

POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA
MATEMATICA



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**VALUTAZIONE DI OPZIONI SWING
TRAMITE METODO FOURIER
SPACE TIME-STEPPING
NELL'AMBITO DI MODELLI DI
MERCATO CON SALTI**

Relatore: Prof. Carlo Sgarra

Correlatore: Dott. Daniele Marazzina

Enrico Testa
Matr. 734627

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento è ovviamente per il Prof. Carlo Sgarra che mi ha stimolato offrendomi un lavoro interessante come questo e che è sempre stato disponibile per chiarimenti e delucidazioni. Avendolo avuto come Professore in diversi esami e due volte come relatore in questi anni di università, si è venuto a costruire tra noi oltre ad un ottimo rapporto professionale, anche un certo rapporto di amicizia. Un ringraziamento speciale va al Dott. Daniele Marazzina che è sempre stato disponibile ad aiutarmi nel momento del bisogno; i suoi consigli sono stati preziosi.

Desidero ringraziare Nicola e Davide, inseparabili compagni di viaggio lungo questo percorso che ora volge al termine. L'amicizia, la solidarietà e la complicità che si è creata tra noi è possibile solo tra persone che hanno condiviso le stesse fatiche e difficoltà.

Desidero ringraziare i miei genitori che mi hanno permesso di intraprendere questo percorso supportandomi sino a questo momento senza mai farmi mancare nulla, anzi, alle volte forse dandomi anche più di quanto non meritassi.

Il modo migliore per ringraziare tutti Voi penso sia racchiuso nelle pagine di questo lavoro che sono la sintesi della trasformazione avvenuta dal Liceale che ero all'Ingegnere che sono.

Mens Sana in Corpore Sano.

Abstract**SWING OPTION PRICING VIA FOURIER SPACE
TIME-STEPPING METHOD IN JUMP MARKET MODELS
FRAMEWORK**

Enrico Testa

Politecnico di Milano

2010

This work was done to show the validity and the potential of the Fourier Space Time-stepping method. During the last decade research for better and faster methods dedicated to option pricing has grown more and more. It would be considered ideal to find a method able to price every kind of existent contingent claim and whose evaluation is fast and precise.

A famous example is the algorithm invented by Carr and Madan in 1999. The algorithm allows to price European Options and it's based on exploiting the characteristic function of the process driving the underlying price process and the Fourier Transform used in its most efficient formulation, the Fast Fourier Transform. The use of FFT allows to drastically reduce the number of flops needed to compute the transform even though in order for it to work it's needed that the dimension of the vector that has to be transformed is a power of two. Despite the great success of the method, that revealed it self to be extremely efficient and reliable, it is limited to the pricing of European Options and is hardly extendable to pricing of contracts with non standard payoffs.

The Fourier Space Time-stepping method can instead be used to price derivatives with non standard payoffs and has great stability and convergence properties. FST valuations will be carried out in jump market models, in particular it's hypothesized that the underlying assets dynamics are driven by a Lévy process. Lévy processes are generalizations of more standard processes such as the Geometric Brownian Motion and are able to adapt better to historical series of stock prices. Finite and infinite activity Lévy processes will be addressed separately in order to be subsequently compared.

The work starts with a chapter dedicated to basic notions needed to understand the fundamentals of Lévy markets and of the Carr-Madan algorithm which is the base from which the Fourier Space Time-stepping algorithm can be understood. The chapter will start with a brief explanation of Lévy processes, their properties and on how can they be build and modeled. Some examples will follow on sample Lévy processes. The chapter will then go on in showing the Fourier Transform, concentrating on the FFT algorithm especially, fundamental in the FST framework. A part on option pricing using characteristic functions will then follow with an extensive explanation on the Carr-Madan formulation. At last a small introduction to pseudo differential operators is proposed, these operators are needed during the solution of the FST method.

In chapter 3 Fourier Space Time-stepping will be broadly and extensively explained, from the PIDE solution via Fourier transform that will make it equivalent to an ODE family parameterized by w to appropriate grid selection and stability and convergence properties.

Prices will then be computed on different kind of derivatives. European style derivatives will be addressed first exploiting comparison with the Carr-Madan

prices. Pricing will be carried out under different kinds of Lévy models and it will be done also a comparison between finite and infinite activity Lévy models. Path-dependent option pricing follows. Barrier options will be priced by making a minor change in the equation that lead to European style option prices, the only difference is in fact the boundary condition. Last but absolutely not least is the original contribution of the work, the pricing of swing contracts. Because of their complexity it will be shown how it will be necessary to introduce a dynamic programming equation in the FST algorithm to handle the problem. In this case also pricing will be done with different kinds of Lévy models, both finite and infinite activity as usual. As last experiment a price comparison will be done using as reference an algorithm that uses forests of trinomial trees.

Abstract**VALUTAZIONE DI OPZIONI SWING TRAMITE METODO
FOURIER SPACE TIME-STEPPING NELL'AMBITO DI
MODELLI DI MERCATO CON SALTI**

Enrico Testa
Politecnico di Milano
2010

Questo lavoro è stato intrapreso con lo scopo di mostrare la validità e il potenziale del metodo Fourier Space Time-stepping. Negli ultimi anni la ricerca per metodi dedicati alla valutazione di opzioni sempre più affidabili ed efficienti è cresciuta sempre più. L'ideale sarebbe trovare un metodo in grado di valutare ogni tipo di derivato attualmente in commercio e che la valutazione fosse rapida e precisa.

Un celebre esempio è l'algoritmo ideato da Carr e Madan nel 1999. L'algoritmo permette di valutare opzioni di tipo europeo e si basa sullo sfruttare la funzione caratteristica del processo che guida il sottostante azionario e sulla trasformata di Fourier usata nella sua forma più efficiente, ovvero la Fast Fourier Transform. L'uso di FFT permette di ridurre drasticamente il numero di flops (operazioni macchina) richiesti per effettuare la trasformata anche se per il suo funzionamento impone che la dimensione del vettore oggetto della trasformazione sia una potenza di due.

Nonostante il grande successo del metodo, che si è rivelato essere estremamente efficiente ed affidabile, esso è limitato alla valutazione delle Vanilla Europee e risulta difficilmente estendibile alla valutazione di contratti dal payoff non standard.

Il metodo Fourier Space Time-stepping invece, è applicabile alla valutazione di derivati dal payoff non standard e ha ottime proprietà di stabilità e convergenza. Le valutazioni FST saranno effettuate nell'ambito di modelli di mercato con salti, in particolare ipotizzando che la dinamica del sottostante segua un processo di tipo Lévy. I processi di Lévy sono una generalizzazione di processi standard come ad esempio il moto Browniano Geometrico e si adattano meglio alla spiegazione delle serie storiche dei prezzi dei sottostanti azionari. Saranno affrontati separatamente i processi ad attività finita e quelli ad attività infinita per poi essere successivamente confrontati fra loro onde mettere in luce le differenze nelle valutazioni.

Il lavoro ha inizio con una parte di Nozioni Introduttive, fondamentali per far comprendere al lettore i mercati di tipo Lévy ed il metodo di Carr-Madan che è poi la base per la comprensione del metodo Fourier Space Time-stepping. La sezione teorica avrà inizio con una rapida spiegazione dei processi di Lévy, delle loro proprietà e di come possono essere costruiti e modellizzati; seguiranno poi alcuni esempi di modelli di tipo Lévy. Si passerà quindi all'illustrazione della trasformata di Fourier discreta con particolare attenzione all'algoritmo FFT, fondamentale nel metodo FST. Seguirà una parte sulla valutazione di opzioni tramite l'uso di funzioni caratteristiche e una dettagliata descrizione della formulazione di Carr e Madan. Infine viene proposta una breve introduzione agli operatori Pseudodifferenziali, usati per la risoluzione nel metodo FST.

Nel capitolo 3 verrà esposto nel dettaglio il metodo Fourier Space Time-stepping,

dalla risoluzione della PIDE tramite trasformata di Fourier che la renderà equivalente ad una famiglia di ODE parametrizzata da w alla selezione appropriata della griglia e alle proprietà di stabilità e convergenza.

Successivamente saranno effettuate valutazioni numeriche su diversi tipi di derivati. Verranno trattati dapprima derivati di tipo europeo ed i risultati ottenuti saranno confrontati con l'algoritmo di Carr-Madan. Le valutazioni saranno effettuate sotto diversi tipi di processi e sarà fatto anche un confronto tra processi ad attività finita e processi ad attività infinita.

Saranno poi valutate opzioni di tipo path-dependent, in particolare opzioni barriera e opzioni swing. Le opzioni barriera saranno valutate tramite una piccola modificazione dell'equazione che ha portato alla valutazione delle Vanilla europee; fondamentalmente l'unica differenza è nella condizione al contorno.

Nella valutazione dei contratti swing risiede il contributo originale di questo lavoro. Vedremo come, data la loro complessità, sarà necessario introdurre un'equazione di programmazione dinamica nel metodo FST. Anche in questo caso le valutazioni saranno effettuate con diversi tipi di Lévy sia ad attività finita che infinita.

Da ultimo effettueremo un confronto sui risultati ottenuti servendoci di valutazioni effettuate tramite foreste di alberi trinomiali.

Indice

1	Introduzione	11
2	Nozioni Introduttive	17
2.1	Processi di Lévy	17
2.1.1	Modellizzazione	24
2.1.2	Esempi di Modelli	26
2.2	Trasformata di Fourier	27
2.2.1	Trasformata di Fourier Discreta (DFT)	28
2.2.2	Trasformata Rapida di Fourier (FFT)	30
2.3	Valutazione di Opzioni	31
2.3.1	Valutazione Tramite Funzioni Caratteristiche	31
2.3.2	Formulazione di Carr-Madan	33
2.4	Operatori Pseudodifferenziali (PDOs)	35
2.4.1	Spazi Funzionali	36
2.4.2	Funzioni ed Operatori	37
3	Metodo Fourier Space Time-stepping	41
3.1	Risoluzione PIDE	42
3.2	Metodo FST	42
3.2.1	Selezione Ottimale della Griglia	43
3.3	Stabilità, Convergenza e Precisione	44
3.4	Valutazione Opzioni Europee	46
3.4.1	Valutazione tramite Carr-Madan	47
3.4.2	Valutazione tramite FST	49
3.4.3	Confronti	53
3.5	Valutazione Opzioni Path-Dependent	54
3.5.1	Opzioni Barriera	55
3.5.2	Opzioni Swing	56
3.5.3	Un Confronto con l'Albero Trinomiale	61
3.5.4	Valore di Cambio di Diritto	64
4	Conclusioni	67
4.1	Opzioni Europee	67
4.2	Opzioni Path-Dependent	68
4.3	Sviluppi Futuri	68
A	Opzioni e Modelli	71

B Codici	73
B.1 Funzioni Caratteristica	73
B.2 Carr-Madan	74
B.3 FST	75
B.4 Swing	76

Capitolo 1

Introduzione

I derivati sono contratti finanziari che hanno valore contingente all'evoluzione del proprio sottostante azionario. Essi sono scambiati in diversi mercati tra cui: equity, commodity, currency, credit e interest rate. Il principale scopo dei derivati è quello di ridurre il rischio relativo ad un cambio di prezzo inaspettato del sottostante azionario. Tuttavia, possono anche essere usati per acquisire rischio speculando sul valore delle azioni.

Secondo la Bank of International Settlement l'ammontare in trilioni di dollari della quantità di derivati è cresciuto di più di 7 volte dal 1998 al 2007, assestandosi su di un valore pari a 624 trilioni di dollari.

Sfortunatamente questa crescita smisurata e dovuta soprattutto alla speculazione (specialmente nei mercati di credito) è associata con la crisi finanziaria di questi ultimi anni che ancora purtroppo non volge al termine.

La soluzione di tutto ciò è celata nell'uso di modelli migliori, metodi di valutazione e tecniche di risk management all'avanguardia col contributo di una regolamentazione appropriata.

Lo scopo di questo lavoro consiste nel presentare uno schema di valutazione che può essere esteso ed adattato alla valutazione di una grande varietà di derivati. Nel lavoro si tratterà in particolare di Opzioni, un particolare tipo di derivati finanziari. La flessibilità e la potenza del metodo verranno presentate tramite esempi e prove numeriche.

Nella valutazione di Opzioni, è tutt'ora largamente usato in diversi mercati il modello di Black-Scholes-Merton (BSM) (1973) [6] [32]. Il suo grande successo è dovuto in gran parte alla sua trattabilità dal punto di vista matematico e alla semplicità delle formule di valutazione alle quali porta. Tuttavia negli anni è stato mostrato come il modello log-normale per i rendimenti non sia affatto adatto. Sono stati individuati diversi comportamenti conosciuti nel settore come fatti stilizzati che portano a concludere che il modello risulta inadatto alla spiegazione. Tra questi fenomeni ricordiamo le code grasse, ovvero nei mercati si registrano molti più rendimenti estremi che non nel modello e la skewness negativa dei rendimenti, ovvero il fenomeno secondo il quale i rendimenti sono asimmetrici in negativo.

Merton nel 1976 ha introdotto un modello per lo stock price discontinuo [33]. Nel suo modello i prezzi sono soggetti a piccole variazioni modellizzate da un moto Browniano Geometrico e da grandi variazioni modellizzate da un processo di salto, solitamente un processo di Poisson. Merton usa una distribuzione log-

normale per i salti mentre Kou nel 2002 considera anche della skewness negativa nel suo modello double-exponential [26].

Una classe di modelli più generale che sta divenendo sempre più popolare nel campo dei modelli per prezzi azionari sono i processi di Lévy. Questi processi permettono la costruzione di modelli che rispecchiano molto accuratamente i fatti stilizzati citati in precedenza di code grasse e skewness negativa. A differenza dei processi di salto, questi processi possono avere un infinito numero di salti, la cui maggioranza ha ampiezza infinitamente piccola, su di un intervallo temporale finito. La loro dinamica inoltre è abbastanza articolata da riprodurre comportamenti di tipo Browniano su piccoli intervalli di tempo ottenendo quindi il beneficio di avere una certa trattabilità analitica.

Huang e Wu nel 2004 riportano risultati di numerosi test statistici che dimostrano come modelli con salti infinitesimali surclassino i modelli jump-diffusion per equity options [24].

Nonostante ci siano diverse classi di processi di Lévy, nel lavoro saranno usati in particolare il Variance Gamma introdotto da Madan e Seneta [28] e il Normal Inverse Gaussian di Barndorff-Nielsen [5], appartenente alla classe dei modelli iperbolici generalizzati introdotti da Eberlein e Prause [19]. Questi modelli sono stati scelti poiché sono quelli attualmente maggiormente usati per la valutazione di prezzi equity sia in ambito accademico che in ambito professionale. Per una maggiore comprensione sui processi di Lévy e sulle loro applicazioni nella modellizzazione di prezzi azionari si rimanda a Cont e Tankov [14] e Papapantoleon [36].

Un'opzione è un contratto secondo il quale il seller dà al buyer il diritto ma non l'obbligo di esercitare l'opzione stessa alla data di scadenza (maturity). In genere se l'opzione è scritta su un sottostante scambiabile, l'esercizio comporta solitamente l'acquisto (Call) o la vendita (Put) del sottostante ad un prezzo fissato contrattualmente noto come prezzo di esercizio (strike price). Sin dai lavori originali di Black e Scholes [6] e Merton [32] è stata effettuata tantissima ricerca nel campo della valutazione di opzioni. Se denotiamo con $V(t, S(t))$ il valore dell'opzione al tempo t allora è noto che in un mercato privo di arbitraggio e senza costi di transazione il valore di un'opzione Europea è dato dal valore atteso scontato del suo payoff, sotto una non necessariamente unica misura neutrale al rischio, ovvero:

$$V(t, S(t)) = E_t^Q \left[e^{-r(T-t)} \varphi(S(t)) \right]$$

dove il valore atteso è preso rispetto all'informazione disponibile in t ovvero alla filtrazione in t .

Sia nella formula precedente che nel resto del lavoro supporremo il tasso di interesse privo di rischio r come una data costante.

Mentre nel caso in cui il sottostante segua un processo di diffusione la misura neutrale rispetto al rischio risulta essere unica, nel caso più interessante dei modelli di Lévy esponenziali, analizzati nel lavoro, esistono tante misure di martingala equivalenti. Il punto di vista che si adotta qui è quello secondo cui il trader sta usando il modello per valutare strumenti derivati pertanto sta già modellando sotto una particolare misura neutrale rispetto al rischio, possibilmente scelta tramite un opportuno processo di calibrazione.

Black e Scholes [6] e Merton [32] hanno mostrato come, sotto l'assunzione che il prezzo del sottostante azionario evolva secondo un moto Browniano Geometrico,

la strategia replicante riduca la valutazione dell'opzione alla risoluzione di una PDE che risulta indipendente dal rendimento dell'azione. Sotto ipotesi evolutive degli altri modelli presentati in precedenza invece, il problema soddisfa una più complessa equazione parziale integro-differenziale (PIDE). Tale equazione può essere risolta analiticamente solo in particolari casi semplici. Per valutare derivati complessi sono stati sviluppati una serie di metodi numerici come il metodo Monte Carlo che risulta efficiente se il payoff dell'opzione dipende da diverse variabili del sottostante oppure se esiste una complessa dipendenza tra il payoff dell'opzione e la storia delle variabili sottostanti. Boyle nel 1977 fu il primo ad applicare tale metodo alla valutazione di opzioni [9]. L'idea di fondo consiste nel generare un elevato numero di traiettorie di prezzo del sottostante sotto la misura neutrale rispetto al rischio ed infine calcolare il valore atteso di tutti i payoff costruiti tramite le traiettorie.

I problemi multidimensionali possono essere facilmente affrontati dal metodo Monte Carlo che non soffre della curse of dimensionality. L'errore del metodo è $O(1/\sqrt{N})$ che può essere migliorato tramite l'uso di tecniche di riduzione della varianza come le variabili antitetiche e le variabili di controllo. L'uso di sequenze deterministiche a bassa discrepanza possono portare la convergenza a $O((\log N)^d/N)$ anche se per d grande, i benefici sono apprezzabili solo per grandi campioni. Le sequenze a bassa discrepanza come ad esempio quelle di Halton e Sobol portano a metodi chiamati Quasi-Monte Carlo. Per informazioni dettagliate riguardo al metodo Monte Carlo e alle sue applicazioni nel campo della valutazione di opzioni il lettore interessato è rimandato a [8] e [23].

Un'altra categoria di metodi è quella rappresentata dai metodi ad albero, che approssimano il modello a tempo continuo dell'evoluzione del prezzo con uno schema a tempo discreto.

Il primo metodo di questa categoria fu l'albero binomiale introdotto da Cox, Ross e Rubinstein nel 1979 [16] seguito dall'albero trinomiale di Boyle nel 1986 [10]. Madan, Milne e Shefrin nel 1989 hanno generalizzato ulteriormente portando il modello a livello multinomiale [29]. In uno schema a tempo discreto il livello del prezzo del sottostante è rappresentato da ogni nodo dell'albero nei diversi istanti temporali. Una volta generato l'albero, la valutazione delle opzioni è fatta iterativamente, il valore dell'opzione nei nodi precedenti è calcolato tramite quello nei nodi successivi. Questo tipo di metodologia porta ad una facile gestione di opzioni path-dependent e ad esercizio anticipato, oltre ad avere un tasso di convergenza migliore dei metodi Monte Carlo.

I metodi alle Differenze Finite sono stati ampiamente usati per ottenere soluzioni numeriche relative alle PIDE della valutazione. L'idea alla base di tali metodi consiste nel discretizzare il dominio spazio-temporale della PIDE in una griglia finita e approssimare l'operatore differenziale in differenze finite. La soluzione dell'equazione ai tempi precedenti la scadenza è trovata effettuando passi a ritroso sui punti della griglia, la condizione finale a scadenza è dettata dal payoff dell'opzione. Esistono diversi modi di scrivere un metodo alle differenze finite, il più facile da implementare è detto Eulero Esplicito la cui stabilità impone una condizione sul passo temporale che può diventare proibitiva su griglie grandi. Eulero Implicito invece ovvia al problema della condizione sul passo temporale dovendo però risolvere un sistema lineare di equazioni ad ogni passo. L'approccio di Crank-Nicolson invece, che consiste in una mistura dei due approcci di Eulero, non solo ovvia alla condizione sul passo temporale presente in Eulero Esplicito ma ha anche una convergenza del secondo ordine nel tempo (gli ap-

procci di Eulero si fermano al primo ordine). Per una completa discussione su schemi alle differenze finite nel contesto di valutazione di opzioni in assenza di salti si rimanda a [42].

In caso di presenza di salti, la valutazione sotto metodi alle differenze finite diventa complicata a causa di diverse ragioni come ad esempio il fatto che il comportamento dell'opzione al di fuori del dominio debba essere supposto e i grandi salti debbano essere troncati. Questi metodi diventano inclini a problemi di stabilità e accuratezza, specialmente per derivati di tipo path-dependent. Tutto questo porta come conseguenza al fatto che molti metodi sono specificatamente progettati per un particolare tipo di modello Lévy. È da ricordare inoltre che nel caso di Lévy ad attività infinita, le differenze finite soffrono di bassa convergenza.

Tra i vari schemi a differenze finite ricordiamo gli schemi Explicit-Implicit di Ascher, Ruuth e Wetton del 1997 [4] e la successiva proposta di Cont e Tankov nel 2004 [14] e Cont e Voltchkova nel 2005 [15] che propongono una trattazione asimmetrica del termine diffusivo e del termine integrale. Tra gli schemi che sfruttano FFT ricordiamo FFT - Alternating Directions Implicit Method sviluppato da Andersen e Andreasen nel 2000 che punta a migliorare il metodo Explicit-Implicit trattando la componente differenziale ed integrale dell'operatore differenziale simmetricamente [2]. Questo viene fatto spezzando ogni passo temporale in due mezzi passi e alternando la direzione del metodo per ogni componente dei due mezzi passi. Infine ricordiamo il metodo Fixed-Point Iteration che migliora l'Explicit-Implicit method calcolando la soluzione della PIDE al prossimo passo temporale usando più iterazioni di uno schema alle differenze finite. D'Halluin, Forsyth e Vetzal nel 2005 usano il Crank-Nicolson time-stepping [18].

Passando ai metodi basati sulla Fast Fourier Transform ricordiamo che i primi ad applicare tali metodi per la valutazione di opzioni sotto modelli di Lévy esponenziali furono Carr e Madan nel 1999 [11]. L'idea sottostante tale approccio consiste nello sviluppare l'espressione analitica della trasformata di Fourier della funzione valore dell'opzione. La formula di valutazione risk-neutral presentata in precedenza può essere espressa come convoluzione tra il payoff dell'opzione e la densità del prezzo del sottostante. I valori delle opzioni nello spazio reale possono essere in seguito ottenuti tramite l'applicazione dell'Inverse Fourier Transform. Questi calcoli possono essere efficacemente svolti tramite l'uso dell'algoritmo FFT.

Diverse importanti estensioni di questi metodi sono state sviluppate da Dempster e Hong [17], Raible [37], Lewis [27], Reiner [38], Andricopoulos, Widdicks, Duck e Newton [3] e O'Sullivan [35] per valutare opzioni multi-asset e path-dependent.

Esistono anche altri metodi che non sono esattamente classificabili in alcuna delle precedenti categorie.

Chiarella, El-Hassan e Kucera [12] e Chiarella e Ziogas [13] hanno sviluppato un path-integral framework usando l'espansione in serie di Fourier-Hermite per la rappresentazione continua del prezzo del sottostante azionario.

Albanese, Jaimugal e Rubisov nel 2001 introducono un metodo di valutazione basato sul metodo delle linee che postula solo la discretizzazione del tempo di calendario, con ogni data chiave corrispondente ad una linea continua per i prezzi azionari [1]. Boyarchenko e Levendorskii nel 2002 sfruttano la fattorizzazione di Wiener-Hopf per ottenere prezzi in termine di risolutori di processi supremum

e infimum e derivano formule esplicite per questi fattori [7].

