

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in
Ingegneria Spaziale



Progetto della strategia di guida e controllo orbitale per una missione LEO di
osservazione della Terra con payload IR

Relatore: Prof. Michelle LAVAGNA

Tesi di Laurea di:

Annalisa MAZZOLENI Matr. 682536

Anno Accademico 2009 - 2010

A mia sorella Diana

Prefazione e ringraziamenti

Quando ci si è dentro non si vede mai la fine – e a dire il vero uno degli sforzi è quello di riuscire a non pensarci – ed ora che è giunta, la fine, quasi non ci si ricorda di quando si andava avanti con le unghie, per ottenere talvolta successi incredibili, talvolta delusioni inattese.

Meglio così. Perché questo è il momento del bilancio finale, delle valutazioni sentite, non sull'onda di un'emozione passeggera, che è stata a volte di rabbia e sconforto, a volte di orgoglio e euforia, ma sulla base di qualcosa che si è interiorizzato e che varrà ancora per molto tempo.

Il mio primo personale ringraziamento è diretto nei confronti della Prof.ssa Lavagna che ha fatto in modo che io credessi in me stessa in questi anni, e che non ha mancato di esprimere una parola per me quando ne ho avuto bisogno, nonostante i suoi onnipresenti impegni “tendenti a infinito”.

Con un pensiero rivolto alla Prof.ssa Finzi, sento di aver contribuito nel mio piccolo al riscatto del mondo femminile in una società in cui una donna non è ancora considerata alla pari di un uomo e in cui un uomo non è ancora slegato dai suoi “compiti o atteggiamenti da uomo”, generalmente parlando. Ne vado molto orgogliosa e non vedo l'ora di prendermi altre innumerevoli rivincite.

In questo momento non posso non ricordare con stima e rispetto il Prof. Saleri, scomparso tragicamente il 4 giugno 2007 e rinato in una vita migliore. Lo ringrazio di aver speso una parte della sua vita e del suo impegno anche per me.

Un grazie affettuoso è per i miei compagni di università: Luca Canistro, per la fantastica bottiglia di spumante dopo l'esame pazzesco del Mante! Giuseppe Albini, per i nostri passati e futuri viaggi e sfoghi al telefono! Andrea Fogante, che mi ha sempre aiutato a trovare i principi primi di ogni problema non avendo mai vergogna di domandare il perché delle cose. Massimo Vetrivano, che ha tentato di farmi fare una sfilata con i capelli rosso fuoco! Nicola Vaona, per la piacevolezza di stare insieme e tutti gli altri che non ho citato qui ma che hanno avuto la pazienza di ascoltarmi, di consigliarmi o solo semplicemente di scambiare le proprie idee con me. Un grazie a chi l'università l'ha finita già da un pezzo, Luca Tosatto e Alessio Bandera che non mancano mai di darmi il loro aiuto per il mio domani.

Un grazie veramente speciale e assai meritato è per Ian Carnelli e Nando Boeri, perché sono le persone a me più care, perché cercano sempre di far emergere la forza che ho dentro e di cui molto spesso mi dimentico. In loro ho trovato più che un sostegno morale, una comprensione amica e un affetto sincero.

Vorrei dire grazie a conoscenti, amici, parenti, o persone che hanno solo incrociato il loro cammino con il mio e che lo incroceranno in futuro che si impegnano e desiderano fare qualcosa, piccola o grande, per gli altri, perché in mezzo a questi “altri” ci potrei essere io, o tu che stai leggendo in questo momento.

“Per aspera ad astra!” Spero che il Prof. De Luca abbia ragione. Grazie a tutti quelli che credono che dopo le difficoltà arrivino i risultati, o meglio che solo dopo le difficoltà arrivino i risultati. Ma che non si disperano e hanno il coraggio e l’umiltà insieme, di affrontarle. L’ammonimento è rivolto soprattutto a mio fratello Riccardo, affinché sappia che non arriverà nessuna manna dal cielo nel domani che lo aspetta.

Grazie a tutti quelli che hanno ancora sogni da bambino, poiché l’entusiasmo che ne deriva è sintomo naturale della vera passione, che tuttavia non è facile da seguire e che purtroppo non sempre accompagna nel mondo reale.

Grazie a tutti quelli che puntano sempre in alto.

Grazie al corso di studi in ingegneria aerospaziale, che mi ha insegnato che posso superare i miei limiti.

I figli sono anche come i genitori li crescono: grazie a quei genitori che non deridono malamente né rimproverano in maniera dittatoriale i propri bambini per non alimentare vergogna, timidezza e mancanza di autostima. E grazie a tutti quei genitori che coltivano le aspirazioni e le attitudini dei propri bambini, pur con enormi sacrifici.

Grazie alla mia famiglia che mi ha permesso di arrivare fin qui.

A mia sorella Diana a cui dedico questo manoscritto, vorrei augurare una giovinezza ricca di interessi, divertimento e studio. Molte volte un interesse, uno studio può essere un divertimento e un piacere. A volte studiare troppo, diciamo, fa male.

Annalisa Mazzoleni
Ottobre 2010

Indice

Indice delle figure	xi
Indice delle tabelle	xv
Sommario	xvii
Extended Abstract	xix
Mission scenario implementation	xix
Guidance and requirements of the control system	xxii
Orbit determination	xxiv
Introduzione	1
Perché la propulsione elettrica a effetto Hall ?	2
L'obiettivo di un sistema di navigazione integrato <i>gps /inertial/ star tracker</i>	5
1 La missione	7
1.1 Descrizione	7
1.1.1 Caratteristiche generali	7
1.1.2 Utilizzo della missione	8
1.1.3 Carico utile	9
1.1.4 Configurazione	10
1.1.5 Copertura della Terra da 310 km e da 268 km	12
1.2 AOCS	19
1.2.1 Requisiti	19
1.2.2 Prestazioni della EP	21
2 Ambiente di missione e studio del controllo	25
2.1 Creazione dello scenario	25
2.1.1 Sistemi di coordinate terrestri	25

2.1.2	Tempo	26
2.1.3	Orbita	27
2.2	Dinamica perturbata	29
2.2.1	<i>Geopotenziale, resistenza atmosferica e pressione solare</i>	31
2.2.2	Errori di modello	34
2.2.3	Dinamica libera	38
2.2.4	Equazioni di Gauss	43
2.3	Strategia di controllo orbitale	48
2.3.1	Studi precursori	49
2.3.2	Controllo attraverso l'approccio variazionale	51
2.3.2.1	Equazioni di Gauss come test di controllabilità	51
2.3.2.2	Obiettivo del controllo a riferimenti costanti	53
2.3.2.3	Obiettivo del controllo con accoppiamento delle accelerazioni	56
3	Implementazione del calcolo e risultati	59
3.1	Impostazione del calcolo	59
3.1.1	Schema del programma	59
3.1.2	Schema concettuale	62
3.2	Simulazioni numeriche	64
3.2.1	Caso a riferimenti costanti	64
3.2.1.1	Mantenimento orbitale con compensazione dei disturbi non conservativi secolari	64
3.2.1.2	Impostazione del trasferimento all'orbita risonante con eclisse	67
3.2.2	Mantenimento orbitale con f_C, f_D, f_T	70
3.2.2.1	Modello della dinamica nel controllo	70
3.2.2.2	Risultati	70
3.2.2.3	Definizione del <i>box</i> di accettabilità	73
4	Navigazione	75
4.1	Navigazione GNSS e ricevitore SDR	75
4.1.1	Stima della PVT	76
4.1.2	Simulatore GNSS & ricevitore	78
4.2	Processo di stima orbitale	80
4.2.1	Linearizzazione e equazioni variazionali risolutive	80
4.2.2	Stima orbitale sequenziale: LKF e EKF	83
4.3	Assetto	88
4.4	Accuratezza orbitale	93

Conclusioni	97
Appendice A	99
Descrizione del propulsore ad effetto Hall	99
Appendice B	103
Basi dell'analisi di <i>coverage</i>	103
Appendice C	105
Modello WGS-84	105
Lista degli acronimi	107
Lista dei simboli	109
Bibliografia	111

Indice delle figure

Figura 0.1: propulsore HT-100, modello di sviluppo (DM2),©Alta.	4
figura 1.1: l'immagine TIR qui sopra rappresenta, attraverso una scala di temperature, la recente attività eruttiva del vulcano Eyjafjallajokull in Islanda, nel giorno 19 Aprile 2010, GMT 12:51.	8
figura 1.2: Finestre atmosferiche.	9
figura 1.3: rappresentazione schematica del satellite e dimensioni geometriche dell'involucro.	11
figura 1.4: casi di calcolo per la copertura della Terra: a destra con puntamento mobile, a sinistra con puntamento fisso.	13
figura 1.5: geometria della traccia a terra a 310 km.	15
figura 1.6: schema di calcolo.	16
figura 1.7: Stima dei giorni minimi per la copertura globale nel caso di puntamento mobile.	18
figura 1.8:Stima dei giorni minimi per la copertura globale nel caso di puntamento fisso.	18
figura 1.9: rappresentazione dei sistemi di riferimento nel piano orbitale e del vincolo sulla direzione della spinta.	19
figura 1.10: Involucro della spinta per il motore HT-100.	21
figura 1.11: Resistogetto a Xenon e relative dimensioni.	22
figura 1.12: ciclo caratteristico della missione.	23
figura 2.1: Rappresentazione dell'orbita nei sistemi FK5 e ITRF. La porzione orbitale illuminata è in verde, quella in eclisse in blu. In magenta e in rosso sono rispettivamente il meridiano di Greenwich e la direzione Terra- Sole.	29
figura 2.2: previsione del numero di macchie solari per il prossimo decennio.	33
figura 2.3: Errore nella valutazione del modulo di r , al variare delle armoniche considerate nel potenziale gravitazionale.	35
figura 2.4: Errore nella valutazione di a , al variare delle armoniche considerate nel potenziale gravitazionale.	36
figura 2.5: Errore nella valutazione di r tra un modello con valori precisi di PREC, NU, PM, e un modello con matrici identità.	37
figura 2.6: Errore nella valutazione di r tra un modello con f_s e un modello senza f_s .	37
figura 2.7: componenti di f_s nel sistema locale r - ϑ - h .	37
figura 2.8: schema di calcolo per la dinamica libera.	39
figura 2.9: Moto secolare di ω e Ω . In magenta vi è l'asse nodale, in verde l'asse focale o versore eccentricità, in blu il versore momento della quantità di moto, in rosso il versore posizione.	41

figura 2.10: Evoluzione degli elementi orbitali per $n=2$, $m=2$.	42
figura 2.11: Evoluzione della quota riferita all'ellissoide terrestre al variare dell'anomalia vera.	43
figura 2.12: Andamento della componenti della forza specifica perturbativa dovuta alle armoniche del potenziale terrestre. $\vartheta_0=53^\circ$.	45
figura 2.13: Andamento delle componenti della forza specifica resistiva. $\vartheta_0=53^\circ$.	46
figura 2.14: componenti delle derivate degli elementi orbitali.	48
figura 2.15: Controllo di a attraverso l'imposizione dei limiti.	50
figura 2.16: Ciclo di controllo dell'integrale della derivata non conservativa del semiasse.	56
figura 3.1: Schema del programma di minimizzazione per la prima fase propulsa. Per la fase di rilascio dal lanciatore, l'istante di manovra scelto corrisponde ad una anomalia vera fuori dalla zona d'ombra.	61
figura 3.2: Schema del programma di minimizzazione per la seconda fase propulsa.	61
figura 3.3: Schema del controllo orbitale di station-keeping a tre o quattro parametri.	62
figura 3.4: Spinta calcolata all'interno del primo ciclo di missione.	65
figura 3.5: Parametri orbitali e grandezze sotto controllo.	65
figura 3.6: Consumo di massa.	66
figura 3.7: Andamento della derivata di e causata da spinta e resistenza.	66
figura 3.8: Andamento della derivata di ω causata da spinta e resistenza.	66
figura 3.9: Spinta soluzione.	68
figura 3.10: Variazione dei principali protagonisti dell'analisi.	68
figura 3.11: Consumo di massa durante due manovre di trasferimento.	68
figura 3.12: Rappresentazione dell'arco propulso per la prima manovra nel ciclo 1 (FK5). Il versore eccentricità varia entro lo spazio di piano colorato in verde, ma in realtà l'effettivo scostamento dovuto a spinta e resistenza è di soli 0.06° .	70
figura 3.13: Spinta soluzione ed evoluzione delle derivate e degli integrali delle parti non conservative.	71
figura 4.1: Dati di numero di satelliti GPS e PDOP dal simulatore GNSS.	78
figura 4.2: Simulatore software GNSS e ricevitore.	79
figura 4.3: filtraggio dei dati provenienti dal ricevitore attraverso l'algoritmo di stima sequenziale.	80
figura 4.4: Schema della procedura di stima orbitale del filtro di Kalman lineare. Con il simbolo (-) è indicata la quantità propagata, con (+) quella stimata.	83
figura 4.5: errori sulla posizione e velocità stimate usando un LKF e un intervallo di osservazione pari a 50s.	85
figura 4.6: Andamento della traccia della matrice di covarianza.	86

figura 4.7: differenza tra i parametri orbitali della traiettoria perturbata da quella di riferimento.	86
figura 4.8: Schema della procedura di stima orbitale del filtro di Kalman esteso.	87
figura 4.9: errori sulla posizione utilizzando un EKF con un intervallo di 60 s e il simulatore GNSS completo illustrato in figura 4.1.	88
figura 4.10: Schema del controllo d'assetto.	89
figura 4.11: Applicazione del controllo sugli angoli di Eulero.	91
figura 4.12: Andamento delle velocità angolari nelle due fasi successive.	92
figura 4.13: Andamento delle coppie di controllo nelle due fasi successive.	92
figura 4.14: Schema di taratura.	94

Indice delle tabelle

Tabella 0.1: Risultati dello studio su TerraSar confrontati con missioni HET a 10500h di funzionamento.	3
Tabella 0.2: Specifiche di alcuni motori Fakel**, Busek* e Alta***.	4
tabella 1.1: caratteristiche del carico utile.	10
tabella 1.2: Risultati del programma per puntamento mobile e fisso; dati orbita risonante a 268 km.	17
tabella 1.3: Riassunto proprietà del motore a Hall e del resitogetto a Xenon.	22
tabella 1.4: tempi caratteristici di funzionamento.	22
tabella 2.1: Dati orbitali.	27
tabella 2.2: periodi di eclisse.	28
tabella 2.3: Confronto tra le possibili tecniche di controllo.	51
tabella 3.1: Riassunto delle caratteristiche orbitali e del trasferimento.	67
tabella 3.2: Evoluzione dei termini non conservativi nel tempo.	72
tabella 3.3: Parametri caratteristici della soluzione in tre cicli.	73
tabella 4.1: caratteristiche delle ruote di reazione.	93

Sommario

L'analisi corrente sviluppa l'analisi di missione di un mini satellite in orbita bassa progettato per l'osservazione della Terra nelle bande dell'infrarosso, in particolare del TIR e dell'LWIR. A causa della vicinanza a Terra, il satellite è soggetto alla forte influenza della resistenza atmosferica e ha bisogno da subito di manovre di mantenimento orbitale che sono eseguite sfruttando un tipo di propulsione promettente per il futuro, cioè motori ad effetto Hall.

L'obiettivo del lavoro propone la ricerca della migliore legge di controllo che possa limitare le variazioni dei parametri orbitali all'interno di un *box* di accettabilità.

Il satellite sarà costretto ad operare in un ambiente fortemente perturbato e sarà soggetto a numerosi vincoli dettati dalla configurazione e dal sistema propulsivo, come l'effettuazione di manovre in periodi limitati con una direzionabilità del vettore spinta quasi nulla.

La missione prevista prevede la realizzazione di una piccola piattaforma, di complessità ridotta, soprattutto in termini di basso consumo di potenza, massa e di conseguenza costo. In questo scenario si inserisce bene la possibilità di impiegare un ricevitore software di basso costo i cui dati possono essere gestiti da un programma di stima orbitale. Si vedrà infine in che modo le parti di controllo e di navigazione possano interagire tra di loro.

Parole chiave: propulsione elettrica, mantenimento orbitale, stima orbitale.

Extended Abstract

The actual work presents the mission analysis of a small LEO micro satellite which has been designed to provide high resolution infra-red images of the Earth surface, in the TIR and LWIR bandwidths. As the altitude becomes lower than 400 Km, because of the strong atmosphere resistance, the platform needs the electrical propulsion to keep small and efficient its design. The objective of the work is to control the satellite trajectory with an Hall effect thrusters, finding the best station keeping control law which is able to maintain the orbital parameters variation within an accepted constrained altitude box. The mission goal foresees the realization of a mini platform characterized by a reduced complexity especially in terms of low power consumption, low mass, and consequently low mission costs. On this basis, the eventual hardware substitution with a fully software technology (SDR-software defined radio) could reveal advantageous to manage signals and functions; for this reason, it has been realized a sequential trajectory estimation algorithm, using a low cost SW GPS receiver.

Mission scenario implementation

On the basis of a phase-A study, previously conducted, the satellite is designed to be of small dimensions ($\sim 2 \times 1 \times 1$ m), whose large dimension lies along the velocity vector. It has a wet mass close to 200/260 kg, a total power consumption in the most demanding operational phase of about 280 Watt, and a lifetime no longer than two years starting from 1st January 2013.

In order to obtain the coverage of the whole Earth surface, it was chosen a polar sun-synchronous orbit with 310 km altitude. Furthermore, the LTAN (local time of ascending node) is set to the default 6:30, or eventually to 9:30 if it will be adopted a double payload, the panchromatic camera combined with the main high infra-red payload. In both the case, a fixed solar panel configuration was adopted in order to keep low the satellite cross-section.

The selected low orbit is subject of a large variation of its parameters.

If c is the generic orbital parameter, it can be expressed in a sum of five terms:

$$c = c_0 + \dot{c} (t - t_0) + K_1 \cos(2\omega) + K_2 \sin(2v + \omega) + K_3 \cos(2v) \quad \text{equation 1}$$

where c_0 is the shift, \dot{c} represents the secular variation, like the selected precession of the ascending node $\dot{\Omega} = 0.985^\circ / \text{day}$, while the third term

represents the long periodic variation (~days), such the eccentricity and perigee argument variations that are set to zero in case minimization of the global variation in altitude (frozen orbit) is requested. The latter terms are respectively the mixed periodic and the short periodic variations (~fraction of orbit).

Since the mission objective is the repeatability of the Earth surface traces - in other words, the satellite has to be at about the same altitude on the same geographic coordinates during the image acquisition phase – the initial orbital parameters are calculated to get the orbit “frozen” and sun-synchronous as well.

It is worth noting that both $\dot{\Omega}$, \dot{e} and $\dot{\omega}$ will not assume exactly the selected values, because their evolution is driven by the other 4 terms of the expression I . The frozen eccentricity vector, for example, is subjected to short period variations, periodic rotation cycles and secular drift, although its long period variation has been set to zero. The line of nodes is subjected to the known secular regression, but short oscillations are present and they are not negligible. The figure I shows the total parameter variations within three orbits, for which the two bodies problem of the form eq.2 has been solved. The geo-potential perturbing accelerations till the fifth degree and order (depending on simulation time period) and an exponential drag model, based on the mathematical formulation of the MSISE-90 atmosphere¹, are included. For sectorial and tesseral harmonics inclusion, the transformation from a “Body-Fixed – ECEF” to an “Inertial – ECI” reference frame is needed. Therefore the passage between ITRF (International Terrestrial Reference Frame or WGS-84), and ICRF(International Celestial Reference Frame or FK5) is modelled, with the optional possibility to consider precession, nutation, and polar motion.

¹ The MSISE-90 is the standard atmosphere model indicated by the ECSS ESA standardization. It corresponds to CIRA-86, the COSPAR International Reference Atmosphere, adequate for altitudes above 120 km.

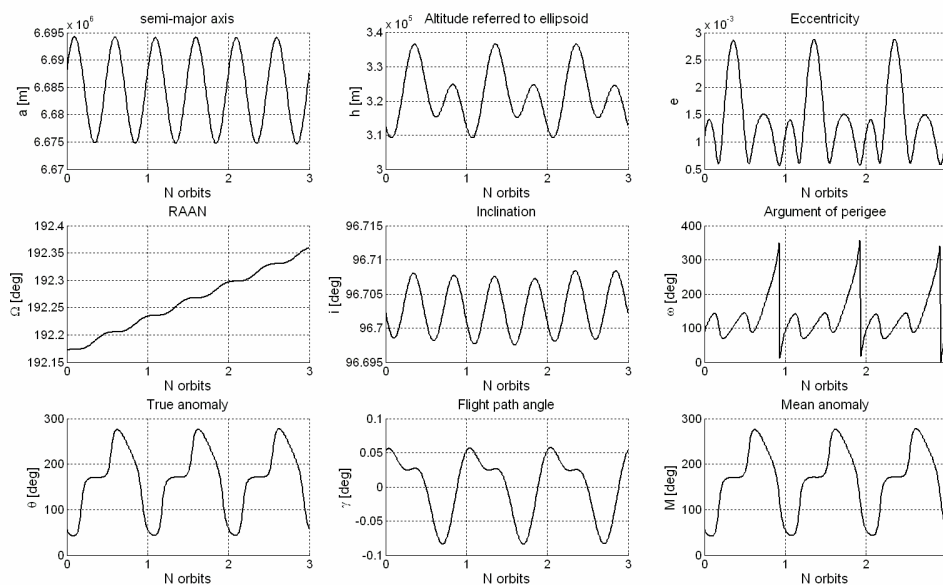


figure 1: Orbital parameters evolution.

Equations are solved in the inertial frame not in the co-rotating frame, so the Coriolis and the centrifugal accelerations are not been taken into account. The necessity to solve equations in the body-fixed frame comes also from the fact that the GNSS measurements are available in the ITRF frame, and, at second, it could avoid continuous transformations between frames, improving the numerical performance of the algorithm.

In synthesis, the MATLAB® code allows to select²:

- starting launch date
- orbit: all parameters, like, above all, LTAN and mean anomaly to perform sensitivity analysis
- Models of precession, nutation, Earth rotation and polar motion
- Arbitrary degree and order of the Earth gravitational potential
- The thrust law for station keeping, after the optimization procedure

² the implementation of precise transformation between ITRF and FK5 has been necessary to convert real GPS data towards the standard inertial frame, J2000. In addition, the potential possibility to add accelerations of higher degree and order would contribute to the birth of a self-made and more and more precise orbital propagator.

Guidance and requirements of the control system

The station keeping manoeuvres have to be carried out within 35% of the nominal orbital period and there is the possibility to perform two burn arcs in a cycle of three orbits. Furthermore, the module-varying thrust vector must lie approximately along tangential direction accounting for an I_{sp} equal to ~ 1300 s. The Alta HT-100 Hall thruster was chosen to supply a thrust in the range 12 mN to 3 mN, in order to cope with the satellite orbital decrement due to the drag level relative to the solar activity.

As a consequence, the rise in altitude, or more precisely in semi-major axis, must be adequate for the current level of drag, which not only can vary through days or months, but also through eclipse and sunlight times. Although the ECSS standard atmosphere is adopted as reference model, in a real hypothetical on board application, a certain drag unconsciousness will be always present.

For this reason, the drag model would need to be adjusted to the its current level, for example by accelerometer measurements or studying parameters variations calculated by GPS state reconstruction, respect to reference variations. But this kind of procedure has not been studied through this work.

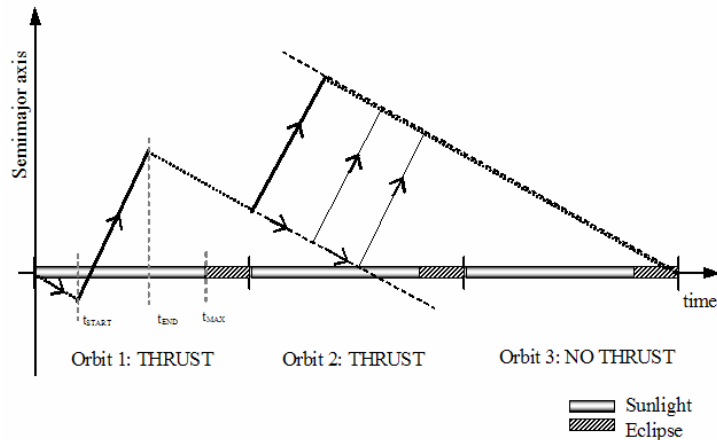


figure 2: Δa guidance for the orbital maintenance..

After a correct initialization, the program chooses the time at which the maneuver starts but ensuring that the final maneuver time does not overlap t_{max} , when eclipse occurs. Referring to figure 2, after the first ramp is performed, the algorithm waits for being in orbit 2 and chooses the second starting time in order

to reach the second slope, which grants to obtain the semi axis value like the starting one, at the end of the cycle.

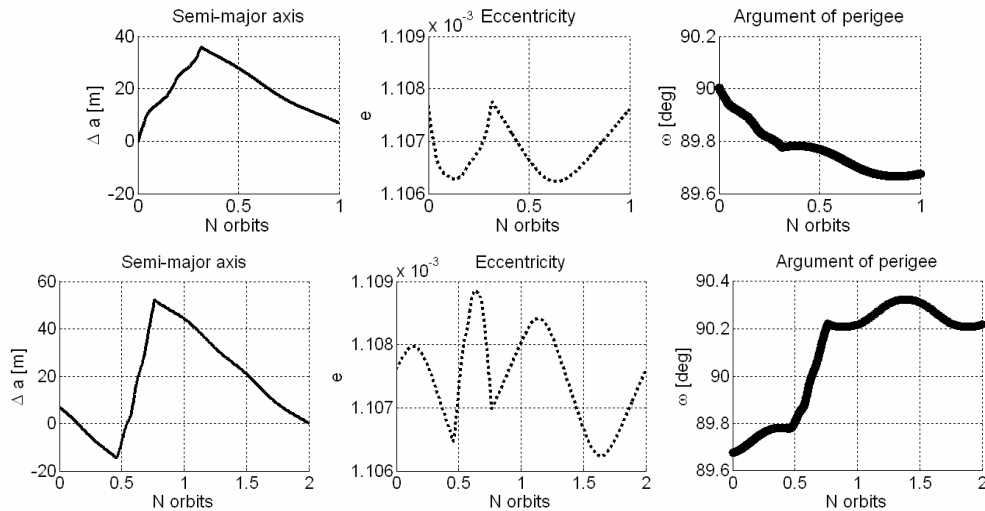


figure 3: Example of Δa control & orbit shape control realization, through cycle 1 and 2.

Actually, the main activity consisted in studying the parameters variation using Gauss equations, which helped to understand the system behavior under different types of accelerations. The variational approach is fundamental to choose the correct starting maneuver point, the burning time period and, above all, to establish if a targeting maneuver is possible or not, obviously satisfying the particular constraints set. In this case, the control system pays further attention to maintain the orbital shape – which means Δe control – and the focal axis orientation – which means $\Delta \omega$ control.

As it has been empirically demonstrated that the control of both a , e ω can not be executed in a single burn arc, some maneuvers are scheduled to first perform Δa and Δe control, and successively $\Delta \omega$ control if it exceeds a box of $\pm 1^\circ$.

With this technique, station keeping maneuvers and transfers (like that possible to a repeat track orbit) are managed with a continuous thrust law.

Orbit determination

Within Intecs Spa is available a GNSS simulator (ref. [3] and ref. [8]) which provides the observables data file of the satellite designed orbit, from the selected time data, step size and GNSS details.

There is the possibility to set a wide number of parameters related to: transmitter and receiver clocks, ionosphere delay, random noise, etc.. in such a way to get a test bed rather than of a simple static simulation. The fully SW single-frequency GPS receiver supplies data to the real time filtered navigation system. The 6-state linear Kalman filter (LKF) or the extended Kalman filter (EKF) implemented as well, reconstructs the state vector through using the same simplified dynamical trajectory model, as the previous station keeping algorithm.

If the dynamics equations which govern the motion of a LEO satellite can be expressed as:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}_C(t, \mathbf{r}(t)) + \mathbf{f}_D(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), C_D, A_n, \omega_{\oplus}, \dots) + \mathbf{f}_T(I_{sp}, \Delta v, \dots) + \mathbf{m}(t, \mathbf{r}(t)) \quad \text{equation 2}$$

where the 3x1 vectors, \mathbf{f}_C , \mathbf{f}_D , \mathbf{f}_T , and \mathbf{m} , respectively represent the acceleration due to the central body (Earth), the acceleration due to the atmospheric drag, the calculated thrust per unit mass for orbit maintenance, and the acceleration due to unmodeled forces.

The potential model used to define \mathbf{f}_C , is been defined to provide accurate short term solutions (2 revolutions), in particular setting $n=3$ and $m=0$.

Eq. 2 can be therefore summarized in a more compact non linear relation, together with the measurement equation, then linearized with respect to a reference state.

The general solution for the system of linear differential equations, can be expressed as

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_k) \mathbf{x}_k \quad \text{equation 3}$$

where \mathbf{x}_k is the value of \mathbf{x} at t_k . The matrix $\Phi(t, t_k)$ is called the state transition matrix which is calculated solving the following complete problem:

$$\dot{\Phi}(t, t_k) = A(t)\Phi(t, t_k), \quad \Phi(t_k, t_k) = I \quad \text{equation 4}$$

$A(t)$ is a 6x6 matrix of time-dependent coefficients. In a more extended form:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad \text{equation 5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_C}{\partial \mathbf{r}} \right)_{FK5} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_D}{\partial \mathbf{r}} \right)_{FK5} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_D}{\partial \mathbf{v}} \right)_{FK5} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_T}{\partial \Delta \mathbf{v}} \right)_{FK5} \cdot (\text{thrust} > 0) \end{aligned} \quad \text{equation 6}$$

In practice, the partial derivatives $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}}$ and $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}}$ have to be evaluated to solve the problem 4, where \mathbf{a} has the form 2. In particular, $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}}$ and $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}}$ are composed by the partial derivatives of \mathbf{f}_C , \mathbf{f}_D , \mathbf{f}_T , in the FK5 system, while \mathbf{m} is been neglected. The procedure is well shown in ref.2. $\Phi(t, t_k)$ is necessary to the “Time Update” phase of the sequential KF, in which the knowledge of the probability density function of the observation errors is required to propagate the covariance matrix and the state estimate. The LKF refers all measurements and state corrections to a common reference trajectory, while the EKF makes use of the last estimate to propagate the state vector and the state transition matrix, making the EKF less sensitive to non linearities than the LKF. Because velocity estimation, provided by the GNSS LSQ algorithm, is too noisy for due the high dynamic, it is been decided to set state dimension to three, and to reconstruct the entire state using the Kalman filter. The errors in observations have zero mean $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k] = 0$ and covariance matrix $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_j^T] = R_k \delta_{kj}$, where $R_k = \sigma^2 = 100^2$. As a LKF result, following an initial acquisition phase of about 45 min, the filter reaches the steady state performance: the standard deviation of the filtered position error approaches to 9 m, while the velocity error approaches to 0.006 m/s (figure 4).

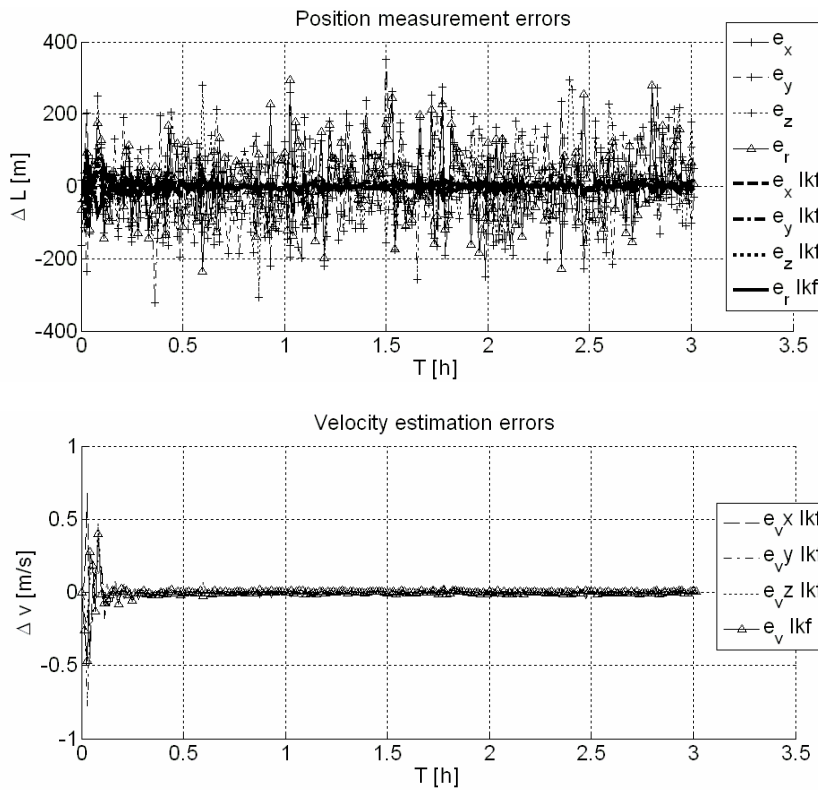


figure 4: Errors on the estimated position and velocity using LKF for observation step equal to 50 s.

Determining the true accuracy of an orbit determination solution is difficult because the true trajectory is never known. For missions with high orbit accuracy requirements, the limitation on the accuracy usually is imposed by the accuracy of the dynamical model, particularly the geopotential. But even the geopotential errors are dependent on the particular orbit. To summarize, in general the orbit accuracy is dependent on the following factors:

- Truncation error and round-off error in the application of a finite computational precision.
- Mathematical model simplifications.
- Errors in the parameters used.
- Amount, type, and accuracy of tracking data.

Keywords: EP propulsion, station keeping, orbital maintenance, Gauss equations, orbital estimation, Kalman filter.

Introduzione

Il presente lavoro di tesi è stato svolto nel corso di un periodo di tirocinio di quattro mesi presso la sede romana della *Intecs Spa* divisione spazio. In tale occasione, dopo aver preso visione di uno studio di fase A riguardante il progetto di un mini/micro satellite per osservazione della Terra, è stato assegnato, discusso, e successivamente approfondito su basi teoriche, il problema del mantenimento orbitale del satellite, sfruttando archi di spinta continui, cioè periodi propulsi all'interno di frazioni di orbita. Tale propulsione infatti non è ininterrottamente fornita poiché essa, da un lato, non può prescindere dai periodi di eclisse affidandosi esclusivamente alle batterie, e dall'altro non può sussistere contemporaneamente all'attività della strumentazione, in modo che il requisito di potenza della piattaforma non ecceda il livello massimo disponibile.

