

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi

Corso di Studi in
INGEGNERIA MATEMATICA

Tesi di Laurea Specialistica



Modelli statistici per lo studio della Fibrillazione Atriale

Relatore:

Prof.ssa Anna Maria Paganoni

Correlatori:

Dott.ssa Francesca Ieva

Dott.ssa Valeria Vitelli

Candidato:

Paolo Zanini (matr. 735615)

Anno Accademico 2009/2010

“Di tutto ciò che l’uomo, spinto dal suo istinto vitale, costruisce ed erige, nulla è più bello e più prezioso per me dei ponti.

I ponti sono più importanti delle case, più sacri perchè più utili dei templi. Appartengono a tutti e sono uguali per tutti, sempre costruiti sensatamente nel punto in cui si incrocia la maggior parte delle necessità umane, più duraturi di tutte le altre costruzioni [...].

Diventano tutti uno solo e tutti degni della nostra attenzione, perchè indicano il posto in cui l’uomo ha incontrato l’ostacolo e non si è arrestato, lo ha superato e scavalcato come meglio ha potuto, secondo le sue concezioni, il suo gusto e le condizioni circostanti. [...] Così, ovunque nel mondo, in qualsiasi posto, il mio pensiero vada e si arresti, trova fedeli e operosi ponti, come eterno e mai soddisfatto desiderio dell’uomo di collegare, pacificare e unire insieme tutto ciò che appare davanti al nostro spirito, ai nostri occhi, ai nostri piedi, perchè non ci siano divisioni, contrasti, distacchi.”

Ivo Andrić, *I ponti*

Ringraziamenti

La prima persona che desidero ringraziare è la professoressa Anna Maria Paganoni, che mi ha seguito con costanza durante la preparazione della tesi, sempre presente dall'inizio alla fine con una precisione e un'attenzione nelle correzioni assolutamente non comune. Vorrei ringraziarla, inoltre, perchè sin dal primo anno di università ha rappresentato per me un esempio e, attraverso l'entusiasmo tangibile nei confronti di ciò che insegna, è riuscita a trasmettere anche a me questa sua grande passione per la statistica.

Vorrei inoltre ringraziare Francesca e Valeria che sono state più che una presenza importante nello svolgimento di questo lavoro, sempre disponibili a dedicarmi del tempo per rispondere ai miei dubbi e puntuali nel correggere le mie imprecisioni.

In terzo luogo un ringraziamento particolare lo devo anche al gruppo di ricerca di bioingegneria del Politecnico di Milano, composto da Luca Mainardi, Anna Maria Bianchi e Valentina Corino, sia per avermi fornito i dati sui quali il mio lavoro è incentrato, sia per aver sempre risposto alle mie richieste durante questo periodo.

In questo momento di gioia e di soddisfazione per la fine di un percorso che, inevitabilmente, ha segnato profondamente la mia vita, non posso inoltre non ringraziare chi della mia vita fa parte. La mia famiglia in primis, per avermi sempre sostenuto e aver sempre creduto in me e in quello che faccio e, soprattutto, per essere la mia famiglia. I miei amici storici, "quelli di Corsico", perché ci sono sempre stati e ci saranno sempre e perché lo striscione che mi hanno dedicato due anni fa non lo dimenticherò mai. E gli amici che hanno compiuto passo a passo insieme a me lo stupendo percorso che oggi si conclude, alcuni sin dal via, altri raccolti strada facendo, ma tutti fondamentali nell'aver reso indimenticabili questi cinque anni.

Grazie a tutti, davvero!

Indice

Elenco delle figure	8
Elenco delle tabelle	9
Abstract	10
Introduzione	11
1 Presentazione del problema	13
1.1 Il cuore: origine del battito cardiaco	13
1.2 La Fibrillazione Atriale	15
1.3 Elettrocardiogramma e intervalli RR	17
1.4 Il monitor Holter	19
1.5 Presentazione del dataset	20
2 Analisi di serie temporali	21
2.1 Processi stocastici stazionari	21
2.2 Modelli lineari stazionari	23
2.2.1 Funzioni di autocovarianza e autocorrelazione di un processo lineare	24
2.2.2 Condizioni di stazionarietà e invertibilità per un pro- cesso lineare	25
2.3 Processi autoregressivi	27
2.3.1 Funzione di autocorrelazione e varianza	27
2.3.2 Processo autoregressivo di ordine 1	29
2.3.3 Processo autoregressivo di ordine 2	29
2.3.4 Funzione di autocorrelazione parziale	31
2.4 Processi a media mobile	32
2.4.1 Funzione di autocorrelazione e varianza	32
2.4.2 Processo a media mobile di ordine 1	33
2.4.3 Processo a media mobile di ordine 2	34

2.4.4	Dualità tra processi autoregressivi e processi a media mobile	35
2.5	Processi autoregressivi e a media mobile	35
2.5.1	Processo autoregressivo e a media mobile di ordine (1,1)	37
2.6	Modelli lineari non stazionari	38
2.6.1	Forma generale dei processi ARIMA	41
2.6.2	Tre forme esplicite per i modelli ARIMA	42
2.7	Particolari modelli ARIMA	48
2.7.1	Processo IMA di ordine (0,1,1)	48
2.7.2	Processo IMA di ordine (0,2,2)	50
2.7.3	Generico processo IMA (0,d,q)	52
2.7.4	Schema riassuntivo	53
2.8	Identificazione del modello	54
2.8.1	Uso delle funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale nell'identificazione	54
2.9	Controllo del modello	56
2.9.1	Tecniche di <i>overfitting</i>	56
2.9.2	Metodi basati sullo studio dei residui	57
3	Analisi dei dati via serie temporali	60
3.1	Analisi esplorativa	60
3.1.1	Istogrammi degli intervalli RR	60
3.1.2	Poincaré e Lorenz plot	62
3.2	Analisi quantitativa	68
3.2.1	Schema riassuntivo	74
3.3	Monitoraggio	76
3.3.1	Prima e dopo fibrillazione	76
3.3.2	Monitoraggio continuo	76
3.3.3	Presentazione dei risultati	81
3.3.4	Ritardo nella segnalazione della Fibrillazione Atriale	88
3.3.5	Falsi allarmi	90
3.4	Conclusioni	92
4	Controllo statistico di processo	93
4.1	Teoria e metodi del controllo statistico di un processo produttivo	93
4.1.1	Fondamenti statistici delle carte di controllo	94
4.1.2	Scelta dei limiti di controllo	96
4.1.3	Dimensione del campione e frequenza di campionamento	96
4.1.4	Analisi degli andamenti tipici di una carta di controllo	97
4.1.5	Fase I e fase II dell'applicazione delle carte di controllo	99
4.2	Carte di controllo per variabili	100

4.2.1	Carte di controllo \bar{X} e R/S : costruzione e uso	100
4.2.2	Interpretazione delle carte \bar{X} e R/S	106
4.2.3	Effetto della non normalità sulle carte \bar{X} e R/S	109
4.3	Carte di controllo per dati correlati	109
5	Analisi dei dati via carte di controllo	112
5.1	Analisi preliminari	112
5.2	Scelta di un modello	114
5.3	Analisi tramite carte \bar{X} e R	116
5.4	Conclusioni	124
	Conclusione	126
	Appendice A	128
	Appendice B: codici	129

Elenco delle figure

1.1	Schema del cuore.	14
1.2	Onde tipiche del tracciato elettrocardiografico.	18
2.1	Esempio di serie stazionaria nelle differenze di ordine uno.	40
2.2	Esempio di serie stazionaria nelle differenze di ordine due.	40
3.1	Istogrammi relativi al paziente 2 durante FA costruiti utilizzando la tecnica HRSH.	61
3.2	Poincaré plot dei pazienti 2 (sinistra) e 10 (destra) pre-FA, durante FA e post-FA.	63
3.3	Lorenz plot dei pazienti 2 (sinistra) e 10 (destra) pre-FA, durante FA e post-FA.	64
3.4	Poincaré (sinistra) e Lorenz (destra) plot del paziente 3 pre-FA.	65
3.5	Poincaré plot del paziente 5 (sopra) e Lorenz plot del paziente 6 (sotto) pre-FA e post-FA.	66
3.6	Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 1.	69
3.7	Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 4.	70
3.8	Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 9.	71
3.9	Autocorrelazione dei residui del modello ARIMA(0,1,1) per il paziente 5.	72
3.10	Autocorrelazione dei residui del modello ARIMA(0,2,2) per il paziente 9.	72
3.11	P-value del test di portemonteau del modello ARIMA(0,2,2) per il paziente 3.	73
3.12	P-value del test di portemonteau del modello ARIMA(0,1,1) per il paziente 5.	74

3.13	Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 1 pre-FA.	77
3.14	Paziente 1, modello ARIMA(0,1,1): grafici dei p-value del test di portemonteau (K=5) al variare di N.	79
3.15	Paziente 6, modello ARIMA (0,2,2): grafici dei p-value del test di portemonteau (K=15) al variare di N.	80
3.16	Paziente 1: identificazione della FA tramite il p-value del test di portmanteau con K=5 in riferimento al modello ARIMA (0,1,1), al variare di N.	82
3.17	Paziente 5: identificazione della FA tramite il p-value del test di portmanteau con K=5 in riferimento al modello ARIMA (0,1,1), al variare di N.	83
3.18	Paziente 8: identificazione della FA tramite il p-value del test di portmanteau con K=5 in riferimento al modello ARIMA (0,1,1), al variare di N.	84
3.19	Paziente 1: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).	85
3.20	Paziente 1: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).	86
3.21	Paziente 5: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).	87
3.22	Paziente 5: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).	87
3.23	Paziente 8: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).	88
4.1	Esempio di carta di controllo.	95
4.2	Curve operative caratteristiche, al variare di n , per una carta \bar{X}	105
4.3	Esempio di andamento ciclico in una carta di controllo \bar{X}	106
4.4	Esempio di presenza di due popolazioni in una carta di controllo \bar{X}	107
4.5	Esempio di spostamento del valore di riferimento in una carta \bar{X}	107
4.6	Esempio di deriva del valore di riferimento in una carta \bar{X}	108
4.7	Esempio di stratificazione in una carta \bar{X}	108
5.1	Intervalli RR per i pazienti 1,3,6 e 10. Le linee rosse verticali indicano inizio e fine della Fibrillazione Atriale.	113
5.2	Paziente numero 2: autocorrelazione dei residui e p-value del test di buon adattamento per il modello ARIMA (5,1,3).	115
5.3	Carta R relativa ai primi 1000 valori per il paziente 1, con $n = 10$	117
5.4	Carta R del paziente 1 dopo l'eliminazione dei primi valori fuori controllo.	118

5.5	Carta \bar{X} del paziente 1 dopo l'eliminazione dei primi valori fuori controllo.	119
5.6	Carte \bar{X} e R del paziente 1 pre-FA: la linea blu rappresenta l'inizio della fibrillazione.	120
5.7	Carte \bar{X} e R del paziente 1 durante la FA: la linea blu rappresenta la fine della fibrillazione.	122
5.8	Carta R del paziente 10 pre-FA: la linea blu rappresenta l'inizio della fibrillazione.	123

Elenco delle tabelle

1.1	Durata dell'evento di FA e numero di intervalli RR.	20
2.1	Schema riassuntivo dei processi stazionari analizzati	53
3.1	Tabella riassuntiva dei pazienti e dei modelli presi in considerazione.	75
3.2	Ritardi nella segnalazione dell'inizio dell'evento di FA.	88
3.3	Ritardi nella segnalazione della fine dell'evento di FA.	89
3.4	Percentuali dei ritardi massimi e minimi rispetto alla scelta di N nella segnalazione dell'inizio e della fine dell'evento di FA.	89
3.5	Numero degli errori pre e post tempo d'attesa e durata dell'evento di fibrillazione nel caso di $N = 600$	90
3.6	Numero degli errori pre e post tempo d'attesa e durata dell'evento di fibrillazione nel caso di $N = 800$	91
3.7	Valore del tempo d'attesa in percentuale sul totale della durata dell'evento di fibrillazione per i pazienti analizzati.	91
1	Costanti relative alle carte \bar{x} e R	128
2	Costanti relative alle carte \bar{x} e S	128

Abstract

Il presente lavoro di tesi consiste nell'analisi di un dataset composto dagli intervalli RR dell'ECG di dieci pazienti registrati prima, durante e dopo un evento di Fibrillazione Atriale (FA), aritmia cardiaca con un'elevata incidenza nella popolazione. Nel Capitolo 1 viene approfondito il problema della FA dal punto di vista clinico ed è descritto nel dettaglio il dataset a disposizione. Nel Capitolo 2 si illustra la teoria relativa all'analisi di serie temporali. In particolare sono analizzati i processi della classe ARIMA (*Auto-Regressive Integrated Moving Average*). All'interno del Capitolo 3 viene identificato un modello adatto a descrivere l'andamento della serie degli intervalli RR durante il fenomeno della FA; è dunque proposto e validato un metodo innovativo, basato sullo studio di statistiche del modello, per l'identificazione tempestiva del fenomeno di FA. Nel Capitolo 4 viene presentata la teoria sulle carte di controllo, un particolare strumento di monitoraggio utilizzato nell'ambito dell'SPC (*Statistical Process Control*). Nel Capitolo 5 sono illustrati i risultati ottenuti applicando gli strumenti descritti nel Capitolo 4 alle serie storiche degli intervalli RR prima, durante e dopo FA, illustrando punti di forza e criticità dell'analisi condotta (anche alla luce dei risultati del Capitolo 3). Da ultimo, nelle appendici A e B sono riportati i codici utilizzati per svolgere le analisi e due tabelle relative alle carte di controllo. Il lavoro di tesi è quindi volto alla ricerca di uno o più metodi che permettano, a partire dal monitoraggio delle serie storiche degli intervalli RR, di indicare in tempi brevi sia il sopraggiungere del fenomeno di FA, che la fine dello stesso. Il lavoro svolto in questo elaborato, inoltre, non solo permette, tramite l'analisi statistica, di arrivare ad una comprensione profonda del problema clinico in questione e a dei risultati incisivi, ma porta anche a dei contributi innovativi nel momento in cui modelli provenienti da un ambito (SPC) molto lontano dalla biostatistica sono stati efficacemente adattati al caso in esame.

Introduzione

L'uso di strumenti propri dell'analisi statistica esplorativa e inferenziale si sta sempre più affermando quale passo imprescindibile nell'interpretazione dei risultati sperimentali in svariati ambiti scientifici, primo fra tutti quello delle scienze umane. Sempre più spesso, infatti, i problemi di natura clinica invocano l'utilizzo di tecniche specializzate per trattare la complessità dei dati provenienti dalla pratica medica e la sempre più alta dimensionalità degli stessi.

Lo studio oggetto di questo elaborato di tesi è un esempio di come, partendo da un dataset ottenuto per l'analisi di uno specifico problema clinico e attraverso il perfezionamento di tecniche statistiche avanzate, si possa giungere ad una comprensione del problema e a dei risultati che le competenze cliniche, da sole, non sarebbero in grado di ottenere.

Obiettivo di questo lavoro di tesi è infatti l'analisi di un dataset composto dalle serie temporali delle distanze tra i picchi R del battito di dieci pazienti, registrato prima, durante e dopo un evento di Fibrillazione Atriale (FA), un'aritmia cardiaca con un'incidenza relativamente alta nella popolazione.

Per affrontare l'analisi statistica di un simile database si è reso innanzitutto necessario un approfondito studio del problema volto alla contestualizzazione della patologia da un punto di vista clinico ([6], [19], [20]). Per questo motivo nel Capitolo 1 vengono descritte le basi fisiologiche e anatomiche del funzionamento del cuore e gli effetti causati su di esse dalla Fibrillazione Atriale. È anche presentato un tipico tracciato elettrocardiografico, con lo scopo di illustrare in cosa consiste un intervallo RR. Infine viene descritto nel dettaglio il dataset a disposizione, che consiste nelle serie temporali degli intervalli RR di dieci pazienti soggetti alla Fibrillazione Atriale.

È stato inoltre necessario un accurato vaglio delle tecniche matematiche applicate al problema della Fibrillazione Atriale esistenti in letteratura, con lo scopo di creare una base di partenza per le analisi successive ([7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]).

Nel Capitolo 2 viene quindi approfondita la teoria relativa all'analisi di serie temporali, analizzando in particolare i processi delle classi AR (*Auto-*

Regressive), MA (*Moving Average*), ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*) e ARIMA (*Auto-Regressive Integrated Moving Average*), con particolare attenzione alle fasi di identificazione del modello e della sua validazione tramite test diagnostici.

Il Capitolo 3 descrive innanzitutto le analisi esplorative condotte sul dataset, effettuate tramite strumenti specifici del problema in esame. Sono poi presentati i risultati ottenuti sfruttando le tecniche analizzate nel Capitolo 2; viene identificato un modello adatto a descrivere l'andamento della serie degli intervalli RR durante il fenomeno della Fibrillazione Atriale ed è infine proposto un metodo innovativo, attraverso lo studio di statistiche derivanti da tale modello, per l'identificazione del fenomeno di Fibrillazione Atriale, valutando le prestazioni che tale metodo è in grado di fornire dal punto di vista della tempestività.

Nel Capitolo 4 viene introdotta la teoria della carte di controllo, uno strumento utilizzato nell'ambito dell'SPC (*Statistical Process Control*) per il controllo della qualità di un processo produttivo, con l'intento di sfruttare tali strumenti per il monitoraggio dell'adattamento dei dati al modello e di individuare ancor più efficacemente l'insorgere di un episodio di FA. Sono prese in considerazione le carte di controllo più comuni, ovvero la carta \bar{X} per la media e le carte R ed S per l'analisi della variabilità di un processo.

Nel Capitolo 5 sono presentati i risultati ottenuti applicando gli strumenti descritti nel Capitolo 4 alle serie storiche degli intervalli RR prima, durante e dopo FA, illustrando punti di forza e criticità dell'analisi condotta (anche alla luce dei risultati del Capitolo 3).

Da ultimo, nelle Appendici A e B sono riportati i valori delle costanti necessarie alla costruzione delle carte di controllo e i codici prodotti e utilizzati per l'analisi dei dati.

Il lavoro di tesi è quindi volto alla ricerca di uno o più metodi che permettano, a partire dal monitoraggio delle serie storiche degli intervalli RR, di indicare in tempi brevi sia il sopraggiungere del fenomeno di fibrillazione, che la fine dello stesso. A tale scopo vengono utilizzati modelli propri di due ambiti diversi della statistica, quello dell'analisi di serie temporali e quello del controllo statistico di processo.

Lo studio proposto in questo elaborato, inoltre, non solo permette, tramite l'analisi statistica, di arrivare ad una comprensione profonda del problema clinico in questione e a dei risultati incisivi, ma porta anche a dei contributi innovativi nel momento in cui modelli provenienti da un ambito (SPC) molto lontano dalla biostatistica sono efficacemente adattati al caso in esame.

Capitolo 1

Presentazione del problema

1.1 Il cuore: origine del battito cardiaco

Il cuore, come tutti i muscoli, è capace di contrarsi sfruttando l'energia prodotta dalla ossidazione di sostanze energetiche (come acidi grassi, carboidrati) in presenza di ossigeno. A differenza di quelle degli altri muscoli, le cellule muscolari striate di cui è composto il cuore sono dotate della capacità di autoeccitarsi e autocontrarsi. Il controllo nervoso sul cuore può modulare la frequenza di contrazione aumentandola o diminuendola, ma questa è generata in maniera spontanea dal miocardio.

Esiste una parte del miocardio dedicata alla sola generazione e conduzione degli impulsi attraverso il muscolo cardiaco, il cosiddetto *miocardio specifico*. Si tratta di un sistema specializzato del cuore che permette, in condizioni normali, che il cuore batta in maniera efficiente ed ordinata (prima gli atri, poi i ventricoli permettendo il completo riempimento di questi ultimi) e che l'impulso generato si diffonda velocemente, facendo contrarre tutte le parti del ventricolo in maniera pressoché simultanea.

Questo sistema è formato da diverse parti:

- Il *nodo seno-atriale* (S-A): si tratta di una piccola e appiattita striscia elissoidale di miocardio specifico larga circa 3 mm, lunga 15 mm e spessa 1 mm, che si trova nella parte superiore laterale dell'atrio destro subito sotto allo sbocco della vena cava superiore. Le fibre del nodo seno-atriale hanno un diametro variabile tra i 3 e i 5 mm, mentre le fibre circostanti sono delle dimensioni di una decina di micrometri. In questo nodo si genera il normale impulso ritmico; per fare in modo che l'impulso venga trasmesso alle fibre atriali, le fibre del nodo S-A si connettono direttamente con quelle atriali; il potenziale d'azione si diffonde, così, in maniera simultanea negli atri.

- Le *vie internodali*: si tratta di una striscia di tessuto di conduzione che deve condurre il segnale verso il nodo atrioventricolare.
- Il *nodo atrio-ventricolare* (A-V): è il principale responsabile del ritardo che deve essere attuato nel passaggio del segnale dagli atri ai ventricoli. Un'altra importante funzione del nodo A-V è quella di permettere il passaggio solo in un senso dell'impulso cardiaco, impedendo il passaggio dai ventricoli agli atri tramite uno strato fibroso che funziona da isolante per l'impulso.
- Le *fibre del Fascio di His* propagano l'impulso alla massa cardiaca ventricolare, dividendosi in due branche, destra e sinistra. La branca sinistra possiede due fascicoli, anteriore, più spesso, e posteriore, più sottile.
- Le *fibre del Purkinje*, cellule cardiache con conducibilità maggiore rispetto ai miocardiociti, sono la parte terminale del sistema di conduzione del cuore.

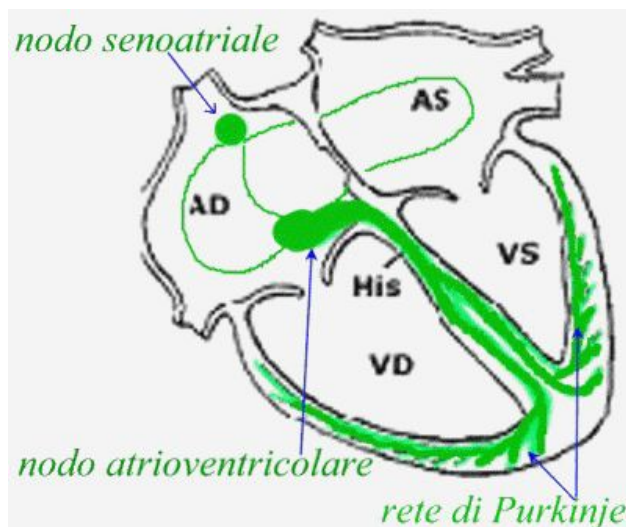


Figura 1.1: Schema del cuore.

Una volta che l'impulso si è generato nel nodo seno-atriale passa direttamente alle fibre atriali investendole in maniera simultanea. A questo punto attraverso le fibre internodali, il segnale viene trasmesso al nodo atrioventricolare. Dalla generazione del segnale sono passati 0,02 secondi. È in questo punto del sistema di conduzione, quello che trasferisce il segnale dagli atri ai

ventricoli, che troviamo un ritardo di trasmissione. Questo ritardo è necessario affinché l'impulso cardiaco non possa propagarsi dagli atri ai ventricoli in maniera troppo veloce. Se questo accadesse, infatti, sarebbe impossibile per i ventricoli un perfetto riempimento e da questo si arriverebbe ad un non perfetto rendimento della pompa cardiaca.

La prima struttura che provoca questo ritardo è il nodo A-V, che ritarda di circa 0,09 secondi prima che l'impulso invada il fascio di His (che si divide poi in branca destra e sinistra). Subito dopo il passaggio attraverso il nodo atrioventricolare abbiamo un ulteriore ritardo di 0,04 secondi dovuto ad una parte del fascio fibroso che separa atri e ventricoli. Il ritardo complessivo dalla generazione dell'impulso, all'arrivo dello stesso ai ventricoli è quindi di circa 0,13 secondi. Subito dopo questa parte ritardante troviamo le fibre del Purkinje, che dal nodo A-V si portano ai ventricoli passando attraverso il setto ventricolare. Queste fibre sono a conduzione molto veloce, il che permette di avere una trasmissione dell'impulso ai ventricoli praticamente immediata e simultanea (circa 0,03 secondi). L'alta velocità diminuisce una volta che si è arrivati nelle parti terminali delle fibre del Purkinje, quindi le ultime cellule miocardiche sono raggiunte con un ritardo di circa 0,03 secondi; conseguentemente il tempo per far contrarre i ventricoli è calcolato in 0,06 secondi.

1.2 La Fibrillazione Atriale

La Fibrillazione Atriale (FA) è un'aritmia cardiaca che origina dagli atri [19], [20].

Nella Fibrillazione Atriale, gli impulsi elettrici che danno luogo alla contrazione degli atri si attivano in maniera totalmente caotica e frammentaria, dando origine a multipli fronti d'onda e a contrazioni disorganizzate e frammentarie. Queste contrazioni degli atri sono spesso inefficaci dal punto di vista emodinamico, cioè non permettono al cuore di esercitare in maniera efficace la sua funzione di pompa. Il battito cardiaco risulta quindi molto più variabile e irregolare.

Esistono tre classi principali di Fibrillazione Atriale: parossistica, persistente, permanente. Per poter classificare il tipo di fibrillazione a cui un paziente è soggetto, bisogna innanzitutto individuare un primo episodio isolato di Fibrillazione Atriale, valutare se la regressione è stata spontanea o indotta, stabilire se il paziente è sintomatico o meno, tenendo presente che può esserci incertezza nel definire la durata dell'episodio stesso e l'eventuale presenza di episodi misconosciuti in passato.

Quando nello stesso paziente vengono accertati due o più episodi, la Fibril-

lazione Atriale viene considerata ricorrente. In questi casi, qualora vi sia il ripristino spontaneo del ritmo sinusale e gli episodi siano di durata inferiore o uguale a sette giorni, la Fibrillazione Atriale ricorrente viene designata come *parossistica*; nel caso in cui gli episodi abbiano durata superiore a sette giorni e/o il ripristino del ritmo sinusale abbia richiesto un trattamento di cardioversione farmacologica o elettrica, la Fibrillazione Atriale ricorrente viene designata come *persistente*. Nei casi in cui la cardioversione elettrica non sia stata tentata o sia stata inefficace e il paziente permanga in Fibrillazione Atriale, si parla di Fibrillazione Atriale *permanente*.

I farmaci a volte possono procurare un rimedio temporaneo, ma il trattamento più efficace e definitivo è la rimozione della zona di tessuto che causa il corto-circuito. Questa procedura viene detta ablazione cardiaca. L'ablazione è una procedura non-chirurgica e come molte procedure cardiache interventistiche moderne non richiede alcun taglio chirurgico nel torace. Invece l'ablazione è relativamente non-invasiva, in quanto richiede l'inserimento di elettrocateri (sottili e flessibili fili elettrici) nei vasi sanguigni, solitamente dai vasi dell'inguine o del collo, per poi raggiungere il cuore. Il percorso dal punto d'ingresso al cuore è possibile grazie alla fluoroscopia, una macchina a raggi X che fornisce immagini continue dei cateteri e dei tessuti.

Quando l'elettrocatero raggiunge il cuore, piccoli elettrodi alla punta del catetere registrano i segnali elettrici e vengono eseguite numerose misure. I risultati permettono di localizzare in modo preciso la zona di tessuto che causa il problema elettrico. Durante questo "mappaggio elettrico", il cardiologo specialista in aritmie (elettrofisiologo) seda il paziente con calmanti, per poter indurre la tachicardia e studiarne il meccanismo.

Una volta localizzata la zona che causa il problema elettrico, tramite la radiofrequenza, che cauterizza i tessuti, è possibile distruggere una piccola quantità di tessuto e quindi terminare l'anomalia. Al posto della radiofrequenza possono essere utilizzati la crioablazione, ovvero l'intenso raffreddamento con gas liquido, o gli ultrasuoni.

Sebbene, come già detto, durante Fibrillazione Atriale la risposta ventricolare abbia tutte le caratteristiche di un processo caotico e nonostante non sembri possedere un comportamento specifico, si possono intraprendere diversi studi e utilizzare molteplici tecniche per capire se in realtà questo processo non sia del tutto casuale.

L'obiettivo di questo lavoro è proprio quello di capire se la risposta ventricolare durante la Fibrillazione Atriale contenga in realtà informazioni importanti per comprendere meglio i meccanismi di tale disfunzione cardiaca. Un altro obiettivo, che sarà spiegato meglio in seguito, è anche quello di utilizzare i dati disponibili per prevedere, in tempi ragionevolmente brevi, il

sopraggiungere del fenomeno di Fibrillazione Atriale.

Prima di entrare nel dettaglio di questo lavoro è però necessario, per poter introdurre una descrizione approfondita dei dati a nostra disposizione, comprendere come funziona l'elettrocardiogramma e quali siano le quantità che si possono estrarre da un tracciato elettrocardiografico.

1.3 Elettrocardiogramma e intervalli RR

L'elettrocardiogramma (ECG) è la registrazione dell'attività elettrica del cuore durante il ciclo cardiaco. Il principio su cui si basa la misurazione dell'attività elettrica del cuore è prettamente fisiologico: l'insorgere degli impulsi nel miocardio porta alla generazione di differenze di potenziale (in seguito ddp) che variano nello spazio e nel tempo e che possono essere registrate tramite degli elettrodi. La registrazione della ddp da parte di elettrodi posti sulla superficie corporea avviene grazie alla conducibilità dei liquidi interstiziali del corpo umano. Il tracciato elettrocardiografico rappresenta il metodo più pratico e meno dispendioso per osservare se l'attività elettrica del cuore è normale oppure se sono presenti patologie di natura meccanica o bioelettrica. Il tracciato ECG fisiologico presenta un aspetto caratteristico che varia soltanto in presenza di problemi.

Il tracciato è caratterizzato da diversi tratti denominati onde, positive e negative, che si ripetono ad ogni ciclo cardiaco:

- *Onda P*: è la prima onda che si genera nel ciclo, e corrisponde alla depolarizzazione degli atri. È di piccole dimensioni, poiché la contrazione degli atri non è così potente. La sua durata varia tra i 60 e i 100 ms.
- *Complesso QRS*: si tratta di un insieme di tre onde che si susseguono l'una all'altra, e corrisponde alla depolarizzazione dei ventricoli. L'onda Q è negativa e di piccole dimensioni, e corrisponde alla depolarizzazione del setto interventricolare; la R è un picco molto alto positivo, e corrisponde alla depolarizzazione dell'apice del ventricolo sinistro; la S è un'onda negativa anch'essa di piccole dimensioni, e corrisponde alla depolarizzazione delle regioni basale e posteriore del ventricolo sinistro. La durata dell'intero complesso è compresa tra i 60 e 90 ms. In questo intervallo avviene anche la ripolarizzazione atriale che però non risulta visibile perché mascherata dalla depolarizzazione ventricolare.
- *Onda T*: rappresenta la ripolarizzazione dei ventricoli. Non sempre è identificabile, perché può anche essere di valore molto piccolo.

- *Onda U*: è un'onda che non sempre è possibile apprezzare in un tracciato, dovuta alla ripolarizzazione dei muscoli papillari.

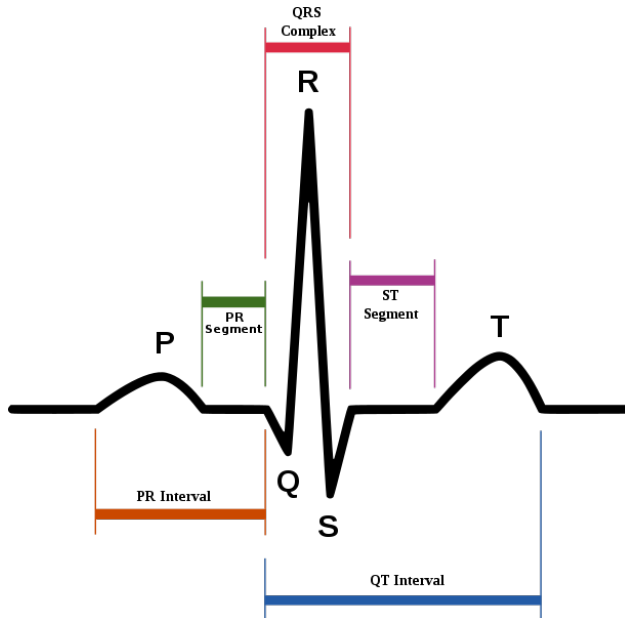


Figura 1.2: Onde tipiche del tracciato elettrocardiografico.

Il tracciato ECG viene compilato su carta millimetrata, che scorre nell'elettrocardiografo ad una velocità di 25 mm al secondo, quindi cinque lati di quadrati da 5 mm rappresentano 1 secondo. È quindi facile immaginare come si possa ricavare la frequenza cardiaca, valutando quanto tempo passa tra un ciclo e l'altro (si misura il tempo intercorso tra due complessi QRS). A solo titolo di esempio se abbiamo un complesso ogni 4 quadrati da 5 millimetri, significa che la nostra frequenza è attorno ai 75 battiti al minuto. Ovvero, visto che ogni quadrato da 5 mm corrisponde a 0.2 sec e, quindi, 4 quadrati a 0.8 sec, basterà dividere 60 sec (1 minuto) per 0.8 sec per ottenere la frequenza di 75 battiti al minuto, appunto.

A partire dall'elettrocardiogramma si possono estrapolare alcune quantità di interesse utili nello studio del battito cardiaco. Una di queste è l'intervallo RR, ovvero la distanza (in secondi) tra due picchi R successivi. Questa è la quantità che studieremo nel lavoro i cui obiettivi sono presentati nel paragrafo 1.5.

1.4 Il monitor Holter

Il monitor Holter, detto anche Holter ECG, è uno strumento portatile in grado di monitorare in maniera continua l'attività elettrica del cuore per 24 o più ore. Questo strumento, che prende il nome dal suo inventore, il Dr Norman J. Holter, registra l'attività cardiaca utilizzando lo stesso principio dell'elettrocardiogramma.

Sul torace del paziente che deve essere sottoposto a elettrocardiogramma dinamico, ossia a monitoraggio continuo dell'attività cardiaca, vengono posizionati alcuni elettrodi. Per la posizione si scelgono piani ossei, al fine di minimizzare gli artefatti da attività muscolare. Gli elettrodi variano per numero (per lo più fra tre ed otto) e per posizione, a seconda del modello utilizzato, e sono connessi ad una apparecchiatura, agganciata alla cintura, che riceve e registra i segnali.

Il paziente resta collegato all'apparecchio almeno 24 ore, durante le quali può continuare a svolgere le sue normali attività. Durante la giornata gli viene chiesto di annotare su un diario le varie attività svolte (dormire, mangiare, assumere farmaci, lavorare, correre) e la comparsa di eventuali sintomi, in modo che ciascun evento registrato possa essere messo in relazione, ove possibile, con una delle attività descritte dal paziente. I dispositivi attualmente in uso prevedono inoltre la presenza di un pulsante che il paziente può azionare in caso di insorgenza di dolore toracico o di altri sintomi rilevanti. In quel momento rimane così registrato un segnale, che costituisce un punto di repere durante la lettura del tracciato da parte del medico.

Per la registrazione dei segnali, i primi modelli usavano bobine o audiocassette standard (C120) che giravano a velocità ridotta, e la lettura dei tracciati era pertanto molto lenta; oggi la registrazione avviene su memorie digitali flash, i dati sono trasferiti su computer, ed uno specifico software effettua in automatico una prima analisi, conteggia i complessi QRS, indica la frequenza cardiaca media, massima e minima, ed evidenzia le aree che meritano una più attenta osservazione.

Questo permette di evidenziare occasionali aritmie, non identificabili durante il breve tempo di un elettrocardiogramma standard. Per pazienti con sintomi ancora più transitori l'Holter ECG può essere usato anche per più giorni.

Sono disponibili modelli da 24 ore fino a 7 giorni di registrazione, e con un numero di elettrodi del cavo paziente da 3 a 12.

1.5 Presentazione del dataset

I dati oggetto del presente lavoro sono stati forniti dal *Dipartimento di Bioingegneria del Politecnico di Milano* e consistono negli intervalli RR di dieci pazienti misurati a partire da due ore prima della comparsa del fenomeno di Fibrillazione Atriale fino alle due ore successive l'interruzione dell'aritmia.

I pazienti sono stati sottoposti ad un Holter di 7 giorni, registrato prima di sottoporre i pazienti a un intervento di ablazione. L'Holter utilizzato nella registrazione dei canali elettrocardiografici è un sistema "Del Mar Reynolds", con un canale di registrazione e frequenza di campionamento a 128 Hz.

Per ogni paziente è disponibile un vettore in cui ogni elemento rappresenta la durata in millisecondi dell'intervallo RR. In due vettori a parte sono poi indicati il tempo iniziale e quello finale del fenomeno di fibrillazione per ciascun paziente. Inoltre sono disponibili anche età e sesso dei pazienti.

Numero paziente	Sesso	Età	Durata FA (minuti)	Numero di intervalli RR relativi a FA
1	M	54	521	41085
2	M	67	613	43178
3	M	70	433	52937
4	M	57	2	266
5	F	52	56	4326
6	M	64	13	1066
7	M	64	442	52661
8	M	61	319	28229
9	M	67	11	1303
10	M	39	229	17989

Tabella 1.1: Durata dell'evento di FA e numero di intervalli RR.

Nella Tabella 1.1 sono apprezzabili la durata dell'evento di fibrillazione e la numerosità del campione di intervalli RR misurati durante FA a disposizione per ogni soggetto, nonché età e sesso dei pazienti.

L'obiettivo principale di questo lavoro è utilizzare questo dataset per trovare un metodo che ci permetta di poter segnalare l'inizio e la fine del fenomeno di fibrillazione in tempi relativamente brevi.

Per raggiungere tale obiettivo, nei prossimi capitoli studieremo diversi modelli statistici e cercheremo di applicare i concetti e gli strumenti descritti al dataset a nostra disposizione.

Capitolo 2

Analisi di serie temporali

Un modello che descrive la struttura di probabilità di una successione di osservazioni è chiamato processo stocastico. Prima di definire un processo stocastico, introduciamo la definizione di variabile aleatoria.

Definizione 1. *Una variabile aleatoria (v.a.) è una funzione misurabile a valori reali definita su uno spazio probabilistico, ossia:*

$$Z : (\Omega, F, P) \rightarrow (\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}), P_Z), \quad Z^{-1}(B) \in F \quad \forall B \in B(\mathfrak{R})$$

dove Ω è lo spazio degli eventi, F una sigma-algebra di Ω , P una misura di probabilità definita su (Ω, F) , $B(\mathfrak{R})$ è la sigma-algebra di Borel definita sull'insieme \mathfrak{R} e P_Z la probabilità indotta da Z su $(\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}))$.

A questo punto possiamo dare la definizione di processo stocastico.

Definizione 2. *Un processo stocastico è una successione di variabili aleatorie indicizzate da un parametro (che nell'analisi delle serie storiche è il tempo) $t \in T$, dove T è uno spazio parametrico discreto o continuo. Il processo stocastico si indica come $\{Z_t\}_{t \in T}$.*

Un serie temporale (o serie storica) può essere vista come la realizzazione campionaria di un processo stocastico, le cui osservazioni a tempi diversi sono dunque caratterizzate da una distribuzione congiunta.

