

**POLITECNICO DI MILANO**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Informatica**  
**Dipartimento di Elettronica e Informazione**



**“Jules et Jim” rivisitato: un nuovo  
modello caotico e un prodotto  
multimediale interattivo**

**Relatore: Prof. Fabio Dercole**  
**Correlatore: Prof. Sergio Rinaldi**

**Tesi di Laurea di:**  
**Francesco De Liva, matricola 731388**

**Anno Accademico 2010-2011**



*In tempi come questi la fuga è l'unico mezzo  
per mantenersi vivi e continuare a sognare.*

*Henry Laborit*



# Sommario

Questo studio riguarda la modellizzazione matematica di un problema che è vicino a tutti noi più di qualsiasi altro, ovvero l'evoluzione dei nostri sentimenti. Questo tema, classificato da alcuni studiosi con la parola chiave *Love Dynamics*, ha ricevuto considerevole attenzione negli ultimi anni e rientra nel campo della psicologia sociale. In questa tesi non si presenta lo studio di un caso generico, ma una modellizzazione del famoso triangolo descritto nel romanzo *Jules et Jim* di Henri-Pierre Roché (1953), da cui François Truffaut ha tratto nel 1961 uno dei suoi film di maggior successo. La storia racconta di un intreccio amoroso in cui due amici inseparabili, Jules e Jim, amano la stessa donna, Kathe, che li ricambia entrambi in modo altalenante. La loro relazione, alquanto turbolenta, dura quasi vent'anni e si conclude con un suicidio.

Questa tesi ha lo scopo di rivisitare il modello matematico con cui F. Dercole (1999) ha dimostrato che la storia contiene elementi di caoticità, raffinando la descrizione dei processi che sono alla base della dinamica dei sentimenti: l'oblio, il ricambio e l'attrazione.

Dopo aver dimostrato l'esistenza di un comportamento caotico anche nel nuovo modello, presenteremo uno strumento multimediale innovativo progettato, realizzato e testato al fine di veicolare i risultati scientifici di questo studio a un pubblico più vasto rispetto a quello della sola comunità scientifica.

Infatti la grande sfida che è alla base di questo lavoro è di carattere comunicativo e si può tradurre in una domanda: attraverso un sistema multimediale interattivo possiamo riuscire, anche solo a livello intuitivo, a trasmettere un'idea di cosa possano essere i modelli matematici e le dinamiche non lineari?

In relazione a quest'ultima domanda è facile comprendere il perché della scelta del tema che è oggettivamente di grande interesse per tutti.



# Ringraziamenti

Voglio esprimere la mia ammirazione per il Prof. Fabio Dercole, per l'impegno e la costanza con cui mi ha seguito in questi mesi. Ringrazio di cuore il Prof. Sergio Rinaldi per avermi trasmesso la sua passione per l'ingegneria e, inoltre, per le coinvolgenti ore di lezione.

Ringrazio Letizia, Walter, Massimo, Anna, Enzo, Marco e Orsolina per avermi fatto diventare la persona che sono.

Inoltre non mi troverei qui a scrivere questa tesi se non avessi potuto contare, negli ultimi cinque anni, su alcuni veri amici che mi hanno supportato e aiutato negli studi: Alessandro Candolini, Stefano Fasani, Daniele Garbugli, Massimo Dell'Erba e Luca Di Minervino.

Ci sono inoltre delle persone molto care che devo ringraziare per avermi permesso di concludere gli studi in ingegneria senza perdere del tutto la "salute mentale". Ovvero coloro che nonostante tutto mi hanno apprezzato e voluto bene: Linda Sporeni, Alessandra Cornaro, Veronica Tecchio, Giovanna Goldaniga, Federico Caimi e Gaia Calligaris (in ordine di ore al telefono).

Infine ringrazio la mia prima lettrice Piera Corubolo.

Milano, 24 novembre 2010

*Francesco De Liva*





# Indice

<b>Sommario</b>	<b>I</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>III</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Inquadramento generale . . . . .	1
1.2 Breve descrizione del lavoro . . . . .	3
1.3 Struttura della tesi . . . . .	4
<b>2 Il modello originale</b>	<b>5</b>
2.1 Il modello minimo di coppia . . . . .	5
2.2 Oblio, ricambio e attrazione . . . . .	6
2.2.1 L'oblio . . . . .	6
2.2.2 Il ricambio . . . . .	6
2.2.3 L'attrazione . . . . .	8
2.2.4 La caratterizzazione di un individuo . . . . .	9
2.3 Le variabili . . . . .	10
2.4 Kathe, Jules et Jim . . . . .	11
2.4.1 Kathe . . . . .	11
2.4.2 Jules et Jim . . . . .	13
2.5 Il modello completo . . . . .	15
2.6 Risultati dell'analisi del modello . . . . .	16
<b>3 Il nuovo modello</b>	<b>21</b>
3.1 Il modello originale . . . . .	21
3.2 Critiche al modello originale . . . . .	21
3.3 Il nuovo modello . . . . .	22
<b>4 Analisi del nuovo modello</b>	<b>25</b>
4.1 Obiettivi dell'analisi . . . . .	25
4.2 Richiamo sugli esponenti di Lyapunov . . . . .	26

4.3	Implementazione . . . . .	28
4.4	Risultati e loro interpretazione . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Cenni all'apprendimento multimediale</b>	<b>35</b>
5.1	L'apprendimento multimediale . . . . .	35
5.1.1	Funzionamento dell'apprendimento multimediale a livello cognitivo . . . . .	36
5.1.2	I principi dell'apprendimento multimediale . . . . .	37
5.1.3	L'apprendimento multimediale della matematica . . . . .	39
5.2	Sistemi dinamici e apprendimento multimediale . . . . .	40
5.2.1	Jules et Jim e il multimediale . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Il prodotto multimediale</b>	<b>43</b>
6.1	Introduzione . . . . .	43
6.2	Analisi dei requisiti . . . . .	43
6.2.1	Segmentazione del messaggio . . . . .	43
6.2.2	Requisiti funzionali e non . . . . .	45
6.2.3	Requisiti di interazione con l'utente . . . . .	46
6.3	Progettazione . . . . .	46
6.3.1	Progettazione dei casi d'uso . . . . .	46
6.3.2	Interazione con l'utente . . . . .	47
6.3.3	Analisi dettagliata . . . . .	48
6.3.4	Progettazione multimediale . . . . .	50
6.3.5	Progettazione multimediale: studio di caso . . . . .	51
6.4	Sviluppo . . . . .	55
6.4.1	Action Script 3 . . . . .	55
6.4.2	Diagramma delle classi . . . . .	56
6.4.3	Architettura del sistema . . . . .	57
6.4.4	Sviluppo contenuti multimediali . . . . .	58
6.5	Deploy . . . . .	58
6.6	Test case e casi d'uso . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>61</b>
7.1	Conclusioni . . . . .	61
	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>
	<b>A Diagrammi UML</b>	<b>67</b>
	<b>B Casi d'uso</b>	<b>73</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Questo elaborato va letto come una rivisitazione o meglio un'estensione della tesi di laurea del Prof. Fabio Dercole (1999) *Un'interpretazione modellistica del romanzo "Jules et Jim"*. Per evitare una trattazione ripetuta della tematica, delle motivazioni e delle congetture si rimanderà frequentemente il lettore a questa e ad opere correlate.

### 1.1 Inquadramento generale

Dercole (1999) studia la possibilità, in un certo senso rivoluzionaria nel contesto della psicologia tradizionale, di modellizzare matematicamente l'evoluzione dei nostri sentimenti. L'argomento rientra nel campo della psicologia sociale, dove i rapporti interpersonali sono l'argomento su cui è focalizzata maggior attenzione.

Il lavoro originale (Dercole, 1999) presenta un modello costituito da equazioni differenziali che ha la pretesa di descrivere la dinamica dei sentimenti di tre persone coinvolte in una storia d'amore.

Non è lo studio di un caso generico, ma una modellizzazione del famoso triangolo descritto nel romanzo "Jules et Jim" di Henri-Pierre Roché (1953), da cui François Truffaut ha tratto nel 1961 uno dei suoi film di maggior successo. La storia racconta di un intreccio amoroso in cui due amici inseparabili, Jules e Jim, amano la stessa donna, Kathe, che li ricambia entrambi in modo altalenante. La loro relazione, alquanto turbolenta, dura quasi vent'anni e si conclude con un suicidio.

Nel modello ogni variabile rappresenta il sentimento di una persona per un'altra. In un triangolo i sentimenti in gioco sono sei, ma nel modello

presentato i sentimenti di Jules per Jim e di Jim per Jules non sono modellizzati, rimanendo la loro amicizia praticamente immutata durante tutta la storia. Pertanto il modello è del quarto ordine.

Kathe è descritta da due variabili di stato,  $x_1$  e  $x_2$ , che misurano rispettivamente i suoi sentimenti per Jules e per Jim. Jules e Jim sono descritti da una variabile di stato ciascuno, rispettivamente  $y_1$  e  $y_2$ , che misura il loro sentimento per Kathe.

L'analisi del romanzo ha permesso di individuare le caratteristiche della psicologia dei tre personaggi e dei loro sentimenti. Naturalmente si è trattato di interpretazioni soggettive, supportate tuttavia da svariate citazioni tratte dal romanzo. Sulla base degli elementi raccolti e di considerazioni generali sui meccanismi psicologici che regolano la dinamica dei sentimenti, viene scelta la struttura del modello e vengono assegnati valori realistici ai parametri.

L'obiettivo generale è stato mostrare che una storia d'amore, essendo un processo che evolve nel tempo, può essere modellizzata da un sistema dinamico. In particolare è stato mostrato che, in accordo con l'evoluzione turbolenta e imprevedibile della storia d'amore narrata nel romanzo, il modello può avere dinamica caotica per opportuni valori dei parametri.

La tesi si inserisce nell'ambito di studi precedenti sui rapporti di coppia (Gagnani et al. (1997); Rinaldi (1998b), Rinaldi (1998b); Rinaldi e Gagnani (1998b), Rinaldi e Gagnani (1998c); Strogatz (1988)). In questi lavori ogni individuo è descritto da una variabile che misura il suo sentimento per il partner, e il modello tiene conto di tre fenomeni che contribuiscono a formare la dinamica dei sentimenti: l'oblio, a causa del quale si tende a dimenticare una persona che non si può più frequentare, il ricambio, cioè la reazione al sentimento del partner, e l'istinto, che è responsabile della reazione al fascino del partner. L'elemento innovativo della tesi è l'allargamento dell'indagine dalla coppia al triangolo.

Annullando alcuni fattori di interferenza, il modello degenera in due sotto-modelli tra loro non interagenti, che descrivono la coppia Kathe-Jules (in assenza di Jim) e la coppia Kathe-Jim (in assenza di Jules). L'analisi delle biforcazioni mostra che entrambi i sotto-modelli hanno dinamica periodica per valori realistici dei parametri. Il modello completo, cioè il modello che tiene conto delle interferenze, risulta pertanto costituito da due oscillatori accoppiati, e come tale è candidato ad avere comportamento caotico (Strogatz, 1994).

L'analisi del modello completo (condotta attraverso lo studio delle biforcazioni e l'analisi picco-picco di serie temporali generate per simulazione) mostra che, al variare dei parametri, gli attrattori possono essere equilibri,

cicli, tori o strani attrattori. In altre parole, sui tempi lunghi il triangolo può assestarsi su regimi stazionari, periodici, quasi periodici o caotici.

I risultati del lavoro di Dercole sono in accordo con l'evoluzione della storia descritta da Henri-Pierre Roché. Lo strano attrattore che si ottiene per valori realistici dei parametri descrive la dinamica turbolenta e imprevedibile della relazione d'amore tra i tre personaggi. Anche l'altalenanza di Kathe nel ricambiare a tratti Jules, a tratti Jim, interpretabile come altalenanza nell'amare a tratti più l'uno, a tratti più l'altro, è descritta dal modello. Infatti, interpretando i cambi di segno della variabile  $k(t) = x_1(t) - x_2(t)$  come cambi di partner da parte di Kathe, si ottiene un buon accordo con la cronologia degli eventi tratta dal romanzo.

## 1.2 Breve descrizione del lavoro

Il processo con il quale il modello matematico del triangolo viene ricavato partendo dal romanzo è spiegato abbondantemente nel lavoro di Dercole (1999). La componente innovativa apportata da questa tesi va individuata in due componenti.

La prima è l'elaborazione e l'analisi di un modello matematico rivisitato che si discosta dal precedente per la suddivisione più chiara nelle equazioni matematiche dei tre processi di oblio, ricambio e attrazione. Successivamente alla presentazione del modello rivisitato è stata svolta un'analisi del modello completo (studio delle biforcazioni e analisi picco-picco di serie temporali generate per simulazione), mostrando anche in questo caso che al variare dei parametri sui tempi lunghi il triangolo può assestarsi su regimi stazionari, periodici, quasi periodici o caotici.

La seconda componente innovativa è la sfida a livello comunicativo che viene presentata nella seconda parte dell'elaborato. L'obiettivo è stato quello di costruire un prodotto multimediale interattivo in grado di veicolare un'idea, anche puramente intuitiva, di cosa possano essere i modelli matematici e le dinamiche non lineari. Per riuscire in questo intento è stato necessario comprendere a fondo quali potessero essere i nostri utenti potenziali e creare attorno a questi dei percorsi di filmati, testi, immagini e esperienze interattive che li portassero ad avere un'esperienza del nostro modello matematico: come è stato realizzato, come funziona e come può essere cambiato.

La componente sicuramente più importante del percorso didattico che offriamo è legata alla possibilità data all'utente, dopo una breve introduzione sui concetti chiave dei sistemi dinamici, di interagire con il modello cambiando graficamente le funzioni dei parametri e avendo la possibilità di simulare

come questo si ripercuote sulla simulazione del modello.

### 1.3 Struttura della tesi

La tesi può essere divisa nettamente in due parti. La prima parte, che comprende i capitoli dal primo al quarto, contiene la spiegazione dei modelli matematici vecchio e nuovo, assieme alla loro analisi. Nella seconda parte, che è composta dai capitoli quinto e sesto, si trova l'analisi dei requisiti, la progettazione, lo sviluppo e i *test case* del prodotto multimediale realizzato.

## Capitolo 2

# Il modello originale

### 2.1 Il modello minimo di coppia

In questo capitolo viene presentato il modello di coppia ricavato dal romanzo di *Jules et Jim* nel lavoro ormai già altre volte citato di Dercole (1999).

Il modello di coppia proposto è un modello minimo, nel senso che studia la coppia col minimo numero di variabili di stato, ovvero due, una per ogni membro della coppia. La variabile  $x_i, i = 1, 2, \dots$  è una misura dell'amore dell'individuo  $i$  per il partner. Valori positivi rappresentano sentimenti positivi, dall'amicizia alla passione in ordine crescente, mentre valori negativi sono associati ad antagonismo e disprezzo. La completa indifferenza è identificata dal valore nullo.

Il modello è una cruda semplificazione della realtà. Primo perché l'amore è una complessa miscela di diversi sentimenti (stima, amicizia, soddisfazione sessuale, ...) e difficilmente può essere catturata da una singola variabile. Secondo perché altre emozioni e tensioni legate alla vita sociale di una persona non possono essere prese in considerazione in un modello minimo. In altre parole, solo l'interazione tra due individui è descritta, mentre il resto del mondo è congelato e non partecipa esplicitamente alla formazione dei sentimenti. Ciò significa che piuttosto di tentare di essere completi, il proposito è di controllare quali comportamenti osservati nella vita reale possano essere spiegati dai pochi ingredienti inclusi nel modello.

E' importante sottolineare che questi modelli non sono pensati per descrivere le fluttuazioni veloci dei sentimenti, come quelle indotte dalle variazioni giornaliere di pressione arteriosa, dai ritmi di lavoro settimanali o dai cicli mestruali, e nemmeno per descrivere l'evoluzione del rapporto di coppia sull'intero arco della vita. Modelli come quello considerato in questa tesi fanno riferimento a periodi di durata intermedia (mesi/anni) e possono essere us-

ati, per esempio, per prevedere se una storia d'amore sarà caratterizzata da sentimenti regolari o turbolenti.

Oblio, ricambio e attrazione sono i tre processi ritenuti responsabili della dinamica dei sentimenti. L'oblio descrive il fenomeno per cui tendiamo a dimenticare una persona che non possiamo più frequentare, il ricambio è la reazione all'amore del partner e l'attrazione è responsabile della reazione al fascino. Più precisamente, il grado di variazione istantanea del sentimento  $x_i$  dell'individuo  $i$  verso il partner è supposto essere costituito dalla somma di tre termini,

$$x_i = O_i + R_i + A_i \quad (2.1)$$

dove le funzioni  $O_i, R_i, A_i$  sono dette rispettivamente funzione d'oblio, funzione di ricambio, funzione d'attrazione e devono essere ulteriormente specificate.

## 2.2 Oblio, ricambio e attrazione

### 2.2.1 L'oblio

Il processo d'oblio può essere facilmente studiato pensando al caso estremo di un individuo che ha perso il partner (così che  $R_i = 0, A_i = 0$ ). Assumendo che in questa condizione  $x_i(t) = 0$  svanisca esponenzialmente nel tempo, cioè

$$x_i(t) = x_i(0)e^{-f_i t}$$

si ottiene

$$\dot{x}_i = -f_i x_i$$

Pertanto la funzione d'oblio risulta essere

$$O_i(x_i) = -f_i x_i \quad (2.2)$$

dove il parametro  $f_i$  può assumere solo valori positivi, ed è detto coefficiente d'oblio.

### 2.2.2 Il ricambio

La funzione di ricambio  $R_i$  descrive la reazione dell'individuo  $i$  all'amore del partner e può pertanto essere assunta dipendente da  $x_j, j \neq i$ . Per essere più specifici, vengono descritti i casi degli individui sicuri e insicuri (Bartholomew e Horowitz, 1991; Griffin e Bartholomew, 1994). Gli individui sicuri reagiscono positivamente all'amore del partner e non sono spaventati



dall'elevato coinvolgimento sentimentale. In altre parole, un individuo sicuro ama essere amato e odia essere odiato.

Si può pertanto assumere, come caso estremo, che la funzione di ricambio di un individuo sicuro sia proporzionale a  $x_j$ , con coefficiente di proporzionalità positivo (vedi curva (1) in Figura 2.1). Più realisticamente si assume che  $R_i$  sia positiva, crescente, concava e limitata, per valori positivi di  $x_j$ , e negativa, crescente, convessa e limitata, per valori negativi (vedi curva (2) in Figura 2.1). La limitatezza interpreta il meccanismo psico-fisico che previene le persone dal raggiungere elevati e pericolosi livelli di stress.

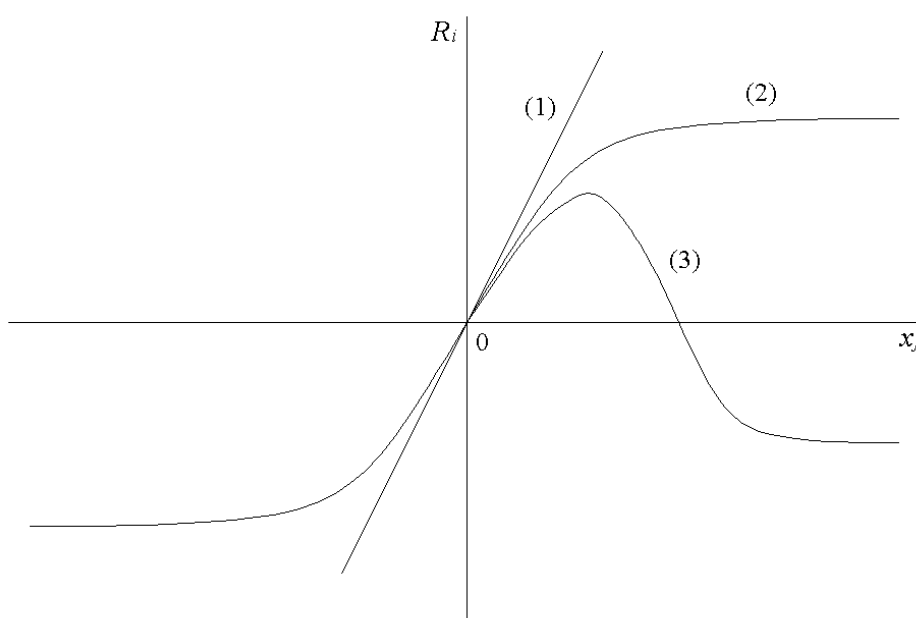


Figura 2.1: Andamenti tipici della funzione di ricambio per individui sicuri (lineare (1) e limitata (2)) e insicuri (3).

Gli individui insicuri sono invece quelli che per paura di perdere la propria libertà o per paura delle responsabilità connesse ad un legame forte, reagiscono negativamente ad elevate pressioni e coinvolgimenti sentimentali. Pertanto, la loro funzione di ricambio è decrescente per valori sufficientemente alti di  $x_j$  (vedi curva (3) in Figura 2.1). E' opportuno osservare che gli individui sicuri e insicuri non rappresentano l'intera popolazione.

### 2.2.3 L'attrazione

La funzione d'attrazione  $A_i$  descrive la reazione dell'individuo  $i$  al fascino del partner, rappresentato dal parametro  $a_j$ . Naturalmente il fascino non è solo costituito dall'attrazione fisica, ma più propriamente da una combinazione di differenti attributi quali età, educazione, posizione economica e sociale, cultura,... e ovviamente bellezza fisica.

La funzione d'attrazione gode delle stesse proprietà della funzione di ricambio per individui sicuri, in quanto si assume che tutti gli individui reagiscano positivamente al fascino, anche se i pesi relativi con cui ogni individuo reagisce agli ingredienti costituenti il fascino, sono in generale diversi. Nella Figura 2.2 sono mostrati gli andamenti tipici della funzione d'attrazione.

Si noti che la reazione al fascino del partner  $A_i(a_j)$  è più grande della reazione all'amore del partner  $R_i(x_j)$ , quando  $x_i$  è piccolo (o negativo). In particolare, all'inizio di una relazione  $x_1$  e  $x_2$  sono piccoli, così che il termine d'attrazione è quello dominante.