L'obiettivo principale dell'analisi quindi, consiste nella messa a punto di una tecnica di controllo orbitale che sfrutti una tempistica alternata e una spinta modulabile, erogata da un mini motore elettrico ad effetto Hall, per compensare l'effetto di decadimento della quota orbitale dovuto alla resistenza dell'alta atmosfera³.

La modulazione della spinta, in un intervallo che dipende dalla scelta del motore, tarato sul livello di resistenza atmosferica alla quota operativa, è una caratteristica della propulsione elettrica che ne fa l'aspetto cardine dell'intera missione e dell'analisi corrente. Questa propulsione infatti, attraverso la variazione in intensità del vettore spinta, è in grado di soddisfare i vincoli imposti dal profilo di missione (i quali saranno meglio espressi nei capitoli seguenti), permettendo al satellite di salire di quota quanto basta per far fronte al decadimento orbitale e consentendo all'orbita di variare entro limiti accettabili.

Costruire una legge di spinta per manovre di *station-keeping* richiede la realizzazione del modello della dinamica, e delle accelerazioni "utili" di disturbo agenti sul sistema, le quali, agendo in maniera accoppiata, rendono da subito necessaria l'azione regolatoria, come verrà presentato in maniera estesa nel capitolo 2.

Il propagatore orbitale è necessario anche all'algoritmo di stima sequenziale dell'orbita che richiede la conoscenza della storia del moto del

³ si tratta della eterosfera terrestre, ben al di sopra dei 90 km di quota, dove il processo di diffusione, sotto l'influenza dei gradienti di gravità e temperatura, determina i profili di concentrazione di N₂, N, O₂, O, He, H, Ar.

satellite, per ricostruire lo stato, o in maniera equivalente i parametri orbitali. Quest'ultimo è di fatto un filtro di Kalman che minimizza la varianza dell'errore tra le misure di posizione provenienti dal ricevitore GPS di bordo e la posizione di riferimento. Sotto questo aspetto esso svolge la medesima attività delle stazioni di Terra, riaggiornando di tanto in tanto lo stato di partenza da cui ha avviato il propagatore.

Tutto ciò è pensato nell'intento di creare un prototipo di software di bordo che possa gestire insieme, il processo di determinazione orbitale e il calcolo del profilo di guida del satellite.

E' importante evidenziare che, anche la costellazione GNSS e il ricevitore sono stati modellati numericamente, e in quanto tali, insieme agli algoritmi di navigazione e guida, costituiscono la base per essere integrati in un'architettura *software defined radio (SDR)*, che ha come scopo la gestione di segnali e funzioni via software a scapito dell'hardware, da intendere come massa pagante in eccedenza che occorre evitare di mettere in orbita.

L'obiettivo della missione prevede la realizzazione di una mini piattaforma di complessità ridotta, specialmente dal punto di vista dei consumi di potenza, massa e conseguentemente costi.

La propulsione elettrica, grazie agli alti impulsi specifici in gioco, garantisce la riduzione della massa di propellente e quindi della massa totale al lancio. D'altro canto, l'implementazione di un software di bordo che gestisca anche la navigazione, renderebbe il satellite autonomo dalla supervisione delle stazioni di Terra.. Si tratta ora di capire se e in che misura questo obiettivo sia possibile.

Perché la propulsione elettrica a effetto Hall ?

Studi recenti da parte dell'Agenzia Spaziale Europea su applicazioni di *remote sensing*, hanno chiaramente dimostrato che la possibilità di lanciare un satellite ad una quota operativa bassa può rivelarsi un concreto vantaggio in termini di:

- Massa totale al lancio; basti pensare alla riduzione di massa (e anche di dimensione) dei *payload* ottici, che assumerebbero caratteri prestazionali decisamente più importanti rispetto a ottiche a quote maggiori. Analoghi vantaggi si riscontrerebbero anche nei *payload* LIDAR o SAR.
- Costi, grazie al possibile impiego di un lanciatore leggero.

La propulsione elettrica (EP) favorisce tale possibilità. Essa permette di compensare i disturbi sull'orbita, ed eventualmente sull'assetto, con una spesa di

propellente molto bassa se comparata con quella dei motori a propulsione chimica, grazie al suo elevato impulso specifico, tipicamente di almeno un ordine di grandezza più elevato rispetto ai motori a bipropellente.

Di fatto, la forza resistiva che si impone sui satelliti orbitanti a quote tra 300 e 350 km, implicherebbe un certo ΔV per il mantenimento orbitale, il quale, per un motore chimico, significherebbe impiegare una massa di propellente proibitiva per un mini/micro satellite.

Prendendo in considerazione a titolo esplicativo, alcune missioni SAR promosse dal programma *Earth Watch* oppure della serie GMES sentinel-1, si riscontra quanto affermato sopra. La tabella 0.1 confronta la missione TerraSAR per misure SAR in banda L, con due missioni ipotetiche, una ancora per misure in banda L, l'altra per misure in banda C, entrambe supportate da un HET con 2300 s di impulso specifico, 20.1 W/mN di potenza specifica.

Parametro	Missione di L-band	C-band
Missione		
Quota orbitale (km)	629	350
Satellite		
<i>S/C</i> massa <i>wet</i> (kg)	2326	1395
<i>S/C</i> massa <i>dry</i> (kg)	2152	1330
Potenza consumata (giorno/notte) (W)	1563/1493	674/610
Area normale (m ²)	-	8.5
Carico utile		
Massa <i>P/L</i> (kg)	746	472
Potenza max <i>P/L</i> (W)	2224	1309
Frequenza SAR (MHz)	1258	6000
<i>Swath</i> (km)	395	211
Propulsione		
I_{sp} (s)	230	2300
Potenza specifica (W/mN)	-	20.1
Spinta (mN)	-	15.1
Massa carburante (kg)	174	65

Tabella 0.1: Risultati dello studio su TerraSar confrontati con missioni HET a 10500h di funzionamento.

Noti i possibili vantaggi riguardanti l'utilizzo della propulsione elettrica, la scelta del motore a Hall si giustifica con il ridotto requisito di potenza di questa, soprattutto per i mini HET. Negli ultimi dieci anni, tali sistemi sono stati oggetto di grande interesse da parte di gruppi di ricerca e industrie, specialmente in Russia, Stati Uniti e Europa. Alcuni di essi, come l'SPT-35, l'SPT-50 e l'SPT-

70⁴ hanno volato per molti anni a bordo di diversi satelliti russi in orbite sunsincrone (METEOR, PRIRODA). La tabella 2 mostra le caratteristiche dei mini motori costruiti dalla Fakel, aventi vite operative comparabili con il motore scelto nel progetto di missione. Piccoli HET sono anche sviluppati in maniera intensa negli USA, dove il BUSEK BHT 200 (200 W di potenza) è stato recentemente testato in orbita. Nell'Europa occidentale, una piccola unità HET è in via di sviluppo alla Alta Spa dal 2003, l'HT-100, usato all'interno dell'analisi, il più piccolo HET a basso consumo di potenza mai sviluppato in Europa. L'unità ha una potenza nominale operativa di 175 W e una configurazione a magneti permanenti.

Motore	SPT 35**	SPT 50**	SPT 70**	BHT 200*	HT 100***
Spinta mN	10	20	40	12.8	12
Potenza W	200	350	650	200	175
I_{sp} s	1200	1250	1450	1390	1300
Efficienza	30%	35%	48%	43.5%	30/50%
Vita operativa h	2500	2250	3100	-	2000
Massa kg	0.4	0.8	1.5	-	1
Stato	Modello Ing.	Modello di volo	Modello di volo	Modello di volo	Modello Ing.

Tabella 0.2: Specifiche di alcuni motori Fakel**, Busek* e Alta***.

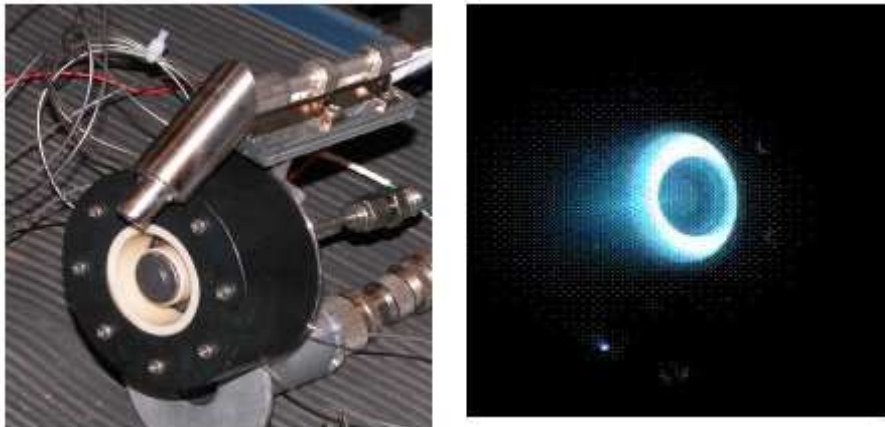


Figura 0.1: propulsore HT-100, modello di sviluppo (DM2), ©Alta.

I prototipi, sottoposti a campagne di test durante il 2004, mostrarono in tale occasione, di avere un intervallo operativo stabile tra 10 e 235 W con un livello

⁴ SPT sta per *Stationary Plasma Thruster*. 35, 50 e 70 rappresentano il diametro in cm del magnete esterno.

di spinta da 5 a 9 mN. Una seconda modifica nel progetto iniziale fu messa a punto, finché si realizzò il modello ingegneristico nel 2005, insieme alla fabbricazione della PSCU (*power supply and control unit*). Al giorno d'oggi il motore HT-100 mostra una tecnologia matura con più di 600 ore cumulative di attività di spinta.

I vantaggi riguardati l'uso del HET devono naturalmente essere confrontati con i relativi rischi tecnologici e costi di sviluppo di una tecnologia che si è affacciata da solo un decennio sul panorama della propulsione spaziale. I livelli TRL della componentistica del motore e del sistema di gestione di potenza, sono disponibili in Appendice A, insieme allo schema del motore che ne riassume il funzionamento.

L'obiettivo di un sistema di navigazione integrato *gps /inertial/ star tracker*

Sebbene sia considerata la possibilità di stimare l'orbita del satellite attraverso un propagatore di bordo propriamente calibrato grazie ai dati provenienti da Terra, si desidera invece effettuare la determinazione del tempo e dell'orbita usando un GPS di bordo.

Si potrebbe sviluppare un ricevitore GPS software per applicazioni spaziali (SSGR) basato su una architettura SDR che combini i segnali di ingresso provenienti dall'antenna, dall'unità di navigazione inerziale e dai sensori di stelle (*star tracker*), per ottenere la soluzione di navigazione e di determinazione d'assetto (ref. [15]).

Di basso costo, basso peso e con poca richiesta di potenza, potrebbe diventare una soluzione promettente per essere testata sulle piattaforme del prossimo futuro e per essere brevettata come nuova tecnologia spaziale.

In questo lavoro, sfruttando un simulatore GNSS (rif. [3] e rif. [8]), disponibile alla Intecs Spa, che fornisce il file dati delle osservabili al ricevitore software, si è costruito un primo *test bed* per la simulazione di navigazione, seppur per ora limitata alla sola orbita, non integrando la parte di assetto.

1 La missione

1.1 Descrizione

1.1.1 Caratteristiche generali

La missione oggetto dello studio ha l'obiettivo di fornire delle immagini della superficie terrestre ad alta risoluzione (5-15 m) nel campo dell'infrarosso, in particolare nelle bande del TIR e dell'LWIR, eventualmente combinate con immagini pancromatiche. Al fine di compiere una copertura globale della superficie terrestre, l'orbita del satellite è una polare quasi circolare, ad una quota nominale molto bassa, 310 km, e sincrona con il Sole, in modo cioè che la velocità di regressione del nodo eguagli la velocità angolare di rivoluzione della Terra. Nel caso in cui il payload sia esclusivamente infrarosso, la scelta ricade su un'orbita sunsincrona alba-tramonto, minimizzando i periodi annuali di eclisse, mentre in caso di payload combinato VIS+IR l'orbita assume un LTAN pari a $9^{\text{h}}:30^{\text{m}}$, così che la superficie terrestre sia ben illuminata dalla luce solare durante la fase di osservazione.

Il satellite è stato progettato per essere di piccole dimensioni ($\sim 1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 2\text{ m}$) tra le quali quella maggiore si estende lungo il vettore velocità, e in modo che l'area normale esposta al *drag* atmosferico sia minima, di circa 1 m^2 . La massa totale è stimata tra 200 e 260 kg e la potenza richiesta totale è di circa 280 Watt. Trattandosi di un mini/micro satellite, la vita operativa è quindi stabilita attorno ai due anni di missione.

Due motori elettrici ad effetto Hall, di cui uno viene acceso al termine della vita operativa dell'altro, hanno il compito di mantenere il satellite alla quota nominale compensando l'effetto della resistenza atmosferica. Alle ruote d'inerzia è invece riservato il compito di stabilizzare l'assetto attorno alla condizione di puntamento a nadir, oppure di compiere operazioni dedicate, come l'inseguimento di un profilo di spostamento angolare di riferimento che può essere richiesto nelle fasi di spinta o di osservazione (manovre di rollio e di beccheggio).

Il satellite può essere anche dotato di due resistogetti, alimentati dallo stesso serbatoio di Xenon dei motori a Hall, che verrebbero utilizzati per un eventuale trasferimento dall'orbita nominale ad un'orbita più bassa, detta "di crisi" o risonante a ripetizione di traccia a Terra, corrispondente ad un'orbita sunsincrona a quota 268 km, e ciclo di ripetizione di un giorno.

1.1.2 Utilizzo della missione

I sensori TIR possono essere usati per diverse applicazioni:

- Eventi naturali catastrofici
- Monitoraggio ambientale
- Sicurezza e sorveglianza
- Applicazione della legge
- Rischi e salute

Per quanto riguarda eventi geofisici o naturali catastrofici, si riuscirebbe a monitorare attività vulcaniche primarie e secondarie, in particolare deformazioni topografiche o delle proprietà termiche del terreno anche per la prevenzione dei terremoti. Si potrebbe inoltre osservare lo sviluppo e la propagazione di incendi, che nelle regioni dell'Europa meridionale occorrono con frequenza ogni anno, stabilendo un piano di intervento, prevenzione ed eventualmente recupero. Osservare inoltre i flussi migratori di popolazioni potrebbe aiutare le attività di soccorso dopo un evento catastrofico.

Immagini infrarosse possono supportare le attività di ispezione di traffici illeciti e di siti di contrabbando, con la possibilità di essere fuse con dati SAR.

In aggiunta, i sensori TIR, avvertendo i cambiamenti di temperatura nelle piantagioni, sono di aiuto per predire il livello di produttività dei terreni e tenere sotto controllo la temperatura di mari e oceani.

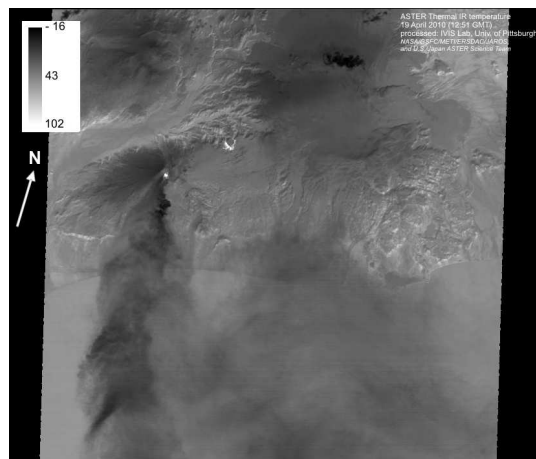


figura 1.1: l'immagine TIR qui sopra rappresenta, attraverso una scala di temperature, la recente attività eruttiva del vulcano Eyjafjallajökull in Islanda, nel giorno 19 Aprile 2010, GMT 12:51.

1.1.3 Carico utile

L'ottica che sarà montata sul satellite può essere considerata la caratteristica più innovativa della missione dopo l'impiego della propulsione a Hall – costituendo per questo anche un fattore di rischio – poiché ha come obiettivo l'ottenimento di immagini IR ad altissima risoluzione vicino al limite di diffrazione di Rayleigh⁵. Il telescopio è stato quindi preliminarmente progettato per soddisfare i requisiti di risoluzione nelle bande di progetto per la quota nominale di 310 km, sotto il vincolo di avere uno *swath* (striscia di terra) di 10 km in ogni banda. La scelta delle bande dell'infrarosso non è casuale, infatti esse corrispondono a finestre atmosferiche importanti poiché rappresentano la maggioranza della radiazione riflessa (PAN) ed emessa (IR) dalla Terra. In particolare, dalla legge di Wien, con l'MWIR è possibile studiare superfici di temperature elevate (287°C / 555°C), e con l' LWIR superfici di temperature normali (-10°C / 49°C).

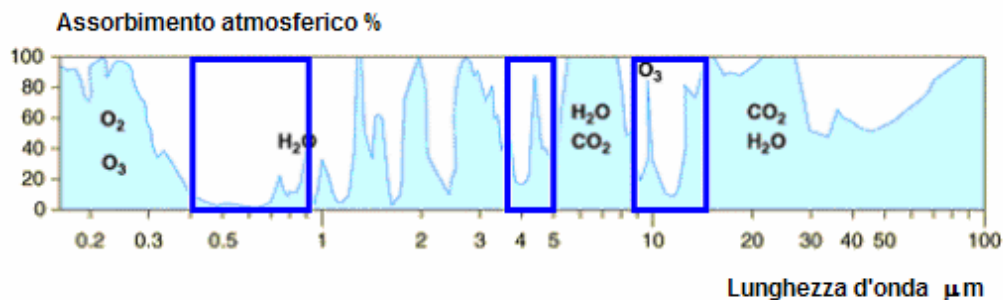


figura 1.2: Finestre atmosferiche.

L'ottica risultante presenta una lunghezza di 1800 mm, diametro dell'obiettivo di 250 mm, dimensione del sensore di 50 mm in configurazione combinata rifrattore (IR) e riflettore (PAN). In caso di acquisizione di un segnale debole, si è deciso di usare uno specchietto rotante in modo da seguire l'obiettivo ed incrementare il tempo di integrazione per raggiungere il rapporto segnale/rumore richiesto, evitando una manovra di rotazione dell'assetto che richiederebbe ulteriore potenza nella fase di acquisizione.

In tabella 1.1 si sono riportate le caratteristiche principali del progetto del carico utile.

⁵ Il criterio di Rayleigh indica la separazione angolare minima tra due fonti di luce affinché esse si rappresentino in due oggetti differenti.

	Valore	Commenti
Swath	10 km	Uguale nelle diverse bande
Lunghezze d'onda	0.4-0.9 μm (pancromatico) 3.5-5.0 μm (MWIR 287/555°C) 11 μm (LWIR -10/49°C)	Bande
GSD	1 m PAN 10 m MWIR 20 m LWIR	Proiezione del pixel a terra
Numero pixel detector	10000 (PAN) 1000 (MWIR) 500 (LWIR)	
Pixel size	5 μm (PAN) 25 μm (IR)	
Dimensioni detector	50 mm (costante in ogni banda)	
SNR	300 PAN (con specchio rotante) >5000 IR	Requisito sul rapporto segnale rumore
Lunghezza telescopio	1800 mm	
Diametro dell'ottica	250 mm	
Configurazione	Rifratore (IR), Riflettore (PAN)	
Peso	<20 kg (senza sistema di raffreddamento)	
Consumo	< 25 W	
Dimensioni delle immagini	1200 Mb (PAN) 48 Mb (IR)	

tabella 1.1: caratteristiche del carico utile.

1.1.4 Configurazione

Data la lunghezza sostanziale del telescopio progettato, è necessario disporre la piattaforma in modo che possa assumere una forma aerodinamicamente adatta per orbitare a quote basse, creando cioè una forma affusolata con minima area normale esposta al drag atmosferico. In tale configurazione, tuttavia, la stabilità passiva del satellite non è garantita⁶ ed è necessario un adeguato controllo d'assetto per mantenere la tangenzialità alla traiettoria, oppure un puntamento a nadir durante la fase di acquisizione delle immagini, oppure ancora per inseguire uno scostamento angolare tempo dipendente, rispetto ad una terna di riferimento.

⁶ La condizione di stabilità passive si ottiene per $I_z > I_y > I_x$ o per $I_y > I_x > I_z$.

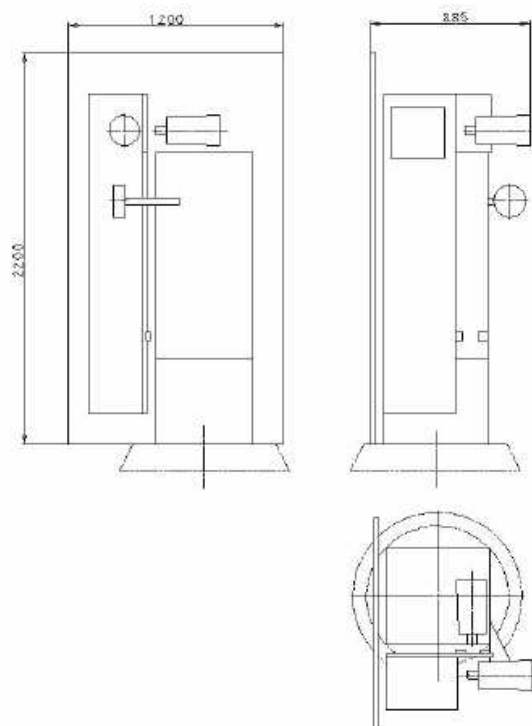
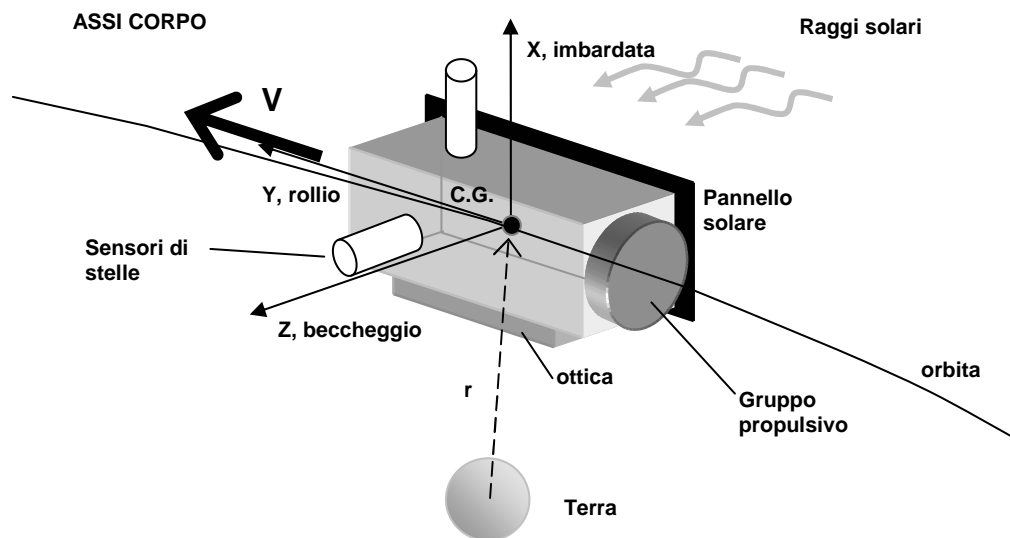


figura 1.3: rappresentazione schematica del satellite e dimensioni geometriche dell'involucro.

Sia dunque stabilito come riferimento principale d'inerzia, la terna X-Y-Z, formata dagli assi corpo coincidenti rispettivamente con imbardata, rollio, beccheggio. Il rollio in condizioni nominali è tangente alla traiettoria, il beccheggio è nella stessa direzione della normale al piano orbitale e il terzo asse si posiziona di conseguenza a formare una terna destra. Con riferimento alla figura 1.3, si possono riassumere le seguenti proprietà inerziali:

Massa	$M = 260kg$	
Lunghezza in X:	$L_x = 0.885m$	
Lunghezza in Y:	$L_y = 2.2m$	
Lunghezza in Z:	$L_z = 1.2m$	
Volume involuppo:	$V = 2.34m^3$	
Densità media:	$\bar{\rho} = 111.28 \frac{kg}{m^3}$	eq. 1.1
Momento d'inerzia di massa in x:	$I_x = \frac{M}{12} (L_y^2 + L_z^2) = 136.07 kgm^2$	
Momento d'inerzia di massa in y:	$I_y = \frac{M}{12} (L_x^2 + L_z^2) = 48.17 kgm^2$	
Momento d'inerzia di massa in z:	$I_z = \frac{M}{12} (L_x^2 + L_y^2) = 121.84 kgm^2$	

Il pannello solare, di circa $2.6 m^2$ è fisso e giace nel piano orbitale in condizioni nominali, mentre i due motori a Hall sono posizionati posteriormente fornendo una spinta in verso concorde con il versore tangente. Nel caso in cui si dotasse il satellite della possibilità di trasferirsi ad un'orbita più bassa, impiegando dei resistogetti, allora questi sarebbero posizionati a poppa o a prua, ma sempre in modo da erogare una spinta nel verso opposto della velocità.

1.1.5 Copertura della Terra da 310 km e da 268 km

L'obiettivo di missione consiste nel riuscire ad effettuare una copertura totale della Terra, costruendone una mappa, anche se, essendo una missione europea, è di maggior interesse l'osservazione dell'Europa e dell'area mediterranea.

La scelta della quota e dell'orbita in generale, determina il modo in cui l'ottica eseguirà la copertura della Terra, oltre che influire sulla prestazione dello strumento stesso. In prima istanza si è voluto dunque riprendere in mano l'analisi di missione calcolando la copertura della Terra, in termini di parametri tipici del ciclo di ripetizione, in due casi particolari: il primo, in cui si concede la

possibilità di muovere la direzione di puntamento entro un *field of regard* caratterizzato da un angolo di vista di $\pm 25^\circ$, il secondo, in cui si desidera la copertura a direzione di puntamento congelata. In entrambi i casi, si tratta di stabilire in quanti giorni minimi la mappatura del globo sia effettuabile, nel senso che potenzialmente si è in grado di osservare ogni zona della Terra a prescindere dal piano operativo del *payload*.

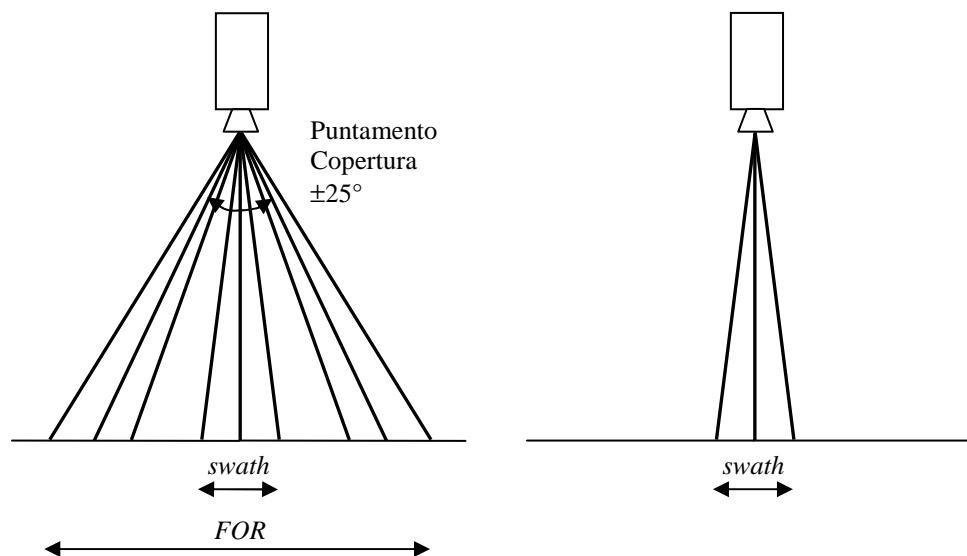


figura 1.4: casi di calcolo per la copertura della Terra: a destra con puntamento mobile, a sinistra con puntamento fisso.

In risposta al quesito enunciato, si passa ora a citare brevemente i parametri oggetto dell'analisi al fine di chiarire i risultati, e lo schema di calcolo, rimandando a [11] per maggiori approfondimenti.

Il disegno della traccia a terra di un satellite sunsincrono in un'orbita pressoché circolare è completamente determinato dal numero di orbite completate al giorno, un numero razionale, Q . Q è trovato comparando la rotazione della Terra con il moto del piano orbitale. In poco meno di un giorno la Terra ruota di 360° . In un'orbita il piano dell'orbita si muove verso est ad una velocità di regressione nodale di

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{R^2}{a^2 (1-e^2)^2} n \cos(i) \quad \text{eq. 1.2}$$

che è fissata a circa 1°/giorno, verso il sole. Per trovare la traccia a terra del satellite, la rotazione della Terra deve essere utilizzata per ottenere il moto del piano orbitale relativamente alla Terra, chiamato anche velocità angolare longitudinale (positiva verso est):

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Theta} - \dot{\Omega} \quad \text{eq. 1.3}$$

dove $\dot{\Theta}$ è la velocità di rotazione terrestre ($7.292115856 \times 10^{-5}$ rad/s $\sim 360^\circ/\text{giorno}$).

L'angolo di cui ruota il piano orbitale in un'orbita, relativamente alla Terra, è la velocità longitudinale moltiplicata per il tempo tra il passaggio del satellite al nodo ascendente e il successivo. L'intervallo temporale è detto periodo nodale e si esprime come:

$$P_n = P \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R^2}{a^2} (4 \cos^2(i) - 1) \right] \quad \text{eq. 1.4}$$

dove P è il periodo orbitale, a e i sono rispettivamente il semiasse maggiore e l'inclinazione dell'orbita sunsincrona, R il raggio terrestre, e J_2 la prima armonica zonale del potenziale di gravitazione. L'angolo è invece chiamato intervallo fondamentale S, cioè la differenza di longitudine tra una traccia a terra e la successiva.

$$S = P_n \dot{\Lambda} \quad \text{eq. 1.5}$$

Per un'orbita sunsincrona, il numero di rivoluzioni orbitali completate in un giorno, Q, si ottiene dunque come:

$$Q = \frac{2\pi}{S} \quad \text{eq. 1.6}$$

Q è rappresentabile come

$$Q = \frac{O}{D} = I + \frac{N}{D} \quad \text{eq. 1.7}$$

Se con ciclo di ripetizione si intende il numero di orbite che il satellite deve compiere per ritornare alla medesima posizione di partenza sull'equatore, in pratica per ripercorrere la stessa traccia a terra, O è il numero di orbite in un ciclo e D è il numero di giorni del ciclo. Per esempio, se $Q = 27/2 = 13.5$, ciò significa che il satellite ripercorrerà la sua stessa traccia a terra dopo 27 orbite e

per ottenere ciò impiegherà 2 giorni (si dice anche che l'orbita è "risonante" in 2 giorni). Se ora la stessa frazione è scomposta in una parte intera I, e una parte frazionaria con numeratore N e denominatore D, si ottiene: $27/2 = 13 + 1/2$. Con la parte intera si vuole sottolineare il numero intero di orbite al giorno (13) e con la frazione (1/2), la quota parte di orbita in più che il satellite esegue in un giorno.

La più piccola distanza tra una traccia a terra e l'altra è quindi data da:

$$S_i = \frac{S}{D} \quad \text{eq. 1.8}$$

S_i , in realtà, è tale se l'equatore cade in corrispondenza dell'intersezione della traccia a terra ascendente con quella discendente; se si verificasse questa circostanza, allora si potrebbe affermare che si ha copertura completa se al minimo il FOR eguaglia S_i .

Osservando però la figura 1.5, che mostra il disegno della traccia a terra dell'orbita nominale, si nota la formazione di molteplici profili a losanga, il cui posizionamento rispetto ai paralleli e ai meridiani dipende dal tipo di orbita. In particolare la più piccola distanza sull'equatore tra una traccia e l'altra può essere anche inferiore a S_i .

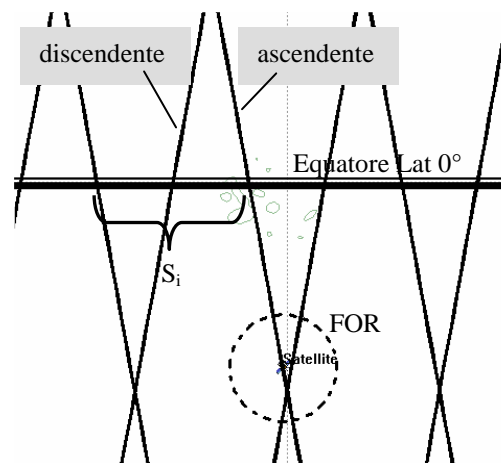


figura 1.5: geometria della traccia a terra a 310 km.

Tuttavia, poiché la distanza massima tra le tracce si mantiene di $\sim S_i$ ⁷ soprattutto in prossimità dell'equatore, si può stabilire di nuovo che se il FOR dell'orbita nominale coincide con S_i è assicurata la copertura globale.

⁷ All'aumentare della latitudine, a causa della sfericità terrestre, la distanza in longitudine tra i due vertici della losanga diminuisce.

Non è noto però che l'orbita nominale abbia un ciclo di ripetizione di traccia (lo sarebbe solo se la parte frazionaria di Q fosse razionalizzabile). Per questo si cercheranno orbite molto simili e le si caratterizzerà con un parametro ξ definito come

$$\xi = \frac{FOR}{S_i}$$

che esprime la sovrastima dei giorni utili per la copertura totale (se $\xi > 1$), o la sottostima (se $\xi < 1$).

Scopo del programma è quindi identificare i parametri del ciclo di ripetizione per orbite molto simili all'orbita nominale. In figura 1.6 è riportato lo schema di calcolo.

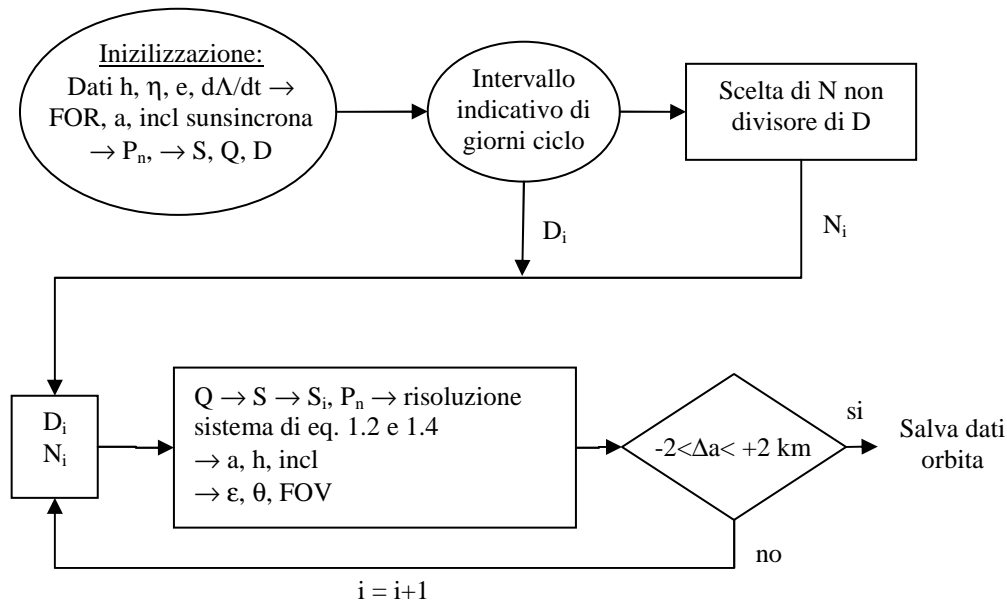


figura 1.6: schema di calcolo.