In generale, se abbiamo N osservazioni (z_1, \dots, z_N) , queste sono generate da una variabile aleatoria N dimensionale (Z_1, \dots, Z_N) con funzione densità di probabilità $p(z_1, \dots, z_N)$.

2.1 Processi stocastici stazionari

Una classe molto speciale di processi stocastici è quella dei cosiddetti *processi stazionari*.

Un processo è strettamente stazionario se le sue proprietà statistiche non cambiano nel tempo, ovvero se la distribuzione congiunta associata ad m osservazioni ai tempi t_1, \dots, t_m è la stessa rispetto a quella associata ad altrettante osservazioni ai tempi $t_1 + k, \dots, t_m + k$.

In un processo stazionario media e varianza sono indipendenti dal tempo, quindi la funzione densità $p(z_t)$ può essere indicata semplicemente come $p(z)$. Allo stesso modo la media μ_t può essere indicata come μ così come i coefficienti di autocovarianza e autocorrelazione, che saranno definiti in seguito, γ_{tk} e ρ_{tk} , possono essere indicati γ_k e ρ_k .

In una serie temporale si può studiare la relazione tra elementi vicini della serie, a distanza fissata. Ad esempio, scelto un generico *lag* k , si può calcolare la autocovarianza della serie a distanza k definita da:

$$\gamma_k = Cov(z_t, z_{t+k}) = E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)].$$

Allo stesso modo si può calcolare il coefficiente di autocorrelazione:

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2]E[(z_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{\gamma_k}{\sigma_z^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

La matrice di varianza-covarianza Γ_n associata ad un processo stazionario per le osservazioni (z_1, \dots, z_n) sarà della forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \\ &= \sigma_z^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_z^2 \mathbf{P}_n \end{aligned}$$

dove \mathbf{P}_n è la matrice di autocorrelazione. Consideriamo ora una combinazione lineare delle variabili aleatorie $Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-n+1}$, $L_t = l_1 Z_t + l_2 Z_{t-1} + \dots + l_n Z_{t-n+1}$. Possiamo calcolarne la varianza:

$$Var[L_t] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n l_i l_j \gamma_{|i-j|},$$

che ovviamente è una quantità strettamente positiva. Questo implica che le matrici di autocorrelazione e autocovarianza siano definite positive e quindi abbiano tutti i minori principali > 0 .

Per $n = 3$ questo si traduce in 3 vincoli che devono essere soddisfatti:

$$\begin{aligned} -1 < \rho_1 < 1 \\ -1 < \rho_2 < 1 \\ -1 < \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 1. \end{aligned}$$

In generale la matrice di autocorrelazione di un processo stazionario deve soddisfare un numero di condizioni pari ad n , che può essere anche molto grande.

Il grafico di ρ_k (o γ_k) vs. k è chiamato funzione di autocorrelazione (o autocovarianza). Poiché $\rho_k = \rho_{-k}$ ci si limita a tracciare il grafico della funzione per k positivo. Per disegnare la funzione di autocorrelazione (o autocovarianza) è necessario stimare i coefficienti di correlazione. Uno stimatore per i coefficienti è:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0},$$

dove $c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$ è lo stimatore di γ_k .

Una proprietà dei processi stazionari è che combinazioni lineari di processi stazionari sono a loro volta stazionari.

2.2 Modelli lineari stazionari

Un processo stocastico può essere rappresentato come output di un filtro lineare, che in ingresso ha rumore bianco a_t (con $E[a_t] = 0$, $Var[a_t] = \sigma_a^2$ e $Cov(a_i, a_j) = 0 \ \forall i \neq j$), ovvero:

$$\tilde{z}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j},$$

dove $\tilde{z}_t = z_t - \mu$ è la deviazione del processo dalla sua media, se il processo è stazionario.

Questo modello comporta l'esistenza di un'altra possibile scrittura del processo z_t , quella basata sugli istanti passati del processo stesso, ovvero:

$$\tilde{z}_t = \pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{z}_{t-j} + a_t.$$

Vogliamo ora trovare una relazione esplicita tra i coefficienti ψ_j e i π_j .
Introduciamo l'operatore:

$$Bz_t = z_{t-1} \quad B^j z_t = z_{t-j},$$

il cui inverso $F = B^{-1}$ è tale che:

$$Fz_t = z_{t+1} \quad F^j z_t = z_{t+j}.$$

Quindi:

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta a_{t-1} = (1 - \theta B)a_t,$$

dove si è scelto un modello con $\psi_1 = -\theta$ e $\psi_j = 0$ per $j > 1$. Se ricaviamo a_t in funzione di \tilde{z}_t otteniamo:

$$(1 - \theta B)^{-1} \tilde{z}_t = a_t$$

$$(1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots) \tilde{z}_t = a_t$$

$$\tilde{z}_t = -\theta \tilde{z}_{t-1} - \theta^2 \tilde{z}_{t-2} - \dots + a_t,$$

ovvero ricaviamo $\pi_j = -\theta^j$. In generale possiamo scrivere:

$$\tilde{z}_t = \psi(B)a_t, \quad \psi(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j$$

o

$$\pi(B)\tilde{z}_t = a_t, \quad \pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j.$$

Da queste otteniamo:

$$\psi(B)\pi(B)\tilde{z}_t = \psi(B)a_t = \tilde{z}_t \Rightarrow \psi(B)\pi(B) = 1 \Rightarrow \psi(B) = \pi(B)^{-1}.$$

Questa relazione può essere usata per ricavare π_j conoscendo $\psi_j \forall j$.

2.2.1 Funzioni di autocovarianza e autocorrelazione di un processo lineare

Una quantità significativa nell'analisi di serie temporali è, come abbiamo visto, la funzione di autocovarianza (autocorrelazione). Si può dimostrare che la funzione di autocovarianza di un processo lineare è data da:

$$\gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}.$$

In particolare, ponendo $k = 0$, ricaviamo la varianza di un processo lineare:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2.$$

Quindi se un processo ha varianza finita la serie dei ψ_j^2 è convergente. Si può ottenere la funzione di autocovarianza anche in un modo più conveniente, utilizzando i coefficienti della funzione generatrice di autocovarianza, data dalla seguente espressione:

$$\gamma(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k B^k.$$

L'autocovarianza di lag k è quindi il coefficiente relativo a B^k nella funzione $\gamma(B)$. Per ricavare questa funzione è utile il seguente risultato:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B) \psi(B^{-1}). \quad (2.1)$$

Cerchiamo di chiarire questo fatto riconsiderando il precedente esempio. Pensiamo di avere

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta a_{t-1},$$

in questo caso $\psi(B) = 1 - \theta B$; sostituendo nella (2.1) otteniamo:

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= \sigma_a^2 (1 - \theta B)(1 - \theta B^{-1}) = \\ &= \sigma_a^2 (-\theta B^{-1} + (1 + \theta^2) - \theta B) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k B^k \end{aligned}$$

e quindi ricaviamo:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta^2) \sigma_a^2 \\ \gamma_1 &= -\theta \sigma_a^2 \\ \gamma_k &= 0 \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

2.2.2 Condizioni di stazionarietà e invertibilità per un processo lineare

Abbiamo già accennato al fatto che autocovarianze e autocorrelazioni devono soddisfare una serie di condizioni (relative alla positività dei minori principali) per assicurare la *stazionarietà*.

È possibile dimostrare che per un processo lineare queste condizioni possono essere incorporate in un'unica richiesta, che la serie $\psi(B)$ converga per $|B| \leq 1$.

Possiamo ora considerare un altro concetto, indipendente dalla stazionarietà e che coinvolge la serie dei $\pi(B)$, l'*invertibilità*. Per capirlo riprendiamo l'esempio precedente:

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta B)a_t.$$

Ricavando a_t in funzione dei \tilde{z} otteniamo:

$$a_t = (1 - \theta B)^{-1}\tilde{z}_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots + \theta^k B^k)(1 - \theta^{k+1} B^{k+1})^{-1}\tilde{z}_t$$

e i pesi π del modello sono $\pi_j = \theta^j$. Questo processo è stazionario per qualsiasi valore di θ , però se $|\theta| \geq 1$ il valore attuale di \tilde{z}_t dipende dai valori $\tilde{z}_{t-1}, \dots, \tilde{z}_{t-k}$, con pesi che aumentano con l'aumentare di k . Per evitare questa situazione basta richiedere che $|\theta| < 1$. Diremo dunque che la serie è invertibile quando il valore attuale \tilde{z}_t non dipende dai valori della serie ad istanti precedenti con coefficienti che divergono all'aumentare di k .

Perché sia soddisfatta questa condizione è necessario che la serie dei $\pi(B)$ converga per ogni B con $|B| \leq 1$.

Il modello appena introdotto, in cui il valore corrente del processo, z_t , dipende da infiniti termini, risulta poco utilizzabile nella pratica. Analizzeremo quindi nel seguito modelli più parsimoniosi, i cosiddetti processi autoregressivi e a media mobile.

Un processo autoregressivo di ordine p è un processo nel quale il valore attuale z_t dipende dai precedenti p valori di z e dallo *shock* attuale a_t . Si indica con il simbolo AR(p) e si può esprimere nella forma seguente:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t$$

$$\phi(B)\tilde{z}_t = a_t.$$

Un diverso tipo di processo è invece quello a media mobile. Un processo a media mobile di ordine q è caratterizzato dal fatto che il valore attuale z_t della serie dipende solo dal valore attuale dello *shock* a_t e dai q precedenti valori degli *shocks*. Si indica con il simbolo MA(q) e si può esprimere nella seguente forma:

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\tilde{z}_t = \theta(B)a_t.$$

Questi due modelli si possono anche combinare insieme, ottenendo il modello più generale ARMA(p,q), di cui AR(p) e MA(q) sono casi particolari:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\phi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)a_t$$

dove $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$.

2.3 Processi autoregressivi

Prendiamo in esame innanzitutto le condizioni che il set di parametri ϕ_1, \dots, ϕ_p di un processo AR(p) deve soddisfare affinché il processo sia stazionario. Partiamo dall'AR(1):

$$(1 - \phi_1 B)\tilde{z}_t = a_t$$

$$\tilde{z}_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t,$$

quindi in questo caso $\psi(B) = (1 - \phi_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j$. La condizione per la stazionarietà è la convergenza di $\psi(B)$ per $|B| \leq 1$. Nel nostro caso, quindi, è necessario che sia $|\phi_1| < 1$. Questo è equivalente a chiedere che la soluzione dell'equazione $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B = 0$ cada fuori dal cerchio unitario (perché la soluzione è $B = \phi^{-1}$).

Generalizzando possiamo dire che un generico processo AR(p) è stazionario se le soluzioni dell'equazione $\Phi(B) = 0$ cadono tutte fuori dal cerchio unitario. $\Phi(B) = 0$ viene chiamata equazione caratteristica del processo.

Per quanto riguarda l'invertibilità, essa non risulta problematica, infatti in questo caso $\pi(B) = \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ è una serie finita e quindi convergente.

2.3.1 Funzione di autocorrelazione e varianza

Proseguiamo nell'analisi dei processi autoregressivi ricavando la funzione di autocovarianza (e di autocorrelazione) per i processi AR(p). Consideriamo il generico processo:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t$$

e moltiplichiamo tutto per \tilde{z}_{t-k}

$$\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-k}a_t. \quad (2.2)$$

Ora prendiamo il valore atteso di entrambi i membri per ottenere un'equazione alle differenze soddisfatta da γ_k

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k > 0.$$

Se dividiamo tutto per γ_0 otteniamo:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k > 0, \quad (2.3)$$

ovvero

$$\phi(B)\rho_k = 0,$$

con l'operatore B che, in questo caso, agisce su k , fornendo quindi un'equazione alle differenze per ρ_k .

Per capire la natura della funzione di autocorrelazione (e autocovarianza) riscriviamo $\phi(B)$, che, essendo un polinomio di ordine p in B , può essere scritto nella forma $\phi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B)$. Una soluzione generale dell'equazione alle differenze (2.3) sarà quindi:

$$\rho_k = A_1 G_1^k + \dots + A_p G_p^k.$$

In base alla natura dei G_i (se sono reali o immaginari) ρ_k (e γ_k) avrà la forma di un'esponenziale decrescente (decrescente perché $|G_i| < 1$ per la stazionarietà) o di una sinusoidale. In generale la funzione di autocorrelazione (e autocovarianza) di un processo AR stazionario consiste in una mistura di esponenziali e sinusoidi.

Fissiamo ora $k = 0$ per ricavare la varianza. In questo caso, però, quando passiamo alla media nell'equazione (2.2), l'ultimo termine, $E[\tilde{z}_{t-k} a_t]$, non si annulla, ma vale σ_a^2 . Il risultato che otteniamo è quindi il seguente:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2$$

e se dividiamo tutto per γ_0 ricaviamo la formula per la varianza di un processo AR(p):

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \dots - \phi_p \rho_p}.$$

Consideriamo ora le classi di processi più usati nella pratica, l'AR(1) e l'AR(2).

2.3.2 Processo autoregressivo di ordine 1

Un processo autoregressivo di ordine 1 può essere scritto nella forma seguente:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \dots$$

Come abbiamo visto la condizione per la stazionarietà è $|\phi_1| < 1$. Inoltre l'equazione alle differenze della funzione di autocorrelazione diventa:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$$

e quindi, visto che $\rho_0 = 1$,

$$\rho_k = \phi_1^k.$$

Questo vuol dire che il comportamento della funzione e in particolare l'alternanza di segno, dipende dal valore positivo o negativo di ϕ_1 . La varianza invece assume la forma seguente:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1} = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}.$$

2.3.3 Processo autoregressivo di ordine 2

Passiamo ora ad analizzare il processo autoregressivo di ordine 2, che può essere scritto nel seguente modo:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + a_t.$$

Per la stazionarietà le soluzioni dell'equazione $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ devono essere fuori dal cerchio unitario. Questo implica:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1.$$

La funzione di autocorrelazione deve invece soddisfare la seguente equazione:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

che, con le condizioni iniziali $\rho_0 = 1$ e $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$ ha come soluzione:

$$\rho_k = \frac{G_1(1 - G_2^2)G_1^k - G_2(1 - G_1^2)G_2^k}{(G_1 - G_2)(1 + G_1 G_2)}$$

dove G_1 e G_2 sono le soluzioni dell'equazione $1 - \phi_1 G - \phi_2 G^2 = 0$.

Quando queste radici sono reali la soluzione è una mistura di esponenziali smorzate e ciò si verifica per $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ (con ρ_k che o rimane sempre dello stesso segno, o oscilla in modo dipendente dal segno della radice dominante). Se le radici sono complesse la funzione di autocorrelazione ha l'aspetto di una sinusoidale smorzata.

Le equazioni della funzione di autocovarianza,

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2,$$

ci permettono di ricavare le espressioni di ϕ_1 e ϕ_2 in funzione dei coefficienti di autocorrelazione

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}.$$

Queste relazioni saranno utili quando affronteremo il problema della stima dei parametri del modello.

Possiamo però ricavare anche le relazioni inverse e ottenere ρ_1 e ρ_2 in funzione dei ϕ :

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2}.$$

Tramite queste relazioni possiamo ricavare le limitazioni sui coefficienti di autocorrelazione affinché sia garantita la stazionarietà:

$$-1 < \rho_1 < 1$$

$$-1 < \rho_2 < 1$$

$$\rho_1^2 < \frac{1}{2}(1 + \rho_2).$$

Calcoliamo ora la varianza del processo:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2} = \left(\frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \right) \frac{\sigma_a^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}.$$

2.3.4 Funzione di autocorrelazione parziale

Affrontiamo ora un problema che nella pratica è molto importante. Quando analizziamo una serie temporale, spesso non sappiamo quale sia il processo autoregressivo dal quale è stata generata e in particolare non conosciamo l'ordine di tale processo; abbiamo dunque bisogno di strumenti per stimare l'ordine del processo.

La funzione di autocorrelazione parziale è uno strumento che ci permette di capire fino a che ordine ha senso considerare l'autocorrelazione diversa da zero, fornendo così un'indicazione dell'ordine del processo autoregressivo che ha generato la serie storica.

Sia ϕ_{kj} il j -esimo coefficiente in un processo AR(k). Sappiamo che ϕ_{kk} deve soddisfare le equazioni:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \dots + \phi_{k(k-1)}\rho_{j-k+1} + \phi_{kk}\rho_{j-k} \quad j = 1, \dots, k.$$

Ovvero possiamo scrivere in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \phi_{k3} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

cioè

$$P_k \phi_k = \rho_k.$$

Per $k = 1, 2, 3$ otteniamo i seguenti risultati:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

La quantità ϕ_{kk} , intesa come funzione di k , viene chiamata funzione di autocorrelazione parziale.

Per un processo autoregressivo di ordine p , la funzione di autocorrelazione

parziale è diversa da zero per tutti i $k \leq p$ e uguale a zero per $k > p$.
 Per avere un'indicazione dell'ordine del processo, è dunque sufficiente ricavare la funzione di autocorrelazione parziale, che andrà a zero a partire da $k = p + 1$.

2.4 Processi a media mobile

Vogliamo ora considerare i processi a media mobile, applicando quanto visto nel caso di processi autoregressivi e questo nuovo tipo di modello.
 Come prima cosa, vediamo quali sono le condizioni che i parametri $\theta_1, \dots, \theta_q$ devono soddisfare affinché un processo MA(q) sia invertibile:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \\ &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t = \Theta(B) a_t.\end{aligned}$$

Consideriamo inizialmente, per semplicità, un MA(1):

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta_1 B) a_t = \theta(B) a_t \\ &\Rightarrow a_t = (1 - \theta_1 B)^{-1} \tilde{z}_t \\ &\Rightarrow \pi(B) = (1 - \theta_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j B^j.\end{aligned}$$

Perché la serie $\pi(B)$ converga, quindi, deve essere $|\theta_1| < 1$, cioè la soluzione dell'equazione $\theta(B) = 0$ deve cadere fuori dal cerchio unitario.

In un processo MA(q) generico, l'invertibilità è garantita se le soluzioni dell'equazione $1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q = 0$ sono fuori dal cerchio unitario.

Per quanto riguarda la stazionarietà, invece, non ci sono problemi, in quanto la serie $\Psi(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ è finita e, quindi, convergente.

2.4.1 Funzione di autocorrelazione e varianza

Come già visto per i processi autoregressivi, occupiamoci ora di analizzare la forma della funzione di autocovarianza (e autocorrelazione) nel caso di processi a media mobile.

La funzione di autocovarianza di un processo MA(q) è data da:

$$\gamma_k = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q})],$$

quindi la varianza diventa:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$$

e le funzioni di autocovarianza e di autocorrelazione sono, rispettivamente:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q) & k = 1, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}.$$

Analizziamo ora più in dettaglio, come già fatto per i processi autoregressivi, i processi MA(1) e MA(2).

2.4.2 Processo a media mobile di ordine 1

Usando le formule già introdotte in precedenza la varianza assume la forma seguente:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2),$$

mentre la funzione di autocorrelazione è:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho_1 = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

$$\Rightarrow \theta_1^2 + \frac{\theta_1}{\rho_1} + 1 = 0.$$

Dal momento che il prodotto delle due radici deve fare 1, una soluzione rispetterà il criterio di invertibilità mentre l'altra no. Quindi, anche se all'apparenza abbiamo due opzioni possibili per la scelta di θ_1 , in realtà è una sola quella sensata.

Si può anche ricavare, con un po' di algebra, la forma della funzione di autocorrelazione parziale, che è la seguente:

$$\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}$$

$$\Rightarrow |\phi_{kk}| < \theta_1^k.$$

Notiamo quindi una certa dualità tra un MA(1) e un AR(1).

Nel MA(1) la funzione di autocorrelazione vale 0 per $k > 1$, mentre la funzione di autocorrelazione parziale va come un'esponenziale smorzata.

Nel caso di un AR(1), invece, succede esattamente l'opposto.

2.4.3 Processo a media mobile di ordine 2

Analizziamo ora a fondo il processo a media mobile di ordine due. La sua rappresentazione è la seguente:

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}.$$

Affinché il processo sia invertibile le soluzioni dell'equazione $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$ devono star fuori dal cerchio unitario e questo si verifica per:

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1.$$

La varianza di questo processo è:

$$\gamma_0 = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

e la funzione di autocorrelazione, sempre riprendendo le formule viste nel caso di processo MA generico, diventa:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0 \quad k > 2.$$

Quindi possiamo ricavare le restrizioni su ρ_1 e ρ_2 che garantiscono l'invertibilità. I due coefficienti di autocorrelazione devono essere compresi all'interno della regione di piano individuato dalle curve:

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\rho_2 - \rho_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\rho_1^2 = 4\rho_2(1 - 2\rho_2).$$

Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione parziale, invece, l'esatta espressione è piuttosto complicata, ma è dominata da una somma di due esponenziali se le radici dell'equazione caratteristica sono reali e da un'onda sinusoidale se le radici sono complesse, comportandosi come la funzione di autocorrelazione di un processo AR(2).

Anche in questo caso, quindi, si riscontra una dualità tra AR(2) e MA(2).

2.4.4 Dualità tra processi autoregressivi e processi a media mobile

Questa dualità ha le seguenti caratteristiche:

1. in un processo AR(p), a_t può essere espresso come somma pesata finita dei \tilde{z} , oppure \tilde{z}_t può essere rappresentata come una somma pesata infinita degli a_t .
Viceversa, in un processo MA(q), \tilde{z}_t può essere vista come somma finita degli a_t e a_t come somma infinita dei \tilde{z} .
2. un processo MA ha una funzione di autocorrelazione che vale zero da un certo punto in poi, ma, potendolo vedere come processo AR infinito, la sua funzione di autocorrelazione parziale ha estensione infinita ed è dominata da esponenziali negative o da sinusoidi.
Viceversa un processo AR ha una funzione di autocorrelazione parziale che vale zero da un certo punto in poi e funzione di autocorrelazione infinita dominata da esponenziali negative o sinusoidi.
3. un processo AR(p) generico è automaticamente invertibile, mentre, affinché la stazionarietà sia garantita, le soluzioni dell'equazione $\Phi(B) = 0$ devono cadere fuori dal cerchio unitario. Viceversa, in un processo MA(q), è la stazionarietà ad essere garantita, mentre la condizione che permette di avere invertibilità è che le soluzioni dell'equazione $\Theta(B) = 0$ cadano fuori dal cerchio unitario.

2.5 Processi autoregressivi e a media mobile

Abbiamo fino ad ora analizzato separatamente processi autoregressivi e processi a media mobile. Un modello, però, potrebbe includere sia la parte AR che la parte MA ed è questo il caso dei cosiddetti processi ARMA.

Un modello ARMA(p,q) è rappresentato dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \\ (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t \\ \phi(B) \tilde{z}_t &= \theta(B) a_t.\end{aligned}$$

Affinché un processo di questo tipo sia stazionario le radici dell'equazione $\phi(B) = 0$ devono stare fuori dal cerchio unitario, mentre perchè sia garantita l'invertibilità le radici dell'equazione $\theta(B) = 0$ devono cadere fuori dal cerchio unitario.

Per trovare la funzione di autocorrelazione utilizziamo la tecnica usata per i processi AR. Moltiplichiamo entrambi i membri per \tilde{z}_{t-k} e applichiamo il valore atteso. Otteniamo così la seguente relazione:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{za}(k) - \theta_1 \gamma_{za}(k-1) - \dots - \theta_q \gamma_{za}(k-q),$$

dove $\gamma_{za}(k) = E[\tilde{z}_{t-k} a_t]$ e ha la proprietà che è diversa da zero solo per $k \leq 0$. Quindi l'equazione soddisfatta dalla funzione di autocovarianza diventa:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k \geq q+1$$

e quindi

$$\begin{aligned} \rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k \geq q+1 \\ \phi(B) \rho_k &= 0 \quad k \geq q+1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Un processo ARMA(p,q) ha dunque q autocorrelazioni ρ_1, \dots, ρ_q i cui valori dipendono direttamente dai coefficienti θ_i e ϕ_i e tra questi si ottengono anche i p valori iniziali

$$\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p+1}$$

per risolvere l'equazione alle differenze (2.4).

Se $q-p < 0$ l'intera funzione di autocorrelazione consisterà in una mistura di esponenziali smorzate e/o onde sinusoidali smorzate.

Se $q-p \geq 0$ allora ci saranno $q-p$ ($\rho_1, \dots, \rho_{q-p}$) valori che non seguiranno questo comportamento.

Per ricavare la varianza fissiamo $k=0$ e otteniamo:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2 - \theta_1 \gamma_{za}(-1) - \dots - \theta_q \gamma_{za}(-q),$$

che deve essere risolta insieme alle altre p equazioni della funzione di autocovarianza per $k=1, \dots, p$ ottenendo così i valori $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$.

Per calcolare la funzione di autocorrelazione parziale riscriviamo così il processo:

$$a_t = \theta(B)^{-1} \phi(B) \tilde{z}_t,$$

dove $\theta(B)^{-1}$ è una serie infinita in B. Quindi la funzione di autocorrelazione parziale ha estensione infinita. In particolare, dopo un certo numero di termini, essa si comporta come quella di un processo a media mobile puro.

Analizziamo ora più in dettaglio un particolare processo ARMA.

2.5.1 Processo autoregressivo e a media mobile di ordine (1,1)

Vediamo ora di analizzare nel dettaglio questo particolare tipo di processo, un modello ARMA in cui sia la parte autoregressiva che quella a media mobile sono di ordine 1.

Il processo ARMA (1,1) ha la seguente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t - \phi_1 \tilde{z}_{t-1} &= a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ (1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t &= (1 - \theta_1 B) a_t \\ \phi(B) \tilde{z}_t &= \theta(B) a_t.\end{aligned}$$

Subito si possono ricavare le condizioni di stazionarietà ($-1 < \phi_1 < 1$) e invertibilità ($-1 < \theta_1 < 1$). Per quanto riguarda l'autocorrelazione, invece, utilizziamo la formula complessa appena vista:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 \gamma_{za}(-1) \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2 \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} \quad k \geq 2.\end{aligned}$$

Se moltiplichiamo l'equazione del processo per a_{t-1} e prendiamo il valore atteso possiamo trovare il valore di $\gamma_{za}(-1)$, più precisamente $\gamma_{za}(-1) = (\phi_1 - \theta_1) \sigma_a^2$. Quindi ricaviamo le espressioni dei γ :

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma_a^2 \frac{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1}{1 - \phi_1^2} \\ \gamma_1 &= \sigma_a^2 \frac{(1 - \theta_1 \phi_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} \quad k \geq 2\end{aligned}$$

e i valori di ρ_k si trovano di conseguenza. Quindi la funzione di autocovarianza (così come quella di autocorrelazione) decade esponenzialmente partendo dal valore iniziale γ_1 (ρ_1), che dipende da θ_1 e ϕ_1 . Potendo trovare i valori dei coefficienti di autocorrelazione, siamo in grado di ricavare anche limitazioni su di essi che garantiscano stazionarietà e invertibilità. Più precisamente:

$$\begin{aligned}|\rho_2| &< |\rho_1| \\ \rho_2 &> \rho_1(2\rho_1 + 1) \quad \rho_1 < 0 \\ \rho_2 &> \rho_1(2\rho_1 - 1) \quad \rho_1 > 0.\end{aligned}$$

La funzione di autocorrelazione parziale, invece, ha un valore iniziale $\phi_{11} = \rho_1$ e poi si comporta come quella di un processo MA(1).

2.6 Modelli lineari non stazionari

Il comportamento di molte serie storiche empiriche non è caratterizzato da un valor medio costante. Non possiamo quindi considerare il processo stazionario e, in casi del genere, le tecniche finora analizzate non risultano applicabili. Vengono dunque studiati nuovi modelli nei quali si suppone che opportune *differenze* del processo siano stazionarie. Consideriamo in questo paragrafo le proprietà di un importante classe di modelli nella quale la d -esima differenza è un processo ARMA stazionario. Questi modelli sono chiamati processi ARIMA (*Auto-Regressive Integrated Moving Average*).

Nei paragrafi precedenti abbiamo appreso che un processo ARMA è stazionario se le radici dell'equazione $\phi(B) = 0$ cadono fuori dal cerchio unitario, mentre presenta un comportamento non stazionario e divergente se le radici cadono dentro il cerchio unitario.

Nel caso in cui, invece, le radici si collochino esattamente sulla circonferenza, il modello risultante può essere utilizzato nell'analisi dei processi non stazionari.

Consideriamo il modello

$$\varphi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)a_t, \quad (2.5)$$

dove $\varphi(B)$ è un operatore non stazionario autoregressivo, tale che d delle sue radici siano unitarie, mentre le restanti cadano fuori dal cerchio unitario.

Possiamo quindi riscrivere il nostro modello nel modo seguente

$$\varphi(B)\tilde{z}_t = \phi(B)(1 - B)^d\tilde{z}_t = \theta(B)a_t,$$

dove $\phi(B)$ è un operatore stazionario autoregressivo. Dal momento che, per $d \geq 1$, $\nabla^d\tilde{z}_t = \nabla^d z_t$, possiamo scrivere il modello come

$$\phi(B)\nabla^d z_t = \theta(B)a_t. \quad (2.6)$$

In modo del tutto equivalente possiamo definire il processo con due equazioni,

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t$$

e

$$w_t = \nabla^d z_t.$$

Vediamo così che il modello corrisponde ad assumere che la d -esima differenza della serie possa essere rappresentata da un processo ARMA stazionario e invertibile. Questo processo viene chiamato *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA).

Se l'operatore $\phi(B)$ è di ordine p , $\theta(B)$ di ordine q e stiamo considerando la

d -esima differenza, il processo si indica con $\text{ARIMA}(p, d, q)$.

Vediamo ora perchè è ragionevole applicare questi modelli alle serie storiche a nostra disposizione. Innanzitutto è bene notare che i processi stazionari analizzati fino ad ora erano tali che il comportamento locale della serie fosse fortemente influenzato dal livello di \tilde{z}_t .

Per poter usare modelli secondo i quali il comportamento del processo sia indipendente dal suo livello, dobbiamo richiedere che l'operatore $\varphi(B)$ sia tale che

$$\varphi(B)(\tilde{z}_t + c) = \varphi(B)\tilde{z}_t,$$

quindi $\varphi(B)$ deve essere della forma

$$\varphi(B) = \phi_1(B)(1 - B) = \phi_1(B)\nabla,$$

ovvero il processo è della forma

$$\phi_1(B)w_t = \theta(B)a_t,$$

dove $w_t = \nabla\tilde{z}_t = \nabla z_t$.

Inoltre è auspicabile che le differenze w_t non divergano, ovvero dobbiamo chiedere che $\phi_1(B)$ sia un operatore stazionario, oppure che $\phi_1(B) = \phi_2(B)(1 - B)$, con $\phi_2(B)$ operatore stazionario. Alla fine arriviamo alla conclusione che l'operatore di sinistra della (2.5) debba essere della forma $\phi(B)\nabla^d$, con $\phi(B)$ operatore stazionario, ritrovando l'espressione della (2.6).

La serie in Figura 2.1 sembra essere omogenea, eccetto che nel livello, cioè una parte di essa sembra subire una traslazione verticale. Possiamo rappresentare tale comportamento ritenendo che le differenze siano un processo stazionario a media nulla, ma permettendo al livello di essere libero. Ovvero utilizziamo il modello

$$\phi(B)\nabla z_t = \theta(B)a_t.$$

La Figura 2.2 mostra invece un secondo tipo di non stazionarietà. La serie non sembra avere né un livello costante né una pendenza fissa, ma il comportamento è omogeneo se teniamo conto delle differenze in queste caratteristiche. Possiamo quindi rappresentare tale comportamento con il modello

$$\phi(B)\nabla^2 z_t = \theta(B)a_t.$$

Vedremo meglio nel seguito quali sono le tecniche da utilizzare per individuare il valore di d più adatto.

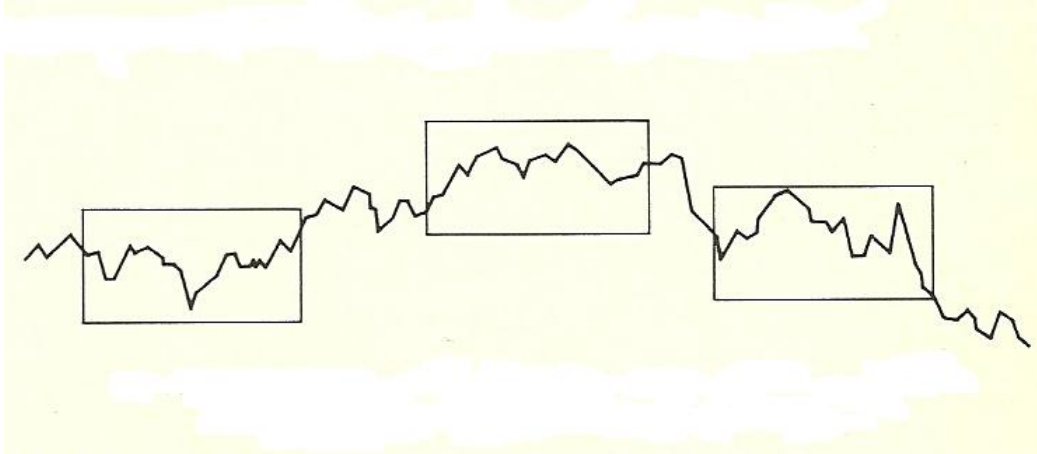


Figura 2.1: Esempio di serie stazionaria nelle differenze di ordine uno.

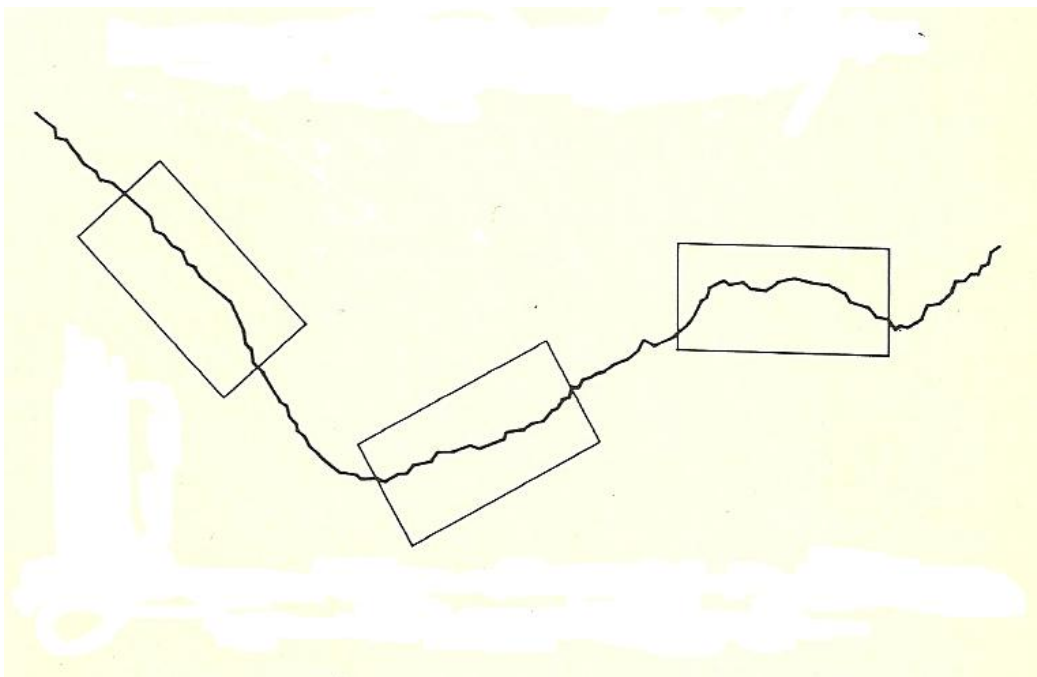


Figura 2.2: Esempio di serie stazionaria nelle differenze di ordine due.

2.6.1 Forma generale dei processi ARIMA

Nel caso in cui si voglia, o risulti necessario, rappresentare un trend deterministico, si considera un'estensione del modello (2.6), aggiungendo un termine costante θ_0 . Otteniamo così un modello più generale per descrivere le serie temporali in questione:

$$\varphi(B)z_t = \phi(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t, \quad (2.7)$$

dove

$$\begin{aligned} \phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \\ \theta(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \end{aligned}$$

con le seguenti definizioni:

- $\phi(B)$ è chiamato operatore autoregressivo; è assunto stazionario, ovvero le radici dell'equazione $\phi(B) = 0$ cadono fuori dal cerchio unitario.
- $\varphi(B) = \phi(B)\nabla^d$ è chiamato operatore autoregressivo generalizzato; è un operatore non stazionario con d radici unitarie e le restanti fuori dal cerchio unitario.
- $\theta(B)$ è chiamato operatore a media mobile; è assunto invertibile, ovvero le radici dell'equazione $\theta(B) = 0$ cadono fuori dal cerchio unitario.

Abbiamo visto che quando il coefficiente θ_0 non è incluso, il modello è in grado di rappresentare serie che abbiano andamenti stocastici, con cambiamenti casuali nel livello e nella pendenza della serie.

A volte, però, si rende necessario includere funzioni deterministiche che influenzino il valore della serie. Per $d = 1$, ad esempio, si possono rappresentare possibili andamenti lineari deterministici nella media ponendo $\theta_0 \neq 0$. In questa situazione, infatti:

$$E[w_t] = E[\nabla^d z_t] = \mu_w = \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}.$$

Avremo quindi una media delle differenze diversa da zero. Definendo $\tilde{w}_t = w_t - \mu_t$ possiamo scrivere

$$\phi(B)\tilde{w}_t = \theta(B)a_t.$$

Includere o meno il termine θ_0 nel modello dipende dalla situazione e non sempre ha senso la presenza di un andamento deterministico.

Concentriamoci ora sui processi ARIMA con θ_0 nullo e seguendo lo schema

di trattazione già utilizzato per i processi stazionari, introduciamo alcuni modelli particolari che, in seguito, analizzeremo più nel dettaglio. Il processo ARIMA (0,1,1), ad esempio, è definito come:

$$\nabla z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta_1 B) a_t.$$

Il processo ARIMA (0,2,2), invece, è della forma:

$$\nabla^2 z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t.$$

Infine, il processo ARIMA (1,1,1), diventa:

$$\nabla z_t - \phi_1 \nabla z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 B) \nabla z_t = (1 - \theta_1 B) a_t.$$

Difficilmente nella rappresentazione di processi ARIMA si utilizzano valori di p, q e d maggiori di due. In alcune situazioni si può sostituire z_t con z_t^λ , dove quest'ultima è una trasformazione potenza di z_t .

2.6.2 Tre forme esplicite per i modelli ARIMA

Consideriamo ora tre diverse forme esplicite per il modello generale (2.7). Ciascuna di esse mette in evidenza alcuni aspetti particolari del modello. Il valore corrente z_t può essere espresso:

1. in termini dei precedenti valori di z e dell'attuale e precedenti valori di a , tramite l'uso diretto delle equazioni alle differenze.
2. solamente in termini dei *random shock* a_{t-j} .
3. solamente in termini dei precedenti valori z_{t-j} e del valore corrente di a_t .

