



POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Analisi numerica e sperimentale dello stato di sforzo di elementi criccati in contatto hertziano in presenza di fluido interposto

Relatore: Prof. Mario Guagliano

Correlatore: Prof. Michele Sangirardi

Giorgio Vallone matr. 725774

Anno Accademico 2009-2010

*Pour examiner la vérité,
il est besoin une fois en sa vie,
de mettre toutes choses en doute
autant qu'il se peut.*

René Descartes, Les Principes de la philosophie, 1644

Indice

1	Introduzione	15
2	Analisi del contatto	19
2.1	Contatto normale	20
2.2	Esempio: azioni normali nel contatto ruota-rotaia	27
2.3	Campo di sforzi interno ai corpi a contatto	27
2.3.1	Equazioni generali	28
2.3.2	Forza applicata in un punto di un solido infinito	29
2.3.3	Sforzi in un recipiente sferico sottoposto a pressione uniforme	30
2.3.4	Forza applicata sulla superficie di un corpo semi-infinito . . .	32
2.3.5	Sforzi lungo una generica retta appartenente al semispazio . .	35
2.3.6	Sforzi per distribuzione di pressione qualsiasi sulla superficie del semipiano	35
2.4	Sforzi nel caso del binario	36
3	Analisi Sperimentale	39
3.1	Teoria della similitudine	39
3.1.1	Problema elastico piano	39
3.1.2	Stato piano di deformazione	40
3.1.3	Stato di sforzo piano	41
3.1.4	Similitudine lineare	41
3.1.5	Similitudine nel caso di non linearità	42
3.2	Allestimento del modello	44
3.2.1	Realizzazione sandwich	44
3.2.2	Realizzazione cricca	47
3.2.3	Validazione della struttura a sandwich	49
3.2.4	Tensioni residue	49
3.3	Sistema di carico	49
3.4	Taratura del modello	50
3.5	Sforzi in assenza di cricca	51
3.6	Determinazione sperimentale dei parametri della frattura	53
3.6.1	Descrizione del campo di sforzi nell'intorno della frattura . . .	53
3.6.2	Analisi multiparametro	56
3.7	Determinazione dei SIF per il binario fratturato	59
3.8	Modello sandwich a cinque strati	60
3.9	Risultati	62

4	Analisi numerica: il metodo delle funzioni peso (WF)	67
4.1	Introduzione	67
4.1.1	Relazioni basilari	67
4.1.2	Derivazione della WF	69
4.1.3	Interpretazione fisica della WF	70
4.2	Funzione peso per cricca inclinata in un semipiano	70
4.3	SIF per carico concentrato agente sulla superficie	73
4.4	Funzione di Green	73
4.4.1	Integrazione	77
4.4.2	Dominio di integrazione	78
4.4.3	Integrale interno in db	79
4.4.4	Integrali successivi al primo	80
4.4.5	Analisi dei casi di singolarità	83
4.5	COD e pressione di contatto nel caso di cricca parzialmente chiusa	85
4.6	COD, pressioni di contatto e SIF per carico concentrato mobile in assenza di attrito	88
4.7	COD, pressioni di contatto e SIF per carico distribuito Hertziano	88
4.8	Modello con fluido interposto	95
4.9	COD, pressioni di contatto e SIF in presenza di fluido	101
4.10	Confronti	102
5	Analisi mediante elementi finiti	111
5.1	Contatto: modellazione	111
5.2	Simulazione di contatto Hertziano	112
5.3	Modellazione FEM della cricca	112
5.4	Valutazione numerica dei parametri della frattura	113
5.4.1	J-integral	114
5.4.2	SIFs	114
5.4.3	T-stress	116
5.5	Simulazione dell'elemento criccato	117
5.6	Considerazioni sull'introduzione del fluido nella simulazione	119
6	Conclusioni	121
6.1	Sviluppi futuri	122
	Bibliografia	125
	Ringraziamenti	129
A	Cenni di Fotoelasticità	131
A.1	Superfici indicatrici	131
A.2	Stress-Optic law	132
A.3	Il polariscopio	133
A.3.1	Piani polarizzati	133
A.3.2	Piani d'onda	134
A.3.3	Polariscopio piano e circolare	135
A.4	Modello sottoposto ad un campo di sforzi in un polariscopio circolare	137

B Codice Matlab	139
B.1 Contatto Hertziano	139
B.2 Soluzione del semispazio elastico	141
B.3 Soluzione del problema senza fluido interposto	143
B.3.1 Subroutine	147
B.4 Soluzione del problema con fluido interposto	149
B.4.1 Subroutine	155

Elenco delle figure

1.1	Componenti di cuscinetti con esteso danneggiamento superficiale . . .	16
1.2	Due esempi di vie ferroviare criccate	17
1.3	A sinistra: ingranaggio con danneggiamento superficiale. In queste condizioni l'elemento è ancora in grado di funzionare, ma ulteriori danneggiamenti potrebbero portare alla frattura di un dente. A destra: Danneggiamento microscopico sulla via di corsa di un cuscinetto a rotolamento. L'immagine è rappresentativa dell'inizio della fessurazione, che porta ai risultati catastrofici di figura 1.1	17
2.1	Sistema di riferimento per la descrizione delle superfici a contatto . .	20
2.2	Disposizione degli assi dei corpi a contatto (sinistra); triangolo utilizzato per il calcolo delle costanti (destra)	21
2.3	Ipotetica configurazione deformata	22
2.4	Pressione all'interfaccia tra il binario e la ruota con $R_r = 800 \text{ mm}$, $F_n = 88000 \text{ N}$ (sinistra), $F_n = 1000 \text{ N}$ (destra)	26
2.5	Schema del contatto ruota rotaia	27
2.6	Schema per il calcolo della costante B	29
2.7	Applicazione di due forze P ad una distanza d	31
2.8	Elementino infinitesimo di dimensioni $(dR, d\psi dR)$	32
2.9	Schema per il calcolo delle tensioni causate dall'applicazione di una forza sulla superficie di un corpo semi-infinito	33
2.10	Proiezione delle pressioni all'interfaccia, a destra dimensionali ($[MPa]$) e a sinistra adimensionalizzate secondo la pressione massima del caso non proiettato	36
2.11	Valore di σ , adimensionalizzato secondo la massima pressione lineare, sulla lunghezza della retta di inclinazione θ , per vari valori della distanza della posizione del carico applicato con $L < 0$ (sinistra) e $L > 0$ (destra)	37
2.12	Valore di τ , adimensionalizzato secondo la massima pressione lineare, sulla lunghezza della retta di inclinazione θ , per vari valori della distanza della posizione del carico applicato con $L < 0$ (sinistra) e $L > 0$ (destra)	37
3.1	Schema del problema elastico piano	40
3.2	A sinistra: costruttivo del modello sandwich realizzato. A destra: modello sandwich realizzato	45

3.3	Tavole quotate delle componenti del modello: a sinistra componente in policarbonato, a destra componenti in polimetacrilato, identici tra di loro	46
3.4	Realizzazione della cricca: rappresentato l'intaglio desiderato	47
3.5	Ciclo termico utilizzato per la distensione del policarbonato	48
3.6	Sistema utilizzato per caricare il modello	50
3.7	Sperimentazione condotta per ricavare la costante fotoelastica del policarbonato utilizzato: a sinistra la strumentazione utilizzata, a destra una delle immagini fotoelastiche acquisite	51
3.8	Acquisizione con modello di solo policarbonato, per carico normale pari a 430 N (sinistra) e 530 N (destra)	52
3.9	Acquisizione con il modello sandwich, per carico normale pari a 430 N (sinistra) e 530 N (destra)	53
3.10	Modi di carico.	54
3.11	Divisione della zona adiacente all'apice della cricca.	54
3.12	Acquisizioni con rotolamento a carico costante a secco (a sinistra), con tellus oil 46 (a destra) e agip 100 (in basso)	59
3.13	Andamento delle frange 'visto' dal programma multiparametro nel caso della prima delle acquisizioni della figura 3.12	60
3.14	A sinistra: bolla d'aria nella fessura riempita d'acqua. A destra: posizionamento del fluido sopra al modello	61
3.15	Immagine ottenuta al polariscopio per il primo modello a cinque strati fessurato in presenza di fluido: si notino il contatto multiplo tra ruota e binario e lo strato di fluido in movimento a contatto con la ruota	62
3.16	Ricostruzione delle frange in presenza di fluido per fessura inclinata di 30 gradi per il primo modello a cinque strati	63
3.17	Immagine ottenuta al polariscopio per il secondo modello a cinque strati fessurato in presenza di fluido	64
3.18	Ricostruzione delle frange in presenza di fluido per fessura inclinata di 30 gradi per il secondo modello a cinque strati	64
3.19	KI, KII e T-stress ottenuti per il binario per inclinazioni della fessura di 30 e 60 gradi, con carico verticale di 500 N	65
3.20	KI, KII e T-stress ottenuti in presenza di fluido e a secco per la fessura inclinata di 30 gradi, con carico verticale di 750 N	65
4.1	Calcolo dei SIFs per trazioni arbitrarie T , schema geometrico	68
4.2	Sforzi lungo la cricca per la definizione dell'integrale di Bueckner	69
4.3	Schema del problema in esame	71
4.4	Rappresentazione delle WF come SIF prodotti da coppie di forze opposte applicate sui corrispondenti punti sulle facce della cricca	71
4.5	K_I e K_{II} ottenuti permettendo la compenetrazione delle facce per vari angoli di inclinazione della cricca	74
4.6	Carico concentrato viaggiante sulla superficie del binario fratturato	75
4.7	K_I , K_{II} adimensionalizzati per $\theta = 30^\circ$	89
4.8	K_I , K_{II} adimensionalizzati per $\theta = 45^\circ$	89
4.9	K_I , K_{II} adimensionalizzati per $\theta = 60^\circ$	90
4.10	COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 30^\circ$, $L=10$	90

4.11 COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 45^\circ$, $L=10$	91
4.12 COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 60^\circ$, $L=10$	91
4.13 A sinistra: COD lineare per $\theta = 30^\circ$, $L=10$. A destra: COD lineare per $\theta = 45^\circ$, $L=10$	92
4.14 COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 30^\circ$, $L=-10$	92
4.15 COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 45^\circ$, $L=-10$	93
4.16 COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 60^\circ$, $L=-10$	93
4.17 A sinistra: COD lineare per $\theta = 30^\circ$, $L=-10$. A destra: COD lineare per $\theta = 45^\circ$, $L=-10$	94
4.18 A sinistra: COD lineare per $\theta = 30^\circ$, $L=10$. A destra: COD lineare per $\theta = 45^\circ$, $L=-10$	94
4.19 SIF nel caso di carico Hertziano all'aumentare di L , con $\theta = 30^\circ$. . .	95
4.20 Valori del COD normale effettivo per $L = -10$ (sinistra) e $L = 10$ (destra), carico Hertziano	96
4.21 Valori del COD normale effettivo per $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano	96
4.22 Valori della pressione di contatto per $L = -10$ (sinistra) e $L = 10$ (destra), carico Hertziano	97
4.23 Valori della pressione di contatto per $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano	97
4.24 Valori della pressione di contatto (sinistra) e del COD normale (destra) per $L = 40 : 180$, carico Hertziano	98
4.25 Direzione di avanzamento in grado di generare effetto pumping in funzione dell'angolo di inclinazione della fessura	98
4.26 Schema a blocchi del controllo sul volume della fessura	100
4.27 SIF nel caso di carico Hertziano all'aumentare di L , con $\theta = 30^\circ$. . .	103
4.28 Valori del COD normale effettivo. In rosso il COD ottenuto senza considerare la presenza del fluido, in blu con fluido. $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano	103
4.29 Valori della pressione di contatto. In rosso ottenuta senza considerare la presenza del fluido, in blu con fluido. $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano	104
4.30 Valori del COD normale effettivo (sinistra) e della pressione di contat- to(destra) per $L = 40 : 80$	104
4.31 Valori della pressione dell'acqua. $L = 20$ (sinistra), $L = 30$ (destra) e $L = 40 : 80$ (in basso), carico Hertziano	105
4.32 Confronto tra i valori dei SIF ottenuti con fluido (blu) e senza fluido (rosso), per $\theta = 30^\circ$	105
4.33 Confronto tra i valori dei SIF ottenuti con fluido (blu) e senza fluido (rosso), per $\theta = 45^\circ$	106
4.34 Confronto tra i valori dei SIF ottenuti con fluido (blu) e senza fluido (rosso), per $\theta = 45^\circ$	106
4.35 A sinistra: risultati ottenuti da Benuzzi in [15], a destra valori di confronto ottenuti con il metodo qui presentato. $\theta = 45^\circ$	108
4.36 A sinistra: risultati ottenuti da Bower in [14], a destra valori di confronto ottenuti con il metodo qui presentato	108

4.37	A sinistra: risultati ottenuti da Bower in [14], a destra valori di confronto ottenuti con il metodo qui presentato	109
4.38	Andamento del COD ottenuto da Bower	109
5.1	Tensione equivalente di Tresca nella simulazione di contatto ruota-ruota: a sinistra spostamento imposto di 1 mm, a destra 10 mm . .	112
5.2	Scelta dei domini su cui valutare il J-integral	115
5.3	Tensione equivalente di Mises per due condizioni posizioni della ruota	117
5.4	Valori dei parametri della frattura valutati per $\theta = 30^\circ$	118
5.5	Valori dei parametri della frattura valutati per $\theta = 45^\circ$	118
5.6	Valori dei parametri della frattura valutati per $\theta = 60^\circ$	119
6.1	Confronto sperimentale-weight function per gli andamenti del K_I con fluido interposto	123
6.2	Confronto sperimentale-weight function per gli andamenti del K_{II} con fluido interposto	123
A.1	Ellissoide indicatore	131
A.2	Filtro Polaroid	133
A.3	Piano d'onda	134
A.4	Polariscopio piano	135
A.5	Polariscopio circolare	136

Elenco delle tabelle

2.1	Tabella dei coefficienti m e n , come riportata nell'originale lavoro di Hertz	25
2.2	Coefficienti per calcolare m e n con il metodo proposto da Shabana e Berzeri	26
3.1	Rapporto di dosaggio per l' <i>Araldite 2028</i>	45
3.2	Tempi di polimerizzazione del collante in funzione della resistenza al taglio richiesta e alla temperatura di incollaggio	47
3.3	Valori di resistenza garantiti dal produttore	48
3.4	Risultato delle misurazioni fotoelastiche di taratura	52
3.5	Risultati ottenuti nell'analisi delle immagini di figura 3.12	60
4.1	Valori dei coefficienti λ_{ij}	75

Capitolo 1

Introduzione

La propagazione delle cricche a fatica in elementi sottoposti a contatto hertziano è una delle più comuni cause di cedimento per ingranaggi, cuscinetti o rotaie. In questo ambito si distinguono due tipologie di cricche: quelle generate dal contatto tra le superfici e propagate quindi ad una data inclinazione nel pezzo; oppure quelle generate a causa di una inclusione nonmetallica in profondità. In entrambi i casi, la cricca continua a propagare nel materiale prima di causare il distacco di parti della superficie oppure cambiando direzione di propagazione, con possibili conseguenze catastrofiche.

Nel presente lavoro di tesi non sono state analizzate le cricche subsuperficiali, limitando la trattazione a quelle superficiali: esempi di tale problematica sono il *pitting* negli ingranaggi e cuscinetti e *squats* nelle vie ferroviarie. E' importante far presente come in letteratura non sia adottata una terminologia univoca e spesso vengano usati indiscriminatamente i termini *spalling* e *pitting* riferendosi ai fenomeni di fatica da contatto superficiale. Ad esempio, Tallian [1] definisce *spalling* come fatica di contatto macroscopica causata dalla propagazione delle cricche a fatica, mentre riserva il termine *pitting* ai danneggiamenti superficiali causati da cause diverse dalla propagazione delle cricche quali corrosione o erosione elettrica. Kuhnell [2] definisce invece con *pitting* la formazione di piccoli crateri a causa di difetti superficiali, e con *spalling* la formazione di profonde cavità causate da difetti subsuperficiali. La mancanza di una standardizzazione nella terminologia è probabilmente dovuta al fatto che le cause fisiche del *pitting* e dello *spalling* non sono ancora ben chiare.

Le cricche possono essere originate dal ripetuto passaggio dei carichi di contatto oppure da difetti quali *dents* o *scratches* sulla superficie, e propagano in genere con una caratteristica inclinazione relativamente alla superficie di contatto. Raggiungendo una lunghezza critica, le cricche potrebbero biforcarsi: negli ingranaggi e nei cuscinetti (figure 1.1 e 1.3), la cricca, dopo la biforcazione, propaga fino alla superficie, causando il distacco di un pezzo di materiale e quindi generando un cratere (*pit*) sulla superficie. Nei binari ferroviari (figura 1.2), può propagare, dopo la biforcazione, orizzontalmente, causando la frattura del binario. Maggiori dettagli possono essere trovati in [3], [5] e [6].

E' lecito domandarsi in quali condizioni sia favorito l'innesco sub-superficiale della fessura e in quali un innesco superficiale. In [1] viene riportato che elevata finitura superficiale tende a generare *spalling*, mentre una normale finitura da rettifica comporta *pitting*. In [4] studiando gli acciai per cuscinetti, Nelias et al. hanno scoperto

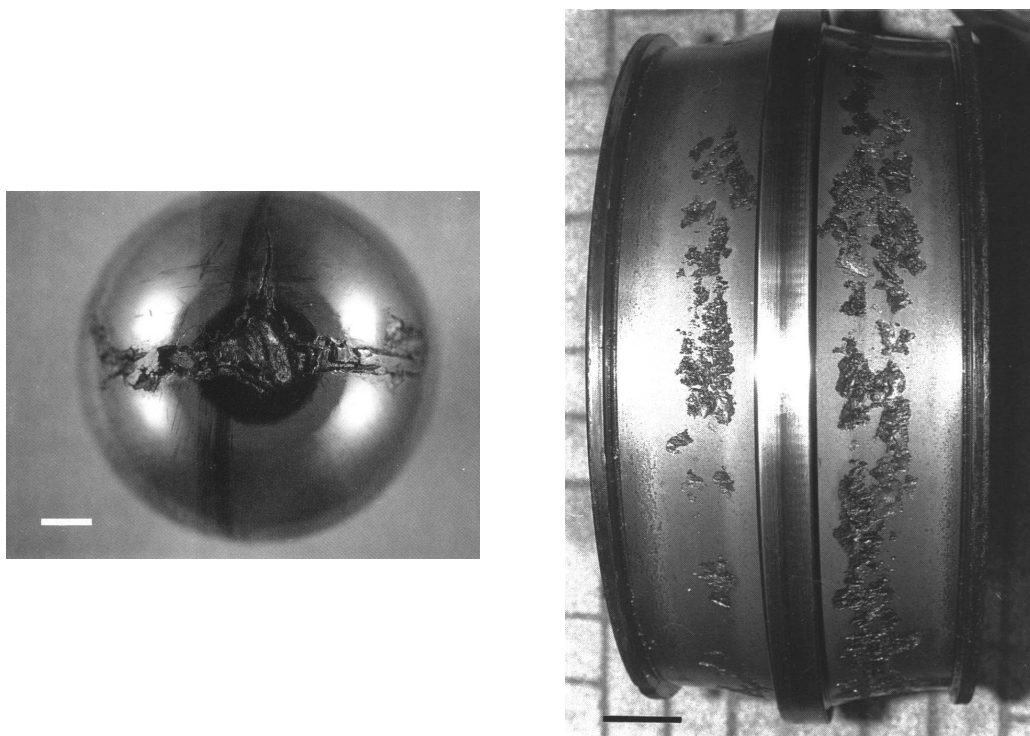


Figura 1.1 – Componenti di cuscinetti con esteso danneggiamento superficiale

che qualora la rugosità sia in grado di produrre un rapporto fra l'altezza del meato e rugosità equivalente minore dell'unità ($\lambda > 1.0$) la fatica di contatto è sempre di carattere superficiale, mentre nel caso contrario, elevata finitura superficiale e buona lubrificazione ($\lambda < 1$), la fatica di contatto è sempre di carattere sub-superficiale. L'innesco del *pitting* è quindi da considerarsi di natura tribologica e causato dal contatto fra le creste della rugosità.

Nel 1935 Way [7] mostrò come cricche da fatica di contatto possano essere prodotte in laboratorio facendo rotolare due dischi contro un terzo disco caricato; da allora vi è stato un grande lavoro sperimentale per investigare il comportamento di queste cricche che ha rivelato come la propagazione possa avvenire solo in presenza di fluido lubrificante interposto tra le superfici in contatto.

Come detto, il meccanismo che causa la propagazione di queste cricche non è ancora completamente compreso; è tuttavia generalmente accettato che esse propagano per un meccanismo di fatica, guidato dagli sforzi ciclici associati al ripetersi del contatto. E' d'altra parte estremamente difficile giustificare la propagazione di una cricca in un campo di sforzi di compressione: questi agirebbero per chiudere la fessura e non per aprirla. Tre principali ipotesi sono state fatte per giustificare tale apparente incongruenza:

- le fessure potrebbero propagare a causa dello scorrimento e quindi secondo il secondo modo di carico;

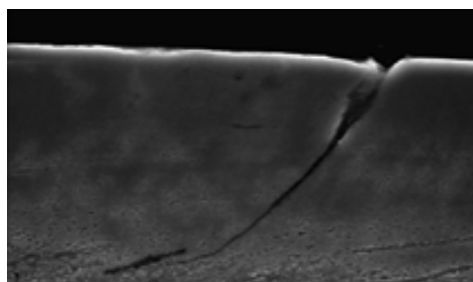


Figura 1.2 – Due esempi di vie ferroviarie criccate

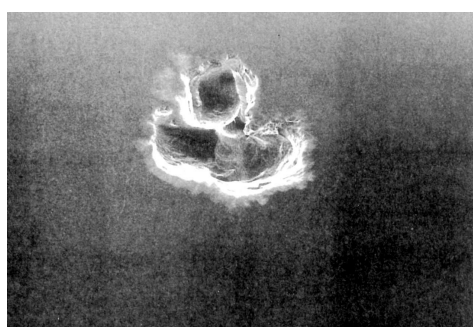


Figura 1.3 – A sinistra: ingranaggio con danneggiamento superficiale. In queste condizioni l'elemento è ancora in grado di funzionare, ma ulteriori danneggiamenti potrebbero portare alla frattura di un dente. A destra: Danneggiamento microscopico sulla via di corsa di un cuscinetto a rotolamento. L'immagine è rappresentativa dell'inizio della fessurazione, che porta ai risultati catastrofici di figura 1.1

- il fluido potrebbe essere forzato nella fessura dal carico, spingendo le facce della fessura lateralmente e quindi generando un'apertura secondo il primo modo;
- il fluido potrebbe essere intrappolato nella cricca e susseguentemente essere spinto verso l'apice.

Sono stati sviluppati diversi modelli teorici del fenomeno per investigare questi meccanismi di propagazione della cricca. Keer e Bryant hanno sviluppato una tecnica [9] che usa la distribuzione delle dislocazioni per rappresentare una fessura bidimensionale in un semispazio, e, in [8], hanno analizzato il fenomeno in questione, sostenendo il primo dei meccanismi ipotizzati. Murakami e Nemat-Nasser [10] hanno invece sviluppato una tecnica detta *body force method* per analizzare cricche tridimensionali: in [11], [12] e [13] si trovano i risultati ottenibili con questo metodo per il problema in esame. I risultati presentano fattori di intensificazione degli sforzi in grado di provocare la propagazione della cricca, e darebbero ragione del fenomeno utilizzando la seconda ipotesi, ovvero del fluido forzato. In [14], utilizzando un'estensione del metodo delle dislocazioni sviluppato da Keer e Bryant [9], viene

analizzato il fenomeno favorendo l'ipotesi dell'intrappolamento del fluido. In [15] è presente un'analisi FEM, in cui vengono considerati sia la propagazione causata da forzamento che da intrappolamento del fluido. In ultimo, in [16] è presentata una analisi FEM con intrappolamento del fluido.

Come deducibile da quanto esposto in letteratura manca un riscontro sperimentale che possa chiarire quale dei metodi sviluppati sia da preferirsi. Nella presente tesi sono state quindi condotte delle analisi sperimentali con il metodo della fotoelasticità, ricavando i valori dei fattori di intensificazione degli sforzi mediante analisi multiparametrica. I risultati ottenuti sembrano confermare il meccanismo di intrappolamento del fluido. Si è quindi sviluppato, utilizzando la tecnica delle WF, un modello numerico in grado di tener conto della presenza del fluido, che confermerebbe anche esso il meccanismo di intrappolamento. In ultimo è stata presentata un'analisi FEM in assenza di fluido.

Capitolo 2

Analisi del contatto

Nell'analizzare il possibile avanzamento della frattura nei corpi a contatto si utilizza un metodo simile a quello proposto in [17]: in tale lavoro vengono prima calcolate le azioni scambiate tra i corpi a contatto e quindi il campo di sforzi interno al corpo non criccato, che sono quindi il dato di partenza per un'analisi FEM. Nel nostro caso invece si useranno questi dati per impostare il problema con le Weight Functions.

Si distinguono due tipologie di contatto; il contatto tra due corpi rigidi può avvenire infatti in un singolo punto o su un'area definita, in relazione alla forma dei corpi. L'approccio metodologico di analisi del fenomeno è diverso qualora la regione di contatto tra i corpi sia una superficie oppure un punto, o una linea. Applicando un carico ai corpi, in modo da comprimerli l'uno contro l'altro, si avrebbe un'area di contatto di dimensioni rilevanti, nel primo tipo di contatto, e un'area di dimensione nettamente minore nella seconda condizione. Una prima teoria riguardante questo fenomeno fu esposta da Heinrich Hertz, il quale propose un'area di contatto ellittica ed un contatto del secondo tipo, visto la marcata differenza tra le geometrie superficiali dei corpi. A causa dell'elasticità dei corpi e dell'elevato valore del carico esterno, alcuni punti che interessano le superfici a contatto possono scorrere relativamente tra loro o microsaldarsi. Per questi fenomeni, sviluppati dal normale rotolamento e strisciamento della ruota sulla via di corsa, si generano sul sistema sia forze tangenziali che momenti di spin meglio conosciuti in letteratura come *tangential creep forces* e *creep spin moment*. Queste forze implicano importanti effetti sulla direzione e la stabilità del veicolo ferroviario.

Il problema del contatto è suddiviso in problema normale e tangenziale. Nel problema normale, dati due corpi con certe caratteristiche elastiche e geometriche, si determinano la forma e la dimensione dell'area di contatto e la distribuzione delle azioni normali alla superficie dei corpi nel contatto. Nel problema tangenziale, data l'area di contatto e la distribuzione delle azioni normali si determinano le azioni tangenziali alla superficie dei corpi nel contatto, in modulo, direzione e verso.

Solitamente si ricorre all'ipotesi di quasi identità per semplificare il problema, verificata quando:

1. la dimensione dell'area di contatto dei due corpi sia piccola rispetto alla dimensione dei corpi (contatto non conforme), ossia i due corpi possono essere assimilati a due semispazi elastici;

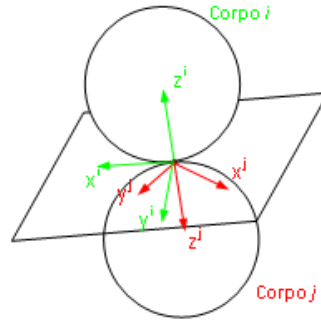


Figura 2.1 – Sistema di riferimento per la descrizione delle superfici a contatto

2. le caratteristiche elastiche (E, ν, G, \dots) dei due corpi a contatto siano simili e i corpi subiscano solo deformazioni elastiche.

In tale caso è possibile studiare separatamente il problema normale e quello tangenziale, in quanto risultano disaccoppiati.

2.1 Contatto normale

Nel 1881 Heinrich Hertz pubblicò la prima teoria fondamentale per il contatto normale [42], [43]. Nell'ipotesi di:

- linearità: è necessario che il materiale dei corpi sia schematizzabile come lineare ed elastico, inoltre deve essere isotropo e omogeneo. In ultimo le equazioni che definiscono la cinematica del sistema devono anch'esse essere lineari;
- assenza di attrito (come già detto grazie all'ipotesi di quasi identità è possibile comunque supporre l'attrito inizialmente nullo ed introdurlo solo in seguito);
- le superfici dei due bordi a contatto devono essere approssimabili con un polinomio di secondo grado.

Ipotizzando inoltre che la forma della superficie dei corpi a contatto i, j sia esprimibile con un funzionale del tipo:

$$\begin{aligned} z^i &= A^i(x^i)^2 + B^i(y^i)^2 + C^i(c^i y^i) + \dots \\ z^j &= A^j(x^j)^2 + B^j(y^j)^2 + C^j(c^j y^j) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

con $A^{i,j}$, $B^{i,j}$, $C^{i,j}$ costanti dipendenti dalla geometria dei corpi. Con riferimento alla figura 2.1, è possibile esprimere il divario tra le superfici a contatto come:

$$h = z^i - z^j \quad (2.2)$$

Sostituendo l'espressione 2.1 nella 2.2 otteniamo:

$$h = A(x)^2 + B(y)^2 + C(xy) + \dots \quad (2.3)$$

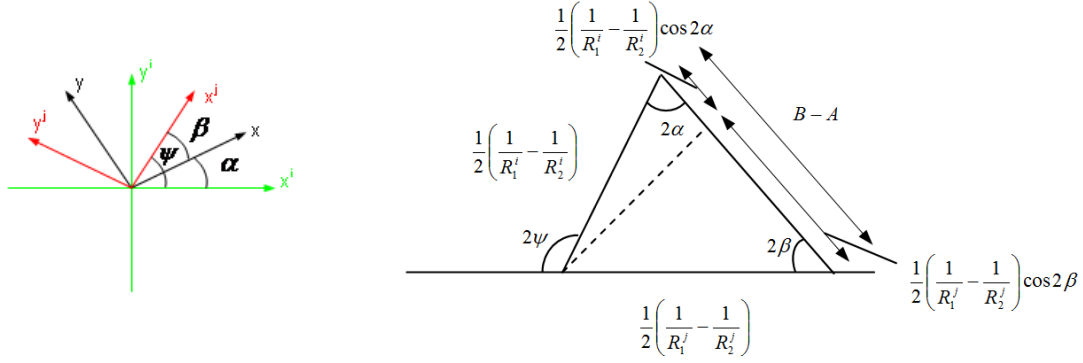


Figura 2.2 – Disposizione degli assi dei corpi a contatto (sinistra); triangolo utilizzato per il calcolo delle costanti (destra)

Imponendo dei valori di $x^{i,j}$ e $y^{i,j}$ per i quali il prodotto $x^{i,j}y^{i,j}$ dia valore nullo, possiamo riscrivere le 2.1 come:

$$\begin{aligned} z^i &= \frac{1}{2R_1^i}(x^i)^2 + \frac{1}{2R_2^i}(y^i)^2 \\ z^j &= - \left(\frac{1}{2R_1^j}(x^j)^2 + \frac{1}{2R_2^j}(y^j)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

la 2.2 diventa invece:

$$h = A(x)^2 + B(y)^2 = \frac{1}{2R_1}A(x)^2 + \frac{1}{2R_2}B(x)^2 \quad (2.5)$$

Dove sono stati introdotti i raggi $R_1^{i,j}$ e $R_2^{i,j}$, vincolati a soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z^{i,j}}{(\partial x^{i,j})^2} &= \frac{1}{R_1^{i,j}} \\ \frac{\partial^2 z^{i,j}}{(\partial y^{i,j})^2} &= \frac{1}{R_2^{i,j}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

E' possibile ricavare la costante C , pari a:

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \sin 2\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) \sin 2\alpha \quad (2.7)$$

Poichè per avevamo imposto $C = 0$, dalla precedente è possibile ricavare il seguente vincolo:

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right)}{\sin 2\beta} \quad (2.8)$$

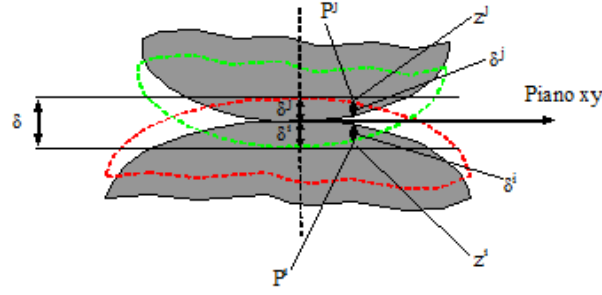


Figura 2.3 – Ipotetica configurazione deformata

che permette di costruire il triangolo di figura 2.2. Sulla base di considerazioni geometriche, otteniamo:

$$B - A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \cos 2\beta =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) \left(\frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \cos 2\psi} \quad (2.9)$$

Nel contatto ruota-ruotaia si ipotizza solitamente $\psi = 0$:

$$B + A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^i} + \frac{1}{R_2^i} + \frac{1}{R_1^j} + \frac{1}{R_2^j} \right) \quad (2.10)$$

Dalla 2.5 e la precedente, si osserva che è stato definito un contorno ellittico con rapporto tra assi pari a $\sqrt{A/B}$. Per definire la dimensione dell'area di contatto ellittica si ipotizza l'azione di un carico di intensità F_n che comprime i due corpi l'uno contro l'altro. A causa della pressione all'interfaccia, le superfici dei corpi subiscono uno spostamento verticale di un valore u_i e u_j rispettivamente. Qualora i punti P^i e P^j (riferimento alla figura 2.3) coincidessero, la deformazione totale sarebbe:

$$u^i + u^j + h = \delta^i + \delta^j \quad (2.11)$$

Utilizzando ancora una volta la 2.5 si ricava:

$$u^i + u^j = \delta - A(x)^2 - B(y)^2 \quad (2.12)$$

Indicando con $p(x, y)$ la pressione nel punto di contatto di coordinate (x, y) , è possibile imporre l'equilibrio:

$$F_n = \int \int p dx dy \quad (2.13)$$

Ipotizzando che i corpi a contatto siano infiniti, ovvero che l'area di contatto sia molto piccola rispetto alla dimensione dei corpi, si assume che:

- le componenti degli spostamenti nel punto di contatto svaniscono all'infinito,
- gli sforzi normali lontano dalla zona di contatto sono nulli
- gli sforzi normali agenti sui corpi siano in equilibrio nella zona di contatto
- gli sforzi tangenziali τ_{xz} e τ_{yz} lungo la superficie dei corpi siano nulli

Un andamento di pressione quadratico nell'area di contatto rispetta le condizioni precedenti:

$$p = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.14)$$

dove p_0 è una costante e (a, b) sono i semiassi dell'ellisse definente il contorno del contatto. Sostituendo la 2.14 nella 2.13 si ottiene il valore della costante p_0 in funzione della forza normale:

$$p_0 = \frac{3F_n}{2\pi ab} \quad (2.15)$$

Risostituendo nella 2.14 otteniamo quindi la relazione fondamentale:

$$p = \frac{3F_n}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.16)$$

La pressione p produce uno spostamento u pari a:

$$u = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} (L - M(x)^2 - N(y)^2) \quad (2.17)$$

con E modulo di Young e ν coefficiente di Poisson. (L, M, N) sono tre costanti, ricavabili dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi p_0 ab}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2 + w)^3 (b^2 + w) w}} dw = \frac{\pi p_0 b}{e^2 a^2} (K_e - E_e) \\ N &= \frac{\pi p_0 ab}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2 + w)(b^2 + w)^3 w}} dw = \frac{\pi p_0 b}{e^2 a^2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 E_e K_e \right] \\ L &= \frac{\pi p_0 ab}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2 + w)(b^2 + w) w}} dw = \pi p_0 b K_e \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove (K_e, E_e) sono le funzioni integrali complete di argomento $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, $b < a$. Applicando ai due corpi la 2.13, si ottiene:

$$u^i + u^j = \frac{(L - M(x)^2 - N(y)^2)}{\pi E^{ij}} \quad (2.19)$$

con E^{ij} costante funzione delle proprietà elastiche dei due corpi, pari a:

$$\frac{1}{E^{ij}} = \frac{1 - (\nu^i)^2}{E^i} + \frac{1 - (\nu^j)^2}{E^j} \quad (2.20)$$

Congiungendo ora i risultati 2.12 e 2.19 otteniamo la seconda relazione fondamentale:

$$\delta - Ax^2 - By^2 = \frac{L - M(x)^2 - N(y)^2}{\pi E^{ij}} \quad (2.21)$$

con coefficienti:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{L}{\pi E^{ij}} = \frac{p_0 b}{E^{ij}} K_e \\ A &= \frac{M}{\pi E^{ij}} = \frac{p_0 b}{e^2 a^2 E^{ij}} (K_e - E_e) \\ B &= \frac{N}{\pi E^{ij}} = \frac{p_0 b}{e^2 a^2 E^{ij}} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 E_e - K_e \right]\end{aligned}\quad (2.22)$$

Dalla definizione dei coefficienti si ottengono le seguenti relazioni

$$\frac{B}{A} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{(a/b)^2 E_e - K_e}{K_e - E_e} \quad (2.23)$$

$$\sqrt{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}} = \frac{p_0 b}{E^{ij} a^2 e^2} \sqrt{[(a/b)^2 E_e - K_e] [K_e - E_e]} \quad (2.24)$$

che permettono di ricavare i semiassi dell'ellisse di contatto:

$$a = m \left(\frac{3\pi F_n (K_1 + K_2)}{4K_3} \right)^{1/3} \quad (2.25)$$

$$b = n \left(\frac{3\pi F_n (K_1 + K_2)}{4K_3} \right)^{1/3} \quad (2.26)$$

dove K_1 e K_2 sono costanti che dipendono unicamente dalle proprietà elastiche del primo e del secondo corpo rispettivamente:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1 - (\nu^i)^2}{E^i} \\ K_2 &= \frac{1 - (\nu^j)^2}{E^j}\end{aligned}\quad (2.27)$$

mentre K_3 dipende dalla geometria del problema di contatto, ovvero dai raggi di curvatura dei corpi nella zona di contatto:

$$K_3 = A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^i} + \frac{1}{R_2^i} + \frac{1}{R_2^j} + \frac{1}{R_1^j} \right) \quad (2.28)$$

I coefficienti m e n si trovano tabulati in letteratura, sono già presenti nel lavoro originale di Hertz e sono espressi in funzione dell'angolo θ , pari a:

$$\theta = \arccos(K_4 K_3) \quad (2.29)$$

con K_4 costante funzione ancora della geometria del contatto:

$$K_4 = B - A = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1^i} - \frac{1}{R_2^i} \right) \left(\frac{1}{R_1^j} - \frac{1}{R_2^j} \right) \cos 2\psi} \quad (2.30)$$

Essendo funzione del rapporto tra due quantità geometriche, i coefficienti (m , n), congiuntamente al K_3 introducono la geometria del problema nelle espressioni dei semiassi delle ellisse 2.26. I loro valori sono riportati in tabella 2.1. Molto spesso è necessario ottenere valori per valori di θ differenti da quelli inseriti in tabella. Si

θ (deg)	m	n
0.5	61.400	0.1018
1.0	36.890	0.1314
1.5	27.480	0.1522
2.0	22.260	0.1691
3.0	16.500	0.1964
4.0	13.310	0.2188
6.0	9.790	0.2552
8.0	7.860	0.2850
10.0	6.604	0.3112
20.0	3.813	0.4123
30.0	2.731	0.4930
35.0	2.397	0.5300
40.0	2.136	0.5670
45.0	1.926	0.6040
50.0	1.754	0.6410
55.0	1.611	0.6780
60.0	1.486	0.7170
65.0	1.378	0.7590
70.0	1.284	0.8020
75.0	1.202	0.8460
80.0	1.128	0.8930
85.0	1.061	0.9440
90.0	1.000	1.0000

Tabella 2.1 – Tabella dei coefficienti m e n, come riportata nell'originale lavoro di Hertz

Coefficiente	Valore
A_m	-1.086419052477
B_m	-0.106496432832
C_m	1.35
D_m	1.057885958251
A_n	-0.773444080706
B_n	0.256695354565
C_n	0.2
D_n	-0.280958376499

Tabella 2.2 – Coefficienti per calcolare m e n con il metodo proposto da Shabana e Berzeri

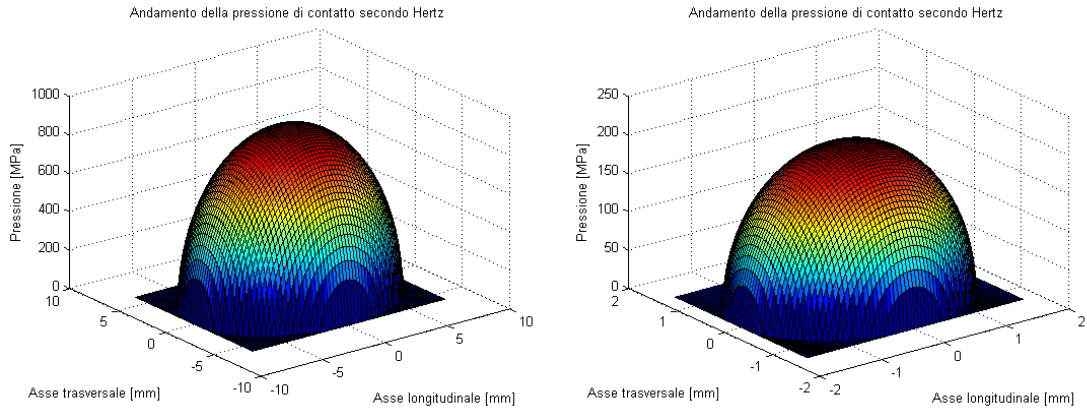


Figura 2.4 – Pressione all'interfaccia tra il binario e la ruota con $R_r = 800$ mm, $F_n = 88000$ N (sinistra), $F_n = 1000$ N (destra)

ricorre quindi ad una interpolazione tra i due valori tra cui è compreso il valore di θ richiesto. Una strada alternativa, proposta da Shabana e Berzeri [39], è utilizzare le equazioni:

$$m = A_m \tan \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{B_m}{\theta C_m} + D_m \quad (2.31)$$

$$n = \frac{1}{A_n \tan \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + 1} + B_n \theta^{C_n} + D_n \sin \theta \quad (2.32)$$

con coefficienti riportati in tabella 2.2.

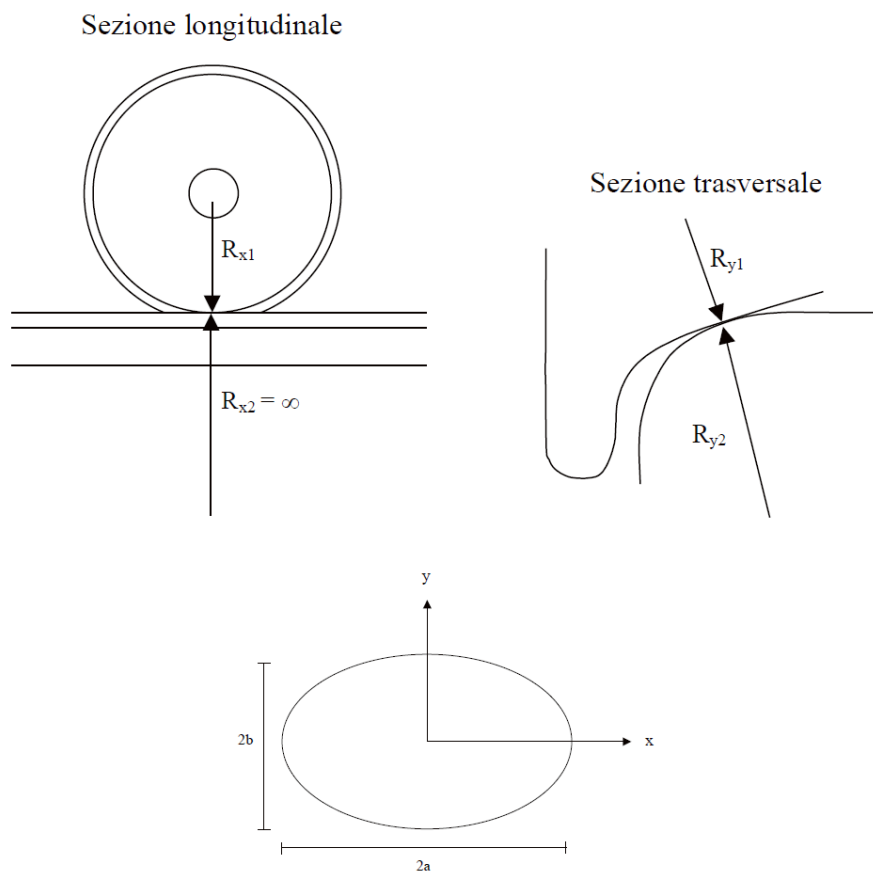


Figura 2.5 – Schema del contatto ruota rotaia

2.2 Esempio: azioni normali nel contatto ruota-rotaia

Il problema è schematizzato in figura 2.5; utilizzando le equazioni ricavate in precedenza e il metodo di Shabana e Berzeri, con un raggio della ruota pari a 800 millimetri e un carico normale pari a 88000. Newton otteniamo l'andamento della pressione mostrato in figura 2.4, e i seguenti valori per i semiassi dell'ellisse di contatto:

$$a = 3.8377 \text{ mm}$$

$$b = 3.0523 \text{ mm}$$

I valori coincidono con buona precisione a quanto ottenuto sperimentalmente in [40].

