

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale
Dipartimento di Energia

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica



SIMULAZIONE MULTI-DIMENSIONALE DELL'ACUSTICA DI SILENZIATORI PER MOTORI A C.I. MEDIANTE UN CODICE OPEN-SOURCE

Relatore: Prof. Federico PISCAGLIA

Correlatori: Ing. Andrea MONTORFANO

Tesi di Laurea di:

Mario GATTERE Matr. 720602

Anno Accademico 2009-2010

A mio papà

Scienza e potere umano coincidono esattamente.
Francis Bacon

Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare il Prof. Piscaglia e l'Ing. Montorfano per il loro aiuto ed i loro consigli nello svolgimento di questa tesi.

Un ringraziamento particolare a mia madre che mi ha permesso di affrontare questo percorso di studio con serenità.

Un doveroso grazie a tutte le persone che ho conosciuto in questi anni universitari che, per non dimenticare nessuno, evito di citare.

Ed infine gli amici di sempre che, nel bene e nel male, sono sempre presenti.

Indice

Introduzione	1
1 Equazioni fondamentali e metodi risolutivi	3
1.1 Equazioni di conservazione	4
1.1.1 Equazione di conservazione della massa	5
1.1.2 Equazione di conservazione della quantità di moto	6
1.1.3 Equazione di conservazione dell'energia	7
1.2 Metodo dei volumi finiti	8
1.2.1 Approssimazione degli integrali di superficie e di volume	9
1.2.2 Metodi per la discretizzazione temporale	10
1.2.3 Introduzione ai metodi di discretizzazione delle equazioni	11
1.2.4 Introduzione ai metodi di interpolazione	14
1.2.5 Metodi numerici per sistemi lineari	14
1.3 Introduzione solutori utilizzati	18
1.3.1 rhoCentralFoam: schema Kurganov - Tadmor	19
1.3.2 sonicFoam: metodo risolutivo PISO	23
2 Controllo del rumore	27
2.1 Funzione di trasferimento	27
2.2 Trasformata di Fourier: proprietà e caratteristiche	28
2.2.1 Trasformata continua di Fourier	28
2.2.2 Trasformata discreta di Fourier	30
2.2.3 Errori di misura	31
2.3 Segnale in ingresso: tipologie di eccitazione	33
2.3.1 Sinusoide	33
2.3.2 Rumore bianco	34
2.3.3 Impulso	34
2.4 Segnale in uscita: monopolo pulsante	35
2.5 Effetti di discontinuità	36

3	Struttura dei casi di OpenFOAM®	39
3.1	Cartella <code>constant</code>	41
3.1.1	Modelli termodinamici e termofisici	41
3.1.2	<code>polyMesh</code>	42
3.2	Cartella <code>system</code>	46
3.2.1	<code>controlDict</code>	46
3.2.2	<code>fvSchemes</code>	47
3.2.3	<code>fvSolution</code>	48
3.3	Cartella <code>time</code>	50
4	Geometrie analizzate	53
4.1	Descrizione delle geometrie dei silenziatori	53
4.2	Descrizione delle prove sperimentali	54
4.3	Discretizzazione del dominio spaziale	56
4.3.1	<i>Mesh</i> 2D	58
4.3.2	<i>Mesh wedge</i>	60
4.3.3	<i>Mesh</i> 3D	62
5	Risultati e discussione	65
5.1	Parametri generali delle simulazioni	66
5.1.1	Condizioni al contorno	66
5.1.2	Posizionamento delle sonde di lettura dei dati	67
5.1.3	Durata delle simulazioni	68
5.1.4	Passo temporale utilizzato e numero di Courant	69
5.2	Analisi del solutore <code>rhoCentralFoam</code>	70
5.3	Analisi del solutore <code>sonicFoam</code>	79
5.3.1	Geometrie a camera di espansione	79
5.3.2	Geometrie con risonatore a colonna e risonatori di Helmholtz	90
	Conclusioni	99
	Bibliografia	101

Elenco delle figure

1.1	Volumi finiti in 3D.	9
1.2	Grandezze geometriche relative ai volumi finiti.	12
1.3	Confronto Lax-Friedrichs e Nessyahu-Tadmor.	19
1.4	Schema di Kurganov-Tadmor.	20
2.1	Rappresentazione di un sistema dinamico nel dominio del tempo.	28
2.2	Fenomeno dell' <i>aliasing</i> : campionamento errato in blu, segnale corretto in rosso.	32
2.3	Andamento di alcune finestre nel dominio temporale.	33
2.4	Andamento temporale rumore bianco.	35
2.5	Andamento nel dominio delle frequenze rumore bianco.	36
2.6	Andamento temporale impulso.	37
2.7	Andamento nel dominio delle frequenze impulso.	38
2.8	Lunghezza correttiva terminale.	38
3.1	Struttura di OpenFOAM®.	39
3.2	Esempio della struttura della cartella di lavoro.	40
3.3	Esempio blocco.	43
3.4	Attributi gerarchia <i>patch</i>	45
4.1	Geometrie A con diametro della camera di espansione pari a 130 mm, sinistra, e B di 178 mm, destra.	54
4.2	Geometria C con risonatore a colonna.	55
4.3	Geometrie D con risonatore di Helmholtz, altezza camera di 90 mm.	55
4.4	Geometrie E con risonatore di Helmholtz, altezza camera di 60 mm.	55
4.5	Schema dell'apparato sperimentale.	56
4.6	Esempio <i>aspect ratio</i>	57
4.7	Esempio <i>skewness</i> : a sinistra cella con valore nullo, a destra cella con valore non nullo.	57
4.8	Possibili celle esaedriche.	58
4.9	Esempio blocchi griglia.	58
4.10	Dettaglio celle allungate con griglia di 4 mm.	59

4.11	Esempio <i>wedge</i>	61
4.12	Esempio collasso cella per <i>wedge</i>	61
4.13	Esempio discretizzazione cerchio.	63
4.14	<i>Mesh</i> 3D risonatore colonna.	63
4.15	Dettaglio congiunzione a T e cella con massimo <i>skewness</i>	64
5.1	Posizionamento sonde: a sinistra sonda di pressione, a destra sonda di velocità.	67
5.2	Andamento pressione con 10 cicli.	68
5.3	Funzione di trasferimento caso B_RCF-01.	71
5.4	Funzione di trasferimento caso B_RCF-02.	71
5.5	Funzione di trasferimento caso B_RCF-03.	72
5.6	Funzione di trasferimento caso B_RCF-04.	72
5.7	Funzione di trasferimento caso B_RCF-05.	73
5.8	Funzione di trasferimento caso B_RCF-06.	74
5.9	Funzione di trasferimento caso B_RCF-07.	74
5.10	Funzione di trasferimento caso B_RCF-08.	75
5.12	Funzione di trasferimento caso B_RCF-10.	75
5.11	Funzione di trasferimento caso B_RCF-09.	76
5.13	Funzione di trasferimento caso B_RCF-11.	77
5.14	Funzione di trasferimento caso B_RCF-12.	77
5.15	Funzione di trasferimento caso B_RCF-13.	78
5.16	Funzione di trasferimento caso A_SF-01.	80
5.17	Funzione di trasferimento caso B_SF-01.	80
5.18	Funzione di trasferimento caso A_SF-02.	81
5.19	Funzione di trasferimento caso A_SF-03.	82
5.20	Funzione di trasferimento caso A_SF-04.	82
5.21	Funzione di trasferimento caso B_SF-02.	83
5.22	Funzione di trasferimento caso B_SF-03.	83
5.23	Funzione di trasferimento caso B_SF-04.	84
5.24	Andamento onda a 344 mm, geometria A, <i>time step</i> 10.	84
5.25	Andamento onda a 344 mm, geometria B, <i>time step</i> 10.	85
5.26	Andamento onda a 344 mm, geometria A, <i>time step</i> 12.	85
5.27	Andamento onda a 344 mm, geometria B, <i>time step</i> 12.	85
5.28	Funzione di trasferimento caso A_SF-05.	86
5.29	Funzione di trasferimento caso A_SF-06.	86
5.30	Funzione di trasferimento caso A_SF-07.	87
5.31	Funzione di trasferimento caso B_SF-05.	87
5.32	Funzione di trasferimento caso B_SF-06.	88
5.33	Funzione di trasferimento caso B_SF-07.	88
5.34	Funzione di trasferimento caso A_SF-08.	89

5.35	Funzione di trasferimento caso B_SF-08.	90
5.36	Funzione di trasferimento caso C_SF-01.	91
5.37	Funzione di trasferimento caso C_SF-02.	91
5.38	Funzione di trasferimento caso C_SF-03.	92
5.39	Funzione di trasferimento caso D_SF-01.	93
5.40	Funzione di trasferimento caso D_SF-02.	93
5.41	Funzione di trasferimento caso D_SF-03.	94
5.42	Funzione di trasferimento caso E_SF-01.	94
5.43	Funzione di trasferimento caso E_SF-02.	95
5.44	Funzione di trasferimento caso E_SF-03.	95
5.45	Funzione di trasferimento caso C_SF-04.	96
5.46	Funzione di trasferimento caso D_SF-04.	97
5.47	Funzione di trasferimento caso E_SF-04.	97

Elenco delle tabelle

4.1	Dimensioni geometrie “A” e “B”	53
4.2	Dimensioni geometrie “A” e “B”	54
4.3	Numero di celle per ogni geometria e dimensione di griglia 2D.	59
4.4	Tabella controllo <i>Aspect Ratio</i>	60
4.5	Tabella controllo <i>skewness</i>	60
4.6	Numero di celle per ogni geometria e dimensione di griglia wedge	60
4.7	Tabella controllo <i>Aspect Ratio</i> griglia wedge	61
4.8	Tabella controllo <i>skewness</i> griglia wedge	61
5.1	Riepilogo principali condizioni al contorno	67
5.2	Riepilogo tempi cicli	69
5.3	Valori di passo temporale usati.	69
5.4	Riepilogo schemi di differenziazione ed interpolazione del so- lutore rhoCentralFoam	70
5.5	Riepilogo metodi risolutivi e parametri di controllo solutore rhoCentralFoam	70
5.6	Riepilogo casi geometria B al variare dell’ampiezza di pressione	70
5.7	Riepilogo casi geometria B al variare del passo in frequenza. .	73
5.8	Riepilogo casi geometria B al variare della griglia di calcolo. .	75
5.9	Riepilogo casi geometria B con impulso.	76
5.10	Riepilogo casi geometria B con impulso.	78
5.11	Riepilogo schemi di differenziazione ed interpolazione del so- lutore sonicFoam	79
5.12	Riepilogo metodi risolutivi e parametri di controllo solutore sonicFoam	79
5.13	Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B.	80
5.14	Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B con differenti griglie di calcolo e tolleranza.	81
5.15	Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B con griglia di calcolo 2D.	85

5.16 Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B con griglia di calcolo 3D.	89
5.17 Riepilogo geometria a colonna C con griglia 2D.	91
5.18 Riepilogo geometria con risonatore di Helmholtz D ed E con griglia 2D.	92
5.19 Riepilogo geometria tridimensionale.	96

Sommario

Vengono presentati i risultati ottenuti dall'analisi numerica effettuata su silenziatori per motori a combustione interna.

In particolare l'analisi ha riguardato il calcolo della funzione di trasferimento. Sono state sviluppate le condizioni di eccitazione per il campo di pressione ed ottimizzati i parametri per il calcolo della funzione di trasferimento in condotti di scarico con modellizzazione tri-dimensionale. Il lavoro svolto è stato effettuato confrontato due possibili metodi di discretizzazione numerica, uno basato sulle differenze finite centrate ed uno basato sul metodo classico PISO.

I risultati così ottenuti sono stati confrontati con i dati sperimentali a disposizione, evidenziando un buon accordo nel caso di solutore PISO ed irregolarità non eliminabili nel caso di solutore alle differenze finite centrate.

Parole chiave: funzione di trasferimento, silenziatori, differenze finite centrate, PISO, CFD, OpenFOAM®, motori a combustione interna.

Abstract

In this work we present the results of numerical simulations carried out on mufflers for internal combustion engines.

The numerical analysis is oriented to calculate the acoustic transfer function by means of an opensource finite volume code. We developed a new boundary condition for the pressure field and optimized all parameters for the transfer function calculation within a 3D modellization. We compared two possible methods of resolution, one based on centered finite difference scheme and another based on PISO classic algorithm.

The results were compared with experimental data. With PISO method the agreement is satisfactory, whereas with the centered finite difference scheme we found out discrepancies that could not be eliminated.

Key words: transfer function, mufflers, centered finite differences, PISO, CFD, OpenFOAM[®], internal combustion engine.

Introduzione

Lo sviluppo dei motori a combustione interna ha subito una grande evoluzione negli anni e la stessa cosa è avvenuta per le norme che ne regolano le emissioni, siano esse leggi sull'inquinamento dovuto ai gas combustibili che leggi riguardanti l'inquinamento acustico. Seguendo lo scenario che si è sviluppato, le norme anti-inquinamento hanno portato alla ricerca ed allo sviluppo di nuove metodologie. Queste forniscono strumenti per lo studio di tali fenomeni in fase di progettazione.

Il codice di calcolo usato per ottenere questo risultato è OpenFOAM[®], un *software* con licenza *GNU General Public License*, di cui nel Gruppo di Motori del Politecnico di Milano vengono sviluppate applicazioni e librerie per il settore *automotive*.

L'inquinamento acustico è suddivisibile in tre categorie [2]: il rumore di combustione, legato al processo di combustione per il rapido incremento di pressione nel cilindro; il rumore meccanico, dovuto agli urti che si originano nei principali accoppiamenti cinematici del motore; il rumore gasdinamico, generato dal processo ciclico di sostituzione del fluido di lavoro nel cilindro motore.

In questo lavoro si è considerato il rumore gasdinamico, ricercando una metodologia per la simulazione numerica tridimensionale di silenziatori. Allo stato attuale questi strumenti vengono simulati tramite codici di calcolo monodimensionali. Con il termine silenziatori si racchiude un insieme di sistemi meccanici il cui scopo è l'abbattimento del rumore. Si possono suddividere in diverse categorie, in base ai fenomeni fisici alla base del loro funzionamento: possono essere dissipativi, reattivi e ad interferenza. Questa suddivisione in categorie è solo teorica, perché nella realtà non è possibile scindere i singoli effetti. Si preferisce pertanto sfruttare una classificazione in base alle geometrie usate: a camera di espansione in serie, con capacità in parallelo o risonatore di Helmholtz, risonatore a colonna, ad elementi perforati e silenziatore dissipativo.

Nel lavoro di tesi qui presentato si pone l'obiettivo di trovare i parametri ottimali per l'analisi numerica e quindi il calcolo della funzione di trasferimento acustica nel caso di condotti tridimensionali. Con condizioni ottimali

si intendono i parametri al contorno, i quali permettono di restituire dati che approssimano in maniera accurata i valori sperimentali. Oltre alla corretta definizione dei parametri al contorno, si è operato con due diversi solutori.

In primo luogo ci si è concentrati sullo studio della condizione al contorno in ingresso. Questa è risultata di particolare interesse poiché al variare della tipologia di eccitazione usata i risultati ottenuti variano di conseguenza.

Il confronto tra i due solutori usati è stato effettuato per verificare la bontà della condizione al contorno con diversi metodi numerici.

Il presente lavoro di tesi è così organizzato:

- nel primo capitolo si descrivono brevemente le equazioni di conservazione, i metodi di approssimazione delle derivate parziali ed i metodi numerici alla base dei solutori;
- nel secondo capitolo sono introdotte gli strumenti analitici usati in elaborazione dei dati;
- nel terzo capitolo viene presentato il *software* utilizzato e le modalità con cui si appresta un'analisi;
- nel quarto capitolo si tratta la discretizzazione del dominio di calcolo e la generazione della griglia stessa, con i parametri di merito presi in considerazione;
- nel quinto capitolo si presentano i risultati ottenuti confrontandoli fra loro al variare dei parametri scelti.

Capitolo 1

Equazioni fondamentali e metodi risolutivi

Un fluido è un corpo materiale che può subire illimitatamente deformazioni sotto l'azione di una forza esterna. La forza esterna che ne causa la variazione di forma dà origine ad un moto nel fluido stesso. Tale forza può essere, per esempio, differenza di pressione, gravità, tensione superficiale. Si distinguono due categorie: forze di volume e forze di superficie.

Con il termine fluido vengono indicati i liquidi ed i gas; questi si differenziano per il fatto che i primi formano una superficie libera non identificabile con il contenitore in cui si trovano mentre nei secondi ciò non accade. Nel lavoro seguente sarà considerato un fluido gassoso.

Sebbene i fluidi presentino un comportamento simile tra loro quando sottoposti all'azione di una forza, presentano delle proprietà macroscopiche differenti e tali proprietà sono importanti per studiare il moto del fluido: ovvero la densità ρ e la viscosità μ . Altre proprietà, quali il numero di Prandtl Pr , il calore specifico sia a pressione costante c_p che a volume costante c_v , la tensione superficiale γ , sono di interesse in determinate condizioni di lavoro. La pressione e la temperatura influenzano il comportamento del fluido agendo sulle proprietà termodinamiche. Anche la velocità U ha un ruolo fondamentale:

- bassissime velocità: le forze viscosive sono predominanti rispetto all'inerzia. Il numero di Reynolds, $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$, dove d è la lunghezza caratteristica, è molto piccolo, prossimo a zero. In questo caso si parla di flusso di Stokes;
- al crescere della velocità si distinguono due regioni, in cui le inerzie non sono trascurabili:
 - con un primo aumento di velocità, le particelle seguono traiettorie basate su filetti fluidi paralleli fra loro;

- un successivo aumento della velocità porta ad avere un predominio delle forze di inerzia rispetto alle forze viscosi, con possibile instabilità, che dà origine ad un moto in parte casuale delle particelle, chiamato moto turbolento.

Un altro parametro significativo è il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nel fluido stesso, chiamato numero di Mach (Ma). A bassi numeri di Mach, per valori inferiori a $Ma < 0.3$, il fluido viene considerato incomprimibile. La variazione di densità risulta non significativa, commettendo pertanto un errore trascurabile. Diversamente il fluido viene considerato comprimibile. Per valori di Mach compresi tra 0.3 ed 1 il flusso è in regime subsonico: in presenza di un restringimento la velocità aumenta e la densità diminuisce. Per valori di $Ma > 1$ il flusso è in regime supersonico: in presenza di un restringimento si ha un comportamento opposto al caso subsonico, aumenta la densità e diminuisce la velocità.

1.1 Equazioni di conservazione

I principi di conservazione [3] di interesse per questo lavoro di tesi sono:

- conservazione della massa;
- conservazione della quantità di moto;
- conservazione dell'energia.

Prima di procedere alla descrizione delle singole equazioni si pone l'attenzione su due possibili approcci al problema: l'approccio lagrangiano e l'approccio euleriano. Secondo l'approccio lagrangiano il moto del fluido è descritto seguendo l'andamento della singola particella fluida, descrivendone le caratteristiche in funzione dello spostamento e del tempo. Nell'approccio euleriano il moto del fluido è invece illustrato descrivendo l'andamento delle variabili caratteristiche in punti fissi nello spazio al variare del tempo. Non è corretto affermare che uno dei due riferimenti sia migliore in senso assoluto poiché ciascuno risulta più efficace in un determinato contesto.

La velocità v è numericamente uguale nelle due descrizioni, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, ma cambia il modo con cui è descritta la variazione della stessa. Usando il sistema di coordinate lagrangiane, l'accelerazione di una data particella è

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}(x(t), y(t), z(t))}{dt} \quad (1.1)$$

Nel riferimento euleriano la sola derivata parziale della velocità rispetto al tempo $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ non è sufficiente perché indica solo la variazione del vettore velocità

rispetto ad un determinato punto dello spazio. Compiono altri termini, come riportato

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (1.2)$$

che rappresentano i termini di trasporto.

Per ricavare le equazioni di conservazione sarà usata una formulazione di base comune: definita con ϕ una generica grandezza intensiva, la corrispondente proprietà estensiva può essere così scritta

$$\Phi = \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega \quad (1.3)$$

dove Ω è il volume di controllo.

Sfruttando questa definizione è possibile sviluppare l'equazione di conservazione della grandezza estensiva riferita al volume di controllo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial\Omega_{CV}} \rho \phi (\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (1.4)$$

dove

- Ω_{CV} è il volume di controllo;
- $\partial\Omega_{CV}$ è la superficie che racchiude tale volume;
- \mathbf{n} è il vettore normale a $\partial\Omega_{CV}$ e diretto verso l'esterno;
- \mathbf{v} è la velocità del fluido e \mathbf{v}_b è la velocità con cui si muove la superficie $\partial\Omega_{CV}$ che generalmente è nulla;
- Q termini sorgenti e flussi diffusivi.

1.1.1 Equazione di conservazione della massa

La forma integrale dell'equazione di conservazione della massa o equazione di continuità deriva direttamente dalla Eq. (1.4) ponendo la quantità ϕ ad 1

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.5)$$

Sfruttando il teorema di Gauss ed ipotizzando un volume di controllo infinitesimo, l'Eq. (1.5) diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

dove

- $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ rappresenta la variazione di massa contenuta nel volume di controllo
- $\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$ rappresenta il flusso netto di massa attraverso il contorno permeabile.

1.1.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

L'equazione di conservazione della quantità di moto può essere derivata, per i volumi finiti, da $\frac{d(mv)}{dt} = \sum f$, ed ottenendo, usando le Eq. (1.3) e (1.4) con ϕ posto uguale a \mathbf{v}

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum f. \quad (1.7)$$

Per esprimere le forze agenti sul volume finito vengono considerate

- forze di superficie, come la pressione, gli sforzi e le tensioni superficiali
- forze di volume, come la forza di gravità.

Affinché il sistema sia chiuso, le forze di superficie devono essere esprimibili attraverso i termini che governano l'equazione, ovvero il legame sforzi - velocità di deformazione; viene introdotta una ipotesi: il fluido è un fluido newtoniano.

Con l'assunzione di fluido newtoniano è possibile scrivere il tensore degli sforzi

$$\mathbf{T} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (1.8)$$

dove p è la pressione statica, μ è la viscosità dinamica, \mathbf{I} è la matrice identità e \mathbf{D} è la velocità di deformazione:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (1.9)$$

Queste due equazioni, sviluppate per il piano cartesiano, risultano

$$\tau_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (1.10)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (1.11)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker.

L'equazione di conservazione della quantità di moto diviene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega \quad (1.12)$$

si sono indicate con \mathbf{b} le forze di volume per unità di massa.

La corrispondente scrittura in coordinate cartesiane è

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{t}_i + \rho b_i. \quad (1.13)$$

Sostituendo nell'Eq. (1.13) la parte relativa agli sforzi viscosi dell'Eq. (1.10) e considerando solo la forza gravitazionale come forza di volume si ottiene

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (1.14)$$

dove

- $\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}$: rappresenta il termine di accumulo
- $\frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j}$: flusso di quantità di moto attraverso le pareti di contorno
- $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$: contributo dovuto agli sforzi tangenziali interni al fluido
- $\frac{\partial p}{\partial x_j}$: contributo dovuto al gradiente di pressione
- ρg_i : contributo gravitazionale; l'accelerazione gravitazionale g_i contiene il pedice "i" poiché il sistema di riferimento può non essere allineato alla verticale.

1.1.3 Equazione di conservazione dell'energia

La derivazione dell'equazione di conservazione dell'energia anche in questo caso può essere realizzata partendo dalle Eq. (1.3) e (1.4), sostituendo ϕ con h

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho h d\Omega + \int_S \rho h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum f_{\Phi}. \quad (1.15)$$

dove nel termine f_{Φ} vengono racchiuse le componenti di trasporto, di diffusione e di generazione.

Sfruttando la legge di Fourier è possibile scrivere l'equazione di conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho h d\Omega + \int_S \rho h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla p + S : \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} p d\Omega \quad (1.16)$$

dove h è l'entalpia, T la temperatura, κ la conducibilità termica definita come $\frac{\mu c_p}{Pr}$ (con μ viscosità dinamica, c_p calore specifico a pressione costante e Pr numero di Prandtl), S la componente viscosa del tensore degli sforzi, $S = T + pI$.

Quindi i termini presenti sono

- $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho h d\Omega$ variazione di entalpia nel tempo sul volume
- $\int_S \rho h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ variazione di entalpia sulla superficie dovuta ai flussi entranti ed uscenti dal volume di controllo
- $\int_S \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} dS$ scambio termico conduttivo
- $\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla p + S : \nabla \mathbf{v}) d\Omega$ e $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} p d\Omega$ lavoro compiuto nel volume di controllo dalla pressione e dagli sforzi viscosi.

1.2 Metodo dei volumi finiti

Le equazioni precedentemente esposte descrivono i fenomeni fluidodinamici e normalmente sono risolte con tecniche numeriche a causa delle loro non linearità, che rende impossibile la risoluzione analitica nel caso generale. Uno dei possibili metodi risolutivi è il metodo dei volumi finiti [3] e [4], che si basa sulla soluzione delle equazioni in forma integrale.

Il dominio di calcolo, una geometria semplice o complessa, viene suddiviso in un numero finito di sottodomini che prendono il nome di griglia. Tramite la forma integrale con cui sono scritte le equazioni, vengono ricavate le relazioni che intercorrono tra i vari volumetti confinanti, così da poter essere risolte per via numerica. Ad ogni volumetto finito viene assegnato un nodo di calcolo, posto al suo interno in posizione centrale, che rappresenta il valore medio della cella. Le grandezze così calcolate variano ad ogni passo temporale per via dei flussi attraverso i bordi delle celle. Il problema è determinare delle funzioni matematiche per il flusso numerico che approssimino, con una buona accuratezza, il flusso reale, basato sul valore medio del nodo, unico dato disponibile.

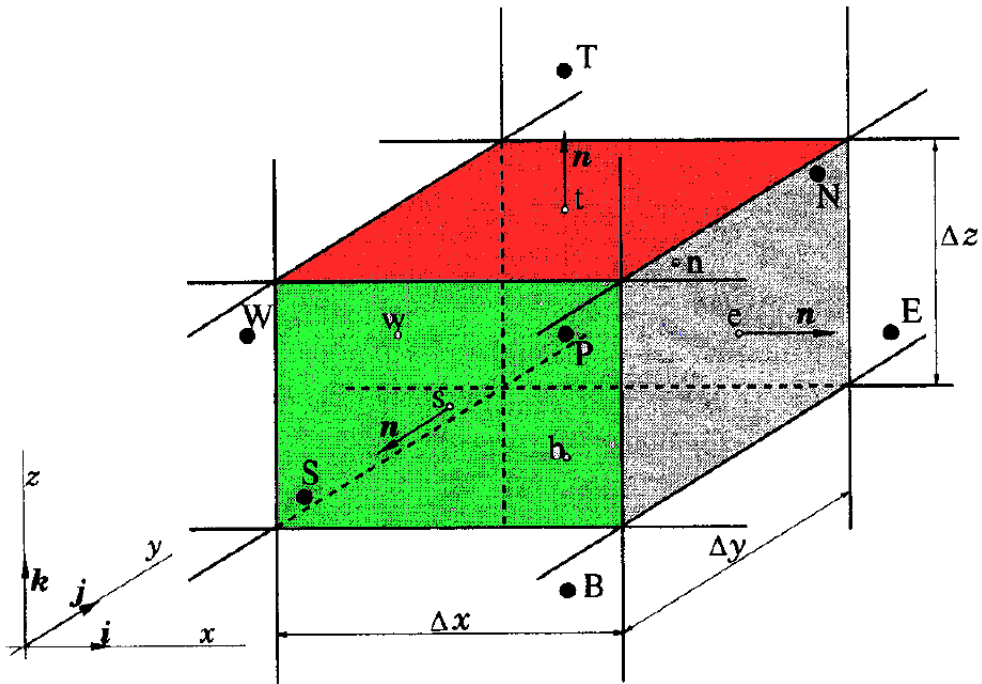


Figura 1.1: Volumi finiti in 3D.

