

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria dei Sistemi

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica



PROBLEMI ELLITTICO-PARABOLICI DEGENERI AL BORDO E BUONA POSIZIONE DEL PROBLEMA DERIVANTE DAL MODELLO DI HESTON

Relatore: prof. Sandro SALSA

Correlatore: dr. Carlo SGARRA

Correlatore ASP: dr.ssa Barbara TRIVELLATO

Tesi di Laurea di:
Andrea BANDINI
Matr. 732639

Anno Accademico 2009-2010

*Bisogna avere il caos dentro di sé,
per poter partorire una stella danzante*

*Così parlò Zarathustra,
F. W. Nietzsche*

Sommario

In questa tesi ci si propone di studiare i problemi ellittici e parabolici quando l'operatore degenera in alcuni tratti di bordo del dominio, e la loro applicazione a diversi problemi di rilievo in finanza, in particolare allo studio del modello di Heston.

Nella prima parte si descrive il modello finanziario di Heston, che si basa sull'idea di rilassare l'ipotesi avanzata nel modello di Black-Scholes di volatilità costante del titolo azionario, e modellizzarla con un processo stocastico di tipo CIR. Siccome l'equazione alle derivate parziali che permette di valutare il prezzo di un'opzione nel contesto del modello di Heston è un'equazione parabolica il cui operatore ellittico degenera al bordo, nella seconda parte di questo lavoro ci si occupa dello studio dei problemi ellittici e parabolici degeneri al bordo. Tale studio viene affrontato da due punti di vista differenti: da un lato, in un'ottica deterministica, si sono costruiti teoremi di esistenza ed unicità mediante le tecniche di Analisi Funzionale e i principi di massimo; mentre dall'altro, il problema è stato analizzato in ottica stocastica studiando le proprietà del processo stocastico generato dall'operatore in gioco e la relativa classificazione dei punti di frontiera. In particolare si vedrà che i problemi di Dirichlet e Cauchy-Dirichlet studiati non prevedono, a differenza del caso non degenero, la prescrizione delle condizioni al bordo su tutto il bordo del dominio, ma occorre studiare la natura delle diverse regioni che compongono la frontiera. Queste due ottiche, che in passato sono state troppo spesso analizzate separatamente, vengono qui presentate assieme, cercando di metterne in luce analogie e complementarità e di generalizzarne la trattazione rendendola il più unitaria possibile.

Successivamente, si analizzano i numerosi modelli in finanza in cui compaiono problemi di questo tipo e si mette in luce in particolare il problema della non-unicità delle soluzioni, che invece è in generale scongiurato per le situazioni

non degeneri corrispondenti. Tale questione è studiata anche da un punto di vista stocastico, mostrando che le non unicità compaiono in presenza di processi di prezzo che sono martingale strettamente locali, e dal punto di vista delle interpretazioni e implicazioni finanziarie. A questo punto, si procede allo studio della buona posizione del problema di valutazione di opzioni Europee nell'ambito di Heston, fornendo una generalizzazione n -dimensionale e studiando una nozione di soluzione che garantisce l'unicità. Infine, si passa allo studio del medesimo problema nel caso di titoli derivati Americani, per i quali il problema è più complesso e si presenta nella forma dello studio, con le tecniche dell'Analisi Funzionale, di una disequazione variazionale non stazionaria con operatore degenerare.

Abstract

The main aim of this thesis is to study elliptic and parabolic problems when the elliptic operator is degenerating at the boundary of the domain, and their application to several situations in financial mathematics, mainly the Heston model.

In the first part we describe the Heston model, with its main idea of relaxing the Black-Scholes hypothesis of constant volatility for the stock and, instead, using a CIR-type stochastic process to model it. Since the partial differential equation that allows to price an option within the Heston model is a parabolic-type equation whose elliptic operator degenerates at the boundary, in the second part of this work we study elliptic and parabolic problems degenerating at some subsets of the boundary. We take care of two different viewpoints: on one side, the deterministic tools of Functional Analysis and maximum principles will allow us to build existence and uniqueness results; on the other side, we analyze the problem through a stochastic approach by studying the process generated by the considered operator and the corresponding boundary points classification. At this purpose, we'll see that the arising Cauchy and Cauchy-Dirichlet problems don't imply, as is the case for non-degenerate problems, prescribing boundary conditions on the whole boundary: it depends on the different nature of the subsets composing the boundary. These two viewpoints were in the past too often considered separately and are instead presented here together: we try to highlight similarities and differences and to generalize the analysis by unifying it as much as possible.

Subsequently, we consider many financial models that show degenerations of this type and, most importantly, we highlight the non-uniqueness problem, that in general doesn't show up in non-degenerating problems. This point is studied in a stochastic viewpoint too, by showing that non-uniqueness corresponds to price pro-

cesses which are strict local martingales; the financial implications are extensively treated as well. Then, we proceed to the study of existence and uniqueness for the pricing equation of an European option within the Heston model, by giving an n -dimensional generalization and studying a notion of solution which guarantees unicity. In the end, the same problem is studied for the pricing of American options, in whose case the problem is much more complicated and implies the use of Functional Analysis techniques in order to study a degenerate non-stationary variational inequality.

Indice

Introduzione	11
1 Il modello di Heston	13
1.1 Il modello di Black-Scholes e le sue problematiche	13
1.2 I modelli a volatilità stocastica	18
1.3 Il modello di Heston	21
2 Problemi ellittici degeneri al bordo	25
2.1 Introduzione e illustrazione del problema	25
2.2 La trattazione classica	27
2.3 Il problema ellittico: punto di vista stocastico	28
2.3.1 Classificazione dei punti di frontiera	30
2.3.2 Studio dell'insieme \mathcal{E}_0	35
2.3.3 Un caso particolare	42
2.4 Il problema ellittico: punto di vista deterministico	45
2.4.1 Esistenza e non unicità di soluzioni	45
2.4.2 Unicità della soluzione	49
2.4.3 Confronto con il punto di vista stocastico	52
3 Problemi parabolici degeneri al bordo	56
3.1 Introduzione e prime ipotesi	56
3.2 Esistenza e non unicità di soluzioni	57
3.3 Unicità della soluzione	59
3.4 Punto di vista stocastico	61

4	Gli operatori degeneri in finanza e il problema della non-unicità	68
4.1	Processi degeneri in finanza	68
4.1.1	Il modello CIR	68
4.1.2	Il modello CEV	69
4.1.3	Il modello di Heston	70
4.2	Il problema della non-unicità: tre esempi	71
4.3	Il problema della non-unicità: framework generale e aspetti finanziari	79
4.4	Il problema della non-unicità: conclusioni e considerazioni finali .	88
5	Buona posizione del problema derivante dal modello di Heston per opzioni Europee	90
5.1	Introduzione	90
5.2	Esistenza di una soluzione	91
5.3	Unicità della soluzione	98
5.4	La questione delle condizioni al bordo	99
6	Buona posizione del problema derivante dal modello di Heston per opzioni Americane	101
6.1	Introduzione e formulazione del problema	101
6.2	Formulazione del problema come disequazione variazionale	103
6.3	Problema parabolico e disequazione variazionale non stazionaria .	106
	Conclusioni e possibili sviluppi	111
	Bibliografia	113

Introduzione

Quando nel 2002 Mitchell, Pulvino e Stafford analizzarono¹ i prezzi dei titoli azionari nel quinquennio 1995-2000, ricordato come il periodo del 'NASDAQ bubble', notarono diverse incongruenze: i valori dei titoli derivati, in particolare, presentavano diverse anomalie, mostrate tramite gli strumenti di pricing utilizzati per effettuare le valutazioni stesse, come si fossero improvvisamente 'gonfiati'. In quegli anni, d'altra parte, i mercati finanziari avevano attraversato una crisi piuttosto importante, tanto che il 17 Aprile 2000 l'indice NASDAQ contava 3227 punti, ben il 37% in meno dei 5133 punti del 10 Marzo 2000, valore record fino a quel momento. Numerosi titoli azionari, specialmente quelli legati alla tecnologia e ad Internet, che stava allora vivendo il suo periodo di boom, avevano vissuto una sorprendente crescita, destinata però ad esplodere improvvisamente, come una bolla di sapone. Secondo numerosi esperti², molte crisi finanziarie come questa sono causate dal lento costruirsi di correlazioni a lungo termine tra i vari titoli ed attori finanziari, che portano ad un comportamento collettivo del mercato ed al collasso in un breve e critico intervallo di tempo.

Da un punto di vista matematico, i modelli utilizzati per valutare i diversi titoli finanziari si sono fatti negli anni sempre più sofisticati e aderenti alla realtà. In particolare, il modello di Heston, sviluppato nel 1993, è negli ultimi anni largamente utilizzato dai vari attori dei mercati finanziari nei problemi di valutazione e garantisce, come si vedrà, un'ottima vicinanza agli andamenti reali dei titoli. Come ci si deve aspettare, un modello più preciso come quello di Heston presenta difficoltà di risoluzione maggiori rispetto, ad esempio, al modello classico di Black-Scholes, ma consente di studiare e spiegare fenomeni, come quello del NASDAQ bubble accennato sopra, di grande attualità poiché legati alle situazioni

¹in [26]

²si veda in particolare [31]

di crisi finanziaria. Come vedremo in questa tesi, infatti, in merito alla 'bolla' cui si accennava prima, ne esiste anche una nozione matematica, che ci permetterà di inserire anche queste situazioni nel modello e tentare dunque di spiegarle.

Questo lavoro, con lo scopo di studiare in modo rigoroso il modello di Heston, segue due principali fili logici. Da una parte, vista la tipologia di problemi che derivano dall'utilizzo di tale modello, ci proponiamo di studiare i problemi ellittico-parabolici degeneri al bordo e la loro buona posizione cercando di unificare la trattazione dei due approcci che sono presenti in letteratura: quello deterministico e quello stocastico. Dall'altra parte, si vuole studiare la costruzione del modello di Heston e, in particolare, l'insorgere del problema della non-unicità (così come in altri problemi degeneri in finanza), che presenta problematiche sia da un punto di vista dello studio matematico, sia delle interpretazioni finanziarie che ne conseguono. Infine, tenendo conto della teoria sviluppata nella prima parte, si vuole studiare rigorosamente la buona posizione dei problemi di valutazione nell'ambito di Heston, sia per contratti di tipo Europeo, sia per titoli derivati Americani.

Di conseguenza, questa tesi è strutturata così: nel capitolo **1** si presenta il modello finanziario di Heston, che risponde ad una serie di problemi presentati dal celebre modello di Black-Scholes, che si è rivelato inconsistente con numerosi andamenti reali dei titoli ed ha quindi portato a considerare la volatilità del prezzo del titolo azionario come un altro processo stocastico, invece che una costante.

Nei capitoli **2** e **3**, invece, si passa allo studio dettagliato dei problemi ellittici (capitolo **2**) e parabolici (capitolo **3**) degeneri al bordo. In particolare, dopo aver brevemente considerato la trattazione classica di questi problemi (dovuta principalmente a [14] e [28]), i risultati più recenti ottenuti seguendo i due approcci, stocastico e deterministico, cui si faceva riferimento prima, vengono rilette l'uno nell'ottica dell'altro per costruire un quadro d'insieme il più completo e rigoroso possibile.

Nel capitolo **4** si presentano tre esempi in cui lo studio dei problemi degeneri appena svolto si applica immediatamente a dei casi di interesse finanziario. In particolare, si evidenzia come in tutti questi tre casi si possa presentare il problema della non-unicità della soluzione, che viene analizzato da un punto di vista stocastico e nelle sue implicazioni dirette di carattere finanziario.

Infine, nei capitoli **5** e **6**, si studia la buona posizione del problema alle derivate parziali parabolico degeneri per la valutazione di un'opzione Europea con il modello di Heston e della disequazione variazionale parabolica degeneri per la valutazione di un'opzione Americana. In particolare, si utilizzano gli strumenti dell'Analisi Funzionale e si stabiliscono delle classi particolari in cui ricercare la soluzione affinché vi si possa garantire l'unicità.

Il modello di Heston

1.1 Il modello di Black-Scholes e le sue problematiche

Il modello sviluppato da Fischer Black e Myron Scholes e pubblicato nel 1973, detto comunemente modello di Black-Scholes, è stato il primo tentativo di un certo rilievo di descrivere matematicamente i mercati finanziari ed è stato per molti anni largamente utilizzato per calcolare i prezzi di numerosi prodotti finanziari¹.

Tale modello prevede la presenza di un titolo privo di rischio, che chiameremo anche *money market account*, la cui dinamica è governata dal processo $R(t)$ ed è completamente deterministica:

$$dR(t) = r(t)R(t)dt, \quad (1.1)$$

dove $r(t)$ è il rendimento del titolo privo di rischio e, nella versione più semplice del modello di Black-Scholes, viene considerato costante. L'estensione al caso di funzione dipendente dal tempo è comunque di semplice attuazione.

Inoltre, vi è un titolo rischioso (*stock*), come ad esempio un titolo azionario, rappresentato dal processo $S(t)$, il quale, a differenza del precedente, ha dinamica stocastica:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t), \quad (1.2)$$

dove $W(t)$ è un processo di Wiener, o moto Browniano, nella misura di probabilità oggettiva che indicheremo con P , mentre μ e σ sono funzioni note e, come per r , verranno considerate costanti. In questo caso si nota che il rendimento dello stock è composto da due componenti: una deterministica, governata dal coefficiente di *drift* $\mu(t)$, ed una stocastica, governata dal coefficiente σ , detto

¹Per una trattazione dettagliata del modello si veda ad esempio [3] oppure [32].

volatilità e proporzionale ad un moto browniano. Tale titolo verrà indicato anche come *sottostante*, in particolare quando su di esso viene scritto un titolo derivato. Applicando la formula di Ito, la (1.2) si risolve ed ha soluzione

$$S(t) = S(s)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(W(t) - W(s))}, \quad \forall t \geq s. \quad (1.3)$$

Detto ciò, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.1

In generale, una opportunità di arbitraggio è un portafoglio autofinanziante h tale che il suo valore V^h abbia le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} V_0^h &= 0, \\ P(V_T^h \geq 0) &= 1, \\ P(V_T^h > 0) &> 0, \end{aligned}$$

con $T > 0$.

Ora si possono scrivere le assunzioni alla base del modello di Black-Scholes, che sono le seguenti:

Ipotesi 1.1 (Black-Scholes)

- *Il prezzo del titolo rischioso segue il moto browniano geometrico in (1.3).*
- *Il tasso di interesse privo di rischio r e la volatilità σ sono costanti.*
- *Non vi sono costi di transazione associati agli scambi di titoli (questa ipotesi può essere rilassata, vedi [32])*
- *Non esistono opportunità di arbitraggio.*
- *Lo scambio del sottostante può avvenire a tempo continuo: questa ovviamente è un'idealizzazione della situazione reale.*
- *Il sottostante e il titolo derivato possono essere venduti allo scoperto e ciò può avvenire in qualsiasi quantità, anche non intera.*

Date queste ipotesi, è possibile trovare il prezzo $u(S, t)$ di un titolo derivato (europeo) di scadenza T e payoff $F(S(T))$ tramite la PDE, detta equazione di

Black-Scholes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, & \text{in } \mathbb{R}^+ \times [0, T] \\ u(T, S(T)) = F(S(T)). \end{cases} \quad (1.4)$$

Il payoff può essere ad esempio del tipo $F_{Call}(S(T)) = \max(S(T) - K, 0)$ per un'opzione Call², oppure del tipo $F_{Call}(S(T)) = \max(K - S(T), 0)$ per un'opzione Put³, dove K è detto prezzo di esercizio dell'opzione.

Tramite un cambio di variabili del tipo

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad u = Kv(x, \tau),$$

si può poi ricondurre la (1.4) ad un'equazione a coefficienti costanti del tipo

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv,$$

dove $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ e con condizione iniziale

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0).$$

A questo punto un altro semplice cambio di variabile del tipo

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} w(x, \tau),$$

con $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$ e $\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$, porta all'equazione

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{per } -\infty < x < \infty, \tau > 0,$$

con condizione iniziale

$$w(x, 0) = w_0(x) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right).$$

Di conseguenza, la risoluzione del problema (1.4) è ricondotta alla soluzione della classica equazione del calore, ben trattata nella teoria classica dei problemi

²Un'opzione Call Europea di scadenza T e prezzo di esercizio K è un contratto che consente al possessore di acquistare il sottostante S al tempo T al prezzo K e obbliga il sottoscrittore a vendere il sottostante nel caso in cui l'opzione venga esercitata.

³Un'opzione Put Europea di scadenza T e prezzo di esercizio K è un contratto che consente al possessore di vendere il sottostante S al tempo T al prezzo K e obbliga il sottoscrittore a comprare il sottostante nel caso in cui l'opzione venga esercitata.

ellittico-parabolici e per la quale lo studio della buona posizione è ampiamente trattato.

Un metodo alternativo per trovare il prezzo u del titolo derivato si ottiene grazie al **Teorema di rappresentazione di Feynman-Kac**, che ne dimostra la perfetta equivalenza, e consiste nel calcolare il valore atteso scontato del payoff in una misura di probabilità Q opportuna:

$$u(S, t) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}F(S(T))|\mathcal{F}_t],$$

dove \mathcal{F}_t è la *filtrazione* al tempo t , che rappresenta le informazioni possedute fino a quell'istante di tempo, e dove lo stock nella misura Q ha la seguente dinamica

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)d\widetilde{W}(t),$$

dove $\widetilde{W}(t)$ è un moto browniano nella misura Q che viene dunque chiamata misura di probabilità neutra rispetto al rischio, poiché sotto di essa lo stock ha un rendimento atteso pari a quello del titolo privo di rischio r .

Nel contesto di questo modello, uno dei risultati più significativi è una formula *esplicita* che permette di calcolare il prezzo di un'opzione Call, che ora riportiamo.

$$u_{Call} = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

dove $N(x)$ è la distribuzione cumulata di probabilità di una gaussiana normale standard valutata nel punto x ,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log \frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right),$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Il modello di Black-Scholes, pur avendo notevoli pregi, fra i quali la disponibilità di formule esplicite semplici come quella appena presentata, ha evidenziato diversi problemi, soprattutto nel momento di comparare i prezzi dei titoli osservati sul mercato con quelli ricavati dall'applicazione del modello. A questo proposito, una variabile molto utile e significativa per effettuare questo confronto è la cosiddetta *volatilità implicita*.

Per volatilità implicita si intende il valore di σ che 'il mercato si aspetta', ossia il valore che è implicito nei valori delle opzioni scambiate di cui già si conosce il costo. Supponiamo infatti di conoscere (tramite, ad esempio, un quotidiano finanziario) il prezzo, che indicheremo con p , di una data opzione di prezzo di esercizio K , scadenza T e scritta sul sottostante $S(t)$. D'altra parte, per questa stessa opzione, il valore ricavato con l'equazione di Black-Scholes sarà

dato da $u(S, t, T, r, \sigma, K)$, dove si è indicata anche la dipendenza dai parametri. Considerando ora σ come incognita, possiamo risolvere la seguente equazione per σ

$$p = u(S, t, T, r, \sigma, K),$$

che ammette un'unica soluzione se è verificata la condizione

$$p > u(S, t, T, r, 0, K),$$

e permette dunque di ottenere la volatilità implicita.

A questo punto, per testare la validità del modello di Black-Scholes, si possono osservare i prezzi di mercato di più opzioni call europee con la stessa scadenza e scritte sul medesimo sottostante, ma con diverso prezzo di esercizio K . Se quindi il modello, che presenta volatilità costante, è corretto, allora, costruendo un grafico della volatilità implicita in funzione del prezzo di esercizio, dovremmo ottenere una linea orizzontale. Tuttavia, questa speranza viene disattesa dall'osservazione empirica, che invece mostra spesso un andamento non costante: per valori di K bassi rispetto ad $S(t)$ (opzioni dette *out of the money*) e per K alti rispetto ad $S(t)$ (opzioni *into the money*) si osservano volatilità implicite più alte che per K vicino ad $S(t)$ (opzioni *at the money*). Questo andamento, mostrato in Figura 1.1, può ricordare la forma di un sorriso ed è per questo che ad esso ci riferisce con il termine *smile* di volatilità.

Inoltre, facendo la stessa operazione al variare del tempo di scadenza T invece che del prezzo di esercizio K , ancora una volta l'ipotesi di costanza della volatilità σ sembra essere non confermata dai prezzi reali osservati: si osserva infatti una dipendenza dal *time to maturity* $T - t$ e si ottiene un grafico della volatilità implicita rispetto a $T - t$ non costante, detto struttura a termine della volatilità.

Il fenomeno dello *smile* di volatilità è comunque soltanto una delle evidenze degli scostamenti dei prezzi osservati sul mercato rispetto a quelli teorici: le code delle distribuzioni osservate risultano più 'grasse' di quelle teoriche (riscontrando una maggiore frequenza degli eventi 'estremi' rispetto a quelli previsti dalla teoria), gli incrementi non risultano indipendenti nel tempo e il logaritmo del prezzo dei titoli azionari si discosta spesso notevolmente da una distribuzione normale.

Queste evidenze hanno quindi portato a rigettare o indebolire alcune ipotesi alla base del modello di Black-Scholes, nel tentativo di costruire approssimazioni più vicine alla realtà. Dunque, per intervenire e modificare il modello di dinamica del sottostante si sono intraprese diverse strade, la maggior parte delle quali sono riconducibili in due gruppi:

- i **modelli con salti**, per i quali si fa cadere l'ipotesi di continuità del processo stocastico che governa la dinamica del sottostante e si utilizzano i processi di Levy per modellare dei salti nel sottostante;

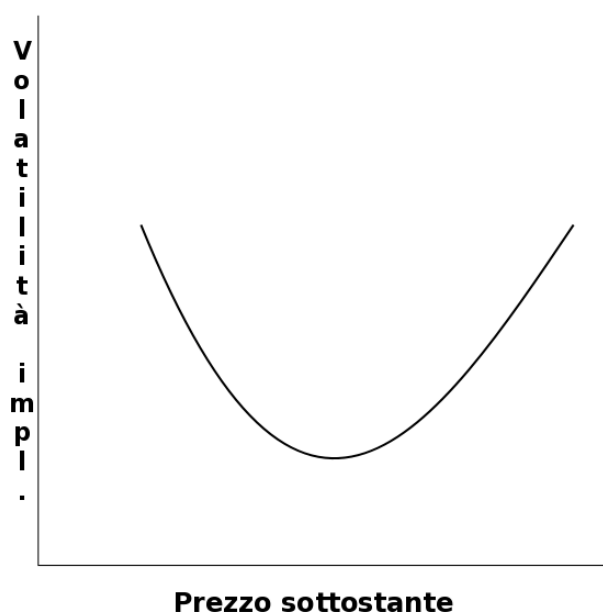


Figura 1.1: Smile di volatilità

- i modelli a volatilità variabile, in cui la volatilità non viene più considerata costante, ma viene modellata come una funzione del tempo e del sottostante $\sigma(t, S(t))$ (**modelli a volatilità locale**) oppure con un altro processo stocastico (**modelli a volatilità stocastica**).

Alcuni modelli, infine, combinano entrambi gli aspetti: si pensi in particolare al modello di Bates a volatilità stocastica con salti (per una trattazione dettagliata, si veda [4]).

In questo lavoro non si considereranno comunque i modelli con salti, ma ci si concentrerà sui modelli a volatilità variabile e, in particolare, a volatilità stocastica.

1.2 I modelli a volatilità stocastica

Ripartiamo quindi ora dall'equazione differenziale stocastica (1.2) che governa la dinamica del titolo $S(t)$ e cominciamo con l'apportare una prima modifica. Supponiamo quindi che σ sia funzione del tempo t e anche del sottostante $S(t)$,

cioè

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t, S(t))S(t)dW(t),$$

dove $W(t)$ è sempre un P -moto browniano. L'equazione (1.4) può dunque essere così riscritta

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S(t))S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, & \text{in } \mathbb{R}^+ \times [0, T] \\ u(T, S(T)) = F(S(T)). \end{cases}$$

Per questi modelli il mercato rimane in generale completo⁴, così come era per Black-Scholes, ed esiste dunque ancora una misura di probabilità Q neutra rispetto al rischio tale per cui il sottostante ha rendimento atteso pari al titolo privo di rischio:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma(t, S(t))S(t)d\widetilde{W}(t),$$

con $\widetilde{W}(t)$ Q -moto browniano.

Tra questi modelli, uno di particolare interesse è quello cosiddetto *constant elasticity of variance* (CEV), presentato da Cox nel 1975, in cui si prende $\sigma(t, S(t)) = \sigma S^\alpha$ con $\alpha > 0$ e si ottiene la Q -dinamica

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)^{\alpha+1}dW(t),$$

in cui il valore $\alpha + 1$ è detto *elasticità di varianza* e fa ricondurre al modello di Black-Scholes nel caso limite $\alpha = 0$.

I modelli a volatilità locale portano a migliori previsioni dei prezzi, ma ovviamente occorre ipotizzare che la volatilità sia legata al tempo ed al prezzo dello stock, fatto che è parzialmente vero. Tuttavia, le ipotesi che di volta in volta sono alla base di questi modelli non sono generalizzabili, e delle previsioni ancora migliori possono essere fatte se si passa a modelli a volatilità stocastica.

Se infatti nei modelli a volatilità locale, la volatilità aveva già una dipendenza stocastica indiretta data dalla sua dipendenza da $S(t)$, che non è deterministico, per ottenere un modello ancora migliore rendiamo direttamente la volatilità un processo stocastico $(\sigma(t))_{t \geq 0}$ e prendiamone il quadrato $V(t) = \sigma(t)^2$, di modo che la dinamica di $S(t)$ può ora essere scritta così

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW(t).$$

⁴Il mercato si dice **completo** se ciascun titolo può essere replicato, se cioè, dato un qualsiasi titolo X , esiste un portafoglio h , composto dal titolo rischioso e da quello privo di rischio, tale che il suo valore sia

$$V^h = X, \quad \text{con probabilità 1.}$$

Il passo che resta da fare è costruire un modello (nei termini di un'equazione differenziale stocastica) per descrivere $V(t)$, ricercando in particolare le due seguenti proprietà:

- $V(t)$ sia positivo: $V(t) > 0$;
- $V(t)$ abbia la proprietà di *mean reversion*, la sua dinamica sia cioè tale per cui il processo si allontana tanto da un valore costante \bar{v} , poi tende a riavvicinarsi.

Il processo $V(t)$ avrà allora una dinamica del tipo

$$dV(t) = (a - bV(t))dt + f(V(t))dZ(t), \quad (1.5)$$

dove $f(V(t))$ varia a seconda del modello e $Z(t)$ è un secondo moto browniano, che solitamente è correlato a $W(t)$, cioè $\mathbb{E}[dW(t), dZ(t)] = \rho dt$, ma non è perfettamente correlato ($|\rho| \neq 1$). Questo fatto porta ad una conseguenza importante: la completezza dei mercati, alla base del modello di Black-Scholes viene qui a mancare e il mercato è ora incompleto, poiché l'introduzione di una nuova sorgente di casualità $Z(t)$ non è compensata dall'introduzione di un nuovo titolo scambiabile sul mercato (la volatilità non è infatti scambiabile).

Dalla (1.5) notiamo inoltre che il termine di drift ($a - bV(t)$) indirizza il processo $V(t)$ verso il valore $\frac{a}{b}$, mentre l'altro termine, stocastico, introduce un rumore casuale.

Esistono diversi modelli a volatilità stocastica, dei quali non tutti presentano le due importanti proprietà presentate prima. Un primo modello importante è stato proposto da Hull e White nel 1987 e associa a $V(t)$ una dinamica log-normale:

$$dV(t) = abV(t) + \sigma Y(t)dZ(t),$$

che, come si può notare, non presenta la mean reversion e che ha $\rho = 0$, quindi scorrelazione tra il moto browniano associato a $S(t)$ e quello associato a $V(t)$.

Un secondo modello che si può considerare è quello presentato nel 1991 da Stein-Stein, che utilizza un processo di Ornstein-Uhlenbeck:

$$dV(t) = (a - bV(t))dt + \sigma dZ(t),$$

che non garantisce la positività, ma è dotato di mean reversion. Anche qui, inoltre, si ha $\rho = 0$.

I modelli a volatilità stocastica, in generale, sono interessanti poiché la distribuzione di probabilità dei prezzi cambia rispetto al modello di Black-Scholes e non è più rappresentabile con una lognormale e, in particolare, presenta code più grasse. Inoltre, facendo variare opportunamente i parametri presenti, si può

modificare tale distribuzione e modellarla sulla distribuzione osservata sul mercato. Ovviamente questi modelli presentano una complessità maggiore di quello di Black-Scholes ed introducono, con la volatilità stocastica, un ulteriore elemento di rischio: il rischio di volatilità.

1.3 Il modello di Heston

Passiamo ora al modello presentato da Heston nel 1993 in [18], che utilizza il processo di Cox-Ingersoll-Ross (CIR) per modellare la dinamica di $V(t)$:

$$dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dZ(t), \quad (1.6)$$

in cui la correlazione ρ tra i due moti browniani $W(t)$ e $Z(t)$ non è nulla come nei casi considerati in precedenza ma è $\rho \neq 0$. Inoltre, il termine di *mean reversion* è stato scritto in modo leggermente diverso da prima sostituendo le costanti a e b con k e θ

La scelta di utilizzare una correlazione non nulla, che rappresenta uno degli aspetti innovativi alla base del modello di Heston, nasce dall'idea che la volatilità del prezzo di un titolo non sia completamente indipendente dall'andamento del prezzo in sé: è infatti frequente osservare una situazione di incertezza del mercato nei confronti di un'ente quotato e, quindi, un aumento della volatilità quando il titolo si deprezza. Nel caso delle materie prime, invece, come ad esempio il petrolio o l'oro, l'aumentare del prezzo porta ad una situazione più incerta e all'aumentare della volatilità.

Guardando poi la (1.6), il primo termine, ovvero quello deterministico, è dotato di *mean reversion*, e fa dunque tendere la volatilità ad avvicinarsi ad un valore costante, pari a θ , detto volatilità di lungo termine. Il contributo deterministico è $k(\theta - V(t))$, dove si evidenzia anche che il parametro k indica la velocità di oscillazione attorno alla volatilità di lungo termine: il periodo di oscillazione, d'altra parte, è dato dal suo inverso $\frac{1}{k}$.

Il secondo termine della (1.6), invece, rappresenta la componente stocastica e contiene il coefficiente σ , che può essere chiamato *volatilità della volatilità* e indica l'intensità del disturbo generato dal moto browniano $dZ(t)$.

Inoltre, osserviamo che se si verifica la condizione $2k\theta \geq \sigma^2$ si ha anche la positività del processo $V(t)$, altra proprietà desiderabile nel modellare una volatilità.