Matache, von Petersdorff e Schwab [31] e Matache, Nitsche e Schwab [30] discretizzano la PIDE del prezzo nello spazio usando un metodo wavelet Galerkin con la compressione della matrice dei momenti della componente relativa ai salti. La trasformata di Hilbert è usata da Feng e Linetsky nel 2008 per derivare un algoritmo che si basa sulla moltiplicazione matrice-vettore di Toeplitz FFT-based [21]. Fang e Oosterlee durante lo stesso anno hanno sviluppato un algoritmo basato sulla espansione in serie Fourier-cosine della funzione densità [20]. Infine Surkov nel 2009 presenta il metodo Fourier Space Time-stepping nella sua tesi di dottorato [40].

Un metodo numerico per essere competitivo deve avere una vasta gamma di proprietà, prima tra tutte la precisione. In un contesto istituzionale, dove avvengono scambi di larghi blocchi di derivati, anche differenze di frazioni di centesimi possono portare a guadagni/perdite significative. La velocità del metodo è un altro aspetto fondamentale, infatti, gli operatori di mercato devono essere in grado di reagire ai cambiamenti di mercato in centesimi di secondo. Esiste quindi un tradeoff tra la precisione e la velocità del metodo che caratterizza poi la performance generale del metodo stesso. Anche la convergenza, ovvero il tasso al quale l'errore si riduce all'aumentare dei dati a disposizione, ha un ruolo importante. Solitamente infatti un ordine di convergenza più elevato porta ad errori più piccoli in tempi uguali. In questo lavoro vedremo come l'ordine di convergenza delle valutazioni sarà pari a due.

Oltre alle proprietà fondamentali sopra citate, un metodo numerico dovrebbe anche maneggiare in maniera efficiente derivati path-independent e discretely-monitored. In particolare per questi ultimi, il tempo computazionale dovrebbe essere linearmente dipendente dal numero di monitoring dates.

Anche la trattazione di derivati di tipo multi-asset e path-dependent è fondamentale per un buon metodo numerico così come l'abilità di saper maneggiare diversi tipi di modelli per il prezzo del sottostante azionario.

Infine una considerazione tecnica. Negli ultimi anni è stata introdotta l'architettura multi-core nella costruzione di computer. Questa tecnologia fa sì che ogni computer abbia adesso più chip in uno stesso processore (CPU). I metodi numerici all'avanguardia devono essere in grado di sfruttare questi processori multi-core per spremere al massimo la tecnologia a disposizione al giorno d'oggi.

I metodi che saranno presentati nel lavoro sono precisi, rapidi e rapidamente convergenti. Le opzioni Europee possono essere valutate usando un solo passo dell'algoritmo mentre altri tipi di opzioni path-dependent come le Barriera possono essere efficientemente trattate. Il contributo originale di questo lavoro consta nel valutare derivati di tipo Swing tramite Fourier Space Time-stepping, usando diversi tipi di processi Lévy come modelli per l'evoluzione del prezzo del sottostante azionario. Vedremo come sarà necessaria l'introduzione di una equazione di programmazione dinamica e come il problema possa essere trattato efficientemente.

Capitolo 2

Nozioni Introduttive

Questo capitolo è interamente dedicato alle nozioni teoriche fondamentali per la comprensione del lavoro svolto nei capitoli successivi. Tuttavia si invita il lettore già esperto in materia a limitarsi nello scorrere velocemente queste pagine e passare al capitolo successivo senza molti indugi. Il capitolo presenta dapprima i processi di Lévy, fondamentali per costruire modelli finanziari generici e prosegue presentando la trasformata di Fourier e l'algoritmo FFT di fondamentale importanza pratica. Conclude infine con una rapida presentazione delle basi per la valutazione di opzioni in questo particolare ambito e con una introduzione agli operatori pseudodifferenziali usati per derivare il metodo presentato nel capitolo successivo.

2.1 Processi di Lévy

Questa sezione sarà interamente dedicata alla teoria relativa ai processi di Lévy. Ci si soffermerà in maniera dettagliata sulle basi di tale teoria, ovvero definizioni e proprietà dei suddetti processi per poi arrivare ai risultati fondamentali che ne permettono l'utilizzo pratico nella finanza. Il lettore interessato è rimandato a [14] per una dettagliata spiegazione della materia.

Definizione 2.1.1 *Un processo stocastico cadlag $(X_t)_{t \geq 0}$ definito su (Ω, F, P) a valori in \mathbb{R}^d tale che $X_0 = 0$ è detto di Lévy se possiede le seguenti proprietà:*

- È a incrementi indipendenti, ovvero per ogni sequenza crescente di tempi $t_1 \dots t_n$ le variabili aleatorie $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sono indipendenti.
- È a incrementi stazionari, ovvero la legge di $X_{t+h} - X_t$ non dipende da t .
- È stocasticamente continuo, ovvero $\forall t > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0$.

Da notare che la terza condizione non implica in alcun modo la continuità del processo, serve invece ad escludere processi con salti a tempi predeterminati che non sono interessanti dal nostro punto di vista. In altre parole significa che dato un istante di tempo t , la probabilità di salto a tale istante è identicamente nulla,

ovvero le discontinuità avvengono a tempi casuali.

Campionando un processo di Lévy ad intervalli regolari si ottiene una camminata aleatoria. Definendo $S_n(\Delta) \equiv X_{n\Delta}$ si può scrivere $S_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$, dove $Y_k = X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}$ sono variabili aleatorie *i.i.d.* aventi la distribuzione uguale a quella di X_Δ . Siccome l'intervallo di campionamento è arbitrario osserviamo che lo specificare un processo di Lévy equivale a specificare un'intera famiglia di camminate aleatorie $S_n(\Delta)$.

Scegliendo $t = n\Delta$ osserviamo che per ogni $n \geq 1$ e $t > 0$, $X_t = S_n(\Delta)$ può essere rappresentato da una somma di n variabili aleatorie *i.i.d.* la cui distribuzione è la medesima di $X_{t/n}$. Una distribuzione avente tali proprietà è detta infinitamente divisibile.

Definizione 2.1.2 *Una distribuzione di probabilità F su R^d si dice infinitamente divisibile se per ogni intero $n \geq 2$, esistono n variabili aleatorie *i.i.d.* Y_1, \dots, Y_n tali che $Y_1 + \dots + Y_n$ ha distribuzione F .*

Siccome la distribuzione di somme di variabili *i.i.d.* è data dalla convoluzione delle distribuzioni degli addendi possiamo dare una definizione alternativa di distribuzione infinitamente divisibile, ovvero che per una tale distribuzione F la radice dell' n -esima convoluzione sia ancora una distribuzione di probabilità, per ogni $n \geq 2$.

Quindi se X_t è un processo di Lévy, allora per ogni $t > 0$ la distribuzione di X_t è infinitamente divisibile. Viceversa, data una distribuzione infinitamente divisibile F è sempre possibile trovare un processo di Lévy associato tale che la legge di X_1 sia data da F .

Alcuni classici esempi di distribuzioni infinitamente divisibili sono la Gaussiana, la Gamma e la Poisson mentre la distribuzione uniforme su di un intervallo non gode della suddetta proprietà.

Definiamo ora la funzione caratteristica di X_t come segue:

$$\Phi_t(z) \equiv \Phi_{X_t}(z) \equiv E[e^{izX_t}], z \in R^d \quad (2.1)$$

Dall'indipendenza degli incrementi del processo si ottiene la proprietà $\Phi_{t+s}(z) = \Phi_s \Phi_t$.

Proposizione 2.1.1 *Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R^d . Allora esiste una funzione continua $\psi : R^d \rightarrow R$ chiamata esponente caratteristico di X , tale che:*

$$E[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)}, z \in R^d$$

Diamo ora la definizione di misura di Lévy, ci sarà molto utile nel proseguire la discussione delle proprietà relative ai processi.

Definizione 2.1.3 *Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R^d . La misura ν su R^d definita da:*

$$\nu(A) = E[\#\{t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}] A \in B(R^d) \quad (2.2)$$

è detta *misura di Lévy* del processo X . In altre parole la misura di Lévy non è altro che il numero atteso di salti di ampiezza appartenente ad A per unità di tempo.

Dato un qualsiasi processo di Lévy possiamo sempre definire la misura di Lévy associata come sopra. Tale misura risulta essere finita per ogni compatto A tale che $0 \notin A$, infatti se fosse vero il contrario il processo avrebbe infiniti salti di ampiezza finita sull'orizzonte $[0, T]$, contraddicendo la proprietà cadlag. Quindi ν definisce una misura di Radon su $R^d \setminus \{0\}$. Tuttavia nulla impone a ν di essere una misura finita, è possibile che essa esploda nell'avvicinarsi allo 0. In tal caso la somma di tutti i salti diventa una serie infinita convergente; la condizione di convergenza impone alcune restrizioni sulla forma di ν .

Vediamo ora una scomposizione molto utile di un processo di Lévy in diversi termini.

Proposizione 2.1.2 (Lévy-Itô) *Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R^d e ν la sua misura di Lévy. Allora:*

- ν è una misura di Radon su $R^d \setminus \{0\}$ e verifica:

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty \quad \int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$$

- La misura dei salti di X , detta J_X , è una misura di Poisson su $[0, +\infty[\times R^d$ con intensità $\nu(dx)dt$
- Esiste un vettore γ e un moto Browniano d -dimensionale $(B_t)_{t \geq 0}$ avente matrice di covarianza A tale che:

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon$$

$$X_t^l = \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(ds \times dx)$$

$$X_t^l = \int_0^t \int_{\epsilon \leq |x| < 1} x \{J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds\} = \int_0^t \int_{\epsilon \leq |x| < 1} x \tilde{J}_X(ds \times dx)$$

I termini della scomposizione sono indipendenti e la convergenza dell'ultimo termine è quasi certa e uniforme in t su $[0, T]$.

La tripletta (A, ν, γ) è detta tripletta caratteristica del processo di Lévy. I primi due termini della scomposizione sono un termine di drift e un moto browniano, pertanto il risultato è un processo gaussiano continuo. Le discontinuità infatti sono introdotte dagli altri due termini che incorporano i salti descritti dalla

misura di Lévy del processo. Essi non sono altro che processi di tipo Poisson composto: mentre il primo incorpora tutti i salti di ampiezza superiore alla soglia prefissata (in questo caso 1), il secondo tratta tutti i salti infinitamente piccoli. Da notare come le condizioni sulla struttura della misura di Lévy implicano la finitezza dei salti di ampiezza finita ma consentano un'infinità di salti infinitesimi la cui somma non debba necessariamente convergere.

La scomposizione precedente permette quindi di esprimere un qualsiasi processo di Lévy come somma di un moto browniano con drift e una somma (potenzialmente infinita) di processi Poisson composto indipendenti. Possiamo quindi in questo modo approssimare con precisione arbitraria un qualsiasi processo di Lévy attraverso un processo di tipo jump-diffusion; tale tecnica è molto utile da punto di vista delle applicazioni pratiche.

Ora passiamo ad un altro importante risultato teorico, ovvero il teorema di rappresentazione di Lévy-Khinchin che ci fornirà un'importante relazione tra la funzione caratteristica di un processo di Lévy e la sua tripletta caratteristica.

Teorema 2.1.1 *Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R^d con tripletta caratteristica (A, ν, γ) . Allora:*

$$E[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)}, \quad z \in R^d \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}zAz + i\gamma z + \int_{R^d} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x| \leq 1})\nu(dx)$$

Una versione equivalente di tale rappresentazione può essere ottenuta tramite il troncamento di salti di ampiezza maggiore di una determinata soglia. La forma della funzione di troncamento può essere scelta in diversi modi (nel nostro caso una funzione indicatrice) non influenzando i parametri A e ν della tripletta caratteristica del processo ma tuttavia influenza il parametro γ .

Nel caso in cui la misura di Lévy soddisfi anche la condizione addizionale $\int_{|x| \geq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ allora non c'è necessità di troncamento i salti di grande ampiezza e si può riscrivere $\psi(z)$ in una forma più semplice. In tal caso $E[X_t] = \gamma_c t$ e γ_c è detto il centro del processo ed è legato a γ dalla relazione $\gamma_c = \gamma + \int_{|x| \geq 1} x\nu(dx)$. Risultati simili a quelli appena ottenuti si trovano anche nel caso in cui l'insieme degli istanti di salto di ogni traiettoria è un'infinità numerabile e denso in $[0, \infty[$, ovvero in caso di processi ad attività infinita ($\nu(R^d) = \infty$).

Giunti a tal punto useremo i risultati teorici fino ad ora visti per poter esporre altre proprietà dei processi di Lévy.

Proposizione 2.1.3 *Un processo di Lévy ha traiettorie costanti a tratti se e solo se la sua tripletta caratteristica soddisfa le seguenti condizioni: $A = 0$, $\int_{R^d} \nu(dx) < \infty$ e $\gamma = \int_{|x| < 1} x\nu(dx)$ o equivalentemente se il suo esponente caratteristico è della forma:*

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\nu(dx)$$

con $\nu(R) < \infty$.

Richiamiamo ora la funzione variazione totale per poi poter definire le condizioni necessarie e sufficienti affinché un processo di Lévy sia a variazione finita.

Definizione 2.1.4 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Allora la funzione Variazione Totale (TV) è definita come:

$$TV(f) = \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

dove il sup è preso considerando tutte le partizioni finite $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$.

Un processo di Lévy è detto a variazione finita se le sue traiettorie sono funzioni a variazione finita con probabilità 1.

Proposizione 2.1.4 Un processo di Lévy è a variazione finita se e solo se la sua tripletta caratteristica (A, ν, γ) soddisfa:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) &< \infty \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dal caso particolare di processi di Lévy a variazione finita possiamo ottenere un sotto caso della scomposizione di Lévy-Itô e della rappresentazione di Lévy-Khinchin.

Corollario 2.1.1 Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy a variazione finita con tripletta caratteristica data da $(\nu, 0, \gamma)$. Allora X può essere espresso come somma dei suoi salti tra 0 e t e da un termine di drift lineare:

$$X_t = bt + \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} x J_X(ds \times dx) = bt + \sum_{s \in [0, t]}^{\Delta X_s \neq 0}$$

e la sua funzione caratteristica può essere espressa come:

$$E[e^{izX_t}] = \exp\left\{t(ibz + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{izx} - 1)\nu(dx)\right\}$$

dove $b = \gamma - \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx)$.

Vediamo ora un paio di criteri utili ad individuare una speciale categoria di processi di Lévy, ovvero quelli crescenti. Tali processi, chiamati subordinatori, rivestono una grande importanza nella modellistica dei mercati finanziari.

Proposizione 2.1.5 Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $X_t \geq 0$ quasi certamente per qualche $t > 0$
- $X_t \geq 0$ quasi certamente per ogni $t > 0$
- Le traiettorie di X_t sono quasi certamente non decrescenti
- X_t non ha componente diffusiva, ha un drift positivo ed esclusivamente salti positivi di variazione finita.

Proposizione 2.1.6 Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R^d e sia $f : R^d \rightarrow [0, \infty[$ una funzione positiva tale che $f(x) = O(|x|^2)$ quando $x \rightarrow 0$. Allora il processo $(S_t)_{t \geq 0}$ definito da:

$$S_t = \sum_{\substack{s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} f(\Delta X_s)$$

è un subordinatore.

Diamo ora qualche nozione delle proprietà distribuzionali dei processi di Lévy e delle relazioni che sussistono tra la densità di Lévy e la densità di probabilità associata.

Proposizione 2.1.7 Sia X un processo di Lévy a valori reali con tripletta caratteristica (σ^2, ν, γ) .

- Se $\sigma > 0$ o $\nu(R) < \infty$ allora X_t ha densità continua $p_t(\cdot)$ su R^d
- Se la misura di Lévy verifica

$$\exists \beta \in]0, 2[, \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\beta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |x|^2 d\nu(x) > 0$$

allora per ogni $t > 0$ X_t ha densità liscia $p_t(\cdot)$ tale che

$$p_t(\cdot) \in C^\infty(R) \quad \forall n \geq 1, \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{\partial^n p_t}{\partial x^n}(t, x) = 0$$

Per quanto riguarda le relazioni che sussistono tra la densità di probabilità e la densità di Lévy esistono alcuni risultati asintotici che omettiamo in quanto non di interesse per il lavoro che sarà svolto, qui ci limitiamo a dare una visione concettuale di tali risultati. L'idea fondamentale è che la densità di Lévy descrive il comportamento della densità di probabilità per piccoli lassi di tempo.

Diamo ora una panoramica sulla proprietà di autosimilarità dei moti browniani e di come essa possa essere estesa a processi più generali, in particolare ai processi di Lévy.

Dato un processo di Wiener W , la proprietà di autosimilarità è definita da: $\forall a > 0, (\frac{W_{at}}{\sqrt{a}})_{t \geq 0} = (W_t)_{t \geq 0}$. La proprietà si estende facilmente al caso di moto

browniano con drift, basta infatti effettuare un'opportuna traslazione. La domanda che noi ci poniamo è quando questa proprietà possa essere soddisfatta dai processi di Lévy.

Notiamo innanzitutto che tale proprietà, dato che la funzione caratteristica di un processo di Lévy può essere scritta come $e^{t\psi(z)}$, risulta equivalente alla seguente proprietà delle funzioni caratteristiche:

$$\forall a > 0, \exists b(a) > 0 : \Phi_{X_t}(z)^a = \Phi_{X_t}(zb(a)), \forall z$$

Le distribuzioni soddisfacenti tale proprietà prendono il nome di distribuzioni *strettamente stabili*.

Sintetizziamo la nozione di distribuzione strettamente stabile nella seguente definizione.

Definizione 2.1.5 Una variabile aleatoria $X \in R^d$ è detta avere una distribuzione stabile se per ogni $a > 0$ esiste $b(a) > 0$ e $c(a) \in R^d$ tale che:

$$\Phi_{X_t}(z)^a = \Phi_{X_t}(zb(a))e^{icz}, \forall z \in R^d$$

La distribuzione si dice invece *strettamente stabile* se:

$$\Phi_{X_t}(z)^a = \Phi_{X_t}(zb(a)), \forall z \in R^d$$

Un processo di Lévy autosimile ha quindi una distribuzione strettamente stabile in tutti gli istanti di tempo. Quindi banalmente un processo di Lévy α -stabile verifica:

$$\forall a > 0, \left(\frac{X_{at}}{a^{\frac{1}{\alpha}}}\right)_{t \geq 0} = (X_t)_{t \geq 0}$$

Come ultime relazioni riguardo ai processi di Lévy esponiamo due proposizioni che legano tali processi ad un fondamentale concetto di probabilità e di finanza matematica, ovvero il concetto di martingala.

Proposizione 2.1.8 Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo a valori reali e ad incrementi indipendenti. Allora:

1. $\frac{e^{iuX_t}}{E[e^{iuX_t}]}$ è una martingala $\forall u \in R$
2. Se per qualche $u \in R$, $E[e^{uX_t}] < \infty \forall t \geq 0$, allora $\frac{e^{iuX_t}}{E[e^{iuX_t}]}$ è una martingala
3. Se $E[X_t] < \infty \forall t \geq 0$, allora $M_t = X_t - E[X_t]$ è una martingala
4. Se $Var[X_t] < \infty \forall t \geq 0$ allora $(M_t)^2 - E[(M_t)^2]$ è una martingala, dove M_t è definito come sopra

Notiamo che se (X_t) è un processo di Lévy, allora perché tutti i processi della proposizione siano martingale è sufficiente che i corrispondenti momenti siano finiti per un valore di t .

Le affermazioni precedenti seguono direttamente dall'indipendenza degli incrementi, che infatti risulta essere l'unica ipotesi della proposizione. I Lévy ovviamente rientrano in questa categoria. Diamo ora un ultimo risultato utile a capire se un dato processo di Lévy (o il suo esponenziale) sia una martingala o meno. La seguente proposizione deriva direttamente dalla precedente e dall'applicazione della rappresentazione di Lévy-Khinchin.

Proposizione 2.1.9 *Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R avente tripletta caratteristica (A, ν, γ) .*

- (X_t) è una martingala se e solo se $\int_{|x| \geq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ e $\gamma + \int_{|x| \geq 1} |x| \nu(dx) = 0$
- e^{X_t} è una martingala se e solo se $\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty$ e $\frac{A}{2} + \gamma + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1 - x1_{|x| \leq 1}) \nu(dx) = 0$

2.1.1 Modellizzazione

I modelli finanziari con salti cadono in due grandi categorie delle quali la prima è quella dei cosiddetti modelli jump-diffusion. In tali modelli il prezzo di mercato del sottostante è data da un modello diffusivo e sono introdotte discontinuità inserendo un numero finito di salti casuali. Tali salti vogliono rappresentare eventi rari come ad esempio le cadute di mercato e pertanto vengono modellizzati tramite un processo di Poisson composto mentre la parte diffusiva solitamente è rappresentata da un processo di Lévy avente componente gaussiana non banale. Esempi famosi di tali modelli sono il modello di Merton e il double exponential di Kou.

La seconda categoria di modelli invece si avvicina al problema in modo sensibilmente diverso. Essi infatti ammettono un infinito numero di salti per ogni intervallo di tempo e per questo vengono chiamati modelli ad attività infinita. In tali modelli non occorre introdurre una componente browniana siccome la dinamica dei salti già riesce a generare un comportamento non banale in ristretti intervalli temporali.

Ciascuno dei due modelli sopra citati ha i suoi punti di forza e le proprie debolezze. Infatti mentre i modelli jump-diffusion hanno buone performance riguardanti le interpolazioni per lo smile della volatilità implicita i modelli ad attività infinita danno una descrizione realistica dei prezzi storici e mentre per i primi nonostante la facilità delle simulazioni non si hanno le densità dei salti in forma chiusa, nei secondi in alcuni casi esse si possono ottenere.

Esistono tre approcci principali per definire un processo di Lévy parametrico: la subordinazione browniana, specificare direttamente la misura di Lévy oppure specificare una densità infinitamente divisibile come la densità degli incrementi secondo una data scala temporale.

Ognuno dei tre approcci citati ha i propri punti di forza e le proprie debolezze, noi ci concentreremo prevalentemente sul primo approccio, ovvero la subordinazione browniana.

Subordinazione Browniana

Prima di passare alla subordinazione browniana esponiamo un importante risultato generale sulla subordinazione.

Sia $(S_t)_{t \geq 0}$ un subordinatore. Siccome per ogni t S_t è una variabile casuale positiva definiamo la sua trasformata di Laplace. Se la tripletta caratteristica è $(0, \rho, b)$ allora la funzione generatrice dei momenti risulta essere:

$$E[e^{uS_t}] = e^{tl(u)} \quad \forall u \leq 0$$

$$l(u) = bu + \int_0^\infty (e^{ux} - 1)\rho(dx)$$

dove $l(u)$ viene chiamato l'esponente di Laplace di S_t . Essendo S_t un subordinatore (e quindi un processo crescente) esso può essere interpretato come una deformazione temporale ed essere usato per un time change su altri processi di Lévy.

Teorema 2.1.2 *Si fissi uno spazio di probabilità (Ω, F, P) . Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Lévy su R^d avente esponente caratteristico $\Psi(u)$ e tripletta caratteristica (A, ν, γ) e sia $(S_t)_{t \geq 0}$ un subordinatore con esponente di Laplace $l(u)$ e tripletta $(0, \rho, b)$. Allora il processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ definito per ogni $\omega \in \Omega$ da $Y(t, \omega) = X(S(t, \omega), \omega)$ è un processo di Lévy la cui funzione caratteristica è:*

$$E[e^{iuY_t}] = e^{tl(\Psi(u))}$$

La tripletta caratteristica di Y_t è data da:

$$A^Y = bA$$

$$\nu^Y = b\nu(B) + \int_0^\infty p_s^X(B)\rho(ds), \quad \forall B \in B(R^d)$$

$$\gamma^Y = b\gamma + \int_0^\infty \rho(ds) \int_{|x| \leq 1} xp_s^X(dx)$$

dove p_t^X è la distribuzione di probabilità di X_t .

Passiamo ora a vedere come si possono costruire processi di Lévy tramite subordinazione browniana, in particolare forniamo un teorema che impone delle condizioni che la misura di Lévy deve avere affinché il processo possa essere rappresentato tramite un moto browniano subordinato con drift.

