

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale
Dipartimento di Energia

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica



CARATTERIZZAZIONE ACUSTICA DI SILENZIATORI COMPLESSI MEDIANTE ANALISI C.F.D.

Relatore: Prof. Federico PISCAGLIA

Correlatore: Ing. Andrea MONTORFANO

Tesi di Laurea di:

Matteo SALA Matr. 720480

Anno Accademico 2009-2010

*L'è no impurtant rivà primm, ma rivà.
Claudio Sala, filosofo contemporaneo*

Ringraziamenti

La ingegneria si può veramente deffinire una guerra illustre d'uom contra Nattura, tal che a niuno è concesso trovar Vittoria se solitario s'appresta a così alto cimento, per tal cagion subito m'accingo a rinnovar per iscritto le gratie più d'una volta rimarcate a nuda voce.

Gratie ordunque a li Virgilio miei nell'insidioso pelago del calcolo: Federico Picaglia, Clarissimo et Honestissimo Docente, Andrea Montorfano et Augusto Della Torre, Sommi Dottorii nella scientia dello ingegno. Gratie per l'amplissima patientia et bontade di core con cui fortissima mano tendeste per carvar me d'impiccio ogni die dello passato anno! Gratie anche a Mario, che di sua cagnoscenza mai fu avaro e sempre con me condivise sue fatiche et scoperte, facendo il mio sentier ben più piano di quel da lui percorso.

Uom che tal sia non puote obliar familia sua, acciocchè io m'appresto a ringratiar Padre et Madre che più di tutti vollero tal vittoria e mi sostennero ne' passaggi più buii. Neanche mia cara Sorella Claudia tralasciar voglio: gratie d'aver prestato tua scientia letteraria et humanista a l'italiano dal fondamento spesso debol et arenoso di mia tesi.

Gratie Claudio, magnifico zio, per le tante historie da te narrate et insegnamenti nell'arduo campo dell'humana vita et di vicissitudini sue.

Sol ora scrivo di te mia Erato, mia Beatrice, ma prima tra i primi fosti e sei, Luana! Gratie per l'Amor, parola sì grande et misteriosa che tu ogni ora di significato adorni. Gratie per li consilii et fiducia, vera et sine conditione, che sempre poni in me.

Gratie Rosario, sommo amico, per saggezza ch'asperi e ch'io assetato raccolgo! Gratie Coetano mio, Giovine d'anni, ma savio d'ore.

Gratie a tutti l'altri compagni d'avventurosa vita universitaria: a lo grande et massiccio Hüge, all'illustrissimo atleta Triggio, allo maestro d'arte martial Pedro.

Gratie infin a tutti l'amci che, pur se non vicini negli studii, lo son nella vita: gratie al messer Marco Cazzaniga, compagno d'impres ardite et avventurose, al messer Ceresi, storico et letterato di massimo pregio, al messer Nicchio, che di silentio e di parola opportuna fa sue virtù, a signora Chicca, migrata in Hispania per seguir anch'essa la scientia et iscoprir la sostanza che compon l'universo tutto.

Sentite scuse, per concluder degnamente, a tutte le dame e messer ch'io dimenticai in codesta pagina, non mia fu la colpa, ma reo è il Tempo Tiranno che sempre giuoca contro l'uom e vince.

Indice

Introduzione	1
1 Richiami di acustica ed equazioni di conservazione	3
1.1 Richiami di acustica	3
1.1.1 Equazioni di propagazione	4
1.1.2 Principali caratteristiche di un campo sonoro	8
1.1.3 L'ipotesi di onda piana	11
1.2 Il rumore nei motori a combustione interna	13
1.2.1 Rumore di combustione e rumore meccanico	13
1.2.2 Rumore gasdinamico	14
1.3 Silenziatori per motori a combustione interna	16
1.3.1 Indicatori dell'attenuazione sonora di un silenziatore	16
1.3.2 Silenziatori reattivi	17
1.3.3 Silenziatori dissipativi e ad elementi perforati	21
1.4 Equazioni di conservazione	22
1.4.1 Conservazione della massa	23
1.4.2 Conservazione della quantità di moto	24
1.4.3 Conservazione dell'energia ed equazione di stato	25
2 Elementi di analisi dei segnali e teoria della decomposizione	27
2.1 Serie di Fourier e trasformata di Fourier	27
2.1.1 Serie e trasformata continue	27
2.1.2 Trasformata discreta di Fourier	29
2.2 Auto spettro e cross spettro	30
2.3 Teorema del campionamento	31
2.4 Finestratura e <i>signal averaging</i>	32
2.4.1 Leakage e finestratura	32
2.4.2 Time averaging	34
2.5 Tecniche di eccitazione	35
2.5.1 Eccitazione impulsiva	37
2.5.2 Rumore bianco	38
2.5.3 Altri tipi di eccitazione	39

2.6	Teoria della decomposizione	40
2.7	Ipotesi della teoria	41
2.8	Trattazione analitica della teoria	42
2.9	Applicazione al calcolo della transmission loss	46
2.10	Problematiche connesse alla teoria della decomposizione	47
3	Metodi Numerici	51
3.1	Introduzione	51
3.2	Proprietà di un metodo numerico	53
3.3	Metodo dei volumi finiti	54
3.3.1	Discretizzazione degli integrali di superficie e di volume	55
3.3.2	Interpolazione	56
3.4	Discretizzazione temporale	58
3.5	Risoluzione di sistemi lineari di equazioni algebriche	59
3.5.1	Eliminazione di Gauss	59
3.5.2	Fattorizzazione LU	61
3.5.3	Il metodo di Gauss-Seidel	61
3.5.4	Il metodo del gradiente coniugato	62
3.5.5	Il metodo del gradiente biconiugato	64
3.6	Condizioni al contorno	65
3.7	Il solutore utilizzato: <i>LodiFOAM</i>	67
3.7.1	L'algoritmo PISO	67
3.7.2	La condizione di uscita anecoica	69
4	La discretizzazione dello spazio	75
4.1	Introduzione	75
4.2	<i>Mesh</i> : concetti generali	75
4.2.1	Principali tipi di griglie di calcolo	75
4.2.2	Parametri fondamentali di valutazione	77
4.3	Le <i>mesh</i> in <i>OpenFOAMTM</i>	78
4.3.1	Numerazione di blocchi e celle	78
4.3.2	Vincoli di validità della <i>mesh</i> in <i>OpenFOAMTM</i>	79
4.3.3	La cartella <code>polyMesh</code>	81
4.4	Le geometrie analizzate	83
4.5	Discretizzazione delle geometrie	85
4.5.1	<i>Mesh</i> bidimensionale	86
4.5.2	<i>Mesh</i> a spicchio	90
4.5.3	<i>Mesh</i> tridimensionali	93

5	Descrizione del software analizzato: OpenFOAM™	97
5.1	Introduzione	97
5.2	struttura di un caso <i>OpenFOAM™</i>	97
5.3	Le Cartelle predefinite	98
5.3.1	La cartella system	98
5.3.2	La cartella 0	102
5.3.3	La cartella constant	103
5.4	Cartelle create per la raccolta dei risultati	105
6	Risultati ottenuti	107
6.1	Introduzione	107
6.2	Parametri delle simulazioni numeriche	107
6.2.1	Le condizioni iniziali	107
6.2.2	La raccolta dati: posizionamento delle probes	110
6.3	Il campo sonoro calcolato da <i>OpenFOAM™</i>	111
6.4	Risultati del calcolo della <i>transmission loss</i>	116
6.4.1	Camera CS con <i>mesh</i> 2D	116
6.4.2	Camera CS con <i>mesh</i> a specchio	117
6.4.3	Camere <i>reverse</i> con griglie di calcolo 3D	117
6.4.4	Note sulle prove fatte	118
	Lista dei simboli	123
	Bibliografia	127

Elenco delle figure

1.1	Volume infinitesimo considerato per il calcolo delle equazioni con approccio euleriano.	4
1.2	Curve di pari intensità sonora di Fletcher e Munson messe a punto nel 1933.	10
1.3	Andamento dell'attenuazione strutturale del rumore di combustione in funzione della frequenza. Sull'asse delle ascisse: frequenze in [Hz] sull'asse delle ordinate: attenuazione strutturale in [dB]	15
1.4	Andamento del livello di pressione sonora rilevato a distanza di un metro dallo scarico di un motore monocilindrico a quattro tempi funzionante a pieno carico al variare del regime di rotazione.	16
1.5	Camera di espansione semplice, costituita da un tratto di sezione S_1 con interposto un volume di sezione S_2 e lunghezza l	18
1.6	Andamento della Transmission Loss di una camera semplice in funzione delle frequenze al variare del rapporto tra sezione della camera stessa e del condotto.	19
1.7	Due esempi di geometrie di condotti con risonatore di Helmholtz. Nella a) si nota la soluzione con collo di lunghezza L , mentre nella b) la soluzione con foro di diametro $2R$ che collega il condotto al volume in parallelo.	20
1.8	Transmission Loss di un risonatore di Helmholtz al variare del parametro caratteristico $\sqrt{C_{geom}V_s}/2S_1$, che ne sintetizza la geometria.	21
1.9	Transmission Loss di un risonatore a colonna	22
1.10	Schema di un silenziatore forato e di come interagisce col fluido	23
2.1	Esempio di campionamento di un segnale nel dominio del tempo. Il grafico in alto descrive un processo di campionamento corretto, quello centrale un processo corrispondente al limite imposto dal <i>teorema di Shannon</i> , mentre quello in basso un campionamento errato dei dati con insorgenza dell' <i>aliasing</i>	32
2.2	sempio del fenomeno del <i>leakage</i> nel dominio delle frequenze su di un segnale armonico semplice acquisito per un tempo pari ad una volta e mezza il periodo del segnale stesso.	33

2.3 Grafico dei principali tipi di finestre nel dominio del tempo, più precisamente in questo caso in funzione del numero di campioni crescente nel tempo. Si nota che alcune finestre, come la *flat-top* in alcuni intervalli pesano i dati con coefficienti negativi 34

2.4 Esempio di acquisizione nel tempo della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine. Si nota come la componente aleatoria sia molto marcata ed in alcuni punti del grafico renda quasi impossibile risalire all'andamento reale del sistema fisico. Ad esempio il primo tratto di curva sarebbe una retta orizzontale costante sul valore zero. 35

2.5 Effetto della media di dieci storie temporali analoghe a quella di figura 2.4. Si nota come sia ancora presente una componente random nrl segnale, ma come questa sia decisamente più gestibile rispetto a prima. Mediando più serie temporali ancora la situazione migliorerebbe ulteriormente. 36

2.6 Distribuzione di Dirac nel dominio del tempo (a) e delle frequenze (b). . 38

2.7 spettro di un impulso reale. Si nota che l'ampiezza va diminuendo con la frequenza, il sistema sottoposto ad un impulso reale risentirà quindi più delle basse frequenze che delle alte. 39

2.8 esempio di rumore bianco visto nel dominio del tempo e delle frequenze. . 40

2.9 Sezione longitudinale di un condotto di scarico costituito da due tratti rettilinei a diametro costante di 50 mm con frapposto un silenziatore cilindrico di lunghezza 497 mm e larghezza 297 mm. La freccia indica la direzione di propagazione del campo sonoro imposto all'antrata come condizione al contorno. Le sezioni (a) e (b) sono quelle di monte e valle silenziatore, mentre la (c) è la sezione terminale del condotto. 42

2.10 Grafico della *transmission loss* della geometria in figura 2.9 nel caso di terminale anecoico. In blu si nota quella calcolata con la teoria della decomposizione, mentre in nero quella derivante da misure sperimentali. . 43

2.11 Grafico della *transmission loss* del silenziatore in figura 2.9 nel caso di terminale (sezione (c)) riflettente. In blu è rappresentata quella calcolata numericamente, mentre in nero quella sperimentale. Le due curve sono completamente scorrelate tra loro: la teoria della decomposizione non è quindi applicabile in questo caso. 44

2.12 Sezione longitudinale del condotto di scarico già mostrato in figura 2.9. Si possono notare i punti di acquisizione dei dati e le componenti incidenti e riflesse del campo sonoro a monte del silenziatore, indicate dalle frecce nere 45

3.1	Volume finito di calcolo cubico in sistema di riferimento cartesiano di dimensioni Δx , Δy e Δz . P rappresenta il nodo di calcolo a centro cella mentre le altre lettere maiuscole i centri degli elementi adiacenti le lettere minuscole sono invece le facce del cubo, che hanno vettore normale \mathbf{n}	55
3.2	Esempio di griglia di calcolo bidimensionale con celle aggiuntive oltre al confine della geometria per l'implementazione delle condizioni al contorno.	65
3.3	Dominio di calcolo con la rappresentazione delle onde ricavate con la teoria delle caratteristiche.	71
3.4	Rappresentazione dell'uscita anecoica in un condotto di scarico e delle quantità che la influenzano maggiormente.	74
4.1	Esempio di griglia di calcolo strutturata e non ortogonale.	76
4.2	Esempio di griglia di calcolo strutturata a blocchi per la simulazione del campo di moto attorno ad un profilo alare.	76
4.3	Esempio di griglia non strutturata.	77
4.4	Angoli che definiscono lo <i>skewness</i> in una cella bidimensionale rettangolare	78
4.5	numerazione di un blocco in <i>OpenFOAMTM</i>	79
4.6	Schema dei principali tipi di celle definite in <i>OpenFOAMTM</i> con relativa numerazione.	80
4.7	Geometria camera di espansione semplice, denominata CS.	84
4.8	Camere di tipo <i>reverse long chamber 1</i> , nella a) e <i>long chamber 2</i> nella b), rispettivamente codificate con LC1 e LC2.	85
4.9	amere di tipo <i>reverse mid chamber</i> , nella a) e <i>short chamber</i> nella b), rispettivamente codificate con MC e SC.	86
4.10	Particolare della geometria bidimensionale per il calcolo della camera CS. In rosso è rappresentata la sezione di entrata.	87
4.11	Camera CS in due dimensioni con la <i>mesh</i> evidenziata. Sono indicate anche le condizioni al contorno	88
4.12	Divisione in blocchi della camera CS e dettaglio della griglia di calcolo nella zona in prossimità dell'entrata.	89
4.13	Geometria <i>wedge</i> con celle esaedriche e angolo al centro di 5 gradi. Nei differenti colori sono indicate le condizioni al contorno, non è visibile quella di uscita.	91
4.14	Ingrandimento sulla sezione di entrata di una <i>mesh</i> a spicchio. Si noti come i volumi di calcolo vicino all'asse di rotazione siano molto chiuse e tendano a collassare in un segmento. Anche la presenza di una sola cella in direzione circonferenziale è ben visibile.	92
4.15	Geometria tridimensionale che ritrae la camera LC2. Sono indicate le condizioni al contorno adottate.	94

4.16	Modellazione dello spessore dei condotti per la camera LC2, come mostrato nei disegni quotati, in questo caso il condotto di entrata è più lungo di quello di uscita. Si nota anche la <i>mesh</i> esaedrica.	94
4.17	Vista della <i>mesh</i> alla sezione di entrata della camera LC2. Si può vedere la parte centrale approssimata con un rettangolo per mantenere il più regolare possibile la forma delle celle. I riquadri rossi indicano le zone più critiche per il fattore di <i>skewness</i>	96
5.1	Schema di un caso <i>OpenFOAMTM</i>	98
6.1	Posizionamento delle probes nella geometria CS, vista nella modellizzazione wedge	111
6.2	posizionamento delle probes nella geometria SC, esplicitiva anche delle LC1, LC2, MC.	112
6.3	Campo di pressione nella camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale 0.0004 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso.	112
6.4	Campo di pressione nella camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale 0.0007 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Si nota il fronte d'onda divenuto semisferico.	113
6.5	Campo di pressione nella camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale 0.0009 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Il riquadro verde mostra la riflessione dell'onda di pressione.	114
6.6	Campo di pressione nella camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale 0.0011 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Nel riquadro verde si nota la parte di impulso riflessa dal silenziatore che risale verso l'entrata.	114
6.7	Campo di pressione nella camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale 0.0016 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Parte dell'impulso di pressione impatta contro il fondo del silenziatore e parte imbocca il condotto che porta alla sezione di uscita.	115
6.8	Campo di pressione nella camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale 0.0019 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Nel silenziatore il grosso del fronte d'onda si è riflesso e sta ritornando indietro, mentre nel secondo tratto di condotto un'altra parte di impulso, ridivenuto piano, sta andando verso l'uscita.	115
6.9	Campo di pressione nella camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale 0.0022 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Il fronte d'onda che è arrivato alla sezione di uscita la attraversa senza riflettersi.	116
6.10	Confronto tra <i>transmission loss</i> sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera CS con <i>mesh</i> bidimensionale.	117
6.11	Confronto tra <i>transmission loss</i> sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera CS con <i>mesh</i> a spicchio.	118

6.12	Confronto tra <i>transmission loss</i> sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera SC con mesh 3D.	118
6.13	Confronto tra <i>transmission loss</i> sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera MC con mesh 3D.	119
6.14	Confronto tra <i>transmission loss</i> sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera LC1 con mesh 3D.	119
6.15	Confronto tra <i>transmission loss</i> sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera LC2 con mesh 3D.	120

Elenco delle tabelle

4.1	Specifiche geometriche del silenziatore in figura 4.7	84
4.2	Specifiche geometriche dei silenziatori nelle figure 4.8 e 4.9 . . .	85
6.1	Quote geometriche di posizionamento delle probes in direzione assiale 4.7	111

Sommario

In questo lavoro viene presentato un metodo numerico per la stima della transmission loss di silenziatori automobilistici. Si possono riconoscere due parti principali: l'implementazione della condizione di terminale anecoico per un condotto e lo sviluppo di un metodo di postprocessing basato sulla teoria della decomposizione per calcolare la transmission loss. La prima parte è utile alla seconda in quanto la condizione di uscita non riflettente è una delle ipotesi principali della teoria della decomposizione.

Si sono analizzate più configurazioni di condotti di scarico con *mesh* bi-dimensionali, a specchio e tridimensionali e si sono fatte valutazioni sui risultati ottenuti in ogni caso. Il software utilizzato per tutto il lavoro è stato *OpenFOAMTM*.

Parole chiave: transmission loss, teoria della decomposizione, condizione di terminale non riflettente, LODI relations, silenziatore, *OpenFOAMTM*.

Abstract

In this work we present a numerical method for calculating transmission loss of mufflers for internal combustion engines. We can recognize two main theoretical parts: first the implementation of a non-reflecting outlet boundary condition, then the application of decomposition theory to value transmission loss. The first part is necessary because non-reflecting outlet boundary is a very important hypothesis of decomposition theory.

We analyzed lay-out of different mufflers with three main types of meshes: two-dimensional, wedge and three-dimensional and we valued results of every configuration. We used the CFD software *OpenFOAMTM* during all the work.

key words: transmission loss, decomposition theory, non-reflecting outlet boundary condition, LODI relations, muffler, *OpenFOAMTM*.

Introduzione

Il *suono* è una perturbazione di carattere ondulatorio che si propaga in un mezzo elastico. Il mezzo più comune coinvolto è l'aria, dove le oscillazioni che danno origine al fenomeno sonoro sono provocate da sollecitazioni di pressione indotte dalle vibrazioni di un corpo, la sorgente sonora, o da una variazione delle condizioni fisiche e termodinamiche di un fluido. Ad esempio, una reazione di combustione cambia repentinamente il volume specifico e la temperatura dell'aria in cui avviene, provocando un'onda di pressione che si propaga nell'ambiente circostante.

Il *rumore* può, invece, essere visto come un suono non desiderato. Questa connotazione negativa può avere varie ragioni: un suono è una possibile fonte di fastidio per le persone o addirittura un pericolo per la salute; oppure può essere problematico dal punto di vista progettuale, perchè introduce dissipazioni di energia o malfunzionamento fluidodinamico.

In un'epoca in cui l'efficienza delle macchine e il comfort dell'utente hanno assunto un ruolo centrale, la progettazione acustica dei condotti di aspirazione e scarico è sempre più importante, lo dimostrano anche le normative antirumore che, al pari di quelle anti-inquinamento, sono rese più stringenti ad ogni revisione.

In un tale contesto poter sviluppare componenti in modo efficiente e poco dispendioso è fondamentale. Tuttavia, se si parla di sviluppo ingegneristico, non si può prescindere dalla simulazione numerica. Come per altri ambiti, anche in questo ridurre il numero di prove sperimentali ed i tempi di lavoro sfruttando i codici di calcolo permette, oltre che migliorare la qualità di progetto, di ottimizzare le risorse.

Da quanto detto si comprende la necessità da cui nasce il presente lavoro di tesi, che ha come obiettivo lo sviluppo di un metodo numerico per la caratterizzazione acustica di silenziatori automobilistici, in particolare il calcolo della *transmission loss*, ovvero dell'attenuazione acustica.

Si è lavorato su *OpenFOAM*®[®], software CFD open source particolarmente utilizzato nell'ambito della ricerca ma i risultati ottenuti restano comunque di validità generale. In particolare il lavoro si è diviso in due momenti: implementare un solutore delle equazioni di conservazione che imponesse una

condizione di uscita anecoica su di un condotto e, sfruttando i dati così ottenuti, mettere a punto una procedura di *post-processing* basata sulla teoria della decomposizione che fosse in grado di stimare la *transmission loss* di un silenziatore.

Il lavoro che segue, composto da sei capitoli, è così strutturato:

capitolo primo. Concetti di base di acustica e presentazione delle equazioni di conservazione nelle forme matematiche in cui saranno trattate nel resto del lavoro

capitolo secondo. Esposizione di elementi di analisi dei segnali e della teoria della decomposizione, fondamentale per il calcolo della *transmission loss*.

capitolo terzo. Trattazione dei concetti di calcolo numerico più importanti per il lavoro svolto e descrizione del solutore numerico sviluppato per svolgere le simulazioni numeriche.

capitolo quarto. Descrizione dettagliata dei silenziatori di scarico utilizzati per la validazione del lavoro, in particolare per quanto riguarda la loro discretizzazione numerica

capitolo quinto. Descrizione delle principali caratteristiche del software utilizzato.

capitolo sesto. Presentazione dei risultati ottenuti.

Capitolo 1

Richiami di acustica ed equazioni di conservazione

Il punto di partenza naturale di questa tesi non possono che essere le basi fisiche degli argomenti che verranno affrontati poi nel seguito. Una volta trattato il fenomeno sonoro in modo esaustivo dal punto di vista teorico, si entrerà nello specifico parlando del rumore nei motori a combustione interna. Infine l'ultima parte del capitolo sarà dedicata alla modellazione fluidodinamica: verranno presentate le equazioni che regolano il flusso di un gas. Quest'ultimo argomento sarà lo spunto iniziale per esporre i metodi numerici di calcolo, che giocano un ruolo di primo piano in questo lavoro.

1.1 Richiami di acustica

La principale grandezza fisica che si usa per descrivere il suono in un fluido comprimibile è la variazione di pressione o, analogamente, la variazione di densità. Si dice pressione acustica (o sonora), indicata con Δp , la differenza in un punto tra la pressione dell'aria al passaggio della perturbazione sonora e la pressione dell'ambiente indisturbato (o, a seconda del caso, del flusso medio), p_0 . Si noti che Δp è una grandezza molto piccola, che si può esprimere solo in *Pascal* senza usare multipli. Risulta assai raro che suoni anche molti forti superino Δp dell'ordine di 150 Pa. Ecco il motivo per cui sono misurati generalmente con scale logaritmiche: in questo modo, infatti, si riescono meglio ad esprimere piccole variazioni di pressione che sono però determinanti dal punto di vista dell'entità del rumore.

Queste prime e concise informazioni verranno trattate in modo più completo durante il seguente paragrafo. Dopo una necessaria trattazione formale delle equazioni che regolano l'acustica [6], si esporranno le principali caratteristiche che descrivono un suono in maniera completa ed univoca [1], per poi

specificare la differenza tra la modellizzazione delle onde sonore come sferiche o piane.

1.1.1 Equazioni di propagazione

Si consideri un volume di controllo infinitesimo $dx dy dz$ in figura 1.1 e si studi il problema dal punto di vista euleriano. Se facciamo l'ipotesi di *fluido perfetto* e trascuriamo quindi gli attriti, possiamo considerare le onde solo longitudinali, ciò vale a dire che il moto delle particelle si svolge solo nella direzione di propagazione dell'onda.

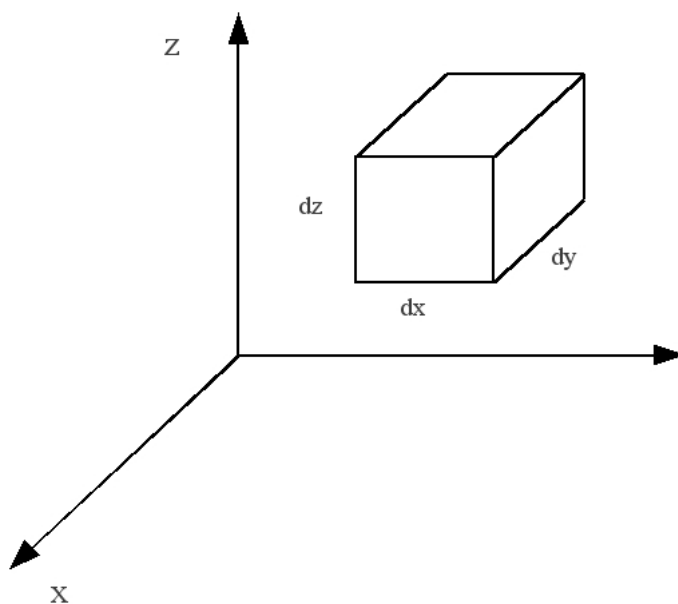


Figura 1.1: Volume infinitesimo considerato per il calcolo delle equazioni con approccio euleriano.

Si parte con l'esprimere le tre equazioni che chiudono il problema: l'equazione di equilibrio tra le forze agenti sul volume di controllo, l'equazione di continuità e una relazione che esprima la trasformazione termodinamica che subisce l'aria, nel nostro caso una *politropica*. Le tre variabili di stato sono la velocità $u(x, y, z, t)$, la pressione $p(x, y, z, t)$ e la densità $\rho(x, y, z, t)$, che dipendono dalle tre coordinate spaziali e dal tempo.

Trascurata, come detto, la viscosità, le forze che agiscono sull'elementino nelle tre direzioni sono dovute esclusivamente alla pressione sonora.

$$dF_x = \left[\Delta p - \left(\Delta p + \frac{\delta p}{\delta x} dx \right) \right] dy dz = -\frac{\delta p}{\delta x} dx dy dz \quad (1.1)$$

$$dF_y = \left[\Delta p - \left(\Delta p + \frac{\delta p}{\delta y} dy \right) \right] dx dz = -\frac{\delta p}{\delta y} dx dy dz \quad (1.2)$$

$$dF_x = \left[\Delta p - \left(\Delta p + \frac{\delta p}{\delta z} dz \right) \right] dx dy = -\frac{\delta p}{\delta z} dx dy dz \quad (1.3)$$

Considerata l'equazione della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ le tre relazioni precedenti si possono esprimere come:

$$\frac{\delta p}{\delta x} = -\rho_0 \frac{\delta u_x}{\delta t} \quad (1.4)$$

$$\frac{\delta p}{\delta y} = -\rho_0 \frac{\delta u_y}{\delta t} \quad (1.5)$$

$$\frac{\delta p}{\delta z} = -\rho_0 \frac{\delta u_z}{\delta t} \quad (1.6)$$

Dove ρ_0 è la densità dell'aria in condizioni ambiente e u_x , u_y ed u_z sono le componenti della velocità nelle tre direzioni cartesiane.

Le (1.4), (1.5) e (1.6) si possono esprimere in maniera compatta con la (1.7).

$$\nabla \delta p = -\rho_0 \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta t} \quad (1.7)$$

L'equazione di continuità esprime il concetto che la massa che entra e che esce dal volumetto di controllo nell'intervallo di tempo dt è uguale alla variazione di massa nel volumetto stesso. Questo concetto è espresso dalla relazione (1.8), che esprime la condizione di conservazione della massa nel cubetto $dx dy dz$.

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = -\rho_0 \left(\frac{\delta u_x}{\delta x} + \frac{\delta u_y}{\delta y} + \frac{\delta u_z}{\delta z} \right) \quad (1.8)$$

Dove il primo membro esprime la variazione di massa nel volume $dx dy dz$ nel tempo dt , mentre il secondo esprime la differenza tra il flusso di massa entrante ed uscente nelle tre direzioni cartesiane. In forma vettoriale si ha la (1.9).

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.9)$$

Vista la rapidità con cui l'onda sonora percorre l'aria, le trasformazioni termodinamiche che questa induce nel fluido si possono considerare adiabatiche senza introdurre approssimazioni eccessive. Ecco quindi che la *politropica* che meglio descrive la situazione è la seguente:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.10)$$

dove γ è il rapporto tra i calori specifici c_p e c_v .

Considerato che nel nostro caso $p = p_0 + \Delta p$ e $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, la (1.10) può essere scritta come

$$1 + \frac{\Delta p}{p_0} = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1.11)$$

Poichè nel caso di un'onda sonora $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$, la (1.11) diviene

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \quad (1.12)$$

che descrive la relazione termodinamica tra le variabili di stato coinvolte.

Tramite le tre relazioni presentate, si è in grado di definire in maniera chiusa il comportamento dell'aria ed è quindi possibile giungere ad un'equazione che descriva in maniera formale la propagazione dell'onda sonora. Ricordando che la velocità del suono nell'aria in condizioni ambiente vale $a_0 = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$, si può derivare la (1.12) rispetto al tempo e scriverla nella forma

$$\frac{\delta\Delta\rho}{\delta t} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\delta\Delta p}{\delta t} \quad (1.13)$$

Il primo membro della (1.13) è uguale a quello dell'equazione di continuità scritta nella forma (1.8), uguagliando quindi i secondi membri si scrive la (1.14)

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\delta\Delta p}{\delta t} = -\rho_0 \left(\frac{\delta u_x}{\delta x} + \frac{\delta u_y}{\delta y} + \frac{\delta u_z}{\delta z} \right) \quad (1.14)$$

e derivando ancora rispetto a δt :

$$\left(\frac{\delta^2 u_x}{\delta x \delta t} + \frac{\delta^2 u_y}{\delta y \delta t} + \frac{\delta^2 u_z}{\delta z \delta t} \right) = -\frac{1}{a_0^2 \rho_0} \frac{\delta^2 \Delta p}{\delta t^2} \quad (1.15)$$

Considerando ora le equazioni di equilibrio dell'elementino $dx dy dz$ (1.4), (1.5), (1.6) e derivandole rispettivamente per x , y e z si giunge alle:

$$\frac{\delta^2 \Delta p}{\delta x^2} = -\rho_0 \frac{\delta^2 u_x}{\delta x \delta t} \quad (1.16)$$

$$\frac{\delta^2 \Delta p}{\delta y^2} = -\rho_0 \frac{\delta^2 u_y}{\delta y \delta t} \quad (1.17)$$

$$\frac{\delta^2 \Delta p}{\delta z^2} = -\rho_0 \frac{\delta^2 u_z}{\delta z \delta t} \quad (1.18)$$

Confrontando infine le (1.16), (1.17), (1.18) con la (1.15) si perviene all'equazione di Laplace, che descrive matematicamente tutti i fenomeni ondulatori, in questo caso il suono:

$$\nabla^2 \Delta p = \frac{1}{a_0^2} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} \quad (1.19)$$

La (1.19) può anche essere scritta in maniera del tutto analoga sia per la densità che per la velocità:

$$\nabla^2 \Delta \rho = \frac{1}{a_0^2} \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} \quad (1.20)$$

$$\nabla^2 \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\delta^2 \mathbf{u}}{\delta t^2} \quad (1.21)$$

Si tratta di equazioni differenziali alle derivate parziali nello spazio e nel tempo. Il modo più agevole per giungere ad una soluzione è il metodo della separazione delle variabili.

Si consideri l'equazione (1.19) e la si risolva, per maggior chiarezza d'esposizione, nel caso monodimensionale (in direzione x) ed in ipotesi di onda piana (concetto che verrà chiarito nel paragrafo 1.1.3) [7]. Soluzioni analoghe possono essere ottenute per la (1.20) e per la (1.21). La soluzione della (1.19) è un'espressione trigonometrica che esprime il moto ondulatorio:

$$\Delta p(x, t) = A_{px} \cdot e^{j\omega t} = A_{px} \cdot [\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)] \quad (1.22)$$

dove A_{px} è l'ampiezza della componente in direzione x della pressione. Sostituendo ora la prima uguaglianza della (1.22) nella (1.19), considerata però nel caso monodimensionale, si ottiene:

$$\frac{\delta^2 A_{px}}{\delta x^2} = -\frac{1}{a_0^2} \omega^2 A_{px} \quad (1.23)$$

cioè riscrivendo in ordine più chiaro i termini

$$\omega^2 A_{px} + a_0^2 \frac{\delta^2 A_{px}}{\delta^2 x} = 0 \quad (1.24)$$

La (1.24), è risolta con opportune condizioni al contorno. Ad esempio nel caso di un'onda sonora che propaga in un condotto cilindrico si impongono pressione e velocità in una sezione.

