

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria dei Sistemi

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica



EFSF PRICING
A MARSHALL-OLKIN APPROACH

Relatore: Prof. Carlo SGARRA

Co-relatore: Dott. Massimo MORINI

Tesi di Laurea di:
Emiliano CARCHEN
Matr. n. 735227

Anno Accademico 2010-2011

Ringraziamenti

Alla mia famiglia che ha sempre creduto in me
(anche quando non ne aveva alcun motivo)

A tutto il desk di strutturazione
e di ricerca quantitativa di Banca IMI

*Forecasting is like trying to drive a car blindfolded and following directions
given by a person who is looking out the back window.*

Indice

1	Introduzione	6
2	Credit Risk and Credit Derivatives	9
2.1	Il Rischio di Credito	9
2.1.1	Il rischio di credito sovrano: considerazioni post-crisi	9
2.2	I derivati di credito	10
2.2.1	CDS	11
2.2.2	CDO	12
3	European Financial Stability Facility - EFSF	14
3.1	Struttura e obiettivi	14
3.2	Credit enhancement	14
3.2.1	Contribution key e stepping out member	14
3.2.2	Guarantee Commitments	15
3.2.3	Calcolare la garanzia	16
3.2.4	Extra AAA-commitment	17
4	Il modello matematico	19
4.1	Il caso bivariato	19
4.1.1	Vita residua e indipendenza dal passato	20
4.1.2	Momenti e correlazione	21
4.1.3	Confronto con il caso indipendente	21
4.2	Estensione al caso multivariato	22
4.3	La copula di Marshall-Olkin	23
5	Implementazione, calibrazione e simulazione	25
5.1	Intensità di default single name	25
5.1.1	La scelta delle nazioni	25
5.1.2	Free-risk discount factor	25
5.1.3	Intensità di default single name e CDS spread	27
5.1.4	I bond EIB e il default europeo	31
5.2	Struttura dei default sistemici	32
5.2.1	Processi di Poisson e struttura della copula	32
5.2.2	Simulazione del tempo di default	35
5.2.3	Le matrici di correlazione	36
5.3	Pricing dell'emissione irlandese	37
5.3.1	Analisi dei flussi	38
5.3.2	Parametri e prezzo	40
5.3.3	Sensibilità ai parametri	43
6	Commenti e Sviluppi	46
A	Valori numerici	49
B	Struttura dei default	56
C	Codice Matlab	57

Elenco delle figure

1	5Y-CDS SPREAD DELLE PRINCIPALI NAZIONI EUROPEE	10
2	SCHEMA DI FLUSSI IN UNA TRADIZIONALE CARTOLARIZZAZIONE	13
3	BASE EURIBOR: 3M CONTRO 6M	26
4	CURVA DEI TASSI IMPLICITA NEGLI US T-BOND (BLU) E NEI BUND TEDESCHI (ROSSO)	27
5	GRECIA: CDS SPREAD (IN USD) A DIVERSE MATURITY E RELATIVE INTENSITÀ DI DEFAULT SINGLE NAME ($R = 40\%$)	30
6	DISTRIBUZIONE EMPIRICA DEI TEMPI DI ARRIVO PER I PROCESSI L- EIB, LG1 E LG3 PER 300000 SIMULAZIONI	36
7	ERRORE E TEMPO DI CALCOLO IN FUNZIONE DEL NUMERO DI SIMU- LAZIONI	42
8	PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DELLA RECOVERY. TUTTI GLI AL- TRI VALORI SONO SUPPOSTI COSTANTI, CON GLI STESSI VALORI DELLA SIMULAZIONE DI MERCATO	44
9	PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DEL COUPON. LE DUE STRUTTURE DI GARANZIA DEL CREDITO SONO, PER QUESTI VALORI DI RECOVERY, ASSIMILABILI	44
10	PV DEL BOND EFSF CON DATE DI EMISSIONE FORWARD. LE DUE STRUTTURE DI GARANZIA SI SOVRAPPONGONO	45
11	CDS SINTENTICO EUROPA	50
12	SCHEMA GRAFICO DEI PROCESSI DI POISSON E DEI RELATIVI FALLI- MENTI IN CASO DI TRIGGER	56

Elenco delle tabelle

1	CONTRIBUTION KEYS ALLA CREAZIONE DEL VEICOLO, DOPO LA CRISI GRECA E DOPO LA CRISI IRLANDESE	15
2	GUARANTEE COMMITMENTS IN MILIONI DI EURO E RATING S&P	16
3	EXTRA AAA CONTRIBUTION KEYS DOPO LO STEPPING-OUT DI IRLANDA E GRECIA	18
4	BOOTSTRAPPING DELLE INTENSITÀ DI DEFAULT PER SINGLE NAME CDS ITALIA E PER DIVERSI VALORI DEL RECOVERY VALUE	31
5	PREZZO DELL'EMISSIONE PER UN NOMINALE PARI A 100 (IN EURO)	40
6	VALORE MEDIO DEL COUPON VERSATO (PERCENTUALE DEL COUPON NON DEFAULT)	41
7	PAGAMENTO MEDIO E MASSIMO RICHIESTO AI GARANTI (MILIONI DI EURO)	42
8	BOND DEL TESORO STATUNITENSI E BUND TEDESCHI CON RELATIVI TASSI DI RENDIMENTO	49
9	CDS SPREAD MID PER LE NAZIONI EUROPEE	50
10	INTENSITÀ SINGLE-NAME RICAVATE DAI CDS SUPPONENDO UNA RECOVERY DEL 40%	51
11	INTENSITÀ DI DEFAULT COSTANTE A TRATTI PER I PROCESSI STRUTTURALI	51
12	CORRELAZIONE TRA I DEFAULT AVVENUTI PRIMA DI T	54
13	PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DELLA RECOVERY	54
14	PV DEL BOND EFSF IN EMISSIONE FORWARD	55
15	PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DEL COUPON	55

Sommario

Obbiettivo di questa tesi è la valutazione della prima emissione obbligazionaria EFSF, avvenuta il 25 gennaio 2011 e collateralizzata dal debito irlandese. L'idea di questo progetto nasce nell'autunno 2010 durante il mio tirocinio a Banca IMI da una reale esigenza lavorativa: i risultati ottenuti costituiscono quindi una totale novità nel panorama italiano, che pone l'Istituto all'avanguardia a livello internazionale. Il complesso sistema di credit enhancement firmato dalla Comunità Europea rende il bond EFSF sostanzialmente differente da un normale titolo di stato: le tradizionali tecniche di pricing si rivelerebbero quindi inadeguate. Attingendo all'ampia letteratura riguardate i derivati di credito individueremo delle caratteristiche che lo rendono simile ad un CDO. Dopo aver ricavato le intensità di default dai CDS delle nazioni europee, attraverso una innovativa ipotesi sulla base di liquidità, saremo in grado di approssimare lo spread creditizio della banca di investimento centrale. Si utilizzerà in seguito una copula di Marshall-Olkin per correlare i processi di Poisson che regolano i default degli stati ed una simulazione di Monte Carlo per approssimarne i tempi di default. Il present value dell'obbligazione sarà il valor medio dei flussi attualizzati generati nei vari scenari. L'intera analisi sarà svolta parallelamente su due possibili sistemi di garanzia: il primo viene delineato nel testo dell'accordo comunitario, il secondo è suggerito dalle maggiori agenzie di rating. Effettueremo infine delle analisi di stress che ci porteranno a preferirne il secondo il cui contributo, seppur irrilevante per l'emissione irlandese, si dimostrerà fondamentale nel caso di un deterioramento della qualità del credito sovrano.

Attraverso questo framework siamo stati in grado di elaborare una stima del prezzo di collocamento con largo anticipo sull'emissione: il valore così trovato si è dimostrato un'ottima approssimazione di quello reale registrato il 25 gennaio; inoltre la scelta del secondo sistema di garanzia, suggerita dal nostro modello, è stata condivisa anche dalla Comunità Europea. Nella prossima sezione definiremo il rischio di credito ed introdurremo i principali derivati usati per mitigarlo; nella sezione 3 analizzeremo il funzionamento del veicolo di stabilità europeo EFSF, descrivendone i due principali meccanismi di credit enhancement; nella sezione 4 introdurremo la distribuzione esponenziale multivariata e la copula di Marshall-Olkin, alla base dell'impianto teorico utilizzato nel pricing; nella sezione 5 applicheremo il modello ai dati di mercato per determinare il present value dell'emissione irlandese e la sua sensibilità ai parametri più importanti; analizzeremo infine i risultati ottenuti delineando i possibili sviluppi e l'applicazione dell'algoritmo alle future emissioni. In appendice saranno riportati tutti i dati di mercato utilizzati per le simulazioni oltre che tutti i listati dei codici Matlab.

Abstract

This graduation thesis aims to evaluate the first EFSF bond issuance collateralised by Irish debt, that took place on 25th January 2011. The idea of this project can be traced back to autumn 2010, during my internship in Banca IMI: all the results obtained are at the cutting edge in the Italian literature.

The complex credit enhancement system set up by the European Union makes the EFSF bond radically different from the average sovereign security: therefore traditional pricing techniques are so not valid. Starting from a thorough reasearch in the credit derivatives literature, our analysis will be followed by some features that make EFSF bond pricing close to the one of a traditional CDO. Once derived the default intensities of European nations from CDS spreads we will be able, with a new hypothesis on the liquidity basis, to approximate the European Central Bank credit spread. Subsequently, we will use a Marshall-Olkin copula to correlate Poisson processes that regulate national default and a Monte Carlo simulation to approximate default times. The bond present value is the average of the discounted cash flows paid in each scenario. The whole analysis will be led on two possible guarantee systems: the first one described in the official European agreement, the second one suggested by the major rating agencies. Finally a stress analysis will lead us to choose the second guarantee system, especially when the sovereign credit quality is seriously compromised.

In January 2011 the implementation of this framework provided an approximation of the real issuance price: thus the value we computed is very close to the one the market showed the 25th of January; furthermore the choice of the second guarantee system, suggested by our analysis, had been shared even by the European Community. In the next section we will define credit risk and we will describe the main derivatives used as hedging instrument; in the third section we will analyse the legal framework of EFSF vehicle, describing the two main systems of credit enhancement; in the forth section will focus on exponential multivariate distribution and the Marshall-Olkin copula, that represent the main building block of our model; in the fifth section we will apply our framework to market data in order to evaluate the present value of the bond issuance collateralised by Irish debt and its sensibility to the main market parameters; finally in the last section we will analyse the results we have obtained and we will discuss the possible development and the application of the algorithm to future bond issuances.

1 Introduzione

L'anno appena trascorso sarà ricordato come l'anno del rischio di credito sovrano. La crisi finanziaria, nata nel 2007 da una cattiva valutazione della rischiosità del debito privato, dopo aver compromesso la liquidità delle grandi istituzioni bancarie europee ed americane, si è infine ripercossa sui garanti di ultima istanza, ovvero gli stati sovrani. Per la prima volta il mercato ha dovuto prendere in conto un rischio fino ad allora tanto ridotto da non essere mai stato considerato: il fallimento delle economie occidentali. Tale rischio assume in Europa una forma del tutto particolare, dettata dagli accordi politici e di stabilità che legano nazioni accumulate da secoli di storia ed interessi; ma è proprio a seguito di questa crisi che le differenze tra i paesi dell'eurozona si accentuano, delineando una Unione Europea a due velocità: da una parte la locomotiva franco-tedesca, dall'altra i *pigs*¹, le economie periferiche che presentano una sempre maggiore difficoltà nel finanziare il proprio debito pubblico. E' in questo contesto tumultuoso che nel maggio 2010 la banca centrale sancisce la creazione di un veicolo di salvataggio, l' EFSF, capace di erogare prestiti agli stati in difficoltà ricorrendo al mercato obbligazionario. Il grande vantaggio di questo veicolo è quello di potersi finanziare a dei costi notevolmente inferiori rispetto alle singole economie, grazie ad un sistema di garanzie che protegge gli investitori dal possibile fallimento della controparte. E' proprio tale meccanismo di credit enhancement a distinguere in modo peculiare le obbligazioni EFSF che, non essendo legate esclusivamente alla rischiosità di un soggetto ma piuttosto a quella di un insieme di stati, assumono caratteristiche simili ad un CDO: il prezzo viene quindi determinato dalla struttura di correlazione che esiste tra i fallimenti.

La letteratura riguardante il rischio di credito e la modellizzazione dei default è ampia ed ha conosciuto un fervente sviluppo fin dalla fine degli anni settanta legandosi, con l'introduzione degli accordi di Basilea, ad aspetti regolamentari. Una prima classificazione tra i diversi modelli può essere articolata attorno a due grandi metodologie: l'approccio strutturale e l'approccio in forma ridotta. In prima approssimazione i modelli che fanno uso di un approccio strutturale permettono la determinazione endogena della probabilità di default e del valore di recovery attraverso la struttura della società, ovvero le attività e passività aziendali. Il primo e più noto esponente di questa famiglia è il modello di Merton (1974) che, utilizzando degli strumenti propri all'option pricing e con delle ipotesi molto simili a quelle di Black-Scholes, permette una valutazione puntuale dell'obbligazione emessa da una società: quest'ultima sarà considerata fallita se e solo se alla data di scadenza la sua capitalizzazione azionaria, che segue un processo di diffusione, è inferiore al suo debito. Sebbene in grado di fornire un risultato in forma chiusa le assunzioni sulle quali si basa questo modello sono troppo forti perche risulti veritiero: l'unica passività dell'emittore è un'obbligazione zero coupon, il valore dell'attivo equivale esattamente alla somma di equity e bond e lo stato di default può essere dichiarato solo in un momento specifico. Un secondo esempio di approccio strutturale fu introdotto

¹ L'acronimo, forgiato dal Financial Times, indica alcuni stati periferici europei: Portogallo, Irlanda, Grecia e Spagna.

da Black-Cox (1976): in questo modello il fallimento avviene al momento del primo passaggio del valore azionario al di sotto di una certa barriera; a differenza di quanto visto precedentemente il default può quindi avvenire in qualsiasi momento. La barriera può essere esogena ed avere la funzione di livello limite per proteggere i creditori obbligazionari (Longstaff-Schwartz) o definita endogeneamente come quel valore che massimizza la capitalizzazione della società per gli azionisti (Leland-Toft). Negli ultimi anni l'approccio del primo passaggio di Black-Cox è stato ulteriormente ampliato portando allo sviluppo di modelli nei quali il fallimento non comporta la liquidazione immediata degli attivi a favore dei debitori ma al contrario rappresenta l'inizio di un ulteriore processo che potrebbe non terminare in una liquidazione. Tale approccio trova riscontri nelle pratiche di mercato dove una azienda in procinto di fallimento può vivere un periodo di amministrazione straordinaria, anche di diversi anni, proprio per evitarne la liquidazione.

Nei modelli a forma ridotta, o ad intensità di default, non esiste una diretta correlazione tra la struttura della società e il fallimento: il tempo di default è modellizzato attraverso il tempo di arrivo di un processo a salti esogeno, i cui parametri sono dedotti da dati di mercato. Un'altra importante differenza risiede nella determinazione del recovery rate: mentre nei modelli strutturali il suo valore è funzione degli attivi e dei passivi al momento del fallimento, nei modelli in forma ridotta è un dato esterno. Questa classe di modelli, che si presentano per costituzione più versatili e facilmente calibrabili, hanno conosciuto nel corso dell'ultimo ventennio un notevole sviluppo nella simulazione di fallimenti correlati tra più soggetti: essi giocano quindi un ruolo centrale nel pricing di strutture il cui valore dipende da un portafoglio di debiti, come i CDO o i basket default swap. Tradizionalmente si sono seguite due diverse strade per incorporare la correlazione tra i default. La prima, e la più semplice, consiste nell'introdurre una correlazione nelle dinamiche delle intensità di default, lasciando invece il modello inalterato. Questo approccio ha numerosi svantaggi: il livello di correlazione che è possibile raggiungere è generalmente troppo basso e la correlazione tra i tempi di default è difficilmente analizzabile. In Davis-Lo (1999), ad esempio, le intensità di default saltano simultaneamente verso l'alto di una quantità deterministica al verificarsi di un evento di credito. Benché molto intuitivo questo modello risulta difficilmente calibrabile partendo dalle intensità single-name: parametri come l'ampiezza del salto non possono essere direttamente ricavati dai dati di mercato. La seconda strada tradizionalmente seguita nell'implementare la correlazione, e nella quale si colloca anche questo lavoro, trova spunto nei lavori di Duffie-Singleton (1998) e nei successivi sviluppi di Kijima (2000): per avere una forte dipendenza tra i fallimenti simuliamo più processi di arrivo, tra di loro indipendenti, ma capaci di provocare i default di più enti simultaneamente. La struttura di correlazione così definita sarà fortemente non lineare e potrà essere descritta attraverso una copula. Seguendo Marshall-Olkin (1967) in questa tesi i singoli processi di arrivo saranno dei processi di Poisson indipendenti che andranno così a delineare una probabilità di sopravvivenza multivariata esponenziale.

Il veicolo EFSF è particolarmente giovane e per questo la letteratura a suo

riguardo è ancora scarsa. Il crescente interesse intorno all'argomento è tuttavia confermato dall'alto numero di ricerche tecniche recentemente pubblicate: fra le più significative ricordiamo le pubblicazioni di Deutsche Bank dell'ottobre 2010 o quella di Société Générale del marzo 2011. In entrambe le ricerche vengono posti a confronto i due diversi sistemi di garanzia, analizzandone i benefici ed i costi aggiuntivi per gli stati garanti: è nel solco tracciato da questa discussione che si inserisce questa tesi di laurea.

Nella prossima sezione definiremo il rischio di credito, con particolare attenzione a quello sovrano: indicandone le caratteristiche che lo rendono peculiare ne descriveremo l'evoluzione durante la recente crisi finanziaria; saranno inoltre introdotti i principali derivati di credito, sia quelli legati ad una singola entità sia quelli il cui valore dipende da un basket di titoli e quindi dalla loro correlazione. Nella sezione 3 introdurremo il veicolo EFSF, creato nel corso del 2010 dalla Comunità Europea; dopo averne descritto le funzionalità e le somiglianze con un SPV dettaglieremo il sistema di credit enhancement inizialmente votato dalla commissione comparandolo con quello invece proposto da Moody's: in questo secondo caso i paesi dotati del migliore rating creditizio (AAA) dovranno garantire, nel caso ne fosse necessario, un'ulteriore parte del debito, in modo da coprirlo totalmente. La sezione 4 costituirà invece il nucleo teorico della nostra tesi: introdurremo la distribuzione esponenziale bivariata analizzandone le principali proprietà, la funzione generatrice dei momenti, la correlazione implicita e ne quantificheremo la differenza dal caso indipendente. Il modello bivariato verrà quindi esteso al caso multivariato, che ci permetterà di derivare la distribuzione della probabilità di sopravvivenza congiunta di più stati; dimostreremo infine come la struttura di correlazione così introdotta sia rappresentabile in forma di copula di Marshall-Olkin. Nella sezione 5 descriveremo l'implementazione del nostro modello, cominciando col ricavare l'intensità di default delle singole nazioni implicita nei CDS single-name; attraverso un'innovativa assunzione sulla base di liquidità saremo in grado di stimare la probabilità di fallimento della Comunità Europea, ovvero la probabilità che alcuni stati, benché non in default, decidano spontaneamente di non onorare gli accordi comunitari. Le intensità così ricavate verranno quindi ridistribuite su 8 processi di Poisson indipendenti, alcuni idiosincratici ad una particolare economia, altri legati al default di più stati. Dopo aver descritto l'algoritmo utilizzato per simulare i tempi di arrivo potremo ricavare l'evoluzione della matrice di correlazione e, attraverso un metodo Monte Carlo, il valore medio dei flussi scontati ricevuti dal possessore di un'obbligazione EFSF. I risultati ottenuti saranno infine contestualizzati all'interno dell'attuale panorama del mercato creditizio e verranno confrontati con il reale prezzo di collocamento dell'emissione registrato il 25 gennaio 2010; un'analisi di scenario ci permetterà di esprimerci a favore del sistema di credit enhancement proposto da Moody's, in grado di proteggere gli investitori anche con valori di recovery più bassi di quelli attuali. Infine nella sezione 6 descriveremo i principali sviluppi e le modifiche necessarie per adattare il modello alle possibili successive emissioni del veicolo. In appendice verranno riportati in forma estesa i dati di mercato utilizzati per le simulazioni, i risultati ottenuti e il listato dei codici Matlab.

