

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica



Classificazione e restauro
di immagini a colori:
un approccio via Γ -convergenza

Relatore: Prof. Franco Tomarelli

Tesi di Laurea di:
Alfonso Fascì, matricola 721905

Anno Accademico 2009–2010

Ringraziamenti

Indice

Indice	iii
Introduzione	v
1 Trattamento di immagini monocromatiche	1
1.1 Restauro	3
1.2 Segmentazione	5
1.3 Classificazione	9
1.4 Un modello di classificazione e restauro	12
2 Spazi di colore	15
2.1 Perché uno spazio di colore ha tre dimensioni?	15
2.2 I modelli <i>CIE-XYZ</i> , <i>RGB</i>	17
2.3 Distanza percettiva fra colori	20
2.4 Spazi di colore come varietà Riemanniane	23
3 Classificazione di immagini a colori	27
3.1 Formulazione debole e risultati di esistenza	28
3.2 Proprietà qualitative delle minimizzanti	31
3.3 Approssimazione via Γ -convergenza	33
4 Γ-convergenza	39
4.1 Un approccio maieutico	40
4.2 Semicontinuità e coercività	44
4.3 Le diverse definizioni di Γ -convergenza e le sue principali proprietà	47
4.4 Γ -liminf e Γ -limsup: rilassamento	52
4.5 Convergenza dei minimi	54
4.6 Γ -limite con un parametro continuo	56
4.7 Calcolo del Γ -limite	57

5	Richiami di teoria della misura	61
5.1	Misure in spazi metrici	67
6	Semicontinuità e coercività in spazi L^p e $H^{1,p}$	73
6.1	Spazi L^p	73
6.2	Mollificazione e distribuzioni	77
6.3	Spazi $H^{1,p}$	80
7	Spazi BV e insiemi di perimetro finito	85
7.1	Funzioni a variazione limitata	85
7.2	Insiemi di perimetro finito	90
7.3	Partizioni di Caccioppoli e funzioni costanti a tratti	94
7.4	Funzionali isotropi su partizioni di Caccioppoli	97
8	Modelli di transizione di fase	101
9	Analisi asintotica del modello di classificazione e restauro per immagini a colori	111
9.1	Disuguaglianza del liminf	113
9.2	Disuguaglianza del limsup	117
9.3	Equicompattezza	123
10	Approssimazione via Γ-convergenza	125
10.1	Convergenza delle energie di segmentazione	129
11	Conclusioni	133
	Bibliografia	135

Introduzione

In questo lavoro di tesi si propone un modello di classificazione per immagini a colori. Si formalizza tale modello mediante un problema con discontinuità libera, corrispondente alla minimizzazione di un opportuno funzionale. Infine si costruisce una approssimazione di tale funzionale nel senso della Γ -convergenza: la minimizzazione del funzionale approssimante è interpretabile come un algoritmo di classificazione e restauro per immagini a colori.

Per chiarezza di esposizione precisiamo la nozione **immagine a colori** a colori che useremo nel seguito.

Dato un dominio aperto e regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ che rappresenta una regione del piano (tipicamente un rettangolo) si può rappresentare un'immagine monocromatica (o in scala di grigi) come una funzione scalare $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ che indica un'intensità luminosa. Il capitolo 1 è dedicato ad alcuni importanti metodi variazionali per il trattamento delle immagini monocromatiche.

Un'immagine a colori è generalmente rappresentata come una funzione vettoriale $u : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$, in cui $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ è un sottoinsieme chiuso e limitato che rappresenta uno *spazio di colori*: ad esempio per il formato RGB si considera $\mathcal{C} = [0, 1]^3$.

In questo senso lo *spazio dei colori* è semplicemente un sottoinsieme dello spazio \mathbb{R}^3 munito della distanza euclidea. Tuttavia se siamo interessati (e lo saremo) a dare una nozione di distanza su \mathcal{C} che corrisponda alla *distanza percepita* dalla nostra mente risulta decisamente inopportuno impiegare la distanza euclidea. Per convincersi di ciò basta dare un'occhiata alla figura 1. La costruzione di uno spazio di colori con una metrica vicina a quella percepita è una questione che nell'ultimo secolo è stata affrontata da diversi punti di vista. In generale si è rilevata l'impossibilità di determinare un sistema di coordinate che renda uno spazio di colore *perceptivamente uniforme*, cioè tale che la distanza euclidea su esso coincida con quella percepita; questo argomento

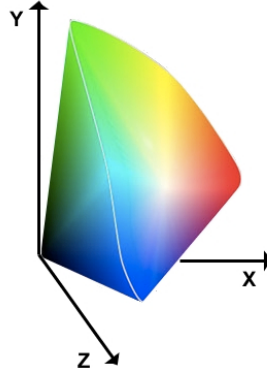


Figura 1: Spazio di colore *CIE XYZ*.

è affrontato nel capitolo 2, in particolare nella sezione 2.4 è presentato un approccio modellistico di carattere generale che consiste nel considerare l'insieme \mathcal{C} munito di un *tensore metrico*, cioè un campo di matrici $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simmetriche, definite positive e a coefficienti regolari che inducono una metrica $d_g(\cdot, \cdot)$ espressa in termini di geodetiche cioè

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 (\langle \dot{v}, g(v)\dot{v} \rangle)^{1/2} dt : v \in C^1([0, 1], \mathcal{C}), v(0) = x, v(1) = y \right\}$$

Ciò equivale a dire che uno *spazio di colori* è una varietà riemanniana di dimensione 3.

Nel seguito per noi una immagine a colori sarà una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ e ipotizzeremo che (\mathcal{C}, g) sia uno spazio di colori (definizione 2.2).

Classificazione di immagini a colori

La *classificazione* di un'immagine può essere definita come un processo di partizione di un'immagine in regioni significative ottenuta raggruppando i pixel che hanno caratteristiche comuni (colore, intensità o texture). Viene utilizzata per semplificare la rappresentazione delle immagini mettendo in evidenza oggetti e bordi (figura 2).

La classificazione si può pensare come suddivisa in due passi:

- (i) Si fissano un numero finito l di colori $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$ che rappresentino i colori medi macroscopici presenti in un'immagine z : questa scelta può derivare, ad esempio, dall'applicazione di un algoritmo di clustering agglomerativo o da un'argomento di discretizzazione.



Figura 2: Un esempio di classificazione.

- (ii) Si determina una partizione $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,l}$ di Ω costituita da l porzioni $\{U_i\}_{i=1,\dots,l}$ cioè tali che

$$U_i \cap U_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^l U_i$$

in modo che ogni porzione U_i sia associata al valore α_i . Poichè ogni porzione U_i potrebbe avere una frontiera topologica ∂U_i molto frastagliata l'idea è di ottenere bordi $\partial U_i \cap \partial U_j \cap \Omega$ regolari e che soddisfino un principio d'interfaccia minima. Inoltre dobbiamo penalizzare anche la distanza dal dato z .

Sulla base del procedimento appena esposto presentiamo un problema di minimo per la classificazione di immagini che tiene conto della *distanza percepita* fra colori. Sia (\mathcal{C}, g) uno spazio di colori e $d_g(\cdot, \cdot)$ la metrica associata. Assegnato un numero finito $l \geq 2$ di colori distinti denotati con $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$, un parametro positivo $\beta > 0$ e un'immagine a colori $z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{C})$ ci proponiamo di minimizzare fra tutte le partizioni $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,l}$ di Ω il funzionale definito come

$$E^z(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l d_g(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial U_i \cap \partial U_j \cap \Omega) + \beta \sum_{i=1}^l \int_{U_i} |d_g(z(x), \alpha_i)|^2 dx$$

in cui

- \mathcal{H}^1 denota la misura di Hausdorff monodimensionale, quindi il primo termine rappresenta la lunghezza del bordo della partizione pesata con la distanza percepita fra i colori relativi agli elementi della partizione.

- Il secondo termine è detto *fidelity term* ed è un'energia di volume che misura la distanza percepita dal dato z .
- Il parametro positivo β rappresenta il peso relativo fra i due tipi di energia, che nelle applicazioni potrà essere opportunamente regolato in base alle esigenze.

Nella sezione 3.1 è presentata una formulazione debole ambientata nell'insieme delle funzioni a variazione limitata costanti a tratti

$$BV(\Omega, K) = \left\{ u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3) : u \in K \text{ q.o. in } \Omega \right\}.$$

Il problema diventa

$$E^z(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l d_g(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial^* U_i \cap \partial^* U_j \cap \Omega) + \beta \int_{\Omega} |d_g(u, z)|^2 dx & \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Nella sezione 3.1 è discussa l'esistenza dei minimi di questa formulazione e il problema della loro regolarità. Nella sezione 3.2 sono illustrate alcune proprietà dei minimi attraverso qualche semplice esempio.

Approssimazione via Γ -convergenza

Il problema (1) rientra nella classe dei *problemi con discontinuità libera* e la sua analisi sia teorica che numerica risulta difficoltosa a causa della presenza congiunta di energie di area e di linea. Per affrontare questo tipo di problemi solitamente si sostituisce il funzionale oggetto di studio $F(u)$ con una famiglia di funzionali dipendenti da un parametro positivo $F_\varepsilon(u)$ che contengano solo energie di volume (quindi più trattabili numericamente) e tali che le minimizzanti u_ε e i valori minimi $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ convergano, rispettivamente, per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ad una minimizzante u_0 di $F(u)$ e al suo valore minimo $F(u_0)$ cioè

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0$$

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow F(u_0).$$

Lo strumento più adeguato per questa tipologia di analisi è rappresentato dalla Γ -convergenza. Si tratta di una nozione di convergenza per famiglie di funzionali che trova applicazione in molti altri ambiti e che è presentata, insieme alle sue principali proprietà, nel capitolo 4.

Presentiamo adesso il risultato principale di questo lavoro di tesi. Per una esposizione più dettagliata rimandiamo alla sezione 3.3.

Dato uno spazio di colori (\mathcal{C}, g) e un insieme finito di l colori $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$ si consideri il potenziale positivo $W_\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty]$ dipendente dal parametro positivo $0 < \delta < \bar{\delta} = \min\{|\alpha - \beta| : \alpha, \beta \in K, \alpha \neq \beta\}/2$ definito come

$$W_\delta(x) = \left[\frac{1 + \delta}{2} \psi \left(\frac{\text{dist}(x, K)}{\delta} \right) \right]^2 \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

in cui $\text{dist}(x, K) = \min\{|x - \alpha| : \alpha \in K\}$ è la distanza euclidea del punto $x \in \mathbb{R}^3$ dall'insieme K e $\psi : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ è definita come

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(1-x^2)} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Con questa definizione la funzione W_δ verifica le seguenti proprietà strutturali per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$

- (1) **(Positività)** $W_\delta(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ e $W_\delta(x) = [\frac{1+\delta}{2}]^2$ se $|x| > R$.
- (2) **(Numero finito di zeri)** ha un numero finito l di zeri che coincide con l'insieme K , cioè $\{x \in \mathbb{R}^3 : W(x) = 0\} = K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$,
- (3) **(Regolarità)** $W \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Si noti che dalla proprietà (ii) se $l \geq 2$ segue la non convessità.

Per δ che tende a zero abbiamo che $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} W_\delta(x) = W_0(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ in cui

$$W_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus K \end{cases}.$$

Indicheremo con γ il campo di matrici ottenuto estraendo l'unica radice quadrata simmetrica e definita positiva di g (Osservazione 2.3) ottenendo che le distanze in un intorno di U di $y \in \mathcal{C}$ siano approssimativamente

$$d_g^2(x, z) \approx \langle x - z, g(y)x - z \rangle = |\gamma(y)(x - z)|^2 \quad \forall x, z \in U.$$

Consideriamo la seguente famiglia di funzionali a due parametri positivi $\varepsilon, \delta > 0$

$$E_{\varepsilon, \delta}^z(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\varepsilon} W_{\delta}(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u) D_j u|^2 + \beta |d_g(z, u)|^2 \right] dx & \text{se } u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3)$$

Usando i classici risultati di semicontinuità e coercività in spazi di Sobolev si dimostra che per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ questo funzionale ammette minimo finito (teorema 6.27 nella sezione 6.3 del capitolo 6).

Enunciamo il risultato principale, dimostrato nel capitolo 10.

Teorema 1. *Sia (\mathcal{C}, g) uno spazio di colori, $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$ un insieme finito di l colori. Sia $E^z(u)$ il funzionale definito dalla (1) e $E_{\varepsilon, \delta}^z(u)$ definito dalla (3).*

Sia $\delta : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione continua e strettamente monotona tale che $\delta(0) = 0$ e ε_j una successione di numeri positivi che tende a 0. Allora abbiamo che se u_{ε_j} è una successione costituita da minimizzanti di $E_{\varepsilon_j, \delta(\varepsilon_j)}^z$ si può estrarre una sottosuccessione convergente, che indichiamo ancora con u_{ε_j} tale che

$$u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0 \quad \text{fortemente in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

$$E_{\varepsilon_j, \delta(\varepsilon_j)}^z(u_{\varepsilon_j}) \rightarrow E^z(u_0)$$

e $u_0 \in \operatorname{argmin}(E^z)$.

È importante fare alcune osservazioni. Innanzitutto le configurazioni ad energia finita del funzionale (1) possono essere discontinue lungo linee mentre il funzionale (3) è ambientato su un insieme di funzioni differenziabili nel senso delle distribuzioni e gli elementi dello spazio di Sobolev $H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ non possono avere discontinuità lungo linee.

Il problema (1) ha come ultimo termine un *fidelity term* e come primo termine un'energia di segmentazione. Il problema (3) presenta come ultimo termine lo stesso *fidelity term* mentre incontriamo altri due termini in competizione che approssimano la lunghezza della segmentazione.

- Il termine $\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} W_{\delta(\varepsilon)}(u) dx$ è un'energia di **classificazione** nel senso che, al tendere di $\varepsilon \rightarrow 0^+$, penalizza in maniera crescente la distanza di u dall'insieme K .



Figura 3: Comportamento qualitativo delle minimizzanti

- Il termine $\int_{\Omega} \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u) D_j u|^2 dx$ è un'energia di **regolarizzazione** compatibile con la struttura del tensore metrico g e decrescente per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ che penalizza le interfacce superflue.

La minimizzazione del funzionale $E_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}^z$ descrive quindi un **modello di classificazione e restauro per immagini a colori**.

Dall'analisi della Γ -convergenza si deduce l'interpretazione seguente per il parametro ε : se trascuriamo scostamenti numericamente irrilevanti dai valori in K , ε rappresenta l'ampiezza sulla quale avviene una brusca transizione da un valore all'altro (figura 3). In questo senso ε può anche essere interpretato come un **parametro di sfocamento**.

L'analisi asintotica sfrutta un risultato di Γ -convergenza con applicazioni nella teoria dei sistemi multifase mostrato da S. Baldo in [9] ed enunciato alla fine del capitolo 8 nel quale è riportata anche una derivazione del modello fisico. I problemi nell'impiego di tale risultato sono due:

- (1) Il risultato in [9] funziona nel caso in cui il campo di matrici g sia isotropo, cioè del tipo $f(x)I$ in cui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, +\infty)$ e I è la matrice identità: ciò non è soddisfacente perchè come vedremo nel capitolo 2 anche i più semplici spazi di colore hanno una metrica non isotropa.
- (2) Per replicare in maniera esatta la metrica definita su \mathcal{C} è necessario un secondo passaggio al limite, rilevabile nella dipendenza della famiglia di funzionali introdotti da δ .

La tesi è articolata come segue

- **Capitolo 1** Vengono presentati alcuni modelli variazionali per il trattamento delle immagini monocromatiche (restauro, segmentazione, classificazione) ed alcuni risultati noti in letteratura.
- **Capitolo 2** Contiene gli elementi della teoria di generazione del colore nell'occhio umano (*teoria del tristimolo*) sulla base del quale sono stati formulati diversi modelli per la rappresentazione del colore (*CIE-XYZ*, *RGB*). In seguito sono presentati due spazi di colori, che sono spazi metrici, nei quali la distanza è vicina a quella percepita. Alla fine della sezione viene giustificata l'assunzione modellistica che uno spazio di colori sia una varietà Riemanniana.
- **Capitolo 3** Viene proposto un problema con discontinuità libera per la classificazione di immagini a colori ed il risultato principale della tesi.
- **Capitolo 4** Oltre a ricordare i concetti di semicontinuità e coercività (strumenti indispensabili per affrontare i problemi di minimo) viene presentato il concetto di Γ -convergenza.
- **Capitolo 5** Alcune definizioni e risultati dalla *Teoria Geometrica della Misura*.
- **Capitolo 6** Classici risultati di semicontinuità e coercività in spazi di Lebesgue e in alcuni spazi di Sobolev.
- **Capitolo 7** Alcune proprietà delle funzioni a variazione limitata, degli insiemi di perimetro finito e delle partizioni (finite) di Caccioppoli con infine un risultato di esistenza per il problema con discontinuità libera proposto nel capitolo 3.
- **Capitolo 8** È presentata una derivazione di alcuni modelli nella teoria delle transizioni di fase per fluidi in quiete e la loro interpretazione come energie d'interfaccia. In particolare sono riportati due risultati di Γ -convergenza. Il primo tratta il caso di un fluido ed è stato ottenuto da L. Modica in [35]. Il secondo generalizza l'analisi ai sistemi multifase non interagenti ed è stato ottenuto da S. Baldo in [9].
- **Capitolo 9** Viene calcolato il Γ -limite di una famiglia di funzionali strettamente legati alla famiglia considerata in [9]. Questo risultato rappresenta una traccia fondamentale nella dimostrazione del risultato principale.

- **Capitolo 10** Approssimazione via Γ -convergenza: dimostrazione del risultato principale.
- **Capitolo 11** Conclusioni.

Metodi variazionali e trattamento di immagini monocromatiche

Il trattamento delle immagini presenta una grande varietà di problematiche che vengono affrontate con diversi strumenti. Per una presentazione generale dei questi metodi si consiglia [8]. Nel seguito ci concentreremo su modelli che possono essere formulati come problemi di minimo.

La difficoltà in questo ambito è dovuta al fatto che si presentano congiuntamente energie di volume e di superficie, questi problemi sono conosciuti come *problemi con discontinuità libera* e un approccio generale al loro studio è stato proposto da E. De Giorgi in [25].

La giusta ambientazione per questi problemi è rappresentata dalle *funzioni a variazione limitata*. Dato un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ indichiamo con $BV(\Omega)$ l'insieme delle funzioni definite su Ω a valori scalari sommabili secondo Lebesgue e il cui gradiente distribuzionale è una misura vettoriale di Radon. Data $u \in BV(\Omega)$ per il suo gradiente distribuzionale Du vale la seguente formula di decomposizione

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^n + (u^+ - u^-) \nu_u \mathcal{H}^1 \llcorner J_u + C_u$$

in cui il primo termine è la parte assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue (nel caso degli spazi di Sobolev il gradiente distribuzionale si riduce a questo termine), il secondo è una misura di salto e la terza è una misura diffusa chiamata parte Cantoriana. Spesso inoltre è necessario studiare dei sottoinsiemi propri che abbiano particolari proprietà. La definizione e i principali risultati riguardo questo spazio di funzioni sono presentati nel capitolo 7 sezione 7.1.

I problemi con discontinuità libera sono difficili da risolvere numericamente. L'idea è di sostituire un generico funzionale $F(u)$ con una famiglia di funzionali a un parametro positivo $F_\varepsilon(u)$ che contengano solo energie di volume (quindi più trattabili numericamente) e tali che le minimizzanti u_ε e i valori minimi $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ convergano, rispettivamente, per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ad una minimizzante u_0 di $F(u)$ e al suo valore minimo $F(u_0)$ cioè

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0$$

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow F(u_0).$$

Lo strumento giusto per compiere questa analisi è rappresentato dalla Γ -convergenza. Si tratta di una nozione di convergenza per famiglie di funzionali che trova applicazione in molti altri ambiti e che è presentata, insieme alle sue principali proprietà, nel capitolo 4.

Presentiamo adesso i principali trattamenti (restauro e segmentazione) delle immagini monocromatiche che possono essere ambientati in un contesto variazionale insieme ai principali risultati noti. L'ordine di esposizione riflette la comparsa cronologica di questi modelli in letteratura. Nelle ultime due sezioni è presentato un problema con discontinuità libera nell'ambito della classificazione ed un modello di classificazione e recupero. Prima di procedere ricordiamo cosa intenderemo nel seguito con il termine immagine.

Cos'è un'immagine?

Un'immagine digitale (chiamata anche immagine discreta) è ottenuta da un'immagine continua tramite un campionamento e una quantizzazione. Questo processo dipende dal dispositivo di acquisizione: si pensi ad esempio ad una videocamera digitale. L'idea di base è di usare una struttura dati costituita da una griglia e di assegnare ad ogni cella, chiamata pixel, un certo numero di informazioni ad esempio la luminosità media nel caso di immagini in scala di grigi o l'intensità di tre diversi colori: rosso, verde e blu (formato RGB).

Una importante caratteristica di un'immagine è la sua risoluzione, cioè il numero di pixel per unità di superficie.

Dato un dominio aperto e regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ che rappresenta una regione del piano (tipicamente un rettangolo) si può rappresentare un'immagine monocromatica (o in scala di grigi) come una funzione reale $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Una scelta alternativa potrebbe essere l'assunzione di un codominio discreto che indichi le modalità di memorizzazione dell'immagine: infatti spesso l'intensità luminosa

è quantizzata in valori naturali compresi fra 0 e 255 e quindi l'immagine è rappresentata come $u : \Omega \rightarrow \{0, \dots, 255\}$.

Rappresentiamo un'immagine a colori come una funzione vettoriale $u : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$, in cui $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ è un sottoinsieme chiuso e limitato che rappresenta l'insieme dei colori (si pensi ad esempio al formato RGB in cui $\mathcal{C} = [0, 1]^3$). Come nel caso monocromatico si può assumere che l'immagine di u sia un sottoinsieme di \mathcal{C} costituito da un numero finito di elementi, come conseguenza di una quantizzazione o di una selezione a priori di un numero finito di colori.

1.1 Restauro

In molte applicazioni abbiamo a che fare con immagini che presentano una degradazione omogenea (difetti nei sensori di acquisizione, rumore naturale, interferenza, problemi di trasmissione, etc.). In questi casi nell'immagine è introdotto un "rumore" ed è necessario trovare un modo di rimuoverlo. Questo è uno dei più vecchi interessi ed è ancora un trattamento necessario in molti casi.

Il restauro di un'immagine può essere visto come un problema di minimo. Indichiamo con u l'immagine iniziale, con u_0 l'immagine osservata e assumiamo il seguente modello di degradazione:

$$u_0 = Ru + \eta$$

in cui η rappresenta un rumore bianco Gaussiano e R indica un operatore lineare che rappresenta una macchia (solitamente una convoluzione). Il problema è formulato come il problema di minimo

$$\inf_{u \in X} E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx,$$

$$X = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla(u) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^2)\}$$

in cui la funzione $\phi : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ è strettamente convessa e con crescita lineare. La scelta di ϕ determina la regolarità del risultato u .

Lo studio matematico di questo problema presenta alcune difficoltà. Lo spazio X non è riflessivo, di conseguenza non possiamo dedurre alcuna informazione dalle minimizzanti limitate. Il problema si affronta rilassando il funzionale nello spazio $BV(\Omega)$ e la corretta formulazione del problema per applicare il metodo diretto è

$$\bar{E}_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_\Omega \phi(|\nabla u|) dx \\ + \lambda c \int_{S_u} (u^+ - u^-) d\mathcal{H}^1 + \lambda c \int_{\Omega - S_u} |C_u| & \text{se } u \in BV(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.1)$$

In [33], [46] è stato mostrato il seguente risultato di esistenza e unicità.

Teorema 1.1. *Sia ϕ una funzione strettamente convessa e con crescita lineare, $R : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ un operatore lineare e continuo, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Allora il problema di minimo (1.1) ha un'unica soluzione $u \in BV(\Omega)$ con energia finita.*

Un possibile approccio per la risoluzione numerica di questo problema consiste nel considerare una successione di funzionali quadratici $E_\varepsilon(u)$ che ammettono minimo in $H^{1,2}(\Omega)$ (facili da trattare numericamente) e usare la Γ -convergenza. Sia $\phi_\varepsilon : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ definita come

$$\phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\phi'(\varepsilon)}{2\varepsilon} t^2 + \phi(\varepsilon) - \frac{\varepsilon\phi'(\varepsilon)}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \phi(t) & \text{se } \varepsilon \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{\varepsilon\phi'(1/\varepsilon)}{2} t^2 + \phi(1/\varepsilon) - \frac{\phi'(1/\varepsilon)}{2\varepsilon} & \text{se } t \geq \frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \quad (1.2)$$

e si consideri la famiglia di funzionali

$$E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_\Omega \phi_\varepsilon(|\nabla u|) dx & \text{se } u \in H^{1,2}(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.3)$$

In [8] è mostrato il seguente risultato.

Teorema 1.2. *Dati i funzionali $E_\varepsilon(u)$ e $\bar{E}(u)$ definiti dalle 1.3 e 1.1. Allora $E_\varepsilon(u)$ Γ -converge a $\bar{E}(u)$ per ε che tende a 0 rispetto alla convergenza forte di $L^1(\Omega)$.*

Il ruolo del parametro λ è legato al concetto di scala e in un certo senso esiste un valore di λ ottimale.

Dal punto di vista applicativo si osservano, con sorpresa, migliori risultati numerici con l'impiego di una ϕ non convessa, per esempio

$$\phi(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

La comprensione di questo fenomeno è ancora una questione aperta.

1.2 Segmentazione

Ci sono diversi modi di definire il compito della segmentazione e in generale non esiste una nozione universalmente accettata. Può essere considerata da due punti di vista diversi. Il primo è quello di ottenere una versione semplificata dell'immagine iniziale, composta da regioni omogenee separate da bordi sottili. Il secondo è l'estrazione dei contorni intesi come una famiglia di linee con una certa regolarità (si pensi ai frame di un cartone animato).

Presentiamo adesso, insieme ai principali risultati, due modelli variazionali noti in letteratura come il modello di Mumford e Shah [38] e il modello di Blake e Zisserman [10]. In entrambi i modelli sono opportunamente bilanciati una distanza integrale dall'immagine da segmentare, un termine di regolarizzazione e la lunghezza dei contorni di segmentazione: in questo senso la segmentazione non è un concetto completamente disgiunto da quello del restauro, ma ha i propri obiettivi e le proprie problematiche.

Funzionale di Mumford e Shah

Il primo funzionale di segmentazione comparso in letteratura è noto come funzionale di Mumford-Shah ed è definito come

$$\mathcal{MS}(K, u) = \int_{\Omega \setminus K} (|Du|^2 + \mu|u - g|^2) dx + \alpha \text{length}(K \cap \Omega)$$

in cui $K \subset \mathbb{R}^2$ è l'unione di una famiglia di curve a priori sconosciute e $\text{length}(K \cap \Omega)$ denota la somma delle lunghezze di tali curve. L'incognita $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare differenziabile in $\Omega \setminus K$. Il dato g rappresenta l'immagine da segmentare.

Il primo termine nel funzionale \mathcal{MS} penalizza le irregolarità (rimozione del rumore) e forza u a essere il più regolare possibile in $\Omega \setminus K$, il secondo penalizza la distanza dal dato g e l'ultimo gli insiemi K lunghi. I due parametri μ e α sono legati ai concetti di scala e contrasto: per un'esposizione più dettagliata si consulti [10], [37].

La principale difficoltà nella minimizzazione del funzionale \mathcal{MS} è dovuta all'insieme indeterminato K . Se tale insieme fosse prescritto la soluzione u sarebbe l'unica soluzione del seguente problema di Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu(u - g) = 0 & \text{in } \Omega \setminus K \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \text{su } \partial\Omega \cup K \end{cases}$$

in cui Δu è il laplaciano di u e $\frac{\partial u}{\partial n}$ è la derivata normale. Di conseguenza possiamo porre $\mathcal{MS}(K) = \mathcal{MS}(u, u(K))$ in modo che il funzionale dipenda principalmente dall'insieme chiuso K come suggerito in [23].

Un'altro approccio è basato sull'ipotesi modellistica che l'insieme K abbia una misura bidimensionale nulla, quindi è possibile estendere la definizione del funzionale ponendo $\mathcal{MS}(K, u) = +\infty$ se $meas(K) > 0$, in cui $meas(K)$ è la misura bidimensionale di K . In questo caso la funzione u è definita quasi ovunque in Ω e K contiene l'insieme dei punti di discontinuità S_u di u , quindi la funzione u è l'unica variabile significativa e $\mathcal{MS}(u) = \mathcal{MS}(u, S_u)$: con questo approccio l'insieme S_u non è necessariamente chiuso quindi non è possibile assumere a priori la chiusura di K .

Questa seconda strategia, proposta da De Giorgi [25], estende il funzionale \mathcal{MS} sul sottoinsieme proprio di $BV(\Omega)$ delle funzioni a variazione limitata i cui elementi ammettono discontinuità solo su insiemi monodimensionali, questo insieme è definito come

$$SBV := \{v \in BV(\Omega) : |Dv|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla v| dx + \int_{S_u} |u^+ - u^-| d\mathcal{H}^1\}$$

e la formulazione debole associata è

$$\inf_{u \in SBV(\Omega)} \overline{\mathcal{MS}}(u) = \int_{\Omega \setminus K} (|\nabla u|^2 + \mu|u - g|^2) dx + \alpha \mathcal{H}^1(S_u).$$

La segmentazione ottimale secondo il modello di Mumford e Shah si ottiene da una soluzione debole attraverso la chiusura dell'insieme delle sue discontinuità, ponendo cioè $K = \overline{S_u}$. L'esistenza di un minimo per questo problema è stata mostrata tramite il metodo diretto in [26].

Una volta ottenuta l'esistenza di una soluzione debole è necessario raffinare il risultato ottenendo una soluzione forte. Il seguente teorema è stato mostrato in [23],[26].

Teorema 1.3 (Esistenza di una soluzione). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un'insieme aperto e assumiamo*

$$\Omega \text{ limitato, } \mu > 0, \quad \alpha > 0,$$

$$g \text{ una funzione limitata e misurabile in } \Omega. \tag{1.4}$$

Allora esiste almeno una coppia (u, K) in cui K è un insieme chiuso, $u \in C^1(\Omega \setminus K)$ e minimizza il funzionale \mathcal{MS} con energia finita. Inoltre $\sup |u| \leq \sup |g|$ e l'insieme $K \cap \Omega$ è l'unione (al più numerabile) di linee di classe C^1 .

Sotto le assunzioni 1.4 e data una segmentazione ottimale K è possibile mostrare che i punti γ che sono estremi di una curva contenuta in K possono essere solo di tre tipi

- (i) $\gamma \in \partial\Omega$, in questo caso la curva associata interseca $\partial\Omega$ in maniera perpendicolare.
- (ii) γ è l'estremo comune di tre curve, allora gli angoli fra due qualsiasi di queste curve è $2\pi/3$
- (iii) γ è l'estremo di una sola curva ed è un punto interno a Ω .

A questo punto l'ultimo problema da risolvere è la formulazione di un algoritmo numerico in grado di approssimare i minimi del funzionale \mathcal{MS} . Presentiamo adesso un approccio basato sulla Γ -convergenza la cui idea di base è aggiungere una variabile ausiliaria z che assume valori prossimi a 0 vicino a K e a 1 lontano da K . Consideriamo la seguente famiglia di funzionali dipendenti dalla due variabili z, u e dal parametro positivo ε definita come

$$\mathcal{MS}_\varepsilon(z, u) = \int_{\Omega} (z^2 |\nabla u|^2 + \mu |u - g|^2) dx + \alpha \int_{\Omega} \left(\varepsilon |Dz|^2 + \frac{(z-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx. \quad (1.5)$$

L'ultimo termine forza z a essere uguale a 0 quasi ovunque mentre tutto il secondo integrale approssima la lunghezza di K nella minimizzazione per $\varepsilon \rightarrow 0$. Questo funzionale è definito sull'insieme $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e poniamo

$$F(z, u) = \begin{cases} \overline{\mathcal{MS}}(z, u) & \text{se } z = 1 \text{ q.o. in } \Omega \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Il seguente risultato è stato provato in [6].

Teorema 1.4. *Si consideriamo i funzionali $\mathcal{MS}_\varepsilon(z, u)$ e $F(z, u)$ definiti dalle 1.5 e 1.6. Allora $\mathcal{MS}_\varepsilon(z, u)$ Γ -converge a $F(z, u)$ per ε che tende a 0.*

Sfruttando questo risultato di analisi asintotica è ora possibile scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange associate a \mathcal{MS}_ε e risolverle, ad esempio, con un metodo alle differenze finite.

Funzionale di Blake e Zisserman

In questa sezione ci occupiamo del seguente funzionale dipendente dalle derivate seconde introdotto da Blake a Zisserman in [10]

$$\begin{aligned} \mathcal{BZ}(K_0, K_1, u) = & \int_{\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)} (|D^2 u|^2 + \mu|u - g|^2) dx \\ & + \alpha \text{length}(K_0 \cap \Omega) + \beta \text{length}((K_1 \setminus K_0) \cap \Omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto e limitato e $|D^2 u|^2$ denota la norma euclidea della matrice Hessiana di u . I parametri positivi α, β, μ e la funzione $g \in L^\infty(\Omega)$ sono dati mentre $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^2$ sono insiemi chiusi e u è una funzione scalare tale che $u \in C^2(\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)) \cap C^1(\Omega \setminus K_0)$. Gli insiemi chiusi K_0, K_1 e la funzione scalare u sono le incognite del problema di minimizzazione del funzionale (1.7) fra tutte le triple (K_0, K_1, u) .

A causa della dipendenza dalle derivate seconde $D^2 u$ (invece che dalle derivate prime come nel caso del funzionale di Mumford e Shah) il funzionale di Blake e Zisserman individua anche l'insieme dei punti nei quali si ha una piega, cioè i punti in cui la funzione è continua ma è discontinuo il suo gradiente. Le discontinuità di u e Du sono rappresentate rispettivamente dagli insiemi K_0 e K_1 che sono "a priori" sconosciuti.

Il seguente risultato di esistenza di una soluzione forte è stato mostrato da M. Carriero, A. Leaci e F. Tomarelli in [18].

Teorema 1.5 (Esistenza di una soluzione). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un'insieme aperto. Assumiamo*

$$\mu > 0, \quad 0 < \beta < \alpha < 2\beta, \quad \Omega \text{ limitato.}$$

g una funzione limitata e misurabile in Ω .

Allora esiste almeno una tripla (K_0, K_1, u) in cui K_0, K_1 sono insiemi chiusi, $u \in C^2(\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)) \cap C^1(\Omega \setminus K_0)$ è approssimativamente continua in $\Omega \setminus K_0$, che minimizza il funzionale \mathcal{BZ} con energia finita. Inoltre gli insiemi $K_0 \cap \Omega$ e $K_1 \cap \Omega$ sono l'unione (al più numerabile) di linee di classe C^1 .