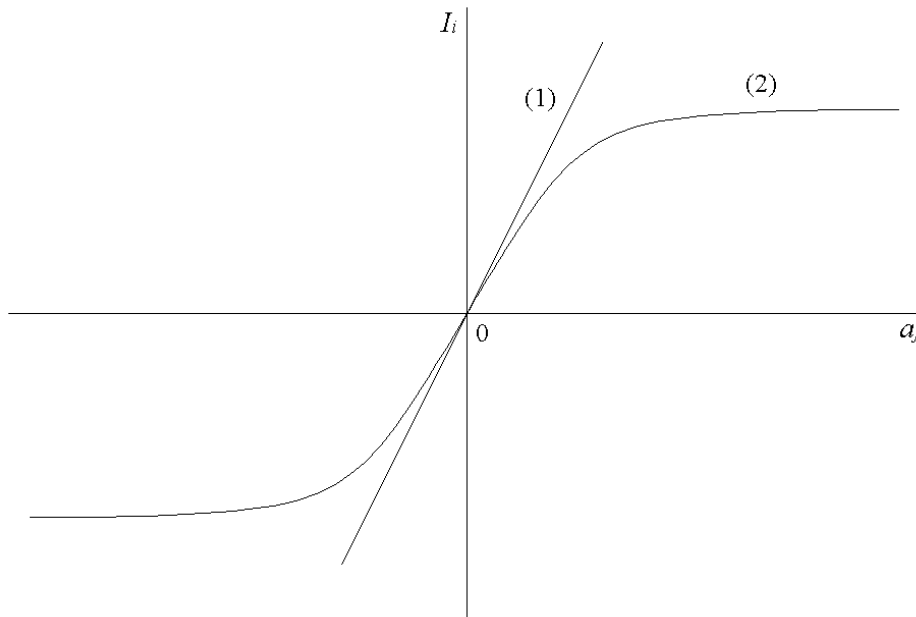


Figura 2.2: Andamenti tipici della funzione d'attrazione (lineare (1) e limitata (2)).

E' noto che le reazioni individuali possono essere esaltate dall'amore. Pertanto, si assume che la funzione d'attrazione di un individuo esaltato sia della forma

$$A_i(a_j, x_i) = [1 + S_i(x_i)]A_i^*(a_j) \quad (2.3)$$

dove la funzione  $A_i^*(a_j)$  è la funzione d'attrazione di un individuo completamente indifferente all'individuo  $j$ , ovvero di un individuo  $i$  per il quale risulti  $x_i = 0$ , mentre la funzione  $S_i(x_i)$ , detta funzione d'esaltazione, è nulla per  $x_i \leq 0$  e crescente, convessa / concava e limitata per  $x_i > 0$ , come mostrato nella Figura 2.3.

Il valore limite assunto dalla funzione d'esaltazione quando  $x_i$  tende all'infinito coincide col suo estremo superiore, ed è detto coefficiente d'esaltazione. Data la forma funzionale (2.3), tale coefficiente, sommato all'unità, rappresenta il massimo fattore moltiplicativo che la reazione istintiva può avere a causa dell'esaltazione.

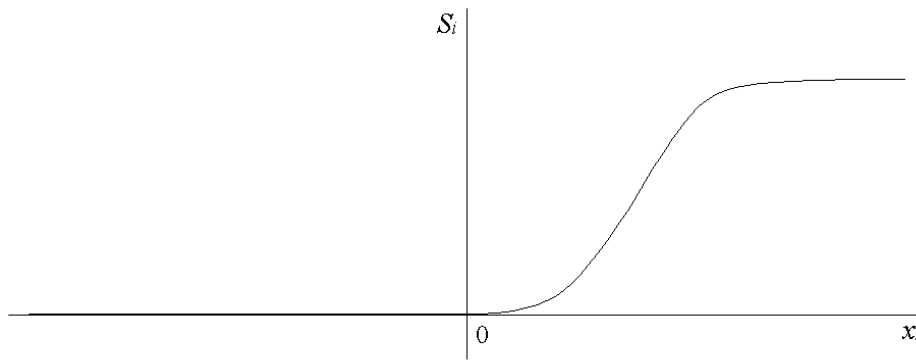


Figura 2.3: Andamento tipico della funzione d'esaltazione.

#### 2.2.4 La caratterizzazione di un individuo

La struttura generale del modello minimo di coppia presentato nei paragrafi precedenti si ottiene dalle (2.1)-(2.3), ed è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 = -f_1 x_1 + R_1(x_2) + A_1(a_2, x_1) \\ x_2 = -f_2 x_2 + R_2(x_1) + A_2(a_1, x_2) \end{cases} \quad (2.4)$$

dove ogni individuo è identificato da due parametri e due funzioni. I parametri sono il coefficiente d'oblio  $f_i$  e il fascino  $a_i$ , mentre le due funzioni sono la funzione di ricambio  $R_i(x_j)$  e la funzione d'attrazione  $A_i(a_j, x_i)$ . Parametri e funzioni sono assunte invarianti nel tempo.

Specificare le funzioni e assegnare valori numerici ai parametri per descrivere una coppia specifica è indubbiamente molto problematico.

## 2.3 Le variabili

Le variabili di stato del modello sono misure di sentimenti. Rappresentando ogni individuo di un generico triangolo attraverso due variabili di stato, descrittive i suoi sentimenti per gli altri due individui, si ottiene un modello del sesto ordine. Il modello è minimo, nel senso che ha il numero minimo di variabili di stato per descrivere una relazione triangolare.

Nel caso particolare del triangolo Kathe-Jules-Jim, i sentimenti di amicizia reciproca tra Jules e Jim sono immutati lungo tutto l'arco della storia, malgrado l'evoluzione della relazione con Kathe, che li coinvolge entrambi, sia caratterizzata da una dinamica irregolare e turbolenta.

Per questo motivo, il modello sviluppato nel seguito è del quarto ordine e descrive solamente i sentimenti d'amore tra i protagonisti, ritenendo implicitamente costanti i sentimenti di amicizia tra Jules e Jim.

Kathe è caratterizzata da due variabili di stato, indicate con  $x_1$  e  $x_2$ , che misurano rispettivamente i suoi sentimenti per Jules e per Jim. Jules e Jim sono caratterizzati da una variabile di stato ciascuno, indicata rispettivamente con  $y_1$  e  $y_2$ , che misura il loro sentimento per Kathe.

Si anticipa fin d'ora che il modello non costituisce un sistema positivo. Grazie alla scelta dei valori dei suoi parametri risulta tuttavia positiva la traiettoria che parte dall'origine dello spazio di stato, condizione iniziale che identifica il primo incontro tra Kathe, Jules e Jim, in cui i loro sentimenti reciproci sono ancora nulli.

Questa caratteristica è in accordo con la storia modellizzata, in quanto l'amore tra Kathe, Jules e Jim, malgrado abbia una dinamica irregolare, è sempre presente durante l'intera vicenda. Kathe ama sia Jules che Jim, desidera le caratteristiche di entrambi, ma nessuno dei due singolarmente le basta.

Nel seguito del capitolo, la descrizione delle funzioni che compaiono nelle equazioni del modello sarà concentrata solamente sui valori positivi delle variabili di stato che, come già detto, sono sempre positive per condizioni iniziali nulle. Inoltre, si adotta la convenzione di assumere positivi tutti i parametri del modello, esplicitando i segni negativi nelle equazioni, laddove necessario.

## 2.4 Kathe, Jules et Jim

### 2.4.1 Kathe

La dinamica dei sentimenti di Kathe è modellizzata tenendo conto dei tre fenomeni, chiamati oblio, ricambio e attrazione. Pertanto, la struttura delle equazioni delle variabili  $x_1$  e  $x_2$  è analoga a quella dell'equazione (2.1) del modello di coppia. Le funzioni d'oblio  $O_i$ , di ricambio  $R_i$  e d'attrazione  $A_i$ , devono però essere riviste nell'ambito del modello del triangolo.

Nel modello di coppia la funzione di ricambio è un elemento caratteristico dell'individuo, in quanto descrive il suo modo di reagire all'amore del partner. In generale però, la funzione di ricambio è una caratteristica della coppia, perché un individuo può reagire in modo diverso all'amore ricevuto da persone diverse.

Inoltre, nel caso si amino più persone contemporaneamente, il ricambio nei confronti di una può essere affievolito dall'amore ricevuto dalle altre, interpretando un meccanismo psico-fisico che limita l'amore erogabile da una persona. Kathe è quindi caratterizzata da due funzioni di ricambio, una verso Jules, indicata  $R_{x_1}$ , e una verso Jim, indicata  $R_{x_2}$ , dipendenti, per quanto detto, dalle variabili  $y_1$  e  $y_2$ . Ma la particolarità di Kathe è che riesce a vivere le sue storie d'amore con Jules e Jim (ma anche con altri uomini), in modo parallelo e indipendente.

Si è pertanto scelto di non far dipendere la funzione di ricambio  $R_{x_1}$  dalla variabile  $y_2$ , e analogamente la funzione di ricambio  $R_{x_2}$  dalla variabile  $y_1$ . Malgrado ciò Kathe ama due uomini contemporaneamente, ed è inevitabile che in lei nasca qualche tipo di conflitto interno. In particolare, è ragionevole pensare che il partner che a un certo istante è meno amato, sia dimenticato più rapidamente di quello più amato.

Di ciò si può tener conto ipotizzando che le funzioni d'oblio  $O_1$  e  $O_2$  di Kathe, rispettivamente per Jules e per Jim, siano date da

$$O_1(x_1, x_2) = -f + \varepsilon f(x_2 - x_1)x_1 \quad (2.5)$$

$$O_2(x_1, x_2) = -f + \varepsilon f(x_1 - x_2)x_2 \quad (2.6)$$

I coefficienti d'oblio secondo cui Kathe dimentica Jules e Jim sono quindi diversi e, in generale, varianti nel tempo. La loro media è però costante e pari a  $f$ , che è pertanto il coefficiente d'oblio di Kathe.

Infine, sembra lecito ipotizzare che la reazione al fascino di un partner non sia influenzata dall'esistenza di altri partner, per cui la funzione d'attrazione è unica e analoga a quella descritta nel paragrafo 2.1 nell'ambito del modello di coppia. Kathe è pertanto caratterizzata da una sola funzione

d'attrazione, indicata  $A$ , dipendente dal fascino del partner e dal sentimento per questo.

In conclusione, tenendo conto delle (2.1), (2.2) e (2.3), le equazioni che descrivono la dinamica dei sentimenti di Kathe sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -[f + \varepsilon_f(x_2 - x_1)]x_1 + R_{x_1}(y_1) + A_1(a_1, x_1) \\ \dot{x}_2 = -[f + \varepsilon_f(x_1 - x_2)]x_2 + R_{x_2}(y_2) + A_2(a_2, x_2) \end{cases} \quad (2.7)$$

dove  $a_1$  e  $a_2$  sono, rispettivamente, il fascino di Jules e il fascino di Jim.

La funzione di ricambio di Kathe per Jules ha i tratti dell'insicurezza, non perché Kathe sia spaventata dal coinvolgimento sentimentale, ma perché quando l'amore di Jules raggiunge livelli elevati è troppo spirituale e troppo poco passionale, tale da generare in lei reazioni negative. La forma funzionale scelta è:

$$\begin{aligned} R_{x_1}(y_1) &= R^*(y_1)N(y_1) \\ R(y_1) &= \frac{r^+ y_1}{r^+/\delta + y_1} \\ N(y_1) &= \begin{cases} \frac{\gamma - ((y_1 - \tau)/d)^2}{\gamma + ((y_1 - \tau)/d)^2} & \text{se } y_1 \geq \tau \\ 1 & \text{se } y_1 < \tau \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ed i parametri che vi compaiono hanno lo stesso significato dei corrispondenti parametri della (2.15):  $r^+$  coefficiente di ricambio asintotico di Kathe,  $\delta$  grado di ricambio iniziale di Kathe,  $\tau$  soglia d'insicurezza di Kathe,  $d$  grado d'insicurezza di Kathe,  $\gamma$  coefficiente d'azzeramento del ricambio di Kathe.

La passione mancante in Jules è invece presente nell'amore di Jim, che Kathe ricambia in modo positivo. La funzione di ricambio di Kathe per Jim è pertanto della classe degli individui sicuri, e nel modello è assunta lineare, ovvero

$$R_{x_2}(y_2) = r y_2 \quad (2.9)$$

dove il parametro  $r$  è il *coefficiente di ricambio di Kathe*. Kathe, come Jim, è passionale e reagisce positivamente al fascino maschile. Tra gli amanti di Kathe ci sono uomini belli e affascinanti, anche più di Jules e Jim. Inoltre, l'amore amplifica in lei l'attrazione fisica. Quando l'amore per Jules e Jim viene meno non esita a tradirli.

Il comportamento istintivo di Kathe è pertanto condizionato dai suoi sentimenti, ed è modellizzato da una funzione d'istinto dipendente dalle variabili  $x_1$  e  $x_2$  attraverso una funzione d'esaltazione, secondo la forma generale espressa dalla (2.3),

$$A(a_i, x_i) = \rho a_i [1 + S(x_i)] \quad (2.10)$$

$$S(x_i) = \begin{cases} \sigma \frac{((x_i - \tau_s)/d_s)^2}{1 + ((x_i - \tau_s)/d_s)^2} & \text{se } x_i \geq \tau_s \\ 0 & \text{se } x_i < \tau_s \end{cases}$$

$i = 1, 2$ , dove i parametri che vi compaiono permettono di plasmarne la dipendenza dalla variabile  $x_i$ .

Il parametro  $\rho$  è il coefficiente d'istinto di Kathe e il parametro  $\sigma$  è il coefficiente d'esaltazione di Kathe. Il parametro  $\tau_s$ , detto soglia d'esaltazione di Kathe, identifica il valore della variabile  $x_i$  oltre il quale il fenomeno dell'esaltazione inizia ad influenzare la reazione istintiva.

Il parametro  $d_s$ , detto grado d'esaltazione di Kathe, permette di regolare la rapidità con cui la funzione d'esaltazione  $S$  passa dal valore nullo a valori positivi, al crescere della variabile  $x_i$ : la transizione è tanto più rapida tanto più piccolo è il valore di questo parametro, e viceversa è tanto più lenta quanto più il suo valore è grande.

### 2.4.2 Jules et Jim

Jules non è geloso. Per lui l'amore non implica possesso. modo suo. Amando Jim, Kathe trova la passione che non ha con Jules, realizza completamente la sua felicità, e la sua bellezza pare agli occhi di Jules più radiosa.

Ciò stimola in Jules l'ispirazione poetica, contribuendo positivamente al suo sentimento per Kathe. E' quindi il modo di amare di Jules a rendere possibile in lui il fenomeno del compiacimento.

All'equazione del suo sentimento per Kathe viene pertanto aggiunto un termine che modella l'effetto positivo del surplus d'amore di Kathe per Jim.

$$\varepsilon_c(x_2 - x_1) \tag{2.11a}$$

Dove  $\varepsilon_c$  è detto *coefficiente di compiacimento di Jules*.

Jim, al contrario di Jules, è geloso. Lo è per gli amanti di Kathe ed anche per Jules, anche se nei suoi confronti la gelosia è attenuata dall'amicizia.

L'effetto del surplus d'amore di Kathe per Jules sul sentimento di Jim per Kathe è quindi negativo, pertanto all'equazione di Jim viene aggiunto il termine

$$-\varepsilon_j(x_1 - x_2) \tag{2.11b}$$

dove il parametro  $\varepsilon_j$  è detto coefficiente di gelosia di Jim.

In conclusione, tenendo conto delle (2.1), (2.11a) e (2.11b), le equazioni che descrivono la dinamica dei sentimenti di Jules e Jim sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -f_1 y_1 + R_1(x_1) + A_1(a, y_1) + \epsilon_c(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_2 = -f_2 y_2 + R_2(x_2) + A_2(a, y_2) + \epsilon_j(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (2.12)$$

dove i parametri  $f_1$  e  $f_2$  sono rispettivamente il coefficiente d'oblio di Jules e il coefficiente d'oblio di Jim, e  $a$  è il fascino di Kathe.

### Jules

E' già stato osservato che l'amore di Jules per Kathe è più spirituale che passionale. Malgrado la qualità del suo amore, Jules reagisce positivamente all'amore di Kathe, per cui la sua funzione di ricambio è della classe degli individui sicuri. Nel modello è assunta lineare, cioè

$$R_1(x_1) = r_1 x_1 \quad (2.13)$$

dove il parametro  $r_1$  è detto coefficiente di ricambio di Jules.

La perdita dell'interesse sessuale di Jules all'aumentare del suo amore per Kathe è modellizzata dalla funzione d'istinto, che è supposta lineare rispetto al fascino di Kathe, ma decrescente rispetto alla variabile  $y_1$  (termine di anti-esaltazione). Più precisamente,

$$A_1(a, y_1) = \rho_1 a [1 + S_1(y_1)] \quad (2.14)$$

$$S_1(y_1) = -\frac{y_1^2}{1 + y_1^2}$$

dove il parametro  $\rho_1$  è detto coefficiente d'istinto di Jules e la funzione  $S_1$  è la funzione di anti-esaltazione di Jules (la funzione d'esaltazione particolare è descritta nel paragrafo 2.2).

### Jim

Jim è un uomo libero da legami. Ridurre i propri bisogni, possedere il meno possibile per poter restare veramente libero, non vivere insieme per molto tempo di seguito, sapersi lasciare per potersi ritrovare, sono questi i suoi principi.

La funzione di ricambio di Jim è pertanto della classe degli individui insicuri. La forma funzionale scelta è la seguente:

$$R_2(x_2) = R_2^*(x_2) N_2(x_2)$$



$$R_2^*(x_2) = \frac{r_2^+ x_2}{r_2^+ / \delta_2 + x_2} \quad (2.15)$$

$$N_2(x_2) = \begin{cases} \frac{\gamma_2 - ((x_2 - \tau_2)/d_2)^2}{\gamma_2 + ((x_2 - \tau_2)/d_2)^2} & \text{se } x_2 \geq \tau_2 \\ 1 & \text{se } x_2 < \tau_2 \end{cases}$$

dove i parametri che vi compaiono permettono di plasmarne la dipendenza dalla variabile  $x_2$ .

La funzione  $R_2^*$  è una funzione di ricambio della classe degli individui sicuri, dove il parametro  $r_2^+$  è detto coefficiente di ricambio asintotico di Jim e il parametro  $\delta_2$ , detto grado di ricambio iniziale di Jim, è la derivata della funzione  $R_2^*$  valutata per  $x_2 = 0$ .

La funzione  $N_2$  modella il fenomeno dell'insicurezza, a causa del quale, per valori sufficientemente elevati dell'amore del partner, il ricambio diviene negativo. Il parametro  $\tau_2$ , detto soglia d'insicurezza di Jim, identifica il valore della variabile  $x_2$  oltre il quale il fenomeno dell'insicurezza inizia ad influenzare il ricambio.

Il parametro  $d_2$ , detto grado d'insicurezza di Jim, permette di regolare la rapidità con cui la funzione di ricambio di Jim passa da valori positivi a valori negativi, al crescere della variabile  $x_2$ : la transizione è tanto più rapida tanto più piccolo è il valore di questo parametro, e viceversa è tanto più lenta quanto più il suo valore è grande. Il parametro  $\gamma_2$ , detto coefficiente d'azzeramento del ricambio di Jim, permette di determinare il valore  $x_2^0$  della variabile  $x_2$  per cui la funzione di ricambio di Jim si annulla.

Jim è passionale, amante di tutte (o quasi) le donne desiderabili che incontra, pertanto reagisce positivamente al fascino femminile, indipendentemente da quanto le ama. La sua funzione d'istinto è assunta lineare nel fascino di Kathe e indipendente dal suo sentimento per lei, cioè

$$A_2(a) = \rho_2 a \quad (2.16)$$

dove il parametro  $\rho_2$  è detto *coefficiente d'istinto di Jim*.

## 2.5 Il modello completo

Il modello sviluppato nei paragrafi precedenti viene qui riportato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -[f + \varepsilon_f(x_2 - x_1)]x_1 + R_{x_1}(y_1) + \rho a_1(1 + S(x_1)) \\ \dot{x}_2 = -[f + \varepsilon_f(x_1 - x_2)]x_2 + r y_2 + \rho a_2(1 + S(x_2)) \\ \dot{y}_1 = -f_1 y_1 + r_1 x_1 + \rho_1 a(1 + S_1(y_1)) + \epsilon_c(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_2 = -f_2 y_2 + R_2(x_2) + \rho_2 a + \epsilon_j(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (2.17)$$

Inoltre viene messa a disposizione una tabella riassuntiva con l'elenco dei parametri usati nella modellizzazione:

Simbolo	Significato
$f$	coefficiente d'oblio di Kathe
$f_1$	coefficiente d'oblio di Jules
$f_2$	coefficiente d'oblio di Jim
$r$	coefficiente di ricambio di Kathe
$r^+$	coefficiente di ricambio asintotico di Kathe
$r_1$	coefficiente di ricambio di Jules
$r_2^+$	coefficiente di ricambio asintotico di Jim
$\delta$	grado di ricambio iniziale di Kathe
$\delta_2$	grado di ricambio iniziale di Jim
$\tau$	soglia d'insicurezza di Kathe
$\tau_2$	soglia d'insicurezza di Jim
$d$	grado d'insicurezza di Kathe
$d_2$	grado d'insicurezza di Jim
$\gamma$	coefficiente d'azzeramento del ricambio di Kathe
$\gamma_2$	coefficiente d'azzeramento del ricambio di Jim
$a$	fascino di Kathe
$a_1$	fascino di Jules
$a_2$	fascino di Jim
$\rho$	coefficiente d'istinto di Kathe
$\rho_1$	coefficiente d'istinto di Jules
$\rho_2$	coefficiente d'istinto di Jim
$\sigma$	coefficiente d'esaltazione di Kathe
$\tau_s$	soglia d'esaltazione di Kathe
$d_s$	grado d'esaltazione di Kathe
$\epsilon_f$	coefficiente di conflitto
$\epsilon_c$	coefficiente di compiacimento di Jules
$\epsilon_j$	coefficiente di gelosia di Jim

Tabella 2.1: Parametri del modello.

## 2.6 Risultati dell'analisi del modello

Al variare dei parametri d'accoppiamento il modello, pur non essendo un sistema positivo, mantiene positiva la traiettoria che parte dall'origine dello spazio di stato, in accordo col fatto che l'amore tra i tre protagonisti è sempre presente.

La sua evoluzione irregolare e imprevedibile è descritta dal modello, in quanto il regime asintotico raggiunto, per valori realistici dei parametri d'accoppiamento, è caotico. Tutti gli attrattori non stazionari raggiunti a partire dalla condizione iniziale nulla al variare dei parametri d'accoppiamento, sono caratterizzati dall'alternanza in segno della variabile  $k(t) = x_1(t) - x_2(t)$ , che descrive l'alternanza di Kathe nella scelta del partner.