Accanto al processo della volatilità vi è poi il processo di prezzo $S(t)$, che nel modello di Heston ha, nella misura di probabilità oggettiva P , dinamica governata dall'equazione differenziale stocastica

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW(t), \quad (1.7)$$

dove, come per il modello di Black-Scholes, il termine deterministico di drift indica il valore atteso del prezzo (siccome la componente stocastica ha valore atteso nullo) e, dunque, μ rappresenta il rendimento atteso. Ciò che cambia è, come detto prima a proposito di tutti i modelli a volatilità stocastica, la distribuzione di probabilità, che non è più quella di una lognormale, ma si adatta maggiormente a quella osservata sul mercato, approssimando non soltanto i primi due momenti (ovvero media e varianza), ma anche la *skewness* (momento terzo) e la *kurtosis* (momento quarto). In particolare, il fatto che la correlazione ρ non sia nulla influenza direttamente la skewness e rende la distribuzione asimmetrica. Analogamente, il parametro σ cambia la probabilità degli eventi rari e interviene al livello del momento quarto agendo sullo spessore delle code. Riscrivendo la (1.7) nella misura di probabilità Q neutra rispetto al rischio⁵ otteniamo, invece, come al solito un rendimento atteso pari a quello del titolo privo di rischio r :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW(t),$$

Nel caso in cui poi il sottostante $S(t)$ consegna dei dividendi continui di tasso q (che cioè, in un intervallo di tempo dt , consegna una quantità pari a $qS(t)dt$), l'equazione (1.7) può essere riscritta in questo modo:

$$dS(t) = (r - q)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW(t). \quad (1.8)$$

Raggruppando ora la (1.6) e la (1.8) e rinominando i due moti browniani W_1 e W_2 otteniamo il seguente sistema di due equazioni differenziali stocastiche

$$\begin{cases} dS(t) = (r - q)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1(t), \\ dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t), \end{cases}$$

dove $W_2(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2}W_3(t)$ e $(W_1(t), W_3(t))$ è un moto browniano bidimensionale. Si sono riscritti i moti browniani in questa forma per evidenziare la presenza di due processi indipendenti W_1 e W_3 , mentre W_2 è a loro correlato.

A questo punto possiamo ricavare l'equazione alle derivate parziali associata a questo problema. Utilizzando un metodo del tutto analogo a quello tramite il quale si ottiene l'equazione di Black-Scholes, l'equazione di pricing per individuare il valore u di un'opzione europea di scadenza T e payoff generico $g(S(T), V(T))$

⁵Il modello di Heston propone un mercato incompleto: rispetto a Black-Scholes, infatti, viene aggiunto un moto browniano (e, dunque, una sorgente di incertezza), ma non un ulteriore titolo scambiabile, siccome la volatilità non è vendibile sul mercato. Quindi, in realtà, le misure neutre rispetto al rischio Q risultano infinite: per selezionarne una occorre fare un'ipotesi sul cosiddetto rischio di volatilità (si veda a tal proposito [18]).

è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(s^2 v \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\rho\sigma s v \frac{\partial^2 u}{\partial s v} + \sigma^2 v \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}) + k(\theta - v) \frac{\partial u}{\partial v} + (r - q)s \frac{\partial u}{\partial s} - ru = 0, \\ u(T, S, V) = g(S(T), V(T)). \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda l'insieme di definizione del problema, la variabile temporale è compresa nell'intervallo $[0, T]$, mentre le variabili s (valore dello stock) e v (volatilità) sono assunte in generale essere nell'intervallo $[0, \infty)$ (nel caso in cui i parametri siano tali che $2k\theta \geq \sigma^2$ si ha invece l'intervallo $(0, \infty)$). Di conseguenza, è facile osservare che questa equazione *degenera* al bordo del dominio: per $v = 0$, cioè, tutti i termini di second'ordine si annullano e, come vedremo nel dettaglio dopo, l'operatore perde ellitticità. Questo fatto, d'altra parte, si verificava anche per l'equazione (1.4) in $S = 0$, ma in quel caso l'opportuno cambio di variabile prima introdotto rendeva l'equazione analoga a quella del calore, ampiamente trattata nella teoria classica dei problemi ellittico-parabolici.

In questo caso, invece, data la complessità maggiore del problema, non esiste un cambio di variabili in grado di eliminare la degenerazione dell'operatore ellittico in gioco. Se infatti proviamo, in analogia con il caso di Black-Scholes, con il cambio di variabile

$$s = e^x,$$

otteniamo innanzitutto una dinamica del processo $X(t)$ associato alla variabile x che, a partire dalla (1.8) e grazie alla formula di Ito, è del tipo

$$dX(t) = \left(r - q - \frac{V(t)}{2} \right) dt + \sqrt{V(t)} dW(t),$$

e, di conseguenza, l'equazione si modifica in questo modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\rho\sigma v \frac{\partial^2 u}{\partial x v} + \sigma^2 v \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}) + k(\theta - v) \frac{\partial u}{\partial v} + \\ + (r - q - \frac{v}{2}) \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0, \\ u(T, X(T), V(T)) = g(X(T), V(T)). \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Si nota facilmente che, a differenza di quanto visto per il modello di Black-Scholes, il problema della degenerazione rimane e, infatti, per $v = 0$, tutti i termini di secondo grado si annullano ancora. Questo fatto, come vedremo meglio nei prossimi capitoli, rappresenta un problema di grande importanza e renderà necessario, ai fini di studiare la buona posizione della PDE derivata dal modello di Heston, sviluppare la teoria per i problemi ellittico-parabolici degeneri

alla frontiera del dominio. Questo studio verrà fatto in modo esteso nei due prossimi capitoli.

Problemi ellittici degeneri al bordo

2.1 Introduzione e illustrazione del problema

Vista la natura dei problemi coinvolti nello studio del modello di Heston, in questo capitolo e nel seguente ci interesseremo allo studio di problemi ellittici e parabolici degeneri, per i quali cioè l'operatore non è sempre strettamente ellittico oppure i coefficienti possono essere degeneri o illimitati. Le equazioni coinvolte saranno dunque del tipo:

$$\mathcal{L}u - cu = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

e

$$\mathcal{L}u - cu - \partial_t u = h \quad \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T]. \quad (2.2)$$

D'ora in avanti Ω è un aperto di \mathbb{R}^n , connesso e sufficientemente regolare, il cui bordo verrà indicato con $\partial\Omega$. La funzione c , data, sarà supposta essere non negativa, mentre per f e h verranno fatte le rispettive ipotesi più avanti. L'operatore \mathcal{L} , invece, è così definito:

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Per quanto detto sopra, si avrà in generale

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

(dove si è considerata la chiusura di Ω per indicare che la relazione vale anche per i punti di frontiera). In questo modo, nei punti dove non varrà la maggiorazione stretta, l'operatore non sarà strettamente ellittico.

Ai fini applicativi, tuttavia, ci si interesserà in particolare a problemi per i quali ciò accade in alcune porzioni di bordo, e non nei punti interni:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall x \in \Omega, (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

e in questo caso un primo problema che sorge è su quale porzione di $\partial\Omega$ imporre delle condizioni al bordo.

Per i corrispondenti problemi di Dirichlet e Cauchy-Dirichlet non degeneri, la formulazione classica prevede infatti la prescrizione delle condizioni al bordo su tutto $\partial\Omega$, se invece si perde l'ellitticità stretta su parte della frontiera la situazione cambia radicalmente e non è più detto che le condizioni saranno imponibili su tutto il bordo.

Il problema di Dirichlet (ellittico) in studio è dunque in generale il seguente:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (2.3)$$

dove Γ è un sottoinsieme (eventualmente proprio) di $\partial\Omega$ e, in generale, $g \in C(\Gamma)$.

Il corrispondente problema di Cauchy-Dirichlet (parabolico) è invece formulabile così:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu - \partial_t u = h & \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{su } \Gamma \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{in } (\Omega \cup \Gamma) \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.4)$$

con $g \in C(\Gamma \times [0, T])$ e $u_0 \in C(\Omega \cup \Gamma)$ tali per cui $g(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Gamma$.

Lo studio dei problemi (2.3) e (2.4) è stato in passato condotto essenzialmente da due punti di vista. Da un lato, si è cercato di costruire teoremi di esistenza ed unicità mediante l'uso dei risultati di Analisi Funzionale e dei principi di massimo, utilizzando quindi un approccio di tipo *deterministico*¹. Altri autori, invece, hanno analizzato il problema con un'ottica *stocastica*, studiando le proprietà del processo stocastico generato dall'operatore \mathcal{L} e stabilendo analogie tra l'imposizione delle condizioni al bordo e i diversi comportamenti del processo in corrispondenza delle differenti porzioni del bordo².

Questi due approcci, tuttavia, sono stati troppo spesso portati avanti separatamente, sebbene i relativi risultati portassero spesso nella stessa direzione e, talvolta l'uno, talvolta l'altro, fosse più idoneo a spiegare alcuni comportamenti del problema in esame.

¹Due buoni riferimenti sono, fra gli altri, il classico [28] e il recente [29].

²Qui si veda in particolare [13], [22] e [24].

Lo scopo di questo capitolo è dunque quello di sistematizzare i diversi risultati ottenuti cercando di mettere in luce le analogie e la complementarietà dei due approcci, e di generalizzare e rendere il più unitaria possibile la trattazione nel caso specifico qui considerato di problemi degeneri al bordo. Ora ci concentreremo sullo studio dettagliato dei problemi ellittici, mentre i problemi parabolici saranno trattati nel prossimo capitolo.

2.2 La trattazione classica

Il fatto che nel problema degenero (2.3) le condizioni al contorno fossero da imporre solo su una parte del bordo venne sottolineato per la prima volta nel 1951 da M.V.Keldys, il cui articolo [23] diede il via ad una lunga serie di studi che portarono alla creazione di una prima teoria generale delle, come furono chiamate, equazioni ellittiche del second'ordine in forma non-caratteristica. Presentiamo qui un breve richiamo di tale teoria, mentre in seguito la richiameremo confrontandola con risultati recenti ricavati con diversi approcci.

Ipotizzato Ω limitato, definiamo per ciascuna $x \in \partial\Omega$ le quantità:

$$\alpha(x) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)n_i(x)n_j(x),$$

$$\beta(x) := \sum_{i=1}^n \left[b_i(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} \right] n_i(x),$$

dove $\mathbf{n}(x) = [n_1(x), \dots, n_n(x)]$ indica la normale esterna al bordo $\partial\Omega$.

Si può ora passare alle seguenti definizioni:

Definizione 2.1

Un punto $x_0 \in \partial\Omega$ si dice non caratteristico se $\alpha(x_0) > 0$. L'insieme di tutti i punti $x \in \partial\Omega$ non caratteristici sia indicato con Σ_0 :

$$\Sigma_0 := \{x \in \partial\Omega : \alpha(x) > 0\}.$$

Definizione 2.2

Un punto $x_0 \in \partial\Omega$ si dice caratteristico se $\alpha(x_0) = 0$. Indichiamo quindi con Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 i punti caratteristici (appartenenti a $\partial\Omega \setminus \Sigma_0$) nel seguente modo:

$$\Sigma_1 := \{x \in \partial\Omega : \alpha(x) = 0, \beta(x) > 0\},$$

$$\Sigma_2 := \{x \in \partial\Omega : \alpha(x) = 0, \beta(x) < 0\},$$

$$\Sigma_3 := \{x \in \partial\Omega : \alpha(x) = 0, \beta(x) = 0\}.$$

Grazie a queste definizioni, il problema fu quindi così formulato:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \Sigma_0 \cup \Sigma_1, \end{cases} \quad (2.5)$$

dove le condizioni al bordo sono dunque imposte sulla porzione non caratteristica di frontiera e su quella parte della porzione caratteristica dove il vettore di *drift* è diretto esternamente rispetto al dominio Ω . Questa scelta, che per ora non pare completamente intuitiva, sarà chiarita nelle sezioni successive. Il problema in esame è dunque il (2.3), in cui $\Gamma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

Si può ora enunciare il risultato principale:

Teorema 2.1

Sia Ω un aperto, connesso, limitato e tale che $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}$. Allora il problema (2.5) ammette al più una soluzione nello spazio $C_{\mathcal{L}} := \{u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : \mathcal{L}u \in L^\infty(\Omega)\}$. Tale soluzione è inoltre unica se $g = 0$.

Per dimostrare questo risultato è essenziale che valga $c > 0$ e che, detto $c^* = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} - c$, si abbia $c^* < 0$. A questo punto si dimostra la stima:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{p}{-c^* + (p-1)c} \|\mathcal{L}(u)\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.6)$$

valida per ogni $p \geq 1$ e per tutte le funzioni $u \in C_{\mathcal{L}}$ tali per cui $u = 0$ su $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

Usando quindi la stima (2.6) e il teorema di rappresentazione di un funzionale lineare di $L^p(\Omega)$, si ottiene il teorema di esistenza per una soluzione debole del problema (2.3) in $L^p(\Omega)$ e, successivamente il corrispondente risultato forte in $C_{\mathcal{L}}$.

2.3 Il problema ellittico: punto di vista stocastico

Consideriamo l'equazione (2.1) nel dominio Ω , che, in questa sezione, sarà per semplicità di trattazione un aperto del piano \mathbb{R}^2 . Ogni punto sarà quindi individuato da una coppia $\mathbf{x} = (x, y)$. Inoltre, il dominio Ω abbia come contorno l'unione della curva \mathcal{E} , regolare a tratti e giacente nel semipiano $y > 0$, e il segmento $\mathcal{E}_0 = [r_1, r_2]$, sull'asse x , come in Figura 2.1. Valgano infine le seguenti ipotesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad a_{ij}, b_i \in C^0(\Omega \cup \mathcal{E}); \\ (ii) \quad a_{ij}, b_i \in C^2(\Omega); \\ (iii) \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ in } \Omega \cup \mathcal{E}; \\ (iv) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{E}_0 \text{ non imponiamo alcuna restrizione;} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

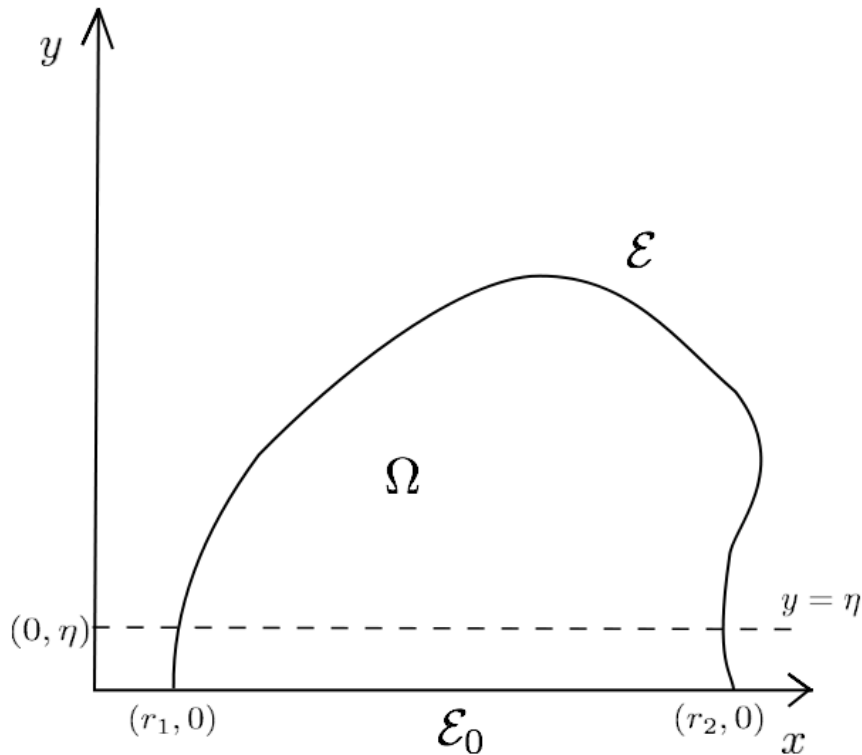


Figura 2.1: Configurazione del dominio Ω

Per stabilire che tipo di problema al contorno sia opportuno impostare, occorre vedere cosa accade in prossimità del bordo \mathcal{E}_0 , dove, per quanto detto sopra, l'equazione potrebbe degenerare oppure alcuni coefficienti potrebbero essere illimitati. Per fare ciò, si analizzerà il comportamento di un processo stocastico \mathbf{X}_t intimamente collegato all'operatore \mathcal{L} , ossia il cui generatore infinitesimale è proprio \mathcal{L} .

Si consideri il dominio $\Omega_\eta := \Omega \cap \{y > \eta\}$ (al variare di $\eta > 0$) con frontiera \mathcal{E}_η , che si ottiene tagliando un intorno arbitrario della porzione di frontiera \mathcal{E}_0 , e il processo di Markov (a valori vettoriali) $\mathbf{X}_t^\eta = (X_t^\eta, Y_t^\eta)$, che ha traiettorie

continue in Ω_η , termina al tempo τ_η in cui raggiunge la frontiera \mathcal{E}_η e la cui estensione a Ω è generata dall'operatore \mathcal{L} .

Grazie a risultati noti della teoria dei processi stocastici, è facile vedere che esiste un processo $\mathbf{X}_t = (X_t, Y_t)$, definito su tutto Ω , per il quale \mathbf{X}_t^η è parte di \mathbf{X}_t in Ω_η e che termina al tempo $\tau = \lim_{\eta \rightarrow 0} \tau_\eta$.

Detto questo, come si comporta il processo \mathbf{X}_t per $t \rightarrow \tau$, quando cioè sta terminando?

2.3.1 Classificazione dei punti di frontiera

Per rispondere alla domanda appena posta introduciamo ora delle definizioni, che saranno subito utili per il prosieguo.

La scuola russa

Le prime presentate sono di scuola russa, cui si devono moltissimi risultati nello studio dei processi stocastici e dei loro comportamenti alla frontiera dell'insieme di definizione. In esse si indicherà con \mathcal{E}_τ l'insieme (aleatorio) dei punti limite di \mathbf{X}_t per $t \rightarrow \tau$.

Definizione 2.3 (Insieme attrattivo)

Un insieme \mathcal{E}_0 si dice attrattivo per il processo \mathbf{X} se per ciascun punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0$ e per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{P}_x(\mathcal{E}_\tau \subset \mathcal{E}_0 \cup \gamma_\epsilon) = 1, \quad (2.8)$$

dove $\gamma_\epsilon = \mathcal{E} \cap \{y < \epsilon\}$.

Definizione 2.4 (Punto e insieme repulsivo)

Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0$ si dice repulsivo per il processo \mathbf{X} se, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \mathbf{P}_x(\mathcal{E}_\tau \subset \mathcal{E}_0 \cup \gamma_\epsilon) < 1. \quad (2.9)$$

L'insieme \mathcal{E}_0 si dice repulsivo se tutti i suoi punti sono repulsivi.

Definizione 2.5 (Punto regolare)

Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0$ si dice regolare per il processo \mathbf{X} se, per ogni intorno \mathcal{U}_{x_0} del punto \mathbf{x}_0 , si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{P}_x(\mathcal{E}_\tau \subset \mathcal{U}_{x_0}) = 1. \quad (2.10)$$

Definizione 2.6 (Insieme irraggiungibile)

Un insieme \mathcal{E}_0 è detto irraggiungibile per il processo \mathbf{X} se, per ogni $x \in \Omega$, si ha

$$\mathbf{P}_x\{\mathcal{E}^\tau \cap \mathcal{E}_0 \neq \emptyset\} = 0. \quad (2.11)$$

La dicitura \mathbf{P}_x sta ad indicare la particolare misura indotta da \mathbf{X} tale che le traiettorie \mathbf{X}_t del processo partono, all'istante temporale $t = 0$, dal punto \mathbf{x} con probabilità 1.

Interpretiamo in modo schematico le definizioni appena date:

- se il punto di partenza delle traiettorie \mathbf{X}_t tende a \mathbf{x}_0 regolare, allora il processo termina, con probabilità 1, in ogni intorno di \mathbf{x}_0 , ossia, al limite, in \mathbf{x}_0 stesso;
- per \mathbf{x}_0 soltanto attrattivo, invece, se il punto di partenza delle traiettorie \mathbf{X}_t tende a \mathbf{x}_0 , il processo termina genericamente in un intorno dell'insieme attrattivo e dunque, al limite, eventualmente ad un suo estremo, facendo intuire un minor grado di controllo sulle sue traiettorie;
- per quanto riguarda \mathcal{E}_0 insieme non raggiungibile, poi, qualsiasi sia il punto di partenza della traiettoria \mathbf{X}_t , l'insieme di terminazione del processo è certamente disgiunto da \mathcal{E}_0 , dove quindi il processo non può in alcun modo arrivare.

Grazie anche a queste interpretazioni, possiamo dedurre che:

- un punto regolare è anche attrattivo (e, dunque, un punto repulsivo non può essere regolare),
- un punto attrattivo, invece, non è necessariamente regolare.

Considerando le porzioni in cui è diviso $\partial\Omega$, è chiaro che tutti i punti di \mathcal{E} sono regolari, data la regolarità assunta nelle ipotesi (2.7) per i coefficienti dell'equazione (2.1) in quei punti. Lo stesso discorso, ovviamente, non vale per \mathcal{E}_0 , dove occorrerà stabilire in che situazione ci si trova.

Prima di proseguire allo studio di \mathcal{E}_0 , presentiamo accanto a questa classificazione di scuola russa, la cosiddetta 'classificazione di Feller³', mettendone in evidenza le analogie e differenze di approccio. Oltre che interessante di per sè, tale classificazione ci tornerà anche utile nel seguito.

³presentata in [13]

La classificazione di Feller

Per semplicità di trattazione, ci limitiamo qui al caso di processo unidimensionale $X(t)$. Consideriamo dunque un *processo di diffusione*, ossia un processo stocastico che gode della proprietà di Markov e con traiettorie che siano funzioni continue in t quasi ovunque: il suo spazio degli stati sia un intervallo $I = (l, r)$ della retta reale, dove si può avere anche $l = -\infty$ e/o $r = +\infty$. Supponiamo inoltre che tale processo sia *regolare*, ogni punto interno ad I sia cioè raggiungibile da una traiettoria partente da un altro punto interno in tempo finito con probabilità positiva. Rappresentiamo questo processo come la soluzione dell'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t) \\ X(0) = x. \end{cases} \quad (2.12)$$

Questa rappresentazione, in cui $W(t)$ è il ben noto processo di Wiener, mette in evidenza il termine di *drift istantaneo* $\mu(x)$ e quello di *diffusione istantanea* $\sigma(x)$.

Procediamo ora alla classificazione, nella quale si sceglie di considerare il bordo sinistro l : per il bordo destro r la procedura è del tutto analoga. Introduciamo per prima cosa quattro quantità.

- La *funzione di scala* è così definita:

$$S(x) = \int_{x_0}^x s(\xi)d\xi, \quad \text{dove} \quad s(\xi) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} [2\mu(\eta)/\sigma^2(\eta)]d\eta}, \quad (2.13)$$

in cui x_0 e ξ_0 sono due punti arbitrari all'interno di I . Inoltre, per un intervallo $J = [a, b] \subset (l, r)$ definiamo la *misura di scala*

$$S[J] = S(b) - S(a).$$

Da queste definizioni è evidente che $0 < S[a, b] < +\infty$ e che

$$S[a, b] = S[a, x] + S[x, b] \quad \text{per} \quad l < a < x < b < r.$$

La misura di scala è direttamente collegata al concetto di bordo attrattivo, come esplicitato in questa definizione, che, come vedremo dopo, risulta perfettamente equivalente alla Definizione 2.3.

Definizione 2.7

Il bordo l si dice *attrattivo* se $S(l, x] < \infty$ indipendentemente dalla scelta di

| x in I .

- La *misura di velocità* è invece così definita:

$$M[a, b] = \int_a^b m(x) dx, \quad \text{dove} \quad m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)s(x)}, \quad (2.14)$$

e anche qui vale $0 < M[a, b] < +\infty$. Essa può essere interpretata come l'inverso della velocità della traiettoria $X(t)$ nell'intervallo $[a, b]$.

- Definiamo la quantità

$$\begin{aligned} \Sigma(l) &= \lim_{a \rightarrow l} \int_a^x S[a, \xi] dM(\xi) = \int_l^x S(l, \xi] dM(\xi) \\ &= \int_l^x d\xi m(\xi) \int_l^\xi s(\eta) d\eta = \int_l^x d\eta s(\eta) \int_\eta^x m(\xi) d\xi \\ &= \int_l^x M[\eta, x] dS(\eta). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si può dimostrare che $\Sigma(l) < \infty$ se e solo se vale

$$\lim_{a \rightarrow l} \mathbb{E}_x [T_a \wedge T_b] < \infty,$$

dove T_h indica il tempo in cui la traiettoria tocca il punto h e il simbolo \wedge indica l'operazione di minimo tra due quantità. Di conseguenza, $\Sigma(l)$ è direttamente collegata al tempo atteso di primo passaggio dal bordo l o, in alternativa, dal punto b , partendo da x .

- Definiamo infine

$$N(l) = \int_l^x S[\eta, x] dM(\eta) = \int_l^x M(l, \xi] dS(\xi), \quad (2.16)$$

dove si intende $M(l, x] = \lim_{a \rightarrow l} M[a, x]$. Questa quantità può essere vista come una misura del tempo che è necessario per raggiungere un punto interno $x \in I$ a partire, in questo caso, dal bordo sinistro l .

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per costruire la classificazione dei punti di frontiera alla Feller. Le quattro quantità sopra definite, $S(l, x]$, $M(l, x]$, $\Sigma(l)$ e $N(l)$, determinano, con il loro essere finite o infinite, la natura delle diverse porzioni di frontiera. Esistono 16 combinazioni possibili con le quali assegnare ad esse valori infiniti o finiti, delle quali tuttavia soltanto sei sono ammissibili: a queste ci si riferisce per procedere nella classificazione di Feller, che viene qui comparata con quella di scuola russa:

1. $S(l, x] < \infty$, $M(l, x] < \infty$, $\Sigma(l) < \infty$, $N(l) < \infty$: questa prima combinazione identifica i **punti regolari**, che corrispondono a quelli introdotti con la Definizione 2.5 e che, secondo la scuola russa, sono sempre attrattivi e raggiungibili. Per stabilire che un punto di frontiera sia regolare è sufficiente mostrare che $S(l, x]$ e $M(l, x]$ siano finiti contemporaneamente, infatti, come si può vedere analizzando gli altri cinque casi, ciò accade solo qui. In corrispondenza di un bordo regolare un processo di diffusione può entrare ed uscire: questa grande 'libertà' si traduce nel fatto che il comportamento in tale punto debba essere specificato (infatti, come vedremo più avanti, esso richiede la definizione di una condizione al bordo). Si possono avere condizioni di *assorbimento* (se $M[\{l\}] = \infty$), *riflessione* (se $M[\{l\}] = 0$), oppure intermedie (come il fenomeno di barriera adesiva), in cui il processo staziona per un tempo finito sul bordo, per $M[\{l\}]$ positivo e finito.
2. $S(l, x] < \infty$, $M(l, x] = \infty$, $\Sigma(l) < \infty$, $N(l) = \infty$: con questa combinazione si identifica la cosiddetta **frontiera di uscita**. Per stabilire di avere a che fare con una frontiera di uscita, è sufficiente, seguendo lo stesso ragionamento fatto al punto precedente, verificare che $\Sigma(l) < \infty$ e $M(l, x] = \infty$. Si può mostrare che, in tale circostanza, vale la proprietà

$$\lim_{b \rightarrow l} \lim_{x \rightarrow l} \mathbf{P}(T_b < t | X(0) = x) = 0 \quad \forall t > 0,$$

ossia, una traiettoria partente da l (nel limite lo stato iniziale x tende a l) non può raggiungere un qualsiasi stato interno b , anche se arbitrariamente vicino. Ciò significa che, una volta raggiunto il bordo l , il processo rimane sempre lì: si parla dunque di *frontiera assorbente*.

Secondo la classificazione russa, questi punti sono tutti quelli attrattivi e raggiungibili che, tuttavia, non sono classificabili come punti regolari.

3. $S(l, x] = \infty$, $M(l, x] < \infty$, $\Sigma(l) = \infty$, $N(l) < \infty$: questo terzo caso corrisponde alla **frontiera di entrata**, che non può essere raggiunta in alcun modo dall'interno dello spazio degli stati I , ma che ammette traiettorie che partano da essa. Per verificare che il bordo l sia di entrata è sufficiente mostrare che $S(l, x] = \infty$ e $N(l) < \infty$.

Questa configurazione si classifica, secondo le definizioni di scuola russa, come frontiera non attrattiva e, a maggior ragione, non raggiungibile.

4. $S(l, x] < \infty$, $M(l, x] = \infty$, $\Sigma(l) = \infty$, $N(l) = \infty$: tale combinazione, assieme alle prossime due, identifica la **frontiera naturale**. Queste tre combinazioni hanno in comune il fatto che vale contemporaneamente

$\Sigma(l) = \infty$ e $N(l) = \infty$ e presentano le condizioni di massima repulsività per una frontiera. Un processo di diffusione, infatti, non può né transitarvi in tempo finito, né semplicemente cominciare da lì. Un esempio di frontiera naturale è rappresentato da entrambi i bordi dello spazio degli stati $I = (-\infty, +\infty)$ quando il processo in considerazione è un moto Browniano standard. A differenza della frontiera regolare, in corrispondenza della quale un processo ha una grande varietà di comportamenti possibili, che quindi vanno specificati mediante condizioni al bordo, qui occorre valutare caso per caso quale sia il comportamento consistente con il processo in gioco.

Si può infine verificare che questa particolare combinazione, all'interno delle tre che concorrono a formare la frontiera naturale, corrisponde al caso particolare, che tratteremo nel dettaglio tra poco, e che nella classificazione russa viene etichettato come frontiera *attraattiva ma irraggiungibile*. L'attraattività discende infatti dal fatto che $S(l, x] < \infty$, che però non si traduce in raggiungibilità a causa dei valori infiniti delle altre tre quantità.

5. $S(l, x] = \infty$, $M(l, x] < \infty$, $\Sigma(l) = \infty$, $N(l) = \infty$: questa quinta combinazione che, come detto, ricade nella categoria di frontiera naturale, differisce dalla precedente poiché, studiandone la classificazione alla russa, si configura come frontiera non attraattiva e non raggiungibile.
6. $S(l, x] = \infty$, $M(l, x] = \infty$, $\Sigma(l) = \infty$, $N(l) = \infty$: qui, infine, vale lo stesso discorso fatto per la combinazione precedente.