La dimostrazione è stata ottenuta studiando preliminarmente una formulazione debole del problema. Si considerino i seguenti insiemi di funzioni

$$GSBV(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; -k \vee v \wedge k \in SBV_{loc}(\Omega) \forall k \in \mathbb{N}\}$$

$$GSBV^2(\Omega) = \{v \in GSBV(\Omega), \nabla v \in (GSBV(\Omega))^n\}$$

e il problema di minimo

$$\inf_{u \in GSBV^2(\Omega)} \overline{\mathcal{BZ}}(u) := \int_{\Omega} (|D^2 u|^2 + \mu|u - g|^2) dx + \alpha \mathcal{H}^1(S_u) + \beta \mathcal{H}^1(S_{\nabla u} \setminus S_u). \quad (1.8)$$

In [17] è stata mostrata l'esistenza di un minimo del funzionale $\overline{\mathcal{BZ}}$ usando il metodo diretto, quindi la soluzione del problema forte è stata ottenuta in [18] mostrando la regolarità delle minimizzanti di $\overline{\mathcal{BZ}}$.

La minimizzazione numerica del funzionale \mathcal{BZ} è difficile da trattare a causa della difficoltà nell'individuare l'insieme di discontinuità libera K_0 e l'insieme di discontinuità libera del gradiente. Analogamente a quanto visto per il funzionale di Mumford e Shah in [4] si usano due variabili ausiliarie α e σ per introdurre i funzionali

$$\begin{aligned} \mathcal{BZ}_{\varepsilon}(s, \sigma, u) = & \int_{\Omega} ((\sigma^2 - k_{\varepsilon})|D^2 u|^2) dx \\ & + \int_{\Omega} (\zeta_{\varepsilon}(s^2 - \xi_{\varepsilon})|D^2 u|^2 + \mu|u - g|^2) dx \\ & + (\alpha - \beta) \int_{\Omega} \left(\varepsilon |Ds|^2 + \frac{(s-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx \\ & + \beta \int_{\Omega} \left(\varepsilon |D\sigma|^2 + \frac{(\sigma-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx \quad (1.9) \end{aligned}$$

che approssimano \mathcal{BZ} nel senso della Γ -convergenza per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ con opportune scelte di valori infinitesimi $k_{\varepsilon}, \zeta_{\varepsilon}, \xi_{\varepsilon}$.

I risultati numerici mostrano come i minimi approssimati del funzionale di Blake e Zisserman ottenuti risolvendo numericamente il funzionale $\mathcal{BZ}_{\varepsilon}$ catturino meglio le pieghe rispetto ai minimi approssimati del funzionale di Mumford e Shah determinati attraverso i funzionali $\mathcal{MS}_{\varepsilon}$.

1.3 Classificazione

La *classificazione* di un'immagine può essere definita come un processo di partizione di un'immagine in regioni significative ottenuta raggruppando i pixel

che hanno caratteristiche comuni (colore, intensità o texture). Viene utilizzata per semplificare la rappresentazione delle immagini mettendo in evidenza oggetti e bordi (figura 1.1). La differenza rispetto alla *segmentazione* di un'immagine è che in questo caso l'insieme dei valori ammissibili è un insieme discreto ed assegnato a priori, cioè ogni elemento della partizione è identificato con un'etichetta che rappresenta un colore.



Figura 1.1: Un esempio di classificazione.

Presentiamo adesso un problema di minimo con discontinuità libera per la classificazione di immagini. La classificazione si può pensare come suddivisa in due passi:

- (i) Si fissano un numero finito l di colori $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathbb{R}$ che rappresentino i colori medi macroscopici presenti in un'immagine z : questa scelta può derivare, ad esempio, dall'applicazione di un algoritmo di clustering agglomerativo o da un'argomento di discretizzazione.
- (ii) Si determina una partizione $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1, \dots, l}$ di Ω costituita da l porzioni $\{U_i\}_{i=1, \dots, l}$ cioè tali che

$$U_i \cap U_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^l U_i$$

in modo che ogni porzione U_i sia associata al valore α_i . Poichè ogni porzione U_i potrebbe avere una frontiera topologica ∂U_i molto frastagliata l'idea è di ottenere bordi $\partial U_i \cap \partial U_j \cap \Omega$ regolari e che soddisfino un principio d'interfaccia minima. Inoltre dobbiamo penalizzare anche la distanza dal dato z .

Assegnato un numero finito $l \geq 2$ di colori distinti denotati con $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathbb{R}$, i parametri positivi $\beta > 0$, $\theta_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, l$ e un'immagine $z \in L^\infty(\Omega)$

ci proponiamo di minimizzare fra tutte le partizioni $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,l}$ di Ω il funzionale definito come

$$J(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_{ij} \mathcal{H}^1(\partial U_i \cap \partial U_j \cap \Omega) + \beta \sum_{i=1}^l \int_{U_i} |z(x) - \alpha_i|^2 dx$$

in cui

- \mathcal{H}^1 denota la misura di Hausdorff monodimensionale e quindi il primo termine rappresenta la lunghezza della frontiera topologica della partizione pesata con opportuni coefficienti θ_{ij} , che dipendono dalle etichette α_i, α_j relative agli elementi della partizione.
- Il secondo termine è la solita energia di volume che misura la distanza dal dato z .
- Il parametro positivo β rappresenta il peso relativo fra i due tipi di energia, che nelle applicazioni potrà essere opportunamente regolato in base alle esigenze.

Nella sezione 3.1 è discussa la derivazione di una formulazione debole per questa classe di problemi ambientata nell'insieme di funzioni costanti a tratti

$$BV(\Omega, K) = \left\{ u \in BV(\Omega) : u \in K \text{ q.o. in } \Omega \right\}.$$

Il funzionale assume la seguente forma

$$\bar{J}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_{ij} \mathcal{H}^1(\partial^* U_i \cap \partial^* U_j \cap \Omega) + \beta \int_{\Omega} |u - z|^2 dx & \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.10)$$

e nella sezione 3.1 è discussa l'esistenza dei minimi di questa formulazione e il problema della regolarità.

1.4 Un modello di classificazione e restauro

Come visto nelle sezioni precedenti i diversi trattamenti presentati non sono completamente indipendenti e spesso lo stesso modello può avere diversi obiettivi. Adesso presentiamo un modello di classificazione e restauro proposto da C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert e J. Zerubia in [42].

Usando la stessa notazione introdotta nella sezione 1.3 ipotizziamo che il dato z su una porzione Ω_i sia affetto da un disturbo Gaussiano con media α_i e deviazione standard σ_i . Indichiamo in maniera compatta il vettore $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ costituito dai valori selezionati a priori e con $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_l\}$ le deviazioni standard associate. Consideriamo la seguente famiglia di funzionali

$$J_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} (u - z)^2 dx + \lambda^2 \varepsilon \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx + \frac{\eta^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} W_{\alpha\sigma}(u) dx \quad (1.11)$$

in cui:

- Il primo termine è la distanza dal dato z .
- La funzione ϕ è convessa e l'integrale associato rappresenta un termine di ripristino.
- La funzione $W_{\alpha,\sigma}$ è maggiore o uguale a zero, continua e si annulla solo $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Questo è un termine di classificazione nel senso che penalizza la distanza di u dall'insieme α . Ha inoltre una dipendenza dalle deviazioni standard (per maggiori informazioni si consulti [42]).
- I parametri λ, η permettono di bilanciare il peso di ogni termine.

Questo modello, al tendere di ε a 0, diventa un modello di classificazione del tipo esposto nella sezione precedente nel senso della Γ -convergenza, infatti vale il seguente risultato.

Teorema 1.6. *Siano $z \in L^\infty(\Omega)$, $J_\varepsilon(u)$ definito dalla (1.11) con $\phi(s) = s^2$ e $\bar{J}(u)$ definito dalla (1.10) con*

$$\theta_{ij} = \left| \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} 2\lambda\eta\sqrt{W_{\alpha,\sigma}(s)} ds \right|.$$

Allora $J_\varepsilon(u)$ Γ -converge a $\bar{J}(u)$ rispetto alla topologia forte di $L^2(\Omega)$.

questo teorema è la conseguenza di un risultato di Γ -convergenza con applicazioni nella teoria delle transizioni di fase nei fluidi in quiete e mostrato da

S. Baldo in [9]. In questa tesi studieremo in maniera approfondita questo risultato e quindi posticipiamo il suo enunciato.

In [42] il potenziale $W_{\alpha,\sigma}$ è polinomiale di secondo grado a tratti ed è costruito in modo che le energie di transizione del Γ -limite, cioè le quantità

$$\theta_{ij} = \left| \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} 2\lambda\eta \sqrt{W_{\alpha,\sigma}(s)} ds \right|$$

siano proporzionali alla somma delle varianze σ_k associate ai punti α_k tali che $\alpha_i \leq \alpha_k \leq \alpha_j$.

Ricordando quanto detto nella sezione riguardante i modelli di restauro si potrebbe pensare di usare una ϕ non convessa: ciò è confermato da simulazioni numeriche effettuate in [42] nel caso in cui

$$\phi(s) = \frac{s^2}{1+s^2}$$

e che sembrano dare migliori risultati. In questo caso però non sono soddisfatte le ipotesi del teorema sul quale si appoggia il risultato riportato sopra, che per essere mostrato necessita di un'altra dimostrazione. Il risultato è stato ottenuto da G. Aubert, L. Blanc-Feraud e R. March in [7] nel caso in cui

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{s^2}{1+\delta(\varepsilon)s^2}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$$

e che giustifica dal punto di vista teorico le simulazioni numeriche.

Il colore non è una proprietà fisica degli oggetti, si tratta piuttosto di una rappresentazione percettiva della distribuzione di energia fotonica all'interno di uno spettro di riflessione o di emissioni prodotte da un oggetto. Il legame che esiste fra le distribuzioni fotoniche e la nostra percezione del colore è stato studiato per più di trecento anni a partire da Newton. Una rassegna storica della letteratura relativa alla costruzione di uno spazio di colore percettivo è stato presentato da S.M. Boker in [11].

In questo capitolo è presentata la teoria di generazione del colore nell'occhio umano, nota come *teoria del tristimolo* (sezione 2.1). Questa teoria rappresenta una base interpretativa di molti modelli per la rappresentazione del colore. Nella sezione 2.2 sono presentati due classici modelli (*CIE-XYZ*, *RGB*). Nella sezione 2.3 si affronta la questione della *distanza percepita* in uno spazio di colore e sono presentati due esempi.

Nella sezione 2.4 daremo una definizione di spazio di colori.

2.1 Perché uno spazio di colore ha tre dimensioni?

L'occhio umano contiene due categorie di recettori: bastoncelli e coni.

- I bastoncelli sono circa $120 \cdot 10^6$ e sono situati prevalentemente nella regione periferica della retina. Sono sensibili a basse luminosità (1 fotone) e per questo motivo sono responsabili della visione notturna, o scotopica.
- I coni sono circa $6 \cdot 10^6$ e sono situati prevalentemente al centro della retina (fovea). Sono meno sensibili alla luce (100 – 1000 fotoni) e quindi sono responsabili della visione diurna, o fotopica. A loro volta i coni

sono di tre tipi: sensibili alle lunghezze d'onda lunghe (L), medie (M) e corte (S).

I coni e i bastoncelli sono a tutti gli effetti dei sensori nel senso che se sono investiti da una radiazione con spettro $I(\lambda)$, in cui λ è la lunghezza d'onda espressa in nm , producono una tensione elettrica

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\lambda)a(\lambda) d\lambda$$

in cui $a(\lambda)$ è lo spettro di adsorbimento del recettore.

Per ognuno dei recettori introdotti sono stati determinati empiricamente gli spettri di assorbimento (figura 2.1) che nel caso dei coni L , M , S indichiamo rispettivamente con $l(\lambda)$, $m(\lambda)$, $s(\lambda)$.

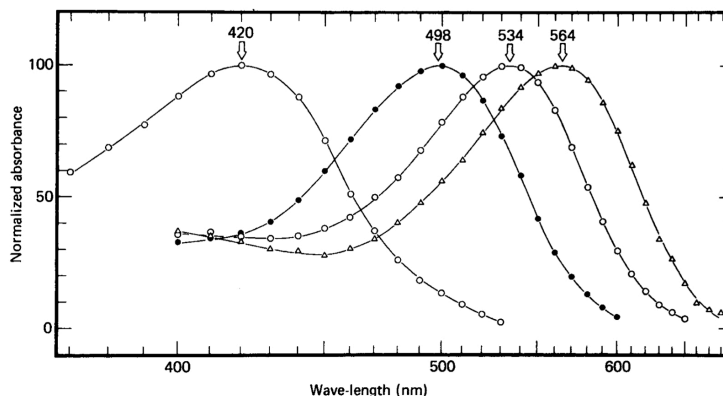


Figura 2.1: Spettri di assorbimento dei quattro tipi di recettori presenti nell'occhio. Da sinistra a destra: bastoncelli, coni di tipo (S), coni di tipo (M), coni di tipo (L).

Quindi se ci limitiamo a considerare la visione diurna, ogni radiazione $I(\lambda)$ viene sintetizzata dall'occhio in tre tensioni elettriche che saranno processate dal cervello e che indichiamo con

$$I_l = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\lambda)l(\lambda) d\lambda, \quad I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\lambda)m(\lambda) d\lambda, \quad I_s = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\lambda)s(\lambda) d\lambda.$$

Per quanto detto possiamo identificare un colore percepito con tre quantità scalari positive che dipendono dallo spettro $I(\lambda)$ della luce incidente solo attraverso le sue componenti I_l , I_m , I_s . Questa teoria di generazione del colore è chiamata *teoria del tristimolo*.

Tale corrispondenza non è iniettiva, cioè a spettri diversi può corrispondere lo stesso colore: questo fenomeno è noto come *metamerismo* e due spettri con le stesse componenti sono dette *metameri* (figura 2.2).

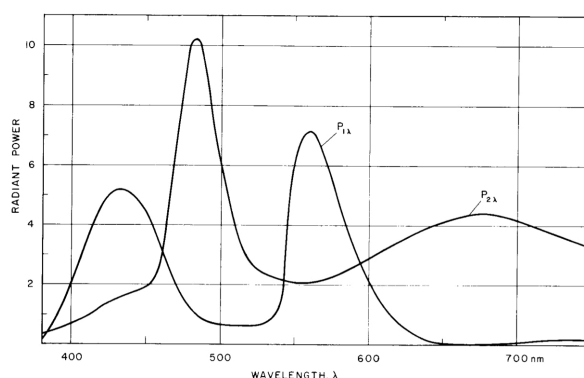


Figura 2.2: Esempio di metameri.

Sulla base del modello fisico esposto sembra ragionevole l'idea di esprimere ogni radiazione visibile $I(\lambda)$ come somma di tre radiazioni fondamentali (non necessariamente visibili singolarmente) che indichiamo con $E^1(\lambda)$, $E^2(\lambda)$, $E^3(\lambda)$ che siano in grado di generare in sintesi additiva tutti i colori e poi rappresentarle in un grafico tridimensionale in funzione delle coordinate I^1 , I^2 , I^3 , che vengono determinate risolvendo il seguente sistema lineare

$$\begin{aligned} I^1 E_l^1 + I^2 E_l^2 + I^3 E_l^3 &= I_l \\ I^1 E_m^1 + I^2 E_m^2 + I^3 E_m^3 &= I_m \\ I^1 E_s^1 + I^2 E_s^2 + I^3 E_s^3 &= I_s \end{aligned}$$

in cui come prima i pedici in basso l, m, s rappresentano l'integrazione delle radiazioni con gli spettri di assorbimento $l(\lambda), m(\lambda), s(\lambda)$. Le ipotesi fatte finora ci permettono di assumere che un colore sia una quantità vettoriale, cioè indipendente dal sistema di riferimento, e che uno spazio di colori sia uno spazio lineare di tre dimensioni.

Questa costruzione astratta di spazio di colore fu intuita quasi due secoli fa da Hermann Grassman, uno dei padri dell'algebra lineare, che in [27] aveva già intuito la natura tridimensionale del colore.

2.2 I modelli CIE-XYZ, RGB

Il formato CIE-XYZ (International Commission on Illumination) rappresenta il primo modello di colore completo, cioè in grado di rappresentare tutti i colori percepibili, e assunto ancora oggi come modello di riferimento. È stato ottenuto

nel 1931 in seguito ad una campagna sperimentale condotta da da W. David Wright and John Guild impiegando come radiazioni fondamentali tre colori primari “virtuali”, cioè non rappresentabili in natura poichè hanno dei valori negativi nel loro spettro. Queste radiazioni sono vicine in termini di spettro ai colori rosso, verde e blu: questa scelta deriva dal fatto che questi tre colori hanno, rispettivamente, la maggior quantità del loro spettro concentrata in corrispondenza degli spettri di assorbimento dei tre tipi di coni.

La scelta di tali sorgenti è motivata dal fatto che con il loro impiego è possibile generare **tutti i colori visibili in sintesi additiva**. Le coordinate dei colori in questo spazio vengono usualmente indicate come X, Y, Z e questo modello è noto come .

Il modello RGB deriva dalla necessità di rappresentare il colore sui monitor e perciò la scelta delle radiazioni fondamentali deve essere fatta in modo che siano singolarmente visibili: in questo caso si scelgono il rosso (700 nm), il verde (546.1 nm) e il blu (435.8 nm). Le coordinate in questo modello sono indicate con r, g, b e di solito sono normalizzate in modo che appartengano all'intervallo $[0, 1]$. Il punto dolente di questa scelta è che alcuni colori possono essere generati solo in sintesi sottrattiva e quindi alcune coordinate sono negative. Come conseguenza non tutti i colori sono rappresentabili nei dispositivi. In figura 2.3 sono riportate due rappresentazioni grafiche di questi spazi di colore.

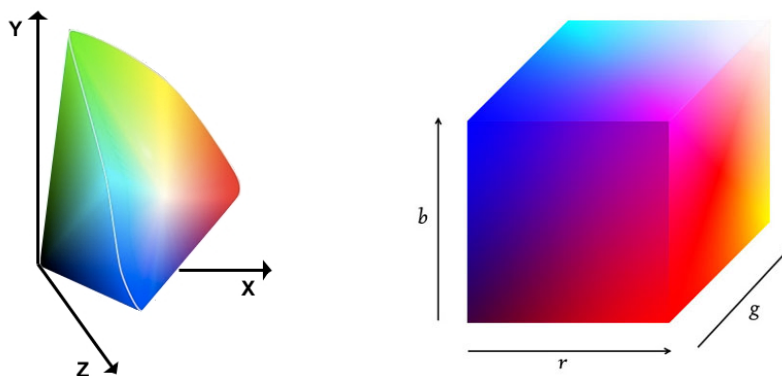


Figura 2.3: Due esempi di spazi di colore: a sinistra lo spazio $CIE\ XYZ$ e a destra lo spazio RGB .

È importante notare che entrambi i modelli di colore presentati derivano dalla teoria del tristimolo quindi gli insiemi geometrici associati nei due sistemi di riferimento sono mappabili uno nell'altro attraverso una trasformazione lineare, che può essere costruita usando la corrispondenza fra quattro punti

nei due spazi attraverso semplici passaggi algebrici. Di seguito riportiamo i valori numerici della matrice associata a tale trasformazione

$$M = \frac{1}{0.17697} \begin{bmatrix} 0.49 & 0.31 & 0.20 \\ 0.17697 & 0.81240 & 0.01063 \\ 0.00 & 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e vale la relazione lineare

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A partire dallo spazio XYZ per ottenere una rappresentazione bidimensionale dei colori, a prescindere dalla loro luminosità, spesso si usano le coordinate normalizzanti definite come

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}, \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z}, \quad z = \frac{Z}{X+Y+Z} = 1 - x - y$$

ottenendo il cosiddetto *diagramma di cromaticità* (figura 2.4) in cui ogni colore, in base alla coordinata omessa, può variare dal nero al bianco.

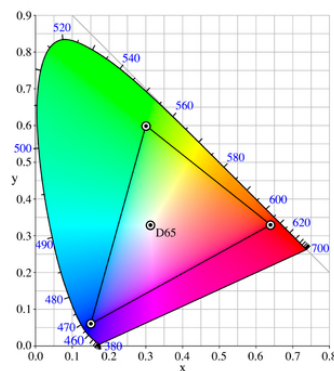


Figura 2.4: Diagramma di cromaticità con *Gamut* del formato *RGB*.

Lo spazio *RGB*, come già detto ha il limite di non contenere tutti i colori del modello *CIE*: ciò può essere verificato proiettando l'immagine del cubo $[0, 1]^3$ attraverso l'applicazione M sul diagramma di cromaticità (figura 2.4). L'insieme dei colori riproducibili in *RGB* è rappresentato dal triangolo all'interno del diagramma di cromaticità ed è chiamato *gamut*.

2.3 Distanza percettiva fra colori

In molti casi, dato uno spazio di colori, è necessario misurare le distanze fra colori. Osservato il diagramma di cromaticità risulta chiaramente inopportuno utilizzare la distanza euclidea a causa di una evidente non-uniformità nella distribuzione delle tinte. Sarebbe utile avere uno spazio di colori percettivamente uniforme, in cui cioè la distanza percepita tra due colori è proporzionale alla distanza euclidea tra le coordinate colorimetriche.

Per ottenere uno spazio uniforme un'idea potrebbe essere quella di distorcere lo spazio RGB o, equivalentemente, lo spazio XYZ con una funzione **non lineare**, in modo che l'immagine attraverso tale trasformazione sia un insieme nel quale la distanza percepita fra i colori coincida con quella euclidea. Illustriamo a tale scopo due importanti costruzioni teoriche nella storia della colorimetria: la prima è motivata da un esperimento di natura statistica condotto da MacAdam e descritto in [34], il secondo invece deriva da un modello percettivo psico-fisico che si basa sulla legge di Weber e che è stato proposto da Stiles in [45]. Entrambi gli studi sono stati compiuti negli stessi anni.

Modello di MacAdam

Nel 1942 MacAdam condusse il seguente esperimento di natura statistica

- Un osservatore tenta di riprodurre un colore dato mescolando 3 sorgenti primarie.
- A causa della limitata sensibilità dell'occhio, il colore ottenuto non è identico al campione.
- Si ripete più volte l'esperimento, e si misura la dispersione.

L'errore commesso varia notevolmente a seconda del colore di riferimento e le misure si presentano come “nuvole” di punti di forma ellissoidale nello spazio XYZ che, se proiettate sul diagramma di cromaticità, generano ellissi note come *Ellissi di MacAdam* (figura 2.5).

Seguendo questa strada nel 1976 viene introdotto lo spazio di colori *CIE-Lab* attraverso una funzione $\phi : [0, +\infty)^3 \rightarrow [0, +\infty)^3$ che trasforma le ellissi di MacAdams in sfere. Questa trasformazione ha le componenti

$$\phi(X, Y, Z) = (a(X, Y, Z), b(X, Y, Z), L(X, Y, Z)) \quad (2.3)$$

definite come

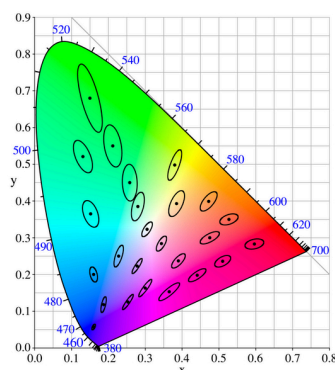


Figura 2.5: Ellissi di MacAdam nel diagramma di cromaticità.

$$a(X, Y, Z) = a(X, Y) = 500[f(X/X_w) - f(Y/Y_w)] \quad (2.4)$$

$$b(X, Y, Z) = a(Y, Z) = 200[f(Y/Y_w) - f(Z/Z_w)] \quad (2.5)$$

$$L(X, Y, Z) = L(Y) = 116f(Y/Y_w) - 16 \quad (2.6)$$

dove X_w, Y_w, Z_w sono le coordinate del bianco nel sistema di riferimento X, Y, Z e $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è data dalla seguente espressione

$$f(t) = \begin{cases} 7.787t + 16/116 & \text{se } 0 \leq t \leq 0.008856 \\ t^{1/3} & \text{se } t \geq 0.008856 \end{cases} .$$

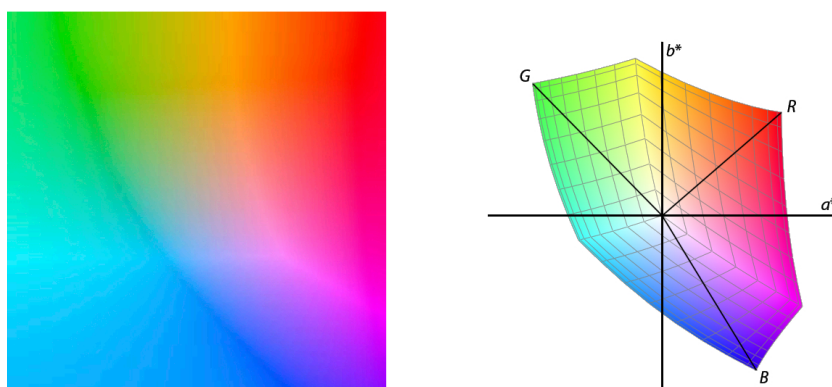


Figura 2.6: A sinistra una porzione della superficie $L = 0.75$ nello spazio Lab . A destra il gamut di RGB nello spazio Lab

Per quanto detto prima e ricordando il legame lineare che esiste fra RGB e $CIE-XYZ$ definiamo la distanza fra $x, y \in [0, 1]^3$, come

$$d(x, y) = |\phi(Mx) - \phi(My)|$$

in cui ϕ è data dalla (2.3), M è la matrice data dalla (2.1) e il simbolo $|\cdot|$ denota la norma euclidea.

Modello di Stiles

È possibile rilevare sperimentalmente che il nostro sistema visivo non ha una risposta lineare alla energia radiante, ma logaritmica. Questa peculiarità del sistema visivo è formalizzata nella cosiddetta legge di Weber. Tale legge può essere illustrata con un esempio molto semplice. Supponiamo di trovarci in un ambiente illuminato con una lampada da 25 watt. Dopo esserci abituati a tale livello di luminosità, raddoppiamo l'illuminazione accendendo un'altra lampada da 25 watt. Percepiremo una certa variazione di luminosità. Dopo esserci abituati al nuovo livello di luminosità accendiamo un'altra lampada con la stessa potenza: questa volta la variazione percepita sarà inferiore. Per ottenere una variazione percepita di luminosità uguale a quella precedente in realtà dovremo incrementare la potenza dal valore di 25 watt al valore di 100 watt.

La legge di Weber afferma che la risposta del sistema percettivo umano cresce con il logaritmo della energia emessa dalle superfici luminose che osserviamo. In altre parole se δP è la variazione di luminosità percepita e δI è la variazione di potenza radiante vale la relazione

$$\delta P = \frac{\delta I}{I}$$

che integrata dà

$$P - P_0 = \ln(I/I_0).$$

Con questa motivazione Stiles propose nel 1945 propone una trasformazione su RGB $\psi : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della forma

$$\begin{aligned}\psi_r(r, g, b) &= \psi_r(r) = \alpha_r \ln(\delta_r + r) \\ \psi_g(r, g, b) &= \psi_g(g) = \alpha_g \ln(\delta_g + g) \\ \psi_b(r, g, b) &= \psi_b(b) = \alpha_b \ln(\delta_b + b)\end{aligned}$$

in cui tutti i parametri sono positivi e $\delta_r, \delta_g, \delta_b$ servono a non rendere singolare la trasformazione nell'origine. Dati due punti $(r_0, g_0, b_0), (r_1, g_1, b_1)$ questa trasformazione definisce la famiglia di distanze

$$\left[\left(\alpha_r \ln \left(\frac{\delta_r + r_1}{\delta_r + r_0} \right) \right)^2 + \left(\alpha_g \ln \left(\frac{\delta_g + g_1}{\delta_g + g_0} \right) \right)^2 + \left(\alpha_b \ln \left(\frac{\delta_b + b_1}{\delta_b + b_0} \right) \right)^2 \right]^{1/2}$$

Osservazione 2.1. *Sulla base di quanto detto si potrebbe pensare di definire in RGB la distanza attraverso una trasformazione globale. Tuttavia questa strada si è mostrata essere in accordo con la distanza percepita soltanto per punti “vicini”.*

2.4 Spazi di colore come varietà Riemanniane

Quanto detto finora supporta l'ipotesi che l'insieme dei colori percepiti sia tridimensionale: le leggi di Grassmann implicano tre tipi differenti di stimoli. Le specifiche psicologiche di colore usano tre parametri quali tonalità, l'intensità, saturazione e infine la struttura dei coni nei nostri occhi è di tre tipi. Tuttavia, la struttura interna dello spazio di colore percettivo non è determinata dal fatto che lo spazio sia tridimensionale. Quali sono le proprietà intrinseche di questa struttura? In che modo percepiamo le differenze di colore?

Uno spazio di colori deve essere dotato di una struttura interna basata sulle differenze percettibili di colore, cioè sul modo in cui decidiamo che due colori sono differenti e quanto sono differenti.

Un approccio alternativo alle trasformazioni globali nella definizione di una metrica in uno spazio colore è costituito dall'assumere come ipotesi che tale insieme sia una varietà differenziabile Riemanniana: nel caso dello spazio RGB consideriamo l'insieme geometrico dei colori $[0, 1]^3$ e ipotizziamo che esista un campo di matrici simmetriche, definite positive e a coefficienti regolari, indicato con $g : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e chiamato *tensore metrico* , tale che la distanza percepita fra due colori $x, y \in [0, 1]^3$ sia la quantità

$$d(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 [\langle \dot{v}(t), g(v(t)) \dot{v}(t) \rangle]^{1/2} dt : v \in C^1((0, 1), \mathbb{R}^3), v(0) = x, v(1) = y \right\}.$$

Le curve che realizzano il minimo (se esistono) sono chiamate *geodetiche* associate a g . In accordo con l'osservazione 2.1 il significato di tali definizioni è che si cerca di distorcere lo spazio **solo localmente** : il tensore metrico, che dipende dalla posizione, è un'indice di tale distorsione e permette di calcolare le distanze con buona approssimazione solo fra punti sufficientemente vicini. È facile verificare che questo modello contiene i cambi di variabili globali che siano biettivi e sufficientemente regolari: data una di queste trasformazioni ϕ il tensore metrico associato è

$$g(x) = \nabla \phi^T(x) \nabla \phi(x)$$

e le geodetiche si ottengono mappando i segmenti nell'immagine di ϕ attraverso l'inversa, cioè la geodetica che unisce il punto x_0 al punto x_1 è la curva

$$\gamma(t) = \phi^{-1}(\phi(x_0)(1-t) + \phi(x_1)t).$$

Questa ipotesi è nota e accettata da molto tempo. Silberstein in conclude che la struttura interna dello spazio di colore è descritta da un metrica Riemanniana ([43],[44]). Ashtekar in [21] ha presentato una derivazione astratta di tale struttura basata soltanto sull'assunzione che le caratteristiche essenziali dei colori percepiti sono contenute in tre coefficienti di assorbimento. Il compito difficile è determinare questo metrica con il solo studio della percezione umana del colore. I primi sforzi per formulare un'elemento di linea adatto vanno indietro a Helmholtz. Un'altra metrica fu proposta da Schrodinger e Stiles.

Con le motivazioni esposte diamo la seguente

Definizione 2.2 (Spazio di colore). *Chiameremo spazio di colore una coppia (C, g) in cui $C \subset \mathbb{R}^3$ è un insieme chiuso e limitato e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ è un campo di matrici quadrate che soddisfa*

- (i) *esistono $0 < m < M < +\infty$ tali che $m^2|x|^2 \leq \langle x, g(y)x \rangle \leq M^2|x|^2$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$,*
- (ii) *$g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $i, j = 1, \dots, n$,*
- (iii) *$g_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.*

Indicheremo con $d_g(\cdot, \cdot)$ la metrica indotta su C e definita per ogni $x, y \in C$ come

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 [\langle \dot{v}(t), g(v(t))\dot{v}(t) \rangle]^{1/2} dt : v \in C^1((0, 1), \mathbb{R}^3), v(0) = x, v(1) = y \right\}. \quad (2.7)$$

Osservazione 2.3. *È noto dall'algebra lineare che data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva esiste un'unica matrice $\sqrt{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva tale che*

$$A = \sqrt{A}^T \sqrt{A}.$$

Da ciò segue l'esistenza di un unico campo di matrici, indicate con $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, simmetriche e definite positive tali che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ valga

$$g(y) = \gamma(y)^T \gamma(y),$$

come conseguenza per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale l'uguaglianza

$$\langle x, g(y)x \rangle = \langle x, \gamma(y)^T \gamma(y)x \rangle = \langle \gamma(y)x, \gamma(y)x \rangle = |\gamma(y)x|^2$$

e quindi la metrica può essere espressa in maniera equivalente come

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 |\gamma(v(t))\dot{v}(t)| dt : v \in C^1((0, 1), \mathbb{R}^3), v(0) = x, v(1) = y \right\}. \quad (2.8)$$

Dalle ipotesi (i), (ii), (iii) seguono proprietà analoghe per γ , cioè:

- (1) esistono $0 < m < M < +\infty$ tali che $m|x| \leq |\gamma(y)x| \leq M|x|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- (2) $\gamma_{ij}(x) = \gamma_{ji}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $i, j = 1, \dots, n$,
- (3) $\gamma_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Classificazione di immagini a colori

Cos'è un'immagine a colori?

Nel seguito indicheremo un'immagine a colori come una funzione vettoriale $u : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto regolare e $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ è un insieme chiuso e limitato che rappresenta l'insieme dei colori. Sulla base delle motivazioni esposte nella sezione 2 sezione 2.4 ipotizzeremo che su \mathcal{C} sia definito un tensore metrico g in modo che la coppia (\mathcal{C}, g) sia uno *spazio di colori* con metrica $d_g(\cdot, \cdot)$ nel senso della definizione 2.2.

Presentiamo adesso un problema di minimo per la classificazione di immagini a colori analogo a quello presentato nella sezione 1.3 che tiene conto della *distanza percepita* fra colori. Sia (\mathcal{C}, g) uno spazio di colori e $d_g(\cdot, \cdot)$ la metrica associata. Assegnato un numero finito $l \geq 2$ di colori distinti denotati con $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$, un parametro positivo $\beta > 0$ e un'immagine a colori $z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{C})$ ci proponiamo di minimizzare fra tutte le partizioni $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1, \dots, l}$ di Ω il funzionale definito come

$$E^z(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l d_g(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial U_i \cap \partial U_j \cap \Omega) + \beta \sum_{i=1}^l \int_{U_i} |d_g(z(x), \alpha_i)|^2 dx$$

in cui

- \mathcal{H}^1 denota la misura di Hausdorff monodimensionale e quindi il primo termine rappresenta la lunghezza del bordo della partizione pesata con la distanza percepita fra i colori relativi agli elementi della partizione.

- Il secondo termine è detto *fidelity term* ed è un'energia di volume che misura la distanza percepita dal dato z .
- Il parametro positivo β rappresenta il peso relativo fra i due tipi di energia, che nelle applicazioni potrà essere opportunamente regolato in base alle esigenze.

3.1 Formulazione debole e risultati di esistenza

Il primo passo per affrontare il problema di minimo appena presentato è la caratterizzazione delle partizioni ad energia finita

$$\{\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,l} : J(\mathcal{U}) < +\infty\}.$$

Questo insieme è contenuto strettamente nell'insieme di tutte le partizioni poichè esistono insiemi bidimensionali con frontiera topologica che hanno una misura di Hausdorff monodimensionale infinita. Un esempio di questo tipo di insiemi è l'isola di Koch costruita in maniera iterativa come in figura 3.1, infatti ad ogni passo la lunghezza della frontiera aumenta nel rapporto fisso di $4/3$ e la lunghezza della curva limite è evidentemente superiore a tutte le lunghezze delle curve costruite ad ogni passo.

