sottraendo all'espressione precedente la seguente quantità

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}},$$

si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} (\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} (\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \hat{\mathbf{R}} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} (\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{L}}_i^\varnothing. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sostituendo la relazione appena ricavata nella (2.14) si arriva a scrivere la discretizzazione node-pair dello schema FEM

$$\begin{aligned} L_i^\varnothing \frac{du_i}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right) + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{L}}_i^\varnothing \\ & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}^\varnothing} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\varnothing, \varnothing} - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\varnothing, \varnothing}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove la matrice di massa è stata approssimata con la matrice diagonale

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_i}{dt} \simeq L_i^\varnothing \frac{du_i}{dt},$$

con $L_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing$.

Si precisa che, purtroppo, l'approssimazione appena introdotta qui ed utilizzata in tutti gli schemi numerici presentati in questo lavoro, nota come *mass lumping*, introduce un errore di fase in tempo non trascurabile rispetto ad un approccio ad elementi finiti classico [7]; tuttavia lo sviluppo di schemi ad elementi finiti per leggi di conservazione che impiegano la matrice di massa completa è ancora oggetto di ricerca ed esula dagli scopi del presente lavoro [10].

2.1.2 Discretizzazione ai volumi finiti

Come alternativa agli elementi finiti, viene ora ricavata una diversa discretizzazione dell'equazione scalare applicando il metodo dei volumi finiti node-centred. Si consideri la forma integrale dell'equazione scalare (omettendo i differenziali per non appesantire la notazione)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} Ru(\mathbf{x}^\varnothing, t) = - \int_{\mathcal{C}} R \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{f}^\varnothing, \quad \forall \mathcal{C} \subseteq \Omega,$$

applicando il teorema della divergenza al secondo membro dell'equazione precedente

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} Ru(\mathbf{x}^\varnothing, t) = - \oint_{\partial \mathcal{C}} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}},$$

dove \mathbf{n}^\varnothing è la normale uscente dalla regione $\mathcal{C} \subseteq \Omega$. La forma discreta dell'equazione precedente si ottiene considerando un certo numero di volumi finiti \mathcal{C}_i , con bordo $\partial \mathcal{C}_i$, ognuno dei quali circonda il nodo i della triangolazione di Ω

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} Ru(\mathbf{x}^\varnothing, t) = - \oint_{\partial \mathcal{C}_i} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing + \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

Le celle dei volumi finiti sono tali che le loro parti interne non si sovrappongano, riempiano tutto il volume Ω e siano associate in maniera univoca ad ogni nodo, ovvero

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{C}}_i \cap \mathring{\mathcal{C}}_k &= \emptyset, \quad \forall i, k \in \mathcal{N}, i \neq k, \\ \bigcup_{k \in \mathcal{N}} \mathcal{C}_k &= \Omega, \quad \forall i, k \in \mathcal{N}, i \neq k, \\ i \in \mathcal{C}_i &\Rightarrow i \notin \mathcal{C}_k, \quad \forall i, k \in \mathcal{N}, i \neq k. \end{aligned}$$

Su ogni volume \mathcal{C}_i l'incognita è approssimata con la sua media spaziale

$$u(\mathbf{x}^\varnothing, t) \simeq u_i(t) = \frac{1}{V_i} \int_{\mathcal{C}_i} u(\mathbf{x}^\varnothing, t),$$

con V_i il volume della cella \mathcal{C}_i . Quindi

$$V_i^\varnothing \frac{du_i}{dt} = - \oint_{\partial \mathcal{C}_i} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing + \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad (2.17)$$

con

$$V_i^\varnothing \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}_i} R d\mathcal{C}^\varnothing.$$

L'integrale di bordo nel membro a destra dell'Eq. (2.17) viene riscritto (a meno del segno) al fine di mettere in evidenza la struttura node-pair

$$\oint_{\partial\mathcal{C}_i} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing + \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing,$$

per cui si ottiene

$$V_i^\varnothing \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing - \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing + \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad (2.18)$$

dove $\mathcal{N}_{i,\neq}$ è l'insieme dei volumi finiti \mathcal{C}_k che condividono una parte del loro bordo con \mathcal{C}_i , \mathcal{C}_i escluso; $\partial\mathcal{C}_{ik} = \partial\mathcal{C}_i \cap \partial\mathcal{C}_k \neq \emptyset, k \neq i$, nel gergo dei volumi finiti $\partial\mathcal{C}_{ik}$ è detto interfaccia di cella tra \mathcal{C}_i e \mathcal{C}_k , (figura 2.2). Si faccia attenzione alla diversa notazione utilizzata per la normale \mathbf{n}_i^\varnothing relativa alla cella i -esima \mathcal{C}_i che, qualora coincida con la normale relativa al dominio completo, ovvero la cella i -esima condivida parte del suo bordo con il bordo dell'intero dominio, viene indicata con \mathbf{n}^\varnothing .

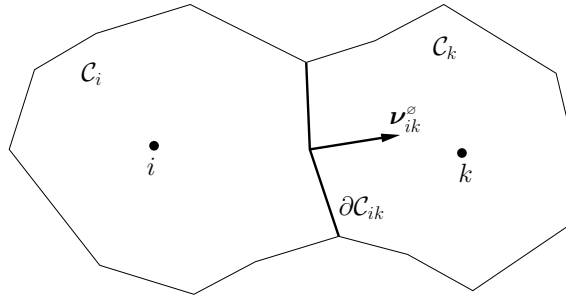


Figura 2.2: Interfaccia di cella $\partial\mathcal{C}_{ik}$ tra le celle \mathcal{C}_i e \mathcal{C}_k .

A causa dell'approssimazione costante a tratti della soluzione su ogni cella, all'interfaccia $\partial\mathcal{C}_{ik}$ i flussi sono discontinui di conseguenza gli integrali sull'interfaccia nell'Eq. (2.18) non sono definiti. Quindi si introduce un flusso numerico $\mathbf{f}_{ik}^\varnothing$ che rappresenta un'approssimazione di $\mathbf{f}^\varnothing(u)$ all'interfaccia $\partial\mathcal{C}_{ik}$. Se il flusso numerico è assunto costante su ogni interfaccia, per il contributo nel dominio si ha

$$\int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing \simeq \mathbf{f}_{ik}^\varnothing \cdot \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^\varnothing = \mathbf{f}_{ik}^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing,$$

mentre per il termine di bordo

$$\int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing \simeq \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{n}^\varnothing = \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\varnothing},$$

dove sono stati definiti

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^\varnothing d\partial\mathcal{C}^\varnothing, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\varnothing} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{n}^\varnothing d\partial\mathcal{C}^\varnothing. \quad (2.19)$$

L'ultimo termine del secondo membro dell'Eq. (2.18) diventa

$$\int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \int_{\mathcal{C}_i} \hat{\mathbf{R}}.$$

Un'approssimazione accurata al secondo ordine può essere ottenuta scegliendo la seguente approssimazione centrata per il flusso numerico \mathbf{f}_{ik}

$$\mathbf{f}_{ik} = \frac{\mathbf{f}_i^\varnothing + \mathbf{f}_k^\varnothing}{2},$$

la forma FVM node-pair dell'equazione scalare risulta

$$V_i^\varnothing \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^\varnothing + \mathbf{f}_k^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{V}}_i^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\varnothing}, \quad (2.20)$$

con

$$\hat{\mathbf{V}}_i^\varnothing \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}_i} \hat{\mathbf{R}} d\mathcal{C}^\varnothing. \quad (2.21)$$

2.1.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM

La discretizzazione FEM node-pair (2.16) e la discretizzazione FVM node-pair (2.20) dell'equazione scalare hanno una forma molto simile. Si può quindi pensare di interpretare lo schema FEM come un particolare schema FVM node-centred, tranne per la presenza del termine di dominio $(\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing/2$ e per il termine di contorno $(\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing) \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\varnothing}/2$ che sono visti come correzioni di ordine superiore che derivano dall'approssimazione lineare a pezzi dell'incognita negli elementi finiti.

Le quantità metriche introdotte nei due schemi devono soddisfare alcune proprietà che assicurino la conservatività e la consistenza degli schemi. Tali relazioni permettono di determinare una relazione tra lo schema FEM e lo schema FVM. Inoltre esiste anche una proprietà geometrica in grado di assicurare che i volumi finiti siano consistenti con le quantità metriche dello schema FEM.

Ricordando che $\mathbf{n}_i^\varnothing = -\mathbf{n}_k^\varnothing$ su $\partial\mathcal{C}_{ik}$, il vettore metrico $\boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing$ risulta antisimmetrico, si ottiene la proprietà FVM-a

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^\varnothing, \quad (2.22)$$

tale proprietà, assieme all'approssimazione centrata dei flussi all'interfaccia, garantisce che lo schema sia conservativo.

Consideriamo ora la seguente applicazione del teorema di Gauss

$$\int_{\mathcal{C}_i} \nabla^\varnothing R d\Omega^\varnothing = \oint_{\partial\mathcal{C}_i} R \mathbf{n}^\varnothing d\Omega^\varnothing,$$

dalla definizione di $\hat{\mathbf{V}}_i^\varnothing$ si può scrivere

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{V}}_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^\varnothing, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial, \\ \hat{\mathbf{V}}_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^\varnothing + \int_{\partial\mathcal{C}_i^\partial} R \mathbf{n}_i^\varnothing, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial, \end{cases}$$

sostituendo nell'espressione precedente la definizione delle quantità metriche (2.19) si ottiene la proprietà FVM-b

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial, \\ \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing = \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\varnothing}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial, \end{cases} \quad (2.23)$$

Si consideri ora la seguente relazione

$$\begin{aligned} \int_{C_i} R \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{x}^\varnothing &= \oint_{\partial C_i} R \mathbf{x}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing - \int_{C_i} \nabla^\varnothing R \cdot \mathbf{x}^\varnothing \\ &= \oint_{\partial C_i} R \mathbf{x}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing - \int_{C_i} \widehat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}^\varnothing, \end{aligned} \quad (2.24)$$

ricordando che in coordinate cilindriche tridimensionali il vettore posizione risulta essere $\mathbf{x}^\varnothing = Z \hat{\mathbf{Z}} + R \widehat{\mathbf{R}}(\theta)$. Poichè $R \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{x}^\varnothing = 3R$, si ha

$$\int_{C_i} R \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{x}^\varnothing = 3V_i^\varnothing.$$

All'integrale al secondo membro della (2.24) è possibile applicare lo schema numerico del metodo ai volumi finiti, (2.20) ottenendo

$$3V_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing + \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing + \mathbf{x}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\varnothing}.$$

Sommando al secondo membro dell'equazione precedente l'Eq. (2.23), cioè la proprietà FVM-b, moltiplicata per \mathbf{x}_i^\varnothing si ottiene la proprietà FVM-c

$$3V_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing. \quad (2.25)$$

Si considerino, ora, le proprietà delle quantità metriche nello schema FEM. Il vettore $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing$ risulta antisimmetrico per definizione, la proprietà FEM-a risulta quindi

$$\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing = -\boldsymbol{\eta}_{ki}^\varnothing. \quad (2.26)$$

Per la proprietà FEM-b si consideri l'Eq (2.13), sommando la precedente relazione su tutti gli elementi dell'insieme \mathcal{E}_i , e usando il fatto che $\sum_{k \in \mathcal{N}^e} \varphi_k(\mathbf{x}^\varnothing) = 1$ per $\mathbf{x}^\varnothing \in \Omega^e$ si ha

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_i} \sum_{k \in \mathcal{N}^e} \left(\boldsymbol{\eta}_{ik}^{e,\varnothing} - \int_{\Omega^e} \varphi_i \varphi_k \widehat{\mathbf{R}} + \oint_{\partial \Omega^e} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing \right) = \mathbf{0},$$

da cui per definizione dei vettori metrici (2.6) si ha

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} (\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing) + \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing} = \mathbf{0},$$

effettuando il lumping $\widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \zeta_{ik}^\varnothing$ si ottiene la proprietà FEM-b

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases} \quad (2.27)$$

Per la proprietà FEM-c si consideri la seguente uguaglianza

$$\int_{\Omega_i} R\varphi_i \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{x}^\varnothing = \int_{\Omega_i} R\varphi_i \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{x}^\varnothing,$$

il termine al primo membro, ricordando che $R\nabla^\varnothing \cdot \mathbf{x}^\varnothing = 3R$, diviene

$$\int_{\Omega_i} 3R\varphi_i = 3L_i^\varnothing,$$

mentre il secondo membro può essere integrato per parti, così da scrivere la seguente identità

$$3L_i^\varnothing = \oint_{\partial\Omega_i^\varnothing} R\varphi_i \mathbf{x}^\varnothing \cdot \mathbf{n}^\varnothing - \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{x}^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{R}} - \int_{\Omega_i} R\mathbf{x}^\varnothing \cdot \nabla^\varnothing \varphi_i. \quad (2.28)$$

Utilizzando la seguente espansione esatta

$$\mathbf{x}^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{x}_k^\varnothing \varphi_k,$$

l'Eq. (2.28) diventa

$$3L_i^\varnothing = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{x}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \widehat{\mathbf{R}} - \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{x}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} R\varphi_k \nabla^\varnothing \varphi_i + \sum_{k \in \mathcal{N}_i^\partial} \mathbf{x}_k^\varnothing \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R\varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\varnothing,$$

applicando ora lo schema FEM node-pair per l'operatore divergenza, l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} 3L_i^\varnothing &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{x}_k^\varnothing + \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \zeta_{ik}^\varnothing \right] - \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing \cdot \mathbf{x}_i^\varnothing \\ &+ \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\varnothing} + \mathbf{x}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing}. \end{aligned}$$

Sommando al secondo membro della precedente equazione la proprietà FEM-b (2.27) moltiplicata per \mathbf{x}_i^\varnothing , si ottiene la proprietà FEM-c

$$3L_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \zeta_{ik}^\varnothing \right] + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\varnothing}. \quad (2.29)$$

Quindi l'approssimazione FVM dell'equazione scalare può essere formalmente costruita usando le quantità metriche FEM ponendo i nodi della discretizzazione negli stessi punti, confrontando le proprietà (a) e (b) si può imporre

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing = \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing, \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\varnothing} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing}, \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing = \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing \quad (2.30)$$

Date le proprietà precedenti, sottraendo la (2.29) alla (2.25) si ottiene la condizione di equivalenza elementi/volumi finiti in coordinate cilindriche

$$V_i^\varnothing = L_i^\varnothing + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{6} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^\varnothing - \mathbf{x}_i^\varnothing}{6} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\varnothing}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.31)$$

Si noti come la relazione precedente sia diversa dal caso cartesiano in cui dall'uguaglianza dei vettori metrici $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\square$ e $\boldsymbol{\nu}_{ik}^\square$ discendeva immediatamente quella tra il volume della cella FVM, V_i , e la quantità L_i ottenuta dal lumping della matrice di massa FEM, M_{ik}^\varnothing . Inoltre non è più possibile determinare la forma dei volumi di controllo anche per il caso di elementi finiti lineari, ma ciò non impedisce di trarre vantaggio dalla relazione tra elementi e volumi finiti per la costruzione di uno schema ibrido.

2.2 Caso assialsimmetrico $Z-R$

Nella presente sezione verrà analizzato lo schema nel caso assialsimmetrico ($Z-R$). Seguendo quanto mostrato nel caso tridimensionale (§2.1) si ricaverà la discretizzazione FEM e FVM dell'equazione scalare (1.28) qui riscritta per comodità

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{f}^{ZR} + \frac{1}{R} f_R = 0. \quad (2.32)$$

Verrà inoltre ricavata la condizione di equivalenza tra le due formulazioni (FEM/FVM).

2.2.1 Discretizzazione a elementi finiti

Moltiplicando la (2.32) per la coordinata radiale R si ottiene, a meno del termine f_R , una forma del tutto analoga alla (2.1) dove ora la presenza del solo l'operatore $\nabla^{ZR} \cdot ()$ permette l'applicazione del teorema della divergenza nello spazio bidimensionale $Z-R$.

Procedendo in completa analogia con il caso tridimensionale, ovvero moltiplicando l'Eq. (2.32) per la funzione test Lagrangiana φ_h e integrando sul supporto Ω_i si scrive

$$\int_{\Omega_i} R \varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega^{ZR} + \int_{\Omega_i} R \varphi_i \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{f}^{ZR}(u) d\Omega^{ZR} + \int_{\Omega_i} \varphi_i f_R d\Omega^{ZR} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (2.33)$$

dove si è indicato esplicitamente l'elemento di volume infinitesimo $d\Omega^{ZR} = dZ dR$ che nel seguito verrà ommesso per non appesantire la trattazione. Per mezzo dell'in-

tegrazione per parti il secondo termine diventa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} R\varphi_i \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{f}^{ZR}(u) &= \int_{\Omega_i} \nabla^{ZR} \cdot (R\varphi_i \mathbf{f}^{ZR}(u)) - \int_{\Omega_i} \mathbf{f}^{ZR}(u) \cdot \nabla^{ZR} R\varphi_i \\ &= \oint_{\partial\Omega_i^\partial} R\varphi_i \mathbf{f}^{ZR}(u) \cdot \mathbf{n}^{ZR} - \int_{\Omega_i} R \mathbf{f}^{ZR}(u) \cdot \nabla^{ZR} \varphi_i - \int_{\Omega_i} \varphi_i f_R, \end{aligned}$$

dove si è già fatto uso del teorema della divergenza e di

$$\mathbf{f}^{ZR} \cdot \nabla^{ZR} R = \mathbf{f}^{ZR} \cdot \hat{\mathbf{R}} = f_R$$

In virtù di quanto appena mostrato si può riscrivere la (2.33) come

$$\int_{\Omega_i} R\varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega_i^\partial} R\varphi_i \mathbf{f}^{ZR} \cdot \mathbf{n}^{ZR} - \int_{\Omega_i} R \mathbf{f}^{ZR} \cdot \nabla^{ZR} \varphi_i = 0, \quad (2.34)$$

ottenendo una forma del tutto analoga a quanto mostrato in [19]. In questa forma appare evidente come per la scelta di coordinate Z - R si ottenga una scrittura formalmente analoga al caso tridimensionale (2.3) a meno del termine contenente il prodotto della componente radiale del flusso (f_R) per la funzione test φ . Tale analogia permette di scrivere direttamente la forma discreta dell'equazione scalare in coordinate Z - R nella forma node-pair partendo dalla (2.14) ed eliminando il termine $\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k \cdot \int_{\Omega_{ik}^\partial} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{R}}$, ottenendo

$$\begin{aligned} L_i^{ZR} \frac{du_i}{dt} &= - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^{ZR} + \mathbf{f}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} + \frac{\mathbf{f}_k^{ZR} - \mathbf{f}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{ZR} \right) \\ &\quad - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^{ZR} - \mathbf{f}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,ZR} - \mathbf{f}_i^{ZR} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,ZR}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove $\mathcal{N}_{i,\neq} = \mathcal{N}_i \setminus \{i\}$ e $\mathcal{N}_{i,\neq}^\partial = \mathcal{N}_i^\partial \setminus \{i\}$. Le quantità metriche sono definite in analogia con il caso tridimensionale

$$\begin{aligned} L_i^{ZR} &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^{ZR} \quad \text{con} \quad M_{ik}^{ZR} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R\varphi_i \varphi_k \, d\Omega^{ZR}, \\ \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R(\varphi_i \nabla^{ZR} \varphi_k - \varphi_k \nabla^{ZR} \varphi_i) \, d\Omega^{ZR}, \\ \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{ZR} &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{R}} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \, d\Omega^{ZR}, \\ \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,ZR} &\stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R\varphi_i \varphi_k \mathbf{n}_i^{ZR} \, d\partial\Omega^{ZR}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,ZR} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_i^\partial} R\varphi_i \mathbf{n}_i^{ZR} \, d\partial\Omega^{ZR}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si sottolinea che nella definizione della quantità metrica $\boldsymbol{\zeta}_{ik}^{ZR}$ non è necessaria l'integrazione del versore radiale $\hat{\mathbf{R}}$ essendo esso sempre normale al versore $\hat{\mathbf{Z}}$ in analogia a quanto accade nel caso di coordinate cartesiani bidimensionali x - y .

2.2.2 Discretizzazione a volumi finiti

La discretizzazione a volumi finiti dell'Eq. (2.32) è ottenibile in perfetta analogia a quanto presentato in §2.1.2. Si procede moltiplicando l'Eq. (2.32) per la coordinata radiale R e integrando sulla cella \mathcal{C}_i :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} Ru + \int_{\mathcal{C}_i} R \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{f}^{ZR} + \int_{\mathcal{C}_i} f_R = 0. \quad (2.37)$$

È necessario notare come procedendo all'integrazione per parti

$$\int_{\mathcal{C}_i} R \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{f}^{ZR} = \int_{\mathcal{C}_i} \nabla^{ZR} \cdot R \mathbf{f}^{ZR} - \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^{ZR} \cdot \nabla^{ZR} R$$

si giunga ad elidere $\int_{\mathcal{C}_i} f_R$ ottenendo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} Ru = - \oint_{\partial \mathcal{C}_i} R \mathbf{f}^{ZR} \cdot \mathbf{n}_i^{ZR},$$

In completa analogia a quanto mostrato in §2.1.2 si perviene alla forma finale dello schema a volumi finiti ottenendo una espressione formalmente analoga alla (2.18) ad eccezione dell'ultimo termine di quest'ultima che, invece, qui non compare

$$V_i^{ZR} \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{ZR} + \mathbf{f}_k^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} - \mathbf{f}_i^{ZR} \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial, ZR}, \quad (2.38)$$

dove si sono definite le quantità metriche

$$V_i^{ZR} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}_i} R d\mathcal{C}^{ZR}, \quad \boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial \mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^{ZR} d\mathcal{C}^{ZR} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial, ZR} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial \mathcal{C}_i^{\partial}} R \mathbf{n}^{ZR} d\partial \mathcal{C}^{ZR}. \quad (2.39)$$

2.2.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM

Si vuole trovare la condizione di equivalenza nel caso assialsimmetrico, è necessario introdurre anche per il sistema di coordinate $Z-R$ le proprietà delle quantità metriche per lo schema FVM e per lo schema FEM.

Come detto nelle due sezioni precedenti, le quantità metriche nel sistema di coordinate $Z-R$ sono definite in maniera analoga al caso tridimensionale, tranne per il fatto che il versore $\hat{\mathbf{R}}$ è portato fuori dall'integrale. Le proprietà (a) e (b) che rappresentano delle proprietà geometriche delle quantità metriche, sono identiche alle proprietà definite nel caso tridimensionale. Per comodità vengono riportate qui le proprietà FVM-a e FVM-b

$$(a) \quad \boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{ZR},$$

$$(b) \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{V}}_i^{ZR} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^{\partial}, \\ \hat{\mathbf{V}}_i^{ZR} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} = \boldsymbol{\nu}_i^{\partial, ZR}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^{\partial}, \end{cases}$$

con $\widehat{\mathbf{V}}_i^{ZR} = \widehat{\mathbf{R}} \int_{C_i} dC^{ZR}$. Di seguito sono riportate invece le proprietà FEM-a e FEM-b

$$(a) \quad \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{ZR},$$

$$(b) \quad \begin{cases} \widehat{\mathbf{L}}_i^{ZR} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^{ZR} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,ZR}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases}$$

con $\widehat{\mathbf{L}}_i^{ZR} = \widehat{\mathbf{R}} \int_{\Omega_i} \varphi_i d\Omega_i^{ZR}$

Le proprietà (c) risultano, invece, diverse rispetto al caso tridimensionale. La proprietà FVM-c si ottiene a partire dalla seguente relazione

$$\int_{C_i} \boldsymbol{\nabla}^{ZR} \cdot (R\mathbf{x}^{ZR}) = \oint_{\partial C_i} R\mathbf{x}^{ZR} \cdot \mathbf{n}^{ZR}.$$

Poichè risulta che $\boldsymbol{\nabla}^{ZR} \cdot (R\mathbf{x}^{ZR}) = 3R$, si ha per l'integrale al primo membro che $\int_{C_i} \boldsymbol{\nabla}^{ZR} \cdot (R\mathbf{x}^{ZR}) = 3V_i^{ZR}$, mentre all'integrale al secondo membro è possibile applicare lo schema numerico per il metodo ai volumi finiti (2.38)

$$3V_i^{ZR} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} + \mathbf{x}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} + \mathbf{x}_i^{ZR} \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,ZR}.$$

Moltiplicando scalarmente la proprietà FVM-b per \mathbf{x}_i^{ZR} e sottraendola all'espressione precedente, si ottiene la proprietà FVM-c nel caso di coordinate $Z-R$

$$3V_i^{ZR} = \mathbf{x}_i^{ZR} \widehat{\mathbf{V}}_i^{ZR} + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{2}, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

Per ricavare la proprietà FEM-c si consideri la seguente identità

$$\int_{\Omega_i} \varphi_i \boldsymbol{\nabla}^{ZR} \cdot (R\mathbf{x}^{ZR}) = \int_{\Omega_i} \varphi_i \boldsymbol{\nabla}^{ZR} \cdot (R\mathbf{x}^{ZR}),$$

il primo membro può essere scritto come $\int_{\Omega_i} 3R\varphi_i = 3L_i^{ZR}$, mentre il secondo membro può essere integrato per parti, l'identità precedente diventa quindi

$$3L_i^{ZR} = - \int_{\Omega_i} R\mathbf{x}^{ZR} \cdot \boldsymbol{\nabla}^{ZR} \varphi_i + \oint_{\partial \Omega_i^\partial} R\varphi_i \mathbf{x}^{ZR} \cdot \mathbf{n}^{ZR}.$$

Sostituendo nella relazione precedente l'espansione esatta

$$\mathbf{x}^{ZR} = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{x}_k^{ZR} \varphi_k,$$

e applicando all'equazione risultante lo schema agli elementi finiti (2.35) si ottiene

$$3L_i^{ZR} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{x}_k^{ZR} + \mathbf{x}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} - \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{ZR} \right] \\ + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,ZR} + \mathbf{x}_i^{ZR} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,ZR}.$$

La proprietà FEM-c si ottiene sottraendo al secondo membro dell'equazione precedente la proprietà FEM-b moltiplicata scalarmente per \mathbf{x}_i^{ZR} , ottenendo

$$3L_i^{ZR} = \mathbf{x}_i^{ZR} \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^{ZR} + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} - \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{ZR} \right] \\ + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,ZR}$$

A questo punto assumendo che i nodi della discretizzazione FVM e FEM siano i medesimi e confrontando le proprietà (a) e (b) per i due schemi, si ottiene

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} = \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR}, \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,ZR} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,ZR}, \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^{ZR} = \widehat{\mathbf{L}}_i^{ZR} \quad (2.40)$$

Dal confronto delle proprietà (c) si ottiene la condizione di equivalenza elementi/volumi finiti in coordinate cilindriche $Z-R$

$$V_i^{ZR} = L_i^{ZR} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{6} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{ZR} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^{ZR} - \mathbf{x}_i^{ZR}}{6} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,ZR}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.41)$$

2.3 Caso polare $R-\theta$

Per rappresentare in coordinate cilindriche un problema senza variazioni della soluzione lungo una direzione (assunta Z nel caso in esame) è possibile effettuare la scelta delle coordinate $R-\theta$ (come mostrato in §1.5.2). In questo caso la legge di conservazione scalare assume la forma compatta (1.29) riscritta qui per convenienza

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^{R\theta} \cdot \mathbf{f}^{R\theta} = 0. \quad (2.42)$$

Vengono di seguito riportate le formulazioni node-pair ad elementi/volumi finiti e le rispettive condizioni di equivalenza tra le due formulazioni.

2.3.1 Discretizzazione a elementi finiti

Moltiplicando l'Eq. (2.42) per la distanza radiale R e per la funzione test Lagrangiana si ottiene, dopo l'integrazione, la forma node-pair per lo schema a elementi

finiti (analoga nella totalità dei termini alla formulazione tridimensionale (2.16))

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^{R\theta} \frac{du_k}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^{R\theta} + \mathbf{f}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} - \frac{\mathbf{f}_k^{R\theta} - \mathbf{f}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{R\theta} \right) \\ & + \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^{R\theta} - \mathbf{f}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,R\theta} - \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,R\theta}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si precisa che in questo caso l'elemento di volume infinitesimo da utilizzarsi deve essere $d\Omega^{R\theta} = R dR d\theta$. Le quantità metriche che compaiono nella (2.43) sono

$$\begin{aligned} M_{ik}^{R\theta} & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_i \varphi_k d\Omega^{R\theta}, \\ \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R (\varphi_i \nabla^{R\theta} \varphi_k - \varphi_k \nabla^{R\theta} \varphi_i) d\Omega^{R\theta}, \\ \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{R\theta} & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \widehat{\mathbf{R}} d\Omega^{R\theta}, \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta} & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \widehat{\mathbf{R}} d\Omega^{R\theta} = \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \widehat{\mathbf{R}} d\Omega^{R\theta}, \\ \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,R\theta} & \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}_i^{R\theta} d\partial\Omega^{R\theta}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,R\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \varphi_i \mathbf{n}_i^{R\theta} d\partial\Omega^{R\theta}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.3.2 Discretizzazione a volumi finiti

Anche la discretizzazione a volumi finiti in forma node-pair dell'Eq. (2.42) risulta del tutto analoga, nella forma, a quella tridimensionale (2.20)

$$V_i^{R\theta} \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{R\theta} + \mathbf{f}_k^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta} + \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \widehat{\mathbf{V}}_i^{R\theta} - \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,R\theta} \quad (2.45)$$

con

$$\widehat{\mathbf{V}}_i^{R\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}_i} \widehat{\mathbf{R}} d\mathcal{C}^{R\theta}, \quad \boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^{R\theta} d\mathcal{C}^{R\theta} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,R\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_i^\partial} R \mathbf{n}^{R\theta} d\partial\mathcal{C}^{R\theta}. \quad (2.46)$$

2.3.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM

La condizione di equivalenza tra lo schema FVM e lo schema FEM nel caso delle coordinate cilindriche $R-\theta$ si ottiene in modo del tutto analogo a quanto fatto nel caso più generale tridimensionale. Le proprietà (a) e (b) risultano formalmente uguali a quelle del caso tridimensionale, sostituendo alle quantità metriche definite nello spazio $ZR\theta$ quelle definite nello spazio $R\theta$. Anche le proprietà (c) risultano analoghe al caso tridimensionale, con l'unica differenza nel coefficiente moltiplicativo della cella nello schema FVM e della massa nello schema FEM per il fatto che

$\nabla^{R\theta} \cdot \mathbf{x}^{R\theta} = 2$. Di seguito sono riportate le proprietà dello schema FVM

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{R\theta}, \\
 (b) \quad & \begin{cases} \widehat{\mathbf{V}}_i^{R\theta} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial, \\ \widehat{\mathbf{V}}_i^{R\theta} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta} = \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,R\theta}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial, \end{cases} \\
 (c) \quad & 2V_i^{R\theta} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{R\theta} - \mathbf{x}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta},
 \end{aligned}$$

con $\widehat{\mathbf{V}}_i^{R\theta} = \int_{\mathcal{C}_i} \widehat{\mathbf{R}} \, d\mathcal{C}^{R\theta}$, e le proprietà dello schema FEM

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{R\theta}, \\
 (b) \quad & \begin{cases} \widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,R\theta}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases} \\
 (c) \quad & 2L_i^{R\theta} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{x}_k^{R\theta} - \mathbf{x}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} - \frac{\mathbf{x}_k^{R\theta} - \mathbf{x}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{R\theta} \right] \\
 & \quad + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^{R\theta} - \mathbf{x}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,R\theta},
 \end{aligned}$$

con $\widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta} = \int_{\Omega_i} \widehat{\mathbf{R}} \varphi_i \, d\Omega_i^{R\theta}$.

Quindi posizionando i nodi dello schema FVM negli stessi punti di quello dello schema FEM ed uguagliando le proprietà dei due schemi si ottiene

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta} = \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta}, \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,R\theta} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,R\theta} \quad \text{e} \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^{R\theta} = \widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta}, \quad (2.47)$$

e la condizione di equivalenza nel caso del sistema di coordinate cilindriche R - θ risulta

$$V_i^{R\theta} = L_i^{R\theta} + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{R\theta} - \mathbf{x}_i^{R\theta}}{4} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{R\theta} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^{R\theta} - \mathbf{x}_i^{R\theta}}{4} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,R\theta}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.48)$$

2.4 Caso monodimensionale

La legge di conservazione scalare (1.22) in coordinate cilindriche, per problemi che esibiscono una simmetria cilindrica (indipendenza della soluzione dalle coordinate

Z e θ) è esprimibile come

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial(Rf_R)}{\partial R} = 0. \quad (2.49)$$

Nel seguito vengono ricavate le forme assunte dagli schemi ad elementi/volumi finiti nella loro scrittura in forma node-pair e le rispettive condizioni di equivalenza.

2.4.1 Discretizzazione a elementi finiti

Moltiplicando la relazione (2.49) per R e per la funzione test Lagrangiana φ , integrando sul dominio Ω (omettendo come sempre il differenziale $d\Omega^R = dR$) si ottiene

$$\int_{\Omega} R\phi \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Omega} \phi \frac{\partial(Rf_R)}{\partial R} = 0.$$

Per mezzo dell'integrazione per parti si può scrivere

$$\int_{\Omega} R\phi \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Omega} \frac{\partial(R\phi f_R)}{\partial R} - \int_{\Omega} Rf_R\phi' = 0, \quad (2.50)$$

dove l'apice ' indica l'operazione di derivazione ordinaria rispetto alla coordinata radiale R . Utilizzando le funzioni test φ_i a supporto compatto, ogni integrale sarà non nullo sul supporto Ω_i . Un'analisi separata è necessaria per il secondo termine della (2.50), infatti, facendo uso del teorema fondamentale del calcolo integrale esso è esprimibile (nel caso monodimensionale) come una valutazione della funzione $R\varphi_i f_R$ sui nodi che delimitano il supporto di Ω_i ; notando che la funzione test φ_i potrà assumere un valore diverso da zero solo in corrispondenza del nodo i -esimo, tale integrale darà vita ad un contributo non nullo solo in corrispondenza di nodi di bordo. Pertanto si potrà scrivere

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial(R\varphi_i f_R)}{\partial R} = f_{R_i} \xi_i^{\partial, R},$$

dove si è introdotta la quantità metrica (figura 2.3)

$$\xi_i^{\partial, R} \stackrel{\text{def}}{=} \pm R_i, \quad (2.51)$$

con R_i valore della coordinata radiale R in corrispondenza del nodo i -esimo.

A questo punto è possibile introdurre le approssimazioni di interpolazione per l'incognita u e per il flusso radiale f_R

$$\begin{aligned} u(R, t) &\simeq u_h(R, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} u_k(t) \varphi_k(R) \\ f_R(R, t) &\simeq f_{R_h}(R, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} f_{R_k}(t) \varphi_k(R) \end{aligned}$$

giungendo alla scrittura dello schema ad elementi finiti nella sua formulazione Bubnov-Galerkin discreta

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^R \frac{du_k}{dt} = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} f_{R_k} \int_{\Omega_{ik}} R\varphi_k \varphi_i' - f_{R_i} \xi_i^{\partial, R}, \quad (2.52)$$

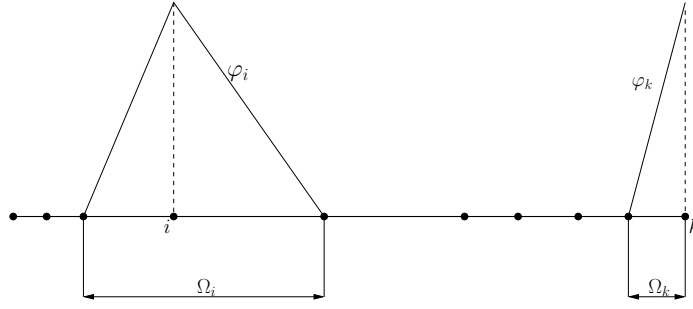


Figura 2.3: Esempio di dominio monodimensionale con griglia a spaziatura non uniforme. Sono riportate a titolo esemplificativo le funzioni di forma Lagrangiane in corrispondenza di un generico nodo i all'interno del dominio e un generico nodo k posto invece sul bordo; per entrambe le funzioni di forma φ_i e φ_k sono evidenziati anche i supporti.

dove è stata introdotta la matrice di massa M_{ik}^R

$$M_{ik}^R \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_i \varphi_k dR \quad (2.53)$$

Forma node-pair dello schema FEM

Come sempre lo schema ad elementi finiti è passibile di una riscrittura che ne evidenzi la struttura node-pair. Per fare questo è necessario invocare l'identità vettoriale (2.7) dimostrata nel caso tridimensionale che con gli analoghi passaggi risulta essere nel caso monodimensionale

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} f_{R_k} \int_{\Omega_{ik}} R \varphi_k \varphi_i' = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \left(\frac{f_{R_k} + f_{R_i}}{2} \eta_{ik}^R + \frac{f_{R_k} - f_{R_i}}{2} \zeta_{ik}^R \right), \quad (2.54)$$

con

$$\eta_{ik}^R \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R (\varphi_i \varphi_k' - \varphi_k \varphi_i') d\Omega^R.$$

Inserendo la (2.54) nella (2.52) si ottiene la discretizzazione node-pair dello schema FEM in coordinate cilindriche monodimensionali

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^R \frac{du_k}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \left(\frac{f_{R_k} + f_{R_i}}{2} \eta_{ik}^R + \frac{f_{R_k} - f_{R_i}}{2} \zeta_{ik}^R \right) - f_{R_i} \xi_i^{\theta, R}. \quad (2.55)$$

2.4.2 Discretizzazione a volumi finiti

La formulazione a volumi finiti, per il caso cilindrico monodimensionale, è deducibile a partire dall'equazione di conservazione scalare (1.22) moltiplicata per la coordinata radiale R e integrata sulla cella \mathcal{C}_i

$$\int_{\mathcal{C}_i} R \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial (R f_R)}{\partial R} = 0. \quad (2.56)$$

Particolare attenzione deve essere posta all'analisi del termine $\int_{C_i} \frac{\partial(Rf_R)}{\partial R}$. Questo termine, in accordo con il teorema fondamentale del calcolo, corrisponde ad una valutazione della funzione Rf_R sulle due interfacce che delimitano la cella C_i ; non è superfluo ricordare che una delle due interfacce può corrispondere al nodo di bordo (si veda la figura 2.4).

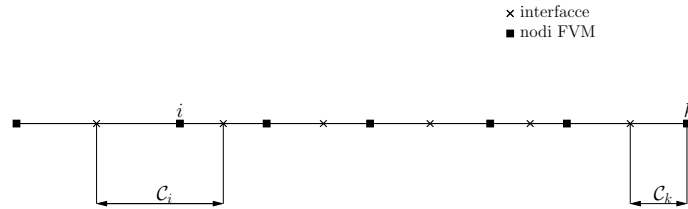


Figura 2.4: Esempio di dominio monodimensionale con in evidenza le celle associate ai generici nodi FVM i -esimo, appartenente al dominio, e j -esimo, appartenente al bordo.

Per questo motivo è possibile una riscrittura del contributo derivante dal flusso di interfaccia come

$$\int_{C_i} \frac{\partial(Rf_R)}{\partial R} = \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} f_{R_{ik}} \nu_{ik}^R + f_{R_i} \nu_i^{\partial, R}. \quad (2.57)$$

Nella (2.57) si sono introdotte le seguenti quantità metriche

$$\nu_{ik}^R = \sigma_{ik} R_{ik} \quad \text{e} \quad \nu_i^{\partial, R} = \pm R_i, \quad (2.58)$$

dove $\sigma_{ik} = R_k - R_i$, mentre R_i , R_k e R_{ik} indicano rispettivamente i valori della coordinata radiale in corrispondenza dei nodi i , k e dell'interfaccia ik (si veda la figura 2.4). A questo punto è possibile introdurre un'approssimazione del secondo ordine per il flusso di interfaccia

$$f_{R_{ik}} = \frac{f_{R_i} + f_{R_k}}{2}$$

che permette di pervenire alla formulazione finale dello schema a volumi finiti per le coordinate cilindriche monodimensionali

$$V_i^R \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \frac{f_{R_i} + f_{R_k}}{2} \nu_{ik}^R - f_{R_i} \nu_i^{\partial, R}, \quad (2.59)$$

nella quale è introdotta, a seguito dell'approssimazione della media di cella, la quantità V_i^R

$$V_i^R \stackrel{\text{def}}{=} \int_{C_i} R dR. \quad (2.60)$$

2.4.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM

Si vogliono calcolare le condizioni di equivalenza nel caso monodimensionale. Le proprietà (a) e (b) mantengono la stessa forma dei casi precedenti, mentre risulta utile spendere alcuni passaggi per dimostrare le proprietà (c). Di seguito sono riportate le proprietà FVM-a e FVM-b

$$(a) \quad \nu_{ik}^R = -\nu_{ki}^R,$$

$$(b) \quad \begin{cases} \widehat{V}_i^R - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \nu_{ik}^R = 0, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial, \\ \widehat{V}_i^R - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \nu_{ik}^R = \nu_i^{\partial,R}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases}.$$

Per ottenere la proprietà FVM-c, si considerano le relazioni (2.58) e ricordando che la lunghezza della cella nel caso monodimensionale è

$$V_i^R = \int_{\mathcal{C}_i} R \, d\mathcal{C}^R = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} |R_{ik}^2 - R_i^2|,$$

si ottiene che

$$2V_i^R = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \sigma_{ik} (R_{ik} \nu_{ik}^R - R_i \nu_i^{\partial,R}),$$

dalla proprietà FVM-b aggiungendo $R_i(\widehat{V}_i^R - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \nu_{ik}^R - \nu_i^{\partial,R} = 0)$ al termine di destra dell'espressione precedente si ottiene la proprietà FVM-c

$$2V_i^R - R_i \widehat{V}_i^R = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} (R_{ik} - R_i) \nu_{ik}^R.$$

Di seguito sono riportate le proprietà FEM-a e FEM-b dello schema FEM

$$(a) \quad \eta_{ik}^R = -\eta_{ki}^R,$$

$$(b) \quad \begin{cases} \widehat{L}_i^R - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \eta_{ik}^R = 0, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial \\ \widehat{L}_i^R - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \eta_{ik}^R = \xi_i^{\partial,R}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases}$$

Per ottenere la proprietà FEM-c, partendo dalla seguente relazione

$$\int_{\Omega_i} \varphi_i (r^2)' = - \int_{\Omega_i} [r^2 \varphi_i' - (r^2 \varphi_i)'],$$

sostituendo lo sviluppo esatto $R = \sum_{k \in \mathcal{N}} R_k \varphi_k$, sommando per tutti i $k \in \mathcal{N}_i$ e applicando lo schema (2.55) si ottiene

$$2L_i^R = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{R_k + R_i}{2} \eta_{ik}^R + \frac{R_k - R_i}{2} \zeta_{ik}^R \right) - R_i \xi_i^{\partial,R},$$

quindi sottraendo all'equazione precedente la proprietà FEM-b moltiplicata per R_i si ottiene la proprietà FEM-c

$$2L_i^R - R_i \widehat{L}_i^R = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \left(\frac{R_k - R_i}{2} \eta_{ik}^R + \frac{R_k - R_i}{2} \zeta_{ik}^R \right).$$

Ora se i nodi della discretizzazioni FEM sono i medesimi di quella FVM ed uguagliando le proprietà dei due schemi si ottiene

$$\nu_{ik}^R = \eta_{ik}^R, \quad \nu_i^{\partial,R} = \xi_i^{\partial,R}, \quad \widehat{V}_i^R = \widehat{L}_i^R \quad (2.61)$$

e la condizione di equivalenza nel caso del sistema di coordinate cilindriche mono-dimensionali risulta

$$V_i^R = L_i^R - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \frac{R_k - R_i}{4} \zeta_{ik}^R, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.62)$$

Equivalenza volumi/elementi finiti in coordinate sferiche

In questo capitolo, seguendo quanto esposto nel caso di coordinate cilindriche nel Capitolo 2, viene mostrato come procedere nel caso di coordinate sferiche. Saranno esplicitamente ricavati gli schemi ad elementi e volumi finiti e le rispettive condizioni di equivalenza per i casi tridimensionale, bidimensionale (r - ϕ) e monodimensionale r .

Per semplicità di trattazione la discretizzazione node-pair FEM/FVM viene ricavata nel caso multidimensionale per l'equazione scalare ritenendo l'estensione al caso vettoriale immediata.

3.1 Il caso tridimensionale

Si consideri la legge di conservazione scalare tridimensionale scritta in coordinate sferiche, Eq. (1.23) riscritta qui per comodità

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} = 0. \quad (3.1)$$

In forma vettoriale compatta, sfruttando l'operatore divergenza scritto in coordinate sferiche (§1.3.3) è possibile scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^\circ \cdot \mathbf{f}^\circ(u) = 0. \quad (3.2)$$

Il termine $\nabla^\circ \cdot \mathbf{f}^\circ$ può risciversi come

$$\nabla^\circ \cdot \mathbf{f}^\circ = \frac{2}{r} f_r + \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\theta}{\partial \phi}$$

mostrando esplicitamente la presenza al denominatore di un termine singolare $r \sin \theta = r \sin \theta$.