2.3 Campo di sforzi interno ai corpi a contatto

Una volta nota la distribuzione delle pressioni di contatto, è fondamentale ai fini dell'analisi strutturale valutare il campo di sforzi generato dal contatto. Si presenta in

questa sede la teoria di Boussinesq [34], matematico francese che, nel 1885, fornì la soluzione analitica del problema capostipite di tutte le successive soluzioni elastiche: tensioni e deformazioni indotte da una forza applicata ortogonalmente sulla superficie di un semispazio ideale, continuo, omogeneo, isotropo, elastico lineare e privo di peso, da cui è possibile poi ricavare applicando la sovrapposizione degli effetti (valida per le ipotesi fatte) le tensioni indotte da un generico andamento di pressioni applicato sulla superficie.

2.3.1 Equazioni generali

Si richiamano innanzitutto le relazioni generali fra deformazioni e spostamenti in coordinate cilindriche [31]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.33)$$

E le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (2.35)$$

Introduciamo la *stress function* ϕ di Love [33]: può essere verificato per sostituzione che le equazioni di equilibrio sono soddisfatte da:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \quad (2.36)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (2.37)$$

$$\sigma_a = \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (2.38)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (2.39)$$

assumendo che la ϕ soddisfi la seguente equazione:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.40)$$

che può essere riscritta in coordinate polari:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \cot \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \cot \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad (2.41)$$

dove si è utilizzata la trasformazione $(r, z) \rightarrow (R, \psi)$. Una qualsiasi soluzione della precedente è anche soluzione dell'equazione di Laplace:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \cot \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad (2.42)$$

Ad esempio:

$$\phi_n = R^n \psi_n \quad (2.43)$$

con ψ_n funzione del solo angolo ψ .

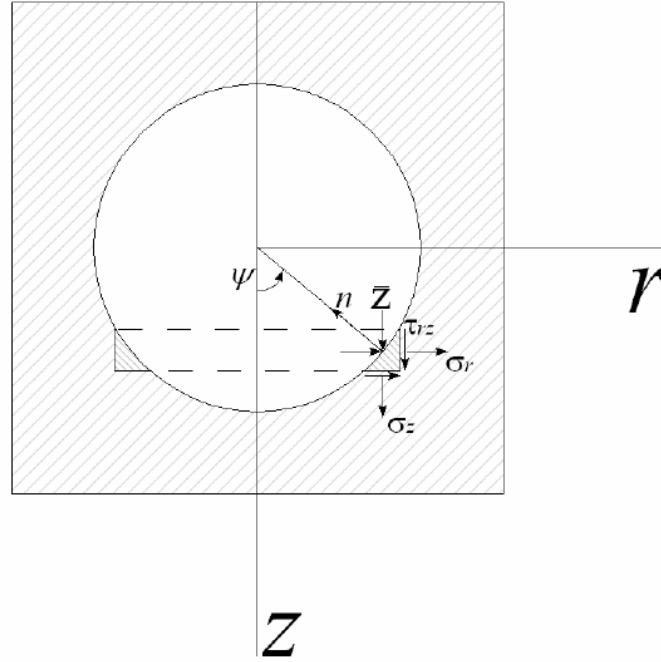


Figura 2.6 – Schema per il calcolo della costante B

2.3.2 Forza applicata in un punto di un solido infinito

Applicando una forza di un solido infinito, e prendendo il punto di applicazione come origine delle coordinate, la soluzione dell'equazione 2.42 risulta:

$$\phi = B(r^2 + z^2)^{1/2} \quad (2.44)$$

dove B è una costante da valutare. Sostituendo questa soluzione nelle 2.39 si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= B \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} - 3r^2z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right] \\ \sigma_\theta &= B(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} \\ \sigma_z &= -B \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} + 3r^2z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right] \\ \tau_{rz} &= -B \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} + 3r^2z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Tutte le componenti dello sforzo presentano una singolarità nel punto di applicazione della forza. Per determinare la costante B , si consideri una sfera cava di piccole dimensioni e gli sforzi sulla superficie della stessa calcolati mediante le 2.45. La risultante di questi sforzi rappresenta la forza applicata nell'origine in direzione z . Dalla condizione di equilibrio dell'anello conico rappresentato in 2.6, la componente degli sforzi in direzione z vale:

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi) \quad (2.46)$$

Invertendo la trasformazione di coordinate cilindriche-sferiche, attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned}\sin \psi &= r(r^2 + z^2)^{-1/2} \\ \cos \psi &= z(r^2 + z^2)^{-1/2}\end{aligned}\quad (2.47)$$

e sostituendo, otteniamo:

$$\bar{z} = B \left[(1 - 2\nu)(r^2 + z^2)^{-1} + 3z^2(r^2 + z^2)^{-2} \right] \quad (2.48)$$

La risultante P lungo l'asse z è:

$$P = 2 \int_0^{\pi/2} \bar{Z} \sqrt{r^2 + z^2} d\phi 2\pi r = 8B\pi(1 - \nu) \quad (2.49)$$

Da cui si ricava il valore cercato per la costante B :

$$B = \frac{P}{8\pi(1 - \nu)} \quad (2.50)$$

Dalle 2.45 si trova che nel piano di equazione $z = 0$ non agiscono sforzi normali, mentre gli sforzi tangenti sul piano valgono:

$$\tau_{rz} = \frac{B(1 - 2\nu)}{r^2} = -\frac{P(1 - 2\nu)}{8\pi(1 - \nu)r^2} \quad (2.51)$$

2.3.3 Sforzi in un recipiente sferico sottoposto a pressione uniforme

Si consideri ora il caso di due forze uguali ed opposte applicate ad un corpo elastico infinito ad una distanza d infinitesima.

Gli sforzi generati dalla forza P applicati nell'origine O sono determinati, in ciascun punto, dalle equazioni ricavate al paragrafo precedente. Ugualmente possiamo introdurre gli sforzi introdotti dalla forza P applicata nel punto O' , avendo cura di operare la seguente sostituzione per ogni termine del tipo $f(r, z)$:

$$f(r, z) \rightarrow - \left[f + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) d \right] \quad (2.52)$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -A \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} - 3r^2z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right] \\ \sigma_\theta &= -A \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \\ \sigma_z &= A \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} + 3r^2z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right] \\ \tau_{rz} &= A \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} + 3r^2z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right]\end{aligned}\quad (2.53)$$

dove $A = Bd$. Dall'equilibrio del triangolo infinitesimo di 2.7 si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \sigma_r \sin^2 \psi + \sigma_z \cos^2 \psi + 2\tau_{rz} \sin \psi \cos \psi \\ \tau_{R\psi} &= (\sigma_r - \sigma_z) \sin \psi \cos \psi - \tau_{rz}(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi)\end{aligned}\quad (2.54)$$

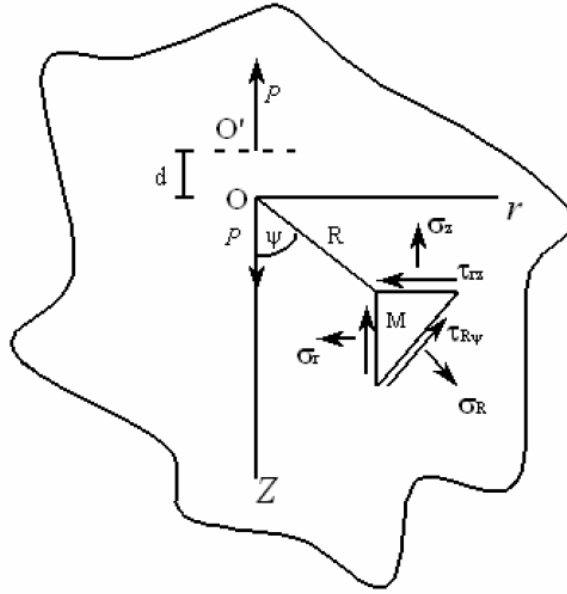


Figura 2.7 – Applicazione di due forze P ad una distanza d

Ricordando le 2.47, si ricava infine:

$$\sigma_R = -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \left[-\sin^2 \psi + \frac{2(2-\nu)}{1+\nu} \cos^2 \psi \right] \quad (2.55)$$

$$\sigma_R = -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \sin \psi \cos \psi$$

La distribuzione degli sforzi risulta simmetrica rispetto sia all'asse z che alle coordinate piane perpendicolari a z . Si immagini ora di avere nell'origine, oltre al sistema di due forze P appena considerato, altri due sistemi di forze analoghi al primo posizionati in modo da formare tre direzioni perpendicolari. Combinando l'azione di queste tre doppie forze, gli sforzi normali agenti su di una superficie sferica centrata nell'origine sono determinati dalla relazione:

$$\sigma_R = -\frac{4(1-2\nu)A}{R^3} \quad (2.56)$$

La combinazione di queste tre doppie forze perpendicolari è detta centro di compressione. Considerando un elementino infinitesimo (figura 2.8) di dimensioni $(dR, d\psi dR)$, si può scrivere il seguente equilibrio:

$$\sigma_t \frac{\pi R}{2} dR d\psi^2 = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{\pi R^2}{4} dR d\psi^2 \quad (2.57)$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R \quad (2.58)$$

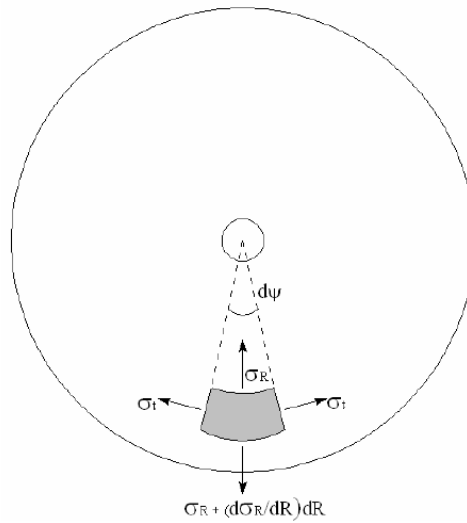


Figura 2.8 – Elementino infinitesimo di dimensioni $(dR, d\psi dR)$

2.3.4 Forza applicata sulla superficie di un corpo semi-infinito

La teoria di Boussinesq permette di calcolare lo stato di sforzo in un corpo elastico semi infinito, indotto dall'applicazione di una forza normale alla frontiera del solido, risultato di grande interesse per studiare i fenomeni di contatto. Sia il piano di equazione $z = 0$ la frontiera di un corpo solido semi-infinito e sia P una forza agente su questo piano lungo la direzione z . In precedenza è stata esposta la distribuzione di sforzi in un solido semi-infinito prodotta dall'applicazione di una forza concentrata nell'origine e da un campo di sforzi agente sulla superficie di equazione $z = 0$ espresso nella 2.51. Per eliminare questo campo di sforzi distribuito ed ottenere quindi il risultato voluto, si fa ricorso alla distribuzione di sforzo corrispondente al centro di compressione mostrata nel paragrafo precedente. In coordinate polari, la distribuzione degli sforzi è ricavabile con le 2.56 e 2.58:

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{A}{R^3} \\ \sigma_t &= \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} \frac{R}{2} \\ \sigma_R &= -\frac{A}{2R^3}\end{aligned}\tag{2.59}$$

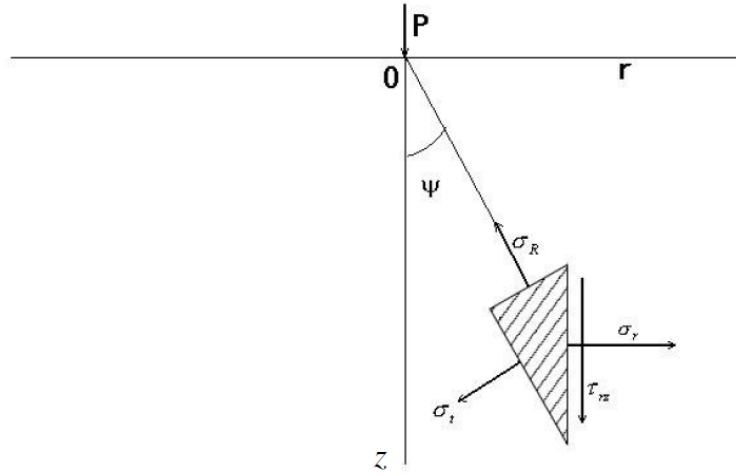


Figura 2.9 – Schema per il calcolo delle tensioni causate dall'applicazione di una forza sulla superficie di un corpo semi-infinito

Tornando ancora una volta alle coordinate cilindriche, le componenti di sforzo diventano:

$$\begin{aligned}
 \sigma_R &= \sigma_R \sin^2 \psi + \sigma_t \cos^2 \psi = A \left(r^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) (r^2 + z^2)^{-5/2} \\
 \sigma_z &= \sigma_R \cos^2 \psi + \sigma_t \sin^2 \psi = A \left(z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-5/2} \\
 \tau_{rz} &= \frac{1}{2} (\sigma_R - \sigma_t) \sin 2\psi = \frac{3}{2} A r z (r^2 + z^2)^{-5/2} \\
 \sigma_\theta &= \sigma_t = -\frac{A}{2R^3} = -\frac{A}{2} (r^2 + z^2)^{-5/2}
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Supponendo ora che i centri di pressione siano uniformemente distribuiti lungo l'asse z a partire da $z = 0$ fino a $z = -\infty$. Per sovrapposizione le componenti di sforzo generate in un solido indefinitamente esteso si ottengono integrando le 2.60. Introducendo una nuova costante A_1 otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \sigma_R &= A_1 \int_0^\infty \sigma_R \sin^2 \psi + \sigma_t \cos^2 \psi = A \int_0^\infty \left(r^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) (r^2 + z^2)^{-5/2} dz \\
 \sigma_z &= A_1 \int_0^\infty \sigma_R \cos^2 \psi + \sigma_t \sin^2 \psi = A \int_0^\infty \left(z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-5/2} dz \\
 \tau_{rz} &= A_1 \int_0^\infty \frac{1}{2} (\sigma_R - \sigma_t) \sin 2\psi = \frac{3}{2} A r z \int_0^\infty (r^2 + z^2)^{-5/2} dz \\
 \sigma_\theta &= A_1 \int_0^\infty \frac{A}{2} (r^2 + z^2)^{-5/2} dz
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{A_1}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} - z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \\ \sigma_z &= \frac{A_1}{2} z (r^2 + z^2)^{-3/2} \\ \tau_{rz} &= -\frac{A_1}{2} r (r^2 + z^2)^{-3/2} \\ \sigma_\theta &= -\frac{A_1}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right]\end{aligned}\quad (2.62)$$

Sul piano $z = 0$ gli sforzi normali sono nulli, mentre quelli tangenziali valgono:

$$\tau_{rz}|_{z=0} = \frac{A_1}{2r^2} \quad (2.63)$$

E' possibile combinare quanto ottenuto nelle 2.45 e 2.62, e agendo sulle costanti A_1 e B imporre che lo stato di sforzo sulla superficie di separazione sia nullo, ottenendo quindi come unica forza agente quella concentrata nell'origine. In particolare, confrontando le equazioni 2.63 e 2.51, dovrà essere:

$$-B(1 - 2\nu) + \frac{A_1}{2} = 0 \quad (2.64)$$

ovvero:

$$A_1 = 2B(1 - 2\nu) \quad (2.65)$$

Sommando quindi i due effetti così ottenuti, si giunge all'espressione degli sforzi cercata, a meno della costante B :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= B \left\{ (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} \right\} \\ \sigma_z &= -3Bz^3 (r^2 + z^2)^{-5/2} \\ \sigma_\theta &= B(1 - 2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \\ \tau_{rz} &= -3Brz^2 (r^2 + z^2)^{-5/2}\end{aligned}\quad (2.66)$$

Questa distribuzione di sforzi soddisfa le condizioni al contorno ovvero $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ per $z = 0$, realizzando il distacco tra le superfici del corpo infinito. Rimane da determinare il valore della costante B , che puo' essere cercato imponendo che la risultante degli sforzi distribuiti su di una superficie semi-sferica centrata nell'origine abbia intensità pari a P .

La componente lungo z degli sforzi agenti sulla superficie semi-sferica è:

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi) = 3B <^2 (r^2 + z^2)^{-2} \quad (2.67)$$

La costante B si determina imponendo che sia:

$$P = 2\pi \int_0^{\pi/2} \bar{Z} r (r^2 + z^2)^{1/2} d\psi = 6\pi B \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi \sin \psi d\psi = 2\pi B \quad (2.68)$$

da cui:

$$B = \frac{P}{2\pi} \quad (2.69)$$

Sostituendo quindi il valore trovato della costante B nell'espressione 2.70 raggiungiamo il risultato desiderato, ovvero il campo di sforzi generato da una forza normale di intensità P agente sulla superficie di un corpo semi-infinito:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} \right\} \\ \sigma_z &= -3 \frac{P}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2} \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \\ \tau_{rz} &= -3 \frac{P}{2\pi} r z^2 (r^2 + z^2)^{-5/2}\end{aligned}\tag{2.70}$$

2.3.5 Sforzi lungo una generica retta appartenente al semispazio

Proiettando la soluzione trovata su una linea di inclinazione θ rispetto alla superficie e a distanza L dal punto di applicazione del carico concentrato, otteniamo il seguente campo di sforzi [44]:

$$\sigma(x, \theta) = -\frac{2F_n}{\pi} \frac{L^2 \cos^2(\theta) x}{(x^2 + L^2 - 2Lx \sin(\theta))^2}\tag{2.71}$$

$$\tau(x, \theta) = -\frac{2F_n}{\pi} \frac{(x - L \sin(\theta)) L \cos(\theta) x}{(x^2 + L^2 - 2Lx \sin(\theta))^2}\tag{2.72}$$

2.3.6 Sforzi per distribuzione di pressione qualsiasi sulla superficie del semipiano

Avendo ottenuto gli sforzi causati da un carico concentrato normale applicato sulla superficie di un semipiano, è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti per analizzare il comportamento del semipiano quando sia caricato sulla superficie da un'andamento di pressioni qualsiasi. Difatti, considerando l'effetto di una pressione applicata su di un'area infinitesima sulle tensioni (per semplicità indicate con s , visto che le considerazioni seguenti valgono sia per le azioni normali che per le azioni tangenziali) sarà:

$$ds(x) = f(x, L) dF = f(x, L) p(x_1, y_1) dx_1 dy_1\tag{2.73}$$

dove si è indicato con (x_1, y_1) le coordinate del punto di applicazione della pressione e con $f(x, L)$ il funzionale ricavato dalle relazioni di Boussinesque, in grado di restituire a partire dalla conoscenza del carico normale le tensioni interne. Integrando sul dominio su cui sono applicate le pressioni:

$$s(x) = \int_{A_1} f(x, L) p(x_1, y_1) dA_1\tag{2.74}$$

con $dA_1 = dx_1 dy_1$. Data la difficoltà di trovare una soluzione analitica alla 2.74, si preferisce solitamente discretizzare la distribuzione di pressione con un'andamento costante a tratti, definendo un 'reticolo' sul dominio. Considerando quindi un numero

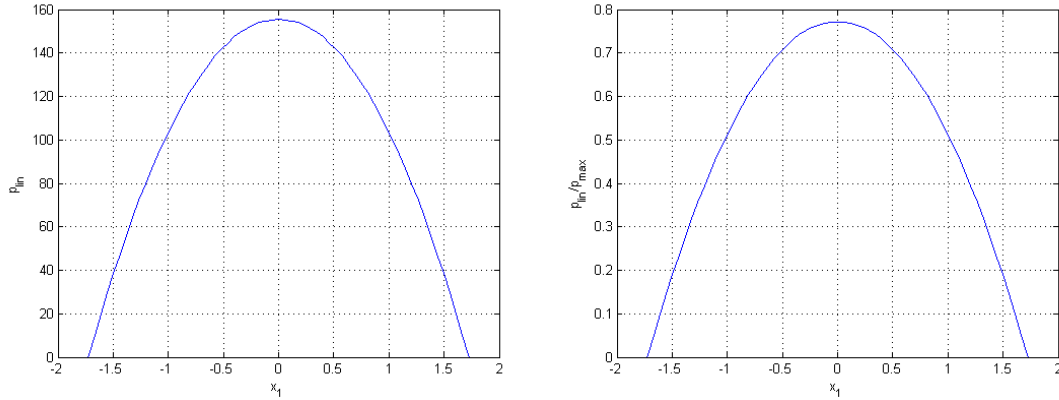


Figura 2.10 – Proiezione delle pressioni all’interfaccia, a destra dimensionali ([MPa]) e a sinistra adimensionalizzate secondo la pressione massima del caso non proiettato

di carichi pari al numero di maglie della rete si considera un valore per ognuno pari a:

$$F_n(i) = p(x_1(i), y_1(i))\Delta x_1\Delta y_1 \quad (2.75)$$

La 2.74 diventa quindi:

$$s(x) = \sum_i f(x, L)F_n(i) \quad (2.76)$$

2.4 Sforzi nel caso del binario

Si cercano ora i valori del campo di sforzi realizzati nel binario non criccato durante il moto longitudinale della ruota. A partire dalle distribuzioni di pressione Hertziana ricavate in precedenza, si calcola innanzitutto:

$$p_{lin}(x) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b p(x_1, y_1) dy_1 \quad (2.77)$$

ottenendo quindi una ‘proiezione’ del contatto su una singola linea. Detta quindi L la distanza dell’ intersezione tra la linea e la superficie di contatto e il baricentro delle pressioni, si applica la 2.76 per tutti i valori di L per cui si vogliono conoscere le tensioni interne. In figura 2.10 è riportato il risultato dell’operazione di media della 2.77. Sono poi riportati nelle figure 2.11 e 2.12, i valori di tensione agenti su un’ipotetica fessura di lunghezza a giacente sulla retta di parametri (L, θ) . Si noti come gli sforzi raggiungano il valore massimo non in superficie ma ad una certa distanza funzione della posizione del carico.

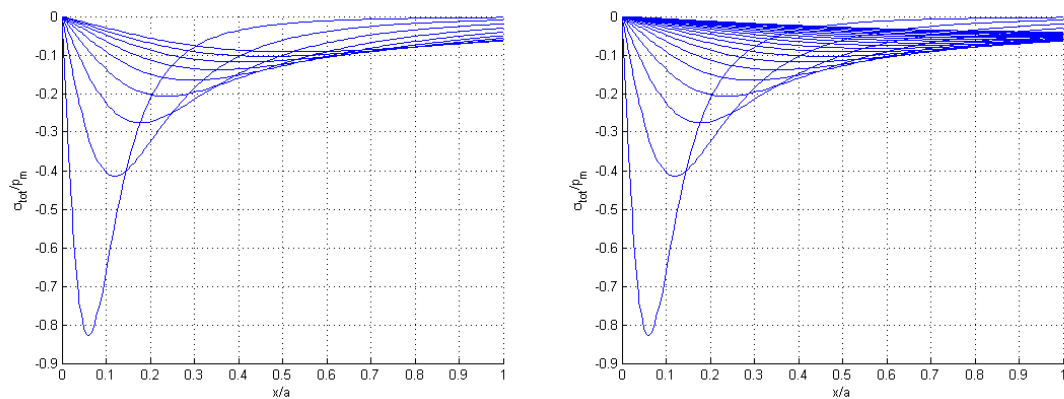


Figura 2.11 – Valore di σ , adimensionalizzato secondo la massima pressione lineare, sulla lunghezza della retta di inclinazione θ , per vari valori della distanza della posizione del carico applicato con $L < 0$ (sinistra) e $L > 0$ (destra)

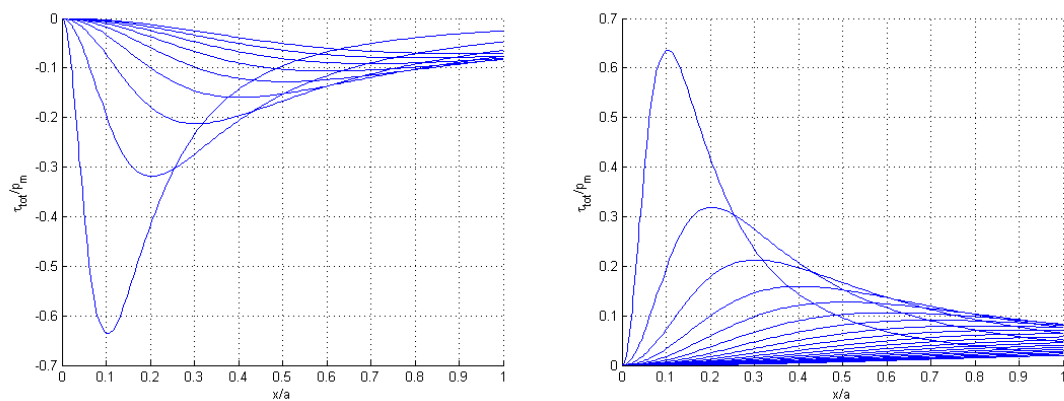


Figura 2.12 – Valore di τ , adimensionalizzato secondo la massima pressione lineare, sulla lunghezza della retta di inclinazione θ , per vari valori della distanza della posizione del carico applicato con $L < 0$ (sinistra) e $L > 0$ (destra)

Capitolo 3

Analisi Sperimentale

Nel presente capitolo viene descritta l'analisi sperimentale effettuata per analizzare il fenomeno della fessurazione di elementi criccati in presenza di fluido interposto con la tecnica della Fotoelasticità, i cui principi basilari sono descritti nell' Appendice A. Sono state effettuate varie analisi per valutare innanzitutto la validità della schematizzazione di contatto Hertziano proposta, e quindi analizzare i SIF nel caso di contatto lubrificato e non lubrificato.

3.1 Teoria della similitudine

Le analisi fotoelastiche vengono fatte utilizzando un modello realizzato non già in lega come le rotaie ferroviarie, ma con materiali plastici quali il policarbonato, le cui proprietà elastiche differiscono sostanzialmente. Per validare tale approccio è necessario ricorrere alla teoria dei problemi elastici piani e al concetto di similitudine.

3.1.1 Problema elastico piano

Definiamo corpo piano (figura 3.1) una regione di spessore uniforme limitata da due piani paralleli e chiusa da una superficie qualsiasi B_L . Nonostante lo spessore del corpo debba essere costante, non è necessario che sia piccolo e in realtà per dare validità a tale approccio sarà preferibile che il corpo sia molto spesso o molto sottile. Vi sono delle limitazioni ai carichi applicabili a rigore in un problema elastico piano: le forze di volume, se presenti, non devono variare lungo lo spessore del corpo e non devono essere in direzione z ; i carichi applicati sul bordo B_L devono appartenere al piano del modello e essere distribuiti uniformemente lungo lo spessore; i piani che limitano il corpo superiormente ed inferiormente devono essere scarichi. Possiamo riassumere queste condizioni con le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(x, y) F_y = F_y(x, y) & F_z &= 0 \\ T_x &= T_x(x, y) T_y = T_y(x, y) & T_z &= 0 \\ T_n &= 0 \text{ per } z = \pm t \end{aligned} \quad (3.1)$$

A seconda che il corpo sia molto spesso o molto sottile rispetto alle dimensioni laterali è possibile ipotizzare rispettivamente una condizione di deformazione piana o di sforzo piano.

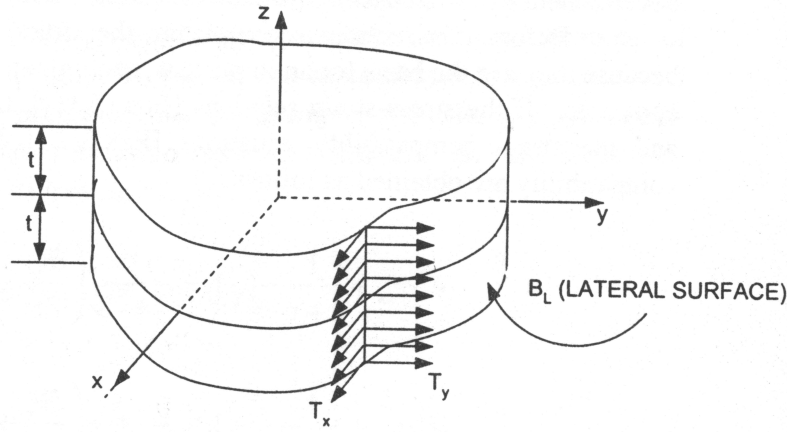


Figura 3.1 – Schema del problema elastico piano

3.1.2 Stato piano di deformazione

Assumendo che lo stato di deformazioni sia piano, le relazioni spostamenti-deformazioni diventano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da cui è possibile ottenere le relazioni tra sforzi e spostamenti:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_{xx} & \sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_{yy} & \sigma_{zz} &= \lambda J_1 \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} & \tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove con J_1 si è indicata la dilatazione del corpo. Le equazioni di equilibrio per un problema piano sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

La soluzione ad un qualsiasi problema di deformazione piana dovrà quindi soddisfare le equazioni precedenti, sarà inoltre necessario imporre le condizioni sul bordo; per il bordo laterale B_L saranno:

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_{xx} \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) \\ T_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_{yy} \cos(n, y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

mentre per il piano superiore ed inferiore sarà ovviamente:

$$T_n = 0 \quad (3.6)$$

3.1.3 Stato di sforzo piano

Essendo lo spessore del corpo molto piccolo, si assume che lungo lo stesso sia:

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.7)$$

Le equazioni di equilibrio sono le stesse scritte per il caso di deformazione piana (3.3), mentre le relazioni sforzi-spostamenti diventano:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_{xx} \quad \sigma_{yy} = \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_{yy} \quad \sigma_{zz} = \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_{zz} = 0 \\ \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

da cui si ottiene:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (3.9)$$

La relazione precedente permette di calcolare la dilatazione J_1 come:

$$J_1 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (3.10)$$

Che, sostituita nelle relazioni sforzi-deformazioni restituisce:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \quad \sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Comparando le condizioni 3.3 e 3.11 notiamo che trasformando:

$$\lambda \rightarrow \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (3.12)$$

ovvero:

$$\frac{\nu}{1 - \nu} \rightarrow \nu \quad (3.13)$$

le soluzioni ottenute soddisfacenti le equazioni proposte saranno identiche, permettendo quindi di trasformare agilmente una soluzione di sforzo piano in una di deformazione piana e viceversa.

3.1.4 Similitudine lineare

Si desidera ora dimostrare come, soddisfatte le ipotesi fatte in precedenza, la soluzione di un problema piano non sia dipendente dal materiale utilizzato. L'equazione di compatibilità delle deformazioni per il caso di deformazione piana (ma abbiamo appena dimostrato che è equivalente a considerarla un caso di sforzo piano) risulta:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (3.14)$$

Supponendo che sia possibile definire un potenziale $\Omega(x, y)$ per le forze di volume, sarà possibile scrivere:

$$F_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (3.15)$$

Quindi, sostituendo le 3.15 nelle 3.4 e 3.14, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \nabla^2 \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \frac{\Omega}{1-\nu} \right) &= 0\end{aligned}\quad (3.16)$$

In cui si è introdotto il coefficiente di Poisson ν .

Ipotizziamo ora che esista una funzione ϕ degli sforzi tale per cui:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \Omega \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3.17)$$

Sostituendo la 3.17 nelle tre equazioni 3.16 si nota che le prime due sono soddisfatte, mentre la terza restituisce:

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 \Omega \quad (3.18)$$

Pertanto, sia l'equilibrio che la compatibilità delle deformazioni sono soddisfatte se la ϕ , detta *funzione degli sforzi di Airy*, rispetta la precedente condizione. Grazie alle considerazioni fatte nel paragrafo precedente è immediato scrivere una formulazione equivalente per la condizione piana di sforzo, di nostro interesse:

$$\nabla^4 \phi = -(1-\nu) \nabla^2 \Omega \quad (3.19)$$

Nel caso in cui le forze di volume siano nulle o costanti, come nel caso del campo gravitazionale, risulterà $\nabla^2 \Omega = 0$, da cui:

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (3.20)$$

ovvero per risolvere il problema elastico piano sarà sufficiente risolvere una equazione biarmonica. Sviluppando le derivate della 3.20 si ottiene:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \quad (3.21)$$

Si noti come ϕ sia assolutamente indipendente dalle proprietà elastiche del solido in analisi: gli sforzi ottenuti attraverso le esperienze fotoelastiche per problemi elastici piani saranno identici a quelli ottenibili con un prototipo di metallo se il modello è semplicemente connesso e soggetto a forze di volume nulle o uniformi.

3.1.5 Similitudine nel caso di non linearità

Abbiamo ottenuto quindi che per due solidi di materiali (A, B) con stessa geometria, in un problema piano sarà:

$$[\sigma_A] = [\sigma_B] \quad (3.22)$$

Dove $[\sigma_i]$ è in tensore degli sforzi. Nel nostro problema è da considerarsi però la presenza del contatto tra ruota e rotaia, che come noto introduce una non linearità geometrica a causa della variazione di forma non trascurabile dei componenti. Anche

solo considerando la rotaia, difatti, i semiassi dell'ellisse delle pressioni di contatto variano in funzione della rigidezza dei materiali a contatto. Risulta quindi necessario, per fare in modo che il modello in polycarbonato simuli correttamente la realtà, imporre che la deformata dei due solidi coincida:

$$[\varepsilon_A] = [\varepsilon_B] \quad (3.23)$$

si possono quindi trovare gli sforzi nel modello mediante sperimentazione, e risalire a quelli reali attraverso le equazioni di legame:

$$\begin{aligned} [\sigma_A] &= [H_A][\varepsilon_A] \\ [\sigma_B] &= [H_B][\varepsilon_B] \end{aligned} \quad (3.24)$$

dove H_i con $i = A, B$ è la matrice di legame, pari a:

$$[H_i] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_i} & -\frac{1}{E_i} & 0 \\ -\frac{1}{E_i} & \frac{1}{E_i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_i)}{E_i} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

che sostituite nella 3.23 restituiscono:

$$[\sigma_A] = [H_A][\varepsilon_A] = [H_A][\varepsilon_B] = [H_A][H_B]^{-1}[\sigma_B] \quad (3.26)$$

La 3.23 potrebbe sembrare di difficile applicazione, ma in realtà, supponendo di avere un solido semplicemente connesso e indicando con:

- τ_1 il contorno vincolato
- τ_2 un contorno su cui si impongono le deformazioni
- τ_3 il contorno libero

è possibile risolvere il problema elastico piano senza altre condizioni. Risulta pertanto imporre le deformazioni su un solo contorno, quello in cui si presenta la non linearità. Nel nostro caso particolare quindi si imporranno le deformazioni nella zona di contatto, ovvero i semiassi dell'ellisse. Conoscendo quindi l'entità dell'ellisse di contatto ottenibile con i materiali del binario reale si cercherà il carico F_n da imporre per avere semiassi coincidenti. Chiaramente il discorso non varia considerando geometrie in scala diversa da quella unitaria.

In ultimo è necessario osservare come sia possibile che si presentino non linearità geometriche multiple: nel nostro caso, ad esempio, potrebbe presentarsi il contatto tra le facce della cricca, funzione del carico applicato. Non è inoltre possibile vincolare separatamente le deformazioni sul bordo della cricca, in quanto queste sono comandate dal carico trasmesso dalla ruota.

Si supponga però che le facce della fessura possano compenetrarsi, e che quindi vi sia una sola non linearità geometrica. In tal caso, utilizzando il metodo sviluppato in precedenza, dato che le deformazioni coincidono, saranno le stesse zone della fessura a compenetrarsi, ovvero, riabilitando il contatto tra le facce, saranno le stesse zone

ad andare a contatto, ripristinando l'eguaglianza (o la similitudine in caso di scala non unitaria) geometrica.

Quanto riportato è utile nel caso si voglia effettivamente utilizzare l'analisi mediante sperimentazione fotoelastica con modelli per ottenere valori di sforzi effettivi su pezzi reali. In realtà nella presente tesi non era di interesse l'analisi di un particolare componente, rendendo superfluo adottare questa metodologia dal punto di vista numerico. I risultati ottenuti restano comunque di fondamentale nel paragonare i fenomeni osservati in laboratorio con quelli che avvengono nei pezzi reali.

3.2 Allestimento del modello

Si vuole realizzare, come esempio di elemento criccato, un modello fotoelastico del binario che sia in grado di riprodurre lo stato di sforzo al passaggio di una ruota ferroviaria in presenza di una cricca e di fluido interposto. Ipotizzando di utilizzare un solo materiale fotoelastico si potrebbe scegliere di realizzare una fessura passante in senso trasversale oppure confinata all'interno del materiale. Nel primo caso però non sarebbe possibile inserire il fluido, in quanto la chiusura della cricca durante il passaggio del binario comporterebbe la fuoriuscita dello stesso; nel secondo invece non sarebbe garantita una condizione di sforzo piano a causa della presenza dei bordi della cricca all'interno del materiale fotoelastico.

3.2.1 Realizzazione sandwich

Tale problematica è stata risolta in un primo momento utilizzando un modello 'sandwich', realizzato applicando uno strato di materiale fotosensibile (policarbonato) tra due strati di materiale non fotosensibile (polimetacrilato). Si potrà quindi realizzare una fessurazione non passante con i bordi giacenti nel polimetacrilato: questo realizzerà uno stato di sforzo che potrà essere approssimato come piano all'interno del policarbonato, ovvero nella parte del sandwich che 'genera' il segnale fotoelastico. Per approssimare una condizione di sforzo piano sarebbe interessante avere che lo spessore del sandwich sia pari a quello della ruota. Questo tuttavia non è possibile, in quanto si è scelto di realizzare delle 'sponde' nel polimetacrilato per contenere il fluido presente, il cui spessore è tuttavia molto ridotto. Va inoltre aggiunto un margine per fare in modo che i bordi della ruota non striscino sulle sponde. Il costruttivo del modello è presentato in 3.2, mentre le tavole quotate sono proposte nelle 3.3.

Per poter realizzare il sandwich è necessario realizzare un vincolo tra le varie componenti, tale per cui i punti a contatto siano vincolati a realizzare gli stessi spostamenti. E' stata utilizzato a tale scopo un adesivo: l'*Araldite 2028*, prodotto dall'azienda svizzera *Vantico*. L'*Araldite* è un adesivo epossidico a due componenti a bassa viscosità, polimerizzante a temperatura ambiente e caratterizzato da un'estrema trasparenza, impiegato difatti anche nell'unione del vetro.

Le proprietà della resina dipendono fortemente dalle proporzioni dei componenti e dal tempo di polimerizzazione e quindi dal grado di reticolazione.

Il processo di incollaggio è formato dalle seguenti fasi:

1. pre-trattamento

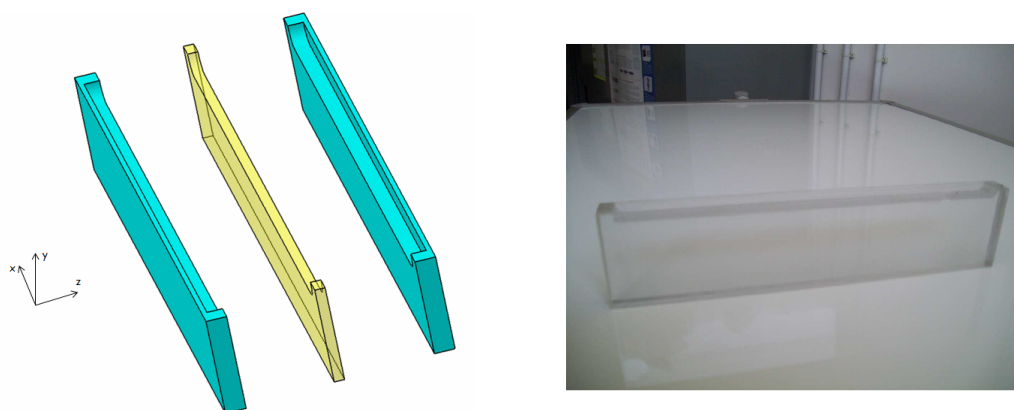


Figura 3.2 – A sinistra: costruttivo del modello sandwich realizzato. A destra: modello sandwich realizzato

Rapporto di miscelazione	Parti in peso	Parti in volume
Resina	100	100
Catalizzatore	30	35

Tabella 3.1 – Rapporto di dosaggio per l'Araldite 2028

2. stesura dell'adesivo
3. polimerizzazione

Pre-trattamento

Nella prima fase si preparano le superfici da unire rimuovendo lo sporco. Va evitato l'uso di sgrassatori quali l'acetone, che opacizzano la superficie del policarbonato, compromettendone l'uso nella sperimentazione fotoelastica.

Stesura dell'adesivo

Nella fase di applicazione della resina i componenti sono mescolati fino ad ottenere una miscela omogenea, operazione realizzabile grazie all'applicatore fornitoci dall'azienda assieme alla resina. Esso permette inoltre il corretto dosaggio delle due componenti, che nello specifico caso della *Araldite 2028* avviene secondo i rapporti riportati in tabella 3.1

Nel primo incollaggio realizzato il sandwich presentava alcune bolle d'aria nel collante. Ad un'analisi fotoelastica con carico viaggiante, inoltre, si sperimentava una costante di tempo significativa, probabilmente dovuta ad una reazione viscoelastica dello strato di colla, a causa forse di uno spessore non trascurabile dello stesso strato.

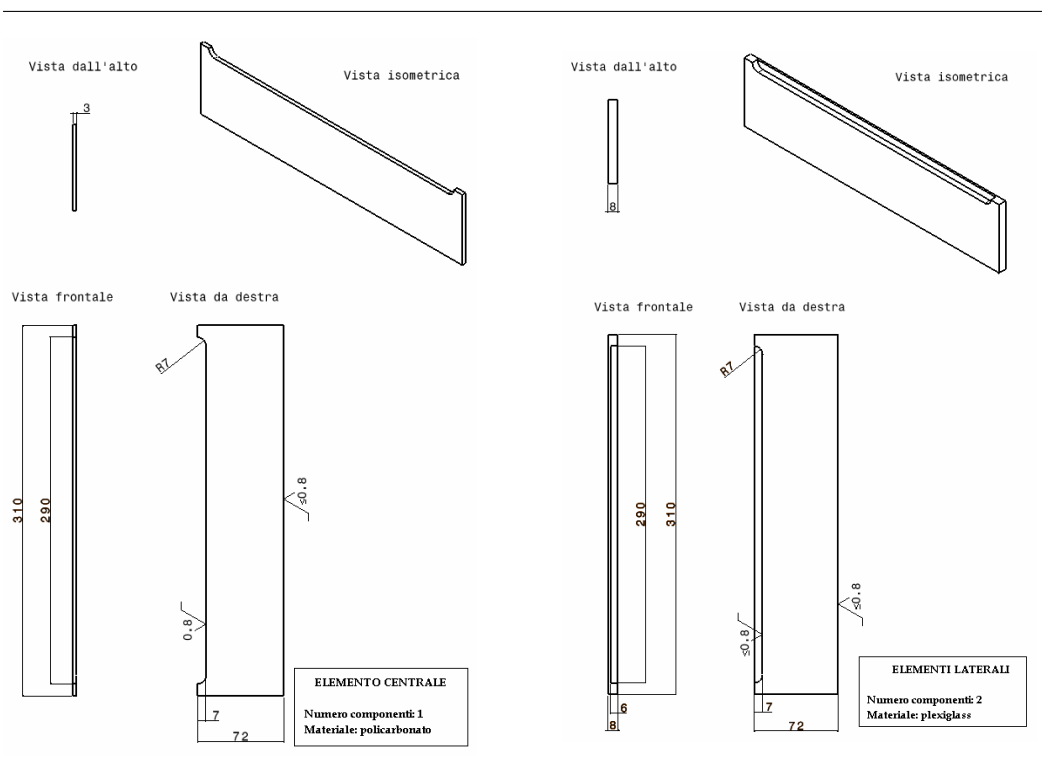


Figura 3.3 – Tavole quotate delle componenti del modello: a sinistra componente in policarbonato, a destra componenti in polimetacrilato, identici tra di loro

Nelle successive applicazioni si è quindi scelto di adagiare la colla con un pennello sulle varie faccie da vincolare, con conseguente eliminazione sia delle bolle d'aria presenti che del fenomeno viscoelastico: il nuovo sandwich presentava infatti tempi di reazione non visibili ad occhio nudo.