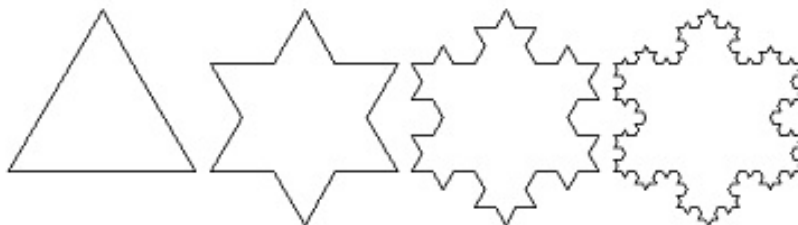


Figura 3.1: Un esempio di insieme piano con area finita e perimetro infinito perimetro infinito.

Esistono anche degli esempi di partizioni bidimensionali che hanno frontiera densa, quindi la loro chiusura ha addirittura misura bidimensionale (3.2).

L'idea è di rilassare il funzionale $E^z(\mathcal{U})$ dando una definizione di *perimetro* di un insieme E all'interno di Ω , che indichiamo con $P(E, \Omega)$ in modo che sia definito per ogni insieme misurabile, per gli insiemi sufficientemente regolari coincida con la classica definizione cioè

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^1(\partial E \cap \Omega) \quad (3.1)$$

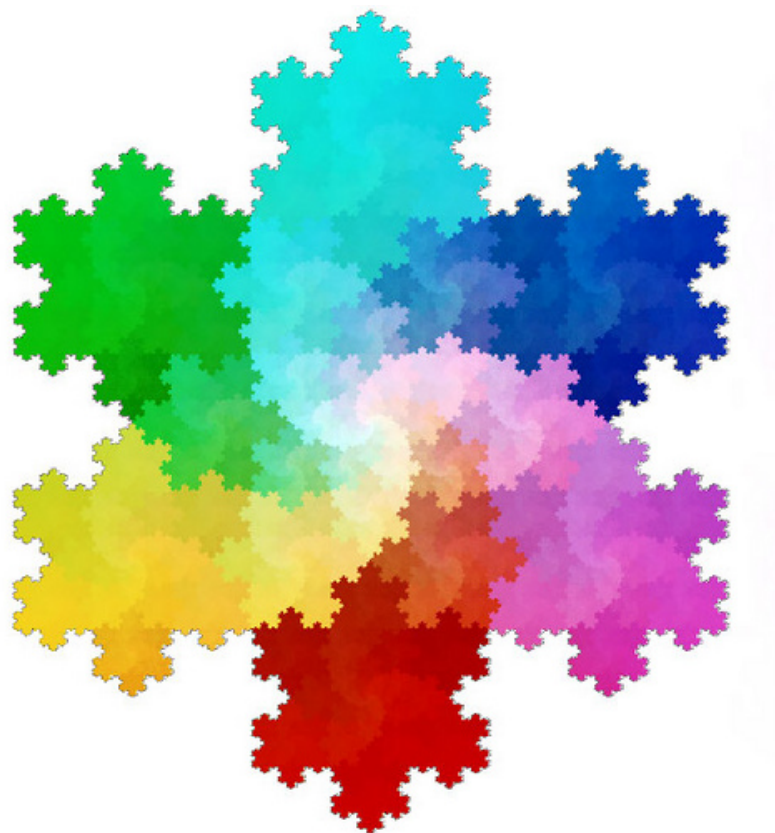


Figura 3.2: Una partizione con frontiera densa.

e che sia inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza in misura fra insiemi cioè

$$|E \Delta E_j| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad P(E, \Omega) \leq \liminf_j P(E_j, \Omega)$$

in cui $E \Delta F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ è la differenza simmetrica fra gli insiemi E ed F . Chiameremo *insiemi di perimetro finito* in Ω gli insiemi E per i quali $P(E, \Omega) < +\infty$. Questa questione è affrontata nel capitolo 7 sezione 7.2 in cui vedremo che affinché valga una formula analoga alla 3.1 per un generico insieme di perimetro finito non è possibile considerare la frontiera topologica ma è necessario dare una nuova nozione di frontiera $\partial^* E$, chiamata *frontiera ridotta*, che soddisfa

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^1(\partial^* E \cap \Omega) \quad (3.2)$$

ma che presenta l'inconveniente di non essere in generale un insieme chiuso, contrariamente alla frontiera topologica.

A questo punto risulta naturale considerare come partizioni ad energia finita le partizioni $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,l}$ di Ω tali che

$$\sum_{i=1}^l P(U_i, \Omega) < +\infty$$

questo tipo di partizioni sono conosciute come *partizioni di Caccioppoli* e sono introdotte nel capitolo 7 sezione 7.3 insieme alle principali proprietà fra le quali vi è la possibilità di identificare l'insieme di queste partizioni con l'insieme (di classi di equivalenza) di funzioni

$$BV(\Omega, K) = \left\{ u \in BV(\Omega) : u \in K \text{ q.o. in } \Omega \right\}$$

nel senso che per ogni partizione di Caccioppoli $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\dots,l}$ la funzione associata è

$$u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i}.$$

Diamo la seguente formulazione debole (o rilassata) del funzionale $E^z(\mathcal{U})$, nel quale esprimiamo la dipendenza da u

$$E^z(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l d_g(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial^* U_i \cap \partial^* U_j \cap \Omega) + \beta \int_{\Omega} |d_g(u, z)|^2 dx & \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.3)$$

Con questa formulazione è mostrata l'esistenza di un minimo debole (capitolo 7 sezione 7.3 teorema 7.42).

Osservazione 3.1. Una volta mostrata l'esistenza di un minimo finito per il funzionale rilassato $E^z(u)$ è necessario uno studio di regolarità dell'interfaccia $\bigcup_i \partial^* U_i \cap \Omega$ per ottenere una formulazione forte. Il problema deriva dal fatto che la frontiera ridotta di un insieme di perimetro finito $\partial^* E$ non è in generale chiusa, quindi per ottenere una soluzione forte dobbiamo in realtà considerare la chiusura dell'interfaccia, cioè l'insieme

$$\bigcup_i \overline{\partial^* U_i \cap \Omega}.$$

Tuttavia esistono insiemi E di perimetro finito Ω tali che $\mathcal{H}^1 \overline{\partial^* \cap \Omega} = +\infty$ e ciò rende necessari delicati studi di tipo variazionale. Citiamo due lavori che vanno in questa direzione. G.P. Leonardi e I. Tamanini in [31] hanno ottenuto risultati di regolarità per partizioni di perimetro minimo, cioè nel caso $\theta_{ij} = c > 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, l$. G.P. Leonardi in [32] ha raffinato il risultato nel caso in cui

$$\theta_{ij} < \theta_{ik} + \theta_{kj} \quad \forall i \neq j \neq k$$

con un'applicazione nella teoria delle transizioni di fase.

3.2 Proprietà qualitative delle minimizzanti

Illustriamo alcune proprietà dei minimi attraverso qualche semplice esempio. Indichiamo con z_1 e z_2 le immagini riportate in figura 3.3. Indichiamo r, g, a, v i colori rosso, giallo, arancio e verde. Se ipotizziamo che la geodetica che unisce il rosso al giallo passi per l'arancione (ipotesi percettivamente ragionevole) la disuguaglianza triangolare fra i punti r, y, o diventa un'uguaglianza, cioè

$$d_g(r, g) = d_g(r, a) + d_g(a, g)$$

mentre considerando le disuguaglianza triangolare fra i colori rosso, giallo e verde ci aspettiamo che valga un disuguaglianza stretta

$$d_g(r, g) < d_g(r, v) + d_g(v, g).$$

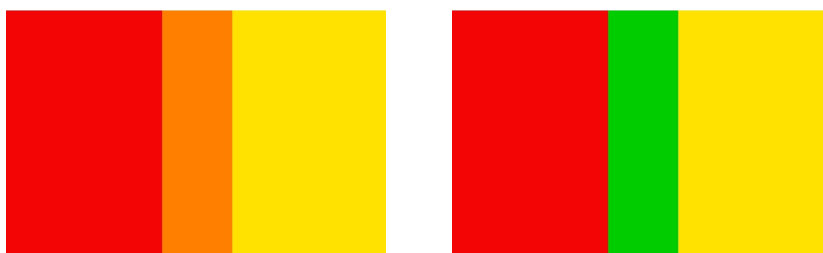


Figura 3.3: A sinistra l'immagine z_1 , a destra l'immagine z_2 .

Per classificare l'immagine z_1 scegliamo esattamente $K_1 = \{r, a, g\}$ mentre per z_2 scegliamo $K = \{r, v, g\}$. Nel caso di z_1 la disuguaglianza triangolare diventa

un'uguaglianza quindi l'energia di linea associata a una partizione costituita da due componenti (rosso e giallo) separate da una linea verticale sarà uguale all'energia di linea associata a una partizione costituita da tre componenti (rosso, arancio, giallo) separate da due linee verticali, però il termine di fidelity forza l'unica minimizzante u_1 a essere esattamente uguale a z_1 (figura 3.4) per β sufficientemente grande.

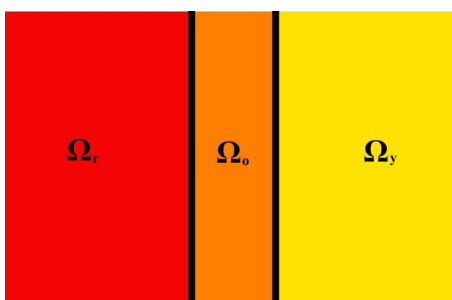


Figura 3.4: Minimizzante u_1 .

Nel caso di z_2 la minimizzante u_2 potrebbe avere comportamenti diversi in funzione di β dell'area relativa della strisce verde $|z_2^{-1}(v)|$: per β e $|z_2^{-1}(v)|$ grandi pesa di più il *fidelity term* e quindi ci aspettiamo la riproduzione esatta dei bordi con la separazione in tre regioni. Per β e $|z_2^{-1}(v)|$ piccolo e in funzione dell'ampiezza della striscia verde pesa di più il termine di segmentazione che, a causa della disuguaglianza stretta, preferirà la separazione in due sole regioni (figura 3.5).

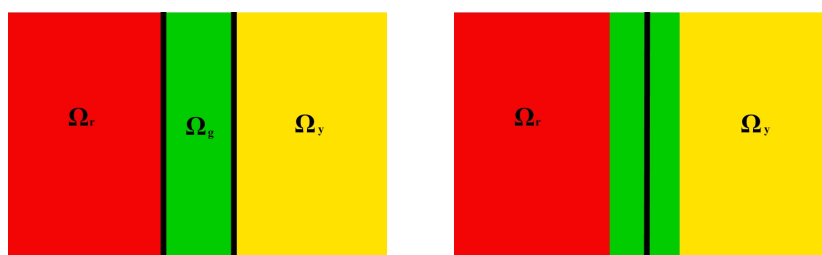


Figura 3.5: A sinistra la minimizzante u_1 per alti valori di β , a destra la minimizzante per valori bassi.

Queste osservazioni motivano la seguente

Definizione 3.2. Sia (\mathcal{C}, g) uno spazio di colori. Diremo che una successione finita di $n + 1$ colori $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sono allineati se

$$\sum_{i=1}^n d_g(\alpha_i, \alpha_{i-1}) = d_g(\alpha_0, \alpha_n).$$

dalla quale deduciamo le seguenti proprietà delle minimizzanti

- (i) Una minimizzante riproduce esattamente le scale di colori allineati sotto l'ipotesi che tali colori appartengano a K .
- (ii) La riproduzione di scale cromatiche non allineate dipende in generale dal termine di fedeltà, dalle misure degli insiemi con tali colori e dalla struttura della metrica (tranne che nel caso $n = 1$).

Osservazione 3.3. L'allineamento dei colori dipende completamente dalla metrica g tranne che nel caso di immagini in scale di grigi. Infatti se $\mathcal{C} = [0, 1]$ g è in generale una qualsiasi funzione positiva q.o. g e la distanza è $d(x, y) = \int_x^y (g)^{1/2} dt$ e quindi dall'additività dell'integrale abbiamo che

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \quad \Leftrightarrow \quad z \in [x, y]$$

$$d(x, y) < d(x, z) + d(z, y) \quad \Leftrightarrow \quad z \notin [x, y].$$

Ciò fa capire che nel caso vettoriale la struttura della disuguaglianza triangolare non ha una caratterizzazione semplice come nel caso scalare.

3.3 Approssimazione via Γ -convergenza

Il problema (3.3) rientra nella classe dei *problemi con discontinuità libera* e, come visto nel capitolo precedente, la sua analisi sia teorica che numerica risulta difficoltosa a causa della presenza di energie concentrate su insiemi con dimensione topologica diversa.

Seguendo la stessa filosofia del modello presentato nella sezione 1.4 l'idea è di creare un modello di *classificazione-ripristino* giustificando queste parole con tecniche di Γ -convergenza.

Dato uno spazio di colori (\mathcal{C}, g) e un insieme finito di l colori $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$ si consideri il potenziale positivo $W_\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty]$ dipendente dal parametro positivo $0 < \delta < \bar{\delta} = \min\{|\alpha - \beta| : \alpha, \beta \in K, \alpha \neq \beta\}/2$ definito

come

$$W_\delta(x) = \left[\frac{1+\delta}{2} \psi\left(\frac{\text{dist}(x, K)}{\delta}\right) \right]^2 \quad x \in \mathbb{R}^3$$

in cui $\text{dist}(x, K) = \min\{|x - \alpha| : \alpha \in K\}$ è la distanza euclidea del punto $x \in \mathbb{R}^3$ dall'insieme K e $\psi : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ è definita come

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(1-x^2)} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Con questa definizione la funzione non convessa W_δ verifica le seguenti proprietà strutturali per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$

- (1) **(Positività)** $W_\delta(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ e $W_\delta(x) = \left[\frac{1+\delta}{2}\right]^2$ se $|x| > R$.
- (2) **(Numero finito di zeri)** ha un numero finito l di zeri che coincide con l'insieme K , cioè $\{x \in \mathbb{R}^3 : W(x) = 0\} = K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$,
- (3) **(Regolarità)** $W \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Si noti che dalla proprietà (ii) se $l \geq 2$ segue la non convessità.

Per δ che tende a zero abbiamo che $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} W_\delta(x) = W_0(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ in cui

$$W_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus K \end{cases}.$$

Indicheremo con γ il campo di matrici ottenuto estraendo l'unica radice quadrata simmetrica e definita positiva di g (Osservazione 2.3) ottenendo che le distanze in un intorno di U di $y \in \mathcal{C}$ siano approssimativamente

$$d_g^2(x, z) \approx \langle x - z, g(y)x - z \rangle = |\gamma(y)(x - z)|^2 \quad \forall x, z \in U$$

e consideriamo la seguente famiglia di funzionali a due parametri positivi $\varepsilon, \delta > 0$

$$E_{\varepsilon, \delta}^z(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\varepsilon} W_\delta(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u) D_j u|^2 + \beta |d_g(z, u)|^2 \right] dx & \text{se } u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Usando i classici risultati di semicontinuità e coercività in spazi di Sobolev si dimostra che per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ questo funzionale ammette minimo finito (teorema 6.27 nella sezione 6.3 del capitolo 6).

Enunciamo adesso il risultato principale di questo lavoro di tesi, dimostrato nel capitolo 10.

Teorema 3.4. *Sia (\mathcal{C}, g) uno spazio di colori, $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$ un insieme finito di l colori. Sia $E^z(u)$ il funzionale definito dalla (3.3) e $E_{\varepsilon, \delta}^z(u)$ definito dalla (3.4).*

Sia $\delta : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione continua e strettamente monotona tale che $\delta(0) = 0$ e ε_j una successione di numeri positivi che tende a 0. Allora abbiamo che

Se u_{ε_j} è una successione costituita da minimizzanti di $E_{\varepsilon_j, \delta(\varepsilon_j)}^z$ si può estrarre una sottosuccessione convergente, che indichiamo ancora con u_{ε_j} tale che

$$u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0 \quad \text{fortemente in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

$$E_{\varepsilon_j, \delta(\varepsilon_j)}^z(u_{\varepsilon_j}) \rightarrow E^z(u_0)$$

e $u_0 \in \operatorname{argmin}(E^z)$.

È importante fare alcune osservazioni. Innanzitutto le configurazioni ad energia finita del funzionale (3.3) possono essere discontinue lungo linee mentre il funzionale (3.4) è ambientato su un insieme di funzioni differenziabili nel senso delle distribuzioni e gli elementi dello spazio di Sobolev $H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ non possono avere discontinuità lungo linee.

Il problema (3.3) ha come ultimo termine un *fidelity term* e come primo termine un'energia di segmentazione. Il problema (3.4) presenta come ultimo termine lo stesso *fidelity term* mentre incontriamo altri due termini in competizione che approssimano la lunghezza della segmentazione.

- Il termine $\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} W_{\delta(\varepsilon)}(u) dx$ è un'energia di **classificazione** nel senso che, al tendere di $\varepsilon \rightarrow 0^+$, penalizza in maniera crescente la distanza di u dall'insieme K .
- Il termine $\int_{\Omega} \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u) D_j u|^2 dx$ è un'energia di **regolarizzazione** compatibile con la struttura del tensore metrico g e decrescente per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ che penalizza le interfacce superflue.

Dall'analisi della Γ -convergenza si deduce l'interpretazione seguente per il parametro ε : se trascuriamo scostamenti numericamente irrilevanti dai valori in K , ε rappresenta l'ampiezza sulla quale avviene una brusca transizione da un valore all'altro.

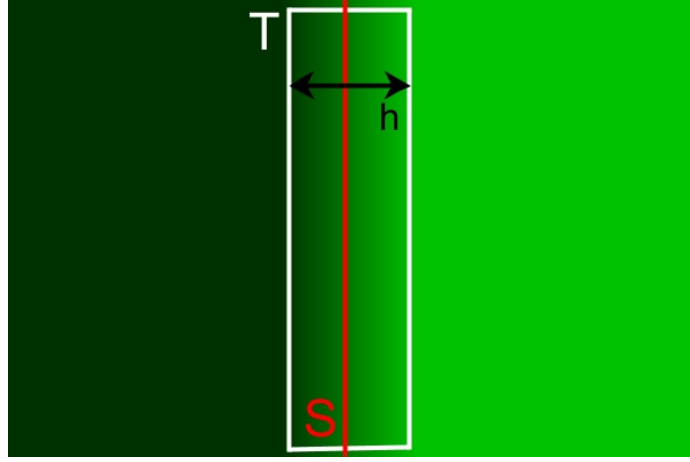


Figura 3.6: Comportamento qualitativo delle minimizzanti

Se la transizione avviene fra due colori α, β per le quali esiste una geodetica ci aspettiamo che le minimizzanti u_ε di $E_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}^z$ presentino variazioni monodimensionali nella direzione ortogonale all'interfaccia lungo la geodetica. In questa tesi esporremo in maniera rigorosa questa proprietà che adesso ci limitiamo a giustificare con il seguente argomento euristico: trascurando l'effetto del *fidelity term* consideriamo, al variare di $h > 0$, una transizione u_h localizzata all'interno di un h -intorno T di una linea S (figura 3.6).

Dal momento che fuori da T u_h è costante e $W_{\delta(\varepsilon)}(u_h) = 0$, risulta approssimativamente

$$\int_T \frac{1}{\varepsilon} W_{\delta(\varepsilon)}(u_h) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u) D_j u_h|^2 dx \approx \left(\frac{1}{\varepsilon} C_1 + C_2 \frac{\varepsilon}{h^2} \right) |T| =$$

$$\left(C_1 \frac{h}{\varepsilon} + C_2 \frac{\varepsilon}{h} \right) |S| \approx C \left(\frac{h}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{h} \right)$$

da cui minimizzando in h , cioè annullando la derivata prima rispetto a h , si ottiene la condizione

$$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \approx h.$$

In questo senso ε può anche essere interpretato come un **parametro di sfocamento**: la minimizzazione del funzionale $E_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}^z$ descrive un **modello di classificazione e restauro per immagini a colori**.

l'analisi asintotica sfrutta un risultato di Γ -convergenza con applicazioni nella teoria dei sistemi multifase mostrato da S. Baldo in [9] ed enunciato alla fine

del capitolo 8 nel quale è riportata anche una derivazione del modello fisico. I problemi nell'estensione del risultato al caso vettoriale sono due:

- (1) Il risultato in [9] funziona nel caso in cui il campo di matrici g sia isotropo, cioè del tipo $f(x)I$ in cui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, +\infty)$ e I è la matrice identità: ciò non è soddisfacente perchè come esposto nell'appendice 2 anche i più semplici spazi di colore hanno una metrica non isotropa.
- (2) Per replicare in maniera esatta la metrica definita su \mathcal{C} è necessario un secondo passaggio al limite, rilevabile nella dipendenza della famiglia di funzionali introdotti da δ .



Γ -convergenza

In molti problemi di minimizzazione e più in generale nei problemi che ammettono una formulazione variazionale, appaiono alcuni parametri (piccoli o grandi, di natura costitutiva o geometrica, provenienti da un argomento di approssimazione o discretizzazione) che rendono tali problemi estremamente complessi da studiare. Precisamente quando si deve studiare il comportamento di tali problemi nel caso in cui i parametri tendono a valori singolari, può essere utile sostituire una famiglia di problemi con una “teoria limite” indipendente da tali parametri che risulti più semplice da studiare e con un comportamento più comprensibile. Questo ragionamento può essere inteso anche nella direzione opposta: se un problema di minimo è difficile da affrontare (riguardo ad esempio l’esistenza di una soluzione o il suo trattamento numerico) può essere approssimato con una famiglia di problemi con soluzioni più facili da determinare.

Ipotizziamo di avere a che fare con una famiglia di problemi di minimo che dipende da un certo parametro ε . Un modo di descrivere il comportamento delle soluzioni è la sostituzione di tale famiglia con un unico problema di minimo (che non dipende da ε) che catturi il comportamento asintotico delle minimizzanti e per il quale sia facile mostrare l’esistenza di una soluzione. La nozione di Γ -convergenza di una famiglia di problemi di minimo ad un parametro (sia esso un numero naturale o reale) gioca in questo caso un ruolo fondamentale in virtù di alcune importanti proprietà:

- Convergenza delle minimizzanti ad un punto di minimo del problema limite, la cui esistenza è strettamente legata alla definizione stessa di Γ -convergenza.

- Convergenza dei valori di minimo al minimo del problema limite.
- Stabilità rispetto alle perturbazioni continue.

4.1 Un approccio maieutico

Introduciamo la definizione di questa nozione di convergenza in analogia al “Metodo Diretto”: uno strumento astratto fondamentale per la dimostrazione dell’esistenza di soluzioni di problemi variazionali.

Dato un funzionale $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definito in un insieme X ci poniamo l’obiettivo di mostrare l’esistenza di una soluzione del problema di minimo

$$\text{determinare } \bar{u} \in X : F(\bar{u}) = \min_X F := \min\{F(u) : u \in X\} \quad (4.1)$$

Per semplicità nel seguito ipotizzeremo che i domini dei funzionali (nel caso del problema (4.1) l’insieme X) siano spazi metrici in modo che la loro topologia sia interamente descrivibile tramite l’uso di successioni. L’idea del metodo è di esaminare il comportamento di una successione minimizzante, ossia una successione $u_j \in X$ tale che

$$\lim_j F(u_j) = \inf_X F. \quad (4.2)$$

L’esistenza di tale successione è garantita dalla definizione di estremo inferiore. Poichè tale successione potrebbe non convergere, il primo obiettivo è mostrarne la convergenza o almeno avere la possibilità di estrarre una sottosuccessione convergente, che chiaramente sarà ancora minimizzante. Questo problema potrebbe essere affrontato studiando le minimizzanti caso per caso ma spesso è più conveniente dedurre questa informazione da altre proprietà generiche: se ogni minimizzante è contenuta in un insieme compatto, allora si può estrarre una sottosuccessione u_{j_k} che è ancora minimizzante e converge ad un elemento u^* . Questa condizione di compattezza può essere ottenuta richiedendo la **coercività** del funzionale: diremo che un funzionale è coercivo se i suoi sottolivelli sono precompatti, cioè se

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \exists K_t \subseteq X \quad \text{compatto} : \\ F^{-1}(t) = \{u \in X : F(u) \leq t\} \subseteq K_t \end{aligned} \quad (4.3)$$

La coercività è una condizione più stringente della sola determinazione di una successione minimizzante convergente ma, grazie allo studio delle proprietà degli insiemi compatti o precompatti, risulta molto semplice da caratterizzare.

A questo punto è naturale considerare l'elemento u^* come un buon candidato ma rimane da mostrare che

$$F(u^*) = \inf_X F$$

una disuguaglianza è banale infatti usando u^* come funzione test abbiamo che

$$F(u^*) \geq \inf_X F \quad (4.4)$$

Per ottenere la disuguaglianza inversa, e quindi terminare la dimostrazione di esistenza di un minimo, sarebbe sufficiente richiedere che

$$F(u^*) \leq \lim_k F(u_{j_k}) = \inf_X F \quad (4.5)$$

Come prima richiediamo una proprietà molto più forte ma spesso verificabile mediante considerazioni di carattere generale, ossia

$$u_j \rightarrow u \Rightarrow F(u) \leq \liminf_j F(u_j) \quad (4.6)$$

tale proprietà è detta **semicontinuità inferiore**. In definitiva possiamo sommariamente concludere che

$$\text{coercività} + \text{semicontinuità} \Rightarrow \exists \text{ minimo}$$

È importante notare come la condizione di coercività sia più facile da verificare quando ci sono “molte” successioni convergenti mentre la semicontinuità è più facilmente soddisfatta quando ce ne sono “poche”: come conseguenza l'opposizione di tali condizioni gioca un ruolo fondamentale nella scelta della nozione di convergenza, che deve essere opportunamente bilanciata.

Passiamo adesso a descrivere il comportamento di una famiglia di problemi di minimo dipendenti da un parametro. Cominciamo col considerare un parametro discreto $j \in \mathbb{N}$ (il caso in cui ci sia la dipendenza da un parametro continuo sarà specificato in seguito per generalizzazione) e quindi consideriamo una successione di funzionali $F_j : X_j \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ definiti su insiemi X_j in generale diversi fra loro. A tale successione associamo i corrispondenti problemi di minimo

$$\text{determinare } \bar{u}_j \in X_j : F_j(\bar{u}_j) = \min_{X_j} F_j := \min\{F_j(u) : u \in X_j\} \quad (4.7)$$

L'idea è di approssimare tale famiglia, nel limite per $j \rightarrow +\infty$, con un unico problema di minimo

$$\text{determinare } \bar{u} \in X : F(\bar{u}) = \min_X F := \min\{F(u) : u \in X\} \quad (4.8)$$

Considerando il fatto che il nostro obiettivo è fornire una nozione di convergenza per la successione di funzionali F_j ci farebbe comodo avere un unico dominio X piuttosto che con domini dipendenti dal parametro j . Questo problema può essere superato scegliendo il dominio X del problema limite grande abbastanza da contenere tutti gli insiemi X_j ed estendendo ogni funzionale F_j su X assegnando il valore $+\infty$ al di fuori dell'insieme X_j .

A questo punto, in analogia con quanto fatto nella sezione precedente, seguiamo una successione $u_j \in X$ minimizzante, cioè tale che

$$\liminf_j (F_j(u_j) - \inf_X F_j) = 0 \quad (4.9)$$

che, chiaramente, anche in questo caso esiste sempre. La condizione di coercività, necessaria per estrarre una sottosuccessione convergente, adesso deve coinvolgere contemporaneamente tutti i funzionali e diventa la seguente

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists K_t \subseteq X \quad \text{compatto} : \quad (4.10)$$

$$\bigcup_j F_j^{-1}(t) = \bigcup_j \{u \in X : F_j(u) \leq t\} \subseteq K_t$$

Chiameremo tale condizione, relativa ad una famiglia di funzionali, **equicoercività**. Una volta ottenuta una minimizzante convergente, le richieste fondamentali che facciamo ad un funzionale F affinché esso possa sostituire la successione F_j sono la convergenza dei minimi

$$\inf_X F = \liminf_j \inf_X F_j \quad (4.11)$$

ed il fatto che il limite di ogni minimizzante convergente minimizzi F

$$u_j, u^* \in X : \liminf_j (F_j(u_j) - \inf_X F_j) = 0, \quad u_j \rightarrow u^* \quad \Rightarrow \quad F(u^*) = \inf_X F \quad (4.12)$$

ottenendo così anche un risultato di esistenza del minimo per F .

Per ottenere le (4.11),(4.12) imponiamo condizioni che assicurino, ogni volta che u^* è il limite di una minimizzante convergente, la seguente catena di disuguaglianze

$$\limsup_j \inf_X F_j \leq \inf_X F \leq F(u^*) \leq \liminf_j \inf_X F_j \quad (4.13)$$

che se verificate, visto che l'ultimo termine non è più grande del primo, sono anche uguaglianze. L'immediata conseguenza è la convergenza dei valori minimi e le due condizioni ricercate. La seconda disuguaglianza nella (4.13) è banalmente verificata. Riguardo la prima, essa rappresenta un limite dall'alto che riscriviamo come

$$\limsup_j \inf_X F_j \leq F(u) \quad \forall u \in X \quad (4.14)$$

e che possiamo ottenere richiedendo che

$$\forall u \in X \quad \exists \bar{u}_j : \quad \bar{u}_j \rightarrow u, \quad F(u) \geq \limsup_j F_j(\bar{u}_j). \quad (4.15)$$

Nel seguito chiameremo la condizione (4.15) **disuguaglianza del limsup**. Per ottenere la terza disuguaglianza nella (4.13) ci serve un limite dal basso e dovremo sfruttare il fatto che u^* è limite di una minimizzante. Se richiediamo che

$$u_j, u^* \in X : \quad \liminf_j (F_j(u_j) - \inf_X F_j) = 0, \quad u_j \rightarrow u^* \quad \Rightarrow \quad (4.16)$$

$$F(u^*) \leq \liminf_j F_j(u_j)$$

otteniamo la terza disuguaglianza grazie al fatto che per ogni minimizzante u_j abbiamo che $\liminf_j F_j(u_j) = \liminf_j F(u^*) = \inf_X F_j$. Come nel caso del metodo diretto richiediamo una condizione più forte della (4.16), ossia non solo sulle minimizzanti ma su tutte le successioni convergenti

$$\forall u_j \rightarrow u \quad \Rightarrow \quad F(u) \leq \liminf_j F_j(u_j) \quad (4.17)$$

Chiameremo questa condizione **disuguaglianza del liminf**, che gioca un ruolo analogo alla semicontinuità inferiore nel metodo diretto.

Alla luce di quanto detto data una famiglia di funzionali equicoerciva, se riusciamo a trovare un funzionale F che soddisfi le disuguaglianze del liminf e del limsup possiamo dedurre:

- (*esistenza*) il problema limite $\min\{F(u) : u \in X\}$ ammette soluzione.
- (*convergenza dei valori minimi*) la successione di valori $\inf\{F_j(u) : u \in X\}$ converge a questo valore minimo .
- (*convergenza delle minimizzanti*) a meno di una sottosuccessione, ogni minimizzante di $\{F_j\}$ converge a un minimo di F .

Perciò se definiamo la Γ -convergenza di $\{F_j\}$ a F come la richiesta che valgano contemporaneamente la (4.15) e la (4.17) possiamo concludere che

$$\text{equicoercività} + \Gamma\text{-convergenza} \Rightarrow \text{convergenza dei problemi di minimo}$$

Come nel caso del metodo diretto la scelta della nozione di convergenza gioca un ruolo fondamentale: avere molte successioni convergenti rende più semplice la verifica dell'equicompattezza e della disuguaglianza del limsup, mentre averne poche ne facilita il test riguardo la disuguaglianza del liminf.

4.2 Semicontinuità e coercività

Nel seguito indicheremo con X un insieme sul quale è definita una nozione di convergenza σ che renda di Hausdorff lo spazio topologico (X, σ) . Ciò si verifica per esempio se su X è definita una distanza $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ e si considera come σ la nozione di convergenza indotta da d , cioè $x_j \xrightarrow{\sigma} x$ se e solo se $d(x_j, x)$ tende a 0. Come già accennato, negli spazi metrici le definizioni topologiche e quelle sequenziali sono equivalenti, quindi la topologia di X è descrivibile in termini di successioni. Sulla base dei problemi che dovremo affrontare la restrizione a tali strutture non sarà limitativa perchè sarà (quasi) sempre possibile inquadrare in questo contesto gli spazi di funzioni che utilizzeremo. Quando ciò non sarà possibile sarà esplicitamente evidenziato richiedendo l'esistenza di una convergenza σ .

Per ogni funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ indicheremo con $\{f \leq t\}$ il suo sottolivello di altezza t , cioè $\{f \leq t\} := \{u \in X : f(u) \leq t\}$.

Quando si farà riferimento ad una famiglia di funzionali $\{f_j : j \in J\}$, $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sarà sottointeso, a meno che non sia detto esplicitamente, che l'insieme degli indici J sia al più numerabile.

Semicontinuità inferiore

L'ambientazione naturale dei problemi di minimo è rappresentata dalle funzioni inferiormente semicontinue. Ciò è giustificato in parte da quanto visto nella sezione precedente ma sarà ancora più chiaro nelle sezioni successive. Per tale motivo riportiamo la definizione, una caratterizzazione e le proprietà più importanti.

Definizione 4.1. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è inferiormente semicontinua (i.s.c. per brevità) in un punto $x \in X$, se $\forall x_j \rightarrow x$ vale

$$f(x) \leq \liminf_j f(x_j)$$

Diremo che f è inferiormente semicontinua (su X) se è i.s.c. $\forall x \in X$.

Osservazione 4.2. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) f è i.s.c..
- (ii) $f(x) = \min\{\liminf_j f(x_j) : x_j \rightarrow x\} \quad \forall x \in X$.
- (iii) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{f \leq t\}$ è chiuso.

Osservazione 4.3. (proprietà)

- (i) Se f, g sono i.s.c. in x allora è i.s.c. anche la loro somma $f + g$.
- (ii) Sia $\{f_i : i \in I\}$ una famiglia di funzioni i.s.c. (I un arbitrario insieme di indici, non necessariamente numerabile). Allora anche $f(x) = \sup_i f_i(x)$ è i.s.c..
- (iii) Se $f = \chi_E$ è la funzione indicatrice di un sottoinsieme di X allora è i.s.c. se e solo se E è aperto.

Condizioni di coercività

Prima di procedere ricordiamo la definizioni di insieme compatto e precompatto.

Definizione 4.4. Diremo che un insieme $K \subseteq X$ è compatto se ogni successione in K ammette una sottosuccessione che converge ad un elemento di K , cioè

$$\forall x_j \in K \quad \exists x_{j_k}, x \in K : x_{j_k} \rightarrow x.$$

Diremo che un insieme $K \subseteq X$ è precompatto se la sua chiusura è compatta, cioè se ogni successione in K ammette una sottosuccessione che converge ad un elemento in X (che quindi potrebbe essere fuori da K), in formule

$$\forall x_j \in K \quad \exists x_{j_k}, x \in X : x_{j_k} \rightarrow x.$$

Entriamo adesso nel dettaglio delle diverse condizioni di coercività che si possono richiedere per mostrare l'esistenza di minimizzanti convergenti. Iniziamo con il caso di un singolo funzionale. Anche se equivalenti, daremo ogni definizione sia in forma puramente topologica che sequenziale anteponendo al nome delle varie definizioni il simbolo σ per indicare quest'ultima.