2.3.2 Studio dell'insieme \mathcal{E}_0

Per studiare la natura dell'insieme \mathcal{E}_0 , vediamo ora una caratterizzazione delle definizioni date prima di insieme attraattivo, regolare, repulsivo e irraggiungibile. A tale scopo ci si servirà del seguente problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_\eta - cu_\eta = f & \text{in } \Omega_\eta \\ u_\eta = g & \text{su } \mathcal{E}_\eta, \end{cases} \quad (2.17)$$

dove Ω_η e \mathcal{E}_η sono come definiti sopra, ottenuti dunque tagliando una porzione arbitraria di intorno della frontiera di interesse \mathcal{E}_0 . A questo punto si può, al variare di Ω_η , e dunque di \mathcal{E}_η , cercare una soluzione *uniformemente limitata*⁴ u_η e, pertanto, costruire una successione $\{u_\eta\}$, il limite di una cui estratta può essere la soluzione u del problema originario. Questo metodo è detto *metodo di Wiener*, in quanto fu per la prima volta utilizzato da Wiener per risolvere

⁴restrizione essenziale per il funzionamento del procedimento

l'equazione di Laplace. Fatta questa introduzione, possiamo ora caratterizzare le nozioni di insieme (o punto) attrattivo, regolare, repulsivo e irraggiungibile.

Proposizione 2.1

L'insieme \mathcal{E}_0 è attrattivo per il processo \mathbf{X} se e solo se valgono le due condizioni seguenti:

1. *Ogni soluzione dell'equazione (2.1) in Ω costruita mediante il metodo di Wiener con una funzione $g(x)$ tale che $g(x)|_{\mathcal{E}_0} = 0$, tende a 0 se $x \rightarrow \mathcal{E}_0$.*
2. *In ciascun intorno $\mathcal{U}_{\mathcal{E}_0}$ esiste una funzione $V(x)$, detta barriera, tale che $V(x) \in \mathcal{C}^2((\Omega \cup \mathcal{E}_0) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0})$, $V(x) > 0$ per $x \in \Omega$, $\mathcal{L}V \leq 0$ e $V(x) \rightarrow 0$ se $x \rightarrow \mathcal{E}_0$.*

Proposizione 2.2

Un punto $x_0 \in \mathcal{E}_0$ è regolare per il processo \mathbf{X} se e solo se in ogni intorno $\mathcal{U}_{\mathcal{E}_0}$ esiste una funzione $V(x)$, detta barriera, tale che $V(x) \in \mathcal{C}((\Omega \cup \mathcal{E}_0) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0})$, $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$ negli altri punti di $\mathcal{U}_{\mathcal{E}_0}$ e $\mathcal{L}V \leq 0$ in $\Omega \cup \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0}$.

Proposizione 2.3

Affinché il punto $x_0 \in \mathcal{E}_0$ sia repulsivo è necessario e sufficiente che una delle due condizioni seguenti sia verificata:

1. *Esiste una soluzione $u_0(x)$ dell'equazione (2.1) in Ω costruita mediante il metodo di Wiener con una funzione $g(x)$ tale che $g(x)|_{\mathcal{E}_0} = 0$, e si ha $\limsup_{x \rightarrow x_0} u_0(x) > 0$.*
2. *Esiste una famiglia di funzioni $V_\eta(x)$ definite su $\Omega \cap \mathcal{U}_{x_0}$ con bordo $\mathcal{E}_\eta^{x_0}$ e una costante $\epsilon > 0$ tali che:*

$$\mathcal{L}V_\eta \leq 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\eta \cap \mathcal{U}_{x_0},$$

$$V_\eta|_{\mathcal{E}_\eta^{x_0} \cap (y < \epsilon)} \geq 1 \quad \text{per } \eta \text{ sufficientemente piccolo,}$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \lim_{\eta \rightarrow 0} V_\eta(x) = 0.$$

Proposizione 2.4

L'insieme \mathcal{E}_0 è irraggiungibile per il processo \mathbf{X} se e solo se una delle seguenti condizioni è verificata:

1. *Esiste un'unica soluzione limitata di (2.3) con $\Gamma = \mathcal{E}$*

2. Esiste una famiglia di funzioni $\{V_\eta\}$ definite su Ω_η tali che:

$$(i) \quad \mathcal{L}V_\eta \leq 0 \quad \text{in } \Omega_\eta, \quad (2.18)$$

$$(ii) \quad V_\eta|_{\mathcal{E}_\eta \cap \{y=\eta\}} \geq k > 0, \quad (2.19)$$

$$(iii) \quad V_\eta(x) \rightarrow 0 \quad \text{se } \eta \rightarrow 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \quad (2.20)$$

Le quattro proposizioni sopra elencate sono molto utili per la comprensione delle diverse situazioni, ma non forniscono nella pratica risultati sempre applicabili per stabilire la natura delle varie porzioni della frontiera. Passiamo quindi ora a dare delle condizioni sufficienti che siano più incisive e praticamente utili per i nostri scopi.

Euristicamente, se ci attendiamo che l'insieme \mathcal{E}_0 sia **attrattivo** per il processo \mathbf{X} , è naturale aspettarsi anche che la componente Y del processo abbia l'origine come punto attrattivo (vista la configurazione di dominio che stiamo considerando). Il problema, a questo punto, consiste nel fatto che, in generale, un processo che sia componente scalare di un processo vettoriale di Markov, non è necessariamente a sua volta un processo di Markov, fatto imprescindibile di tutta la teoria sviluppata. È tuttavia possibile, grazie a risultati noti della teoria dei processi stocastici, maggiorarlo (in qualche senso) con un processo che sia markoviano. Consideriamo dunque il processo (di Markov) \tilde{Y} , che abbia lo stesso drift e la stessa diffusione istantanea del processo Y preso sulla retta $y = y_0$, dove $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ (nel dominio qui considerato si ha sempre $y_0 = 0$ in quanto \mathcal{E}_0 è un segmento giacente sull'asse x) è un punto dell'insieme \mathcal{E}_0 che si vuole dimostrare essere attrattivo.

Si può ora enunciare il seguente risultato:

Teorema 2.2

Definiamo le seguenti funzioni (al variare di \mathbf{x}_0):

$$B(y) = \max_{x \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0}} \frac{b_2(x, y)}{a_{22}(x, y)},$$

$$\bar{W}(y) = e^{\int_y^{y_0} B(z) dz}.$$

Condizione sufficiente affinché l'insieme \mathcal{E}_0 sia attrattivo è che, per ogni punto (x_0, y_0) appartenente ad \mathcal{E}_0 , la funzione $\bar{W}(y)$ sia integrabile all'origine.

Per dimostrare questo risultato si può, ad esempio, vedere che, se $\bar{W}(y)$ è integrabile all'origine, allora la funzione $V(y) = \int_0^y \bar{W}(z) dz$ è una barriera. A questo punto, l'applicazione della Proposizione 2.1 prova il risultato.

Passiamo ora ai punti **repulsivi**. Occorre innanzitutto osservare che, in questo caso, non ci si può più limitare a considerare una componente (come prima si era fatto con la componente Y) del processo \mathbf{X} , siccome la repulsività può di certo agire in direzione verticale (ossia quella dell'asse y), ma può anche 'spingere' il processo in orizzontale, verso i punti di bordo $(r_1, 0)$ e $(r_2, 0)$. Queste due modalità di respinta di un processo da parte di un insieme repulsivo fanno sì che esista una condizione in più rispetto al caso precedente: il drift e la diffusione istantanei in direzione orizzontale non devono essere grandi rispetto a quelli in direzione verticale.

Enunciamo quindi il secondo risultato:

Teorema 2.3

Siano definite, al variare di \mathbf{x}_0 :

$$C^{\mathbf{x}_0}(y) = \min_{x \in \mathcal{U}_{x_0}} \frac{b_2(x, y)}{a_{22}(x, y)},$$

$$\underline{W}^{\mathbf{x}_0}(y) = e^{\int_y^{y_0} C^{\mathbf{x}_0}(z) dz}.$$

Affinché il punto x_0 sia repulsivo è sufficiente che valgano contemporaneamente le seguenti due condizioni:

- 1. la funzione $\underline{W}^{\mathbf{x}_0}(y)$ non sia integrabile all'origine,*
- 2. le funzioni $|a_{11}/b_2|$ e $|b_1/b_2|$ siano limitate in \mathcal{U}_{x_0} .*

Per quanto riguarda i punti **regolari**, occorre ricordare il ragionamento fatto sopra nel caso di insiemi attrattivi. Per prima cosa si opera una sostituzione temporale, la quale fa sì che l'operatore \mathcal{L} sia moltiplicato per una funzione arbitraria: se si agisce in modo che questa funzione sia pari a $\frac{1}{a_{11}+|b_1|}$, si ottengono dei coefficienti di drift e diffusione orizzontali limitati. Nel frattempo, comunque, si è anche modificato il processo originario: chiamiamo il nuovo \mathbf{X} . Si può però dimostrare che un punto regolare per \mathbf{X} lo è anche per $\tilde{\mathbf{X}}$ e dunque, per individuare i punti regolari, possiamo trattare i due processi indistintamente. In ogni caso, la garanzia che la componente \tilde{Y} sia markoviana non c'è: consideriamo quindi, come fatto in precedenza, un processo, che sia di Markov e che chiamiamo \bar{Y} , i cui coefficienti di drift e diffusione istantanei siano gli stessi di \tilde{Y} ristretto alla linea $y = y_0$. Siamo pronti ora per enunciare il risultato:

Teorema 2.4

Definiamo le funzioni (al variare di \mathbf{x}_0) :

$$A(y) = \min_{x \in \mathcal{U}_{x_0}} \frac{a_{22}(x, y)}{a_{11}(x, y) + |b_1(x, y)|},$$

$$B^{\mathbf{x}_0}(y) = \max_{x \in \mathcal{U}_{x_0}} \frac{b_2(x, y)}{a_{22}(x, y)},$$

$$\bar{W}^{\mathbf{x}_0}(y) = e^{\int_y^{y_0} B^{\mathbf{x}_0}(z) dz},$$

$$Z(y) = \bar{W}^{\mathbf{x}_0}(y) \int_y^{y_0} (\bar{W}^{\mathbf{x}_0}(z) A(z))^{-1} dz.$$

Affinché il punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0$ sia classificabile come regolare per il processo \mathbf{X} , è sufficiente che la funzione $Z(y)$ sia integrabile all'origine.

Infine, trattiamo i punti **irraggiungibili**. In questo caso, dalla Proposizione 2.4 possiamo ottenere un'ulteriore caratterizzazione:

Proposizione 2.5

Affinché l'insieme \mathcal{E}_0 sia irraggiungibile per il processo \mathbf{X} è sufficiente che esista una funzione $U(x)$ tale che:

1. $U(x) > 0$ in Ω ,
2. $\mathcal{L}U(x) \leq 0$ in Ω ,
3. $U(x) \rightarrow +\infty$ se $\mathbf{x} \rightarrow \mathcal{E}_0$ uniformemente in \mathbf{x} e in Ω .

Per ottenere poi un risultato analogo ai precedenti, si possono ora ripetere le considerazioni euristiche fatte in precedenza nel caso dei punti regolari, ed è dunque facile immaginare che, affinché il segmento \mathcal{E}_0 sia irraggiungibile, e quindi l'origine sia irraggiungibile per il processo \bar{Y} , la funzione $Z(y)$ non debba essere integrabile all'origine. Ci si potrebbe ora chiedere: è questa condizione sufficiente? La risposta a questa domanda è affermativa, soltanto se si impone che i coefficienti dell'operatore \mathcal{L} soddisfino una serie di condizioni, come visibile nel seguente risultato:

Teorema 2.5

Definiamo le funzioni (al variare di \mathbf{x}_0) :

$$D(y) = \max_{x \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0}} \frac{a_{22}(x, y)}{a_{11}(x, y) + |b_1(x, y)|},$$

$$C(y) = \min_{x \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0}} \frac{b_2(x, y)}{a_{22}(x, y)},$$

$$\underline{W}(y) = e^{\int_y^{y_0} C(z) dz},$$

$$\underline{Z}(y) = \underline{W}(y) \int_y^{y_0} \underline{W}^{-1}(z) D^{-1}(z) dz.$$

Affinché il segmento \mathcal{E}_0 sia irraggiungibile è sufficiente che valgano contemporaneamente le due condizioni:

1. la funzione $\underline{Z}(y)$ non sia integrabile all'origine,
2. i coefficienti a_{ij} , b_i (per $i, j = 1, 2, \dots, n$) dell'operatore \mathcal{L} siano tali che esistano due insiemi chiusi \mathcal{E}_0^1 e \mathcal{E}_0^2 tali che $\mathcal{E}_0^1 \cup \mathcal{E}_0^2 = \mathcal{E}_0$ dove $a_{11}(\mathbf{x}) > k > 0$, $b_1(\mathbf{x})$ è limitato per $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0^1}$ e $b_1(\mathbf{x})$ ha segno costante in $\mathcal{U}_{\mathcal{E}_0^2}$

Ora che sono disponibili le caratterizzazioni per tutte le tipologie di frontiere con cui si può avere a che fare, e le relative condizioni sufficienti, vediamo che impatto hanno queste diverse situazioni nel momento in cui occorre decidere dove imporre le condizioni al bordo.

Caso di frontiera regolare

Se ci si mette nel campo di applicazione del Teorema 2.4, cioè quando \mathcal{E}_0 è regolare per il processo \mathbf{X} , si ha, nell'ambito delle ipotesi (2.7), che le caratteristiche di regolarità, a priori valide solo per la porzione \mathcal{E} , valgono anche per \mathcal{E}_0 e pertanto per tutta la frontiera. Ci siamo dunque ricondotti al caso particolare di problema non degenero, per cui il problema in considerazione è il (2.3) con $\Gamma = \partial\Omega$ e vale dunque il seguente risultato:

Teorema 2.6

Sia \mathcal{E}_0 regolare. Allora il problema è formulabile come

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.21)$$

e ammette un'unica soluzione.

Caso di frontiera attrattiva ma non raggiungibile

Il caso in cui \mathcal{E}_0 è attrattivo ma non raggiungibile è particolarmente interessante poiché rappresenta una via di mezzo tra la frontiera regolare, appena trattata, e la frontiera repulsiva: vediamo come questa sorta di compromesso si ripercuota sull'imposizione delle condizioni al bordo. Da un punto di vista qualitativo ci si aspetta che, da un lato, l'attrattività di \mathcal{E}_0 per \mathbf{X}_t porti nella direzione dell'imporre una qualche condizione al bordo. D'altra parte, la non raggiungibilità di \mathcal{E}_0 fa intuire che essa non possa essere trattata come una frontiera regolare, concedendo meno 'libertà' nell'imposizione delle condizioni al bordo.

Innanzitutto, cosa significa che un insieme sia attrattivo ma irraggiungibile?

Dal punto di vista delle condizioni sufficienti fornite in questa sezione, in particolare nei teoremi 2.2 e 2.5, si vede che, per verificare di trovarsi in questa situazione, è sufficiente verificare che la funzione $\bar{W}(y)$ sia integrabile all'origine, $Z(y)$ non sia lì integrabile e valgano le condizioni di regolarità del Teorema 2.5, ovvero i coefficienti a_{ij} , b_i (per $i, j = 1, 2, \dots, n$) dell'operatore \mathcal{L} siano tali che esistano due insiemi chiusi \mathcal{E}_0^1 e \mathcal{E}_0^2 tali che $\mathcal{E}_0^1 \cup \mathcal{E}_0^2 = \mathcal{E}_0$ dove $a_{11}(\mathbf{x}) > k > 0$, $b_1(\mathbf{x})$ è limitato per $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}_0^1}$ e $b_1(\mathbf{x})$ ha segno costante in $\mathcal{U}_{\mathcal{E}_0^2}$.

Da un punto di vista probabilistico, combinando la (2.8) e la (2.11), è chiaro che in questo caso si ha

$$\mathbf{P}_x(\mathcal{E}_\tau \subset \gamma_\epsilon) \rightarrow 1 \quad \text{se } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{E}_0 \quad \forall \epsilon > 0. \quad (2.22)$$

Possiamo quindi dire che:

- all'avvicinarsi dello stato iniziale a \mathcal{E}_0 , l'insieme di arrivo è contenuto, con probabilità tendente a 1, in qualsiasi intorno dell'insieme \mathcal{E}_0 : dunque, siccome non può raggiungere il suo interno, tenderà ad uno dei suoi estremi;
- da un punto di vista differenziale, ciò si traduce nel fatto che il comportamento della soluzione $u(\mathbf{x})$ dell'equazione (2.1) dipende, per $\mathbf{x} \rightarrow \mathcal{E}_0$, solo dai valori al bordo della funzione nei punti $(r_1, 0)$ e $(r_2, 0)$.

Assumiamo ora che i coefficienti $a_{11}(\mathbf{x})$ e $b_1(\mathbf{x})$ siano continui sulla chiusura di $\Omega \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_0$ e che $a_{11}(\mathbf{x}) > 0$. Definiamo quindi con X_0 il processo unidimensionale che vive sul segmento dell'asse x $[r_1, r_2]$ e termina quando, al tempo aleatorio τ_0 , raggiunge uno dei due estremi, r_1 o r_2 . L'operatore infinitesimale di tale processo è individuabile dall'espressione:

$$\mathcal{L}_0(u) = a_{11}(x, 0) \frac{d^2 u}{dx^2} + b_1(x, 0) \frac{du}{dx},$$

dove le derivate sono totali poiché non vi è alcuna dipendenza dalla coordinata verticale y .

Si può ora enunciare il seguente risultato.

Teorema 2.7

Valgano le ipotesi fatte sopra sui coefficienti a_{11} e b_1 , e sia \mathcal{E}_0 attrattivo ma non raggiungibile. Inoltre, sia $g_0(\mathbf{x})$ una funzione continua su \mathcal{E} . Allora si ha che

$$\mathbb{E}_x g_0(\mathbf{X}_\tau) \rightarrow \mathbb{E}_x g_0(X_0(\tau_0), 0) \quad \text{se } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0,$$

e tale convergenza è uniforme in \mathbf{x}_0 .

Dal punto di vista del problema differenziale, questo teorema significa che il problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g_0 & \text{su } \mathcal{E}, \end{cases} \quad (2.23)$$

ammette un'unica soluzione $u(\mathbf{x})$, che al limite soddisfa la relazione

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow (x_0, 0)} u(\mathbf{x}) = u_0(x_0), \quad (2.24)$$

dove $u_0(x)$ è la soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 u_0 - c u_0 = 0 & \text{in } \mathcal{E}_0 \\ u_0(r_1) = g_0(r_1, 0), \quad u_0(r_2) = g_0(r_2, 0), \end{cases} \quad (2.25)$$

e la convergenza (2.24) è uniforme in x_0 .

2.3.3 Un caso particolare

Vediamo ora come le condizioni sufficienti presentate sopra possono essere applicate in modo da dimostrare che un tratto di frontiera è regolare, piuttosto che attrattivo ma irraggiungibile, oppure completamente repulsivo.

Consideriamo quindi il problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \mathcal{E}, \end{cases} \quad (2.26)$$

e assumiamo che i coefficienti a_{11} , a_{12} e b_1 siano sufficientemente regolari (ad esempio, siano continui sulla chiusura di Ω e sia $a_{11}(\mathbf{x}) > 0$, mentre, per quanto riguarda gli altri due coefficienti, si abbia $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0} a_{22}(\mathbf{x}) = 0$ oppure $b_2(\mathbf{x})$ sia illimitato se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}_0$).

Di conseguenza, occorre approfondire lo studio di tali coefficienti per classificare la frontiera e capire quanta libertà abbiamo per imporre le condizioni al bordo. Per poter svolgere i conti, supponiamo che, in particolare, valga

$$\lambda y^\alpha \leq a_{22}(x, y) \leq \Lambda y^\alpha,$$

$$\delta y^\beta \leq b_2(x, y) \leq \Delta y^\beta,$$

dove λ , Λ , δ e Δ sono costanti positive.

Per stabilire la natura di \mathcal{E}_0 , che dipenderà, come si può intuire, dai parametri α e β , occorre studiare l'integrabilità delle funzioni introdotte nei teoremi 2.2-2.5.

1. Affinché \mathcal{E}_0 sia **attrattivo** è sufficiente che $\overline{W}(y)$ sia integrabile all'origine. Ora, nel nostro caso particolare, per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\overline{W}(y) \sim e^{\int_y^{y_0} x^{\beta-\alpha} dx},$$

perciò, se poniamo $\beta - \alpha > -1$, la funzione $\overline{W}(y)$ è ben definita e limitata e, dunque, integrabile all'origine. Invece, se $\beta - \alpha = -1$, occorre, per garantire l'integrabilità, aggiungere la condizione $\frac{\Delta}{\lambda} < 1$, cioè $\Delta < \lambda$.

Applicando il Teorema 2.2, si ha dunque che \mathcal{E}_0 è attrattivo se vale

$$\beta - \alpha + 1 > 0,$$

oppure

$$\beta - \alpha + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \Delta < \lambda.$$

2. Per avere \mathcal{E}_0 **repulsivo** si può invece applicare il Teorema 2.3. In questo caso, occorre provare che $\underline{W}(y)$ non sia integrabile all'origine e che $|a_{11}/b_2|$ e $|b_1/b_2|$ siano limitate in ogni \mathcal{U}_{x_0} , con $x_0 \in \mathcal{E}_0$. La prima di queste due condizioni, in contrapposizione con il punto precedente, è certamente verificata se $\beta - \alpha + 1 < 0$, in quanto l'integrale sopra riportato diverge. Se invece $\beta - \alpha + 1 = 0$ la non integrabilità si ottiene con la condizione

supplementare $\frac{\delta}{\Lambda} > 1$, cioè $\delta > \Lambda$. Per verificare la seconda delle due condizioni del teorema, occorre invece che sia $\beta \leq 0$, cosicché le due quantità $|a_{11}/b_2|$ e $|b_1/b_2|$ siano limitate.

Ricapitolando, \mathcal{E}_0 è repulsivo se vale

$$\beta - \alpha + 1 = 0, \quad \delta > \Lambda \quad \text{e} \quad \beta \leq 0,$$

oppure

$$\beta - \alpha + 1 < 0 \quad \text{e} \quad \beta \leq 0.$$

3. Per vedere in quali casi la frontiera \mathcal{E}_0 è regolare, si può applicare il Teorema 2.4, e quindi provare che la funzione $Z(y)$ è integrabile all'origine. Per prima cosa, sappiamo che una frontiera regolare deve essere anche attrattiva: partiamo dunque dalle condizioni che garantiscono l'attrattività. Una volta garantito che $\overline{W}(y)$ è integrabile, si ha:

$$Z(y) \sim \frac{1}{y^\alpha},$$

l'integrabilità è dunque garantita se $\alpha < 2$.

Combinando questa condizione con i due casi ottenuti in precedenza, si ha dunque che \mathcal{E}_0 è regolare se

$$\beta - \alpha + 1 > 0 \quad \text{e} \quad \alpha < 2$$

oppure

$$\beta - \alpha + 1 = 0, \quad \Delta < \lambda \quad \text{e} \quad \alpha < 2.$$

4. Vediamo infine quando \mathcal{E}_0 è **irraggiungibile**. Applichiamo il Teorema 2.5 e studiamo la funzione $\underline{Z}(y)$: siccome tutte le quantità in gioco dipendono soltanto dalla variabile y (almeno riguardo alle maggiorazioni e minorazioni), le operazioni di massimo e minimo sono superflue e la $\underline{Z}(y)$ coincide con la $Z(y)$. Affinché essa non sia integrabile si hanno quindi, in esatta contrapposizione con il caso di frontiera regolare, due scenari possibili. In primo luogo, se $\beta - \alpha + 1 > 0$, possiamo avere una frontiera irraggiungibile se $\alpha > 2$. Invece, se $\beta - \alpha + 1 = 0$, vi sono due possibilità per far cadere la seconda condizione del punto precedente: o $\delta \geq \Lambda$, oppure $\delta < \Lambda$ e $\alpha \geq 2$.

Ricapitolando, \mathcal{E}_0 è irraggiungibile se

$$\beta - \alpha + 1 > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \geq 2$$

oppure

$$\beta - \alpha + 1 = 0, \quad \delta \geq \Lambda,$$

oppure

$$\beta - \alpha + 1 = 0, \quad \delta < \Lambda \quad \text{e} \quad \alpha \geq 2.$$

2.4 Il problema ellittico: punto di vista deterministico

Consideriamo ora sempre il problema (2.3), ma utilizzando un altro tipo di approccio, che si baserà sulla ricerca di opportune soprasoluzioni e sottosoluzioni. In particolare, ci si servirà di due problemi ausiliari: il *problema omogeneo*

$$\begin{cases} \mathcal{L}U - cU = 0 & \text{in } \Omega \\ U = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (2.27)$$

e il cosiddetto *problema del tempo di prima uscita*

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = -1 & \text{in } \Omega \\ V = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \quad (2.28)$$

Prima di proseguire occorre fare alcune ipotesi sui coefficienti dell'operatore \mathcal{L} e sui dati, che saranno poi utili per i risultati che presenteremo nel seguito. Innanzitutto, riconsideriamo la composizione dell'insieme $\partial\Omega$: indichiamo con \mathcal{A} la parte di frontiera con le caratteristiche di migliore regolarità, mentre con \mathcal{B} quella in cui si perde l'ellitticità di \mathcal{L} oppure i suoi coefficienti diventano illimitati:

$$\begin{cases} \partial\Omega = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset, \quad \mathcal{B} \neq \emptyset; \\ \mathcal{A} \subseteq \partial\bar{\Omega} \text{ sia aperto.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Per quanto riguarda i coefficienti, chiediamo che

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,1}(\Omega \cup \Gamma); \\ b_i \in C^{0,1}(\Omega \cup \Gamma); \\ c \in C(\Omega \cup \Gamma), \quad c \geq 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Per quanto riguarda i dati, chiediamo invece che valgano le seguenti ipotesi:

$$\begin{cases} f \in C(\Omega); \\ g \in C(\mathcal{A}). \end{cases} \quad (2.31)$$

Proseguiamo ora con la trattazione in due passi: per prima cosa svilupperemo la teoria con i risultati di esistenza di soluzioni, poi passeremo ad esaminare i risultati di unicità.

2.4.1 Esistenza e non unicità di soluzioni

Cominciamo considerando il problema del tempo di prima uscita (2.28), e supponiamo inizialmente che il dominio Ω sia limitato. Mettiamoci inoltre nella

situazione in cui tale problema ammetta una soprasoluzione V , e che questa sia tale che

$$\inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V = 0 < \inf_{\mathcal{A}} V.$$

Ciò significa che la soprasoluzione trovata ammette estremo inferiore positivo sul bordo regolare \mathcal{A} , mentre, considerando l'unione di esso con il dominio Ω , l'estremo inferiore è più piccolo ed, anzi, è nullo (l'estremo inferiore è quindi assunto all'interno). Allora, si può dimostrare che si ha

$$\liminf_{\text{dist}(x, \mathcal{A}) \rightarrow 0} V(x) = \inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V = 0, \quad (2.32)$$

e, dunque, esiste una successione $\{x_m\} \subseteq \Omega$ tale per cui $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{dist}(x_m, \mathcal{A}) = 0$ e caratterizzata dalla proprietà che, per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione limitata U_γ del problema omogeneo

$$\begin{cases} \mathcal{L}U - cU = 0 & \text{in } \Omega \\ U = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

tale per cui si abbia

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U_\gamma(x_m) = \gamma.$$

A questo punto, grazie al risultato ottenuto, si può dimostrare che il problema omogeneo appena riportato ammette infinite soluzioni limitate e, di conseguenza, abbiamo immediatamente un risultato di non unicità per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \mathcal{A}, \end{cases} \quad (2.33)$$

dove si è posto $\Gamma = \mathcal{A}$ per adeguarci alla notazione introdotta in questa sezione. Ovviamente, per il problema (2.33) la non-unicità sussiste non appena si dimostri l'esistenza di almeno una soluzione.

Nel caso in cui invece il dominio Ω sia illimitato, se ancora abbiamo una soprasoluzione del problema del tempo di prima uscita tale per cui $\inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V = 0 < \inf_{\mathcal{A}} V$, non è più detto che ciò implichi la (2.32). Nel caso non si riesca a dimostrare questo passaggio, si può comunque mostrare che, invece, vale:

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V = 0,$$

e si può ripercorrere la stessa strada appena descritta. L'unico accorgimento da tenere riguarnerà il fatto che la successione $\{x_m\} \subseteq \Omega$ sarà qui divergente. Ciò che innesca la non-unicità in questo caso è, dunque, la mancanza di una condizione all'infinito sulla soluzione u nel problema (2.33).

Abbiamo dunque a grandi linee mostrato il seguente

Teorema 2.8

Siano soddisfatte le ipotesi (2.30) e (2.31) sui coefficienti e i dati del problema, e inoltre sia $c \in L^\infty(\Omega)$. Esista poi una soprasoluzione V del problema del tempo di prima uscita tale per cui

$$\inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V = 0 < \inf_{\mathcal{A}} V. \quad (2.34)$$

Allora si ha la seguente alternativa: o non esistono soluzioni per il problema originario (2.33), oppure ne esistono infinite.

A questo punto, grazie al risultato appena mostrato, se ci troviamo nel contesto di applicabilità del Teorema 2.8, è sufficiente mostrare l'esistenza di una soluzione per avere automaticamente anche la non unicità. Enunciamo dunque un teorema di esistenza.

Proposizione 2.6

Siano soddisfatte le ipotesi (2.30) e (2.31) sui coefficienti e sui dati del problema, e inoltre sia $f \in L^\infty(\Omega)$ e $g \in L^\infty(\mathcal{A})$. Esista poi una soprasoluzione positiva $W \in C(\Omega \cup \mathcal{A})$ dell'equazione

$$\mathcal{L}u - cu = -1 \quad \text{in } \Omega.$$

Allora esiste una soluzione del problema originario (2.33).

Esempio

Vediamo subito come si applicano nella pratica i risultati appena visti. Si consideri dunque il problema

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} - u = f & \text{in } (0, \infty) \times (0, 1) = \Omega \\ u = g & \text{su } (0, \infty) \times \{1\} = \mathcal{A}, \end{cases} \quad (2.35)$$

dove $f \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $g \in C(\mathcal{A}) \cup L^\infty(\mathcal{A})$. Il dominio è raffigurato in Figura 2.2.