Polimerizzazione

Successivamente alla stesura dello strato di adesivo i componenti sono stati sottoposti ad una pressione di contatto uniforme su tutta l'area mediante applicazione di pesi, e lasciati ad aderire per un'intera notte. I tempi di presa comunque sono forniti dal produttore, e riportati in tabella 3.2. Questi risultano funzione della resistenza al taglio richiesta e della temperatura di incollaggio. Si noti come sia possibile accelerare la presa del collante realizzando un incollaggio a caldo. Il produttore fornisce inoltre i valori di resistenza garantiti a temperatura ambiente (23°C), riportati in tabella 3.3.

Dopo l'operazione di incollaggio è stata realizzata una fresatura della superficie superiore, quella destinata ad andare a contatto con la ruota, per rimuovere i residui di colla inevitabilmente fuoriusciti al momento di applicazione della pressione e inoltre per 'spianare' eventuali differenze tra i vari fogli del sandwich.

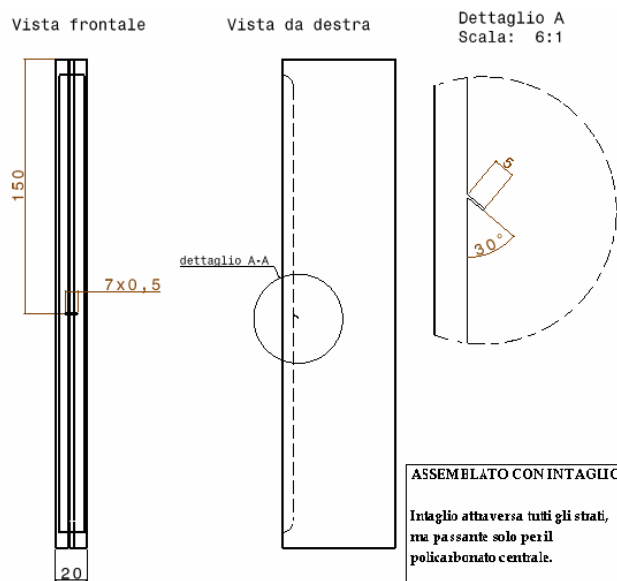


Figura 3.4 – Realizzazione della cricca: rappresentato l'intaglio desiderato

3.2.2 Relizzazione cricca

Volendo realizzare un intaglio non passante, come mostrato in figura 3.4, si sono condotte molte sperimentazioni. Tuttavia non è semplice realizzare un intaglio che sia al contempo sottile e profondo. Sono state in precedenza condotte esperienze di cricaggio passante per lastre di polycarbonato, che venivano eseguite mediante martellamento di lamette all'interno del pezzo. Tuttavia un approccio di questo tipo non è possibile: a causa della struttura a sandwich realizzata il martellamento genererebbe una differente propagazione della cricca nei differenti strati di materiale. Nel particolare, il polimetacrilato tende a propagare velocemente, superando la lunghezza della fessura raggiunta all'interno del polycarbonato, e fornendo quindi una

Temperatura	°C	10	15	23	40	60	100
Tempo di indurimento per raggiungere	ore	24	20	16	3	-	-
LSS > 1N/mm ²	minuti	-	-	-	-	90	15
Tempo di indurimento per raggiungere	ore	60	48	25	7	2.5	-
LSS > 10N/mm ²	minuti	-	-	-	-	-	20

Tabella 3.2 – Tempi di polimerizzazione del collante in funzione della resistenza al taglio richiesta e alla temperatura di incollaggio

Proprietà	Valore
Resistenza al taglio	5 MPa
Resistenza alla flessione	74.9 MPa
Modulo di flessione	2497.9 MPa
Temperatura di transizione vetrosa	39.5 °C

Tabella 3.3 – Valori di resistenza garantiti dal produttore

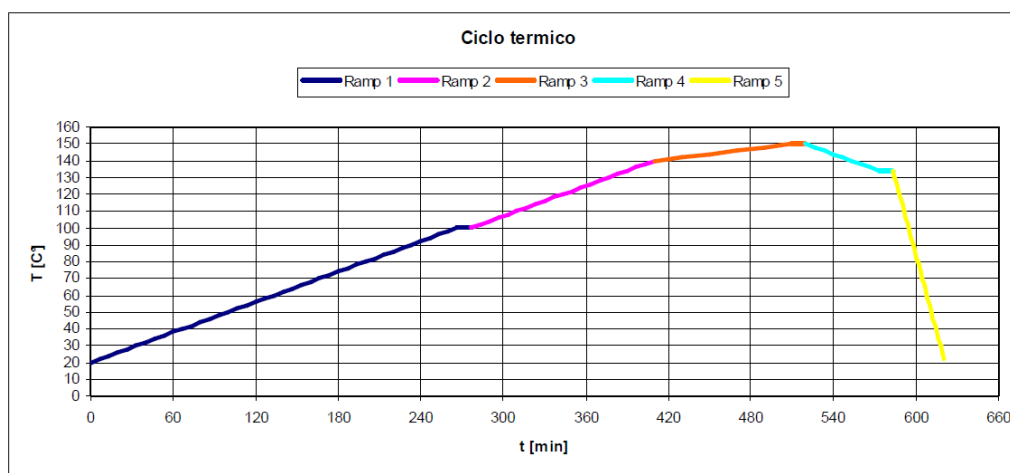


Figura 3.5 – Ciclo termico utilizzato per la distensione del polycarbonato

sacca all'interno della quale il fluido potrebbe inserirsi durante la sperimentazione, invalidando i risultati.

Risultati migliori sono stati ottenuti utilizzando prima delle lamette da taglierino di tipo *Stanley*, che sono state scaldate ad una temperatura superiore ai 700°C mediante un bruciatore di tipo *pencil torce*, effettuando quindi una penetrazione a caldo del sandwich. Ovviamente avere un'alta temperatura di penetrazione consente di avere una profondità maggiore dell'intaglio. L'operazione viene poi ripetuta fino a raggiungimento della massima profondità consentita dalla lunghezza delle lamette *Stanley*. A questo punto, mediante una seconda lametta di tipo *Rufin Professional*, avente maggiore lunghezza e anche un filo migliore, si cerca di aumentare ulteriormente la profondità raggiunta.

Le lame sono state tagliate attraverso la tecnologia *Waterjet*, che ha permesso una buona precisione di taglio. Era stato provato precedentemente il taglio mediante tranciatura, ma a causa dell'esiguo spessore delle lame queste risultavano inflesse alla fine dell'operazione.

La penetrazione a caldo comporta però i seguenti inconvenienti:

- la superficie penetrata risulta rovinata a causa del rialzamento di uno dei lembi della fessura. Si rende quindi necessaria una accurata lavorazione mediante carta vetrata, per ristabilire una finitura superficiale ottimale;
- a causa dell'elevata temperatura le superfici della fessura risultano anneriti: è difficile dire quale influenza si avrà sul comportamento della stessa sotto carico, ma dal punto di vista fotoelastico non risulta problematico.

3.2.3 Validazione della struttura a sandwich

A rigore, per la validità di un modello di tipo sandwich in un'analisi fotoelastica sarebbero necessari:

- un comportamento in campo elastico dei materiali impiegati identico;
- un comportamento perfettamente non birifrangente per il polimetacrilato, per avere un segnale fotoelastico prodotto solo dallo strato di policarbonato.

Ovviamente l'analisi fotoelastica sarà valida in proporzione a quanto le due precedenti condizioni siano soddisfatte.

3.2.4 Tensioni residue

Le lastre di policarbonato acquistate contenevano delle tensioni residue, immediatamente visulizzabili al polariscopio. Si è reso pertanto necessario distenderle; si è utilizzato un trattamento termico sviluppato e testato con buoni risultati presso il Politecnico di Milano, riportato in figura 3.5. Per evitare che il modello si incurvasse durante il trattamento termico si è posta superiormente una lastra di vetro; date le basse temperature in gioco il peso proprio della lastra, di dimensioni comunque non eccessive, non ha comportato lo schiacciamento del modello e relative riduzioni di spessore.

3.3 Sistema di carico

Per applicare i carichi sul modello si utilizza il sistema di carico mostrato in figura 3.6. E' presente un telaio principale che permette di imporre il carico verticale e orizzontale; la rotaia viene montata su un carrello che permette di fornire il movimento orizzontale; sono presenti inoltre alcune parti che permettono di far ruotare la ruota intorno alla cerniera e elementi a U che sostengono la ruota e che permettono di applicare il carico orizzontale. A differenza del caso reale quindi, la componente di spostamento orizzontale è imposta alla rotaia e non alla ruota; questo permette di semplificare notevolmente la sperimentazione. Il carico verticale è applicabile mediante una vite e misurabile attraverso dinamometro. Si noti come, a causa della geometria del sistema, il carico misurato sia metà di quello effettivamente agente sul centro della ruota; metà del carico si va infatti a scaricare sull'elemento E.

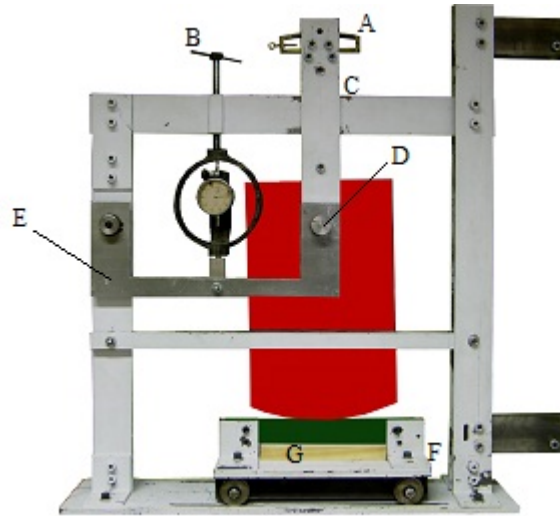


Figura 3.6 – Sistema utilizzato per caricare il modello

3.4 Taratura del modello

Come ricavato nella Appendice A, la differenza tra gli sforzi principali su un'isocromatica è pari a:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h} \quad (3.27)$$

Dove h è noto e N , ordine di frangia, è il risultato delle misurazioni fotoelastiche. Per risalire allo stato di sforzo presente nel materiale risulta quindi necessario valutare la costante di frangia f_σ , pari a:

$$f_\sigma = h \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{N} \quad (3.28)$$

mediante taratura. Dall'osservazione della 3.27 notiamo come la costante di frangia incida sulla densità delle frange presenti, infatti, data una differenza massima tra gli sforzi, il numero di frange osservate N sarà inversamente proporzionale al valore di f_σ . Ovviamente maggiore sarà il numero di frange osservate, maggiore sarà la qualità della misurazione, aumentando il numero di punti in cui è nota la differenza degli sforzi e quindi la risoluzione dell'immagine.

Al fine di determinare la costante di frangia si effettua un esperimento di cui è già noto il valore della differenza degli sforzi per via analitica oppure in cui viene misurata con altri strumenti. Con la semplice applicazione della 3.28 sarà quindi determinabile f_σ . Nella presente tesi è stato utilizzato un disco diametralmente compresso, in cui la differenza tra gli sforzi principali nel centro è pari a:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8P}{\pi h D} \quad (3.29)$$

con D diametro del provino e P carico applicato, misurato con un dinamometro. Pertanto è possibile caricare progressivamente il provino e misurare il valore del carico in corrispondenza del passaggio di una frangia di cui va segnato l'ordine.

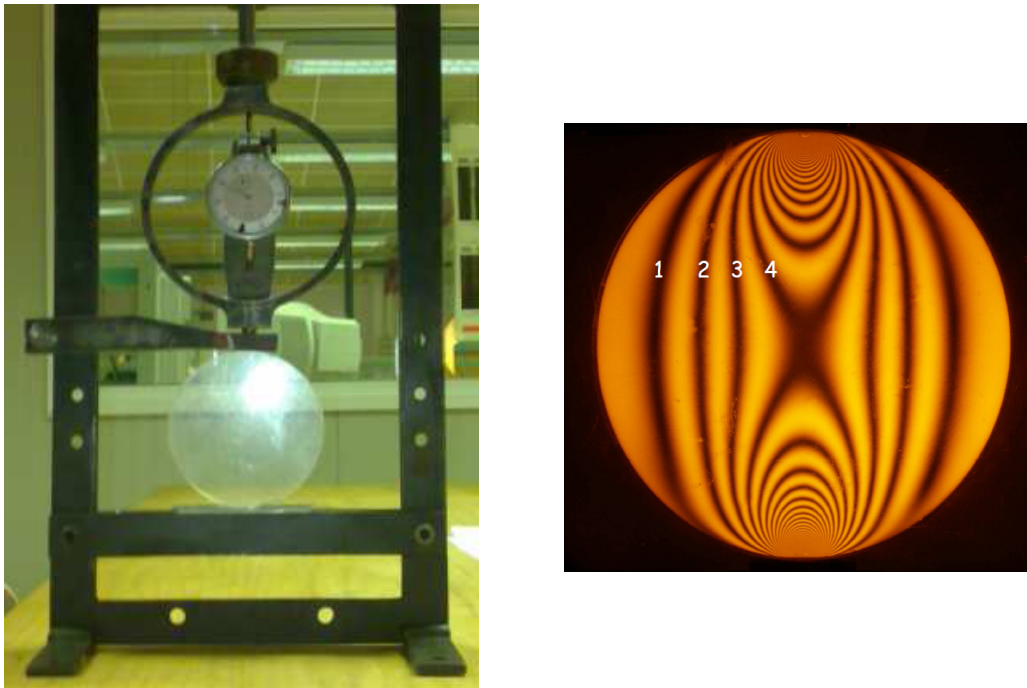


Figura 3.7 – Sperimentazione condotta per ricavare la costante fotoelastica del policarbonato utilizzato: a sinistra la strumentazione utilizzata, a destra una delle immagini fotoelastiche acquisite

I risultati dell'indagine condotta sono riportati in tabella 3.4, si noti come si sia scartato il valore ottenibile con ordine di frangia pari a 1, ritenuto poco accurato. Effettuando una media dei vari valori di f_σ si ottiene:

$$f_\sigma = 6.96 \text{ [N/mm]}$$

3.5 Sforzi in assenza di cricca

Si è innanzitutto simulato il rotolamento, con e senza fluido. Nella simulazione in assenza di fluido si è scelto di utilizzare oltre al modello sandwich presentato anche un modello di solo policarbonato, corrispondente allo strato centrale del sandwich. La presenza degli strati in polimetilacrilato irrigidisce notevolmente il binario, diminuendo il numero di frange visualizzate per un dato carico, ovvero diminuendo gli sforzi presenti, con un minor dettaglio dell'immagine fotoelastica.

In figura 3.8 notiamo, dall'andamento delle frange, la conferma del risultato ottenuto con la teoria di Boussinesque: la differenza tra gli sforzi principali maggiore si ha sottopelle. Non è immediato ricostruire il valore degli sforzi nelle direzioni principali, in letteratura si trovano delle tecniche di separazione degli sforzi, tuttavia, essendo di interesse non la valutazione dei singoli sforzi ma dei fattori di intensificazione degli sforzi non si sono sviluppati tali approcci. L'osservazione delle frange permette

N	P [N]	$\sigma_1 - \sigma_2$ [MPa]	f_σ [N/mm]
2	340	2.89	7.22
3	490	4.16	6.94
4	650	5.52	6.90
5	800	6.79	6.79

Tabella 3.4 – Risultato delle misurazioni fotoelastiche di taratura

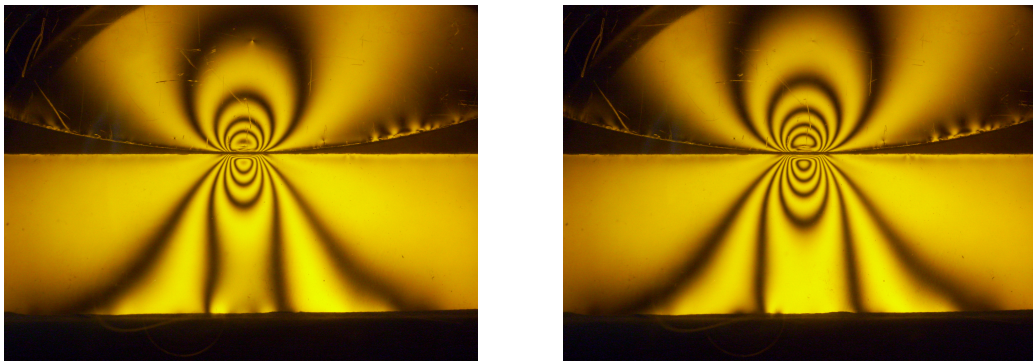


Figura 3.8 – Acquisizione con modello di solo policarbonato, per carico normale pari a 430 N (sinistra) e 530 N (destra)

inoltre, avendo ricavato la costante di frangia, di ricavare la differenza massima tra gli sforzi principali. Per un carico di 430 N osserviamo sei frange, da cui:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 34.8 \text{ MPa}$$

Aumentando il carico fino a 530 N invece compare una frangia aggiuntiva, da cui:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 41.76 \text{ MPa}$$

In realtà il valore ottenuto è pari alla differenza degli sforzi sulla frangia stessa, non sempre coincidente con il punto di massima differenza. Dall'osservazione delle immagini deduciamo però che codesto punto sarà interno alla frangia considerata, lo sforzo massimo sarà pertanto compreso in un intorno di semilarghezza pari alla costante di frangia ($\pm 6.96N$). Si noti peraltro come, poichè il modello non ha un'altezza infinita come supposto nella teoria di Boussinesque, gli sforzi generati dal contatto non vadano a zero ma vadano a fondersi con quelli generati dalla reazione del terreno. In figura 3.9 sono riportati invece i risultati ottenuti con il modello sandwich: come anticipato, questo risulta notevolmente più rigido del singolo strato di policarbonato. L'andamento delle frange è tuttavia analogo, anche se, data la minore entità degli sforzi, non vi è più fusione con gli sforzi 'generati' dalla reazione vincolare. L'ordine di frangia massimo risulta pari a due con carico di 430 N, da cui:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 13.92 \text{ MPa}$$

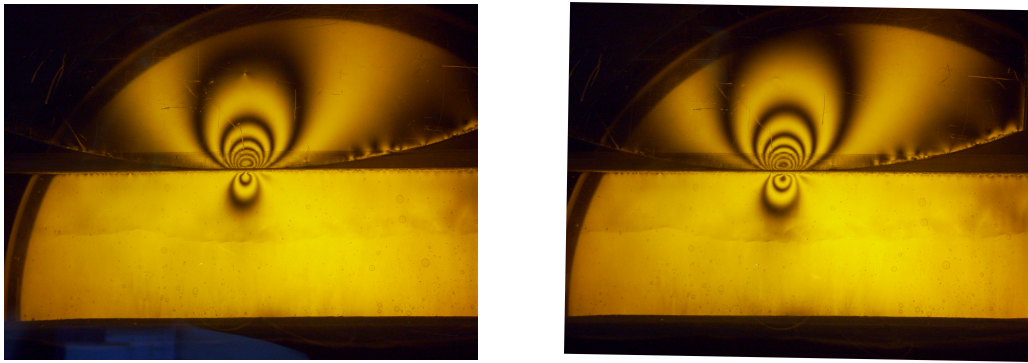


Figura 3.9 – Acquisizione con il modello sandwich, per carico normale pari a 430 N (sinistra) e 530 N (destra)

e pari a tre per carico di 530 N:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 20.88 \text{ MPa}$$

Introducendo nella sperimentazione il fluido, a causa della staticità dell'analisi, non si apprezzano differenze nelle acquisizioni fotoelastiche.

3.6 Determinazione sperimentale dei parametri della frattura

La geometria di un corpo fratturato comporta sforzi nell'intorno della frattura singolari. Si ha quindi il superamento del limite di resistenza del materiale anche per blandi carichi; i tradizionali metodi basati sulle teorie di Von Mises o Tresca per calcolare il carico critico non sono quindi applicabili. Vengono invece calcolati alcuni parametri come il fattore di intensificazione degli sforzi (SIF) per il primo modo di apertura K_I , che, comparati con i valori critici, possono predire se la frattura sarà stabile per una data entità di carico oppure se diventerà instabile propagando e generando quindi il collasso della struttura. I modi di carico a cui una frattura può essere sottoposta sono tre, rappresentati in figura 3.10. Per ogni modo di apertura è calcolabile il SIF K_i , con $i = I, II, III$. Si può mostrare che il campo di sforzi nell'intorno della frattura è descrivibile completamente conoscendo le suddette quantità; è noto inoltre che in un problema in cui siano presenti contemporaneamente più modi di carico è possibile sommare gli sforzi dati dal singolo modo di carico:

$$\sigma_{ij}^{tot} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III} \quad (3.30)$$

3.6.1 Descrizione del campo di sforzi nell'intorno della frattura

Qualsiasi metodo sperimentale per determinare i fattori di intensificazione degli sforzi mediante analisi di immagini fotoelastiche richiede la conoscenza delle equazioni

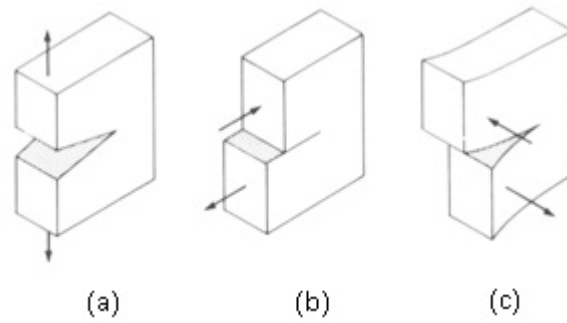


Figura 3.10 – Modi di carico.

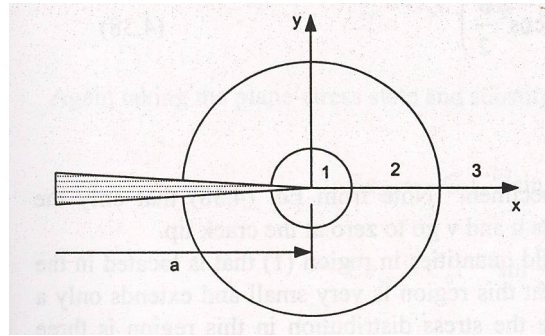


Figura 3.11 – Divisione della zona adiacente all'apice della cricca.

di campo valide nell'intorno dell'apice della cricca. Il campo di sforzi puo' essere rappresentato con una serie di funzioni trigonometriche:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^N A_n r^{(n-1/2)} f_n(\theta) \sum_{m=0}^M B_m r^m g_m(\theta) \quad (3.31)$$

Dove A_n e B_n sono i coefficienti da determinare, f_n e g_m funzioni trigonometriche e (r, θ) le coordinate polari che descrivono la posizione nell'intorno della cricca, con origine nell'apice della stessa. Per valori di r molto piccoli il termine ottenibile con $n = 0$ diventa predominante e gli altri termini possono esser trascurati. Allontanandosi invece dall'apice è necessario considerare un numero di termini sempre maggiori. Si è soliti distinguere tre zone, mostrate in figura 3.11. Nella prima zona, in figura indicata con il numero 1, è possibile descrivere il campo di sforzi semplicemente

come:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (3.32)$$

nel caso di puro modo I. Considerando invece il secondo modo di apertura si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.33)$$

Queste equazioni sono dette equazioni classiche di Westergaard, e furono utilizzate da Irwin per sviluppare il cosiddetto metodo dell'apogeo, utile per stimare sperimentalmente K_I a partire dalla conoscenza delle isocromatiche. È importante notare come le equazioni furono modificate da Irwin, che intuì che era necessario aggiungere un termine lineare per avere accurata riproduzione dei risultati sperimentali. Introdusse il termine σ_{0x} , anche noto come T-stress, ottenendo:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_{0x} \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Nel caso in esame nella presente tesi il pezzo è sottoposto a condizioni di carico con compartecipazione dei primi due modi di apertura, pertanto il metodo di Irwin risulta inutilizzabile; inoltre è stato dimostrato da Chona che le equazioni utilizzate sarebbero valide in una regione molto piccola, più precisamente nei punti in cui vale

$$r < 0.02a \quad (3.35)$$

dove a è la lunghezza della cricca. Inoltre l'assunzione fatta di condizione di sforzo piano non è valida in questa zona. Risulta quindi necessario descrivere il campo di sforzi con un numero più alto di termini, per poter descrivere correttamente ciò che avviene nella zona 2.

Atluri e Kobayashi introdussero le seguenti relazioni, valide per condizioni di apertura mista nella zona 2:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{In} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{II n} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\
\sigma_{yy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{In} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{II n} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\
\tau_{xy} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{In} r^{\frac{n-2}{2}} \left((-1)^n + \frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{II n} r^{\frac{n-2}{2}} \left((-1)^n + \frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta
\end{aligned} \tag{3.36}$$

dove i coefficienti A_{I1} e A_{II1} dipendono esclusivamente dai fattori di intensificazione degli sforzi:

$$\begin{aligned}
A_{I1} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \\
A_{II1} &= - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Il T-stress è invece ricavabile come:

$$4A_{I2} = -\sigma_{0x} \tag{3.38}$$

3.6.2 Analisi multiparametro

Avendo le equazioni di campo, come anticipato, è possibile introdurre i dati acquisiti sulla base della sperimentazione fotoelastica condotta e calcolare i parametri della frattura. Partendo dalla relazione fondamentale della fotoelasticità:

$$\frac{Nf\sigma}{t} = \sigma_1 - \sigma_2$$

Con σ_1, σ_2 sforzi principali, pari a:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Ipotizzando di conoscere i coefficienti delle 3.36, e di essere quindi in grado di ricostruire il campo di sforzi, si può confrontare il valore della differenza tra gli sforzi principali ottenuta sperimentalmente e dalle equazioni in un dato punto m , dovendo valere:

$$\left(\frac{N_m f \sigma}{2t} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)_m^2 + (\tau_{xy})_m^2 \tag{3.39}$$

Definiamo il seguente funzionale, che valuta l'entità dell'errore commesso:

$$g_m = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)_m^2 + (\tau_{xy})_m^2 - \left(\frac{N_m f \sigma}{2t} \right)^2 \quad (3.40)$$

Evidentemente sarà possibile, a partire da un set di parametri di tentativo $A_{I1}, A_{I2} \dots A_{Ik}$ e $A_{II1}, A_{II2} \dots A_{IIl}$ calcolare il funzionale 3.40. Si noti come sia necessario scegliere il numero di parametri k e l caratterizzanti rispettivamente il modo I e il modo II. A partire dalla conoscenza dell'errore si realizza una procedura iterativa, cercando i nuovi parametri che porteranno all'annullamento dell'errore. Nel particolare, si sviluppa in serie di Taylor il funzionale g_m arrestandosi al primo ordine:

$$(g_m)_{i+1} = (g_m)_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{I1}} (\Delta A_{I1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{I2}} (\Delta A_{I2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{Ik}} (\Delta A_{Ik})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II1}} (\Delta A_{II1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II2}} (\Delta A_{II2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{IIl}} (\Delta A_{IIl})_i \quad (3.41)$$

Imponendo il passaggio per lo zero della superficie tangente così trovata:

$$-(g_m)_i = \frac{\partial g_m}{\partial A_{I1}} (\Delta A_{I1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{I2}} (\Delta A_{I2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{Ik}} (\Delta A_{Ik})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II1}} (\Delta A_{II1})_i + \frac{\partial g_m}{\partial A_{II2}} (\Delta A_{II2})_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial A_{IIl}} (\Delta A_{IIl})_i \quad (3.42)$$

Avendo a disposizione l'ordine di frangia in un numero di punti M , è possibile scrivere M funzionali g_m , e quindi un pari numero di equazioni 3.42. In forma matriciale:

$$\underline{g}_i = - [b]_i \underline{\Delta A}_i \quad (3.43)$$

Con:

$$\underline{g}_i = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_m \\ \dots \\ g_M \end{Bmatrix}_i$$

$$\underline{\Delta A}_i = \begin{Bmatrix} \Delta A_{I1} \\ \Delta A_{I2} \\ \dots \\ \Delta A_{Ik} \\ \Delta A_{II1} \\ \Delta A_{II2} \\ \dots \\ \Delta A_{IIl} \end{Bmatrix}_i \quad (3.44)$$

$$[b]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial A_{I1}} & \frac{\partial g_1}{\partial A_{I2}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial A_{Ik}} & \frac{\partial g_1}{\partial A_{II1}} & \frac{\partial g_1}{\partial A_{II2}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial A_{IIl}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial A_{I1}} & \frac{\partial g_2}{\partial A_{I2}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial A_{Ik}} & \frac{\partial g_2}{\partial A_{II1}} & \frac{\partial g_2}{\partial A_{II2}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial A_{IIl}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_M}{\partial A_{I1}} & \frac{\partial g_M}{\partial A_{I2}} & \dots & \frac{\partial g_M}{\partial A_{Ik}} & \frac{\partial g_M}{\partial A_{II1}} & \frac{\partial g_M}{\partial A_{II2}} & \dots & \frac{\partial g_M}{\partial A_{IIl}} \end{bmatrix}_i$$

Le derivate presenti nella matrice $[b]_i$ rispetto al generico A_{In} sono calcolabili come:

$$\frac{\partial g_m}{\partial A_{In}} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_m \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial A_{In}} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial A_{In}} \right)_m + 2 \left(\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{In}} \right)_m \quad (3.45)$$

Mentre quelle secondo il coefficiente generico A_{II_n} :

$$\frac{\partial g_m}{\partial A_{II_n}} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_m \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial A_{II_n}} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial A_{II_n}} \right)_m + 2 \left(\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{II_n}} \right)_m \quad (3.46)$$

Si puo' quindi invertire la 3.43:

$$\underline{\Delta A}_i = -[c]_i^{-1} \underline{d}_i \quad (3.47)$$

Con:

$$\begin{aligned} [c]_i &= [b]_i^T [b]_i \\ [d]_i &= [b]_i g_i \end{aligned} \quad (3.48)$$

Trovate quindi le perturbazioni dei parametri $\Delta A_{I_i}, \Delta A_{II_i}$ è possibile calcolare i nuovi valori dei parametri:

$$\underline{A}_{i+1} = \underline{A}_i + \underline{\Delta A}_i \quad (3.49)$$

Per esplicitare le relazioni 3.45 e 3.46, è necessario derivare le relazioni di Atluri e Kobayashi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial A_{In}} &= \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial A_{In}} &= \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{In}} &= -\frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left((-1)^n + \frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial A_{II_n}} &= -\frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial A_{II_n}} &= -\frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left(2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial A_{II_n}} &= \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left((-1)^n + \frac{n}{2} \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta \end{aligned} \quad (3.51)$$

Le derivate degli sforzi sono pertanto indipendenti dai coefficienti incogniti, e non devono essere ricalcolate ad ogni iterazione. Stabilito quindi un set di parametri di partenza, è possibile, grazie a quanto esposto, realizzare una procedura iterativa che vada a ridurre arbitrariamente l'errore. E' necessario però stabilire un criterio che valuti se è stata raggiunta o meno la convergenza. E' possibile ad esempio arrestare il procedimento iterativo quando risulti soddisfatta la condizione:

$$\left| \underline{A}_{i+1} - \underline{A}_i \right| < \epsilon \quad (3.52)$$

Dove ϵ è un valore prefissato arbitrariamente piccolo. In alternativa è possibile valutare la differenza tra il numero di frangia teorico N_{th} e quello numerico N_{num} , pesato per il numero di parametri M dati in input alla procedura, imponendo:

$$\frac{\sum_1^M |N_{th} - N_{num}|}{M} < \epsilon \quad (3.53)$$

Il secondo metodo è da preferirsi, in quanto valuta la raggiunta convergenza in base al corretto *fittaggio* dei dati.

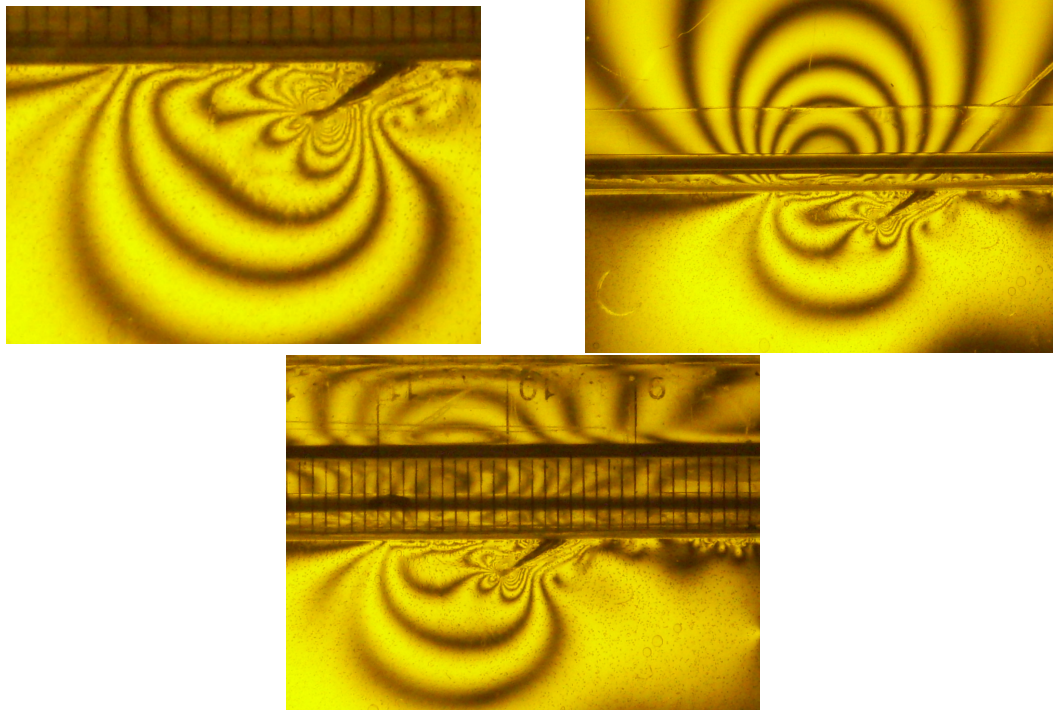


Figura 3.12 – Acquisizioni con rotolamento a carico costante a secco (a sinistra), con tellus oil 46 (a destra) e agip 100 (in basso)

3.7 Determinazione dei SIF per il binario fratturato

Utilizzando il modello sandwich fratturato presentato precedentemente, si conducono delle esperienze, al fine di ottenere immagini che verranno processate con un'implementazione *Matlab* del metodo multiparametrico precedentemente descritto, allo scopo di ottenere i SIF. Le esperienze vengono condotte 'a secco', e in presenza di due fluidi di viscosità diversa:

- *Agip 100*, con viscosità pari a $100 [mm^2/s]$
- *Tellus oil 46*, con viscosità pari a $46 [mm^2/s]$.

Per avere una lunghezza di riferimento, necessaria nei calcoli, è stato posto un righello in corrispondenza della superficie di contatto. Un approccio alternativo consiste nell'indicare la lunghezza della cricca, precedentemente misurata, al programma. La ricostruzione dell'andamento delle frange, mostrata in figura 3.12, non è soddisfacente. Il programma, pertanto, non può essere considerato in grado di apprezzare il fenomeno in maniera efficace. Questo è dovuto con ogni probabilità alla forma della fessura ottenuta, che presenta una sorta di secondo apice, come osservabile dalle immagini, che distorce eccessivamente le frange. Inoltre la lunghezza della fessura è estremamente ridotta, non permettendo di arrivare ad una distanza accettabile dal carico applicato. Ad ogni modo i risultati ottenuti sono riportati in tabella 3.5.

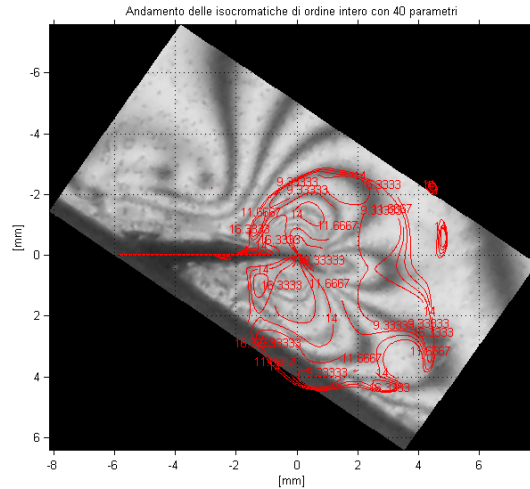


Figura 3.13 – Andamento delle frange 'visto' dal programma multiparametro nel caso della prima delle acquisizioni della figura 3.12

	Secco	Agip 100	Tellus oil 46
K_I	-7	-5.5	-6.12
K_{II}	5	8.84	4.47
σ_{0x}	5.90	7.65	4.22
errore	0.8	0.7	0.9

Tabella 3.5 – Risultati ottenuti nell'analisi delle immagini di figura 3.12

Non deve ingannare il valore di errore basso ottenuto, difatti il programma riesce ad effettuare una ricostruzione con frange passanti per i punti interessati, senza però riuscire ad interpretarne la forma complessiva. Una indicazione interessante si evince però dal valore di K_I negativo: la distanza tra i lembi della cricca è tale da garantire una condizione di non contatto appena ci si allontana dall'apice, ovvero nella zona di validità del modello di frattura lineare elastica utilizzato: è quindi permesso un avvicinamento tra i lembi, giustificando il risultato trovato.

3.8 Modello sandwich a cinque strati

Le esperienze condotte con il modello sandwich a tre strati si sono quindi dimostrate di poca utilità pratica a causa principalmente della bassa qualità della fessura realizzata. Non trovando un modo soddisfacente per realizzare una fessura non passante all'interno di un sandwich si è quindi pensato ad una realizzazione a cinque strati, quattro di polimetacrilato e un cuore centrale di policarbonato.

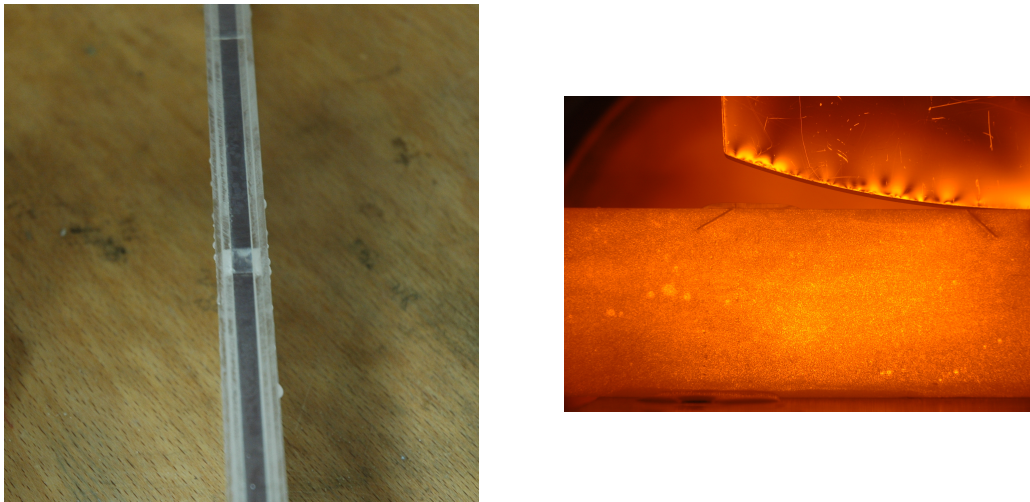


Figura 3.14 – A sinistra: bolla d’aria nella fessura riempita d’acqua. A destra: posizionamento del fluido sopra al modello

Dopo aver realizzato con i metodi descritti in precedenza un sandwich di tre strati si sono utilizzati i macchinari messi a disposizione dalla professoressa M.Rink, disponibili nel dipartimento di chimica, materiali e ingegneria chimica 'Giulio Natta' del Politecnico di Milano, in grado di realizzare una fessura passante con spessore estremamente ridotto (minore di un millimetro) e un apice con raggio all’apice pari a 12 micron.

Sono state realizzate delle fessure con inclinazione di 30, 45 e 60 gradi, e si è poi posto del teflon sul bordo delle stesse, con un lato sporgente dalla bocca della cricca. Si è quindi realizzato l’incollaggio del quarto e quinto strato e si è estratto il teflon. E’ conveniente, nell’applicazione del teflon, rotolare delle strisce di lunghezza pari a due volte la lunghezza della fessura e inserirle nel bordo mediante una lametta. L’estrazione delle stesse ad incollaggio avvenuto ha comportato problemi, in quanto il teflon è si insensibile all’incollaggio con resina bicomponente, ma puo’ rimanere chiuso superiormente dalla colla. Si suggerisce quindi di estrarre le striscette in una fase intermedia dell’incollaggio, quando la colla permetta ancora il passaggio delle stesse ma sia solidificata abbastanza da vincolarsi al materiale e non entrare all’interno della fessura.

In ultimo sono state fresate le superfici inferiore e superiore, in modo da appianare le inevitabili differenze tra i vari strati del modello e garantire una buona condizione di contatto tra binario e ruota e binario e terreno. Purtroppo ciò ha portato alla chiusura della bocche delle fessure inclinate di 45 e 60 gradi, mentre quella da 30 gradi, che risultava parzialmente bloccata, è stata liberata mediante taglierino con lama *Stanley*. La chiusura delle prime due fessure probabilmente da imputarsi alla maggiore inclinazione, nel futuro sarà interessante trovare un metodo per impedirle.

La struttura a cinque strati ha permesso pertanto di avere nuovamente una fessura non passante, realizzata però con tecnologie specifiche per realizzare intagli

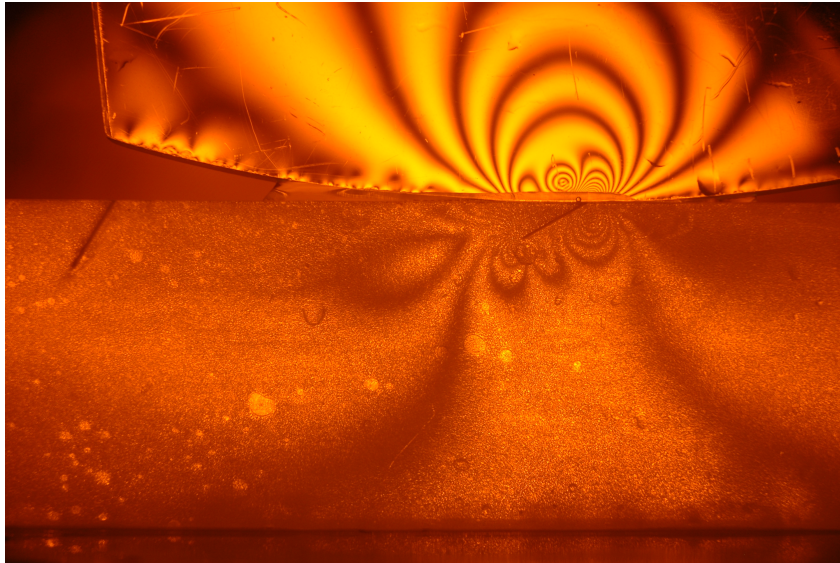


Figura 3.15 – Immagine ottenuta al polariscopio per il primo modello a cinque strati fessurato in presenza di fluido: si notino il contatto multiplo tra ruota e binario e lo strato di fluido in movimento a contatto con la ruota

passanti, con indubbi vantaggi ma con lo svantaggio di avere due strati di collante che inevitabilmente riducono la penetrazione della luce all'interno del pezzo.

La distanza ridotta tra le pareti della fessura puo' impedire l'ingresso del lubrificante all'interno della fessura. Per ovviare a questo problema si sono utilizzate delle siringhe equipaggiate con *butterfly 27*, ago di spessore estremamente ridotto, mediante le quali è possibile introdurre manualmente il fluido nelle fessure.

3.9 Risultati

Sono stati realizzati due modelli fotoelastici: il primo è mostrato in figura 3.15, il secondo in figura 3.17. Si nota una migliore penetrazione della luce nel secondo modello, dovuta ad un incollaggio migliore: diventano quindi visibili alcune frange in più, che permettono di effettuare l'analisi parametrica introducendo punti più vicini all'apice e quindi in cui il campo di sforzi è dominato dalla singolarità.

Sono state condotte due analisi: passaggio della ruota a secco per le varie fessure e in presenza di fluido per la fessura inclinata di 30 gradi, per varie posizioni della ruota.

E' importante segnalare come ai fini dell'analisi sia di importanza fondamentale la scelta delle frange da cui ricavare i parametri da inserire nell'analisi multiparametro sopra descritta: queste dovranno essere preferibilmente quelle determinate dalla presenza della fessura e possibilmente scelte sempre con lo stesso criterio. Sarà preferibile riportare in due posizione successive le forme delle stesse frange in modo da avere una confrontabilità dei risultati ottenuti.