Introducendo il *numero d'onda* (definito come $k = \omega_0$), che rappresenta il numero di oscillazioni che un'onda compie nell'unità di spazio (ed è quindi l'inverso della lunghezza d'onda), la (1.24) diviene:

$$\frac{\delta^2 A_{px}}{\delta x^2} + k^2 A_{px} = 0 \quad (1.25)$$

L'ampiezza della pressione può essere considerata anche come somma di una componente incidente (che avanza in direzione x positiva) al trascorrere del tempo e di una riflessa (che procede in direzione x negativa all'aumentare di t). La (1.24) è infatti il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale di *Laplace* e le sue soluzioni sono:

$$A_{px} = A_{px+} e^{-jkx} + A_{px-} e^{jkx} \quad (1.26)$$

in cui A_{px+} e A_{px-} sono costanti di integrazione che dipendono dalle condizioni al contorno.

Per concludere si può esprimere la (1.22) come somma delle già citate componenti incidente e riflessa:

$$\Delta p(x, t) = A_{px+} e^{j(\omega t - kx)} + A_{px-} e^{j(\omega t + kx)} \quad (1.27)$$

La componente incidente avanza quindi con velocità $a_0 = x/t$, mentre quella riflessa ritorna con egual velocità.

Quest'ultima osservazione ricopre una fondamentale importanza nei calcoli riguardanti il rumore nei condotti. Come si è visto con la teoria della decomposizione nel capitolo precedente, il primo problema che si presenta, infatti, è quello di separare i dati di pressione e velocità del condotto, sperimentali o numerici che siano, nelle due componenti di cui si è parlato poco sopra.

L'equazione delle onde non è però da sola uno strumento sufficiente per parlare di acustica in maniera esauriente. Nella pratica, infatti, ci si trova solitamente alle prese con suoni molto complessi (campi sonori), servono quindi degli strumenti matematici immediati e facili da maneggiare che possano fornire informazioni utili senza dover obbligatoriamente trattare direttamente le equazioni appena esposte.

Vediamo quindi come si descrive in maniera efficace e semplice un campo sonoro.

1.1.2 Principali caratteristiche di un campo sonoro

Si dice *campo sonoro* una determinata regione dello spazio in cui è presente un insieme di onde sonore [6]. Esso è il punto di partenza per un qualsiasi

studio sull'acustica ed è quindi necessario cogliere le caratteristiche principali in maniera efficace e concisa tramite opportuni indicatori [1].

Un tratto comune delle proprietà di un campo sonoro è innanzitutto, come già accennato, che sono espresse per la maggior parte in scale logaritmiche. Ciò è dovuto al fatto che un'onda sonora è caratterizzata da scostamenti molto piccoli delle variabili di stato del mezzo in cui propaga. Non solo: scostamenti che in altri ambiti possono essere tranquillamente considerati trascurabili sono in acustica molto importanti. Si pensi, ad esempio, all'ampiezza in Pa di un'onda di pressione: un valore di 5 Pa già corrisponde ad un suono abbastanza forte (come ad esempio quello di un tagliaerba a motore) e una variazione di 100 Pa potrebbe cambiare in maniera radicale l'entità del suono con cui si ha a che fare.

Una delle quantità più usate che definisce un campo sonoro è il *livello di pressione sonora* (L_p). Esso si basa sul concetto di *pressione efficace*. In effetti, quando l'aria è attraversata da un rumore qualsiasi, la pressione in un punto subisce variazioni alquanto complesse (derivanti ad esempio dallo spettro continuo che caratterizza un rumore) ed è quindi necessario definire un valore che la rappresenti con la migliore approssimazione possibile [1]. Si definisce perciò la *pressione efficace* p_e come:

$$p_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt} \quad (1.28)$$

Conseguentemente il *livello di pressione sonora* è:

$$L_p = 20 \log_{10} \left(\frac{p_e}{p_{rif}} \right) \quad (1.29)$$

la cui unità di misura è il decibel (simbolo $[dB]$). Nella (1.29) p_{rif} è la pressione di riferimento, che vale $2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$. Questo valore dell'ampiezza in pressione del suono più basso che l'essere umano medio può sentire alla frequenza di un KHz ed è detto *soglia di udibilità*.

Secondo quanto detto, un $L_p = 0 \text{dB}$ corrisponde quindi alla *soglia di udibilità*, la scala di misura in dB è quindi estremamente legata alla percezione umana del suono, anche se è applicabile senza problemi in ogni campo, tenendo conto che i suoni che non possono essere uditi dall'orecchio umano risulteranno espressi da un valore negativo di L_p .

Il *livello di pressione sonora*, quando si fanno misure di rumore percepito da persone, va riferita alla frequenza: infatti, suoni con il medesimo L_p possono provocare reazioni (e problemi) anche molto diversi a seconda che siano molto acuti o particolarmente gravi. In particolare, come si nota dalla figura 1.2, suoni a frequenze basse sono meno fastidiosi.

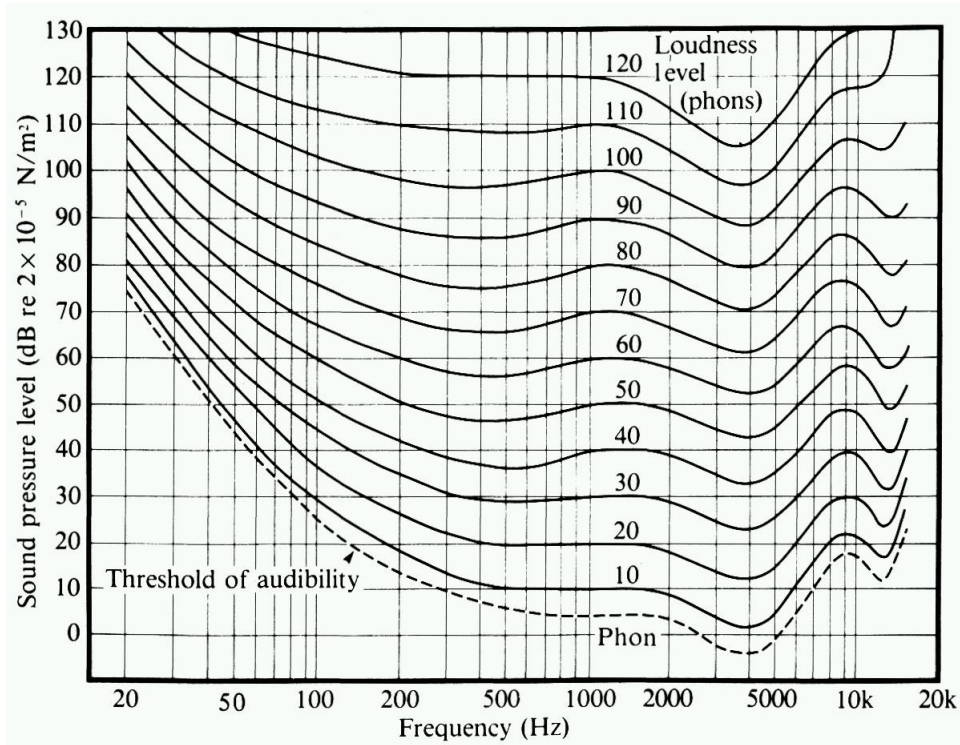


Figura 1.2: Curve di pari intensità sonora di Fletcher e Munson messe a punto nel 1933.

In maniera molto simile a quanto fatto per il *livello di pressione sonora* si definisce il *livello di potenza sonora* (L_W). Per *potenza sonora* di una sorgente si intende l'energia totale irradiata nell'unità di tempo, per un condotto (onde piane), caso di particolare interesse per questo lavoro. La sua formula è:

$$W = \frac{p^2}{\rho a} S \quad (1.30)$$

Si tratta di una quantità scalare dipendente, come si nota anche, dalla sezione del condotto. p può essere un valore medio nel tempo o un valore efficace, soprattutto se si vuole calcolare poi il *livello di pressione sonora*, oppure un valore istantaneo, se si intende calcolare la potenza in ogni punto del dominio e per ogni istante temporale: ad esempio, quando si desidera vederene l'andamento nel tempo e nello spazio e la si calcola utilizzando i dati di output di una simulazione numerica.

L_W è invece:

$$L_W = 10 \log_{10} \left(\frac{W}{W_{rif}} \right) \quad (1.31)$$

sempre espresso in dB e dove W_{rif} è la potenza di riferimento e vale 10^{-4} Watt.

Anche un'ulteriore caratteristica di un *campo sonoro* si esprime in decibel rispetto ad un valore di riferimento: il *livello di intensità sonora*.

Si definisce *intensità sonora* in un punto di un dato campo l'energia sonora che attraversa, nell'unità di tempo, l'unità di area disposta normalmente alla direzione di propagazione dell'onda [1]. Essa costituisce quindi una caratteristica del campo con proprietà direzionali, che può essere legata alla potenza della sorgente ed alla pressione acustica efficace in quel punto del campo e definisce il volume con il quale un suono viene percepito da un essere umano o da un'apparecchiatura di rilevamento. In particolare nel caso di onda acustica *piana*, che sarà definita in seguito, vale una semplice relazione di proporzionalità che definisce *l'intensità sonora* come:

$$I = \frac{p_e^2}{a\rho} \quad (1.32)$$

Il prodotto $a\rho$ dipende dal mezzo in cui passa il suono ed è detto *resistenza acustica caratteristica* (vedi paragrafo 1.1.3) e per l'aria vale $414\text{Kg/m}^2\text{s}$.

Il livello di intensità sonora è quindi dato dalla:

$$L_I = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{rif}} \right) \quad [dB] \quad (1.33)$$

Il valore di riferimento dell'*intensità sonora* è $I_{rif} = 10^{-12}\text{W/m}^2$, che, analogamente a quanto fatto per il *livello di pressione sonora*, definisce in questo caso il minimo volume al quale un suono è percepibile dall'essere umano medio.

1.1.3 L'ipotesi di onda piana

Prima di parlare, nei prossimi paragrafi, di rumore nei motori a combustione interna, e scendere quindi nello specifico, si è deciso di dedicare un piccolo paragrafo ai concetti di onda piana e onda sferica. Delle due modellizzazioni, in questo lavoro, si avrà a che fare soprattutto con la prima, che quindi verrà qui di seguito approfondita.

Un campo sonoro è considerato costituito da onde piane quando assume la forma di un fascio di onde parallele e la sorgente può immaginarsi costituita da un piano che vibra in direzione normale alla superficie stessa. I fronti d'onda sono perciò costituiti da superfici parallele al piano sorgente sulle quali, in un dato istante, le variabili di stato hanno lo stesso valore. Ciò vuol dire che l'unica variabile oltre al tempo da cui dipendono pressione, velocità e densità è una direzione spaziale [6]. Ecco perchè risolvere l'equazione

delle onde nel caso monodimensionale equivale a fare l'ipotesi di onda piana. Quanto detto ora è particolarmente utile nello studio dei condotti proprio per l'efficacia nell'adattare i fronti d'onda alle varie sezioni del condotto e il piano vibrante che fa da sorgente ad una sezione specifica, come quella di entrata. Vista però l'importanza dell'argomento, si propone qualche altra considerazione.

Riprendendo l'equazione (1.27) e scrivendola in termini di modulo e fase si ha che:

$$\Delta p = A_{px+} \sin \omega \left(t - \frac{x}{a_0} \right) = A_{px+} \sin[k(a_0 t - x)] = A_{px+} \sin(\omega t - kx) \quad (1.34)$$

dove quindi kx è in pratica lo sfasamento (ritardo) dell'onda di pressione. Si noti che si è considerata solo la componente incidente per alleggerire la trattazione, poichè la componente riflessa si può trattare in maniera del tutto identica.

Partendo dall'equazione di equilibrio dinamico (1.4) è possibile ricavare la velocità per integrazione:

$$u = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^t \frac{\delta \Delta p}{\delta x} dt \quad (1.35)$$

dalla quale sostituendo a Δp l'espressione trovata in (1.34) e svolgendo l'integrale si ottiene:

$$u = \frac{A_{px+}}{\rho_0 a_0} \sin[k(a_0 t - x)] + \text{costante} \quad (1.36)$$

In quest'ultima equazione la costante di integrazione si ottiene imponendo in $x = 0$ il valore della velocità. La si può comunque ritenere nulla senza per nulla stravolgere la trattazione.

Nella (1.36) il coefficiente $A_{px+}/\rho_0 a_0$ è in sostanza l'ampiezza dell'onda sonora espressa in termini di velocità (A_{ux+}). L'osservazione appena fatta permette di scrivere il rapporto tra le ampiezze di pressione e velocità, che è una grandezza notevole ed è detta *resistenza acustica caratteristica*:

$$\frac{A_{px+}}{A_{ux+}} = \rho_0 a_0 \quad (1.37)$$

L'equazione (1.37) mostra anche come pressione acustica e velocità siano sempre in fase nel caso di onda piana (proprio perchè il rapporto delle ampiezze è reale).

La *resistenza acustica caratteristica* non dipende né dallo spazio né dal tempo

ed è quindi una peculiarità del mezzo (tramite la ρ) e delle condizioni termodinamiche (tramite la a). In effetti, la *resistenza acustica* si comporta per le onde sonore come una resistenza elettrica in un circuito, quantificando quanto bene un certo mezzo in determinate condizioni conduce il suono. Si noti ad esempio che compare al denominatore della (1.30) e della (1.32): tanto è maggiore tanto la potenza sonora e l'intensità (cioè il volume) diminuiscono.

Un campo di onde sferiche è quello prodotto da una sorgente puntiforme che diffonde un suono nello spazio circostante [6]. I fronti d'onda non sono quindi paralleli come nelle onde piane e la trattazione matematica, pur molto simile a quella presentata per le onde piane, va condotta in coordinate sferiche. La principale differenza rispetto al caso precedente è che pressione e velocità non sono più in fase e che il rapporto delle loro ampiezze è un numero complesso: *l'impedenza acustica*, di cui la *resistenza acustica* è la parte reale. Non si scende comunque ulteriormente nel dettaglio poichè l'ipotesi di onda sferica è di scarso interesse per questo lavoro di tesi.

1.2 Il rumore nei motori a combustione interna

Il rumore emesso dai motori a combustione interna è una delle principali caratteristiche che li contraddistingue sia in modo positivo che in modo negativo. Esso è una fonte molto ricca di informazioni per l'orecchio attento: svela le peculiarità tecniche, la presenza di eventuali anomalie di funzionamento e può, inoltre, costituire un'ottimo biglietto da visita dal punto di vista commerciale. Non bisogna, però, dimenticare gli aspetti negativi. I suoni emessi da un propulsore possono creare molti disagi a chi ne viene esposto e, comunque sia, una mancanza del controllo del campo sonoro sia a monte che a valle del cilindro può creare inefficienze di riempimento.

Un motore a combustione interna è un sistema complesso che possiede svariate fonti sonore al suo interno; le principali sono tre: rumore di combustione, rumore meccanico e rumore gasdinamico. Sebbene in questa sede ci si occuperà principalmente del terzo (che riguarda i condotti), per completezza si esporranno le caratteristiche fondamentali di tutti e tre.

1.2.1 Rumore di combustione e rumore meccanico

Durante il funzionamento del motore la pressione nel cilindro varia in maniera molto marcata e repentina. Questo andamento e il moto alternativo tipico del pistone danno origine a forze non costanti né in modulo né in direzione e verso, facendo sì che gli accoppiamenti cinematici direttamente coinvolti nel fenomeno della combustione subiscano continui urti che a loro volta emettono onde sonore. Possiamo annoverare tale fenomeno nel cam-

po del rumore meccanico. Esempi di rumore meccanico possono essere, ad esempio, lo scampanamento del pistone, che, spinto da una forza orizzontale che cambia verso ad ogni corsa, urta un lato del cilindro piuttosto che l'altro; oppure gli urti che avvengono nei cuscinetti tra albero motore e biella sempre per gli elevati gradienti di pressione.

Del rumore viene anche dagli organi meccanici non direttamente connessi al processo di combustione come ad esempio gli urti delle valvole contro le loro sedi oppure lo strisciamento delle camme contro le punterie.

Anche il motore come corpo unico e compatto è una fonte sonora: vibrando sui supporti produce onde di pressione che si espandono nell'ambiente circostante.

Come si può notare da quanto appena detto, la variabile fondamentale del fenomeno sono le forze in gioco durante il funzionamento del propulsore e quindi l'andamento della pressione all'interno della camera di combustione. Più precisamente si può dire che lo spettro del livello di pressione all'interno del cilindro descrive le caratteristiche della forza di eccitazione sull'intera gamma di frequenze. Sottraendo quindi il quest'ultimo al livello di pressione sonora emesso dal motore nell'ambiente circostante si ottiene la *curva di attenuazione* [1].

Questa risulta relativamente indipendente dalle condizioni di funzionamento del motore (come si vede nella figura 1.3 le curve a pari regime di rotazione sono quasi sovrapposte) e può essere utilizzata in fase di progettazione sia per stimare la rumorosità intrinseca di un motore (connessa al comfort) sia per modellizzare il comportamento dei vari organi meccanici all'eccitazione sonora.

1.2.2 Rumore gasdinamico

Il susseguirsi delle aperture e delle chiusure delle luci di aspirazione e scarico del cilindro genera nei rispettivi condotti un campo sonoro che si propaga attraverso il mezzo (gas combusti o aria a seconda del caso) lungo tutto l'impianto. La geometria del sistema determina poi la presenza di riflessioni totali o parziali delle onde che quindi interagiscono tra loro in modo complesso. Le pareti del sistema, non perfettamente rigide, e la sua estremità verso l'ambiente trasmettono onde sonore verso l'esterno conosciute come rumore gasdinamico.

Analizzando meglio tutto lo spettro di emissione di rumore gasdinamico di un motore si ravvisano diverse componenti. Si consideri ad esempio il caso della figura 1.4 che mostra il *livello di pressione sonora* misurato e distanza di 1 m dall'uscita dello scarico di un motore quattro tempi monocilindrico a

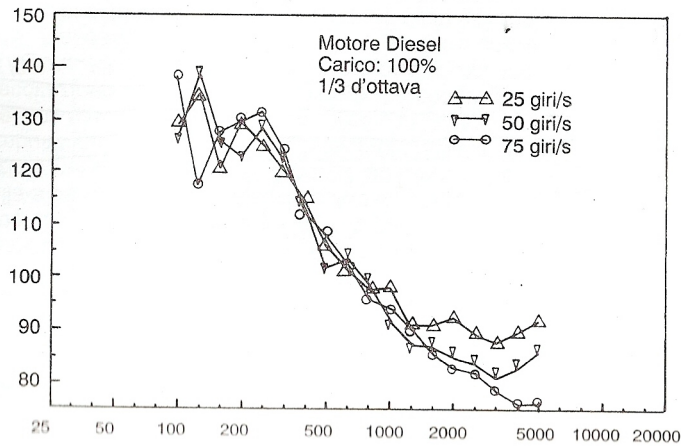


Figura 1.3: Andamento dell'attenuazione strutturale del rumore di combustione in funzione della frequenza. Sull'asse delle ascisse: frequenze in [Hz] sull'asse delle ordinate: attenuazione strutturale in [dB]

diversi regimi di rotazione [1] (ma gli stessi discorsi valgono anche per motori pluricilindrici e per sistemi di aspirazione).

Come si nota dai valori di *livello di pressione sonora* raggiunti, è la parte bassa dello spettro dove sono in gioco le energie maggiori, che è quindi molto importante ottimizzare sia per il funzionamento efficiente del propulsore sia per evitare eccessivi fastidi o danni alle persone. Il contributo maggiore lo si ottiene alle frequenze più gravi: i picchi in questa zona dello spettro corrispondono alle successioni di scarichi del motore e alle loro armoniche superiori, espresse analiticamente dalla:

$$f_0 = \frac{n_c n}{\varepsilon} \quad (1.38)$$

Dove f_0 è l'armonica fondamentale, n_c il numero di cilindri del motore, ε i giri necessari per compiere un ciclo termodinamico completo (due nel caso di un quattro tempi) e n il regime di rotazione.

Il contributo a frequenze maggiori è invece dovuto al *rumore autogenerato* [1]. Esso è prodotto dal flusso medio del fluido che incontra le discontinuità del condotto in cui scorre. Queste, staccando vortici, producono rumore ad alta frequenza, fenomeno ampiamente riconoscibile soprattutto in motori sportivi che funzionano ad alti regimi di rotazione.

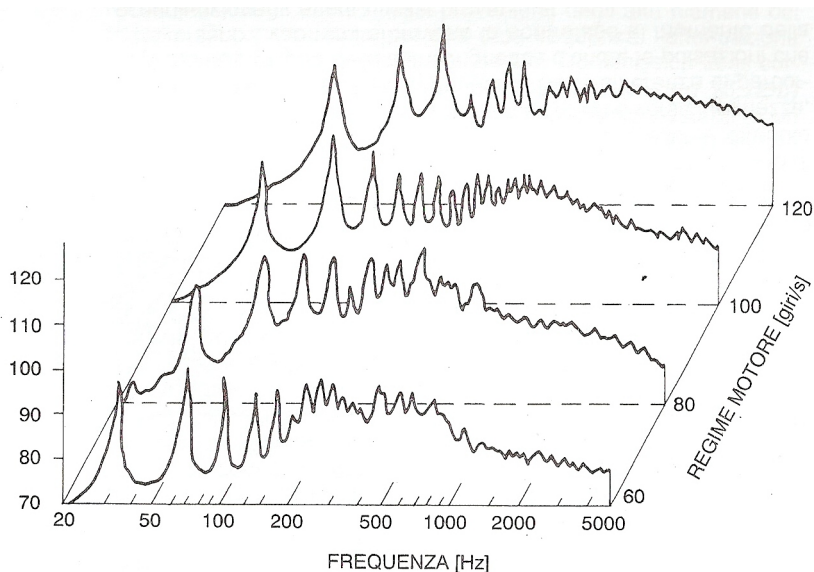


Figura 1.4: Andamento del livello di pressione sonora rilevato a distanza di un metro dallo scarico di un motore monocilindrico a quattro tempi funzionante a pieno carico al variare del regime di rotazione.

1.3 Silenziatori per motori a combustione interna

Il principale scopo dei silenziatori è quello di attenuare il rumore di tipo gasdinamico emesso dai motori senza causare eccessive perdite fluidodinamiche. Per fare ciò si possono sfruttare vari principi fisici che distinguono perciò i silenziatori in differenti tipi di cui i principali sono: silenziatori reattivi, dissipativi e ad interferenza.

Si noti che i componenti reali non sono propriamente riconducibili ad un particolare gruppo perchè sfruttano più fenomeni fisici contemporaneamente, la distinzione in gruppi è comunque utile a livello concettuale.

Prima di addentrarci nelle descrizioni delle tipologie di condotti occorre spiegare come viene quantificata la capacità di attenuare il rumore.

1.3.1 Indicatori dell'attenuazione sonora di un silenziatore

Il principale indice in uso per valutare quanto un silenziatore abbatte il rumore è la *Transmission Loss* che è definita come la differenza in decibel tra livello di potenza sonora (vedi 1.30) in entrata (cioè dell'onda incidente) e quella in uscita (cioè dell'onda trasmessa).

$$TL = 10 \log_{10} \left(\frac{W_i}{W_t} \right) \quad [dB] \quad (1.39)$$

nella quale W_i è la potenza incidente e W_t la potenza trasmessa.

Se le oscillazioni di pressione non hanno modulo eccessivamente elevato si può considerare il campo lineare e, come accade anche ad esempio per le funzioni di trasferimento, la *Transmission Loss* risulta dipendente solo dalla frequenza e dalla geometria del silenziatore, che quindi definisce in maniera completa ed univoca. Se così non fosse si aggiungerebbe anche una dipendenza dell'intensità sonora (vedi 1.32) e quindi una dipendenza, oltre che dell'ampiezza stessa di oscillazione, anche del tipo di fluido e delle sue condizioni termodinamiche.

Un altro parametro abbastanza diffuso è l'*Insertion Loss*, definita come la differenza tra il *livello di pressione sonora* in un punto dell'impianto misurata prima e dopo l'inserimento di un silenziatore. Questa quantità è utile per sistemi di scarico o aspirazione particolarmente complessi quando l'attenuazione prodotta da un silenziatore dipende in maniera non trascurabile anche dall'impianto in cui è inserito e non è perciò una caratteristica esclusiva del singolo elemento.

$$IL = 10 \log_{10} \left(\frac{p_{e1}^2}{p_{e2}^2} \right) \quad [dB] \quad (1.40)$$

Dove per p_{e1} si intende la pressione efficace in un punto prima dell'inserimento del silenziatore e con p_{e2} s'intende la pressione efficace nello stesso punto dopo l'inserimento del silenziatore.

1.3.2 Silenziatori reattivi

Questa tipologia di silenziatori fa uso di elementi, in serie o in parallelo al condotto principale, che attenuano le oscillazioni di pressione perchè introducono variazioni di capacità del sistema percorso dai gas e sfruttano l'inerzia e la comprimibilità del fluido. La capacità di attenuare il rumore, sia dal punto di vista della potenza dissipata che dalle particolari frequenze che riescono a smorzare, dipende strettamente dalla geometria del volume che si introduce nel condotto.

Si esamina inizialmente il silenziatore reattivo più semplice da costruire: la cosiddetta camera di espansione in serie. Come si vede dalla figura 1.5 essa è costituita da un condotto a sezione costante (S_1) nel quale è stato aggiunto un volume cilindrico di sezione S_2 .

Al variare della frequenza dell'onda incidente proveniente dall'inizio del tratto di area S_1 , la massa di gas contenuta in quello di area S_2 entra in

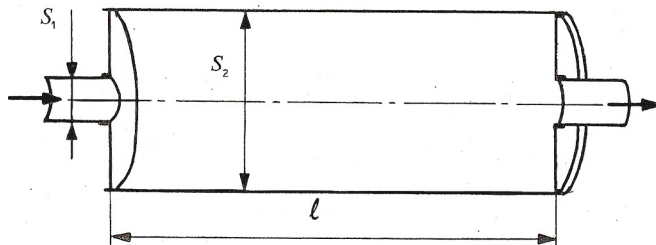


Figura 1.5: Camera di espansione semplice, costituita da un tratto di sezione S_1 con interposto un volume di sezione S_2 e lunghezza l .

risonanza quando un numero intero di mezze lunghezze d'onda eguaglia la sua lunghezza l , come spiegato dalla relazione seguente:

$$f_0 = \frac{a}{2l} \quad (1.41)$$

Il fenomeno della risonanza non si ha solo per l'armonica fondamentale della (1.41) ma anche per le armoniche superiori, ovvero per le frequenze multiple di f_0 .

Queste particolari frequenze sono anche dette trasparenze perchè la camera si comporta, in questi casi, come se non esistesse e l'attenuazione è nulla. Le cosiddette trasparenze sono facilmente individuabili nei punti iniziali e finali del grafico in figura 1.6 dove la TL è nulla. Si nota sempre dalla figura 1.6 che l'abbattimento del rumore, oltre ad aumentare quanto più lontano si è dalle risonanze, cresce con il rapporto S_2/S_1 , cioè con l'accentuarsi della discontinuità geometrica tra condotto e camera aggiunta in serie.

Un'altra tipologia di silenzianti reattivi è costituita dai sistemi che si basano sul cosiddetto *risonatore di Helmholtz*. Come mostrato in figura 1.7 è realizzato da una camera disposta in parallelo al condotto principale e collegata ad esso tramite un foro (quello di diametro $2R$ nella 1.7 b) oppure tramite un collo di lunghezza L e di sezione maggiore rispetto a quella S_1 del condotto.

In ogni caso, quando il volume in parallelo entra in risonanza assorbe quella frequenza vibrando al posto del fluido che scorre nel tubo. Il funzionamento è quindi sostanzialmente inverso a quello della camera in parallelo: questa volta le trasparenze del volume sono punti di massimo assorbimento del rumore, come si nota anche in figura 1.8, dove il picco di TL è alla frequenza di risonanza. Quest'ultima è definita, nel caso di risonatore di Helmholtz, come:

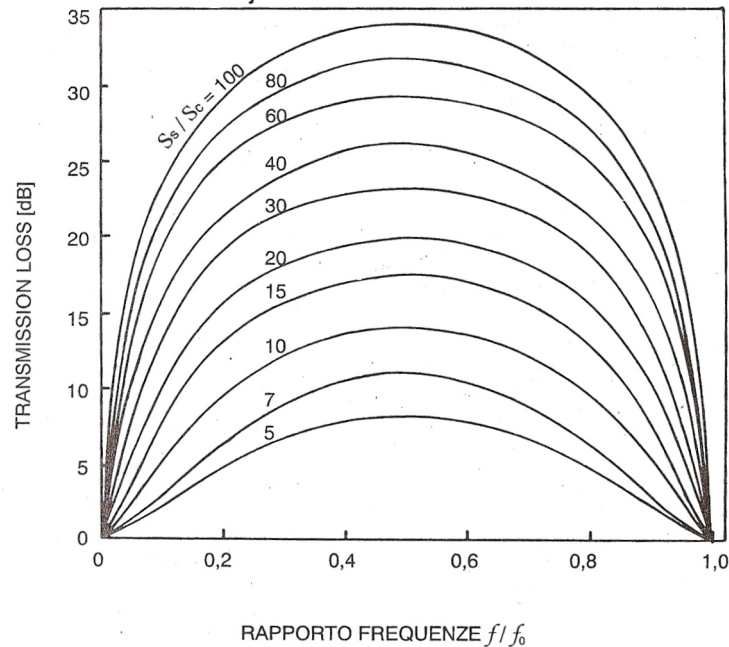


Figura 1.6: Andamento della Transmission Loss di una camera semplice in funzione delle frequenze al variare del rapporto tra sezione della camera stessa e del condotto.

$$f_0 = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{geom}}{V_s}} \quad (1.42)$$

nella quale il fattore C_{geom} è un fattore che dipende dalla forma del collegamento tra volume e condotto (ad esempio per in foro circolare $k = 2R$), mentre V_s è il volume che entra in risonanza.

Si può così notare che f_0 dipende sia dalla geometria (tramite V_s e C_{geom}) sia dalle condizioni termodinamiche del gas tramite a .

La figura 1.8 mette anche in risalto come la capacità di attenuazione del rumore dipenda anche dal parametro $\sqrt{C_{geom}V_s}/2S_1$, che ancora meglio dell'equazione (1.42) mette in risalto il ruolo della forma del risonatore rispetto alla sezione del condotto S_1 . Si nota che più la differenza di grandezza tra i due aumenta (cioè il rapporto diventa più grande), più la capacità di attenuazione cresce. Bisogna comunque considerare che allo stesso modo cresce la massa, e quindi l'inerzia, del fluido che vibra: ciò in un silenziatore automobilistico potrebbe generare sistemi non abbastanza pronti nel silenziare i fenomeni fortemente transitori, spesso presenti nei motori.

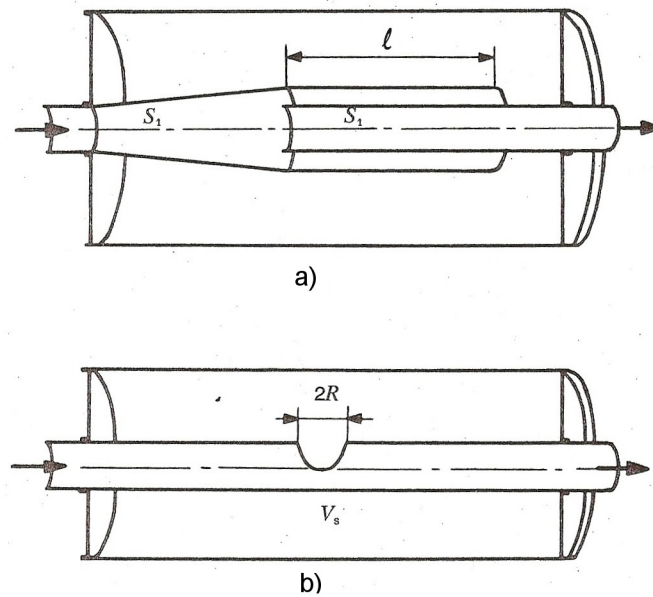


Figura 1.7: Due esempi di geometrie di condotti con risonatore di Helmholtz. Nella a) si nota la soluzione con collo di lunghezza l , mentre nella b) la soluzione con foro di diametro $2R$ che collega il condotto al volume in parallelo.

Sfruttando il tipo di configurazione appena esposta si possono porre in parallelo al flusso di gas (aria o prodotti di combustione che siano), dei tubi di sezione paragonabile (tipicamente uguale) a quella del condotto principale e di una certa lunghezza l . Si hanno in questo caso dei silenziatori a colonna. Le frequenze dove l'effetto silenziante è massimo, idealmente, come nel caso del risonatore di Helmholtz, infinito, sono:

$$f_0 = \frac{a}{4l} \quad (1.43)$$

e le sue armoniche dispari. Come si vede dalla figura 1.9, al di fuori delle frequenze di risonanza l'effetto è sostanzialmente nullo, il che presenta uno degli svantaggi di questa soluzione nel caso in cui si hanno spettri sonori molto estesi. L'altro problema è l'ingombro: come si nota dalla (1.43), si abbassa la frequenza da abbattere più la lunghezza del tubo cresce, e con un fattore moltiplicativo di 4. Si può ovviare a quest'ultimo inconveniente disponendo i tubi in maniera concentrica con le rispettive estremità collegate, ogni tubo ha lunghezza diversa dall'altro e abbatte armoniche diverse.