Cerchiamo ora di costruire una funzione che soddisfi contemporaneamente le ipotesi del Teorema 2.8 e della Proposizione 2.6, in modo da dimostrare subito esistenza e non unicità di una soluzione per (2.35). Prendiamo ad esempio $U(x, y) = y$, che soddisfa

$$\inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} U = 0 < \inf_{\mathcal{A}} U = 1,$$

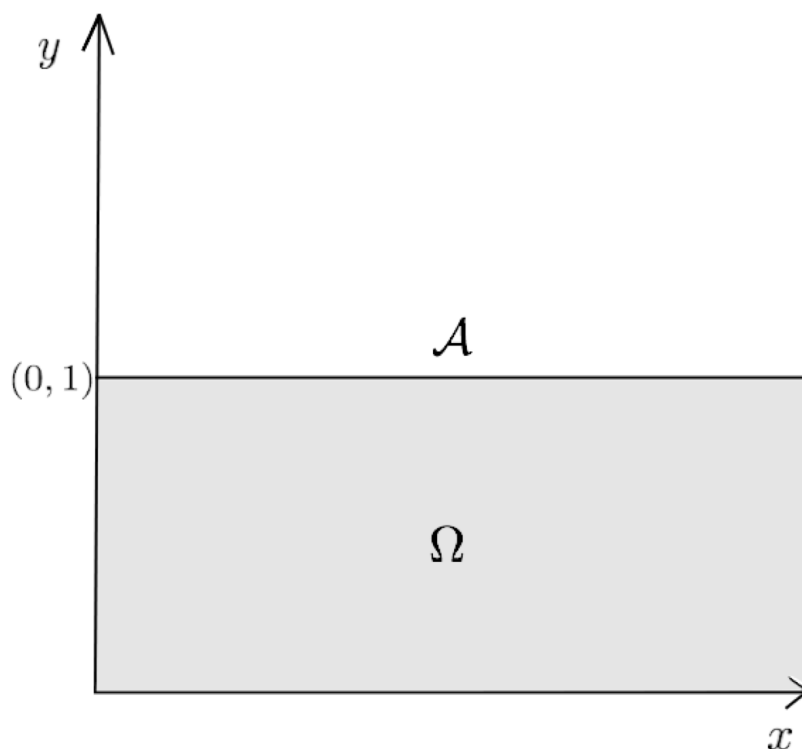


Figura 2.2: Configurazione del dominio Ω

e anche

$$\mathcal{L}U = -1 \quad \text{in } \Omega,$$

dove si ricordi che $\mathcal{L} = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}$. Allora l'applicazione del Teorema 2.8 implica che esistono infinite soluzioni per (2.35) oppure non ne esiste alcuna.

Tuttavia, vediamo che vale anche

$$\mathcal{L}U - U = -1 - y \leq -1 \quad \text{in } \Omega,$$

e pertanto possiamo applicare anche la Proposizione 2.6, che garantisce l'esistenza di almeno una soluzione.

In conclusione, il problema (2.35) ammette infinite soluzioni.

2.4.2 Unicità della soluzione

È chiaro che la situazione più desiderabile, che permette di avere un problema ben posto, è quella in cui l'esistenza della soluzione sia accompagnata dalla sua unicità. Costruiamo quindi ora dei teoremi che ci diano risultati in questo senso, e generalizziamo maggiormente la situazione. Nel caso in cui i risultati della precedente sezione implicino non unicità, tentiamo allora di ripristinare l'unicità aumentando la porzione di barriera sulla quale vengono imposte condizioni di bordo. Intuitivamente, infatti, la non unicità può essere ricondotta ad un insufficiente controllo della soluzione al bordo, dovuto ad un numero eccessivo di gradi di libertà ad essa concesso: si può dunque tentare di sistemare questa situazione aumentando il controllo al bordo.

Riconsideriamo la porzione singolare di bordo (sulla quale si perde ellitticità o si hanno coefficienti non limitati) \mathcal{B} , dividiamola in due parti e facciamo le seguenti ipotesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset; \\ \mathcal{B}_j = \bigcup_{k=1}^{k_j} \mathcal{B}_j^k, \text{ dove ogni } \mathcal{B}_j^k \text{ è connesso, } j = 1, 2; \\ \text{se } k_j \geq 2 : \overline{\mathcal{B}_j^k} \cap \overline{\mathcal{B}_j^l} = \emptyset \quad \forall k, l = 1, \dots, k_j, \quad k \neq l. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

A questo punto possiamo riformulare il problema (2.33) con il proposito di recuperare l'unicità eventualmente persa:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

e, nel caso in cui il dominio Ω sia illimitato, individuiamo, come accennato prima, nella condizione all'infinito la correzione da apportare:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u - cu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \alpha & \alpha \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

La definizione di questi due problemi non esclude il fatto che i teoremi che ora presenteremo potranno essere applicati per dimostrare l'unicità della soluzione direttamente al problema (2.33). Quest'ultimo è infatti un caso particolare del problema (2.37) in cui $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ e $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$.

Concentriamoci inizialmente sul caso in cui Ω sia limitato e serviamoci del problema ausiliario introdotto prima, ossia il problema omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}U - cU = 0 & \text{in } \Omega \\ U = 0 & \text{su } \mathcal{A}. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Vedremo come l'unicità della soluzione dipenderà dal comportamento di eventuali sottosoluzioni di tale problema quando $\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0$. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 2.9

Valgano le ipotesi (2.30), (2.31) e (2.36), e inoltre sia $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ e $g \in C(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1)$. Esista inoltre una sottosoluzione $W \leq K < 0$ (dove $K \in \mathbb{R}$) del problema omogeneo (2.39). Allora, se Ω è limitato, esiste al più una soluzione u del problema originario (2.37) tale che

$$\lim_{\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} \frac{u(x)}{W(x)} = 0. \quad (2.40)$$

Se invece Ω è illimitato, vale lo stesso risultato aggiungendo la condizione all'infinito

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{W(x)} = 0.$$

La dimostrazione di questo risultato, che qui viene omessa, discende dal fatto che, nelle ipotesi del Teorema 2.9, se u è una sottosoluzione di (2.37) con $f = g = 0$ tale che

$$\liminf_{\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} \frac{u(x)}{W(x)} \geq 0,$$

allora $u \leq 0$.

Il risultato di unicità appena presentato è molto importante, ma poco utile dal punto di vista pratico, in quanto riguarda una soluzione di una classe definita in funzione della sottosoluzione ausiliaria $W(x)$. Osserviamo però bene la (2.40): se la sottosoluzione $W(x)$ divergesse per $\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0$ avremmo automaticamente l'unicità della soluzione nella classe L^∞ . Vale dunque il seguente teorema:

Teorema 2.10

Valgano le ipotesi (2.30), (2.31) e (2.36), e inoltre sia $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ e $g \in C(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1)$. Esista inoltre una sottosoluzione $W \leq K < 0$ (dove $K \in \mathbb{R}$) del problema omogeneo (2.39), tale che

$$\lim_{\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} W(x) = -\infty,$$

se Ω è limitato, oppure

$$\lim_{\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} W(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x) = -\infty,$$

se Ω è illimitato. Allora esiste al più una soluzione $u \in L^\infty(\Omega)$ del problema originario (2.37).

Esempio

Mettiamo in pratica i risultati visti in questa parte e consideriamo il problema

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} - |\log |1 - x^2|| u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1, \end{cases} \quad (2.41)$$

dove

$$\begin{aligned} \Omega &= ((-1, 1) \times [0, 1]) \cup ((-1, 0) \times (-1, 0)), \\ \mathcal{A} &= ([-1, 0) \times \{-1\}) \cup ([-1, 1] \times \{1\}), \\ \mathcal{B}_1 &= (\{-1\} \times (-1, 1)) \cup (\{1\} \times (0, 1)), \\ \mathcal{B}_2 &= (\{0\} \times (-1, 0)) \cup ([0, 1] \times \{0\}); \\ a_{11}(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \in (-1, 1), y \in [0, 1] \\ x^2, & \text{se } x \in (-1, 0), y \in (-1, 0), \end{cases} \\ a_{22}(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \in (-1, 0), y \in (-1, 1) \\ y^2, & \text{se } x \in [0, 1), y \in (0, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

$f \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $g \in C(\mathcal{A}) \cup L^\infty(\mathcal{A})$. Il dominio è mostrato in Figura 2.3.

Per poter discutere l'unicità di questo problema dobbiamo quindi, guidati dai teoremi mostrati prima, costruire una sottosoluzione del problema omogeneo (2.39) con le caratteristiche spiegate sopra. Visto che queste funzioni sono caratterizzate soprattutto per il loro andamento per $\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0$, il modo più semplice e intelligente per definirle è proprio in funzione della distanza dalla porzione critica del bordo, cosicché la loro regolarità dipenda da quella di tale insieme.

Vediamo che in questo esempio si ha:

$$\text{dist}((x, y), \mathcal{B}_2) = \begin{cases} y & \text{se } x \in [0, 1), y \in (0, 1) \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } x \in (-1, 0), y \in (0, 1) \\ -x & \text{se } x \in (-1, 0), y \in (-1, 0). \end{cases}$$

Notato ciò, possiamo dunque prendere la seguente funzione come candidata sottosoluzione del problema omogeneo:

$$W(x, y) = 2 \log[\text{dist}((x, y), \mathcal{B}_2)] - \log 3.$$

Per prima cosa, è facile vedere che questa funzione è limitata superiormente, infatti certamente si ha

$$Z(x, y) \leq \log 2 - \log 3 = \log \frac{2}{3} \quad \text{in } \Omega.$$

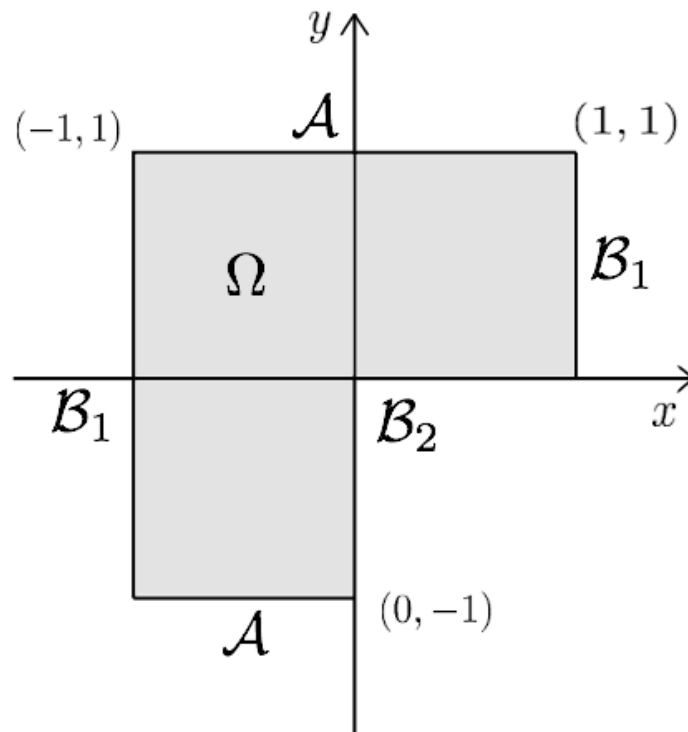


Figura 2.3: Configurazione del dominio Ω

Applicando poi l'operatore \mathcal{L} , si vede che $\mathcal{L}W \leq 0$, quindi essa è sottosoluzione del problema omogeneo. È, infine, evidente che, per come è stata costruita la funzione, vale

$$\lim_{\text{dist}((x,y), \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} W(x, y) = -\infty,$$

ed è dunque possibile applicare il Teorema 2.10 e mostrare che il problema (2.41) ammette al più una soluzione $u \in L^\infty$.

2.4.3 Confronto con il punto di vista stocastico

Torniamo alla definizione del problema (2.37) e, in particolare, a come si presenta il dato al bordo g definito sull'insieme $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$. Tale problema era stato definito con lo scopo di ripristinare l'unicità della soluzione ed estendendo la porzione di bordo sulla quale imponiamo le condizioni: non è tuttavia ancora chiaro che tipo di condizioni possiamo imporre su \mathcal{B}_1 . Se infatti su \mathcal{A} , data la regolarità

dell'insieme, vi è una grande libertà di imposizione delle condizioni, la stessa cosa non può invece essere detta dell'insieme \mathcal{B}_1 , che, come detto all'inizio, presenta delle criticità per l'operatore \mathcal{L} . Occorre stabilire dunque che grado di libertà abbiamo nell'imporre le condizioni di bordo su \mathcal{B}_1 e ciò sarà, come intuibile, legato alla 'gravità' delle degenerazioni di \mathcal{L} su tale insieme.

A tale scopo si rivela essere più efficace ritornare in un'ottica più stocastica e tornare quindi a parlare di insiemi attrattivi e di funzioni barriera. Questo cambio di prospettiva rientra nell'intento, dichiarato all'inizio, di studiare lo stesso problema da due punti di vista differenti, supportato dal fatto che ciascuno di essi sia più efficace dell'altro nell'evidenziare alcuni specifici problemi.

Consideriamo quindi $\mathcal{B}_1 \subseteq \partial\Omega$ e definiamo così il suo intorno di raggio ϵ

$$\mathcal{B}_1^\epsilon := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \mathcal{B}_1) < \epsilon\}.$$

Possiamo ora introdurre la seguente definizione:

Definizione 2.8

Diciamo che $\mathcal{B}_1 \subseteq \partial\Omega$ è attrattivo se esiste un $\epsilon > 0$ e una soprasoluzione $U \in C(\overline{\mathcal{B}_1^\epsilon})$ dell'equazione

$$\mathcal{L}u - cu = -1 \quad \text{in } \mathcal{B}_1^\epsilon, \quad (2.42)$$

tale per cui

$$U > 0 \quad \text{in } \overline{\mathcal{B}_1^\epsilon} \setminus \mathcal{B}_1,$$

e

$$U = 0 \quad \text{su } \mathcal{B}_1.$$

Notiamo subito che la definizione qui presentata è del tutto analoga a quella riportata nella precedente sezione, ed in particolare esplicitata nella Proposizione 2.1: cambia solo leggermente la definizione del problema ausiliario di cui la U è soprasoluzione, ma il concetto è lo stesso.

A questo punto, come già fatto in precedenza, ci serve un'ulteriore definizione per classificare dei punti attrattivi, che però godono di una proprietà più forte.

Definizione 2.9

Consideriamo un punto $x_0 \in \partial\overline{\Omega}$. Una funzione $F \in C(\overline{\Omega \cap \mathcal{U}(x_0)})$ è detta barriera in x_0 se

1. F è soprasoluzione di

$$\mathcal{L}u - cu = -1 \quad \text{in } \Omega \cap \mathcal{U}(x_0),$$

2. vale la relazione

$$F > 0 \text{ in } \overline{\Omega \cap \mathcal{U}(x_0)} \setminus \{x_0\},$$

3. $F(x_0) = 0$.

Come fatto prima, riscontriamo anche qui il parallelismo tra questa definizione e quella riportata nella precedente sezione, più precisamente con la Proposizione 2.2, legata ai cosiddetti punti regolari. Anche qui l'analogia è completa, a parte il problema ausiliario che è definito in modo leggermente diverso.

Possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Teorema 2.11

Sia $\mathcal{B}_1 \subseteq \partial\overline{\Omega}$ attrattivo e valgano come al solito le ipotesi (2.7), (2.30), (2.31) e (2.36). Si aggiungano inoltre le seguenti ipotesi:

1. $c \in L^\infty(\mathcal{B}_1^\epsilon)$ per una qualche $\epsilon > 0$,
2. $f \in L^\infty(\Omega)$,
3. $g \in C(\Omega \cup \mathcal{B}_1)$.

Inoltre, esista una soprasoluzione $F \in C(\Omega \cup \mathcal{A}) \cap L^\infty(\mathcal{B}_1^\epsilon)$ dell'equazione

$$\mathcal{L}u - cu = -1 \quad \text{in } \Omega,$$

tale che

$$F > 0.$$

Allora esiste una soluzione del problema originario (2.37), in cui però

$$g = \text{costante} \quad \text{su } \mathcal{B}_1. \quad (2.43)$$

La condizione (2.43) non è necessaria solo se, per ogni punto di \mathcal{B}_1 , esiste una barriera nel senso della Definizione 2.9.

I risultati di questo teorema sono molto importanti anche perché ci permettono di apprezzare i collegamenti tra il punto di vista deterministico e il punto di vista stocastico utilizzati per studiare il problema ellittico in esame.

La prima parte del teorema si pone, nel tentativo di classificare l'insieme \mathcal{B}_1 , nel caso in cui esso rientri nell'ambito della Definizione 2.9, ossia se è attrattivo, ma non in quella della Definizione 2.10, cioè se non è possibile costruire una barriera in ogni suo punto. In tale caso possiamo concludere che si possono imporre condizioni al bordo anche su \mathcal{B}_1 , sotto la condizione che però queste siano costanti su di esso. Rifacendoci alle definizioni di scuola russa introdotte

nelle sezioni precedenti, siamo in presenza di un insieme **attrattivo**, che tuttavia non è regolare, in quanto non ha una barriera, ed è dunque **non raggiungibile**. È dunque sensato il fatto che si abbia una certa libertà di imporre condizioni al bordo (siccome l'insieme è attrattivo), ma che questa libertà sia in un certo senso limitata dal fatto che le condizioni siano lì costanti (l'insieme è di fatto non raggiungibile).

Nella seconda parte del teorema ci si pone invece nel caso in cui l'insieme \mathcal{B}_1 rientri nell'ambito di entrambe le definizioni sopra riportate, che sia cioè attrattivo e dotato di barriera in ogni suo punto. In questo caso possiamo, a maggior ragione, imporre delle condizioni su \mathcal{B}_1 e, ora, abbiamo la massima libertà: non siamo più obbligati ad imporre condizioni costanti. Se torniamo dunque alle definizioni di ottica stocastica introdotte prima, l'insieme \mathcal{B}_1 può ora essere classificato come **regolare**, ed è dunque sensato che tale insieme sia trattato allo stesso modo della porzione \mathcal{A} , con la libertà di imporre condizioni al bordo arbitrarie.

Problemi parabolici degeneri al bordo

3.1 Introduzione e prime ipotesi

I problemi considerati nel capitolo precedente vengono utilizzati nella pratica per modellizzare dei sistemi non dipendenti dal tempo: il vettore \mathbf{x} rappresenta infatti un punto nello spazio (nel caso di sistemi fisici) oppure, in generale, il vettore delle incognite (nel modello di Heston è, ad esempio, costituito dal prezzo del sottostante e dalla volatilità).

Il passaggio da problemi ellittici a parabolici avviene, in questi casi, quando si vuole considerare un fenomeno dipendente dal tempo e si aggiunge dunque anche la coordinata temporale al problema in analisi. Un problema parabolico può essere visto dunque, in questo senso, come la versione non stazionaria del corrispondente problema ellittico.

In questo capitolo studieremo quindi il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu - \partial_t u = h & \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{su } \mathcal{A} \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{in } (\Omega \cup \mathcal{A}) \times \{0\}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Rimangono ovviamente validi tutti i discorsi fatti nel capitolo precedente, in particolare nell'introduzione (sezione 2.1), a proposito dell'operatore \mathcal{L} e dei suoi coefficienti. Soprattutto, ricordiamo che vale

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0 \quad \forall x \in \Omega, (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

e che questa condizione decade in genere su una porzione del bordo $\partial\Omega$, solitamente contenuta in \mathcal{B} , dove l'operatore degenera. Le ipotesi che verranno uti-

lizzate nei teoremi presentati sono dunque le (2.7), (2.30), (2.36) e, per quanto riguarda i dati del problema, supponiamo che:

$$\begin{cases} h \in C(\overline{Q_T} \times \mathbb{R}) \text{ ed è Lipschitz-continua rispetto a } u \in \mathbb{R}; \\ g \in C(\mathcal{A} \times [0, T]), u_0 \in C(\Omega \cup \mathcal{A}); \\ g(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Come è facile immaginare, lo sviluppo della teoria per i problemi parabolici è spesso analogo e molto simile a quello per i problemi ellittici, costituendone di fatto una generalizzazione. In questo capitolo si mostreranno i risultati in modo meno approfondito rispetto al precedente, entrando nel dettaglio solo nei casi in cui le differenze siano più significative.

3.2 Esistenza e non unicità di soluzioni

Introduciamo per prima cosa, come nel capitolo precedente, il problema del tempo di prima uscita

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = -1 & \text{in } \Omega \\ V = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (3.3)$$

che ci torna subito utile per enunciare il primo risultato.

Teorema 3.1

Siano soddisfatte le ipotesi (2.7), (2.30) e (3.2). Supponiamo inoltre che sia $g \in L^\infty(\mathcal{A} \times (0, T))$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ e $h(\cdot, \cdot, 0) \in L^\infty(Q_T)$. Esista ora una soprasoluzione V del problema del tempo di prima uscita (3.3) tale per cui valga

$$\inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V = 0 < \inf_{\mathcal{A}} V.$$

Allora esistono infinite soluzioni limitate per il problema (2.4). In particolare esiste una successione $\{x_k\} \subseteq \Omega$ con la seguente proprietà: per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione $u_\beta \in L^\infty(Q_T)$ del problema (2.4) tale per cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_\beta(x_k, t) dt = \beta.$$

Osserviamo subito che la funzione V cercata come soprasoluzione del problema del tempo di prima uscita (3.3) deve, secondo la descrizione data in questo teorema, essere necessariamente non negativa. Tuttavia, questo fatto non costituisce una reale limitazione nella costruzione di tale funzione: basta infatti

che V sia limitata inferiormente. In questo caso, infatti, potremmo considerare $\tilde{V} = V - \inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V$, che, ovviamente, è ancora soprasoluzione del problema del tempo di prima uscita (se V già lo era) ed è tale per cui $\inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} \tilde{V} = 0$.

A questo punto, accanto a questo risultato di non unicità, possiamo, come fatto anche per i problemi ellittici, presentare un risultato di esistenza.

Proposizione 3.1

Siano sempre soddisfatte le ipotesi (2.7), (2.30) e (3.2) e sia anche $g \in L^\infty(\mathcal{A} \times (0, T))$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e $h(\cdot, \cdot, 0) \in L^\infty(Q_T)$. Esista poi una soprasoluzione $W \in C((\Omega \cup \mathcal{A}) \times [0, T])$ dell'equazione

$$\mathcal{L}u - cu - \partial_t u = -1 \quad \text{in } Q_T,$$

tale che $W \geq k > 0$. Allora esiste una soluzione u del problema originario (2.4). Inoltre, se $W \in L^\infty(Q_T)$, allora $u \in L^\infty(Q_T)$.

Come facciamo a costruire la funzione W che ci garantisce l'esistenza di una soluzione? Nel caso in cui la funzione $c(x)$ sia limitata dal basso (se cioè $c(x) \geq c_0$ in tutto $\Omega \cup \mathcal{A}$ e con $c_0 \in \mathbb{R}$) la si può trovare facilmente. Si può infatti verificare che in questo caso $W = e^{(|c_0|+1)t} \geq 1$ soddisfa le condizioni richieste ed è inoltre limitata, permettendoci di concludere che esiste almeno una soluzione $u \in L^\infty(\Omega)$.

Esempio

Per vedere all'opera i teoremi appena visti, analizziamo il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = f & \text{in } Q_T \\ u = g & \text{su } \mathcal{A} \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{su } (\Omega \cup \mathcal{A}) \times \{0\}, \end{cases} \quad (3.4)$$

dove $\Omega = (0, \infty) \times (0, 1)$, $\mathcal{A} = (0, \infty) \times \{1\}$, $\mathcal{B} = ((0, \infty) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ e $f(\cdot, \cdot, 0) \in L^\infty(Q_T)$. Il dominio è raffigurato in Figura 3.1.

Il nostro scopo è ora quello di applicare il Teorema 3.1: prendiamo dunque la funzione $V(x) = y$ e vediamo se soddisfa le ipotesi fatte.

Applicando l'operatore \mathcal{L} vale

$$\mathcal{L}V = -1,$$

mentre calcolando gli estremi inferiori sugli insiemi $\Omega \cup \mathcal{A}$ e \mathcal{A} si ha

$$\inf_{\Omega \cup \mathcal{A}} V = 0 < \inf_{\mathcal{A}} V = 1.$$

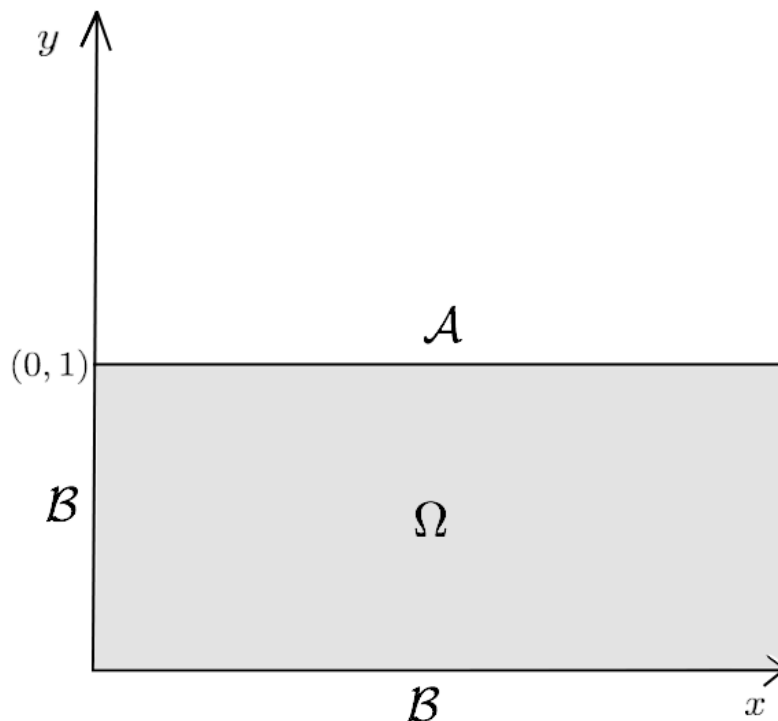


Figura 3.1: Configurazione del dominio Ω

Di conseguenza, possiamo applicare il Teorema 3.1 e dedurre che esistono infinite soluzioni limitate per il problema (3.4).

3.3 Unicità della soluzione

Ancora una volta, qualora fossimo nell'ambito di uno dei teoremi presentati nella precedente sezione, ci piacerebbe poter comunque ripristinare l'unicità, in modo da avere un problema ben posto. Come detto nel capitolo precedente, il rimedio che utilizzeremo in questi casi consisterà nell'incrementare il grado di controllo del bordo, diminuendo così il numero di 'gradi di libertà' concessi alla soluzione.

Torniamo dunque alla parte di bordo \mathcal{B} , sulla quale non era garantita l'ellitticità dell'operatore \mathcal{L} e la limitatezza dei suoi coefficienti, e alla sua divisione in due porzioni: \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 (rispettanti le ipotesi (2.36)).

Possiamo ora ridefinire il problema (2.4) in questi termini:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu - \partial_t u = h & \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{su } (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1) \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{in } (\Omega \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1) \times \{0\}, \end{cases} \quad (3.5)$$

Ovviamente, questa formulazione è più generale di quella data nella (2.4), e i risultati presentati in questa sezione varranno a maggior ragione per il problema (2.4), dove $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ e $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$. D'altra parte, comunque, un risultato di esistenza per il problema (3.5) con $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$ implica sempre una non-unicità per il problema corrispondente (2.4).

Introduciamo ora il problema ausiliario che ci servirà per mostrare i risultati di questa sezione, il quale differisce leggermente dal corrispondente del capitolo precedente (2.39) in quanto si configura come un problema agli autovalori:

$$\begin{cases} \mathcal{L}U - cU = \mu U & \text{in } \Omega \\ U = 0 & \text{su } \mathcal{A}. \end{cases} \quad (3.6)$$

A questo punto, cercheremo di individuare delle sottosoluzioni di questo problema e di studiare il loro comportamento quando $\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0$. In particolare, vale il seguente risultato:

Teorema 3.2

Valgano le ipotesi (2.7), (2.30), (3.2) e (2.36). Inoltre, sia $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$, $g \in C((\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1) \times [0, T])$, $u_0 \in C(\Omega \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1)$ e $g(x, 0) = u_0(x)$ per ogni $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$. Esista poi una sottosoluzione $W \leq K < 0$ (dove $K \in \mathbb{R}$) del problema (3.6) per qualche $\mu \geq 0$. Allora, se Ω è limitato, per qualsiasi coppia u_1, u_2 di soluzioni del problema originario (3.5) vale

$$\lim_{\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} \frac{\sup_{t \in (0, T]} |u_2(x, t) - u_1(x, t)|}{W(x)} = 0. \quad (3.7)$$

Se invece Ω è illimitato, vale lo stesso risultato aggiungendo la condizione all'infinito

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\sup_{t \in (0, T]} |u_2(x, t) - u_1(x, t)|}{W(x)} = 0.$$

Questo risultato è del tutto simile a quello relativo al problema ellittico presentato nel Teorema 2.9, con i dovuti aggiustamenti dovuti all'inserimento della dimensione temporale. Il risultato poi, viene esibito in due modi leggermente diversi ma equivalenti: nel Teorema 2.9 si dice che esiste al più una soluzione con una determinata caratteristica (che, cioè, dividendola per $W(x)$, il risultato tende a 0 per $\text{dist}(x, \mathcal{B}) \rightarrow 0$); qui, invece si dice che, qualora ne esistano due, la loro differenza soddisfa quella stessa condizione.

La dimostrazione di questo teorema è ovviamente analoga a quella del Teorema 2.9 e deriva dal fatto che, nelle ipotesi sopra enunciate, si ha che ogni sottosoluzione del problema originario (3.5) con $f = g = u_0 = 0$ tale che

$$\limsup_{\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} \frac{\sup_{t \in (0, T]} u(x, t)}{|Z(x)|} \leq 0,$$

è non positiva: $u \leq 0$ in Q_T (se Ω è limitato). Nel caso di Ω illimitato, per avere lo stesso risultato occorre aggiungere la condizione

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\sup_{t \in (0, T]} u(x, t)}{|Z(x)|} \leq 0.$$

Per passare ad un risultato più utile dal punto di vista pratico occorre ora eliminare la funzione $W(x)$ dalla definizione della classe nella quale cerchiamo la soluzione unica. Ci piacerebbe ad esempio dimostrare l'unicità di una soluzione, ad esempio, appartenente alla classe delle funzioni limitate quasi ovunque L^∞ . Ancora una volta, è facile vedere dalla (3.7) che, qualora la sottosoluzione $W(x)$ divergesse per $\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0$, il risultato ricercato sarebbe immediatamente vero. È dunque valido il seguente teorema:

Teorema 3.3

Valgano le ipotesi (2.7), (2.30), (3.2) e (2.36). Inoltre, sia $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$, $g \in C((\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1) \times [0, T])$, $u_0 \in C(\Omega \cup \mathcal{A} \mathcal{B}_1)$ e $g(x, 0) = u_0(x)$ per ogni $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$. Esista poi una sottosoluzione $W \leq K < 0$ (dove $K \in \mathbb{R}$) del problema (3.6) per qualche $\mu \geq 0$, tale che

$$\lim_{\text{dist}(x, \mathcal{B}_2) \rightarrow 0} W(x) = -\infty.$$

Se Ω è illimitato, valga anche

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x) = -\infty.$$

Allora esiste al più una soluzione $u \in L^\infty(\Omega)$ del problema originario (3.5).