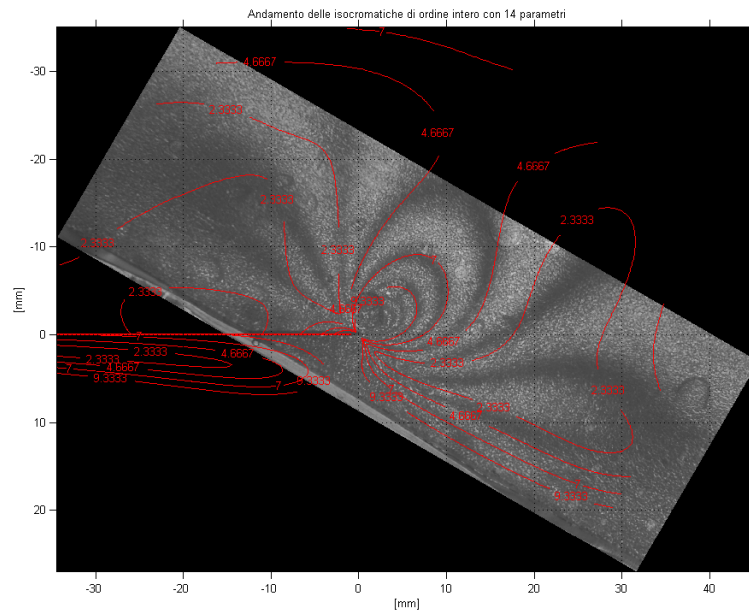


Figura 3.16 – Ricostruzione delle frange in presenza di fluido per fessura inclinata di 30 gradi per il primo modello a cinque strati

Analizzando il modello scarico al polariscopio (figura 3.14) notiamo subito come la qualità dei macchinari utilizzati per la fessura, ovvero il filo della lama e la precisione nel taglio, abbiano permesso di avere tensioni residue impercettibili sul pezzo. Inoltre, avendo applicato il carico sulla ruota, risulta percettibile da un'analisi delle fotografie lo spostamento della fessura e le condizioni di contatto multiplo da questo generate e accentuate.

I risultati dell'analisi in assenza di fluido sono riportati in figura 3.19: gli andamenti sono riportati in funzione della posizione del carico (adimensionalizzata secondo la lunghezza della fessura). Si evince un 'ritardo' nella variazione dei valori per la fessura meno inclinata: questo è dovuto alla posizione relativa tra apice della cricca e carico, variata a causa dell'inclinazione stessa. Il campionamento fotografico è stato peraltro arrestato prima per la fessura meno inclinata, volendo intuitivamente mantenere costante la distanza di partenza tra fessura e carico. Notiamo ancora una volta la presenza di valori negativi di K_I : nonostante la distanza tra le facce della cricca sia stata ridotta in modo drastico questa non è ancora nulla. Abbiamo prima valori molto ridotti per L/a negativi, poi appena passata la bocca della cricca questi diventano positivi per l'apertura presente nella gola, che quindi si richiude riportando in campo negativo il SIF. Gli andamenti del K_{II} e del T-stress riportano un cambio di segno deciso di valore all'attraversamento della bocca. I valori di K_I adimensionalizzato sono di un ordine di grandezza inferiore a quelli del K_{II} adimensionalizzato; è lecito quindi ipotizzare che in assenza di lubrificante la propagazione, qualora presente, avvenga mediante il secondo modo di carico.

E' importante notare come i risultati ottenuti per valori di L/a grandi in senso

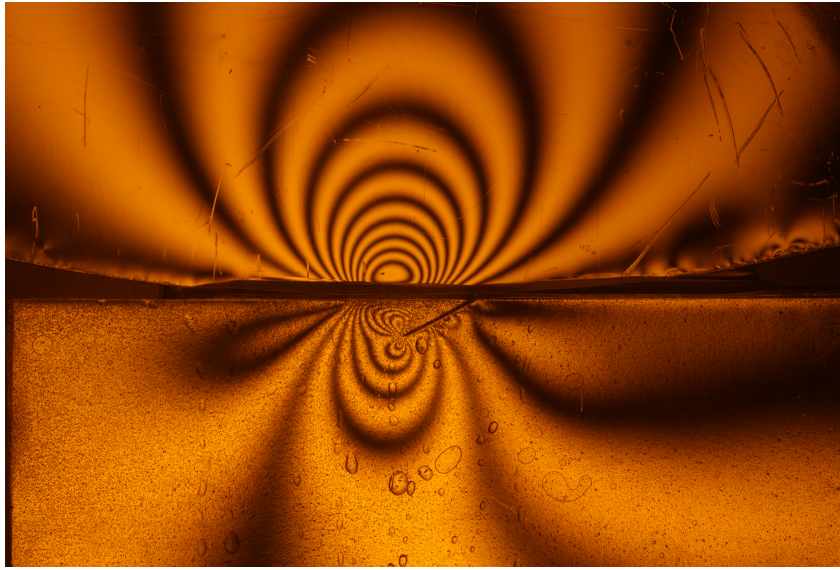


Figura 3.17 – Immagine ottenuta al polariscopio per il secondo modello a cinque strati fessurato in presenza di fluido

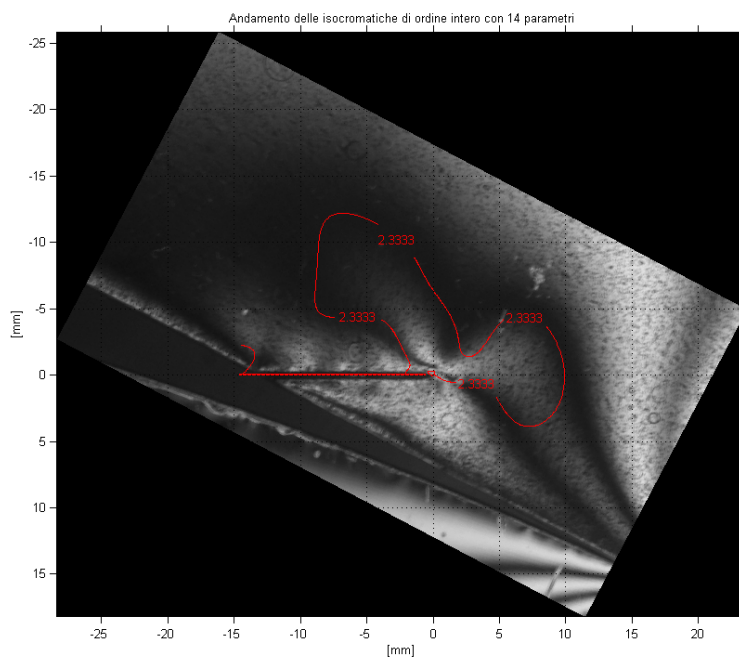


Figura 3.18 – Ricostruzione delle frange in presenza di fluido per fessura inclinata di 30 gradi per il secondo modello a cinque strati

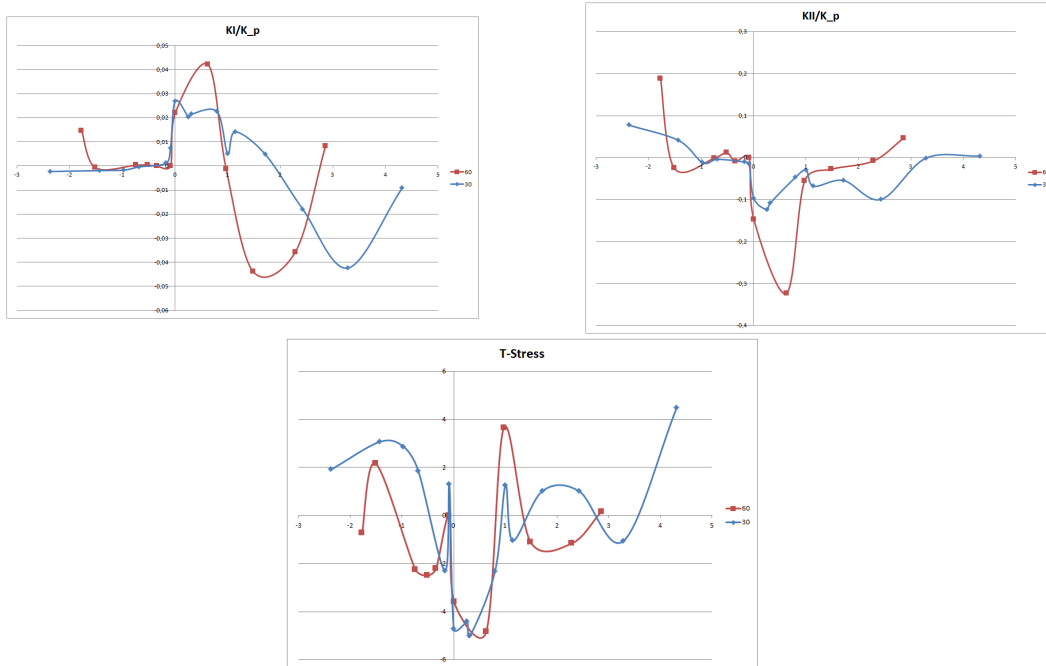


Figura 3.19 – KI, KII e T-stress ottenuti per il binario per inclinazioni della fessura di 30 e 60 gradi, con carico verticale di 500 N

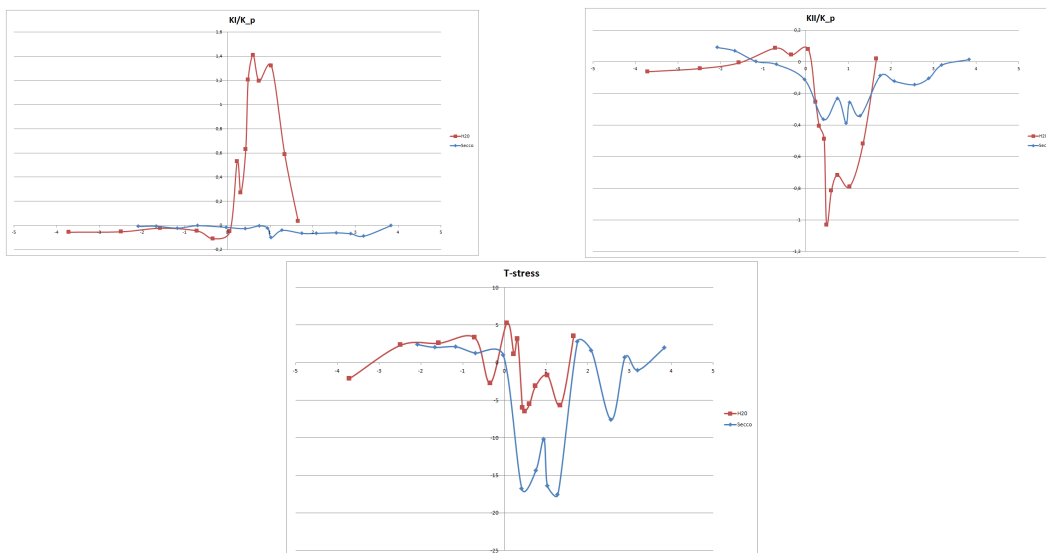


Figura 3.20 – KI, KII e T-stress ottenuti in presenza di fluido e a secco per la fessura inclinata di 30 gradi, con carico verticale di 750 N

assoluto sono poco affidabili a causa delle poche frange disponibili per la distanza tra carico e fessura. In figura 3.16 è riportato l'andamento della ricostruzione delle frange effettuata: si noti come questa sia estremamente precisa nell'intorno dell'apice e di qualità assolutamente migliore a quanto ottenuto con il sandwich a tre strati.

L'analisi in presenza di fluido, è stata condotta per il solo valore di inclinazione della fessura di 30 gradi. E' fondamentale, ai fini di tale analisi, garantire l'ingresso dell'acqua nella fessura: in figura 3.14 è possibile notare la presenza di una bolla d'aria interna alla fessura, creata svuotando parzialmente la stessa applicando una pressione superiormente. La posizione della bolla lascia intuire la presenza di acqua sottostante. Sempre in figura 3.14 è mostrato il 'posizionamento' del fluido: avendo ritenuto superficiali le sponde realizzate per il modello a tre strati, si posiziona dell'acqua al di sopra del modello, che resta posizionata grazie alla tensione superficiale propria.

I risultati ottenuti dall'analisi multiparametro sono riportati in figura 3.20, insieme ai valori dei parametri della frattura ottenuti a secco con lo stesso valore di carico agente sulla ruota. L'andamento di K_I è assolutamente confrontabile per valori di L negativi; si nota invece un deciso incremento dopo il passaggio della bocca della cricca. Il fluido viene imprigionato all'interno della fessura e acquisendo pressione va ad aprire i lembi. L'apertura della fessura avviene quindi solo dopo che la ruota ha abbondantemente superato la bocca della cricca, riportando rapidamente i valori verso lo zero.

Per quanto riguarda il K_{II} sia per L negativi che per L positivi, grazie probabilmente alla lubrificazione introdotta che riduce la resistenza allo scorrimento delle facce della fessura, si ha un incremento in valore assoluto dei valori ottenuti. Si noti inoltre come, nel caso di contatto lubrificato, il SIF vada a zero molto prima. Questo può essere giustificato dalla presenza dell'attrito, che per contatto a secco incolla le facce non permettendo loro di ritornare alla posizione originaria fino a che il carico non si sia allontanato in misura maggiore.

Gli andamenti del T-stress nei due casi sono confrontabili, si nota però una diminuzione del modulo dello stesso quando è presente il lubrificante.

In base a quanto osservato sperimentalmente sarebbe pertanto lecito ipotizzare una propagazione della fessura secondo il meccansimo dell'intrappolamento del fluido o anche per scorrimento, visto l'aumentare dei valori a causa della lubrificazione introdotta.

Capitolo 4

Analisi numerica: il metodo delle funzioni peso (WF)

4.1 Introduzione

In letteratura è possibile trovare un gran numero di metodi utilizzabili allo scopo di determinare i SIFs; tra questi:

- funzione complessa degli sforzi [18],
- mapping conforme [19],
- interpolazione asintotica [20],
- trasformazione integrale [21],
- elementi finiti (FEM) [22],
- elementi di contorno (BEM) [23],
- collocazione degli elementi di contorno (BCM) [24], [25],
- weight function o funzioni peso (WF) [26], [28].

Quasi tutti questi metodi richiedono il calcolo separato dei SIFs per ogni distribuzione di sforzo e per ogni lunghezza della cricca. Il metodo delle WFs, sviluppato da Bueckner [26] semplifica la determinazione dei SIFs considerevolmente. Una WF esiste per ogni problema definito da geometria del componente e tipologia della cricca. Se la funzione è nota, i fattori di intensificazione degli sforzi possono essere ottenuti moltiplicando semplicemente questa funzione per la distribuzione degli sforzi nominale e integrandola lungo la cricca.

4.1.1 Relazioni basilari

Una cricca (riferimento a figura 4.1) di lunghezza a in un corpo può essere caricata da trazioni $\underline{T}(s) = (T_y, T_x)^T$ agenti normalmente ad una curva Γ . Le trazioni sono responsabili di un campo di sforzi all'apice della cricca che può essere caratterizzato

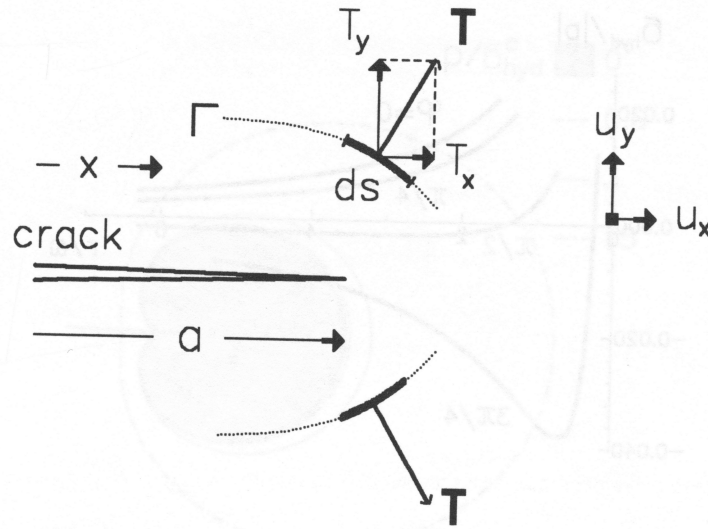


Figura 4.1 - Calcolo dei SIFs per trazioni arbitrarie T , schema geometrico

da un fattore di intensificazione degli sforzi K^T , dove l'indice T si riferisce al sistema di carico. Bueckner [26] ha suggerito di scrivere:

$$K^T = \int_{\tau} \underline{T} \cdot \underline{h} ds \quad (4.1)$$

dove \underline{h} è il vettore della WF $h = (h_y, h_x)^t$. Rice [28] ha mostrato che la WF dipende dal campo di spostamenti $\underline{u} = (u_y, u_x)^T$ per un carico di riferimento arbitrario secondo la seguente relazione:

$$\underline{h} = \frac{E'}{K_r} \frac{\partial \underline{u}}{\partial a} \quad (4.2)$$

con $E' = E$ per stato di sforzo piano e $E' = E/(1 - \nu^2)$ per deformazione piana. K_r è il SIF per il caso di carico di riferimento scelto. Limitando ora la trattazione a cricche soggette al solo primo modo di carico, e con riferimento alla figura 4.2, è possibile trasformare le precedenti relazioni vettoriali in relazioni scalari, ottenendo:

$$K_I = \int_x^a \sigma(x) h(x, a) dx \quad (4.3)$$

L'integrazione deve essere effettuata sulla lunghezza della cricca a partire da $x = 0$ sulla superficie, fino all'apice. La WF $h(x, a)$ dipende solo dalla geometria del componente. La relazione di Rice diviene invece:

$$h(x, a) = \frac{E'}{K_{Ir}} \frac{\partial v_r(x, a)}{\partial a} \quad (4.4)$$

dove $v_r(x, a)$ è il *crack opening displacement* (COD), per il solito sistema di carico di riferimento scelto r . Il SIF K_{Ir} dipende dal campo di sforzi di riferimento $\sigma_r(x)$ e

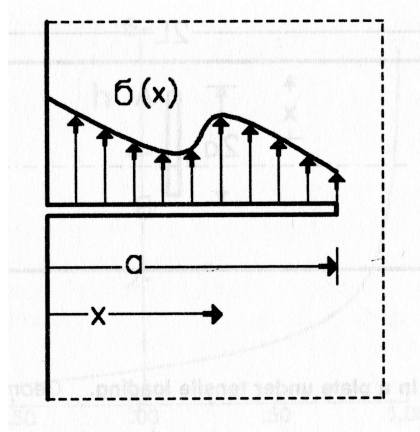


Figura 4.2 – Sforzi lungo la cricca per la definizione dell'integrale di Bueckner

dalla lunghezza della cricca. Solitamente è conveniente usare $\sigma_r = \sigma_0 = \text{cost.}$ come distribuzione degli sforzi di riferimento.

4.1.2 Derivazione della WF

La definizione della WF data in 4.2 puo' essere ricavata semplicemente, come mostrato in [29]. A partire dalla definizione di energia di rilascio per una cricca di lunghezza a sottoposta ad un carico σ_1 e con COD v_1 , è:

$$K_{I1}^2/E' = G_{I1} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^a \sigma_1(x)v_1(x)dx \quad (4.5)$$

Per un secondo sistema di carico risulta invece, analogamente:

$$K_{I2}^2/E' = G_{I2} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^a \sigma_2(x)v_2(x)dx \quad (4.6)$$

Sovrapponendo i due campi di sforzi:

$$\frac{(K_{I1} + K_{I2})^2}{E'} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^a (\sigma_1 + \sigma_2)(v_1 + v_2)dx \quad (4.7)$$

Poiché, dal teorema di Betti [27] risulta:

$$\int_0^a \sigma_1 v_2 dx = \int_0^a \sigma_2 v_1 dx \quad (4.8)$$

la 4.7 diventa:

$$\frac{K_{I1}^2}{E'} + \frac{K_{I2}^2}{E'} + 2\frac{K_{I1}K_{I2}}{E'} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^a \sigma_1 v_1 dx + \frac{\partial}{\partial a} \int_0^a \sigma_2 v_2 dx + 2\frac{\partial}{\partial a} \int_0^a \sigma_1 v_2 dx \quad (4.9)$$

Per la 4.5 e la 4.6 otteniamo:

$$K_{I2} = \frac{E'}{K_{I1}} \int_0^a \sigma_2 \frac{\partial v_1}{\partial a} dx = \int_0^a \sigma_2 h(x, a) dx \quad (4.10)$$

Di conseguenza, interpretando il sistema di carico 1 come il sistema di riferimento r :

$$K_I = \frac{E'}{K_{Ir}} \int_0^a \sigma(x) \frac{\partial v_r}{\partial a} dx h(x, a) = \frac{E'}{K_{Ir}} \frac{\partial v_r}{\partial a} \quad (4.11)$$

$$h(x, a) = \frac{E'}{K_{Ir}} \frac{\partial v_r}{\partial a} \quad (4.12)$$

Per determinare la WF è necessario conoscere, per un caso di carico di riferimento K_{Ir} e $v_r(x, a)$. In molti casi è noto il SIF e non il COD. Nella situazione opposta è però possibile, combinando le equazioni 4.3 e 4.4, ottenere:

$$K_{Ir}^2 = E' \int_0^a \sigma_r \frac{\partial v_r(x, a)}{\partial a} dx \quad (4.13)$$

Che per uno campo di sforzi di riferimento costante $\sigma_r = \sigma_0$ diviene:

$$K_{Ir}^2 = E' \sigma_0 \int_0^a \frac{\partial v_r(x, a)}{\partial a} dx \quad (4.14)$$

4.1.3 Interpretazione fisica della WF

La WF $h(x', a)$ può essere interpretata come la funzione di Green dei SIFs. Questo significa che la WF è identica al SIF causato da una coppia di forze normali di norma unitaria agenti al punto x' . Esprimendo la singola forza P mediante il delta di Dirac δ :

$$\sigma(x) = P\delta(x - x') \quad (4.15)$$

e sostituendo nella 4.3, si ottiene:

$$K_I = P \int_0^a h(x, a) \delta(x - x') dx = Ph(x', a) \quad (4.16)$$

Ovvero, per $P = 1$:

$$K_I = h(x', a) \quad (4.17)$$

4.2 Funzione peso per cricca inclinata in un semipiano

Nel caso di cricca inclinata, rappresentato in figura 4.3, la perdita di simmetria e la presenza di sforzi normali e tangenziali comporta la presenza di modo di carico misto, complicando la struttura della WF [44]. Si richiede infatti una struttura matriciale, suggerita per la prima volta da Fett e Munz nel 1997 [30]. Per ottenere tale struttura, è necessario innanzitutto notare come un solo sistema di carico di riferimento non sia sufficiente per definire la WF quando ci si aspetta la compartecipazione di due modi di carico e quindi la presenza di due SIF non nulli. Difatti la scrittura dell'energia associata alla cricca dipende da entrambi secondo la sovrapposizione degli effetti.

Scegliendo due sistemi di carico di riferimento indipendenti, con presenza contemporanea in entrambi dei due modi di carico, per la definizione del tasso di rilascio dell'energia vale la seguente identità:

$$\frac{1}{H} [(K_I^{(i)}(a))^2 + (K_{II}^{(i)}(a))^2] = \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a [(\sigma^{(i)}(x)v^{(i)}(x, a)) + (\tau^{(i)}(x)u^{(i)}(x, a))] dx \right\} \quad (4.18)$$

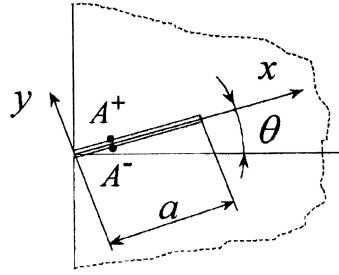


Figura 4.3 – Schema del problema in esame

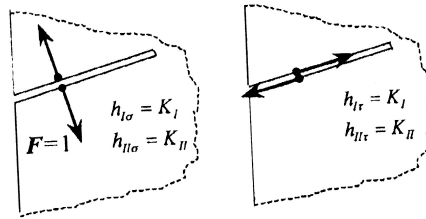


Figura 4.4 – Rappresentazione delle WF come SIF prodotti da coppie di forze opposte applicate sui corrispondenti punti sulle facce della cricca

Dove $\sigma^i(x), \tau^i(x)$ sono le componenti dello sforzo applicato sulle facce della cricca secondo il sistema di carico di riferimento (i), con (i) = (1), (2) a seconda del sistema scelto e $v^i(x, a), u^i(x, a)$ sono gli spostamenti delle facce della cricca.

Si introduce un terzo sistema di carichi, peraltro generabile secondo una combinazione lineare dei sistemi di riferimento scelti in precedenza, grazie alla imposta indipendenza, di cui sono note le componenti di sforzo $\sigma(x), \tau(x)$, e di cui si vogliono calcolare i SIF K_I, K_{II} . Per il principio di sovrapposizione degli sforzi si puo' scrivere:

$$\frac{1}{H} [(K_I(a) + K_I^{(i)}(a))^2 + (K_{II}(a) + K_{II}^{(i)}(a))^2] = \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a [(\sigma(x) + \sigma^{(i)}(x))(v(x, a) + v^{(i)}(x, a)) + (\tau(x) + \tau^{(i)}(x))(u(x, a) + u^{(i)}(x, a))] dx \right\} \quad (4.19)$$

Grazie ad alcune semplificazioni algebriche e l'applicazione del teorema di reciprocità di Betti si ricava:

$$K_I(a)K_I^{(i)}(a) + K_{II}(a)K_{II}^{(i)}(a) = \frac{1}{2}H \int_0^a \left(\sigma(x) \frac{\partial v^{(i)}(x, a)}{\partial a} + \tau(x) \frac{\partial u^{(i)}(x, a)}{\partial a} \right) dx \quad (4.20)$$

Ovvero un sistema di due equazioni lineari con incognite K_I, K_{II} . Il sistema ha soluzione unica se il determinante:

$$D(a) = K_I(a)K_{II}^{(i)}(a) - K_{II}(a)K_I^{(i)}(a) \quad (4.21)$$

non è nullo, condizione soddisfatta grazie all'indipendenza dei due sistemi di carico di riferimento. E' possibile quindi risolvere il sistema e ottenere:

$$K_I(a) = \frac{H}{2D(a)} \left\{ \int_0^a \left(K_{II}^{(2)}(a) \frac{\partial v^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_{II}^{(1)}(a) \frac{\partial v^{(2)}(x, a)}{\partial a} \right) \sigma(x) dx + \int_0^a \left(K_{II}^{(2)}(a) \frac{\partial u^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_{II}^{(1)}(a) \frac{\partial u^{(2)}(x, a)}{\partial a} \right) \sigma(x) \right\} \quad (4.22)$$

$$K_{II}(a) = \frac{H}{2D(a)} \left\{ \int_0^a \left(K_I^{(2)}(a) \frac{\partial v^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_I^{(1)}(a) \frac{\partial v^{(2)}(x, a)}{\partial a} \right) \sigma(x) dx + \int_0^a \left(K_I^{(2)}(a) \frac{\partial u^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_I^{(1)}(a) \frac{\partial u^{(2)}(x, a)}{\partial a} \right) \sigma(x) \right\} \quad (4.23)$$

Che puo' essere scritta in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} K_I(a) \\ K_{II}(a) \end{Bmatrix} = \int_0^a \begin{bmatrix} h_{I\sigma}(x, a) & h_{I\tau}(x, a) \\ h_{II\sigma}(x, a) & h_{II\tau}(x, a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma(x) \\ \tau(x) \end{Bmatrix} dx \quad (4.24)$$

Avendo definito la matrice delle WF h_{ij} come:

$$\begin{bmatrix} h_{I\sigma}(x, a) & h_{I\tau}(x, a) \\ h_{II\sigma}(x, a) & h_{II\tau}(x, a) \end{bmatrix} = \frac{H}{2D(a)} \begin{bmatrix} K_{II}^{(2)}(a) \frac{\partial v^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_{II}^{(1)}(a) \frac{\partial v^{(2)}(x, a)}{\partial a} & K_{II}^{(2)}(a) \frac{\partial u^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_{II}^{(1)}(a) \frac{\partial u^{(2)}(x, a)}{\partial a} \\ K_I^{(2)}(a) \frac{\partial v^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_I^{(1)}(a) \frac{\partial v^{(2)}(x, a)}{\partial a} & K_I^{(2)}(a) \frac{\partial u^{(1)}(x, a)}{\partial a} - K_I^{(1)}(a) \frac{\partial u^{(2)}(x, a)}{\partial a} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Beghini, Bertini e Fontanari hanno proposto per il caso in esame una WF del tipo:

$$h_{M\mu}(x, a, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1/2} + \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(M\mu)}(\theta) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{i-1/2} \right] \quad (4.26)$$

per $M\mu = I\sigma, II\tau$, e:

$$h_{M\mu}(x, a, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(M\mu)}(\theta) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{i-1/2} \right] \quad (4.27)$$

per $M\mu = II\sigma, I\tau$. Le funzioni angolari $\alpha_i^{(M\mu)}(\theta)$ sono state approssimate mediante espansione in serie di Fourier:

$$\alpha_i^{(M\mu)}(\theta) = \lambda_{i1}^{M\mu} \tan^2(\theta) + \sum_{j=2}^m \lambda_{ij}^{M\mu} \cos((j-2)\theta) \quad (4.28)$$

per $M\mu = I\sigma, II\tau$, e:

$$\alpha_i^{(M\mu)}(\theta) = \lambda_{i1}^{M\mu} \tan^2(\theta) \sin(\theta) + \sum_{j=2}^m \lambda_{ij}^{M\mu} \sin((j-1)\theta) \quad (4.29)$$

per $M\mu = II\sigma, I\tau$. I coefficienti $\lambda_{ij}^{M\mu}$ sono ottenuti mediante confronto con analisi FEM, e riportati in tabella 4.1. Il professor Fontanari ci ha fornito dei valori aggiornati degli stessi, capaci di una maggiore precisione di calcolo.

4.3 SIF per carico concentrato agente sulla superficie

Ipotizziamo ora di avere un carico concentrato viaggiante sulla superficie di un semipiano, secondo lo schema mostrato in figura 4.6. Le sollecitazioni agenti sulla cricca possono essere considerate come una prima approssimazione di quelle effettivamente generate dal contatto ruota-rotaia. Grazie alla teoria del Boussinesque, e come già ricavato nel Capitolo 2, è possibile esprimere gli sforzi nominali agenti sul bordo della cricca:

$$\sigma(x, \theta) = -\frac{2P}{\pi} \frac{L^2 \cos^2(\theta)x}{(x^2 + L^2 - 2Lx \sin(\theta))^2} \quad (4.30)$$

$$\tau(x, \theta) = -\frac{2P}{\pi} \frac{(x - L \sin(\theta))L \cos(\theta)x}{(x^2 + L^2 - 2Lx \sin(\theta))^2} \quad (4.31)$$

I SIFs, ottenuti mediante integrazione sulla lunghezza della cricca, sono adimensionalizzati secondo:

$$K_P = P \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (4.32)$$

I risultati ottenuti sono riportati in figura 4.5. Il K_{II} presenta una discontinuità per $L = 0$, per inclinazione nulla della cricca si ha solo un cambiamento di segno, dovuto al cambiamento della direzione di scorrimento relativa delle facce della cricca. A causa della non simmetria del problema per valori di θ diversi da 0 si ha invece anche un improvviso cambiamento del modulo.

E' fondamentale notare come K_I assuma valori negativi per ogni posizione del carico: valori di questo genere non sono fisicamente ammissibili in quanto comporterebbero la compenetrazione tra le facce, che rende pertanto fittizi i risultati ottenuti.

4.4 Funzione di Green

Per introdurre nel modello fatto il vincolo di non compenetrazione tra le facce della cricca è necessario innanzitutto calcolare gli spostamenti delle facce della cricca in direzione orizzontale e verticale [45]. Fett ha mostrato come questi possano essere ricavati come:

$$v(x, a) = \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\sigma}(x, b)K_I(b) + h_{II\sigma}(x, b)K_{II}(b)] db \quad (4.33)$$

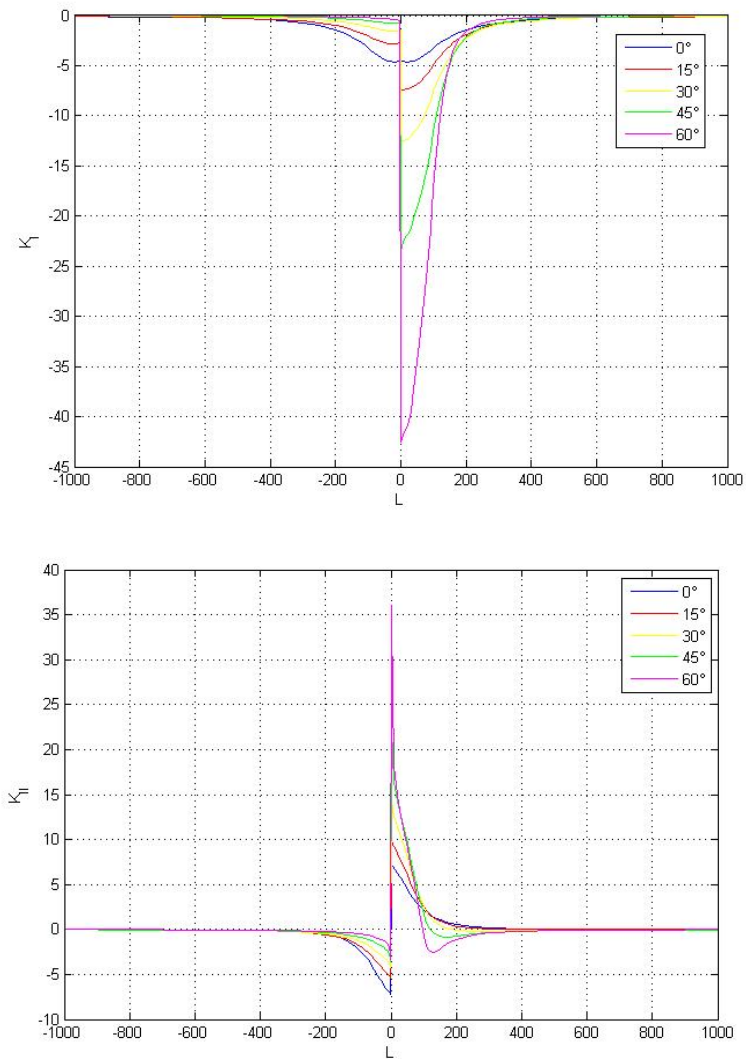


Figura 4.5 – K_I e K_{II} ottenuti permettendo la compenetrazione delle facce per vari angoli di inclinazione della cricca

$\lambda_{ij}^{(I\sigma)}$	$i = 1$	2	3	4
$j = 1$	0.352260648	0.561740777	0.002757774	-0.082522228
2	20.12858867	-6.75915207	14.69890758	-6.555566564
3	-28.35443914	12.21105233	-24.64961078	10.87434602
4	10.61781505	-6.721903843	13.14073974	-5.893279322
5	-1.794159914	1.272090422	-2.589806357	1.200996132
$\lambda_{ij}^{(Ir)}$	$i = 1$	2	3	4
$j = 1$	0.04401007	-0.088936286	0.09297728	-0.035669115
2	5.730314603	-11.04002435	12.13325221	-4.883436003
3	-4.413898809	10.19534617	-11.84935675	4.856493593
4	1.598258465	-3.559021699	4.07900429	-1.676244823
5	-0.257065332	0.515781329	-0.548201846	0.214198514
$\lambda_{ij}^{(II\sigma)}$	$i = 1$	2	3	4
$j = 1$	0.177883032	0.728488774	-0.248806075	0.023045677
2	0.808784091	17.6992381	-10.7581263	3.112044367
3	0.101895496	-16.00705368	11.92486888	-4.026999105
4	-0.023285672	5.675420857	-3.879295621	1.234486015
5	0.001237758	-0.851326701	0.497548624	-0.133053283
$\lambda_{ij}^{(IIr)}$	$i = 1$	2	3	4
$j = 1$	0.114487102	-0.22899214	0.242228468	-0.093044459
2	8.781169684	-11.51130605	11.0665334	-4.245644102
3	-12.02782951	19.63198074	-19.64671793	7.575469487
4	4.571171695	-9.876681231	11.38812338	-4.668556109
5	-0.723370423	1.708779212	-2.077090179	0.884130668

Tabella 4.1 – Valori dei coefficienti λ_{ij}

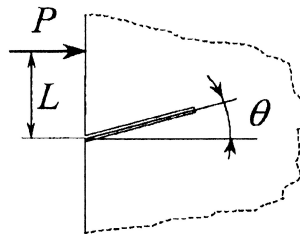


Figura 4.6 – Carico concentrato viaggiante sulla superficie del binario fratturato

$$u(x, a) = \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\tau}(x, b)K_I(b) + h_{II\tau}(x, b)K_{II}(b)] db \quad (4.34)$$

Si noti come b sia una variabile di comodo destinata a sparire dopo l'integrazione. Definita:

$$[W(x, a)] = \begin{bmatrix} h_{I\sigma}(x, a) & h_{I\tau}(x, a) \\ h_{II\sigma}(x, a) & h_{II\tau}(x, a) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

la 4.33 e la 4.34 sono riassumibili in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} v(x, a) \\ u(x, a) \end{pmatrix} = \frac{2}{H} \int_0^a \left[\int_{\max(x, x')}^a [W(x, b)]^T [W(x, b)] db \right] \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix} dx' \quad (4.36)$$

Per ottenere la precedente si sostituisce l'espressione 4.24 nelle equazioni del COD e si inverte l'ordine di integrazione (Fett, Munz). Ponendo:

$$[G(x, x')] = \begin{bmatrix} G_{v\sigma}(x, x') & G_{v\tau}(x, x') \\ G_{u\sigma}(x, x') & G_{u\tau}(x, x') \end{bmatrix} = \int_{\max(x, x')}^a [W(x, b)]^T [W(x, b)] db \quad (4.37)$$

e sostituendo nella 4.36 si ottiene:

$$\begin{pmatrix} v(x, a) \\ u(x, a) \end{pmatrix} = \frac{2}{H} \int_0^a [G(x, x')] \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix} dx' \quad (4.38)$$

La matrice $[G(x, x')]$ è quindi nient'altro che la funzione di Green, in quanto lega il carico applicato sulle facce della cricca agli spostamenti locali. Le singole componenti, rappresentanti l'influenza degli sforzi normali e tangenziali su spostamenti normali e tangenziali, sono:

$$G_{v\sigma}(x, x') = \int_{\max(x, x')}^a [h_{I\sigma}(x, b)h_{I\sigma}(x', b) + h_{II\sigma}(x, b)h_{II\sigma}(x', b)] db \quad (4.39)$$

$$G_{v\tau}(x, x') = \int_{\max(x, x')}^a [h_{I\sigma}(x, b)h_{I\tau}(x', b) + h_{II\sigma}(x, b)h_{II\tau}(x', b)] db \quad (4.40)$$

$$G_{u\sigma}(x, x') = \int_{\max(x, x')}^a [h_{I\tau}(x, b)h_{I\sigma}(x', b) + h_{II\tau}(x, b)h_{II\sigma}(x', b)] db \quad (4.41)$$

$$G_{u\tau}(x, x') = \int_{\max(x, x')}^a [h_{I\tau}(x, b)h_{I\tau}(x', b) + h_{II\tau}(x, b)h_{II\tau}(x', b)] db \quad (4.42)$$

4.4.1 Integrazione

Sostituendo le espressioni delle funzioni peso nelle funzioni di Green e ricordando l'espressione ottenuta per gli spostamenti si ha:

$$\begin{aligned}
v(x, a) = & \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{I\sigma} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{I\sigma} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \sigma(x') db dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{II\sigma} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{II\sigma} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \sigma(x') db dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{I\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{I\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \tau(x') db dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{II\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{II\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \tau(x') db dx'
\end{aligned} \tag{4.43}$$

e

$$\begin{aligned}
u(x, a) = & \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{I\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{I\sigma} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \sigma(x') db dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{II\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{II\sigma} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \sigma(x') db dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{I\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{I\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \tau(x') db dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \int_0^a \int_{\max(x, x')}^a \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{II\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \right] \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^{II\tau} \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] \tau(x') db dx'
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Essendo i coefficienti $\alpha_k^{M\mu}$ indipendenti sia da x' che da b , possono essere portati fuori dal segno di integrale:

$$\begin{aligned}
v(x, a) = & \\
& \frac{4}{H\pi} \sum_{k,j=1}^n (\alpha_k^{I\sigma} \alpha_j^{I\sigma} + \alpha_k^{II\sigma} \alpha_j^{II\sigma}) \int_0^a \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db\sigma(x') dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \sum_{k,j=1}^n (\alpha_k^{I\tau} \alpha_j^{I\tau} + \alpha_k^{II\tau} \alpha_j^{II\tau}) \int_0^a \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db\tau(x') dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \sum_{k,j=1}^n (\alpha_k^{I\sigma} \alpha_j^{I\tau} + \alpha_k^{II\sigma} \alpha_j^{II\tau}) \int_0^a \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db\sigma(x') dx' + \\
& \frac{4}{H\pi} \sum_{k,j=1}^n (\alpha_k^{I\tau} \alpha_j^{I\sigma} + \alpha_k^{II\tau} \alpha_j^{II\sigma}) \int_0^a \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db\tau(x') dx' +
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Come si puo' notare tutto si riduce allo svolgimento di due gruppi di integrali:

$$\int_0^a \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db\sigma(x') dx' \tag{4.46}$$

$$\int_0^a \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db\tau(x') dx' \tag{4.47}$$

che hanno lo stesso integrale in db e cambiano invece per la presenza del termine di tensione nella successiva integrazione in dx' . L'integrale generale puo' essere visto come la somma di n^2 integrali moltiplicati per i rispettivi coefficienti numerici combinati.

4.4.2 Dominio di integrazione

Il dominio di integrazione varia con il variare delle variabili (x, x') . Difatti, l'estremo inferiore dipende da quale tra queste assume il valore massimo nel punto. Questo peraltro garantisce l'esistenza della funzione in campo reale, per la presenza dei termini del tipo $(1 - x/b)^{(k-3)}$ e $(1 - x'/b)^{(j-3)}$. Si noti come l'integrale possa essere scomposto in due termini:

$$I(x, a) = I_1(x, a) + I_2(x, a) \tag{4.48}$$

Con:

$$I_1(x, a) = \int_0^x \int_x^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} dbS(x') dx' \quad 0 < x' < x \tag{4.49}$$

$$I_2(x, a) = \int_x^a \int_{x'}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} dbS(x') dx' \quad x < x' < a \tag{4.50}$$

Dove $S(x')$ rappresenta la generica tensione normale o tangenziale.