2 Credit Risk and Credit Derivatives

2.1 Il Rischio di Credito

Il rischio di credito è onnipresente sui mercati finanziari e riguarda tutti i tipi di contratto: nella sua definizione più generale possiamo interpretare questo rischio come la possibilità che un debitore non oneri i suoi obblighi di pagamento. Questa definizione comprende solo il rischio di un mancato pagamento da parte del debitore e non si preoccupa del rischio del fallimento del debitore a sé stante: un ente senza obblighi di pagamento non avrà quindi un rischio di fallimento.

In principio, dunque, un debitore potrebbe scegliere di fallire solo rispetto a certi obblighi, rispettandone altri. Questo tipo di atteggiamento fraudolento viene impedito dalla legge, che disciplina delle procedure fallimentari. Grazie ad esse possiamo parlare, in generale, di rischio di credito, senza dover specificare a quale particolare contratto ci riferiamo: un debitore ha l'obbligo di rispettare tutti i suoi debiti, finquando ne è capace. Se, per diverse ragioni, non è più in grado di rispettare i pagamenti dovuti, la legge lo obbligherà a seguire una procedura fallimentare, nella quale gli attivi dell'ente fallito verranno usati per ripagare, secondo una scala di priorità, i debitori.

2.1.1 Il rischio di credito sovrano: considerazioni post-crisi

Il rischio di credito sovrano ha delle caratteristiche che lo distinguono dal normale rischio di credito. Inanzitutto una nazione, essendo un ente giuridico indipendente, non è soggetta a procedura fallimentare che regolamenti la divisione degli assets fra i debitori. Inoltre, il fallimento di uno stato è anche un decisione politica (e non solo finanziaria), spesso influenzata da fattori macroeconomici e da un moral hazard più alto di quanto avviene nel settore industriale: essenzialmente non vi è nessuna sicurezza per l'investitore che uno stato paghi i suoi debiti, anche se possiede i mezzi per farlo. Esistono diversi credit events che possono intaccare la qualità creditizia di un bond sovrano, fra questi si possono citare:

- **default/repudiation:** la nazione annuncia che interromperà i pagamenti del servizio di debito
- **ristrutturazione:** la nazione e i suoi debitori si accordano per ridurre o ritardare i pagamenti restanti
- **regime switch:** un cambiamento di governo (pacifico o meno). Spesso il nuovo governo potrebbe preferire pagare i bond da lui emessi piuttosto che quelli legati al vecchio assetto politico

Allo stato attuale gli stati europei contraggono debito in due modi²:

- **singolarmente**, emettendo obbligazioni in euro garantite dalla banca nazionale (p.es. i BPT per l'Italia)

² Per maggiori informazioni riguardo il rischio di credito sovrano rimandiamo a [Bib.4]

- **comunitariamente**, partecipando alla EIB, l'European Investment Bank, la quale, a sua volta, emette delle obbligazioni. Come avremo modo di vedere meglio in seguito il rischio di credito per questi *eurobond* è legato alla stabilità degli accordi europei. Facciamo notare che queste obbligazioni sono emesse in diverse valute, principalmente EUR, USD e GBP

Se, prima del collasso di Lehman Brothers, gli stati europei venivano omogeneamente considerati a rischio nullo ora, in seguito al credit crunch ed alle misure intraprese per immettere liquidità nei mercati, esistono delle grandi differenze nella qualità del credito.

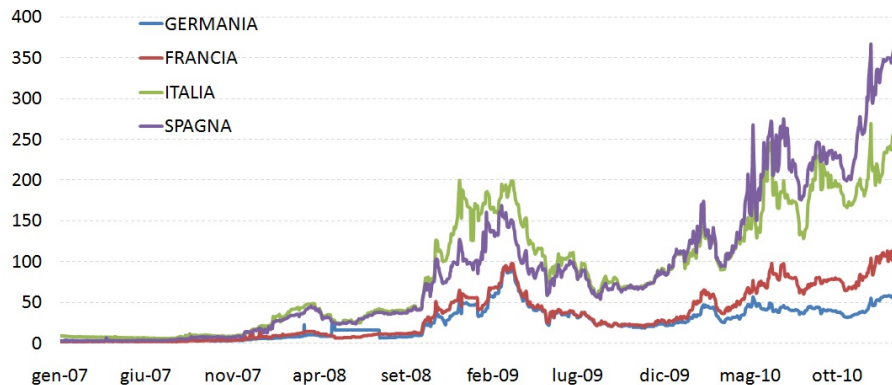


Fig. 1: 5Y-CDS SPREAD DELLE PRINCIPALI NAZIONI EUROPEE

2.2 I derivati di credito

Il mercato dei derivati di credito è essenzialmente giovane, ed ha conosciuto un radicale sviluppo alla fine degli anni novanta. I primi prodotti ad essere stati commercializzati furono semplici swap di rischio di credito; oggi questi costituiscono i mattoni di base di strutture ben più esotiche, tant'è che il termine *credit derivative* si applica ormai ad un'ampia classe di titoli. In modo del tutto generale possiamo darne la seguente definizione:

Un credit derivative è un titolo il cui payoff è condizionato al verificarsi di un credit event. Questo credit event è definito rispetto ad una reference entity ed ad un reference asset da lei emesso. Se si verifica il credit event una controparte dovrà provvedere al default payment.

Chiariamo il significato dei diversi termini appena introdotti:

- **Reference entity:** è l'ente oggetto della protezione, quell'ente che ha emesso il titolo contro il cui mancato rimborso ci si vuole proteggere. Gli esempi più comuni sono corporate o un enti pubblici

- **Reference asset:** è il titolo, emesso dalla reference entity, sul quale si scrive la protezione. In generale si tratta di obbligazioni o di prestiti
- **Credit event:** è un generico evento, riferito alla reference entity, che può mettere a rischio i flussi di cassa generati dal reference asset. La definizione di credit event può includere:
 - bancarotta
 - default dell'obbligazione
 - ristrutturazione del debito
 - downgrade del rating dell'emittente
- **Default payment:** è il pagamento che la controparte deve effettuare al possessore del derivato di credito, nel caso di un credit event. Si tratta della caratteristica fondamentale che definisce il tipo di derivato, e vedremo che può assumere diverse forme
- **Controparte:** è l'ente che garantisce, al possessore del credit derivative, il default payment

La chiave del successo di questi derivati è la capacità di isolare il rischio di credito, rendendolo tradabile indipendentemente. Nel mercato tradizionale ogni contratto comporta inevitabilmente un rischio di controparte, ovvero la possibilità che la mia controparte non rispetti i termini di pagamento. I derivati di credito permettono agli investitori di coprire questo rischio, vendendolo ad altri.

Analizziamo ora due credit derivatives che saranno particolarmente importanti per le successive simulazioni. Per una descrizione più ampia dei diversi derivati rimandiamo a [Bib.1].

2.2.1 CDS

Si tratta sicuramente del credit derivative più comune e liquido sul mercato. In questo paragrafo ne evidenzieremo il funzionamento in termini generali; il pricing verrà affrontato nella sezione 5.

Un credit default swap (CDS) è un contratto tra due parti, nel quale il compratore (protection buyer) effettua dei pagamenti periodici al venditore (protection seller), ricevendo, in caso di un credit event, un default payment. Per la valutazione di un CDS dovranno allora essere presi in conto:

- **Nozionale:** definisce la dimensione del contratto, che può essere diversa da quella del reference asset
- **Spread:** la percentuale annuale di nozionale che, periodicamente e fino ad un credit event, il buyer dovrà corrispondere al seller. Nel caso in cui il credit event avvenga tra due date di pagamento dello spread, il buyer dovrà corrispondere anche lo spread proporzionale al tempo passato tra l'ultimo pagamento e la data di default

- **Maturity:** la durata del contratto, passata la quale buyer e seller non avranno più obblighi di pagamento
- **Recovery Value:** è una stima della percentuale del valore, dopo il default, del reference asset
- **Tenor:** è la frequenza con la quale il protection buyer dovrà pagare lo spread al seller

Nel caso si verifichi default si avranno dunque due flussi di cassa opposti:

1. Il buyer pagherà al seller l'accrual spread factor, ovvero quella parte di spread accantonato, ma non ancora versato, dall'ultimo pagamento alla data di default
2. Il seller pagherà al buyer $[1 - recovery]$ del nozionale

2.2.2 CDO³

Ora al centro della recente crisi finanziaria, i collateralized debt obligation sono gli strumenti di gestione del rischio di credito che hanno conosciuto, nell'ultimo ventennio, il più grande sviluppo. Il primo CDO venne emesso nel 1987, ma la vera crescita cominciò solo un decennio dopo: nel mercato entrarono un numero sempre crescente di investitori, come le compagnie di assicurazione, i fondi di investimento, le banche di investimento ed i fondi pensione. Il numero di emissioni è cresciuto da circa 20 miliardi di USD ad inizio 2004 a più di 180 miliardi alla fine del 2006, momento di massimo sviluppo.

I CDO possono variare per struttura e tipo di sottostante, ma il principio di base è sempre lo stesso: i flussi di pagamento generati da un portafoglio di titoli a reddito fisso sono raccolti e distribuiti agli investitori secondo un ordine preciso. Se il denaro raccolto è insufficiente per pagare tutti gli investitori la perdita si ripercuoterà a partire da quelli con minor priorità di pagamento. Per avere un CDO viene creato un veicolo, l' SPV che acquista un portafoglio di assets (nel caso più comune dei prestiti immobiliari); per finanziare tale acquisto il veicolo emette delle particolari obbligazioni, i CDO appunto, divise in categorie di rischio, le *tranches*. La tranche senior avrà priorità nel ricevere i coupon e il nozionale rispetto alle tranches subordinate, chiamate junior. Una ulteriore tranche equity assorbirà le primissime perdite. Una simpatica analogia è di pensare ai cash flow del portafoglio di titoli sottostanti un CDO come ad un flusso d'acqua che scorre per riempire delle tazze. Le prime ad essere riempite saranno quelle senior, poi le junior ed infine le equity. Se nessun debito sottostante è in default l'acqua sarà sufficiente a riempire tutte le tazze mentre, man mano che i debitori divengono insolventi, le ultime tazze riceveranno sempre meno acqua.

Nel valutare una tranche CDO si devono prendere in conto tre elementi:

³ Più informazioni sui rischi ed il pricing dei CDO in [Bib.5]

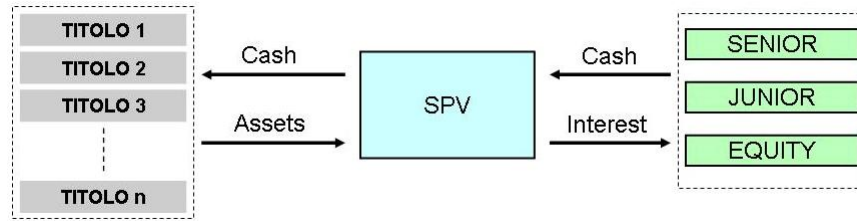


Fig. 2: SCHEMA DI FLUSSI IN UNA TRADIZIONALE CARTOLARIZZAZIONE

- La subordinazione: indica la percentuale di fallimenti nel portafoglio titoli a partire dalla quale la tranche avrà uno shortfall nei pagamenti. In generale la tranche equity assorbe le perdite da un default del 0% del portafoglio fino a un default pari a circa il 2-3% del portafoglio. Ciò significa che quando la percentuale di fallimenti supera il 3% anche la tranche junior subirà delle perdite.
- La distribuzione dei default: per un investitore in un CDO la regolarità e la qualità dei pagamenti è legata alla probabilità di default dei titoli del portafoglio. Il parametro di maggior impatto è sicuramente la correlazione tra i fallimenti: se è molto alta la probabilità di uno shortfall anche nelle tranches senior aumenta.
- Il coupon: è l'interesse ricevuto dall'acquirente di una tranche, se non vi sono shortfall che ne intaccano la rendita. Ovviamente le tranches più subordinate avranno un coupon più elevato di quelle senior.

In un mercato perfetto, senza possibilità di arbitraggio, una cartolarizzazione CDO non servirebbe a niente, ed i costi legali di costruzione e marketing ne inibirebbero la creazione. Nella realtà i CDO sfruttano invece importanti imperfezioni di mercato: in primo luogo le banche (ed in genere le istituzioni finanziarie) hanno interesse a cartolarizzare dei portafogli di attivi per diminuire la richiesta di capitale regolamentare. Secondariamente, alcuni bond o prestiti possono essere particolarmente illiquidi, e quindi con un basso valore di mercato: se cartolarizzati in un portafoglio possono recuperare liquidità ed aumentare di conseguenza il loro valore.

3 European Financial Stability Facility - EFSF

In seguito alla crisi greca, il 9 maggio 2010 i sedici stati dell'area euro hanno firmato un accordo che decreta la creazione dell'EFSF, veicolo europeo per il salvataggio delle economie dell'eurozona in difficoltà. Cerchiamo in questa sezione di dare una rapida, ma completa, descrizione del veicolo. Per una lettura più approfondita rimandiamo al testo originale dell'accordo ([Bib.3]).

3.1 Struttura e obiettivi

Tale organismo, con sede in Lussemburgo, ha una governance direttamente eletta dalla EIB, la banca d'investimento europea. Il suo scopo è quello di garantire la stabilità del sistema economico della zona euro, garantendo agli stati in difficoltà la liquidità a basso costo che non potrebbero trovare sul mercato.

L'accordo sancisce che, nel caso uno stato europeo si trovi in difficoltà, ha il diritto di chiedere un prestito all'EFSF per una durata indicativa di 3 anni. Per finanziare tale prestito l'organismo, agendo come un vero SPV, emette sul mercato mondiale dei bond, collateralizzati dal prestito effettuato verso lo stato in difficoltà. Gli altri stati europei, che non hanno ancora chiesto l'aiuto dell'EFSF garantiscono⁴, in quote proporzionali, queste obbligazioni, che possono quindi essere vendute ad un tasso meno elevato (essendo percepite dal mercato meno rischiose).

Durante i tre anni lo stato che ha ricevuto la sovvenzione deve garantire i pagamenti degli interessi sui bond emessi dal veicolo, e ripagarne il nozionale alla fine del prestito.

Dopo questa breve descrizione potremmo pensare ad i bond EFSF come alla tranche super-senior di un normale CDO; come molti hanno fatto notare esistono tuttavia delle sostanziali differenze. Infatti nel veicolo le nazioni dell'eurozona possono apparire sia sul lato sinistro del bilancio (come debitori del EFSF attraverso i prestiti che hanno ricevuto) sia sul quello destro (come garanti), a seconda della loro situazione economica in quel momento. Bisogna inoltre ricordare che ogni emissione di EFSF bond avrà un diverso insieme di garanti: è quindi difficile assegnare, a priori, un singolo rating a tutte le emissioni.

3.2 Credit enhancement

Per poter valutare le obbligazioni emesse dall'EFSF è indispensabile chiarire il sistema di garanzie legate a ciascuna emissione poiché, in caso di fallimento della nazione debitrice, sarà determinante per il ripagamento dei creditori.

3.2.1 Contribution key e stepping out member

All'interno dei sedici stati costituenti l'EFSF definiamo stepping out members quegli stati che hanno già ricorso ad un prestito da parte del veicolo. Al momento

⁴ Per maggiori informazioni riguardo ai meccanismi di *credit enhancement* fare riferimento al paragrafo successivo

di costituzione del veicolo, luglio 2010, la Grecia, che ha già ricevuto da parte dell'Europa un prestito (anche se non attraverso l' EFSF) è l'unico stepping out member. Nel momento in cui uno stato europeo chiede un prestito all' EFSF esso diviene uno stepping out member: egli non dovrà più garantire per i successi prestiti dell' EFSF ma, al contrario, sarà ancora garante delle emissioni precedenti il suo stepping out.

Ogni prestito sarà garantito al 100% dagli stati partecipanti all'EFSF che non sono stepping out members; all'atto di formazione del veicolo ogni stato ha avuto una contribution key, ovvero la percentuale dell'emissione che dovrà garantire. Quando una nazione chiede un sussidio, gli altri stati, che non appartengono al gruppo degli stepping out, dovranno ripartirsi la sua quota di garanzia. Dopo la crisi greca e irlandese i membri garanti saranno solo i quattordici stati restanti.

CONTRIBUTION KEY	CREAZIONE EFSF	POST GRECIA	POST IRLANDA
AUSTRIA	2,76%	2,86%	2,91%
BELGIO	3,47%	3,57%	3,63%
CIPRO	0,20%	0,21%	0,22%
FINLANDIA	1,80%	1,85%	1,88%
FRANCIA	20,3%	20,9%	21,3%
GERMANIA	27,1%	27,9%	28,4%
GRECIA	2,82%	-	-
IRLANDA	1,59%	1,64%	-
ITALIA	17,9%	18,4%	18,7%
LUSSEMBURGO	0,25%	0,26%	0,26%
MALTA	0,09%	0,09%	0,10%
OLANDA	5,71%	5,88%	5,98%
PORTOGALLO	2,51%	2,58%	2,62%
SLOVACCHIA	0,99%	1,02%	1,04%
SLOVENIA	0,47%	0,48%	0,49%
SPAGNA	11,9%	12,3%	12,5%
	100%	100%	100%

Tab. 1: CONTRIBUTION KEYS ALLA CREAZIONE DEL VEICOLO, DOPO LA CRISI GRECA E DOPO LA CRISI IRLANDESE

3.2.2 Guarantee Commitments

Alla stipula dell'accordo ogni nazione ha pattuito il montante massimo del quale essa si porterà garante. Tale tetto massimo, che prende il nome di guarantee commitment, è proporzionale alla quota di partecipazione all'interno della Comunità Europea. Alla momento della stipula del contratto il veicolo aveva una capacità di emissione di 440 miliardi di euro ma ora, dopo il prestito greco e irlandese, la sua capacità di emissione è ridotta a circa 420 miliardi.