3.4 Punto di vista stocastico

Come visto nel capitolo precedente, lo studio dal punto di vista stocastico dei problemi ellittici (e, vedremo qui, anche di quelli parabolici) si rivela particolarmente utile quando si voglia capire che tipo di dato g occorra imporre al momento della definizione del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu - \partial_t u = h & \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{su } (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1) \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{in } (\Omega \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1) \times \{0\}. \end{cases} \quad (3.8)$$

In particolare, siccome questo problema era stato in precedenza introdotto per ripristinare l'unicità di una soluzione, vogliamo capire che libertà abbiamo nell'imporre le condizioni al bordo sulla porzione di frontiera aggiunta \mathcal{B}_1 e, quindi, che caratteristiche ha g su tale insieme.

Come fatto prima, consideriamo \mathcal{B}_1 e il suo intorno di raggio $\epsilon \mathcal{B}_1^\epsilon$ (per ogni $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$) e introduciamo la seguente definizione:

Definizione 3.1

Diciamo che $\mathcal{B}_1 \subseteq \partial\Omega$ è attrattivo per l'operatore \mathcal{L} se esiste un $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e una soprasoluzione $U \in C(\overline{\mathcal{B}_1^\epsilon})$ dell'equazione

$$\mathcal{L}u = -1 \quad \text{in } \mathcal{B}_1^\epsilon, \quad (3.9)$$

tale per cui

$$U > 0 \quad \text{in } \overline{\mathcal{B}_1^\epsilon} \setminus \mathcal{B}_1,$$

e

$$U = 0 \quad \text{su } \mathcal{B}_1.$$

Grazie a questa definizione, del tutto analoga a quella esplicitata nella Proposizione 2.1, possiamo ora enunciare l'importante teorema

Teorema 3.4

Sia Ω limitato e valgano come al solito le ipotesi (2.7), (2.30), (3.2) e (2.36). Si aggiungano inoltre le seguenti ipotesi:

1. $\mathcal{B}_1 \subseteq \partial\Omega$ è attrattivo,
2. $c \in L^\infty(\mathcal{B}_1^\epsilon)$ per una qualche $\epsilon > 0$,
3. $h(\cdot, \cdot, 0) \in L^\infty(Q_T)$,
4. esiste una funzione $\phi \in C((\Omega \cup \mathcal{A} \cup \overline{\mathcal{B}_1}) \times [0, T]) \cap L^\infty(Q_T)$ tale per cui $g = \phi$ in $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1) \times [0, T]$ e $u_0(x) = \phi(x, 0)$ per ogni $x \in \Omega \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$,
5. ϕ non dipenda da x in $\mathcal{B}_1 \times [0, T]$, ossia

$$\phi(x, t) = \phi_1(t) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{B}_1 \times [0, T], \quad (3.10)$$

per qualche $\phi_1 \in C([0, T])$.

Inoltre, esista una soprasoluzione $F \in C((\Omega \cup \mathcal{A}) \times [0, T]) \cap L^\infty(\mathcal{B}_1^c \times (0, T))$ dell'equazione

$$\mathcal{L}u - cu - \partial_t u = -1 \quad \text{in } Q_T,$$

tale che

$$F \geq K > 0.$$

Allora esiste una soluzione del problema originario (3.5). Inoltre, se $F \in L^\infty(Q_T)$, allora $u \in L^\infty(Q_T)$.

Questo teorema ci dice dunque che, nel caso in cui l'insieme \mathcal{B}_1 sia solo attrattivo per l'operatore \mathcal{L} , è lecito imporre delle condizioni al bordo su di esso, ma queste devono essere costanti rispetto alla coordinata spaziale x . Questo risultato, come nel caso del problema ellittico, ci permette di capire bene cosa succede in corrispondenza di insiemi che avevamo definito come attrattivi ma non raggiungibili: si ha infatti una libertà solo parziale nell'imposizione delle condizioni al bordo, che sono, come detto, vincolate all'essere lì costanti.

Vediamo ora cosa succede se dotiamo \mathcal{B}_1 di un'ulteriore proprietà, definita nella seguente

Definizione 3.2

Preso un punto $x_0 \in \partial\bar{\Omega}$, una funzione $F \in C(\overline{K_\delta(x_0, t_0)})$, dove $K_\delta(x_0, t_0) = Q_T \cap (\mathcal{U}(x_0) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta))$, è detta barriera locale per x_0 se

1. F è soprasoluzione di

$$\mathcal{L}u - cu - \partial_t u = -1 \quad \text{in } Q_T \cap (\mathcal{U}(x_0) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)),$$

2. esiste $\delta > 0$ tale per cui valga la relazione

$$F > 0 \quad \text{in } \overline{Q_T \cap (\mathcal{U}(x_0) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta))} \setminus \{(x_0, t_0)\},$$

3. $F(x_0, t_0) = 0$.

Questa definizione, del tutto analoga a quella relativa ai punti regolari presentata nella Proposizione 2.2, ci permette di avere condizioni meno restrittive sul dato qualora i punti dell'insieme \mathcal{B}_1 la soddisfino. Vale infatti il seguente risultato

Teorema 3.5

Poniamoci nelle ipotesi del Teorema 3.4, senza tuttavia richiedere che valga la restrizione (3.10). Inoltre, ogni punto $x \in \mathcal{B}_1$ ammetta una barriera locale (secondo la Definizione 3.2). Allora vale la stessa tesi del teorema precedente,

| cioè esiste una soluzione u del problema originario (3.5).

Qui siamo infatti nel caso in cui i punti di \mathcal{B}_1 godono di una maggiore regolarità rispetto al caso precedente: essi sono ora attrattivi e dotati di barriera locale. In essi abbiamo dunque maggiore regolarità e, di conseguenza, più libertà nell'imporre le condizioni al bordo, che ora non devono più essere necessariamente costanti su \mathcal{B}_1 rispetto alle coordinate spaziali.

Concludiamo ora questa sezione con una condizione sufficiente per garantire l'esistenza di una barriera locale per ogni punto di un insieme del tipo $\mathcal{B}_1 \times [0, T]$, dove \mathcal{B}_1 è un insieme attrattivo.

Proposizione 3.2

Valgano come al solito le ipotesi (2.7), (2.30), (3.2) e (2.36) e sia $\mathcal{B}_1 \subseteq \partial\Omega$ un insieme attrattivo per l'operatore \mathcal{L} . Supponiamo inoltre che si abbia $a_{ij}, b_i \in L^\infty(\mathcal{B}_1^\epsilon)$, $c \geq c_0$ in \mathcal{B}_1^ϵ per qualche $c_0 \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $(x_0, t_0) \in \mathcal{B}_1 \times [0, T]$ esiste un barriera locale.

Esempio

Vediamo ora un esempio di applicazione dei risultati di unicità presentati nella sezione precedente, che coinvolge anche le nozioni stocastiche qui esaminate. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{1}{y \sin x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = f & \text{in } Q_T \\ u = g & \text{su } \mathcal{A} \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{su } (\Omega \cup \mathcal{A}) \times \{0\}, \end{cases} \quad (3.11)$$

dove $\Omega = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \times (0, 1)$, $\mathcal{A} = \partial\Omega \setminus ([\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \times \{0\})$, $\mathcal{B} = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \times \{0\}$ e $f(\cdot, \cdot, 0) \in L^\infty(Q_T)$.

Prendiamo ora la funzione

$$W(x, y) = x^2 + \log y - \pi^2,$$

e vediamo subito che essa è sempre negativa: $W(x, y) < 0$ in Ω . Inoltre, applicando l'operatore ellittico \mathcal{L} , si ha

$$\mathcal{L}W = \frac{1}{y \sin x} \cdot (2 + y^2(-\frac{1}{y^2})) = \frac{1}{y \sin x} > 0 \quad \text{in } \Omega,$$

e

$$\lim_{y \rightarrow 0} W(x, y) = -\infty.$$

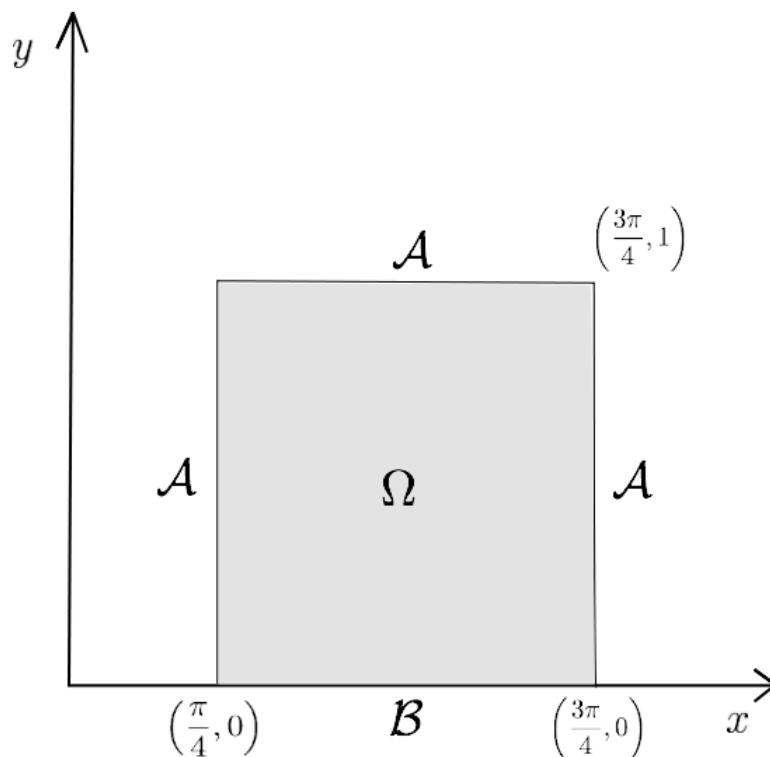


Figura 3.2: Configurazione del dominio Ω

Notiamo subito che, in questo problema si ha $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ e, dunque, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$; inoltre, è evidente che $\text{dist}((x, y), \mathcal{B}) = y$. Possiamo ora applicare il teorema di unicità (Teorema 3.3) ed affermare che esiste al più una soluzione limitata del problema (3.11). Più in generale, grazie al Teorema 3.2, possiamo anche dire che esiste al più una soluzione nella classe (più ampia di L^∞) delle funzioni che divergono più lentamente rispetto a $|W|$ per $y \rightarrow 0^+$ e $t \in (0, T)$.

Vediamo ora cosa succede se tentiamo di estendere la porzione di bordo sulla quale imponiamo le condizioni a tutto $\partial\Omega$. Per prima cosa, occorre capire che caratteristiche ha l'insieme \mathcal{B} , per comprendere quanta libertà abbiamo nella scelta dei dati di bordo. Prendiamo dunque la funzione

$$U(x, y) = y \sin x + 1.$$

Essa certamente soddisfa $\mathcal{L}U \leq -1$, infatti

$$\mathcal{L}U = \frac{1}{y \sin x} (-y \sin x) = -1 \leq -1 \quad \text{in } \Omega.$$

Inoltre, vediamo facilmente che $U(x, y) \geq 1$. Se poi prendiamo la funzione $F(x, y) = U(x, y) - 1 = y \sin x$, essa soddisfa certamente $F(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ e $F > 0$ in $\Omega \cup \mathcal{A}$. Poi per quanto appena visto,

$$\mathcal{L}F = -1 \quad \text{in } \Omega,$$

e

$$F = y \sin x = 0 \quad \text{su } \mathcal{B},$$

quindi, per la Definizione 3.1, \mathcal{B} è un insieme attrattivo. Siamo inoltre in condizione di applicare il Teorema 3.4 e dedurre l'esistenza di una soluzione \tilde{u} limitata per il problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{y \sin x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = f & \text{in } Q_T \\ u = \phi & \text{su } \partial\Omega \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{su } \bar{\Omega} \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

dove $\phi \in C([0, T])$ è una funzione dipendente soltanto dal tempo e tale per cui $u_0 = \phi(0)$ su $\partial\Omega$.

Come si può vedere, data l'attrattiva della porzione singolare di frontiera \mathcal{B} , abbiamo potuto ridefinire il problema (3.11) imponendo condizioni al bordo su tutta la frontiera $\partial\Omega$. Come chiarito in precedenza, però, ciò viene bilanciato da una perdita di libertà nella costruzione del dato, che ora dipende soltanto dal tempo.

Cosa succederebbe se invece decidessimo di modificare ulteriormente il problema (3.12), imponendo sempre condizioni su tutta la frontiera, ma senza chiedere che il dato sia indipendente dalla coordinata spaziale? Valutiamo cioè il problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{y \sin x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = f & \text{in } Q_T \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \times (0, T] \\ u = u_0 & \text{su } \bar{\Omega} \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

dove $g \in C(\partial\Omega \times [0, T])$, $u_0 = g(x, 0)$ su \mathcal{A} e $g(\bar{x}, \bar{t}) \neq \phi(\bar{t})$ per qualche punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathcal{B} \times (0, T)$.

In questa formulazione abbiamo sottolineato come, in corrispondenza della porzione critica di frontiera \mathcal{B} , il dato non sia costante rispetto alla coordinata spaziale. È subito evidente che questo problema non può avere una soluzione u_g . Infatti, se così fosse, potremmo prendere due funzioni g_1 e g_2 che differiscano soltanto su $\mathcal{B} \times (0, T]$ come dati di due problemi del tipo (3.13) ed ottenere

due soluzioni u_{g_1} ed u_{g_2} distinte (in quanto, per costruzione dei dati, differiscono sicuramente su $\mathcal{B} \times (0, T]$). Questo fatto, tuttavia è in contraddizione con il risultato di unicità per il problema (3.11) (i dati g_1 e g_2 sono infatti coincidenti su $\mathcal{A} \times (0, T]$) e, dunque non può esistere una soluzione u_g per il problema (3.13). Di conseguenza, non può essere trovata una barriera locale per i punti di \mathcal{B} , che è, dunque, soltanto attrattivo.

Gli operatori degeneri in finanza e il problema della non-unicità

4.1 Processi degeneri in finanza

Ora che è stata presentata la teoria dei problemi ellittici e parabolici degeneri al bordo, si può tornare sul fronte finanziario e vedere come tale studio sia particolarmente interessante in diverse situazioni.

Da una parte, come visto nel primo capitolo, il modello di Black-Scholes presenta un'equazione parabolica che, mediante una semplice trasformazione logaritmica, ha coefficienti costanti, ed è pertanto ampiamente considerata dalla teoria standard delle PDE, che garantisce esistenza ed unicità di una soluzione classica.

Dall'altra parte, invece, molte situazioni al di fuori del contesto di Black-Scholes danno vita ad equazioni di pricing di tipo degenerare oppure con coefficienti che crescono troppo velocemente, che dunque escono dalla teoria classica delle PDE, ma possono invece essere trattate con la teoria dei problemi degeneri presentata in questo lavoro.

Iniziamo ora ad introdurre qualche primo esempio che dia un'idea di quanto tali situazioni siano frequenti nelle applicazioni di nostro interesse.

4.1.1 Il modello CIR

Il modello CIR, presentato nel 1985 da Cox, Ingersoll e Ross per modellare l'andamento del tasso d'interesse privo di rischio r , si può scrivere, nella misura di probabilità reale P , così:

$$dr_t = \alpha(\bar{r} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad r_0 > 0, \quad (4.1)$$

dove α , \bar{r} e σ sono tre costanti positive e W_t è un moto browniano sotto la misura di probabilità P .

A questo punto, l'equazione di Fokker-Planck associata al processo stocastico (4.1) corrisponde all'equazione di valutazione di un bond¹ quando il tasso d'interesse segue la dinamica in (4.1) e si scrive così:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) - \frac{\partial}{\partial r} (\alpha(\bar{r} - r)p), \quad p(0, r) = \delta(r - r_0), \quad (4.2)$$

dove il dato iniziale $\delta(r - r_0)$ è la delta di Dirac centrata in $r - r_0$.

Si nota subito come l'equazione (4.2) sia degenera al bordo, in quanto il termine di ordine massimo si annulla per $r = 0$: è dunque necessario in questo caso capire come si comporta il processo r_t nei pressi dell'origine, per poi dedurre che tipo di condizioni al contorno imporre.

Per rendere il problema più comprensibile dal punto di vista finanziario prendiamo l'equazione ai valori finali corrispondente, ottenibile grazie al teorema di Feynman-Kac:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \alpha(\bar{r} - r) \frac{\partial u}{\partial r} - ru = 0, \quad u(T, r) = 1, \quad (4.3)$$

che mostra ancora una volta il degenerare per $r = 0$ dell'operatore ellittico associato all'equazione.

4.1.2 Il modello CEV

Consideriamo ora i modelli a *volatilità locale*, che descrivono il prezzo di un titolo azionario $S(t)$ mediante un processo stocastico del tipo

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + \sigma(t, S(t))S(t)dW(t), & t \geq u \\ S(u) = x, \end{cases} \quad (4.4)$$

dove, ora, $W(t)$ è un moto browniano sotto la misura di probabilità neutra rispetto al rischio Q .

In particolare si prenda $\sigma(t, S(t)) = \sigma S^\alpha$, di modo da ottenere il modello *constant elasticity of variance* (CEV), presentato nel primo capitolo:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)^{\alpha+1} dW(t). \quad (4.5)$$

In (4.5), r e σ sono costanti e il coefficiente α verrà come prima assunto essere positivo ($\alpha > 0$).

¹ovvero un titolo che consegna un payoff unitario al tempo di scadenza T

Se ora prendiamo un'opzione call europea scritta sul sottostante $S(t)$, con scadenza T e prezzo di esercizio K , il suo prezzo $u(S, t)$ deve soddisfare l'equazione parabolica all'indietro

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^{2(\alpha+1)} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, \\ u(T, S) = \max(S_T - K, 0). \end{cases} \quad (4.6)$$

Per quanto riguarda l'insieme di definizione Ω di questo problema (monodimensionale, visto che l'unica variabile 'spaziale' è S), è evidente che esso debba essere delimitato a sinistra dalla retta $S = 0$, poiché, per ovvi motivi, il valore del sottostante non può mai essere negativo; mentre a destra è illimitato, poiché non si pongono limiti alla crescita del valore dello stock.

È chiaro quindi che l'equazione (4.6) sia degenera nell'unico punto di frontiera $S = 0$: in questo caso, infatti, siccome si è assunto $\alpha > 0$, il termine di ordine maggiore (derivata seconda) si annulla e l'operatore ellittico degenera. D'altra parte, si potrebbe pensare che la stessa situazione valga anche per il modello classico di Black-Scholes, dove il sottostante è modellato con un processo come in (4.5) in cui però $\alpha = 0$: in questo caso si ottiene un termine di second'ordine del tipo $\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$, che è anch'esso degenera per $S = 0$. Come accennato prima, è però possibile operare un cambio di variabile (del tipo $S = Ke^x$) che conduce ad un'equazione parabolica a coefficienti costanti, trattabile dunque grazie alla teoria classica. Nel caso qui considerato $\alpha > 0$, non esiste invece un cambio di variabile che consenta questa semplificazione e il problema rimane dunque degenera.

4.1.3 Il modello di Heston

Veniamo ora al modello di cui ci si interessa maggiormente in questo lavoro, ovvero il modello di Heston. Come visto nel primo capitolo, il sottostante $S(t)$ e la volatilità $V(t)$ vengono modellate dai processi

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1(t), \\ dV(t) &= k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

in cui $W_2(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_3(t)$ e $(W_1(t), W_3(t))$ è un moto Browniano bidimensionale. In questa sezione tralasciamo momentaneamente la presenza dei dividendi.

Se ora indichiamo con $u(t, s, v)$ il prezzo di un'opzione europea di scadenza T e payoff generico $g(S(T), V(T))$, tale prezzo può essere ottenuto risolvendo il problema ai valori finali

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_{Heston}u - ru = 0, \\ u(T, S, V) = g(S(T), V(T)). \end{cases} \quad (4.8)$$

dove

$$\mathcal{L}_{Heston} = \frac{1}{2}(s^2v \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\rho\sigma sv \frac{\partial^2}{\partial sv} + \sigma^2v \frac{\partial^2}{\partial v^2}) + k(\theta - v) \frac{\partial}{\partial v} + rs \frac{\partial}{\partial s}$$

Per quanto riguarda l'insieme di definizione 'spaziale', ci troviamo ora nel caso bidimensionale (vi sono le due variabili s e v). Come prima, la variabile s sarà limitata inferiormente da 0, ma non avrà in generale limiti superiori; lo stesso discorso varrà anche per l'altra variabile e si imporrà soltanto come limite inferiore la retta $v = 0$.

Coerentemente con la notazione introdotta nei capitoli precedenti, l'operatore ellittico \mathcal{L}_{Heston} associato a questa equazione può essere scritto come

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

dove $x_1 = s$ e $x_2 = v$. La condizione di ellitticità, data da

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(s, v) \xi_i \xi_j > 0 \quad \forall (s, v) \in \bar{\Omega}, (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

non è evidentemente soddisfatta al bordo $v = 0$, cioè quando la volatilità si annulla, siccome tutti i coefficienti dei termini di second'ordine si annullano, e l'operatore \mathcal{L} è dunque lì degenere.

4.2 Il problema della non-unicità: tre esempi

Come visto in precedenza, lo studio della buona posizione dei problemi ellittico-parabolici degeneri è molto più complicato di quello per i problemi classici e non è dunque semplice né univoco definire un problema, con opportune condizioni al bordo, di modo che sia ben posto.

Dal punto di vista dell'applicazione di tali problemi alla finanza, poi, il problema si fa ancora più complicato ed interessante poiché, una volta stabilite le condizioni al bordo e il concetto di soluzione necessari per rendere il problema in esame ben posto, occorre vedere se queste abbiano un significato anche dal punto di vista finanziario. Le condizioni al bordo, infatti, fanno parte della definizione

di un problema e dovrebbero sempre avere un collegamento con l'applicazione che si sta modellando.

Evidentemente, non sempre si riesce ad avere questa stretta corrispondenza e, nel nostro caso, molti problemi definiti soltanto a partire da considerazioni finanziarie non risultano ben posti e presentano spesso una *non-unicità* della soluzione. Lo scopo che ci si pone ora è duplice:

- vogliamo da un lato descrivere questo problema da un punto di vista modellistico, e, nello spirito che guida questo lavoro, caratterizzare la nozione di non-unicità sia in un'ottica deterministica sia in un'ottica stocastica;
- dall'altro lato, si vuole vedere che tipo di implicazioni abbiano, da un punto di vista finanziario, eventuali situazioni di non-unicità: si avranno ad esempio strategie distinte (e, quindi, a costi distinti) che replicano il payoff della stessa opzione, la non validità della parità put-call e la mancanza di tempo di esercizio ottimale per opzioni Americane.

Cominciamo prima presentando, grazie ai tre esempi di processi degeneri presentati nella sezione precedente, dei casi concreti dove si manifesta il problema della non-unicità.

Il modello CIR

Entriamo più nel dettaglio del modello CIR che, come detto sopra, segue una dinamica del tipo

$$dr_t = \alpha(\bar{r} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad r_0 > 0, \quad (4.9)$$

sotto la misura di probabilità oggettiva P . Cerchiamo di descrivere ora il bordo del dominio secondo la classificazione alla Feller presentata nel capitolo 2.

Innanzitutto il problema è monodimensionale: l'unica variabile in gioco è la r e, come unica e logica restrizione, assumiamo che essa sia sempre positiva, cosicché il dominio è costituito dalla semiretta $\{r > 0\}$. La frontiera è dunque costituita da un solo punto, $\{r = 0\}$, la cui classificazione dipenderà dalla combinazione dei parametri α , \bar{r} e σ in gioco.

In particolare, se vale la condizione

$$2\alpha\bar{r} < \sigma^2, \quad (4.10)$$

allora il punto $\{r = 0\}$ è *regolare* e, in particolare, è di tipo riflettente: infatti, per le quantità caratteristiche definite nel capitolo 2, si ha $S[\{0\}] < \infty$, $M[\{0\}] = 0$, $\Sigma(0) < \infty$ e $N(0) < \infty$.

Se invece vale la condizione complementare

$$2\alpha\bar{r} \geq \sigma^2, \quad (4.11)$$

allora $\{r = 0\}$ è una *frontiera naturale*, e, in particolare, irraggiungibile e non attrattiva: infatti si ha $S[\{0\}] = \infty$, $M[\{0\}] = \infty$, $\Sigma(0) = \infty$ e $N(0) = \infty$.

Nel seguito ipotizziamo che valga la condizione (4.11), di modo che il processo $r(t)$ non possa raggiungere l'origine nella misura di probabilità P , situazione nella quale non occorre imporre una condizione al bordo. Supponiamo inoltre che il premio per il rischio, ovvero il tasso di guadagno atteso (in eccesso rispetto a quello di un bond) sia lineare in r e del tipo $\psi_0 + \psi_1 r$, con ψ_0 e ψ_1 costanti.

A questo punto, l'equazione (4.3) di valutazione di un bond di scadenza T si riscrive così:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \alpha(\bar{r} - r) \frac{\partial u}{\partial r} - ru = (\psi_0 + \psi_1 r) \frac{\partial u}{\partial r} \\ u(T, r) = 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Ridefinendo ora i parametri del modello in questo modo

$$\alpha^* = \alpha + \psi_1, \quad \bar{r}^* = \frac{\alpha\bar{r} - \psi_0}{\alpha + \psi_1},$$

l'equazione (4.12) può essere riscritta così

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \alpha^*(\bar{r}^* - r) \frac{\partial u}{\partial r} - ru = 0 \\ u(T, r) = 1, \end{cases} \quad (4.13)$$

che è analoga alla (4.3) e ha una soluzione del tipo

$$u_1(r, t) = A(t)e^{-B(t)r},$$

dove

$$A(t) = \left[\frac{2\gamma e^{(\alpha^* - \gamma)(T-t)/2}}{2\gamma + (\alpha^* - \gamma)[1 - e^{-\gamma(T-t)}]} \right]^{\frac{2\alpha^*\bar{r}^*}{\sigma^2}},$$

$$B(t) = \frac{2(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{2\gamma + (\alpha^* - \gamma)[1 - e^{-\gamma(T-t)}]},$$

e $\gamma = \sqrt{(\alpha^*)^2 + 2\sigma^2}$.

Sfruttiamo ora l'introduzione dei parametri modificati α^* e \bar{r}^* e la ridefinizione (4.13) dell'equazione di valutazione, che è evidentemente associata all'equazione differenziale stocastica

$$dr_t = \alpha^*(\bar{r}^* - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^*, \quad r_0 > 0,$$

che rappresenta la dinamica del processo $r(t)$ nella misura neutra rispetto al rischio Q . Se, a questo punto, vale la (4.11) e, allo stesso tempo, la frontiera $\{r = 0\}$ è raggiungibile nella misura Q , cioè

$$2\alpha^*\bar{r}^* < \sigma^2,$$

allora si può esibire una seconda soluzione non negativa dell'equazione di valutazione, del tipo

$$u_2(r, t) = A(t)e^{-B(t)r} \left[1 - \frac{\Gamma(\nu, r\xi(t))}{\Gamma(\nu, 0)} \right], \quad (4.14)$$

dove $A(t)$ e $B(t)$ sono state definite prima e

$$\Gamma(\nu, x) = \int_x^\infty e^{-s} s^{\nu-1} ds,$$

è la funzione gamma incompleta, $\nu = 1 - \frac{2\alpha^*\bar{r}^*}{\sigma^2}$ e

$$\xi(t) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{e^{-\alpha^*(T-t)} A(t)^{-\frac{1}{\alpha^*\bar{r}^*}}}{\int_t^T e^{-\alpha^*(T-s)} A(s)^{-\frac{1}{\alpha^*\bar{r}^*}} ds}.$$

Siccome u_1 e u_2 sono due soluzioni, anche

$$u_1 - u_2 = A(t)e^{-B(t)r} \frac{\Gamma(\nu, r\xi(t))}{\Gamma(\nu, 0)}$$

lo è e costituisce un titolo con payoff nullo a scadenza e valore strettamente positivo per tempi $t < T$: verrà chiamato *bolla*, termine che sarà definito meglio più avanti.

Inoltre, è facile vedere che $u_2(r, t)$ è non negativa e che

$$u_1(r, T) = u_2(r, T) = A(T)e^{-B(T)r},$$

siccome $\Gamma(\nu, r\xi(T)) = \Gamma(\nu, \infty) = 0$. Poi, si vede facilmente che $u_2(r, t)$ è strettamente minore di $u_1(r, t)$ prima della scadenza T : da un punto di vista finanziario abbiamo dunque costruito due strategie che replicano lo stesso payoff (siccome si equivalgono a scadenza), ma delle quali la seconda è sempre più

conveniente prima della scadenza, costituendo dunque un evidente arbitraggio. La non unicità della soluzione ha dunque sollevato un primo importante problema da un punto di vista applicativo: nel momento in cui si ha più di una soluzione, si possono costruire strategie di arbitraggio. È dunque opportuno, in questi casi, ridefinire ad esempio la classe della soluzione per ottenere una soluzione unica e aggirare il problema.

Tuttavia, se invece la frontiera $\{r = 0\}$ non è raggiungibile per il processo $r(t)$, se cioè vale la condizione

$$2\alpha^* \bar{r}^* \geq \sigma^2,$$

si può mostrare che $u_1(r, t)$ è l'unica soluzione non negativa ammissibile.

La differenza tra questi due casi può essere spiegata alla luce della teoria presentata nei capitoli precedenti. Infatti, se la frontiera è raggiungibile nella misura di probabilità Q (mentre in ogni caso non lo è nella misura P per la (4.11)) si ha la non unicità della soluzione, fatto che può essere spiegato con la necessità di imporre una condizione al bordo nel momento in cui il punto $\{r = 0\}$ diventa raggiungibile: la mancata imposizione di una condizione lì spiega quindi la non-unicità della soluzione. Inoltre, il fatto che queste due misure di probabilità assegnino all'evento $\{r = 0\}$ l'una probabilità nulla, l'altra probabilità positiva, fa sì che esse non siano equivalenti: non esiste dunque una misura di martingala (ossia neutra rispetto al rischio) equivalente a P , in quanto l'unica candidata, Q , non può esserlo.

D'altra parte, nel caso in cui, invece, la frontiera non sia raggiungibile nemmeno nella misura di probabilità Q , non si deve imporre la condizione al bordo e, infatti, si mantiene l'unicità della soluzione senza la necessità di ridefinire il problema.