1.2.1 Approssimazione degli integrali di superficie e di volume

Il flusso che attraversa le facce di un volume finito è dato dalla relazione

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS \quad (1.17)$$

Il termine a destra dell'uguale rappresenta la somma dei singoli flussi sulle singole facce che compongono la cella. f è un generico termine usato per semplificare la trattazione che rappresenta il termine convettivo o diffusivo del vettore del flusso, normale alla faccia; l'indice k rappresenta la faccia considerata.

Si considera il caso di cella cubica, avente 6 facce identificate con le lettere "e", "w", "n", "s", "t" e "b", riportata in fig. 1.1.

Il calcolo dell'integrale esatto della grandezza f sulla superficie S_e , fig. 1.1, non è possibile in quanto vengono calcolati solo i valori al centro cella: si introduce così un'approssimazione.

Il modo più semplice per approssimare l'integrale è la legge del punto medio: il valore dell'integrale è approssimato dal prodotto tra il valore inte-

grado del centro della faccia ed il valore dell'area corrispondente, con ordine di accuratezza pari a 2

$$F_e = \int_{S_e} f dS \simeq f_e S_e \quad (1.18)$$

Dal momento che il valore di f non è disponibile al centro della faccia “e”, deve essere ottenuto tramite interpolazione dal valore del nodo posto al centro e, per mantenere il secondo ordine di accuratezza, bisogna utilizzare un'interpolazione almeno del secondo ordine. Altri metodi di approssimazione sono possibili ma risultano di difficile implementazione.

Alcuni termini che compaiono nell'equazione richiedono l'integrazione sul volume. Il metodo più semplice e che garantisce un'accuratezza del secondo ordine consiste nel sostituire l'integrale di volume con il prodotto tra il valore medio dell'integrando ed il volume stesso

$$f_P = \int_{\Omega} f d\Omega \simeq f_P \Delta\Omega \quad (1.19)$$

dove f_P è il valore di f nel centro del volume finito: già disponibile nel nodo P senza interpolare.

Un'approssimazione di ordine maggiore richiede più valori di f e non solo quello al centro. Per ottenere questi valori si utilizzano o l'interpolazione o le funzioni di forma.

1.2.2 Metodi per la discretizzazione temporale

La discretizzazione temporale avviene tramite schemi alle differenze finite. Un fattore di scelta si basa sulla tipologia di problema: stazionario od instazionario. La modellazione numerica qui affrontata è di tipo instazionario, si occupa di come le derivate spaziali cambiano durante un transitorio temporale.

Il metodo di Eulero implicito

Il metodo di Eulero implicito [6] è una metodologia atta alla risoluzione numerica di equazioni differenziali, ricavato dall'approssimazione della derivata temporale con le differenze finite all'indietro. Il metodo delle differenze finite consiste nel ricavare uno schema discreto che approssimi l'equazione differenziale sostituendo alle derivate opportuni rapporti incrementali, Eq. (1.20)

$$R_h(t) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \quad (1.20)$$

dove u è la generica funzione, h è l'incremento della variabile ed $R_h(t)$ è il rapporto incrementale. Il metodo di Eulero implicito, applicando ad un'equazione differenziale il metodo delle differenze finite all'indietro, può essere espresso come segue:

$$\frac{w_n - w_{n-1}}{h} = u(t_n, w_n) \quad (1.21)$$

equivalente a

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{h} = u(t_{n+1}, w_{n+1}) \quad (1.22)$$

da cui si ricava la formulazione generica per Eulero implicito

$$w_{n+1} = w_n + hu(t_{n+1}, w_{n+1}) \quad (1.23)$$

Tale metodo è un metodo del primo ordine con ordine di convergenza pari ad 1.

Il metodo di Crank-Nicholson

Il metodo di Crank-Nicholson è la somma, membro a membro, dei metodi di Eulero esplicito ed implicito. Risulta essere un metodo implicito ad un passo. Il metodo di Eulero esplicito è riportato nell'Eq. (1.24)

$$w_{n+1} = w_n + hu(t_n, w_n) \quad (1.24)$$

mentre Eulero implicito nell'Eq. (1.23). Il metodo che si ottiene è riportato nell'Eq. (1.25)

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}[u(t_n, w_n) - u(t_{n+1}, w_{n+1})] \quad (1.25)$$

Il metodo di Crank-Nicholson presenta un ordine di convergenza pari a 2.

1.2.3 Introduzione ai metodi di discretizzazione delle equazioni

La discretizzazione [5], [12] e [13] delle equazioni di conservazione precedentemente introdotte avviene attraverso la conversione delle stesse in un insieme di equazioni algebriche, la cui espressione matriciale è del tutto simile a quella riportata nell'Eq. (1.37). La maggior parte di queste approssimazioni viene espressa sfruttando il teorema di Gauss: l'integrale di volume viene sviluppato come integrale di superficie

$$\int_{\Omega} \nabla \star \phi d\Omega = \int_S dS \star \phi \quad (1.26)$$

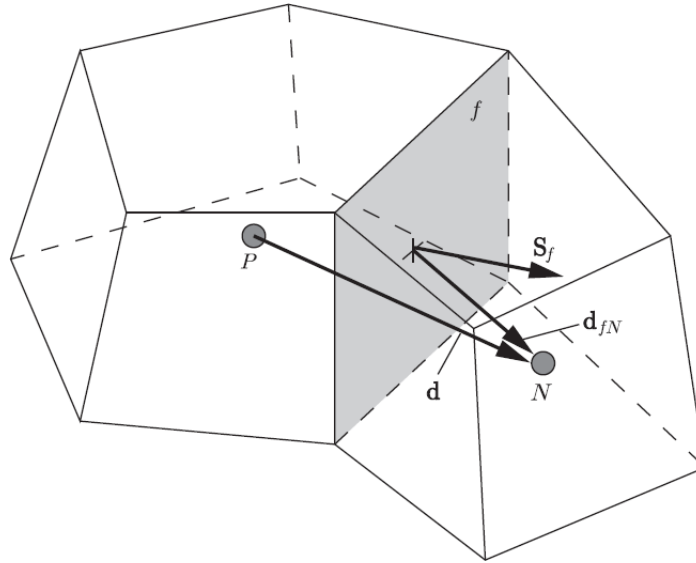


Figura 1.2: Grandezze geometriche relative ai volumi finiti.

★ rappresenta un qualunque prodotto possibile (divergenza $\nabla \cdot \phi$, gradiente $\nabla \phi$ o rotore $\nabla \times \phi$).

Facendo riferimento alla fig. 1.2, si introducono dei termini che nel seguito risultano utili alla fine della discretizzazione. Con P ed N si indicano i centri cella, f rappresenta la faccia in comune tra le due celle, \mathbf{S}_f è la normale a tale faccia. Il vettore \mathbf{d} è la distanza tra i centri P ed N , mentre \mathbf{d}_f è la distanza tra la faccia f ed il centro N della cella vicina.

Approssimazione gradiente

Il gradiente è un termine esplicito che può essere valutato in diversi modi. Il metodo più comodo è sfruttare il teorema di Gauss, con cui si ottiene

$$\int_{\Omega} \nabla \phi d\Omega = \int_S dS \phi = \sum_f \mathbf{S}_f \phi_f \quad (1.27)$$

Approssimazione gradiente sulla superficie

Il gradiente sulla faccia viene approssimato sfruttando la normale alla superficie. È possibile farlo usando uno schema così strutturato:

$$(\nabla \phi)_f = \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}. \quad (1.28)$$

Questo termine è richiesto per approssimare il laplaciano usando il teorema di Gauss.

Approssimazione termini convettivi

I termini convettivi che compaiono nelle equazioni sono i seguenti: $\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho)$ che compare nell'Eq. (1.6), $\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho u_i)$ nell'Eq. (1.13) ed il termine $\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho h)$ nell'equazione di conservazione dell'energia. Tali termini vengono integrati sui volumetti di controllo e quindi linearizzati.

Passando ad una trattazione più generale, si ricorre alla formulazione $\nabla \cdot (\mathbf{v}\phi)$ dove ϕ , come in precedenza, è una generica grandezza.

L'approssimazione è così formulata:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v}\phi) d\Omega = \int_S dS \cdot (\mathbf{v}\phi) \simeq \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{v}_f \phi_f. \quad (1.29)$$

Il termine ϕ_f viene valutato con i metodi di linearizzazione che verranno presentati nel seguito.

Approssimazione divergenza

I termini contenenti la divergenza vengono approssimati tramite il teorema di Gauss nel seguente modo:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \phi d\Omega = \int_S dS \cdot \phi = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \phi_f. \quad (1.30)$$

Approssimazione laplaciano

Il termine laplaciano viene integrato sui singoli volumi di controllo e linearizzato nel seguente modo:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) d\Omega = \int_S dS \cdot (\Gamma \nabla \phi) = \sum_f \Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f \quad (1.31)$$

Γ è il termine diffusivo.

Γ_f viene interpolato linearmente dal centro cella alla faccia nel caso in cui la direzione congiungente i centri cella di due volumetti vicini risulti perpendicolare alla faccia. Nel caso in cui tale vettore non risulti ortogonale, il termine $\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f$ viene suddiviso in due componenti: la componente normale e la componente tangenziale

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f = A(\phi_N - \phi_P) + \mathbf{a} \cdot (\nabla \phi)_f \quad (1.32)$$

dove $A = \frac{|\mathbf{S}_f|^2}{\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{d}}$ ed $\mathbf{a} = \mathbf{S}_f - A\mathbf{d}$.

1.2.4 Introduzione ai metodi di interpolazione

Il calcolo dei valori corrispondenti alle diverse grandezze viene effettuato tramite l'interpolazione.

Interpolazione lineare

Un possibile metodo è l'interpolazione lineare, dove il valore della grandezza ϕ viene calcolato al centro della faccia, nel punto "e", fig. 1.1, tramite la relazione

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad (1.33)$$

dove ϕ_E e ϕ_P sono le grandezze nei due nodi più vicini; λ_e viene definito il fattore di interpolazione lineare

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (1.34)$$

Questo metodo ha un grado di accuratezza pari a 2 e, nell'approssimazione di funzioni con grado maggiore al primo, può portare ad una soluzione oscillante.

Interpolazione *Upwind*

Un altro metodo per interpolare la grandezza ϕ nel punto "e", fig. 1.1, è il metodo *upwind differencing scheme* (UDS). Tale metodo identifica la direzione del flusso tramite il prodotto scalare tra la velocità e il versore normale alla faccia

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{se } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e > 0; \\ \phi_E & \text{se } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e < 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

È equivalente ad esprimere ϕ_e con una serie centrata su ϕ_P troncata al termine di ordine 0

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + O(\Delta x^3) \quad (1.36)$$

dove con $O(\Delta x^3)$ si intendono i termini di ordine superiore.

1.2.5 Metodi numerici per sistemi lineari

La risoluzione tramite volumi finiti si riconduce alla risoluzione di uno o più sistemi lineari

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1.37)$$

dove A è la matrice quadrata di elementi, reali o complessi, \mathbf{x} e \mathbf{b} sono vettori colonna che rappresentano il vettore soluzione ed il vettore termine noto. La soluzione di tale sistema esiste solo se la matrice A è non singolare.

Per la risoluzione del sistema Eq. (1.37) esistono due diversi approcci:

- metodo diretto: la soluzione viene calcolata dopo un numero finito di passi;
- metodo iterativo: l'algoritmo risolutivo parte da una soluzione iniziale e, dopo un numero di operazioni matematiche, fornisce una soluzione migliore. Il numero di passi richiesto può essere infinito;

I metodi diretti hanno la caratteristica di avere noto il numero di passi necessari per arrivare alla soluzione esatta e le soluzioni intermedie non sono di interesse. Questi metodi risultano molto veloci nella risoluzione di sistemi lineari ben posti; come contro richiedono matrici piene con conseguente spreco di spazio nella memoria, sono pertanto pesanti computazionalmente e rischiano di introdurre un errore che deve essere considerato. In conclusione i metodi diretti risultano sconsigliati per matrici mal condizionate.

Il metodo diretto più semplice è l'eliminazione di Gauss, dove l'eliminazione è ottenuta combinando opportunamente le righe per ottenere una matrice triangolare. Il primo elemento di una riga diverso da zero deve essere più a destra del primo elemento diverso da zero della riga precedente.

I metodi iterativi dipendono direttamente dalle caratteristiche della matrice, infatti il solutore migliora la soluzione incrementale: se l'errore cresce ad ogni iterazione, allora la soluzione che si sta ottenendo diverge. Su questo principio si basano il metodo di Jacobi ed il metodo di Gauss - Seidel. I metodi così costruiti devono soddisfare ad ogni passo la condizione di consistenza, altrimenti la soluzione che si ottiene non corrisponde al sistema di partenza.

Il metodo di Gauss-Seidel

Il metodo di Gauss-Seidel è un metodo iterativo per la risoluzione di un sistema matriciale nella forma riportata nell'Eq. (1.37). La matrice A viene decomposta in due matrici triangolari: una costituita da tutti gli elementi posti al di sotto della diagonale principale e chiamata *lower* L ed una con tutti gli elementi posti al di sopra chiamata *upper* U . La diagonale principale viene inclusa nella matrice L . Il sistema lineare viene pertanto riscritto nella formulazione $L\mathbf{x} = \mathbf{b} - U\mathbf{x}$. Il metodo di Gauss-Seidel è una tecnica risolutiva iterativa che risolve il termine a sinistra dell'espressione per \mathbf{x} usando il valore al passo precedente di \mathbf{x}

$$\mathbf{x}^{k+1} = L^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^k). \quad (1.38)$$

Sfruttando la decomposizione della matrice A , nello specifico la forma di L , è possibile aggiornare le componenti dell'elemento \mathbf{x}^{k+1} in modo sequenziale

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right), i = 1, \dots, n \quad (1.39)$$

dove b_i ed a_{ij} sono i termini componenti il vettore dei termini noti e la matrice.

Il metodo del gradiente coniugato e del gradiente biconiugato

Il metodo del gradiente coniugato è un algoritmo risolutivo per i sistemi lineari tipo l'Eq. (1.37). È un metodo iterativo che costruisce la soluzione come una successione \mathbf{x}_k di vettori. Affinché sia applicabile richiede che la matrice A sia simmetrica e definita positiva.

Se A è simmetrica e definita positiva la risoluzione dell'Eq. (1.37) equivale alla ricerca del punto di minimo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ della forma quadratica

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}. \quad (1.40)$$

I problemi sono quindi la determinazione del punto di minimo di $f(\mathbf{x})$, partendo da un punto $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, e la scelta di opportune direzioni lungo le quali muoversi per avvicinarsi il più rapidamente possibile alla soluzione \mathbf{x} : la direzione ottimale non è nota. Ci si muoverà da \mathbf{x}^0 lungo una direzione \mathbf{d}^0 e su questa si fisserà un nuovo punto \mathbf{x}^1 , ripetendo l'operazione fino a convergenza. La soluzione al generico passo k è determinata

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k \quad (1.41)$$

essendo α_k il valore che fissa la lunghezza del passo lungo la direzione \mathbf{d}^k .

Nel metodo del gradiente si prende come direzione di discesa quella per cui la pendenza di $f(\mathbf{x})$ è massima, data da $\nabla f(\mathbf{x}^k)$. Definito il residuo

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - A \mathbf{x}^k \quad (1.42)$$

è possibile scrivere l'algoritmo per il metodo del gradiente: dato $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ per $k = 1 \dots$ fino a convergenza

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}{\mathbf{r}^T A \mathbf{r}} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{r}^k \quad (1.44)$$

cioè le direzioni di discesa coincidono con il residuo. La versione preconditionata assume la seguente formulazione:

$$P \mathbf{z}^k = \mathbf{r}^k \quad (1.45)$$

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{r}}{\mathbf{z}^T A \mathbf{z}} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{z}^k \quad (1.47)$$

dove P è la matrice di preconditionamento e \mathbf{z} è il residuo preconditionato.

Nel metodo del gradiente coniugato, la direzione di discesa non coincide con il residuo. Posto $\mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0$, si cercano delle direzioni della forma

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \beta_k \mathbf{p}^k \quad (1.48)$$

dove i parametri β_k sono determinati in modo tale che

$$(A\mathbf{p}^j)^T \cdot \mathbf{p}^{k+1} = 0 \quad (1.49)$$

con $j = 1..k$. Le direzioni che si ottengono sono chiamate A-ortogonali.

Nel caso preconditionato assume la seguente formulazione: dato $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, posto $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^0$, $\mathbf{z}^0 = P^{-1}\mathbf{r}^0$ e $\mathbf{p}^0 = \mathbf{z}^0$, la k -esima iterazione è

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{p}^k)^T \mathbf{r}^k}{(A\mathbf{p}^k)^T \mathbf{p}^k} \quad (1.50)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k \quad (1.51)$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \alpha_k A\mathbf{p}^k \quad (1.52)$$

$$P\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{r}^{k+1} \quad (1.53)$$

$$\beta_k = \frac{(A\mathbf{p}^k)^T \mathbf{z}^{k+1}}{(\mathbf{p}^k)^T A\mathbf{p}^k} \quad (1.54)$$

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{z}^{k+1} - \beta_k \mathbf{p}^k \quad (1.55)$$

L'estensione al caso di matrici non simmetriche è il metodo del gradiente biconiugato. In tale algoritmo il residuo viene calcolato sia per la matrice A sia per la sua trasposta. In questo modo vengono definite due direzioni (\mathbf{p} e $\bar{\mathbf{p}}$) ed anche i coefficienti α e β sono definiti in modo diverso, come riportato di seguito:

$$\alpha_k = \frac{(\bar{\mathbf{p}}^k)^T \mathbf{r}^k}{(A\bar{\mathbf{p}}^k)^T \mathbf{p}^k} \quad (1.56)$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \alpha_k A \mathbf{p}^k \quad (1.57)$$

$$\bar{\mathbf{r}}^{k+1} = \bar{\mathbf{r}}^k - \alpha_k A^T \bar{\mathbf{p}}^k \quad (1.58)$$

$$P \mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{r}^{k+1} \quad (1.59)$$

$$P \bar{\mathbf{z}}^{k+1} = \bar{\mathbf{r}}^{k+1} \quad (1.60)$$

$$\beta_k = \frac{(A \bar{\mathbf{p}}^k)^T \mathbf{z}^{k+1}}{(\bar{\mathbf{p}}^k)^T A \mathbf{p}^k} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{z}^{k+1} - \beta_k \mathbf{p}^k \quad (1.62)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{k+1} = \bar{\mathbf{z}}^{k+1} - \beta_k \bar{\mathbf{p}}^k \quad (1.63)$$

Questa modifica ai vettori delle direzioni e dei residui assicura che la relazione

$$(\bar{\mathbf{r}}^i)^T \mathbf{r}^j = (\bar{\mathbf{p}}^i)^T A \mathbf{p}^j = 0 \quad (1.64)$$

sia verificata se $i \neq j$ e quindi permette l'applicazione del metodo del gradiente biconiugato a matrici non simmetriche.

1.3 Introduzione solutori utilizzati

Il codice di calcolo usato è `OpenFOAM`[®], un `toolbox` sviluppato con il linguaggio di programmazione `C++` per la risoluzione dei problemi di meccanica del continuo, sia esso solido o fluido, in $3D$.

Il `toolbox OpenFOAM`[®] mette a disposizione dell'utilizzatore diversi tipi di solutori per i diversi campi d'interesse. In questo lavoro si sono utilizzati solutori per fluidi comprimibili, nello specifico `rhoCentralFoam` e `sonicFoam`.

Il `rhoCentralFoam`, come dice anche il nome stesso, è un solutore che risolve equazioni di conservazione per fluidi comprimibili, risolvendo l'equazione di quantità di moto e dell'energia. Si basa sul metodo di discretizzazione *central upwind*, sviluppato da Kurganov - Noella - Petrova.

Il `sonicFoam` infine è un solutore per flussi compressibili sub- e supersonici in regime laminare. Si basa sulla risoluzione delle equazioni di continuità e della quantità di moto tramite l'algoritmo PISO.

1.3.1 rhoCentralFoam: schema Kurganov - Tadmor

Lo schema centrato Kurganov - Tadmor [9] è uno schema risolutivo del secondo ordine appartenente alla famiglia degli schemi MUSCL (*Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws*), basato sugli schemi centrati, applicabile sia a grandezze scalari che a grandezze vettoriali. Gli schemi di discretizzazione MUSCL permettono di ottenere un'alta accuratezza numerica della soluzione per il sistema dato anche se si è in presenza di discontinuità, onde d'urto o gradienti elevati.

Questo algoritmo ha una bassa viscosità numerica e ha il vantaggio di poter essere implementato sia come metodo totalmente discreto che come metodo semi-discreto. È una naturale evoluzione del metodo introdotto da Lax - Friedrichs del primo ordine per le differenze centrate

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2}[f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)] \quad (1.65)$$

dove con λ si intende $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, griglia con passo fisso, u_j^n l'approssimazione del valore di $u(x = x_j, t = t^n)$ al punto $x_j = j\Delta x, t^n = n\Delta t$. Questo metodo risulta facilmente implementabile numericamente e non utilizza l'approssimazione di Riemann. L'aspetto sfavorevole è la sua grande dissipazione numerica che non porta a soluzioni attendibili in presenza di discontinuità.

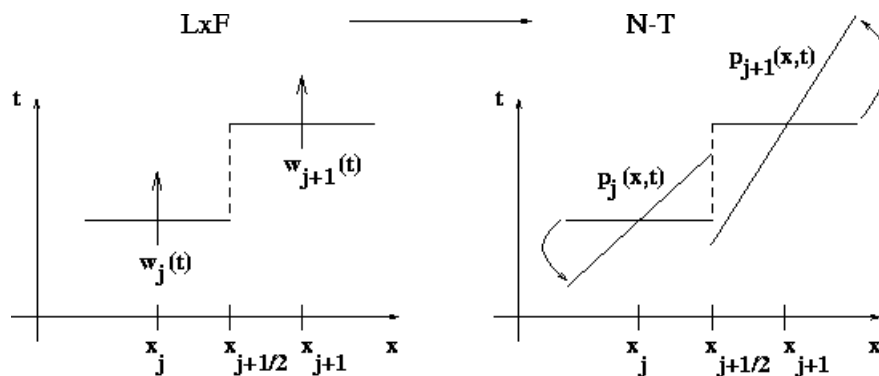


Figura 1.3: Confronto Lax-Friedrichs e Nessyahu-Tadmor.

La prima evoluzione di questo metodo è il Nessyahu - Tadmor, dove si va a sfruttare la metodologia risolutiva MUSCL per la risoluzione di equazioni costanti a tratti, introducendo un ordine di accuratezza pari a 2. In tal modo si mantiene la semplicità del metodo di Lax - Friedrichs, andando però a ridurre le dissipazioni poiché si passa da un primo ad un secondo ordine. La formula per l'approssimazione della soluzione di Nessyahu - Tadmor è la

seguinte

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = & \frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2} + \frac{\Delta x}{8} ((u_x)_j^n + \\ & - (u_x)_{j+1}^n) - \lambda [f(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_j^{n+\frac{1}{2}})] \end{aligned} \quad (1.66)$$

dove $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ è il punto medio del passo di discretizzazione, ricavato dall'espansione di Taylor

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{2} (f_x)_j^n \quad (1.67)$$

ed \bar{u} la soluzione approssimata, Δx è il passo di discretizzazione fisso della griglia di calcolo. L'evoluzione introdotta da Kurganov - Tadmor riguarda la qualità delle informazioni per le velocità locali di propagazione dell'onda.

Si procede in due fasi distinte: in primo luogo si parte dallo schema di Nessyahu - Tadmor, che si basa sulla media nel volume di controllo definito da $[x_j, x_{j+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$ con un passo fisso, per modificare l'intervallo in $[x_{j+\frac{1}{2},l}^n, x_{j+\frac{1}{2},r}^n] \times [t^n, t^{n+1}]$ ed integrando con passo fitto. In seguito viene valutata la soluzione esatta al tempo t^{n+1} , cioè su metà volume di controllo.

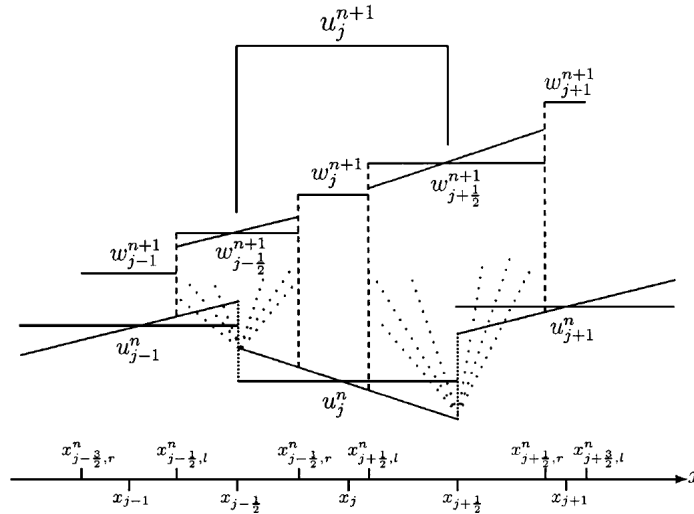


Figura 1.4: Schema di Kurganov-Tadmor.

Si giunge alla seguente formulazione del secondo ordine per Kurganov - Tadmor

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \lambda a_{j-1}^n w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + [1 - \lambda(a_{j-\frac{1}{2}}^n + a_{j+\frac{1}{2}}^n)] w_j^{n+1} + \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^n w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta x}{2} [(\lambda a_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 ((u_x)_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) - (\lambda a_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 ((u_x)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})] \end{aligned} \quad (1.68)$$

dove i valori di $w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ e w_j^{n+1} sono i valori che rappresentano la velocità locale

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \frac{\Delta x - a_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t}{4} ((u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n) + \frac{1}{2a_{j+\frac{1}{2}}^n} [f(u_{j+\frac{1}{2},r}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{j+\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}})] \quad (1.69)$$

$$w_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} (a_{j-\frac{1}{2}}^n - a_{j+\frac{1}{2}}^n) (u_x)_j^n + \frac{\lambda}{1 - \lambda(a_{j-\frac{1}{2}}^n - a_{j+\frac{1}{2}}^n)} [f(u_{j+\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}) - f(u_{j-\frac{1}{2},r}^{n+\frac{1}{2}})]. \quad (1.70)$$

I termini $a_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ sono le velocità con cui si propaga l'informazione

$$a_{j+\frac{1}{2}}^+ = \max_{u \in C(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+)} \rho \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \right) \quad (1.71)$$

ed i restanti termini che compaiono nella variabile u sono le soluzioni ricostruite sugli estremi dell'intervallo.

L'algoritmo così ricavato è utilizzato per la risoluzione di problemi con discretizzazione totale.