Per ogni chiarimento riguardo ai parametri geometrici utilizzati, si rimanda all'Appendice B.

Nel caso di puntamento variabile poche orbite a ciclo di ripetizione sono disponibili per scostamenti dal semiasse nominale di ± 2 km. Esse presentano giorni ciclo da 7 a 20 giorni e diversi valori di ξ . In generale si osserva che:

- Per scostamenti negativi da a , si hanno giorni ciclo più bassi, ma essi sono sottostimati perché $\xi < 1$.
- Per scostamenti positivi da a , si hanno giorni ciclo più alti, ma essi sono sovrastimati perché $\xi > 1$.

Per validare quanto detto, si sono fatte delle simulazioni di calcolo della copertura con *Satellite Toolkit* (STK) usando una risoluzione di griglia di 200 km. I risultati, seppur approssimati, confermano quanto esposto in precedenza e stabiliscono un periodo di circa 13 giorni per la copertura globale al 99.3% (i poli non sono osservabili) con puntamento variabile.

	Risultati del calcolo							
	Δa [km]	i [°]	Q	N	D	S_i [km]	FOR [km]	ξ
Puntamento variabile	-1.92	96.7	15.86	6	7	361.04	288.87	0.8
	+1.18	96.71	15.85	11	13	194.54	291.79	1.5
	+2.32	96.71	15.84	16	19	133.14	292.87	2.2
	+0.09	96.70	15.85	17	20	126.42	290.77	2.3
Puntamento fisso	+0.89	96.71	15.85	194	229	11.04	10.03	0.91
Orbita risonante 268 km	-	96.56	16	0	1	2504.6	251.11 (mobile) 8.65 (fisso)	-

tabella 1.2: Risultati del programma per puntamento mobile e fisso; dati orbita risonante a 268 km.

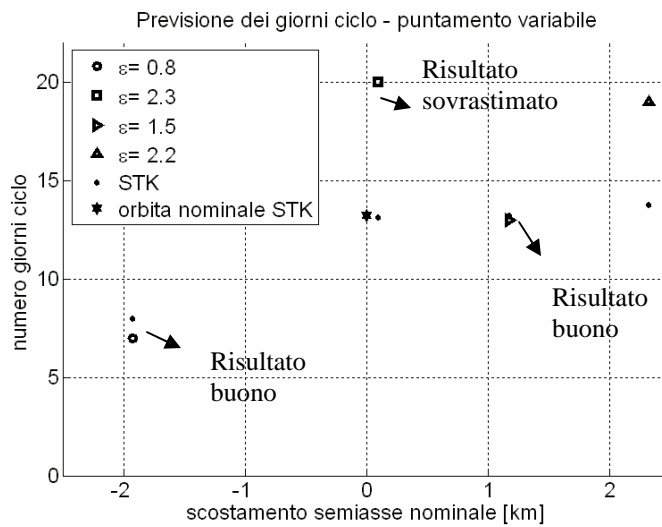


figura 1.7: Stima dei giorni minimi per la copertura globale nel caso di puntamento mobile.

Nel caso di puntamento fisso, si sono selezionate quelle soluzioni con $-2 < \Delta a < +2$ km e con $0.9 < \xi < 1.1$. Selezionando le orbite a giorni ciclo minimi, si ritiene che una buona stima dei giorni utili per la copertura globale sia all'incirca 230.

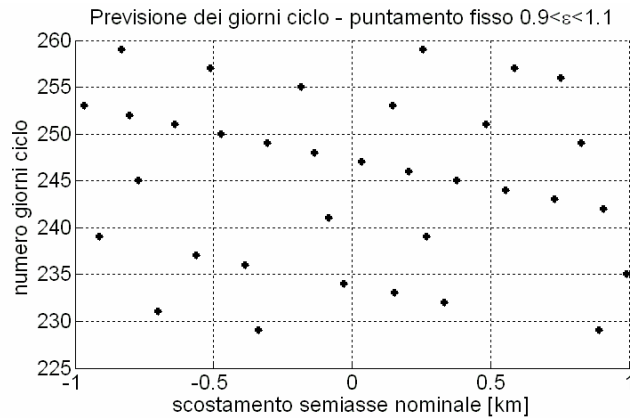


figura 1.8: Stima dei giorni minimi per la copertura globale nel caso di puntamento fisso.

Per l'orbita a 310 km i tempi di rivisita vanno da 1.3 giorni massimo nell'area europea a circa 12 giorni nell'area equatoriale, se l'ottica è orientabile. Da qui nasce l'idea del trasferimento all'orbita risonante di ciclo di ripetizione pari a un giorno, per minimizzare i tempi di rivisita su una località ben precisa ($\leq 24^h$), a scapito naturalmente della copertura globale.

1.2 AOCS

1.2.1 Requisiti

La determinazione orbitale dovrebbe permettere la conoscenza della traiettoria con una accuratezza inferiore a 20 m a 3σ . Si prenderà in considerazione tale requisito nell'ultimo capitolo, quando verrà affrontato il problema della stima orbitale.

Dal punto di vista del controllo orbitale invece, è richiesto che la piattaforma mantenga la quota orbitale con una accuratezza di 100 m e di 2 km se essa si trovasse all'orbita di crisi a 268 km; per il trasferimento tra le due quote è contemplato l'uso della propulsione elettrica anche nei periodi di eclisse con il conseguente aggravio di peso dovuto al ridimensionamento delle batterie.

E' noto dalla meccanica orbitale che per controllare la quota occorre agire con una manovra nel piano orbitale, in quanto un'accelerazione fuori dal piano agirebbe sull'orientamento dell'orbita nello spazio, ma non sulla sua forma. Si riprenda ora la definizione del sistema di assi corpo presentato in precedenza nella figura 1.3. Esso è coincidente con la terna intrinseca t-n-h, rappresentata nella figura 1.6, in condizioni di volo nominale. Viceversa, l'asse di rollio Y diventa la direzione di applicazione della spinta.

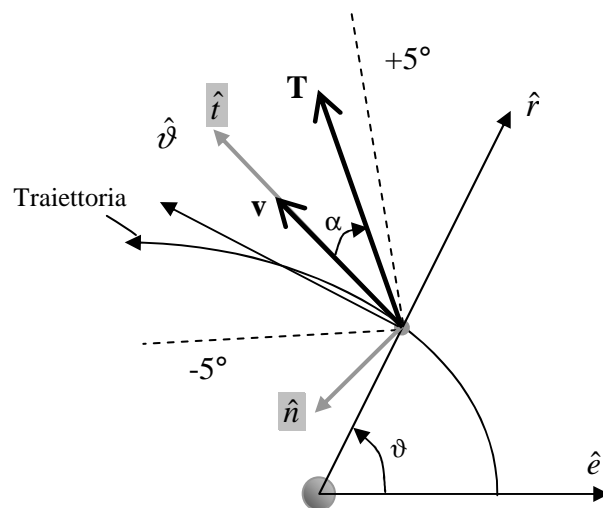


figura 1.9: rappresentazione dei sistemi di riferimento nel piano orbitale e del vincolo sulla direzione della spinta.

Quindi la capacità di variare la direzione del vettore spinta T , è affidata alle quattro ruote d'inerzia che stabilizzano l'assetto. Si stabilisce una variabilità dell'angolo α tra il vettore velocità e il vettore spinta in un intervallo tra $+5^\circ$ e -5° . Potrebbe essere eventualmente incrementata se si dotasse il motore di un meccanismo mobile (*thrust vector control*), che garantirebbe $\pm 10^\circ$ di variazione di α . Nel caso si volesse una variazione maggiore, si dovrebbe verificare che l'incremento di area normale non influisca sulla fattibilità del controllo orbitale e in secondo luogo che il controllo d'assetto, la cui dinamica è linearizzata attorno ad una condizione di equilibrio, riesca ad inseguire il *set point*.

Alla direzionabilità della spinta sia associa anche la modulabilità della stessa tra 3mN e 11.5mN, come sarà meglio evidenziato nel paragrafo 1.2.2.

Per quanto concerne il periodo di manovra, si è stabilito un intervallo temporale pari a circa il 35% del periodo orbitale, mettendo d'accordo da un lato il requisito di essere in luce durante la fase propulsa, e dall'altro il vincolo tecnologico del motore a Hall, il quale prevede una fase di accensione fino a 30^m.

In sintesi, il controllo orbitale deve compensare la perdita di quota dovuta alla resistenza atmosferica restando entro i 100m di accuratezza sotto i vincoli di:

- Mantenimento di α entro i $\pm 5^\circ$.
- Variabilità del modulo della spinta da 3mN a 11.5 mN.
- Durata dell'arco continuo propulso di circa il 35% del periodo nominale.

Dal punto di vista dell'assetto, il cui progetto preliminare sarà mostrato nel capitolo finale, l'obiettivo è il raggiungimento di uno scostamento angolare su ogni asse inferiore a 0.1° , durante la fase propulsa e di 0.02° durante le manovre di puntamento. Inoltre la piattaforma eventualmente dovrà essere in grado di eseguire manovre di ripuntamento sull'asse di rollio di $\pm 25^\circ$, come visto nel paragrafo 1.1.5.

La determinazione d'assetto, anche se in questa sede non è stata implementata, sarà eseguita usando:

- 2 sensori di stelle, aventi un'accuratezza intrinseca di 0.01° (vedi figura 1.1.3)
- sensori di sole di media accuratezza (per la modalità di sicurezza)
- 3 giroscopi
- 2 magnetometri (per la modalità di sicurezza)
- 1 accelerometro (di supporto alla misura della spinta)

L'azione di controllo sarà eseguita da:

- 4 ruote di reazione in configurazione a piramide aventi coppia variabile tra 10 e 20mNm.
- 3 attuatori magnetici (per la fase iniziale di *de-tumbling* e desaturazione delle ruote).

1.2.2 Prestazioni della EP

Il motore a Hall, come si è visto, ha ottime prestazioni dal punto di vista dell'impulso specifico e della potenza specifica. La figura 1.7 mostra l'involuppo della spinta che il motore HT-100 è in grado di fornire, in cui si nota la parametrizzazione in termini di voltaggio e potenza fornita. La regolazione di questi permette la modulazione della spinta a scapito della variazione in impulso specifico. Per questi motivi, si è cercata una soluzione di compromesso che garantisca un buon valore di I_{sp} e un buon intervallo di spinta: se la spinta si mantiene tra 11.5 mN e 6 mN, l' I_{sp} sarà costante e pari a 1300 s, per livelli inferiori a 6 mN l' I_{sp} decade secondo la retta a flusso di massa costante, fino a 540 s.

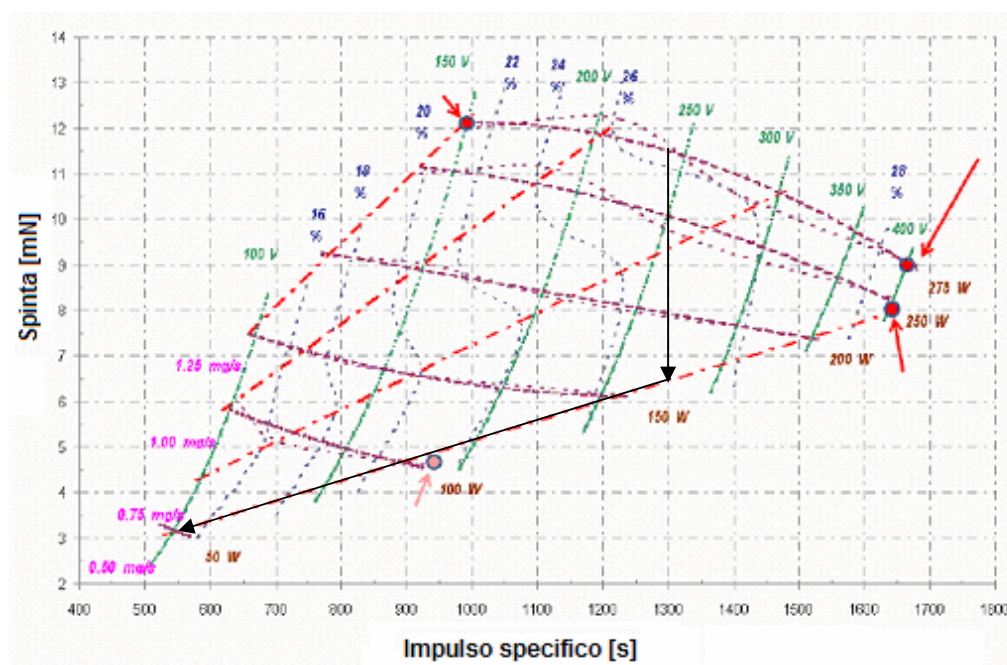


figura 1.10: Involuppo della spinta per il motore HT-100.

Motore	Spinta, mN	I_{sp}	η_t , %	propellente	Potenza, W	Massa g
HT-100	3-12	540-1300	30-50	Xenon 5.0	175	1000
XR-100	125	55	65-90	Xenon 5.0	100	<200

tabella 1.3: Riassunto proprietà del motore a Hall e del resistogetto a Xenon.

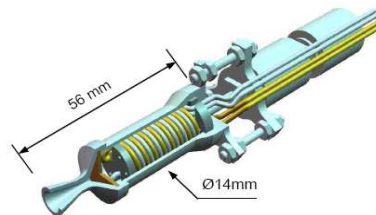


figura 1.11: Resistogetto a Xenon e relative dimensioni.

A causa della ridotta vita operativa, si prevede l'adozione di 2 motori HT-100, il secondo sarà attivato al termine del tempo vita dell'altro. Inoltre, poiché è stato scelto di effettuare la manovra di mantenimento orbitale elusivamente in luce, il motore dovrà passare nelle fasi operative di ignizione, *stand-by*, e spegnimento (eventualmente). La fase di ignizione, come mette in evidenza la tabella 1.3, può durare da 10 minuti a oltre 30 minuti, da qui sorge il vincolo riguardante il tempo massimo di manovra; si stabilisce quindi che poiché il motore richiede circa 15/20 minuti nella fase di luce per accendersi, la manovra propulsa avrà una durata massima del 35% del periodo orbitale.

Caratteristiche principali (1 motore)	
Fase di ignizione	Riscaldamento catodo: 5-30 ^m
	Ignizione catodo: <1 ^m
	Scarica ignizione: <2 ^m
	Stato stazionario: <2 ^m
Vita operativa	2 anni
Tempo di vita operativo	2000 ore/ 2000 cicli

tabella 1.4: tempi caratteristici di funzionamento.

In aggiunta, affinché la strumentazione ottica nella fase di acquisizione delle immagini non subisca disturbi come quelli generati dalla propulsione, è stato stabilito un ciclo di tre orbite, due delle quali dedicate alle fasi propulse e la terza alla modalità operativa del *payload*.

1		2		3
Spinta 35%	<i>Stand-by</i>	Spinta 35%	<i>Stand-by</i>	<i>Stand-by</i>

figura 1.12: ciclo caratteristico della missione.

2 Ambiente di missione e studio del controllo

2.1 Creazione dello scenario

In questo paragrafo saranno definiti i sistemi di coordinate e temporali adottati per la risoluzione delle equazioni della dinamica e per il calcolo delle accelerazioni perturbative. Sarà mostrata la corretta trasformazione tra i sistemi di riferimento terrestri, il calcolo dei tempi caratteristici e il posizionamento del sole al fine di presentare parte dell'ambiente di missione, che sarà in seguito completato dalla definizione delle perturbazioni orbitali, e dell'ambiente di calcolo.

2.1.1 Sistemi di coordinate terrestri

Il sistema di coordinate adottato per la risoluzione delle equazioni è il J2000 o EME2000 (*Earth Mean Equator and Equinox of J2000*), un sistema quasi inerziale realizzato con il catalogo stellare FK5⁸ (*Fundamental Catalog 5*), che si riferisce all'equatore e all'equinozio dell'anno 2000.

Come sistema fisso rotante con la Terra è stato adottato l'ITRF⁹ (*International Terrestrial Reference Frame*). Entrambi i sistemi sono noti, seppur in maniera non corretta, come ECI (*Earth Centered Inertial*) e ECEF (*Earth Centered Earth fixed*) rispettivamente. Per entrambi il centro del sistema di coordinate è coincidente con il centro di massa della Terra.

Le equazioni della dinamica saranno risolte nel sistema inerziale, anche se esse potrebbero essere risolte nel sistema rotante, tenendo conto opportunamente delle accelerazioni centrifughe e di Coriolis; in questo modo le misure provenienti dal ricevitore GPS sarebbero direttamente confrontabili con lo stato propagato evitando continue trasformazioni tra i sistemi di riferimento, migliorando di certo le performance numeriche.

⁸ Tale catalogo fornisce posizioni precise e i movimenti propri di approssimativamente 1500 stelle per l'epoca J2000 rispetto a tale sistema.

⁹ La sua origine è situata in corrispondenza del centro di massa della Terra, inclusi oceani e atmosfera, e i suoi assi sono realizzati secondo determinate coordinate di alcune stazioni di Terra. Poiché tuttavia queste stazioni sono affette dal movimento tettonico delle placche (~cm/anno), l'ITRF è una soluzione pesata di diverse analisi. Tipicamente questo sistema è usato nel problema di determinazione orbitale. Struttura WGS-84= struttura ITRF (~cm).

La trasformazione del vettore posizione e velocità tra ITRF e FK5 si esprime in maniera compatta come:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{ITRF} &= PM^T ST^T NUT^T PREC^T \mathbf{r}_{FK5} \\ \mathbf{v}_{ITRF} &= PM^T ST^T NUT^T PREC^T \mathbf{v}_{FK5} + PM^T \dot{S}T^T NUT^T PREC^T \mathbf{r}_{FK5}\end{aligned}\quad \text{eq. 2.1}$$

dove le matrici di rotazione $PREC$, NUT , ST , PM descrivono i cambiamenti di coordinate dovuti a precessione, nutazione, rotazione della Terra e moto polare rispettivamente.

Tale trasformazione è importante sia per la determinazione orbitale da misure GPS, che sono fornite esclusivamente nel sistema WGS-84, sia per il calcolo della corretta accelerazione perturbativa dovuta all'asfericità terrestre, (armoniche tesserali e zonali).

2.1.2 Tempo

La definizione del tempo è fondamentale per stabilire la posizione della Terra durante il suo moto di rivoluzione attorno al Sole sia per identificare la corretta posizione angolare durante il suo moto di rotazione. Si possono così simulare le condizioni di lancio reali, quando la missione vedrà il suo inizio, il 1 Gennaio 2013.

Ci si riserva di esprimere qui la trattazione completa delle trasformazioni temporali, e per questo si rimanda al rif. [10]. Si vuole tuttavia accennare ai passaggi fondamentali.

Per il calcolo delle matrici di precessione, nutazione, per la valutazione dell'equazione degli equinozi, quindi per il calcolo di GMST e GAST, e di conseguenza per le matrici di rotazione della Terra e di moto polare, e infine per il posizionamento del Sole, è necessaria la conversione della data gregoriana e di un tempo UTC, in tempi particolari:

$$[UT1, TAI, TT, TDB, T_{UT1}, T_{TT}, T_{TDB}] = \text{convtime}(D, M, Y, UTC, \Delta_{UT1}, \Delta_{AT})$$



$$\begin{aligned}& PM, ST, NUT, PREC, \dot{S}T \\ & + \\ & \text{versore Terra - Sole}, \alpha, \delta\end{aligned}$$

2.1.3 Orbita

L'orbita di base definita nello studio di fattibilità, è una circolare (quota 310 km) sunsincrona quasi polare, con un LTAN pari alle ore 6:00 oppure alle ore 9:30 nel caso sia previsto di montare un *payload* combinato VIS+IR.

Tuttavia in questa analisi, si è deciso di fornire all'orbita una piccola eccentricità e un argomento di perigeo definibile in modo da rendere l'orbita sia sunsincrona che *frozen*.

Un'orbita con queste caratteristiche garantisce infatti la minor variazione di quota possibile, in quanto si rendono "ghiacciate" le variazioni di lungo periodo di eccentricità e argomento di perigeo. In altre parole l'orbita, tende ad essere fissa in forma e in orientamento nello spazio, assolvendo il requisito di ripetibilità delle osservazioni.

Considerando il caso semplificato di determinare le derivate di e e di ω di lungo periodo solo con le armoniche zonali $J_2=1.08263e-3$ e $J_3=-2.53215e-6$, e inserendo l'equazione di sunsincronismo, il sistema risultante da risolvere è:

$$\begin{cases} \cos(i) + \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{p}{R} \right)^2 \frac{\dot{\lambda}}{nJ_2} \right] = 0 \\ \frac{de}{dt} = -\frac{3J_3 n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \sin(i) \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2(i) \right) \cos(\omega) = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{3J_2 n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2(i) \right) \left[1 + \frac{J_3}{2J_2(1-e^2)} \left(\frac{R}{a} \right) \frac{\sin(i) \sin(\omega)}{e} \right] = 0 \end{cases} \quad \text{eq. 2.2}$$

la derivata dell'eccentricità si annulla istantaneamente per $\omega = 90^\circ, 270^\circ$, mentre i valori di e e di i sono il risultato della soluzione del sistema non lineare, a semiasse imposto, che è stato mantenuto pari a quello dell'orbita circolare del progetto di base.

	Orbita del progetto di base	Orbita attuale modificata
a [km]	6688.136	6688.136
e	0	0.0011076
i [°]	96.712	96.707
Ω [°]	192.172 (LTAN 6:00)	192.172 (LTAN 6:00)
	243.311 (LTAN 9:30)	243.311 (LTAN 9:30)
ω [°]	Non definito	90 (scelto) o 270
ϑ [°]	variabile	variabile

tabella 2.1: Dati orbitali.

La scelta di LTAN influisce sui periodi di eclisse annui, e poiché se ne dovrà tener presente nello studio della legge di controllo, è conveniente riportare le durate massime del periodo in ombra, il periodo peggiore durante l'anno e il *beta angle*¹⁰ (vedi tabella 2.2). All'interno del programma Matlab si è adottato un modello cilindrico di eclisse, da ritenersi accurato data la bassa quota operativa.

LTAN	Intervallo annuo	Durata massima	Intervallo β [°]
6:00	20 Ottobre / 20 Febbraio	~ 27 ^m (fine Dicembre)	-60/-90
9:30	Tutto l'anno	~ 35 ^m 11 ^s (fine Novembre)	-30/-39

tabella 2.2: periodi di eclisse.

Si noti che la scelta di un'orbita alba-tramonto permetterebbe in primo luogo la riduzione della complessità della missione, visto che i periodi di eclisse avvengono solamente durante quattro mesi all'anno, e in secondo luogo il sistema di potenza verrebbe avvantaggiato in termini di riduzione del numero di batterie e di area del pannello solare, grazie ad un'illuminazione quasi ottimale. Adottando viceversa un LTAN pari a 9:30, si riscontra immediatamente l'incremento della durata del periodo di eclisse e il quasi dimezzamento dell'angolo β .

Prima di passare alla risoluzione delle equazioni del moto, si vuole sottolineare inoltre che, è stato adottato un modello ellissoidale terrestre, avente parametri caratteristici espressi dal modello WGS-84. Si rimanda all'Appendice C per i dettagli.

La variabilità della quota nel tempo, che sarà osservata nei paragrafi seguenti, dipenderà quindi anche dall'ellitticità della Terra ($e_{\oplus}=0.081$), che agirà in maniera non trascurabile sulla posizione relativa tra satellite e punto di sottosatellite.

¹⁰ Tali dati si sono ricavati dal simulatore costruito e confrontati per correttezza con i risultati STK.

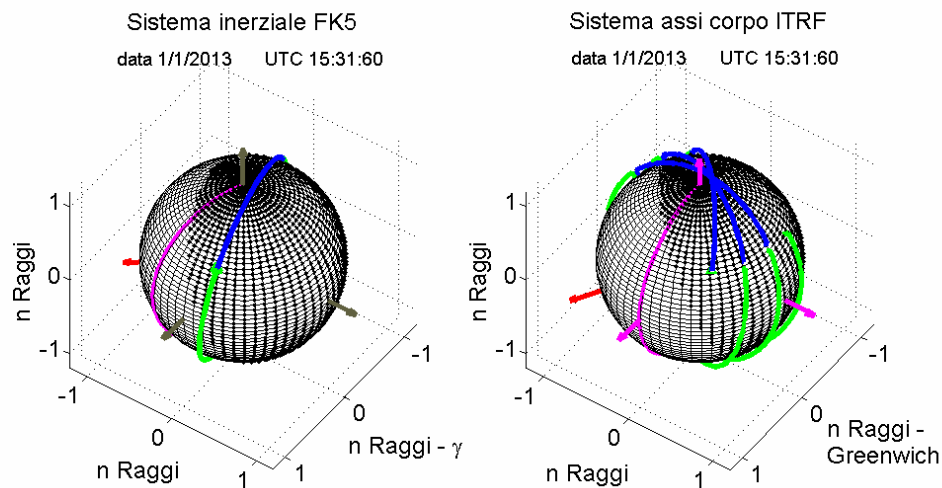


figura 2.1: Rappresentazione dell'orbita nei sistemi FK5 e ITRF. La porzione orbitale illuminata è in verde, quella in eclisse in blu. In magenta e in rosso sono rispettivamente il meridiano di Greenwich e la direzione Terra- Sole.

2.2 Dinamica perturbata

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che l'orbita è stata progettata sfruttando le accelerazioni perturbative di grado 3 e ordine 0 (J_2 e J_3) affinché l'orbita assolvà caratteristiche ben precise.

Tali perturbazioni di carattere conservativo (la massa e l'energia rimangono costanti) sono sfruttate in quanto utili alla missione dal punto di vista del soddisfacimento dei requisiti. Il compito del controllo sarà dunque quello di fare evolvere il sistema avvicinando questo il più possibile alla dinamica soggetta solo a forze conservative.

Al fine di ottenere dalle simulazioni risultati, di cui si possa ritrovare riscontro con la teoria e in secondo luogo per semplicità - nel senso di voler procedere nella complicazione del problema "passo per passo" - si sono modellate le perturbazioni maggiormente note: quella dovuta al potenziale gravitazionale di grado e ordine arbitrario, la perturbazione di resistenza atmosferica secondo un modello standard di densità dipendente dalla sola quota, e la perturbazione solare.

Se confrontata con il moto nel modo reale, la dinamica che si andrà a risolvere, potrebbe risultare limitata in accuratezza per simulazioni lunghe, ma soddisfacente nell'ambito di simulazioni di corto periodo, pari a qualche orbita. Viceversa, troncando per esempio lo sviluppo delle armoniche del geopotenziale, si potrebbe incorrere in una soluzione molto differente dal moto reale anche per periodi brevi.

In aggiunta, se si considera anche la risoluzione del problema di determinazione orbitale, allora all'incertezza sul vettore posizione ricostruito, si deve aggiungere l'incertezza dovuta al modello ridotto. Ci si potrebbe quindi facilmente trovare nel caso di non soddisfare più il requisito di controllo dell'orbita entro $\pm 100\text{m}$, poiché l'errore che si sta compiendo nel modello e nella valutazione orbitale, è molto più grande di tale soglia (vedi paragrafo 2.2.2).

Introduciamo ora la formulazione del problema dei due corpi con l'aggiunta delle perturbazioni conservative e non conservative.

Sia ora $\mathbf{r}(t)=(x \ y \ z)^T$ il vettore posizione (3x1), $\mathbf{v}(t)=(v_x \ v_y \ v_z)^T$ il vettore velocità (3x1), definiti in coordinate inerziali e $M(t)$ la massa del satellite, variabile nel tempo. Il problema completo secondo l'approssimazione dei due corpi risulta essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{a} = \mathbf{f}_C(t, \mathbf{r}) + \mathbf{f}_D(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, C_D, A_n, \omega_{\oplus}, \dots) + \mathbf{f}_S(t, \mathbf{r}, p_{SR}, A_S, \dots) + \mathbf{f}_T(I_{sp}, \Delta v, \dots) + \mathbf{f}_{UM}(t, \mathbf{r}) \\ \dot{M} = \frac{T(t)}{I_{sp} g_0} \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ M(t_0) = M_0 \\ I_{sp} = \tilde{I}_{sp}(T) \end{array} \right. \quad \text{eq. 2.3}$$

Il sistema 2.3, a patto che sia noto il profilo di spinta, è un sistema non lineare nelle incognite \mathbf{r} , \mathbf{v} e M , che costituiscono il vettore stato (7x1). Esso è risolvibile per via numerica mediante algoritmi di integrazione come Runge-Kutta 4-5. \mathbf{f}_C , \mathbf{f}_D , \mathbf{f}_S , \mathbf{f}_T e \mathbf{f}_{UM} rappresentano le accelerazioni dovute rispettivamente al gradiente del potenziale terrestre, alla resistenza atmosferica, alla pressione solare, alla spinta e alle perturbazioni non modellate. T è la spinta, I_{sp} l'impulso specifico e g_0 l'accelerazione di gravità a quota zero. Le condizioni iniziali completano il problema.

Vediamo ora come sono state modellate le accelerazioni conservative e non conservative, analizzando gli errori nel modello dovuti all'esclusione di alcune accelerazioni perturbative.

2.2.1 Geopotenziale, resistenza atmosferica e pressione solare

L'accelerazione f_C , dovuta al corpo centrale, è convenzionalmente calcolata valutando il gradiente del potenziale terrestre, nella forma:

$$U = \frac{K_{\oplus}}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_n P_n(\cos(\phi)) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{n,m}(\cos(\phi)) \{ C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda) \} \right]$$

eq. 2.4

dove K_{\oplus} è la costante planetaria, R_{\oplus} il raggio terrestre, ϕ la latitudine e λ la longitudine geocentrica misurata verso est a partire dal meridiano di Greenwich. La sommatoria con J_n costituisce la parte di armoniche zonali, mentre la seconda con $C_{n,m}$ e $S_{n,m}$ (costanti fisiche), che crea la dipendenza del potenziale U dalla longitudine, è la parte di armoniche settoriali e tesserali. Per evitare la valutazione dei polinomi di Legendre, P_n , e di Legendre associati, $P_{n,m}(\cos(\phi))$, U può essere scritto in forma ricorsiva non convenzionale come:

$$U = \frac{K_{\oplus}}{R_{\oplus}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} V_{nm} + S_{nm} W_{nm}) \quad \text{eq. 2.5}$$

espressione che mette insieme al termine classico $\frac{K_{\oplus}}{r}$ ($n=0, m=0$), le armoniche del potenziale di grado m o ordine n superiore allo zero, considerate di perturbazione. I termini V_{nm} e W_{nm} sono stati formulati per permettere una valutazione più veloce del potenziale e conseguentemente delle accelerazioni, soddisfacendo relazioni ricorsive dipendenti da r , m ed n . Si rimanda a [2] e a [5] per le relazioni in forma estesa.

L'accelerazione f_C , pari al gradiente di U , è direttamente calcolata come sommatoria, nelle singole componenti, su n e m :

$$\mathbf{f}_C \Big|_{ITRF} = \nabla U = (\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z})^T \Big|_{ITRF} \quad \text{eq. 2.6}$$

$$\ddot{x}|_{ITRF} = \sum_{n,m} \ddot{x}_{n,m} \quad \ddot{y}|_{ITRF} = \sum_{n,m} \ddot{y}_{n,m} \quad \ddot{z}|_{ITRF} = \sum_{n,m} \ddot{z}_{n,m} \quad \text{eq. 2.7}$$

dove

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{n,m} &= \tilde{a}_x(K_{\oplus}, R_{\oplus}, n, m, C_{n,m}, S_{n,m}, V_{n,m}, W_{n,m}) \\ \ddot{y}_{n,m} &= \tilde{a}_y(K_{\oplus}, R_{\oplus}, n, m, C_{n,m}, S_{n,m}, V_{n,m}, W_{n,m}) \\ \ddot{z}_{n,m} &= \tilde{a}_z(K_{\oplus}, R_{\oplus}, n, m, C_{n,m}, S_{n,m}, V_{n,m}, W_{n,m}) \end{aligned} \quad \text{eq. 2.8}$$

$$\mathbf{f}_C = \mathbf{R} \mathbf{f}_C|_{ITRF} \quad \text{eq. 2.9}$$

Le formule 2.6, 2.7, 2.8 calcolano il vettore accelerazione nel sistema assi corpo *ITRF*. Secondo la procedura esposta nel paragrafo 2.1.1, si è provveduto alla trasformazione nel sistema inerziale secondo l'equazione 2.9, dove $R = PREC NUT ST PM$.

Per quanto riguarda la resistenza atmosferica, è stato adottato il modello MSISE-90, standardizzazione dell'eterosfera terrestre secondo la norme ESA, ECSS. Esso corrisponde al CIRA-86, adeguato per quote superiori a 120 km. Tale modello determina la densità con una accuratezza r.m.s dal 10% al 15% se si possiedono i dati delle variazioni dell'attività solare, delle variazioni diurne, longitudinali-latitudinali e stagionali-latitudinali.

Dalla proiezione del ciclo solare per il decennio 2010-2020, si evince che l'intensità dell'attività solare, che dipende dal numero di macchie solari presenti sulla superficie del Sole, sarà inferiore rispetto al ciclo appena passato. Si è valutata quindi la densità secondo il modello per medie attività solari (rif. [7] e [14]).

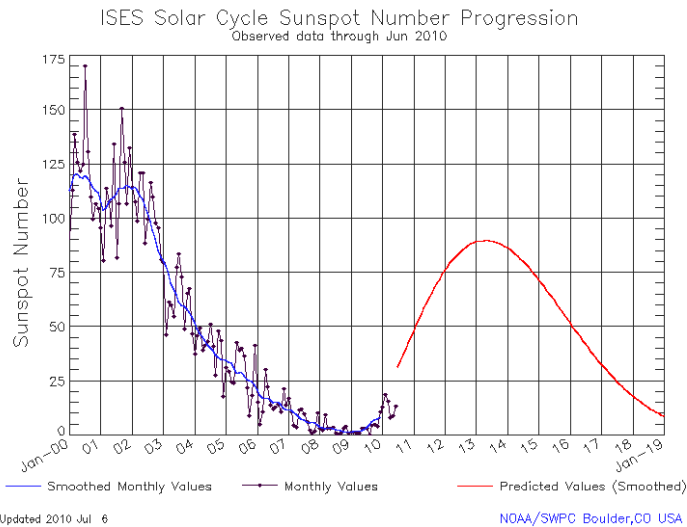


figura 2.2: previsione del numero di macchie solari per il prossimo decennio.