Il modello CEV

Riconsideriamo ora il modello CEV, in cui la dinamica dello stock viene modellata dall'EDS

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)^{\alpha+1}dW(t), \quad \alpha > 0,$$

sotto la misura di probabilità neutra rispetto al rischio Q .

Per ottenere il prezzo di un'opzione call europea scritta su $S(t)$ e con scadenza T e prezzo di esercizio K , l'equazione di valutazione è la (4.6), completata dalle condizioni al bordo:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) = \infty,$$

che rispecchiano il fatto che, se $S(t)$ si annulla in un certo istante di tempo, poi rimane nullo e l'opzione non ha quindi più valore, se invece $S_t \rightarrow \infty$, allora evidentemente $S_t - K \sim S_t$.

Certamente, una soluzione della (4.6), presentata in [19], è della forma

$$u_1(S, t) = Sp_1(S, t) - e^{-r(T-t)}Kp_2(S, t), \quad (4.15)$$

in cui

$$p_1(S, t) = Q \left[2a, \frac{1}{\alpha}, 2kK^{-2\alpha} \right],$$

e

$$p_2(S, t) = 1 - Q \left[2kK^{-2\alpha}, 2 + \frac{1}{\alpha}, 2a \right],$$

dove

$$k = \frac{2r}{2\sigma^2\alpha[1 - e^{2r(1-\alpha)(T-t)}]}, \quad a = kS^{-2\alpha}e^{-2r\alpha(T-t)},$$

e $Q[x, q, \lambda]$ è la distribuzione chi-quadro non centrale con q gradi di libertà e parametro di non centralità λ , data da

$$Q[x, q, \lambda] = \int_z^\infty p[b, q, \lambda]db$$

e

$$p[b, q, \lambda] = \frac{1}{2}e^{-\frac{b+\lambda}{2}} \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{\frac{q-2}{4}} I_{(q-2)/2}(\sqrt{\lambda b}),$$

in cui I_q è la funzione di Bessel modificata del primo tipo di ordine q .

Anche in questo esempio, tuttavia, si può mostrare che la (4.15) non è l'unica soluzione del problema. Notiamo infatti che $p_1(S, t)$ è soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^{2(\alpha+1)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial S^2} + (rS + \sigma^2 S^{2\alpha+1}) \frac{\partial p_1}{\partial S} + \frac{\partial p_1}{\partial t} - rp_1 = 0, \quad (4.16)$$

con condizione finale $p_1(S, T) = 1_{\{S_T > K\}}$: essa può dunque rappresentare il prezzo di un derivato che dà uno se la call viene esercitata, e quando il sottostante segue la dinamica

$$dS(t) = (rS(t) + \sigma^2 S(t)^{2\alpha+1})dt + \sigma S(t)^{\alpha+1}dZ(t),$$

che può divergere in tempo finito. Ora, a seconda delle condizioni all'infinito che imponiamo per l'equazione (4.16), essa ammette diverse soluzioni p_1 e, di conseguenza, diverse soluzioni $u(S, t)$ per la (4.6). Nello specifico, un'altra soluzione per il modello CEV è data dalla seguente formula

$$u_2(S, t) = S \left(p_1(S, t) - \frac{\Gamma(\nu, y)}{\Gamma(\nu, 0)} \right) - e^{-r(T-t)}Kp_2(S, t),$$

dove, come nell'esempio precedente, $\Gamma(\nu, x) = \int_x^\infty e^{-s} s^{\nu-1} ds$ è la funzione gamma incompleta con

$$\nu = \frac{1}{2\alpha}, \quad y = \frac{2r}{\sigma^2\alpha} \frac{e^{-2r\alpha(T-t)}}{1 - e^{-2r\alpha(T-t)}} S^{-2\alpha}.$$

Per ricavare questa soluzione, occorre partire dalla densità di probabilità di $S(T)$ condizionata a $S(t) = S$ in $t < T$, che è

$$f(S_T, T|S, t) = 2\alpha k^{-\frac{1}{2\alpha}} (az^{-\alpha})^{\frac{1}{3-\alpha}} e^{-a-z} I_{\frac{1}{2\alpha}}(2\sqrt{az}),$$

dove a e k sono come definite sopra e $z = kS(T)^{-2\alpha}$. A questo punto, la soluzione u_2 si ottiene come valore atteso scontato del payoff, secondo la misura neutra rispetto al rischio, mentre la u_1 non ha questa proprietà.

Tuttavia, ragionando dal punto di vista finanziario, se consideriamo la corrispondente opzione put ottenuta ancora con la misura neutra, la *put-call parity*² è soddisfatta utilizzando come prezzo della call la soluzione u_1 , ma non utilizzando la u_2 , che ha un valore strettamente minore. In altre parole, e qui introduciamo un secondo problema dal punto di vista applicativo, non si può avere contemporaneamente una relazione put-call parity (ottenibile utilizzando la soluzione u_1) e una soluzione ottenuta con il pricing neutrale rispetto al rischio (che fa invece selezionare u_2).

Infine, in analogia con l'esempio precedente, notiamo che la differenza tra le due soluzioni è

$$u_1 - u_2 = S \frac{\Gamma(\nu, y)}{\Gamma(\nu, 0)},$$

soddisfa ovviamente l'equazione (4.6) ed è nulla alla scadenza T : di conseguenza rappresenta un portafoglio 'suicida', che cioè parte con una somma positiva ad un istante t e perde con probabilità 1 tutto il suo valore alla scadenza T . Anche in questo caso usiamo dunque il termine *bolla*. A differenza del caso precedente, tuttavia, la non-unicità e la presenza di una bolla si verificano anche se la misura Q , sotto la quale è stata scritta la dinamica del sottostante, è una misura neutra rispetto al rischio ed è equivalente alla misura di probabilità 'oggettiva'.

²La put-call parity lega, nel contesto classico di Black-Scholes, il prezzo di un'opzione call $C(t)$ e di una put $P(t)$ scritte sullo stesso sottostante $S(t)$, con lo stesso prezzo di esercizio K e la stessa scadenza T in questo modo:

$$P(t) + S(t) = C(t) + Ke^{-r(T-t)}.$$

Il modello di Heston

Torniamo al modello di Heston, ma consideriamone ora una versione semplificata rispetto a quella presentata nel primo capitolo: prendiamo allora (4.7) con $\rho = 1$ e coefficiente di drift per la volatilità pari semplicemente a σ^2 . Le dinamiche per $S(t)$ e $V(t)$ sono allora le seguenti:

$$\begin{aligned} dS(t) &= r(t)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW(t), \\ dV(t) &= \sigma^2 dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

dove $W(t)$ è un moto browniano nella misura di martingala Q neutra rispetto al rischio. L'equazione di pricing per un generico titolo derivato europeo di payoff $g(S_T, V_T)$ è allora la seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_{Heston}u - ru = 0, \\ u(T, S, V) = g(S(T), V(T)), \end{cases} \quad (4.18)$$

dove

$$\mathcal{L}_{Heston} = \frac{1}{2} \left(s^2 v \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\sigma s v \frac{\partial^2}{\partial s v} + \sigma^2 v \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial v} + r s \frac{\partial}{\partial s}.$$

Per mostrare ora che vi possono essere problemi di non unicità per questo problema, consideriamo la funzione

$$B(V, t) = \frac{1}{V} e^{-r(T-t) - \frac{2V}{\sigma^2(T-t)}}.$$

È facile verificare che essa verifica l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} + \sigma^2 \frac{\partial B}{\partial v} - rB = 0, \\ B(T, V) = 0, \end{cases}$$

che è lo stesso problema definito dalla (4.18), se si prende un valore di S costante. Allora, se si considera la B come funzione delle tre variabili t , V ed S , essa soddisfa l'equazione in (4.18) con condizione finale nulla: $B(T, S, V) = 0$. Siccome inoltre, essendo una funzione esponenziale, è sempre positiva prima della scadenza e, in particolare, per $t = 0$, allora essa rappresenta, da un punto di vista finanziario, un altro portafoglio 'suicida', che parte con un valore strettamente positivo $B(0, S(0), V(0))$ e termina con una ricchezza nulla $B(T, S, V) = 0$. È dunque evidente che, anche in questo caso, si apre un'opportunità di arbitraggio.

Per quanto riguarda il pricing di un derivato europeo, d'altra parte, una volta trovata una soluzione $u_1(S, V, t)$ dell'equazione di valutazione, si ha automaticamente una soluzione alternativa data da

$$u_2(S, V, t) = u_1(S, V, t) + B(S, V, t),$$

che rappresenta una valutazione più cara del titolo (siccome $B > 0$). Anche in questo caso, $B(S, V, t)$ è dunque detta *bolla*, e compare anche se, come nell'esempio del modello CEV, Q è una misura di martingala equivalente a quella oggettiva.

4.3 Il problema della non-unicità: framework generale e aspetti finanziari

I tre esempi presentati nella sezione precedente hanno portato diversi spunti e sollevato alcune questioni: vediamo qui di strutturare meglio tutte le considerazioni fatte in un discorso più generale.

La non-unicità è infatti un problema da tenere in grande considerazione: innanzitutto perché, evidentemente, se si vuole stabilire il prezzo di un prodotto finanziario, esso deve essere necessariamente univoco. Non solo. Da un punto di vista teorico, infatti, oltre al metodo delle PDE, si può utilizzare il pricing neutrale al rischio (mediante il calcolo di un valore atteso condizionato scontato) per calcolare il valore di un'opzione, ottenendo in questo caso un risultato unico: è dunque opportuno capire *quale* delle soluzioni della PDE di pricing sia quella ottenuta anche con quest'altro metodo, e che caratteristiche hanno le altre. Infine, da un punto di vista finanziario, sappiamo che la teoria classica di Black-Scholes presenta diverse proprietà universali per i valori delle opzioni, tra le quali la put-call parity, la non ottimalità dell'esercizio anticipato per opzioni americane e molte altre: nel nostro caso, invece, il degenerare dell'operatore in gioco e l'insorgere di soluzioni multiple fanno sì che alcune soluzioni soddisfano determinate proprietà che altre non hanno e viceversa.

Di conseguenza, si vuole qui definire i diversi tipo di bolle viste negli esempi precedenti, studiarne la loro formazione e caratterizzarne bene le implicazioni finanziarie.

Consideriamo quindi un generico processo $X(t)$, che sarà la variabile di stato (ad esempio, nel modello di Heston, essa rappresenta la volatilità) la cui P -dinamica è governata dall'equazione differenziale stocastica

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad X(0) > 0, \quad (4.19)$$

dove $W(t)$ è un moto browniano nella misura di probabilità oggettiva P .

Inoltre, il titolo azionario $S(t)$ segue la dinamica

$$dS(t) = \mu_S(X(t))S(t)dt + \sigma_S(X(t))S(t)dZ(t), \quad S(0) > 0,$$

dove $Z(t)$ è un altro moto browniano.

Infine, la dinamica del *money market account*³ sia la seguente

$$dR(t) = r(X(t))R(t)dt, \quad R(0) = 1.$$

Studiamo ora il processo $X(t)$ e, in particolare, il suo comportamento al bordo, utilizzando gli strumenti della classificazione di Feller introdotti nella sezione 2.3.1. Supponiamo, come naturale ad esempio per la volatilità di Heston, che il processo $X(t)$ viva nella semiretta reale $(0, \infty)$ e prendiamo un punto arbitrario $x_0 \in (0, \infty)$. Allora, la funzione di scala è data da

$$S(x) = \int_{x_0}^x s(\xi)d\xi, \quad \text{dove} \quad s(\xi) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} [2\mu(\eta)/\sigma^2(\eta)]d\eta},$$

mentre la misura di velocità è scrivibile così

$$M(x) = \int_{x_0}^x m(\xi)d\xi, \quad \text{dove} \quad m(\xi) = \frac{1}{\sigma^2(\xi)s(\xi)}.$$

A questo punto, possiamo imporre che

$$\lim_{x \rightarrow 0} M(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \infty,$$

di modo che il processo $X(t)$ non possa raggiungere l'origine né esplodere in tempo finito, proprietà che sono desiderabili.

Diamo ora la definizione di bolla, per poi essere in grado di dare delle condizioni affinché esse non si formino.

Definizione 4.1

Un titolo con prezzo non negativo presenta una bolla se esiste un portafoglio auto-finanziante (dal quale, cioè, non vi sono flussi di denaro dopo l'istante iniziale) di valore non negativo in ogni istante di tempo, tale che costi meno del titolo e replichi il valore del titolo per un istante finale fissato T . Il valore della bolla è quindi dato dalla differenza tra il valore del titolo e il valore della strategia replicante più economica.

³Esso rappresenta una quantità di denaro investita in un titolo privo di rischio (del tipo bond) con tasso di interesse r .

Il concetto di bolla, dunque, così come osservato in tutti i tre esempi prima presentati, sembra essere strettamente legato ad una opportunità di arbitraggio, realizzabile ad esempio vendendo il titolo allo scoperto e acquistando un portafoglio più economico (che esiste, per la Definizione 4.1) replicante lo stesso titolo. Tuttavia, un'ipotetica strategia di arbitraggio non è sempre attuabile sul mercato, dove spesso vengono imposti dei limiti, come ad esempio sul valore negativo di un portafoglio: occorre quindi distinguere tra diverse opportunità di arbitraggio e, dunque, agire a diversi livelli, per impedirne l'attuazione.

Definizione 4.2

Un primo tipo di arbitraggio si verifica quando si costruisce un portafoglio che ha profitti istantanei senza rischi di perdita: in altre parole si ha un premio per il rischio positivo e volatilità nulla.

Nel modello classico di Black-Scholes, si impone l'impossibilità di questo tipo di arbitraggi e si arriva a determinare l'unica soluzione dell'equazione di valutazione. Nel nostro caso si fa naturalmente la stessa imposizione, per la quale è necessario introdurre la quantità

$$\kappa(X(t)) := \frac{\mu_S(X(t)) - r(X(t))}{\sigma_S(X(t))},$$

detta *prezzo locale istantaneo del rischio*. Assicurare che tale prezzo del rischio sia finito significa assicurare che tale primo tipo di arbitraggio sia irrealizzabile: abbiamo dunque la seguente prima condizione.

Condizione 4.1

Il prezzo del rischio $\kappa(X(t))$ abbia valore finito.

Essa è automaticamente verificata se assumiamo, come fatto prima, che il processo $X(t)$ non tocchi l'origine e non diverga all'infinito e che i coefficienti dei modelli sopra presentati abbiano una certa regolarità (siano, ad esempio, continui). Negli esempi visti in precedenza essa era sempre verificata; tuttavia si è visto che sono comunque possibili delle bolle nel money market account: si riveda a tal proposito il primo esempio (relativo al processo CIR) della sezione precedente, dove la bolla è rappresentata dalla differenza tra le due soluzioni presentate. La strategia di arbitraggio evidenziata in quel caso deve dunque essere di un altro tipo rispetto alla prima: veniamo dunque ad una seconda tipologia.

Definizione 4.3

Un secondo tipo di arbitraggio, associato ad una bolla nel money market account, si verifica quando si ha un portafoglio che ha profitti finali garantiti,

| *ma che rischia perdite temporanee prima della scadenza.*

In questo caso, dunque, un investitore potrebbe ottenere profitti illimitati nel caso in cui vi siano portafogli ammissibili che consentono perdite temporanee: per evitare del tutto tale tipo di arbitraggio occorre dunque imporre un vincolo di ricchezza non negativa per il portafoglio. Un'alternativa più applicabile potrebbe consistere nell'imporre, invece, un limite fissato alle perdite: in questo modo sarebbero possibili arbitraggi solo di entità ridotte.

Da un punto di vista modellistico, invece, per assicurarsi che non vi siano arbitraggi di questo secondo tipo, occorre supporre che esista un cambio di misura di probabilità Q , al quale si è già accennato più volte, che sia equivalente a P e che sia neutra rispetto al rischio: sotto tale misura lo stock abbia cioè un termine di drift pari al tasso di interesse privo di rischio $r(X(t))$.

$$dS(t) = r(X(t))S(t)dt + \sigma_S(X(t))S(t)d\tilde{Z}(t), \quad S(0) > 0,$$

dove questa volta $\tilde{Z}(t)$ è un Q -moto browniano. Per ottenere questa proprietà, imponiamo la seconda condizione.

Condizione 4.2

La martingala locale esponenziale

$$M(t) := e^{-\frac{1}{2} \int_0^t |\kappa(X(s))|^2 ds - \int_0^t \kappa(X(s)) dZ(s)},$$

sia una martingala strettamente positiva.

Innanzitutto notiamo che questa condizione implica anche la precedente: se infatti $M(t)$ è strettamente positiva e, dunque, non nulla, $\kappa(X(t))$ deve avere necessariamente valore finito. Allora, essa permette di evitare le opportunità di arbitraggio di entrambi i primi due tipi.

Questa condizione, inoltre, può essere riscritta in un altro modo, utilizzando il teorema di Girsanov e il teorema di rappresentazione delle martingale. Siccome $M(t)$ è una martingala, infatti la sua rappresentazione può essere utilizzata per trovare il cambio di misura che definisce la nuova misura Q . In particolare, nella misura Q , il processo $X(t)$ ha la dinamica

$$dX(t) = [\mu(X(t)) - \rho(X(t))\kappa(X(t))\sigma(X(t))]dt + \sigma(X(t))d\tilde{W}(t), \quad (4.20)$$

dove

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \rho(Y(s))\kappa(Y(s))ds$$

è un Q -moto browniano e $\rho(X(t)) = \text{corr}(dW(t), dZ(t))$. Detto ciò, la Condizione 4.2, coincide con il fatto che la soluzione di (4.20) non esploda né raggiunga l'origine nella misura Q .

Nel caso del primo esempio visto prima (processo CIR), possiamo dire ora che la possibilità di arbitraggio di cui si era lì parlato (vendita del portafoglio replicante di maggior prezzo e acquisto di quello più economico) è di questo secondo tipo. Infatti, nel caso in cui $2\alpha\bar{r} \geq \sigma^2$ e $2\alpha^*\bar{r}^* < \sigma^2$, come già osservato, la misura P non è equivalente a quella neutrale rispetto al rischio Q : questo perché la $M(t)$ della Condizione 4.2 non è una martingala e non si può dunque operare il cambio di misura alla Girsanov. La strategia di arbitraggio del secondo tipo associata a questa situazione consiste nel vendere allo scoperto il portafoglio replicante u_1 (secondo la notazione del primo esempio della sezione precedente), comprare il portafoglio replicante u_2 e investire 1 nel money market. In questo modo, si ha una spesa iniziale pari a $u_2(r_0, 0) - u_1(r_0, 0) + 1 < 1$ siccome $u_2(r_0, 0) - u_1(r_0, 0) < 0$, ed un valore del portafoglio al tempo t pari a $u_2(r_t, t) - u_1(r_t, t) + e^{\int_0^t r(s)ds}$. Siccome poi si ha $u_1(r_T, T) = u_2(r_T, T)$, il payoff a scadenza è pari a

$$R(T) = e^{\int_0^T r(t)dt},$$

cioè lo stesso ottenibile investendo 1 nel money market account. In questo modo si è dunque costruito un portafoglio auto-finanziante di valore non negativo che costa meno del titolo $R(t)$ e lo replica alla scadenza T : per la Definizione 4.1 esiste dunque una bolla nel money market account.

Se, viceversa $2\alpha\bar{r} \geq \sigma^2$ e $2\alpha^*\bar{r}^* \geq \sigma^2$, allora, come già osservato, la misura Q è equivalente a P e la Condizione 4.2 è soddisfatta, cosicché non esistono bolle nel money market account. Analogamente, per il secondo e terzo esempio tale condizione è valida, ma tuttavia si è evidenziata la presenza di bolle: occorre introdurre una terza possibilità di arbitraggio e, dunque, una terza nozione di bolla.

Definizione 4.4

Un terzo tipo di arbitraggio, associato ad una bolla nel titolo azionario (stock), si verifica quando si ha un portafoglio che ha profitti finali garantiti, ma che rischia perdite temporanee illimitate prima della scadenza.

Per evitare arbitraggi di questo tipo si potrebbe introdurre una limitazione analoga a quella nel caso precedente: se si pone un limite inferiore (anche negativo) al valore di un portafoglio, si rendono inattuabili strategie di arbitraggio di questo tipo.

Da un punto di vista matematico, imponiamo una terza condizione.

Condizione 4.3

Esista una misura di martingala (locale) equivalente Q , e la Q -martingala

locale esponenziale

$$\frac{S(t)}{R(t)} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_S(X(s))|^2 ds - \int_0^t \sigma_S(X(s)) d\tilde{Z}(s)},$$

sia una Q -martingala.

Se, ora, la Condizione 4.2 fosse soddisfatta, mentre la 4.3 no, esisterebbe un portafoglio dinamico con valore maggiore del guadagno dato dallo stock nell'intervallo $[0, T]$ e vi sarebbe, secondo la Definizione 4.1, una bolla nel titolo azionario. L'arbitraggio associato è del terzo tipo, poiché si potrebbe vendere allo scoperto lo stock ed acquistare una strategia più economica, tuttavia essendo esposti a perdite temporanee anche illimitate.

Analogamente alla situazione precedente, è possibile riscrivere questa terza condizione utilizzando il fatto che $\frac{S(t)}{R(t)}$ sia una martingala e, quindi, mediante il teorema di rappresentazione e quello di Girsanov, definisce un cambio di misura di probabilità G , che è equivalente a P e Q , tale che $X(t)$ ha la seguente G -dinamica:

$$dX(t) = [\mu(X(t)) - \rho(X(t))\kappa(X(t))\sigma(X(t)) + \rho(X(t))\sigma_R(X(t))\sigma(X(t))]dt + \sigma(X(t))dW^G(t),$$

dove $W^G(t)$ è un G -moto browniano. A questo punto, la Condizione 4.3 coincide con il fatto che la soluzione di questa equazione differenziale stocastica non esploda o non raggiunga l'origine nella misura Q .

Nel caso del secondo esempio visto prima, relativo al modello CEV, è evidente che tale condizione non sia soddisfatta. Prendendo infatti, come lì, $r(X(t)) = r$, $X(t) = S(t)$ e $\sigma_S(S(t)) = \sigma S(t)^\alpha$, con $\alpha > 0$, occorre considerare la soluzione di

$$dS(t) = (rS(t) + \sigma^2 S(t)^\alpha S(t)^{\alpha+1})dt + \sigma S(t)^{\alpha+1}dZ(t).$$

Si può vedere che essa esplosa con probabilità positiva, verificando che la condizione prima enunciata,

$$\lim_{x \rightarrow 0} M(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \infty,$$

non sia verificata, cosicché il processo $\frac{S(t)}{R(t)}$ sia una martingala locale ma non una martingala.

Svolgendo il calcolo, nel caso semplificato $r = 0$, che però non ci fa perdere generalità (se infatti la soluzione esplosa per $r = 0$, lo fa anche a maggior ragione per $r > 0$, vedi...), si ha

$$M(x) = \frac{2}{\sigma^2(1-2\alpha)} \left(\frac{-x^{-2\alpha}}{2\alpha} + \frac{x_0^{1-2\alpha}}{x} + \frac{x_0^{-\alpha}}{2\alpha} - x_0^{-2\alpha} \right).$$

Per $\alpha > 0$, come in questo caso, $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x)$ è finito e pertanto il processo esplode. Abbiamo quindi dimostrato utilizzando il criterio appena introdotto quanto si era già osservato prima: esiste una bolla nel titolo azionario.

Veniamo ora all'ultimo passo che occorre fare in questa caratterizzazione della non-unicità delle soluzioni e della teoria delle bolle: dopo aver introdotto le nozioni di bolla per il money market account e lo stock, consideriamo un titolo derivato europeo generico, che sia scritto sul sottostante $S(t)$, il quale a sua volta dipenda dalla variabile di stato $X(t)$. Tale titolo ha valore $D(S, X, t)$ dipendente dal tempo, dal sottostante e dalla variabile $X(t)$ (che, nel modello di Heston, è naturalmente la volatilità stocastica) e consegna un payoff pari a $G(S)$ alla scadenza temporale T . Se assumiamo che $D \in C^{2,2,1}(\Omega \times [0, T])$, dove $\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty)$, si può scrivere l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathcal{L}D - rD = 0, \\ D(S, X, T) = G(S), \end{cases} \quad (4.21)$$

dove

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(S^2 \sigma_S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 2\sigma_S \rho \sigma \frac{\partial^2}{\partial X \partial S} + \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) + (\mu - \rho \kappa \sigma) \frac{\partial}{\partial X} + rS \frac{\partial}{\partial S}.$$

L'equazione (4.21) permette di determinare il prezzo del titolo derivato considerato: caratterizziamo ora la non-unicità della soluzione e vediamo come si rapportano con la soluzione ottenuta utilizzando il pricing neutrale al rischio, generalizzando e integrando quanto visto nell'esempio sul modello di Heston della sezione precedente.

Per prima cosa, assumiamo che le condizioni 4.1 e 4.2 siano soddisfatte, di modo che non siano possibili arbitraggi di primo e di secondo tipo, né sia possibile la formazione di bolle nel money market account. Di conseguenza, il titolo azionario e l'opzione in sé possono avere delle bolle e, come visto negli esempi del modello CEV e di Heston, che soddisfano l'assunzione appena fatta, si possono comunque avere più soluzioni.

Guidati dai casi particolari, scriviamo la soluzione $D(S, X, t)$ della (4.21) in questo modo

$$D(S, X, t) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{R(t)}{R(T)} G(S(T)) \right] + B(S, X, t), \quad (4.22)$$

in cui $B(S, X, t)$ è la nostra candidata bolla per la soluzione D e verifica

$$B(S, X, T) = 0.$$

Si può facilmente mostrare che:

Proposizione 4.1

Il valore neutrale rispetto al rischio del titolo derivato, definito da

$$\mathbb{E}^Q \left[\frac{R(t)}{R(T)} G(S(T)) \right], \quad (4.23)$$

è il prezzo più basso tra le strategie replicanti il titolo con valore non negativo.

Di conseguenza, il valore del portafoglio di replica $D(S, X, t)$ non può essere minore del valore in (4.23) e $B(S, X, t)$ è non negativa. Per la (4.22), inoltre, siccome il valore atteso scontato e D hanno drift pari a r nella misura Q , anche B gode della stessa proprietà. In altre parole, il suo valore scontato è una Q -martingala locale ma non è una martingala (tranne, banalmente, a scadenza, quando $B(S, X, T) = 0$): essa dunque rappresenta una bolla.

Ora, il fatto che si debba selezionare una tra le soluzioni, pone anche il problema di valutare quali soddisfino le ben note proprietà di tipo finanziario derivate nel modello classico di Black-Scholes.

Cominciamo con la put-call parity: si consideri dunque un'opzione call di valore $C(t)$ e un'opzione put di valore $P(t)$, entrambe europee e con prezzo di esercizio K . Come noto, la put-call parity afferma che i valori delle due opzioni sono collegati tra loro e con lo stock $S(t)$ e il money market account $R(t)$ dalla relazione

$$C(t) + K \mathbb{E}^Q \left[\frac{R(t)}{R(T)} \right] = P(t) + S(t). \quad (4.24)$$

Ora occorre però capire, data in generale la non-unicità di soluzioni per problemi di valutazione di titoli derivati, quali valori occorre utilizzare affinché valga la relazione (4.24). La situazione ideale consisterebbe nell'utilizzare i valori ottenuti col pricing neutrale al rischio e soddisfare con essi la (4.24). Purtroppo non sarà così. Dalla (4.22), valida ovviamente per tutti i titoli ($S(t), P(t)$ e $C(t)$) ricaviamo le seguenti formule:

$$S(t) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{R(t)}{R(T)} S(T) \right] + B^S(t),$$

per lo stock,

$$C(t) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{R(t)}{R(T)} (S(T) - K)^+ \right] + B^C(t), \quad (4.25)$$

per l'opzione call e

$$P(t) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{R(t)}{R(T)} (K - S(T))^+ \right] + B^P(t),$$

per l'opzione put. Naturalmente, B^S , B^C e B^P rappresentano delle bolle nello stock, nella call e nella put rispettivamente. Inserendo queste relazioni nella (4.24) otteniamo la relazione fra le tre bolle

$$B^S(t) + B^P(t) = B^C(t). \quad (4.26)$$

Utilizzando ora le informazioni ricavabili dalle (4.25), (4.26) e (4.22), si possono fare numerose osservazioni e rispondere ad alcuni interrogativi posti in precedenza.

Per prima cosa, dalla (4.26) si nota che, qualora lo stock $S(t)$ abbia una bolla, anche l'opzione call $C(t)$ ne deve avere una, siccome esse sono necessariamente non negative. Vale dunque la seguente proposizione:

Proposizione 4.2

Supponiamo che, fissati il prezzo di esercizio K e la scadenza T , valga la relazione put-call, ma che la Condizione 4.3 non sia soddisfatta. Allora il prezzo della call non può essere pari a quello ottenuto tramite il pricing neutrale al rischio.

Questa proposizione è di dimostrazione immediata siccome, nel momento in cui la call ha una bolla, il suo valore non è il minimo possibile e, per la Proposizione 4.1, non può quindi coincidere con quello dato dal pricing neutrale. In un ampio contesto di applicazioni, quello nel quale la Condizione 4.3 è violata, non si può dunque avere contemporaneamente la validità della put-call parity ed il pricing delle opzioni tramite il metodo del valore atteso condizionato rispetto alla misura Q . Questo fatto costituisce un problema poiché, se si determina il prezzo di tutte le opzioni come il minimo fra le varie soluzioni ottenute (soprattutto per evitare arbitraggi), si deve rinunciare ad una relazione, come la put-call parity, comoda anche per calibrare alcuni parametri del modello. Un esempio nel quale ci si trova esattamente in questa situazione è, come visto, quello del modello CEV, presentato nella sezione precedente.

Questa, comunque, non è l'unica proprietà che perde universalità e presenta problematiche. Vale infatti anche la seguente proposizione:

Proposizione 4.3

Supponiamo che la Condizione 4.3 sia violata. Allora, se la put-call parity vale per tutti i possibili valori di K , allora il prezzo di una successione $\{C^K(t)\}$ di opzioni call di prezzo di esercizio K non soddisfa

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} C^K(t) = 0,$$

ma, invece, il limite è positivo finito.

Per dimostrare questo fatto, basta osservare che, essendo violata la Condizione 4.3, lo stock $S(t)$ ha una bolla e, per la (4.26) e la non negatività delle bolle, anche l'opzione call ne ha una. Allora, nella (4.25), il primo termine a destra si annulla per $K \rightarrow \infty$, mentre il secondo rimane positivo. Dunque, $\liminf_{K \rightarrow \infty} C^K(t) \neq 0$ e, se si vuole poter contare sulla relazione put-call parity, bisogna dall'altra parte accettare di perdere anche questa proprietà.