Teorema 2.1.3 *Sia ν una misura di Lévy su R e $\mu \in R$. Allora esiste un processo di Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ con misura di Lévy ν tale che $X_t = W(Z_t) + \mu Z_t$ per un qualche subordinatore $(Z_t)_{t \geq 0}$ e un moto browniano $(W_t)_{t \geq 0}$ indipendente da Z se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- ν è assolutamente continua con densità $\nu(x)$
- $\nu(x)e^{-\nu x} = \nu(-x)e^{\nu x}$ per ogni x
- $\nu(\sqrt{\cdot}(u))e^{-\nu\sqrt{\cdot}(u)}$ è una funzione completamente monotona su $(0, \infty)$

Forti di questi risultati teorici andiamo ora a presentare alcuni modelli basati sulla subordinazione browniana.

2.1.2 Esempi di Modelli

In questa sezione andiamo a presentare due modelli largamente utilizzati che si basano sulla subordinazione browniana. Nel primo modello il processo subordinatore sarà un processo gaussiano inverso mentre nel secondo caso sarà un processo gamma. Per maggiori informazioni riguardanti i modelli qui citati si rimanda a [5] e [28].

Normal Inverse Gaussian

Il processo NIG è un particolare processo di Lévy avente parametri $\mu, \delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ e $0 \leq |\beta| \leq \alpha$. Definendo $\delta_t = \delta t$, $\mu_t = \mu t$ e $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ siamo in grado di scrivere la distribuzione condizionale di L_t rispetto a $L_0 = 0$, ovvero

$$f_t^{NIG}(l; \alpha, \beta, \delta_t, \mu_t) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{K_1(\alpha \delta_t \sqrt{1 + (\frac{l - \mu_t}{\delta_t})^2})}{\sqrt{1 + (\frac{l - \mu_t}{\delta_t})^2}} \exp(\delta_t (\gamma + \beta (\frac{l - \mu_t}{\delta_t})))$$

dove $K_\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp(-\frac{1}{2}z(y + y^{-1})) dy$. Qui di seguito sono riportati i primi quattro momenti della distribuzione.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_t + \delta_t \beta \gamma^{-1} \\ \mu_2 &= \delta_t \alpha^2 \gamma^{-3} \\ \mu_3 &= 3\delta_t \alpha^2 \beta \gamma^{-5} \\ \mu_4 &= 3\delta_t \alpha^2 (\alpha^2 + 4\beta^2) \gamma^{-7} \end{aligned}$$

La skewness della NIG è pari a $3 \frac{\beta}{\alpha \sqrt{\delta_t \gamma}}$ mentre la kurtosis risulta essere $3 \frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{\delta_t \alpha^2 \gamma}$. La tripletta caratteristica della distribuzione NIG nella rappresentazione di Lévy-Khintchine è $(\gamma, 0, l^{NIG})$. Dove

$$\gamma = 2 \frac{\delta \alpha}{\pi} \int_0^1 \sinh \beta x K_1(\alpha x) dx$$

e la misura di Lévy $l^{NIG}(dl) = k^{NIG}(l) dl$ ha densità di Lévy

$$k^{NIG}(l) = \pi^{-1} \delta \alpha |l|^{-1} K_1(\alpha |l|) \exp(\beta l)$$

Un processo NIG L_t può essere rappresentato come moto browniano subordinato, ovvero nella forma

$$L_t = \mu_t + w_{h(t)}$$

dove w_t è un moto browniano avente drift β e varianza unitaria mentre $h(t)$ è un processo gaussiano inverso $h(t) \sim IG(\delta_t, \gamma)$. La densità di $h(t)$ condizionata ad $h(0) = 0$ è

$$f_t^{IG}(x) = \frac{\delta_t}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{x} \left(x - \frac{\delta_t}{\gamma}\right)^2\right)$$

Variance Gamma

La funzione caratteristica della legge Variance Gamma è data da:

$$\Phi(u; \sigma, \nu, \theta) = \left(1 - iu\theta\nu - \frac{\sigma^2\nu u^2}{2}\right)^{-1/\nu}$$

Tale distribuzione è infinitamente divisibile pertanto possiamo definire il processo Variance Gamma X_t come il processo che parte da 0, ha incrementi indipendenti e stazionari che seguono la legge $VG(\sigma, \nu/t, t\theta)$. Ovviamente

$$E[e^{iuX_t}] = \left(1 - iu\theta\nu - \frac{\sigma^2\nu u^2}{2}\right)^{-t/\nu}$$

È possibile dimostrare che il processo Variance Gamma può essere ottenuto come differenza di due processi Gamma indipendenti. Questa caratterizzazione permette di determinare la misura di Lévy:

$$\nu_{VG}(dx) = \begin{cases} C \exp(Gx) |x|^{-1} dx & x < 0 \\ C \exp(-Mx) x^{-1} dx & x > 0. \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} C &= 1/\nu > 0 \\ G &= \left(\sqrt{\frac{\theta^2\nu^2}{4} + \frac{\sigma^2\nu}{2}} - \frac{\theta\nu}{2} \right)^{-1} > 0 \\ M &= \left(\sqrt{\frac{\theta^2\nu^2}{4} + \frac{\sigma^2\nu}{2}} + \frac{\theta\nu}{2} \right)^{-1} > 0 \end{aligned}$$

Si nota che la misura di Lévy ha massa infinita pertanto vi sarà un'infinità di salti per ogni intervallo di tempo finito. Inoltre, siccome $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \nu_{VG}(dx) < \infty$, la teoria garantisce che le traiettorie del processo siano a variazione finita. Un processo Variance Gamma non presenta alcuna componente browniana e la sua tripletta di Lévy è $(\gamma, 0, \nu_{VG}(dx))$ dove γ è dato da:

$$\gamma = \frac{-C(G \exp(-M) - 1) - M(\exp(-G) - 1)}{MG}$$

2.2 Trasformata di Fourier

In questa sezione affrontiamo la teoria inerente alla trasformata di Fourier. Daremo un rapido sguardo alla trasformata continua per poi passare alla trasformata di Fourier discreta (DFT) e alla trasformata rapida (FFT) che sono per questo lavoro di fondamentale importanza. Per una più completa trattazione dell'argomento si rimanda a [39].

Definizione 2.2.1 Si definisce trasformata di Fourier di f la funzione $\hat{f}: R \rightarrow C$ data da:

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

Tale funzione risulta continua su tutta la retta reale e si annulla all'infinito. In ogni punto nel quale f è continua si ha:

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx \iff f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)e^{-i2\pi ux} du$$

Per convenzione indichiamo con F l'operazione che permette il passaggio da una funzione alla sua trasformata e con F^{-1} l'operazione inversa.

Elenchiamo ora brevemente le fondamentali proprietà della trasformata.

1. La trasformata è lineare, ovvero date c_1 e c_2 costanti complesse ($c_1 f + c_2 g$)
 $= c_1 \hat{f} + c_2 \hat{g}$
2. Vale la formula del ritardo, ovvero se $g(x) = f(ax - b)$, con $a, b \in R$, allora
 $\hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax - b)e^{-i2\pi ux} dx = \dots = \frac{1}{|a|} e^{-i2\pi \frac{b}{a} u} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right)$
3. Sia f una funzione derivabile, allora

$$F[f^{(n)}(x)](u) = (2\pi i u)^n \hat{f}(u)$$

$$F[x^n f(x)](u) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{f}^{(n)}(u)$$

4. La trasformata scambia tra loro il prodotto algebrico e il prodotto di convoluzione, cioè:

$$F[f * g](u) = \hat{f}(u) \cdot \hat{g}(u)$$

$$F[f \cdot g](u) = (\hat{f} * \hat{g})(u)$$

5. Vale l'uguaglianza di Parseval, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(u)|^2 du$$

2.2.1 Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

La trasformata di Fourier discreta è uno strumento estremamente utile per trattare successioni periodiche, ovvero quelle successioni che sono completamente descritte da un vettore N -dimensionale (caso di successione N -periodica) che si ripete ciclicamente.

Supponiamo ora di disporre di una funzione $f(x)$ reale di variabile reale che sia continua con derivata continua e anche 2π -periodica. Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier di tale funzione ovvero

$$f(x) = \sum_{n \in Z} c_n e^{inx}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Effettuiamo ora un calcolo approssimato di c_n potendo disporre del valore di f in N punti distinti e tenendo conto di $f(0) = f(2\pi)$ usiamo il metodo dei trapezi:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(2k\pi/N) e^{-in2k\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(2k\pi/N) (e^{2\pi i/N})^{-kn}$$

Per rendere la notazione più leggibile definiamo $y_k = f(2k\pi/N)$ e $w = e^{2\pi i/N}$. Da notare come w sia una radice N -esima di uno e quindi di come tutte le sue potenze $w^k, k = 1, \dots, N-1$ sono tutte le radici N -esime complesse dell'unità. Con questo cambio di notazione arriviamo a scrivere:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k w^{-kn}$$

Vediamo ora come possono essere interpretati i coefficienti approssimati C_n . Cerchiamo un polinomio trigonometrico p che interpoli f nel senso seguente:

$$p(x) = \sum_{h=-N/2}^{N/2-1} \gamma_h e^{ihx}, \quad p(2k\pi/N) = f(2k\pi/N) = y_k, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Tale problema è equivalente alla risoluzione di un problema algebrico di N equazioni in altrettante incognite che può essere riscritto nella forma:

$$\sum_{h=-N/2}^{N/2-1} \gamma_h w^{hk} = y_k, \quad k = 1, \dots, N-1$$

Effettuiamo ora un cambio di incognite: $Y_h = \gamma_h$ se $0 \leq h < N/2$ e $Y_h = \gamma_{h-N}$ se $N/2 \leq h < N$. In tal modo la sommatoria percorrerà ora gli indici da 0 a $N-1$, inoltre osserviamo che il vettore N -dimensionale Y definisce implicitamente una successione N periodica.

Il sistema lineare da risolvere quindi è diventato:

$$\sum_{h=0}^{N-1} Y_h w^{hk} = y_k, \quad k = 1, \dots, N-1$$

e la matrice \mathbf{F} dei suoi coefficienti è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & w^{3(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che tale matrice è invertibile e che, grazie alle proprietà delle radici complesse dell'unità, si ottiene la relazione $F\bar{F} = NI_N$ dove \bar{F} non è che la matrice sopra definita con gli esponenti cambiati di segno ($(w^k) = w^{-k}$). Pertanto la matrice inversa è calcolata come $F^{-1} = \frac{1}{N}\bar{F}$.

Risolvendo ora esplicitamente il sistema otteniamo:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k w^{-kn}$$

Confrontando quest'ultima espressione con quella che individua i coefficienti approssimati della serie di Fourier notiamo che le due equazioni coincidono, ovvero che i coefficienti stimati con la regola dei trapezi non forniscono altro che i coefficienti del polinomio trigonometrico interpolante la funzione nei punti $2k\pi/N$. Il vettore Y è detto trasformata di Fourier discreta di y , viceversa y è la trasformata discreta di Fourier inversa di Y .

$$Y = DFT[y]$$

$$y = DFT^{-1}[Y]$$

Quindi il passaggio da un vettore al suo trasformato si esegue tramite la semplice applicazione di una opportuna matrice.

2.2.2 Trasformata Rapida di Fourier (FFT)

L'esigenza di avere una versione rapida della trasformata nasce da importanti esigenze pratiche. In problemi concreti infatti gli algoritmi codificati devono avere la minor complessità computazionale possibile, ovvero devono arrivare al risultato desiderato nel minor numero di operazioni possibili. Una bassa complessità computazionale infatti significa un risparmio di memoria e soprattutto di tempo impiegato da un calcolatore per giungere ai risultati desiderati.

Cerchiamo ora di valutare la complessità computazionale per eseguire una DFT su di un vettore N -dimensionale tramite un algoritmo standard, per esempio l'algoritmo di Ruffini-Horner. In generale, per ogni elemento del vettore da trasformare l'algoritmo richiede tante addizioni e moltiplicazioni quanto è il grado del polinomio in questione. Inoltre il vettore da trasformare ha N elementi, pertanto la complessità per eseguire un simile calcolo è di ordine N^2 . Tale numero di operazioni può risultare proibitivo se N è abbastanza grande.

J.W. Cooley e J.W. Tucker idearono un algoritmo più rapido per raggiungere i medesimi risultati (FFT). Per effettuarlo è necessario che $N = 2^p$ e in tal caso, la complessità dell'algoritmo risulta essere pari a Np .

L'idea alla base dell'algoritmo FFT consta nel fatto che se N è una potenza di due, i punti nei quali si vuole calcolare il polinomio trigonometrico interpolante si dividono in coppie di numeri opposti con lo stesso quadrato. Così facendo è possibile dividere il polinomio in questioni nei suoi termini di grado pari e di grado dispari ed effettuare i calcoli per coppie di numeri anziché singoli numeri. Il fatto che N sia una potenza di due garantisce ad ogni passaggio la fattibilità di tali operazioni. Vediamo ora come lavora l'algoritmo FFT nel dettaglio.

Algoritmo FFT

Consideriamo il vettore y N -dimensionale e la sua trasformata discreta di Fourier Y . Supponiamo che N sia scomponibile in un prodotto di interi: $N = p_1 p_2$ con

$p_1 \neq p_2 \neq 1$. Allora gli indici n e k tramite i quali sono definiti i vettori y e Y possono essere scritti come:

$$\begin{cases} n = n_1 p_2 + n_0 & n_0 = 0, 1, \dots, p_2 - 1 & n_1 = 0, 1, \dots, p_1 - 1 \\ k = k_1 p_1 + k_0 & k_0 = 0, 1, \dots, p_1 - 1 & k_1 = 0, 1, \dots, p_2 - 1 \end{cases}$$

Tenendo conto dell'identità $w^{-N} = 1$ si deduce che

$$w^{-n(k_1 p_1 + k_0)} = w^{-n k_0} w^{-(n_1 p_2 + n_0) k_1 p_1} = w^{-n k_0} w^{-n_0 k_1 p_1}$$

Sostituiamo ora il risultato nell'espressione di Y_n .

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k w^{-kn} \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{p_2-1} \sum_{k_0=0}^{p_1-1} y_{k_1 p_1 + k_0} w^{-n(k_1 p_1 + k_0)} = \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k_0=0}^{p_2-1} w^{-n k_0} \left(\frac{1}{p_2} \sum_{k_1=0}^{p_1-1} y_{k_1 p_1 + k_0} w^{-n k_1 p_1} \right) = \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k_0=0}^{p_2-1} w^{-n k_0} \tilde{y}_{k_0, n_0} \quad (2.7)$$

Rispetto all'esecuzione del calcolo dalla (2.3) che richiede N^2 flops per ogni componente osserviamo che se $N = p_1 p_2$ il calcolo di \tilde{y} richiede p_2 operazioni e nella sostituzione altre p_1 , pertanto per calcolare tutti gli Y_n occorrono $N(p_1 + p_2)$ flops.

Se N si può fattorizzare ulteriormente allora il numero di flops necessari continua a ridursi sino ad arrivare al caso ideale, ovvero N potenza di p (in particolare potenza di due) per cui come già citato in precedenza l'ordine di operazioni risulta essere Np .

2.3 Valutazione di Opzioni

In questa sezione daremo un rapido sguardo ai metodi standard per valutare opzioni semplici facendo uso delle funzioni caratteristiche e della trasformata di Fourier. I metodi esposti in seguito sono una valida introduzione a tutto il lavoro svolto nella parte successiva.

2.3.1 Valutazione Tramite Funzioni Caratteristiche

Per capire l'importanza che rivestono le funzioni caratteristiche nell'ambito della valutazione di opzioni riportiamo un semplice ed efficace esempio. Ricordiamo che il prezzo privo di arbitraggio di un contingent claim può essere espresso come media condizionata del suo payoff scontato.

Consideriamo un'opzione vanilla call e scriviamo il prezzo come:

$$\begin{aligned} c(K, T) &= E_t^Q[e^{r(T-t)}(X(T) - K)^+] \\ &= e^{r(T-t)} \left(E_t^Q[X(T)1_{X(T)>K}] - K E_t^Q[1_{X(T)>K}] \right) \end{aligned}$$

Se ora definiamo $z(T) = \ln X(T)$ e $k = \ln K$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} c(e^k, T) &= e^{r(T-t)} \left(E_t^Q[e^{z(T)}1_{z(T)>k}] - e^k E_t^Q[1_{z(T)>k}] \right) \\ &= X(t)\Pi_1 - e^k e^{-r(T-t)}\Pi_2 \end{aligned}$$

Le quantità Π_1 e Π_2 possono essere interpretate come le probabilità rispettivamente stock-adjusted e money-market adjusted, ovvero sono state calcolate usando come numerario rispettivamente lo stock e il money market account. Quindi

$$\Pi_1 = P_t^X[X(T) > K]$$

$$\Pi_2 = P_t^B[X(T) > K]$$

I due valori attesi possono essere calcolati tramite la funzione caratteristica di $Z(T)$. Definiamo ora:

$$\phi_1(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma z} P_t^X(Z(T) \in dz)$$

$$\phi_2(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma z} P_t^B(Z(T) \in dz)$$

dove P_t^X e P_t^B indicano la funzione densità di $Z(T)$ sotto i due diversi numerari e dove omettiamo la dipendenza della funzione caratteristica dalla scadenza dell'opzione. Le funzioni $\phi_1(\gamma)$ e $\phi_2(\gamma)$ sono le trasformate di Fourier delle densità di probabilità $P_t^X(Z(T) \in dz)$ e $P_t^B(Z(T) \in dz)$. Usando la formula di inversione possono essere calcolate le quantità Π_1 e Π_2 necessarie al calcolo del prezzo.

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\gamma k} \phi_1(\gamma)}{i\gamma} \right) d\gamma$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\gamma k} \phi_2(\gamma)}{i\gamma} \right) d\gamma$$

Tali integrali possono essere calcolati con metodi di quadratura. A questo proposito bisogna stare attenti ai problemi di instabilità dovuti alla natura oscillatoria delle funzioni integrande data dalla presenza di un esponenziale complesso. Per questo tipo di calcoli la formula dei trapezi funziona molto meglio del metodo di Newton-Cotes e dovrebbe essere comparabile con la quadratura gaussiana.

Un esempio di processi largamente usati per questo tipo di valutazioni sono proprio i processi di Lévy in quanto dispongono di qualità interessanti. Essi infatti, oltre ad essere trattabili analiticamente come abbiamo già visto, sono la più diretta generalizzazione di un modello basato sul moto browniano. Inoltre sono strutturati in modo da poter spiegare una vasta gamma di fenomeni come ad esempio lo smile di volatilità e la skewness negativa dei prezzi e la loro struttura i.i.d. ne semplifica la stima dei parametri sotto la misura di probabilità storica.

Come già discusso in precedenza ogni processo di Lévy risulta univocamente determinato dalla funzione caratteristica dei suoi incrementi

$$E_t^Q[e^{i\gamma z(T)}] = e^{m\Delta + \psi_\Delta(\gamma)}$$

dove m indica il drift e $\Delta = T - t$. Diversi processi originano diversi modelli dei quali alcuni esempi sono stati forniti nella sezione apposita. Anche una volta deciso il modello e quindi avendo a disposizione esplicitamente la funzione caratteristica di interesse rimane da specificare il parametro di drift m . Inoltre, data l'incompletezza del mercato, occorre anche scegliere una misura di martingala attraverso la quale effettuare la valutazione neutrale rispetto al rischio dei derivati. In particolare, una possibile scelta che rende il problema trattabile consiste nello scegliere m in modo tale che il prezzo dello stock scontato rispetto al money-market account risulti una martingala, ovvero

$$E_t^Q\left[\frac{X(T)}{B(T)}\right] = \frac{X(t)}{B(t)}, \quad \forall T \geq 0$$

Dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene la condizione:

$$m = r - \frac{\psi_\Delta(-i)}{\Delta}$$

dove r denota il tasso di interesse privo di rischio.

2.3.2 Formulazione di Carr-Madan

In questa sezione verrà illustrato il celebre metodo per la valutazione di opzioni europee introdotto nel 1999 da Carr e Madan [11]. Tale formulazione costituisce la base dell'idea del lavoro che sarà svolto in seguito.

Il metodo in questione dimostra come la soluzione analitica del prezzo di una opzione europea possa essere ottenuto in forma esplicita una volta nota la funzione caratteristica di $\log S_t$ dove S_t è il prezzo del sottostante al tempo t .

L'idea fondamentale della formulazione consiste nel considerare la trasformata di Fourier del prezzo di una call europea modificato rispetto a $k = \log K$, dove K è il prezzo di esercizio dell'opzione considerata. Il vantaggio consiste nel poter ottenere uno spettro di prezzi dell'opzione a diversi livelli di prezzo di esercizio tramite una singola inversione della trasformata.

Il payoff di un'opzione call a scadenza T è

$$(S_T - K)^+$$

Definiamo ora s_t e k come i logaritmi rispettivamente del prezzo del sottostante e del prezzo di esercizio e definiamo $q_t(s)$ la densità di probabilità neutrale rispetto al rischio di s_t . Allora, il prezzo dell'opzione in una valutazione neutrale rispetto al rischio diventa:

$$C_T(k) = e^{-rT} E^Q[(S_T - K)^+] = e^{-rT} \int_k^{+\infty} (e^s - e^k) q_T(s) ds$$

dove ovviamente r indica il tasso di interesse privo di rischio e Q la misura di martingala neutrale rispetto al rischio. Purtroppo, siccome la funzione $C_T(k)$

non è quadrato integrabile dato che tende ad S_0 per k che tende a $-\infty$, non è possibile ottenerne la trasformata di Fourier.

Per ovviare al problema si considera il prezzo dell'opzione smorzato, definito come

$$\psi_T(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwk} c_T(k) dk = \frac{e^{-rT} \phi_T(w - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - w^2 + i(2\alpha + 1)w} \quad (2.7)$$

dove ϕ_T indica la funzione caratteristica di s_T .

Data $\psi_T(w)$, il prezzo dell'opzione segue dalla trasformata inversa

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwk} \psi_T(w) dw$$

Siccome poi $C_T(k)$ è reale, l'espressione si può riscrivere come

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-iwk} \psi_T(w) dw$$

Questo integrale può essere valutato numericamente:

$$C_T(k) \sim \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i w_j k} \psi_T(w_j) \eta$$

dove $w_j = \eta j$ e $j = 0, \dots, N-1$ ed η è la distanza che separa i punti della griglia di integrazione.

Nel 2004 Lee ha sviluppato dei vincoli per ben approssimare l'integrale. La formula soprastante suggerisce l'impiego della trasformata rapida di Fourier in quanto algoritmo efficiente per il calcolo di somme del tipo

$$v_u = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} j u} x_j, \text{ per } u=0, \dots, N-1$$

In generale, i prezzi di esercizio intorno allo spot price sono di interesse perché tali opzioni sono quelle scambiate più frequentemente. Consideriamo quindi una griglia equispaziata dei logaritmi dei prezzi d'esercizio in un intorno del logaritmo dello spot price:

$$k_u = -\frac{1}{2} N \zeta + \zeta u + s_0, \text{ per } u=0, \dots, N-1$$

dove ζ indica la distanza tra i log strikes. Sostituendo l'espressione della formula di approssimazione del prezzo otteniamo:

$$C_T(k) \sim e^{-\alpha k} \pi \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \zeta \eta j u} e^{i \{(\frac{1}{2} N \zeta - s_0) w_j\}} \psi(w_j) \eta$$

A questo punto applichiamo l'algoritmo FFT a

$$x_j = e^{i \{(\frac{1}{2} N \zeta - s_0) w_j\}} \psi(w_j) \eta, \text{ per } j=0, \dots, N-1$$

a patto che $\zeta\eta = \frac{2\pi}{N}$. Il secondo membro del vincolo può essere visto come fissato un quanto N è determinato dal setup computazionale. Questo porta a scegliere un trade-off tra accuratezza e numero di strike interessanti, infatti se si sceglie ζ piccolo per avere a disposizione molti strike η per compensare dovrà essere grande pertanto la griglia di integrazione risulterà grossolana, il viceversa avviene scambiando i parametri.

La struttura altamente oscillatoria di ψ_T per scadenze brevi rende difficoltosa la valutazione numerica pertanto talvolta si può ricorrere ad un approccio alternativo che ora illustriamo.