Prima forma: equazioni alle differenze

L'uso diretto delle equazioni alle differenze ci permette di esprimere z_t in funzione dei precedenti valori di z e dell'attuale e precedenti valori di a . Quindi:

$$\varphi(B) = \phi(B)(1 - B)^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}.$$

Il modello generale (2.7), con θ_0 uguale a zero, può essere scritto:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \dots + \varphi_{p+d} z_{t-p-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_q a_{t-q}.$$

Consideriamo per esempio un semplice modello ARIMA (1,1,1):

$$\begin{aligned}(1 - \phi B)(1 - B)z_t &= (1 - \theta B)a_t \\ [1 - (1 + \phi)B + \phi B^2]z_t &= (1 - \theta B)a_t \\ z_t &= (1 + \phi)z_{t-1} - \phi z_{t-2} + a_t - \theta a_{t-1},\end{aligned}$$

nel quale, per comodità, abbiamo ommesso il pedice 1 dei coefficienti ϕ e θ . Per molti obiettivi, tra i quali la predizione, questa è la forma più conveniente da utilizzare.

Seconda forma: *random shock*

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti, come un modello lineare possa essere espresso come output z_t di un filtro lineare

$$\begin{aligned}z_t &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \psi(B)a_t \\ z_t &= \psi(B)a_t.\end{aligned}\tag{2.8}$$

A volte può essere utile esprimere un modello ARIMA in questa forma, in quanto i coefficienti ψ servono per calcolare la varianza della predizione. Vediamo come si ricavano i pesi ψ per un processo ARIMA partendo dalla prima forma vista, quella con le equazioni alle differenze. Moltiplichiamo entrambi i membri dell'espressione (2.8) per l'operatore autoregressivo generalizzato $\varphi(B)$:

$$\varphi(B)z_t = \varphi(B)\psi(B)a_t$$

e dal momento che

$$\varphi(B)z_t = \theta(B)a_t$$

ricaviamo

$$\varphi(B)\psi(B) = \theta(B),$$

ovvero i coefficienti ψ sono quelli che risolvono l'equazione

$$\begin{aligned}(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d})(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) &= \\ &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Notiamo che per j più grande del massimo tra $p + d - 1$ e q , i coefficienti ψ soddisfano l'equazione alle differenze definita dall'operatore autoregressivo generalizzato, ovvero:

$$\varphi B \psi_j = \phi(B)(1 - B)^d \psi_j = 0,$$

dove B ora opera sull'indice j . Quindi, per j sufficientemente grande, i pesi ψ rappresentano una mistura di polinomi, esponenziali e sinusoidi smorzate. Analizziamo per esempio il caso di modello ARIMA (1,1,1), per il quale

$$\begin{aligned}\psi(B) &= (1 - \phi B)(1 - B) = \\ &= 1 - (1 + \phi)B + \phi B^2\end{aligned}$$

e

$$\theta(B) = 1 - \theta B.$$

Sostituendo nella (2.9) otteniamo

$$(1 - (1 + \phi)B + \phi B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1 - \theta B$$

e quindi

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_1 &= A_0 + A_1 \phi \\ \psi_2 &= A_0 + A_1 \phi^2 \\ &\vdots \\ \psi_j &= A_0 + A_1 \phi^j,\end{aligned}$$

con

$$A_0 = \frac{1 - \theta}{1 - \phi} \quad A_1 = \frac{\theta - \phi}{1 - \phi}$$

e quindi $\psi_0 = A_0 + A_1 = 1$. Possiamo dunque scrivere:

$$z_t = \sum_{i=1}^{\infty} (A_0 + A_1 \phi^i) a_{t-i}. \quad (2.10)$$

Dal momento che $|\phi| < 1$ i pesi ψ_j tendono ad A_0 , cioè gli *shocks* a_{t-j} ricevono un peso costante A_0 .

Consideriamo ora il modello in una forma leggermente differente dalla (2.8). Pensiamo di voler esprimere il valore corrente z_t in funzione dei $t - k$ *shocks* a_t, a_{t-1}, a_{k+1} . k è quindi considerato una sorta di tempo di origine.

Il modello generale

$$\varphi(B)z_t = \theta(B)a_t$$

è un'equazione alle differenze con soluzione

$$z_t = C_k(t - k) + I_k(t - k), \quad (2.11)$$

dove $C_k(t - k)$ è la soluzione dell'equazione omogenea

$$\varphi(B)C_k(t - k) = 0,$$

che in generale consiste in una combinazione lineare di determinate funzioni del tempo, quali, per esempio, potenze, esponenziali, sinusoidi. $I_k(t - k)$ è invece la soluzione particolare dell'equazione

$$\varphi(B)I_k(t - k) = \theta(B)a_t.$$

Si può dimostrare che, per $t - k > q$, questa equazione è soddisfatta da:

$$I_k(s - k) = \begin{cases} 0 & s \leq k \\ \sum_{j=k+1}^s \psi_{s-j} a_j & s > k \end{cases}.$$

Questo discorso implica che l'osservazione z_t può essere divisa in due parti, additive. Una, $C_k(t - k)$, è la componente di z_t già determinata al tempo k e rappresenta il corso che il processo avrebbe preso se, dal tempo k in poi, fossero stati eliminati gli *shocks* a_t .

La seconda, $I_k(t - k)$, non prevedibile al tempo k , contiene l'effetto degli *shocks* entrati nel sistema dopo il tempo k .

Per capire meglio quanto detto fino ad ora, analizziamo di nuovo il caso di processo ARIMA (1,1,1):

$$(1 - \phi B)(1 - B)z_t = (1 - \theta B)a_t.$$

La soluzione dell'omogenea $C_k(t - k)$ dovrà quindi risolvere l'equazione alle differenze $(1 - \phi B)(1 - B)C_k(t - k) = 0$ e come soluzione si ottiene quindi:

$$C_k(t - k) = b_0^{(k)} + b_1^{(k)}\phi^{t-k},$$

dove $b_0^{(k)}$ e $b_1^{(k)}$ sono coefficienti che dipendono dalla storia passata del processo e dall'origine k . La soluzione particolare $I_k(t - k)$, invece, sostituendo i valori dei pesi ψ , si può scrivere come:

$$I_k(t - k) = \sum_{j=k+1}^t (A_0 + A_1\phi^{t-j})a_j.$$

Possiamo quindi riscrivere il modello (2.10) nella forma equivalente

$$z_t = b_0^{(k)} + b_1^{(k)}\phi^{t-k} + \sum_{j=k+1}^t (A_0 + A_1\phi^j)a_{t-j}. \quad (2.12)$$

Cerchiamo ora di capire in che modo sono collegate queste due visioni del modello.

Possiamo vedere la forma generale del modello sotto una nuova ottica, considerando il tempo d'origine k uguale a $-\infty$. In questa situazione possiamo, senza perdita di generalità, considerare nulla la funzione $C_{-\infty}(t)$, ottenendo quindi:

$$z_t = I_{-\infty}(t) = \sum_{j=-\infty}^t \psi_{t-j} a_j = \psi(B) a_t. \quad (2.13)$$

Inoltre la soluzione dell'omogenea $C_k(t-k)$ può essere espressa in funzione dei coefficienti ψ . Confrontando la (2.11) e la (2.13), infatti, si ottiene la relazione

$$C_k(t-k) = I_{-\infty}(t) - I_k(t-k) = \sum_{j=-\infty}^k \psi_{t-j} a_j.$$

Analizziamo il solito esempio di modello ARIMA (1,1,1) per capire meglio quanto detto. Possiamo scrivere z_t come somma pesata infinita degli a_j

$$z_t = \sum_{-\infty}^t (A_0 + A_1 \phi^{t-k}) a_j,$$

oppure in termini di somma finita

$$z_t = C_k(t-k) + \sum_{k+1}^t (A_0 + A_1 \phi^{t-k}) a_j,$$

dove la funzione complementare $C_k(t-k)$ è la somma troncata

$$C_k(t-k) = \sum_{-\infty}^k (A_0 + A_1 \phi^{t-k}) a_j.$$

Abbiamo anche visto, però, che a soluzione dell'omogenea può essere scritta come

$$C_k(t-k) = b_0^{(k)} + b_1^{(k)} \phi^{t-k}.$$

Ricaviamo quindi i seguenti valori per i coefficienti b_0 e b_1 :

$$b_0^{(k)} = A_0 \sum_{j=-\infty}^k a_j = \frac{1-\theta}{1-\phi} \sum_{j=-\infty}^k a_j$$

$$b_1^{(k)} = A_1 \sum_{j=-\infty}^k \phi^{k-j} a_j = \frac{\theta-\phi}{1-\phi} \sum_{j=-\infty}^k \phi^{k-j} a_j.$$

Terza forma: forma inversa

Vediamo come si può esprimere z_t in funzione degli z precedenti e del valore corrente a_t . Possiamo scrivere

$$\psi^{-1}(B)z_t = a_t,$$

oppure

$$\pi(B)z_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) z_t = a_t$$
$$z_t = \pi_1 z_{t-1} + \pi_2 z_{t-2} + \dots + a_t.$$

Vediamo come ricavare i coefficienti π nel caso di modello generale ARIMA:

$$\varphi(B)z_t = \theta(B)a_t$$
$$\varphi(B)z_t = \theta(B)\pi(B)z_t$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi(B) = \theta(B)\pi(B),$$

ovvero

$$(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots). \quad (2.14)$$

Notiamo che per j più grande del massimo tra $p + d$ e q , i coefficienti π soddisfano l'equazione alle differenze definita dall'operatore a media mobile, ovvero:

$$\theta(B)\pi_j = 0.$$

Quindi, per j sufficientemente largo, i coefficienti π si comportano come la funzione di autocorrelazione di un processo autoregressivo, ovvero sono una mistura di esponenziali e sinusoidi smorzate.

Un altro fatto interessante è che, se $d \geq 1$, allora i pesi π sommano a 1. Infatti $\varphi(B) = \phi(B)(1 - B)^d$ vale zero per $B = 1$. Le radici di $\theta(B) = 0$ cadono fuori dal cerchio unitario, quindi $\theta(1) \neq 0$. Questo implica che $\pi(1) = 0$, cioè

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1.$$

Quindi, quando $d \geq 1$, il processo si può scrivere come $z_t = \bar{z}_{t-1}(\pi) + a_t$, dove

$$\bar{z}_{t-1}(\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j}$$

è la media pesata dei precedenti valori del processo.

Questo ci dice che, sebbene teoricamente z_t dipenda da tutta la storia passata, in realtà solo i valori più recenti della serie storica rivestono importanza nella predizione di z_t .

2.7 Particolari modelli ARIMA

Una classe particolare dei modelli appena visti sono i cosiddetti processi IMA (Integrated Moving Average), ovvero dei processi ARIMA (0,d,q), che possono essere espressi nella forma seguente:

$$\nabla^d z_t = \theta(B)a_t.$$

2.7.1 Processo IMA di ordine (0,1,1)

Cominciamo analizzando il modello in cui consideriamo le differenze di ordine 1 un processo a media mobile di ordine 1:

$$\nabla z_t = (1 - \theta B)a_t \quad -1 < \theta < 1.$$

Vediamo ora come è possibile rappresentarlo nelle tre forme viste precedentemente. Secondo lo schema della prima forma, cioè quella in cui il valore attuale z_t dipende dai valori z precedenti e dagli *shocks* a , questo particolare modello assume la forma seguente:

$$z_t = z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}.$$

In alternativa possiamo utilizzare la seconda forma ed esprimere z_t solo in funzione degli shocks a . Prima di fare ciò è utile esprimere l'operatore $\theta(B)$ in termini di ∇ , piuttosto che di B . Scriveremo quindi

$$1 - \theta B = (1 - \theta)B + (1 - B) = (1 - \theta)B + \nabla = \lambda B + \nabla,$$

dove $\lambda = 1 - \theta$, per le condizioni di stazionarietà, sarà compreso tra 0 e 2 (estremi esclusi). Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned} \nabla z_t &= \lambda a_{t-1} + \nabla a_t \\ \Downarrow \\ z_t &= \lambda S a_{t-1} + a_t, \end{aligned} \tag{2.15}$$

per cui, utilizzando la forma $z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$ si ricavano i valori dei coefficienti, $\psi_0 = 1$, $\psi_j = \lambda$ per $j \geq 1$.

Se volessimo utilizzare il modello troncato (quello in cui vengono considerati gli *shocks* a solo a partire da un tempo k fissato), dovremmo scrivere

$$z_t = b_0^{(k)} + \lambda \sum_{j=k+1}^{t-1} a_j + a_t, \tag{2.16}$$

dove

$$C_k(t-k) = b_0^{(k)} = \lambda \sum_{j=-\infty}^k a_j.$$

Quindi, se l'origine dovesse essere spostata da $k-1$ a k , b_0 andrebbe aggiornato nella maniera seguente:

$$b_0^{(k)} = b_0^{(k-1)} + \lambda a_k.$$

Consideriamo infine il modello nella terza forma che abbiamo analizzato, $\pi(B)z_t = a_t$, ovvero

$$z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j} + a_t = \bar{z}_{t-1}(\pi) + a_t.$$

I pesi π sono dati in questo caso da:

$$(1 - \theta B)\pi(B) = 1 - B$$

↓

$$\begin{aligned} \pi(B) &= \frac{1 - B}{1 - \theta B} = \frac{1 - \theta B - (1 - \theta)B}{1 - \theta B} = \\ &= 1 - (1 - \theta)(B + \theta B^2 + \theta^2 B^3 + \dots), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\pi_j = (1 - \theta)\theta^{j-1} = \lambda(1 - \lambda)^{j-1}.$$

Il processo può quindi essere scritto come

$$z_t = \bar{z}_{t-1}(\lambda) + a_t, \tag{2.17}$$

dove la media pesata dei valori precedenti $\bar{z}_{t-1}(\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda)^{j-1} z_{t-j}$ è, in questo caso, un *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA).

Confrontando la (2.15) e la (2.17) è evidente che

$$\bar{z}_{t-1}(\lambda) = \lambda S a_{t-1}.$$

In particolare, per questo processo, risulta essere che la funzione complementare $C_k(t-k) = b_0^{(k)}$ è uguale a $\bar{z}_k(\lambda)$, cioè una media pesata esponenzialmente dei valori fino all'origine k . La (2.16) può quindi essere scritta

$$z_t = \bar{z}_k(\lambda) + \lambda \sum_{j=k+1}^{t-1} a_j + a_t.$$

Avevamo detto che la funzione complementare $C_k(t-k)$ ci dice cosa sappiamo del futuro valore del processo al tempo t , basandoci sulle conoscenze del passato se ci troviamo nel tempo d'origine k . Per i processi IMA (0,1,1), quindi, la conoscenza di questa funzione ci dice il livello del processo. Al tempo k la nostra conoscenza riguardo al comportamento futuro del processo è che esso evolverà seguendo la camminata aleatoria rappresentata da $\lambda \sum_{j=k+1}^{t-1} a_j + a_t$, che è un processo a media nulla.

2.7.2 Processo IMA di ordine (0,2,2)

Analizziamo ora un secondo modello, quello in cui consideriamo le differenze di ordine 2 come un processo a media mobile di ordine 2:

$$\nabla^2 z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t.$$

Diamo delle limitazioni ai coefficienti θ , in modo di trovarci nella regione di invertibilità, ovvero $-1 < \theta_2 < 1$, $\theta_2 + \theta_1 < 1$ e $\theta_2 - \theta_1 < 1$.

Analizziamo innanzi tutto la prima forma vista per i processi ARIMA, quella in cui z_t è espresso in funzione sia dei valori precedenti z che degli a :

$$z_t = 2z_{t-1} - z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}.$$

Vediamo invece come poter esprimere z_t solo in funzione degli *shocks* a . Facciamo uso dello stesso meccanismo utilizzato precedentemente

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = (\lambda_0 \nabla + \lambda_1) B + \nabla^2,$$

dove

$$\lambda_0 = 1 + \theta_2$$

$$\lambda_1 = 1 - \theta_1 - \theta_2.$$

Il modello può quindi essere espresso come

$$\nabla^2 z_t = (\lambda_0 \nabla + \lambda_1) a_{t-1} + \nabla^2 a_t$$

↓

$$z_t = \lambda_0 S a_{t-1} + \lambda_1 S^2 a_{t-1} + a_t,$$

quindi per questo processo i pesi ψ risultano essere

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = (\lambda_0 + \lambda_1), \dots, \psi_j = (\lambda_0 + j\lambda_1), \dots$$

Si può notare come, imponendo $\lambda_1 = 0$, si ottiene

$$\nabla z_t = [1 - (1 - \lambda_0) B] a_t,$$

ovvero un processo IMA (0,1,1) con $\theta = 1 - \lambda_0$.

La forma troncata del modello risulta in questo caso essere:

$$z_t = C_k(t - k) + \lambda_0 \sum_{j=k+1}^{t-1} a_j + \lambda_1 \sum_{i=k+1}^{t-1} \sum_{j=k+1}^i a_j + a_t,$$

dove la funzione complementare è $C_k(t - k) = b_0^{(k)} + b_1^{(k)}(t - k)$, che è un polinomio di grado 1 in $(t - k)$, i cui coefficienti dipendono dall'origine k . Si può dimostrare che $C_k(t - k)$ può essere espressa in funzione degli a secondo la formula seguente

$$C_k(t - k) = [(\lambda_0 - \lambda_1)Sa_k + \lambda_1 S^2 a_k] + (\lambda_1 Sa_k)(t - k),$$

così che

$$\begin{aligned} b_0^{(k)} &= (\lambda_0 - \lambda_1)Sa_k + \lambda_1 S^2 a_k \\ b_1^{(k)} &= \lambda_1 Sa_k. \end{aligned}$$

Considerando le differenze $b_{0/1}^{(k)} - b_{0/1}^{(k-1)}$ ricaviamo come aggiornare i parametri nel caso l'origine fosse spostata da $k - 1$ a k :

$$\begin{aligned} b_0^{(k)} &= b_0^{(k-1)} + b_1^{(k-1)} + \lambda_0 a_k \\ b_1^{(k)} &= b_1^{(k-1)} + \lambda_1 a_k. \end{aligned}$$

Si vede come ciò che ci aspettiamo noi al tempo k è che il processo evolva seguendo una retta di pendenza $b_1^{(k)}$ e intercetta $b_0^{(k)}$. Nella pratica, in realtà, ci sarà il contributo del rumore che devierà il processo dalla traiettoria ideale.

Vediamo ora questo modello nella sua ultima forma

$$z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j} + a_t = \bar{z}_{t-1}(\pi) + a_t.$$

L'equazione (2.14) diventa in questo caso

$$1 - 2B + B^2 = (1 - \theta_1 B - \theta_1 B^2)(-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots).$$

Possiamo così ricavare i valori dei coefficienti π nel caso di processo IMA (0,2,2)

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2 - \theta_1 = \lambda_0 + \lambda_1 \\ \pi_2 &= \theta_1(2 - \theta_1) - (1 + \theta_2) = \lambda_0 + 2\lambda_1 - (\lambda_0 + \lambda_1)^2 \\ (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\pi_j &= 0 \quad j \geq 3. \end{aligned}$$

Quindi se le radici dell'equazione $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$ sono reali, i π andranno come due esponenziali smorzate, se invece le radici sono complesse, il loro andamento sarà quello di sinusoidi smorzate.

2.7.3 Generico processo IMA (0,d,q)

Vediamo ora di analizzare il generico processo IMA, ovvero un processo nel quale non specifichiamo l'ordine delle differenze e l'ordine della parte a media mobile, ma non consideriamo la parte autoregressiva:

$$\nabla^d z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta(B) a_t.$$

Possiamo esprimere z_t nella prima delle forme viste, quella in cui il valore corrente è in funzione dei valori passati e degli *shocks*:

$$z_t = dz_{t-1} - \frac{1}{2}d(d-1)z_{t-2} + \dots + (-1)^{d+1}z_{t-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}.$$

Se volessimo utilizzare la seconda forma, invece, z_t sarebbe in funzione dei soli *shocks a* secondo la seguente formula:

$$z_t = (\lambda_{d-q} \nabla^{q-d-1} + \dots + \lambda_0 S + \dots + \lambda_{d-1} S^d) a_{t-1} + a_t.$$

Se volessimo scrivere la soluzione in termini di somme finite di *shocks a* (considerando sempre un tempo d'origine k), otteniamo per la funzione dell'equazione alle differenze omogenea

$$\nabla^d C_k(t-k) = 0$$

la seguente soluzione, che è un polinomio in $(t-k)$:

$$C_k(t-k) = b_0^{(k)} + b_1^{(k)}(t-k) + b_2^{(k)}(t-k)^2 + \dots + b_{k-1}^{(k)}(t-k)^{k-1}.$$

Come nei casi specifici visti in precedenza, i coefficienti b_j^k possono essere espressi in funzione delle somme infinite fino all'origine k $Sa_k, S^2a_k, \dots, S^d a_k$, trovando anche la formula che ci dice come aggiornare i parametri se l'origine fosse spostata dal tempo $k-1$ al tempo k .

Per concludere vediamo come si presenta il modello nella terza e ultima forma analizzata:

$$\pi(B)z_t = a_t,$$

o, alternativamente

$$z_t = \bar{z}_{t-1}(\pi) + a_t,$$

dove i pesi π risolvono l'equazione

$$(1-B)^d = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots).$$

Ritroviamo, in sostanza, quanto visto nei due modelli specifici analizzati, ma nel caso generale valido per qualsiasi processo IMA.

2.7.4 Schema riassuntivo

Riassumiamo brevemente quanto discusso fino ad ora, in modo da rendere bene evidenti i concetti principali che saranno utili nell'identificazione e il controllo del modello.

Ricordiamo la forma generale del modello nel caso di processi stazionari:

$$\phi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)a_t,$$

dove $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$.

Le principali caratteristiche dei modelli relativi a processi stazionari si possono apprezzare nella Tabella 2.1.

	AR	MA	ARMA
$f(\tilde{z}_t) = a_t$	$\phi(B)\tilde{z}_t = a_t$	$\theta(B)^{-1}\tilde{z}_t = a_t$	$\theta(B)^{-1}\phi(B)\tilde{z}_t = a_t$
$\tilde{z}_t = f(a_t)$	$\tilde{z}_t = \phi(B)^{-1}a_t$	$\tilde{z}_t = \theta(B)a_t$	$\tilde{z}_t = \phi(B)^{-1}\theta(B)a_t$
Pesi π	Serie finita	Serie infinita	Serie infinita
Pesi ψ	Serie infinita	Serie finita	Serie infinita
Funzione di autocorrelazione	infinita (esp. e/o sinusoidi smorzate)	finita	infinita (esp. e/o sinusoidi dopo i primi $q - p$ lags)
Funzione di autocorrelazione parziale	finita	infinita (dominata da esp. smorzate e/o sinusoidi)	infinita (dominata da esp. smorzate e/o sinusoidi dopo i primi $p - q$ lags)

Tabella 2.1: Schema riassuntivo dei processi stazionari analizzati

Per quanto riguarda i processi non stazionari, invece, abbiamo visto come risulta conveniente, in molte occasioni, applicare i modelli analizzati nella tabella alle differenze di vario ordine del processo. Si ottengono i cosiddetti modelli ARIMA (p,d,q) , dove d è l'ordine della differenza presa in considerazione, p l'ordine della parte autoregressiva e q l'ordine della parte a media mobile.

2.8 Identificazione del modello

I metodi di identificazione sono procedure da sviluppare partendo dai dati per capire quale sia il modello che meglio li rappresenta.

In particolare, riguardo a quanto abbiamo detto fino ad ora, si tratta di identificare i valori di p , d e q (caratteristici di un modello ARIMA) adatti alla serie temporale che stiamo analizzando e di trovare dei valori iniziali adeguati per i parametri del modello.

Va precisato, innanzi tutto, che l'identificazione è una procedura inesatta, perché l'andamento che un certo fenomeno segue è una proprietà relativa al comportamento fisico e non può essere stabilito solamente a partire da considerazioni di tipo matematico. A questo stadio del problema, generalmente, si ricorre all'uso di analisi grafiche qualitative, che spesso risultano utili per avere un'idea più precisa del fenomeno oggetto di studio.

È bene ricordare, però, che questa analisi preliminare ha lo scopo di individuare una classe di modelli che sembrano essere adeguati al problema in questione e che vanno prima adattati e poi controllati.

Il nostro obiettivo sarà quello di considerare un'appropriata sottoclasse del modello ARIMA generale

$$\phi(B)\nabla^d z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t,$$

che rappresenti nel modo più coerente possibile la nostra serie storica.

Ci dovremo concentrare quindi sull'identificare il valore di d più adatto in modo da ridurre il processo ad un generico modello ARMA

$$\phi(B)w_t = \theta_0 + \theta(B)a_t,$$

dove $w_t = \nabla^d z_t$. Dovremo poi lavorare sul modello ARMA così ottenuto. Grande importanza, non solo nell'identificazione, ma anche nella stima dei parametri, sarà rivestita dalle funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale.

2.8.1 Uso delle funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale nell'identificazione

Come abbiamo visto parlando di modelli stazionari, la funzione di autocorrelazione di un processo ARMA, che corrisponde ad un ARIMA di ordine $(p,0,q)$, soddisfa l'equazione alle differenze $\phi(B)\rho_k = 0$, per $k > q$.

Se possiamo scrivere $\phi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B)$, allora la funzione di autocorrelazione avrà la forma seguente:

$$\rho_k = A_1 G_1^k + \dots + A_p G_p^k \quad k > q - p.$$

Per la stazionarietà, le radici di $\phi(B)$ devono stare fuori dal cerchio unitario, quindi G_1, G_2, \dots, G_p saranno dentro al cerchio unitario. Questo vuol dire che nel caso in cui un modello sia stazionario la funzione di autocorrelazione va a zero molto velocemente.

Supponiamo ora invece che un G_i sia prossimo a 1, per esempio $G_1 = 1 - \delta$, dove δ è una quantità piccola e positiva. Per k grande avremo $\rho_k \simeq A_1(1 - k\delta)$, cioè la funzione di autocorrelazione avrà un decadimento lento, di tipo lineare. Un comportamento di questo tipo da parte della funzione ρ_k è quindi sintomo della presenza di una radice prossima a 1, portandoci a considerare un modello non stazionario, ma che potrebbe esserlo, ad esempio, per ∇z_t . Per tutte queste ragioni, quindi, il grado d del nostro modello sarà quello per cui la funzione di autocorrelazione di $w_t = \nabla^d z_t$ abbia un decadimento esponenziale. Nella pratica normali valori di d sono 0,1 o 2 ed è sufficiente controllare i primi 20 valori di ρ_k per valutarne l'andamento.

Una volta stabilito il valore di d , utilizziamo l'andamento delle funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale per determinare p e q , ovvero gli ordini degli operatori autoregressivo e a media mobile rispettivamente. Rivediamo quindi alcune proprietà caratterizzanti queste funzioni.

Nel caso di un processo autoregressivo di ordine p , la funzione di autocorrelazione decade ma non raggiunge mai lo zero, mentre quella di autocorrelazione parziale, dopo il *lag* p , si annulla. Per un processo a media mobile di ordine q , invece, vale esattamente il contrario; la funzione di autocorrelazione si annulla dopo il *lag* q , mentre quella di autocorrelazione parziale non si annulla mai, semplicemente tende a zero al crescere di k .

Se entrambe le funzioni decadono al crescere di k , invece, bisogna pensare ad un processo ARMA. Per questo tipo di modello, infatti, entrambe le funzioni sono dominate da misture di esponenziali e sinusoidi smorzate dopo i primi $q - p$ *lag*, per la funzione di autocorrelazione e dopo i primi $p - q$, invece, per quella di autocorrelazione parziale.

È quindi l'analisi di queste funzioni per il nostro processo e le sue differenze a farci scegliere i valori di p e q che permettano di descrivere il fenomeno in maniera più accurata possibile.

Poniamo ora l'attenzione su un problema che può influenzare le nostre scelte. L'analisi dei grafici sopra descritta è fatta utilizzando le stime di tali funzioni. Una varianza troppo elevata di queste stime, quindi, può rendere priva di significato la nostra analisi. È quindi importante sapere di quanto ci stiamo allontanando dal valore corretto quando utilizziamo i valori stimati.

A questo proposito risultano utili alcune formule riguardo la varianza dei coefficienti di autocorrelazione e autocorrelazione parziale, per poter valutare se effettivamente vadano a zero dopo un certo k . Per quanto riguarda il

coefficiente di autocorrelazione, per $k > q$ è valida la formula

$$\widehat{\sigma}[r_k] \simeq \frac{1}{n^{1/2}} [1 + 2(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_q^2)]^{1/2}.$$

Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione parziale, invece, sotto l'ipotesi che il processo sia autoregressivo di ordine p , per $k > p$ è valida la formula

$$\widehat{\sigma}[\phi_{kk}] \simeq \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Si può dimostrare che, per n particolarmente grande, una coefficiente di correlazione il cui valore teorico è nullo, è distribuito approssimativamente come una normale. Quindi dividendo la stima di r_k per la sua deviazione standard otteniamo, approssimativamente, una normale di media nulla e varianza unitaria, potendo quindi utilizzare tutte le tecniche di inferenza ben note in ambito gaussiano. Un risultato simile è vero anche nel caso dei coefficienti di autocorrelazione parziale.

2.9 Controllo del modello

Supponiamo di aver identificato un modello che pensiamo adatto alla nostra serie storica e di averne stimato i parametri. Bisogna come ultima cosa capire se il modello è adeguato al fenomeno che siamo intenzionati a descrivere.

Se ci fossero dei segni evidenti di inadeguatezza, dovremo essere in grado di capire in che modo il modello risulta essere inadeguato in modo tale da poter apportare le modifiche necessarie.

2.9.1 Tecniche di *overfitting*

Una tecnica che può essere usata per controllare la bontà del modello è chiamata *overfitting*. Supponiamo di avere elaborato un modello sulla base dell'analisi dei grafici di autocorrelazione e autocorrelazione parziale e di averne stimato i parametri. Immaginiamo anche che esista un motivo valido di credere che il modello debba essere più complesso in una determinata direzione (ad esempio incrementando q o p). Creiamo quindi un nuovo modello più complicato e poi confrontiamo i risultati, in termini di somma dei quadrati dei residui che si ottengono facendo predizione, sia con il nuovo modello che con quello più parsimonioso. Se il nuovo modello non apporta benefici vuol dire che è meglio rimanere con quello originale.

Ovviamente non avrà senso aumentare contemporaneamente sia il parametro

p che il parametro q , sia perché un eventuale miglioramento apportato dall'incremento di uno dei due parametri potrebbe essere mascherato dall'altro, sia perché, in caso il nuovo modello risultasse effettivamente migliore, non sapremmo a chi attribuire il merito.

Facciamo un esempio che chiarifichi meglio il ragionamento da seguire: pensiamo di avere una serie storica e di analizzarne i grafici di autocorrelazione e autocovarianza, individuando così come modello più adatto un processo IMA (0,1,1). Pensiamo, però, di avere motivo di credere che la nostra serie debba essere predetta da una funzione di predizione quadratica. Poiché la funzione di predizione ottima di un processo IMA (0, q , q) è un polinomio di grado $q - 1$, ovvero $\hat{z}_t(l) = b_0^{(t)} + b_1^{(t)}l + b_2^{(t)}l^2$ (dove i coefficienti $b_0^{(t)}$, $b_1^{(t)}$ e $b_2^{(t)}$ vengono aggiornati ogni volta che un nuovo dato diventa disponibile), un modello IMA (0,3,3) potrebbe essere più adatto. A questo punto è bene confrontare i due modelli tramite i risultati ottenuti in termine di predizione, per verificare se effettivamente il nuovo modello sia migliore del primo.

Questa tecnica ha un limite evidente: presuppone la conoscenza di una particolare direzione lungo la quale il modello andrebbe reso più elaborato. Il nostro modello, però, potrebbe non essere adatto e aver bisogno di modifiche anche senza che qualcosa o qualcuno ce lo faccia pensare.

Possono risultare utili, quindi, procedure di controllo che fanno a meno di conoscenze riguardanti il fenomeno e che sono basate sull'analisi dei residui. Sebbene anche in questo caso è utile sapere cosa andare a cercare, tramite queste tecniche è più facile che i dati stessi ci suggeriscano delle modifiche.

2.9.2 Metodi basati sullo studio dei residui

Consideriamo il modello

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t$$

e le stime di massima verosimiglianza $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ per i parametri. Definiamo i residui come

$$\hat{a}_t = \hat{\theta}^{-1}(B)\hat{\phi}(B)w_t.$$

Se il modello è adeguato, con il crescere di n i residui \hat{a}_t approssimano sempre meglio il rumore bianco a_t . Lo studio dei residui, quindi, è uno strumento utile per verificare la bontà del modello.

Supponiamo che il modello sia corretto e immaginiamo di conoscere i valori dei parametri θ e ϕ . Si può dimostrare che le stime delle autocorrelazioni degli a_t , ovvero $r_k(a)$, sono indipendenti e distribuite come una normale di media zero e varianza $\frac{1}{n}$. Possiamo quindi utilizzare questo fatto per fare

inferenza sulle stime delle autocorrelazioni degli errori. Valori significativamente diversi da zero comportano un'evidenza di inadeguatezza del modello. In realtà noi non conosciamo i veri valori dei parametri, ma solo le loro stime $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$, tramite le quali possiamo calcolare i valori di \hat{a} e non di a . Possiamo dunque fare inferenza sulla stima dell'autocorrelazione dei residui, ovvero su $r_k(\hat{a})$, per mettere alla prova la validità del modello.

L'analisi di un'effettiva differenza da zero di queste autocorrelazioni utilizzando la varianza teorica n^{-1} , però, potrebbe sottostimare una discrepanza da zero statisticamente significativa. Per un processo AR(1), per esempio, la varianza di $r_1(\hat{a})$ è uguale a $\phi^2 n^{-1}$ e quindi, in base al valore del parametro ϕ , potrebbe essere sostanzialmente minore di n^{-1} .

Si può dimostrare, però, che una riduzione nella varianza rispetto al valore teorico può verificarsi per *lag* bassi, mentre all'aumentare di k questa diminuzione tende a scomparire.

Possiamo quindi concludere che, ad eccezione dei *lag* medio-alti, il valore $n^{-1/2}$ deve essere inteso come un limite superiore della deviazione standard, piuttosto che come il valore della deviazione standard stessa. Questo comporta il fatto che, per piccoli valori di k , utilizzando n^{-1} come varianza, potremmo non riscontrare evidenza statistica per dire che il nostro modello sia inadeguato, quando questa evidenza, in realtà, è presente.

Piuttosto che considerare gli $r_k(\hat{a})$ individualmente, quindi, potremmo utilizzare le prime K autocorrelazioni per vedere se queste, nel loro insieme, ci forniscano indicazioni riguardo l'inadeguatezza del modello.

Si può dimostrare (per i dettagli della dimostrazione si vedano [14] e [15]) che, date le prime K autocorrelazioni dei residui di un modello ARIMA(p, d, q), se il modello è corretto la quantità

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^K r_k^2(\hat{a}) / (n-k)$$

è distribuita come una $\chi^2(K-p-q)$, dove $n = N - d$, con N numerosità del campione. È quindi immediata l'implementazione di un test d'ipotesi, chiamato **test di portmanteau**, per verificare la bontà del modello.

Analizziamo ora un altro motivo per cui il nostro modello potrebbe risultare inadeguato. Possiamo pensare che un valore molto alto della statistica Q possa derivare non dalla forma del modello, ma dal fatto che i valori dei parametri debbano essere cambiati al variare del tempo.

In questi casi generalmente si applica lo stesso modello prima sulla prima metà e poi sulla seconda del nostro dataset (oppure su due o più parti diverse

che non siano necessariamente prima e seconda metà) per verificare se, così facendo, i valori delle nuove statistiche Q non ci permettano di avere motivazioni statisticamente significative per rifiutare l'ipotesi nulla di adeguatezza del modello.

Abbiamo quindi visto due vie principali per il controllo del modello: da una parte l'*overfitting*, più sensibile nel rilevare l'inadeguatezza del modello, ma che non permette di identificare altre direzioni nelle quali il modello potrebbe essere carente rispetto a quella specifica sulla quale stiamo investigando. Dall'altra i metodi basati sullo studio dei residui che, sebbene non facciano uso di test molto potenti essendo dunque meno sensibili all'inadeguatezza del modello, ci permettano di individuare la maggior parte dei problemi del modello stesso.

Capitolo 3

Analisi dei dati via serie temporali

In questo capitolo presenteremo le analisi effettuate sul dataset descritto nel paragrafo 1.5 e i risultati ottenuti.

Cominceremo col descrivere un'analisi esplorativa del dataset, effettuata utilizzando tecniche specifiche per il problema che vogliamo affrontare. Successivamente applicheremo gli strumenti teorici analizzati nel capitolo 2 alle serie storiche degli intervalli RR, cercando di capire se tali dati durante FA possono essere visti come realizzazioni campionarie di un particolare processo stocastico. Nell'ultima parte di analisi, una volta scelto il modello che meglio si adatta ai dati, giungeremo alla definizione di un metodo di monitoraggio dinamico degli intervalli RR, che permetta di individuare l'istante in cui inizia e finisce il fenomeno di Fibrillazione Atriale in tempi clinicamente accettabili.

3.1 Analisi esplorativa

Cominciamo effettuando alcune analisi qualitative pensate appositamente per l'individuazione della FA. In particolare considereremo una tecnica di analisi degli istogrammi studiata per mettere in evidenza caratteristiche fisiologiche specifiche della Fibrillazione Atriale e successivamente due tipi di grafici chiamati *Poincaré plot* e *Lorenz plot* (si vedano [4], [5]).

3.1.1 Istogrammi degli intervalli RR

Una prima analisi grafica consiste nell'osservazione degli istogrammi degli intervalli RR, tramite i quali siamo in grado di valutare alcune proprietà del

nodo Atrio-Ventricolare. Gli istogrammi possono presentare unimodalità, bimodalità o plurimodalità.