Un modello di riferimento, scelto fissando i parametri d'accoppiamento nella regione caotica, mostra come gli andamenti nel tempo delle variabili descrivano qualitativamente il susseguirsi degli eventi della vicenda. Interpretando i cambi di segno della variabile  $k(t)$  come cambi di partner da parte di Kathe, si riscontra un buon accordo con la cronologia tratta dal romanzo.

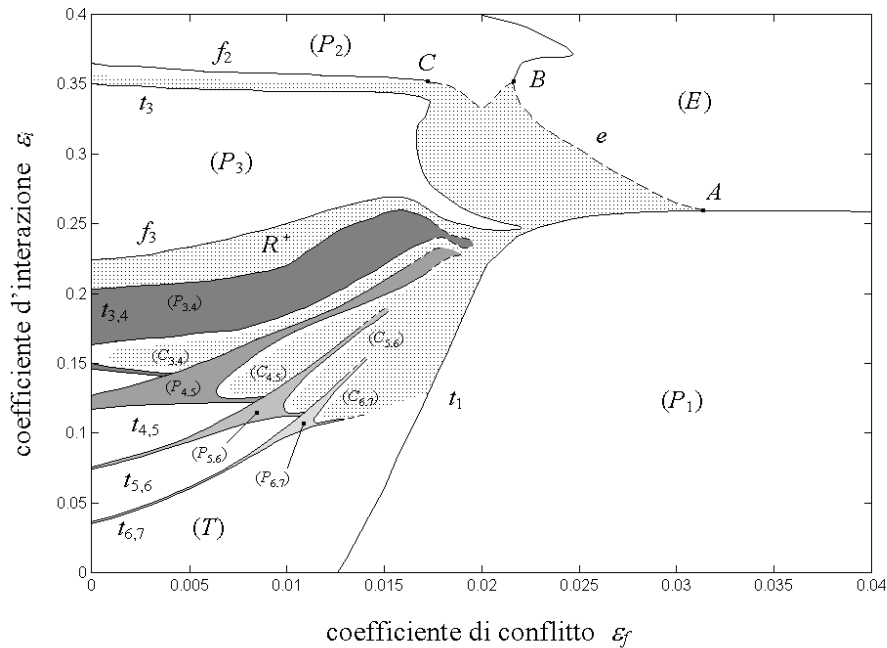


Figura 2.4: Sottoregioni del piano dei parametri d'accoppiamento in cui l'attrattore raggiunto dall'origine è topologicamente lo stesso; il punto  $R$  rappresenta il modello di riferimento.

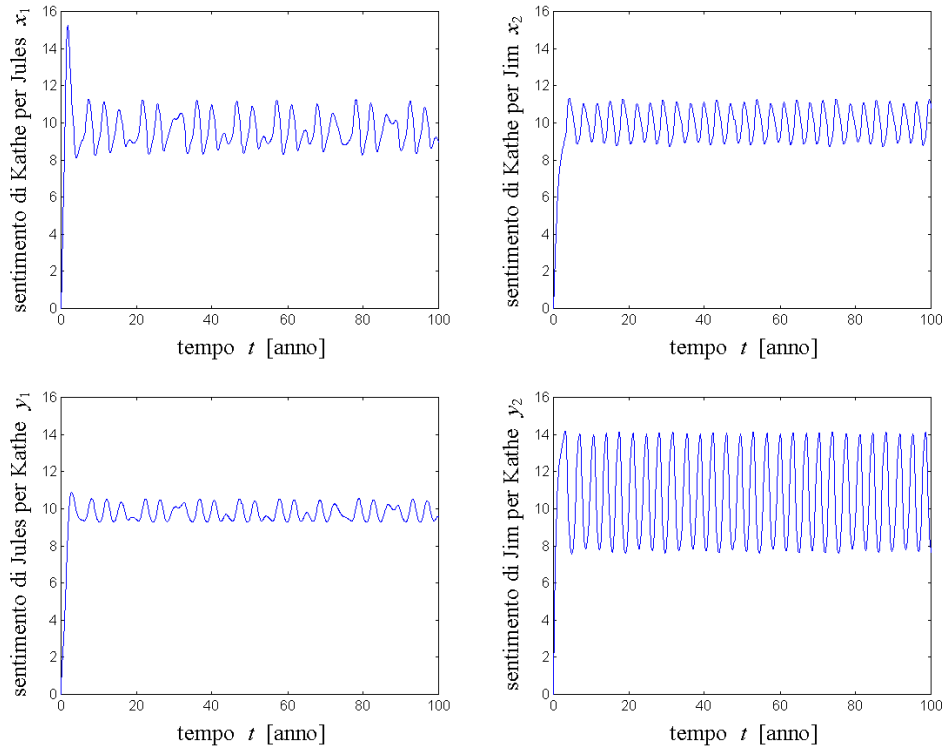


Figura 2.5: Andamento nel tempo delle variabili di stato, generati per simulazione del modello di riferimento a partire dallo stato nullo.

Simbolo	Significato	Valore
$f$	coefficiente d'oblio di Kathe	2
$f_1$	coefficiente d'oblio di Jules	1
$r$	coefficiente di ricambio di Kathe	1
$r^+$	coefficiente di ricambio asintotico di Kathe	80
$r_1$	coefficiente di ricambio di Jules	1
$\delta$	grado di ricambio iniziale di Kathe	8
$\tau$	soglia d'insicurezza di Kathe	2.5
$d$	grado d'insicurezza di Kathe	7.5
$\gamma$	coefficiente d'azzeramento del ricambio di Kathe	13/7
$a$	fascino di Kathe	20
$a_1$	fascino di Jules	4
$\rho$	coefficiente d'istinto di Kathe	1
$\rho_1$	coefficiente d'istinto di Jules	0.5
$\sigma$	coefficiente d'esaltazione di Kathe	2
$\tau_s$	soglia d'esaltazione di Kathe	9
$d_s$	grado d'esaltazione di Kathe	1
$\epsilon_f$	coefficiente di conflitto	$10^{-2}$
$\epsilon_i$	coefficiente di interazione	0.24

Tabella 2.2: Scelta dei valori dei parametri del sotto-modello Kathe-Jules.

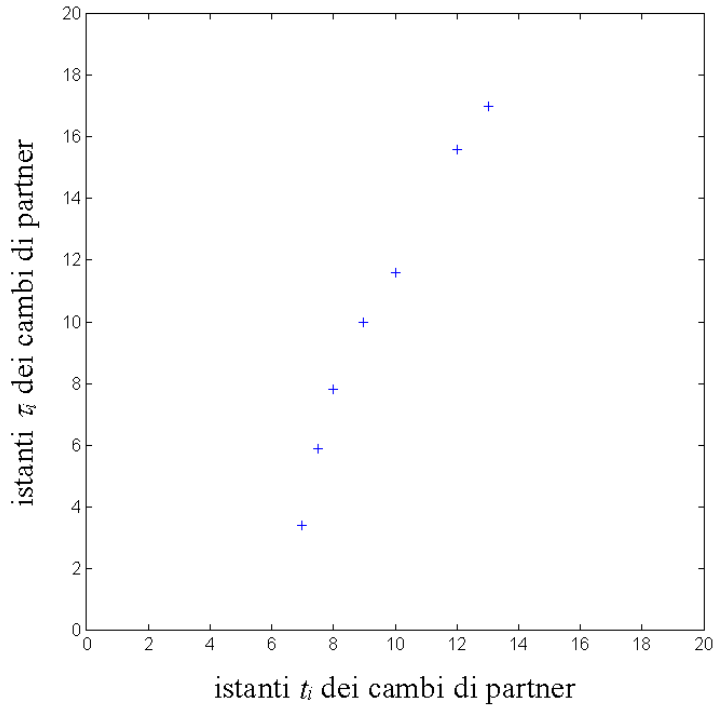


Figura 2.6: Istanti corrispondenti ai cambi di partner da parte di Kathe: in ascissa i dati ricavati dal romanzo e in rdinata quelli proposti dal modello di riferimento.

Simbolo	Significato	Valore
$f$	coefficiente d'oblio di Kathe	2
$f_2$	coefficiente d'oblio di Jim	2
$r$	coefficiente di ricambio di Kathe	1
$r^+$	coefficiente di ricambio asintotico di Kathe	80
$r_2^+$	coefficiente di ricambio asintotico di Jim	20
$\delta$	grado di ricambio iniziale di Kathe	8
$\delta_2$	grado di ricambio iniziale di Jim	2
$\tau$	soglia d'insicurezza di Kathe	2.5
$\tau_2$	soglia d'insicurezza di Jim	9
$d$	grado d'insicurezza di Kathe	7.5
$d_2$	grado d'insicurezza di Jim	1
$\gamma$	coefficiente d'azzeramento del ricambio di Kathe	13/7
$\gamma_2$	coefficiente d'azzeramento del ricambio di Jim	1
$a$	fascino di Kathe	20
$a_2$	fascino di Jim	5
$\rho$	coefficiente d'istinto di Kathe	1
$\rho_2$	coefficiente d'istinto di Jim	1
$\sigma$	coefficiente d'esaltazione di Kathe	2
$\tau_s$	soglia d'esaltazione di Kathe	9
$d_s$	grado d'esaltazione di Kathe	1

Tabella 2.3: Scelta dei valori dei parametri del sotto-modello Kathe-Jim.

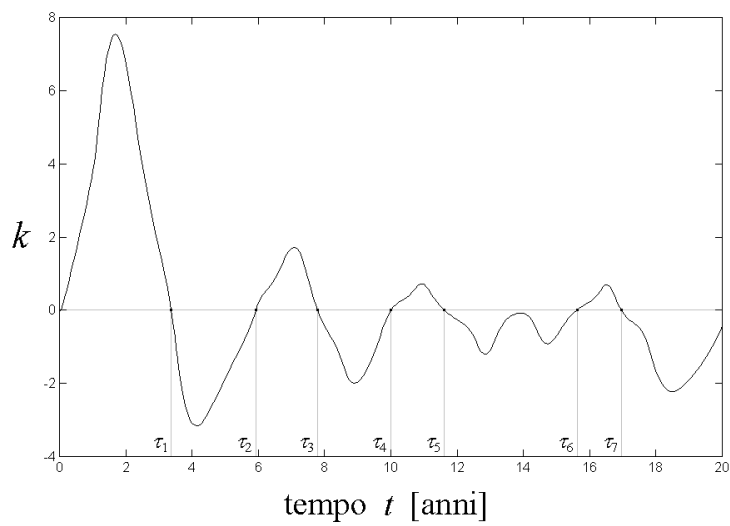


Figura 2.7: Andamento nel tempo del sentimento relativo di Kathe  $k(t)$ , generato per simulazione del modello di riferimento, e istanti  $\tau_i$  dei cambi di partner da parte di Kathe suggeriti dal modello.

## Capitolo 3

# Il nuovo modello

### 3.1 Il modello originale

Per aiutare il lettore vengono riportate brevemente alcune formulazioni presentate nel capitolo 2. Come si può notare i nomi dei parametri sono stati cambiati, per essere coerenti con quelli che verranno usati nel *nuovo* modello, mentre quelli usati nel capitolo 2 erano quelli originali del lavoro di Dercole (1999).

Il modello Kathe Jules:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -f x_1 + R(y_1) + (1 + S(x_1)) a A_1 \\ \dot{y}_1 &= -f_1 y_1 + r_1 x_1 + (1 + P(y_1)) a_1 A\end{aligned}\tag{3.1}$$

Il modello Kathe-Jim:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -f x_2 + r y_2 + (1 + S(x_2)) a A_2 \\ \dot{y}_2 &= -f_2 y_2 + R_2(x_2) + a_2 A\end{aligned}\tag{3.2}$$

Il modello originale del triangolo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(f + \varphi(x_2 - x_1)) x_1 + R(y_1) + (1 + S(x_1)) a A_1 \\ \dot{x}_2 &= -(f + \varphi(x_1 - x_2)) x_2 + r y_2 + (1 + S(x_2)) a A_2 \\ \dot{y}_1 &= -f_1 y_1 + r_1 x_1 + \gamma(x_2 - x_1) + (1 + P(y_1)) a_1 A \\ \dot{y}_2 &= -f_2 y_2 + R_2(x_2) - \gamma(x_1 - x_2) + a_2 A\end{aligned}\tag{3.3}$$

### 3.2 Critiche al modello originale

Benché in un notevole accordo qualitativo e quantitativo tra il modello originale (3.3) e la storia d'amore sia stato evidenziato nel lavoro di Dercole (1999), un'attenta rilettura del modello ha evidenziato due piccoli difetti, il primo qui sotto descritto, di tipo modellistico, mentre il secondo di tipo formale.

1. Il modello (3.3) non è conforme alla struttura (2.1) in quanto le equazioni dei sentimenti di Jules e Jim (la terza e la quarta) presentano quattro termini in somma. Sebbene la somma del secondo e terzo termine, corrispondenti ai termini di ricambio di Jules e Jim presenti nei modelli di coppia (3.1 e 3.2) e ai termini di compiacimento/gelosia, possa considerarsi come unico termine di ricambio, la struttura in somma sottointende che i due addendi corrispondano a processi psico-sociali indipendenti. Per rendere il modello del triangolo conforme alla struttura (2.1) è pertanto più adeguata una struttura in prodotto (si vedano la seconda e la terza equazione in (3.4)), dove il compiacimento/gelosia moduli il ricambio che si avrebbe in situazione di coppia. La gelosia, per esempio, attenua ricambi sia positivi, perché si è infastiditi dal fatto che il nostro partner sia più interessato in quel momento al nostro “concorrente”, che negativi, perché quando infastiditi da un sentimento ricevuto, il fastidio viene a rilassarsi se ci si accorge di non essere il partner più desiderato in quel momento.
2. L’interazione tra i modelli di coppia (3.1) e (3.2) introdotta dal parametro  $\varphi$  descrive il meccanismo psico-sociale per cui Kathe dimentica più rapidamente in ogni istante il partner meno amato. Il parametro  $\varphi$  è stato giustamente considerato piccolo in Dercole (1999), perché Kathe, icona del “libero amore riesce a vivere storie d’amore parallele in modo quasi indipendente. Inoltre, per i valori raggiunti dai sentimenti di Kathe ( $x_1$  e  $x_2$ ) nell’attrattore del modello (3.3) (vedi figura 2.5), i coefficienti di oblio di Kathe per Jules e Jim ( $f + \varphi(x_i - x_j)$ ) restano positivi. Dal punto di vista formale, però, la formulazione (3.3) può portare a coefficienti di oblio negativi qualora, anche per valori di  $\varphi$  piccoli, la differenza tra i  $x_1$  e  $x_2$  diventasse rilevante. Anche in questo caso una formulazione in prodotto tra il coefficiente di oblio di base di Kathe  $f$  e di un termine modulante (si vedano la prima e la seconda equazione in (3.4)) risulta più appropriata.

### 3.3 Il nuovo modello

Il nuovo modello del triangolo è pertanto il seguente:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -f \exp(\varphi(x_2 - x_1)) x_1 + R(y_1) + (1 + S(x_1)) a A_1 \\
 \dot{x}_2 &= -f \exp(\varphi(x_1 - x_2)) x_2 + r y_2 + (1 + S(x_2)) a A_2 \\
 \dot{y}_1 &= -f_1 y_1 + r_1 x_1 \exp(\gamma(x_2 - x_1)) + (1 + P(y_1)) a_1 A \\
 \dot{y}_2 &= -f_2 y_2 + R_2(x_2) \exp(-\gamma(x_1 - x_2)) + a_2 A
 \end{aligned} \tag{3.4}$$



Dove le funzioni  $R, S, P$  e  $R_2$  corrispondono alle funzioni  $R_{x_1}, S, S_1$  e  $R_2$  del capitolo 2, si vedano le equazioni (2.8), (2.10), (2.14) e (2.15):

$$R(y_1) = r_I \frac{y_1/y_R}{1 + y_1/y_R} \begin{cases} \frac{\sigma^2 - ((y_1 - \tau_I)/y_I)^2}{\sigma^2 + ((y_1 - \tau_I)/y_I)^2} & \text{se } y_1 \geq \tau_I \\ 1 & \text{se } y_1 < \tau_I \end{cases}$$

$$R(x_2) = r_{I2} \frac{x_2/x_R}{1 + x_2/x_R} \begin{cases} \frac{\sigma^2 - ((x_2 - \tau_{I2})/x_I)^2}{\sigma^2 + ((x_2 - \tau_{I2})/x_I)^2} & \text{se } x_2 \geq \tau_{I2} \\ 1 & \text{se } x_2 < \tau_{I2} \end{cases}$$

$$S(x_1) = \begin{cases} s \frac{((x_1 - \tau_s)/x_s)^2}{1 + ((x_1 - \tau_s)/x_s)^2} & \text{se } x_1 \geq \tau_s \\ 0 & \text{se } x_1 < \tau_s \end{cases}$$

$$P(y_1) = \begin{cases} -p \frac{((y_1 - \tau_p)/y_p)^2}{1 + ((y_1 - \tau_p)/y_p)^2} & \text{se } y_1 \geq \tau_p \\ 0 & \text{se } y_1 < \tau_p \end{cases}$$

La nuova parametrizzazione viene riassunta nella seguente tabella:

Simbolo	Significato
$f$	coefficiente d'oblio di Kathe
$f_1$	coefficiente d'oblio di Jules
$f_2$	coefficiente d'oblio di Jim
$r_I$	coefficienti di insicurezza di Kathe verso Jules
$y_R$	grado di ricambio iniziale di Kathe
$\sigma$	coefficiente d'azzeramento del ricambio di Kathe
$\tau_I$	soglia d'insicurezza di Kathe
$y_I$	grado d'insicurezza di Kathe
$r$	coefficienti di ricambio di Kathe verso Jim
$r_1$	coefficiente di ricambio di Jules
$r_{I2}$	coefficiente di insicurezza di Jim
$x_R$	grado di ricambio iniziale di Jim
$\sigma_2$	coefficiente d'azzeramento del ricambio di Jim
$\tau_{I2}$	soglia d'insicurezza di Jim
$x_I$	grado d'insicurezza di Jim
$a$	sensibilità al fascino di Kathe
$A$	fascino di Kathe
$s$	coefficiente d'esaltazione di Kathe
$\tau_s$	soglia d'esaltazione di Kathe
$x_s$	grado d'esaltazione di Kathe
$a_1$	sensibilità al fascino di Jules
$A_1$	fascino di Jules
$p$	coefficiente di platonicità di Jules
$\tau_P$	soglia di platonicità di Jules
$y_P$	grado di platonicità di Jules
$a_2$	sensibilità al fascino di Jim
$A_2$	fascino di Jim
$\varphi$	coefficiente di conflitto di Kathe
$\gamma$	coefficiente di compiacimento/gelosia di Jules et Jim

## Capitolo 4

# Analisi del nuovo modello

In questo capitolo viene presentata l'analisi numerica del modello del triangolo (formula 3.4) rispetto ai parametri  $\varphi$  e  $\gamma$  di interazione tra i due modelli di coppia (formula 3.1) e (formula 3.2).

### 4.1 Obiettivi dell'analisi

Ad ogni coppia di valori non negativi dei parametri di interazione  $\varphi$  e  $\gamma$ , ovvero ad ogni punto del quadrante positivo del piano  $(\varphi, \gamma)$ , corrisponde un particolare modello del triangolo (formula 3.1) e quindi una particolare interpretazione della storia d'amore. L'obiettivo principale dell'analisi è quello di mostrare che per opportuni valori positivi e sufficientemente piccoli di  $\varphi$  e  $\gamma$  la storia predetta dal modello sia caotica, ovvero che la traiettoria del particolare modello ottenuto, a partire dallo stato iniziale

$$[x_1, x_2, y_1, y_2]^\top = [0, 0, 0, 0]^\top \quad (4.1)$$

di pura indifferenza, tenda asintoticamente verso un attrattore caotico. Per questo, i così detti *esponenti di Lyapunov* che caratterizzano, se positivi, la divergenza delle traiettorie che sta alla base della definizione di attrattore caotico, verranno sistematicamente calcolati per la condizione iniziale (4.1) (si veda la sezione successiva per un richiamo sulla definizione e il calcolo degli esponenti di Lyapunov).

Obiettivi secondari dell'analisi sono:

- Classificare il tipo di attrattore raggiunto dalla condizione iniziale (4.1), equilibrio, ciclo, toro (regime quasiperiodico), attrattore caotico, al variare dei parametri  $\varphi$  e  $\gamma$ .

- Identificare valori positivi (sufficientemente piccoli) di  $\varphi$  e  $\gamma$  per cui l'attrattore raggiunto dalla condizione iniziale (4.1) non solo sia caotico, ma tale che la variabile  $x_1 - x_2$ , sbilanciamento (a favore di Jules) del sentimento di Kathe, sia in accordo con la storia narrata. Ovvero, dopo un primo picco a favore di Jules, cambi segno sette volte nei primi venti istanti di tempo (la storia dura vent'anni e l'unità di misura scelta del tempo nel modelli (formula 3.1)-(formula 3.4) è l'anno).
- Tra le coppie  $(\varphi, \gamma)$  in accordo con la storia, identificare quella che realizza la miglior correlazione tra gli istanti di cambi di partner identificati nel romanzo (vedi tabella 2.5, capitolo 2) e quelli predetti dal modello.

## 4.2 Richiamo sugli esponenti di Lyapunov

Gli esponenti di Lyapunov (EL) sono  $n$  numeri reali associati ad una traiettoria di un sistema dinamico  $n$ -dimensionale, tipicamente non lineare, che caratterizzano il comportamento “medio” delle traiettorie che si originano in punti dello spazio di stato vicini alla traiettoria di riferimento. Trattiamo qui il caso a tempo continuo, ovvero quello di un sistema del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad (4.2)$$

dove  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$  è il vettore di stato.

Gli EL sono definiti come i logaritmi dei tassi medi di divergenza (se positivi) o convergenza (se negativi) esponenziale locale delle traiettorie vicine rispetto a quella di riferimento. Trattandosi di divergenza/convergenza esponenziale locale, gli EL sono basati sulla *linearizzazione* del sistema lungo la traiettoria di riferimento. Come verrà dettagliato nel seguito, in ogni punto della traiettoria, il sistema linearizzato definisce (genericamente)  $n$  direzioni ortogonali con associati tassi di divergenza (se  $> 1$ ) o convergenza (se  $< 1$ ), che possono essere ordinati dal più grande,  $\rho_1(t)$ , al più piccolo,  $\rho_n(t)$ . Questi sono i tassi che regolano lo scostamento iniziale (cioè nei primissimi istanti di tempo in cui la linearizzazione fornisce una buona approssimazione) di una traiettoria perturbata che si origini all'istante  $t$  da una condizione iniziale vicina a quella del punto in esame. Gli EL sono dunque i logaritmi delle medie (geometriche) di tali tassi, ovvero

$$L_i(x(0)) = \log \left( \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho_i(t))^{1/t} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(\rho_i(t)), \quad (4.3)$$

dove gli EL sono stati associati allo stato iniziale  $x(0)$  che identificata univocamente la traiettoria di riferimento.