Partiamo dal caso di un solo funzionale.

Definizione 4.5. Diremo che un funzionale $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è:

(C) coercivo se $\forall t \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{f \leq t\}$ è precompatto.

(σ -C) σ -coercivo se

$$u_j \in X : \sup_j f(u_j) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists u_{j_k}, u^* \in X : u_{j_k} \rightarrow u^*.$$

(DC) debolmente-coercivo se $\exists K \subseteq X$ compatto non vuoto tale che $\inf_K f = \inf_X f$.

(σ -DC) σ -debolmente-coercivo se

$$\exists u_j, u^* \in X : u_j \rightarrow u^* \text{ e } \lim_j f(u_j) = \inf_X f.$$

Osservazione 4.6. (i) È immediato verificare che (C) \Leftrightarrow (σ -C). Mostriamo la seconda equivalenza, che è una caratterizzazione topologica dell'esistenza di una successione minimizzante convergente. (DC) \Rightarrow (σ -DC): dopo aver selezionato una minimizzante di f su K (che è minimizzante per ipotesi anche su X) è possibile estrarre una sottosuccessione convergente, poichè K è compatto, che è ancora minimizzante. (σ -DC) \Rightarrow (DC): basta scegliere $K = \{u_j, j \in \mathbb{N}\}$.

(ii) (C) \Rightarrow (DC). Basta scegliere come K la chiusura di $\{f \leq t\}$ per un $t \geq \inf_X f$.

(iii) (DC) $\not\Rightarrow$ (C). Basta considerare il controesempio fornito sull'asse reale da $f(x) = \sin(x)$.

Passiamo adesso al caso di una successione di funzionali. Ricordiamo innanzitutto la definizione di successione minimizzante

$$\liminf_j (f_j(u_j) - \inf_X f_j) = 0$$

Anche in questo caso siamo interessati a dare definizioni rilassate rispetto a quella di equicoercività presentata nell'introduzione ma che diano ancora la possibilità di estrarre sottosuccessioni minimizzanti e convergenti. Seguendo uno schema simile al caso di un singolo funzionale diamo le seguenti definizioni

Definizione 4.7. Diremo che una famiglia di funzionali f_j è :

(eC) equicoerciva se $\forall t \in \mathbb{R}$ l'unione dei sottolivelli $\bigcup_j \{f_j \leq t\}$ è precompatto.

(σ -eC) σ -equicoercivo se

$$u_j \in X : \sup_j f_j(u_j) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists u_{j_k}, u^* \in X : u_{j_k} \rightarrow u^*.$$

(eDC) equi-debolmente-coerciva se $\exists K \subseteq X$ compatto non vuoto tale che $\inf_K f_j = \inf_X f_j \quad \forall j$.

(σ -EDC) σ -equi-debolmente-coerciva se

$$\forall j \quad \exists u_k^j, u^j \in X : u_k^j \rightarrow u^j, \lim_k f_j(u_k^j) = \inf_X f_j.$$

Osservazione 4.8. Anche in questo caso è facile mostrare che:

(i) $(eC) \Leftrightarrow (\sigma - eC), (eDC) \Leftrightarrow (\sigma - eDC)$.

(ii) $(eC) \Rightarrow (eDC)$.

(iii) $(eDC) \not\Rightarrow (eC)$.

Tuttavia in questo caso la condizione più debole non è semplicemente una caratterizzazione dell'esistenza di minimizzanti convergenti: la condizione è più forte. È inoltre possibile individuare delle condizioni di coercività intermedie come la richiesta, nel caso di un funzionale, della precompattezza anche di un solo sottolivello. Infine scegliendo le successioni costanti le definizioni nel caso di un solo funzionale coincidono.

4.3 Le diverse definizioni di Γ -convergenza e le sue principali proprietà

Richiamiamo adesso la definizione di Γ -convergenza, e facciamo alcune semplici osservazioni.

Definizione 4.9 (Γ -convergenza). Diremo che una successione di funzioni $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Γ -converge in $x \in X$ a $f_\infty : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, e scriveremo $f_\infty(x) = \Gamma\text{-lim}_j f_j(x)$ se

(i) (disuguaglianza del *liminf*) $\forall x_j \rightarrow x$ vale

$$f_\infty(x) \leq \liminf_j f_j(x_j) \quad (4.18)$$

(ii) (disuguaglianza del *limsup*) $\exists x_j \rightarrow x$ vale

$$f_\infty(x) \geq \limsup_j f_j(x_j) \quad (4.19)$$

Diremo che f_j Γ -converge in X a f_∞ , e scriveremo $f_\infty = \Gamma\text{-lim}_j f_j$, se $f_\infty(x) = \Gamma\text{-lim}_j f_j(x) \forall x \in X$.

Da questa definizione possiamo subito notare come questo tipo di convergenza possa essere localizzato: si può parlare di convergenza in un punto.

Quando sarà necessario evidenziare la distanza d che definisce la convergenza usata scriveremo $f_\infty(x) = \Gamma(d)\text{-lim}_j f_j(x)$.

Differenti modi di scrivere la disuguaglianza del *limsup*. Se x_j soddisfa la (4.19), usando anche la (4.18) si ottiene

$$f_\infty(x) \leq \liminf_j f_j(x_j) \leq \limsup_j f_j(x_j) \leq f_\infty(x)$$

da cui otteniamo che

(ii') (esistenza di una *recovery sequence*) $\exists x_j \rightarrow x$:

$$f_\infty(x) = \lim_j f_j(x_j) \quad (4.20)$$

che può quindi sostituire la (4.19) perchè è una condizione più forte.

Altre volte può essere utile ottenere la (4.19) con un piccolo errore richiedendo che

(ii'') (disuguaglianza del *limsup* approssimata) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_j \rightarrow x$:

$$f_\infty(x) \geq \limsup_j f_j(x_j) - \varepsilon \quad (4.21)$$

e poi dedurre la (4.19) con un'estrazione diagonale cioè per ogni $\varepsilon > 0$ indichiamo la recovery sequence approssimata che u_j^ε e data $\varepsilon_j \rightarrow 0$ la successione $u_j^{\varepsilon_j}$ soddisfa la (4.19).

Γ -convergenza come uguaglianza *upper e lower bounds*. La (4.18) può essere scritta come

$$f_\infty(x) \leq \inf\{\liminf_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\}.$$

Trivialmente vale che

$$\inf\{\liminf_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} \leq \inf\{\limsup_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\},$$

e se \bar{x}_j è una recovery sequence abbiamo

$$\inf\{\limsup_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} \leq \limsup_j f_j(\bar{x}_j) = \lim_j f_j(\bar{x}_j) = f_\infty(x)$$

quindi dalle ultime tre disuguaglianze otteniamo

$$f_\infty(x) = \inf\{\liminf_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} = \inf\{\limsup_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} \quad (4.22)$$

o, equivalentemente

$$f_\infty(x) = \min\{\liminf_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} = \min\{\limsup_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} \quad (4.23)$$

che sono equivalenti alla definizione di Γ -convergenza. L'importanza di questa scrittura è che permette di pensare alla Γ -convergenza in un punto come all'uguaglianza di due quantità, che rappresentano rispettivamente stime dall'alto e dal basso, che possono essere calcolate **separatamente**. Dalla (4.22) deduciamo in particolare l'unicità del Γ -limite.

Definizione topologica. A volte è utile avere una definizione di Γ -limite direttamente espressa sulla base della topologia di X e non solo attraverso le successioni convergenti. È facile verificare che l'uguaglianza (4.22) può essere riscritta come

$$f_\infty(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \liminf_j \inf_{y \in U} f_j(y) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \limsup_j \inf_{y \in U} f_j(y) \quad (4.24)$$

in cui $\mathcal{N}(x)$ è la famiglia degli intorni di x . Questa definizione ha senso in qualsiasi spazio topologico (in particolare se X non è metrico) ed è assunta

come la definizione di Γ -convergenza (mentre la definizione 4.9 è detta Γ -convergenza *sequenziale*). Una suggestiva osservazione è che, ricordando la definizione di \liminf e \limsup , la (4.24) può essere riscritta come

$$f_\infty(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq k} \inf_{y \in U} f_j(y) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} \inf_{y \in U} f_j(y) \quad (4.25)$$

e interpretata come composizione delle ‘operazioni elementari’ di tipo \inf/\sup .

Una definizione in termini di convergenza di minimi. La Γ -convergenza può essere espressa in termini comportamento asintotivo di problemi di minimo (localizzati su aperti o compatti): dalla seconda uguaglianza della (4.24) abbiamo che

$$\inf_U f_\infty \geq \limsup_j \inf_U f_j \quad (4.26)$$

per ogni insieme aperto U , mentre richiedendo che

$$\inf_K f_\infty \leq \sup \{ \liminf_j \inf_U f_j : U \supset K, U \text{ aperto} \} \quad (4.27)$$

per ogni insieme compatto K implica la prima uguaglianza nella (4.24) scegliendo $K = \{x\}$.

Riassumiamo quanto detto nel seguente risultato di caratterizzazione

Teorema 4.10. *Date $f_j, f_\infty : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, x \in X$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) $f_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_j f_j(x)$ secondo la definizione (4.9) per ogni $x \in X$;
- (ii) vale la (4.18) e la (4.21) per ogni $x \in X$;
- (iii) vale la (4.18) e la (4.20) per ogni $x \in X$;
- (iv) vale la (4.23) per ogni $x \in X$;
- (v) vale la (4.22) per ogni $x \in X$;
- (vi) vale la (4.24) per ogni $x \in X$;
- (vii) valgono la (4.26) per ogni U aperto e la (4.27) per ogni K compatto.

Osservazione 4.11. (Stabilità rispetto a perturbazioni continue)

Una fondamentale proprietà della Γ -convergenza è la stabilità rispetto a perturbazioni continue cioè

$$f_\infty, f_j, g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : \Gamma(d) - \lim_j f_j = f_\infty, \quad g(d) \text{ continua} \Rightarrow$$

$$\Gamma(d) - \lim_j (f_j + g) = f_\infty + g$$

Questa è un'immediata conseguenza della definizione poichè se vale la (4.18) abbiamo $\forall x \in X, x_j \rightarrow x$ che

$$\begin{aligned} f_\infty(x) + g(x) &\leq \liminf_j f_j(x_j) + g(x) = \liminf_j f_j(x_j) + \lim_j g(x_j) = \\ &= \liminf_j f_j(x_j) + \liminf_j g(x_j) \leq \liminf_j (f_j(x_j) + g(x_j)) \end{aligned}$$

Mentre se vale la (4.20) e x_j è una successione di recupero per x segue

$$f_\infty(x) + g(x) = \lim_j f_j(x_j) + \lim_j g(x_j) = \liminf_j (f_j(x_j) + g(x_j))$$

Osservazione 4.12. (successioni costanti) Per l'operazione di Γ -limite la proprietà che una successione costante $f_j = f \quad \forall j \in \mathbb{N}$ converge ad f non è verificata a meno che la funzione non sia i.s.c.: se $f_\infty = \Gamma\text{-lim}_j f$ e f non è i.s.c. $\exists \bar{x}, x_j \rightarrow \bar{x}$ tali che

$$f_\infty(\bar{x}) \leq \lim_j f_j(x_j) < f(\bar{x})$$

quindi $f_\infty(\bar{x}) \neq f(\bar{x})$. Viceversa se $f_j = f$ allora $f = \Gamma\text{-lim}_j f_j \Leftrightarrow f$ è i.s.c.. L'implicazione \Rightarrow viene dalla disuguaglianza \liminf , l'altra si ottiene scegliendo come recovery sequence le successioni costanti.

Osservazione 4.13. (Dipendenza dalla metrica) Come già visto nell'introduzione la scelta della metrica d , e quindi della convergenza indotta da essa, gioca un ruolo fondamentale e deve essere opportunamente bilanciata. Per questo motivo date due distanze confrontabili d e d' , cioè tali che una generi una nozione di convergenza più forte dell'altra

$$\lim_j d(x_j, x) = 0 \Rightarrow \lim_j d'(x_j, x) = 0$$

in generale non si può dedurre l'esistenza di un Γ -limite in una metrica dall'esistenza nell'altra. Tuttavia se in entrambi i casi il limite esiste dalla caratterizzazione (v) e dal fatto che l'insieme delle successioni (d)-convergenti contiene quello delle successioni (d')-convergenti abbiamo

$$\Gamma(d)\text{-}\liminf_j f_j \leq \Gamma(d')\text{-}\liminf_j f_j$$

Osservazione 4.14 (Alcune proprietà). *Riportiamo di seguito alcune proprietà che seguono direttamente dalla definizione e da semplici esempi sull'asse reale (per maggiori informazioni [12] Paragrafo 1.3):*

$$(i) \quad \Gamma\text{-}\lim_j(-f_j) \neq -\Gamma\text{-}\lim_j(f_j).$$

$$(ii) \quad \Gamma\text{-}\lim_j(f_j + g_j) \neq \Gamma\text{-}\lim_j(f_j) + \Gamma\text{-}\lim_j(g_j).$$

4.4 Γ -liminf e Γ -limsup: rilassamento

La condizione (v) nella proposizione 4.10 giustifica la seguente definizione.

Definizione 4.15. *Siano $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x \in X$. Definiamo le quantità*

$$\Gamma\text{-}\liminf_j f_j(x) = \inf\{\liminf_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} \quad (4.28)$$

$$\Gamma\text{-}\limsup_j f_j(x) = \inf\{\limsup_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\} \quad (4.29)$$

che chiameremo, rispettivamente, Γ -liminf (Γ -limsup) di f_j in x . Indicheremo con $\Gamma\text{-}\liminf_j f_j$ ($\Gamma\text{-}\limsup_j f_j$) rispettivamente le funzioni $x \rightarrow \Gamma\text{-}\liminf_j f_j(x)$ ($x \rightarrow \Gamma\text{-}\limsup_j f_j(x)$).

Osservazione 4.16. *Chiaramente Γ -liminf e Γ -limsup esistono sempre. Il Γ -limite invece esiste solo se queste due quantità sono uguali, cioè*

$$\exists \Gamma\text{-}\lim_j f_j(x) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma\text{-}\liminf_j f_j(x) = \Gamma\text{-}\limsup_j f_j(x) = \lambda$$

Osservazione 4.17. È possibile mostrare ([12] Proposizione 1.28) che per ogni successione $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, le funzioni $\Gamma - \liminf_j f_j$, $\Gamma - \limsup_j f_j$ sono i.s.c., l'immediata conseguenza e che anche $\Gamma - \lim_j f_j$, se esiste, è i.s.c.

Quando una funzione f non è i.s.c. risulta a volte utile la determinazione del suo involucro semicontinuo. Questa operazione è chiamata *rilassamento*.

Definizione 4.18. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione. Il suo involucro i.s.c. è la più grande delle funzioni i.s.c. non più grandi di f , cioè $\forall x \in X$

$$scf(x) := \sup\{g(x) : g \text{ i.s.c.}, g \leq f\}$$

Dall'osservazione 4.3 (ii) segue che scf è i.s.c.. Inoltre se $f_1 \leq f_2$ allora $scf_1 \leq scf_2$.

L'impiego degli involucri convessi risulta molto utile nel calcolo del Γ -limite, ad esempio il seguente risultato risolve da un lato la questione del Γ -limite di successioni costanti (parzialmente affrontato nell'osservazione 4.12 (iii)), e dall'altro fornisce una caratterizzazione dell'involucro.

Proposizione 4.19. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, x \in X$ una funzione. Allora $scf(x) = \Gamma - \lim_j f(x) = \inf\{\liminf_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\}$.

Dimostrazione. Dall'osservazione 4.17 abbiamo che $f_\infty = \Gamma - \lim_j f(x) = \inf\{\liminf_j f_j(x_j) : x_j \rightarrow x\}$ è i.s.c.. Inoltre $f_\infty \leq f$, quindi $f_\infty \leq scf$. Se $g \leq f$ è i.s.c. allora $g = \Gamma - \lim_j g \leq \Gamma - \lim_j g = f_\infty$. Prendendo il sup su tali g si ottiene che $scf \leq f_\infty$.

□

Il seguente risultato ([12] Proposizione 1.32), mostra la flessibilità nell'impiego degli involucri

Proposizione 4.20. Per ogni successione di funzioni $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, x \in X$ vale

$$\Gamma - \liminf_j f_j = \Gamma - \liminf_j scf_j \quad \Gamma - \limsup_j f_j = \Gamma - \limsup_j scf_j$$

Osservazione 4.21. Come conseguenza della precedente proposizione, ai fini del calcolo del Γ -limite, si può sostituire ad una successione di funzioni la relativa successione degli involucri i.s.c., cioè

$$\Gamma\text{-}\lim_j f_j = \Gamma\text{-}\lim_j sc f_j$$

4.5 Convergenza dei minimi

A questo punto abbiamo gli strumenti necessari per mostrare quanto discusso nella prima sezione riguardo la convergenza dei problemi di minimo con condizioni di coercività rilassate.

Teorema 4.22. *Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una famiglia di funzioni equi-debolmente-coercive (eDC) su X tali che $\inf_X f_j < +\infty \forall j$. Sia $f_\infty = \Gamma\text{-}\lim_j f_j$; allora*

$$\exists \min_K f_\infty = \lim_j \inf_X f_j.$$

Inoltre, se x_j è una successione precompatta t.c. $\lim_j f_j(x_j) = \lim_j \inf_X f_j$, allora il limite di ogni sottosuccessione convergente di x_j è un punto di minimo per f_∞ .

Dimostrazione. Dalla definizione di equi-debole-coercività esiste $K \subseteq X$ compatto tale che $\inf_K f_j = \inf_X f_j \forall j \in \mathbb{N}$. Consideriamo una successione minimizzante $\bar{x}_j \in K$, cioè tale che

$$\lim_j \inf f_j(\bar{x}_j) = \lim_j \inf_j \inf_K f_j = \lim_j \inf_j \inf_X f_j.$$

Grazie alla compattezza di K è possibile estrarre una sottosuccessione \bar{x}_{j_k} convergente a un elemento $\bar{x} \in K$ che, chiaramente è ancora minimizzante

$$\lim_k f_{j_k}(\bar{x}_{j_k}) = \lim_j \inf_K f_j.$$

Ponendo

$$x_j = \begin{cases} \bar{x}_j & \text{se } j = j_k, \\ \bar{x} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e sfruttando la disuguaglianza del liminf abbiamo

$$\begin{aligned} \inf_X f_\infty &\leq \inf_K f_\infty \leq f_\infty(\bar{x}) \leq \lim_j \inf f_j(x_j) \\ &\leq \lim_k \inf f_{j_k}(x_{j_k}) = \lim_k f_{j_k}(\bar{x}_{j_k}) \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$= \lim_j \inf_K \inf f_j = \lim_j \inf_X \inf f_j \leq \limsup_j \inf_X f_j.$$

A questo punto serviamoci della disuguaglianza \limsup . Con $\delta > 0$ fissato, sia $x \in X$ tale che $f_\infty(x) \leq \inf_X f_\infty + \delta$. Se x_j è una recovery sequence per x abbiamo

$$\inf_X f_\infty + \delta \geq f_\infty(x) \geq \limsup_j f_j(x_j) \geq \limsup_j \inf_X f_j$$

e dall'arbitrarietà di δ segue che

$$\limsup_j \inf_X f_j \leq \inf_X f_\infty \quad (4.31)$$

Da (4.30) e (4.31) segue la convergenza della successione $\inf_X f_j$ e vale la catena di uguaglianze

$$f_\infty(\bar{x}) = \inf_X f_\infty = \lim_j \inf_X f_j$$

dalla quale segue la tesi

Osservazione 4.23. (Γ -convergenza come criterio di scelta). Abbiamo appena visto che il limite di minimizzanti convergenti è minimo del Γ -limite. Il viceversa non vale, cioè possono esistere punti di minimo del Γ -limite che non sono limite di minimizzanti: si consideri sull'asse reale $f_j(t) = \frac{1}{j}t^2$. Da ciò segue che l'operazione di Γ -limite non è una caratterizzazione delle minimizzanti convergenti anzi il problema limite potrebbe esibire troppi minimi e quindi, la teoria limite associata, essere poco significativa.

□

Usando le proposizioni (4.22) e (4.19) possiamo ottenere la seguente versione del 'metodo diretto'.

Proposizione 4.24 (Metodo diretto). Sia (X, d) uno spazio metrico e $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione debolmente-coerciva (DC) su X tale che $\inf_X f < +\infty$. allora

$$\exists \min_X sc(f) = \inf_X f.$$

Inoltre se \bar{x} è punto di minimo per scf allora è il limite di una minimizzante convergente cioè $\bar{x} = \lim_j x_j$ e $\lim_j f(x_j) = \inf_X f$. Se inoltre f è i.s.c. esiste un suo minimo su X .

Diversamente da quanto visto nella proposizione (4.22), il rilassamento di un funzionale non rappresenta un criterio di scelta: sostituire f con $sc(f)$ è la scelta naturale nel caso f non sia i.s.c..

4.6 Γ -limite con un parametro continuo

Nelle applicazioni i funzionali sono spesso indicizzati con un parametro continuo $\varepsilon > 0$, di conseguenza avremo una famiglia $f_\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Per tale motivo è necessario dare una precisa definizione di Γ -limite anche in questo caso.

Definizione 4.25. Diremo che una famiglia di funzionali $f_\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dipendenti dal parametro positivo $\varepsilon > 0$ Γ -converge per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ad f_0 , e scriveremo $f_0 = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon$, se per ogni successione ε_j che converge a 0 vale $f_0 = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon_j} f_{\varepsilon_j}$

È facile verificare che con questa definizione tutte le proprietà finora presentate continuano ad essere vere.

Γ -limiti successivi

Proposizione 4.26. Sia $f_{\varepsilon,\delta} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una famiglia di funzionali dipendenti dai due parametri positivi $\varepsilon, \delta > 0$. Ipotizziamo che:

- (i) per ogni $\delta > 0$ esiste $f_\delta = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_{\varepsilon,\delta}$
- (ii) esiste $f_\infty = \Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f_\delta$.

Allora per ogni funzione $\delta : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ funzione continua, strettamente monotona crescente e tale che $\delta(0) = 0$ abbiamo

$$f_\infty = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_{\varepsilon,\delta(\varepsilon)}.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon_j \rightarrow 0^+$, allora $\delta(\varepsilon_j) \rightarrow 0^+$. Iniziamo dalla disuguaglianza del liminf. Per ogni $x_j \rightarrow x$ abbiamo

$$f_\infty(x) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} f_{\delta(\varepsilon_j)}(x_j)$$

e per ogni j considerando le successioni costanti abbiamo

$$f_{\delta(\varepsilon_j)}(x_j) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_{\varepsilon_k,\delta(\varepsilon_j)}(x_j)$$

quindi

$$f_\infty(x) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} f_{\varepsilon_k,\delta(\varepsilon_j)}(x_j) \right) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} f_{\varepsilon_j,\delta(\varepsilon_j)}(x_j).$$

Passiamo alla disuguaglianza del limsup. Per ogni $x \in X$ esiste $x_j \rightarrow x$ e tale che

$$f_\infty(x) \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} f_{\delta(\varepsilon_j)}(x_j)$$

e per ogni x_j esiste $x_j^k \rightarrow x_j$ tale che

$$f_{\delta(\varepsilon_j)}(x_j) \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_{\varepsilon_k, \delta(\varepsilon_j)}(x_j^k)$$

quindi scegliendo come recovery sequence x_j^j abbiamo

$$f_\infty(x) \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} \left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} f_{\varepsilon_k, \delta(\varepsilon_j)}(x_j^k) \right) \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} f_{\varepsilon_j, \delta(\varepsilon_j)}(x_j^j).$$

□

4.7 Calcolo del Γ -limite

Come visto nella sezione 4.4 il calcolo del Γ -limite di una famiglia di funzionali F_ε può essere eseguito affrontando **separatamente** la stima del Γ -liminf e del Γ -limsup.

Γ -liminf: estremo superiore di misure

Un metodo generale per determinare il Γ -liminf è trovare una classe di *lower bound* cioè funzionali G tali che $G \leq \Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon$, ovvero

$$G(x) \leq \liminf_{\varepsilon_j \rightarrow 0^+} F_{\varepsilon_j}(x_j) \quad \forall \varepsilon_j \rightarrow 0, x_j \rightarrow x. \quad (4.32)$$

La semicontinuità del Γ -limite (osservazione 4.17) limita la nostra ricerca a limiti inferiori G nella classe dei funzionali *i.s.c.*. Se riusciamo a caratterizzare una famiglia $\mathcal{G} = \{G : G \text{ è i.s.c. e rispetta la (4.32)}\}$ sufficientemente grande il *lower bound* ottimale è ottenuto passando al sup cioè

$$\bar{G}(x) = \sup\{G(x) : g \in \mathcal{G}\}$$

in cui \bar{G} è semicontinuo perchè sup di funzioni semicontinue.

Nelle applicazioni spesso si incontrano funzionali che rappresentano energie di volume o superficie dipendenti dal comportamento ‘locale’ di una qualche funzione u ad esempio *funzionali integrali* del tipo

$$F_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} f_\varepsilon(u, Du) dx \quad u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Queste energie possono essere *localizzate* sui sottoinsiemi aperti A di Ω definendo

$$F_\varepsilon(u, A) = \int_A f_\varepsilon(u, Du) dx \quad u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

La proprietà essenziale nella *definizione locale* dei funzionali è che

$$F_\varepsilon(u, A) = F_\varepsilon(v, A) \quad \text{se } u = v \text{ q.o. in } A.$$

Una semplice ma importante osservazione è che se i funzionali $F_\varepsilon(u, A)$ sono locali allora la funzione

$$A \rightarrow F'(u, A) := \Gamma\text{-}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u, A)$$

è superadditiva sugli insiemi aperti con chiusure compatte disgiunte cioè

$$F'(u, A \cup B) \geq F'(u, A) + F'(u, B)$$

per ogni $A, B \subset \Omega$ tali che \bar{A}, \bar{B} sono compatti e $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Questa disuguaglianza deriva dalla definizione di Γ -liminf perchè le funzioni test per $F'(u, A \cup B)$ possono essere usate sia per $F'(u, A)$ che per $F'(u, B)$.

Se abbiamo una famiglia di *lower bound* della forma

$$F'(u, A) \geq G_i(u, A) := \int_A \phi_i d\lambda$$

in cui λ è una misura positiva e ϕ_i sono funzioni Borel-misurabili allora possiamo applicare alla misura $\mu(A)$ il seguente lemma (lemma 15.2 in [12])

Lemma 4.27 (Estremo superiore di una famiglia di misure). *Sia μ una funzione definita sulla famiglia degli insiemi aperti di Ω superadditiva sugli aperti con chiusura compatta e disgiunta. Sia λ una misura positiva su Ω e $\{\phi_i\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni positive Borel-misurabili tali che $\mu(A) \geq \int_A \phi_i d\lambda$ per ogni $i \in I$ e A aperto. Posto $\phi(x) = \sup_{i \in I} \phi_i(x)$ allora $\mu(A) \geq \int_A \phi d\lambda$ per ogni A aperto.*

Il passaggio all'estremo superiore su una famiglia di *lower bound* è solo una delle tecniche che si può usare per ottenere il Γ -liminf. Più in generale si parla di *metodi di localizzazione*. Per maggiori informazioni si consulti [12], Capitolo 3.

Γ -limsup: un argomento di densità

La semicontinuità del Γ -limsup può essere usata per ridurre la sua determinazione ad una classe densa. Sia d' una distanza su X che induce una convergenza non più debole di d cioè

$$d(x_j, x) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad d'(x_j, x) \rightarrow 0,$$

e supponiamo che

1. D è un sottoinsieme denso di X rispetto a d' cioè per ogni $x \in X$ esiste $x_j \in D$ tale che $d(x_j, x) \rightarrow 0$
2. F è un funzionale tale che se $x_j \in D$ e $d(x_j, x) \rightarrow 0$ allora $F(x_j) \rightarrow F(x)$.
3. $\Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in D$.

allora abbiamo che

$$\Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) \leq F(x) \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Per verificare ciò è sufficiente notare che se $x_j \in D$, $x \in X$ e $d(x_j, x) \rightarrow 0$ allora

$$\Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x) \leq \liminf_j (\Gamma\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(x_j)) \leq \liminf_j F(x_j) = F(x).$$

Trattamento dei problemi con vincolo

Ipotizziamo di avere determinato un Γ -limite $f_\infty = \Gamma\text{-lim}_j f_j$ in cui $f_\infty, f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dato un sottoinsieme $E \subset X$ delle configurazioni ammissibili, per esempio la prescrizione di un dato al bordo o un vincolo integrale, si consideri la famiglia di funzionali $f_j|_E : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definita come

$$f_j|_E(x) = \begin{cases} f_j(x) & \text{se } x \in E, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e analogamente per $f_\infty|_E : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Restringere l'analisi agli elementi contenuti in E equivale a dedurre che $f_\infty|_E = \Gamma\text{-lim}_j f_j|_E$. Se l'insieme E è chiuso in X rispetto ad una convergenza che non sia più debole rispetto a quella usata per il calcolo del Γ -limite in X si ricava subito la disuguaglianza del liminf. Riguardo invece la disuguaglianza del limsup essa va verificata a parte, solitamente modificando in maniera opportuna una recovery sequence sull'insieme X .

Richiami di teoria della misura

Definizione 5.1 (Funzioni continue e differenziabili). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

- (a) Indichiamo con $C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di funzioni $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue e limitate cioè tali che

$$\|u\|_\infty := \sup\{|u(x)| : x \in \Omega\} < \infty.$$

- (b) Data $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $1 \leq j \leq n$ indicheremo con $D_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ la derivata parziale (classica) della componente i -esima di u rispetto alla coordinata j -esima e con $D_j u = (D_j u_1, \dots, D_j u_m)$. Dato il multi-indice $j = \{j_1, \dots, j_m\} \in J = \mathbb{N}^n$ indicheremo con $|j| = j_1 + \dots + j_n$ e con

$$D^j u = \frac{\partial^{|j|} u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}}$$

(se esiste) la derivata parziale (classica) di ordina $|j|$ della componente i -esima di u . Per convenzione porremo $\frac{\partial^0 u}{\partial x_i^0} = u$.

- (c) Indichiamo con $C^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di funzioni $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabili (in senso classico) α volte e con tutte le derivate di ordine minore o uguale di α appartenenti a $C(\Omega)$, cioè tali che

$$\|u\|_{\infty, \alpha} := \sum_{\substack{j \in J \\ |j| \leq \alpha}} \|D^j u\|_\infty < \infty.$$

In particolare $C^0(\Omega, \mathbb{R}^m) = C(\Omega, \mathbb{R}^m)$

Gli spazi vettoriali $C^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$ dotati della norma $\| \cdot \|_{\infty, \alpha}$ sono spazi di Banach.

Definizione 5.2 (σ -algebre e spazi misurabili). *Sia X un insieme non vuoto e \mathcal{F} una famiglia di sottoinsiemi.*

- (a) Diremo che \mathcal{F} è una σ -algebra su X se $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X/E \in \mathcal{F}$ per ogni $E \in \mathcal{F}$ e $\bigcup_i E_i \in \mathcal{F}$ per ogni famiglia numerabile di insiemi $E_i \in \mathcal{F}$.
- (b) Se \mathcal{F} è una σ -algebra su X chiameremo spazio misurabile la coppia (X, \mathcal{F}) . Se $A \subseteq X$ diremo che la σ -algebra $\mathcal{F}|_A := \{E \cap A : E \in \mathcal{F}\}$ è la restrizione di \mathcal{F} su A . Chiaramente per ogni $A \subseteq X$ la coppia $(A, \mathcal{F}|_A)$ è uno spazio misurabile.
- (c) Per ogni famiglia \mathcal{G} di sottoinsiemi di X la σ -algebra generata da \mathcal{G} è la più piccola σ -algebra su X che contiene \mathcal{G} . Se (X, τ) è uno spazio topologico indicheremo con $\mathcal{B}(X)$ la σ -algebra generata dagli aperti.

Definizione 5.3 (Misure positive). *Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio misurabile e $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$.*

- (a) Diremo che μ è una misura positiva se $\mu(\emptyset) = 0$ ed è numerabilmente additiva, cioè se per ogni famiglia numerabile $\{E_i\}$ di insiemi mutuamente disgiunti in \mathcal{F} abbiamo

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mu(E_i)$$

- (b) Una misura μ è finita se $\mu(X) < +\infty$; è σ -finita se esiste una famiglia numerabile di insiemi $\{E_i\}$ in \mathcal{F} di misura finita e tali che $X = \bigcup_i E_i$.

Definizione 5.4 (Misure reali e vettoriali). *Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio misurabile e $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^k$.*

- (a) Diremo che μ è una misura positiva se $\mu(\emptyset) = 0$ ed è numerabilmente additiva, cioè se per ogni famiglia numerabile $\{E_i\}$ di insiemi mutuamente disgiunti in \mathcal{F} abbiamo

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mu(E_i).$$

Se $k = 1$ diremo che μ è una misura reale, se $k > 1$ diremo che μ è una misura vettoriale.

(b) Se μ è una misura definiamo la sua variazione totale su E come

$$|\mu| = \sup \left\{ \sum_i |\mu(E_i)| : E_i \text{ mutuamente disgiunti in } \mathcal{F}, \bigcup_i E_i = E \right\}$$

Teorema 5.5. Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio misurabile. Data una misura μ la sua variazione totale $|\mu|$ è una norma sullo spazio vettoriale delle misure. Inoltre lo spazio vettoriale delle misure (reali o vettoriali) dotato di tale norma è uno Spazio di Banach.

Definizione 5.6 (Spazi di misura). Dato uno spazio misurabile (X, \mathcal{F}) e una misura positiva, reale o vettoriale μ chiameremo spazio di misura la tripla (X, \mathcal{F}, μ) .

Definizione 5.7 (Insiemi μ -trascurabili). Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio misurabile e μ una misura positiva.

- (a) Diremo che un insieme $N \subseteq X$ è μ -trascurabile se esiste $E \in \mathcal{F}$ tale che $N \subseteq E$ e $\mu(E) = 0$.
- (b) Diremo che una proprietà $\mathcal{P}(x)$ che dipende dal punto $x \in X$ è vera μ -q.o. se esiste $N \subseteq X$ μ -trascurabile tale che $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni $x \in X/N$.
- (c) Sia \mathcal{F}_μ la collezione degli insiemi $F = E \cup N$ con $E \in \mathcal{F}$, $N \subseteq X$ insieme μ -trascurabile; allora \mathcal{F}_μ è una σ -algebra chiamata μ -completamento di \mathcal{F} . Diremo che un insieme E è μ -misurabile se $E \in (\mathcal{F})_\mu$. La misura μ può sempre essere estesa a \mathcal{F}_μ ponendo $\mu(F) = \mu(E)$.

Nel seguito assumeremo tacitamente che tutte le σ -algebre siano complete, in caso contrario, sulla base della precedente definizione, è sempre possibile completarle ed estendere le misure sul completamento.