	RATING	GUARANTEE
AUSTRIA	AAA	12241
BELGIO	AA+	15292
CIPRO	A+	863
FINLANDIA	AAA	7905
FRANCIA	AAA	89657
GERMANIA	AAA	119390
GRECIA	BB+	12388
IRLANDA	A-	7002
ITALIA	AA	78785
LUSSEMBURGO	AAA	1010
MALTA	A	398
OLANDA	AAA	25144
PORTOGALLO	A	11037
SLOVACCHIA	A+	4372
SLOVENIA	AA	2071
SPAGNA	AA	52353
		440000

Tab. 2: GUARANTEE COMMITMENTS IN MILIONI DI EURO E RATING S&P

3.2.3 Calcolare la garanzia

Ora che, per ogni nazione europea, abbiamo definito la contribution key e il guarantee commitment stabiliamo il montante massimo di cui le nazioni si porteranno garanti nel momento di un'emissione. Ogni stato garantirà ciascuna emissione per un montante:

1. in percentuale di nozionale non superiore al 120% della contribution key
2. tale che la garanzia globalmente allocata (per questa emissione e per quelle precedenti) non superi la guarantee commitment

Possiamo riassumere queste condizioni in un'unica formula. Indicando con $g_{i,j}$ il montante massimo di cui lo stato i -esimo si porterà garante per l'emissione j -esima si avrà:

- $g_{i,j} = \max\left(0; \min\left(G_i - \sum_{n < j} g_{i,n}; 120\% \cdot K_{i,j} \cdot N_j\right)\right)$ se lo stato non è stepping-out
- $g_{i,j} = 0$ se lo stato è stepping-out

dove abbiamo indicato con G_i il guarantee commitment per lo stato i -esimo, $K_{i,j}$ la contribution key per lo stato i -esimo e l'emissione j -esima e N_j il montante dell'emissione j -esima.

Evidentemente per le prime emissioni la limitazione più stringente alle capacità di garanzia verrà dal poter contribuire solamente al 120% del nozionale. Come avremo modo di vedere in seguito nelle simulazioni numeriche il guarantee commitment sarà, per l'emissione irlandese, un vincolo molto debole

3.2.4 Extra AAA-commitment

Nell'autunno 2010 le tre maggiori agenzie di rating hanno pubblicato delle analisi sui bond EFSF ([Bib.2]), anche in prospettiva dell'imminente crisi irlandese. In particolar modo Moody's ha fatto notare che le caratteristiche del tutto peculiari che distinguono il veicolo europeo da un classico CDO lo rendono particolarmente esposto ad un rischio sistemico. La logica del stepping-out members va infatti a ridurre le capacità di finanziamento del veicolo proprio quando il suo aiuto sarà indispensabile.

Per questo motivo Moody's ha proposto un cash buffer, che garantisca alle emissioni EFSF un rating AAA. Affidando maggiori responsabilità alle grandi economie europee, l'agenzia di rating propone che alla normale garanzia venga aggiunto un'ulteriore contributo delle economie AAA, in modo che esse, da sole, garantiscano il 100% del nozionale di emissione. Non essendo ancora chiaro in questo momento se la EIB seguirà questo consiglio (anche se sembra inevitabile, data la necessità del finanziamento a basso costo che solo un rating AAA può garantire), nelle simulazioni questa ipotesi verrà trattata singolarmente. Il credit enhancement viene allora modificato nel seguente modo:

- i guarantee commitments rimangono inalterati, la capacità di finanziamento del veicolo resta dunque di 440 miliardi di euro
- ai paesi AAA sarà chiesta, solo qualora il 120% delle contribution keys dei garanti non sia sufficiente, un'ulteriore garanzia. Tale garanzia aggiuntiva sarà tale che, se sommata al 120% delle contribution keys dei paesi AAA, garantisca la totalità del nozionale

Riassumendo la garanzia massima dello stato i -esimo per l'emissione j -esima sarà pari a:

- $g_{i,j} = \max \left(0; \min \left(G_i - \sum_{n < j} g_{i,n}; 120\% \cdot K_{i,j} \cdot N_j \right) \right)$ se lo stato non è stepping-out e non è AAA
- $g_{i,j} = \max \left(0; \min \left(G_i - \sum_{n < j} g_{i,n}; [120\% \cdot K_{i,j} + A_i] \cdot N_j \right) \right)$ e lo stato non è stepping-out ma è AAA
- $g_{i,j} = 0$ se lo stato è stepping-out

dove A_i è l'extra AAA contribution. Da notare che se, come probabile, a diventare stepping out saranno le piccole economie, il valore del cash buffer si restringerà: le grandi economie AAA saranno infatti gli unici garanti.

CONTRIBUTION KEY	STANDARD	EXTRA AAA
AUSTRIA	2,91%	1,30%
BELGIO	3,63%	
CIPRO	0,22%	
FINLANDIA	1,88%	0,84%
FRANCIA	21,3%	9,52%
GERMANIA	28,4%	12,7%
GRECIA	-	
IRLANDA	-	
ITALIA	18,7%	
LUSSEMBURGO	0,26%	0,12%
MALTA	0,10%	
OLANDA	5,98%	2,67%
PORTOGALLO	2,62%	
SLOVACCHIA	1,04%	
SLOVENIA	0,49%	
SPAGNA	12,5%	
	100%	27%

Tab. 3: EXTRA AAA CONTRIBUTION KEYS DOPO LO STEPPING-OUT DI IRLANDA E GRECIA

4 Il modello matematico

La misura del rischio di credito comporta una stima delle perdite aggregate. I derivati di credito, permettendoci di isolare e vendere questo rischio attraverso un payoff condizionato ad un evento di credito, ci aiutano nella gestione dei rischi di default. Per stimare i tempi di default correlati utilizzeremo, ispirandoci al lavoro di Duffie & Garleanu (2001), un modello ad intensità multivariato. Il modello è basato sull'idea che il fallimento di uno stato può essere causato da differenti shock: uno shock idiosincratice, legato alle caratteristiche peculiari di quella economia, ed altri shock legati a situazioni macroeconomiche che interessano più soggetti. I loro tempi di arrivo saranno modellizzati attraverso dei processi di Poisson indipendenti. Attraverso questa struttura sarà possibile ricavare, in forma esplicita, i momenti, le correlazioni, le probabilità marginali di default e quelle congiunte. Nella prima sezione tratteremo il modello nel caso di due soli soggetti per poi estenderlo, nella sezione successiva, al caso multivariato; deriveremo infine la struttura della copula di Marshall-Olkin naturalmente implicita in questa impostazione.

4.1 Il caso bivariato

Cominciamo derivando le proprietà di base nel caso bivariato, con due nazioni che chiameremo 1 e 2. L'idea è di supporre che i loro fallimenti possano essere provocati sia da degli shock idiosincratice sia da uno shock sistemico, comune ad entrambi; per far questo utilizziamo tre processi di Poisson indipendenti N_1, N_2 e N_{12} rispettivamente con intensità λ_1, λ_2 e λ_{12} . Interpretiamo λ_i come l'intensità dello shock idiosincratice dell'ente i , mentre λ_{12} è l'intensità dello shock macroeconomico che interesserà entrambi i soggetti. Definiamo il default time τ_i dell'ente i come

$$\tau_i = \inf \{t \geq 0 : N_i(t) + N_{12}(t) > 0\} \quad (1)$$

Si ha quindi un default al primo shock subito, indipendentemente che sia idiosincratice o sistemico. Facciamo notare che vi è una probabilità positiva di fallimento simultaneo dei due enti, contrariamente al modello senza shock comuni. La probabilità di sopravvivenza marginale per l'ente i è

$$\bar{F}_i(t) = P[\tau_i > t] = P[N_i(t) + N_{12}(t) = 0] = e^{-(\lambda_i + \lambda_{12})t} \quad (2)$$

il tempo atteso di default e la sua varianza sono dati da

$$E[\tau_i] = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_{12}} \quad \text{Var}[\tau_i] = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_{12})^2}$$

e la probabilità di sopravvivenza congiunta sarà

$$\bar{F}(t, s) = P[\tau_1 > t, \tau_2 > s] = P[N_1(t) = 0, N_2(s) = 0, N_{12}(t \vee s) = 0]$$

che grazie all'indipendenza e alla relazione $\max(t, s) = t + s - \min(t, s)$ sarà

$$\bar{F}(t, s) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 s} e^{-\lambda_{12} \max(t, s)}$$

$$\bar{F}(t, s) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})t - (\lambda_2 + \lambda_{12})s + \lambda_{12} \min(t, s)) \quad (3)$$

$$\bar{F}(t, s) = \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(s) \cdot \min(e^{\lambda_{12} t}; e^{\lambda_{12} s}) \quad (4)$$

D'ora in avanti ci riferiremo a questa distribuzione bivariata indicandola con $BVE(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$. Esploriamone ora le principali caratteristiche.

4.1.1 Vita residua e indipendenza dal passato

Una caratteristica fondamentale della distribuzione esponenziale, nel caso univariato, è quella di essere condizionatamente indipendente dal passato

$$P\{X > s + t \mid X > s\} = P\{X > t\} \quad \forall s, t \geq 0$$

cioè la probabilità di sopravvivenza al tempo $s + t$, data la sopravvivenza al tempo s , è uguale alla probabilità non condizionata al tempo t ; equivalentemente ho

$$\bar{F}(s + t) = \bar{F}(s) \cdot \bar{F}(t) \quad (5)$$

Data l'importanza di questa proprietà nel caso univariato cerchiamo di vedere sotto quali condizioni essa si mantiene valida anche nel caso multivariato. La più ovvia estensione di (5) è

$$\bar{F}(s_1 + t_1, s_2 + t_2) = \bar{F}(s_1, s_2) \cdot \bar{F}(t_1, t_2) \quad (6)$$

Si dimostra che la soluzione di questa equazione funzionale è

$$\bar{F}(s, t) = e^{-(\theta_1 s + \theta_2 t)} \quad (7)$$

Quindi (6) implica una distribuzione congiunta prodotto delle marginali: evidentemente (6) è un'assunzione troppo forte per fornire una distribuzione multivariata esponenziale non banale. Indeboliamo questa assunzione, chiedendo che la probabilità di sopravvivenza di entrambi i soggetti ad un tempo addizionale $s = (s_1, s_2)$, condizionata a t , sia uguale alla probabilità incondizionata di sopravvivenza allo stesso tempo s se ci troviamo nella origine dei tempi

$$P\{X > s_1 + t, Y > s_2 + t \mid X > t, Y > t\} = \{X > s_1, Y > s_2\}$$

ovvero

$$\bar{F}(s_1 + t, s_2 + t) = \bar{F}(s_1, s_2) \cdot \bar{F}(t, t) \quad \forall s_1, s_2, t \geq 0 \quad (8)$$

che rappresenta una forma debole di (6). Dato che (8) è equivalente a

$$P\{X > s_1 + t, Y > s_2 + t \mid X > s_1, Y > s_2\} = \{X > t, Y > t\}$$

essa afferma che la probabilità che le nazioni non siano fallite a t unità temporali da s è la medesima che si avrebbe se entrambe le nazioni fossero state appena fondate. La soluzione di questa equazione funzionale è data da

$$\bar{F}(x, y) = \begin{cases} e^{-\theta y} \bar{F}_1(x - y) & x \geq y \\ e^{-\theta x} \bar{F}_2(y - x) & y \geq x \end{cases}$$

dove abbiamo indicato le distribuzioni marginali $F(t, 0)$ e $F(0, t)$ con $\bar{F}_1(t)$ e $\bar{F}_2(t)$ rispettivamente. Inserendo le distribuzioni marginali esponenziali avremo la probabilità congiunta di sopravvivenza

$$\bar{F}(x, y) = \begin{cases} \exp[-\theta y - \delta_1(x - y)] & x \geq y \\ \exp[-\theta x - \delta_2(y - x)] & y \geq x \end{cases}$$

dove se $\delta_1 + \delta_2 \geq \theta$ posso sostituire $\delta_1 = \lambda_1 + \lambda_{12}$, $\delta_2 = \lambda_2 + \lambda_{12}$ e $\theta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$ ottenendo la BVE data da (3).

4.1.2 Momenti e correlazione

Dal momento che stiamo considerando variabili aleatorie positive, la trasformata di Laplace esiste, può essere calcolata e coinciderà con la funzione generatrice dei momenti. Indicando con $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$ la trasformata è data da

$$\psi(s, t) = \int \int_0^\infty e^{-sx - ty} dF(x, y) = \frac{(\lambda + s + t)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}) + st\lambda_{12}}{(\lambda + s + t)(\lambda_1 + \lambda_{12} + s)(\lambda_2 + \lambda_{12} + t)} \quad (9)$$

Dalle distribuzioni marginali troviamo

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} & Var[X_i] &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_{12})^2} \\ E[Y] &= \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12}} & Var[Y_i] &= \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_{12})^2} \end{aligned}$$

e dalla funzione generatrice dei momenti ottengo

$$E[XY] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial t} \Big|_{s=t=0} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12}} \right)$$

quindi la covarianza sarà data da

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{\lambda_{12}}{(\lambda)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})} \quad (10)$$

$$\rho(X, Y) = Cov(X, Y) / \sqrt{Var[X]Var[Y]} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda} \quad (11)$$

4.1.3 Confronto con il caso indipendente

E' interessante vedere come la distribuzione multivariata esponenziale - nella quale esiste una correlazione tra i default - si comporti rispetto ad una classica distribuzione esponenziale con fallimenti indipendenti. Supponendo che le probabilità di sopravvivenza marginale siano

$$\bar{F}_1(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t} \quad \bar{F}_2(s) = e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})s}$$

evidentemente la differenza

$$\bar{F}(t, s) - \bar{F}_1(t) \cdot \bar{F}_2(s) = e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 s - \lambda_{12} \max(t, s)} (1 - e^{-\lambda_{12} \min(t, s)}) > 0$$

e quindi la probabilità che entrambi sopravvivano a qualunque t, s è più grande di quanto troviamo nel caso di indipendenza. Per determinare il punto in cui la differenza tra l'assunzione di indipendenza e quella di dipendenza è massima

$$\max_{t, s} [\bar{F}(t, s) - \bar{F}_1(t) \cdot \bar{F}_2(s)]$$

notiamo che se $t < s$

$$\bar{F}(t, s) - \bar{F}_1(t) \cdot \bar{F}_2(s) = e^{-\lambda_1 t - (\lambda_2 + \lambda_{12})s} (1 - e^{-\lambda_{12} t})$$

è decrescente per s così che

$$\bar{F}(t, s) - \bar{F}_1(t) \cdot \bar{F}_2(s) \leq e^{-(\lambda) \min(t, s)} (1 - e^{-\lambda_{12} \min(t, s)})$$

e il massimo del lato destro si ha per

$$\min(t, s) = \lambda_{12}^{-1} \log(1 + \lambda_{12}/\lambda)$$

Per quanto visto precedentemente $\lambda_{12}/(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}) = \rho(t, s)$ è la correlazione tra i tempi di default ed allora ho che la massima discrepanza può essere scritta in questi termini

$$\max_{t, s} [\bar{F}(t, s) - \bar{F}_1(t) \cdot \bar{F}_2(s)] = \left[\frac{\rho^\rho}{(1 + \rho)^{1+\rho}} \right]^{1/\rho} \quad (12)$$

4.2 Estensione al caso multivariato

Estendiamo ora il modello di default a due variabili appena introdotto nel caso generale multivariato con un numero di soggetti $n \geq 2$. Il fallimento di una singola nazione sarà causato da uno shock idiosincratico e da shock regionali, economici o politici che interessano più individui. Questi $m = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}$ shock sono governati da dei processi di Poisson indipendenti; per individuare le nazioni che falliscono all'arrivo di un certo processo di Poisson introduciamo una matrice $(a_{ij})_{n \times m}$ dove $a_{ij} = 1$ se lo shock $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, modellizzato attraverso il processo di Poisson N_j di intensità λ_j , comporta il fallimento della nazione $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; in caso contrario, ovvero se lo shock non ha ripercussioni sulla vita della nazione, avrò $a_{ij} = 0$. Per esempio nel caso di tre enti posso avere la massima specificazione se uso una matrice come

$$A_{3 \times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nelle prime tre colonne riconosciamo gli shock idiosincratici che interessano esclusivamente una nazione; nelle successive tre degli shock che interessano due paesi simultaneamente e nell'ultima uno shock sistemico che interessa tutti i soggetti. Evidentemente non è necessario avere questo grado di dettaglio e potrò avere una matrice con un minor numero di colonne e di relativi processi di Poisson. Per esempio se si esclude la possibilità di uno shock che comporti il fallimento di tutti e tre gli enti si potrà non prendere in conto l'ultima colonna. Coerentemente con questo approccio abbiamo

$$\tau_i = \inf \left\{ t \geq 0 : \sum_{k=1}^m a_{ik} N_k(t) > 0 \right\} \quad (13)$$

cioè la nazione i fallisce con intensità $\sum_{k=1}^m a_{ik} \lambda_k$ e probabilità di sopravvivenza marginale

$$\bar{F}_i(t) = e^{-\sum_{k=1}^m a_{ik} \lambda_k t} \quad (14)$$

In modo del tutto analogo a quanto fatto per (3) possiamo definire la probabilità di sopravvivenza multivariata

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_n) = P[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n] = \exp \left(- \sum_{k=1}^m \lambda_k \max(a_{1k} t_1, \dots, a_{nk} t_n) \right) \quad (15)$$

chiamiamo questa distribuzione *distribuzione multivariata esponenziale* (MVE). Notiamo che tutte le marginali, da quelle a $n-1$ dimensioni fino ad una dimensione sono ancora delle MVE; in particolar modo, scelte due variabili aleatorie tra le n , la loro marginale sarà una BVE, ed godrà quindi delle proprietà viste nel paragrafo precedente. In particolar modo per la correlazione lineare dei tempi di arrivo sarà:

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk} \lambda_k}{\sum_{k=1}^m a_{ik} \lambda_k + \sum_{k=1}^m a_{jk} \lambda_k - \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk} \lambda_k} \quad (16)$$

dove troviamo al numeratore la somma delle intensità dei processi che simultaneamente ne causano il fallimento e, al denominatore, la somma delle intensità dei processi che provocano il fallimento di uno qualsiasi delle due nazioni.

4.3 La copula di Marshall-Olkin

La distribuzione multivariata esponenziale appena descritta può essere espressa in forma di copula; introdotta per la prima volta negli anni sessanta da Marshall-Olkin tale copula è oggi uno strumento fondamentale per modellizzare la distribuzione congiunta di sopravvivenza di soggetti il cui default è legato da fattori comuni. Cominciamo col ricordare la definizione di copula; in tutta la nostra trattazione ci limiteremo al caso bidimensionale.

Definizione: una copula bidimensionale, C , è una funzione reale definita in $\mathbf{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ con valori in $\mathbf{I} = [0, 1]$ tale che

1. Per ogni (u, v) in \mathbf{I}^2 , $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ e $C(u, 1) = u, C(1, v) = v$
2. In ogni rettangolo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ in \mathbf{I}^2 con $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$ ho $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$

La prima parte della definizione ci dice che C è definita a partire dalle marginali, mentre il secondo punto assicura che la funzione non è mai negativa: la copula può quindi essere interpretata come una funzione che lega la funzione di ripartizione congiunta alle sue marginali. La sua esistenza viene assicurata dal seguente teorema:

Teorema di Sklar: *Sia F una funzione di ripartizione congiunta con marginali F_1 e F_2 . Allora esiste una copula, C , tale che per ogni t, s in \mathfrak{R} ho*

$$F(t, s) = C(F_1(t), F_2(s))$$

Inoltre se F_1 e F_2 sono continue C è unica. In modo analogo se C è una copula e F_1 e F_2 sono funzioni di ripartizione, allora F , definita come nell'espressione precedente, è una funzione di ripartizione congiunta con marginali F_1 e F_2 .