Più precisamente, si considerino il sistema linearizzato

$$\dot{v}(t) = J(x(t))v, \quad v \in \mathbf{R}^n, \quad (4.4)$$

dove  $J(x) = \partial f / \partial x$  è la matrice Jacobiana del vettore di funzioni  $f(x)$ , e le  $n$  condizioni iniziali

$$v^{(1)}(0) = [1, 0, \dots, 0]^\top, \quad v^{(2)}(0) = [0, 1, \dots, 0]^\top, \dots, \quad v^{(n)}(0) = [0, 0, \dots, 1]^\top. \quad (4.5)$$

Integrando il sistema linearizzato, lungo la traiettoria di riferimento  $x(t)$ , dall'istante  $t = 0$  all'istante generico  $t$ , i punti risultanti  $v^{(1)}(t)$ ,  $v^{(2)}(t)$ , ...,  $v^{(n)}(t)$ , si trovano sulla superficie di un ellissoide. Infatti, la matrice

$$\Phi(t) = [v^{(1)}(t), v^{(2)}(t), \dots, v^{(n)}(t)] \quad (4.6)$$

è la *matrice di transizione* del sistema linearizzato, ovvero  $v(t) = \Phi(t)v(0)$  per una qualsiasi condizione iniziale  $v(0)$ . Allora tutte le condizioni iniziali  $v(0)$  corrispondenti a punti sulla sfera unitaria ( $\|v(0)\| = 1$ ), generano al tempo  $t$  punti che soddisfano l'equazione

$$v(t)^\top (\Phi(t)\Phi(t)^\top)^{-1} v(t) = v(0)^\top v(0) = \|v(0)\|^2 = 1, \quad (4.7)$$

che definisce per l'appunto un ellissoide, essendo la matrice  $E(t) = (\Phi(t)\Phi(t)^\top)^{-1}$  simmetrica e definita positiva ( $v(0) \neq 0$  per ogni  $v(t) \neq 0$  grazie alla (4.4)).

Le direzioni degli assi dell'ellissoide sono quelle degli autovettori di  $E(t)$  (reali e ortogonali perché  $E(t)$  è simmetrica), mentre le lunghezze dei semiassi  $r^{(i)}(t)$ , ordinati dal più lungo al più corto,  $i = 1, \dots, n$ , sono date dalle radici degli autovalori  $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_n(t)$  di  $E(t)^{-1}$ . Infatti, il semiasse  $i$ -esimo è l'autovettore  $r^{(i)}(t)$  di  $E(t)$  che soddisfa la (4.7), ovvero  $r^{(i)}(t)^\top r^{(i)}(t) = \|r^{(i)}(t)\|^2 = \lambda_i$ .

Le lunghezze dei semiassi,  $\rho_i(t) = \sqrt{\lambda_i(t)}$ , indicano divergenza in tempo  $t$  (se  $> 1$ ) o convergenza (se  $< 1$ ) rispetto alla sfera unitaria al tempo 0. Le direzioni dei semiassi cambiano però lungo la traiettoria. Pertanto gli EL dati dalla (4.3) indicano i logaritmi di  $n$  tassi medi senza associarli a particolari direzioni. Nel caso di una traiettoria caotica, quindi caratterizzata da almeno EL positivo, non è quindi detto che partendo da un punto vicino alla traiettoria di riferimento ci sia nell'immediato divergenza in almeno una direzione, perché il fatto che la media  $L_1$  sia positiva è solo indice che lungo la traiettoria ci sia, mediamente, più divergenza che convergenza lungo il primo semiasse dell'ellissoide. Localmente a certi punti della traiettoria, però, i  $\rho_i(t)$  potrebbero essere tutti minori dell'unità.

Dal punto di vista del calcolo, la formula (4.3) non è praticabile, perché i  $\rho_i(t)$  associati a divergenza crescono indefinitamente mentre quelli associati a

convergenza diventano estremamente piccoli. Tipicamente si preferisce spezzare la traiettoria di riferimento in pezzetti, per esempio di durata temporale costante e pari a  $\tau$ . Calcolate le lunghezze dei semiassi  $\rho_i(\tau)$  si procede a rendere di nuovo orto-normale la base ottenuta in (4.6) (con la nota procedura di Gram-Schmidt o fattorizzazione QR della matrice (4.6)). Ripartendo dalla nuova base orto-normale come  $n$  nuove condizioni iniziali del sistema linearizzato (4.4) fissate all'istante  $t = \tau$ , si ottengono dei nuovi  $\rho_i(2\tau)$  e si reitera l'algoritmo. Gli EL si ottengono come

$$L_i(x(0)) = \log \left( \lim_{K \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^K (\rho_i(k\tau))^{1/t} \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K\tau} \sum_{k=0}^K \log(\rho_i(k\tau)). \quad (4.8)$$

Gli EL sono più propriamente associati agli attrattori del sistema dinamico (4.2). Infatti, essendo calcolati come medie su un orizzonte di tempo infinito, gli EL ottenuti per condizioni iniziali diverse, ma che generano traiettorie di riferimento che convergono allo stesso attrattore, coincidono. Inoltre, per attrattori non stazionari (cicli, tori, strani attrattori) un esponente è sempre nullo, perché corrisponde a perturbazioni date lungo la traiettoria di riferimento che mediamente non divergono né convergono, essendo lo stato lungo la traiettoria perturbata sempre alla stessa distanza temporale dallo stato lungo quella di riferimento.

Gli EL sono di interesse sostanzialmente solo per gli attrattori caotici, perché nel caso di attrattori stazionari (equilibri) e periodici (cicli di periodo  $T$ ) portano non aggiungono informazione agli autovalori  $\lambda_i$  e ai moltiplicatori di Floquet  $\mu_i$  del sistema e della mappa di Poincaré linearizzati, rispettivamente (precisamente,  $L_i = \text{Re}(\lambda_i)$  e  $L_i = \log(|\mu_i|)/T$ ). Nel caso di attrattori quasi-periodici (toro), ovvero con più EL nulli e nessuno positivo, gli EL sono potenzialmente interessanti come metodo di identificazione di attrattori quasi-periodici. Numericamente, però, la distinzione tra esponenti positivi, negativi e esponenti che pur non essendo identicamente nulli vanno considerati tali, è sempre delicata e legata a soglie empiriche sul valore assoluto dei risultati numerici sotto la quale considerarli nulli.

Ulteriori dettagli teorici e algoritmici legati agli EL e alla teoria dei sistemi dinamici in genere possono essere trovati in Alligood et al. (1996).

### 4.3 Implementazione

L'analisi del modello del triangolo (formula 3.4) rispetto ai parametri  $\varphi$  e  $\gamma$  è stata implementata in parte in C, usando la *GNU Scientific Library* per

l'integrazione delle ODEs, e in parte in Matlab<sup>1</sup>.

Il codice C implementa una griglia di punti nel piano  $(\varphi, \gamma)$  (a passo fisso per ognuno dei due parametri). Per ogni punto della griglia vengono effettuate le seguenti operazioni:

- Partendo dalla condizione iniziale (4.1), il modello (formula 3.4) viene simulato fino a convergenza su un attrattore (ovvero fino a che la variazione della media di  $\|[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2]^\top\|$  resta al di sotto di una soglia predefinita per un tempo predefinito) o fino al raggiungimento di un tempo limite.
- Vengono identificati i cambi di segno della variabile  $x_1 - x_2$  nell'intervallo di tempo  $[0, 20]$  (anni), corrispondente alla durata della storia d'amore, mediante una tecnica di "event detection" durante l'integrazione e localizzazione accurata dell'evento mediante tecniche di tipo "bisezione" sull'intervallo di tempo a cavallo dell'evento.
- Se il valore finale di  $\|[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2]^\top\|$  è al di sotto di una soglia di "equilibrio", lo stato raggiunto  $[x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)]^\top$  è classificato come tale, e gli viene convenzionalmente assegnato il valore di zero "massimi distinti" nell'attrattore (vedi punto successivo).
- Altrimenti l'attrattore raggiunto non è stazionario. Si procede pertanto, a partire dallo stato  $[x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)]^\top$ ,
  - al calcolo dei primi due EL;
  - al calcolo dei valore minimo e massimo della variabile  $x_1$  nell'attrattore, integrando il modello (formula 3.4) per un tempo predefinito;
  - alla determinazione del numero di massimi distinti della variabile  $x_1$  nell'attrattore (per questo, l'intervallo  $[x_{1,\min}, x_{1,\max}]$  viene quantizzato dividendolo in un numero predefinito di sotto-intervalli di pari ampiezza e viene determinato il numero di intervalli interessato dalla variabile  $x_1$  durante l'integrazione del modello (formula 3.4) per un tempo predefinito).

L'analisi effettuata permette di classificare il tipo di attrattore raggiunto asintoticamente a partire dalla condizione iniziale (4.1). Se in numero di massimi distinti di  $x_1$  nell'attrattore è pari a zero, l'attrattore è un equilibrio. Se è sufficientemente piccolo, l'attrattore è periodico (ciclo). Ciò

---

<sup>1</sup><http://www.gnu.org/software/gsl/> e <http://www.mathworks.it/>

è confermato dagli EL calcolati. In particolare, dei primi due EL calcolati, quello più significativo è quello maggiore in valore assoluto. Infatti, nel caso di attrattore periodico, l'esponente maggiore è teoricamente nullo, e quindi il maggiore in valore tra i primi due risulterà il secondo, di segno negativo. Nel caso di attrattore quasi-periodico, i valori assoluti di entrambi gli EL risulteranno piccoli, mentre nel caso di attrattore caotico, l'esponente (positivo) di modulo maggiore sarà il primo. Sia nel caso di attrattore quasi-periodico che caotico, il numero di massimi distinti di  $x_1$  nell'attrattore risulterà elevato.

Il codice Matlab legge tutti i dati prodotti dal codice C e salvati in opportuni file di testo e produce tutti i diagrammi mostrati nella prossima sezione. Per i valori di  $\varphi$  e  $\gamma$  per cui la variabile  $x_1 - x_2$  cambia segno sette volte nell'intervallo di tempo  $[0, 20]$ , viene calcolata la correlazione tra gli istanti di tempo corrispondenti ai cambi di segno di  $x_1 - x_2$  e gli istanti dei cambi di partner da parte di Kate riportati in figura 2.7 (capitolo 2).

#### 4.4 Risultati e loro interpretazione

Va innanzi tutto notato come il vettore  $[\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0)]^\top$ , tangente alla traiettoria del modello (formula 3.4) nel punto (4.1) di origine della storia d'amore, sia determinato esclusivamente dai termini di attrazione (fisica in questo caso). In particolare, essendo Jim più affascinante di Jules, in accordo con i valori dei parametri dei modelli di coppia (formula 3.1) e (formula 3.2) (si vedano tabelle 2.2 e 2.3, capitolo 2), la variabile  $x_1 - x_2$  diventa inizialmente negativa, come evidenziato nell'ingrandimento inserito in Figura 4.1. Ciò può sembrare in disaccordo con la storia, perché Kathe si innamora di Jules e lo sposa, ma in effetti Kathe, fin dal loro primo incontro, è più attratta da Jim e solo la dolcezza di Jules, e quindi il ricambio al suo corteggiamento, la fanno innamorare. Il modello cattura questa sfumatura, con un breve periodo (di circa due settimane) in cui il sentimento di Kathe per Jim,  $x_2$ , supera di poco quello per Jules,  $x_1$ , dopodiché la variabile  $x_1 - x_2$  mostra l'atteso picco a favore di Jules. Il primo cambio di segno della variabile  $x_1 - x_2$  non è pertanto visibile in Figura 4.1 nella scala dei vent'anni e non corrisponde, nella storia, ad un effettivo cambio di partner, se non nella mente di Kathe. Nel parlare dei cambi di segno della variabile  $x_1 - x_2$ , trascuriamo quindi questo primo cambio, che per tutti i valori dei parametri di interazione  $\varphi$  e  $\gamma$  analizzati, resta sempre interno al primo mese di storia. Diciamo quindi che l'andamento della variabile  $x_1 - x_2$  mostrato in Figura 4.1, che corrisponde all'assenza di interazione tra i due modelli di coppia (formula 3.1) e (formula 3.2) ( $\varphi = \gamma = 0$ ), ha 11 cambi di segno.



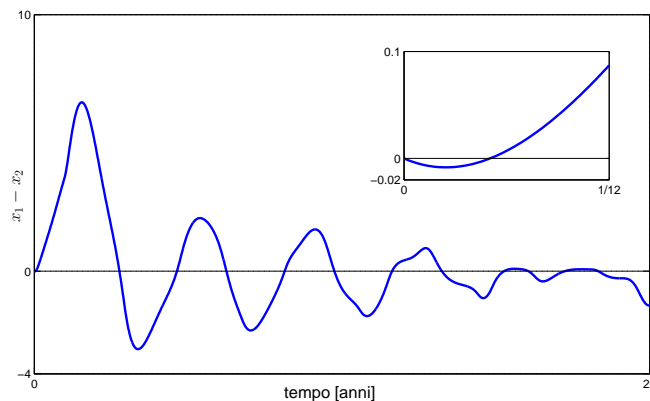


Figura 4.1: Andamento della variabile  $x_1 - x_2$  nell'arco di tempo  $[0, 20]$  anni (e ingrandimento sul primo mese di storia) ottenuto per valori nulli dei parametri di interazione  $\varphi$  e  $\gamma$ .

L'interpretazione della storia d'amore ottenuta per valori nulli dei parametri di interazione  $\varphi$  e  $\gamma$ , ovvero data dai due modelli di coppia (formula 3.1) e (formula 3.2), è già di per se interessante, come discusso in (Dercole, 1999). La breve infatuazione di Kathe per Jim, così come il primo deciso picco di innamoramento per Jules e l'alternanza che ne segue sono infatti elementi catturati. L'andamento della variabile  $x_1 - x_2$ , visto su vent'anni in Figura 4.1, sembra anche piuttosto irregolare, così come i cambi di segno conseguenti. L'attrattore raggiunto asintoticamente dalla traiettoria del modello (formula 3.4) a partire dalla condizione iniziale (4.1) non è però caotico, essendo le variabili  $x_1$  e  $x_2$  entrambe periodiche, anche se di periodo diverso, con periodi genericamente non commensurabili (rapporto irrazionale). La variabile  $x_1 - x_2$  è pertanto genericamente quasi-periodica, come mostrato in Figura 4.2, dove è riportata una proiezione dell'attrattore (toro) nello spazio  $(y_1, y_2, x_1 - x_2)$ , e confermato dal calcolo degli EL.

Come nel lavoro di (Dercole, 1999) è pertanto ragionevole, sia dal punto di vista psicologia sociale che da quello della storia narrata, introdurre le interazioni tra i modelli di coppia (formula 3.1) e (formula 3.2) identificate dai parametri  $\varphi$  e  $\gamma$ . La classificazione del tipo di attrattore raggiunto dalla condizione iniziale (4.1) al variare di  $\varphi$  e  $\gamma$  (positivi e piccoli) è riportata in Figura 4.3.

Le zone rosse del primo diagramma confermano che il modello (formula 3.4) predice una storia caotica per opportuni valori dei parametri  $\varphi$  e  $\gamma$ . Esse corrispondono a zone rosse anche nel secondo diagramma, in quanto un attrattore caotico è certamente caratterizzato oscillazioni delle variabili. Svianti estremi delle variabili caratterizzano però anche gli attrattori quasi-

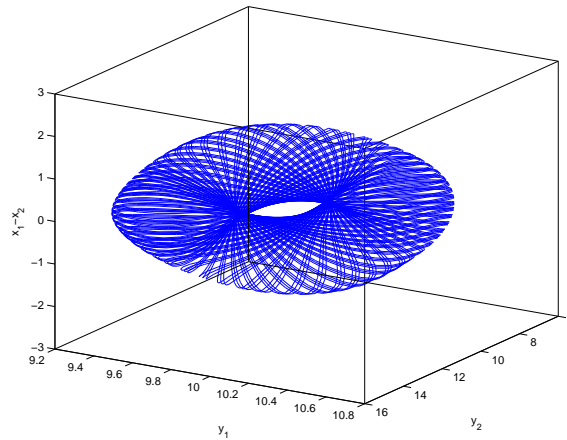


Figura 4.2: Proiezione dell'attrattore raggiunto dalla condizione iniziale (4.1) ottenuto per valori nulli dei parametri di interazione  $\varphi$  e  $\gamma$ .

periodici, come confermano i toni rossi nella parte in basso a sinistra del secondo diagramma, che corrispondono ad un EL (non banale) circa nullo. Per continuità del modello, infatti, per  $\varphi$  e  $\gamma$  prossimi allo zero ci si aspetta comportamento quasi-periodici. Un EL nullo caratterizza anche le biforcazioni di cicli (associate ai cambi di stabilità), come per esempio il “baffo” giallo nella parte centrale-superiore del diagramma, a cui corrisponde un aumento del numero di massimi locali di  $x_1$  da 1 a 2 (da sinistra verso destra), ovvero un raddoppio di periodo.

Infine, l'area ombreggiata identifica tutte le combinazioni di  $\varphi$  e  $\gamma$  per cui il modello (formula 3.4), partendo dalla condizione iniziale (4.1), prevede sette cambi di segno della variabile  $x_1 - x_2$  (come detto, non contando il primo cambio discusso in Figura 4.1). La presenza di regioni rosse ombreggiate del primo diagramma conferma quindi gli obiettivi preposti. Tra le combinazioni di  $\varphi$  e  $\gamma$  in tali regioni, quella che realizza la migliore correlazione (0.98, vedi Figura 4.4) tra i sette istanti predetti dal modello per i cambi di partner da parte di Kathe e quelli estratti dalla storia narrata (riportati in figura 2.7), è identificata dal puntino nero riportato in entrambi i pannelli di Figura 4.3. I valori dei parametri di interazione

$$\varphi = 0.0073 \quad \text{e} \quad \gamma = 0.0308 \quad (4.9)$$

completano pertanto la definizione del modello (formula 3.4) del triangolo. Le proiezioni dell'attrattore raggiunto asintoticamente (dalla condizione iniziale (4.1)) nei piani dei modelli di coppia (formula 3.1) e (formula 3.2) sono riportate in Figura 4.5.

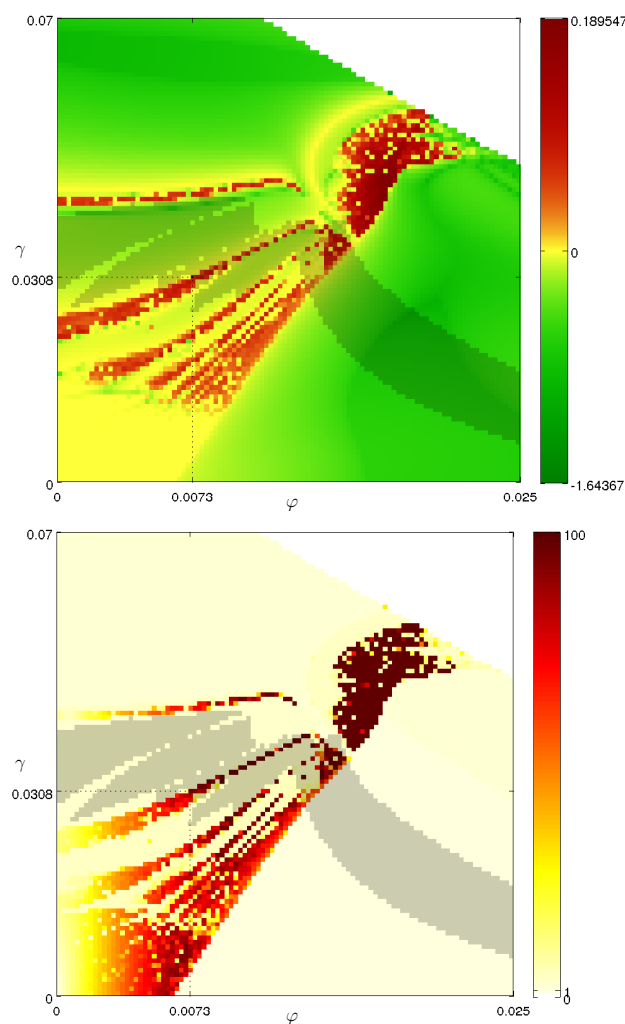


Figura 4.3: Analisi dell'attrattore del modello (formula 3.4) raggiunto a partire dalla condizione iniziale (4.1). Primo esponente di Lyapunov non banale (sopra). Numero di massimi locali distinti della variabile  $x_1$  nell'attrattore (saturati a 100, sotto). L'area ombreggiata identifica le combinazioni di  $\varphi$  e  $\gamma$  per cui la variabile  $x_1 - x_2$  cambia segno sette volte nell'intervallo di tempo  $[0, 20]$ . Il punto nero identifica i valori di  $\varphi$  e  $\gamma$  per cui l'attrattore raggiunto è caotico e la correlazione tra i sette cambi di partner previsti e quelli di figura 2.7 è massima (e pari a 0.98).

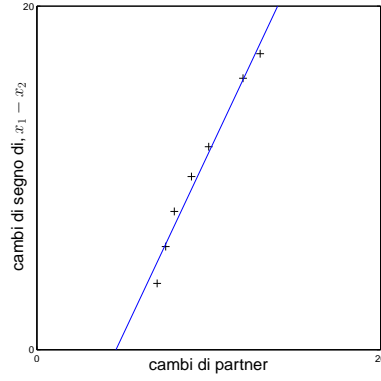


Figura 4.4: Correlazione tra i sette istanti predetti dal modello per i cambi di partner da parte di Kathe e quelli riportati in figura 2.7. Parametri di interazione  $\varphi$  e  $\gamma$  ai valori in (4.9).

