

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di ingegneria dei processi industriali
Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica



**UN APPROCCIO UNIFICATO ALLA DEFINIZIONE DI POTENZA
REATTIVA PER I CIRCUITI MONOFASE IN REGIME ALTERNATO
NON SINUSOIDALE**

Elaborato di Laurea di:
Gianluca Melli
Matr. 722059

Relatore: Prof. Ing. Alessandro Ferrero

Anno accademico 2009-2010

INDICE

| | |
|-----------------------------------|-----|
| <i>Indice delle figure</i> | IV |
| <i>Indice delle tabelle</i> | VII |

| | |
|---------------------------|---|
| Introduzione | 1 |
|---------------------------|---|

Capitolo 1 POWER THEORIES

| | | |
|------------|--|----|
| 1.1 | Potenze e correnti in regime sinusoidale | 3 |
| 1.2 | Estensione al regime non sinusoidale | 10 |
| | <i>1.2.1 Potenza attiva</i> | 10 |
| | <i>1.2.2 Valore efficace</i> | 12 |
| | <i>1.2.3 Potenza apparente e fattore di potenza</i> | 13 |
| | <i>1.2.4 Estensione di ulteriori concetti</i> | 14 |
| 1.3 | Power Theories | 15 |
| | <i>1.3.1 Budeanu</i> | 15 |
| | <i>1.3.2 Fryze</i> | 24 |
| | <i>1.3.3 Shepherd e Zakikhani</i> | 27 |
| | <i>1.3.4 Sharon</i> | 31 |
| | <i>1.3.5 Emanuel</i> | 36 |
| | <i>1.3.6 Kusters and Moore</i> | 42 |
| | <i>1.3.7 Czarnecki</i> | 47 |
| | <i>1.3.8 Willems (Rivisitazione della teoria di Budeanu)</i> | 55 |
| | <i>1.3.9 Ulteriore analisi della teoria di Budeanu</i> | 57 |

Capitolo 2
APPROCCIO UNIFICATO ALLE DEFINIZIONI DELLE COMPONENTI
DI POTENZA REATTIVA

| | | |
|------------|---|------------|
| 2.1 | Definizione di corrente reattiva come il risultato di un processo di minimizzazione..... | 64 |
| 2.1.1 | <i>Introduzione.....</i> | <i>64</i> |
| 2.1.2 | <i>Budeanu.....</i> | <i>66</i> |
| 2.1.3 | <i>Kusters and Moore – capacitiva.....</i> | <i>68</i> |
| 2.1.4 | <i>Kusters and Moore – induttiva.....</i> | <i>70</i> |
| 2.1.5 | <i>Czarnecki.....</i> | <i>72</i> |
| 2.1.6 | <i>Ulteriori definizioni di corrente reattiva.....</i> | <i>73</i> |
| 2.1.7 | <i>Realizzabilità delle reti di compensazione.....</i> | <i>75</i> |
| 2.2 | Esempi numerici..... | 78 |
| 2.2.1 | <i>Esempio 1.....</i> | <i>78</i> |
| 2.2.2 | <i>Esempio 2.....</i> | <i>88</i> |
| 2.2.3 | <i>Esempio 3.....</i> | <i>94</i> |
| | Conclusioni..... | 100 |

Appendice A
PROPRIETA' E SINTESI DELLE IMMETTENZE LC

| | | |
|------------|---|------------|
| A.1 | Proprietà delle immetENZE LC..... | 103 |
| A.1.1 | <i>Funzione reale positiva.....</i> | <i>103</i> |
| A.1.2 | <i>Poli e zeri risiedono sull'asse immaginario.....</i> | <i>105</i> |
| A.1.3 | <i>Funzione dispari.....</i> | <i>106</i> |
| A.1.4 | <i>Reattanza e suscettanza sono funzioni dispari.....</i> | <i>107</i> |

| | | |
|------------|---|-----|
| A.2 | Operazioni elementari di sintesi | 109 |
| A.2.1 | <i>Introduzione</i> | 111 |
| A.2.2 | <i>Rimozione di un polo all'infinito</i> | 111 |
| A.2.3 | <i>Rimozione di un polo nell'origine</i> | 112 |
| A.2.4 | <i>Rimozione di una coppia di poli immaginari coniugati</i> | 113 |
| A.3 | Metodi di sintesi | 115 |
| A.3.1 | <i>Primo metodo di Foster</i> | 115 |
| A.3.2 | <i>Secondo metodo di Foster</i> | 117 |
| A.3.3 | <i>Primo metodo di Cauer</i> | 118 |
| A.3.4 | <i>Secondo metodo di Cauer</i> | 120 |
| A.4 | Esempi numerici | 121 |
| A.4.1 | <i>Esempio 1</i> | 122 |
| A.4.2 | <i>Esempio 2</i> | 123 |
| A.4.3 | <i>Esempio 3</i> | 125 |
| A.4.4 | <i>Esempio 4</i> | 126 |

Appendice B STRUMENTI MATEMATICI

| | | |
|-----|---|-----|
| B.1 | <i>Trasformata di Laplace</i> | 128 |
| B.2 | <i>Formule trigonometriche</i> | 129 |
| B.3 | <i>Sviluppo in serie di Fourier</i> | 130 |
| B.4 | <i>Ortogonalità e disuguaglianza di Cauchy-Schwarz</i> | 131 |
| B.5 | <i>Trasformata di Hilbert</i> | 134 |
| B.6 | <i>Massimi e minimi di una funzione a più variabili</i> | 136 |
| | Bibliografia | 142 |

INDICE DELLE FIGURE

| | | |
|-------------|---|----|
| Figura 1.1 | Circuito (a); andamento della tensione, della corrente attiva e della corrente non attiva (b)..... | 5 |
| Figura 1.2 | Circuito (a); potenza istantanea, potenza istantanea attiva e potenza istantanea reattiva (b)..... | 7 |
| Figura 1.3 | Circuito esemplificativo della non correlazione tra Q_b e lo scambio energetico..... | 18 |
| Figura 1.4 | Andamento del fattore di potenza in funzione della capacità..... | 20 |
| Figura 1.5 | Circuiti esemplificativi (a) (b)..... | 22 |
| Figura 1.6 | Circuito avente potenza distortente nulla (a); circuito avente potenza distortente differente da zero (b)..... | 23 |
| Figura 1.7 | Circuito (a); andamento della tensione, della corrente attiva e armonica in fase (caso in cui esse non coincidano) (b)..... | 25 |
| Figura 1.8 | Circuito (a); andamento della tensione, della corrente attiva e armonica in fase (caso in cui esse coincidono) (b)..... | 26 |
| Figura 1.9 | Circuito (a); andamento della tensione, della corrente non attiva e armonica in quadratura (caso in cui esse non coincidano) (b)..... | 27 |
| Figura 1.10 | Circuito (a); andamento della tensione, della corrente non attiva e armonica in quadratura (caso in cui coincidono) (b)..... | 27 |
| Figura 1.11 | Andamento del fattore di potenza in funzione della capacità..... | 36 |
| Figura 1.12 | Schema tipico della rete di compensazione in caso di carico ohmico-induttivo..... | 38 |
| Figura 1.13 | Rete di compensazione per il circuito esemplificativo..... | 41 |
| Figura 1.14 | Susceptanza del carico (cambiata di segno) e del ramo (1) della rete di compensazione..... | 42 |
| Figura 1.15 | Modellizzazione del carico agli effetti esterni..... | 50 |
| Figura 1.16 | Sintesi dell'immettenza $Y_C(s)$ con il secondo metodo di Foster..... | 54 |
| Figura 1.17 | Sintesi dell'immettenza $Y_C(s)$ con il primo metodo di Foster..... | 54 |
| Figura 1.18 | Susceptanza del carico (cambiata di segno) e susceptanza della rete di compensazione..... | 55 |

| | | |
|-------------|---|----|
| Figura 1.19 | Tipico circuito per il quale la potenza reattiva di Budeanu e la potenza reattiva di Czarnecki sono coincidenti..... | 60 |
| Figura 1.20 | Circuiti esemplificativi (a) (b)..... | 62 |
| Figura 1.21 | Andamento delle armoniche della tensione (a); andamento delle armoniche della corrente relative al circuito di figura 1.20(a)(b); andamento delle armoniche della corrente relative al circuito di figura 1.21(b)(c)..... | 63 |
| Figura 2.1 | Circuito monofase con rete di compensazione..... | 65 |
| Figura 2.2 | Circuito esempio 1..... | 78 |
| Figura 2.3 | Rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu (secondo metodo di Foster)..... | 80 |
| Figura 2.4 | Rete di compensazione delle corrente reattiva di Budeanu (primo metodo di Cauer)..... | 80 |
| Figura 2.5 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione..... | 82 |
| Figura 2.6 | Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki (secondo metodo di Foster)..... | 84 |
| Figura 2.7 | Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki (primo metodo di Foster)..... | 84 |
| Figura 2.8 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione..... | 85 |
| Figura 2.9 | Rete di compensazione della corrente reattiva capacitiva di Kusters e Moore..... | 86 |
| Figura 2.10 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione..... | 87 |
| Figura 2.11 | Andamento della corrente non attiva di Fryze dopo la compensazione con le tre differenti reti di analizzate..... | 87 |
| Figura 2.12 | Circuito esempio 2..... | 88 |
| Figura 2.13 | Rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu..... | 90 |
| Figura 2.14 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione..... | 91 |
| Figura 2.15 | Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki..... | 92 |
| Figura 2.16 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione..... | 93 |
| Figura 2.17 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione con le due differenti reti analizzate..... | 94 |
| Figura 2.18 | Circuito esempio 3..... | 95 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figura 2.19 | Rete di compensazione impiegata..... | 95 |
| Figura 2.20 | Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki..... | 93 |
| Figura 2.21 | Rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu..... | 96 |
| Figura 2.22 | Rete di compensazione della corrente reattiva capacitiva di Kusters e Moore..... | 97 |
| Figura 2.23 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione..... | 99 |
| Figura 2.24 | Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione..... | 99 |
| Figura A.1 | Andamento della funzione suscettanza nel caso di polo nell'origine, zero all'infinito, tre coppie di poli immaginari coniugati e due coppie di zeri immaginari e coniugati..... | 109 |
| Figura A.2 | Reti equivalenti: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza..... | 110 |
| Figura A.3 | Rimozione di un polo all'infinito: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza..... | 112 |
| Figura A.4 | Rimozione di un polo nell'origine: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza..... | 113 |
| Figura A.5 | Rimozione di una coppia di poli immaginari coniugati: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza..... | 114 |
| Figura A.6 | Primo metodo di Foster..... | 116 |
| Figura A.7 | Secondo metodo di Foster..... | 118 |
| Figura A.8 | Primo metodo di Cauer..... | 119 |
| Figura A.9 | Secondo metodo di Cauer..... | 121 |
| Figura A.10 | Primo metodo di Foster per l'impedenza $Z(s)$ | 123 |
| Figura A.11 | Secondo metodo di Foster per l'ammettenza $Y(s)$ | 124 |
| Figura A.12 | Primo metodo di Cauer per l'impedenza $Z(s)$ | 126 |
| Figura A.13 | Secondo metodo di Cauer per l'impedenza $Z(s)$ | 127 |
| Figura B.1 | Punti stazionari nel caso di funzioni a due variabili: minimo (a), massimo (b), sella (c)..... | 138 |

INDICE DELLE TABELLE

| | | |
|-------------|---|----|
| Tabella 1.1 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione..... | 19 |
| Tabella 1.2 | Ammettenze e potenze distorcenti per i circuiti riportati in figura 2.5 (a) (b)..... | 22 |
| Tabella 1.3 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione..... | 35 |
| Tabella 1.4 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con riferimento alle potenze definite da Emanuel | 42 |
| Tabella 1.5 | Valori assunti dalle principali grandezze prime e dopo la compensazione con riferimento alle potenze definite da Sharon | 43 |
| Tabella 1.6 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con riferimento alle potenze definite da Czarnecki..... | 56 |
| Tabella 1.7 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con riferimento alle potenze definite da Sharon..... | 56 |
| Tabella 1.8 | Suscettanze , potenze distorcenti e sfasamenti armonici per i circuiti riportati in figura 2.20 (a) (b)..... | 62 |
| Tabella 2.1 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione..... | 81 |
| Tabella 2.2 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione per mezzo di un condensatore..... | 81 |
| Tabella 2.3 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione..... | 85 |
| Tabella 2.4 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione..... | 86 |
| Tabella 2.5 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione..... | 90 |
| Tabella 2.6 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione..... | 93 |
| Tabella 2.7 | Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione | 98 |

INTRODUZIONE

Il concetto di potenza reattiva è stato utilizzato, in ingegneria elettrotecnica, da quasi un secolo. Per i sistemi monofase in regime sinusoidale e per i sistemi trifase equilibrati in regime sinusoidale è dimostrato che tale concetto è di estrema utilità ai fini della caratterizzazione della qualità della trasmissione e della compensazione delle perdite in linea. Negli ultimi anni si sono verificati numerosi cambiamenti che hanno di fatto modificato il comportamento del sistema elettrico. I sistemi elettrici, al giorno d'oggi, sono difatti influenzati dalla presenza in rete, fra l'altro, di dispositivi elettronici di potenza quali inverter, raddrizzatori e cicloconvertitori, forni ad arco, cluster di personal computer, etc. Tali apparecchiature, a causa della loro non linearità e della loro tempo varianza, generano un grande ammontare di disturbi sulla rete elettrica e agli utenti di quest'ultima. Tra questi disturbi, quelli periodici armonici comportano significativi problemi, sia di distorsione delle correnti, sia, a causa dell'impedenza sorgente non nulla, di distorsioni delle tensioni. Ne deriva che l'intero impianto matematico impiegato per descrivere i fenomeni energetici che hanno luogo in regime alternato sinusoidale non può più essere applicato quando il regime abbandona le condizioni sinusoidali. In particolare, anche il concetto di potenza reattiva e i concetti ad essa strettamente correlati debbono essere riadattati alle mutate condizioni di esercizio del sistema elettrico. Nel corso degli anni numerose proposte sono state avanzate al fine di estendere il concetto di potenza reattiva anche a sistemi nei quali correnti e tensioni non siano più perfettamente sinusoidali. Tale generalizzazione è tutt'oggi soggetta a notevoli discussioni in ambito scientifico; sono difatti numerosi gli articoli relativi a tale argomento ed essi sono sovente raggruppati sotto la dicitura di "*Power theories*".

La mole del materiale a disposizione, la differente terminologia e la differente simbologia utilizzate rendono l'approccio all'argomento difficoltoso. Ne consegue che le varie teorie proposte appaiono a prima vista totalmente scorrelate tra loro. Uno studio più approfondito e l'utilizzo di una notazione il più generale possibile sono invece in grado di mostrare interessanti legami concettuali tra i diversi

approcci. Nella presente tesi tali legami sono analizzati ponendo particolare attenzione alle proprietà fisiche che caratterizzano le varie grandezze considerate ed evidenziando i differenti significati che tali grandezze assumono in regime sinusoidale.

Lo scopo del presente elaborato è quello di inquadrare in un'unica formulazione gli approcci più significativi alla definizione delle componenti di potenza non attiva finora proposti. Tale formulazione consente di dimostrare che le definizioni disponibili identificano soltanto la parte di corrente non attiva che può essere totalmente compensata con una rete di elementi reattivi passivi e differiscono unicamente per la topologia di detta rete. Pertanto, come si vedrà nel seguito della tesi, gran parte delle proprietà fisiche originariamente attribuite alle diverse "potenze reattive" non trovano giustificazione dal momento che l'unica plausibile proprietà fisica è quella della compensabilità per mezzo di una data rete di compensazione. Diventa quindi impossibile attribuire minore o maggiore importanza teorica ad una qualunque definizione di potenza reattiva. Essendo tali definizioni legate alla topologia della rete di compensazione, sono virtualmente possibili infinite definizioni, tutte equivalenti da un punto di vista teorico, ma diversamente efficienti da un punto di vista pratico.

La presente tesi è dunque costituita da due capitoli e due appendici. Nel primo capitolo sono analizzate e commentate le varie teorie proposte nel corso degli anni, ponendo particolare attenzione all'utilizzo di una notazione ed una terminologia che sia il più fedele possibile ai testi originali disponibili in letteratura e nello stesso tempo sia il più uniforme possibile.

Il secondo capitolo costituisce il cuore della tesi; in esso, basandosi anche su particolari risultati ottenuti nel corso del primo capitolo, viene definito un approccio unificato alle varie componenti della potenza reattiva. In tale capitolo, a completamento di quanto esposto, sono riportati inoltre vari esempi numerici.

Le appendici presenti a conclusione del testo hanno invece il solo scopo di richiamare le nozioni matematiche e circuitali utilizzate di non frequente impiego.

Capitolo 1

POWER THEORIES

Nel presente capitolo sono riportate le principali teorie sviluppate per definire le componenti di potenza in regime distorto; tali teorie sono commentate in modo dettagliato ponendo particolare attenzione alla terminologia utilizzata, la quale può essere fonte di incomprensioni, e focalizzandosi sulle modalità di compensazione delle componenti non attive della potenza.

Per porre tali teorie nella giusta prospettiva è utile discutere inizialmente il caso dei circuiti monofase in regime sinusoidale, dove è dimostrato che i concetti di potenza attiva e di potenza reattiva sono funzionali alla corretta descrizione del sistema.

Nel proseguo, al fine di semplificare la trattazione, si farà sempre riferimento a carichi lineari connessi ad una rete di potenza infinita. Ciò equivale ad assumere che l'impedenza equivalente della linea sia trascurabile e altresì a supporre che l'inserzione di elementi in derivazione al carico non comporti variazioni della tensione applicata al carico stesso.

Occorre osservare che alcune delle teorie analizzate e riportate in bibliografia non partono dall'ipotesi che i carichi siano lineari; quando queste verranno presentate saranno riadattate, per rendere la trattazione il più lineare possibile, alla condizione sopra posta.

1.1 Potenze e correnti in regime sinusoidale

Si consideri un circuito monofase connesso ad una sorgente sinusoidale. La tensione ai capi del carico e la corrente che fluisce attraverso quest'ultimo possono essere espressi come:

$$v(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \alpha) \tag{1.1}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha + \varphi) \quad (1.2)$$

La (1.2) può essere, utilizzando una nota formula trigonometrica (App. B § B.2), riscritta come:

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos \varphi \sin(\omega t + \alpha) + \sqrt{2}I \sin \varphi \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.3)$$

Questo conduce alla scomposizione della corrente in due termini:

$$i(t) = i_a(t) + i_r(t) \quad (1.4)$$

dove:

$$i_a(t) = \sqrt{2}I \cos \varphi \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.5)$$

è detta corrente attiva (figura 1.1). Tale corrente, che è intimamente legata alla presenza di elementi resistivi nel carico, rappresenta la quota parte della corrente totale a cui è associato trasferimento di energia elettrica. In regime sinusoidale essa coincide con la componente della corrente totale in fase con la tensione di alimentazione. Il termine:

$$i_r(t) = \sqrt{2}I \sin \varphi \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.6)$$

è detto invece corrente reattiva (figura 1.1). Tale corrente, dovuta alla presenza di elementi reattivi nel carico, rappresenta la quota parte della corrente totale che non contribuisce al trasferimento di energia elettrica. La corrente reattiva è dunque il complemento della corrente attiva e per tale motivo può essere anche ribattezzata corrente non attiva. Essa coincide con la componente della corrente totale in quadratura con la tensione di alimentazione.

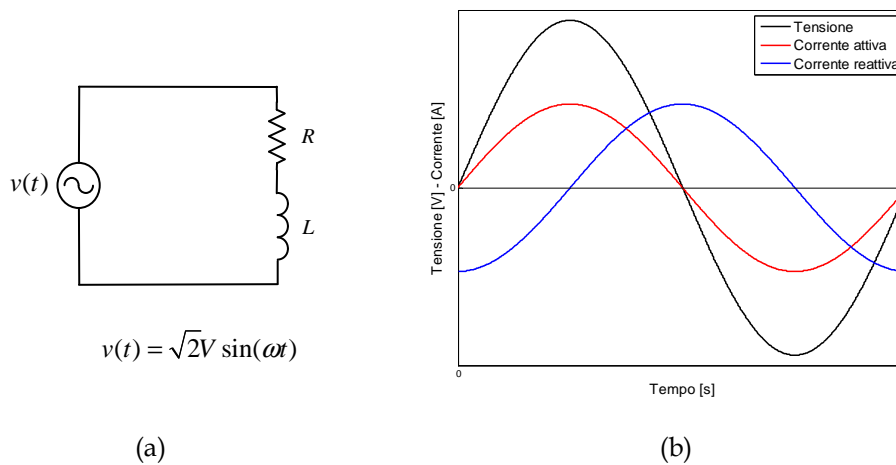


Figura 1.1 Circuito (a); andamento della tensione, della corrente attiva e della corrente reattiva (b)

La potenza istantanea è data dal prodotto tra la tensione istantanea (1.1) e la corrente istantanea (1.2)⁽¹⁾:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1.7)$$

Essa, se si considerano le relazioni (1.5) e (1.6), può essere vista come la somma di due potenze istantanee:

$$p(t) = p_a(t) + p_r(t) \quad (1.8)$$

dove il termine:

$$p_a(t) = 2VI \cos \varphi \sin^2(\omega t + \alpha) \quad (1.9)$$

prende il nome di potenza attiva istantanea. Essa può essere, utilizzando le formule di bisezione (App. B § B.2), riscritta in modo del tutto equivalente come:

⁽¹⁾ Occorre osservare come in realtà la potenza istantanea sia data dalla somma di tre termini messi in evidenza dal flusso del vettore di Poynting. Nella presente trattazione si ritiene verificata la condizione di Abraham e dunque si ritiene che il termine legato alla conduzione prevalga sui rimanenti che risultano dunque trascurabili.

$$p_a(t) = VI \cos \varphi + VI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) \quad (1.10)$$

Il termine:

$$p_r(t) = 2VI \sin \varphi \sin(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.11)$$

prende il nome di potenza reattiva istantanea. Essa, utilizzando le formule di Werner (App. B § B.2), può essere riscritta in un modo del tutto equivalente come:

$$p_r(t) = VI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha) \quad (1.12)$$

In definitiva si ha che la potenza istantanea può essere espressa come:

$$p(t) = VI \cos \varphi + VI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) + VI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha) \quad (1.13)$$

Il valore medio della potenza attiva istantanea, ovvero il valore medio della potenza istantanea (figura 1.2), prende il nome di potenza attiva. Analiticamente essa è definita come:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = VI \cos \varphi \quad (1.14)$$

In aggiunta a tale potenza sono inoltre definite altre due potenze: la potenza apparente e la potenza reattiva. Tali grandezze, a differenza della potenza attiva, non sono associate ad un chiaro e ben definito fenomeno fisico, ma sono quantità matematiche convenzionalmente definite di pratica utilità a cui è possibile associare alcune proprietà relazionabili a diversi fenomeni fisici.

La potenza apparente è definita come il prodotto tra il valore efficace della tensione e della corrente:

$$S = VI \tag{1.15}$$

La potenza reattiva è invece definita come il valore di picco della potenza reattiva istantanea (1.12) (figura 1.2):

$$Q = VI \sin \varphi \tag{1.16}$$

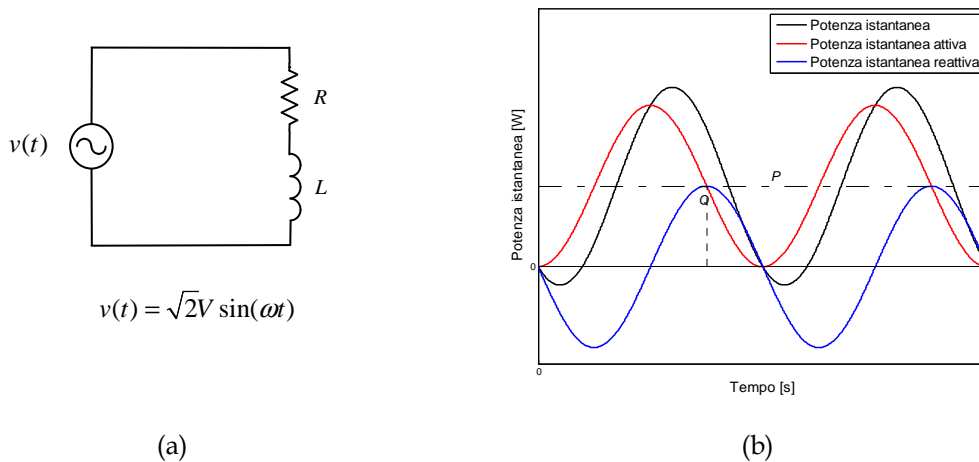


Figura 1.2 Circuito (a); potenza istantanea, potenza istantanea attiva e potenza istantanea reattiva (b)

In regime sinusoidale la potenza apparente è di fondamentale importanza per il dimensionamento delle apparecchiature; essa è difatti ottenuta come prodotto tra il valore efficace della tensione, il quale caratterizza gli isolamenti, e il valore efficace della corrente, il quale caratterizza i conduttori. Il legame che intercorre tra la potenza attiva e la potenza apparente è espresso dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (App. B § B.4):

$$S \geq P \tag{1.17}$$

La potenza reattiva rappresenta la quota parte della potenza apparente che non determina trasferimento di energia elettrica. Il suo effetto è quello di incrementare la potenza apparente fornita dal generatore e di conseguenza di incrementare le perdite lungo la linea. Il legame che intercorre tra la potenza attiva, la potenza apparente e la potenza reattiva è espresso dal triangolo delle potenze:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (1.18)$$

Dato che la potenza attiva rappresenta l'effetto utile del trasporto di energia, si ha che l'efficienza di un dato sistema risulta migliorata se, a pari potenza attiva, la potenza reattiva è ridotta. Tale effetto può essere conseguito inserendo in derivazione al carico un opportuno elemento reattivo. La natura dell'elemento di compensazione è strettamente legata alla natura del carico e, in particolare, alla positività o negatività della potenza reattiva. L'elemento di compensazione, nel caso in cui la potenza reattiva assorbita è negativa, è un condensatore. In caso contrario, è invece un induttore. Per quantificare l'efficienza del trasferimento di energia è possibile definire un indice che prende il nome di fattore di potenza:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (1.19)$$

Dalla definizione (1.19) segue che, in caso di potenza attiva assorbita nulla, ovvero in caso di carico puramente reattivo, il fattore di potenza ha valore nullo. Esso ha invece valore unitario in caso di potenza reattiva assorbita nulla; l'assenza di assorbimento di potenza reattiva si può avere in caso di carichi puramente resistivi o in caso di carichi generici purché totalmente compensati.

Un ulteriore punto di vista si ha se si riconsiderano le correnti invece che le potenze. Le componenti della corrente totale definite dalle relazioni (1.5) e (1.6) sono tra loro ortogonali (App. B § B.4); ne consegue che il quadrato del valore efficace di quest'ultima possa essere valutato come:

$$I^2 = I_a^2 + I_r^2 \quad (1.20)$$

Le perdite lungo la linea sono proporzionali al quadrato del valore efficace della corrente totale. Data la relazione (1.20) vi sono dunque perdite dovute alla corrente attiva e perdite dovute alla corrente reattiva. Le prime sono inequivocabilmente

collegate al trasferimento di energia e sono di conseguenza le minime possibili per una data tensione e per una data potenza utile (o attiva); le seconde sono dovute al carattere reattivo del carico e possono essere minimizzate annullando la rispettiva corrente. Tale effetto può essere conseguito inserendo in derivazione al carico un opportuno elemento reattivo. La natura dell'elemento di compensazione è strettamente legata alla natura del carico: in caso di carico induttivo l'elemento di compensazione è un condensatore, in caso di carico capacitivo è invece un induttore. Per quanto esposto si ha che il fattore di potenza definito nella (1.19) può essere valutato anche con l'utilizzo della relazione seguente:

$$\lambda = \frac{I_a}{I} = \frac{I_a}{\sqrt{I_a^2 + I_r^2}} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (1.21)$$

In analogia a quanto mostrato con riferimento alla relazione (1.19) si ha che in caso di corrente attiva nulla, ovvero in caso di carico puramente reattivo, il fattore di potenza ha valore nullo. Esso ha invece valore unitario in caso di corrente reattiva nulla; quest'ultima si può avere per carichi puramente resistivi o per carichi qualsiasi totalmente compensati. In tutte le altre situazioni il fattore di potenza assume un valore intermedio tra i due estremi.

La trattazione appena esposta mostra chiaramente come i concetti di potenza e corrente siano tra loro intercambiabili una volta fissata la tensione di alimentazione; quanto esposto con riferimento alle correnti può essere dunque tradotto in termini di potenza e viceversa. In accordo con quanto espresso da Willems [17] è comunque preferibile fare sempre riferimento alle correnti, in quanto queste ultime sono più vicine alla realtà fisica del fenomeno. Le varie potenze difatti, fatta eccezione per la potenza attiva, nonostante siano grandezze dalla straordinaria utilità, sono comunque sempre grandezze di tipo convenzionale ottenute attraverso operazioni matematiche prive di riscontri fisici, e che, di conseguenza, possono al più esprimere alcune proprietà fisiche, ma non possono descrivere compiutamente alcun fenomeno fisico. Per tale motivo, ove possibile, si farà sempre riferimento a componenti di

corrente; ciò non toglie, comunque, che le considerazioni che verranno espone possano essere estese con riferimento alle potenze. Ne consegue dunque che le varie teorie, spesso indicate con l'appellativo generico di "Power Theories", possono essere viste a tutti gli effetti e più propriamente come delle "Current Theories".

1.2 Estensione al regime alternato non sinusoidale

Alcune delle grandezze che sono state introdotte nel precedente paragrafo possono essere facilmente estese anche al caso in cui tensione e corrente non siano più perfettamente sinusoidali. Prima ancora di analizzare i vari modelli atti a descrivere il comportamento di un circuito in regime alternato non sinusoidale, è bene effettuare tale estensione, in quanto essa costituisce un caposaldo comune a tutte le teorie che verranno in seguito espone.

1.2.1 Potenza attiva

Si consideri un carico lineare connesso ad una sorgente alternata non sinusoidale, che per semplicità di notazione sarà supposta a valor medio nullo. La tensione ai capi del carico e la corrente che fluisce attraverso quest'ultimo possono essere, utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier (App. B § B.3), espresse come:

$$v(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.22)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n + \varphi_n) \quad (1.23)$$

dove con $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_M\}$ si è indicato il gruppo di armoniche della tensione e della corrente. Occorre notare che il contenuto armonico della corrente è identico a quello della tensione solamente perché ci si è posti nell'ipotesi semplificativa di

carico lineare; qualora quest'ultimo non lo fosse, vi potrebbero essere delle armoniche presenti nella corrente ma non presenti nella tensione.

La definizione di potenza istantanea fornita nel precedente paragrafo è ovviamente valida sia nel caso in cui tensioni e correnti siano perfettamente sinusoidali sia nel caso in cui esse non lo siano⁽²⁾; è possibile dunque definire la potenza istantanea ancora una volta come il prodotto tra la tensione istantanea e la corrente istantanea:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1.24)$$

Per sostituzione delle relazioni (1.22) (1.23) all'interno della (1.24), si ha che la potenza istantanea assume il seguente aspetto:

$$p(t) = 2 \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \sin(n\omega_1 t + \alpha_n + \varphi_n) + 2 \sum_{n \in \mathcal{M}} \sum_{h \neq n \in \mathcal{M}} V_n I_h \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \sin(h\omega_1 t + \alpha_h + \varphi_h) \quad (1.25)$$

La potenza attiva è sempre definita, in accordo al suo significato fisico, come il valor medio sul periodo della potenza istantanea. In altre parole, essa è la somma delle medie sul periodo comune dei vari termini che costituiscono la potenza istantanea. I termini contenuti nella doppia sommatoria sono costituiti da prodotti tra sinusoidi aventi frequenza differente e, di conseguenza, il loro valor medio è nullo. I termini contenuti nella prima sommatoria coincidono invece con la potenza attiva assorbita dal carico a ciascuna armonica.