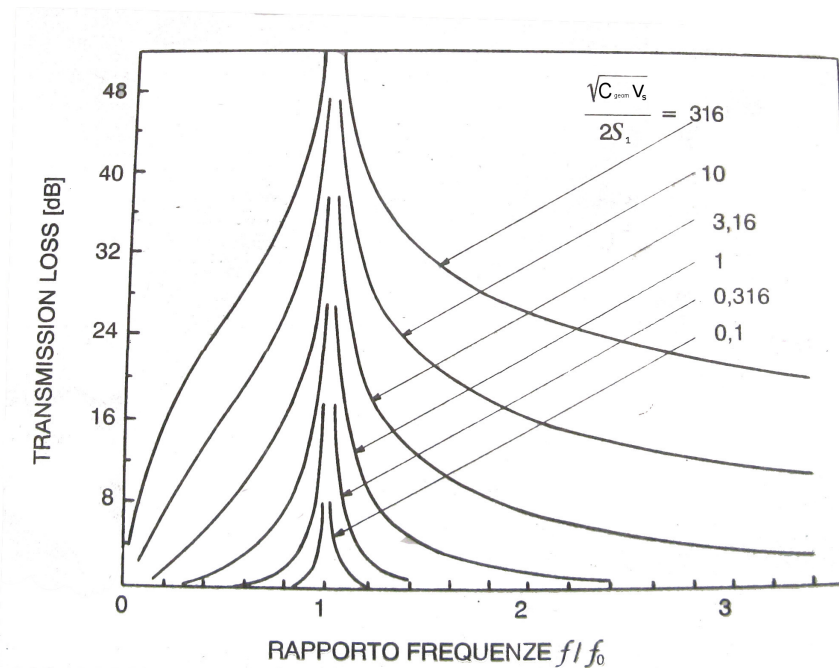


Figura 1.8: Transmission Loss di un risonatore di Helmholtz al variare del parametro caratteristico $\sqrt{C_{geom} V_s} / 2S_1$, che ne sintetizza la geometria.

1.3.3 Silenziatori dissipativi e ad elementi perforati

Queste due tipologie di impianti sono meno interessanti per questo lavoro di tesi ma saranno citati dal momento che costituiscono comunque una tipologia interessante sia a livello tecnico che di mercato.

Un silenziatore dissipativo è costituito generalmente da un tubo forato circondato da materiale fonoassorbente (ad esempio lana di vetro o di roccia) che assorbe, dissipandola, l'energia delle onde di pressione del flusso di gas che vi passa dentro.

L'attenuazione prodotta è proporzionale alla superficie di contatto tra gas e materiale fonoassorbente e dallo spessore di questo (maggiore è l'isolamento alle basse frequenze migliora, mentre alle alte è indifferente). Questo tipo di silenziatori è molto usato per realizzare scarichi sportivi, ad esempio per le motociclette da competizione, per via della limitata perdita di carico che genera, della leggerezza e compattezza del sistema. Grazie alle doti di isolamento termico che spesso il fonoassorbente può vantare è ad esempio possibile, nel caso di un sistema di scarico, realizzare la parte del silenziatore in materiali non metallici molto leggeri, come Kevlar o compositi. Tuttavia un silenziatore dissipativo impiega materiale costoso e soggetto a continuo

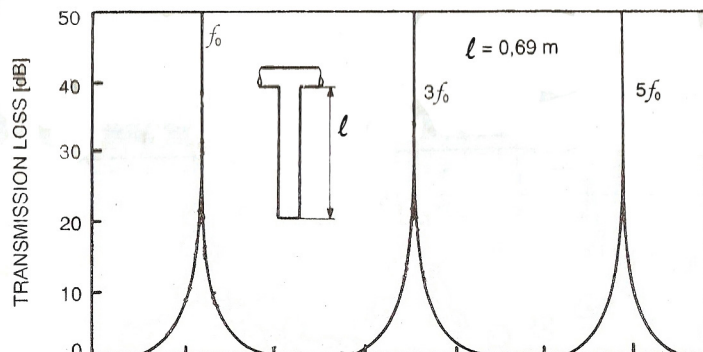


Figura 1.9: Transmission Loss di un risonatore a colonna

degrado (soprattutto per quanto riguarda quello assorbente, che deve essere sostituito con regolarità) e abbatte in maniera poco soddisfacente il rumore alle basse frequenze.

La presenza di elementi perforati nei silenziatori (di cui un esempio schematico in figura 1.10) è, invece, trasversale a tutte le tipologie, sia reattivi che dissipativi. I fori fungono infatti sia da collegamento per i volumi di un eventuale silenziatore reattivo, sia dissipano energia opponendo resistenza al passaggio del fluido, comportandosi quindi da elementi assorbenti.

Uno dei parametri di progetto più importanti per questi silenziatori è la *porosità*, definita come il rapporto tra la superficie totale dei fori e la superficie laterale complessiva del tratto forato in esame. In genere, sia che questi elementi siano inseriti in sistemi reattivi sia in dissipativi, la loro efficacia cresce all'aumentare di questo parametro. In particolare, per motivi di costi e di miglior funzionamento alle basse frequenze, gli elementi forati stanno sempre più sostituendo l'utilizzo di materiale fonoassorbente nei silenziatori dissipativi. Anche nei tipi reattivi sono però sempre più impiegati come collegamento alle camere poichè ne migliorano l'abbattimento sonoro alle alte frequenze.

1.4 Equazioni di conservazione

Il comportamento di un fluido è analiticamente descritto da tre equazioni differenziali alle derivate parziali: conservazione della massa, conservazione della quantità di moto e conservazione dell'energia. Ad esse può essere aggiunta un'equazione di stato, nella fattispecie, lavorando con aria o gas

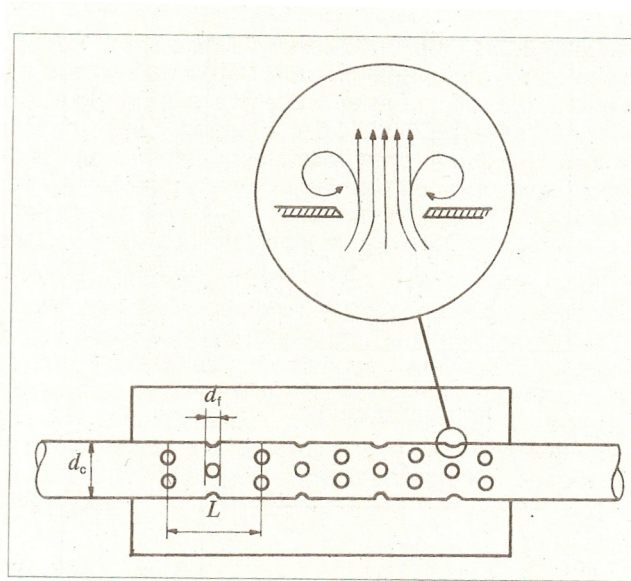


Figura 1.10: Schema di un silenziatore forato e di come interagisce col fluido

combusti, sarà quella dei gas perfetti. Come già fatto ad inizio capitolo, si userà anche in questo caso un approccio Euleriano. In effetti, la trattazione analitica della propagazione del suono che è stata presentata non è altro che un caso particolare delle equazioni qui di seguito, che sono il fondamento teorico di tutti i fenomeni fisici legati alla meccanica dei fluidi.

Ci sono vari modi, dal punto di vista formale, per esprimere le equazioni: in questa sede si opererà per la in forma indefinita, cioè con le derivate e senza riferirsi ad volume in particolare e per la forma integrale, cioè riferita ad un volume di calcolo Ω e alla rispettiva superficie Σ . La prima sarà utile quando si parlerà della modellazione di terminale anecoico e quella integrale servirà per introdurre l'approccio del *metodo dei volumi finiti*

1.4.1 Conservazione della massa

La massa di fluido contenuto nel volume Ω in un certo istante di tempo è data da [11]:

$$m = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (1.44)$$

L'equazione di conservazione della massa afferma che la variazione di massa in Ω , associata a variazioni nel tempo della densità in ciascun punto, deve

essere compensata dal flusso totale di massa attraverso la superficie Σ [11]:

$$\int_{\Omega} \frac{\delta \rho}{\delta t} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0 \quad (1.45)$$

Nella (1.45) il primo termine esprime la variazione instazionaria della densità, mentre il secondo termine è l'integrale di flusso attraverso Σ .

La stessa relazione in forma indefinita nella quale gli indici i e j rappresentano le tre coordinate cartesiane, perciò detta anche indiciale:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u_i)}{\delta x_i} = 0 \quad (1.46)$$

1.4.2 Conservazione della quantità di moto

La conservazione della quantità di moto è strettamente legata al secondo principio della dinamica ($F = ma$), infatti:

$$m \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta t} = m a \quad (1.47)$$

Ciò vuol dire che la relazione che si va a presentare esprime, in sostanza, l'equilibrio di tutte le forze agenti sul volume Ω , che si possono dividere in due categorie: forze di volume e forze di superficie.

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta t} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Sigma} (\tau_n - p_n) d\Sigma \quad (1.48)$$

Nella (1.48) i vari termini corrispondono alle forze agenti [11]:

- $\int_{\Omega} \rho \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta t} d\Omega$ è il termine instazionario che spiega la dipendenza dal tempo della quantità di moto. A regime il fluido non subisce accelerazione e questa quantità si annulla.
- $\int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma$ esprime il flusso di quantità di moto attraverso la superficie del dominio.
- $\int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega$ è invece un termine che esprime il contributo delle forze di volume, come ad esempio la gravità
- $\int_{\Sigma} (\tau_n - p_n) d\Sigma$ sono le forze di superficie dovute alle pressione e agli sforzi viscosi (τ_n)

In forma indefinita gli stessi condetti possono essere così espressi:

$$\frac{\delta(\rho u_i)}{\delta t} + \frac{\rho u_i u_j}{\delta x_j} + \frac{\delta p}{\delta x_i} = \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta x_j} + f_i \quad (1.49)$$

nella quale si ravvisano gli stessi termini già approfonditi poco sopra.

1.4.3 Conservazione dell'energia ed equazione di stato

La variazione di energia in un fluido coincide con la somma della variazione di potenza meccanica e termica nel volume Ω considerato: questo è il concetto che afferma principio di conservazione dell'energia.

Posta e l'energia totale per unità di massa e $h_T = h + 1/2\mathbf{u}_2$ l'entalpia totale, nella quale h è l'entalpia statica, si ha perciò che:

$$\int_{\Omega} \frac{\delta(\rho e)}{\delta t} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho h_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Sigma + \int_{\Sigma} \tau_n \cdot \mathbf{u} d\Sigma + \int_{\Sigma} -q \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (1.50)$$

nella quale [11]:

- $\int_{\Omega} \frac{\delta(\rho e)}{\delta t} d\Omega$ è, analogamente alle altre due equazioni, il termine istanzionario
- $\int_{\Sigma} \rho h_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$ esprime il flusso di energia attraverso la superficie Σ , al quale, considerato il concetto di entalpia totale, contribuiscono sia l'energia interna totale e sia la pressione.
- $\int_{\Sigma} -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Sigma$ rappresenta il lavoro dovuto alla pressione. Qui è necessaria una precisazione: questo termine potrebbe essere considerato già presente nel punto precedente. Parlando, però di lavoro, si considera l'effetto della pressione su superfici mobili (ad esempio le pale delle turbomacchine), mentre nel termine precedente ci si riferiva ad un flusso di pressione che causa una variazione di energia senza generare lavoro (come può essere il flusso attraverso una sezione di ingresso o di uscita del volume Ω).
- $\int_{\Sigma} \tau_n \cdot \mathbf{u} d\Sigma$ è il lavoro dovuto agli sforzi viscosi, si tratta perciò di una dissipazione di energia
- $\int_{\Sigma} -q \cdot \mathbf{n} d\Sigma$ è infine il flusso di calore scambiato con l'esterno. q è quantificato dalla *legge di Fourier*.

La forma indefinita dell'equazione è invece data dalla:

$$\frac{\delta \rho E}{\delta t} + \frac{\delta[(\rho E + p)u_i]}{\delta x_i} = \frac{\delta(u_j \tau_{ij})}{\delta x_i} - \frac{\delta q}{\delta x_i} \quad (1.51)$$

L'equazione di stato, come dice il nome stesso, è una relazione matematica che lega tra loro le variabili di stato del problema:

$$\frac{p}{\rho} = R_{aria} T \quad (1.52)$$

nella quale si assume che la costante dei gas specifica per l'aria sia, eventualmente, anche quella dei gas combustibili.

Capitolo 2

Elementi di analisi dei segnali e teoria della decomposizione

Questo capitolo presenta l'altra componente teorica che ha giocato un ruolo fondamentale nel corso di questa tesi: l'analisi dei segnali. Dopo una rassegna dei concetti di base riguardanti i segnali si esporrà la *teoria della decomposizione*, il punto centrale di tutto il processo di post-trattamento dei dati per la previsione della *transmission loss* che si è messo a punto in questi mesi.

2.1 Serie di Fourier e trasformata di Fourier

2.1.1 Serie e trasformata continue

Sia $g(t)$ una generica funzione periodica di periodo T e di frequenza $f = 1/T$. Se essa soddisfa le condizioni di *Dirichelet*¹ è possibile esprimerla come una serie infinita di funzioni sinusoidali aventi frequenza uguale o multipla intera (armoniche superiori) di quella della $g(t)$ di partenza [3]. Quanto detto ora è matematicamente rappresentato dall'equazione:

$$G(f) = \frac{b_0}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cos(\omega it) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin(\omega it) \quad (2.1)$$

nella quale b_0 , b_i e c_i sono numeri reali o complessi opportunamente definiti detti *coefficienti della serie di Fourier*. Si noti inoltre che, nel caso $i = 0$, si ha il termine a frequenza nulla ($b_0/2$ nella 2.1), cioè il valor medio della serie, $i = 1$ rappresenta invece il termine alla frequenza fondamentale, mentre i termini $i > 1$ sono le già citate armoniche superiori. Il termine ω è detto

¹Una funzione soddisfa le condizioni di Dirichelet se è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie o se è dotata di un numero finito di massimi o minimi ed è assolutamente integrabile

pulsazione e vale $2\pi/T$.

Si può dimostrare che i *coefficienti di Fourier* sono dati dalle seguenti relazioni:

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^T g(t) dt \quad (2.2)$$

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^T g(t) \cos(\omega i t) dt \quad (2.3)$$

$$c_i = \frac{1}{\pi} \int_0^T g(t) \sin(\omega i t) dt \quad (2.4)$$

L'equazione (2.1) fornisce la funzione $G(f)$ nel campo delle frequenze, ovvero lo spettro di $g(t)$ che, essendo originato da una funzione periodica, è una funzione discreta. Si osservi inoltre che lo spettro, a parità di fase, dipende solo dalla forma della funzione nel dominio del tempo, ovvero traslando $g(t)$ sull'asse t la $G(f)$ non cambia [4].

Utilizzando i numeri complessi la (2.1) può anche essere espressa come segue:

$$G(f_i) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(t) \cdot e^{-j2\pi f_i t} dt \quad (2.5)$$

nella quale $f_i = i\omega/2\pi$ è direttamente collegata al concetto di frequenza. Si può passare dalla (2.1) alla (2.5) utilizzando la *formula di Eulero*.²

Quando la funzione da esprimere nel dominio delle frequenze non è periodica si utilizza invece la trasformata di Fourier. L'operazione è concettualmente analoga a quella di prima, si considera cioè la $g(t)$ in questione come periodica di periodo infinito e si esprime la trasformata come [4]:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} dt \quad (2.6)$$

Si noti che, proprio perchè il periodo $T \rightarrow \infty$, lo spettro di $G(f)$ sarà questa volta una funzione continua: una funzione non periodica dà perciò un contributo a tutte le infinite frequenze.

Le caratteristiche dello spettro (continuo o discreto, periodico o non) dipendono quindi dal tipo di funzione da cui si parte. In ogni caso, sia che si esegua la trasformata o la serie di Fourier, il passaggio al dominio delle frequenze non aggiunge o toglie nessuna informazione al segnale, semplicemente permette di evidenziare alcune peculiarità piuttosto che altre.

² $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$

2.1.2 Trasformata discreta di Fourier

Per come è stata presentata la trasformata di Fourier non può avere molte applicazioni pratiche. Una delle caratteristiche principali di una serie di dati reali è, infatti, quella di essere frutto di un processo di campionamento³. In parole povere ciò vuol dire che ci si trova ad operare prevalentemente, per non dire esclusivamente, con funzioni discrete. Risulta perciò fondamentale adattare uno strumento matematico importante come la trasformata anche per questo tipo di funzioni. La prima osservazione da fare è quella che lo spettro di una quantità discreta è, a differenza che nel caso continuo, periodico. Esso si estende, infatti, in un intervallo che va da zero alla metà della frequenza di campionamento f_{camp} (si veda anche il paragrafo 2.3), dopodiché replica ancora le stesse informazioni di quell'intervallo [4]. Se la funzione campionata in questione è non periodica, comunque lo spettro sarà continuo e sarà definito dalla:

$$G(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(t_i) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t_i} \quad (2.7)$$

Se, oltre ad essere discreta, la funzione di cui fare la trasformata è anche periodica (caso in cui nel paragrafo 2.1.1 si calcolava la serie di Fourier) il suo spettro sarà sempre periodico ma questa volta anche discreto [4] e la trasformata discreta di Fourier è la seguente:

$$G(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g(i) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot i} \quad (2.8)$$

dove k è l'indice che rappresenta la k -esima frequenza mentre i è l' i -esimo istante temporale rispetto al totale dei campioni nel tempo N .

Gli algoritmi che implementano la trasformata discreta di Fourier tentano di fattorizzare il numero di campioni N e dividere il problema di partenza in più sottoproblemi in modo da velocizzare il calcolo. Questa prassi fa ottenere nella maggior parte dei casi degli spettri approssimati noti come *fast Fourier transform*. Anche nel presente lavoro di tesi è stato usato un algoritmo di questo tipo per passare dal dominio del tempo a quello delle frequenze.

³Si noti che il processo di campionamento, ignorando i valori presenti tra due campioni successivi, introduce una perdita di informazione rispetto ad un segnale continuo di tipo analogico

2.2 Auto spettro e cross spettro

Si considerino due segnali $g(t)$ e $h(t)$ e le loro trasformate di Fourier $G(f)$ e $H(f)$, il loro *auto spettro*, o anche *Power Spectrum* nella letteratura anglosassone, è definito come:

$$S_{GG}(f) = G(f) \cdot \overline{G(f)} \quad (2.9)$$

$$S_{HH}(f) = H(f) \cdot \overline{H(f)} \quad (2.10)$$

cioè come il prodotto dello spettro di un segnale per il suo coniugato. Come si può intuire questa quantità risulta reale ed è strettamente legata al concetto di potenza del segnale⁴, della quale fornisce la distribuzione sull'asse delle frequenze. Questo aspetto è di primaria importanza per questo lavoro di tesi in quanto il calcolo della *Transmissio Loss* in un condotto, come si è visto, comprende anche la necessità di calcolare la potenza.

Come lo spettro di un segnale è la trasformata di Fourier di quel segnale, inizialmente considerato nel dominio del tempo, così la funzione *auto spettro* è la trasformata di Fourier della funzione di *autocorrelazione* di un segnale, definita come:

$$R_{gg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t) g(t + \tau) dt \quad (2.11)$$

dove per T si intende, come di consueto, il periodo e con τ un fattore di traslazione temporale.

L'*autocorrelazione* è uno strumento utilissimo per determinare la periodicità di un segnale, per pulirlo dal rumore e per misurare fenomeni come i ritardi di propagazione. Se si osserva infatti la (2.11) si nota che i suoi massimi corrispondono a quando il segnale al tempo t e lo stesso al tempo τ sono uguali, ovvero a quando τ corrisponde ad un periodo. Misurando quindi la distanza temporale tra i picchi di R_{GG} è possibile stimare la periodicità [4].

Se estendiamo quanto ora esposto al confronto tra due segnali, anziché a quello di un segnale con se stesso, si arriva ai concetti di *crosscorrelazione*, espressa dalla formula (2.14), e *cross spettro*, che sono una la trasformata dell'altro.

Il *cross spettro* di due segnali è perciò definito come:

⁴considerato un segnale costituito da i armoniche $g(t) = A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$, la potenza media nel periodo di osservazione è data da $A_i^2/2$

$$S_{GF} = F(f) \cdot \overline{G(f)} \quad (2.12)$$

$$S_{FG} = G(f) \cdot \overline{F(f)} \quad (2.13)$$

Le (2.13) sono in questo caso quantità complesse nelle quali l'ampiezza è pari al prodotto delle ampiezze dei due segnali, mentre la fase è la differenza delle fasi. Anche il *cross spettro* è uno strumento fondamentale nel contesto di questa tesi: esso, infatti, esprime la relazione esistente tra due segnali stimando la loro affinità. Questa caratteristica sarà determinante quando si dovrà calcolare il *cross spettro* per separare la componente incidente e riflessa nel campo sonoro di un condotto.

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t + \tau) dt \quad (2.14)$$

2.3 Teorema del campionamento

Si è già accennato nei paragrafi precedenti che i segnali su cui si lavora in genere sono campionati. Non è questa la sede per discutere in maniera approfondita su come si svolga il processo di acquisizione dei dati e la sua conversione da analogico a digitale, si pone però attenzione sull'aspetto dal quale non si può prescindere se si lavora con dei segnali: la frequenza di campionamento.

Strumento essenziale per poter trattare il tema è il *teorema di Shannon*. Esso afferma che, considerato un segnale $g(t)$ il cui spettro si estende fino alla frequenza f_{max} , questo potrà essere acquisito senza nessuna perdita di informazione solo se campionato con una frequenza di campionamento f_{camp} almeno pari al doppio della f_{max} presente nel segnale⁵; bisogna, in parole povere, raccogliere almeno due punti di misura per ogni periodo [4].

Se non si tiene conto di quanto appena illustrato, si presenta il problema dell'*aliasing*. Campionando con frequenza minore della $2f_{max}$ del segnale succede, infatti, che le frequenze maggiori del limite imposto da *shannon* vengono viste come armoniche a frequenza inferiore. Il fenomeno è ben rappresentato in figura 2.1, in cui si nota che il terzo grafico (in basso) ricostruisce un segnale totalmente errato rispetto all'originale.

Bisogna prestare molta attenzione all'*aliasing* perché non è riconoscibile dalla serie di dati campionati e va quindi evitato a priori perché non correggibile.

⁵Per avere una buona qualità dei dati è consigliabile stare almeno a 2,5 volte la frequenza massima del segnale

Il rischio di un errore di campionamento del genere è addirittura quello di interpretare fenomeni fisici in maniera completamente fuorviante proprio per la presenza di componenti armoniche del segnale non esistenti nella situazione a cui si riferisce. Nel caso di un silenziatore, ad esempio, si ottimizzerebbe il componente per abbattere toni del rumore in realtà inesistenti.

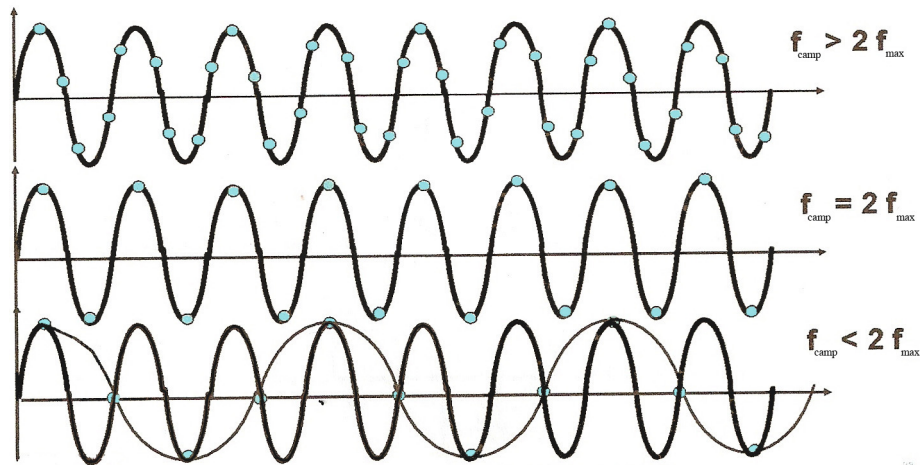


Figura 2.1: Esempio di campionamento di un segnale nel dominio del tempo. Il grafico in alto descrive un processo di campionamento corretto, quello centrale un processo corrispondente al limite imposto dal *teorema di Shannon*, mentre quello in basso un campionamento errato dei dati con insorgenza dell'*aliasing*.

2.4 Finestratura e *signal averaging*

Ci sono altri due aspetti da considerare quando si lavora con i segnali: i *record* di campionamento hanno durate finite e i dati hanno, qualunque sia la loro provenienza, una componente aleatoria indipendente dalla fisica del problema che falsifica i risultati.

2.4.1 Leakage e finestratura

I dati che si acquisiscono hanno in genere uno spettro complesso, costituito da molteplici armoniche, ciascuna con il proprio periodo temporale caratteristico. Avendo la storia temporale una lunghezza che raramente è il multiplo di tutti i periodi del segnale, tutte o quasi le armoniche sono caratterizzate dalla presenza di un numero non intero di periodi. Oltretutto il periodo fondamentale di una serie di dati risulta essere la durata del *record* stesso. Questa situazione genera un errore nel trattamento dei dati noto

come *leakage*, che consiste nella distribuzione dello spettro del segnale su armoniche della frequenza di campionamento a partire da quella fondamentale che è l'inverso del tempo di acquisizione stesso.

Si consideri ad esempio un segnale armonico semplice $g(t) = A \cos(t)$ con periodo T acquisito per un tempo $T_w = 1,5T$: lo spettro che si otterrebbe è quello dato dalle righe tratteggiate in figura 2.2, mentre quello reale è quello dato dalle righe continue. Come si nota per ogni frequenza "vera" ce ne sono almeno quattro ricostruite dall'elaborazione del segnale. Come è perciò osservabile, l'ampiezza spettrale su cui si ripartisce una frequenza è piuttosto grande e non certo nelle immediate vicinanze di questa. Addirittura nel caso della figura 2.2, avendo campionato un coseno per un periodo e mezzo, il valor medio non sarà più nullo e comparirà una componente spettrale a frequenza zero, fenomeno che altera notevolmente la realtà dei dati.

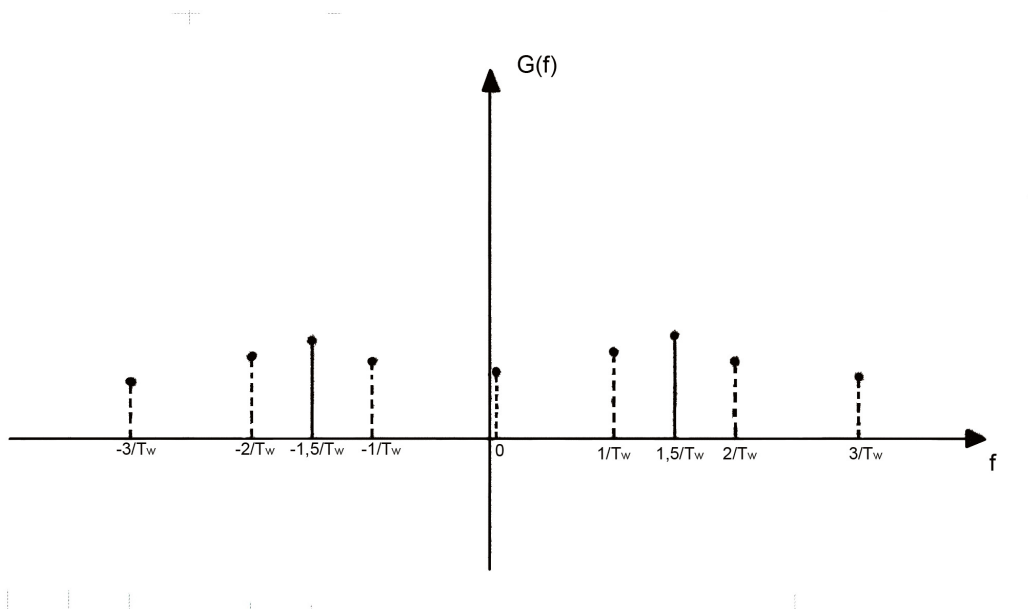


Figura 2.2: Esempio del fenomeno del *leakage* nel dominio delle frequenze su di un segnale armonico semplice acquisito per un tempo pari ad una volta e mezza il periodo del segnale stesso.

Per ovviare al *leakage* si attua una opportuna finestrtura dei dati. Una finestra di acquisizione è una funzione metematica con la quale si pesano i dati che si acquisiscono. La più semplice immaginabile, naturalmente del tutto inefficace contro il *leakage*, è quella rettangolare, che equivale ad acquisire i dati senza pensarli in alcun modo, o meglio pesandoli tutti allo stesso modo. Altri tipi di finestre sono osservabili in figura 2.3. Come si nota, senza scendere nel dettaglio matematico, l'obiettivo di tutte è quello di considerare più

il centro della storia temporale che gli estremi, dove, infatti, il troncamento dell'acquisizione genera il problema.

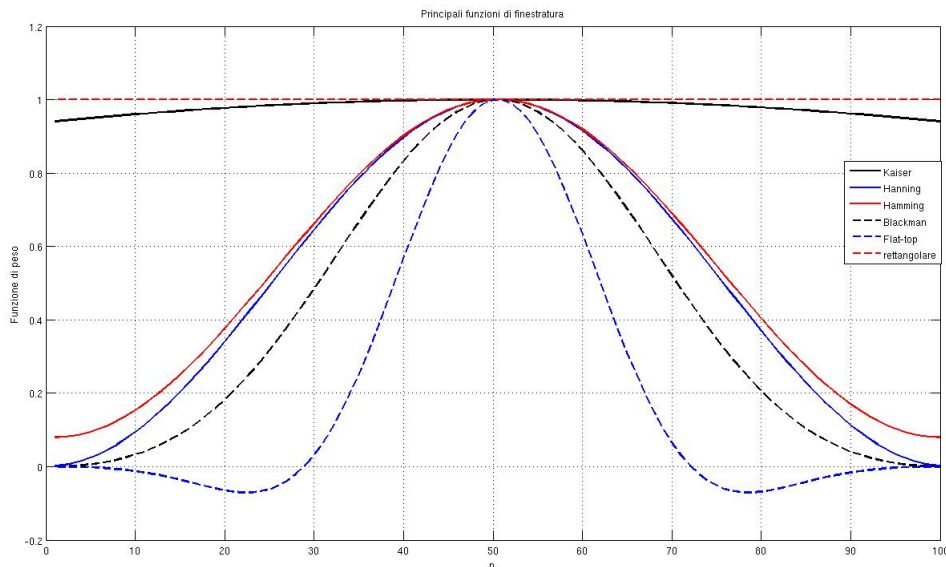


Figura 2.3: Grafico dei principali tipi di finestre nel dominio del tempo, più precisamente in questo caso in funzione del numero di campioni crescente nel tempo. Si nota che alcune finestre, come la *flat-top* in alcuni intervalli pesano i dati con coefficienti negativi.

2.4.2 Time averaging

Veniamo ora alla seconda delle due problematiche citate all' inizio del paragrafo: la presenza di una componente aleatoria nei segnali. La sua presenza può essere dovuta a svariate cause, le più comuni sono, ad esempio, la presenza di disturbi elettrici negli strumenti di misura o l'effetto di forzanti di tipo *random* non connesse al fenomeno che si vuole monitorare: ad esempio la presenza di vento nelle operazioni di misura condotte all'aperto.