Definendo F_i^{-1} l'inversa generalizzata della funzione di ripartizione marginale $F_i^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathfrak{R} \mid F(x) \geq t\}$ per $\forall t$ in $[0, 1]$. Possiamo estendere il precedente teorema trovando

Corollario: *sia F una funzione di ripartizione congiunta con marginali continue F_1 e F_2 e una copula C definita come nel teorema precedente, allora $\forall u, v$ in $\mathbf{I} = [0, 1]$ ho*

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))$$

Quest' ultima rappresentazione risulta particolarmente utile e ci permette di ricavare, nel caso bivariato, la forma analitica per la copula di Marshall-Olkin. Ricordando (4) ho

$$\overline{F}(t, s) = \overline{F}_1(t) \overline{F}_2(s) \cdot \min(e^{\lambda_{12}t}; e^{\lambda_{12}s})$$

e ponendo

$$\overline{F}_1(t) = u \quad \overline{F}_2(s) = v \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}}$$

così che

$$e^{\lambda_{12}t} = u^{-\alpha_1} \quad , \quad e^{\lambda_{12}s} = v^{-\alpha_2}$$

Sostituendo possiamo esplicitare la funzione che lega le funzioni di sopravvivenza marginali alla congiunta, ovvero la copula di sopravvivenza:

$$\overline{C}^{MO}(u, v) = u \cdot v \cdot \min(u^{-\alpha_1}, v^{-\alpha_2}) = \min(v \cdot u^{1-\alpha_1}, u \cdot v^{1-\alpha_2})$$

$$\overline{C}^{MO}(u, v) = \begin{cases} v \cdot u^{1-\alpha_1} & \text{se } u^{\alpha_1} > v^{\alpha_2} \\ u \cdot v^{1-\alpha_2} & \text{se } u^{\alpha_1} < v^{\alpha_2} \end{cases} \quad (17)$$

5 Implementazione, calibrazione e simulazione

Dopo aver definito e studiato le proprietà del modello matematico usato per simulare i tempi di default, entriamo nel cuore di questa tesi, descrivendo l'implementazione del codice di pricing per i bond EFSF. Inizieremo col calcolare le intensità di default delle nazioni europee implicite nelle quotazioni dei CDS single name per poi ripartirle su altri processi di Poisson idiosincratici e sistemici. Dopo aver impostato e calibrato la copula di Marshall-Olkin cercheremo, attraverso delle simulazioni Monte Carlo, di stimare il present value della emissione irlandese e di studiarne la sensibilità ai parametri di mercato. Benché il codice recuperi i valori di mercato in tempo reale, per evidenti motivi di coerenza, tutti i dati sono del 25 gennaio 2011, data dell'asta di collocamento.

5.1 Intensità di default single name

Ricaviamo l'intensità di default single name di ogni singola nazione, ovvero l'intensità del suo default a prescindere dalla causa (idiosincratica o sistemica); in (14) essa è stata espressa formalmente come $L_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} \lambda_k$.

5.1.1 La scelta delle nazioni

L'accordo di stabilità europeo prevede la partecipazione di 16 nazioni: tuttavia sul mercato non abbiamo informazioni aggiornate e sufficientemente liquide per tutti gli stati. Questo è dovuto a:

1. **la dimensione ridotta:** stati come Malta o Cipro, troppo piccoli per avere dei CDS liquidi e con prezzi coerenti, sono stati fin da subito considerati come degli stepping-out members; le loro quote di partecipazione sono state riallocate sulle altre nazioni e non è previsto che possano chiedere degli aiuti. Si tratta di un'approssimazione più che accettabile dato che Slovacchia, Slovenia, Cipro e Malta rappresentano meno del 1,7% del fondo EFSF
2. **la solidità economica:** alcune economie cassaforte, come il Lussemburgo o la Finlandia appaiono particolarmente slegate dalle dinamiche europee. La loro probabilità di default è così bassa che il mercato non è interessato ad acquistare protezione da un loro improbabile fallimento. Abbiamo quindi supposto che il loro CDS sia uguale a quello dell'Austria, economia particolarmente solida e anch'essa dotata di rating AAA.

5.1.2 Free-risk discount factor

In qualsiasi pricing, dovendo attualizzare dei flussi di cassa futuri, è necessaria una curva risk-free. Non fa parte degli scopi di questo lavoro descrivere le modalità per ricavare tale curva⁵; vogliamo tuttavia, data l'importanza che ricopre, descrivere l'approccio seguito.

⁵ Si rimanda alla vasta bibliografia disponibile sul soggetto

Prima della recente crisi finanziaria era prassi di mercato attualizzare i flussi di cassa attraverso la curva di interscambio bancario della stessa valuta: per dei flussi in euro si trattava della euro swap curve, ovvero la curva ricavata attraverso il bootstrapping dei tassi Euribor sul breve termine e gli swap rate contro Euribor su lungo termine. Si tratta dei tassi medi ai quali le grandi banche contraggono mutualmente prestiti; se, prima del 2008, questi tassi erano interpretati come privi di rischio, in quanto applicati a soggetti -le grandi istituzioni finanziarie- con altissima reputazione creditizia, dopo il collasso di Lehman il rischio di controparte ad essi legato non è più negligibile. Riportiamo la base tra l'Euribor 3 mesi e l'Euribor 6 mesi, ovvero la differenza tra gli swap rate di un'interest rate swap di durata 5 anni con pagamenti rispettivamente trimestrali e semestrali: se gli istituti finanziari non avessero un rischio di credito tale base dovrebbe essere nulla, per non permettere arbitraggi.

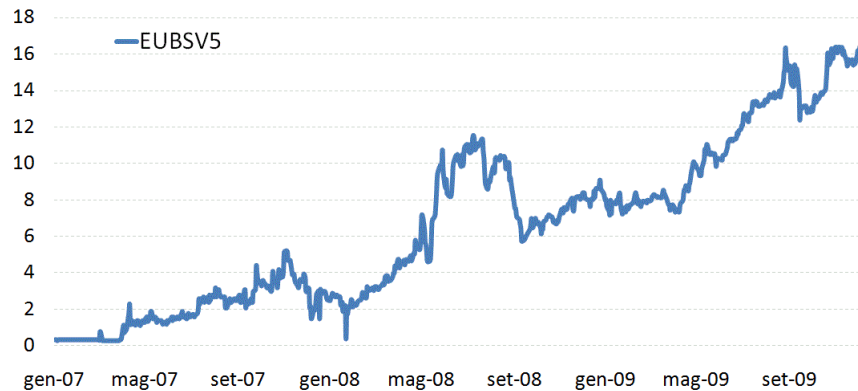


Fig. 3: BASE EURIBOR: 3M CONTRO 6M

La scelta di una curva che sottointenda il più piccolo rischio di controparte diventa ancora più delicata quando si scontano prodotti governativi; trattandosi di strumenti a basso rischio il loro valore può venire facilmente alterato da una cattiva scelta della curva risk-free. Quest'ultima dovrà soddisfare due caratteristiche:

1. **indipendenza**: essendo per definizione risk-free essa non dovrà risentire di eventi creditizi. Ovviamente, dato che non è possibile trovare sul mercato una curva indipendente dal rischio di controparte, chiederemo che essa lo sia almeno dal rischio europeo
2. **omogeneità di valuta**: la curva deve esprimere dei tassi calcolati nella stessa valuta dei derivati di cui dobbiamo dare un prezzo. La scelta di

una curva in valuta estera introduce un rischio di cambio, che andrebbe misurato stimandone volatilità e correlazione

In questa tesi avremo bisogno di due curve risk-free: una in dollari ed una in euro. La prima sarà usata per ricavare l'intensità di default delle nazioni europee dai loro CDS spread⁶: tale curva è derivata dai rendimenti impliciti dei bond del tesoro americano. La seconda, in euro, è stata ottenuta attraverso i rendimenti dei bund, i bond governativi tedeschi⁷, e verrà utilizzata per attualizzare i flussi in euro.

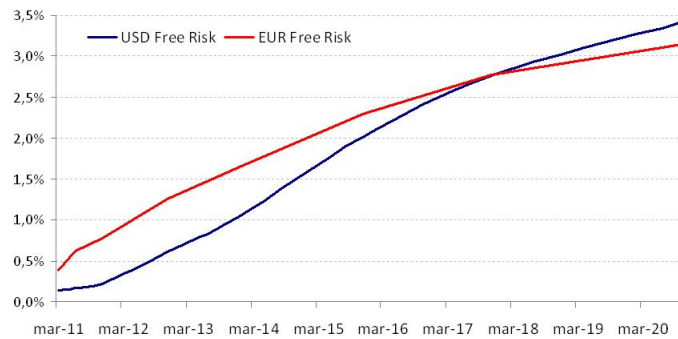


Fig. 4: CURVA DEI TASSI IMPLICITA NEGLI US T-BOND (BLU) E NEI BUND TEDESCHI (ROSSO)

5.1.3 Intensità di default single name e CDS spread

Abbiamo già introdotto i CDS come strumento di protezione dal default di un debitore; vedremo ora come calcolarne il prezzo e come ricavare dal CDS spread di mercato l'intensità di default della reference entity.

Probabilità di Default I CDS single name garantiscono protezione contro il fallimento di un singolo stato, a prescindere dalle cause. Nella sezione precedente abbiamo visto che l'intensità ricavata da un CDS single name è l'intensità complessiva che non tiene in conto le cause di default (idiosincratice o sistemiche); riferendoci a (14) formalmente possiamo scrivere $L_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} \lambda_k$

$$P[\tau_i > t] = \bar{F}_i(t) = e^{-\sum_{k=1}^m a_{ik} \lambda_k t} = e^{-L_i t} \quad (18)$$

In realtà $L_i(t)$ sarà una funzione costante a tratti del tempo.

⁶ I CDS spread delle nazioni europee sono espressi principalmente in USD. Per maggiori informazioni si rimanda al paragrafo 5.1.3 .

⁷ Ricordiamo che la Germania è stata considerata priva di rischio idiosincratice; la scelta di utilizzare i rendimenti dei bond sovrani tedeschi come risk-free è quindi del tutto coerente.

Premium Leg Con il nome di premium leg indichiamo la serie di pagamenti di un CDS spread effettuati periodicamente dal protection buyer fino alla scadenza del contratto o all'evento di credito. Come abbiamo già detto essa dovrà includere anche il pagamento del premio accumulato dalla data dell'ultimo pagamento all'evento di credito. Assumiamo che vi siano $n = 1, \dots, N$ pagamenti alle date $t_1 \dots t_N$, dove t_N è la data di scadenza del CDS; ignorando in prima analisi il premio accumulato, possiamo calcolare il valore di mercato - present value - della premium leg di un CDS come

$$Premium\ Leg\ PV(t_V, t_N) = S \cdot \sum_{n=1}^N \Delta(t_{n-1}, t_n) Z(t_V, t_n) Q(t_V, t_n) \quad (19)$$

dove:

- $\Delta(t_{n-1}, t_n)$ è la frazione di anno tra le date di pagamento dello spread t_{n-1}, t_n
- $Q(t_V, t_n)$ è la probabilità di sopravvivenza della reference entity in un mercato perfetto dal tempo di valutazione t_V fino alla data di pagamento di questo premio t_n . E' attraverso questo elemento che introduciamo nel pricing la probabilità che il soggetto possa non sopravvivere a una certa data di pagamento
- $Z(t_V, t_n)$ è il discount factor al tempo t_V di un flusso che avviene in t_n . Come detto precedentemente, essendo i CDS spread espressi in USD, abbiamo scelto di usare la curva risk-free implicita nei treasury bond statunitensi

Questa equazione ignora gli effetti del premio accumulato - ovvero il fatto che quando si verifica un default il contratto prevede che il protection buyer paghi la frazione del CDS spread accantonata ma non ancora versata dall'ultima data di pagamento. Per includere nel pricing anche questa componente dobbiamo trovare il premio accumulato atteso, valutando la probabilità di default tra due date di pagamento:

1. Consideriamo che ogni periodo di accantonamento inizi in t_{n-1} e finisca in t_n
2. Determiniamo la probabilità che il soggetto sopravviva dalla data di calcolo t_v ad s , e fallisca nell'immediato istante temporale successivo. Questa probabilità è data da $Q(t_V, s) \cdot \lambda(s) ds$, infatti $P[\tau < t + dt | \tau > t] = 1 - e^{-\lambda dt} \simeq \lambda dt$
3. Calcoliamo il valore del premio accumulato da ogni data di pagamento, $S \cdot \Delta(t_{n-1}, s)$
4. Scontiamo questo premio accumulato alla data di valutazione t_V utilizzando la stessa curva di discount $Z(t_V, s)$

5. Per calcolare il valore atteso del premio accumulato integriamo, su tutta la maturity del contratto, la probabilità $Q(t_V, s) \cdot \lambda(s) ds$ per il premio accumulato in ogni istante, $S \cdot \Delta(t_{n-1}, s)$
6. Ripetiamo questa operazione per tutti i periodi tra due date di pagamento e sommiamo

Il valore atteso del premio accumulato sarà allora

$$S \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Delta(t_{n-1}, s) Z(t_V, s) Q(t_V, s) \lambda(s) ds \quad (20)$$

Approssimiamo questo integrale notando che se il default avviene tra due date di pagamento, il valore medio del premio accumulato è circa la metà del premio che si pagherà alla fine del periodo. Ottengo allora

$$\frac{S}{2} \sum_{n=1}^N \Delta(t_{n-1}, t_n) Z(t_V, t_n) [Q(t_V, t_{n-1}) - Q(t_V, t_n)] \quad (21)$$

Il valore completo della premium leg è allora dato da $S \times RPV01$ dov

$$RPV01 = \sum_{n=1}^N \Delta(t_{n-1}, t_n) Z(t_V, t_n) \left[Q(t_V, t_n) - \frac{1}{2} [Q(t_V, t_{n-1}) - Q(t_V, t_n)] \right] \quad (22)$$

L'effetto del premio accumulato nel pricing è generalmente piccolo, anche se non sempre trascurabile.

Protection Leg La *protection leg* è il pagamento che il venditore di protezione dovrà effettuare, immediatamente dopo un credit event, al *protection buyer*. In un generico CDS il pagamento è pari al $(100\% - R)$ del valore nominale del contratto. Ricordiamo che R è il recovery value, ovvero quella parte del debito che viene comunque onorata anche in caso di fallimento. Nel valutare questa gamba dobbiamo:

1. Determiniamo la probabilità che il soggetto sopravviva dalla data di calcolo t_V a s , e fallisca nell'immediato istante temporale successivo. Questa probabilità è data da $Q(t_V, s) \cdot \lambda(s) ds$, infatti $P[\tau < t + dt | \tau > t] = 1 - e^{-\lambda dt} \simeq \lambda dt$
2. Scontiamo il pagamento $(100\% - R)$ al tasso privo di rischio $Z(t_V, s)$

Il valore atteso in t_V della protection leg è l'integrale del pagamento in caso di default, scontato, per la probabilità che questo avvenga

$$Protection\ Leg\ PV(t_V, t_N) = (1 - R) \int_{t_V}^{t_N} Z(t_V, s) Q(t_V, s) \lambda(s) ds \quad (23)$$

L'integrale rende questa espressione scomoda da maneggiare: si può dimostrare che si può assumere, senza effettiva perdita di precisione, che il default possa avvenire solo in un finito numero di istanti temporali, M per anno. Abbiamo quindi la forma approssimata di(23)

$$ProtectionLeg PV(t_V, t_N) \simeq (1 - R) \sum_{m=1}^{M \times t_N} Z(t_V, t_m) [Q(t_V, t_{m-1}) - Q(t_V, t_m)] \quad (24)$$

L'intensità di default I CDS sono dei contratti che al momento delle stipula hanno valore nullo. In genere S , il CDS spread, viene calcolato in modo che *protection leg* e *contingent leg* si equivalgano ed il prezzo del contratto sia zero. Procedendo in maniera inversa cerchiamo di ricavare le probabilità di default recuperando il CDS spread dal mercato e risolvendo in $Q(0, s) = P[\tau > t] = e^{-\int_0^t L_i(s) ds}$. Per rendere il modello più facilmente calibrabile abbiamo ipotizzato delle intensità di default costanti a tratti, con discontinuità sulle 7 scadenze più liquide dei CDS, ovvero i contratti a 6 mesi, 1,2,3,5,7 e 10 anni. Indicando allora con $\lambda_{6M}, \lambda_{1Y}, \dots, \lambda_{10Y}$ le intensità rispettivamente a 6M, 1 anno e 10 anni calcolate attraverso un bootstrapping abbiamo:

$$Q(0, \tau) = \begin{cases} \exp(-\lambda_{6M}\tau) & 0 \leq \tau \leq 0,5 \\ \exp(-0,5\lambda_{6M} - \lambda_{1Y}(\tau - 0,5)) & 0,5 \leq \tau \leq 1 \\ \exp(-0,5\lambda_{6M} - 0,5\lambda_{1Y} - \lambda_{2Y}(\tau - 1)) & 1 \leq \tau \leq 2 \\ \exp(-0,5\lambda_{6M} - 0,5\lambda_{1Y} - \lambda_{2Y} - \lambda_{3Y}(\tau - 2)) & 2 \leq \tau \leq 3 \\ \exp(-0,5\lambda_{6M} - 0,5\lambda_{1Y} - \lambda_{2Y} - \lambda_{3Y} - \lambda_{4Y}(\tau - 3)) & 3 \leq \tau \leq 5 \\ \exp(-0,5\lambda_{6M} - 0,5\lambda_{1Y} - \dots - 2\lambda_{5Y} - \lambda_{7Y}(\tau - 5)) & 5 \leq \tau \leq 7 \\ \exp(-0,5\lambda_{6M} - 0,5\lambda_{1Y} - \dots - 2\lambda_{7Y} - \lambda_{10Y}(\tau - 7)) & 7 \leq \tau \leq 10 \end{cases} \quad (25)$$

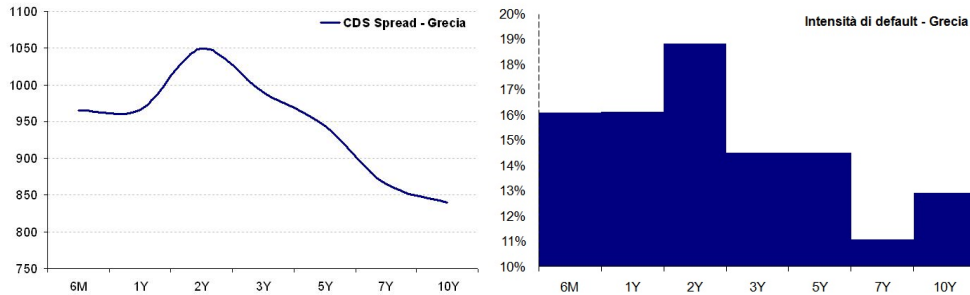


Fig. 5: GRECIA: CDS SPREAD (IN USD) A DIVERSE MATURITY E RELATIVE INTENSITÀ DI DEFAULT SINGLE NAME (R = 40%)

Recovery value e intensità di default Il recovery value influisce in modo determinante nel calcolo delle intensità di default. Dato che siamo interessati a trovare la probabilità di fallimento che il mercato attribuisce a una nazione dobbiamo svolgere i nostri calcoli utilizzando un valore di recovery il più simile possibile a quello attribuito dal mercato. Diversi studi dimostrano che la recovery media utilizzata è del 40%, valore giustificato sia da dati storici che da alcune giustificazioni legali. Anche noi supporremo una percentuale di recovery pari al 40%. Come mostrato nelle tabelle qui sotto più è alta la recovery, a parità di spread, più sarà alta l'intensità di default: se richiediamo infatti lo stesso spread per una possibile perdita più bassa (la recovery è più alta) è perché la probabilità che questa perdita si verifichi è aumentata.