In definitiva si ha dunque che la potenza attiva risulta essere pari a:

$$P = \sum_{n \in \mathcal{M}} P_n = \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \cos \varphi_n \quad (1.26)$$

⁽²⁾ Si veda nota 1 pag 6.

In regime non sinusoidale la potenza attiva assorbita dal carico è data quindi dalla somma delle potenze attive assorbite a ciascuna armonica.

1.2.2 Valore efficace

Il valore efficace della tensione è definito come la radice quadrata del valor medio del quadrato della tensione stessa. Analiticamente si ha dunque che:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T v^2(t) dt} \quad (1.27)$$

Il quadrato della tensione può essere ricavato elevando a quadrato lo sviluppo in serie di Fourier della tensione stessa (1.22); esso risulta essere pari a:

$$v^2(t) = 2 \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sin^2(n\omega_1 t + \alpha_n) + 4 \sum_{n \in \mathcal{M}} \sum_{h \neq n \in \mathcal{M}} V_n V_h \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \sin(h\omega_1 t + \alpha_h) \quad (1.28)$$

I termini contenuti nella doppia sommatoria sono costituiti dai prodotti tra sinusoidi aventi frequenza differente e, di conseguenza, il loro valor medio sul periodo è nullo. I termini contenuti nella prima sommatoria coincidono invece con il valore efficace di ciascuna armonica. In definitiva si ha dunque che il valore efficace della tensione risulta essere pari a ⁽³⁾:

$$V = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2} \quad (1.29)$$

In regime non sinusoidale il valore efficace della tensione è pari quindi alla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle singole armoniche.

Il medesimo risultato si sarebbe ottenuto se in luogo della tensione si fosse considerata la corrente; in tal caso si sarebbe giunti al risultato seguente:

⁽³⁾ La relazione (1.29) prova l'importante proprietà dello sviluppo in serie di Fourier di essere una trasformata ortonormale.

$$I = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2} \quad (1.30)$$

Analogamente a prima è possibile asserire che il valore efficace della corrente è pari alla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle singole armoniche.

1.2.3 Potenza apparente e fattore di potenza

La potenza apparente è definita, in analogia al regime sinusoidale, come il prodotto tra il valore efficace della tensione e della corrente:

$$S = VI = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2} \quad (1.31)$$

Occorre notare come, in regime deformato, tale grandezza perda gran parte delle sue proprietà di potenza di dimensionamento. Le sollecitazioni termiche dei conduttori e le sollecitazioni dielettriche degli isolanti dipendono difatti, qualora tensioni e correnti non siano più sinusoidali, oltre che dal valore efficace della corrente e dal valore di picco della tensione anche dalla forma d'onda di dette grandezze.

Il fattore di potenza è ancora una volta definito come il rapporto tra la potenza attiva e la potenza apparente:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \cos \varphi_n}{\sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2}} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (1.32)$$

In regime deformato il fattore di potenza perde gran parte delle sue proprietà di caratterizzazione del carico. Esso è difatti unitario se e solo se tutte le armoniche di corrente sono una replica scalata (con il medesimo fattore di scala) delle armoniche di tensione e se le prime sono in fase con queste ultime (carichi puramente resistivi).

Se il fattore di potenza ha un valore differente da uno nulla si può dire riguardo al carico se non che esso non è più sicuramente puramente resistivo.

1.2.4 Estensione di ulteriori concetti

Se da un lato vi sono dei concetti che possono essere agevolmente estesi dal regime sinusoidale al regime deformato, è altresì vero che vi sono dei concetti per cui tale estensione non è effettuabile. Uno di questi è il concetto di potenza reattiva attorno al quale ruotano le varie teorie che saranno presentate nel prossimo paragrafo. Occorre però puntualizzare un ulteriore aspetto che può essere fonte di forti incomprensioni. In regime sinusoidale la corrente reattiva è una corrente in quadratura; tale dicitura può stare ad indicare quattro aspetti differenti ma strettamente correlati tra loro. In particolare, essa esprime il fatto che:

- la corrente reattiva è sfasata di un quarto di periodo rispetto alla tensione di alimentazione;
- la corrente reattiva è sfasata di un quarto di periodo rispetto alla corrente attiva;
- il prodotto ortogonale tra la corrente reattiva e la tensione di alimentazione è nullo;
- il prodotto ortogonale tra la corrente reattiva e la corrente attiva è nullo.

Dato che in regime non sinusoidale non ha alcun senso parlare di sfasamento tra due forme d'onda, ritengo, personalmente, che la dicitura in quadratura debba essere abbandonata. Quest'ultima potrebbe essere utilizzata qualora si sia fortemente consapevoli che essa sia associata all'ortogonalità tra due forme d'onda e non allo sfasamento esistente tra di esse. Onde evitare possibili equivoci nel proseguo della tesi si predilige dunque evitare tale dicitura, fuorché quando utilizzata dai singoli autori. Occorre inoltre precisare che, se da un lato non è possibile definire lo sfasamento tra due forme d'onda non sinusoidali, è comunque possibile definire lo sfasamento esistente tra le rispettive armoniche. Si utilizzerà dunque la dicitura armonica in quadratura per identificare quelle correnti che, armonica per armonica ,

soddisfano quanto espresso dall'elenco sopra riportato; si utilizzerà inoltre il termine armonica in fase per identificare quelle correnti le cui componenti armoniche sono in fase con la tensione di alimentazione.

1.3 Power Theories

1.3.1 Budeanu

L'estensione della definizione della potenza reattiva dal regime sinusoidale al regime deformato proposta da Budeanu [1] parte dal presupposto che sia lecito, in modo analogo a quanto fatto per la potenza attiva, sommare la potenza reattiva assorbita dal carico alle varie armoniche. Egli ha definito dunque la potenza attiva e la potenza reattiva rispettivamente come:

$$P = \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \cos \varphi_n \quad (1.33)$$

$$Q_B = \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \sin \varphi_n \quad (1.34)$$

La potenza reattiva così definita non completa il triangolo delle potenze; ciò è facilmente verificabile con riferimento alla seguente relazione:

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2 \neq \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 I_n^2 \quad (1.35)$$

dove il termine a destra del segno di disuguaglianza rappresenta il quadrato della potenza apparente, mentre il termine di sinistra rappresenta la somma dei quadrati della potenza attiva e della potenza reattiva.

Al fine di completare il triangolo delle potenze, l'autore definisce dunque un'ulteriore potenza a cui attribuisce il nome di potenza distortante. Tale grandezza è analiticamente definita come:

$$D_B = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_B^2} \quad (1.36)$$

Sin da quando fu proposta, la scomposizione della potenza apparente di Budeanu, non fu mai ritenuta soddisfacente; ciò ha spinto numerosi studiosi a definire un modello che fosse più corretto ed adeguato rispetto a quello da lui presentato.

La critica formale di tale teoria ad opera di Czarnecki [11] mostra chiaramente come la potenza reattiva e la potenza distorcente non siano correlate ad alcun fenomeno fisico. In particolare, la potenza reattiva non fornisce alcuna informazione su come il carico debba essere compensato e la potenza distorcente non fornisce informazioni circa la distorsione delle forme d'onda di tensione e corrente.

Questi due aspetti meritano di essere indagati in dettaglio; inizialmente ci soffermerà sul significato della potenza reattiva Q_B e, successivamente, si analizzerà il significato della potenza distorcente D_B .

Budeanu definisce la potenza reattiva come somma delle potenze reattive alle varie armoniche. Tuttavia, a differenza di quanto accade in regime sinusoidale, tale quantità non ha nessun significato, neppure matematico, dal momento che si sta eseguendo la somma dei valori di picco di sinusoidi aventi frequenza e angolo di fase differenti. Se dunque ciascun termine della sommatoria preso singolarmente ha un chiaro significato fisico, la loro sommatoria lo perde completamente. In particolare si ha che la potenza reattiva Q_B può essere nulla nonostante i vari termini della sommatoria non lo siano; in altre parole la potenza reattiva può essere nulla anche in presenza di scambi energetici non nulli tra la sorgente e il carico. Il fenomeno dello scambio reciproco di energia alle varie armoniche non influenza il valore efficace della corrente totale nel modo suggerito da Budeanu. Ogni armonica della corrente totale può essere difatti, come visto in regime sinusoidale, decomposta nelle seguenti componenti tra loro ortogonali:

$$i_{an} = \sqrt{2}I_n \cos \varphi_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.37)$$

$$i_m = \sqrt{2} I_n \sin \varphi_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad (1.38)$$

i cui valori efficaci soddisfano la seguente relazione:

$$I_n^2 = I_{an}^2 + I_m^2 = \left(\frac{P_n}{V_n}\right)^2 + \left(\frac{Q_n}{V_n}\right)^2 \quad (1.39)$$

Dato che le correnti armoniche sono tra loro ortogonali, si ha che il valore efficace della corrente totale è pari a:

$$I^2 = \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(\frac{P_n}{V_n}\right)^2 + \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(\frac{Q_n}{V_n}\right)^2 \quad (1.40)$$

o, alternativamente, in termini di potenza apparente:

$$S^2 = \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(\frac{P_n}{V_n}\right)^2 + \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(\frac{Q_n}{V_n}\right)^2 \quad (1.41)$$

Nelle relazioni (1.40) e (1.41) è facile dunque riconoscere come l'incremento del valore efficace della corrente e della potenza apparente sia attribuibile al termine:

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} \left(\frac{Q_n}{V_n}\right)^2 \quad (1.42)$$

e non al termine:

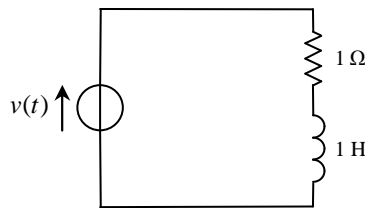
$$\sum_{n \in \mathcal{M}} Q_n \quad (1.43)$$

come supposto da Budeanu.

Il valore efficace della corrente, e quindi anche la potenza apparente, hanno difatti un minimo se la potenza reattiva assorbita dal carico ad ogni armonica è nulla e non se la loro somma è nulla. In altre parole, l'aver una potenza reattiva Q_B nulla costituisce una condizione necessaria ma non sufficiente ad assicurare un minimo della potenza apparente. Il fenomeno dello scambio reciproco di energia alle varie armoniche esiste anche qualora la potenza Q_B sia nulla. Il confronto della relazione (1.41) con la relazione:

$$S^2 = P^2 + Q_B^2 + D_B^2 \quad (1.44)$$

conduce quindi alla conclusione che non solo la potenza Q_B , ma anche la potenza distorcente, sono affette dallo scambio reciproco di energia alle varie armoniche. Ciò implica che nessuna delle due potenze è relazionata distintamente con tale fenomeno. Per tale ragione, il modello di Budeanu non è da ritenersi soddisfacente ai fini del raggiungimento di un migliore fattore di potenza. Quanto esposto può essere chiarito con l'ausilio di un semplice esempio numerico; si consideri dunque il circuito riportato in figura 1.3.



$$v(t) = \sqrt{2}100 \sin(t) + \frac{\sqrt{2}100}{5} \sin(5t) + \frac{\sqrt{2}100}{7} \sin(7t)$$

Figura 1.3 Circuito esemplificativo della non correlazione tra Q_B e lo scambio energetico

La potenza reattiva Q_B può essere totalmente compensata mediante l'inserzione di un condensatore il cui valore può essere ricavato con l'utilizzo della seguente formula:

$$C = \frac{Q_B}{\omega_l \sum_{n \in \mathcal{M}} n V_n^2} \quad (1.45)$$

Il condensatore assume dunque, essendo $Q_B = 5105,494 \text{ VA}$, un valore pari a $C = 0.3801 \text{ F}$. L'inserzione di tale condensatore, avendo supposto nulla l'impedenza della linea, non muta la potenza attiva assorbita dal carico, ma comporta l'annullamento della potenza reattiva Q_B e altresì comporta una variazione della potenza distorcente D_B . In particolare, si ha che l'annullamento della potenza reattiva determina un incremento della potenza apparente con conseguente aumento delle perdite lungo la linea. I valori delle varie grandezze di interesse, prima e dopo la compensazione, sono riportate in tabella 1.1.

| | Senza condensatore | Con condensatore |
|---------------------------|--------------------|------------------|
| $C \text{ [F]}$ | - | 0.3801 |
| $S \text{ [VA]}$ | 7295,671 | 7360,771 |
| $P \text{ [W]}$ | 5019,466 | 5019,466 |
| $Q_B \text{ [VA]}$ | 5105,494 | - |
| $D_B \text{ [VA]}$ | 1402,039 | 5383,857 |
| $\lambda \text{ [Adim.]}$ | 0.688 | 0,682 |

Tabella 1.1 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione

A riprova ancora una volta del fatto che il valore del condensatore di compensazione, valutato a partire dalla definizione di potenza reattiva Q_B , non è quello ottimale ai fini del miglioramento del fattore di potenza, è possibile tracciare l'andamento di tale grandezza in funzione dei possibili valori che il condensatore può assumere (figura 1.4).

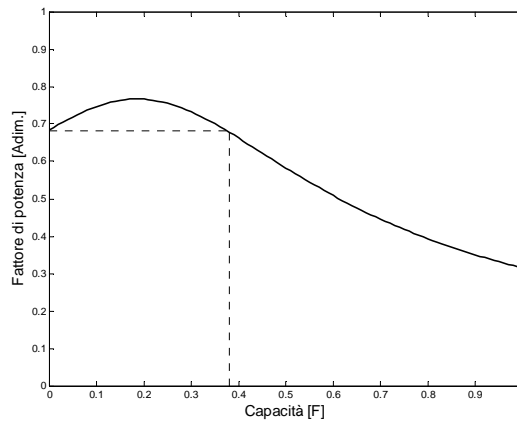


Figura 1.4 Andamento del fattore di potenza in funzione della capacità

Rimane ora da analizzare l'altra potenza introdotta da Budeanu, ovvero la potenza distortente D_B . Egli, nel suo trattato, non specifica in modo esplicito cosa indichi tale potenza, né tantomeno cosa il nome attribuitogli stia ad indicare. Una possibile interpretazione di questa grandezza viene fornita e confutata da Czarnecki. Una prima interpretazione del significato della parola distortente è che essa stia in un certo qual modo ad indicare la presenza di distorsione nelle forme d'onda di tensione e corrente. Tale grandezza è tuttavia nulla, oltre che in regime sinusoidale, anche qualora una tensione distorta sia applicata ad un carico puramente resistivo. E' dunque lecito pensare che essa sia una misura della distorsione della corrente rispetto alla tensione di alimentazione. Anche se tale ipotesi può apparire ragionevole, essa non ha tuttavia alcun fondamento. Per chiarire ulteriormente quanto appena asserito è utile ricavare una formulazione più esplicita della potenza distortente. Per sostituzione nella relazione (1.36) delle relazioni (1.33) e (1.34) e successiva elaborazione dei vari termini si ha che:

$$D_B = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} \left\{ (V_\beta I_\gamma - V_\gamma I_\beta)^2 + 2V_\beta V_\gamma I_\beta I_\gamma [1 - \cos(\varphi_\beta - \varphi_\gamma)] \right\}} \quad (1.46)$$

La potenza distortente, essendo tutti i termini contenuti nella (1.46) positivi, è nulla se e solo se sono verificate contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\frac{I_\gamma}{V_\gamma} = \frac{I_\beta}{V_\beta} \quad \forall \gamma, \beta \in \mathcal{M} \quad (1.47)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\beta \quad \forall \gamma, \beta \in \mathcal{M} \quad (1.48)$$

dove φ_γ e φ_β rappresentano lo sfasamento tra le armoniche della tensione e le armoniche della corrente.

Ciò significa che la potenza distortente è nulla se il carico presenta la medesima ammettenza, pari valore assoluto e pari fase, ad ogni armonica. Due forme d'onda risultano traslate temporalmente l'una rispetto all'altra se sono, invece, verificate contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\frac{I_1}{V_1} = \frac{I_k}{V_k} \quad \forall k \in \mathcal{M}_k \quad (1.49)$$

$$\varphi_k = k\varphi_1 \quad \forall k \in \mathcal{M}_k \quad (1.50)$$

dove φ_1 e φ_k rappresentano rispettivamente lo sfasamento esistente tra la tensione e la corrente alla prima armonica e lo sfasamento esistente tra le tensioni e le correnti appartenenti al gruppo di armoniche $\mathcal{M}_k = \{m_2, m_3, \dots, m_M\}$ (con \mathcal{M}_k si è indicato il gruppo di armoniche \mathcal{M} privato del primo elemento). Se si confrontano le condizioni (1.47) e (1.48) con le condizioni (1.49) e (1.50) è possibile concludere come non vi sia alcuna correlazione tra la potenza distortente e la distorsione della corrente rispetto alla tensione. In particolare, la presenza di potenza distortente nulla non implica necessariamente l'assenza di un cambiamento nella forma d'onda della corrente rispetto alla tensione e, viceversa, l'assenza di distorsione della corrente rispetto alla tensione non risulta in potenza distortente nulla. Per convincersi di quanto appena esposto si considerino i circuiti illustrati in figura 1.5 (a)(b) e si supponga che al carico sia applicata una tensione pari a:

$$v(t) = \sqrt{2}V_1 \sin(\omega t) + \sqrt{2}V_3 \sin(3\omega t) \quad (1.51)$$

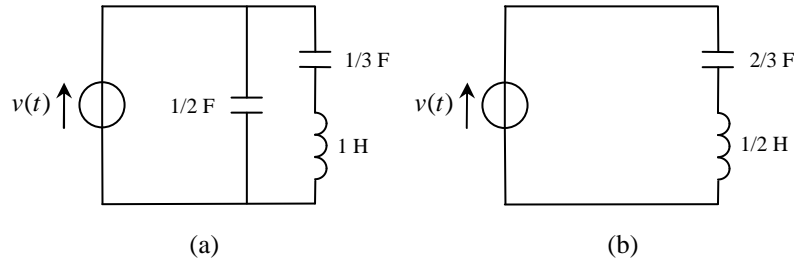


Figura 1.5 Circuiti esemplificativi (a)(b)

Se si suppone che la pulsazione angolare dell'armonica fondamentale sia pari a $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$, si ha che l'ammettenza alle varie armoniche e la potenza distortente assumono, per i due circuiti, i valori riportati in tabella 1.2.

| | \bar{Y}_1 [S] | \bar{Y}_3 [S] | D_B |
|--------------|-----------------|-----------------|----------|
| Circuito (a) | $j1$ | $j1$ | $= 0$ |
| Circuito (b) | $j1$ | $-j1$ | $\neq 0$ |

Tabella 1.2 Ammettenze e potenze distortenti per i due circuiti riportati in figura 2.5 (a)(b)

Le correnti circolanti nei due circuiti sotto analisi valgono rispettivamente:

$$i(t) = \sqrt{2}V_1 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}V_3 \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.52)$$

$$i(t) = \sqrt{2}V_1 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}V_3 \sin\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (1.53)$$

Esse hanno quindi l'andamento riportato in figura 1.6 (a) e in figura 1.6 (b)

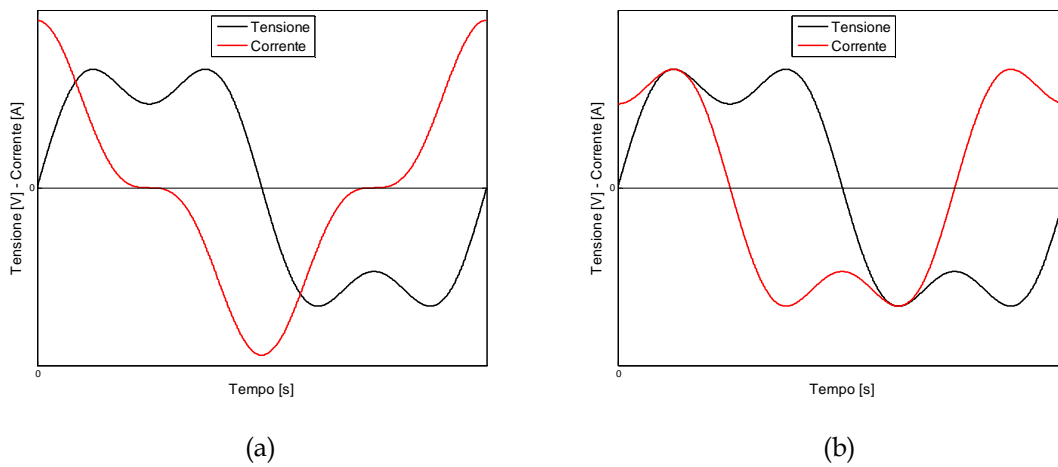


Figura 1.6 Circuito avente potenza distortente nulla (a) ; circuito avente potenza distortente differente da zero (b)

Se si analizzano i dati contenuti in tabella 1.2 unitamente agli andamenti delle correnti rispetto alla tensione di alimentazione rappresentati in figura 1.6 (a)(b), si evince chiaramente come non vi sia alcuna correlazione tra il valore assunto dalla potenza distortente e la distorsione delle forme d'onda.

In particolare, per il circuito di figura 1.5 (a), le forme d'onda della tensione e della corrente hanno un andamento totalmente differente tra loro nonostante la potenza distortente sia nulla. Viceversa per il circuito di figura 1.5 (b); in questo caso tensione e corrente hanno medesima forma d'onda e risultano semplicemente traslate temporalmente tra loro nonostante la potenza distortente abbia un valore differente da zero.

Quanto esposto mostra chiaramente come la scomposizione della potenza apparente proposta da Budeanu non sia in grado di inquadrare il comportamento di un circuito in regime non sinusoidale. Nessuna delle due potenze introdotte può essere difatti relazionata ad un fenomeno fisico in modo sensato.

I difetti di tale modello giustificano, di fatto, la non presenza della potenza reattiva Q_B e della potenza distortente D_B tra le definizioni proposte in [12] e altresì ne giustificano la recente cancellazione dal IEEE Standard 1459 [16]

Recentemente Willems [17] ha riqualificato il concetto di potenza reattiva di Budeanu vanificando la critica proposta da Czarnecki. Si sarebbe potuto dunque proseguire la trattazione riportando i risultati ottenuti da tale autore; nonostante ciò si è preferito, dato il rilevante interesse che essi ricoprono, dedicargli un paragrafo a sé stante.

1.3.2 Fryze

La scomposizione proposta da Fryze [2] consiste nel dividere, in analogia al regime sinusoidale, la corrente totale in due componenti. La prima parte, detta corrente attiva, avente ampiezza pari alla potenza attiva e avente medesima forma d'onda e medesima fase della tensione di alimentazione. La seconda, detta corrente non attiva, la quale rappresenta semplicemente il complemento della corrente attiva. A queste due correnti è possibile associare successivamente una potenza.

Questo conduce alla scomposizione della corrente in due termini:

$$i(t) = i_a(t) + i_{na}(t) \quad (1.54)$$

dove:

$$i_a(t) = \frac{P}{V^2} v(t) \quad (1.55)$$

è la componente attiva della corrente totale. A tale corrente è possibile attribuire un'importante interpretazione fisica; essa è difatti la corrente circolante in un carico puramente resistivo che, a pari tensione, sviluppa la stessa potenza attiva misurata ai morsetti del carico reale. In accordo con quanto appena espresso, la corrente attiva può essere anche riscritta nel seguente modo:

$$i_a(t) = G_e v(t) \quad (1.56)$$

dove:

$$G_e = \frac{P}{V^2} \quad (1.57)$$

è detta conduttanza equivalente. In regime deformato essa non coincide necessariamente con la corrente armonica in fase con la tensione di alimentazione (figura 1.7(a)(b) e figura 1.8(a)(b)); in particolare, si ha che la corrente attiva è una sottocomponente della corrente in fase e coincide con essa solo in determinate situazioni.

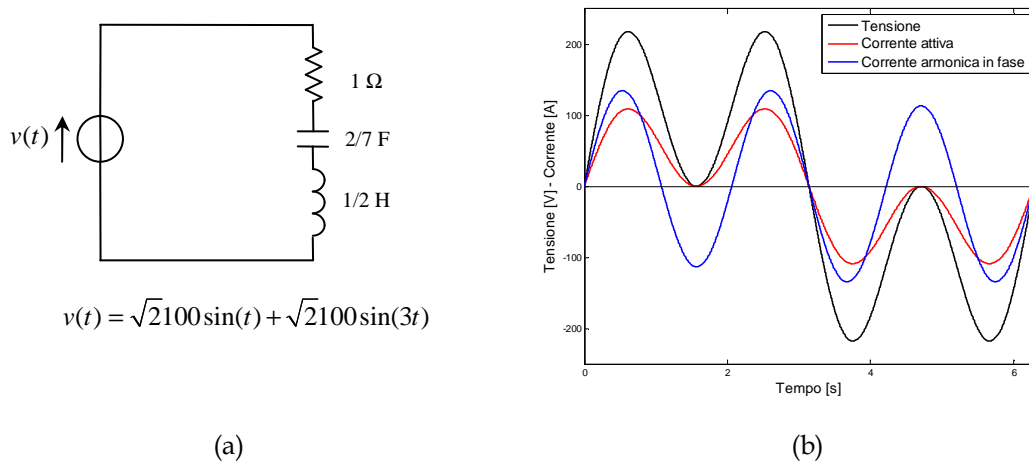


Figura 1.7 Circuito (a); andamento della tensione, della corrente attiva e armonica in fase (caso in cui esse non coincidano) (b)

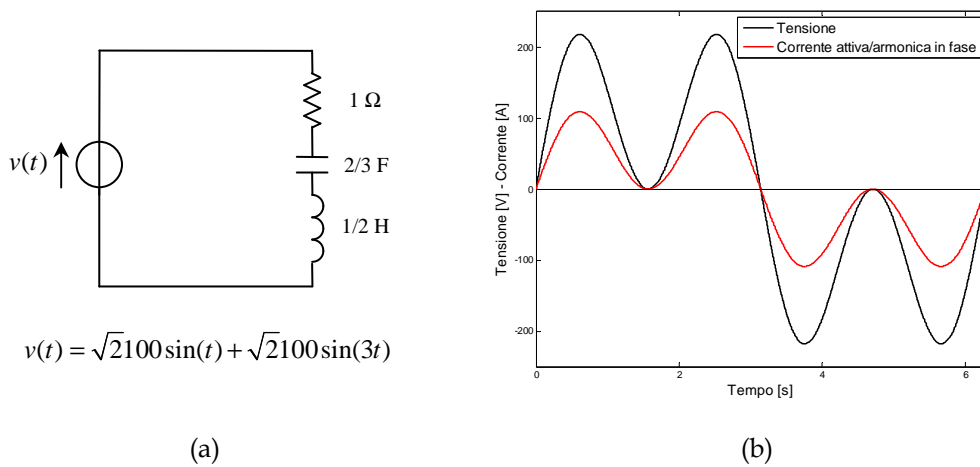


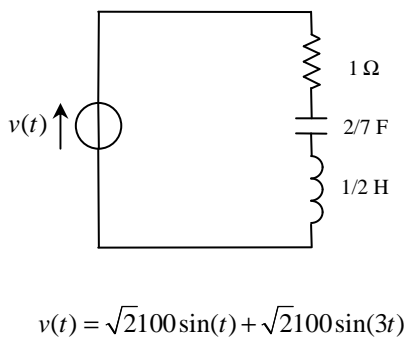
Figura 1.8 Circuito (a); andamento della tensione, della corrente attiva e armonica in fase (caso in cui esse coincidano) (b)

Il termine:

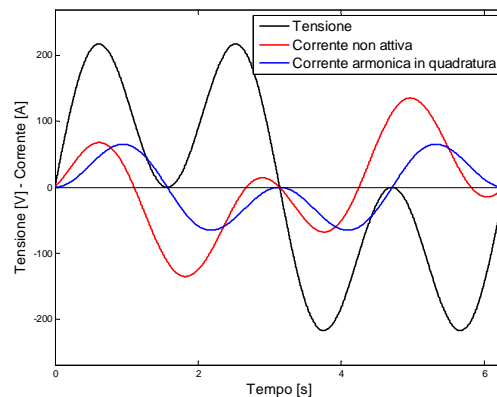
$$i_{na}(t) = i(t) - i_a(t) \tag{1.58}$$

è la componente non attiva della corrente totale; esso è dunque la quota parte della corrente totale a cui non è associato alcun trasporto di energia e il cui unico effetto è quello di incrementare le perdite lungo la linea. In regime deformato, però, a differenza di quanto accade in regime sinusoidale, essa non coincide necessariamente con la componente armonica in quadratura della corrente totale (figura 1.9(a)(b) e figura 1.10(a)(b)); in particolare, si ha che la corrente non attiva comprende la corrente in quadratura e coincide con essa solo in determinate situazioni.

Come conseguenza diretta di questa differenza, si ha che ciascuna armonica della corrente non attiva è sfasata rispetto alla tensione di alimentazione di un angolo generico. L'inserzione di una rete di compensazione costituita da soli elementi reattivi, opportunamente disegnata, può dunque non essere in grado di annullare completamente la quota parte delle perdite che non sono associate ad alcun trasferimento di energia.

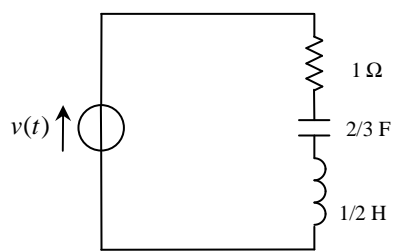


(a)



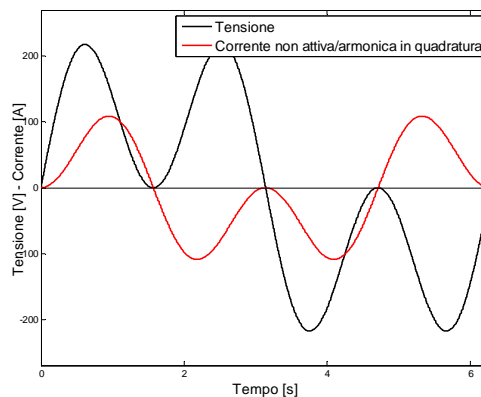
(b)

Figura 1.9 Circuito (a); andamento della tensione, della corrente non attiva e armonica in quadratura (caso in cui esse non coincidano) (b)



$$v(t) = \sqrt{2}100 \sin(t) + \sqrt{2}100 \sin(3t)$$

(a)



(b)

Figura 1.10 Circuito (a); andamento della tensione, della corrente non attiva e armonica in quadratura (caso in cui coincidano) (b)

Le componenti della corrente totale introdotte sono tra loro ortogonali; ne consegue che il quadrato del valore efficace di quest'ultima possa essere valutato come:

$$I^2 = I_a^2 + I_{na}^2 \tag{1.59}$$

La potenza apparente, prodotto dei valori efficaci di corrente e tensione, può dunque essere, tenendo presente la relazione (1.59), decomposta come:

$$S^2 = V^2 I^2 = V^2 (I_a^2 + I_{na}^2) = P^2 + Q_F^2 \tag{1.60}$$

dove P e Q_F rappresentano rispettivamente la potenza attiva e la potenza fittizia (o non attiva). Per quanto espresso in precedenza (Cap. 1 § 1.1), è possibile effettuare delle considerazioni analoghe a quelle viste anche con riferimento alle potenze definite nella relazione (1.60).

1.3.3 Shepherd e Zakikhani

La scomposizione della corrente, e quindi anche della potenza apparente, proposta da Shepherd e Zakikhani [4] è del tutto analoga alla scomposizione effettuata in

regime sinusoidale. La corrente totale viene difatti separata in due componenti: la prima armonica in fase con la tensione di alimentazione e la seconda armonica in quadratura con la tensione di alimentazione. A queste correnti, ortogonali tra loro, viene successivamente associata una potenza.

Se si suppone che al carico lineare sia applicata una tensione del tipo:

$$v(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.61)$$

si ha che la corrente totale che fluisce nel carico, data dalla relazione (1.23), può essere riscritta, utilizzando una nota formula trigonometrica (App. B § B.2), come:

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n \cos \varphi_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n \sin \varphi_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.62)$$

dove con \mathcal{M} si è indicato, ancora una volta, il gruppo di armoniche presente nelle tensione di alimentazione e anche, essendo il carico lineare, il gruppo di armoniche presente nella corrente. Ciò conduce alla scomposizione della corrente in due termini:

$$i(t) = i_f(t) + i_q(t) \quad (1.63)$$

dove:

$$i_f(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n \cos \varphi_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.64)$$

è la componente armonica in fase con la tensione di alimentazione (figura 1.7(a)(b) e figura 1.8(a)(b)). In regime deformato, essa non coincide necessariamente con la componente attiva della corrente totale definita da Fryze; in particolare, le due correnti coincidono solo in determinate situazioni.