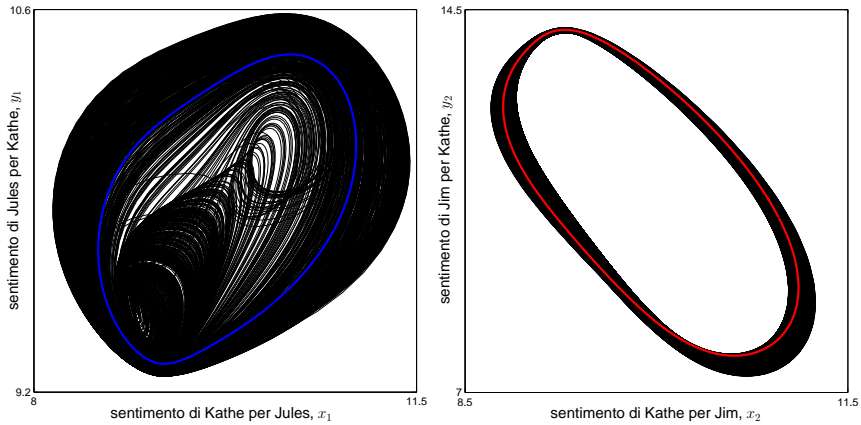


Figura 4.5: Proiezioni dell'attrattore del modello (formula 3.4) raggiunto a partire dalla condizione iniziale (4.1) nei piani  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . I relativi attrattori dei modelli di coppia (formula 3.1) e (formula 3.2) sono riportati blu (coppia Kathe-Jules) e rosso (coppia Kathe-Jim).

## Capitolo 5

# Cenni all'apprendimento multimediale

### 5.1 L'apprendimento multimediale

La divulgazione scientifica è dai tempi di Galileo Galilei uno dei problemi maggiori per gli scienziati. Lo stesso Galileo decise di pubblicare la sua più famosa opera, il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, in volgare italiano. La ragione di questa scelta risiedeva appunto nell'intento di poter comunicare le sue scoperte sui sistemi *lunari* e *sublunari* al più grande numero di persone possibile. Per fare ciò escogitò una strategia comunicativa innovativa: il dialogo.

L'obiettivo che sta alla base della comunicazione e dell'apprendimento è quello di riuscire a stimolare nel pubblico la creazione di rappresentazioni mentali del messaggio che si sta trasmettendo.

La trattazione di questo argomento implica conoscenze approfondite inerenti ai processi cognitivi umani, funzionamento della memoria, psicologia e cultura del *target group* e molto ancora

Cercheremo di effettuare un'esposizione semplificata, prendendo spunto da diverse pubblicazioni riguardanti soprattutto il tema del *Multimedia Learning* (Mayer (2005); Atkinson (2002); Merrill et al. (2004); Mayer (2003); Damasio (1995)).

L'idea del *Multimedia Learning* è che lo studente possa apprendere in maniera più rapida e approfondita, se al tradizionale dato verbale si affianca un supporto multimediale ben costruito fatto di parole, immagini, filmati e audio di modo che il messaggio possa essere costruito in modo da adattarsi ai processi cognitivi umani; diversi studi comparativi hanno evidenziato come

le tecnologie multimediali riescano a superare quelle tradizionali per efficacia comunicativa.

### 5.1.1 Funzionamento dell'apprendimento multimediale a livello cognitivo

Per comprendere come secondo Mayer (2003) funziona l'apprendimento multimediale ci affiederemo a diverse semplificazioni. Assumeremo infatti che i messaggi veicolati attraverso i supporti multimediali siano composti di sole parole e immagini (*dual channel assumption*), che il pubblico abbia una capacità di immagazzinare conoscenze limitata (*limited capacity assumption*) e che questo tipo di apprendimento sia di carattere prettamente attivo (*active learning assumption*).

Lo schema presentato nella figura 5.1 mostra come una persona che interagisce con un sistema multimediale sia immersa in un'esperienza di parole (audio) e immagini (animazioni, video,...) che vengono percepite, elaborate e filtrate attraverso occhi e orecchie. La mente di colui che apprende seleziona dai due flussi che percepisce solo gli aspetti che risultano rilevanti e li trasmette alla memoria operativa (*processo di selezione*). Nella memoria operativa le parole e le immagini selezionate interagiscono tra di loro (anche perché percepite contemporaneamente) allo scopo di creare delle rappresentazioni o meglio dei modelli verbali e visivi (*processo di organizzazione*). Questi modelli vengono poi confrontati e integrati con i modelli precedentemente appresi che risiedono nella memoria a lungo termine (*processo di integrazione*).

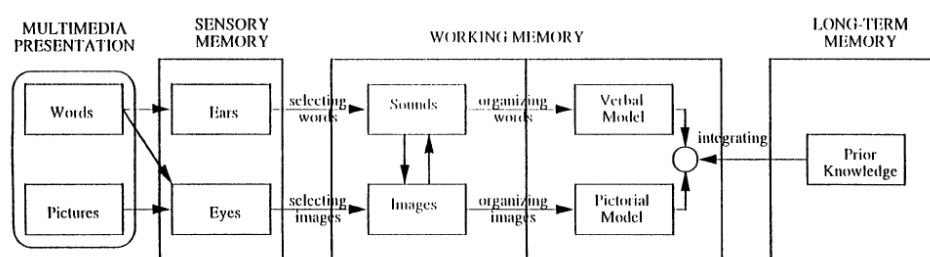


Figura 5.1: Un riferimento per le teorie cognitive sull'apprendimento multimediale. Tratta da Mayer (2003)

I tre processi di selezione, organizzazione e integrazione non avvengono completamente in serie, ma in una certa misura anche in parallelo, o meglio con uno schema di interazione reciproca molto dinamico e riassumibile solo parzialmente nella figura 5.1.

Per poter procurare un apprendimento significativo, il prodotto multimediale deve tener conto di tutti e tre i processi appena descritti. Lo scopo appunto è quello di riuscire a far sviluppare in colui che apprende delle rappresentazioni chiare del messaggio che si sta veicolando.

### 5.1.2 I principi dell'apprendimento multimediale

In questo progetto, in cui la parte multimediale e interattiva rappresenta una delle componenti innovative, è stato necessario definire alcune linee guida che accompagnassero i progettisti. Nello sviluppo di ambienti di apprendimento multimediale i principi che si sono seguiti sono:

- **Multimedia principle:** E' più efficace l'uso congiunto di parole e immagini che di sole parole.
- **Split-attention principle:** E' preferibile che le parole e le immagini siano fisicamente e temporalmente integrate. Mayer (2005) illustra questo concetto facendo ricorso ai principi di *continuità spaziale* e *temporale* di . Secondo il *principio di continuità spaziale*, una persona comprende meglio un messaggio quando il testo e le immagini sono vicine tra di loro nello schermo. Il *principio di continuità temporale* sostiene che una persona comprende meglio un messaggio quando l'animazione e la narrazione di questo avvengono in contemporanea.
- **Redundancy principle:** Colui che apprende impara meglio dai grafici e dalla narrazione piuttosto che dai grafici e dal testo.
- **Signaling principle:** Il pubblico impara in maniera più efficace quando in un percorso di apprendimento ha sempre delle informazioni che gli permettono di comprendere il contesto di riferimento.
- **Coherence principle:** Bisogna cercare di veicolare solo il messaggio essenziale senza l'aggiunta di informazioni estranee a questo.
- **Segmenting principle:** E' preferibile suddividere un percorso in molte unità piuttosto che realizzare un unico flusso di informazioni con diversi concetti.
- **Pretraining principle:** E' importante procedere con un approccio *top-down* nelle spiegazioni, ovvero fornire prima alcuni concetti molto ampi o un glossario di riferimento, e solo successivamente approfondire nel dettaglio gli argomenti.

- **Modality principle:** La comunicazione è più efficace se è parlata al posto di essere scritta.
- **Personalization, voice, and image principle:** Il registro della narrazione più efficace è quello colloquiale piuttosto che formale e con un accento umano (voce registrata, piuttosto che computerizzata). Mentre risulta non importante che colui che narra sia presente anche visivamente sulla scena o meno.

Le linee guida introdotte fino ad ora rappresentano le conoscenze basilari, ormai ampiamente diffuse, per poter realizzare un supporto multimediale. Adesso introdurremo un nuovo elenco di principi, questa volta avanzati, a cui un prodotto multimediale deve ispirarsi:

- **Guided-discovery principle:** Un percorso di apprendimento in cui si conduce il pubblico alla scoperta dei principi attraverso un *problem solving* partecipativo è molto efficace.
- **Worked-out example principle:** L'apprendimento risulta molto facilitato se prima di introdurre un concetto teorico si mostra un interessante esempio pratico di questo concetto.
- **Collaboration principle:** E' importante riuscire a fornire agli utenti un ambiente che consenta attività online e interattive di apprendimento.
- **Self-explanation principle:** Il pubblico è maggiormente invogliato ad apprendere quando si dà la possibilità di generare delle proprie spiegazioni ai fenomeni che incontrano nel percorso d'apprendimento.
- **Animation and interactivity principle:** Non sono state evidenziate fino ad ora delle nette differenze tra l'apprendimento derivato da animazioni e quello derivato da diagrammi statici per uno stesso argomento.
- **Navigation principle:** E' importante consentire all'utente di navigare facilmente tra i contenuti dei percorsi formativi.
- **Site map principle:** Fornire una mappa aggiornata con indicato esattamente il percorso e il punto in cui ci si trova risulta di estrema importanza per l'utente.
- **Prior knowledge principle:** E' difficile a volte comprendere quale possa essere l'utente target di un'applicazione multimediale; bisogna



tenere presente che se un certo taglio dell'opera può consentire ad un utente inesperto della materia di comprendere meglio i concetti chiave, dall'altra parte questo potrebbe provocare un abbandono dell'uso da parte di un utente più qualificato.

### 5.1.3 L'apprendimento multimediale della matematica

L'apprendimento multimediale della matematica cerca di raggruppare in un unico strumento sia le definizioni, i teoremi e le dimostrazioni di solito presenti nei libri di testo, sia le simulazioni, i grafici e i calcoli avanzati svolti solitamente dai computer.

In questo caso il paradigma classico dell'apprendimento multimediale “immagini e parole” viene riformulato nel binomio grafici animati e narrazione di concetti matematici.

L'apprendimento multimediale nell'ambito della matematica può essere riassunto in due dimensioni, la prima specifica per coloro che usano grafici statici o dinamici e la seconda per discriminare tra testo o narrazione.

Sono stati condotti diversi esperimenti su gruppi di studenti a cui è stato chiesto di risolvere problemi di carattere matematico, in cui c'erano, in un caso, grafici e testo scritto, e, in un altro, grafici e una parte letta dal docente (Cap. 25 Mayer (2005) e Moreno e Mayer (1999)).

In diversi studi si nota come gli studenti comprendano maggiormente problemi a loro posti in uno scenario in cui le parole scritte vengono sostituite da una narrazione. Questo fenomeno può essere compreso in relazione alla figura 5.1, difatti il principio è semplice: dividendo l'apprendimento su diversi canali (vista e udito) si riesce a saturare meno velocemente le risorse cognitive a disposizione.

#### Grafici statici e testo

E' stato riscontrato da diversi esperimenti pratici che è buona pratica cercare di integrare le parole all'interno dei grafici. Questa tecnica si rifà al principio della continuità spaziale.

#### Grafici statici e narrazione

In questa specifica combinazione delle due dimensioni è utile tenere presente alcune deduzioni chiave:

- Quando possibile cercare di combinare grafici statici alla narrazione.

- Se si combina narrazione e grafici, non affiancare mai un equivalente scritto delle informazioni lette dal narratore
- E' utile nel caso di diagrammi molto complessi inserire delle parole che possano aiutare il lettore a comprendere meglio il diagramma.

Questi tre suggerimenti sono la traduzione pratica di due principi precedentemente introdotti, ovvero: il *modality* e il *redundacy principle*.

### Grafici dinamici e testo

Se un progettista di piattaforme multimediali volesse usare grafici dinamici (animazioni) dovrebbe tenere conto delle seguenti istruzioni:

- Animazioni e narrazione sono meglio della narrazione solamente.
- Le animazioni possono essere utili soprattutto ad un pubblico con capacità cognitive e spaziali elevate.

Le parole scritte tendono ad appesantire i processi cognitivi associati alla vista andando perciò ad intaccare le possibilità di rielaborazione per la creazione di una rappresentazione mentale più limpida dei concetti.

### Grafici dinamici e narrazione

La possibilità di presentare un grafico nelle diverse evoluzioni temporali che lo portano al risultato finale, prende il nome di *grafico dinamico*. E' interessante notare come questa possibilità di vedere grafici animati porti gli studenti oggetto degli studi a elaborare soluzioni per i problemi concettualmente più sofisticate di quelle che si ottengono con grafici statici.

Partendo da questo risultato è stato presentato il *dynamic principle*: quando si progetta un ambiente multimediale di apprendimento è auspicabile poter rappresentare i grafici attraverso animazioni e poter sostituire il testo con la narrazione.

## 5.2 Sistemi dinamici e apprendimento multimediale

Il capitolo 5.1 è una dimostrazione di come l'argomento del *multimedia learning* sia stato ampiamente trattato e approfondito da diversi studiosi, soprattutto statunitensi. Nonostante si possa trovare una letteratura specifica per l'ambito del *multimedia learning of mathematics*, è difficile trovare pubblicazioni o libri che riguardano il *multimedia learning of dynamic systems*.

E' proprio in questa direzione che questa tesi fa un passo nel vuoto e cerca di definire una sua strategia per poter creare una comunicazione o meglio uno strumento di apprendimento efficace nell'ambito dei sistemi dinamici. Il nostro scopo non è quello di definire delle linee guida universali per trattare questo argomento, piuttosto vorremmo presentare uno studio di caso in cui cerchiamo di spiegare argomentando le varie scelte progettuali e comunicative che abbiamo intrapreso. L'idea alla base di questo lavoro è anche quella di comprendere le possibilità che offre un ambiente di apprendimento multimediale cercando di definire limiti e punti di forza delle tecnologie utilizzate.

Per ragioni di completezza, bisogna citare altre pubblicazioni sempre nel settore delle *Love Dynamics*: Bee et al. (2010); Pizzi et al. (2007); Gottman et al. (2002). Questi lavori condividono con il nostro il tentativo di studiare le dinamiche dell'amore da un punto di vista informatico-multimediale, discostandosi dai tentativi propri della matematica più classica (equazioni differenziali ordinarie).

### 5.2.1 Jules et Jim e il multimediale

Il lavoro originale (Dercole (1999)) sul romanzo di *Jules et Jim*, negli ultimi anni è diventato una conferenza rituale prima della pausa natalizia, nonché una delle lezioni del corso "The Art of Modeling" dell'Alta Scuola Politecnica (Politecnico di Milano e Torino). I Proff. F. Dercole e S. Rinaldi (relatore della tesi di Dercole e correlatore del presente lavoro) accompagnano il pubblico di studenti dei corsi di *Fondamenti di Automatica e Teoria dei Sistemi*, assieme ad amici e parenti in un percorso che, partendo dal romanzo di Roché (1953), lo conduce verso i sistemi dinamici e il caos deterministico.

La matematica, la fisica e l'ingegneria non possono essere delle discipline di dominio solo degli adetti ai lavori. E' necessario riuscire a comunicare la bellezza della modellistica anche a coloro che sono completamente estranei al mondo scientifico. Da questo desiderio nasce la necessità di creare uno strumento che sia in grado di divulgare questo tipo di conoscenza ad un pubblico più vasto.

#### Il messaggio

Il supporto multimediale che abbiamo realizzato ha lo scopo di veicolare il seguente messaggio agli spettatori-attori del nostro prodotto:

*La storia d'amore descritta nel romanzo Jules et Jim di Henri-Pierre Roché viene studiata in modo formale per mezzo di un modello matematico.*

*La storia (riguardante un triangolo costituito da due amici, Jules e Jim, e dalla loro amata Kathe) ha dinamica alquanto turbolenta caratterizzata da pronunciati e imprevedibili alti e bassi. L'analisi, pur avendo ovviamente notevoli limitazioni a causa della difficoltà di interpretare quantitativamente l'evoluzione dei sentimenti, permette di supportare, come mai fatto prima, l'idea che una storia d'amore possa essere caotica (nel senso tecnico oggi attribuito a questo termine) e, quindi, imprevedibile a causa delle caratteristiche psico-fisiche dei soli individui coinvolti. I risultati ottenuti permettono altresì di precisare l'originalità e il contributo di Francois Truffaut che ha tratto dal romanzo di Roché un film ritenuto da molti critici il più bel film d'amore e d'amicizia di tutti i tempi.*

Questo messaggio implica necessariamente la congettura su cui si basa tutto il lavoro di Dercole (1999), ovvero che *la storia di Kathe, Jules et Jim* è caotica. Come questo messaggio è stato veicolato nel multimediale verrà spiegato nei prossimi capitoli.

## Capitolo 6

# Il prodotto multimediale

### 6.1 Introduzione

Per la realizzazione di questo prodotto multimediale si è scelto il classico approccio dell'ingegneria del software, ovvero la divisione dello sviluppo del software in cinque processi (Sommerville (2006)): *analisi dei requisiti, progettazione, sviluppo, deploy e testing*.

Il ciclo di vita del software utilizzato in questo caso è stato il classico *waterfall model*, che implica una visione abbastanza separata dei diversi processi. Si è ritenuto che l'applicazione di metodologie più innovative come i modelli *agile*, fossero inutili per la ristrettezza del dominio dell'applicazione. Questo approccio (*agile*) è stato usato esclusivamente nel processo di creazione dei contenuti multimediali, in cui si è preferito per la complessità del dominio, utilizzare un procedimento che riguardasse il miglioramento progressivo di prototipi.

Il modello di progettazione di unprodotto multimediale può essere assimilabile a quello di un sistema informativo basato sul web. Il *modus operandi* utilizzato nella progettazione è stato simile a quello descritto in Ardagna et al. (2006).

E' utile, per meglio comprendere l'evoluzione del prodotto multimediale realizzato, leggere i capitoli 6.2 - 6.5 in successione.

### 6.2 Analisi dei requisiti

#### 6.2.1 Segmentazione del messaggio

Il punto di partenza per questa fase del ciclo di vita del software è stata la lettura approfondita del messaggio riportato nel paragrafo 5.2.1. Il messag-

gio, in accordo con il *segmenting principle*, è stato suddiviso in cinque unità chiave:

- **La storia:** Introduce le tre storie d'amore (quella vera, quella del romanzo e quella del film) e ne delinea i protagonisti, l'evoluzione e le conclusioni. In questa sezione si accenna in via preliminare alle quattro unità successive.
- **La congettura:** In questa sezione si vuole trasmettere la congettura su cui si basa l'intero lavoro, ovvero che *la storia di Kathe, Jules et Jim è caotica*. Questa affermazione, opportunamente contestualizzata, deve essere accompagnata da una breve lezione sui sistemi dinamici e gli equilibri.
- **Il romanzo:** Una panoramica sul romanzo di Roché (1953). Come molte opere prime, il romanzo è fortemente autobiografico, l'autore descrive infatti la sua esperienza e filosofia di vita attraverso il personaggio di Jim. Questa unità deve raccontare la storia evidenziando i passaggi che ci aiutano a descrivere i sentimenti tra i personaggi di Kathe, Jules e Jim.
- **Il film:** Questa sezione deve trattare il film opera del grande regista Truffaut, che pur semplificando il romanzo riesce a trasmettere le stesse impressioni, in particolare quella della imprevedibilità dell'evoluzione della storia d'amore. In un certo senso, quindi, Truffaut anticipa il risultato di questo nostro studio, dando la netta impressione che una storia d'amore possa essere caotica a causa delle caratteristiche degli individui coinvolti.
- **Il modello:** E' sicuramente la parte più interessante del prodotto multimediale. E' la sezione in cui, dopo diverse introduzioni alla storia e alla congettura, si conduce il pubblico nel percorso fatto di variabili, parametri e equazioni con il quale si cerca di modellizzare il triangolo. In questa parte è fondamentale dare la possibilità agli utenti di interagire con i modelli e, cambiando opportunamente i parametri e di conseguenza le forme delle funzioni, ottenere nuovi diagrammi aggiornati con l'evoluzione dei sentimenti.

Queste cinque unità hanno finalità diverse. Mentre le prime quattro sono assimilabili a delle lezioni frontali con una spiccata componente di multimedialità e di effetti grafici, l'ultima fornisce un laboratorio virtuale nel quale

poter manipolare le equazioni e avere così un'esperienza diretta con i sistemi dinamici.

Il *goal* del prodotto deve comunque essere quello di immergere l'utente nelle tre storie e renderlo consapevole della nostra congettura attraverso un apprendimento sia frontale che interattivo.

### 6.2.2 Requisiti funzionali e non

I requisiti funzionali rappresentano che cosa il sistema che andremo a realizzare dovrebbe fare. Il sistema deve essere in grado di comunicare nel modo più efficace possibile le cinque unità del nostro messaggio.

In accordo con i principi elencati nel paragrafo 5.1, il modo migliore per avere un'eccellente comunicazione è quella di usare contemporaneamente narrazione e animazioni. In questo modo il nostro software inizia a prendere la forma di un prodotto multimediale con le cinque unità che si tramutano in cinque percorsi per gli utenti.

Bisogna comprendere a quale tipo di utente ci vogliamo riferire con il nostro lavoro per costruire attorno al nostro gruppo di utenti potenziali il prodotto. Essendo questo un lavoro con un proposito divulgativo verso il grande pubblico, non possiamo impostare il prodotto pensando ad un pubblico segmentato. Inoltre, per favorire la divulgazione di questo prodotto sarà necessaria la sua presenza sul web.

Stiamo perciò delineando un prodotto multimediale accessibile via internet che possa adattarsi ad un qualsiasi visitatore della rete. L'affermazione precedente, che corrisponde ad un chiaro requisito di fruibilità, implica vincoli stretti riguardo le performance, la portabilità e l'efficienza del prodotto. Difatti diventa importante costruire un prodotto che possa essere utilizzato dagli utenti del web nel modo più semplice possibile, ovvero senza dover installare ulteriori *plug-in* sul proprio browser. Inoltre, ipotizzando un'ampia gamma di contenuti multimediali (video, immagini e animazioni), bisognerà progettare e sviluppare il software attorno ad un prodotto fruibile da un computer con medie prestazioni per quanto riguarda: risoluzione dello schermo, capacità di calcolo del processore e banda della connessione ad internet. Non dovrà essere richiesta nessuna credenziale per accedere al prodotto multimediale per non limitare il suo uso.

La presenza di contenuti multimediali implica necessariamente requisiti legislativi quali l'autorizzazione da parte della SIAE per l'uso di video e audio proveniente dai DVD del film "Jules et Jim".