3.1.1 Discretizzazione a elementi finiti

L'Eq. (3.2), dopo essere stata moltiplicata per $r \sin \theta$, viene ora scritta in forma debole. Si utilizzano a tale scopo funzioni test Lagrangiane $\varphi_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$ e si

integra sul supporto Ω_i di di ognuna delle funzioni test φ_i ottenendo

$$\int_{\Omega_i} r \sin \theta \varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega^\circ + \int_{\Omega_i} r \sin \theta \varphi_i \nabla^\circ \cdot \mathbf{f}^\circ(u) d\Omega^\circ = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (3.3)$$

dove l'elemento di volume infinitesimo, di seguito omesso per brevità, è definito come

$$d\Omega^\circ = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Procedendo all'integrazione per parti del termine contenente la divergenza si perviene a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} r \sin \theta \varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f}^\circ(u) \cdot \nabla^\circ(r \sin \theta) \\ &+ \int_{\Omega_i} r \sin \theta \mathbf{f}^\circ(u) \cdot \nabla^\circ \varphi_i - \oint_{\partial\Omega_i^\circ} r \sin \theta \varphi_i \mathbf{f}^\circ(u) \cdot \mathbf{n}^\circ. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A questo punto la soluzione $u(\mathbf{x}, t)$ viene approssimata con uno sviluppo nello stesso spazio di φ_h

$$u(\mathbf{x}^\circ, t) \simeq u_h(\mathbf{x}^\circ, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} u_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\circ),$$

dove $u_k(t)$ è il valore della soluzione nel nodo k al tempo t . Introducendo questa approssimazione nell'Eq. (3.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \frac{du_k}{dt} M_{ik}^\circ &= \int_{\Omega_i} r \sin \theta \mathbf{f}^\circ(u_h) \cdot \nabla^\circ \varphi_i \\ &+ \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f}^\circ(u_h) \cdot \nabla^\circ(r \sin \theta) - \oint_{\partial\Omega_i^\circ} r \sin \theta \varphi_i \mathbf{f}^\circ(u_h) \cdot \mathbf{n}^\circ, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove si è introdotta la matrice di massa

$$M_{ik}^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} r \sin \theta \varphi_i \varphi_k d\Omega^\circ.$$

Sfruttando l'approssimazione dell'interpolazione dei flussi, utilizzando le valutazioni nodali della funzione flusso $\mathbf{f}(u_h)$ e le stesse funzioni test Lagrangiane utilizzate per l'espansione della soluzione si può scrivere

$$\mathbf{f}^\circ(u_h) = \mathbf{f}^\circ \left(\sum_{k \in \mathcal{N}} u_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\circ) \right) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{f}_k^\circ(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\circ),$$

dove $\mathbf{f}_k^\circ(t) = \mathbf{f}^\circ(u_k(t))$. La formulazione Bubnov-Galerkin dell'equazione scalare in coordinate sferiche tridimensionali assume così la forma

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \frac{du_k}{dt} M_{ik}^\circ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\circ \cdot \int_{\Omega_{ik}} r \sin \theta \varphi_k \nabla^\circ \varphi_i \\ &+ \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\circ \cdot \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \nabla^\circ(r \sin \theta) - \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\circ \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\circ} r \sin \theta \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\circ. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Forma node-pair dello schema FEM

In perfetta analogia a quanto mostrato nel caso tridimensionale per coordinate cilindriche (§2.1) si può procedere alla manipolazione dell'Eq. (3.6) per ottenere la formulazione discreta node-pair. Si evidenzia un'analogia formale tra le formulazioni Bubnov-Galerkin per le coordinate tridimensionali cilindriche, Eq. (2.4), e quella appena ricavata per coordinate tridimensionali sferiche, Eq. (3.6), fatta eccezione per la presenza rispettivamente della coordinata radiale R e del prodotto $r \sin \theta$. Sfruttando tale analogia è possibile scrivere direttamente lo schema node-pair, essendo i passaggi che vi conducono equivalenti a quelli mostrati in §2.1. Lo schema discreto in forma node-pair derivante dalla discretizzazione dell'equazione scalare in coordinate sferiche tridimensionali reciterà

$$\begin{aligned} L_i^\circ \frac{du_i}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\circ + \mathbf{f}_i^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ - \frac{\mathbf{f}_k^\circ - \mathbf{f}_i^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\circ \right) + \mathbf{f}_i^\circ \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^\circ \\ & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^\circ - \mathbf{f}_i^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\circ} - \mathbf{f}_i^\circ \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\circ}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove, come sempre, $\mathcal{N}_{i,\neq} = \mathcal{N}_i \setminus \{i\}$ e $\mathcal{N}_{i,\neq}^\partial = \mathcal{N}_i^\partial \setminus \{i\}$. Nell'equazione precedente sono state introdotte le seguenti quantità metriche

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}^\circ} r \sin \theta (\varphi_i \nabla^\circ \varphi_k - \varphi_k \nabla^\circ \varphi_i) d\Omega^\circ, \\ \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\circ & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}^\circ} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{r}} d\Omega^\circ, \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^\circ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \int_{\Omega_{ik}^\circ} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{r}} d\Omega^\circ = \int_{\Omega_{ik}^\circ} \varphi_i \hat{\mathbf{r}} d\Omega^\circ, \\ \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\circ} & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega_{ik}^\circ} r \sin \theta \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^\circ d\partial\Omega^\circ, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega_{ik}^\circ} r \sin \theta \varphi_i \mathbf{n}^\circ d\partial\Omega^\circ. \end{aligned} \quad (3.8)$$

e si è approssimata la matrice di massa M_{ik}° come

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\circ \frac{du_k}{dt} \simeq L_i^\circ \frac{du_i}{dt},$$

dove $L_i^\circ = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\circ$.

3.1.2 Discretizzazione a volumi finiti

L'Eq. (3.2) può, alternativamente alla formulazione ad elementi finiti, discretizzarsi usando uno schema a volumi finiti. Ripetendo i passaggi già illustrati in §2.1.2, con la sola eccezione costituita dal fattore moltiplicativo $r \sin \theta$ in luogo di R si perviene allo schema a volumi finiti dell'equazione di conservazione scalare tridimensionale per coordinate sferiche

$$V_i^\circ \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^\circ + \mathbf{f}_k^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\circ + \mathbf{f}_i^\circ \cdot \widehat{\mathbf{V}}_i^\circ - \mathbf{f}_i^\circ \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\circ}, \quad (3.9)$$

dove si sono introdotte le quantità metriche

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} r \sin \theta \mathbf{n}_i^{\circ} d\mathcal{C}^{\circ}, \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_i^{\circ}} r \sin \theta \mathbf{n}^{\circ} d\mathcal{C}_i^{\circ} \quad \text{e} \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}_i^{\circ}} \widehat{\mathbf{r}} d\mathcal{C}^{\circ}. \quad (3.10)$$

3.1.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM

Si vuole ricavare la condizione di equivalenza tra lo schema FVM e lo schema FEM nel caso di coordinate sferiche tridimensionali. Procedendo in analogia con quanto fatto nel caso del sistema di coordinate cilindriche, si dovranno introdurre le proprietà a cui soddisfano le quantità metriche dei due schemi. In particolare si noti il fatto che aver introdotto la variabile $r \sin \theta$ rende la manipolazione delle equazioni scritte in coordinate sferiche del tutto analoga a quella utilizzata per le equazioni in coordinate cilindriche con la sostituzione $R \rightarrow r \sin \theta$ e calcolando le metriche nello spazio $r\theta\phi$. Per tale motivo qui ci si limita solo a riportare i risultati delle manipolazioni delle equazioni, in quanto i passaggi e le conclusioni sono del tutto analoghi al caso del sistema di coordinate cilindriche. Le proprietà dello schema FVM risultano

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \boldsymbol{\nu}_{ik}^{\circ} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{\circ}, \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} \widehat{\mathbf{V}}_i^{\circ} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{\circ} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^{\partial}, \\ \widehat{\mathbf{V}}_i^{\circ} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{\circ} = \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\circ}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^{\partial}, \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & 3V_i^{\circ} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{\circ} - \mathbf{x}_i^{\circ}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{\circ}, \end{aligned}$$

mentre le proprietà dello schema FEM risultano

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \boldsymbol{\eta}_{ik}^{\circ} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{R\theta}, \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} \widehat{\mathbf{L}}_i^{\circ} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{\circ} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^{\partial} \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^{\circ} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{\circ} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\circ}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^{\partial} \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & 3L_i^{\circ} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{x}_k^{\circ} - \mathbf{x}_i^{\circ}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{\circ} - \frac{\mathbf{x}_k^{\circ} - \mathbf{x}_i^{\circ}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{\circ} \right] + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^{\partial}} \frac{\mathbf{x}_k^{\circ} - \mathbf{x}_i^{\circ}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\circ}, \end{aligned}$$

Quindi posizionando i nodi dello schema FVM negli stessi punti di quello dello schema FEM ed uguagliando le proprietà dei due schemi si ottiene

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^{\circ} = \boldsymbol{\eta}_{ik}^{\circ}, \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\circ} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\circ}, \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^{\circ} = \widehat{\mathbf{L}}_i^{\circ} \quad (3.11)$$

e la condizione di equivalenza nel caso del sistema di coordinate sferiche tridimensionali risulta

$$V_i^\circ = L_i^\circ + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^\circ - \mathbf{x}_i^\circ}{6} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\circ - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^\circ - \mathbf{x}_i^\circ}{6} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\circ}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3.12)$$

3.2 Il caso sferico bidimensionale $r\text{-}\phi$

In questa sezione vengono presentate le formulazioni a elementi e volumi finiti per l'equazione di conservazione in coordinate sferiche qualora si possa supporre l'indipendenza della soluzione da una coordinata angolare (θ nel caso in esame). La forma assunta dalle equazioni è tale per cui si rende necessario specificare un valore della coordinata θ al fine di renderle totalmente indipendenti da essa. Si è scelto il valore di $\theta = \pi/2$. Come mostrato in §1.4.1 l'equazione di conservazione scalare in coordinate sferiche bidimensionali ($r\text{-}\phi$) è esprimibile in forma compatta utilizzando l'opportuno operatore divergenza come

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{f}^{r\phi} + \frac{1}{r} f_r = 0. \quad (3.13)$$

Da questa equazione si otterranno gli schemi ad elementi e volumi finiti.

3.2.1 Discretizzazione a elementi finiti

Procedendo come effettuato per le coordinate sferiche nel caso tridimensionale è necessario moltiplicare l'Eq. (3.13) per $r \sin \theta$ che nel caso in esame, con $\theta = \pi/2$, si riduce a r . Per ottenere la formulazione debole si utilizzano funzioni test Lagrangiane $\varphi_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$ e si integra sul supporto associato alla funzione Lagrangiana i -esima φ_i

$$\int_{\Omega_i} r \varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega^{r\phi} + \int_{\Omega_i} r \varphi_i \nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{f}^{r\phi}(u) d\Omega^{r\phi} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (3.14)$$

dove \mathcal{N} indica l'insieme di tutti nodi della triangolazione. Nel caso in esame l'elemento di volume infinitesimo assumerà la seguente forma

$$d\Omega^{r\phi} = r dr d\phi$$

e verrà di seguito omesso per brevità. L'Eq. (3.14) può essere manipolata integrando per parti il termine contenente l'operatore di divergenza; a seguito dell'applicazione del teorema della divergenza si ottiene

$$\int_{\Omega_i} r \varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega_i^\partial} r \varphi_i \mathbf{f}^{r\phi}(u) \cdot \mathbf{n}_i^{r\phi} - \int_{\Omega_i} r \mathbf{f}^{r\phi}(u) \cdot \nabla^{r\phi} \varphi_i. \quad (3.15)$$

Tramite l'espansione della soluzione nello stesso spazio delle φ_h e la conseguente interpolazione dei flussi si perviene alla forma Bubnov-Galerkin dello schema

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \frac{du_k}{dt} M_{ik}^{r\phi} = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^{r\phi}(t) \cdot \int_{\Omega_{ik}} r \varphi_k \nabla^{r\phi} \varphi_i - \sum_{k \in \mathcal{N}_i^\partial} \mathbf{f}_k^{r\phi}(t) \cdot \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} r \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}^{r\phi}, \quad (3.16)$$

in cui compare la matrice di massa

$$M_{ik}^{r\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_i} r \varphi_i \varphi_k d\Omega^{r\phi}.$$

Discretizzazione node-pair dello schema FEM

Dal confronto con la formulazione presentata nella sezione §2.2.1 si evince una analogia formale tra le due discretizzazioni dell'equazione di conservazione scalare scritta per i sistemi di coordinate sferico ($r-\phi$) e cilindrico ($Z-R$). Pertanto, in completa analogia a quanto fatto per ottenere l'Eq. (2.35), si giungerà alla, formalmente medesima, discretizzazione in forma node-pair

$$\begin{aligned} L_i^{r\phi} \frac{du_i}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^{r\phi} + \mathbf{f}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} + \frac{\mathbf{f}_k^{r\phi} - \mathbf{f}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{r\phi} \right) \\ & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^{r\phi} - \mathbf{f}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,r\phi} - \mathbf{f}_i^{r\phi} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,r\phi}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove $\mathcal{N}_{i,\neq} = \mathcal{N}_i \setminus \{i\}$ e $\mathcal{N}_{i,\neq}^\partial = \mathcal{N}_i^\partial \setminus \{i\}$. Le quantità metriche sono le medesime del caso cilindrico bidimensionale $R-\theta$, infatti r è, nel caso in esame, pari alla sola coordinata radiale e gli operatori, di conseguenza, assumeranno la stessa forma per le due diverse scelte di coordinate

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} r (\varphi_i \nabla^{r\phi} \varphi_k - \varphi_k \nabla^{r\phi} \varphi_i) d\Omega^{r\phi}, \\ \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{r\phi} & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}^{r\phi}} \varphi_i \varphi_k \hat{\mathbf{r}} d\Omega^{r\phi}, \\ \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,r\phi} & \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} r \varphi_i \varphi_k \mathbf{n}_i^{r\phi} d\partial\Omega^{r\phi}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,r\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial\Omega_{ik}^\partial} r \varphi_i \mathbf{n}_i^{r\phi} d\partial\Omega^{r\phi}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Come sempre si è introdotto il lumping della matrice di massa $M_{ik}^{r\phi}$

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^{r\phi} \frac{du_k}{dt} \simeq L_i^{r\phi} \frac{du_i}{dt},$$

dove $L_i^{r\phi} = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^{r\phi}$.

3.2.2 Discretizzazione a volumi finiti

Al fine di discretizzare l'Eq. (3.13) a volumi finiti, dopo aver moltiplicato per r , integrato sulla cella i -esima e integrato per parti il termine contenente la divergenza, si applica il teorema della divergenza e si giunge a scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} r u \, d\mathcal{C}^{r\phi} = - \oint_{\partial\mathcal{C}_i} r \mathbf{f}^{r\phi} \cdot \mathbf{n}_i^{r\phi} \, d\mathcal{C}^{r\phi}. \quad (3.19)$$

Anche per la discretizzazione a volumi finiti si ha una completa analogia con il caso cilindrico bidimensionale $Z-R$, per cui, a seguito dei passaggi più volte delineati, si ottiene la forma node-pair dello schema che qui si riporta direttamente per brevità

$$V_i^{r\phi} \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{r\phi} + \mathbf{f}_k^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi} - \mathbf{f}_i^{r\phi} \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,r\phi} \quad (3.20)$$

dove si sono definite le quantità metriche

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} r \mathbf{n}_i^{r\phi} \, d\mathcal{C}^{r\phi} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,r\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_i^\partial} r \mathbf{n}^{r\phi} \, d\mathcal{C}^{r\phi}. \quad (3.21)$$

3.2.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM

Nelle sezioni precedenti si è sottolineata l'analogia tra la formulazione FVM/FEM tra il caso di coordinate sferiche $r-\phi$ e quella in coordinate cilindriche $R-\theta$, di conseguenza anche le proprietà a cui soddisfano le quantità metriche nella formulazione in coordinate sferiche $r-\phi$ saranno analoghe a quelle nelle coordinate cilindriche $R-\theta$, ragion per cui qui ci si limita a riportare solo i risultati della condizione di equivalenza senza ricavarli esplicitamente in quanto i passaggi sono del tutto analoghi a quelli del caso cilindrico assisimmetrico, con l'unica differenza nel coefficiente moltiplicativo della cella nello schema FVM e della massa nello schema FEM per il fatto che $\nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{x}^{r\phi} = 2$. Le proprietà dello schema FVM risultano

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{r\phi}, \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} \widehat{\mathbf{V}}_i^{r\phi} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial, \\ \widehat{\mathbf{V}}_i^{r\phi} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi} = \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,r\phi}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial, \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & 2V_i^{r\phi} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{r\phi} - \mathbf{x}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi}, \end{aligned}$$

mentre le proprietà dello schema FEM risultano

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^{R\theta}, \\
 (b) \quad & \begin{cases} \widehat{\mathbf{L}}_i^{r\phi} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} = \mathbf{0}, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial \\ \widehat{\mathbf{L}}_i^{r\phi} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,r\phi}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases} \\
 (c) \quad & 2L_i^{r\phi} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{x}_k^{r\phi} - \mathbf{x}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} - \frac{\mathbf{x}_k^{r\phi} - \mathbf{x}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{r\phi} \right] + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^{r\phi} - \mathbf{x}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,r\phi},
 \end{aligned}$$

Quindi posizionando i nodi dello schema FVM negli stessi punti di quello dello schema FEM ed uguagliando le proprietà dei due schemi si ottiene

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi} = \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi}, \quad \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,r\phi} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,r\phi}, \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^{r\phi} = \widehat{\mathbf{L}}_i^{r\phi} \quad (3.22)$$

e la condizione di equivalenza nel caso del sistema di coordinate sferiche r - ϕ risulta

$$V_i^{r\phi} = L_i^{r\phi} + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{x}_k^{r\phi} - \mathbf{x}_i^{r\phi}}{4} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{r\phi} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{x}_k^{r\phi} - \mathbf{x}_i^{r\phi}}{4} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,r\phi}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3.23)$$

3.3 Il caso monodimensionale

In questa sezione vengono presentate le formulazioni a elementi e volumi finiti, nella loro forma node-pair, per la discretizzazione dell'equazione di conservazione scalare per problemi in coordinate sferiche monodimensionali. Vengono ricavate, inoltre, le condizioni di equivalenza tra i due schemi FEM e FVM.

L'equazione di conservazione scalare in coordinate sferiche monodimensionali (1.35), qui riscritta per comodità, assume la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{2}{r} f_r = 0.$$

Moltiplicando la relazione precedente per la coordinata radiale r e riarrangiando i termini è possibile ottenere

$$r \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(r f_r)}{\partial r} + f_r = 0. \quad (3.24)$$

3.3.1 Discretizzazione a elementi finiti

La formulazione a elementi finiti dell'Eq. (3.24) è ottenibile moltiplicando per la funzione test Lagrangiana φ e integrando sul dominio (come sempre verrà omissa il differenziale $d\Omega^r = dr$)

$$\int_{\Omega} r \phi \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Omega} \phi \frac{\partial(r f_r)}{\partial r} + \int_{\Omega} \phi f_r = 0. \quad (3.25)$$

Integrando per parti il secondo termine al primo membro si può riscrivere l'Eq. (3.25) come

$$\int_{\Omega} r\phi \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Omega} \frac{\partial(r\phi f_r)}{\partial r} - \int_{\Omega} r f_r \phi' + \int_{\Omega} \phi f_r = 0, \quad (3.26)$$

dove l'apice ' indica l'operazione di derivazione ordinaria rispetto alla coordinata radiale r . Sfruttando la definizione delle funzioni test Lagrangiane a supporto compatto queste permettono di limitare gli integrali al solo segmento corrispondente all'elemento finito Ω_i (si veda la figura 2.3)

$$\int_{\Omega_i} r\varphi_i \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Omega_i} \frac{\partial(r\varphi_i f_r)}{\partial r} - \int_{\Omega_i} r f_r \varphi_i' + \int_{\Omega_i} \varphi_i f_r = 0. \quad (3.27)$$

L'Eq. (3.27) è stata scritta in modo da porla in analogia con l'equazione scalare monodimensionale in coordinate cilindriche (2.50), infatti, dal confronto delle due è facile notare che esse sono identiche fatta eccezione l'utilizzo della coordinata radiale r nel caso sferico e R nel caso cilindrico e per la presenza dell'ultimo termine al primo membro della (3.27) assente nella (2.50).

Pertanto sfruttando tale analogia si avrà

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial(r\varphi_i f_r)}{\partial r} dr = f_{r_i} \xi_i^{\partial,r}, \quad (3.28)$$

dove la quantità metrica $\xi_i^{\partial,r} = \pm r_i$ è la medesima della $\xi_i^{\partial,R}$.

Introducendo ora le approssimazioni per l'incognita $u(r, t)$ e per il flusso $f_r(r, t)$

$$\begin{aligned} u(r, t) &\simeq u_h(r, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} u_k(t) \varphi_k(r) \\ f_r(r, t) &\simeq f_{r_h}(r, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} f_{r_k}(t) \varphi_k(r) \end{aligned}$$

l'Eq. (3.27) diventa

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^r \frac{du_k}{dt} = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} f_{r_k} \int_{\Omega_{ik}} r \varphi_k \varphi_i' - \sum_{k \in \mathcal{N}_i} f_{r_k} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_k \varphi_i - f_{r_i} \xi_i^{\partial,r} \quad (3.29)$$

che rappresenta la discretizzazione Bubnov-Galerkin a elementi finiti in coordinate sferiche monodimensionali.

Discretizzazione node-pair dello schema FEM

L'Eq. (3.29) può essere riscritta in modo da evidenziare la struttura node-pair. Per fare questo è sufficiente utilizzare l'identità (2.54) introdotta nel caso di coordinate cilindriche monodimensionali e manipolare il penultimo termine a secondo membro

della (3.29) nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in \mathcal{N}_i} f_{r_k} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} (f_{r_k} - f_{r_i}) \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} f_{r_i} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} (f_{r_k} - f_{r_i}) \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k + f_{r_i} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

La forma finale della discretizzazione ad elementi finiti in forma node-pair per l'equazione scalare in coordinate sferiche monodimensionali risulta essere

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^r \frac{du_k}{dt} &= - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \left(\frac{f_{r_k} + f_{r_i}}{2} \eta_{ik}^r + \frac{f_{r_k} - f_{r_i}}{2} \zeta_{ik}^r \right) \\
 &\quad - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} (f_{r_k} - f_{r_i}) \zeta_{ik}^r - f_{r_i} \widehat{L}_i^r - f_{r_i} \xi_i^{\partial, r} \\
 &= - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \left(\frac{f_{r_k} + f_{r_i}}{2} \eta_{ik}^r + \frac{3(f_{r_k} - f_{r_i})}{2} \zeta_{ik}^r \right) \\
 &\quad - f_{r_i} \widehat{L}_i^r - f_{r_i} \xi_i^{\partial, r},
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

dove si sono utilizzate le definizioni delle quantità metriche

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^r &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} r \varphi_i \varphi_k \, d\Omega^r, & \eta_{ik}^r &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} r (\varphi_i \varphi_k' - \varphi_k \varphi_i') \, d\Omega^r, \\
 \zeta_{ik}^r &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k \, d\Omega^r, & \widehat{L}_i^r &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \, d\Omega^r.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

3.3.2 Discretizzazione a volumi finiti

Viene ora ricavata la forma assunta dallo schema a volumi finiti per la discretizzazione dell'equazione di conservazione scalare in coordinate sferiche monodimensionali (3.24). È necessario integrare l'Eq. (3.24) sulla cella i -esima ottenendo

$$\int_{\mathcal{C}_i} r \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial(r f_r)}{\partial r} + \int_{\mathcal{C}_i} f_r = 0. \tag{3.33}$$

In completa analogia a quanto discusso in §3.3.2 è possibile riscrivere

$$\int_{\mathcal{C}_i} r \frac{\partial(r f_r)}{\partial r} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} f_{r_{ik}} \nu_{ik}^r + f_{r_i} \nu_i^{\partial, r}, \tag{3.34}$$

con le quantità metriche ν_{ik}^r e $\nu_i^{\partial, r}$ identiche, rispettivamente, a ν_{ik}^R e $\nu_i^{\partial, R}$ ricavate in §3.3.2

$$\nu_{ik}^r = \sigma_{ik} r_{ik} \quad \text{e} \quad \nu_i^{\partial, r} = \pm r_i, \tag{3.35}$$

dove $\sigma_{ik} = r_k - r_i$, mentre r_{ik} e r_i indicano rispettivamente i valori delle coordinate radiali r in corrispondenza dell'interfaccia tra i nodi i e k e del nodo i -esimo. Maggiore attenzione deve essere posta all'analisi del termine $\int_{C_i} \frac{\partial(r f_r)}{\partial r}$, infatti, esso può essere riscritto, approssimando il flusso come costante sulla cella

$$\int_{C_i} \frac{\partial(r f_r)}{\partial r} dr = f_{r_i} \int_{C_i} 1 dr = f_{r_i} \widehat{V}_i^r, \quad \text{con} \quad \widehat{V}_i^r \stackrel{\text{def}}{=} \int_{C_i} 1 dr. \quad (3.36)$$

Si devono introdurre due ulteriori approssimazioni per giungere alla forma finale assunta dallo schema, ovvero l'approssimazione del secondo ordine del flusso di interfaccia $f_{r_{ik}}$

$$f_{r_{ik}} = \frac{f_{r_k} + f_{r_i}}{2}$$

e l'approssimazione della media di cella per l'incognita $u(r, t)$. L'introduzione di tali approssimazioni, unitamente alle definizioni (2.58) porta a scrivere la forma finale dello schema FVM per l'equazione di conservazione scalare in coordinate sferiche monodimensionali

$$V_i^r \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \frac{f_{r_k} + f_{r_i}}{2} \nu_{ik}^r - f_{r_i} \nu_i^{\partial, r} - f_{r_i} \widehat{V}_i^r. \quad (3.37)$$

3.3.3 Condizione di equivalenza FEM-FVM

Si vogliono calcolare le condizioni di equivalenza nel caso monodimensionale. Le proprietà (a) e (b) mantengono la stessa forma dei casi precedenti, mentre risulta utile spendere alcuni passaggi per dimostrare le proprietà (c). Di seguito sono riportate le proprietà FVM-a e FVM-b

$$(a) \quad \nu_{ik}^r = -\nu_{ki}^r,$$

$$(b) \quad \begin{cases} \widehat{V}_i^r - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \nu_{ik}^r = 0, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial, \\ \widehat{V}_i^r - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \nu_{ik}^r = \nu_i^{\partial, r}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases}$$

Per ottenere la proprietà FVM-c, si considera la relazione (3.35) e ricordando che la lunghezza della cella nel caso monodimensionale è

$$V_i^r = \int_{C_i} R dC^R = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} |r_{ik}^2 - r_i^2|,$$

si ottiene che

$$2V_i^r = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \sigma_{ik} (r_{ik} \nu_{ik}^r - r_i \nu_i^{\partial, r}),$$

dalla proprietà FVM-b, aggiungendo $r_i (\widehat{V}_i^r - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \nu_{ik}^r - \nu_i^{\partial, r} = 0)$ al termine di destra dell'espressione precedente si ottiene la proprietà FVM-c

$$2V_i^r - r_i \widehat{V}_i^r = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} (r_{ik} - r_i) \nu_{ik}^r$$

Di seguito sono riportate le proprietà FEM-a e FEM-b dello schema FEM

$$(a) \quad \eta_{ik}^r = -\eta_{ki}^r,$$

$$(b) \quad \begin{cases} \widehat{L}_i^r - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \eta_{ik}^r = 0, & \text{se } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^\partial \\ \widehat{L}_i^r - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \eta_{ik}^r = \xi_i^{\partial, r}, & \text{se } i \in \mathcal{N}^\partial \end{cases}$$

Per ottenere la proprietà FEM-c, partendo dalla seguente relazione

$$\int_{\Omega_i} 3r\varphi_i = \int_{\Omega_i} [(r^2\varphi_i)' - r^2\varphi_i' + r\varphi_i],$$

notando che il termine al membro di sinistra è $3L_i^r$ e sostituendo lo sviluppo esatto $r = \sum_{k \in \mathcal{N}} r_k \varphi_k$, sommando per tutti i $k \in \mathcal{N}_i$ e applicando lo schema (3.31) si ottiene

$$3L_i^r = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \left(\frac{r_k + r_i}{2} \eta_{ik}^r + 3 \frac{r_k - r_i}{2} \zeta_{ik}^r \right) + r_i \widehat{L}_i^r + r_i \xi_i^{\partial, r},$$

quindi sottraendo all'equazione precedente la proprietà FEM-b moltiplicata per r_i si ottiene la proprietà FEM-c

$$3L_i^r = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \left(\frac{r_k - r_i}{2} \eta_{ik}^R + 3 \frac{r_k - r_i}{2} \zeta_{ik}^R \right)$$

Posizionando ora i nodi dello schema FVM negli stessi punti di quelli dello schema FVM ed uguagliando le proprietà dei due schemi si ottiene

$$\nu_{ik}^r = \eta_{ik}^r, \quad \nu_i^{\partial, r} = \xi_i^{\partial, r}, \quad \widehat{V}_i^r = \widehat{L}_i^r \quad (3.38)$$

e la condizione di equivalenza nel caso del sistema di coordinate sferiche monodimensionali risulta

$$V_i^r = \frac{3}{2} L_i^r - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} 3 \frac{R_k - R_i}{4} \zeta_{ik}^R, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3.39)$$

La forma discreta delle equazioni di Eulero

La formulazione node-pair ricavata per l'equazione scalare in coordinate cilindriche (Capitolo 2) e in coordinate sferiche (Capitolo 3) viene qui estesa al caso vettoriale delle equazioni di Eulero. Si ricava la forma discreta FEM/FVM e sulla base della condizione di equivalenza tra volumi/elementi finiti viene proposto uno schema ai volumi finiti centrato del secondo ordine. La discretizzazione delle equazioni di Eulero nel caso cartesiano è mostrata in [15,41], mentre qui viene considerato il caso delle coordinate cilindriche e sferiche. Infine, la forma completamente discreta delle equazioni è ottenuta discretizzando la derivata temporale dell'incognita. Vengono, inoltre, brevemente descritte le principali scelte implementative presenti nel codice di calcolo già in uso nel Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale del Politecnico di Milano che ha costituito la base per l'estensione ai sistemi di coordinate cilindriche e sferiche effettuata in questo lavoro.

4.1 La discretizzazione node-pair in coordinate cilindriche

La discretizzazione node-pair FEM e FVM di un sistema di equazioni si ottiene in modo analogo a quanto fatto nel caso scalare. Formalmente le equazioni discretizzate per il problema vettoriale risultano uguali alle espressioni ottenute per il caso scalare e anche le condizioni di equivalenza non vengono modificate passando da un problema scalare ad uno vettoriale. Si consideri in particolare il sistema di equazioni di Eulero in coordinate cilindriche, rispetto al caso cartesiano l'unico elemento di novità è rappresentato dalla presenza del termine sorgente, che come si vedrà, può essere scritto in forma discreta in modo agevole.

4.1.1 Il caso tridimensionale

Le equazioni di Eulero in coordinate cilindriche tridimensionali sono state scritte nel Capitolo 2 e sono riportate di seguito per comodità

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\varnothing}{\partial t} + \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{f}^\varnothing = \frac{1}{R} \mathbf{s}^\varnothing. \quad (4.1)$$

Il sistema di equazioni (4.1), analogamente al caso scalare, viene moltiplicato per la variabile R e poi scritto in forma debole

$$\int_{\Omega_i} R \varphi_i \frac{\partial \mathbf{u}^\varnothing}{\partial t} - \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f}^\varnothing \cdot \nabla R - \int_{\Omega_i} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \nabla \varphi_i + \oint_{\partial \Omega_i^\varnothing} R \varphi_i \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{s}^\varnothing,$$

si introduce poi l'espansione del vettore delle incognite \mathbf{u}^ϑ e la reinterpolazione della funzione flusso \mathbf{f}^ϑ

$$\mathbf{u}^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t) \simeq \mathbf{u}_h^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{u}_k^\vartheta(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta),$$

$$\mathbf{f}^\vartheta(\mathbf{u}_h^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t)) \simeq \mathbf{f}_h^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{f}_k^\vartheta(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta),$$

con $\mathbf{f}_k^\vartheta(t) = \mathbf{f}^\vartheta(\mathbf{u}_k^\vartheta(t))$. Ricordando che il termine sorgente in coordinate cilindriche risulta

$$\mathbf{s}^\vartheta(\mathbf{u}^\vartheta) = \left(0, 0, \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi(\mathbf{u}^\vartheta), -\frac{m_\theta m_R}{\rho}, 0 \right)^\top,$$

le singole componenti possono essere approssimate tramite l'espansione nello spazio delle funzioni test come mostrato di seguito

$$\frac{m_\theta^2(\mathbf{x}^\vartheta, t)}{\rho(\mathbf{x}^\vartheta, t)} \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{(m_{\theta,k}(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta))^2}{(\rho_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta))} = \sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{m_{\theta,k}^2(t)}{\rho_k(t)} \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta),$$

$$\Pi(\mathbf{u}^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t)) \simeq \Pi(\mathbf{u}_h^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t)) = \Pi \left(\sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{u}_k^\vartheta(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta) \right) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}} \Pi_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta).$$

$$\begin{aligned} -\frac{m_\theta(\mathbf{x}^\vartheta, t) m_R(\mathbf{x}^\vartheta, t)}{\rho(\mathbf{x}^\vartheta, t)} &\simeq -\sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{(m_{\theta,k}(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta)) (m_{R,k}(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta))}{(\rho_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta))} \\ &= -\sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{m_{\theta,k}(t) m_{R,k}(t)}{\rho_k(t)} \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta), \end{aligned}$$

Quindi la rappresentazione FEM del termine sorgente in coordinate cilindriche risulta

$$\mathbf{s}^\vartheta(\mathbf{u}_h^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t)) \simeq \mathbf{s}_h^\vartheta(\mathbf{x}^\vartheta, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{s}_k^\vartheta(t) \varphi_k(\mathbf{x}^\vartheta),$$

con

$$\mathbf{s}_k^\vartheta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(0, 0, \frac{m_{\theta,k}^2}{\rho_k} + \Pi_k, -\frac{m_{\theta,k} m_{R,k}}{\rho_k}, 0 \right)^\top.$$

La formulazione debole del termine sorgente risulta

$$\int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{s}^\vartheta(\mathbf{u}^\vartheta) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^\vartheta(t) \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik} \mathbf{s}_k^\vartheta(t),$$

con $M_{ik} = \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k$.

Utilizzando gli stessi passaggi per la discretizzazione FEM node-pair dell'equazione scalare (2.2) è possibile ottenere la formulazione FEM node-pair delle equazioni di Eulero in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} L_i^\vartheta \frac{d\mathbf{u}_i^\vartheta}{dt} &= - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\vartheta + \mathbf{f}_i^\vartheta}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik} \frac{\mathbf{f}_k^\vartheta - \mathbf{f}_i^\vartheta}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\vartheta \right) + \mathbf{f}_i^\vartheta \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^\vartheta + \mathbf{s}_k^\vartheta L_i \\ &\quad - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^\vartheta - \mathbf{f}_i^\vartheta}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\vartheta} - \mathbf{f}_i^\vartheta \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\vartheta}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

dove le quantità metriche FEM sono state definite in (2.6) ed è stato effettuato il lumping della matrice che moltiplica il termine sorgente: $L_i \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}$. La discretizzazione FVM in forma node-pair dell'Eq. (4.1), analogamente al caso scalare, si ottiene come segue

$$V_i^\varnothing \frac{d\mathbf{u}_i^\varnothing}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing + \mathbf{s}_i^\varnothing V_i - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\varnothing} \quad (4.3)$$

con $V_i = \int_{\mathcal{C}_i} d\mathcal{C}_i$ e le quantità metriche FVM sono state definite in §2.1.2. Grazie alle relazioni (2.30), l'Eq. (4.3) può essere riscritta come

$$V_i^\varnothing \frac{d\mathbf{u}_i^\varnothing}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing + \mathbf{s}_i^\varnothing L_i - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\varnothing}, \quad (4.4)$$

in cui il termine V_i^\varnothing è ricavato dalla condizione di equivalenza (2.31).

4.1.2 Caso assialsimmetrico $Z-R$

Si consideri ora il caso delle equazioni di Eulero scritte nelle coordinate cilindriche $Z-R$, Eq. (1.55). Come visto precedentemente, l'unico elemento di novità rispetto al caso scalare è rappresentato dal termine sorgente che in questo caso risulta

$$\mathbf{s}^{ZR}(\mathbf{u}^{ZR}) = (0, 0, \Pi(\mathbf{u}^{ZR}), 0)^T,$$

In analogia a quanto fatto nel caso tridimensionale, il termine sorgente viene discretizzato come

$$\mathbf{s}^{ZR}(\mathbf{u}_h^{ZR}(\mathbf{x}^{ZR}, t)) \simeq \mathbf{s}_h^{ZR}(\mathbf{x}^{ZR}, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{s}_k^{ZR}(t) \varphi_k(\mathbf{x}^{ZR}),$$

con $\mathbf{s}_k^{ZR}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, \Pi_k, 0)^T$. La formulazione debole del termine sorgente risulta quindi

$$\int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{s}^{ZR}(\mathbf{u}^{ZR}) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^{ZR}(t) \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik} \mathbf{s}_k^{ZR}(t).$$

Omettendo tutti i passaggi intermedi, si può quindi scrivere direttamente l'espressione finale della discretizzazione FEM

$$\begin{aligned} L_i^{ZR} \frac{d\mathbf{u}_i^{ZR}}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^{ZR} + \mathbf{f}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} + \frac{\mathbf{f}_k^{ZR} - \mathbf{f}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{ZR} \right) + \mathbf{s}_i^{ZR} L_i \\ & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^{ZR} - \mathbf{f}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,ZR} - \mathbf{f}_i^{ZR} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,ZR}, \end{aligned}$$

dove le quantità metriche sono state definite in (2.36). La discretizzazione FVM in forma node-pair risulta

$$V_i^{ZR} \frac{d\mathbf{u}_i^{ZR}}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{ZR} + \mathbf{f}_k^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{ZR} + \mathbf{s}_i^{ZR} V_i - \mathbf{f}_i^{ZR} \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,ZR},$$

con le quantità metriche definite in (2.39). Grazie alle relazioni (2.40) è possibile scrivere l'espressione precedente come segue

$$V_i^{ZR} \frac{d\mathbf{u}_i^{ZR}}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_k^{ZR} + \mathbf{f}_i^{ZR}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{ZR} + \mathbf{s}_i^{ZR} L_i - \mathbf{f}_i^{ZR} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,ZR},$$

con V_i^{ZR} dato dalla condizione di equivalenza (2.41).

4.1.3 Caso polare $R - \theta$

Il termine sorgente nel caso delle equazioni di Eulero scritte nelle coordinate cilindriche $R-\theta$ risulta

$$\mathbf{s}^{R\theta}(\mathbf{u}^{R\theta}) = \mathbf{s}^{R\theta} = \left(0, \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi, \frac{m_\theta m_R}{\rho}, 0 \right)^T,$$

di conseguenza viene discretizzato come

$$\mathbf{s}^{R\theta}(\mathbf{u}_h^{R\theta}(\mathbf{x}^{R\theta}, t)) \simeq \mathbf{s}_h^{R\theta}(\mathbf{x}^{R\theta}, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{s}_k^{R\theta}(t) \varphi_k(\mathbf{x}^{R\theta}),$$

con

$$\mathbf{s}_k^{R\theta}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(0, \frac{m_{\theta,k}^2}{\rho_k} + \Pi_k, -\frac{m_{\theta,k} m_{R,k}}{\rho_k}, 0 \right)^T.$$

La formulazione debole del termine sorgente risulta quindi

$$\int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{s}^{R\theta}(\mathbf{u}^{R\theta}) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^{R\theta}(t) \int_{\Omega_{ik}} \varphi_i \varphi_k = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik} \mathbf{s}_k^{R\theta}(t).$$

Procedendo alla discretizzazione FEM delle equazioni di Eulero nelle coordinate polari si ottiene

$$\begin{aligned} L_i^{R\theta} \frac{d\mathbf{u}_i^{R\theta}}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^{R\theta} + \mathbf{f}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} - \frac{\mathbf{f}_k^{R\theta} - \mathbf{f}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{R\theta} \right) + \mathbf{s}_i^{R\theta} L_i \\ & + \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta} - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\theta} \frac{\mathbf{f}_k^{R\theta} - \mathbf{f}_i^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,R\theta} - \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,R\theta}, \end{aligned}$$

dove le quantità metriche sono state definite in (2.44). La discretizzazione FVM risulta

$$V_i^{R\theta} \frac{d\mathbf{u}_i^{R\theta}}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{R\theta} + \mathbf{f}_k^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{R\theta} + \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \widehat{\mathbf{V}}_i^{R\theta} + \mathbf{s}_i^{R\theta} V_i - \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,R\theta}.$$

con le quantità metriche definite in (2.46). Quindi, grazie alle relazioni (2.47) la forma finale della discretizzazione FVM diventa

$$V_i^{R\theta} \frac{d\mathbf{u}_i^{R\theta}}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{R\theta} + \mathbf{f}_k^{R\theta}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{R\theta} + \mathbf{f}_i^{\emptyset} \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^{R\theta} + \mathbf{s}_i^{R\theta} L_i - \mathbf{f}_i^{R\theta} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,R\theta}.$$

con $V_i^{R\theta}$ dato dalla condizione di equivalenza (2.48).

4.1.4 Caso monodimensionale

Come già fatto nei casi precedenti nella discretizzazione delle equazioni di Eulero bisogna solo concentrarsi sulla forma discreta del termine sorgente in quanto gli altri termini si discretizzano in modo del tutto analogo a come fatto nel caso scalare. Nel caso monodimensionale cilindrico il termine sorgente risulta $\mathbf{s}^R(\mathbf{u}^R) = (0, \Pi, 0)^T$, quindi grazie alla reinterpolazione dei flussi si può scrivere

$$\mathbf{s}^R(\mathbf{u}^R) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^R(t) \varphi_k(R),$$

con $\mathbf{s}_k^R(t) = (0, \Pi_k, 0)^T$. La forma debole del termine sorgente diventa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \varphi_i R \mathbf{s}^R(\mathbf{u}^R) &\simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^R(t) \int_{\Omega_i} \varphi_i \varphi_k \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^R(t) M_{ik}. \end{aligned}$$

Lo schema FEM node-pair delle equazioni di Eulero in simmetria cilindrica risulta

$$L_i^R \frac{d\mathbf{u}_i^R}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^R + \mathbf{f}_i^R}{2} \eta_{ik}^R + \frac{\mathbf{f}_k^R - \mathbf{f}_i^R}{2} \zeta_{ik}^R \right) + \mathbf{s}_k^R L_i - \mathbf{f}_i^R \xi_i^{\partial, R}, \quad (4.5)$$

con le quantità metriche definite in §2.4.1. La discretizzazione FVM in forma node-pair delle equazioni di Eulero in simmetria cilindrica risulta

$$V_i^R \frac{d\mathbf{u}_i^R}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \frac{\mathbf{f}_i^R + \mathbf{f}_k^R}{2} \nu_{ik}^R + \mathbf{s}_i^R \widehat{V}_i^R - \mathbf{f}_i^R \nu_i^{\partial, R},$$

dove le quantità metriche sono state definite in §2.4.2. Quindi grazie alle relazioni (2.61) è possibile scrivere lo schema FVM precedente come segue

$$V_i^R \frac{d\mathbf{u}_i^R}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i, \neq}} \frac{\mathbf{f}_i^R + \mathbf{f}_k^R}{2} \eta_{ik}^R + \mathbf{s}_i^R \widehat{L}_i^R - \mathbf{f}_i^R \xi_i^{\partial, R}.$$

con V_i^R calcolato con la condizione di equivalenza (2.62).

4.2 Coordinate sferiche

Si vogliono ora discretizzare le equazioni di Eulero in coordinate sferiche. Le considerazioni fatte nel caso cilindrico si estendono in modo immediato al caso sferico, quindi ci si limiterà per lo più a mostrare le espressioni finali delle forme discrete per non appesantire la trattazione.

4.2.1 Il caso tridimensionale

Si consideri il sistema delle equazioni di Eulero in coordinate sferiche tridimensionali, Eq. (1.63). In particolare il termine sorgente risulta

$$\mathbf{s}^\circ(\mathbf{u}^\circ) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) + \sin \theta \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ - \sin \theta \left(\frac{m_\theta m_r}{\rho} \right) + \cos \theta \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ - \sin \theta \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) - \cos \theta \left(\frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

che può essere convenientemente riscritto come

$$\mathbf{s}^\circ(\mathbf{u}^\circ) = \sin \theta \check{\mathbf{s}}^\circ(\mathbf{u}^\circ) + \cos \theta \check{\mathbf{s}}^\circ(\mathbf{u}^\circ),$$

dove

$$\check{\mathbf{s}}^\circ(\mathbf{u}^\circ) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \right) + \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ - \frac{m_\theta m_r}{\rho} \\ - \frac{m_\phi m_r}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \check{\mathbf{s}}^\circ(\mathbf{u}^\circ) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \\ - \frac{m_\phi m_\theta}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I termini non nulli dei vettori $\check{\mathbf{s}}^\circ$ e $\check{\mathbf{s}}^\circ$ vengono discretizzati attraverso la reinterpolazione dei flussi

$$\mathbf{s}^\circ \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}} (\sin \theta) \varphi_k(\mathbf{x}^\circ) \check{\mathbf{s}}_k^\circ(t) + \sum_{k \in \mathcal{N}} (\cos \theta) \varphi_k(\mathbf{x}^\circ) \check{\mathbf{s}}_k^\circ(t),$$

con

$$\check{\mathbf{s}}_k^\circ(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{m_{\theta,k}^2}{\rho_k} + \Pi_k \right) + \left(\frac{m_{\phi,k}^2}{\rho_k} + \Pi_k \right) \\ - \frac{m_{\theta,k} m_{r,k}}{\rho_k} \\ - \frac{m_{\phi,k} m_{r,k}}{\rho_k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{s}}_k^\circ(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_{\phi,k}^2}{\rho_k} + \Pi \\ - \frac{m_{\phi,k} m_{\theta,k}}{\rho_k} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La formulazione debole del termine sorgente si scrive

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} r \sin \theta \varphi_i (\sin \theta \check{\mathbf{s}}^\circ(\mathbf{u}^\circ)) + \int_{\Omega_i} r \sin \theta \varphi_i (\cos \theta \check{\mathbf{s}}^\circ(\mathbf{u}^\circ)) \\ \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}} \check{\mathbf{s}}_k^\circ \int_{\Omega_{ik}} r \sin^2 \theta \varphi_i \varphi_k + \sum_{k \in \mathcal{N}} \check{\mathbf{s}}_k^\circ \int_{\Omega_{ik}} r \sin \theta \cos \theta \varphi_i \varphi_k \\ = \sum_{k \in \mathcal{N}} \check{\mathbf{s}}_k^\circ \check{M}_{ik} + \sum_{k \in \mathcal{N}} \check{\mathbf{s}}_k^\circ \check{M}_{ik}, \end{aligned}$$

dove sono state definite le seguenti quantità metriche

$$\check{M}_{ik} = \int_{\Omega_{ik}} r \sin^2 \theta \varphi_i \varphi_k \quad \text{e} \quad \check{M}_{ik} = \int_{\Omega_{ik}} r \sin \theta \cos \theta \varphi_i \varphi_k.$$

A questo punto con passaggi del tutto analoghi a quelli fatti nel caso scalare è possibile scrivere la forma discreta node-pair

$$\begin{aligned} L_i^\circ \frac{d\mathbf{u}_i^\circ}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\circ + \mathbf{f}_i^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ - \frac{\mathbf{f}_k^\circ - \mathbf{f}_i^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\circ \right) + \mathbf{f}_i^\circ \cdot \hat{\mathbf{L}}_i^\circ \\ - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^\circ - \mathbf{f}_i^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,\circ} - \mathbf{f}_i^\circ \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\circ} + \check{\mathbf{s}}^\circ \check{L}_i + \check{\mathbf{s}}^\circ \check{L}_i, \end{aligned}$$

in cui le quantità metriche sono state definite in (3.8) ed è stata utilizzata la seguente approssimazione per le matrici che moltiplicano i termini sorgenti $\hat{L}_i \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \check{M}_{ik}$ e $\check{L}_i \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \check{M}_{ik}$. La forma discreta node-pair FVM risulta

$$V_i^\circ \frac{d\mathbf{u}_i^\circ}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^\circ + \mathbf{f}_k^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\circ + \mathbf{f}_i^\circ \cdot \hat{\mathbf{V}}_i^\circ - \mathbf{f}_i^\circ \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,\circ} + \check{\mathbf{s}}_i^\circ \hat{V}_i + \check{\mathbf{s}}_i^\circ \check{V}_i, \quad (4.6)$$

con le quantità metriche definite in (3.9) e dove $\check{V}_i = \int_{\mathcal{C}_i} r \sin \theta \sin \theta d\mathcal{C}_i$ e $\check{V}_i = \int_{\mathcal{C}_i} r \sin \theta \cos \theta d\mathcal{C}_i$. Grazie alle relazioni (3.11) è possibile scrivere la relazione precedente come segue

$$V_i^\circ \frac{d\mathbf{u}_i^\circ}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^\circ + \mathbf{f}_k^\circ}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ + \mathbf{f}_i^\circ \cdot \hat{\mathbf{L}}_i^\circ - \mathbf{f}_i^\circ \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,\circ} + \check{\mathbf{s}}_i^\circ \hat{L}_i + \check{\mathbf{s}}_i^\circ \check{L}_i, \quad (4.7)$$

dove V_i° è calcolato con la condizione di equivalenza (3.12).