Per concludere questa sezione, presentiamo ora un risultato relativo alle opzioni Americane, la cui valutazione nel contesto del modello di Heston verrà ampiamente trattata più avanti. Nel modello classico di Black-Scholes, uno dei risultati più importanti e di grande validità applicativa afferma che l'esercizio anticipato per un'opzione call americana scritta su un sottostante che non consegna dividendi non è mai ottimale: essa si comporta dunque come un'opzione europea. Nel nostro contesto, invece, dove il degenerare dell'operatore porta a non-unicità della soluzione, anche questo risultato non ha validità universale. Se infatti, come prima, assumiamo che i primi due tipi di arbitraggio non siano realizzabili, ma che invece la Condizione 4.3 non sia soddisfatta, non si può concludere nulla sul tempo di esercizio ottimo. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 4.4

Si consideri un'opzione call Americana con prezzo di esercizio K e scritta su un sottostante che non consegni dividendi. Se esiste una bolla per il sottostante, allora l'opzione non ammette un tempo di esercizio ottimo.

4.4 Il problema della non-unicità: conclusioni e considerazioni finali

In questo capitolo sono stati presentati dei casi reali, in applicazioni di tipo finanziario, in cui compaiono dei problemi ellittico-parabolici degeneri al bordo che, come ci si aspettava vista la teoria presentata prima, presentano maggiori difficoltà rispetto alle controparti classiche nello studio della buona posizione, soprattutto dal punto di vista della non-unicità.

Da un punto di vista delle equazioni a derivate parziali, come visto, il problema si manifesta con l'insorgere delle cosiddette bolle, che si manifestano come soluzioni del problema omogeneo associato e, pertanto, possono essere sommate ad una soluzione già trovata generandone altre di entità maggiore.

Da un punto di vista stocastico, invece, si è visto che la formazione delle bolle è associata al fatto che il processo che governa la dinamica del sottostante sia una *martingala locale stretta* e non quindi una martingala, come sempre accade invece nel contesto classico di Black-Scholes. Per rendere più chiaro

il collegamento tra il fatto che il sottostante sia una martingala locale stretta e l'insorgere di soluzioni multiple riconsideriamo un momento l'esempio del modello CEV, in cui la dinamica dello stock è, prendendo per comodità $r = 0$:

$$dS(t) = \sigma S(t)^{\alpha+1} dW(t),$$

nella misura Q . Se $\alpha > 0$, si può dimostrare che⁴ $S(t)$ è una martingala locale stretta, quindi, per la soluzione del problema (4.6) che corrisponde con la soluzione neutrale al rischio vale la relazione

$$u(S, t) = \mathbb{E}_t^Q[S(T)] < S.$$

D'altra parte, anche $u = S$ è soluzione del problema, e quindi l'unicità è persa.

Accanto a questo studio dell'insorgere delle non-unicità, si sono anche viste le conclusioni che essa comporta, specialmente dal punto di vista finanziario nel venire meno dell'universalità di alcune proprietà valide nel contesto di Black-Scholes. Anche da un punto di vista teorico, comunque, vi sono implicazioni importanti.

Nel contesto classico, infatti, la valutazione di un titolo derivato europeo può essere fatta indifferentemente calcolando il valore atteso (condizionato al momento attuale) scontato secondo la misura di martingala Q del payoff del titolo, oppure risolvendo la PDE associata, derivata utilizzando la formula di Ito. Per il modello di Black-Scholes entrambi i metodi danno lo stesso, unico risultato, e questo perfetto parallelismo è garantito dal teorema di Feynman-Kac, che funge da 'ponte' tra le due interpretazioni del problema.

Nel nostro contesto, invece, visto il degenerare dell'operatore al bordo del dominio, le assunzioni alla base del teorema di Feynman-Kac non sono più soddisfatte, e ciò costituisce un problema per la maggior parte dei modelli a volatilità stocastica usati in pratica. Il crollare di questo 'ponte' fa sì quindi che l'esistenza di un'unica soluzione non discenda dal calcolo della stessa tramite il metodo di pricing neutrale al rischio e la corrispondenza tra rappresentazione stocastica e PDE associata è più complicata. Da qui il fatto che la soluzione dell'equazione non è in generale unica e che, ovviamente, solo una delle soluzioni della PDE corrisponde con il valore ottenuto tramite valore atteso condizionato. Esistono, a tal proposito, dei tentativi di generalizzazione del teorema di Feynman-Kac tramite il rilassamento di alcune ipotesi⁵, per adattarlo al contesto di problemi degeneri.

⁴si veda [7]

⁵come, ad esempio, in [1]

Buona posizione del problema derivante dal modello di Heston per opzioni Europee

5.1 Introduzione

Come abbiamo già avuto modo di osservare nel capitolo precedente, il problema di valutare un titolo derivato con gli strumenti della Finanza Matematica presenta due alternative principali: l'*approccio stocastico*, che prevede il calcolo del valore atteso nella misura di probabilità neutra rispetto al rischio (nella quale, cioè, il processo di prezzo del sottostante è una martingala locale) del prezzo scontato; e l'*approccio PDE*, che calcola il valore del titolo come soluzione della PDE derivante dalle equazioni differenziali stocastiche che governano i processi in gioco (per il modello di Heston, sottostante e volatilità). Il problema, a questo punto, è che la buona posizione del problema derivante da questo secondo approccio è, per molti problemi come quelli derivanti dai modelli a volatilità stocastica, tutt'altro che una questione semplice. Il contesto è radicalmente diverso da quello del modello di Black-Scholes, dove la semplicità dell'equazione ottenuta (grazie anche a dei cambi di variabile) garantisce una perfetta corrispondenza con l'altro approccio e, quindi, anche l'unicità della soluzione.

In questo contesto, il problema che dunque si pone per studiare la buona posizione del problema, anche alla luce delle numerose situazioni di non-unicità mostrate nel capitolo precedente, può essere riassunto nelle tre domande seguenti:

1. In che senso intendiamo una soluzione dell'equazione di valutazione, in modo da garantire che il valore dell'opzione sia una soluzione di quel tipo?
2. Sotto quali ipotesi una funzione valore, ottenuta nel senso della domanda precedente, è unica in una certa classe di candidate soluzioni?

3. Se vi è esistenza nel senso di 1., ma non unicità, come identifichiamo la funzione valore dell'opzione tra tutte le possibili soluzioni?

In questo capitolo considereremo dunque la valutazione di titoli derivati europei¹ nell'ambito del modello di Heston e metteremo a punto lo studio della buona posizione del problema che ne deriva, tentando di rispondere alle tre questioni appena formulate.

5.2 Esistenza di una soluzione

Torniamo quindi alle due equazioni differenziali stocastiche che governano il processo di prezzo e quello di volatilità nel modello di Heston:

$$\begin{cases} dS(t) = (r - q)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1(t), \\ dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t), \end{cases}$$

dove come al solito W_1 e W_2 sono due moti browniani in generale correlati con correlazione $\rho \in (-1, 1)$. Le due dinamiche appena riportate sono già espresse nella misura di probabilità Q neutra rispetto al rischio e, pertanto, il problema di valutazione del prezzo $u(t, S(t), V(t))$ di un'opzione Europea di scadenza T e payoff $G(S(T), V(T))$ può essere risolto con l'approccio stocastico di valutazione neutrale al rischio in questo modo:

$$u(t, S, V) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}G(S(T), V(T))|\mathcal{F}_t], \quad (5.1)$$

dove, ancora una volta, \mathcal{F}_t è la filtrazione al tempo t ed indica l'insieme di informazioni acquisite fino a quell'istante temporale.

Consideriamo ora il caso di un'opzione **put** scritta sul sottostante $S(t)$ e con prezzo di esercizio K : il payoff G è allora del tipo $G(S(T), V(T)) = \max(K - S(T), 0) = (K - S(T))^+$ e la (5.1) si scrive così

$$u(t, S, V) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}(K - S(T))^+|\mathcal{F}_t].$$

Siccome questa formula di valutazione dà, naturalmente, un'unico valore e, dunque, un'unico prezzo all'opzione, consistente con la teoria del pricing neutrale rispetto al rischio, vorremmo che anche il metodo PDE ci dia questa stessa soluzione. Come visto prima, d'altra parte, il problema parabolico degenero associato ai problemi di valutazione secondo il modello di Heston non garantisce in generale una soluzione unica: ricerchiamo dunque delle condizioni sui coefficienti dell'equazione e un particolare concetto di soluzione che garantisca l'unicità.

¹per i quali, come visto nel primo capitolo, è fissato l'istante temporale T nel quale si deve scegliere se esercitare o meno l'opzione.

Ponendoci per un momento in un contesto più generale, consideriamo un dominio 'spaziale' Ω contenuto in \mathbb{R}^n , dove $n \geq 2$, e il solito dominio temporale $[0, T]$ con $T \in (0, \infty)$. Si prenda poi l'equazione differenziale stocastica n -dimensionale

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(t, \mathbf{X}(t))dt + \Sigma(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t), \quad \mathbf{X}(s) = \mathbf{x}, \quad (5.2)$$

dove $\mathbf{b} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Sigma : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_m)^T$ è un moto browniano m -dimensionale.

Prendiamo ora delle funzioni misurabili $G : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ e $c : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e definiamo la funzione $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tramite il valore atteso

$$u(t, \mathbf{x}) := \mathbb{E}^Q \left[h(\mathbf{X}(T))e^{\left(\int_t^T c(s, \mathbf{X}(s))ds\right)} + \int_t^T f(s, \mathbf{X}(s))e^{\left(\int_t^s c(\tau, \mathbf{X}(\tau))d\tau\right)}ds \right], \quad (5.3)$$

ben definita se \mathbf{X} non esplose o lascia Ω in tempo finito. L'operatore \mathcal{L} che possiamo associare all'EDS (5.2) è ora il seguente

$$\mathcal{L}v = - \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

con

$$a_{ij}(t, \mathbf{x}) := (\Sigma(t, \mathbf{x})\Sigma^T(t, \mathbf{x}))_{ij}.$$

A questo punto, vorremmo dare delle condizioni affinché la funzione u definita in (5.3) sia soluzione della PDE

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f & \text{in } [0, T] \times \Omega \\ u(T, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

in altre parole, vogliamo rispondere al primo quesito di quelli posti nella sezione precedente: stabilire cioè condizioni affinché la rappresentazione stocastica della u sia anche soluzione della corrispondente PDE. Il problema è stato considerato già da molto tempo (si veda ad esempio [16]), ma le applicazioni finanziarie di cui ci occupiamo qui non soddisfano le assunzioni fatte in questi lavori: solo in tempi molto recenti² si sono derivati alcuni risultati buoni anche in questo contesto.

Dimostriamo allora il seguente teorema.

²ad esempio in [8]

Teorema 5.1

Valgano le seguenti ipotesi:

1. I coefficienti \mathbf{b} e Σ siano, sul dominio $[0, T] \times \Omega$ localmente Lipschitziani in \mathbf{x} e uniformemente rispetto a t , cioè per ogni sottoinsieme compatto K di Ω , esiste una costante $C_K < \infty$ tale che

$$|\Sigma_i(t, \mathbf{x}) - \Sigma_i(t, \mathbf{y})| \leq C_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad |\mathbf{b}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{b}(t, \mathbf{y})| \leq C_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

per ogni $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ e con Σ_i , $i = 1, \dots, m$ colonne della matrice Σ .

2. Per tutti i punti $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega$, la soluzione \mathbf{X} di (5.2) non esploda né esca da Ω prima del tempo T , cioè

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}(t)| < \infty \right] = 1 \quad e \quad P[\mathbf{X}(t) \in \Omega, \forall t \in [0, T]] = 1.$$

3. Esista una sequenza $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di domini limitati contenuti in Ω tale che $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$ e tale che, per ogni k , la PDE

$$\begin{cases} \mathcal{L}w - cw - \frac{\partial w}{\partial t} = f & \text{in } [0, T] \times \Omega_k \\ w(T, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}) & \text{in } (0, T) \times \partial\Omega_k \cup \{T\} \times \Omega_k, \end{cases}$$

abbia una soluzione classica w_k .

Allora u soddisfa la (5.4) e, in particolare, $u \in C^{1,2}([0, T] \times \Omega)$.

Dimostrazione: Per i noti teoremi di esistenza ed unicità per equazioni differenziali stocastiche (si veda [27]), l'ipotesi 1. implica che l'equazione (5.2) ha un'unica soluzione $\mathbf{X}(t)$ definita localmente: essa potrebbe cioè esplodere in tempo finito, ma, per 2., l'eventuale istante di esplosione deve essere maggiore di T Q -quasi certamente. Quindi, $\mathbf{X}(t)$ è certamente ben definito in $[0, T]$. Siccome poi G e f sono non negative, il valore atteso in (5.3) è ben definito. Quindi, a maggior ragione, $u(t, \mathbf{x}) < \infty$ su $(0, T) \times \Omega_k \cup \{T\} \times \Omega_k$, $\forall k$ nell'ipotesi 3.. Inoltre, fissato $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$, possiamo trovare un valore $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbf{x} \in \Omega_k$.

Se allora indichiamo con $\tau_k := \min(\{t \geq s | \mathbf{X}(t) \notin \Omega_k\}, T)$ il tempo di prima uscita di $\mathbf{X}(t)$ da Ω_k prima di T , allora la continuità di $\mathbf{X}(t)$ implica che $(\tau_k, \mathbf{X}(\tau_k)) \in (0, T) \times \partial\Omega_k \cup \{T\} \times \Omega_k$ e, dunque, $u(\tau_k, \mathbf{X}(\tau_k)) < \infty$. Per un altro noto teorema sulle EDS (si veda [16]), applicando la formula di Ito a w_k e utilizzando la PDE scritta sopra, le condizioni al bordo per w_k e la limitatezza

di Ω_k , si ha

$$w_k(t, \mathbf{x}) = \mathbb{E} \left[u(\tau_k, \mathbf{X}(\tau_k)) e^{\int_t^{\tau_k} c(s, \mathbf{X}(s)) ds} + \int_t^{\tau_k} f(s, \mathbf{X}(s)) e^{\int_t^s c(u, \mathbf{X}(u)) du} ds \right]. \quad (5.5)$$

Inoltre, dalle ipotesi 1. e 2. si può dimostrare che $\mathbf{X}(t)$ è un processo di Markov forte e, dunque, gode della proprietà seguente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q \left[G(\mathbf{X}(T)) e^{\int_t^T c(s, \mathbf{X}(s)) ds} + \int_t^T f(s, \mathbf{X}(s)) e^{\int_t^s c(u, \mathbf{X}(u)) du} ds \middle| \mathcal{F}_{\tau_k} \right] = \\ = u(\tau_k, \mathbf{X}(\tau_k)) e^{\int_t^{\tau_k} c(s, \mathbf{X}(s)) ds} + \int_t^{\tau_k} f(s, \mathbf{X}(s)) e^{\int_t^s c(u, \mathbf{X}(u)) du} ds. \end{aligned}$$

Da questa formula, dalla (5.3) e dalla (5.5) segue dunque che

$$u(t, \mathbf{x}) = w_k(t, \mathbf{x}),$$

e quindi u e w_k coincidono su $(0, T) \times \Omega_k$ per ogni k . Di conseguenza, grazie all'ipotesi 3., u soddisfa la (5.4) su $(0, T) \times \Omega$. ■

Applichiamo ora questo risultato al nostro caso specifico del modello di Heston, in cui il vettore \mathbf{X} è dato da

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} S \\ V \end{pmatrix},$$

e il dominio $\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Siccome poi il processo $W_1(t)$ può essere riscritto come $W_1(t) = \rho W_3(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t)$, dove $(W_1(t), W_3(t))$ è un moto browniano bidimensionale, allora \mathbf{X} segue la dinamica indicata in (5.2), con i coefficienti

$$\mathbf{b}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (r - q)X_1 \\ k(\theta - X_2) \end{pmatrix}, \quad \Sigma(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \rho^2} X_1 \sqrt{X_2} & \rho X_1 \sqrt{X_2} \\ 0 & \sigma \sqrt{X_2} \end{pmatrix}.$$

Inoltre, rispetto alla notazione generale definita prima, qui abbiamo:

$$f(t, \mathbf{x}) = 0, \quad c(t, \mathbf{x}) = -r, \quad \text{e} \quad G(\mathbf{x}) = (K - X_1)^+.$$

Possiamo ora verificare se le ipotesi del Teorema 5.1 sono soddisfatte. Innanzitutto, siccome \mathbf{b} e Σ non dipendono da t e sono di classe $C^1(\Omega)$ in \mathbf{x} , l'ipotesi 1. è sicuramente soddisfatta. Inoltre, come già visto prima utilizzando i criteri alla Feller di classificazione delle frontiere, se la condizione

$$2k\theta > \sigma^2,$$

è soddisfatta, allora il processo $X_2 = V$ non tocca l'origine né esplose a $+\infty$ con probabilità 1. Lo stesso risultato vale quindi anche per l'altra variabile

$$S(t) = S_0 e^{\int_0^t \sqrt{V(s)} dW_1(s) + \int_0^t (r - q - \frac{1}{2}V(s)) ds}, \quad (5.6)$$

e, dunque, anche la condizione 2. è automaticamente soddisfatta.

La condizione 3. è più difficile da verificare, in particolare è complicato costruire direttamente la successione w_k necessaria. Di conseguenza, per il nostro studio, preferiamo utilizzare l'insieme delle seguenti condizioni, che la implicano:

- (i) Esista una sequenza $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di domini limitati con $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega$ tale che $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$ e ogni Ω_k ha frontiera C^2 ;
- (ii) le funzioni \mathbf{b} e $a = \Sigma \Sigma^T$ siano uniformemente Lipschitziane su $[0, T] \times \overline{\Omega_k}$;
- (iii) $a(t, \mathbf{x})$ sia uniformemente ellittica su \mathbf{R}^n per $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega_k$, cioè esista $\delta_k > 0$ tale che $\mathbf{y}^T a(t, \mathbf{x}) \mathbf{y} \geq \delta_k |\mathbf{y}|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;
- (iv) c sia uniformemente Hoelder-continua su $[0, T] \times \overline{\Omega_k}$;
- (v) G sia uniformemente Hoelder-continua su $[0, T] \times \overline{\Omega_k}$;
- (vi) u sia finita e continua su $[0, T] \times \partial\Omega_k \cup \{T\} \times \overline{\Omega_k}$.

Tornando al caso specifico, dove $\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty)$, prendiamo la successioni di domini limitati $\Omega_k = \left(\frac{1}{k}, k\right)^2$, in cui però gli spigoli siano smussati di modo che le frontiere $\partial\Omega_k$ siano C^2 : in questo modo la condizione (i) è evidentemente soddisfatta. Inoltre, siccome \mathbf{b} e Σ sono $C^1(\Omega)$ in \mathbf{x} , allora anche la condizione (ii) è subito accertata. Siccome poi abbiamo visto che $c = -r$ e $G = (K - X_1)^+$, anche le condizioni (iv) e (v) sono soddisfatte.

Per quanto riguarda la condizione (iii), utilizziamo il seguente lemma, di cui omettiamo la dimostrazione, e che garantisce una condizione sufficiente affinché tale ipotesi sia soddisfatta.

Lemma 5.1

Assumiamo che Σ sia continua in (t, \mathbf{x}) e consideriamo un dominio limitato $\Omega' \subseteq \Omega$. Se ora $\det a(t, \mathbf{x}) \neq 0$ per ogni $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \overline{\Omega'}$, allora $a(t, \mathbf{x})$ è uniformemente ellittica su \mathbf{R}^n per $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega'$.

Siccome ora si ha, per il nostro sistema derivante dal modello di Heston,

$$\det a(t, \mathbf{x}) = \sigma^2 |X_1|^2 |X_2|^2 (1 - \rho^2) > 0,$$

su $[0, T] \times \Omega$, allora, grazie al Lemma 5.1, anche la condizione (iii) è soddisfatta.

Manca solo da verificare la condizione (vi), che, visto che si richiede la continuità di u , sembra a prima vista difficile da verificare. Tuttavia, anche in questo caso, possiamo ricavare una condizione sufficiente che ci semplifica le cose.

Lemma 5.2

Supponiamo che le condizioni 1. e 2. del Teorema 5.1 siano soddisfatte. Se inoltre G , f e c sono continue, G ed f sono limitate e c è limitata dall'alto, allora u è continua su $[0, T] \times \Omega$.

Prima di procedere alla dimostrazione osserviamo che, nell'applicazione alla valutazione di opzioni Europee, la richiesta più fastidiosa è che G sia limitata. Se infatti tale ipotesi è vera nel caso di contratto put (quello che stiamo considerando in questo momento), la stessa cosa non vale per un'opzione call, il cui payoff è illimitato. Tuttavia, ciò non costituisce una limitazione insormontabile perché, con un ragionamento analogo a quello fatto per il dominio Ω , si può prendere una successione di funzioni limitate approssimanti il payoff e poi passare al limite.

Dimostrazione: Vista la rappresentazione di u data in (5.3), basta dimostrare che la funzione

$$u(t, \mathbf{x}) := \mathbb{E}^Q \left[h(\mathbf{X}(T)) e^{\left(\int_t^T c(s, \mathbf{X}(s)) ds\right)} + \int_t^T f(s, \mathbf{X}(s)) e^{\left(\int_t^s c(\tau, \mathbf{X}(\tau)) d\tau\right)} ds \right], \quad (5.7)$$

sia continua. Le ipotesi 1. e 2. del Teorema 5.1 implicano innanzitutto che il processo $\mathbf{X}(t)$ ha una versione tale che l'applicazione

$$(t, s, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{X}(t),$$

è Q -quasi certamente continua (si veda [27]).

Allora, viste le ipotesi sulle funzioni G , f e c , si ha che $(s, \mathbf{x}) \rightarrow G(\mathbf{X}(T))$ è Q -quasi certamente continua, mentre $(t, s, \mathbf{x}) \rightarrow c(t, \mathbf{X}(t))$ e $(t, s, \mathbf{x}) \rightarrow f(t, \mathbf{X}(t))$ sono Q -quasi certamente uniformemente continue e limitate in sottoinsiemi compatti di $[s, T] \times [0, T] \times \Omega$. Da qui, discende immediatamente che le applicazioni $(s, \mathbf{x}) \rightarrow \int_s^T c(t, \mathbf{X}(t)) dt$ e $(s, \mathbf{x}) \rightarrow \int_s^T f(t, \mathbf{X}(t)) dt$ sono Q -quasi certamente continue e, quindi, la (5.7) è continua. Allora, per il teorema della convergenza dominata, la u data in (5.3) è continua. ■

Siccome ora siamo nel contesto di applicazione del Lemma 5.2, allora anche la condizione (vi) è soddisfatta e, ritornando alle ipotesi del Teorema 5.1, ora sono anch'esse tutte soddisfatte. Applicando tale teorema e utilizzando ora le variabili originarie S e V , si è dunque dimostrato che la funzione u definita in (5.1) soddisfa la PDE

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{Heston} u + ru - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & \text{su } [0, T) \times \Omega \\ u(T, S, V) = G(S(T), V(T)), \end{cases} \quad (5.8)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Heston} = & - \left(\frac{1}{2} \left(S^2 V \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma SV \frac{\partial^2}{\partial SV} + \sigma^2 V \frac{\partial^2}{\partial V^2} \right) + \right. \\ & \left. + (k(\theta - V)) \frac{\partial}{\partial V} + (r - q)S \frac{\partial}{\partial S} \right). \end{aligned}$$

Tutta l'analisi qui svolta può comodamente essere generalizzata al caso in cui il titolo derivato Europeo di interesse sia scritto su un numero arbitrario di sottostanti, che indicheremo con m , poiché può essere inserito nel framework n -dimensionale presentato prima in questa sezione. In questo caso avremmo infatti $n = 2m$ variabili di stato legate agli m sottostanti:

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= (r - q_i)S_i(t)dt + \sqrt{V_i(t)}S_i(t)dW_i(t), \\ dV_i(t) &= k_i(\theta_i - V_i(t))dt + \sigma_i\sqrt{V_i(t)}d\tilde{W}_i(t), \end{aligned}$$

dove q_i è il dividendo consegnato dal titolo i -esimo S_i , mentre $V_i(t)$ è la sua volatilità, con i propri parametri k_i , θ_i e σ_i . Si possono quindi introdurre i seguenti vettori:

$$\mathbf{S}(t) = (S_1(t), \dots, S_m(t))^T, \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)^T, \quad \mathbf{V}(t) = (V_1(t), \dots, V_m(t))^T,$$

e analogamente per gli altri parametri

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)^T, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m).$$

A questo punto, secondo la notazione introdotta sopra, abbiamo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}(r\mathbf{1} - \mathbf{q}) \\ \mathbf{k}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{V}) \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} S_i\sqrt{V_i} & 0 \\ 0 & \sigma_i\sqrt{V_i} \end{pmatrix}$$

e si mostra facilmente che le ipotesi del Teorema 5.1 sono ancora soddisfatte.

Ora che si è verificato che la soluzione ottenuta con l'approccio stocastico del valore atteso secondo la misura Q è anche soluzione della PDE associata, si ha dunque un risultato di esistenza per l'approccio PDE. A questo punto, l'interrogativo che ci si può porre riguarda l'unicità, dal momento che sappiamo che tale equazione alle derivate parziali, come visto negli esempi del capitolo precedente, fornisce anche altre soluzioni. In particolare, ci chiediamo ora quali condizioni richiedere e che tipo di nozione di soluzione introdurre affinché si abbia unicità di soluzione anche con l'approccio PDE.

5.3 Unicità della soluzione

Nella ricerca dell'unicità, la strategia che appare dunque più sensata consiste nel definire particolari classi di soluzioni per il problema in gioco, cercando di verificare se, almeno in esse, la soluzione sia unica. Spesso infatti non tutte le eventuali soluzioni di una PDE sono poi interessanti ai fini dell'applicazione considerata, ma solo alcune particolari candidate si rivelano interessanti. Riportiamo quindi qui un risultato utile in questo senso, utilizzando una condizione finale (e, dunque, un payoff) di crescita al più lineare: per le applicazioni finanziarie ciò non costituisce una grossa limitazione.

Teorema 5.2

Esiste al più una soluzione classica dell'equazione di valutazione (5.8) che sia di crescita al più lineare in S e polinomiale in V . Ossia, l'eventuale soluzione classica u , deve soddisfare

$$|u(t, S, V)| \leq C(1 + S + V^m), \quad (5.9)$$

con $C, m \geq 0$.

Dimostrazione: Prendiamo per comodità $r = 0$: la dimostrazione può essere estesa al caso $r > 0$. Consideriamo una funzione v che sia soluzione di (5.8) con $G = 0$ (problema omogeneo); inoltre v abbia crescita al più lineare in S e sia polinomiale in V , valga cioè la (5.9). Prendiamo ora una funzione $h(S, V) = (1 + S \log S + SV + V^{m+1})$, con m come in (5.9). Operiamo poi un cambio di variabile temporale del tipo $\tilde{t} = T - t$, che rende il problema (5.8) un problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{Heston}u + ru + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(0, S, V) = 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

D'ora in poi utilizzeremo \mathcal{L} per \mathcal{L}_{Heston} e t per \tilde{t} . Possiamo ora trovare una costante M abbastanza grande da soddisfare

$$\begin{aligned} Mh = M((1 + S \log S + SV + V^{m+1})) &> \frac{m(m+1)}{2} V^{m-1} \sigma^2 V + \frac{1}{2} SV + \\ &+ \sigma \rho SV + (k(\theta - V))(S + (m+1)V^m) = -\mathcal{L}h \end{aligned}$$

nei punti interni del dominio $[0, T] \times \Omega$ con $\Omega = (0, \infty)^2$.

Definiamo ora la funzione $v^\epsilon : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in questo modo

$$v^\epsilon(t, S, V) = v(t, S, V) + \epsilon e^{Mt} h(S, V).$$

Allora, si vede che

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \mathcal{L}v^\epsilon = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}v + \epsilon e^{Mt}(Mh + \mathcal{L}h) = \epsilon e^{Mt}(Mh + \mathcal{L}h) > 0.$$

A questo punto, si può mostrare che $v^\epsilon \geq 0$ e, per l'arbitrarietà di ϵ , anche v lo è di conseguenza. Lo stesso argomento lo si può poi utilizzare per $-v$, arrivando alla conclusione che deve essere $v = 0$. ■

5.4 La questione delle condizioni al bordo

Un breve discorso a parte merita la questione delle condizioni al bordo. Come si nota dalla definizione del problema (5.8), infatti, oltre alla condizione finale di imposizione del payoff, non vi è alcuna condizione sulla frontiera del dominio $\partial\Omega$. Da un punto di vista matematico questo fatto è pienamente giustificato dai discorsi fatti nei capitoli precedenti: infatti, data la non raggiungibilità degli insiemi $\{S = 0\}$ per il processo S e $\{V = 0\}$ per il processo V , né di un'esplosione all'infinito, come visto nei capitoli riguardanti lo studio dei problemi ellittici e parabolici degeneri al bordo, non occorre imporre alcuna condizione sulla frontiera.

Tuttavia, molto spesso tale problema di valutazione viene corredato da una serie di condizioni al bordo. Ad esempio, in [18], articolo in cui nel 1993 Heston ha presentato la prima formula esplicita per il suo modello, il problema (5.8) viene accompagnato dalle seguenti condizioni al bordo, modificate per il caso di un'opzione put:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, 0, V) = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{su } [0, T] \times (0, \infty), \\ u(t, \infty, V) = 0 \quad \text{su } [0, T] \times (0, \infty), \\ \left(rS \frac{\partial u}{\partial S} + k\theta \frac{\partial u}{\partial V} - ru + \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, S, 0) = 0 \quad \text{su } [0, T] \times (0, \infty), \\ u(t, S, \infty) = S \quad \text{su } [0, T] \times (0, \infty). \end{array} \right. \quad (5.11)$$

In realtà, queste condizioni vengono imposte ai fini di una successiva implementazione numerica dello schema, che, come noto, necessita di condizioni di questo tipo. Dal punto di vista matematico della buona posizione del problema, invece, possiamo dire che esse sono superflue: dobbiamo comunque verificare che siano consistenti con la definizione del problema.

Le prime due condizioni in (5.11), per i valori estremi della variabile S , discendono da ragionamenti di carattere finanziario: per $S = 0$, siccome il sottostante

perde tutto il suo valore, l'opzione avrà un valore pari al suo prezzo di esercizio K attualizzato al tempo t ; per $S \rightarrow \infty$, invece, l'opzione non verrà esercitata e quindi avrà valore nullo. Queste considerazioni, che in generale sono sempre vere, sono superflue nel nostro studio della buona posizione e non vengono esplicitate nella (5.8) poiché da (5.6) e dal buon comportamento di $V(t)$, come già osservato, il processo $S(t)$ non tocca l'origine nè esplode all'infinito prima di T . Esse sono dunque certamente utili da un punto di vista numerico, oltre che per la loro interpretazione finanziaria, ma possono essere omesse nella nostra formalizzazione matematica.