Partendo dalle Eq. (1.68) e sostituendo i termini che compaiono nelle Eq. (1.69), (1.70) e (1.71), è possibile giungere alla formulazione semi-discreta

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ - \left[\left(f(u_{j+\frac{1}{2},r}^{n+\frac{1}{2}}) + f(u_{j+\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}) \right) - \left(f(u_{j-\frac{1}{2},r}^{n+\frac{1}{2}}) + f(u_{j-\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}) \right) \right] + \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \left[\left(u_{j+1}^n - \frac{\Delta x}{2} (u_x)_{j+1}^n \right) - \left(u_j^n + \frac{\Delta x}{2} (u_x)_j^n \right) \right] - \frac{a_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \left[\left(u_j^n - \frac{\Delta x}{2} (u_x)_j^n \right) - \left(u_{j-1}^n + \frac{\Delta x}{2} (u_x)_{j-1}^n \right) \right] \right\}. \quad (1.72)$$

Quando il passo temporale Δt tende a 0 è possibile scrivere la Eq. (1.72) nella forma compatta come segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_j(t) = & -\frac{\left(f(u_{j+\frac{1}{2}}^+(t)) + f(u_{j+\frac{1}{2}}^-(t))\right) - \left(f(u_{j-\frac{1}{2}}^+(t)) + f(u_{j-\frac{1}{2}}^-(t))\right)}{2\Delta x} \\ & + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ a_{j+\frac{1}{2}}(t) \left[u_{j+\frac{1}{2}}^+(t) - u_{j+\frac{1}{2}}^-(t) \right] - a_{j-\frac{1}{2}}(t) \left[u_{j-\frac{1}{2}}^+(t) - u_{j-\frac{1}{2}}^-(t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

L'Eq. (1.73) ammette la forma conservativa e permette di scrivere la formulazione in termini di flussi numerici

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = -\frac{H_{j+\frac{1}{2}}(t) - H_{j-\frac{1}{2}}(t)}{\Delta x}. \quad (1.74)$$

dove con $H_{j\pm\frac{1}{2}}(t)$ sono i flussi numerici

$$H_{j\pm\frac{1}{2}}(t) = \frac{f(u_{j\pm\frac{1}{2}}^+(t)) + f(u_{j\pm\frac{1}{2}}^-(t))}{2} - \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}(t)}{2} \left[u_{j\pm\frac{1}{2}}^+(t) - u_{j\pm\frac{1}{2}}^-(t) \right]. \quad (1.75)$$

L'implementazione di tale algoritmo in **OpenFOAM**[®] [?] e [11] avviene sfruttando il calcolo dei flussi, positivi e negativi, sulla faccia in modo da “ingannare” la funzione interpolante e ricostruire le grandezze primitive. I flussi così calcolati corrispondono a $H_{j\pm\frac{1}{2}}(t)$. Una volta calcolate tali grandezze primitive si passa alle risoluzioni dell'equazione di conservazione, dell'equazione della quantità di moto ed infine dell'equazione dell'energia. Questo solutore presenta anche un'altra peculiarità: nel caso si stia trattando un fluido non viscoso, viene sfruttato un metodo diretto per la risoluzione dell'equazione della quantità di moto e per quella dell'energia; invece nel caso di fluido viscoso si sfrutta sempre il metodo diretto, che poi viene corretto da un metodo indiretto tramite il tensore degli sforzi τ_{MC} .

L'implementazione nel codice di calcolo **OpenFOAM**[®] del metodo sviluppato da Kurganov - Tadmor avviene attraverso il calcolo dei flussi, positivi e negativi, delle grandezze. Si presenta ora come tale metodo viene applicato.

I termini convettivi che compaiono nelle equazioni di conservazione sono calcolati tramite lo sdoppiamento del flusso nella componente positiva e nella componente negativa. Si ottiene la seguente relazione

$$\begin{aligned} \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{v}_f \phi_f = \\ \sum_f \left(\alpha \mathbf{S}_f^+ \cdot \mathbf{v}_{f+} \phi_{f+} + (1 - \alpha) \mathbf{S}_f^- \cdot \mathbf{v}_{f-} \phi_{f-} + \omega_f (\phi_- - \phi_+) \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

I termini $\alpha \mathbf{S}_{f+} \cdot \mathbf{v}_{f+} \phi_{f+}$ e $(1 - \alpha) \mathbf{S}_{f-} \cdot \mathbf{v}_{f-} \phi_{f-}$ sono i flussi valutati rispettivamente nelle direzioni f_+ e f_- . Il termine $\omega_f(\phi_- - \phi_+)$ viene calcolato solo in alcuni casi particolari, ovvero quando il termine convettivo fa parte di una derivata sostanziale come nel caso dell'Eq. (1.13). Il coefficiente α è un peso che ripartisce il contributo dei flussi (nel caso di Kurganov - Tadmor tale peso risulta pari a 0.5).

Il termine ω_f rappresenta un flusso volumetrico basato sulla velocità massima di propagazione delle discontinuità che possono esistere sulla faccia tra i valori interpolati nelle due direzioni. È così calcolato:

$$\omega_f = \alpha \max(\psi_{f+}, \psi_{f-}). \quad (1.77)$$

Sono stati introdotti i flussi volumetrici relativi alle velocità di propagazioni locali, calcolati come segue:

$$\psi_+ = \max(c_{f+} |\mathbf{S}_f| + \phi_{f+}, c_{f-} |\mathbf{S}_f| + \phi_{f-}, 0) \quad (1.78)$$

$$\psi_- = \max(c_{f+} |\mathbf{S}_f| - \phi_{f+}, c_{f-} |\mathbf{S}_f| - \phi_{f-}, 0). \quad (1.79)$$

$c_{f\pm} = \sqrt{\gamma RT_{f\pm}}$ è la velocità del suono sulla faccia. I valori così ottenuti risultano essere positivi nelle due direzioni.

I termini contenenti il gradiente vengono distinti in fluidi comprimibili ed incomprimibili. Nel caso di fluidi incomprimibili si ricorre all'interpolazione lineare, anche in questo caso suddivisa in due componenti:

$$\sum_f \mathbf{S}_f \phi_f = \sum_f [\alpha \mathbf{S}_{f+} \phi_{f+} + (1 - \alpha) \mathbf{S}_{f-} \phi_{f-}]. \quad (1.80)$$

Sia per i termini convettivi che per quelli contenenti il gradiente, si utilizza un limitatore di flusso per passare da schemi di interpolazione lineare a schemi di interpolazioni di ordine superiore, basati su una funzione $\beta(r)$. Il termine r che compare nella funzione rappresenta il rapporto esistente tra il gradiente e la variabile interpolata, imposto a $r \geq 0$. Nel caso di celle poliedriche la relazione è la seguente:

$$r = 2 \frac{\mathbf{d} \cdot (\nabla \phi)_P}{(\nabla_{\mathbf{d}} \phi)_f} - 1 \quad (1.81)$$

dove $(\nabla \phi)_P$ è il gradiente totale calcolato nella centro cella P e $(\nabla_{\mathbf{d}} \phi)_f = \phi_N - \phi_P$ è la componente normale del gradiente alla faccia considerata, scalato della distanza $|\mathbf{d}|$.

1.3.2 sonicFoam: metodo risolutivo PISO

A differenza del solutore `rhoCentralFoam`, il solutore `sonicFoam` si basa sull'algoritmo PISO (*Pressure Implicit with Splitting of Operators*) improntato

sulla risoluzione dell'accoppiamento velocità - pressione e quindi delle altre grandezze presenti.

L'equazione della quantità di moto, Eq. (1.82), è non lineare. Per essere risolta viene discretizzata, di conseguenza la velocità al nuovo passo temporale risulterà anch'essa non lineare.

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (1.82)$$

Se i gradienti di pressione vengono separati dal termine sorgente, il sistema discreto può essere scritto come:

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{n+1} + \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{n+1} = Q_{u_i}^{n+1} - \left(\frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i} \right)_P \quad (1.83)$$

dove P rappresenta una generica cella ed l denota il punto vicino che appare nell'equazione discretizzata della quantità di moto. Il termine sorgente Q contiene i termini dipendenti da u_i^n e le forze di volume che dipendono da u_i^{n+1} . Infine A rappresenta il generico elemento della matrice che si ricava dalla discretizzazione della quantità di moto.

A causa della presenza di termini non lineari e dipendenti tra loro l'Eq. (1.83) non è risolvibile direttamente nel termine A . Si procede dunque con un metodo iterativo, risolvendo l'equazione ad ogni passo temporale. Si pone $n + 1$ uguale ad m , in modo da non confondere le relazioni interne, atte alla risoluzione di equazioni lineari, con quelle esterne, relative al passo temporale. Evidenziando in Eq. (1.83) $u_{i,P}^{m*}$ si ottiene

$$u_{i,P}^{m*} = \frac{Q_{u_i}^{m-1} - \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{m*}}{A_P^{u_i}} - \frac{1}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P. \quad (1.84)$$

La velocità ottenuta tramite la Eq. (1.84), dove $u_{i,P}^{m*}$ non è il valore finale cercato, perché non soddisfa l'equazione di continuità, ed è per questo che viene aggiunto un * al termine. Si pone $\frac{Q_{u_i}^{m-1} - \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{m*}}{A_P^{u_i}}$ uguale a $\tilde{u}_{i,P}^{m*}$, vedendo questo termine come il campo di velocità depurato del gradiente di pressione.

L'equazione di continuità

$$\frac{\delta \rho u_i^m}{\delta x_i} = 0 \quad (1.85)$$

deve essere soddisfatta dalla velocità calcolata, modificando il campo di pressione

$$u_{i,P}^{m*} = \tilde{u}_{i,P}^{m*} - \frac{1}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p^m}{\delta x_i} \right)_P. \quad (1.86)$$

che viene calcolato al passo m e non al passo $m - 1$. Il valore del campo di velocità calcolato nell'Eq. (1.86) viene sostituito nell'Eq. (1.85) dando

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[\frac{\rho}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p^m}{\delta x_i} \right) \right]_P = \left[\frac{\delta(\rho \tilde{u}_i^{m*})}{\delta x_i} \right]_P \quad (1.87)$$

Risolta l'equazione Eq. (1.87) per la pressione, la velocità viene calcolata tramite l'Eq. (1.86).

Tramite questi passaggi matematici si è ottenuto un campo di velocità il quale soddisfa la continuità, ma la velocità e la pressione non verificano più la equazione discretizzata Eq. (1.83) da cui si è partiti. Si procede quindi iterativamente finché le grandezze non soddisfano entrambe le equazioni.

L'algoritmo si basa sulla variazione del campo di velocità: più il passo temporale scelto per la risoluzione risulta piccolo più l'accuratezza della soluzione aumenta poiché sono necessarie minori correzioni.

Il parametro che permette di stabilire se il metodo è stabile o no è il numero di Courant:

$$C = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad (1.88)$$

dove Δt è il passo temporale, Δx è la dimensione della griglia di calcolo e u la velocità del fluido. Il numero di Courant è usato per scrivere una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di problemi risolti con metodi iterativi impliciti. Tale valore si deve mantenere al di sotto di una soglia, che di solito equivale ad 1, secondo la condizione di Courant - Friedrichs - Lewy, affinché vi sia stabilità.

Capitolo 2

Controllo del rumore

L'estensione della modellazione numerica ai sistemi di abbattimento del rumore serve per predire come si comportano le onde di pressione nelle terminazioni aperte e come influenzano le prestazioni del motore.

La validazione delle condizioni al contorno, l'ottimizzazione del comportamento nelle zone di discontinuità geometrica e lo sviluppo di un modello acustico equivalente, per silenziatori semplici e complessi, può essere affrontato per il singolo elemento, senza considerare il sistema completo. È possibile fare una analisi sia numerica o sperimentale nel dominio delle frequenze, confrontando la funzione di trasferimento calcolata con quella ottenuta da campagne di misura sperimentali in camera semi-anecoica.

L'analisi sperimentale si basa sull'eccitazione del silenziatore tramite un altoparlante che genera un segnale acustico, come il rumore bianco, con ampiezza dell'onda di pressione piccola e flusso medio nullo. In tale modo si sfrutta la semplicità del modello e si evitano tutti gli effetti non lineari che verrebbero introdotti dal motore (gradienti di temperatura elevati, velocità medie elevate e onde con ampiezza finita), concentrandosi unicamente sulle frequenze di risonanza e i picchi di attenuazione.

2.1 Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento è una rappresentazione matematica della relazione tra l'ingresso X di un sistema lineare e la risposta Y del sistema stesso, fig. 2.1 così definita:

$$H = \frac{Y}{X}. \quad (2.1)$$

La condizione di sistema lineare permette di sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti, che ha reso possibile la definizione delle condizioni

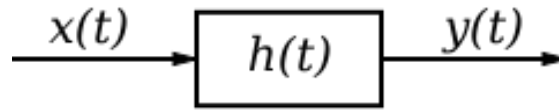


Figura 2.1: Rappresentazione di un sistema dinamico nel dominio del tempo.

al contorno come sovrapposizione di più componenti armoniche. Inoltre, l'uso di ampiezze di oscillazione ridotte ha consentito di rimanere in campo lineare. Il calcolo di tale funzione ha richiesto la misura di due segnali: quello in ingresso, misurato direttamente, e quello in uscita, ricavato tramite la formula del monopolo pulsante Eq. (2.21). Da tali misure si è ricavato lo spettro del segnale, usando la trasformata discreta di Fourier

$$P(f) = \mathcal{F}[p(t)] \quad (2.2)$$

La parte relativa alla fase non è stata considerata, analizzando solo l'ampiezza

$$TF = -20 \log \frac{P_{Out}}{P_{In}} \quad (2.3)$$

dove P_{Out} e P_{In} sono le ampiezze degli spettri in uscita ed in ingresso.

2.2 Trasformata di Fourier: proprietà e caratteristiche

La determinazione della funzione di trasferimento richiede l'analisi dello spettro della grandezza considerata, la pressione. Ciò è reso possibile dalla trasformata di Fourier [7]

2.2.1 Trasformata continua di Fourier

Si considera una funzione $g(t)$ periodica di periodo T , equivalente a $f = \frac{1}{T}$.

Se la funzione soddisfa le condizioni di Dirichlet, ossia:

- funzione definita nell'intervallo considerato,
- derivata prima continua,
- dotata di discontinuità al massimo di prima specie,

allora è possibile svilupparla in una serie infinita di componenti sinusoidali la cui formulazione trigonometrica è

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt) \quad (2.4)$$

dove a_0 , a_k sono i coefficienti pari della serie

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt \quad (2.5)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(kt) dt \quad (2.6)$$

e b_k sono i coefficienti dispari della serie

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(kt) dt \quad (2.7)$$

con $k \geq 1$.

È possibile scriverla anche in una formulazione basata sui numeri complessi

$$g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} \quad (2.8)$$

con c_k così calcolato

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt \quad (2.9)$$

Le formulazioni riportate nelle Eq. (2.4) e (2.8) sono adatte a rappresentare sia segnali ad energia finita che ad energia infinita periodici.

L'estensione della serie di Fourier a segnali non periodici è la trasformata di Fourier. La formulazione matematica per segnali periodici è

$$\mathcal{F}(f_k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi f_k t} dt \quad (2.10)$$

posto $f_k = kf_1$ e k intero. Le componenti di frequenza f_k , con $k > 1$, sono chiamate armoniche di ordine k , mentre la componente con frequenza f_1 , pari a quella del segnale, è detta fondamentale.

Una particolarità della trasformata di Fourier è l'introduzione per frequenze reali f_k , con $f_k > 0$, di due valori: uno positivo ed uno negativo. Sarà quindi sufficiente una sola parte dello spettro poiché $\mathcal{F}(f_k) = \mathcal{F}^*(-f_k)$. Lo spettro così ottenuto è composto da due componenti: il modulo e la fase. La rappresentazione grafica sarà discreta nel dominio delle frequenze perché la spaziatura tra le righe spettrali dipende dal reciproco del periodo T .

Le funzioni non periodiche possono essere caratterizzate da un periodo infinito, avente spettro continuo, la cui formulazione è

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.11)$$

senza riscalarle le componenti spettrali sul periodo T e quindi graficamente si otterrà una rappresentazione continua nel dominio delle frequenze.

2.2.2 Trasformata discreta di Fourier

I segnali che si ottengono dalle misure non risultano essere funzioni continue, bensì campionati. Il campionamento consiste nel rilevare i valori assunti dal segnale ad intervalli discreti di tempo e nel riunirli in una sequenza. Tale processo comporta una perdita di informazione che è legata all'entità del periodo di campionamento t_s .

Il tempo di campionamento dt risulta un parametro critico, dal momento che i valori compresi tra due istanti successivi non sono noti e non è dunque possibile determinarli. Ne consegue che la scelta del tempo di campionamento dt e della frequenza di campionamento, $f_{sample} = \frac{1}{dt}$, è un parametro importante e deve essere eseguito con cura.

Il segnale campionato si presenta nel dominio delle frequenze con una quantità di informazione univocamente determinata solo in un intervallo definito dalla frequenza di campionamento f_{sample} (per l'esattezza da 0 a $f_{sample}/2$).

La relazione che definisce la trasformata di Fourier non sarà più definita da un integrale ma da una sommatoria:

$$\mathcal{F}(f_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t_k)e^{-j2\pi ft_k} \quad (2.12)$$

con $t_k = kdt$.

Nel caso trattato il segnale che si ha a disposizione non è un segnale continuo ma campionato e non periodico. Questo segnale sarà rappresentato da una sequenza finita di lunghezza N , numero di campioni relativi agli istanti kdt . La trasformata discreta di Fourier, con l'uso della tecnica di finestrazione, permette di rendere periodico tale segnale. La relazione che definisce la trasformata discreta di Fourier è

$$\mathcal{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn}. \quad (2.13)$$

L'Eq. (2.13) permette il calcolo dello spettro del segnale campionato dalle simulazioni numeriche.

2.2.3 Errori di misura

Le misure effettuate possono essere affette da errori di misura [8], che ne compromettono la veridicità. Gli errori analizzati in questa trattazione, legati direttamente al calcolo della funzione di trasferimento, sono

- risoluzione in frequenza;
- errore di *aliasing*;
- errore di *leakage*.

Altre tipologie di errori, quali gli errori accidentali e gli errori sistematici, non sono state prese in esame poiché non è stato possibile stimarli.

Risoluzione in frequenza

L'algoritmo della trasformata discreta di Fourier permette un'estensione del campo di frequenze esaminato tra 0 e $f_{sample}/2$. Aumentando la frequenza di campionamento f_{sample} si aumenterà di conseguenza la banda utile della trasformata.

Il numero di campioni presente nel dominio della frequenza è sempre un numero pari ad N , che costituisce il *record* temporale e rappresenta anche il numero di righe spettrali calcolabili. La distanza tra queste righe è chiamata risoluzione in frequenza

$$\Delta f = \frac{f_{sample}}{N} \quad (2.14)$$

ed esprime la capacità della trasformata discreta di Fourier di poter evidenziare la presenza di righe spettrali molto vicini tra loro le quali verrebbero altrimenti considerate come una unica componente spettrale.

Errore di *aliasing*

La diminuzione della frequenza di campionamento sul segnale armonico porta alla situazione di fig. 2.2, dove i punti campionati rappresentano correttamente i valori del segnale negli istanti di campionamento. Congiungendoli, però, si arriverebbe ad ipotizzare, per il segnale acquisito, una frequenza più bassa di quella reale.

Così facendo si perde una componente armonica ad una determinata frequenza e ne viene inventata una inesistente. Tale fenomeno prende il nome di *aliasing* ed è legato sia alla frequenza di campionamento sia alla frequenza del segnale. La condizione più critica è applicata alla componente armonica a frequenza più elevata nel segnale.

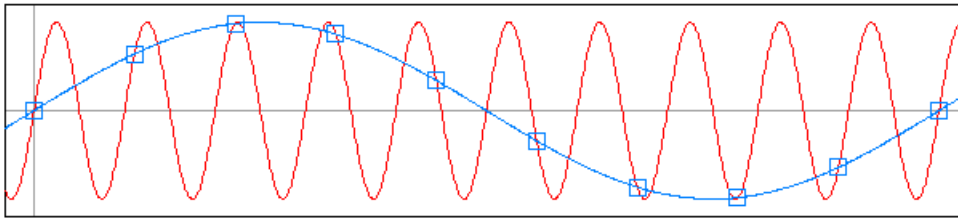


Figura 2.2: Fenomeno dell'*aliasing*: campionamento errato in blu, segnale corretto in rosso.

La soluzione a tale problema viene fornita dal teorema di Nyquist - Shannon, in cui si afferma che, se un segnale continuo, a banda limitata, contiene solo frequenze inferiori a f_{max} (massima frequenza del segnale), il segnale verrà campionato correttamente se

$$f_{sample} \geq 2f_{max} \quad (2.15)$$

cioè la frequenza di campionamento deve essere almeno il doppio della massima frequenza del segnale.

Errore di *leakage*

I segnali campionati e limitati nel tempo, per la trasformata discreta di Fourier, sono periodici ed il loro periodo è noto a priori, essendo pari alla estensione temporale T della finestra di osservazione. Se si pone la finestra di osservazione pari ad un multiplo intero del periodo della funzione, tale periodizzazione si ritrova anche nel dominio delle frequenze con periodo pari alla frequenza di campionamento f_{sample} . Applicando invece la trasformata discreta di Fourier con una finestra di osservazione che non risulta essere un multiplo intero della frequenza del segnale, cosa che avviene nella maggior parte dei casi, si ottiene un passaggio da dominio temporale a dominio delle frequenze errato. Questo errore nel dominio delle frequenze è evidenziabile da una ripartizione dell'informazione su più righe.

Analizzando tale fenomeno si nota come il problema si verifica per via della diversa finestra usata: se si eliminassero i campioni presenti ad inizio record ed a fine record, la parte centrale conterrebbe informazioni corrette. Tale tecnica è la *finestratura*: questa consiste nel moltiplicare il campione per una finestra ponderata della stessa durata del segnale ed avente valore nulla agli estremi e valore unitario al centro.

Esistono diverse finestre ponderali che enfatizzano in modo diverso le caratteristiche spettrali del segnale di partenza. Le più usate sono la ret-

tangolare, la Hanning e la Flat Top, fig. 2.3. La finestra rettangolare non applica un peso particolare perché ha valore unitario su tutto il periodo. Semplicemente tronca il segnale, effettuando un filtraggio in frequenza. È la tecnica naturale che si ottiene effettuando il campionamento del segnale ed è consigliata solo nel caso in cui il segnale contiene un numero intero di periodi fondamentali. La finestra di Hanning presenta un lobo principale circa doppio rispetto alla finestra rettangolare. Presenta una buona selettività ed un basso errore di *leakage*. La finestra Flat Top è una finestra particolare perché presenta un lobo centrale molto esteso. Permette delle misure di ampiezza molto precise ed è usata nelle operazioni di calibratura.

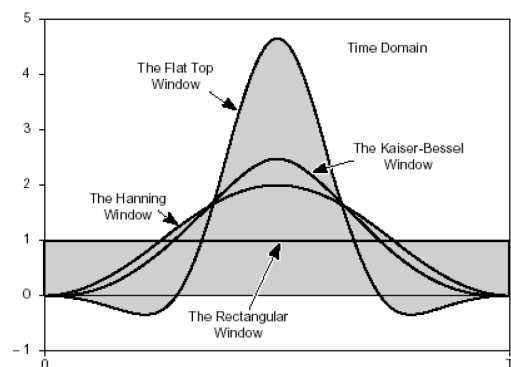


Figura 2.3: Andamento di alcune finestre nel dominio temporale.

2.3 Segnale in ingresso: tipologie di eccitazione

Il segnale di ingresso [1] deve riuscire a perturbare il flusso mediante una onda armonica di pressione, ripetuta più volte, per poter eccitare il campo di frequenze considerato: 20 - 2000 Hz. Il campo di frequenze non viene applicato in modo continuo ma con un passo fissato, variabile tra 5, 10 e 20 Hz, in modo da ottenere la funzione di trasferimento discreta nella banda di frequenze in esame.

2.3.1 Sinusoide

Una possibile condizione al contorno in ingresso è la creazione di una perturbazione sinusoidale sul valore di riferimento della pressione

$$p(t) = p_0 + \Delta p \sin(2\pi ft) \quad (2.16)$$

dove p_0 è il valore di riferimento, Δp è l'ampiezza massima della sinusoide che si va a sovrapporre al valore di riferimento, f è la frequenza di eccitazione.

Con questa funzione di ingresso si eccita solo una data frequenza con un'ampiezza fissata, ma non si permette di operare, con una sola simulazione, su tutto l'intervallo di frequenze in esame e quindi il metodo è più dispendioso.

2.3.2 Rumore bianco

Un'altra possibile condizione è il rumore bianco. Il rumore bianco è un segnale casuale con uno spettro piatto. Questo perché ogni frequenza ha lo stesso contenuto energetico. Nella realtà tale segnale non ha un contenuto energetico infinito su tutte le frequenze possibili ma solo su un numero limitato di frequenze. Il limite dell'approccio classico, basato sulla generazione di numeri casuali, risiede nell'ampiezza del segnale del dominio temporale che non risulta essere costante, ma presenta picchi massimi disuniformi. La nuova relazione proposta è

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^N \Delta p \sin(2\pi n f t + \varphi_n) \quad (2.17)$$

dove p_0 è un valore costante che rappresenta il valore medio della pressione a monte del condotto, $N = \frac{f_{max} - f_{min}}{f_{step}}$ è il numero delle armoniche eccitate e φ_n è un valore variabile ad ogni iterazione e serve per ottenere una fase casuale, calcolato come $2\pi\alpha_k$, con α_k valore casuale compreso tra 0 ed 1. Il metodo di eccitazione rumore bianco permette di ottenere una precisione di eccitazione sull'intervallo di frequenze voluto, mantenendo un'ampiezza il più uniforme possibile, limitando l'errore di *aliasing*.

In fig. 2.4 e 2.5 viene riportato l'andamento nel dominio temporale e l'andamento nel dominio spaziale del segnale rumore bianco così generato.

2.3.3 Impulso

Un'altra possibile condizione al contorno è l'impulso. Tale funzione può essere pensata, nel dominio del tempo, come un rettangolo di base infinitesima ed altezza idealmente infinita in modo che l'area sottostante sia pari ad 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.18)$$

dove $\delta(t)$ è il delta di Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0; \\ 1 & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

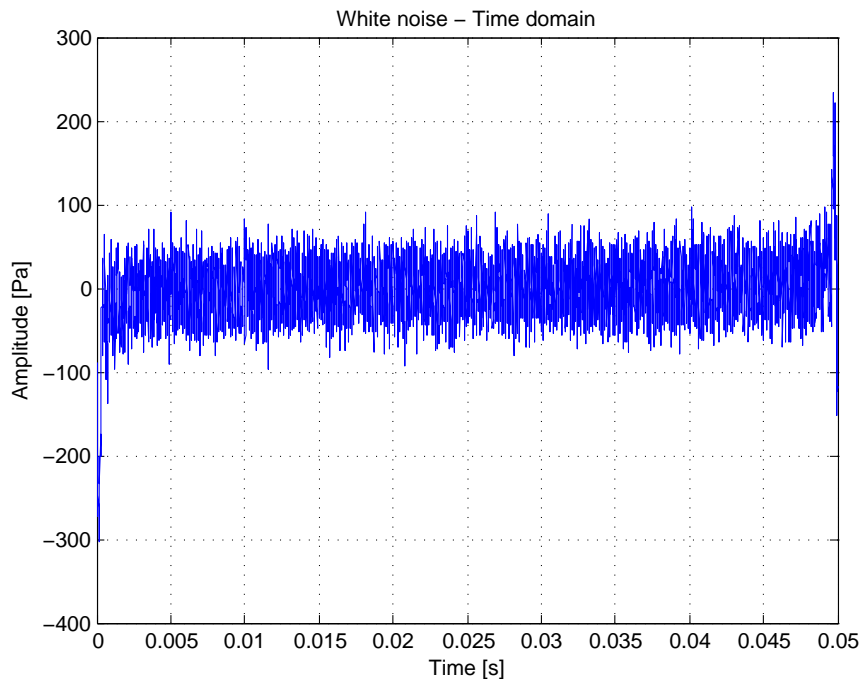


Figura 2.4: Andamento temporale rumore bianco.