Definiamo

$$z_T(k) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} [(e^k - e^s)\mathbf{1}_{\{s < k, k < 0\}} + (e^s - e^k)\mathbf{1}_{\{s > k, k < 0\}}] q_T(s) ds$$

ed osserviamo che esso è uguale ad una opzione call di scadenza T e strike K quando $K > S_0$ ed uguale alla put corrispondente qualora $K < S_0$. Quindi, una volta noto $z_T(k)$ è possibile trovare il prezzo della corrispondente opzione out-of-the-money. Per tenere sotto controllo le indesiderate oscillazioni di $z_T(k)$ nell'intorno di $k = 0$ si considera la trasformata di Fourier di $\sinh(\alpha k)z_T(k)$

$$\begin{aligned} \gamma_T(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwk} \sinh(\alpha k) z_T(k) dk \\ &= \frac{\zeta_T(w - i\alpha) - \zeta_T(w + i\alpha)}{2} \end{aligned}$$

dove

$$\zeta_T(w) = e^{-rT} \left(\frac{1}{1 + iw} - \frac{e^{rT}}{iw} - \frac{\phi_T(w - i)}{w^2 - iw} \right)$$

Siccome la quantità γ_T è ottenibile una volta nota la funzione caratteristica di s_T , possiamo ottenere tramite inversione

$$z_T(k) = \frac{1}{\pi} \sinh(\alpha k) \int_0^{+\infty} e^{-iwk} \gamma_T(w) dw$$

Per effettuare le valutazioni numeriche, i corrispondenti integrali vengono discretizzati con metodi di quadratura e i domini di integrazione infiniti vengono troncati.

2.4 Operatori Pseudodifferenziali (PDOs)

Gli operatori pseudodifferenziali sono una generalizzazione degli operatori differenziali. In questa sezione saranno esposti solo i risultati teorici base della teoria, in particolare quelli che serviranno poi per costruire il modello attraverso il quale saranno effettuate le valutazioni nel capitolo successivo. Per informazioni teoriche più approfondite si rimanda a [34] e [43].

Data una funzione liscia $\underline{p}(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, la si associa ad un operatore $p(x, \partial_x) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dove \mathcal{S} è lo spazio di Schwartz ovvero l'insieme di tutte le funzioni lisce a valori complessi con dominio in \mathbb{R}^n tali che la funzione e ogni sua derivata decada all'infinito più rapidamente di qualsiasi polinomio. L'associazione $\underline{p} \rightarrow p$ non è unica e diverse mappature da funzione ad operatore danno

origine a diverse teorie di calcolo pseudodifferenziale.

La funzione polinomiale $p(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(iy)^\alpha$ dove α è un multi-indice in R^n deve essere associata con l'operatore $p(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$, ovvero con un operatore differenziale di ordine m .

Nella teoria dei PDO è molto utile la trasformata di Fourier in quanto dotata della proprietà di trasformare derivate in prodotti. Tale proprietà è largamente utilizzata per risolvere equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti trasformando l'equazione differenziale in questione in una equazione algebrica. Sfortunatamente tale proprietà non si estende al caso di coefficienti variabili.

Le funzioni $\underline{p}(x, y)$ sono chiamate simboli. Gli operatori differenziali corrispondono a simboli polinomiali in y . La letteratura definisce diversi spazi di simboli ma ognuno di essi concorda sul fatto che lo spazio associato agli operatori pseudodifferenziali è chiuso rispetto all'inversione, ovvero *l'inverso di un operatore pseudodifferenziale è un'altro operatore pseudodifferenziale*. Tale affermazione non vale per operatori differenziali.

Gli operatori pseudodifferenziali sono pseudolocali. Un operatore p applicato ad una distribuzione u si dice locale se $p(u)$ è liscio nello stesso insieme in cui u è liscia. Il termine pseudocale sta ad indicare che l'insieme dove $p(u)$ è liscio include l'insieme dove u è liscia, ovvero l'operatore in questione potrebbe rendere lisce alcune irregolarità di u .

Dopo questa breve introduzione agli operatori pseudodifferenziali diamo ora una trattazione matematica rigorosa dell'argomento introducendo dapprima gli spazi funzionali ed in seguito concentrandoci sugli operatori in questione.

2.4.1 Spazi Funzionali

Gli spazi funzionali sono la base per poter condurre uno studio sulle equazioni differenziali. La struttura matematica necessaria è quella degli spazi di Hilbert, di Banach oppure di Fréchet. Ovvero spazi vettoriali completi dotati rispettivamente di: prodotto interno, una norma, una particolare metrica costruita tramite una famiglia di semi norme. I principali esempi di spazi di Hilbert sono lo spazio L^2 e gli spazi di Sobolev H^k , con k intero positivo che consistono di tutte le funzioni aventi derivate k -esime appartenenti ad L^2 . La trasformata di Fourier permette di estendere gli spazi di Sobolev ad indici reali. Tale generalizzazione è simile all'idea che permette la costruzione di operatori pseudodifferenziali. Per effettuare la generalizzazione occorre presentare gli spazi di Schwartz ed estendere la trasformata di Fourier in L^2 . Presentiamo ora quindi dapprima gli spazi di Sobolev e quelli di Schwartz.

Gli spazi di Sobolev H^k , essendo k intero non negativo, sono gli elementi di L^2 tali che

$$\|u\|_k^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^2 < \infty$$

dove α è un multi indice e la notazione $|\alpha|$ indica l'intero positivo $\sum_{i=1}^n \alpha_i$. Il prodotto interno in L^2 definisce un prodotto interno in H^k dato da

$$(u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)$$

Lo spazio di Schwartz S è l'insieme delle funzioni a decadimento rapido, ovvero le funzioni lisce su R^n a valori complessi che soddisfano

$$|u|_{k,\alpha} := \sup_{x \in R^n} |(1 + |x|^2)^{k/2} \partial^\alpha u| < \infty$$

per ogni multi indice α e ogni k naturale, prendendo $|x|$ come lunghezza euclidea in R^n .

È facile verificare che la trasformata di Fourier è ben definita sugli elementi dello spazio (ovvero l'integrale converge) ma cosa ancora più importante è notare che la trasformata di Fourier è un'isomorfismo tra spazi di Schwartz.

Per riuscire ad estendere la trasformata ad un isomorfismo $F : L^2 \rightarrow L^2$ occorre prima dimostrare il teorema di Parseval ed in seguito ricordare che S è denso in L^2 .

Sullo stesso teorema si basa la generalizzazione degli spazi di Sobolev ad indice reale. Ricordando infatti che ogni $u \in H_k$ con k naturale soddisfa $\partial^\alpha u \in L^2$ per $|\alpha| \leq k$ il teorema di Parseval implica che $|y|^k \hat{u}(y) \in L^2$. Osservando ora che esiste una costante positiva c tale che $(1/c)\langle y \rangle \leq (1 + |y|) \leq c\langle y \rangle$, dove $\langle y \rangle = (1 + |y|^2)^{1/2}$ si perviene alla seguente

Definizione 2.4.1 *Lo spazio di Sobolev $H^s \forall s \in R$ consiste nelle funzioni in R^n localmente quadrato integrabili tali che $\langle y \rangle^s \hat{u} \in L^2$. Questo è uno spazio di Hilbert con il prodotto interno*

$$(u, v)_s := \int_{R^n} \langle y \rangle^{2s} \overline{\hat{u}(y)} \hat{v}(y) dy$$

e la norma associata è definita da

$$\|u\|_s^2 := \int_{R^n} \langle y \rangle^{2s} |\hat{u}(y)|^2 dy$$

La definizione precedente si basa su di una proprietà della trasformata di Fourier che converte la regolarità della funzione in un decadimento all'infinito della trasformata. Si può verificare che $H^s \subset H^{s'} \forall s' \leq s$. Sono ammessi anche indici negativi, gli elementi degli spazi corrispondenti a tali indici sono distribuzioni inoltre lo spazio di Hilbert H^{-s} è il duale di H^s .

Introduciamo infine spazi che serviranno nella seguente sezione:

$$H^{-\infty} := \bigcup_{s \in R} H^s$$

$$H^\infty := \bigcap_{s \in R} H^s$$

Tali spazi, con metriche appropriate, sono spazi di Fréchet. Da notare anche che $S \subset H^\infty$, quindi $H^{-\infty} \subset S'$ e quindi gli elementi di $H^{-\infty}$ sono distribuzioni temperate.

2.4.2 Funzioni ed Operatori

Sia S^m con $m \in R$ l'insieme delle funzioni lisce $p(x, y) : R^n \times R^n \rightarrow C$ tali che:

$$|\partial_x^\beta \partial_y^\alpha p(x, y)| \leq C_\alpha \langle y \rangle^{m-|\alpha|} \quad (2.8)$$

dove C_α è una costante dipendente dal multi indice α e $\langle y \rangle = (1 + |y|^2)^{1/2}$. Questo è lo spazio i cui elementi sono associati agli operatori ed è chiamato spazio dei simboli. Notiamo che non c'è alcun andamento asintotico richiesto per la variabile x in quanto gli integrali di Fourier fanno riferimento esclusivamente alla variabile y il cui comportamento asintotico è legato all'ordine dell'operatore differenziale ad essa associato.

Si può verificare che $S^{m'} \subset S^m \forall m' \leq m$ e a tal proposito introduciamo gli spazi $S^\infty := \cup_{m \in \mathbb{R}} S^m$ e $S^{-\infty} := \cap_{m \in \mathbb{R}} S^m$.

Data $\underline{p}(x, y) \in S^m$, l'operatore associato $p(x, \partial_x) : S \rightarrow S$ si dice che appartiene allo spazio ψ^m ed è determinato da:

$$p(x, \partial_x)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} \underline{p}(x, y) \hat{u}(y) dy \quad (2.9)$$

per ogni $u \in S$. La costante m è detta ordine dell'operatore. Mentre risulta chiaro dalle proprietà degli spazi che $u \in S$ implica $p(x, \partial_x)(u) \in C^\infty$ non è banale ma tuttavia possibile provare che $p(u) \in S$.

I simboli polinomiali $\underline{p}(x, y) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) (iy)^\alpha$ con m naturale corrispondono agli operatori differenziali $p(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ di ordine m .

Un esempio di operatore pseudodifferenziale che non sia un operatore differenziale è dato dal simbolo $\underline{p}(y) = \chi(y) |y|^k \sin \ln |y|$ dove $k \in \mathbb{R}$ e $\chi(y)$ è una cut function a $|y| = 1/2$, ovvero una funzione liscia che scompare per $|y| \leq 1/2$ e vale identicamente 1 su tutti gli altri punti dell'asse reale. L'uso di tale funzione è strumentale per ottenere una funzione liscia in $y = 0$. Il simbolo appena descritto appartiene ad S^k .

Un operatore molto utile è costituito da $\Lambda^s : S \rightarrow S$ dato da

$$\Lambda^s(u) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot x} \langle y \rangle^s \hat{u}(y) dy$$

dove s è una costante reale. Λ^s è un operatore pseudo differenziale che non è un operatore differenziale. il suo simbolo è $\underline{\Lambda}^s = \langle y \rangle^s$ che appartiene ad S^s , pertanto $\Lambda^s \in \psi^s$. È possibile estendere l'operatore a spazi di Sobolev, ovvero ad un operatore $\Lambda^s : H^s \rightarrow L^2$. Un tale operatore da un'idea di cosa si intende per derivata s -esima con s reale.

In generale gli operatori pseudodifferenziali possono essere estesi a spazi di Sobolev esattamente come l'esempio riportato qui sopra dell'operatore Λ^s . Dato $p \in \psi^m$, esso definisce un operatore $p(x, \partial_x) : H^{s+m} \rightarrow H^s$ e questa è la ragione per la quale m viene chiamato l'ordine dell'operatore. È possibile estendere gli operatori in modo tale che agiscano su spazi di distribuzione S' .

Introduciamo ora la nozione di operatore lisciante:

Definizione 2.4.2 *Un operatore $p : H^{-\infty} \rightarrow H^{-\infty}$ è detto operatore lisciante se $p(H^{-\infty}) \subset C^\infty$.*

Questo significa che $p(u)$ sarà una funzione liscia indipendentemente dal comportamento di u stessa. Mentre è possibile provare che un operatore pseudodifferenziale il cui simbolo appartenga a $S^{-\infty}$ sia un operatore lisciante non è vero che ogni operatore lisciante sia pseudodifferenziale.

Una delle più utili nozioni legate al calcolo pseudodifferenziale è l'espansione asintotica dei simboli. Consideriamo una sequenza decrescente $m_{j=1}^\infty$, con $\lim_{j \rightarrow \infty} m_j = -\infty$. Sia ora $\underline{p}_{j=1}^\infty$ una sequenza di simboli $\underline{p}_j(x, y) \in S^{m_j}$ ed

assumiamo che questi simboli siano asintoticamente omogenei in y di grado m_j , ovvero soddisfano $\underline{p}(x, ty) = t^{m_j} \underline{p}_j(x, y)$ per $|y| \geq 1$. Allora un simbolo $\underline{p} \in S^{m_1}$ ammette espansione asintotica $\sum_j \underline{p}_j$ se e solo se

$$\left(\underline{p} - \sum_{j=1}^k \underline{p}_j \right) \in S^{m_{(k+1)}}, \quad \forall k \geq 1 \quad (2.10)$$

usando la notazione $\underline{p} \sim \sum_j \underline{p}_j$. Il primo termine dell'espansione, ovvero \underline{p}_1 è detto simbolo principale. È importante osservare che m_j sono costanti reali, non necessariamente intere e che ogni espansione asintotica definisce un simbolo, ovvero ogni funzione della forma $\sum_j \underline{p}_j$ appartiene a qualche spazio S^{m_1} . Tuttavia non tutti i simboli ammettono un'espansione asintotica. L'insieme dei simboli che ammettono tale espansione viene detto classico ed indicato con S_{cl}^m mentre gli operatori corrispondenti apparterranno allo spazio ψ_{cl}^m . Banalmente si riscontra che $S_{cl}^m \subset S^m$. Un aspetto importante da evidenziare è che due simboli \underline{p} e \underline{q} aventi la stessa espansione asintotica differiscono per via di un operatore pseudodifferenziale lisciente, perché

$$\underline{p} - \underline{q} = \left(\underline{p} - \sum_{j=1}^k \underline{p}_j \right) - \left(\underline{q} - \sum_{j=1}^k \underline{p}_j \right) \in S^{m_{(k+1)}}$$

per ogni k e $\lim_{k \rightarrow \infty} m_j = -\infty$, quindi $(\underline{p} - \underline{q}) \in S^{-\infty}$.

La gran parte del calcolo di operatori pseudodifferenziali consiste nel fare i conti tenendo conto solo del termine di grado più alto dell'espansione asintotica e tenere sotto controllo il comportamento dei termini di ordine inferiore. Il simbolo di un prodotto di operatori pseudodifferenziali non è il prodotto dei simboli individuali. In questi casi si effettua l'espansione asintotica e si può riscontrare che il simbolo principale del prodotto risulta essere uguale al prodotto dei singoli simboli principali. Più precisamente dato $p \in \psi^r$ e $q \in \psi^s$, allora il prodotto è un operatore ben definito $pq \in \psi^{r+s}$ e l'espansione asintotica del suo simbolo risulta essere

$$\underline{pq} \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} [\partial_y^\alpha \underline{p}(x, y)] [\partial_x^\alpha \underline{q}(x, y)]$$

Capitolo 3

Metodo Fourier Space Time-stepping

In questo capitolo verrà sviluppato il metodo FST per la valutazione di opzioni introdotto da Vladimir Surkov nel 2009 [40]. Tale metodo sfrutta i vantaggi della trasformata di Fourier trasformando la PIDE relativa alla valutazione nello spazio di Fourier. Uno dei principali vantaggi di lavorare direttamente in tale spazio consiste nel fatto che l'esponente caratteristico di un processo stocastico ad incrementi indipendenti (nel nostro caso i Lévy) può essere fattorizzato dalla trasformata della PIDE e conseguentemente, applicando la trasformata di Fourier alla PIDE, si ottiene un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie. Inoltre l'esponente caratteristico è disponibile in forma chiusa per ogni processo ad incrementi indipendenti grazie alla formula di Lévy-Khintchine. Tutto questo rende il metodo FST flessibile e generico e vedremo come esso porti naturalmente ad una trattazione simmetrica dei termini di diffusione e di salto. Inoltre dato che non c'è alcuna necessità di avere l'espressione della trasformata del payoff in forma chiusa, il metodo FST può essere facilmente applicato ad opzioni aventi payoff non standard.

Vedremo come per opzioni di tipo path-independent si possano ottenere valutazioni per un intero range di prezzi spot con una singola iterazione temporale mentre un discorso leggermente più complicato andrà affrontato per quanto riguarda le opzioni di tipo path-dependent.

Dato l'approccio dalle PIDE trasformate, il metodo FST può facilmente essere esteso a strutture di tipo regime-switching e mean-reverting.

Tramite gli esperimenti condotti nel capitolo vedremo come l'ordine di convergenza per quanto riguarda la valutazione di un'opzione path-dependent single-asset risulti essere di 2 nello spazio e 1 nel tempo. Vedremo infine come l'FST sia computazionalmente efficiente: per ogni passo temporale vengono richieste due FFT, quindi la complessità computazionale risulta $O(MN^d \log_2 N)$ dove N è il numero di punti della griglia in ogni dimensione, d il numero di dimensioni spaziali e M il numero di passi temporali.

Entriamo ora nei dettagli partendo dalla soluzione teorica per poi passare alla descrizione pratica del metodo e agli esperimenti.

3.1 Risoluzione PIDE

Ricordando il teorema fondamentale dell'asset pricing sappiamo che il logaritmo del prezzo scontato $v(t, X(t))$ risulta essere una martingala sotto la misura Q e conseguentemente il termine di drift dell'equazione differenziale stocastica associata risulta essere banale.

Applicando tale condizione a $v(t, X(t))$ assieme alle condizioni al contorno a scadenza otteniamo la seguente PIDE:

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathcal{L})v(t, x) & = 0 \\ v(T, x) & = \phi(S(0)e^x). \end{cases}$$

dove \mathcal{L} è il generatore infinitesimale del processo di Lévy multidimensionale e agisce su funzioni doppiamente differenziabili come segue:

$$\mathcal{L}g(x) = (\gamma^\top \partial_x + \frac{1}{2} \partial_x^\top \Sigma \partial_x)g(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (g(x+y) - g(x) - 1_{\{|y| < 1\}} y^\top \partial_x g(x)) \nu(dy) \quad (3.1)$$

Lo scopo principale di questa sezione è quello di sviluppare un metodo basato sulla trasformata di Fourier per risolvere equazioni della forma (3.1). Il vantaggio maggiore di tale approccio consiste nel fatto che la PIDE può essere maneggiata in maniera efficiente senza le addizionali difficoltà associate al termine integrale.

Ricordando un'importante proprietà della trasformata di Fourier e cioè quella di trasformare derivate spaziali in moltiplicazioni, applichiamo la trasformata continua di Fourier (CFT) al generatore \mathcal{L} , ottenendo così

$$F[\mathcal{L}v](t, w) = \left\{ i\gamma^\top w - \frac{1}{2} w^\top \Sigma w + \int_{\mathbb{R}^n} (e^{iw^\top y} - 1 - i1_{|y| < 1} w^\top y) \nu(dy) \right\} F[v](t, w) = \Psi(w) F[v](t, w) \quad (3.2)$$

Prendendo ora le trasformate di entrambi i membri della PIDE otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_t F[v](t, w) + \Psi(w) F[v](t, w) & = 0 \\ F[v](T, w) & = F[\phi](w). \end{cases}$$

Siamo riusciti a trasformare la PIDE in una famiglia di ODE parametrizzata da w . Dato il valore di $F[v](t, w)$ ad un tempo $t_2 \leq T$ il sistema è facilmente risolvibile per trovare il prezzo al tempo $t_1 < t_2$.

$$F[v](t_1, w) = F[v](t_2, w) \cdot e^{\Psi(w)(t_2 - t_1)} \quad (3.3)$$

Il risultato finale è ottenuto applicando l'antitrasformata:

$$v(t_1, x) = F^{-1} \left[F[v](t_2, w) \cdot e^{\Psi(w)(t_2 - t_1)} \right](x) \quad (3.4)$$

3.2 Metodo FST

Una volta che si ha a disposizione l'equazione (3.4), l'algoritmo per il calcolo si ottiene piuttosto facilmente.

Occorre ora effettuare una distinzione tra opzioni path-dependent e path-independent: per le prime è necessario un algoritmo time-stepping per applicare condizioni

al contorno o vincoli al prezzo di esercizio mentre nel secondo caso si ottiene il prezzo dell'opzione in un solo passo temporale applicando direttamente la (3.4), nello stile Carr-Madan.

Consideriamo una partizione del dominio troncato del prezzo del sottostante $\Omega = [x_{min}, x_{max}]$ in una griglia finita di punti $\{x_n, n=0, \dots, N-1\}$ dove $x_n = x_{min} + n\Delta x$ e $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/(N - 1)$. Analogamente effettuiamo una partizione dell'asse temporale in M intervalli e del dominio in frequenza $\hat{\Omega} = [0, w_{max}]$ in una griglia finita di punti $\{w_n, n=0, \dots, N/2\}$, dove $w_n = w_{min} + n\Delta w$, $\Delta w = 2w_{max}/N$ e $w_{max} = \frac{1}{2\Delta x}$ ovvero pari alla frequenza critica di Nyquist. È importante osservare che siccome $v(t, x)$ è una funzione a valori reali, non è necessario calcolare la trasformata per le frequenze negative e pertanto la griglia del dominio in frequenza avrà la metà dei punti rispetto a quella del dominio spaziale.

Consideriamo ora il caso monodimensionale. Sia $v_{mn} = v(t_m, x_n)$ il generico punto della griglia spazio temporale e $\hat{v}_{mn} = \hat{v}(t_m, w_n)$ il suo corrispettivo trasformato secondo Fourier. I prezzi nel dominio delle frequenze sono ottenuti tramite approssimazione della CFT:

$$\hat{v}_{mn} \approx \sum_{k=0}^{N-1} v(t_m, x_k) e^{-iw_n x_k} \Delta x = \alpha_n \sum_{k=0}^{N-1} v_{mk} e^{-ink/N} = \alpha_n (FFT[v_m])_n \quad (3.5)$$

dove $\alpha_n = e^{-iw_n x_{min}} \Delta x$ e $(FFT[v_m])_n$ indica l'n-esima componente della trasformata discreta di Fourier (DFT) del vettore v_m , che viene calcolata tramite l'algoritmo FFT.

In maniera del tutto simile i prezzi nel dominio spaziale possono essere calcolati da quelli in frequenza tramite l'uso dell'antitrasformata: $v_{mn} = (FFT^{-1}[\alpha^{-1} \cdot \hat{v}_m])_n$ dove $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}]$.

Combiniamo ora i risultati ottenuti ed esplicitiamo l'espressione facendo anche un passo indietro nel dominio temporale:

$$v_{m-1} = FFT^{-1}[\alpha^{-1} \cdot \hat{v}_{m-1}] \quad (3.6)$$

$$= FFT^{-1}[\alpha^{-1} \cdot \hat{v}_m \cdot e^{\Psi(\cdot)\Delta t_m}] \quad (3.7)$$

$$= FFT^{-1}[\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot FFT[v_m] \cdot e^{\Psi(\cdot)\Delta t_m}] \quad (3.8)$$

$$= FFT^{-1}[FFT[v_m] \cdot e^{\Psi(\cdot)\Delta t_m}] \quad (3.9)$$

Dalle equazioni sopra si nota come il coefficiente α che racchiude le informazioni relative alle condizioni al contorno in dominio spaziale scompare nei calcoli e pertanto possa essere omesso nella computazione permettendo così di alleggerire l'algoritmo.

Il caso monodimensionale si può estendere senza problemi a quello pluridimensionale facendo uso della trasformata pluridimensionale e considerando vettori anziché valori scalari.

3.2.1 Selezione Ottimale della Griglia

La scelta ottimale della griglia di integrazione è tutt'altro che banale; qui di seguito sono riportate esclusivamente alcune considerazioni euristiche a riguardo.