La forza specifica dovuta alla resistenza atmosferica è espressa come:

$$\mathbf{f}_D = \frac{1}{2} \frac{C_D A_n}{M(\dot{t})} \rho(h) v_{rel}^2 \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} \quad \text{eq. 2.10}$$

dove C_D è il coefficiente di resistenza, di non facile valutazione e per approssimazione lo si è posto pari a 2.2. A_n è l'area normale al vettore tangente, fissa in condizioni nominali, e variabile secondo la legge di controllo in fase propulsa con la:

$$A_n = L_1(L_3 \cos(\alpha) + L_2 \sin(\alpha)) \quad \text{eq. 2.11}$$

dove i parametri citati sono definiti in figura 1.3 e 1.9. La densità ρ dipende dalla quota riferita all'ellissoide terrestre, secondo il modello MSISE-90. La velocità relativa \mathbf{v}_{rel} che esprime il vettore velocità rispetto all'atmosfera rotante, è data da:

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{r} \quad \text{eq. 2.12}$$

dove $\boldsymbol{\omega}_{\oplus}$ è il vettore velocità angolare di rotazione terrestre. Ci si aspetta dunque che la \mathbf{f}_D abbia non solo esclusivamente la componente tangente.

Infine, la forza specifica dovuta alla pressione solare, è modellata come:

$$\mathbf{f}_S = -\frac{P_{SR}C_R A_S}{M(t)} \mathbf{r}_{\oplus S} \quad \text{eq. 2.13}$$

dove p_{SR} è la pressione media e pari a CS/c_0 , il rapporto tra la costante solare $CS= 1367.6 \text{ W/m}^2$, e la velocità della luce $c_0= 2.9979e8 \text{ m/s}$. C_R è pari a $1+b$, dove $b=1.3$ è il coefficiente stimato di riflettività ottica. A_S è l'area illuminata e per la missione in esame, visto che i pannelli solari giacciono nel piano orbitale, risulta essere:

$$A_S = A_{SA} \sin(|\beta|) \quad \text{eq. 2.14}$$

dove A_{SA} è l'area del pannello solare, β è il beta angle, definito come l'angolo tra il piano orbitale e la direzione Terra Sole che può essere valutato come:

$$\beta = 90^\circ - a \cos(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}_{\oplus S}) \quad \text{eq. 2.15}$$

dove \mathbf{h} è il versore momento della quantità di moto e $\mathbf{r}_{\oplus S}$ è il versore Terra-Sole.

2.2.2 Errori di modello

Propagatori orbitali, concretamente in uso a bordo di satelliti, tengono conto di ogni tipo di perturbazione modellabile, come accelerazioni gravitazionali di grado e ordine elevato (almeno fino a 50), di resistenza atmosferica attraverso modelli molto dettagliati tempo-dipendenti (Harris-Priester), e perfino accelerazioni dovute alle maree, agli spostamenti della crosta terrestre, alla radiazione infrarossa terrestre o all'Albedo. Errori sull'accuratezza dell'orbita dovuti alla non esatta conoscenza di parametri come C_D , C_R , divengono limitati in applicazioni reali, grazie alla stima di essi tramite un filtro di Kalman.

L'implementazione di un modello dettagliato di perturbazioni orbitali è quindi indispensabile per la determinazione orbitale precisa, a livelli di accuratezza anche dell'ordine di centimetri (rif.[4]).

Per questa missione non è necessario conoscere l'orbita all'interno di centimetri di accuratezza, ma si vuole provare a valutare quali perturbazioni è importante considerare e quali no, in termini di scostamento del vettore posizione al variare del modello adottato. Vogliamo renderci conto quindi in che misura stiamo sbagliando.

Si prenda in considerazione lo sviluppo del potenziale gravitazionale e le accelerazioni perturbative relative. E' noto che i coefficienti $C_{n,m}$ e $S_{n,m}$, diminuiscono di ordine di grandezza all'aumentare di grado e ordine, ma ci chiediamo fino a quando lo sviluppo dei termini debba essere preso in considerazione, cioè quando il calcolo di ulteriori armoniche non possa giovare ulteriormente nel dettagliare la soluzione. Come parametro di giudizio teniamo presente un limite di accuratezza di $\pm 1\text{m}$ per il modulo del vettore \mathbf{r} .

A differenza dell'aspettativa, come si evince dalla figura 2.3 in cui sono rappresentate le differenze del modulo di \mathbf{r} per approssimazioni di f_C via via sempre più dettagliate, è importantissimo considerare armoniche zonali, settoriali e tesserali di grado relativamente elevato, sicuramente superiore a 10; neanche per questo valore terminale della serie periodica infatti, si riesce ad ottenere una approssimazione del vettore posizione all'interno dell'intervallo obiettivo, ma d'altro canto la differenza di soluzione non diverge per il periodo esaminato. E' vero che le differenze tra modelli successivi si assottigliano all'aumentare del grado, ma è altrettanto vero che la "descrizione" in latitudine e in longitudine del potenziale terrestre non ha raggiunto ancora un livello di dettaglio tale dal permettere variazioni trascurabili di \mathbf{r} : tale comportamento si spiega con il fatto che le armoniche settoriali e tesserali per i primi termini dello sviluppo sono ancora di ordine di grandezza confrontabile fino al grado esaminato.

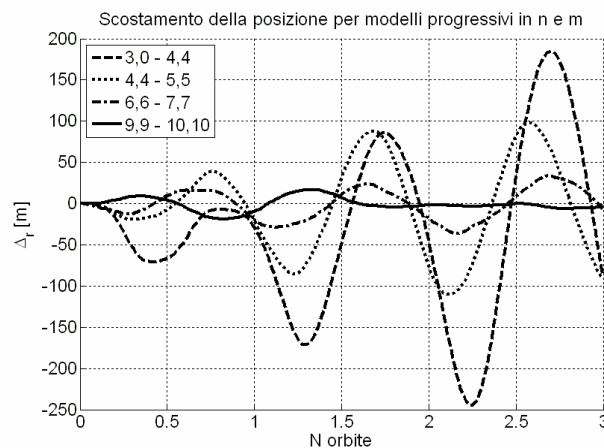


figura 2.3: Errore nella valutazione del modulo di \mathbf{r} , al variare delle armoniche considerate nel potenziale gravitazionale.

Essendo \mathbf{r} una grandezza vettoriale, il suo modulo racchiude in sé l'errore dei modelli progressivi in tre dimensioni. Se esaminassimo ogni singolo parametro

orbitale, potremmo apprezzare scostamenti nel piano orbitale, se si tratta di a , e e ω , oppure fuori dal piano se si tratta di i ed Ω . Se prendiamo ad esempio il semiasse a , poiché oggetto del controllo orbitale in maniera equivalente alla quota, osserviamo che la differenza massima del semiasse calcolato con una approssimazione di ordine e grado 9 e calcolato con ordine e grado 10 nelle prime tre orbite, risulta al di sotto degli 8 m e non diverge. Valgono quindi le medesime considerazioni fatte su \mathbf{r} .

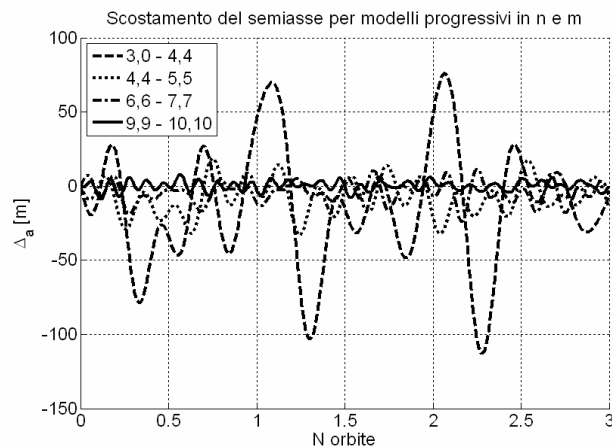


figura 2.4: Errore nella valutazione di a , al variare delle armoniche considerate nel potenziale gravitazionale.

Potrebbe inoltre sembrare che la valutazione delle matrici di precessione, nutazione e moto polare, sia di eccessivo dettaglio per la trasformazione dei sistemi di coordinate. Ecco ciò che accade se tali matrici fossero approssimate a matrici identità: lo scostamento in \mathbf{r} diverge e assume valori eccessivi (vedi figura 2.5).

In ultimo valutiamo l'effetto del disturbo solare sul vettore posizione, essendo nota la sua caratteristica di essere un disturbo non eccessivamente influente, almeno per orbite basse, dove gli effetti del potenziale gravitazionale e della resistenza atmosferica sono molto più rilevanti.

Infatti, \mathbf{f}_s , essendo anche una accelerazione di modulo inferiore di almeno due ordini di grandezza rispetto a \mathbf{f}_C e \mathbf{f}_D , provoca una variazione di qualche frazione di metro, sempre per un periodo di tre orbite.

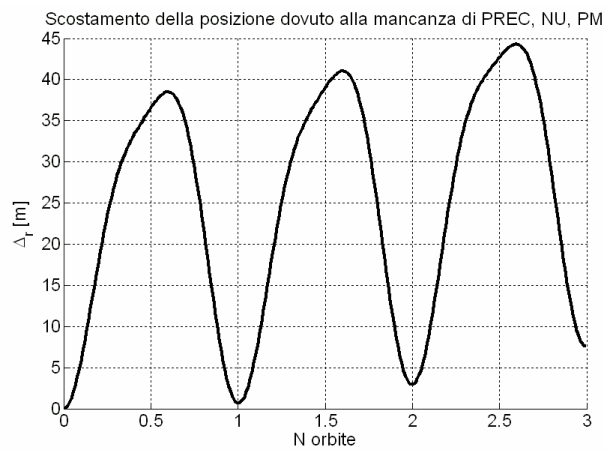


figura 2.5: Errore nella valutazione di r tra un modello con valori precisi di PREC, NU, PM, e un modello con matrici identità.

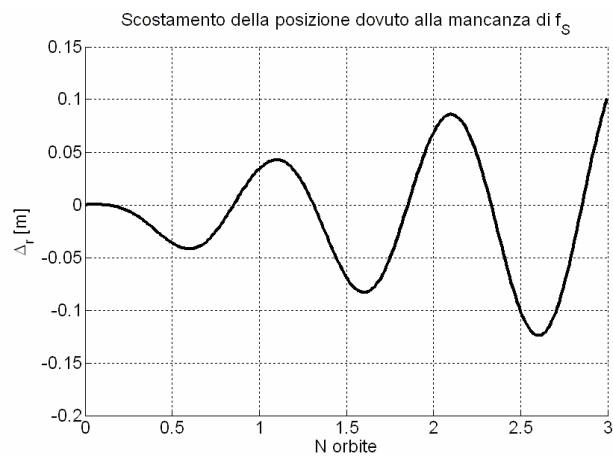


figura 2.6: Errore nella valutazione di r tra un modello con f_S e un modello senza f_S .

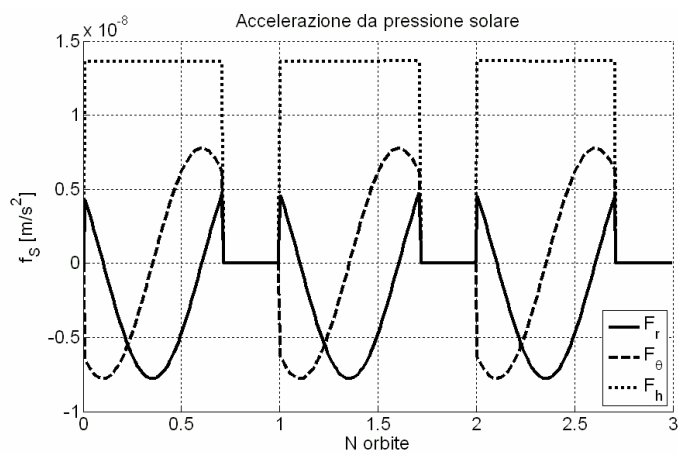


figura 2.7: componenti di f_S nel sistema locale r - ϑ - h .

Per concludere dunque, affinché la dinamica fin qui esaminata possa realmente fornire una buona soluzione all'interno di un periodo di qualche orbita, essa deve necessariamente includere nella sua definizione:

- Le accelerazioni del geopotenziale almeno od oltre il grado 10.
- Il *drag* atmosferico.
- I modelli di precessione, nutazione, moto polare.

Si esclude da questo punto in poi di considerare la perturbazione di pressione solare.

Viceversa, per una reale propagazione a bordo, – e con questo si intende per periodi di simulazione lunghi (~ mesi o anni) – affinché la dinamica venga utilizzata per la propagazione orbitale, nonostante la missione sia svincolata dall'impiego di una determinazione orbitale precisa, questa deve tassativamente includere sia modelli anche complessi delle perturbazioni viste, sia le f_{UM} .

2.2.3 Dinamica libera

Semplificando la notazione e in base a ciò che è stato espresso nei paragrafi precedenti, il sistema da risolvere al fine di rappresentare la dinamica libera, non controllata, risulta essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{a} = \mathbf{f}_C + \mathbf{f}_D \\ \dot{M} = 0 \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ M(t_0) = M_0 \end{array} \right. \quad \text{eq. 2.16}$$

Non essendoci quindi una fase propulsa, il consumo di massa sarà nullo. A valle del calcolo del vettore stato soluzione, si passa successivamente alla trasformazione in elementi osculatori e a ricostruire le accelerazioni modellate.

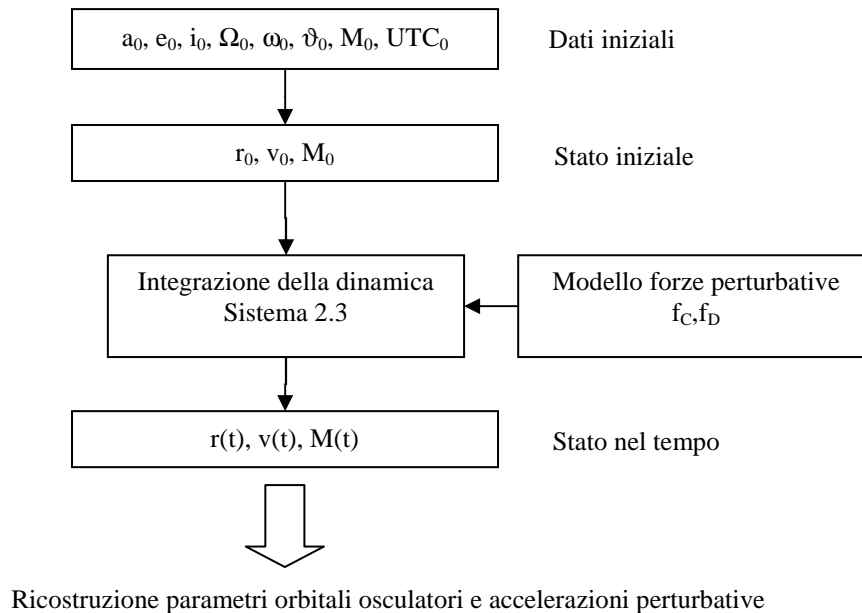


figura 2.8: schema di calcolo per la dinamica libera.

I parametri orbitali risultanti presentano caratteristiche di vario tipo: variazioni periodiche e secolari, con escursioni in modulo anche molto alte.

Fenomeni di periodicità di corto periodo circa della metà del periodo orbitale, o periodo fondamentale $\varphi=2\pi/n$, dove n è la velocità angolare, sono riscontrabili in ciascun elemento orbitale; questa caratteristica limita l'impiego di intervalli temporali di integrazione troppo grandi, specialmente nel caso corrente di un'orbita bassa fortemente perturbata. Si sono quindi impiegati intervalli temporali di 60 s o 120 s, non eccedendo oltre i 5 minuti. Si osservano inoltre gli effetti secolari e di lungo periodo stabiliti dall'analisi di missione nel paragrafo 2.1.3 su e , Ω e ω . Non si deve però dimenticare il contributo di f_D , che agisce a volte impercettibilmente, a volte vistosamente come il decadimento secolare sul semiasse maggiore.

In particolare si osserva che:

- Il semiasse a , presenta un'escursione di circa 20 km al di sopra del valore nominale o al di sotto di esso in dipendenza dalla condizione di partenza e un'oscillazione della metà del periodo orbitale. Sono inoltre riscontrabili variazioni a frequenza maggiore e ampiezza minore, causate dagli altri termini gravitazionali del potenziale di disturbo.

- La quota, importante in quanto oggetto del controllo alla stessa stregua del semiasse, può presentare anche delle variazioni fino a 50 km rispetto al valore di partenza. Come si farà notare in seguito, anche la scelta della condizione iniziale, così come l'elevata intensità delle perturbazioni considerate, influisce pesantemente sul profilo dei parametri orbitali. Quota e semiasse decadono progressivamente a vista d'occhio già nel corso delle prime tre orbite. Nel prossimo paragrafo valuteremo meglio i termini di questa variazione da contrastare.
- L'eccentricità, un altro parametro indice della forma orbitale, varia in un intervallo di $3e-3$. Per concretizzare tale scostamento, l'angolo di volo γ , ne costituisce un buon sostituto: la direzione trasversa del riferimento locale si mantiene entro i $\pm 0.1^\circ$ dalla direzione tangente. Gli effetti di lungo periodo sono effettivamente non presenti. Anche e è modificata nel tempo da f_D ma in maniera percettibilmente non apprezzabile.
- Il nodo ascendente è approssimabile ad una retta di coefficiente angolare pari a $d\lambda/dt = 1^\circ/\text{giorno}$, come desiderato. Piccole oscillazioni di corto periodo si sommano sopra il contributo secolare.
- La derivata dell'argomento di perigeo sul lungo periodo si mantiene pari a zero come dettato dal sistema 2.2. Sono presenti tuttavia oscillazioni all'interno del periodo orbitale che fanno assumere ad ω valori da 0° a 360° . In più, valutando la componente secolare si ottiene:

$$\dot{\omega}_{\text{sec}} = \frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{4p^2} \{4 - 5 \sin^2(i)\} = -3.2791e-7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{eq. 2.17}$$

Il risultato esposto in eq. 2.17 racconta la storia che subirà nel tempo l'asse focale; questo oscillerà per la maggior parte del periodo orbitale attorno ai 90° di argomento di perigeo e con il passare dei giorni oscillerà attorno ad un ω sempre più decrescente. L'orbita quindi sarà caratterizzata da cicli specifici dell'asse focale di circa 3 mesi; se la missione partisse il 1 Gennaio 2013, ω assumerebbe di nuovo un valore di 90° all'inizio di Aprile. Tale proprietà dell'orbita potrebbe essere sfruttata per l'acquisizione di immagini a quota bassa, anche se è chiaro che la scelta del periodo operativo deve coincidere con la scelta del luogo desiderato da osservare (vedi figura 2.9).

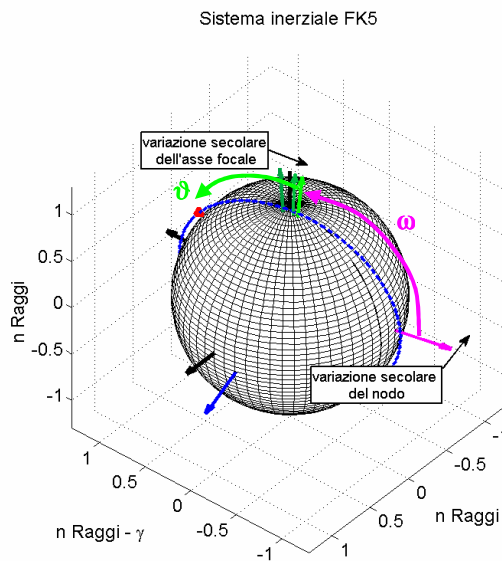


figura 2.9: Moto secolare di ω e Ω . In magenta vi è l'asse nodale, in verde l'asse focale o versore eccentricità, in blu il versore momento della quantità di moto, in rosso il versore posizione.

- L'inclinazione orbitale mostra caratteristiche di oscillazioni di corto periodo e di lungo periodo in dipendenza del grado e ordine del potenziale gravitazionale valutato. Si tratta del parametro che meno subisce l'influenza delle perturbazioni, variando sempre entro i 97° . Anche gli ultimi elementi presentati, che stabiliscono l'orientamento dell'orbita nello spazio a tre dimensioni, subiscono delle variazioni provocate da f_D .
- Si noti l'andamento dell'anomalia media di figura 2.10: nel caso non perturbato essa dovrebbe avere un andamento crescente, saltando da 360° a 0° al termine di ogni orbita; nel caso attuale perturbato, un andamento crescente di M indica che il vettore posizione sta ruotando nel piano orbitale ad una velocità angolare maggiore della velocità con cui ruota l'asse focale, un andamento decrescente indica che l'asse focale si sta muovendo nel piano più velocemente di \mathbf{r} , e se M rimane invariato, le due velocità sono della stessa entità.

Non si mostrano gli andamenti degli elementi osculatori su due anni di vita operativa, poiché vogliamo limitare la validità dell'analisi sul piccolo periodo utilizzando le perturbazioni approssimate definite in precedenza valide per tale periodo. Mostrare e descrivere dunque l'evoluzione dei parametri per periodi più lunghi sarebbe erronea. Inoltre identificare variazioni secolari dei parametri di

lungo periodo o secolari dovute a f_D , non sono utili in quanto l'obiettivo del controllo mirerà all'annullamento degli stessi sul corto periodo.

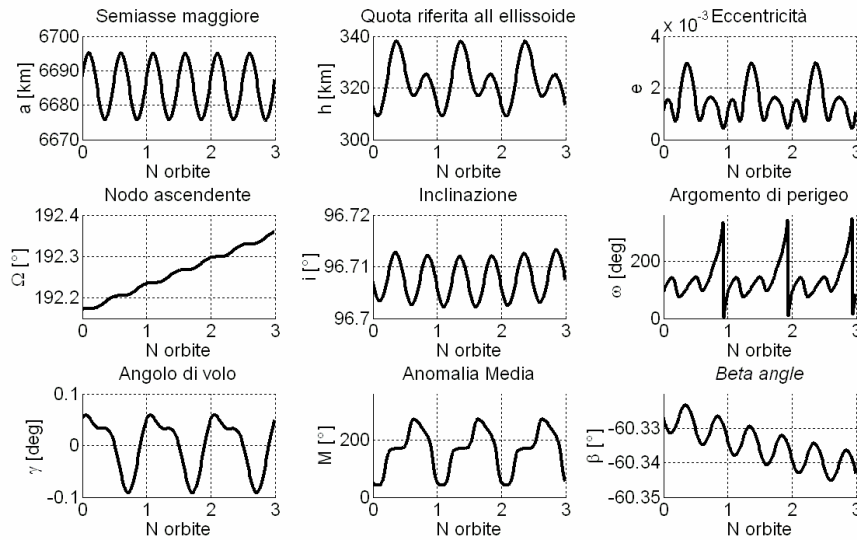


figura 2.10: Evoluzione degli elementi orbitali per $n=2$, $m=2$.

Il “disegno” caratteristico dell’evoluzione dei parametri mostrato in figura 2.10, potrebbe modificarsi dal punto di vista delle oscillazioni di corto e lungo periodo, se si facesse partire la simulazione da condizioni iniziali diverse in termini di anomalia vera o equivalentemente di anomalia media. Se ne riporta l’effetto a titolo d’esempio per il caso della quota orbitale (vedi figura 2.11).

Il profilo della quota è la combinazione dell’ellitticità dell’orbita, del movimento dell’asse focale e dell’ellitticità della Terra.

Si prenda in considerazione la prima orbita e la curva a $\vartheta_0=0^\circ$. Fermo restando che l’argomento di perigeo rimanga nell’intorno di 90° , e quindi che il perigeo orbitale sia identificato nella zona del polo nord terrestre, la quota assume valore quasi minimo in partenza e alla fine della prima orbita, circa ad un quarto e a tre quarti di orbita il satellite attraversa l’equatore, presso cui la quota sarebbe minima in caso di orbita circolare, e a 0.5 orbite, in corrispondenza del polo sud, arriva all’apogeo in cui si riscontra un’impennata della quota, anche dovuta allo schiacciamento dei poli. Medesime considerazioni si possono fare nei casi successivi di partenza a $\vartheta_0=53^\circ$, valore massimo di ϑ_0 che stabilisce il confine tra luce ed ombra nel periodo invernale (per LTAN=6:00), $\vartheta_0=90^\circ$ e $\vartheta_0=180^\circ$.

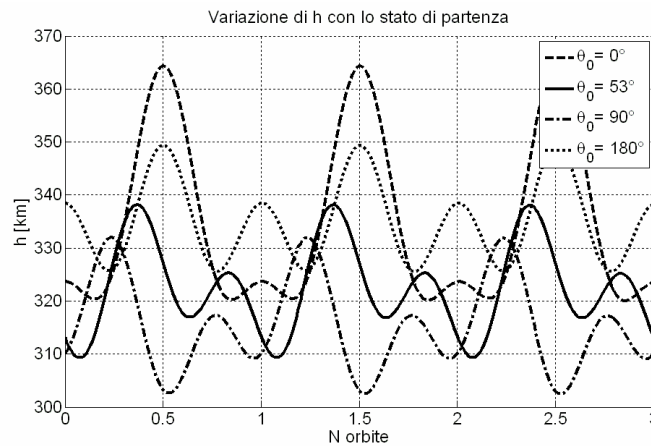


figura 2.11: Evoluzione della quota riferita all'ellissoide terrestre al variare dell'anomalia vera.

La variazione della quota stabilisce un nuovo requisito sul *payload*: questo deve potenzialmente essere in grado di fornire immagini della risoluzione stabilita, per intervalli di quota da 300 a 370 km, oppure si dovrebbe decidere in una fase di analisi di missione più dettagliata, il punto più opportuno di rilascio del satellite da parte del lanciatore per ottenere il profilo di quota che ricalchi l'andamento desiderato. E' chiaro che la resistenza atmosferica agirà in maniera strettamente dipendente dalla quota; una partenza ad esempio per $\vartheta_0=90^\circ$, genererà la massima decaduta del semiasse a nel tempo.

2.2.4 Equazioni di Gauss

Ci si domanda quali siano le variazioni dei parametri che meno si sono apprezzate nell'analisi precedente, all'interno di un ciclo di in modo da cercare una tecnica per poterle poter controllarle.

Le equazioni di Gauss risultano essere un ottimo strumento per gli obiettivi posti, esse giustificano la variazione dei parametri, fornendo le espressioni delle derivate degli elementi orbitali in dipendenza delle accelerazioni perturbative sia di carattere conservativo, sia non conservativo, oltre che dei parametri orbitali.

Ecco l'espressione in equazione 2.18.

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ e \sin(\vartheta) F_r + \frac{p}{r} F_\vartheta \right\} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ \sin(\vartheta) F_r + \left(\cos(\vartheta) + \frac{e + \cos(\vartheta)}{1 + e \cos(\vartheta)} \right) F_\vartheta \right\} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r \cos(u)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} F_h \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(u)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin(i)} F_h \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -\cos(\vartheta) F_r + \sin(\vartheta) \left(1 + \frac{r}{p} \right) F_\vartheta \right\} - \frac{r \cot(i) \sin(u)}{h} F_h \\
\frac{dM}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (p \cos(\vartheta) - 2er) F_r - (p+r) \sin(\vartheta) F_\vartheta \right\} \\
&\left(\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left(\cos(\vartheta) F_r - \frac{2 + e \cos(\vartheta)}{1 + e \cos(\vartheta)} F_\vartheta \right) \right)
\end{aligned} \tag{eq. 2.18}$$

Le forze specifiche F da cui dipendono le derivate 2.18, sono espresse nel sistema locale r- ϑ -h e in particolare costituiscono la sommatoria delle relative componenti di ciascuna perturbazione come:

$$\begin{aligned}
F_r &= F_r^C + F_r^D \\
F_\vartheta &= F_\vartheta^C + F_\vartheta^D \\
F_h &= F_h^C + F_h^D
\end{aligned} \tag{eq. 2.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{da^C}{dt} + \frac{da^D}{dt} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{de^C}{dt} + \frac{de^D}{dt} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{di^C}{dt} + \frac{di^D}{dt} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\Omega^C}{dt} + \frac{d\Omega^D}{dt} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{d\omega^C}{dt} + \frac{d\omega^D}{dt} \\
\frac{dM}{dt} &= \frac{dM^C}{dt} + \frac{dM^D}{dt}
\end{aligned} \tag{eq. 2.20}$$

dove le componenti in C e in D rappresentano rispettivamente il contributo geopotenziale e di resistenza. Inserendo la 2.19 nelle 2.18 si possono scrivere le

derivate come somma delle derivate appartenenti ai due singoli contributi (eq.2.20). In questo modo, i termini in D esprimono esplicitamente la variazione nel tempo degli elementi causata dalla resistenza atmosferica. Si ricordi che ciascuna variazione in C o in D è strettamente dipendente dalla storia temporale complessiva del parametro considerato, cioè le due derivate sono accoppiate. Matematicamente ad esempio per da/dt :

$$\frac{da}{dt} = \frac{da^C}{dt}(a, e, \vartheta) + \frac{da^D}{dt}(a, e, \vartheta) \quad \text{eq. 2.21}$$

Vediamo ora l'entità delle forze specifiche in gioco.

il profilo di f_C calcolato, risulta essere macroscopicamente identico alla f_C causata dal solo J2 (vedi rif. [12] pag. 355), per la quale la componente radiale è l'unica a presentare una asimmetria rispetto allo zero. Dalla figura 2.12 è visibile tale contributo perturbativo che nel piano assume almeno un ordine di grandezza in più rispetto alla perturbazione fuori dal piano.

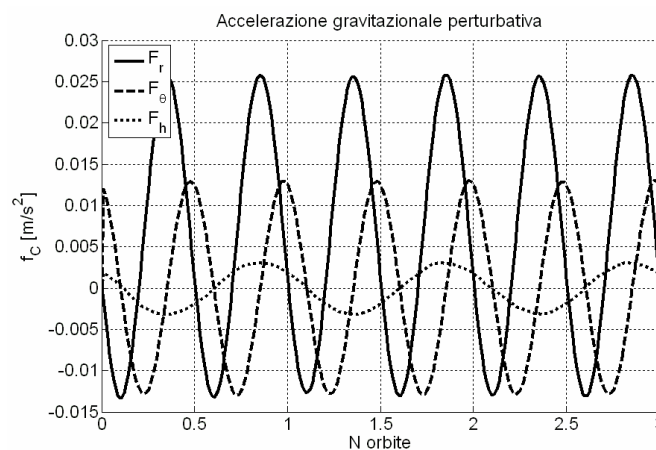


figura 2.12: Andamento della componenti della forza specifica perturbativa dovuta alle armoniche del potenziale terrestre. $\vartheta_0=53^\circ$.

Dal punto di vista dell'accelerazione resistiva, si noti come la componente trasversa ricalchi il profilo della quota per $\vartheta_0=53^\circ$ (vedi figura 2.11); ci si ritrova dunque con quanto affermato prima: il livello di quota influenza direttamente la variazione nel tempo del semiasse, più è bassa e più da/dt^D sarà molto più negativo.

Le due accelerazioni mostrano livelli di ampiezza molto diversi: 10^{-2} e 10^{-6} m/s^2 rispettivamente. Il satellite si trova in un ambiente che provoca un'ondulazione della sua traiettoria di decine di chilometri, su cui progressivamente agisce una

forza piccola rispetto alla principale, ma che causa una modifica dell'orbita più intensa o meno intensa, in dipendenza della posizione all'interno dell'orbita.

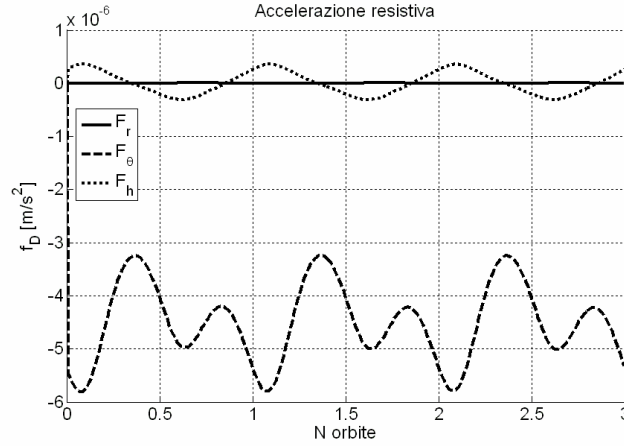


figura 2.13: Andamento delle componenti della forza specifica resistiva. $\vartheta_0=53^\circ$.

Dalle 2.18 è possibile prevedere in maniera approssimata, attraverso un'analisi agli ordini di grandezza, l'entità delle variazioni temporali resistive nei riguardi di ciascun parametro. Considerando i parametri orbitali espressi in tabella 2.1 e i parametri terrestri, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{da^D}{dt} &\approx F_r^D + 10^3 F_\vartheta^D \Rightarrow && \approx 10^{-2} (< 0) \\
 \frac{de^D}{dt} &\approx 10^{-4} F_r^D + 2 \cdot 10^{-4} F_\vartheta^D \Rightarrow && \approx 10^{-9} \\
 \frac{di^D}{dt} &\approx 10^{-4} F_h^D \Rightarrow && \approx 10^{-11} \\
 \frac{d\Omega^D}{dt} &\approx 10^{-4} F_h^D \Rightarrow && \approx 10^{-11} \\
 \frac{d\omega^D}{dt} &\approx 10^{-1} F_r^D + 2 \cdot 10^{-1} F_\vartheta^D + 10^{-5} F_h^D \Rightarrow && \approx 10^{-6} \\
 \frac{dM^D}{dt} &\approx 10^{-1} F_r^D + 2 \cdot 10^{-1} F_\vartheta^D \Rightarrow && \approx 10^{-6}
 \end{aligned}
 \tag{eq. 2.22}$$

Sostituendo ora le componenti di f_D , tra cui F_r^D è praticamente nulla, si ottengono le stime delle derivate dei parametri causate dalla resistenza. Se confrontate con le derivate dei parametri causate da f_C , di cui si può osservare l'andamento in figura 2.14 su un'orbita, si può osservare che:

- La stima delle derivate può ritenersi corretta come mostra la figura 2.14. Alla differenza tra gli ordini di grandezza delle due forze corrisponde una eguale differenza nelle derivate. Se si prendono in considerazione gli angoli, ancora una volta risultano molto bassi i valori di di/dt e $d\Omega/dt$ per entrambe le forze. Più un parametro è sollecitato (da f_C) più subisce la quota parte corrispondente di f_D .
- Se l'intensità della forza resistiva, seppur variabile con la posizione orbitale come osservato in figura 2.13, è determinabile facilmente attraverso la stima presentata in 2.22, nulla però è dato sapere riguardo all'andamento a al segno nel tempo delle derivate. La risoluzione completa delle equazioni di Gauss dà adito a questo. Gli andamenti delle derivate mostrano gli istanti precisi all'interno dell'orbita in cui le variazioni dei parametri subiscono un incremento o un decremento a causa di f_D . Il segno delle espressioni 2.2 dipende da e , ϑ , ed ω variabili come mostrato in figura 2.10, e da F_ϑ^D . In particolare si osserva che $\frac{da^D}{dt}$ è sempre negativo, mentre per gli altri parametri sono riscontrabili istanti temporali di inversione di segno delle derivate. Nel caso del semiasse è fuor di dubbio che l'introduzione di una derivata sempre negativa, genera un a sempre più decrescente al crescere del periodo di integrazione. Naturalmente, solo una propagazione di qualche giorno (non controllata) ci permetterebbe di valutare contributi secolari (come nel caso del semiasse) causati da f_D sugli altri parametri.