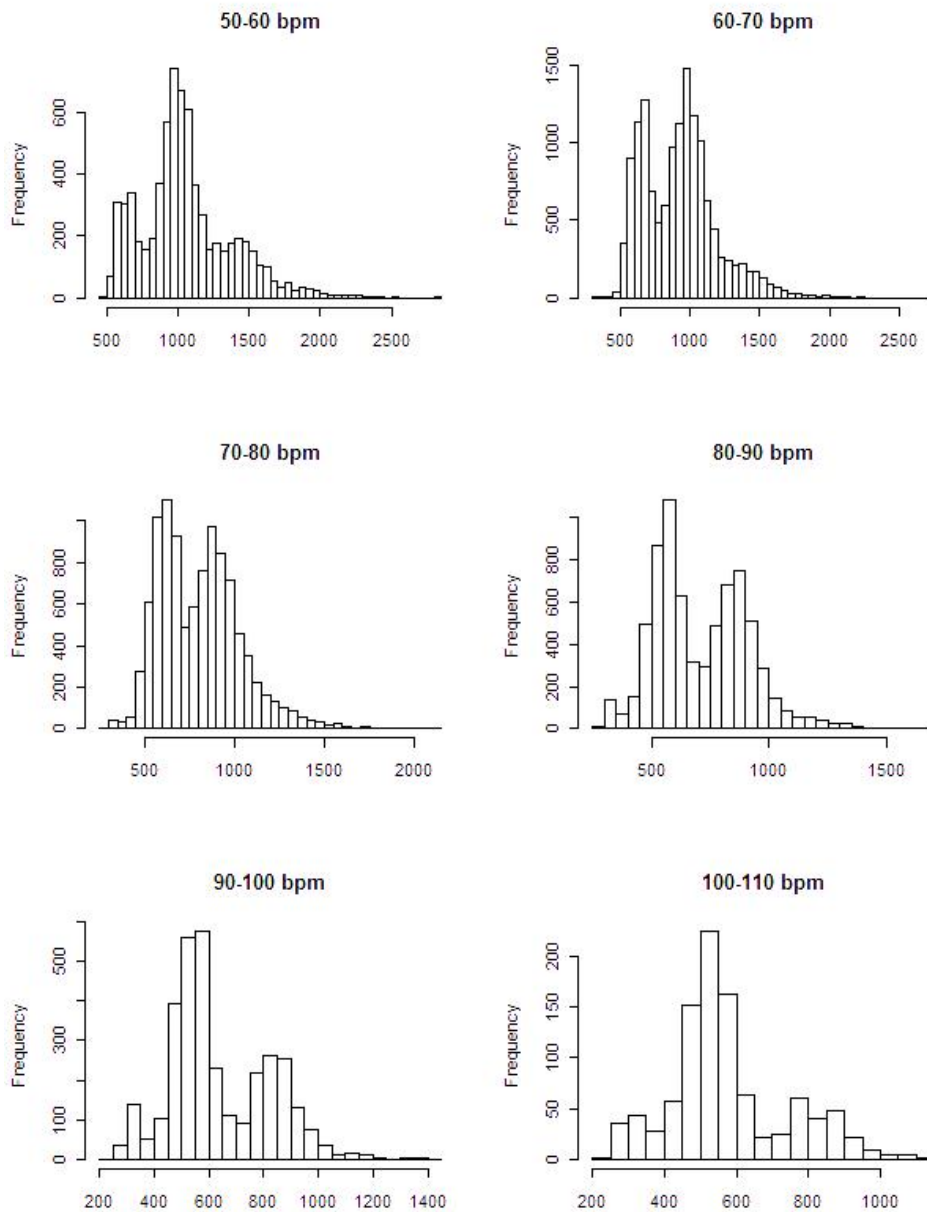


Figura 3.1: Istogrammi relativi al paziente 2 durante FA costruiti utilizzando la tecnica HRS.

Un istogramma degli intervalli RR bimodale, per esempio, suggerisce la

presenza di una fisiologia duale del nodo AV, ovvero l'esistenza di due cammini con tempi di percorrenza diversi attraverso i quali i segnali elettrici vengono propagati ai ventricoli durante la Fibrillazione Atriale.

Per la visualizzazione e l'analisi degli istogrammi RR esiste una tecnica particolare, ovvero l'analisi *heart rate stratified histograms* (HRSH). Questa tecnica permette di osservare la distribuzione degli intervalli RR a differenti livelli di battito cardiaco medio. Bisogna innanzitutto decidere il numero di intervalli nei quali dividere la frequenza del battito cardiaco. Successivamente si divide il dataset in sottointervalli, di ognuno si calcola la media e in base a questa lo si assegna ad un determinato intervallo di battito cardiaco. Si ottiene così un campione per ogni intervallo scelto e quindi un istogramma per ogni livello.

Questa tecnica è particolarmente utile per mettere in evidenza l'esistenza di due popolazioni, con conseguenti istogrammi bimodali, per gli intervalli RR di pazienti soggetti a Fibrillazione Atriale persistente.

Nonostante i pazienti del dataset a disposizione soffrano di Fibrillazione Atriale parossistica, abbiamo comunque applicato questa tecnica al vettore di intervalli RR relativi al periodo di Fibrillazione Atriale, ottenendo in un solo caso su dieci la presenza di due popolazioni. Questo fenomeno è evidente dalla Figura 3.1 in cui sono mostrati gli istogrammi RR relativi al paziente 2 ottenuti con la tecnica HRSH. Tale comportamento è proprio dovuto al tipo di fibrillazione di cui soffrono i pazienti che abbiamo analizzato.

3.1.2 Poincaré e Lorenz plot

Gli istogrammi, pur mettendo in evidenza alcune caratteristiche rilevanti della distribuzione degli intervalli RR, non tengono conto, per esempio, della sequenza degli intervalli e quindi non forniscono informazioni sulla regolarità del battito cardiaco.

Per questo tipo di analisi, sempre mantenendosi ad un livello puramente descrittivo del fenomeno, risulta utile l'utilizzo di alcuni grafici specifici, come, per esempio, uno scatterplot dell'intervallo RR al passo n rispetto a quello al passo $n + 1$. Questo grafico prende il nome di *Poincaré plot*.

In alternativa si può analizzare un altro tipo di grafico, simile al primo, chiamato *Lorenz plot*. In questo caso viene contrapposta la differenza tra gli intervalli al passo n e $n + 1$ a quella ai passi $n + 1$ e $n + 2$.

La regolarità del battito fisiologico porta ad una forte correlazione positiva tra un intervallo RR e il successivo. Questo fa sì che nei *Poincaré plot* la forma sia simile a quella della retta $y = x$. Durante Fibrillazione Atriale, invece, a causa dell'irregolarità del battito cardiaco, questa correlazione diminuisce

sensibilmente. Tale fenomeno si manifesta alterando la forma del grafico, che diventa simile a quella di un imbuto.

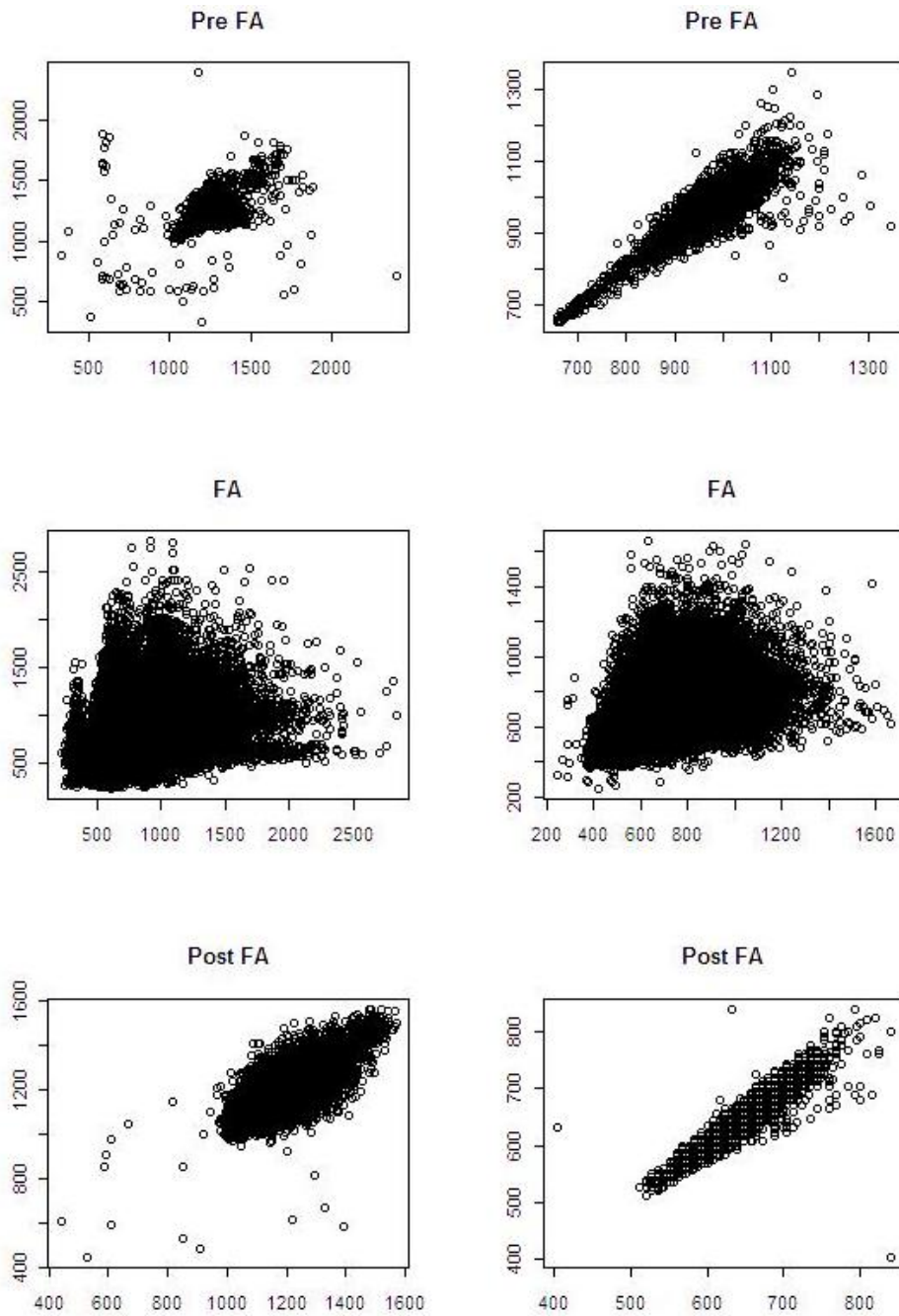


Figura 3.2: Poincaré plot dei pazienti 2 (sinistra) e 10 (destra) pre-FA, durante FA e post-FA.

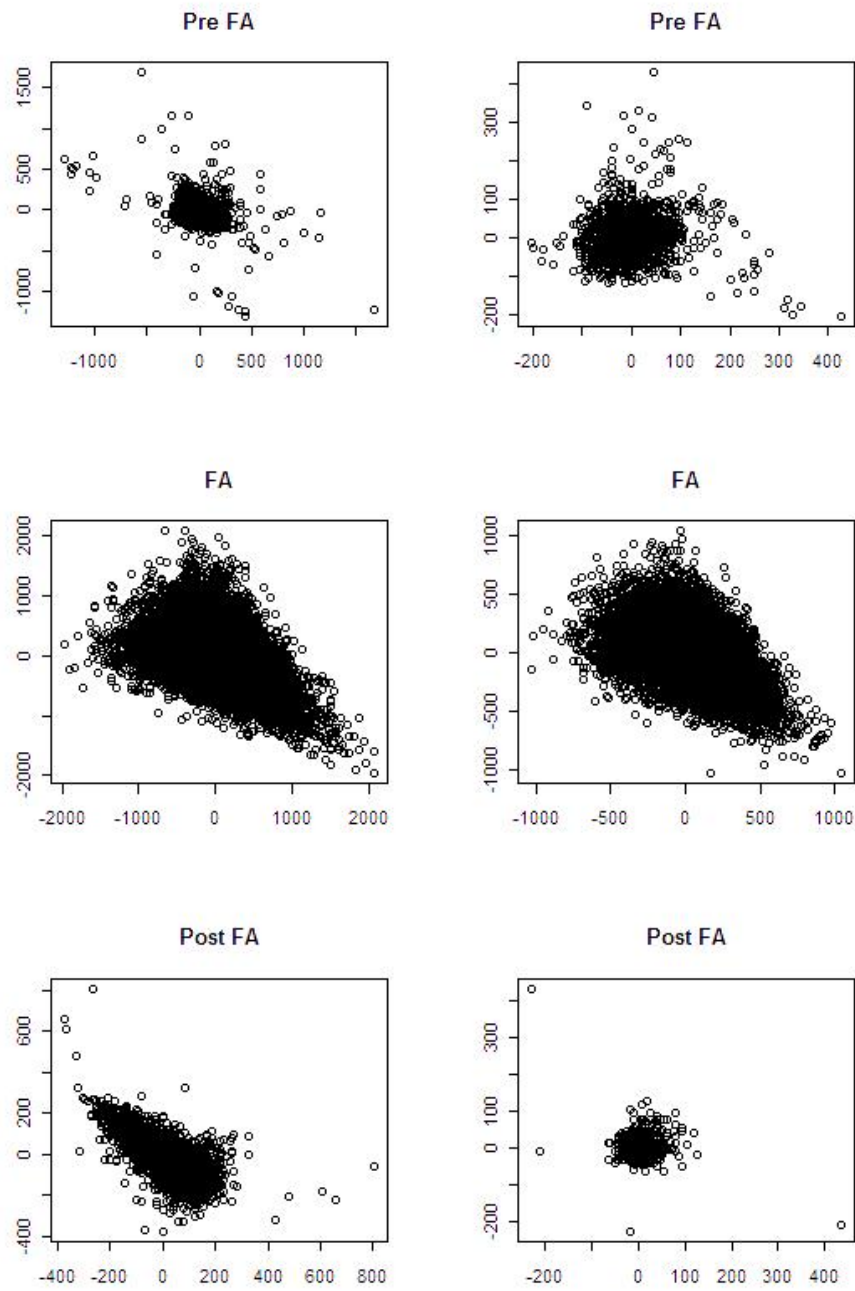


Figura 3.3: Lorenz plot dei pazienti 2 (sinistra) e 10 (destra) pre-FA, durante FA e post-FA.

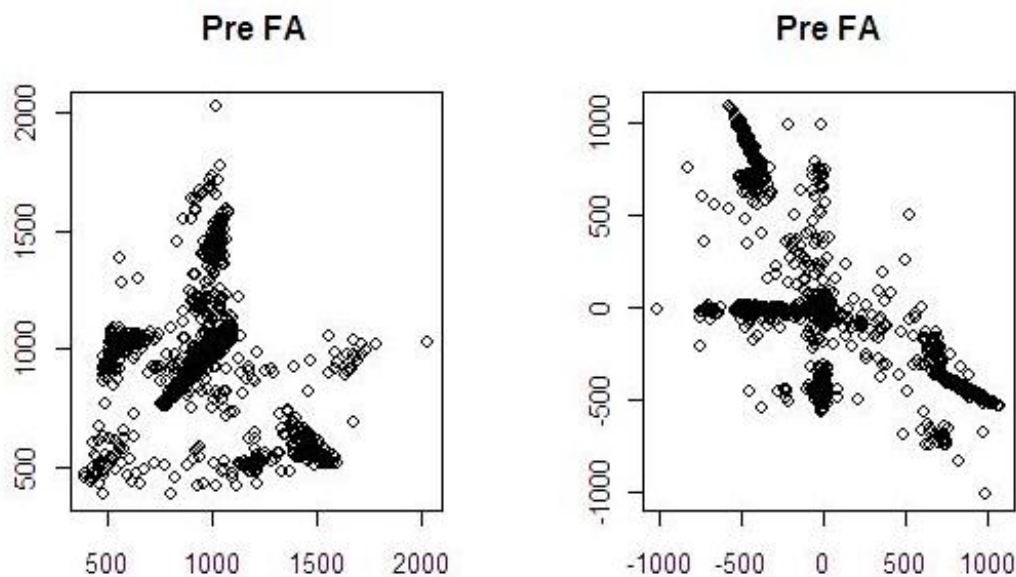


Figura 3.4: Poincaré (sinistra) e Lorenz (destra) plot del paziente 3 pre-FA.

Per quanto riguarda i *Lorenz plot*, invece, le differenze tra intervalli successivi in presenza di battito fisiologico saranno molto vicine a zero. In questo caso, quindi, la forma del grafico in condizioni fisiologiche sarà quella di un cerchio di raggio molto piccolo centrato nell'origine. Durante la Fibrillazione Atriale, al contrario, il raggio sarà molto più ampio.

Per ognuno dei dieci pazienti del dataset abbiamo realizzato tre *Poincaré* e tre *Lorenz plot*; un primo grafico riferito al periodo prima che comparisse il fenomeno di fibrillazione, un secondo durante e un terzo relativo alle due ore successive all'aritmia atriale.

In tutti e dieci i pazienti i grafici relativi al periodo di Fibrillazione Atriale hanno la forma irregolare descritta precedentemente. Per quanto riguarda i risultati ottenuti prima e dopo fibrillazione, invece, possiamo ricondurci a tre tipologie.

Nei pazienti 1,2,4,9 e 10, per esempio, l'aspetto dei grafici in questione evidenzia la regolarità del battito cardiaco, sia prima che dopo il fenomeno di Fibrillazione Atriale (ad esempio si vedano i grafici dei pazienti 2 e 10 nelle Figure 3.2 e 3.3).

Per quanto riguarda i pazienti 3,7 e 8, a fronte di un comportamento regolare del battito dopo la fibrillazione, la situazione prima dell'aritmia sembra alquanto irregolare. I grafici presentano la forma tipica di un'altra disfunzione cardiaca, l'*atrial flutter* (tale patologia non sarà analizzata in questo lavoro, per ulteriori informazioni si rimanda a [5] e [21]). In Figura 3.4 sono

riportati i grafici relativi al paziente numero 3 a titolo d'esempio.

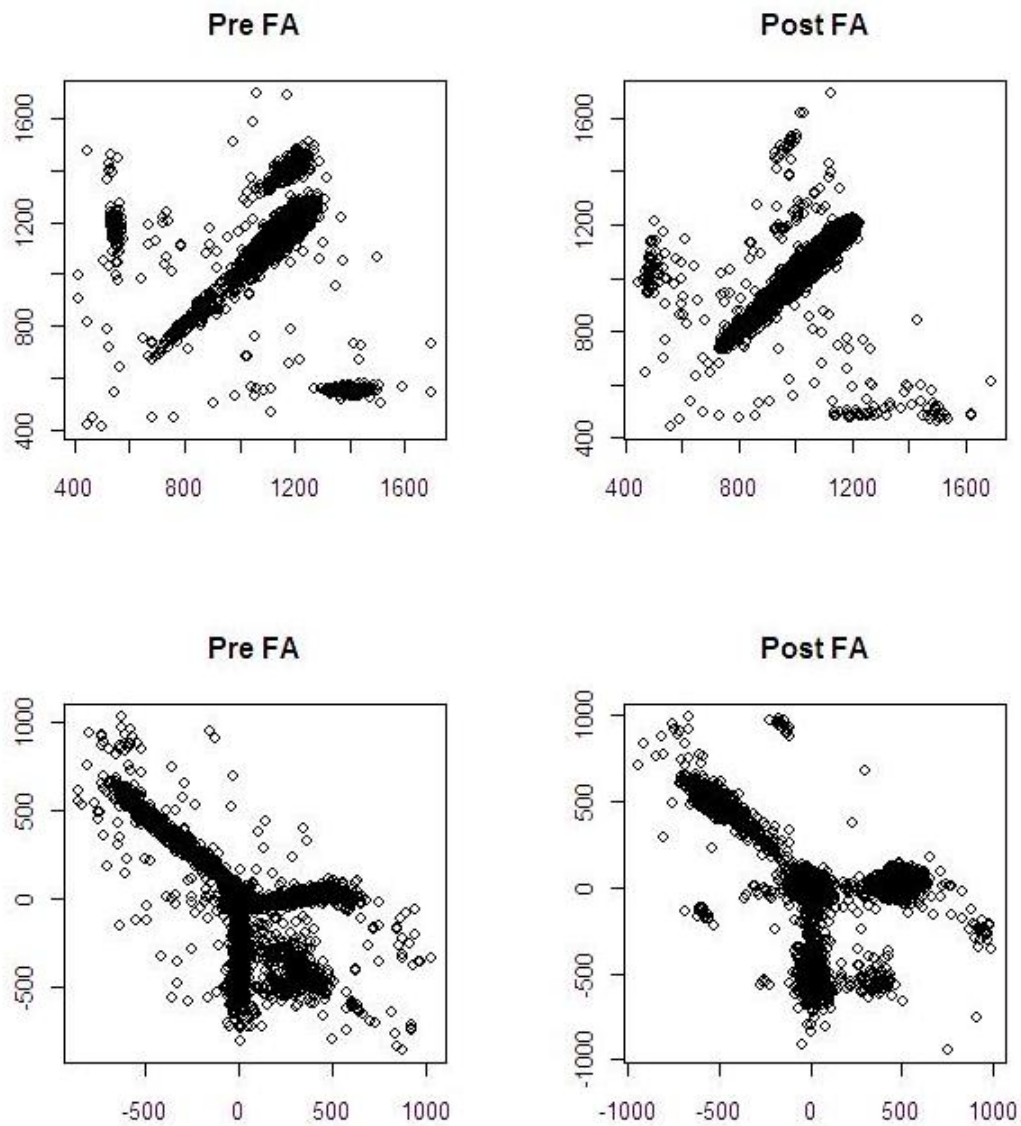


Figura 3.5: Poincaré plot del paziente 5 (sopra) e Lorenz plot del paziente 6 (sotto) pre-FA e post-FA.

Nel caso dei pazienti 5 e 6, invece, la forma anomala tipica dell'*atrial flutter* si presenta sia prima che dopo l'evento di Fibrillazione Atriale, come si può osservare nella Figura 3.5.

Quello che emerge da questa analisi esplorativa è, quindi, un possibile collegamento tra Fibrillazione Atriale e *atrial flutter*, collegamento che non ap-

profondiremo in questo lavoro. Nei prossimi paragrafi cercheremo invece di identificare un modello che ben catturi l'andamento degli intervalli RR durante FA e, tramite il monitoraggio di quantità specifiche del modello in questione, di identificare in tempi relativamente brevi il sopraggiungere del fenomeno di fibrillazione.

3.2 Analisi quantitativa

Cerchiamo ora di individuare tra i modelli studiati nel capitolo 2 quale possa descrivere adeguatamente l'andamento degli intervalli RR in Fibrillazione Atriale.

Come discusso nel paragrafo 2.8.1, per identificare un modello adatto risulta molto utile uno studio grafico delle funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale.

Analizziamo quindi i suddetti grafici per la serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due durante la Fibrillazione Atriale dei 10 pazienti a disposizione.

Da una prima lettura dei grafici, quello che risulta più evidente è un andamento simile per tutti i pazienti. I grafici delle serie semplici suggeriscono un comportamento non stazionario, poiché non si apprezza né un rapido andamento a zero, né un comportamento sinusoidale, né tantomeno una troncatura della serie, caratteristiche tipiche dei processi stazionari autoregressivi e/o a media mobile (si veda la Tabella 2.1).

Diversamente, per quanto riguarda tutti i pazienti ad eccezione del paziente numero 9, i grafici di autocorrelazione subiscono una troncatura dopo il primo termine nel caso di differenze di ordine uno e dopo il secondo termine nel caso di differenze di ordine due, mentre le funzioni di autocorrelazione parziale, in entrambi i casi, tendono a zero all'aumentare di k . Queste sono le caratteristiche, rispettivamente, di un modello ARIMA (0,1,1) e ARIMA (0,2,2), descritti dalle seguenti equazioni:

$$\nabla z_t = (1 - \theta_0 B)a_t \quad (3.1)$$

$$\nabla z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t \quad (3.2)$$

In figura (3.6) e (3.7) sono mostrati i grafici di autocorrelazione parziale per i pazienti 1 e 4, mentre in figura (3.8) quelli del paziente 9, l'unico che presenta caratteristiche diverse dagli altri.

A fronte di queste considerazioni proviamo a verificare che le serie storiche a nostra disposizione siano effettivamente realizzazioni campionarie di processi ARIMA (0,1,1) e (0,2,2).

Tramite l'utilizzo del software statistico R [22] applichiamo alle serie degli intervalli RR durante fibrillazione i modelli sopra citati.

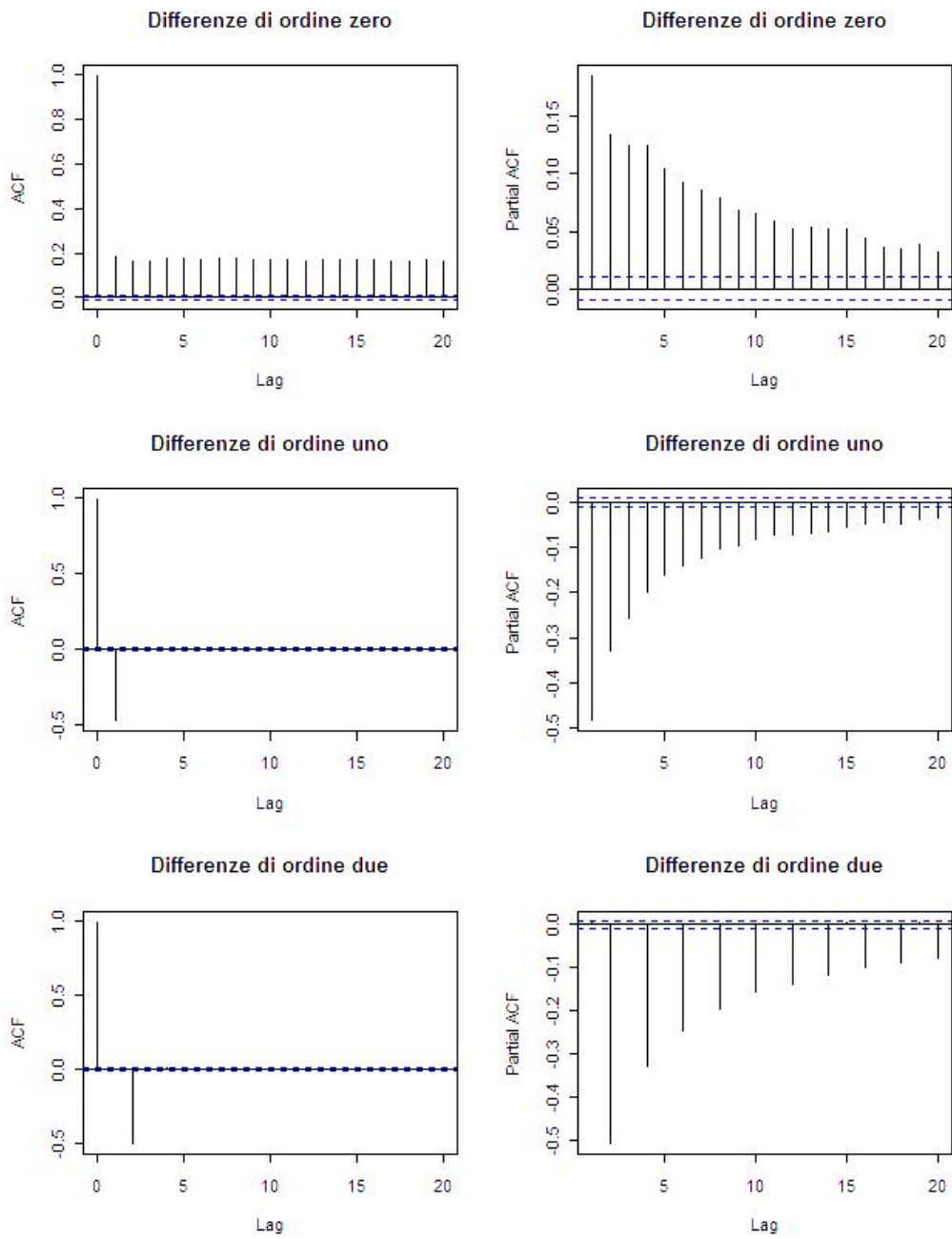


Figura 3.6: Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 1.

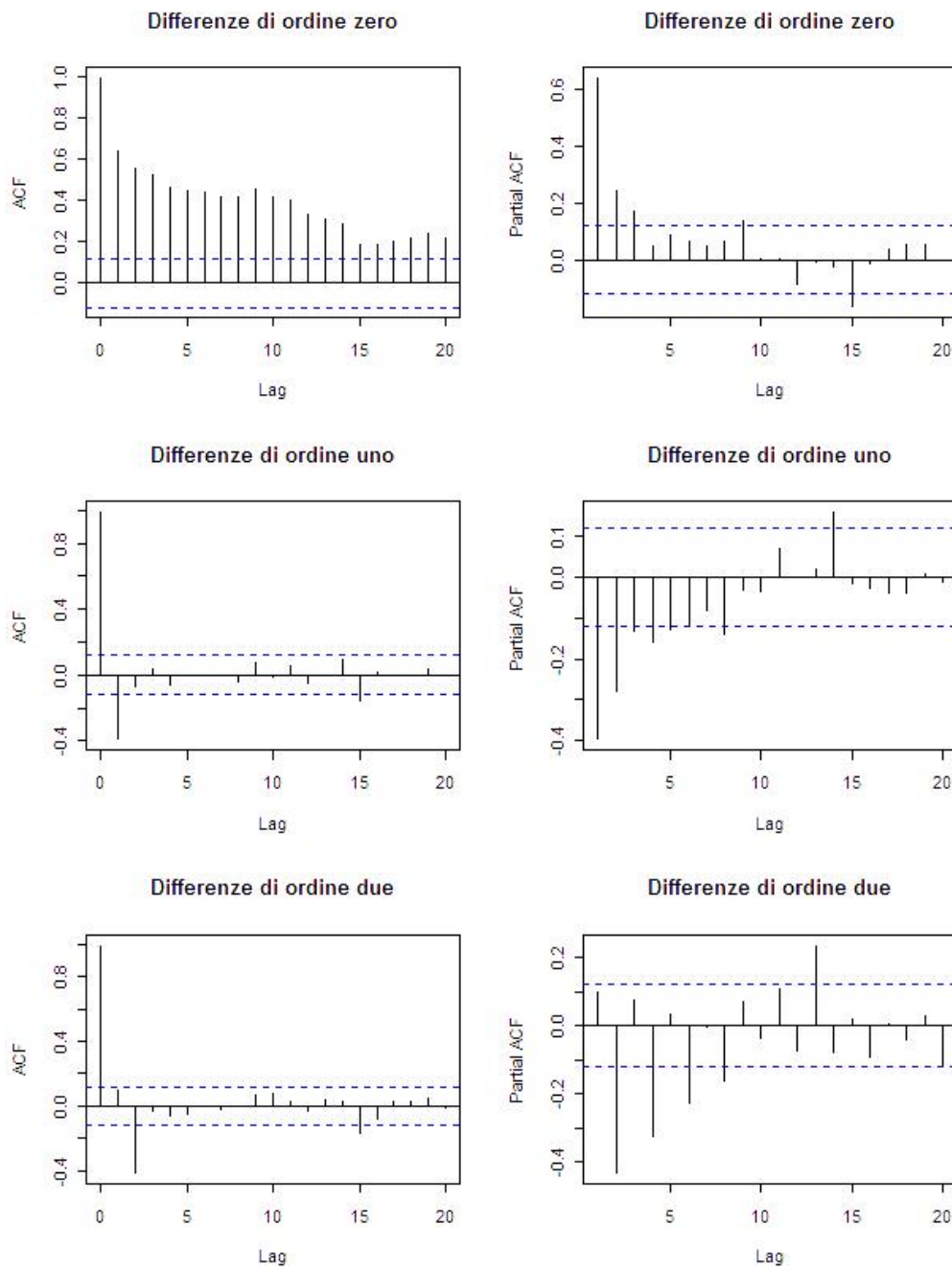


Figura 3.7: Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 4.

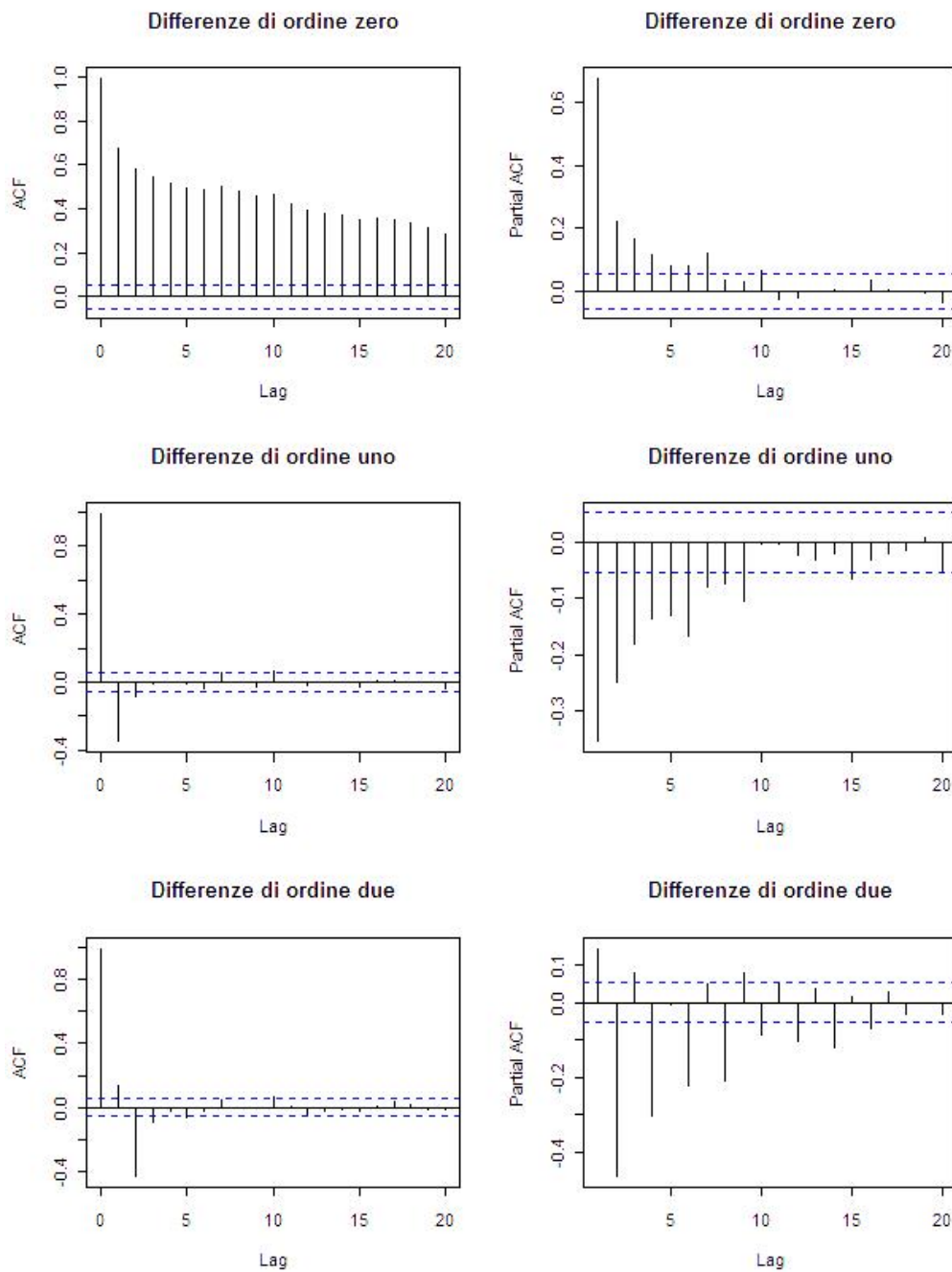


Figura 3.8: Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 9.

Come evidenziato nel paragrafo 2.9.2, l'analisi dei residui gioca un ruolo fondamentale nel giudicare la bontà di un modello. Perché il modello sia corretto le autocorrelazioni dei residui, di qualunque ordine, devono essere nulle. Osservando i grafici relativi ai nostri pazienti questa condizione sembra rispettata per tutti i pazienti, un esempio dei quali è mostrato in Figura 3.9, tranne che per il paziente 9, mostrato in Figura e 3.10.

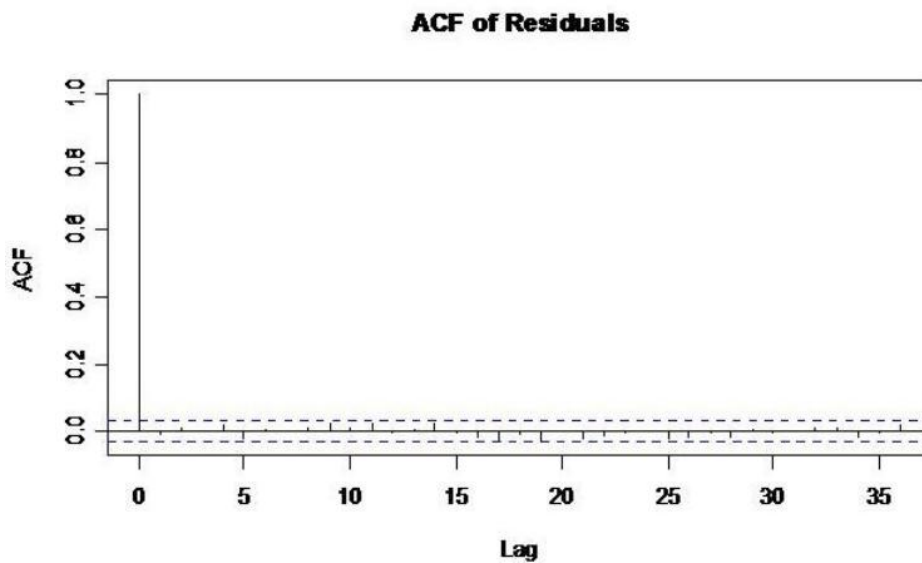


Figura 3.9: Autocorrelazione dei residui del modello ARIMA(0,1,1) per il paziente 5.

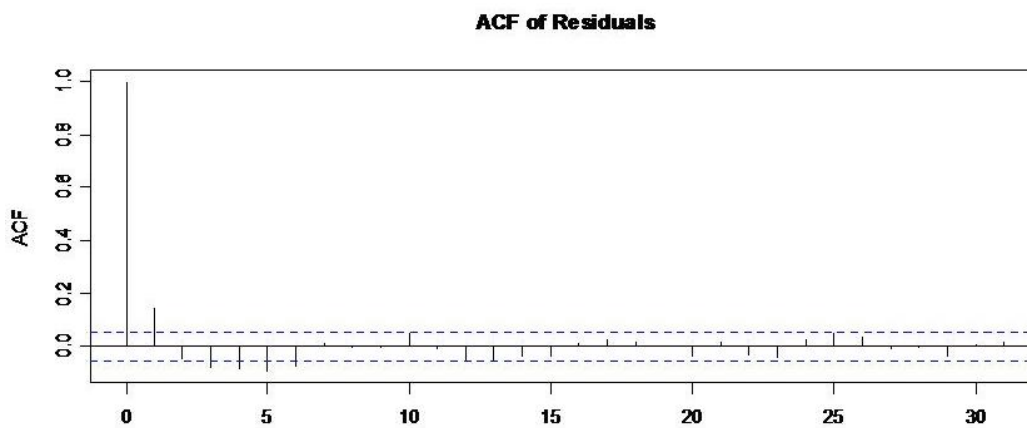


Figura 3.10: Autocorrelazione dei residui del modello ARIMA(0,2,2) per il paziente 9.

Un altro strumento presentato nel paragrafo 2.9.2 di grande utilità nella valutazione del modello è il test di portmanteau che utilizza la statistica di Ljung-Box. Applicato ai nostri pazienti, il test porta a conclusioni differenti permettendoci di dividere i soggetti studiati in due gruppi.

Nel caso dei pazienti 1,2,3,7,8,9 e 10 i valori dei p-value del test sono bassi, qualunque sia K (K è il *lag* considerato nella costruzione della statistica del test, come presentato nel paragrafo 2.9.2), come evidenziato dal grafico in Figura 3.11.

Per gli altri, invece, i valori dei p-value ci dicono che non abbiamo evidenza statistica per rifiutare l'ipotesi nulla di bontà del modello, come possiamo vedere in Figura 3.12.

Potremmo quindi pensare che i modelli ARIMA (0,1,1) e (0,2,2) non siano adatti a rappresentare l'andamento degli intervalli RR in Fibrillazione Atriale.