4.2.2 Il caso sferico bidimensionale $r-\phi$

Nel caso sferico bidimensionale il termine sorgente delle equazioni di Eulero risulta

$$\mathbf{s}^{r\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi + \left(\frac{m_\phi^2}{\rho} + \Pi \right) \\ - \left(\frac{m_\phi m_r}{\rho} \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi tramite la reinterpolazione dei flussi è possibile scrivere il termine sorgente come segue

$$\mathbf{s}^{r\phi}(\mathbf{u}_h^{r\phi}(\mathbf{x}^{r\phi}, t)) \simeq \mathbf{s}_h^{r\phi}(\mathbf{x}^{r\phi}, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{s}_k^{r\phi}(t) \varphi_k(\mathbf{x}^{r\phi}),$$

$$\text{con } \mathbf{s}_k^{r\phi} = \left(0, \Pi_k + \left(\frac{m_{\phi,r}^2}{\rho_k} + \Pi_k \right), - \left(\frac{m_{\phi,k} m_{r,k}}{\rho_k} \right), 0 \right).$$

Analogamente al caso scalare la formulazione FEM node-pair delle equazioni di Eulero in coordinate sferiche r - ϕ risulta

$$\begin{aligned} L_i^{r\phi} \frac{d\mathbf{u}_i^{r\phi}}{dt} = & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^{r\phi} + \mathbf{f}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} + \frac{\mathbf{f}_k^{r\phi} - \mathbf{f}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^{r\phi} \right) + \mathbf{s}_i^{r\phi} L_i \\ & - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^{r\phi} - \mathbf{f}_i^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^{\partial,r\phi} - \mathbf{f}_i^{r\phi} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,r\phi}, \end{aligned}$$

dove è stato effettuato il lumping della matrice che moltiplica il termine sorgente e le quantità metriche sono state definite in (3.18). La forma FVM node-pair risulta invece

$$V_i^{r\phi} \frac{d\mathbf{u}_i^{r\phi}}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{r\phi} + \mathbf{f}_k^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^{r\phi} + \mathbf{s}_i^{r\phi} V_i - \mathbf{f}_i^{r\phi} \cdot \boldsymbol{\nu}_i^{\partial,r\phi}$$

con le quantità metriche definite in (3.21). Grazie alle relazioni (3.22) è possibile scrivere l'espressione precedente come

$$V_i^{r\phi} \frac{d\mathbf{u}_i^{r\phi}}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^{r\phi} + \mathbf{f}_k^{r\phi}}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^{r\phi} + \mathbf{s}_i^{r\phi} L_i - \mathbf{f}_i^{r\phi} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\partial,r\phi},$$

con $V_i^{r\phi}$ calcolato tramite la condizione di equivalenza (3.23).

4.2.3 Caso monodimensionale

Anche nel caso monodimensionale si pone l'attenzione solo sulla discretizzazione del termine sorgente in quanto gli altri termini si discretizzano in modo del tutto analogo a quanto fatto nel caso scalare. Nel caso monodimensionale sferico il termine sorgente risulta $\mathbf{s}^R(\mathbf{u}^r) = (0, 2\Pi, 0)^\top$ quindi, grazie alla reinterpolazione dei flussi, si può scrivere

$$\mathbf{s}^r(\mathbf{u}^r) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^r(t) \varphi_k(R),$$

con $\mathbf{s}_k^r(t) = (0, 2\Pi_k, 0)^\top$. Quindi la forma debole discretizzata del termine sorgente diventa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \varphi_i r \mathbf{s}^r(\mathbf{u}^r) & \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^r(t) \int_{\Omega_i} \varphi_i \varphi_k \\ & = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{s}_k^r(t) M_{ik}. \end{aligned}$$

Lo schema FEM node-pair delle equazioni di Eulero in simmetria cilindrica risulta

$$L_i^r \frac{du_i^r}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \left(\frac{f_k^r + f_i^r}{2} \eta_{ik}^r + 3 \frac{f_k^r - f_i^r}{2} \zeta_{ik}^r \right) - f_i^r \widehat{L}_i^r + s_k^r L_i - f_i^R \zeta_i^{\partial, R}, \quad (4.8)$$

con le quantità metriche definite in (3.32). La discretizzazione FVM in forma node-pair delle equazioni di Eulero in simmetria cilindrica risulta

$$V_i^r \frac{du_i^r}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \frac{f_k^r + f_i^r}{2} \nu_{ik}^r - f_{r_i} \widehat{V}_i^r + s_i^r V_i - f_i^r \nu_i^{\partial, r},$$

dove le quantità metriche sono state definite in §3.3.2. Quindi grazie alle relazioni (3.38) è possibile scrivere lo schema FVM precedente come segue

$$V_i^r \frac{du_i^r}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_i, \neq} \frac{f_k^r + f_i^r}{2} \eta_{ik}^r - f_{r_i} \widehat{L}_i^r + s_i^r L_i - f_i^r \zeta_i^{\partial, r},$$

con V_i^r calcolato con la condizione di equivalenza (3.39).

4.3 Le condizioni al contorno

Per completare il sistema delle equazioni di Eulero è necessario imporre delle condizioni al contorno, queste vengono imposte in forma debole calcolando l'integrale di bordo in uno stato $\bar{\mathbf{u}}$ che in genere dipende dal valore dell'incognita \mathbf{u} sul contorno e dal dato \mathbf{b} al contorno. Si è omesso di specificare il sistema di riferimento in quanto è irrilevante a questi fini.

In questo lavoro si sono utilizzate solo condizioni al contorno di parete solida che sono imposte sottraendo ad \mathbf{u} la componente di quantità di moto normale al contorno: per un nodo i appartenente ad un contorno solido il valore al contorno risulta

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \left(\rho_i, \mathbf{m}_i - (\mathbf{m}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_i^{\partial}) \hat{\boldsymbol{\xi}}_i^{\partial}, \frac{E_i^t - |\mathbf{m}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_i^{\partial}|^2}{2\rho_i} \right)^T,$$

con $\hat{\boldsymbol{\xi}}_i^{\partial} = \boldsymbol{\xi}_i^{\partial} / |\boldsymbol{\xi}_i^{\partial}|$, versore normale uscente dal contorno.

4.4 Lo schema TVD ad alta risoluzione

In questo paragrafo viene introdotto lo schema ad alta risoluzione per la risoluzione delle equazioni di Eulero. È noto [24,25] che l'utilizzo di approssimazione del secondo ordine per i flussi numerici porta ad oscillazioni spurie in presenza di discontinuità, mentre la monotonicità della soluzione è garantita solo per schemi del primo ordine.

Nell'ambito dei volumi finiti uno schema TVD ad alta risoluzione viene ottenuto dall'accoppiamento di uno schema dell'primo ordine con uno di ordine superiore; lo schema del primo ordine è adatto alla soluzione in prossimità di discontinuità, mentre schemi di ordine superiore vengono impiegati nel resto del dominio. Qui viene presentato uno schema TVD ai volumi finiti [15, 19] ottenuto da un'opportuna combinazione dello schema del primo ordine FVM upwind di Roe [36] e dello schema FVM centrato del secondo ordine (§4.1 e §4.2). Una funzione limitatore [47] è introdotta come "sensore" della discontinuità per passare dallo schema del primo ordine a quello del secondo ordine. Nella trattazione successiva per semplicità non viene considerata la presenza del termine sorgente, inoltre per semplificare l'esposizione viene omesso l'apice relativo al sistema di coordinate usato riferendosi ad una trattazione generale dove non specificato.

4.4.1 La linearizzazione di Roe

Nell'ambito dei metodi ai volumi finiti risulta necessario determinare il flusso all'interfaccia tra due celle. Nel metodo di Godunov il flusso all'interfaccia viene ottenuto risolvendo in modo esatto il problema di Riemann prendendo il valore nodale della soluzione come condizione iniziale. La soluzione è poi mediata in spazio per ottenere la media di cella. L'operazione della media di cella distrugge tutte le informazioni che si ottengono risolvendo il problema di Riemann in modo esatto: quindi, per ridurre il costo computazionale, il problema di Riemann può essere sostituito da una adeguata approssimazione.

Nel metodo proposto da Roe [36] il problema di Riemann è sostituito da un problema linearizzato come segue

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{0}.$$

La matrice \mathbf{A}^* dipende dallo stato \mathbf{u}_i e \mathbf{u}_k e deve soddisfare le seguenti condizioni

- i*) $\mathbf{A}^*(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i)$,
- ii*) $\mathbf{A}^*(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)$ deve essere diagonalizzabile con autovalori reali,
- iii*) $\mathbf{A}^*(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u})$ se $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) \rightarrow \mathbf{u}$.

La condizione *i*) è importante in quanto assicura che lo schema sia ancora conservativo. Le condizioni *ii*) e *iii*) assicurano rispettivamente che il sistema sia ancora iperbolico e che le soluzioni regolari siano risolte correttamente.

La matrice $\mathbf{A}^*(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)$ non è definita in maniera univoca, in realtà il modo più semplice di individuare una matrice che soddisfi la condizione quantitativa *i*) insieme alle condizioni qualitative *ii*) e *iii*) è quello di scegliere \mathbf{A}^* coincidente con la matrice Jacobiana del sistema delle equazioni di Eulero $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ (soluzione in forma Jacobiana), valutata in un opportuno stato intermedio $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)$ da determinarsi tramite la seguente condizione

$$\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k))(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i).$$

Per una completa descrizione della costruzione della matrice di Roe per le equazioni di Eulero si faccia riferimento a [17, 18, 27].

Per la descrizione della linearizzazione di Roe nel caso multidimensionale si consideri dapprima il caso di un sistema di coordinate cartesiane. Data la matrice Jacobiana

$$\mathbf{A}^\square(\mathbf{u}^\square) = (\mathbf{A}_x^\square, \mathbf{A}_y^\square, \mathbf{A}_z^\square)^\top = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_x^\square}{\partial \mathbf{u}^\square}, \frac{\partial \mathbf{f}_y^\square}{\partial \mathbf{u}^\square}, \frac{\partial \mathbf{f}_z^\square}{\partial \mathbf{u}^\square} \right)^\top$$

si definisce la matrice $\tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\square(\mathbf{u}^\square, \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square)$ tale che

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\square(\mathbf{u}^\square, \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square) &= \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square \cdot \mathbf{A}^\square(\mathbf{u}) \\ &= \eta_{ik_x}^\square \mathbf{A}_x^\square + \eta_{ik_y}^\square \mathbf{A}_y^\square + \eta_{ik_z}^\square \mathbf{A}_z^\square. \end{aligned}$$

La linearizzazione delle equazioni di Eulero lungo la direzione $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\square$ consiste nel determinare lo stato intermedio $\tilde{\mathbf{u}}^\square(\mathbf{u}_i^\square, \mathbf{u}_k^\square, \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square)$ tale che

$$\boldsymbol{\eta}_{ik}^\square \cdot \mathbf{A}^\square(\tilde{\mathbf{u}}^\square) [\mathbf{u}_k^\square - \mathbf{u}_i^\square] = \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square \cdot [\mathbf{f}^\square(\mathbf{u}_k^\square) - \mathbf{f}^\square(\mathbf{u}_i^\square)],$$

cioè la matrice di Roe $\tilde{\mathbf{A}}_{ik}$ è scelta tale che

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\square = \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square \cdot \mathbf{A}^\square(\tilde{\mathbf{u}}^\square(\mathbf{u}_i^\square, \mathbf{u}_k^\square, \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square)),$$

e soddisfa la seguente condizione

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\square [\mathbf{u}_k^\square - \mathbf{u}_i^\square] = \boldsymbol{\eta}_{ik}^\square \cdot [\mathbf{f}^\square(\mathbf{u}_k^\square) - \mathbf{f}^\square(\mathbf{u}_i^\square)]. \quad (4.9)$$

La linearizzazione di Roe nelle coordinate cilindriche e sferiche

Nel sistema di coordinate cilindrico l'Eq. (4.9) si scrive come

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\circ [\mathbf{u}_k^\circ - \mathbf{u}_i^\circ] = \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ \cdot [\mathbf{f}^\circ(\mathbf{u}_k^\circ) - \mathbf{f}^\circ(\mathbf{u}_i^\circ)]$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\circ &= \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ \cdot \mathbf{A}^\circ(\tilde{\mathbf{u}}^\circ(\mathbf{u}_i^\circ, \mathbf{u}_k^\circ, \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ)) \\ &= \eta_{ik_z}^\circ \tilde{\mathbf{A}}_Z^\circ + \eta_{ik_R}^\circ \tilde{\mathbf{A}}_R^\circ + \eta_{ik_\theta}^\circ \tilde{\mathbf{A}}_\theta^\circ \end{aligned} \quad (4.10)$$

avendo definito $\mathbf{A}^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{f}^\circ / \partial \mathbf{u}^\circ$. Nell'Eq. (4.10) la matrice Jacobiana \mathbf{A}° è espressa tramite le sue componenti cilindriche al fine di mantenere una struttura analoga alla matrice nel caso cartesiano e in particolare per mantenere la stessa struttura degli autovettori (i suoi autovalori non verrebbero alterati in quanto scalari). Diventa quindi necessario esprimere le componenti del vettore $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ$ nel sistema di coordinate cilindriche.

Nella formulazione FVM node-pair i flussi numerici sono calcolati nella direzione della normale integrata $\boldsymbol{\nu}_{ik}^\circ$, che grazie alla condizione di equivalenza coincide con la quantità metrica FEM $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ$. La correzione upwind (si veda la sezione successiva) va quindi effettuata lungo la direzione del vettore $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ$ e quindi anche la linearizzazione

di Roe viene effettuata lungo questa direzione. Poichè nel codice di calcolo gli integrali di quantità vettoriali vengono sempre eseguiti in coordinate cartesiane, solo le componenti cartesiane del vettore metrico $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ$ sono note ed esse non permettono di determinare le componenti cilindriche in quanto manca l'informazione relativa alle coordinate spaziali del punto in cui si considera applicato il vettore $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ$. Per poter determinare le componenti nel sistema cilindrico del vettore $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ$ è necessario specificare la variabile angolare $\tilde{\theta}$ del punto in cui si trova lo stato intermedio, cioè del punto in cui si vogliono trovare le componenti cilindriche di $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ$.

L'informazione della posizione spaziale del nodo associato allo stato intermedio non è necessaria nel sistema cartesiano in quanto lo stato intermedio in questo sistema risulta invariante per traslazioni e rotazioni del sistema di riferimento. Nel caso cilindrico non valgono più queste considerazioni a causa della dipendenza dei versori dalla coordinata angolare. La variabile $\tilde{\theta}$ dovrebbe a rigore essere individuata come le altre grandezze dello stato intermedio. Attualmente $\tilde{\theta}$ è scelto come la media tra θ_i e θ_k della coppia di nodi i e k

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_i + \theta_k}{2}.$$

Tale scelta si rivela sufficiente per ottenere risultati numerici accurati considerando anche il fatto che le griglie utilizzate per discretizzare il dominio di calcolo sono generalmente abbastanza fitte per cui la differenza tra θ_i e θ_k per una coppia di nodi è molto piccola. Si noti come nel caso di coordinate cilindriche Z - R o nel caso monodimensionale cilindrico lo stato intermedio di Roe viene trovato in modo del tutto analogo al caso cartesiano poichè non è presente la variabile angolare.

Le considerazioni fatte nel caso cilindrico si possono estendere al caso sferico. In questo caso la relazione a cui deve soddisfare la matrice di Roe è

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\circ [\mathbf{u}_k^\circ - \mathbf{u}_i^\circ] = \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ \cdot [\mathbf{f}^\circ(\mathbf{u}_k^\circ) - \mathbf{f}^\circ(\mathbf{u}_i^\circ)]$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{ik}^\circ &= \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ \cdot \mathbf{A}^\circ(\tilde{\mathbf{u}}^\circ(\mathbf{u}_i^\circ, \mathbf{u}_k^\circ, \boldsymbol{\eta}_{ik}^\circ)) \\ &= \eta_{ik_r}^\circ \tilde{\mathbf{A}}_r^\circ + \eta_{ik_\theta}^\circ \tilde{\mathbf{A}}_\theta^\circ + \eta_{ik_\phi}^\circ \tilde{\mathbf{A}}_\phi^\circ \end{aligned}$$

avendo definito $\mathbf{A}^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{f}^\circ / \partial \mathbf{u}^\circ$. Anche in questo caso si dovrebbe procedere ad una linearizzazione geometrica per ottenere l'informazione relativa alle coordinate angolari dello stato intermedio, ma come già fatto per il caso cilindrico si è scelto di utilizzare la media delle variabili angolari dei due punti della coppia di nodi. Un'analisi atta a indentificare le conseguenze di tale scelta è attualmente in corso.

4.4.2 Lo schema upwind del primo ordine

Nello schema FVM upwind di Roe per un sistema di leggi di conservazione il flusso numerico viene calcolato come [13, 36]

$$Q_{ik} = \frac{\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_i}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik} - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_{ik}| (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \quad (4.11)$$

dove la matrice di linearizzazione di Roe $|\tilde{\mathbf{A}}_{ik}| \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ soddisfa la seguente condizione

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ik}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) = [\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_i] \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}.$$

Lo schema upwind di Roe può essere riscritto in maniera differente sfruttando l'autostruttura della matrice di Roe, in modo tale da individuare il contributo di ogni campo caratteristico al flusso numerico (Si veda l'Appendice A per gli autovalori e gli autovettori delle equazioni di Eulero). Si può scrivere

$$|\tilde{\mathbf{A}}_{ik}| = \tilde{\mathbf{R}}_{ik} |\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}| \tilde{\mathbf{L}}_{ik},$$

dove $\tilde{\mathbf{R}}_{ik}$ e $\tilde{\mathbf{L}}_{ik} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ sono le matrici degli autovettori destri e sinistri rispettivamente, mentre $|\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}| = \text{diag}(|\tilde{\lambda}_{ik}|)$ con $\tilde{\lambda}_{ik} \in \mathbb{R}^p$ vettore degli autovalori di $\tilde{\mathbf{A}}_{ik}$. Proiettando $\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i$ sulla base delle variabili caratteristiche

$$\tilde{\mathbf{v}}_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{L}}_{ik}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i),$$

ed usando l'identità $|\tilde{\mathbf{A}}_{ik}|(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) = \tilde{\mathbf{R}}_{ik} |\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}| \tilde{\mathbf{v}}_{ik}$, si può riscrivere l'Eq. (4.11) come

$$\mathcal{Q}_{ik} = \frac{\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_i}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{R}}_{ik} |\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}| \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \quad (4.12)$$

È noto che la linearizzazione di Roe può portare a soluzioni non fisiche, dette non entropiche, diventa quindi necessario modificare gli autovalori $|\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}|$ del sistema applicando la tecnica di entropy fix. In questo lavoro si è utilizzato l'entropy fix di Harten e Hyman [22].

4.4.3 Lo schema ad alta risoluzione

Come già detto uno schema TVD ad alta risoluzione si ottiene da un'opportuna combinazione di un flusso upwind del primo ordine e da uno centrato del secondo ordine [15, 24, 30]

$$\mathcal{Q}_{ik}^{HR} = \mathcal{Q}_{ik}^L + \boldsymbol{\Psi}_{ik}(\mathcal{Q}_{ik}^H - \mathcal{Q}_{ik}^L),$$

con $\boldsymbol{\Psi}_{ik} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ una matrice diagonale chiamata limitatore che controlla il passaggio dallo schema del primo ordine a quello del secondo ordine. Sostituendo

$$\mathcal{Q}_{ik}^L = \frac{\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_i}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{R}}_{ik} |\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}| \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_{ik}^H = \frac{\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_i}{2},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ik}^{HR} &= \frac{\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_i}{2} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Psi}_{ik} - \mathbf{I})|\tilde{\mathbf{A}}_{ik}|(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \\ &= \frac{\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_i}{2} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Psi}_{ik} - \mathbf{I})\tilde{\mathbf{R}}_{ik}|\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}|\tilde{\mathbf{v}}_{ik} \\ &= \frac{\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_i}{2} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Psi}_{ik} - \mathbf{I})\tilde{\mathbf{R}}_{ik}|\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{ik}|(\tilde{\mathbf{w}}_{ik} - \tilde{\mathbf{v}}_{ik}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ e $\tilde{\mathbf{w}}_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_{ik} \tilde{\mathbf{v}}_{ik}$. Le grandezze $\tilde{\mathbf{v}}_{ik}$ e $\tilde{\mathbf{w}}_{ik}$ sono dette salti caratteristici centrati e limitati rispettivamente. Si noti che il flusso numerico ad alta risoluzione (4.13) si riduce al flusso upwind del primo ordine per $\Psi_{ik} = \mathbf{0}$, mentre per $\Psi_{ik} = \mathbf{I}$ si ottiene il flusso centrato del secondo ordine. Sostituendo il limitatore di van Leer [47] si ottiene

$$\tilde{\mathbf{w}}_{ik,p} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{ik,p} |\tilde{\mathbf{q}}_{ik,p}| + \tilde{\mathbf{q}}_{ik,p} |\tilde{\mathbf{v}}_{ik,p}|}{|\tilde{\mathbf{v}}_{ik,p}| + |\tilde{\mathbf{q}}_{ik,p}| + \epsilon},$$

dove il pedice p indica la p -esima componente di ogni vettore; ϵ è un parametro positivo molto piccolo introdotto per evitare di avere divisioni per zero nel caso di quantità nulle ($\epsilon = 10^{-12}$ nel codice di calcolo). La p -esima componente del vettore di salto upwind è data da

$$\tilde{\mathbf{q}}_{ik,p} = \begin{cases} \tilde{L}_{ik,p}(\mathbf{u}_{k^*} - \mathbf{u}_k) & \text{se } \tilde{\lambda}_{ik} > 0, \\ \tilde{L}_{ik,p}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i^*}) & \text{se } \tilde{\lambda}_{ik} \leq 0, \end{cases}$$

in cui \mathbf{u}_{i^*} e \mathbf{u}_{k^*} sono i così detti stati upwind associati alla coppia di nodi $i-k$ e $\tilde{L}_{ik,p}$ è la p -esima riga della matrice \tilde{L}_{ik} . Gli stati upwind \mathbf{u}_{i^*} e \mathbf{u}_{k^*} possono essere individuati come i valori della soluzione nei due nodi di griglia i^* e k^* , rispettivamente, che appartengono alle due coppie di nodi meglio allineate con $i-k$ [50]. (figura 4.1)

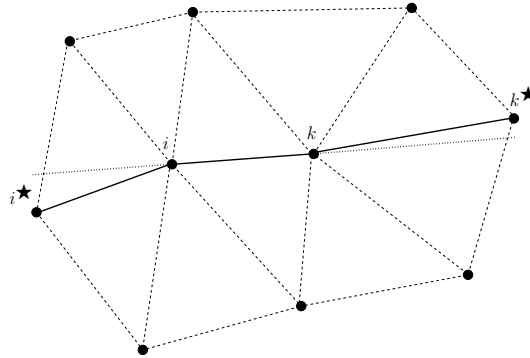


Figura 4.1: La struttura estesa dei node-pair per lo schema ad alta risoluzione. I nodi i^* e k^* sono i nodi degli stati upwind.

4.5 La discretizzazione in tempo

Dopo che le equazioni di Eulero sono state discretizzate in spazio, esse si riducono ad un sistema di equazioni ordinarie nell'incognita delle variabili conservative. Riferendosi ad una trattazione generale senza specificare il sistema di coordinate usato, è possibile scrivere la forma semi-discreta delle equazioni di Eulero come

$$V_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{rhs}_i(\mathbf{u}) = \mathbf{rhs}_i^a(\mathbf{u}) + \mathbf{rhs}_i^s(\mathbf{u}),$$

dove con $\mathbf{rhs}_i^a(\mathbf{u})$ si è indicato il contributo alla discretizzazione spaziale dei termini advettivi e con $\mathbf{rhs}_i^s(\mathbf{u})$ quello relativo alla discretizzazione dei termini sorgenti. (Si veda §4.1 e §4.2.)

Come noto [34] esistono diversi schemi per la soluzione numerica di un'equazione differenziale ordinaria, di solito vengono classificati in schemi espliciti/impliciti e a passo singolo/multiplo.

Negli schemi espliciti la soluzione al passo temporale attuale dipende solo dalle soluzioni ai passi temporali precedenti, mentre negli schemi impliciti dipende anche da se stessa. Dall'analisi di stabilità condotta sull'equazione lineare si ricava che i metodi espliciti sono sempre condizionatamente stabili, mentre quelli impliciti risultano incondizionatamente stabili al massimo fino al secondo ordine. Queste considerazioni vengono utilizzate come indicazione sul comportamento degli schemi impliciti applicati all'equazione non lineare.

Inoltre i metodi si classificano in base al numero di passi all'indietro ai quali il valore della funzione incognita viene utilizzato per calcolarne il valore al passo corrente. I metodi a passo singolo partono dalla conoscenza della funzione all'ultimo passo risolto (o dalle condizioni iniziali se si tratta del primo passo); quelli a passo multiplo richiedono la conoscenza della funzione a più intervalli. Si nota subito che i metodi a passo singolo sono autopartenti, mentre quelli a passo multiplo richiedono un criterio di avviamento.

In questo lavoro ci si è concentrati sulla soluzioni di problemi instazionari per cui verranno descritte solo le tecniche numeriche per risolvere questo tipo di problemi. Utilizzando un metodo di integrazione esplicito, a causa della presenza del termine sorgente, è necessario impiegare la procedura descritta da Strang in [44] (operator splitting technique), che introduce un errore del second'ordine in tempo. L'integrazione temporale dal tempo t_n al tempo t_{n+1} si ottiene tramite tre sottopassi

$$\begin{aligned} \text{Sottopasso 1 : } L_i \frac{\tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} - \mathbf{u}_i}{\Delta t/2} &= \mathbf{rhs}_i^s(\mathbf{u}^n), \\ \text{Sottopasso 2 : } L_i \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1/2}}{\Delta t} &= \mathbf{rhs}_i^a(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}), \\ \text{Sottopasso 3 : } L_i \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1}}{\Delta t/2} &= \mathbf{rhs}_i^s(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}), \end{aligned} \tag{4.14}$$

dove $\Delta t = (t^{n+1} - t^n)$, t^{n+1} e t^n sono rispettivamente i tempi ai passi n e $n+1$. Nella (4.14) ad ogni sottopasso temporale è stata impiegata la tecnica di Eulero in avanti; in realtà è possibile adottare tecniche di integrazione temporale più accurate ad ogni sottopasso. Lo schema di integrazione temporale è soggetto a delle condizioni di stabilità, ossia la dimensione del passo temporale Δt è limitato dal valore massimo ammissibile del numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [24]. Seguendo quanto affermato da Giles [12], il passo temporale è calcolato come

$$\Delta t = \text{CFL} \min_{i \in \mathcal{N}} \left[\frac{2L_i}{\max_{p=1, \dots, d+2} |\tilde{\lambda}_{ij,p}|} \right],$$

con d numero delle dimensioni spaziali.

Per prevenire errori numerici nelle regioni di flusso uniformi, causati dallo sbilanciamento tra i termini advettivi e quelli sorgenti [25], si è scelto di utilizzare il metodo implicito multipasso Backward Differentiation Formula (BDF). La forma completamente discreta delle equazioni di Eulero diventa quindi

$$\frac{V_i}{\Delta t^n} \sum_{l=-1}^p a_{-l} \mathbf{u}_i^{n-l} = \mathbf{rhs}_i^{n+1}, \quad (4.15)$$

dove p è il numero dei passi all'indietro ($p + 1$ è l'ordine del metodo), a_{-l} sono i coefficienti dello schema BDF, l'apice n indica il passo temporale discreto e $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. In particolare nel caso dello schema del schema BDF del secondo ordine, i coefficienti risultano

$$a_{-1} = \frac{\beta^2}{1 + \beta}, \quad a_0 = -(1 + \beta) \quad \text{e} \quad a_{-1} = \frac{1 + 2\beta}{1 + \beta}, \quad \text{con} \quad \beta = \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}}.$$

La soluzione del sistema non lineare (4.15) è ottenuta attraverso un schema di Newton–Raphson, in cui è stata implementata la tecnica di integrazione così detta dual time step [23]. Se si utilizza la formula di Eulero all'indietro per il calcolo della derivata temporale nel tempo duale τ , per ogni passo temporale $\Delta\tau$, bisogna risolvere il seguente sistema lineare

$$\left[V_i \left(\frac{a_1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) - \frac{\partial \mathbf{rhs}_i(\tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right] \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{rhs}_i(\tilde{\mathbf{u}}) - \frac{V_i}{\Delta t} \left[a_1 \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{l=0}^p a_{-l} \mathbf{u}_i^{n-l} \right],$$

con $\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}$. Per la soluzione del sistema lineare è stata usata la libreria SparseKit [37]. L'integrazione lungo il passo temporale duale viene eseguita partendo dal valore iniziale $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n$ per poi iterare fino ad ottenere un residuo in norma L^2 inferiore di 10^{-7} rispetto al valore iniziale al tempo t^n .

Il metodo BDF descritto necessita della conoscenza della soluzione al passo temporale precedente a quello in cui si vuole ottenere la soluzione, ovviamente quest'informazione non è disponibile all'istante iniziale. Per questo motivo è necessario un metodo ad un passo per calcolare la soluzione all'istante di tempo immediatamente successivo al tempo iniziale e poter avviare così il metodo BDF. Al fine di conservare l'accuratezza del secondo ordine, il calcolo del primo passo temporale viene eseguito attraverso il metodo esplicito Runge-kutta ad un passo, accurato al terzo ordine [42].

Risultati numerici

Lo schema numerico per la soluzione delle equazioni di Eulero in coordinate cilindriche e sferiche, presentato nel capitolo precedente, viene ora utilizzato per eseguire simulazioni numeriche dei problemi dell'esplosione e dell'implosione. Vengono prima presentati i risultati per i problemi monodimensionali assieme allo studio di convergenza in spazio e in tempo. In seguito vengono mostrati i risultati per i problemi bidimensionali insieme allo studio di interazione tra urti convergenti ed ostacoli.

5.1 Il problema dell'esplosione e dell'implosione

Si consideri un problema di Riemann per la gasdinamica, cioè un problema in cui la condizione iniziale consiste in una discontinuità delle variabili con una distribuzione uniforme prima e dopo la discontinuità. Questo problema rappresenta la schematizzazione delle situazioni che si incontrano nei problemi di implosione ed esplosione. Per esempio, i fenomeni dell'esplosione (figura 5.1(a)) si possono avere per effetto di cariche esplosive, per effetto di un raggio laser focalizzato (Laser Breakdown) o una scarica elettrica, mentre il fenomeno dell'implosione (figura 5.1(b)) si verifica nelle applicazioni di Inertial Confinement Fusion o nei fenomeni di sonoluminescenza.

Nel corso degli anni il problema dell'implosione è stato oggetto di numerosi studi, teorici e sperimentali, per la possibilità di poter ottenere elevati valori di energia e pressione in una regione limitata dello spazio. In particolare le onde convergenti cilindriche o sferiche possono essere pensate come se fossero state generate da un pistone cilindrico o sferico e la soluzione di questo problema risulta simile [20].

Nel modello numerico il dominio di calcolo è rappresentato da una regione circolare di raggio \bar{L} . Come condizioni iniziali si impone che la densità del fluido sia uniforme in tutto il dominio e il fluido sia in quiete, mentre la pressione assume un valore dieci volte superiore nella zona ad alta energia rispetto alla regione imperturbata. Nel caso dell'esplosione la regione ad alta pressione è situata nella regione interna del dominio ed ha un raggio pari a $\bar{L}/2$ mentre la regione esterna rappresenta la zona imperturbata. La situazione risulta opposta nel caso dell'implosione, con la regione ad alta energia situata nella parte esterna del dominio. Le variabili termodinamiche sono rese adimensionali con i valori nella regione imperturbata (regione esterna nel caso di esplosione, regione interna nel caso di implosione) \bar{P}_{rif} e $\bar{\rho}_{rif}$, mentre le lunghezze sono rese adimensionali con il raggio del dominio di calcolo:

$$\bar{\rho} = \rho \bar{\rho}_{rif}, \quad \bar{P} = P \bar{P}_{rif}, \quad \bar{R} = R \bar{L}, \quad \bar{t} = t \bar{L} \sqrt{\bar{\rho}_{rif} / \bar{P}_{rif}}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \sqrt{\bar{P}_{rif} / \bar{\rho}_{rif}},$$

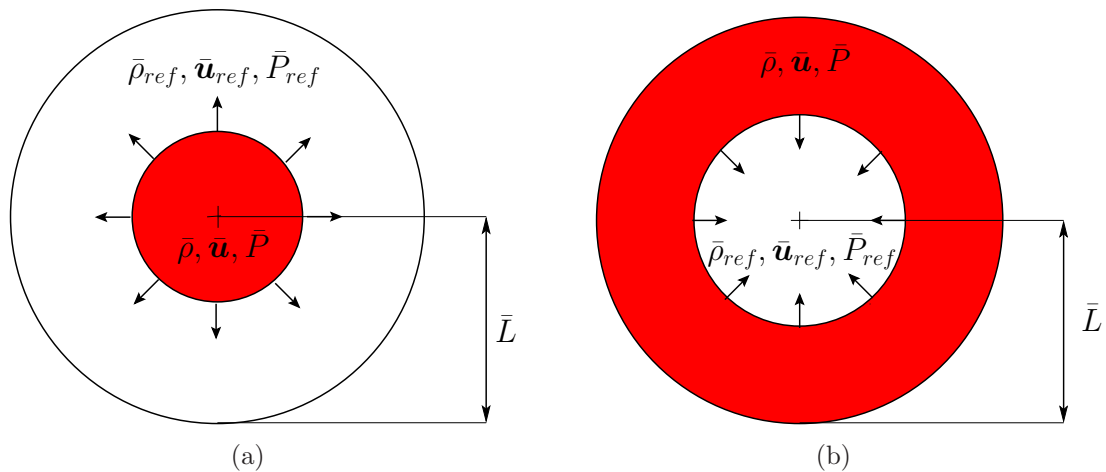


Figura 5.1: Rappresentazione schematica del problema dell'esplosione, (a), e del problema dell'implosione, (b).

dove le variabili soprascritte indicano le variabili dimensionali. In tutte le simulazioni è stato usato il modello di gas ideale per l'azoto con $\gamma = c_p/c_v = 1.39$.

5.2 Il problema monodimensionale

I problemi dell'implosione e dell'esplosione monodimensionali descrivono l'andamento delle grandezze nel campo di moto quando la distanza dall'origine, r , è l'unica variabile da cui dipende la soluzione.¹

In figura 5.2 sono riportati i profili di pressione e densità a tre istanti di tempo diversi per il problema dell'esplosione in simmetria cilindrica e sferica. Gli stessi tipi di risultati sono mostrati in figura 5.3 per il problema dell'implosione. Tutti le simulazioni sono state eseguite su una griglia di 5001 nodi, che corrisponde ad una risoluzione spaziale di $\Delta r = 2 \times 10^{-4}$, con CFL = 0.5 e con le condizioni al contorno di parete solida ai due nodi estremi del dominio di calcolo.

Guderley [20] fu il primo a risolvere analiticamente il problema della convergenza degli urti cilindrici e sferici, e mostrò che la soluzione risulta simile per il raggio dell'urto convergente in funzione del tempo

$$\frac{R}{R_c} = A^\pm \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^\alpha. \quad (5.1)$$

Dove $R = R(t)$ è il raggio dell'urto convergente, dove t la variabile temporale, R_c è la posizione della discontinuità, all'istante iniziale, e t_c è l'istante di tempo al quale l'urto arriva sull'asse. L'esponente α della legge di potenza simile non può essere

¹In questa sezione per uniformare la trattazione tra il caso cilindrico e quello sferico si userà sempre il simbolo r come variabile radiale.

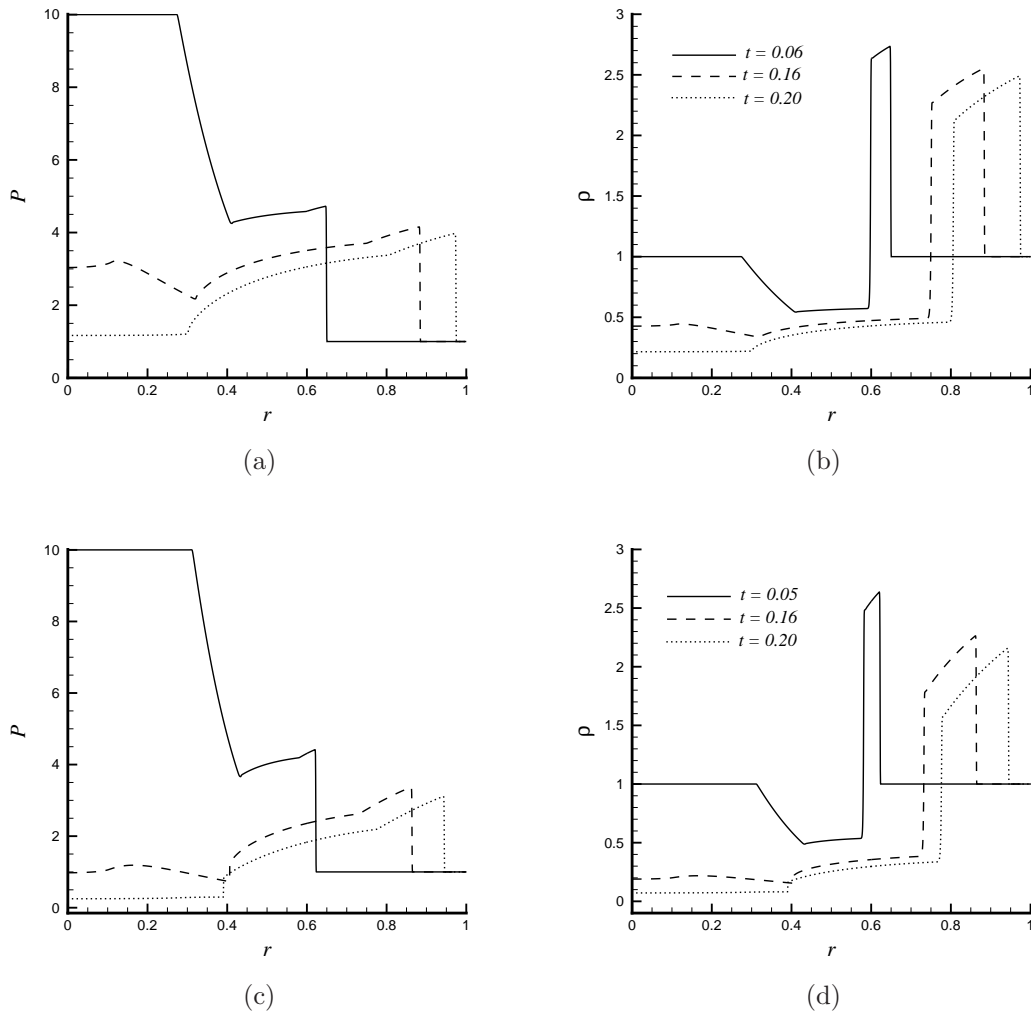


Figura 5.2: Nella prima riga: pressione (a) e densità (b) per il problema dell'esplosione nel sistema di coordinate cilindriche. Nella seconda riga: pressione (c) e densità (d) per il problema dell'esplosione nel sistema di coordinate sferiche.

trovato sotto forma di una semplice frazione ma è un numero irrazionale. Guderley stimò per un gas ideale $\alpha = 0.834$ e $\alpha = 0.717$, rispettivamente per il problema cilindrico e quello sferico. Con A^+ si è indicato il coefficiente moltiplicativo nel caso di urto convergente, mentre con A^- si è indicato il coefficiente moltiplicativo nel caso di urto divergente dopo essere stato riflesso sull'asse. Il coefficiente A^+ può essere calcolato in maniera esatta e si ottiene $A^+ = 1$ sia per il caso cilindrico che sferico, mentre per il coefficiente A^- esistono solo delle stime numeriche [32]: $A^- = 0.533$ nel caso cilindrico e $A^- = 0.653$ nel caso sferico. Nel codice numerico la posizione dell'urto, come fatto nel lavoro di Payne [29], è stata calcolata interpolando il salto di pressione tra due nodi consecutivi.

In figura 5.4 sono confrontati i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche su una griglia di 501 nodi ($\Delta r = 2 \times 10^{-3}$) con un passo temporale pari $\Delta t = 10^{-4}$ con

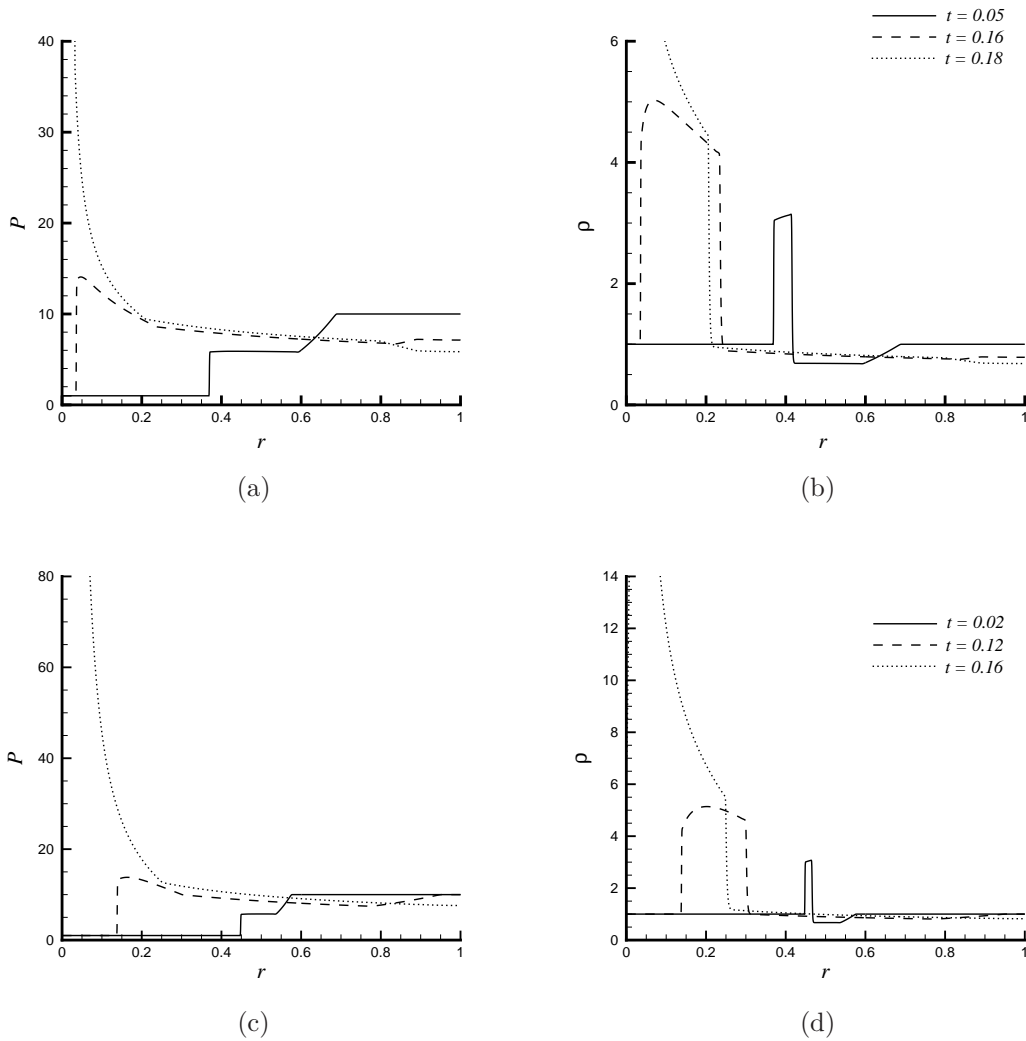


Figura 5.3: Nella prima riga: pressione (a) e densità (b) per il problema dell'implosione nel sistema di coordinate cilindriche. Nella seconda riga: pressione (c) e densità (d) per il problema dell'implosione nel sistema di coordinate sferiche.

la soluzione analitica (5.1).

Si nota come la soluzione numerica coincida con quella analitica anche in prossimità dell'asse dove gli urti diventano molto intensi, per poi discostarsi progressivamente dopo la riflessione dell'urto sull'asse poichè la soluzione analitica non riesce a tener conto delle complesse interazioni tra le onde riflesse e incidenti.

5.2.1 Accuratezza del metodo numerico

Vengono ora studiate le caratteristiche di convergenza in spazio e in tempo del metodo numerico proposto. Per ragioni pratiche, in questo lavoro vengono studiate solo le caratteristiche di convergenza dello schema numerico monodimensionale, riservando ad un lavoro successivo lo studio di convergenza per il caso bidimensionale.

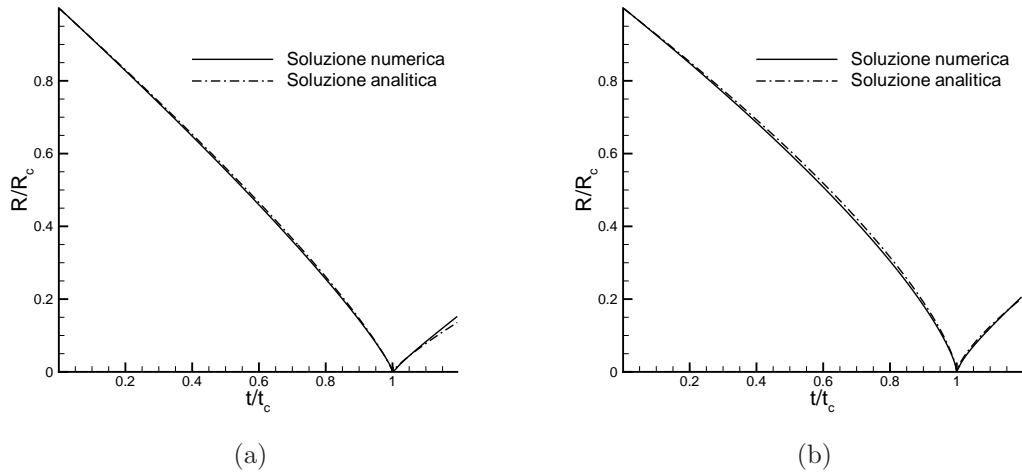


Figura 5.4: Raggio dell'urto convergente al variare del tempo calcolato dalle simulazioni numeriche monodimensionali confrontato con quello calcolato dalla relazione di similarità di Guderley: (a) problema cilindrico, (b) problema sferico.