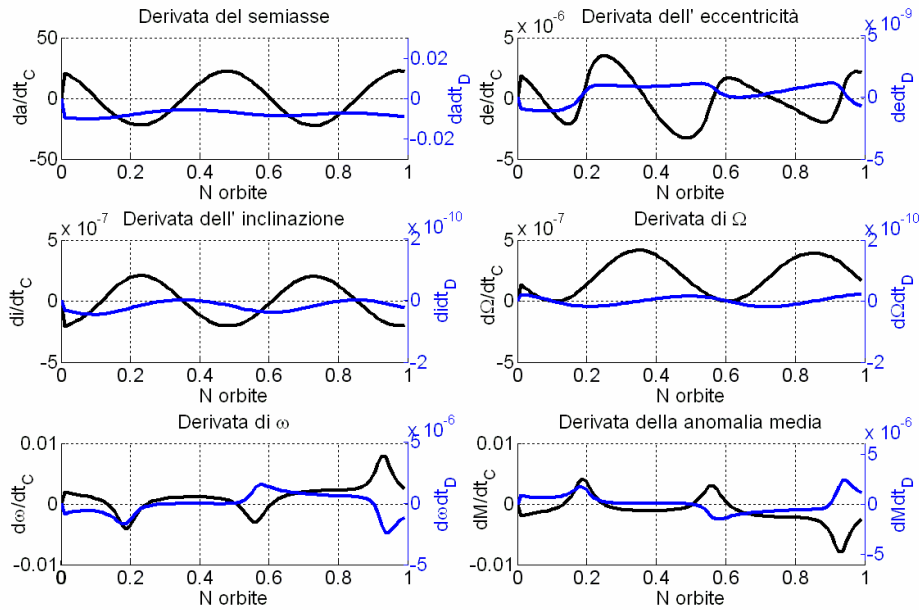


figura 2.14: componenti delle derivate degli elementi orbitali.

L'accelerazione propulsiva, quasi esclusivamente tangenziale, si comporterà in maniera opposta alla resistenza, ma genererà delle variazioni nei parametri, in modulo e in segno, esattamente come f_D .

L'approccio variazionale dunque è necessario ed indispensabile per valutare l'effetto di forze specifiche perturbative di varia natura, soprattutto di carattere non conservativo. Abbandoniamo quindi la classica risoluzione delle equazioni, che non lascia intravedere un metodo chiaro per il controllo dei parametri, per abbracciare una risoluzione attraverso le equazioni di variazione dei parametri.

2.3 Strategia di controllo orbitale

In questo paragrafo si affronta finalmente il problema del controllo dell'orbita. Per questo motivo si tengano ben presenti le peculiarità del sistema di controllo e i requisiti espressi nel paragrafo 1.2.

All'inizio di questo lavoro, ancora non si era appreso bene quale potesse essere la tecnica di controllo per la compensazione del *drag* o – si può aggiungere anche – per la gestione di qualsiasi manovra di trasferimento. Primo perché l'aver pensato all'applicazione di schemi di controllo classici, ha contribuito a

rendere difficoltosa la ricerca di una strategia funzionante, e in secondo luogo perché i vincoli che impone questa missione sulla modalità del controllo, non permettono di realizzare una soluzione di facile intuizione.

Prendendo le mosse dalle problematiche incontrate, nei paragrafi a seguire saranno riprese le equazioni di Gauss, rivelatesi indispensabili per l'identificazione delle quantità da controllare. Infine sarà presentata la strategia completa in due casi, nel primo si metteranno in relazione solo le due forze non conservative per la compensazione della deriva secolare, nel secondo vedremo come esse agiranno in accoppiamento con le accelerazioni del geopotenziale.

2.3.1 Studi precursori

Dalla teoria della meccanica orbitale di base, tecniche analitiche di controllo della traiettoria, o meglio di trasferimento attraverso una propulsione continua nel tempo, sono disponibili soltanto se si segue un approccio *shape-based*, che impone un profilo predeterminato sulla traiettoria. Numerose sono le forme a spirale che sono state messe a punto negli anni, ognuna studiata ad hoc per diverse condizioni di spinta: costante o variabile in modulo, costante o variabile in direzione (si rimanda al rif.[16]). Ma l'approccio analitico si rivela ben presto privo di utilità, poiché da subito gli angoli di volo in partenza e in arrivo risultanti si scontrano con i vincoli sulla spinta, primo fra tutti l'impossibilità di variare l'angolo α di oltre 5° . Inoltre tali tecniche sono di solito usate per sgrossare i problemi di trasferimenti interplanetari e non sono adatte per piccole manovre in cui si vorrebbe anche ottimizzare un parametro, come il consumo di massa oppure la crescita in quota.

La limitata direzionabilità del vettore spinta non permette di controllare l'orbita nemmeno entro un box 3D formalmente costituito da vincoli di posizione e velocità, ma praticamente costituito dai limiti sui parametri orbitali da rispettare, per fare in modo ad esempio che eccentricità, inclinazione e semiasse, comunque variati, rispettino la condizione di sunsincronismo.

Che la quasi-tangenzialità del vettore di controllo non conceda la possibilità di controllare contemporaneamente gli elementi, è dimostrabile, come si vedrà, attraverso le equazioni di variazione dei parametri in cui le forze in ingresso sono costituite dalle componenti attive dalla spinta.

Si è citata la quota come possibile grandezza da massimizzare: si potrebbero sfruttare infatti i momenti in cui il satellite affronta un passaggio orbitale a quota maggiore, dove la resistenza ha minor influenza, per portare il motore a massimo regime e raggiungere salti di quota maggiori per poter far fronte al successivo decadimento, risparmiando propellente. Naturalmente la quota di riferimento dalla quale scostare la traiettoria propulsa rimane quella oscillante nel tempo come illustrato il figura 2.11.

Tuttavia, proprio nei riguardi dell'analisi combinata con la resistenza atmosferica sorge un'altra questione: chi ci assicura che sviluppando una spinta massima nel massimo periodo di tempo disponibile, si riesca a "compensare" la resistenza senza raggiungere quote troppo elevate? E se anche tale resistenza dovesse essere giustamente compensata con la spinta massima, cosa succederebbe se essa subisse delle variazioni in intensità?

Il controllo non sarebbe più adattato, e occorrerebbe variare altri parametri, come il modulo della spinta o il periodo di manovra.

Il ragionamento sta ruotando attorno al fulcro del problema, cioè individuare l'obiettivo primo del controllo: controllare la quota o il semiasse entro certi limiti.

Semplicemente si potrebbe lasciare che il sistema subisca accelerazioni resistive più o meno forti, a seconda della quota, agendo solo allo sfioramento di un limite inferiore al di sotto del quale sia impossibile lasciare orbitare il satellite. L'operazione si potrebbe eseguire a spinta costante per periodi di tempo variabili proporzionalmente al livello di resistenza incontrato o a spinta modulata per periodi di tempo pressoché immutati.

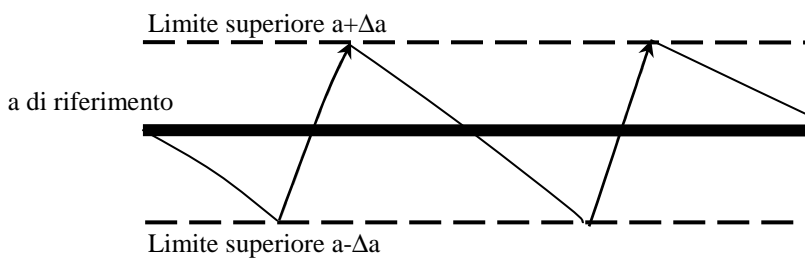


figura 2.15: Controllo di a attraverso l'imposizione dei limiti.

Naturalmente questa strategia non considera né i periodi di eclisse, né il vincolo sul periodo di manovra, pari al 35 % del periodo nominale, tuttavia declinabile a periodi più brevi poiché non è restrittivo dal punto di vista del motore. Il ciclo orbitale di figura 1.11 potrebbe non essere rispettato, potrebbe infatti succedere che durante l'orbita dedicata alle operazioni del carico utile, o durante il periodo in ombra, si abbia la necessità di compiere la manovra.

Si accennava prima all'obiettivo di regolare le variazioni degli altri parametri orbitali per assicurare all'orbita le caratteristiche di progetto.

Se si seguisse la strategia rappresentata in figura 2.15, che ne sarebbe delle variazioni degli altri parametri orbitali? In che misura variano e se ci sia o meno la necessità di effettuare un controllo anche su di essi, lo possono dire solo le equazioni di Gauss.

La tabella seguente riassume i problemi che hanno portato alla formulazione di una tecnica di controllo disassata, plasmata a seguire i vincoli imposti dal ciclo orbitale, dai limiti sul modulo e direzionabilità della spinta.

Vincoli sulla spinta o di missione	Strategie bloccate	Pro	Contro
Quasi-tangenzialità $\pm 5^\circ$	Calcolo analitico, controllo entro un box 3D (disponibilità di almeno 6 propulsori oppure di 4 per il controllo nel piano)	Semplicità del sottosistema di potenza: impiego di un solo propulsore. Massimizzazione della crescita in quota.	Variazione di tutti i parametri orbitali soprattutto nel piano
Ciclo orbitale (nel caso peggiore con eclisse)	Controllo limite-limite	Semplicità della missione	Necessità di un controllo ad hoc per il ciclo proposto
Modulo spinta, limiti superiore e inferiore	Controllo classico continuo proporzionale allo stato (box 3D) attorno ad una posizione di riferimento. Esso dovrebbe essere applicato istante per istante.	Semplicità del sottosistema di potenza	No capacità di dettagliare la soluzione, necessità di fornire una minima variabilità al periodo di spinta e all'istante iniziale di sparo

tabella 2.3: Confronto tra le possibili tecniche di controllo.

2.3.2 Controllo attraverso l'approccio variazionale

2.3.2.1 Equazioni di Gauss come test di controllabilità

Ammettiamo per ora di voler controllare l'orbita solo nel piano orbitale, visto che gli elementi che riguardano la sua forma, a ed e , e il suo orientamento rispetto all'asse nodale ω , sono quelli che subiscono le maggiori variazioni.

Prendiamo di nuovo le equazioni di Gauss, questa volta considerando solo le accelerazioni non conservative di resistenza e spinta, in modo da comprendere come esse possano interagire e alternarsi per eliminare in primis la componente secolare di decadimento del semiasse.

Dalle 2.22 e dall'analisi condotta nel paragrafo 2.2.4, è emerso come la componente trasversa domini il comportamento del sistema. La componente radiale è praticamente nulla per la resistenza e nel caso della spinta è valutata essere al massimo il 9% del modulo, pur assumendo il massimo scostamento α .

E' banale quindi osservare che nella prima delle eq. 2.23, la F_{ϑ}^{nc} , assumendo che sia dovuta alla sola spinta, essendo sempre positiva produrrà una derivata di a sempre positiva. Dal punto di vista del semiasse si tratta dunque di stabilire le corrette fasi di azione delle due forze non conservative per bilanciare gli effetti.

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{da^{nc}}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ e \sin(\vartheta) F_r^{nc} + \frac{p}{r} F_{\vartheta}^{nc} \right\} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{de^{nc}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ \sin(\vartheta) F_r^{nc} + \left(\cos(\vartheta) + \frac{e + \cos(\vartheta)}{1 + e \cos(\vartheta)} \right) F_{\vartheta}^{nc} \right\} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d\omega^{nc}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -\cos(\vartheta) F_r^{nc} + \sin(\vartheta) \left(1 + \frac{r}{p} \right) F_{\vartheta}^{nc} \right\}\end{aligned} \quad \text{eq. 2.23}$$

Si ponga attenzione ora alla derivata dell'eccentricità; il termine tra parentesi tonde è quello che stabilisce il segno della variazione. Per anomalie vere comprese tra 0° e 90° ad esempio, si avrà una variazione positiva, oltre i 180° e fino ai 270° una variazione negativa. Tale comportamento è ribaltato se al posto di F_{ϑ}^{nc} si sostituisce la componente negativa della resistenza.

Mentre quindi si può affermare che la $\frac{de^{nc}}{dt}$ segue grossomodo¹¹ l'andamento di un coseno, la terza delle 2.23, presenta l'andamento di un seno. Da queste considerazioni emerge che:

- La spinta, allo stesso modo di qualsiasi altra accelerazione, introduce ulteriori variazioni sugli altri parametri, per di più di modulo maggiore, essendo compresa tra $1e-5$ e $4e-5$ m/s^2 (3/ 11.5 mN). Tali variazioni devono essere controllate, poiché potrebbe accadere che l'alternanza di una tempistica scorretta di fasi propulse e fasi resistive porti un parametro (e o ω) solo a diminuire o solo ad aumentare.
- La seconda e la terza delle 2.23, evolvendo in maniera differente, sanciscono che laddove sia possibile stabilire l'istante di partenza della manovra per controllare il movimento di e , per contro non sarà gestibile la regolazione di ω . Stiamo dunque dicendo che il controllo simultaneo dei tre elementi che definiscono l'orbita nel piano, non è possibile.

¹¹ Le considerazioni relative agli effetti isolati di spinta e resistenza sono in realtà approssimate in quanto gli effetti delle due sono accoppiati. Tuttavia, le approssimazioni si possono ritenere buone in virtù della differenza tra gli ordini di grandezza.

Lo studio quindi delle 2.18 ci indica che è possibile regolare uno o al massimo due parametri nel piano, semiasse ed eccentricità o semiasse e argomento di perigeo, decidendo opportuni istanti di partenza.

In particolare, per il controllo di e ed ω , è intuitivo scegliere come miglior periodo propulso, il periodo in cui la derivata combinata di spinta e resistenza subisce un'inversione di segno.

Se ci fosse stata la possibilità di inserire più propulsori nelle due direzioni di controllo, radiale e trasversa, per anche necessità di conservare l'assetto, allora non si sarebbe presentata l'impossibilità di governare contemporaneamente i parametri.

Alla complicazione appena espressa si aggiunge il problema di non poter scegliere manovre in corrispondenza dei periodi di eclisse.

Da qui riemerge l'importanza del punto di rilascio del satellite da parte del lanciatore: la condizione iniziale, oltre a determinare una diversa variazione in quota (vedi figura 2.11), introduce uno sfasamento nell'andamento delle derivate, diverso al variare della stessa. Pensiamo a $\frac{de^{nc}}{dt}$ e a $\frac{d\omega^{nc}}{dt}$. Se

l'inversione di segno delle derivate avvenisse solo nei periodi di eclisse, allora in una sola manovra il parametro in questione non sarebbe controllabile, e si dovrebbe utilizzare una seconda manovra, in un istante di partenza differente rispetto al precedente, per provvedere alla sua diminuzione o accrescimento.

Oppure, se sono riscontrabili più punti di inversione di segno delle derivate, come nel caso visto di seno o coseno, e se essi corrispondono ad un periodo in luce, allora l'istante d'inizio della manovra è pressoché determinato.

L'obbligatorietà di scegliere una regolazione in una o più manovre dipende esclusivamente dall'andamento delle equazioni di Gauss, che per questo motivo fungono da "test di controllabilità" dei parametri.

Per il momento il test di controllabilità ci ha permesso di capire che ci sono momenti chiave in cui agire per poter mantenere la forma dell'orbita o, alternativamente l'orientamento dell'asse focale nel piano orbitale. Resterebbe da valutare il profilo delle componenti della spinta nel tempo, cioè come l'azione attiva deve variare in modulo e in direzione per soddisfare l'obiettivo del controllo. Ma quale è l'obiettivo del controllo?

2.3.2.2 Obiettivo del controllo a riferimenti costanti

Si prendano di nuovo le 2.23 e questa volta si consideri le componenti delle accelerazioni F come la somma delle rispettive componenti di spinta e resistenza

(per ora si lavora sempre nel piano poiché la spinta agisce nel piano e si considerano le variazioni di i e Ω al momento non importanti).

$$\begin{aligned} F_r^{nc} &= F_r^T + F_r^D \\ F_{\vartheta}^{nc} &= F_{\vartheta}^T + F_{\vartheta}^D \end{aligned} \quad \text{eq. 2.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{da^{nc}}{dt} &= \frac{da^T}{dt} + \frac{da^D}{dt} \\ \frac{de^{nc}}{dt} &= \frac{de^T}{dt} + \frac{de^D}{dt} \\ \frac{d\omega^{nc}}{dt} &= \frac{d\omega^T}{dt} + \frac{d\omega^D}{dt} \end{aligned} \quad \text{eq. 2.25}$$

Separando ora i contributi di spinta e resistenza nelle equazioni di Gauss si ottengono le 2.25. Se integrate, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_{fin}} \frac{da^{nc}}{dt} dt &= \int_{t_0}^{t_{fin}} \left(\frac{da^T}{dt} + \frac{da^D}{dt} \right) dt = a^{nc}(t_{fin}) - a^{nc}(t_0) \\ \int_{t_0}^{t_{fin}} \frac{de^{nc}}{dt} dt &= \int_{t_0}^{t_{fin}} \left(\frac{de^T}{dt} + \frac{de^D}{dt} \right) dt = e^{nc}(t_{fin}) - e^{nc}(t_0) \\ \int_{t_0}^{t_{fin}} \frac{d\omega^{nc}}{dt} dt &= \int_{t_0}^{t_{fin}} \left(\frac{d\omega^T}{dt} + \frac{d\omega^D}{dt} \right) dt = \omega^{nc}(t_{fin}) - \omega^{nc}(t_0) \end{aligned} \quad \text{eq. 2.26}$$

dove t_0 è l'istante iniziale del ciclo caratteristico della missione e t_{fin} è posto pari a tre volte il periodo orbitale cioè il termine del periodo del ciclo.

Annullare l'integrale della derivata di a costituita dai contributi non conservativi, equivale a stabilire che il semiasse iniziale debba eguagliare quello finale, lasciando lo stesso, libero di crescere o decrescere all'interno del periodo-ciclo.

$$a^{nc}(t_{fin}) = a^{nc}(t_0) \quad \text{eq. 2.27}$$

Dal momento che, qualsiasi valore assuma la spinta, essa produce sempre un incremento del semiasse, allora all'interno della prima fase propulsa si può controllare un parametro, e ad esempio. Nell'algoritmo di ricerca del profilo di spinta, che sarà presentato nel capitolo successivo, si potrà quindi assegnare come obiettivo della minimizzazione, l'integrale della derivata dell'eccentricità

dei contributi non conservativi, in modo che alla conclusione della prima orbita si abbia:

$$e^{nc}(t_1) = e^{nc}(t_0) \quad \text{eq. 2.28}$$

Nella seconda fase propulsa in condizioni favorevoli si potrebbe controllare di nuovo e , garantendo però il soddisfacimento della 2.27, che rimane l'obiettivo primario.

In questo caso risulterebbe:

$$\begin{aligned} e^{nc}(t_{fin}) &= e^{nc}(t_0) \\ \omega^{nc}(t_{fin}) - \omega^{nc}(t_0) &\neq 0 \end{aligned} \quad \text{eq. 2.29}$$

Tuttavia, sappiamo che il parametro indice della direzione dell'asse focale sarà mutato e otterremo la disuguaglianza 2.29. Se ω alla fine del ciclo di missione, è cresciuto e successivamente diminuito (o viceversa), mantenendosi entro opportuni limiti (ad esempio $\pm 1^\circ$), allora l'obiettivo della minimizzazione per la prima fase propulsa del nuovo ciclo può rimanere la 2.28. Al contrario, il *target* dovrà essere cambiato in:

$$\omega^{nc}(t_1) = \omega^{nc}(t_0) \quad \text{eq. 2.30}$$

Se quindi il controllo riesce ad annullare per periodi differenti dal periodo-ciclo, gli integrali delle derivate non conservative di e e ω , allora la regolazione dei due parametri può ritenersi soddisfatta, in senso integrale. Succederà quindi che:

$$\begin{aligned} a^{nc}(t_{fin}) &= a^{nc}(t_0) \\ \int_{t_0}^{t^*} \frac{de^{nc}}{dt} dt &= \int_{t_0}^{t^*} \left(\frac{de^T}{dt} + \frac{de^D}{dt} \right) dt = e^{nc}(t^*) - e^{nc}(t_0) = 0 \\ \int_{t_0}^{\hat{t}} \frac{d\omega^{nc}}{dt} dt &= \int_{t_0}^{\hat{t}} \left(\frac{d\omega^T}{dt} + \frac{d\omega^D}{dt} \right) dt = \omega^{nc}(\hat{t}) - \omega^{nc}(t_0) = 0 \end{aligned} \quad \text{eq. 2.31}$$

dove t^* è l'istante temporale in cui l'integrale della derivata di e è annullato, e \hat{t} è l'istante temporale in cui l'integrale della derivata di ω è annullato. Se si vuole, in questo modo si garantisce che l'orbita perturbata si mantenga nell'intorno dell'orbita di progetto, definendo il termine "intorno" come un box

di variazione di a , e ed ω i cui scostamenti dal valore di riferimento sono definibili a valle del calcolo della manovra propulsa.

Ecco di seguito, in figura 2.16, la proposta per il controllo del semiasse: nelle prime due orbite, dedicate alla fase propulsiva, si sceglieranno gli istanti temporali di inizio delle manovre, rigorosamente in luce e tali da soddisfare la 2.28, 2.29 o la 2.30.

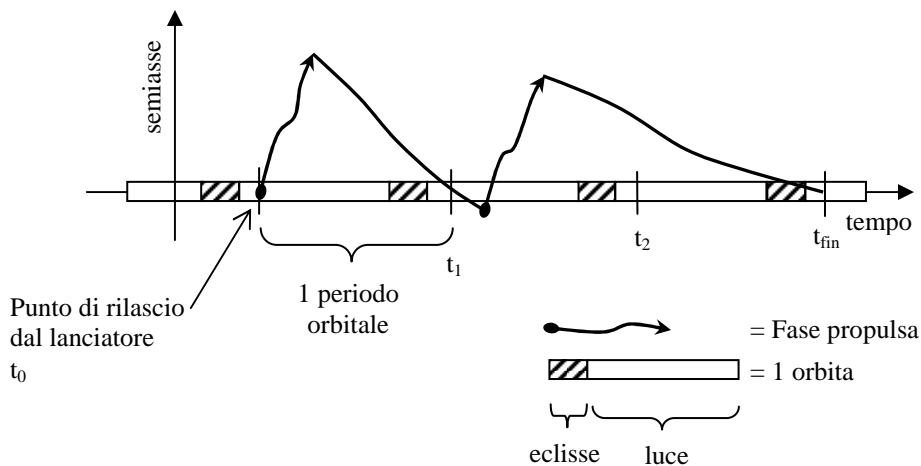


figura 2.16: Ciclo di controllo dell'integrale della derivata non conservativa del semiasse.

2.3.2.3 Obiettivo del controllo con accoppiamento delle accelerazioni

Vediamo ora il caso completo, poiché le formule da 2.26 a 2.31 sono vere solo se la dinamica è risolta in assenza del termine oscillatorio dovuto a f_C . Si intende dire che fino a questo momento abbiamo trovato un modo per compensare i disturbi secolari di f_D e f_T cercando allo stesso tempo di tenere sotto controllo gli altri parametri importanti per la missione, e ci siamo permessi di assegnare all'obiettivo di controllo parametri **costanti** di riferimento, immutabili nel tempo. Incominciamo a vedere ora cosa accade per il caso completo.

Consideriamo la dinamica perturbata dalla sola f_C . La soluzione del moto ci permette di identificare la soluzione di riferimento, così come progettata in 2.1.3. Si esamini ad esempio la variazione del semiasse, la quale sarà dunque:

$$\frac{da}{dt} \equiv \frac{da^{c\ progetto}}{dt} \Rightarrow a \equiv a^{c\ progetto} \quad \text{eq. 2.32}$$

I parametri di progetto, prodotti dalla risoluzione del problema con accelerazioni conservative, sono considerati il riferimento.

Consideriamo ora la dinamica perturbata da f_C , f_D e f_T . Esplicitando i termini della variazione di a , li separiamo come fatto in precedenza in base alla tipologia di accelerazione, in un contributo conservativo c e in uno non conservativo nc :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ e \sin(\vartheta) F_r^c + \frac{p}{r} F_\vartheta^c \right\} + \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ e \sin(\vartheta) F_r^{nc} + \frac{p}{r} F_\vartheta^{nc} \right\} \quad \text{eq. 2.33}$$

La relazione 2.33 dipende dai parametri e , a , ϑ , e dalle F^C , che approssimate alla prima armonica zonale si possono scrivere anche come:

$$\begin{aligned} F_r^c &= -\frac{3K_\oplus J_2 R_\oplus^2}{2r^4} \sin^2(i) \sin^2(\vartheta + \omega) \\ F_\vartheta^c &= -\frac{3K_\oplus J_2 R_\oplus^2}{r^4} \sin^2(i) \sin(\vartheta + \omega) \cos(\vartheta + \omega) \end{aligned} \quad \text{eq. 2.34}$$

e dalle F^{nc} dipendenti dal modulo della spinta e dalle variabili espresse in 2.10. Quindi la variazione di a , come ciascuna altra variazione, dipende da tutto lo stato, da tutti i parametri. Ed ogni parametro dipende da tutti gli altri. Scriviamo ora la variazione di a , in maniera compatta, come somma dei due contributi:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da^c}{dt} + \frac{da^{nc}}{dt} \quad \text{eq. 2.35}$$

Il secondo termine si può ancora eliminare periodicamente seguendo la procedura del paragrafo precedente, ma la soluzione che otterremo non sarà mai coincidente con gli andamenti di riferimento, poiché mentre il controllo si preoccupa di eliminare in un certo periodo l'integrale della variazione nc , all'interno dello stesso periodo le F^C si generano utilizzando gli stessi parametri

in cambiamento. Quando si verifica che $\int_{t_0}^{t_{fin}} \frac{da^{nc}}{dt} dt = 0$, allora a si potrebbe scrivere

come:

$$a(t_{fin}) - a(t_0) \equiv \int_{t_0}^{t_{fin}} \left(\frac{da^c}{dt} \text{ progetto} + \Delta \frac{da^c}{dt} \text{ indotta} \right) dt + \int_{t_0}^{t_{fin}} \cancel{\frac{da^{nc}}{dt}} dt \quad \text{eq. 2.36}$$

dove il primo termine, generato dalla F^C , può essere visto come la composizione della parte di progetto e di un termine spurio, indotto dalla variazione dei parametri delle forze non conservative.

L'accoppiamento delle accelerazioni quindi produce:

- Dal punto di vista del termine nc : la forte dipendenza da parametri sensibili come la quota o il semiasse, che potrebbero incrementare o diminuire l'effetto del *drag*. Lo schema di controllo precedente è ancora applicabile e in particolar modo è utile per la visualizzazione grafica della soluzione di controllo. Tuttavia le equazioni di Gauss 2.18 non hanno andamenti riconducibili ad un seno o un coseno ma presentano andamenti complessi, come è stato mostrato in figura 2.14. Quindi l'andamento delle derivate, i relativi punti di inversione di segno e di conseguenza gli istanti propizi per la manovra propulsiva dipenderanno da funzioni complesse.
- Dal punto di vista del termine c : alla soluzione di riferimento è sovrimposto un andamento spurio. Se tale andamento pur crescendo nel tempo, presenta media nulla e non introduce effetti secolari, allora il moto può ritenersi controllato.

Il termine spurio non è mai eliminabile poiché il controllo è eseguito in archi differenti di spinta. Se invece si potesse compensare istante per istante l'accelerazione di resistenza, non ci sarebbero periodi temporali in cui i parametri vengano modificati irreversibilmente. Lo stesso effetto si potrebbe ottenere dotando il satellite di un set di 6 propulsori per la controllabilità nelle tre direzioni.

Le stesse considerazioni espresse per il semiasse valgono anche per gli altri parametri orbitali.

Ci si aspetta anche che poiché l'orbita è poco perturbata fuori dal piano orbitale, il termine di variazione ns di inclinazione e nodo ascendente ($\sim 1e-6^\circ$), non comprometterà nel corto periodo il movimento dell'orbita. Gli integrali ns avranno periodi di annullamento più lunghi e per qualche orbita il loro controllo non è necessario.

3 Implementazione del calcolo e risultati

3.1 Impostazione del calcolo

Fmincon è una funzione di Matlab che calcola il minimo di una funzione obiettivo, detta oracolo, sotto una serie di vincoli, lineari, non lineari, di eguaglianza o di disuguaglianza che possono coinvolgere sia variabili in generale, sia la soluzione stessa, definendo il dominio di ricerca della soluzione.

Si è scelto per l'analisi corrente di utilizzare come metodo di ricerca del minimo un metodo iterativo basato sul metodo del gradiente o quasi-Newton. Si è assunto cioè che la funzione oracolo sia derivabile almeno due volte, cosa fattibile in quanto si possono ottenere le derivate prime dei parametri orbitali delle parti non conservative delle equazioni di Gauss, e le derivate seconde per derivazione dalle prime, senza riscontrare problemi particolari.

In questo modo *fmincon* tratterà i dati attraverso un'aritmetica sparsa (*Large scale - Sparse storage*). Un punto delicato per l'algoritmo è l'inizializzazione del vettore soluzione, in quanto l'identificazione di un buon punto da cui partire permette all'algoritmo di convergere sul minimo globale dell'oracolo.

La funzione obiettivo infatti può essere in generale una funzione complessa caratterizzata da molteplici minimi locali, e l'algoritmo potrebbe convergere su uno di essi.

La strategia migliore per trovare un buon punto di partenza, se non lo si conosce, è quella di utilizzare un algoritmo genetico, meno accurato e più lento, per localizzare la zona dell'ottimo globale. Successivamente si utilizzerebbe la soluzione dell'algoritmo genetico per inizializzare un metodo del gradiente, più raffinato, che identifichi con precisione il minimo globale.

Poiché la procedura appena enunciata avrebbe introdotto un onere di tempo computazionale non irrilevante, si è deciso in alternativa di generare automaticamente diversi vettori soluzione iniziali e di scegliere a valle di ciascuna minimizzazione, quel vettore soluzione risultante con il minor valore della funzione obiettivo.

Il programma sceglierà automaticamente l'intensità nel tempo del vettore spinta e la sua direzione, osservando i vincoli imposti e soddisfacendo una funzione oracolo che, come si è visto nel capitolo precedente, sarà alternativamente sostituita in modo che periodicamente tutti i parametri orbitali siano controllati.

3.1.1 Schema del programma

La strategia di missione suddivisa in due manovre, non è solo una prerogativa della missione stessa, ma lo stesso programma Matlab che è stato implementato, ha avvio in due fasi distinte: la prima si occupa di gestire la manovra per la prima orbita, la seconda gestisce la spinta della seconda orbita ma propaga lo stato fino alla terza orbita, alla fine della quale l'obiettivo proposto deve essere soddisfatto. Si è provato tuttavia anche a costruire un unico programma per le due manovre, ma ancora una volta i tempi di calcolo sono risultati proibitivi.

Un caso particolare riguarda la manovra di partenza, in cui viene stabilito il punto più opportuno di rilascio del satellite da parte del lanciatore, ovvero l'anomalia vera di partenza ϑ_0 , che fisserà l'andamento che subirà la quota e posizionerà gli andamenti delle derivate dei parametri orbitali relativamente ai periodi in luce o in ombra.

Per i cicli di missione successivi al primo, al posto di ϑ_0 sarà trovato un tempo di inizio manovra, con particolare riferimento all'analisi completa di ogni perturbazione, in quanto l'anomalia vera, calcolata rispetto ad un asse in movimento, non è più considerata un buon indice a cui riferirsi.

Illustriamo in figura 3.1 lo schema del programma per la prima orbita del ciclo: come visto nel capitolo precedente, la funzione obiettivo della minimizzazione sarà l'integrale della derivata non conservativa di un parametro orbitale c , mentre i vincoli saranno quelli relativi alla spinta, al periodo di eclisse, assumendo che la missione abbia inizio il 1 Gennaio 2013, e al periodo di manovra, a cui è stato concesso di poter diminuire, dando così la possibilità all'algoritmo di trovare più agevolmente il minimo.

La condizione iniziale, come il vettore soluzione, è composta dalle componenti del vettore spinta nelle coordinate inerziali, dal periodo di manovra, e dall'istante di partenza della fase propulsa.

In figura 3.2 si mostra lo schema del programma per la seconda manovra. Si sottolinea che questa fase di spinta dovrà soddisfare l'annullamento dell'integrale del semiasse sull'intero periodo ciclo. Inoltre la funzione obiettivo dovrà tener conto dell'integrale accumulato, relativo alla prima fase propulsa.

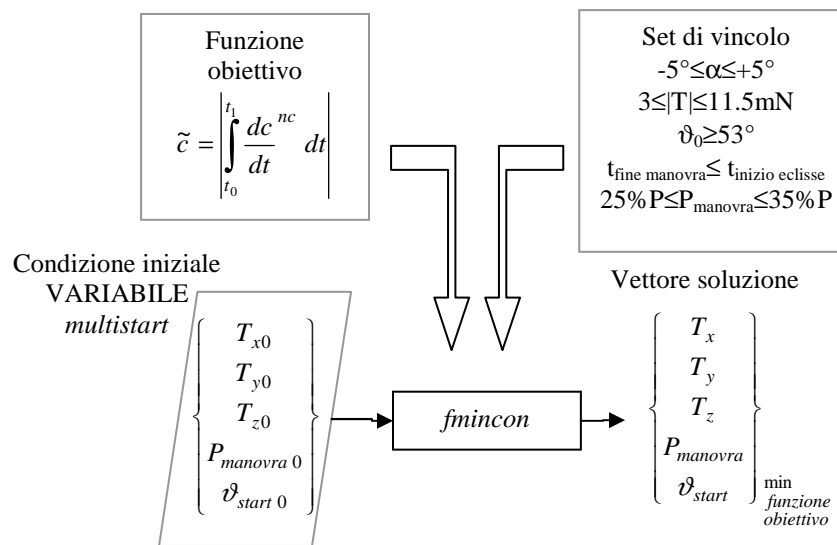


figura 3.1: Schema del programma di minimizzazione per la prima fase propulsa. Per la fase di rilascio dal lanciatore, l'istante di manovra scelto corrisponde ad una anomalia vera fuori dalla zona d'ombra.