Analizzando attentamente le caratteristiche dei due gruppi di pazienti, però, si può notare che il primo gruppo, quello in cui i valori dei p-value sono molto bassi, è composto (ad eccezione del paziente numero 9 che abbiamo già visto avere un comportamento peculiare) dai soggetti relativamente ai quali abbiamo a disposizione un campione molto numeroso, conseguenza del fatto che il fenomeno di Fibrillazione Atriale ha avuto una durata considerevole.

I pazienti del secondo gruppo, al contrario, sono quelli la cui fibrillazione ha avuto una durata piuttosto ridotta.

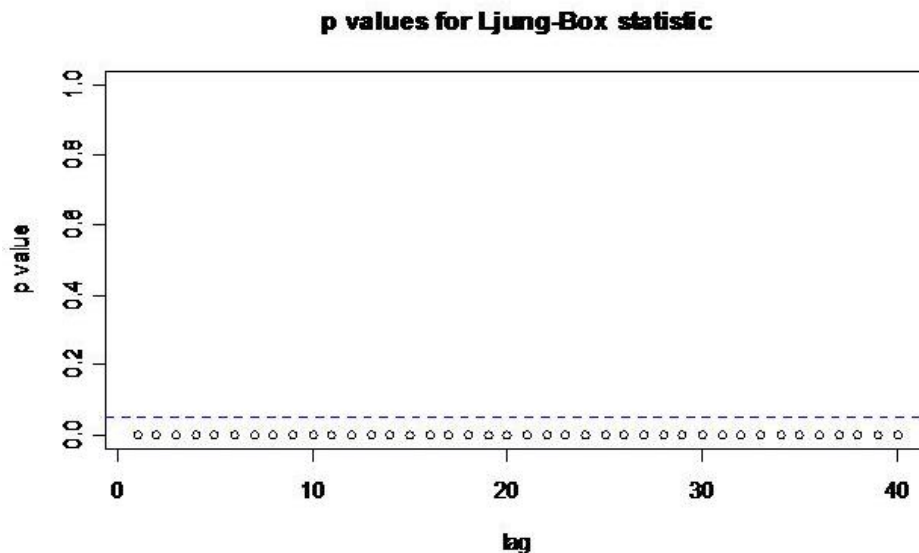


Figura 3.11: P-value del test di portemonteau del modello ARIMA(0,2,2) per il paziente 3.

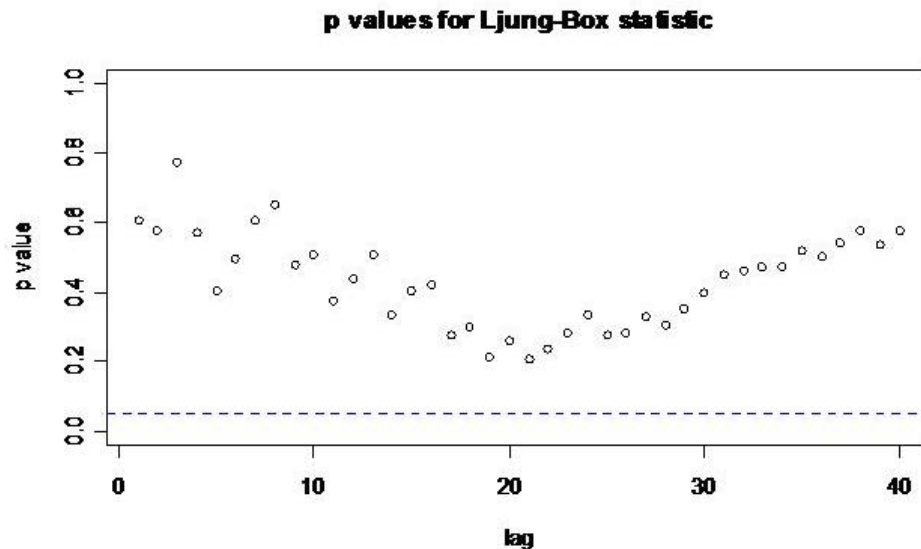


Figura 3.12: P-value del test di portemonteau del modello ARIMA(0,1,1) per il paziente 5.

Questo fenomeno ha una possibile spiegazione nel fatto che, con una grande quantità di dati, i modelli perdano di significatività a causa dell'*overfitting* che si verifica, appunto, quando il campione è eccessivamente numeroso. Provando a testare i modelli con sottoinsiemi delle serie dei pazienti del primo gruppo, infatti, i valori dei p-value risultano essere quasi sempre sopra la soglia critica del 5%. Questo significa che anche in questo caso non abbiamo evidenza statistica per rifiutare l'ipotesi nulla di bontà del modello proposto. Nel proseguo, pertanto, considereremo i modelli (3.1) e (3.2) come i più adatti a descrivere l'andamento degli intervalli RR durante Fibrillazione Atriale.

3.2.1 Schema riassuntivo

Nei prossimi paragrafi vedremo come è possibile sfruttare il fatto di aver individuato un modello che ben descriva l'andamento degli intervalli RR durante FA per raggiungere il secondo obiettivo di questo lavoro: riuscire a prevedere in tempi relativamente brevi, tramite monitoraggio continuo, il sopraggiungere del fenomeno di Fibrillazione Atriale.

Prima di descrivere le analisi di monitoraggio, però, facciamo una considerazione preliminare riguardo alla selezione del dataset: sono stati infatti eliminati i pazienti 9 e 4.

Il paziente 9 è stato escluso a motivo del fatto che, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, non presenta le caratteristiche tipiche dei processi ARIMA (0,1,1) e (0,2,2) ed essendo un caso isolato possiamo ritenerlo un'anomalia.

Il paziente 4, invece, come già accennato nel paragrafo 1.5, ha pochi dati relativi al fenomeno di Fibrillazione Atriale. Non risulta quindi utile utilizzare questo paziente per individuare e perfezionare alcune tecniche di monitoraggio continuo. Vediamo uno schema riassuntivo che mostra quali pazienti sono stati analizzati e quali modelli sono stati considerati.

Numero paziente	ARIMA (0,1,1) $\nabla z_t = (1 - \theta_0 B)a_t$	ARIMA (0,2,2) $\nabla z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t$
1	SI	SI
2	SI	SI
3	SI	SI
4	NO	NO
5	SI	SI
6	SI	SI
7	SI	SI
8	SI	SI
9	NO	NO
10	SI	SI

Tabella 3.1: Tabella riassuntiva dei pazienti e dei modelli presi in considerazione.

3.3 Monitoraggio

Nei paragrafi precedenti abbiamo individuato due modelli che sembrano catturare l'andamento dei dati che abbiamo analizzato. A questo punto affrontiamo i seguenti problemi:

1. verificare che i modelli individuati non descrivano l'andamento degli intervalli RR anche prima e dopo Fibrillazione Atriale. Questo vorrebbe dire, infatti, che i modelli proposti non sono peculiari della fibrillazione, ma del battito cardiaco in generale;
2. una volta verificato il punto (1), trovare determinate quantità che, tramite monitoraggio continuo, permettano di individuare in tempi sufficientemente brevi il momento in cui inizia la Fibrillazione Atriale.

3.3.1 Prima e dopo fibrillazione

Analizzando i grafici delle serie temporali, delle loro differenze prime e delle loro differenze seconde degli intervalli RR prima e dopo la fibrillazione, si può osservare come in nessuno dei dieci pazienti si ritrovino le caratteristiche tipiche dei modelli ARIMA (0,1,1) e (0,2,2).

In figura (3.13) possiamo apprezzare le autocorrelazioni relative al paziente 1 prima della fibrillazione (i grafici relativi agli altri pazienti sono del tutto simili a quelli mostrati per il primo).

3.3.2 Monitoraggio continuo

Avendo verificato il punto (1), l'obiettivo è ora quello di trovare una o più quantità che permettano di individuare in tempi relativamente brevi l'inizio della Fibrillazione Atriale.

L'idea è quella di considerare le prime N osservazioni (con N molto minore rispetto alla numerosità del campione, sfruttando quindi la bontà dei modelli sul corto periodo) e testare su questo sotto-campione i due modelli presi in considerazione, calcolando i valori di determinate statistiche; considerare poi un nuovo campione, sempre di numerosità N , che comprenda però le osservazioni dalla seconda alla $N + 1$ -esima, calcolare le nuove grandezze e passare al campione successivo proseguendo con la stessa modalità fino all'ultima osservazione.

L'obiettivo è quello di trovare una o più quantità di quelle considerate che abbia una variazione considerevole nel momento in cui c'è fibrillazione e che questa variazione avvenga in tempi ragionevolmente brevi.

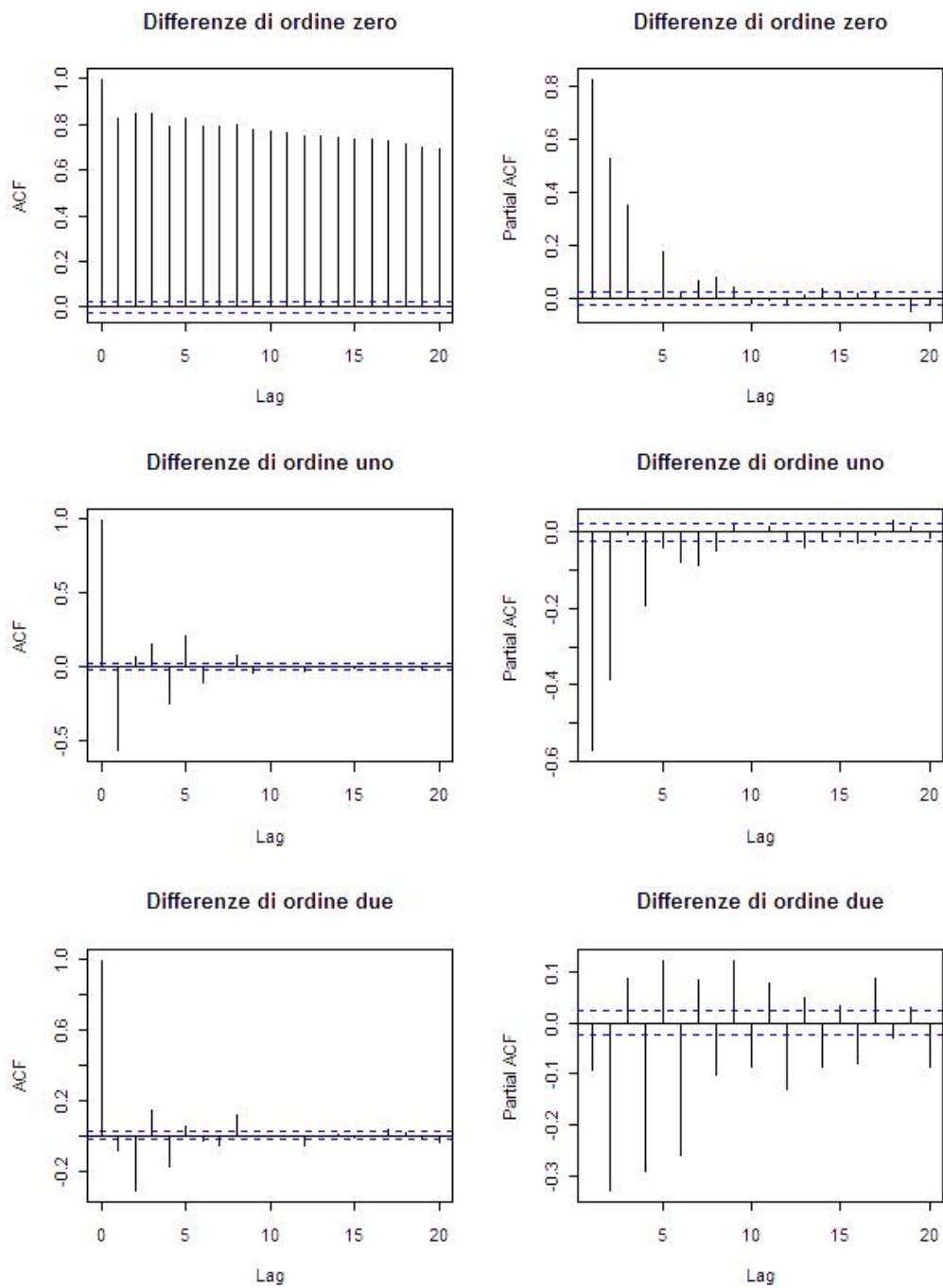


Figura 3.13: Autocorrelazione (sinistra) e autocorrelazione parziale (destra) della serie degli intervalli RR, delle differenze di ordine uno e delle differenze di ordine due per il paziente 1 pre-FA.

Le quantità prese in considerazione sono state i p-value dei test di portmonteau con $K = 5, 10, 15$ e 20 . Tali grandezze sono state monitorate per diversi valori di N , in particolare sono stati assegnati ad N i valori di $200, 400, 600, 800$ e 1200 .

Presentiamo ora le analisi fatte considerando $K = 5$, dal momento che i risultati, al variare di K , non evidenziano differenze significative.

Vediamo in Figura 3.14 i grafici relativi al paziente numero 1 considerando il modello ARIMA (0,1,1) e in Figura 3.15 quelli relativi al paziente numero 6 ottenuti sulla base del modello ARIMA (0,2,2).

Da una prima osservazione delle figure è evidente come i valori del p-value sembrano catturare molto bene l'evento di Fibrillazione Atriale. Infatti, durante FA (ovvero nello spazio compreso tra le due linee rosse), i valori dei p-value si mantengono alti, al contrario di quello che succede prima e dopo il fenomeno, dove i p-value sono pressoché nulli.

Convinti che il p-value del test di portemanteau sia un valido indicatore da mantenere, ci interessa individuare un criterio che fornisca, con il miglior grado di precisione possibile, l'istante in cui inizia il fenomeno di Fibrillazione Atriale.

L'obiettivo è quello di realizzare un test d'ipotesi del tipo:

$$H_0 : \text{c'è fibrillazione} \quad \text{vs} \quad H_1 : \text{non c'è fibrillazione}$$

In realtà quello che siamo in grado di fare sono dei test con le seguenti ipotesi:

$$H_0 : \theta_0 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta_0 \neq 0 \tag{3.3}$$

$$H_0 : \theta_1 = 0 \cap \theta_2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta_1 \neq 0 \cup \theta_2 \neq 0. \tag{3.4}$$

L'idea per costruire le regioni critiche per i test 3.3 e 3.4 è quella di considerare un determinato numero M di p-value e costruire una regione critica con il seguente ragionamento: rifiuto l'ipotesi nulla se almeno X p-value su M sono minori di y . Il valore di α si determina calcolando la probabilità che, sotto ipotesi nulla, almeno X p-value su M siano minori di y .

Chiamiamo p un singolo p-value. Allora, se il p-value è valido (senza dilungarci sulla definizione di p-value valido, diciamo solamente che, in questo caso, le ipotesi sono rispettate. Per ulteriori dettagli si veda [1]):

$$P_{H_0}(p < y) \leq y.$$

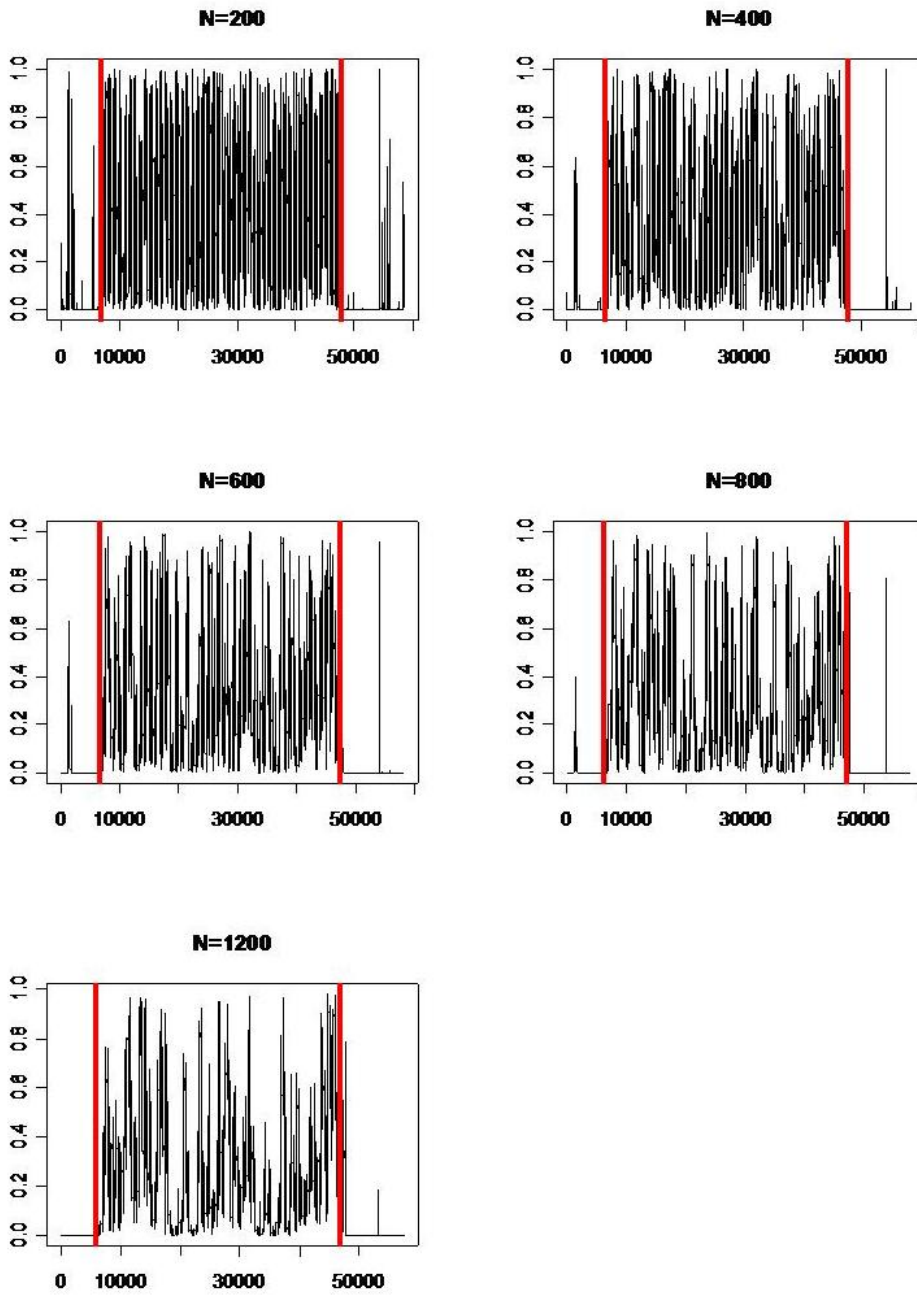


Figura 3.14: Paziente 1, modello ARIMA(0,1,1): grafici dei p-value del test di portemonteau ($K=5$) al variare di N.

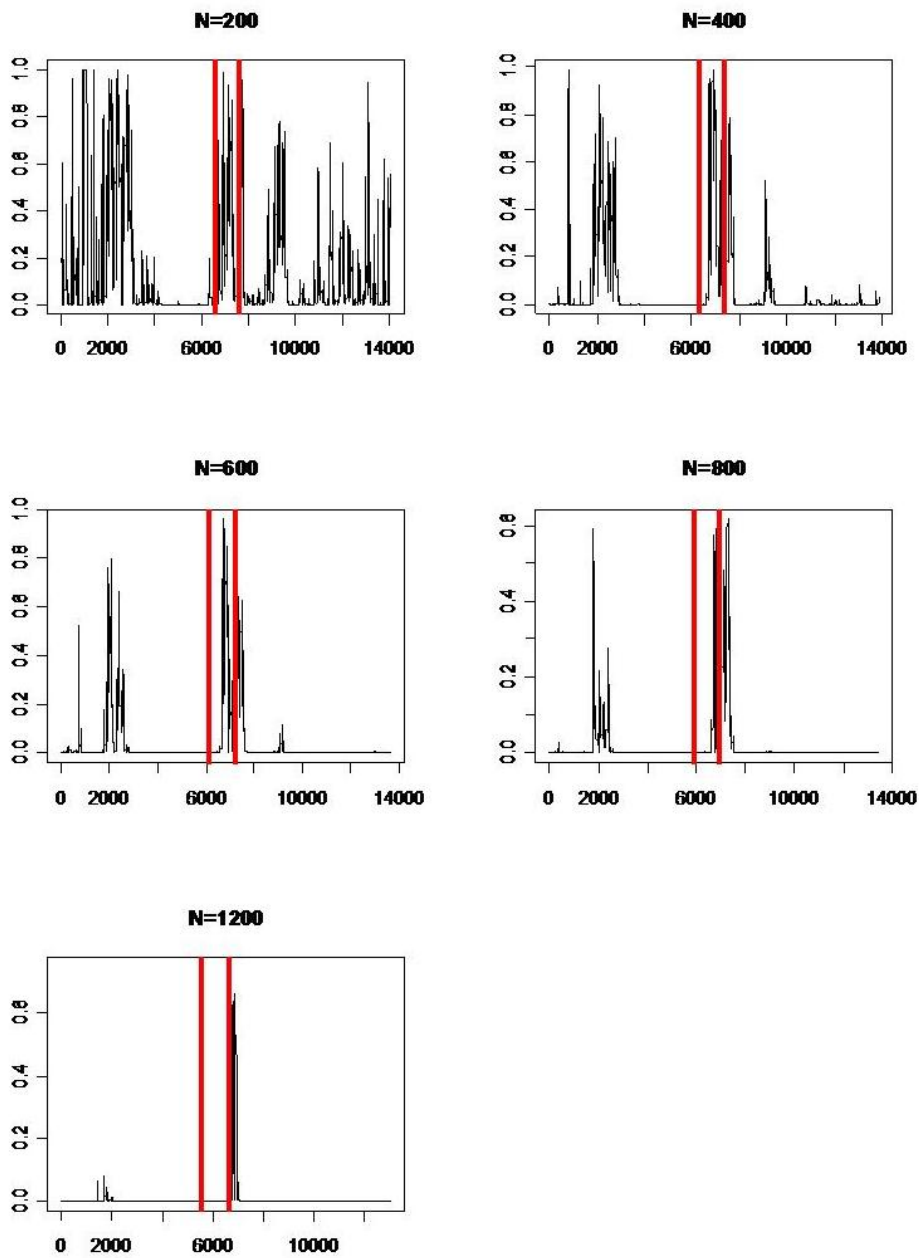


Figura 3.15: Paziente 6, modello ARIMA (0,2,2): grafici dei p-value del test di portemonteau ($K=15$) al variare di N .

In realtà, anche a fronte di questa considerazione, non è possibile calcolare il valore preciso di α . Considerando però come regione critica quella in cui rifiutiamo l'ipotesi nulla se almeno 1 p-value su M è minore di y , siamo in grado di ottenere una stima alla Bonferroni del valore di α dipende da y .

Più precisamente:

$$\alpha = P_{H_0}\left(\bigcup_{i=1}^M (p_i < y)\right) \leq \sum_{i=1}^M P_{H_0}(p_i < y) \leq \sum_{i=1}^M y = My$$

Quindi, se chiamiamo α^* il valore dell'errore di primo tipo desiderato, dovremo prendere y uguale a $\frac{\alpha^*}{M}$.

Presentiamo ora i risultati ottenuti seguendo una strategia molto conservativa, che è risultata essere la scelta migliore. Consideriamo il modello ARIMA (0,1,1) e $K = 5$, poichè non ci sono differenze significative al variare del modello e di K . Escludiamo inoltre $N = 200$ perché, essendo la numerosità del campione troppo bassa, si osservano numerosi errori del secondo tipo (segnalazione di fibrillazione quando il battito è regolare). Questo è dovuto al fatto che, con una bassa numerosità del campione, è più probabile concludere che una serie storica può essere realizzazione campionaria di un particolare tipo di modello quando in realtà non è così, in quanto la potenza diminuisce al decrescere di N .

3.3.3 Presentazione dei risultati

Consideriamo $M = 100$ e fissiamo y in modo tale da avere $\alpha \leq 0.01$. Otteniamo dunque $y = 0.0001$.

Costruendo dei grafici in cui assegniamo il valore 1 al mancato rifiuto del test e il valore 0 al rifiuto (ovvero 1 in presenza fibrillazione e 0 in assenza) è possibile visualizzare l'output del metodo costruito.

In figura (3.16), (3.17) e (3.18) vediamo i risultati ottenuti per tre dei nostri pazienti (gli altri casi sono tutti riconducibili a questi). Sono state sovrapposte due linee rosse per ogni grafico, che rappresentano inizio e fine reali dell'evento di fibrillazione, in modo da rendere apprezzabile l'efficacia del metodo di monitoraggio elaborato.

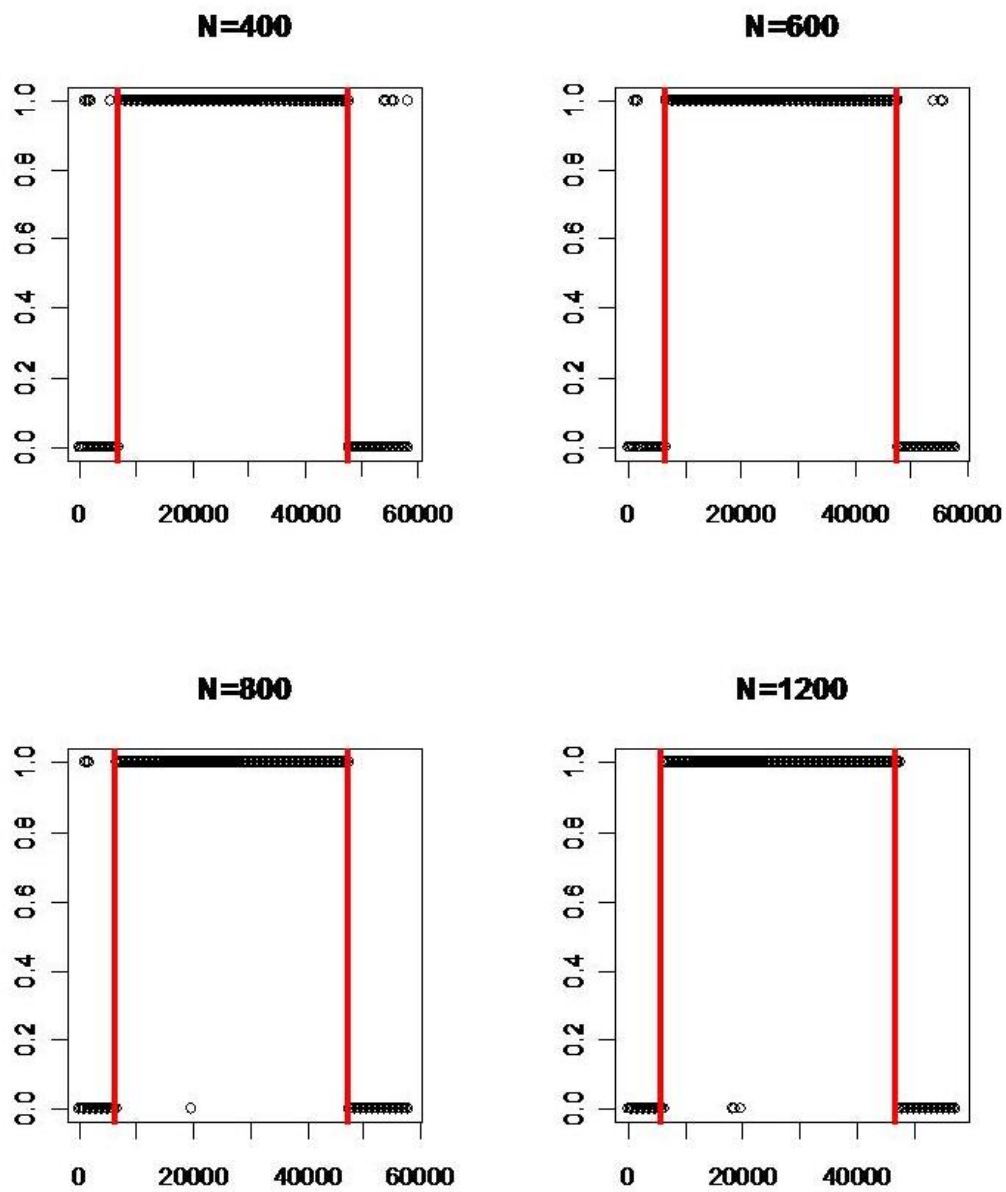


Figura 3.16: Paziente 1: identificazione della FA tramite il p-value del test di portmanteau con $K=5$ in riferimento al modello ARIMA $(0,1,1)$, al variare di N .

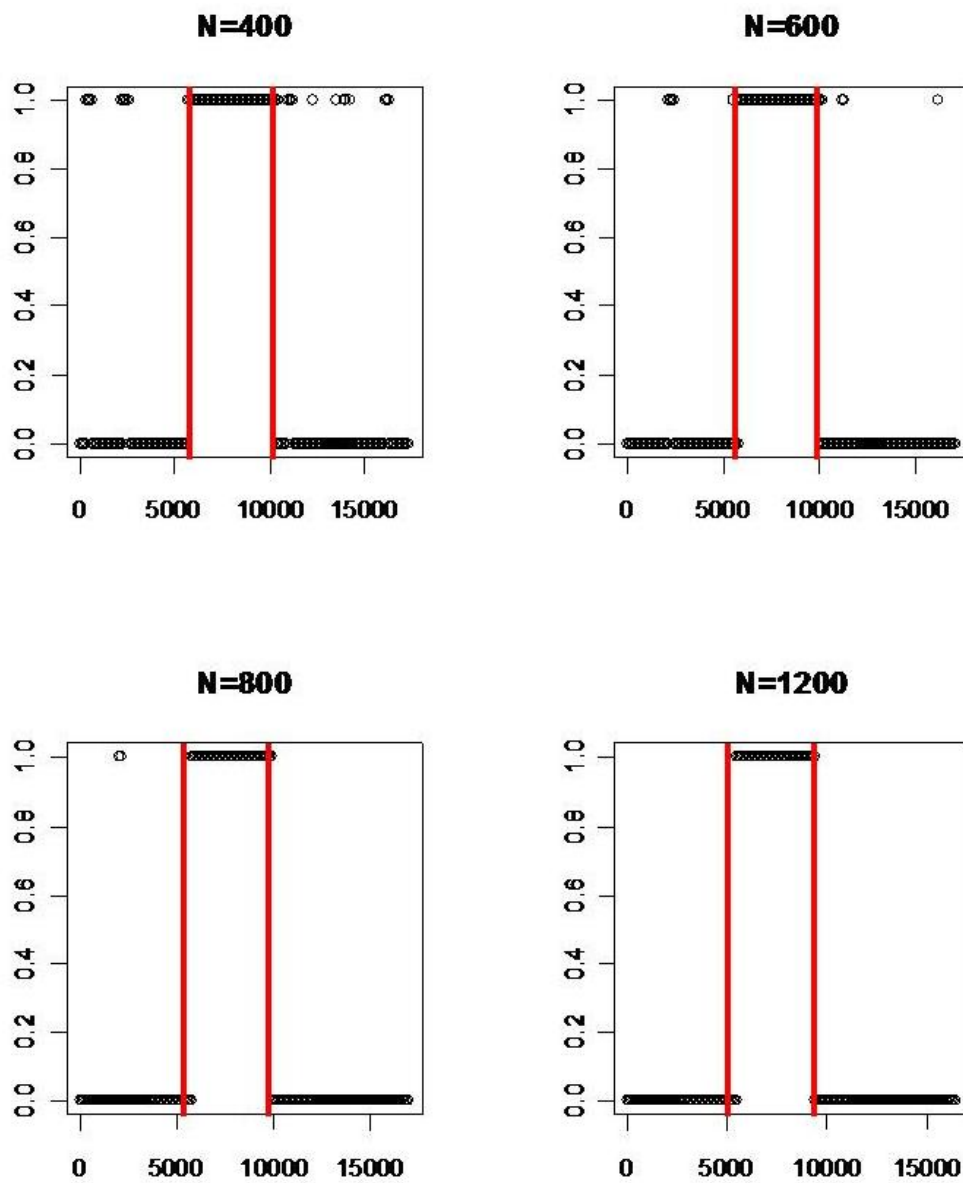


Figura 3.17: Paziente 5: identificazione della FA tramite il p-value del test di portmanteau con $K=5$ in riferimento al modello ARIMA $(0,1,1)$, al variare di N .

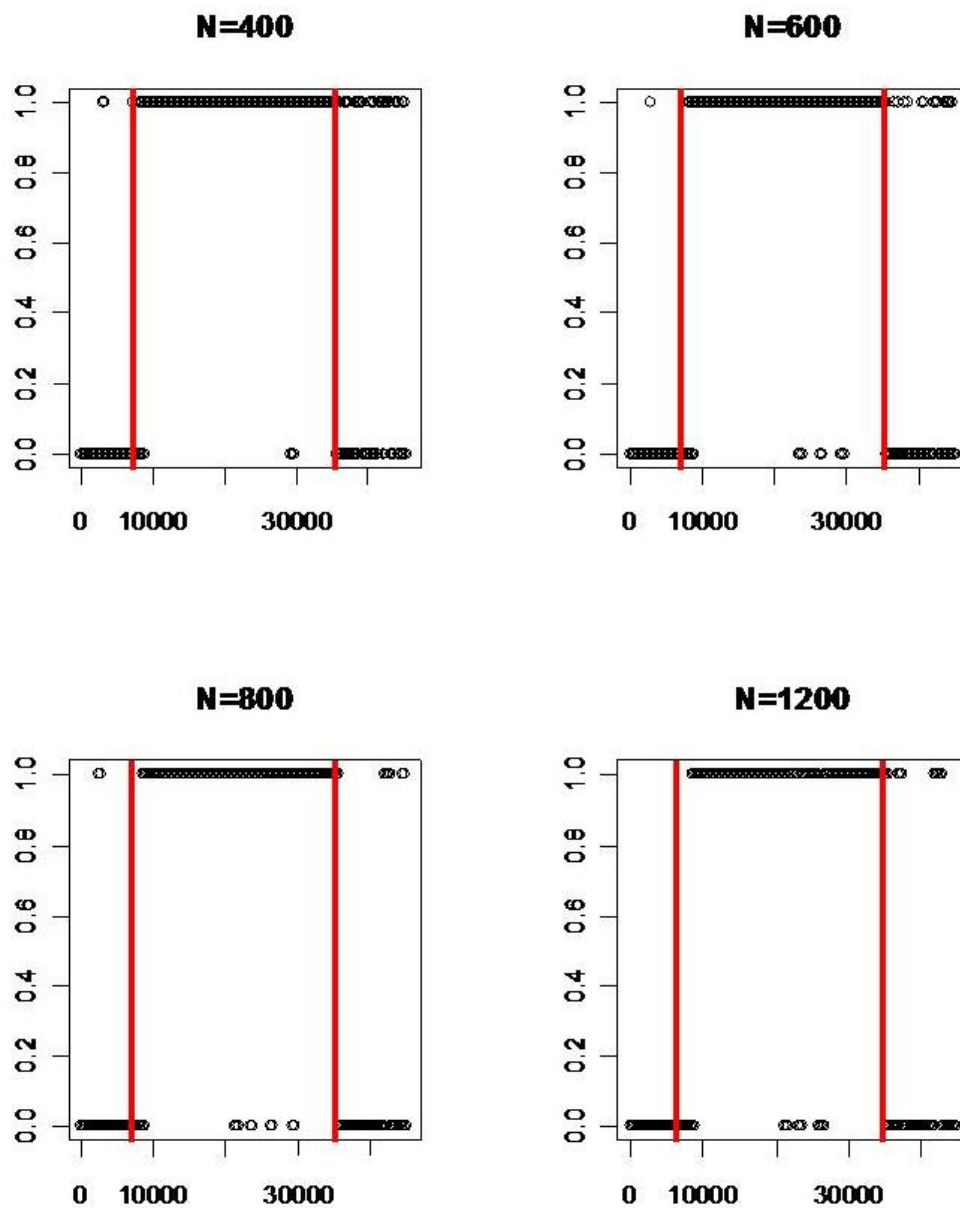


Figura 3.18: Paziente 8: identificazione della FA tramite il p-value del test di portmanteau con $K=5$ in riferimento al modello ARIMA $(0,1,1)$, al variare di N .

Già da una prima analisi esplorativa si possono trarre interessanti conclusioni:

- dalle Figure 3.18 e 3.17, relative ai pazienti numero 5 e 8, è possibile apprezzare l'aumento del ritardo nel segnalare l'evento di fibrillazione

al crescere di N . Questo potrebbe indurre a utilizzare $N = 400$ per avere una maggiore efficienza. Tuttavia è necessario considerare che, all'aumentare di N , si verifica una tendenza alla diminuzione degli errori di secondo tipo, come tutte e tre le figure mettono in luce.

Esiste quindi un *trade-off* nella scelta di N tra efficienza nel segnalare il ritardo ed errore di II tipo, che implica l'esistenza di una **scelta ottima** in tutte le situazioni.

Per quanto riguarda l'errore di primo tipo, invece, non vi è dipendenza da N , a conferma della correttezza del test effettuato.

- sebbene non in tutti i pazienti si riesca a cogliere graficamente l'entità del ritardo nella segnalazione del fenomeno, è comunque evidente come quest'ultimo sia ben catturato in tutti i soggetti studiati.
- in alcuni casi, come quello del paziente numero 8 (Figura 3.18), sono però presenti più oscillazioni tra 0 e 1 durante il periodo di Fibrillazione Atriale; in altri, come quello del paziente numero 1 (Figura 3.16), l'output del metodo utilizzato è molto più regolare.

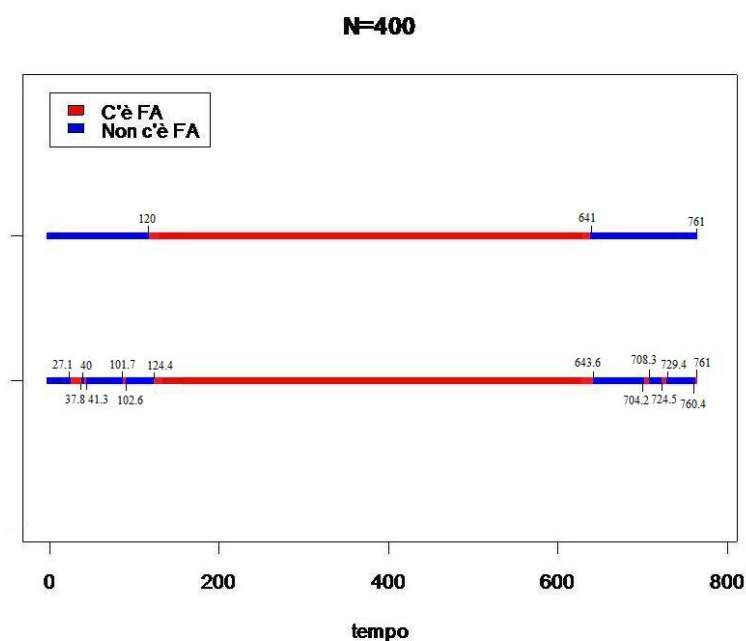


Figura 3.19: Paziente 1: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).