Ricordiamo la relazione sussistente tra la griglia in frequenza e quella spaziale:

$$w_{max} \cdot (x_{max} - x_{min}) = \frac{N - 1}{2}$$

Inoltre potrebbe essere opportuno effettuare una trasformazione logaritmica in modo da poter effettuare valutazioni in un intorno di $x = 0$. A questo punto per tenere il punto di interesse al centro della griglia la scelta naturale degli estremi risulta $x_{min} = -x_{max}$ e quindi $w_{max} \cdot x_{max} = (N - 1)/4$.

Ci sono diversi fattori in gioco da tenere in considerazione infatti gli estremi della griglia spaziale dovrebbero essere abbastanza grandi da poter catturare il comportamento generale dell'opzione ma anche abbastanza piccoli in modo da poter mantenere un'elevata accuratezza sulle valutazioni in un intorno dell'area di interesse. Analogamente in frequenza w_{max} dovrebbe essere scelta abbastanza grande da poter catturare le alte frequenze della funzione caratteristica ma se la si sceglie troppo grande si perde accuratezza nella computazione e di conseguenza nel prezzo calcolato. Prove pratiche suggeriscono che $x_{max} \in [4, 7]$ funziona bene per modelli diffusivi a bassa volatilità e scadenza breve mentre $x_{max} \in [5, 10]$ meglio si adatta a modelli ad elevata volatilità o che abbiano una componente di salto dominante.

Il problema di selezione ottimale della griglia rimane tutt'ora aperto nonostante le numerose considerazioni effettuate.

3.3 Stabilità, Convergenza e Precisione

Una potenziale fonte di instabilità del metodo FST potrebbe essere la struttura di certi payoff la cui trasformata contenga singolarità sull'asse reale. Per ovviare a questo problema basta effettuare una traslazione $w \rightarrow w + i\epsilon$ che si ripercuote con una leggera modificazione dell'algoritmo, ovvero:

$$v_{m-1} = FFT^{-1}[FFT[\tilde{v}_m] \cdot e^{\tilde{\Psi}(\cdot)\Delta t_m}]$$

dove $\tilde{v}_{mn} = e^{\epsilon x_n} v_{mn}$ e $\tilde{\Psi}(w) = \Psi(w + i\epsilon)$.

Nel metodo FST, troncando il payoff a prezzi spot molto elevati o molto ridotti permette di togliere la singolarità dall'asse reale.

Una tipica fonte di instabilità dei metodi numerici è il passo temporale. Nel metodo FST dove si passa al dominio in frequenza per effettuare tale passo, non ci sono restrizioni di alcun genere. Siccome la trasformata della (3.1) viene risolta esattamente dalla (3.3) non vi è alcun errore di discretizzazione e pertanto il metodo FST definito dalla (3.9) è valido per qualsiasi passo temporale si desideri. Inoltre l'esponente caratteristico risulta noto in forma chiusa, pertanto la soluzione continua (3.3) per la soluzione delle PIDE e il metodo FST (3.9) hanno le stesse proprietà di stabilità. In altre parole, nel caso discreto la soluzione è campionata ad un numero finito di frequenze e pertanto in un sottoinsieme del dominio della soluzione nel caso continuo.

Vediamo ora la struttura delle soluzioni, o meglio, cosa garantisce che esse non divergano. La risposta risiede nella struttura delle funzioni caratteristica. Tali funzioni infatti per una qualsiasi variabile casuale sono dominate in valore assoluto dalla costante 1 per ogni w e pertanto anche la quantità $e^{\Psi\Delta t}$ finita. Tutto questo implica che le soluzioni (sia quella continua che quella discreta) si

smorzino sicuramente indipendentemente dalla lunghezza del passo temporale. Cerchiamo ora di stabilire le proprietà di convergenza del metodo FST. Assumiamo che la differenza tra il vero valore dell'opzione e il prezzo calcolato tramite una griglia con N nodi spaziali e M temporali sia di forma polinomiale, in particolare:

$$e^{[N,M]} = [v^{[N,M]} - v] = c_n N^{-p_n} + c_m M^{-p_m}$$

dove p_n e p_m rappresentano gli ordini di convergenza rispettivamente di spazio e tempo mentre c_n e c_m sono delle costanti di convergenza. Siccome l'algoritmo non necessita di effettuare passi temporali nella valutazione di opzioni europee l'espressione dell'errore può essere definita in dipendenza esclusiva da N :

$$e^{[N,\cdot]} = |v^{[N,\cdot]} - v| = c_n N^{-p_n}$$

Si può ora ottenere l'ordine di convergenza tramite i valori dell'opzione calcolati su griglie via via più fini senza necessitare del vero valore dell'opzione. L'ordine sarà dato da

$$p_n = \log_2 \frac{|v^{[N,\cdot]} - v^{[2N,\cdot]}|}{|v^{[2N,\cdot]} - v^{[4N,\cdot]}|}$$

Dagli esperimenti numerici emerge che l'ordine di convergenza del metodo nella variabile spaziale in ambito di valutazione di opzioni europee è quadratico. Tale ordine e un'elevata precisione sono mantenuti per tutti i prezzi spot, anche quelli lontani dal centro della griglia. Queste considerazioni possono essere verificate confrontando i logaritmi degli errori del metodo per diversi N .

Per quanto riguarda le opzioni path-dependent occorre valutare le proprietà di convergenza anche nella variabile temporale. Fissando N l'errore risulta dipendere esclusivamente da M , ovvero:

$$e^{[\cdot,M]} = |v^{[\cdot,M]} - v| = c_m M^{-p_m}$$

quindi esattamente come è stato fatto in precedenza si stima p_m :

$$p_m = \log_2 \frac{|v^{[\cdot,M]} - v^{[\cdot,2M]}|}{|v^{[\cdot,2M]} - v^{[\cdot,4M]}|}$$

Gli esperimenti rivelano che la convergenza nella variabile temporale risulta del primo ordine per opzioni path-dependent. Esistono diversi metodi per aumentare la ordine di convergenza dell'algoritmo, uno di questi è l'estrapolazione di Richardson che verrà tra breve euristicamente esposta.

Concludiamo questa sezione dicendo che la trasformata di Fourier (nucleo fondamentale del metodo) rappresenta una generica funzione come somma di esponenziali complessi di diverse frequenze, che sono funzioni periodiche. Troncando il dominio della soluzione e lavorando in frequenza, la soluzione al di fuori del dominio scelto viene rimpiazzata dalle estensioni periodiche della soluzione esistenti nel dominio. Scegliendo un dominio abbastanza grande però l'errore della soluzione nella regione di interesse risulta essere estremamente piccolo. Tuttavia la soluzione nelle vicinanze del contorno sarà influenzata dall'effetto di periodicità e pertanto andrà trattata con un riguardo particolare.

Estrapolazione di Richardson

Consideriamo una procedura di approssimazione di passo h che generi una stima $A(h)$ della quantità A . Possiamo quindi scrivere:

$$A = A(h) + Kh^k + K'h^{k+1} + \dots$$

essendo k, K, K', \dots delle costanti di solito note. Riscrivendo l'espressione in notazione più matematica si ottiene:

$$A = A(h) + Kh^k + O(h^{k+1}) \quad (3.10)$$

Se quindi limitiamo la nostra analisi ai termini di ordine k e inferiori, otteniamo un'equazione lineare a due incognite che però cambia a seconda del passo scelto. Scegliendo due diversi h possiamo risolvere le due equazioni ed ottenere i parametri A e K . Il nuovo A costituisce una migliore approssimazione per l'esatto valore di A . Quindi prendendo 2^k volte

$$A = A(h/2) + K(h/2)^k + O(h^{k+1})$$

e sottraendo (3.10) si ottiene:

$$(2^k - 1)A = 2^k A(h/2) - A(h) + O(h^{k+1})$$

$$A = \frac{2^k A(h/2) - A(h)}{2^k - 1} + O(h^{k+1})$$

Definendo ora

$$B(h) = \frac{2^k A(h/2) - A(h)}{2^k - 1} \quad (3.11)$$

allora

$$A = B(h) + O(h^{k+1})$$

pertanto abbiamo generato una approssimazione di A con errore di ordine $k+1$ ovvero di un'ordine superiore rispetto ad $A(h)$.

3.4 Valutazione Opzioni Europee

In questa sezione ci si occuperà della valutazione di opzioni europee dapprima tramite il metodo di Carr-Madan ed in seguito tramite FST. Saranno presi in considerazione diversi modelli sottostanti la valutazione e saranno effettuati confronti tra i diversi approcci. Tutti gli esperimenti sono stati svolti su una macchina dotata di processore Intel Centrino Duo 2 Ghz e 2 GB di memoria RAM. Tutti i codici sono stati implementati tramite l'uso di MATLAB R2007b e possono essere trovati in appendice B. Qui viene presentata esclusivamente l'idea dell'algoritmo che si desidera ottenere. Per quanto riguarda i parametri delle opzioni e dei modelli usati negli esperimenti, tutti i dettagli possono essere trovati in appendice A.

3.4.1 Valutazione tramite Carr-Madan

Focalizziamo ora la nostra attenzione nel valutare opzioni Call secondo la struttura Carr-Madan presentata precedentemente [11]. Valuteremo le opzioni sfruttando diversi modelli di cui i parametri possono essere trovati nell'apposita appendice per poter replicare gli esperimenti.

Il codice è stato implementato usando gli stessi parametri di integrazione suggeriti da Carr e Madan nel loro articolo originale. Il desiderio è quello di costruire un unico algoritmo che riesca a valutare opzioni sotto diversi modelli e che riesca a fornire un risultato a determinati livelli di strike che fornisce l'utente (si ricordi che in Carr-Madan la griglia degli strike è fissata a seconda del passo di integrazione e quindi difficilmente i prezzi vengono immediatamente valutati allo strike desiderato).

Il nostro algoritmo dovrà quindi effettuare le seguenti operazioni:

1. Fissare il damping factor ed i parametri di integrazione;
2. Costruire la griglia degli strike logaritmici ed i pesi di Simpson;
3. Trasformare il prezzo dell'opzione;
4. Calcolare la FFT del prezzo con gli opportuni coefficienti;
5. Interpolare la soluzione trovata sugli strike price dati in input.

In più il codice riportato in appendice fornisce anche il tempo che occorre al nucleo di valutazione per arrivare al prezzo desiderato. Ora che abbiamo a disposizione l'algoritmo procediamo col valutare diversi derivati ed effettuare alcuni confronti.

Partiamo dal modello *Black – Scholes – Merton* (BSM) e valutiamo una opzione Europea $EU - A$. Il prezzo riportato in tabella è il prezzo at-the-money.

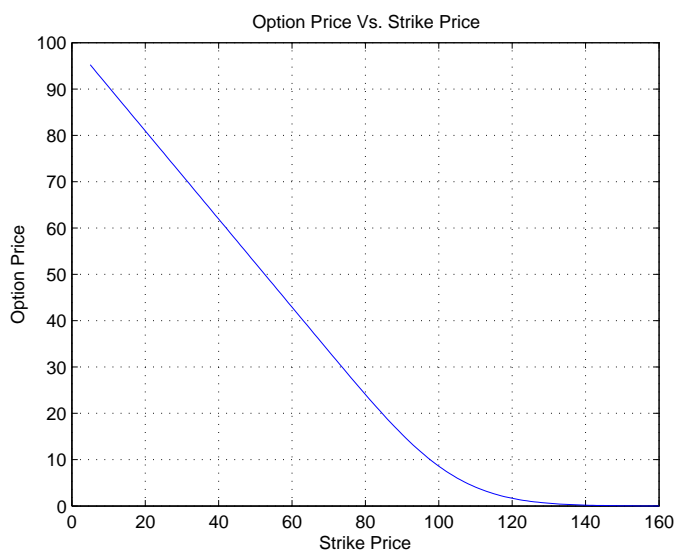
N	Prezzo	Variazione	Tempo(msec.)
2048	8.58897375		1.3452
4096	8.59165809	0.0026843	2.2069
8192	8.59165831	0.0000002	4.4076
16384	8.59165831	0.0000000	6.9059
32768	8.59165831	0.0000000	9.7492

Notiamo subito come il metodo converga velocemente ad un risultato accurato e come esso sia veloce, non si superano mai i 10 millisecondi.

Vediamo ora di sfruttare pienamente le potenzialità del metodo e di valutare in un colpo solo opzioni a diversi prezzi di esercizio. Valutiamo quindi la stessa opzione sotto lo stesso modello ma in corrispondenza di diversi prezzi di esercizio.

Dalla figura si nota subito il tipico andamento di un derivato di tipo vanilla Call Europeo, ovvero il valore del derivato stesso svanisce rapidamente al crescere del prezzo di esercizio.

Vediamo ora come si comporta il metodo valutando la medesima opzione ma

Figura 3.1: Opzione Call $EU - A$ sotto il modello BSM

sotto un modello diverso, il *Merton - Jump - Diffusion* (MJD).
Riportiamo subito i risultati ottenuti nella sottostante tabella:

N	Prezzo	Variazione	Tempo(sec.)
2048	11.55881446		0.2098
4096	11.56149880	0.0026843	0.0174
8192	11.56149902	0.0000002	0.0282
16384	11.56149902	0.0000000	0.0582
32768	11.56149902	0.0000000	0.1164

Notiamo una sensibile variazione del prezzo calcolato una volta cambiato modello, la differenza si attesta all'incirca su 25% del prezzo dell'opzione. Una variazione sensibile c'era da aspettarsela in quanto i due modelli hanno natura completamente diversa, in particolare il modello MJD appena presentato risulta ampiamente influenzato dalla scelta dei parametri legati ai salti, che sono totalmente assenti in BSM. Diamo ora una visualizzazione grafica su come i prezzi dei derivati si comportino a diversi livelli di strike nei due differenti modelli.

Dal grafico si evince come le variazioni maggiori nei prezzi si riscontrino in un intorno del livello at-the-money del prezzo di esercizio mentre tale effetto tende a scomparire man mano che ci si allontana da tale livello. Se ci si sofferma un attimo a pensare al significato del risultato ottenuto in figura, esso risulta sensato se non addirittura ovvio. Infatti i salti del modello MJD assumono molta più rilevanza se il livello del sottostante e quello del prezzo di esercizio sono vicini. All'aumentare del gap tra i due (sia in senso positivo che in senso negativo) i fenomeni di salto nel prezzo del sottostante azionario risulteranno sempre meno

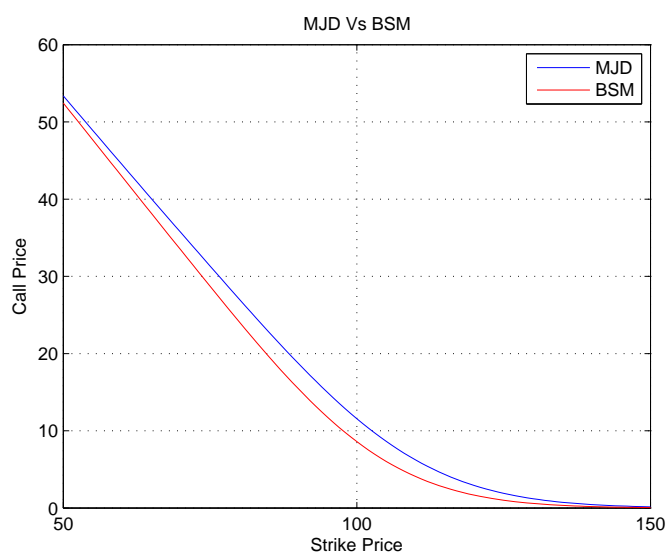


Figura 3.2: Opzione Call $EU - A$ a confronto tra modello BSM e MJD a diversi livelli di prezzo di esercizio.

rilevanti nel payoff dell'opzione a scadenza ripercuotendosi così in una minore discrepanza nella valutazione dei due modelli.

3.4.2 Valutazione tramite FST

In questa sessione sarà messo in pratica il metodo FST esposto nella sezione 3.2. Il metodo di esposizione dei risultati sarà il medesimo della sezione precedente riguardante Carr-Madan.

Per valutare un'opzione europea, sia essa di tipo Call o di tipo Put, occorre applicare direttamente l'equazione (3.9). Sappiamo inoltre che il metodo è esatto e pertanto valido per qualsiasi passo temporale, ciò significa che l'algoritmo che andremo a costruire sarà in grado di valutare il prezzo della nostra opzione con un solo passo temporale.

L'algoritmo che deve essere codificato dovrà quindi:

1. Costruire la griglia spaziale sulla quale si muoverà il processo di prezzo opportunamente trasformato;
2. Costruire di conseguenza la corrispondente griglia in frequenza sfruttando la relazione di Nyquist;
3. Calcolare il Payoff del derivato oggetto della valutazione;
4. Costruire la funzione caratteristica del Lévy sottostante;
5. Applicare la (3.9) così da ottenere il vettore di prezzi del derivato in corrispondenza di diversi spot price del sottostante;

6. Interpolare la soluzione ottenuta agli spot price desiderati.

Vediamo subito come il nostro algoritmo si comporta nel valutare l'opzione $EU - A$ sotto il modello BSM .

Riportiamo qui di seguito i risultati riguardanti l'ordine di convergenza del metodo con e senza sfruttare l'estrapolazione di Richardson.

Standard				Richardson	
N	Prezzo	Variazione(10^{-3})	Ordine	Prezzo	Ordine
2048	8.59220591				
4096	8.59179511	0.4107992		8.59165818	
8192	8.59169250	0.1026147	2.0011	8.59165829	
16384	8.59166685	0.0256447	2.0005	8.59165831	3.2460
32768	8.59166044	0.0064101	2.0002	8.59165831	3.1381

La voce *Ordine* in tabella è intesa come ordine di convergenza del metodo ed è calcolata secondo l'equazione riportata nella sezione 3.3. Si nota come il metodo applicato direttamente abbia un ordine di convergenza pari a 2 nello spazio che con l'ausilio dell'estrapolazione di Richardson viene migliorato a 3. Riportiamo ora in figura gli andamenti dei valori dei derivati appena valutati in funzione dello spot price del sottostante, ovvero diamo una rappresentazione grafica dell'output del metodo FST prima che intervenga l'interpolazione tramite spline per ottenere il valore del derivato in corrispondenza del prezzo del sottostante dato in input.

Valutiamo ora un derivato di tipo $EU - B$ sotto il modello MJD.

N	Prezzo	Variazione(10^{-3})	Ordine	Tempo
2048	4.39233941			0.2069
4096	4.39151877	0.8206487		0.0379
8192	4.39131395	0.2048180	2.0024	0.0280
16384	4.39126277	0.0511757	2.0008	0.0504
32768	4.39124998	0.0127912	2.0003	0.1075

Le stesse valutazioni della tabella sono state effettuate da Vladimir Surkov [40] e il prezzo di riferimento secondo i parametri usati (dato da d'Halluin, Forsyth e Vetzal [18]) è 4.391243.

La tabella mostra quindi un'altra conferma della precisione e della rapidità del metodo, ovviamente l'ordine di convergenza può essere portato a 3 tramite l'implementazione dell'estrapolazione di Richardson.

Vediamo ora, analogamente a quanto visto nella sezione dedicata a Carr-Madan, come varia la discrepanza tra le valutazioni dei modelli BSM e MJD per l'opzione $EU - B$. La prospettiva sarà leggermente diversa rispetto all'analogo grafico riportato nella sezione precedente. Infatti mentre per il metodo di Carr-Madan ottenevamo un vettore di prezzi corrispondenti a diversi prezzi di esercizio, ora col metodo FST otteniamo sì un vettore di prezzi, ma a diversi livelli di spot price.

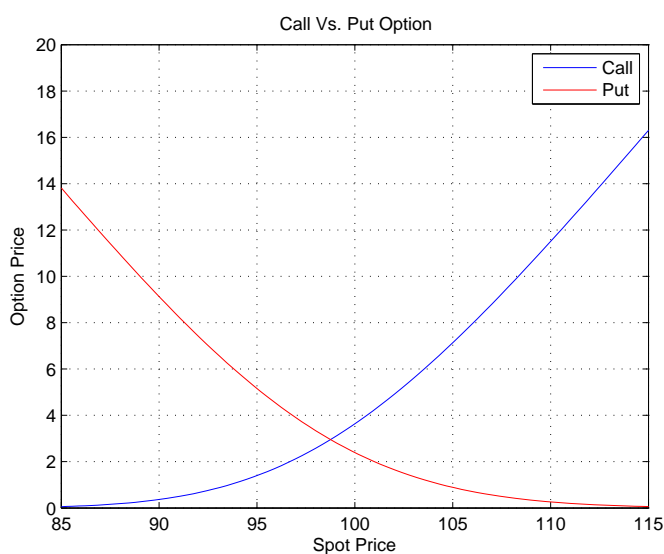


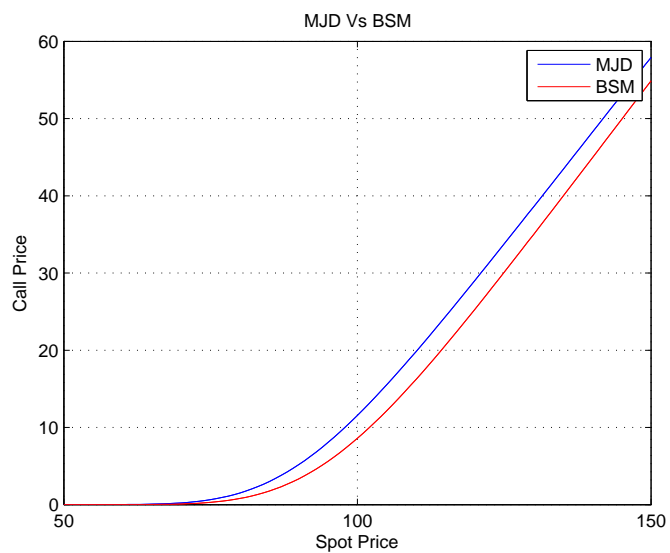
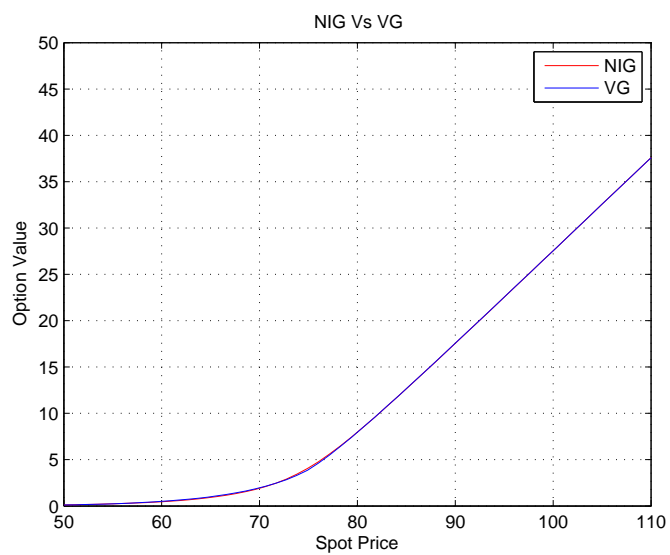
Figura 3.3: Andamenti dei prezzi riguardanti derivati di tipo $EU - A$ sotto modello *Black - Scholes - Merton*.

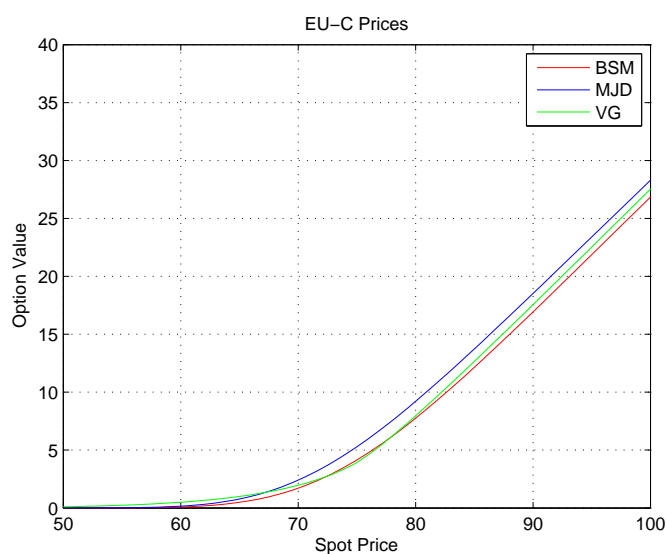
Da notare come l'andamento riportato in Figura 3.4 sia del tutto analogo a quello osservato in precedenza, il modello *MJD* coi parametri scelti valuta il prezzo dell'opzione sempre maggiore rispetto a *BSM* e la discrepanza tra le valutazioni si accentua in un intorno del livello *at-the-money*.