In figura 5.5 sono riportati gli andamenti dell'errore al variare del passo di integrazione in tempo nel caso cilindrico e sferico per il problema dell'implosione con un salto di pressione pari a 10, nell'intervallo di tempo $[0, 0.2]$. Tutte le simulazioni sono state eseguite su una griglia di 501 nodi, $\Delta r = 2 \times 10^{-3}$, con i seguenti passi temporali $(0.125, 0.25, 0.25, 1, 2) \times 10^{-4}$. L'errore è stato calcolato come la norma L^2 della differenza tra la soluzione calcolata $\mathbf{u}(r, t)$ e la soluzione di riferimento $\hat{\mathbf{u}}(r, t)$ ad una data posizione r , cioè

$$e(r) = \frac{\|\mathbf{u}(r, t) - \hat{\mathbf{u}}(r, t)\|_{L_t^2}}{\|\hat{\mathbf{u}}(r, t)\|_{L_t^2}}, \quad \text{con} \quad \|\mathbf{u}\|_{L_t^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{K=1,3} \mathbf{u}_{(k)}^2(r, \tau) d\tau,$$

dove $t_1 = 0$, $t_2 = 0.2$ e l'errore è stato calcolato nel punto $r = 0.1$. La soluzione di riferimento, $\hat{\mathbf{u}}$, è stata calcolata usando un passo temporale $\Delta t = 10^{-6}$ sulla stessa griglia usata per le altre soluzioni. Infatti, per ogni Δr fissato la soluzione numerica per $\Delta t \rightarrow 0$ non tende alla soluzione esatta, ma alla soluzione del problema discretizzato in spazio. Per valutare quindi l'ordine di convergenza rispetto a Δt occorre eliminare gli effetti dell'errore di discretizzazione spaziale utilizzando la stessa griglia per tutte le simulazioni.

La soluzione ottenuta applicando il metodo numerico descritto nel Capitolo 4 (FVE) è stata confrontata con una versione modificata (FVE^{*}) in cui $V_i^\circ = L_i^\circ$ e $V_i^\circ = L_i^\circ$, cioè in cui la dimensione delle celle nello schema ai volumi finiti non viene calcolata in modo coerente con la matrice di massa dello schema agli elementi finiti. Si nota come entrambi i metodi hanno un rateo di convergenza del secondo ordine tipico dei metodi BDF a due passi, come quello qui impiegato. La differenza tra i due schemi è modesta, ma più marcata per il problema sferico. Una trattazione più approfondita sulla differenza tra i due schemi nel caso monodimensionale è riportata nel riferimento [16], anche aggiunta per comodità in allegato.

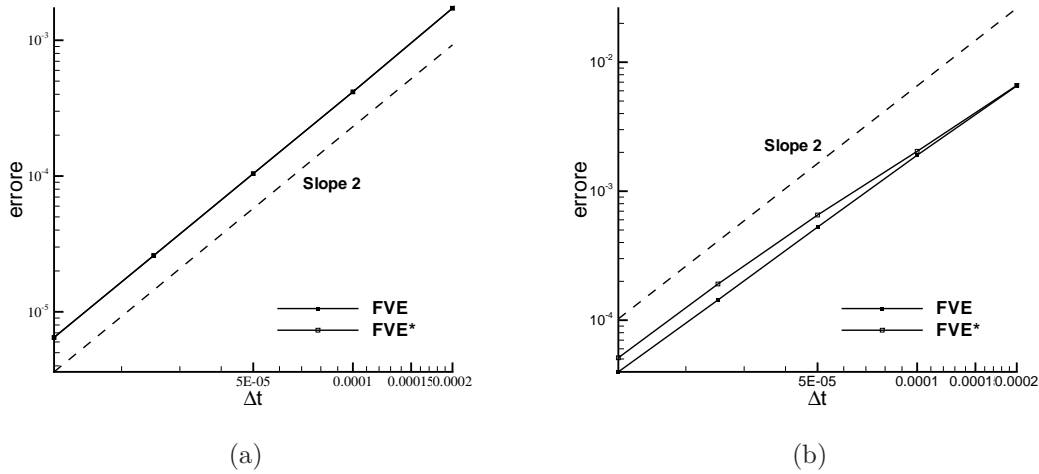


Figura 5.5: Curve di convergenza in tempo per il problema dell'implosione per il caso cilindrico (a) e per il caso sferico (b).

In figura 5.6 sono riportati gli andamenti dell'errore al variare della risoluzione spaziale delle griglie di calcolo. Si è scelto di non considerare un problema con una discontinuità nella soluzione per osservare una convergenza spaziale del primo ordine a causa dell'attivazione dei limitatori in prossimità della discontinuità. È stata quindi scelta una condizione iniziale continua che porta ad una soluzione continua per tutti gli istanti di tempo successivi $t, t \in [0, 0.2]$. In particolare è stata scelta una funzione cubica come profilo iniziale della pressione, la densità è stata ricavata dalla relazione isentropica e la velocità iniziale del fluido è imposta nulla

$$\rho(r) = \sqrt[3]{P(r)/K^\gamma}, \quad m(r) = 0 \quad e \quad P(r) = (P_2 - P_1)(2r - 3)r^2 + P_2 \quad \forall r \in [0, 1]$$

dove K è la costante isentropica, che è stata imposta unitaria, e γ è il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante. Tutte le simulazioni sono state eseguite su griglie uniformi composte di 51, 101, 201, 501, 1001 nodi che corrispondono ad una risoluzione spaziale di $\Delta r = (20, 10, 5, 2, 1) \times 10^{-3}$. La soluzione di riferimento è stata calcolata su una griglia di 6001 nodi. In tutte le simulazioni si è scelto un passo temporale $\Delta t = 3 \times 10^{-5}$ e $\Delta t = 3 \times 10^{-5}$, rispettivamente per il caso cilindrico e per quello sferico. Anche in questo caso l'errore è stato calcolato come la norma L^2 della differenza tra la soluzione calcolata e la soluzione di riferimento.

$$e(t) = \frac{\| \mathbf{u}(r, t) - \hat{\mathbf{u}}(r, t) \|_{L_r^2}}{\| \hat{\mathbf{u}}(r, t) \|_{L_r^2}}, \quad \text{con} \quad \| \mathbf{u} \|_{L_r^2} = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{K=1,3} \mathbf{u}_{(k)}^2(\chi, t) d\chi,$$

dove $r_1 = 0, r_2 = 1$, e l'errore è stato calcolato all'istante finale $t = 0.2$. L'andamento dell'errore ha una pendenza quasi del secondo ordine. Il fatto che non si ottenga una convergenza esattamente del secondo ordine si ritiene sia dovuto alla presenza dei limitatori che, anche in assenza di discontinuità, attivano comunque la correzione del primo ordine in presenza di forti gradienti od oscillazioni spurie.

Si consideri in particolare la curva di convergenza in spazio in coordinate sferiche, figura 5.6(b). Si nota che l'ordine di convergenza peggiora per griglie molto fitte. Questo comportamento potrebbe essere dovuto ad un errore numerico che produce un'oscillazione molto limitata (minore del 1%) sul primo nodo del dominio e che potrebbe diventare l'errore dominante per griglie molto fitte. Tuttavia tale comportamento anomalo nel caso sferico non è presente nella formulazione che utilizza il prodotto delle equazioni di governo per r^2 anziché r (si veda [16]), il che lascerebbe intuire che sono possibili formulazioni r^n , con $n > 1$, che potrebbero essere utilizzate per migliorare la convergenza, soprattutto in problemi multidimensionali.

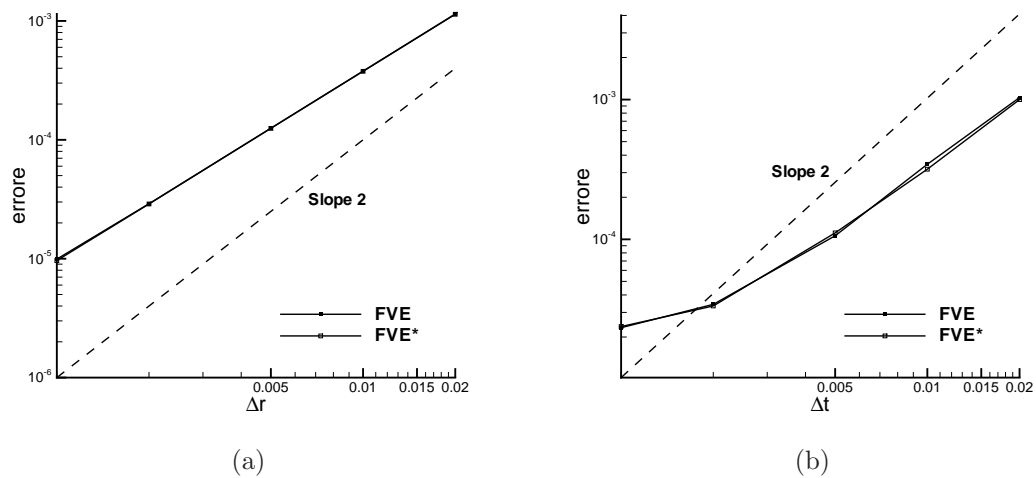


Figura 5.6: Curve di convergenza in spazio per il problema dell'implosione per il caso cilindrico (a) e per il caso sferico (b).

5.3 Il problema bidimensionale

Consideriamo ora i problemi dell'esplosione e dell'implosione bidimensionali. Vista la simmetria del problema in esame, per ridurre il costo computazionale solo un quarto del dominio di calcolo è stato discretizzato; in figura 5.7 viene mostrato il dominio computazionale usato insieme ad un esempio di griglia numerica che è stata generata con il programma UMESH^{2D} [35]. Tutte le simulazioni sono state eseguite su tre tipi di griglie con una diversa risoluzione spaziale; nella tabella 5.1 sono mostrate le proprietà delle griglie utilizzate. Sui tre bordi del dominio sono applicata la condizione al contorno di parete solida.

5.3.1 Risultati in coordinate cilindriche

Vengono qui riportati risultati delle simulazioni numeriche per il caso dell'esplosione e dell'implosione bidimensionale in coordinate cilindriche. Sono stati considerati

Griglia	Nodi	Triangoli	Risoluzione
Rada	9 551	18 745	0.01
Media	20 683	40 841	0.007
Fitta	39 153	77 587	0.005

Tabella 5.1: Caratteristiche delle griglie usate per le simulazioni dei problemi dell'implosione e dell'esplosione.

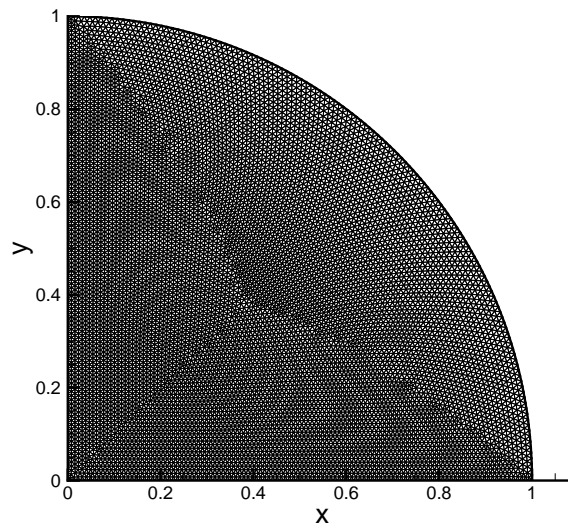


Figura 5.7: Esempio di griglia usata per il problema dell'esplosione e implosione. Nel caso assisimetrico l'asse è rappresentato dal bordo allineato con l'asse x della figura. La griglia mostrata è la più rada tra quelle usate.

i due casi in cui le variabili indipendenti sono $R-\theta$ e $Z-R$ che corrispondono rispettivamente al caso polare e al caso assisimetrico. Quest'ultimo caso, grazie alla simmetria del dominio di calcolo e delle condizioni iniziali corrisponde ad un problema sferico.

Si consideri prima il problema dell'esplosione. Nelle figure 5.8(a)–(c) sono riportate le isolinee della densità per il caso polare a diversi istanti di tempo, mentre in figura 5.8(d) è riportato il profilo di pressione lungo l'asse $y = 0$ confrontato con la soluzione del problema cilindrico monodimensionale su una griglia equispaziata di 2001 nodi, $\Delta r = 5 \times 10^{-4}$. Gli stessi tipi di risultati sono riportati per il problema assisimetrico nelle figure 5.9(a)–(c) e in figura 5.9(d) dove il segnale di pressione è confrontato con la soluzione del problema sferico monodimensionale. Nei risultati riportati è stata utilizzata la griglia più fitta e l'intervallo di tempo utilizzato per la descrizione del problema è pari a 2.5×10^{-4} per il caso polare e 1.5×10^{-4} per il caso assisimetrico, che corrispondono approssimativamente ad un numero CFL 0.5. In entrambi i casi un'onda d'urto si muove verso l'esterno del dominio, seguita da una

discontinuità di contatto, mentre un'onda di rarefazione si muove verso l'interno per poi essere riflessa verso l'esterno dopo aver raggiunto l'origine.

Si noti come il fronte d'onda presenti dei corrugamenti nei primi istanti di tempo a causa della discretizzazione irregolare dell'urto iniziale prodotta dalla griglia di triangoli. Le simulazioni numeriche sul piano $R-\theta$ nel punto collocato sull'origine del sistema di riferimento presentano una sottoelongazione che non sparisce affinando la griglia, ma che comunque resta confinata nell'intorno dell'origine senza inficiare i risultati in tutto il resto del dominio, come già osservato nel caso monodimensionale in coordinate sferiche.

Lo studio di dipendenza dalla risoluzione della griglia è riportato in figura 5.10, dove il segnale della pressione delle simulazioni bidimensionali lungo l'asse $y = 0$ per i tre tipi di griglie è confrontato con la soluzione del problema monodimensionale. La simulazione monodimensionale è stata eseguita su una griglia di 2001 nodi con $\Delta r = 5 \times 10^{-4}$. I risultati risultano pressochè indipendenti dalla risoluzione della griglia. Lo studio di dipendenza della soluzione dal passo temporale è riportato in figura 5.11 dove la soluzione del problema monodimensionale è stata confrontata con il segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ all'istante $t = 0.16$ per tre diversi passi temporali usati per ottenere la soluzione su griglia media. I risultati risultano essere indipendenti dal passo temporale scelto.

Consideriamo ora il problema dell'implosione sia per il caso polare che assisimetrico. Le condizioni iniziali sono tali per cui ora la regione ad alta pressione è situata nella parte esterna del dominio. Nelle figure 5.12(a)–(c) sono riportate le isolinee di densità a diversi istanti di tempo per la soluzione su griglia fitta con un passo temporale di 2.5×10^{-4} . In figura 5.12(d) il segnale di pressione lungo l'asse $y = 0$ è confrontato con la soluzione del problema monodimensionale cilindrico su una griglia equispaziata di 2001 nodi. La soluzione del problema dell'implosione assisimetrica è mostrata nelle figure 5.13(a)–(c) in cui sono mostrate le isolinee della densità per la soluzione su griglia fitta con un passo temporale $\Delta t = 1.5 \times 10^{-4}$. In figura 5.13(d) sono confrontati il segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ con la soluzione del problema monodimensionale sferico su una griglia di 2001 nodi. Sia nel caso polare che in quello assisimetrico un'onda di rarefazione si muove verso la zona esterna del dominio e un'onda d'urto si muove verso l'origine seguita da una discontinuità di contatto, l'intensità dell'urto aumenta avvicinandosi all'origine creando una zona di alta pressione e temperatura. Una volta raggiunta l'origine l'urto viene poi riflesso verso l'esterno.

Si vuole ora eseguire un confronto tra lo schema con la condizione di equivalenza (FVE) e quello leggermente modificato (FVE*) in cui $V_i^{\circ} = L_i^{\circ}$, difatti l'uguaglianza tra il volume della cella dello schema ai volumi finiti e la matrice di massa condensata dello schema agli elementi finiti vale solo nel caso di coordinate cartesiane. In figura 5.14 è mostrato il segnale di densità lungo l'asse x nel caso cilindrico $R-\theta$ al tempo $t = 0.16$ per la simulazione sulla griglia rada: dal particolare mostrato in figura 5.14(b) si nota come ci sia una minima differenza tra i due schemi. Lo stesso si nota in per il caso cilindrico $Z-R$ in figura 5.15, per la soluzione sempre su griglia rada al tempo $t = 0.16$. Si sottolinea come questo confronto non ha la pretesa di verificare la differenza in accuratezza tra i due schemi (che non può prescindere da un'analisi

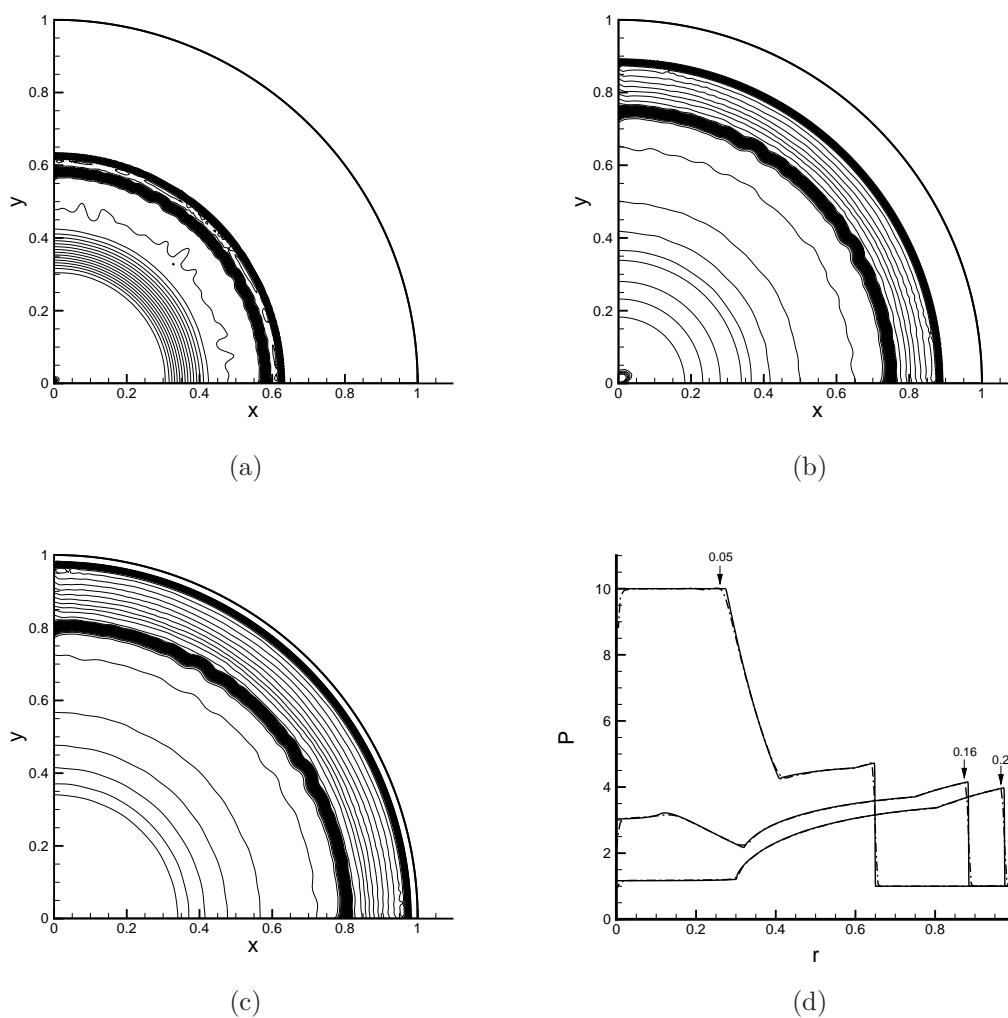


Figura 5.8: Isolinee della densità per il problema dell'esplosione cilindrica in coordinate $R-\theta$: (a) $t = 0.05$; (b) $t = 0.16$; (c) $t = 0.20$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, cilindrica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.

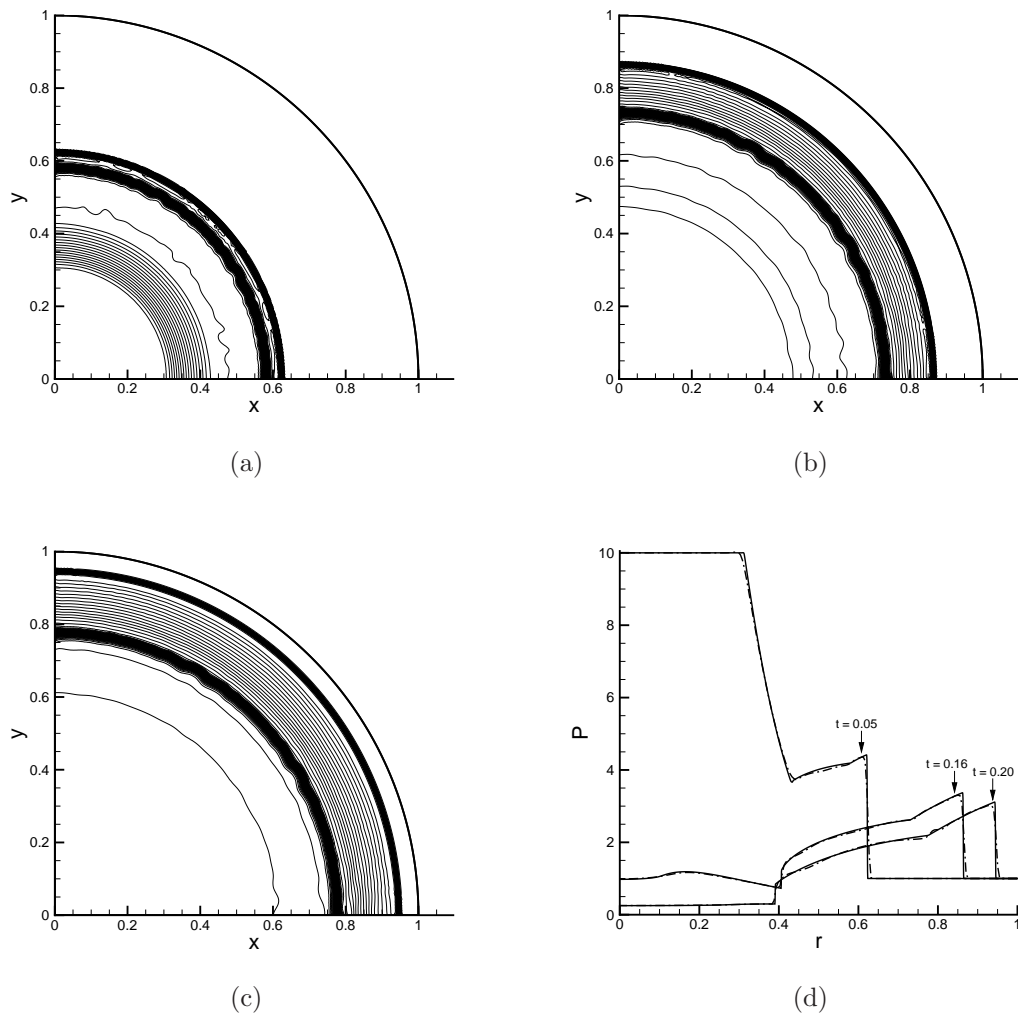


Figura 5.9: Isolinee della densità per il problema dell'esplosione cilindrica in coordinate $Z-R$: (a) $t = 0.05$; (b) $t = 0.16$; (c) $t = 0.20$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.

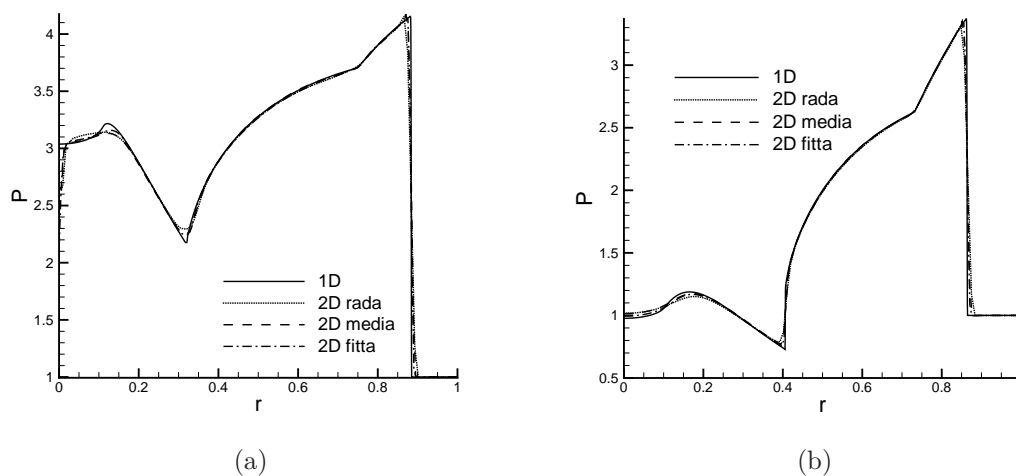


Figura 5.10: Confronto del segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ per il problema dell'esplosione al tempo $t = 0.16$ per griglie con diverse risoluzioni spaziali. Il segnale è confrontato con la soluzione monodimensionale cilindrica e quella sferica, rispettivamente nel caso polare, (a), e in quello assisimmetrico, (b).

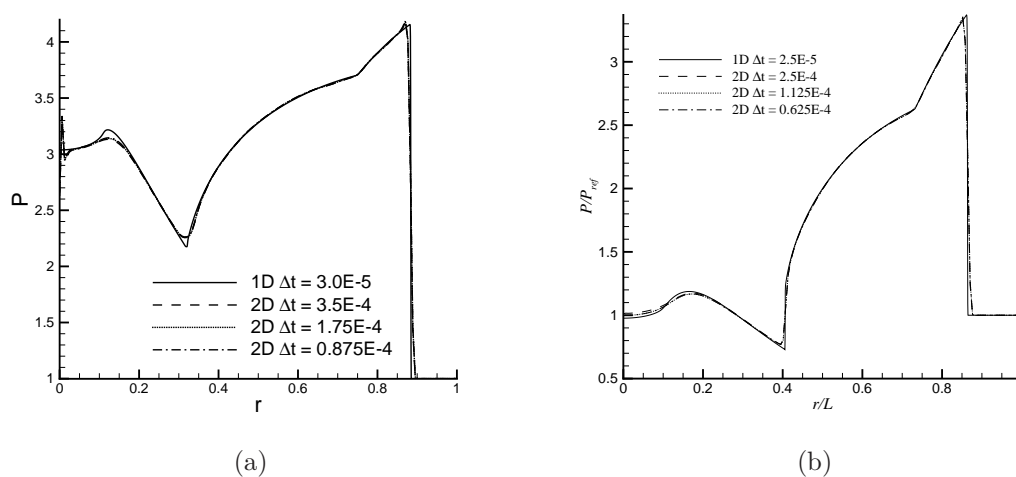


Figura 5.11: Confronto del segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ per il problema dell'esplosione al tempo $t = 0.16$ per diversi passi temporali. Il segnale è confrontato con la soluzione monodimensionale cilindrica e quella sferica, rispettivamente nel caso polare, (a), e in quello assisimmetrico, (b).

degli errori come fatto nel caso monodimensionale) ma è volto soltanto a mettere in evidenza che ci sono delle, pur minime, differenze tra i due schemi.

5.3.2 Risultati in coordinate sferiche

In questa sezione i problemi dell'implosione e dell'esplosione vengono risolti in coordinate sferiche considerando la soluzione nel piano $r-\phi$. Le caratteristiche del dominio e le condizioni iniziali sono uguali a quelle delle simulazioni in coordinate cilindriche, ciò rende i risultati in coordinate sferiche esattamente equivalenti a quelli ottenuti nel caso assisimmetrico. Nelle figure 5.16(a)–(c) sono riportate le isolinee di densità per il caso dell'esplosione a diversi istanti di tempo per la soluzione su griglia fitta con un passo temporale $\Delta t = 1.5 \times 10^{-4}$. In figura 5.16(d) il segnale di pressione lungo l'asse $y = 0$ è confrontato con la soluzione del problema monodimensionale sferico su una griglia di 2001 nodi equispaziati. In figura 5.17 è riportato lo studio di indipendenza della soluzione dalla risoluzione spaziale e temporale insieme al confronto con la soluzione del problema monodimensionale.

In figura 5.18(a)–(c) sono riportate le isolinee di densità per il caso dell'implosione per a diversi istanti di tempo per la soluzione su griglia fitta con un passo temporale di 1.5×10^{-4} . In figura 5.18(d) il segnale di pressione lungo l'asse $y = 0$ è confrontato con la soluzione del problema monodimensionale sferico.

Le simulazioni bidimensionali sferiche nel piano $r-\phi$ e le simulazioni cilindriche assisimmetriche nel piano $Z-R$ corrispondono alla soluzione dello stesso problema, cioè quello di un'esplosione sferica tridimensionale. Per questo motivo per constatare la bontà delle simulazioni eseguite è necessario verificare la soluzione nel piano $r-\phi$ e quella nel piano $Z-R$ siano identiche. Il confronto tra le due soluzioni è mostrato nella figura 5.19 per il problema dell'esplosione e in figura 5.20 per il problema dell'implosione. In entrambe le figure sono mostrate le soluzioni bidimensionali sferiche e cilindriche sul piano $r-\phi$ e $Z-R$ rispettivamente, per suggerire l'idea che tali soluzioni sono la soluzione del problema sferico tridimensionale proiettato su i due piani. Si nota che come le soluzioni sui due piani sono in perfetto accordo tra loro e risultano continue lungo la linea di intersezione dei due piani.

Infine in figura 5.21 è mostrato un confronto tra lo schema numerico con equivalenza (FVE) e quello modificato (FVE*) in cui il volume delle celle dello schema FVM è ottenuto direttamente dall'uguaglianza con la matrice di massa condensata dello schema FEM. Anche qui si nota che le differenze tra i due schemi sono molto modeste.

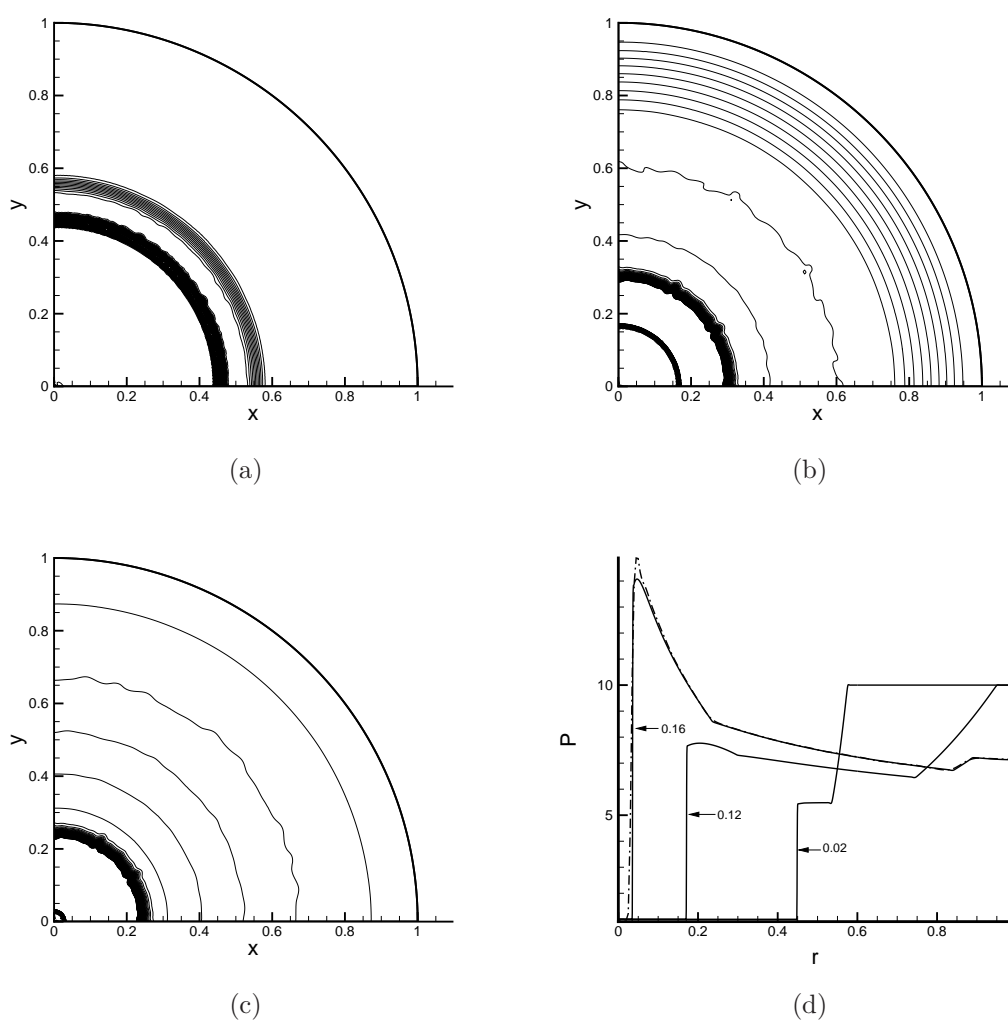


Figura 5.12: Isolinee della densità per il problema dell'implosione cilindrica in coordinate $R-\theta$: (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.12$; (c) $t = 0.16$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, cilindrica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.

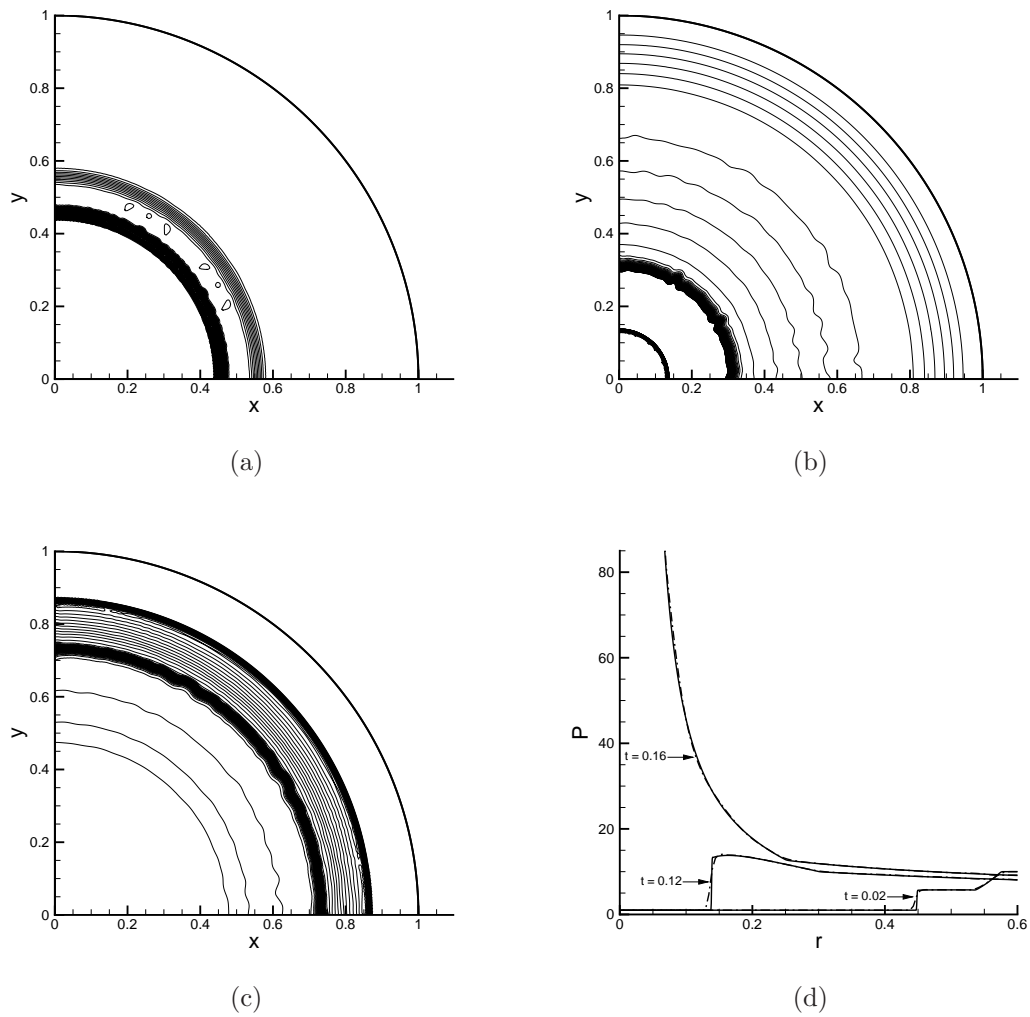


Figura 5.13: Isolinee della densità per il problema dell'implosione cilindrica in coordinate $Z-R$: (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.12$; (c) $t = 0.16$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.

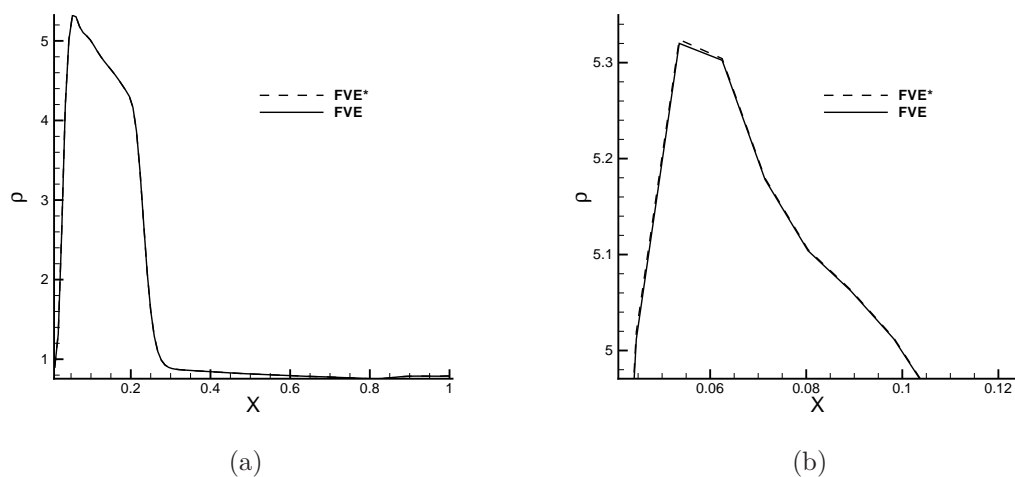


Figura 5.14: Confronto del segnale della densità lungo l'asse x al tempo $t = 0.16$ tra lo schema con equivalenza FVE e quello modificato FVE* per lo schema cilindrico $R-\theta$. In (b) è riportato un particolare del segnale.

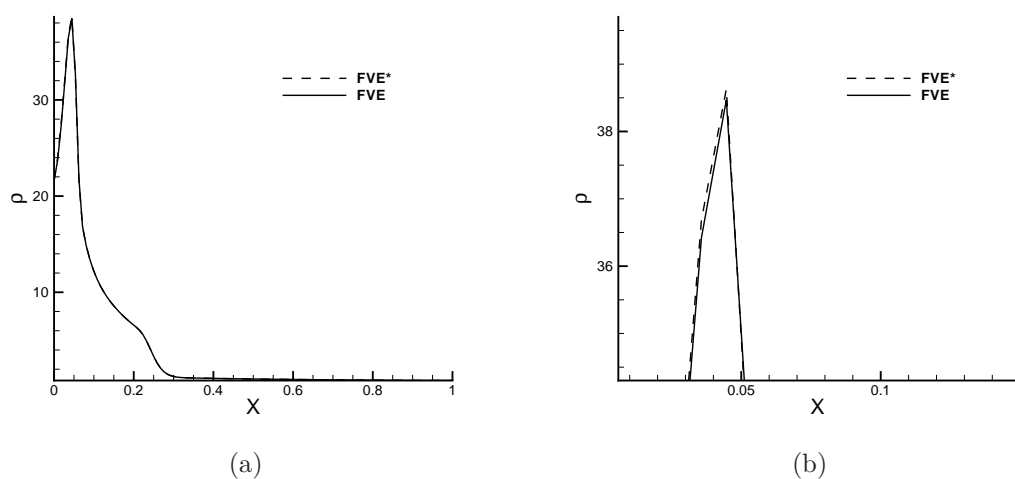


Figura 5.15: Confronto del segnale della densità lungo l'asse x al tempo $t = 0.16$ tra lo schema con equivalenza FVE e quello modificato FVE* per il caso cilindrico $Z-R$. In (b) è riportato un particolare del segnale.

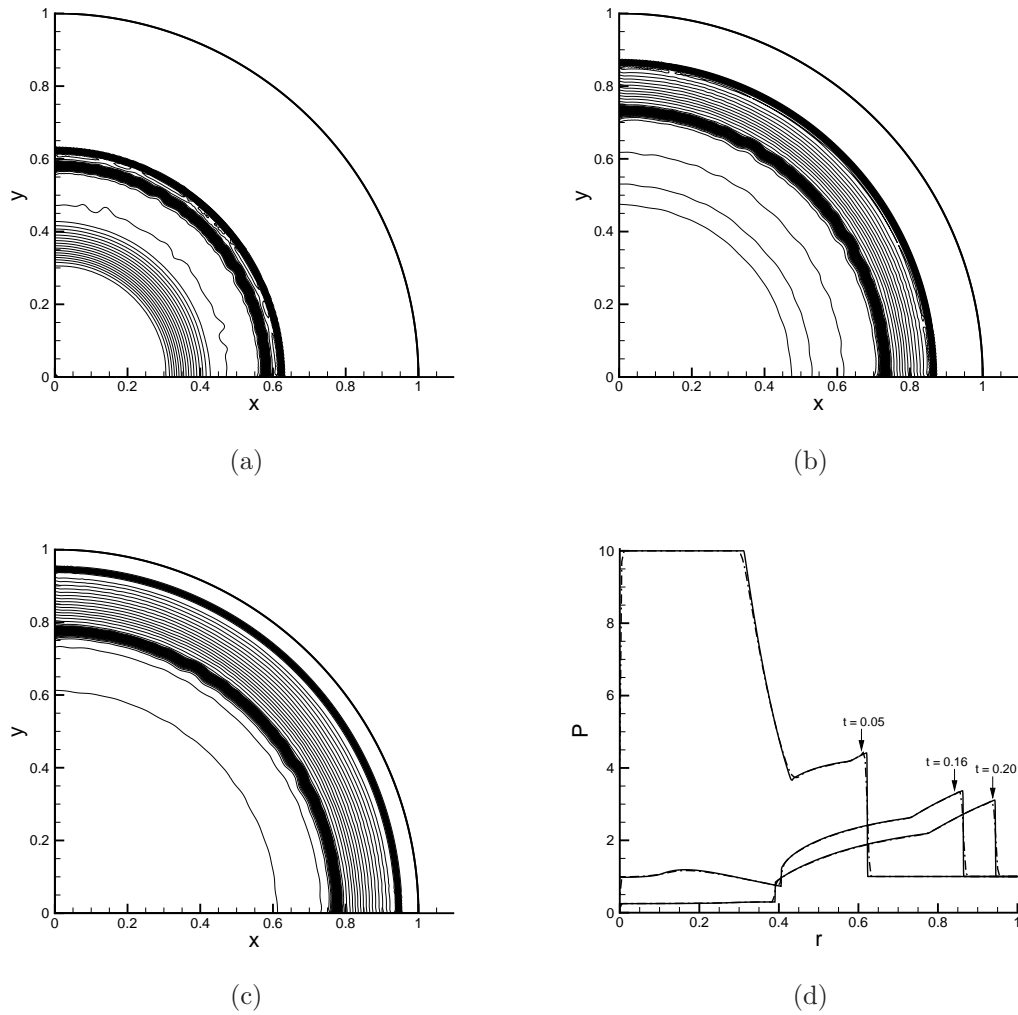


Figura 5.16: Isolinee della densità per il problema dell'esplosione sferica: (a) $t = 0.05$; (b) $t = 0.16$; (c) $t = 0.20$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.

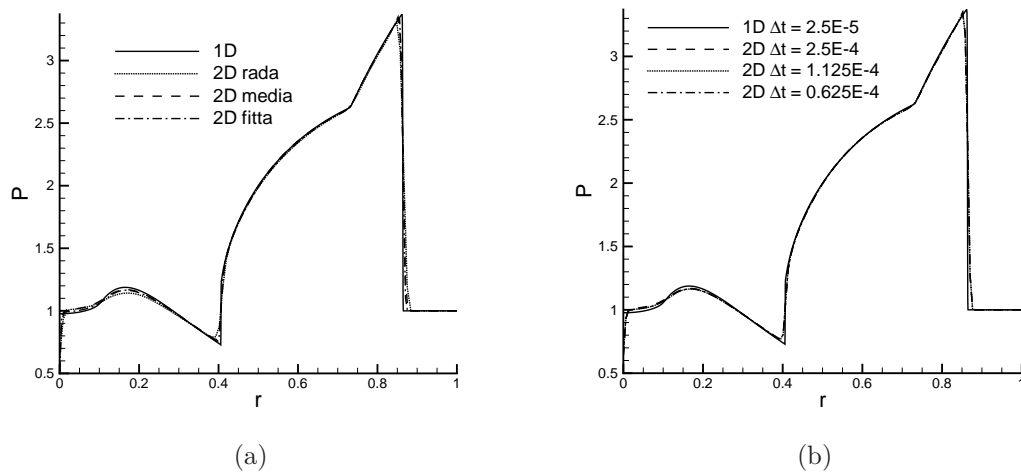


Figura 5.17: Confronto del segnale della pressione lungo l'asse $y = 0$ per il problema dell'esplosione in coordinate sferiche al tempo $t = 0.16$ per griglie con diverse risoluzioni spaziali, (a), e per diversi passi temporali (b). Il segnale è confrontato con la soluzione monodimensionale sferica.