Proprio per la natura casuale del fenomeno, esso può essere eliminato facendo la media di più *record* nel dominio del tempo o in quello delle frequenze. In particolare se si lavora nel primo dei due si esegue il cosiddetto *time averaging*. Perché le storie temporali siano adeguate devono essere perfettamente omologhe, bisogna quindi che abbiano tutte la stessa durata e che il punto iniziale sia lo stesso. Per quanto riguarda l'ultimo aspetto è quindi necessaria la presenza di un *trigger* che comandi l'inizio acquisizione. In alternativa è possibile dividere una storia temporale lunga in più sottostorie e

poi mediarle: ad esempio se si lavora con un motore a combustione interna si possono mediare più cicli tra loro, sempre facendo in modo che il punto del ciclo in cui si spezza la storia temporale sia lo stesso ogni volta. L'operazione di *time averaging* consente un aumento del rapporto tra segnale e rumore di $10 \cdot \log(i)$, dove i è il numero di record temporali utilizzati [4]. I risultati che si ottengono sono molto buoni anche nel caso di un livello di disturbo elevato, come quello presentato in figura 2.4 che riguarda la risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine. La figura 2.5 mostra, infatti, quanto viene abbattuta la componente casuale del segnale mediando tra loro dieci acquisizioni. Si nota come il primo tratto di rumore puro in figura 2.4 sia completamente eliminato nella 2.5

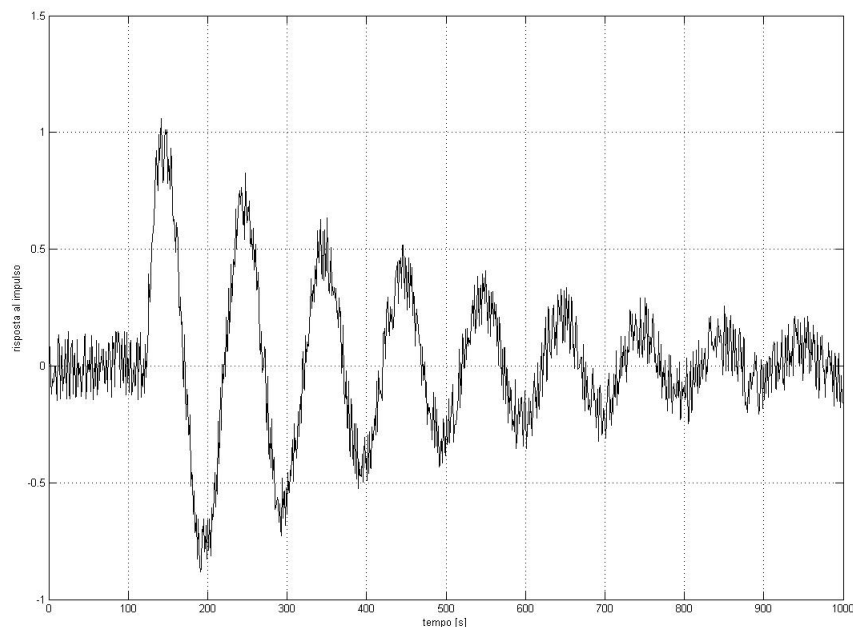


Figura 2.4: Esempio di acquisizione nel tempo della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine. Si nota come la componente aleatoria sia molto marcata ed in alcuni punti del grafico renda quasi impossibile risalire all'andamento reale del sistema fisico. Ad esempio il primo tratto di curva sarebbe una retta orizzontale costante sul valore zero.

2.5 Tecniche di eccitazione

Per poter modellare un sistema meccanico o la fluidodinamica di un condotto è necessario capire come si comporta il sistema. Per fare ciò si eccita

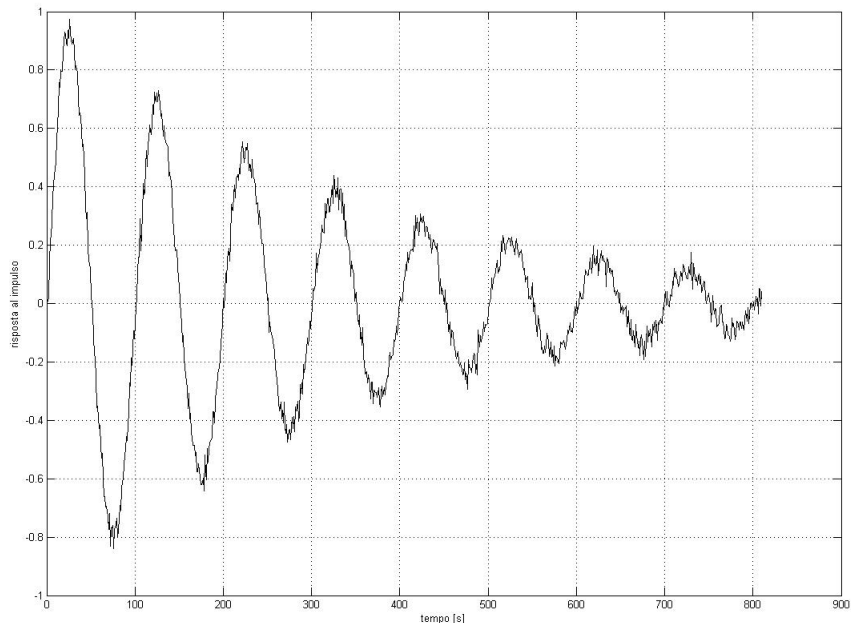


Figura 2.5: Effetto della media di dieci storie temporali analoghe a quella di figura 2.4. Si nota come sia ancora presente una componente random nel segnale, ma come questa sia decisamente più gestibile rispetto a prima. Mediando più serie temporali ancora la situazione migliorerebbe ulteriormente.

il sistema in maniera opportuna, in modo da ottenere dalla sua risposta il maggior numero di informazioni possibile rispetto alle esigenze che si hanno. I parametri che entrano in gioco in questo caso sono molteplici, i più importanti verranno descritti qui di seguito.

Bisogna innanzitutto considerare i propri obiettivi. Ad esempio, se si deve solo determinare la funzione di trasferimento di un sistema di cui già si conosce il funzionamento, sarà necessaria una precisione molto minore rispetto al caso in cui si deve modellizzare matematicamente il problema. Svolgere prove sperimentali o simulazioni numeriche con tecniche di eccitazione sofisticate quando non serve aumenta decisamente la difficoltà ed il costo sia della prova stessa che del trattamento dei dati.

Quanto appena detto introduce un altro aspetto di cui tener conto: la scelta dello spettro di frequenze con cui eccitare il sistema. In genere è bene studiare il sistema solo nell'intervallo di frequenze che interessa e con una risoluzione adeguata. In particolare si ricorda che la risoluzione in frequenza è inversamente proporzionale alla durata della prova e quindi un valore molto

piccolo necessita di prove molto lunghe.

Si consideri infine che è fondamentale sapere se una certa forzante porta il sistema in campo non lineare o meno. Se si lavora con ipotesi di sistema lineare bisogna fare attenzione a non eccedere questo limite durante le prove. Se, ad esempio, si sta eseguendo una procedura di analisi modale, andare in campo non lineare mina quella che è la base dell'intero lavoro.

Nei prossimi paragrafi si passeranno in rassegna le principali tecniche di eccitazione di un sistema.

2.5.1 Eccitazione impulsiva

Questa modalità di trasferire una forzante al sistema è quella che maggiormente è stata utilizzata in questo lavoro di tesi. Essenzialmente consiste nel dare un colpo secco al sistema, trasmettendogli quindi un impulso: viene ottenuto sui sistemi meccanici con il cosiddetto martello dinamometrico, mentre a livello numerico è riprodotto con opportune funzioni matematiche. A seconda del caso, la grandezza impulsiva può essere una forza o una grandezza tipica della fluidodinamica come la pressione o la velocità di un gas.

A livello matematico un impulso di una forza nel dominio del tempo è descritto dalla *Delta di Dirac*, ovvero la distribuzione matematica data dalla seguente equazione e rappresentata in figura 2.6a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.15)$$

Ciò che rende molto interessante la (2.15) è che la sua trasformata di Fourier (in figura 2.6b) è una retta orizzontale costante. Questo fisicamente vuol dire che eccitare un sistema con una forzante del tipo *delta di Dirac* equivale a forzarlo a tutte le frequenze dello spettro contemporaneamente. Risulta perciò evidente l'efficacia con cui è possibile modellare un sistema con questo strumento di analisi.

Uno svantaggio di questo tipo di approccio è il basso contenuto energetico per ogni frequenza che potrebbe far perdere o sottostimare il comportamento in certe bande [5]. Si noti inoltre che un impulso reale non ha uno spettro costante di ampiezza infinita ma uno spettro che tende a diminuire in ampiezza con l'aumento della frequenza e con il massimo a 0 Hz, come rappresentato in figura 2.7 [5]. Queste limitazioni sono presenti anche per gli impulsi generati durante le simulazioni numeriche, anche se, rispetto ad una prova sperimentale, è possibile controllare meglio la forma dello spettro proprio perchè generato a partire da una funzione nota.

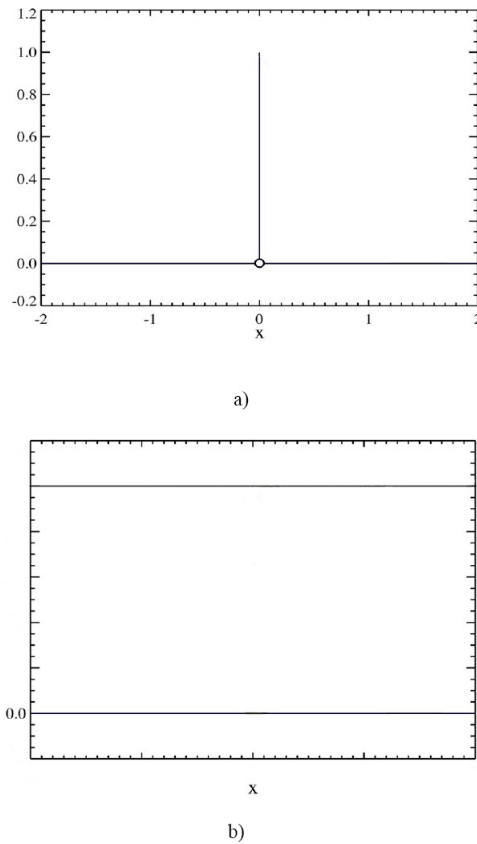


Figura 2.6: Distribuzione di Dirac nel dominio del tempo (a) e delle frequenze (b).

2.5.2 Rumore bianco

Il *rumore bianco* è un particolare tipo di rumore caratterizzato dall'assenza di periodicità e da ampiezza costante su tutto lo spettro di frequenze. Esso è generato da un segnale random e può essere quindi descritto solo in termini di densità di potenza spettrale, che preferibilmente deve essere costante lungo tutto l'asse delle frequenze [5], un esempio è riportato in figura 2.8. Non essendo possibile generare un *rumore bianco* per uno spettro di ampiezza infinita, solitamente si usa il termine *rumore bianco a banda limitata* per descrivere un segnale random generato in un intervallo di frequenze interessante per le acquisizioni da fare, ed è proprio la possibilità di analizzare il sistema in uno spettro ben definito (rispetto invece all'impulso che non lo permette) uno dei suoi vantaggi principali. Si noti inoltre che, sempre rispetto all'eccitazione impulsiva, in questo caso anche la fase del segnale è casuale.

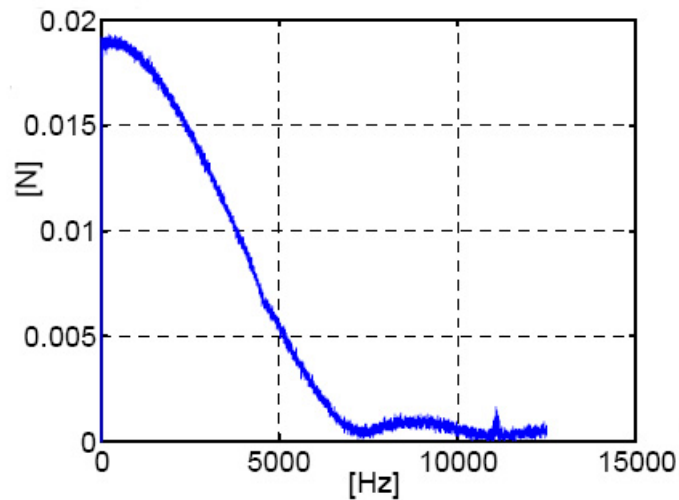


Figura 2.7: Spettro di un impulso reale. Si nota che l'ampiezza va diminuendo con la frequenza, il sistema sottoposto ad un impulso reale risentirà quindi più delle basse frequenze che delle alte.

Data la natura casuale del segnale, è molto più importante che in altri casi eseguire una procedura di *signal averaging* adeguata.

Il principale svantaggio del rumore bianco è il *leakage*, proprio per il suo contenuto armonico sempre diverso. La finestrazione è quindi fondamentale e va eseguita in maniera molto accurata, soprattutto per quanto riguarda la scelta del tipo di ponderazione dei dati da fare.

2.5.3 Altri tipi di eccitazione

Si citano di seguito altri metodi di eccitazione di un sistema di minor interesse per questo lavoro di tesi. Uno di questi è forzare il sistema con un segnale armonico semplice e procedere per step di frequenza più o meno ravvicinati. Si tratta di un metodo che permette un'estrema precisione di misura ma con il quale è molto lungo e costoso caratterizzare il comportamento su tutto lo spettro.

In alternativa si può utilizzare un segnale armonico semplice che varia la frequenza in continuo (*sweep*). In questo caso il parametro più importante è la velocità con cui varia la frequenza: se troppo alta il sistema resta in condizioni transitorie per tutta la durata dell'acquisizione, non permettendo di studiarlo in modo corretto. Un metodo per capire se non si è nella condizione appena descritta è quello di eseguire lo *sweep* di frequenze sia in senso

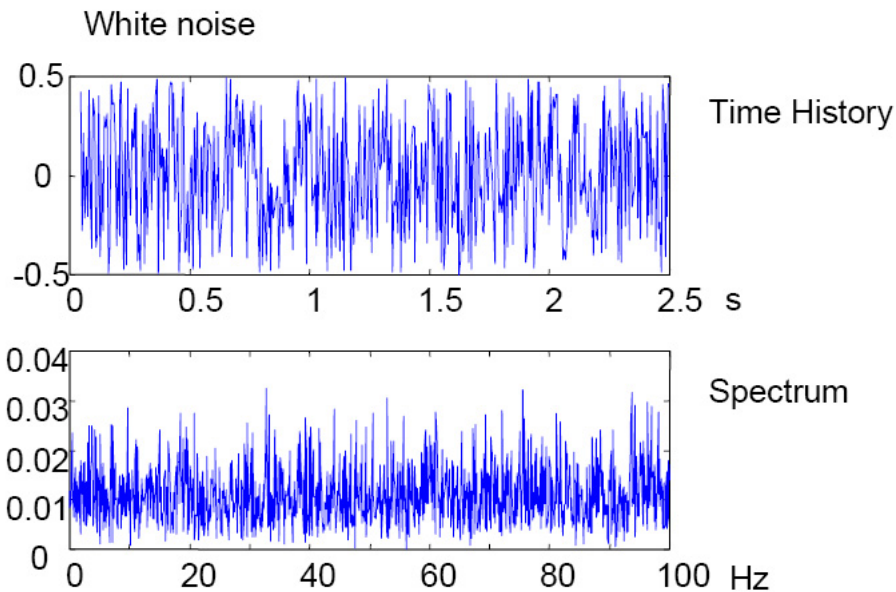


Figura 2.8: Esempio di rumore bianco visto nel dominio del tempo e delle frequenze.

crescente che in senso decrescente, se la risposta è la stessa l'acquisizione è eseguita in condizioni stazionarie. Benchè in teoria nessuna velocità di *sweep* sia sufficientemente lenta per garantire che si sia a regime, nella pratica si usa una curva logaritmica di crescita delle frequenze (espressa in ottave al minuto) che fornisce risultati migliori [5].

2.6 Teoria della decomposizione

Dopo aver introdotto nei paragrafi precedenti i principali concetti teorici da cui parte questo lavoro di tesi, si presenta ora la teoria su cui si basa tutta l'analisi dei dati ottenuti dai calcoli numerici. La scelta di anteporre la trattazione teorica che riguarda il post-trattamento dei dati alla parte di presentazione degli strumenti di simulazione numerica utilizzati deriva, dal fatto che, anche a livello concettuale, i solutori numerici utilizzati e i dettagli del calcolo dipendono da cosa poi si vuole fare con i dati stessi. Vediamo quindi nel dettaglio in cosa consiste la *teoria della decomposizione*, applicata in questo caso per giungere ad una stima della *transmission loss* di un silenziatore.

Questa teoria fu sviluppata a partire dalla fine degli anni settanta come metodo alternativo per estrarre informazioni dal campo sonoro nei condotti,

come ad esempio l'*impedenza* o l'*intensità sonora*. Essa è applicabile con un qualsiasi fluido, sia comprimibile come l'aria o i gas combusti di un motore, sia incomprimibile come acqua o olio [9]. Nella fattispecie ci si riferisce all'aria, anche se non specificato ogni volta durante il corso dell'esposizione.

Uno dei maggiori vantaggi che ha permesso alla *teoria della decomposizione* di essere applicata in svariati campi è la sua facilità e velocità di applicazione. In effetti bastano tre punti di misura ed una serie di prove per poter determinare il campo sonoro in maniera completa, mentre altri metodi sono più laboriosi da implementare: ad esempio il *metodo dei due carichi*, necessita di quattro sonde e di almeno due serie di prove, una con la sorgente di rumore a monte silenziatore e una con sorgente a valle [8].

2.7 Ipotesi della teoria

Parlando delle ipotesi della *teoria della decomposizione* ci si trova davanti a quello che è il suo tallone d'Achille: lo svantaggio di questa teoria è, in effetti, dato dal fatto che sono piuttosto stringenti.

La prima ipotesi, quella che influenza tutta la trattazione a livello analitico, è quella monodimensionale. Bisogna però fare subito una precisazione: è in una dimensione il trattamento dei dati che la teoria implementa, ma non è assolutamente necessario che la simulazione numerica dalla quale i dati stessi vengono ricavati sia tale. Proprio il fatto che lo studio CFD sia condotto in due o tre dimensioni influenza sicuramente in maniera decisiva la qualità del lavoro. Uno degli obiettivi di questa tesi è stato, anzi, quello di validare un solutore tridimensionale che fornisca dati adeguati per essere trattati con la *teoria della decomposizione*.

Un altro assunto semplificativo è quello di onda piana. Per la verità, come visto nel primo capitolo, ciò non ha molte ripercussioni sui risultati in quanto si tratta di una modellazione che rispecchia in maniera realistica il vero andamento delle onde sonore nei condotti. Se invece vi fosse necessità di raccogliere dati all'interno del silenziatore va precisato che qui il campo sonoro si avvicinerebbe più a quello sferico, dato l'aumento di volume, lo si potrà notare anche nel capitolo di presentazione dei risultati.

La limitazione che veramente condiziona l'applicabilità della teoria è la necessità dell'uscita del condotto (sezione (c) in figura 2.9) anecoica. I problemi che subentrano sono di vario tipo. Innanzitutto, se i dati derivano da un apparato sperimentale è molto difficile creare questa condizione. In realtà, anzi, l'uscita anecoica perfetta è solo un'astrazione teorica ed una minima riflessione ci sarà sempre, soprattutto per le basse frequenze. Si tratta, perciò, di una modellizzazione che non trova riscontro nella realtà. Non è obiettivo primario di questo lavoro determinare l'applicabilità di questa teoria in



Figura 2.9: Sezione longitudinale di un condotto di scarico costituito da due tratti rettilinei a diametro costante di 50 mm con frapposto un silenziatore cilindrico di lunghezza 497 mm e larghezza 297 mm. La freccia indica la direzione di propagazione del campo sonoro imposto all'entrata come condizione al contorno. Le sezioni (a) e (b) sono quelle di monte e valle silenziatore, mentre la (c) è la sezione terminale del condotto.

ambito industriale, ma certamente questo punto potrebbe essere oggetto di ulteriori approfondimenti.

Come si spiegherà nei prossimi paragrafi, l'assenza di un terminale anecoico determina la presenza di una componente riflessa delle onde di pressione a valle del silenziatore, condizione indesiderata e che la teoria non è in grado di trattare. A questo proposito è interessante notare le differenze tra i grafici della *transmission loss* di un silenziatore costituito da un semplice volume cilindrico come quello visto in sezione longitudinale in figura 2.9.

Osservando le figure 2.10 e 2.11 è subito chiara la netta differenza nella qualità di calcolo della *transmission loss*. Nel caso di figura 2.11, nella quale la sezione (c) è riflettente, i risultati sperimentali non sono stati in nessun modo previsti e la funzione risulta disturbata da una forte componente aleatoria. Essendo i dati raccolti a valle silenziatore completamente inattendibili, proprio perchè non si rispetta una delle ipotesi fondamentali della teoria, non è neanche possibile commentare più di tanto l'andamento del grafico. Si noti invece come la figura 2.10, mostri l'efficacia della teoria della decomposizione se applicata in maniera corretta. Si approfondirà poi il tema dei risultati nel capitolo ad essi dedicato.

2.8 Trattazione analitica della teoria

Consideriamo la stessa geometria introdotta nel paragrafo precedente ed ora in figura 2.12.

Il campo sonoro monodimensionale composto da onde piane a monte del silenziatore (tratteggiato nella 2.12) può essere scomposto negli *auto spettri* della componente incidente al silenziatore stesso (S_{AA}), che vi entra e prosegue il cammino verso l'uscita, e della componente riflessa (S_{BB}), che torna verso l'entrata, rimbalzando contro la discontinuità geometrica costituita dal

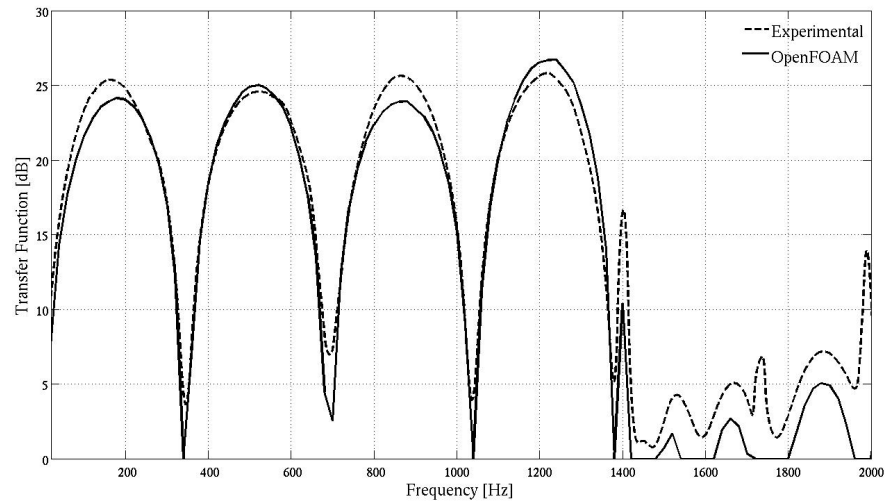


Figura 2.10: Grafico della *transmission loss* della geometria in figura 2.9 nel caso di terminale anecoico. In blu si nota quella calcolata con la teoria della decomposizione, mentre in nero quella derivante da misure sperimentali.

brusco allargamento. Una volta noti S_{AA} e S_{BB} è possibile calcolare anche il loro *cross spettro*:

$$S_{AB} = C_{AB} + j \cdot Q_{AB} \quad (2.16)$$

Nel quale C_{AB} e Q_{AB} sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria.

Il punto di partenza per arrivare a definire il campo sonoro sono però i dati raccolti nei punti di misura (1) e (2) in figura 2.12. Dalla pressione e dalla velocità si calcola la pressione totale per poi passare al dominio delle frequenze e calcolare le quantità S_{11} , S_{22} e S_{12} , rispettivamente *auto spettri* del segnale in (1) e in (2) e il loro *cross spettro*. Si tenga presente fin da subito che si esporrà la teoria nel caso di flusso medio nel condotto nullo o comunque con velocità nettamente inferiore a quella del suono. Essa può però essere facilmente estesa anche a casi con flusso medio vicino alla velocità del suono, caso che in questa sede non è stato preso in considerazione, anche perchè di scarso interesse nell'applicazione allo studio del rumore nei motori a combustione interna.

Essendo il sistema lineare, come già detto nel paragrafo 2.7, è possibile calcolare gli *auto spettri* della componente incidente e riflessa, nonché il loro *cross spettro* tramite un relazione come la 2.17, dove $[A]$ gioca il ruolo che gioca la matrice di stato in un sistema meccanico, così che dall'entrata, in

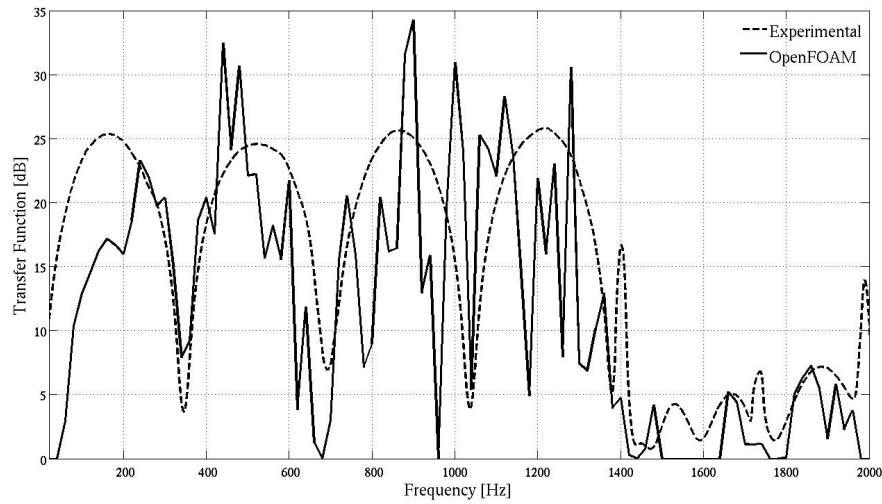


Figura 2.11: Grafico della *transmission loss* del silenziatore in figura 2.9 nel caso di terminale (sezione (c)) riflettente. In blu è rappresentata quella calcolata numericamente, mentre in nero quella sperimentale. Le due curve sono completamente scorrelate tra loro: la teoria della decomposizione non è quindi applicabile in questo caso.

funzione dei punti di acquisizione (1) e (2), si pervenga all'uscita, in funzione di parte incidente e parte riflessa del campo sonoro.

$$[A] [S_{AA} \ S_{BB} \ C_{AB} \ Q_{AB}]^T = [S_{11} \ S_{22} \ C_{12} \ Q_{12}]^T \quad (2.17)$$

La matrice $[A]$ è una 4×4 composta dai seguenti elementi:

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0 \quad (2.18a)$$

$$a_{13} = 2 \cos(2kx_1) \quad (2.18b)$$

$$a_{14} = 2 \sin(2kx_1) \quad (2.18c)$$

$$a_{23} = 2 \cos(2kx_2) \quad (2.18d)$$

$$a_{24} = 2 \sin(2kx_2) \quad (2.18e)$$

$$a_{31} = \cos[k(x_1 - x_2)] \quad (2.18f)$$

$$a_{32} = \cos[k(x_1 - x_2)] \quad (2.18g)$$

$$a_{33} = 2 \cos[k(x_1 + x_2)] \quad (2.18h)$$

$$a_{34} = 2 \sin[k(x_1 + x_2)] \quad (2.18i)$$

$$a_{41} = \sin[k(x_1 - x_2)] \quad (2.18j)$$

$$a_{42} = -\sin[k(x_1 - x_2)] \quad (2.18k)$$

$$a_{43} = a_{44} = 0 \quad (2.18l)$$

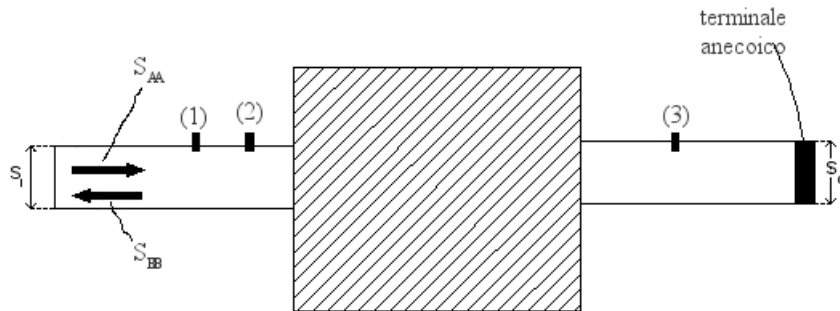


Figura 2.12: Sezione longitudinale del condotto di scarico già mostrato in figura 2.9. Si possono notare i punti di acquisizione dei dati e le componenti incidenti e riflesse del campo sonoro a monte del silenziatore, indicate dalle frecce nere.

Nelle (2.18) $k = 2\pi f/a$ è il numero d'onda (con a la velocità del suono) del quale si è parlato nel capitolo 1, mentre x_1 e x_2 sono le distanze dalla sezione di entrata delle sonde (1) e (2).

Se non si fosse fatta l'ipotesi di flusso medio nullo il numero d'onda non sarebbe stato unico. Ne avremmo avuto uno per la componente incidente ed uno per la componente riflessa, entrambi dipendenti dal numero di *Mach*⁶[9]. Perciò, sebbene si sia ragionato in campo subsonico, la *teoria della decomposizione* si adatta perfettamente anche a casi di flusso medio transonico e anzi tale applicazione potrebbe costituire un'estensione naturale di questo lavoro di tesi.

Considerando però che il nostro obiettivo è separare le parti incidente e riflessa del campo sonoro, l'equazione (2.17) deve essere riscritta così:

$$[S_{AA} \ S_{BB} \ C_{AB} \ Q_{AB}]^T = [B] [S_{11} \ S_{22} \ C_{12} \ Q_{12}]^T \quad (2.19)$$

Dove $[B]$ non è altro che la matrice $[A]$ invertita. Più precisamente possiamo dire:

$$[B] = \frac{1}{4 \sin^2 \left(\frac{k(x_1 - x_2)}{2} \right)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2a_{32} & -2a_{42} \\ 1 & 1 & -2a_{31} & -2a_{41} \\ -a_{23}/2 & -a_{13}/2 & a_{33} & a_{43} \\ -a_{24}/2 & -a_{14}/2 & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

⁶In particolare $k_i = k/(1+M)$ quello della componente incidente e $k_t = k/(1-M)$ quello della componente riflessa. Si noti che se il *Mach* è nullo i due numeri d'onda si riducono entrambi a k e si torna nella trattazione a flusso medio nullo che si sta conducendo in questo capitolo.

L'equazione (2.19) è il punto centrale della teoria della decomposizione [9]. Con essa è possibile definire completamente il campo sonoro usandola come base di partenza per svariate applicazioni⁷.

2.9 Applicazione al calcolo della transmission loss

Come già chiarito in 2.2, il concetto di *auto spettro* è molto vicino a quello di potenza del segnale: infatti, la letteratura anglosassone con il termine *power spectrum* si riferisce proprio a questo fatto. A sua volta la potenza ha un ruolo centrale nella definizione della *transmission loss*, della quale si è già parlato. Una teoria come quella della decomposizione, che fa largo uso proprio di *auto spettri* e *cross spettri*, ha come estensione naturale quella del calcolo della TL.

Ricordando che la *transmission loss* è definita come:

$$TL = 10 \log_{10} \left(\frac{W_i}{W_t} \right) \quad (2.20)$$

la decomposizione assume un ruolo centrale proprio nel calcolo di W_i . Essa è direttamente connessa all'*auto spettro* S_{AA} calcolato con la (2.19), che scritto in maniera estesa (data l'importanza che ricopre nella trattazione), vale:

$$S_{AA} = \frac{S_{11} + S_{22} - 2C_{12} \cos[k(x_1 - x_2)] + 2Q_{12} \sin[k(x_1 - x_2)]}{4 \sin^2[k(x_1 - x_2)]} \quad (2.21)$$

Per quanto riguarda invece la quantità W_t è fondamentale la condizione di uscita anecoica. Essendo, infatti, presente una sola sonda di misura a valle del silenziatore (la (3) in figura 2.12), non è possibile discernere la presenza di un'eventuale onda riflessa verso monte dalla sezione finale del condotto. La potenza trasmessa sarà quindi ottenuta direttamente da S_{33} , *auto spettro* del segnale acquisito in (3), che si considera quindi composto unicamente da un campo sonoro uscente dal silenziatore.

Uno stratagemma che spesso si tenta di adottare per ovviare alla limitazione dell'uscita anecoica è di acquisire in due posizioni i dati anche a valle del silenziatore e applicarvi, come a monte, la teoria della decomposizione [8]. Questo approccio è però del tutto errato perchè la sezione di entrata del condotto, da dove parte l'eccitazione sonora in figura 2.9, è non riflettente

⁷Oltre a quanto si vedrà in questa tesi, la teoria della decomposizione può essere ad esempio usata per determinare l'impedenza acustica come $Z_0 = (S_{AA} - S_{BB}) / (S_{AA} + S_{BB} - 2C_{AB}) + J \cdot [-2Q_{AB} / (S_{AA} + S_{BB} - 2C_{AB})]$, oppure l'intensità sonora data semplicemente da: $I = Q_{12} / (\rho a \sin(k(x_1 - x_2)))$, con a velocità del suono e ρ densità.

(o comunque impone un campo sonoro ben definito tramite un altoparlante o una condizione al contorno nel caso di simulazione CFD), mentre l'uscita del silenziatore (sezione (b) in figura 2.9) lo è; quindi se la sezione (c) in figura 2.9 non fosse totalmente anecoica, le sonde a valle sarebbero investite da una componente incidente che non è solo quella del campo sonoro uscente dal silenziatore, ma anche quella derivante dalla doppia riflessione delle onde che rimbalzano prima sull'uscita del condotto e poi sull'uscita del silenziatore (appunto la sezione (b) in figura 2.9).

Noti gli *auto spettri* si può esprimere la pressione nel dominio delle frequenze come [8]:

$$p_i = \sqrt{S_{AA}} \quad (2.22)$$

$$p_t = \sqrt{S_{33}} \quad (2.23)$$

Di conseguenza le potenze incidente e trasmessa saranno:

$$W_i = \frac{p_i^2}{\rho a} S_i \quad (2.24)$$

$$W_t = \frac{p_t^2}{\rho a} S_o \quad (2.25)$$

dove S_i e S_o sono rispettivamente la sezione di ingresso e quella di uscita del condotto (figura 2.12). Nella (2.25) si nota che un in condotto a diametro costante, senza frapposto alcun silenziatore, $W_i = W_t$, meno delle perdite di pressione dovute agli attriti con le pareti ed alla viscosità del fluido.