L'impulso è stato implementato sfruttando la Eq. (2.17) del segnale sinusoidale, scalando l'ampiezza Δp sul numero di armoniche eccitate N e usando fase φ costante

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^N \frac{\Delta p}{N} \sin(2\pi n f t). \quad (2.20)$$

La definizione di eccitazione precedentemente data introduce un segnale con una ampiezza massima definita a priori invece che essere il risultato della somma di più armoniche come avviene nell'Eq. (2.17). Il controllo ottenuto è migliore, riuscendo a lavorare in campo lineare senza il rischio di entrare nel campo non lineare, come può avvenire con il rumore bianco. In fig. 2.6 e 2.7 viene riportato l'andamento nel dominio temporale, da 0 s a 0.05 s, e l'andamento nel dominio spaziale dell'impulso così costruito.

2.4 Segnale in uscita: monopolo pulsante

Il campo acustico sulla sezione di uscita viene calcolato tramite una relazione basata sulla velocità rilevata in tale sezione poiché, per la condizione di pressione ambiente su tale sezione, non è possibile il calcolo diretto.

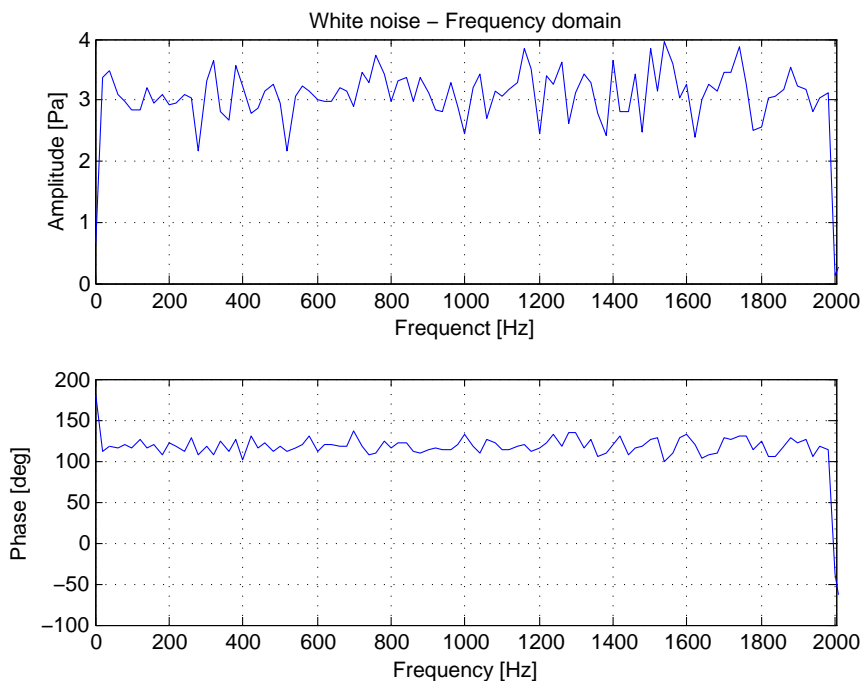


Figura 2.5: Andamento nel dominio delle frequenze rumore bianco.

Per piccole perturbazioni, considerando l'uscita come un monopolo pulsante che irradia una onda sferica, il campo di pressione $p(r, t)$, ad una distanza r dall'uscita, viene relazionata alla derivata della velocità sul tempo $\frac{d}{dt}u(t)$ tramite

$$p(r, t) = \frac{\rho_0 S}{C \pi r} \frac{d}{dt} \left[u \left(t - \frac{r}{a_0} \right) \right] \quad (2.21)$$

dove S è la sezione d'uscita, ρ_0 la densità e a_0 la velocità del suono nel mezzo indisturbato, C è una costante che dipende dal tipo di sorgente acustica, uguale a 4 nel caso di sorgente sferica, 2 nel caso di sorgente semisferica. L'equazione 2.21 è valida fintanto che la lunghezza d'onda λ è maggiore del diametro del condotto d .

2.5 Effetti di discontinuità

Nella modellazione bisogna tener presente che, in prossimità delle discontinuità geometriche e di sezioni aperte, le onde acustiche non si comportano come onde piane ma come onde sferiche. Il piano di riflessione dell'onda non è posizionato subito all'uscita del condotto, infatti risulta spostato. La

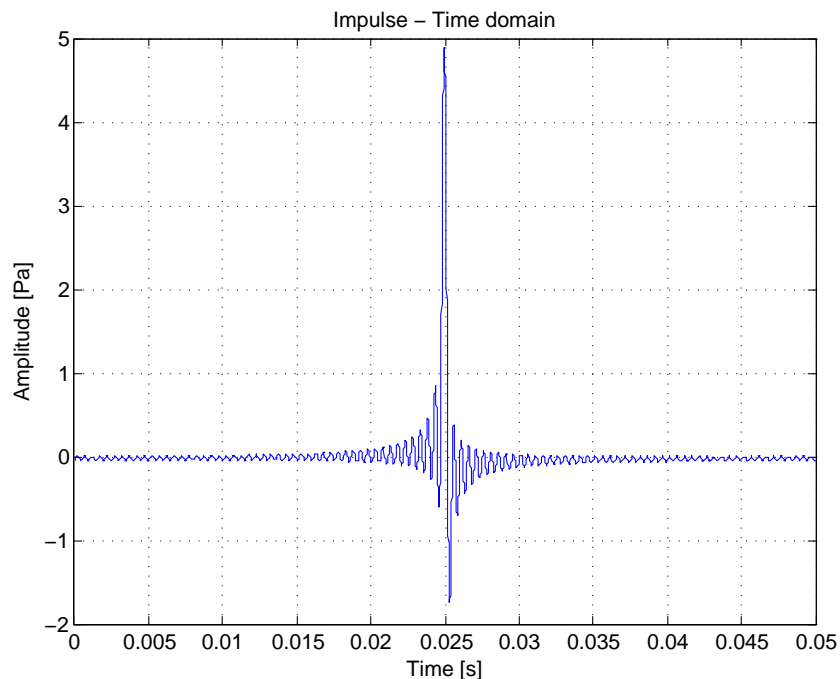


Figura 2.6: Andamento temporale impulso.

propagazione continua nell'ambiente circostante e assume una forma sferica. Inoltre si formano strutture tridimensionali vicino al bordo d'uscita e la pressione non si adegua istantaneamente alla pressione ambiente. Tale effetto può essere visto come spostamento del piano di riflessione dell'onda.

Di tale effetto si tiene conto aumentando la lunghezza del terminale di una quantità l_c , che dipende sia dalla geometria sia dalla frequenza dell'onda incidente. Per una terminazione aperta, la lunghezza correttiva l_{c0} per flusso a media nulla è dipendente dalla frequenza

$$\frac{l_{c0}}{r} = 0.6 - \frac{0.6}{K_{2000}^2} K^2 \quad (2.22)$$

dove r è il raggio del condotto, $K = \frac{2\pi f}{a}$ è il numero d'onda della frequenza minima e K_{2000} è il numero d'onda valutato a 2000Hz. Risulta pertanto essere ottimizzata in un intervallo di frequenze 0-2000Hz. Per valori di K molto piccoli, basse frequenze, questa correzione tende al valore di $0.6r$ mentre, ad alte frequenze tende ad essere nulla.

Nel caso di una eccitazione data dal motore e flusso medio non nullo, conviene usare una lunghezza correttiva per la sezione di ingresso, tenendo

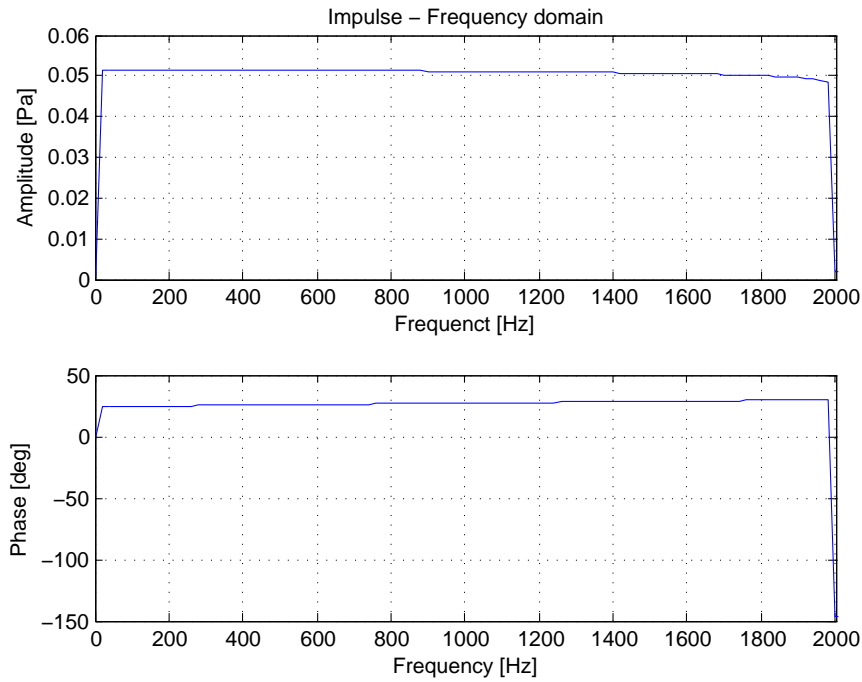


Figura 2.7: Andamento nel dominio delle frequenze impulso.

conto del valore medio del numero di Mach M in ingresso

$$l_{cM} = l_{c0}(1 - M^2) \quad (2.23)$$

In questo caso il numero d'onda K dev'essere calcolato tenendo conto dell'andamento ciclico del motore tramite $f_p = n_c \frac{N}{120}$ dove n_c è il numero di cilindri ed N è la velocità di rotazione. Questa frequenza è solitamente bassa quindi $(\frac{K}{K_{2000}})^2 \rightarrow 0$ e delle buone approssimazioni sono $l_{cM} = 0.6r$ (per l'uscita) e $l_{cM} = 0.6r(1 - M^2)$ (per l'ingresso).

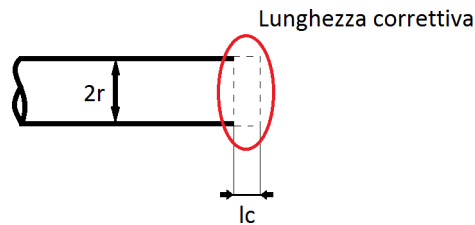


Figura 2.8: Lunghezza correttiva terminale.

Capitolo 3

Struttura dei casi di OpenFOAM®

Il pacchetto *software* utilizzato nel lavoro di tesi è OpenFOAM®, rilasciato con licenza GPL e quindi facilmente espandibile e personalizzabile dall'utente finale in base alle proprie necessità di calcolo.

OpenFOAM® si presenta come una raccolta di librerie C++ con cui è possibile sviluppare delle applicazioni che si dividono in due categorie: i solutori, atti a risolvere uno specifico problema, e le applicazioni accessorie, atte alla manipolazione dei dati e delle geometrie, con funzioni sia di *pre-processing* che di *post-processing*. Uno schema di questo strumento di lavoro è riportata in fig. 3.1.

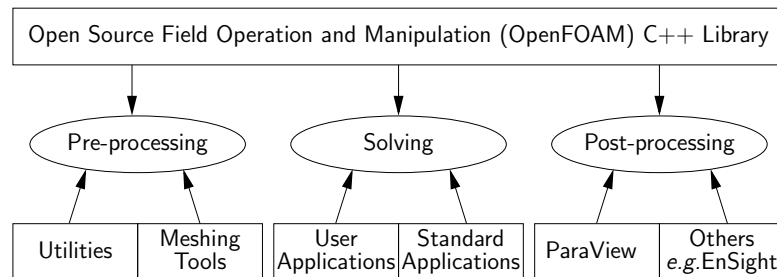


Figura 3.1: Struttura di OpenFOAM®.

Una particolarità di OpenFOAM® è il modo in cui sono scritte le equazioni risolutive: la sintassi usata è molto simile alla formulazione matematica delle equazioni alle derivate parziali. Prendendo ad esempio l'equazione della quantità di moto, Eq. (3.1)

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot \phi U - \nabla \cdot \mu \nabla U = -\nabla p \quad (3.1)$$

nel codice è rappresentata nel seguente modo

```

1 solve
2 (
3   fvm::dt(rho, U)
4   +fvm::div(phi, U)
5   -fvm::laplacian(mu, U)
6   ==
7   -fvc::grad(p)
8 ).

```

La struttura base, fig. 3.2, di un caso in OpenFOAM® è una cartella di lavoro principale contenente:

- cartella **constant**: descrizione completa della griglia di calcolo (cartella **polyMesh**), proprietà termo-dinamiche e termo-fisiche del fluido di lavoro ed i modelli di turbolenza, se richiesti;
- cartella **system**: insieme dei parametri associati al solutore. Le impostazioni sono ripartite in 3 *file* principali (**controlDict**, **fvSchemes** e **fvSolution**) a cui è possibile aggiungere altri dizionari quali quelli per il calcolo in parallelo, o estrarre dati da una sezione della geometria specifica;
- cartella **time**: dati delle grandezze imposte sulle condizioni al contorno, di interfaccia tra due o più regioni. Si può trattare di condizioni iniziali o risultati ottenuti dal codice di calcolo in simulazioni precedenti.

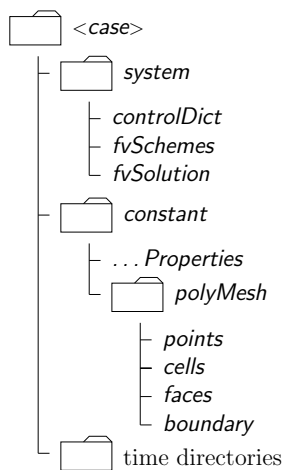


Figura 3.2: Esempio della struttura della cartella di lavoro.

3.1 Cartella constant

3.1.1 Modelli termodinamici e termofisici

I modelli termodinamici e termofisici vengono scelti in base al solutore usato: `rhoCentralFoam` chiede la definizione delle `thermophysicalProperties` mentre `sonicFoam` le `thermodynamicProperties` e le `transportProperties`.

Il dizionario `thermophysicalProperties` permette di ricavare le proprietà del fluido a partire da un modello pressione - temperatura. Si presenta con la seguente struttura:

```

1 thermoType
2 hThermo<pureMixture<sutherlandTransport
3 <specieThermo<hConstThermo<perfectGas>>>>>;
4 mixture
5     air 1 28.9          // specieThermo
6     1007 0             // hConstThermo
7     1.4792e-06 116     // sutherlandTransport (Star-CD)
8 // 1.4584e-06 110.33 // sutherlandTransport (European Space
    Agency);

```

Nel dettaglio è così composta:

- **hThermo**: modello termodinamico. Si sceglie il modello termico, basato sull'entalpia o sul calore specifico. Può rifarsi all'energia interna del gas od ad una composizione di entalpia e comprimibilità;
- **pureMixture**: racchiude le informazioni necessarie alla combustione;
- **sutherlandTransport**: modello per il calcolo della viscosità. La viscosità dinamica μ è calcolata con la temperatura T , la temperatura di Sutherland T_s ed il coefficiente di Sutherland A_s ;
- **specieThermo**: proprietà termo-dinamiche derivate. Le proprietà termofisiche delle singole specie presenti sono derivate a partire da calore specifico, dall'entalpia o dall'entropia;
- **hConstThermo**: proprietà termo-dinamiche di base. È un modello a calore specifico costante da cui è possibile ricavare l'entalpia e l'entropia;
- **perfectGas**: equazione di stato del gas.

Con la voce `mixture` si indicano le specie chimiche (in questo caso aria, in frazione molare pari ad 1), il loro peso molecolare, il valore di riferimento del calore specifico a pressione costante ed il calore latente di fusione, che è nullo se non definito. Sulle ultime due righe sono presenti i coefficienti di trasporto A_s e T_s .

I dizionari `thermodynamicProperties` e `transportProperties` non richiedono la definizione di un modello pressione - temperatura perché definito altrove nel codice.

`ThermodynamicProperties` contiene i valori di calore specifico a volume costante e la costante specifica del gas

```
1 Cv          Cv [0 2 -2 -1 0 0 0] 717.5;
2 R          R [0 2 -2 -1 0 0 0] 287;
```

I valori racchiusi nelle parentesi quadre sono le unità di misura del sistema internazionale: massa kg, lunghezza m, tempo s, temperatura K, quantità di sostanza mol, intensità di corrente A e intensità luminosa cd.

`TransportProperties` contiene il valore della viscosità dinamica

```
1 mu          mu [1 -1 -1 0 0 0 0] 1.84766e-05; // Aria a
              300k
```

3.1.2 polyMesh

La cartella `polyMesh` contiene le informazioni sulla griglia di calcolo: grazie al dizionario `blockMeshDict`. Questo dizionario contiene le informazioni per la generazione della griglia una volta definiti i vertici, i blocchi e le interfacce. Si presenta con la seguente struttura:

- `intestazione`: breve descrizione dell'applicazione o del dizionario in uso;
- un fattore di scala che premoltiplica tutte le coordinate introdotte;
- `vertices`: rappresentano i punti estremi della geometria;
- `edges`: spigoli che hanno una definizione geometrica non lineare;
- `block`: regioni in cui è stata suddivisa la geometria;
- `patches`: definizione delle condizioni al contorno.

Il codice usato è il seguente, dove sono state omesse alcune parti ritenute superflue per il lavoro in questione:

```
1 convertToMeters 0.001;
2 vertices
3 ( );
4 blocks
5 ( );
6 patches
7 ( );
```

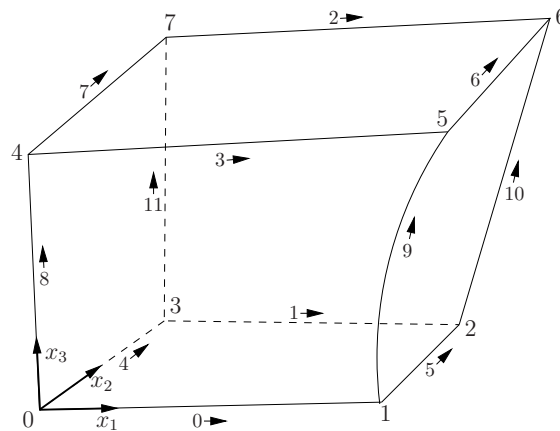


Figura 3.3: Esempio blocco.

`Vertices` contiene la lista delle coordinate che compongono i blocchi, per esempio la fig. 3.3:

```

1 vertices
2 (
3 ( 0 0 0 ) // vertice numero 0
4 ( 1 0 0.1 ) // vertice numero 1
5 ( 1.1 1 0.1 ) // vertice numero 2
6 ( 0 1 0.1 ) // vertice numero 3
7 ( -0.1 -0.1 1 ) // vertice numero 4
8 ( 1.3 0 1.2 ) // vertice numero 5
9 ( 1.4 1.1 1.3 ) // vertice numero 6
10 ( 0 1 1.1 ) // vertice numero 7
11 );

```

La definizione dei blocchi costituenti la geometria è contenuta nella sezione `blocks`:

```

1 blocks
2 (
3 hex (0 1 2 3 4 5 6 7) // numero di vertice
4 (10 10 10) // numero di celle
5 simpleGrading (1 2 3) // distanziamento celle
6 );

```

- “numero di vertice” rappresenta la scelta della forma del blocco ed il numero di vertici che la compongono, ordinati secondo un sistema di riferimento locale (l’origine degli assi è il primo vertice definito nel blocco, l’asse x_1 è descritto dal vertice 0 e dal vertice 1, l’asse x_2 dai vertici 0 e 3 e l’asse x_3 è definito dai vertici 0 e 4);

- “numero di celle” rappresenta il numero di celle in cui verrà suddiviso il blocco in ogni direzione;
- “distanziamento celle” è il fattore di crescita della dimensione delle celle nelle tre direzioni.

Patches sono le dichiarazioni delle condizioni al contorno, contiene:

```
1 patches
2 (
3 patch // tipologia
4 inlet // nome della patch
5 (
6 (0 4 7 3) // facce del blocco
7 )
8 );
```

Le **patches** presentano una struttura a livelli, come è possibile notare in fig. 3.4. In questa sezione del codice è richiesta la definizione tramite il primo livello, le **base type**:

- **patch**: non contiene informazioni geometriche o fisiche in quanto si tratta della condizione base;
- **wall**: identifica le “pareti” e viene usata per definire particolari funzioni di parete. Presenta un flusso nullo sulla faccia;
- **symmetryPlane**: definisce il piano o l’asse di simmetria;
- **empty**: viene usata per trasformare una griglia bidimensionale in una griglia tridimensionale. Le equazioni non vengono risolte lungo la direzione normale a tali facce;
- **wedge**: è utilizzata con una geometria a “spicchio“. Impone che il flusso su un lato sia uguale a quello sul lato corrispondente dall’altra parte della griglia;
- **cyclic**: permette di trattare due patch come se fossero fisicamente connesse tra loro. Viene utilizzata per geometrie ripetute;
- **processor**: quando una simulazione viene lanciata in parallelo, la mesh viene divisa in parti uguali in modo che differenti parti del dominio vengano assegnate a diversi processori. Permette lo scambio di informazioni fra diversi sottodomini.

I *file* che vengono generati sono i seguenti:

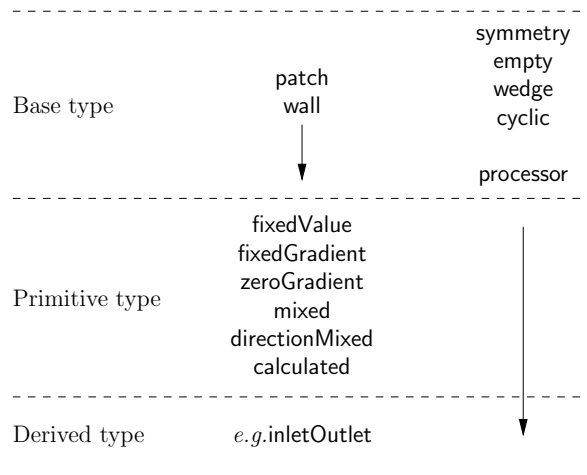


Figura 3.4: Attributi gerarchia patch.

- **points**: lista di vettori che descrivono i vertici delle celle. Il primo vettore rappresenta il vertice 0, il secondo vettore il vertice 1 e così via;
- **faces**: lista delle facce, formate a loro volta dalla lista di vertici che le compongono. Anche qui la prima corrisponde alla faccia 0 e via scorrendo;
- **owner**: lista del numero delle celle, direttamente connesso con il numero di facce che creano la cella;
- **neighbour**: indice delle contigue;
- **boundary**: lista delle patches. Ha la seguente struttura

```

1 inlet
2 {
3   type          patch;
4   nFaces       50;
5   startFace    10325;
6 }

```

dove il termine **inlet** è il nome dato alla condizione al contorno, **type** è la tipologia, scelta tra quelle precedentemente esposte, **nFaces** è il numero di facce che compongono la condizione al contorno e **startFace** è il numero della faccia di partenza da cui contare le facce componenti.

3.2 Cartella system

3.2.1 controlDict

Il dizionario `controlDict` permette di impostare i parametri di controllo essenziali per lanciare la simulazione. La struttura standard è la seguente

```
1 startFrom      startTime;
2 startTime      0;
3 stopAt         endTime;
4 endTime        0.1;
5 deltaT         5e-06;
6 adjustTimeStep no;
7 maxCo          0.8;
8 writeControl   adjustableRunTime;
9 writeInterval  1e-2;
10 writeFormat    binary;
11 writeCompression compressed;
12 runTimeModifiable yes.
```

È suddivisibile in 4 sezioni: "controllo temporale", "scrittura risultati", "lettura dati" e "funzioni richiamabili".

Il "controllo temporale" contiene informazioni utili all'avanzamento temporale delle iterazioni, secondo la formulazione:

- `startFrom` indica a quale istante iniziare la simulazione. Ha 3 opzioni: `startTime`, cioè un tempo specificato dall'utilizzatore; `firstTime`, la prima cartella temporale disponibile, e `latestTime`, l'ultimo passo temporale presente;
- `startTime` è la definizione del tempo di inizio simulazione;
- `stopAt` controllo del tempo di fine simulazione;
- `endTime` tempo di fine simulazione espresso in secondi;
- `deltaT` passo temporale della simulazione;
- `adjustTimeStep` modifica il `deltaT`, in base al limite imposto sul numero di Courant;
- `maxCo` valore limite del numero di Courant nelle iterazioni interne per avere stabilità.

La "scrittura dei risultati" è composta dai parametri di *output*:

- `writeControl` controlla il tempo di scrittura sui *file* di uscita. Impostato con `adjustableRunTime` aggiusta il passo temporale per farlo coincidere con il `writeInterval`;

- `writeInterval` definisce il numero di iterazioni che devono intercorrere tra il salvataggio di un risultato ed il successivo;
- `writeFormat` specifica in che formato vengono salvati i dati in uscita;
- `writeCompression` viene usato per avere dati in uscita compressi;

La sezione "lettura dati" permette a OpenFOAM®, in caso di arresto e riavvio della simulazione, di rileggere i dizionari ad ogni passo temporale.

L'ultima sezione abilita l'uso di funzioni o librerie già presenti o sviluppate dall'utente finale. Un esempio sono le `probes`: sonde virtuali che è possibile posizionare nel punto o sulla sezione scelta.

3.2.2 fvSchemes

Il dizionario `fvSchemes` serve ad impostare gli schemi numerici per i termini derivativi e non che compaiono nelle equazioni. Si riporta un esempio

```

1 interpolationSchemes
2 {
3   default          linear;
4 }
5 snGradSchemes
6 {
7   default          corrected;
8 }
9 gradSchemes
10 {
11  default          Gauss linear;
12  grad(p)          Gauss linear;
13  grad(U)          Gauss linear;
14 }
15 laplacianSchemes
16 {
17  default          none;
18  laplacian(mu,U)  Gauss linear corrected;
19  laplacian(mu,e)  Gauss linear corrected;
20  laplacian((rho*(1|A(U))),p) Gauss linear corrected;
21 }
22 divSchemes
23 {
24  default          none;
25  div(phi,U)       Gauss vanLeerDC;
26  div(phiid,p)     Gauss vanLeerDC;
27  div(phi,e)       Gauss vanLeerDC;
28 }
29 ddtSchemes
30 {
31  default Euler;
32 }
33 fluxRequired
34 {
35  default          no;
36 p;
37 }

```

È riconducibile a 7 categorie:

- **interpolationSchemes**: schemi di interpolazione delle variabili dal centro cella alle facce. Esistono molti schemi possibili, distinguibili tra campi scalari e campi vettoriali. Per semplicità si riportano solo quelli di interesse: lo schema lineare, richiamato con **linear** e lo schema *upwind*.
- **snGradSchemes**: schema per la componente normale del gradiente alla faccia della cella.
- **gradSchemes**: schema di approssimazione del gradiente. L'uso del teorema di Gauss per approssimare il gradiente richiede anche la specifica del metodo di interpolazione usato. Sono dichiarate anche le grandezze a cui applicare l'approssimazione;
- **laplacianSchemes**: schema di approssimazione del laplaciano. L'unica scelta possibile è l'approssimazione tramite l'integrale di Gauss a cui si affiancano il metodo di interpolazione e il metodo di approssimazione del gradiente sulla superficie.
- **divSchemes**: schema di approssimazione della divergenza. Anche in questo caso l'unico metodo utilizzabile è il teorema di Gauss associato agli schemi di interpolazione.
- **timeSchemes**: schemi per la discretizzazione temporale. Gli schemi possibili sono: Eulero implicito e Crank - Nicholson.
- **fluxRequired**: calcolo dei flussi per le grandezze di campo che lo richiedono. Viene qui specificata solo la grandezza voluta.