### 6.2.3 Requisiti di interazione con l'utente

E' necessario realizzare un ambiente multimediale che consenta di riprodurre contenuti audio-video, mostrare testo e equazioni e permetta simulazioni in tempo reale dei modelli matematici.

L'idea chiave del lavoro è che successivamente alle lezioni on-line ci possa essere per l'utente una parte interattiva e pratica in cui, manipolando i parametri del modello, si generino nuove simulazioni di come potrebbe essere la storia se i personaggi fossero stati modellizzati in altro modo. Questa parte ha il grande vantaggio di offrire un'esperienza diretta su come i sistemi dinamici reagiscono alla modifica dei parametri in gioco, mostrando all'utente l'evoluzione a volte non intuitiva dei sistemi non lineari.

Questa sezione, che permetterà di simulare un modello del triangolo modificato, diventa un laboratorio didattico per l'utente, il quale altrimenti, senza questo strumento, se volesse simulare l'andamento del sistema di equazioni sarebbe costretto a scrivere alcune linee di codice Matlab. Il prodotto multimediale dovrà quindi risultare facilmente utilizzabile e interessante sia per un utente neofita che per quello esperto, il quale sicuramente avrà una maggiore consapevolezza dei valori che starà modificando. Necessariamente in questa parte del lavoro bisognerà riporre notevole attenzione nell'impatto grafico e nella scelta di pulsanti, forme, animazioni e grafici, in modo da renderli quanto più autoesplicativi possibili.

Una prima anticipazione della fase di progetto, e che rappresenta una notevole scelta didattica, è la scelta di cercare di lavorare il più possibile con equazioni in forma grafica, piuttosto che in forma esplicita.

## 6.3 Progettazione

### 6.3.1 Progettazione dei casi d'uso

#### Casi d'uso

La progettazione di un software richiede in primo luogo un'analisi approfondita dei casi d'uso. I diagrammi *use case* contengono una rappresentazione di come si comporta il sistema multimediale in termini di interazione con l'utente.

Nella figura A.1 (Appendice *Diagrammi UML*) possiamo vedere il diagramma UML (Unified Modeling Language) dei casi d'uso. L'unico *attore* che abbiamo individuato è un generico utente del web che apre l'indirizzo del nostro sito. I possibili casi d'uso sono divisi in due tipologie: la prima, *visualizza percorso x*, che comprende i primi 5 casi d'uso e rappresenta le



piccole lezioni multimediali che si vuole mostrare agli utenti, mentre l'ultimo caso d'uso, ovvero *simula il tuo modello*, rappresenta la parte interattiva dell'applicazione.

A differenza di molti altri software non è necessario ipotizzare la necessità di autenticazioni per i visitatori. Inoltre, essendo un prodotto multimediale completo e pronto all'uso, non ha bisogno di contenuti aggiornabili da parte degli amministratori, perciò non sono previsti pannelli di controllo o amministrazione dei contenuti, che si suppone rimarranno invariati per tutto il ciclo di vita del software.

L'utente usufruisce in modo ottimale del nostro software quando visualizza in ordine progressivo i contenuti presenti nel sito internet, ovvero partendo con *Visualizza il percorso "La Storia"* e finendo con *Simula il tuo modello*.

### 6.3.2 Interazione con l'utente

Finita la fase di definizione degli attori e dei casi d'uso passiamo alla definizione di come gli attori si interfacciano con le funzionalità offerte dai casi d'uso. In questo paragrafo può risultare utile consultare la figura A.2 dell'*appendice A*.

L'interazione per visualizzare un percorso è molto semplice. Dopo aver selezionato il bottone associato a questa funzionalità, il sistema provvederà a mostrare il percorso all'utente in *streaming*. Si vuole dare la possibilità all'utente di fermare, abbandonare e navigare nel percorso selezionato. Queste descritte sono le sole interazioni che possono avvenire durante la fase di visualizzazione di un percorso.

La sezione che consentirà la simulazione del modello necessita invece di una maggiore interazione con l'utente. Difatti il sistema dovrà essere in grado di fare fronte a tre tipologie di richiesta: *simulazione del modello originale*, *cambiamento dei parametri delle funzioni e aggiornamento di queste* e infine *simulazione del modello modificato*.

Per comprendere meglio l'interazione tra utente e sistema iniziamo a definire meglio le diverse sezioni di cui il prodotto multimediale sarà composto. Per fare ciò ricorriamo ad un diagramma UML innovativo chiamato *UX model* (User eXperience), figura A.3.

Questo modello è simile ad un diagramma delle classi, ma è arricchito con opportuni stereotipi:  $\ll screen \gg$  e  $\ll screen component \gg$  che si riferiscono a schermate del prodotto multimediale e parti di questa.

La *HomePage* rappresenterà il punto di partenza del software. Da qui dopo aver scelto la lingua di visualizzazione (italiano, inglese o francese) si

passa a visualizzare il *Menu Pellicola* che consente di orientarsi nei percorsi e di scegliere quello desiderato.

Il modello delle « *screen* » *Storia, Congettura, Romanzo e Film* sarà molto simile e permetterà la sola visualizzazione dei contenuti multimediali. Mentre la « *screen* » *Modello* offre l'opportunità sia di visualizzare i contenuti multimediali attraverso i metodi: *variabili*, *coppiaKatheJules*, *coppiaKatheJim* e *Triangolo* che di passare alla « *screen* » *SimulaModello* per poter manipolare il modello.

### 6.3.3 Analisi dettagliata

In questa parte dell'analisi si cerca di progettare quei componenti che andranno a realizzare le funzionalità abbozzate nei casi d'uso. In particolare in questa fase diventa fondamentale riuscire a separare la parte di presentazione dei dati (*boundary*), da quella di elaborazione (*control*) e accesso ai dati (*entity*). Anche in questa parte risultano molto importanti i diagrammi UML come supporto alla progettazione.

#### Progettazione dei dati

Questo prodotto multimediale presenta delle peculiarità rispetto ad un normale sito internet o sistema informativo che ci portano ad affrontare scelte progettuali non comuni. I contenuti multimediali del software saranno in numero limitato e non verranno modificati nel tempo. Per ragioni divulgative, non si prevede la registrazione o la gestione di utenti da parte del software, questo implica che non sono previste tabelle per immagazzinare *tuple* sugli utenti.

Quindi, per ricapitolare la situazione, ci troviamo a dover progettare un software che durante tutto il suo ciclo di vita accede a contenuti statici che non cambiano nel tempo. Per realizzare questo tipo di astrazione a livello dati, l'approccio più comune prevederebbe l'utilizzo di un *database* ad oggetti in grado di immagazzinare contenuti multimediali. Questa soluzione viene di solito adottata per gestire database con un discreto numero di *tuple* con lo scopo di favorirne l'aggiornamento in modo coerente. Partendo dal presupposto che l'accesso a *database* è più lento che l'accesso a *file system* e conoscendo le necessità della nostra base dati, abbiamo deciso di non utilizzare alcun database per i contenuti multimediali. Difatti, dovendo visualizzare video in alta definizione, il sistema necessita di un *response time* molto basso.

Nonostante ciò, nei *diagrammi di analisi* vengono mostrate delle classi identificate con lo stereotipo *entity*. Queste devono essere pensate come in-

terfacce per la gestione dell'accesso al *file system*.

### Diagrammi di analisi

Nella fase di analisi dettagliata l'obiettivo è quello di separare i tre elementi di presentazione, di controllo e di interazione con dati o risorse esterne. Perciò ci si avvale del modello *Boundary-Control-Entity* che consente di rappresentare il sistema in *diagrammi di analisi* che consentono di separare la logica applicativa dalla presentazione dei dati. In questo paragrafo si farà riferimento al diagramma A.4.

**Entity.** Nel modello si vedono due *entity*: *ContenutiMultimediali* e *ModelloMatematico*. La prima rappresenta la gestione del recupero dei contenuti multimediali che verranno visualizzati durante i percorsi formativi. Va pensata come un interfaccia che permetterà di gestire file di formati diversi: immagini, video, animazioni, audio (voce narrante), etc. La seconda *entity* serve ad immagazzinare le informazioni necessarie all'esecuzione delle simulazioni, difatti conterrà i valori dei parametri, l'espressione matematica delle formule e le equazioni del modello.

**Controller.** Sono i componenti che, ricevute le richieste dall'utente, recuperano i dati dalle *entity* e li manipolano per generare l'output del livello di presentazione. In questo caso sono stati creati tre *controller* differenti. *GestionePercorsi* è l'*handler* delle richieste tra *VisualizzaPercorso* e *ContenutiMultimediali*. Mentre *GestioneSimulazioni* ha l'incarico di fornire i dati con le traiettorie del modello, far cambiare i parametri all'utente e mostrare come cambiano le funzioni del modello e infine comunicare al *controller Simulazione* di generare nuovi dati sulle traiettorie del modello.

**Boundary.** Ricavate dallo *UX model* (figura A.3), rappresentano il raggruppamento delle classi  $\llcorner$  *screen*  $\lrcorner$  in due categorie principali, individuabili anche attraverso i casi d'uso, ovvero: la visualizzazione di un percorso e le simulazioni del modello.

### Rappresentazione della dinamica nell'interazione con il sistema

Per mostrare questo tipo di interazioni vengono comunemente usati i *sequence diagram* UML. In figura A.5-6 si vedono le interazioni degli utenti nei due scenari più comuni identificabili nello *use case*.

Il *sequence diagram* A.5 mostra l'utente che interagisce con l'interfaccia grafica per visualizzare i contenuti di uno dei percorsi. Le richieste che arrivano alla GUI vengono reindirizzate al *controller* il quale genera i dati per la risposta e li invia all'interfaccia grafica.

Il *sequence diagram* A.6 mostra l'interazione che avviene tra l'utente e il software alla richiesta di simulare il modello. In questo caso ci sono diverse parti in gioco. L'interfaccia grafica ha due istanze diverse: *SimulazioneModello* mostra l'evoluzione del modello con le traiettorie nei diversi diagrammi di stato, mentre *ModificaModello* fornisce la possibilità di cambiare i valori dei parametri alle diverse funzioni in gioco. Queste due *boundary* fanno riferimento a due diversi *controllers* i quali gestiscono l'elaborazione dei dati da spedire all'interfaccia grafica. Il *controller Simulatore Modello* sarà un programma esterno compilato con la GSL (Gnu Scientific Library) in grado di calcolare le traiettorie per i vari modelli di coppia (vedi paragrafo 4.3).

Le interazioni dell'utente con l'interfaccia grafica lo portano a poter passare velocemente dalla sezione dedicata alle traiettorie del modello a quella dedicata al cambiamento dei parametri. Ciascuna di queste interazioni implica dei calcoli da parte dei *controller*, come si può vedere nel *sequence diagram*. La sequenza di azioni computazionalmente più onerosa è rappresentata dalla richiesta di ricalcolare le traiettorie del modello dopo aver modificato alcuni parametri delle funzioni. In questo caso il controllo passa tra tutti gli attori del diagramma fino a generare nella GUI, *SimulazioneModello*, il disegno animato delle traiettorie.

#### 6.3.4 Progettazione multimediale

Questo paragrafo ha lo scopo di analizzare i requisiti di un prodotto multimediale elencati nel capitolo 5.1 e cercare di adeguarli al nostro caso specifico. Il nostro obiettivo sarà quello di articolare un discorso al fine di veicolare un messaggio chiaro e preciso per ognuno dei cinque percorsi didattici.

I percorsi dovranno essere costruiti attorno all'idea chiave che narrazione e filmati sono uno degli strumenti più potenti per riuscire a comunicare. Il procedimento con il quale abbiamo progettato i percorsi non è definibile come un processo organico o ingegnerizzabile. E' difficile, difatti, definire degli schemi ripetibili con cui progettare e realizzare un percorso multimediale. Secondo Mayer (2003) la bravura di un realizzatore di prodotti multimediali, risiede nel riuscire a creare un percorso che si adatti il più possibile ai processi cognitivi con cui la mente genera rappresentazioni mentali.

Il nostro approccio è passato necessariamente attraverso la generazione di diversi prototipi, fatti di raffinamenti successivi. In questo dominio non esistono formule matematiche che possano dare la certezza di un risultato. Ogni persona che fruisce del nostro prodotto multimediale intraprende un percorso soggettivo influenzato dai propri gusti, passioni, cultura e educazione. Pur avendo cercato di rispettare tutti i principi definiti nel capitolo

5, abbiamo scelto di mostrarti un esempio pratico del nostro *modus operandi* in questa parte di costruzione dei contenuti multimediali.

### 6.3.5 Progettazione multimediale: studio di caso

Questo studio di caso mostra la realizzazione del *documento di progettazione multimediale* per il primo percorso didattico: *La Storia*.

In questa trattazione si parte dalla stesura del testo contenente i messaggi che si vogliono trasmettere a livello comunicativo. Si sceglie, come suggerito dal *personalization, voice, and image principle*, un registro colloquiale per il testo che viene scritto, in quanto verrà letto da una voce narrante, piuttosto che scritto a video (*modality principle*). I concetti espressi devono essere chiari e non prolissi (*coherence principle*) e sempre finalizzati ad un percorso di progressiva consapevolezza dell'argomento (*pretraining principle*).

Il testo formulato per il primo percorso è il seguente:

*“Jules et Jim è un film del 1961 in cui il famoso regista francese François Truffaut descrive una storia d'amore triangolare che coinvolge due amici inseparabili: Jules, interpretato da Oskar Werner e Jim interpretato da Henri Serre, e la loro amata, Kathe, interpretata da Jeanne Moreau.*

*La storia dura 20 anni e si svolge a cavallo della prima guerra mondiale dal 1910 al 1930. All'inizio Kathe si sposa con Jules, ma poi lo abbandona per Jim, per poi tornare con Jules e così proseguire per un totale di 8 periodi distinti.*

*La storia termina con il suicidio di Kathe che coinvolge la morte di Jim.*

*Il film è tratto dal romanzo Jules et Jim di Henri-Pierre Roché pubblicato da Gallimard nel 1953.*

*Il romanzo diventa noto con il film di Truffaut, è tra i più popolari durante il movimento del 68 perché portatore dell'ideologia del libero amore.*

*Il romanzo è autobiografico, con Roché impersonificato da Jim e Franz Hessel, uno scrittore amico di Roché, impersonificato da Jules. Helen Grund, una pittrice tedesca, moglie di Franz Hessel, è invece Kathe nel romanzo.*

*Esistono così tre storie d'amore: quella vera, quella descritta da Roché e quella di Truffaut.*

*Benché il romanzo sia per forza di cose un estratto della storia reale e il film di Truffaut sia, a sua volta, una riduzione del romanzo, se non altro nel numero dei personaggi, c'è da ritenere che il film descriva con fedeltà i sentimenti che hanno caratterizzato la relazione tra Helen Grund e i suoi due amanti. Lei stessa dopo aver visto il film, scrive infatti una lettera a Truffaut in cui dice:*

*...ma quale predisposizione e quale affinità hanno potuto ispirarla al punto di ricreare - malgrado inevitabili deviazioni e compromessi - la vera natura delle nostre più intime emozioni...”*

Dopo aver prodotto questo testo dobbiamo necessariamente, applicando lo *split-attention principle*, suddividere il messaggio in parti separate da trattare come unità separate, ma conologicamente contigue. Ad ognuna di queste parti verranno associati dei contenuti multimediali. Per meglio comprendere i segmenti proposti è opportuno lavorare di immaginazione: i numeri tra parentesi quadre rappresentano opportuni contenuti multimediali che verranno visualizzati in corrispondenza delle parole in cui sono inseriti.

Trovandoci in una fase ancora prettamente progettuale, non verranno presi in considerazioni dettagli implementativi quali animazioni, dissolvenze o effetti specifici, questi verranno aggiunti *just in time* in fase di sviluppo.

### **Primo segmento: introduzione**

*“Jules et Jim è un film del 1961 [1] in cui il famoso regista francese François Truffaut descrive una storia d’amore triangolare che coinvolge due amici inseparabili: Jules, interpretato da Oskar Werner [2] e Jim interpretato da Henri Serre[3], e la loro amata, Kathe, interpretata da Jeanne Moreau[4,5].”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - Un cartellone su Jules et Jim o, alternativamente, il titolo del film con regista e autori.

[2,3,4] - Una breve scena di ognuno dei tre che si ferma per un attimo sulla loro immagine.

[5] - Il triangolo: verranno mostrate tre immagini a triangolo con al vertice superiore l’immagine di Kathe. Sotto le foto verranno indicati i nomi degli attori del film.

### **Secondo segmento: la storia**

*“La storia dura 20 anni e si svolge a cavallo della prima guerra mondiale[1] dal 1910 al 1930. All’inizio Kathe si sposa con Jules[2], ma poi lo abbandona per Jim, per poi tornare con Jules e così proseguire per un totale di 8 periodi distinti[3].”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - Scena di guerra tratta dal film.

[2] - Scena del film di Jules e Kathe.

[3] - Mostrare un diagramma in cui si vedono gli 8 periodi in cui si evidenzia l’evoluzione dei scambi di partner (animazione cronologica a velocità

costante).

### Terzo segmento: il suicidio

*“La storia termina con il suicidio di Kathe che coinvolge la morte di Jim[1].”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - La frase viene letta quando l’animazione presente al punto [3] del segmento 2 arriva alla fine. Subito dopo la lettura inizia la scena del film in cui si assiste al suicidio di Kathe (inizio spezzone: Kathe chiama Jim ad accompagnarla in macchina; fine spezzone: macchina che precipita).

### Quarto segmento: il romanzo

*“Il film è tratto dal romanzo Jules et Jim di Henri-Pierre Roché pubblicato da Gallimard nel 1953[1].”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - Appare con una transizione sfumata la versione originale del romanzo “Jules et Jim” con a fianco, se possibile, una foto di Roché.

### Quinto segmento: il successo del romanzo

*“Il romanzo diventa noto con il film di Truffaut, è tra i più popolari durante il movimento del 68 perché portatore dell’ideologia del libero amore.[1]”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - Far comparire la scritta: “*IL LIBERO AMORE: non si deve vincolare la persona amata, ma lasciarla vivere in piena libertà*”. La transizione deve mostrare prima il titolo e poi il testo sottostante, ma solo alla fine della lettura della frase.

### Sesto segmento: il romanzo è autobiografico

*“Il romanzo è autobiografico, con Roché impersonificato da Jim e Franz Hessel, uno scrittore amico di Roché, impersonificato da Jules. Helen Grund, una pittrice tedesca, moglie di Franz Hessel, è invece Kathe nel romanzo[1].”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - Fin dall’inizio della frase deve comparire il triangolo mostrato nel primo segmento al punto 4. Durante la lettura della frase vengono aggiunti, associati alle foto dei personaggi, i nomi dei vari protagonisti, della storia

reale, del romanzo e del film.

### **Settimo segmento: le tre storie d'amore**

*“Esistono così tre storie d'amore: quella vera[1], quella descritta da Roché[2] e quella di Truffaut[3].”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - Vengono evidenziati nel triangolo del sesto segmento i nomi associati alla storia vera.

[2] - Evidenzia i nomi associati al romanzo.

[3] - Evidenzia i nomi associati al film.

Alla fine tutti i nomi diventano ugualmente visibili.

### **Ottavo segmento: Helen Grund**

*“Benché il romanzo sia per forza di cose un estratto della storia reale e il film di Truffaut sia, a sua volta, una riduzione del romanzo, se non altro nel numero dei personaggi, c'è da ritenere che il film descriva con fedeltà i sentimenti che hanno caratterizzato la relazione tra Helen Grund e i suoi due amanti. Lei stessa dopo aver visto il film, scrive infatti una lettera a Truffaut in cui dice:*

*...ma quale predisposizione e quale affinità hanno potuto ispirarla al punto di ricreare - malgrado inevitabili deviazioni e compromessi - la vera natura delle nostre più intime emozioni...[1]”*

Contenuti multimediali proposti:

[1] - La citazione compare sullo schermo di colpo e viene quindi letta dalla solita voce con la scritta già presente.

### **Segmenti: conclusione**

Il lavoro esposto nei paragrafi precedenti mostra il nostro processo di analisi dei contenuti. Ovviamente questo lavoro genera semplicemente un documento contenente la traccia da implementare in fase di sviluppo. Dopo aver creato questi *documenti di progettazione multimediale* un passaggio obbligato è il recupero dei contenuti multimediali dalle diverse fonti disponibili (dvd, internet e il romanzo).



## 6.4 Sviluppo

La fase di progettazione fornisce dei diagrammi abbastanza precisi di come sarà il prodotto finale. La fase di sviluppo prevede la realizzazione del codice relativo a tali diagrammi.

In questo lavoro, dopo un'attenta analisi del dominio di riferimento, abbiamo deciso di utilizzare l'ambiente di sviluppo offerto dal software *Adobe Flash*. Questo programma è stato scelto come giusto compromesso tra le necessità multimediali e quelle scientifiche. Se da una parte la programmazione in java, attraverso *Swing* o *JavaScript*, avrebbe facilitato la realizzazione dei grafici, dall'altra avrebbe penalizzato la visualizzazione dei contenuti multimediali. Inoltre i *plug-in* di *flash player* sono maggiormente usati rispetto a quelli richiesti dalle *applet java*.

Il linguaggio di programmazione su cui si basa *Adobe Flash* è chiamato *Action Script*, e nella sua ultima versione (3.0) è diventato un linguaggio di programmazione ad oggetti ibrido. Scegliere un ambiente come *Adobe Flash* può sembrare una scelta per semplificare il lavoro e ridurre la mole di codice. Rispetto ad un comune linguaggio di programmazione *Action Script* è temporizzato a diversi strati. La *timeline* di *Flash* contiene dei *frame* che vengono eseguiti cronologicamente. Ad ogni *frame* può essere associato un frammento di codice *Action Script* il quale viene eseguito in serie, inoltre ogni *frame* può possedere un oggetto di tipo *MovieClip* che al suo interno avrà una *timeline* annidata.

Rispetto ad un linguaggio di programmazione tradizionale, *Adobe Flash*, essendo orientato alla creazione di interfacce utente, può disorientare un programmatore esperto di linguaggi come *c* o *java*, orientati al *livello logico*.

Prendendo spunto da un manuale (Reinhardt e Dowd (2008)) e dal supporto in internet siamo riusciti a definire uno stile di programmazione che fosse il più aderente possibile ai canoni dell'ingegneria del software. Molte delle difficoltà riscontrate nascono dalla tipologia degli utilizzatori di *Macromedia Flash* i quali solitamente hanno basse conoscenze di programmazione a discapito di un *background* nel web design.

La nostra trattazione in questo paragrafo prevede una sezione di approfondimento sull' *action script*, una illustrativa del diagramma delle classi del prodotto multimediale e una infine sull'architettura del sistema.