Definizione 5.8 (Funzioni μ -misurabili). . Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio di misurabile, (Y, d) uno spazio metrico. Diremo che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è \mathcal{F}

misurabile se per ogni aperto $A \in Y$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Se μ è una misura positiva su (X, \mathcal{F}) diremo che f è μ -misurabile se è \mathcal{F}_μ -misurabile.

Definizione 5.9 (Operazioni su misure). Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio misurabile.

- (a) Sia μ una misura positiva, reale o vettoriale su (X, \mathcal{F}) e $A \subseteq X$. chiameremo restrizione di μ su A la misura $\mu \llcorner A$ definita come $\mu \llcorner A(E) = \mu(E)$ se $E \in \mathcal{F}|_A$, $\mu \llcorner A(E) = 0$ altrimenti.
- (b) Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di misure positive. Dato $E \in \mathcal{F}$ definiamo, rispettivamente, il sup e l'inf di tale famiglia come

$$\bigvee_{i \in I} \mu_i(E) = \sup \left\{ \sum_{i \in I'} \mu_i(E_i) : E_i \in \mathcal{F} \text{ mutuamente disgiunti, } \bigcup_{i \in I'} E_i = E \right\}$$

$$\bigwedge_{i \in I} \mu_i(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I'} \mu_i(E_i) : E_i \in \mathcal{F} \text{ mutuamente disgiunti, } \bigcup_{i \in I'} E_i = E \right\}$$

in cui I' è un qualsiasi sottoinsieme numerabile di I .

Definizione 5.10 (Integrali). Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio misurabile.

- (a) Diremo che una funzione $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è semplice se è una combinazione lineare (finita) di indicatori, cioè se esistono $z_1, \dots, z_k \in [-\infty, +\infty]$ e $E_1, \dots, E_k \subseteq X$ tali che

$$f = \sum_{i=1}^k z_i \chi_{E_i}$$

in cui per ogni $E \subseteq X$

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}.$$

- (b) Sia μ una misura positiva su (X, \mathcal{F}) . Definiamo l'integrale di una funzione semplice e \mathcal{F}_μ -misurabile $u : X \rightarrow [0, +\infty]$ come

$$\int_X u d\mu = \sum_{z \in \text{Im}(u)} z \mu(u^{-1}(z))$$

usando la convenzione che se $z = 0$ e $\mu(u^{-1}(z)) = +\infty$ il prodotto è nullo, cioè $z\mu(u^{-1}(z)) = 0$. Data una funzione \mathcal{F}_μ -misurabile $u : X \rightarrow [0, +\infty]$ definiamo l'integrale come

$$\int_X u \, d\mu = \sup\left\{ \int_X v \, d\mu : v \text{ semplice, } \mu\text{-misurabile, } v \leq u \right\}.$$

Diremo che una funzione μ -misurabile $u : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è μ -sommabile se $\int_X |u| \, d\mu < +\infty$.

Diremo che una funzione μ -misurabile $u : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è μ -integrabile se

$$\int_X u^+ \, d\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X u^- \, d\mu < +\infty.$$

Se u è μ -integrabile poniamo

$$\int_X u \, d\mu := \int_X u^+ \, d\mu - \int_X u^- \, d\mu$$

(c) Sia μ una misura su (X, \mathcal{F}) e $u : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una funzione $|\mu|$ -misurabile. Diremo che u è μ -sommabile se u è $|\mu|$ -sommabile e, se μ è reale, definiamo

$$\int_X u \, d\mu := \int_X u^+ \, d\mu - \int_X u^- \, d\mu.$$

Se μ è k -vettoriale definiamo

$$\int_X u \, d\mu := \left(\int_X u \, d\mu_1, \dots, \int_X u \, d\mu_k \right).$$

Se μ è reale e $u = (u_1, \dots, u_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ è $|\mu|$ -misurabile diremo che u è $|\mu|$ -sommabile se tutte le sue componenti sono $|\mu|$ -sommabili e definiamo

$$\int_X u \, d\mu := \left(\int_X u_1 \, d\mu, \dots, \int_X u_n \, d\mu \right).$$

Se $E \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\int_E u \, d\mu := \int_X \chi_E u \, d\mu.$$

Teorema 5.11 (Teorema della Convergenza Monotona). Sia $u_j : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una successione crescente di funzioni μ -misurabili inferiormente limitate cioè tali che $u_{j+1} \geq u_j \geq g$ per qualche $g \in L^1(X, \mu)$ e per ogni j . Allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X u_j d\mu = \int_X \lim_{j \rightarrow \infty} u_j d\mu$$

Teorema 5.12 (Lemma di Fatou). Sia $u_j : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una successione di funzioni μ -misurabili e $g \in L^1(X, \mu)$. Allora

$$\int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} u_j d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X u_j d\mu$$

se $u_j \geq g$ per ogni j e

$$\int_X \limsup_{j \rightarrow \infty} u_j d\mu \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_X u_j d\mu$$

se $u_j \leq g$ per ogni j .

Teorema 5.13 (Teorema della Convergenza Dominata). Siano $u, u_j : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ μ -misurabili tali che $u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$ per μ -q.o. $x \in X$. Se esiste $g \in L^1(X, \mu)$ tale

$$\sup_j |u_j| < g$$

allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X |u_j - u| d\mu = 0$$

Definizione 5.14 (Assoluta continuità e mutua singolarità fra misure). Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio di misura.

(a) Data μ una misura positiva e ν una misura reale, o una misura vettoriale, nello spazio di misura (X, \mathcal{F}) , diremo che ν è assolutamente continua rispetto a μ , e scriveremo $\nu \ll \mu$, se per ogni insieme $B \subseteq \mathcal{F}$ vale

$$\mu(B) = 0 \Rightarrow |\nu|(B) = 0.$$

(b) Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio di misura diremo che due misure positive μ, ν su (X, \mathcal{F}) sono mutuamente singolari, e scriveremo $\mu \perp \nu$, se esiste un insieme $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A) = \nu(X/A) = 0$. Se μ, ν sono misure reali o vettoriali, diremo che sono mutuamente singolari se lo sono $|\mu|$ e $|\nu|$.

Teorema 5.15 (Radon-Nikodým). Sia (X, \mathcal{F}) uno spazio di misura, μ una misura positiva e σ -finita, ν una misura positiva, reale o k -vettoriale. Allora esiste un'unica coppia di misure ν_a e ν_s tali che $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu = \nu_a + \nu_s$. Inoltre esiste un'unica funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ μ -sommabile tale che $\nu_a = f\mu$. La funzione f è detta derivata di Radon-Nikodym della ν rispetto alla μ ed è indicata come $f = d\nu/d\mu$.

Corollario 5.16 (Decomposizione polare di una misura). Sia (X, \mathcal{F}, μ) uno spazio di misura con μ misura k -vettoriale. Allora esiste un'unica funzione $f : X \rightarrow S^{m-1}$, in cui S^{m-1} è la sfera $(m-1)$ -dimensionale di raggio unitario centrata nell'origine, tale che $\mu = f|\mu|$

5.1 Misure in spazi metrici

Definizione 5.17 (Misure di Borel e misure di Radon). Sia X uno spazio metrico localmente compatto e separabile (l.c.s.), $\mathcal{B}(X)$ la σ -algebra di Borel definita su tale spazio. Consideriamo lo spazio di misura $(X, \mathcal{B}(X))$.

- Diremo che una misura positiva su $(X, \mathcal{B}(X))$ è una misura di Borel. Se una misura di Borel è finita sugli insiemi compatti, verrà chiamata misura positiva di Radon;
- una funzione d'insiemi (a valori reali o vettoriali) definita per ogni compatto $K \subseteq X$ su $\mathcal{B}(X)|_K$ che sia una misura su $(K, \mathcal{B}(K))$ è detta misura di Radon. Se $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una misura, verrà chiamata misura di Radon finita.
- Le misure appena definite sono tacitamente assunte come estese al completamento di $\mathcal{B}(X)$.

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ lo spazio di Banach costituito dall'insieme delle misure finite k -vettoriali di Radon su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dotato della metrica Euclidea.

Definizione 5.18 (supporto). Sia μ una misura positiva su uno spazio metrico l.c.s. X ; chiamiamo l'insieme chiuso dei punti $x \in X$ tali che $\mu(U) > 0$ per ogni intorno U di x il supporto di μ e lo indichiamo con $\text{spt}\mu$. Se μ è reale o vettoriale chiameremo supporto di μ il supporto di $|\mu|$.

Le misure finite di Radon possono essere caratterizzate in termini di funzionali additivi e continui grazie ai due seguenti risultati.

Teorema 5.19. Sia X uno spazio metrico localmente compatto e μ una misura di Radon finita k -vettoriale. Allora

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \int_X u_i d\mu_i : u \in C_0(A, \mathbb{R}^k), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Teorema 5.20 (Riesz). Sia X uno spazio metrico localmente compatto. Supponiamo che il funzionale $L : C_0(X, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ sia additivo e limitato, cioè che valgano

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \quad \forall u, v \in C_0(X, \mathbb{R}^k)$$

e

$$\|L\| := \sup \{ |L(v)| : \|v\|_\infty \leq 1 \} < +\infty.$$

Allora esiste un'unica misura k -vettoriale di Radon μ su X tale che per ogni $u \in C_0(X, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(u) = \sum_{i=1}^k \int_X u_i d\mu_i.$$

Corollario 5.21. Lo spazio di Banach $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ è isometricamente isomorfo al duale di $C_0(X, \mathbb{R}^k)$.

Proposizione 5.22 (Regolarità interna ed esterna). Sia X uno spazio metrico localmente compatto, μ una misura di Borel e $E \subseteq X$ un'insieme μ -misurabile.

(a) Se μ è σ -finita allora

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compatto}, K \subseteq E\}$$

(b) Se esiste una famiglia di aperti X_h tali che $\mu(X_h) < +\infty$ per ogni h e $X = \cup_h X_h$, allora

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \text{ aperto}, E \subseteq A\}$$

Definizione 5.23 (Misure esterne). Sia X uno spazio metrico. Diremo che una funzione μ definita sull'insieme delle parti di X e a valori in $[0, +\infty]$ è una misura esterna se $\mu(\emptyset) = 0$; è numerabilmente subadditiva, cioè se per ogni famiglia numerabile $\{E_i\}$ di insiemi boreliani abbiamo

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$$

e se

$$\text{dist}(E, F) > 0 \Rightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Il seguente risultato mostra che ogni misura esterna definisce una misura di Borel.

Teorema 5.24 (Criterio di Carathèodory). Sia μ una misura esterna sullo spazio metrico X . Allora μ è σ -additiva su $\mathcal{B}(X)$, quindi la sua restrizione su $\mathcal{B}(X)$ è una misura di Borel.

Questo criterio ci permette di definire in maniera costruttiva su \mathbb{R}^n la misura di Lebesgue attraverso il seguente

Esempio 1. Sia $Q_r(x) = \{u \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, \dots, n} |y_i - x_i| < r\}$ l'iperquadrato aperto di lato $2r$ e centrato in x . Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty} (2r_h)^n : E \subseteq \bigcup_h Q_{r_h}(x_h)\right\}.$$

è facile verificare che con tale definizione μ è una misura esterna.

Definizione 5.25 (Misura di Lebesgue). Sia μ la misura esterna dell'esempio 1. Chiameremo μ misura esterna di Lebesgue n -dimensionale e la denoteremo con \mathcal{L}^n . Poichè \mathcal{L}^n è finita sui compatti, dal criterio di Carathéodory la sua restrizione su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è una misura positiva di Radon. Diremo che un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è Lebesgue-misurabile, e scriveremo \mathcal{L}^n -misurabile, se appartiene al completamento della σ -algebra di Borel rispetto \mathcal{L}^n che chiameremo σ -algebra di Lebesgue e indicheremo con \mathcal{L}_n . Per brevità nel seguito scriveremo, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $|E| = \mathcal{L}^n(E)$.

Un'altra fondamentale misura esterna su \mathbb{R}^n è la misura di Hausdorff in cui, diversamente dalla misura di Lebesgue, la dimensione è parte stessa della definizione e assume valori reali (e non solo naturali).

Definizione 5.26 (Misure di Hausdorff). Sia $k \in [0, +\infty)$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$. La misura di Hausdorff k -dimensionale di E è data da

$$\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(E)$$

in cui per $0 < \delta < +\infty$, $\mathcal{H}_\delta^k(E)$ è definito come

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i)^k : \text{diam } E_i < \delta, E \subseteq \bigcup_i E_i \right\}.$$

Proposizione 5.27 (proprietà delle misure di Hausdorff). La misura \mathcal{H}^k in \mathbb{R}^n ha le seguenti proprietà:

(i) Le misure \mathcal{H}^k sono subaddittive in \mathbb{R}^n e, in particolare, σ -additive su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

(ii) \mathcal{H}^k ha il seguente comportamento rispetto alle traslazioni

$$\mathcal{H}^k(E + z) = \mathcal{H}^k(E) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

e alle omotetie

$$\mathcal{H}^k(\lambda E) = \lambda^k \mathcal{H}^k(E) \quad \forall \lambda > 0$$

(iii) Se $s > k \geq 0$ allora

$$\mathcal{H}^k(E) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^s(E) = \infty$$

e

$$k > n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^k(E) = 0$$

quindi per ogni insieme E può essere definita la sua dimensione come

$$k(E) = \inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(E) = 0\}$$

che risulta essere unica.

(iv) Se $k \in \mathbb{N}$ allora $\mathcal{H}^k = \mathcal{L}^k$ e \mathcal{H}^0 è la misura del conteggio cioè $\mathcal{H}^0(E) = \#(E)$.

La misura di Hausdorff è uno strumento fondamentale nella teoria geometrica della misura poichè permette di misurare le porzioni di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ che hanno una dimensione topologica minore di n : si pensi ad esempio ad un insieme E con misura di Lebesgue $0 < \mathcal{L}^n(E) < \infty$ che ha una frontiera ∂E regolare: in questo caso la dimensione di Hausdorff di ∂E sarà $n - 1$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$ sarà la misura di Lebesgue $n - 1$ dimensionale.

La prossima definizione riguarda gli insiemi che possono (localmente) essere appiattiti per mezzo di funzioni lipschitziane

Definizione 5.28 (Insiemi \mathcal{H}^k rettificabili). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{H}^k -misurabile. Diciamo che E è numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile se esiste una collezione numerabile di funzioni lipschitziane $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

$$\mathcal{H}^k(E \setminus \bigcup_i f_i(\mathbb{R}^k)) = 0.$$

6

Semicontinuit  e coercivit  in spazi L^p e $H^{1,p}$

6.1 Spazi L^p

Definizione 6.1 (Spazi di Lebesgue). Per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, chiamiamo $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, con $1 \leq p < \infty$, lo spazio (delle classi di equivalenza) di funzioni $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ \mathcal{L}^n -misurabili che hanno la p -esima potenza del modulo sommabile rispetto alla misura di Lebesgue \mathcal{L}^n , cio  tali che

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mathcal{L}^n \right)^{1/p} < +\infty.$$

Denotiamo con $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ lo spazio (delle classi di equivalenza) di funzioni $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ \mathcal{L}^n -misurabili essenzialmente limitate, cio  tali che

$$\|u\|_\infty = \inf\{t : \mathcal{L}^m(\{x : |u(x)| > t\}) = 0\} < +\infty$$

Indicheremo con $L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, con $1 \leq p \leq \infty$, lo spazio (delle classi di equivalenza) di funzioni $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ \mathcal{L}^n -misurabili tali che $u \in L^p(K, \mathbb{R}^m)$ per ogni compatto $K \subseteq \Omega$.

Nel caso $m = 1$ (funzioni a valori reali) scriveremo semplicemente $L^p(\Omega)$, $L^p_{loc}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Nel seguito il differenziale $d\mathcal{L}^n$ rispetto alla misura di Lebesgue   sempre indicato con dx .

Dall'identificazione \mathcal{L}^n -q.o. di due elementi in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e dalla disuguaglianza di Minkowski deduciamo che l'insieme $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ dotato della norma $\|\cdot\|_p$

CAPITOLO 6. SEMICONTINUITÀ E COERCIVITÀ IN SPAZI L^p E $H^{1,p}$

è uno spazio vettoriale normato. Si può mostrare che tale spazio è anche completo e che quindi è uno spazio di Banach.

Richiamiamo alcuni risultati per gli spazi di Lebesgue.

Proposizione 6.2. *Se $|\Omega| < +\infty$ e $1 \leq s \leq r \leq \infty$, allora vale l'inclusione*

$$L^r(\Omega, \mathbb{R}^m) \subseteq L^s(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Inoltre interpretando $1/\infty = 0$ vale

$$\|f\|_s \leq |\Omega|^{1/s-1/r} \|f\|_r.$$

Di seguito riportiamo la definizione e riassumiamo, nella proposizione successiva, i rapporti che esistono fra le diverse nozioni di convergenza negli spazi di Lebesgue.

Definizione 6.3. *Siano $u, u_j \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Diremo che*

(a) *La successione u_j converge q.o. (rispetto a \mathcal{L}^n) all'elemento u se*

$$|\{x \in \Omega : \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \neq u(x)\}| = 0$$

(b) *La successione u_j converge in misura (rispetto a \mathcal{L}^n) all'elemento u se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{j \rightarrow \infty} |\{x \in \Omega : |u_j(x) - u(x)| > \varepsilon\}| = 0$$

(c) *La successione u_j converge fortemente all'elemento u in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\|_p = 0.$$

(d) *La successione u_j converge debolmente (debolmente* se $p = \infty$) all'elemento u in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se per ogni $v \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $1/p + 1/q = 1$ ($q = 1$ se $p = \infty$) vale*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle (u - u_j), v \rangle dx = 0.$$

Proposizione 6.4. *Siano $u_j, u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ funzioni misurabili, sia $1 \leq p < +\infty$. Valgono i seguenti risultati*

- (i) Se $u_j \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ esiste una sottosuccessione u_{j_k} tale che $u_{j_k} \rightarrow u$ q.o..
- (ii) Se $u_j \rightarrow u$ q.o. e $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_p = \|u\|_p$ allora $u_j \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
- (iii) Se $|\Omega| < \infty$ e $u_j \rightarrow u$ q.o. allora $u_j \rightarrow u$ in misura.
- (iv) Se $u_j \rightarrow u$ in misura esiste una sottosuccessione u_{j_k} tale che $u_{j_k} \rightarrow u$ q.o..
- (v) Se $u_j \rightarrow u$ q.o. ed esiste una funzione $g \in L^1(\Omega)$ tale che $|u - u_j|^p \leq g$ in Ω allora $u_j \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.
- (vi) Se $u_j \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ allora $u_j \rightarrow u$ debolmente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Osservazione 6.5 (successioni equilimitate). Dato un insieme aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e una successione $u_j \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ equilimitata, cioè tale che

$$\sup_j \|u_j\| < +\infty$$

se u_j converge a una successione u fortemente in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ chiaramente anche $u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e per ogni $1 < p < +\infty$ esiste una sottosuccessione u_{j_k} tale che $u_j \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Infatti dalla convergenza in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e dalle (i), (iii) della proposizione 6.4 abbiamo che esiste una sottosuccessione u_{j_k} che converge a u in misura quindi dato $\varepsilon > 0$ usando l'equilimitatezza otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u - u_{j_k}|^p dx &\leq (\|u\|_\infty + \|u_{j_k}\|_\infty)^p (\varepsilon |\Omega| + \lim_{k \rightarrow \infty} |\{x \in \Omega : |u_j(x) - u(x)| > \varepsilon^{1/p}\}|) \\ &= \varepsilon (\|u\|_\infty + \|u_{j_k}\|_\infty)^p |\Omega| \end{aligned}$$

e facendo tendere ε a 0 otteniamo il risultato.

Il seguente risultato stabilisce condizioni sufficienti per la continuità rispetto alla convergenza forte di un funzionale integrale definito su uno spazio di

Lebesgue.

Proposizione 6.6. (teorema di continuità di Carathéodory) Sia $1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) $f(x, y)$ è misurabile in x per ogni $y \in \mathbb{R}^m$

(ii) $f(x, y)$ è continuo in y per q.o. $x \in \Omega$

(iii) esiste $a \in L^1(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(x, y)| \leq a(x) + b|y|^p$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^m$.

Allora il funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x)) dx$$

è continuo rispetto alla topologia forte di $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Esempio 2. Sia $1 \leq p \leq +\infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione misurabile e $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$ una metrica continua tale che per qualche costante $C > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}^m$ valga

$$d(x, y) \leq C|x - y|;$$

allora dal teorema di continuità di Carathéodory e dalla proposizione 6.2 abbiamo che il funzionale definito come

$$L^z(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} (d(z(x), u(x)))^p dx & \text{se } u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è continuo rispetto alla topologia forte di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^m)$ con $q \geq p$.

Esiste un risultato di semicontinuità analogo anche rispetto alla convergenza debole, nel quale si richiede anche la convessità dell'integrando f rispetto alla seconda variabile: torneremo sull'argomento nella prossima sezione parlando della semicontinuità in spazi di Sobolev.

Concludiamo questa sezione ricordando il seguente (parziale) risultato di debole compattezza.

Proposizione 6.7. (Debole compattezza) Sia $1 < p < +\infty$, $u_j \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ limitata, cioè tale che $\sup_j \|u_j\|_p \leq C < +\infty$, allora esiste una sottosuccessione u_{j_k} tale che $u_{j_k} \rightarrow u$ debolmente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

6.2 Mollificazione e distribuzioni

Definizione 6.8 (Mollificatori). Una funzione test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si dice nucleo regolarizzante se

- (i) $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,
- (ii) $\phi(x) = \phi(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,
- (iii) $\int_{\Omega} \phi(x) dx$,
- (iv) $\text{spt } \phi \subseteq B_1(0)$.

Se ϕ è un nucleo regolarizzante posto

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$$

ϕ_ε , con $\varepsilon > 0$, è una famiglia di mollificatori (o operatori regolarizzanti) mediante convoluzione cioè data $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è ben definita la funzione

$$u_\varepsilon(x) = u * \phi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y)u(y) dy.$$

Inoltre $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e per ogni multi-indice j abbiamo $D^j u_\varepsilon(x) = D^j \phi_\varepsilon * u$

Proposizione 6.9 (Approssimazione tramite convoluzioni). Dato $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e posto $S_\varepsilon u = u_\varepsilon$ valgono

- (i) Per ogni $p \in [1, +\infty)$ l'operatore $S_\varepsilon : L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è lineare e continuo.
- (ii) Per ogni $p \in [1, +\infty)$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ abbiamo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|S_\varepsilon u - u\|_p = 0$.
- (iii) Per ogni $u \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ abbiamo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|S_\varepsilon u - u\|_\infty = 0$.
- (iv) Se $\text{spt } u \subset \Omega$, allora $\text{spt } S_\varepsilon u \subset \Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \bar{\Omega}) < \varepsilon\}$.

Definizione 6.10 (Distribuzioni). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

(a) Data $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ indicheremo il suo supporto con

$$\text{spt}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

(b) Indichiamo con $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di funzioni $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabili (in senso classico) infinite volte e con supporto compatto cioè

$$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ \phi \in \bigcap_{\alpha \geq 0} C^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m) : \text{spt}(\phi) \text{ compatto} \right\}.$$

(c) Data una successione $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e un elemento $\phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ diremo che ϕ_k converge a ϕ con ordine α , e scriveremo $\phi_k \xrightarrow{\alpha} \phi$, se

$$\text{esiste un compatto } K \text{ tale che } \bigcup_j \text{spt}(\phi_j) \subseteq K$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi\|_{\infty, \alpha} = 0.$$

(d) Chiamiamo spazio delle funzioni test, e lo indichiamo con $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, lo spazio topologico sequenziale costituito dall'insieme $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ dotato della seguente nozione di convergenza: dati $\phi_k, \phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ diremo che ϕ_k converge a ϕ in $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, e scriveremo $\phi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$, se

$$\forall \alpha \geq 0 \quad \phi_k \xrightarrow{\alpha} \phi.$$

(e) Chiamiamo spazio delle distribuzioni, e lo indichiamo con $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m)$, il duale di $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ cioè l'insieme dei funzionali $T : \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

e

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi \quad \Rightarrow \quad \lim_{j \rightarrow \infty} T(\phi_j) = T(\phi).$$

Data una distribuzione T scriveremo $T(\phi) = \langle T, \phi \rangle$.

(f) Chiamiamo spazio delle distribuzioni di ordine α , e lo indichiamo con $\mathcal{D}'_\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$, il sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m)$ costituito dalle distribuzioni continue rispetto alla convergenza di ordine α , cioè

$$\mathcal{D}'_\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m) : \phi_j \xrightarrow{\alpha} \phi \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \phi_j \rangle = \langle T, \phi \rangle\}.$$

Nel caso in cui $n = 1$ scriveremo semplicemente $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{D}'_\alpha(\Omega)$.

Osservazione 6.11. *Se Ω è un insieme limitato, il supporto è sempre compatto e quindi, la convergenza di ordine α si riduce alla convergenza in $C^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Osservazione 6.12. *Lo spazio delle distribuzioni generalizza il concetto di funzione localmente sommabile infatti data $v \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se definiamo su $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ il funzionale $\langle T_v, \phi \rangle = \int_{\Omega} \langle v, \phi \rangle dx$, dalle definizioni appena date segue che T_v è una distribuzione di ordine 0. Inoltre dal lemma di du Bois-Reymond l'operatore lineare $K : L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m)$ definito come $K(v) = T_v$ è iniettivo.*

Osservazione 6.13. *Lo spazio delle distribuzioni contiene lo spazio delle misure di Radon $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ infatti Dalla proposizione 6.9 (iii) segue la densità di $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ in $C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_\infty$ che, grazie al teorema di estensione di Hahn-Banach, permette di estendere in maniera unica ogni distribuzione di ordine 0 su $C_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Come conseguenza, dal teorema di Riesz, deduciamo la seguente catena di inclusioni (strette) fra gli spazi finora introdotti*

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \subset L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \mathcal{D}'_0(\Omega, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Una (delle tante) importanti proprietà delle distribuzioni è la possibilità di dare un definizione di derivata che rende ogni distribuzione derivabile infinite volte e che equivale a quella classica nel caso in cui la distribuzione sia una funzione differenziabile. In vista delle applicazioni in questo lavoro, per noi sarà sufficiente dare la definizione di derivata distribuzionale in $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, anche se tale definizione si generalizza facilmente in $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Definizione 6.14 (Derivate distribuzionali). *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

(a) *Chiameremo derivata distribuzionale della componente u_i rispetto alla coordinata x_j , e la indicheremo come $D_j u_i$, la distribuzione a valori reali definita come*

$$\langle D_j u_i, \phi \rangle = - \int_{\Omega} u_i D_j \phi dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Indicheremo con $D_j u$ il vettore di distribuzioni $(D_j u_1, \dots, D_j u_m) \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m)$ che può essere definito componente per componente come sopra e che indicheremo in maniera compatta come

$$\langle D_j u, \phi \rangle = - \int_{\Omega} u D_j \phi \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

in cui $u D_j \phi$ è il vettore di componenti $(u D_j \phi)_i = u_i (D_j \phi)_i$.

Chiameremo gradiente distribuzionale di u , e lo indicheremo con Du , la matrice $m \times n$ di distribuzioni con componenti $(Du)_{ij} = D_j u_i$. Chiaramente $Du \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$.

(b) In generale dato il multi-indice $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$, con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, chiameremo derivata distribuzionale di ordine $|\alpha|$ della componente u_i rispetto al multi-indice α , e la indicheremo come $D^{\alpha} u_i$, la distribuzione a valori reali definita come

$$\langle D^{\alpha} u_i, \phi \rangle = -1^{|\alpha|} \langle u_i, D^{\alpha} \phi \rangle.$$

Osservazione 6.15. Dalla definizione appena presentata segue che la derivata prima distribuzionale di una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ è in generale una distribuzione di ordine 1 e se è anche di ordine 0, per quanto detto nell'osservazione 6.12, è una misura di Radon.

6.3 Spazi $H^{1,p}$

A questo punto abbiamo gli strumenti per dare la definizione dello spazio di Sobolev $W^{1,p}$.

Definizione 6.16 (Spazi di Sobolev). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $1 \leq p \leq \infty$. Diremo che $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e il suo gradiente distribuzionale è p -sommabile cioè

$$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) : Du \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})\}.$$

Chiaramente $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se

$$\|u\|_{1,p} = \left(\sum_{i=1}^m \|D_i u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Lo spazio $W^{1,p}$ dotato della norma $\| \cdot \|_{1,p}$ è di Banach. Uno spazio strettamente legato allo spazio $W^{1,p}$ è il seguente.

Definizione 6.17. *Indichiamo con $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ il completamento dell'insieme $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ nella norma $\| \cdot \|_{1,p}$ cioè*

$$H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ t.c. } \exists u_j \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m), \lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\|_{1,p} = 0 \right\}$$

In generale vale l'inclusione (che può essere stretta)

$$H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \subseteq W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

tuttavia se il dominio Ω ha un bordo regolare e soddisfa la seguente proprietà

Definizione 6.18 (Proprietà del segmento). *Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ soddisfa la proprietà del segmento se per ogni $x \in \Omega$ esiste un suo intorno U_x e un vettore $z(x) \in \mathbb{R}^n$ tali che*

$$\{ U_x \cap \Omega \} + tz(x) \subseteq \Omega \quad \forall t \in [0, 1].$$

allora prolungando gli insiemi $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ a $H^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e usando l'approssimazione tramite nuclei regolarizzanti si può mostrare (Teorema di Meyers-Serrin) che

$$H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Nel seguito considereremo sempre domini che soddisfano la proprietà del segmento.

Ricordiamo adesso la definizione di funzioni lipschitziane e riportiamo due importanti risultati che riguardano il prolungamento e la differenziabilità.

Definizione 6.19 (Funzioni lipschitziane). *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Indichiamo con $Lip(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di funzioni $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitziane cioè tali che*

$$lip(u, \Omega) = \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} : x, y \in \Omega \right\} < \infty.$$

Indichiamo con $Lip^(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di funzioni $u = (u_1, \dots, u_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente lipschitziane cioè tali che per ogni $x \in \Omega$ esiste un suo intorno U_x tale che*

$$lip(u, U_x) < \infty.$$

Nel caso $m = 1$ scriveremo semplicemente $Lip(\Omega)$, $Lip^(\Omega)$*

Proposizione 6.20 (Prolungamento di funzioni lipschitziane). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in Lip(\Omega)$, allora esiste $\tilde{f} \in Lip(\Omega)$ tale che $f(x) = \tilde{f}(x)$ per ogni $x \in E$ e $lip(f, E) = lip(\tilde{f}, \mathbb{R}^n)$.*

Proposizione 6.21 (Rademacher). *Sia $f \in Lip^*(\Omega, \mathbb{R}^m)$ una funzione localmente lipschitziana, allora è quasi ovunque differenziabile. Se inoltre Ω è lipschitziano e $f \in Lip(\Omega, \mathbb{R}^m)$ il suo gradiente è limitato q.o. e coincide con il gradiente distribuzionale quindi,*

$$H^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m) = Lip(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Di seguito riportiamo la definizione e riassumiamo i rapporti che esistono fra le diverse nozioni di convergenza in $H^{1,p}$.

Definizione 6.22. *Siano $u, u_j \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Diremo che*

(a) *La successione u_j converge fortemente all'elemento u in $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\|_{m,p} = 0.$$

(b) *La successione u_j converge debolmente (debolmente* se $p = \infty$) all'elemento u in $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se $u_j \rightarrow u$ debolmente (debolmente* se $p = \infty$) in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e $Du_j \rightarrow Du$ debolmente (debolmente* se $p = \infty$) in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$.*

Proposizione 6.23. *Siano $u_j, u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ funzioni misurabili, sia $1 \leq p < +\infty$. Valgono i seguenti risultati*

(i) *Se $u_j \rightarrow u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ allora $u_j \rightarrow u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$*

(ii) *$u_j \rightarrow u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se allora $u_j \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e $Du_j \rightarrow Du$ debolmente (debolmente* se $p = \infty$) in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$.*

Dalla debole compattezza degli spazi di Lebesgue segue il seguente risultato di debole compattezza in $H^{1,p}$.

Proposizione 6.24 (Debole compattezza). *Sia $1 < p < +\infty$, $u_j \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ limitata, cioè tale che $\sup_j \|u_j\|_p \leq C < \infty$, allora esiste una sottosuccessione u_{j_k} tale che $u_{j_k} \rightarrow u$ debolmente in $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Corollario 6.25 (Debole coercività in $H^{1,p}$). *Siano $1 < p < +\infty$, $m, n \geq 1$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto limitato, e sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$. Se esistono due costanti positive a, b tali che*

$$f(x, u, v) \geq -a + b(|u|^p + |v|^p)$$

Allora il funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) dx \quad (6.2)$$

è sequenzialmente coercivo in $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, rispetto alla convergenza debole.

La semicontinuità di un funzionale integrale in $H^{1,p}$ può essere dedotta dal seguente risultato, che è un'applicazione del teorema di De Giorgi-Ioffe.

Teorema 6.26. *Siano $m, n \geq 1$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto limitato, e sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

- (i) $f(x, u, v)$ è misurabile in x per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n}$ e continua in (u, v) per q.o. $x \in \Omega$;
- (ii) $f(x, u, v) \geq 0$;
- (iii) $f(x, u, v)$ è convessa in $\mathbb{R}^{m \times n}$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in \mathbb{R}^m$.

Allora il funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) dx \quad (6.3)$$

è sequenzialmente inferiormente semicontinuo in $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \infty$ rispetto alla convergenza debole.