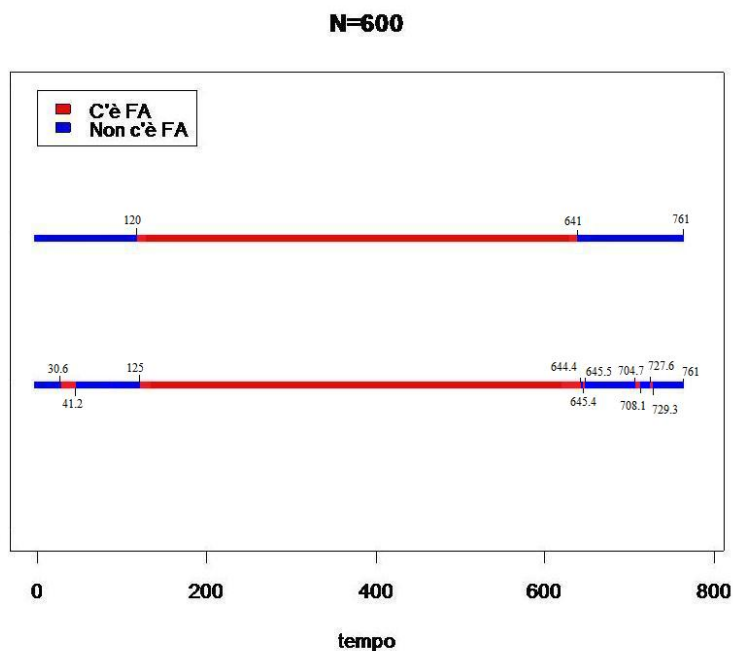


Figura 3.20: Paziente 1: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).

Cerchiamo ora di dare una descrizione più quantitativa dei risultati raggiunti, per meglio avere un'idea del ritardo con il quale il metodo descritto è in grado di segnalare l'inizio e la fine del fenomeno di Fibrillazione Atriale e per quantificare il numero dei falsi allarmi.

I grafici di Figura 3.19, 3.20, 3.21, 3.22 e 3.23 forniscono una prima idea sul ritardo di segnalazione e sul numero di falsi allarmi nel caso dei tre soggetti presentati, che ben rappresentano tutte le tipologie di pazienti analizzate in questo lavoro.

È però interessante affrontare comunque questi due problemi, ritardo di segnalazione e falsi allarmi, per tutti i soggetti a disposizione.

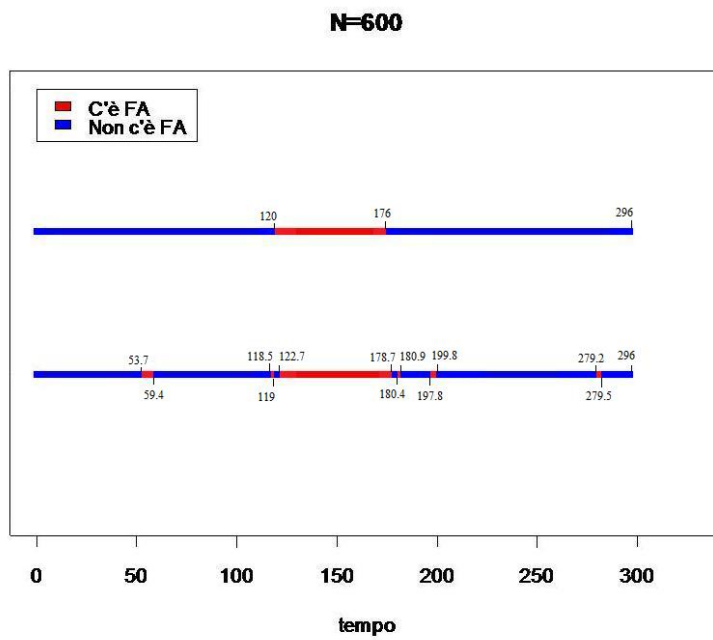


Figura 3.21: Paziente 5: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).

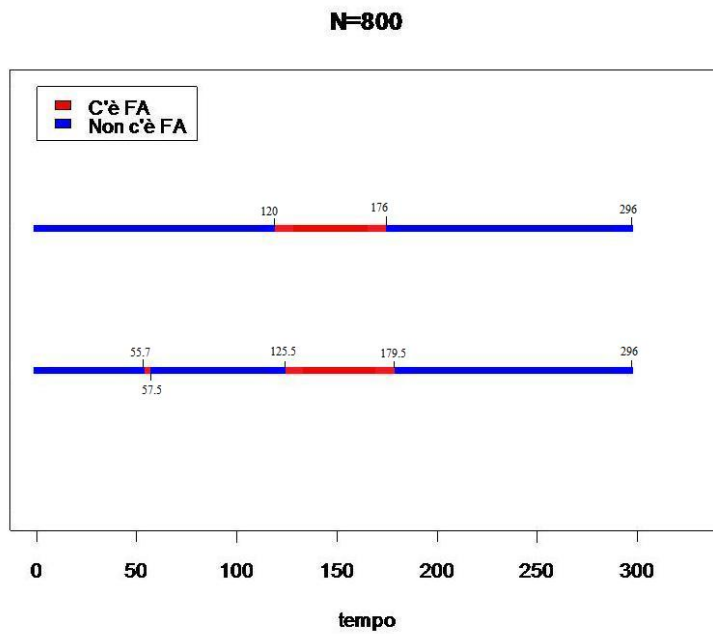


Figura 3.22: Paziente 5: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).

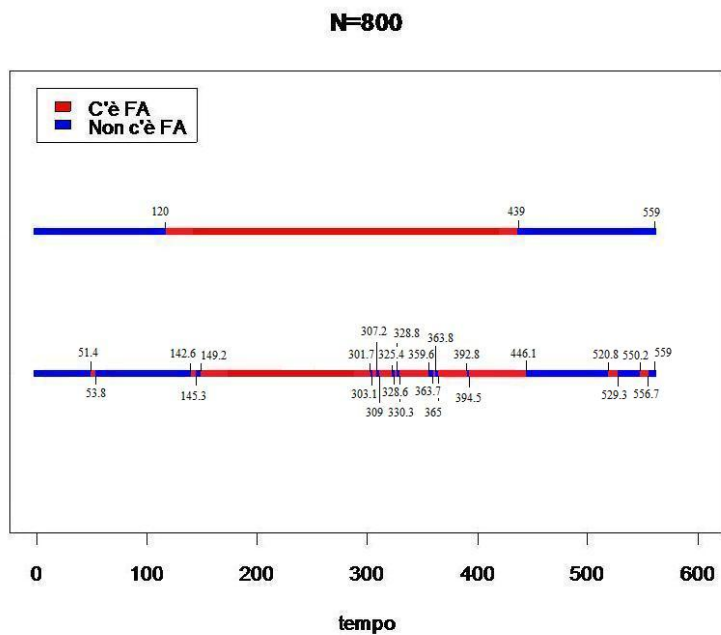


Figura 3.23: Paziente 8: situazione reale (sopra) e output del metodo (sotto).

3.3.4 Ritardo nella segnalazione della Fibrillazione Atriale

Cominciamo analizzando il ritardo con il quale il metodo presentato segnala l'inizio e la fine del fenomeno di Fibrillazione Atriale. In tutti i casi, infatti, nonostante la presenza di falsi allarmi, l'evento di Fibrillazione Atriale è ben catturato e siamo quindi in grado di determinare i tempi di ritardo.

Numero paziente	N=400	N=600	N=800	N=1200
1	4.4 min	5 min	5.4 min	7.9 min
2	4.2 min	6 min	6.6 min	7.3 min
3	-2.4 min	0.3 min	-4.6 min	0.8 min
5	-1.5 min	2.7 min	5.5 min	7.3 min
6	4 min	5.9 min	8.4 min	11.1 min
7	-2.2 min	1.1 min	1.1 min	8 min
8	16.8 min	16.9 min	29.2 min	33.8 min
10	4.8 min	5.6 min	7.7 min	11.2 min

Tabella 3.2: Ritardi nella segnalazione dell'inizio dell'evento di FA.

Numero paziente	N=400	N=600	N=800	N=1200
1	2.6 min	4.5 min	5.1 min	9.1 min
2	5.5 min	8.3 min	11.9 min	18.3 min
3	6.7 min	7.2 min	7.7 min	13.8 min
5	4.9 min	4.9 min	3.5 min	1.9 min
6	7.3 min	9.7 min	9.6 min	10.3 min
7	-1.8 min	-6.4 min	-5.7 min	-5.3 min
8	3.2 min	4.8 min	7 min	9.9 min
10	19.1 min	5.3 min	7.1 min	11.2 min

Tabella 3.3: Ritardi nella segnalazione della fine dell'evento di FA.

Nelle Tabelle 3.2 e 3.3 è possibile apprezzare i tempi di ritardo nel segnalare l'inizio e la fine del fenomeno al variare di N .

In queste tabelle non si fa però riferimento alla durata dell'evento di fibrillazione, che sarebbe invece utile per poter avere un'idea dell'efficacia del metodo utilizzato. Per dare una migliore descrizione della bontà dei risultati ottenuti, quindi, può essere utile osservare la Tabella 3.4, dove è possibile apprezzare tutti i ritardi percentuali rispetto alla durata della Fibrillazione Atriale di ciascun paziente.

Se escludiamo il paziente numero 6, la cui aritmia dura 13 minuti ed è quindi comprensibile un'alta percentuale del ritardo, questo metodo porta in generale ad un veloce riconoscimento del fenomeno di Fibrillazione Atriale.

Numero paziente	Ritardo min (inizio)	Ritardo max (inizio)	Ritardo min (fine)	Ritardo max (fine)
1	0.8%	1.5%	0.5%	1.7%
2	0.7%	1.2%	0.9%	3%
3	-1.1%	0.2%	1.5%	3.2%
5	-2.7%	13%	3.4%	8.8%
6	30.8%	85.4%	56.2%	79.2%
7	-0.5%	1.8%	-1.4%	-0.4%
8	5.3%	10.6%	1%	3.1%
10	2.1%	4.9%	2.3%	8.3%

Tabella 3.4: Percentuali dei ritardi massimi e minimi rispetto alla scelta di N nella segnalazione dell'inizio e della fine dell'evento di FA.

Dall'osservazione della Tabella 3.4 concludiamo quindi che, per quanto riguarda il ritardo nella segnalazione del fenomeno di Fibrillazione Atriale, la tecnica presentata e analizzata in precedenza fornisce buoni risultati.

3.3.5 Falsi allarmi

Passiamo ora ad analizzare il secondo dei due problemi che erano sorti da una prima analisi dei risultati, ovvero quello dei falsi allarmi. Pur catturando molto bene l'evento di fibrillazione, infatti, per alcuni pazienti si verificano molte oscillazioni indesiderate tra 0 e 1, anche se di durata ridotta. Per ridurre in parte questo fenomeno possiamo pensare di fissare un breve tempo di attesa prima di confermare il passaggio da 0 a 1 e viceversa. Per stabilire la durata di questo tempo d'attesa è necessario trovare un compromesso tra la diminuzione dei falsi all'armi e il ritardo nella segnalazione della fibrillazione (è infatti evidente che, ponendo 20 minuti come tempo d'attesa, probabilmente elimineremmo tutti i falsi allarmi, ma, in alcuni casi, decuplicheremmo il ritardo di segnalazione).

I risultati che si ottengono considerando un tempo di attesa di 3 minuti sono mostrati nelle Tabelle 3.5 e 3.6, che contengono il numero di errori di primo e secondo tipo per ogni paziente prima e dopo l'introduzione del tempo d'attesa scegliendo rispettivamente $N = 600$ e $N = 800$. Tale numero di errori è sempre rapportato alla durata della fibrillazione nel paziente.

Paziente	Errori I tipo (pre)	Errori I tipo (post)	Errori II tipo (pre)	Errori II tipo (post)	Durata FA (min)
1	1	0	3	2	521
2	0	0	0	0	613
3	17	6	1	1	433
5	1	0	4	1	56
6	0	0	5	3	13
7	23	6	4	1	442
8	7	0	10	3	319
10	0	0	10	5	229
Totale	49	12	37	16	

Tabella 3.5: Numero degli errori pre e post tempo d'attesa e durata dell'evento di fibrillazione nel caso di $N = 600$.

Paziente	Errori I tipo (pre)	Errori I tipo (post)	Errori II tipo (pre)	Errori II tipo (post)	Durata FA (min)
1	1	0	1	1	521
2	2	0	0	0	613
3	22	5	1	0	433
5	0	0	1	0	56
6	0	0	2	2	13
7	22	5	1	1	442
8	7	2	4	2	319
10	1	0	7	1	229
Totale	55	12	17	7	

Tabella 3.6: Numero degli errori pre e post tempo d'attesa e durata dell'evento di fibrillazione nel caso di $N = 800$.

Si può osservare come l'introduzione del tempo di attesa comporti una diminuzione consistente del numero di errori, mentre l'aumento di N provoca una riduzione dei soli errori di II tipo.

La durata del fenomeno è importante per poter confrontare il numero di errori del primo tipo tra due o più pazienti. Infatti, se gli errori di secondo tipo (segnalare fibrillazione quando non c'è) sono confrontabili tra i vari pazienti, in quanto in tutti i casi abbiamo a disposizione quattro ore di battito fisiologico (due ore pre-FA e due post-FA), non si può dire lo stesso degli errori di primo tipo (non segnalare fibrillazione quando invece c'è) a causa delle differenti durate dell'evento di Fibrillazione Atriale.

Numero paziente	Percentuale tempo d'attesa
1	0.58%
2	0.49%
3	0.69%
5	5.36%
6	23.08%
7	0.68%
8	0.94%
10	1.31%

Tabella 3.7: Valore del tempo d'attesa in percentuale sul totale della durata dell'evento di fibrillazione per i pazienti analizzati.

Per poter effettivamente verificare come il tempo d'attesa non influisca eccessivamente sul ritardo di segnalazione, mostriamo in Tabella 3.7 a quanto corrispondono 3 minuti in percentuale sulla durata del fenomeno di fibrillazione in ogni singolo paziente.

3.4 Conclusioni

Dall'analisi presentata in questo capitolo possiamo trarre interessanti conclusioni.

Il primo risultato raggiunto è stata l'identificazione di un modello per gli intervalli RR durante la Fibrillazione Atriale. Abbiamo infatti visto come i modelli ARIMA (0,1,1) e (0,2,2) sembrano ben catturare l'andamento degli intervalli RR durante tale fenomeno.

A partire dalla scelta di questi due modelli per gli intervalli RR durante FA, abbiamo individuato un metodo per l'identificazione in tempi brevi della comparsa di Fibrillazione Atriale.

Anche dal punto di vista del monitoraggio continuo abbiamo ottenuto buoni risultati. In tutti i pazienti analizzati, infatti, il metodo presentato in questo capitolo riesce a catturare l'evento di Fibrillazione Atriale. Siamo poi passati all'analisi del ritardo con cui vengono segnalati inizio e fine del fenomeno, raggiungendo risultati più che soddisfacenti, soprattutto per bassi valori di N .

In ultimo abbiamo affrontato il problema dei falsi allarmi, che in alcuni casi erano troppo numerosi. Per risolverlo abbiamo introdotto un tempo d'attesa, nello specifico della durata di 3 minuti, prima del quale non viene segnalato il cambiamento. Così facendo i falsi allarmi si sono più che dimezzati e le prestazioni riguardanti il ritardo di segnalazione della Fibrillazione Atriale non sono state compromesse.

In un'ultima analisi possiamo dire che i valori di N per i quali si ottiene un buon compromesso tra ritardo di segnalazione e numero di falsi allarmi sono 600 e 800, anche se è bene sottolineare come non esista una scelta sempre ottimale. Ogni situazione deve essere valutata singolarmente e la scelta di N deve essere fatta in base alle finalità del problema in questione.

Fino ad ora abbiamo lavorato con i p-value del test di Ljung-Box e non direttamente con le serie storiche degli intervalli RR. Nei prossimi capitoli studieremo tecniche statistiche particolari per mezzo delle quali analizzeremo tali serie temporali, cercando di perfezionare ulteriori tecniche che diano buoni risultati nell'individuazione della Fibrillazione Atriale a partire dai valori degli intervalli RR.

Capitolo 4

Controllo statistico di processo

In questo capitolo studieremo il controllo statistico di processo e in particolare l'utilizzo delle carte di controllo, uno strumento statistico fondamentale nell'ambito del controllo della qualità di un processo produttivo [2].

Nelle sezioni seguenti vedremo come queste tecniche ci permettano di studiare gli intervalli RR durante la Fibrillazione Atriale.

Generalmente è difficile ispezionare o verificare la qualità di un prodotto: sarebbe meglio avere un prodotto che sia qualitativamente accettabile già in fase di produzione. Questo richiede che il processo produttivo sia stabile e che si cerchi continuamente il miglioramento del processo produttivo e la riduzione della variabilità dei fattori coinvolti nella produzione. L'SPC (*Statistical Process Control*) è la metodologia primaria per conseguire tale risultato e le carte di controllo sono lo strumento più semplice per definire una procedura di controllo statistico di processo.

4.1 Teoria e metodi del controllo statistico di un processo produttivo

Perché un prodotto possa soddisfare le esigenze dei consumatori, deve essere il risultato di un processo produttivo stabile e ripetibile. Per raggiungere tale scopo il processo deve essere in grado di produrre pezzi tali che la variabilità del valore nominale specifico del prodotto sia la più bassa possibile.

Ogni processo produttivo è sempre soggetto ad una certa variabilità intrinseca o naturale. Questo rumore di fondo è il risultato dell'effetto cumulato di molti piccoli, ma ineliminabili, fattori costanti o casuali. Un processo la cui variabilità sia provocata solo da fattori casuali verrà detto sotto controllo. Possono però esistere altri fattori che influenzano la variabilità dei prodotti

e che possono essere solo occasionalmente presenti nel processo produttivo. Inoltre può essere che la variabilità introdotta da questi fattori sia molto più evidente di quella prodotta dai fattori casuali e potrebbe dar luogo ad una prestazione del processo inaccettabile. Le fonti di variabilità che non sono riconducibili a fattori casuali vengono chiamate fattori specifici. Un processo che stia funzionando in presenza di fattori specifici verrà detto fuori controllo.

Quando un processo è sotto controllo, la maggior parte dei valori della grandezza oggetto di controllo cade tra i *limiti di specifica* superiore e inferiore (indicati con *USL* e *LSL* rispettivamente); invece, quando il processo è fuori controllo, un elevato numero di determinazioni campionarie cade al di fuori di queste specifiche.

L'obiettivo primario del controllo statistico di un processo produttivo è di individuare il più velocemente possibile il verificarsi di fattori specifici. Le carte di controllo sono lo strumento maggiormente usato per questi scopi. Analizziamo quindi, nei paragrafi successivi, i criteri statistici che costituiscono le basi delle carte di controllo.

4.1.1 Fondamenti statistici delle carte di controllo

Una tipica carta di controllo è quella riportata in Figura 4.1, che descrive una certa qualità di un prodotto misurata in diversi istanti temporali. La carta riporta una linea centrale che rappresenta il valor medio della qualità e due ulteriori linee orizzontali chiamate limite di controllo superiore (UCL, *Upper Control Limit*) e inferiore (LCL, *Lower Control Limit*). Questi limiti di controllo vengono scelti in modo tale che, se il processo è sotto controllo, quasi tutti i valori campionari cadranno al loro interno. Se un punto cade al di fuori di tali limiti, questo dovrà essere interpretato come un'evidenza del fatto che il processo è fuori controllo.

In realtà può anche capitare il caso in cui tutti i punti cadono all'interno dei limiti di controllo pur non essendo il processo sotto controllo. Tale situazione si manifesta con una sequenza di punti avente un andamento sistematico o non casuale. Ad esempio, se 18 degli ultimi 20 punti si sono posizionati tra la linea centrale e l'UCL, allora si dovrebbe sospettare un aumento del livello del processo ritenendolo, quindi, fuori controllo. Infatti se il processo è sotto controllo ci si deve aspettare un comportamento casuale dell'andamento dei punti.

C'è uno stretto legame tra carte di controllo e test d'ipotesi. Per illustrare questo legame si supponga che la caratteristica di qualità monitorata in Figura 4.1 sia la media campionaria \bar{X} . Se il valore di \bar{X} cade tra i limiti di

controllo concluderemo che la media del processo è sotto controllo, ovvero è pari ad un valore μ_0 . Se invece \bar{X} supera uno dei due limiti concluderemo che la media del processo è pari ad un valore $\mu_1 \neq \mu_0$. Una carta di controllo corrisponde quindi ad un test del tipo:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

e verifica l'ipotesi che il processo sia sotto controllo.

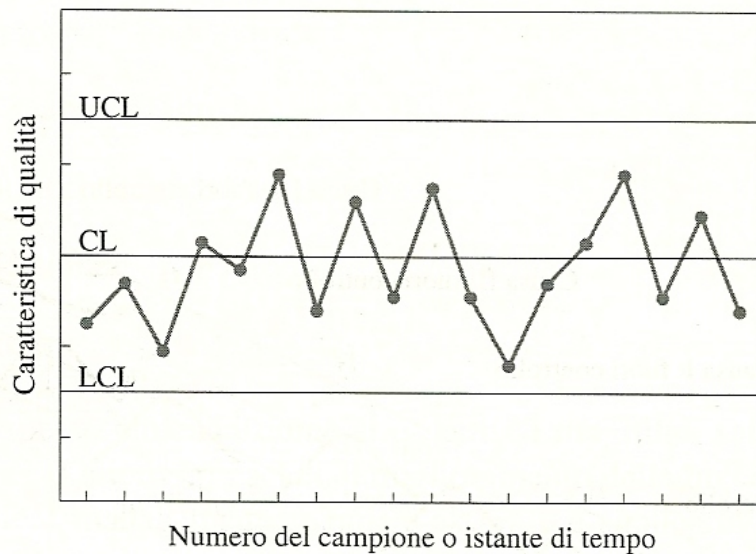


Figura 4.1: Esempio di carta di controllo.

Esistono comunque delle differenze tra carte di controllo e test d'ipotesi. Un segnale di fuori controllo, infatti, come abbiamo visto precedentemente, può manifestarsi in diversi modi all'interno di una carta di controllo senza che si verifichi una fuoriuscita dei punti dai limiti di controllo. La teoria relativa ai test d'ipotesi, però, può risultare utile per valutare l'efficacia di una carta di controllo. Pensiamo ad esempio alla probabilità dell'errore di I tipo (concludere che un processo è fuori controllo quando in realtà è sotto controllo) e alla probabilità dell'errore di II tipo (concludere che un processo è sotto controllo quando in realtà non lo è).

Un altro strumento utilizzato nell'analisi delle carte di controllo è la curva operativa caratteristica che rappresenta l'andamento della probabilità dell'errore di II tipo in funzione dei diversi scostamenti del parametro del processo dal valore obiettivo. L'uso della curva operativa caratteristica fornisce un'indicazione della sensibilità della carta di controllo a individuare il più

velocemente possibile tali scostamenti.

Possiamo ora proporre uno schema generico di carta di controllo. Sia W una statistica che misura una certa caratteristica e si supponga che abbia media μ_w e deviazione standard σ_w . Allora l'UCL, la linea centrale (CL) e l'LCL saranno:

$$UCL = \mu_w + L\sigma_w$$

$$CL = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - L\sigma_w$$

dove L è la distanza dei limiti di controllo dalla linea centrale, espressa in unità di deviazioni standard.

Le carte di controllo costruite secondo questi criteri vengono chiamate **carte di controllo di Shewhart**.

4.1.2 Scelta dei limiti di controllo

La definizione dei limiti di controllo è uno dei passaggi più critici nella progettazione di una carta. Quanto più i limiti vengono posizionati lontano dalla linea centrale della carta di controllo, tanto minore sarà la probabilità di commettere un errore del I tipo. D'altro canto l'ampliare i limiti comporta una aumento della probabilità di commettere un errore del II tipo. Avvicinando i limiti alla linea centrale, invece, si otterrà l'effetto opposto.

Esistono due possibili scelte diverse per stabilire il valore di L . Una è quella di scegliere direttamente il valore della distanza in termini di deviazioni standard alla quale posizionare i limiti. A questo punto, supponendo per esempio che la grandezza in questione segua un andamento gaussiano, è possibile determinare l'errore di I tipo utilizzando le tavole della normale. Se scegliamo di posizionare i limiti a 3 deviazioni standard di distanza dalla linea centrale, li chiameremo *limiti a 3-sigma*.

In alternativa possiamo prima scegliere il livello del test e, in base a questo, calcolare il valore di L . Se ad esempio scegliamo come livello $\alpha = 0.001$ i limiti di controllo prenderanno il nome di *limiti con probabilità 0.001*.

Da questo punto in poi consideriamo sempre verificata l'ipotesi di normalità.

4.1.3 Dimensione del campione e frequenza di campionamento

Generalmente una carta di controllo viene utilizzata per verificare se una certa caratteristica dell'oggetto in questione si mantiene ad un determinato

livello desiderato. Di conseguenza fondamentale risulta essere lo studio della carta di controllo che monitora la media campionaria \bar{X} .

Nel progettare una carta di controllo per \bar{X} , bisogna specificare la dimensione del campione e la frequenza di campionamento. In generale, quanto più grande è il campione, tanto più facile sarà individuare piccoli scostamenti del processo dal valore di riferimento. La situazione ideale sarebbe quella di poter esaminare grandi campioni di frequente, ma questa non sempre è una scelta possibile.

Due strumenti utili per calcolare la dimensione campionaria e la frequenza di campionamento ottimali sono la lunghezza media delle sequenze (ARL, *Average Run Length*) e il tempo medio al segnale (ATS, *Average Time to Signal*).

L'ARL è il numero medio di punti che devono essere osservati prima che un punto cada al di fuori dei limiti di controllo e per la carta di controllo di Shewhart può essere calcolato facilmente con la seguente formula:

$$ARL = \frac{1}{p}$$

dove p è la probabilità che un punto superi i limiti di controllo. Se interpretiamo come successo l'osservazione di un punto fuori dai limiti di controllo l'ARL corrisponde infatti alla media di una geometrica di parametro p , $\frac{1}{p}$ appunto. Per la carta di controllo con limiti a 3-sigma, quando il processo è sotto controllo, $p = 0.0027$ e quindi l'ARL (che in questo caso chiameremo ARL_0) vale 370, ovvero un segnale di fuori controllo (da interpretarsi come falso allarme) si presenterà in media ogni 370 campioni.

Il tempo medio al segnale ATS, invece, è dato dal prodotto dell'ARL per l'intervallo medio intercorrente tra due campioni e indica il tempo medio intercorrente tra due segnali di fuori controllo.

Per verificare l'efficacia di una carta nell'individuare un processo fuori controllo è possibile calcolare l'ARL e l'ATS per diversi valori di scostamento del processo dalla media. Se il valore dell'ATS è troppo elevato possiamo, a seconda dei casi, aumentare la dimensione del campione e/o la frequenza di campionamento, riducendo così il valore dell'ARL e, di conseguenza, quello dell'ATS.

4.1.4 Analisi degli andamenti tipici di una carta di controllo

Una carta di controllo può indicare una situazione di fuori controllo sia quando uno o più punti cadono oltre i limiti di controllo, sia quando l'andamento

descritto dai punti, pur rimanendo all'interno dei limiti, non è casuale.

Ad esempio, se abbiamo una successione di punti sempre crescenti (o decrescenti), questa successione viene chiamata *sequenza* e sequenze molto lunghe possono essere un segnale che il processo non è più sotto controllo. Anche l'alternanza di punti uno sopra e uno sotto la linea centrale è considerata una sequenza.

In letteratura (per approfondimenti si veda [2]) sono presenti alcune regole decisionali per l'individuazione di comportamenti anomali. Tali regole non sono giustificabili da un procedimento rigoroso dal punto di vista matematico, ma sono state sviluppate con l'esperienza. In particolare un processo è da stabilirsi fuori controllo se:

1. un punto cade al di fuori dei limiti a 3-sigma;
2. due punti su tre consecutivi cadono oltre la distanza di 2-sigma dalla linea centrale e sono dalla stessa parte rispetto a quest'ultima;
3. quattro punti su cinque consecutivi cadono oltre la distanza di 1-sigma dalla linea centrale e dalla stessa parte rispetto a quest'ultima;
4. otto punti consecutivi cadono tutti dalla stessa parte della linea centrale;
5. quindici punti consecutivi sono ad una distanza minore di 1-sigma dalla linea centrale (sia sopra che sotto).

L'uso di tali criteri aumenta l'efficacia della carta di controllo e consente un'individuazione di situazioni anomale più veloce di quanto non accadrebbe se ci si basasse solo sul criterio del superamento dei limiti posti a 3-sigma. Tuttavia, quando vengono usati contemporaneamente, si è soliti dare un'interpretazione cauta ai segnali di fuori controllo.

Si supponga infatti di utilizzare k regole decisionali e che la regola decisionale i -esima abbia probabilità di errore di I tipo uale ad α_i . L'errore globale di I tipo è dunque:

$$\alpha = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$$

nell'ipotesi che le k regole decisionali siano indipendenti. Tuttavia l'ipotesi di indipendenza tra le regole decisionali non è sempre valida. In generale l'utilizzo di più regole decisionali migliora la capacità della carta di individuare piccoli scostamenti, ma l'ARL₀ peggiora sensibilmente.

4.1.5 Fase I e fase II dell'applicazione delle carte di controllo

L'uso delle carte di controllo standard coinvolge due fasi distinte, caratterizzate da due differenti obiettivi. Nella fase I si esegue un'analisi preliminare del processo: si raccoglie e si analizza un insieme retrospettivo di dati del processo al fine di determinare se rappresentano una situazione in stato di controllo e costruire quindi limiti di controllo attendibili per monitorare correttamente la produzione futura. Le carte di controllo sono utilizzate quindi in fase I per isolare sequenze di dati del processo in stato di controllo statistico.

Nella fase II, invece, usiamo le carte di controllo per monitorare il processo confrontando la statistica campionaria per ogni campione estratto dal processo, con i limiti di controllo stabiliti in fase I.

In fase I viene scelto un determinato numero di sottogruppi. Vengono stabiliti dei limiti di controllo preliminari, basandosi sui sottogruppi scelti. I punti che sono al di fuori dei limiti vengono analizzati alla ricerca delle cosiddette cause assegnabili che devono essere quindi eliminate. A questo punto vengono scartati i punti anomali e ricalcolati i nuovi limiti di controllo, fino a che il processo non risulta essere sotto controllo.

Nella fase II, invece, si utilizzano i limiti precedentemente costruiti per monitorare il processo ad istanti successivi. Spesso le cause assegnabili che si verificano in questa fase sono costituite da limitati spostamenti di livello poiché, in teoria, la maggior parte delle fonti di variabilità dovrebbero essere state individuate durante la fase I.

Generalmente le carte di Shewhart sono molto efficienti in fasi I e sono facili sia da costruire sia da interpretare. I tipi di cause assegnabili che si verificano solitamente nella fase I sono costituiti da scostamenti dei livelli del processo abbastanza elevati, esattamente lo scenario in cui la carta di controllo di Shewhart è più efficace.

Nella fase II, al contrario, le carte di Shewhart possono essere meno efficienti, poiché esse non sono molto sensibili nell'individuare moderati scostamenti e i risultati in termini di ARL non sono molto soddisfacenti. È molto più probabile che, in fase II, le carte a somme cumulate o le carte EWMA (che non verranno analizzate in questo lavoro, per ulteriori informazioni si veda [2]) siano più efficienti.

A seguito di questa panoramica introduttiva sulle carte di controllo, nelle sezioni che seguono ci occuperemo nel dettaglio di due tipologie specifiche: la carta \bar{X} , per il controllo della media, e le carte R ed S per il monitoraggio della variabilità di un processo.

4.2 Carte di controllo per variabili

Le carte di controllo introdotte nella sezione precedente possono essere usate in due modi, a seconda della caratteristica della variabile oggetto di studio. Se la quantità in questione è rappresentabile su una scala continua di valori, viene detta *variabile* ed è possibile descriverla con una misura di centralità e una di variabilità. Le carte di controllo per la centralità e la variabilità di un processo vengono chiamate *carte di controllo per variabili*. La carta per la media campionaria \bar{X} è la più usata per controllare la centralità del processo, invece le carte basate sul range campionario R o sulla deviazione standard campionaria S sono quelle più usate per controllare la variabilità. Nei prossimi paragrafi analizzeremo nel dettaglio queste carte.

In alcuni casi, però, molte caratteristiche non possono essere misurate né su scala continua né su scale genericamente quantitative. In questi casi ciascuna unità prodotta viene valutata conforme a seconda che possieda o meno certi attributi o a seconda del numero di difetti presenti nell'unità prodotta. Le carte di controllo costruite sulla base di queste grandezze vengono chiamate *carte di controllo per attributi* e non verranno analizzate in questo lavoro (per approfondimenti si veda [2]).

4.2.1 Carte di controllo \bar{X} e R/S : costruzione e uso

Abbiamo visto finora i motivi per cui risulta ragionevole pensare di utilizzare una carta per la media campionaria \bar{X} al fine di verificare che il processo sia sotto controllo. Questa carta però non basta da sola a determinare lo stato di un processo. La variabilità della quantità analizzata, infatti, è anch'essa un fattore determinante nell'analisi di un processo produttivo. Non si può quindi prescindere dall'utilizzo di una carta di controllo per la variabilità della grandezza in esame. Vediamo ora nel dettaglio la costruzione e l'uso delle carte di controllo.

Si supponga che una variabile quantitativa X sia distribuita secondo la legge normale con media μ e varianza σ^2 . Se indichiamo con X_1, \dots, X_n un campione di dimensione n proveniente da X , allora la media campionaria:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Si dimostra che \bar{X} ha distribuzione normale con media μ e varianza $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Da questo segue che la probabilità che un'altra media da un campione di dimensione n cada tra

$$\mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.1)$$

e

$$\mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.2)$$

è uguale a $1 - \alpha$ (nelle Equazioni 4.1 e 4.2 è stata usata la notazione tale per cui $Z_{\alpha/2}$ è il punto percentile di ordine $\alpha/2$, ovvero il punto tale per cui $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$). Di conseguenza, sostituendo $Z_{\alpha/2}$ con 3 possiamo interpretare le equazioni 4.1 e 4.2 come limiti di controllo a 3-sigma, condizionatamente al fatto di conoscere i valori di μ e σ^2 . Di fatto, però, quest'ultima ipotesi non è quasi mai soddisfatta. Questi parametri devono quindi essere stimati sulla base di un certo numero di campioni preliminari estratti in un periodo in cui il processo viene ritenuto sotto controllo (periodo che in precedenza abbiamo chiamato fase I). Si supponga che, in questa fase, siano disponibili m campioni, tutti di dimensione campionaria n . Allora il miglior stimatore della media è la media delle medie degli m campioni:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}$$

e $\bar{\bar{X}}$ verrà usata come linea centrale nella carta di controllo \bar{X} .

Per costruire i limiti di controllo abbiamo tuttavia bisogno anche di una stima della deviazione standard σ . A questo scopo è possibile utilizzare le deviazioni standard o i range degli m campioni considerati. Concentriamoci inizialmente sul metodo basato sui range.

Ricordiamo innanzi tutto che, dato un campione x_1, \dots, x_n , il range del campione è dato da:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Siano ora R_1, \dots, R_m i range degli m campioni. Definiamo il range medio come:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

Consideriamo ora il quoziente tra range campionario e deviazione standard di una variabile aleatoria normale, chiamata anche range relativo:

$$W = \frac{R}{\sigma}$$

Si può dimostrare che questa quantità ha una distribuzione nota che dipende dalla dimensione campionaria e che la sua media è $E[W] = d_2$, funzione nota della dimensione campionaria (la costante d_2 e tutte le altre costanti introdotte in seguito sono tabulate in Appendice A), quindi come stima di σ possiamo utilizzare:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

A questo punto possiamo definire i limiti di controllo a 3-sigma per la carta \bar{X} :

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ UCL &= \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se definiamo $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ possiamo scrivere le equazioni 4.3 in forma più compatta:

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ UCL &= \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Consideriamo ora la carta R . La deviazione standard di R , σ_R , necessaria per poter costruire i limiti di controllo della carta R , si può ricavare analizzando la distribuzione di W . Si può dimostrare che $\sigma_W = d_3$, dove d_3 è una funzione nota della dimensione campionaria n ed essendo $R = W\sigma$ ricaviamo che $\sigma_R = d_3\sigma$. Sostituendo σ con la sua stima $\hat{\sigma}$ descritta in precedenza, possiamo determinare i limiti di controllo a 3-sigma per la carta R :

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} \\ CL &= \bar{R} \\ UCL &= \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se definiamo le costanti $D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}$ e $D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$ possiamo scrivere le equazioni 4.5 in forma più compatta:

$$\begin{aligned} LCL &= D_3\bar{R} \\ CL &= \bar{R} \\ UCL &= D_4\bar{R}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Quando iniziarono a svilupparsi le teorie relative alle carte di controllo, il metodo del range per la stima di σ veniva usato al fine di semplificare i calcoli necessari per la costruzione dei limiti di controllo. Attualmente la

disponibilità di computer e di software specifici consente di impiegare metodi di stima computazionalmente più onerosi ma statisticamente più efficienti. Tuttavia, se la dimensione del campione è sufficientemente piccola, la stima di σ utilizzando il range è pressoché uguale a quella ottenibile con la varianza campionaria S^2 . All'aumentare di n , però, la situazione peggiora sensibilmente, ovvero l'efficienza relativa tra la stima di σ ottenuta tramite il range e quella che fa riferimento alla varianza campionaria diminuisce al crescere di n . Quando n è grande, quindi, sarebbe meglio utilizzare la carta di controllo S per monitorare la variabilità del processo e la varianza campionaria nella determinazione dei limiti di controllo della carta \bar{x} .

È noto che, se σ^2 è la varianza ignota di una distribuzione, uno stimatore non distorto di σ^2 è la varianza campionaria così definita:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

La deviazione standard campionaria S , invece, è uno stimatore distorto di σ , con media pari a $c_4\sigma$, dove c_4 è una funzione di n . Infine la deviazione standard di S è pari a $\sigma\sqrt{1 - c_4^2}$.

Queste informazioni possono essere utilizzate per la costruzione delle carte \bar{x} e S . Si supponga, infatti, che siano disponibili m campioni preliminari, ciascuno di dimensione n e sia S_i la deviazione standard dell' i -esimo campione. A questo punto possiamo definire \bar{S} come la media delle m deviazioni standard, ovvero:

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

Essendo la statistica $\frac{\bar{S}}{c_4}$ uno stimatore non distorto di σ possiamo definire i limiti di controllo per la carta S :

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} \\ CL &= \bar{S} \\ UCL &= \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Definendo le costanti $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$ e $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$ possiamo definire in forma più compatta le Equazioni 4.7:

$$LCL = B_3\bar{S}$$

$$CL = \bar{S} \quad (4.8)$$

$$UCL = B_4 \bar{S}.$$

Utilizzando $\frac{\bar{S}}{c_4}$ come stima di σ è possibile, inoltre, ridefinire i limiti di controllo della carta \bar{X} . Più precisamente:

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{\bar{X}} - \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \bar{S} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ UCL &= \bar{\bar{X}} + \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \bar{S} \end{aligned} \quad (4.9)$$

e definendo $A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$ possiamo riscrivere le equazioni 4.9:

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ UCL &= \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Abbiamo dunque visto come si ottengono i limiti di controllo delle carte \bar{x} , R e S . La costruzione dei limiti di controllo deve essere fatta durante la fase I del processo, attraverso m campioni preliminari estratti da una situazione in cui il processo si trova sotto controllo.