Si può infine arrivare all'espressione della *transmission loss*:

$$TL = 20 \log_{10} \left(\frac{p_i}{p_t} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{S_i}{S_o} \right) \quad (2.26)$$

2.10 Problematiche connesse alla teoria della decomposizione

Si parlerà in questo paragrafo di quelli che sono gli aspetti più critici nell'applicazione della teoria.

Cominciamo con il considerare la scelta della distanza delle sonde (1) e (2) di figura 2.12. Dal punto di vista strettamente teorico questo parametro non influenza i risultati, ed infatti è considerato dalla teoria come una costante data. Nelle applicazioni si notano però delle modeste variazioni nella qualità dei risultati. Il problema non è critico, anche se è necessario porre attenzione

a non usare distanze $x_1 - x_2$ troppo elevate. Se comunque si resta al di sotto dei 50 mm non nascono complicazioni.

Se, come nel nostro caso, i dati sono ottenuti da una simulazione numerica, $x_1 - x_2$ non deve essere più piccolo della grandezza di un volume finito di calcolo, altrimenti sarà come acquisire lo stesso punto due volte, situazione che fa perdere il significato fisico al lavoro che si sta facendo, indipendentemente dalla qualità del risultato finale.

Si consideri ora l'equazione (2.21), che permette di determinare la componente incidente del campo sonoro a monte silenziatore. I valori per i quali il denominatore si annulla, sono punti singolari nei quali la teoria non è più applicabile. Dato che il denominatore della (2.21) è $4 \sin^2[k(x_1 - x_2)]$, si intuisce subito che vi sarà una distanza critica tra i punti (1) e (2) che rende nullo il seno. Più precisamente, per le armoniche la cui lunghezza d'onda corrisponde a una volta e mezza $x_1 - x_2$ il denominatore si annulla.

Più in generale esisteranno infiniti numeri d'onda individuati dalla:

$$k_n = \frac{n\pi}{x_1 - x_2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

che annullano il determinante di $[A]$ nell'equazione (2.17):

$$\det[A] = -16 \sin^4 \left(\frac{k_n(x_1 - x_2)}{2} \right) = 0 \quad (2.28)$$

rendendo il sistema singolare.

Questo significa che per ogni distanza tra le due sonde di acquisizione ci sarà un *set* sempre diverso di frequenze alle quali la teoria non è applicabile. Come si intuisce dalla (2.27), maggiore è $x_1 - x_2$ più è bassa la minima delle frequenze alla quale si ha la singolarità. Nella pratica, inoltre, bisogna stare sufficientemente lontani da queste frequenze critiche, perchè già in prossimità di essere il metodo della composizione non funziona bene, dando errori molto grandi di calcolo della TL per errori di misura dei dati di partenza piccoli. Una delle frequenze critiche come si può chiaramente evincere dalla (2.27) è quella nulla. Questo spiega i problemi alle bassissime frequenze che verranno evidenziati nell'esposizione dei risultati finali.

Per ovviare al problema ci sono varie strade che si possono seguire. Si può porre una terza sonda a monte silenziatore, in modo che quando una delle due distanze assume un valore critico si lavora con una coppia diversa in modo da uscire dalla singolarità. Questo può complicare, anche se non in maniera eccessiva, il processo di post-trattamento dei dati.

Se, come nel caso di questo lavoro di tesi, la banda di frequenze alla quale si calcola la *transmission loss* lo permette, si può scegliere una distanza $x_1 - x_2$ abbastanza piccola da far sì che il primo punto di singolarità sia

ad una frequenza maggiore della massima analizzata. In questo caso l'implementazione della teoria resta semplicemente quella esposta, senza alcuna ulteriore difficoltà. Si tenga infatti presente che per un valore di $x_1 - x_2$ di 10 mm, la prima frequenza critica vale 17150 Hz, per un valore di 50 mm, al quale neanche ci si avvicinerà in questo lavoro, è di 3430 Hz. Considerato il fatto che non si supereranno mai i 20 mm di distanza massima tra le sonde e che si indagherà su di uno spettro da 0 Hz a 2000 Hz, si può concludere che non si hanno problemi di frequenze singolari, a meno che per la già citata frequenza nulla alla quale la singolarità sarà comunque sempre presente.

Capitolo 3

Metodi Numerici

3.1 Introduzione

Complessi apparati sperimentali allestiti in laboratori costosissimi; acquisizione dei dati solo nei punti più sensibili o impossibilità di raccogliarli dove si desidera per via dei più svariati impedimenti fisici o logistici; elaborazione statistica e formule empiriche applicabili solo in ambiti ristrettissimi ed estremamente difficili da estendere. Questo fino a pochi decenni fa era la ricerca ingegneristica, almeno negli ambiti più critici. Oggi la disponibilità di calcolatori sempre più performanti sta cambiando ogni giorno di più il modo di fare ingegneria. I vantaggi che offre sono in effetti molto accattivanti: costi molto minori, possibilità di risolvere le equazioni che governano un fenomeno anche in casi non banali e tempi di progettazione più brevi sono tutti motivi che spiegano chiaramente il successo dei metodi di simulazione numerica.

Bisogna però fare attenzione a sfruttare tutte le possibilità che nascono in maniera intelligente. Innanzitutto occorre considerare che, comunque sia, le soluzioni sono approssimate e il loro grado di incertezza va opportunamente quantificato; è necessaria, inoltre, un'ottima preparazione teorica per poter essere critici sui risultati ottenuti. Si consideri infine che raramente si ha la possibilità di costruire un modello del fenomeno reale che sia perfetto in ogni dettaglio: sono necessarie spesso assunzioni semplificative da valutare debitamente. Proprio per questo ultimo motivo può essere perciò utile anche un riscontro sperimentale, dal quale non si può prescindere neanche oggi.

Nel presente capitolo, percorreremo i passi principali che portano all'implementazione di un metodo numerico ai *volumi finiti* per la simulazione fluidodinamica del campo sonoro in un silenziatore. L'obiettivo non è quindi quello di fornire un panoramica del settore del calcolo scientifico, ma tracciare il percorso fatto in questo lavoro di tesi.

Il punto di partenza sono le equazioni differenziali che governano il moto del fluido: equazione di conservazione della massa, della quantità di moto e

dell' energia, già affrontate nel capitolo primo e che vengono qui di seguito ulteriormente riportate data la loro importanza:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\delta \rho}{\delta t} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0 \\ \int_{\Omega} \rho \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta t} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Sigma} (\tau_n - p_n) d\Sigma \\ \int_{\Omega} \frac{\delta(\rho e)}{\delta t} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho h_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \\ \int_{\Sigma} -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Sigma + \int_{\Sigma} \tau_n \cdot \mathbf{u} d\Sigma + \int_{\Sigma} -q \cdot \mathbf{n} d\Sigma \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Il secondo passo, una volta scritte le equazioni in forma analitica, è quello di discretizzare sia il dominio spaziale che quello temporale. In particolare lo spazio può essere diviso secondo vari metodi, i più utilizzati sono: il *metodo delle differenze finite*, quello degli *elementi finiti* ed il già citato *metodo dei volumi finiti*, che si approfondirà nelle prossime pagine.

Dei tre le *differenze finite* sono il più semplice e più datato (XVIII secolo). Si basano sulla risoluzione delle equazioni di conservazione nella loro forma differenziale nei nodi della *mesh*. Si ottiene così un sistema formato da tante equazioni algebriche quanti sono i nodi della griglia. La relativa facilità di implementazione si scontra però con il grosso svantaggio della limitazione a geometrie semplici. I *volumi finiti* si basano, invece, sulla forma integrale delle equazioni, che sono risolte sui volumetti in cui è diviso il dominio che, diversamente dalle *differenze finite*, non costituiscono nodi di calcolo ma veri e propri volumi di controllo con opportune condizioni al contorno nei quali sono risolte le equazioni. Si può adattare a geometrie anche complesse ed è comunque abbastanza intuitivo da applicare grazie al significato fisico diretto che conservano tutti i termini delle equazioni. Il *metodo degli elementi finiti* è molto simile a quello dei *volumi finiti*, la differenza principale è che le equazioni sono moltiplicate per una funzione peso prima di essere integrate sul dominio. La presenza di questa funzione peso, detta anche *funzione di forma*, rende possibile analizzare geometrie di ogni tipo ancora più efficacemente che con i *volumi finiti*.

Per quanto riguarda invece la discretizzazione temporale i metodi più utilizzati sono quello di *Eulero implicito* e il *Crank Nicholson*, che verranno trattati più avanti nel capitolo.

A questo punto, indifferentemente dal metodo usato, il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali da cui si era partiti è diventato un sistema di equazioni algebriche discrete, che vanno risolte con metodi opportuni, come ad esempio la *fattorizzazione LU* o il *gradiente biconiugato*.

Prima di iniziare con la trattazione matematica vera e propria si dedica il prossimo paragrafo alle proprietà che descrivono un metodo numerico. Benchè non rivestano un ruolo centrale nel contesto di questo scritto si ritiene

di doverle almeno citare proprio per l'importanza che ricoprono permettendo di valutare se un algoritmo numerico procede in maniera corretta dando risultati sensati.

3.2 Proprietà di un metodo numerico

Iniziamo con il chiarire che ogni metodo numerico, in certe condizioni, può fornire la soluzione analitica esatta. Si dice *grado di esattezza* di un algoritmo numerico il massimo ordine di grandezza al quale può fornire la soluzione senza alcuna approssimazione. Ad esempio, se opera un'interpolazione lineare per approssimare l'andamento di una retta si ottiene la retta stessa: il *grado di esattezza* dell'interpolazione lineare è perciò 1.

Parlando invece di *accuratezza* si introduce il concetto di errore di approssimazione, cioè la differenza tra la soluzione esatta di un problema matematico e la soluzione numerica. L'*accuratezza* è solitamente espressa come potenza del passo di discretizzazione dalla quale l'errore di approssimazione dipende. Se si ha quindi un'*accuratezza* del secondo ordine vuol dire che l'errore è dato da un'espressione che dipende dal quadrato del passo di discretizzazione.

Le prime due definizioni date forniscono da sole molte informazioni sulla qualità intrinseca di un algoritmo numerico ma non lo relazionano al problema che deve risolvere. A tal proposito si definisce la *consistenza* di un metodo numerico come la capacità di costruire schemi di equazioni algebriche discrete che si può dimostrare tendono alle equazioni differenziali analitiche con il tendere della griglia di calcolo, sia spaziale che temporale, ad intervalli infinitesimi [14].

Un'altra proprietà importantissima è la *stabilità*. Un metodo numerico è stabile se a piccole variazioni dei dati corrispondono piccole variazioni della soluzione. Per sistemi non lineari, con equazioni accoppiate e con condizioni al contorno complesse è molto difficile stimare se un calcolo è stabile oppure no.

Il *numero di Courant* è uno dei principali parametri per valutare la stabilità della soluzione di una simulazione numerica. Questa condizione è sfruttata nell'impiego di schemi numerici espliciti temporali. Come conseguenza, il passo temporale deve essere più piccolo di un certo intervallo di tempo, altrimenti la simulazione produrrà risultati scorretti. Per una griglia di calcolo monodimensionale la *condizione di Courant* vale:

$$Co = \frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (3.2)$$

nella quale Δx e Δt sono gli intervalli spaziale e temporale. Simulando campi sonori il controllo del numero di Courant è stato fondamentale per

valutare l'attendibilità dei risultati di volta in volta ottenuti. In questo caso la *condizione di Courant* afferma che il Δt deve essere più piccolo del tempo impiegato dall'onda per attraversare due punti adiacenti nella griglia spaziale [10]. In questa sede ci si è perciò riferiti alla seguente definizione del *numero di Courant*:

$$Co = \frac{(u + a)\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (3.3)$$

Tutto ciò implica che infittire la *mesh* spaziale significa dovere anche diminuire il passo temporale rischiando di appesantire di molto il calcolo [10].

La *convergenza* è un concetto molto affine a quello di *consistenza*, pone però l'accento sulla soluzione. Un metodo numero converge se la sua soluzione tende a quella analitica esatta all'infittirsi della *mesh*. Dato che la convergenza è un parametro molto difficile da stimare, nella pratica si usa spesso il *teorema di equivalenza di Lax* che riconosce, per problemi lineari, come condizione necessaria e sufficiente per la *convergenza* il fatto che il calcolo sia *consistente e stabile* [14].

3.3 Metodo dei volumi finiti

Consideriamo la generica equazione di conservazione della quantità ϕ :

$$\int_{\Sigma} \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \Gamma \nabla \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_{\Omega} q_{\phi} d\Omega \quad (3.4)$$

dove Γ rappresenta la diffusività di ϕ e q_{ϕ} un generico termine sorgente. Questo approccio un po' generico al problema è giustificato dal fatto che il modo di trattare i termini dipende dalle loro caratteristiche matematiche e non dall'appartenenza ad una delle tre leggi di conservazione in particolare. Ragionando perciò solo sulla (3.4) si può sviluppare l'argomento in modo meno dispersivo.

Il dominio Ω è diviso in un numero finito di volumi di controllo con le condizioni al contorno opportunamente definite e, al centro di ognuno di essi, è posto un nodo di calcolo nel quale le equazioni vengono risolte. Le variabili calcolate in tale punto rappresentano il loro valore medio nel volumetto. Se sommiamo le equazioni di tutte le celle otteniamo la (3.4) calcolata per l'intero il dominio: infatti, gli integrali di superficie sulle facce interne degli elementi si elidono fra loro e restano solo quelle di contorno, mentre gli integrali di volume si sommano a dare quello totale. Questa caratteristica è intrinseca al metodo dei volumi finiti ed è uno dei suoi principali vantaggi.

Nel seguito si fa riferimento ad un volume di controllo cubico come quello in figura 3.1, dove è rappresentata anche la notazione matematica utilizzata.

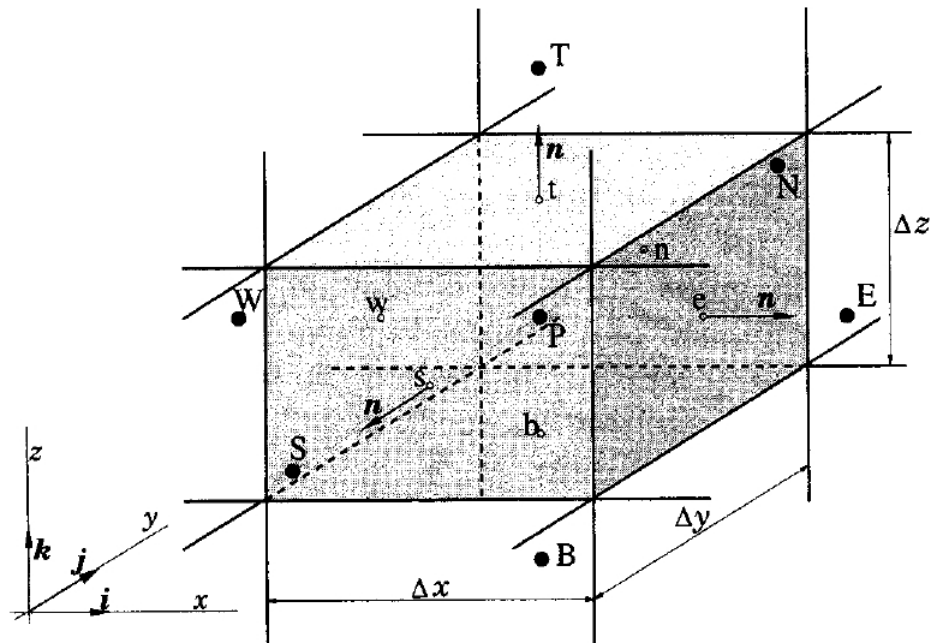


Figura 3.1: Volume finito di calcolo cubico in sistema di riferimento cartesiano di dimensioni Δx , Δy e Δz . P rappresenta il nodo di calcolo a centro cella mentre le altre lettere maiuscole i centri degli elementi adiacenti le lettere minuscole sono invece le facce del cubo, che hanno vettore normale \mathbf{n} .

3.3.1 Discretizzazione degli integrali di superficie e di volume

Il flusso netto attraverso le sei pareti del volume della cella è dato da:

$$\int_{\Sigma} f d\Sigma = \sum_k \int_{\Sigma} f d\Sigma \quad (3.5)$$

dove f è una quantità generica che fa le veci dell'integrale convettivo ($\int_{\Sigma} \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$) o di quello diffusivo ($\int_{\Sigma} \Gamma \nabla \cdot \mathbf{n} d\Sigma$) nella (3.4). Assumendo note le proprietà del fluido, se il campo di velocità è anch'esso noto si ha un problema nell'unica incognita ϕ , se \mathbf{u} non è noto ci si trova a risolvere un sistema di equazioni non lineare e accoppiato. Il caso di interesse per questo lavoro di tesi è proprio l'ultimo, si parlerà perciò di algoritmi specifici per questo tipo di problemi, come ad esempio il PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators). L'obiettivo, una volta calcolate le variabili mancanti, resta comunque quello di discretizzare le equazioni e giungere ad un sistema algebrico [10]

Per calcolare l'integrale nella (3.5) esattamente è necessario conoscere la f su tutta la superficie. dato che il valore degli integrali è noto solo a centro cella questo non è però possibile. Si introducono quindi due livelli di approssimazione: Uno perchè si deve approssimare l'integrale basandosi su uno o più punti noti, l'altro perchè i valori che si hanno sulle facce sono ottenuti tramite interpolazione numerica dal valore al centro. Le caratteristiche numeriche dei metodi di approssimazione degli integrali che si descriveranno nelle prossime righe devono perciò essere valutate tenendo anche conto della qualità dell'interpolazione.

Il metodo di approssimazione più semplice è quello del punto medio: si calcola l'integrale di f sulla faccia basandosi sul suo valore al centro della stessa (che rappresenta il valore medio f_e) Ad esempio considerando la faccia e della figura 3.1:

$$F_e = \int_{\Sigma_e} f d\Sigma = \bar{f}_e \Sigma_e \approx f_e \Sigma_e \quad (3.6)$$

Il metodo del punto medio ha un'accuratezza del secondo ordine rispetto al passo di discretizzazione.

Algoritmi con accuratezza maggiore, che richiedono anche la conoscenza di più di un punto sulla superficie, possono essere applicati, ma in tre dimensioni sono molto difficili da implementare [10].

Per approssimare gli integrali di volume della 3.4 si segue un procedimento che concettualmente è analogo a quello del punto medio appena descritto. L'integrale di volume è perciò sostituito dal prodotto del valore medio della quantità integranda (che è quello nel punto P in figura 3.1) per il volume della cella:

$$Q_P = \int_{\Omega} q d\Omega = \bar{q} \Delta\Omega \approx q_P \Delta\Omega \quad (3.7)$$

con q_P il valore della quantità q nel punto P .

A differenza che per gli integrali di superficie, in questo caso i valori a centro cella sono disponibili senza dover interpolare, l'approssimazione introdotta è quindi solo quella dovuta al calcolo dell'integrale. Se invece si implementano metodi di approssimazione degli integrali di ordine superiore è necessario avere più valori nel volume finito ed è necessaria un'interpolazione: si ritorna al caso degli integrali di superficie.

3.3.2 Interpolazione

Nei paragrafi precedenti si è di visto che, avendo i dati solo nel nodo di calcolo al centro della cella, per ricaverli negli altri punti è necessario un

processo interpolativo. Si descriveranno qui di seguito i principali modi per farlo. Ci si riferisce sempre all'equazione generica di conservazione (3.4) e alla quantità ϕ_e e la faccia e in figura 3.1.

Il primo metodo che si presenta è detto *upwind*. Consiste nell'approssimare il valore ϕ_e utilizzando le differenze finite in avanti o all'indietro a seconda dei valori a centro cella in E o P a seconda che:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{se } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{se } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases}$$

La controindicazione principale dell'interpolazione *upwind* è di essere numericamente diffusiva. L'espansione in serie di Taylor di ϕ_e intorno a P vale, per semplicità scritta solo in direzione x :

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left(\frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} \right)_P + O(\Delta x^3) \quad (3.8)$$

dove $O(\Delta x^3)$ sono i termini di ordine superiore. L'approssimazione *upwind*, essendo del primo ordine, rispetta la conservazione solo fino al termine dipendente dalla derivata prima e il suo errore di troncamento dipende dalla derivata seconda, che può essere considerata come un termine diffusivo delle equazioni di conservazione. Utilizzando la stessa notazione numerica usata in questo capitolo per la diffusività possiamo quindi esprimere il coefficiente di diffusione numerica come:

$$\Gamma_e^{num} = (\rho u)_e \frac{\Delta x}{2} \quad (3.9)$$

Questo fattore si ingrandisce nei problemi tridimensionali soprattutto se il flusso è obliquo alla griglia di calcolo. L'errore di troncamento genera quindi un termine diffusivo in direzione normale al flusso oltre che nella sua direzione.

In alternativa si può considerare l'interpolazione lineare. Si tratta sempre di un metodo del primo ordine che utilizza nodi computazionali di celle adiacenti. Si definisce innanzitutto un fattore di interpolazione, che non è altro che l'espressione di una retta passante per due punti noti (per semplicità si riportano le formule per la sola direzione x):

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (3.10)$$

considerando, anche in questo caso, la notazione di figura 3.1. la quantità ϕ_e cercata attraverso l'interpolazione lineare vale:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad (3.11)$$

L'accuratezza è in questo caso del secondo ordine rispetto al passo della mesh e proprio per questo c'è il rischio, assente nel caso di *upwind* di produrre soluzioni oscillatorie [10]. Scrivendo la serie di Taylor attorno a P si coglie la già citata dipendenza del secondo ordine dal passo di discretizzazione:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left(\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} \right)_P + O(\Delta x^3) \quad (3.12)$$

Utilizzare schemi di interpolazione di ordine superiore ha senso solo se si approssimano anche gli integrali con ordine di accuratezza superiore al secondo (ad esempio con la formula di Simpson). Nel caso delle simulazioni numeriche condotte per questo lavoro di tesi non si sono utilizzati questi metodi perchè comportano una maggiore difficoltà di implementazione e tempi di calcolo lunghi a fronte di un miglioramento della qualità dei risultati non assolutamente determinante.

3.4 Discretizzazione temporale

Verranno qui presentati i metodi di *Eulero esplicito* ed *implicito* e quello di *Crank Nicholson*. I primi due sono, infatti, tra i principali e più conosciuti metodi di discretizzazione delle derivate, mentre il secondo è il metodo implementato nelle simulazioni numeriche svolte.

Il metodo di *Eulero esplicito* detto anche *Eulero in avanti* approssima le derivate temporali partendo dal rapporto incrementale:

$$y'(t_n, w_n) = \frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} \quad (3.13)$$

dove $y(t_n, w_n)$ è una generica funzione all'istante temporale t_n e h è l'incremento, ovvero l'ampiezza della discretizzazione temporale. Applicando ad un'equazione differenziale la (3.13) si ottiene [12]:

$$y(t_n, w_n) = \frac{w_{n+1} + w_n}{h} \quad (3.14)$$

che può essere scritta come:

$$w_{n+1} = w_n + h y(w_n) \quad (3.15)$$

che è la formulazione del metodo di *Eulero in avanti*.

Allo stesso modo partendo dal rapporto incrementale di $y(t_{n+1}, w_n)$ si giunge alla formulazione di *Eulero all'indietro*:

$$w_{n+1} = w_n + hy(w_{n+1}) \quad (3.16)$$

Come si può notare l'ultima equazione scritta ha il termine w_{n+1} sia a destra che a sinistra dell'uguale: da cui il nome *Eulero implicito* [12]. Entrambi i metodi hanno ordine di accuratezza pari a uno.

Il metodo di *Crank Nicholson* si ricava sommando membro a membro le due formulazioni del metodo di *Eulero* delle equazioni (3.15) e (3.16):

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}[y(t_n, w_n) - y(t_n, w_{n+1})] \quad (3.17)$$

L'accuratezza è in questo caso del secondo ordine con l'ampiezza dell'intervallo temporale. Lo si preferisce quindi solitamente ai primi due metodi anche perchè non comporta un'eccessivo appesantimento del calcolo numerico [12].

3.5 Risoluzione di sistemi lineari di equazioni algebriche

Qualunque siano i metodi di discretizzazione adottati il punto di arrivo è un sistema di equazioni algebriche, lineare o non a seconda delle equazioni di partenza, che deve essere risolto per ottenere il risultato finale. Esistono svariati algoritmi risolutivi per questo genere di problemi che si dividono essenzialmente in due categorie: i metodi diretti e quelli iterativi. Gli ultimi sono necessari per i sistemi non lineari. Le matrici che si ottengono dalle equazioni differenziali sono spesso *sparse*¹ e, se la *mesh* di partenza è strutturata (concetto che verrà chiarito in seguito), quasi tutti i valori saranno posti sulla diagonale principale o su quelle immediatamente sopra o sotto ad essa.

3.5.1 Eliminazione di Gauss

Si tratta del più semplice algoritmo diretto di risoluzione di un sistema algebrico, qui scritto in notazione matriciale:

$$[A]\phi = \mathbf{b} \quad (3.18)$$

nel quale $[A]$ è la matrice dei coefficienti, ϕ il vettore delle incognite e \mathbf{b} il vettore dei termini noti. Si assume come ipotesi $[A]$ *sparsa*.

¹Una matrice si dice sparsa se i suoi elementi sono quasi tutti nulli

Agendo sulle matrici e sui vettori il metodo punta a trasformare il sistema di partenza in uno ad esso equivalente ma più piccolo. Si consideri ad esempio la matrice dei coefficienti e dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Gasuss osserva che se nella matrice $[[A] + \mathbf{b}]$ [13]:

- si scambiano due righe
- si moltiplica una riga per un numero diverso da zero
- si somma una riga ad un'altra

le soluzioni del sistema restano invariate. In effetti, quanto elencato sopra corrisponde, se si considera il sistema scritto per equazioni, a:

- scambiare tra loro due equazioni
- moltiplicare i due membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero
- sommare membro a membro due equazioni

Tramite le operazioni appena descritte l'obiettivo è trasformare $[[A] + \mathbf{b}]$ in una matrice triangolare superiore. Il sistema nella (3.18) è ora:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \cdot \phi = [b] \tag{3.19}$$

A questo punto risolvere il sistema è estremamente semplice se si parte dall'ultima equazione. Essa ha una sola incognita ϕ_n diversa da zero e la soluzione è:

$$\phi_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \tag{3.20}$$

sostituendola nella penultima, anche questa verrà ad avere una sola incognita e così via (*sostituzione all'indietro*). La generica i -esima equazione avrà quindi soluzione:

$$\phi_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^n a_{ik}\phi_k}{a_{ii}} \tag{3.21}$$

Il principale svantaggio di questo metodo sta nel grande numero di operazioni da svolgere, che sono proporzionali a $n^3/3$. Lo sforzo computazionale maggiore è dato dalla parte che rende diagonale la matrice dei coefficienti, mentre la parte di risoluzione per sostituzione richiede $n^2/2$ operazioni, cioè molto meno della metà [10].

3.5.2 Fattorizzazione LU

Questo algoritmo deriva da quello di Gauss e tenta di risolvere il problema dell'elevato numero di operazioni che richiede. Il punto di partenza è sempre un sistema algebrico lineare nella forma (3.18). Si esprime la matrice dei coefficienti come:

$$[A] = [L][U] \quad (3.22)$$

con $[L]$ matrice triangolare superiore e $[U]$ matrice triangolare superiore. Questa volta i termini noti del sistema non vengono coinvolti nell'operazione.

Una volta fattorizzata $[A]$ il problema si spezza nella risoluzione successiva di due sottosistemi. Un aspetto di cui tener conto nel processo di fattorizzazione è che una delle due matrici triangolari ottenute deve avere gli elementi della diagonale principale nulli. Prima si risolve:

$$[U]\phi = \mathbf{y} \quad (3.23)$$

Poi una volta determinato \mathbf{y} :

$$[L]\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (3.24)$$

Si noti che rispetto al metodo di eliminazione di Gauss, in questo caso il vettore dei termini noti non è coinvolto. Ciò determina vari vantaggi: ad esempio, se si deve studiare lo stesso sistema in condizioni diverse la fattorizzazione può essere fatta una sola volta.

3.5.3 Il metodo di Gauss-Seidel

L'approccio di questo algoritmo è molto simile a quello dei due appena presentati, la differenza è l'approccio iterativo al problema. Se da un lato ciò porta lo svantaggio di non sapere di preciso quanto durerà il procedimento, dall'altro permette una maggior velocità di calcolo. Partendo ancora dalla (3.18), si decompone la matrice dei coefficienti in due matrici triangolare superiore ed inferiore, come nella fattorizzazione LU. Si riscrive quindi il sistema come segue:

$$[L]\phi = \mathbf{b} - [U]\phi \quad (3.25)$$

Il vettore ϕ delle incognite viene determinato risolvendo ricorsivamente la seguente relazione, scritta per l' k -esima iterazione:

$$\phi^{k+1} = [L]^{-1}(\mathbf{b} - [U]\phi^k) \quad (3.26)$$

per un sistema composto da i equazioni e una matrice dei coefficienti di dimensione $i \times j$ il singolo elemento del vettore delle incognite può essere così calcolato [12]:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

3.5.4 Il metodo del gradiente coniugato

I metodi presentati fino ad ora non sono applicabili se il sistema non è lineare, circostanza in cui l'approccio al problema deve cambiare. Consideriamo l'equazione (3.18) e ipotizziamo $[A]$ simmetrica e definita positiva². Sotto questa ipotesi la risoluzione del sistema può essere trasformata in un problema di ricerca del minimo di una funzione F :

$$F = \frac{1}{2} \phi^T [A] \phi - \phi^T \mathbf{b} \quad (3.28)$$

Essendo, però, tale funzione definita in uno spazio a n -dimensioni, tante quante sono le incognite del sistema, la ricerca del minimo non è affatto banale.

Considerando la F come una *iper*-superficie con n direzioni possibili, il metodo del *gradiente coniugato* risolve il problema sfruttando l'osservazione che è possibile minimizzare una funzione rispetto a più direzioni contemporaneamente analizzandone una alla volta, a patto di sceglierle opportunamente. Si fa un esempio nel caso di due: Esprimendo il vettore delle incognite come:

$$\phi = \phi^0 + \alpha_1 \mathbf{p}^1 + \alpha_2 \mathbf{p}^2 \quad (3.29)$$

dove \mathbf{p}^1 e \mathbf{p}^2 sono due piani. L'obiettivo è trovare α_1 e α_2 che minimizzino F . Se i due piani sono ortogonali rispetto ad $[A]$, ovvero rispettano la :

$$\mathbf{p}^1 \cdot [A] \mathbf{p}^2 = 0 \quad (3.30)$$

allora sono detti *coniugati* e si può studiare la posizione del minimo considerando uno alla volta. Nel caso più generale si valuta una direzione ad ogni *step* di calcolo. Questo metodo garantisce che l'errore diminuisce ad ogni

²Una matrice è detta definita positiva se i suoi autovalori sono positivi

iterazione, ma di quanto diminuisce dipende dalla particolare direzione che in quella iterazione si sta analizzando.

Si può definire un rapporto di convergenza del metodo che dipende dal *numero di condizionamento* della matrice $[A]$, definito come il rapporto tra il massimo ed il minimo degli autovalori. Per poter migliorare il metodo è possibile *precondizionare* la matrice dei coefficienti, ovvero modificarla in modo che il *numero di condizionamento* sia più piccolo, ad esempio premoltiplicando l'equazione del sistema in (3.18) per una matrice attentamente scelta, solitamente derivante da un algoritmo di fattorizzazione della famiglia LU:

$$[C]^{-1}[A][C]^{-1}[C]\phi = [C]^{-1}\mathbf{b} \quad (3.31)$$

Definendo quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{r}^k & \text{il vettore dei residui al passo } k\text{-esimo} \\ \mathbf{p}^k & \text{la } k\text{-esima direzione} \\ \mathbf{z}^k & \text{un vettore ausiliario} \\ \alpha^k, \beta^k & \text{due parametri utili per la costruzione della soluzione} \end{cases} \quad (3.32)$$

e ponendo le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} k = 0 & \text{inizializzazione contatore} \\ \phi^0 = \phi_{in} & \text{le incognite inizializzate alle condizioni iniziali} \\ \mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - [A]\phi_{in} & \text{valore dei residui all'iterazione zero} \\ \mathbf{p}^0 = 0 & \text{nessuna direzione già considerata all'iterazione zero} \\ s^0 = 10^{30} & \end{cases} \quad (3.33)$$

ad ogni passo si risolve il sistema:

$$[C]^{-1}\mathbf{z}^k = \mathbf{r}^{k-1} \quad (3.34)$$

e si calcolano le seguenti quantità:

$$\begin{cases} \beta^k = s^k / s^{k-1} \\ \mathbf{p}^k = \mathbf{z}^k + \beta^k \mathbf{p}^{k-1} & \text{direzione da analizzare} \\ \alpha^k = s^k / (\mathbf{p}^k \cdot [A]\mathbf{p}^k) & \text{coefficiente incognito } k\text{-esima direzione} \\ \phi^k = \phi^{k-1} + \alpha^k \mathbf{p}^k & \text{valore delle incognite al passo } k \\ \mathbf{r}^k = \mathbf{r}^{k-1} - \alpha^k [A]\mathbf{p}^k & \text{residui al passo } k \end{cases} \quad (3.35)$$

fino a giungere a convergenza.