Con i classici risultati di semicontinuità e coercività riportati possiamo ottenere tramite il metodo diretto l'esistenza di un minimo per il funzionale $E_{\varepsilon, \delta}^z(u)$ definito dalla (3.4) nel capitolo 3 che riportiamo

$$E_{\varepsilon,\delta}^z(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} [\frac{1}{\varepsilon} W_{\delta}(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u) D_j u|^2 + \beta |d_g(z, u)|^2] dx & \text{se } u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (6.4)$$

Riportiamo per chiarezza le condizioni necessarie per mostrarne la semicontinuità e la coercività che discendono dalle ipotesi fatte nel capitolo 3.

$$W_{\delta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty], \quad \gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \text{sono continue} \quad (6.5)$$

$$\text{la metrica } d_g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{è continua} \quad (6.6)$$

$$\text{esiste } m > 0 : \quad m|x| \leq |\gamma(y)x|; \quad m|x - y| \leq d_g(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (6.7)$$

Teorema 6.27. *Siano $\varepsilon, \delta > 0$, $z \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato. Allora il funzionale $E_{\varepsilon,\delta}^z(u)$ definito dalla (3.4) ammette minimo finito in $H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

Dimostrazione. Dal metodo diretto sappiamo che è sufficiente verificare semicontinuità e coercività. Scegliamo la convergenza debole in $H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dal teorema 6.26 abbiamo che per ottenere la semicontinuità è sufficiente che l'integrando

$$f(x, u, v) = \frac{1}{\varepsilon} W_{\delta}(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u)v|^2 + \beta |d_g(z(x), u)|^2$$

soddisfi le ipotesi (i), (ii), (iii). La (i) è verificata perchè dalla 6.6 otteniamo che la funzione $x \rightarrow |d_g(z(x), u)|^2$ è misurabile perchè composizione di funzioni misurabili mentre la funzione $(u, v) \rightarrow f(x, u, v)$ è continua grazie alle (6.6), (6.5). La (ii) è verificata perchè ogni termine è positivo. La (iii) è verificata perchè la funzione $v \rightarrow |\gamma(u)v|^2$ è una forma quadratica definita positiva grazie alla 6.7. Passiamo alla coercività. Basta verificare le ipotesi del corollario 6.25. Usando la (6.7) abbiamo

$$\frac{1}{\varepsilon} W_{\delta}(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 |\gamma(u)v|^2 + \beta |d_g(z(x), u)|^2 \geq \varepsilon m |v|^2 + \beta m |u - z(x)|^2$$

e poichè

$$|u - z(x)|^2 \geq |u|^2 - |z(x)|^2 \geq |u|^2 - \|z\|_{\infty}^2$$

otteniamo la coercività scegliendo $a = m\|z\|_{\infty}^2$ e $b = \min\{\varepsilon m, \beta m\}$. \square

7

Spazi BV e insiemi di perimetro finito

7.1 Funzioni a variazione limitata

Definizione 7.1 (Spazi di funzioni a variazione limitata). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diremo che $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e il suo gradiente distribuzionale è una misura finita di Radon, cioè

$$BV(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})\}$$

Dalla definizione appena data discende subito che

$$\int_{\Omega} u_i D_j \phi \, dx = - \int_{\Omega} \phi \, dD_j u_i \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

che può essere riscritta in maniera compatta come

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_i \operatorname{div}(\phi_i) \, dx &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_i D_j \phi_{ij} \, dx \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \phi_{ij} \, dD_j u_i \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

in cui $\phi_i = (\phi_{i1}, \dots, \phi_{in})$. Dall'ultima equazione e dal teorema 5.19 segue la possibilità di esprimere la variazione totale della misura Du come

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_i \operatorname{div}(\phi_i) \, dx : \phi \in C_0(A, \mathbb{R}^{m \times n}), \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Definiamo in generale la variazione di una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ come

$$V(u, \Omega) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_i \operatorname{div}(\phi_i) dx : \phi \in C_0(A, \mathbb{R}^{m \times n}), \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Proposizione 7.2 (Variazione totale di funzioni BV). *Sia $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Allora u appartiene allo spazio $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se $V(u, \Omega) < \infty$: in questo caso $V(u, \Omega) = |Du|(\Omega)$ e la mappa $u \rightarrow |Du|(\Omega)$ è inferiormente semicontinua in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ rispetto alla convergenza forte in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Teorema 7.3 (Approssimazione con funzioni differenziabili). *Sia $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Allora u appartiene allo spazio $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se esiste una successione $u_j \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ che converge a u in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e che soddisfa*

$$L = \lim_j \int_{\Omega} |Du_j| dx < \infty$$

inoltre la più piccola delle costanti L , al variare delle successioni approssimanti, è $|Du|(\Omega)$.

Introduciamo ora la nozione di convergenza debole* per lo spazio BV aggirando la definizione consueta basata sul preduale di BV , infatti tale spazio ha una caratterizzazione piuttosto tecnica. La definizione seguente è equivalente alla definizione usuale, basata sullo spazio preduale, nel caso di domini sufficientemente regolari.

Definizione 7.4 (Convergenza debole* in BV). *Siano $u, u_j \subseteq BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$, allora u_j converge debole* in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ a u se u_j converge a u in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, e Du_j converge debole* a Du in Ω , ovvero se*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi dDu_j = \int_{\Omega} \phi dDu \quad \forall \phi \in C_0(\Omega).$$

Per verificare che una successione converge debole* basta richiedere la convergenza in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e la limitatezza della successione.

Proposizione 7.5. *Siano $u, u_j \subseteq BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$, diciamo che u_j converge debole* in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ a u se e solo se u_j è limitata in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e converge a u in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Proposizione 7.6 (Compattezza debole* in BV). *Sia $u_j \subseteq BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ limitata in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$, allora esiste una sottosuccessione u_{k_j} e un elemento $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che u_{k_j} converge debolmente* a u in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Un'altra topologia per lo spazio BV , oltre a quella forte e a quella debole, è la topologia intermedia o stretta, collegata al concetto di distanza.

Definizione 7.7 (Convergenza stretta in BV). *Siano $u, u_j \subseteq BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Diremo che u_j converge strettamente, o nella topologia intermedia in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$, se u_j converge in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ a u , e le variazioni totali della successione convergono alla variazione totale di u .*

La topologia intermedia è indotta da una distanza in $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ definita come

$$d(u, v)_{BV} = \int_{\Omega} |u - v| dx + ||Du|(\Omega) - |Du|(\Omega)|.$$

Dalle definizioni riportate sopra abbiamo che la convergenza stretta implica la convergenza debole*, tuttavia non è vero l'opposto. Infatti se consideriamo la successione $u_j = \sin(jx)/x$ converge debole* in $BV(0, 2\pi)$ a 0, ma non vi converge strettamente dato che la variazione totale di ciascun elemento della successione è pari a $|D(\sin(jx)/x)|((0, 2\pi)) = 4j$.

Teorema 7.8 (Immersioni in spazi di Lebesgue). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto con frontiera limitata e lipschitziana e $1^* = +\infty$ se $N = 1$, $1^* = n/(n-1)$ se $n > 1$. Allora l'immersione $BV(\Omega, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{1^*}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ è continua e l'immersione $BV(\Omega, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ è compatta se $1 \leq p < n/(n-1)$.*

Definizione 7.9 (Limite approssimato). *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Diciamo che u ha limite approssimato in $x \in \Omega$ se esiste $z \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B_{\rho}(x)|} \int_{B_{\rho}(x)} |u(y) - z| dy = 0$$

e scriveremo $z = ap \lim_{y \rightarrow x} u(y)$.

Indicheremo anche il limite approssimato di u in x , se esiste, con $\tilde{u}(x) = ap \lim_{y \rightarrow x} u(y)$.

Definizione 7.10 (Insieme singolare). *L'insieme dei punti $x \in \Omega$ in cui non esiste il limite approssimato si chiama insieme singolare o di discontinuità approssimata, ed è indicato con S_u . In formule*

$$S_u = \{x \in \Omega : \text{non esiste } z = \text{ap} \lim_{y \rightarrow x} u(y)\}$$

Osserviamo che l'insieme dei punti dove il limite approssimato esiste non dipende dal rappresentante scelto nella stessa classe di equivalenza di u , ovvero se $u = v$ \mathcal{L}^n -q.o. in Ω allora $x \in S_u$ se e solo se $x \in S_v$ e $\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x)$. D'altra parte la proprietà di ammettere limite approssimato in x , dipende dal valore di u nel punto quindi questo può essere differente nella stessa classe di equivalenza. Per il limite approssimato valgono alcune proprietà.

Proposizione 7.11. *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, valgono le seguenti:*

- (1) S_u è un insieme di Borel di misura nulla rispetto a \mathcal{L}^n e $\tilde{u} : \Omega \setminus S_u \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione di Borel che coincide con u in $\Omega \setminus S_u$ quasi ovunque rispetto a \mathcal{L}^n ;
- (2) se $x \in \Omega \setminus S_u$ le funzioni $u * \rho_\varepsilon(x)$ convergono a $\tilde{u}(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, dove è stato indicato con ρ_ε un generico mollificatore;
- (3) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è una mappa lipschitziana e $v = f \circ u$, allora $S_v \subseteq S_u$ e $\tilde{v}(x) = f(\tilde{u}(x))$ per ogni $x \in \Omega \setminus S_u$.

Definizione 7.12 (Insieme dei punti di salto). *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. L'insieme dei punti di salto approssimati J_u è l'unione dei punti $x \in \Omega$ tali che esistono due costanti, $a, b \in \mathbb{R}^m$ e $\nu \in S^{n-1}$, con $a \neq b$*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\rho^+(x)|} \int_{B_\rho^+(x)} |u(y) - a| dy = 0 \quad (7.2)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\rho^-(x)|} \int_{B_\rho^-(x)} |u(y) - b| dy = 0 \quad (7.3)$$

in cui

$$B_\rho^+(x) = \{y \in B_\rho(x) : \langle y - x, \nu \rangle > 0\} \quad (7.4)$$

$$B_\rho^-(x) = \{y \in B_\rho(x) : \langle y - x, \nu \rangle < 0\}. \quad (7.5)$$

La tripletta, denotata con (a, b, ν) , univocamente determinata a meno di una permutazione tra a e b e un cambiamento di segno di ν , è denotata con $(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x))$.

Teorema 7.13 (Federer-Vol'pert). Per ogni funzione $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di discontinuità approssimata S_u è numerabilmente \mathcal{H}^{n-1} -rettificabile e $\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus J_u) = 0$. Inoltre valgono le seguenti formule di decomposizione

$$Du \llcorner J_u = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u$$

Introduciamo infine la nozione di differenziabilità approssimata.

Definizione 7.14 (Differenziabilità approssimata). Consideriamo la funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Diremo che u è differenziabile approssimativamente in $x \in \Omega \setminus S_u$ se esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - \tilde{u}(x) - L(y-x)| dy = 0$$

Se u è differenziabile approssimativamente in x la matrice L , univocamente determinata, è chiamata differenziale approssimato di u in x , ed è denotata con $\nabla u(x)$.

Teorema 7.15 (Calderòn-Zygmund). Ogni funzione $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ è approssimativamente differenziabile \mathcal{L}^n -q.o. e il gradiente approssimato ∇u è la densità del gradiente distribuzionale rispetto alla misura di Lebesgue \mathcal{L}^n cioè

$$Du \llcorner \mathcal{L}^m = \nabla u \llcorner \mathcal{L}^n.$$

In particolare negli spazi di Sobolev il differenziale approssimato e il gradiente distribuzionale coincidono.

Osservazione 7.16. I teoremi 7.13 e 7.15 ci permettono di decomporre il gradiente distribuzionale Du di una funzione $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ in tre parti

$$Du = \nabla u \llcorner \mathcal{L}^m + (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u + C_u$$

in cui $C_u = Du \llcorner (S_u \setminus J_u)$ è detta parte Cantoriana.

7.2 Insiemi di perimetro finito

In questa sezione introduciamo la definizione di perimetro di un insieme, riportiamo le sue principali proprietà e studiamo la classe dei sottoinsiemi con perimetro finito. In particolare vedremo che un insieme di perimetro finito $E \subset \mathbb{R}^n$, contrariamente a quanto ci aspettiamo, può avere una frontiera topologica ∂E con misura di Hausdorff $n - 1$ -dimensionale infinita: ciò rende necessaria l'introduzione di una nuova nozione di frontiera rispetto alla quale la proprietà di un insieme di avere perimetro finito equivale ad avere una frontiera rettificabile.

Definizione 7.17 (Insiemi di perimetro finito). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile e χ_E la sua indicatrice. Per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo il perimetro di E in Ω come*

$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}(\phi) \, dx : \phi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ scriveremo semplicemente $P(E)$. Diremo che E è insieme di perimetro finito in Ω se $P(E, \Omega) < +\infty$.

La classe degli insiemi di perimetro finito include tutti gli insiemi E con frontiera ∂E differenziabile in Ω tali che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) < +\infty$. Per questi insiemi, dal teorema di Gauss-Green, vale la formula

$$\int_E \operatorname{div}(\phi) \, dx = \int_{\partial E \cap \Omega} \langle \nu_E, \phi \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \phi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

in cui ν_E è la normale interna alla frontiera di E . Passando al sup nell'ultima formula e dalla definizione di perimetro appena data segue che per gli insiemi regolari abbiamo

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega). \tag{7.6}$$

La teoria degli insiemi di perimetro finito è strettamente legata alla teoria delle funzioni BV . Il primo legame evidente è il seguente risultato.

Proposizione 7.18. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile, χ_E la sua indicatrice e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Allora E è un insieme di perimetro finito in Ω se e solo se la variazione totale della sua funzione indicatrice $|D\chi_E|(\Omega)$ è finita, in questo caso coincide con il suo perimetro in Ω cioè*

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega).$$

Definizione 7.19 (Convergenza in misura di insiemi). Siano $E, E_j \subset \mathbb{R}^n$. Diremo che la successione E_j converge in misura a E in Ω se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |E_j \Delta E \cap \Omega| = 0$$

in cui $E_j \Delta E := E_j \setminus E \cup E \setminus E_j$ è la differenza simmetrica. Questa convergenza equivale alla convergenza in $L^1(\Omega)$ delle funzioni indicatrici χ_{E_j} .

Riportiamo adesso le principali proprietà del perimetro, che derivano in buona parte dalle proprietà delle funzioni BV .

Proposizione 7.20 (Proprietà del perimetro). (a) La funzione $\Omega \rightarrow P(E, \Omega)$ è la restrizione sugli aperti di una misura di Borel in \mathbb{R}^n .

(b) $E \rightarrow P(E, \Omega)$ è inferiormente semicontinua rispetto alla convergenza in misura.

(c) $E \rightarrow P(E, \Omega)$ è locale, cioè $P(E, \Omega) = P(F, \Omega)$ se $|\Omega \cap (E \Delta F)| = 0$.

(d) $P(E, \Omega) = P(\mathbb{R}^n \setminus E, \Omega)$ e

$$P(E \cap F, \Omega) + P(E \cup F, \Omega) \leq P(E, \Omega) + P(F, \Omega)$$

Proposizione 7.21 (Compattezza). Sia $E_j \subset \mathbb{R}^n$ una successione di insiemi tali che

$$\sup_j P(E_j, A) < \infty \quad \forall A \subset \subset \Omega$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tale che $|\Omega| < \infty$. Allora esiste una sottosuccessione E_{j_k} che converge in misura in Ω .

Proposizione 7.22 (Formula di coarea in BV). Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ vale

$$V(u, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{x \in \Omega : u(x) \leq t\}, \Omega) dt.$$

In particolare se $u \in BV(\Omega)$ l'insieme $\{x \in \Omega : u(x) \leq t\}$ ha perimetro finito in Ω per \mathcal{L}^1 -q.o. $t \in \mathbb{R}$ e valgono le formule

$$|Du|(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} |D\chi_{\{u(x) \leq t\}}|(B) dt \quad Du(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} D\chi_{\{u(x) \leq t\}}(B) dt$$

per ogni insieme di Borel $B \subset \Omega$.

Proposizione 7.23 (Densità degli insiemi regolari). *Sia E un insieme di perimetro finito in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Allora esiste una successione di insiemi E_j con frontiera regolare che convergono in misura a E e tali che*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P(E_j, \mathbb{R}^n) = P(E, \mathbb{R}^n).$$

Come accennato all'inizio della sezione è possibile costruire (Esempio 3.53 in [5]) insiemi $E \subset \mathbb{R}^n$ di perimetro finito tali che

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = +\infty.$$

Ciò rende necessario introdurre una nuova definizione di frontiera che giochi lo stesso ruolo della frontiera topologica negli insiemi con frontiera regolare, in particolare vogliamo ottenere una formula analoga alla 7.6 e valida in generale.

Definizione 7.24 (Frontiera ridotta). *Sia un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L}^n -misurabile e Ω il più grande insieme tale che al suo interno E abbia perimetro localmente finito. Chiamiamo frontiera ridotta di E , e la indichiamo con $\mathcal{F}E$, l'insieme dei punti $x \in \text{spt}|D\chi_E| \text{cap}\Omega$ tali che il limite*

$$\nu_E(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{D\chi_E(B_\delta(x))}{D\chi_E(B_\delta(x))}$$

esiste in \mathbb{R}^n e soddisfa $|\nu_E(x)| = 1$. La funzione $\nu_E : \mathcal{F}E \rightarrow S^{n-1}$ è chiamata normale interna generalizzata.

Con questa definizione la frontiera ridotta è sostanzialmente l'insieme dei punti in cui è ben definita una normale al bordo e valgono le seguenti proprietà

- (i) $\mathcal{F}E$ è un insieme di Borel.
- (ii) La funzione $\nu_E : \mathcal{F}E \rightarrow S^{n-1}$ è una funzione di Borel.

(iii) Dal teorema di derivazione di Besicovitch abbiamo che la misura $|D_{\chi_E}|$ è concentrata su $\mathcal{F}E$ e $D_{\chi_E} = \nu_E |D_{\chi_E}|$.

Teorema 7.25. (De Giorgi) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile di perimetro finito in Ω . Allora $\mathcal{F}E$ è $(n-1)$ -rettificabile e*

$$|D_{\chi_E}| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E.$$

Osservazione 7.26. *La conseguenza di questo fondamentale risultato è che vale la seguente formula di Gauss-Green generalizzata*

$$\int_E \operatorname{div}(\phi) dx = \int_{\mathcal{F}E} \nu_E \phi d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \phi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad (7.7)$$

simile alla classica formula con la differenza che la normale interna è intesa nel senso della teoria della misura e non nel senso topologico. In particolare, per un generico insieme di perimetro finito, $\mathcal{F}E$ non è necessariamente un insieme chiuso e ν_E non è necessariamente una funzione continua.

Continuiamo l'analisi degli insiemi di perimetro finito studiando la densità dei punti di un insieme.

Definizione 7.27 (Punti di densità e frontiera essenziale). *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L}^n -misurabile diremo che $x \in E$ è un punto di densità $t \in [0, 1]$ se*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\omega_n)^{-1} \rho^{-n} |E \cup B_\rho(x)| = t.$$

*Indichiamo l'insieme dei punti di densità t con E^t . Chiameremo frontiera essenziale di E , e la indicheremo con ∂^*E , l'insieme*

$$\mathbb{R}^N \setminus (E^0 \cup E^1).$$

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ gli insiemi E^0 , E^1 possono essere intesi come la controparte dell'interno $\operatorname{int}(E)$ e del complementare $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$ topologico di E : ciò motiva la definizione data di frontiera essenziale ∂^*E .

Teorema 7.28 (Federer). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile di perimetro finito in Ω . Allora*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}E \cap \Omega &\subset E^{1/2} \subset \partial^*E \\ \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \setminus (E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1)) &= 0. \end{aligned}$$

In particolare E ha densità $0, 1/2$ o 1 per \mathcal{H}^{n-1} q.o. $x \in \Omega$ e \mathcal{H}^{n-1} q.o. x in $\partial^* E \cap \Omega$ appartiene a $\mathcal{F}E$.

Osservazione 7.29. Il teorema 7.28 afferma sostanzialmente che dato un insieme di perimetro finito un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ha \mathcal{H}^{n-1} q.o. densità pari a 1 ($x \in E^1$), 0 ($x \in E^1$), $1/2$ ($x \in \partial^* E$). Inoltre questo risultato ci dà la possibilità di sostituire $\partial^* E$ oppure $E^{1/2}$ alla frontiera ridotta $\mathcal{F}E$ nella formula di Gauss-Green generalizzata 7.7 e possiamo calcolare il perimetro scrivendo

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial^* E) = \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap E^{1/2}) \quad (7.8)$$

e infine possiamo riscrivere la formula di coarea come

$$|Du|(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \partial^* \{u(x) \leq t\}) dt \quad (7.9)$$

Concludiamo questa sezione riportando una condizione sufficiente per dedurre che un insieme ha perimetro finito e una coincidenza del perimetro con la misura della frontiera topologica nel caso di insiemi con frontiera lipschitziana.

Proposizione 7.30. Ogni insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ ha perimetro finito in \mathbb{R}^n e $|D\chi_\Omega| \leq \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega$. Se Ω ha frontiera topologica lipschitziana vale l'uguaglianza.

7.3 Partizioni di Caccioppoli e funzioni costanti a tratti

In questa sezione studiamo le partizioni con perimetro finito costituite da un numero di componenti fissato a priori. Molti dei risultati presentati valgono per partizioni con una quantità numerabile di componenti, tuttavia questa scelta è motivata dalla forma dei funzionali che saranno presentati alla fine della sezione insieme a condizioni di semicontinuità e equicoercività.

Definizione 7.31 (Partizioni di Caccioppoli e funzioni costanti a tratti). Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, una sua partizione costituita da l sottoinsiemi $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^l$ è detta partizione di Caccioppoli di lunghezza l se

$$\sum_i^l P(U_i, \Omega) < +\infty.$$

Indicheremo con $CP_l(\Omega)$ l'insieme delle partizioni di Caccioppoli di lunghezza l quozientato rispetto alla relazione di equivalenza

$$\mathcal{U} = \{U_i\} \approx \mathcal{V} = \{V_i\} \quad \Leftrightarrow \quad U_i = V_i \mathcal{L}^n\text{-q.o.}$$

Teorema 7.32 (Struttura locale delle partizioni di Caccioppoli). *Sia $\mathcal{U} \in CP_l(\Omega)$ una partizione finita di Caccioppoli. Allora*

$$\mathcal{H}^{n-1}\left(\Omega \setminus \left(\bigcup_i (U_i)^0 \cup \bigcup_{i \neq j} \mathcal{F}U_i \cap \mathcal{F}U_j\right)\right) = 0.$$

Nel seguito data $\mathcal{U} \in CP_l(\Omega)$ identificheremo le sue componenti U_i con un insieme di l punti distinti in \mathbb{R}^m , che indicheremo con $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$: in questo modo possiamo identificare questa struttura con una classe di funzioni costanti a tratti come stabilito dalla seguente definizione.

Definizione 7.33 (Funzioni costanti a tratti). *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato diciamo che una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ è costante a tratti a valori in $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ se esiste una partizione di Caccioppoli di lunghezza l $\mathcal{U} = \{U_i\}$ tale che*

$$u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i}.$$

In particolare questo insieme, quozientato rispetto all'equivalenza $\mathcal{L}^n\text{-q.o.}$, è in corrispondenza biunivoca con $CP_l(\Omega)$.

Il seguente risultato ci permette di identificare l'insieme delle funzioni costanti a tratti (e quindi l'insieme delle partizioni di Caccioppoli) con un sottoinsieme di $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Proposizione 7.34. *Sia $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Allora u è costante a tratti a valori in K se e solo se $u \in K \mathcal{L}^n\text{-q.o.}$ e il suo gradiente distribuzionale Du è concentrato su J_u e $\mathcal{H}^{n-1}(J_u) < +\infty$. Inoltre abbiamo che*

$$2\mathcal{H}^{n-1}(J_u) = \sum_i P(E_i, \Omega)$$

e

$$\bigcup_{i \neq j} \mathcal{F}E_i \cap \mathcal{F}E_j \cap \Omega \subset J_u \subset U \cup \bigcup_{i \neq j} \mathcal{F}E_i \cap \mathcal{F}E_j \cap \Omega$$

dove $U \subset \mathbb{R}^n$ è trascurabile, cioè $\mathcal{H}^{n-1}(U) = 0$, e

$$(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x)) = (\alpha_i, \alpha_j, \nu_{E_i}(x))$$

per ogni $x \in \mathcal{F}E_i \cap \mathcal{F}E_j \cap \Omega$.

In particolare vale l'identificazione

$$BV(\Omega, K) \equiv CP_l(\Omega)$$

Definizione 7.35 (convergenza). Data una successione $\mathcal{U}^h = \{U_i^h\} \in CP_l(\Omega)$ diremo che \mathcal{U}^h converge a $\mathcal{U} = \{U_i\}$, e scriveremo $\mathcal{U}^h \rightarrow \mathcal{U}$, se l'insieme U_i^h converge in misura a U_i per ogni $i = 1, \dots, l$. Chiaramente date $u_h = \sum_i \alpha_i \chi_{U_i^h}$ e $u = \sum_i \alpha_i \chi_{U_i}$ abbiamo che

$$\mathcal{U}^h \rightarrow \mathcal{U} \quad \Leftrightarrow \quad u_h \rightarrow u \text{ in } L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

Osservazione 7.36. Dati $1 < p < +\infty$, una successione $u_h \in BV(\Omega, K)$ e un elemento $u \in BV(\Omega, K)$ allora

$$u_h \rightarrow u \text{ in } L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \quad \Leftrightarrow \quad u_h \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

L'implicazione \Leftarrow vale sempre perchè Ω è limitato. Per verificare l'implicazione inversa premettiamo una semplice disuguaglianza algebrica. Dati $x_i \in [0, 1]$ con $i = 1, \dots, l$ e $p \in [1, +\infty)$ scriviamo $p = q + r$ con $q \in \mathbb{N}$ e $0 < r < 1$ se $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ mentre se $p \in \mathbb{N}$ poniamo $q = p - 1$. Allora è facile verificare che

$$\left(\sum_{i=1}^l x_i \right)^p \leq l^q \sum_{i=1}^l x_i. \quad (7.10)$$

Se $u_h \rightarrow u$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ allora per ogni $i = 1, \dots, l$ l'insieme U_i^h converge in misura a U_i cioè

$$|U_i^h \Delta U_i| \rightarrow 0$$

e posto $D_K = \max\{|\alpha| : \alpha \in K\}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_h - u|^p dx &= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^l \alpha_i (\chi_{U_i^h} - \chi_{U_i}) \right|^p dx \leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^l |\alpha_i| |\chi_{U_i^h} - \chi_{U_i}| \right)^p dx \\ &\leq D_K^p \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^l |\chi_{U_i^h} - \chi_{U_i}| \right)^p dx \leq D_K^p l^q \sum_{i=1}^l |U_i^h \Delta U_i| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Proposizione 7.37 (Compattezza di funzioni costanti a tratti). *Sia $u_j \in BV(\Omega, K)$ una successione di funzioni costanti a tratti a valori in K tali che*

$$\sup_j (\mathcal{H}^{n-1}(J_{u_j})) < \infty.$$

Allora esiste una sottosuccessione u_{j_k} che converge $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ad una funzione $u \in BV(\Omega, K)$.

7.4 Funzionali isotropi su partizioni di Caccioppoli

Data $\theta : K \times K \setminus \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in K\} \rightarrow (0, +\infty)$ tale che

$$\theta(\alpha_i, \alpha_j) = \theta(\alpha_j, \alpha_i)$$

poniamo $\theta_{ij} = \theta(\alpha_i, \alpha_j)$ e consideriamo il funzionale

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_{ij} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_i \cap \partial^* U_j \cap \Omega) & \text{se } u = \sum_i \alpha_i \chi_{U_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.11)$$

La positività di θ assicura che il funzionale sia finito se e solo se $u \in BV(\Omega, K)$ mentre la simmetria equivale all'invarianza di $F(u)$ rispetto alle permutazioni dei valori in K . Passiamo adesso alla caratterizzazione della semicontinuit  inferiore.

Osservazione 7.38. *Supponiamo che $F(u)$ sia inferiormente semicontinuo su $BV(\Omega, K)$ e, dato $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \Omega$, consideriamo la successione u_j e la funzione u dipendenti solamente da una coordinata e definite come*

$$u(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x_1 < \tilde{x}_1 \\ \beta & \text{se } x_1 > \tilde{x}_1 \end{cases} \quad u_j(t) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x_1 < \tilde{x}_1 - \frac{1}{j} \\ \gamma & \text{se } \tilde{x}_1 - \frac{1}{j} < x_1 < \tilde{x}_1 + \frac{1}{j} \\ \beta & \text{se } x_1 > \tilde{x}_1 + \frac{1}{j} \end{cases}$$

in cui $\alpha, \beta, \gamma \in K, \alpha \neq \beta \neq \gamma$. Chiaramente $u_j \rightarrow u$ e affinché $F(u)$ sia semicontinuo è necessario che

$$F(u) = \theta(\alpha, \beta) \leq \liminf_j F(u_j) = \theta(\alpha, \gamma) + \theta(\gamma, \beta).$$

Sulla base di questa osservazione diamo la seguente

Definizione 7.39. Data $\theta : K \times K \setminus \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in K\} \rightarrow (0, +\infty)$ tale che $\theta(\alpha_i, \alpha_j) = \theta(\alpha_j, \alpha_i)$ diremo che θ è subadditivo se per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in K$ tale che $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ vale

$$\theta(\alpha, \beta) \leq \theta(\alpha, \gamma) + \theta(\gamma, \beta).$$

Il seguente teorema, dimostrato in [9] (Proposizione 2.2), dà una formulazione del funzionale 7.11 in termini di massimo di misure e implica che la subadditività è anche sufficiente per la semicontinuità.

Proposizione 7.40. Data $\psi_i : K \rightarrow (0, +\infty)$ definita come $\psi_i(\alpha) = \min\{\theta(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in K, \alpha \neq \beta\}$, le misure di Borel $E \rightarrow |D(\psi_i \circ u)|(E)$ e se $u \in K$ q.o. è tale che $\psi_i \circ u \in BV(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, l$ allora $u \in BV(\Omega, K)$ e

$$\left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)| \right) (\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_{ij} \mathcal{H}^{n-1}(\partial U_i \cap \partial U_j \cap \Omega).$$

In particolare il funzionale (7.11) coincide con

$$F(u) = \begin{cases} \left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)| \right) (\Omega) & \text{se } \psi_i \circ u \in BV(\Omega) \forall i = 1, \dots, l \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (7.12)$$

Corollario 7.41. *Il funzionale F definito dalla (7.11) è inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza forte in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se e solo se θ è subadditivo.*

Dimostrazione. La condizione necessaria è fornita dall'osservazione 7.38. Verifichiamo la sufficienza usando l'espressione di $F(u)$ contenuta nel teorema 7.12. Se $u_h \rightarrow u$ in $BV(\Omega, K)$ allora per ogni $i = 1, \dots, l$ abbiamo che $\psi_i \circ u_h \rightarrow \psi_i \circ u$ in $BV(\Omega)$ e dalla semicontinuit  della variazione totale abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)| \right) (\Omega) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)|(A_i) : \cup_{i=1}^l A_i \subset A, \right. \\ &\quad \left. A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, A_i \text{ aperti in } \Omega \right\} \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u_h)| \right) (\Omega) \end{aligned}$$

e ci  conclude la dimostrazione. \square

A questo punto abbiamo i risultati di semicontinuit  e coercivit  per mostrare l'esistenza di un minimo per il funzionale di classificazione che abbiamo presentato nell'introduzione e che riportiamo di seguito

$$E^z(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l d_g(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial^* U_i \cap \partial^* U_j \cap \Omega) + \beta \int_{\Omega} |d_g(u, z)|^2 dx & \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.13)$$

Teorema 7.42. *Sia $F(u)$ definito dalla 7.11 con θ subadditivo. Sia $1 \leq p < +\infty$ e $G : L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty]$ un funzionale inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che esiste $\tilde{u} \in BV(\Omega, K)$ e $G(\tilde{u}) < +\infty$. Allora il funzionale $F(u) + G(u)$ ammette minimo finito in $BV(\Omega, K)$. In particolare il funzionale $E^z(u)$ ammette minimo finito in $BV(\Omega, K)$.*

Dimostrazione. Poichè F è finito su $BV(\Omega, K)$ abbiamo che $0 \leq F(\tilde{u}) + G(\tilde{u}) < +\infty$ e quindi $0 \leq \inf(F + G) < +\infty$. Applichiamo il metodo diretto usando la convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dalla subadditività di θ , dalla proposizione 7.41 e dall'osservazione 7.36 abbiamo che F è inferiormente semicontinuo e ciò vale per ipotesi anche per G , quindi $F + G$ è semicontinuo perchè somma di funzioni semicontinue. Verifichiamo la coercività. Sia $u_j \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che $\sup_j (F(u_j) + G(u_j)) < \infty$, dalla definizione di F abbiamo che $u_j \in BV(\Omega, K)$, inoltre posto $\delta_K = \min\{\theta(\alpha_i, \alpha_j) : \alpha_i, \alpha_j \in K\}$ abbiamo

$$\delta_K \sup_j \mathcal{H}^{n-1}(J_{u_j}) \leq \sup_j F(u_j) \leq \sup_j (F(u_j) + G(u_j)) < +\infty$$

quindi dalla proposizione 7.37 e ancora dall'osservazione 7.36 abbiamo la compattezza e quindi l'esistenza di un minimo finito in $BV(\Omega, K)$.

Riguardo l'esistenza di un minimo per $E^z(u)$ è sufficiente ricordare l'esempio 2 che lo fa rientrare nelle ipotesi del teorema appena mostrato. \square

Modelli di transizione di fase

In questo capitolo presentiamo due modelli fisici che descrivono il comportamento di un fluido contenuto in una regione limitata dello spazio e che presenta due fasi, cioè due stati di aggregazione con densità diverse non chimicamente interagenti. In seguito sono riportati due importanti risultati: il primo spiega la connessione fra i due modelli, il secondo estende il risultato al caso in cui siano presenti più di due fluidi.

Nel seguito indicheremo con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio aperto limitato e regolare, con $|\Omega|$ il suo volume mentre $u : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ rappresenterà la densità di un fluido presente con due fasi e soggetto ad un vincolo di massa $\int_{\Omega} u \, dx = d|\Omega|$, in cui d è la densità media.

Nel classico **modello di tensione superficiale**, che deriva da un'osservazione macroscopica del fenomeno, si considera $u : \Omega \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ dove i valori α e β rappresentano le densità e u descrive le regioni occupate dalle fasi corrispondenti. Dunque i due insiemi $E_{\alpha}(u) = \{x \in \Omega : u(x) = \alpha\}$ e $E_{\beta}(u) = \{x \in \Omega : u(x) = \beta\}$ rappresentano una partizione di Ω , mentre $S_u = \partial E_{\alpha}(u) \cap \Omega = \partial E_{\beta}(u) \cap \Omega$ è l'interfaccia fra le due fasi (figura 8.1).

Si noti come il vincolo di massa implichi necessariamente $\alpha \leq d \leq \beta$ infatti, tenendo conto che $|\Omega| = |E_{\alpha}(u)| + |E_{\beta}(u)|$ e posto $q = \frac{|E_{\alpha}(u)|}{|\Omega|} \in [0, 1]$, abbiamo

$$d|\Omega| = \int_{\Omega} u \, dx = \alpha|E_{\alpha}(u)| + \beta|E_{\beta}(u)| \quad (8.1)$$

da cui ricaviamo

$$d = \alpha q + \beta(1 - q). \quad (8.2)$$

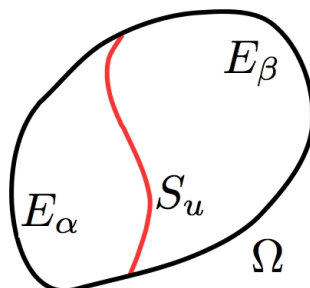


Figura 8.1: una configurazione nel caso bidimensionale

Per questo motivo d'ora in poi supporremo che $\alpha \leq d \leq \beta$. In base al modello le configurazioni di equilibrio del sistema sono quelle che minimizzano un funzionale proporzionale alla misura dell'interfaccia:

$$\min\{E(u) : u(x) \in \{\alpha, \beta\} \text{ per q.o. } x \in \Omega, \int_{\Omega} u \, dx = d|\Omega|\} \quad (8.3)$$

dove $E(u) = \gamma \mathcal{H}^2(\partial E_{\alpha}(u) \cap \Omega)$ e $\mathcal{H}^2(S_u)$ è la misura di Hausdorff bidimensionale dell'interfaccia mentre γ è una costante che descrive la tensione superficiale, vale a dire la densità di energia per unità di superficie che il sistema spende per separare le due fasi del fluido. È importante notare che in questo caso una distribuzione di densità non costante è discontinua, inoltre il funzionale da minimizzare dipende unicamente dall'insieme dei punti di discontinuità $\partial E_{\alpha}(u) \cap \Omega$, che contiene la maggior parte delle informazioni relative alla configurazione.