Il termine:

$$i_q(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n \sin \varphi_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.65)$$

è la componente armonica in quadratura con la tensione di alimentazione (figura 1.9(a)(b) e figura 1.10(a)(b)). Essa è dovuta alla presenza nel carico di elementi reattivi. In regime deformato però, a differenza di quanto accade in regime sinusoidale, essa non coincide necessariamente con la componente non attiva della corrente totale; in particolare, si ha che la corrente armonica in quadratura è una sottocomponente della corrente non attiva e coincide con quest'ultima solo in determinate situazioni. Come conseguenza diretta, si ha che l'annullamento della corrente armonica in quadratura per mezzo di una rete di compensazione costituita da soli elementi reattivi e opportunamente disegnata, non comporta necessariamente il raggiungimento di un fattore di potenza unitario.

Le componenti della corrente totale introdotte sono tra loro ortogonali; ne consegue che i quadrati dei loro valori efficaci possano essere sommati a dare il quadrato del valore efficace della corrente totale:

$$I^2 = I_f^2 + I_q^2 \quad (1.66)$$

La potenza apparente può essere dunque, tenendo presente la relazione (1.66), decomposta come:

$$S^2 = V^2 I^2 = V^2 (I_f^2 + I_q^2) = S_f^2 + S_q^2 \quad (1.67)$$

Al primo termine:

$$S_f = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2 \cos^2 \varphi_n} \quad (1.68)$$

Shepherd e Zakikhani attribuiscono il nome di potenza attiva apparente [4]. Al secondo termine:

$$S_q = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2 \sin^2 \varphi_n} \quad (1.69)$$

essi attribuiscono il nome di vera potenza reattiva apparente [4]. Osservando che:

$$I_n \cos \varphi_n = G_n V_n \quad (1.70)$$

$$I_n \sin \varphi_n = B_n V_n \quad (1.71)$$

si ha che le due componenti della corrente totale (1.64) e (1.65) e le due potenze introdotte (1.68) e (1.69) possono essere riscritte in modo del tutto alternativo, ma del tutto equivalente, come:

$$i_f(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} G_n V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.72)$$

$$i_q(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} B_n V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.73)$$

$$S_f = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} G_n^2 V_n^2} \quad (1.74)$$

$$S_q = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} B_n^2 V_n^2} \quad (1.75)$$

Fornire una formulazione alternativa può apparire superfluo e ripetitivo ma ciò consente una più veloce e facile individuazione dei legami che intercorrono tra le varie teorie. Inoltre, in alcuni casi, esprimere le correnti e le potenze in termini di conduttanza e suscettanza consente di mostrare importanti proprietà più di quanto

non faccia la scrittura in termini di sfasamento armonico. Per queste motivazioni la maggior parte delle componenti che verranno in seguito introdotte, sia della corrente che della potenza apparente, saranno espresse in entrambi modi.

Dalla relazione (1.72) deriva che la corrente armonica in fase ha il medesimo andamento della corrente attiva di Fryze se e solo se la conduttanza del carico è indipendente dalla frequenza. In tal caso, difatti, essa viene necessariamente a coincidere con la conduttanza equivalente G_e definita nel precedente paragrafo.

1.3.4 Sharon

La scomposizione della potenza apparente proposta da Sharon [5], a differenza delle precedenti, non prende spunto da alcuna considerazione riguardante la corrente circolante nel carico. Nei precedenti paragrafi si è ampiamente discusso riguardo la differenza che intercorre tra le varie componenti della corrente introdotte evidenziandone i rispettivi limiti. Tali limiti si ripercuotono ovviamente anche sulle rispettive potenze; in particolare, si ha che la potenza attiva apparente definita da Shepherd e Zakikhani non coincide con la potenza attiva, e che la potenza fittizia di Fryze, nonostante sia dovuta alla presenza di elementi reattivi nel carico, non è totalmente compensabile con una rete composta da soli condensatori ed induttori. Le teorie sopra esposte comunque non sono in alcun caso in grado di spiegare quale sia il motivo che scatena la discrepanza di comportamento di un circuito alimentato con una tensione perfettamente sinusoidale e di uno alimentato con una tensione distorta.

Anche se probabilmente non era nei suoi intenti, quanto espresso da Sharon è in grado di individuare proprio tale causa. La sua scomposizione della potenza apparente può dunque essere vista come un punto di contatto, in termini di potenza, tra le due teorie sopradette. Le varie componenti della potenza da lui introdotte possono essere difatti derivate a partire dalle varie potenze introdotte da Shepherd e Zakikhani e da Fryze. In particolare, se si presuppone di partire dalla relazione (1.67), le componenti di Sharon possono essere ottenute estraendo la potenza attiva dalla potenza apparente. In modo del tutto duale, se si presuppone di partire dalla

relazione (1.60) esse possono essere determinate estraendo la potenza reattiva apparente dalla potenza apparente. Se si considera la prima ipotesi, si ha che la potenza attiva può essere estratta semplicemente aggiungendo e togliendo il quadrato di quest'ultima dal quadrato della potenza apparente.

Il possibile processo logico seguito da Sharon è dunque di seguito mostrato:

$$S^2 = S_f^2 + S_q^2 + P^2 - P^2 \quad (1.76)$$

La relazione (1.76) può essere riscritta in modo del tutto equivalente come:

$$S^2 = P^2 + S_q^2 + (S_f^2 - P^2) \quad (1.77)$$

Per sostituzione delle relazioni (1.26), (1.68) e (1.69) all'interno della (1.77) e successiva elaborazione dei termini contenuti tra parentesi, è possibile ottenere la seguente relazione:

$$S^2 = \left(\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \cos \varphi_n \right)^2 + \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2 \sin^2 \varphi_n + \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} (V_\beta I_\gamma \cos \varphi_\gamma - V_\gamma I_\beta \cos \varphi_\beta)^2 \quad (1.78)$$

dove il primo termine:

$$P = \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \cos \varphi_n \quad (1.79)$$

rappresenta la potenza attiva. Al secondo termine:

$$S_q = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2 \cos^2 \varphi_n} \quad (1.80)$$

Sharon attribuisce la notazione S_o e il nome di potenza reattiva in quadratura [5]. (si noti come tale potenza coincida con la vera potenza reattiva apparente definita da Shepherd e Zakikhani; ciò ne giustifica l'utilizzo della medesima notazione).

Al terzo termine:

$$S_C = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} (V_\beta I_\gamma \cos \varphi_\gamma - V_\gamma I_\beta \cos \varphi_\beta)^2} \quad (1.81)$$

egli attribuisce il nome di potenza reattiva complementare [5].

Oltre a effettuare tale scomposizione, Sharon nel suo trattato fornisce anche due espressioni utili per determinare il valore del condensatore o dell'induttore, a seconda del carattere del carico, che collegati in derivazione al carico stesso consentono di minimizzare la potenza reattiva in quadratura. Esse sono di seguito riportate in entrambe le metodologie di scrittura:

$$C_{opt} = -\frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} n V_n I_n \sin \varphi_n}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} n^2 V_n^2} \quad C_{opt} = -\frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} n B_n V_n^2}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} n^2 V_n^2} \quad (1.82)$$

$$L_{opt} = \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n^2}{n^2}}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n I_n \sin \varphi_n}{n}} \quad L_{opt} = \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n^2}{n^2}}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{B_n V_n}{n}} \quad (1.83)$$

La potenza attiva e la potenza reattiva complementare godono dell'interessante proprietà di non essere influenzate dall'inserzione di tali elementi o, più in generale, dall'inserzione di una rete di compensazione costituita da più elementi reattivi. Ne consegue che, a differenza di quanto accadeva per le potenze introdotte da Budeanu, la minimizzazione della potenza reattiva risulta in una sostanziale diminuzione delle perdite lungo la linea. Nel termine S_C è inoltre insita la motivazione del perché, nella maggior parte dei casi, la totale compensazione della potenza reattiva in quadratura

non comporta il raggiungimento di un fattore di potenza unitario. La potenza reattiva complementare, considerando le relazioni (1.70) e (1.71), può essere riscritta in modo del tutto alternativo, ma del tutto equivalente, come:

$$S_C = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} (V_\beta V_\gamma G_\gamma - V_\gamma V_\beta G_\beta)^2} \quad (1.84)$$

Dalla relazione (1.84) deriva che la potenza reattiva complementare è nulla se e solo se è verificata, per ogni β e per ogni γ , la seguente condizione:

$$G_\beta = G_\gamma \quad (1.85)$$

Affinché si possa dunque ottenere un fattore di potenza unitario, a fronte di una totale compensazione della potenza reattiva in quadratura, si dovrà necessariamente avere un carico caratterizzato da una conduttanza indipendente dalla frequenza. Data la presenza di una sola armonica, tale condizione è sicuramente verificata in regime sinusoidale; in regime deformato essa è invece verificata in caso di carico puramente resistivo, mentre non è sicuramente soddisfatta nel caso di carichi ohmici-induttivi serie o ohmici-capacitivi serie. Ciò è facilmente verificabile se considera, a titolo di esempio, un carico ohmico-induttivo serie caratterizzato da un'impedenza pari a:

$$\bar{Z} = R + j\omega L \quad (1.86)$$

L'equivalente parallelo di tale impedenza può essere ricavato invertendo l'impedenza e razionalizzando il denominatore. Si ottiene quindi che:

$$\bar{Y} = G + jB = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (1.87)$$

da cui si evince, essendo R ed L costanti, come la conduttanza vari al variare della frequenza. Se si suppone che il carico sia ohmico-capacitivo serie è possibile, procedendo nel medesimo modo, ricavare un risultato del tutto analogo.

A conclusione di quanto esposto è utile riportare un breve esempio numerico; si consideri ancora una volta, il circuito di figura 1.3 analizzato al paragrafo 1.3.1.

Utilizzando una delle due relazioni (1.82) si ottiene per il condensatore ottimo un valore pari a $C_{opt} = 0,1861$ F. I valori delle principali grandezze prima e dopo la compensazione sono riportate in tabella 1.3.

| | Senza condensatore | Con condensatore |
|-------------------|--------------------|------------------|
| C [F] | - | 0,1861 |
| S [VA] | 7295,671 | 6496,372 |
| P [W] | 5019,466 | 5019,466 |
| S_q [VA] | 5168,122 | 3960,493 |
| S_c [VA] | 1149,914 | 1149,914 |
| λ [Adim.] | 0.688 | 0,772 |

Tabella 1.3 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione

La tabella 1.3 mostra chiaramente quanto sopra esposto; la potenza attiva e la potenza complementare rimangono difatti invariate dopo l'inserzione del condensatore, mentre si ha un miglioramento dell'efficienza del sistema, dato il sensibile incremento del fattore di potenza. Il valore del condensatore ricavato mediante la relazione (1.72) è quello per cui si ha la massima minimizzazione della potenza reattiva in quadratura; per convincersi di ciò è sufficiente osservare la figura 1.11 nella quale è riportato l'andamento del fattore di potenza in funzione dei possibili valori che il condensatore può assumere.

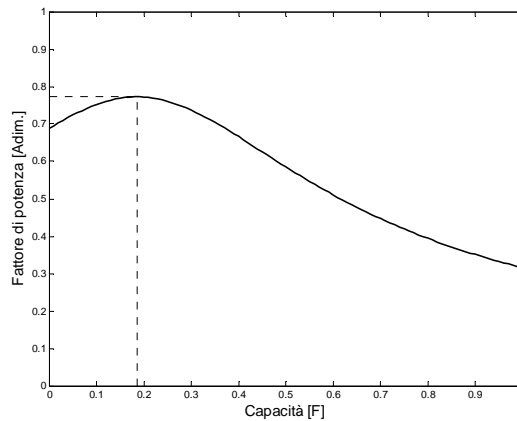


Figura 1.11 Andamento del fattore di potenza in funzione della capacità

1.3.5 Emanuel

La scomposizione della potenza apparente proposta da Emanuel [6] muove i propri passi da quella proposta da Sharon. Di fatto egli accorpa semplicemente in un unico termine la potenza reattiva complementare e la potenza reattiva in quadratura definite al paragrafo 1.4.4. Ciò conduce alla definizione delle due seguenti potenze:

$$P = \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n I_n \cos \varphi_n \quad (1.88)$$

$$P_C = \sqrt{S_q^2 + S_C^2} = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{M}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}} (V_\beta I_\gamma \cos \varphi_\gamma - V_\gamma I_\beta \cos \varphi_\beta)^2} \quad (1.89)$$

dove ovviamente P rappresenta ancora una volta la potenza attiva, mentre al termine P_C l'autore attribuisce il nome di potenza complementare [6].

Concettualmente tale scomposizione è analoga a quella proposta da Fryze. La potenza complementare difatti rappresenta la quota parte della potenza apparente a cui non è associato alcun trasferimento di energia elettrica, così come, la potenza fittizia Q_F rappresenta la quota parte della potenza apparente il cui unico effetto è quello di incrementare le perdite lungo la linea.

Emanuel nel suo trattato evidenzia inoltre come l'utilizzo di un insieme di filtri assicuri una maggiore compensazione della potenza complementare rispetto ad un singolo condensatore o ad un singolo induttore. La rete di compensazione da lui proposta è passiva e costituita da soli elementi reattivi; essa è dunque in grado di minimizzare solamente la quota parte della corrente totale che è armonica in quadratura rispetto alla tensione di alimentazione. In termini di potenza essa è quindi in grado di compensare solamente la potenza reattiva in quadratura S_q .

Tale rete di compensazione è essenzialmente costituita da un insieme di rami in parallelo, ciascuno dei quali, costituito dalla serie di più filtri e da un elemento reattivo posto in serie al gruppo di filtri; il numero di rami e il numero di filtri che compongono la rete di compensazione dipendono dal numero di armoniche che si devono o che si vogliono compensare. In particolare, qualora si ricerchi la totale compensazione della potenza sopraddetta, il numero di rami è pari al numero di armoniche, mentre il numero di filtri è pari al numero di armoniche diminuito di un unità. Il numero di elementi che compongono la rete di compensazione può essere ricavato facilmente dalle considerazioni sopraesposte ed esso risulta essere pari a:

$$N = M(2M - 1) \tag{1.90}$$

dove N e M rappresentano rispettivamente il numero di elementi che compongono la rete di compensazione e il numero di armoniche della corrente.

Occorre notare come l'autore non chiarisca in modo preciso da che cosa dipenda la natura dell'elemento reattivo posto in serie al gruppo di filtri. Visto e considerato che ciascun ramo è dedicato alla compensazione di una determinata armonica è possibile ritenere che egli abbia supposto che la natura di tale elemento dipenda dal comportamento del carico a quella armonica; in particolare si ha dunque un induttore se il comportamento del carico è capacitivo, mentre si ha un condensatore in caso contrario (figura 1.12). In realtà ciò non è da ritenersi del tutto necessario; tale aspetto non verrà ulteriormente indagato e ci si attiene dunque alla possibile interpretazione appena fornita.

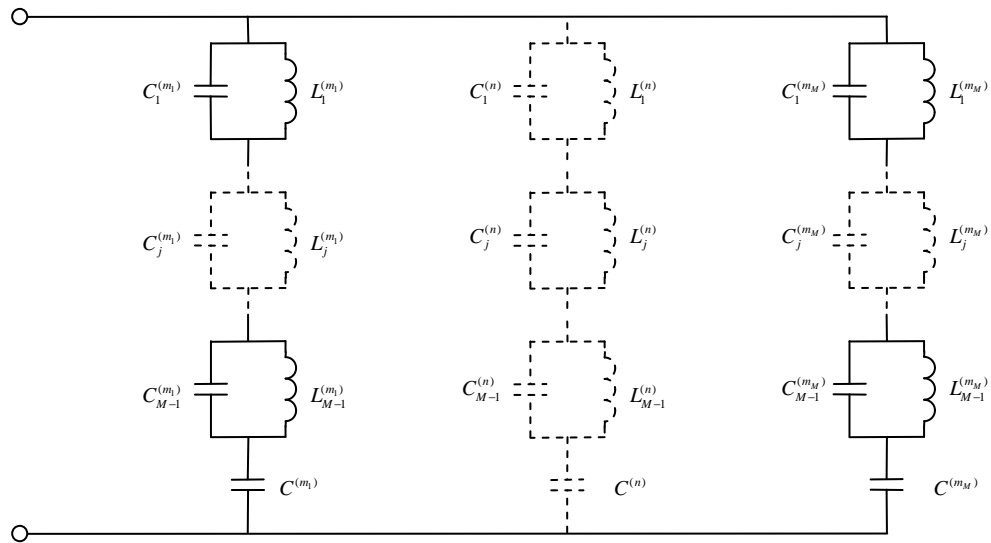


Figura 1.12 Schema tipico della rete di compensazione in caso di carico ohmico-induttivo

La presenza dei filtri assicura che ciascun ramo eroghi o assorba corrente solo in corrispondenza dell'armonica a cui quel dato ramo è associato. In termini di funzione suscettanza ciò equivale ad asserire che esso deve avere suscettanza nulla in corrispondenza di tutte le armoniche fatta eccezione per quella che esso deve compensare; in corrispondenza di tale armonica la rete dovrà avere suscettanza pari ed opposta a quella del carico. In altre parole ad ogni ramo è demandato il compito di compensare la potenza reattiva assorbita dal carico a quella determinata armonica. Quanto espresso si traduce nelle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} L_j^{(n)} C_j^{(n)} = 1/k^2 \omega_1^2 & n \in \mathcal{M} & j = 1, 2, \dots, M-1 & k \neq n \\ B_{C_n}^{(n)} = -B_{L_n} & \forall n \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (1.91)$$

dove con $B_{C_n}^{(n)}$ si è indicata la suscettanza, alle varie armoniche, di ciascun ramo costituente la rete di compensazione e con B_{L_n} si è indicata la suscettanza del carico alle varie armoniche. L'autore si limita a fornire tali condizioni, in modo matematicamente non formale, e inoltre non chiarisce in modo esplicito in quale

modo i parametri della rete di compensazione vadano determinati; a completamento quindi di quanto esposto, e con riferimento all'esempio già analizzato nei precedenti paragrafi (figura 1.3), un personale approccio alla determinazione di tali parametri è di seguito fornito.

Con riferimento dunque all'esempio sopraddetto, si ha che il numero di armoniche della corrente è pari a tre e il carico ha un comportamento induttivo in corrispondenza di ciascuna di esse. La rete di compensazione, che garantisce la totale compensazione della potenza reattiva in quadratura, è pertanto, per quanto detto in precedenza, composta da sei elementi; in particolare si avranno tre rami posti in parallelo tra loro, ciascuno dei quali costituito da due filtri posti in serie ad un condensatore.

I rami che costituiscono la rete di compensazione devono soddisfare rispettivamente le seguenti condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^{(1)} C_1^{(1)} = \frac{1}{25} \\ L_2^{(1)} C_2^{(1)} = \frac{1}{49} \\ \left(-\frac{L_1^{(1)}}{1-L_1^{(1)} C_1^{(1)}} - \frac{L_2^{(1)}}{1-L_2^{(1)} C_2^{(1)}} + \frac{1}{C^{(1)}} \right)^{-1} = 0,5 \end{array} \right. \quad (1.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^{(5)} C_1^{(5)} = 1 \\ L_2^{(5)} C_2^{(5)} = \frac{1}{49} \\ \left(-\frac{5L_1^{(5)}}{1-25L_1^{(5)} C_1^{(5)}} - \frac{5L_2^{(5)}}{1-25L_2^{(5)} C_2^{(5)}} + \frac{1}{5C^{(5)}} \right)^{-1} = 0,192 \end{array} \right. \quad (1.93)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^{(7)} C_1^{(7)} = 1 \\ L_2^{(7)} C_2^{(7)} = \frac{1}{25} \\ \left(-\frac{7L_1^{(7)}}{1-49L_1^{(7)}C_1^{(7)}} - \frac{7L_2^{(7)}}{1-49L_2^{(7)}C_2^{(7)}} + \frac{1}{7C^{(7)}} \right)^{-1} = 0,14 \end{array} \right. \quad (1.94)$$

I tre sistemi (1.92), (1.93) e (1.94), essendo costituiti da tre equazioni in cinque incognite, risultano indeterminati; di conseguenza, per poterli risolvere, si rende necessario fissare alcune delle variabili presenti. Il primo sistema può essere dunque agevolmente risolto qualora si sostituiscano le prime due equazioni nella terza e si fissino due dei tre parametri rimanenti; supponendo, per esempio, di fissare $L_1^{(1)} = 0,1 \text{ H}$ e $L_2^{(1)} = 0,1 \text{ H}$, si ottengono per le rimanenti variabili i seguenti valori: $C_1^{(1)} = 0,4 \text{ F}$, $C_2^{(1)} = 0,204 \text{ F}$ e $C^{(1)} = 0,453 \text{ F}$. Il secondo sistema può ora essere reso determinato imponendo che $L_2^{(5)} = L_2^{(1)} = 0,1 \text{ H}$, $C_2^{(5)} = C_2^{(1)} = 0,204 \text{ F}$, sostituendo la prima equazione nella terza e fissando uno dei due parametri rimanenti; supponendo, per esempio, di fissare $L_1^{(5)} = 1 \text{ H}$ si ottengono per le rimanenti variabili i seguenti valori: $C_1^{(5)} = 1 \text{ F}$ e $C^{(5)} = 0,033 \text{ F}$. Il terzo sistema (1.91) può essere reso determinato imponendo che $L_2^{(7)} = L_1^{(1)} = 0,1 \text{ H}$, $C_2^{(7)} = C_1^{(1)} = 0,4 \text{ F}$, $L_1^{(7)} = L_1^{(5)} = 1 \text{ H}$ e $C_1^{(7)} = C_1^{(5)} = 1 \text{ F}$; si ottiene dunque che $C^{(5)} = 0,022 \text{ F}$.

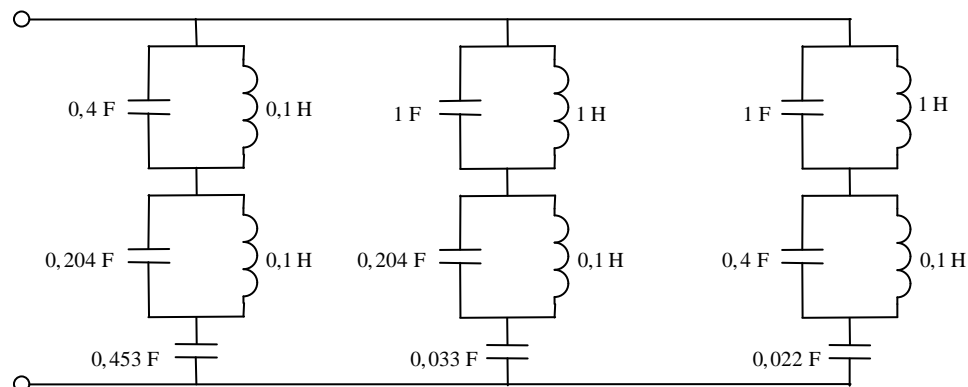


Figura 1.13 Rete di compensazione per il circuito esemplificativo

Occorre osservare come la rete riportata in figura 1.13 non sia l'unica possibile. Se difatti si fossero scelti altri valori, o si fossero fissate altre grandezze, si sarebbero ottenuti dei parametri di rete differenti ma ovviamente si sarebbe conseguito il medesimo risultato.

In figura 1.14 è riportato l'andamento della suscettanza del carico (cambiata di segno) e della suscettanza del ramo della rete di compensazione a cui è demandato il compito di compensare la potenza reattiva della prima armonica. Tale andamento conferma quanto sopra esposto, ovvero la suscettanza del ramo in questione è pari ed opposta alla suscettanza del carico in corrispondenza della prima armonica, mentre è nulla in corrispondenza della quinta e della settima armonica. Ovviamente gli andamenti delle suscettanze dei rimanenti due rami sono, con le dovute modifiche, del tutto analoghi.

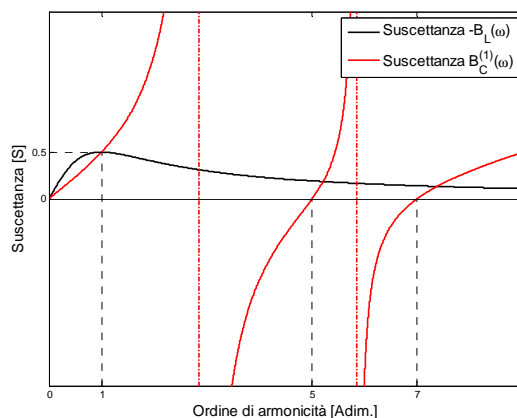


Figura 1.14 Suscettanza del carico (cambiata di segno) e del ramo (1) della rete di compensazione

I valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione sono riportati nelle tabelle 1.4 e 1.5. In particolare, nella prima si sono riportati i risultati ottenuti con riferimento alle potenze introdotte da Emanuel e, nella seconda, i risultati ottenuti con riferimento alle potenze introdotte da Sharon.

| | Senza rete | Con rete |
|-------------------|------------|----------|
| S [VA] | 7295,671 | 5149.499 |
| P [W] | 5019,466 | 5019,466 |
| P_c [VA] | 5294.505 | 1149,914 |
| λ [Adim.] | 0.688 | 0,974 |

Tabella 1.4 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con riferimento alle potenze definite da Emanuel

| | Senza rete | Con rete |
|------------|------------|----------|
| S_q [VA] | 5168,122 | 0 |
| S_c [VA] | 1149,914 | 1149,914 |

Tabella 1.5 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con riferimento alle potenze definite da Sharon

La tabella 1.4 mostra chiaramente quanto sopra esposto; l'inserzione della rete di compensazione non muta la potenza attiva, ma comporta una drastica diminuzione della potenza complementare con una conseguente miglioria dell'efficienza della trasmissione. La rete di compensazione annulla, di fatto, la potenza reattiva in quadratura definita da Sharon mantenendo invariata la potenza reattiva complementare (tabella 1.5).

1.3.6 Kusters e Moore

La scomposizione proposta da Kusters e Moore [7] è di fatto un'estensione della scomposizione proposta da Fryze. La corrente non attiva di Fryze viene difatti separata dai due autori in due ulteriori componenti. Le due correnti che si ottengono da tale scomposizione sono dette, a seconda della tipologia del carico, rispettivamente corrente reattiva capacitiva o induttiva e corrente residua capacitiva o induttiva. Esse sono definite come segue:

$$i_a(t) = \frac{P}{V^2} v(t) = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt}{V^2} v(t) \quad (1.95)$$

$$i_{rC}(t) = \frac{\frac{1}{T} \int v_{der}(t)i(t)dt}{V_{der}^2} v_{der}(t) \quad i_{rC_r}(t) = i(t) - i_a(t) - i_{rC}(t) \quad (1.96)$$

$$i_{rL}(t) = \frac{\frac{1}{T} \int v_{int}(t)i(t)dt}{V_{int}^2} v_{int}(t) \quad i_{rL_r}(t) = i(t) - i_a(t) - i_{rL}(t) \quad (1.97)$$

dove $v_{der}(t)$ e $v_{int}(t)$ rappresentano rispettivamente la derivata della tensione istantanea e la parte a valor medio nullo dell'integrale della tensione istantanea:

$$v_{der}(t) = \frac{d}{dt} v(t) \quad (1.98)$$

$$v_{int}(t) = \int_0^T v(t)dt - V_0 \quad V_0 \text{ Costante di integrazione} \quad (1.99)$$

I termini V_{der} e V_{int} rappresentano, invece, rispettivamente il valore efficace della derivata della tensione e il valore efficace della parte alternata a valor medio nullo dell'integrale della tensione.

Le correnti definite dalle relazioni (1.95), (1.96) e (1.97) sono tra loro ortogonali; ancora una volta dunque i quadrati dei valori efficaci possono essere sommati a dare il quadrato del valore efficace della corrente totale:

$$I^2 = I_a^2 + I_{rC}^2 + I_{rC_r}^2 \quad (1.100)$$

$$I^2 = I_a^2 + I_{rL}^2 + I_{rL_r}^2 \quad (1.101)$$

Nonostante il valore efficace sia una grandezza convenzionalmente assunta come positiva, Kusters e Moore attribuiscono al valore efficace di $i_{rC}(t)$ e di $i_{rL}(t)$ rispettivamente il medesimo segno del valor medio di $v_{der}(t)i(t)$ e il medesimo segno del valor medio di $v_{int}(t)i(t)$. Essi sono dunque definiti nel seguente modo:

$$i_{rC}(t) = \frac{\frac{1}{T} \int v_{der}(t)i(t)dt}{V_{der}} \quad (1.102)$$

$$i_{rL}(t) = \frac{\frac{1}{T} \int v_{int}(t)i(t)dt}{V_{int}} \quad (1.103)$$

Note tali grandezze, è ora possibile definire le rispettive potenze come il prodotto tra il valore efficace della tensione e il valore efficace delle componenti della corrente totale introdotte:

$$P = VI_a \quad (1.104)$$

$$Q_{rC} = VI_{rC} \quad (1.105)$$

$$Q_{rL} = VI_{rL} \quad (1.106)$$

Le potenze reattive definite dalle relazioni (1.105) e (1.106) sono delle quantità dotate di segno ed esse possono essere, se negative, totalmente compensate mediante l'inserzione di un condensatore o di un induttore. Ne consegue che la potenza Q_{rC} segue le convenzioni di segno della potenza reattiva in regime sinusoidale, mentre la potenza Q_{rL} ha segno opposto. Ad ogni modo, esse sono grandezze dotate di segno e dunque, al pari di ciò che accade in regime sinusoidale, forniscono informazioni su come il carico debba essere compensato.

Le potenze associate alle correnti residue possono essere definite a partire dalle (1.104), (1.105) e (1.106) come:

$$Q_{rC_r} = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_{rC}^2} \quad (1.107)$$

$$Q_{rL_r} = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_{rL}^2} \quad (1.108)$$

Al fine di ricavare possibili legami con le teorie precedentemente esposte è utile ricercare una formulazione alternativa per la corrente reattiva capacitiva e per la corrente reattiva induttiva. Se si suppone, come sino ad ora fatto, che al carico sia applicata una tensione non sinusoidale del tipo:

$$v(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.109)$$

si ha che $i_{rC}(t)$ e $i_{rL}(t)$ possono essere riscritte in modo del tutto equivalente come:

$$i_{rC}(t) = \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} n V_n I_n \sin \varphi_n}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} n^2 V_n^2} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} n \omega_1 V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.110)$$

$$i_{rL}(t) = - \frac{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n I_n \sin \varphi_n}{n}}{\sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n^2}{n^2}} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n}{n \omega_1} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.111)$$

o, alternativamente come:

$$i_{rC}(t) = \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} n B_n V_n^2}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} n^2 V_n^2} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} n \omega_1 V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.112)$$

$$i_{rL}(t) = -\frac{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{B_n V_n}{n}}{\sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n^2}{n^2}} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n}{n \omega_1} \cos(n \omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.113)$$

Se ora si confrontano tali relazioni con quelle introdotte da Sharon, atte alla valutazione del condensatore ottimo e dell'induttore ottimo ((1.82) (1.83)), è possibile riconoscere la presenza di queste ultime nelle relazioni (1.112) (1.113). In particolare, si ha che nella corrente reattiva capacitiva è presente un termine pari ed opposto al condensatore ottimo, mentre nella corrente reattiva induttiva è presente un termine inverso ed opposto all'induttore ottimo. La corrente reattiva capacitiva e la corrente reattiva induttiva possono essere dunque riscritte come:

$$i_{rC}(t) = -\sqrt{2} C_{opt} \sum_{n \in \mathcal{M}} n \omega_1 V_n \cos(n \omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.114)$$

$$i_{rL}(t) = -\sqrt{2} \frac{1}{L_{opt}} \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n}{n \omega_1} \cos(n \omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.115)$$

La teoria di Kusters e Moore può quindi essere vista come un punto di contatto tra il condensatore/induttore ottimo di Sharon e la teoria di Fryze. Essi hanno di fatto estratto dalla corrente non attiva una corrente pari ed opposta a quella fornita dal condensatore/induttore ottimo definiti da Sharon. Da tale considerazione ne consegue che la corrente reattiva capacitiva e la corrente reattiva induttiva rappresentano rispettivamente la quota parte della corrente non attiva di Fryze che può essere compensata mediante l'inserzione di un elemento capacitivo o induttivo in derivazione al carico, viceversa, le correnti residue da essi definite rappresentano la quota parte della corrente non attiva che non è influenzata dall'inserzione di tali elementi.