Maturity	CDS Spread	R 20%	R 30%	R 40%	R 50%	R 60%
6M	119.4	1.49%	1.71%	1.99%	2.39%	2.98%
1Y	119.5	1.49%	1.72%	2.00%	2.39%	2.99%
2Y	154.4	2.36%	2.70%	3.15%	3.78%	4.73%
3Y	191.4	3.31%	3.78%	4.41%	5.29%	6.62%
5Y	220.3	3.28%	3.75%	4.38%	5.25%	6.57%
7Y	219.5	2.70%	3.09%	3.60%	4.32%	5.40%
10Y	219	2.71%	3.09%	3.61%	4.33%	5.41%

Tab. 4: BOOTSTRAPPING DELLE INTENSITÀ DI DEFAULT PER SINGLE NAME CDS ITALIA E PER DIVERSI VALORI DEL RECOVERY VALUE

5.1.4 I bond EIB e il default europeo

Abbiamo visto come derivare l'intensità di default per i singoli stati a partire dallo spread di mercato dei loro CDS. Per il pricing dei bond EFSF abbiamo bisogno anche di una misura della stabilità degli accordi europei. Ricordiamo infatti che, in un improbabile scenario di grande crisi, alcune solide economie potrebbero preferire pagare il proprio debito sovrano piuttosto che rispettare i vincoli imposti dalla comunità europea. La forma più liquida di debito, direttamente connesso alla stabilità dell'europa, sono i bond emessi dalla banca di investimento comunitaria, i bond EIB. Tali bond non hanno tuttavia un CDS liquido, e non possiamo allora derivare l'intensità di default europea in modo diretto dai loro spread: ricaveremo dei CDS sintetici ipotizzando che la base europea sia comparabile alla base media delle grandi economie europee.

Base CDS-bond Definiamo la base CDS-bond come la differenza tra lo spread CDS e l'asset swap spread della stessa reference entity con la stessa maturity. Se questa differenza è positiva ci troviamo di fronte ad una base positiva: per la data t avremo una base:

$$B_t = CDS_t - ASW_t \quad (26)$$

Benché evidenti condizioni di non arbitraggio impongano una base nulla, si riscontrano spesso dei valori diversi da zero: fattori che aggiungono rischio ai CDS, senza aumentare la rischiosità del relativo ASW, tendono ad incrementare la base. Per una completa descrizione di questi fattori e il loro impatto sulla base si rimanda a [Bib.9]. Ci limitiamo tuttavia ad osservare che tali fattori impatterebbero nello stesso modo sulla base dei bond europei che sulla base delle grandi economie mondiali a basso rischio: assumiamo che la base dei bond EIB sia uguale alla base dei titoli di stato statunitensi, i Treasury bond. I CDS spread dell'Europa saranno allora ottenuti come⁸

$$CDS_t^{EU} = B_t^{US} + ASW_t^{EU} \quad (27)$$

5.2 Struttura dei default sistemici

Per simulare una copula Marshall-Olkin dobbiamo definire il numero di processi di Poisson di cui si compone, delinearne la relazione con i default delle nazioni europee e ripartire l'intensità di single name trovate precedentemente sui diversi processi. Teniamo a sottolineare che questa ripartizione deve essere fatta in modo coerente, ovvero la somma di tutte le intensità dei processi che causano il fallimento di uno stato deve essere uguale all'intensità single name della nazione.

5.2.1 Processi di Poisson e struttura della copula

Nel corso degli ultimi anni la qualità del credito delle nazioni europee si è notevolmente differenziata, individuando economie cassaforte a basso rischio, economie solide ma comunque esposte ai rischi di un mercato instabile ed economie che già vivono un momento di difficoltà. Il modello incorpora questa percezione grazie ad una divisione delle nazioni europee in 4 gruppi:

Gruppo 0: vi fanno parte le nazioni che hanno dei CDS spread più bassi di quelli sintetici calcolti per i bond EIB. Si tratta dunque di nazioni il cui rischio di fallimento è più basso di quello europeo; ciò significa che, in caso di forte crisi, queste economie sopravviverebbero a discapito degli accordi europei, onorando i propri debiti ma non quelli comunitari.

Gruppo 1: comprende nazioni sicure, ma tuttavia più rischiose di quelle del primo gruppo. Questo gruppo ha quindi un debole rischio di fallimento supplementare a quello sistemico dell'Europa.

Gruppo 2: in questo gruppo sono raccolte le economie europee tradizionalmente stabili e che, pur non avendo un rischio di fallimento immediato, risentono del momento negativo nel mercato del credito. Il rischio di fallimento supplementare a quello dell'Europa inizia ad essere sensibile.

⁸ I valori utilizzati durante le simulazioni sono riportati in appendice

Gruppo 3: nell'ultimo gruppo sono raccolte le economie più rischiose che hanno o stanno per chiedere un prestito all'EFSF. Il rischio supplementare a quello europeo è il driver principale di fallimento.

La ripartizione delle nazioni all'interno dei gruppi è determinata dal valore del CDS spread, che ne caratterizza in maniera univoca la rischiosità.

GRUPPO 0	GRUPPO 1	GRUPPO 2	GRUPPO 3
GERMANIA	FRANCIA	ITALIA	IRLANDA
OLANDA	BELGIO	SPAGNA	GRECIA
AUS-FIL-LUX		PORTOGALLO	

Intensità di gruppo Abbiamo attribuito ad ogni gruppo un processo di Poisson che, al primo arrivo, provoca il fallimento di tutti i membri di quel gruppo e dei gruppi ad esso superiori: i processi sono stati chiamati L-EIB, LG1, LG2 e LG3 rispettivamente per il gruppo 0, 1 2 e 3. L'intensità complessiva⁹ di questi processi è pari all'intensità del membro meno rischioso del gruppo; per esempio LG2 avrà un'intensità di fallimento complessiva - sommata dunque a L-EIB e LG1 - pari a quella dell'Italia; unica eccezione L-EIB che ha un' intensità ricavata dai CDS europei.¹⁰

$$\begin{aligned}
 \lambda_{L-EIB} &= \lambda_{EU} \\
 \lambda_{LG1} &= (\lambda_{FR} - \lambda_{L-EIB})^+ \\
 \lambda_{LG2} &= (\lambda_{IT} - \lambda_{LG1} - \lambda_{L-EIB})^+ \\
 \lambda_{LG3} &= (\lambda_{IRL} - \lambda_{LG2} - \lambda_{LG1} - \lambda_{L-EIB})^+
 \end{aligned} \tag{28}$$

Per non rendere troppo pensante la notazione non abbiamo riportato la dipendenza temporale di λ che, come abbiamo già avuto modo di dire, è una funzione costante a tratti del tempo.

Intensità idiosincratca Fatta eccezione per il gruppo 0, ogni membro di un gruppo sarà soggetto ad un fallimento idiosincratca che determina il suo fallimento esclusivo. L'intensità di tali processi sarà pari alla differenza tra l'intensità dello stato in questione e l' intensità complessiva del gruppo al quale appartiene; per esempio il portogallo avrà un'intensità di fallimento idiosincratca pari alla sua intensità single name meno l'intensità complessiva del gruppo 2, ovvero:

$$\lambda_{L2-2} = (\lambda_{PORT}^{SN} - \lambda_{LG2} - \lambda_{LG1} - \lambda_{L-EIB})^+$$

⁹ Con il termine *intensità complessiva* indichiamo la somma di tutte le intensità che possono provocare il default del gruppo. Dato che ogni gruppo fallisce, oltre che a causa del proprio processo di Poisson, anche per il fallimento dei gruppi inferiori, l'intensità complessiva di un gruppo è la somma delle intensità dei gruppi pari o minori ad esso.

¹⁰ Abbiamo riportato in (28) solo le intensità in forma analitica. Per i valori numerici si rimanda, come al solito, all'appendice.

Ovviamente lo stato del gruppo avente minor intensità di default, e sul quale è indicizzato il processo di gruppo, non avrà un processo idiosincratice.

Osservazione: le equazioni che definiscono le intensità di default di gruppo o idiosincratice non possono dare un risultato negativo, dovendo λ essere maggiore a zero. In particolar modo le intensità saranno tutte maggiori di zero se mantengono uno stesso ordine in qualsiasi istante temporale, ovvero

$$\forall i, j : \quad \lambda_i(s) - \lambda_j(s) \geq 0 \implies \lambda_i(t) - \lambda_j(t) \geq 0 \quad \forall t \quad (29)$$

Scorrendo le intensità di default ricavate dai CDS ¹¹ notiamo che questa relazione è rispettata ovunque eccetto che per le intensità della Francia: λ_{LG1} in $t = 0$ è superiore a λ_{L-EIB} ma ne diventa inferiore per $t \in [1, 7]$. Non potendo avere intensità negative il valore di λ_{LG1} è nullo per $t \in [1, 7]$: in questo intervallo temporale la Francia non ha rischio idiosincratice e viene assimilata a Germania, Olanda e Austria. Sommando le intensità dei processi che possono causarne il default troveremo allora, per $t \in [1, 7]$, dei valori più alti del single name, in linea con le altre economie AAA.¹²

Struttura di default

Si individuano in modo naturale 8 processi di Poisson, 4 di gruppo e 4 idiosincratice. La matrice di struttura¹³, con queste assunzioni, sarà

	L-EIB	LG1	L1-1	LG2	L2-1	L2-2	LG3	L3-1
GRECIA	1	1	0	1	0	0	1	1
IRLANDA	1	1	0	1	0	0	1	0
PORTOGALLO	1	1	0	1	0	1	0	0
SPAGNA	1	1	0	1	1	0	0	0
ITALIA	1	1	0	1	0	0	0	0
BELGIO	1	1	1	0	0	0	0	0
FRANCIA	1	1	0	0	0	0	0	0
GERMANIA	1	0	0	0	0	0	0	0
OLANDA	1	0	0	0	0	0	0	0
AU-FI-LU	1	0	0	0	0	0	0	0

Scorrendo la riga relativa ad uno stato individuiamo, con degli 1, i processi di Poisson che possono causarne il fallimento. In modo analogo ciascuna colonna corrisponde ad un processo e indica quali nazioni sarebbero colpite in caso di

¹¹ I valori sono riportati in appendice.

¹² Questo risultato è in accordo con il nostro modello. Ricordiamo che alla economie cassaforte è stato attribuito il rischio europeo, più elevato del loro rischio single name. La motivazione, come abbiamo già avuto modo di spiegare, è che in un regime di forte crisi tali nazioni preferiranno onorare il debito sovrano piuttosto degli accordi europei. La Francia, intersecando la curva europea, ha un rischio idiosincratice soltanto per certi intervalli temporali.

¹³ La matrice di struttura è stata definita nella sezione 4.2, parlando dei processi esponenziali multivariati.

un suo trigger. Oltre ai processi di gruppo riconosciamo i processi idiosincratici λ_{L1-1} per il Belgio, λ_{L2-1} per la Spagna, λ_{L2-2} per il Portogallo e λ_{L3-1} per la Grecia.

5.2.2 Simulazione del tempo di default

Una volta definiti i processi di Poisson e le loro intensità dobbiamo simulare i tempi di arrivo. Ricordando che, grazie alla trasformazione integrale di probabilità, abbiamo

$$\Phi_{\tau_i}(t) = P[\tau_i < t] = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \quad (30)$$

$$\Phi_{\tau_i}(\tau_i) \sim U_{[0,1]} \mapsto \tau_i = \Phi_{\tau_i}^{-1}(U_{[0,1]}) \quad (31)$$

Indicando con Γ il tempo di arrivo simulato troviamo la relazione che ci permette di determinarne il valore:

$$\Phi_{\tau_i}^{-1}(U_{[0,1]}) = \Gamma \mapsto \Gamma = \min(x) : 1 - e^{-\int_0^x \lambda(s) ds} = U_{[0,1]} \quad (32)$$

$$\Gamma = \max(x) : -\int_0^x \lambda(s) ds > \log[1 - U_{[0,1]}] \mapsto \max(x) : \int_0^x \lambda(s) ds < \ln \left[\frac{1}{U_{[0,1]}} \right] \quad (33)$$

Notiamo che (33) è facilmente risolvibile nel caso di intensità costante a tratti. Possiamo infatti procedere ricorsivamente, in modo analogo a quanto fatto per il bootstrapping; ricordando che le intensità hanno discontinuità per $d_i = \{0, 0.5, 1, 2, 3, 5, 7\}$ e indicando con $A_i = \{0.5, 0.5, 1, 1, 2, 2, 100\}$ la lunghezza degli intervalli di continuità abbiamo

$$\text{sia } t : \sum_{k=1}^{t-1} \lambda(d_k) \cdot A_k < \ln \left[\frac{1}{U_{[0,1]}} \right] < \sum_{k=1}^t \lambda(d_k) \cdot A_k \quad (34)$$

$$\text{allora } \Gamma = d_{t-1} + \frac{1}{\lambda(d_t)} \cdot \left[\ln \left[\frac{1}{U_{[0,1]}} \right] - \sum_{k=1}^{t-1} \lambda(d_k) \cdot A_k \right] \quad (35)$$

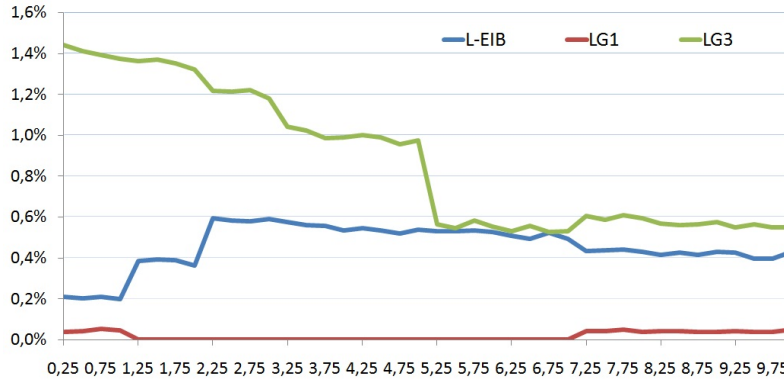


Fig. 6: DISTRIBUZIONE EMPIRICA DEI TEMPI DI ARRIVO PER I PROCESSI L-EIB, LG1 E LG3 PER 300000 SIMULAZIONI

5.2.3 Le matrici di correlazione

Come abbiamo visto nella sezione 4, la copula di Marshall-Olkin introduce una struttura di correlazione tra i tempi di default. In (16) abbiamo espresso, in forma analitica, il valore teorico di questa correlazione. Benché utile in altri tipi di analisi, questa misura non è particolarmente significativa per il nostro modello; le intensità sono calibrate sul mercato fino a 10 anni, e poi supposte costanti: essendo il loro valore generalmente basso, la maggior parte dei tempi di arrivo si concentrerà dopo i 10 anni; la correlazione sarà quindi quasi esclusivamente influenzata dal valore, costante, dell'intensità per $t > 10$ e non sarà significativa per descrivere le dinamiche nel breve termine, quelle che hanno maggior impatto nel pricing dei bond EFSF.

Abbiamo allora scelto di misurare la correlazione tra i default verificatisi prima di una certa data. Indicando con $D_i(t)$ la variabile binaria definita come

$$D_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau_i < t \\ 0 & \text{se } \tau_i > t \end{cases}$$

ho che la correlazione al tempo t tra i fallimenti degli stati A e B è definita come

$$\rho_{A,B}^D(t) = \frac{E[D_A(t) \cdot D_B(t)] - E[D_A(t)] \cdot E[D_B(t)]}{\sqrt{\text{Var}[D_A(t)] \cdot \text{Var}[D_B(t)]}} \quad (36)$$

Tale grandezza misura la correlazione media in $[0, t]$ tra i default di due nazioni: anch'essa è funzione del tempo di osservazione ed evolve in t . Riportiamo in appendice le matrici di correlazione per $t = 1, 3, 5, 7, 10$.

5.3 Pricing dell'emissione irlandese

Dopo aver definito e calibrato i processi di Poisson che regolano i fallimenti sistemici ed idiosincratici delle nazioni europee possiamo affrontare il pricing delle emissioni del veicolo EFSF. Tale prezzo sarà approssimato attraverso un metodo di Monte Carlo: in ogni iterazione simuleremo i tempi di default degli 8 processi indipendenti, ricavando il valore di ogni coupon e del nominale rimborsato: il present value $p_i(t)$ sarà la media dei payoff nelle varie simulazioni. Per quanto riguarda l'emissione collateralizzata dal debito all' i -esima emissione avremo:

$$p_i(t) = E \left[\bar{\Phi}(X_{0,5}; X_1; \dots; X_T; R; \bar{K}_i; \bar{g}_i; C; N) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (37)$$

dove t è il momento della nostra valutazione, \mathcal{F}_t è la filtrazione naturale che rappresenta le informazioni disponibili nella data di valutazione t , $\bar{\Phi}$ è una funzione scalare in n variabili che restituisce il valore totale attualizzato dei flussi. $\bar{\Phi}$ dipende anche da $X_{0,5}, X_1, \dots, X_T$, variabili che rappresentano le nazioni fallite in ogni data nella quale vi è un flusso (coupon o rimborso del nominale). Espandendo (37) ho

$$p_i(t) = \sum_{k=1}^{N-1} D(t, T_k) \cdot E \left[\Phi(X_{T_k}; \dots; X_{T_1}; R; \bar{K}_i; \bar{g}_i; C) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ + D(t, T_N) \cdot E \left[\Phi(X_{T_N}; \dots; X_{T_1}; R; \bar{K}_i; \bar{g}_i; N) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (38)$$

dove abbiamo:

- C è il valore nominale della cedola
- N è il valore nominale dell'emissione che sarà rimborsato, a meno di default, in T_N
- T_k sono le date di pagamento dei coupon; T_N è la maturity, data di pagamento dell'ultimo coupon e di rimborso del nominale
- $D(t, T_k)$ è il discount factor di un flusso, in euro, in T_k attualizzato in t .¹⁴
- \bar{K}_i è il vettore delle contribution keys delle diverse nazioni per l' i -esima emissione. Si tratta di una variabile aleatoria, funzione del numero di stepping-out members; questa risulta tuttavia misurabile al momento dell'emissione
- \bar{g}_i è il vettore del montante massimo di garanzia per l'emissione i -esima, definito in 3.2.3 o 3.2.4. Come per il parametro precedente anche \bar{g}_i è, a priori, una variabile aleatoria misurabile nel momento della i -esima emissione: essa dipende infatti anche da quanto le nazioni hanno già dovuto garantire nelle emissioni precedenti

¹⁴ Per calcolare il discount factor abbiamo utilizzato la curva risk-free euro. Per maggiori informazioni si rimanda a 5.1.2

- X_{T_k} sono le variabili vettoriali che descrivono, alle date di pagamento T_k , lo stato delle economie europee. Possiamo pensarle come vettori binari, dove 1 rappresenta una economia in salute e 0 una nazione fallita
- Φ è una funzione deterministica delle variabili vettoriali X_{T_n} , R , \bar{K}_i , \bar{g}_i , e C che restituisce il flusso effettivamente erogato
- R è il recovery ratio, ovvero la percentuale del flusso che viene garantita anche in caso di fallimento del debitore o del garante ¹⁵

Notiamo che la percentuale ricevuta di un flusso non è funzione solamente dello stato dell'economia in T_k ma anche dell'ordine nel quale i default si sono susseguiti tra T_1 e T_k : questa dipendenza è dovuta al sistema dinamico di garanzie. Facciamo notare come, per le emissioni successive a quella irlandese, sarà determinante per la loro valutazione conoscere quanto, fino a quel momento, gli stati ancora garanti hanno già garantito. Tale informazione, prima della data d'emissione, è una variabile aleatoria, così come le contribution keys che dipendono dal numero degli stepping out. E' solamente attraverso queste due variabili che si instaura una dipendenza tra le varie emissioni.

5.3.1 Analisi dei flussi

Nel paragrafo precedente abbiamo espresso i flussi come valore atteso di una funzione delle variabili di stato economico. Vediamo nel dettaglio come è stata implementata questa funzione.