3.2.3 fvSolution

I metodi risolutivi dei sistemi lineari, le tolleranze e gli algoritmi sono controllati dal dizionario **fvSolution**. Eccone un esempio:

```
1 solvers
2 {
3   p PBiCG
4   {
5     preconditioner DILU;
6     tolerance      1e-15;
7     relTol         0;
8   };
9   U PBiCG
10  {
11    preconditioner DILU;
12    tolerance      1e-15;
```

```

13 relTol          0;
14 };
15 rho PCG
16 {
17 preconditioner  DIC;
18 tolerance      1e-15;
19 relTol         0;
20 };
21 e PBiCG
22 {
23 preconditioner  DILU;
24 tolerance      1e-15;
25 relTol         0;
26 };
27 }
28 PISO
29 {
30 nCorrectors     2;
31 nNonOrthogonalCorrectors 0;
32 }

```

È suddivisibile in 2 categorie: **solvers** e **PISO**.

La sezione **solvers** serve a specificare ogni solutore lineare usato per ciascuna equazione. La sintassi è semplice: si fa riferimento alla variabile voluta a cui si aggiunge il solutore utilizzato. Nell'esempio sono usati i solutori **PCG** (basato sul gradiente coniugato), e **PBiCG** (basato sul gradiente bi-coniugato). Sono metodi iterativi che basano il loro successo sulla riduzione del residuo. Quest'ultimo è una misura dell'errore che si sta commettendo, quindi, più piccolo è, più accurata sarà la soluzione finale. Il solutore lineare si ferma solo quando sono raggiunte le condizioni necessarie:

- il residuo è sceso al di sotto della tolleranza del solutore, **tolerance**;
- il rapporto tra il valore del residuo al passo precedente ed al passo attuale è minore del valore relativo, **relTol**.

Questi termini vanno specificati per ogni solutore lineare usato. L'altro parametro da specificare è il pre-condizionamento della matrice:

- **preconditioner DILU**: metodo di pre-condizionamento per matrici asimmetriche basato sulla fattorizzazione incompleta LU. L ed U sono le matrici *lower* ed *upper*, viene memorizzato il reciproco della diagonale condizionata;
- **preconditioner DIC**: pre-condizionamento di Cholesky per matrici simmetriche. Si basa sulla matrice *lower* e la sua coniugata.

Nella sezione **PISO** è mostrato il numero di correzioni richieste tramite **nCorrectors** (è consigliato un valore compreso tra 1 e 4 ma varia in base alle esigenze dell'utilizzatore). Con **nNonOrthogonalCorrectors** vengono specificate le correzioni in caso ci si trovi in presenza di celle non ortogonali.

3.3 Cartella `time`

Con il termine generico di `time` sono indicate le cartelle usate da **OpenFOAM**[®] per i dati di ingresso ed uscita. Tali cartelle contengono le grandezze calcolate dal codice ad eccezione della cartella iniziale, solitamente chiamata `0`, in cui sono contenuti le condizioni al contorno ed i dati iniziali. Si riporta un esempio di *file*:

```

1 internalField    uniform 100000;
2 boundaryField
3 {
4   inlet
5   {
6     type          fixedValue;
7     value         uniform 100000;
8   }
9   outlet
10  {
11    type          fixedValue;
12    value         uniform 100000;
13  }
14  wall
15  {
16    type          zeroGradient;
17  }

```

La prima riga contiene informazioni riguardanti l'`internalField`: ovvero l'inizializzazione della grandezza sulla geometria. La sezione `boundaryField` contiene la definizione delle condizioni al contorno. Avviene mediante il richiamo della `patch` dichiarata nella generazione della griglia di calcolo ed attraverso le tipologie `primitive type` o `derived type` di fig 3.4:

- `primitive type`: consiste nell'associare un valore numerico ad una variabile di campo:
 - `fixedValue`: impone un valore fisso su tutta la regione interessata. Equivale ad imporre una condizione al bordo di Dirichlet;
 - la condizione al bordo di Neumann può essere implementata come:
 - * `fixedGradient`: consente la definizione di un gradiente in direzione normale alla superficie su cui è applicata la condizione al bordo;
 - * `zeroGradient`: impone il gradiente in direzione normale nullo;
- `derived type`: sono derivate dalla tipologia primitiva andando crearne di nuove:

- `totalPressure`: viene definita la pressione totale come $p_0 = p + \frac{1}{2}\rho|U|^2$;
- `oscillatingFixedValue`: fissato un valore di riferimento iniziale quest'ultimo viene fatto variare con andamento sinusoidale nel tempo.

Capitolo 4

Geometrie analizzate

La ricerca dei parametri fondamentali e, quindi la validazione del metodo di lavoro per il calcolo della funzione di trasferimento di un condotto nel caso specifico di silenziatori per uso automobilistico si è svolta analizzando cinque geometrie relativamente semplici di cui si dispongono i risultati di campagne sperimentali.

4.1 Descrizione delle geometrie dei silenziatori

Le prime geometrie considerate, fig. 4.1, sono semplici poiché presentano assi di simmetria. Questa caratteristica aiuta la schematizzazione sia in 2D che 3D nell'analisi fluidodinamica. La geometria con camera di espansione di 130 mm verrà indicata nel seguito con "A", quella con camera di 178 mm sarà invece indicata con "B". I silenziatori "A" e "B" hanno le dimensioni riportate in Tab. 4.1.

		A	B
Tratto iniziale	D [mm]	77.5	77.5
	L [mm]	106	106
Tratto centrale	D [mm]	73.6	73.6
	L [mm]	238	238
Camera espansione	D [mm]	130	178
	L [mm]	178	140
Tratto finale	D [mm]	77.5	77.5
	L [mm]	52	52
Distanza microfono uscita	R [mm]	170	170

Tabella 4.1: Dimensioni geometrie "A" e "B"

In corrispondenza di ogni cambio di sezione si hanno delle discontinuità che possono influenzare il comportamento del fluido. La discontinuità di maggiore interesse è situata nella zona terminale.

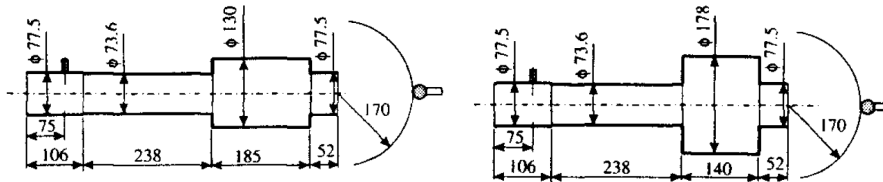


Figura 4.1: Geometrie A con diametro della camera di espansione pari a 130 mm, sinistra, e B di 178 mm, destra.

Le altre geometrie prese in esame non presentano più un asse di simmetria ma sono dotate di un piano di simmetria. A differenza delle precedenti non hanno una camera di espansione, bensì un risonatore a colonna, fig. 4.2 che in seguito verrà indicata con geometria “C”, e un risonatore di Helmholtz con diversa altezza della camera di espansione, fig. 4.3 e fig. 4.4, a cui ci si riferirà con “D” ed “E” rispettivamente, il cui asse è posto a 881 mm dalla sezione di ingresso. In Tab. 4.2 sono riportate le dimensioni di ogni tratto.

		C	D	E
Tratto iniziale	D [mm]	77.5	77.5	77.5
	L [mm]	151	151	151
Tratto centrale	D [mm]	42	42	42
	L [mm]	580	580	580
Risonatore a colonna	D [mm]	45.5	45.5	45.5
	H [mm]	200	205	205
	D_H [mm]	150	150	150
Tratto finale	D [mm]	45.5	45.5	45.5
	L [mm]	450	450	450
Camera di Helmholtz	D [mm]	-	88	88
	L [mm]	-	90	60
Distanza microfono uscita	R [mm]	200	200	200

Tabella 4.2: Dimensioni geometrie “A” e “B”

4.2 Descrizione delle prove sperimentali

L'apparato di misura, rappresentato in fig. 4.5, consiste in una camera semi-anechoica dove, tramite due microfoni, si misura la pressione acustica all'in-

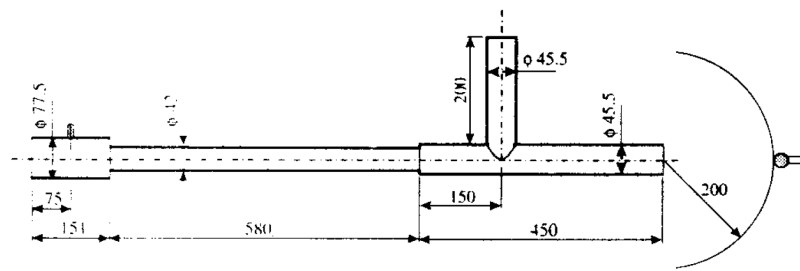


Figura 4.2: Geometria C con risonatore a colonna.

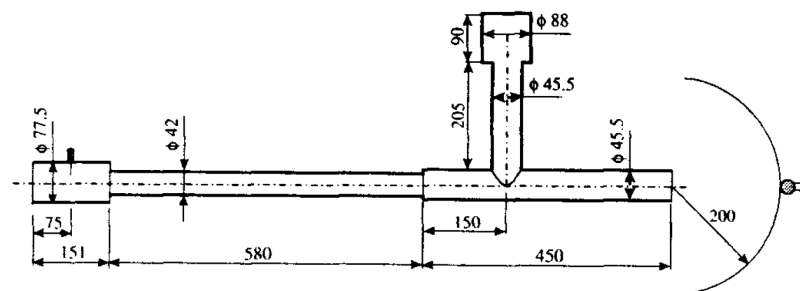


Figura 4.3: Geometrie D con risonatore di Helmholtz, altezza camera di 90 mm.

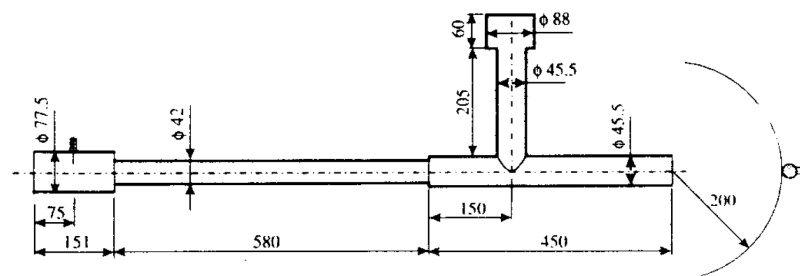


Figura 4.4: Geometrie E con risonatore di Helmholtz, altezza camera di 60 mm.

terno del condotto ad una data distanza, 75 mm dall'apertura, ed all'uscita in ambiente ad una data distanza, variabile in base alla geometria e riportata nelle tabelle Tab. 4.1 e 4.2.

L'influenza del pavimento della camera, nonché le onde riflesse dovute al riverbero, sono state ridotte tramite un tappeto assorbente, posizionato sotto la terminazione aperta per ottenere una radiazione quasi sferica: è possibile approssimare la sorgente come in campo libero. La sorgente sonora usata è stata un altoparlante, isolato tramite un box, in grado di generare rumore bianco con flusso a media nulla e ampiezza fissata a 5 Pa.

L'analisi dello spettro è stata eseguita tramite la trasformata di Fourier

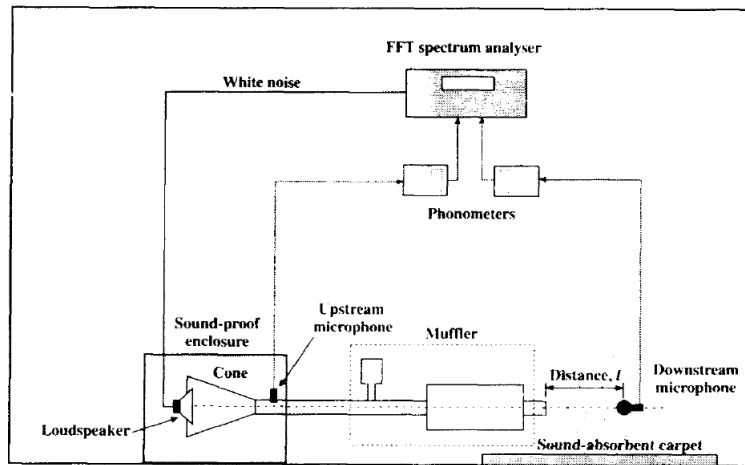


Figura 4.5: Schema dell'apparato sperimentale.

dei due segnali ed è stata quindi valutata la funzione di trasferimento come spiegato nel capitolo precedente.

Nel *range* di frequenze tra 20Hz e 250Hz, i risultati ottenuti per via sperimentale non sono molto attendibili, perché l'altoparlante utilizzato presenta una bassa efficienza acustica a tali frequenze.

4.3 Discretizzazione del dominio spaziale

Una delle prime operazioni da eseguire per procedere con un'analisi fluidodinamica è la preparazione della geometria, che consiste nella creazione della griglia di calcolo sul dominio geometrico tramite volumi di controllo.

La griglia di calcolo che si andrà a generare deve rispettare alcuni parametri, funzioni degli obiettivi preposti nell'analisi. Inoltre, poiché le equazioni verranno risolte nei volumi di controllo così definiti, la qualità finale della *mesh* avrà un impatto anche sulla qualità finale del risultato e sulla stabilità stessa della simulazione.

I parametri di controllo presi in esame durante la fase di generazione sono

- *aspect ratio*, cioè il rapporto tra la lunghezza massima e minima dei lati delle celle. Quando è unitario rappresenta una cella equilatera, mentre negli altri casi la cella ha una dimensione predominante, fig. 4.6.
- *equiangle skewness* che misura il grado di deformazione di una cella. Il controllo viene fatto sugli angoli massimi e minimi presenti sulla faccia

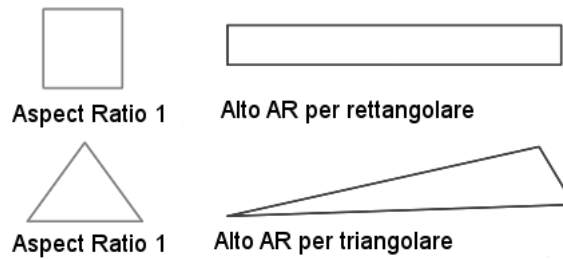


Figura 4.6: Esempio *aspect ratio*.

della cella, ed è così definito

$$\max \left| \frac{\theta_{max} - \theta_e}{180 - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{min}}{180 - \theta_e} \right| \quad (4.1)$$

dove θ_{max} è il massimo angolo presente, θ_{min} il minimo e θ_e rappresenta il caso di angoli tutti uguali tra loro, es. 60 per facce triangolari e 90 per facce quadrate.

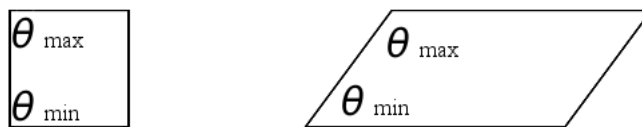


Figura 4.7: Esempio *skewness*: a sinistra cella con valore nullo, a destra cella con valore non nullo.

- *non-orthogonality*, cioè il segmento che unisce i centroidi di due volumi di controllo adiacenti tra loro. Deve risultare normale alle facce per cui passa tale congiungente.

Data la semplicità delle geometrie si sono analizzate diverse casistiche di griglia di calcolo: 2D, **wedge** e 3D.

Le griglie 2D e **wedge** si distinguono tra loro per la forma che assume la geometria: nel caso di **wedge** si considera un solo “spicchio” del condotto mentre nella 2D il condotto viene sviluppato, rispetto al suo asse di simmetria, come avente estensione laterale infinita. Questa distinzione è dovuta al fatto che si assume la velocità in direzione normale al piano identicamente nulla per la 2D; invece nella geometria **wedge** può non essere nulla a causa della presenza di una componente circonferenziale.

La dimensione di cella è stata scelta a priori e posta pari a 4 mm, 2 mm ed 1 mm sia per la direzione assiale che radiale. È stata effettuata quindi una verifica per evitare l'errore di *aliasing* nei dati numerici. La lunghezza d'onda minima in analisi, corrispondente alla massima frequenza, è data da

$$\lambda = \frac{a}{f} \tag{4.2}$$

dove a è la celerità del suono, 340 m/s a 293 K, 1.204 kg/m³ e 101325 Pa, ed f la massima frequenza considerata pari a 2000 Hz. Si ottiene un valore di 170 mm che risulta di due ordini di grandezza superiore alle dimensioni di cella scelta, ponendosi quindi in una situazione di sicurezza.

4.3.1 Mesh 2D

Per generare le *mesh* in 2D, ed anche per la griglia *wedge*, una volta definito il dizionario di riferimento `blockMeshDict`, è stata usata l'applicazione `blockMesh` di `OpenFOAM`[®]. Con tale codice è possibile generare una griglia di calcolo con celle esaedriche, fig. 4.8, che permette di ottenere una buona qualità della stessa.

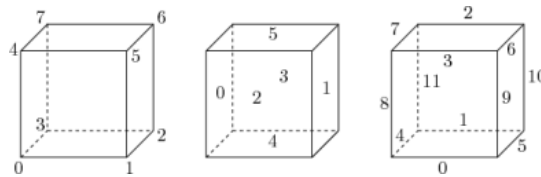


Figura 4.8: Possibili celle esaedriche.

Si è posta attenzione alla suddivisione di questo dominio in blocchi per avere una perfetta coincidenza delle celle nelle zone di discontinuità geometrica presenti. Tali blocchi sono rappresentati in fig. 4.9 per quanto riguarda la geometria “A” con camera di espansione avente diametro di 130 mm, ma il procedimento risulta il medesimo per le altre.



Figura 4.9: Esempio blocchi griglia.

Come è possibile notare ancora dalla fig. 4.9 sono state sfruttate le simmetrie presenti, rendendo la griglia molto leggera in termini di numero di celle finali.

La griglia di calcolo 2D risulta pertanto costituita da una dimensione pari ad uno spessore di 1 mm nella direzione Z, in direzione X si è mantenuta la dimensione reale del condotto ed in direzione Y si è considerato metà diametro. In tab. 4.3 sono riportate il numero di celle per ogni geometria.

	Dimensione mesh		
	4 mm	2 mm	1 mm
A	1897	7062	27359
B	1915	7166	27773
C	4574	17341	67785
D	6459	24494	96443
E	6458	24494	96443

Tabella 4.3: Numero di celle per ogni geometria e dimensione di griglia 2D.

Con tali valori di cella si sono eseguiti i controlli di *aspect ratio*, tab. 4.4, e *skewness*, tab. 4.5.

Il valore di *aspect ratio*, come prevedibile, risulta ottimo solo per le discretizzazioni aventi dimensione della griglia pari ad 1 mm. Le altre griglie di calcolo presentano valori elevati. Questo perché, nelle *mesh* da 2 mm e da 4 mm, la dimensione laterale rimane sempre unitaria e pari ad 1 mm e di conseguenza si ottengono celle che risultano avere una dimensione preponderante rispetto alle altre, fig. 4.10.

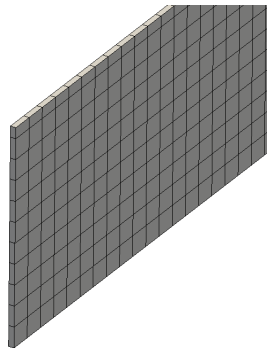


Figura 4.10: Dettaglio celle allungate con griglia di 4 mm.

Per quanto concerne lo *skewness*, i valori ottenuti risultano essere tutti molto piccoli: ciò indica che le celle generate non presentano particolari deformazioni. In verità la *mesh* supera tutti i test, compreso anche il *non-orthogonality*, ed è possibile affermare di avere una griglia di calcolo ben strutturata.

	Dimensione mesh		
	4 mm	2 mm	1 mm
A	3.97	1.99	1.03
B	3.97	1.99	1.03
C	3.99	1.99	1.14
D	3.99	2.26	2.29
E	3.98	3.39	3.43

Tabella 4.4: Tabella controllo *Aspect Ratio*.

	Dimensione mesh		
	4 mm	2 mm	1 mm
A	3.41e-7	6.67e-7	2.61e-6
B	3.41e-7	6.67e-7	2.61e-6
C	3.76e-7	7.22e-7	2.89e-6
D	8.15e-7	3.09e-6	1.24e-5
E	1.22e-6	4.65e-6	1.85e-5

Tabella 4.5: Tabella controllo *skewness*.

4.3.2 *Mesh wedge*

Si è creata una griglia di calcolo *wedge* dove, al posto di avere in direzione Z una dimensione unitaria, si crea uno “spicchio” come mostrato in fig. 4.11. Per ottenere tale risultato vengono fatti coincidere dei vertici in modo da avere una faccia che degenera in un segmento, fig. 4.12. L’angolo di apertura di questo “spicchio” non deve essere superiore ai 5 gradi di apertura, come richiesto dal codice di calcolo.

Per le geometrie con risonatore a colonna e risonatore di Helmholtz non è stato possibile sfruttare l’asse di simmetria e di conseguenza la griglia di calcolo *wedge*. Si è pertanto considerato solo il caso bidimensionale.

In tab. 4.6 sono riportati il numero di celle per tali geometrie. Nel caso delle *mesh wedge* i controlli eseguiti sono riportati in tab. 4.7 e 4.8.

	Dimensione mesh		
	4 mm	2 mm	1 mm
A	1859	6793	27032
B	1859	6793	27032

Tabella 4.6: Numero di celle per ogni geometria e dimensione di griglia *wedge*.

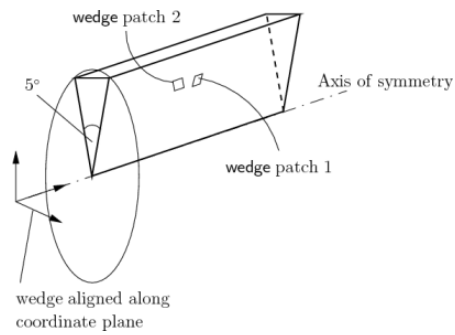


Figura 4.11: Esempio wedge.

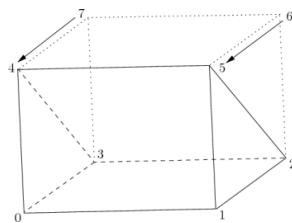


Figura 4.12: Esempio collasso cella per wedge.

	Dimensione mesh		
	4 mm	2 mm	1 mm
A	25.4	23.8	23.05
B	25.4	23.7	23.05

Tabella 4.7: Tabella controllo *Aspect Ratio* griglia wedge.

	Dimensione mesh		
	4 mm	2 mm	1 mm
A	0.33	0.33	0.33
B	0.33	0.33	0.33

Tabella 4.8: Tabella controllo *skewness* griglia wedge.

In questi casi si nota una crescita del valore dello *skewness*, dovuto allo “spicchio” ma ancora accettabile. Anche l’*aspect ratio* ha subito una crescita notevole ed è riconducibile alla struttura della griglia scelta. Fare collassare i due vertici equivale a considerare un lato di dimensione infinitesime e pertanto si ha una cella con deformazione elevata. Tali valori elevati non hanno presentato problemi di calcolo nelle simulazioni effettuate quindi non si sono eseguite operazioni atte alla modifica della geometria per ottenere dei valori di controllo migliori. Il controllo sulla non ortogonalità della cella viene superato.

4.3.3 *Mesh 3D*

Oltre alle *mesh* bidimensionali è stato preso in considerazione il caso tridimensionale. La geometria è stata disegnata con un *software CAD* e poi, una volta generata la griglia di calcolo, è stata esportata in **OpenFOAM®**.

Le geometrie con camera di espansione sono state ricreate per intero, andando a porre particolare attenzione alla discretizzazione spaziale del cerchio. Questo elemento, per ottenere un risultato il più omogeneo possibile, è stato suddiviso in figure geometriche più semplici: un quadrato centrale per ottenere una *mesh* il più regolare possibile e la restante sezione con quarti di corona circolare, come mostrato in fig. 4.13.

In questo modo è stato possibile ottenere una *mesh* strutturata con buone caratteristiche dei parametri di controllo scelti.

Le geometrie con la presenza di risonatori sono state analizzate sfruttando il piano di simmetria. In questo caso si è scelto di usare una griglia ibrida: strutturata nella maggior parte del dominio, non strutturata nella congiunzione del risonatore a colonna e del condotto principale i quali, avendo lo stesso diametro, non permettevano di ottenere una qualità accettabile.

In questa zona si sono usate celle piramidali e tetraedriche, ottenendo un valore di *skewness* massimo pari a 0.75 che risulta accettabile avendo come limite il valore di 1, in fig. 4.15 è evidenziata la cella con tale valore in rosso.

In queste geometrie tridimensionali si è usato un passo di discretizzazione diverso per la direzione assiale e per la direzione radiale. In direzione assiale si è cercato di mantenere costate il valore delle celle, pari a circa 5 mm, mentre in direzione radiale si è partiti con una dimensione minima di cella nel quadrato centrale pari a 2 mm che, allontanandosi, cresce fino ad un valore massimo di 6 mm.

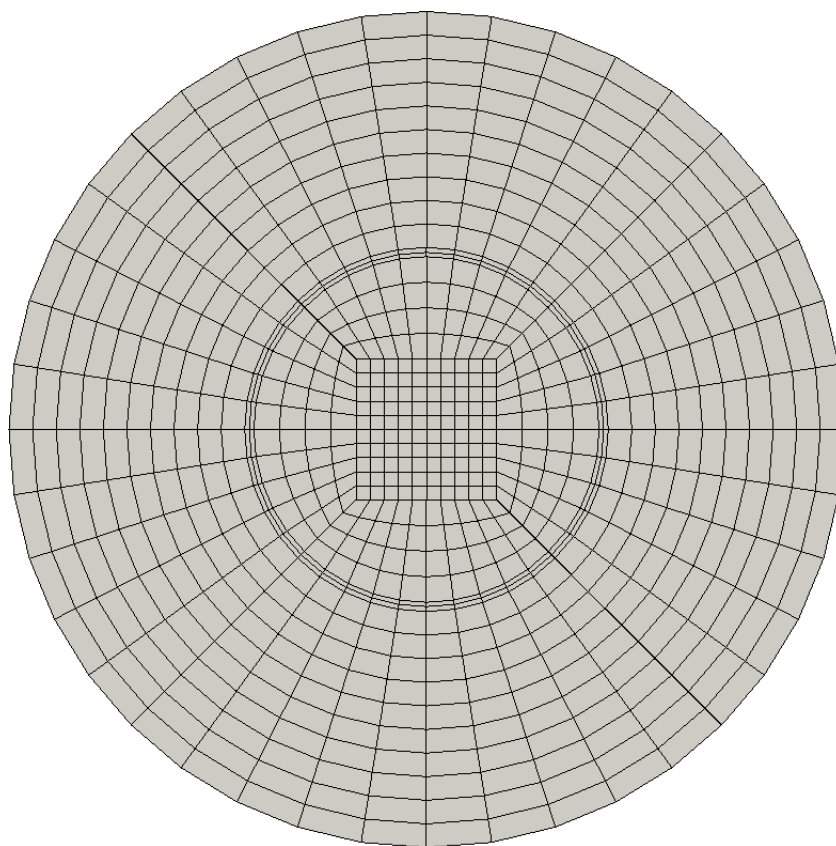


Figura 4.13: Esempio discretizzazione cerchio.



Figura 4.14: *Mesh* 3D risonatore colonna.

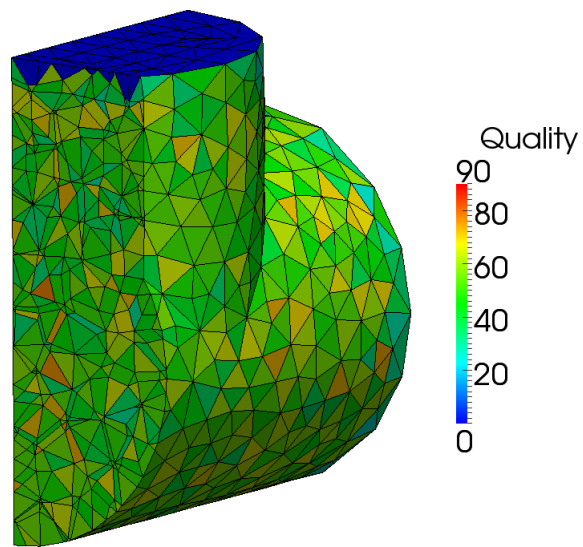


Figura 4.15: Dettaglio congiunzione a T e cella con massimo *skewness*.