4.4.3 Integrale interno in db

Il problema maggiore è svolgere gli integrali interni, nel nostro caso in numero di 25:

$$I = \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db \quad (4.51)$$

E' possibile trovare una rappresentazione ricorsiva degli integrali, difatti, raccogliendo i termini $(1 - x'/b)$ o $(1 - x/b)$ si ottiene nel primo caso:

$$\begin{aligned} I_{kj} &= \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2-1)} db - \\ & x' \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2-1)} db \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ovvero:

$$I_{kj} = I_{k(j-1)} + x' A_{kj} \quad (4.53)$$

E nel secondo:

$$\begin{aligned} I_{kj} &= \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2-1)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db - \\ & x' \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2-1)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ovvero:

$$I_{kj} = I_{(k-1)j} + x A_{kj} \quad (4.55)$$

In entrambi i casi si ottiene un abbassamento di grado in b , ovvero la variabile integranda. Pertanto è sufficiente risolvere il primo integrale (corrispondente a $k = 1, j = 1$) e occuparsi del secondo integrale della scomposizione. Adottando la scomposizione presentata in 4.53 e 4.55 i 25 integrali, ordinati in una matrice, diventano:

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{11} + x' A_{12} & I_{12} + x' A_{13} & I_{13} + x' A_{14} & I_{14} + x' A_{15} \\ I_{11} + x A_{21} & I_{12} + x A_{22} & I_{13} + x A_{23} & I_{14} + x A_{24} & I_{15} + x A_{25} \\ I_{21} + x A_{31} & I_{22} + x A_{32} & I_{23} + x A_{33} & I_{24} + x A_{34} & I_{25} + x A_{35} \\ I_{31} + x A_{41} & I_{32} + x A_{42} & I_{33} + x A_{43} & I_{34} + x A_{44} & I_{35} + x A_{45} \\ I_{41} + x A_{51} & I_{42} + x A_{52} & I_{43} + x A_{53} & I_{44} + x A_{54} & I_{45} + x A_{55} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

In cui si è utilizzato un approccio 'orizzontale'. Adottando invece un approccio in verticale otteniamo:

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{11} + x' A_{12} & I_{12} + x' A_{13} & I_{13} + x' A_{14} & I_{14} + x' A_{15} \\ I_{11} + x A_{21} & I_{21} + x' A_{22} & I_{22} + x' A_{23} & I_{23} + x' A_{24} & I_{24} + x' A_{25} \\ I_{21} + x A_{31} & I_{31} + x' A_{32} & I_{32} + x' A_{33} & I_{33} + x' A_{34} & I_{34} + x' A_{35} \\ I_{31} + x A_{41} & I_{41} + x' A_{42} & I_{42} + x' A_{43} & I_{43} + x' A_{44} & I_{44} + x' A_{45} \\ I_{41} + x A_{51} & I_{51} + x' A_{52} & I_{52} + x' A_{53} & I_{54} + x' A_{54} & I_{54} + x' A_{55} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Le due formulazioni sono analoghe, si è scelto di utilizzare la prima presentata[4.56]. Il primo integrale risulta pari a:

$$I_{11} = \int \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{-1/2} db = \int (b-x)^{-1/2} (b-x')^{-1/2} db \quad (4.58)$$

Che ha primitiva pari a:

$$I_{11} = 2 \ln(\sqrt{b-x} + \sqrt{b-x'}) \quad (4.59)$$

Sostituendo gli estremi di integrazione:

$$\begin{aligned} I_{11} &= 2 \ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x'}) - 2 \ln(\sqrt{x-x'}) \quad 0 < x' < x \\ I_{11} &= 2 \ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x'}) - 2 \ln(\sqrt{x'-x}) \quad x < x' < a \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ovvero:

$$I_{11} = \ln \left[\frac{(\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x'} + \sqrt{a-x'})^2}{|x-x'|} \right] \quad (4.61)$$

Si noti come l'integrale presenti alcune singolarità, in grado di complicare la seconda integrazione:

- per $x' = 0$ l'integrale tende ad infinito
- per $x = x'$ l'integrale tende ad infinito

Esistono pertanto due rette sulle quali non è possibile ottenere il valore numerico dell'integrale. Si rende necessaria una integrazione analitica separata, che sarà trattata in seguito.

4.4.4 Integrali successivi al primo

Per $k = 1, j = 2$ la funzione integranda puo' essere semplificata, grazie alle 4.56 in:

$$I_{12} = I_{11} - x' \int \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{-1/2} db \quad (4.62)$$

Pertanto è sufficiente integrare il secondo termine, che, adottando un cambio di variabili:

$$t = 1/b; \quad -db/b^2 = dt \quad (4.63)$$

si puo' scrivere come:

$$A_{12} = \int (1-xt)^{-1/2} (1-x't)^{-1/2} dt \quad (4.64)$$

Razionalizzando e integrando per parti si ottiene:

$$A_{12} = -\frac{2}{\sqrt{xx'}} \ln[\sqrt{x'(1-xt)} + \sqrt{x(1-x't)}] = -\frac{2}{\sqrt{xx'}} \ln \left[\sqrt{x' \left(1 - \frac{x}{b}\right)} + \sqrt{x \left(1 - \frac{x'}{b}\right)} \right] \quad (4.65)$$

Sostituendo gli estremi di integrazione e condensando le due equazioni che si ottengono mediante il valore assoluto, come fatto prima, otteniamo:

$$I_{12} = I_{11} - \sqrt{\frac{x'}{x}} \ln \left[\frac{\left(\sqrt{x' \left(1 - \frac{x}{a}\right)} + \sqrt{x \left(1 - \frac{x'}{a}\right)} \right)^2}{|x - x'|} \right] \quad (4.66)$$

Il termine A_{12} presenta l'unica singolarità è per $x = x'$, che va ad aggiungersi a quelle presenti a causa del termine I_{11} . Negli integrali successivi non si presenteranno ulteriori singolarità, pertanto le tre rette del dominio in cui la funzione tende ad infinito sono:

- $x = x'$
- $x = 0$
- $x' = 0$

Per $k = 1, j = 3$, utilizzando ancora l'abbassamento di grado, si ha:

$$I_{13} = I_{12} - x' \int \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{1/2} db \quad (4.67)$$

Adottando il cambio di variabili definito in 4.63:

$$A_{13} = \int \frac{(1 - x't)^{1/2}}{(1 - xt)^{1/2}} dt \quad (4.68)$$

Razionalizzando e integrando:

$$A_{13} = -\frac{1}{x} \left[\left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1/2} + \frac{x' - x}{2} \int \frac{1}{(1 - x't)^{1/2} (1 - x/t)^{1/2}} dt \right] \quad (4.69)$$

ci si riconduce all'integrale A_{12} , ottenendo quindi una forma ricorsiva che sarà utilizzata per i termini seguenti:

$$A_{13} = -\frac{1}{x} \left[\left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1/2} + \frac{x' - x}{2} A_{12} \right] \quad (4.70)$$

Sostituendo gli estremi di integrazione, l'integrale I_{13} risulta:

$$\begin{aligned} I_{13} &= I_{12} - \frac{x'}{x} \left[\left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + \frac{x' - x}{2} (A_{12}(a) - A_{12}(x)) \right] & 0 < x' < x \\ I_{13} &= I_{12} - \frac{x'}{x} \left[\left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + \frac{x' - x}{2} (A_{12}(a) - A_{12}(x')) \right] & 0 < x' < x \end{aligned} \quad (4.71)$$

Questa forma risulta singolare per $x = 0$, oltre che ovviamente per le singolarità già considerate in I_{12} .

Avendo notato la presenza di una ricorsività, i termini per cui ($k = 1; j = 4, 5$) sono di immediata formulazione. Difatti questi sono della forma:

$$A_{1j} = \int \frac{(1 - x't)^{j-5/2}}{(1 - xt)^{1/2}} dt \quad (4.72)$$

La formula ricorsiva per l'integrale indefinito è:

$$A_{1j} = \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{2} - j + \frac{5}{2} - 1} \left[\left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{j-5/2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1/2} + \right. \\ \left. \left[(j - 5/2)(x' - x) \int \frac{(1 - x't)^{j-7/2}}{(1 - xt)^{1/2}} dt \right] \right] \quad (4.73)$$

Sostituendo gli estremi di integrazione:

$$A_{1j} = \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{2} - j + \frac{5}{2} - 1} \left[\left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{j-5/2} \right. \\ \left. \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + (j - 5/2)(x' - x)(A_{1(j-1)}(a) - A_{1(j-1)}(x)) \right] \quad 0 < x' < x \quad (4.74)$$

$$A_{1j} = \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{2} - j + \frac{5}{2} - 1} \left[\left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{j-5/2} \right. \\ \left. \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + (j - 5/2)(x' - x)(A_{1(j-1)}(a) - A_{1(j-1)}(x')) \right] \quad x < x' < a$$

Passando alla seconda riga cambia la strategia di abbassamento di grado, invece che riferirsi al termine corrispondente a ($k, j - 1$) ci si riferisce a ($k - 1, j$). Per ($k = 2, j = 1$) si ha:

$$I_{21} = \int \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1/2} db = I_{11} - x \int \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1/2} db = I_{11} + xA_{21} \quad (4.75)$$

Si noti come il termine A_{21} sia identico ad A_{12} , risulta quindi immediato calcolare:

$$I_{21} = I_{11} - \sqrt{\frac{x}{x'}} \ln \left[\frac{\left(\sqrt{x' \left(1 - \frac{x}{a}\right)} + \sqrt{x \left(1 - \frac{x'}{a}\right)} \right)^2}{|x - x'|} \right] \quad (4.76)$$

Come I_{21} , tutti gli integrali della seconda riga possono essere ricondotti a quelli precedenti:

$$I_{2j} = \int \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{j-3/2} db = \\ I_{1j} - x \int \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{j-3/2} db = I_{1j} + xA_{2j} \quad (4.77)$$

Si osserva inoltre che:

$$A_{k,j} = A_{k-1,j-1} \quad (4.78)$$

Gli integrali della seconda riga, definendo gli estremi di integrazione, diventano quindi:

$$\begin{aligned} I_{2j} &= I_{1j} + x[A_{1(j+1)}(a) - A_{1(j+1)}(x)] \quad 0 < x' < x \\ I_{2j} &= I_{1j} + x[A_{1(j+1)}(a) - A_{1(j+1)}(x')] \quad x < x' < a \end{aligned} \quad (4.79)$$

Per gli integrali della terza, quarta e quinta riga è possibile, per quanto esposto, utilizzare una formula generale ricorsiva:

$$A_{kj} = -\frac{1}{x'(j-1/2)} \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{k-5/2} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{j-1/2} + (k-5/2)x A_{(k-1)(j+1)} \right] \quad (4.80)$$

Sostituendo nell'integrale indefinito:

$$I_{kj} = I_{(k-1)j} + x A_{kj} \quad (4.81)$$

gli estremi di integrazione otteniamo:

$$\begin{aligned} I_{kj} &= I_{(k-1)j} - \frac{x}{x'(j-1/2)} \left[\left(q - \frac{x}{a}\right)^{k-5/2} \left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{j-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + (k-5/2)x[A_{(k-1)(j+1)}(a) - A_{(k-1)(j+1)}(x)] \right] \quad 0 < x' < x \\ I_{kj} &= I_{(k-1)j} - \frac{x}{x'(j-1/2)} \left[\left(q - \frac{x}{a}\right)^{k-5/2} \left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{j-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + (k-5/2)x[A_{(k-1)(j+1)}(a) - A_{(k-1)(j+1)}(x')] \right] \quad x < x' < a \end{aligned} \quad (4.82)$$

4.4.5 Analisi dei casi di singolarità

Si analizzano per prime le singolarità presenti sulla retta di equazione $x = x'$; come ottenuto in precedenza queste competono agli integrali I_{11}, I_{12}, I_{21} , presenti peraltro alla fine della catena ricorsiva di tutti gli altri integrali.

I_{11} può essere riscritto come:

$$I_{11} = 2 \ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x'}) - \ln|x-x'| = A_{11}(a) - A_{11}(x \circ x') \quad (4.83)$$

E' il secondo termine della somma ad essere singolare, ma eseguendo la successiva integrazione in dx' otteniamo:

$$\int A_{11}(x \circ x') dx' = (x' - x)(\ln(|x - x'|) - 1) \quad (4.84)$$

Per $x' \rightarrow x$ il logaritmo tende ancora ad infinito, ma l'integrale tende a 0 in quanto $x' - x$ domina sul logaritmo. E' possibile quindi realizzare un'integrazione simbolica di questo pezzo, che verrà utilizzata congiuntamente all'integrazione numerica svolta sul resto dei punti considerati, e ovviamente risulterà indispensabile per tutti gli integrali successivi, contenenti la forma appena risolta.

Il secondo integrale $I_{12} = I_{11} + x'A_{12}$ presenta una nuova singolarità nel termine $x'A_{12}$, che può essere risolta integrando secondo dx' :

$$\int x'A_{12}dx' = \frac{2}{3\sqrt{x}} \left[(x'^{3/2} - x^{3/2}) \ln|x - x'| + 2x^{3/2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x'}) - 2\sqrt{x'} \left(x + \frac{x'}{3} \right) \right] \quad (4.85)$$

Sostituendo $x' = x$:

$$\int x'A_{12}dx' = \frac{4x}{3} \left[\ln(2\sqrt{x}) - \frac{4}{3} \right] \quad (4.86)$$

Analogamente per I_{21} si ottiene:

$$\int x'A_{21}dx' = 2\sqrt{x}[(\sqrt{x'} - \sqrt{x}) \ln|x' - x| + 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x'} - 2\sqrt{x'})] \quad (4.87)$$

Sostituendo $x' = x$:

$$\int x'A_{12}dx' = 4x[\ln(2\sqrt{x}) - 1] \quad (4.88)$$

Con questa forma si possono considerare risolte le singolarità relative ad $x' = x$ in quanto per tutti i termini successivi la forma singolare risulta moltiplicata per un termine del tipo $(x' - x)^{j-2}$ ed il limite generale dell'integrando tende quindi a 0.

Passando alla retta di equazione $x = 0$, notiamo come essendo sempre $x' > x$, gli estremi di integrazione dell'integrale interno in db saranno (x', a) . L'integrale risulta estremamente semplificato ponendo immediatamente $x = 0$:

$$I = \int_{x'}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db = \int_{x'}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db \quad (4.89)$$

L'espressione ottenuta è indipendente da k , pertanto si avranno solamente 5 integrali da svolgere. Per $j = 1$:

$$I_{k1} = \int_x^{a'} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(-1/2)} db = \ln \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - x'}}{\sqrt{a} - \sqrt{a - x'}} \right) = 2 \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a - x'}) - \ln(x') \quad (4.90)$$

Questa forma risulta singolare per $x' = 0$, a causa del secondo termine che tende all'infinito negativo: Facendo l'integrazione simbolica in x' la forma singolare scompare:

$$\int I_{k1}dx' = 2x' \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a - x'}) - x' \ln(x') - 2\sqrt{a}\sqrt{a - x'} \quad (4.91)$$

Per $j > 1$ esiste una formula risolutiva generale di tipo ricorsivo, che permette di abbassare di grado fino ad arrivare al caso del tipo I_{k1} :

$$I_{kj} = \int_x^{a'} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db = \int_x^{a'} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-5/2)} db - \frac{1}{j-3/2} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \Big|_x^{a'} \quad (4.92)$$

ovvero:

$$I_{kj} = \int_x^{a'} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-5/2)} db - \frac{1}{j-3/2} \left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{(j-3/2)} \quad (4.93)$$

La ricorsività è quindi la seguente:

$$I_{kj} = I_{k(j-1)} - \frac{1}{j-3/2} \left(1 - \frac{x'}{a}\right)^{(j-3/2)} \quad (4.94)$$

Per il calcolo degli integrali sulla retta $x' = 0$ notiamo che:

$$\begin{aligned} \lim_{x' \rightarrow 0} \int_{x'}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} db = \\ \int_{x'}^a \lim_{x' \rightarrow 0} \left[\frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{(j-3/2)} \right] db \end{aligned} \quad (4.95)$$

Infatti quando $x' = 0$ il limite inferiore di integrazione è x e questo permette di portare il limite sotto il segno di integrale. Dato che $(1 - x'/b)$ tende ad 1, l'integrale da risolvere è:

$$I_{kj} = \int_{x'}^a \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{(k-3/2)} db \quad (4.96)$$

Questo gruppo di integrali risulta quindi indipendente da j , pertanto ogni integrale calcolato varrà per un'intera riga della matrice. E' inoltre possibile ottenere una soluzione del tutto analoga a quella ottenuta per $x = 0$, data la similitudine tra le due forme. Il primo termine risulta:

$$I_{1j} = 2 \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-x}) - \ln(x) \quad (4.97)$$

analoga alla 4.91. Gli altri termini, ottenibili per ricorsività sono:

$$I_{kj} = I_{(k-1)j} - \frac{1}{k-3/2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{(k-3/2)} \quad (4.98)$$

con espressione analoga alla 4.93. Questi integrali rappresentano già il valore della funzione in $x' = 0$, e quindi possono essere sfruttati solamente nell'integrazione numerica.

4.5 COD e pressione di contatto nel caso di cricca parzialmente chiusa

Conoscendo la funzione di Green, calcolata come descritto nel precedente paragrafo, è possibile ottenere immediatamente il COD nel caso di non contatto tra le facce della cricca integrando numericamente la 4.38. In realtà per il generico stato di sforzo lungo l'estensione della cricca si avrà il contatto delle facce della cricca: in questo caso la 4.38 restituirebbe dei valori dello spostamento normale v negativi, privi di significato fisico. Pertanto nel caso di contatto non saranno più accettabili le tensioni nominali ma sarà necessario aggiungere gli sforzi dovuti alla pressione e all'attrito tra le facce. Gli effetti delle tensioni risultanti possono essere studiati con le WF e sovrapposti linearmente ai valori ottenuti considerando solo la tensione nominale. Il problema risulta non lineare: i carichi imposti al sistema vanno a determinare l'estensione della zona di contatto modificando in modo drastico la geometria della struttura.

La soluzione dovrà soddisfare le seguenti condizioni (caso di attrito nullo):

$$COD(x, a) = \begin{cases} = 0 & 0 \leq x \leq x_c \\ \geq 0 & x_c < x \leq a \end{cases} \quad (4.99)$$

$$p(x, a) = \begin{cases} \geq 0 & 0 \leq x \leq x_c \\ = 0 & x_c < x \leq a \end{cases} \quad (4.100)$$

Si realizza quindi un'approssimazione iterativa che converga ad una soluzione accettabile, secondo i seguenti passi:

- si suddivide la fessura in n intervalli e si ipotizza di conoscere l'estensione della parte chiusa della fessura,
- su ogni intervallo si considera un valore costante di pressione di contatto per la parte chiusa ed un valore costante di COD per la parte aperta; questi valori costanti rappresentano le incognite del problema. Sugli intervalli si distribuisce in modo costante a tratti (distribuzione a 'canne d'organo') la tensione nominale, dalla quale si determina il COD lineare (ovvero senza contatto tra le facce) al quale sovrappone il COD dato dalle aggiunte tensioni di pressione per ottenere quindi il COD effettivo.

La soluzione iterativa si basa quindi sulla sovrapposizione dell'effetto delle pressioni a quello delle tensioni nominali, ovvero:

$$\sum_{k=1}^m p_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' + \sum_{k=1}^n S_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' = COD_{eff}(x_h) \quad (4.101)$$

dove n è il numero di intervalli in cui si è suddivisa la fessura, m il numero di intervalli in cui la fessura è chiusa ed agiscono quindi le pressioni, x_h è la coordinata centrale dell'intervallo su cui si calcola il COD. Lungo la parte chiusa della fessura il COD normale è noto e pari a 0, mentre sulla parte aperta il COD è incognita del sistema. Suddividendo nelle due componenti normale e tangente del COD otteniamo le due equazioni tipo del sistema:

$$v(x_h) = \sum_{k=1}^m p_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{v\sigma}(x_h, x') dx' + \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_v \sigma(x_h, x') dx' + \tau_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_v \tau(x_h, x') dx' \right] \quad (4.102)$$

$$u(x_h) = \sum_{k=1}^m p_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{u\sigma}(x_h, x') dx' + \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_u \sigma(x_h, x') dx' + \tau_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_u \tau(x_h, x') dx' \right] \quad (4.103)$$

Valide nei tratti in cui la fessura è aperta. Portando gli spostamenti dovuti alle pressioni di contatto a sinistra si evidenzia a destra il COD lineare, ottenuto considerando le sole tensioni nominali:

$$COD_{eff}(x_h) - \sum_{k=1}^m p_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' = \sum_{k=1}^n S_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' = COD(x_h)_{lin} \quad (4.104)$$

Ovvero:

$$\{COD_{eff}(x_h)\} - [M]\underline{p} = \{COD(x_h)_{lin}\} = [M]\underline{S} \quad (4.105)$$

La matrice $[M]$ è calcolabile integrando sui vari tratti di dominio la funzione di Green:

$$M(h, k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' \quad (4.106)$$

Essa non è nient'altro che una matrice di coefficienti di influenza, in cui il generico termine $M(h, k)$ rappresenta lo spostamento indotto sull'intervallo h da una tensione unitaria applicata in k ; ogni riga della matrice contiene pertanto i contributi al COD dovuti a tensioni unitarie applicate sui diversi intervalli in cui è suddivisa la cricca. Sinteticamente:

$$M = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{l} \text{spostamento } v \\ \text{dovuto a } \sigma = 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{l} \text{spostamento } v \\ \text{dovuto a } \tau = 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{l} \text{spostamento } u \\ \text{dovuto a } \sigma = 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{l} \text{spostamento } u \\ \text{dovuto a } \tau = 1 \end{array} \right) \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Per quanto detto il vettore delle incognite sarà costituito da m termini corrispondenti ai valori delle pressioni p_k incognite corrispondenti alla zona chiusa e da $n + (n - m)$ termini che rappresentano il COD effettivo della fessura, n per lo spostamento tangenziale ai labbri della fessura e $n - m$ per lo spostamento normale.

$$x = \begin{Bmatrix} p_k \\ v_k \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (4.108)$$

Definendo la seguente matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} -M(1, 1) & \dots & \dots & -M(1, m) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -M(m, 1) & \dots & \dots & -M(m, m) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -M(2n, 1) & \dots & \dots & -M(2n, m) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

La 4.105 diventa:

$$[A]\underline{x} = [M]\underline{s} \quad (4.110)$$

Sulla base dell'equazione precedente e delle condizioni espresse in 4.99 e 4.100 si procede in modo iterativo: partendo da un valore di primo tentativo della lunghezza della zona chiusa, calcolare la pressione e il COD, verificare l'esistenza di punti aventi pressione o COD negativo e modificare gli intervalli considerati chiusi di conseguenza, fino a che non si arrivi ad una soluzione che soddisfi una data tolleranza oppure con COD e pressione maggiori di zero nelle zone opportune. Si noti come non è assolutamente necessario limitarsi ad un solo intervallo chiuso ma è possibile riscrivere la 4.109 immettendo i coefficienti di influenza corrispondenti alle sole zone aperte, anche non contigue.

4.6 COD, pressioni di contatto e SIF per carico concentrato mobile in assenza di attrito

Sulla base di quanto ottenuto risolviamo di nuovo il problema di figura 4.6. Si riportano COD effettivo, pressione all'interfaccia, COD lineare per tre inclinazioni della fessura nel caso di carico posto prima e dopo la bocca della cricca. In ultimo sono stati calcolati i SIF in funzione della posizione del carico.

Il COD calcolato prima dell'attraversamento del carico $L = -10$ e dopo $L = 10$ differiscono in maniera importante: il contatto avviene prima alla gola della cricca e in seguito alla bocca. Questa discontinuità è dovuta al fatto che, mentre all'inizio la parte superiore del labbro destro della fessura è libera di muoversi e resta staccata dalla superficie inferiore, in seguito viene schiacciata dal carico verso il basso, generando il contatto alla bocca.

4.7 COD, pressioni di contatto e SIF per carico distribuito Hertziano

Facendo ricorso alla formulazione ricavata nella sezione 2.4, è possibile introdurre come stato di tensione nominale quello generato dal contatto Hertziano durante lo scorrimento della ruota sulla superficie della rotaia.

E' interessante notare l'andamento del COD e della pressione di contatto al variare di L , riportato per un valore di θ pari a 30° :

- per $L = -10$ la fessura presenta un'apertura alla bocca
- per $L = 0$ la fessura è completamente chiusa
- per $L = 10$ la fessura si chiude alla bocca per poi riaprirsi e chiudersi all'apice
- per $L = 20$ e $L = 30$ l'apertura della fessura resta alla gola, ma riduce progressivamente la propria area
- per $L > 30$ la fessura si richiude completamente per poi riaprirsi gradualmente alla bocca man mano che il carico avanza.

La pressione di contatto presenta un massimo facilmente spiegabile osservando l'andamento delle tensioni nominali riportato in figura 2.11; si noti come nel tratto $L > 30$ si abbia una pressione con valore non nullo all'apice della fessura. In realtà

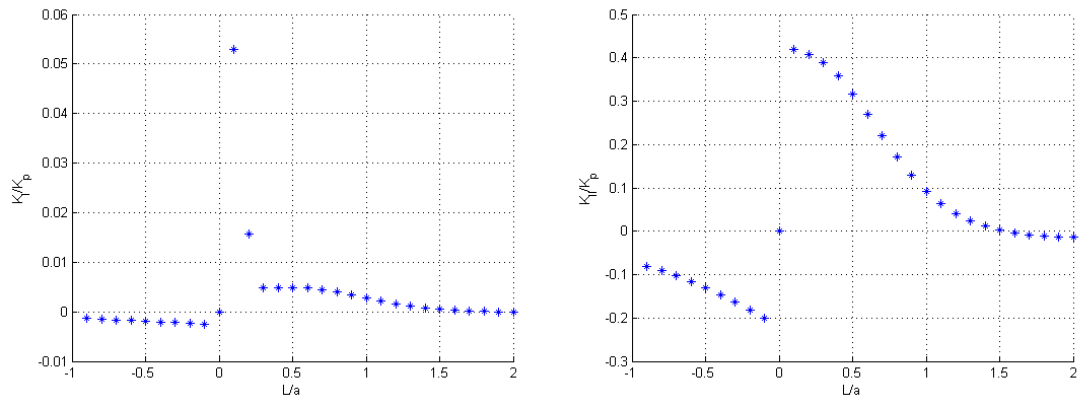


Figura 4.7 - K_I , K_{II} adimensionalizzati per $\theta = 30^\circ$

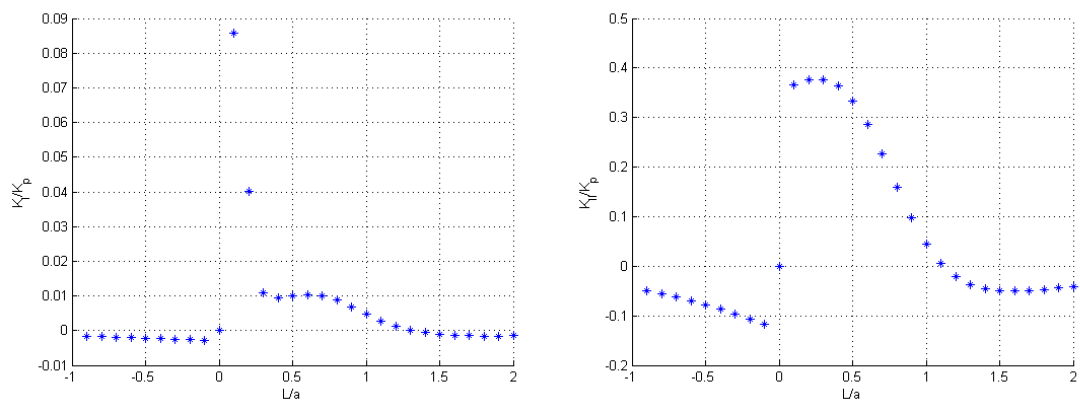


Figura 4.8 - K_I , K_{II} adimensionalizzati per $\theta = 45^\circ$

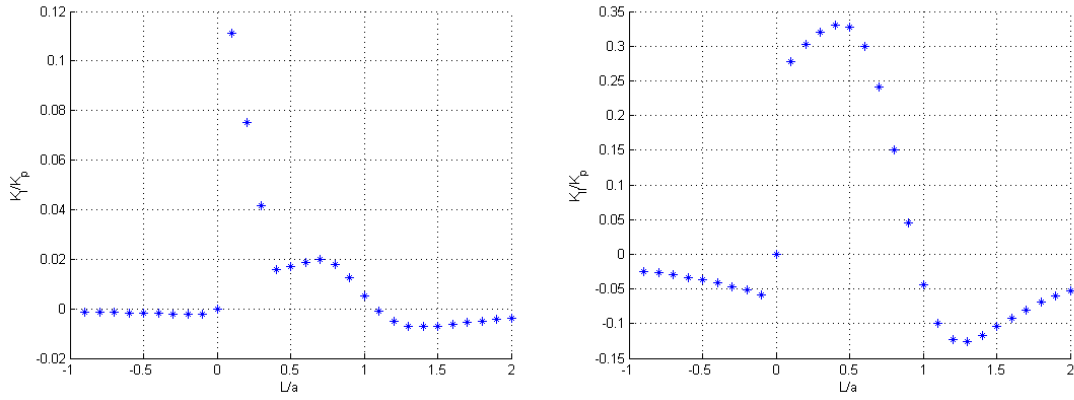


Figura 4.9 – K_I , K_{II} adimensionalizzati per $\theta = 60^\circ$

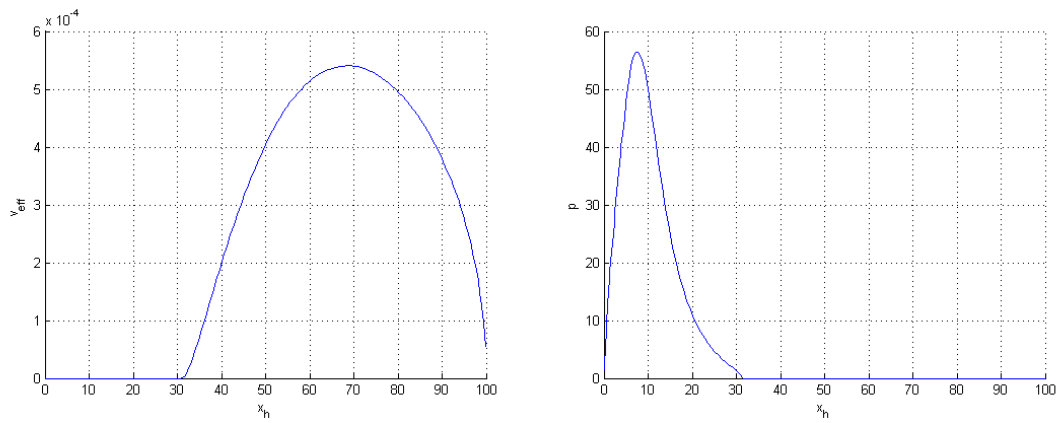


Figura 4.10 – COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 30^\circ$, $L=10$

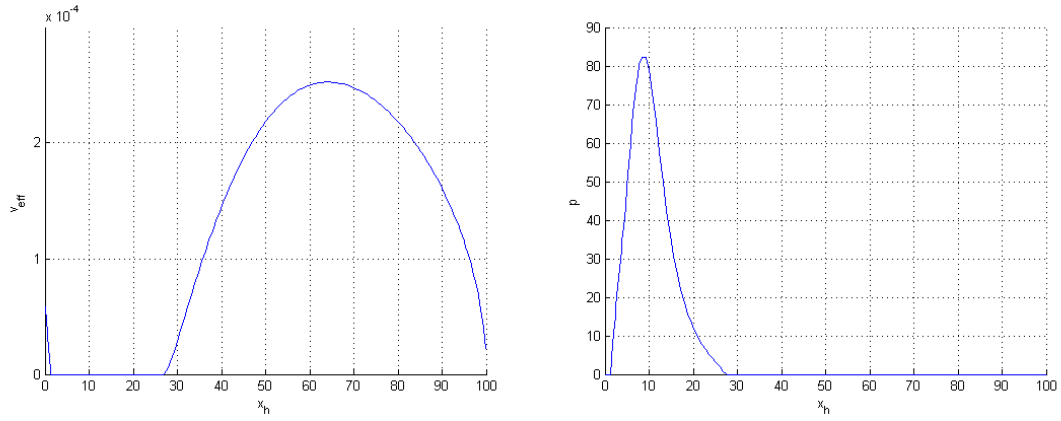


Figura 4.11 – COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 45^\circ$, $L=10$

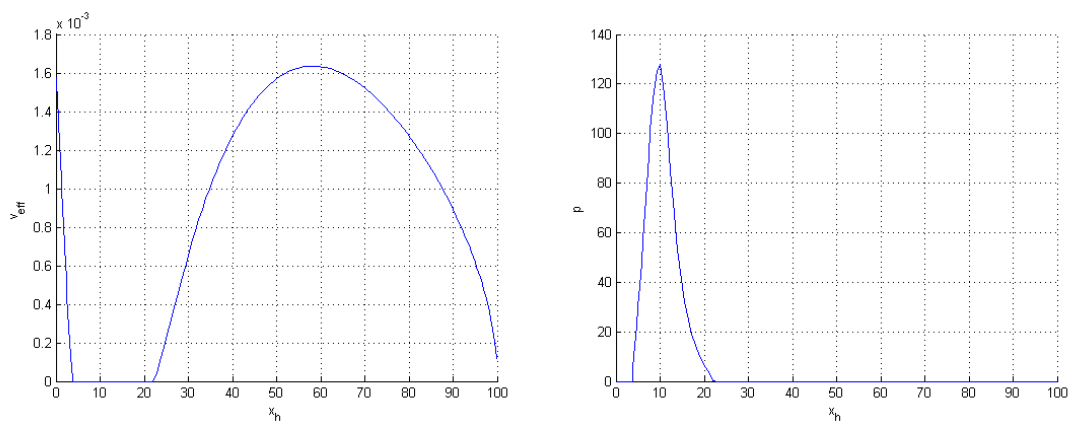


Figura 4.12 – COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 60^\circ$, $L=10$

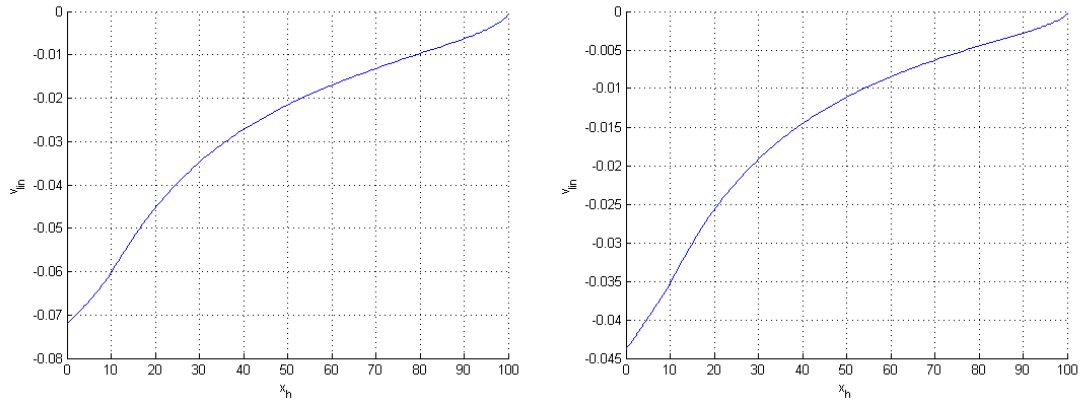


Figura 4.13 – A sinistra: COD lineare per $\theta = 30^\circ$, $L=10$. A destra: COD lineare per $\theta = 45^\circ$, $L=10$

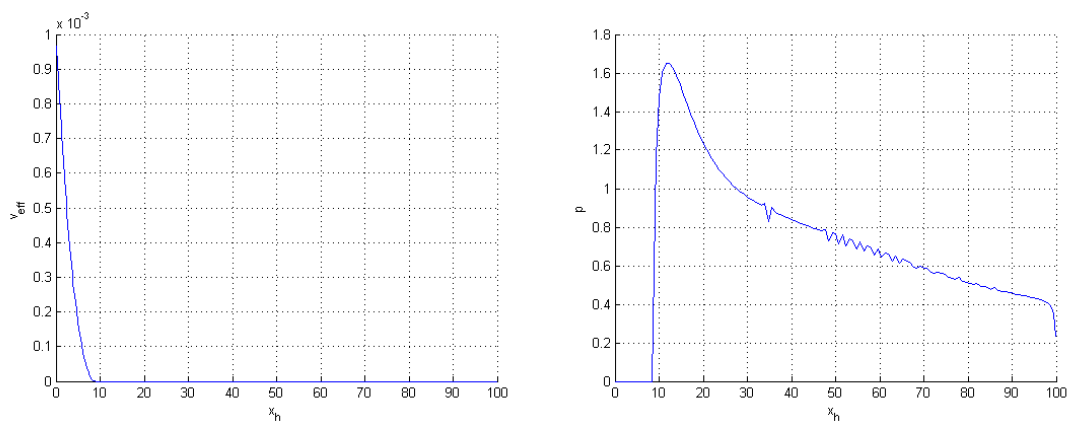


Figura 4.14 – COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 30^\circ$, $L=-10$

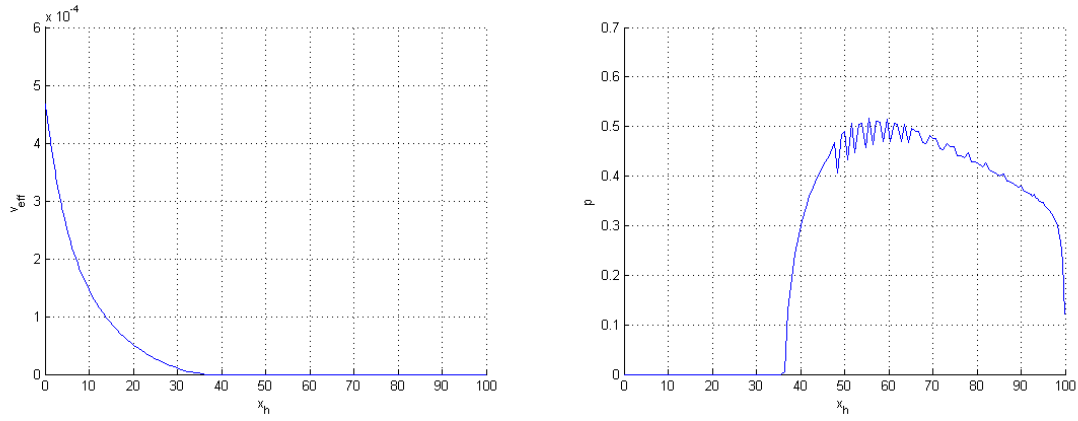


Figura 4.15 – COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 45^\circ$, $L=-10$

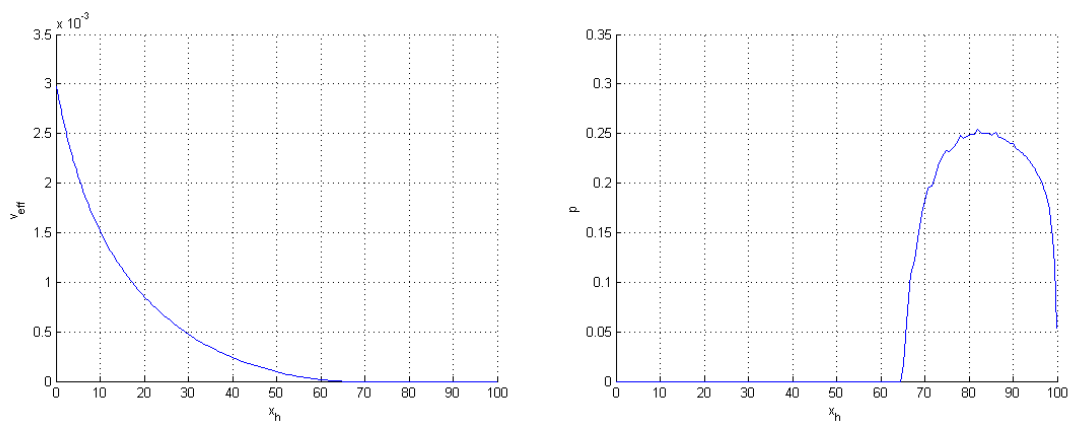


Figura 4.16 – COD effettivo e pressione all'interfaccia per $\theta = 60^\circ$, $L=-10$

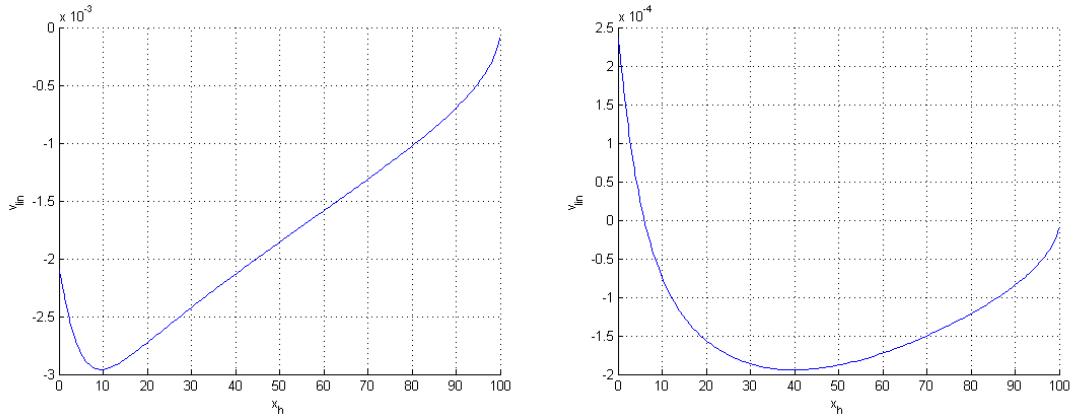


Figura 4.17 – A sinistra: COD lineare per $\theta = 30^\circ$, $L=-10$. A destra: COD lineare per $\theta = 45^\circ$, $L=-10$

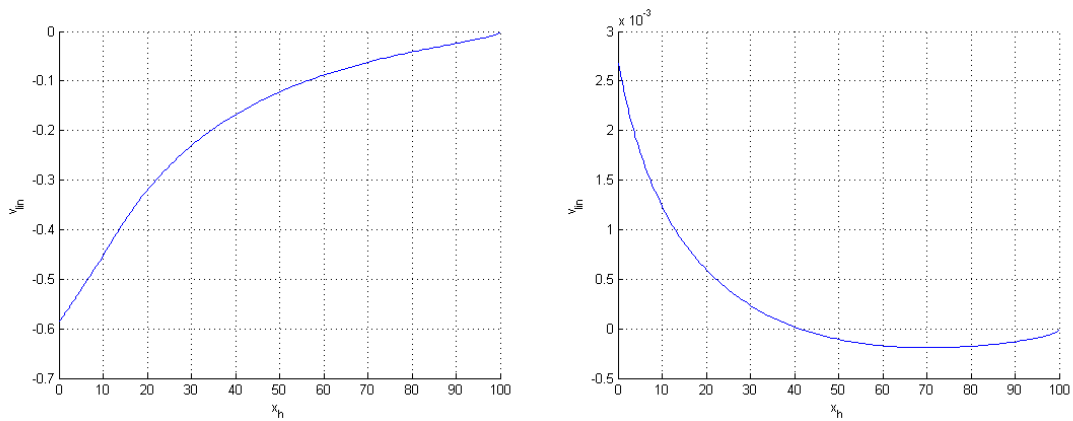


Figura 4.18 – A sinistra: COD lineare per $\theta = 30^\circ$, $L=10$. A destra: COD lineare per $\theta = 45^\circ$, $L=10$

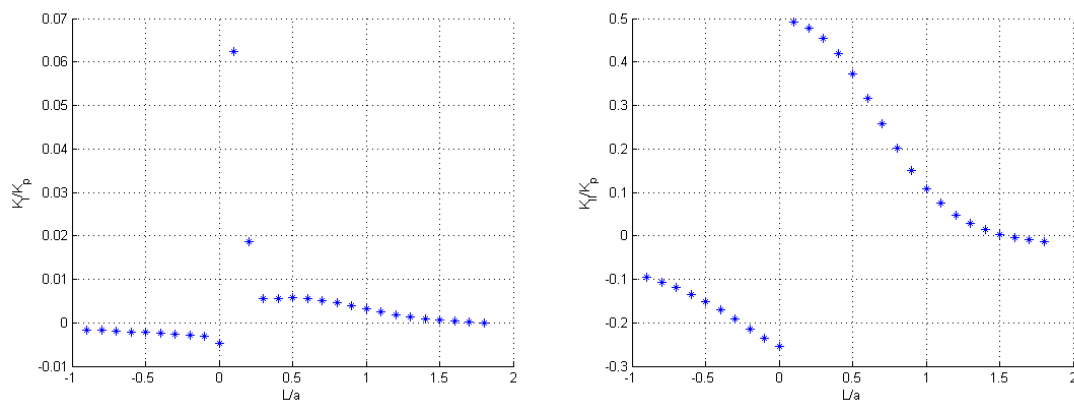


Figura 4.19 – SIF nel caso di carico Hertziano all'aumentare di L , con $\theta = 30^\circ$

a causa delle singolarità presenti nelle WF non è stato possibile calcolare il valore per $x = a$, che comunque deve essere nullo. Questo genera un gradiente degli sforzi elevato all'apice, probabilmente bilanciato dall'andamento delle tensioni effettive interne.

4.8 Modello con fluido interposto

Come mostrato, le WF permettono di creare un modello completo di una fessura sul bordo di un semipiano, e quindi di studiare le sollecitazioni interne ad un elemento criccato durante il passaggio del carico hertziano. In caso di presenza di acqua il modello strutturale resta lo stesso, ma le tensioni nominali non sono più funzione della sola posizione della ruota. Difatti l'interazione tra fluido e struttura può portare, nel caso del *pumping*, a delle sovrasollecitazioni di cui è necessario tenere conto nel valutare la pericolosità di un difetto superficiale.