3.5.5 Il metodo del gradiente biconiugato

Deriva direttamente dal metodo appena presentato ed è quello applicato in *OpenFOAM*^{TM3}. La differenza rispetto al *metodo del gradiente coniugato* è che la matrice dei coefficienti non deve essere necessariamente simmetrica, ipotesi che spesso non è rispettata nei problemi fluidodinamici (ad esempio nei problemi convettivi e diffusivi). L'idea di fondo è di convertire il problema non simmetrico di partenza in uno simmetrico sfruttando la trasposta della matrice dei coefficienti, ottenendo quindi due sottosistemi:

$$\begin{pmatrix} 0 & [A] \\ [A]^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Il processo iterativo è del tutto analogo a quello del *gradiente coniugato*, ma in questo caso le variabili in gioco si sdoppiano: quelle contrassegnate con una tilde sono quelle del sottosistema alla prima riga della (3.36). L'inizializzazione del sistema è definita dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} k = 0 & \text{inizializzazione contatore} \\ \phi^0 = \phi_{in} & \text{incognite poste alle condizioni iniziali} \\ \mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - [A]\phi_{in} & \text{inizializzazione dei residui del primo sottosistema} \\ \tilde{\mathbf{r}}^0 = \mathbf{b} - [A]^T\phi_{in} & \text{inizializzazione dei residui del secondo sottosistema} \\ \mathbf{p}^0 = \tilde{\mathbf{p}}^0 & \text{le direzioni analizzate sono le stesse} \\ s_0 = 10^{30} \end{cases} \quad (3.37)$$

Ogni iterazione necessita quata volta della risoluzione dei due sottosistemi, con un onere computazionale che quindi è raddoppiato:

$$\begin{cases} [C]^{-1}\mathbf{z}^k = \mathbf{r}^{k-1} \\ [C]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}^k = \tilde{\mathbf{r}}^{k-1} \end{cases} \quad (3.38)$$

Anche le quantità calcolate ad ogni ciclo sono più numerose:

$$\begin{cases} \beta^k = s^k / s^{k-1} \\ \mathbf{p}^k = \mathbf{z}^k + \beta^k \mathbf{p}^{k-1} \\ \tilde{\mathbf{p}}^k = \tilde{\mathbf{z}}^k + \beta^k \tilde{\mathbf{p}}^{k-1} \\ \alpha^k = s^k / (\tilde{\mathbf{p}}^k \cdot [A]\mathbf{p}^k) \\ \phi^k = \phi^{k-1} + \alpha^k \mathbf{p}^k \\ \mathbf{r}^k = \mathbf{r}^{k-1} - \alpha^k [A]\mathbf{p}^k \\ \tilde{\mathbf{r}}^k = \tilde{\mathbf{r}}^{k-1} - \alpha^k [A]^T \tilde{\mathbf{p}}^k \end{cases} \quad (3.39)$$

A partire da questa versione di base sono state implementate numerose varianti del *gradiente biconiugato* con l'obiettivo di aumentare stabilità e velocità del metodo [10].

³è il software utilizzato per i calcoli fluidodinamici verrà presentato nei prossimi capitoli

3.6 Condizioni al contorno

Un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali ben posto costituisce un problema di *Cauchy globale*: in esso condizioni al contorno e condizioni iniziali devono essere assegnate in modo opportuno per ottenere risultati attendibili. Si propongono qui di seguito le principali condizioni al contorno utilizzate in questa tesi, mentre quelle iniziali verranno citate quando si parlerà delle prove svolte.

In genere, per poter porre le condizioni al contorno senza generare problemi di calcolo nelle celle vicine al limite del dominio di calcolo, i software generano una serie di nodi aggiuntivi oltre i bordi nei quali possono essere memorizzate le posizioni matematiche di ogni variabile. Come si nota dalla figura 3.2 i nodi in $J = 1$ e $I = 1$ sono oltre il limite fisico di calcolo e in essi non sono risolte le equazioni [14].

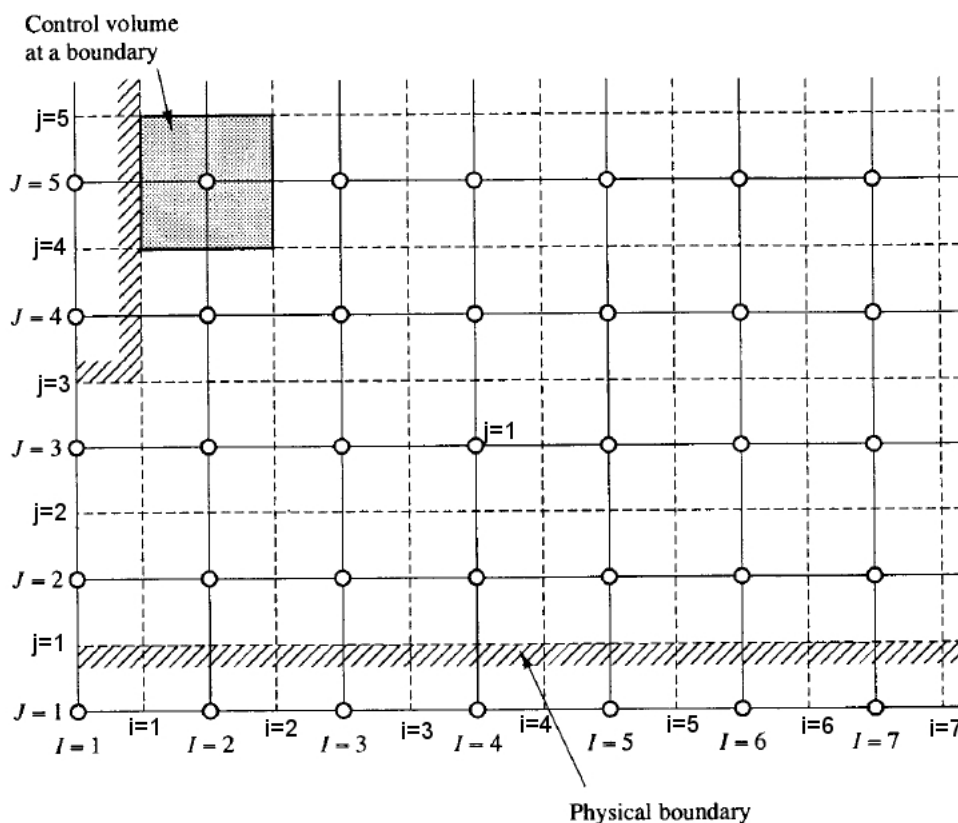


Figura 3.2: Esempio di griglia di calcolo bidimensionale con celle aggiuntive oltre al confine della geometria per l'implementazione delle condizioni al contorno.

I nomi delle condizioni al contorno richiamano solitamente le parti reali, ad esempio, nel caso un condotto di scarico o aspirazione per un motore a combustione interna si avranno le condizioni di: sezione di entrata, sezione di uscita e parete. Altre tipologie derivano invece da necessità di calcolo, come la condizione di asse di simmetria e di *wedge*.

Dal punto di vista matematico le sezioni di ingresso ed uscita sono funzioni che assegnano un valore alle principali variabili del problema, come velocità, pressione e temperatura. Condizioni matematiche che hanno significato fisico possono ad esempio essere all'ingresso :

$$\begin{cases} p = \delta(p) & \text{i valori di pressione sono assegnati seguendo una funzione impulso} \\ \nabla \mathbf{u} = 0 & \text{condizione di gradiente della velocità nullo} \\ T = 293 & \text{temperatura imposta} \end{cases} \quad (3.40)$$

e all'uscita, dove i valori di pressione e velocità modellano un ambiente a pressione atmosferica e con aria ferma all'uscita del tubo:

$$\begin{cases} p = 100000 \text{ Pa} & \text{pressione imposta} \\ \mathbf{u} = 0 & \text{velocità imposta} \\ \nabla T = 0 & \text{gradiente di temperatura imposto} \end{cases} \quad (3.41)$$

Esistono più possibilità per definire la parete a seconda delle condizioni ipotizzate. Si può ad esempio assumere che:

$$\begin{cases} u_t = \text{cost.} & \text{velocità in direzione tangenziale alla parete non nulla} \\ u_n = 0 & \text{velocità normale alla parete nulla} \end{cases} \quad (3.42)$$

condizione detta di *slip*. Si noti, inoltre, che la velocità normale deve necessariamente essere nulla, altrimenti il fluido attraverserebbe la parete.

Se si volesse invece considerare lo strato limite:

$$\begin{cases} u_t = f(y) & \text{profilo di velocità assegnato} \\ u_n = 0 & \text{velocità normale alla parete nulla} \end{cases} \quad (3.43)$$

con $f(y)$ una funzione che determina il profilo di velocità in direzione perpendicolare alla parete.

Si può in alternativa imporre una semplice condizione di *no slip*:

$$\begin{cases} u_t = 0 \\ u_n = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Alcuni confini del dominio di calcolo possono non corrispondere a necessità fisiche. Se ad esempio si analizza solo una parte di un pezzo sfruttando

le sue simmetrie geometriche, alcune delle sue superfici corrisponderanno a dei piani di simmetria, che possono essere così definiti:

$$\begin{cases} \phi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{flusso nullo} \\ \frac{\delta\phi}{\delta\mathbf{n}} = 0 & \text{derivata in direzione normale nulla} \end{cases} \quad (3.45)$$

dove ϕ è una grandezza generica. Le due condizioni sopra imposte stanno ad indicare che nessuna quantità deve attraversare il piano nè deve avere una componente perpendicolare ad esso, altrimenti si perderebbe la simmetria fluidodinamica.

Oltre quella di asse di simmetria ci sono molte altre condizioni al contorno che servono per velocizzare i calcoli. Si citano ad esempio la *wedge* che permette di definire spicchi di solidi di rotazione, *cyclic* che permette di definire superfici che si ripetono, come può ad esempio succedere per i canali palari di una turbomacchina o le *empty*, a cui il codice CFD assegna un valore in automatico, come può succedere nei confini dei sottodomini di calcolo per le simulazioni multiprocessore.

3.7 Il solutore utilizzato: *LodiFOAM*

Per concludere il discorso sulla numerica non resta parlare un po' più approfonditamente del solutore numerico utilizzato in questa tesi. Dovendo calcolare il campo sonoro all'interno di un condotto e applicare la *teoria della decomposizione* le proprietà numeriche richieste sono state principalmente due: che fosse adeguato a trattare con fluidi comprimibili e che rispettasse la condizione di uscita anecoica.

3.7.1 L'algoritmo PISO

Trovandosi a dover risolvere un sistema di equazioni differenziali non lineare in cui i campi di velocità e di pressione non sono noti, ci si trova, come accennato nel paragrafo 3.3.1, a dover utilizzare degli algoritmi specifici per determinare le incognite del problema.

L'algoritmo PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) è un metodo appartenente alla famiglia dei cosiddetti *predictor-corrector*. Ciò significa che ad ogni iterazione verrà svolto un calcolo partendo da una grandezza ipotizzata (indicata di seguito con un asterisco per specificare che si tratta di una quantità prevista) tramite una relazione esplicita, il risultato così ottenuto (sempre indicato con asterisco in quanto frutto di una previsione) verrà poi utilizzato in equazioni implicite i cui risultati correggeranno l'ipotesi iniziale fatta. [12].

Si consideri l'equazione di conservazione della quantità di moto, scritta in forma indiciale per le componenti cartesiane i -esima e j -esima [11]:

$$\frac{\delta(\rho u_i)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u_i u_j)}{\delta x_j} = f_i - \frac{\delta p}{\delta x_i} + \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta x_j} \quad (3.46)$$

dove f_i sono le forze di volume e τ_{ij} gli sforzi viscosi.

Si consideri una griglia di calcolo bidimensionale ⁴ come quella in figura 3.2 dove gli indici in maiuscolo indicano quelli riguardanti i nodi di calcolo a centro cella e quelli in minuscolo quelli riguardanti i bordi di ogni volume di controllo. Come già anche nella (3.46) i è l'indice per la direzione x e j per la y . In conformità con le convenzioni appena citate l'equazione di conservazione della quantità di moto può essere scritta per le due componenti di velocità u in direzione x e v in direzione y come segue:

$$\begin{cases} a_{i,J} u_{i,J} = a_{i-1,J} u_{i-1,J} + a_{i+1,J} u_{i+1,J} + a_{i,J+1} u_{i,J+1} + a_{i,J-1} u_{i,J-1} + \\ (p_{I-1,J} - p_{I,J}) S_{i,J} + b_{i,J} \\ a_{I,j} v_{I,j} = a_{I,j-1} v_{I,j-1} + a_{I,j+1} v_{I,j+1} + a_{I+1,j} v_{I+1,j} + a_{I-1,j} v_{I-1,j} + \\ (p_{I,J-1} - p_{I,J}) S_{I,j} + b_{I,j} \end{cases} \quad (3.47)$$

nelle quali S è la superficie della faccia della cella di calcolo, b è il termine sorgente e a sono coefficienti calcolati con i metodi di interpolazione come ad esempio l'*upwind*.

Il primo passo, la parte *predictor* del codice, deriva dal metodo *SIMPLE*⁵ e consiste nel risolvere il sistema di equazioni per dei campi di pressione p^* e velocità u^* e v^* ipotizzati:

$$\begin{cases} a_{i,J} u_{i,J}^* = a_{i-1,J} u_{i-1,J}^* + a_{i+1,J} u_{i+1,J}^* + a_{i,J+1} u_{i,J+1}^* + a_{i,J-1} u_{i,J-1}^* + \\ (p_{I-1,J}^* - p_{I,J}^*) S_{i,J} + b_{i,J} \\ a_{I,j} v_{I,j}^* = a_{I,j-1} v_{I,j-1}^* + a_{I,j+1} v_{I,j+1}^* + a_{I+1,j} v_{I+1,j}^* + a_{I-1,j} v_{I-1,j}^* + \\ (p_{I,J-1}^* - p_{I,J}^*) S_{I,j} + b_{I,j} \end{cases} \quad (3.48)$$

I campi di velocità u^* e v^* non soddisferanno l'equazione di continuità finché il campo p^* non è corretto. Si introducono perciò delle nuove quantità u^{**} , v^{**} e p^{**} in modo che la conservazione della massa sia rispettata:

⁴per la trattazione del metodo *PISO* si segue l'approccio di [14]

⁵per ulteriori informazioni sul metodo *SIMPLE* si veda [14] pagg. 142 e seguenti

$$\begin{cases} p^{**} = p^* + p' \\ u^{**} = u^* + u' \\ v^{**} = v^* + v' \end{cases} \quad (3.49)$$

La pressione p' appunto è scelta in modo che p^{**} soddisfi l'equazione di continuità, poi con questo valore si ricavano u^{**} e v^{**} , si è così eseguito il primo passo *corrector* dell'algoritmo *PISO*. A questo punto si risolvono nuovamente le equazioni di conservazione della quantità di moto (3.47) con p^{**} , u^{**} e v^{**} .

La procedura di affinamento dei valori predetti viene ripetuta ulteriormente per trovare i valori:

$$\begin{cases} p^{***} = p^{**} + p'' \\ u^{***} = u^{**} + u'' \\ v^{***} = v^{**} + v'' \end{cases} \quad (3.50)$$

che sono caratterizzati da un ulteriore valore correttivo. Le equazioni discretizzate di conservazione della quantità di moto risolte per p^{***} , u^{***} e v^{***} sono ritenute corrette dall'algoritmo.

Nonostante rispetto al *SIMPLE* il doppio passo di correzione del *PISO* aumenti l'onere computazionale i risultati sono migliori e l'algoritmo non è comunque eccessivamente pesante.

3.7.2 La condizione di uscita anecoica

Spesso le condizioni al contorno sono reputate come una parte secondaria della simulazioni che non pone grossi problemi. Quando però sia lavora con fluidi comprimibili e si ha la necessità di modellare fenomeni come le onde sonore, o comunque ci si trova in condizioni instazionarie, la questione ha una forte influenza sulla qualità dei risultati. In effetti l'unico modo di poter chiudere il problema in modo esatto al contorno è assumere condizioni periodiche, affinché il dominio di calcolo sia chiuso su se stesso e non richieda ulteriori imposizioni matematiche. Nella maggioranza dei casi non ci si trova però in questa situazione. Le difficoltà che nascono nel trovare formulazioni efficaci delle condizioni al contorno sono numerose, ma il caso di maggior interesse per questo lavoro è il dover implementare un controllo accurato della riflessione delle onde dai limiti del dominio. Già a livello teorico vi sono pochi strumenti disponibili: è possibile scrivere condizioni al contorno esatte che assicurino la buona posizione del problema solo per le equazioni di Eulero, come spiegato da [16].

La tecnica che si è usata per superare gli ostacoli appena descritti è stata quella di imporre le condizioni al contorno utilizzando relazioni matematiche basate sull'analisi delle differenti onde che attraversano il limite del dominio

di calcolo, nel fattispecie la sezione di uscita del condotto. L'approccio è di estendere le ECBC (*Euler Characteristic Boundary Conditions*) al caso più generale delle equazioni di Navier-Stokes e di definire così le NSCBC (*Navier Stokes Characteristic Boundary Conditions*). Come si può intuire dagli acronimi le onde vengono modellate attraverso la teoria delle caratteristiche, approfondita adeguatamente in [17]. Nonostante le criticità che tale metodo può presentare (ad esempio la difficoltà ad estendere il concetto di caratteristica alle equazioni di Navier), è preferibile all'uso di tecniche estrapolative per determinare le variabili incognite, [15].

Prima affrontare l'argomento dal punto di vista analitico è utile fare una distinzione tra condizioni al contorno fisiche, di cui si è parlato anche nel paragrafo 3.6, e numeriche. Le prime, come già spiegato, corrispondono a comportamenti fisici del fluido: esse chiudono il problema dal punto di vista matematico, ma non numericamente. Le ulteriori relazioni imposte per ricavare tutte le variabili non corrispondono a nessun comportamento reale e sono dette appunto condizioni al contorno numeriche. Queste possono essere determinate o per estrapolazione o risolvendo le equazioni di conservazione sui confini del dominio come all'interno, caso trattato in questo paragrafo. Svolgere calcoli numerici sul contorno del dominio pone però due problemi: l'accuratezza delle derivate diminuisce di un ordine in quanto le differenze centrate devono essere sostituite da quelle in avanti o all'indietro perchè i nodi computazionali al limite del dominio sono solo su di un lato; le onde che si propagano dall'esterno della griglia verso l'interno devono essere imposte.

Per semplicità si presenta la trattazione differenziale tipica dell'approccio alle differenze finite, i concetti sono comunque di validità generale ed implementabili anche nei calcoli ai volumi finiti, e si fanno le seguenti ipotesi:

- calori specifici costanti
- forze di volume e sorgenti di calore sono trascurate

Si ripropongono quindi le tre equazioni di conservazione, questa volta in forma indiciale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u_i)}{\delta x_i} = 0 \\ \frac{\delta(\rho u_i)}{\delta t} + \frac{\rho u_i u_j}{\delta x_j} + \frac{\delta p}{\delta x_i} = \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta x_j} \\ \frac{\delta \rho E}{\delta t} + \frac{\delta[(\rho E + p)u_i]}{\delta x_i} = \frac{\delta(u_j \tau_{ij})}{\delta x_i} - \frac{\delta q}{\delta x_i} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

nelle quali E è la densità di energia interna.

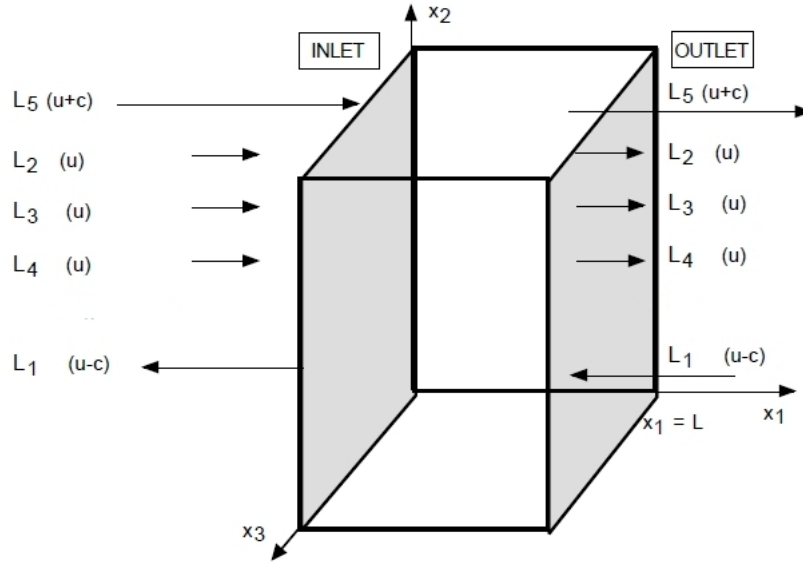


Figura 3.3: Dominio di calcolo con la rappresentazione delle onde ricavate con la teoria delle caratteristiche.

Si consideri un dominio di calcolo come quello in figura 3.3 con un contorno posto in $x_1 = L$. Tramite la teoria delle caratteristiche le equazioni (3.51) possono essere riscritte in termini di onde che si propagano in direzione x_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta p}{\delta t} + d_1 + \frac{\delta(\rho u_{x_2})}{\delta x_2} + \frac{\delta(\rho u_{x_3})}{\delta x_3} = 0 \\ \frac{\delta \rho E}{\delta t} + \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^3 u_k u_k) d_1 + \frac{d_2}{\gamma-1} + \rho u_{x_1} d_3 + \rho u_{x_2} d_4 + \rho u_{x_3} d_5 + \frac{\delta[(\rho E+p)u_{x_2}]}{\delta x_2} \\ + \frac{\delta[(\rho E+p)u_{x_3}]}{\delta x_3} = \frac{\delta u_j \tau_{ij}}{\delta x_i} - \frac{\delta q_i}{\delta x_i} \\ \frac{\delta \rho u_{x_1}}{\delta t} + u_{x_1} d_1 + \rho d_3 + \frac{\delta(\rho u_{x_1} u_{x_2})}{\delta x_2} + \frac{\delta \rho u_{x_1} u_{x_3}}{\delta x_3} = \frac{\delta \tau_{ij}}{x_j} \\ \frac{\delta \rho u_{x_2}}{\delta t} + u_{x_2} d_1 + \rho d_4 + \frac{\delta(\rho u_{x_2} u_{x_2})}{\delta x_2} + \frac{\delta \rho u_{x_2} u_{x_3}}{\delta x_3} = \frac{\delta \tau_{ij}}{x_j} \\ \frac{\delta \rho u_{x_3}}{\delta t} + u_{x_3} d_1 + \rho d_5 + \frac{\delta(\rho u_{x_3} u_{x_2})}{\delta x_2} + \frac{\delta \rho u_{x_3} u_{x_3}}{\delta x_3} = \frac{\delta \tau_{ij}}{x_j} \end{array} \right. \quad (3.52)$$

con:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{a^2} \left[L_2 + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \right] \\ d_2 = \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \\ d_3 = \frac{1}{2\rho a}(L_5 - L_1) \\ d_4 = L_4 \\ d_5 = L_4 \end{cases} \quad (3.53)$$

dove le L_n con $n = 1, 2, 3, 4, 5$ sono le ampiezze delle onde caratteristiche, le cui velocità sono:

$$\begin{cases} \lambda_1 = u_{x_1} - a \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u_{x_1} \\ \lambda_5 = u_{x_1} + a \end{cases} \quad (3.54)$$

Si possono riconoscere cinque termini che descrivono le onde, tanti quanti le condizioni al contorno richieste per un problema con flusso in entrata subsonico dalle equazioni di Navier-Stokes.

A questo punto si presentano, al confine del dominio, i due inconvenienti cui si accennava poco sopra: il calcolo dei termini L_n (cioè dei termini d_n nelle equazioni 3.52) che dipendono dalle onde che propagano dall'interno del condotto all'esterno sono fatti con le differenze in avanti, mentre per gli L_n delle onde che arrivano all'esterno del dominio di calcolo si possono avere due possibilità: avere informazioni sull'esterno della griglia di calcolo o non averle. Il caso qui trattato è il secondo e questo porta a definire le *LODI (Local One Dimensional Inviscid) relations*. Non è possibile, infatti, calcolare i valori L_n per le equazioni complete tridimensionali così dove è posta la condizione al contorno (da cui l'aggettivo *local*) si svolgono i calcoli per equazioni monodimensionali (lungo x_1 in figura 3.3) con viscosità nulla [15]. Il sistema (3.52) diviene quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta p}{\delta t} + \frac{1}{a^2} \left[L_2 + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \right] = 0 \\ \frac{\delta p}{\delta t} + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) = 0 \\ \frac{\delta u_{x_1}}{\delta t} + \frac{1}{2\rho a}(L_5 - L_1) = 0 \\ \frac{\delta u_{x_2}}{\delta t} + L_3 = 0 \\ \frac{\delta u_{x_3}}{\delta t} + L_4 = 0 \end{array} \right. \quad (3.55)$$

I risultati ottenuti dalle *LODI relations* sono poi utilizzati per i calcoli multidimensionali e viscosi all'interno del dominio e possono essere considerati una loro approssimazione. Si noti che le *LODI* sono utilizzate soltanto per il calcolo delle ampiezze delle onde (L_n) e non per le altre variabili, che sono ottenute tramite le equazioni di Navier-Stokes [15].

L'implementazione del metodo sul relativo bordo della griglia di calcolo avviene in principalmente in tre passi:

Passo 1. Per ogni condizione al contorno fisica viene eliminata la corrispondente equazione di conservazione nel sistema (3.52).

Passo 2. Per ogni relazione eliminata si utilizza la *LODI* corrispondente, presa nelle (3.55), e si calcola il valore L_n .

Passo 3. Si utilizzano le equazioni rimaste in (3.52) e la L_n ricavata al secondo passo per trovare tutte le altre quantità ancora incognite. In questo passaggio si ha la differenza principale tra il caso in cui si stiano risolvendo le equazioni di Eulero o quelle di Navier. Nella seconda ipotesi sono necessarie condizioni aggiuntive sui termini viscosi.

Approfondiamo ora l'utilizzo delle *LODI relations* nel caso di interesse per questa tesi, ovvero la condizione di sezione di uscita anecoica. Imporre che un terminale di scarico sia anecoico è un'operazione che richiede attenzione. Supponendo infatti che, come in figura 3.4, all'esterno del condotto vi sia una pressione diversa, dovrà necessariamente esistere un'onda (L_1 in figura) che entra nella griglia di calcolo dall'esterno, per ristabilire la differenza di pressione [16]. Imporre una condizione al contorno totalmente non riflettente implica che si debba porre $L_1 = 0$, rischiando di risolvere un problema mal posto. Per ovviare all'inconveniente di cui si è appena, detto è necessario imporre tra le condizioni anche p_∞ , cioè la pressione a valle del silenziatore. In linea di principio per una buona implementazione si possono seguire i seguenti punti:

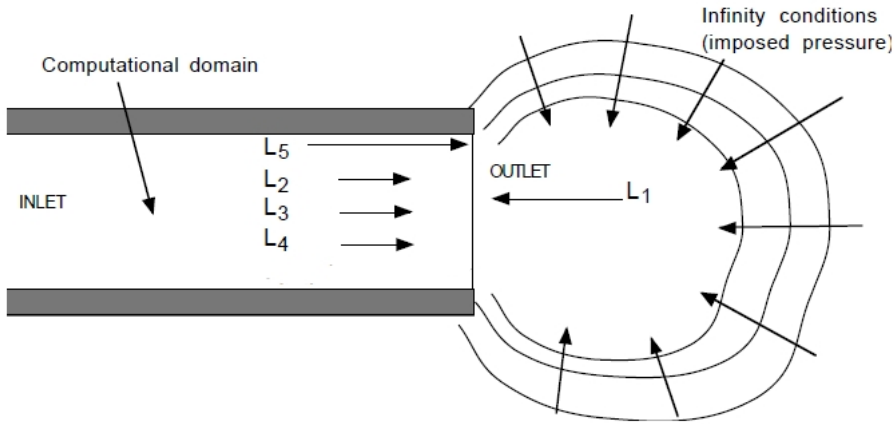


Figura 3.4: Rappresentazione dell'uscita anecoica in un condotto di scarico e delle quantità che la influenzano maggiormente.

Passo 1. Si fissa una condizione al contorno e la pressione p_∞ . Quest'ultima posizione non risolve nessuna variabile e perciò, a dispetto di quanto scritto nei passi generali da seguire per l'implementazione delle *LODI*, non si elimina nessuna equazione di conservazione nel sistema (3.52).

Passo 2. L'ampiezza dell'onda entrante (L_1) è data dalla: $L_1 = K(p - p_\infty)$ con p la pressione sulla sezione di uscita all'interno del dominio. Il parametro K dipende dal numero di Mach del flusso tramite: $K = (1 - M^2)a/H$ dove H è la misura delle celle di calcolo.

Passo 3. Tutte le ampiezze delle onde caratteristiche che non sono L_1 provengono dall'interno del condotto e possono essere valutate dalle (3.52)

Nel secondo passo della procedura entra in gioco un concetto fondamentale per questo lavoro di tesi: la possibilità di implementare una perfetta uscita anecoica dipende dal numero di Mach del flusso [16].

Come si dirà anche nei prossimi capitoli, tutte le prove svolte erano sotto ipotesi di flusso medio nullo, quindi con condizione perfettamente non riflettente. All'aumentare di M questa condizione viene meno e anche la teoria della decomposizione, utilizzata per il calcolo della *transmission loss*, esce sempre più dal suo campo di applicabilità. Un'estensione molto interessante delle prove fatte può essere stimare fino a che condizioni si possono ottenere risultati accettabili.

Capitolo 4

La discretizzazione dello spazio

4.1 Introduzione

In questo e nei prossimi capitoli si descriveranno le geometrie di scarico analizzate durante la tesi, il software utilizzato (*OpenFOAMTM*) ed infine verranno presentati i risultati ottenuti con le relative conclusioni del lavoro. Tutti questi argomenti hanno tra loro molte connessioni ed è quindi impossibile affrontarli uno alla volta isolatamente. Già nelle prossime righe potranno esservi perciò riferimenti ai risultati od a componenti del software, che saranno poi chiariti nel capitolo dedicato.

4.2 *Mesh*: concetti generali

4.2.1 Principali tipi di griglie di calcolo

La simulazione del comportamento fluidodinamico di un componente presuppone che esso venga opportunamente discretizzato con una griglia di calcolo e che le condizioni al contorno siano ben definite. Questa parte, di primaria importanza per la riuscita del lavoro, è molto ampia e complessa: si è scelto di iniziare discutendo dei principali tipi di *mesh*.

Le griglie di calcolo si dividono principalmente in: strutturate, strutturate a blocchi e non strutturate [10]. Nelle prime le celle non si sovrappongono mai e ogni nodo può essere univocamente definito da tre coordinate cartesiane. Nel caso bidimensionale ogni elemento è circondato da altri quattro, in quello tridimensionale da altri sei. Questa è la situazione nella quale è più facile implementare le equazioni di risoluzione. Gli svantaggi che si incontrano sono essenzialmente due: non si riescono a trattare geometrie particolarmente complesse e non sempre vi è completo controllo sulla distribuzione dei nodi di calcolo nel dominio. La necessità di dover infittire in una regione potrebbe ad esempio creare celle molto deformate in quella adiacente. Un esempio

di *mesh* strutturata è in figura 4.1, dove si nota che le celle non devono necessariamente essere ortogonali tra loro.

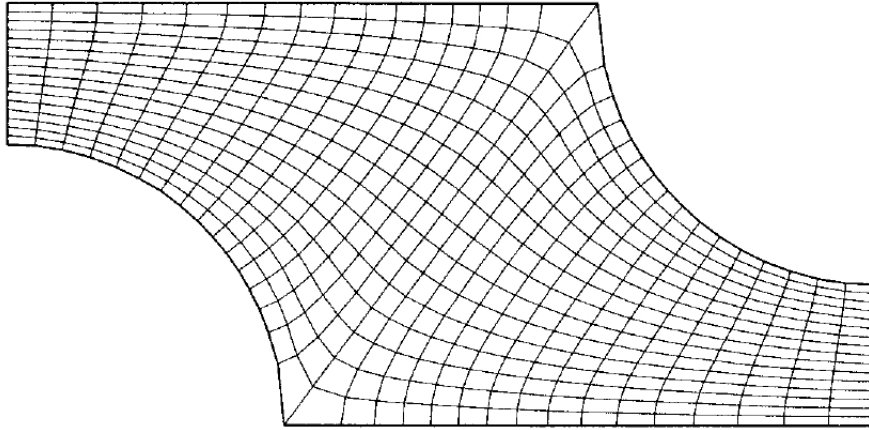


Figura 4.1: Esempio di griglia di calcolo strutturata e non ortogonale.