Capitolo 5

Risultati e discussione

La validazione di un modello di calcolo si differenzia dalla verifica poiché quest'ultima consiste in una soluzione corretta delle equazioni, mentre con validazione si intende “risolvere le equazioni corrette”. Andare a risolvere le equazioni correttamente significa verificare che tale metodo sia consistente e abbia un buon ordine di accuratezza, in modo tale che, al diminuire del passo di discretizzazione, la soluzione approssimata tenda alla soluzione continua. Un ulteriore grado di difficoltà è rappresentato dalle assunzioni che vengono fatte e che si possono adattare al caso studiato. In questo senso il codice delle equazioni numeriche può essere pienamente verificato ma, se le assunzioni del modello sono sbagliate, non si ha validazione, perché non si ha coincidenza con i dati sperimentali.

Altro fattore importante da prendere in considerazione è la stabilità del metodo, poiché

- il codice può introdurre instabilità nella soluzione;
- la soluzione, scegliendo un metodo numerico non adatto al problema, può risultare stabile anche se il problema non lo è.

Esistono diverse strategie per raccogliere sufficienti dati atti a stimare l'errore nella risoluzione delle equazioni del fluido:

- risolvere lo stesso dominio su griglie con discretizzazione diverse. La valutazione dell'errore si ottiene con successivi affinamenti o rilassamenti della griglia;
- sfruttare lo stesso metodo numerico con gradi di accuratezza diversi tra loro;
- valutare l'errore tra la soluzione esatta sperimentale e la soluzione numerica.

In questo lavoro sono state prese in considerazione diverse *mesh* per poter avere un confronto tra i risultati sperimentali e numerici ottenuti. Oltre alle differenti griglie, sono stati usati anche due solutori che risolvono i sistemi di equazioni con metodi di discretizzazione diversi tra loro.

La validazione del modello ha richiesto la ricerca dei parametri ottimali sia per le condizioni al contorno che per i solutori.

5.1 Parametri generali delle simulazioni

I parametri che ora verranno analizzati sono risultati comuni sia al solutore `rhoCentralFoam` che al solutore `sonicFoam`. Per impostare questi parametri è stata usata la geometria B con una dimensione media della cella pari a 4 mm.

5.1.1 Condizioni al contorno

La condizione sulla temperatura è risultata ininfluenta ai fini dei risultati: non si sono osservati significativi scostamenti al suo variare. Si è imposto un valore uniforme per tutta la geometria, sia sulle pareti che sul fluido, pari a 293 K.

Il campo di velocità è stato inizializzato con un valore nullo nella geometria. Sulle pareti invece si è imposto un gradiente nullo. La scelta della condizione iniziale nulla è stata fatta per via dell'eccitazione in ingresso sulla pressione che dà origine ad una velocità diversa da zero nel fluido.

In ultima analisi si è studiato il comportamento delle condizioni al bordo per la pressione. È stata considerata una pressione di inizializzazione interna alla geometria uniforme. Sulla sezione di ingresso si sono prese in esame le seguenti condizioni di eccitazione:

- variazione finita di pressione in ingresso;
- pressione totale con andamento sinusoidale ad una data frequenza;
- pressione statica con andamento sinusoidale in un *range* di frequenze.

La prima condizione al contorno è stata utilizzata per cercare di simulare il comportamento di un impulso di pressione. I risultati ottenuti, variando il salto di pressioni tra il valore di riferimento ed il valore imposto, hanno dato risultati contraddittori: una distribuzione di pressione senza significato fisico. Inoltre la pressione interna tende ad uniformarsi al nuovo valore imposto.

La pressione totale con andamento sinusoidale ha presentato lo stesso inconveniente della analoga condizione al contorno per la velocità: non è in gradi di eccitare contemporaneamente un intervallo finito di frequenze.

L'ultima condizione al contorno introdotta è stata sviluppata in quanto non presente. È una funzione in grado di eccitare, con una sola analisi, l'intervallo di frequenze voluto. Permette diverse scelte operative, quelle più interessanti sono il rumore bianco e l'impulso. Hanno impostazioni simili, cambia però il modo in cui viene trattato il dato sull'ampiezza. Nel caso di rumore bianco l'ampiezza definita è il valore massimo di ogni singola frequenza eccitata, nel caso di impulso è scalata sul numero di frequenze da eccitare. In seguito si discuterà quale impostazione scegliere tra le due disponibili, con quale ampiezza di pressione e quale passo in frequenza.

L'indagine sulla sezione di uscita si è rivelata più semplice rispetto al caso del bordo di ingresso. Per la pressione è stato imposto un valore uniforme, pari alla pressione di riferimento, mentre per la velocità è stato imposto un gradiente nullo.

In tab. 5.1 si riportano le definizioni al contorno impostate con i valori di riferimento.

	Pressione	Temperatura	Velocità
Sezione di ingresso	Rumore bianco Impulso	Valore fisso, 293 K	Gradiente nullo
Sezione di uscita	$p_{ref} = 100000\text{Pa}$	Gradiente nullo	Gradiente nullo
Inizializzazione interna	Valore costante 100000 Pa	Valore costante 293 K	Valore costante $v_{x,y,z} = 0\text{m/s}$

Tabella 5.1: Riepilogo principali condizioni al contorno

5.1.2 Posizionamento delle sonde di lettura dei dati

Il calcolo della funzione di trasferimento è stato effettuato con i dati ottenuti dalla pressione in ingresso ed i valori di velocità in uscita, come spiegato nel capitolo 2.

Il posizionamento delle sonde di lettura è avvenuto seguendo quanto fatto nelle prove sperimentali, fig. 5.1.



Figura 5.1: Posizionamento sonde: a sinistra sonda di pressione, a destra sonda di velocità.

Per la sonda in ingresso è stato considerato un solo punto di misura perché il microfono è schematizzabile con uno strumento puntiforme.

Sulla sezione d'uscita sono state effettuate delle verifiche sul posizionamento della sonda come puntiforme e sull'eventualità di mediare il valore di velocità sull'intera sezione. Si è osservato che lo scostamento tra i risultati con valore puntiforme della velocità e valore mediato sulla sezione di uscita è pressoché trascurabile. Si è quindi deciso di usare la soluzione con sonda puntiforme anche per la lettura della velocità.

5.1.3 Durata delle simulazioni

La pressione di eccitazione risulta periodica. La durata di tale periodo è stata calcolata a priori, avendo noto il passo in frequenza usato e la frequenza minima. Per ricavare tale valore è stata usata la relazione Eq. (5.1), dove f_{mcd} è la frequenza massimo comune divisore tra la minima ed il passo:

$$\tau_0 = \frac{1}{f_{mcd}}. \quad (5.1)$$

Il valore τ_0 ha portato alla definizione del tempo totale τ_{tot} di simulazione dopo aver osservato il comportamento della pressione su 10 periodi ripetuti. In fig. 5.2 è riportato tale andamento. Com'è possibile osservare, si vede un comportamento periodico a partire dal secondo ciclo. Il primo periodo presenta una fase di transitorio iniziale ed assestamento: non è stato preso in considerazione.

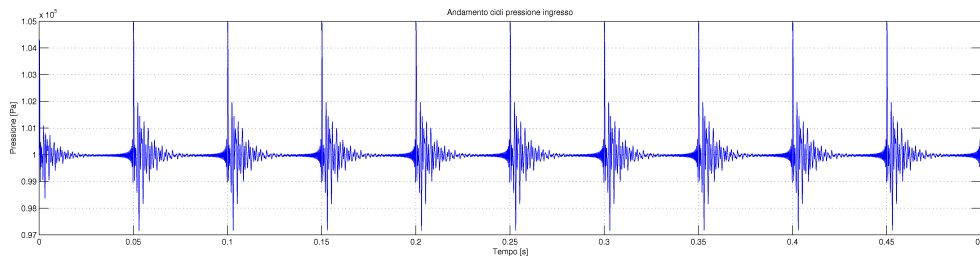


Figura 5.2: Andamento pressione con 10 cicli.

I tempi totali scelti, tenendo conto che il primo ciclo non è considerato, sono riportati in tab. 5.2.

f_0 [Hz]	f_{step} [Hz]	f_{mcd} [Hz]	τ_0 s	τ_{tot} s
20	20	20	0.05	0.20
20	10	10	0.10	0.50
20	5	5	0.05	0.60

Tabella 5.2: Riepilogo tempi cicli

5.1.4 Passo temporale utilizzato e numero di Courant

Il passo temporale Δt ed il numero di Courant sono intimamente legati tra loro per la definizione stessa del numero di Courant.

Il numero di Courant è un parametro che determina la stabilità del metodo risolutivo.

Nel primo solutore preso in esame, `rhoCentralFoam`, sono stati testati alcuni valori del numero di Courant, partendo da un valore massimo di 0.9 fino ad un minimo di 0.2, con passo temporale fissato e molto piccolo, $1 \cdot 10^{-6}$. Non si sono riscontrati benefici sulla stabilità della soluzione. In questo solutore, la definizione Courant usata è la seguente:

$$Co_{rCF} = \frac{(u + a_0)\Delta t}{\Delta x}. \quad (5.2)$$

La velocità considerata è quella relativa al fluido nel condotto sommata alla velocità del suono nel fluido in esame. Questa definizione ha portato ad avere un numeratore che in prima approssimazione è costante ed una piccola variazione del denominatore senza influenzare il valore finale. È stato scelto un valore pari a 0.7 per tutte le simulazioni.

Nel caso del solutore `sonicFoam` la definizione del numero di Courant è la seguente:

$$Co_{rCF} = \frac{u\Delta t}{\Delta x}. \quad (5.3)$$

A differenza del caso precedente, la velocità considerata è quella del fluido senza aggiungere il contributo dovuto alla velocità del suono. Questa definizione è un'approssimazione valida per fluidi a bassa velocità, incomprimibili, ma errata in questo caso. Pertanto si è imposto a priori il ΔT , provando i valori riportati in tab. 5.3.

Δt	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}
	Non Stabile	Non Stabile	Non Stabile	Stabile	Stabile

Tabella 5.3: Valori di passo temporale usati.

5.2 Analisi del solutore rhoCentralFoam

In questa sezione sarà analizzato il comportamento del solutore `rhoCentralFoam` al variare della condizione al contorno sulla pressione, della griglia di calcolo e del passo in frequenza. È stata considerata solo la geometria B con griglia di calcolo bidimensionale.

Gli schemi di discretizzazione temporale e spaziale usati in questo solutore sono riportati in tab. 5.4

Operatore	Metodo usato	
Derivata temporale	Eulero implicito	
Gradiente	Teorema di Gauss con interpolazione lineare	
Divergenza	Teorema di Gauss con interpolazione lineare	
Laplaciano	Teorema di Gauss con interpolazione lineare corretta	
Interpolazione	Densità ρ	Interpolazione <i>upwind</i>
	Velocità U	Interpolazione <i>upwind</i>
	Temperatura T	Interpolazione <i>upwind</i>
Gradiente sulla superficie	Interpolazione lineare corretta	

Tabella 5.4: Riepilogo schemi di differenziazione ed interpolazione del solutore `rhoCentralFoam`.

Per quanto riguarda i solutori lineari, con tolleranze assolute e relative, sono riportati in tab. 5.5.

	Solutore matriciale	Numero di iterazioni	Tolleranza assoluta	Tolleranza relativa
Velocità U	Gauss-Seidel	2	10^{-9}	0
Entalpia h	Gauss-Seidel	2	10^{-10}	0

Tabella 5.5: Riepilogo metodi risolutivi e parametri di controllo solutore `rhoCentralFoam`.

Imponendo una condizione al contorno sulla pressione di tipo rumore bianco e facendo variare l'ampiezza della pressione, come riportato in tab. 5.6, non si sono ottenuti risultati accettabili. È stato riscontrato un andamento frastagliato della funzione di trasferimento. I picchi inferiori non vengono calcolati correttamente.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	FdT: Fig.
B_RCF-01	4	Rumore bianco	50	20	5.3
B_RCF-02	4	Rumore bianco	500	20	5.4
B_RCF-03	4	Rumore bianco	1000	20	5.5
B_RCF-04	4	Rumore bianco	2000	20	5.6
B_RCF-05	4	Rumore bianco	3000	20	5.7

Tabella 5.6: Riepilogo casi geometria B al variare dell'ampiezza di pressione

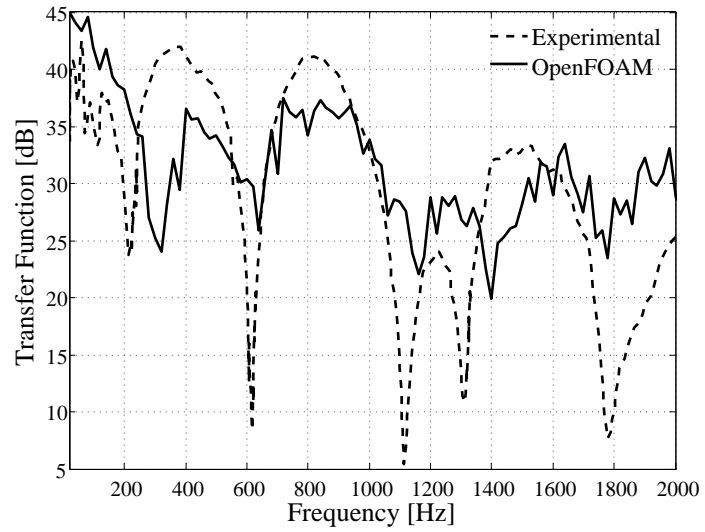


Figura 5.3: Funzione di trasferimento caso B_RCF-01.

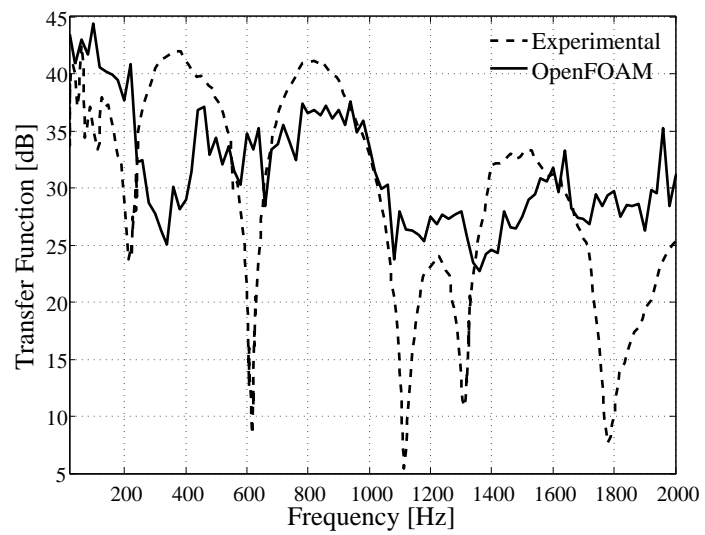


Figura 5.4: Funzione di trasferimento caso B_RCF-02.

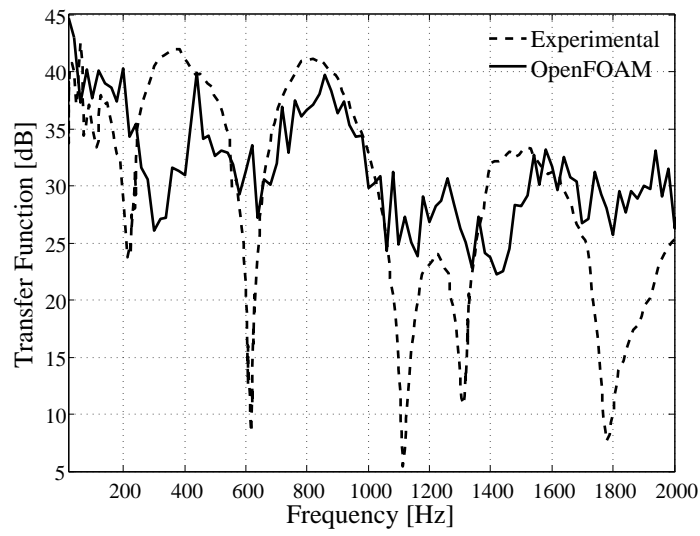


Figura 5.5: Funzione di trasferimento caso B_RCF-03.

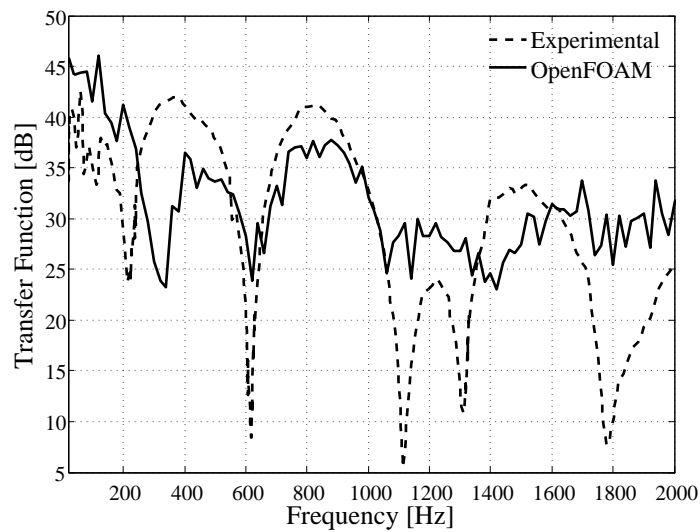


Figura 5.6: Funzione di trasferimento caso B_RCF-04.

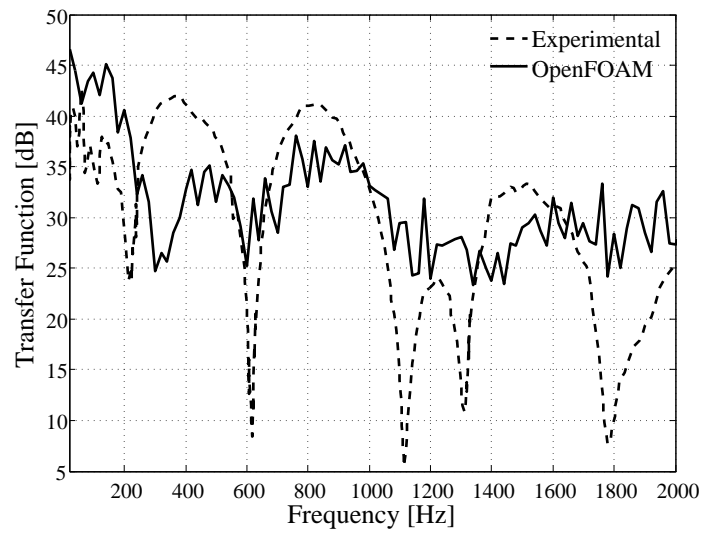


Figura 5.7: Funzione di trasferimento caso B_RCF-05.

Ritenendo l'andamento a tratti un problema di passo in frequenza troppo grande, si è provato ad abbassarlo, usando i valori riportati in tab. 5.7. I grafici della funzione di trasferimento sono rimasti seghettati.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	FdT: Fig.
B_RCF-06	4	Rumore bianco	500	10	5.8
B_RCF-07	4	Rumore bianco	500	5	5.9

Tabella 5.7: Riepilogo casi geometria B al variare del passo in frequenza.

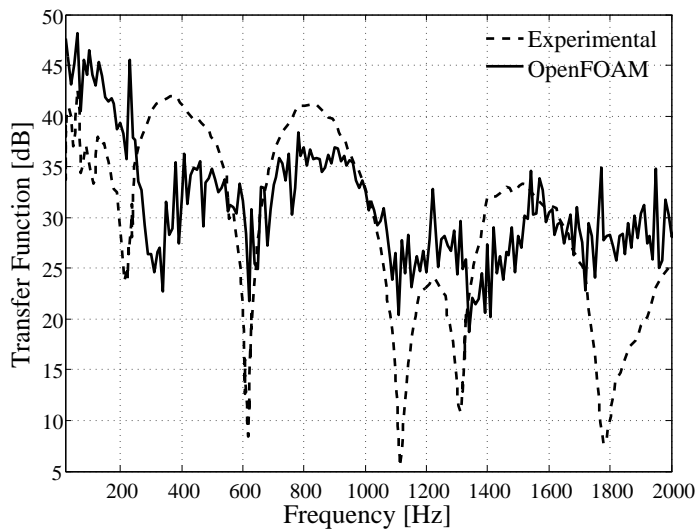


Figura 5.8: Funzione di trasferimento caso B_RCF-06.

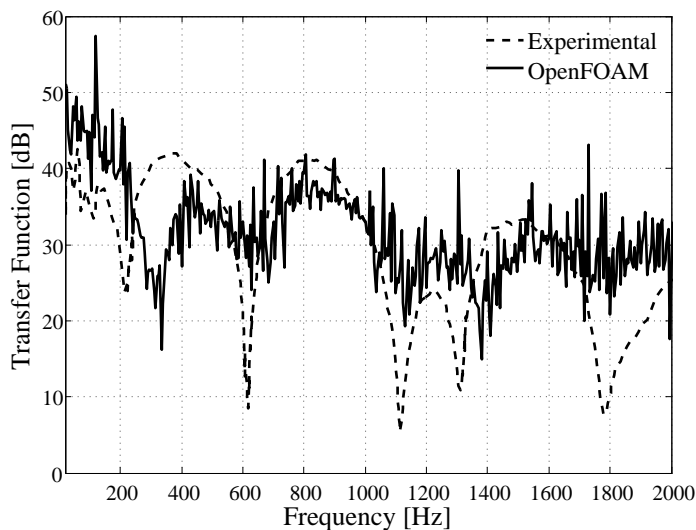


Figura 5.9: Funzione di trasferimento caso B_RCF-07.

Correlando tale andamento ad un problema legato alla dimensione della griglia di calcolo si è provato a ridurla, usando delle ampiezze di pressione elevate, tab. 5.8.

I risultati ottenuti anche in questi casi sono risultati errati.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	FdT: Fig.
B_RCF-08	2	Rumore bianco	1000	20	5.10
B_RCF-09	2	Rumore bianco	2000	20	5.11
B_RCF-10	2	Rumore bianco	3000	20	5.12

Tabella 5.8: Riepilogo casi geometria B al variare della griglia di calcolo.

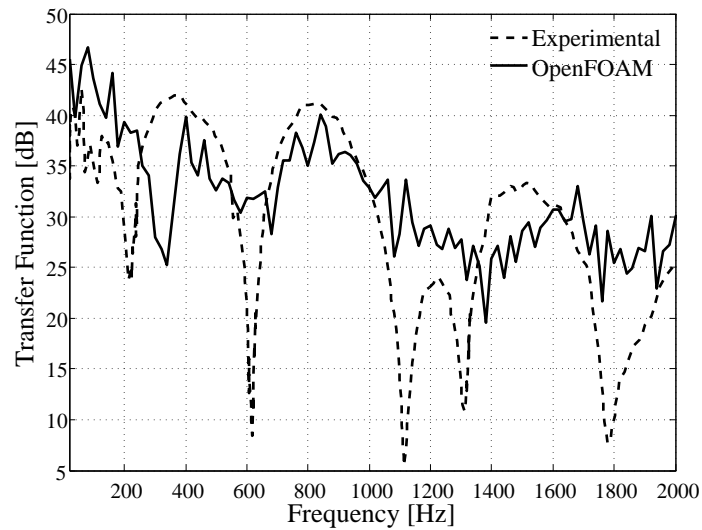


Figura 5.10: Funzione di trasferimento caso B_RCF-08.

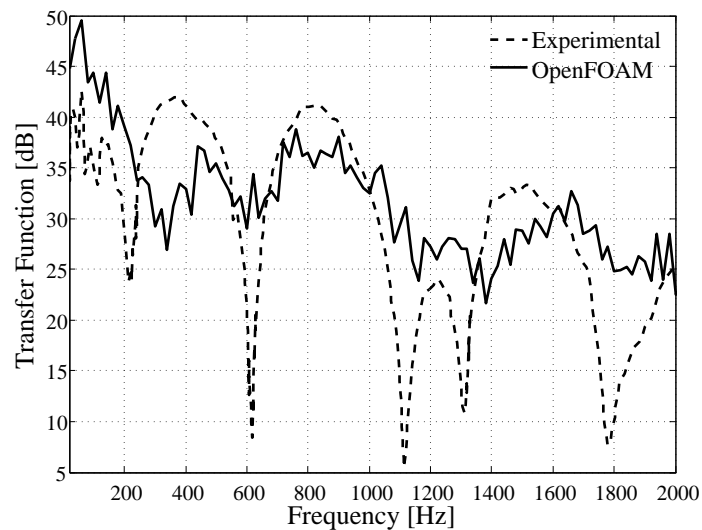


Figura 5.12: Funzione di trasferimento caso B_RCF-10.

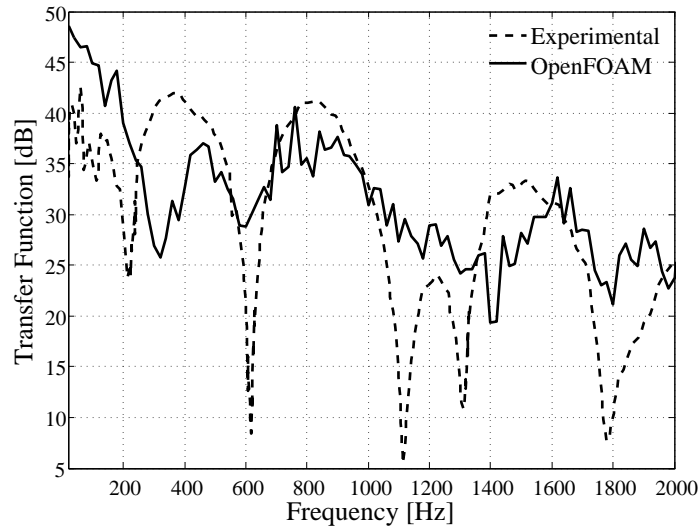


Figura 5.11: Funzione di trasferimento caso B_RCF-09.

Si è modificata la condizione al contorno sulla pressione, passando all'impulso. I valori delle grandezze utilizzate sono riportati in tab. 5.9.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	FdT: Fig.
B_RCF-11	4	Impulso	50	20	5.13
B_RCF-12	2	Impulso	50	20	5.14

Tabella 5.9: Riepilogo casi geometria B con impulso.

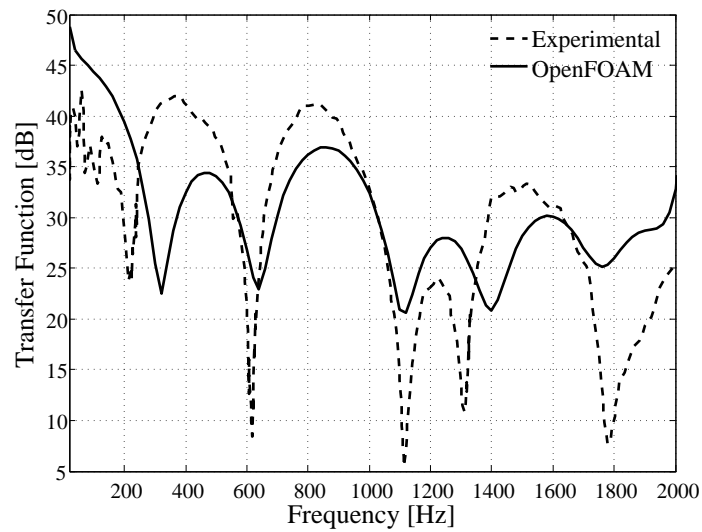


Figura 5.13: Funzione di trasferimento caso B_RCF-11.