Consideriamo pertanto il binario immerso in un fluido in grado di penetrare nella fessura, e di avere un moto della ruota come definito in 4.25. Si noti che se la ruota avesse un moto contrario a quello indicato, il fluido durante il passaggio del carico uscirebbe dalla fessura, in quanto le sollecitazioni tendono a chiudere prima la gola della fessura e solo in seguito l'apice, causando l'uscita del fluido. Nella direzione opposta, come deducibile dagli andamenti del COD a secco riportati in precedenza, si avrà la chiusura improvvisa della bocca della fessura, con conseguente intrappolamento del fluido. Questo non comporterà immediatamente delle sovrasollecitazioni, che si avranno solo se le pareti della fessura tentassero di schiacciare il fluido. Una verifica può essere fatta sul volume della fessura senza fluido, confrontandolo con il volume del fluido: nel caso quest'ultimo eccedesse il volume della fessura senza fluido il COD calcolato non sarà più valido. Per i nostri scopi è possibile considerare il fluido come incomprimibile, definendo quindi con:

$$V_c = \int_0^{x_c} v_{sc}(x) dx \quad (4.111)$$

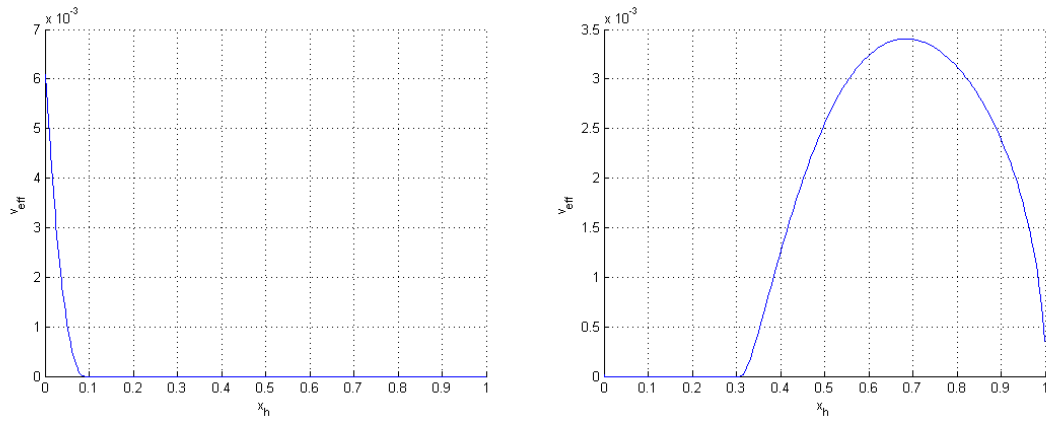


Figura 4.20 – Valori del COD normale effettivo per $L = -10$ (sinistra) e $L = 10$ (destra), carico Hertziano

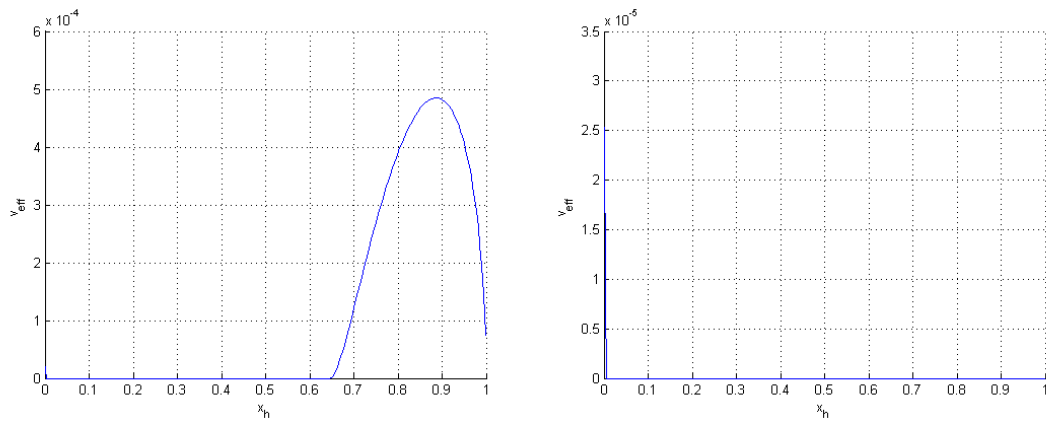


Figura 4.21 – Valori del COD normale effettivo per $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano

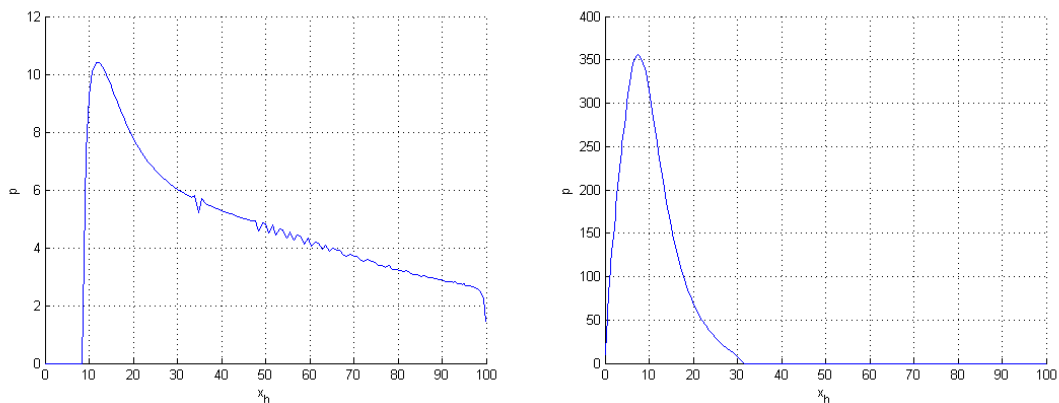


Figura 4.22 – Valori della pressione di contatto per $L = -10$ (sinistra) e $L = 10$ (destra), carico Hertziano

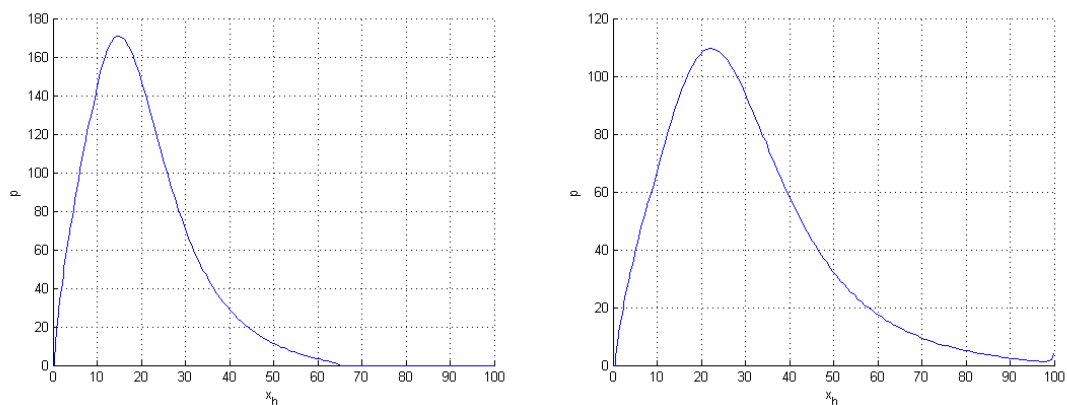


Figura 4.23 – Valori della pressione di contatto per $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano

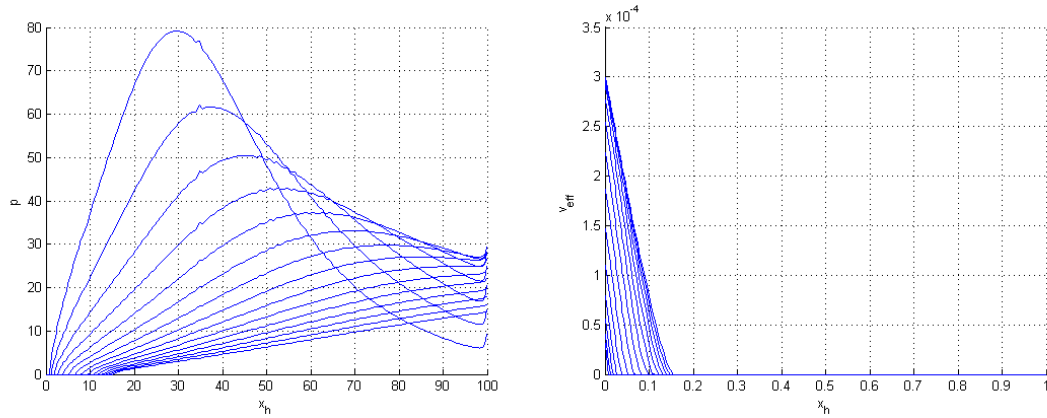


Figura 4.24 – Valori della pressione di contatto (sinistra) e del COD normale (destra) per $L = 40 : 180$, carico Hertziano

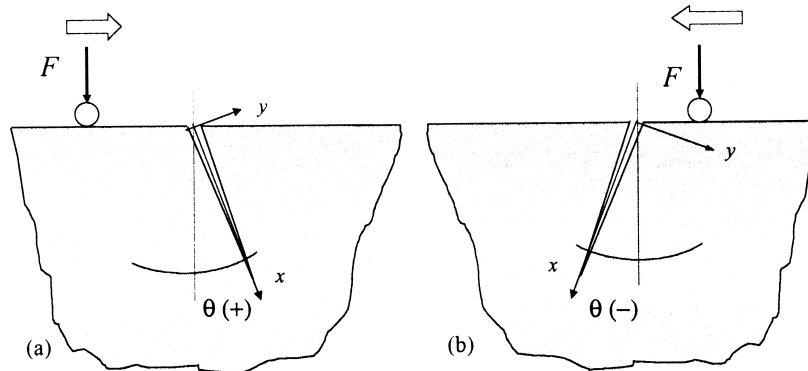


Figura 4.25 – Direzione di avanzamento in grado di generare effetto pumping in funzione dell'angolo di inclinazione della fessura

il volume della fessura senza fluido, con v_{sc} COD normale a secco, sarà necessario che:

$$\Delta V = V_f - V_c \geq 0 \quad (4.112)$$

dove V_f è il volume di fluido rimasto intrappolato nella fessura. Non è immediato stabilire quanto fluido rimanga intrappolato: si è ipotizzato che il binario fosse immerso nell'acqua, e che quindi che la fessura fosse piena di liquido fino al passaggio della ruota. Ipotizzando che la dimensione dell'impronta non cambi nell'approcciarsi alla fessura, ipotesi limitata dal cambio di rigidità del binario in corrispondenza di questa zona, è facile immaginare che il fluido venga superiormente 'tappato' dalla ruota quando il limite destro dell'impronta raggiunge la bocca della cricca. Si è quindi imposto:

$$V_f = \int_0^{x_c} v_{sc}(x) dx \Big|_{L=-b/2} \quad (4.113)$$

dove $b/2$ è la semilunghezza dell'area di contatto (collassata ad una linea per un problema piano). Si verificherà quindi che con l'avanzamento del carico sia verificata la 4.112, se così non fosse sarà necessario passare ad una formulazione diversa da quella presentata in precedenza. E' tuttavia ancora possibile ragionare per sovrapposizione degli effetti: il COD effettivo sarà pari a quello a secco più quello dovuto alle sollecitazioni del fluido:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m p_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' + \sum_{k=1}^n S_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' + \\ \sum_{k=1}^n p_{fk} \int_{x_k}^{x_{k+1}} G(x_h, x') dx' = COD_{eff}(x_h) \end{aligned} \quad (4.114)$$

Dove si è indicata con p_{fk} la pressione del fluido agente sulla k-esima area aperta. Pertanto, utilizzando la notazione matriciale definita in precedenza:

$$[A]\underline{x} = [M]\underline{s}_{tot} \quad (4.115)$$

Dove si è introdotto il vettore di tensioni totale pari a:

$$\underline{s} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\sigma} + \underline{p}_f \\ \underline{\tau} \end{array} \right\} \quad (4.116)$$

Si noti come le pressioni del fluido vengano sommate alle sole azioni normali, si trascura pertanto la componente tangenziale, comunque presente a causa dell'inclinazione dei labbri della fessura. Quest'ultima però è estremamente ridotta nel caso di un binario, grazie all'elevata rigidità del metallo utilizzato. Per materiali più flessibili potrebbe essere invece necessario inserire la componente tangenziale e quindi calcolare anche l'inclinazione della fessura punto per punto.

Neanche in questo caso è nota a priori l'estensione della zona di contatto, inoltre non essendo noto il COD finale è incognita anche la pressione del fluido. Sarà necessario quindi realizzare ancora un processo iterativo. A partire dal valore di tentativo:

$$p_f(0) = k_p \Delta V_0 \quad (4.117)$$

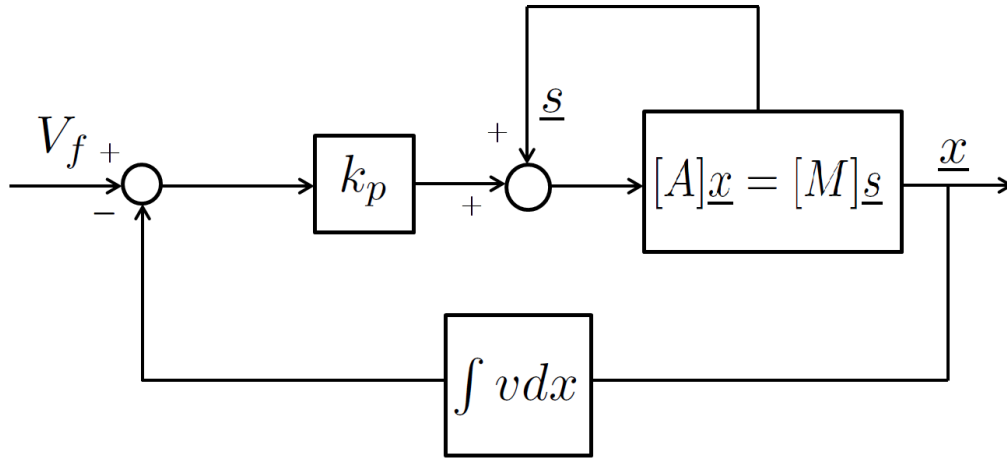


Figura 4.26 – Schema a blocchi del controllo sul volume della fessura

dove ΔV_0 è il valore della differenza tra il volume del fluido intrappolato e il volume del COD calcolato a secco, e $p_f(0)$ è la pressione di primo tentativo, ipotizzata costante per tutto il fluido, si procederà aggiustando la pressione cercando di mandare a 0 l'errore attraverso un controllo proporzionale:

$$p_f(i) = p_f(i-1) + k_p \Delta V \quad (4.118)$$

Verificando quindi che:

$$COD(x, a) = \begin{cases} = 0 & 0 \leq x \leq x_c \\ \geq 0 & x_c < x \leq a \end{cases} \quad (4.119)$$

$$p(x, a) = \begin{cases} \geq 0 & 0 \leq x \leq x_c \\ = 0 & x_c < x \leq a \end{cases} \quad (4.120)$$

$$\Delta V(i) = V_f - V_c(i) < \epsilon \quad (4.121)$$

con ϵ tolleranza piccola a piacere, sarà possibile ottenere il COD, le pressioni di contatto e la pressione del fluido. In 4.26 è riportato lo schema a blocchi del controllo: si noti come non sia più necessario controllare se il volume della fessura sia maggiore o minore di quello del fluido, grazie alle verifiche fatte in precedenza è infatti già noto che alla fine della procedura dovranno essere uguali. E' possibile automatizzare la procedura di calcolo, realizzando un programma che sia in grado di valutare la presenza di chiusura dei labbri della fessura e di fluido in pressione. Quest'ultima condizione peraltro è dipendente dalla storia delle sollecitazioni; difatti è necessario verificare la presenza di fluido in pressione al passo precedente e la forma dell'apertura della fessura: se la zona in cui è presente il fluido pressurizzato si congiungesse con la bocca della cricca il fluido sarebbe libero di uscire. La procedura di calcolo segue il seguente schema:

1. Calcolo le tensioni dovute al contatto
2. Calcolo COD lineare
3. Verifico se esistono zone in cui $v < 0$. Se non ce ne sono sposto il carico e torno al punto 1
4. Calcolo COD senza fluido con procedura iterativa
5. Se $L < -b/2$ sposto il carico e torno al punto 1
6. Verifico la presenza di un'apertura in grado di ospitare il fluido senza permettergli di scappare
7. Verifico se il fluido è in pressione, ovvero se il volume dell'apertura è minore di quello del fluido
8. Procedura iterativa per ottenere il COD in presenza di fluido pressurizzato
9. Verifico che la pressione del fluido non permetta l'uscita del fluido, se è così torno al punto 1, altrimenti vado al punto successivo
10. Sposto il carico e ricalcolo le tensioni, aggiungendo la pressione al passo precedente; torna al punto 8

4.9 COD, pressioni di contatto e SIF in presenza di fluido

Utilizzando la solita formulazione ricavata nella sezione 2.4 per introdurre gli sforzi nominali generati da contatto di tipo Hertziano all'interno del binario, si riportano ora i risultati ottenuti con il modello considerante il fluido appena proposto.

E' interessante analizzare di nuovo il comportamento della fessura al variare della posizione della ruota:

- per $L < -10$ gli andamenti del COD sono analoghi a quelli ottenuti in precedenza; il fluido è libero di entrare ed uscire dalla fessura, non andando quindi in pressione
- per $L = 0$ si ha la transizione dalla forma aperta alla bocca a quella aperta all'apice
- per $L = 10$ si è formata la cavità, tuttavia questa risulta avere un volume maggiore di quello del fluido, che quindi non la occupa interamente
- per $L = 20$ la cavità ottenibile a secco avrebbe un volume minore di quello del fluido introdotto, che pertanto viene schiacciato dalle pareti della fessura, reagendo con una pressione riportata nella prima delle figure 4.31
- per $L \geq 20$ la soluzione a secco non presenterebbe una cavità. Tuttavia questa deve essere presente per ospitare il fluido; si nota un'avanzamento del fronte della chiusura a sinistra ma un aumento dell'ampiezza della sacca, che permette di mantenere il volume costante.

Si noti inoltre come all'avanzare del carico non vi sia la fuoriuscita di fluido, che rimane quindi intrappolato all'interno della fessura. L'esiguo volume di fluido assorbito difatti non è in grado di deformare la fessura fino ad aprirne la bocca. Sebbene il risultato ottenuto sia coerente, esso dipende fortemente dall'aver ipotizzato una fessura in cui le pareti indeformate si trovano a distanza nulla. Nella realtà sarà presente una opportuna forma che verrà riacquistata dopo il passaggio della ruota, introducendo due effetti principali sul fenomeno del pumping:

- in primo luogo, il fluido non resterà in pressione dopo il passaggio della ruota, in quanto nella configurazione indeformata la bocca della cricca avrà una larghezza diversa da zero;
- la forma propria della fessura andrà a generare anche in condizione indeformata un alloggiamento per il fluido, con un assorbimento di una quantità decisamente maggiore di fluido e probabilmente degli effetti più drastici sull'entità dei SIF e quindi sulla vita del pezzo

Sarà quindi interessante formulare un modello in cui la condizione di contatto non sarà più data da un COD minore di zero ma da:

$$COD(x_h) < f(x_h) \quad (4.122)$$

dove $f(x_h)$ è una funzione esprime la forma locale della fessura.

E' stato trovato inoltre che per un'inclinazione della fessura pari a 60 gradi il carico non è in grado di intrappolare il fluido, che, secondo il modello adottato, verrebbe espulso appena dopo il passaggio della ruota. Per tali inclinazioni potrebbe divenire predominante il fenomeno di spinta del fluido nella fessura da parte della ruota: una tale analisi è facilmente effettuabile con il metodo delle WF, ma è di scarso interesse pratico a causa della inclinazione della fessura irrealistica.

Confrontando gli andamenti dei fattori di intensificazione degli sforzi in assenza ed in presenza di fluido (figure 4.32 e 4.33), si nota come si introduca un importante effetto di carico secondo il modo I in presenza di fluido, mentre si ottengono minime variazioni del K_{II} .

4.10 Confronti

Come anticipato nel Capitolo 1, il problema non presenta ancora una soluzione accettata: analizzando i risultati presenti in letteratura, si riscontrano delle differenze anche sostanziali. Prendendo in considerazione i risultati numerici ottenuti da Benuzzi [15], riportati in figura 4.35, notiamo ottima corrispondenza.

Nel lavoro di Keer [8] viene proposto un meccanismo di propagazione basato unicamente sul secondo modo di apertura, non confermato da risultati sperimentali. D'altra parte nel lavoro non è considerata la presenza del fluido interposto, ottenendo valori di K_I praticamente nulli, come mostrato anche dalle WF.

Il lavoro di Bower [14] estendendo il modello di Keer, introduce la presenza del fluido. Nel lavoro sono riportati (figura 4.38) gli andamenti qualitativi del COD. Il modello delle dislocazioni conferma il meccanismo di intrappolamento del fluido trovato dalle WF, questo avviene però con anticipo rispetto a quanto ottenuto nel

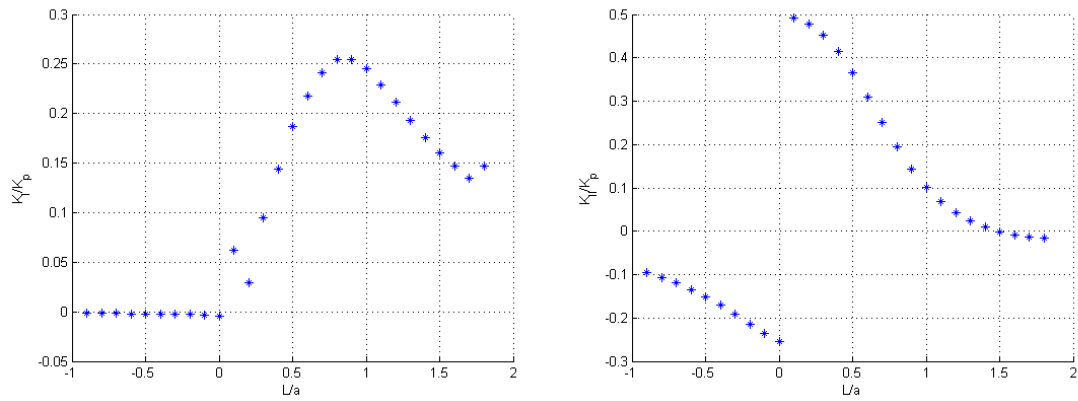


Figura 4.27 – SIF nel caso di carico Hertziano all'aumentare di L , con $\theta = 30^\circ$

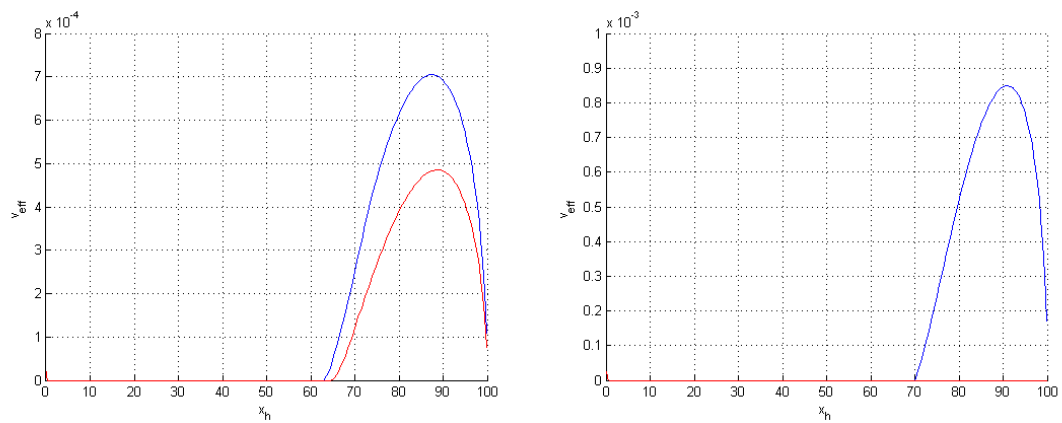


Figura 4.28 – Valori del COD normale effettivo. In rosso il COD ottenuto senza considerare la presenza del fluido, in blu con fluido. $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano

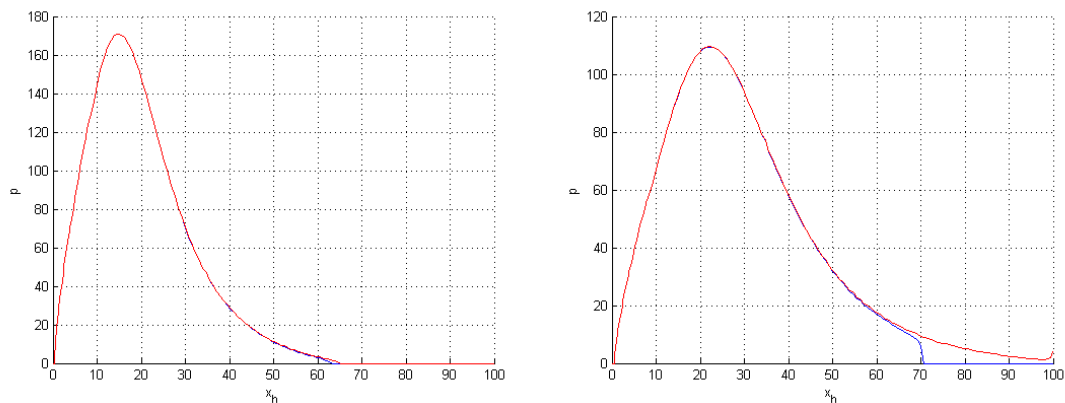


Figura 4.29 – Valori della pressione di contatto. In rosso ottenuta senza considerare la presenza del fluido, in blu con fluido. $L = 20$ (sinistra) e $L = 30$ (destra), carico Hertziano

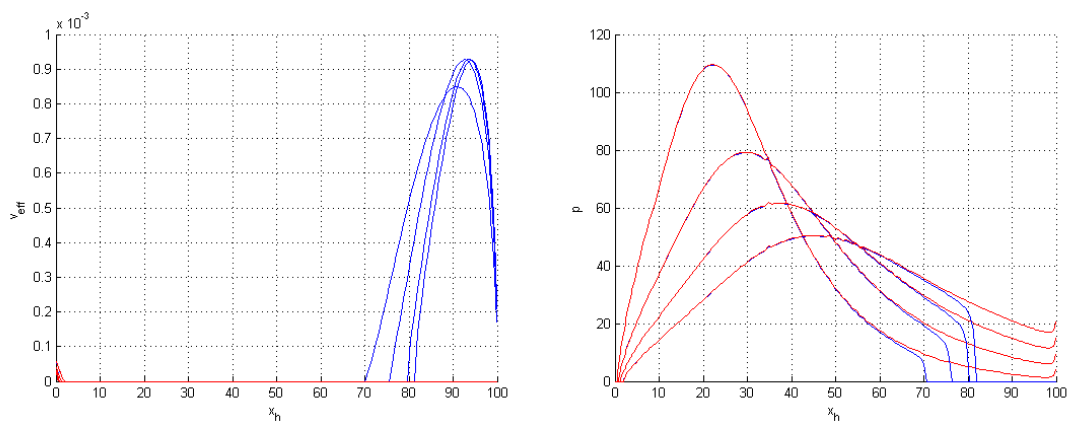


Figura 4.30 – Valori del COD normale effettivo (sinistra) e della pressione di contatto (destra) per $L = 40 : 80$

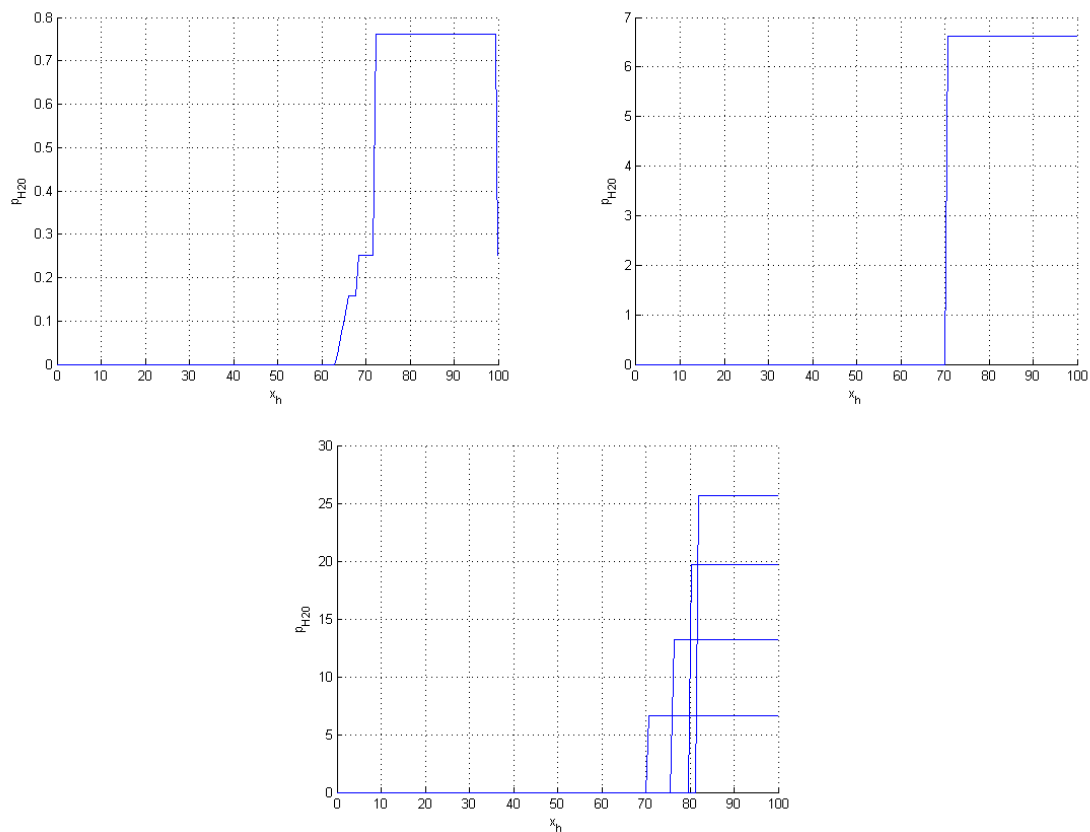


Figura 4.31 – Valori della pressione dell'acqua. $L = 20$ (sinistra), $L = 30$ (destra) e $L = 40 : 80$ (in basso), carico Hertziano

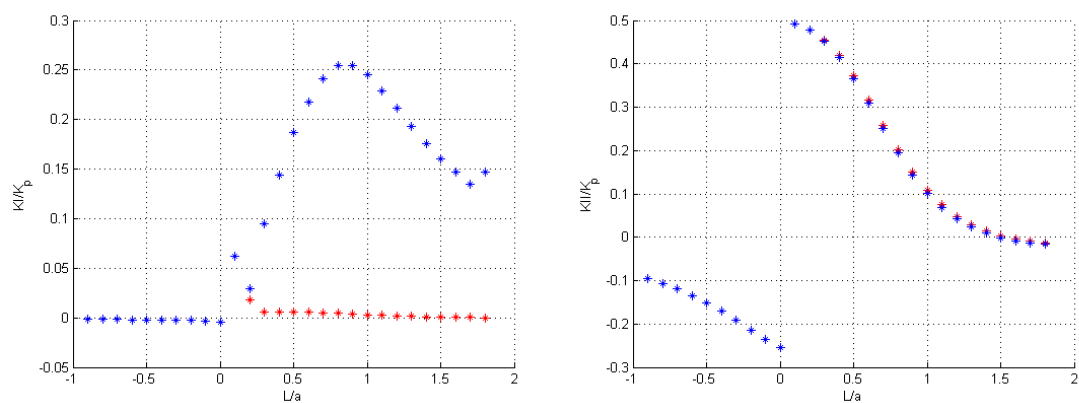


Figura 4.32 – Confronto tra i valori dei SIF ottenuti con fluido (blu) e senza fluido (rosso), per $\theta = 30^\circ$

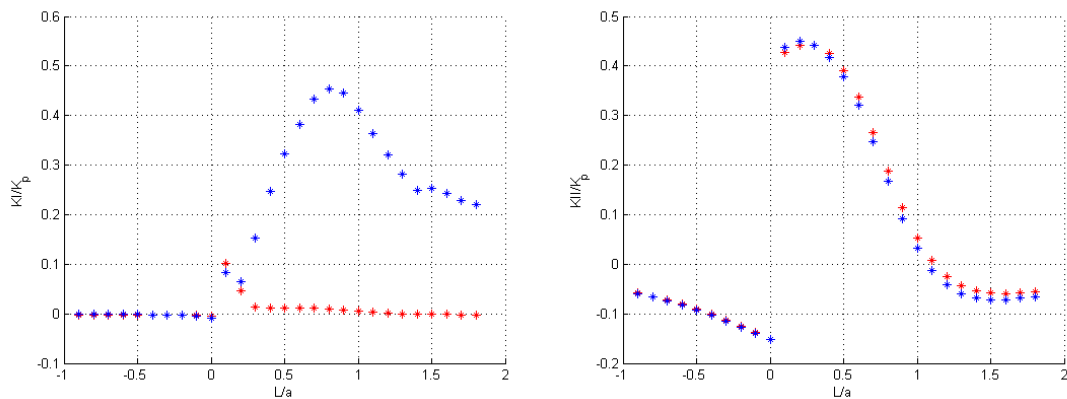


Figura 4.33 – Confronto tra i valori dei SIF ottenuti con fluido (blu) e senza fluido (rosso), per $\theta = 45^\circ$

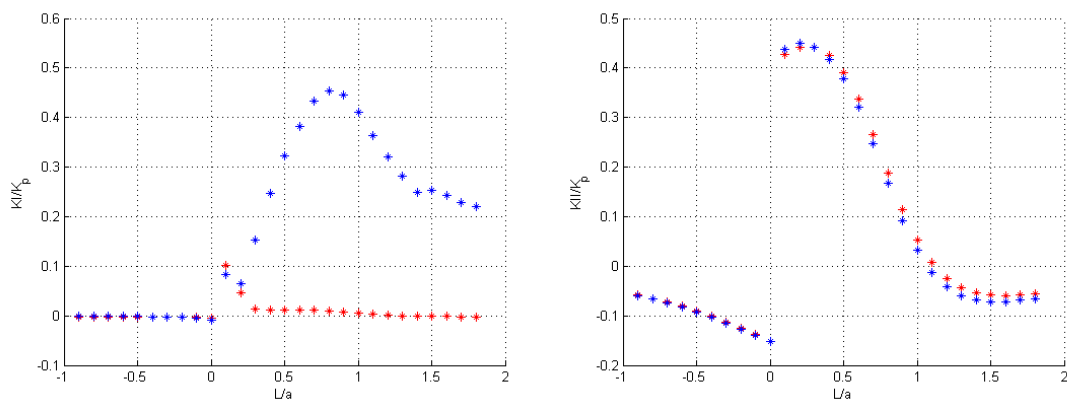


Figura 4.34 – Confronto tra i valori dei SIF ottenuti con fluido (blu) e senza fluido (rosso), per $\theta = 45^\circ$

presente lavoro. Nel particolare la chiusura della fessura avviene appena il bordo dell'area di contatto raggiunge la bocca della fessura: le tensioni presenti, come mostrato, e come intuibile per l'andamento parabolico presente, non sono però in grado di realizzare una chiusura in tale geometria.

Nelle figure 4.37 e 4.36 sono presentati i SIFs ottenuti da Bower. Il segno di L è opposto rispetto ad i grafici delle WF. Il K_I presenta buona corrispondenza come valore massimo. L'andamento, sebbene presenti una buona somiglianza nella zona con fluido intrappolato, ha una sostanziale differenza nel graduale raggiungimento della condizione di fessura aperta, causato da quanto già notato per gli andamenti del COD. Il K_{II} ottenuto da Bower risulta leggermente minore in modulo. Su questo parametro ha però un'incidenza decisiva il non aver considerato l'attrito tra le facce della cricca. Anche in tale caso notiamo un anticipo della risposta rispetto al valore di L : il cambiamento di segno avviene difatti all'incirca in corrispondenza della chiusura della bocca della fessura, ovvero del passaggio da 0 di K_I a valori positivi.

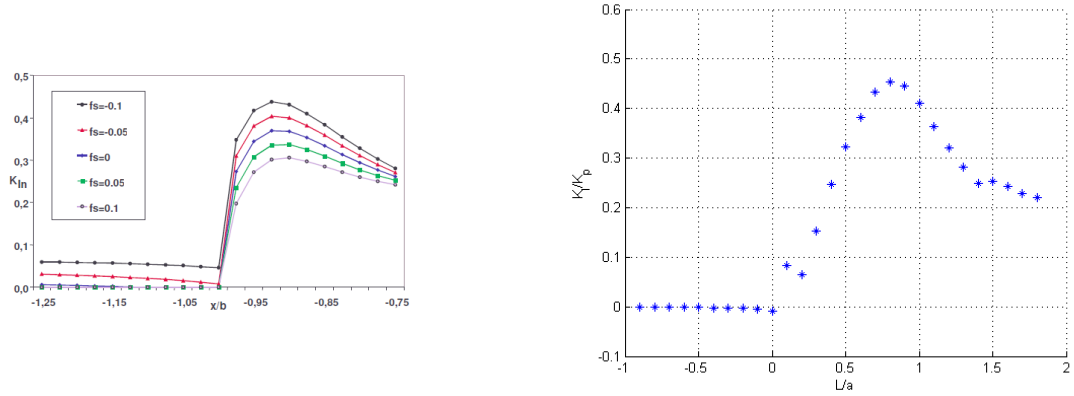


Figura 4.35 – A sinistra: risultati ottenuti da Benuzzi in [15], a destra valori di confronto ottenuti con il metodo qui presentato. $\theta = 45^\circ$

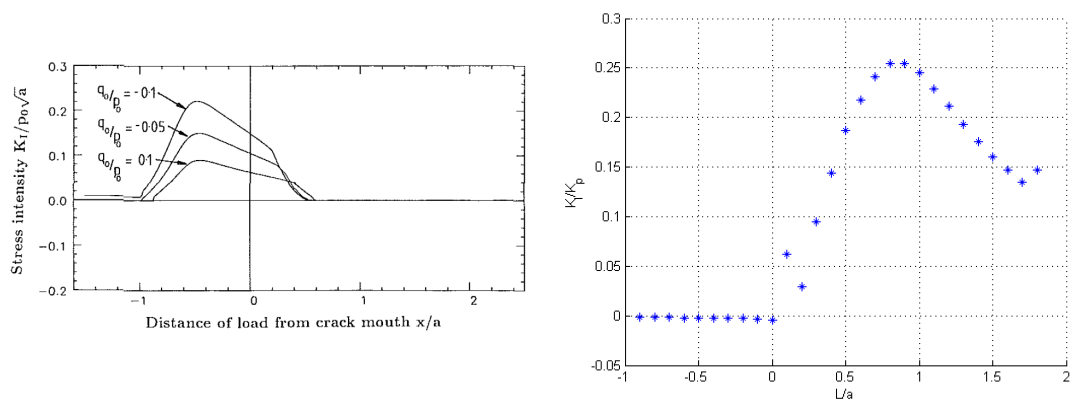


Figura 4.36 – A sinistra: risultati ottenuti da Bower in [14], a destra valori di confronto ottenuti con il metodo qui presentato

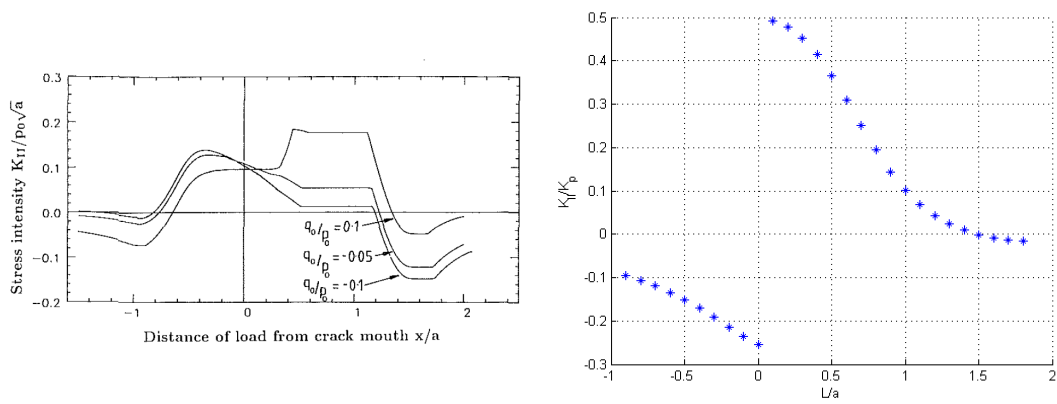


Figura 4.37 – A sinistra: risultati ottenuti da Bower in [14], a destra valori di confronto ottenuti con il metodo qui presentato

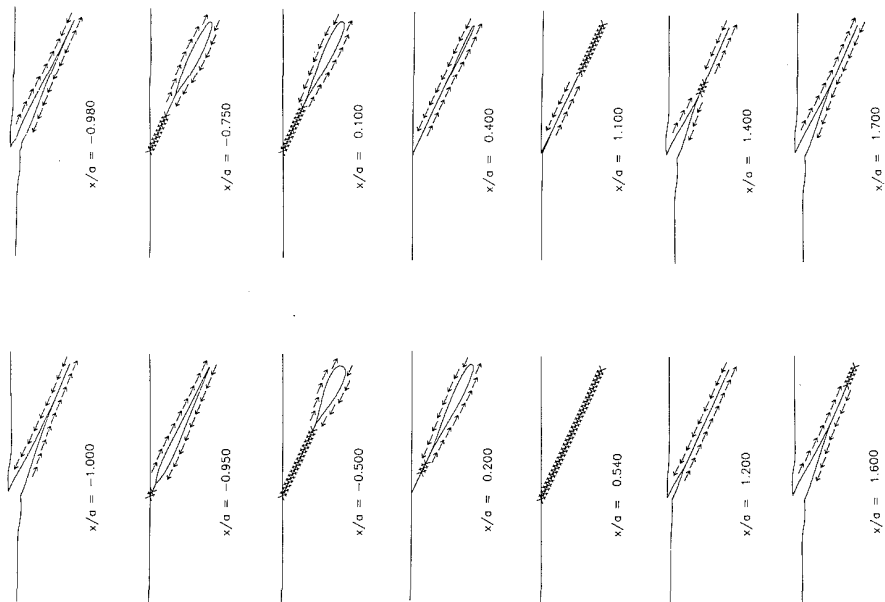


Figura 4.38 – Andamento del COD ottenuto da Bower

Capitolo 5

Analisi mediante elementi finiti

E' stato implementato, attraverso il software commerciale *Abaqus/CAE*, un modello ad elementi finiti di un elemento rettangolare integro e fratturato, caricato dal rotolamento di una porzione di un cilindro, in assenza di lubrificante. Il modello integro permette di valutare il contatto e confrontare i risultati con quanto ottenuto mediante la teoria di Hertz e le sperimentazioni fotoelastiche. Il modello fratturato permette invece la valutazione dei SIF e altri parametri interessanti per vari angoli di inclinazione della fessura.

Sono stati realizzati modelli bidimensionali e tridimensionali, quest'ultimi, tuttavia, non aggiungono informazioni a quelle ottenute precedentemente e quindi non sono qui presentati. Si noti peraltro come l'approssimazione bidimensionale del problema è coerente con gli approcci fotoelastico e analitico utilizzati in precedenza.

Si è valutato inoltre che, non avendo modellizzato il fluido interposto, una simulazione dinamica non comportasse significativi vantaggi; non avendo inoltre riscontrato problemi di convergenza si è potuto utilizzare un solutore implicito.

5.1 Contatto: modellazione

Nella modellazione del contatto è necessario scegliere:

- se utilizzare una discretizzazione superficie-superficie o nodo-superficie
- decidere quale delle superfici partecipanti al contatto sarà considerata *master* e quale *slave*
- tra una formulazione a scorrimenti piccoli o finiti

La discretizzazione superficie-superficie è preferibile nelle situazioni in cui le superfici a contatto siano approssimativamente opposte, mentre nodo-superficie presenta vantaggi nel caso in cui siano presenti spigoli o angoli, il cui vertice quindi sarà ben modellato da un singolo nodo. In generale però, la discretizzazione superficie-superficie fornisce risultati più accurati per gli sforzi e le pressioni di contatto quando la geometria della superficie è rappresentata bene dalle superfici a contatto.