Le griglie strutturate a blocchi hanno più livelli di suddivisione del dominio. La geometria è divisa in pochi macrosettori a loro volta divisi in celle di calcolo di tipo strutturato. I blocchi possono sovrapporsi o meno a seconda della necessità, ma le celle devono essere sempre separate e univocamente definite dai tre assi cartesiani. La figura 4.2 mostra la discretizzazione a blocchi dello spazio intorno ad un profilo alare, le linee rosse indicano la divisione in blocchi, nei quali è implementata una *mesh* con diverse grandezze di cella. Le griglie strutturate a blocchi sono state utilizzate durante tutto il lavoro svolto.

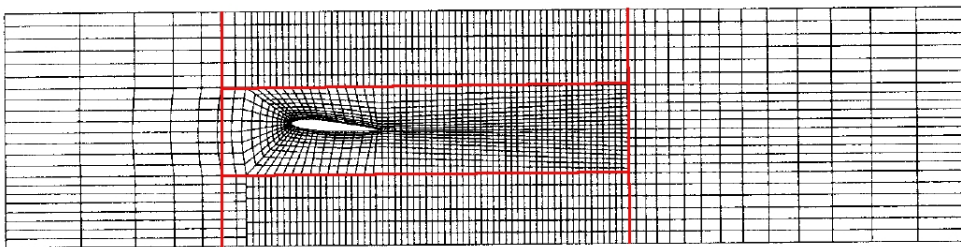


Figura 4.2: Esempio di griglia di calcolo strutturata a blocchi per la simulazione del campo di moto attorno ad un profilo alare.

Nelle griglie non strutturate è invece possibile far cambiare forma ai volumi di controllo per i quali non è neanche fissato un numero di elementi vicini:

in questo modo è possibile riempire domini anche molto complessi. Esistono anche algoritmi di generazione appositamente progettati per generare questo tipo di *mesh*. Lo svantaggio principale sta nella difficoltà di implementazione e nei dati di output delle simulazioni che possono essere anche molto irregolari. Le griglie non strutturate (di cui un esempio in figura 4.3) sono le più usate nel *metodo degli elementi finiti*.

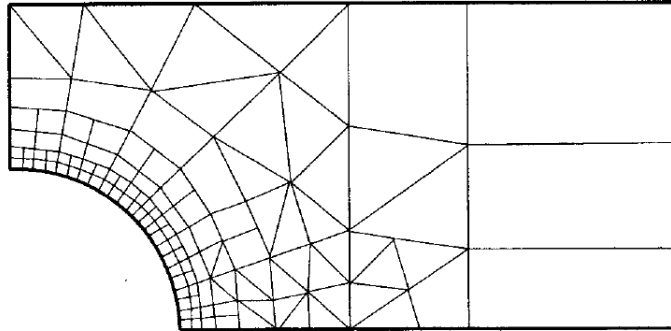


Figura 4.3: Esempio di griglia non strutturata.

4.2.2 Parametri fondamentali di valutazione

Prima di “lanciare” un codice numerico è bene accertarsi che la *mesh* rispetti almeno i principali requisiti geometrici. I risultati sono, infatti, influenzati dalla qualità della griglia ed un veloce controllo può evitare grosse perdite di tempo. I principali parametri che definiscono la qualità di una *mesh* sono molto semplici e riguardano tutti la forma delle celle.

L'*aspect ratio* è il rapporto tra lunghezza massima e minima dei lati delle celle. Se è unitario la cella è equilatera, ad esempio nel caso bidimensionale è quadrata, se è decisamente diverso da uno la cella è deformata in una direzione. Questo fattore è interessante perché specifica in che direzione si ha una discretizzazione più fitta. Ad esempio in figura 4.2 le celle hanno un *aspect ratio* decisamente maggiore di uno e, lontano dal profilo alare ci sono molti più volumi di calcolo in direzione verticale che orizzontale.

La *skewness* misura quanto una cella è deformata in funzione dell'angolo maggiore e di quello minore in essa presenti. Nel caso 2D una cella con *skewness* nulla è di forma rettangolare mentre con un valore elevato è un parallelogramma sempre più schiacciato all'aumentare del fattore, che in *OpenFOAMTM* risulta così definito:

$$\max \left| \frac{\theta_{max} - \theta_e}{180 - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{min}}{180 - \theta_e} \right| \quad (4.1)$$

nella quale θ_{max} e θ_{min} sono il massimo ed il minimo degli angoli nel volume finito, mentre θ_e è il valore che l'angolo assume se il poligono o il poliedro che lo costituiscono sono equilateri. La figura 4.4 mostra il caso di una cella rettangolare.

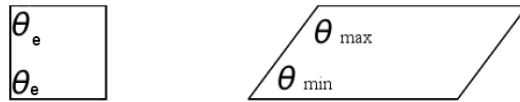


Figura 4.4: Angoli che definiscono lo *skewness* in una cella bidimensionale rettangolare.

La *non ortogonalità*, infine, misura la regolarità con la quale i gli elementi della griglia sono disposti. Due celle si dicono ortogonali se la congiungente i due centri è normale alla loro faccia comune. *OpenFOAMTM* richiede che due celle vicine siano ortogonali o che l'angolo sia compreso tra quello nullo e quello retto.

4.3 Le *mesh* in *OpenFOAMTM*

4.3.1 Numerazione di blocchi e celle

Ogni cella all'interno del software è completamente definita da un preciso sistema di numerazione che coinvolge tutti i principali elementi geometrici: vertici, facce e spigoli. Questo permette di poter compiere tutte le operazioni di volta in volta necessaria sulla griglia di calcolo, come definire le condizioni al contorno. Anche i blocchi che costituiscono la geometria sono numerati in modo secondo uno standard definito dal software così da poter costruire o importare i modelli su cui svolgere i calcoli in modo determinato e coerente. La figura 4.5 mostra che un contenitore cubico con una *mesh* fatta da un solo blocco. Come si può notare un blocco è definito tramite i suoi vertici con un sistema di numerazione che parte dall'origine del sistema di riferimento e considera una faccia alla volta numerandola in senso antiorario [18].

La figura 4.6 mostra i principali tipi di celle che possono essere utilizzati nel software, con la relativa nomenclatura:

- **hex¹** : cella esaedrica, o rettangolare nel caso bidimensionale: si tratta del tipo di cella più semplice. Tutte le altre possono essere considerate come una modifica di questa.

¹Con questo carattere si indica tutto il lessico utilizzato dal software *OpenFOAMTM*

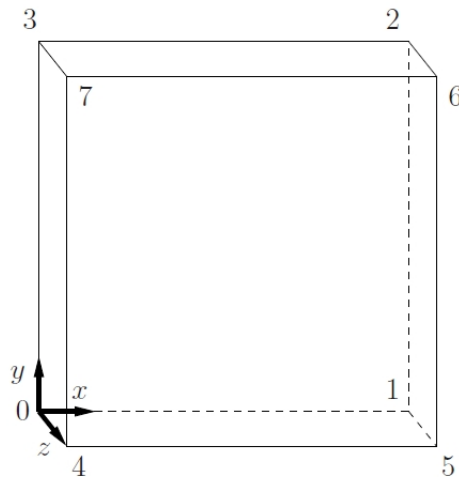


Figura 4.5: numerazione di un blocco in *OpenFOAM*TM.

- **wedge**: utilizzata per problemi assialsimmetrici semplificabili con geometrie a spicchio, se ne vedrà un'applicazione più avanti.
- **prism**: non è altro che una cella esaedrica tagliata lungo un opportuno piano di simmetria.
- **pyr**: si tratta di una cella piramidale ottenuta facendo collassare i punti di una faccia di un volume finito esaedrico al centro della faccia stessa.
- **tet**: cella a forma di tetraedro regolare.
- **tetWedge**: si utilizza per problemi assiasimmetrici con *mesh* composta da tetraedri.

Il metodo di numerazione dei vertici è analogo a quello dei blocchi, mentre quello delle facce e dei vertici prosegue a coppie di elementi uno opposto all'altro, come in 4.6 [18].

4.3.2 Vincoli di validità della *mesh* in *OpenFOAM*TM

In *OpenFOAM*TM è implementata tutta una serie di controlli sull'adeguatezza della griglia di calcolo che si basa sulla valutazione di alcuni aspetti imprescindibili per una simulazione numerica corretta.

Innanzitutto non possono esistere due o più punti con le stesse coordinate cartesiane. I punti (**points**), sono per il software i vertici delle celle. Queste ultime devono essere contigue, ovvero ogni parte del dominio di calcolo deve

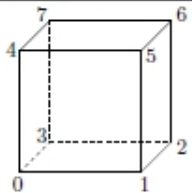
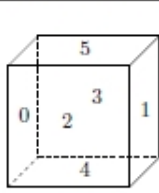
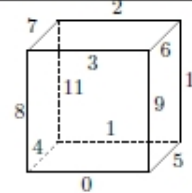
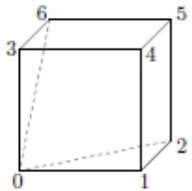
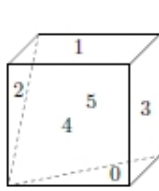
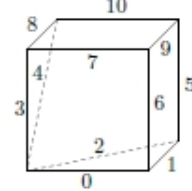
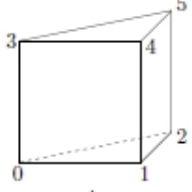
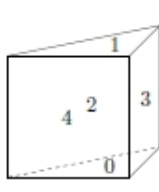
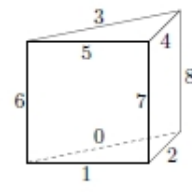
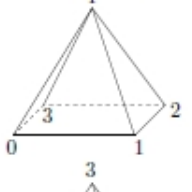
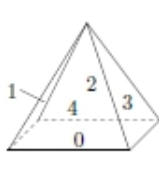
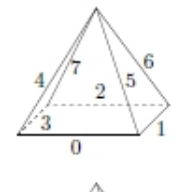
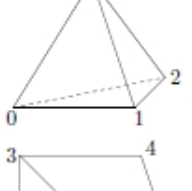
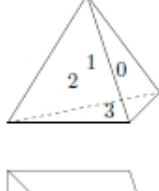
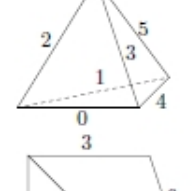
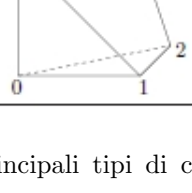
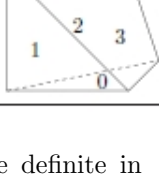
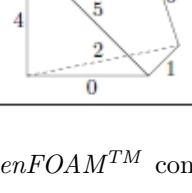
Cell type	Keyword	Vertex numbering	Face numbering	Edge numbering
Hexahedron	hex			
Wedge	wedge			
Prism	prism			
Pyramid	pyr			
Tetrahedron	tet			
Tet-wedge	tetWedge			

Figura 4.6: Schema dei principali tipi di celle definite in *OpenFOAMTM* con relativa numerazione.

appartenere ad una delle celle, convesse e con il centro all'interno della cella stessa.

Anche la chiusura, sia topologica che geometrica è fondamentale: tutti gli spigoli sono perciò in comune tra due facce dello stesso volume finito (chiusura topologica) e quando tutti i vettori che definiscono le facce sono orientati verso punti esterni alla cella la loro somma deve dare un vettore

nullo (chiusura geometrica).

Si ha, infine, la condizione di ortogonalità già descritta al paragrafo precedente.

4.3.3 La cartella polyMesh

Tutti i parametri riguardanti la *mesh* di una simulazione numerica in *OpenFOAMTM* sono contenuti nella cosiddetta cartella *polyMesh*, che contiene i files: *blockMeshDict*, *boundary*, *faces*, *neighbour*, *owner*, *points*. Il primo contiene le istruzioni in C++ per generare tutti gli altri.

Il *blockMeshDict* è facoltativo e, se c'è, la geometria con la relativa discretizzazione sono create in *OpenFOAMTM*, se invece sono importate da un software di prototipazione questo file non è presente. Subito di seguito è riportato un esempio delle parti salienti:

```

1
2
3 convertToMeters 0.001;
4
5 vertices
6 (
7     // vertici con y e z nulli
8     ( 0 0 0 ) // pt 0 (xyz-000)
9     ( 230 0 0 ) // pt 1 (xyz-100)
10    ( 727 0 0 ) // pt 2 (xyz-200)
11    ( 927 0 0 ) // pt 3 (xyz-300)
12
13    // vertici con y1 e z nullo
14    ( 0 25 0 ) // pt 4 (xyz-010)
15    ( 230 25 0 ) // pt 5 (xyz-110)
16    ( 727 25 0 ) // pt 6 (xyz-210)
17    ( 927 25 0 ) // pt 7 (xyz-310)
18 );
19
20 blocks
21 (
22     // blocco 1
23     hex (0 1 5 4 10 11 15 14)
24     ( 57 6 1 )
25     simpleGrading (1 1 1)
26 );
27
28 patches
29 (
30     symmetryPlane axis
31     (
32     (0 1 11 10)
33     (1 2 12 11)
34     (2 3 13 12)
35     )
36
37     patch inlet
38     (
39     (0 4 14 10)
40     )
41

```

```
42     patch outlet
43     (
44     (7 3 13 17)
45     )
46
47     wall wall
48     (
49     (4 5 15 14)
50     (5 8 18 15)
51     )
52 );
```

Nel codice appena presentato si possono riconoscere le impostazioni che riguardano i parametri più importanti:

riga 3. Conversione in metri. *OpenFOAMTM* lavora infatti esclusivamente in questa unità di misura (riguardo la lunghezza), quindi ogni dato in altri multipli o sottomultipli va riscalato. Nella fattispecie tutte le grandezze sono in millimetri.

righe 5-18. Definizione delle coordinate cartesiane dei vertici dei blocchi in cui è diviso il dominio.

riga 23. Numerazione vertici del blocco.

riga 24. Numero di celle in direzione x,y e z di ogni blocco

riga 26. Coefficienti per eventuale infittimento progressivo della *mesh* in una direzione. In questo caso le celle hanno dimensione costante nel blocco.

righe 28-51. Assegnazione delle condizioni al contorno a tutte le facce di blocchi che stanno sul confine del dominio.

Il file `boundary` contiene un elenco di tutte le facce alle quali sono assegnate delle condizioni al contorno, con specificato il particolare tipo di condizione assegnata. Questo file, se si usa il `blockMeshDict`, è generato dalla funzione `patches` riportata nel codice soprastante. Le principali condizioni al contorno implementate in *OpenFOAMTM* e di interesse per questa tesi, già presentate dal punto di vista matematico e fisico nel capitolo precedente, sono [18]:

- `inlet` definisce la sezione di entrata
- `outlet` definisce la sezione di uscita
- `wall` definisce una parete

- `symmetryPlane` posta su di una faccia appartenente ad un piano di simmetria
- `wedge` per superfici che delimitano uno spicchio di solido di rotazione
- `empty` Condizione che serve per fare simulazioni bidimensionali: infatti *OpenFOAMTM* genera comunque geometrie in tre dimensioni (al limite con una unitaria), quindi per imporre al solutore di trascurare una delle tre si imposta la condizione `empty` alle facce perpendicolari alla coordinata per la quale non eseguire i calcoli.
- `processor` Nei calcoli multiprocessore la geometria è divisa in più sottodomini di calcolo i cui confini comuni sono definiti con questa condizione al contorno.

`points` è invece la lista delle coordinate di tutti i vertici delle celle che compongono la geometria, mentre `faces` è quella di tutte le facce, espresse con il numero identificativo dei vertici, che la compongono. `owner` è un file che specifica a quali celle appartiene ogni faccia del dominio, in pratica costruisce le celle di calcolo, infine in `neighbour` è costruito una lista di tutte le celle vicine tra loro [18].

4.4 Le geometrie analizzate

In questo lavoro si sono studiati quattro silenziatori di scarico con l'obiettivo di ottenere riscontri positivi da tutti e quattro nella valutazione della *transmission loss* con la teoria della decomposizione.

Tutto l'affinamento del solutore con condizione anecoica e della *routine* di post-trattamento dei dati è stato condotto con una geometria a camera di espansione semplice, costituita da due tratti di condotto cilindrico a diametro costante con interposto un volume anch'esso cilindrico. La figura 4.7 mostra la sezione longitudinale del silenziatore e la tabella 4.1 riporta i valori delle quote in figura e il codice utilizzato nei prossimi capitoli per riferirsi ad esso. I dati geometrici e fluidodinamici sperimentali della CS erano presenti in dipartimento, già utilizzati per precedenti lavori.

In un secondo momento l'attenzione si è spostata su componenti più complessi, per i quali è indispensabile un approccio pienamente tridimensionale. Questi silenziatori, forniti da AVLTM, azienda tedesca di ricerca e sviluppo nel campo dei motori a combustione interna, sono caratterizzati da un'impostazione cosiddetta *reverse*, con i gas combusti che entrano ed escono dallo stesso lato del silenziatore. In particolare si sono studiate quattro configurazioni.

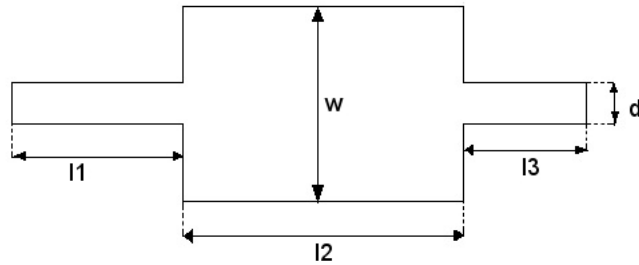


Figura 4.7: Geometria camera di espansione semplice, denominata CS.

Codice	Quote geometriche				
	l1 [mm]	l2 [mm]	l3 [mm]	w [mm]	d [mm]
CS	230	497	200	297	50

Tabella 4.1: Specifiche geometriche del silenziatore in figura 4.7

Una è la *long chamber 1* in figura 4.8a, abbreviata successivamente con LC1, nella quale il condotto di entrata sbocca direttamente dentro al silenziatore cilindrico. L'aggettivo *long*, come anche i successivi *mid* e *short* si riferiscono alla lunghezza, variabile da camera a camera, del silenziatore. La *long chamber 2*, da ora in poi denominata LC2, (figura 4.8b) è del tutto identica alla prima, l'unica differenza sta nell'entrata: in questa soluzione i gas di scarico sono accompagnati fin dentro al volume cilindrico, la quota e_2 (figura 4.8 e tabella 4.2) è infatti molto maggiore in LC2 che in LC1.

La *mid chamber* (MC) segue la configurazione della LC2, ma il silenziatore è più corto (quota l minore), mentre nella *short chamber* (SC) il condotto di entrata è disposto come per la LC1. Sono entrambe raffigurate in figura 4.9 con i valori delle quote in tabella 4.2.

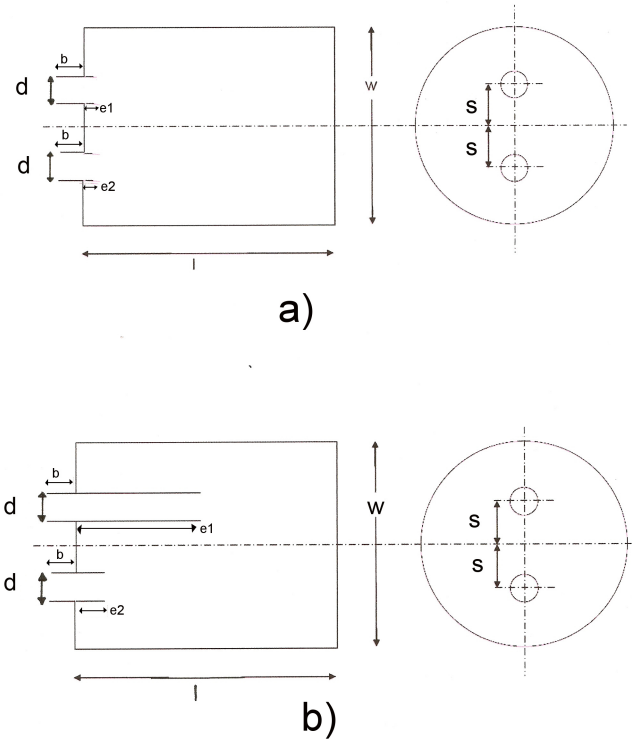


Figura 4.8: Camere di tipo *reverse long chamber* 1, nella a) e *long chamber* 2 nella b), rispettivamente codificate con LC1 e LC2.

Codice	Quote geometriche						
	l [mm]	w [mm]	d [mm]	b [mm]	e1 [mm]	e2 [mm]	s [mm]
LC1	494	197	50	17	17	17	50
LC2	494	197	50	17	257	17	50
MC	377	197	50	17	167	17	50
SC	127	197	50	17	17	17	50

Tabella 4.2: Specifiche geometriche dei silenziatori nelle figure 4.8 e 4.9

4.5 Discretizzazione delle geometrie

La CS, come accennato, è stato il silenziatore utilizzato per migliorare la qualità dell'implementazione del solutore e del post-trattamento dei dati con la teoria della decomposizione. Essendo inoltre l'unica geometria a solido di rotazione (costituita in pratica da tre cilindri in serie) sono state eseguite su

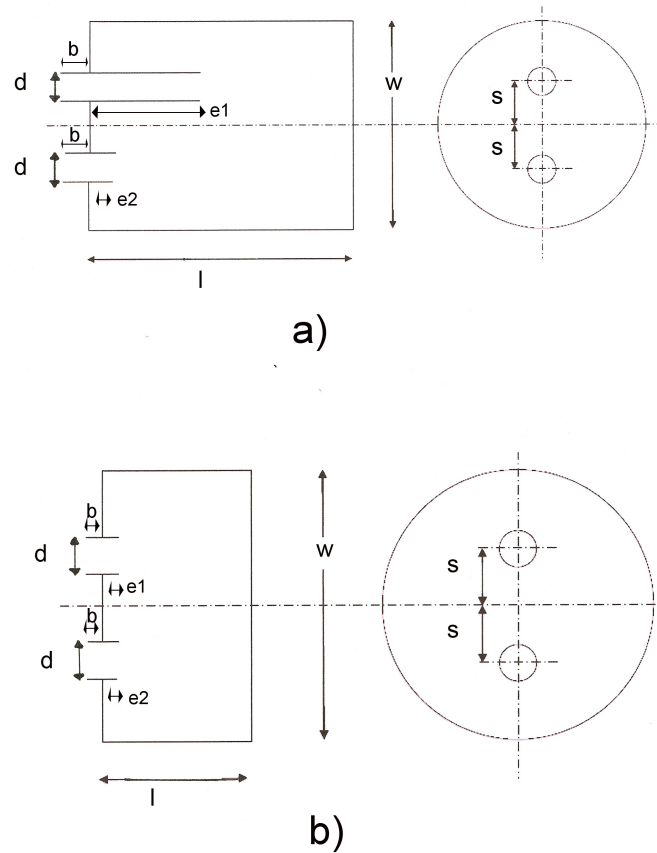


Figura 4.9: Camere di tipo *reverse mid chamber*, nella a) e *short chamber* nella b), rispettivamente codificate con MC e SC.

di essa simulazioni bidimensionali e *wedge*. Per le *reverse* l'approccio 3D è stata l'unica soluzione percorribile.

4.5.1 Mesh bidimensionale

In *OpenFOAMTM* i domini di calcolo sono sempre tridimensionali, se per ciò si vuole fare un calcolo 2D si creerà una *mesh* in tre dimensioni con una cella sola in direzione di uno dei tre assi coordinati. Il solutore in questo caso non calcolerà le grandezze riguardanti quest'ultimo asse. In figura 4.10 ad esempio è riportato un ingrandimento della sezione di entrata (in rosso) della camera CS in due dimensioni: in direzione z lo spessore è molto piccolo (una cella) ma non è nullo.

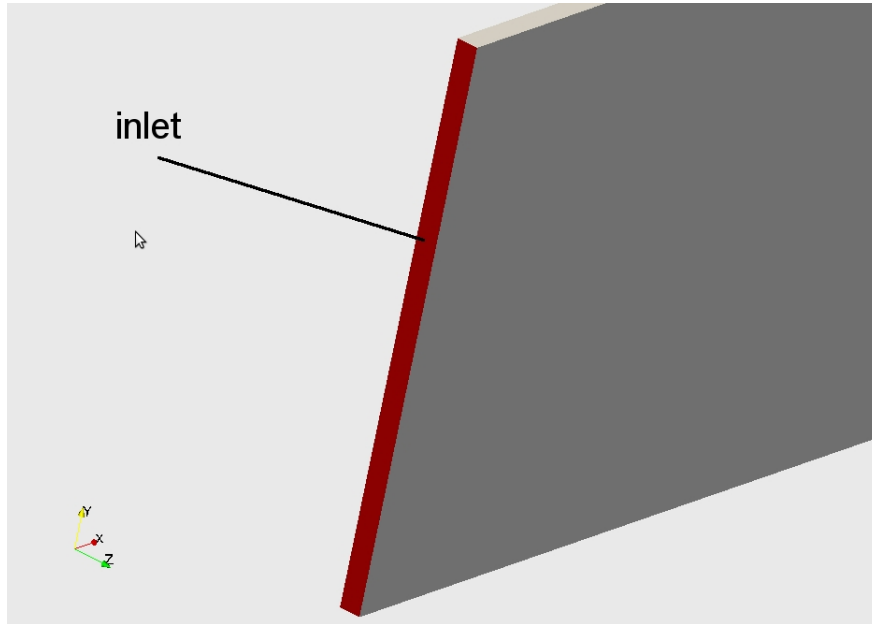


Figura 4.10: Particolare della geometria bidimensionale per il calcolo della camera CS. In rosso è rappresentata la sezione di entrata.

La geometria CS, su cui si sono svolti i calcoli, è invece riportata nella figura 4.11. Si può benissimo notare come il dominio sia composto solamente da metà della camera, con una condizione di `symmetryPlane` lungo l'asse x : questo espediente permette di risparmiare tempo a parità di qualità dei risultati. Sempre in figura 4.11 è messa in evidenza la griglia di calcolo esaedrica. Le celle misurano 4mm sia in direzione x che y . La scelta della dimensione della mesh è stata fatta cercando di non lavorare con una discretizzazione troppo fitta, che avrebbe reso le simulazioni lunghe e i dati relativi ad esse voluminosi e difficili da trattare; si è però prestata molta attenzione al rispetto della condizione di *Courant* (si veda il capitolo 3) e ad evitare l'aliasing nell'acquisire i dati relativi al campo sonoro.

Per quanto riguarda la condizione di Courant, essendo le prove fatte con flusso medio nullo $u = 0$, si sono ottenuti i seguenti valori:

$$Co = \frac{a\Delta t}{\Delta x} = \frac{343 \text{ m/s } \Delta t}{4 \text{ mm}} < 1 \quad (4.2)$$

cioè l'intervallo temporale massimo è:

$$\Delta t = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad (4.3)$$

Considerato che le onde si propagano da monte a valle in direzione x , la misura delle celle in questa direzione è in realtà l'unica critica e ad essa sono,

infatti, riferiti i calcoli appena svolti sul numero di *Courant*. Per precauzione si sono comunque tenuti in considerazione questi limiti anche per gli altri assi cartesiani, soprattutto perchè nel volume di espansione del silenziatore, cioè fuori dai condotti, nei quali vale l'approssimazione di onda piana, effettivamente il campo sonoro non segue solo una direzione.

Se i nodi di calcolo sono troppo lontani, nasce anche il problema tipicamente misuristico dell'*aliasing*. Come si vedrà, la massima frequenza che si acquisisce è 2000 Hz , considerando perciò, per il teorema di *Shannon*, un massimo di 4000 Hz la dimensione minima che i volumi finiti devono avere è:

$$\Delta x_{max} = \frac{343\text{ m/s}}{4000\text{ Hz}} = 0.085\text{ m} \quad (4.4)$$

La misura della mesh scelta è quindi ampiamente accettabile.

I limiti sulle celle sono validi anche per le altre geometrie che verranno trattate nel capitolo, in quanto le condizioni che le determinano non dipendono dalla geometria ma dalle condizioni fluidodinamiche delle prove.

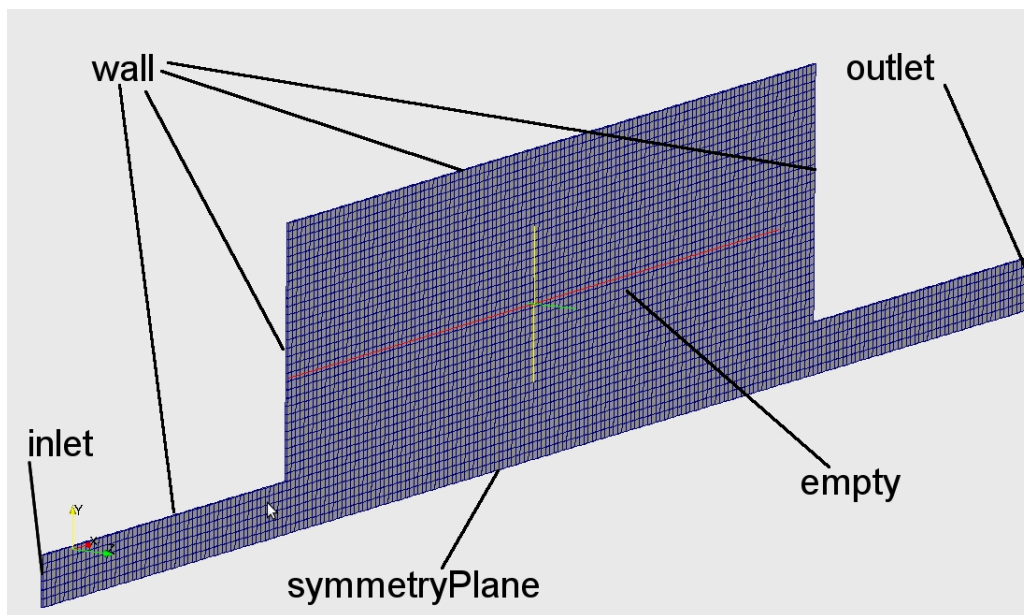


Figura 4.11: Camera CS in due dimensioni con la *mesh* evidenziata. Sono indicate anche le condizioni al contorno.

Nella figura 4.11 sono indicate anche le condizioni al contorno. In particolare si veda come la *empty*, di cui si è parlato, permetta al dominio, in realtà tridimensionale, di essere trattato come se avesse solo due dimensioni.

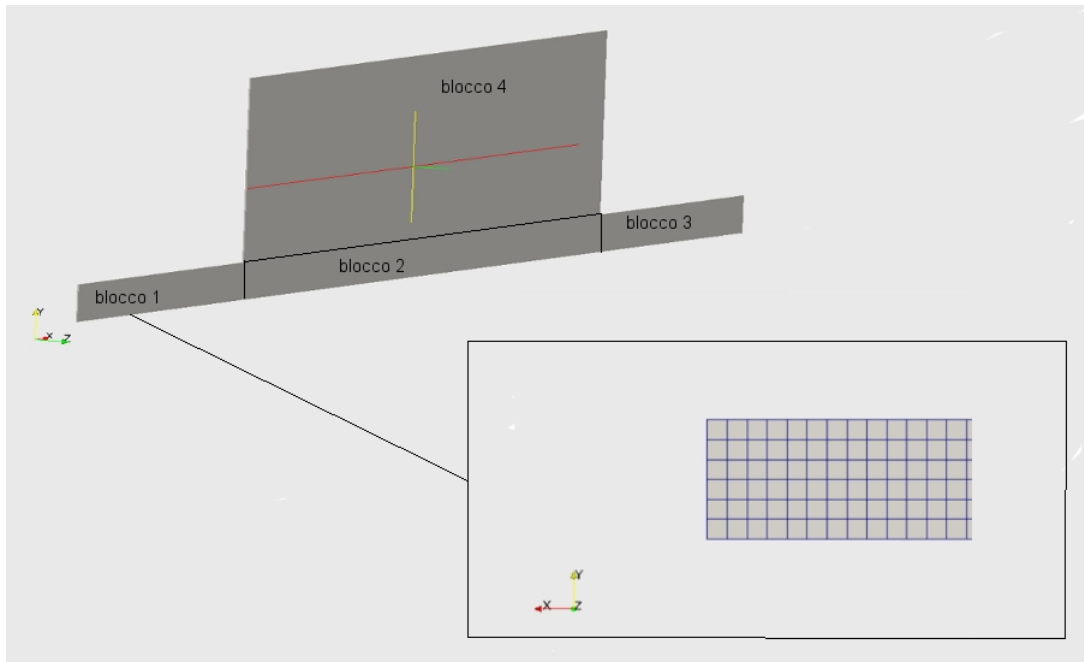


Figura 4.12: Divisione in blocchi della camera CS e dettaglio della griglia di calcolo nella zona in prossimità dell'entrata.

In figura 4.12 sono infine rappresentati i blocchi in cui è divisa la geometria e che a loro volta il software divide in celle. Per chiarezza è anche riportato un dettaglio dei volumi esaedrici.