Variabili di stato economico. Seguendo 5.2.2 troviamo, per ogni simulazione, il tempo di arrivo degli 8 processi di Poisson; attraverso la matrice di struttura ricaviamo direttamente il tempo di default dei singoli stati. Abbiamo in questo modo trovato le variabili vettoriali X_{T_k} : se uno stato è fallito prima di T_k la riga corrispondente assumerà valore 0, altrimenti 1.

Flusso erogato dati i default. Una volta ricavate le X_{T_k} possiamo calcolare la percentuale del flusso che sarà erogata agli investitori. In particolar modo se la nazione che collateralizza l'emissione (nel nostro caso l'Irlanda) non è fallita il flusso sarà erogato al 100%. Al contrario se lo stato è fallito allora ogni flusso previsto sarà coperto solamente per una percentuale pari a $R < 1$; la parte restante, $1 - R$, sarà rimborsata nel seguente modo:

- i garanti cercheranno di erogare la totalità del debito restante, rispettando tuttavia i vincoli di garanzie commitment e contribution key descritti nella sezione 2. Se un garante è anch'esso in default in T_k , allora contribuirà nell'erogare il flusso solo per una percentuale pari ad R della sua contribution key: ciò significa che gli altri stati dovranno, per quanto possibile, coprire la sua quota restante, $(1 - R)$. Facciamo un esempio: se alla

¹⁵ Come dovrebbe essere ormai evidente con il termine di *debitore* indichiamo la nazione che ha chiesto il sussidio, ovvero l'Irlanda. Le altre nazioni sono generalmente indicate come *garanti*.

data del quarto coupon, T_4 l'Irlanda è fallita, indicando con X_{T_4} il vettore degli stati garanti falliti, con C è il valore nominale della cedola, con K le contribution keys e con $g_{i,Irl}$ la contribuzione massima per l'emissione irlandese dell' i -esimo stato - introdotto in 3.2.3 - avrò

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N X_{T_4}^i \cdot K^i} \quad \forall i \quad F_i = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{T_4}^i = 1 \\ R & \text{se } X_{T_4}^i = 0 \end{cases}$$

$$Flusso1 = \sum_{i=1}^N \min \left[C \times F_i \times K^i; g_{i,Irl} - \sum_{t=1}^3 m_i^t \right]$$

$$Flusso2 = \sum_{i=1}^N \min \left[(C - Flusso1) \times \bar{\phi} \times K^i; g_{i,Irl} - \sum_{t=1}^4 m_i^t \right]$$

$$Flusso4 = Flusso1 + Flusso2$$

Dove abbiamo indicato con $\bar{\phi}$ la percentuale della contribution key che ogni stato sopravvissuto deve fornire per colmare la mancata garanzia delle economie in default: se nessun stato è fallito in T_4 avrò $\bar{\phi} = 1$; nel caso si sia invece verificato qualche fallimento gli altri stati dovranno contribuire per una quota $\bar{\phi} > 1$ della contribution key. F è invece un vettore derivato da X_{T_k} che ci dice la percentuale del flusso effettivamente erogato: pari al 100% se lo stato è in salute, di solo R se lo stato è fallito; il vettore m_i^t indica la garanzia versata dallo stato i -esimo per l'emissione irlandese per il coupon t . $Flusso1$ raccoglie i pagamenti che gli stati naturalmente versano in caso di default dell'Irlanda: se nessun stato è fallito - e se non si infrangono limiti di garanzia - $Flusso1$ è pari al C . Al contrario, in caso di default dei garanti, la parte non versata sarà chiesta in quote proporzionali agli stati sopravvissuti: $Flusso2$. I minimi rappresentano il buffer di garanzia restante per la nazione i ovvero la differenza tra la garanzia massima che i può erogare per una certa emissione¹⁶ ed i flussi di cui lo stato si è già portato garante nelle precedenti date di pagamento dei coupon.

- per applicare l'extra credit enhancement dobbiamo modificare il vettore $g_{i,Irl}$ sostituendo all'espressione di 3.2.3 quella trovata nel paragrafo 3.2.4 che prevede la copertura totale dell'emissione dai i paesi AAA. E' quindi importante notare che tra le due ipotesi di garanzia avanzate non vi è differenza nelle contribution keys ma esclusivamente nell'ammontare della garanzia massima che le nazioni di massimo rating possono fornire. Sarà quindi solo in scenari fortemente negativi che quest'ultime nazioni dovranno contribuire in modo maggiore di quanto fatto senza extra credit enhancement

¹⁶ Si rimanda ancora una volta alla sezione 2. Ci limitiamo a ricordare in questa sede che $g_{i,Irl}$ è il minimo tra 1) il prodotto di 120% , la contribution key dell' i -esimo stato ed il nozionale della j -esima emissione 2) Il guarantee commitment dell' i -esimo stato

5.3.2 Parametri e prezzo

Dopo aver introdotto il modello di default ed avere esplicitato la funzione che lega i pagamenti allo stato dell'economia possiamo stimare il present value delle obbligazioni EFSF. Riportiamo i parametri che sono stati utilizzati per il pricing e le simulazioni di Monte Carlo; nel paragrafo successivo analizzeremo il loro impatti sul valore finale dell'emissione. Facciamo notare che alcuni parametri, come la data di emissione e la maturity sono rimasti sconosciuti fino a pochi giorni prima dell'asta pubblica, avvenuta il martedì 25 gennaio: è con i dati di mercato di questa data che abbiamo lanciato la simulazione.

Recovery Come da prassi di mercato, e come già ampiamente discusso in questo lavoro, abbiamo utilizzato $R = 40\%$ sia per L'Irlanda sia per gli stati garanti

Maturity Contrariamente alle aspettative il prestito EFSF avrà una durata di 5 anni e 6 mesi, ben più lunga di quello greco, di durata triennale: la maturity è il 18-07-2016. Tale scelta è stata giustificata da un tentativo di diversificazione del rischio: se il ripagamento di tutti i prestiti si concentrassero nel 2013-2014 il problema del debito sovrano potrebbe essere stato solo posticipato

Issue-Date Come detto l'asta è avvenuta il 25-01-2011; tutti i dati sensibili di mercato sono stati congelati alla mattina di questa data

Montante Il prestito all'Irlanda è stato totalmente cartolarizzato, visto il grande successo dell'asta. Il montante è di 5 miliardi di euro: siamo dunque ben lontani dai 440 miliardi limite

Frequenza E' la frequenza dei coupon. Alcuni titoli di stato hanno cedole semestrali, mentre la più parte hanno cedole annuali. I bond EFSF hanno cedola annuale, ma con un coupon corto i primi 6 mesi

Una settimana prima dell'emissione tutti questi dati erano disponibili - o largamente intuibili da rumors di mercato; all'interno di Banca IMI abbiamo allora potuto lanciare una simulazione per determinare il coupon del bond alla pari, ovvero con un present value (PV) di 100. Dato che ora il coupon è determinato, procederemo all'incontrario, verificando che, con il coupon fisso stabilito, il prezzo la mattina sia pari al nostro PV.

Oltre ai dettagli già descritti, la schermata Bloomberg del bond¹⁷ ci informa che il coupon fisso è del **2,75%** e che il prezzo di acquisto al termine dell'asta era di **99,3** euro. Lanciando la simulazione con questo coupon, per un totale di 100.000 simulazioni otteniamo

	MERCATO	STANDARD	EXTRA AAA
PREZZO	99,3	98,6	98,8

Tab. 5: PREZZO DELL'EMISSIONE PER UN NOMINALE PARI A 100 (IN EURO)

¹⁷ Uno snapshot della vera schermata è riportato, per completezza, in appendice.

Notiamo immediatamente due cose: i nostri prezzi sono leggermente più bassi del mercato e l'extra garanzia AAA non sembra, con questi parametri, incidere in maniera determinante sul PV del bond. Il primo risultato è del tutto in sintonia con le ipotesi fatte nel modello, decisamente conservative: agli stati cassaforte è stato attribuito il CDS spread sintetico EIB, più elevato del loro single name; alcune intensità leggermente negative, come quelle del processo di gruppo LG1, sono state arbitrariamente azzerate, aumentando implicitamente la probabilità di fallimento; infine tutti gli specialisti concordano nel dire che l'asta ha emesso, visto il la grande domanda, a dei tassi leggermente più bassi di quelli di parità¹⁸. Per quanto riguarda il cuscinetto AAA possiamo notare come, con questa recovery, il debito sia già largamente sovra collateralizzato dal 120% del nozionale: nel paragrafo successivo avremo modo di vedere come questo cuscinetto sia invece determinante nelle emissioni future, dove è logico attendersi dei montati più grandi e delle recovery più basse. La simulazione fornisce anche i coupon medi attesi non scontati ed il pagamento totale richiesto ai garanti.

NOZIONALE 100	STANDARD		EXTRA AAA	
	MEDIO	%	MEDIO	%
07-2011	1,24	100%	1,24	100%
07-2012	2,74	99,8%	2,74	99,8%
07-2013	2,73	99,3%	2,73	99,3%
07-2014	2,71	98,7%	2,71	98,7%
07-2015	2,68	97,9%	2,69	98,1%
07-2016	100,1	97,4%	100,2	97,6%

Tab. 6: VALORE MEDIO DEL COUPON VERSATO (PERCENTUALE DEL COUPON NON DEFAULT)

¹⁸ Per una descrizione precisa ed efficace dell' asta EFSF si rimanda al Sole 24 Ore Online: <http://www.ilsole24ore.com/art/finanza-e-mercati/2011-01-25/domanda-record-primobond-125120.shtml?uuid=AagU0o2C>

(Mil.)	STANDARD		EXTRA AAA	
	MEDIO	MASSIMO	MEDIO	MASSIMO
Grecia	0	0	0	0
Irlanda	0	0	0	0
Portogallo	22	103	22	103
Spagna	111	455	111	455
Italia	176	749	175	749
Belgio	42	168	41	168
Francia	258	1026	259	1026
Germania	3748	1735	380	1890
Olanda	79	365	81	398
Au-Fi-Lu	67	309	68	337

Tab. 7: PAGAMENTO MEDIO E MASSIMO RICHIESTO AI GARANTI (MILIONI DI EURO)

Proprietà di convergenza Il prezzo è la media di 100.000 simulazioni, con un scarto quadratico medio di circa lo 0,03% del nozionale ed un tempo totale di calcolo inferiore ai 4 minuti. Il risultato appare quindi estremamente preciso ed è ottenuto in tempi del tutto accettabili per lo scopo che ci proponiamo, ovvero la valutazione puntuale di un'obbligazione in corrispondenza della sua emissione. Per questo motivo non riteniamo necessario, almeno per l'emissione irlandese, ricorrere a tecniche di riduzione della varianza. Riportiamo nel grafico il tempo di calcolo e lo scarto quadratico in funzione del numero di simulazioni; ovviamente la scelta del sistema di credit enhancement non influisce in modo significativo sul costo computazionale.

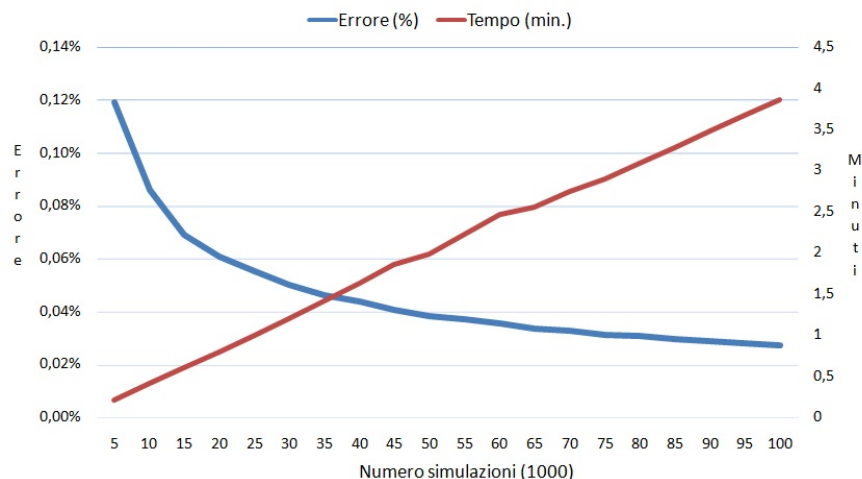


Fig. 7: ERRORE E TEMPO DI CALCOLO IN FUNZIONE DEL NUMERO DI SIMULAZIONI

5.3.3 Sensibilità ai parametri

Per ora abbiamo parlato del prezzo ottenuto con dei dati di mercato coerenti al giorno d'emissione: il pricer è stato utile nel dare un'indicazione del prezzo al quale i bond EFSF sarebbero stati collocati sul mercato. Ma il suo utilizzo, nell'emissione irlandese, non si esaurisce qui. In futuro, inserendo i dati di mercato correnti, sarà possibile seguirne il mark-to-market, ovvero la valutazione del prodotto sul mercato. Nel momento in cui scriviamo questa tesi i dati rilevanti al modello sono rimasti pressoché invariati, tant'è che il mark-to market è all'incirca il prezzo di collocamento del 25 gennaio; possiamo tuttavia simulare il comportamento del prezzo a degli shock sui dati di mercato, studiando come il valore dell'emissione sia funzione dei parametri. Per tutte queste simulazioni sono state usate puntualmente 100.000 iterazioni Monte Carlo.

Recovery Partendo da un valore registrato del 40% facciamo variare R nell'intervallo $[0\% - 60\%]$. Benché i valori estremi siano alquanto improbabili un deterioramento della situazione creditizia potrebbe lasciare presupporre valori di recovery più bassi di quello attuale. Vediamo come a partire da recovery inferiori al 30% la differenza tra l'approccio standard e quello proposto da Moody's diviene notevole: è quindi in questo contesto che deve essere interpretata la richiesta dell'agenzia di rating di un ulteriore credit enhancement. Nei momenti di stress, con dei default in catena, la recovery diminuirà: ma è proprio in questo contesto che il veicolo EFSF deve potere essere percepito come a basso rischio, per potersi finanziare con costi sostenibili.

Coupon Come è normale aspettarsi il coupon ha un impatto positivo sul PV dell'obbligazione. Abbiamo supposto una recovery del 40%: la differenza tra le due strutture di garanzia è quindi minima.

Forward-start Partendo dalla data di emissione abbiamo calcolato il PV della struttura con data di emissione successiva al 25 gennaio 2011: si tratta quindi di un prezzo forward, ovvero il prezzo che dovremmo pagare oggi per impegnarci nel futuro a comprare un bond alla sua data di emissione. E' normale attendersi un PV in diminuzione in quanto sarò esposto a dei possibili default per un periodo più lungo: il contratto forward ad 1 anno ci espone al rischio fino al 18/07/2017, ovvero fino alla maturity del bond emesso il 25 gennaio 2012.

Riportiamo in ordinata il PV dell'emissione al variare di un parametro, supponendo gli altri dati costanti al valore di mercato del 25 gennaio 2011.

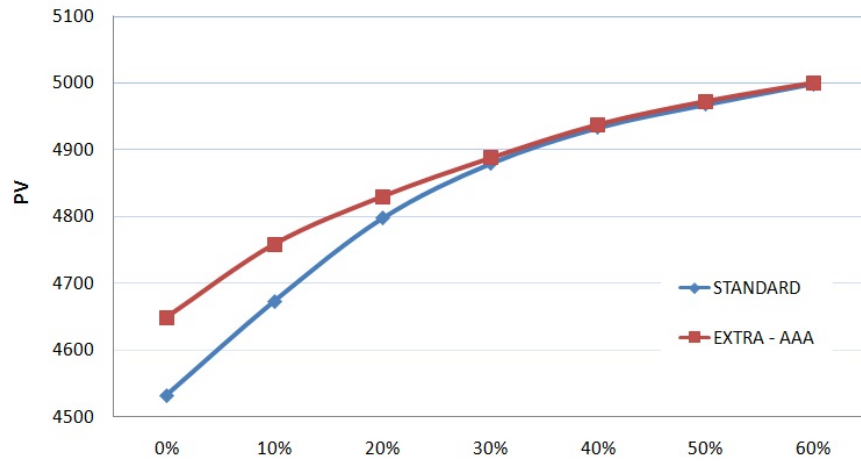


Fig. 8: PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DELLA RECOVERY. TUTTI GLI ALTRI VALORI SONO SUPPOSTI COSTANTI, CON GLI STESSI VALORI DELLA SIMULAZIONE DI MERCATO

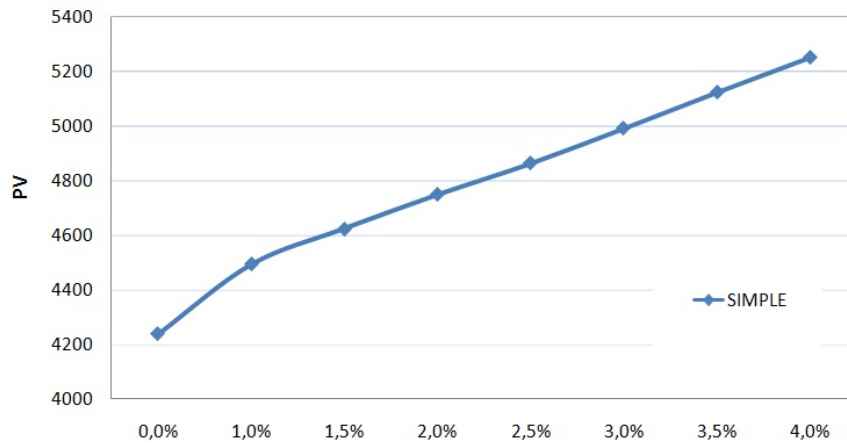


Fig. 9: PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DEL COUPON. LE DUE STRUTTURE DI GARANZIA DEL CREDITO SONO, PER QUESTI VALORI DI RECOVERY, ASSIMILABILI

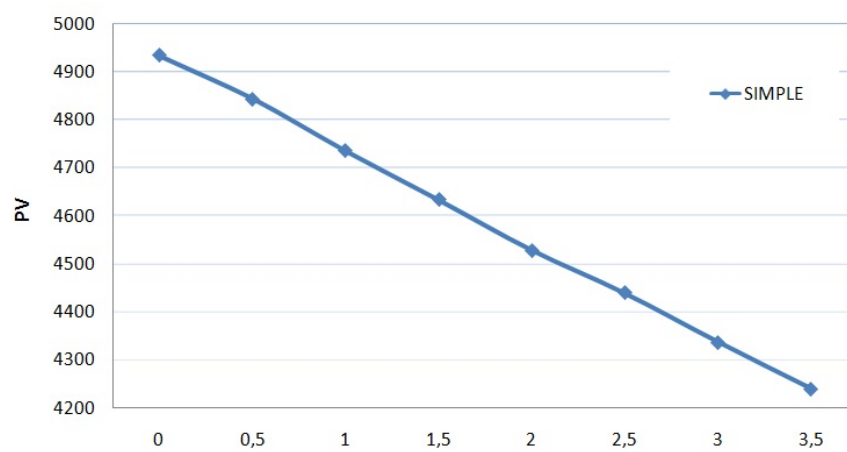


Fig. 10: PV DEL BOND EFSF CON DATE DI EMISSIONE FORWARD. LE DUE STRUTTURE DI GARANZIA SI SOVRAPPONGONO

6 Commenti e Sviluppi

Il modello di pricing elaborato in questa tesi si è dimostrato particolarmente accurato nell'approssimare il prezzo di collocamento dell'obbligazione EFSF collateralizzata dal debito irlandese. Tale risultato è tanto più sorprendente se si pensa che l'emissione del 25 gennaio 2011 rappresenta un'assoluta novità, con un sistema di garanzie del tutto innovativo e che non trova riscontri sul mercato. A differenza di quanto avviene usualmente non abbiamo avuto la possibilità di testare e calibrare il nostro modello su prodotti con caratteristiche simili o su prezzi storici: nell'autunno 2010, quando è stato scritto il codice del pricer, il veicolo era stato appena fondato e non si conosceva nè la natura nè la tempistica della futura emissione.