Passiamo ora alla valutazione di un derivato di tipo $EU - C$. Valuteremo questo derivato assumendo stavolta come modello di prezzo del sottostante due processi di Lévy ad attività infinita, in particolare useremo il processo *VG* e il processo *NIG*. La Figura 3.5 riporta l'andamento dei prezzi in funzione dello spot price.

I due processi risultano dare un prezzo praticamente identico. Per un valore dello spot price pari a 80 infatti, il prezzo calcolato secondo *NIG* risulta pari a 7.9758 mentre secondo *VG* risulta 7.9552. La differenza tra le valutazioni risulta quindi essere intorno ai 2 centesimi di Euro. Non possiamo affermare che i due processi diano un prezzo equivalente, ma certamente possiamo concludere che le valutazioni trovate si assomiglino molto.

Come ultima cosa confrontiamo per il derivato $EU - C$ gli andamenti dei prezzi a seconda del modello sottostante. Prendiamo *BSM*, *MJD* e *VG*. Non c'è un motivo particolare per cui è stato preferito *VG* rispetto a *NIG*, l'importante è avere un confronto anche con un modello che segue un Lévy ad attività infinita e secondo quanto appena visto, se fossero stati introdotti entrambi avrebbero solo fatto confusione nella grafica.

Figura 3.4: Andamenti dei prezzi riguardanti derivati di tipo $EU - B$.Figura 3.5: Andamenti dei prezzi riguardanti derivati di tipo $EU - C$.



Dalla figura si può notare come il Variance Gamma si introduca in mezzo ai prezzi calcolati usando il *Merton – Jump – Diffusion* e il modello di *Black – Scholes – Merton* al crescere dello spot price. Nella parte sinistra del grafico invece si riscontra che il prezzo dettato dal Lévy ad attività infinita tende ad azzerarsi più lentamente rispetto agli altri due modelli usati. Questo fenomeno può essere spiegato dal fatto che mentre per i modelli jump-diffusion i salti sono eventi rari e l'intensità degli stessi ha una distribuzione nota, nei Lévy ad attività infinita il processo si muove essenzialmente tramite salti, che arrivano infinitamente spesso. Tutto questo è contenuto nelle informazioni che da la funzione caratteristica di ogni processo.

3.4.3 Confronti

Vediamo ora di tirare le fila del discorso affrontato sino ad ora e quindi di confrontare direttamente i metodi usati sotto i diversi modelli. Iniziamo subito col proporre una tabella riguardante il derivato $EU - A$ sotto il modello BSM.

N	Prezzo	ErroreCM	ErroreCM(%)	Tempo(sec.)	Tempo CM
2048	8.59220591	0.0032321	0.03763	0.1979	0.0366
4096	8.59179511	0.0001370	0.00159	0.0136	0.0122
8192	8.59169250	0.0000341	0.00039	0.0221	0.0254
16384	8.59166685	0.0000085	0.00009	0.0446	0.0455
32768	8.59166044	0.0000021	0.00002	0.0938	0.1199

Nella tabella la voce ErroreCM sta ad indicare il valore assoluto dello scostamento delle stime dei due metodi, mentre ErroreCM(%) quello percentuale. Dalla tabella si evince come il metodo FST sia estremamente affidabile e veloce,

difatti già a partire da griglie poco fitte i due metodi danno risultati estremamente vicini e i tempi di esecuzione si equivalgono.

Effettuiamo ora lo stesso tipo di analisi usando però il derivato $EU - B$ e il modello MJD.

N	Prezzo	ErroreCM	ErroreCM(%)	Tempo(sec.)	Tempo CM
2048	4.39233941	0.0037781	0.08601	0.0342	0.2108
4096	4.39151877	0.0002732	0.00622	0.0129	0.0155
8192	4.39131395	0.0000682	0.00155	0.0252	0.0282
16384	4.39126277	0.0000170	0.00038	0.0515	0.0602
32768	4.39124998	0.0000042	0.00009	0.1081	0.1228

I risultati sono comparabili con quelli ottenuti sotto il modello BSM. I tempi di esecuzione sono virtualmente identici e anche i prezzi stimati convergono ad uno stesso valore. Tale convergenza è molto veloce e da subito i prezzi ottenuti con i due metodi combaciano quasi perfettamente (ad esempio già a partire da una griglia con 2048 nodi l'errore percentuale risulta essere inferiore allo 0.1%). Infine confrontiamo le performance dei due metodi nella valutazione del derivato $EU - C$, usando come modello il *Variance - Gamma*.

N	Prezzo	ErroreCM	ErroreCM(%)	Tempo(sec.)	Tempo CM
2048	7.95640344	0.0023260	0.02924	0.0359	0.2169
4096	7.95617904	0.0000602	0.00075	0.0136	0.0167
8192	7.95624558	0.0000061	0.00007	0.0281	0.0302
16384	7.95623021	0.0000092	0.00011	0.0601	0.0552
32768	7.95624070	0.0000012	0.00001	0.1078	0.1214

La tabella da un'ulteriore conferma di quanto affermato in precedenza ovvero dell'equivalenza sostanziale tra i due approcci.

Vediamo ora per verifica diretta se i metodi sono robusti tra loro rispetto ai modelli adottati, ovvero confrontiamo i prezzi calcolati sotto il modello di BSM con quelli calcolati usando MJD per il derivato $EU - A$ e vediamo se le variazioni percentuali riscontrate sui prezzi variano a seconda del metodo usato.

Il grafico mostra che i metodi sono robusti tra loro, nel senso che cambiando modello, le variazioni riscontrate in un metodo sono le medesime riscontrate nell'altro. Questo fatto unito alle tabelle e ai commenti riportati in precedenza ci permette di concludere che i due metodi (Carr-Madan e FST) si equivalgono in tutto e per tutto per quanto riguarda opzioni di tipo europeo.

3.5 Valutazione Opzioni Path-Dependent

In questa sezione ci occuperemo della valutazione di opzioni il cui payoff dipende dal cammino seguito dal sottostante durante la vita dell'opzione. Vedremo come

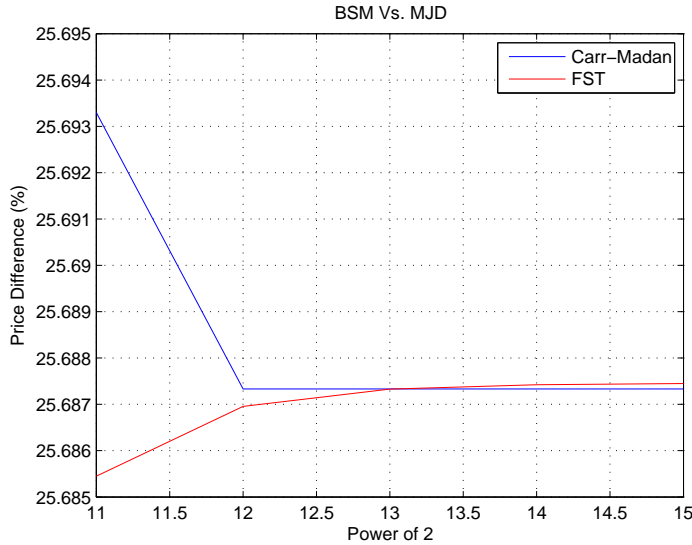


Figura 3.6: Variazione (%) dei prezzi riguardanti derivati di tipo *EU – A* tra i modelli *Black – Scholes – Merton* e *Merton – Jump – Diffusion*.

il metodo FST non sarà così immediato come nel caso di opzioni europee ma dovrà essere adattato a payoff non standard. All’inizio vengono riportati alcuni risultati ottenuti da Vladimir Surkov [40] nel caso di Opzioni di tipo Barriera ed in seguito si concentrerà l’attenzione su Opzioni Swing. La valutazione di quest’ultime rappresenta il contributo originale di questo lavoro.

3.5.1 Opzioni Barriera

Nel caso di opzioni path-dependent non è possibile valutare il prezzo in un unico passo temporale ma occorre suddividere l’asse dei tempi in intervalli corrispondenti alle monitoring dates.

Consideriamo ad esempio un’opzione barriera di tipo Up-and-Out. Nel dominio spaziale, la condizione al contorno dovuta alla barriera è:

$$v(t, x) = R \text{ per } x \geq B, t \leq T$$

dove B è il livello della barriera (log-trasformato) e R il rebate, ovvero la quantità di denaro che l’opzione paga al suo possessore in caso di superamento della barriera.

Quindi il nostro algoritmo time-stepping consisterà nel codificare:

$$v_{m-1} = FFT^{-1} \left[FFT[v_m] \cdot e^{\Psi(\cdot)\Delta t_m} \right] \cdot 1_{\{x < B\}} + R \cdot 1_{\{x \geq B\}} \quad (3.12)$$

Nel caso di opzioni barriera monitorate in maniera discreta, gli istanti temporali sono scelti esattamente sulle monitoring dates e pertanto il numero di passi temporali richiesti all’algoritmo è esattamente pari al numero di monitoring dates.

Per quanto riguarda invece opzioni a monitoraggio continuo, prove numeriche dimostrano che una diretta applicazione di (3.12) risulta avere bassa convergenza. Per ovviare al problema si forza la condizione della barriera tramite il metodo delle immagini.

Riporto qui di seguito una tabella nella quale è stata valutata una Call Up-and-Out a monitoraggio continuo tramite il modello di *Black – Scholes – Merton* ed il cui prezzo di riferimento usando una forma chiusa è: 0.2541963.

N	M	Prezzo	Variazione	Convergenza	Tempo(sec.)
2048	128	0.25329897			0.017
4096	512	0.25396930	0.0006703		0.115
8192	2048	0.25414052	0.0001712	1.9690	0.653
16384	8192	0.25418296	0.0000424	2.0123	6.129
32768	32768	0.25419312	0.0000102	2.0638	46.227

La tabella sopra riportata è stata ottenuta tramite l'applicazione di (3.12) con il metodo delle immagini. Il prezzo riguarda un'opzione con strike at-the-money, spot price pari a 100 e barriera $B = 110$. I parametri del modello *Black – Scholes – Merton* utilizzati sono: $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$ e $q = 0.02$.

I risultati in tabella suggeriscono che l'ordine di convergenza risulta essere pari a 2 nello spazio e 1 nel tempo.

3.5.2 Opzioni Swing

Questa sezione contiene l'apporto originale del lavoro ed è pertanto di fondamentale importanza. Tutte le valutazioni che seguono sono state svolte in totale autonomia con l'ausilio di qualche informazione dispensata da Vladimir Surkov [40] e di alcuni preziosi consigli del Prof. Carlo Sgarra e del Dott. Daniele Marazzina.

Le Opzioni Swing sono molto usate nei mercati energetici (elettricità, gas naturale, petrolio) e sono contratti che garantiscono a colui che li detiene di esercitare un certo numero di diritti a prezzo di esercizio fissato sull'incremento (Swing-Up) e sul decremento (Swing-Down) della quantità acquistata del bene in questione. In un contratto di tipo swing ci sono due componenti essenziali: un contratto forward che consegna un quantitativo fissato di bene in un certo arco temporale e una componente swing che da il diritto a chi detiene l'opzione di variare il consumo a proprio piacimento.

I diritti possono essere esercitati solo a date prefissate contrattualmente pertanto un'opzione swing prevede che ad ogni monitoring date il proprietario debba decidere se esercitare una Call, una Put oppure non esercitare alcun diritto. Nel caso in cui il proprietario decida di esercitare un diritto allora il suo cash flow sarà pari a $q|S - K|$ dove q è l'ampiezza dello swing. In certi tipi di contratti q è arbitrario e limitato solo da un upper (lower) bound, per semplicità negli esperimenti che seguono q è considerato una costante fissata contrattualmente. Tramite il metodo FST è possibile valutare questi tipi di contratto. La valutazione tuttavia deve essere aiutata in questo caso più complesso tramite la seguente equazione di programmazione dinamica

$$V(t, \mathbf{S}, Q) = \max_{q \in \{0, \bar{q}\}} \{ \Phi(t, \mathbf{S}, q) + e^{-r\Delta t} E_t^Q [V(t + \Delta t, \mathbf{S}, Q - 1_{\{q \neq 0\}}(q))] \} \quad (3.13)$$

dove $V(t, \mathbf{S}, Q)$ rappresenta il valore di una swing al tempo t avente Q diritti ancora esercitabili, $\Phi(t, \mathbf{S}, q)$ il payoff dell'opzione e \bar{q} ampiezza dello swing fissata contrattualmente.

L'equazione sopra presentata può subire alcune variazioni per particolari tipi di contratti swing, comunque sia il metodo FST permette di svolgere i calcoli fondamentali per ottenere il prezzo dell'opzione.

Costruiamo ora un algoritmo che ci permetta di valutare un contratto swing. Tale algoritmo dovrà:

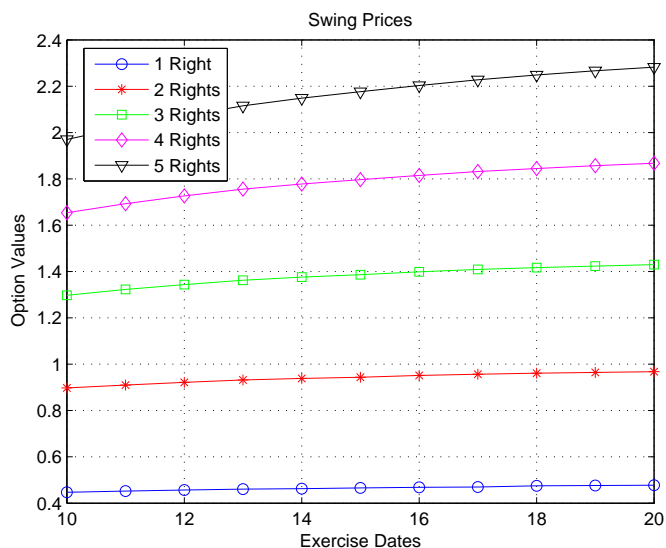
1. Costruire la griglia spaziale sulla quale si muoverà il processo di prezzo opportunamente trasformato;
2. Costruire di conseguenza la corrispondente griglia in frequenza sfruttando la relazione di Nyquist;
3. Costruire la funzione caratteristica del Lévy sottostante;
4. Implementare una corretta applicazione dell'equazione di programmazione dinamica;
5. Interpolare la soluzione ottenuta agli spot price desiderati.

Passiamo subito alla valutazione dell'opzione *SWG – A* sotto il modello *BSM*. Da notare come i passi temporali necessari alla valutazione del derivato coincidano col numero di date in cui è possibile esercitare uno swing. Tali date sono supposte come distribuite uniformemente su tutto il periodo di vita del contratto.

N	M	Prezzo	Variazione	Tempo(sec.)
1024	10	1.65392509		0.459
2048	10	1.65266557	0.0012595	0.564
4096	10	1.65355786	0.0008922	1.028
8192	10	1.65308914	0.0004687	2.218
16384	10	1.65301526	0.0000738	4.340
32768	10	1.65315150	0.0001362	8.887

Dalla tabella si evince come il metodo dia una buona stima del prezzo ma anche di come questo sia influenzato dal numero di nodi da cui è composta la griglia spaziale. Sperimentalmente si nota come le variazioni di prezzo da una griglia ad una doppiamente fitta siano decrescenti ma oscillanti. Questo dipende dal fatto che l'equazione di programmazione dinamica è influenzata dalla griglia stessa. La strategia di esercizio ottimale infatti può variare a seconda del passo di discretizzazione spaziale e ciò chiaramente influenza il prezzo del contratto. I tempi di esecuzione sono del tutto ragionevoli considerato anche che già a partire da un basso numero di nodi il prezzo al centesimo di Euro risulta già essere esatto.

Fissiamo ora il numero di nodi della griglia spaziale e passiamo a confrontare l'andamento dei prezzi di un contratto di tipo *SWG – A* al variare del numero di date di esercizio disponibili e del numero di diritti a disposizione. A tale scopo costruiamo una rappresentazione grafica e riportiamo una tabella coi precisi valori ottenuti nelle valutazioni.



Dates/Rights	1	2	3	4	5
10	0.4471	0.8976	1.2974	1.6539	1.9701
11	0.4526	0.9099	1.3226	1.6931	2.0259
12	0.4570	0.9219	1.3437	1.7265	2.0712
13	0.4608	0.9319	1.3621	1.7557	2.1155
14	0.4624	0.9385	1.3757	1.7780	2.1486
15	0.4659	0.9439	1.3862	1.7963	2.1762
16	0.4684	0.9514	1.3987	1.8147	2.2028
17	0.4696	0.9569	1.4094	1.8317	2.2274
18	0.4750	0.9611	1.4166	1.8449	2.2483
19	0.4765	0.9647	1.4237	1.8568	2.2664
20	0.4779	0.9679	1.4299	1.8673	2.2824

I risultati sono quelli aspettati, i prezzi del derivato sono crescenti in entrambe le variabili considerate e l'aggiunta di un diritto è valutata molto di più rispetto all'aggiunta di una data di esercizio.

Fissiamo ora i diritti e le date di esercizio e costruiamo un grafico rappresentante il valore di contratti di tipo *SWG - A* a diversi livelli di prezzo del sottostante azionario.

Nel grafico sono riportate due linee: una riguardante il caso in cui il tasso privo di rischio sia positivo e quindi il processo di prezzo del sottostante abbia drift positivo, l'altra il caso opposto.

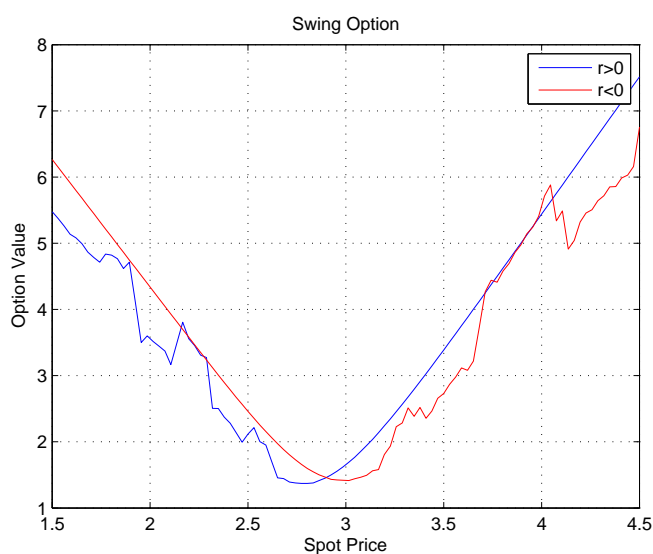


Figura 3.7: Valutazioni del derivato *SWG-A* sotto il modello *Black-Scholes-Merton*

Consideriamo la linea blu. Essa presenta delle perturbazioni nel prezzo dell'opzione per alcuni livelli di spot price al di sotto del prezzo di esercizio. Tali perturbazioni sono date dal fatto che essendo $r > 0$, in quella zona lo spot price ha tendenza ad avvicinarsi al prezzo di esercizio, pertanto piccole variazioni nel prezzo del sottostante possono portare a strategie ottimali diverse e quindi ad un prezzo differente. Concorde con quanto detto sino ad ora, quando invece lo spot price è al di sopra dello strike price, tali perturbazioni non si registrano perché il prezzo spot tende ad allontanarsi dallo strike pertanto la strategia ottimale sarà sempre la stessa. L'intensità e la frequenza di queste perturbazioni di prezzo nella zona critica dipendono dal tipo e dai parametri stimati per il modello scelto come rappresentante della dinamica del sottostante. Come controprova di quanto detto sin'ora si può osservare la linea rossa del grafico, essa ha un andamento simmetrico rispetto a quella blu. La zona critica nella quale si trovano perturbazioni è quindi dove il prezzo del sottostante (causa il drift della sua dinamica) tende ad andare incontro al prezzo di esercizio.

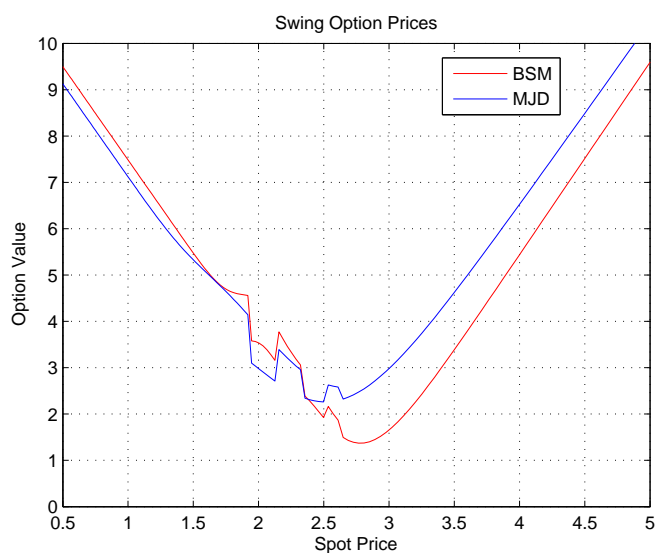
Le perturbazioni scompaiono all'allontanarsi dal prezzo di esercizio, questo avviene cioè quando i rispettivi prezzi di sottostante e esercizio sono abbastanza lontani da non permettere al sottostante di giungere in prossimità del prezzo di esercizio. Quando questo avviene la strategia ottima non cambia pertanto il prezzo non risente di perturbazioni.

Cambiamo ora modello a cui applicare il metodo FST. Vedremo il modello *Merton - Jump - Diffusion* per quanto riguarda la categoria dei Lévy ad attività finita ed effettueremo valutazioni con modelli *Variance - Gamma* e *Normal - Inverse - Gaussian* come rappresentanti della categoria dei Lévy ad attività infinita.

Valutiamo ancora una volta il derivato *SWG - A* sotto il modello *Merton -*

Jump-Diffusion e confrontiamolo con i risultati ottenuti con *Black-Scholes-Merton*.

Il prezzo valutato usando *MJD* risulta pari a circa 2.9809 Euro mentre per *BSM* abbiamo circa 1.6539. La variazione è notevole, di circa 1.327 Euro. Di seguito viene riportato un grafico che rappresenta i prezzi del derivato *SWG-A* a diversi livelli di spot price.

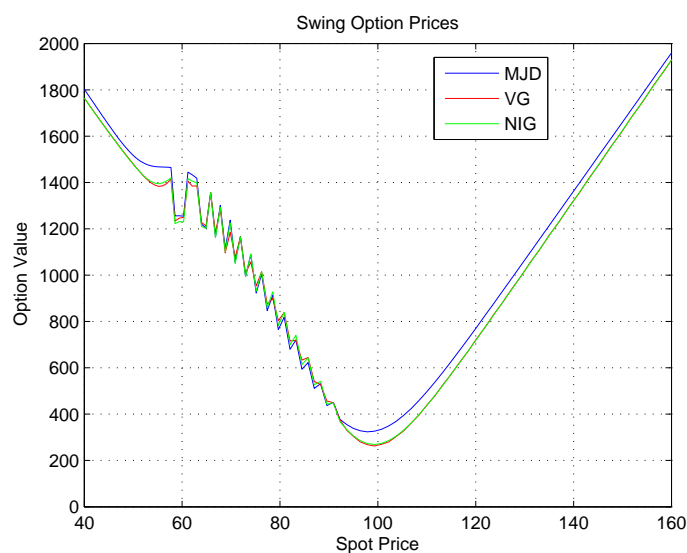


Dalla figura si vede come i prezzi secondo *MJD* sono maggiori rispetto a *BSM* nella parte destra del grafico, esattamente come era già stato ottenuto nel caso delle Vanilla Europee. Particolare attenzione invece merita la regione critica, ovvero la zona degli spot price che risente di perturbazioni di prezzo. L'introduzione dei salti nel processo di prezzo del sottostante ha portato inevitabilmente ad una mutazione delle perturbazioni di prezzo, tuttavia la natura ed il comportamento di tali perturbazioni sono rimasti invariati, si può notare infatti come una linea sia la leggera modificazione dell'altra.