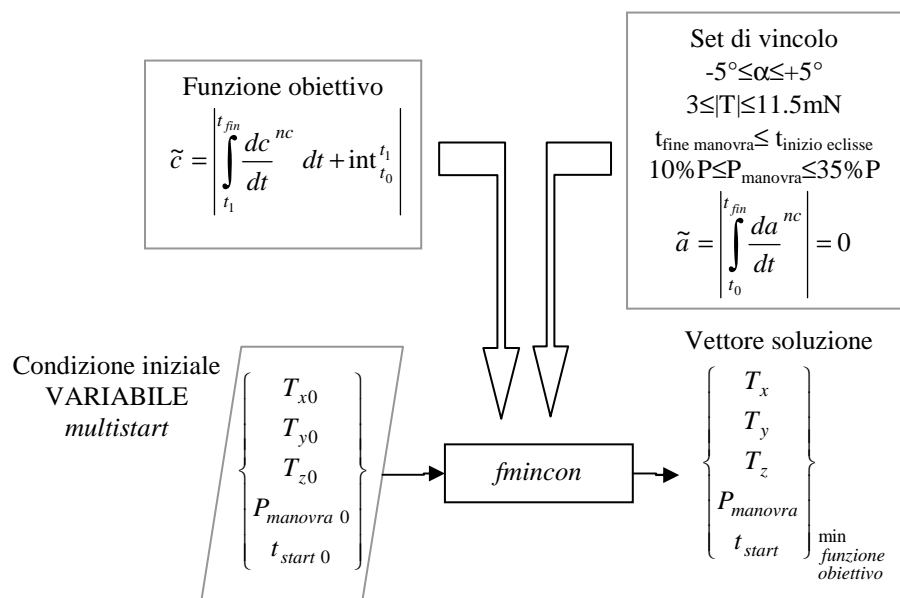


figura 3.2: Schema del programma di minimizzazione per la seconda fase propulsa.

3.1.2 Schema concettuale

Si è detto che il controllo dell'orbita sarà messo in pratica dall'algoritmo che a turno minimizzerà il modulo dell'integrale delle derivate non conservative degli elementi orbitali. Particolare attenzione si deve riservare alle derivate di eccentricità e argomento di perigeo, che nel caso della dinamica completa assumono andamenti complessi, positivi e negativi a tratti, non riconducibili a funzioni semplici. In generale succederà che nel periodo in cui un parametro sarà controllabile, l'altro subirà un aumento o un decremento. Nonostante ciò avvenga, si decide di cambiare la funzione obiettivo dopo un ciclo, in modo che ci sia un parametro per ciclo controllato. L'importante non è quindi controllare contemporaneamente tutti i parametri (anche perché è impossibile dati i vincoli di missione), ma è che si abbia l'effettiva possibilità di controllare entrambi, seppur in cicli diversi; condizione necessaria è che nel periodo in luce si possano sfruttare andamenti delle derivate positivi e negativi per aumentare e diminuire il parametro che ha subito variazioni nel ciclo precedente.

Lo schema concettuale del controllo si può comporre nella maniera seguente:

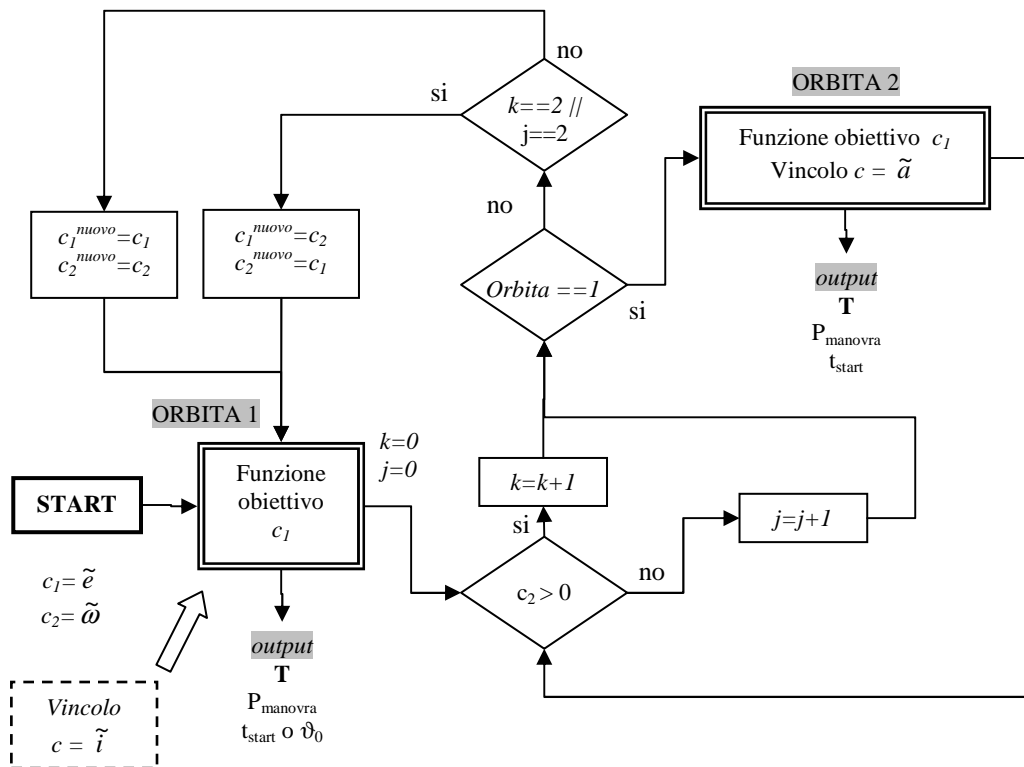


figura 3.3: Schema del controllo orbitale di station-keeping a tre o quattro parametri.

Se alla fine del primo ciclo la seconda funzione c_2 ha subito solo variazioni positive o negative, nel ciclo successivo la funzione da minimizzare diventerà c_2 , viceversa rimarrà c_1 .

La figura 3.3 si riferisce al controllo orbitale dei tre parametri che descrivono la geometria orbitale nel piano, i quali subiscono le maggiori variazioni riscontrate. Regolando l'energia orbitale, la forma e l'orientamento dell'asse focale, attraverso una manovra esclusivamente nel piano, si garantisce che le misure effettuate dal carico utile siano ripetibili nel tempo (non solo, poiché la variazione dei quattro parametri entro certi intervalli, garantisce che l'orbita mantenga il sunsincronismo e la caratteristica *frozen*).

Da questo discorso rimane escluso il controllo dei parametri che posizionano l'orbita nello spazio; mentre per il nodo ascendente si riscontrano variazioni dovute alle accelerazioni non conservative oscillanti a tratti positive e negative, di bassissima intensità ($\sim 1e-9^\circ$), per l'inclinazione si avrà la necessità di compiere saltuariamente una manovra fuori dal piano poiché la variazione introdotta dalla resistenza atmosferica risulta avere un andamento sempre negativo, monotono discendente e tuttavia piccolo ($\sim 1e-6^\circ$).

Come eseguito dal controllo durante l'orbita 2, in cui si impone il vincolo sul semiasse, il quale, in quanto tale, è una condizione molto più forte da rispettare rispetto ad una funzione da minimizzare, così dopo una serie di cicli orbitali si inserisce un vincolo dello stesso tipo sull'inclinazione, durante l'orbita 1.

La prima manovra propulsa di tale ciclo particolare, sarà compiuta permettendo all'assetto di muoversi fuori dal piano di un angolo ζ , e quindi di compiere eccezionalmente una manovra nel piano definito da velocità e momento della quantità di moto. Poiché quindi, come si può facilmente vedere dalle equazioni di Gauss, una manovra nel piano orbitale non può controllare i e Ω , occorre effettuare una manovra fuori dal piano orbitale, perdendo per tale periodo di manovra l'allineamento nominale dei pannelli solari con il Sole.

E' importante che il calcolo venga eseguito manovra per manovra in quanto ogni condizione non è mai uguale ad una delle precedenti anche perché si tratta di un sistema a massa variabile.

3.2 Simulazioni numeriche

Presentiamo le soluzioni di spinta che soddisfano l'obiettivo e i vincoli imposti in due casi fondamentali: il primo in cui non è considerato l'accoppiamento con il termine f_C , che mostra quanto espresso nella trattazione del paragrafo 2.3.2.2, il secondo in cui verranno mostrati i risultati dell'applicazione dello schema 3.3 nel caso di dinamica fortemente perturbata.

Nel caso a riferimenti costanti saranno riportate anche le prime soluzioni del trasferimento orbitale dalla quota nominale alla quota dell'orbita risonante 1 giorno, a 268 km.

I risultati che saranno mostrati, si riferiscono alla condizione peggiore relativa al periodo di eclisse maggiore, eccetto il primo caso a riferimenti costanti. Per i cicli orbitali di un'orbita alba-tramonto, diversi dal caso peggiore, il vincolo sull'istante iniziale e finale di manovra è gradualmente rilassato.

Le manovre saranno vincolate in periodi di luce sempre più ampi al passare dei giorni, settimane, mesi, soprattutto se $LTAN=6:00$. Viceversa se si scegliesse $LTAN=9:30$, ci sarebbe sì un beneficio al passare del tempo, ma come visto in tabella 2.2, i periodi in ombra occorrerebbero in ogni periodo dell'anno. Anche in questo caso il controllo studiato non incontrerebbe particolari problemi, la distanza angolare occupata della zona d'ombra aumenterebbe di 30° circa rispetto alla precedente. Per aiutare l'algoritmo a trovare il minimo della funzione oracolo in questo caso, si potrebbe fornire una maggior manovrabilità al vettore spinta; infatti dalle simulazioni si è appreso che massimizzando la sua direzionabilità e in particolar modo orientando il vettore spinta di $\pm 10^\circ$ attraverso un meccanismo mobile e lasciando all'assetto una mobilità di $\pm 5^\circ$ nel piano orbitale, il dominio di ricerca della soluzione si allarga e aiuta la ricerca del minimo globale. Nonostante questo, non si osservano particolari benefici in termini di avvicinamento alla traiettoria di riferimento, con l'utilizzo di un meccanismo di orientazione della spinta (si intende il simultaneo controllo di e e ω).

3.2.1 Caso a riferimenti costanti

3.2.1.1 Mantenimento orbitale con compensazione dei disturbi non conservativi secolari

All'interno del primo ciclo orbitale, l'algoritmo minimizza l'eccentricità e osserva il vincolo sul valore del semiasse finale. Con riferimento alla figura 3.5 si nota in particolare che l'argomento di perigeo ha subito una diminuzione e un

successivo aumento a causa dei due diversi istanti di inizio della manovra. Nel ciclo successivo quindi il programma manterrà come funzione obiettivo l'integrale della derivata non conservativa di e .

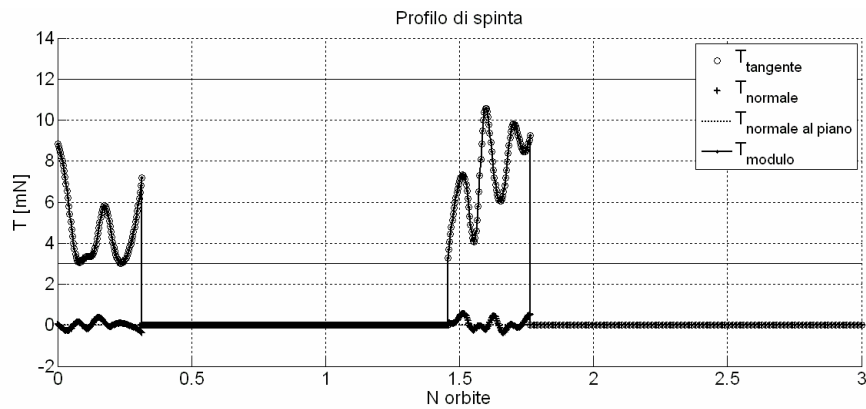


figura 3.4: Spinta calcolata all'interno del primo ciclo di missione.

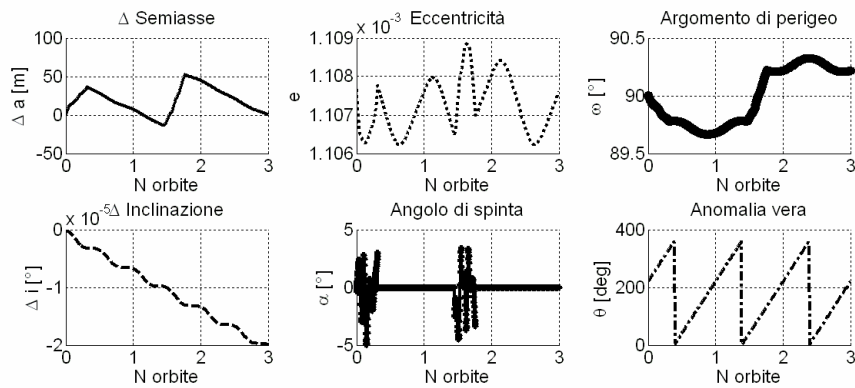


figura 3.5: Parametri orbitali e grandezze sotto controllo.

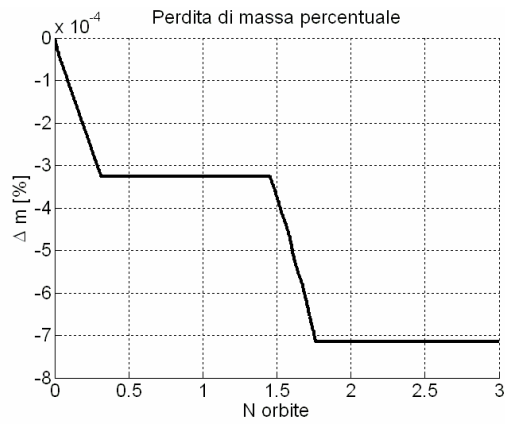


figura 3.6: Consumo di massa.

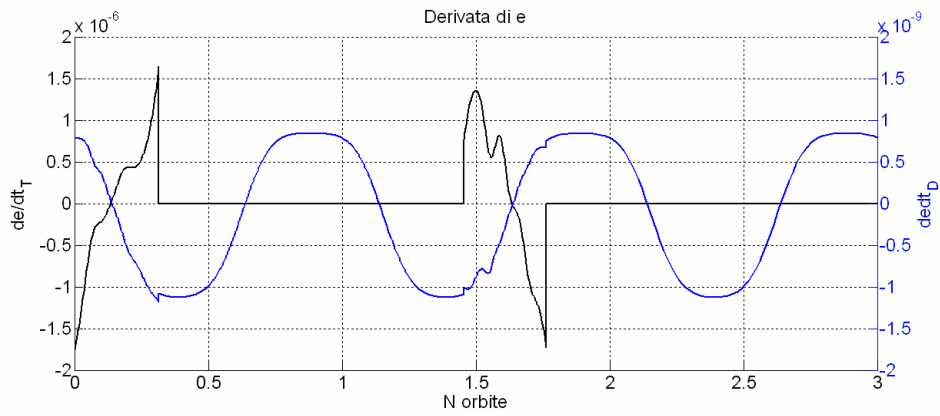


figura 3.7: Andamento della derivata di e causata da spinta e resistenza.

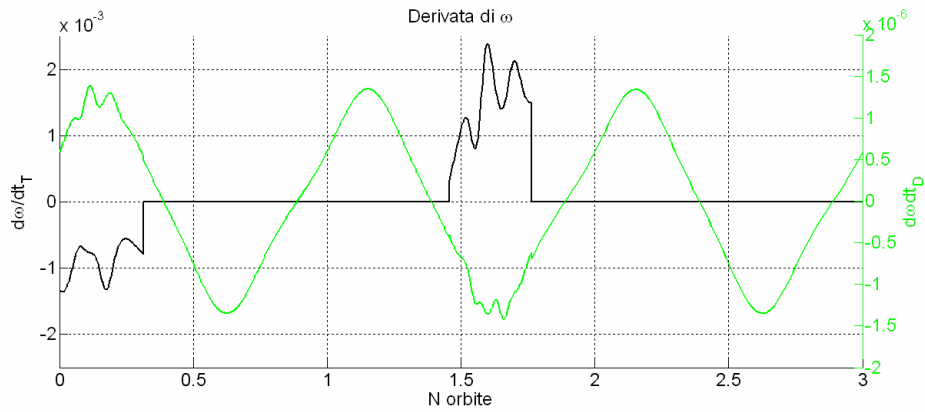


figura 3.8: Andamento della derivata di ω causata da spinta e resistenza.

Mentre l'eccentricità continua a subire aumenti e diminuzioni a causa dell'andamento 3.7 (si noti che le manovre sono eseguite nei punti di inversione di segno), l'argomento di perigeo di fatto segue le indicazioni provenienti dalla sua derivata (figura 3.8), che si comporta in maniera opposta.

La spinta rimane entro i limiti imposti e utilizza la sua capacità di variare in direzione con α e soprattutto la sua modularità per portare a zero l'integrale di de/dt che in prima approssimazione si può ritenere coincidente con la curva in nero della figura 3.7. . Il consumo di massa alla fine del ciclo è bassissimo, pari a 0.0007%, che corrisponde a 1.8 g. Come anticipato, l'inclinazione subisce una di munizione ma è ancora troppo bassa per essere controllata.

3.2.1.2 Impostazione del trasferimento all'orbita risonante con eclisse

Utilizzando lo schema semplificato, si è voluto intraprendere il calcolo della traiettoria di trasferimento e delle sue caratteristiche di percorrenza temporale, dall'orbita nominale a quella risonante a quota 268 km. Lo si è fatto mantenendo l'impostazione dell'algoritmo sopra presentato, conservando quindi il vincolo sul periodo in ombra, ma inserendo le prestazioni dei due resistogetti che agendo insieme garantiscono una manovra efficace e tempestiva in caso di occorrenza.

Orbita risonante		Manovra	
h [km]	268	Obiettivo	Min e, min ω
e	1.115e-3		
i [°]	96.56	Vincoli	50mN<T<300mN
ω [°]	90		-175°< α <175°
LTAN	6:00		eclisse

tabella 3.1: Riassunto delle caratteristiche orbitali e del trasferimento.

I resistogetti insieme creano una spinta massima di 300mN con 55 s di impulso specifico e agendo in verso opposto al versore tangente, generano automaticamente la caduta del semiasse. In questa manovra la resistenza atmosferica incide positivamente contribuendo alla perdita di a . Per abbassare il periodo di manovra si potrebbe anche dispiegare una superficie dedicata per incrementare l'area normale o ruotare il satellite di 90° rispetto alla tangente purché nel piano orbitale. In questo ultimo caso si deve ripensare alla configurazione del sottosistema di potenza. I grafici seguenti mostrano i risultati per due manovre consecutive.

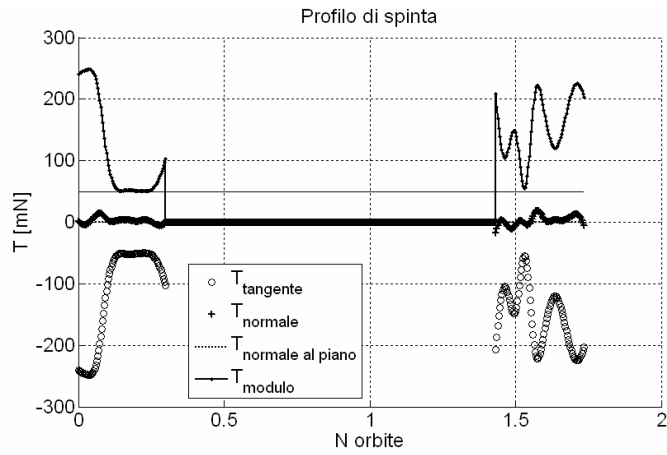


figura 3.9: Spinta soluzione.

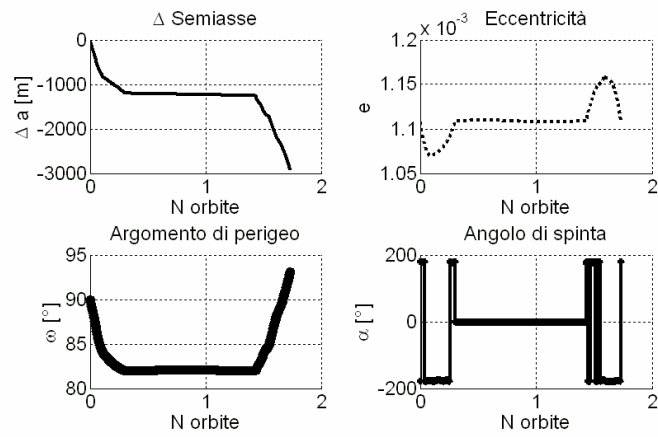


figura 3.10: Variazione dei principali protagonisti dell'analisi.

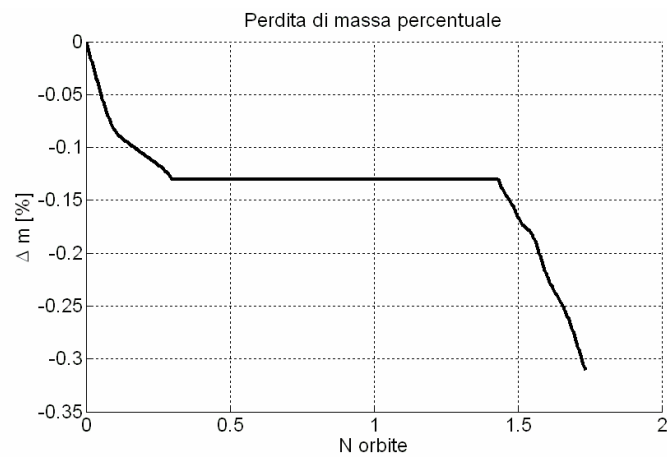


figura 3.11: Consumo di massa durante due manovre di trasferimento.

A fronte dei grafici 3.9-3.11, si possono presentare le seguenti considerazioni:

- Anche in una simulazione diversa dal mantenimento orbitale, l'algoritmo svolge il suo compito, regolando alternativamente e ed ω . Occorre sempre infatti adempiere a questi obiettivi, pena il cambiamento definitivo dei parametri orbitali di progetto. Si noti come in questo caso la variazione di eccentricità introdotta dalla spinta sia almeno di un ordine di grandezza maggiore rispetto a quella introdotta dalla resistenza. Lo stesso discorso vale per ω , si può quindi affermare che la spinta è artefice delle maggiori variazioni sui parametri. Del caso di figura 3.5 invece, è evidente che la spinta genera le stesse variazioni della resistenza a conferma del fatto che il motore è adeguato alla compensazione alla quota nominale.
- La prima variazione del semiasse ammonta a -1234 m e la seconda a -1698 m; nel giro di due orbite, grossomodo tre ore, il satellite sottoposto al comando di trasferimento ha perso circa 3 km in semiasse. Considerando che la resistenza atmosferica diventa sempre più elevata per quote sempre più basse, sicuramente il satellite raggiungerà quota 268 km in meno di 24 ore.
- Alla manovra finale sarà riservato il compito di acquisire i corretti parametri orbitali espressi in tabella 3.1. Un aspetto che non è stato tuttavia considerato, riguarda l'operazione di fasamento ad una longitudine desiderata. Per questo problema si dovrebbe studiare se sia conveniente stabilire a priori l'istante esatto di partenza dalla quota nominale per arrivare direttamente alla longitudine obiettivo, o se si può separare la manovra in due fasi, lasciando l'operazione di fasamento a trasferimento avvenuto.

L'analisi del trasferimento non ha quindi avuto solo lo scopo di stabilire il tempo per raggiungere l'orbita risonante, ma insieme allo studio del mantenimento orbitale ha permesso di comprendere in che misura la spinta di due diversi propulsori ha influenza sui parametri.

3.2.2 Mantenimento orbitale con f_C , f_D , f_T

3.2.2.1 Modello della dinamica nel controllo

Si è fatta notare in precedenza l'importanza di una modellazione corposa, che tenga conto di termini di ordine e grado elevato nello sviluppo del potenziale gravitazionale. Tuttavia, a fronte di alcune prove iniziali con il modello completo, ci si è accorti che i tempi di calcolo si sarebbero protratti a lungo, così per semplificare l'analisi, si è deciso di conservare solo i termini con J_2 e J_3 . Questo costituirà una limitazione dell'algoritmo se si effettua un confronto con l'applicazione in un mondo reale. D'altro canto ciò non inficia né l'ordine di grandezza dei risultati, né la funzionalità della procedura di calcolo.

3.2.2.2 Risultati

Si presentano di seguito tabelle e grafici relativi ad una simulazione eseguita per tre cicli di missione. Le derivate e gli integrali dei termini non conservativi mostrano andamenti complessi come si nota dalla loro rappresentazione per il primo ciclo in figura 3.13. Si osservi ad esempio la derivata in rosso di e , i punti che identificano un cambiamento di segno sono diversi, ma solo nella prima zona è possibile far subire un accrescimento e poi una diminuzione, perché nella

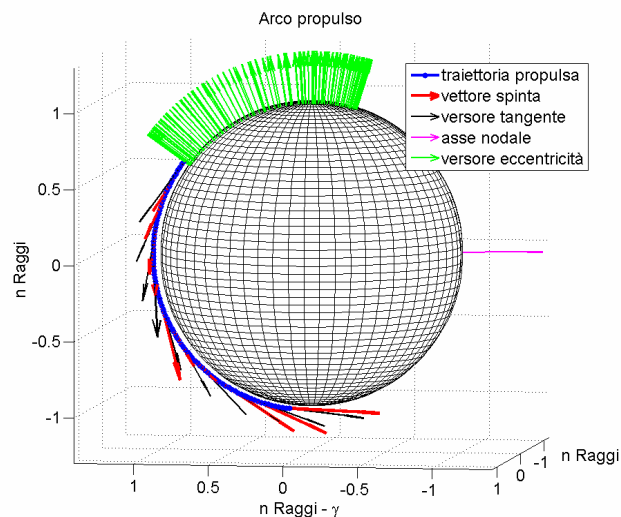


figura 3.12: Rappresentazione dell'arco propulso per la prima manovra nel ciclo 1 (FK5). Il versore eccentricità varia entro lo spazio di piano colorato in verde, ma in realtà l'effettivo scostamento dovuto a spinta e resistenza è di soli 0.06° .

fascia temporale rimanente la derivata sotto l'azione della spinta, assumerebbe solo valori negativi. Inoltre si consideri che esiste una zona proibita, quella in ombra nel caso presentato tra 0.7 e 1 periodo orbitale.

Si osservi ora la derivata di ω , all'interno del periodo consentito può crescere se la manovra è eseguita all'inizio dell'orbita oppure diminuire se la manovra è eseguita a metà orbita. Il movimento seguente fuori dagli archi propulsi è dettato dal solo termine resistivo.

Dal punto di vista degli ordini di grandezza si riscontrano i valori già trovati nel paragrafo 2.2.4 e nel caso appena visto di mantenimento a riferimenti costanti. L'unica differenza sostanziale è soprattutto negli istanti di inizio manovra, nella variazione del modulo e del tempo di spinta.

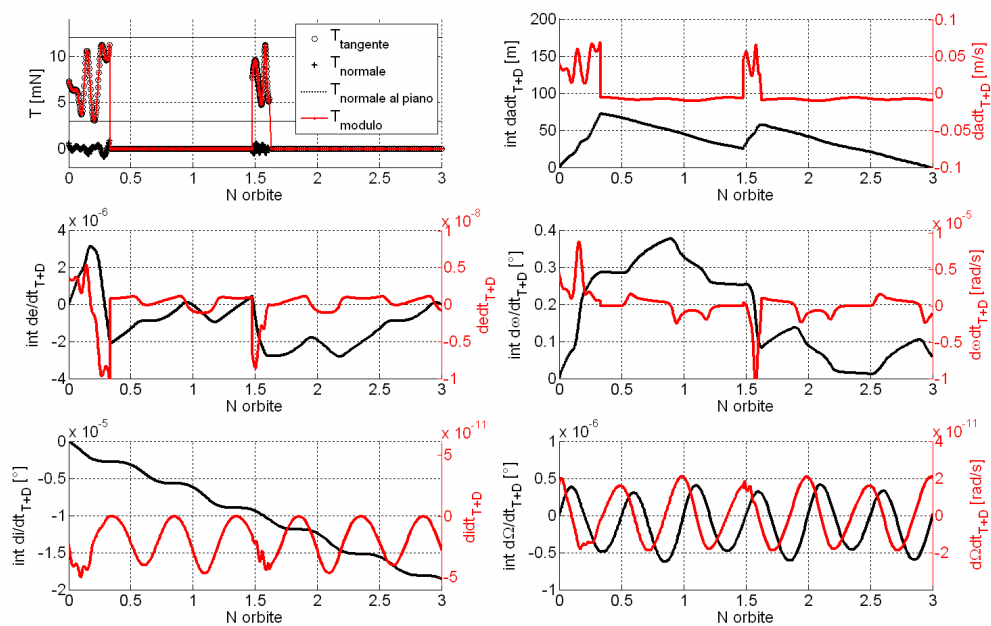


figura 3.13: Spinta soluzione ed evoluzione delle derivate e degli integrali delle parti non conservative.

	$\int \frac{da}{dt}_{T+D}$ [m]	$\int \frac{de}{dt}_{T+D}$	$\int \frac{d\omega}{dt}_{T+D}$ [°]	$\int \frac{di}{dt}_{T+D}$ [°]	$\int \frac{d\Omega}{dt}_{T+D}$ [°]
CICLO 1 $c_I=e$					
Orbita 1	45.3	$\sim 1e-8$	0.33	$-0.6e-5$	$7e-9$
Orbita 2-3	<0.1	$\sim -1e-8$	0.06	$-1.9e-5$	$2e-8$
CICLO 2 $c_I=\omega$					
Orbita 1	38.7	$-9.9e-6$	$<1e-6$	$-2.5e-5$	$2.2e-8$
Orbita 2-3	<0.1	$-1.3e-5$	$<1e-6$	$-3.7e-5$	$4.1e-8$
CICLO 3¹² $c_I=e$					
Orbita 1	41.3	$\sim 1e-8$	0.36	$\sim -1e-8$	$2.3e-8$
Orbita 2	<0.1	$\sim 1e-8$	0.1	$-0.5e-5$	$1.2e-8$

tabella 3.2: Evoluzione dei termini non conservativi nel tempo.

In primo ciclo è dedicato alla minimizzazione della funzione in e , il secondo alla minimizzazione in ω a causa della sua crescita nel ciclo precedente, il terzo ancora in e . Tutti i parametri sono monitorati (tabella 3.2).

Si osservi ora il consumo di massa in tabella 3.3, ogni manovra impiega circa 1 grammo di propellente e se si calcola il propellente totale per l'intera missione si ottiene circa 7.5 kg non marginati solo per il mantenimento orbitale. Questo è all'incirca quello che impiegherebbero i resistogetti per un trasferimento all'orbita risonante, esclusa l'eventuale manovra di risalita. Si confrontino le figure 3.11 e 3.6.

Visti i periodi di manovra, si può pensare di diminuire il periodo del primo arco propulso in modo che si effettuino manovre più bilanciate, la prima manovra è sempre quella più intensa, anche se si lascia sempre la possibilità di arrivare fino al 35% di periodo propulso in caso di attività solare più elevata.

L'ultima considerazione riguarda i tempi di calcolo: purtroppo per ogni minimizzazione, l'algoritmo richiede di norma più di 1 ora di calcolo. Questo costituisce un'altra limitazione e potrebbe non permettere il funzionamento dell'algoritmo direttamente a bordo di un piccolo satellite.

¹² In questo ciclo si è anche imposto il vincolo sul termine non conservativo dell'inclinazione e in particolare con $\zeta=\pm 1^\circ$ visto l'ordine di grandezza della variazione in inclinazione.

	Consumo massa [%/man]	t_{start} [% orbita corrente] ¹³	P_{prop} [%P]	Spinta	Tempi di calcolo
CICLO 1 $c_I=e$					
Orbita 1	4e-4 (1g)	0	34	Variabile in modulo e in direzione	~1 ^h (1 start)
Orbita 2-3	2e-4	47	15	Variabile in modulo e in direzione	~2 ^h
CICLO 2 $c_I=\omega$					
Orbita 1	3.7e-4	31.2	27	Variabile in modulo e in direzione	~1 ^h
Orbita 2-3	2.4e-4	20.1	21	Variabile in modulo e in direzione	~2 ^h
CICLO 3 $c_I=e$					
Orbita 1	3.8e-4	0	32	Variabile in modulo e in direzione	~1.5 ^h
Orbita 2	4.3e-4	0.2	35	Variabile in modulo e in direzione	~2 ^h

tabella 3.3: Parametri caratteristici della soluzione in tre cicli.

3.2.2.3 Definizione del *box* di accettabilità

Se si dovesse definire un *box* di accettabilità delle variazioni dei parametri, allora si può affermare che il semiasse è controllato entro i +100m dall'andamento di progetto, l'eccentricità entro $\pm 1e-5$, l'argomento di perigeo entro i $\pm 1^\circ$, inclinazione e nodo entro angoli ben più piccoli $\sim 1e-4^\circ$ e $\sim 1e-8^\circ$ rispettivamente, intese come variazioni dei termini non conservativi compensati in fasi alterne. Tale *box* non è quindi inteso in termini di 'limiti' ai quali effettuare il controllo, ma esso è generato 'naturalmente' a posteriori.

Deve essere detto che non si può tuttavia definire un "cilindro curvo" di percorrenza fisso entro il quale orbiterà il satellite, poiché i termini spuri fanno evolvere il movimento dell'orbita, scostandola dalla soluzione di progetto, anche a causa del non simultaneo controllo di ogni parametro. Il "cilindro curvo" sarà

¹³ t_{start} , istante iniziale di rilascio dal lanciatore, determina per l'orbita numero 1 il punto di rilascio del satellite dal lanciatore. Per la simulazione lanciata nel caso peggiore di eclisse, esso corrisponde a immettere il satellite ad una anomalia vera di partenza pari a 53° . Considerando tale punto come punto di partenza per il calcolo del numero di orbite, il periodo di eclisse si situa tra il 70% e il 100% del periodo orbitale P.

quindi in movimento, diverso di orbita in orbita. Può questa soluzione andare bene?

I termini spuri che sono indice della differenza tra gli andamenti di riferimento e quelli perturbati privati della parte non conservativa, non influiscono sulla fattibilità della soluzione, rappresentando funzioni crescenti e a media nulla per e e ω .