Si è soliti iniziare analizzando la carta che controlla la variabilità del processo, poiché i valori \bar{R} e \bar{S} vengono utilizzati nella costruzione della carta \bar{x} . Durante questa analisi preliminare, se uno o più punti cadono fuori dai limiti di controllo, questi ultimi vengono analizzati alla ricerca di eventuali cause assegnabili da eliminare. Una volta risolto il problema questi punti vengono eliminati e i limiti calcolati nuovamente. Se questa volta il processo risulta sotto controllo, allora i limiti vengono utilizzati per monitorare il processo con nuovi set di dati, con lo scopo di verificarne la stabilità.

Analizziamo nel seguito alcune linee guida per la progettazione di una carta di controllo. Nel progettare le carte \bar{X} e R/S bisogna stabilire, come abbiamo visto, la dimensione campionaria, i limiti di controllo e la frequenza di campionamento. Non sempre, infatti, sarà possibile campionare un numero elevato di campioni ad una frequenza elevata. Il compito dell'analista sarà quindi quello di operare un *trade-off* tra dimensione campionaria e frequenza di campionamento, tenendo in conto un elevato numero di fattori, tra i quali gli obiettivi dell'analisi in questione e il costo del campionamento, sia

in termini economici che tecnici.

A titolo di esempio, se una carta \bar{X} viene progettata solo per individuare scostamenti dal valor medio di ampiezza relativamente grande, allora saranno sufficienti campioni di dimensione 4 o 5. Se invece si è interessati a piccoli scostamenti, allora i campioni dovranno essere più numerosi. Aumentando la numerosità del campione, però, aumenta il rischio di incorrere in uno scostamento quando il campione viene estratto, con la possibilità, quindi, di non accorgersi dello scostamento del processo se non prima del campione successivo, provocando quindi un aumento dell'ARL. Un'alternativa, quando si è alla ricerca di piccoli spostamenti, è l'utilizzo di altri tipi di carte, che però non saranno analizzate in questo lavoro.

Da un punto di vista statistico le curve operative caratteristiche (curve OC, *Operating Characteristic Curves*) delle carte \bar{X} e R/S sono utili per scegliere la dimensione campionaria. Per costruire la curva OC per la carta \bar{X} , per esempio, si rappresenta su un grafico la probabilità di errore di II tipo β in funzione dell'intensità dello scostamento espresso in unità di deviazioni standard per diversi valori di n . Un esempio di curva OC è presentato in Figura 4.2, per la quale sono stati scelti i limiti di controllo a 3-sigma.

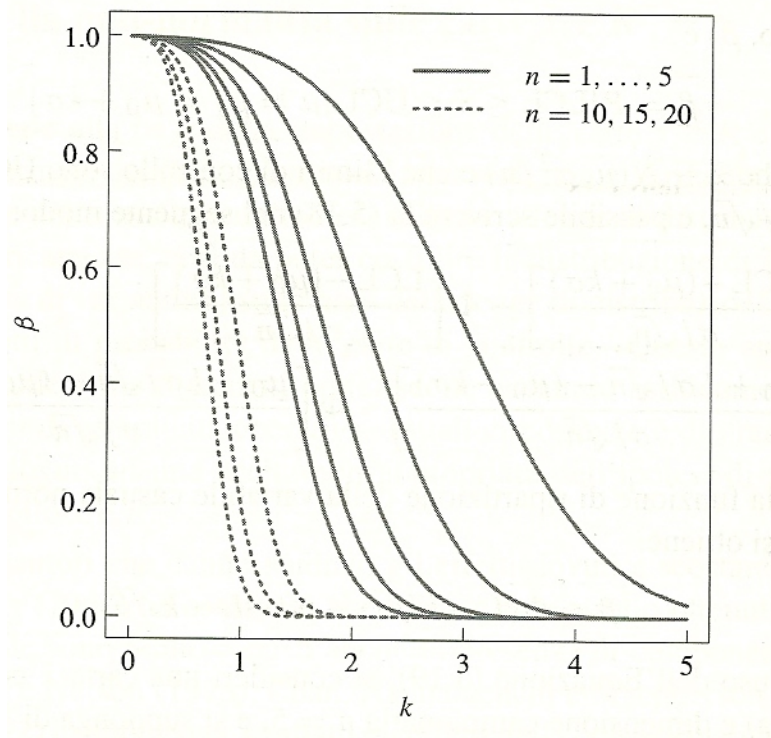


Figura 4.2: Curve operative caratteristiche, al variare di n , per una carta \bar{X} .

4.2.2 Interpretazione delle carte \bar{X} e R/S

Abbiamo già rimarcato in precedenza che una carta di controllo può restituire un'informazione di fuori controllo pur non presentando punti al di fuori dei limiti, ad esempio quando i punti si dispongono in modo non casuale. Per interpretare correttamente gli andamenti non casuali osservati sulla carta \bar{X} bisogna prima accertarsi che la carta che controlla la variabilità (d'ora in avanti faremo riferimento alla carta R , più comunemente usata nell'ambito del controllo statistico di processo, ma le considerazioni sarebbero analoghe anche per la carta S), sia sotto controllo. Molto spesso, infatti, intervenire prima sulla carta R eliminando i fattori specifici che hanno determinato i fuori controllo, consente di eliminare anche il comportamento non casuale presente nella carta \bar{X} .

Tra i vari andamenti non casuali ricordiamo per esempio quelli ciclici, dovuti spesso ad un continuo cambiamento delle condizioni ambientali di funzionamento del processo. Un esempio di tale andamento è presentato in Figura 4.3.

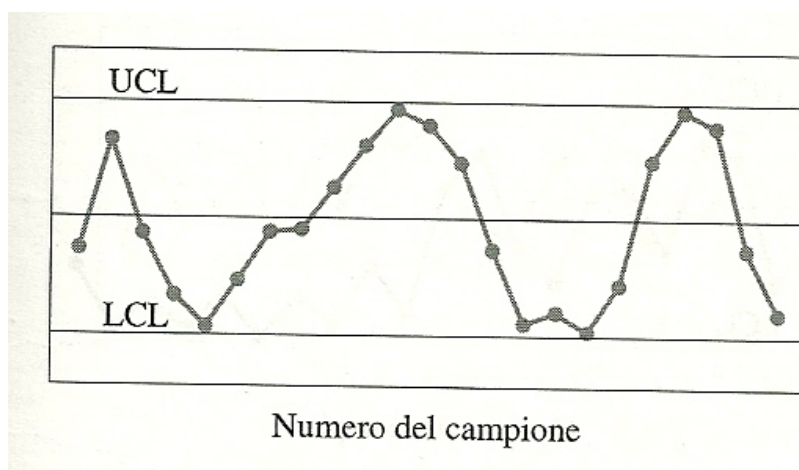


Figura 4.3: Esempio di andamento ciclico in una carta di controllo \bar{X} .

Un'altra situazione non casuale si manifesta quando i punti tendono a cadere in prossimità dei limiti di controllo, mentre pochi sono quelli che vanno a distribuirsi in prossimità della linea centrale, come illustrato in Figura 4.4. Tale andamento è dovuto al fatto che il processo produttivo è mistura di due distribuzioni aventi diverso parametro di posizione.

Ulteriori comportamenti anomali possono essere lo spostamento del valor medio o la deriva, mostrati rispettivamente in Figura 4.5 e 4.6.

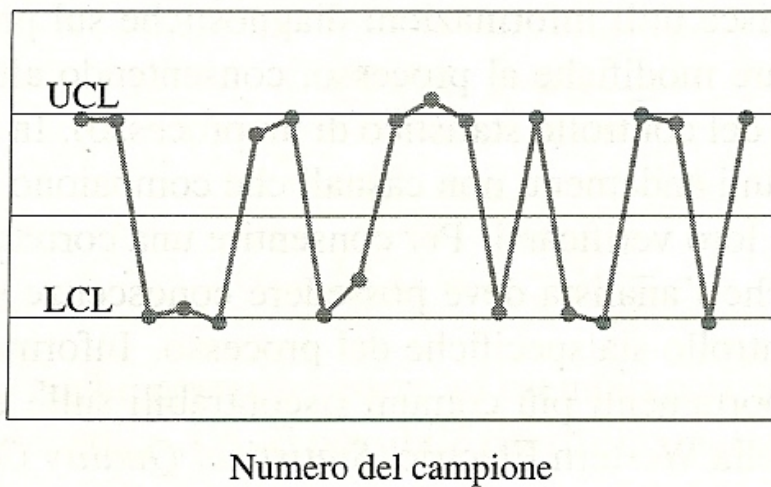


Figura 4.4: Esempio di presenza di due popolazioni in una carta di controllo \bar{X} .

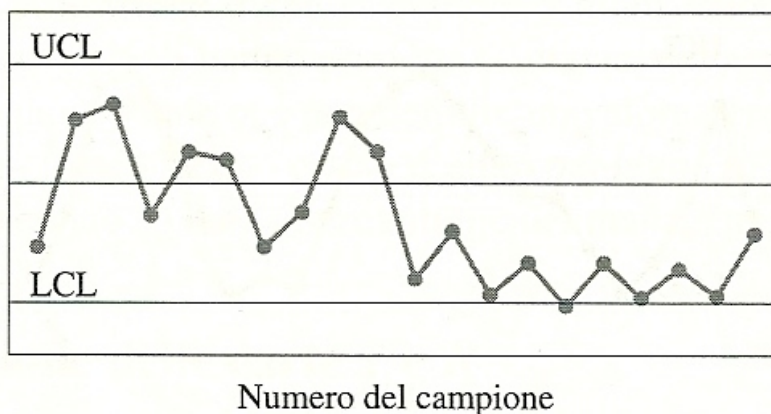


Figura 4.5: Esempio di spostamento del valore di riferimento in una carta \bar{X} .

L'ultima anomalia che presentiamo, chiamata stratificazione, è la tendenza dei punti a creare gruppi intorno alla linea centrale ed è apprezzabile in Figura 4.7. In tale grafico si osserva un'evidente mancanza di variabilità naturale tra i punti. Una possibile ragione è l'errata valutazione dei limiti di controllo, mentre un'altra potenziale causa è da cercarsi nella possibilità che il processo tenda a raccogliere unità campionarie da sottogruppi caratterizzati da una distribuzione marcatamente diversa. Ad esempio, si consideri un

campione di cinque unità, estratto da un processo che presenta cinque diverse linee di produzione. Se le unità del campione sono molto diverse l'una dall'altra, allora \bar{R} assumerà valori elevati, dando luogo a limiti di controllo per la carta \bar{X} troppo ampi. In questo caso \bar{R} restituisce una misura di variabilità tra le diverse distribuzioni e non una misura di variabilità tra le singole unità campionarie di ogni distribuzione. Un'ulteriore spiegazione di un comportamento di questo tipo potrebbe anche essere la diminuzione della variabilità del processo, indicando la presenza di un evento che ha cambiato le caratteristiche della variabile analizzata.

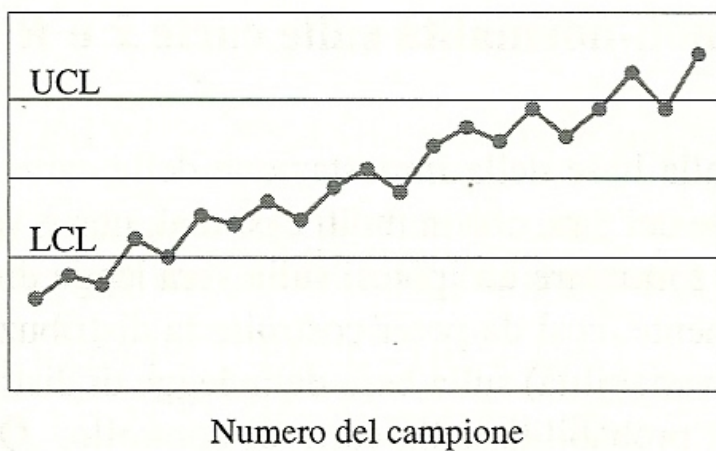


Figura 4.6: Esempio di deriva del valore di riferimento in una carta \bar{X} .

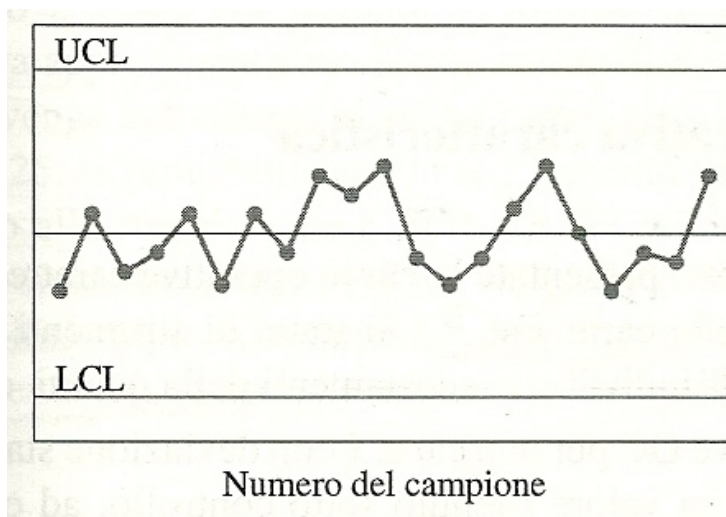


Figura 4.7: Esempio di stratificazione in una carta \bar{X} .

Rimane comunque da sottolineare che l'interpretazione del comportamento di una carta \bar{X} o R andrebbe sempre svolta considerando congiuntamente le due carte. Le variabili aleatorie \bar{X} e R calcolate sui dati campionari, infatti, sono stocasticamente indipendenti sotto ipotesi di gaussianità. Di conseguenza, la presenza di una qualche correlazione tra le carte è un'indicazione che la distribuzione dei dati non è più quella considerata.

4.2.3 Effetto della non normalità sulle carte \bar{X} e R/S

Un'ipotesi fondamentale alla base della impostazione delle carte \bar{X} e R/S è quella relativa alla distribuzione normale dei dati, che in molti casi reali però non risulta soddisfatta. Una soluzione al problema consiste nel formulare un'ipotesi sulla vera legge di distribuzione dei dati o nello stimarla empiricamente, così da poter costruire la distribuzione di \bar{X} e R (o quella di S) sulla base della legge di distribuzione scelta e ottenere da questa i limiti di probabilità esatti per le carte di controllo. Questo approccio è però nella maggior parte dei casi non facile e si preferisce, in genere, accettare l'ipotesi di normalità nonostante questa non sia verificata, per ragioni di semplicità operativa. In questa situazione, però, assume una rilevanza fondamentale l'essere in grado di quantificare le conseguenze dell'assenza di normalità dei dati sulle prestazioni delle carte.

Fortunatamente gli studi effettuati a riguardo (per approfondimenti si vedano [16], [17] e [18]) hanno osservato che i limiti di controllo ottenuti utilizzando la distribuzione normale sono molto robusti anche in presenza di dati che non siano realizzazioni campionarie di una variabile aleatoria gaussiana.

4.3 Carte di controllo per dati correlati

Le assunzioni alla base di un corretto uso delle carte di controllo stabiliscono che i dati generati da un processo in stato di controllo sono indipendenti e seguono una distribuzione normale di media μ e varianza σ^2 . Una condizione di fuori controllo comporta un cambiamento del livello medio μ , oppure di σ^2 , o di entrambe. Pertanto, quando il processo è in stato di controllo la caratteristica di qualità x_t al tempo t può essere rappresentata dal modello

$$x_t = \mu + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots$$

dove le ϵ_t sono normali indipendenti e identicamente distribuite con media nulla e varianza σ^2 . Questo è spesso chiamato *modello di Shewhart* del processo.

Anche nelle situazioni in cui non è garantita la normalità della distribuzione

delle osservazioni abbiamo visto che la carta continua a funzionare in maniera soddisfacente.

L'assunzione più importante, quindi, è l'indipendenza delle osservazioni, in mancanza della quale la carta non funziona in modo corretto e i risultati che produce non sono affidabili.

Qualora si abbia a che fare con dati che presentano correlazione temporale, il problema generalmente si affronta mediante la descrizione della struttura di correlazione. Come abbiamo ampiamente descritto nel capitolo 2, questo è possibile attraverso l'utilizzo di appropriati modelli di serie temporali. Il primo passo sarà quindi l'individuazione di modelli di serie temporali che ben si adattino ai dati analizzati. Una volta individuato il modello, lo studio dei residui diventa fondamentale per risolvere il problema dell'autocorrelazione. Essi infatti, se il modello è adatto, sono indipendenti, rendendo possibile l'applicazione delle carte di controllo e potendo così monitorare il processo. Consideriamo, per esempio, uno dei modelli più semplici, il modello autoregressivo del primo ordine:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t$$

con ϵ_t variabili aleatorie normali indipendenti e identicamente distribuite, con media nulla e varianza σ^2 . Indicati con $\hat{\phi}_1$ la stima di ϕ_1 , ottenuta attraverso un'analisi preliminare dei dati del processo e con \hat{x}_t i valori x_t calcolati attraverso il modello, i residui $e_t = x_t - \hat{x}_t$ hanno distribuzione approssimativamente normale, sono indipendenti e hanno media nulla e varianza costante. Le carte di controllo convenzionali risultano quindi applicabili senza problemi alla serie temporale dei residui. I punti fuori controllo o comportamenti anomali dell'andamento del grafico dovrebbero indicare che il parametro ϕ_1 è cambiato, portando la variabile x_t fuori norma. Lo stesso discorso è ovviamente valido per i residui di qualsiasi tipo di modello.

La tecnica che abbiamo descritto sarà utile nell'analisi degli intervalli RR via carte di controllo. I valori delle serie storiche che stiamo analizzando, infatti, presentano una forte autocorrelazione, rendendo impossibile l'uso diretto dei dati per costruire delle carte che possano individuare l'inizio della Fibrillazione Atriale.

Nel prossimo capitolo, quindi, cercheremo di rendere i dati utilizzabili nell'ambito delle carte di controllo. Per fare ciò prima di tutto dovremo individuare un modello adatto a descrivere l'andamento degli intervalli RR nel periodo pre-FA. In questo modo, lavorando sui residui del modello indicato, potremo costruire le carte di controllo che abbiamo analizzato in questo capitolo, cercando di individuare un comportamento anomalo dei residui tipico della Fibrillazione Atriale, permettendoci di segnalare il sopraggiungere del

fenomeno in tempi ragionevolmente brevi.

Una volta individuata la Fibrillazione Atriale sarà necessario cercare un nuovo modello adatto a descrivere l'andamento degli intervalli RR durante questa fase (tematica per altro già ampiamente discussa nel capitolo 3) e analizzare le carte di controllo di questi nuovi residui per individuare la fine del fenomeno di fibrillazione.

Vediamo quindi i risultati che sono stati ottenuti tramite l'analisi via carte di controllo.

Capitolo 5

Analisi dei dati via carte di controllo

Le analisi compiute nel capitolo 3 erano volte alla ricerca di un metodo che individuasse in tempi brevi e con un numero ridotto di falsi allarmi l'evento di Fibrillazione Atriale. A tal fine, non si faceva un uso diretto delle serie degli intervalli RR. È stato invece individuato un modello adatto a descrivere l'andamento di tale quantità e, tramite un test di buon adattamento del modello, è stato raggiunto l'obiettivo preposto.

In questo capitolo cercheremo, invece, di lavorare direttamente sulle serie degli intervalli RR, sfruttando uno degli strumenti fondamentali nel controllo statistico di processo, ovvero le carte di controllo, analizzate nel capitolo 4.

5.1 Analisi preliminari

Cominciamo analizzando graficamente le serie storiche degli intervalli RR dei pazienti a disposizione. Come è possibile apprezzare in Figura 5.1, vi sono tre comportamenti differenti.

Per i pazienti 1 e 10 si osserva un considerevole aumento della variabilità durante il periodo di FA. Per quanto riguarda il paziente 3, invece, la variabilità nei periodi pre-FA e durante FA è molto più grande rispetto al post-FA. In ultimo, per il paziente 6, la variabilità degli intervalli RR non sembra subire cambiamenti particolarmente significativi.

Questi tre gruppi corrispondono esattamente alle tre categorie di pazienti individuate dall'analisi dei Poincaré e Lorenz plot presentata nel paragrafo 3.1.2.

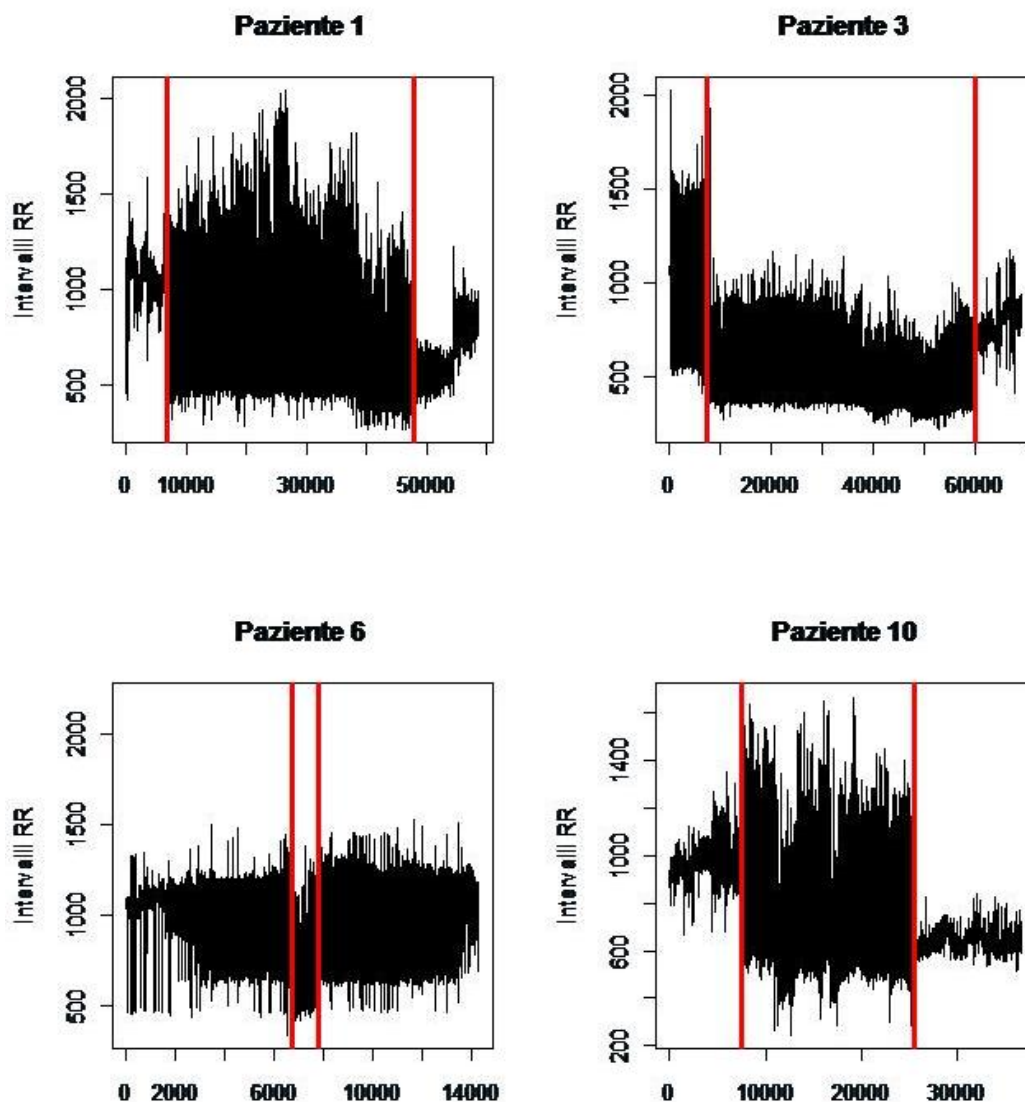


Figura 5.1: Intervalli RR per i pazienti 1,3,6 e 10. Le linee rosse verticali indicano inizio e fine della Fibrillazione Atriale.

Concentriamo le nostre analisi sul comportamento comune alla maggior parte dei pazienti, ovvero quello dei pazienti 1 e 10 di Figura 5.1. L'idea è quindi quella di sfruttare la grande differenza di variabilità per identificare il sopraggiungere di Fibrillazione Atriale. A tal proposito faremo uso delle carte di controllo; in particolar modo, come vedremo nei paragrafi seguenti, faremo uso delle carte specifiche per il monitoraggio della variabilità.

5.2 Scelta di un modello

La prima importante considerazione da fare per poter costruire carte di controllo adatte al processo degli intervalli RR di ciascun paziente, è la verifica delle ipotesi preliminari: normalità e indipendenza.

Purtroppo la prima ipotesi non risulta verificata. Le cose non migliorano analizzando la seconda ipotesi, quella di indipendenza, poiché neanche questa può dirsi soddisfatta dalle nostre serie temporali. Però, se per quanto riguarda la violazione della normalità abbiamo visto nel capitolo 4 come le carte di controllo siano piuttosto robuste, l'indipendenza è condizione indispensabile per la loro costruzione.

Dobbiamo quindi utilizzare le tecniche per dati correlati, analizzate nel paragrafo 4.3. Il primo passo è quindi quello di individuare un metodo che ben descriva l'andamento degli intervalli RR nel periodo pre-FA. Una volta individuato il modello si potranno costruire le carte di controllo sui residui.

Come abbiamo visto nel capitolo 4, quando si lavora con le carte di controllo bisogna distinguere due fasi: la prima in cui un numero definito di campioni preliminari estratti mentre il processo è in stato di controllo viene utilizzato per costruire i limiti delle carte; la seconda in cui, utilizzando i limiti precedentemente determinati, il processo viene monitorato. L'idea è quindi quella di utilizzare una parte degli intervalli RR, per esempio i primi 1000 campioni, per individuare il modello e costruire poi i limiti di controllo per i residui.

Come già osservato nel paragrafo 3.3.1, i modelli che ben spiegano l'andamento degli intervalli RR durante Fibrillazione Atriale, non sono adatti a descrivere tale quantità nel periodo di battito fisiologico. Pertanto bisogna cercare altre classi di modelli che possano descrivere gli intervalli RR nel periodo pre-FA.

Il primo problema incontrato in questa fase è che nessun modello semplice si adatta ai dati analizzati. Un modello che può essere considerato accettabile è il modello ARIMA (5,1,3), nonostante i residui non diano buoni risultati in termini di normalità. L'autocorrelazione dei residui di questo modello, però, si può considerare pressoché nulla in tutti i pazienti analizzati e il p-value del test ottenuto tramite la statistica di Ljung-Box è, soprattutto per valori bassi del lag K , quasi sempre molto alto, come è possibile apprezzare in Figura 5.2.

A fronte della robustezza all'ipotesi di normalità, abbiamo scelto di utilizzare i residui di questo modello per la costruzione di carte di controllo che riescano ad individuare l'inizio e la fine del fenomeno di Fibrillazione Atriale.

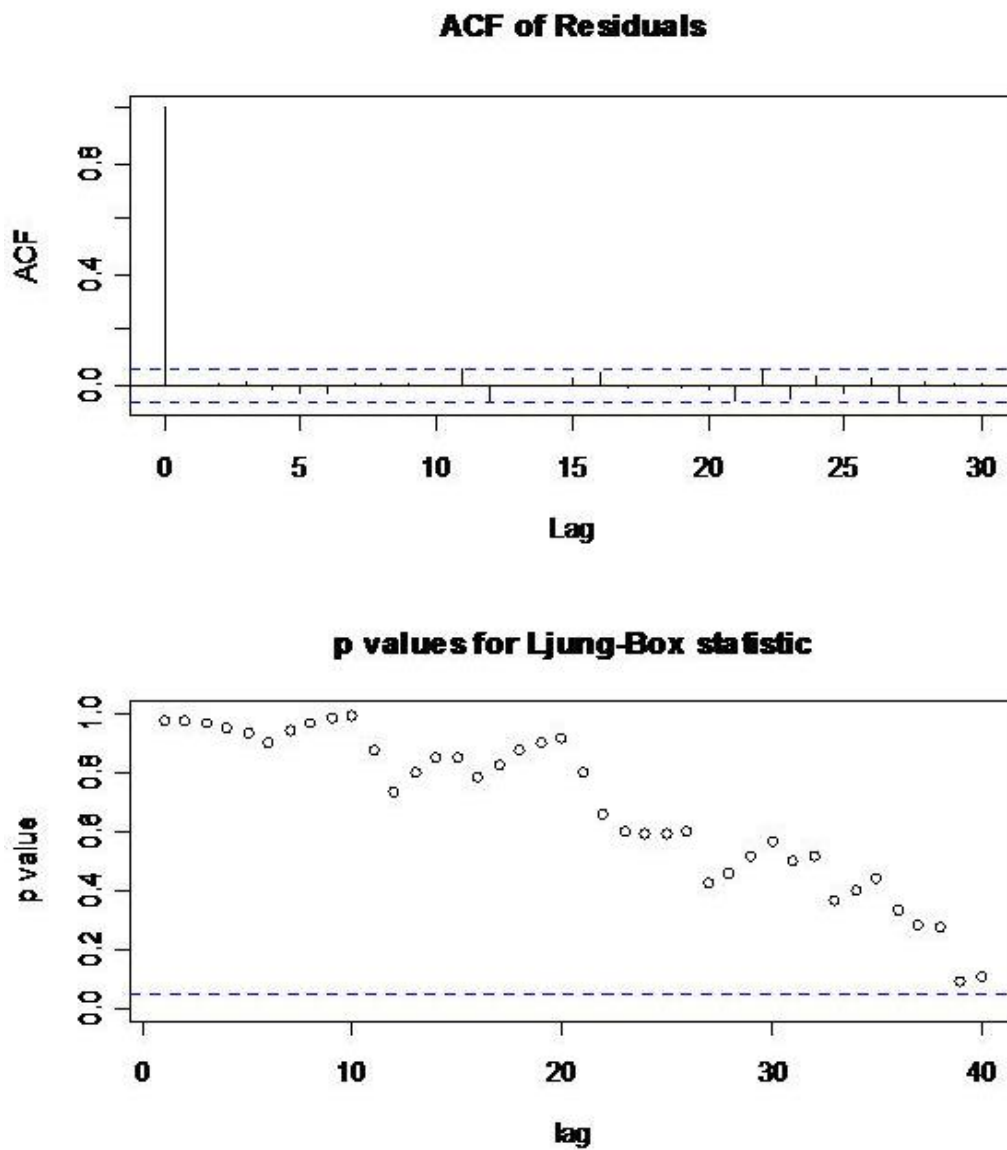


Figura 5.2: Paziente numero 2: autocorrelazione dei residui e p-value del test di buon adattamento per il modello ARIMA (5,1,3).

Una volta costruite le carte di controllo con il campione preliminare è necessario compiere le seguenti operazioni:

1. monitorare il processo fino a quando sopraggiunge il fenomeno di Fibrillazione Atriale;
2. costruire nuove carte di controllo utilizzando modelli adatti a descrivere l'andamento degli intervalli RR durante la FA;

3. monitorare il processo fino al ritorno del battito fisiologico;
4. ricostruire nuove carte di controllo e ricominciare dal punto 1.

Nei prossimi paragrafi presentiamo i risultati ottenuti applicando le carte \bar{X} e R ai pazienti presi in considerazione.

5.3 Analisi tramite carte \bar{X} e R

Cominciamo con una considerazione preliminare volta a contestualizzare le analisi fatte nel prosieguo del lavoro. Secondo quanto affermato nel 4, nell'analisi del campione preliminare si dovrebbe partire dalla carta R ed eliminare i punti fuori dai limiti fino a quando la variabilità del processo può considerarsi sotto controllo. A questo punto si analizza la carta \bar{X} e, una volta che il processo è sotto controllo, si utilizzano i limiti delle due carte così ottenuti per monitorare il processo agli istanti successivi.

Questa procedura, però, è stata pensata per processi nei quali la variabile monitorata è una caratteristica di qualità di un determinato prodotto e quindi le osservazioni fuori controllo devono essere individuate e le cause eliminate. La variabile sulla quale noi lavoriamo, invece, è di tutt'altro tipo. Riguardo alle carte che controllano la variabilità del processo, un punto fuori dai limiti può essere generato da un valore particolarmente alto di un intervallo RR, che può facilmente verificarsi in qualsiasi momento. Per questo motivo non considereremo i punti fuori controllo, se non in quantità molto elevata, come un campanello d'allarme per la Fibrillazione Atriale, ma ci concentreremo sull'osservazione di un evidente aumento nella variabilità del processo.

Le carte sulla media, come vedremo meglio in seguito, sono di ancor più difficile lettura, perchè sia punti fuori controllo che scostamenti di livello possono verificarsi a causa di motivi totalmente slegati al fenomeno di Fibrillazione Atriale. Basti pensare, per esempio, all'attività fisica, che provoca un aumento della frequenza cardiaca e quindi una diminuzione del livello degli intervalli RR.

Per capire meglio quanto detto fino ad ora, analizziamo i risultati ottenuti con uno dei pazienti appartenenti a quello che abbiamo chiamato primo gruppo, ovvero quei pazienti che nel periodo pre-FA e post-FA registrano un battito regolare.

Per la costruzione della carta dobbiamo definire innanzi tutto la numerosità del campione. Consideriamo $n = 10$. In questo caso, dalla Tabella in Appendice A, ricaviamo: $A_2=0.308$, $D_3=0.223$ e $D_4=1.777$.

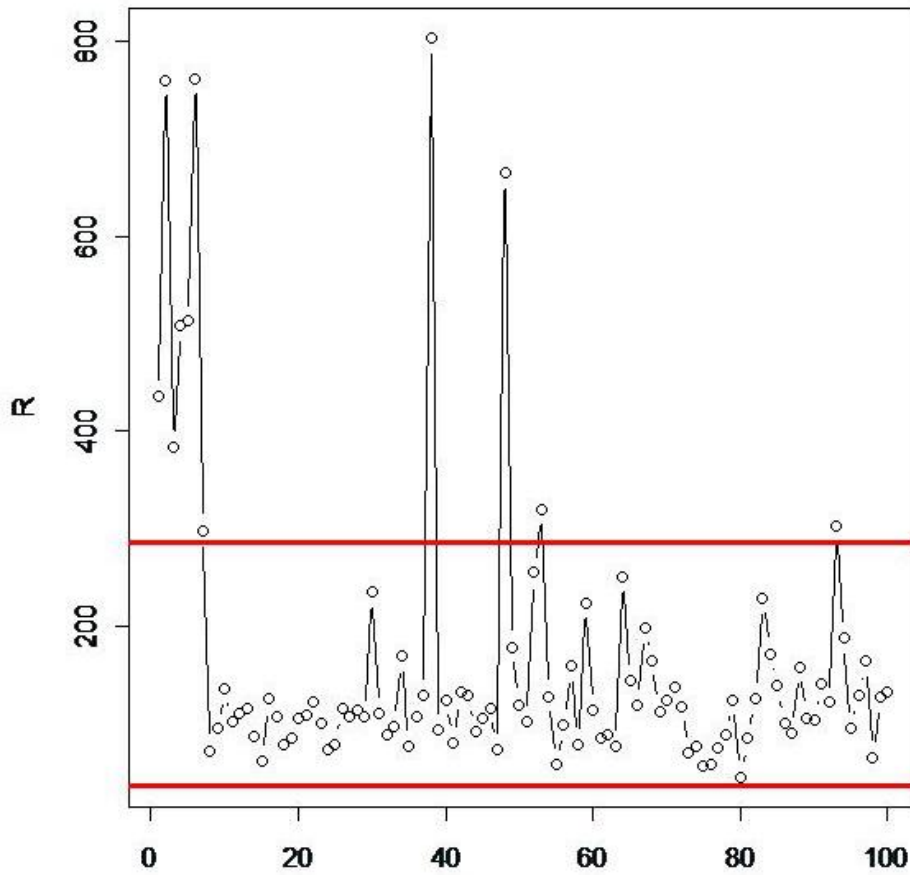


Figura 5.3: Carta R relativa ai primi 1000 valori per il paziente 1, con $n = 10$.

Analizziamo le prime 1000 osservazioni del paziente 1 e costruiamo la carta R relativa. I valori ottenuti sono:

$$LCL = D_3CL = 35.84$$

$$CL = 160.73$$

$$UCL = D_4CL = 285.62$$

In Figura 5.3 è possibile apprezzare la carta R che si ottiene con questi valori. Possiamo osservare che i primi sette valori sono tutti fuori dai limiti di controllo, mentre degli altri 93 punti, solo quattro si trovano al di sopra del limiti di controllo superiore.

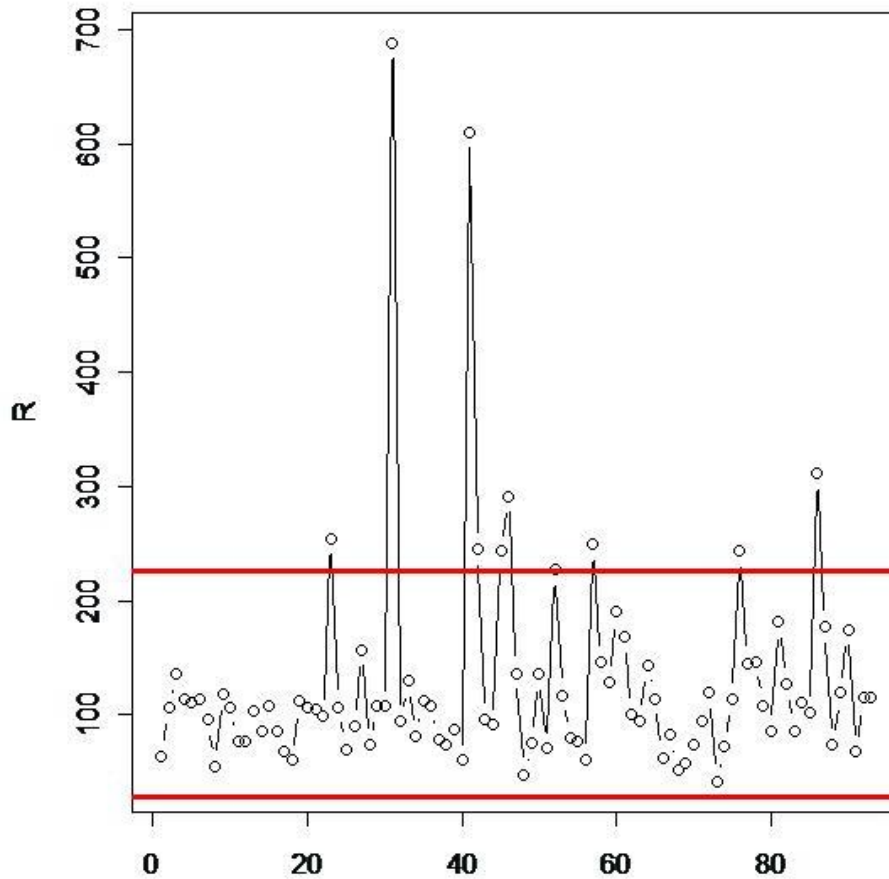


Figura 5.4: Carta R del paziente 1 dopo l'eliminazione dei primi valori fuori controllo.