1.3.7 Czarnecki

La scomposizione della corrente proposta da Czarnecki [9],[10] è concettualmente analoga alla scomposizione della potenza apparente effettuata da Sharon. A differenza di quest'ultimo, però, la volontà di trovare un punto di contatto tra la scomposizione di Shepherd e Zakikhani e quella di Fryze è palesata dall'autore stesso. Un procedimento analogo a quello precedentemente esposto può dunque essere seguito, questa volta, con riferimento alle correnti. Supponendo di partire dalla scomposizione della corrente proposta da Shepherd e Zakikhani, è difatti possibile estrarre la corrente attiva dalla corrente totale aggiungendo e togliendo la prima da quest'ultima:

$$i(t) = i_f(t) + i_q(t) - i_a(t) + i_a(t) \quad (1.116)$$

Tale relazione può essere riscritta in modo del tutto equivalente come:

$$i(t) = i_a(t) + i_q(t) + (i_f(t) - i_a(t)) \quad (1.117)$$

Per sostituzione delle relazioni (1.56), (1.72) e (1.73) all'interno della (1.117) e successivo riarrangiamento dei termini contenuti tra parentesi è possibile ottenere:

$$i(t) = \sqrt{2}G_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} B_n V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} (G_n - G_e) V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.118)$$

Ne consegue che la corrente totale risulta scomposta in tre termini:

$$i(t) = i_a(t) + i_q(t) + i_s(t) \quad (1.119)$$

dove i termini $i_a(t)$ e $i_q(t)$ hanno il significato ampiamente spiegato in precedenza, mentre il termine:

$$i_s(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} (G_n - G_e) V_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad (1.120)$$

rappresenta una corrente fittizia a cui l'autore attribuisce il nome di corrente di scattering. Tale corrente, essendo armonica in fase con la tensione di alimentazione, non può essere compensata con una rete passiva costituita da soli elementi reattivi. Essa è inoltre ortogonale rispetto alla tensione di alimentazione; ne consegue che nessun trasferimento di energia è associato a detta corrente. Inoltre, essendo il termine $G_n - G_e$ positivo ad alcune armoniche e negativo ad altre, si ha che tale corrente non è sicuramente compensabile utilizzando soli elementi passivi; per consentire la compensazione della corrente di scattering si rende difatti necessario l'impiego di una rete attiva e con elementi di accumulo di energia. In tal caso è difatti possibile pensare di accumulare energia nelle porzioni di periodo in cui la corrente di scattering è positiva e di restituirla nelle porzioni di periodo in cui essa è negativa. E' facilmente dimostrabile che le componenti della corrente totale introdotte sono ortogonali tra loro [9]; ne consegue che i quadrati dei loro valori efficaci possono essere sommati a dare il quadrato del valore efficace della corrente circolante nel carico:

$$I^2 = I_a^2 + I_r^2 + I_s^2 \quad (1.121)$$

La potenza apparente può essere dunque, tenendo presente la (1.121), decomposta come:

$$S^2 = V^2 I^2 = V^2 (I_a^2 + I_r^2 + I_s^2) = P^2 + Q_r^2 + D_s^2 \quad (1.122)$$

dove:

$$P = G_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \quad (1.123)$$

$$Q_r = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} B_n V_n^2} \quad (1.124)$$

$$D_s = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} (G_n - G_e)^2 V_n^2} \quad (1.125)$$

Se si confrontano ora le potenze (1.123) (1.124) (1.225) con le potenze introdotte da Sharon, è possibile rendersi conto di come esse abbiano un aspetto formalmente differente nonostante esprimano i medesimi concetti.

L'approccio proposto da Czarnecki ha il vantaggio di essere formalmente più raffinato di quello proposto da Sharon. Esso consente inoltre una possibile modellizzazione circuitale del carico agli effetti esterni; Armonica per armonica, quest'ultimo può essere difatti visto come costituito da tre rami posti in parallelo tra loro: il primo avente conduttanza pari a G_e ; il secondo avente conduttanza pari a $G_n - G_e$; il terzo avente suscettanza pari a B_n . Quanto esposto è schematicamente riportato in figura 1.15.

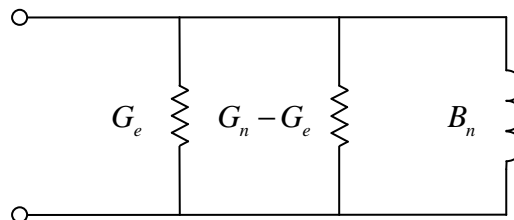


Figura 1.15 Modellizzazione del carico agli effetti esterni

In aggiunta a quanto esposto, Czarnecki nel suo trattato evidenzia inoltre come la totale compensazione della potenza reattiva sopra definita sia in realtà realizzabile con una rete di compensazione reattiva passiva avente un numero di elementi minore di quella proposta da Emanuel (Cap. 1 § 1.3.5). Con riferimento a quanto espresso nell'appendice A è difatti facile verificare come sia possibile conseguire il medesimo risultato ottenuto da quest'ultimo con una rete la cui complessità, in termini di numero di elementi reattivi utilizzati, è regolata dalla seguente relazione:

$$M \leq N \leq 2M - 1 \quad (1.126)$$

Ciò è facilmente verificabile osservando che la potenza reattiva è nulla quando lo sono le potenze reattive alle varie armoniche. Ciò equivale ad imporre che la rete di compensazione eroghi o assorba alle varie armoniche una corrente reattiva pari ed opposta a quella richiesta dal carico. Altresì ciò equivale ad imporre che la suscettanza del carico sia armonica per armonica pari alla suscettanza della rete di compensazione. Per comprendere come tale rete di compensazione debba essere disegnata è bene ricordare le principali proprietà di cui godono le ammettenze delle reti costituite da soli elementi passivi e reattivi. In particolare è possibile affermare che: poli e zeri di un ammettenza LC risiedono lungo l'asse immaginario e sono tra loro alternati, l'origine e l'infinito costituiscono sempre delle frequenze critiche di un ammettenza LC e le funzioni suscettanza sono funzioni crescenti (App. A). Si ha dunque che la suscettanza del carico dovrà, al fine di garantire la totale compensazione della corrente reattiva di Czarnecki, avere:

- uno zero nell'origine se il carico ha un comportamento induttivo in corrispondenza dell'armonica m_1 ;
- un polo nell'origine se il carico ha un comportamento capacitivo in corrispondenza dell'armonica m_1 ;
- uno zero all'infinito se il carico ha un comportamento capacitivo in corrispondenza dell'armonica m_M ;
- un polo all'infinito se il carico ha un comportamento induttivo in corrispondenza dell'armonica m_M ;
- uno zero e un polo se il carico ha il medesimo comportamento (induttivo o capacitivo) per due armoniche consecutive del gruppo $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_M\}$;
- uno zero se il carico ha comportamento capacitivo in corrispondenza dell'armonica m_j e comportamento induttivo in corrispondenza dell'armonica m_{j+1} ;

- un polo se il carico ha comportamento induttivo in corrispondenza dell'armonica m_j e comportamento capacitivo in corrispondenza dell'armonica m_{j+1} .

Per comprendere come sia possibile determinare la funzione ammettenza della rete di compensazione e come sia possibile, successivamente, determinare i parametri di detta rete, è utile mostrare l'iter che occorre seguire con riferimento all'esempio analizzato nei precedenti paragrafi (figura 1.3).

Con riferimento all'esempio sopraddetto, si ha che il numero di armoniche della corrente è pari a tre e il carico ha un comportamento induttivo in corrispondenza di ciascuna di esse. Affinché la rete consenta la completa compensazione della corrente armonica in quadratura con la tensione, essa dovrà necessariamente avere una ammettenza caratterizzata da un numero di poli e di zeri immaginari coniugati pari a due. Inoltre, dato il carattere induttivo del carico alle basse e alle alte armoniche, essa dovrà avere uno zero nell'origine e un polo all'infinito. Per quanto esposto l'ammettenza assume dunque il seguente aspetto:

$$Y_C(s) = \frac{As(s^2 + z_1^2)(s^2 + z_2^2)}{(s^2 + p_1^2)(s^2 + p_2^2)} \quad (1.127)$$

Tale ammettenza deve necessariamente soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 < p_1 < 5 \\ 5 < p_2 < 7 \end{cases} \quad (1.128)$$

se quest'ultime non fossero difatti verificate, si avrebbe la mancata compensazione di alcune delle armoniche presenti nella corrente. La relazione (1.127) può essere riscritta in modo alternativo come:

$$Y_C(s) = \frac{a_5 s^5 + a_3 s^3 + a_1 s}{(s^2 + p_1^2)(s^2 + p_2^2)} \quad (1.129)$$

Si hanno dunque cinque incognite e solo tre condizioni del tipo:

$$\text{Im}\{Y_C(jn\omega_1)\} = -B_{Ln} \quad n \in \mathcal{M} \quad (1.130)$$

da imporre. Al fine di rendere determinato il sistema risultante dall'imposizione delle condizioni (1.130), occorre fissare due dei cinque parametri contenuti nella relazione (1.129). Supponendo di porre, per esempio, $p_1 = 3$ e $p_2 = 6$ è possibile ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1 - a_3 + a_5 = 140 \\ 5a_1 - 125a_3 + 3125a_5 = -33,792 \\ 7a_1 - 343a_3 + 16807a_5 = 72,8 \end{cases} \quad (1.131)$$

la cui risoluzione conduce ai seguenti risultati: $a_1 = 149,672$, $a_3 = 9,814$ e $a_5 = 0,142$; l'ammettenza assume dunque il seguente aspetto:

$$Y_C(s) = \frac{0,142s^5 + 9,814s^3 + 149,672s}{(s^2 + 3^2)(s^2 + 6^2)} \quad (1.132)$$

Tale funzione può essere, ora, sintetizzata utilizzando uno dei metodi di sintesi esposti in appendice A. Se si suppone di utilizzare il secondo metodo di Foster (App. A § A.3.1, § A.4.1), si ha, tralasciando i calcoli, che la rete di compensazione assume l'aspetto riportato in figura 1.16.

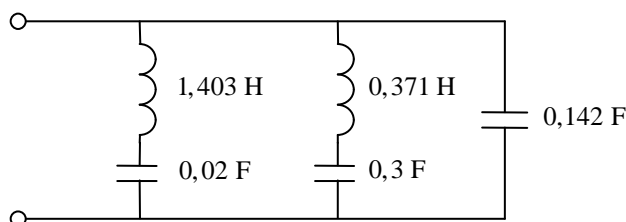


Figura 1.16 Sintesi dell'ammettenza $Y_C(s)$ con il secondo metodo di Foster

Se si suppone invece di utilizzare il primo metodo di Cauer (Cap. A § A.3.3, § A.4.3), la rete di compensazione assumerà l'aspetto riportato in figura 1.17.

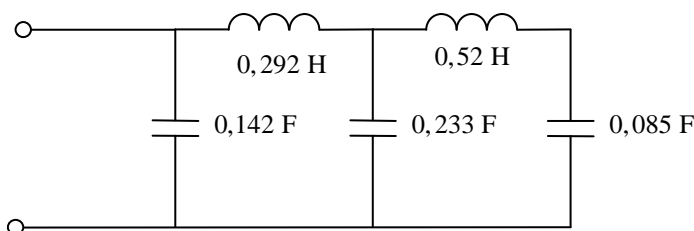


Figura 1.17 Sintesi della ammettenza $Y_C(s)$ con il primo metodo di Cauer

Occorre osservare che le reti riportate in figura 1.16 e in figura 1.17 non sono le uniche possibili. L'utilizzo di uno qualsiasi degli altri metodi di sintesi avrebbe difatti condotto ad una rete di compensazione dall'aspetto totalmente differente. Altresì una differente scelta del valore attribuito ai poli della funzione ammettenza avrebbe condotto, a pari metodo di sintesi, ad una rete avente dei parametri numericamente differenti. Se si confronta tale rete di compensazione con quella proposta da Emanuel è possibile osservare come quest'ultima richieda un numero maggiore di elementi rispetto a quella proposta da Czarnecki e sia, all'atto pratico, fisicamente più difficile da realizzare data la presenza di elementi risonanti.

In figura 1.18 è riportato l'andamento della suscettanza del carico (cambiata di segno) e della suscettanza della rete di compensazione. Tale andamento mostra come, a

differenza della rete proposta da Emanuel, la compensazione della corrente reattiva alle varie armoniche avvenga simultaneamente.

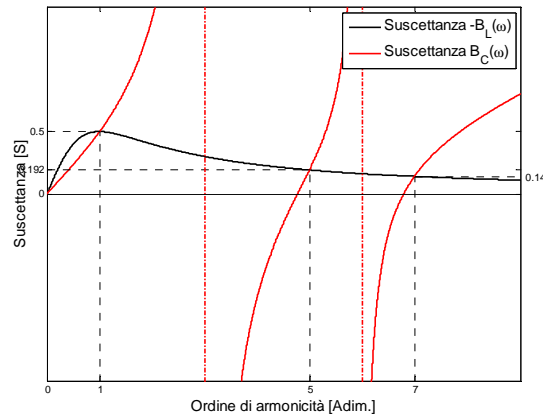


Figura 1.18 Suscettanza del carico (cambiata di segno) e suscettanza della rete di compensazione

In tabella 1.6 sono riportati i valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione.

| | Senza rete | Con rete |
|-------------------|------------|----------|
| S [VA] | 7295,671 | 5149.499 |
| P [W] | 5019,466 | 5019,466 |
| Q_r [VA] | 5168,122 | 0 |
| D_s [VA] | 1149,914 | 1149,914 |
| λ [Adim.] | 0.688 | 0,974 |

Tabella 1.6 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con riferimento alle potenze introdotte da Czarnecki

A riprova ancora una volta del fatto che la teoria di Czarnecki e quella di Sharon esprimono il medesimo concetto in modo differente si sono riportati nella tabella 1.7 i risultati che si sarebbero conseguiti qualora si fosse fatto riferimento alle potenze introdotte da Sharon. Il confronto delle due tabelle mostra chiaramente come le componenti introdotte siano numericamente coincidenti nonostante siano formalmente differenti.

| | Senza rete | Con rete |
|-------------------|------------|----------|
| S [VA] | 7295,671 | 5149.499 |
| P [W] | 5019,466 | 5019,466 |
| S_q [VA] | 5168,122 | 0 |
| S_c [VA] | 1149,914 | 1149,914 |
| λ [Adim.] | 0.688 | 0,974 |

Tabella 1.7 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con riferimento alle potenze definite da Sharon

1.3.8 Willems (*Rivisitazione della teoria di Budeanu*)

Al paragrafo 1.1 si è mostrato come, in regime sinusoidale, una delle principali proprietà di cui gode la potenza reattiva è rappresentata dal fatto che una sua riduzione comporta, a pari potenza attiva trasmessa, una diminuzione delle perdite lungo la linea. La potenza reattiva di Budeanu non soddisfa tale proprietà, e in ciò risiede il motivo per cui Czarnecki [11] ha fermamente contestato il modello proposto dall'autore rumeno (Cap. 1 § 1.3.1). E' interessante ricercare le motivazioni per le quali, in regime sinusoidale, la minimizzazione della potenza reattiva risulta in una minimizzazione delle perdite di potenza lungo la linea, mentre ciò non avviene, in regime deformato, qualora si faccia ricorso al concetto di potenza reattiva Q_B . Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che in regime sinusoidale le correnti, a cui non è associato alcun trasferimento di energia, appartengono ad un sottospazio unidimensionale, mentre in regime deformato esse appartengono ad uno spazio multidimensionale. Se nel primo caso vi è corrispondenza tra la riduzione della

potenza reattiva e la riduzione delle perdite, ciò non è più vero qualora un dato sistema funzioni con tensioni e correnti distorte. In questo caso si ha dunque che le direzioni lungo le quali si ha un decremento della potenza reattiva di Budeanu non corrispondono alle direzioni per cui si ha una diminuzione delle perdite. La ragione principale per la quale il condensatore, valutato a partire dalla definizione di potenza reattiva di Budeanu, non è in grado di minimizzare il valore efficace della corrente totale, è che la corrente fornita da tale elemento e la corrente che è possibile associare alla potenza distorcente del carico non sono tra loro mutuamente ortogonali. Si rende dunque necessario definire la corrente del compensatore che minimizza contemporaneamente sia la potenza reattiva di Budeanu sia le perdite in linea.

Ciò si traduce nella ricerca della soluzione del seguente problema: determinare la componente della corrente totale la quale giace nel sottospazio delle correnti a cui non è associato alcun trasferimento di potenza attiva e la quale è ortogonale al sottospazio delle correnti che danno luogo a potenza reattiva di Budeanu nulla (anche se non espressamente riportato in bibliografia da Willems si veda a tal proposito anche [14]). La soluzione a tale problema, ricercabile con l'ausilio del metodo di Lagrange, conduce alla definizione della seguente corrente reattiva di Budeanu:

$$i_{rB}(t) = \frac{Q_B}{V^2} H(v(t)) = B_e H(v(t)) \quad (1.133)$$

dove V e $H(v(t))$ rappresentano rispettivamente il valore efficace e la trasformata di Hilbert (App. B § B.5) della tensione e B_e rappresenta la suscettanza "equivalente". La corrente totale può essere dunque scomposta nelle seguenti tre componenti ortogonali tra loro:

$$I^2 = I_a^2 + I_{rB}^2 + I_{rB_r}^2 \quad (1.134)$$

dove I_{rB_r} rappresenta il valore efficace della corrente residua definita come:

$$i_{rB_c}(t) = i(t) - i_a(t) - i_{rB}(t) \quad (1.135)$$

Dalle relazioni (1.134) e (1.135) deriva che le perdite risultano ridotte della quota parte corrispondente al termine $i_{rB}(t)$ qualora una rete di compensazione, posta in derivazione, fornisca tale corrente al carico. Ciò dimostra come, scegliendo un'opportuna corrente del compensatore, è possibile annullare la potenza di Budeanu e minimizzare le perdite lungo la linea.

La corrente reattiva di Budeanu, per come è stata definita, rappresenta dunque la quota parte della corrente totale che può essere compensata mediante l'inserzione di una suscettanza indipendente dalla frequenza.

1.3.9 Ulteriore analisi della teoria di Budeanu

Personalmente ritengo che quanto esposto da Willems abbia un rilevante interesse teorico in quanto, oserei dire, ribalta le critiche che, per circa un secolo, sono state mosse al modello proposto da Budeanu. Ritengo altresì che vi siano degli aspetti, non indagati dall'autore, che meritano un ulteriore approfondimento; in particolare egli nel suo articolo non pone in relazione le componenti della corrente da lui introdotte con la corrente reattiva introdotta da Czarnecki e non tenta di riqualificare il concetto di potenza distorcente introdotto da Budeanu. Al fine di conseguire tali scopi è utile effettuare un'ulteriore scomposizione (a tal proposito si veda, ancora una volta, l'articolo [14]). Partendo ancora una volta dalla scomposizione proposta da Shepherd e Zakikhani, è possibile, in modo analogo a quanto fatto in precedenza, estrarre sia la corrente attiva di Fryze sia la corrente reattiva di Budeanu. Tale estrazione può essere effettuata semplicemente aggiungendo e togliendo tali quantità dalla corrente che fluisce nel carico:

$$i(t) = i_f(t) + i_q(t) + i_a(t) - i_a(t) + i_{rB}(t) - i_{rB}(t) \quad (1.136)$$

Tale relazione può essere riscritta in modo del tutto equivalente come:

$$i(t) = i_a(t) + i_{rB}(t) + (i_f(t) - i_a(t)) + (i_q(t) - i_{rB}(t)) \quad (1.137)$$

Per sostituzione delle relazioni (1.56), (1.72), (1.73) e (1.133) all'interno della (1.137) e successivo elaborazione dei termini contenuti tra parentesi, è possibile ottenere la seguente relazione:

$$i(t) = \sqrt{2}G_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2}B_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} (G_n - G_e) V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} (B_n - B_e) V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.138)$$

Ne consegue che la corrente totale risulta scomposta in quattro termini:

$$i(t) = i_a(t) + i_{rB}(t) + i_s(t) + i_{s_B}(t) \quad (1.139)$$

dove $i_a(t)$, $i_{rB}(t)$ e $i_s(t)$ hanno il significato ampiamente spiegato in precedenza e dove $i_{s_B}(t)$ rappresenta la corrente di scattering di Budeanu. E' bene ancora una volta sottolineare come entrambe le correnti di scattering siano delle quantità fittizie che però sono in grado di porre in risalto importanti proprietà circa il comportamento del carico agli effetti esterni. Le due correnti $i_s(t)$ e $i_{s_B}(t)$ sono legate da un'importante analogia concettuale; la corrente di scattering di Czarnecki rappresenta difatti la quota parte della corrente non attiva di Fryze che non è possibile compensare con una rete passiva composta da soli elementi reattivi, così come la corrente di scattering di Budeanu rappresenta la quota parte della corrente non attiva che non è possibile compensare con una rete passiva, avente suscettanza indipendente dalla frequenza, composta da soli elementi reattivi.

Dalla relazione (1.138) si evince inoltre come la corrente reattiva di Budeanu sia una sottocomponente della corrente reattiva di Czarnecki.

Riconsiderando ed estendendo la critica formulata da Czarnecki a Budeanu [11], è possibile giungere alla conclusione che anche la corrente reattiva da lui definita è

priva di qualsiasi significato fisico in quanto composta da una componente che ne è priva. La situazione assume dunque dei contorni paradossali: si ritiene corretta la definizione di corrente reattiva di Czarnecki e scorretta quella di Budeanu nonostante la prima comprenda la seconda. Quanto espresso da Willems, unitamente a quanto esposto, è sufficiente a rimettere in discussione la validità concettuale della critica della potenza reattiva di Budeanu ad opera di Czarnecki. La scomposizione effettuata consente inoltre di evidenziare altre proprietà intimamente correlate a quanto appena esposto. In particolare, si ha che la corrente reattiva di Budeanu è nulla quando la corrente reattiva di Czarnecki è nulla (caso di carichi resistivi o compensati), ed inoltre si ha che le due correnti, e quindi le rispettive potenze, vengono a coincidere ogniqualvolta il carico sia caratterizzato da una suscettanza indipendente dalla frequenza. Un tipico esempio di tale situazione è rappresentata dal circuito riportato in figura 1.19.

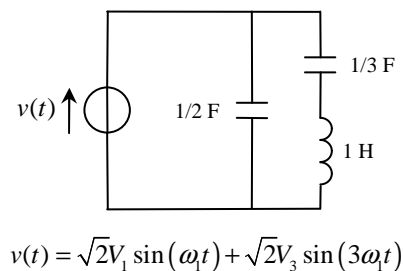


Figura 1.19 Tipico circuito per il quale la potenza reattiva di Budeanu e la potenza reattiva di Czarnecki sono coincidenti

Con riferimento alla figura 1.19 si ha difatti che:

$$B_1 = B_3 \tag{1.140}$$

da cui segue che la corrente reattiva di Czarnecki è la medesima di quella definita da Budeanu.

Un ulteriore concetto relativo alla teoria di Budeanu, ovvero il concetto di potenza distortente, è stato fortemente contestato e ritenuto privo di alcun fondamento fisico.

Per ricercare una possibile interpretazione matematica o fisica di suddetta potenza è utile fare riferimento ancora una volta alla scomposizione sopra proposta (1.137).

Si supponga, dunque, di avere un carico caratterizzato da una suscettanza e da una conduttanza indipendenti dalla frequenza, ovvero si supponga che entrambe le correnti di scattering siano nulle; sotto tali condizioni, la corrente $i(t)$ assume il seguente aspetto:

$$i(t) = \sqrt{2}G_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2}B_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (1.141)$$

o, alternativamente:

$$i(t) = \sqrt{2} \sqrt{G_e^2 + B_e^2} \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n + \arctan \frac{B_e}{G_e}) \quad (1.142)$$

Ne consegue dunque, essendo G_e e B_e costanti, che lo sfasamento esistente tra le varie armoniche della tensione e della corrente non varia al variare della frequenza. In altre parole, le varie armoniche della corrente sono sfasate rispetto alle relative armoniche della tensione della medesima quantità indipendentemente dall'ordine di armonicità. Dato che le due correnti di scattering sono strettamente correlate al concetto di potenza distortante di Budeanu, si ha che quest'ultimo può essere visto come un indice di tale proprietà. Per convincersi di quanto esposto, si riconsiderino i due circuiti analizzati in 11] e presentati al paragrafo 1.3.1.

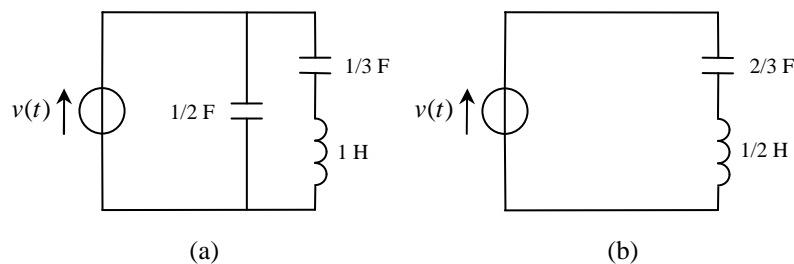


Figura 1.20 Circuiti esemplificativi (a) (b)

Se si suppone che al carico sia applicata una generica tensione pari a:

$$v(t) = \sqrt{2}V_1 \sin(\omega_1 t) + \sqrt{2}V_3 \sin(3\omega_1 t) \quad (1.143)$$

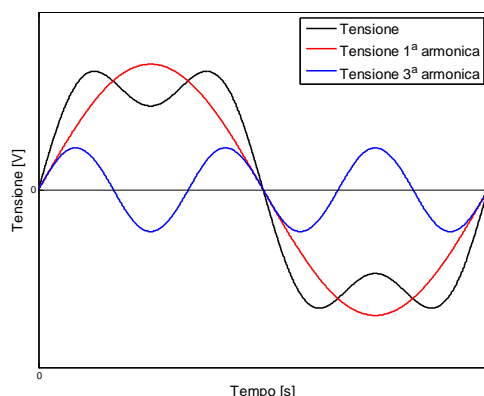
e se si suppone che la pulsazione angolare dell'armonica fondamentale sia pari a $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ si ha che la suscettanza alle varie armoniche, la potenza distortente e lo sfasamento armonico assumono, per i due circuiti, i valori riportati in tabella 1.8.

| | B_1 [S] | B_3 [S] | D_B [VA] | φ_1 [rad/s] | φ_3 [rad/s] |
|-----------|-----------|-----------|------------|---------------------|---------------------|
| Circ. (a) | 1 | 1 | = 0 | $\pi / 2$ | $\pi / 2$ |
| Circ. (b) | 1 | -1 | $\neq 0$ | $\pi / 2$ | $3\pi / 2$ |

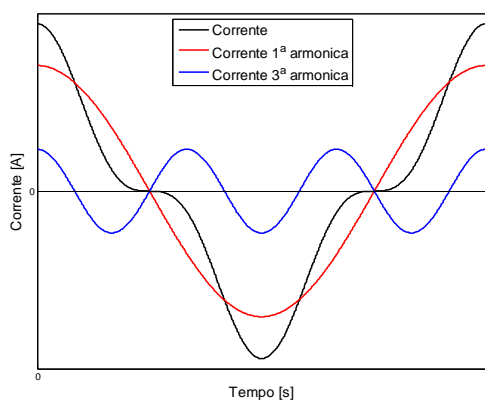
Tabella 1.8 Suscettanze, potenze distortenti e sfasamenti armonici per i circuiti riportati in figura 2.20

Gli andamenti delle armoniche della tensione e gli andamenti delle armoniche delle correnti dei due circuiti analizzati sono riportati rispettivamente in figura 1.21 (a) e in figura 1.21 (b) (c).

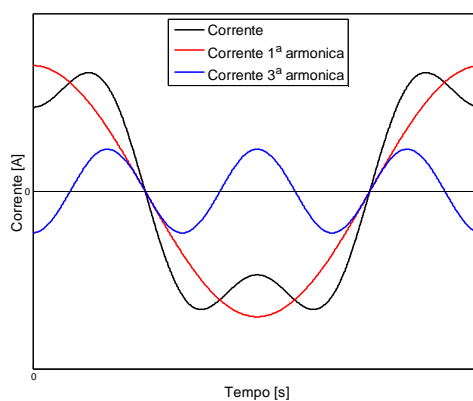
Se si analizzano i dati contenuti in tabella 1.8 unitamente all'andamento delle armoniche delle correnti rispetto alle armoniche della tensione di alimentazione è possibile avere conferma di quanto sopra esposto. In particolare, nel primo caso, si ha che, essendo la potenza distortente nulla, lo sfasamento esistente tra le armoniche della tensione e le armoniche della corrente non varia al variare della frequenza; nel secondo caso, essendo la potenza distortente non nulla, si ha invece che lo sfasamento esistente tra le armoniche della tensione e le armoniche della corrente varia al variare dell'ordine di armonicità. Il concetto di potenza distortente riacquista, di conseguenza, credibilità se associato allo sfasamento armonico anziché alla distorsione delle forme d'onda come supposto, e confutato, da Czarnecki. Tale risultato, probabilmente di scarso interesse pratico mostra comunque come, teoricamente, sia possibile attribuire una particolare proprietà anche alla potenza distortente.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.21 Andamento delle armoniche della tensione (a); andamento delle armoniche della corrente relative al circuito di figura 1.20(a) (b); andamento delle armoniche della corrente relative al circuito di figura 1.20(b) (c)

A completamento di quanto esposto si osservi come le componenti della corrente introdotte siano ortogonali tra loro; ne consegue che i quadrati dei loro valori efficaci possono essere sommati a dare il quadrato del valore efficace della corrente totale:

$$I^2 = I_a^2 + I_{rB}^2 + I_s^2 + I_{sB}^2 \quad (1.144)$$

Da ciò segue che la potenza apparente può essere decomposta come:

$$S^2 = V^2 I^2 = V^2 (I_a^2 + I_{rB}^2 + I_s^2 + I_{sB}^2) = P^2 + Q_B^2 + D_s^2 + D_{sB}^2 \quad (1.145)$$

dove:

$$P = G_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \quad (1.146)$$

$$Q_B = B_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \quad (1.147)$$

$$D_s = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} (G_n - G_e)^2 V_n^2} \quad (1.148)$$

$$D_{sB} = \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2 \sum_{n \in \mathcal{M}} (B_n - B_e)^2 V_n^2} \quad (1.149)$$

Ovviamente si ha che la radice quadrata della somma dei quadrati delle potenze D_s e D_{sB} rappresenta la potenza distorcente di Budeanu.

In conclusione è possibile quindi affermare che sia la potenza reattiva Q_B che la potenza distorcente D_B introdotte da Budeanu godono di una possibile interpretazione fisica o matematica in antitesi a quanto esposto da Czarnecki.

Capitolo 2

APPROCCIO UNIFICATO ALLA DEFINIZIONE DELLE COMPONENTI DI POTENZA REATTIVA

2.1 Definizione di corrente reattiva come risultato di un processo di minimizzazione

2.1.1 Introduzione

Nel precedente capitolo si è visto come la corrente totale possa essere decomposta in sottocomponenti a cui è possibile a posteriori attribuire particolari proprietà fisiche. Tutti gli autori pervengono a differenti definizioni di corrente (e potenza) “reattiva” e giustificano, chi espressamente chi meno, il nome attribuito a questa parte della corrente non attiva di Fryze con il fatto che tale componente può essere totalmente compensata con una data rete di elementi reattivi passivi posta in derivazione al carico. Ovviamente, la topologia di tale rete, varia a seconda della definizione data per la corrente reattiva.