Il secondo modello proviene dalla teoria di **Van Der Waals-Cahn-Hilliard** e assume che il profilo di densità sia rappresentato da una funzione $u : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ continua e che la variazione da un livello di densità all'altro avvenga in corrispondenza di uno strato sottile. Il punto di partenza nella costruzione del funzionale è costituito da considerazioni di carattere termodinamico. In figura 8.2 è riportato il tipico diagramma di fase di un fluido in equilibrio a pressione costante, il cui stato di aggregazione dipende dalla temperatura T e dalla densità ρ . In particolare per temperature $T > T_c$, in cui T_c è conosciuta come 'temperatura critica', il fluido si presenta omogeneo mentre per temperature inferiori, e determinati range di densità, può avvenire la nucleazione di due fasi.

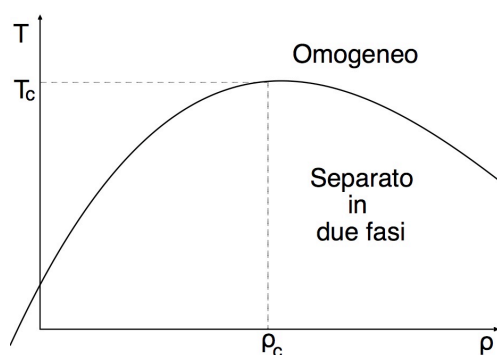


Figura 8.2: diagramma di fase

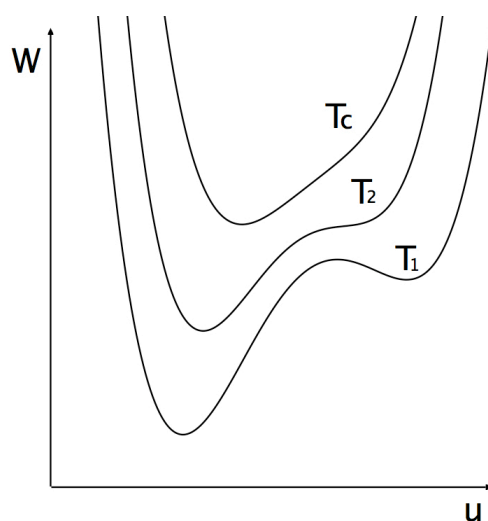


Figura 8.3: andamento dell'energia libera per diverse temperature

In termodinamica si definisce energia libera di un sistema la quantità di lavoro macroscopico che il sistema può compiere sull'ambiente. Essa è funzione della temperatura, della pressione e della concentrazione della specie chimica considerata. Considerando anche in questo caso la pressione costante, riportiamo in figura 8.3 l'andamento dell'energia libera W in funzione della densità ρ e per diversi livelli di temperatura $T_c > T_2 > T_1$, in cui T_c è ancora la temperatura critica.

Per temperature maggiori di quella critica la funzione W è convessa mentre, per valori inferiori, presenta due minimi, noti come 'pozzi termodinamici': ipotizziamo che la temperatura appartenga a questo insieme di valori.

Quando un sistema fisico subisce un cambiamento, ad esempio per una reazione-

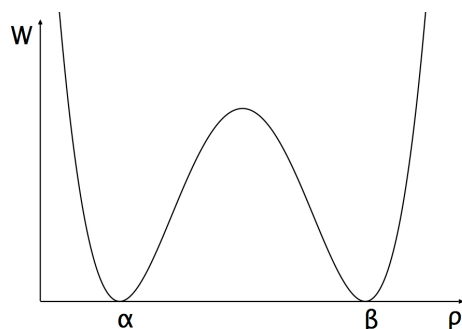


Figura 8.4: grafico dell'energia libera dopo una opportuna trasformazione affine

ne chimica o per una transizione di fase, si rileva una progressiva diminuzione dell'energia libera fino al raggiungimento dell'equilibrio. Come conseguenza risulta naturale cercare i minimi del seguente funzionale

$$\min\left\{\int_{\Omega} W(u) dx : \int_{\Omega} u dx = d|\Omega|\right\}. \quad (8.4)$$

che rappresenta l'energia libera del sistema.

Al fine di rendere il problema (8.4) più chiaro e per comprendere le proprietà delle minimizzanti, aggiungiamo un termine affine a W ; cioè, consideriamo $W(u) + c_1u + c_2$ al posto di W . Grazie al vincolo di massa l'aggiunta di tale termine non ha alcun effetto sul problema di minimo (8.4) in quanto corrisponde all'aggiunta della costante

$$\int_{\Omega} c_1u + c_2 dx = c_1d|\Omega| + c_2|\Omega|.$$

Inoltre è sempre possibile scegliere c_1, c_2 in maniera tale che la nuova densità di energia, che chiameremo ancora W , sia non negativa ed abbia esattamente due zeri in corrispondenza dei punti α e β , come in figura 8.4.

A questo punto è chiaro che le minimizzanti del problema (8.4) sono esattamente (tutte!) le funzioni $u : \Omega \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ che rispettano il vincolo (8.1). Ciò implica che il volume degli insiemi $E_{\alpha}(u), E_{\beta}(u)$ è univocamente determinato se $\alpha \leq d \leq \beta$ ma non si può dedurre alcuna informazione riguardo la forma e la misura bidimensionale dell'interfaccia S_u , che potrebbe essere molto irregolare o addirittura densa in Ω : non vale più quel principio d'interfaccia minima che si osserva nella realtà e che è presente nel classico modello di tensione superficiale, in cui si paga un'energia proporzionale all'area dell'interfaccia. Un modo per introdurre questo concetto è l'aggiunta, al funzionale energia, di un termine di volume che contenga il gradiente come perturbazione singolare

e che possa essere interpretato come una debole tensione superficiale fra le due fasi. Il nuovo problema, nel quale si può notare la comparsa di piccolo parametro positivo ε , ha la forma

$$\min\{E_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} (W(u) + \varepsilon^2 |Du|^2) dx : \int_{\Omega} u dx = d|\Omega|\} \quad (8.5)$$

ed è conosciuto in letteratura come **modello di Cahn-Hilliard**.

Osservazione 8.1. È importante fare alcune osservazioni e confronti fra i due funzionali (8.3) e (8.5):

- (i) (8.3) rappresenta un'energia d'interfaccia confinata su un insieme di dimensione inferiore rispetto al dominio Ω mentre (8.5) presenta la competizione fra due diversi tipi di energia di volume: il termine $\int_{\Omega} W(u) dx$ penalizza la distanza di u dalle due fasi α, β , mentre il termine $\varepsilon^2 \int_{\Omega} |Du|^2 dx$ penalizza le interfacce superflue.
- (ii) Le configurazioni di (8.3) sono, per definizione, discontinue mentre il funzionale (8.5) è ambientato su un insieme di funzioni differenziabili nel senso delle distribuzioni.
- (iii) Il parametro ε rappresenta l'ordine di grandezza di uno strato sul quale avviene la transizione di una minimizzante da una fase all'altra, come parzialmente giustificato dal seguente argomento euristico: consideriamo, al variare di $\delta > 0$, una transizione u_δ localizzata all'interno di un δ -intorno T di una qualche superficie S (figura 8.5).

Dal momento che fuori da T u_δ è costante e $W(u_\delta) = 0$, risulta approssimativamente

$$E_\varepsilon(u_\delta) = \int_T W(u_\delta) dx + \varepsilon^2 \int_T |Du_\delta|^2 dx \approx (C_1 + C_2 \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}) |T| = (C_1 \delta + C_2 \frac{\varepsilon^2}{\delta}) |S|$$

da cui minimizzando in δ , cioè annullando la derivata prima rispetto a δ , si ottiene la condizione

$$C_1 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \approx \varepsilon$$

e il costo della transizione è proporzionale a ε , cioè

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \approx (C_1 + C_2) \varepsilon |S|.$$

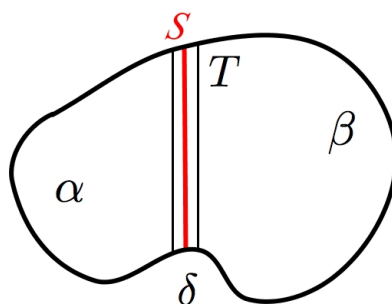


Figura 8.5: Transizione fra due livelli di densità

Come conseguenza dell'osservazione (iii) i funzionali $E_\varepsilon(u)$ e $E(u)$, per ε sufficientemente piccolo, sembrano descrivere il medesimo fenomeno su scale diverse, rispettivamente la scala mesoscopica e quella macroscopica. Inoltre una naturale congettura per il comportamento delle minimizzanti di (8.5) è

$$u_\varepsilon \approx u(x) + u_1\left(\frac{\text{dist}(x, S(u))}{\varepsilon}\right)$$

in cui u è minimizzante per (8.3) e $u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione con limite nullo all'infinito. Sempre dall'osservazione (iii), sembra ragionevole supporre che il valore minimo del funzionale sia proporzionale al prodotto fra la misura dell'interfaccia e il parametro ε ; come conseguenza affinché il minimo del funzionale sia finito per ε che tende a zero conviene considerare il seguente riscaldamento del funzionale $E_\varepsilon(u)$

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} E_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon |Du|^2 \right) dx.$$

Queste congetture sono state confermate in [35], il cui principale risultato è il seguente

Teorema 8.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e regolare e $W : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione continua tale che*

(i) $\{x \in \mathbb{R} : W(x) = 0\} = \{a, b\}$, con $a < b$,

(ii) $\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} W(x) \geq c > 0$.

Sia $d \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \leq d \leq \beta$ e si consideri la famiglia di funzionali

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon |Du|^2 \right) dx & \text{se } \int_\Omega u \, dx = d|\Omega| \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8.6)$$

in cui $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e il funzionale

$$F(u) = \begin{cases} c_W \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_a(u) \cap \Omega) & \text{se } u(x) \in \{a, b\}, \int_\Omega u \, dx = d|\Omega| \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (8.7)$$

in cui $c_W = \int_a^b 2\sqrt{W(s)} \, ds$.

Allora

$$F(u) = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u)$$

rispetto alla topologia forte di $L^1(\Omega)$.

Questo risultato è stato esteso al caso vettoriale da S. Baldo in [9]. Nel lavoro [9] si considera il caso in cui nell'insieme Ω siano presenti $n \geq 1$ fluidi non interagenti le cui densità sono rappresentate da una funzione vettoriale $u = (u_1, \dots, u_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ogni componente scalare di u rappresenta la densità di un fluido. Da considerazioni di tipo fisico sembra ragionevole supporre che l'energia libera $W : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ del sistema multifase sia la somma dell'energia libera delle componenti: per esempio se $n = 2$ ipotizziamo che $W(u_1, u_2) = W_1(u_1) + W_2(u_2)$ in cui le due funzioni $W_1, W_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ rispettano le ipotesi del caso scalare cioè sono continue, hanno limite all'infinito positivo e hanno entrambi due zeri indicati rispettivamente con $\{a_1, b_1\}$ e $\{a_2, b_2\}$. Chiaramente l'insieme degli zeri di W è $\{(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)\} \subset \mathbb{R}^2$. In figura 8.6 è riportato un esempio di questo tipo di funzione. Come conseguenza risulta naturale assumere per W che abbia un numero finito l di zeri, cioè $\{x \in \mathbb{R}^n : W(x) = 0\} = K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$.

In questo caso il vincolo di massa appropriato è, con ovvio significato dei simboli

$$\int_\Omega u \, dx = d|\Omega|$$

in cui $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ rappresenta le densità medie dei fluidi e soddisfa la condizione $\min\{(\alpha_1)_i, \dots, (\alpha_l)_i\} \leq d_i \leq \max\{(\alpha_1)_i, \dots, (\alpha_l)_i\}$.

Il risultato mostrato in [9] è il seguente

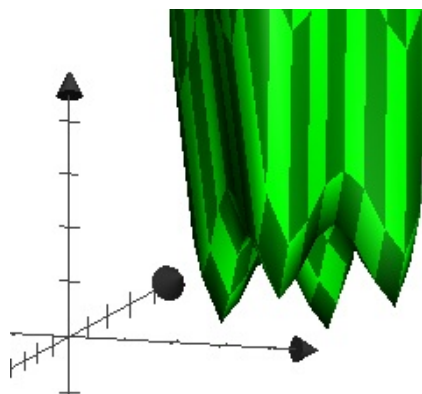


Figura 8.6: Esempio di un potenziale nel caso $n = 2$

Teorema 8.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e regolare e $W : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione continua tale che

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^m : W(x) = 0\} = K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$,
- (ii) esistono $C_1 > C_2$ tali che $\inf\{W(x) : x \notin [C_1, C_2]^m\} \geq \sup\{W(x) : x \in [C_1, C_2]^m\}$.

Sia $d \in \mathbb{R}^m$ tale che $\min\{(\alpha_1)_i, \dots, (\alpha_l)_i\} \leq d_i \leq \max\{(\alpha_1)_i, \dots, (\alpha_l)_i\}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e si consideri la famiglia di funzionali definiti come

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega (\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon |Du|^2) dx & \text{se } \int_\Omega u dx = d|\Omega| \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8.8)$$

in cui $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e il funzionale

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_W(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^{m-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega) & \text{se } \int_\Omega u dx = d|\Omega| \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (8.9)$$

in cui

$$\theta_W(w, z) = \inf \left\{ \int_0^1 2\sqrt{W(v)} |\dot{v}| dt : v \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^m) v(0) = w, v(1) = z \right\}. \quad (8.10)$$

Allora

$$F(u) = \Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u)$$

rispetto alla topologia forte di $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Osservazione 8.4. *Con un argomento euristico analogo a quello presentato nell'osservazione 8.1 (iii), anche nel caso vettoriale si deduce che il parametro ε rappresenti l'ampiezza dello strato sul quale avviene la transizione di una minimizzante da una fase all'altra.*

Analogamente, se la transizione avviene fra due fasi α_i, α_j per le quali esiste una geodetica γ , è ragionevole attendersi che le minimizzanti u_ε di F_ε presentino variazioni monodimensionali nella direzione ortogonale all'interfaccia che attraversino i punti per i quali passa γ .

Analisi asintotica del modello di classificazione e restauro per immagini a colori

In questo capitolo presentiamo alcuni risultati preliminari alla dimostrazione del teorema 1 che sarà svolta nel successivo ultimo capitolo.

Qui ci proponiamo di studiare il comportamento asintotico della famiglia di funzionali definiti come

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left[\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^l |\gamma(u) D_j u|^2 \right] dx & \text{se } u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (9.1)$$

in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato connesso con frontiera lipschitziana e $n \geq 2$. $W : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che

(9.1) W è continua,

(9.2) $W(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^m$,

(9.3) W ha un numero finito di zeri $\{W = 0\} = K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$,

(9.4) Esistono due costanti $K_2 > K_1 > 0$ tali che $\inf\{W(x) : x \notin [K_1, K_2]^m\} \geq \sup\{W(x) : x \in [K_1, K_2]^m\}$

$\gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ è un campo di matrici tali che

(9.5) esistono $0 < m < M < +\infty$ tali che $m|x| \leq |\gamma(y)x| \leq M|x|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^m$,

$$(9.6) \quad \gamma_{ij}(x) = \gamma_{ji}(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^m \text{ e } i, j = 1, \dots, n,$$

$$(9.7) \quad \gamma_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \text{ per ogni } i, j = 1, \dots, n.$$

Lo studio di questa famiglia di funzionali presenta molte analogie con il lavoro compiuto da S. Baldo in [9] nell'ambito della teoria delle transizioni di fase e presentato alla fine del capitolo 8 (teorema 8.3). Evidenziamo le differenze

- Nei funzionali 9.1 non è presente il vincolo integrale.
- Il termine di perturbazione del gradiente $\varepsilon \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2$ presente nei funzionali (9.1) si riduce al termine $\varepsilon |Du|^2$ presente nei funzionali 8.8 nel caso in cui il campo di matrici γ sia l'identità.
- Per mostrare il teorema 1 sarà necessario il calcolo di un secondo Γ -limite che è presentato nel capitolo 10.

Consideriamo il funzionale definito come

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_W(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega) & \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{S_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (9.2)$$

in cui

$$\theta_W(w, z) = \inf \left\{ \int_0^1 2\sqrt{W(v)} |\gamma(v) \dot{v}| dt : v \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^m), v(0) = w, v(1) = z \right\} \quad (9.3)$$

In questo capitolo mostreremo il seguente risultato di Γ -convergenza per i funzionali F_ε .

Teorema 9.1. *Sia $F_\varepsilon(u)$ definito dalla (9.1) e $F(u)$ definito dalla (9.2). Allora*

$$F(u) = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u, \Omega)$$

rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ con $1 \leq p < +\infty$.

La dimostrazione è analoga al caso in cui il campo di matrici γ è l'identità: $\gamma(s) = I_m \forall s \in \mathbb{R}^m$, mostrato da S. Baldo in [9]. Ripercorreremo la dimostrazione seguendo i passi fondamentali e dimostrando in maniera dettagliata i punti in cui emergono le differenze. La disuguaglianza del liminf è dimostrata nella sezione 9.1 e quella del limsup nella sezione 9.2. Nella sezione 9.3 è mostrato un risultato di equicompattezza che completa l'analisi asintotica.

9.1 Disuguaglianza del liminf

Osservazione 9.2. Sia $\alpha_i \in K$ e $\theta_w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$ definita dalla (9.3). La funzione $\psi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$ definita come

$$\psi_i(x) = \theta_W(\alpha_i, x) \quad (9.4)$$

è localmente lipschitziana, infatti poichè θ_W è una metrica su \mathbb{R}^m abbiamo sempre che

$$|\psi_i(x) - \psi_i(y)| \leq \theta_W(x, y). \quad (9.5)$$

Dato un aperto limitato convesso $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $x, y \in A$ e il segmento $\sigma(t) = tx + (1-t)y$ abbiamo

$$\theta_W(x, y) \leq \int_0^1 2\sqrt{W(\sigma(t))} |\gamma(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t)| dt \leq C_A M |x - y|$$

in cui $C_A = \sup_{x \in A} 2\sqrt{W(x)}$. Di conseguenza, dalla continuità di W abbiamo che per ogni $B \subset \mathbb{R}^n$ limitato $\sup_B W = C_B < \infty$ e quindi

$$|\psi_i(x) - \psi_i(y)| \leq C_B M |x - y|.$$

Iniziamo a mostrare la disuguaglianza del liminf. Localizziamo il funzionale ponendo

$$F_\varepsilon(u, A) = \int_A \left[\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2 \right] dx$$

per ogni insieme aperto $A \subset \Omega$ e premettiamo alcuni lemmi preliminari.

Lemma 9.3. Se $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, allora $\psi_i \circ u \in H^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ e $A \subset \Omega$ aperto valgono le disuguaglianze

$$\begin{aligned} \int_A |D(\psi_i \circ u)| dx &\leq \int_A 2 \left(W(u) \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2 \right)^{1/2} dx \\ &\leq \int_A \left(\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2 \right) dx = F_\varepsilon(u, A). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Dimostrazione. L'ultima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Young. Riguardo la prima è sufficiente verificare che per ogni A insieme aperto in Ω valga la

$$\int_A |D(\psi_i \circ u)| dx \leq \int_A 2 \left(W(u) \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2 \right)^{1/2} dx \quad (9.7)$$

poichè implica l'assoluta continuità della misura $A \rightarrow \int_A |D(\psi_i \circ u)|$ rispetto alla misura di Lebesgue \mathcal{L}^n e quindi, dal teorema di Radon-Nikodym, segue che $D\psi_i \circ u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Consideriamo il caso $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dall'osservazione 9.2 e dalla differenziabilità di u abbiamo che $\psi \circ u$ è localmente lipschitziana quindi, per il teorema di Rademacher, è \mathcal{L}^n -q.o. differenziabile. Sia $x \in \Omega$ un punto differenziabilità e x_h una successione che converge a x . Dalla definizione di metrica e usando la curva $u_{\sigma_h}(t) = u(\sigma_h(t))$, $\sigma_h(t) = tx_h + (1-t)x$ abbiamo

$$|\psi_i(u(x)) - \psi_i(u(x_h))| \leq \theta_W(x, y) \leq \int_0^1 2\sqrt{W(u_{\sigma_h}(t))} |\gamma(u_{\sigma_h}(t)) \frac{d}{dt} u_{\sigma_h}(t)| dt$$

e

$$\frac{d}{dt} u_{\sigma_h}(t) = \sum_{i=1}^n (x - x_h)_i (D_i u)(\sigma_h(t)).$$

Poichè

$$|\gamma(u_{\sigma_h}(t)) \sum_{i=1}^n (x - x_h)_i (D_i u)(\sigma_h(t))| = \left| \sum_{i=1}^n (x - x_h)_i \gamma(u_{\sigma_h}(t)) (D_i u)(\sigma_h(t)) \right|,$$

usando prima la disuguaglianza triangolare e l'omogeneità della norma in \mathbb{R}^n e poi la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n (x - x_h)_i \gamma(u_{\sigma_h}(t)) (D_i u)(\sigma_h(t)) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |(x - x_h)_i| |\gamma(u_{\sigma_h}(t)) (D_i u)(\sigma_h(t))| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (x - x_h)_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |\gamma(u_{\sigma_h}(t)) (D_i u)(\sigma_h(t))|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= |x - x_h| \left(\sum_{i=1}^n |\gamma(u_{\sigma_h}(t))(D_i)u(\sigma_h(t))|^2 \right)^{1/2}.$$

Per quanto detto otteniamo

$$|\psi_i(u(x)) - \psi_i(u(x_h))| \leq \int_0^1 2 \left(W(u_{\sigma_h}(t)) \sum_{i=1}^n |\gamma(u_{\sigma_h}(t))D_i u(\sigma_h(t))|^2 \right)^{1/2} |x - x_h| dt.$$

Dividendo per $|x - x_h|$, usando il teorema del valor medio e passando al limite per $h \rightarrow \infty$ otteniamo che

$$|D(\psi_i \circ u)(x)| \leq 2 \left(W(u(x)) \sum_{i=1}^n |\gamma(u(x))(D_i u)(x)|^2 \right)^{1/2}$$

\mathcal{L}^n -q.o. e quindi la (9.7). Sia adesso $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e $u_j \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che $u_j \rightarrow u$ fortemente in $H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. A meno di estrarre una sottosuccessione abbiamo anche che $u_j \rightarrow u$, $Du_j \rightarrow Du$ q.o.. Dato $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $|g| \leq 1$ dal teorema della convergenza dominata e dalla definizione di derivata distribuzionale abbiamo

$$\int_{\Omega} (\psi_i \circ u) \operatorname{div}(g) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\psi_i \circ u_j) \operatorname{div}(g) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle D(\psi_i \circ u_j), g \rangle dx$$

mentre usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la (9.7) e il lemma di Fatou otteniamo

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle D(\psi_i \circ u_j), g \rangle dx \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D(\psi_i \circ u_j)| dx \leq$$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 2 \left(W(u_j) \sum_{i=1}^n |\gamma(u)D_i u_j|^2 \right)^{1/2} dx \leq \int_{\Omega} 2 \left(W(u) \sum_{i=1}^n |\gamma(u)D_i u|^2 \right)^{1/2} dx$$

da cui segue la tesi. □

Lemma 9.4. *Sia $\varepsilon_h \rightarrow 0^+$ e $u_h \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ una successione che converge a u in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che $\sup_h F_{\varepsilon_h}(u_h) \leq C < +\infty$. Allora*

$$u \in K \quad \text{q.o. in } \Omega, \quad (9.8)$$

Dimostrazione. Poichè u_h converge in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ possiamo scegliere una sottosuccessione u_{h_k} che converge a u q.o. in Ω e, dalla continuità di W , ciò vale anche per $W(u_{h_k})$ che converge q.o. a $W(u)$ in Ω . Usando il Lemma di Fatou otteniamo

$$0 \leq \int_{\Omega} W(u) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} W(u_{h_k}) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{h_k} F_{\varepsilon_{h_k}}(u_{h_k}) = 0;$$

quindi deduciamo che $W(u(x)) = 0$ q.o. in Ω , cioè $u \in K$ q.o. in Ω . \square

Adesso date l misure positive di Borel ν_i ricordiamo la definizione di estremo superiore di misure, cioè la misura positiva definita per ogni A aperto come

$$\left(\bigvee_{i=1}^l \nu_i \right) (A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^l \nu_i(A_i) : \bigcup_{i=1}^l A_i \subset A, \right. \\ \left. A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, A_i \text{ aperti in } \Omega \right\}$$

Proposizione 9.5. (Proposizione 2.2 in [9]) Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $u \in K$ q.o. e $\psi_i \circ u \in BV(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, l$. Allora $u \in BV(\Omega, K)$ e

$$\left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)| \right) (\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_W(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega).$$

Procediamo con la dimostrazione della disuguaglianza del liminf.

Dimostrazione. Poichè Ω è limitato è sufficiente mostrare la disuguaglianza del liminf rispetto alla convergenza forte in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e quindi dedurne la validità rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ con $p \geq 1$. Sia $\varepsilon_h \rightarrow 0^+$ e $u_h \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ una successione che converge a u in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che $\liminf_{h \rightarrow +\infty} F_{\varepsilon_h}(u_h) \leq C < +\infty$ (essendo triviali gli altri casi) allora dal lemma 9.4

$$u \in K \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{9.9}$$

Osserviamo che non è restrittivo considerare solo successioni convergenti u_h tali che $u_h \in [K_1, K_2]^m$ q.o. infatti nel caso in cui ciò non sia verificato, dall'ipotesi (9.4) fatta su W , possiamo sostituire u_h con \bar{u}_h ottenuta troncando ogni componente scalare fra i valori K_1 e K_2 . Chiaramente \bar{u}_h converge ancora fortemente in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ a u e $F_{\varepsilon_h}(\bar{u}_h, A) \leq F_{\varepsilon_h}(u_h, A)$.

Dall'osservazione 9.2 abbiamo che se $u_h \in [K_1, K_2]^m$ q.o. e convergono a u allora

$$|\psi \circ u_h - \psi \circ u| \leq \sup_{x \in [K_1, K_2]^m} 2\sqrt{W(x)}M|u_h - u|$$

e quindi $(\psi_i \circ u_h)$ convergono fortemente a $(\psi_i \circ u)$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ per ogni $i = 1, \dots, l$. Dalla semicontinuità inferiore della variazione totale in $BV(\Omega)$ (Proposizione 7.2) e dalla (9.7) abbiamo

$$|D(\psi_i \circ u)|(A) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} |D(\psi_i \circ u_h)|(A) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_h}(u_h, A) \leq C < \infty \quad (9.10)$$

per ogni aperto $A \subset \Omega$ e $i = 1, \dots, l$. Scegliendo $A = \Omega$ nella (9.10) e dal fatto che $u_h \rightarrow u$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ otteniamo che (proposizione 7.5) $\psi_i \circ u \in BV(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, l$ e quindi, dalla proposizione 9.5 abbiamo che

$$F(u) = \left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)| \right) (\Omega).$$

Dalla prima disuguaglianza nella (9.10) otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)| \right) (\Omega) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u)|(A_i) : \cup_{i=1}^l A_i \subset \Omega, \right. \\ &\quad \left. A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, A_i \text{ aperti in } \Omega \right\} \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u_h)| \right) (\Omega) \end{aligned}$$

e infine usando la seconda disuguaglianza nella (9.10) abbiamo

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \left(\bigvee_{i=1}^l |D(\psi_i \circ u_h)| \right) (\Omega) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_h}(u_h)$$

da cui segue la tesi. □

9.2 Disuguaglianza del limsup

Passiamo adesso alla disuguaglianza del limsup. Premettiamo il seguente lemma tecnico

Lemma 9.6. (Lemma 3.1 in [9]) Sia $\{S_i\}_{i=1, \dots, l}$ una partizione di perimetro finito in Ω . Allora esiste una successione di partizioni $\{S_i^h\}_{i=1, \dots, l}$ tale che

- (i) S_i^h è un insieme poligonale e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial S_i^h \cap \partial \Omega) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, l$; $h \in \mathbb{N}$.

$$(ii) \text{ Se } u_h = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{S_i^h} \text{ e } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{S_i}, \text{ allora } u_h \text{ converge a } u \text{ fortemente in } L^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

$$(iii) \lim_{h \rightarrow \infty} \bigvee_{j=1}^l |D(\psi_i \circ u_h)|(\Omega) = \bigvee_{j=1}^l |D(\psi_i \circ u)|(\Omega).$$

Il lemma appena presentato afferma che l'insieme delle partizioni poligonali è denso nell'insieme delle partizioni di Caccioppoli rispetto alla convergenza forte in $BV(\Omega, K)$ e quindi anche rispetto alla convergenza in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dall'osservazione 7.36 abbiamo che in $BV(\Omega, K)$ la convergenza in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ è equivalente alla convergenza in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ con $1 < p < +\infty$ quindi, usando l'argomento di densità esposto nella sezione 4.7, possiamo restringere l'analisi a partizioni di tipo poligonale. Premettiamo alla dimostrazione due lemmi.

Lemma 9.7. (Lemma 3.2 in [9]) *Si considerino i seguenti sistemi di equazioni differenziali ordinarie con funzione incognita $v_\varepsilon^{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$(\dot{v}_\varepsilon^{ij})^2 = \frac{\delta + W(c_{ij}(v_\varepsilon^{ij}))}{\varepsilon^2 |\gamma(c_{ij}(v_\varepsilon^{ij})) \dot{c}_{ij}(v_\varepsilon^{ij})|^2} \quad (9.11)$$

in cui $i, j = 1, \dots, l$, $i \neq j$ e $\delta > 0$ è una costante fissata.

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una funzione lipschitziana $\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^{l-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e tre costanti C_1, C_2, C_3 (dipendenti da δ) tali che:

$$(i) \chi_\varepsilon(t_1, \dots, t_{l-1}) = \alpha_1 \text{ se } t_1 < 0.$$

$$\chi_\varepsilon(t) = \alpha_i \text{ se } t_1 > C_1\varepsilon, \dots, t_{i-1} > C_1\varepsilon, t_i < 0 \text{ per ogni } i = 2, \dots, l-1.$$

$$\chi_\varepsilon(t) = \alpha_l \text{ se } t_1 > C_1\varepsilon, \dots, t_l > C_1\varepsilon.$$

$$(ii) 0 < |\chi_\varepsilon| < C_2, |D\chi_\varepsilon| < C_3/\varepsilon \text{ q.o. in } \mathbb{R}^{l-1}.$$

(iii) Se $j > i$, sull'insieme $\{t \in \mathbb{R}^{l-1} : 0 < t_i < C_1\varepsilon, t_j < 0, t_h > C_1\varepsilon \text{ per ogni } h \neq i, j\}$ χ_ε dipende solo da t_i e possiamo scrivere:

$$\chi_\varepsilon(t_i) = c_{ij}(v_\varepsilon^{ij}(t)) \text{ (in cui } v_\varepsilon^{ij} \text{ risolve la (9.11)) per ogni } t_i \text{ tale che } \chi_\varepsilon(t_i) \neq \alpha_i. \text{ (Se } j = k, \text{ si ignori la condizione } t_j < 0 \text{ ch non ha senso).}$$

Lemma 9.8. (Lemma 3.3 in [9]) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, A un dominio poligonale in \mathbb{R}^n con ∂A compatto e tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial \cap \Omega) = 0$. Poniamo:*

$$h(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial A) & \text{se } x \notin A \\ -\text{dist}(x, \partial A) & \text{se } x \in A. \end{cases} \quad (9.12)$$

Allora esiste una costante $\eta > 0$ tale che h è lipschitziana sull'insieme $H_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| < \eta\}$ e $|Dh(x)| = 1$ per quasi tutti gli $x \in H_\eta$.

Infine se $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = t\}$ abbiamo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega).$$

Procediamo con la dimostrazione della disuguaglianza del limsup.

Dimostrazione. Sia $u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{S_i}$ in cui $\{S_i\}$ è una partizione costituita da elementi con frontiera poligonale. Definiamo per ogni $i = 1, \dots, l$:

$$h_i(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial S_i) & \text{se } x \notin S_i \\ -\text{dist}(x, \partial S_i) & \text{se } x \in S_i. \end{cases}$$

Fissiamo $\delta > 0$. Per ε sufficientemente piccolo abbiamo che $|Dh_i(x)| = 1$ q.o. sull'insieme $\{x \in \Omega : |h_i(x)| < C_1 \varepsilon\}$, per ogni $i = 1, \dots, l$.

Consideriamo la successione di funzioni dipendenti da ε (e da δ) definite come

$$u_\varepsilon = \chi_\varepsilon(h_1(x), \dots, h_l(x)).$$

Il significato di questa costruzione è il seguente:

- dalla (i) del lemma 9.7 abbiamo che u_ε è uguale a u al di fuori di un ε -intorno I_ε del bordo della partizione.
- Dalla (ii) abbiamo l'equilimitatezza di u_ε rispetto a ε e una crescita del modulo del gradiente di u_ε al più di ordine $1/\varepsilon$, quindi l'energia è finita poichè

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega) = F_\varepsilon(u_\varepsilon, I_\varepsilon) \approx \varepsilon \left(\frac{a}{\varepsilon} + \frac{b}{\varepsilon} \right)$$

- Dalla (iii) abbiamo che in un ε -intorno I_ε^{ij} dell'interfaccia fra due regioni i, j la funzione u_ε varia solo nella direzione normale all'interfaccia seguendo la geodetica c_{ij} con la parametrizzazione ottimale (a meno di un parametro δ destinato a tendere a zero) v^{ij} che soddisfa l'equazione differenziale (9.11). L'ottimalità può essere notata ricordando il limite inferiore che segue dalla disuguaglianza di Young

$$\int_{I_\varepsilon^{ij}} 2 \left(W(u) \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2 \right)^{1/2} dx \leq \int_{I_\varepsilon^{ij}} \left(\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2 \right) dx$$

e osservando che, grazie alla (9.11), u_ε raggiunge l'uguaglianza a meno del parametro δ .

Verifichiamo innanzitutto che u_ε converge fortemente a u in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dato $1 \leq p < +\infty$, $\Delta_K = \max\{|\alpha| : \alpha \in K\}$ e ponendo

$$\Pi_i^t = \{x \in \Omega : h_i(x) = t\}, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, l-1$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon - u|^p dx &\leq \sum_{i=1}^{l-1} \int_{\{x \in \Omega : 0 < h_i(x) < C_1 \varepsilon\}} |u_\varepsilon - u|^p dx \\ &\leq (C_2 + \Delta_K)^p \sum_{i=1}^{l-1} |\{x \in \Omega : 0 < h_i(x) < C_1 \varepsilon\}| \\ &= (C_2 + \Delta_K)^p \sum_{i=1}^{l-1} \int_{\{x \in \Omega : 0 < h_i(x) < C_1 \varepsilon\}} |Dh_i(x)| dx = (C_2 + \Delta_K)^p \sum_{i=1}^{l-1} \int_0^{C_1 \varepsilon} \mathcal{H}^{m-1}(\Pi_i^t) dx \end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza viene dalla formula di coarea. Dal lemma 9.8 otteniamo, facendo tendere ε a zero, che

$$\int_0^{C_1 \varepsilon} \mathcal{H}^{m-1}(\Pi_i^t) dx \approx C_1 \varepsilon \mathcal{H}^{m-1}(\partial S_i) \rightarrow 0$$

e quindi u_ε converge fortemente a u in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Ci rimane da stimare $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Consideriamo la seguente partizione di Ω :

- (i) $\Omega_1^\varepsilon = S_1$.
- (ii) $\Omega_i^\varepsilon = \{x \in S_i : h_j(x) > C_1 \varepsilon, j = 1, \dots, i-1\}$ per $i = 2, \dots, l$.
- (iii) $\Omega_{ij}^\varepsilon = \{x \in \Omega : 0 < h_i(x) < C_1 \varepsilon, h_j(x) < 0, h_l(x) > C_1 \varepsilon$ per

$$l \in \{1, \dots, l-1\} \setminus \{i, j\}$$

$$(iv) \quad \Omega_0^\varepsilon = \Omega \setminus \left(\left(\bigcup_{i=1}^l \Omega_i^\varepsilon \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \Omega_{ij}^\varepsilon \right) \right).$$

Localizziamo il funzionale $F_\varepsilon(u)$ ponendo per ogni $A \subset \Omega$ aperto

$$F_\varepsilon(u, A) = \int_A \left[\frac{1}{\varepsilon} W(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^n |\gamma(u) D_j u|^2 \right] dx.$$

Dalle proprietà del limsup otteniamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega) &\leq \sum_{i=1}^l \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega_i^\varepsilon) \\
&= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega_0^\varepsilon) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega_{ij}^\varepsilon). \quad (9.13)
\end{aligned}$$

La prima somma a destra della (9.13) è nulla perchè su Ω_i^ε abbiamo per costruzione $u_\varepsilon = \alpha_i$.