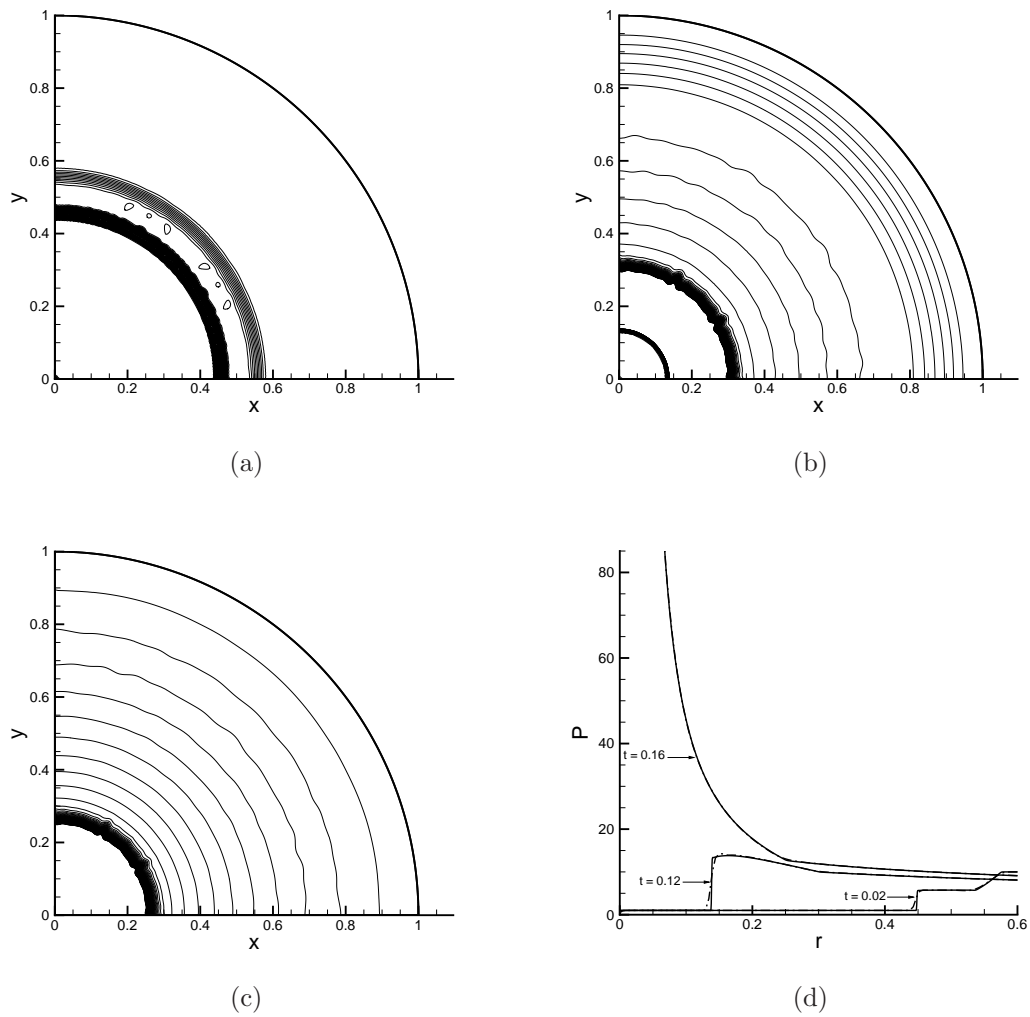


Figura 5.18: Isolinee della densità per il problema dell'implosione sferica: (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.12$; (c) $t = 0.16$. Ogni isolina corrisponde ad una differenza di densità di $\Delta\rho/\rho_{ref} = 0.03$. (d) Pressione lungo l'asse $y = 0$ agli stessi istanti di tempo: la linea continua è la soluzione di riferimento monodimensionale, sferica, la linea tratto-punto è la soluzione bidimensionale.

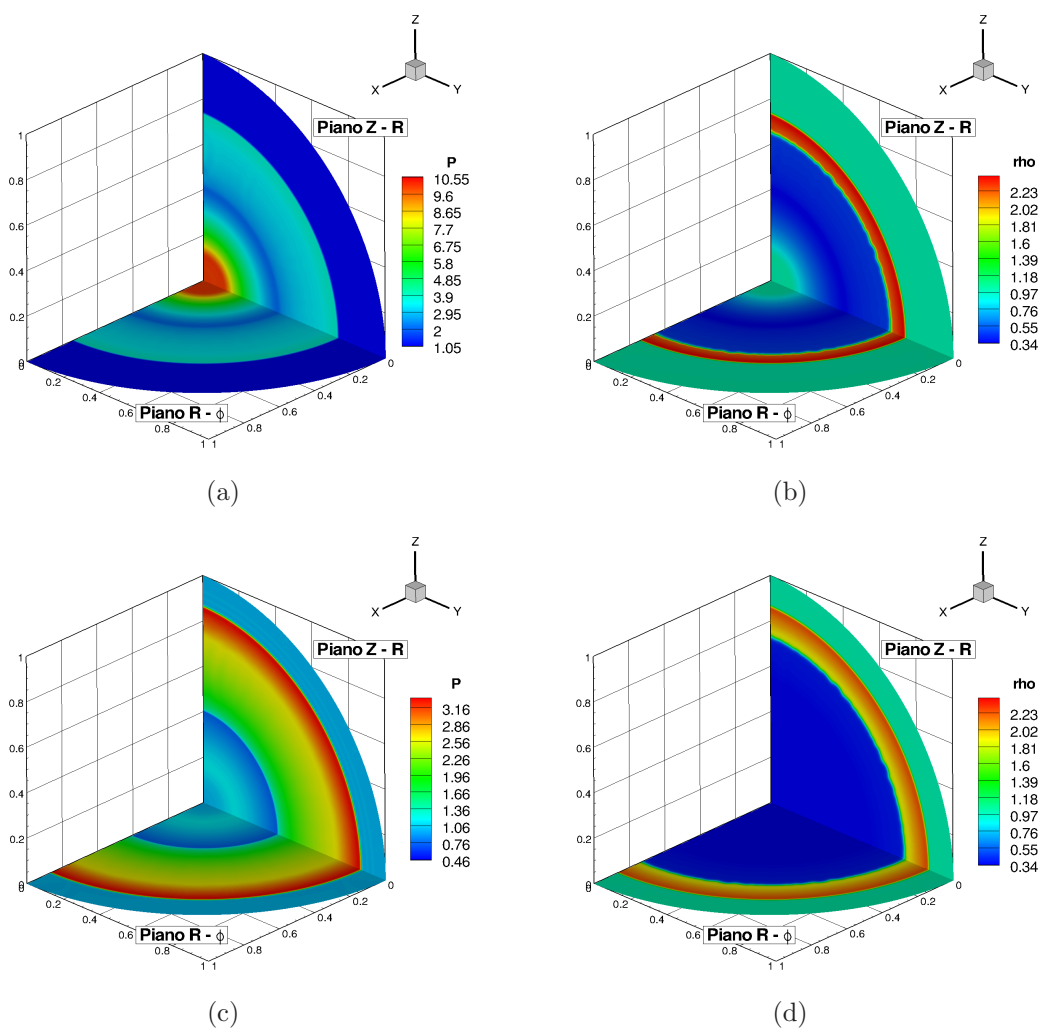


Figura 5.19: Contours della pressione (a), (c) e della densità (b), (d) per il problema dell'e-
 esplosione a due diversi istanti di tempo: $t = 0.1$ prima riga, $t = 0.16$ seconda
 riga. Sul piano orizzontale di ogni immagine è riportata la soluzione bidi-
 dimensionale sferica nelle coordinate $r-\phi$ mentre sul piano verticale è riportata
 la soluzione cilindrica assisimmetrica nel piano $Z-R$.

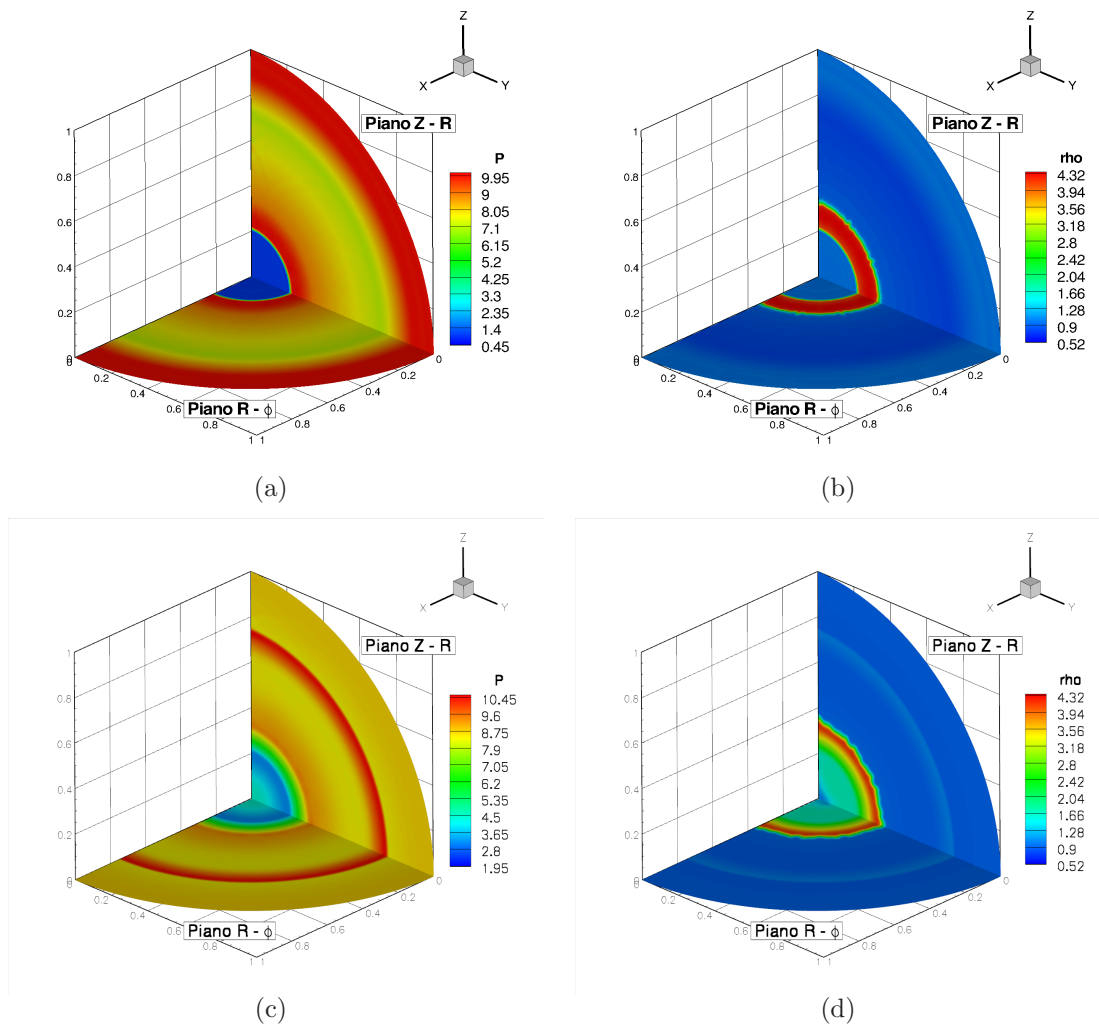


Figura 5.20: Contours della pressione (a), (c) e della densità (b), (d) per il problema dell'implosione a due diversi istanti di tempo: $t = 0.1$ prima riga, $t = 0.32$ seconda riga. Sul piano orizzontale di ogni immagine è riportata la soluzione bidimensionale sferica nelle coordinate $r-\phi$ mentre sul piano verticale è riportata la soluzione cilindrica assisimmetrica nel piano $Z-R$.

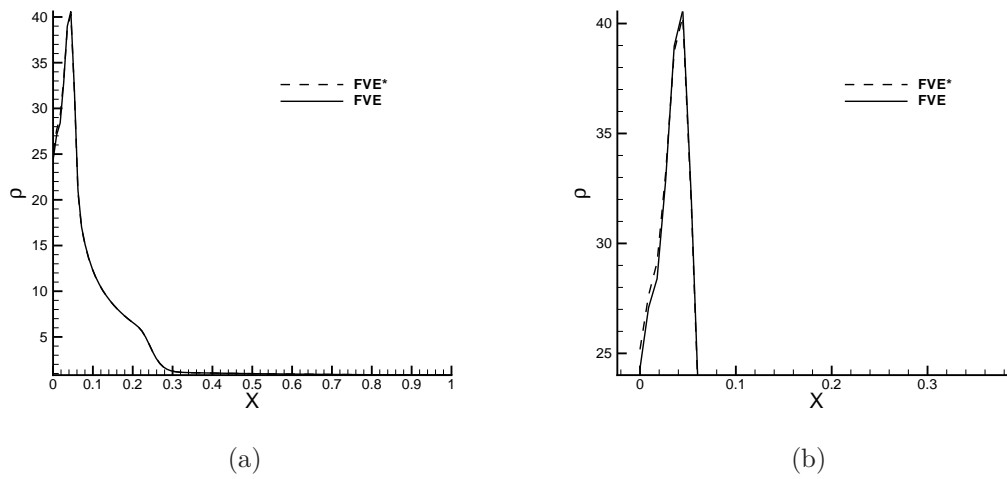


Figura 5.21: Confronto del segnale della densità lungo l'asse x al tempo $t = 0.16$ tra lo schema con equivalenza FVE e quello modificato FVE* nel caso sferico. In (b) è riportato un particolare del segnale.

5.4 Urti convergenti su ostacoli

Si è più volte fatto riferimento all'importanza che gli urti convergenti possono rivestire in applicazioni pratiche che richiedono la creazione, in una regione limitata dello spazio, di valori elevati di energia e pressione. Nel corso degli anni si sono susseguiti diversi esperimenti [31, 45, 46, 49] con lo scopo di produrre urti cilindrici convergenti regolari, ma in tutti gli esperimenti si è notato come tali urti tendano a perdere la forma cilindrica, a causa dell'insorgere di instabilità nel fronte d'urto. La comparsa di queste instabilità è stata attribuita ai disturbi introdotti nel flusso dalle componenti degli apparati sperimentali, ma anche in esperimenti a bassa intrusività non si è mai riusciti ad ottenere urti perfettamente circolari, si è concluso che non sarà mai possibile sopprimere tutti i disturbi [48].

Gli urti cilindrici convergenti esibiscono una forte sensibilità ai disturbi esterni [45, 46] pertanto risulta praticamente impossibile che l'urto conservi la sua forma cilindrica o sferica iniziale durante il processo di implosione. Tuttavia è possibile, qualora le perturbazioni introdotte siano simmetriche, osservare la formazione di un fronte poligonale, questa volta stabile, che è soggetto a trasformazioni periodiche di forma e orientamento [2, 3, 39]. Questo comportamento è dovuto all'accoppiamento non lineare tra la velocità locale dell'urto e la sua forma: dove la curvatura è maggiore l'urto è più veloce e quindi tende ad assumere una forma piana. Una volta che si è instaurata la forma poligonale, essa continua ad evolvere trasformandosi periodicamente da un poligono a n lati ad uno a $2n$ lati e viceversa. Affinchè si ottenga questo comportamento periodico stabile è necessario che le perturbazioni nel flusso sul fronte d'onda siano simmetriche, invece la mancanza di simmetria nelle perturbazioni causa la perdita della periodicità nell'evoluzione del fronte d'onda.

Alla luce di queste considerazioni diventa importante poter introdurre dei disturbi simmetrici al fronte dell'onda convergente al fine di avere una configurazione ripetibile e controllabile. Le tecniche principali per conformare il fronte d'onda sono due: nella prima tecnica le pareti riflettenti del dominio vengono modellate con la stessa forma che si vuole imporre all'urto [9], nella seconda tecnica vengono inseriti in modo simmetrico N ostacoli cilindrici all'interno del dominio che modificano la forma dell'urto circolare incidente in una forma poligonale ad N lati [8]. Quest'ultima tecnica risulta più interessante perchè il disturbo introdotto dagli ostacoli cilindrici sovrasta i disturbi (indesiderati) introdotti dagli apparati sperimentali a discapito però di una riduzione del picco di pressione e temperatura che si ottiene al centro dell'implosione a causa del bloccaggio e della diffrazione dell'urto incidente prodotti dalla presenza degli ostacoli cilindrici.

La dinamica dell'urto convergente osservata sperimentalmente è stata riscontrata anche nelle simulazioni numeriche degli urti convergenti [2, 3]. Di seguito verranno riportati i risultati numerici ottenuti con lo schema numerico realizzato come mostrato nel presente lavoro, nei casi di urto cilindrico convergente su quattro e otto ostacoli cilindrici. Verrà inoltre analizzato, a titolo di prova esplorativa, l'effetto di un ostacolo sferico sull'urto convergente sferico mostrandone, al contempo, le differenze con il caso cilindrico.

Urto convergente su quattro ostacoli cilindrici

Si considera il caso in cui un urto circolare interagisca con una schiera di quattro ostacoli cilindrici disposti in modo simmetrico attorno al centro della regione circolare. In figura 5.22 è descritto il dominio computazionale utilizzato per eseguire le simulazioni numeriche e riproduce la condizione dell'esperimento eseguito in [8]. Il raggio della circonferenza che delimita il dominio è unitario, il centro degli ostacoli cilindrici si trova ad una distanza dal centro del dominio $R_o = 0.578$ e ogni ostacolo ha un diametro $d_o = 0.1875$. La condizione iniziale consiste in una discontinuità della pressione e della densità ad una distanza $R_s = 0.875$ dal centro con un salto di pressione e densità di 10. Si fa notare come la stessa simulazione numerica potrebbe essere eseguita in coordinate cartesiane, ma si è deciso comunque di utilizzare lo schema numerico in coordinate cilindriche per osservare il comportamento dello schema numerico proposto. Si è deciso di discretizzare l'intero dominio, senza tener conto delle simmetrie che avrebbero consentito di discretizzarne solo una parte, al fine di non introdurre forzatamente delle simmetrie nel risultato e per poter valutare la capacità del metodo numerico di conservare la simmetria della soluzione. La griglia di calcolo è formata da 36 713 nodi e 72 612 triangoli. In tutte le simulazioni è stato usato un passo temporale uniforme nello spazio ma variabile nel tempo che corrisponde a $CFL = 0.5$.

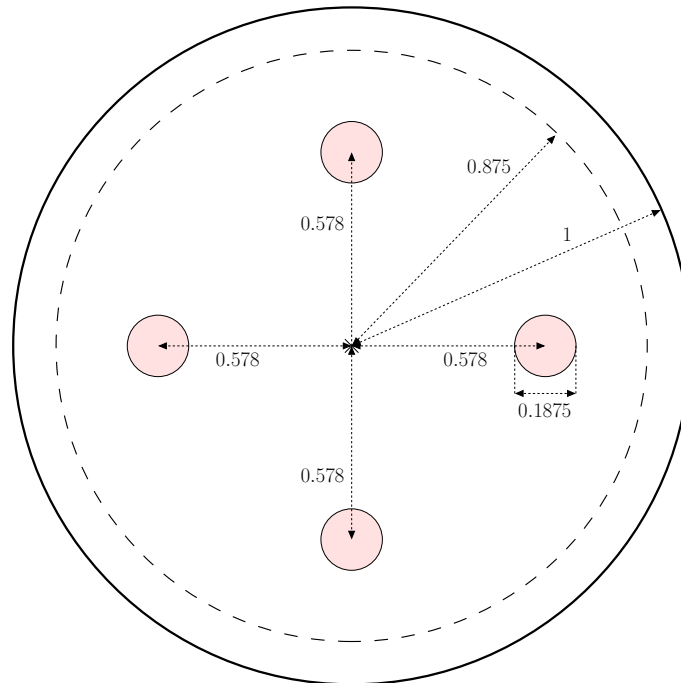


Figura 5.22: Il dominio computazionale cilindrico usato per lo studio delle onde convergenti su quattro ostacoli. La circonferenza tratteggiata indica la posizione della discontinuità iniziale della pressione e della densità.

In figura 5.23 sono mostrati i risultati della simulazione numerica dell'urto convergente su quattro cilindri, a diversi istanti di tempo. Si nota come l'urto cilindrico

dopo essere stato diffratto dagli ostacoli assume una struttura poligonale con otto lati convessi. All'avvicinarsi verso il centro l'urto diventa piano e la forma ottagonale viene sostituita da una quadrata, quando l'urto raggiunge il centro viene poi riflesso come un urto circolare. Tali risultati sono già stati presentati in occasione della conferenza ECCOMAS 2010 e il relativo lavoro è stato aggiunto in allegato.

La bontà della simulazione può essere valutata anche confrontando il risultato ottenuto con lo schema presentato in questo lavoro e quello ottenuto utilizzando la formulazione cartesiana; si veda pertanto la figura 5.24 nella quale sono riportate le linee di livello per l'interazione dell'urto al tempo $t = 0.354$ per la soluzione ottenuta dallo schema presentato in questo lavoro a cui è stata sovrapposta, nel primo quadrante, la soluzione ottenuta da uno schema numerico che impiega le coordinate cartesiane.

La diffrazione dell'urto circolare su un ostacolo cilindrico avviene in modo analogo a quella di un urto piano su un cilindro, la differenza risiede solo nella forma dell'urto convergente e riflesso. In figura 5.25 è mostrato un ingrandimento della regione in prossimità dell'ostacolo dopo che l'urto è stato diffratto dalla parte posteriore del cilindro; si nota il sistema di tre urti noto come urto a lambda o riflessione di Mach, costituito dall'urto di Mach, dall'urto convergente e dall'urto riflesso dal cilindro che formano un punto triplo.

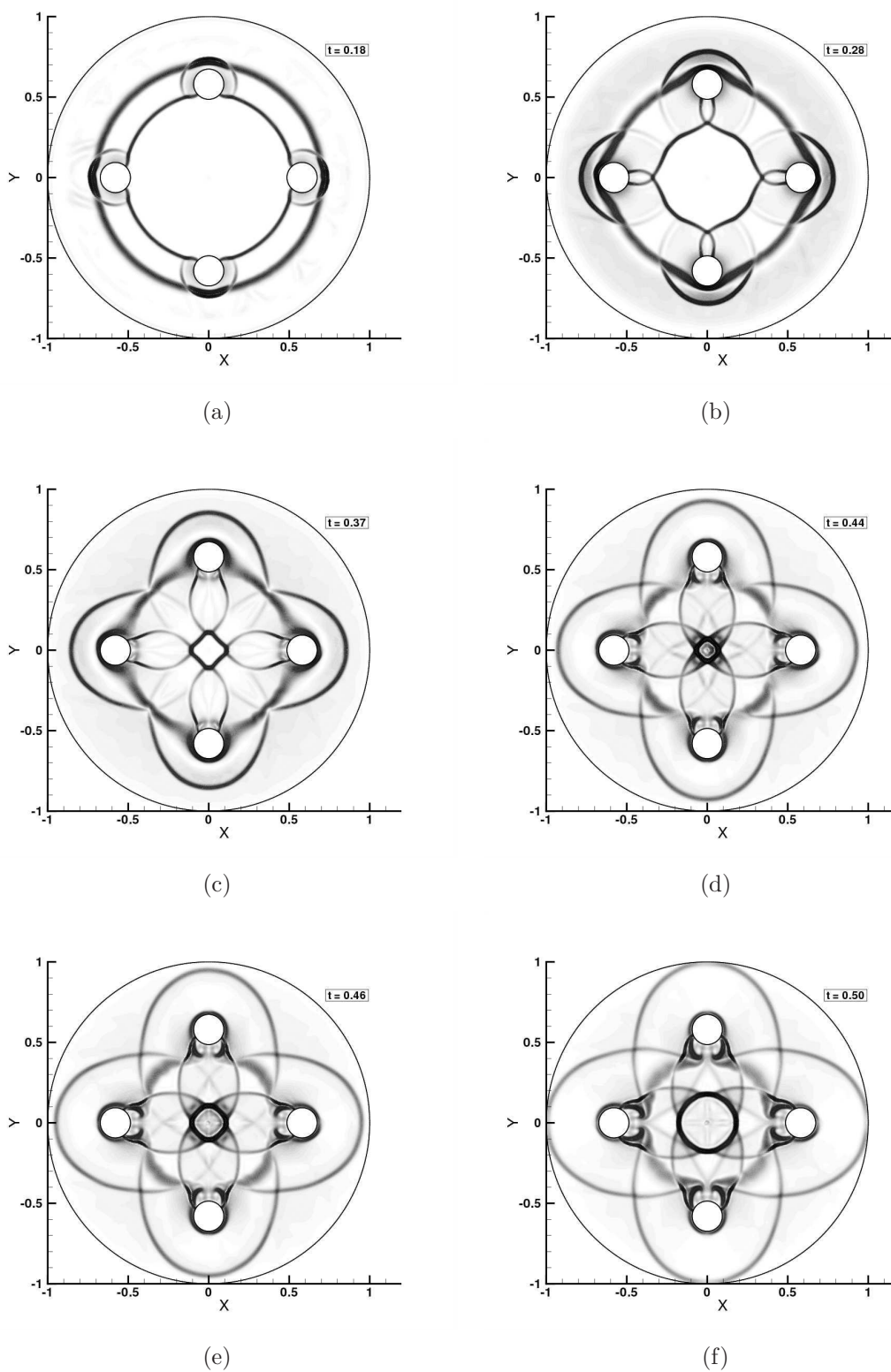


Figura 5.23: Schlieren numerica del problema dell'implosione cilindrica su quattro ostacoli cilindrici a diversi istanti di tempo. Le figure (a)–(c) mostrano l'urto convergente prima di raggiungere l'origine, le figure (d)–(f) mostrano l'urto dopo la riflessione sull'origine.

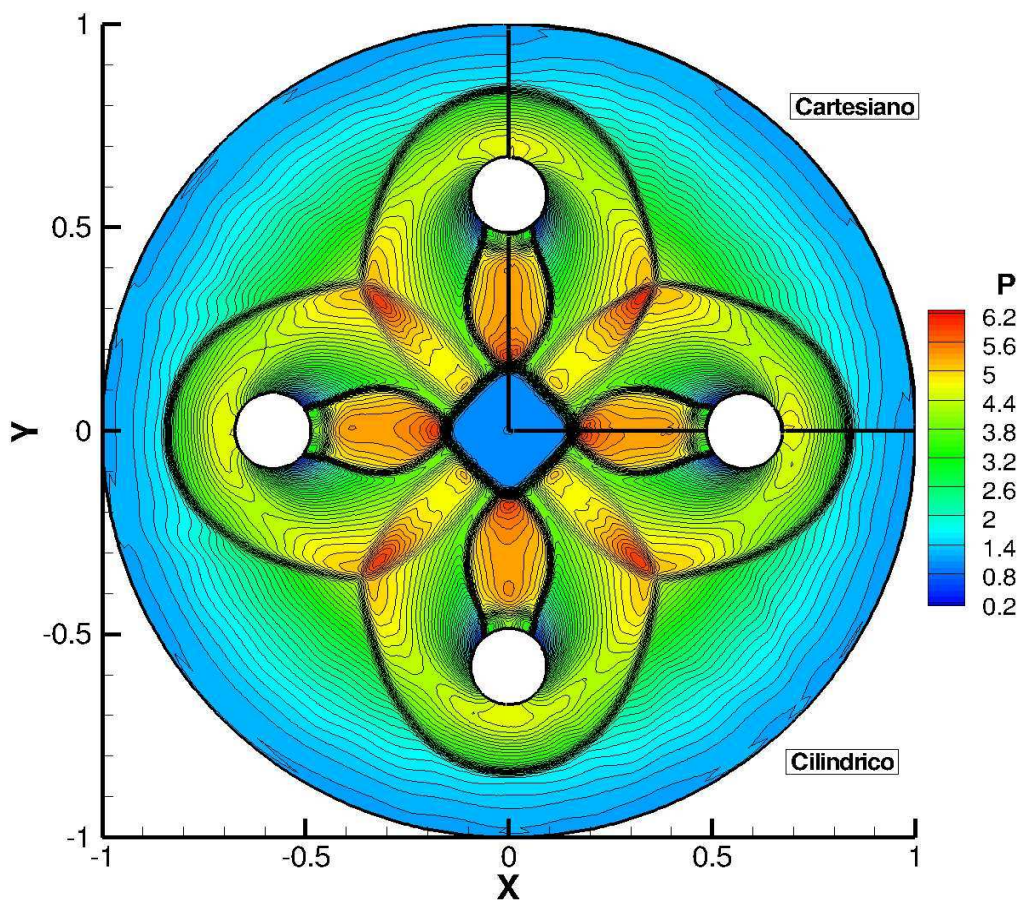


Figura 5.24: Confronto della soluzione dell'urto convergente su quattro ostacoli usando lo schema numerico in coordinate cilindriche con la soluzione dello schema numerico in coordinate cartesiane. In quest'ultimo caso solo un quarto dell'intero dominio è stato discretizzato.

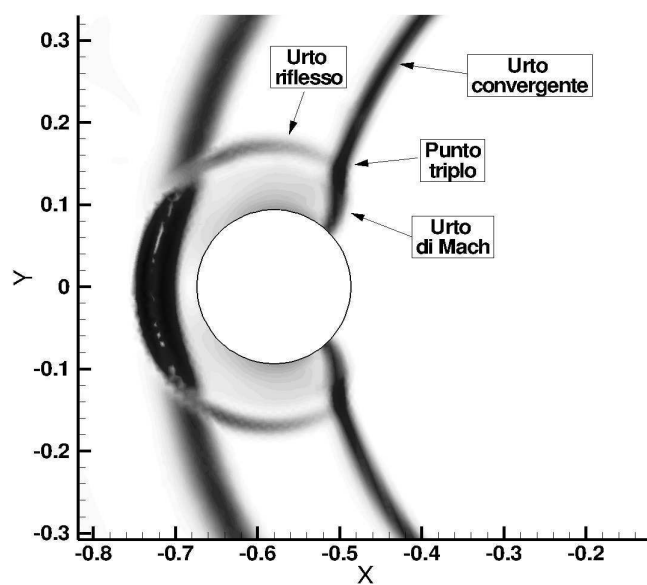


Figura 5.25: Particolare della Schlieren numerica al tempo $t = 0.18$. Si nota la struttura del punto triplo composta dall'urto di Mach, dall'urto convergente e dall'urto riflesso dal cilindro. Nella simulazione il flusso è diretto da sinistra a destra.

Interazione tra l'urto convergente e otto ostacoli cilindrici

Si presentano ora i risultati relativi alla simulazione effettuata nel caso di urto cilindrico convergente su otto ostacoli cilindrici (si faccia riferimento alla figura 5.26). Per le simulazioni è stata utilizzata la simmetria geometrica potendo così effettuare la simulazione su un dominio pari ad un ottavo di circonferenza (si veda la figura 5.26).

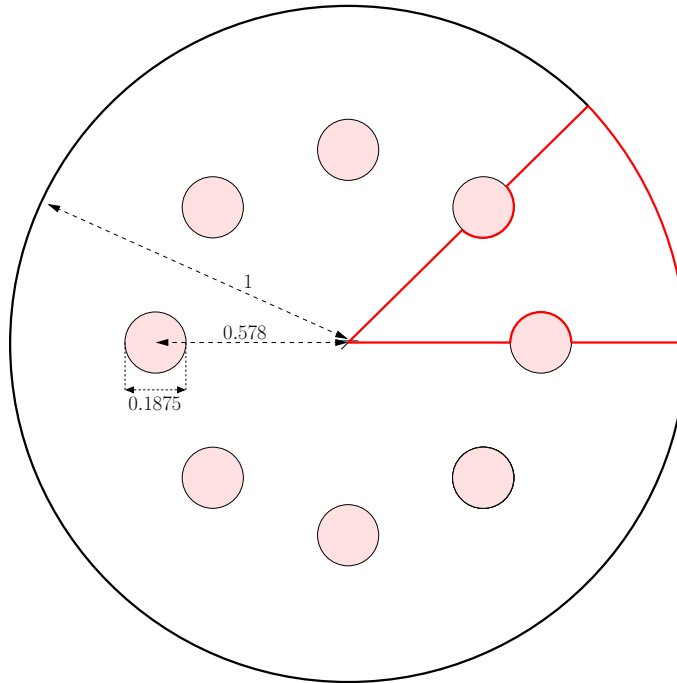
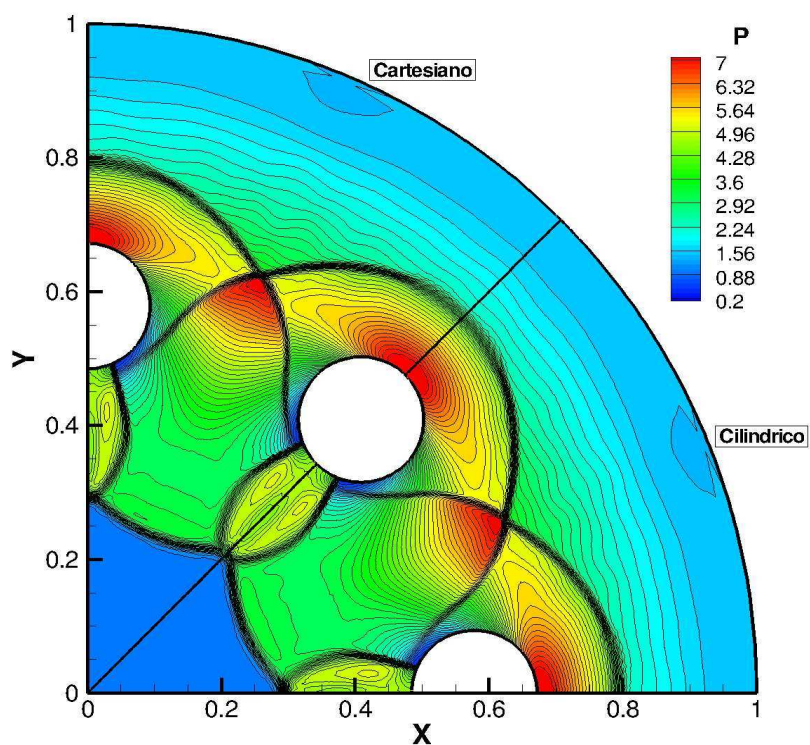


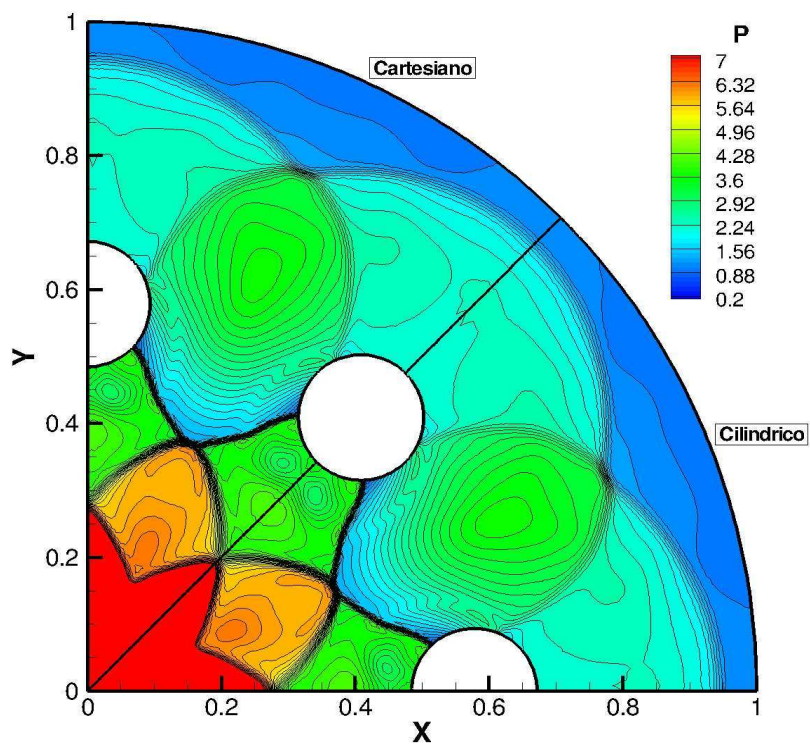
Figura 5.26: Dominio per la simulazione dell'interazione tra l'urto convergente e otto ostacoli cilindrici. Viene indicato in rosso anche l'effettivo dominio utilizzato per la simulazione, ridotto in accordo alla simmetria geometrica.

Prima di presentare i risultati relativi all'evoluzione della struttura dell'urto si fornisce un ulteriore confronto con lo schema impiegante le coordinate cartesiane. Nelle figura 5.27 sono riportati i risultati ottenuti con lo schema numerico in coordinate cilindriche presentato in questo lavoro (setto circolare da 0° a 45°) e lo schema in coordinate cartesiane (setto circolare da 45° a 90°); sono presentati i risultati numerici a due diversi istanti temporali: $t = 0.30$ (figura 5.27(a)) e $t = 0.46$ (figura 5.27(b)). Si evidenzia anche in questo caso un ottimo accordo tra i due schemi.

Nella figura 5.28 si riporta l'evoluzione (a vari istanti temporali) della struttura assunta dall'urto nel setto circolare di 45° compreso tra due degli otto ostacoli cilindrici.



(a)



(b)

Figura 5.27: Confronto tra i risultati numerici ($t = 0.30$, figura 5.27(a) e $t = 0.46$, figura 5.27(b)) dello schema in coordinate cilindriche presentato in questo lavoro (settore circolare da 0° a 45°) e quello impiegante le coordinate cartesiane (settore circolare da 45° a 90°).

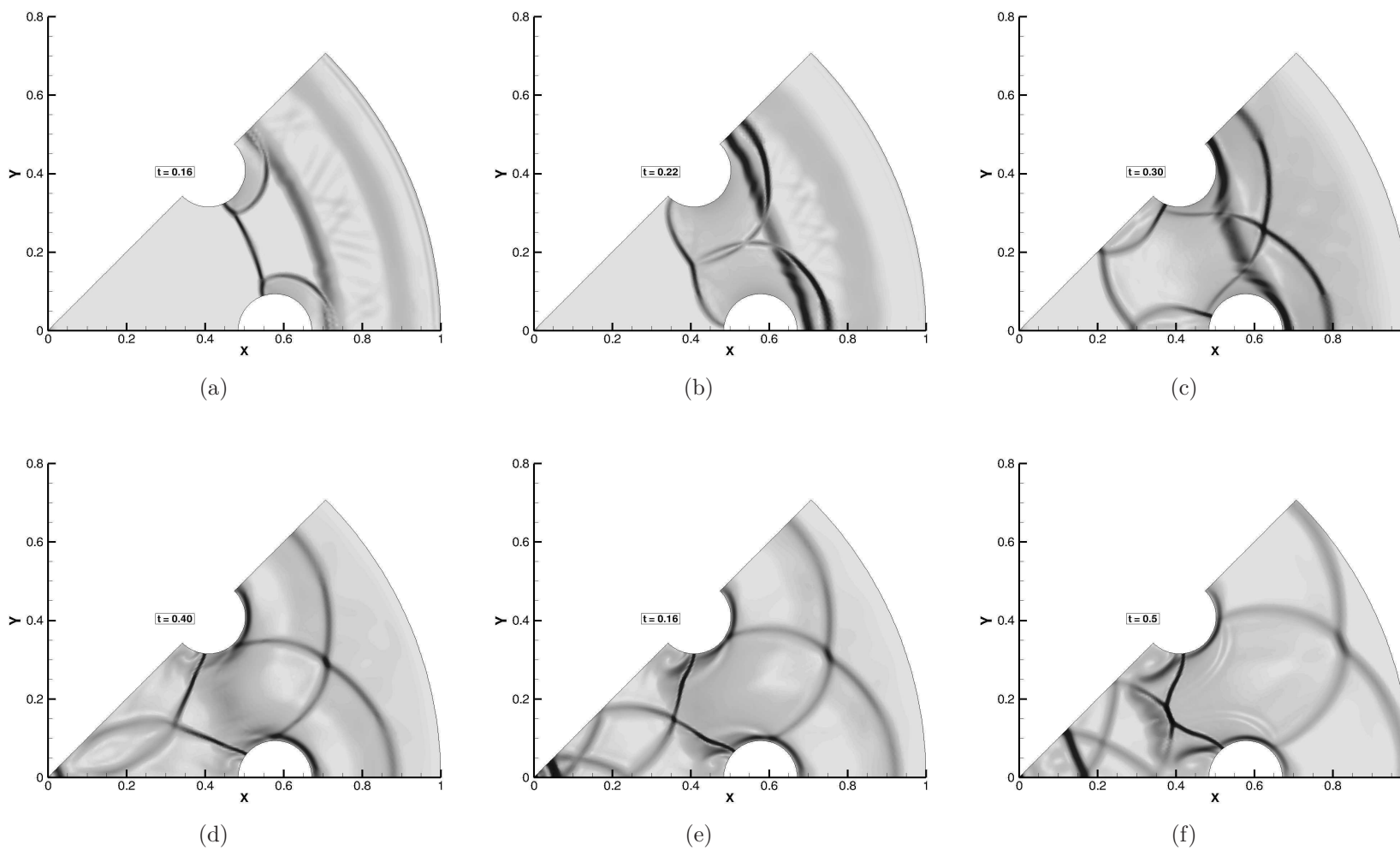


Figura 5.28: Schlieren numerica del problema dell'implosione cilindrica su otto ostacoli cilindrici a diversi istanti di tempo. Le figure (a)–(c) mostrano l'urto convergente prima di raggiungere l'origine, le figure (d)–(f) mostrano l'urto dopo la riflessione sull'origine.

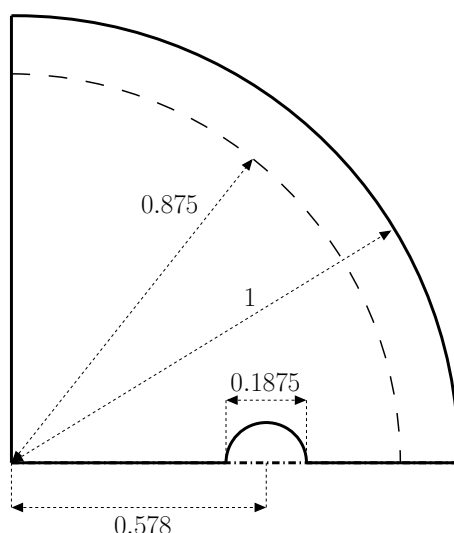


Figura 5.29: Il dominio computazionale usato per lo studio dell'urto cilindrico/sferico su un ostacolo cilindrico/sferico. La linea tratto-punto indica l'asse di simmetria nel caso del problema assisimmetrico. La circonferenza tratteggiata indica la posizione della discontinuità iniziale della pressione e della densità.

Interazione urto cilindrico/sferico sul singolo ostacolo cilindrico

Come ulteriore applicazione del codice numerico, può risultare interessante confrontare l'interazione di un urto cilindrico su un ostacolo cilindrico con l'iterazione di un urto sferico con un ostacolo sferico. Il problema sferico è stato risolto utilizzando lo stesso dominio computazionale del problema cilindrico ma usando la descrizione assisimmetrica del campo di moto. In figura 5.29 è descritto il dominio computazionale usato per eseguire le simulazioni in coordinate cilindriche nel caso polare e assisimmetrico. Si è sfruttata la simmetria del problema per discretizzare solo un quarto del dominio. Anche in questa prova la condizione iniziale consiste in una discontinuità della pressione e della densità con un salto di entrambe le grandezze pari a 10. La griglia usata per le simulazioni numeriche è composta da 22 649 nodi e 44 781 triangoli. Su tutti i bordi del dominio è stata applicata la condizione al contorno di parete solida.

Il confronto tra l'urto cilindrico e quello sferico è mostrato in figura 5.30 a diversi istanti di tempo. Nel caso cilindrico, l'interazione con l'ostacolo risulta ancora nella formazione di un urto piano, ma non ha una forma poligonale come avveniva a seguito dell'interazione con quattro cilindri. Nel caso dell'urto sferico, l'interazione con l'ostacolo sferico produce modifiche meno significative alla forma dell'urto, probabilmente dovuto al minore rapporto tra l'area frontale dell'ostacolo e quella dell'urto rispetto al caso cilindrico.

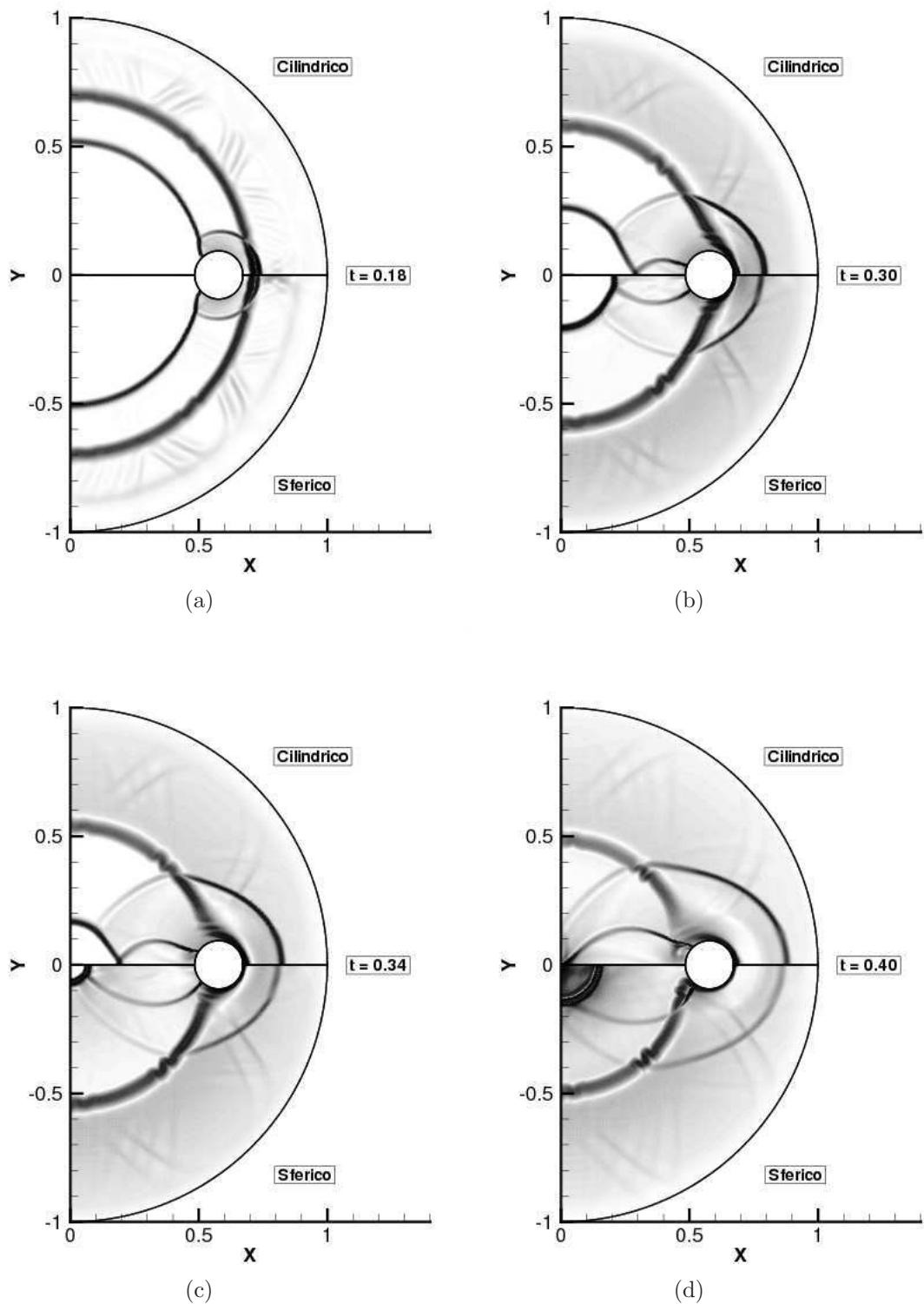


Figura 5.30: Schlieren numerica a diversi istanti di tempo del problema dell'implosione con due ostacoli; solo uno ne è mostrato in virtù della simmetria del problema. In tutte le immagini la metà superiore rappresenta l'urto cilindrico che converge su un ostacolo cilindrico, la metà inferiore rappresenta l'urto sferico che converge su un ostacolo sferico.

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro sono stati ricavati gli schemi ibridi volumi (FV) / elementi finiti (FE) in coordinate curvilinee ortogonali, cilindriche e sferiche, nei differenti casi multidimensionali e monodimensionali.