Dato che tale compensazione viene ottenuta per mezzo di reti passive e reattive, in grado dunque di fornire al carico solamente una corrente armonica in quadratura con la tensione, si ha che essi attribuiscono il significato di corrente reattiva al risultato del processo di compensazione (o minimizzazione) del valore efficace di detta corrente. Ciò implica che le varie definizioni possano essere viste come il risultato di un problema di minimizzazione, vincolata o meno, nel quale la funzione obiettivo è ovviamente il valore efficace della corrente armonica in quadratura o, altresì, il valore efficace della corrente non attiva di Fryze. Per mostrare dunque come tutte le definizioni di corrente reattiva possano essere ricavate seguendo il medesimo approccio, si consideri un carico lineare connesso ad una sorgente di tensione non

sinusoidale e si supponga di voler ridurre le perdite mediante l'inserzione di un opportuna rete posta in derivazione al carico (figura 2.1).

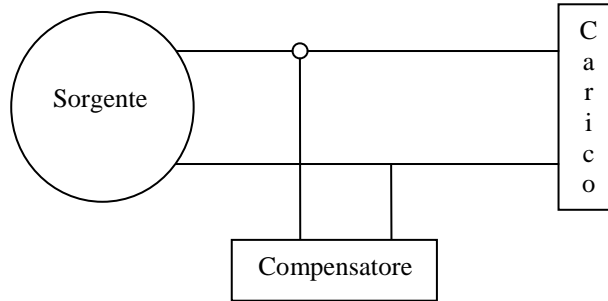


Figura 2.1 Circuito monofase con rete di compensazione

Supponendo che il generatore imponga al carico una tensione del tipo:

$$v(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad (2.1)$$

per quanto visto in precedenza (Cap. 1 § 1.3.3), si ha che la corrente totale che fluisce nel carico può essere riscritta come:

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} G_n V_n \sin(n\omega t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} B_{Ln} V_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad (2.2)$$

dove con B_{Ln} si sono indicati i valori assunti dalla suscettanza del carico in corrispondenza delle M armoniche della tensione. La corrente fornita dal compensatore, essendo armonica in quadratura con la tensione di alimentazione, avrà dunque la seguente forma:

$$i_{qC}(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} B_{Cn} V_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad (2.3)$$

dove con B_{Cn} si sono indicati i valori assunti dalla suscettanza della rete di compensazione in corrispondenza delle M armoniche della tensione.

Se si scrive la legge di Kirchhoff delle correnti al nodo indicato in figura 2.1, si ha che la corrente armonica in quadratura circolante lungo la linea a seguito dell'inserzione della rete di compensazione è pari a:

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} G_n V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} B_{Ln} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} B_{Cn} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.4)$$

o alternativamente:

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} G_n V_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) + \sqrt{2} \sum_{n \in \mathcal{M}} (B_{Ln} + B_{Cn}) V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.5)$$

E' noto che le perdite di trasmissione sono legate al valore efficace di tale corrente; al fine di ridurle, occorre dunque ricercare i valori delle M variabili B_{Cn} che minimizzano queste ultime. In altre parole occorre minimizzare la seguente funzione:

$$I_q^2 = \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + B_{Cn})^2 V_n^2 \right] \quad (2.6)$$

Alla luce di quanto espresso vediamo ora come è possibile determinare le correnti reattive proposte dai vari autori come il risultato di un processo di minimizzazione.

2.1.2 *Budeanu*

Si supponga di voler minimizzare la corrente armonica in quadratura alla tensione di alimentazione inserendo in derivazione al carico una rete caratterizzata dall'avere suscettanza indipendente dall'ordine di armonicità. Analiticamente ciò si traduce nella risoluzione del seguente problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + B_{Cn})^2 V_n^2 \right] \\ & B_{Cn} = B_e \quad \forall n \in \mathcal{M} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esso può essere trasformato in un problema non vincolato del tutto equivalente utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (App. B § B.5) o, più semplicemente, sostituendo gli M vincoli all'interno della funzione da minimizzare. Procedendo in tal senso, che risulta più semplice in quanto ci si riconduce ad avere una funzione in una sola variabile, si può scrivere che:

$$\text{Min} \quad \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + B_e)^2 V_n^2 \right] \quad (2.8)$$

derivando rispetto all'unica variabile B_e e ponendo tale derivata pari a zero si ottiene quindi il seguente risultato:

$$B_e = - \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} B_{Ln} V_n^2}{\sum_{n \in \mathcal{M}} V_n^2} \quad (2.9)$$

Da ciò consegue che la rete di compensazione fornisce al carico una corrente avente il seguente andamento:

$$i_{C_B}(t) = -\sqrt{2} B_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.10)$$

Per come tale corrente è stata derivata è possibile ritenere che nel carico vi sia una componente della corrente non attiva pari ed opposta:

$$i_{r_B}(t) = \sqrt{2} B_e \sum_{n \in \mathcal{M}} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.11)$$

A tale corrente è possibile attribuire il nome di corrente reattiva di Budeanu. Essa rappresenta la quota parte della corrente armonica in quadratura con la tensione, e dunque della corrente non attiva di Fryze, che è compensabile con un rete avente suscettanza, indipendente dalla frequenza, armonica per armonica pari a B_e . La quota parte di corrente non attiva che non è possibile compensare con tale rete rappresenta un termine residuo.

E' immediato verificare che tale corrente è realmente quella associata alla potenza reattiva di Budeanu confrontando quest'ultima corrente con quella riportata nel precedente capitolo (1.138). E' possibile dunque concludere che la potenza reattiva di Budeanu può essere ricavata imponendo come vincolo l'indipendenza dalla frequenza alla rete di compensazione.

2.1.3 *Kusters e Moore - Capacitiva*

Si supponga ora di rimuovere il vincolo introdotto da Budeanu e di sostituirlo con un vincolo differente. In particolare si ipotizzi che il legame esistente tra i valori assunti dalla funzione suscettanza alle varie armoniche sia regolato dalla seguente equazione:

$$B_{C_n} = n\omega_1 C \quad (2.12)$$

Ovvero si supponga che la rete di compensazione posta in derivazione al carico sia costituita da un semplice condensatore. Il problema di minimizzazione assume dunque il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{L_n} + B_{C_n})^2 V_n^2 \right] \\ & B_{C_n} = n\omega_1 C \quad \forall n \in \mathcal{M} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Al fine di risolvere tale problema è possibile sostituire il vincolo all'interno della funzione che occorre minimizzare. Procedendo in tal senso, il problema assume il seguente aspetto:

$$\text{Min} \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + n\omega_1 C)^2 V_n^2 \right] \quad (2.14)$$

Derivando rispetto a C e ponendo la derivata pari a zero; si ha dunque che:

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + n\omega_1 C) n\omega_1 V_n^2 \right] = 0 \quad (2.15)$$

da cui segue che:

$$C = - \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} B_{Ln} n V_n^2}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} n^2 V_n^2} \quad (2.16)$$

La rete di compensazione è percorsa da una corrente avente il seguente andamento:

$$i_{C_{K-M}}(t) = \sqrt{2}C \sum_{n \in \mathcal{M}} n\omega_1 V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.17)$$

Per come tale corrente è stata derivata è possibile ritenere che nel carico vi sia una componente della corrente non attiva pari ed opposta:

$$i_{r_{K-M_C}}(t) = -\sqrt{2}C \sum_{n \in \mathcal{M}} n\omega_1 V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.18)$$

Tale corrente risulta esattamente pari a quella a cui Kusters e Moore hanno attribuito il nome di corrente reattiva capacitiva. Ciò può essere facilmente verificato confrontando tale corrente con quella ricavata nel precedente capitolo (1.114). Essa

rappresenta dunque la quota parte della corrente armonica in quadratura con la tensione di alimentazione e, di conseguenza, della corrente non attiva di Fryze, che è compensabile con l'ausilio di un condensatore. La quota parte di corrente non attiva che non è possibile compensare con tale elemento rappresenta un termine residuo. E' possibile dunque concludere che la potenza reattiva capacitiva di Kusters e Moore è la quota parte della potenza apparente del carico ricavabile imponendo sulla rete di compensazione il vincolo (2.12).

Occorre osservare come in realtà la definizione di corrente reattiva di Kusters and Moore sia formalmente differente, in quanto non ricorre all'uso della serie di Fourier. Essa esprime però il medesimo concetto della (2.18) e per tale motivo, al fine di poterla porre in relazione con le rimanenti correnti reattive, in tale trattazione è assunta non nella sua forma integrale ma nella sua forma sviluppata secondo la serie di Fourier.

2.1.4 *Kusters e Moore - Induttiva*

Si supponga di voler minimizzare la corrente non attiva di Fryze con una rete di compensazione costituita da un solo induttore; il problema (2.13) assume dunque il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + B_{Cn})^2 V_n^2 \right] \\ & B_{Cn} = -\frac{1}{n\omega L} \end{aligned} \tag{2.19}$$

In modo analogo a quanto visto in precedenza, al fine di risolvere tale problema, è possibile sostituire il vincolo all'interno della funzione oggetto della minimizzazione. Procedendo in tal senso, il problema assume il seguente aspetto:

$$\text{Min} \quad \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[\left(B_{Ln} - \frac{1}{n\omega L} \right)^2 V_n^2 \right] \tag{2.20}$$

Derivando rispetto a L e ponendo la derivata pari a zero si ha dunque che:

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} \left[\left(B_{Ln} - \frac{1}{n\omega_1 L} \right) \frac{V_n^2}{n^2 \omega_1^2 L^2} \right] = 0 \quad (2.21)$$

da cui segue che:

$$L = \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n^2}{n^2}}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{B_{Ln} V_n}{n}} \quad (2.22)$$

La rete di compensazione fornisce al carico la corrente:

$$i_{c_{K-M}}(t) = \sqrt{2} \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n}{n\omega_1} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.23)$$

Per come tale corrente è stata derivata è possibile ritenere che nel carico via sia una componente della corrente non attiva pari ed opposta.

$$i_{r_{K-M_L}}(t) = -\sqrt{2} \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{V_n}{n\omega_1} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (2.24)$$

Tale corrente risulta esattamente pari a quella a cui Kusters e Moore hanno attribuito il nome di corrente reattiva induttiva. Ciò può essere facilmente verificato confrontando tale corrente con quella ricavata nel precedente capitolo (1.115). Essa rappresenta dunque la quota parte della corrente armonica in quadratura con la tensione e, di conseguenza, della corrente non attiva di Fryze, che è compensabile con l'ausilio di un condensatore. La quota parte di corrente non attiva che non è possibile compensare con tale elemento rappresenta un termine residuo. E' possibile dunque concludere che la potenza reattiva induttiva di Kusters e Moore è la quota

parte della potenza apparente del carico ricavabile imponendo sulla rete di compensazione il vincolo contenuto nel problema (2.19).

2.1.5 *Czarnecki*

Si supponga ora di rimuovere qualsiasi tipo di vincolo:

$$\text{Min} \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + B_{Cn})^2 V_n^2 \right] \quad (2.25)$$

La funzione oggetto della minimizzazione, essendo la somma di funzioni quadratiche, ammette come soluzione:

$$B_{Cn} = -B_{Ln} \quad (2.26)$$

Da ciò è facile dedurre come Czarnecki associ alla corrente armonica in quadratura il significato di corrente reattiva. Essa rappresenta la quota parte della corrente non attiva di Fryze che è compensabile con l'ausilio di una rete avente suscettanza, armonica per armonica, pari ed opposta a quella del carico. La quota parte di corrente non attiva che non è possibile compensare con tale rete, ovvero la corrente a cui l'autore attribuisce il nome di corrente di scattering, rappresenta un termine residuo. Concettualmente la sua natura è dunque del tutto identica alle correnti residue definite con riferimento alla teoria di Budeanu e di Kusters e Moore. E' possibile dunque concludere che la potenza reattiva di Czarnecki è la quota parte della potenza apparente del carico ricavabile non imponendo alcun vincolo sulla rete di compensazione. Si noti che tale definizione coincide, con riferimento ai carichi lineari, a quella proposta da Shepherd e Zakikhani e a quella proposta da Sharon (Cap. 1 § 1.3.3 § 1.3.4). Anche le definizioni di potenza reattiva fornita da tali autori ricadono dunque nel processo di compensazione espresso dal problema (2.25); per tali teorie valgono dunque considerazioni simili, con le dovute modifiche facilmente intuibili con riferimento a quanto espresso nel primo capitolo, a quelle svolte con riferimento alla teoria di Czarnecki. Nel proseguo della trattazione si farà comunque

sempre riferimento alla teoria di Czarnecki in quanto essa è formalmente più raffinata e corretta di quelle proposte dagli autori sopracitati (Cap. 1 § 1.3.7)

2.1.6 *Ulteriori definizioni di corrente reattiva*

Quanto esposto nei precedenti paragrafi mostra chiaramente come tutti gli autori citati abbiano, più o meno consapevolmente, attribuito il nome di corrente reattiva a quella quota parte della corrente non attiva di Fryze che è possibile compensare con una rete avente determinate caratteristiche. In particolare, Budeanu, non consciamente, ha attribuito il nome di corrente reattiva alla quantità compensabile con una rete passiva e reattiva avente suscettanza indipendente dalla frequenza; Czarnecki ha attribuito invece il nome di corrente reattiva alla quantità compensabile con una rete passiva e reattiva avente suscettanza, armonica per armonica, pari ad opposta a quella del carico; Kusters and Moore, a loro volta, hanno attribuito il nome di corrente reattiva alla quantità compensabile con un condensatore o con un induttore.

Se si assume come valida la dicitura “reattiva” associata a tale proprietà, ovvero alla compensabilità mediante una rete avente particolari caratteristiche, si ha che esistono infinite definizioni plausibili. Al fine di mostrare quanto appena asserito è possibile impostare, ancora una volta, un problema di minimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{n \in \mathcal{M}} \left[(B_{Ln} + B_{Cn})^2 V_n^2 \right] \\ & B_{Ck} = 0 \quad \forall k \in \mathcal{M}_{m_1, m_2} \end{aligned} \tag{2.27}$$

dove con \mathcal{M}_{m_1, m_2} si è indicato il gruppo di armoniche $\mathcal{M}_{m_1, m_2} = \{m_3, \dots, m_M\}$, ovvero si è indicato il gruppo di armoniche \mathcal{M} privato dell'elemento m_1 e dell'elemento m_2 .

Tale problema di minimizzazione vincolata nelle M variabili B_{Cn} può esser riscritto in modo del tutto equivalente come:

$$\text{Min} \quad (B_{Lm1} + B_{Cm1})^2 V_{m1}^2 + (B_{Lm2} + B_{Cm2})^2 V_{m2}^2 + \sum_{k \in \mathcal{M}_{m1,m2}} [(B_{Lk} + B_{Ck})^2 V_k^2] \quad (2.28)$$

$$B_{Ck} = 0 \quad \forall k \in \mathcal{M}_{m1,m2}$$

Esso può essere ora trasformato in un problema di minimizzazione non vincolato del tutto equivalente sostituendo gli $M - 2$ vincoli all'interno della funzione da minimizzare. Procedendo in tal senso si può scrivere che:

$$\text{Min} \quad (B_{Lm1} + B_{Cm1})^2 V_{m1}^2 + (B_{Lm2} + B_{Cm2})^2 V_{m2}^2 + \sum_{k \in \mathcal{M}_{m1,m2}} B_{Lk}^2 V_k^2 \quad (2.29)$$

La funzione oggetto della minimizzazione, essendo la somma di funzioni quadratiche di cui l'ultimo termine indipendente dalle variabili del problema, ammette come soluzione:

$$B_{Ck} = -B_{Lk} \quad k = m_1, m_2 \quad (2.30)$$

La rete di compensazione fornisce dunque una corrente pari a:

$$i_{C_{m1,m2}}(t) = -\sqrt{2} \sum_{k \in \mathcal{M}_{m1,m2}} B_{Lk} V_k \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad (2.31)$$

Per come tale corrente è stata derivata è possibile ritenere che nel carico vi sia una componente della corrente non attiva pari ed opposta:

$$i_{r_{m1,m2}}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathcal{M}_{m1,m2}} B_{Lk} V_k \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad (2.32)$$

E' immediato verificare che tale corrente è totalmente compensabile con una rete di soli componenti reattivi passivi. In particolare, dato che solitamente nei sistemi

elettrici all'aumentare dell'ordine di armonicità l'ampiezza delle armoniche decresce, si ha che essa potrebbe essere denominata "corrente reattiva dominante".

Essa rappresenta la quota parte della corrente non attiva di Fryze compensabile con una rete passiva e reattiva avente suscettanza pari ed opposta a quella del carico in corrispondenza delle prime due armoniche e suscettanza nulla in corrispondenza delle rimanenti. La quota parte di corrente non attiva che non è possibile compensare con tale rete rappresenta ovviamente ancora una volta un termine residuo. Tale esempio mostra dunque come sia possibile, teoricamente, definire infinite correnti reattive, ciascuna di esse dotata delle medesime proprietà di quelle contenute in letteratura.

2.1.7 Realizzabilità delle reti di compensazione

Affinché quanto esposto al precedente paragrafo abbia effettiva validità, si deve avere che le reti di compensazione descritte siano fisicamente realizzabili; se ciò non fosse verificato si avrebbe ovviamente che quanto mostrato perde di significato. Per quanto concerne la rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki, è provato che essa esiste ed è sintetizzabile così come, essendo la rete composta da un singolo condensatore o da un singolo induttore, per la corrente reattiva capacitiva e induttiva di Kusters and Moore. Rimane dunque da verificare se sia possibile realizzare una rete di compensazione che realizzi corrente di Budeanu nulla e nel contempo rispetti gli $M - 1$ vincoli imposti (2.7). Ovviamente un semplice condensatore o induttore non rispetta tali vincoli e da ciò derivano le critiche mosse alla teoria di Budeanu nel corso degli anni.

Per determinare la struttura della rete che consente la completa compensazione della corrente reattiva di Budeanu occorre fare riferimento, come fatto nel capitolo precedente in relazione alla corrente reattiva di Czarnecki, ad alcune nozioni relative alla teoria dei circuiti. Per comprendere come tale rete di compensazione debba essere disegnata è bene ricordare le principali proprietà di cui godo le ammettenze delle reti costituite da soli elementi passivi e reattivi. In particolare è possibile affermare che: poli e zeri di un ammettenza LC risiedono lungo l'asse immaginario e sono tra loro alternati, l'origine e l'infinito costituiscono sempre delle frequenze

critiche di un ammettenza LC e le funzioni suscettanza sono funzioni crescenti (App. A). Affinché dunque la suscettanza della rete di compensazione possa assumere un valore costante in corrispondenza di ciascuna armonica della tensione essa dovrà necessariamente avere:

- un polo nell'origine e uno zero all'infinito se $Q_B < 0$;
- uno zero nell'origine e un polo all'infinito se $Q_B > 0$;
- un polo e uno zero o uno zero e un polo per due armoniche consecutive del gruppo $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_M\}$.

In particolare se $Q_B > 0$ si ha che l'ammettenza della rete di compensazione assume il seguente aspetto:

$$Y_C(s) = A \frac{s \sum_{j=1}^{M-1} (s^2 + z_j^2)}{\sum_{j=1}^{M-1} (s^2 + p_j^2)} \quad (2.33)$$

se invece $Q_B < 0$ l'ammettenza risulta essere:

$$Y_C(s) = A \frac{\sum_{j=1}^{M-1} (s^2 + z_j^2)}{s \sum_{j=1}^{M-1} (s^2 + p_j^2)} \quad (2.34)$$

Ovviamente $Q_B = 0$ implica che non esiste nessuna rete indipendente dalla frequenza in grado di minimizzare le perdite in linea.

La positività e la negatività della potenza reattiva di Budeanu forniscono dunque un'indicazione su come il carico deve essere compensato. In particolare il segno di detta potenza specifica la natura delle frequenze critiche della rete di compensazione nell'origine e all'infinito come si evince chiaramente dalle relazioni (2.33) e (2.34).

In altre parole, se si considera la sintesi delle ammettenze (2.33) (2.34) con il secondo metodo di Foster (App. A § A.3.2), il numero di armoniche specifica il numero di rami posti in parallelo, mentre il segno della potenza reattiva identifica la presenza o meno di un condensatore (o di un induttore) in parallelo a detti rami. In particolare, se $Q_B > 0$ si ha la presenza del condensatore e non dell'induttore, viceversa, nel caso in cui $Q_B < 0$ si ha la presenza dell'induttore e non del condensatore. Dato che la complessità di una immetenza LC è sempre maggiore di un'unità rispetto al numero complessivo di poli e di zeri presenti sull'asse delle frequenze positive, ad esclusione delle frequenze critiche nell'origine e all'infinito [10], si ha che la complessità della rete di compensazione di Budeanu risulta, per qualsiasi condizione di carico, pari a:

$$N = 2M - 1 \quad (2.35)$$

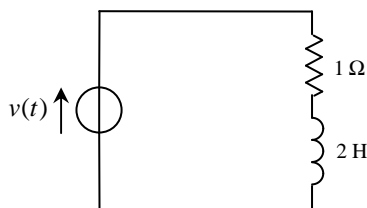
Dove N e M rappresentano rispettivamente il numero di elementi che costituiscono la rete di compensazione e il numero di armoniche della corrente. Per confronto della relazione (2.35) con la relazione (1.126), è facile intuire come vi siano dei casi in cui la complessità della rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu sia pari alla complessità della rete di compensazione proposta da Czarnecki.

Quanto esposto nel presente paragrafo completa la trattazione svolta riguardo tale teoria ad opera di Willems [11] e altresì completa quanto espresso al paragrafo 1.3.9 del precedente capitolo. Quanto illustrato fornisce difatti adeguata risposta a due possibili interrogativi che erano rimasti in sospeso: è possibile realizzare una rete di compensazione indipendente dalla frequenza in grado di realizzare potenza di Budeanu nulla e unitamente di minimizzare le perdite? In caso affermativo qual'è l'aspetto di detta rete? E' comunque lecito porsi un'ulteriore domanda; ci si potrebbe difatti domandare quale sia la metodologia che occorre seguire per determinare i parametri circuitali della rete di compensazione. Gli esempi che seguono oltre a mostrare come fondamentalmente si stia minimizzando la medesima grandezza con reti differenti fornisce risposta a tale ulteriore quesito.

2.2 Esempi numerici

2.2.1 Esempio 1

Si consideri, a titolo di esempio, il circuito riportato in figura 2.2 ([9]):



$$v(t) = \sqrt{2}100 \sin(t) + \frac{\sqrt{2}100}{11} \sin(11t) + \frac{\sqrt{2}100}{13} \sin(13t)$$

Figura 2.2 Circuito esempio 1

Budeanu

Al fine di garantire la totale compensazione della corrente reattiva di Budeanu, essendo $Q_B > 0$ ed essendo $M = 3$, l'ammettenza della rete posta in derivazione al carico dovrà essere del tipo:

$$Y_C(s) = A \frac{s(s^2 + z_1^2)(s^2 + z_2^2)}{(s^2 + p_1^2)(s^2 + p_2^2)} \quad (2.36)$$

e dunque, in accordo con quanto espresso dalla relazione (2.35), la rete di compensazione sarà costituita da un numero di elementi pari a $N = 5$. L'ammettenza (2.36) deve necessariamente soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 < p_1 < 11 \\ 11 < p_2 < 13 \end{cases} \quad (2.37)$$

Se quest'ultime non fossero difatti verificate non sarebbe possibile avere suscettanza costante in corrispondenza di ciascuna armonica della corrente.

La relazione (2.36) può essere riscritta in modo alternativo come:

$$Y_C(s) = \frac{a_5 s^5 + a_3 s^3 + a_1 s}{(s^2 + p_1^2)(s^2 + p_2^2)} \quad (2.38)$$

Si hanno dunque cinque incognite e solo tre condizioni del tipo:

$$\text{Im}\{Y_C(jn)\} = B_e \quad \forall n \in \mathcal{M} \quad (2.39)$$

da imporre. Al fine di rendere determinato il sistema risultante dall'imposizione delle condizioni (2.39), occorre fissare due dei cinque parametri contenuti nella relazione (2.38). Supponendo di porre, per esempio, $p_1 = 5$ e $p_2 = 11,8$ è possibile ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1 - a_3 + a_5 = 1310,5152 \\ 11a_1 - 1331a_3 + 161051a_5 = -691,6608 \\ 13a_1 - 2197a_3 + 371293a_5 = 1692,7488 \end{cases} \quad (2.40)$$

la cui risoluzione conduce ai seguenti risultati: $a_1 = 1333,1$, $a_3 = 22,677$ e $a_5 = 0,092$; l'ammettanza (2.38) assume dunque il seguente aspetto:

$$Y_C(s) = \frac{0,092s^5 + 22,677s^3 + 1333,1s}{(s^2 + 5^2)(s^2 + 11,8^2)} \quad (2.41)$$

Tale funzione può essere ora sintetizzata utilizzando uno dei metodi di sintesi esposti in appendice A. Se si suppone di utilizzare il secondo metodo di Foster (App.

A § A.3.2, § A.4.2) si ha, tralasciando i conti, che la rete di compensazione assume l'aspetto riportato in figura 2.3.

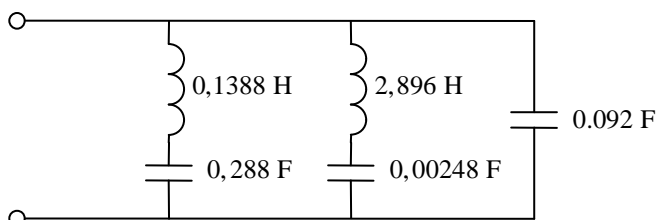


Figura 2.3 Rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu (secondo metodo di Foster)

Se si suppone invece di utilizzare il primo metodo di Cauer (App. A § A.3.3, § A.4.3), la rete di compensazione assume l'aspetto riportato in figura 2.4.

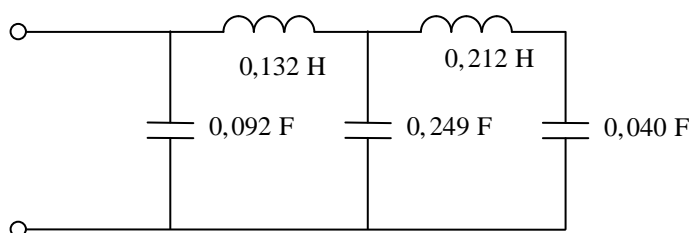


Figura 2.4 Rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu (primo metodo di Cauer)

In tabella 2.1 sono riportati i valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione. Osservando i dati contenuti in essa si evince come l'inserzione di compensazione modifichi solamente la potenza Q_B lasciando inalterata, ovviamente, la potenza attiva ed inoltre la potenza distorcente D_B . A completamento del presente esempio si sono riportati anche i valori che si sarebbero ottenuti qualora si fosse annullata la potenza reattiva di Budeanu utilizzando un singolo condensatore (tabella 2.2). Il valore di tale condensatore può essere ricavato utilizzando la relazione (1.45); numericamente esso risulta essere pari a $C = 0,343$ F.

Dato che tale elemento non soddisfa i vincoli imposti per ricavare la corrente reattiva di Budeanu, l'annullamento di quest'ultima risulta in un peggioramento del fattore

di potenza come era lecito attendersi date le considerazioni inerenti a tale teoria [17] (Cap. 1 § 1.3.8 § 1.3.9).

| | Senza rete di comp. | Con rete di comp. |
|-------------------|---------------------|-------------------|
| S [VA] | 4504,025 | 2058,650 |
| P [W] | 2000,257 | 2000,257 |
| Q_B [VA] | 4006,021 | 0 |
| D_B [VA] | 486,835 | 486,835 |
| λ [Adim.] | 0,444 | 0,971 |

Tabella 2.1 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione

| | Senza condensatore | Con condensatore |
|-------------------|--------------------|------------------|
| C [F] | - | 0,343 |
| S [VA] | 4504,025 | 5299,928 |
| P [W] | 2000,257 | 2000,257 |
| Q_B [VA] | 4006,021 | 0 |
| D_B [VA] | 486,835 | 4907,973 |
| λ [Adim.] | 0,444 | 0,377 |

Tabella 2.2 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione per mezzo di un condensatore

In figura 2.5 è riportato l'andamento della corrente non attiva di Fryze nella situazione di carico non compensato e nella situazione di carico compensato per mezzo delle reti riportate in figura 2.3 e in figura 2.4.

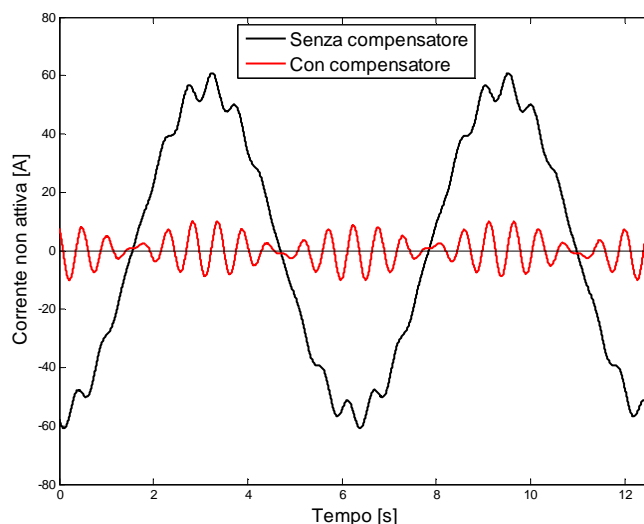


Figura 2.5 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione

Czarnecki

Per quanto esposto, al fine di garantire la totale compensazione della corrente reattiva di Czarnecki, l'ammettenza della rete posta in derivazione al carico dovrà essere del tipo:

$$Y_C(s) = A \frac{s(s^2 + z_1^2)(s^2 + z_2^2)}{(s^2 + p_1^2)(s^2 + p_2^2)} \quad (2.42)$$

Tale ammettenza deve necessariamente soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 < p_1 < 11 \\ 11 < p_2 < 13 \end{cases} \quad (2.43)$$

Se quest'ultime non fossero difatti verificate si avrebbe la mancata compensazione di alcune delle armoniche presenti nella corrente. La relazione (2.42) può essere riscritta in modo alternativo come:

$$Y_C(s) = \frac{a_5 s^5 + a_3 s^3 + a_1 s}{(s^2 + p_1^2)(s^2 + p_2^2)} \quad (2.44)$$

Si hanno dunque cinque incognite e solo tre condizioni del tipo:

$$\text{Im}\{Y_C(jn)\} = -B_n \quad \forall n \in \mathcal{M} \quad (2.45)$$

da imporre. Al fine di rendere determinato il sistema risultante dall'imposizione delle condizioni (2.43), occorre fissare due dei cinque parametri contenuti nella relazione (2.44). Supponendo di porre, per esempio, $p_1 = 5$ e $p_2 = 11,8$ è possibile ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1 - a_3 + a_5 = 1327,104 \\ 11a_1 - 1331a_3 + 1610515a_5 = -79,497216 \\ 13a_1 - 2197a_3 + 371293a_5 = 164,560896 \end{cases} \quad (2.46)$$

la cui risoluzione conduce ai seguenti risultati: $a_1 = 1346,530$, $a_3 = 19,495$ e $a_5 = 0,0686$; l'ammettenza (2.44) assume dunque il seguente aspetto:

$$Y_C(s) = \frac{0,0686s^5 + 19,495s^3 + 1346,530s}{(s^2 + 5^2)(s^2 + 11,8^2)} \quad (2.47)$$

Tale funzione può essere ora sintetizzata utilizzando uno dei metodi di sintesi esposti in Appendice A. Se si suppone di utilizzare il secondo metodo di Foster (App. A § A.3.2, § A.4.2), si ha, tralasciando i calcoli, che la rete di compensazione assume l'aspetto riportato in figura 2.5.