Il manuale del software suggerisce, di scegliere come superficie *master*:

- la superficie più grande

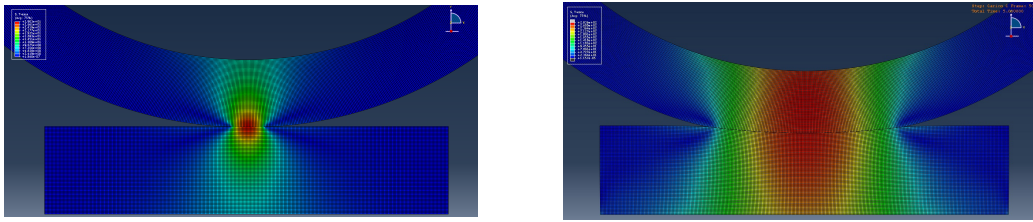


Figura 5.1 – Tensione equivalente di Tresca nella simulazione di contatto ruota-rotaia: a sinistra spostamento imposto di 1 mm, a destra 10 mm

- la superficie appartenente al corpo più rigido

Riporta però che la scelta dei ruoli all'interno del contatto ha importanza principalmente con la discretizzazione nodo-superficie. Nel nostro caso entrambe le indicazioni date non sono applicabili, in quanto i corpi hanno rigidezza simile e le superfici a contatto hanno dimensioni confrontabili. Pertanto è stato scelto un approccio di discretizzazione superficie-superficie, e di assegnare al binario il ruolo *slave*, dato che in corrispondenza della fessura la rigidezza diminuisce significativamente.

In ultimo è necessario scegliere la formulazione per gli scorrimenti: la formulazione a scorrimenti finiti è l'approccio più generale al problema del contatto, in quanto permette movimenti arbitrari in tutte le direzioni delle superfici a contatto¹. E' inoltre preferibile per introdurre gli effetti delle non linearità geometriche, motivo per il quale è stato scelto.

5.2 Simulazione di contatto Hertziano

La simulazione è stata condotta imponendo lo spostamento del centro della ruota. La configurazione deformata è riportata in figura 5.1.

5.3 Modellazione FEM della cricca

A causa della natura singolare del campo di sforzi nell'intorno dell'apice, gradienti degli sforzi molto elevati costringerebbero ad utilizzare un numero di elementi altissimo per ottenere una soluzione accurata. Per tale motivo si è solito utilizzare degli elementi con funzioni di forma modificate, in grado di riprodurre i vari tipi di singolarità che si possono presentare.

Nel caso di modellazione della frattura lineare elastica si avrà

$$\varepsilon \propto 1/\sqrt{r} \quad (5.1)$$

con r raggio misurante la distanza dall'apice. Ipotizzando di utilizzare elementi triangolari quadratici per modellare la zona circostante l'apice, gli spostamenti

¹Ricordiamo che si distingue, nelle superfici a contatto, tra movimento normale, tangenziale e prillamento

sarebbero esprimibili come:

$$u(\chi, \eta) = a_1 + a_2\chi + a_3\eta + a_4\chi\eta + a_5\chi^2 + a_6\eta^2 \quad (5.2)$$

Sarebbe invece desiderabile avere un'espressione del tipo:

$$u(\chi, \eta) = a_1 + \frac{a_2\chi + a_3\eta}{\sqrt{\chi + \eta}} + a_4\frac{\chi\eta}{\chi + \eta} + a_5\chi + a_6\eta \quad (5.3)$$

Questo effetto è ottenibile collassando i *mid-side* nodi, ovvero quelli che si trovano a metà del lato dell'elemento, nelle posizioni a distanza di un quarto del lato dall'apice.

Nel caso di analisi elasto plastiche è invece possibile utilizzare elementi quadrilaterali, a cui siano stati collassati due nodi al vertice della cricca riottenendo quindi un elemento triangolare, in quanto questi sono in grado di riprodurre la presenza contemporanea di una singolarità di tipo $1/r$ e una di tipo $1/\sqrt{r}$.

5.4 Valutazione numerica dei parametri della frattura

Dai risultati in output alle analisi ad elementi finiti è possibile calcolare i parametri della frattura; i metodi utilizzabili sono suddivisi in metodi di sostituzione o energetici.

Tra quest'ultimi ricordiamo:

- tecnica della differenza di energia
- metodo dell'estensione virtuale della fessura

Per un'analisi elastica il primo metodo consiste nei seguenti passi:

- effettuare una prima *run* del codice FEM, con carichi e vincoli reali e una data lunghezza della fessura a , ottenendo l'energia di deformazione P_1
- spostando l'apice della cricca di una piccola quantità δa , tale per cui lo spostamento sia minore della dimensione degli elementi adiacenti all'apice, ed ottenere un nuovo valore per l'energia di deformazione P_2

Si calcola quindi:

$$G = -\frac{dP}{da} = -\frac{P_2 - P_1}{\delta a} \quad (5.4)$$

Dove G è l'energia rilasciata per unità di lunghezza durante l'avanzamento della fessura.

Lo svantaggio principale del metodo proposto è la necessità di ripetere la simulazione, con ovvi costi computazionali. In *Abaqus* è invece implementato un metodo con estensione virtuale della fessura: sulla base del metodo precedente, Park osservò che derivando l'energia di deformazione, definita come:

$$U = -\frac{1}{2}\mathbf{u}[K]\mathbf{u} \quad (5.5)$$

con $[K]$ matrice di rigidità nella regione dell'apice della cricca, rispetto alla lunghezza della fessura a , si rendeva possibile valutare la matrice $\delta[K]$ conoscendo $[K]$ per due lunghezze della cricca a e $a + \delta a$, sugli elementi in cui è stata virtualmente estesa la cricca, e moltiplicarla per i valori di spostamento locali, ottenendo la variazione di energia locale.

²Per un problema non elastico si può calcolare l'energia potenziale totale

5.4.1 J-integral

In un'analisi quasi-statica, il J-integral è pari a:

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{q} d\Gamma \quad (5.6)$$

con \mathbf{q} versore indicante la direzione dell'estensione virtuale della cricca, \mathbf{n} è la normale al contorno Γ , e H è pari a:

$$\mathbf{H} = \left(W\mathbf{I} - \sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (5.7)$$

Ricordiamo inoltre che in campo elastico lineare vale:

$$J = G \quad (5.8)$$

Per la valutazione di tale integrale *Abaqus* calcola il suo valore per un avanzamento virtuale della cricca λ , pari a:

$$J = \int_A \lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{q} d\Gamma \quad (5.9)$$

Il calcolo viene poi eseguito su un dominio di calcolo scelto mediante anelli di elementi circondanti l'apice della cricca. Differenti contorno vengono creati: il primo è formato da elementi direttamente connessi ai nodi collassati nell'apice, il secondo dagli elementi a contatto con quelli della prima fascia, e così via. Un esempio è mostrato in figura 5.2

5.4.2 SIFs

I fattori di intensificazione degli sforzi possono essere correlati in campo lineare elastico al J-Integral attraverso la relazione:

$$J = \frac{1}{8\pi} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{K} \quad (5.10)$$

dove $\mathbf{K} = [K_I, K_{II}, K_{III}]^T$ e \mathbf{B} è detta *pre-logarithmic energy factor matrix*. Per un materiale omogeneo e isotropo essa diventa diagonale, semplificando la precedente equazione in:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (5.11)$$

valida in caso di sforzo piano ed estendibile ovviamente al caso di deformazione piana. In generale sarà invece:

$$J = \frac{1}{8\pi} [K_I B_{11}^{-1} K_I + 2K_I B_{12}^{-1} + 2K_I B_{13}^{-1} K_{III} + \dots] \quad (5.12)$$

Introducendo un J-integral aggiuntivo per il campo di sforzi singolare di una fessura caricata secondo il puro modo I:

$$J_{aux}^I = \frac{1}{8\pi} k_I B_{11}^{-1} k_I \quad (5.13)$$

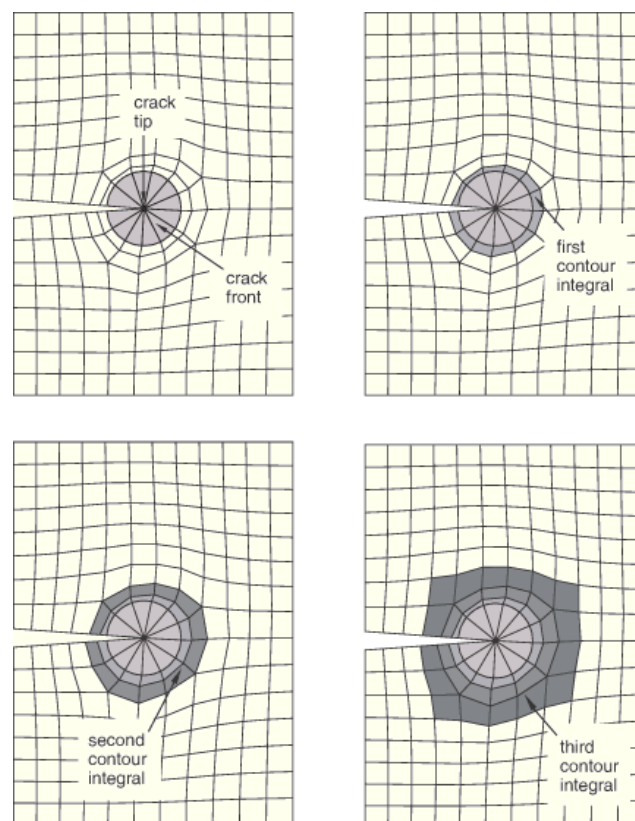


Figura 5.2 – Scelta dei domini su cui valutare il J -integral

e sovrapponendo il campo di sforzi ottenuto in quello del modello:

$$J_{tot}^I = \frac{1}{8\pi} [(K_I + k_I)B_{11}^{-1}(K_I + k_I) + 2(K_I + k_I)B_{12}^{-1}K_{II} + 2(K_I + k_I)B_{13}^{-1}K_{III} + \dots] \quad (5.14)$$

I termini non riportati (indicati con i punti di sospensione) nel calcolo di J_{tot}^I e J sono uguali, definendo l'integrale di interazione J_{int}^α come:

$$J_{int}^\alpha = J_{tot}^\alpha - J - J_{aux}^\alpha \quad (5.15)$$

Otteniamo, per il modo I:

$$J_{int}^I = \frac{k_I}{4\pi} (B_{11}^{-1}K_I + B_{12}^{-1}K_{II} + B_{13}^{-1}K_{III}) \quad (5.16)$$

Analogamente possiamo ottenere l'espressione dell'integrale di interazione per il secondo e terzo modo, ottenendo un sistema di equazioni lineari:

$$J_{int}^\alpha = k_\alpha 4\pi B_{\alpha\beta}^{-1} K_\beta \quad (5.17)$$

con $\alpha = I, II, III$. Se i tre k_α hanno valore unitario, possiamo calcolare risolvendo il sistema precedente il valore ricercato dei SIFs:

$$\mathbf{K} = 4\pi \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_{int} \quad (5.18)$$

con $\mathbf{J}_{int} = [J_{int}^I, J_{int}^{II}, J_{int}^{III}]^T$, il cui calcolo è necessario per la soluzione della 5.17. Ricordando la definizione del J-integral, il generico J_{int}^α puo' essere espresso come:

$$J_{int}^\alpha = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{q} d\Gamma \quad (5.19)$$

con \mathbf{M}^α pari a:

$$\mathbf{M}^\alpha = \sigma : \varepsilon_{aux}^\alpha \mathbf{I} - \sigma \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{aux}^\alpha - \sigma_{aux}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.20)$$

Per il calcolo del integrale di interazione viene utilizzato ancora il concetto di avanzamento virtuale della cricca:

$$J_{int}^\alpha = \int_L J_{int}^\alpha(s) \lambda(s) ds = \int_A \lambda(s) \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{q} dA \quad (5.21)$$

con L lunghezza del fronte della cricca considerato e A dominio definito utilizzando di nuovo una costruzione ad anello intorno all'apice della cricca.

5.4.3 T-stress

Per estrarre il T-stress dalla soluzione del problema elastico, si applica un carico lineare di ampiezza f nel piano di propagazione della cricca e lungo la lunghezza della stessa; è dunque possibile ricavare, in modo simile a quanto fatto per i SIFs, un integrale di interazione e quindi il T-stress.

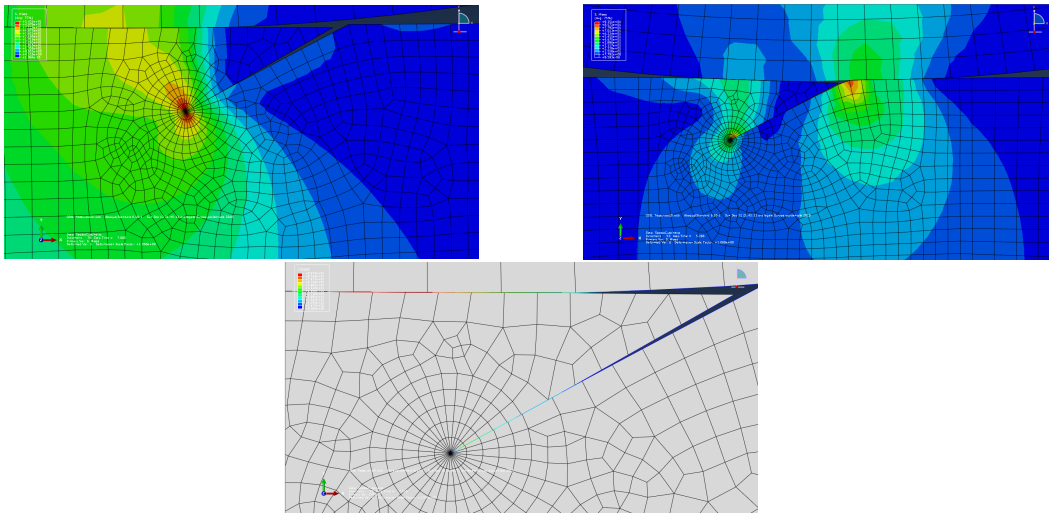


Figura 5.3 – Tensione equivalente di Mises per due condizioni posizioni della ruota

5.5 Simulazione dell'elemento criccato

Sono stati realizzati tre modelli per tre angoli di inclinazione della fessura rispetto all'orizzontale. Sono stati quindi ottenuti i valori del J-Integral, dei fattori di intensificazione degli sforzi e il T-stress per varie posizioni della ruota, che, con riferimento alle immagini, si sposta verso sinistra, con coerenza con le analisi sperimentali e con WF.

I risultati sono riportati nelle figure 5.4, 5.5 e 5.6. Si noti come i valori siano stati calcolati per vari contorni: le curve tendono in alcuni casi a coincidere dal terzo contorno in su; si notano invece degli andamenti alquanto strani per i primi due contorni. Le differenze sono dovute probabilmente alla geometria della fessura, che porta ad avere una condizione di contatto diversa.

Dagli andamenti ottenuti per K_I notiamo notevoli differenze con quanto ottenuto dalle WF consideranti il contatto. L'andamento somiglia piuttosto a quello ottenuto per interazione non considerata tra i lembi della cricca, peraltro i valori del SIF sono negativi. Ciò può essere spiegato dalla geometria qui presente, che differisce sostanzialmente da quella considerata dalle WF, in cui le superfici della cricca indeformate sono a distanza nulla, non permettendo uno spostamento secondo il modo I negativo. Quest'ultimo è invece concesso nel caso di compenetrazione tra le facce della cricca, giustificando i risultati ottenuti.

In 5.3 sono riportate due condizioni di contatto: si noti come nella modellazione FEM venga correttamente simulata la condizione di contatto multiplo che si realizza nell'attraversamento della cricca. E' inoltre riportato l'andamento della pressione all'interfaccia: si noti come vicino all'apice questa sia nulla, confermando la presenza di un COD positivo in questa zona, come trovato dai risultati delle WF.

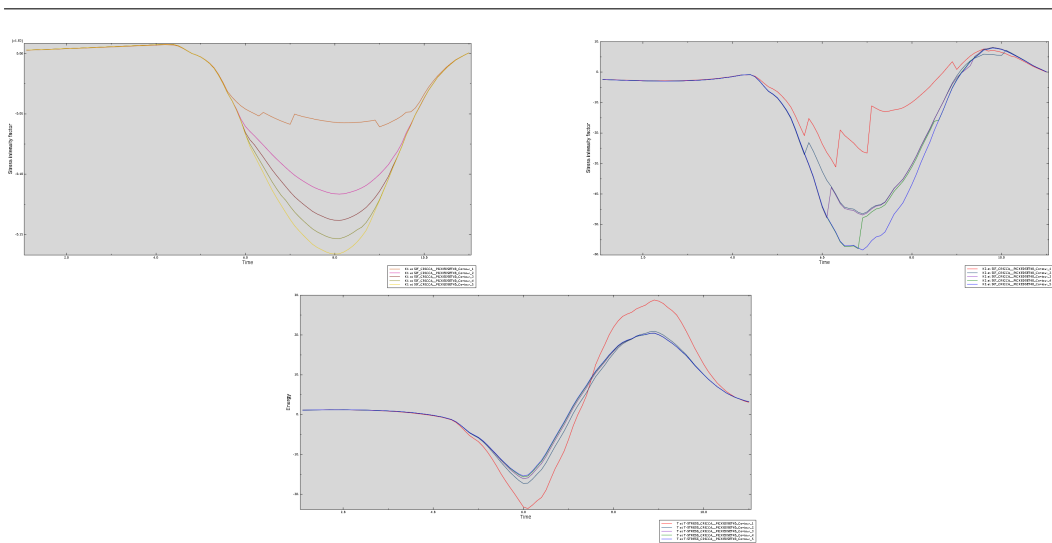


Figura 5.4 – Valori dei parametri della frattura valutati per $\theta = 30^\circ$

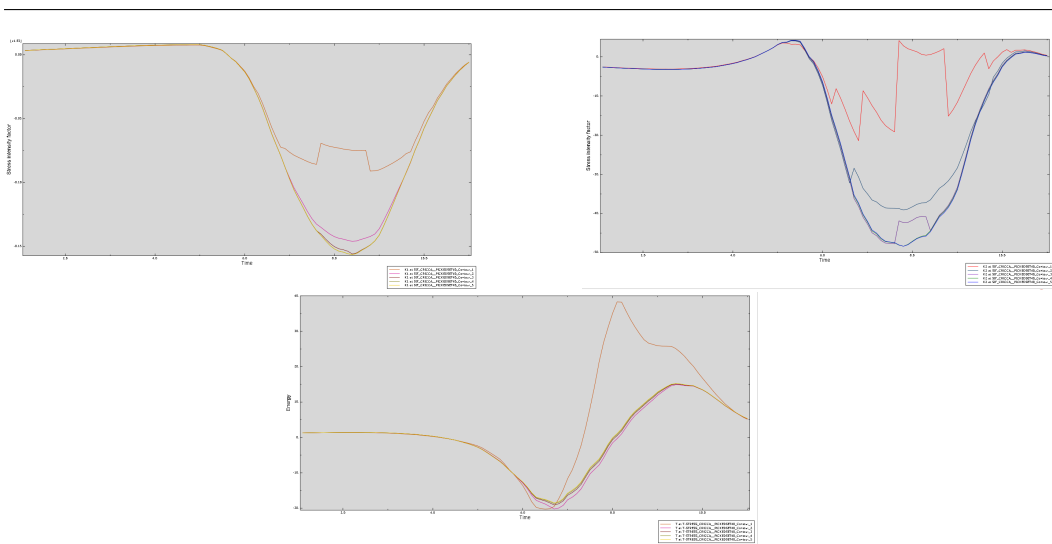


Figura 5.5 – Valori dei parametri della frattura valutati per $\theta = 45^\circ$

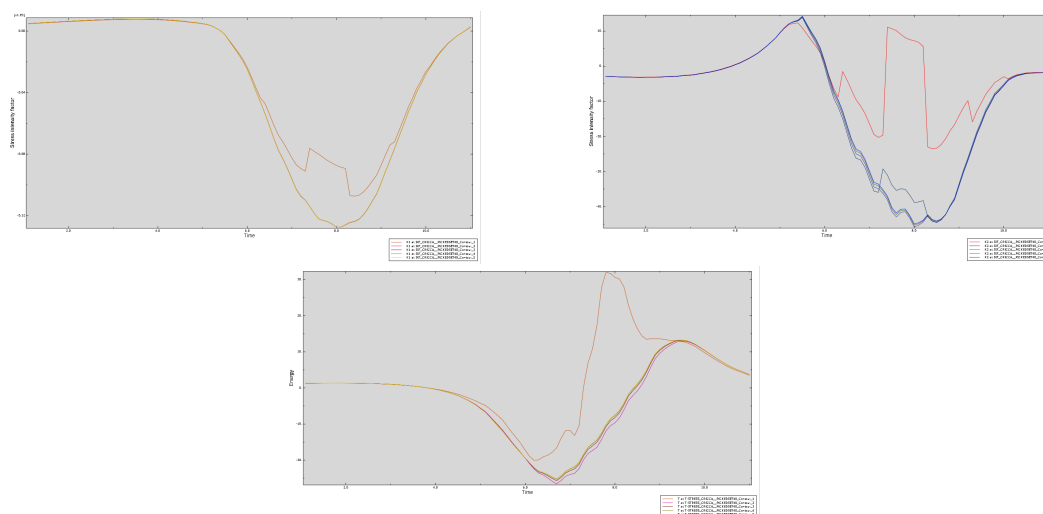


Figura 5.6 – Valori dei parametri della frattura valutati per $\theta = 60^\circ$

5.6 Considerazioni sull'introduzione del fluido nella simulazione

Per poter introdurre il fluido nella simulazione mediante modello FEM è necessario utilizzare un *multi-physics simulation software*, in grado quindi di simulare le differenti fisiche coinvolte in un fluido o in un solido.

Abaqus prevede la simulazione di interazioni fluido-struttura mediante un'implementazione euleriana del fluido e lagrangiana dei solidi presenti. Tuttavia, nel caso di solidi fratturati non è immediato ottenere una simulazione che abbia dei tempi di calcolo ragionevoli; essendo infatti i labbri della frattura estremamente vicini è necessario utilizzare per il fluido elementi di dimensioni estremamente ridotte, con relativo peso computazionale. Le simulazioni in presenza di fluido richiedono peraltro una modellazione dinamica esplicita tridimensionale, molto più lenta di quella realizzata nella presente tesi. In ultimo, non è possibile utilizzare i tool di calcolo per i parametri fratturali utilizzati in precedenza. Ad ogni modo, una simulazione mediante modello FEM avrà comunque un tempo di calcolo non confrontabile con quello delle WF; per uno studio in cui si vogliono valutare l'influenza di parametri quali la lunghezza della fessura, l'inclinazione, il carico applicato, etc., potrebbe divenire impossibile applicare questo approccio. La fase di *debug* potrebbe risultare inoltre estremamente lunga; in una simulazione completa con WF è sufficiente attendere un minuto per valutare i risultati ed intervenire sul codice, tempo assolutamente non confrontabile con quello di un qualsiasi modello del problema realizzato mediante FEM.

Capitolo 6

Conclusioni

Il problema del *pitting*, come chiarito, risulta di difficile analisi, con un meccanismo di propagazione non ancora chiarito in letteratura; in particolare sono presenti molteplici metodologie per l'analisi del problema, con risultati spesso discordi. Per risolvere il problema si è quindi ricercata una metodologia per l'analisi numerica. Utilizzando quanto disponibile in letteratura per l'analisi con WF di elementi criccati superficialmente senza fluido interposto si è notata la formazione di una sacca all'attraversamento del carico, rendendo possibile un meccanismo di intrappolamento del fluido, conformemente a quanto osservato da Bower in [14]. Si è quindi realizzato una nuova metodologia per l'inserimento del fluido nell'analisi con le WF: ipotizzando il fluido incomprimibile si è imposto attraverso un *loop* di controllo l'annullamento della differenza di volume tra il fluido intrappolato e il volume della sacca. Il primo modo di apertura, trascurabile nel caso di assenza di fluido, assume proporzioni interessanti per una possibile propagazione della cricca: la pressione del fluido agisce difatti in prossimità dell'apice della fessura, zona maggiormente sensibile a tale tipo di azioni. Lo studio comparativo tra i SIFs ha prodotto migliori risultati per il primo modo di apertura a causa della non introdotta simulazione dell'attrito tra le facce: non è possibile quindi introdurre l'effetto lubrificante, che dovrebbe comportare un aumento del K_{II} . Il codice utilizzato risulta inoltre estremamente veloce, permettendo l'analisi di un problema complesso come questo, una volta ottenuta la matrice della funzione di Green, in meno di un minuto.

Ai risultati numerici ottenuti mediante WF è stato affiancato da un modello ad elementi finiti, con cui sono stati stimati vari parametri della frattura mediante la teoria dell'avanzamento virtuale della fessura. Il confronto tra FEM e WF è accettabile, a causa della distanza tra le facce della fessura nel modello FEM, solo nel caso di permessa compenetrazione tra le facce nelle WF.

E' stata inoltre condotta un'analisi sperimentale mediante il metodo della fotoelasticità: sono stati realizzati due modelli sandwich a tre e a cinque strati. Per poter valutare i SIFs a partire dall'andamento delle isocromatiche è stato utilizzato un'analisi multiparametrica. Il primo modello si è mostrato non in grado di restituire dati fotoelastici utili; il modello a cinque strati ha permesso una valutazione dei SIFs al variare della posizione relativa ruota-binario, con una ricostruzione delle frange da parte del software multiparametrico a volte ottima.

I risultati ottenuti mediante WF sono confrontabili con quanto ottenuto sperimentalmente almento dal punto di vista degli andamenti, come riscontrabile dalla

figura 6.1 e dalla figura 6.2. I valori negativi per L minore di zero di K_I si hanno a causa della distanza tra le facce non considerata nelle WF. Sperimentalmente l'effetto del pumping decisamente più marcato; viene giustificata l'ipotesi fatta sul volume d'acqua inglobato nella fessura dal ritardo che si riscontra dell'innesco del pumping all'interno dell'esperimento: il volume d'acqua assorbito non è dato dall'apertura al momento del attraversamento del carico sulla bocca della fessura ma da una quantità decisamente minore. L'innesco avviene inoltre leggermente più avanti nel caso sperimentale, probabilmente a causa del gioco presente tra le facce della cricca. La differenza dell'effetto del pumping nel caso sperimentale potrebbe significare comunque una sottostima della quantità di acqua intrappolata, come già detto non semplice da valutare. Anche questa incongruenza potrebbe essere imputabile alle differenze geometriche: all'istante in cui si è stimata l'acqua presente all'interno della fessura, difatti, una geometria come quella del modello sperimentale avrebbe comportato un valore decisamente più alto del volume del fluido. E' possibile altresì che il movimento della ruota vada a 'spingere' una certa quantità d'acqua all'interno della fessura prima di tapparla con la propria impronta. Il K_{II} , come già detto, risente della mancata introduzione nel modello dell'attrito. Gli andamenti sono simili, ma nel caso dei risultati sperimentali presentano una marcata asimmetria rispetto all'asse delle ordinate. I valori diventano in senso assoluto minori per $L < 0$ e maggiori per $L > 0$ rispetto a quelli ottenibili numericamente.

6.1 Sviluppi futuri

Si riporta una lista delle possibili estensioni al lavoro presentato:

- valutazione degli effetti di attrito nella fessura
- valutazione degli effetti di attrito tra gli elementi in contatto Hertziano
- inserimento della dinamica del fenomeno nel modello con WF
- realizzazione di un sistema di carico in grado di realizzare simulazioni dinamiche
- migliorare la qualità dell'incollaggio
- introduzione del fluido interposto nel modello FEM

I fenomeni di attrito tra le facce della fessura possono essere agevolmente introdotti all'interno della modellazione con WF, resta difficile stimare il giusto coefficiente di attrito in presenza di lubrificazione parziale, come avviene durante l'intrappolamento del fluido.

L'attrito tra gli elementi in contatto Hertziano comporta una variazione del comportamento dell'elemento a contatto considerato nei casi di elemento *driver* e *follower*. Questa variazione risulterà chiaramente combinata all'inclinazione della cricca e alla direzione del moto: considerando la direzione di marcia e l'inclinazione della fessura solite, l'attrito potrebbe ad esempio essere in grado di anticipare la chiusura della fessura nel caso di elemento *driver* e di ritardarla nel caso di elemento *follower*.

Per introdurre la dinamica all'interno del modello con WF, è necessario modellare le forze di inerzia proprie dell'elemento. Queste, che sono state trascurate nel presente

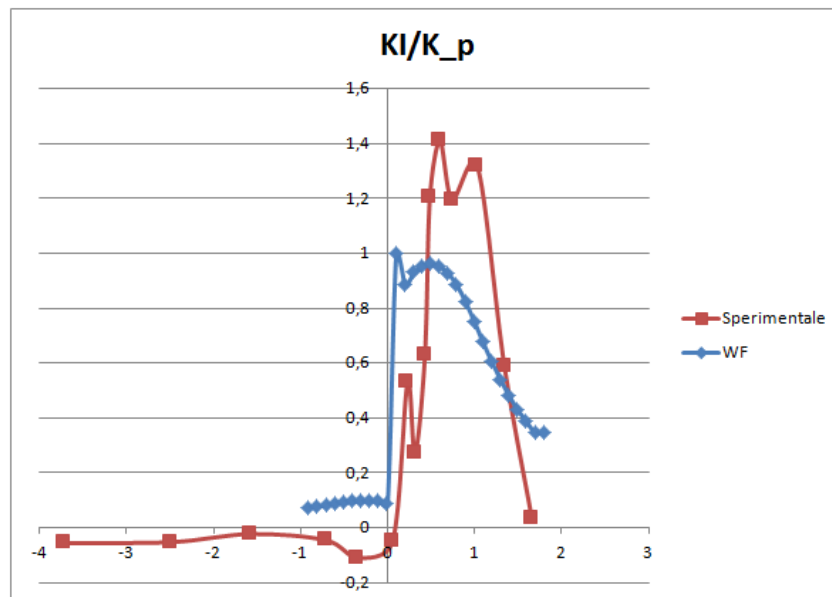


Figura 6.1 – Confronto sperimentale-weight function per gli andamenti del K_I con fluido interposto

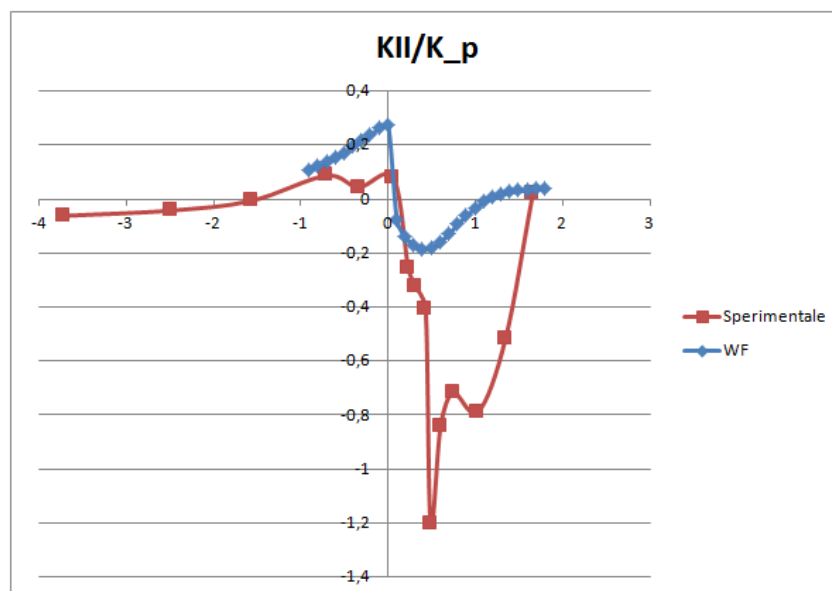


Figura 6.2 – Confronto sperimentale-weight function per gli andamenti del K_{II} con fluido interposto

lavoro, possono assumere dimensioni rilevanti per alte velocità relative degli elementi a contatto. Un possibile procedimento potrebbe essere quello di considerare due valori del campo di spostamenti nell'elemento per due valori dello spostamento relativo e calcolare quindi la velocità come:

$$\dot{u} = \frac{u(L(x_1 + \Delta x)) - u(L(x_1))}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{u(L(x_1 + \Delta x)) - u(L(x_1))}{\Delta x} v \quad (6.1)$$

dove u è il campo di spostamenti, L lo spostamento del carico in funzione della coordinata L e v la velocità relativa.

Volendo realizzare una simulazione dinamica potrebbe essere indispensabile introdurre l'inerzia del fluido.

Il sistema di carico presente in dipartimento consente la realizzazione di simulazioni quasi-statiche; non sembra possibile, a partire da questo telaio, realizzare un miglioramento in grado di realizzare le alte velocità in gioco nella simulazione dinamica. Per realizzare simili esperimenti sarebbe quindi necessario progettare un nuovo telaio di carico, dotato di motore.

Per quanto riguarda l'incollaggio, questo è rimasto l'unico punto dell'esperimento realizzato con risultati parzialmente soddisfacenti: realizzando uno strato di colla migliore sarebbe possibile migliorare la visibilità e quindi il numero di frange percepibili al polariscopio, permettendo di analizzare una zona più vicina all'apice della fessura, in cui gli sforzi rispettano con maggiore precisione le equazioni delle MFLE. Negli esperimenti presentati, difatti, durante l'avvicinamento del carico alla zona della fessura, le frange dovute strettamente al contatto acquisiscono importanza preponderante invalidando le ipotesi alla base dell'analisi multiparametro.

Come già sottolineato nel relativo capitolo, è possibile estendere il modello FEM introducendo il fluido interposto, ottenendo una ulteriore fonte di confronti per i risultati sperimentali e delle WFs.

Bibliografia

- [1] T.E. Tallian, Failure Atlas for Hertz Contact Machine Elements. New York, N.Y., 1992.
- [2] B.T. Kuhnell, Wear in Rolling Element Bearings and Gears - How Age and Contamination Affect Them, Machinery Lubrication (9/2004)
- [3] S.I. Nishida, K. Sugino, C. Urashima and H. Masumoto, Study on contact rolling fatigue of rails:analysis by high speed rail testing machine, Bull. Jpn. Soc. Mech. Eng., 1985, 28, pp. 1819-1824.
- [4] D. Nelias, M.L. Dumont, F. Couhier, G. Dudragne, and L. Flaman, Experimental and Theoretical INvestigation on Rolling Contact Fatigue of 52100 and M50 Steels Under EHL or Micro-EHL Conditions, Journal of Tribology, AME, 120 (2): 184-200, 1988.
- [5] E.A. Shur, N.Y. Bychkova, S.M. Trushevsky, Physical metallurgy aspects of rolling contact fatigue of rail steels. Wear, 2005, 258, pp. 1165-117
- [6] R.I. Carrol, J.H. Beynon, Rolling contact fatigue of white etching layer: Part 1- Crack morphology. Wear, 2007, 262, pp. 1253-1266.
- [7] S. Way, Pitting Due to Rolling Contact, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 2, 1935, pp. A49-A58.
- [8] L.M. Keer, M.D. Bryant, A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue, ASME Journal of Lubrication Technology, Vol 105, 1983, pp. 198-205.
- [9] M.D. Bryant, G.R. Miller, L.M. Keer, Line Contact Between a Rigid Indenter and a Damaged Elastic Body, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 37, No. 3, 1984, pp. 468-478.
- [10] Y. Murakami, S. Nemat-Nasser, Growth and Stability of interacting Surface Flaws of Arbitrary Shape, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 17, No. 3, 1983, pp. 193-210

-
- [11] Y. Murakami, M. Kaneta, H. Yatsuzuka, Analysis of Surface Crack Propagation in Lubricated Rolling Contact, ASLE Trans., Vol. 28, 1985, pp 60-68.
- [12] M. Kaneta, Y. Murakami, H. Yatsuzuka, Mechanism of Crack Growth in Lubricated Rolling/Sliding Contact, ASLE Trans, Vol. 28, 1985, pp. 210-271
- [13] M. Kaneta, Y. Murakami, Effects of Oil Pressure on Surface Crack Growth in Surface Initiated Rolling Contact Fatigue Cracks, Tribology International, Vol. 29, 1980, pp. 1042-1048.
- [14] A.F. Bower, The Influence of Crack Face Friction and Trapped Fluid on Surface Initiated Rolling Contact Fatigue Cracks, ASME Journal of Tribology, Vol. 110, 1988, pp. 704-711
- [15] D. Benuzzi, E. Bormetti, G. Donzella, Modelli numerici per lo studio della propagazione di cricche superficiali da rolling contact fatigue in presenza di fluido, XXX Convegno Nazionale AIAS - Alghero (SS), 2001.
- [16] H. Chai, Multi-crack analysis of hydraulically pumped cone fracture in brittle solids under cyclic spherical contact, Int J Fract, 2007, 143.
- [17] M. Guagliano, L.Vergani, Experimental and numerical analysis of sub-surface cracks in railway wheels, Engineering Fracture Mechanics, 2005, 72, pp 255-269
- [18] N.I. Muskhelishvili, Some basic problems of mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Holland, 1953.
- [19] O.L. Bowie, Analysis of an infinite plate containing radial cracks, originating at the boundaries of an internal circular hole, J. Math. and Phys. 35(1956) 60.
- [20] J.P. Benthem, W.T. Koiter, Asymptotic approximations to crack problems, in: Mechanics of Fracture I, ed. G.C. Sih, Noordhoff International Publi., Leyden, 1973.
- [21] I.N. Sneddon, M. Lowengrub, Crack problems in the classical theory of elasticity, Wiley, New York, 1969.
- [22] W.K. Wilson, Finite element methods for elastic bodies containing cracks, in: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Mechanics of Fracture I, ed. G.C. Sih, Noordhoff International Publ., Leyden, 1973, 484-515.
- [23] T.A. Cruse, Numerical solutions in three-dimensional elastostatics, Int. J. Solids and Struct. 5 (1969) 1259-1274.

-
- [24] B. Gross, J.E. Srawley, W.F. Brown, Stress intensity factors for a single-edge-notched tension specimen by Boundary Collocation of a stress function, NASA, Technical Note, D-2603, 1965.
- [25] B. Gross, J.E. Srawley, Stress intensity factors for single-edge-notch specimens in bending or combined bending and tension by Boundary Collocation of a stress function, NASA, Technical Note, D-2603, 1965.
- [26] H. Bueckner, A novel principle for the computation of stress intensity factors, ZAMM 50 (1970) 529-546.
- [27] E. Betti, Il nuovo cimento, Ser.2, 7 e 8 (1872).
- [28] J.R. Rice, Some remarks on elastic crack-tip stress fields, Int. J. Solids and Struct. 8 (1970) 529-546.
- [29] T. Fett, M. Caspers, D. Munz, H. Stamm, Determination of approximate weight functions for straight through cracks, Int. J. Fract. 43(1990) 195-211.
- [30] T. Fett, D. Munz, Stress Intensity Factors and Weight Functions, Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA, 1997.
- [31] S.P. Timoschenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1988.
- [32] L. Vergani, Meccanica dei materiali, McGraw-Hill, Milano, 2001.
- [33] A.E.H.Love, The Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York, 1927.
- [34] J. Boussinesq, Application des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre e du Mouvement des Solides Elastiques, Gauthiers-Villars, Paris, 1885.
- [35] J.W. Dally, W.F. Riley, Experimental Stress Analysis, College House Enterprises, LLC, Knoxville, TN, USA, 2005.
- [36] G.R. Irwin, Discussion of paper by A.Wells and D.Post, the dynamic stress distribution surrounding a running crack - A photoelastic analysis. Proc. SESA, 1958, 16(1), pp. 93-95.
- [37] W.B. Bradley, A.S. Kobayashi, An investigation of propagating cracks by dynamic photoelasticity. Exp. Mech., 1970, 10, pp. 106-113.
- [38] R.J. Sandford, J.W. Dally, A general method for determining mixed-mode stress intensity factor. Engng Fracture Mech. , 1972, 4, pp. 357-366.

-
- [39] A. Shabana, M. Berzeri, Numerical Procedure for the Simulation of Wheel/rail contact dynamics. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2001, 123, pp 168-178.
- [40] M. Guagliano, M. Pau, Analysis of internal cracks in railway wheels under experimentally determined pressure distributions. *Tribology International*, 2007, 40, pp. 1147-1160.
- [41] T. Hellen, *How To Undertake Fracture Mechanics Analysis with Finite Elements*, NAFEMS Ltd, 2001.
- [42] H. Hertz, Uberdie Beruhrung fester, elastischer Korper. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 1881, 92, pp. 156-171.
- [43] H. Hertz, Uberdie Beruhrung fester, elastischer Korper und uber die harte. *Heinrich Hertz, Gesammelte Werke, Band1*, pp. 174-196.
- [44] M. Beghini, L. Bertini, V. Fontanari, Weight function for an inclined edge crack in a semiplane, *International Journal of Fracture* 99, 1999, pp. 281-292.
- [45] M. Beghini, L. Bertini, V. Fontanari, Weight function technique for partially closed inclined edge cracks analysis, *International Journal of Fracture* 112, 2001, pp. 57-68.
- [46] M. Beghini, L. Bertini, V. Fontanari, Parametric study of oblique edge cracks under cyclic contact loading, *Fatigue Fract Engn Mater Struct*, Blackwell Publishing Inc., 2005, pp. 31-40.

Ringraziamenti

I miei più sentiti ringraziamenti vanno:

al Prof. Mario Guagliano, che mi ha proposto un lavoro di tesi estremamente interessante e stimolante fornendomi anche una vastissima documentazione a cui attingere e che è stato sempre disponibile a fornirmi chiarimenti; lo ringrazio anche per la grande fiducia dimostrata nei miei confronti;

al Prof. Michele Sangirardi, per gli innumerevoli suggerimenti sulla sperimentazione fotoelastica;

al Prof. Vigilio Fontanari, che con il suo gratuito aiuto mi ha permesso di superare difficoltà altrimenti insormontabili per l'implementazione delle weight functions;

alla Prof. Marta Rink, per i preziosissimi suggerimenti e per avermi messo a disposizione i suoi macchinari;

al Prof. Michele Carboni ed all' Ing. Ramin Ghelichi, per l'aiuto con la modellazione FEM.

Vorrei infine ringraziare tutti i tecnici che mi hanno aiutato nella realizzazione degli esperimenti ed in particolare Oscar Bressan, per avermi suggerito l'uso del teflon nell'incollaggio.

Appendice A

Cenni di Fotoelasticità

A.1 Superfici indicatrici

Molti materiali trasparenti con comportamento otticamente isotropo diventano otticamente anisotropi con caratteristiche simile a quelle dei cristalli quando sono sottoposti ad uno stato di sforzo. Queste caratteristiche persistono mentre il carico nel corpo è mantenuto ma scompaiono con la rimozione del carico. Questo comportamento, noto come birifrangenza temporanea, fu osservato per la prima volta da Sir David Brewster nel 1816. Il metodo della fotoelasticità si basa sul comportamento fisico di questi materiali.

L'anisotropia ottica può essere rappresentata da una superficie detta superficie indicatrice, che nel caso dei cristalli risulta un ellissoide. Nel caso di un materiale isotropo gli assi dell'ellissoide n_1 n_2 n_3 hanno la stessa dimensione: la superficie indicatrice diviene quindi una sfera.

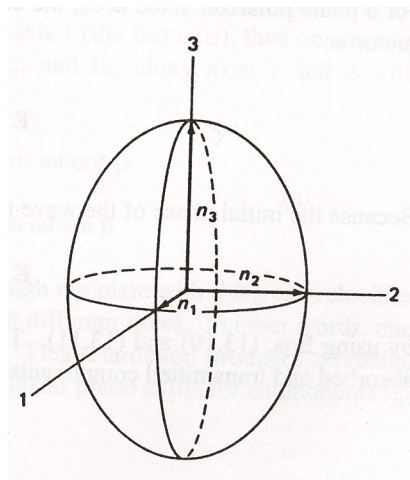


Figura A.1 – Ellissoide indicatore

A.2 Stress-Optic law

Le evidenti similitudini che esistono tra l'ellissoide di sforzo e lo stato di sforzo in un punto e l'ellissoide indicatore con le proprietà ottiche di un materiale birifrangente, fanno pensare all'esistenza di una relazione che leghi queste due quantità. Nel particolare queste relazioni furono notate e formalizzate da Maxwell nel 1853: egli notò come la variazione dell'indice di rifrazione in una data direzione fosse proporzionale allo stato di sforzo nel materiale. Si ottiene:

$$\begin{aligned}n_1 - n_0 &= c_1\sigma_1 + c_2(\sigma_2 + \sigma_3) \\n_2 - n_0 &= c_1\sigma_2 + c_2(\sigma_1 + \sigma_3) \\n_3 - n_0 &= c_1\sigma_3 + c_2(\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}\tag{A.1}$$

dove σ_i rappresenta l' i -esimo sforzo principale, n_i è l'indice di rifrazione principale, con direzione coincidente a quella dell' i -esimo sforzo principale, e i coefficienti c_1 e c_2 sono costanti note come *stress-optic coefficients*.