Si sono dapprima ottenute esplicitamente le formulazioni node-pair degli schemi ad elementi e volumi finiti e, ricavata una opportuna condizione di equivalenza, differente nei vari casi, è stato presentato di volta in volta lo schema ibrido corrispondente. Sono state ricavate esplicitamente tre proprietà degli schemi a elementi e volumi finiti che esprimono le proprietà di conservatività (proprietà 1), caratteristiche geometriche della discretizzazione (proprietà 2) e un'ulteriore proprietà geometrica (proprietà 3) che esprime la costruzione delle celle dello schema FV in relazione alla discretizzazione geometrica dello schema FE. Dalle uguaglianze fornite dal confronto tra le prime due proprietà per lo schema FV con le analoghe proprietà per lo schema FE, sono state ricavate le quantità metriche dello schema ai volumi finiti (volume delle celle e normali integrate) dai corrispondenti integrali dello schema FE. Il coefficiente della derivata temporale viene, invece, ottenuto dall'applicazione della condizione di equivalenza; si tratta di una relazione vettoriale algebrica che lega il coefficiente metrico della derivata temporale nello schema FV al corrispondente coefficiente metrico FE. Si è indagato inoltre l'effetto della mancata imposizione della condizione di equivalenza sulle proprietà di convergenza dello schema. Tali differenze sono risultate di esigua entità nel caso monodimensionale, con l'imposizione della condizione di equivalenza che porta sempre ad errori minori rispetto alla non applicazione della stessa. Gli autori ritengono che questo effetto, seppur di modesta rilevanza nel caso monodimensionale, possa divenire di maggiore entità nei casi bidimensionali e tridimensionali. Un'indagine in questa direzione è attualmente in corso.

Gli schemi presentati sono stati utilizzati con successo per la simulazione di correnti comprimibili non viscosi nei casi di implosione ed esplosione. L'accuratezza del metodo e le sue proprietà di convergenza, sia in spazio che in tempo, sono state verificate esibendo il comportamento atteso.

I risultati ottenuti nel caso di implosione ed esplosione sono stati confrontati, mostrando un ottimo accordo, con quelli ottenibili mediante uno schema monodimensionale. In una fase successiva il codice è stato impiegato per la simulazione dell'interazione di urti convergenti con ostacoli in differenti situazioni (urto sferico e cilindrico) e per differenti configurazioni (quattro o otto ostacoli cilindrici equispaziati). Tali simulazioni non hanno la pretesa di essere esaustive, nello studio e comprensione dei fenomeni simulati. Con tali simulazioni si è ottenuto il duplice

scopo di verificare l'accuratezza del codice di calcolo sviluppato su flussi topologicamente complessi con molteplici interazioni tra urti e pareti, avendo la possibilità di confrontarne i risultati con un solutore in coordinate cartesiane e, inoltre, condurre delle prove esplorative su questa tecnica di controllo del fronte d'urto. Proprio quest'ultima campagna esplorativa non solo ha permesso di riprodurre alcuni dei meccanismi fondamentali caratterizzanti questi fenomeni, in accordo con i lavori già presenti in letteratura [8], ma ha consentito di raggiungere risultati originali, come ad esempio l'interazione del singolo urto sferico con il singolo ostacolo (i risultati di questo lavoro sono stati presentati alla comunità scientifica durante la conferenza ECCOMAS 2010 [6]).

Il presente lavoro di tesi, nel suo sviluppo, ha comportato l'affiorare di diverse problematiche che necessitano di ulteriore approfondimento. Tali problematiche possono essere classificate in due tipologie: quelle riguardanti la descrizione fisica dei fenomeni analizzati e quelle di natura più squisitamente numerica. Alla prima categoria appartengono le questioni legate alla stabilità ed evoluzione dei fronti degli urti convergenti siano essi cilindrici o sferici. Notevole importanza è rivolta in letteratura allo studio degli urti di tipo convergente, ma sembra non essere presente uno studio sistematico sulla stabilità del fronte dell'urto convergente in geometria cilindrica o sferica. Tale studio potrebbe essere condotto impiegando alcune tecniche di adattamento di griglia che consentano il raffinamento in funzione della posizione dell'urto, come quelle sviluppate all'interno del dipartimento [33]). Un ulteriore sviluppo di sicuro interesse potrebbe essere quello di condurre le suddette simulazioni impiegando modelli di gas reale al fine di evidenziare e caratterizzare gli effetti della loro più complessa termodinamica sulla stabilità del fronte d'onda. Come già accennato, di notevole interesse pratico risulta la possibilità di prevedere il comportamento di un urto convergente qualora si trovi ad investire ostacoli di diversa tipologia. Tale tecnica di controllo della stabilità dell'urto permette di imporre al fronte d'onda delle perturbazioni di entità superiore a quelle intrinsecamente presenti nell'urto stesso allo scopo di ottenere una più efficiente concentrazione di energia alla convergenza dell'urto. Attualmente, sulla base dei risultati preliminari ottenuti in questo lavoro, sono in corso ulteriori studi atti a caratterizzare e, se possibile ottimizzare, la tipologia, la distribuzione e il numero di ostacoli che permettano di controllare nel modo più efficiente la convergenza degli urti cilindrici e sferici.

Alla seconda categoria appartengono invece due problemi già introdotti in precedenza e che sono la linearizzazione di Roe in coordinate cilindriche e sferiche e l'analisi di ulteriori schemi che permettano una differente procedura di eliminazione della singolarità sull'origine presente sia in coordinate cilindriche che sferiche. Per quello che concerne la linearizzazione di Roe è stato mostrato nel Capitolo 4 che in coordinate cilindriche o sferiche, a differenza del più semplice caso cartesiano, è necessario risolvere una ulteriore equazione che permette di determinare anche la coordinata angolare dello stato intermedio. In questo lavoro si è assunta l'ipotesi che la posizione angolare dello stato intermedio fosse sempre calcolata come la media di quelle degli stati destro e sinistro. Tale ipotesi è stata, quantomeno empiricamente, verificata a posteriori avendo un'ottima corrispondenza tra i risultati ottenuti con i metodi presentati in questo lavoro e quelli ottenuti, quando possibile, con un codice

di tipo cartesiano. Si sottolinea che l'approssimazione risulta sempre più accettabile quanto minori risultano le dimensioni degli elementi della griglia di calcolo, pertanto gli autori ritengono che, per le griglie di calcolo utilizzate, l'influenza di tale approssimazione sia stata sempre trascurabile. Tuttavia desta molto interesse dal punto di vista teorico/numerico verificare quanto qui affermato ed empiricamente mostrato. Nel Capitolo 5 i vari risultati numerici bidimensionali ottenuti sono stati confrontati con i risultati monodimensionali. Si è evidenziato un andamento non monotono delle grandezze termodinamiche in prossimità dell'origine del sistema di coordinate in tutte le simulazioni numeriche (ad esclusione del caso assialsimmetrico). L'entità di tale oscillazione è risultata essere molto modesta nel caso monodimensionale (inferiore all'1%), mentre più rilevante nel caso bidimensionale (polare e sferico), ma sempre inferiore al 10%. Tale comportamento, pur non inficiando i risultati numerici ottenuti, se non in un punto in prossimità dell'origine stessa, richiede sicuramente ulteriori analisi. Un valido punto di partenza sembra essere il confronto tra quanto svolto nel presente lavoro in coordinate sferiche e quanto presentato dagli autori stessi (come co-autori) in [16] nel caso monodimensionale. Risulta chiaro che tale problematica è del tutto assente qualora lo schema ibrido sia ricavato eliminando la singolarità, dei sistemi di coordinate, ricorrendo al prodotto delle equazioni di governo per la coordinata radiale al quadrato. Tale constatazione porta gli autori a ritenere che l'utilizzo di formulazioni basate sul prodotto delle equazioni di Eulero con la coordinata radiale elevata ad un ordine superiore al primo, possa portare ad un miglioramento del comportamento della soluzione in prossimità dell'origine del sistema di riferimento. Anche questo argomento è attualmente oggetto di ricerca da parte degli autori.

L'autostruttura delle equazioni di Eulero

In questa appendice vengono riportate le espressioni degli autovalori e degli autovettori del sistema delle equazioni di Eulero nel caso bidimensionale. Poichè la forma dell'autostruttura non cambia con il sistema di coordinate scelto ci si riferirà ad una trattazione generica in cui si utilizzeranno i pedici 1 e 2 per riferirsi alle componenti spaziali dei vettori.

Il tensore Jacobiano \mathbf{A} è definito come la derivata delle componenti della funzione flusso rispetto alle variabili conservative

$$A_1(\mathbf{u}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{e} \quad A_2(\mathbf{u}) = \frac{\partial f_2(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}},$$

con $\mathbf{u} = (\rho, \mathbf{m}, E^t)^T$, e $\mathbf{m} = (m_1, m_2)^T$. Da una differenziazione diretta delle funzioni flusso si ottiene

$$A_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_1^2}{\rho^2} + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial \rho} & \frac{2m_1}{\rho^2} + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_1} & \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_2} & \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial E^t} \\ -\frac{m_1 m_2}{\rho^2} & \frac{m_2}{\rho} & \frac{m_1}{\rho} & 0 \\ \frac{m_1}{\rho} \left(-\frac{E^t + \Pi(\mathbf{u})}{\rho} + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial \rho} \right) & \frac{E^t + \Pi(\mathbf{u})}{\rho} + \frac{m_1}{\rho} \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_1} & \frac{m_1}{\rho} \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_2} & \frac{m_1}{\rho} \left(1 + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial E^t} \right) \end{pmatrix}$$

e

$$A_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{m_2 m_1}{\rho^2} & \frac{m_2}{\rho} & \frac{m_1}{\rho} & 0 \\ -\frac{m_2^2}{\rho^2} + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial \rho} & \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_1} & \frac{2m_2}{\rho} + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_2} & \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial E^t} \\ \frac{m_2}{\rho} \left(-\frac{E^t + \Pi(\mathbf{u})}{\rho} + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial \rho} \right) & \frac{m_2}{\rho} \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_2} & \frac{E^t + \Pi(\mathbf{u})}{\rho} + \frac{m_2}{\rho} \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial m_1} & \frac{m_2}{\rho} \left(1 + \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial E^t} \right) \end{pmatrix}$$

Le due matrici Jacobiane possono essere combinate per definire la matrice completa

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = (A_1(\mathbf{u}), A_2(\mathbf{u}))^T.$$

Si definisce ora la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ come la proiezione di \mathbf{A} lungo $\boldsymbol{\eta}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} = \eta_1 A_1(\mathbf{u}) + \eta_2 A_2(\mathbf{u}).$$

La matrice \mathbf{A} è tale per cui $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}$, dove $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ è la matrice degli autovalori di \mathbf{A} , $\mathbf{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ e $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ sono rispettivamente la matrice degli autovettori sinistri e la matrice degli autovettori destri di \mathbf{A} .

Nel caso di gas ideale politropico si ha che gli autovalori di \mathbf{A} risultano

$$\lambda_{1,4}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\mathbf{m}}{\rho} \cdot \boldsymbol{\eta} \mp c(\mathbf{u})|\boldsymbol{\eta}|, \quad \lambda_{2,3}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\mathbf{m}}{\rho} \cdot \boldsymbol{\eta},$$

mentre le matrici degli autovettori sinistri e destri risultano

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{m_1}{\rho} - c\eta_1 & \frac{m_1}{\rho} & -\eta_2 & \frac{m_1}{\rho} + c\eta_1 \\ \frac{m_2}{\rho} - c\eta_2 & \frac{m_2}{\rho} & \eta_1 & \frac{m_2}{\rho} + c\eta_2 \\ \frac{c^2}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho^2} - c \frac{m^{\parallel}}{\rho} & \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho^2} & \frac{\mathbf{m}^{\perp}}{\rho} & \frac{c^2}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho^2} + c \frac{m^{\parallel}}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\beta}{2c^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho^2} + c \frac{m^{\parallel}}{\rho} & -\frac{m_1}{\rho} - \frac{c}{\beta} \eta_1 & -\frac{m_2}{\rho} - \frac{c}{\beta} \eta_2 & 1 \\ -\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho^2} - 2 \frac{c^2}{\beta} & 2 \frac{m_1}{\rho} & 2 \frac{m_2}{\rho} & -2 \\ -2 \frac{c^2}{\beta} \frac{m^{\perp}}{\rho} & -2 \frac{c^2}{\beta} \eta_2 & 2 \frac{c^2}{\beta} \eta_1 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho^2} - c \frac{m^{\parallel}}{\rho} & -\frac{m_1}{\rho} + \frac{c}{\beta} \eta_1 & -\frac{m_2}{\rho} + \frac{c}{\beta} \eta_2 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\beta = (\gamma - 1)$, $m^{\parallel} = m_1 n_1 + m_2 n_2$ e $m^{\perp} = -m_1 n_2 + m_2 n_1$, e dove $c = c(\mathbf{u})$ è la velocità del suono definita come

$$c^2(\mathbf{u}) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{E^t}{\rho} - \frac{|\mathbf{m}|^2}{\rho} \right).$$

Operatori divergenza nei sistemi curvilinei ortogonali

Coordinate cilindriche

Tridimensionale

$$\nabla^{\varnothing} \cdot \mathbf{F}^{\varnothing} = \frac{\partial F_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial(RF_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta}$$

Bidimensionale

$$\nabla^{ZR} \cdot \mathbf{F}^{ZR} = \frac{\partial F_Z}{\partial Z} + \frac{\partial F_R}{\partial R} \quad \longrightarrow \quad (\nabla^{\varnothing} \cdot \mathbf{F}^{\varnothing})_{\frac{\partial}{\partial \theta}=0} = \nabla^{ZR} \cdot \mathbf{F}^{ZR} + \frac{1}{R} F_R$$

$$\nabla^{R\theta} \cdot \mathbf{F}^{R\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial(RF_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} \quad \longrightarrow \quad (\nabla^{\varnothing} \cdot \mathbf{F}^{\varnothing})_{\frac{\partial}{\partial Z}=0} = \nabla^{R\theta} \cdot \mathbf{F}^{R\theta}$$

Monodimensionale

$$\nabla^R \cdot \mathbf{F}^R = \frac{\partial F_R}{\partial R} \quad \longrightarrow \quad (\nabla^{\varnothing} \cdot \mathbf{F}^{\varnothing})_{\frac{\partial}{\partial Z}=\frac{\partial}{\partial \theta}=0} = \nabla^R \cdot \mathbf{F}^R + \frac{1}{R} F_R$$

Coordinate sferiche

Tridimensionale

$$\nabla^{\odot} \cdot \mathbf{F}^{\odot} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi}$$

Bidimensionale

$$\nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{F}^{r\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi} \quad \longrightarrow \quad (\nabla^{\odot} \cdot \mathbf{F}^{\odot})_{\frac{\partial}{\partial \theta}=0, \theta=\frac{\pi}{2}} = \nabla^{r\phi} \cdot \mathbf{F}^{r\phi} + \frac{1}{r} F_r$$

Monodimensionale

$$\nabla^r \cdot \mathbf{F}^r = \frac{\partial F_r}{\partial r} \quad \longrightarrow \quad (\nabla^{\odot} \cdot \mathbf{F}^{\odot})_{\frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \phi}=0} = \nabla^r \cdot \mathbf{F}^r + \frac{2}{r} F_r$$

Bibliografia

- [1] R. A. Adams. *Calcolo differenziale 2*. Casa Editrice Ambrosiana, 1993.
- [2] N. Apazidis and M.B. Lesser. On generation and convergence of polygonal-shaped shock waves. *J. Fluid Mech.*, 319:301–319, 1996.
- [3] N. Apazidis, M.B. Lesser, N. Tillmark, and B. Johansson. An experimental and theoretical study of converging polygonal shock waves. *Shock waves.*, 12:39–58, 2002.
- [4] H. Brode. Numerical solutions of spherical blast waves. *J. Appl. Phys.*, 26:766–775, 1955.
- [5] H. B. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Wiley, 2nd edition, 1985.
- [6] D. De Santis, G. Geraci, and A. Guardone. Equivalence conditions for finite volume/element discretizations in cylindrical coordinates. V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010, June 2010.
- [7] J. Donea and A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. Wiley, New York, 2002.
- [8] V. Eliasson, N. Apazidis, N. Tillmark, and M.B.: Lesser. Controlling the form of strong converging shocks by means of disturbances. *Shock waves.*, 17:29–42, 2006.
- [9] V. Eliasson, N. Apazidis, N. Tillmark, and M.B.: Lesser. Focusing of strong shocks in an annular shock tube. *Shock waves.*, 15:205–217, 2006.
- [10] A. Ern and J. L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Science*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [11] L. Fezou and B. Stoufflet. A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 84:174–206, 1989.
- [12] M. B. Giles. Stability analysis of a Galerkin/Runge-Kutta Navier-Stokes discretization on unstructured tetrahedral grids. *J. Comput. Phys.*, 132:201–214, 1997.
- [13] E. Godlewski and P. A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer-Verlag, New York, 1996.

-
- [14] H. Goldstine and von Neumann J. Blast wave calculations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 8:327–354, 1955.
- [15] A. Guardone and L. Quarapelle. Spatially factorized Galerkin and Taylor-Galerkin schemes for multidimensional conservation laws. Scientific report DIA SR-00-18, Politecnico di Milano, 2000.
- [16] A. Guardone, D. De Santis, G. Geraci, and M. Pasta. On the relation between finite element and finite volume schemes for compressible flows with cylindrical and spherical symmetry (under review, minor revisions requested). *J. Comput. Phys.*, 2010.
- [17] A. Guardone, V. Selmin, and L. Vigevano. An investigation of Roe’s linearization and average for ideal and real gases. Scientific report DIA SR-99-01, Politecnico di Milano, 1999.
- [18] A. Guardone and L. Vigevano. Roe linearization for the van der Waals gas. *J. Comput. Phys.*, 175(1):50–78, 2002.
- [19] A. Guardone and L. Vigevano. Finite element/volume solution to axisymmetric conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 224(2):489–518, 2007.
- [20] G. Guderley. Powerful spherical and cylindrical compression shocks in the neighbourhood of the centre and of the cylinder axis. *Luftfahrtforschung*, 19:302–312, 1942.
- [21] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357–393, 1983.
- [22] A. Harten and J. M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 50:253–269, 1983.
- [23] A. Jameson. Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. *AIAA Paper 91-1596.*, pages 1–13, 1991.
- [24] R. J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [25] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for conservation laws and hyperbolic systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [26] T. G. Liu, B. C. Khoo, and K. S. Yeo. The numerical simulations of explosion and implosion in air: use of a modified Harten’s TVD scheme. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, 31:661–680, 1999.
- [27] L. Mottura, L. Vigevano, and M. Zaccanti. An evaluation of Roe’s scheme generalizations for equilibrium real gas flows. *J. Comput. Phys.*, 138(2):354–399, 1997.

- [28] M. Pasta. Una condizione di equivalenza tra schemi ai volumi ed agli elementi finiti in coordinate curvilinee ortogonali. Master's thesis, Politecnico di Milano Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, 2008.
- [29] R. B. Payne. A numerical method for a converging cylindrical shock. *J. Fluid Mech.*, 2:185–200, 1957.
- [30] R. B. Payne. High resolution schemes using flux-limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Num. Anal.*, 21:995–1011, 1984.
- [31] R.W. Perry and A. Kantrowitz. The production and stability of converging shock waves. *J. Appl. Phys.*, 22:878–886, 1951.
- [32] N. F. Ponchaut, H. G. Hornung, D. I. Pullin, and C. A. Mouton. On imploding cylindrical and spherical shock waves in a perfect gas. *J. Fluid Mech.*, 580:103–122, 2006.
- [33] G. Quaranta, D. Isola, and A. Guardone. Numerical simulation of the opening of aerodynamic control surfaces with two-dimensional unstructured adaptive meshes. V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010, June 2010.
- [34] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Number 37 in Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 2000.
- [35] S. Reaby, A. Guardone, and D. Dussin. *UMESH^{2D} User Manual*, 2005.
- [36] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43:357–372, 1981.
- [37] Y. Saad. Sparsekit: A basic tool-kit for sparse matrix computations. Scientific report, University of Minnesota, 1994.
- [38] P. Sachdev. *Shock waves and explosions*. Monograph and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [39] D.W. Schwendeman and G.B. Whitham. On converging shock waves. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 413:297–311, 1987.
- [40] V. Selmin. The node-centred finite volume approach: bridge between finite differences and finite elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 102:107–138, 1993.
- [41] V. Selmin and L. Formaggia. Unified construction of finite element and finite volume discretizations for compressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39:1–32, 1996.
- [42] C. W. Shu. Total-Variation-Diminishing time discretization. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 9(6):1073–1084, 1988.

- [43] G. A. Sod. A numerical study of a converging cylindrical shock. *J. Fluid Mech.*, 83:785–794, 1977.
- [44] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. Num. Anal.*, 5:506–517, 1968.
- [45] K. Takayama, Kleine, and Gröning H. H. An experimental investigation of the stability of converging cylindrical shock waves in air. *Exp. Fluids*, 5:315–322, 1987.
- [46] K. Takayama, O. Onodera, and Y. Hoshizawa. Experiments on the stability of converging cylindrical shock waves. *Theor. Appl. Mech.*, 32:117–127, 1984.
- [47] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *J. Comput. Phys.*, 14:361–370, 1974.
- [48] M. Watanabe, O. Onodera, and K. Takayama. Shock wave focusing in a vertical annular shock tube. In Springer, editor, *Shock Waves at Marseille IV*, pages 99–104, 1995.
- [49] M. Watanabe and K. Takayama. Stability of converging cylindrical shock waves. *Shock Waves*, 1:149–160, 1987.
- [50] N. P. Weatherill, O. Hassan, M. Marchant, and D. Marcum. Adaptive inviscid solutions for aerospace geometries on efficiently generated unstructured tetrahedral meshes. AIAA Paper 93-3390, 1993.

Allegati

Si allegano al presente lavoro tre articoli scientifici scritti durante lo svolgimento della tesi. In particolare si allegano l'articolo *On the relation between finite element and finite volume schemes for compressible flows with cylindrical and spherical symmetry*, accettato per la pubblicazione sul *Journal of Computational Physics* con 'minor revisions'; l'articolo *Equivalence conditions for finite volume/element discretizations in cylindrical coordinates* presentato alla conferenza ECCOMAS 2010 e l'abstract del lavoro *Hybrid finite element/volume solution of compressible flows in spherical coordinates* che è già stato accettato per la presentazione orale alla prossima conferenza MASCOT 2010. Tutti i lavori qui allegati sono stati realizzati collaborando con il Prof. Alberto Guardone. Per l'articolo in pubblicazione sul *Journal of Computational Physics* è doveroso segnalare anche il contributo del Dott. Ing. Manuel Pasta.

On the relation between finite element and finite volume schemes for compressible flows with cylindrical and spherical symmetry

A. Guardone*, D. De Santis, G. Geraci, M. Pasta

Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano, Via La Masa, 34, 20156 Milano, Italy

Abstract

A complete set of equivalence conditions, connecting the node-centered finite volume and the mass-lumped finite element schemes, is derived for the first time for the one-dimensional compressible Euler equations with cylindrical and spherical symmetry. Analytical expressions for the evaluation of the equivalent cell volumes and interface normals in terms of the finite element integrals are presented. Numerical experiments for compressible unsteady flows, including expanding and converging shock problems, are carried out using the new approach and the differences with the results from a finite volume scheme violating the equivalence conditions are discussed.

Keywords: Euler equations, one-dimensional flows, spherical and cylindrical coordinates, finite element schemes, finite volume schemes.

PACS: 47.40.-x, 47.11.Df, 47.11.Fg, 47.40.Rs

1. Introduction

Diverse relevant gasdynamics problems exhibit cylindrical and spherical symmetry, that allows for a simplified treatment of the governing equations. These are for example diverging or converging flows in e.g. detonations, astrophysical flows, Inertial Confinement Fusion (ICF) applications, sonoluminescence phenomena, laser breakdown problems and nuclear explosions. Indeed, early developments in the field were driven by World War II researches on nuclear devices and are associated to the names of Taylor, Von Neumann, Sedov, Landau, Bethe and many others, see the review of Sachdev [1].

In 1955, Goldstine and von Neumann [2] and Brode [3] were the first to solve numerically the one-dimensional Euler equations in spherical coordinates, using an artificial viscosity approach. In 1957, Payne [4] used a finite difference approximation to solve the spherical implosion problem. Twenty years later, Sod [5] applied for the first time a solution technique based on Riemann solvers. More recently, Liu and collaborators [6] used the Total Variation Diminishing (TVD) technique of Harten [7], in which the numerical scheme is obtained as a suitable combination of an high order scheme with a low order one to be used close to flow discontinuities.

In the framework of TVD schemes for the Euler equations, an interesting possibility is provided by the use of a mixed finite volume / finite element approach [8, 9, 10, 11], in which the upwind first-order finite volume (FV) scheme is used to capture discontinuities without spurious oscillations, whereas a finite element (FE) scheme is used in regions of smooth flow. The combined use of these two different approaches is made possible by the introduction of suitable equivalence conditions that relate the FV metrics, i.e. cell volumes and integrated normals, to the FE integrals. In viscous flows, it is also possible to use the FE scheme to discretize additional contributions to the flow equations due to the action of viscosity and thermal conductivity [12]. Such a possibility is expected to be of use in the study of the effect of viscosity on e.g. the formation of stable shock fronts in cylindrically and spherically symmetric problems.

Equivalence conditions relating FV and FE schemes have been derived for Cartesian coordinates in two and three spatial dimensions [11, 12] and for cylindrical coordinates in axially symmetric two-dimensional problems [13]. In

*Corresponding author

Email address: alberto.guardone@polimi.it (A. Guardone)

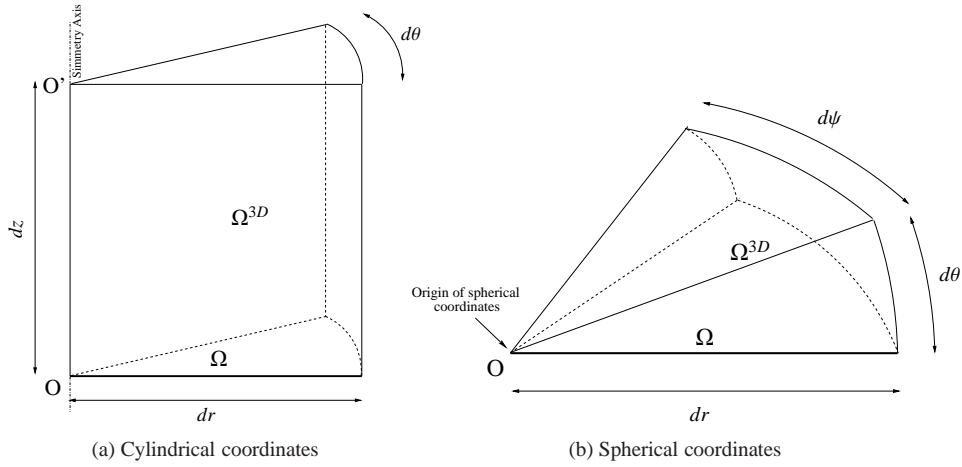


Figure 1: Three-dimensional Ω^{3D} and one-dimensional control volume Ω for (a) cylindrical and (b) spherical symmetry.

both cases, equivalent conditions were obtained by neglecting high-order FE contributions that have no counterparts in the FV representation conservation laws. The goal of the present paper is to derive for the first time equivalence conditions relating FE and FV schemes for the one-dimensional Euler equations in cylindrical and spherical symmetry, without introducing any approximation into the FE discrete expression of the divergence operator, which in the present case is simply the first-order partial derivative with respect to the radial coordinate. To this purpose, in section 2, the one-dimensional Euler equations are first described and the evaluation of the divergence term at the axis of symmetry (cylindrical coordinates) and at the origin (spherical ones) is briefly commented. In section 3 the finite volume (section 3.1) and the finite element (section 3.2) discretizations are recalled for a scalar conservation law. Relevant properties of the two schemes are also pointed out. The equivalence conditions for the FE and FV methods are obtained in section 3.3. Section 4 details the application of the proposed approach to the Euler equations and the time discretization technique. Exemplary numerical results are presented in section 5. In particular, in section 5.1, numerical experiments are used to quantify the effects of the violation of the equivalence conditions. In section 6, final remarks and comments are given.

2. Governing equations

The Euler equations for compressible flows in cylindrical and spherical symmetry are now briefly recalled. In figure 1, the coordinate systems are defined in three spatial dimensions. In the cylindrical reference shown in figure 1a, z , r and θ are the axial, radial and angular coordinates, respectively. In the spherical coordinate system shown, figure 1b, r , θ and ψ are the radial, azimuthal and polar coordinates, respectively.

As it is well known [1], the Euler equations for cylindrically symmetric flows are obtained from their three-dimensional version—written in terms of the cylindrical coordinates (z, r, θ) —by imposing the two symmetry conditions $\partial/\partial z \equiv \partial/\partial \theta \equiv 0$, together with the condition that both the axial and angular velocities are zero. A set of three conservation laws for the density $\rho \in \mathbb{R}^+$, the momentum density along the radial direction $m \in \mathbb{R}$ and the total (internal and kinetic) energy per unit volume $E^t \in \mathbb{R}$ is obtained, in which all flow variables depend only on the radial coordinate r only. Similarly, the governing equations in spherical symmetry are obtained by imposing $\partial/\partial \theta \equiv \partial/\partial \psi \equiv 0$ and zero azimuthal and polar velocity into the three-dimensional Euler equation in spherical

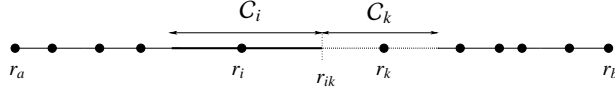


Figure 2: Representative one-dimensional grid of the computational domain $[r_a, r_b]$. The finite volumes C_i and C_k and the interface position r_{ik} are indicated.

coordinates. A general expression is finally obtained as follows [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial r} + \frac{j}{r} m = 0, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{m^2}{\rho} + P \right] + \frac{j}{r} \frac{m^2}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial E^t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{m}{\rho} (E^t + P) \right] + \frac{j}{r} \left[\frac{m}{\rho} (E^t + P) \right] = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where P is the pressure, that under the polytropic (constant specific heats) ideal gas considered here reads $P(\rho, m, E^t) = (\gamma - 1)[E^t - m^2/(2\rho)]$, with γ ratio of the specific heat at constant pressure and volume. The integer j is equal to zero, one and two for Cartesian, cylindrical and spherical coordinates, respectively. The solution of (1), which is to be completed by specifying initial and boundary conditions as detailed in [14], is sought for in the spatial domain $r \in \mathbb{R}^+$ for all times $t \in \mathbb{R}^+$. System (1) can be conveniently written in a vector form as follows

$$\frac{\partial [r^j \mathbf{u}]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} [r^j \mathbf{f}(\mathbf{u})] = jr^{j-1} \mathbf{s}(\mathbf{u}), \quad (2)$$

where all equations have been multiplied by r^j and where $\mathbf{u} = (\rho, m, E^t)$, is the vector unknown of the conservative variables. The functions $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ and $\mathbf{s}(\mathbf{u})$, $\mathbf{f}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$, are the one-dimensional Euler flux function, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (m, m^2/\rho + P, m(E^t + P)/\rho)^T$, and source function, $\mathbf{s}(\mathbf{u}) = (0, P, 0)^T$, respectively. Note that the source term contribution is different from zero only in cylindrical and spherical coordinates.

It is remarkable that equations (2) already embeds the correct treatment of the origin for the Cartesian, cylindrical and spherical cases [15]. At the origin of the coordinate system, the flux is multiplied by the term r^j , which is equal to one in the one-dimensional Cartesian case and to zero in cylindrical and spherical symmetry. Indeed, with reference to figure 1a, the flux at the origin O is always zero for cylindrical symmetric problems, since it corresponds to the integral of the flux through segment OO' , which has in turn a null area in three spatial dimensions. Similarly, the integrated flux at O is zero in spherical symmetry, see figure 1b. This property is expected to be verified in the discrete counterpart of equations (2) derived in the following.

3. Finite volume/element schemes for cylindrical and spherical coordinates

In the present section, the finite volume (section 3.1) and finite element (section 3.2) discrete forms of the exemplary scalar conservation law

$$\frac{\partial [r^j u]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} [r^j f(u)] = 0, \quad (3)$$

where $u \in \mathbb{R}$ and $f = f(u) \in \mathbb{R}$ are the scalar unknown and the flux function, respectively, are derived. The simple conservation law (3) is used to derive the equivalence relations (section 3.3) linking the FV and the FE discretizations, to be applied to the Euler equations (2) in section 4.

3.1. Finite volume scheme

The finite volume discretization of (3) is now obtained by enforcing its integral formulation over a discrete number of finite volumes or cells C_i [16]. In the node centered approach considered here, each finite volume surrounds a node $i \in \mathcal{K}$, where \mathcal{K} is the set of all nodes of the triangulation. In one spatial dimension the elements of the triangulation are segments connecting the grid nodes, see figure 2, and finite volumes are simply segments bounded by two points, the cell interfaces, whose radial positions are indicated in the following as r_{ik} , $k \in \mathcal{K}_{i,\neq}$, with $\mathcal{K}_{i,\neq}$ being the set of the two nodes belonging to the two elements sharing node i , excluding i itself. For a boundary node i , $\mathcal{K}_{i,\neq}$ contains the one node connected to i . Therefore $C_i = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} [r_i, r_{ik}]$ is the union of two (one) intervals. In the following, a general notation is used to account for “unstructured” grids, that in one spatial dimension can possibly occur following e.g. grid adaptation. Therefore, the node and element indexes are assumed to be not ordered. A non-uniform grid spacing is also assumed. Note that interfaces are not required to be located at the midpoint $(r_i + r_k)/2$, with r_i and r_k radial coordinates of nodes i and k , respectively. By introducing the cell-averaged unknown u_i ,

$$u(r, t) \simeq u_i(t) = \frac{1}{V_i} \int_{C_i} u(r, t) dC = \frac{1}{V_i} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \int_{r_i}^{r_{ik}} u(r, t) dr,$$

where

$$V_i = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} |r_{ik} - r_i|, \quad (4)$$

is the volume (length) of the i -th cell, the finite volume discretization of (3) reads [16]

$$V_i^{r^j} \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \mathcal{F}_{ik}(u_i, u_k) - \mathcal{B}_i(u_i), \quad (5)$$

where the r^j -averaged volume $V_i^{r^j}$ reads

$$V_i^{r^j} = \int_{C_i} r^j dC = \frac{1}{j+1} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} |r_{ik}^{j+1} - r_i^{j+1}|, \quad (6)$$

and where the numerical fluxes \mathcal{F}_{ik} and \mathcal{B}_i are suitable approximations of the integral of the flux function at the cell interfaces ik and at the boundary node i , respectively. For example, by choosing the so-called centered approximation of the interface fluxes, $\mathcal{F}_{ik} = (f_i + f_k)v_{ik}^{r^j}/2$ and $\mathcal{B}_i = f_i v_i^{r^j}$, with $f_i = f(u_i)$, one obtains

$$V_i^{r^j} \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \frac{f_i + f_k}{2} v_{ik}^{r^j} - f_i v_i^{r^j}. \quad (7)$$

where

$$v_{ik}^{r^j} = \sigma_{ik} r_{ik}^j, \quad \text{and} \quad v_i^{r^j} = \begin{cases} -r_a^j & \text{if } i = i_a, \\ 0 & \text{if } i \neq i_a, i_b, \\ r_b^j & \text{if } i = i_b, \end{cases} \quad (8)$$

where $\sigma_{ik} = \text{sgn}(r_k - r_i)$.

For later convenience, some basic properties of FV schemes are now briefly recalled. First, scheme (5) is required to be conservative, namely, $\mathcal{F}(u_i, u_k) = -\mathcal{F}(u_k, u_i)$, see [16]. For the centered approximation (7), the scheme is conservative provided that

$$v_{ik}^{r^j} = -v_{ki}^{r^j} \quad \forall i \in \mathcal{K}, i \neq k, \quad (\text{FVM.a})$$

as it is the case here according to definition (8). The second relation linking metric quantities is obtained by applying the fundamental theorem of calculus to obtain

$$\int_{r_i}^{r_{ik}} (r^j)' dr = r_{ik}^j - r_i^j,$$

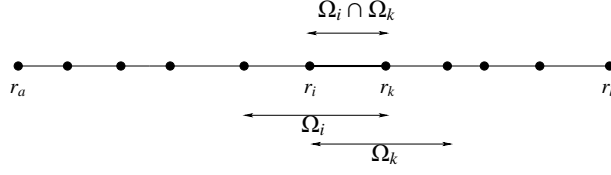


Figure 3: The compact support Ω_i for the test function ϕ_i is the union of the two elements (segments) the i -th node.

where the prime indicates differentiation with respect to the radial coordinate r . By summing both contributions from neighbouring cells k , $k \in \mathcal{K}_{i,\neq}$ (one contribution only for boundary nodes), it follows that

$$j\widetilde{V}_i^{r^{j-1}} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} v_{ik}^{r^j} + v_i^{r^j}, \quad \forall i \in \mathcal{K}, \quad (\text{FVM.b})$$

where $\widetilde{V}_i^{r^{j-1}}$ is the integral of r^{j-1} over the i -th cell, see definition (6). Note that in general one has $\widetilde{V}_i^{r^{j-1}} \neq V_i^{r^{j-1}}$ since the position of the cell interfaces r_{ik} may possibly depend on the value of j , namely on the type of symmetry, see below. Moreover, in the Cartesian case, property (FVM.b) simplifies to $\sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} v_{ik} + v_i = 0$, $\forall i \in \mathcal{K}$, a condition that is commonly known under the name of volume boundary closure.

Finally, an additional relation linking all metric quantities v_{ik} , v_i , $\widetilde{V}_i^{r^{j-1}}$ and $V_i^{r^j}$ is introduced. From definitions (6) and (8), one has

$$(j+1)V_i^{r^j} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \int_{r_i}^{r_{ik}} (r^{j+1})' dr = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \sigma_{ik} (r_{ik}^{j+1} - r_i^{j+1}) = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \sigma_{ik} (r_{ik} v_{ik}^{r^j} - r_i v_i^{r^j}).$$

From property (FVM.b), by adding $r_i(j\widetilde{V}_i^{r^{j-1}} - \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} v_{ik}^{r^j} + v_i^{r^j}) = 0$ to the right hand side one finally has

$$(j+1)V_i^{r^j} - jr_i\widetilde{V}_i^{r^{j-1}} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} (r_{ik} - r_i) v_{ik}^{r^j}, \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (\text{FVM.c})$$

In the cartesian case, property (FVM.c) reads $V_i = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} (r_{ik} - r_i) v_{ik}$, which computes the volume (length) of the cell C_i by applying the discrete divergence operator to the function r . Note that the positions r_{ik} of the cell interfaces still remains to be specified and therefore the FV properties above are valid for any choice of r_{ik} . This degree of freedom is exploited in section 3.3, together with relations (FVM.a), (FVM.b) and (FVM.c) to derive the equivalence conditions linking the present FV scheme to the FE to be introduced in the following section 3.2.

3.2. Finite element scheme

The finite element discretization of the scalar conservation law (3) is now obtained. Assuming linear Lagrangian test functions $\phi_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$, the weak formulation of (3) reads [17]

$$\int_{\Omega_i} r^j \phi_i \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_i} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} [r^j f(u)] d\Omega = 0, \quad (9)$$

where Ω_i is the compact support of the i -th test function ϕ_i , which in the one-dimensional case is made of the two elements (segments) which have node i in common (see figure 3), namely $\Omega_i = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} [r_i, r_k]$. By approximating the conservative variable u using shape functions $\phi_h \in V_h$, namely, $u(r, t) \simeq u_h(r, t) = \sum_{k \in \mathcal{K}_i} \phi_k(r) u_k(t)$, the Bubnov-Galerkin approximation of equation (9) reads

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} M_{ik}^{r^j} \frac{du_k}{dt} + \sum_{k \in \mathcal{K}_i} \int_{r_i}^{r_k} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} [r^j f(u_h)] dr = 0. \quad (10)$$

where the following definition of the weighted mass matrix M_{ik}

$$M_{ik}^{r^j} = \int_{r_i}^{r_k} r^j \phi_i \phi_k dr, \quad (11)$$

has been introduced. Integrating by parts (10) immediately gives

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} M_{ik}^{r^j} \frac{du_k}{dt} = \sum_{k \in \mathcal{K}_i} \int_{r_i}^{r_k} r^j \phi_i' f(u_h) - (r^j \phi_i f(u_h))' dr.$$

From the fundamental theorem of calculus, one also has

$$\int_{r_i}^{r_k} [r^j \phi_i f(u_h)]' dr = r_k^j \phi_i(r_k) f(u_h(r_k, t)) - r_i^j \phi_i(r_i) f(u_h(r_i, t)),$$

which, by recalling that for Lagrangian shape functions $\phi_i(r_k) = 0$ if $k \neq i$ and $\phi_i(r_i) = 1$, immediately gives

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} \int_{r_i}^{r_k} [r^j \phi_i f(u_h)]' dr = \xi_i^{r^j} f_i(t),$$

where $f_i(t) = f(u_h(r_i, t)) = f(u_i(t))$ and where the quantity $\xi_i^{r^j}$ reads (cf. definitions (8))

$$\xi_i^{r^j} = \begin{cases} -r_a^j & \text{if } i = i_a, \\ 0 & \text{if } i \neq i_a, i_b, \\ r_b^j & \text{if } i = i_b. \end{cases} \quad (12)$$

By introducing now the so-called flux re-interpolation [11, 18], namely, $f(u_h) \simeq \sum_{k \in \mathcal{K}} \phi_k(r) f_k(t)$, one also obtains

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} \int_{r_i}^{r_k} r^j \phi_i' f(u_h) dr = \sum_{k \in \mathcal{K}_i} f_k \int_{r_i}^{r_k} r^j \phi_i' \phi_k dr = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}_i} f_k \left[\eta_{ik}^{r^j} - j M_{ik}^{r^{j-1}} - \int_{r_i}^{r_k} (r^j \phi_i \phi_k)' dr \right] \quad (13)$$

where the differential identity, $-2r^j \phi_i' \phi_k = r^j (\phi_i \phi_k' - \phi_k \phi_i') + jr^{j-1} \phi_i \phi_k - (r^j \phi_i \phi_k)'$, was used and where the following finite element metric quantities were introduced (cf. definitions (8))

$$M_{ik}^{r^{j-1}} = \int_{r_i}^{r_k} r^{j-1} \phi_i \phi_k dr, \quad \text{and} \quad \eta_{ik}^{r^j} = \int_{r_i}^{r_k} r^j (\phi_i \phi_k' - \phi_k \phi_i') dr. \quad (14)$$

By integrating over $[r_i, r_k]$ and by summing up for all $k \in \mathcal{K}_i$ the differential identity $r^j \phi_i \phi_k' = r^j (\phi_i \phi_k' - \phi_k \phi_i') - r^{j-1} \phi_i \phi_k + (r^j \phi_i \phi_k)'$, and by recalling that $\sum_{k \in \mathcal{K}_i} \phi_k' \equiv 0$, one also obtains

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} \left[\eta_{ik}^{r^j} - j M_{ik}^{r^{j-1}} + \int_{r_i}^{r_k} (r^j \phi_i \phi_k)' dr \right] \equiv 0.$$

Therefore, by subtracting the left hand side of the above expression multiplied by $f_i/2$ to relation (13) one has

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} \int_{r_i}^{r_k} r^j \phi_i' f(u_h) dr = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}_i} \left[(f_k + f_i) \eta_{ik}^{r^j} + j(f_k - f_i) M_{ik}^{r^{j-1}} - (f_k - f_i) \int_{r_i}^{r_k} (r^j \phi_i \phi_k)' dr \right].$$

It should be noted that in the last term on the right hand side is identically zero, since $\phi_i(r_i) \phi_k(r_k) \neq 0$ only if $k = i$ but in this case $(f_k - f_i) = 0$. Finally, by introducing the diagonalized (or lumped) weighted mass matrix $L_i^{r^j}$, namely,

$$L_i^{r^j} = \sum_{k \in \mathcal{K}_i} M_{ik}^{r^j}, \quad (15)$$

Table 1: Analytical expressions to compute L_i^j , M_{ik}^{j-1} and η_{ik}^j for an internal (domain) node i in the Cartesian ($j = 0$), cylindrical ($j = 1$) and spherical ($j = 2$) cases over an unstructured, i.e., non ordered, grid. Nodes k_+ and k_- are the two nodes belonging to the set $\mathcal{K}_{i,\neq}$ such that $r_{k_+} > r_i$ and $r_{k_-} < r_i$.

	L_i^j	M_{ik}^{j-1}	η_{ik}^j
$j = 0$	$\frac{r_{k_+} - r_{k_-}}{2}$	N/A	σ_{ik}
$j = 1$	$\frac{r_{k_+} - r_{k_-}}{6} [r_{k_-} + r_i + r_{k_+}]$	$\sigma_{ik} \frac{r_k - r_i}{6}$	$\sigma_{ik} \frac{r_k + r_i}{2}$
$j = 2$	$\frac{r_{k_+} - r_{k_-}}{12} [r_{k_-}^2 + r_i^2 + r_{k_+}^2 + r_{k_-} r_i + r_{k_-} r_{k_+} + r_i r_{k_+}]$	$\sigma_{ik} \frac{r_k^2 - r_i^2}{12}$	$\sigma_{ik} \frac{r_k^2 + r_i^2 + r_k r_i}{3}$

Table 2: Analytical expressions to compute L_i^j , M_{ik}^{j-1} and η_{ik}^j for an internal (domain) node i in the Cartesian ($j = 0$), cylindrical ($j = 1$) and spherical ($j = 2$) cases for an evenly spaced grid, with spacing equal to h , so that $r_k = r_i + \sigma_{ik} h$.

	L_i^j	M_{ik}^{j-1}	η_{ik}^j
$j = 0$	h	N/A	σ_{ik}
$j = 1$	hr_i	$\frac{h}{6}$	$\sigma_{ik} r_i + \frac{h}{2}$
$j = 2$	$h \left(r_i^2 + \frac{h^2}{6} \right)$	$\frac{h}{6} \left(r_i + \sigma_{ik} \frac{h}{2} \right)$	$\sigma_{ik} \left(r_i^2 + \frac{h^2}{3} \right) + r_i h$

the diagonalized finite element formulation for the one-dimensional case simplifies to

$$L_i^j \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \left[\frac{f_i + f_k}{2} \eta_{ik}^j + \frac{j}{2} (f_k - f_i) M_{ik}^{j-1} \right] - f_i \xi_i^j. \quad (16)$$

Unfortunately, the mass lumping approximation considered here introduces a non-negligible (phase) error in time with respect to the standard finite element approach [18]; however, the development of finite element schemes for conservation laws making use of the full mass matrix M_{ik}^{j-1} is still a subject of research and lies beyond the scope of the present study [19].

In table 1 the expressions of the FE metric coefficients defined in (12), (14) and (15) are reported in terms of grid node coordinates for Lagrangian linear finite elements. Table 2 reports the same quantities as in table 1 but for an evenly spaced grid, made of elements with constant length h .

It is remarkable that, via the definition of suitable grid-dependent metric quantities, the finite element representation of the scalar conservation law assumes a form that is very similar to its finite volume counterpart (7), as observed already for Cartesian coordinates [11] and for axisymmetric problems in cylindrical coordinates [13]. Indeed, with the only exception of the domain term $j(f_k - f_i)M_{ik}^{j-1}/2$, the two expressions are coincident, provided that the FE and FV metric quantities satisfy the equivalence conditions to be discussed in section 3.3.