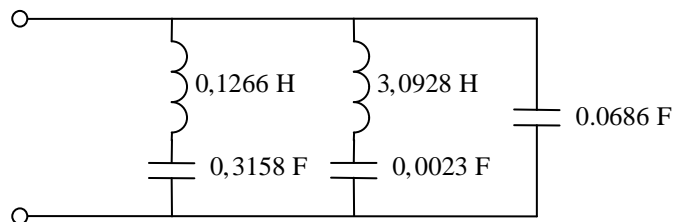


Figura 2.6 Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki (secondo metodo di Foster)

Se si suppone invece di utilizzare il primo metodo di Cauer (App. A § A.3.3, § A.4.3), la rete di compensazione assumerà l'aspetto riportato in figura 2.6.

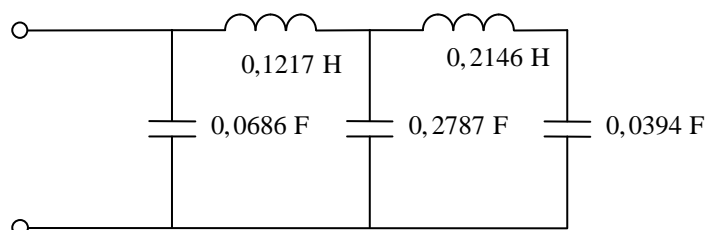


Figura 2.7 Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki (primo metodo di Cauer)

Se si confrontano le figure 2.3 e 2.4 con le figure 2.5 e 2.6 è possibile notare come in caso di carico ohmico-induttivo serie la rete che consente la totale compensazione della potenza reattiva di Budeanu e la rete che consente la totale compensazione della potenza reattiva di Czarnecki abbiano la medesima struttura ma parametri differenti. Un medesimo risultato si sarebbe ottenuto qualora il carico fosse stato ohmico-capacitivo serie. Ciò mostra dunque un'altra particolarità della corrente reattiva di Budeanu non descritta nei paragrafi 1.3.8 e 1.3.9 del capitolo precedente; in caso di carichi ohmici-induttivi serie o ohmici-capacitivi serie essa è la quota parte della corrente non attiva compensabile con una rete avente una struttura analoga a quella che consente la totale compensazione della corrente reattiva di Czarnecki.

In tabella 2.3 sono riportate le principali grandezze prima e dopo la compensazione. Se si confrontano tali risultati con quelli precedentemente ottenuti è facile osservare come la rete di compensazione di Czarnecki consenta una migliore compensazione

della corrente armonica in quadratura rispetto alla rete di compensazione di Budeanu.

| | Senza rete di comp. | Con rete di comp. |
|-------------------|---------------------|-------------------|
| S [VA] | 4504,025 | 2014,387 |
| P [W] | 2000,257 | 2000,257 |
| Q_c [VA] | 4028,587 | 0 |
| D_c [VA] | 238,176 | 238,176 |
| λ [Adim.] | 0,444 | 0,992 |

Tabella 2.3 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione

In figura 2.8 è riportato l'andamento della corrente non attiva di Fryze nella situazione di carico non compensato e nella situazione di carico compensato per mezzo delle reti riportate in figura 2.6 e in figura 2.7.

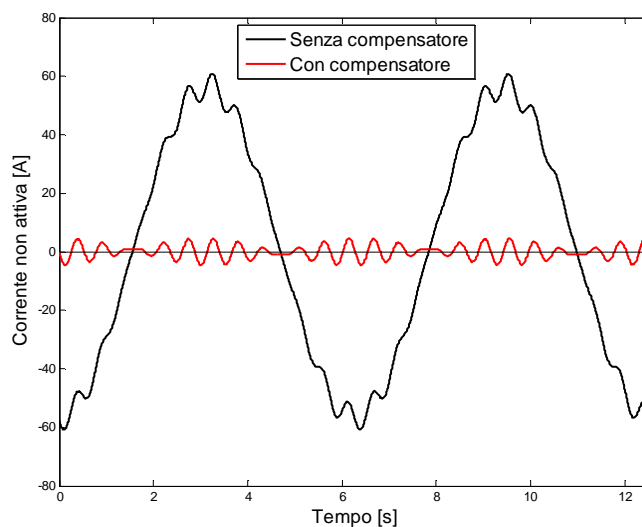


Figura 2.8 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione

Kusters e Moore - Capacitiva

Nel caso di Kusters e Moore, data la semplicità del circuito di compensazione, non è necessario effettuare alcuna sintesi e il valore del condensatore può essere ricavato semplicemente con l'utilizzo della seguente formula:

$$C = - \frac{\sum_{n \in \mathcal{M}} B_{Ln} n V_n^2}{\omega_1 \sum_{n \in \mathcal{M}} n^2 V_n^2} \quad (2.48)$$

Il circuito di compensazione risulta dunque essere il seguente:

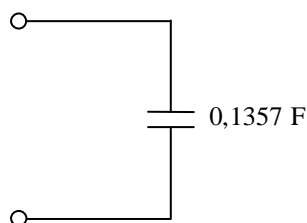


Figura 2.9 Rete di compensazione della corrente reattiva di Kusters e Moore

In tabella 2.4 sono riportati i valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione.

| | Senza condensatore | Con condensatore |
|-------------------|--------------------|------------------|
| S [VA] | 4504,025 | 3831,980 |
| P [W] | 2000,257 | 2000,257 |
| Q_{K-M} [VA] | -2366,890 | 0 |
| D_{K-M} [VA] | 3268,493 | 3268,493 |
| λ [Adim.] | 0,444 | 0,521 |

Tabella 2.4 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione

In figura 2.10 è riportato l'andamento della corrente non attiva di Fryze nella situazione di carico non compensato e nella situazione di carico compensato per mezzo delle reti riportate in figura 2.9.

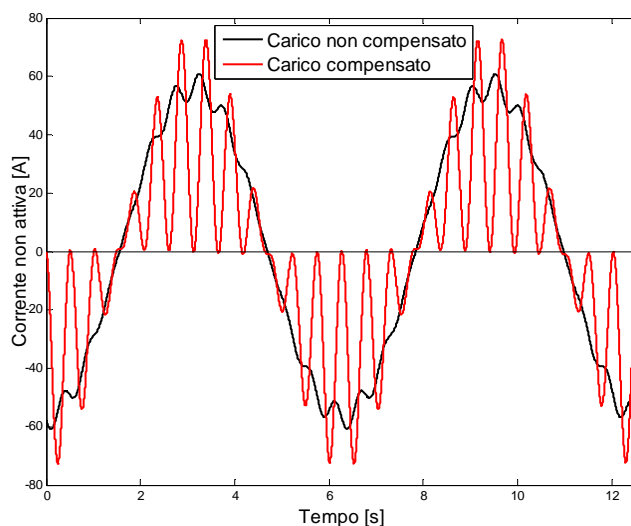


Figura 2.10 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione

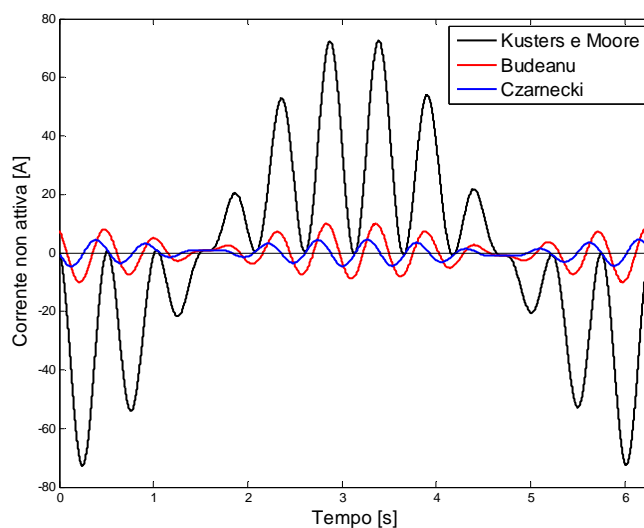
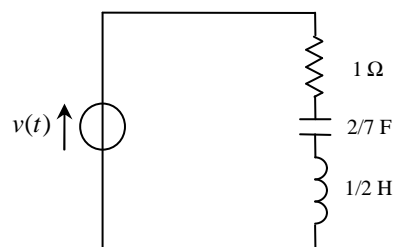


Figura 2.11 Andamento della corrente non attiva di Fryze dopo la compensazione con le tre differenti reti di analizzate

A completamento di quanto esposto nel presente esempio in figura 2.11 è riportato l'andamento della corrente non attiva corrispondente all'inserimento della rete di compensazione di Budeanu, di Czarnecki e di Kusters e Moore. Tale figura simile alle precedenti consente un più immediato confronto tra i risultati ottenuti con le tre differenti reti di compensazione.

2.2.2 Esempio 2

Si consideri il seguente esempio:



$$v(t) = \sqrt{2}100 \sin(t) + \sqrt{2} \frac{100}{3} \sin(3t)$$

Figura 2.12 Circuito esempio 2

Budeanu

Per quanto esposto, al fine di garantire la totale compensazione della corrente reattiva di Budeanu, essendo $Q_B < 0$ e $M = 2$, l'ammettenza della rete posta in derivazione al carico dovrà essere del tipo:

$$Y_C(s) = A \frac{(s^2 + z_1^2)}{s(s^2 + p_1^2)} \quad (2.49)$$

e dunque, in accordo con quanto espresso dalla relazione (2.35), la rete di compensazione sarà costituita da un numero di elementi pari a $N = 3$. L'ammettenza (2.49) deve necessariamente soddisfare la seguente condizione:

$$1 < p_1 < 3 \quad (2.50)$$

Se quest'ultima non fosse difatti verificata non sarebbe possibile avere suscettanza costante in corrispondenza di ciascuna armonica della corrente. La relazione (2.49) può essere riscritta in modo alternativo come:

$$Y_C(s) = \frac{a_2 s^2 + a_0}{s(s^2 + p_1^2)} \quad (2.51)$$

Si hanno dunque tre incognite e solo due condizioni del tipo:

$$\text{Im}\{Y_C(jn)\} = B_e \quad \forall n \in \mathcal{M} \quad (2.52)$$

da imporre. Al fine di rendere determinato il sistema risultante dall'imposizione delle condizioni (2.50) occorre fissare uno dei tre parametri contenuti nella relazione (2.51). Supponendo di porre, per esempio, $p_1 = 2,2$ è possibile ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} -a_0 + a_2 = -0,9216 \\ -a_0 + 9a_2 = 2,9952 \end{cases} \quad (2.53)$$

la cui risoluzione conduce ai seguenti risultati: $a_0 = 1,4112$ e $a_2 = 0,4896$. L'ammettenza (2.51) assume dunque il seguente aspetto:

$$Y_C(s) = \frac{0,4896s^2 + 1,4112}{s(s^2 + 2,2^2)} \quad (2.54)$$

Tale funzione può essere, ora, sintetizzata utilizzando uno dei metodi di sintesi esposti in appendice A. Se si suppone di utilizzare il secondo metodo di Foster, la rete di compensazione assume l'aspetto riportato in figura 2.9.

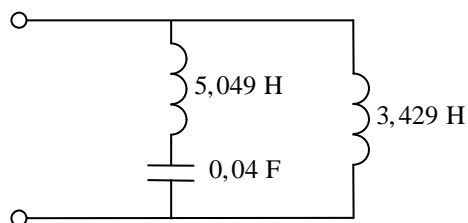


Figura 2.13 Rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu

Se si fosse sintetizzata l'ammettenza (2.54) utilizzando il primo metodo Cauer si sarebbe, essendo la rete costituita da soli tre elementi, ottenuto il medesimo risultato. In tabella 2.5 sono riportati i valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione.

| | Senza rete di comp. | Con rete di comp. |
|-------------------|---------------------|-------------------|
| S [VA] | 4714,045 | 3887,300 |
| P [W] | 2000 | 2000 |
| Q_B [VA] | -2666,667 | 0 |
| D_B [VA] | 3333,333 | 3333,333 |
| λ [Adim.] | 0,4242 | 0,514 |

Tabella 2.5 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione

In figura 2.14 è riportato l'andamento della corrente non attiva di Fryze nella situazione di carico non compensato e nella situazione di carico compensato per mezzo della rete riportata in figura 2.13.

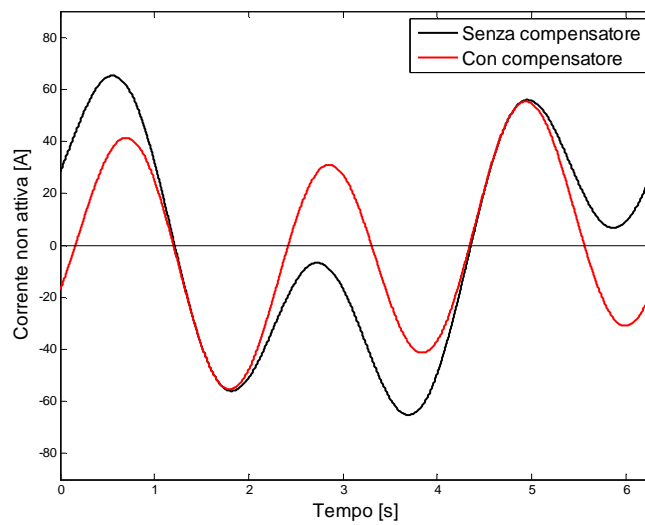


Figura 2.14 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione

Czarnecki

Per quanto esposto, al fine di garantire la totale compensazione della corrente reattiva di Czarnecki, l'ammettenza della rete posta in derivazione al carico dovrà essere del tipo:

$$Y_C(s) = A \frac{(s^2 + z_1^2)}{s} \tag{2.55}$$

la quale può essere riscritta in modo del tutto equivalente come:

$$Y_C(s) = \frac{a_2 s^2 + a_0}{s} \tag{2.56}$$

Si hanno dunque due incognite e due condizioni del tipo:

$$\text{Im}\{Y_C(jn)\} = -B_n \quad \forall n \in \mathcal{M} \tag{2.57}$$

da imporre. In questo caso non occorre dunque imporre nessuna ulteriore condizione sui coefficienti contenuti nella (2.56). In definitiva si ottiene quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} -a_0 + a_2 = -0,5 \\ -a_0 + 9a_2 = 1,5 \end{cases} \quad (2.58)$$

la cui risoluzione conduce ai seguenti risultati: $a_0 = 0,75$, $a_2 = 22,677$; l'ammettenza (2.56) assume dunque il seguente aspetto:

$$Y_C(s) = \frac{0,25s^2 + 0,75}{s} \quad (2.59)$$

La rete di compensazione assume di conseguenza l'aspetto riportato in figura 2.10.

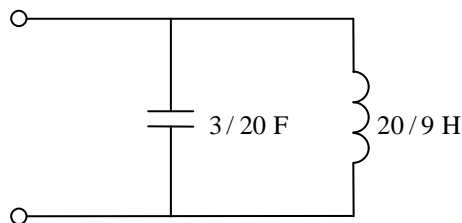


Figura 2.15 Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki

In tabella 2.6 sono riportati i valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione. Se si confrontano tali risultati con quelli precedentemente ottenuti è facile osservare come sia possibile conseguire una maggiore compensazione con un minor numero di elementi. Il presente esempio e il precedente mostrano dunque come in realtà più che definire una grandezza si stia semplicemente minimizzando la medesima quantità utilizzando reti di compensazione differenti scelti sulla base di un determinato criterio.

| | Senza rete di comp. | Con rete di comp. |
|-------------------|---------------------|-------------------|
| S [VA] | 4714,045 | 3333,333 |
| P [W] | 2000 | 2000 |
| Q_C [VA] | 3333,333 | 0 |
| D_C [VA] | 2666,667 | 2666,667 |
| λ [Adim.] | 0,424 | 0,6 |

Tabella 2.6 Valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione

Confrontando le tabelle 2.5 e 2.6 è possibile osservare come la potenza D_C sia pari, a meno del segno, alla potenza Q_B e analogamente è possibile notare come la potenza D_B sia pari alla potenza Q_C . Tale singolare caratteristica è semplicemente dovuta ai particolari valori attribuiti ai parametri circuitali del carico e alla tensione di alimentazione. In figura 2.16 è riportato l'andamento della corrente non attiva di Fryze nella situazione di carico non compensato e nella situazione di carico compensato per mezzo della rete riportata in figura 2.15.

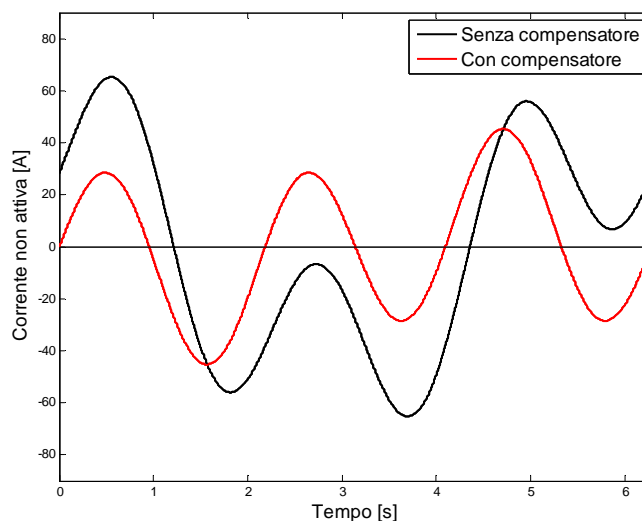


Figura 2.16 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione

In figura 2.17 è riportato l'andamento della corrente non attiva corrispondente all'inserimento della rete di compensazione di Budeanu e di Czarnecki; tale figura,

ancora una volta, consente un più immediato confronto tra i risultati ottenuti con le due differenti reti di compensazione.

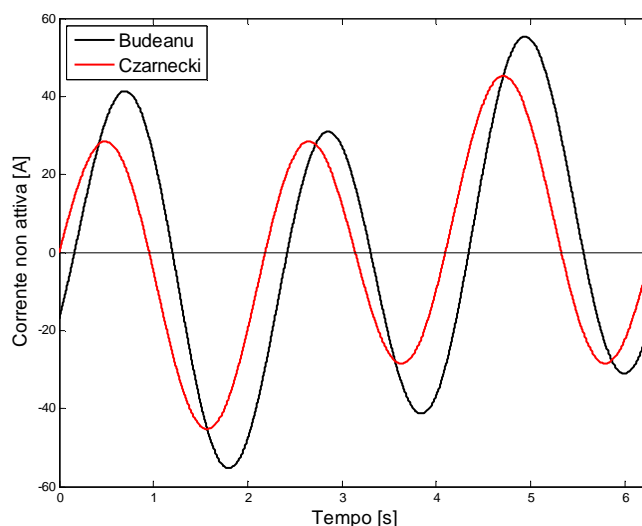
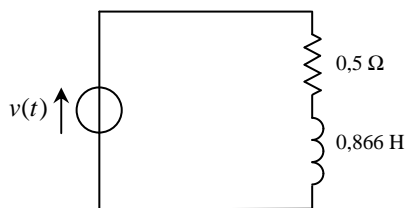


Figura 2.17 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione con le due differenti reti analizzate

2.2.3 Esempio 3

Negli esempi precedenti per determinare i parametri della rete di compensazione della corrente reattiva di Fryze si è fatto ricorso alla definizione della potenza di Fryze stessa. Nel presente esempio viene mostrato come sia possibile, a partire dalla corrente armonica in quadratura, ricavare i valori assunti dai parametri circuitali della rete di compensazione. Per completezza di trattazione si riportano anche i calcoli relativi al compensatore di Czarnecki e di Kusters e Moore. Tale esempio mostra ancora una volta, e forse meglio dei precedenti, come fondamentalmente si stia semplicemente minimizzando la medesima corrente con reti differenti, conseguendo risultati più o meno buoni. Si consideri dunque un carico ohmico-induttivo, che riveste all'atto pratico la situazione più frequente nelle applicazioni elettriche. Il circuito esemplificativo preso in esame è riportato in figura 2.11 ([10]):



$$v(t) = \sqrt{2}100\sin(t) + \sqrt{2}3,5\sin(5t) + \sqrt{2}2\sin(7t)$$

Figura 2.18 Circuito esempio 3

Si supponga di collegare in derivazione al carico una rete avente la struttura riportata in figura 2.12.

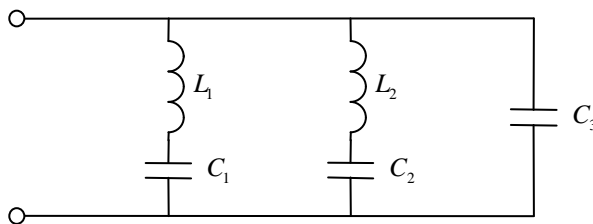


Figura 2.19 Rete di compensazione impiegata

Czarnecki

Per quanto visto in precedenza occorre, al fine di minimizzare la corrente non attiva di Fryze, risolvere il seguente problema di minimizzazione:

$$\text{Min} \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(B_{Ln} + n\omega_1 C_M + \sum_{j=1}^2 \frac{n\omega_1 C_j}{1 - n^2 \omega_1^2 L_j C_j} \right)^2 V_n^2 \tag{2.60}$$

$$L_j C_j = \frac{1}{r_j^2 \omega_1^2} \quad r_j \in \text{Re} \quad m_j < r_j < m_{j+1}$$

dove i vincoli del tipo:

$$L_j C_j = \frac{1}{r_j \omega_1^2} \quad r_j \in \text{Re} \quad m_j < r_j < m_{j+1} \quad (2.61)$$

equivalgono ad imporre i poli della funzione ammettenza (come visto nei precedenti esempi). Supponendo di imporre $L_1 C_1 = 100/1089$ e di imporre $L_2 C_2 = 100/3481$ si ottiene, risolvendo il problema (2.60), la rete di compensazione riportata in figura 2.13.

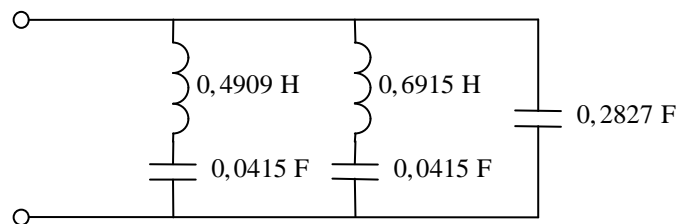


Figura 2.20 Rete di compensazione della corrente reattiva di Czarnecki

Budeanu

Si supponga al medesimo problema di minimizzazione di aggiungere due ulteriori vincoli che esprimano il fatto che la suscettanza della rete di compensazione sia indipendente dalla frequenza:

$$\text{Min} \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(B_{Ln} + n\omega_1 C_M + \sum_{j=1}^2 \frac{n\omega_1 C_j}{1 - n^2 \omega_1^2 L_j C_j} \right)^2 V_n^2$$

$$L_j C_j = \frac{1}{r_j \omega_1^2} \quad r_j \in \text{Re} \quad m_j < r_j < m_{j+1} \quad (2.62)$$

$$n\omega_1 C_3 + \sum_{j=1}^2 \frac{n\omega_1 C_j}{1 - n^2 \omega_1^2 L_j C_j} \Big|_{n=1} = n\omega_1 C_3 + \sum_{j=1}^2 \frac{n\omega_1 C_j}{1 - n^2 \omega_1^2 L_j C_j} \Big|_{n=5}$$

$$n\omega_1 C_3 + \sum_{j=1}^2 \frac{n\omega_1 C_j}{1 - n^2 \omega_1^2 L_j C_j} \Big|_{n=1} = n\omega_1 C_3 + \sum_{j=1}^2 \frac{n\omega_1 C_j}{1 - n^2 \omega_1^2 L_j C_j} \Big|_{n=7}$$

Supponendo di imporre ancora una volta $L_1 C_1 = 100/1089$ e $L_2 C_2 = 100/3481$ si ottiene, risolvendo il problema (2.62), la rete di compensazione riportata in figura 2.14.

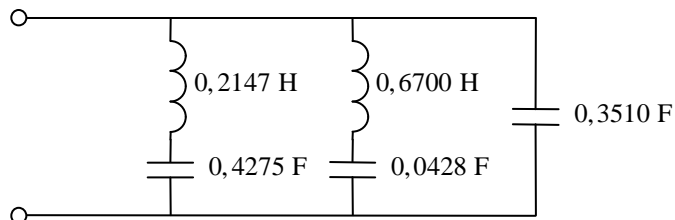


Figura 2.21 Rete di compensazione della corrente reattiva di Budeanu

Kusters and Moore

Si supponga ora di rimuovere il vincolo introdotto da Budeanu e di sostituirlo con un vincolo che esprima il fatto che i rami LC non siano presenti; ciò conduce alla formulazione del seguente problema:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(B_{Ln} + n\omega_1 C_M + \sum_{j=1}^2 \frac{n\omega_1 C_j}{1 - n^2 \omega_1^2 L_j C_j} \right)^2 V_n^2 \\
 & C_j = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.63}$$

la cui risoluzione conduce alla determinazione della rete di compensazione riportata in figura 2.15.

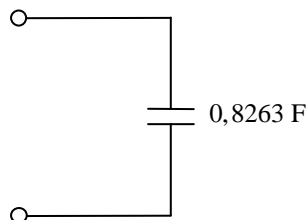


Figura 2.22 Rete di compensazione della corrente reattiva capacitiva di Kusters and Moore

In tabella 2.7 sono riportati i valori assunti dalle principali grandezze prima e dopo la compensazione con i circuiti indicati nelle figure (2.13) (2.14) e (2.15).

| | Senza rete di comp. | Con rete di comp. |
|-------------------|---------------------|-------------------|
| CZARNECKI | | |
| S [VA] | 10008,498 | 5004,070 |
| P [W] | 5000,376 | 5000,376 |
| Q_C [VA] | 8667,717 | 0 |
| D_C [VA] | 192,231 | 192,231 |
| Q_F [VA] | 8669,848 | 192,231 |
| λ [Adim.] | 0,499 | 0,999 |
| BUDEANU | | |
| S [VA] | 10008,498 | 5011,019 |
| P [W] | 5000,376 | 5000,376 |
| Q_B [VA] | 8663,701 | 0 |
| D_B [VA] | 326,430 | 326,430 |
| Q_F [VA] | 8669,848 | 326,430 |
| λ [Adim.] | 0,499 | 0,997 |
| KUSTERS AND MOORE | | |
| S [VA] | 10008,498 | 5320,157 |
| P [W] | 5000,376 | 5000,376 |
| Q_{K-M} [VA] | 8475,608 | 0 |
| D_{K-M} [VA] | 1816,677 | 1816,677 |
| Q_F [VA] | 8669,848 | 1816,677 |
| λ [Adim.] | 0,499 | 0,939 |

Tabella 2.7 Valori assunti dalle principali grandezza prima e dopo la compensazione

Ovviamente valgono considerazioni analoghe a quelle effettuate con riferimento all'esempio riportato al paragrafo 2.2.1. In figura 2.23 è riportato l'andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione con la rete corrispondente all'inserimento della rete di compensazione di Budeanu; in figura 2.24 è riportato invece l'andamento della corrente non attiva corrispondente all'inserimento delle tre diverse reti di compensazione analizzate.

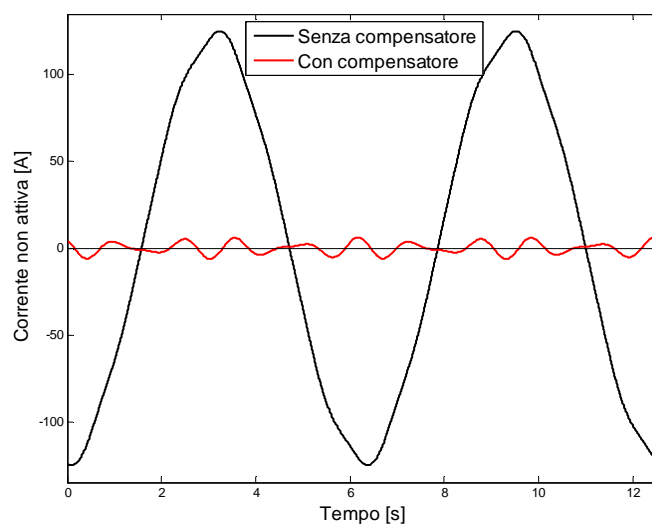


Figura 2.23 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione

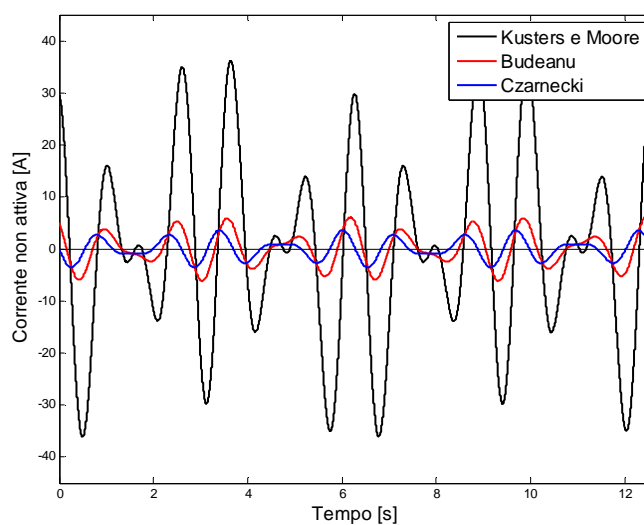


Figura 2.24 Andamento della corrente non attiva di Fryze prima e dopo la compensazione

CONCLUSIONI

Alla luce delle considerazioni e degli esempi riportati, è possibile giungere alla conclusione, non totalmente corretta, che la definizione di corrente reattiva di Czarnecki sia la migliore possibile. A tale conclusione, che personalmente ritengo erronea, si potrebbe giungere osservando che la corrente di Budeanu e le correnti di Kusters e Moore sono delle sottocomponenti della corrente reattiva di Czarnecki. Da questo punto di vista quest'ultima, comprendendo le prime due, assume una posizione rilevante, in quanto risulta più generale delle precedenti. Si potrebbe altresì obiettare che Budeanu e Kusters e Moore minimizzano di fatto, con l'ausilio di una data rete, la corrente reattiva di Czarnecki. Se però si osserva il problema non più dal punto di vista di cercare di definire una corrente reattiva, cosa che ritengo del tutto superflua (in accordo con quanto espresso da Emanuel [6] e Sharon [5]), ma dal punto di vista della minimizzazione delle perdite lungo la linea, la prospettiva delle cose muta profondamente. In questo caso difatti ritengo che si possa semplicemente parlare di maggiore o minore compensazione della corrente armonica in quadratura e di differente scelta del circuito di compensazione. In altre parole che si possa parlare di una maggiore o minore compensazione della corrente non attiva di Fryze per mezzo di una metodologia di compensazione differente. Se difatti si assume come punto di riferimento la minimizzazione del valore efficace di tale corrente, a cui come è bene ricordare non è associato alcun trasferimento di energia, si ha che anche Czarnecki sta risolvendo un problema di ottimizzazione vincolata al pari di Budeanu e di Kusters e Moore; in questo caso il vincolo non compare espressamente nel problema stesso ma è ovviamente insito nel fatto che la rete posta in derivazione al carico è passiva e reattiva.

Occorre comunque notare come la potenza reattiva da lui definita, e altresì da Sharon e Shepherd e Zakikhani, rappresenti un indice di fondamentale importanza al fine di identificare la quota parte della potenza non attiva che può essere compensata, in parte o totalmente, con reti passive e reattive. Viste le considerazioni effettuate, è

possibile dunque ritenere tale corrente come l'estensione del concetto di reattività al regime deformato? Personalmente ritengo che la risposta sia no. Per comprendere quali siano le motivazioni che mi spingono a trarre tale conclusione è bene ricordare le principali proprietà di cui gode la potenza reattiva in regime sinusoidale. Ad essa, a differenza della potenza attiva, non è difatti associato un chiaro fenomeno fisico bensì un insieme di proprietà contenute nel seguente elenco:

- (1) la potenza reattiva è pari al valore di picco della potenza istantanea reattiva;
- (2) il suo annullamento risulta in un fattore di potenza unitario; da ciò consegue che la corrente circolante lungo la linea è la minima per una data tensione e per una data potenza attiva (lavoro elettrico medio);
- (3) la sua compensazione risulta in una minimizzazione delle perdite;
- (4) la potenza reattiva può essere totalmente compensata mediante l'inserzione, in derivazione al carico, di un semplice condensatore o di un semplice induttore;
- (5) è dovuta alla presenza di elementi reattivi nel carico (in particolare se essi non sono presenti essa non è presente);
- (6) è una quantità dotata di segno; quest'ultimo identifica la natura del carico e altresì della rete di compensazione.