Il metodo della fotoelasticità fa uso dei cambi relativi negli indici di rifrazione, ottenibili sottraendo membro a membro le equazioni precedenti:

$$\begin{aligned}n_2 - n_1 &= (c_2 - c_1)(\sigma_1 - \sigma_2) = c(\sigma_1 - \sigma_2) \\n_2 - n_1 &= (c_2 - c_1)(\sigma_2 - \sigma_3) = c(\sigma_2 - \sigma_3) \\n_2 - n_1 &= (c_2 - c_1)(\sigma_3 - \sigma_1) = c(\sigma_3 - \sigma_1)\end{aligned}\tag{A.2}$$

Facendo passare un raggio di luce polarizzata piana attraverso un parallelepipedo con incidenza normale, il ritardo relativo accumulato nell'attraversare il corpo dalla luce Δ sarà pari a:

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \frac{2\pi hc}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \Delta_{23} &= \frac{2\pi hc}{\lambda}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ \Delta_{31} &= \frac{2\pi hc}{\lambda}(\sigma_3 - \sigma_1)\end{aligned}\tag{A.3}$$

dove h è lo spessore del parallelepipedo. Pertanto, con una luce propagante lungo la direzione di σ_3 il ritardo relativo in fase angolare sviluppato sarà pari a Δ_{12} . Per uno stato di sforzo bidimensionale il set di equazioni precedente può essere semplificato nell'unica equazione:

$$\Delta = \frac{2\pi hc}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2)\tag{A.4}$$

da cui:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h}\tag{A.5}$$

dove:

$$N = \frac{\Delta}{2\pi}\tag{A.6}$$

è il numero di cicli di cui è in ritardo la luce, detto ordine di frangia, mentre:

$$f_\sigma = \frac{\lambda}{c}\tag{A.7}$$

è il valore di frangia del materiale, da determinarsi attraverso opportuna calibrazione.

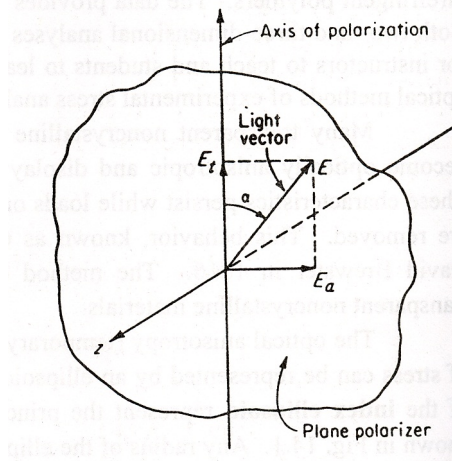


Figura A.2 – Filtro Polaroid

A.3 Il polariscopio

Il polariscopio è uno strumento ottico utilizzato nella fotoelasticità, che sfrutta le proprietà della luce polarizzata. Si distinguono in due famiglie a seconda del tipo di polarizzazione della luce generata: polariscopi piani e polariscopi circolari.

La polarizzazione della luce viene ottenuta attraverso due tipi di filtri ottici, i piani polarizzati e i piani d'onda.

A.3.1 Piani polarizzati

Quando la luce attraversa un piano polarizzato, l'elemento scinde la luce in due componenti mutuamente perpendicolari. La componente parallela all'asse di polarizzazione è trasmessa mentre la componente perpendicolare all'asse è assorbita. Questi filtri sono detti anche filtri Polaroid e sono utilizzati in entrambe le tipologie di polariscopio. Per un piano polarizzato fissato ad un'ascissa z_0 , l'equazione del vettore di luce incidente è:

$$E = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z_0 - ct) \quad (\text{A.8})$$

Dato che la fase iniziale non ha importanza in fotoelasticità, possiamo ridurre il tutto a:

$$E = a \cos(2\pi ft) = a \cos(\omega t) \quad (\text{A.9})$$

dove la quantità $\omega = 2\pi f$ è la frequenza circolare dell'onda. Le componenti assorbite e trasmesse della luce sono pertanto:

$$\begin{aligned} E_a &= a \cos \omega t \sin \alpha \\ E_t &= a \cos \omega t \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Dove α è l'angolo compreso tra l'asse di polarizzazione e la direzione del vettore rappresentante la luce incidente.

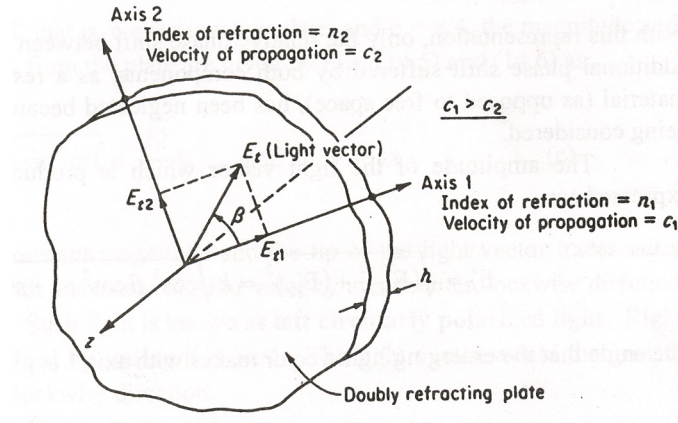


Figura A.3 – Piano d'onda

A.3.2 Piani d'onda

Il piano d'onda è un elemento ottico con la capacità di dividere il fascio di luce incidente in due componenti mutuamente ortogonali e di trasmettere le componenti con due differenti velocità: un materiale con queste proprietà è detto birifrangente.

In Figura A.3 notiamo che il piano d'onda ha due assi principali, corrispondenti ai due assi lungo i quali viene trasmessa la luce. La trasmissione lungo l'asse 1 avviene ad una velocità c_1 , mentre sull'asse 2 avviene a velocità c_2 , minore di c_1 . Per questo motivo il primo asse è detto asse veloce mentre il secondo asse lento.

Supponendo che un piano birifrangente sia posto in un campo di luce polarizzata piana (ottenibile attraverso il filtro Polaroid, descritto nella precedente sezione), e sia β l'angolo formato tra il vettore di luce incidente e l'asse veloce, le componenti della luce scissa dal filtro all'ingresso sono:

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_t \cos \beta = a \cos \alpha \cos \omega t \cos \beta = k \cos \omega t \cos \beta \\ E_{t2} &= E_t \sin \beta = a \cos \alpha \cos \omega t \sin \beta = k \cos \omega t \sin \beta \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A causa della differente velocità di trasmissione, le due componenti attraversano il piano d'onda in tempi diversi, con conseguente sfasamento tra le due componenti. Il ritardo relativo alla propagazione in aria della luce delle due componenti è calcolabile come:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= h(n_1 - n) \\ \delta_2 &= h(n_2 - n) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

dove n è l'indice di rifrazione dell'aria e n_1 e n_2 gli indici di rifrazione lungo le due direzioni principali del piano d'onda. Lo sfasamento lineare relativo è quindi pari a:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = h(n_2 - n_1) \quad (\text{A.13})$$

mentre lo sfasamento angolare, conoscendo la lunghezza d'onda dell'onda che attraversa il filtro è pari a:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_2 - n_1) \quad (\text{A.14})$$

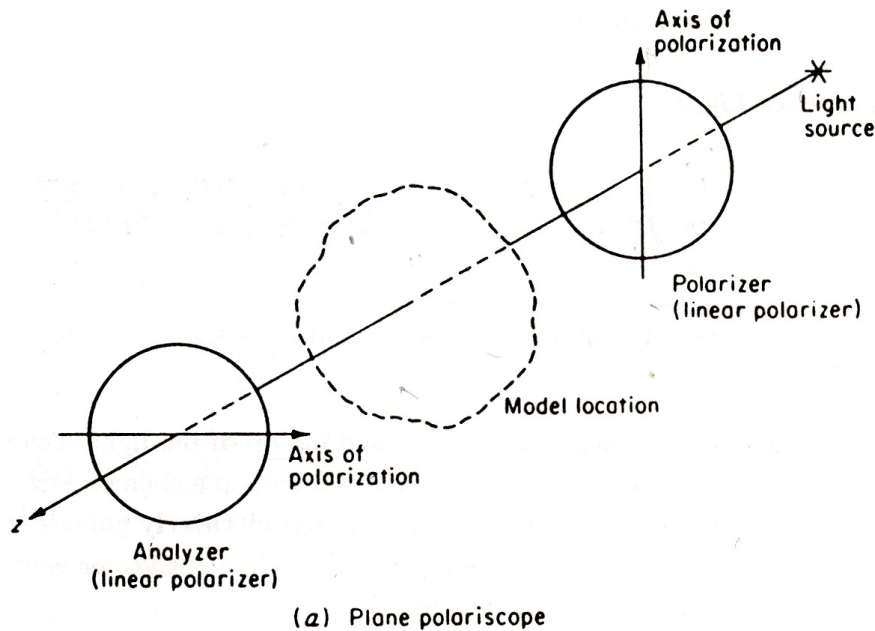


Figura A.4 – Polariscopio piano

Lo sfasamento angolare relativo risulta dipendente dallo spessore del piano, dalla lunghezza d'onda della luce e dalle proprietà del piano, descritte dalla quantità $(n_2 - n_1)$. Nel polarizzatore circolare si utilizzano filtri particolari detti quarti d'onda, i quali restituiscono un ritardo pari a $\Delta = \frac{\pi}{2}$.

La luce trasmessa nelle due direzioni è quindi:

$$\begin{aligned} E_{t1} &= k \cos \beta \cos \omega t \\ E_{t2} &= k \sin \beta \cos(\omega t - \Delta) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A.3.3 Polariscopio piano e circolare

Il polariscopio piano è il più semplice dei due polariscope presentati, è formato da due filtri Polaroid e una sorgente di luce, come mostrato in Figura A.4. Il primo filtro è detto polarizzatore, il secondo analizzatore. Nel polariscopio piano, i due assi di polarizzazione sono sempre perpendicolari, in modo che non sia trasmessa luce attraverso l'analizzatore, e lo strumento lavora quindi in campo oscuro.

Il polariscopio circolare, che realizza luce polarizzata circolarmente, contiene quattro elementi ottici: due filtri Polaroid e due quarti d'onda. La luce entra nel primo filtro polarizzatore, che realizza luce polarizzata piana, e quindi nel primo quarto d'onda, che converte la luce polarizzata piana in luce polarizzata circolarmente. Dopo aver attraversato il modello la luce incontra il secondo quarto d'onda, che ripolarizza planarmente la luce, e infine l'analizzatore che estingue la luce.

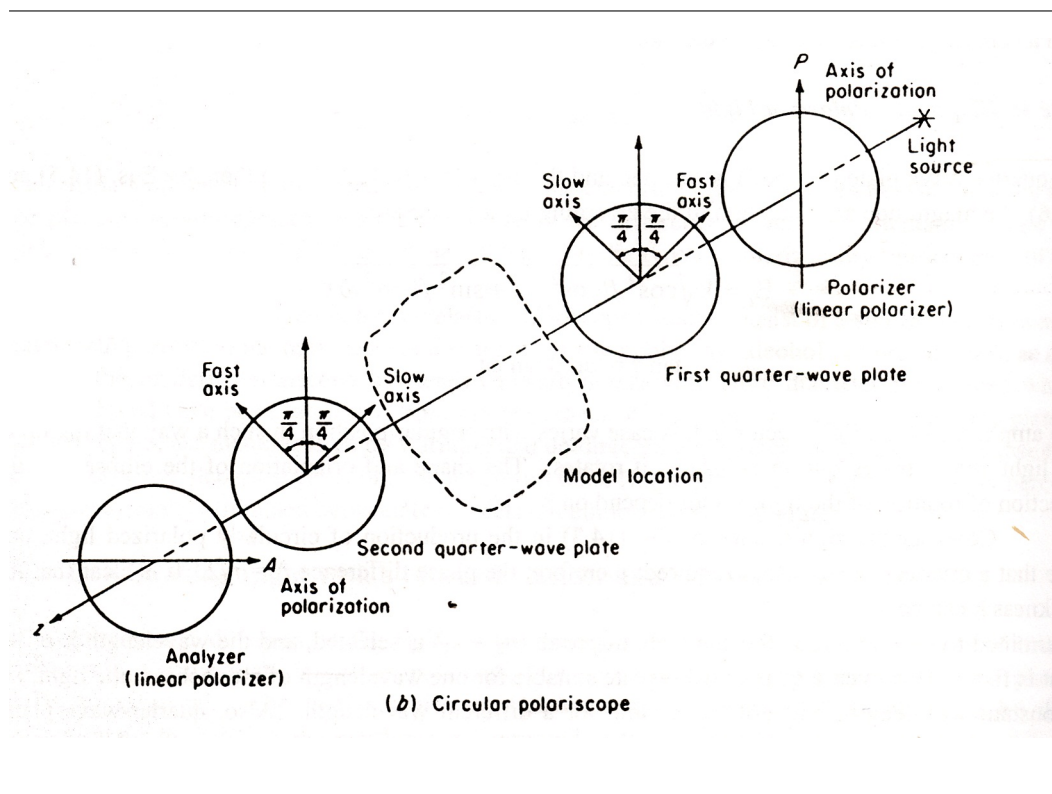


Figura A.5 – Polariscopio circolare

A.4 Modello sottoposto ad un campo di sforzi in un polariscopio circolare

Ci occupiamo unicamente del polariscopio circolare, in quanto nel presente lavoro di tesi non è stato utilizzato un polariscopio piano.

La luce che attraversa il polarizzatore puo' essere rappresentata come:

$$E_{py} = k \cos \omega t \quad (\text{A.16})$$

Attraversando il primo quarto d'onda la luce viene innanzitutto scissa in due componenti:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \omega t \\ E_s &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Queste componenti, come già visto, acquisiscono un ritardo relativo, pertanto le componenti della luce che ha attraversato il quarto d'onda saranno:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \omega t \\ E_s &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

La luce incidente sul modello è scissa in due componenti. Le equazioni che descrivono il comportamento del modello sono del tutto analoghe a quelle del piano d'onda:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + E_s \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ E_2 &= E_s \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + E_f \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \\ E_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Considerando il ritardo acquisito durante l'attraversamento:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \cos \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \\ E_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Nell'attraversamento del secondo quarto d'onda abbiamo ancora una volta la scissione della luce in due componenti ed uno sfasamento:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right] \\ E_s &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\sin \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \cos \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

138 Modello sottoposto ad un campo di sforzi in un polariscopio circolare

La luce entra infine nell'analizzatore. Le proiezioni lungo la verticale di E_f e E_s sono assorbite mentre quelle orizzontali sono trasmesse:

$$E_{ax} = \frac{\sqrt{2}}{2}(E_s - E_f) \quad (\text{A.23})$$

Sostituendo le espressioni ricavate in precedenza:

$$E_{ax} = k \sin \frac{\Delta}{2} \sin \left(\omega t + 2\alpha - \frac{\Delta}{2} \right) \quad (\text{A.24})$$

Ricordando che l'intensità del fascio di luce è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda di luce, otteniamo:

$$I = K \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (\text{A.25})$$

Dall'equazione precedente, e ricordando la stress-optic law, notiamo che l'intensità del fascio di luce che attraversa un polariscopio circolare è funzione solo della differenza degli sforzi principali e non della loro direzione.

Volendo ricavare il valore degli sforzi ove vi è estinzione della luce (righe nere), è sufficiente imporre $I = 0$, ottenendo:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{1 + 2n}{2} \pi \text{ con } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.26})$$

E quindi, l'ordine di frangia sarà semplicemente:

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{1}{2} + n \quad (\text{A.27})$$

Appendice B

Codice Matlab

B.1 Contatto Hertziano

```
[emph=fname]
```

```
%Contatto
```

```
clear all  
close all  
clc
```

```
prompt={'Forza_di_contatto_Fn_[N]:',...  
        'Phi_[rad]:'...  
        'Raggio_R1_i_[mm]:',...  
        'Raggio_R2_i_[mm]:',...  
        'Raggio_R1_j_[mm]:',...  
        'Raggio_R2_j_[mm]:',...  
        'Coefficiente_di_Poisson_del_materiale_del_corpo_1:',...  
        'Coefficiente_di_Poisson_del_materiale_del_corpo_2:',...  
        'Modulo_elastico_del_materiale_del_corpo_1_[MPa]:',...  
        'Modulo_elastico_del_materiale_del_corpo_2_[MPa]:',...  
        };
```

```
name='Acquisizione_parametri';  
numlines=1;  
defaultanswer= {'750','0','400','400.2','300','300.1','0.33','0.33','2300','2300'};
```

```
options.Resize='on';  
options.WindowStyle='normal';  
options.Interpreter='tex';
```

```
answer =inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer,options);
```

```
Fn= str2num(char(answer(1)));  
Phi=str2num(char(answer(2)));  
R1_i=str2num(char(answer(3)));  
R2_i=str2num(char(answer(4)));
```

```

R1_j=str2num(char(answer(5)));
R2_j=str2num(char(answer(6)));
nu_i=str2num(char(answer(7)));
nu_j=str2num(char(answer(8)));
E_i=str2num(char(answer(9)));
E_j=str2num(char(answer(10)));

A_m=-1.086419052477;
B_m=-0.106496432832;
C_m=1.35;
D_m=1.057885958251;
A_n=-0.773444080706;
B_n=0.256695354565;
C_n=0.2;
D_n=-0.280958376499;

K1=(1-(nu_i)^2)/E_i;
K2=(1-(nu_j)^2)/E_j;
K3=1/2*(1/R1_j+1/R2_j+1/R1_i+1/R2_i);
K4=1/2*sqrt((1/R1_i-1/R2_i)+(1/R1_j-1/R2_j)+...
2*((1/R1_i-1/R2_i)*(1/R1_j-1/R2_j))*cos(2*Phi));
Theta=acos(K4/K3);

m=A_m*tan(Theta-pi/2)+B_m/Theta^C_m+D_m;
n=(1/(A_n*tan(Theta-pi/2)+1))+B_n*Theta^C_n+D_n*sin(Theta);

a=m*((3*pi*Fn*(K1+K2))/(4*K3))^(1/3);
b=n*((3*pi*Fn*(K1+K2))/(4*K3))^(1/3);

x=[-abs(a):abs(a)/30:abs(a)];
y=[-abs(b):abs(b)/30:abs(b)];

for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        p(i,j)=3*Fn/(2*pi*a*b)*sqrt(1-(x(i)/a)^2-(y(j)/b)^2);
    end
end

pressione_media=Fn/(pi*a*b);
pressione_massima=1.5*pressione_media;
area_di_contatto=2*a*2*b;

prompt={{
    'Lunghezza_semiasse_di_impronta_longitudinale_a_=', num2str(a), '_mm',...
    '.....',...
    'Lunghezza_semiasse_di_impronta_trasversale_b_=', num2str(b), '_mm',...
    '.....',...

```

```

        'Area_di_contatto_=' , num2str(area_di_contatto), '_mm^2',...
        '.....',...
        'Pressione_media_=' , num2str(pressione_media), '_MPa',...
        '.....',...
        'pressione_massima_=' , num2str(pressione_massima), '_MPa'],...
    };

p(imag(p)>0)=0;
figure;
surf(x,y,p)
xlabel('Asse_longitudinale_[mm]')
ylabel('Asse_trasversale_[mm]')
zlabel('Pressione_[MPa]')
title('Andamento_della_pressione_di_contatto_secondo_Hertz');

save Pression_up.mat p x y

```

B.2 Soluzione del semispazio elastico

```

%Calcolo delle tensioni con Boussinesque, a partire da una distribuzione di
%pressioni Hertziana.
close all
clear all
clc

load Pression_up.mat %Carica i valori della pressione Hz, F=-1000,
%x asse longitudinale, y trasversale
te=-30*pi/180;

%Pressioni nel piano: media su y
N=length(x);
for i=1:N
    p_m(i)=sum(p(i,:))/N;
end
pmax=max(max(p));

figure
plot(x,p_m/pmax)
grid on
xlabel 'x_1'
ylabel 'p_{lin}/p_{max}' %Proiezione della pressione sul semiasse longitudinale

%Pressione lineare
dy=y(3)-y(2);
dx=x(3)-x(2);
dA=dx*dy;

f_l=p_m*dy; %Forza/mm
load xcod.mat
xsigma=xcod;
a=100;

```

```

sigma_tot=0;
tau_tot=0;
N_c=length(xcod);
for iii=1:30
    l_boc=-100.1+10*iii; %Distanza tra il carico e la cricca
    for j=1:N
        forza=-f_l(j);
        xsigma1=0;
        c01=2*forza/pi; %Coefficiente per il calcolo delle forze

        for i=1:N_c
            xsigma2=xsigma(i);
            xsigma12=xsigma2-xsigma1;
            intsigma1=c01*(-(l_boc^2*cos(te)^3)/(2*(xsigma1^2+l_boc^2+...
                2*xsigma1*l_boc*sin(te)))-sin(te)*(0.5*atan(tan(te)+...
                xsigma1/(l_boc*cos(te)))+0.25*sin(2*atan(tan(te)+...
                xsigma1/(l_boc*cos(te))))));
            intsigma2=c01*(-(l_boc^2*cos(te)^3)/(2*(xsigma2^2+l_boc^2+...
                +2*xsigma2*l_boc*sin(te)))-sin(te)*(0.5*atan(tan(te)+...
                xsigma2/(l_boc*cos(te)))+0.25*sin(2*atan(tan(te)+...
                xsigma2/(l_boc*cos(te))))));
            sigtau(i)=(intsigma2-intsigma1)/xsigma12;
            intsigma1=0.5*c01*((l_boc*cos(te)^2*xsigma1)/(xsigma1^2+...
                l_boc^2+2*xsigma1*l_boc*sin(te))-cos(te)*atan(tan(te)+...
                xsigma1/(l_boc*cos(te))));
            intsigma2=0.5*c01*((l_boc*cos(te)^2*xsigma2)/(xsigma2^2+...
                l_boc^2+2*xsigma2*l_boc*sin(te))-cos(te)*atan(tan(te)+...
                xsigma2/(l_boc*cos(te))));
            sigtau(i+N_c)=(intsigma2-intsigma1)/xsigma12;
            xsigma1=xsigma2;
            sigma=sigtau(1:N_c);
            tau=sigtau(N_c+1:end);
        end

        sigma_effetti(:,j)=sigma;
        tau_effetti(:,j)=tau;
    end
    for jj=1:N_c
        sigma_tot(jj,iii)=sum(sigma_effetti(jj,:))*dA;
        tau_tot(jj,iii)=sum(tau_effetti(jj,:))*dA;
    end
end

figure
hold on
grid on
xlabel 'x/a'
ylabel '\sigma_{tot}/p_m'
for i=1:9
plot(xcod/a,sigma_tot(:,i)/dA/max(p_m))

```

```

end
figure
hold on
grid on
xlabel 'x/a'
ylabel '\tau_{tot}/p_m'
for i=1:9
plot(xcod/a,tau_tot(:,i)/dA/max(p_m))
end

figure
hold on
grid on
xlabel 'x/a'
ylabel '\sigma_{tot}/p_m'
for i=11:30
plot(xcod/a,sigma_tot(:,i)/dA/max(p_m))
end

figure
hold on
grid on
xlabel 'x/a'
ylabel '\tau_{tot}/p_m'
for i=11:30
plot(xcod/a,tau_tot(:,i)/dA/max(p_m))
end

sigma_tot(1,10)=0; %singolarità in xcod=0, L=0
tau_tot(1,10)=0;
save boussi30 sigma_tot tau_tot

```

B.3 Soluzione del problema senza fluido interposto

```

%Main_cod_noliquid_boussi

%Main COD

clear all
close all
clc

load Matrice30.mat
load boussi30.mat
te=-30*pi/180;

dA=0.0026;%Da conti precedenti
sigma_tot=sigma_tot/dA;
tau_tot=tau_tot/dA;

global co ri N
co=174*2;
ri=174*2;

```

```

ii=0;
for i=1:co
    for j=1:ri
        ii=ii+1;
        M(j,i)=Matrice(ii);
    end
end

% MESH(x,y,Z)
a=100;
N=ri/2;
load xcod.mat
xsigma=xcod;
% mesh(xcod,xsigma,M(1:N,1:N))
% figure
% plot(xcod)

%L'effetto scala è dovuto alla non linearità con cui è stato preso xcod,
%che viene calcolato con mesh più fitta nei pressi della bocca e della gola
%della cricca, come si può vedere dal plot(xcod). Ovviamente nelle analisi
%successive dovrò utilizzare questa disposizione per fare i conti.

% !Sigma media sull'intervallino, avendo xsigma1 e xsigma2 come coordinate
forza=-750;
c01=2*forza/pi; %Coefficiente per il calcolo delle forze

k=1; %Poi potrà ricalcolare con il carico che si sposta
xsigma1=0; %Serve ad inizializzare il ciclo for seguente

I0=2*7.4030e-004; %Calcolato a "secco" per l_boc->0-
k_p=100;

sigtau1=0; %Serve per avere il giusto controllo su umido
yris_sc=0;

%Calcolo WF

%Lambda validi per teta compreso tra -75 e 75

lambda_Is=[0.352260648 0.561740777 0.002757774 -0.082522228;
20.12858867 -6.75915207 14.69890758 -6.555566564;
-28.35443914 12.21105233 -24.64961078 10.87434602;
10.61781505 -6.721903843 13.14073974 -5.893279322;
-1.794159914 1.272090422 -2.589806357 1.200996132];

lambda_It=[0.04401007 -0.088936286 0.09297728 -0.035669115;

```

```

5.730314603 -11.04002035 12.13325221 -4.883436003;
-4.413898809 10.19534617 -11.84935675 4.856493593;
1.598258465 -3.559021699 4.07900429 -1.676244823;
-0.257065332 0.515781329 -0.548201846 0.214198514];

lambda_IIs=[0.177883032 0.728488774 -0.248806075 0.023045677;
0.808784091 17.6992381 -10.7581263 3.112044367;
0.101895496 -16.00705368 11.92486888 -4.026999105;
-0.023285672 5.675420857 -3.879295621 1.234486015;
0.001237758 -0.851326701 0.497548624 -0.133053283];

lambda_IIt=[0.114487102 -0.22899214 0.242228468 -0.093044459;
8.781169684 -11.51130605 11.0665334 -4.245644102;
-12.02782951 19.63198074 -19.64671793 7.575469487;
4.571171695 -9.876681231 11.38812338 -4.668556109;
-0.723370423 1.708779212 -2.077090179 0.884130668];

%WF

for i=1:4
    alfa_Is(i)=lambda_Is(1,i)*tan(te)^2+sum(lambda_Is(2:end,i)'.*cos([0:3]*te));
    alfa_IIt(i)=lambda_IIt(1,i)*tan(te)^2+sum(lambda_IIt(2:end,i)'.*cos([0:3]*te));

    alfa_IIs(i)=lambda_IIs(1,i)*sin(te)*(tan(te)^2)+sum(lambda_IIs(2:end,i)'.*sin([1:4]*te));
    alfa_IIt(i)=lambda_IIt(1,i)*sin(te)*(tan(te)^2)+sum(lambda_IIt(2:end,i)'.*sin([1:4]*te));
end

alfa_Is = [1 alfa_Is];
alfa_IIt = [1 alfa_IIt];
alfa_IIt = [0 alfa_IIt];
alfa_IIs = [0 alfa_IIs];

A=sqrt(2/(pi*a));
for i=1:length(xcod)
    h_Is(i)=A*(sum(alfa_Is.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
    h_IIt(i)=A*(sum(alfa_IIt.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
    h_IIt(i)=A*(sum(alfa_IIt.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
    h_IIs(i)=A*(sum(alfa_IIs.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
end

for iii=1:28;
    l_boc=-100+10*iii; %Distanza tra il carico e la cricca
    % l_boc=-20+10*iii;
    L(iii)=l_boc;

```

```

% l_boc=-8;
%In sigtau vengono ordinati i sigma sull'intervallino i e i tau
sigma=sigma_tot(:,iii)';
tau=tau_tot(:,iii)';
sigtau=[sigma tau];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Cod Lineare
A=M;

%Posso scriverlo rapidamente in Matlab:
yris=A*sigtau';
s0=2*forza/pi/a;
E=210000;
v0=a*s0/E;

figure(1)
hold on
plot(xcod,yris(1:N))
xlabel 'x_h'
ylabel 'v_{lin}'
grid on

%Verifico chiusura
v=yris(1:N);
chiusi=find(v<0);
if length(chiusi)==0
    lin=1;
else
    lin=0;
end

%Lancio secco se c'è chiusura
if lin==0;
    [x,chiusi,aperti]=secco(A,yris);
    figure(2)
    p_sc(chiusi)=x(chiusi);
    p_sc(aperti)=0;
    hold on
    plot(xcod,p_sc)
    xlabel 'x_h'
    ylabel 'p'
    grid on
    figure(3)
    v_sc(aperti)=x(aperti);
    v_sc(chiusi)=0;
    hold on
    plot(xcod/a,v_sc)
    xlabel 'x_h'
    ylabel 'v_{eff}'
    grid on

%Calcolo gli sforzi effettivi

```



```

sigma(chiusi)=sigma(chiusi)+x(chiusi)';
end

%Integro
Kp=abs(forza)*sqrt(pi/a);
KI=0;
KII=0;
for i=1:length(xcod)-1
    KI=KI+(h_Is(i)*sigma(i)+h_Is(i+1)*sigma(i+1)+...
        h_It(i)*tau(i)+h_It(i+1)*tau(i+1))*(xcod(i+1)-xcod(i))/2;
    KII=KII+(h_IIs(i)*sigma(i)+h_IIs(i+1)*sigma(i+1)+...
        h_IIt(i)*tau(i)+h_IIt(i+1)*tau(i+1))*(xcod(i+1)-xcod(i))/2;
end

KI_p(iii)=KI/Kp;
KII_p(iii)=KII/Kp;

end

```

```

figure(7)
hold on
plot(L/a,KI_p,'*')
grid on
xlabel 'L/a'
ylabel 'K_I/K_p'

figure(8)
hold on
plot(L/a,KII_p,'*')
grid on
xlabel 'L/a'
ylabel 'K_{II}/K_p'

```

```

KI_sc=KI_p;
KII_sc=KII_p;

save Ksc.mat KI_sc KII_sc L a

```

B.3.1 Subroutine

```

%Funzione per il calcolo a secco, utilizzabile quando l'acqua non è in
%pressione
function [x,chiusi,aperti]=secco(A,yris)

global co ri N

```

```

%Primo tentativo, m_p=N
chiusi=1:N;
N_p=N;
A1=0;
for i=1:co
    A1(i,i)=1;
end
for i=1:ri %Scrivo di nuovo la matrice A1 con i nuovi limiti segnati in cotent1a,cotent2a
    for j=1:N_p
        A1(i,chiusi(j))=-A(i,chiusi(j));
    end
end
x=inv(A1)*yris; %Trovo il nuovo vettore delle incognite (p v u)
x1=x(1:N);

%Iterazioni
m=1;
exit=0;
while m<30 && exit==0
    if m==1
        p0=x1;
        chiusi=find(p0>0);
        % aperti=find(p0<=0);
    else
        chiusi_old=chiusi;
        p=x1(chiusi_old);
        i_chiusi=find(p>0);
        i_aperti=find(p<=0);
        chiusi=chiusi_old(i_chiusi);
        % aperti=x(p(i_aperti));
    end
    m=m+1;

    N_p=length(chiusi); %Numero di parti con v>0
    % if length(chiusi)==0
    % cotent1=1;
    % cotent2=N;
    % pmax=1;
    % end

    A1=0;
    for i = 1:co
        A1(i,i)=1;
    end
    for i=1:ri %Scrivo di nuovo la matrice A1 con i nuovi limiti segnati in cotent1a,cotent2a
        for j=1:N_p
            % for j=cotent1(p):cotent2(p)
            A1(i,chiusi(j))=-A(i,chiusi(j));
            % end
        end
    end
    x=inv(A1)*yris; %Trovo il nuovo vettore delle incognite, questa volta conterrà anche i v sugli intervalli senz

```

```

    %Aperti
    chiusi_logic=zeros(1,N);
    chiusi_logic(chiusi)=1;
    ii=1;
    for i=1:N
        if chiusi_logic(i)==0
            aperti(ii)=i;
            ii=ii+1;
        end
    end
    %Analisi per l'uscita
    x1=x(1:N); %Escludo dall'analisi gli u_k che possono avere qualsiasi valore

    if isempty(find(x1<0))
        exit=1;
    end

end

```

B.4 Soluzione del problema con fluido interposto

```

%Main COD

clear all
close all
clc

load Matrice30.mat
load boussi30.mat
te=-30*pi/180;
forza=-750;

dA=0.0026;%Da conti precedenti
sigma_tot=sigma_tot/dA;
tau_tot=tau_tot/dA;

global co ri N
co=174*2;
ri=174*2;
ii=0;
for i=1:co
    for j=1:ri
        ii=ii+1;
        M(j,i)=Matrice(ii);
    end
end

end

% MESH(x,y,Z)
a=100;
N=ri/2;
load xcod.mat
xsigma=xcod;
% mesh(xcod,xsigma,M(1:N,1:N))

```

```

% figure
% plot(xcod)

%L'effetto scala è dovuto alla non linearità con cui è stato preso xcod,
%che viene calcolato con mesh più fitta nei pressi della bocca e della gola
%della cricca, come si può vedere dal plot(xcod). Ovviamente nelle analisi
%successive dovrò utilizzare questa disposizione per fare i conti.

% !Sigma media sull'intervallino, avendo xsigma1 e xsigma2 come coordinate

c01=2*forza/pi; %Coefficiente per il calcolo delle forze

k=1; %Poi potrò ricalcolare con il carico che si sposta
xsigma1=0; %Serve ad inizializzare il ciclo for seguente

% I0=2*7.4030e-004; %Calcolato a "secco" per l_boc->0-
k_p=100;

sigtau1=0; %Serve per avere il giusto controllo su umido
yris_sc=0;

%Calcolo WF

%Lambda validi per teta compreso tra -75 e 75

lambda_Is=[0.352260648 0.561740777 0.002757774 -0.082522228;
20.12858867 -6.75915207 14.69890758 -6.555566564;
-28.35443914 12.21105233 -24.64961078 10.87434602;
10.61781505 -6.721903843 13.14073974 -5.893279322;
-1.794159914 1.272090422 -2.589806357 1.200996132];

lambda_It=[0.04401007 -0.088936286 0.09297728 -0.035669115;
5.730314603 -11.04002035 12.13325221 -4.883436003;
-4.413898809 10.19534617 -11.84935675 4.856493593;
1.598258465 -3.559021699 4.07900429 -1.676244823;
-0.257065332 0.515781329 -0.548201846 0.214198514];

lambda_IIs=[0.177883032 0.728488774 -0.248806075 0.023045677;
0.808784091 17.6992381 -10.7581263 3.112044367;
0.101895496 -16.00705368 11.92486888 -4.026999105;
-0.023285672 5.675420857 -3.879295621 1.234486015;
0.001237758 -0.851326701 0.497548624 -0.133053283];

```

```

lambda_IIt=[0.114487102 -0.22899214 0.242228468 -0.093044459;
8.781169684 -11.51130605 11.0665334 -4.245644102;
-12.02782951 19.63198074 -19.64671793 7.575469487;
4.571171695 -9.876681231 11.38812338 -4.668556109;
-0.723370423 1.708779212 -2.077090179 0.884130668];

%WF

for i=1:4
    alfa_Is(i)=lambda_Is(1,i)*tan(te)^2+sum(lambda_Is(2:end,i).*cos([0:3]*te));
    alfa_IIt(i)=lambda_IIt(1,i)*tan(te)^2+sum(lambda_IIt(2:end,i).*cos([0:3]*te));

    alfa_IIs(i)=lambda_IIs(1,i)*sin(te)*(tan(te)^2)+sum(lambda_IIs(2:end,i).*sin([1:4]*te));
    alfa_IIt(i)=lambda_IIt(1,i)*sin(te)*(tan(te)^2)+sum(lambda_IIt(2:end,i).*sin([1:4]*te));
end

alfa_Is = [1 alfa_Is];
alfa_IIt = [1 alfa_IIt];
alfa_IIt = [0 alfa_IIt];
alfa_IIs = [0 alfa_IIs];

A=sqrt(2/(pi*a));
for i=1:length(xcod)
    h_Is(i)=A*(sum(alfa_Is.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
    h_IIt(i)=A*(sum(alfa_IIt.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
    h_IIt(i)=A*(sum(alfa_IIt.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
    h_IIs(i)=A*(sum(alfa_IIs.*(1-xcod(i)/a).^[0:4]-0.5));
end

I0=0;
for iii=1:28;
    % if iii==12
    % close all
    % end
    l_boc=-100+10*iii; %Distanza tra il carico e la cricca
    % l_boc=-20+10*iii;
    L(iii)=l_boc;
    % l_boc=-8;
    %In sigtau vengono ordinati i sigma sull'intervallino i e i tau
    sigma=sigma_tot(:,iii)';
    tau=tau_tot(:,iii)';
    sigtau=[sigma tau];

    %%%%%%%%%%%
    %Cod Lineare
    A=M;

```

```

%Posso scriverlo rapidamente in Matlab:
yris=A*sigtau';
s0=2*forza/pi/a;
E=210000;
v0=a*s0/E;

figure(1)
hold on
plot(yris)
xlabel 'x_h'
ylabel 'v_{lin}'
grid on

%Verifico chiusura
v=yris(1:N);
chiusi=find(v<0);
if length(chiusi)==0
    lin=1;
else
    lin=0;
end

%Lancio secco se c'è chiusura
if lin==0;
    [x,chiusi,aperti]=secco(A,yris);
    figure(2)
    p_sc(chiusi)=x(chiusi);
    p_sc(aperti)=0;
    hold on
    plot(xcod,p_sc)
    xlabel 'x_h'
    ylabel 'p'
    grid on
    figure(3)
    v_sc(aperti)=x(aperti);
    v_sc(chiusi)=0;
    hold on
    plot(xcod,v_sc)
    xlabel 'x_h'
    ylabel 'v_{eff}'
    grid on

    %Calcolo gli sforzi effettivi
    sigma(chiusi)=sigma(chiusi)+x(chiusi)';
end

%Lancio umido, condizioni da stabilire
%Lancio secco con la pressione dell'acqua al punto precedente, altrimenti potrebbe
%chiudersi la parte a destra della cricca senza considerare che c'è
%ancora acqua dentro, chiaramente valido dopo che l'acqua è entrata in
%pressione
if lin==0 && length(sigtau1)>1;
    % keyboard

```

```

    yris_sc=A*sigtau1';
    [x,chiusi,aperti]=secco(A,yris_sc);
end

diff_aperti=diff(aperti);
if l_boc==-10;%Calcolo all'istante prima del "tappaggio" la quantità d'acqua presente
    for i=1:length(aperti)-1
        delta0=(x(aperti(i+1))+x(aperti(i)))*(xcod(aperti(i+1))-xcod(aperti(i)))/2;
        I0=delta0+I0;
    end
    % I0=4*I0;
end

if l_boc>=0
    if length(diff_aperti)>0
        i_sx=find(diff_aperti>2)+1;
        if length(i_sx)>0
            aperti_dx=aperti(i_sx:end);
            int_v=0;
            for i=1:length(aperti)-1
                delta=(x(aperti(i+1))+x(aperti(i)))*(xcod(aperti(i+1))-xcod(aperti(i)))/2;
                int_v=delta+int_v;
            end
            dI=I0-int_v;
% keyboard
            if length(yris_sc)>1
                [x,chiusi,aperti,sigtau1]=umido(A,sigtau,yris_sc,xcod,I0,k_p);
            elseif dI>0
                [x,chiusi,aperti,sigtau1]=umido(A,sigtau,yris,xcod,I0,k_p);
            end
            if length(yris_sc)>1 || dI>0
                figure(4)
                p_um(chiusi)=x(chiusi);
                p_um(aperti)=0;
                hold on
                plot(xcod,p_um)
                xlabel 'x_h'
                ylabel 'p'
                grid on
                plot(xcod,p_sc,'r')
                figure(5)
                v_um(aperti)=x(aperti);
                v_um(chiusi)=0;
                hold on
                plot(xcod,v_um)
                xlabel 'x_h'
                ylabel 'v_{eff}'
                grid on
                plot(xcod,v_sc,'r')
                figure(6)
                hold on
                p_h20=sigtau1(1:N)-sigtau(1:N);
                plot(xcod,p_h20)
            end
        end
    end
end

```

```

        xlabel 'x_h'
        ylabel 'p_{H20}'
        grid on

        %Calcolo gli sforzi effettivi
        sigma=sigttau1(1:N);
        sigma(chiusi)=sigma(chiusi)+x(chiusi)';
        sigma=sigma+p_h20;
    end
end
end
end

%Integro
Kp=abs(forza)*sqrt(pi/a);
KI=0;
KII=0;
for i=1:length(xcod)-1
    KI=KI+(h_Is(i)*sigma(i)+h_Is(i+1)*sigma(i+1)+h_It(i)*tau(i)+...
        h_It(i+1)*tau(i+1))*(xcod(i+1)-xcod(i))/2;
    KII=KII+(h_IIs(i)*sigma(i)+h_IIs(i+1)*sigma(i+1)+...
        h_IIt(i)*tau(i)+h_IIt(i+1)*tau(i+1))*(xcod(i+1)-xcod(i))/2;
end

KI_p(iii)=KI/Kp;
KII_p(iii)=KII/Kp;

end

figure(7)
hold on
plot(L/a,KI_p,'*')
grid on
xlabel 'L/a'
ylabel 'K_I/K_p'

figure(8)
hold on
plot(L/a,KII_p,'*')
grid on
xlabel 'L/a'
ylabel 'K_{II}/K_p'

KI_um=KI_p;
KII_um=KII_p;
save Kum.mat KI_um KII_um L a

```


B.4.1 Subroutine

```

%Umido

function [x, chiusi, aperti, sigtau1]=umido(A, sigtau, yris, xcod, I0, k_p)

global co ri N

%Primo tentativo, m_p=N
chiusi=1:N;
N_p=N;
A1=0;
for i=1:co
    A1(i,i)=1;
end
for i=1:ri %Scrivo di nuovo la matrice A1 con i nuovi limiti segnati in cotent1a, cotent2a
    for j=1:N_p
        A1(i, chiusi(j))=-A(i, chiusi(j));
    end
end
x=inv(A1)*yris; %Trovo il nuovo vettore delle incognite (p v u)
x1=x(1:N);

%Iterazioni
m=1;
sigtau1=sigtau;
dI=0;
exit=0;
while m<30 && exit==0
    if m==1
        p0=x1;
        chiusi=find(p0>0);
    % aperti=find(p0<=0);
    else
        chiusi_old=chiusi;
        p=x1(chiusi_old);
        i_chiusi=find(p>0);
        i_aperti=find(p<=0);
        chiusi=chiusi_old(i_chiusi);
    % aperti=x(p(i_aperti));
    end
    m=m+1;

    N_p=length(chiusi); %Numero di parti con v>0
    % if length(chiusi)==0
    % cotent1=1;
    % cotent2=N;
    % pmax=1;
    % end

    A1=0;
    for i = 1:co

```

```

    A1(i,i)=1;
end
for i=1:ri %Scrivo di nuovo la matrice A1 con i nuovi limiti segnati in cotent1a,cotent2a
    for j=1:N_p
        % for j=cotent1(p):cotent2(p)
        A1(i,chiusi(j))=-A(i,chiusi(j));
        % end
    end
end
x=inv(A1)*A*sigtau1'; %Trovo il nuovo vettore delle incognite, questa volta conterrà anche i v sugli interva
%Aperti
chiusi_logic=zeros(1,N);
chiusi_logic(chiusi)=1;
ii=1;
for i=1:N
    if chiusi_logic(i)==0
        aperti(ii)=i;
        ii=ii+1;
    end
end
%Integrale di v per calcolare volume di acqua
int_v=0;
for i=1:length(aperti)-1
    delta=(x(aperti(i+1))+x(aperti(i)))*(xcod(aperti(i+1))-xcod(aperti(i)))/2;
    int_v=delta+int_v;
end

%Pressioni acquatiche
diff_aperti=diff(aperti);
if length(diff_aperti)>0
    i_sx=find(diff_aperti>2)+1;
    aperti_dx=aperti(i_sx:end);
    dI=I0-int_v;
    sigtau1(aperti_dx)=sigtau1(aperti_dx)+k_p*dI; %dI_old serve per cercare una convergenza
    sigtau1(chiusi)=sigtau(chiusi);
else
    % dI_old=dI;
    dI=I0-int_v;
    % sigtau1(aperti)=sigtau1(aperti)+k_p*(dI+dI_old); %dI_old serve per cercare una convergenza
    sigtau1(aperti)=sigtau1(aperti)+k_p*dI;
    sigtau1(chiusi)=sigtau(chiusi);
end

%Analisi per l'uscita
x1=x(1:N); %Escludo dall'analisi gli u_k che possono avere qualsiasi valore
if isempty(find(x1<0)) && abs(dI)<10^-5
    exit=1;
end
end
end

```