Anche se l'involuppo del semiasse è controllato, il suo termine spurio non presenta media nulla e questo potenzialmente potrebbe crescere fino alla dimensione massima dell'oscillazione del semiasse stesso, immaginando uno sfasamento, così come quelli di tutti gli altri parametri; L'indagine a riguardo deve essere maggiormente approfondita.

4 Navigazione

4.1 Navigazione GNSS e ricevitore SDR

I GNSS sono costellazioni di satelliti progettate per fornire informazioni di posizione e tempo per utilizzatori sulla Terra o orbitanti nello spazio. Correntemente, il più usato tra le costellazioni GNSS è il GPS che consiste in 24 satelliti nominali, orbitanti su sei piani differenti a 55° di inclinazione e ad una quota media di 2020 km.

Su satelliti per i quali è un requisito di progetto determinare l'orbita e l'assetto in maniera molto precisa, è impiegata una navigazione integrata, che utilizza la combinazione di misure GNSS, con misure da sensori o dal sistema di navigazione inerziale (INS). Quest'ultimo aiuta a mitigare i difetti delle misure GNSS, quali per esempio interferenze radio (RFI) oppure difetti causati dalla necessità di distanziare le antenne di una opportuna lunghezza (si ha anche necessità di particolari ricevitori). La combinazione di entrambi i sistemi produce un miglioramento nella accuratezza e nella robustezza della soluzione relativa alla traiettoria e all'assetto insieme: posizione e velocità del centro di massa, velocità e scostamenti angolari degli assi corpo rispetto ad una terna di riferimento.

Nel caso della missione oggetto dello studio, si dispone di un solo ricevitore GPS, che non fornisce cioè dati utili per la determinazione d'assetto, ma solo per la determinazione della traiettoria. La determinazione d'assetto è calcolata a partire dalle misure dei soli sensori di sole, di stelle e di campo magnetico. La traiettoria sarà quindi stimata indipendentemente dall'assetto.

La minimizzazione dei costi di missione e le dimensioni stesse della piattaforma non avrebbero certo permesso l'adozione di ricevitori GPS molto accurati, per la determinazione anche dell'assetto. Come anticipato nell'introduzione, sarebbe auspicabile infatti adottare un ricevitore completamente software di bassa accuratezza, ad esempio tale da fornire una misura di posizione con accuratezza pari a 100 m a 1σ . Vedremo nel seguito dell'analisi se queste prestazioni possano permettere una buona stima della traiettoria da poter usare per il controllo orbitale.

Il ricevitore GNSS software (o anche chiamato SDR) si dimostra di fatto appetibile per applicazioni satellitari poiché ha dimostrato che molte delle funzioni dell'hardware digitale possono essere eseguite da un software, il quale apre la possibilità di eliminare una componentistica ingombrante, la relativa richiesta di potenza e quindi i costi. Per contro la velocità del software risulta

essere più bassa rispetto al comune circuito hardware e per questo le due soluzioni andrebbero controbilanciate in base alla missione.

4.1.1 Stima della PVT

Un ricevitore GNSS è una combinazione di hardware e software capace di ricevere segnali da diversi satelliti GNSS e di processarli in informazioni di posizione, velocità e tempo (PVT).

Il punto iniziale per determinare la posizione di un ricevitore GNSS è la misura dello *pseudorange* che per il satellite GNSS k-esimo è dato da:

$$\rho^k(t) = r^k(t, t-\tau) + c[\delta_u(t) - \delta^k(t-\tau)] + I^k(t) + T^k(t) + \varepsilon^k(t) \quad \text{eq. 4.1}$$

dove con $r^k(t, t-\tau)$ si intende la distanza geometrica vera tra il ricevitore al tempo di ricezione t , e il satellite trasmettitore k-esimo al tempo di trasmissione $t-\tau$. τ è l'intervallo temporale con cui il segnale compie il tragitto alla velocità della luce nel vuoto c , $\delta_u(t)$ è l'offset temporale tra il tempo del ricevitore e il tempo GPS nell'istante di ricezione e $\delta^k(t-\tau)$ è l'offset temporale del satellite trasmettitore k-esimo relativo al tempo GPS, al tempo di trasmissione. $\varepsilon^k(t)$ raggruppa gli errori non modellati per il satellite k-esimo, come la l'incertezza sulla posizione esatta del trasmettitore, il rumore del ricevitore, gli errori di *multipath* o *radom walk*. Il termine $T^k(t)$ che indica l'errore temporale troposferico, non è considerato e nemmeno il termine $I^k(t)$, relativo all'errore temporale al passaggio del segnale nella ionosfera.

Il ricevitore adottato essendo a singola frequenza, non è in grado infatti di tener conto dell'errore ionosferico, eliminabile invece attraverso un sistema a doppia frequenza. Infatti, indicando le frequenze di trasmissione con f_1 e f_2 , si ottiene:

$$I_{f_1}^k = \frac{f_2^2}{(f_1^2 - f_2^2)} (\rho_{f_2}^k - \rho_{f_1}^k) \quad \text{eq. 4.2}$$

Indicando ora la distanza vera r^k come la norma della differenza tra il vettore posizione del satellite k-esimo e il vettore posizione del ricevitore, l'errore sul clock del ricevitore con b e gli errori *random* totali con $\tilde{\varepsilon}_T^k$, la formula 4.1 si può sinteticamente esprimere come:

$$\rho^k = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_r\| + b + \tilde{\varepsilon}_T^k \quad \text{eq. 4.3}$$

La procedura per la stima della posizione del ricevitore segue quindi l'approccio ai minimi quadrati. Fornendo una buona inizializzazione a x_r e a b , lo *pseudorange* iniziale è dunque:

$$\rho_0^k = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_0\| + b_0 \quad \text{eq. 4.4}$$

La soluzione ai minimi quadrati (LSQ) è:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta b \end{bmatrix} = (G^T G)^{-1} G^T \delta \mathbf{p} \quad \text{eq. 4.5}$$

dove $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ è di dimensioni pari al numero di satelliti in visibilità (al minimo 4), $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0$ e $\delta b = b - b_0$. Si rimanda al rif. [17] per maggiori dettagli.

Per derivazione si potrebbero ottenere le misure di velocità, tuttavia a causa dell'elevata velocità orbitale a quota bassa, le frequenze *doppler* stimate risultano elevate e anche il sistema di *tracking* del segnale GPS presenta delle difficoltà che si traducono in un tempo fisico di attesa prolungata per l'elaborazione del segnale. La velocità del ricevitore calcolata risulta molto rumorosa e per questo si affida la sua stima ad un osservatore ottimo.

La matrice G determina la qualità della posizione dei satelliti rispetto al ricevitore, tramite l'esame del suo rango. Se si definisce la DOP (*dilution of precision*) come il grado con cui la geometria relativa di trasmettitore e ricevitore diluisce l'accuratezza della PVT, allora essa si esprime come:

$$\begin{aligned} GDOP &= \sqrt{H_{11} + H_{22} + H_{33} + H_{44}} \\ PDOP &= \sqrt{H_{11} + H_{22} + H_{33}} \end{aligned} \quad \text{eq. 4.6}$$

dove

$$H = (G^T G)^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & & & \\ & H_{22} & & \\ & & H_{33} & \\ & & & H_{44} \end{bmatrix} \quad \text{eq. 4.7}$$

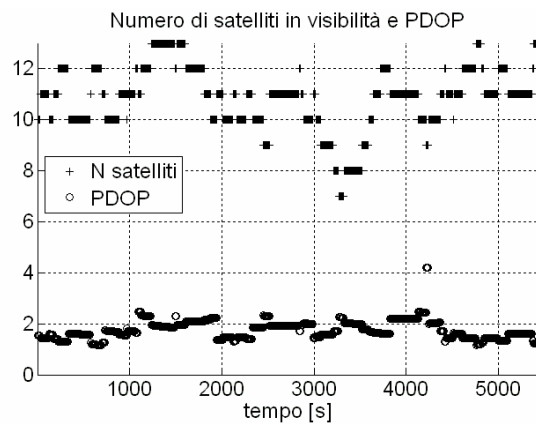


figura 4.1: Dati di numero di satelliti GPS e PDOP dal simulatore GNSS.

4.1.2 Simulatore GNSS & ricevitore

All'interno della Intecs Spa è disponibile un simulatore GNSS (vedi rif. [3] e [8]) formato essenzialmente da tre parti:

- Inizializzazione e propagazione della costellazione GNSS a partire dai TLEs (*two line elements*) di ciascun satellite trasmettitore, da una data UTC con un determinato intervallo temporale di integrazione.
- Definizione dei dettagli lato trasmettitore e lato ricevitore: parametri relativi all'orologio atomico, *bias*, *drift* e *random walk* relativi all'orologio del ricevitore, rumori *random* e di *bias* sullo *pseudorange* e sulla *doppler*. La possibilità di scegliere le caratteristiche proprie di ciascun elemento trasmittente e ricevente rende tale simulatore un poliedrico banco prova piuttosto che capace di una semplice simulazione statica.
- Generazione di un file di osservabili relativi all'orbita del satellite ricevitore, i termini noti dell'equazione 4.1.

Le osservabili sono di seguito processate attraverso il metodo ai minimi quadrati che è stato esposto in precedenza, per ottenere la prima stima della posizione del ricevitore.

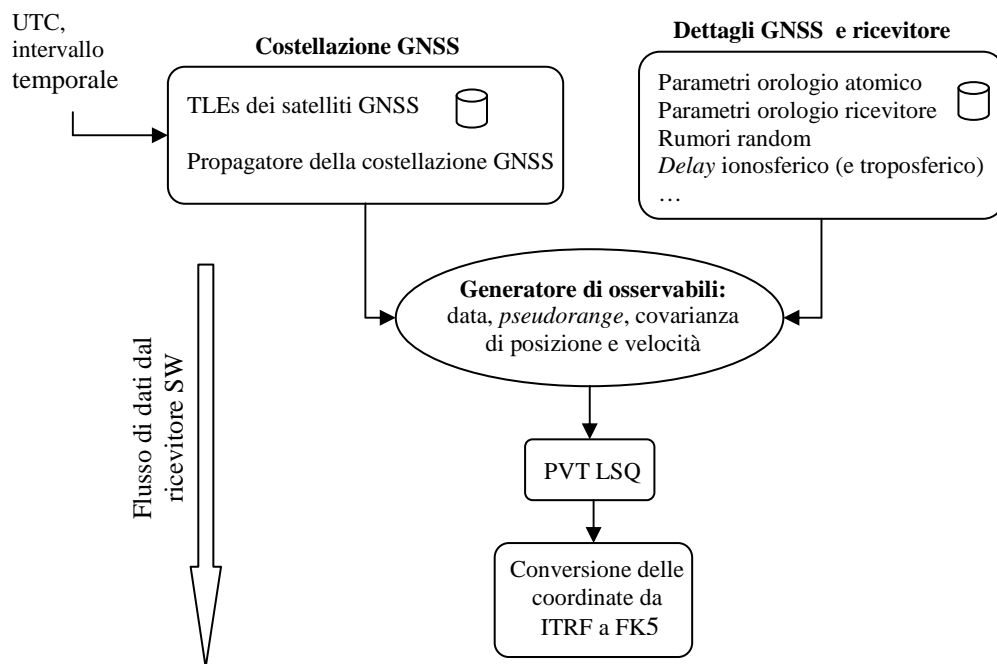


figura 4.2: Simulatore software GNSS e ricevitore.

Infine, I dati in uscita vengono trasformati nel sistema inerziale in cui sono risolte le equazioni.

Il ricevitore GPS software fornisce in questo modo i dati in tempo reale al filtro del sistema di navigazione. Poiché separiamo la determinazione orbitale da quella d'assetto, è sufficiente al minimo costruire un filtro di Kalman, o osservatore ottimo dello stato, a sei dimensioni, tre appartenenti alla posizione e tre alla velocità. Quest'ultimo, lineare o esteso, ricostruisce lo stato utilizzando lo stesso modello della dinamica usato dal programma di calcolo della traiettoria propulsa.

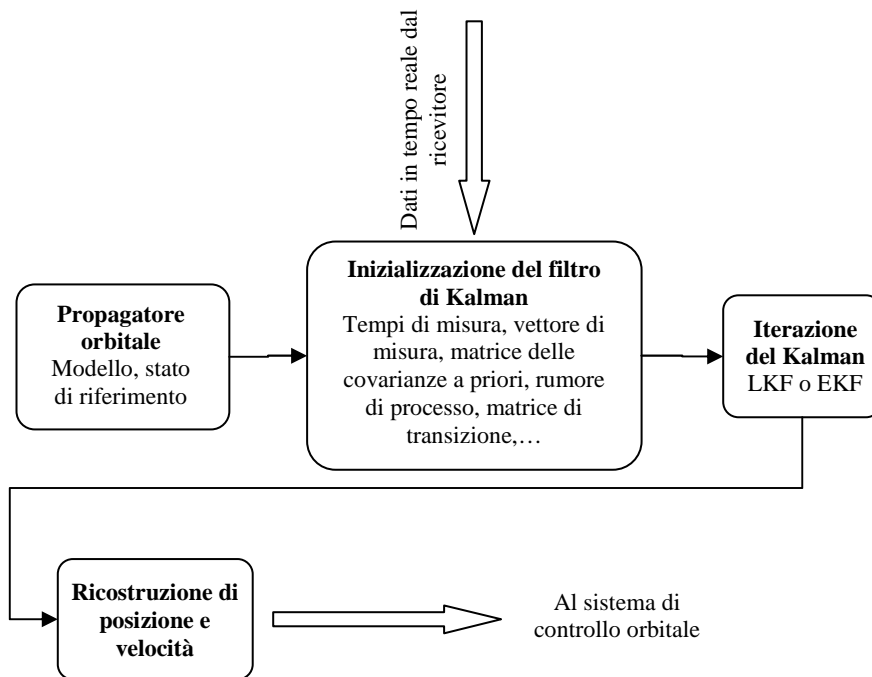


figura 4.3: filtraggio dei dati provenienti dal ricevitore attraverso l'algoritmo di stima sequenziale.

4.2 Processo di stima orbitale

4.2.1 Linearizzazione e equazioni variazionali risolutive

Le equazioni della dinamica che governano il moto di una satellite in orbita bassa possono essere espresse nella forma 2.3. Il modello di potenziale usato per definire f_C è stato definito per fornire soluzioni accurate a breve termine, in particolar modo impostando $n=3$ e $m=3$.

Ora, sia $\mathbf{X} = \{\mathbf{r}(t) \mathbf{v}(t)\}^T$ il vettore stato, dove $\mathbf{r}(t) = \{x \ y \ z\}_{FK5}^T$ e $\mathbf{v}(t) = \{v_x \ v_y \ v_z\}_{FK5}^T$.

L'equazione 2.3 può essere riassunta in una forma più compatta insieme con l'equazione di misura come:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= F(\mathbf{X}, t), & \mathbf{X}(t_k) &\equiv \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Y}_i &= G(\mathbf{X}_i, t_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i; & i &= 1 \dots l \end{aligned} \quad \text{eq. 4.8}$$

Dove \mathbf{X}_k è il vettore incognito 6×1 al tempo t_k , e \mathbf{Y}_i è l'osservazione i -esima 3×1 che deve essere usata per ottenere la miglior stima di $\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_k$ 6×1 . Ricostruiamo quindi il vettore velocità attraverso il filtro di Kalman.

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ rappresenta gli errori nelle osservazioni con media nulla $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k]=0$ e distribuzione di probabilità Gaussiana. La matrice di covarianza è $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_j^T] = R_k \delta_{kj}$, dove $R_k = \sigma^2 = 100^2$. F e G sono funzioni non lineari rispettivamente del vettore stato $\mathbf{X}(t)$ e \mathbf{X}_i (l'indice k è il contatore per lo stato discreto, l'indice i è l'indicatore per le osservazioni).

Sia \mathbf{X} la traiettoria vera e \mathbf{X}^* la traiettoria di riferimento. Dopo aver sviluppato le equazioni 4.8 in serie di Taylor attorno a \mathbf{X}^* , e chiamando $\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^*$ e $\mathbf{y} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}_i &= \tilde{H}_i \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{aligned} \quad \text{eq. 4.9}$$

dove $A(t) = \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \right]^*$ and $\tilde{H}_i = \left[\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} \right]^*$. I termini dello sviluppo di ordine superiore a uno non sono stati considerati. Quindi il problema non lineare di determinazione orbitale 4.8 può essere approssimato alla forma lineare 4.9, nella quale deve essere determinata la deviazione dalla soluzione di riferimento. La soluzione generale per il sistema di equazioni differenziali 4.9 può essere espressa come:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_k) \mathbf{x}_k \quad \text{eq. 4.10}$$

Che esprime il vettore stato deviazione al tempo t in riferimento ad un tempo t_k e allo stato relative \mathbf{x}_k . La matrice $\Phi(t, t_k)$ è chiamata matrice di transizione ed è calcolata risolvendo il problema completo:

$$\dot{\Phi}(t, t_k) = A(t)\Phi(t, t_k), \quad \Phi(t_k, t_k) = I \quad \text{eq. 4.11}$$

$A(t)$ è una matrice 6×6 di coefficienti tempo dipendenti a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0^*$ e \tilde{H}_i 3×6 accomoda lo stato all'osservazione. In forma più estesa:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad \text{eq. 4.12}$$

$$\tilde{H}_i = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$$

Tirando le somme, per risolvere il problema di stima orbitale 4.10 occorre valutare le derivate parziali $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}}$ e $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}}$, dove \mathbf{a} ha la forma 2.3 e in seguito procedere con l'integrazione.

Particolare attenzione si deve riservare a $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}}$ e $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}}$, che sono composte dalle derivate parziali di f_C , f_D , f_T , nel sistema FK5 (le accelerazioni f_{UM} e f_S non sono considerate).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_C}{\partial \mathbf{r}} \right)_{FK5} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_D}{\partial \mathbf{r}} \right)_{FK5} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_D}{\partial \mathbf{v}} \right)_{FK5} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_T}{\partial \Delta \mathbf{v}} \right)_{FK5} \cdot (\text{thrust} > 0) \end{aligned} \quad \text{eq. 4.13}$$

Alle 4.13 si arriva dopo aver effettuato la trasformazione dal sistema di coordinate fisso con la Terra, al sistema inerziale FK5, tramite la trasformazione già espressa in 2.1.1 o seguendo la procedura che si trova in [2].

Un procedimento alquanto laborioso e delicato per ricavare in maniera ricorsiva le

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_C}{\partial \mathbf{r}} \right)_{ITRF} = \sum_{n,m} \frac{\partial \mathbf{f}_{Cn,m}}{\partial \mathbf{r}} \quad \text{eq. 4.14}$$

è stato tradotto in codice Matlab per il quale si rimanda al rif. [2] e [5].

Ad ogni modo, la matrice di transizione tra i due istanti temporali di aggiornamento del filtro può essere ottenuta con un modello di forze ancora semplificato che tiene conto solo della perturbazione dovuta alla asfericità terrestre, come è stato fatto nel software di bordo del ricevitore SW Phoenix-XNS (vedi rif. [4]).

4.2.2 Stima orbitale sequenziale: LKF e EKF

Un metodo di stima orbitale sequenziale è ideale per applicazioni in tempi reali in quanto la matrice di covarianza dell'errore, lo stato di riferimento e di conseguenza lo stesso guadagno di Kalman vengono aggiornati ad ogni intervallo temporale, al contrario di un metodo ai minimi quadrati (o stimatore *batch*) che richiede un intero *set* di misure per trovare lo stato di riferimento a cui riportare le deviazioni sullo stato. Inoltre, utilizzare un filtro di Kalman significa avere la possibilità di definire l'errore dal punto di vista statistico e di ottenere una minimizzazione della varianza dell'errore stesso.

Si richiamano di seguito i passi principali del filtro di Kalman lineare (LKF- *Linear Kalman Filter*) e di seguito di quello esteso (EKF- *Extended Kalman Filter*) in modo da chiarire il significato delle quantità che saranno mostrate nei grafici risolutivi. Per i dettagli di metodi si consulti il rif. [1].

L'LKF è caratterizzato da un'unica traiettoria di riferimento con cui è portato avanti il processo di stima.

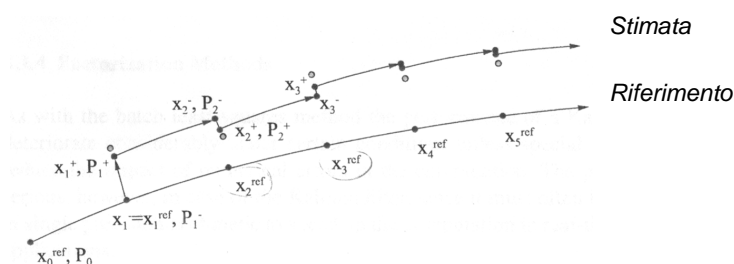


figura 4.4: Schema della procedura di stima orbitale del filtro di Kalman lineare. Con il simbolo (-) è indicata la quantità propagata, con (+) quella stimata.

Dalla stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ e dalla matrice delle covarianze P_{k-1} al tempo precedente $k-1$, si possono ottenere le rispettive propagazioni $\bar{\mathbf{x}}_k$ e \bar{P}_k al tempo k corrente, sfruttando le informazioni provenienti dal propagatore orbitale, e un rumore di processo Q , inserito nella formula della matrice di covarianza per evitare che la stima diverga a causa degli errori introdotti nella procedura di linearizzazione. Il guadagno infatti si avvicinerebbe a zero per $\bar{P}_k \rightarrow 0$ e la procedura di stima diventerebbe insensibile ad ogni osservazione successiva.

Il primo passo di aggiornamento temporale è riassunto quindi nelle:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k &= \Phi(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \bar{P}_k &= \Phi(t_k, t_{k-1})P_{k-1}\Phi^T(t_k, t_{k-1}) + Q\end{aligned}\quad \text{eq. 4.15}$$

Successivamente è calcolata la deviazione dell'osservazione, la matrice che lega lo stato alle osservazioni (H è costante nel nostro caso) e il guadagno di Kalman.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k^* \\ K_k &= \bar{P}_k \tilde{H}_k^T (\tilde{H}_k \bar{P}_k \tilde{H}_k^T + R_k)^{-1} \end{aligned} \quad \text{eq. 4.16}$$

Si intende sottolineare che l'inversione del termine tra parentesi nell'espressione del guadagno è solo una simbologia riportata per brevità, in realtà essa è effettuata attraverso il calcolo di autovalori e autovettori del termine tra parentesi, che deve essere strettamente definito positivo.

Subito dopo avviene l'aggiornamento di misura in cui si determina la stima dello stato al passo corrente k , con una opportuna pesatura dello stato propagato al passo $k-1$ e della deviazione dell'osservazione. Per la matrice di covarianza si utilizza una formula particolare in modo da ottenere una matrice sempre simmetrica: a causa di errori numerici questa infatti potrebbe perdere le sue proprietà di simmetria e di definizione positiva e divenire non definita positiva.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{\mathbf{x}}_k + K_k (\mathbf{y}_k - \tilde{H}_k \bar{\mathbf{x}}_k) \\ P_k &= (I - K_k \tilde{H}_k) \bar{P}_k (I - K_k \tilde{H}_k)^T + K_k R_k K_k^T \end{aligned} \quad \text{eq. 4.17}$$

Infine lo stato di riferimento \mathbf{X}_k^* diventa \mathbf{X}_{k-1}^* .

Di seguito sono riportati i grafici di soluzione relativi alle deviazioni in posizione e in velocità ricostruite con un LKF. Si tratta risultati ottenuti assumendo una dinamica completa con $n=3$ e $m=3$, contornata delle trasformazioni di coordinate opportune. I dati in ingresso provenienti dalla stima LSQ del ricevitore, sono stati qui creati in maniera artificiale per testare e validare l'algoritmo, in previsione della fase successiva in cui si sarebbero dovuti impiegare dati veri, realmente processati a priori dal simulatore GNSS e dal ricevitore software.

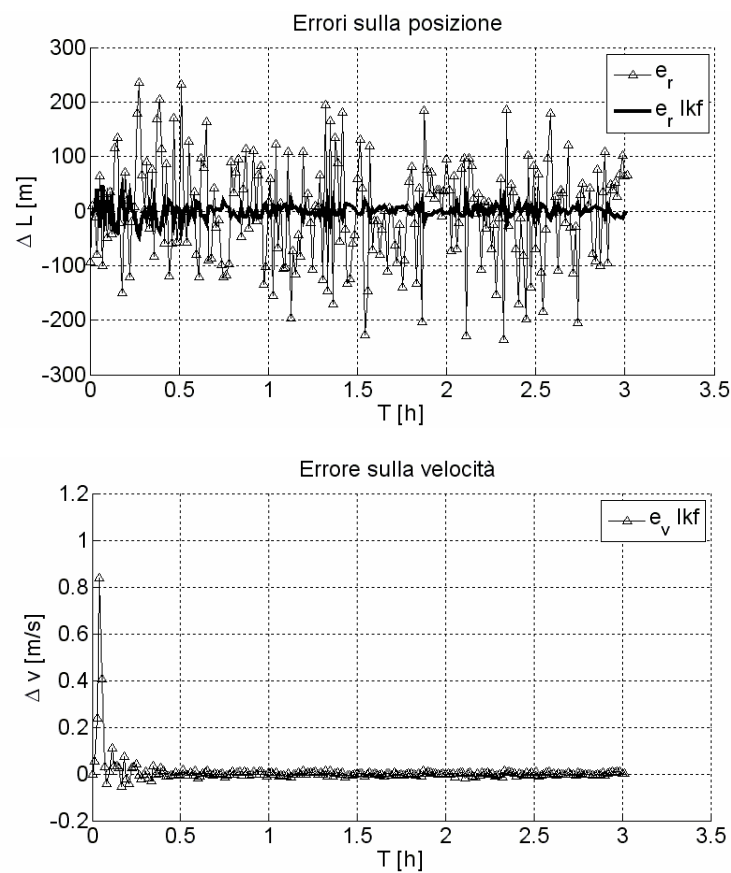


figura 4.5: errori sulla posizione e velocità stimate usando un LKF e un intervallo di osservazione pari a 50s.

Dopo una fase di acquisizione di circa 45 min il filtro raggiunge una prestazione stazionaria: la deviazione standard dell'errore sulla posizione filtrato si avvicina a 10 m, mentre l'errore sulla velocità si avvicina a 0.007 m/s. Inoltre dalla figura 4.5 si evince che la traccia della matrice di covarianza decade esponenzialmente, pur arrestandosi a regime ad un valore costante, indice del rumore di processo inserito.

A questo punto si può verificare che impatto hanno queste variazioni di posizione e velocità sulla stima dei parametri orbitali visto che il controllo orbitale è basato su di essi.

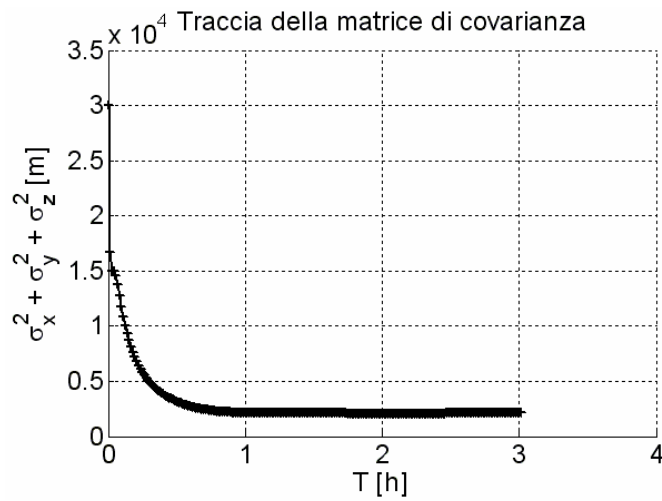


figura 4.6: Andamento della traccia della matrice di covarianza.

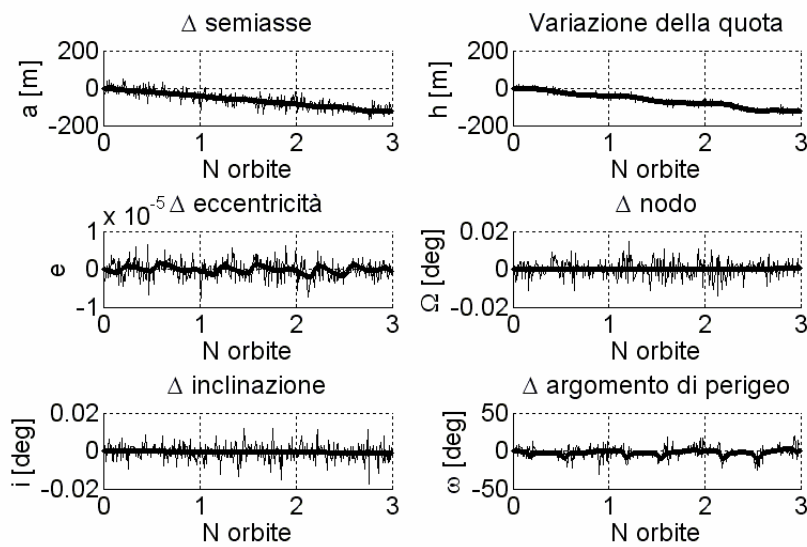


figura 4.7: differenza tra i parametri orbitali della traiettoria perturbata da quella di riferimento.

Provando a rappresentare in grafico la differenza tra i parametri orbitali perturbati ottenuti attraverso la stima orbitale e quelli della traiettoria non perturbata, si nota che:

- Il decadimento della quota e del semiasse è facilmente osservabile, nonostante il rumore di misura, grazie alla caratteristica di essere monotono decrescente.

- Se si dovessero calcolare direttamente le derivate di eccentricità e argomento di perigeo istante per istante, questo produrrebbe un andamento non leggibile visto il livello di rumore nella figura 4.6.

A fronte di queste considerazioni si può affermare che il controllo del semiasse con un ricevitore software poco accurato è ancora possibile a patto di utilizzare un metodo sequenziale; viceversa il controllo pianificato nel capitolo 2 sugli altri parametri orbitali risulta difficoltoso poiché è difficile apprezzare le corrette variazioni. Si deve quindi arrivare a livelli di accuratezza migliori.

L'altra versione dell'algoritmo sequenziale di Kalman è l'estesa; essa offre maggiori prestazioni, per via della sua robustezza alle non linearità a scapito dell'impiego di un maggior tempo di calcolo. La traiettoria di riferimento in questo caso è aggiornata ad ogni passo temporale, per ottenere la miglior approssimazione della traiettoria vera. Il riferimento aggiornato al passo k , si avvale della stima calcolata al passo k :

$$\mathbf{X}_k^{*nuovo} = \hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k^* + \hat{\mathbf{x}}_k \quad \text{eq. 4.18}$$

I passaggi caratteristici del ciclo di Kalman sono del tutto simili a quelli già elencati in precedenza.

Questa tipologia di filtro è stata impiegata in una simulazione completa a partire dalla propagazione dei satelliti GNSS, passando attraverso la stima della PVT del ricevitore di bordo e per finire eseguendo l'algoritmo di stima orbitale.

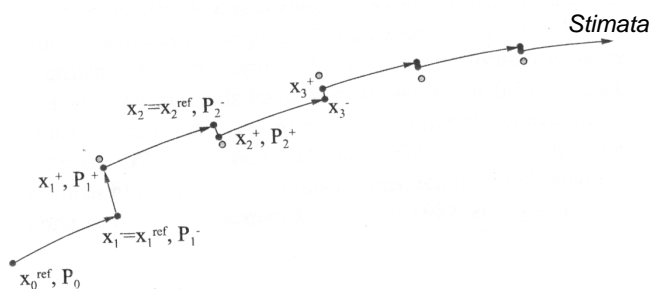


figura 4.8: Schema della procedura di stima orbitale del filtro di Kalman esteso.

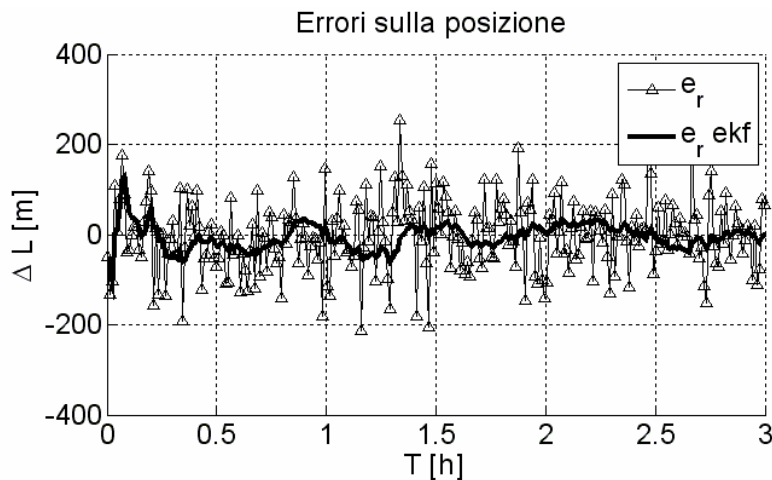


figura 4.9: errori sulla posizione utilizzando un EKF con un intervallo di 60 s e il simulatore GNSS completo illustrato in figura 4.1.

Il filtro di Kalman esteso risulta sensibile alle variazioni locali sulla traiettoria ma fornisce le medesime prestazioni del lineare. Si noti che l'intervallo di osservazione non dovrà essere aumentato perché ciò provocherebbe una crescita nelle oscillazioni e sul livello di rumore. Viceversa osservazioni più frequenti (e più accurate) portano la soluzione a convergere più velocemente e in maniera precisa.

4.3 Assetto

Nonostante l'obiettivo applicativo reale sia la creazione di un software di navigazione autonoma, in questo lavoro si è voluta affrontare solo la stima dell'orbita utilizzando il ricevitore GPS ed escludendo la parte di elaborazione dei segnali provenienti dai sensori di stelle per la determinazione d'assetto. Inoltre, lo studio principale all'interno dello studio si proponeva di osservare e dimostrare se un ricevitore di basso costo avrebbe potuto soddisfare la richiesta di accuratezza del sistema di controllo orbitale.

La procedura di determinazione dell'assetto si può considerare uno standard di implementazione e non è diversa da qualsiasi altra missione. Naturalmente l'accuratezza dei sensori di stelle deve essere molto spinta, al di sotto dei 0.01° visti i requisiti sul puntamento definiti in 1.2.1 (standard di accuratezza tra 0.0003° e 0.01°). Le ruote di reazione dovranno altresì garantire la finezza nel puntamento sia nella fase di osservazione sia in quella propulsa. Anche la simulazione dell'attuazione è stata trascurata.

In questa sede il problema dell'assetto è stato limitato al progetto del sistema di controllo con stato accessibile e a *set-point* costante o variabile.