Con riferimento all'elenco sopra riportato si evince facilmente come la correttezza dell'attribuzione del concetto di reattività ad una data corrente dipenda fortemente dalla prospettiva in cui ci si pone per osservare il problema e dalla proprietà che si assume come fondamentale. Nessuna delle definizioni di potenza reattiva sino ad ora introdotte soddisfa difatti tutte le proprietà elencate e dunque non può essere considerata come l'estensione al regime non sinusoidale della definizione di potenza reattiva data in regime sinusoidale. Tale concetto è messo in risalto, schematicamente, in tabella dove si sono riportate le proprietà soddisfatte dalla correnti introdotte dai vari autori.

| | |
|--|--------------|
| Fryze | (2)(3)(5) |
| Kusters-Moore | (3)(4)(5)(6) |
| Czarnecki (Shap. e Zaki. /Sharon) | (3)(5) |
| Budeanu (nella rivisitazione di Willems) | (3)(5)(6) |

Tabella Proprietà soddisfatte dalle varie definizioni di potenza reattiva

In definitiva ritengo che il termine reattivo, al pari del termine in quadratura, debba essere utilizzato con estrema cautela qualora si vada ad analizzare il comportamento di un circuito in regime deformato. Le varie potenze introdotte rappresentano difatti solamente degli indici atti a descrivere tale comportamento sotto punti di vista differenti. Data la complessità del problema è difatti impensabile di poter racchiudere in un unico indice tutte le informazioni finalizzate alla descrizione del sistema sotto analisi. Tutte le grandezze introdotte sono dunque ben lungi dalla “perfezione” rappresentata dalla potenza reattiva in regime sinusoidale.

Lo scopo della presente tesi era quello di inquadrare le varie definizioni di potenza reattiva sino ad ora proposte in un'unica formulazione; alla luce dei risultati ottenuti si può concludere che l'obbiettivo posto è stato conseguito. Tale approccio ha consentito di dimostrare come tutte le definizioni di potenza reattiva sino ad ora proposte siano concettualmente e teoricamente identiche in quanto identificano semplicemente la quota parte della corrente non attiva di Fryze che è possibile compensare totalmente con una rete avente determinate caratteristiche.

Appendice A

PROPRIETÀ E SINTESI DELLE IMMETTENZE LC

Nel corso dello studio delle reti monofase in regime alternato non sinusoidale si è spesso fatto ricorso ad alcune nozioni relative alla teoria dei circuiti. La presente appendice ha lo scopo di richiamare tali nozioni. Inizialmente verranno dunque enunciate le principali proprietà di cui godono le immetENZE costituite da soli elementi reattivi e, successivamente, verranno presentati i principali metodi di sintesi e le operazioni su cui essi si fondano. Nonostante quanto richiamato sia di fondamentale importanza ai fini dello studio effettuato nei precedenti capitoli, la trattazione è volutamente schematica e sintetica; uno studio più approfondito esula difatti dagli scopi della presente tesi e per questo si rimanda ai testi in bibliografia [18], [19].

A.1 Proprietà delle immetENZE LC

Nel seguente paragrafo sono illustrate le principali proprietà che caratterizzano le immetENZE LC. Brevi dimostrazioni sono fornite a completamento di quanto esposto.

A.1.1 Funzione reale positiva

Una funzione $F(s)$ è detta reale positiva se soddisfa le due seguenti condizioni:

- $F(s)$ è una funzione reale per s reale;
- $\operatorname{Re}\{F(s)\} \geq 0$ per $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$.

L'immettenza di un bipolo composto da soli elementi reattivi soddisfa le condizioni sopra esposte e, di conseguenza, risulta essere una funzione reale positiva. Al fine di mostrare quanto appena asserito, si consideri un bipolo costituito da k -rami reattivi e si assuma per ciascun ramo i -esimo dei k -rami la convenzione degli utilizzatori e la convenzione dei generatori ai morsetti del bipolo.

Per il teorema di Tellegen si deve necessariamente avere che:

$$V(s)I^*(s) = \sum_{i=1}^k V_i(s)I_i^*(s) \quad (\text{A.1})$$

Dove $V(s)$ e $V_i(s)$ rappresentano rispettivamente la trasformata di Laplace (App. B § B.1) della tensione ai capi del bipolo e della tensione ai capi del ramo i -esimo. Mentre $I^*(s)$ e $I_i^*(s)$ rappresentano rispettivamente il complesso coniugato della trasformata di Laplace della corrente che fluisce nel bipolo e il complesso coniugato della trasformata di Laplace della corrente che fluisce nel ramo i -esimo.

I termini $V(s)$ e $V_i(s)$ contenuti nella (A.1) possono, tenendo presente i legami costitutivi del bipolo e dei k -rami, essere riscritti come segue:

$$V(s) = Z(s)I(s) \quad (\text{A.2})$$

$$V_i(s) = \frac{1}{sC_i}I_i(s) + sL_iI_i(s) \quad (\text{A.3})$$

Dove si è supposto che C_i e L_i siano indipendenti dal tempo e di conseguenza non dipendano dalla variabile complessa s .

Per sostituzione delle relazioni (A.2) e (A.3) nella (A.1) e successiva semplificazione dei vari termini è possibile scrivere che:

$$Z(s) = \frac{1}{|I(s)|^2} \left[sW_m(s) + \frac{1}{s}W_e(s) \right] \quad (\text{A.4})$$

Avendo indicato con $W_m(s)$ il termine legato all'energia immagazzinata nel campo magnetico e con $W_e(s)$ il termine legato all'energia immagazzinata nel campo elettrico. Essi sono rispettivamente pari a:

$$W_m(s) = \sum_{i=1}^k L_i |I_i(s)|^2 \quad (\text{A.5})$$

$$W_e(s) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{C_i} |I_i(s)|^2 \quad (\text{A.6})$$

Poiché $W_m(s)$, $W_e(s)$ e $|I(s)|^2$ sono grandezze positive reali la prima condizione risulta verificata. Per il medesimo motivo anche la seconda condizione risulta essere verificata, si ha difatti che:

$$\text{Re}\{Z(s)\} = \frac{1}{|I(s)|^2} \left[\sigma W_m(s) + \frac{1}{\sigma} W_e(s) \right] \quad (\text{A.7})$$

La funzione $Z(s)$ è dunque una funzione reale positiva. In modo analogo è possibile dimostrare che $Y(s)$ è una funzione reale positiva.

A.1.2 Poli e zeri risiedono sull'asse immaginario

Si consideri l'equazione (A.4) ricavata in precedenza e si supponga che s_0 costituisca uno zero di $Z(s)$; si dovrà dunque necessariamente avere che:

$$Z(s_0) = \frac{1}{|I(s_0)|^2} \left[s_0 W_m(s_0) + \frac{1}{s_0} W_e(s_0) \right] = 0 \quad (\text{A.8})$$

Essendo $|I(s_0)|^2 > 0$ si ha che:

$$s_0 W_m(s_0) + \frac{1}{s_0} W_e(s_0) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$W_m(s)$ e $W_e(s)$, per come sono stati definiti, sono positivi (si vedano a tal proposito le relazioni (A.5) e (A.6)); ne consegue che:

$$s_0^2 = -\frac{W_m(s_0)}{W_e(s_0)} \leq 0 \quad (\text{A.10})$$

Tutti gli zeri di $Z(s)$ si trovano dunque sull'asse immaginario. In modo analogo è possibile dimostrare che gli zeri di $Y(s)$ sono puramente immaginari e, data la relazione che lega $Z(s)$ e $Y(s)$, è possibile affermare che tutte le singolarità di un'immettenza LC risiedono sull'asse immaginario.

A.1.3 Funzione dispari

Si consideri nuovamente l'equazione (A.4) ricavata in precedenza; ponendo $s = j\omega$ si ha che:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{|I(j\omega)|^2} \left[j\omega W_m(j\omega) + \frac{1}{j\omega} W_e(j\omega) \right] \quad (\text{A.11})$$

Da cui segue che:

$$Z(j\omega) = \frac{j}{|I(j\omega)|^2} \left[\omega W_m(j\omega) - \frac{1}{\omega} W_e(j\omega) \right] \quad (\text{A.12})$$

La funzione $Z(s)$ è dunque una funzione dispari; in modo analogo è possibile dimostrare che $Y(s)$ è una funzione dispari. Tale risultato implica che un'immettenza LC è sempre il rapporto tra un polinomio pari e un polinomio dispari; ne segue dunque che $s = 0$ e $s = \infty$ sono sempre frequenze critiche di un'immettenza LC. Con

il termine frequenze critiche si è indicato, in modo del tutto generico, le frequenze per le quali la funzione immetENZA si annulla o diverge all'infinito. Ne consegue che $s = 0$ e $s = \infty$ possono costituire sia dei poli che degli zeri della funzione stessa.

A.1.4 Reattanza e suscettanza sono funzioni crescenti

Per le considerazioni poste nei paragrafi precedenti una generica immetENZA $Z(s)$ può essere sempre scritta nella forma:

$$Z(s) = Af(s) \frac{\prod_{i=1}^n (s^2 + \omega_{z_i})}{\prod_{i=1}^n (s^2 + \omega_{p_i})} \quad (\text{A.13})$$

Dove la funzione $f(s)$ è una funzione definita in uno dei due seguenti modi:

$$f(s) = \frac{1}{s} \quad (\text{A.14})$$

$$f(s) = s$$

a seconda che l'immetENZA $Z(s)$ abbia uno zero o un polo all'infinito. L'espansione in frazioni parziali dell'equazione (A.13) conduce a:

$$Z(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{k_j}{s - j\omega_{p_j}} + \frac{k_j^*}{s + j\omega_{p_j}} \right) \quad (\text{A.15})$$

Essendo $Z(s)$ reale positiva i coefficienti k_{∞} , k_0 , $k_j k_j^*$, i quali sono detti residui, sono reali e positivi, ovvero $k_j = k_j^*$; ne consegue che:

$$Z(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2k_j s}{s^2 + \omega_{p_j}^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

Posto $s = j\omega$ si ha:

$$Z(j\omega) = j \left[k_{\infty}\omega - \frac{k_0}{\omega} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2k_j \omega}{\omega_{p_j}^2 - \omega^2} \right) \right] = jX(\omega) \quad (\text{A.17})$$

Dove $X(\omega)$ prende il nome di funzione reattanza. Derivando tale funzione rispetto alla pulsazione ω si ottiene:

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = k_{\infty} + \frac{k_0}{\omega^2} + \sum_{j=1}^n \left[\frac{2k_j (\omega^2 + \omega_{p_j}^2)}{(\omega_{p_j}^2 - \omega^2)^2} \right] \quad (\text{A.18})$$

Si evince perciò, essendo la derivata composta da soli termini positivi, che:

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0 \quad -\infty < \omega < \infty \quad (\text{A.19})$$

La reattanza è dunque una funzione crescente. In modo analogo, partendo dalla funzione ammettenza, è possibile definire una funzione suscettanza $B(\omega)$ avente le medesime proprietà sopra enunciate. In figura A.1 è riportato il tipico andamento della funzione suscettanza nel caso in cui quest'ultima abbia uno zero nell'origine, uno zero all'infinito, tre coppie di poli immaginari e coniugati e due coppie di zeri immaginari e coniugati. Si noti che si è riportato l'andamento di tale grandezza solo in funzione delle frequenze positive; per le frequenze negative, essendo la funzione suscettanza una funzione dispari, l'andamento è speculare rispetto all'origine.

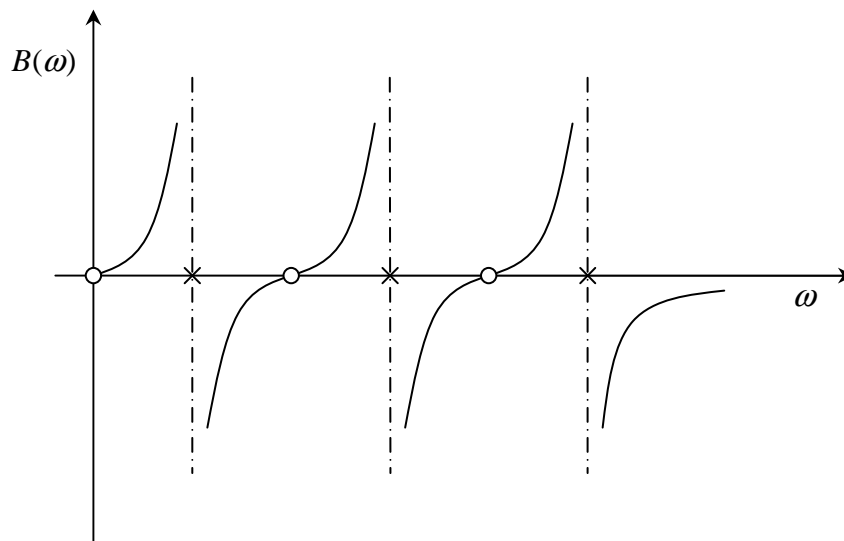


Figura A.1 Andamento della funzione suscettanza nel caso di zero nell'origine, zero all'infinito, tre coppie di poli immaginari e coniugati e due coppie di zeri immaginari e coniugati

Con riferimento alla figura A.1 è possibile osservare che i poli e gli zeri, essendo la funzione crescente, sono necessariamente alternati tra loro:

$$0 < \omega_{p_1} < \omega_{z_1} < \omega_{p_2} < \omega_{z_2} \dots \quad (\text{A.20})$$

A.2 Operazioni elementari di sintesi

A.2.1 Introduzione

Due bipoli sono detti equivalenti quando hanno la medesima funzione impedenza o la medesima funzione ammettenza.

Le due reti mostrate in figura A.2(a) sono dunque equivalenti quando:

$$Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s) \quad (\text{A.21})$$

In modo analogo le due reti mostrate in figura A.2(b) sono equivalenti sotto la condizione:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \quad (\text{A.22})$$

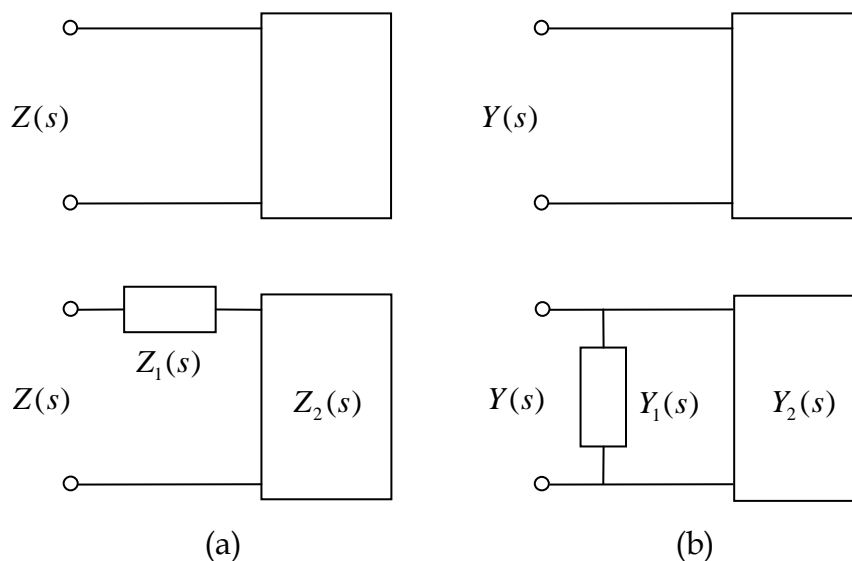


Figura A.2 Reti equivalenti: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza

Quando i termini contenuti nelle (A.21) (A.22) sono talmente semplici da essere riconosciuti come parti elementari di un circuito, come ad esempio un induttanza, un condensatore o la combinazione di questi due elementi, il processo di sintesi sta avendo luogo.

Nel descrivere la procedura di sintesi si usa una specifica terminologia; in particolare si dirà che un polo è stato rimosso dalla funzione $Z(s)$ quando quest'ultimo non appare nell'impedenza $Z_2(s)$. Quanto espresso con riferimento ai poli ovviamente può essere esteso anche agli zeri; in tal caso si dirà che uno zero è stato rimosso dalla funzione $Z(s)$ quando quest'ultimo non compare nella $Z_2(s)$. Il termine rimosso non deve trarre in inganno: il polo o lo zero sono difatti ancora presenti nell'impedenza $Z(s)$ essi sono stati semplicemente messi in evidenza in modo da

poterli riconoscere come parti elementari di un circuito. A conclusione di quanto esposto è bene, dunque, richiamare le funzioni di trasferimento di alcuni dei principali elementi circuitali:

$$Z_L(s) = sL \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC} \quad (\text{A.23})$$

$$Z_{LC_{serie}}(s) = \frac{1+s^2LC}{sC} \quad Z_{LC_{parallelo}}(s) = \frac{sL}{1+s^2LC} \quad (\text{A.24})$$

Ovviamente quanto espresso con riferimento all'impedenza $Z(s)$ può essere ripetuto analogamente per l'ammettenza $Y(s)$.

Le principali operazioni di sintesi su cui si basano i vari metodi che verranno proposti in seguito sono:

- rimozione di un polo all'infinito;
- rimozione di un polo nell'origine;
- rimozione di una coppia di poli immaginari coniugati.

Tali operazioni di rimozione sono trattate dettagliatamente nei paragrafi che seguono.

A.2.2 Rimozione di un polo all'infinito

Si consideri una generica funzione immetenza $F(s)$ e si supponga che essa abbia un polo all'infinito. Se si effettua la lunga divisione polinomiale tra il numeratore e il denominatore della $F(s)$, si ottiene per la funzione un'espressione del tipo:

$$F(s) = k_{\infty}s + \frac{N'(s)}{D'(s)} \quad (\text{A.25})$$

Il termine:

$$F_1(s) = k_\infty s \quad (\text{A.26})$$

Rappresenta:

- un induttore di valore k_∞ se $F(s)$ è una funzione impedenza;
- un condensatore di valore k_∞ se $F(s)$ è una funzione ammettenza.

La rimozione di un polo all'infinito equivale dunque, a seconda della natura della funzione immetenza, all'estrazione di un induttore o di un condensatore dalla $F(s)$ stessa. La situazione descritta è mostrata schematicamente in figura A.3(a)(b).

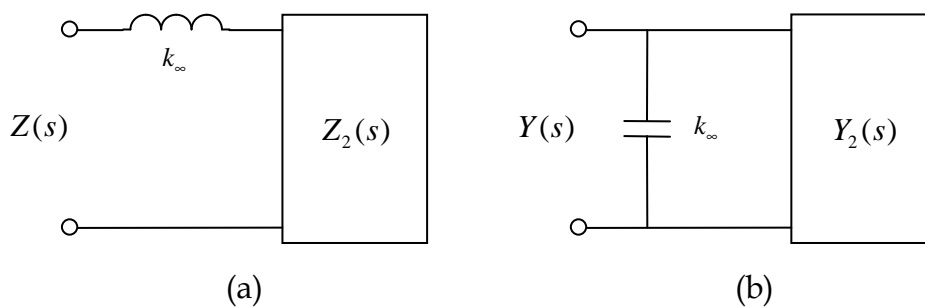


Figura A.3 Rimozione di un polo all'infinito: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza

A.2.3 Rimozione di un polo nell'origine

Si consideri una generica funzione immetenza $F(s)$ e si supponga che essa abbia un polo nell'origine. Se si effettua la lunga divisione polinomiale tra il numeratore e il denominatore della $F(s)$, si ottiene per la funzione un'espressione del tipo:

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{N'(s)}{D'(s)} \quad (\text{A.27})$$

Il termine:

$$F_1(s) = \frac{k_0}{s} \quad (\text{A.28})$$

Rappresenta:

- un condensatore di valore $1/k_0$ se $F(s)$ è una funzione impedenza;
- un induttore di valore $1/k_0$ se $F(s)$ è una funzione ammettenza.

La rimozione di un polo nell'origine equivale dunque, a seconda della natura della funzione immetenza, all'estrazione di un induttore o di un condensatore dalla $F(s)$ stessa. La situazione descritta è mostrata schematicamente in figura A.4(a)(b).

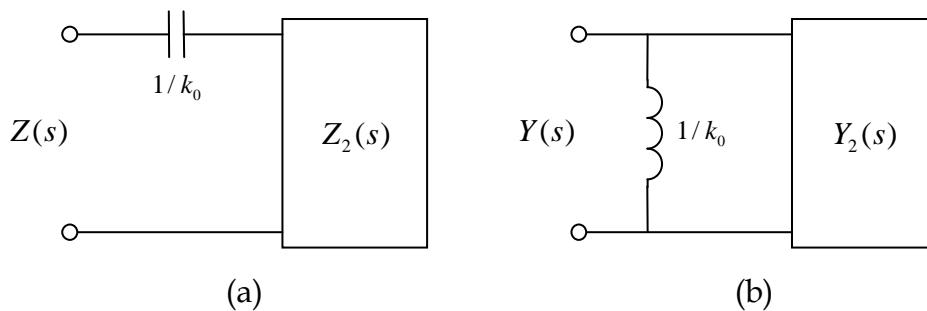


Figura A.4 Rimozione di un polo nell'origine: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza

A.2.4 Rimozione di una coppia di poli immaginari coniugati

Si consideri una generica funzione immetenza $F(s)$ e si supponga che essa abbia una coppia di poli immaginari coniugati:

$$F(s) = \frac{1}{s + \omega_p^2} \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{A.29})$$

Se si effettua l'espansione in funzioni parziali, si ottiene per la funzione immettenza un'espressione del tipo:

$$F(s) = \frac{2ks}{s + \omega_p^2} + \frac{N'(s)}{D'(s)} \quad (\text{A.30})$$

Il termine:

$$F_1(s) = \frac{2ks}{s + \omega_p^2} \quad (\text{A.31})$$

Rappresenta:

- il parallelo tra un condensatore di valore $1/2k$ e un induttore di valore $2k/\omega_p^2$ se $F(s)$ è una funzione impedenza;
- la serie tra un condensatore di valore $2k/\omega_p^2$ e un induttore di valore $1/2k$ se $F(s)$ è una funzione ammettenza.

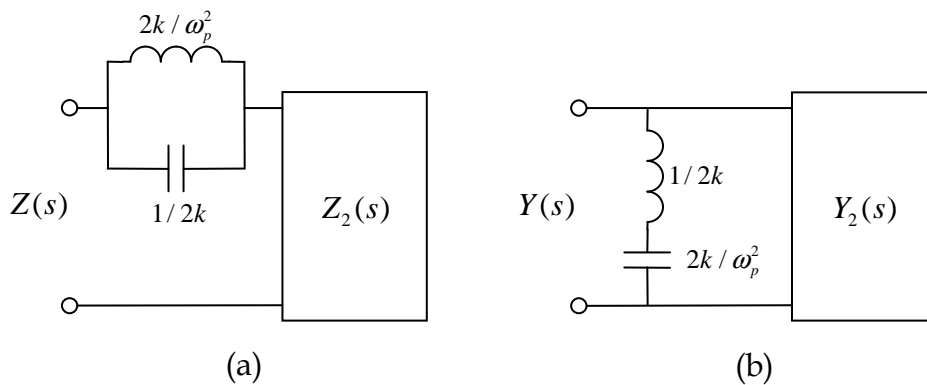


Figura A.5 Rimozione di una coppia di poli immaginari coniugati: (a) funzione impedenza (b) funzione ammettenza

La rimozione di una coppia di poli immaginari coniugati equivale dunque, a seconda della natura della funzione immetENZA, all'estrazione di un bipolo parallelo o di un bipolo serie dalla $F(s)$ stessa. La situazione descritta è mostrata schematicamente in figura A.5(a)(b).

A.3 Metodi di sintesi

Le operazioni di rimozione sopra esposte sono alla base dei metodi di sintesi proposti da Foster e da Cauer. Tali metodi di sintesi sono detti canonici, in quanto utilizzano per realizzare le funzioni impedenza e ammetENZA il minor numero di elementi possibili. In realtà vi sono altre forme che possono essere ritenute canoniche sotto questo punto di vista, ma esse risultano essere sempre una combinazione delle sintesi proposte dai due autori sopracitati.

A.3.1 Primo metodo di Foster

Si consideri la funzione impedenza:

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{A.32})$$

Si supponga che essa abbia un polo all'infinito, un polo nell'origine e coppie di poli immaginari coniugati. Per quanto visto in precedenza è possibile rimuovere i poli sopradetti e, a seguito di tali rimozioni, l'espressione di $Z(s)$ risulterà essere la seguente:

$$Z(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_{r=1}^n \frac{2k_{p_r}s}{s^2 + \omega_{p_r}^2} \quad (\text{A.33})$$

I coefficienti $k_\infty, k_0, 2k_{p_r}$ possono essere valutati a partire dalla (A.33) come:

$$k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Z(s)}{s} \quad (\text{A.34})$$

$$k_0 = sZ(s)|_{s=0} \quad (\text{A.35})$$

$$2k_{p_r} = \left. \frac{s^2 + \omega_{p_r}^2}{s} Z(s) \right|_{s^2 = -\omega_{p_r}^2} \quad (\text{A.36})$$

L'espressione (A.33) corrisponde alla rete riportata in figura 1.6, nella quale si sono messi in risalto i legami esistenti tra i coefficienti e i valori assunti dai parametri di rete.

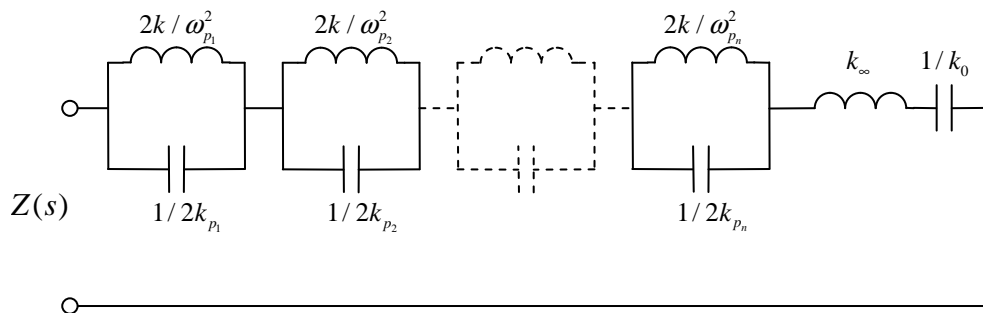


Figura A.6 Primo metodo di Foster

Con riferimento alla figura A.6 si noti che se:

- $Z(s)$ ha uno zero all'infinito, l'induttore non è presente;
- $Z(s)$ ha uno zero nell'origine, il condensatore non è presente;
- $Z(s)$ non presenta poli immaginari coniugati, gli elementi paralleli non sono presenti.

A.3.2 Secondo metodo di Foster

Si consideri la funzione ammettenza:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{A.37})$$

Si supponga che essa abbia un polo all'infinito, un polo nell'origine e coppie di poli immaginari coniugati. Per quanto visto in precedenza è possibile rimuovere i poli sopraddetti e, a seguito di tali rimozioni, l'espressione di $Y(s)$ risulterà essere la seguente:

$$Y(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{r=1}^n \frac{2k_{p_r} s}{s^2 + \omega_{p_r}^2} \quad (\text{A.38})$$

I coefficienti k_∞ , k_0 , $2k_{p_r}$ possono essere valutati a partire dalla (A.38) come:

$$k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y(s)}{s} \quad (\text{A.39})$$

$$k_0 = sY(s) \Big|_{s=0} \quad (\text{A.40})$$

$$2k_{p_r} = \frac{s^2 + \omega_{p_r}^2}{s} Y(s) \Big|_{s^2 = -\omega_{p_r}^2} \quad (\text{A.41})$$

L'espressione (A.38) corrisponde alla rete riportata in figura A.7, nella quale si sono messi in risalto i legami esistenti tra i coefficienti e i valori assunti dai condensatori e dagli induttori costituenti la funzione ammettenza.

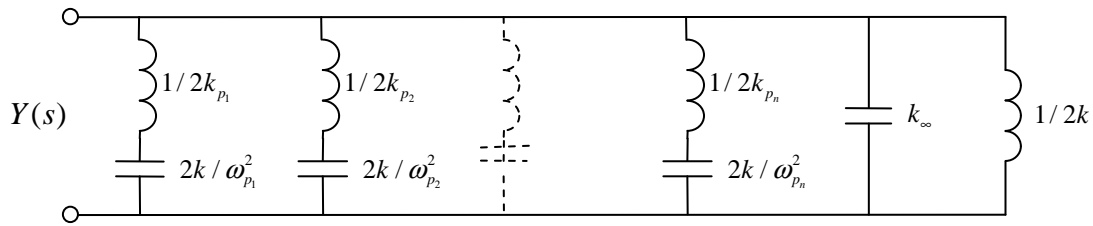


Figura A.7 Secondo metodo di Foster

Con riferimento alla figura A.7 si noti che se:

- $Y(s)$ ha uno zero all'infinito, il condensatore non è presente;
- $Y(s)$ ha uno zero nell'origine, l'induttore non è presente;
- $Y(s)$ non presenta poli immaginari coniugati, gli elementi serie non sono presenti.

A.3.3 Primo metodo di Cauer

Si consideri la funzione impedenza:

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{A.42}$$

Se la funzione impedenza ha un polo all'infinito, quest'ultimo può essere rimosso ottenendo una funzione $Z_2(s)$, la quale avrà necessariamente uno zero all'infinito:

$$Z_2(s) = Z(s) - k_{\infty_1} s \tag{A.43}$$

Se ora si considera la funzione ammettenza in luogo della funzione impedenza, essa avrà un polo all'infinito che può essere rimosso ottenendo una funzione $Y_3(s)$, la quale avrà necessariamente uno zero all'infinito:

$$Y_3(s) = Y_2(s) - k_{\infty_2} s \tag{A.44}$$

Il processo sopra indicato può essere iterato seguendo la sequenza “rimozione, inversione, rimozione...”, ottenendo per la $Z(s)$ la seguente espressione:

$$Z(s) = sL_1 + \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{sL_3 + \frac{1}{sC_4 + \dots}}} \quad (\text{A.45})$$

L'espressione (A.45) corrisponde alla rete a scala riportata in figura A.8.

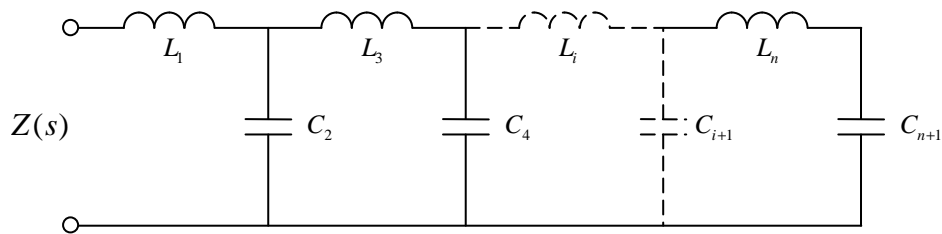


Figura A.8 Primo metodo di Cauer

Con riferimento alla figura A.8 si noti che:

- il primo elemento della rete è fissato dalla natura della funzione impedenza all'infinito; in particolare se $Z(s)$ ha:
 - o un polo all'infinito, il primo elemento è un induttore;
 - o uno zero all'infinito, il primo elemento è un condensatore.

- l'ultimo elemento della rete è fissato dalla natura della funzione impedenza nell'origine; in particolare se $Z(s)$ ha:
 - o un polo nell'origine, l'ultimo elemento è un condensatore;
 - o uno zero nell'origine, l'ultimo elemento è un induttore.