### 6.4.1 Action Script 3

*ActionScript* (AS) è il linguaggio di scripting di Adobe Flash, software che affonda le proprie radici nella grafica vettoriale. Questo anche grazie alla

diffusione del *plugin*, si è ritagliato un proprio spazio nella realizzazione di applicazioni dinamiche, oltre che nella realizzazione di siti web e animazioni. Actionscript si basa su *ECMAScript* e la sua sintassi, almeno fino alla versione 6 del *Flash Player*, è molto simile a *JavaScript* dal quale poi diverge per ciò che riguarda le caratteristiche di *OOP* (Object Oriented Programming).

ActionScript è un linguaggio orientato agli oggetti, supportante quindi la creazione di classi, e l'uso di quelle già esistenti. Come linguaggio di programmazione ad oggetti possiede caratteristiche come *ereditarietà*, *polimorfismo*, *dynamic binding*, *overriding*, *garbage collector*, *virtual methods*, etc.

Per molti anni si è pensato che AS fosse un linguaggio di programmazione con prestazioni computazionali basse. Questo poteva essere vero fino alla versione 2.0, difatti essendo la versione 3.0 orientata ad una grafica 3D e richiedendo un numero di computazioni elevate, la capacità computazionale è notevolmente avanzata. Secondo stime del produttore (*Adobe*) è di 10 volte maggiore a quella della versione precedente.

#### 6.4.2 Diagramma delle classi

In questa sezione verrà analizzato il *class diagram* UML del software che abbiamo realizzato. Questo tipo di diagrammi ha lo scopo di definire le classi che verranno implementate durante la fase di progettazione. Inoltre definisce i metodi e le interfacce che verranno usate dalle classi per comunicare tra loro. Nella figura (A.7) dell'appendice A potete trovare il diagramma delle classi che verrà illustrato in questo paragrafo.

Come si può notare dal diagramma, la maggior parte delle classi dipende (eredita) da *MovieClip*. Difatti in *Action Script* tutti i componenti grafici devono ereditare da questa classe. Le classi principali su cui si basa il funzionamento di questo software sono *ContenitoreMultimediale*, *Pellicola*, *Visualizza Percorso*, *DisegnaGrafici* e *ContenitoreSimulazioni*. La classe astratta *VisualizzaPercorso* viene usata come interfaccia di riferimento da *ContenitoreMultimediale* per gestire le interazioni con le classi *Storia*, *Congettura*, *Romanzo*, *Film* e *Modello*.

Le classi *DisegnaTraiettorie* e *DisegnaFunzioni* ereditano da *DisegnaGrafici* la maggior parte delle funzionalità per rappresentare grafici in 2D. Difatti ActionScript, nonostante le molte caratteristiche, non è fornito di classi per la visualizzazione di traiettorie nei grafici. Questa peculiarità ci ha costretto a sviluppare diverse funzioni di supporto all'interno del codice della classe *DisegnaGrafici*.

L'avvio del nostro software prevede la creazione di un'istanza di *ContentitoreMultimediale*, il quale genera un'istanza di *Pellicola* e cinque istanze di *VisualizzaPercorso*. Grazie al *dynamic binding* vengono associate alle cinque istanze di *VisualizzaPercorso* le classi *Storia*, *Congettura*, etc.. La classe *Pellicola* genera sei fotogrammi di cui cinque rappresentano i percorsi, più un sesto per i crediti, i quali sono implementati come un semplice *MovieClip Flash*.

La classe *ContentitoreSimulazioni* viene costruita solamente quando viene lanciato il metodo *simula* della classe *Modello*. Il costruttore di *ContentitoreSimulazioni* istanzia le classi *DisegnaTraiettorie* e *DisegnaFunzioni* e getisce la visualizzazione e la modifica dei parametri delle funzioni.

La classe *BridgeShell* ha il compito di interfacciare Flash con i nostri eseguibili C usati per simulare il modello. Questo passaggio da *Flash* a *C*, necessita la creazione di un *bridge* che verrà spiegato nel paragrafo seguente.

### 6.4.3 Architettura del sistema

Il sistema da realizzare dovrà essere pubblicato su un web server in grado di supportare richieste HTTP. Il web server dovrà inoltre avere sufficientemente spazio per memorizzare i contenuti multimediali, stimati attorno a 100 MB. Il paradigma utilizzato è client-server, in cui l'applicazione prevede un *fat client* a cui vengono delegate la gran parte delle funzionalità del sistema. I contenuti multimediali vengono scaricate solamente se necessari, cercando di non rendere l'applicazione troppo pesante in termini di bytes da scaricare. Non essendo *Flash* in grado di gestire calcoli differenziali complessi, abbiamo

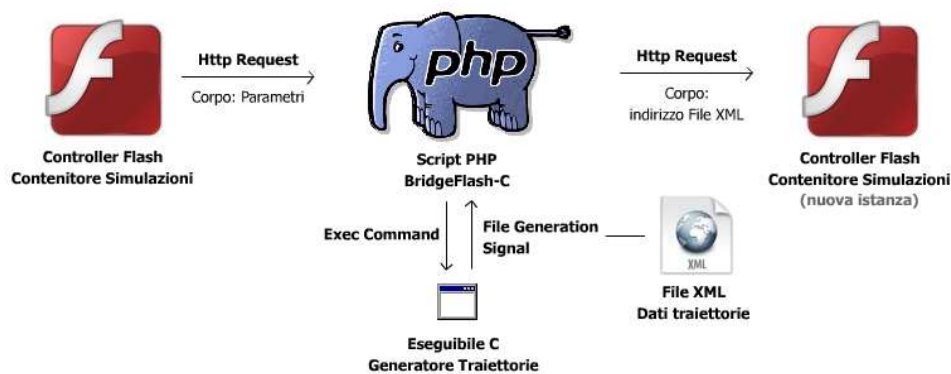


Figura 6.1: Evoluzione del passaggio del controllo durante l'esecuzione di una nuova simulazione.

dovuto delegare le simulazioni matematiche a eseguibili C compilati con la libreria scientifica GSL (vedi capitolo 4). Per poter riuscire a gestire la

comunicazione tra l'applicazione flash e gli eseguibili *c* è stato necessario sviluppare un *bridge* che gestisca lo scambio di informazioni.

In figura 6.1 si vede l'evoluzione del controllo durante una richiesta di *simulazione* di un modello modificato. La classe *ContenitoreSimulazioni* invia una richiesta *HTTP* simile a quelle generate da un *form*, nel cui corpo si trovano i parametri del modello da simulare. Il *bridge PHP* riceve la richiesta e attraverso il comando *exec* lancia l'esecuzione dell'eseguibile *C* per la generazione delle traiettorie del modello. Queste vengono salvate su file XML di dimensioni supposte non superiori ai 100 KB.

Il programma prima di terminare segnala al *bridge* la generazione del file e il percorso per individuarlo. Il *bridge PHP* lancia l'applicazione *flash* che istanzia la classe *ContenitoreSimulazioni* passandogli come parametro il percorso del file generato.

#### 6.4.4 Sviluppo contenuti multimediali

Nella fase di progettazione sono stati prodotti i *documenti di progettazione multimediale* (vedi paragrafo 6.3.5). La parte di sviluppo dei contenuti prevede una fase di ricerca dei contenuti multimediali descritti nel documento. Difatti in fase di progettazione si ipotizza di poter disporre di tutti le sorgenti disponibili. La fase centrale dello sviluppo dei percorsi didattici ruota attorno all'intergrazione dei contenuti multimediali con la narrazione e l'ambiente multimediale. Questa fase molto difficile da descrivere a parole è fortemente integrata con la fase di testing. Difatti il rpedimento prevede il raffinamento di prototipi che vengono migliorati grazie ai *feedback* di *tester* con *background* sia tecnico che non. In questa fase la scelta anche di un'animazione di un contenuto piuttosto che di un'altra può essere cruciale per aumentare la chiarezza del passaggio. Questo discorso può essere applicato a tutte quelle componenti che riguardano la grafica e le animazioni in ambito web.

Infine uno dei problemi più complicati è stata la sincronizzazione della voce narrante (Sergio Rinaldi) con i conenuti multimediali. Trovare le giuste tempistiche ha richiesto notevoli sforzi e ha causato diverse scelte forzate a livello realizzativo.

### 6.5 Deploy

L'applicazione è stata pubblicata sul server unix del dipartimento DEI del Politecnico di Milano, al seguente indirizzo:

<http://home.dei.polimi.it/rinaldi/JulesetJim>

Nonostante l'applicazione sia fisicamente su un unico server, in realtà è stata realizzata in due cartelle distinte del server. Questa decisione è stata necessaria per motivi di permessi di esecuzione. Le pagine internet difatti possono essere inserite solamente nelle cartelle dedicate ai professori, ma queste non hanno la possibilità di ospitare eseguibili. E' stato perciò necessario ottenere un utenza sul server con i privilegi necessari a poter lanciare il comando *gcc*, successivo all'installazione della *GSL* (Gnu Scientific Library) in quel percorso. La comunicazione tra le due cartelle è stata possibile grazie al file system del server.

## 6.6 Test case e casi d'uso

Durante la fase di realizzazione di questa applicazione sono state realizzate numerose versioni e release. Si considera difatti che neppure la versione corrente possa essere definita finale.

Per quanto riguarda la realizzazione dei contenuti multimediali, si può considerare il metodo realizzativo simile a quello adottato durante i cicli di vita di software definiti *agile*. Questo tipo di metodologie implica la realizzazione di prototipi in tempi brevi e il successivo affinamento che passa attraverso anche una ridefinizione dei requisiti e delle scelte progettuali, attorno alle necessità del committente. E' stata realizzata, difatti, un'estesa fase di testing e affinamento per riuscire a comprendere se il mix di filmati, narrazione e grafici era stato assemblato appropriatamente o se fosse opportuno svolgere ulteriori modifiche per affinare le potenzialità comunicative dell'opera.

I casi d'uso riassumono molto rapidamente le interazioni tra l'utente e il sito internet. Si invita perciò il lettore a visitare l'indirizzo web dell'applicazione per avere una visione completa di come è stato realizzato l'ambiente multimediale. Questa trattazione fa riferimento alle immagini disponibili nell'appendice B.

Nella figura B.1 si può vedere la schermata introduttiva del prodotto multimediale. Si vedono le tre locandine del film in lingua italiana, francese e inglese. Al passaggio del mouse sulle locandine, compare un *tooltip* che associa una scritta col nome della lingua alla copertina selezionata. Dopo aver selezionato la lingua si entra nell'ambiente multimediale vero e proprio.

La figura A.2 mostra la visualizzazione di uno spezzone del film. Si può notare in alto a sinistra la pellicola con la scritta "Jules e Jim". La presenza della lettera *e* implica che questa è la versione in italiano del sito. Quando il mouse dell'utente si sposta sopra la pellicola, compare con una breve animazione il menu (vedi figura A.3). La pellicola ha lo scopo di sancire

la relazione del nostro lavoro con il film di Truffaut. Ogni fotogramma rappresenta una sezione del sito. I nomi delle rubriche compaiono in forma di *tooltip* al passaggio del mouse.

Le figure A.4 e A.5 mostrano la sezione di simulazione del modello. Nell'immagine A.4 si possono notare le traiettorie dei sentimenti di Jules e Kathe sia durante l'evoluzione temporale che nel piano di stato. Quando viene premuto il tasto "Cambia i parametri" compare la schermata della figura A.5. In questa parte del software è possibile modificare, attraverso gli slider nella parte sinistra dello schermo, il grafico delle funzioni. Si è scelto di fornire mostrare sia la forma esplicita dell'equazione, che il grafico originale (in rosso). In questo modo un utente non esperto dello studio di funzione è in grado di capire come cambia la forma del grafico alla modifica dei parametri. Premendo il bottone "Calcola traiettorie" viene lanciato il codice C responsabile della generazione delle traiettorie, come illustrato nel paragrafo 6.4.3 .

# Capitolo 7

## Conclusioni

### 7.1 Conclusioni

Questo lavoro è stato realizzato con il fine di rispondere a due necessità: proporre una modifica al modello matematico del romanzo *Jules et Jim* e creare uno strumento multimediale in grado di comunicare e presentare il modello stesso.

La modifica al modello matematico si è resa necessaria dall'individuazione di due piccoli difetti del modello originale presentato da Dercole (1999), uno di tipo puramente formale e uno di natura modellistica. L'auspicio fin dal principio era che il nuovo modello fosse in accordo con quello originale sia qualitativamente (storia turbolenta, quindi dinamica caotica) che quantitativamente. Difatti, i risultati attesi miravano ad individuare lo stesso numero di cambi da parte di Kathe nell'alternare tra i due partner nella storia narrata misurati dai cambi di segno della variabile di sbilanciamento  $x_2 - x_1$ , sentimenti di Kathe per Jules e Jim.

L'idea dello strumento multimediale nasce invece dall'esigenza di trasportare un percorso didattico all'interno di un supporto multimediale, o meglio riuscire a trasmettere seppure ad un livello intuitivo i concetti di sistemi dinamici e caos deterministico anche ad un pubblico non scientifico.

Tra questi due obiettivi, quest'ultimo è la stata la sfida maggiore della tesi poiché affronta tematiche non solamente tecniche. E' difficile infatti poter costruire un percorso formativo attraverso degli standard come quelli tipici della progettazione ingegneristica.

Le modifiche al modello sono state minimali, difatti alterano solo la modellizzazione di due deboli interazioni tra i due modelli di coppia, presentati in Dercole (1999). Ci si poteva pertanto aspettare che il comportamento del nuovo modello, al variare dei due parametri che regolano le interazioni tra

i modelli di coppia, fosse di fatto simile a quello del modello originale. E' tuttavia importante sottolineare che il modello di originale risulta caotico, e quantitativamente in accordo con la storia narrata, proprio grazie a queste deboli interazioni che sono quindi elementi cruciali del modello.

La tesi ha certamente raggiunto il primo obiettivo, grazie ad un'analisi sistematica del nuovo modello al variare dei due parametri di interazione (vedi capitolo 4). Così come il modello originale, per tutte le combinazioni analizzate dei parametri, il nuovo modello prevede che Kathe si innamori e si sposi con Jules e prevede anche la successiva alternanza tra i due. Inoltre, l'attrattore raggiunto a partire dalla condizione iniziale di pura indifferenza, è caotico per varie combinazioni dei parametri di interazione (si veda la Figura 4.3). Infine tra tali combinazioni, è stata identificata quella che dà la migliore correlazione (0,98, vedi figura 4.4) tra gli istanti dei cambi di partner ottenuti come cambi di segno della variabile  $x_2 - x_1$  e quelli estratti dalla storia narrata.

Per quanto riguarda l'obiettivo di comunicazione, ci rimettiamo al giudizio dell'utente. E' ovviamente impossibile poter definire una formulazione matematica per la correttezza della comunicazione di un prodotto multimediale. Il nostro *modus operandi* ha richiesto lo sviluppo di prototipi e vari raffinamenti successivi, ma nonostante questo ogni giorno pensiamo ad una nuova idea che forse potrebbe essere migliore di quella realizzata. La fase di realizzazione ha richiesto vari test che hanno impegnato sia persone con *background* tecnico-scientifico, che con altri percorsi alle spalle.

Il prodotto multimediale realizzato ha un'interessante applicazione non prevista al momento della progettazione. Difatti essendo una piattaforma multimediale sviluppata attorno ai principi di astrazione della programmazione ad oggetti, alcune componenti potranno essere facilmente riutilizzate per altre applicazioni sempre orientate alla divulgazione scientifica e all'apprendimento multimediale.



# Bibliografia

- M. Ainsworth, M. Blehar, E. Waters, e S. Wall. *Patterns of Attachment*. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1978.
- K.T. Alligood, T.D. Sauer, e J.A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, NY, 1996.
- D. Ardagna, M.G. Fugini, B. Pernici, e P. Plebani. *Sistemi informatici, Volume VI, sistemi informativi basati sul web*. FrancoAngeli, Milano, 2006.
- R. K. Atkinson. Optimizing learning from examples using animated pedagogical agents. *Journal of Educational Psychology*, 2002.
- K. Bartholomew e L. M. Horowitz. Attachment styles among young adults: a test of a four-category model. *Journal of Personality and Social Psychology*, 61:226–244, 1991.
- N. Bee, J. Wagner, E. André F. Charles, D. Pizzi, e M. Cavazza. Multimodal interaction with a virtual character in interactive storytelling. *Proc. of 9th Int. Conf on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, 2010.
- J. Bowlby. *Attachment and Loss* vol. 1: *Attachment*. Basic Books, New York, 1969.
- J. Bowlby. *Attachment and Loss* vol. 2: *Separation*. Basic Books, 1973.
- J. Bowlby. *Attachment and Loss* vol. 3: *Loss, Sadness and Depression*. Basic Books, 1980.
- M. R. Bütz, L. L. Chamberlain, e W. G. McCown. *Strange Attractors: Chaos, Complexity, and the Art of Family Therapy*. Wiley, New York, 1996.

- N. L. Collins e S. J. Read. Adult attachment, working models and relationship quality in dating couples. *Journal of Personality and Social Psychology*, 58:644–663, 1990.
- A. R. Damasio. *L'errore di Cartesio*. Adelphi Edizioni, Milano, 1995.
- F. Dercole. *A modeling interpretation of the novel Jules et Jim*. Tesi di laurea, Politecnico di Milano, Milano, 1999.
- J. A. Feeney e P. Noller. Attachment style as a predictor of adult romantic relationships. *Journal of Personality and Social Psychology*, 58:281–291, 1990.
- G. Feichtinger, S. Jorgensen, e A. J. Novak. Petrarch's Canzoniere: Rational addiction and amorous cycles. *Journal of Mathematical Sociology*, 23: 225–240, 1999.
- L. T. Fuller e F. D. Fincham. Attachment style in married couples: Relation to current marital functioning, stability over time, and method of assessment. *Personal Relationships*, 2:17–34, 1995.
- J. M. Gottman, J. D. Murray, C. Swanson, R. Tyson, e K.R. Swanson. *The Mathematics of Marriage: Dynamic Nonlinear Models*. MIT, Boston, 2002.
- A. Gragnani, S. Rinaldi, e G. Feichtinger. Cyclic dynamics in romantic relationships. *International Journal on Bifurcation and Chaos*, 7(11),2611-2619, 1997.
- D. W. Griffin e K. Bartholomew. Models of the self and other. Fundamental dimensions underlying measures of adult attachment. *Journal of Personality and Social Psychology*, 67:430–445, 1994.
- C. Hazan e P. R. Shaver. Romantic love conceptualized as an attachment process. *Journal of Personality and Social Psychology*, 52:511–524, 1987.
- F. J. Jones. *The structure of Petrarch's Canzoniere*. Brewer, Cambridge, UK, 1995.
- R. E. Mayer. *The Cambridge handbook of multimedia learning*. Cambridge University Press, NY, 2005.
- R. E. Mayer. The promise of multimedia learning: using the same instructional design methods across different media. *Learning and Instruction* 13 (2003) 125-139, 2003.

- M. M. Merrill, R. K. Atkinson, e R. E. Mayer. Fostering social agency in multimedia learning: Examining the impact of an animated agent's voice. *Contemporary Educational Psychology*, 2004.
- R. Moreno e R. E. Mayer. Multimedia supported metaphors for meaning making in mathematics. *Cognitions and Instructions 17* 215-248, 1999.
- I. Peterson. Love's dynamics. *The Mathematical Association of America, MAA Online*, 1998. [www.maa.org/mathland/mathtrek\\_9\\_7\\_98.html](http://www.maa.org/mathland/mathtrek_9_7_98.html).
- D. Pizzi, M. Cavazza, J.L. Lugin, e F. Charles. Madame bovary on the holodeck: Immersive interactive storytelling. *ACM 978-1-59593-701-8/07/0009*, 2007.
- M. J. Radzicki. Dyadic processes, tempestuous relationships, and system dynamics. 9:79-94, 1993.
- R. Reinhardt e S. Dowd. *Flash CS3 e ActionScript 3.0*. Hoepli, Milano, 2008.
- S. Rinaldi. Love dynamics: the case of linear couples. *Applied Mathematics and Computation*, 95, 181-192, 1998a.
- S. Rinaldi. Laura and petrarch: an intriguing case of cyclical love dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(4), 1205-1221, 1998b.
- S. Rinaldi e A. Gragnani. Minimal models for dyadic processes: A review. In F. Orsucci, editor, *The Complex Matters of Mind*, Singapore, 1998a. World Scientific.
- S. Rinaldi e A. Gragnani. Love dynamics between secure individuals: a modeling approach. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 2(4), 283-301, 1998b.
- S. Rinaldi e A. Gragnani. Minimal models for dyadic processes: a review. In *The Complex Matters of Mind*. F. Orsucci Ed., World Scientific, Singapore, 1998c.
- H. P. Roché. *Jules et Jim*. Editions Gallimard, Paris, 1953.
- J. A. Simpson, S. W. Gangestad, e M. Lerma. Perception of physical attractiveness: Mechanism involved in the maintenance of romantic relationships. *Journal of Personality and Social Psychology*, 59:1192-1201, 1990.

- I. Sommerville. *Software Engineering, Eighth Edition*. Pearson Education, N.J., 2006.
- J. C. Sprott. Dynamical models of love. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 8:303–314, 2004.
- R. J. Sternberg e M. L. Baines. *Psychology of Love*. Yale University Press, New Haven, CT, 1988.
- S. H. Strogatz. Love affairs and differential equations. *Mathematics Magazine*, 61, 35, 1988.
- R. R. Vallacher e A. Nowak. *Dynamical Systems in Social Psychology*. Academic Press, New York, 1994.
- J. Wauer, D. Schwarzer, G. Q. Cai, e Y. K. Lin. Dynamical models of love with time-varying fluctuations. *Applied Mathematics and Computation*, 188:1535–1548, 2007.

## Appendice A

# Diagrammi UML

In questa appendice si trovano i diagrammi UML trattati nel paragrafo 6.3, riguardanti la progettazione del prodotto multimediale.