Per questi motivi avevamo bisogno di un nuovo impianto teorico: la copula di Marshall-Olkin era lo strumento che meglio si adattava alle nostre esigenze. Questa copula, tradizionalmente utilizzata nel pricing di CDO e derivati n -th to default, non era mai stata applicata direttamente al rischio sovrano. La ragione che ci ha guidato in questa scelta è stata la sua facilità di calibrazione: la natura del mercato del credito sovrano, caratterizzato dalla rarità degli eventi creditizi e dalla grandezza del loro impatto economico, ed i cambiamenti radicali che ha conosciuto negli ultimi anni rendono approssimativa qualsiasi stima storica della correlazione tra i default delle nazioni europee. La copula di Marshall-Olkin non richiede un valore esplicito di questi parametri, ma solo la definizione dei gruppi di default simultaneo: la loro composizione è comunemente condivisa dagli economisti e risulta facilmente riscontrabile nei valori storici dei CDS sovrani e dei relativi spread. Ritroviamo in questo modo la matrice di correlazione dei default come risultato implicito della struttura della copula e delle intensità single-name: la sua evoluzione nel tempo ci permette di quantificare l'impatto che il fallimento di una nazione potrebbe avere, in un determinato momento, sulle altre economie europee.

Un importante risultato intermedio è la stima del CDS sintetico europeo, grazie al quale abbiamo potuto ricavare l'intensità del processo di Poisson che sottintende la violazione degli accordi comunitari e la fine dell'Unione Europea. Sebbene la sua intensità sia molto bassa non avremmo potuto implementare il modello senza di essa: ricordiamo infatti che i bond EIB, la banca di investimento europea, hanno sul mercato un asset swap più alto di quello di alcuni stati particolarmente solidi. Tale informazione non può essere ignorata in quanto ci suggerisce che la Germania potrebbe non onorare la garanzia EFSF pur non essendo fallita, violando gli accordi dell'Unione: si tratta di un rischio supplementare che impatta negativamente sul valore dei bond emessi dal veicolo.

Teniamo infine a far notare come, a seguito delle analisi svolte, siamo stati in grado di valutare l'impatto dell'extra-garanzia richiesta da Moody's: la scelta della comunità Europea di adottare tale misura protettiva supplementare trova pieno riscontro nelle analisi di scenario svolte nella sezione precedente: il suo apporto diventa essenziale quando i tassi di recovery scendono al di sotto del 40%. Tale garanzia appare quindi indispensabile per preservare la qualità delle

future emissioni del veicolo che dovrà potersi finanziare a basso costo anche in momenti di forte stress economico, garantendo un rating stabile AAA.

In questa tesi il present value dell'emissione irlandese è stato approssimato attraverso un metodo Monte Carlo. Valutare oggi delle eventuali emissioni future comporta tuttavia un'ulteriore complicazione: ricordiamo infatti che abbiamo valutato l'obbligazione con i dati di mercato del 25 gennaio 2011, quando erano ormai disponibili molte informazioni sull'emissione irlandese: numero di stati garanti, stepping-out members e valore delle relative contribution keys; inoltre, trattandosi della prima emissione, non è stato necessario fare assunzioni sul montante delle garanzie già erogate, essendo quest'ultime nulle per definizione. Da un punto di vista più formale possiamo dire che in $t_{Irl} = 25/01/11$ le variabili aleatorie precedentemente introdotte \bar{K}_{Irl}, g_{Irl} sono \mathcal{F}_{Irl} misurabili e non ci dobbiamo preoccupare della loro distribuzione di probabilità. Al contrario se in $t_{Por} > t_{Irl}$ un'altra nazione europea, ad esempio il Portogallo, richiederà un prestito EFSF non potremo considerare tali parametri come conosciuti: il loro valore sarà aleatorio e verrà fissato solo al momento dell'emissione. Un'ulteriore complicazione si avrà nel determinare, se non è ancora stato annunciato, se vi sarà o meno un'emissione e quale nazione richiederà il prestito. I risultati ottenuti in questa tesi sono quindi solo il punto di inizio di una trattazione ben più complessa nella quale si dovranno valutare i present value di emissioni condizionate a filtrazioni future, la cui evoluzione non è deterministica. Da un punto di vista simulativo tale problema potrà essere risolto con delle simulazioni di Monte Carlo annidate: tale soluzione, se pur di semplice implementazione, è estremamente onerosa in termini computazionali. In ambito accademico troviamo numerosi esempi di tale tematica, molti dei quali riguardano proprio derivati di credito, specialmente nel pricing di swaption su panieri di CDS; a nostro avviso una brillante soluzione che potrebbe essere implementata, con le dovute modifiche, anche nel contesto di questa tesi è quella proposta da Bally e Caramellino [Bib.18]: la simulazione di Monte Carlo annidata viene approssimata con grande precisione da una equazione alle derivate parziali, ottenuta grazie al teorema di Feynman-Kac.

Inoltre nel nostro algoritmo abbiamo ottenuto dei risultati sufficientemente precisi senza ricorrere a tecniche di riduzione della varianza: è tuttavia auspicabile per il pricing di emissioni future utilizzare tali strumenti, riducendo il numero di simulazioni. La scelta principe sarà l'implementazione di una variabile di controllo: ricordiamo che tale tecnica prevede l'individuazione di una grandezza strettamente legata all'emissione EFSF ma il cui valore possa essere approssimato in forma chiusa o con un piccolo sforzo computazionale: scelta non banale e che richiede un'attenta analisi del mercato.

Un'altro parametro supposto costante è il recovery value, ovvero la parte del debito che il debitore o il garante onorerà anche in caso di un suo fallimento. Se un valore costante è un' approssimazione più che accettabile per l'emissione irlandese, nel valutare le emissioni successive tale assunzione potrebbe risultare troppo stringente e creare un errore crescente con l'orizzonte temporale. Una soluzione sarà quella di modellizzare il recovery value come una variabile aleatoria, anch'essa legata allo stato dell'economia. Come detto precedentemente in

tale modo si valorizzerebbe appieno il contributo dell'extra-garanzia che, seppur superflua con gli alti valori di recovery di questa prima emissione, diventerà uno strumento indispensabile nel caso il veicolo EFSF debba finanziare altri prestiti, con un degradamento della qualità del credito sovrano.

A Valori numerici

Riportiamo qui in dettaglio tutti i dati di mercato e i risultati intermedi utilizzati per la calibrazione ed il pricing. Salvo dove diversamente indicato i dati sono aggiornati al 25 gennaio 2011, giorno dell'asta delle obbligazioni EFSF collateralizzate dal prestito irlandese.

CURVE RISK FREE Per calcolare la curva di sconto priva di rischio abbiamo interpolato linearmente il tasso implicito di rendimento dei bond emessi dal tesoro americano (curva USD) e dei bund tedeschi (curva EUR):

TITOLO	VALUTA	SCADENZA	COUPON	YTM
B 03/10/11	USD	10/03/11	0	0,14%
B 06/09/11	USD	09/06/11	0	0,15%
B 11/17/11	USD	17/11/11	0	0,20%
T 0 1/2 11/30/12	USD	30/11/12	0,5	0,49%
T 0 3/4 12/15/13	USD	15/12/13	0,75	0,90%
T 1 3/8 11/30/15	USD	30/11/15	1,38	1,85%
T 2 1/4 11/30/17	USD	30/11/17	2,25	2,62%
T 2 5/8 11/15/20	USD	15/11/20	2,63	3,32%

TITOLO	VALUTA	SCADENZA	COUPON	YTM
DBR 5 07/04/11	EUR	04/07/11	5,00	0,79%
DBR 5 01/04/12	EUR	04/01/12	5,00	0,92%
DBR 5 07/04/12	EUR	04/07/12	5,00	1,19%
DBR 4 1/2 01/04/13	EUR	04/01/13	4,50	1,34%
DBR 3 3/4 07/04/13	EUR	04/07/13	3,75	1,52%
DBR 4 1/4 01/04/14	EUR	04/01/14	4,25	1,71%
DBR 4 1/4 07/04/14	EUR	04/07/14	4,25	1,88%
DBR 3 3/4 01/04/15	EUR	04/01/15	3,75	2,06%
DBR 3 1/4 07/04/15	EUR	04/07/15	3,25	2,20%
DBR 3 1/2 01/04/16	EUR	04/01/16	3,50	2,36%
DBR 5 5/8 09/20/16	EUR	20/09/16	5,63	2,62%
DBR 3 3/4 01/04/17	EUR	04/01/17	3,75	2,60%
DBR 4 1/4 07/04/17	EUR	04/07/17	4,25	2,70%
DBR 4 01/04/18	EUR	04/01/18	4,00	2,80%
DBR 4 1/4 07/04/18	EUR	04/07/18	4,25	2,88%
DBR 3 1/2 07/04/19	EUR	04/07/19	3,50	3,02%
DBR 3 1/4 01/04/20	EUR	04/01/20	3,25	3,09%
DBR 3 07/04/20	EUR	04/07/20	3,00	3,13%

Tab. 8: BOND DEL TESORO STATUNITENSI E BUND TEDESCHI CON RELATIVI TASSI DI RENDIMENTO

CDS SPREAD Tutti gli spread che compaiono sono espressi i USD, dollari statunitensi. Gli spread per EIB non sono ricavati direttamente ma approssimati attraverso la procedura descritta in 5.1.4. Nelle simulazioni abbiamo usato lo spread mid, media tra spread bid e spread ask.

DURATA	GERM	FRANCIA	OLANDA	AUSTRIA	BELGIO
6 M	12,5	60,3	31,5	53,1	110,7
1 Y	12,6	60,3	31,6	53,3	127,3
2 Y	22,3	71,8	40,4	53,4	155,9
3 Y	34,8	85,8	48,7	65,5	182,8
5 Y	54,8	104,7	61,7	76,1	205,5
7 Y	59,7	112,4	68,1	96	204,8
10 Y	61,5	117,9	72,7	103,8	204,2

DURATA	IRLANDA	ITALIA	SPAGNA	GRECIA	PORTOG
6 M	466,2	119,4	183,6	965,3	332,4
1 Y	466,5	119,5	218,9	965,7	389,8
2 Y	505,1	154,4	291,9	1048,9	462,3
3 Y	536,1	191,4	314,6	990,6	479,5
5 Y	545,5	220,3	338,3	944,1	478,1
7 Y	503,0	219,5	332,6	865,6	451,3
10 Y	478,1	219,1	328,5	839,5	413,7

Tab. 9: CDS SPREAD MID PER LE NAZIONI EUROPEE

TITOLO	SCADENZA	ASW	US BASIS	EIB CDS
EIB 4 3/4 04/15/11	15/04/11	-37,74	50,77	13,03
EIB 3 5/8 10/15/11	15/10/11	-35,35	50,72	15,37
EIB 2 1/2 04/15/12	15/04/12	-34,10	52,34	18,24
EIB 4 3/8 04/15/13	15/04/13	-25,84	60,56	34,72
EIB 3 5/8 10/15/13	15/10/13	-23,25	65,91	42,65
EIB 3 1/8 04/15/14	15/04/14	-4,07	69,11	65,05
EIB 4 1/4 10/15/14	15/10/14	-1,03	69,64	68,61
EIB 4 1/4 04/15/15	15/04/15	4,85	70,17	75,01
EIB 3 1/2 04/15/16	15/04/16	8,65	70,58	79,23

Fig. 11: CDS SINTENTICO EUROPA

INTENSITA DI DEFAULT SINGLE NAME Riportiamo le intensità di default ricavate dai CDS delle nazioni europee e dal CDS sintentico EIB.

PERIODO	GERM	FRANCIA	OLANDA	AUSTRIA	BELGIO
0M - 6M	0,21%	1,00%	0,52%	0,88%	1,84%
6M - 1Y	0,21%	1,01%	0,52%	0,88%	2,40%
1Y - 2Y	0,53%	1,39%	0,82%	0,89%	3,07%
2Y - 3Y	1,01%	1,89%	1,09%	1,09%	3,93%
3Y - 5Y	1,41%	2,21%	1,35%	1,35%	3,98%
5Y - 7Y	1,19%	2,18%	1,40%	1,40%	3,36%
7Y - 10Y	1,09%	2,17%	1,38%	1,38%	3,37%

PERIODO	IRLANDA	ITALIA	SPAGNA	GRECIA	PORTOG
0M - 6M	7,77%	1,99%	3,06%	16,1%	5,54%
6M - 1Y	7,78%	1,99%	4,23%	16,2%	7,45%
1Y - 2Y	9,05%	3,15%	6,07%	18,8%	8,90%
2Y - 3Y	9,94%	4,41%	6,07%	14,5%	8,54%
3Y - 5Y	9,29%	4,38%	6,16%	14,5%	7,90%
5Y - 7Y	6,57%	3,60%	5,27%	11,1%	6,36%
7Y - 10Y	6,96%	3,61%	5,29%	12,9%	5,40%

Tab. 10: INTENSITÀ SINGLE-NAME RICAVATE DAI CDS SUPPONENDO UNA RECOVERY DEL 40%

INTENSITA DI DEFAULT: MARSHALL-OLKIN Nella sezione 5.2 abbiamo descritto la struttura dei default, individuando 8 processi di Poisson, 4 idiosincratici e 4 di gruppo. Abbiamo anche descritto il modo in cui le intensità di questi processi sono state ricavate dalle intensità dei single name; in particolare modo L-EIB è l'intensità di default europea, ricavata dai CDS sintetici. Notiamo ancora che, benché la notazione utilizzata trascuri la dipendenza dal tempo, tutte le intensità sono funzioni costanti a tratti di t .

PERIODO	L-EIB	LG1	L1-1	LG2	L2-1	L2-2	LG3	L3-1
0M - 6M	0,24%	0,77%	0,84%	0,99%	1,07%	3,55%	5,78%	8,32%
6M - 1Y	0,33%	0,68%	1,39%	0,99%	2,24%	5,46%	5,79%	8,35%
1Y - 2Y	0,75%	0,63%	1,68%	1,76%	2,92%	5,75%	5,90%	9,79%
2Y - 3Y	1,72%	0,17%	2,04%	2,52%	1,66%	4,13%	5,53%	4,58%
3Y - 5Y	1,88%	0,33%	1,77%	2,17%	1,78%	3,52%	4,91%	5,21%
5Y - 7Y	1,35%	0,83%	1,18%	1,42%	1,67%	2,76%	5,96%	4,51%
7Y - 10Y	1,31%	0,86%	1,19%	1,44%	1,68%	1,79%	3,35%	5,96%

Tab. 11: INTENSITÀ DI DEFAULT COSTANTE A TRATTI PER I PROCESSI STRUTTURALI

MATRICE DI CORRELAZIONE Riportiamo l'evoluzione della matrice di correlazione tra i default degli stati in diversi istanti temporali: i risultati sono stati ottenuti simulando 300.000 realizzazioni dei tempi di arrivo. Come spiegato nella sezione 5.2 queste matrici misurano la correlazione tra i fallimenti verificatesi fino ad un certo T e non la correlazione tra i tempi di arrivo. Esplicativo è il comportamento della Francia la cui correlazione con il blocco tedesco aumenta nei periodi centrali, proprio dove LG1 è nullo. Possiamo notare anche la correlazione del 100% tra gli stati cassaforte, coerente con il fatto di essere esposti esclusivamente al rischio L-EIB. In alto a sinistra leggiamo l'anno alla fine del quale sono state misurate le correlazioni, ovvero $T = 1, 3, 5, 7, 10$.

T=1	GRE	IRL	POR	SPA	ITA	BEL	FRA	GER	OLA	AFL
GRE	1	68%	18%	24%	33%	16%	24%	11%	11%	11%
IRL	68%	1	27%	36%	49%	24%	35%	16%	16%	16%
POR	18%	27%	1	39%	54%	26%	38%	18%	18%	18%
SPA	24%	36%	39%	1	73%	35%	51%	24%	24%	24%
ITA	33%	49%	54%	73%	1	48%	71%	33%	33%	33%
BEL	16%	24%	26%	35%	48%	1	67%	31%	31%	31%
FRA	24%	35%	38%	51%	71%	67%	1	46%	46%	46%
GER	11%	16%	18%	24%	33%	31%	46%	1	1	1
OLA	11%	16%	18%	24%	33%	31%	46%	1	1	1
AFL	11%	16%	18%	24%	33%	31%	46%	1	1	1

T=2	GRE	IRL	POR	SPA	ITA	BEL	FRA	GER	OLA	AFL
GRE	1	66%	20%	25%	36%	16%	24%	16%	16%	16%
IRL	66%	1	30%	38%	54%	24%	36%	24%	24%	24%
POR	20%	30%	1	40%	56%	26%	38%	26%	26%	26%
SPA	25%	38%	40%	1	71%	32%	48%	32%	32%	32%
ITA	36%	54%	56%	71%	1	45%	68%	45%	45%	45%
BEL	16%	24%	26%	32%	45%	1	67%	45%	45%	45%
FRA	24%	36%	38%	48%	68%	67%	1	67%	67%	67%
GER	16%	24%	26%	32%	45%	45%	67%	1	1	1
OLA	16%	24%	26%	32%	45%	45%	67%	1	1	1
AFL	16%	24%	26%	32%	45%	45%	67%	1	1	1

T=3	GRE	IRL	POR	SPA	ITA	BEL	FRA	GER	OLA	AFL
GRE	1	69%	24%	30%	40%	18%	26%	22%	22%	22%
IRL	69%	1	35%	44%	57%	26%	38%	31%	31%	31%
POR	24%	35%	1	46%	61%	28%	41%	33%	33%	33%
SPA	30%	44%	46%	1	76%	35%	51%	41%	41%	41%
ITA	40%	57%	61%	76%	1	45%	66%	54%	54%	54%
BEL	18%	26%	28%	35%	45%	1	68%	56%	56%	56%
FRA	26%	38%	41%	51%	66%	68%	1	82%	82%	82%
GER	22%	31%	33%	41%	54%	56%	82%	1	1	1
OLA	22%	31%	33%	41%	54%	56%	82%	1	1	1
AFL	22%	31%	33%	41%	54%	56%	82%	1	1	1

T=5	GRE	IRL	POR	SPA	ITA	BEL	FRA	GER	OLA	AFL
GRE	1	69%	26%	33%	41%	20%	28%	24%	24%	24%
IRL	69%	1	38%	47%	59%	28%	40%	35%	35%	35%
POR	26%	38%	1	51%	64%	30%	43%	38%	38%	38%
SPA	33%	47%	51%	1	79%	37%	53%	46%	46%	46%
ITA	41%	59%	64%	79%	1	47%	67%	59%	59%	59%
BEL	20%	28%	30%	37%	47%	1	70%	61%	61%	61%
FRA	28%	40%	43%	53%	67%	70%	1	87%	87%	87%
GER	24%	35%	38%	46%	59%	61%	87%	1	1	1
OLA	24%	35%	38%	46%	59%	61%	87%	1	1	1
AFL	24%	35%	38%	46%	59%	61%	87%	1	1	1