A relation between the FV cell averaged unknowns, which are associated to grid nodes in the present node-centered FV discretization, and the FE degrees of freedom of linear Lagrangian elements, is now derived. As a preliminary step, the FE counterpart of the FV properties (FVM.a), (FVM.b) and (FVM.c) of section 3.1 are now written for the metric quantities η_{ik}^j , ξ_i^j , L_i^j and M_{ik}^{j-1} defined above. The conservation condition (FVM.a), which for the finite element scheme reads

$$\eta_{ik}^j = -\eta_{ki}^j, \quad (\text{FEM.a})$$

is immediately verified by definition (14) of η_{ik}^j . The finite element form of the second condition (FVM.b) reads

$$\int_{r_i}^{r_k} \phi_i(r^j)' dr = j \int_{r_i}^{r_k} \phi_i r^{j-1} dr = - \int_{r_i}^{r_k} [\phi_i' r^j - (\phi_i r^j)'] dr.$$

By multiplying all terms by ϕ_k and summing up for all $k \in \mathcal{K}_i$, one obtains

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_i} \int_{r_i}^{r_k} [(\phi_i \phi'_k - \phi'_i \phi_k) r^j - j \phi_i \phi_k r^{j-1} + (\phi_i r^j)'] dr = 0,$$

where the term $\phi_i \sum_{k \in \mathcal{K}_i} \phi'_k \equiv 0$ was also added. By substituting the definitions (12) and (14) of the metric quantities and the definition (15) of the diagonal weighted mass matrix L_i^j one finally obtains

$$j L_i^{r^{j-1}} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \eta_{ik}^{r^j} + \xi_i^{r^j}, \quad \forall i \in \mathcal{K}. \quad (\text{FEM.b})$$

Considering now property (FVM.c), one has

$$\int_{r_i}^{r_k} \phi_i (r^{j+1})' dr = - \int_{r_i}^{r_k} [r^{j+1} \phi'_i - (r^{j+1} \phi_i)'] dr.$$

By substituting $r^{j+1} = r^j \sum_{k \in \mathcal{K}} r_k \phi_k$ and by recalling that $\sum_{k \in \mathcal{K}_i} \phi_k \equiv 1$, summing up the above identity for all $k \in \mathcal{K}_i$ gives

$$(j+1) L_i^{r^j} = - \sum_{k \in \mathcal{K}_i} r_k \int_{r_i}^{r_k} [r^j \phi_k \phi'_i - (r^j \phi_k \phi_i)'] dr.$$

Note that the expansion $r = \sum_{k \in \mathcal{K}} r_k \phi_k$ is in fact exact, since the functions ϕ_k are piecewise linear. By applying the same procedure used to derive relation (16), one has

$$(j+1) L_i^{r^j} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} [(r_i + r_k) \eta_{ik}^{r^j} + j (r_k - r_i) M_{ik}^{r^{j-1}}] + r_i \xi_i^{r^j},$$

which, by subtracting relation (FEM.b) multiplied by r_i , gives

$$(j+1) L_i^{r^j} - j r_i L_i^{r^{j-1}} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} (\eta_{ik}^{r^j} + j M_{ik}^{r^{j-1}}) (r_k - r_i). \quad (\text{FEM.c})$$

One can conclude that the finite element metric quantities defined in (12), (14) and (15) are linked by consistency relations similarly to those introduced for their FV counterparts in section 3.1. However, in the FE case these relations involve the additional metric quantity $M_{ik}^{r^{j-1}}$, that has no FV equivalent. In the next section, suitable equivalence conditions are derived to link FV and FE metrics.

3.3. Equivalence conditions

In the present section, the equivalence conditions between the FV and FE metric quantities are now written by resorting to relations (FVM.a), (FVM.b) and (FVM.c) and (FEM.a), (FEM.b) and (FEM.c).

Comparison of the conservation conditions (FVM.a) and (FEM.a) suggests the following choice for the integrated normals $\nu_{ik}^{r^j}$ and $\eta_{ik}^{r^j}$,

$$\nu_{ik}^{r^j} = \eta_{ik}^{r^j} \quad \text{and} \quad \nu_i^{r^j} = \xi_i^{r^j}. \quad (\text{a})$$

Note that the condition (a) on boundary metric quantities stems from enforcing volume conservation over the whole domain. Substituting into (FVM.b) and (FEM.b) immediately gives

$$\widetilde{V}_i^{r^{j-1}} = L_i^{r^{j-1}}. \quad (\text{b})$$

Finally, by subtracting (FEM.c) to (FVM.c), from (6) one obtains

$$V_i^{r^j} = L_i^{r^j} - \frac{1}{j+1} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \left[\left(\frac{r_i + r_k}{2} - r_i \right) \eta_{ik}^{r^j} + \frac{j}{2} (r_k - r_i) M_{ik}^{r^{j-1}} \right] \quad (\text{c})$$

Conditions (a), (b) and (c) are now used to compute the positions r_{ik} of the FV interfaces that guarantee the equivalence between the FV discretization and the FE one defined over the same computational grid. In the Cartesian case $j = 0$ and condition (a) introduces no constraint on the values of r_{ik} , since both $v_{ik} \equiv \sigma_{ik}$ and $\eta_{ik} \equiv \sigma_{ik}$ do not depend on the position of the cell interfaces. Moreover, the quantities $\widetilde{V}_i^{r^{j-1}}$ and $L_i^{r^{j-1}}$ in condition (b) are not defined and the only non trivial relation between r_{ik} and the nodes' coordinates is provided by (c). By choosing

$$\text{Cartesian:} \quad r_{ik} = \frac{r_i + r_k}{2}.$$

one immediately obtains

$$\text{Cartesian:} \quad V_i = L_i,$$

In accordance with what observed in [11], in the Cartesian case, if the cell interfaces are located at the mid-point of each element, the value of the volume V_i (length in one spatial dimension) of the equivalent finite volume C_i is equal to the value of the lumped mass matrix L_i . The interface metric quantities η_{ik} and v_{ik} are coincident and equal to σ_{ik} . This choice corresponds to the so-called median dual volume scheme of Dervieux [8] and of Rostand and Stoufflet [9].

In the cylindrical case ($j = 1$), condition (a) immediately provides the relation between r_{ik} and the nodes coordinates, see table 1, namely,

$$\text{Cylindrical:} \quad r_{ik} = \frac{r_i + r_k}{2}.$$

Differently from the Cartesian case, in the cylindrical one the position of the interfaces cannot be chosen arbitrarily but is uniquely determined by condition (a) only. Conditions (b) and (c) are two identities that provides the relation between the remaining FV and FE metric quantities. In particular, from (b) one obtains $\widetilde{V}_i = L_i$. From (c) the relation between the FV and FE masses reads

$$\text{Cylindrical:} \quad V_i^r = L_i^r - \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \frac{r_k - r_i}{4} M_{ik},$$

which is easily verified to be an identity if V_i^r is computed from (6) with $r_{ik} = (r_i + r_k)/2$. Similarly, for spherically symmetric problems ($j = 2$), condition (a) gives

$$\text{Spherical:} \quad r_{ik} = \sqrt{\frac{r_k^2 + r_i^2 + r_k r_i}{3}},$$

from (b) one also has $\widetilde{V}_i^r = L_i^r$ and therefore

$$\text{Spherical:} \quad V_i^{r^2} = L_i^{r^2} - \frac{1}{3} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \left[(r_k - r_i) M_{ik}^r + \left(\frac{r_i + r_k}{2} - \sqrt{\frac{r_k^2 + r_i^2 + r_k r_i}{3}} \right) \eta_{ik}^{r^2} \right].$$

Differently from [13], the term $M_{ik}^{r^{j-1}}$, which is peculiar to the FE discretization, has not been neglected in deriving the FV/FE equivalent conditions. Therefore, the equivalence conditions (a), (b) and (c) proposed here allow to compute in a rigorous and consistent manner FV metric quantities from FE integrals defined over the same grid.

As it can be easily observed, the above conditions guarantees that equivalent FV and FE schemes computes one and the same value of the integral of first order derivative of selected polynomial functions of r . More precisely, condition FVM.b) guarantees that the numerical value of the integral of a polynomial function of order $j - 1$ —that is a constant, linear, quadratic function in the Cartesian, cylindrical and spherical coordinates, respectively—is the same for both the FE and the centred FV schemes, whereas condition FVM.c) refers to a j -th polynomial, that is a linear, quadratic and cubic polynomial, respectively.

As a final remark, it is to be noted that equivalence relations linking the FE approximations to FV schemes can be derived in principle also for non-linear FE schemes, although in this case a simple geometrical representation of the equivalent FV scheme is not straightforward. More precisely, although the FE masses can still be associated with FV volumes in the sense specified above, the discrete numerical fluxes no longer depend on the values of the unknowns

in the two ‘‘adjacent’’ nodes (cells) only, due to the larger computational stencil of high-order FE. It is therefore not possible to devise a geometrical interpretation of the equivalent FV scheme in terms of flux balances at cell interfaces. However, such an interpretation, as clarifying as the authors believe it is, is not mandatory to write and solve the equivalent FV discrete system.

4. Hybrid finite volume / element schemes for the Euler equations

In the present section the FV/FE discrete form of the Euler equations (2) is given, including the discretization of the source term and of the time derivative. First, the source term contribution is computed using either the FV or the FE approximation. Under the FV approach, the average value of the source term over the i -th cell is approximated as $\mathbf{s}(\mathbf{u}(r, t)) \sim \mathbf{s}_i(t) = \mathbf{s}(\mathbf{u}_i(t))$, which provides a first order spatial approximation of the source function. Therefore,

$$\int_{C_i} \mathbf{s}(\mathbf{u}) dC_i \simeq j \tilde{V}_i^{r^{j-1}} \mathbf{s}_i. \quad (17)$$

Considering now the FE approach, the source term is first re-interpolated as $\mathbf{s}(\mathbf{u}) \simeq \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{s}_k(t) \phi_k(r)$ where $\mathbf{s}_k(t) = (0, P(\mathbf{u}_k(t)), 0)^T$, so that

$$\int_{\Omega_i} jr^{j-1} \phi_i \mathbf{s}(\mathbf{u}) d\Omega \simeq \sum_{k \in \mathcal{K}_i} \mathbf{s}_k \int_{r_i}^{r_k} jr^{j-1} \phi_i \phi_k dr = j \sum_{k \in \mathcal{K}_i} \mathbf{s}_k M_{ik}^{r^{j-1}} \simeq j \mathbf{s}_i L_i^{r^{j-1}},$$

where the diagonalized mass matrix approximation was used. Summarizing, both the centred finite volume (FVC) scheme and its lumped finite element (FEL) counterpart can be recast in a general form as follows

$$\mathcal{V}_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \mathcal{F}_{ik}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) - \mathcal{B}_i(\mathbf{u}_i) + \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i), \quad (18)$$

where, with obvious notation,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i^{\text{FEL}} &= L_i^{r^j}, & \mathcal{F}_{ik}^{\text{FEL}} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k) \eta_{ik}^{r^j} + j(\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_i) M_{ik}^{r^{j-1}}], & \mathcal{B}_i^{\text{FEL}} &= \mathbf{f}_i \xi_i^{r^j}, & \mathcal{S}_i^{\text{FEL}} &= j \mathbf{s}_i L_i^{r^{j-1}}, \\ \mathcal{V}_i^{\text{FVC}} &= V_i^{r^j}, & \mathcal{F}_{ik}^{\text{FVC}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k) \nu_{ik}^{r^j}, & \mathcal{B}_i^{\text{FVC}} &= \mathbf{f}_i \nu_i^{r^j}, & \mathcal{S}_i^{\text{FVC}} &= j \mathbf{s}_i \hat{V}_i^{r^{j-1}}. \end{aligned}$$

An hybrid finite volume/element scheme can be obtained by resorting to the equivalence conditions (a), (b) and (c) to compute all metric quantities required by the FV scheme from FE metric quantities. Therefore, the hybrid FV/FE scheme FVE reads

$$\mathcal{V}_i^{\text{FVE}} = L_i^{r^j} - \frac{1}{2} \frac{1}{j+1} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} [(r_i + r_k - 2r_{ik}) \eta_{ik}^{r^j} + j(r_k - r_i) M_{ik}^{r^{j-1}}], \quad (19)$$

$$\mathcal{F}_{ik}^{\text{FVE}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k) \eta_{ik}^{r^j}, \quad \mathcal{B}_i^{\text{FVE}} = \mathbf{f}_i \xi_i^{r^j}, \quad \mathcal{S}_i^{\text{FVE}} = j \mathbf{s}_i L_i^{r^{j-1}},$$

In the computations, the centred $\mathcal{F}_{ik}^{\text{FVE}}$ is replaced by its TVD counterpart

$$\mathcal{F}_{ik}^{\text{FVT}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k) \eta_{ik}^{r^j} + (\Psi_{ik} - 1) |\hat{\mathbf{A}}_{ik}| (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i)] \quad (20)$$

to resolve discontinuities without spurious oscillations [7]. In definition (20), $\hat{\mathbf{A}}_{ik}$ is the Roe matrix [20, 16]. The function $\mathcal{F}_{ik}^{\text{FVT}}$ simplifies to the centred approximation $\mathcal{F}_{ik}^{\text{FVC}}$ in smooth region and to the first order (FVU) upwind scheme of Roe, namely,

$$\mathcal{F}_{ik}^{\text{FVT}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k) \eta_{ik}^{r^j} + -|\hat{\mathbf{A}}_{ik}| (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i)],$$

close to flow discontinuities. The switch between the FVC and the FVU schemes is controlled by the van Leer limiter Ψ_{ik} [21].

The fully discrete form of the Euler equations (2) is finally obtained by applying a standard implicit p -step Backward Differentiation Formula (BDF) to the time derivative term. An implicit time integration scheme is preferred over explicit ones, such as for example Runge-Kutta schemes with operator splitting, to prevent numerical errors arising

from the unbalancing of the advection and source terms in steady-state computations or in uniform flow regions [16]. The fully discrete form of (2) therefore reads

$$\frac{\mathcal{V}_i}{\Delta t^n} \sum_{l=-1}^p a_{-l} \mathbf{u}_i^{n-l} = \mathcal{R}_i^{n+1}, \quad (21)$$

where p is the number of backward steps ($p+1$ is the order of the BDF scheme), a_{-l} are the coefficients of the BDF scheme, the superscript n indicate discrete time levels, and $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ is the time step. In the above expression, the residual \mathcal{R}_i reads

$$\mathcal{R}_i = - \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,*}} \mathcal{F}_{ik}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) - \mathcal{B}_i(\mathbf{u}_i) + \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i).$$

In the second-order BDF scheme used in the computations, the coefficients a_{-l} read

$$a_{-1} = \frac{\beta^2}{1+\beta}, \quad a_0 = -(1+\beta), \quad a_1 = \frac{1+2\beta}{1+\beta}, \quad \text{with } \beta = \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}}.$$

To preserve second-order accuracy, the computation of the first time step is carried out using a third-order Runge-Kutta explicit scheme. The solution of the implicit non-linear system (21) is obtained by means of a modified Newton-Raphson scheme, in which a dual time step integration technique is implemented [22]. If a backward Euler discretization for the time derivative in the dual time τ is considered, for each time step $\Delta\tau$, the following system of linear equation,

$$\left[\mathcal{V}_i \left(\frac{a_1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}_i(\tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right] \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{R}_i(\tilde{\mathbf{u}}) - \frac{\mathcal{V}_i}{\Delta t} \left[a_1 \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{l=0}^p a_{-l} \mathbf{u}_i^{n-l} \right],$$

where $\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}$, is solved by means of the SparseKit software [23]. Dual time stepping integration is carried starting from the initial value $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n$ to reduce the L_2 norm of the residual to less than 10^{-7} times its initial value at t^n .

5. Numerical results

In the present section numerical results for spherical and cylindrical explosions and implosions are reported. In section 5.1, results obtained from FV and FE schemes violating the equivalence conditions are compared with those obtained using the proposed approach. All simulations are carried out using the hybrid FVE scheme (19) with the TVD flux (20) and the second order BDF scheme.

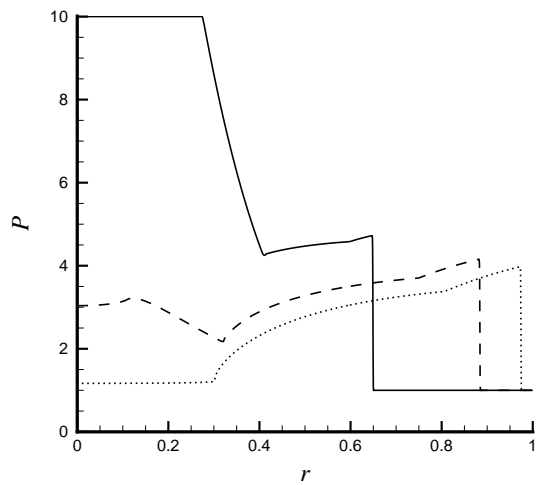
The explosion problem is a special case of a one-dimensional Riemann problem in Cartesian, cylindrical and spherical coordinates. Initial conditions model the instantaneous increase of energy in the interval $[0, R]$ in a fluid at rest and with uniform thermodynamic conditions. The perturbed state is indicated in the following as state 1, the unperturbed state is state 2. Assuming that the characteristic time for energy release is negligible with respect to the characteristic times of the flow, the fluid velocity is zero everywhere and therefore, from mass conservation, the density is constant in the whole flow field and equal to ρ_1 . Initial conditions therefore read

$$\rho(r) = \rho_1 \quad \forall r, \quad u(r) = 0 \quad \forall r, \quad P(r) = \begin{cases} P_1 & \text{for } r \leq R \\ P_2 & \text{for } r > R \end{cases}$$

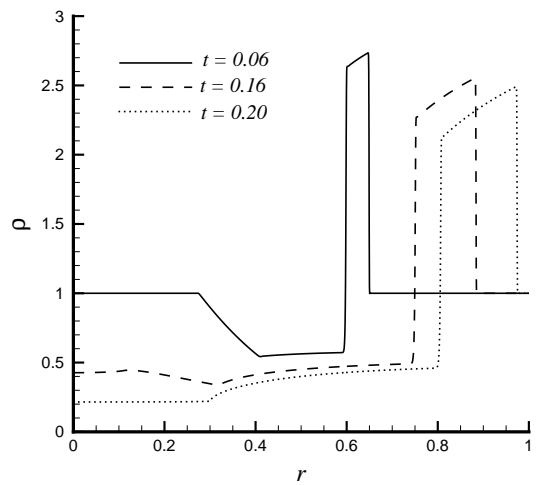
with $u = m/\rho$ fluid velocity. All variables are made dimensionless with respect to an arbitrary reference state (state 0) as follows,

$$\bar{x} = x \bar{L}, \quad \bar{t} = t \bar{L} \sqrt{\bar{\rho}_0 / \bar{P}_0}, \quad \bar{\rho} = \rho \bar{\rho}_0, \quad \bar{u} = u \sqrt{\bar{P}_0 / \bar{\rho}_0}, \quad \bar{P} = P \bar{P}_0,$$

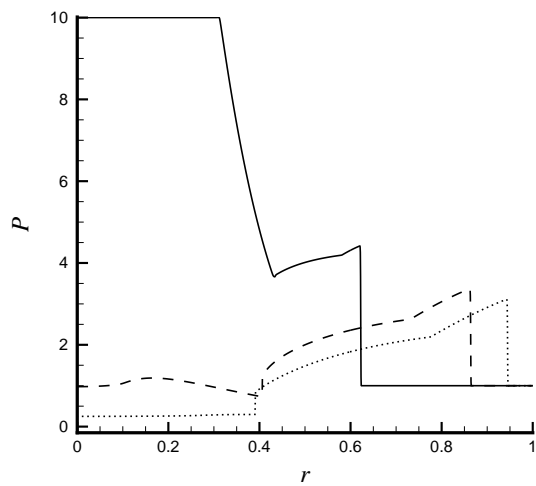
where the overbar indicates dimensional quantities and where \bar{L} is the unit reference length. In the simulations, the computational domain is limited to $[0, 1]$ and solid wall boundary conditions are imposed at $r = 1$. The initial discontinuity is located at $R = 0.5$. In figure 4, the pressure and density profiles at three different dimensionless times are reported for cylindrical and spherical symmetry in the case $\rho_1 = 1$, $P_1 = 10$, $P_2 = 1$. At the first considered



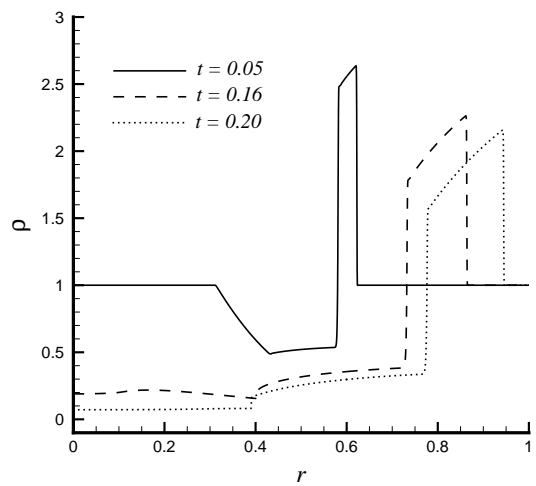
(a) Pressure, cylindrical coordinates



(b) Density, cylindrical coordinates

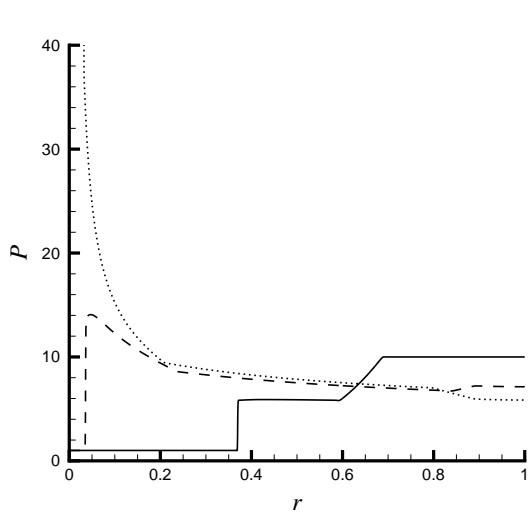


(c) Pressure, spherical coordinates

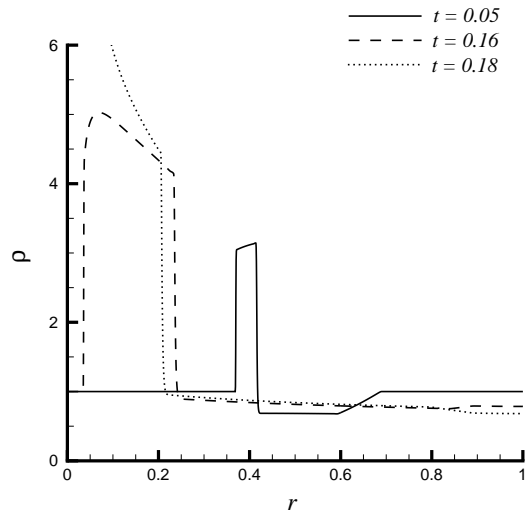


(d) Density, spherical coordinates

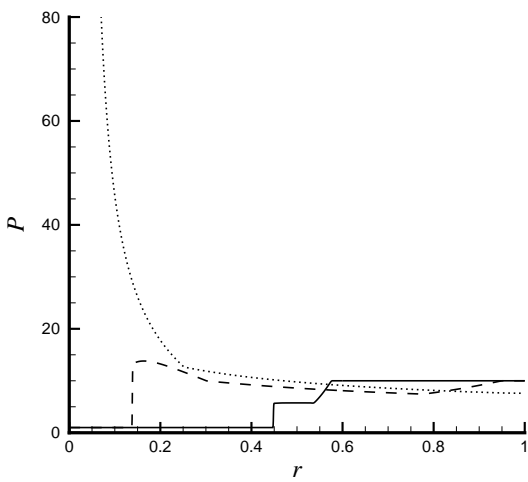
Figure 4: Pressure (a,c) and density (b,d) at three different time levels for the explosion problem in cylindrical (a,b) and spherical (c,d) coordinates.



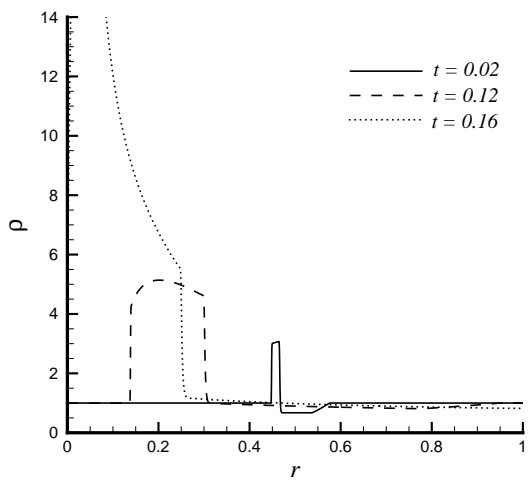
(a) Pressure, cylindrical coordinates



(b) Density, cylindrical coordinates



(c) Pressure, spherical coordinates



(d) Density, spherical coordinates

Figure 5: Pressure (a,c) and density (b,d) at three different time levels for the implosion problem in cylindrical (a,b) and spherical (c,d) coordinates.

time level, the diverging shock wave and contact surface are clearly visible, together with the rarefaction wave that is converging towards the origin. At later times, the rarefaction wave reflects at the origin and moves towards the outer region. All simulations are carried out over a computational grid made of 5 001 nodes ($\Delta r = 2 \times 10^{-4}$); the CFL is 0.5. A time and space convergence analysis is carried out in section 5.1.

The implosion problem is also considered, where now the low-pressure region is located in the interval $[0, R]$ and the high-pressure one is in $[R, \infty)$, see e.g. [4, 5]. In the computations, $\rho_1 = 1$, $P_1 = 1$, $P_2 = 10$. In figure 5, the pressure and density profiles at three different dimensionless times are reported for cylindrical and spherical symmetry. In the implosion problem, a shock wave, followed by a contact discontinuity, moves towards the origin whereas a rarefaction wave propagates outwards. The shock wave and the contact discontinuity are clearly visible at then first time level. At later times, the shock wave reflects at the origin and moves towards the outer region, causing a sharp increase of pressure and density at the origin itself.

5.1. Numerical accuracy and equivalence conditions

In the present section, the consequences of violating the equivalence conditions on the accuracy of the numerical scheme are investigated. To this purpose, time and space convergence studies are carried out using the reference FVE scheme (19) and a number of modified schemes. In all computations, the second order BDF scheme is used.

In figure 6, a time convergence study is shown for the implosion problem with $P_1 = 0.1$ in the time interval $[0, 0.2]$. All computations are carried out over a grid made of 501 nodes ($\Delta r = 2 \times 10^{-3}$) and for the following time steps, $\Delta t = (0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 3) \times 10^{-4}$. At a given station r , the relative error in time is computed at stations $r = 0$ (named Probe 1) and $r = 0.1$ (Probe 2) as the L_2 norm of the difference between the computed solution vector $\mathbf{u}(r, t)$ and the reference solution $\mathbf{u}_{\text{ref}}(r, t)$, namely

$$\text{error}(r) = \frac{\|\mathbf{u}(r, t) - \mathbf{u}_{\text{ref}}(r, t)\|_{2,t}}{\|\mathbf{u}_{\text{ref}}(r, t)\|_{2,t}}, \quad \text{with} \quad \|\mathbf{u}(r, t)\|_{2,t} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{p=1,3} \mathbf{u}_{(p)}^2(r, \tau) d\tau,$$

where $t_1 = 0$ and $t_2 = 0.2$ and where $\mathbf{u}_{(1)} = \rho$, $\mathbf{u}_{(2)} = m$ and $\mathbf{u}_{(3)} = E^t$. The reference solution $\mathbf{u}_{\text{ref}}(t)$ is computed over the same grid but for $\Delta t = 10^{-6}$. The FVE scheme (19), is compared to a slightly modified version, named FVE* in figure 6, for which $\mathcal{V}_i^{\text{FVE}^*} = L_i^j$. Both schemes exhibit second-order convergence rates in time, as expected from the two-step BDF scheme. In both cylindrical and spherical problems, differences between the two schemes are negligible for the pressure signals at Probe 2. The FVE scheme (19) performs (slightly) better at Probe 1, where the error is always smaller than that of the modified schemes.

Indeed, the two schemes FVE and FVE* differ only in definition of the coefficient \mathcal{V}_i multiplying the time derivative of the unknown, cf. expression (21). More precisely, the difference between the time derivative coefficients reads

$$\varepsilon_i = \mathcal{V}_i^{\text{FVE}^*} - \mathcal{V}_i^{\text{FVE}} = -\frac{1}{j+1} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \left[\left(\frac{r_i + r_k}{2} - r_{ik} \right) \eta_{ik}^j + \frac{j}{2} (r_k - r_i) M_{ik}^{j-1} \right].$$

If condition (a) is enforced, then in the cylindrical case $r_{ik} = (r_i + r_k)/2$ and the expression for ε simplifies to

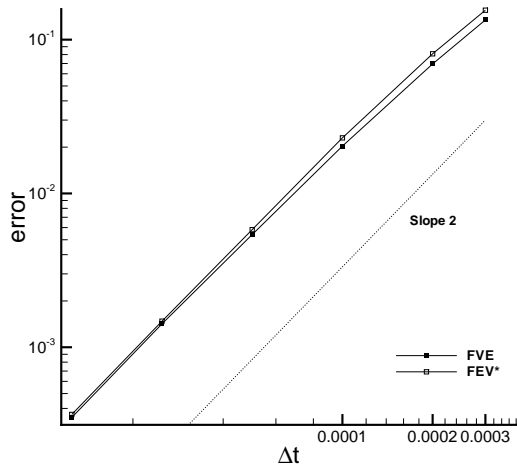
$$\text{Cylindrical:} \quad \varepsilon_i = -\frac{1}{4} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} (r_k - r_i) M_{ik} = -\frac{1}{24} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \sigma_{ik} (r_k - r_i)^2.$$

Moreover, since $\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$, over a uniform mesh with $r_k - r_i$ one has $\equiv h, \forall i \neq k$,

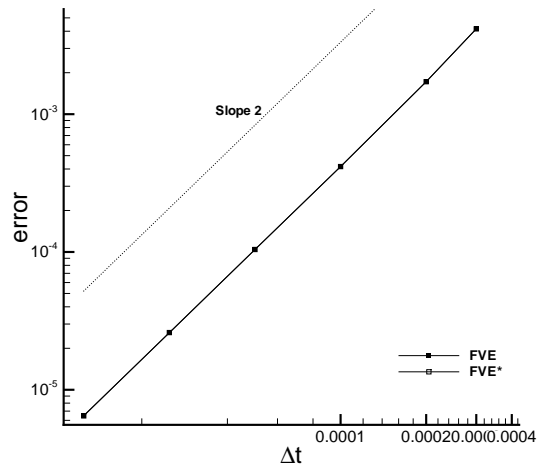
$$\text{Cylindrical } (h = \text{const.}): \quad \varepsilon_i(h) = \begin{cases} -\frac{h^2}{24} & \text{if } i = i_a, \\ 0 & \text{if } i \neq i_a, i_b, \\ \frac{h^2}{24} & \text{if } i = i_b, \end{cases}$$

namely, for an evenly-spaced mesh the only difference between the hybrid FE/FV scheme FVE and its version FVE* is limited to the two boundary volumes and it is proportional to the mesh spacing squared in the case of cylindrical coordinates. For spherical coordinates, one has

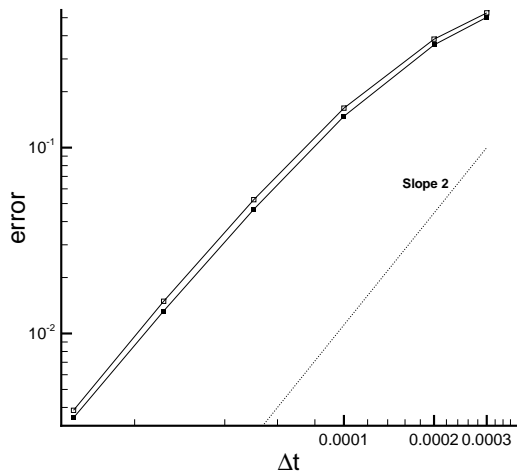
$$\text{Spherical:} \quad \varepsilon_i = -\frac{1}{3} \sum_{k \in \mathcal{K}_{i,\neq}} \left[\left(\frac{r_i + r_k}{2} - \sqrt{\frac{r_i^2 + r_k^2 + r_i r_k}{3}} \right) \eta_{ik}^j + (r_k - r_i) M_{ik}^{j-1} \right].$$



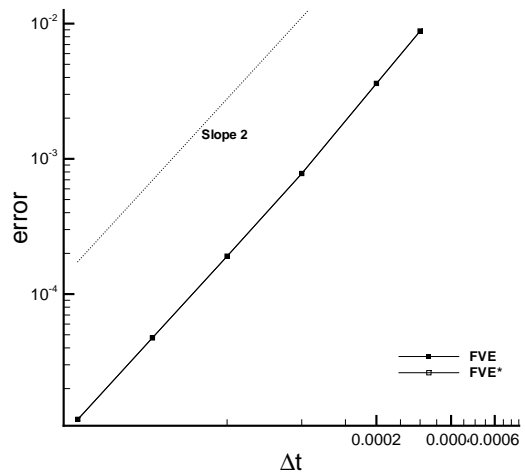
(a) Cylindrical, Probe 1



(b) Cylindrical, Probe 2

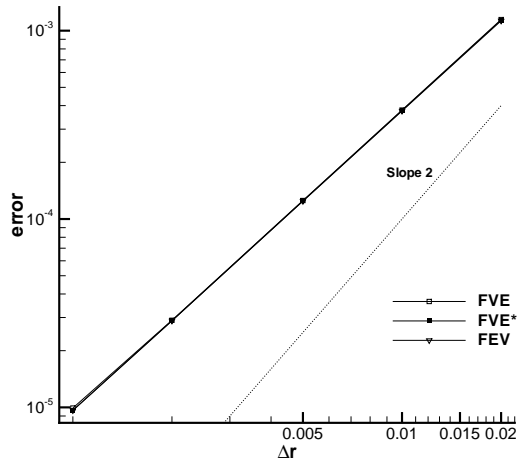


(c) Spherical, Probe 1

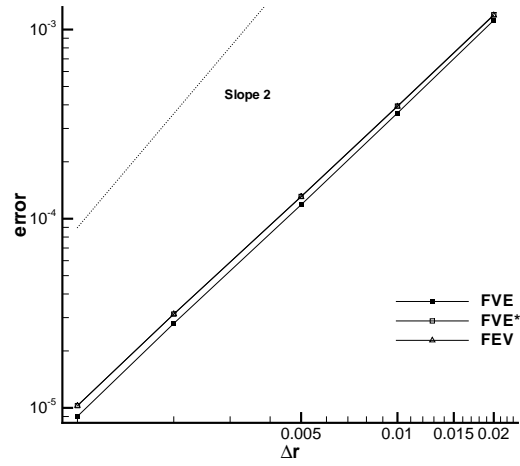


(d) Spherical, Probe 2

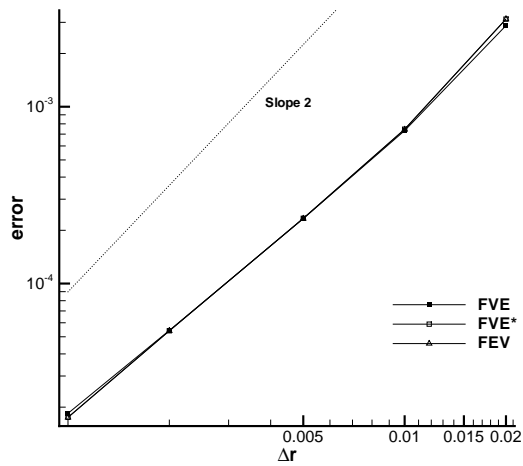
Figure 6: Time convergence study for the implosion problem for the cylindrical (a) and spherical (b) cases for the FV scheme implementing the FE/FV equivalence conditions (indicated as FVE) and a FV scheme (FVE*) violating the equivalence conditions.



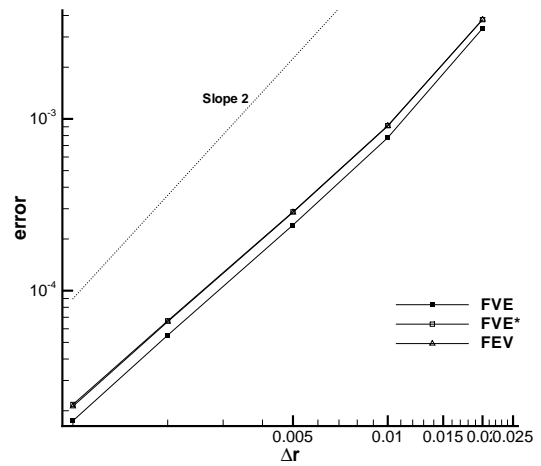
(a) Cylindrical



(b) Cylindrical, reduced domain



(c) Spherical



(d) Spherical, reduced domain

Figure 7: Grid convergence study for smooth initial data for the cylindrical (top) and spherical (bottom) cases for the FV scheme implementing the FE/FV equivalence conditions (indicated as FVE), FV scheme (FVE*) violating the equivalence conditions and a FE scheme (FEV) with FV upwind stabilization via flux limiter. In (b) and (d) the error is computed over the interval $[0,0.1]$ to put into evidence the contribution of the origin of the coordinate system

Over an evenly-spaced grid, the contribution of the term $(r_k - r_i)M_{ik}^r$ is different from zero only at boundary nodes, whereas the first term is always present. Taylor expansion around $h = 0$ provides the following expression

$$\text{Spherical } (h = \text{const.}): \quad \varepsilon_i(h) = \begin{cases} \frac{h^2}{24}(1 + \frac{h}{2}) + o(h^4) & \text{if } i = i_a, \\ \frac{h^2}{24} + o(h^4) & \text{if } i \neq i_a, i_b, \\ \frac{h^2}{24}(1 - \frac{h}{2}) + o(h^4) & \text{if } i = i_b, \end{cases} \quad h \rightarrow 0,$$

which make it apparent that also in the spherical case the leading term in the difference $\varepsilon_i = \mathcal{V}_i^{\text{FVE}^*} - \mathcal{V}_i^{\text{FVE}}$ is proportional to h^2 and it is larger at the origin of the coordinate system. These observations explain why the differences between the two scheme are more relevant for Probe 1.

Space convergence studies were used to assess the different options for space discretizations. To avoid the first-order error due to the shock-capturing technique, a smooth initial conditions, which lead to continuous solution for all considered t , $t \in [0, 0.2]$, was used in all computations. The initial conditions read

$$\rho(r) = \sqrt[3]{P(r)/K^\gamma}, \quad m(r) = 0, \quad P(r) = (P_2 - P_1)(2r - 3)r^2 + P_2 \quad \forall r \in [0, 1]$$

where K is the isentropic constant, which here is unity. In figure 7, results for both the cylindrical (a,b) and spherical (c,d) case are shown. At the final time $t_2 = 0.2$, the relative error in space is computed as the L_2 norm of the difference between the computed solution vector $\mathbf{u}(r, t)$ and the reference solution $\mathbf{u}_{\text{ref}}(x, t)$, namely

$$\text{error}(t) = \frac{\|\mathbf{u}(r, t) - \mathbf{u}_{\text{ref}}(r, t)\|_{2,r}}{\|\mathbf{u}_{\text{ref}}(r, t)\|_{2,r}}, \quad \text{with} \quad \|\mathbf{u}(r, t)\|_{2,r} = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{p=1,3} \mathbf{u}_{(p)}^2(\chi, t) d\chi,$$

where $r_1 = 0$ and $r_2 = 1$. The reference solution $\mathbf{u}_{\text{ref}}(t)$ is computed over a fine grid made of 6 001 nodes. All solutions, including the reference one, were computed using $\Delta t = 3 \times 10^{-5}$ and $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ for the cylindrical and spherical case, respectively, which correspond to a CFL number of about 0.5 for the reference grid. The considered grids are uniform grid made of 51, 101, 201, 501, 1001 nodes, namely, $h = (20, 10, 5, 2, 1) \times 10^{-3}$. In figure 7 shows results from the FEV and FEV* schemes and from a TVD-like FE scheme named FEV and defined as

$$\mathcal{V}_i^{\text{FEV}} = L_i^{r^j}, \quad \mathcal{F}_{ik}^{\text{FEV}} = \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k) \eta_{ik}^{r^j} + [(\Psi_{ik} - 1)|\hat{\mathbf{A}}_{ik}| + \Psi_{ik} \hat{\mathbf{A}}_{ik}] (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \right\}, \quad \mathcal{B}_i^{\text{FEV}} = \mathbf{f}_i \xi_i^{r^j}, \quad \mathcal{S}_i^{\text{FEV}} = j \mathbf{s}_i L_i^{r^{j-1}}. \quad (22)$$

in which the first-order Roe scheme is used to capture discontinuities without spurious oscillations and the FE scheme is used in regions of smooth flow. Differences among the three schemes are very small and can be appreciated in figures 7b) and 7d), in which the error is computed over the interval $[r_1 = 0, r_2 = 1]$ to put into evidence the contribution of the origin of the coordinate system. Also in this case, the FVE performs slightly better than the FVE*. It is remarkable that the FVE scheme is more accurate than the FEV scheme as well, even though the FEV includes FE additional terms that should improve its accuracy. The above can be explained by considering the two limiting case of $\Psi_{ik} = 1$ and $\Psi_{ik} = 0$. For $\Psi_{ik} = 1$, the FEV scheme reduces to the FEL scheme, whereas for $\Psi_{ik} = 0$ it simplifies to the FVE* and therefore it suffers from the inconsistency between the value of \mathcal{V}_i and the metric vectors η_{ik} and $\xi_i^{r^j}$, as observed already.

6. Conclusions

A general formulation of the finite element (FE) and finite volume (FV) schemes for conservation laws in cylindrical and spherical symmetry was presented. The correct evaluation of the governing equations at the origin of the coordinate system is automatically guaranteed by construction of the discrete equations.

Three equivalence conditions were introduced to relate the FE divergence operator, namely, the first order partial derivative with respect to the radial coordinate, to its FV counterpart. These conditions allowed to compute node-centered FV metrics, i.e., cell volumes and integrated interface normals, from FE integrals over the same grid assuming linear FE shape function of Lagrangian type. In particular, the third equivalence condition is an algebraic relation which links the coefficient of the time derivative in the FV approximation to that obtained in the FE framework. This

relation represents a novelty with respect to previous approaches in that it allows to consider the higher-order FE contributions into the discrete expression of the divergence operator to obtain the equivalent FV scheme. Explicit expression of the equivalent FV metric quantities are given in terms of the grid nodes coordinates. The size and location of the equivalent finite volumes is found to depend on the considered type of symmetry.

Numerical simulations of explosion and implosion problems were carried out to evaluate the accuracy of the proposed approach. The consequences of violating the equivalence conditions on the accuracy of the numerical scheme were also investigated. The failure of enforcing the proposed conditions results in the introduction of an additional error term into the discrete equation which is larger at the origin of the coordinate system. For the one-dimensional problem considered here, the error introduced by the violation of the equivalence condition is relatively small, although this may not be the case of the two- and three-dimensional cases currently under investigation.

Acknowledgements

The authors acknowledge the insightful comments of two anonymous referees regarding the discussion of the numerical results.

References

- [1] P. Sachdev, Shock waves and explosions, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [2] H. Goldstine, J. von Neumann, Blast wave calculations, *Comm. Pure Appl. Math.* 8 (1955) 327–354.
- [3] H. Brode, Numerical solutions of spherical blast waves, *J. Appl. Phys.* 26 (1955) 766–775.
- [4] R. B. Payne, A numerical method for a converging cylindrical shock, *J. Fluid Mech.* 2 (1957) 185–200.
- [5] G. A. Sod, A numerical study of a converging cylindrical shock, *J. Fluid Mech.* 83 (1977) 785–794.
- [6] T. G. Liu, B. C. Khoo, K. S. Yeo, The numerical simulations of explosion and implosion in air: use of a modified Harten’s TVD scheme, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 31 (1999) 661–680.
- [7] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 49 (1983) 357–393.
- [8] A. Dervieux, Steady Euler simulations using unstructured meshes, Lecture Series 1985-04, von Karman Institute of Fluid Dynamics, 1985.
- [9] R. Rostand, B. Stoufflet, Finite volume Galerkin methods for viscous gasdynamics, Report RR-863, INRIA, 1988.
- [10] L. Fezou, B. Stoufflet, A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes, *J. Comput. Phys.* 84 (1989) 174–206.
- [11] V. Selmin, The node-centred finite volume approach: bridge between finite differences and finite elements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 102 (1993) 107–138.
- [12] V. Selmin, L. Formaggia, Unified construction of finite element and finite volume discretizations for compressible flows, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 39 (1996) 1–32.
- [13] A. Guardone, L. Vigeveno, Finite element/volume solution to axisymmetric conservation laws, *J. Comput. Phys.* 224 (2007) 489–518.
- [14] E. Godlewski, P. A. Raviart, Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [15] E. F. Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Second Edition, Springer, Berlin, 1999.
- [16] R. J. LeVeque, Finite volume methods for conservation laws and hyperbolic systems, Cambridge University Press, 2002.
- [17] A. Quarteroni, A. Valli, Numerical approximation of partial differential equations, number 23 in Springer series in computational mathematics, Springer-Verlag, 1994.
- [18] J. Donea, A. Huerta, Finite element methods for flow problems, Wiley, 2002.
- [19] A. Ern, J. L. Guermond, Theory and Practice of Finite Elements, volume 159 of *Applied Mathematical Science*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [20] P. L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *J. Comput. Phys.* 43 (1981) 357–372.
- [21] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme, *J. Comput. Phys.* 14 (1974) 361–370.
- [22] A. Jameson, Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings, in: 10th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, HI, pp. 1–13. AIAA Paper 91-1596.
- [23] Y. Saad, SPARSEKIT: A Basic Toll Kit for Sparse Matrix Computations, Report, University of Minnesota, Computer Science Department, 1994.