La dinamica a cui si fa riferimento è quella delle equazioni di Eulero scritte nel sistema principale d'inerzia, parametrizzate con angoli di Eulero 231 e alternativamente 312, con coppie di gradiente di gravità.

Con riferimento a [18] e alla figura 1.3, le equazioni della dinamica libera attorno al centro di massa si esprimono come:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y = 3n^2 (I_z - I_y) c_3 c_2 \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = 3n^2 (I_x - I_z) c_1 c_3 \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = 3n^2 (I_y - I_x) c_2 c_1 \end{cases} \quad \text{eq. 4.19}$$

dove n è la velocità angolare orbitale e c_1 , c_2 e c_3 sono i coseni direttori del vettore posizione rispetto agli assi inerziali. Come noto, si passa prima attraverso la parametrizzazione con gli angoli di Eulero e in secondo luogo linearizza attorno ad una posizione di equilibrio, in questo caso per quanto riguarda le velocità angolari: $\{\omega_x \ \omega_y \ \omega_z\}^T = \{0 \ 0 \ \bar{\omega}_z\}^T$ in quanto il satellite deve eseguire un puntamento a nadir e la velocità angolare in z deve essere pari alla velocità angolare orbitale. Per quanto concerne invece gli angoli, occorre riferirsi alla terna orbitale, l'obiettivo è $\{\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z\}^T = \{0 \ 0 \ 0\}^T$. Poiché si ottiene il disaccoppiamento dell'equazione in beccheggio rispetto alle altre due, si è deciso quindi di calcolare il controllo in x e in y separatamente da quello in z .

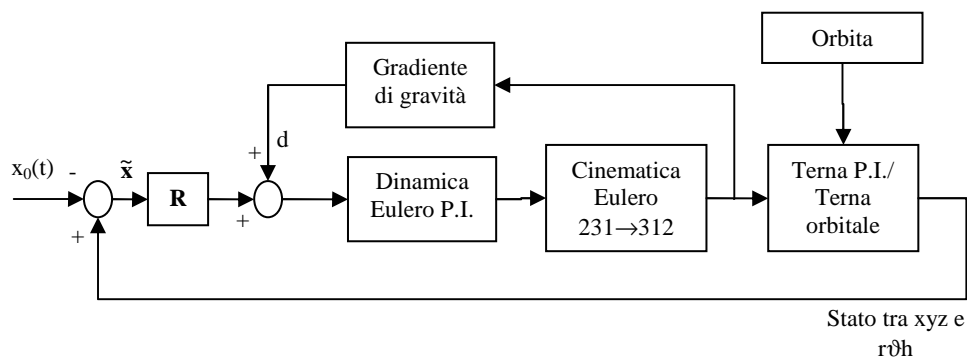


figura 4.10: Schema del controllo d'assetto.

Controllo in imbardata e rollio

Riscriviamo le equazioni 4.19 nella forma agli stati $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}$, linearizzata, dove la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ 4x4 include anche i termini dovuti alle coppie di gravità, e in cui è stato aggiunto il termine $\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}}$ 2x1 che costituisce il vettore delle coppie di controllo. In questa analisi si sono escluse altre forme di disturbo,

come il disturbo magnetico che a quote basse agisce in maniera importante, ma si stima che il suo livello sia inferiore a quello del gradiente di gravità. L'analisi in corso è quindi consistente con la realtà.

Definiamo lo stato $\tilde{\mathbf{x}}$ come:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \dot{\alpha}_x \\ \alpha_y \\ \dot{\alpha}_y \end{Bmatrix}$$

dove $\tilde{\mathbf{x}}$ 4x1 rappresenta gli scostamenti angolari e di velocità rispetto alla condizione di equilibrio, e α e $\dot{\alpha}$ si riferiscono agli angoli e alle velocità tra la terna principale d'inerzia e la terna orbitale $r\vartheta h$. Quanto spiegato è chiarito dallo schema 4.9.

Il sistema lineare MIMO appena scritto risulta controllabile e si può utilizzare il comando *place* di Matlab per calcolare la matrice dei guadagni \mathbf{K} in modo che alla matrice del sistema sotto controllo $\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$ siano assegnate le posizioni volute di poli e zeri. Nella fattispecie scegliendo due poli complessi coniugati a parte reale negativa con smorzamento pari a 0.707 e modulo 0.01 (dello stesso ordine di quelli del sistema libero) e due a parte reale negativa pari a -0.003 e -0.04 si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -n^2 K_x & 0 & 0 & -n(K_x - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -n(1 - K_y) & -n^2 K_y & 0 \end{bmatrix} \quad (4 \times 4)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} \end{bmatrix} \quad (4 \times 2)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0.021 & 4.401 & 0.009 & -2.728 \\ 0.001 & -0.375 & 0.008 & 1.476 \end{bmatrix} \quad (2 \times 4)$$

dove $K_x = (I_z - I_y)/I_x$ e $K_y = (I_z - I_x)/I_y$.

Controllo in beccheggio

Per il controllo in beccheggio si è invece utilizzato un controllo proporzionale derivativo. La procedura classica per il calcolo delle costanti è indicata sotto nelle 4.20. Entrambi quindi i metodi adottati per il controllo su xy e z , sono di carattere sub-ottimale e potrebbero essere migliorati attraverso tecniche di controllo ottimo. Tuttavia il controllo qui progettato iterando sui moduli dei poli al fine di ottenere una soluzione soddisfacente del punto di vista delle prestazioni, è capace di rientrare nei requisiti.

$$\begin{aligned}
 \omega_n &= 50n \\
 \xi &= \cos(45^\circ) \\
 \tau &= \frac{2\xi}{\omega_n} && \text{eq. 4.20} \\
 k_P &= I_z \omega_n^2 = 0.422 \\
 k_D &= k_P \tau = 10.35
 \end{aligned}$$

Si riportano ora i risultati del controllo che agisce in due fasi successive: la prima in cui sono dati degli scostamenti arbitrari elevati allo stato iniziale per verificare che il controllo agisca anche per scostamenti non infinitesimi dallo stato di equilibrio, la seconda in cui è assegnato ad α_z il profilo di controllo ricavato dall'algoritmo di controllo orbitale.

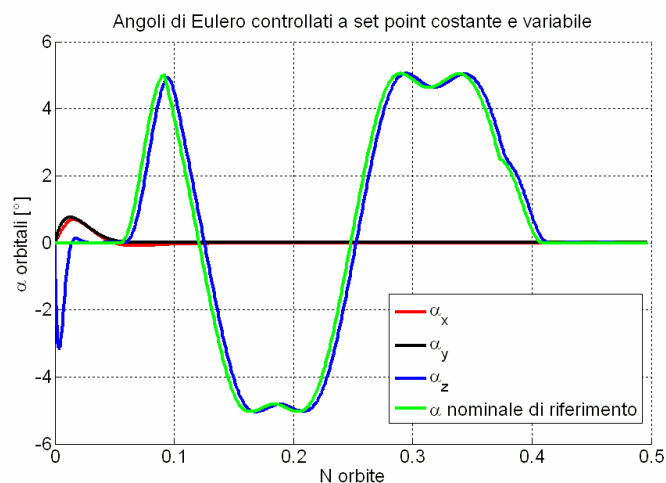


figura 4.11: Applicazione del controllo sugli angoli di Eulero.

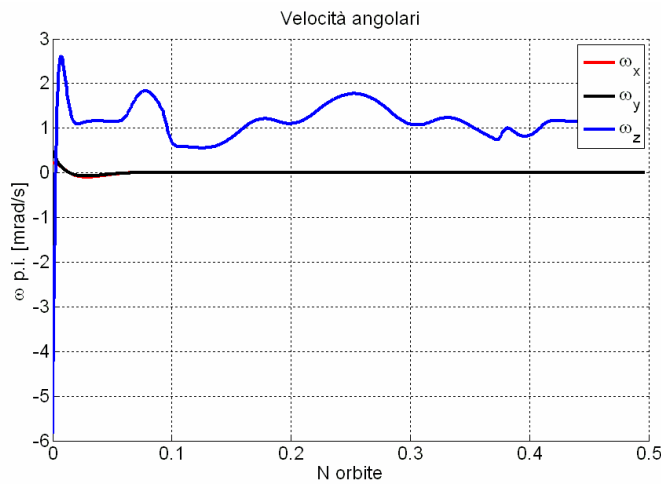


figura 4.12: Andamento delle velocità angolari nelle due fasi successive.

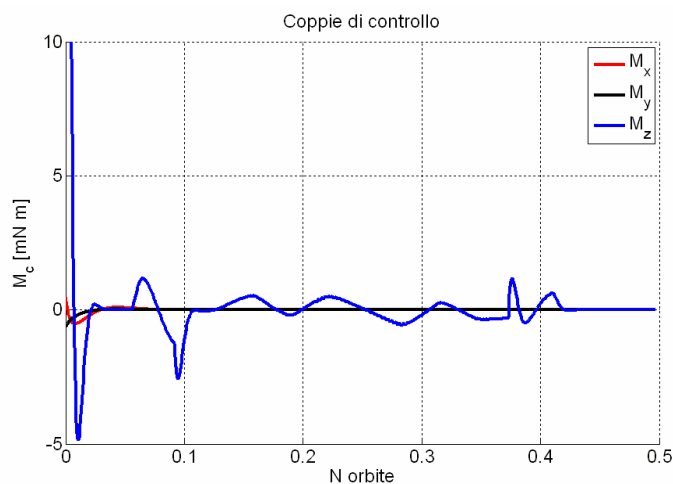


figura 4.13: Andamento delle coppie di controllo nelle due fasi successive.

Dai grafici si nota che:

- Gli angoli di Eulero e le velocità sono controllati nella fase iniziale entro i 5 minuti. Insieme subiscono delle sovraelongazioni iniziali dovute allo stato di partenza, ma i rispettivi andamenti si smorzano in maniera adeguata come stabilito dallo smorzamento ξ . α_x α_z α_z a regime scendono sotto i $2e^{-4}$, si può affermare che il sistema di controllo è in grado di garantire le accuratezze di puntamento richieste sugli scostamenti angolari.

- Durante la fase propulsa, α_z insegue senza problemi il riferimento. In seguito però all'introduzione di poli a parte reale negativa, si è introdotto un ritardo di fase; si riscontra infatti un ritardo di circa 20 secondi tra i due andamenti, che influirà sulla dinamica di attuazione successiva. Se in alcune fasi operative ci sarà bisogno di eseguire un *tilting* per incrementare il tempo di integrazione dell'immagine, questo non costituirebbe un problema né critico né delicato per l'assetto.
- Esclusa la parte iniziale, la richiesta di coppia del comando dell'assetto per la fase propulsa rimane sotto i 5 mNm per M_z . Di conseguenza si potrebbero scegliere le 4 ruote di reazione in configurazione a tetraedro con le seguenti caratteristiche:

Momento della quantità di moto [Nms]	Coppia massima (campo lineare) [mNm]	Velocità angolare massima [rpm]	Massa [kg]
0.04-0.12	5	2800	0.7

tabella 4.1: caratteristiche delle ruote di reazione.

4.4 Accuratezza orbitale

Già nel paragrafo 2.2.2 ci è resi conto di quanto possa valere in termini di accuratezza sulla posizione, la costruzione delle corrette trasformazioni di coordinate, seppur passando attraverso un procedimento laborioso e complesso, e di quanto le armoniche del potenziale terrestre possano avere influenza sulla soluzione.

La costruzione di un modello dettagliato della dinamica e dei suoi disturbi offre alla successiva fase di stima orbitale un ottimo riferimento. Se così non fosse, all'errore di accuratezza del ricevitore GPS si dovrebbe obbligatoriamente sommare un errore di modello, crescente nel tempo.

Immaginiamo ora di possedere un modello della dinamica estremamente dettagliato e un ricevitore molto accurato.

Se questa dinamica fosse propagata nel tempo e se fosse quindi calcolato il movimento dello stato e dei parametri orbitali, questo coinciderebbe, al limite, con il movimento ricostruito a valle del processo di stima orbitale?

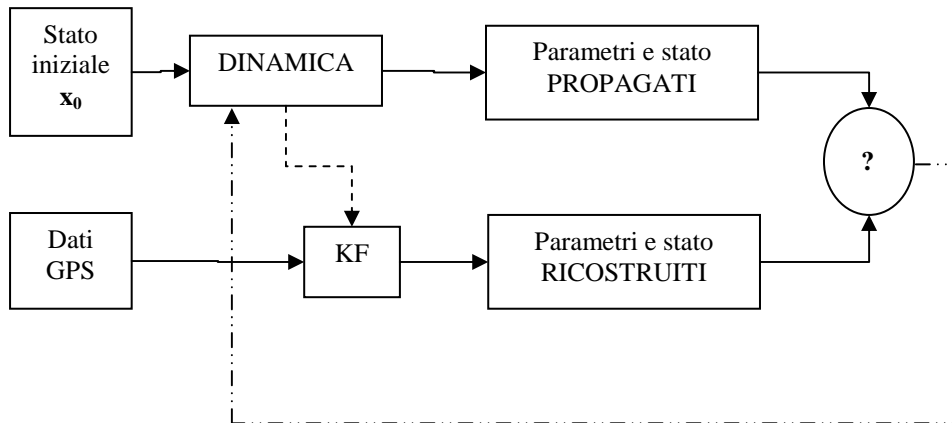


figura 4.14: Schema di taratura.

Pensiamo alla situazione in cui la resistenza atmosferica non è correttamente modellata. Sicuramente se la stima dell'orbita è accurata e fa fede alle misurazioni sequenziali, si apprezzerrebbe la differenza tra i due stati soluzione. Allora per far combaciare i risultati si potrebbe pensare di stimare il parametro non correttamente modellato e di tarare in questo modo la dinamica intrinseca, anche con l'aiuto di sensori accelerometrici.

Se invece consideriamo l'influenza di un'accelerazione imprevista e di breve durata, si ipotizza che la dinamica debba essere inizializzata periodicamente da un nuovo stato per non perdere l'accuratezza desiderata.

In alcuni casi si potrebbe anche risolvere numericamente il problema di Gauss-Markov che procede nella stima orbitale tenendo conto di accelerazioni non modellate (vedi rif. [1]).

In ogni caso ci si dovrebbe scontrare con i tempi di calcolo e questo processo, come anche il calcolo del mantenimento orbitale potrebbe essere agevolmente gestito da Terra piuttosto che da un software di bordo orbitante.

Se anche il modello fosse perfetto e nessuna accelerazione imprevista agisse, l'accuratezza della stima orbitale sarebbe dipendente dai seguenti fattori:

- Errori di troncamento e di semplificazione di un problema matematico.
- Errori di arrotondamento per via dell'aritmetica finita dei computer.
- Errori nei parametri usati nella dinamica del sistema fisico (non precisa conoscenza).
- Tipo, mole e accuratezza dei dati GPS o di tracciamento da Terra.

Anche determinare la vera accuratezza della soluzione del problema di determinazione orbitale è difficile e solo comprendere il livello degli errori in gioco permette di stimare una buona matrice di covarianza e di errore di processo.

Conclusioni

L'analisi condotta è stata articolata sotto diversi aspetti: si è approfondita l'analisi di missione di un mini satellite LEO per osservazione della Terra, con rilevanza particolare allo studio dell'orbita, della copertura a terra e dei sistemi di controllo orbitale a d'assetto.

Si sono gestite in merito le equazioni variazionali già note dalla meccanica orbitale in maniera utile e fruttuosa per sviscerare una possibile soluzione ad un problema non semplice: compensare gli effetti introdotti dalle accelerazioni non conservative di spinta e resistenza atmosferica.

A causa dei vincoli imposti dalla missione, è stata infatti necessaria la creazione ex-novo di uno schema sequenziale di controllo dei parametri, soprattutto di quelli maggiormente afflitti da variazioni: il semiasse, indice dell'energia orbitale, l'eccentricità indice della forma, e dell'argomento di perigeo, che identifica dell'orientamento dell'asse focale.

E' stato dimostrato attraverso i risultati che l'orbita manterrà le sue caratteristiche di elio-sincronismo e di *frozen*. D'altro canto l'algoritmo presenta alcune limitazioni dal punto di vista dei tempi di calcolo, del modello, e della gestione dei termini spuri, che richiederanno approfondimenti futuri.

I tempi di calcolo di fatto non sono adatti all'implementazione degli algoritmi su un software di bordo e dovrebbero dunque essere riscritti in un linguaggio di programmazione più veloce. Se ancora i tempi non fossero adeguati, bisognerebbe rinunciare all'autonomia del satellite e affidarsi obbligatoriamente al calcolo da Terra.

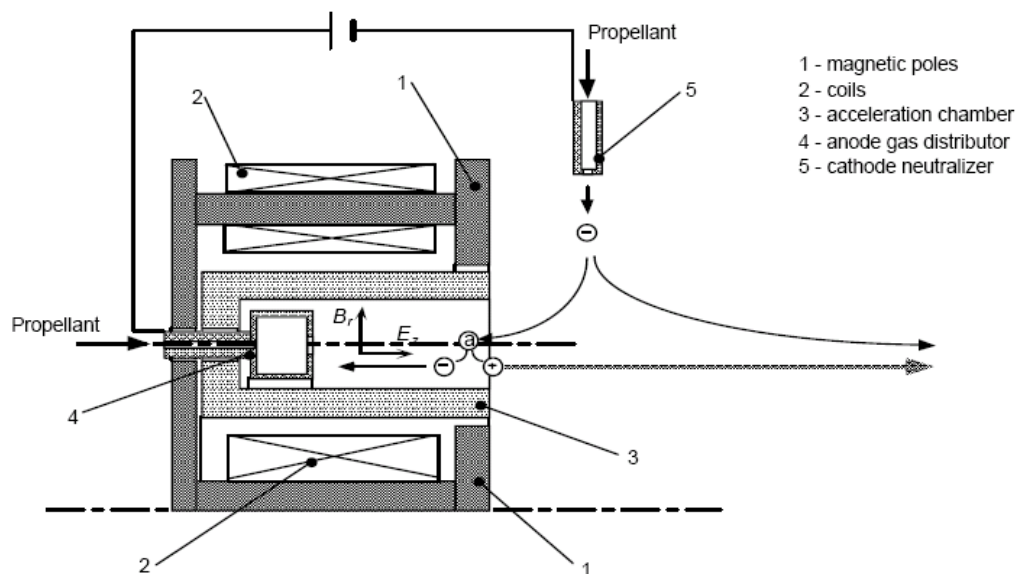
Il secondo aspetto su cui si è concentrata l'analisi, è stato l'utilizzo di un ambiente test preesistente per l'acquisizione e gestione del segnale GNSS, che si interfacciasse con un primordiale algoritmo di navigazione. Anche se è stato calcolato solo il processo di determinazione orbitale, si è potuto valutare che un ricevitore a basso costo non sarà sufficiente per fornire tutte le informazioni utili per il controllo orbitale.

Infine, ma non per importanza secondaria, si è acquisita consapevolezza e conoscenza nei riguardi dei dettagli dell'ambiente di calcolo e degli errori relativi alle approssimazioni del modello.

Appendice A

Descrizione del propulsore ad effetto Hall

I propulsori ad effetto Hall basano il loro principio di funzionamento sull'accelerazione di un fluido di lavoro opportunamente ionizzato da parte della mutua azione della sovrapposizione di un campo magnetico e di un campo elettrico ortogonali tra loro e diretti rispettivamente radialmente e lungo l'asse del propulsore solitamente realizzato con simmetria cilindrica. Il gas generalmente utilizzato è Xenon in virtù delle sue caratteristiche di elevata massa atomica e basso potenziale di ionizzazione, ma anche altri gas nobili come Argon e Krypton possono essere utilizzati come propellenti. Il campo magnetico viene generato da un opportuno circuito magnetico costituito da bobine percorse da corrente elettrica e da elementi ferromagnetici per indirizzare le linee del campo nella zona di introduzione del propellente; il campo elettrico invece viene inizialmente generato dalla differenza di potenziale mantenuta tra un elettrodo esterno al motore (catodo), polarizzato negativamente, e un elettrodo positivo interno al motore (anodo).



Schema di funzionamento del motore a effetto Hall.

Una corrente elettronica viene emessa dal catodo in modo che fluisca in modo pressoché assiale verso l'anodo. Quando gli elettroni penetrano all'interno del motore e risentono del campo magnetico radiale, rimangono intrappolati nella zona di massima intensità del campo magnetico, che annulla praticamente il loro moto verso l'anodo e impartisce loro invece una velocità azimutale (ortogonale al campo magnetico e al campo elettrico), creando così per effetto Hall, una corrente elettronica circonferenziale all'interno del propulsore. Questa scarica, costituita da una elevata densità di elettroni ad elevata energia (tipicamente $10\div 100\text{eV}$), permette la ionizzazione del propellente, generalmente iniettato nel motore attraverso una camera di distribuzione anulare costituita dallo stesso anodo, mediante l'urto degli elettroni con gli atomi neutri del gas di lavoro. Inoltre, la distribuzione di elettroni nella scarica produce un effetto di carica spaziale negativa ("catodo virtuale") che genera una differenza di potenziale con l'anodo permettendo l'accelerazione degli ioni prodotti. Per questo motivo i propulsori ad effetto Hall sono stati anche definiti come motori a ioni senza griglia. Come per i motori a ioni, la velocità degli ioni sarà proporzionale alla radice quadrata del potenziale di scarica, V_d , secondo l'equazione:

$$v_i = \sqrt{\frac{2Zq_iV_d}{m_i}}$$

dove Z è lo stato di ionizzazione della particella, q_i la carica e m_i la massa dello ione.

Gli ioni accelerati dalla differenza di potenziale non risentono dell'azione del campo magnetico poiché percorrono traiettorie pressoché rettilinee dirette prevalentemente lungo l'asse del motore. Gli elettroni creati nella ionizzazione del propellente contribuiscono ad alimentare la corrente azimutale e quindi a mantenere il funzionamento del motore, presentando un moto di deriva verso l'anodo per la presenza del campo elettrico a causa degli urti con gli atomi neutri. Una volta raccolti dall'anodo questi elettroni sono di nuovo forniti al catodo esterno attraverso un opportuno generatore di tensione, ed emessi in modo da mantenere la neutralità macroscopica del satellite e del plasma prodotto dal motore.

I principali vantaggi del propulsore ad effetto Hall consistono essenzialmente:

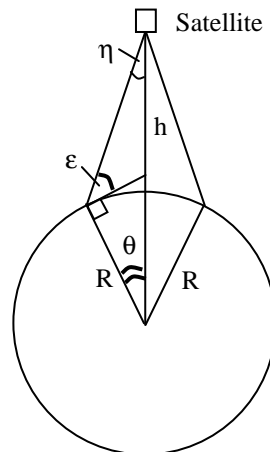
- nell'efficacia del processo di ionizzazione del propellente, prodotto dalla stessa corrente di scarica, senza la necessità di introdurre un opportuno elemento di ionizzazione (come invece avviene nei propulsori elettrostatici) che ridurrebbe il rendimento del motore.

- nella pressoché totale neutralità del plasma prodotto all'interno del propulsore, che quindi nonostante utilizzi in definitiva un processo accelerativo elettrostatico (come spesso viene classificato, a dispetto della presenza di un campo magnetico) non presenta nessuna limitazione per effetto di carica spaziale come i normali propulsori elettrostatici.
- i livelli di potenza disponibili a bordo dei satelliti, e l'elevato rendimento di spinta di questi motori (intorno al 50÷60%) permettono di ottenere impulsi specifici dell'ordine di 2000-3000 secondi, considerati ottimali per molte missioni in cui è vantaggioso l'uso della propulsione elettrica.
- mancanza di elettrodi immersi nel plasma soggetti a erosione e a possibili perdite di isolamento elettrico.

Questi punti di forza della propulsione a effetto Hall rispetto a quella elettrotermica, elettrostatica classica e magnetoplasmadinamica unitamente alla maturità della tecnologia di costruzione di questi motori, mettono i motori ad effetto Hall in una posizione privilegiata per le future applicazioni.

Appendice B

Basi dell'analisi di *coverage*



Geometria della copertura.

Si definisce:

η = angolo conico

ϵ = angolo di elevazione del cono di vista del satellite

θ = angolo sottostante il cono di vista definito da centro della Terra

R = raggio della Terra

h = quota

FOV = campo di vista = 2η

FOR = $2R\theta$

L'equazione caratteristica del *coverage* che relaziona gli angoli in figura è:

$$\cos(\theta + \epsilon) = \frac{\cos(\epsilon)}{1 + \frac{h}{R}}$$

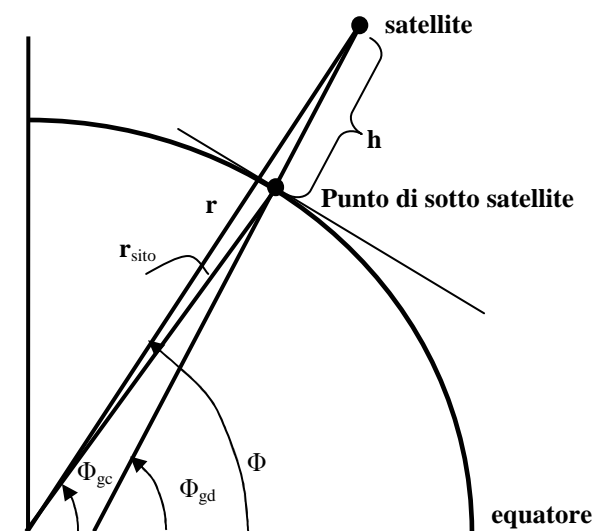
e in particolare:

$$\eta = 90^\circ - \epsilon - \theta$$

Appendice C

Modello WGS-84

Ci riferiamo ad un modello “schiacciato ai poli” della Terra o “*oblate*” che usa l’asse minore per la rotazione della figura piana che genera l’ellissoide di rivoluzione. Assumiamo quindi che la forma della Terra sia approssimativamente una sfera schiacciata ai poli (a,a,b) dove il semiasse maggiore eguaglia il raggio equatoriale e il semiasse minore eguaglia il raggio polare. Essa è diversa dal “geoide” terrestre, o livello medio del mare, in quanto questo è una superficie a potenziale rispetto alla quale un filo a piombo è sempre perpendicolare. Qualche problema si incontra nella definizione di latitudine, importante nel calcolo dei termini del potenziale gravitazionale. La latitudine geocentrica Φ_{gc} , è l’angolo al centro della Terra misurato tra il piano dell’equatore e il punto di sotto satellite o luogo d’interesse. La latitudine geodetica Φ_{gd} è l’angolo tra il piano equatoriale e la normale alla superficie dell’ellissoide. La quota è la distanza tra satellite e punto di sotto satellite sulla semiretta che identifica Φ_{gd} .



Definizione di latitudine geocentrica, latitudine geodetica e quota.

n	m	C_{nm}	S_{nm}
2	0	-1.08263e-03	0
3	0	2.53215e-06	0
4	0	1.61099e-06	0
2	1	0	0
2	2	1.57474e-06	-9.02376e-07
3	1	2.19467e-06	2.70957e-07
3	2	3.09684e-07	-2.1212e-07
3	3	1.00079e-07	1.97346e-07
4	1	-5.08001e-07	-4.49869e-07
4	2	7.78096e-08	1.46639e-07
4	3	5.92668e-08	-1.19e-08
4	4	-3.94816e-09	6.54004e-09

Espansione dei coefficienti dello sviluppo del potenziale gravitazionale fino al grado $n=4$ e ordine $m=4$. Si rimanda a [10] per la prosecuzione.

Costanti caratteristiche terrestri per il modello WGS-84

$$K_t = 3.986005e+14 \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$R_t = 6378.137 \text{ km (medio di riferimento)}$$

$$b_{\oplus} = 6356.751 \text{ km}$$

$$f_{\oplus} = 0.003352 \text{ (flattening)}$$

$$e_{\oplus} = 0.08182$$

$$\omega_{\oplus} = 7.292115e-5 \text{ rad/s}$$

$$m_{\oplus} = 5.973e+24 \text{ kg}$$

Lista degli acronimi

<i>HET</i>	<i>Hall Effect Thruster</i>
<i>SDR</i>	<i>Software Defined Radio</i>
<i>EP</i>	<i>Electric Propulsion</i>
<i>TRL</i>	<i>Technology Readiness Level</i>
<i>TIR</i>	<i>Thermal infra red</i>
<i>LWIR</i>	<i>long wave infra red</i>
<i>MWIR</i>	<i>medium wave infra red</i>
<i>LTAN</i>	<i>local time of ascending node</i>
<i>VIS</i>	<i>visible</i>
<i>IR</i>	<i>infra red</i>
<i>LIDAR</i>	<i>Laser Imaging Detection and Ranging</i>
<i>SAR</i>	<i>synthetic aperture radar</i>
<i>GSD</i>	<i>ground sample distance</i>
<i>SNR</i>	<i>signal to noise ratio</i>
<i>KF</i>	<i>Kalman Filter</i>
<i>LKF</i>	<i>Linearized Kalman Filter</i>
<i>EKF</i>	<i>Extended Kalman Filter</i>
<i>GNSS</i>	<i>Global Navigation Satellite System</i>
<i>LSQ</i>	<i>Least Square</i>
<i>RAAN</i>	<i>right ascension of ascending node</i>
<i>FOV</i>	<i>field of view</i>
<i>FOR</i>	<i>field of regard</i>
<i>AOCS</i>	<i>attitude orbital control system</i>
<i>GPS</i>	<i>Global positioning system</i>
<i>r.m.s.</i>	<i>root mean square</i>
<i>GMST</i>	<i>Greenwich mean sidereal time</i>
<i>GAST</i>	<i>Greenwich apparent sidereal time</i>
<i>EME2000</i>	<i>Earth Mean Equator and Equinox of J2000</i>
<i>FK5</i>	<i>Fundamental Catalog 5</i>
<i>ITRF</i>	<i>International Terrestrial Reference Frame</i>
<i>ECI</i>	<i>Earth Centered Inertial</i>
<i>ECEF</i>	<i>Earth Centered Earth fixed</i>
<i>UTC</i>	<i>Universal Time Coordinated</i>
<i>PVT</i>	<i>Position Velocity Time</i>
<i>DOP</i>	<i>Dilution of precision</i>
<i>TLE</i>	<i>Two Line Elements</i>
<i>MIMO</i>	<i>Multi Input Multi Output</i>

Lista dei simboli

a	semiasse maggiore
e	eccentricità
ω	argomento di perigeo
Ω	ascensione retta del nodo ascendente
$RAAN$	ascensione retta del nodo ascendente
i	inclinazione
ϑ	anomalia vera
n	grado
m	ordine
η	angolo conico o <i>cone angle</i>
R	raggio della Terra
ε	angolo di elevazione del cono di vista del satellite o <i>elevation angle</i>
θ	angolo sottostante il cono di vista definito da centro della Terra
h	quota
P_n	periodo nodale
$\dot{\Lambda}$	velocità angolare longitudinale
S	intervallo fondamentale
S_i	parte dell'intervallo fondamentale
Q	numero di orbite al giorno
N	numeratore
D	denominatore
I	parte intera
J_2	prima armonica zonale $n=2$ $m=0$
M	massa
L_1, L_2, L_3	dimensioni caratteristiche satellite
V	volume
ρ	densità
I_x, I_y, I_z	momenti principali d'inerzia
ξ	parametro di stima
α	angolo tra il vettore velocità e il vettore spinta
T	spinta
β	<i>beta angle</i>
γ	angolo di volo o <i>flight path angle</i>
D	giorno
M	mese

Bibliografia

- [1] Byron D. Tapley, Bob E. Schutz, George H. Born; *Statistical Orbit Determination*; Elsevier Academic Press; (2004); pp.93-250.
- [2] Montenbruck O., Gill E.; *Satellite Orbits - Models, Methods and Applications*; Springer Verlag, Heidelberg; (2000).
- [3] “GNSS SW receiver for space applications”, Luca Cucchi, Cesare Dionisio, Riccardo Marracci, Gabriele Pirazzi, Intecs S.p.A., NAVITEC 2008, Noordwijk.
- [4] Oliver Montenbruck, Eberhard Gill, Markus Markgraf; *Phoenix-XNS – a miniature real-time navigation system for LEO satellites*; Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), German Space Operations Center(GSOC); Noordwijk (2006)
- [5] Leland E. Cunningham; *On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite*; Lockheed Missiles and Space Company, Sunnyvale, Calif., and Astronomy Dept., University of California, Berkeley, Calif., USA; (1969)
- [6] D. S. Ingram, B. D. Tapley; *Lunar orbit determination in the presence of unmodeled accelerations*; Dept. of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, The university of Texas at Austin, Tex., U.S.A.; (1973)
- [7] <http://www.swpc.noaa.gov/SolarCycle/>; *Solar Cycle progression* ; presented by the NOAA/ Space Weather Prediction Center
- [8] "gLAB – A fully software tool to generate, process and analyze GNSS signals" C. Dionisio, D. Citterico, G. Pirazzi, N. De Quattro, R. Marracci, L. Cucchi, N. Valdanbrini, I. Formaioni – Intecs SpA, Italy, DASIA 2010, 1st to 4th June 2010, Budapest.
- [9] Luigi T. De Luca, Politecnico di Milano; *Problemi energetici in propulsione aerospaziale*; Appunti per Studenti – Edizione preliminare Corretta; 13 marzo 1998.

- [10] David A.Vallado, with contributions by Wayne D.McClain; *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*; Second Edition; U.S.A. 2001
- [11] Daren Casey and JoBea Way, Member, IEEE; *Orbit Selection for the EOS Mission and its Synergism Implications*; IEEE transactions on geoscience and remote sensing, Vol.29, no. 6, November 1991.
- [12] Marshall H. Kaplan, Department of Aerospace Engineering, The Pennsylvania State University; *Modern Spacecraft Dynamics & Control*; John Wiley & Sons; 1976.
- [13] M. D'ascenzi, C.Dionisio, T.Pulci, N.Furfaro, G.Cardizzone; *Mission Final Report*; 22 Dicembre 2009, Roma, Italia.
- [14] ECSS-E-10-04A; *Space Engineering, Space Environment*; ECSS Secretariat, ESA-ESTEC, Requirements & Standards Division, Noordwijk, The Netherlands, 21 January 2000.
- [15] Alison Brown, Ben Mathews, Dien Nguyen; NAVSYS Corporation, Colorado Springs, Colorado; *Integrated GPS/Ins/Star Tracker space navigation system using a software defined radio*; Proceedings of SDR Forum 2006, Orlando, FL, November 2006
- [16] Anastassios E. Petropulos, Jon A. Sims; *A Review of Some Exact Solutions to the Planar Equations of Motion of a Thrusting Spacecraft*; Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, USA.
- [17] Scott Gleason, Demoz Gebre-Egziabher; *GNSS Applications and Methods*.
- [18] Franco Bernelli, Ivan Ferrario, Mauro Massari; *Appunti del corso di Dinamica e Controllo d'assetto, Parte 1 e 2*.