A.3.4 Secondo metodo di Cauer

Si consideri la funzione impedenza:

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{A.46})$$

Se la funzione impedenza ha un polo all'infinito, quest'ultimo può essere rimosso ottenendo una funzione $Z_2(s)$, la quale avrà necessariamente uno zero nell'origine:

$$Z_2(s) = Z(s) - k_0 s \quad (\text{A.47})$$

Se ora si considera la funzione ammettenza in luogo della funzione impedenza, essa avrà un polo nell'origine che può essere rimosso ottenendo una funzione $Y_3(s)$, la quale avrà necessariamente uno zero nell'origine:

$$Y_3(s) = Y_2(s) - k_0 s \quad (\text{A.48})$$

Il processo sopra indicato può essere iterato seguendo la sequenza "rimozione, inversione, rimozione...", ottenendo per la $Z(s)$ la seguente espressione:

$$Z(s) = \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{\frac{1}{sL_2} + \frac{1}{\frac{1}{sC_3} + \frac{1}{\frac{1}{sL_4} + \dots}}} \quad (\text{A.49})$$

L'espressione (A.49) corrisponde alla rete a scala riportata in figura A.9.

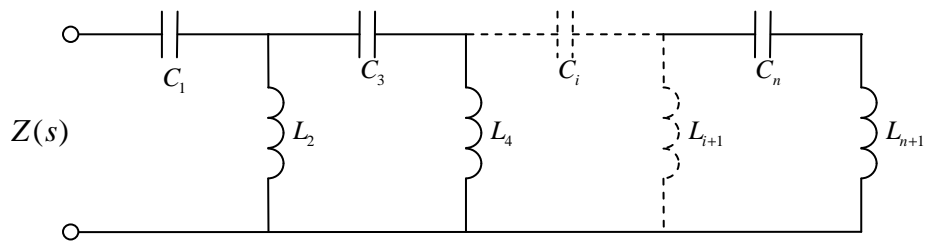


Figura A.9 Secondo metodo di Cauer

Con riferimento alla figura A.9 si noti che:

- il primo elemento della rete è fissato dalla natura della funzione impedenza nell'origine; in particolare se $Z(s)$ ha:
 - o un polo nell'origine, il primo elemento è un condensatore;
 - o uno zero nell'origine, il primo elemento è un induttore.

- l'ultimo elemento della rete è fissato dalla natura della funzione impedenza all'infinito; in particolare se $Z(s)$ ha:
 - o un polo all'infinito, l'ultimo elemento è un induttore;
 - o uno zero all'infinito, l'ultimo elemento è un condensatore.

A.4 Esempi numerici

Per comprendere a fondo come i metodi sopra esposti debbano essere applicati, è bene riportare alcuni esempi numerici; tali esempi consentono inoltre di mettere in luce alcune proprietà che sono state enunciate nei precedenti paragrafi.

A.4.1 Esempio 1

Si consideri la seguente funzione impedenza:

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 1^2)(s^2 + 3^2)}{s(s^2 + 2^2)} \quad (\text{A.50})$$

e si supponga di volerla sintetizzare utilizzando il primo metodo di Foster. L'espansione in frazioni parziali porta l'impedenza $Z(s)$ ad assumere la seguente forma:

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{r=1}^n \frac{2k_{p_r} s}{s^2 + \omega_{p_r}^2} \quad (\text{A.51})$$

I coefficienti contenuti nella (A.51) possono essere valutati come segue:

$$k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Z(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s^2 + 1^2)(s^2 + 3^2)}{s^2(s^2 + 2^2)} = 1 \quad (\text{A.52})$$

$$k_0 = sZ(s) \Big|_{s=0} = \frac{(s^2 + 1^2)(s^2 + 3^2)}{(s^2 + 2^2)} \Big|_{s=0} = \frac{9}{4} \quad (\text{A.53})$$

$$2k_{p_1} = \frac{s^2 + \omega_{p_1}^2}{s} Z(s) \Big|_{s^2 = -\omega_{p_1}^2} = \frac{(s^2 + 1^2)(s^2 + 3^2)}{s^2} \Big|_{s^2 = -4} = \frac{15}{4} \quad (\text{A.54})$$

La rete corrispondente alla (A.51) è dunque quella riportata in figura A.10.

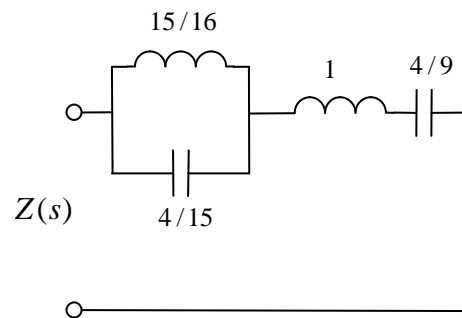


Figura A.10 Primo metodo di Foster per l'impedenza $Z(s)$

Con riferimento alla figura A.10 è possibile osservare come la rete sia costituita dalla serie di tre bipoli. La presenza del parallelo tra un condensatore e un induttore è dovuta al fatto che la $Z(s)$ ha una coppia di poli immaginari e coniugati. La presenza dell'induttore e del condensatore è invece dovuta al fatto che l'impedenza di partenza ha rispettivamente un polo nell'origine e un polo all'infinito.

A.4.2 Esempio 2

Si consideri la seguente funzione ammettenza:

$$Y(s) = \frac{s(s^2 + 2^2)}{(s^2 + 1^2)(s^2 + 3^2)} \quad (\text{A.55})$$

e si supponga di volerla sintetizzare utilizzando il secondo metodo di Foster. L'espansione in frazioni parziali porta l'impedenza $Z(s)$ ad assumere la seguente forma:

$$Y(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_{r=1}^n \frac{2k_r s}{s^2 + \omega_{p_r}^2} \quad (\text{A.56})$$

I coefficienti contenuti nella (A.56) possono essere valutati come segue:

$$k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s^2 + 2^2)}{(s^2 + 1^2)(s^2 + 3^2)} = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$k_0 = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{s^2(s^2 + 2^2)}{(s^2 + 1^2)(s^2 + 3^2)} \Big|_{s=0} = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$2k_{p_1} = \frac{s^2 + \omega_{p_1}^2}{s} Y(s) \Big|_{s^2 = -\omega_{p_1}^2} = \frac{(s^2 + 2^2)}{(s^2 + 3^2)} \Big|_{s^2 = -1} = \frac{3}{8} \quad (\text{A.59})$$

$$2k_{p_2} = \frac{s^2 + \omega_{p_2}^2}{s} Y(s) \Big|_{s^2 = -\omega_{p_2}^2} = \frac{(s^2 + 2^2)}{(s^2 + 1^2)} \Big|_{s^2 = -9} = \frac{5}{8} \quad (\text{A.60})$$

La rete corrispondente alla (A.56) è dunque quella riportata in figura A.11.

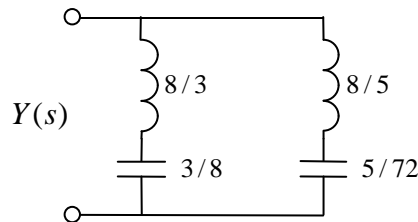


Figura A.11 Secondo metodo di Foster per l'ammittenza $Y(s)$

Con riferimento alla figura A.11 è possibile osservare come la rete sia costituita dal parallelo di due bipoli. La presenza dei due bipoli LC serie è dovuta al fatto che la $Z(s)$ ha due coppie di poli immaginari e coniugati. Non sono invece presenti rami paralleli costituiti da soli condensatori o da soli induttori, in quanto l'impedenza di partenza ha uno zero nell'origine e uno zero all'infinito.

A.4.3 Esempio 3

Si consideri la seguente funzione impedenza:

$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} \quad (\text{A.61})$$

e si supponga di volerla sintetizzare utilizzando il primo metodo di Cauer. L'impedenza presa in esame ha un polo all'infinito che può essere rimosso sottraendo s da $Z(s)$:

$$Z_1(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} - s = \frac{6s^2 + 9}{s^3 + 4s} \quad (\text{A.62})$$

L'impedenza $Z_1(s)$ così ottenuta ha uno zero all'infinito; il suo inverso $Y_1(s)$ ha dunque un polo all'infinito che può essere rimosso sottraendo $s/6$ da $Y_1(s)$:

$$Y_2(s) = \frac{s^3 + 4s}{6s^2 + 9} - \frac{s}{6} = \frac{5s}{12s^2 + 18} \quad (\text{A.63})$$

L'ammettenza $Y_2(s)$ così ottenuta ha uno zero all'infinito; il suo inverso $Z_2(s)$ ha dunque un polo all'infinito che può essere rimosso sottraendo $12s/5$ da $Z_2(s)$:

$$Z_3(s) = \frac{12s^2 + 18}{5s} - \frac{12s}{5} = \frac{18}{5s} \quad (\text{A.64})$$

Il procedimento sopra esposto può essere iterato fino al passo:

$$Y_4(s) = \frac{5s}{18} - \frac{5s}{18} = 0 \quad (\text{A.65})$$

La rete corrispondente alla (A.61) è dunque quella riportata in figura A.12.

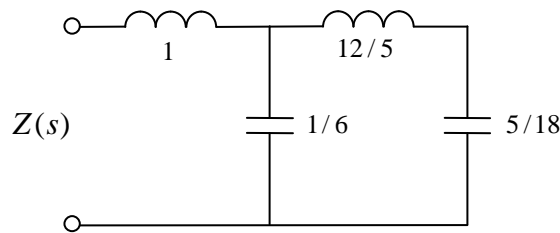


Figura A.12 Primo metodo di Cauer per l'impedenza $Z(s)$

Con riferimento alla figura A.12 è possibile osservare che il primo elemento della rete è un induttore e l'ultimo elemento è un condensatore. La presenza di tali elementi è dovuta al fatto che l'impedenza di partenza $Z(s)$ ha rispettivamente un polo all'infinito e un polo nell'origine.

A.4.4 Esempio 4

Si consideri nuovamente la funzione impedenza definita in (A.61) e si supponga di volerla sintetizzare utilizzando il secondo metodo di Cauer. L'impedenza presa in esame ha un polo nell'origine che può essere rimosso sottraendo $9/4s$ da $Z(s)$:

$$Z_1(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} - \frac{9}{4s} = \frac{4s^3 + 31s}{4s^2 + 16} \quad (\text{A.66})$$

L'impedenza $Z_1(s)$ così ottenuta ha uno zero nell'origine; il suo inverso $Y_1(s)$ ha dunque un polo nell'origine che può essere rimosso sottraendo $16/31s$ da $Y_1(s)$:

$$Y_2(s) = \frac{4s^2 + 16}{4s^3 + 31s} - \frac{16}{31s} = \frac{60s}{124s^2 + 961s} \quad (\text{A.67})$$

L'ammettenza $Y_2(s)$ così ottenuta ha uno zero nell'origine; il suo inverso $Z_2(s)$ ha dunque un polo nell'origine che può essere rimosso sottraendo $961/60s$ da $Z_2(s)$:

$$Z_3(s) = \frac{124s^2 + 961s}{60s} - \frac{961}{60s} = \frac{31s}{15} \quad (\text{A.68})$$

Il procedimento sopra esposto può essere iterato fino al passo:

$$Y_4(s) = \frac{15s}{31} - \frac{15s}{31} = 0 \quad (\text{A.69})$$

La rete corrispondente alla (A.61) è dunque quella riportata in figura A.13.

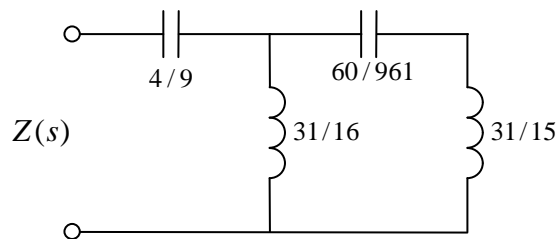


Figura A.13 Secondo metodo di Cauer per l'impedenza $Z(s)$

Con riferimento alla figura A.13 è possibile osservare che il primo elemento della rete è un condensatore e l'ultimo elemento è un induttore. La presenza di tali elementi è dovuta al fatto che l'impedenza di partenza $Z(s)$ ha rispettivamente un polo nell'origine e un polo all'infinito.

Appendice B

STRUMENTI MATEMATICI

Nei precedenti capitoli si sono utilizzati numerosi strumenti matematici presupponendo che la conoscenza di quest'ultimi sia assodata. La presente appendice ha la sola funzione di richiamare brevemente tali strumenti al fine di rendere più agile la lettura della tesi.

B.1 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace di una funzione $s(t)$ è definita come:

$$S(s) = \int_{0^-}^{+\infty} s(t)e^{-st} dt \quad (\text{B.1})$$

La trasformata di Laplace di una funzione $s(t)$ è definita come:

$$s(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} S(s)e^{st} ds \quad (\text{B.2})$$

Dove in entrambe le relazioni (B.1) (B.2) $s = \sigma + j\omega$.

La trasformata di Laplace consente di gestire in modo pratico relazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nella teoria dei sistemi essa è ampiamente utilizzata in associazione al concetto di funzione di trasferimento al fine di esprimere il legame esistente tra la trasformata di Laplace di una grandezza in ingresso ad un dato sistema e la trasformata dell'uscita. In elettrotecnica è utilizzata per lo studio dei transitori, per lo studio dinamico, di stabilità e di controllo delle reti. Essa è altresì utilizzata per l'analisi di regime .

B.2 Formule trigonometriche

Formule di bisezione

Le formule di bisezione per le funzioni seno e coseno sono di seguito riportate:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (\text{B.3})$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (\text{B.4})$$

Formule di addizione

Le formule di addizione per le funzioni seno e coseno sono di seguito riportate:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) \quad (\text{B.5})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (\text{B.6})$$

Formule di Werner

Le formule di Werner per le funzioni seno e coseno sono di seguito riportate:

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (\text{B.7})$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (\text{B.8})$$

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (\text{B.9})$$

B.3 Sviluppo in serie di Fourier

Un generica funzione $s(t)$ periodica di periodo T è sviluppabile in serie di funzioni sinusoidali (serie di Fourier). Le sinusoidi componenti sono chiamate armoniche della funzione data e in particolare, alla prima armonica viene attribuito il nome di armonica fondamentale. Esistono diverse formulazioni della serie di Fourier la forma trigonometrica classica è la seguente:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (\text{B.10})$$

Dove i coefficienti a_0 , a_n e b_n prendono il nome di coefficienti di Fourier e sono valutabili utilizzando le seguenti relazioni:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{B.11})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (\text{B.12})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\text{B.13})$$

Una formulazione alternativa largamente utilizzata è la seguente:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{mn} \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (\text{B.14})$$

Dove S_0 rappresenta il valore medio della funzione $s(t)$ e dove S_{mn} e φ_n rappresentano rispettivamente il valore di picco e l'angolo di fase delle varie sinusoidi che compongono la funzione $s(t)$. Le due formulazioni sono ovviamente

legate tra di loro e le relazioni che consentono il passaggio dall'una all'altra sono qui di seguito riportate:

$$S_{mn} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (\text{B.15})$$

$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (\text{B.16})$$

$$a_n = S_{mn} \cos \varphi_n \quad (\text{B.17})$$

$$b_n = S_{mn} \sin \varphi_n \quad (\text{B.18})$$

B.4 Ortogonalità e disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Ortogonalità

Due funzioni periodiche di periodo T sono dette ortogonali se il loro prodotto scalare nel periodo comune è nullo:

$$\langle s_1(t)s_2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = 0 \quad (\text{B.19})$$

Le funzioni seno e coseno sono tra loro ortogonali così come due funzioni sinusoidali aventi frequenza differente. Si considerino a titolo di esempio le due funzioni:

$$s_1(t) = S_m \sin(\omega t) \quad (\text{B.20})$$

$$s_2(t) = S_m \sin(3\omega t) \quad (\text{B.21})$$

Il valor medio del loro prodotto può essere valutato come segue:

$$\langle s_1(t)s_2(t) \rangle = \frac{S_m^2}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \sin(3\omega t) dt \quad (\text{B.22})$$

Il termine $\sin(\omega t)\sin(3\omega t)$ può essere riscritto in modo alternativo utilizzando le formule di Werner (B.7); si ha dunque che:

$$\langle s_1(t)s_2(t) \rangle = \frac{S_m^2}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t) dt - \frac{S_m^2}{2T} \int_0^T \cos(4\omega t) dt \quad (\text{B.23})$$

Essendo entrambi gli integrali nulli, si ha che:

$$\langle s_1(t)s_2(t) \rangle = 0 \quad (\text{B.24})$$

L'ortogonalità ha come diretta conseguenza un'ulteriore proprietà; al fine di mostrarla si consideri una funzione $s(t)$ ottenuta come somma di due funzioni $s_1(t)$ e $s_2(t)$ tra loro ortogonali:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad (\text{B.25})$$

Il valore efficace, definito come la radice quadrata del valor medio del quadrato della funzione $s(t)$, può essere valutato nel seguente modo:

$$S = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt} \quad (\text{B.26})$$

Sostituendo nella relazione (B.26) la (B.25) ed eseguendo il quadrato si ha che:

$$S = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t)^2 dt + \frac{2}{T} \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt} \quad (\text{B.27})$$

Data l'ortogonalità delle funzioni $s_1(t)$ e $s_2(t)$ l'ultimo termine della sommatoria è nullo; inoltre i primi due termini coincidono rispettivamente con il valore efficace della funzione $s_1(t)$ e con il valore efficace della funzione $s_2(t)$. Il valore efficace della funzione $s(t)$ può essere dunque valutato come:

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \quad (\text{B.28})$$

Ovvero una qualsiasi funzione $s(t)$ ottenuta dalla somma di due funzioni ortogonali tra loro ha valore efficace pari alla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle funzioni componenti. Ovviamente quanto esposto può essere esteso anche al caso in cui le funzioni ortogonali che compongono la $s(t)$ siano più di due.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz asserisce che il valore assoluto del prodotto scalare di due funzioni è sempre minore o uguale al prodotto dei loro valori efficaci:

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt \right| \leq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s_1^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s_2^2(t)dt} \quad (\text{B.29})$$

In un circuito elettrico la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz esprime il legame esistente tra la potenza attiva e la potenza apparente. Posti difatti $s_1(t) = v(t)$ e $s_2(t) = i(t)$ si ha che il termine a sinistra del segno di disuguaglianza, essendo il valor medio della potenza istantanea, rappresenta la potenza attiva mentre il termine a destra del segno di disuguaglianza, essendo il prodotto tra i valori efficaci di corrente e tensione, rappresenta la potenza apparente. Si ha dunque che:

$$P \leq S \quad (\text{B.30})$$

L'uguaglianza si ha solamente se $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono in fase tra loro, ovvero in termini elettrici solamente se il carico è puramente resistivo. Tale relazione ha validità sia nel caso in cui tensione e corrente siano sinusoidali sia nel caso in cui il circuito funzioni con tensioni e correnti non perfettamente sinusoidali.

B.5 Trasformata di Hilbert

Dato un segnale $s(t)$ si dice trasformata di Hilbert il segnale $\tilde{s}(t) = H\{s(t)\}$ ottenuto dal transito del segnale attraverso un filtro, detto filtro di Hilbert o filtro in quadratura, caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$H_H(f) = \begin{cases} j & \text{per } f < 0 \\ 0 & \text{per } f = 0 \\ -j & \text{per } f > 0 \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Alternativamente in termini di parte reale e parte immaginaria:

$$|H_H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{per } f \neq 0 \\ 0 & \text{per } f = 0 \end{cases} \quad \arg\{H_H(f)\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{per } f < 0 \\ 0 & \text{per } f = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{per } f > 0 \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

Nel dominio della frequenza si ha dunque che:

$$\tilde{S}(f) = H_H(f)S(f) \quad (\text{B.33})$$

Dove $S(f)$ e $\tilde{S}(f)$ rappresentano rispettivamente la trasformata di Fourier del segnale $s(t)$ e la trasformata di Fourier del segnale Hilbert trasformato $\tilde{s}(t)$.

Dato un segnale $s(t)$ la sua trasformata secondo Hilbert può essere dunque valutata applicando la (B.33) e antitrasformando il risultato ottenuto secondo Fourier; alternativamente essa può essere valutata effettuando l'integrale di convoluzione tra il segnale $s(t)$ e la risposta impulsiva del filtro di Hilbert:

$$\tilde{s}(t) = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (\text{B.34})$$

Dove p.v. indica il valore principale di Cauchy e $h(t)$ indica la risposta impulsiva del filtro di Hilbert ($h_H(t) = 1/\pi t$).

In tabella B.1 sono riportate le trasformate di Hilbert delle funzioni seno e coseno.

| Funzione $s(t)$ | Funzione Hilbert Trasformata $\tilde{s}(t)$ |
|------------------------|---|
| $S_m \sin(2\pi f_0 t)$ | $-S_m \cos(2\pi f_0 t)$ |
| $S_m \cos(2\pi f_0 t)$ | $S_m \sin(2\pi f_0 t)$ |

Tabella B.1 Trasformata di Hilbert delle funzioni seno e coseno

Una breve dimostrazione di come le trasformate di Hilbert riportate in tabella B.1 possano essere ottenute è di seguito fornita. Si consideri dunque, a titolo di esempio, la funzione:

$$s(t) = S_m \cos(2\pi f_0 t) \quad (\text{B.35})$$

La trasformata di Fourier del segnale (B.35) è pari:

$$S(f) = \frac{S_m}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (\text{B.36})$$

La trasformata di Fourier del segnale Hilbert trasformato può essere valutata utilizzando la (B.33); si ha dunque che:

$$\tilde{S}(f) = \frac{S_m}{2} [-j\delta(f - f_0) + j\delta(f + f_0)] = \frac{S_m}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \quad (\text{B.37})$$

La trasformata di Hilbert del segnale è dunque ottenibile antitrasformando secondo Fourier il risultato ottenuto:

$$\tilde{s}(t) = S_m \sin(2\pi f_0 t) \quad (\text{B.38})$$

Procedendo in modo analogo è possibile determinare la trasformata di Hilbert della funzione seno riportata in tabella B.1.

B.6 Massimi e minimi di una funzione a più variabili

Nello studio delle funzioni a più variabili, così come nello studio delle funzioni ad una sola variabile, notevole interesse è ricoperto dalla ricerca dei massimi e dei minimi relativi. Nel seguente paragrafo sono riportati in modo schematico i concetti fondamentali di come condurre tale ricerca sia nel caso in cui essa debba essere condotta senza la presenza di alcun vincolo sia nel caso in cui essa debba essere condotta rispettando dei vincoli di uguaglianza e/o di disuguaglianza.

Si consideri la funzione reale a più variabili reali definita nel modo seguente:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{B.39})$$

Condizione necessaria affinché un punto x_s sia un punto stazionario della funzione $f(\mathbf{x})$ e che le derivate prime della funzione $f(\mathbf{x})$ valutate in x_s siano nulle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s} = 0 \\ \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s} = 0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.40})$$

I punti stazionari della funzione $f(\mathbf{x})$ possono essere dunque determinati imponendo che il gradiente della funzione stessa sia nullo:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{B.41})$$

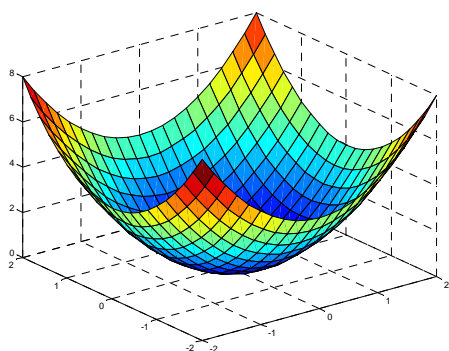
La natura del punto stazionario può essere invece determinata valutando la matrice Hessiana così definita:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

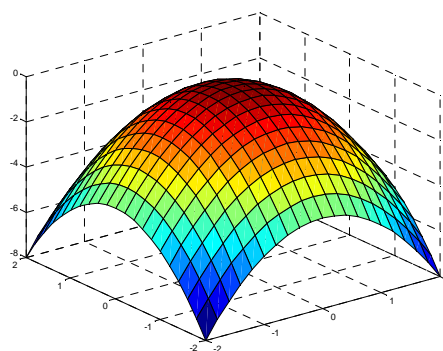
in corrispondenza del punto stazionario \mathbf{x}_s . In particolare si ha che se la matrice Hessiana $H(\mathbf{x})$ è:

- definita positiva, allora \mathbf{x}_s è un punto di minimo relativo della funzione $f(\mathbf{x})$ (fig B.1(a));

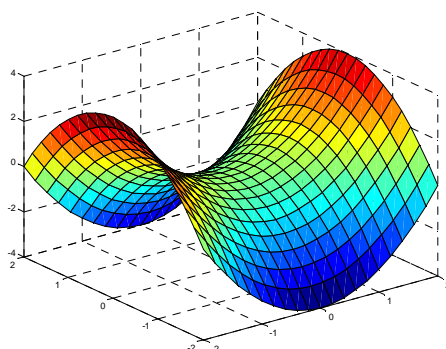
- semidefinita positiva, allora x_s è un punto di minimo relativo o un punto di sella della funzione $f(x)$;
- definita negativa, allora x_s è un punto di massimo relativo della funzione $f(x)$ (fig B.1(b));
- semidefinita negativa, allora x_s è un punto di massimo relativo o un punto di sella della funzione $f(x)$;
- né definita né semidefinita (negativa o positiva), allora x_s è un punto di sella della funzione $f(x)$ (fig .B.1(c)).



(a)



(b)



(c)

Figura B.1 Punti stazionari nel caso di funzioni a due variabili: minimo (a), massimo (b), sella (c)

In alcune circostanze è interessante e utile ricercare i minimi e i massimi di una funzione $f(x)$ non in tutto il dominio di definizione della funzione stessa ma in un

sottoinsieme di esso. In tal caso il processo di determinazione dei minimi e dei massimi viene detto vincolato ed esso consiste nella ricerca di quei punti che minimizzano e massimizzano la funzione e che nel contempo rispettano un insieme di vincoli espressi da un gruppo di i equazioni del tipo $g_i(x) = 0$. Nei problemi di programmazione lineare/non lineare a tale tipo di problema è spesso associata la seguente notazione:

$$\begin{aligned} \text{Min (Max)} \quad & f(x) \\ & g_i(x) = 0 \end{aligned} \tag{B.43}$$

Questo ostacolo può essere superato trasformando il problema vincolato in un problema non vincolato del tutto equivalente. Tale trasformazione può essere effettuata o sostituendo il vincolo all'interno della funzione (qualora ciò sia possibile) o utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; viene dunque definita una nuova funzione detta Lagrangiana avente il seguente aspetto:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \tag{B.44}$$

Dove i coefficienti λ_i prendono il nome di moltiplicatori di Lagrange.

Condizione necessaria affinché un punto x_s sia un punto stazionario della funzione $f(x)$ è che il gradiente della funzione Lagrangiana sia nullo e che contemporaneamente tale punto soddisfi i vincoli imposti:

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x_s, \lambda) = 0 \\ g_i(x_s) = 0 \end{cases} \tag{B.45}$$

Il procedimento di determinazione dei punti stazionari e la valutazione della loro natura segue un iter analogo a quello precedentemente mostrato. Dapprima Si

calcolano dunque i punti stazionari imponendo che il gradiente della funzione Lagrangiana sia nullo:

$$\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \tag{B.46}$$

Successivamente si valuta la matrice Hessiana, che in questo caso assume l'aspetto seguente:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_m \partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_m \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_m \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial \lambda_m \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_1 \partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_1 \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_n \partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_n \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \tag{B.47}$$

in corrispondenza del punto stazionario x_s ricavato dalla soluzione del sistema (B.46).

In conclusione è bene ricordare la definizione di matrice definita/semidefinita positiva e la definizione di matrice definita/semidefinita negativa. Una matrice simmetrica $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è:

- definita positiva se $a^T H a > 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq 0$;
- semidefinita positiva se $a^T H a \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq 0$;
- definita negativa se $a^T H a < 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq 0$;
- semidefinita negativa se $a^T H a \leq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq 0$.

Un metodo pratico per determinare la definizione della matrice Hessiana H consiste nel valutare il determinante dei minori principali di nord-ovest della matrice stessa.

Nominando questi ultimi come H_1, H_2, \dots, H_n si ha che la matrice Hessiana H è:

- definita positiva se tutti i minori principali della matrice stessa hanno determinante strettamente positivo;
- semidefinita positiva se tutti i minori principali della matrice stessa hanno determinante non negativo;
- definita negativa se tutti i minori principali hanno determinante non nullo e segni alterni a partire da $\det(H_1) < 0$;
- semidefinita negativa se tutti i minori principali hanno determinante non nullo e segni alterni a partire da $\det(H_1) \leq 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.Budeanu, "*Reactive and fictitious powers,*" Rumanian National Institute, No.2, 1927.
- [2] S.Fryze, "*Active, Reactive and apparent powers in nonsinusoidal systems,*" Pzreglad Elektrot., no.7, pp,193-203,1931.
- [3] W.Shepherd and P.Zakikhani, "*Capacitance compensation in systems with nonsinusoidal voltage,*" Presented at the 7th universities power engineering conference, Univeristy of Bradford, 1972, pp.117-122.
- [4] W.Shepherd and P.Zakikhani, "*Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal system,*" Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 119, pp.1361-1362, Sept. 1972, and vol. 120. pp. 706-798, July 1973.
- [5] D.Sharon, "*Reactive power definitions and power factor improvement in non linear systems,*" Proc. Inst. Elec. Eng.,vol. 120, pp.704-706, June 1973.
- [6] A.E.Emanuel, "*Suggested definition of reactive power in nonsinusoidal systems and reactive power definition and power factor improvement in nonlinear systems,*" Proc. Inst. Elec. Eng.,vol.121,no.7, pp 705-706, July 1974.
- [7] N.L.Kuster and W.J.M.Moore, "*On the definition of reactive power under nonsinusoidal conditions,*" IEEE Trans. Power Appl. Syst.,vol PAS-99, pp. 1845-1854, Sept./Oct.1980.
- [8] C.H.Page, "*Reactive power in nonsinusoidal situations,*" IEEE Trans. Instrum. Meas.,vol.IM-29, pp.420-423, Dec.1980.

- [9] L.S.Czarnecki, "Considerations on the reactive power in nonsinusoidal situations," IEEE Trans. On Inst. And Meas, vol. 34, No.3, pp 399-404, Sept. 1985.
- [10] L.S.Czarnecki, "Minimization of reactive power under nonsinusoidal conditions," IEEE Trans. On Inst. And Meas, vol. IM-36, No.1, pp 18-22, March 1987.
- [11] L.S.Czarnecki, "What is wrong with the Budeanu concept o reactive and distortion power and why it should be abandoned," IEEE Trans. On Inst. And Meas., vol. 36, No. 3, pp. 834-837, Sept. 1987.
- [12] A.Ferrero, "Definitions of electrical quantities commonly used in nonsinusoidal conditions," Eur. Trans.Elect.Power, vol.8, no.4, pp.235-240, July/ August 1998.
- [13] C.Cepisca, H.Andrei, S.Ganatsios and M.Veyssiere, "Energy measurement techniques for non sinusoidal situations," International conference on metrology & measurement systems, June 27-28, 2002.
- [14] H. Lev-Ari, A.M.Stankovic, S.J. Ceballos, "An orthogonal decomposition of apparent power with application to an industrial load," 15th PSCC, Liege; 22-26 August 2005.
- [15] Jacque L.Willems, "Budeanu's reactive power and related concepts revisited," Comunicazione privata tra l'autore e A.Ferrero October 2010.
- [16] IEEE PES, Power System Instr. And Meas Comm., "IEEE Standard definitions for the measurement of electrical power quantities under sinusoidal, nonsinusoidal, balanced or unbalanced conditions," IEEE Std.1459-2010, February 2010.
- [17] Jacques L. Willems, "The fundamental concepts of power theories for single phase and three-phase voltages and currents", IEEE Instrumentation & Measurement magazine, October 2010.

- [18] M.E. Van Valkenburg *“Introduction to modern network synthesis”*, Jhon Wiley & sons, Inc Publishers.
- [19] Louis Weinberg *“Network analysis and synthesis”*, McGRAW-HILL.
- [20] Livia Tonolini, Franco Tonolini, *“Corso superiore di matematica 1: geometria analitica, trigonometria, complementi di algebra e di geometria,”* Minerva Italica 1997.
- [21] Livia Tonolini, Franco Tonolini, *“Corso superiore di matematica 2: analisi infinitesimale, analisi numerica,”* Minerva Italica 1997.
- [22] Unknown authors, *“Getting started guide,”* the math work inc. 2004.
- [23] Thomas Coleman, Mary Ann Brach, Andrew Grace, *“Optimization toolbox for use with Matlab,”* The math works inc 1999.