Per l'ultima condizione in (5.11) vale una considerazione analoga: essa discende da un ragionamento di tipo finanziario, ma è matematicamente superflua poiché, per le condizioni imposte sui parametri, V non esplode in tempo finito.

Per quanto riguarda la terza condizione in (5.11), per $V = 0$, essa viene ricavata semplicemente sostituendo il valore $V = 0$ nell'equazione originaria (5.8) e necessita di dimostrare che, in particolare, le derivate $\frac{\partial u}{\partial S}$, $\frac{\partial u}{\partial V}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ siano ben definite anche per $V = 0$. Questo è, ancora una volta, necessario solo da un punto di vista numerico, per fornire una condizione sul bordo del dominio $V = 0$, mentre da un punto di vista matematico, siccome abbiamo supposto $2k\theta \geq \sigma^2$ e quindi l'origine è irraggiungibile per il processo V , essa è superflua.

Buona posizione del problema derivante dal modello di Heston per opzioni Americane

6.1 Introduzione e formulazione del problema

Entriamo ora nel contesto delle opzioni Americane. A differenza dei contratti Europei, innanzitutto, esse consentono anche l'*esercizio anticipato*: possono cioè essere esercitate in qualsiasi istante t precedente la scadenza T , consegnando, ad esempio nel caso della Call, il payoff $(S(t) - K)^+$. Questa differenza non è, ovviamente, di poco conto, poiché dà al possessore del titolo una notevole libertà, che si riflette su una maggiore difficoltà di risoluzione del problema di valutazione.

Come, per le opzioni Europee, sono due i modi principali per valutare un titolo derivato Americano:

- **Approccio stocastico**: consiste nel calcolare un valore atteso scontato del payoff nella misura di probabilità neutra rispetto al rischio Q . In particolare, occorre determinare il *tempo d'arresto ottimo*, ossia l'istante in cui è più conveniente esercitare l'opzione e, dunque, calcolare il valore atteso.
- **Approccio PDE**: rispetto al caso delle opzioni Europee, qui il problema è a frontiera libera, la quale separa la regione dove conviene esercitare l'opzione (regione di esercizio) e quella dove è opportuno mantenere il titolo (regione di continuazione). In letteratura esistono due metodi principali per trattare questo approccio:
 - si può riformulare il problema a frontiera libera come *problema di complementarità lineare*,
 - si può passare alla formulazione debole e riformulare il problema come *disequazione variazionale*: questo è il metodo che si userà qui, e che

permette di ricorrere ai teoremi dell'Analisi Funzionale per studiare la buona posizione del problema.

Per cominciare lo studio del problema di valutazione per le opzioni Americane, riprendiamo il sistema di equazioni differenziali stocastiche che governano l'andamento delle due variabili di stato, il prezzo del sottostante $S(t)$ e la volatilità $V(t)$:

$$\begin{cases} dS(t) = (r - q)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1(t), \\ dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t). \end{cases}$$

A questo punto operiamo però un cambio di variabile su $S(t)$ di tipo logaritmico e prendiamo $X(t) = \log(S(t))$, che è ben definito poiché $S(t)$ è sempre positivo. Grazie alla formula di Ito possiamo ora scrivere la dinamica del nuovo vettore di incognite $(X(t), V(t))^T$, che risulta essere di questo tipo:

$$\begin{cases} dX(t) = \left(r - q - \frac{V(t)}{2} \right) dt + \sqrt{V(t)}dW_1(t), \\ dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

dove ancora W_1 e W_2 sono due moti browniani correlati con $\rho \in (-1, 1)$.

Visto il cambio di variabile introdotto, occorre ridefinire il dominio, che ora sarà $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, mentre l'insieme di definizione spazio-temporale è $Q_T := [0, T) \times \Omega$. Con queste nuove variabili ovviamente cambia leggermente anche l'operatore associato al sistema (6.1): lo indichiamo con \mathcal{L}_H ed è del tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & - \left(\frac{1}{2}V \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\rho\sigma \frac{\partial^2}{\partial X \partial V} + \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} \right) + \right. \\ & \left. + (k(\theta - V)) \frac{\partial}{\partial V} + (r - q - V/2) \frac{\partial}{\partial X} - r \right). \end{aligned}$$

Oltre a osservare che, a differenza dei casi precedenti, si è deciso qui di inserire nell'operatore anche il termine lineare nella funzione u (il termine r), notiamo anche che \mathcal{L}_H , nonostante il cambio di variabile, è rimasto un operatore degenero per $V = 0$.

Possiamo ora formulare il problema di valutare il prezzo $u(t, S(t), V(t))$ di un'opzione Americana di scadenza T e payoff $\psi(S(t), V(t))$, per il quale si ha, in analogia con la formulazione nell'ambito Black-Scholes:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_H u - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0, & u \geq \psi \quad \text{su } Q_T \\ \left(\mathcal{L}_H u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\psi - u) = 0 & \text{su } Q_T, \\ u(T, S, V) = \psi(S(T), V(T)). \end{cases} \quad (6.2)$$

Il (6.2) è un *problema ad ostacolo*, dove l'ostacolo è costituito dal payoff ψ : se il valore dell'opzione u in un istante t è strettamente maggiore di ψ , allora essa non viene esercitata e vale l'equazione come nel caso di un'opzione Europea; se invece u uguaglia ψ in t , allora l'opzione viene esercitata in anticipo.

6.2 Formulazione del problema come disequazione variazionale

Riformuliamo ora questo problema in un modo che si rivelerà più utile, mediante una disequazione variazionale: per la relativa ambientazione funzionale occorre ora definire degli **spazi di Sobolev con peso**.

Definizione 6.1

Definita la seguente funzione peso

$$p(X, V) := \frac{2}{\sigma^2} V^{\beta-1} e^{-\gamma|X|-\mu V}, \quad \beta = \frac{2k\theta}{\sigma^2}, \quad \mu = \frac{2k}{\sigma^2},$$

per ogni $(X, V) \in \Omega$ e dove γ è una costante positiva opportuna, allora sia

$$H^1(\Omega, p) := \{u \in L^2(\Omega, p) : (1+V)^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\Omega, p), \text{ e } V^{\frac{1}{2}}Du \in L^2(\Omega, p)\}.$$

In questa definizione, ovviamente, $u \in L^2(\Omega, p)$ significa che

$$\int_{\Omega} |u|^2 p dX dV < \infty,$$

e, per Du , si intende lo Jacobiano di u . Inoltre, vista la condizione di non raggiungibilità alla Feller del tratto di frontiera $\{V = 0\}$, supponiamo di qui in avanti $\beta > 1$.

La norma in questo nuovo spazio è definita coerentemente con la sua definizione:

$$\|u\|_{H^1(\Omega, p)}^2 := \int_{\Omega} V(u_X^2 + u_V^2) p dX dV + \int_{\Omega} (1+V)u^2 p dX dV,$$

e vediamo che, rispetto alla definizione degli spazi di Sobolev con peso fatta in [21] per problemi non degeneri, qui abbiamo moltiplicato le due integrande rispettivamente per V e $(1+V)$.

Possiamo ora passare ad una seconda definizione:

Definizione 6.2

Detto

$$\mathcal{E}_0 = \bar{\Omega} \cap \mathbb{R} \times \{0\},$$

sia $H_0^1(\Omega, p)$ la chiusura in $H^1(\Omega, p)$ di $C_0^\infty(\Omega)$, mentre sia $H_0^1(\Omega \cup \mathcal{E}_0, p)$ la chiusura in $H^1(\Omega, p)$ di $C_0^\infty(\Omega \cup \mathcal{E}_0)$.

Qui, si è utilizzata la notazione $C_0^\infty(\Omega)$ per indicare lo spazio delle funzioni C^∞ e a supporto compatto su Ω .

Ora, utilizzando da qui la notazione più comoda $H_p := L^2(\Omega, p)$ e $V_p := H_0^1(\Omega \cup \mathcal{E}_0, p)$, possiamo passare alla formulazione del problema (6.2) come disequazione variazionale. Per prima cosa, applichiamo l'operatore \mathcal{L}_H alla candidata soluzione $u \in V_p$ e facciamone il prodotto scalare, in H_p , con una funzione test $v \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_H u, v)_{H_p} &= \int_{\Omega} - \left(\frac{1}{2} V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\rho\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial X V} + \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial V^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (k(\theta - V)) \frac{\partial u}{\partial V} + (r - q - V/2) \frac{\partial u}{\partial X} - ru \right) v p dX dV = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} V \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial X} + 2\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial V} + \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial V} \frac{\partial v}{\partial V} \right) + \right. \\ &\quad \left. - (k(\theta - V)) \frac{\partial u}{\partial V} v - (r - q - V/2) \frac{\partial u}{\partial X} v + ruv \right) p dX dV, \end{aligned}$$

dove si è anche integrato per parti, cosicché si può ora introdurre la forma bilineare a :

Definizione 6.3

L'operatore di Heston \mathcal{L}_H definisce una forma bilineare $a : V_p \times V_p \rightarrow \mathbb{R}$ così

$$a(u, v) := (\mathcal{L}_H u, v)_{H_p},$$

con $u \in V_p$ e $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

La forma bilineare appena introdotta è continua, cioè

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{V_p} \|v\|_{V_p}, \quad \forall u, v \in V_p,$$

dove C_1 è una costante positiva che dipende, al più, dai parametri del modello $r, q, k, \theta, \rho, \sigma$.

Per quanto riguarda la coercività, abbiamo invece il seguente risultato:

Proposizione 6.1 (Disuguaglianza di Gårding)

Siano $r, k, \theta, \sigma \in \mathbb{R}$ delle costanti tali che

$$\beta = \frac{2k\theta}{\sigma^2} > 1, \quad \sigma \neq 0, \quad e \quad -1 < \rho < 1.$$

Allora, per ogni $u \in V_p$, esistono due costanti positive C_2 e C_3 dipendenti, al più, dai parametri del modello $r, q, k, \theta, \rho, \sigma$, tali che:

$$a(u, u) \geq \frac{1}{2}C_2\|u\|_{V_p}^2 - C_3\|(1+V)^{1/2}u\|_{H_p}^2$$

A questo punto, possiamo passare ad una prima formulazione di disequazione variazionale, nella versione ellittica (cioè stazionaria):

Sia $f \in H_p$ e $\psi \in V_p$. Trovare $u \in K$ in modo che

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u)_{H_p}, \quad \forall v \in K, \quad (6.3)$$

dove $K := \{v \in V_p : v \geq \psi\}$.

in cui si prende $v \in V_p$, poiché si parte dalle funzioni test in $C_0^\infty(\Omega)$ e si arriva per densità in V_p . Notiamo poi che questa formulazione, in analogia con il caso delle opzioni Europee, non presenta alcuna condizione al bordo; infatti, siccome $X(t)$ può avere valori su tutta la retta reale, l'unica frontiera è l'insieme \mathcal{E}_0 , dove si annulla la volatilità $V(t)$ e che tuttavia non è raggiungibile ($\beta > 1$). Per completezza, osserviamo che se invece l'insieme \mathcal{E}_0 risultasse raggiungibile (se, cioè, si avesse $\beta < 1$), allora occorrerebbe imporre delle condizioni al bordo e il problema verrebbe così riformulato come problema di Dirichlet non-omogeneo:

Sia $f \in H_p$ e $g, \psi \in V_p$ tali che $\psi \leq g$ in Ω . Trovare $u \in K$ in modo che

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u)_{H_p}, \quad \text{con } u = g \text{ su } \mathcal{E}_1, \quad \forall v \in K, \quad \text{con } v = g \text{ su } \mathcal{E}_1,$$

dove $K := \{v \in V : v \geq \psi\}$.

Torniamo comunque al caso $\beta > 1$ e, dunque, alla formulazione (6.3), per la quale si ha il risultato seguente:

Teorema 6.1

Esiste un'unica soluzione per la disequaglianza variazionale ellittica (6.3) per l'operatore di Heston \mathcal{L}_H .

Nei casi particolari di opzioni put e call, si ha anche un risultato di regolarità superiore: se infatti definiamo lo spazio di Sobolev con peso

$$H^2(\Omega, p) := \{u \in L^2(\Omega, p) : (1+V)^{1/2}u, V^{1/2}Du \text{ e } VD^2u \in L^2(\Omega, p)\},$$

con la norma

$$\|u\|_{H^2(\Omega,p)}^2 := \int_{\Omega} [V^2(u_{XX}^2 + 2u_{XV}^2 + u_{VV}^2) + V(u_X^2 + u_V^2) + (1+V)u^2] p dX dV,$$

allora vale anche il seguente teorema.

Teorema 6.2

Se il payoff è della forma $\psi(X, V) = (K - e^X)^+$ oppure $\psi(X, V) = (e^X - K)^+$, allora la soluzione u della disequazione variazionale ellittica (6.3) appartiene allo spazio $H^2(\Omega, p)$ e vale la formulazione forte in forma di problema di complementarità:

$$\mathcal{L}_H u - f \geq 0, \quad u - \psi \geq 0, \quad (\mathcal{L}_H u - f)(u - \psi) = 0 \quad \text{su } \Omega.$$

6.3 Problema parabolico e disequazione variazionale non stazionaria

Dopo aver trattato il problema nella sua versione ellittica, introduciamo anche l'ultimo tassello, ovvero la derivata temporale, e passiamo al problema (parabolico) non stazionario di valutazione di un'opzione Americana nel contesto del modello di Heston. Come usuale nel trattamento di problemi non stazionari, consideriamo la funzione di tre variabili $u(t, X, V) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come una funzione del solo tempo t ma a valori in uno spazio di Sobolev del tipo di quelli introdotti prima $L^2(\Omega, p) = H_p$ e $H^1(\Omega, p) = V_p$. La notazione è dunque la seguente:

$$u : [0, T] \rightarrow V_p \quad \text{oppure} \quad u : [0, T] \rightarrow H_p,$$

e possiamo introdurre gli spazi funzionali tempo dipendenti

$$\mathcal{V} := L^2(0, T; V_p),$$

dove

$$\|u\|_{\mathcal{V}} = \left(\int_0^T \|u\|_{V_p}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

e analogamente

$$\mathcal{H} := L^2(0, T; H_p),$$

dove

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^T \|u\|_{H_p}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Introduciamo anche gli spazi

$$\mathcal{V}' := L^2(0, T; V_p'),$$

e

$$\mathcal{K} := \{v \in \mathcal{V} : v \geq \psi\}, \quad \text{dato } \psi \in \mathcal{V}.$$

Possiamo ora riformulare il problema (6.2) in questo modo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_H u - u' \geq 0, & u \geq \psi \quad \text{su } Q_T \\ (\mathcal{L}_H u - u')(\psi - u) = 0 & \text{su } Q_T, \\ u(T, S, V) = \psi(S(T), V(T)). \end{cases} \quad (6.4)$$

A questo punto, per arrivare al risultato di esistenza ed unicità, operiamo un cambio di variabile di tipo esponenziale sulla soluzione u e prendiamo

$$\tilde{u}(t, X, V) = e^{-\lambda(1+V)(T-t)} u(t, X, V), \quad (t, X, V) \in Q_T. \quad (6.5)$$

In questo modo, il problema *non-coercivo* (6.4) è trasformato, per $t \in [T - \delta, T]$ e $\delta \in (0, T)$, in

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_H \tilde{u} - \tilde{u}' \geq 0, & \tilde{u} \geq \tilde{\psi} \quad \text{su } Q_T \\ (\tilde{\mathcal{L}}_H \tilde{u} - \tilde{u}')(\tilde{\psi} - \tilde{u}) = 0 & \text{su } Q_T, \\ \tilde{u}(T, S, V) = \tilde{\psi}(S(T), V(T)), \end{cases} \quad (6.6)$$

La condizione d'ostacolo $u \geq \psi$ è trasformata in un'equivalente condizione d'ostacolo $\tilde{u} \geq \tilde{\psi}$ e il problema parabolico (6.6) è ora coercivo. Prendiamo infatti la forma bilineare $\tilde{a}(t) : V_p \times V_p \rightarrow \mathbb{R}$ associata all'operatore $\tilde{\mathcal{L}}_H(t)$ per ogni istante temporale $t \in (0, T)$:

$$\tilde{a}(t; \tilde{u}(t), v) := (\tilde{\mathcal{L}}_H \tilde{u}(t), v)_{H_p},$$

dove v come al solito è una funzione test presa in V_p .

Per la forma $\tilde{a}(t)$ otteniamo quindi ora una stima di continuità ed una disuguaglianza di tipo Gårding. Se infatti λ in (6.5) è una costante positiva sufficientemente grande e che dipende al massimo dai parametri di \mathcal{L}_H , e δ è una costante compresa in $(0, T)$ dipendente solo da λ e dai coefficienti di \mathcal{L}_H , Allora la forma bilineare $\tilde{a}(t)$ è continua, vale cioè:

$$|\tilde{a}(t; u, v)| \leq C_1 \|u\|_{V_p} \|v\|_{V_p},$$

per ogni u e $v \in V_p$ e $t \in [T - \delta, T]$ e con $C_1 > 0$; ed è coerciva, vale cioè una disuguaglianza di tipo Gårding

$$\tilde{a}(t; u, u) \geq \frac{C_2}{2} \|u\|_{V_p}^2, \quad (6.7)$$

per ogni $u \in V_p$ e $t \in [T - \delta, T]$. D'ora in poi omettiamo per comodità il simbolo di \sim .

Tutti gli ingredienti sono ora pronti per passare alla formulazione del problema (6.6) come disequazione variazionale parabolica:

Sia $\psi \in \mathcal{H}$ tale che $\psi \leq 0$ in $[0, T) \times \partial\Omega$. Trovare $u \in \mathcal{K}$ con $u' \in \mathcal{H}$ in modo che, per q.o. $t \in [0, T)$, valga

$$-(u'(t), v - u(t))_{H_p} + a(t; u(t), v - u(t)) \geq 0, \quad \forall v \in V_p, \text{ con } v \leq \psi(t, \cdot). \quad (6.8)$$

Dunque, dopo aver verificato l'esistenza e l'unicità di una soluzione per la (6.8) con la forma coerciva, si ritorna indietro dalla soluzione \tilde{u} alla soluzione originaria del problema u utilizzando un peso leggermente diverso per la definizione degli spazi di Sobolev:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(X, V) &:= e^{-2\lambda M(1+V)} p(X, V) = \\ &= \frac{2}{\sigma^2} V^{\beta-1} e^{-\gamma|X| - \mu V - 2\delta\lambda(1+V)}, \quad (X, V) \in \Omega, \end{aligned}$$

dove M è una costante tale che $M > T$.

Una volta tornati alla soluzione del problema originario u siamo quindi giunti al seguente risultato.

Teorema 6.3

Esiste un'unica soluzione per la disequazione variazionale evolutiva (6.8) associata all'operatore di Heston \mathcal{L}_H .

Dimostrazione: Unicità. Supponiamo che u_1 e u_2 siano due soluzioni di (6.8).

Allora, scrivendo la disequazione per u_1 con $v = u_2$ e per u_2 con $v = u_1$, otteniamo le due disuguaglianze:

$$\begin{aligned} (u_1'(t), u_2(t) - u_1(t))_{H_p} + a(t; u_1(t), u_2(t) - u_1(t)) &\geq 0, \\ (u_2'(t), u_1(t) - u_2(t))_{H_p} + a(t; u_2(t), u_1(t) - u_2(t)) &\geq 0. \end{aligned}$$

Riscriviamo la seconda in questo modo

$$-(u_2'(t), u_2(t) - u_1(t))_{H_p} - a(t; u_2(t), u_2(t) - u_1(t)) \geq 0,$$

e sommiamola con l'altra ottenendo:

$$((u_1 - u_2)'(t), u_2(t) - u_1(t))_{H_p} + a(t; u_1(t) - u_2(t), u_2(t) - u_1(t)) \geq 0,$$

cioè, ponendo $w(t) = u_2(t) - u_1(t)$

$$(w'(t), w(t))_{H_p} + a(t; w(t), w(t)) \leq 0.$$

Ora, siccome vale la (6.7), e quindi a è coerciva, si ha:

$$-a(t; w(t), w(t)) \leq -\frac{C_2}{2} \|w\|_{V_p}^2,$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{H_p}^2 + \frac{C_2}{2} \|w\|_{V_p}^2 \leq 0,$$

che ovviamente implica

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{H_p}^2 \leq 0.$$

Siccome ora $w(T) = 0$, si ha $w(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$, da cui l'unicità.

Esistenza. La prima parte della dimostrazione dell'esistenza è stata svolta prima dell'enunciato di questo teorema. Successivamente si introduce il *problema penalizzato*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_H u_\epsilon + u'_\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \max(\psi - u_\epsilon, 0) = 0, \\ u_\epsilon(T) = \psi \quad \text{su } \Omega, \end{cases}$$

si dimostra esistenza ed unicità della soluzione u_ϵ e si fa tendere ϵ a zero giungendo alla tesi. ■

Anche in questo caso, come fatto prima per la versione non evolutiva, si ha un risultato di regolarità ulteriore che permette di ottenere un teorema analogo anche per la controparte forte del problema. Nel caso in cui, ancora una volta, l'ostacolo ψ abbia la forma $\psi(t, X, V) = (e^X - K)^+$ oppure $\psi = (K - e^X)^+$, con $(t, X, V) \in Q$, vale il risultato di regolarità:

Teorema 6.4

Se u è la soluzione della disequazione variazionale evolutiva (6.8) associata all'operatore di Heston \mathcal{L}_H e ricavata come sopra, allora

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega, p)).$$

Acquisita questa regolarità, una soluzione della disequazione variazionale evolutiva per l'operatore di Heston è anche soluzione della corrispondente formulazione come problema di complementarità.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_H u - u' \geq 0, & \text{su } Q_T \\ u \geq \psi & \text{su } Q_T \\ (\mathcal{L}_H u - u')(u - \psi) = 0 & \text{su } Q_T, \\ u(T) = h & \text{su } \Omega, \end{cases} \quad (6.9)$$

dove $h \in V_p$ e $h \geq \psi$ in Ω . Ancora una volta, non si è messa la condizione al bordo poiché abbiamo assunto $\beta > 1$ e dunque l'unico insieme di frontiera \mathcal{E}_0 è irraggiungibile. Se invece si avesse $\beta < 1$ e se quindi \mathcal{E}_0 fosse raggiungibile, il problema (6.9) si riformulerebbe così

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_H u - u' \geq 0, \quad \text{su } Q_T \\ u \geq \psi \quad \text{su } Q_T \\ (\mathcal{L}_H u - u')(u - \psi) = 0 \quad \text{su } Q_T, \\ u = g \quad \text{su } \mathcal{E}_0 \times [0, T), \\ u(T) = h \quad \text{su } \Omega, \end{array} \right.$$

dove deve essere $g \in L^2(0, T; H^2(\Omega, p))$ e $g \geq \psi$ su Q_T .

Conclusioni e possibili sviluppi

In questo lavoro si sono studiati i problemi ellittici e parabolici in particolare nella loro versione in cui l'operatore ellittico degenera in una porzione di frontiera del dominio in considerazione. Tale studio ha permesso di analizzare in maniera rigorosa tutte le (numerose) situazioni in cui si presentano degli operatori degeneri in applicazioni alla Finanza Matematica. In particolare, si è svolta nel dettaglio l'analisi di buona posizione dei problemi di valutazione di contratti Europei ed Americani nel contesto del modello di Heston, oggi largamente utilizzato in ambito finanziario.

Un primo contributo che si è quindi cercato di dare è consistito, a partire dalle trattazioni presenti in letteratura sui problemi degeneri secondo l'approccio stocastico e quello deterministico, nel sistematizzare e generalizzare i risultati ottenuti in queste due ottiche, mettendone in luce analogie e complementarità. Un obiettivo principale riguardava l'individuazione delle porzioni di bordo nelle quali fosse opportuno imporre delle condizioni al fine di avere un problema matematicamente ben posto: si è mostrato come, per rispondere esaurientemente a questa questione, occorre tenere presente entrambi gli approcci, siccome ciascuno di essi evidenzia meglio alcuni aspetti. Inoltre, il problema è stato studiato nel dettaglio sia per i problemi ellittici, sia per la loro controparte parabolica e, a tal proposito, si sono generalizzati al caso non stazionario i risultati di tipo stocastico presentati in [24], e si sono costruite le analogie opportune tra i recenti risultati in [29], di tipo deterministico, con i loro equivalenti stocastici.

In secondo luogo, si è cercato di studiare in modo dettagliato la questione della buona posizione per i problemi derivanti dal modello di Heston: per quanto riguarda i titoli derivati Europei si è presentato un framework che permette di studiare l'esistenza e l'unicità anche nel caso generico n -dimensionale, mentre i recenti studi in proposito (soprattutto [8] e [1]) sono concentrati su modelli

ad un solo sottostante. Per quanto riguarda i contratti Americani, invece, vi sono diversi gruppi di ricerca che stanno studiando il problema, ma non esiste ad oggi ancora nulla di pubblicato che mostri la buona posizione del problema: in questo lavoro si è dunque affrontato questo problema, guidati soprattutto da [11] e cercando di proseguire in analogia con i corrispondenti risultati per i modelli di tipo Black-Scholes a volatilità costante, in riferimento soprattutto a [21].

Le sfide che dunque si possono ora intraprendere sono diverse. Quanto studiato qui per il modello di Heston, può sicuramente essere generalizzato ad un qualsiasi modello a volatilità stocastica, come gli altri presentati nel primo capitolo. Un problema di grande interesse potrebbe poi essere quello di estendere lo studio fatto qui ai modelli in cui, oltre alla volatilità stocastica, vi sono dei termini di salto alla Lévy: in questi modelli, ancora più realistici nella simulazione dell'andamento dei sottostanti, si ha a che fare con equazioni integro-differenziali e dunque problemi non locali, a differenza dei consueti problemi differenziali. Infine, rimane aperto il problema di valutazione asintotica della soluzione alla frontiera libera nel caso considerato in questo lavoro di opzioni Americane nell'ambito Heston, altro traguardo da raggiungere.

Bibliografia

- [1] E. Bayraktar, C. Kardaras, H. Xing: 'Valuation Equations for Stochastic Volatility Models', *Workshop on Financial Derivatives and Risk*, Fields Institute, Toronto, 2010.
- [2] H. Berestycki, J. Busca, I. Florent: 'Computing the Implied Volatility in Stochastic Volatility Models', *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57, pp. 1352-1373, 2004.
- [3] T. Björk: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Second Edition, Oxford University Press, Oxford, UK, 2004.
- [4] R. Cont, P. Tankov: *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/Crc, New York, NY, 2004.
- [5] A. Cox, D. Hobson: 'Local martingales, bubbles and option prices', *Finance and Stochastics*, 9, pp. 477-492, 2005.
- [6] E. Ekstroem, J. Tysk: 'Bubbles, convexity and the Black-Scholes equation', *Annals of Applied Probability*, 19 (4), pp. 1369-1384, 2009.
- [7] E. Ekstroem, P. Loetstedt, L. Von Sydow, J. Tysk: 'Numerical Option Pricing in the Presence of Bubbles', Uppsala University, 2008.
- [8] E. Ekstroem, J. Tysk: 'The Black-Scholes equation in stochastic volatility models', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 368, pp. 498-507, 2010.

- [9] E. Ekstroem, J. Tysk: 'Boundary conditions for the single-factor term structure equation', to appear in *Annals of Applied Probability*, available at <http://www.math.uu.se/ekstrom/publikation.html>, 2010.
- [10] E. Ekstroem, J. Tysk: 'Dupire's Equation for Bubbles', available at <http://www.math.uu.se/ekstrom/forwardeq.pdf>, 2010.
- [11] P. Feehan: 'American-style options, stochastic volatility and degenerate parabolic variational inequalities', talk at *Kolmogorov Equations in Physics and Finance*, Modena, September 2010.
- [12] W. Feller: 'Two singular diffusion problems', *Annals of Mathematics*, 54(1), 1951.
- [13] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications II*, John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 1971.
- [14] G. Fichera: 'On a unified theory of boundary value problem for elliptic-parabolic equations of second order', *Boundary Value Problems in Differential Equations*, pp. 97-120, University of Wisconsin Press, 1960.
- [15] M. Freidlin: *Functional Integration and Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985
- [16] A. Friedman: *Stochastic Differential Equations and Applications, II*, Academic Press, 1976.
- [17] D. Heath, M. Schweizer: 'Martingales versus PDEs in finance: an equivalence result with examples', *Journal of Applied Probability*, 37, pp. 947-957, 2000.
- [18] S. L. Heston: 'A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options', *Review of Financial Studies*, 6, pp. 327-343, 1993.
- [19] S. L. Heston, M. Loewenstein, G. A. Willard: 'Options and Bubbles', *Review of Financial Studies*, 20, pp. 359-390, 2007.
- [20] J. Hull, A. White: 'The pricing of options on assets with stochastic volatility', *Journal of Finance*, 42, pp. 281-300, 1987.
- [21] P. Jaillet, D. Lamberton, B. Lapeyre, 'Variational inequalities and the pricing of American options', *Acta Applicandae Mathematicae*, 21, pp. 263-289, 1990.

- [22] S. Karlin, H. M. Taylor: *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, Inc., New York, NY, 1981.
- [23] M. V. Keldysh: 'On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the boundary of a domain, *Dokl. Akad. Nauk, SSSR*, 77, pp. 181-183, 1951.
- [24] R. Z. Khas'minskii: 'Diffusion Processes and Elliptic Differential Equations Degenerating at the Boundary of the Domain', *Theory of Probability and Its Applications*, 3(4), 1958
- [25] V. Lucic: 'Boundary Conditions for Computing Densities in Hybrid Models via PDE Methods', Equity Derivatives Quant Research, Barclays Capital, London, UK, 2008.
- [26] M. Mitchell, T. Pulvino, E. Stafford: 'Limited Arbitrage in Equity Markets', *Journal of Finance*, 57 (2), pp. 551-584, 2002.
- [27] B. K. Oksendal: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, V edition, Springer-Verlag, Heidelberg, NY, 2000.
- [28] O. A. Oleinik, E. V. Radkevich: *Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form*, Amer. Math. Society, Plenum Press, Providence, RI, 1973.
- [29] F. Punzo: *Well-posedness of Degenerate Elliptic and Parabolic Problems*, Ph.D. Thesis in Mathematics, University of Rome 'La Sapienza', 2008.
- [30] S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali: Metodi, modelli e applicazioni*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2004.
- [31] D. Sornette: *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.
- [32] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison: *Option Pricing*, Oxford Financial Press, Oxford, UK, 1993.