Cambiamo ora derivato, passiamo alla valutazione del derivato *SWG-B*. Lo valuteremo secondo i modelli *MJD*, *VG* e *NIG*.

Dates/Process	MJD	VG	NIG
11	286.6029	225.7410	231.6093
12	292.9167	232.6755	238.5535
13	297.9554	238.4792	243.8839
14	302.4848	243.6853	249.3867
15	306.9420	248.5632	254.0069
16	312.2735	253.2534	259.1301
17	312.4672	254.5973	259.4911
18	316.4554	257.5935	263.0595
19	326.4753	264.8393	271.0565
20	329.3515	264.8967	271.4099

La tabella mostra come il prezzo fornito da *MJD* sia più elevato rispetto a quello dato dal *NIG* e dal *VG*. Quest'ultimo valuta l'opzione leggermente di meno rispetto al *NIG*. Di seguito viene riportato l'andamento dei prezzi a diversi livelli di spot price.



Al crescere dello spot price *MJD* valuta l'opzione di più rispetto ai Lévy ad attività infinita. Quest'ultimi hanno invece un comportamento molto simile tra loro. Per quanto riguarda la regione critica, abbiamo ritrovato il comportamento precedentemente riscontrato, le perturbazioni sono diverse tra loro ma condividono natura e comportamento.

3.5.3 Un Confronto con l'Albero Trinomiale

Per avere un controllo diretto sulla veridicità dei risultati ottenuti e sull'affidabilità dell'approccio FST effettuiamo un confronto con l'albero trinomiale.

L'algoritmo su cui si basa il confronto è stato pubblicato su *Implementing Models in Quantitative Finance* di Fusai e Roncoroni [22]. Tale algoritmo non valuta un'opzione swing come è stata intesa sino a questo momento, esso infatti differenzia il numero di diritti Swing-Up dal numero degli Swing-Down. Questa differenza di fatto fa sì che il contratto che si va a valutare non sia altro che una desiderata combinazione di contratti Bermuda, ovvero una combinazione di opzioni americane esercitabili solo a determinate date.

Per effettuare un confronto efficace quindi modifichiamo l'algoritmo usato per la valutazione delle swing in modo da trattare in modo diverso i diritti Call dai Put. La differenza fondamentale consiste nel cambiare leggermente l'equazione dinamica che ha permesso la valutazione dei contratti precedenti. Ora tale equazione sarà:

$$V(t, \mathbf{S}, Q_c, Q_p) = \max_{q \in \{0, \bar{q}, -\bar{q}\}} \{ \Phi(t, \mathbf{S}, q) + e^{-r\Delta t} E_t^Q [V(t+\Delta t, \mathbf{S}, Q_c - 1_{\{q>0\}}(q), Q_p - 1_{\{q<0\}}(q))] \} \quad (3.14)$$

dove Q_c e Q_p sono rispettivamente il numero di diritti rimanenti rispetto ad una Call o ad una Put.

Visto che il codice dell'albero trinomiale a disposizione valuta i contratti sotto il modello di *Black - Scholes - Merton*, questo sarà ovviamente il modello sul quale sarà applicata la nostra valutazione FST.

Su queste valutazioni quando ci si riferirà ad 1 diritto si sottointenderà di avere a disposizione 1 diritto Call e 1 diritto Put.

Valutiamo diversi derivati tramite i due algoritmi e vediamo le differenze di prezzo. Il metodo FST sarà eseguito su di una griglia a 1024 nodi mentre l'albero trinomiale su un numero di nodi pari a 160.

Qui di seguito sono riportate tre tabelle: la prima contenente i prezzi calcolati usando il metodo FST, la seconda con alberi trinomiali e la terza informa sulla differenza tra i prezzi FST e quelli dell'albero.

FST PRICES			
Dates/Rights	1	2	3
9	0.4067	0.8469	1.2360
10	0.4100	0.8542	1.2625
11	0.4128	0.8704	1.2859
12	0.4150	0.8899	1.3189
13	0.4170	0.9040	1.3458
14	0.4186	0.9156	1.3704
15	0.4200	0.9225	1.3876

TREE PRICES			
Dates/Rights	1	2	3
9	0.4046	0.7806	1.1265
10	0.4048	0.7841	1.1370
11	0.4049	0.7869	1.1452
12	0.4051	0.7893	1.1521
13	0.4052	0.7913	1.1578
14	0.4053	0.7929	1.1626
15	0.4053	0.7943	1.1666

CHANGES			
Dates/Rights	1	2	3
9	0.0021	0.0663	0.1095
10	0.0052	0.0701	0.1256
11	0.0078	0.0835	0.1407
12	0.0100	0.1006	0.1668
13	0.0118	0.1127	0.1880
14	0.0133	0.1227	0.2078
15	0.0147	0.1282	0.2210

Nelle prime due tabelle ogni colonna rappresenta i prezzi di un contratto che ha diritto fissato e numero di possibili date di esercizio variabile, il viceversa vale per le righe delle suddette tabelle. Notiamo che gli andamenti dei prezzi sono esattamente quelli che ci si aspettava di trovare. Il valore dei contratti risulta infatti crescente sia nel numero di date che nel numero di diritti a disposizione, inoltre la differenza di prezzo risulta molto maggiore con l'incremento dei diritti rispetto a quello delle date. Quanto appena detto risulta chiaro se si pensa che avendo a disposizione più date in cui esercitare il diritto permette di ottimizzare leggermente di più la strategia di esercizio ma ciò non ha nulla a che vedere col guadagno che si ottiene avendo a disposizione una possibilità di esercizio in più. Occupiamoci ora della parte più interessante ovvero della tabella riguardante le differenze di prezzo. A tal proposito costruiamo un grafico che mette in evidenza un aspetto fondamentale.

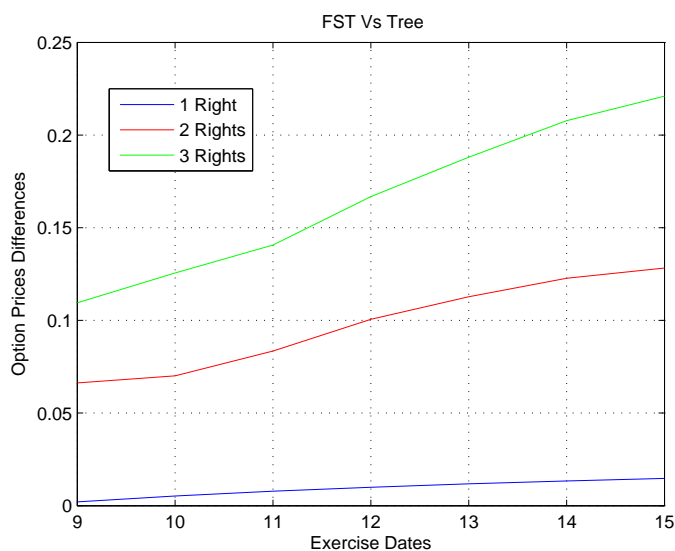


Figura 3.8: Differenze di prezzo per contratti sotto il modello *Black – Scholes – Merton*

Balza subito all'occhio che i prezzi calcolati tramite FST sono maggiori dei prezzi calcolati con l'albero. Inoltre questa differenza si accentua al crescere delle

date di esercizio e diviene molto più marcata all'aumentare del numero di diritti a disposizione. Questo tipo di comportamento è dovuto al fatto che la discretizzazione attuata dall'albero risulta di gran lunga più grossolana rispetto ad FST indi per cui la strategia ottima e quindi il guadagno ottimo risultante sarà diverso, in particolare l'albero di fatto attua una strategia sub-ottima rispetto ad FST. Inoltre la discretizzazione di scarsa qualità effettuata dall'albero introduce ulteriori imprecisioni nella valutazione.

L'algoritmo che sfrutta l'albero trinomiale costruisce in realtà una foresta di alberi per procedere con la valutazione, questo rende necessario un basso numero di nodi per ogni albero causa ovvi motivi di memoria ed efficienza. L'albero quindi calcola la sua strategia ottimale usando approssimazioni scarse della dinamica del sottostante non riuscendo sempre a catturare il massimo guadagno.

3.5.4 Valore di Cambio di Diritto

In questa sezione vogliamo quantificare la differenza di prezzo tra un contratto swing e la sua combinazione equa di opzioni Bermuda (i.e. la differenza tra una swing con 2 Swing Rights e una combinazione di due Bermuda, una Call e una Put). Di fatto quello che stiamo cercando è il prezzo equo per avere il diritto di convertire una Call in una Put o viceversa. Ci aspettiamo che tale prezzo sia crescente nelle date di esercizio e nel numero di diritti e potrebbe anche dipendere dalla posizione relativa tra spot price e strike price e ovviamente dal tipo di processo che guida lo spot price. Ecco le tabelle di alcune valutazioni sul derivato $SWG - A$.

SWING PRICES			
Dates/Rights	1	2	3
10	0.8976	1.6539	2.2512
11	0.9099	1.6931	2.3229
12	0.9219	1.7265	2.3879
13	0.9319	1.7557	2.4426
14	0.9385	1.7780	2.4869
15	0.9439	1.7963	2.5316

BERMUDA PTF PRICES			
Dates/Rights	1	2	3
10	0.4100	0.8542	1.2625
11	0.4128	0.8704	1.2859
12	0.4150	0.8899	1.3189
13	0.4170	0.9040	1.3458
14	0.4186	0.9156	1.3704
15	0.4200	0.9225	1.3876

CHANGES			
Dates/Rights	1	2	3
10	0.4875	0.7997	0.9887
11	0.4972	0.8227	1.0370
12	0.5069	0.8366	1.0690
13	0.5150	0.8517	1.0967
14	0.5199	0.8624	1.1165
15	0.5239	0.8738	1.1440

In entrambi i tipi di contratti ritroviamo i comportamenti usuali, sono ambedue crescenti in entrambe le variabili (Exercise Dates e Rights) e l'averne un diritto in più ha molto più valore che non l'averne una data in più.

Diamo una rappresentazione grafica della tabella **CHANGES** per avere un'visione facilitata e generale dei comportamenti.

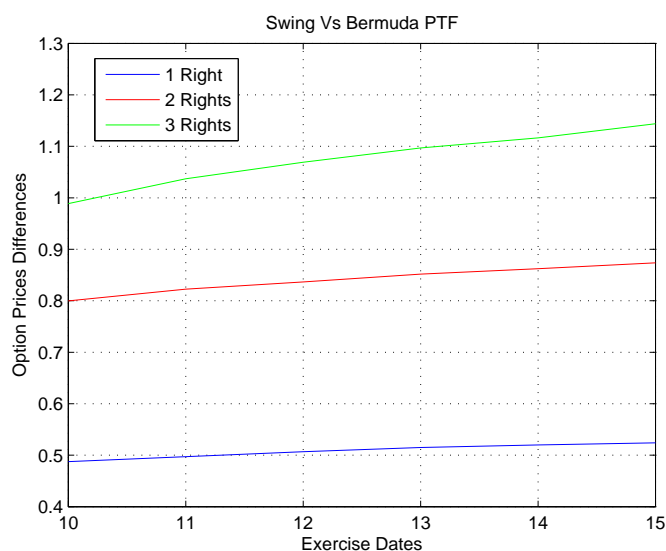


Figura 3.9: Differenze di prezzo tra contratti swing e combinazioni di bermuda sotto il modello *Black – Scholes – Merton*

Dal grafico si nota come la differenza di prezzo cresca all'aumentare delle date disponibili e come l'aumento del numero dei diritti esercitabili faccia sì che questa differenza si accentui molto di più, inoltre come era da aspettarsi il prezzo del contratto swing è sempre maggiore rispetto alla combinazione di bermuda. Osservando meglio il grafico si può notare anche come l'aumento del numero di diritti incrementi la pendenza dell'aumento di prezzo rispetto al numero di date di esercizio. Analizziamo i motivi di questi comportamenti.

I contratti swing ovviamente hanno un prezzo maggiore poiché di fatto nell'equazione di programmazione dinamica hanno dei vincoli meno restrittivi rispetto alle corrispondenti combinazioni di bermuda, pertanto la loro strategia ottima riesce a sfruttare a pieno le fluttuazioni del sottostante. Il fatto che la differenza

diventi più marcata all'aumentare dei diritti è anch'esso più che ragionevole in quanto il convertire un solo diritto sicuramente vale meno che non convertirne due o più. La pendenza positiva rispetto alle possibili date di esercizio è sintomo del fatto che il poter convertire un diritto Call in un diritto Put acquisisce valore nella strategia ottima. L'averne più date a disposizione infatti permette di avere un migliore margine strategico di manovra e avere in questi casi anche la flessibilità di poter scegliere tra il tipo di diritto da esercitare incrementa ancora di più il guadagno ottimo. Infine riguardo all'aumento della suddetta pendenza all'aumentare dei diritti è dovuto anch'esso ad una maggiore flessibilità della strategia ottima che si acquisisce con la possibilità di esercitare il diritto che si desidera.

Capitolo 4

Conclusioni

Riassumiamo ora i principali risultati ottenuti durante il lavoro e cerchiamo di capire se effettivamente il metodo FST abbia raggiunto l'obiettivo desiderato ovvero quello di essere non un valido sostituto bensì un metodo migliore di altri nella valutazione di opzioni.

Per applicare FST occorre esclusivamente conoscere la funzione caratteristica del processo che guida il sottostante azionario. Questo è un grande vantaggio poiché le funzioni caratteristiche sono generalmente note o comunque facili da ottenere. L'esponente caratteristico è disponibile in forma chiusa per ogni processo ad incrementi indipendenti grazie alla formula di Lévy-Khintchine presentata nella sezione 2.1. Un'altro importante beneficio è rappresentato dalla trasformazione della PIDE nello spazio di Fourier. Uno dei principali vantaggi di lavorare direttamente in tale spazio consiste nel fatto che l'esponente caratteristico di un processo stocastico ad incrementi indipendenti può essere fattorizzato dalla trasformata della PIDE e conseguentemente, applicando la trasformata alla PIDE, si ottiene un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie. Infine, non essendo necessaria l'espressione della trasformata del payoff in forma chiusa, il metodo FST può essere facilmente esteso alla valutazione di opzioni dai payoff non standard.

4.1 Opzioni Europee

Nel lavoro è stato scelto come termine di paragone l'algoritmo di Carr-Madan. Le prove sperimentali hanno dimostrato come i due metodi siano virtualmente equivalenti. Entrambi infatti già a partire da griglie poco fitte danno risultati estremamente simili, le differenze si attestano al di sotto del centesimo di Euro e al di sotto dello 0.1%. I tempi di esecuzione sono equivalenti come lo sono le risorse usate per la valutazione. L'unica fondamentale differenza sta nel passo conclusivo. L'algoritmo di Carr-Madan offre un vettore di prezzi a diversi livelli di strike price mentre il Fourier Space Time-stepping propone un vettore di prezzi per il medesimo strike price a diversi livelli di spot price.

4.2 Opzioni Path-Dependent

Il metodo è perfettamente in grado di affrontare la valutazione di opzioni complesse come le barriera e le swing tramite una modificazione opportuna della (3.9) al più integrata con una opportuna equazione di programmazione dinamica.

Per quanto riguarda le barriera, la soluzione si basa sulla (3.12) e abbiamo visto come la convergenza sia quadratica nello spazio e lineare nel tempo. Già da griglie poco fitte la stima del prezzo è più che buona e i tempi di esecuzione sono rapidi.

Per quanto riguarda l'apporto originale di questo lavoro, ovvero la valutazione di contratti Swing, abbiamo fatto uso della (3.13), un'equazione di programmazione dinamica che ha permesso di valutare la strategia ottima e conseguentemente il valore del contratto. Sperimentalmente è stata nuovamente verificata la precisione del metodo ed i suoi rapidi tempi di esecuzione. Le variazioni nelle stime dei prezzi all'infittirsi delle griglie spaziali hanno un andamento decrescente, tuttavia non monotono decrescente ma leggermente oscillante. Questo fenomeno è dovuto al fatto che al migliorare della discretizzazione attuata dalla griglia, ci possono essere variazioni nella strategia ottima che conseguentemente si ripercuotono sul prezzo del contratto.

È stata riscontrata la presenza di una zona critica di spot price nella quale il prezzo dei contratti swing subisce perturbazioni a causa del cambiamento di strategia ottima dovuto alla dinamica del sottostante. Tale zona è situata nei pressi del prezzo di esercizio, quando il sottostante tende ad avvicinarsi a tale prezzo. L'entità delle perturbazioni e l'ampiezza della zona critica dipendono dal modello usato per la dinamica del sottostante e dai parametri del modello stesso.

Sperimentalmente è stato confermato l'andamento tipico dei contratti swing ovvero crescente sia nelle monitoring dates che nell'aumento dei diritti a disposizione. Per quanto riguarda i processi usati per descrivere la dinamica del sottostante è stato mostrato come MJD fornisca un prezzo molto superiore rispetto ai Lévy ad attività infinita, ovvero il NIG e il VG. Quest'ultimo è risultato valutare l'opzione leggermente di meno rispetto al NIG.

Il confronto con l'albero trinomiale ha confermato da una parte la veridicità dei risultati ottenuti tramite FST e dall'altro ha dato prova di come un toy-model come l'albero trinomiale sia poco adatto a valutare contratti complessi come le opzioni swing. Abbiamo visto infatti come la scarsa qualità della discretizzazione dell'albero (imposta dal limite di risorse utilizzabili) faccia perdere ad esso piccole variazioni nella strategia ottima e lo porti ad effettuare stime più grossolane del valore del contratto.

4.3 Sviluppi Futuri

Questo lavoro ha mostrato la validità e il potenziale del metodo Fourier Space Time-stepping. In futuro si può pensare di estendere tale metodo alla valutazione dei derivati più disparati. Come in parte è stato mostrato nella sezione riguardante il confronto con l'albero trinomiale è possibile tramite alcune modifiche all'equazione di programmazione dinamica (3.13) valutare opzioni Bermuda

e una loro qualsiasi combinazione. Inoltre il passo dalla valutazione di opzioni Bermuda a quelle americane è breve, basta infittire sufficientemente la griglia temporale. Sarebbe possibile valutare anche altri tipi di opzioni path-dependent come ad esempio le opzioni lookback, a patto di avere a disposizione la trasformata di Fourier della distribuzione del minimo (massimo) del processo di prezzo del sottostante.

Le applicazioni di questo metodo sono davvero innumerevoli e il suo potenziale dovrebbe essere sfruttato al massimo nel campo dell'Option Pricing.

Appendice A

Opzioni e Modelli

In questa appendice sono riportati tutti i parametri relativi alle opzioni valutate nel lavoro e ai modelli di di evoluzione del prezzo del sottostante azionario.

Name	Spot Price	Strike	Maturity	Tipo	Ampiezza Swing	Diritti
EU-A	100	100	1	Call	-	-
EU-B	100	100	0.25	Call	-	-
EU-C	80	75	0.5	Call	-	-
SWG-A	3	2.9	1	-	1	4
SWG-B	100	100	0.25	-	5	6

Name	σ	r	q	λ	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\sigma}$	γ	μ
BSM	0.15	0.05	0	-	-	-	-	-
MJD	0.15	0.05	0	0.1	-0.9	0.45	-	-
NIG	0.15	0.05	0	-	-	-	0.05	1
VG	0.15	0.05	0	-	-	-	0.05	1

Appendice B

Codici

Di seguito sono riportati per sezione di appartenenza tutti i codici MATLAB usati per attuare gli esperimenti.

B.1 Funzioni Caratteristica

Questa sezione è dedicata ai codici che implementano le funzioni caratteristica usate per gli esperimenti.

CFBS

```
function phi = CFBS(r,q,sigma,T,W)
% Computes the Discount-Adjusted Characteristic Function for the
% Black-Scholes-Merton Model
```

```
phi=exp((i*(r-q-0.5*sigma^2).*W-0.5*sigma^2*(W.^2)-r)*T);
```

CFMJD

```
function [phi,b] = CFMJD(r,q,sigma,T,lambda,jump_mu,jump_sigma,W)
% Computes the Discount-Adjusted Characteristic Function for the
% Merton Jump-Diffusion Model
```

```
drift=lambda*(exp(jump_mu+0.5*jump_sigma^2)-1);
b=(r-q-0.5*sigma^2-drift);
phi=exp((i*b.*W-0.5*(sigma*W).^2+lambda*(exp(i*jump_mu*W-0.5*
(jump_sigma*W).^2)-1)-r)*T);
```

CFNIG

```
function phi = CFNIG(u,T,r,gamma,sigma,mu)
% Discount-Adjusted Characteristic Function NIG-process
```

```
phi=exp(-T/mu*(sqrt(1-2*i*gamma*mu*u+sigma^2*mu*u.^2)-1)-r*T);
```

CFVG

```
function phi = CFVG(u,T,r,gamma,sigma,mu,q)
% Discount Adjusted Characteristic Function VG-process
% mu --> Variance of Subordinator
% sigma --> Volatility of Brownian Motion
% gamma --> Drift of Brownian Motion

phi=(1-i*gamma*mu*u-q+0.5*sigma^2*mu*u.^2).^(-T/mu)*exp(-r*T);
```

B.2 Carr-Madan

Qui si può trovare il codice relativo al metodo di Carr-Madan.

CarrMadan BSM

```
function [Price, Time] = CarrMadan_BSM(S0,K,N,r,T,q,sigma)
% Computes the Carr-Madan price of a European Call Option under the
% Black-Scholes-Merton model

% S0 --> Asset Price
% K --> Vector Of Desired Price Evaluations
% N --> # of points in quadrature
% r --> Risk-Free Interest Rate
% T --> Maturity
% q --> Dividen Yield
% sigma --> Volatility

alpha=1.5; % damping factor
a=1024;
eta=a/N; % integration grid step
lambda=(2*pi)/(N*eta); % log strikes grid step
b=0.5*lambda*N; % log strikes bound
v=eta*(0:N-1);
ku=-b+lambda*(0:N-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f=eta/3*(3+(-1).^(1:N)-eye(1,N)); % Simpson's Weights
tic
phi = CFBS(r,q,sigma,T,v-(alpha+1)*i); % Transformed Price
psi=phi./(alpha^2+alpha-v.^2+i*(2*alpha+1).*v);
ft=fft(exp(i*b*v).*psi.*f); % FFT
P=S0*real((exp(-alpha*ku)/pi).*ft);
Strike=S0*exp(ku);
Price = interp1(Strike,P,K,'spline'); % Prices at desired Strikes
Time=toc;
```

Il codice sopra riportato fa riferimento al modello di *Black – Scholes – Merton*. Lo stesso codice può essere usato per altri modelli di prezzo semplicemente cambiando la funzione caratteristica, ovvero sostituendo la chiamata

```
phi = CFBS(r,q,sigma,T,v-(alpha+1)*i);
con una qualsiasi funzione caratteristica.
```

B.3 FST

Qui è riportato il codice relativo al metodo FST per quanto riguarda la valutazione di opzioni europee.

FST BSM

```
function [Price,Time,P,S]=FST_BSM(S0,K,r,T,sigma,q,N,flag)
% Computes a European Option Price in the Black-Scholes-Merton Model

% S0 --> Spot Price
% K ---> Strike Price
% r ---> Risk-Free Interest Rate
% T ---> Maturity
% sigma -> Volatility
% q ---> Dividend Yield
% N ---> Grid Nodes
% flag-> Call/Put Option 1/-1

%Real Space
xm=-7.5;
xM=-xm;
dx=(xM-xm)/(N-1);
X=xm:dx:xM; % X=log(S/S0)

%Fourier Space
wM=pi/dx;
dw=2*wM/N;
W=[0:dw:wM, -wM+dw:dw:-dw];

%Payoff
S=S0*exp(X);
Payoff=max(flag.*(S-K),0);

%Pricing Core
tic
phi=CFBS(r,q,sigma,T,W);
fftw('planner','measure');
P=real(ifft(fft(Payoff).*phi));
Price=interp1(S,P,S0,'spline');
Time=toc;
```

Esattamente come per Carr-Madan questo codice è relativo esclusivamente al modello *Black – Scholes – Merton*. Per ottenere le valutazioni sotto altri modelli basta modificare la riga

```
phi=CFBS(r,q,sigma,T,W);
chiamando la funzione caratteristica desiderata.
```

B.4 Swing

Qui si trovano i codici relativi alla valutazione delle opzioni Swing e combinazioni di Bermuda. Rispetto ai corrispettivi codici relativi alle Vanilla, nella valutazione di Swing cambiando il modello occorre modificare, oltre alla funzione caratteristica, anche l'aggiornamento del prezzo ad ogni passo. Per completezza sono riportati tutti i codici relativi ai diversi modelli nonostante le differenze siano minime.