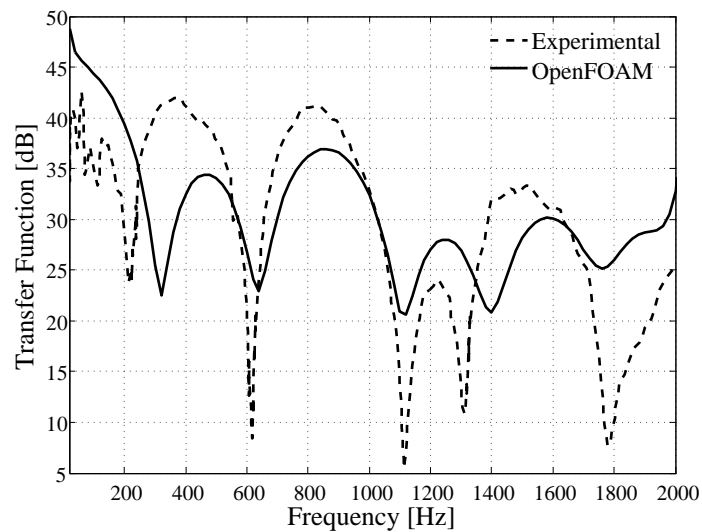


Figura 5.14: Funzione di trasferimento caso B_RCF-12.

Si può notare un netto miglioramento della simulazione, ottenendo un andamento regolare. Rispetto al caso sperimentale, i picchi inferiori non vengono computati correttamente. Questo fatto è un indice di errate dimensioni della geometria. Tra i 500/600 Hz ed i 1200 l'andamento è accettabile, ma il modulo dei picchi non corrisponde.

È stata verificata la dimensione della geometria utilizzata e si è aggiunta una lunghezza correttiva all'uscita calcolata con il numero d'onda corrispondente alla frequenza minima di interesse. I risultati ottenuti non hanno mostrato miglioramenti significativi e pertanto non sono stati riportati.

In ultima analisi si è testata la griglia di calcolo da 1 mm. Il caso più interessante è quello riportato in fig. 5.15 ed i valori usati sono in tab. 5.10. Si nota un netto miglioramento del comportamento, sia per l'andamento della funzione di trasferimento sia per il valore dei picchi. Il valore dell'ampiezza utilizzato è molto elevato e non corrispondente a quello usato nelle prove sperimentali.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	FdT: Fig.
B_RCF-13	1	Impulso	500	20	5.15

Tabella 5.10: Riepilogo casi geometria B con impulso.

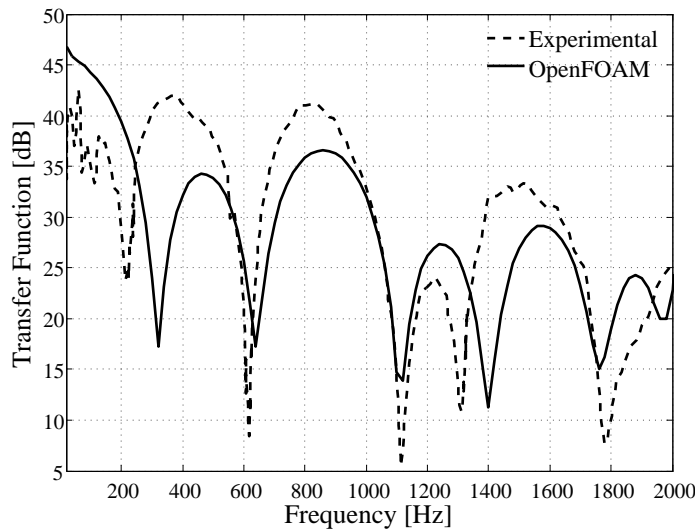


Figura 5.15: Funzione di trasferimento caso B_RCF-13.

5.3 Analisi del solutore sonicFoam

La condizione al contorno sulla pressione è stata fin dalle prime analisi l'impulso, poiché si è rivelato capace di dare un'eccitazione migliore rispetto al rumore bianco.

Si riportano anche in questo caso gli schemi di discretizzazione temporale e spaziale usati, tab. 5.11.

Operatore	Metodo usato	
Derivata temporale	Eulero implicito	
Gradiente	Pressione p	Teorema di Gauss con interpolazione lineare
	Velocità U	Teorema di Gauss con interpolazione lineare
	Altri termini	Teorema di Gauss con interpolazione lineare
Divergenza	Pressione p	Teorema di Gauss con interpolazione VanLeer
	Velocità U	Teorema di Gauss con interpolazione VanLeer
	Energia e	Teorema di Gauss con interpolazione VanLeer
Laplaciano	Pressione p	Teorema di Gauss con interpolazione lineare corretta
	Velocità U	Teorema di Gauss con interpolazione lineare corretta
	Energia e	Teorema di Gauss con interpolazione lineare corretta
Interpolazione	Interpolazione lineare	
Gradiente sulla superficie	Interpolazione lineare corretta	

Tabella 5.11: Riepilogo schemi di differenziazione ed interpolazione del solutore `sonicFoam`.

Per quanto riguarda i solutori lineari, con tolleranze assolute e relative, sono riportati in tab. 5.12. In questo caso si è modificando il valore della tolleranza assoluta, come spiegato nel seguito.

	Solutore matriciale	Precondizionamento	Tolleranza assoluta	Tolleranza relativa
Pressione p	PBiCG	DILU	10^{-6}	0
Velocità U	PBiCG	DILU	10^{-6}	0
Densità ρ	PCG	DIC	10^{-6}	0
Energia e	PBiCG	DILU	10^{-6}	0

Tabella 5.12: Riepilogo metodi risolutivi e parametri di controllo solutore `sonicFoam`.

5.3.1 Geometrie a camera di espansione

Griglia di calcolo wedge

Le geometrie a camera di espansione A e B sono state inizialmente studiate con la griglia di calcolo `wedge`, usando i valori riportati in tab. 5.13

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	Tol.	FdT: Fig.
A_SF-01	4	Impulso	50	20	10^{-6}	5.16
B_SF-01	4	Impulso	50	20	10^{-6}	5.17

Tabella 5.13: Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B.

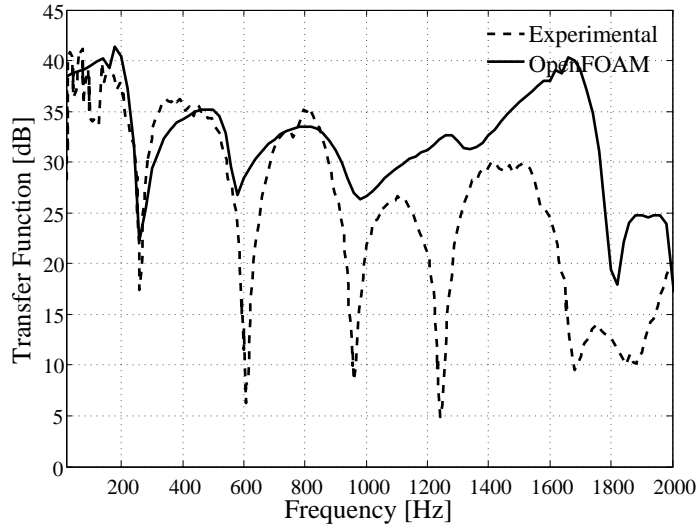


Figura 5.16: Funzione di trasferimento caso A_SF-01.

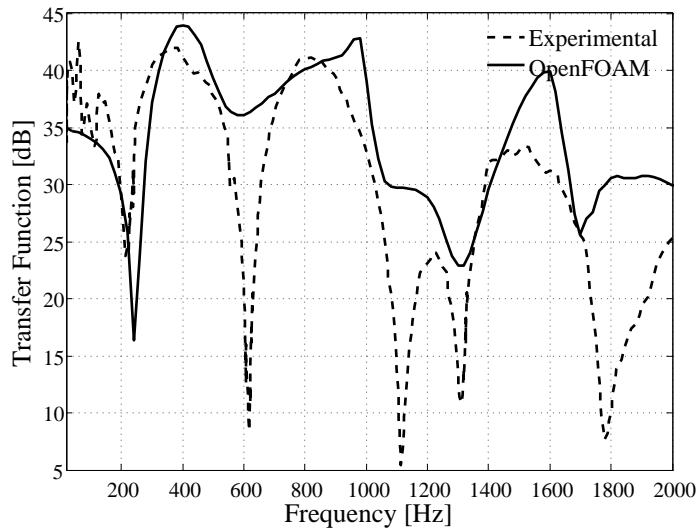


Figura 5.17: Funzione di trasferimento caso B_SF-01.

I grafici mostrano dei risultati molto discordanti. La griglia di calco-

lo *wedge* permette di calcolare correttamente il primo picco ma l'andamento della curva è sbagliato. Abbassando l'ampiezza di pressione fino al valore delle prove sperimentali, non si sono ottenuti né miglioramenti né peggioramenti. Si è agito sulla tolleranza assoluta del solutore, abbassandola drasticamente, tab. 5.14.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	Tol.	FdT: Fig.
A_SF-02	4	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.18
A_SF-03	2	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.18
A_SF-04	1	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.18
B_SF-02	4	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.21
B_SF-03	2	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.21
B_SF-04	1	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.21

Tabella 5.14: Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B con differenti griglie di calcolo e tolleranza.

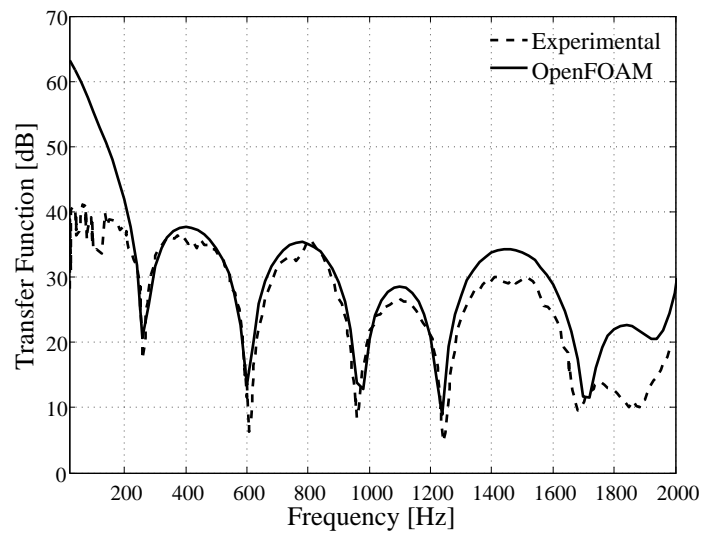


Figura 5.18: Funzione di trasferimento caso A_SF-02.

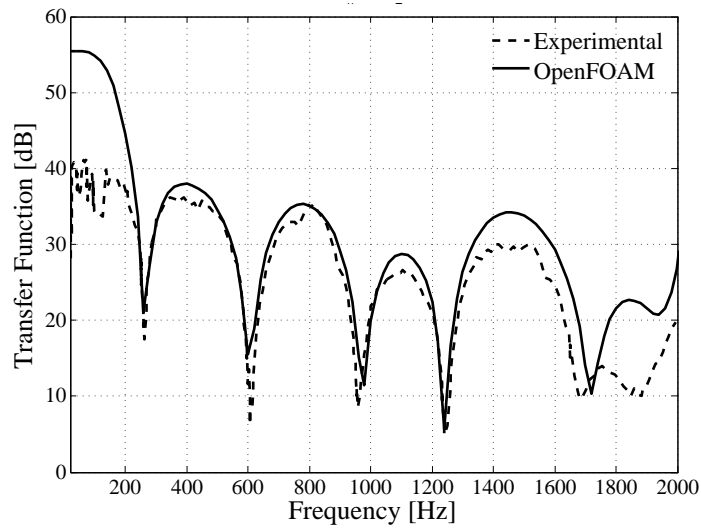


Figura 5.19: Funzione di trasferimento caso A_SF-03.

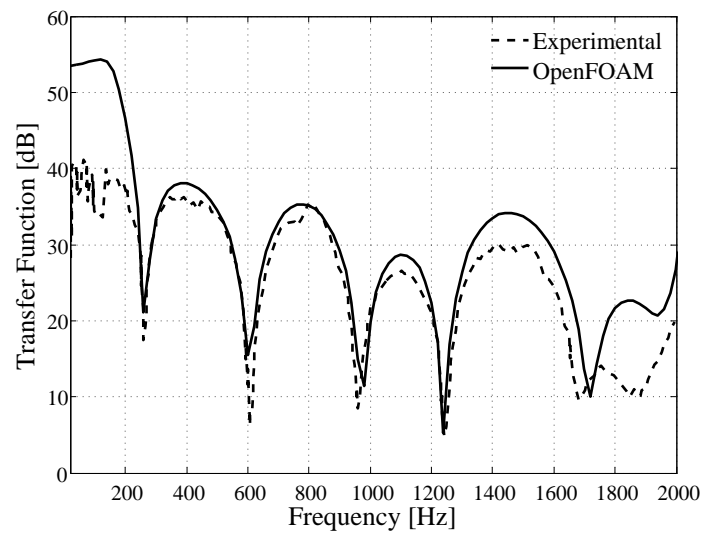


Figura 5.20: Funzione di trasferimento caso A_SF-04.

I grafici mostrano che le simulazioni effettuate con i parametri riportati in tab 5.14 danno ottimi risultati. Le geometrie A, con diverse griglie di calcolo, computano correttamente i picchi alle basse ed alle medie frequenze, sia massimi che minimi. Alle alte frequenze sussiste un piccolo scostamento che molto probabilmente è dovuto ad errori di misura nelle prove sperimentali di cui non si è tenuto conto.

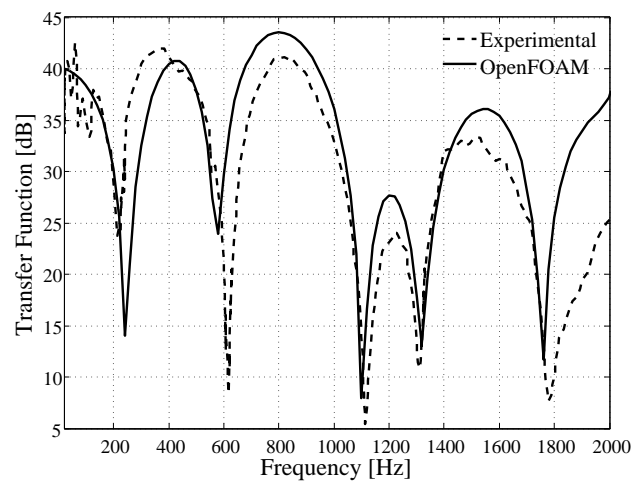


Figura 5.21: Funzione di trasferimento caso B_SF-02.

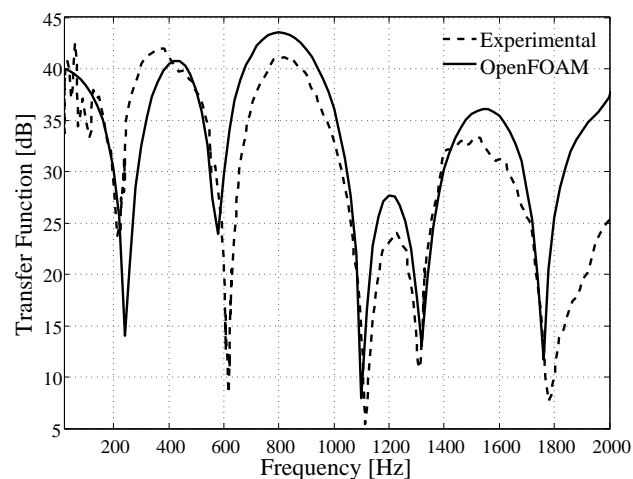


Figura 5.22: Funzione di trasferimento caso B_SF-03.

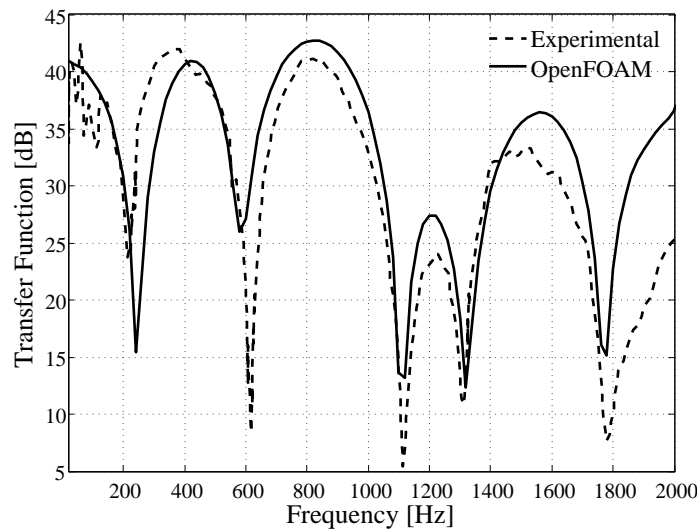


Figura 5.23: Funzione di trasferimento caso B_SF-04.

Le geometrie B presentano un sfasamento nei picchi inferiori, molto probabilmente legato alla forma della camera. Tale camera permette all'onda di pressione di assumere un andamento sferico e quindi l'ipotesi di onde piane non è più valida. È osservabile come il fluido, al medesimo passo temporale, abbia un comportamento analogo nelle due geometrie, figg. 5.24 e 5.25. Nell'istante successivo, si nota come l'onda sia ancora approssimabile ad onda piana nella geometria A, fig. 5.26. Nella geometria B, 5.27, assume invece un andamento sferico.

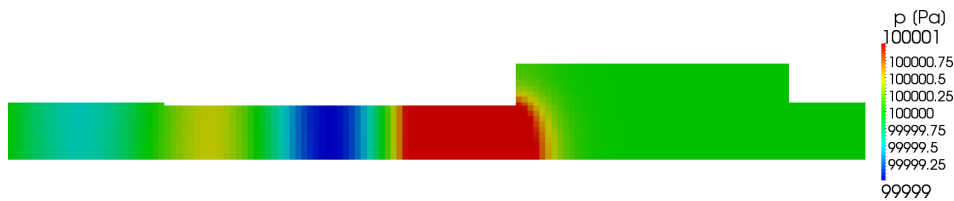
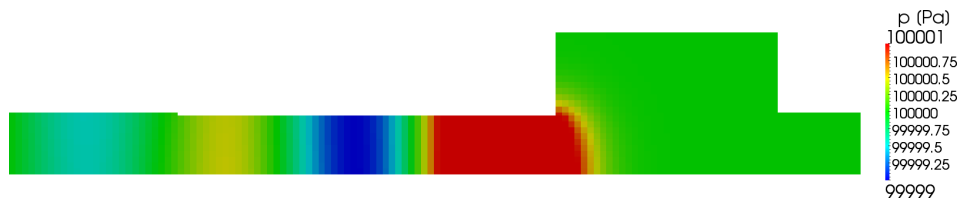
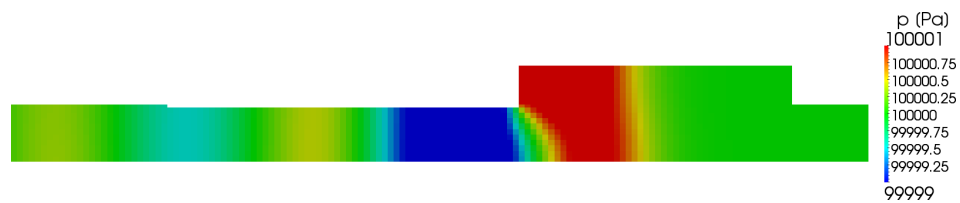
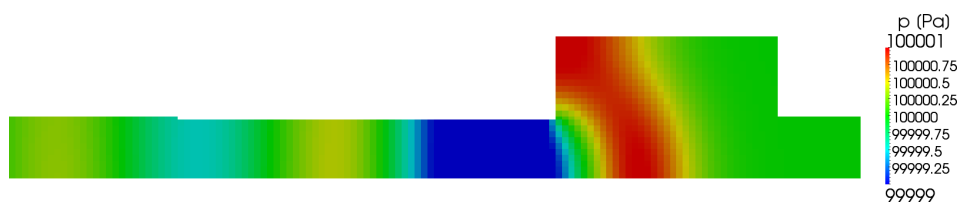


Figura 5.24: Andamento onda a 344 mm, geometria A, *time step* 10.

Figura 5.25: Andamento onda a 344 mm, geometria B, *time step* 10.Figura 5.26: Andamento onda a 344 mm, geometria A, *time step* 12.Figura 5.27: Andamento onda a 344 mm, geometria B, *time step* 12.

Griglia di calcolo bidimensionale

È stato simulato anche il comportamento delle griglie di calcolo bidimensionali, oltre a quella a “spicchi”, per le geometrie A e B.

Vengono riportati in tab. 5.15 i valori usati nelle analisi.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	Tol.	FdT: Fig.
A_SF-05	4	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.28
A_SF-06	2	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.29
A_SF-07	1	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.30
B_SF-05	4	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.31
B_SF-06	2	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.32
B_SF-07	1	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.33

Tabella 5.15: Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B con griglia di calcolo 2D.

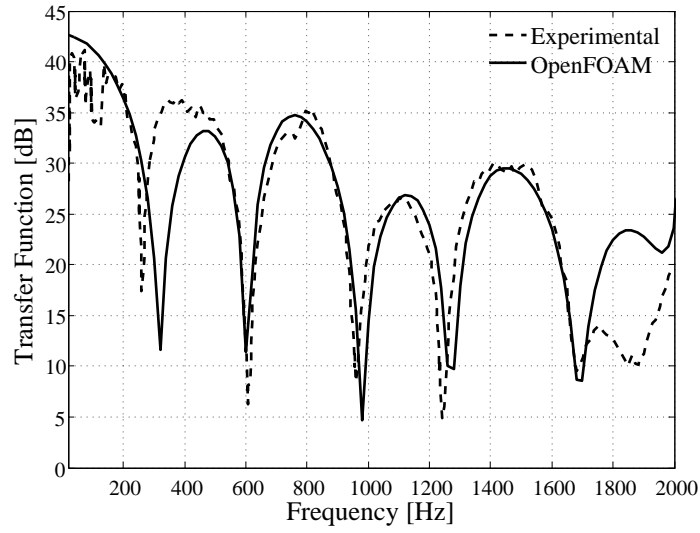


Figura 5.28: Funzione di trasferimento caso A_SF-05.

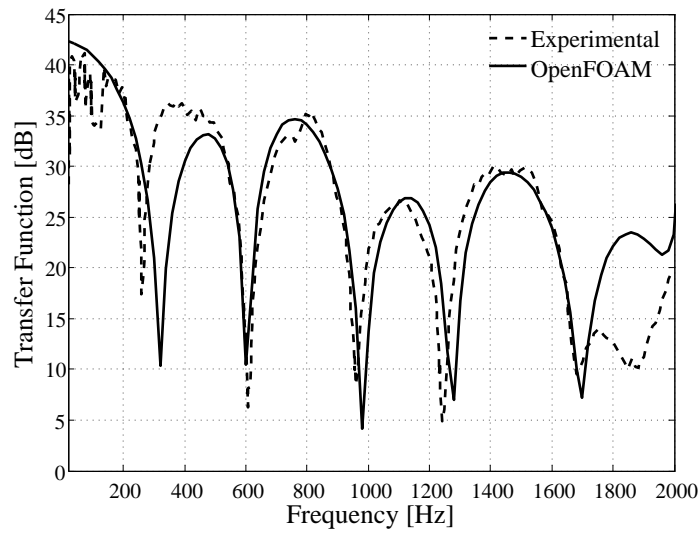


Figura 5.29: Funzione di trasferimento caso A_SF-06.

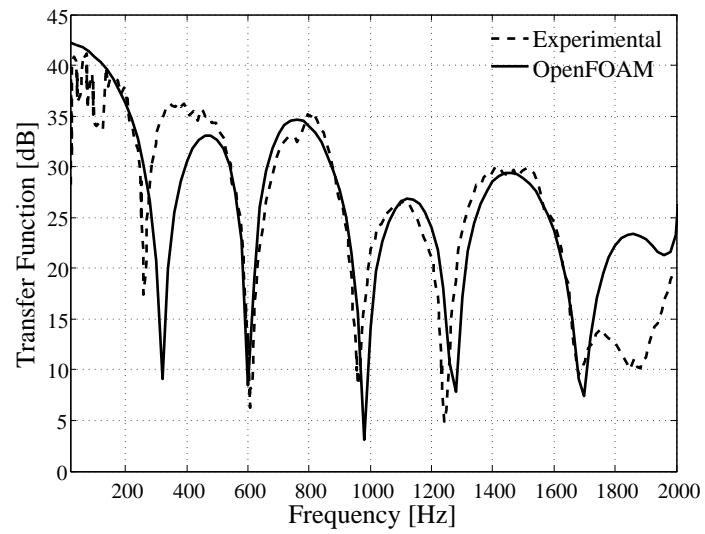


Figura 5.30: Funzione di trasferimento caso A_SF-07.

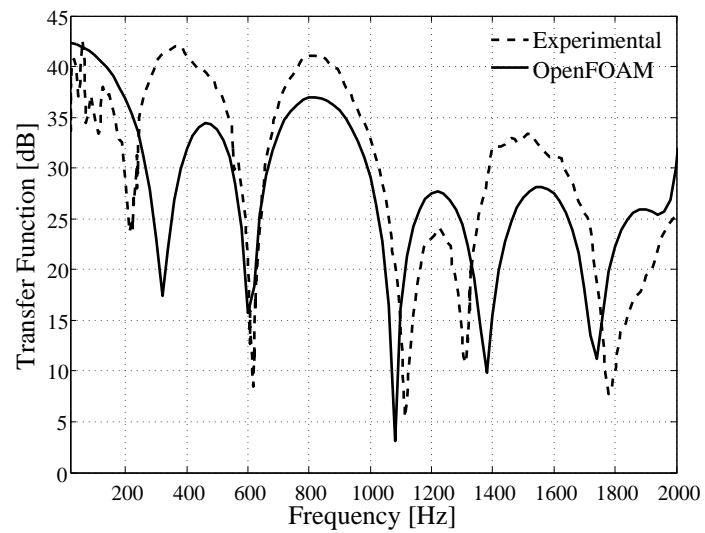


Figura 5.31: Funzione di trasferimento caso B_SF-05.

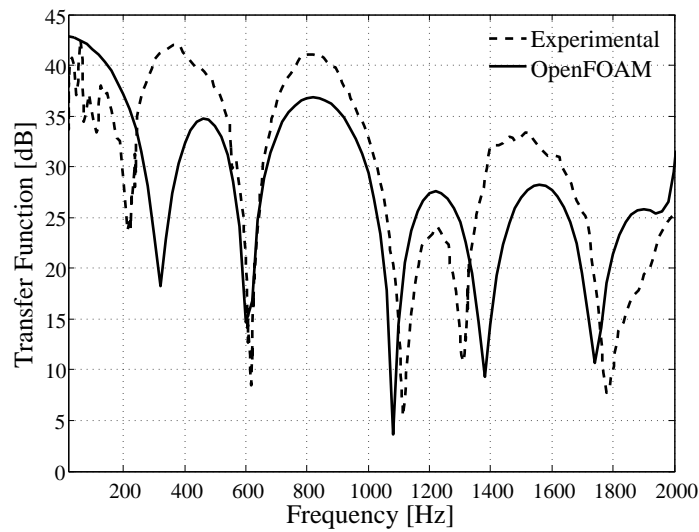


Figura 5.32: Funzione di trasferimento caso B_SF-06.