EQUIVALENCE CONDITIONS FOR FINITE VOLUME / ELEMENT DISCRETIZATIONS IN CYLINDRICAL COORDINATES

Dante De Santis, Gianluca Geraci and Alberto Guardone

[†]Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano Via La Masa, 34, 20156
Milano, Italy
e-mail: alberto.guardone@polimi.it

Key words: Compressible flows, Shock waves, Explosion/Implosion problem, Cylindrical coordinates, Finite Element/Volume Methods

Abstract. *A novel numerical technique for the solution of the compressible flow equations over unstructured grids in a cylindrical reference is presented. The proposed approach is based on a mixed finite volume / finite element method. Equivalence conditions relating the finite volume and the finite element metrics in cylindrical coordinates are derived. Numerical simulations of the explosion and implosion problems for inviscid compressible flows are carried out to evaluate the correctness of the numerical scheme. For the implosion problem, numerical simulations include also the effect of the presence of cylindrical obstacles in the flow field, which have been recently proposed as a mean to modify the shape of a cylindrical converging shock to increase the shock front stability in experimental studies on the sonoluminescence effect. Spherical shock waves are also considered and the modification to the shock geometry due to the presence of a spherical obstacle is evaluated numerically and compared to its cylindrical counterpart.*

1 INTRODUCTION

In a cylindrical reference, diverse gasdynamics problems exhibit relevant symmetries. These are, e.g., nozzle flows, detonations, astrophysical flows, Inertial Confinement Fusion (ICF) applications, sonoluminescence phenomena and nuclear explosions.¹ To compute the numerical solution of the compressible flow equations for these kind of flows, an interesting possibility is provided by the use of a mixed finite volume (FV) / finite element (FE) approach,² which has been already successfully applied to the multidimensional Cartesian case^{3,4} and the cylindrical case with axial symmetry.⁶ For example, in viscous flows, it is possible to use the FV and the FE to compute the advection and dissipation terms, respectively, within the same algorithm. Such a possibility is expected to be of use in the study of the effect of viscosity on e.g. the formation of stable shock fronts in cylindrically and spherically symmetric problems and on the determination of the onset and dynamics of Richtmyer-Meshkov instabilities in cylindrical and spherical implosions.⁵

The combined use of these two different techniques is made possible by the introduction of suitable equivalence conditions that relate the FV metrics, i.e. cell volumes and integrated normals, to the FE integrals. Equivalence conditions relating FV and FE schemes have been derived for Cartesian coordinates in two and three spatial dimensions^{3,4} and for cylindrical coordinates in axially symmetric two-dimensional problems.⁶ In both cited references, equivalent conditions are obtained by neglecting higher order FE contributions. In the present paper, equivalence conditions for the cylindrical coordinates (Z, R, θ) , with Z , R and θ axial, radial and azimuthal coordinate, respectively, are derived for the first time without introducing any approximation into the FE discrete expression of the divergence operator. In particular, three independent equivalent conditions are introduced to link all FV and FE metric quantities defined over the computational grid.

The present paper is structured as follows. In section 2, the FE and FV schemes are briefly described for a scalar conservation law. Equivalence conditions are demonstrated in this case. The extension to the system of Euler equations for compressible flow is also sketched. In section 3, numerical simulations are presented for the explosion and implosion problem in the cylindrical coordinates, including both the axisymmetric (Z - R plane) and the polar (R - θ) case, and are compared to one-dimensional simulations. The effect of introducing cylindrical obstacles in the flow field is also investigated numerically and the modification to the geometry of the cylindrical converging shock wave is studied. The case of spherical shock waves is also considered and the modification to the shock geometry due to the presence of a spherical obstacle is evaluated. In section 4 final remarks and comments are given.

2 FINITE VOLUME/ELEMENT METHOD IN CYLINDRICAL COORDINATES

In the present section, the finite element and finite volume discrete equations for a scalar conservation law in a three-dimensional cylindrical reference are given. The model

equation reads

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R f_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

where t is the time, Z , R and θ are the axial, radial and azimuthal coordinates, respectively, $u = u(Z, R, \theta, t)$ is the scalar unknown and $\mathbf{f}^\varnothing(u) = (f_Z, f_R, f_\theta)$ is the so-called flux function. A more compact form of the above equation is obtained by introducing the divergence operator in three-dimensional cylindrical coordinates $\nabla^\varnothing \cdot (\cdot)$ as follows

$$\frac{\partial(u)}{\partial t} + \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{f}^\varnothing(u) = 0. \quad (2)$$

Equivalence conditions relating the FV and the FE approaches are then derived in the three-dimensional case. Finally, the numerical scheme is applied to the compressible Euler equations and time discretization is discussed.

2.1 Node-pair finite element discretization

The scalar conservation law (2) is now written in a weak form by multiplying it by the radial coordinate R and by a suitable Lagrangian test function $\phi_i \in V_h \subset H^1(\Omega)$. Integrating over the support Ω_i of ϕ_i gives

$$\int_{\Omega_i} R \phi_i \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} R \phi_i \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{f}^\varnothing(u) d\Omega_i = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (3)$$

where \mathcal{N} is the set of all nodes of the triangulation. Note that by multiplying by R , the numerical singularity of the cylindrical reference system is formally removed.⁶ In the following, to simplify the notation, the infinitesimal volume $d\Omega = R dR d\theta dZ$ is not indicated in the integrals. Integrating by parts immediately gives

$$\int_{\Omega_i} R \phi_i \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\Omega_i} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \nabla^\varnothing \phi_i + \int_{\Omega_i} \phi_i \mathbf{f}^\varnothing \cdot \nabla^\varnothing R - \int_{\partial\Omega_i^\varnothing} R \phi_i \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing \quad (4)$$

where $\partial\Omega_i^\varnothing = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega$, with $\partial\Omega_i$ and $\partial\Omega$ are the boundary of Ω_i and of the computational domain Ω , respectively, and where $\mathbf{n}_i^\varnothing = n_Z \hat{\mathbf{Z}} + n_R \hat{\mathbf{R}} + n_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ is the outward normal versor to Ω_i . The scalar unknown is now interpolated as

$$u(Z, R, \theta, t) \simeq u_h(Z, R, \theta, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} u_k(t) \phi_k(Z, R, \theta),$$

to obtain the Bubnov-Galerkin approximation of (2), namely,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_k}{dt} = \int_{\Omega_i} R \mathbf{f}^\varnothing(u_h) \cdot \nabla^\varnothing \phi_i + \int_{\Omega_i} \phi_i \mathbf{f}^\varnothing(u_h) \cdot \nabla^\varnothing R - \int_{\partial\Omega_i^\varnothing} R \phi_i \mathbf{f}^\varnothing(u_h) \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing,$$

where \mathcal{N}_i is the set of shape functions ϕ_k whose support Ω_k overlap Ω_i of ϕ_i and where

$$M_{ik}^\varnothing \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R \phi_i \phi_k,$$

with $\Omega_{ik} = \Omega_i \cap \Omega_k$. By resorting to the so-called flux reinterpolation technique,⁷ the flux function $\mathbf{f}^\varnothing(u_h)$ is now expanded using the same shape functions $\phi_k \in V_h$ as follows

$$\mathbf{f}^\varnothing(u_h(Z, R, \theta, t)) \simeq \sum_{k \in \mathcal{N}} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \phi_k(Z, R, \theta),$$

where $\mathbf{f}_k^\varnothing(t) = \mathbf{f}^\varnothing(u_k(t))$, to obtain

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_k}{dt} &= \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \cdot \int_{\Omega_{ik}} R \phi_k \nabla^\varnothing \phi_i + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \cdot \int_{\Omega_{ik}} \phi_i \phi_k \nabla^\varnothing R \\ &\quad - \sum_{k \in \mathcal{N}_i^\partial} \mathbf{f}_k^\varnothing(t) \cdot \int_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \phi_i \phi_k \mathbf{n}_i^\varnothing, \end{aligned}$$

where $\partial\Omega_{ik}^\partial = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k \cap \partial\Omega$, and \mathcal{N}_i^∂ is the set of all boundary nodes of Ω_i . The above spatially discrete form of the scalar equation (2) simplifies to⁶

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_k}{dt} &= - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left(\frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right) \\ &\quad + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\partial} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^\varnothing, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\mathcal{N}_{i,\neq} = \mathcal{N}_i \setminus \{i\}$ and $\mathcal{N}_{i,\neq}^\partial = \mathcal{N}_i^\partial \setminus \{i\}$. In the expression above, the following FE metric quantities,

$$\begin{aligned} M_{ik}^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R \phi_i \phi_k, & M_{ik} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} \phi_i \phi_k, & \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} \phi_i \phi_k \widehat{\mathbf{R}}, & \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing = \int_{\Omega_{ik}} \phi_i \widehat{\mathbf{R}}, \\ \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_{ik}} R (\phi_i \nabla^\varnothing \phi_k - \phi_k \nabla^\varnothing \phi_i), & \boldsymbol{\chi}_{ik}^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \phi_i \phi_k, & \boldsymbol{\xi}_i^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Omega_{ik}^\partial} R \phi_i. \end{aligned}$$

have been introduced. In the next section, the corresponding FV metrics are derived.

2.2 Edge-based finite volume discretization

The spatially discrete form of the scalar conservation law (2) is now obtained according to the node-centred finite volume approach.⁸ To this purpose, the integral form of (2)

times the radial coordinate R is enforced over a finite number of non-overlapping finite volumes \mathcal{C}_i , with boundary $\partial\mathcal{C}_i$, to obtain,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} Ru = - \oint_{\partial\mathcal{C}_i} R \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{f}^\varnothing, \quad \forall \mathcal{C}_i \subseteq \Omega.$$

By integrating by parts the right hand side and by applying the Gauss theorem the equation above reads

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_i} Ru = - \oint_{\partial\mathcal{C}_i} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing + \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

where \mathbf{n}_i^\varnothing is the outward normal to $\mathcal{C}_i \subseteq \Omega$. Note that each finite volume \mathcal{C}_i surrounds one and only one node of the triangulation. Over each control volume \mathcal{C}_i the cell-averaged unknown is introduced as follows

$$u(Z, R, \theta, t) \simeq u_i(t) = \frac{1}{V_i} \int_{\mathcal{C}_i} u(Z, R, \theta, t),$$

where V_i is the volume of the i -th cell. Therefore

$$V_i^\varnothing \frac{du_i}{dt} = - \oint_{\partial\mathcal{C}_i} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing + \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad \text{where } V_i^\varnothing \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}_i} R \quad (6)$$

The boundary integral on the right hand side is now split into interface or edge contributions as follows

$$V_i^\varnothing \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing - \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing + \int_{\mathcal{C}_i} \mathbf{f}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}}, \quad (7)$$

where $\mathcal{N}_{i,\neq}$ is the set of the finite volume \mathcal{C}_k sharing a boundary with \mathcal{C}_i , excluding \mathcal{C}_i and where $\partial\mathcal{C}_{ik} = \partial\mathcal{C}_i \cap \partial\mathcal{C}_k \neq \emptyset, k \neq i$, is the so-called cell interface. As it is standard practice, the flux vector is assumed to be constant over each cell interface. Under this assumption, the domain and boundary contributions read

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing &\simeq \mathbf{f}_{ik}^\varnothing \cdot \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^\varnothing = \mathbf{f}_{ik}^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing & \text{with } \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_{ik}} R \mathbf{n}_i^\varnothing & \text{and} \\ \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{f}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing &\simeq \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{n}_i^\varnothing = \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_i^\varnothing & \text{with } \boldsymbol{\nu}_i^\varnothing &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{C}_i^\varnothing} R \mathbf{n}_i^\varnothing, \end{aligned}$$

respectively. If a second-order centred approximation of the fluxes is considered, namely, $\mathbf{f}_{ik} = (\mathbf{f}_i^\varnothing + \mathbf{f}_k^\varnothing)/2$, the final form of the finite volume approximation of (2) reads,

$$V_i^\varnothing \frac{du_i}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_i^\varnothing + \mathbf{f}_k^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_i^\varnothing \quad \text{with } \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}_i} \hat{\mathbf{R}}, \quad (8)$$

to be compared with the corresponding FE discretization (5).

2.3 Finite Element/Volume equivalence

The equivalence conditions relating the above FV metric quantities and the FE ones defined in the previous section are now derived. To this purpose, relevant properties of the FE and FV discretizations are briefly recalled.

Considering FE metric quantities first, from its definition the vector $\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing$ is asymmetric, namely,

$$\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing = -\boldsymbol{\eta}_{ki}^\varnothing, \quad (9)$$

which will be referred in the following as property FEM-a. Property FEM-b is obtained by noting that

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} (\boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing) + \boldsymbol{\xi}_i^\varnothing = \mathbf{0},$$

which gives immediately

$$\widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing + \boldsymbol{\xi}_i^\varnothing. \quad (10)$$

Property FEM-c stems from the following identity

$$\int_{\Omega_i} R\phi_i \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{p}^\varnothing = \int_{\Omega_i} 3R\phi_i = 3L_i^\varnothing = 3 \sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing,$$

where \mathbf{p}^\varnothing is the position vector, $\mathbf{p}^\varnothing = Z\hat{\mathbf{Z}} + R\hat{\mathbf{R}}(\theta)$. On the other hand, by integrating by parts, one also has

$$\int_{\Omega_i} R\phi_i \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{p}^\varnothing = \int_{\partial\Omega_i^\varnothing} R\phi_i \mathbf{p}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing - \int_{\Omega_i} \phi_i \mathbf{p}^\varnothing \cdot \hat{\mathbf{R}} - \int_{\Omega_i} R\mathbf{p}^\varnothing \cdot \nabla^\varnothing \phi_i. \quad (11)$$

By substituting the exact expansion $\mathbf{p}^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{p}_k^\varnothing \phi_k$, Eq. (11) reads

$$3L_i^\varnothing = + \sum_{k \in \mathcal{N}_i^\varnothing} \mathbf{p}_k^\varnothing \cdot \int_{\partial\Omega_{ik}^\varnothing} R\phi_i \phi_k \mathbf{n}_i^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{p}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} \phi_i \phi_k \hat{\mathbf{R}} - \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{p}_k^\varnothing \cdot \int_{\Omega_{ik}} R\phi_k \nabla^\varnothing \phi_i,$$

which, from the node-pair representation described in section 2.1, can be written as

$$\begin{aligned} 3L_i^\varnothing = & \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{p}_k^\varnothing + \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing - \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right] \\ & - \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing \cdot \mathbf{p}_i^\varnothing + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing - \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^\varnothing + \mathbf{p}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^\varnothing. \end{aligned}$$

By substituting property FEM-b in the above identity, one finally obtain property FEM-c as

$$3L_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \left[\frac{\mathbf{p}_k^\varnothing + \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing - \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing - \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing \right] + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing - \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^\varnothing. \quad (12)$$

Considering now FV metric quantities, from the fact that $\mathbf{n}_i^\varnothing = -\mathbf{n}_k^\varnothing$ over $\partial\mathcal{C}_{ik}$, property FVM-a reads

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing = -\boldsymbol{\nu}_{ki}^\varnothing, \quad (13)$$

which corresponds to the conservation property of the scheme. From the Gauss theorem, one also has

$$\int_{\mathcal{C}_i} \nabla^\varnothing R = \oint_{\partial\mathcal{C}_i} R \mathbf{n}_i^\varnothing,$$

which, from the definition of FV metric quantities, gives property FVM-b as

$$\widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing + \boldsymbol{\nu}_i^\varnothing. \quad (14)$$

Property FVM-c is obtained by noting that

$$3V_i^\varnothing = \int_{\mathcal{C}_i} R \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{p}^\varnothing = \oint_{\partial\mathcal{C}_i} R \mathbf{p}^\varnothing \cdot \mathbf{n}_i^\varnothing - \int_{\mathcal{C}_i} \widehat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{p}^\varnothing. \quad (15)$$

The right hand side of (15) is now computed by means of the FV discretization described in section 2.2 as

$$3V_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing + \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing - \mathbf{p}_i^\varnothing \cdot \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing + \mathbf{p}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\nu}_i^\varnothing,$$

which from property FVM-b becomes

$$3V_i^\varnothing = \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing + \mathbf{p}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing. \quad (16)$$

Therefore, a FV approximation can be formally obtained from FE metric quantities defined over the same grid points by setting (see properties FEM/FVM-a and -b)

$$\boldsymbol{\nu}_{ik}^\varnothing = \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing, \quad \boldsymbol{\nu}_i^\varnothing = \boldsymbol{\xi}_i^\varnothing, \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^\varnothing = \widehat{\mathbf{L}}_i^\varnothing.$$

Note that the mass lumping approximation,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i} M_{ik}^\varnothing \frac{du_k}{dt} \simeq L_i^\varnothing \frac{du_i}{dt}$$

is to be introduced in (5) for the equivalence conditions to be applicable. By subtracting (12) to (16), one finally has

$$V_i^\varnothing = L_i^\varnothing + \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing - \mathbf{p}_i^\varnothing}{6} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ik}^\varnothing - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}^\varnothing} \frac{\mathbf{p}_k^\varnothing - \mathbf{p}_i^\varnothing}{6} \cdot \boldsymbol{\chi}_{ik}^\varnothing. \quad (17)$$

It is remarkable that, differently from the Cartesian case,^{3,4} in the cylindrical reference the FV cell is not coincident with the FE lumped mass matrix. Moreover, the shape of the FV cells that guarantees equivalence with FE discretization still remains to be determined.

2.4 Fully discrete form of the Euler equations in cylindrical coordinates

The Euler equations for compressible inviscid flows of interest here are now briefly recalled. The differential form reads,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\varnothing}{\partial t} + \nabla^\varnothing \cdot \mathbf{f}^\varnothing = \frac{1}{R} \mathbf{s}^\varnothing, \quad (18)$$

where \mathbf{u}^\varnothing , $\mathbf{u}^\varnothing(Z, R, \theta, t) = (\rho, \mathbf{m}^\varnothing, E^t)^\top$, with ρ density, $\mathbf{m}^\varnothing = (m_Z, m_R, m_\theta)^\top$ momentum and E^t total energy per unit mass, and where

$$\mathbf{f}^\varnothing = \begin{pmatrix} m_Z & m_R & m_\theta \\ \frac{m_Z^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_R m_Z}{\rho} & \frac{m_\theta m_Z}{\rho} \\ \frac{m_Z m_R}{\rho} & \frac{m_R^2}{\rho} + \Pi & \frac{m_\theta m_R}{\rho} \\ \frac{m_Z m_\theta}{\rho} & \frac{m_R m_\theta}{\rho} & \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_Z}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_R}{\rho} (E^t + \Pi) & \frac{m_\theta}{\rho} (E^t + \Pi) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{s}^\varnothing = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_\theta^2}{\rho} + \Pi \\ \frac{m_\theta m_R}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix},$$

are the matrix of the fluxes and the source term, respectively. The FV spatially-discrete form of the Euler equations reads

$$V_i^\varnothing \frac{d\mathbf{u}_i^\varnothing}{dt} = - \sum_{k \in \mathcal{N}_{i,\neq}} \frac{\mathbf{f}_k^\varnothing + \mathbf{f}_i^\varnothing}{2} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ik}^\varnothing + L_i \mathbf{s}_i^\varnothing - \mathbf{f}_i^\varnothing \cdot \boldsymbol{\xi}_i^\varnothing, \quad (19)$$

where $\mathbf{s}_i^\varnothing(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{s}^\varnothing(\mathbf{u}_i^\varnothing)$ and where V_i^\varnothing is computed from the equivalence condition (17). In the computation, a TVD⁹ numerical flux is used, with the van Leer limiter.¹⁰ The fully discrete form of the Euler system is obtained by a two-step Backward Differencing Formulæ. At each time level, a dual time-stepping technique is used to solve the time-implicit problem.¹¹

3 NUMERICAL RESULTS

In the present section, numerical results for converging and diverging cylindrical and spherical shock waves are presented in the two- (Z - R and R - θ planes) and one-dimensional cases.

The case of the explosion problem¹ is considered first. The computational domain is shown in figure 1, where a representative computational grid is also shown. Initial conditions for the explosion problem are as follows. The velocity is assumed to be zero everywhere; the density is uniform and equal to 1, whereas the pressure is uniform and equal to 10 in circular region centred at the origin with radius $R = 0.5$. In the remaining

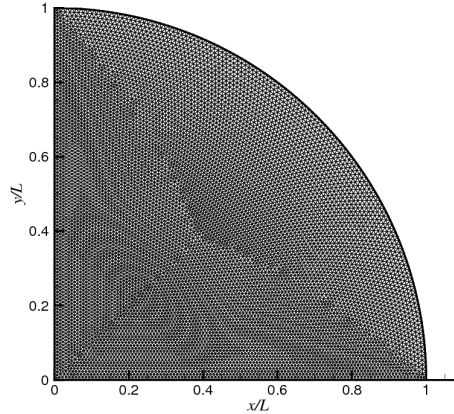


Figure 1: Exemplary grid for the explosion and implosion problems. The grid is the coarse grid made of 9 551 nodes and 18 745 triangles. The resolution along the radial direction is approximatively 0.01.

portion of the domain, the pressure is uniform and equal to 1. In all computations, the ideal gas model for nitrogen ($\gamma = c_P/c_v = 1.39$) is used. Pressure and density are made dimensionless by the corresponding value at rest (outer region), which are indicated in the following as P_{ref} and ρ_{ref} , respectively. The time is made dimensionless by $L_{\text{ref}} \sqrt{\rho_{\text{ref}}/P_{\text{ref}}}$, with L_{ref} unit length.

Numerical results are shown in figure 2, where density isolines at different time levels are shown. On the left column of figure 2, the independent variables are R and θ , namely, a cylindrical shock wave is considered. On the left hand side, a spherical problem is solved in the Z - R plane, where axial symmetry is assumed. The grid is the fine grid with 39 153 nodes 77 587 triangles and the time step is 2.5×10^{-4} for the cylindrical case and 1.5×10^{-4} for the spherical one. In both situations, a cylindrical/spherical shock wave propagates towards the outer boundary of the computational domain; the shock wave is followed by a contact discontinuity. A rarefaction wave propagates towards the origin and is then reflected outward. Note that the initial corrugation of the shock front, due to the un-even shape of the initial discontinuity caused by its discrete representation over an unstructured grid of triangles, is clearly visible also at later times. The pressure profile in figure 3 confirm the above description of the flow field and are compared against reference one-dimensional results for three different time levels. One-dimensional computations were performed over a evenly-spaced grid made of 2 001 nodes, which corresponds to an element spacing of 5×10^{-4} .

A grid dependence study is shown in figure 4. Pressure signals along the $y = 0$ axis are compared at time $t = 0.16$ for three different grid resolutions: the coarse grid is made of 9 551 nodes and 18 745 triangles, the medium one is made of 20 683 nodes and 40 841 triangles, the fine one is made of 39 153 nodes 77 587 triangles. Numerical results are find to be almost independent from the grid resolution; in the following, the fine grid is used

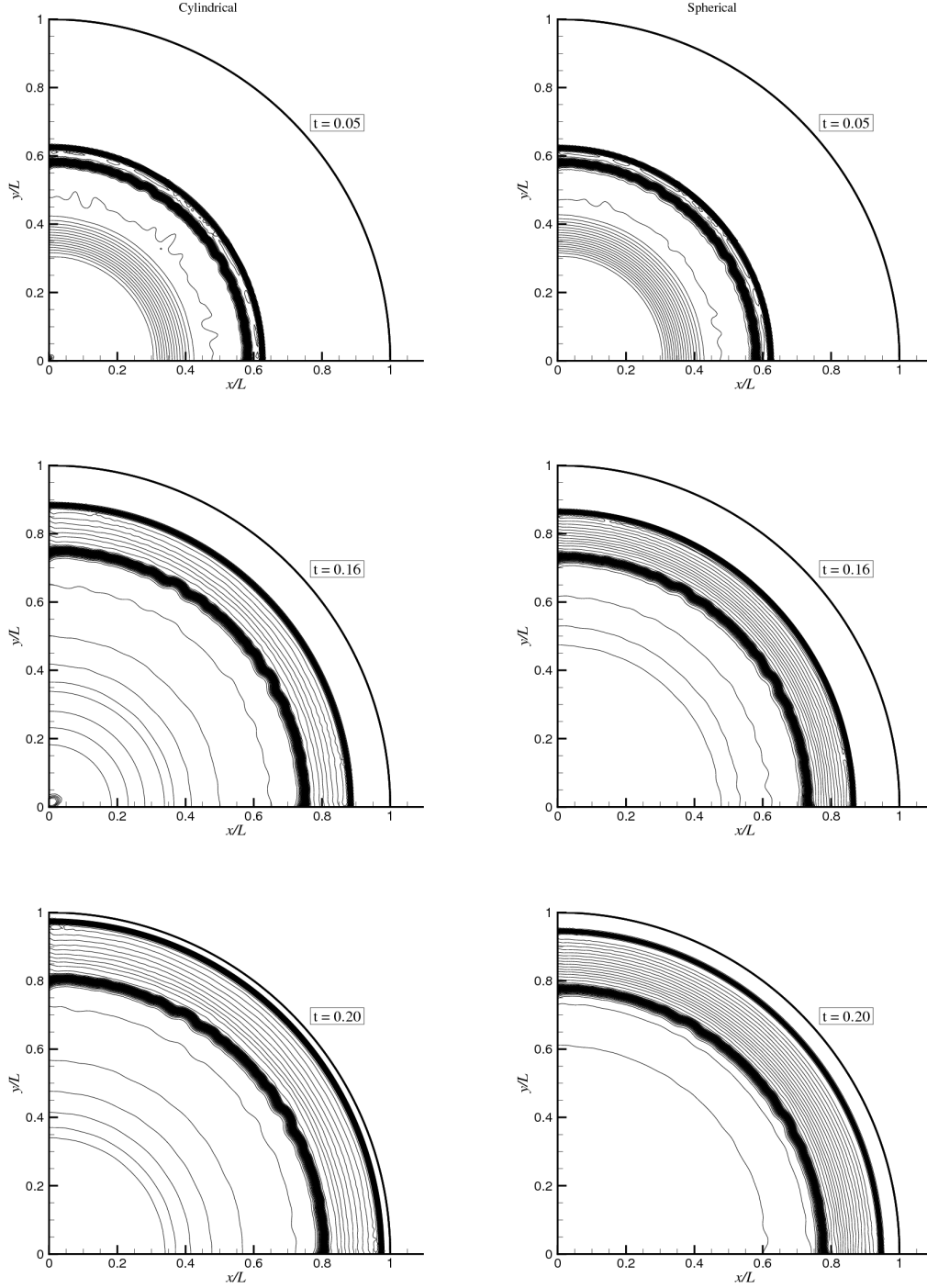


Figure 2: Density isolines for the explosion problem. Each isoline corresponds to a density difference of $\Delta\rho/\rho_{\text{ref}} = 0.03$. Left row: cylindrical problem, right row: spherical problem. Time increases from top to bottom.

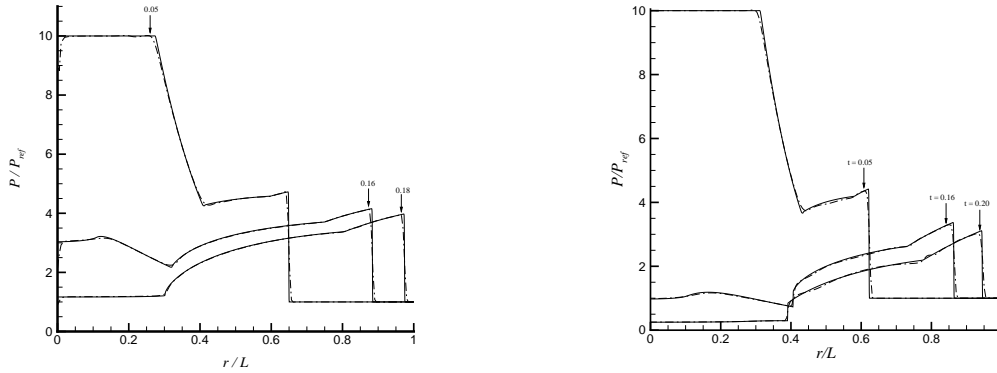


Figure 3: Pressure along the $y = 0$ axis for the explosion problem at times $t = 0.05$, $t = 0.16$ and $t = 0.20$. The solid line is the 1D reference solution, the dash-dot line is the 2D solution. Left: cylindrical problem, right: spherical problem.

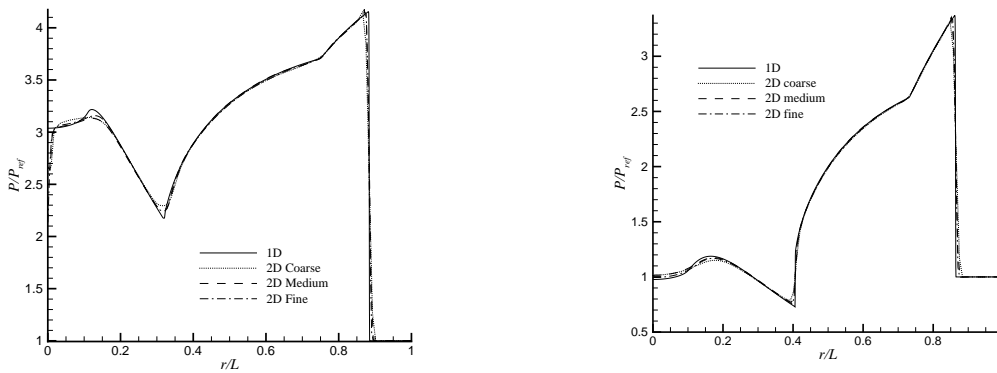


Figure 4: Comparison of pressure signals along the $y = 0$ axis for the explosion problem at time $t = 0.16$ for different grid resolutions against one dimensional simulations. Left: cylindrical case, right: spherical case.

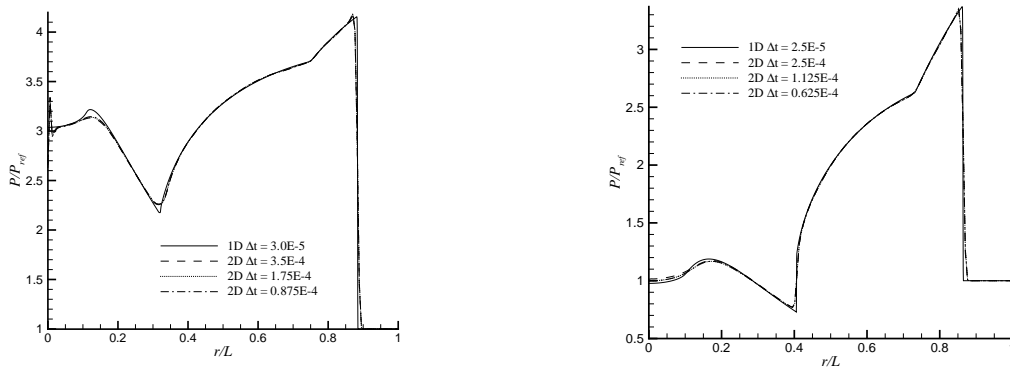


Figure 5: Comparison of pressure signals along the $y = 0$ axis for the explosion problem at time $t = 0.16$ for diverse time steps against one dimensional simulations. Left: cylindrical case, right: spherical case.

in all computations. Time step dependence can be appreciated from figure 5, where the pressure signals for three different time steps is shown at time $t = 0.16$ for the medium grid. Numerical results are found to be independent from the chosen time step. In all computations in the $R-\theta$ plane, the solution at the grid node located at the origin of the reference system suffers from a significant undershoot, which however does not propagate inside the domain and does not affect the correct propagation of the reflected waves.

In figure 6, numerical results for the so-called implosion problem¹ are shown for both the cylindrical and spherical case. The initial condition is as in the explosion problem, where now the high pressure region is the outer one and the low pressure region is at $R \leq 0.5$. The grid is the fine grid and the time step is 2.5×10^{-4} for the cylindrical ($R-\theta$) case and 1.5×10^{-4} for the spherical ($Z-R$) one. A rarefaction wave propagates towards the outer boundary; a shock wave and a contact surface propagates inwards. The intensity of the shock increases as it moves towards the origin; when the shock wave is reflected at the origin, a region of high pressure/temperature is observed. In the spherical case, this effect is more evident.

Converging shock waves are used in experimental facility to attain high pressure and high temperature state to be used e.g. in Inertial Confinement Fusion (ICF) or sonoluminescence studies. A major drawback of this kind of technique is the occurrence of shock front instabilities in converging cylindrical and spherical shock waves.⁵ Recently, the inclusion of obstacles in the flow field has been proposed as a mean to transform a converging cylindrical shock into a polygonal one,¹²⁻¹⁴ which does not suffer from the aforementioned front instabilities. An example is given in figure 7, where four cylindrical obstacles are used to transform the converging cylindrical shock wave into a square-shaped shock wave. The computational domain is made discrete by an unstructured grid made of 36 713 nodes and 72 612 triangle. In all computations with obstacles, the Courant-Friedrichs-Lewy number is 0.5. The symmetry of the problem is not enforced to reduce

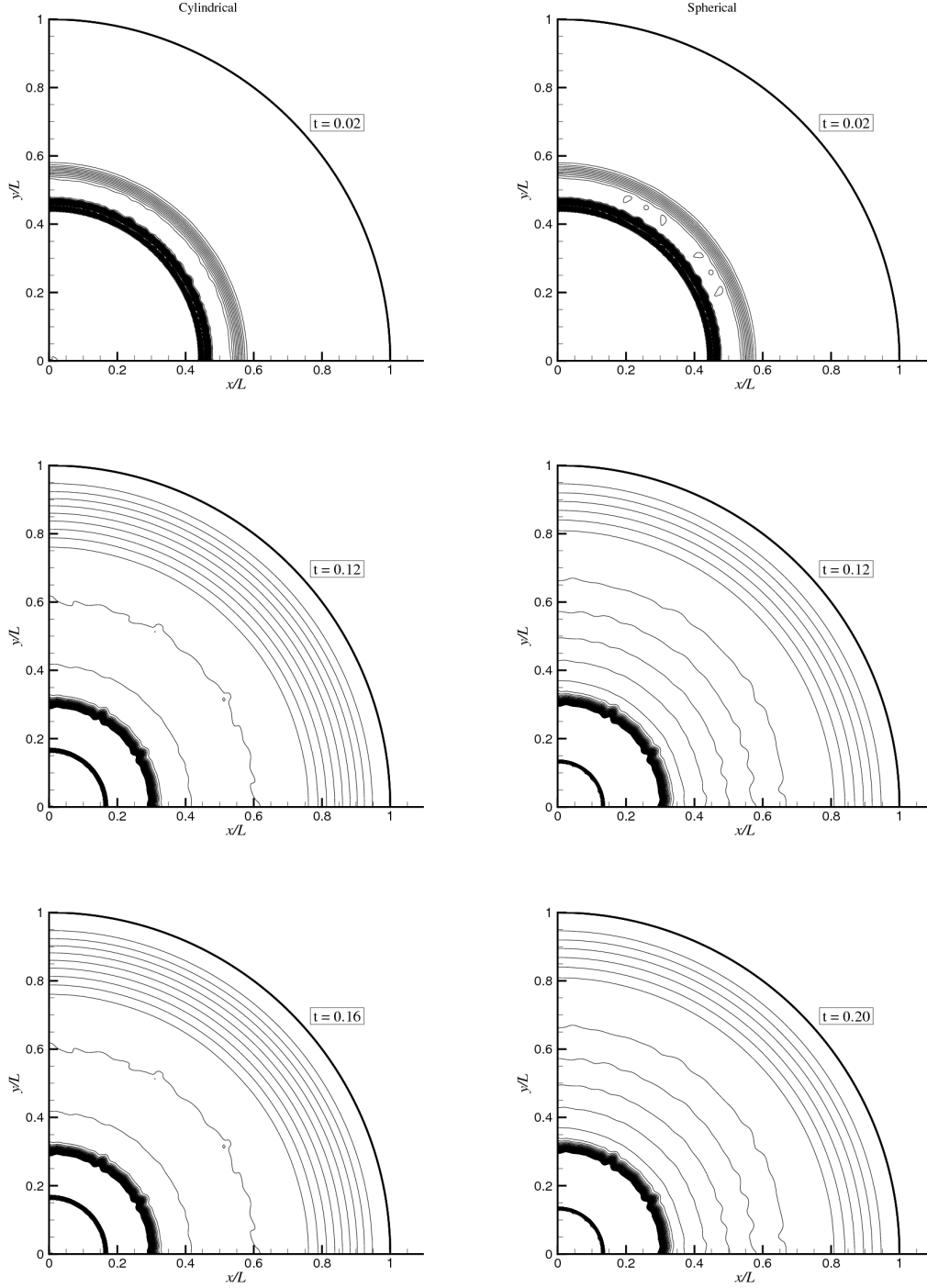


Figure 6: Density isolines for the implosion problem. Each isoline corresponds to a density difference of $\Delta\rho/\rho_{\text{ref}} = 0.03$. Left row: cylindrical problem, right row: spherical problem. Time increases from top to bottom.

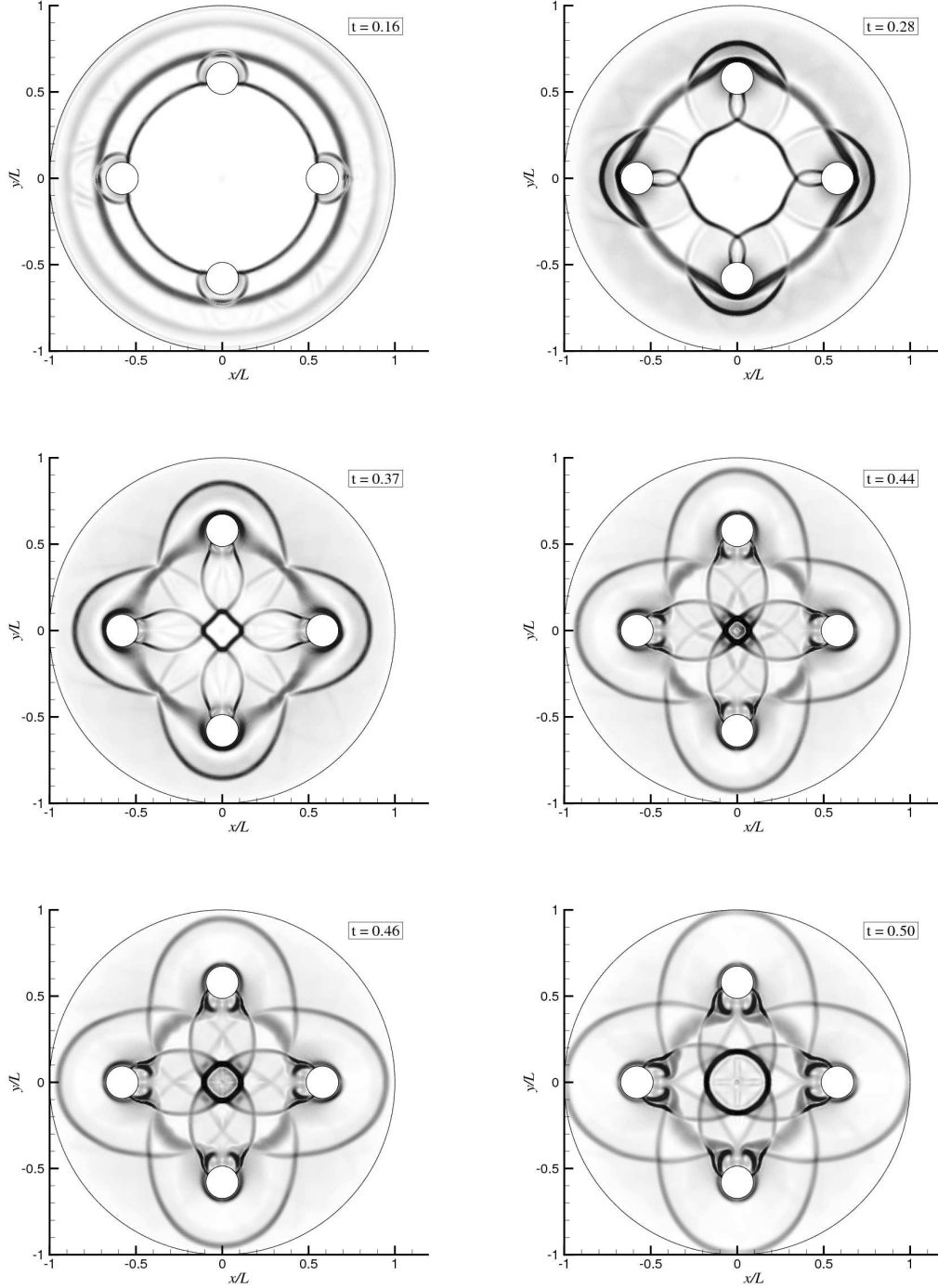


Figure 7: Numerical Schlieren of the cylindrical implosion problem with four cylindrical obstacles. Time increases from left to right and from top to bottom. The first three plots show the converging shock wave before reflection at the origin.

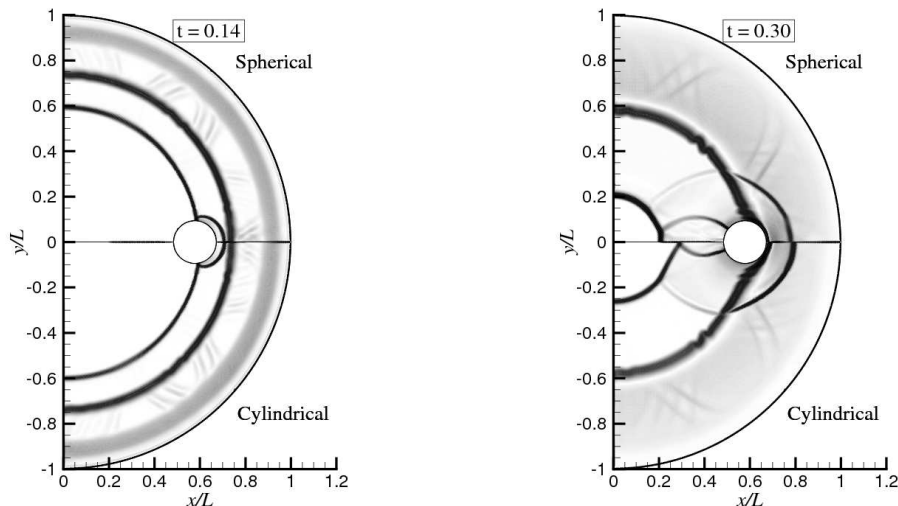


Figure 8: Numerical Schlieren of the implosion problem with two obstacles (only one is shown because of symmetry). Left: before shock-obstacle interaction. Right: after shock-obstacle interaction. In each plot, the upper half shows the spherical problem, the lower half the cylindrical one.

the computational burden to verify the capability of the scheme to reproduce correctly symmetry boundaries within the domain. The initial conditions correspond to a pressure and density discontinuity at $R = 0.875$, with a pressure and density ratio of 10 across the initial discontinuity. Numerical results are in good agreement with similar cases available in the literature, where additional details on the problem geometry can be found.¹²

In the present study, the case of a spherical converging shock wave is also considered. As mentioned above, for a given pressure/density initial ratio, a spherical shock wave results in higher pressure/temperature at the origin. Figure 8 reports on a comparison between spherical shock wave being diffracted from a spherical obstacle and a cylindrical shock wave encountering a cylindrical obstacle. In the computations, a grid made of 22 649 nodes and 44 781 triangles was used. In the cylindrical case, the interaction between the shock and the obstacle results in the formation of a planar portion of the shock wave, which for the four-obstacle case eventually results in the formation of a square-shaped shock. This is not the case for the spherical obstacle, in which the modification of the shock geometry is less relevant. This is possibly due to the limited area ratio of the obstacle frontal area and that of the propagating shock waves.¹⁵ A geometry more similar to that considered in the cylindrical case would have been obtained by inserting a number of spherical obstacles providing the same area blockage and would have required complex three-dimensional simulations, which are left for future investigations.

4 CONCLUSIONS

A novel unstructured-grid hybrid finite element/volume method in a cylindrical reference was presented. The proposed approach represents an extension of the well-known node-pair scheme of Selmin³ to the case of cylindrical coordinates and moves from suitable equivalence conditions linking finite element integrals to the corresponding finite volume metrics, such as the cell volume or the integrated normals. Differently from previous references, equivalence conditions were derived here without introducing any approximation and allowed to determine all needed finite volume metric quantities from finite element ones.

Numerical results are presented for two-dimensional compressible flows in the polar and axisymmetric cases. These include numerical simulation of the explosion and implosion problems, in which an initial discontinuity in pressure results in the formation of a diverging and converging shock, respectively. The computed pressure and density profile agree fairly well with one-dimensional simulation in cylindrical and spherical symmetry over a very fine grid.

The proposed approach was applied to the simulation of converging shock waves including their interaction with cylindrical obstacles, a case study that is relevant for Inertial Confinement Fusion (ICF) and sonoluminescence studies. Cylindrical obstacles are placed within the flow field to modify the cylindrical shock geometry into that of a polygonal shock wave, to increase the shock front stability. In the present study, spherical obstacles were considered to modify the geometry of a spherical converging shock waves. With respect to their cylindrical counterpart, spherical obstacles introduces a smaller modification to the shock front and are not sufficient, at least for the geometry considered here, to reshape the spherical shock wave into a polygonal one.

REFERENCES

- [1] L. I. Sedov. *Similarity and dimensional methods in mechanics*. Academic Press, 1959.
- [2] L. Fezou and B. Stoufflet. A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 84(1):174–206, 1989.
- [3] V. Selmin. The node-centred finite volume approach: bridge between finite differences and finite elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 102:107–138, 1993.
- [4] V. Selmin and L. Formaggia. Unified construction of finite element and finite volume discretizations for compressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39:1–32, 1996.
- [5] H. B. Chen, L. Zhang, and E. Panarella. Stability of imploding spherical shock waves. *Journal of Fusion Energy*, 14:389–392, 1995.

- [6] A. Guardone and L. Vigevano. Finite element/volume solution to axisymmetric conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 224:489–518, 2007.
- [7] J. Donea and A. Huerta. *Finite element methods for flow problems*. Wiley, 2002.
- [8] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for conservation laws and hyperbolic systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] A. Harten and J. M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 50:253–269, 1983.
- [10] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *J. Comput. Phys.*, 14:361–370, 1974.
- [11] V. Venkatakrishnan and D. J. Mavriplis. Implicit method for the computation of unsteady flows on unstructured grids. *J. Comput. Phys.*, 127:380–397, 1996.
- [12] V. Eliasson, N. Tillmark, A. J. Szeri, and N. Apazidis. Light emission during shock wave focusing in air and argon. *Phys. Fluids*, 19:106106, 2007.
- [13] V. Eliasson, M. Kjellander, and N. Tillmark. Regular versus Mach reflection for converging polygonal shocks. *Shock Waves*, 17:43–50, 2007.
- [14] V. Eliasson, N. Apazidis, and N. Tillmark. Controlling the form of strong converging shocks by means of disturbances. *Shock Waves*, 17:29–42, 2007.
- [15] H. Shi and K. Yamamura. The interaction between shock waves and solid spheres arrays in a shock tube. *Acta Mech. Sinica*, 20(3):219–227, 2004.

HYBRID FINITE ELEMENT/VOLUME SOLUTION OF COMPRESSIBLE FLOWS IN SPHERICAL COORDINATES

Dante De Santis, Gianluca Geraci and Alberto Guardone

[†]Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano Via La Masa, 34, 20156
Milano, Italy
e-mail: alberto.guardone@polimi.it

Key words: Compressible flows, Shock waves, Explosion/Implosion problem, Spherical coordinates, Finite Element/Volume Methods

Abstract. *An hybrid finite element / finite volume scheme for compressible flows in spherical coordinates is presented. The proposed approach is based on an unified description of finite element and finite volume discretizations over unstructured grids, which allows to write the discrete form of each differential operator using the most suitable space discretization technique. For example, in viscous flows, it is possible to use the finite volume and the finite element to compute the advection and dissipation terms, respectively, within the same algorithm. Such a possibility is expected to be of use in the study of the effect of viscosity on e.g. the formation of stable shock fronts in spherically symmetric problems and on the dynamics of Richtmyer-Meshkov instabilities in spherical implosions. The relation linking the two schemes is obtained via the introduction of suitable equivalence conditions, which relate analogous metric quantities defined over the computational grid, such as for example the cell volume and the finite element mass matrix. Equivalence conditions are derived here for the first time for spherical coordinates. Computational results for the explosion and implosion problems agree fairly well with one-dimensional simulations.*