FST Swing BSM

```
function [Price,P,s,Time] = FST_Swing_BSM(S, K, r, T, sigma, q, N, M, SR, flag)
% Computes the Price of a Swing Option under the Black-Scholes-Merton
% model.

% S --> Spot Price
% K --> Strike Price
% r --> Risk-Free Rate
% T --> Maturity
% sigma --> Volatility
% q --> Fixed Callable/Puttable Load
% N --> Space Nodes
% M --> Time Nodes
% SR --> # of remaining Swing Rights
% flag --> To be initialized to 1

% Real Space
x_min = -7.5; x_max = 7.5;
dx=(x_max-x_min)/(N-1);
x=x_min:dx:x_max;

% Fourier Space
w_max=pi/dx;
dw=2*w_max/N;
w=[0:dw:w_max, -w_max+dw:dw:-dw];

% Option Payoff
s = S*exp(x);
v_ex = q*max(s-K,0) + q*max(K-s,0);
P=zeros(1,N);
Price=0;

if (flag==1)
    tic
end
% Pricing Core
```

```

if (SR>0 && M>1) % Swing Right Available AND NOT(Maturity)
    Spot_Price_Adj = exp(r*T/M);
    [pc,pu]=FST_Swing_BSM(S*Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR-1, 0); % Swing Option @(t+dt) AND 1 right less
    [p,p0]=FST_Swing_BSM(S*Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR, 0); % Swing Option @(t+dt)
    V_ex = v_ex + exp(-r*(T/M)).*pu;
    v_0 = exp(-r*(T/M)).*p0; % Current Option Value No-Swing Case
    V=[V_ex;v_0];
    Payoff=max(V, [],1);
    bool = (V_ex==Payoff); % 1 if Right Exercised
    Future_Price=pu.*bool+p0.*(1-bool);
    char_exp_factor = exp((i*(r-0.5*sigma^2).*w - 0.5*sigma^2*(w.^2)-r)*T/M);
    fftw('planner', 'estimate');
    P=v_ex.*bool+real(ifft(fft(Future_Price).*char_exp_factor));
end
if (M==1 && SR>0) % Terminal Node AND Swing Right Available
    P=v_ex;
end
if (flag==1)
    Price = interp1(s,P,S,'spline');
    Time=toc;
end
end

```

FST Swing F

```

function [Price,P,s] = FST_Swing_F(S, K, r, T, sigma, q, N, M, SRU, SRD, flag)
% Computes the Price of a Desired combination of Bermuda Options under the
% Black-Scholes-Merton model.

```

```

% S --> Spot Price
% K --> Strike Price
% r --> Risk-Free Rate
% T --> Maturity
% sigma --> Volatility
% q --> Fixed Callable/Puttable Load
% N --> Space Nodes
% M --> Time Nodes
% SR --> # of remaining Swing Rights
% flag --> To be initialized to 1

```

```

% Real space
x_min = -7.5; x_max = 7.5;
dx=(x_max-x_min)/(N-1);
x=x_min:dx:x_max;

```

```

% Fourier space
w_max=pi/dx;
dw=2*w_max/N;
w=[0:dw:w_max, -w_max+dw:dw:-dw];

```

```

% Option Payoff
s = S*exp(x);
Spot_Price_Adj = exp(r*T/M);
v_call=q*max(s-K,0);
v_put =q*max(K-s,0);
P=zeros(1,N);
bool_c=zeros(1,N);
bool_p=zeros(1,N);
pu=zeros(1,N);
pd=zeros(1,N);
Price=0;

% Pricing Core
if (M>1)
    [p,p0]=FST_Swing_F(S*Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SRU, SRD, 0); % Swing Option @(t+dt)
    v_0 = exp(-r*(T/M)).*p0; % Current Option Value No-Swing Case
    if (SRU>0) % Swing Right CALL Available AND NOT(Maturity)
        [pc,pu]=FST_Swing_F(S*Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
            q, N, M-1, SRU-1, SRD, 0); % Swing Option @(t+dt) AND 1 right less
        V_call = v_call + exp(-r*(T/M)).*pu;
        V=[V_call;v_0];
        Payoff_c=max(V,[],1);
        bool_c = (V_call==Payoff_c); % 1 if Called
    end
    if (SRD>0)
        [pp,pd]=FST_Swing_F(S*Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
            q, N, M-1, SRU, SRD-1, 0); % Swing Option @(t+dt) AND 1 right less
        V_put = v_put + exp(-r*(T/M)).*pd;
        V=[V_put;v_0];
        Payoff_p=max(V,[],1);
        bool_p = (V_put==Payoff_p); % 1 if Putted
    end
    Future_Price=pu.*bool_c+pd.*bool_p+p0.*(1-(bool_c+bool_p));
    char_exp_factor = exp((i*(r-0.5*sigma^2).*w - 0.5*sigma^2*(w.^2)-r)*T/M);
    fftw('planner', 'estimate');
    P=v_call.*bool_c+v_put.*bool_p+real(ifft(fft(Future_Price).*char_exp_factor));
end
if (M==1 && SRU>0) % Terminal Node AND Swing Right CALL
    P=v_call;
end
if (M==1 && SRD>0)
    P=v_put;
end
if (M==1 && SRU>0 && SRD>0)
    P=v_call+v_put;
end
if flag==1
    Price = interp1(s,P,S,'spline');
end

```

```
end
```

FST Swing MJD

```
function [Price,P,s,Time] = FST_Swing_MJD(S, K, r, T, sigma, q, N, M, SR, lambda,
                                         jump_mu, jump_sigma, Q, flag)
% Computes the Price of a Swing Option under the Merton-Jump-Diffusion
% model.

% S --> Spot Price
% K --> Strike Price
% r --> Risk-Free Rate
% T --> Maturity
% sigma --> Volatility
% q --> Fixed Callable/Puttable Load
% N --> Space Nodes
% M --> Time Nodes
% SR --> # of remaining Swing Rights
% Q --> Dividen Yield
% flag --> To be initialized to 1

% Real Space
x_min = -7.5; x_max = 7.5;
dx=(x_max-x_min)/(N-1);
x=x_min:dx:x_max;

% Fourier Space
w_max=pi/dx;
dw=2*w_max/N;
w=[0:dw:w_max, -w_max+dw:dw:-dw];

% Option Payoff
s = S*exp(x);
v_ex = q*max(s-K,0) + q*max(K-s,0);
P=zeros(1,N);
Price=0;

if (flag==1)
    tic
end
% Pricing Core
if (SR>0 && M>1) % Swing Right Available AND NOT(Maturity)
    [phi, b] = CFMJD(r,Q,sigma,T,lambda,jump_mu,jump_sigma,w);
    char_exp_factor = phi;
    Spot_Price_Adj = (b+lambda*jump_mu)*(T/M);
    [pc,pu]=FST_Swing_BSM(S+Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR-1, 0); % Swing Option @(t+dt) AND 1 right less
    [p,p0]=FST_Swing_BSM(S+Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR, 0); % Swing Option @(t+dt)
```

```

V_ex = v_ex + exp(-r*(T/M)).*pu;
v_0 = exp(-r*(T/M)).*p0; % Current Option Value No-Swing Case
V=[V_ex;v_0];
Payoff=max(V,[],1);
bool = (V_ex==Payoff); % 1 if Right Exercised
Future_Price=pu.*bool+p0.*(1-bool);
fftw('planner', 'estimate');
P=v_ex.*bool+real(ifft(fft(Future_Price).*char_exp_factor));
end
if (M==1 && SR>0) % Terminal Node AND Swing Right Available
    P=v_ex;
end
if (flag==1)
    Price = interp1(s,P,S,'spline');
    Time=toc;
end

```

FST Swing NIG

```

function [Price,P,s,Time] = FST_Swing_NIG(S, K, r, T, gamma, sigma, mu, q,
                                         N, M, SR, flag)
% Computes the price of a Swing Option under the Normal-Inverse-Gaussian
% model.

% S --> Spot Price
% K --> Strike Price
% r --> Risk-Free Rate
% T --> Maturity
% sigma --> Volatility
% q --> Fixed Callable/Puttable Load
% N --> Space Nodes
% M --> Time Nodes
% SR --> # of remaining Swing Rights
% flag --> To be initialized to 1

% Real Space
x_min = -7.5; x_max = 7.5;
dx=(x_max-x_min)/(N-1);
x=x_min:dx:x_max;

% Fourier Space
w_max=pi/dx;
dw=2*w_max/N;
w=[0:dw:w_max, -w_max+dw:dw:-dw];

% Option Payoff
s = S*exp(x);
v_ex = q*max(s-K,0) + q*max(K-s,0);
P=zeros(1,N);

```



```

Price=0;

if (flag==1)
    tic
end
% Pricing Core
if (SR>0 && M>1) % Swing Right Available AND NOT(Maturity)
    Spot_Price_Adj = gamma*T/M;
    [pc,pu]=FST_Swing_BSM(S+Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR-1, 0); % Swing Option @(t+dt) AND 1 right less
    [p,p0]=FST_Swing_BSM(S+Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR, 0); % Swing Option @(t+dt)
    V_ex = v_ex + exp(-r*(T/M)).*pu;
    v_0 = exp(-r*(T/M)).*p0; % Current Option Value No-Swing Case
    V=[V_ex;v_0];
    Payoff=max(V, [],1);
    bool = (V_ex==Payoff); % 1 if Right Exercised
    Future_Price=pu.*bool+p0.*(1-bool);
    char_exp_factor = CFNIG(w,T,r,gamma,sigma,mu);
    fftw('planner', 'estimate');
    P=v_ex.*bool+real(ifft(fft(Future_Price).*char_exp_factor));
end
if (M==1 && SR>0) % Terminal Node AND Swing Right Available
    P=v_ex;
end
if (flag==1)
    Price = interp1(s,P,S,'spline');
    Time=toc;
end

```

FST Swing VG

```

function [Price,P,s,Time] = FST_Swing_VG(S, K, r, T, gamma, sigma, mu,
    q, N, M, SR, flag)
% Computes the price of a Swing Option under the Variance-Gamma model.

% S --> Spot Price
% K --> Strike Price
% r --> Risk-Free Rate
% T --> Maturity
% sigma --> Volatility
% q --> Fixed Callable/Puttable Load
% N --> Space Nodes
% M --> Time Nodes
% SR --> # of remaining Swing Rights
% flag --> To be initialized to 1

% Real Space
x_min = -7.5; x_max = 7.5;

```

```

dx=(x_max-x_min)/(N-1);
x=x_min:dx:x_max;

% Fourier Space
w_max=pi/dx;
dw=2*w_max/N;
w=[0:dw:w_max, -w_max+dw:dw:-dw];

% Option Payoff
s = S*exp(x);
v_ex = q*max(s-K,0) + q*max(K-s,0);
P=zeros(1,N);
Price=0;

if (flag==1)
    tic
end
% Pricing Core
if (SR>0 && M>1) % Swing Right Available AND NOT(Maturity)
    Spot_Price_Adj = gamma*T/M;
    [pc,pu]=FST_Swing_BSM(S+Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR-1, 0); % Swing Option @(t+dt) AND 1 right less
    [p,p0]=FST_Swing_BSM(S+Spot_Price_Adj, K, r, (T/M)*(M-1), sigma,
        q, N, M-1, SR, 0); % Swing Option @(t+dt)
    V_ex = v_ex + exp(-r*(T/M)).*pu;
    v_0 = exp(-r*(T/M)).*p0; % Current Option Value No-Swing Case
    V=[V_ex;v_0];
    Payoff=max(V,[],1);
    bool = (V_ex==Payoff); % 1 if Right Exercised
    Future_Price=pu.*bool+p0.*(1-bool);
    char_exp_factor = CFVG(w,T,r,gamma,sigma,mu,0);
    fftw('planner', 'estimate');
    P=v_ex.*bool+real(ifft(fft(Future_Price).*char_exp_factor));
end
if (M==1 && SR>0) % Terminal Node AND Swing Right Available
    P=v_ex;
end
if (flag==1)
    Price = interp1(s,P,S,'spline');
    Time=toc;
end

```

swing FUSAI-RONCORONI

Codice disponibile online presso:

<http://semeq.unipmn.it/fusai/#>

```

function [OptionValue]=swing_FR(NumberStep,Maturity,InVal,strike,r,sigma,
    ExerciseTime,Rights,Amount,MaxRights,PenaltyPU)

```

```

% Valuation of swing options via trinomial trees with local or global penalties
% The parameters are:
% NumberStep : is the time discretization step
% Maturity : option's maturity in years (3*(1/12)=3 months)
% InVal : Initial value of the underlying
% strike : fixed price for one unity of gas
% r : rate of interest (0.1=10%)
% sigma : volatility of the price (0.4=40%)
% ExerciseTime: time in which is allow to exercise the option
% Rights : number of exercise the option
% Amount : underlying's amount to take every exercise
% MaxRight : difference in absolute value between gas bought and
              sold at maturity
% PenaltyPU : penalty expressed like amount to pay for every unit
              avercome MaxRight
% Examples :

if ((NumberStep-1)/(ExerciseTime-1)~=round((NumberStep-1)/(ExerciseTime-1)))
    disp('Exercise time is not compatible with time step discretization: ')
    disp('(NumberStep-1)/(ExerciseTime-1) must be integer')
    return
else
    T=Maturity; n=NumberStep; DeltaT=T/((n-1)*2); B=0.5*(exp(-r*DeltaT)
    +exp((r+sigma^2)*DeltaT)); H=B + sqrt(B^2-1);
    H1=1/H;
    vu=(B + sqrt(B^2-1))^2; va=1; vd=1/vu; p=(exp(r*DeltaT)-H1)/(H-H1);
    pu=p^2; pd=(1-p)^2; pa=2*p*(1-p); DeltaVal=[vu;va;vd];
    DeltaProb=[pu;pa;pd]; DiscRate=exp(-2*r*DeltaT);
    ZeroVect=zeros(2*n-1,1);
    ZeroMat=zeros(2*n-1,n);ValueUnderlying=ZeroMat;
    TimeDiscretization=[0:T/(n-1):T];
    index=[1:(n-1)/(ExerciseTime-1):size(TimeDiscretization,2)];
    ExerciseTimeVector(index)=1; RightsUP=Rights;
    RightsDWN=RightsUP; AmountSwingUP=Amount;
    AmountSwingDWN=AmountSwingUP; MaxAmountUP=MaxRights;
    P=[NaN,ones(1,RightsUP+1)]; MaxAmountDWN=MaxAmountUP;

    ValueUnderlying(1,1)=InVal;
    for i=2:n
        y=zeros(2*n-1,1);
        for j=1:3:2*(i-1)-1
            y(j:j+2)=DeltaVal.*ValueUnderlying(j,i-1);
        end
        if (j+1==2*(i-1)-1);
            y(j+3)=DeltaVal(3)*ValueUnderlying(2*(i-1)-1,i-1);
        elseif (j+2==2*(i-1)-1);
            y(j+3:j+4)=DeltaVal(2:3).*ValueUnderlying(2*(i-1)-1,i-1);
        end
        ValueUnderlying(:,i)=y;
    end
end

```

```

end

index=find(ValueUnderlying); Strike=ZeroMat;
Strike(index)=strike; ExpectedValue=ZeroVect;
Forest=zeros(2*n-1,n,RightsUP+1,RightsDWN+1);
ExpectedForest=zeros(2*n-1,n,2,RightsDWN+2);

AmountTotUP=[(AmountSwingUP*RightsUP):-AmountSwingUP:0];
AmountTotDWN=[(AmountSwingDWN*RightsDWN):-AmountSwingDWN:0];
PenaltyF=-max(abs(AmountTotUP(1)-AmountTotDWN(1))-MaxRights,0)*PenaltyPU;
value(:,1)=max(AmountSwingDWN*(strike-ValueUnderlying(:,n)),
               AmountSwingUP*(ValueUnderlying(:,n)-strike));
for j=2:RightsUP+1
    for i=2:RightsUP+1
        Forest(:,n,j,i)=value(:,1)-max(abs(AmountTotUP(i)-AmountTotDWN(j))
                                         -MaxRights,0)*PenaltyPU;
    end
end
value(:,1)=max(AmountSwingDWN*(strike-ValueUnderlying(:,n)),ZeroVect);
value(:,2)=max(AmountSwingUP*(ValueUnderlying(:,n)-strike),ZeroVect);
for i=1:RightsUP+1
    Forest(:,n,1,i)=value(:,1)-max(abs(AmountTotUP(1)-AmountTotDWN(i))
                                     -MaxRights,0)*PenaltyPU;
    Forest(:,n,i,1)=value(:,2)-max(abs(AmountTotUP(i)-AmountTotDWN(1))
                                     -MaxRights,0)*PenaltyPU;
end
Forest(:, :, 1, 1)=PenaltyF;

for m=1:Rights+1
    for l=1:Rights+1
        value=Forest(:,n,m,l);
        for i=1:n-1
            for j=1:2*(n-i)-1
                Vexpected=value(j:j+2,1)'*DeltaProb*DiscRate;
            end
            D=zeros(2*i,1);
            k=size(D,1);
            ExpectedValue(end-k+1:end)=D;
            if (ExerciseTimeVector(n-i)==1)
                ExerciseValue=max(P(m)*(Amount*(ValueUnderlying(:,n-i)
                                                    -Strike(:,n-i)))+ExpectedForest(:,n-i,1,l+1),P(l)*...
                                   (Amount*(Strike(:,n-i)-ValueUnderlying(:,n-i)))+...
                                   +ExpectedForest(:,n-i,2,l));
                value=max(ExerciseValue,ExpectedValue);
                Forest(:,n-i,m,l)=value;
            else
                value=ExpectedValue;
            end
        end
    end
end

```

```
        ExpectedForest(:,n-i,2,1+1)=ExpectedValue;
    end
end
ExpectedForest(:,:,1,:)=ExpectedForest(:,:,2,:);
ExpectedForest(:,:,2,:)=0;
end
OptionValue=Forest(1,1,Rights+1,Rights+1);
end
```


Bibliografia

- [1] Albanese C., Jaimungal S. e Rubisov D.H. (2001). The model of lines for option pricing with jumps. Working paper, disponibile presso <http://ssrn.com/abstract=256845>.
- [2] Andersen L., Andreasen J. (2000). Jump-diffusion processes: Volatility smile fitting and numerical methods for options pricing. *Review of Derivatives Research* 4, 231-262.
- [3] Andricopoulos A., Widdicks M., Duck P. e Newton D. (2003). Universal option evaluation using quadrature. *Journal of Financial Economics* 67(3), 443-471.
- [4] Ascher U.M., Ruuth S.J. e Wetton B.T. (1997). Implicit-Explicit methods for time-dependent PDEs. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 32(3), 797-823.
- [5] Barndorff-Nielsen O.E. (1997). Normal Inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics* 24, 1-13.
- [6] Black F. e Scholes M.S. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81(3), 637-654.
- [7] Boyarchenko S.I. e Levendorskii S.Z. (2002). *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*, Volume 9 di *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability*. World Scientific Publishing Co.
- [8] Boyle P., Broadie M. e Glasserman P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control* 21(8-9), 1267-1321.
- [9] Boyle P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics* 4, 323-338.
- [10] Boyle P. (1986). Option valuation using three jump processes. *International Options Journal* 3, 7-12.
- [11] Carr P., Madan D.B. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *The Journal of Computational Finance* 2(4), 61-73.
- [12] Chiarella C., El-Hassan N. e Kucera A. (1999). Evaluation of American option prices in a path integral framework using Fourier-Hermite series expansions. *Journal of Economic Dynamics and Control* 23, 1387-1424.

- [13] Chiarella C., Ziogas A. (2005). Pricing American options on jump-diffusion processes using Fourier Hermite series expansions. Research Paper Series 145, Quantitative Finance Research Centre.
- [14] Cont R., Tankov P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman&Hall/CRC Press, 79-141.
- [15] Cont R., Voltchkova E. (2005). A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43(4), 1596-1626.
- [16] Cox J.C., Ross S.A. e Rubinstein M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* 7(3), 229-263.
- [17] Dempster M.A., Hong S. (2000). Spread option valuation and the fast Fourier transform. Technical Report 26, Cambridge University.
- [18] D'Halluin Y., Forsyth P.A. e Vetzal K.R. (2005). Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes. *IMA Journal of Numerical Analysis* 25, 87-112.
- [19] Eberlein E., Prause K. (2002). The generalized hyperbolic model: Financial derivatives and risk measures. In H. Geman, D. Madan, S. Pliska e T. Vorst (Eds.), *Mathematical Finance - Bachelier Congress 2000*, Springer, 245-267.
- [20] Fang F., Oosterlee C.W. (2008). A novel pricing method for European options based on Fourier-Cosine series expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing* 31(2), 826-848.
- [21] Feng L., Linetsky V. (2008). Pricing discretely monitored barrier options and defaultable bonds in Lévy process models: A fast Hilbert transform approach. *Mathematical Finance* 18(3), 337-384.
- [22] Fusai G., Roncoroni A. (2008). *Implementing Models in Quantitative Finance: Methods and Cases*, Springer, 457-468.
- [23] Glasserman P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag.
- [24] Huang J.-Z., Wu L. (2004). Specification analysis of option pricing models based on time-changed Lévy processes. *The Journal of Finance* 59, 1405-1440.
- [25] Jackson K.R., Jaimugal S. e Surkov V. (2008). Fourier space time-stepping for option pricing with Lévy models. *Journal of Computational Finance* 12(2), 1-28.
- [26] Kou S.G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science* 48(8), 1086-1101.
- [27] Lewis A. (2001). A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes. Working Paper, disponibile presso <http://ssrn.com/abstract=282110>.

- [28] Madan D., Seneta E. (1990). The Variance Gamma (V.G.) model for share market returns. *Journal of Business* 63(4), 511-524.
- [29] Madan D., Milne F. e Shefrin H. (1989). The multinomial option pricing model and its Brownian and Poisson limits. *The Review of Financial Studies* 2(2), 251-265.
- [30] Matache A.M., Nitsche P. e Schwab C. (2005). Wavelet Galerkin pricing of American options on Lévy driven assets. *Quantitative Finance* 5(4), 403-424.
- [31] Matache A.M., von Petersdorff T. e Schwab C. (2004). Fast deterministic pricing of options on Lévy driven assets. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 38(1), 37-71.
- [32] Merton R.C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4(1), 141-183.
- [33] Merton R.C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3, 125-144.
- [34] Nagy G.(2004). *Essentials of Pseudodifferential Operators*. Paper che può essere trovato presso <http://math.msu.edu/~gnagy/papers/n-pdo.pdf>.
- [35] O'Sullivan C. (2005). Path dependent option pricing under Lévy processes. In *EFA 2005 Moscow Meetings*.
- [36] Papapantoleon A. (2005). An introduction to Lévy processes with applications in finance. Lecture notes, disponibili presso <http://arxiv.org/abs/0804.0482>.
- [37] Raible S. (2000). *Lévy processes in finance: theory, numerics and empirical facts*. Ph. D. thesis, University of Freiburg.
- [38] Reiner E. (2001). Convolution methods for path-dependent options. Diapositive da presentazione Financial Mathematics conference at IPAM, UCLA, disponibile presso http://www.ipam.ucla.edu/publications/fm2001/fm2001_4272.pdf.
- [39] Salinelli E., Tomarelli F. (2009). *Modelli Dinamici Discreti*, 2^a Edizione, Springer, 72-82.
- [40] Surkov V.(2009). *Option Pricing using Fourier Space Time-stepping Framework*. Ph. D. thesis, University of Toronto, 1-45, 80-86, 103-109.
- [41] Wilmott P., Howison S. e Dewynne J. (1993). *Options Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press.
- [42] Wilmott P., Howison S. e Dewynne J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press.
- [43] Young A. (2004). *Pseudodifferential Operators*. Paper che può essere trovato presso <http://www.ma.utexas.edu/users/dafr/Index/Young.pdf>.