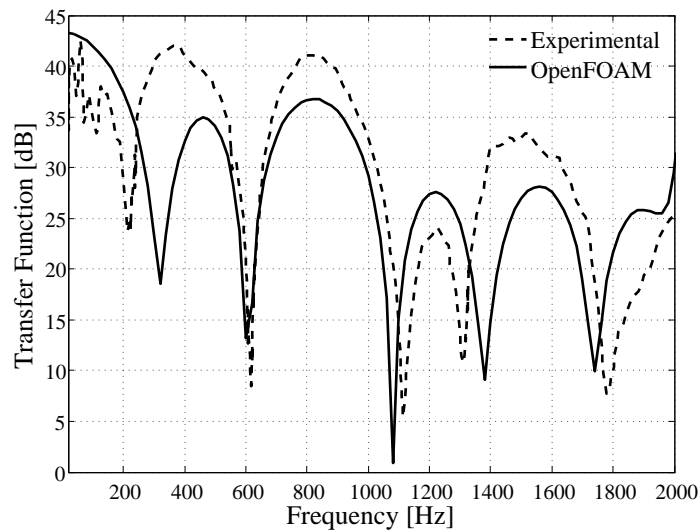


Figura 5.33: Funzione di trasferimento caso B_SF-07.

Nei grafici ottenuti si osserva uno sfasamento dei picchi inferiori, dovuto ad una errata schematizzazione della geometria. Infatti, considerando una geometria bidimensionale ciò equivale ad avere un'estensione infinita e quindi i risultati ottenuti non sono veritieri.

Griglia di calcolo tridimensionale

Per completezza di trattazione si riportano i risultati ottenuti con griglia di calcolo tridimensionale e parametri riportati in tab. 5.16.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	Tol.	FdT: Fig.
A_SF-08	5	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.34
B_SF-08	5	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.35

Tabella 5.16: Riepilogo casi geometrie a camera di espansione A e B con griglia di calcolo 3D.

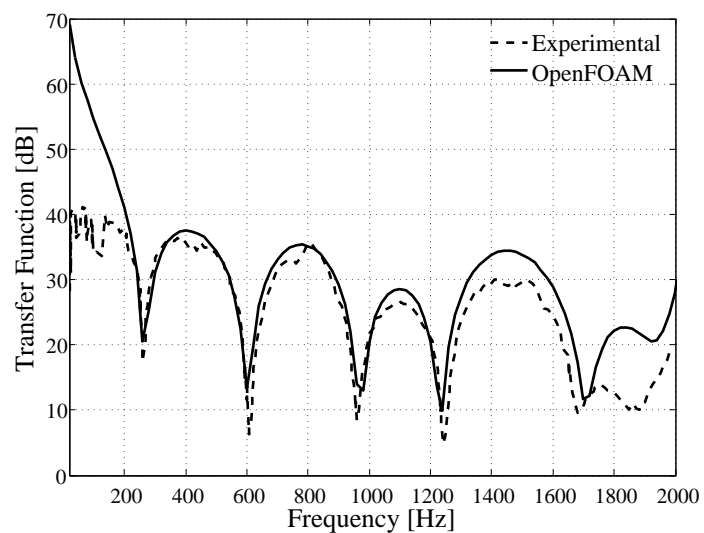


Figura 5.34: Funzione di trasferimento caso A_SF-08.

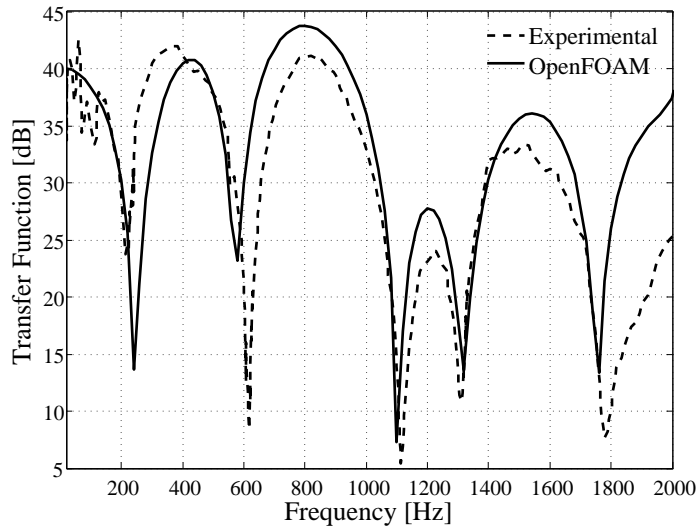


Figura 5.35: Funzione di trasferimento caso B_SF-08.

Confrontando i grafici riportati con quelli dei casi con griglia di calcolo *wedge*, figg. 5.18 e 5.21, non si riscontrano miglioramenti significativi.

Sono state eseguite anche simulazioni con geometrie tridimensionali, a cui si è aggiunta la lunghezza correttiva, che non ha portato miglioramenti.

5.3.2 Geometrie con risonatore a colonna e risonatori di Helmholtz

Griglia di calcolo bidimensionale

Le geometrie con risonatore a colonna, geometria C, ed i risonatori di Helmholtz, geometrie D ed E, sono state analizzate con le medesime impostazioni dei casi precedenti. Per le simulazioni sono state usate le geometrie bidimensionali nonostante la mancanza di un asse di simmetria. Questo fatto ha portato all'introduzione di una forte approssimazione. La decisione di usare comunque tali geometrie è stata presa per poter avere tempi di calcolo ridotti, di contro non è stato possibile considerare gli errori introdotti e ridurli in fase di analisi.

In tab. 5.17 sono riportati i parametri usati per la geometria C.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	Tol.	FdT: Fig.
C_SF-01	4	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.36
C_SF-02	2	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.37
C_SF-03	1	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.38

Tabella 5.17: Riepilogo geometria a colonna C con griglia 2D.

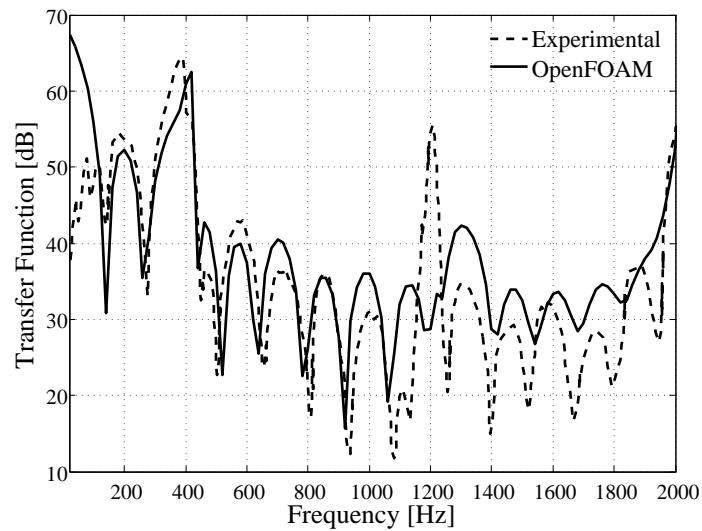


Figura 5.36: Funzione di trasferimento caso C_SF-01.

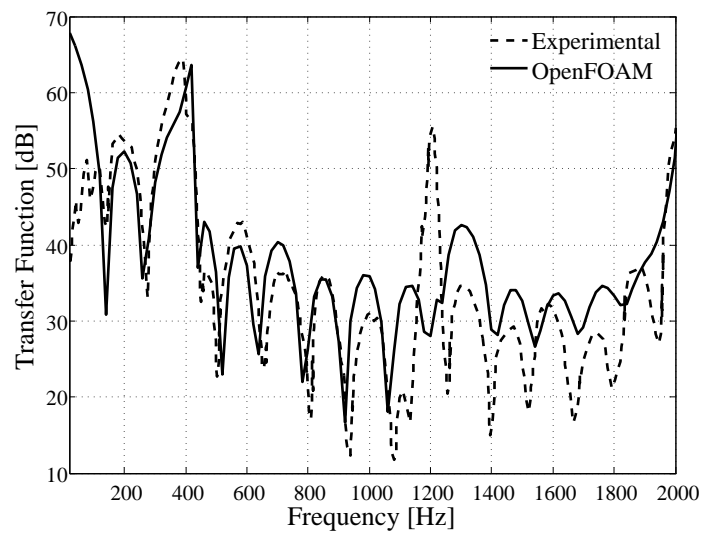


Figura 5.37: Funzione di trasferimento caso C_SF-02.

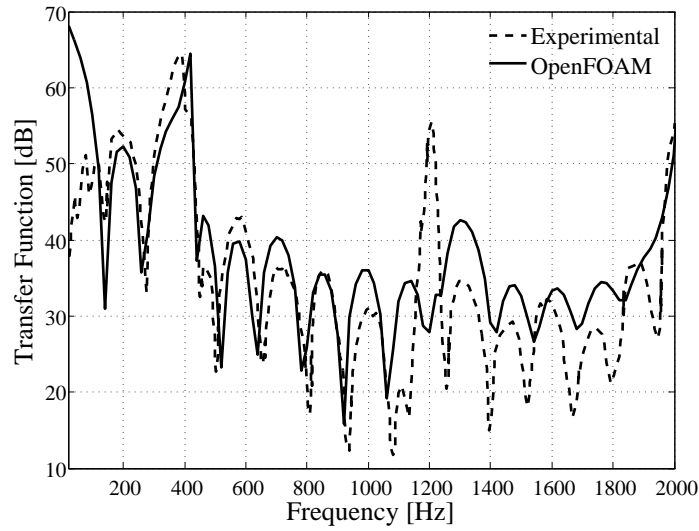


Figura 5.38: Funzione di trasferimento caso C_SF-03.

In tab. 5.18 sono riportati i parametri usati per le geometrie D ed E.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	Tol.	FdT: Fig.
D_SF-01	4	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.39
D_SF-02	2	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.40
D_SF-03	1	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.41
E_SF-01	4	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.42
E_SF-02	2	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.43
E_SF-03	1	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.44

Tabella 5.18: Riepilogo geometria con risonatore di Helmholtz D ed E con griglia 2D.

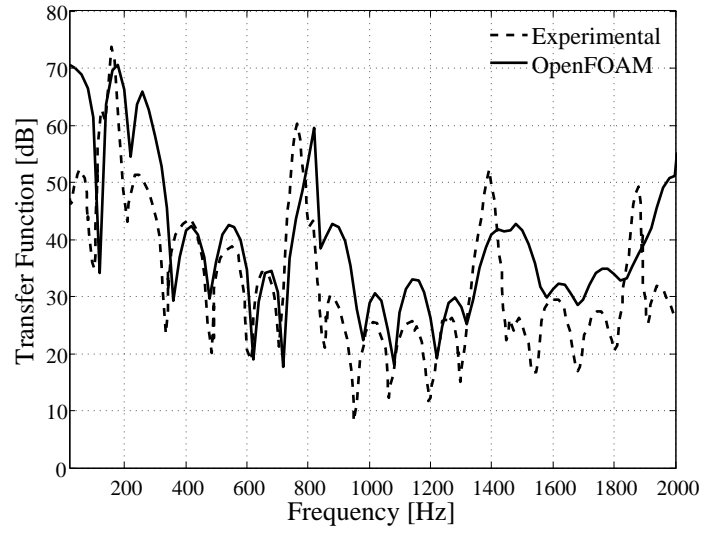


Figura 5.39: Funzione di trasferimento caso D_SF-01.

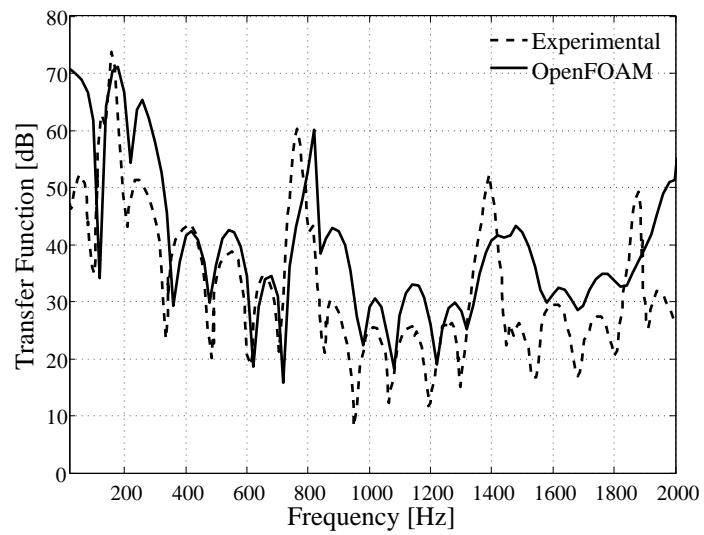


Figura 5.40: Funzione di trasferimento caso D_SF-02.

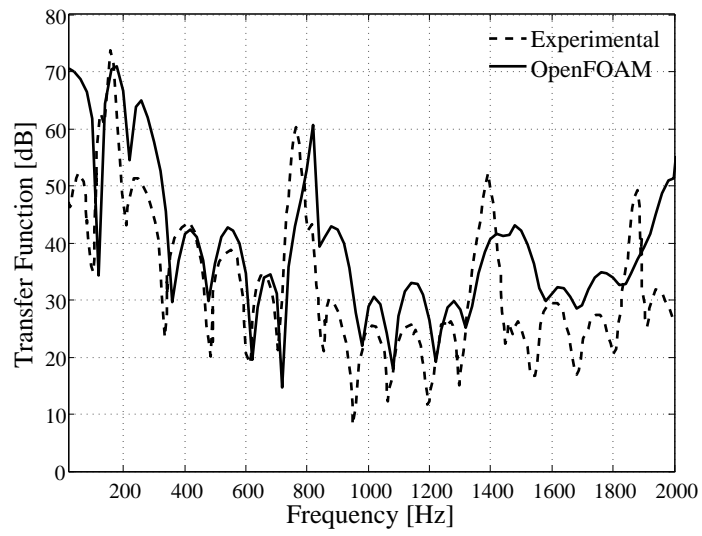


Figura 5.41: Funzione di trasferimento caso D_SF-03.

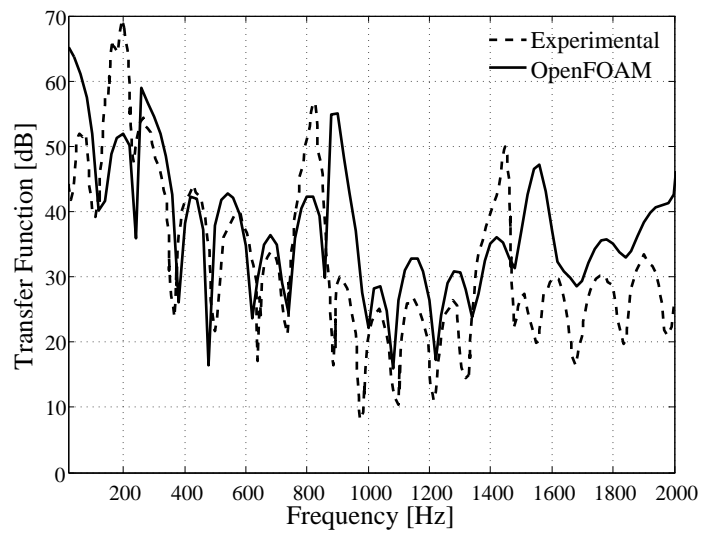


Figura 5.42: Funzione di trasferimento caso E_SF-01.

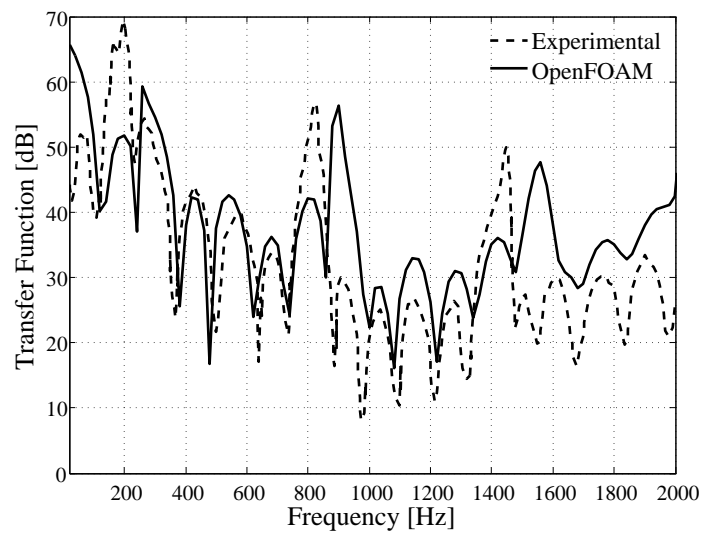


Figura 5.43: Funzione di trasferimento caso E_SF-02.

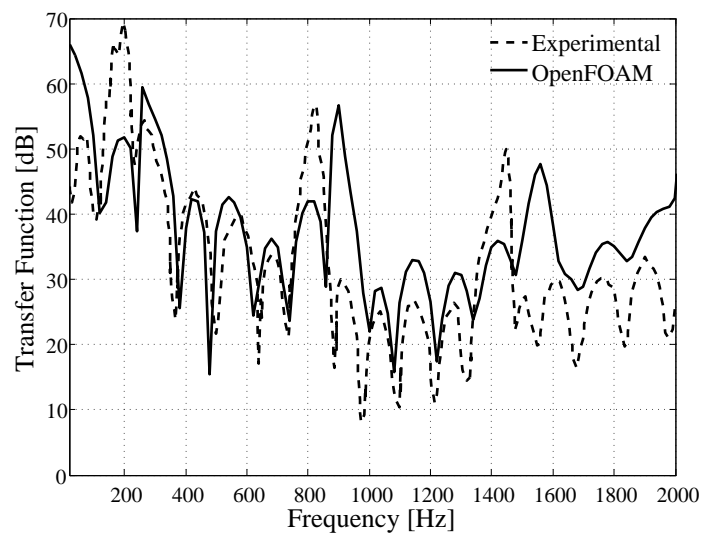


Figura 5.44: Funzione di trasferimento caso E_SF-03.

In tutti i casi si osserva che al variare delle dimensioni della griglia di calcolo non si hanno miglioramenti nei risultati. I grafici numerici presentano un andamento confrontabile con i dati sperimentali fino a circa 1000 Hz. Oltre tale valore si ha un comportamento non adeguato. Nei casi peggiori, in alcuni risultati inerenti alla geometria C, certe frequenze vengono perse.

Particolarità della geometria E è che nel *range* di frequenze tra 1300 e 1600 *Hz* il modulo del picco massimo venga computato correttamente ma risulta posizionato su una frequenza sbagliata.

Griglia di calcolo tridimensionale

I parametri usati anche in questo caso sono i medesimi dei precedenti ad eccezione della dimensione della griglia di calcolo 3D, tab. 5.19.

Caso	Dim. griglia mm	Eccitazione	Amp. p [Pa]	f_{step} [Hz]	Tol.	FdT: Fig.
C_SF-04	5	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.45
D_SF-04	5	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.46
E_SF-04	5	Impulso	5	20	$1 \cdot 10^{-15}$	5.47

Tabella 5.19: Riepilogo geometria tridimensionale.

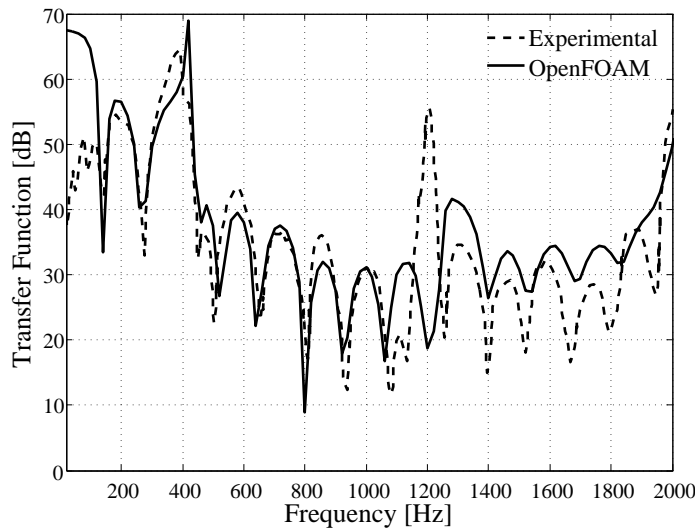


Figura 5.45: Funzione di trasferimento caso C_SF-04.

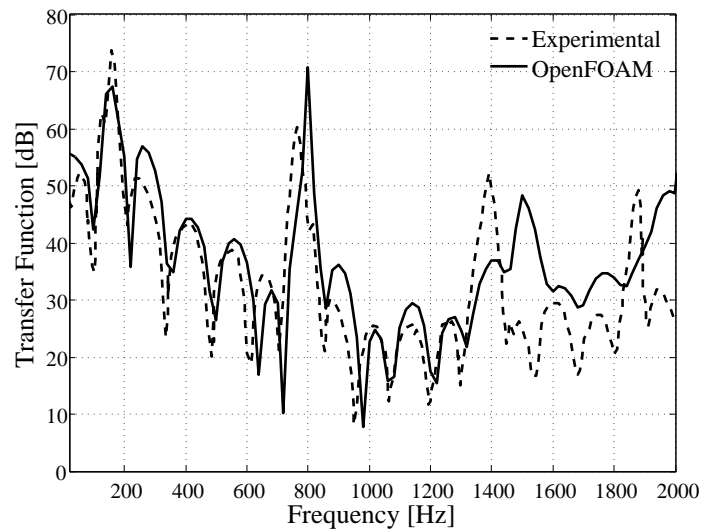


Figura 5.46: Funzione di trasferimento caso D_SF-04.

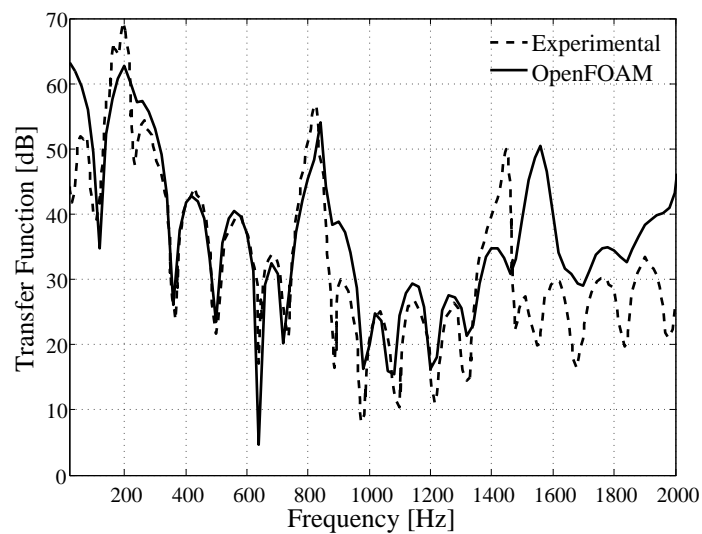


Figura 5.47: Funzione di trasferimento caso E_SF-04.

I risultati sulle geometrie tridimensionali hanno portato a miglioramenti significativi a bassa frequenza, ottenendo ottimi risultati fino a 1100/1200 Hz. Oltre tale limite non si ottiene una corrispondenza tra i risultati. Anche in questo caso si osserva come per la geometria E il modulo del picco massimo venga calcolato correttamente ma posto su una frequenza adiacente nel

campo di frequenze tra 1300 e 1600 Hz . Questo slittamento in avanti del picco di frequenza può essere dovuto all'ipotesi di considerare onde piane e non sferiche.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi ci si è occupati della simulazione di condotti di scarico allo scopo di calcolare la funzione di trasferimento acustica. A partire da dati sperimentali in possesso è stato possibile sviluppare una condizione di eccitazione adeguata e modellare le geometrie usate nelle campagne sperimentali.

Il lavoro si è sviluppato in due direttrici principali: la verifica della condizione al contorno in ingresso ed il confronto tra i solutori usati. La ricerca e quindi verifica della condizione al contorno ha portato allo sviluppo di due metodi di eccitazione. Questi, seppur simili nella formulazione matematica nel dominio delle frequenze, hanno presentato risultati diversi nelle simulazioni: il rumore bianco e l'impulso. Il rumore bianco ha mostrato dei limiti dovuti alla definizione dell'ampiezza massima del segnale. Questo fatto ha portato ad avere delle non linearità nel fluido, dando origine ad una funzione di trasferimento irregolare e lontana dai dati sperimentali. L'impulso, invece, ha presentato un comportamento molto diverso, permettendo di ottenere buoni risultati.

Per quanto riguarda il confronto tra solutori, questo ha il fine di analizzare le differenze di comportamento tra un solutore centrato ed un solutore basato sul PISO. Il solutore alle differenze finite centrate ha mostrato dei limiti, sia con rumore bianco che con impulso, che non è stato possibile eliminare. Questo, molto probabilmente, è dovuto all'uso dei flussi per ricostruire il valore delle grandezze di interesse sulle facce della cella e per introdurre una grande viscosità numerica, che causa risultati privi di significato. Si è anche potuto osservare che è necessaria un'ampiezza di pressione molto elevata per riuscire ad ottenere un andamento confrontabile con i dati sperimentali, sia per quanto concerne la condizione al contorno di rumore bianco, sia per quella al contorno di tipo impulso. I risultati numerici, non confacenti ai risultati sperimentali, e l'uso di elevate ampiezze di pressione non corrispondenti alla realtà hanno fatto optare per un altro solutore. Il solutore basato sull'algoritmo PISO ha invece mostrato un ottimo riscontro nell'analisi sperimentale. Si è visto anche in questo caso come il rumore bianco non è la condizione al contorno corretta, mentre l'impulso ha garantito ottimi risultati nel calcolo

della funzione di trasferimento.

Uno sviluppo futuro del lavoro di tesi qui proposto è l'estensione al calcolo della *transmission loss*. Per il calcolo della *transmission loss* sono richieste due fasi: lo sviluppo di una nuova condizione al contorno non riflettente, nella prima fase, e di un nuovo *post-processing* in grado di calcolare lo sfasamento dell'onda acustica in ingresso, tramite l'analisi degli spettri ottenuti dai dati di due microfoni posti a poca distanza fra loro, nella seconda parte.

Bibliografia

- [1] D. E. Winterbone, R. J. Pearson, *Design Techniques For Engine Manifolds: wave action methods for I.C. engines*, ed. Professional Engineering Publishing, Londra, 2000.
- [2] G. Ferrari, *Motori a Combustione Interna*, ed. Il Capitello, Torino, 2008
- [3] J. H. Ferziger, M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics* ed. Springer, Berlino, 2002.
- [4] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, *An introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method* ed. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1995.
- [5] S. Salsa, F. M. G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino, *Invito alle equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e simulazioni* ed. Springer, Milano, 2009.
- [6] A. Quarteroni, F. Saleri, *Calcolo Scientifico. Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave* ed. Springer, Milano, 2008.
- [7] A. C. Neve, *Introduzione al Digital Signal Processing* ed. Schöenfeld & Ziegler, Milano, 2002.
- [8] E. O. Doebelin, *Strumenti e metodi di misura* ed. McGraw-Hill, Milano, 2008.
- [9] A. Kurganov, E. Tadmor, New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations, *Journal of Computational Physics*, 160, 241-282 (2000).
- [10] A. Kurganov, S. Noelle, G. Petrova, Semidiscrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 23, No. 3, pp 707-740.

- [11] C. J. Greenshields, H. G. Weller, L. Gasparini, J. M. Reese, Implementation of Semi-Discrete, Non Staggered Central Schemes in a Co-located, Polyhedral, Finite Volume Framework, for High-Speed Viscous Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, DOI: 10.1002/flid2069
- [12] OpenFOAM Community, User Guide & Programmer's Guide www.openfoam.com/docs/ 2009
- [13] H. Jasak, *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, Tesi di Dottorato, A.A: 1995-1996