Adesso poniamo $K_{ij}^\varepsilon = \{x \in \Omega : 0 < h_i(x) < C_1\varepsilon, 0 < h_j(x) < C_1\varepsilon\}$ con $i > j$ e notiamo che $\Omega_0^\varepsilon \subset \cup_{i,j} K_{ij}^\varepsilon$. Usando il lemma 9.7 otteniamo

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon, K_{ij}^\varepsilon) = \int_{K_{ij}^\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) + \varepsilon \sum_{j=1}^n |\gamma(u_\varepsilon) D_j u|^2 \right] dx \leq C_5 \varepsilon^{-1} |K_{ij}^\varepsilon|.$$

Ponendo $S_j^t = \{x \in \Omega : h_j(x) > t \text{ oppure } h_j(x) > C_1\varepsilon\}$ e usando la formula di coarea otteniamo

$$\begin{aligned}
|K_{ij}^\varepsilon| &= \int_0^{C_1\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega : h_i(x) = s, 0 < h_j(x) < C_1\varepsilon\}) ds \\
&\leq C_1\varepsilon \sup_{0 \leq s \leq C_1\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega : h_i(x) = s, 0 < h_j(x) < C_1\varepsilon\}) \\
&= C_1\varepsilon \sup_{0 \leq s \leq C_1\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\Pi_i^s \setminus S_j^{C_1\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Si noti che per quasi ogni $\rho > 0$ abbiamo $\mathcal{H}^{n-1}(\partial S_i \cap \partial S_j^\rho) = 0$. Ricordando il lemma 9.8 abbiamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq s \leq C_1\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\Pi_i^s \setminus S_j^{C_1\varepsilon}) &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq s \leq C_1\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\Pi_i^s \setminus S_j^\rho) \\
&= \mathcal{H}^{n-1}((\partial S_i \cap (\Omega \setminus S_j)) \cap \partial S_j^\rho) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial S_i \cap \partial S_j^\rho)
\end{aligned}$$

e passando all'inf su ρ otteniamo in definitiva che $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, K_{ij}^\varepsilon) = 0$ e quindi che

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega_0^\varepsilon) = 0$$

Rimane da stimare l'ultimo termine nella (9.13) costituito dai contributi della forma $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega_{ij}^\varepsilon)$. Abbiamo

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega_{ij}^\varepsilon) = \int_{\Omega_{ij}^\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^l |\gamma(u_\varepsilon) D_k u_\varepsilon|^2 \right] dx$$

Ricordando il lemma 9.7 (iii) su Ω_{ij}^ε abbiamo

$$u_\varepsilon(x) = c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)$$

da cui

$$|\gamma(u_\varepsilon(x))D_k u_\varepsilon(x)|^2 = |D_k h_i(x)|^2 |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x) \dot{v}_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)|^2$$

quindi sommando su k e ricordando che dal lemma 9.8 abbiamo che $|Dh_i(x)| = 1$ q.o. otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\gamma(u_\varepsilon) D_k u_\varepsilon|^2 &= |Dh_i(x)|^2 |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x) \dot{v}_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)|^2 \\ &= |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x) \dot{v}_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)|^2 \end{aligned}$$

perciò otteniamo

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega_{ij}^\varepsilon) &= \\ \int_{\Omega_{ij}^\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} W(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)) + \varepsilon |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x) \dot{v}_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)|^2 \right] dx &= \\ \int_{\Omega_{ij}^\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} W(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)) + \varepsilon |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x) \dot{v}_\varepsilon^{ij} \circ h_i(x)|^2 \right] |Dh_i(x)| dx &= \end{aligned}$$

(Dalla formula di coarea)

$$\int_0^{C_1 \varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} W(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t)) + \varepsilon |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t) \dot{v}_\varepsilon^{ij}(t)|^2 \right] \mathcal{H}^{m-1} |\Pi_i^t \cap S_j| dt$$

(ponendo $\sigma_\varepsilon = \sup_{0 \leq t \leq C_1 \varepsilon} \mathcal{H}^{m-1}(\Pi_i^t \cap S_j)$)

$$\leq \sigma_\varepsilon \int_0^{C_1 \varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} (\delta + W(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t))) + \varepsilon |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t) \dot{v}_\varepsilon^{ij}(t)|^2 \right] dt$$

(usando la 9.11)

$$\begin{aligned} &= \sigma_\varepsilon \int_0^{C_1 \varepsilon} \left\{ 2[\delta + W(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t))]^{1/2} |\gamma(c_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t)) \dot{c}_{ij} \circ v_\varepsilon^{ij}(t) \dot{v}_\varepsilon^{ij}(t)| \right\} dt \\ &\leq \sigma_\varepsilon \int_0^1 2[\delta + W(c_{ij}(s))]^{1/2} |\gamma(c_{ij}(s)) \dot{c}_{ij}(s)| ds. \end{aligned}$$

Unendo tutte le precedenti disuguaglianze e notando che $\sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}^{m-1}(\Pi_i^t \cap S_j)$ otteniamo

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \sum_{i,j=1}^l \mathcal{H}^{n-1}(\partial S_i \cap \partial S_j) \int_0^1 2[\delta + W(c_{ij}(s))]^{1/2} |\gamma(c_{ij}(s)) \dot{c}_{ij}(s)| ds.$$

Ricordiamo adesso che la funzione $u_\varepsilon = u_\varepsilon^\delta$ dipende da δ . Facendo tendere δ a zero

$$\inf_{\delta > 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon^\delta) \leq F(u)$$

e con un'estrazione diagonale, cioè considerando come recovery sequence $u_\varepsilon^\varepsilon$, la disuguaglianza del limsup è mostrata.

La dimostrazione è conclusa sotto l'ipotesi che esistano tutte le geodetiche. Supponiamo ora che per qualche coppia di indici i, j non esista la geodetica e per ogni h scegliamo c_{ij}^h tale che

$$\int_0^1 2W(c_{ij}^h(s))^{1/2} |\gamma(c_{ij}^h(s)) \dot{c}_{ij}^h(s)| ds \leq \theta_W(\alpha_i, \alpha_j) + \frac{1}{h}$$

e ragionando come prima costruiamo una successione u_ε^h tale che

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon^h) \leq \sum_{i,j=1}^l \mathcal{H}^{n-1}(\partial S_i \cap \partial S_j) (\theta_W(\alpha_i, \alpha_j) + \frac{1}{h})$$

e la tesi è mostrata usando ancora un'estrazione diagonale. \square

9.3 Equicompattezza

Proposizione 9.9. *Sia $1 \leq p < +\infty$, F_ε definito dalla 9.1, ε_h una successione di numeri reali che tende a 0 e u_h una successione tale che $\sup_h F_{\varepsilon_h}(u_h) < +\infty$. Allora esiste una successione \tilde{u}_h tale che $F_{\varepsilon_h}(\tilde{u}_h) \leq F_{\varepsilon_h}(u_h)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e si può estrarre una sottosuccessione \tilde{u}_{k_h} che converge fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Dimostrazione. Sostituendo u_j con \tilde{u}_j ottenuta troncando ogni componente scalare fra i valori K_1 e K_2 dall'ipotesi (9.4) fatta su W Segue che $F_{\varepsilon_h}(\tilde{u}_h) \leq F_{\varepsilon_h}(u_h)$.

Poichè $\tilde{u}_h \in [K_1, K_2]^m$ q.o. e le funzioni ψ_i sono continue abbiamo che le funzioni scalari $\psi_i \circ \tilde{u}_h$ sono equilimitate infatti

$$|\psi \circ \tilde{u}_h| \leq \max_{x \in [K_1, K_2]^m} \psi(x) \quad (9.14)$$

Dalla (9.7) abbiamo

$$\sup_h |D(\psi_i \circ \tilde{u}_h)| \leq \sup_h F_{\varepsilon_h}(\tilde{u}_h) \leq C < \infty \quad (9.15)$$

Dalla (9.15) e dalla 9.14 otteniamo che per ogni $i = 1, \dots, l$ la funzione scalare $\psi_i \circ \tilde{u}_h$ è limitata in $BV(\Omega)$ quindi dal risultato di compattezza 7.6 otteniamo che

esiste una sottosuccessione \tilde{u}_{k_h} tale che per ogni $i = 1, \dots, l$ la successione $\psi_i \circ \tilde{u}_{k_h}$ convergente debolmente a un elemento $f_i \in BV(\Omega)$, quindi (proposizione 7.5) che converge fortemente in $L^1(\Omega)$ e, a meno di estrarre una seconda sottosuccessione, anche q.o..

Definiamo

$$S_i = \{x \in \Omega : f_i(x) = 0\}$$

$$u_0 = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{S_i}.$$

Torniamo alla convergenza di \tilde{u}_{k_h} . Grazie all'equilimitatezza è sufficiente mostrare solo la convergenza q.o. (proposizione 6.4 (ii)). Sia

$$A = \{x \in \Omega : \limsup_{h \rightarrow +\infty} W(\tilde{u}_h(x)) > 0\};$$

dall'equilimitatezza di $F_{\varepsilon_h}(\tilde{u}_h)$ otteniamo che $|A| = 0$ e quindi per quasi ogni $x \in \Omega$ abbiamo che

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \tilde{u}_{h_k}(x) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}.$$

Per quasi ogni $x \in S_i$ se $\tilde{u}_{h_k}(x) \rightarrow \alpha_j$ abbiamo che $\psi_i(\tilde{u}_{h_k}(x)) \rightarrow \alpha_j$, $\psi_i(\tilde{u}_{h_k}(x)) \rightarrow f_i(x)$; quindi $\psi_i(\alpha_j) = 0$ e otteniamo che $i = j$. Da ciò segue che \tilde{u}_{h_k} converge q.o. a u_0 .

□

10

Approssimazione via Γ -convergenza

In quest'ultimo capitolo mostriamo il teorema 1 che rappresenta il risultato principale di questo lavoro di tesi. Richiamiamo le definizioni.

Sia (\mathcal{C}, g) uno spazio di colori secondo la definizione 2.2 con metrica associata $d_g(\cdot, \cdot)$. Indicheremo con γ il campo di radici quadrate di g (osservazione 2.3) per mezzo del quale possiamo esprimere la metrica $d_g(\cdot, \cdot)$ come

$$d_g(w, z) = \inf \left\{ \int_0^1 |\gamma(v)\dot{v}| dt : v \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3), v(0) = w, v(1) = z \right\}. \quad (10.1)$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato connesso e con frontiera lipschitziana. Data un'immagine a colori $z : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$, un numero finito l di colori che denotiamo con $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$ e un parametro positivo $\beta > 0$ consideriamo il funzionale

$$E^z(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l d_g(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial^* U_i \cap \partial^* U_j \cap \Omega) + \beta \int_{\Omega} |d_g(u, z)|^2 dx \\ \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty \text{ altrimenti.} \end{cases} \quad (10.2)$$

Ciò che faremo sarà approssimare questo funzionale con un doppio Γ -limite sfruttando il teorema 9.1 mostrato nel capitolo 9. Per ora trascuriamo il *fidelity term* considerando solo il termine di segmentazione

$$E(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l d_g(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial^* U_i \cap \partial^* U_j \cap \Omega) & \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{U_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (10.3)$$

Si consideri il potenziale positivo $W_\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty]$ dipendente dal parametro positivo $0 < \delta < \bar{\delta} = \min\{|\alpha - \beta| : \alpha, \beta \in K, \alpha \neq \beta\}/2$ definito come

$$W_\delta(x) = \left[\frac{1 + \delta}{2} \psi\left(\frac{\text{dist}(x, K)}{\delta}\right) \right]^2 \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (10.4)$$

in cui $\text{dist}(x, K) = \min\{|x - \alpha| : \alpha \in K\}$ è la distanza euclidea del punto $x \in \mathbb{R}^3$ dall'insieme K e $\psi : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ è definita come

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(1-x^2)} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Data la famiglia di funzionali dipendenti dai due parametri positivi $\varepsilon, \delta > 0$ definita come

$$E_{\varepsilon, \delta}(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\varepsilon} W_\delta(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^2 |\gamma(u) D_j u|^2 \right] dx & \text{se } u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (10.5)$$

Ricordando l'enunciato del teorema 9.1 è facile verificare che per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$ W_δ rispetta le ipotesi (9.1), (9.2), (9.3), (9.4) e $\gamma(s)$ rispetta per definizione le ipotesi (9.5), (9.6), (9.7) quindi posto

$$E_\delta(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \theta_\delta(\alpha_i, \alpha_j) \mathcal{H}^1(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega) & \text{se } u = \sum_{i=1}^l \alpha_i \chi_{S_i} \in BV(\Omega, K) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (10.6)$$

in cui

$$\theta_\delta(w, z) = \inf \left\{ \int_0^1 2\sqrt{W_\delta(v)} |\gamma(v) \dot{v}| dt : v \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3), v(0) = w, v(1) = z \right\} \quad (10.7)$$

dal teorema 9.1 abbiamo che

$$E_\delta(u) = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\varepsilon, \delta}(u) \quad (10.8)$$

rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Prima di continuare premettiamo il seguente lemma (mostrato nella prossima sezione).

Lemma 10.1. *Siano $w, z \in K$, $d_g(w, z)$ definito dalla 10.1 e $\theta_\delta(w, z)$ definito dalla 10.7.*

Allora per δ sufficientemente piccolo vale la disuguaglianza

$$d_g(w, z) \leq \theta_\delta(w, z) + o(\delta). \quad (10.9)$$

Inoltre

$$d_g(w, z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_\delta(w, z). \quad (10.10)$$

Questo risultato ci permette di eseguire con facilità un secondo Γ -limite di $E_\delta(u)$ per $\delta \rightarrow 0^+$ ancora rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dando come risultato il funzionale di segmentazione desiderato $E(u)$.

Infatti sia $\delta_j \rightarrow 0^+$, $u_j \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\sup_j E_{\delta_j}(u_j) < C < +\infty$, posto $D_\delta = \max\{\theta_\delta(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in K\}$ grazie alla semicontinuità di $E(u)$ (che è una conseguenza del solo fatto che è un Γ -limite) e dalla (10.9) abbiamo

$$E(u) \leq \liminf_j E(u_j) \leq \liminf_j (E_{\delta_j}(u_j) + CD_{\delta_j} o(\delta_j)) = \liminf_j E_{\delta_j}(u_j)$$

che è la disuguaglianza del liminf mentre usando come recovery sequence le successioni costanti, dalla (10.10) otteniamo la disuguaglianza del limsup. In definitiva abbiamo

$$E(u) = \Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0^+} E_\delta(u). \quad (10.11)$$

rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Riassumiamo la (10.8) e la (10.11) scrivendo

$$E(u) = \Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\varepsilon, \delta}(u) \right) \quad (10.12)$$

rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Adesso rimane solo da aggiungere il *fidelity term*

$$G^z(u) = \begin{cases} \beta \int_{\Omega} |d_g(u, z)|^2 dx & \text{se } u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (10.13)$$

che è continuo rispetto alla convergenza forte in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (esempio 2). Concludiamo selezionando la convergenza forte di $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ nel doppio limite (10.12) e usando la stabilità rispetto alle perturbazioni continue del Γ -limite (osservazione 4.11) otteniamo che

$$E(u) + G^z(u) = \Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\varepsilon, \delta}(u) + G^z(u) \right)$$

e in definitiva ponendo

$$E_{\varepsilon, \delta}^z(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\varepsilon} W_{\delta}(u) + \varepsilon \sum_{j=1}^2 |\gamma(u) D_j u|^2 + |d_g(u, z)|^2 \right] dx & \text{se } u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (10.14)$$

abbiamo mostrato il seguente

Teorema 10.2. *Siano $E^z(u)$ definito dalla (10.2), $E_{\varepsilon, \delta}^z(u)$ definito dalla (10.14). Allora*

$$\Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\varepsilon, \delta}^z(u) \right) = E^z(u)$$

rispetto alla convergenza forte in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Concludiamo l'analisi asintotica ricordando il risultato di compattezza 9.3 che unito al teorema di caratterizzazione dei Γ -limiti successivi 4.26 e al teorema fondamentale della Γ -convergenza 4.22 ci permette di ottenere la tesi del teorema 1. Riportiamo di seguito l'enunciato.

Teorema 10.3. *Sia (\mathcal{C}, g) uno spazio di colori, $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathcal{C}$ un insieme finito di l colori. Sia $E^z(u)$ il funzionale definito dalla (10.2) e $E_{\varepsilon, \delta}^z(u)$ definito dalla (10.14).*

Sia $\delta : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione continua e strettamente monotona tale che $\delta(0) = 0$ e ε_j una successione di numeri positivi che tende a 0. Allora abbiamo che

Se u_{ε_j} è una successione costituita da minimizzanti di $E_{\varepsilon_j, \delta(\varepsilon_j)}^z$ si può estrarre una sottosuccessione convergente, che indichiamo ancora con u_{ε_j} tale che

$$u_{\varepsilon_j} \rightarrow u_0 \quad \text{fortemente in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

$$E_{\varepsilon_j, \delta(\varepsilon_j)}^z(u_{\varepsilon_j}) \rightarrow E^z(u_0)$$

e $u_0 \in \operatorname{argmin}(E^z)$.

10.1 Convergenza delle energie di segmentazione

In questa ultima sezione riportiamo l'enunciato del lemma 10.1 insieme alla dimostrazione. Notiamo preliminarmente che per ogni $0 \leq \delta \leq \bar{\delta}$ il potenziale W_δ ha le seguenti proprietà

$$0 \leq W_\delta \leq 1 + \delta \quad \text{se } \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta$$

$$W_\delta = 1 + \delta \quad \text{se } \operatorname{dist}(x, K) \geq \delta$$

e per δ che tende a zero abbiamo che $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} W_\delta(x) = W_0(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ in cui

$$W_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus K \end{cases}.$$

Lemma 10.4. Siano $w, z \in K$, $d_g(w, z)$ definito dalla 10.1 e $\theta_\delta(w, z)$ definito dalla 10.7.

Allora per δ sufficientemente piccolo vale la disuguaglianza

$$d_g(w, z) \leq \theta_\delta(w, z) + o(\delta). \quad (10.15)$$

Inoltre

$$d_g(w, z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_\delta(w, z). \quad (10.16)$$

Dimostrazione. Dato un intervallo $I \subseteq [0, 1]$, poniamo

$$E_\delta(u, I) = \int_I 2\sqrt{W_\delta(u)} |\gamma(u)\dot{u}| dt$$

$$E(u, I) = \int_I |\gamma(u)\dot{u}| dt$$

$$X = \{v \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3) : v(0) = w, v(1) = z\}.$$

Con tali definizioni possiamo riscrivere le (10.15), (10.16) rispettivamente come

$$\inf_{u \in X} E(u, (0, 1)) \leq \inf_{u \in X} E_\delta(u, (0, 1)) + o(\delta).$$

$$\inf_{u \in X} E(u, (0, 1)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{u \in X} E_\delta(u, (0, 1)).$$

Step 1. Consideriamo una successione $u_j \in X$ che sia minimizzante per la famiglia $E_\delta(u, (0, 1))$, cioè tale che se $\delta_j \rightarrow 0$ abbiamo

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{u \in X} E_\delta(u, (0, 1)) = \lim_{j \rightarrow +\infty} E_{\delta_j}(u_j, (0, 1)). \quad (10.17)$$

L'esistenza di questa successione è garantita dalla definizione di estremo inferiore. Indichiamo con $B_\delta(x)$ la sfera chiusa centrata in $x \in \mathbb{R}^3$ di raggio δ e, dato $\alpha \in K$, con $I_\alpha^j = u_j^{-1}(B_{\delta_j}(\alpha))$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che il supporto delle curve associate alla successione u_j , cioè l'insieme $c(u_j) = \{u_j(t) : t \in (0, 1)\}$ non abbia autointersezioni: in caso contrario è sempre possibile eliminare i loop ottenendo una curva con energia strettamente inferiore. Come conseguenza per j sufficientemente grande e per ogni α gli insiemi I_α^j sono costituiti da un unico intervallo quindi, nel caso dei valori estremi, poniamo $I_w^j = (0, t_w^j)$, $I_z^j = (s_z^j, 1)$ con $t_w^j < s_z^j$ mentre per $\alpha \neq w, z$ poniamo $I_\alpha^j = (s_\alpha^j, t_\alpha^j)$ con $s_\alpha^j < t_\alpha^j$. Adesso cerchiamo una successione minimizzante $\bar{u}_j \in X$ che rispetta la (10.17) e tale che

$$\int_{\bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j} |\dot{\bar{u}}_j| dt \leq C\delta_j \quad (10.18)$$

per qualche costante positiva C indipendente da j . Questa successione può essere costruita a partire da un'arbitraria minimizzante u_j modificandola in modo che per ogni α il suo supporto all'interno degli insiemi $B_{\delta_j}(\alpha)$ sia costituito da segmenti di lunghezza δ_j . Nel caso in cui $c(u_j) \cap (\bigcup_{\alpha \in K} B_{\delta_j}(\alpha)) = \{w, z\}$ ciò può essere fatto definendo \bar{u}_j in modo che su I_w^j, I_z^j sia, rispettivamente, la retta che unisce w al punto $u_j(t_w^j)$ e il punto $u_j(s_z^j)$ al punto z . In maniera esplicita

$$\bar{u}_j(x) = \begin{cases} u_j(x) & \text{se } x \in (-1, 1)/I_w^j \cup I_z^j \\ [(t_w^j - x)w + xu_j(t_w^j)]/(t_w^j) & \text{se } x \in I_w^j \\ [(s_z^j - x)z + (x - 1)u_j(s_z^j)]/(s_z^j - 1) & \text{se } x \in I_z^j. \end{cases}$$

In questo caso la (10.18) segue dall'osservazione che per costruzione si ha

$$\int_{I_w^j \cup I_z^j} |\dot{\bar{u}}_j| dt = 2\delta_j.$$

Nel caso generale, se $\alpha \neq w, z$, definiamo \bar{u}_j in modo che su $(s_\alpha^j, (t_\alpha^j + s_\alpha^j)/2)$ sia la retta che unisce il punto $u_j(s_\alpha^j)$ al punto α e che su $((t_\alpha^j + s_\alpha^j)/2, t_\alpha^j)$ sia la retta che

unisce il punto α al punto $u_j(t_\alpha^j)$ (per semplicità omettiamo la formula esplicita). In questo abbiamo per costruzione

$$\int_{I_\alpha^j} |\dot{\bar{u}}_j| dt = 2\delta_j.$$

In definitiva, ricordando che l è il numero degli zeri di W , otteniamo

$$\int_{\bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j} |\dot{\bar{u}}_j| dt \leq 2(l-2)\delta_j$$

e quindi la (10.18) con $C = 2(l-2)$.

Rimane da mostrare per \bar{u}_j la (10.17), cioè che

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \inf_{u \in X} E_\delta(u, (0, 1)) = \lim_{j \rightarrow +\infty} E_{\delta_j}(u_j, (0, 1)) = \lim_{j \rightarrow +\infty} E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (0, 1)). \quad (10.19)$$

Notiamo innanzitutto che per la minimalità di u_j è sempre possibile supporre che

$$\lim_j E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (0, 1)) \geq \lim_j E_{\delta_j}(u_j, (0, 1)). \quad (10.20)$$

Otteniamo la disuguaglianza inversa. Per costruzione di \bar{u}_j abbiamo

$$\begin{aligned} E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (0, 1)) - E_{\delta_j}(u_j, (0, 1)) &= E_{\delta_j}(\bar{u}_j, \bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j) - E_{\delta_j}(u_j, \bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j) \\ &\leq E_{\delta_j}(\bar{u}_j; \bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j) \leq M \int_{\bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j} 2\sqrt{W_{\delta_j}(\bar{u}_j)} |\dot{\bar{u}}_j| dt \end{aligned} \quad (10.21)$$

mentre da un calcolo diretto abbiamo che

$$\int_{\bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j} 2\sqrt{W_{\delta_j}(\bar{u}_j)} |\dot{\bar{u}}_j| dt = 2(k-2)(1+\delta_j)c_\psi\delta_j \quad (10.22)$$

in cui $c_\psi = \int_0^1 \psi(t) dt$. Unendo le (10.21), (10.22) e passando al limite per $j \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\lim_j E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (0, 1)) \leq \lim_j E_{\delta_j}(u_j, (0, 1)).$$

che insieme alla (10.20) implica la (10.19).

Step 2. Per costruzione abbiamo

$$\begin{aligned} E(\bar{u}_j, (0, 1)) &\leq E_\delta(\bar{u}_j, (0, 1)) + (1+\delta)E(\bar{u}_j, \bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j) \\ &\leq E_\delta(\bar{u}_j, (0, 1)) + M(1+\delta) \int_{\bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j} |\dot{\bar{u}}_j| dt \end{aligned}$$

che unita alla (10.18) implica

$$\begin{aligned}
\theta_\gamma(w, z) &= \inf_{u \in X} E(u, (0, 1)) \leq \lim_j \inf E(\bar{u}_j, (0, 1)) \\
&\leq \lim_j \inf \left(E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (0, 1)) + M(1 + \delta_j) \int_{\bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha^j} |\dot{\bar{u}}_j| dt \right) \\
&\leq \lim_j \inf \left(E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (-1, 1)) + M(1 + \delta_j) C \delta_j \right) \\
&= \lim_{j \rightarrow +\infty} E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (-1, 1)) + \lim_{j \rightarrow +\infty} M(1 + \delta_j) C \delta_j
\end{aligned}$$

da cui, grazie alla (10.19), segue la (10.9).

Step 3. Dalla (10.9) abbiamo

$$\inf_{u \in X} E(u, (0, 1)) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{u \in X} E_\delta(u, (0, 1)).$$

Per mostrare la (10.10) mostriamo la disuguaglianza inversa. Sia $\eta > 0$ e u^η tale che

$$\eta + \theta_\gamma(w, z) \geq E(u^\eta, (0, 1)).$$

Per costruzione abbiamo che

$$(1 + \delta)E(u, (0, 1)) \geq E_\delta(u, (0, 1))$$

e quindi dalle ultime due disuguaglianze e dalla definizione di \bar{u}_j otteniamo

$$\begin{aligned}
\eta + \theta_\gamma(w, z) &\geq E(u^\eta, (0, 1)) = \lim_j ((1 + \delta_j)E(u^\eta, (0, 1))) \geq \lim_j \inf E_{\delta_j}(u^\eta, (0, 1)) \\
&\geq \lim_j \inf E_{\delta_j}(\bar{u}_j, (0, 1)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{u \in X} E_\delta(u, (0, 1))
\end{aligned}$$

quindi facendo tendere η a zero e per quanto detto abbiamo la (10.10)

□

11

Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato introdotto un modello di classificazione per immagini a colori basato sulla nozione di distanza percepita. Tale modello corrisponde alla minimizzazione di un funzionale definito sulle partizioni del dominio che contiene energie di area e di linea, precisamente l'energia di area è un fidelity term che misura la distanza percepita dal dato mentre le energie di linea penalizzano la lunghezza dei bordi della partizione pesata con le distanze percepite fra i colori delle regioni omogenee. Questa nozione di distanza è stata modellizzata assumendo che lo spazio dei colori sia una varietà Riemanniana e la distanza percepita sia la metrica associata.

È stata presentata una formulazione debole del problema ed un risultato di esistenza di una partizione ottimale che minimizza l'energia. Da un'analisi delle minimizzanti condotta attraverso semplici esempi è emerso un legame fra la struttura della metrica e la possibilità di riprodurre in maniera esatta le scale cromatiche.

In seguito è stata costruita un'approssimazione tramite una famiglia di funzionali ellittici la cui minimizzazione può essere interpretata come un modello di classificazione e restauro per immagini a colori. L'analisi asintotica è stata condotta con tecniche di Γ -convergenza sfruttando un risultato nell'ambito della teoria delle transizioni di fase: è stata provata la Γ -convergenza dei funzionali al funzionale proposto.

Sottolineiamo che i funzionali approssimanti costruiti ... sono molto più trattabili in vista di un'approssimazione numerica.

Bibliografia

- [1] G. David A. Bonnet. Crack-tip is a global Mumford-Shah minimizer, *Astérisque*. 2001.
- [2] L. Ambrosio. A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation, *Boll. Un. Mat. It.* 3-B. pages 857–881, 1989.
- [3] L. Ambrosio, V. Caselles, S. Masnou, and J. M. Morel. Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing. *Journal of EMS.*, (3):213–266, 2001.
- [4] L. Ambrosio, L. Faina, and R. March. Variational approximation of a second order free discontinuity problem in computer vision. *SIAM J. Math. Anal.*, (32):1171–1197, 2001.
- [5] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, USA, 2000.
- [6] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via-convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(8):999–1036, 1990.
- [7] G. Aubert, L. Blanc-Feraud, and R. March. γ -convergence of discrete functionals with nonconvex perturbation for image classification. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(3):1128–1145, 2004.
- [8] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations*. Springer-Verlag New York Inc, 2006.

-
- [9] S. Baldo. *Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids*. Dipartimento, Univ., 1988.
- [10] A. Blake and A. Zisserman. Visual reconstruction. 1987.
- [11] S. M. Boker. The Representation of Color Metrics and Mappings in Perceptual Color Space. 1995.
- [12] A. Braides. *Gamma-convergence for Beginners*. Oxford University Press, USA, 2002.
- [13] A. Braides. A handbook of Γ -convergence. *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, 3:101–213, 2006.
- [14] WRJ Brown and DL MacAdam. Visual sensitivities to combined chromaticity and luminance differences. *J. Opt. Soc. Am*, 39(10):808–834, 1949.
- [15] M. Carriero and L. De Luca. Introduzione al calcolo delle variazioni. *Quaderni del Dipartimento di Matematica dell' Università del Salento*, 2010(1), 2010.
- [16] M. Carriero, A. Leaci, and F. Tomarelli. Free gradient discontinuities. *Calculus of Variations, Homogenization and Continuum Mechanics*, World Scientific, Singapore, pages 131–147, 1994.
- [17] M. Carriero, A. Leaci, and F. Tomarelli. A second order model in image segmentation: Blake & Zisserman functional. *Variational methods for discontinuous structures: applications to image segmentation, continuum mechanics, homogenization: Villa Olmo, Como, 8-10 September 1994*, page 57, 1996.
- [18] M. Carriero, A. Leaci, and F. Tomarelli. Strong minimizers of Blake & Zisserman functional. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze-Serie IV*, 25(1):257–286, 1997.
- [19] M. Carriero, A. Leaci, and F. Tomarelli. Calculus of Variations and image segmentation. *Journal of Physiology-Paris*, 97(2-3):343–353, 2003.
- [20] M. Carriero, A. Leaci, and F. Tomarelli. Euler equation for Blake and Zisserman functional. *Calc. Var.*, 2008.
- [21] A. Corichi, A. Ashtekar, and M. Pierri. Geometry in Color Perception. 1997.

-
- [22] G. Dal Maso. *Introduction to Γ -convergence*. Birkhauser, 1993.
- [23] G. Dal Maso, J.M. Morel, and S. Solimini. A variational method in image segmentation: existence and approximation results. *Acta Mathematica*, 168(1):89–151, 1992.
- [24] G. Dal Maso and F. Tomarelli. Variational Methods for Discontinuous Structures, PNLDE 51, 2002.
- [25] E. De Giorgi. Free discontinuity problems in calculus of variations. *Frontiers in pure and applied mathematics. A collection of papers dedicated to Jacques-Louis Lions on the occasion of his sixtieth birthday. June*, pages 6–10.
- [26] E. De Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 108(4):195–218, 1989.
- [27] H. Grassmann. On the theory of compound colors. *Phil. Mag*, 7:254–64, 1854.
- [28] H. Helmholtz. On the theory of compound colors. *Philosophical Magazine*, 4(4):519–534, 1852.
- [29] B.K. Horn. *Robot vision*. McGraw-Hill Higher Education, 1986.
- [30] Y.M. Jung, S.H. Kang, and J. Shen. Multiphase image segmentation via Modica-Mortola phase transition. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67(5):1213–1232, 2007.
- [31] G. P. Leonardi and I. Tamanini. Metric spaces of partitions, and caccioppoli partitions. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 12(2):725–753, 2002.
- [32] G.P. Leonardi. Infiltrations in immiscible fluids systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 131(02):425–436, 2001.
- [33] V. Luminata. Problemes variationnels et EDP pour l’analyse d’images et l’evolution de courbes. 1996.
- [34] D.L. MacAdam. Visual sensitivities to color differences in daylight. *JOSA*, 32(5):247–273, 1942.

-
- [35] L. Modica. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 98(2):123–142, 1987.
- [36] L. Modica and S. Mortola. Un esempio di-convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14(1):285–299, 1977.
- [37] JM Morel and S. Solimini. Variational models in image segmentation. *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl*, 14.
- [38] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on pure and applied mathematics*, 42(5):577–685, 1989.
- [39] M. Nitzberg, D. Mumford, and T. Shiota. *Filtering, segmentation, and depth*. Springer, 1993.
- [40] D.R. Pant and I. Farup. Evaluating color difference formulae by Riemannian metric. In *5th European Conference on Colour in Graphics, Imaging, and Vision, CGIV 2010*, page 497.
- [41] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. Two variational models for multispectral image classification. In *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 344–356. Springer, 2001.
- [42] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. A variational model for image classification and restoration. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 22(5):460–472, 2002.
- [43] L. Silberstein. Investigations on the intrinsic properties of the color domain. *J. Opt. Soc. Am*, 28:63–85, 1938.
- [44] L. Silberstein. Notes on WS Stiles’ Paper Entitled, “A Modified Helmholtz Line-Element in Brightness-Colour Space”. *JOSA*, 37(4):292–295, 1947.
- [45] WS Stiles. A modified Helmholtz line-element in brightness-colour space. *Proceedings of the Physical Society*, 58:41, 1946.
- [46] L. Vese. A Study in the BV Space of a Denoising—Deblurring Variational Problem. *Applied Mathematics and Optimization*, 44(2):131–161, 2001.