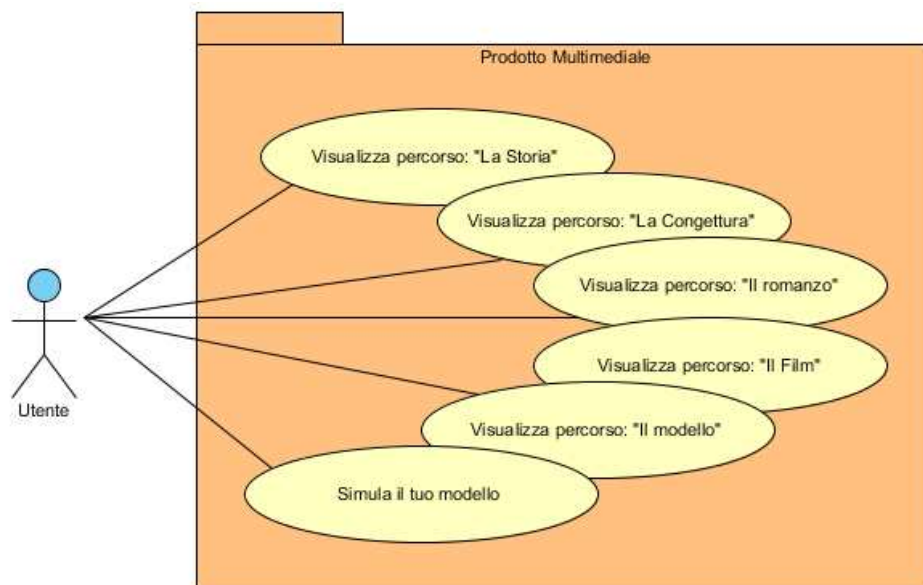


Figura A.1: UML, use case.

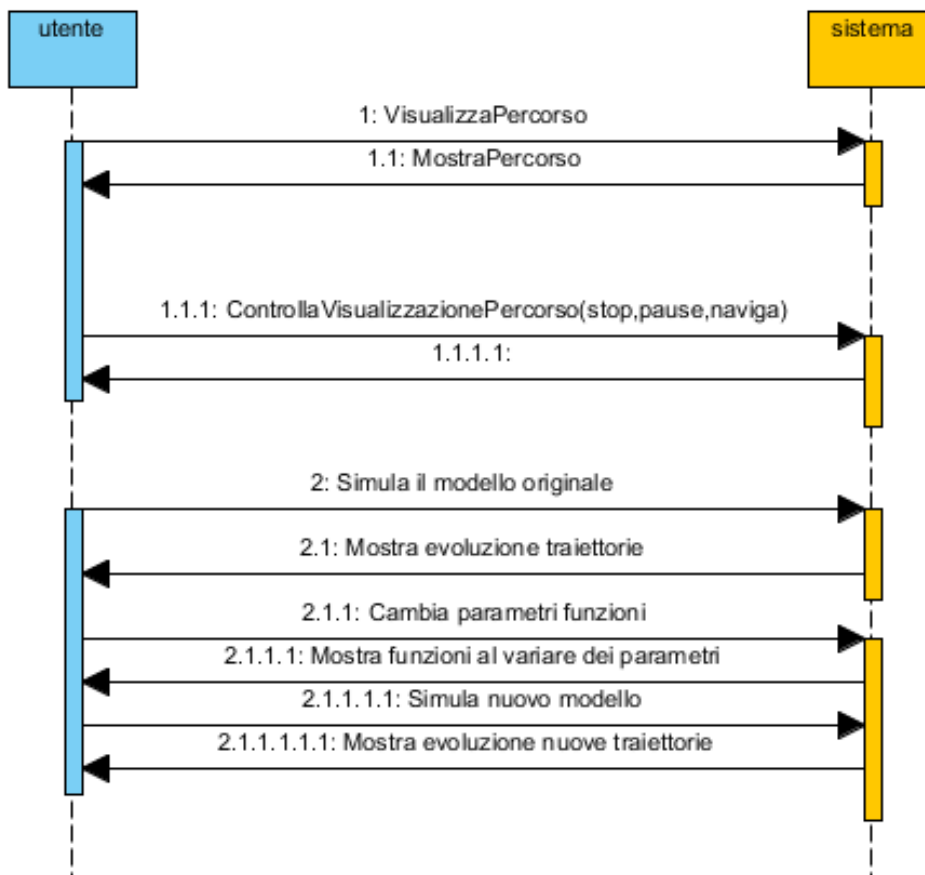


Figura A.2: UML, sequence diagram sistema.

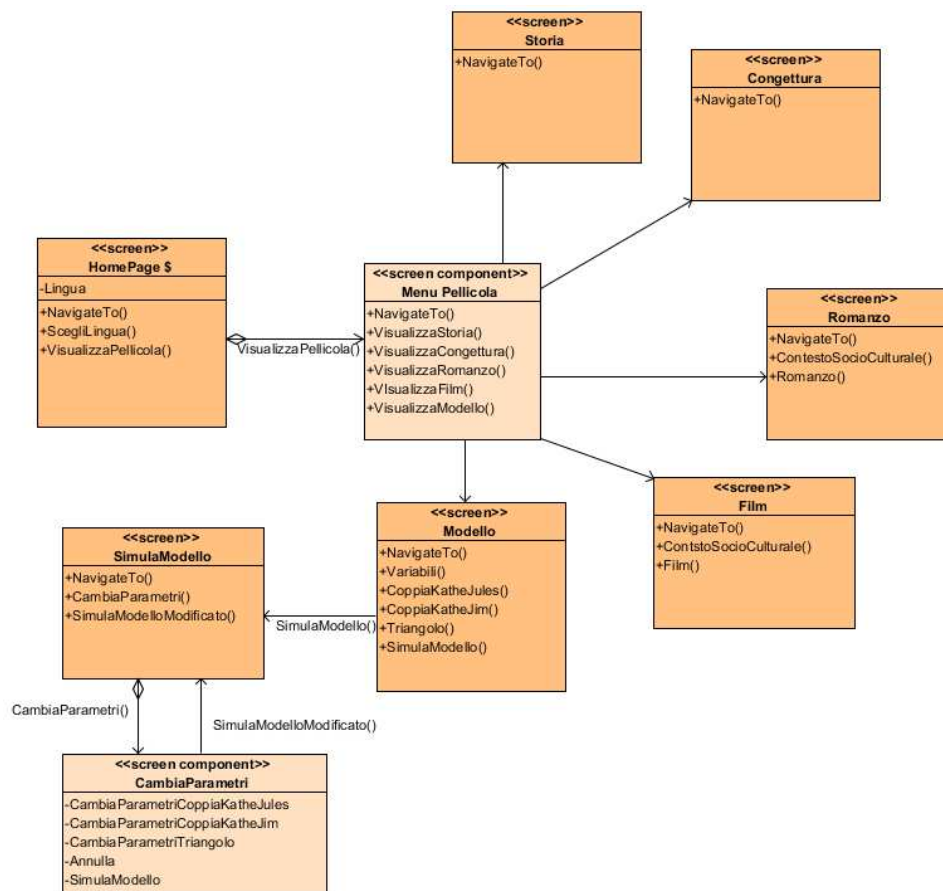


Figura A.3: UML, User eXperience Model

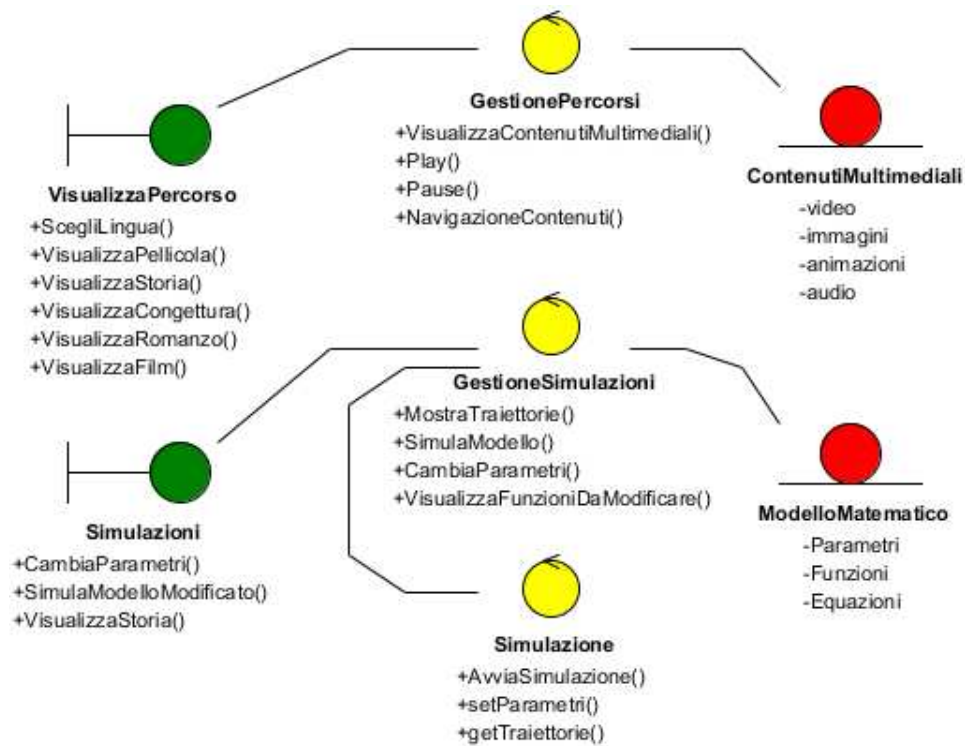


Figura A.4: UML, Boundary Control Entity model

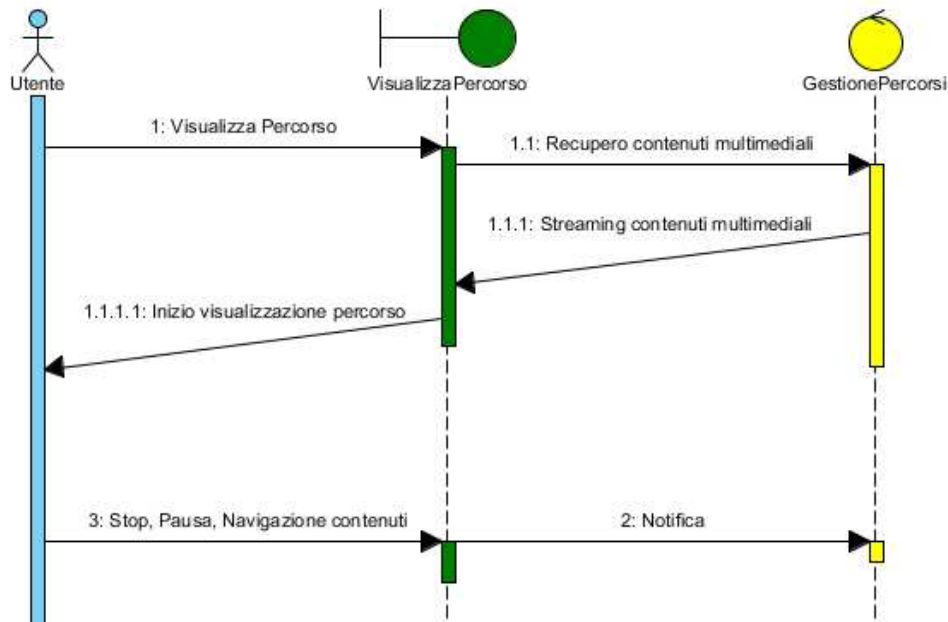


Figura A.5: UML, sequence diagram interazione per visualizzare un unità didattica.



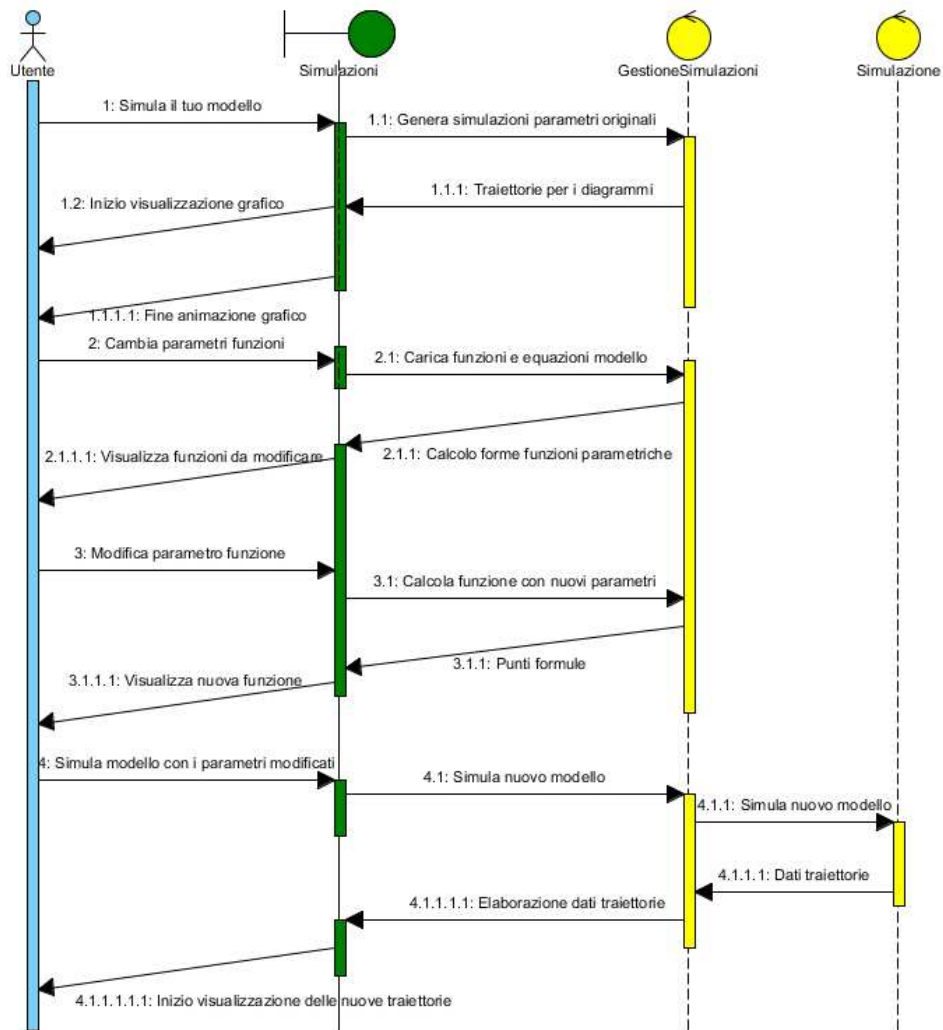


Figura A.6: UML, sequence diagram interazione per lanciare simulazioni del modello

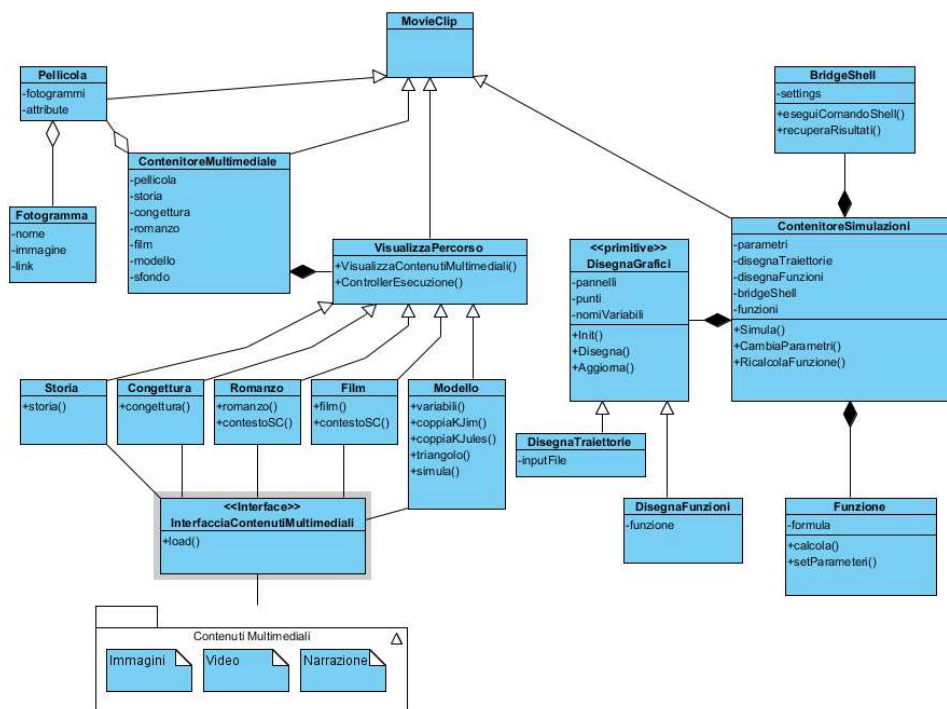
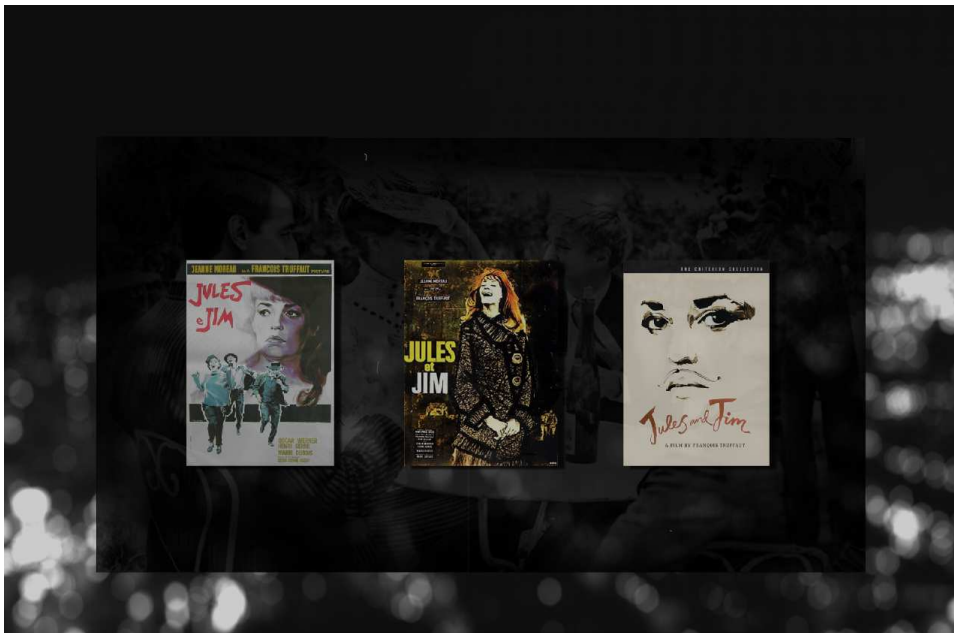


Figura A.7: UML, class diagram

# Appendice B

## Casi d'uso

In questa appendice si trovano alcune schermate utili per comprendere i casi d'uso dell'applicazione.



*Figura B.1: Scelta della lingua.*



Figura B.2: Visualizzazione di un filmato.



Figura B.3: Menu a pellicola.

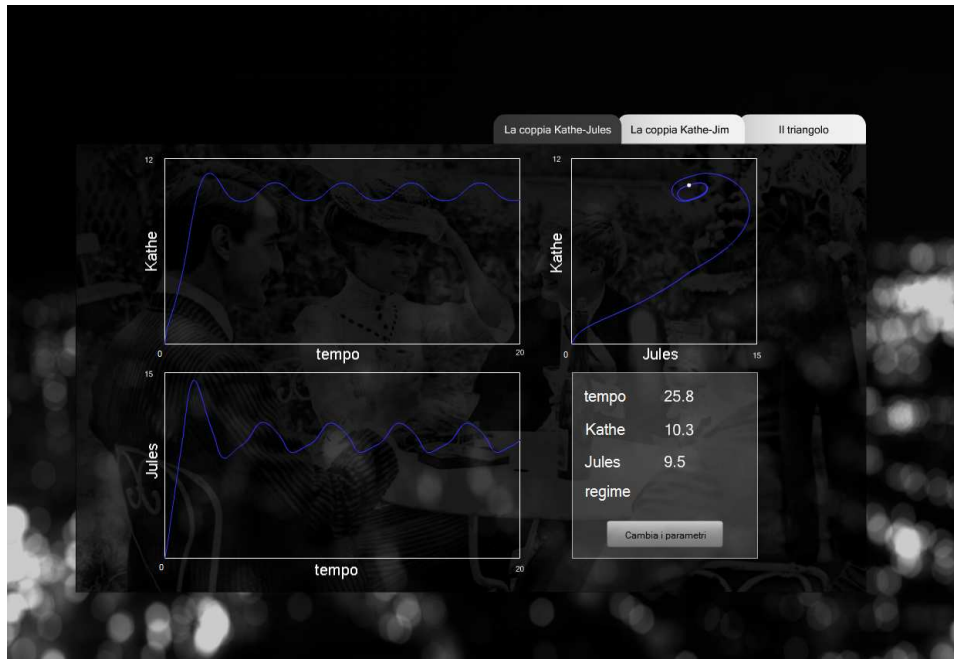


Figura B.4: Grafici.

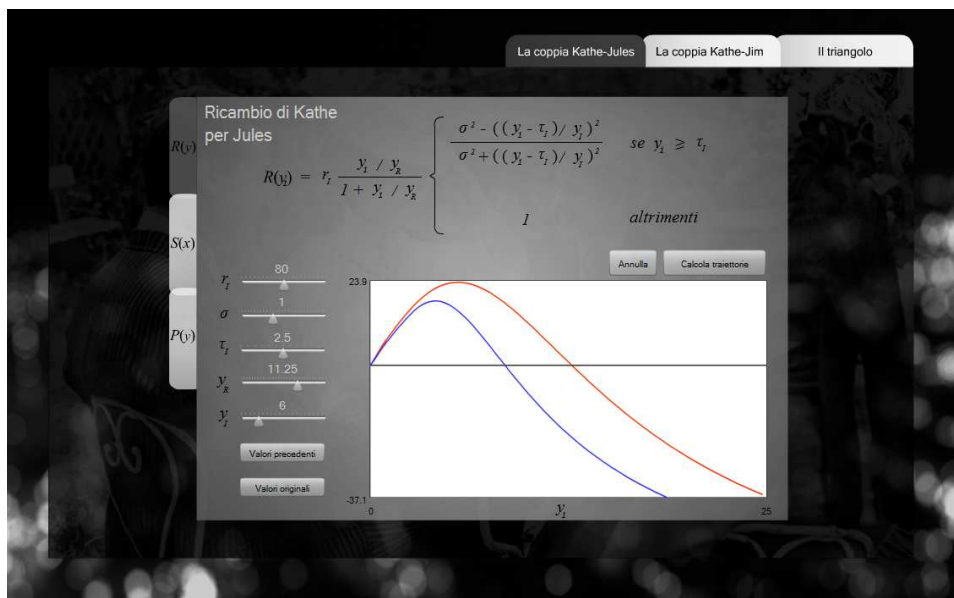


Figura B.5: Modifica di una funzione.