Considerando come anomala l'elevata variabilità degli istanti iniziali, eliminiamo i primi sette punti. Costruiamo quindi un nuovo modello escludendo le prime 70 osservazioni, ottenendo così dei nuovi residui. In questo caso, come limiti di controllo, otteniamo:

$$LCL = D_3CL = 28.31$$

$$CL = 126.93$$

$$UCL = D_4CL = 225.55$$

Il risultato si può apprezzare in Figura 5.4. Alcuni punti sono oltre i limiti di controllo, ma non si osservano cambiamenti di livello nella variabilità del

processo. Quindi, alla luce dei discorsi fatti in precedenza, consideriamo questi come i limiti che utilizzeremo nel monitoraggio degli intervalli RR.

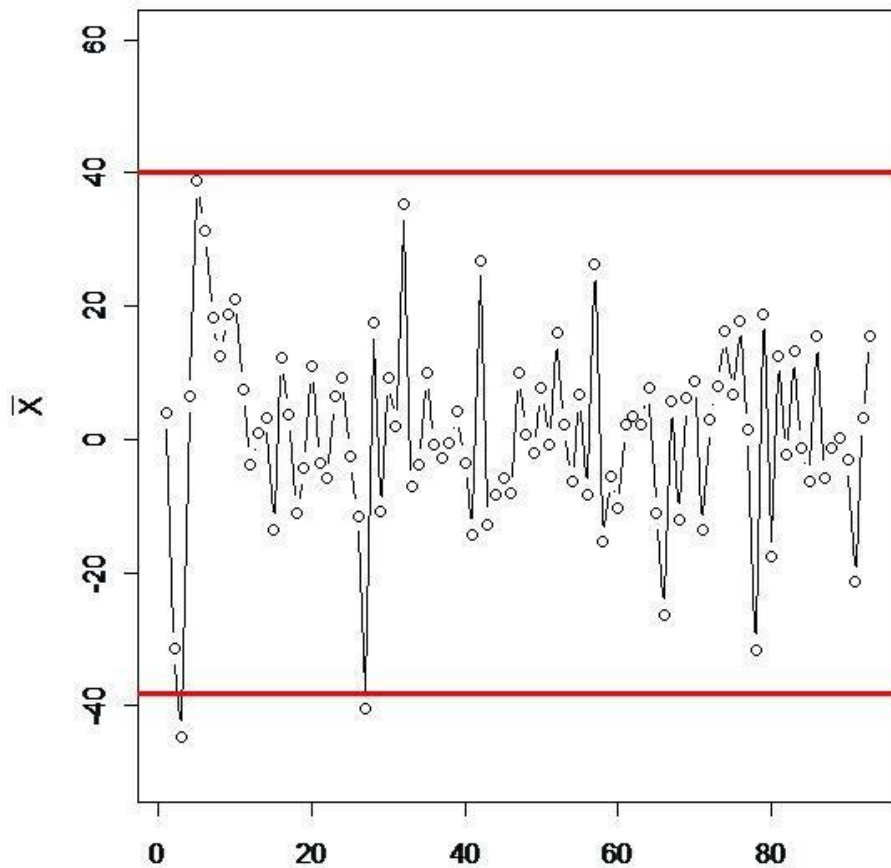


Figura 5.5: Carta \bar{X} del paziente 1 dopo l'eliminazione dei primi valori fuori controllo.

Analizziamo ora la carta \bar{x} . In Figura 5.5 è possibile apprezzare come solo due punti cadano al di fuori dei limiti di controllo. Possiamo quindi utilizzare i seguenti valori

$$LCL = CL - A_2\bar{R} = 40.1$$

$$CL = 1$$

$$UCL = CL + A_2\bar{R} = -38.1$$

nelle analisi successive.

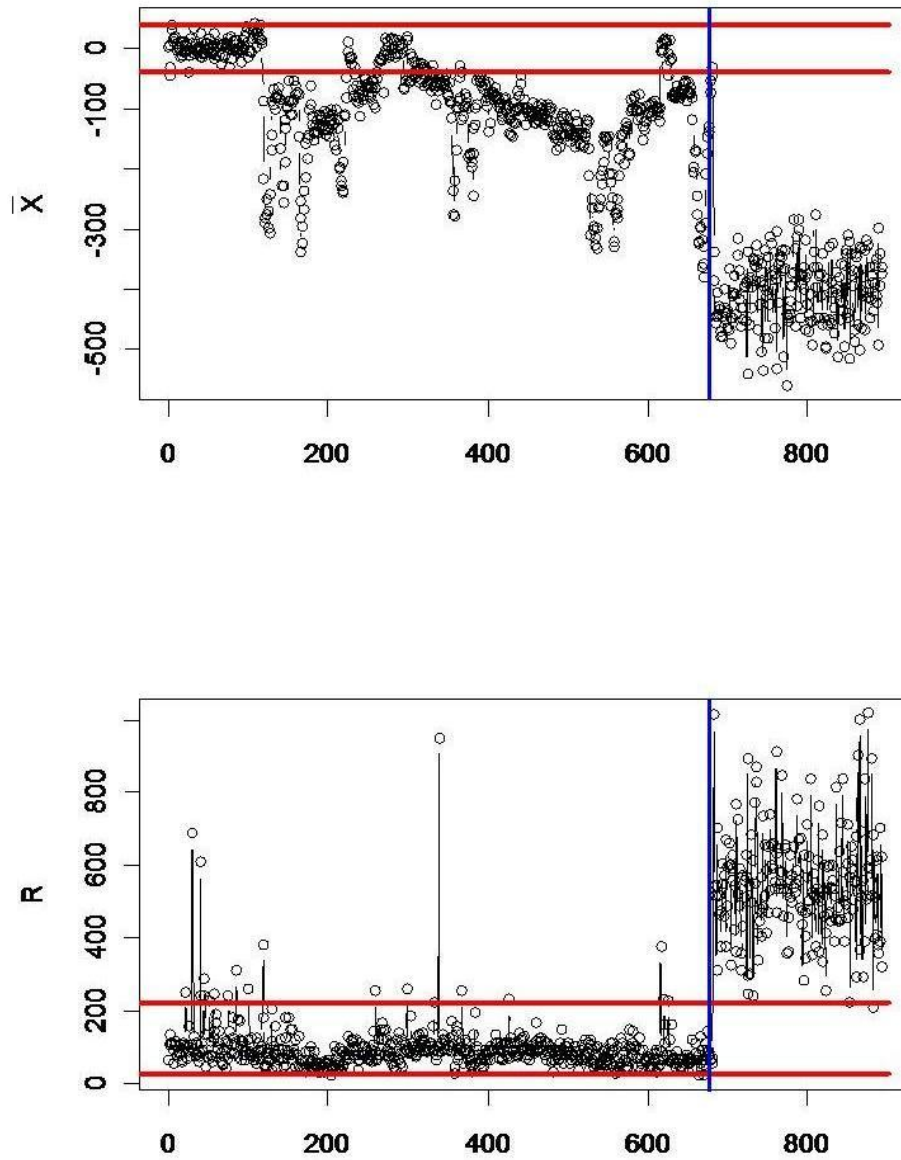


Figura 5.6: Carte \bar{X} e R del paziente 1 pre-FA: la linea blu rappresenta l'inizio della fibrillazione.

Dopo aver definito i limiti di controllo inizia quindi la fase II. Tramite il software statistico R possiamo calcolare un determinato numero di osser-

vazioni successive e, facendo la differenza con i valori reali degli intervalli RR, otteniamo i nuovi residui. Il risultato che vorremmo raggiungere è che le carte di controllo \bar{X} e R colgano l'evento di Fibrillazione Atriale.

In Figura 5.6 è possibile apprezzare le carte \bar{X} e R dei residui. Si può notare come, pur verificandosi uno spostamento del livello della media campionaria, la carta \bar{X} non è di grande utilità perché il processo, anche nel periodo pre-FA, subisce considerevoli scostamenti.

La carta R , invece, è molto più efficace nell'individuare l'evento di Fibrillazione Atriale. Nel periodo pre-FA sono presenti alcuni punti oltre i limiti di controllo, ma in quantità ridotta e mai più di due consecutivi. Durante la FA, al contrario, la quasi totalità dei punti si trova al di sopra del limite di controllo superiore e l'aumento di variabilità si verifica in tempi brevissimi. Si può pensare di ideare un criterio, simile a quelli analizzati nel paragrafo 4.1.4, che permetta in questa situazione di individuare l'inizio del fenomeno di Fibrillazione Atriale. Possiamo quindi fissare un numero M di punti consecutivi al di sopra del limite superiore che indichi l'inizio della FA.

Considerando che nel periodo di battito fisiologico il massimo di punti consecutivi al di sopra dell'UCL è due, possiamo fissare $M = 5$. Con questa scelta il numero di falsi allarmi è nullo e il ritardo di segnalazione è di 1.1 minuti.

Una volta segnalato l'inizio del fenomeno di fibrillazione possiamo utilizzare uno dei due modelli che abbiamo visto essere adatti a descrivere l'andamento degli intervalli RR per costruire nuove carte di controllo con lo scopo, questa volta, di individuare la fine dell'evento di fibrillazione. Cercheremo quindi di catturare, in questo caso, la diminuzione della variabilità che si verifica con il ritorno alla normalità del battito cardiaco.

Presentiamo in Figura 5.7 le carte \bar{X} e R dei residui del modello ARIMA (0,1,1) (è stata tralasciata la discussione della costruzione dei limiti di controllo, in quanto la procedura è analoga a quella utilizzata in precedenza).

Anche in questo caso la carta \bar{X} non permette di trarre conclusioni particolarmente interessanti, se non la diminuzione della variabilità del processo al termine dell'evento di fibrillazione, in quanto i punti tendono a concentrarsi attorno ad un valore. Per quanto riguarda la carta R , invece, si possono fare due riflessioni: la prima è che si osserva un numero elevato di punti fuori dall'UCL, dovuti al fatto che il fenomeno in questione, ovvero il battito cardiaco durante Fibrillazione Atriale, presenta una variabilità molto elevata, che difficilmente si può considerare sotto controllo. La seconda è che, quando la fibrillazione termina, si osserva una consistente riduzione della variabilità e una grande quantità di punti cade al di sotto dell'LCL, fenomeno particolarmente raro durante la FA.

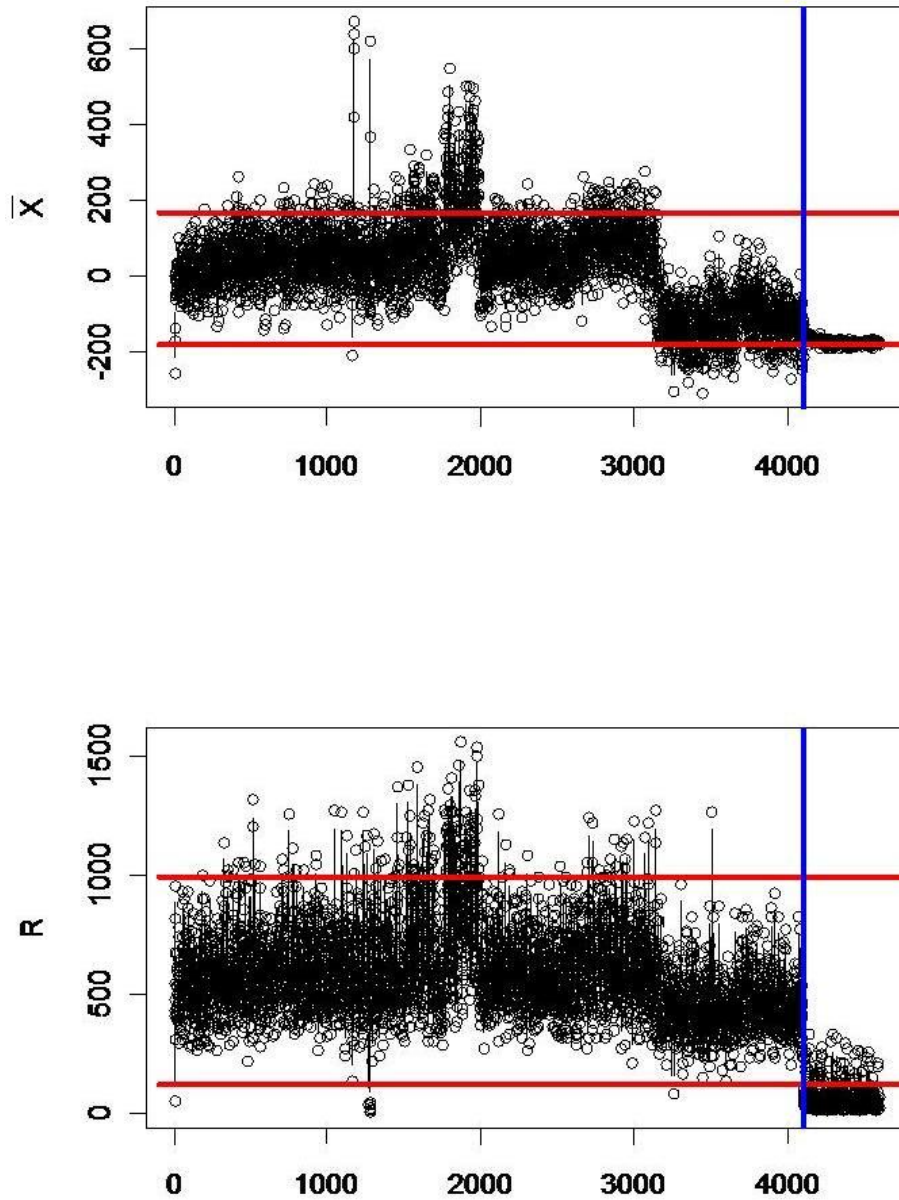


Figura 5.7: Carte \bar{X} e R del paziente 1 durante la FA: la linea blu rappresenta la fine della fibrillazione.

Ripercorrendo quanto fatto nella segnalazione dell'inizio del fenomeno di fibrillazione, possiamo determinare un criterio che indichi la fine del periodo

di FA. Per esempio possiamo adottare la seguente regola: quando 6 punti su 10 cadono al di sotto dell'LCL considereremo il battito cardiaco tornato alla normalità. In questo modo, per quanto riguarda il paziente preso in considerazione, si verifica 1 falso allarme con un ritardo di segnalazione di 0.3 minuti.

I risultati ottenuti, in termini sia di falsi allarmi che di ritardo di segnalazione, sono confortanti. Bisogna però cercare di capire se questi criteri determinati a partire dalla situazione specifica del paziente numero 1, portino a buoni risultati anche con gli altri pazienti. In caso contrario, infatti, i risultati raggiunti perderebbero di significatività.

Applichiamo gli stessi criteri, quindi, ai pazienti numero 2 e 10, ovvero gli altri pazienti che, prima e dopo la FA, presentano un battito regolare.

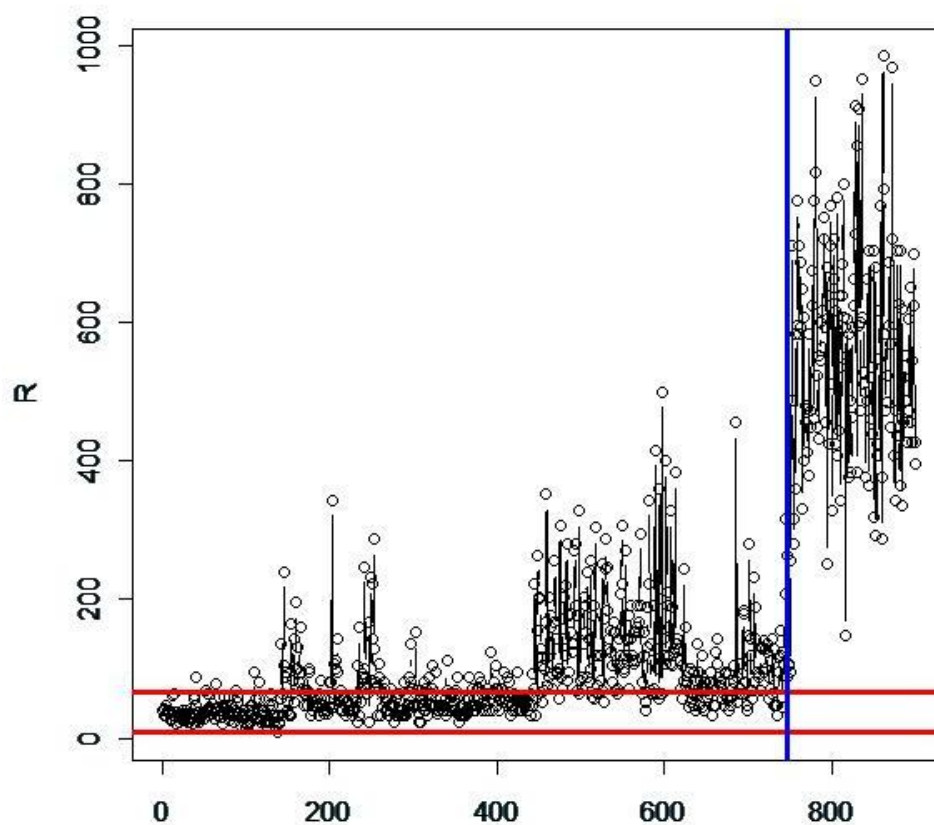


Figura 5.8: Carta R del paziente 10 pre-FA: la linea blu rappresenta l'inizio della fibrillazione.

Per quanto riguarda il paziente numero 2, nel periodo pre-FA, si verifica 1 falso allarme, mentre il ritardo di segnalazione è di 1 minuto. Durante la FA non si verificano falsi allarmi e il ritardo di segnalazione è di 1.6 minuti. Per quanto riguarda il paziente numero 10 analizziamo prima il periodo durante la FA. Utilizzando il criterio descritto per il paziente numero 1 non ci sono falsi allarmi e il ritardo nella segnalazione della fine dell'evento di Fibrillazione Atriale è di 0.5 minuti. Nel periodo pre-FA, invece, un po' prima del sopraggiungere della Fibrillazione Atriale, si verifica un primo aumento del livello di variabilità, seguito da un aumento molto più consistente nel momento in cui inizia la fibrillazione, come apprezzabile in Figura 5.8.

Questo fatto in un certo senso pregiudica la tecnica adottata in precedenza, in quanto verrebbe segnalata Fibrillazione Atriale un po' prima di quando effettivamente cominci.

Il primo aumento di variabilità, però, può essere interpretato come un segnale di allarme che indica il sopraggiungere imminente di una irregolarità nel battito cardiaco. Questo aspetto andrebbe sicuramente approfondito tramite lo studio di ulteriori pazienti, per poter capire se il comportamento riscontrato nel paziente numero 10 è tipico di chi è soggetto a Fibrillazione Atriale.

5.4 Conclusioni

Possiamo quindi trarre alcune conclusioni riguardo all'utilizzo delle carte \bar{x} e R nell'identificazione del fenomeno di fibrillazione.

Tramite le carte di controllo si ottengono ottimi risultati sia in termini di falsi allarmi e, soprattutto, in termini di ritardo di segnalazione, migliorando decisamente le prestazioni del metodo presentato nel capitolo 3.

A fronte di questo risultato positivo, bisogna però porre l'attenzione sul fatto che tali tecniche funzionano bene solo con i pazienti del primo gruppo, ovvero quelli che sia prima che dopo l'evento di fibrillazione sono caratterizzati da un battito cardiaco regolare.

Un'ultima considerazione necessaria è da farsi in riferimento a quanto osservato in uno dei tre casi analizzati. Nel periodo pre-FA, infatti, abbiamo registrato un aumento di variabilità prima che cominci il fenomeno di fibrillazione. Questo aumento, seppure meno marcato di quello provocato dalla Fibrillazione Atriale, fa sì che i punti sulla carta R escano considerevolmente dai limiti di controllo. Bisognerebbe quindi cercare di capire se questo innalzamento è un segnale d'allarme che indica l'avvicinarsi della fibrillazione o se è una situazione che può avvenire in qualsiasi momento. Il fatto che avvenga esattamente prima del fenomeno di Fibrillazione Atriale, però, ci fa

propendere per la prima delle due ipotesi considerate. Se così fosse, inoltre, l'analisi degli intervalli RR tramite carte di controllo assumerebbe ancor più importanza, perchè sarebbe in grado non solo di segnalare l'inizio dell'evento di fibrillazione in tempi brevi, ma addirittura di prevedere il sopraggiungere del fenomeno.

Il numero ridotto di pazienti a disposizione non permette ulteriori analisi in questa direzione, ma sicuramente indica un'importante direzione verso la quale intraprendere future ricerche in questo ambito.

Conclusioni

All'interno di questo lavoro di tesi è stata condotta un'analisi statistica di dati relativi al problema clinico della Fibrillazione Atriale per mezzo di metodologie statistiche avanzate.

Ripercorrendo lo schema di lavoro dal principio alla fine, si è partiti con un'analisi esplorativa dei dati, che ha consentito di riprodurre grafici come *Poincaré* e *Lorenz plot*, già utilizzati in letteratura proprio per l'analisi degli intervalli RR. Questo primo approccio ha permesso di dividere i pazienti in tre gruppi. Nel primo gruppo sono stati inseriti i soggetti che non presentavano irregolarità né prima né dopo l'evento di Fibrillazione Atriale; i pazienti del secondo gruppo, invece, nelle due ore precedenti il fenomeno di aritmia considerato, avevano un battito cardiaco irregolare; tale irregolarità, per i pazienti del terzo gruppo, è stata rinvenuta anche nelle due ore successive alla fibrillazione.

Il secondo passo è stato quello di cercare un modello di serie storiche nella famiglia ARIMA che ben descrivesse l'andamento degli intervalli RR durante la Fibrillazione Atriale. Le analisi compiute hanno fatto propendere per due modelli in particolare, il modello ARIMA (0,1,1) e quello (0,2,2). Una volta identificati i modelli, è stato fatto uso del p-value di un test di buon adattamento, il test di Ljung-Box, per creare un metodo innovativo che fosse in grado di segnalare in tempi relativamente brevi l'inizio e la fine del fenomeno di Fibrillazione Atriale. In tutti i casi analizzati, sia in termini di ritardo di segnalazione che di falsi allarmi, il metodo ha fornito risposte soddisfacenti. Abbiamo quindi affrontato il problema da un altro punto di vista. Infatti, mentre nelle analisi compiute sfruttando la teoria delle serie storiche è stato ideato un metodo innovativo non presente in nessuna precedente analisi, nella seconda parte di questo elaborato di tesi sono state utilizzate tecniche già consolidate nell'ambito del controllo statistico di processo, le carte di controllo, adattandole ed utilizzandole in maniera efficace nel contesto biostatistico di interesse. Per questa seconda analisi sono stati scelti dei pazienti rappresentativi del fenomeno in esame, rispetto ai quali i risultati dell'applicazione del metodo proposto sono stati più che soddisfacenti.

Il contributo innovativo di questo elaborato sta innanzitutto nell'aver identificato e proposto un metodo in grado di segnalare l'inizio e la fine del fenomeno di fibrillazione, che può essere sfruttato nell'analisi dei tracciati Holter. Un Holter di 7 giorni, per esempio, corrisponde ad un lunghissimo tracciato elettrocardiografico che può risultare lungo da analizzare nel suo complesso. Attraverso i metodi statistici proposti, invece, è possibile un controllo automatico degli intervalli RR per avere un'indicazione del verificarsi nel paziente del fenomeno di Fibrillazione Atriale.

I metodi sviluppati in questo lavoro di tesi permettono inoltre di elaborare una proposta che potrebbe rivelarsi di grande utilità per il controllo dei pazienti affetti da Fibrillazione Atriale. L'idea per il lavoro futuro è quella di sviluppare un device specifico che, in base ai criteri dei metodi analizzati, possa indicare in tempo reale il sopraggiungere del fenomeno di Fibrillazione Atriale del paziente.

Appendice A

n	A_2	d_2	d_3	D_3	D_4
2	1.881	1.128	0.853	0	3.269
3	1.023	1.693	0.888	0	2.574
4	0.729	2.059	0.88	0	2.282
5	0.577	2.326	0.864	0	2.114
6	0.483	2.534	0.848	0	2.004
7	0.419	2.704	0.833	0.076	1.924
8	0.373	2.847	0.82	0.136	1.864
9	0.337	2.97	0.808	0.184	1.816
10	0.308	3.078	0.797	0.223	1.777
15	0.223	3.472	0.755	0.348	1.652
20	0.18	3.735	0.729	0.414	1.586

Tabella 1: Costanti relative alle carte \bar{x} e R .

n	A_3	c_4	B_3	B_4
2	2.659	0.7979	0	3.267
3	1.954	0.8862	0	2.568
4	1.628	0.9213	0	2.266
5	1.427	0.94	0	2.089
6	1.287	0.9515	0.03	1.97
7	1.182	0.9594	0.118	1.882
8	1.099	0.965	0.185	1.815
9	1.032	0.9693	0.239	1.761
10	0.975	0.9727	0.284	1.716
15	0.789	0.9823	0.428	1.572
20	0.68	0.9869	0.51	1.49

Tabella 2: Costanti relative alle carte \bar{x} e S .

Appendice B: codici

In questa appendice illustriamo i codici utilizzati nelle analisi dei capitoli 3 e 5. Tutti i codici sono stati sviluppati con il software statistico **R** versione **2.8.1**.

Applicazione del modello ARIMA alla serie degli intervalli RR

Presentiamo il codice utilizzato per applicare i modelli ARIMA (0,1,1) e (0,2,2) a vettori successivi di dimensione N degli intervalli RR. L'idea è quella di considerare le prime N osservazioni e testare su questo sotto-campione i due modelli presi in considerazione, calcolando i valori dei p-value del test di Ljung-Box per diversi valori del *lag* K ; considerare poi un nuovo campione, sempre di numerosità N , che comprenda però le osservazioni dalla seconda alla $N+1$ -esima, calcolare le nuove grandezze e passare al campione successivo proseguendo con la stessa modalità fino all'ultima osservazione.

```
% Importiamo prima di tutti i file con gli intervalli RR dei 10
% pazienti e i due vettori contenenti i valori di inizio e fine
% dell'evento di Fibrillazione Atriale per ogni paziente
```

```
p1=read.table("paziente_1.txt")
p2=read.table("paziente_2.txt")
p3=read.table("paziente_3.txt")
p4=read.table("paziente_4.txt")
p5=read.table("paziente_5.txt")
p6=read.table("paziente_6.txt")
p7=read.table("paziente_7.txt")
p8=read.table("paziente_8.txt")
p9=read.table("paziente_9.txt")
p10=read.table("paziente_10.txt")
```

```

inizio=read.table("inizio.txt")
fine=read.table("fine.txt")

inizio=as.matrix(inizio)
inizio=as.vector(inizio)
fine=as.matrix(fine)
fine=as.vector(fine)

% Consideriamo il paziente numero 1 e presentiamo i codici nel
% caso di N=600, ricordando che le stesse operazioni sono state
% eseguite con N=200,400,800 e 1200.

n=1
a=p1
a=as.matrix(a)
a=as.vector(a)

N=600

% Inizializziamo ora i vettori che, alla fine, conterranno i
% valori dei p-value del test. Consideriamo K=5,10,15 e 20,
% per cui inizializziamo 8 vettori (4 per ciascun modello)

pvalue1_5=rep(0,(length(a)-N+1))
pvalue1_10=rep(0,(length(a)-N+1))
pvalue1_15=rep(0,(length(a)-N+1))
pvalue1_20=rep(0,(length(a)-N+1))
pvalue2_5=rep(0,(length(a)-N+1))
pvalue2_10=rep(0,(length(a)-N+1))
pvalue2_15=rep(0,(length(a)-N+1))
pvalue2_20=rep(0,(length(a)-N+1))

for (i in 1:(length(a)-N+1)){
  arima1=arima(a[i:(i+N-1)],c(0,1,1))
  arima2=arima(a[i:(i+N-1)],c(0,2,2))
  res1=arima1$res
  autocorr1=acf(res1)$acf
  autocorr1=autocorr1[2:length(autocorr1)]
  c=0
  for (j in 1:5){
    c=c + (autocorr1[j]^2)/(h-j)
  }
}

```

```

}
Q=(N-1)*(N+1)*c
pvalue1_5[i]=1-pchisq(Q,4)
c=0
for (j in 1:10){
c=c + (autocorr1[j]^2)/(h-j)
}
Q=(N-1)*(N+1)*c
pvalue1_10[i]=1-pchisq(Q,9)
c=0
for (j in 1:15){
c=c + (autocorr1[j]^2)/(h-j)
}
Q=(N-1)*(N+1)*c
pvalue1_15[i]=1-pchisq(Q,14)
c=0
for (j in 1:20){
c=c + (autocorr1[j]^2)/(h-j)
}
Q=(N-1)*(N+1)*c
pvalue1_20[i]=1-pchisq(Q,19)
res2=arima2$res
autocorr2=acf(res2)$acf
autocorr2=autocorr2[2:length(autocorr2)]
c=0
for (j in 1:5){
c=c + (autocorr2[j]^2)/(h-j)
}
Q=(N-2)*N*c
pvalue2_5[i]=1-pchisq(Q,3)
c=0
for (j in 1:10){
c=c + (autocorr2[j]^2)/(h-j)
}
Q=(N-2)*N*c
pvalue2_10[i]=1-pchisq(Q,8)
c=0
for (j in 1:15){
c=c + (autocorr2[j]^2)/(h-j)
}
Q=(N-2)*N*c

```

```

pvalue2_15[i]=1-pchisq(Q,13)
c=0
for (j in 1:20){
c=c + (autocorr2[j]^2)/(h-j)
}
Q=(N-2)*N*c
pvalue2_20[i]=1-pchisq(Q,18)
}

```

Monitoraggio continuo del p-value del test di Ljung-Box e segnalazione dell'evento di Fibrillazione Atriale

Una volta ottenuti i p-value, il passo successivo è stato quello di creare un metodo che segnalasse l'evento di Fibrillazione Atriale. Il meccanismo utilizzato è stato quello di considerare 100 p-value e rifiutare l'ipotesi nulla di buon adattamento del modello (ovvero rifiutare l'ipotesi di presenza di Fibrillazione Atriale) se almeno 1 p-value su 100 è minore di 0.0001.

```

% Consideriamo il p-value del modello ARIMA (0,1,1) con K=5,
% considerando che le stesse operazioni sono state fatte anche
% per K=10,15 e 20 e per il modello ARIMA (0,2,2)

```

```

p=pvalue1_5
num=length(p)
fin=num-99

```

```

% Inizialmente impostiamo tutti i valori a 1, che rappresenta la
% presenza di Fibrillazione Atriale

```

```

fibrill=rep(1,fin)
for (i in 1:fin){
prova=p[i:(i+99)]
controllo=rep(0,100)
for (j in 1:100){
if (prova[j]<0.0001){
controllo[j]=1}
}
k=sum(controllo) % Se almeno 1 p-value su 100 è minore di 0.0001
if (k>0){ % impostiamo il valore a 0, ovvero
fibrill[i]=0} % non c'è Fibrillazione Atriale
}

```

Costruzione delle carte di controllo

Nel capitolo 5 abbiamo lavorato con le carte di controllo. Presentiamo il codice utilizzato per il paziente numero 1 per la costruzione dei limiti delle carte \bar{X} e R e la successiva carta costruita per monitorare il processo pre-FA, considerando che le stesse operazioni sono state fatte per il periodo di Fibrillazione Atriale e per i pazienti 2 e 10.

```
n=1
a=p1
a=as.matrix(a)
a=as.vector(a)

prima=a[1:inizio[n]-1]
fib=a[inizio[n]:fine[n]]
dopo=a[(fine[n]+1):length(a)]

arima_controllo=arima(prima[1:1000],c(5,1,3))

res=arima_controllo$res

dim_camp=10

% Dalla dimensione campionaria si ottengono, guardando
% l'apposita tabella, i valori delle costanti di interesse

A2=0.308
D3=0.223
D4=1.777

actual=res[1:dim_camp]
res2=mean(actual)
range=max(actual)-min(actual)
for (i in 1:99){
actual=res[(dim_camp*i+1):(dim_camp*i+dim_camp)]
res2=c(res2,mean(actual))
range=c(range,(max(actual)-min(actual)))
}

range_medio=mean(range)

% Costruzione dei limiti di controllo per la carta R
```

```

LCL_r=D3*range_medio
UCL_r=D4*range_medio

% Visualizzazione della carta R

plot(range,type="b",ylab="R",xlab="")
segments(-100,LCL_r,300,LCL_r,col="red",lwd=3)
segments(-100,UCL_r,300,UCL_r,col="red",lwd=3)

% I primi 7 valori sembrano essere anomali, per cui li
% eliminiamo e ricalcoliamo i nuovi limiti della carta R

arima_controllo=arima(prima[71:1000],c(5,1,3))

res=arima_controllo$res

actual=res[1:dim_camp]
res2=mean(actual)
range=max(actual)-min(actual)
for (i in 1:92){
actual=res[(dim_camp*i+1):(dim_camp*i+dim_camp)]
res2=c(res2,mean(actual))
range=c(range,(max(actual)-min(actual)))
}

range_medio=mean(range)

% Costruzione dei nuovi limiti per la carta R

LCL_r=D3*range_medio
UCL_r=D4*range_medio

% Visualizzazione della carta R

plot(range,type="b",ylab="R",xlab="")
segments(-100,LCL_r,300,LCL_r,col="red",lwd=3)
segments(-100,UCL_r,300,UCL_r,col="red",lwd=3)

% In questo caso non abbiamo riscontrato anomalie particolari,
% per cui procediamo costruendo e analizzando la carta X

```

```

linea_centrale=mean(res2)

% Costruzione dei limiti per la carta X

LCL=linea_centrale - A2*range_medio
UCL=linea_centrale + A2*range_medio

% Visualizzazione della carta X

plot(res2,type="b",xlab="",ylab="X")
segments(-100,LCL,300,LCL,col="red",lwd=3)
segments(-100,UCL,300,UCL,col="red",lwd=3)

% Anche nella carta X non riscontriamo particolari anomalie,
% quindi l'ultimo passo sar  quello di calcolare i nuovi
% residui e analizzare le carte X e R che si ottengono

prediction=predict(arima_controllo,8000)$pred
res_new=a[1001:9000]-prediction

actual_new=res_new[1:dim_camp]
res_new2=mean(actual_new)
range_new=max(actual_new)-min(actual_new)
for (i in 1:799){
actual_new=res_new[(dim_camp*i+1):(dim_camp*i+dim_camp)]
res_new2=c(res_new2,mean(actual_new))
range_new=c(range_new,(max(actual_new)-min(actual_new)))
}

plot(c(res2,res_new2),type="b")
segments(-100,LCL_r,9900,LCL_r,col="red",lwd=3)
segments(-100,UCL_r,9900,UCL_r,col="red",lwd=3)
segments(floor(inizio[n]/10),-100000,floor(inizio[n]/10),20000,
col="blue",lwd=3)

plot(c(range,range_new),type="b",xlab="",ylab="R")
segments(-100,LCL_r,9900,LCL_r,col="red",lwd=3)
segments(-100,UCL_r,9900,UCL_r,col="red",lwd=3)
segments(floor(inizio[n]/10),-100,floor(inizio[n]/10),20000,
col="blue",lwd=3)

```


Bibliografia

- [1] George Casella, Roger L. Berger: *Statistical Inference*, Duxbury Press (2002)
- [2] Douglas C. Montgomery: *Introduction to Statistical Quality Control*, McGraw-Hill (2005)
- [3] George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins: *Time series analysis - forecasting and control*, Holden-Day (1970)
- [4] Luca Mainardi, Leif Sornmo, Sergio Cerutti: *Understanding Atrial Fibrillation, cap. 5: Analysis of Ventricular Response during Atrial Fibrillation*, Morgan and Claypoll Publishers
- [5] Luca Mainardi, Leif Sornmo, Sergio Cerutti: *Understanding Atrial Fibrillation, cap. 8: Algorithms for Atrial Tachyarrhythmia Detection for Long-Term Monitoring with Implantable Devices*, Morgan and Claypoll Publishers
- [6] Marcello Costantini, Antonio Crema: *Elettrocardiologia della Fibrillazione Atriale*, Italian Heart J Suppl (2000), 1 (5), pp. 632-640
- [7] Richard J. Cohen, Ronald D. Berger, Theodore E. Dushane: *A Quantitative Model for the Ventricular Response During Atrial Fibrillation*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering (1983), Vol. BME-30, No. 12
- [8] Bert K. Bootsma, Adriaan J. Hoelen, Jan Strackee, Frits L. Meijler: *Analysis of R-R Intervals in Patients with Atrial Fibrillation at Rest and During Exercise*, American Heart Association (1970)
- [9] Camillo Cammarota, Enrico Rogora: *Indipendence and symbolic indipendence of nonstationary heartbeat series during atrial fibrillation*, Physica A (2005), 353, pp. 323-335

- [10] Camillo Cammarota, Giuseppe Guarini, Enrico Rogora, Maria Ambrosini: *Non stationary model of the heartbeat time series in atrial fibrillation*
- [11] Bo Yeon Kim, Yun Seok Chang, Kwang Suk Park: *A nonlinear model for predicting ECG R-R interval variation based on the evolutionary computation approach*, Computational Science ICCS (2003), Vol. 2657
- [12] Bart P.T. Hoekstra, Cees G.H. Diks, Maurits A. Allesie, Jacob De-goede: *Non-linear time series analysis: methods and applications to atrial fibrillation*, Ann. Ist. Super. Sanità (2001), Vol. 37, No. 3, pp. 325-333
- [13] B.S. Saini, Dilbag Singh, Moin Uddin, Vinod Kumar: *Improved Power Spectrum Estimation for R-R Interval Time Series*, International Journal of Computer Science (2009)
- [14] G. E. P. Box, David A. Pierce: *Distribution fo Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Avarage Time Series Models*, Journal of the American Statistical Association (1970), Vol. 65, No. 332, pp. 1509-1526
- [15] G. M. Ljung, G. E. P. Box: *On a measure of lack of fit in time series models*, Biometrika (1978), Vol. 65, No. 2, pp. 297-303
- [16] E. G. Schilling, P. R. Nelson: *The Effect of Non-normality on the Control Limits of X Charts*, Journal of Quality Technology (1976), Vol. 8, pp. 183-187
- [17] I. W. Burr: *The Effects of Non-normality on Constants for X and R Charts*, Industrial Quality Control (1967), Vol. 23, pp. 563-568
- [18] L. K. Chan, K. P. Hapuarachchi, B. D. Machperson: *Robustness of X and R charts*, IEEE Transactions Reliability (1988), Vol. 37, pp. 117-123
- [19] Primo portale internet italiano dedicato alla fibrillazione atriale, con la collaborazione del Dott. Stefano Benussi, responsabile dell'unità funzionale chirurgia delle aritmie all'Ospedale San Raffaele di Milano:
<http://www.fibrillazioneatriale.it>
- [20] http://www.emedicinehealth.com/atrial_fibrillation/article_em.htm
- [21] http://www.emedicinehealth.com/atrial_flutter/article_em.htm

- [22] R Development Core Team (2008)
R: A language and environment for statistical computing
R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria
ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>