T=7	GRE	IRL	POR	SPA	ITA	BEL	FRA	GER	OLA	AFL
GRE	1	67%	27%	32%	41%	21%	28%	24%	24%	24%
IRL	67%	1	39%	47%	60%	30%	42%	35%	35%	35%
POR	27%	39%	1	51%	65%	33%	45%	38%	38%	38%
SPA	32%	47%	5%	1	79%	39%	55%	46%	46%	46%
ITA	41%	60%	65%	79%	1	50%	70%	58%	58%	58%
BEL	21%	30%	33%	39%	50%	1	72%	61%	61%	61%
FRA	28%	42%	45%	55%	70%	72%	1	84%	84%	84%
GER	24%	35%	38%	46%	58%	61%	84%	1	1	1
OLA	24%	35%	38%	46%	58%	61%	84%	1	1	1
AFL	24%	35%	38%	46%	58%	61%	84%	1	1	1

T=10	GRE	IRL	POR	SPA	ITA	BEL	FRA	GER	OLA	AFL
GRE	1	55%	20%	22%	25%	11%	13%	9%	9%	9%
IRL	55%	1	34%	38%	48%	22%	27%	17%	17%	17%
POR	20%	34%	1	45%	59%	27%	34%	22%	22%	22%
SPA	22%	38%	45%	1	67%	30%	38%	25%	25%	25%
ITA	25%	48%	59%	67%	1	42%	58%	37%	37%	37%
BEL	11%	22%	27%	30%	42%	1	62%	40%	40%	40%
FRA	13%	27%	34%	38%	58%	62%	1	63%	63%	63%
GER	9%	17%	22%	25%	37%	40%	63%	1	1	1
OLA	9%	17%	22%	25%	37%	40%	63%	1	1	1
AFL	9%	17%	22%	25%	37%	40%	63%	1	1	1

Tab. 12: CORRELAZIONE TRA I DEFAULT AVVENUTI PRIMA DI T

SENSIBILITA AI PARAMETRI Riportiamo in dettaglio i prezzi ottenuti al variare dei parametri, attraverso i quali abbiamo potuto disegnare i grafici di 5.3.3

RECOVERY	STANDARD	EXTRA-AAA
0%	4532	4648
10%	4672	4758
20%	4797	4829
30%	4879	4887
40%	4929	4935
50%	4967	4972
60%	4998	5000
70%	5021	5020
80%	5038	5038
90%	5048	5048
100%	5052	5051

Tab. 13: PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DELLA RECOVERY

FORWARD	STANDARD	EXTRA-AAA
0	4929	4935
0,5	4842	4837
1	4735	4738
1,5	4632	4641
2	4527	4540
2,5	4439	4431
3	4335	4340
3,5	4238	4245

Tab. 14: PV DEL BOND EFSF IN EMISSIONE FORWARD

COUPON	STANDARD	EXTRA-AAA
0%	4238	4241
1%	4493	4496
1,5%	4623	4626
2%	4747	4749
2,5%	4862	4871
3%	4992	4997
3,5%	5122	5124
4%	5248	5250

Tab. 15: PV DEL BOND EFSF AL VARIARE DEL COUPON

B Struttura dei default

Nella sezione 5.2 abbiamo descritto la struttura dei processi di Poisson. Questi 8 processi sono legati a dei default europei, di un gruppo di nazioni o di un singolo stato. Riportiamo qui in appendice una rappresentazione grafica di questa struttura; i processi reggono ciascuno uno o più stati e, nel caso di trigger, comportano la 'caduta' di tutte le nazioni che poggiano su di esso. Per esempio nel caso di salto del processo L2-1 il solo stato a fallire sarà la Spagna; nel caso di salto di LG3 falliranno contemporaneamente Grecia e Irlanda: ovviamente da questo momento il processo L3-1 perde di interesse per la simulazione.

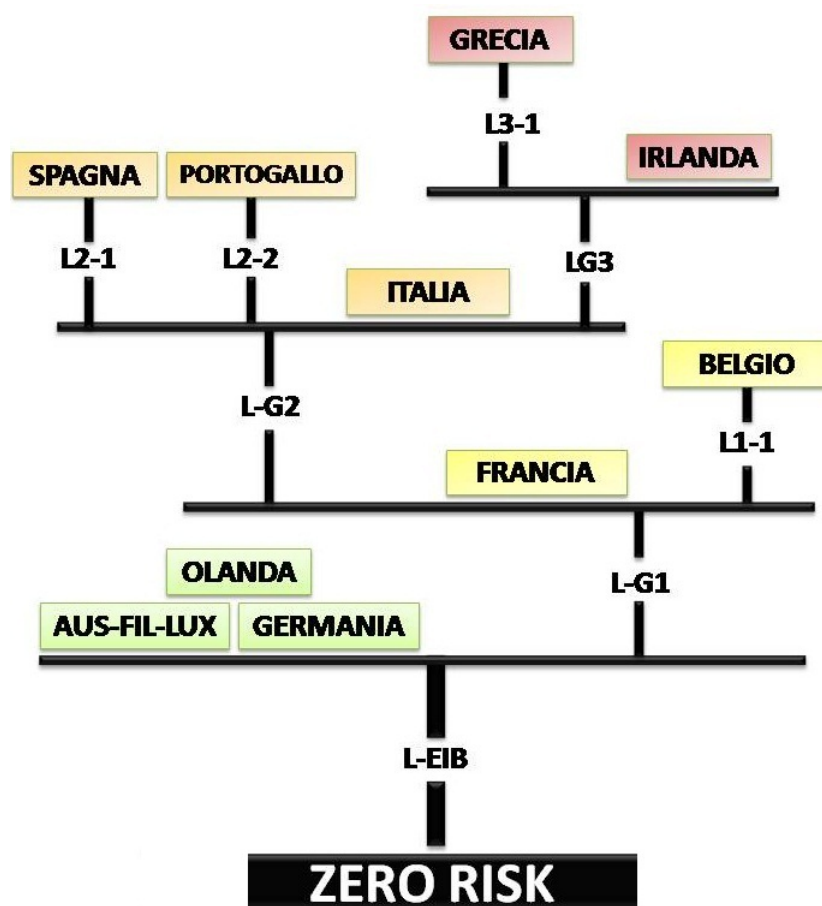


Fig. 12: SCHEMA GRAFICO DEI PROCESSI DI POISSON E DEI RELATIVI FALLIMENTI IN CASO DI TRIGGER

C Codice Matlab

Riportiamo in questa sezione i listati Matlab dell' algoritmo di pricing, omettendo, per ragioni di chiarezza, tutti i commenti.

Algorithm 1 CDSPD: A PARTIRE DAL CDS SPREAD RICAVA LA PD

```
function x = CDSPD(p1,p2,s,stenor,dtenor,recov,maturity,start,acc)

t=1;
for i=(start+stenor):stenor:(maturity)
r1(t)=interp1(p1(1,:),p1(2,:),i);
t = t +1;
end
t=1;
for i=(start+dtenor):dtenor:(maturity)
r2(t)=interp1(p2(1,:),p2(2,:),i);
t = t +1;
end
coef_spread = stenor.*s.*exp(-r1.*((start+stenor):stenor:maturity));
coef_def = (1-recov).*exp(-r2.*((start+dtenor):dtenor:maturity));

x=fzero(@(x)(sum(coef_spread.*(exp(((start+stenor):stenor:(maturity))*(-x)))+(acc/2)*(exp(((start):stenor:(maturity-stenor))*(-x))-exp(((start+stenor):stenor:(maturity))*(-x)))))-sum(coef_def.*(exp(((start):dtenor:(maturity-dtenor))*(-x))-exp(((start+dtenor):dtenor:(maturity))*(-x))))),0);
```

Algorithm 2 DISC: INTERPOLAZIONE DELLE CURVE DI DISCOUNT E TASSI FORWARD

```
function D=disc(r,f,t)

D1 = exp(-t*interp1(r(:,1),r(:,2),t));
D2 = exp(-f*interp1(r(:,1),r(:,2),f));
D = D1/D2;
end
```

Algorithm 3 CPD: RICAVO LA FUNZIONE INTENSITA DI DEFAULT COSTANTE A TRATTI

```
function PD= CPD(r1,r2,acc,SPREAD,rec)
```

```
SPREAD = SPREAD / 10000;
```

```
PD = zeros(1,7);
```

```
PD6M = CDSPD(r1,r2,SPREAD(1),3/12,1/12,rec,6/12,0,acc);
```

```
PD(1) = PD6M;
```

```
PD1Y = CDSPD(r1,r2,SPREAD(2),3/12,1/12,rec,12/12,6/12,acc);
```

```
PD(2) = 2*(PD1Y - PD(1)*0.5);
```

```
PD2Y = CDSPD(r1,r2,SPREAD(3),3/12,1/12,rec,24/12,1,acc);
```

```
PD(3) = PD2Y*2 - PD(1)*0.5 - PD(2)*0.5 ;
```

```
PD3Y = CDSPD(r1,r2,SPREAD(4),3/12,1/12,rec,3,2,acc);
```

```
PD(4) = PD3Y*3 - PD(1)*0.5 - PD(2)*0.5 - PD(3);
```

```
PD5Y = CDSPD(r1,r2,SPREAD(5),3/12,1/12,rec,5,3,acc);
```

```
PD(5) = (PD5Y*5 - PD(1)*0.5 - PD(2)*0.5 - PD(3) -PD(4))/2;
```

```
PD7Y = CDSPD(r1,r2,SPREAD(6),3/12,1/12,rec,7,5,acc);
```

```
PD(6) = (PD7Y*7 - PD(1)*0.5 - PD(2)*0.5 - PD(3)-PD(4)-PD(5)*2)/2;
```

```
PD10Y = CDSPD(r1,r2,SPREAD(7),3/12,1/12,rec,10,7,acc);
```

```
PD(7) = (PD10Y*10 - PD(1)*0.5 - PD(2)*0.5 - PD(3)-PD(4)-PD(5)*2-  
PD(6)*2)/3;
```

```
PD = PD';
```

Algorithm 4 ISFAILED_TIME: SIMULAZIONE DEI TEMPI DI ARRIVO DEI PROCESSI DI POISSON

```
function [failed,when] = isfailed_time (inte,t)

dur = [0.5,0.5,1,1,2,2,9000000]';
durm = dur .* inte;
U = rand();
U = log(1/U);
allum = zeros(1,7);
failed = 0;
when = 1000;
yy = 0;
for j = 1 : 7
bef = (U > (allum*durm));
allum(j) = 1;
aft = (U < (allum*durm));
if ( (bef*aft) == 1) %E' come la bisezione, il tempo è arrivato qui in mezzo
allum(j) = 0;
a = allum*durm;
tt = U - a;
risultato = tt / inte(j);
when = risultato + allum*(dur);
break;
end
end
if when < t
failed = 1;
end
```

Algorithm 5 TIME_CORR: STIMA DELLA MATRICE DI CORRELAZIONE TRA I
DEFAULT PRIMA DI T

```
function maxx= time_corr(nsim,group,int,mint,t)

P = size(group);
fall = zeros(P(1),nsim);
for i = 1:nsim %General un Monte Carlo
saltati = zeros(P(2),1);
group2 = zeros(P(1),P(2));
for j = 1:P(2)
[nul,saltati(j)] = isfailed_time(int(:,j),t);
if (saltati(j) > t) * (saltati(j) < mint )
saltati(j) = 999999;
end
end
for j = 1:P(2)
group2(:,j) = group(:,j).*saltati(j);
end
for j = 1:P(1)
fall(j,i) = min(nonzeros(group2(j,:)));
end
end
matrice = zeros(10,10);
maxx = zeros(10,10);
for i = 1:10
for j=1:nsim
if fall(i,j) == 999999
fall(i,j) = 0;
end
end
end
for i = 1:10
for j=1:10
mediap = 0;
medial = 0;
media2 = 0;
oss = 0;
for k=1:nsim
if (fall(i,k) .* fall(j,k)) == 0
else
oss = oss + 1;
mediap = mediap + (fall(i,k) * fall(j,k));
medial = medial + fall(i,k);
media2 = media2 + fall(j,k);
end
matrice(i,j) = mediap/oss - (medial/oss)*(media2/oss);
end; end; end
for i = 1:10
for j=1:10
maxx(i,j) = matrice(i,j)/sqrt(matrice(i,i)*matrice(j,j));
end
end
end
```

Algorithm 6 SCENARIO: LA STRUTTURA DEL GRUPPO ALLOCA I TEMPI DI ARRIVO DEI POISSON ALLE NAZIONI

```
function res = scenario(group,int,t)

P = size(group);
fall = zeros(P(1),2);
saltati = zeros(P(2),2);
for j = 1:P(2)
[saltati(j,1),saltati(j,2)] = isfailed_time(int(:,j),t);
end
fall(:,1) = (group * saltati(:,1))>0 ;
for j = 1:P(2)
tempo(:,j) = group(:,j) * saltati(j,2);
end
D = size(tempo);
for r = 1: D(1)
for m =1:D(2)
if (tempo(r,m) == 0)
tempo (r,m) = 9999;
end
end
end
fall(:,2) = (min(tempo'))';
res = fall;
```

Algorithm 7 FLUSSO: DATO LO STATO DELL'ECONOMIA E LE GARANZIE GIÀ UTILIZZATE RESTITUISCE IL FLUSSO EFFETTIVAMENTE EROGATO

```
function [flux,guti,guti2,perce] = flusso(rf,valini,time,scen,gar,gmax,guti,_
_guti2,nozio,forw,recindef,extracom)

if (valini == 0)
perce = 0;
else
fallnow = ones(10,1);
for i = 1:10
if (scen(i,2) < time)
fallnow(i) = recindef;
end
end
if fallnow(2) == 1
perce = valini;
else
salvata = valini*recindef;
temp2 = 0;
val = valini*(1-recindef);
limite = max(0,min(nozio.*(gar*1.2+extracom),gmax));
temp = val.*fallnow.*gar; %Gli stati pagano
temp = min(temp,limite-guti);
guti = guti + temp;
if (sum(temp) < val) .* (sum(fallnow>recindef)>0)
temp2 = (val-sum(temp)).*(fallnow>recindef).*(gar)/sum((fallnow>recindef).*(gar));
temp2 = min(temp2,limite-guti);
guti = guti + temp2;
end
perce = salvata + sum(temp) + sum(temp2);
end
end
flux = perce*disc(rf,forw,time);
guti2=0;
```

Algorithm 8 MONTE: LANCIA LA SIMULAZIONE DI MONTE CARLO PER I FLUSSI

```

function [payoff,totuti,maxuti,valmed,tempetti]=Monte(nsim,group,indef,emi,mat,_
_ coupon,rf,gar,gmax,nozio,recindef,extracom)

payoff = 0;
totuti = 0;
forw = emi;
maxuti = zeros(10,1);
tempp = size((forw+0.5):1:(forw + mat));
dimm = tempp(2);
valmed = zeros(dimm,1);
for i=1:nsim
guti = zeros(10,1);
guti2 = zeros(10,1);
scen = scenario(group,indef,forw+mat) ;
pas = 1;
[a,b,c,nondi] = flusso(rf,(nozio*coupon*0.45),0.45,scen,gar,gmax,guti,guti2,_
_ nozio,forw,recindef,extracom);
valmed(pas) = valmed(pas) + nondi;
payoff = payoff + a;
guti = b;
guti2 = c;
for j = (forw+1.5):1:(forw + mat-1)
pas = pas +1;
[a,b,c,nondi] = flusso(rf,(nozio*coupon),j,scen,gar,gmax,guti,guti2,_
_ nozio,forw,recindef,extracom);
valmed(pas) = valmed(pas) + nondi;
payoff = payoff + a;
guti = b;
guti2 = c;
end
pas = pas +1;
[a,b,c,nondi] = flusso(rf,nozio*(1+coupon),mat+forw,scen,gar,gmax,guti,_
_ guti2,nozio,forw,recindef,extracom);
valmed(pas) = valmed(pas) + nondi;
payoff = payoff + a;
guti = b;
guti2 = c;
garutili = guti + guti2;
totuti = totuti + garutili ;
maxuti = max(maxuti,garutili);
end
tempetti = (forw+0.5):1:(forw+mat);
valmed= valmed /nsim;
payoff = payoff / nsim * disc(rf,0,forw);
totuti = totuti / nsim;

```

Riferimenti bibliografici

- [Bib.1] Schonbucher P.J., *Credit derivatives pricing models*, Wiley Finance, 2003
- [Bib.2] Duering A., *Understanding the EFSF*, Fixed Income Special Report, Vol III ,Deutsche Bank Research Press, 2010
- [Bib.3] Commissione Europea, *EFSS framework agreement*, 'www.efsf.europa.eu' , 2010
- [Bib.4] Miao D., *Pricing sovereign bonds*, Working Paper, Department of Mathematics & Statistics, McMaster University, 2005
- [Bib.5] Duffie D. and Garleanu N., *Risk and valuation of collateralized debt obligations*, Financial Analysts Journal, 57, 1, 41-59, 2001
- [Bib.6] Giesecke K., *A simple exponential model for dependent defaults*, Cornell University Press, 42, 1, 21-33, 2003
- [Bib.7] Marshall A.W. and Olkin I., *A multivariate exponential distribution*, Journal of the American Statistical Association 62, 317, 30-44, 1967
- [Bib.8] Giesecke K., *Successive correlated defaults: pricing trends and simulation*, Computing in Economics and Finance, 247, 2003
- [Bib.9] De Wit J., *Exploring the CDS-bond basis*, Working Paper, National Bank of Belgium, 2006
- [Bib.10] Coros B. and Okhrin O., *CDO Pricing with copulae*, Bulletin of the International Statistical Institute, 57, 2-14, 2009
- [Bib.11] Verschuere B., *On copulas and their application to CDO pricing*, Relation, 10, 2, 236, 2006
- [Bib.12] Nelsen R.B., *An introduction to copulas*, Lectures Notes in Statistics, Springer Verlag, New York, 1998
- [Bib.13] Schonbucher P.J., *Copula dependant default risk in intensity models*, Department of Statistics, Bonn University, 2001
- [Bib.14] Oakes D., *A model for association in bivariate survival data*, Journal of the Royal Statistical Society, 44, 3, 414-422, 1982
- [Bib.15] Gibson L., *Understanding the risk of synthetic CDO's*, Working paper, Federal Reserve Board, 2004
- [Bib.16] Genest C. and McKay J., *The joy of copula: bivariate distributions with uniform marginals*, American Statistical, 40, 4, 280-283, 1986
- [Bib.17] Hull J.C. and White A.D., *Valutation of nth to default CDS without Monte Carlo simulations*, The Journal of Derivatives, 12, 2, 8-23, 2004

-
- [Bib.18] Bally V. and Caramellino L., *A mixed PDE-Monte Carlo approach for pricing credit default index swaptions*, Decisions in Economics and Finance, 29, 2, 121-137, 2006
- [Bib.19] Duffie D. and Wang K., *Multi-period corporate failure prediction with stochastic covariates*, Journal of Financial Economics, 83, 3, 635-665, 2007
- [Bib.20] Acharya V., *Credit Risk: pricing, measurement and management*, Economica, 72, 28/5, 180-184, 2005
- [Bib.21] Cherubini U. and Luciano E., *Copula methods in finance*, John Wiley and Sons Chichester, 2004
- [Bib.22] Freund J.E., *A bivariate extension of the exponential distribution*, Journal of the American Statistical Association, 56, 296, 971-978, 1961
- [Bib.23] Nelson C.R. and Siegel A.F., *Parsimonious modeling of yield curves*, Journal of business, 60, 4, 473-489, 1987
- [Bib.24] Schweizer B. and Wolff E.F., *On nonparametric measures of dependence for random variables*, The Annals of Statistics, 9, 4, 879-885, 1981
- [Bib. 25] Hagan P.S. and West G., *Methods for constructing a yield curve*, Wilmott Magazine, 5, 70-81, 2008