Nel software *OpenFOAMTM* è possibile, prima di procedere oltre, controllare la qualità della discretizzazione dello spazio tramite il comando `checkMesh`: esso fornisce il valore dei principali indici di valutazione discussi in 4.2.2. La parte più importante dell'output a schermo è quindi stata:

```

1 Number of cells of each type:
2   hexahedra:    5230
3   prisms:       0
4   wedges:       0
5   pyramids:     0
6   tet wedges:   0
7   tetrahedra:   0
8   polyhedra:    0
9
10 Checking patch topology for multiply connected surfaces ...
11 Patch          Faces    Points  Surface topology
12 axis           231     464    ok (singly connected)
13 inlet          6        14     ok (singly connected)
14 outlet         6        14     ok (singly connected)
15 wall           293     588    ok (singly connected)
16 defaultFaces   10460   10998  ok (singly connected)
17

```

```

18 Checking geometry...
19   This is a 2-D mesh
20   Overall domain bounding box (0 0 0) (0.927 0.1485 0.001)
21   Mesh (non-empty) directions (1 1 0)
22   Mesh (non-empty, non-wedge) dimensions 2
23
24   Max aspect ratio = 4.16666667 OK.
25
26   Mesh non-orthogonality Max: 0 average: 0 Threshold = 70
27   Non-orthogonality check OK.
28
29   Max skewness = 1.56566922e-07 OK.

```

Nella quale si può riconoscere:

- righe 1-8.** Conteggio dei tipi di cella. Si nota che la *mesh* è completamente esaedrica, come già precisato.
- righe 10-16.** Conteggio di punti e facce assegnati alle varie condizioni al contorno e verifica che non vi siano sovrapposizioni, con zone del dominio appartenenti a più celle.
- righe 18-22.** Controllo del dominio di calcolo. In questo caso è riconosciuto come bidimensionale nelle direzioni x e y .
- riga 24.** Controllo dell'*aspect ratio*, in questo caso essendo maggiore di 1 le celle risultano essere rettangolari.
- righe 26-27.** Controllo della *non ortogonalità*. In questo caso viene comunicato che tutte le celle sono ortogonali tra loro, come ci si aspettava essendo tutta la geometria composta da blocchi rettangolari riempiti da celle della stessa forma.
- riga 29.** Controllo sul fattore di *skewness*, che risulta infinitesimo, ciò significa che tutte le celle sono esaedriche e con gli angoli di 90 gradi.

4.5.2 *Mesh* a spicchio

Questa possibilità è applicabile solo ai solidi di rotazione, ma porta a vantaggi notevoli in termini di tempi di calcolo. La simulazione **wedge** è infatti equivalente ad una in tre dimensioni, ma con considerevole diminuzione dell'estensione del dominio. La figura 4.13 mostra l'applicazione fatta al silenziatore CS. Si noti che l'angolo al centro deve essere non superiore a 5 gradi: la condizione al contorno **wedge**, infatti, presuppone che in direzione circonferenziale vi sia solo una cella si calcolo, se perciò il settore circolare si allarga troppo anche i volumi di calcolo si ingrandiscono eccessivamente. La misura delle celle in direzione x ed y è, come per il caso bidimensionale,

di 4 mm, valgono pertanto le considerazioni già scritte sulla condizione di *Courant* e sull'aliasing.

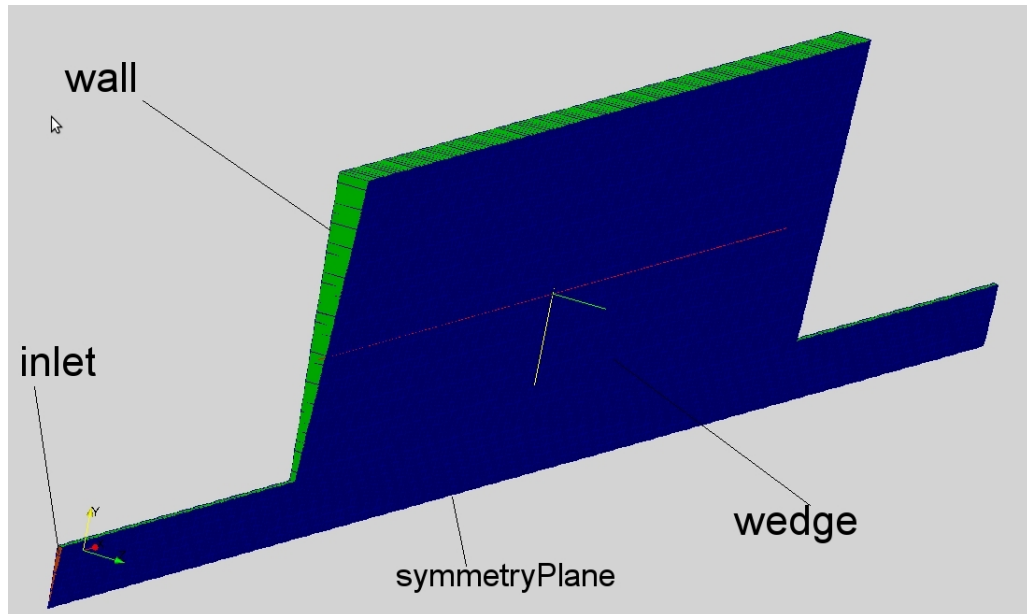


Figura 4.13: Geometria *wedge* con celle esaedriche e angolo al centro di 5 gradi. Nei differenti colori sono indicate le condizioni al contorno, non è visibile quella di uscita.

Una criticità delle geometrie a spicchio è che le celle vicino all'asse di simmetria tendono a chiudersi, la figura 4.14 mostra il fenomeno sulla sezione di entrata.

Anche per questo tipo di geometria è opportuno eseguire un `checkMesh` prima di far intraprendere il calcolo con il solutore:

```

1 Number of cells of each type:
2   hexahedra:      5230
3   prisms:         231
4   wedges:          0
5   pyramids:       0
6   tet wedges:     0
7   tetrahedra:    0
8   polyhedra:     0
9
10 Checking patch topology for multiply connected surfaces ...
11 Patch           Faces   Points  Surface topology
12 axis             0      0      ok (empty)
13 inlet            7      15     ok (singly connected)
14 outlet           7      15     ok (singly connected)
15 front            5461   5731   ok (singly connected)
16 derriere         5461   5731   ok (singly connected)
17 wall             293    588    ok (singly connected)
18

```

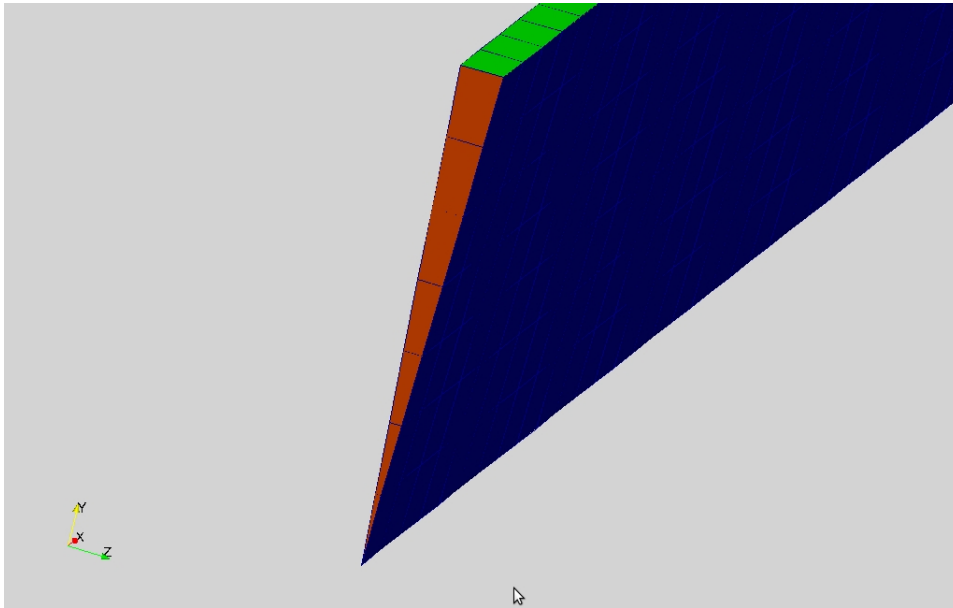


Figura 4.14: Ingrandimento sulla sezione di entrata di una *mesh* a spicchio. Si noti come i volumi di calcolo vicino all'asse di rotazione siano molto chiuse e tendano a collapsare in un segmento. Anche la presenza di una sola cella in direzione circonferenziale è ben visibile.

```

19 Checking geometry ...
20   This is a 3-D mesh
21   Overall domain bounding box (0 0 -0.0064) (0.927 0.148
    0.0064)
22   Mesh (non-empty) directions (1 1 1)
23   Mesh (non-empty, non-wedge) dimensions 2
24   Max aspect ratio = 25.9018902 OK.
25
26   Mesh non-orthogonality Max: 0 average: 0 Threshold = 70
27   Non-orthogonality check OK.
28
29   Max skewness = 0.330796465 OK.

```

righe 1-8. Conteggio dei tipi di cella. Questa volta le celle non sono più solo esaedriche: le piramidali sono quelle in prossimità dell'asse di rotazione.

righe 10-17. Conteggio di punti e facce assegnati alle varie condizioni al contorno e verifica che non vi siano sovrapposizioni, con zone del dominio appartenenti a più celle. Si nota in questo caso anche la presenza delle condizioni al contorno wedge, fondamentali perchè lo spicchio sia trattato a livello computazionale come una parte di un solido di rotazione e non come una geometria a se stante.

righe 19-24. Controllo del dominio di calcolo. Riconosciuto come 3D: infatti il *wedge* dà origine ad un calcolo in tutto e per tutto tridimensionale.

riga 24. *Aspect ratio* decisamente molto più alto del caso 2D.

righe 26-27. La *non ortogonalità* è sempre nulla, in effetti le celle vanno a disporsi secondo corone circolari concentriche, non c'è quindi motivo perchè l'angolo tra di esse subisca variazioni

riga 29. Il fattore di *skewness* è questa volta più elevato, anche se decisamente inferiore a 1. Il motivo è la forma a spicchio di corona circolare che le celle devono assumere. Se l'angolo al centro aumentasse, restando sempre una cella sola in direzione circonferenziale, questo fattore crescerebbe ulteriormente.

4.5.3 *Mesh* tridimensionali

Le camere *reverse* fornite da AVLTM sono state modellate in 3D. Come infatti si evince dalle viste laterali e frontali nelle figure 4.8 e 4.9 non sono riducibili ad un dominio a spicchio, mentre si è preferito non avvalersi di una *mesh* bidimensionale per via dei risultati non soddisfacenti ottenuti con la CS che verranno discussi successivamente.

Nella figura 4.15 (che ritrae la camera LC2) sono visibili le caratteristiche principali di questo tipo di geometria: essa è stata tagliata secondo un piano di simmetria giacente in $x - z$ e le condizioni al contorno assegnate sono indicate in figura. Poichè le caratteristiche delle quattro camere sono molto simili tra loro, la 4.15 vale anche per le altre tre.

Le *mesh* dei silenziatori AVLTM hanno richiesto qualche accorgimento in più rispetto alla CS. Innanzitutto queste geometrie prevedono che i condotti entrata e uscita dal volume silenziante proseguano all'interno di questo in varia misura a seconda del tipo. Per modellare in modo realistico questa configurazione è stato creato un piccolo spazio vuoto di spessore 2 mm che tenga conto delle pareti del condotto. Lo spessore è stato ipotizzato durante il lavoro di tesi perchè non fornito dal AVLTM. La figura 4.16 mostra quanto detto per la camera LC2. Sempre nella stessa figura è anche possibile capire che anche per questi silenziatori è stata scelta una griglia strutturata composta da elementi esaedrici.

Un'ulteriore complicazione è stata divisione in celle delle sezioni circolari, come quelle di entrata e uscita o il fondo del volume cilindrico. Nella figura 4.17 è riportata la sezione di entrata. Per ottenere celle di forma più regolare possibile nell'intorno del centro si è utilizzato un blocco rettangolare. Una certa deformazione dei volumi di calcolo è stata però inevitabile e ha avuto come conseguenza un fattore di *skewness* molto elevato, anche se accettabile.

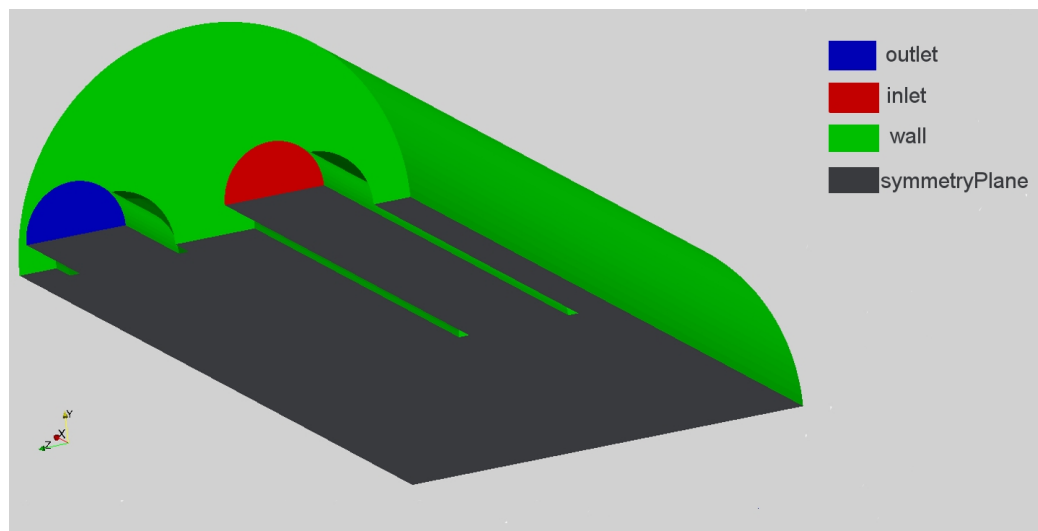


Figura 4.15: Geometria tridimensionale che ritrae la camera LC2. Sono indicate le condizioni al contorno adottate.

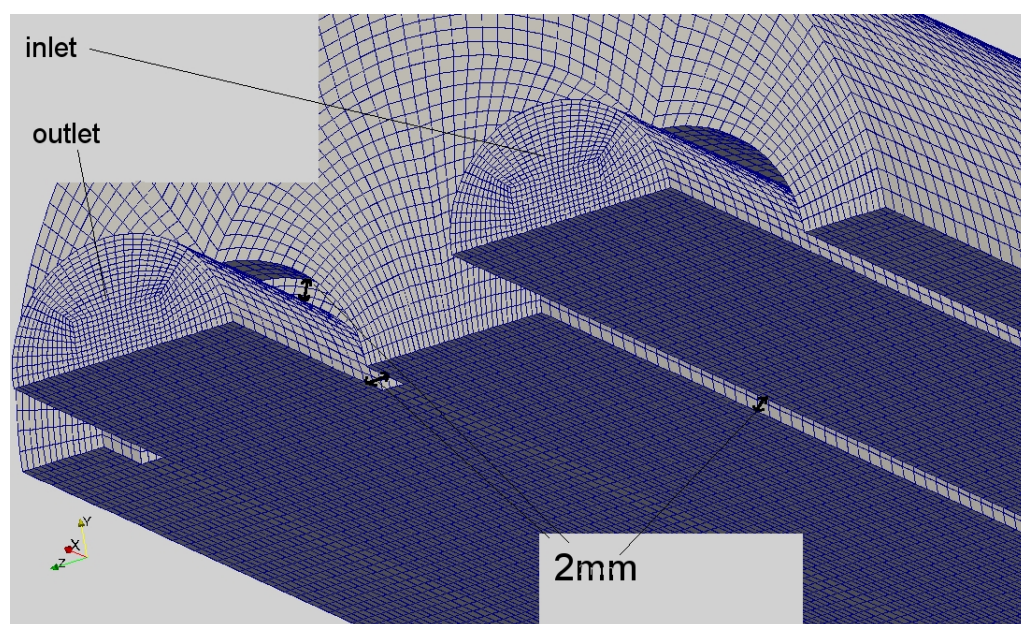


Figura 4.16: Modellazione dello spessore dei condotti per la camera LC2, come mostrato nei disegni quotati, in questo caso il condotto di entrata è più lungo di quello di uscita. Si nota anche la *mesh* esaedrica.

Nel rispetto della condizione di *Courant* e per non avere *aliasing* si è cercato di far sì che in tutte e tre le direzioni la dimensione dei volumi finiti non

superasse i 5 mm.

Si riporta il `checkMesh` anche per la LC2, vista tuttavia l'affinità tra le mesh delle *reverse* l'output è estendibile anche alle altre, per le quali non è presentato perchè non la trattazione non si appesantisca di informazioni ridondanti.

```

1 Number of cells of each type:
2   hexahedra:      319752
3   prisms:         0
4   wedges:         0
5   pyramids:       0
6   tet wedges:     0
7   tetrahedra:     0
8   polyhedra:      0
9
10 Checking patch topology for multiply connected surfaces ...
11 Patch           Faces    Points   Surface topology
12 inlet           630     671     ok (singly connected)
13 internalWalls   216     296     ok (singly connected)
14 outlet          630     671     ok (singly connected)
15 symmetryPlane   16944   17341   ok (singly connected)
16 walls           16740   17197   ok (singly connected)
17
18 Checking geometry ...
19   This is a 3-D mesh
20   Overall domain bounding box (-0.494 -4.249e-11 -0.0985)
21     (0.05 0.0985 0.098)
22   Mesh (non-empty) directions (1 1 1)
23   Mesh (non-empty, non-wedge) dimensions 3
24
25   Max aspect ratio = 11.1943313 OK.
26
27   Mesh non-orthogonality Max: 35.9894591 average: 7.73960332
28     Threshold = 70
29   Non-orthogonality check OK.
30
31   Max skewness = 0.91868275 OK.

```

righe 1-8. Conteggio dei tipi di cella. La *mesh* è completamente esaedrica: non dovendo approssimare la geometria a spicchio le piramidali sono assenti. Il dominio è molto esteso, più di 300000 celle, questo ha influito molto sui tempi di calcolo rispetto alla CS.

righe 10-16. Conteggio di punti e facce assegnati alle varie condizioni al contorno e verifica che non vi siano sovrapposizioni, con zone del dominio appartenenti a più celle. La condizione `internalWalls` serve a modellare le pareti interne dei condotti di entrata e uscita ed è del tutto analoga a quella di parete.

righe 18-24. Controllo del dominio di calcolo. Riconosciuto come 3D, quale effettivamente è.

riga 24. *Aspect ratio* L'assenza della geometria a spicchio permette di ridurre decisamente l'*aspect ratio* delle celle.

righe 26-27. La *non ortogonalità* questa volta ha un valore non nullo, perchè devono essere discretizzate sezioni circolari, resta comunque accettabile.

riga 29. Il fattore di *skewness* è, come anticipato, molto elevato, questo sempre per la presenza di sezioni circolari. Il valore è comunque minore di 1 e quindi la *mesh* è accettabile.

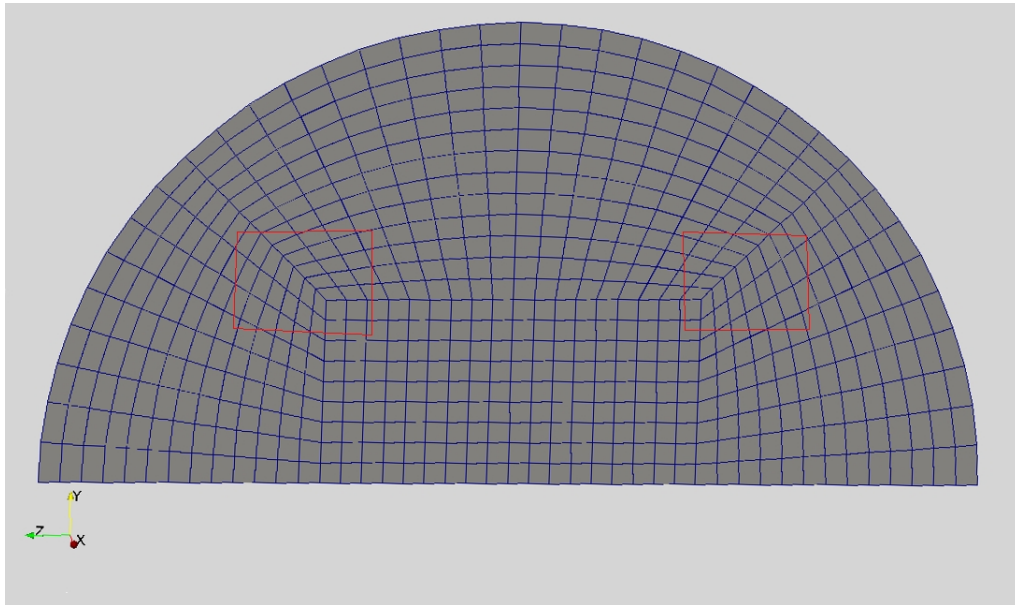


Figura 4.17: Vista della *mesh* alla sezione di entrata della camera LC2. S può vedere la parte centrale approssimata con un rettangolo per mantenere il più regolare possibile la forma delle celle. I riquadri rossi indicano le zone più critiche per il fattore di *skewness*.

Capitolo 5

Descrizione del software analizzato: OpenFOAMTM

5.1 Introduzione

Prima di passare all'esposizione dei risultati ottenuti si dedica un breve capitolo alla spiegazione degli aspetti essenziali del software utilizzato.

OpenFOAMTM (*Open Field Operation And Manipulation*) è un software open source di simulazione numerica che copre la maggior parte degli ambiti dell'ingegneria. Viene utilizzato soprattutto nel campo della ricerca. La presente tesi riguarda proprio lo sviluppo di tale software nel campo dell'acustica dei condotti di scarico ed aspirazione. Il lavoro svolto è stato principalmente sul solutore, per implementare la condizione di uscita anecoica di cui si è discusso, ed il *postprocessing* basato sulla teoria della decomposizione, che sfrutta proprio l'ipotesi di terminale non riflettente.

Se si considera il classico schema *preprocessing-processing-postprocessing* con cui vengono descritti i principali passaggi del calcolo numerico si può affermare che *OpenFOAMTM* si occupa soprattutto di *processing*. In effetti i solutori sono la vera parte distintiva del software, mentre per il preprocessing (a meno di geometrie semplici gestibili con il `blockMeshDict`) e per il post processing si affida ad altri programmi, generalmente anch'essi open source.

5.2 struttura di un caso *OpenFOAMTM*

Un caso *OpenFOAMTM*, ovvero una simulazione numerica, è costituito da una cartella strutturata come in figura 5.1. Alcune sottocartelle, presenti fin dall'inizio, contengono tutti i dati utili affinché la simulazione si svolga in modo corretto, altre, invece, sono create automaticamente, ma sempre su specifica dell'utente, dal software per raccogliervi i risultati dei calcoli. Tra le sottocartelle iniziali, `system` contiene tutte le impostazioni della simula-

zione: durata, metodi numerici utilizzati, specifiche su come e dove registrare i dati della simulazione, impostazioni sull'eventuale calcolo multiprocessore. In `constant` ci sono invece tutti i dati riguardanti la *mesh* e le proprietà del fluido con il quale si svolge la simulazione, infine nella `0` vengono impostate le condizioni iniziali sulle variabili di stato.

A seconda delle impostazioni di scrittura durante il calcolo possono essere create cartelle nominate con un numero corrispondente al *timestep* a cui si riferiscono contenenti tutti i dati riguardanti le variabili calcolate dal solutore. Inoltre, è possibile definire la creazione automatica di cartelle di dati di particolare interesse, come ad esempio `probes` o `patchaverage`.

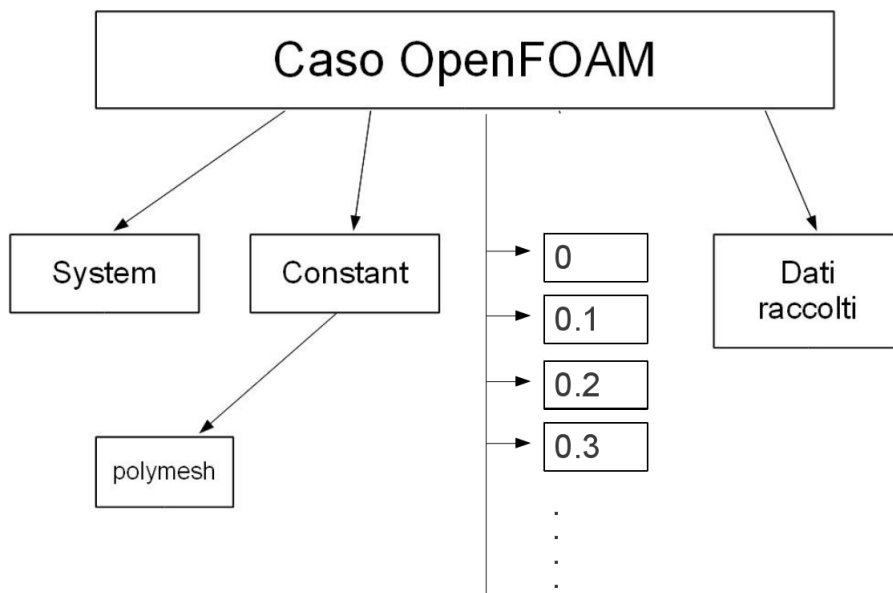


Figura 5.1: Schema di un caso *OpenFOAMTM*.

5.3 Le Cartelle predefinite

5.3.1 La cartella `system`

Tramite i files di codice C++ che contiene questa cartella è possibile gestire i parametri di calcolo. In un software ampio e complesso come *OpenFOAMTM* la cartella `system` può contenere moltissimi files di impostazione, ma i principali sono: `controlDict`, `fvSchemes` ed `fvSolution`.

Il file `controlDict`, di cui è riportato sotto un esempio tratto da un caso sulla camera CS, raccoglie tutti gli aspetti più “pratici” della simulazione.

```

1 startFrom      startTime;
2
3 startTime      0;
4
5 stopAt         endTime;
6 //stopAt      nextWrite;
7
8 endTime        0.5;
9
10 deltaT        5e-06;
11
12 maxCo         0.8;
13
14 writeInterval  1e-02;
15
16 purgeWrite     0;
17
18 writeFormat    ascii; //binary;
19
20 libs ("libnoise.so");
21 functions
22 (
23
24     probes
25     {
26         // Type of functionObject
27         type probes;
28
29         fields
30         (
31             p
32             T
33             U
34         );
35
36         probeLocations
37         (
38             (100e-3 10e-3  0)
39             (130e-3 10e-3  0)
40             (827e-3 10e-3  0)
41         );
42
43         functionObjectLibs ("libsampling.so");
44     }

```

Nel cosice citato:

- riga 1.** `startFrom` è il comando che decide tempo di inizio della simulazione. Le principali opzioni sono `startTime` per cominciare dal tempo indicato alla riga 2 e `latestTime` per cominciare dall’ultimo *timestep* scritto.
- riga 3.** `startTime` serve per indicare il passo temporale al quale iniziare il calcolo, in questo caso dall’inizio.

- riga 5.** `stopAt` serve per impostare quando far finire la simulazione.
- riga 8.** `emdTime` indica la durata in secondi del calcolo.
- riga 10.** `deltaT` è il passo di discretizzazione temporale, anch'esso espresso in secondi.
- riga 12.** Il massimo numero di *Courant* ammissibile è impostato da `maxCo`
- riga 14.** `writeInterval` decide il passo temporale con cui scrivere le variabili calcolate in ogni cella del dominio. Questo parametro influisce molto sulla quantità di dati immagazzinati e sulla velocità della simulazione, spesso infatti il collo di bottiglia non è il processore che esegue quanto implementato nel codice del solutore ma la scrittura su hard disk.
- riga 16.** `purgeWrite` cancella una cartella di salvataggio dati vecchia per ogni nuova salvata, permettendo così di tenere una quantità costante di dati salvati che si riaggiorna ciclicamente con l'avanzare della simulazione.
- riga 18.** `writeFormat` imposta il formato di scrittura dei dati, in codice *ascii* o in binario.
- righe 20-44.** Sono riportati due esempi di impostazione raccolta dati. In questo caso si tratta di `probes`, che permettono di raccogliere ad ogni *timestep* i risultati nei punti del dominio indicati dalle relative coordinate. Sono, in un certo senso, il corrispettivo numerico delle sonde nella sperimentazione.

Il file `fvSolution` (cioè *finite volume solution*) è quello che permette di impostare i metodi risolutivi utilizzati dal programma, sia per quanto riguarda la risoluzione del sistema algebrico lineare in cui sono convertite le equazioni di conservazione, sia per l'algoritmo da adottare per determinare le variabili di stato. Si riporta di seguito il codice utilizzato per tutte le simulazioni condotte in questo lavoro:

```
1 solvers
2 {
3   p PBiCG
4   {
5     preconditioner DILU;
6     tolerance      1e-15;
7     relTol         0;
8   };
9   U PBiCG
10  {
```

```

11     preconditioner  DILU;
12     tolerance      1e-15;
13     relTol         0;
14 };
15 rho PCG
16 {
17     preconditioner  DIC;
18     tolerance      1e-15;
19     relTol         0;
20 };
21 e PBiCG
22 {
23     preconditioner  DILU;
24     tolerance      1e-15;
25     relTol         0;
26 };
27 }
28
29 PISO
30 {
31     nCorrectors      2;
32     nNonOrthogonalCorrectors 0;
33 }

```

riga 1-27. In questa parte di codice ci sono i metodi risolutivi adottati per ogni quantità (pressione, velocità, densità, energia). PBiCG sta per metodo del *gradiente biconiugato* con preconditionamento delle matrici (visto nel capitolo terzo), mentre DILU indica che per preconditionare le matrici si usa un metodo derivato dalla *fattorizzazione LU*, anch'essa esposta nel capitolo terzo.

righe 29-33. Si specifica che si utilizza un algoritmo PISO con due passi correttori, analogo a quello esposto sempre nel capitolo tre dove si descrive il solutore *LODIFoam*.

Nelle specifiche sugli algoritmi risolutivi ricorrono i termini `tolerance` e `relTol`. Il primo sta ad indicare il valore sotto al quale devono stare i residui e il secondo invece impone che il rapporto tra i residui all'iterazione precedente e a quella attuale sia nullo.

In `fvSolution` sono gestiti i metodi di discretizzazione da adottare sia per il dominio spaziale che per quello temporale.

```

1 ddtSchemes
2 {
3     default CrankNicholson 0.5;
4 }
5
6 gradSchemes
7 {
8     default      Gauss linear;
9     grad(p)      Gauss linear;
10    grad(U)      Gauss linear;

```

```

11     grad(ap)           Gauss linear;
12 }
13
14 divSchemes
15 {
16     default           none;
17     div(phi,U)       Gauss linear;
18     div(phiid,p)    Gauss limitedLinear 1;
19     div(phi,e)       Gauss limitedLinear 1;
20 }
21
22 laplacianSchemes
23 {
24     default           none;
25     laplacian(mu,U)  Gauss linear corrected;
26     laplacian(mu,e)  Gauss linear corrected;
27     laplacian((rho*(1|A(U))),p) Gauss linear corrected;
28 }
29
30 interpolationSchemes
31 {
32     default           linear;
33 }

```

righe 1-4. Il metodo l'approssimazione temporale è il Crank Nicholson.

righe 6-12. Per i gradienti si è utilizzata un'approssimazione lineare.

righe 14-20. Approssimazione della divergenza.

righe 22-28. Approssimazione del laplaciano.

righe 30-33 Schema di interpolazione per determinare i valori delle variabili in punti che non sono il nodo centrale di calcolo. In questo caso si adotta un metodo lineare.

5.3.2 La cartella 0

Le condizioni iniziali della simulazione sono contenute qui. Ogni file presente corrisponde ad una delle variabili cui sono assegnate delle condizioni iniziali, in particolare si è lavorato con imposizioni su pressione, velocità e temperatura, quindi nella cartella vi erano i files p, T ed U.

Si porta ad esempio un file di implementazione delle condizioni iniziali di pressione, per altre grandezze la struttura è del tutto analoga.

```

1
2 dimensions           [1 -1 -2 0 0 0 0];
3
4 internalField        uniform 100000;
5
6 boundaryField
7 {

```

```

8   axis
9   {
10      type          symmetryPlane;
11   }
12   inlet
13   {
14      type          zeroGradient;
15   }
16   outlet
17   {
18      type          fixedValue;
19      value         uniform 100000;
20   }
21   wall
22   {
23      type          zeroGradient;
24   }
25   defaultFaces
26   {
27      type          empty;
28   }
29 }

```

riga 2. Impostazione dell'unità di misura. I 7 numeri tra quadre indicano la potenza di 10 che ogni unità fondamentale assume nel comporre l'unità di misura derivata. l'ordine è il seguente: massa [Kg], lunghezza [m], tempo [s], temperatura [K], quantità [kmol], corrente [A], luminosità [cd]. Nella fattispecie si compone quindi $[\text{Kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$ cioè Pascal.

riga 4. Definizione del campo interno. Nell'esempio si impone la pressione costante a 100000 Pa su tutto il dominio interno.

righe 6-29. Imposizione delle condizioni iniziali sui contorni del dominio. In particolare si nota che sugli assi si imposta la condizione già vista di `symmetryPlane`. Si possono anche vedere condizioni di gradiente nullo della quantità in oggetto all'entrata e di valore imposto (`fixedValue`) all'uscita (righe 12-20). Infine la dicitura `defaultFaces` si riferisce in questo caso alle facce delle celle al confine del dominio a cui non è stata assegnata nessuna condizione e alle quali il software assegnerà automaticamente il tipo che l'utente indicherà: si tratta in questo caso delle facce con condizione `empty` già viste quando si è parlato della *mesh* 2D nel capitolo precedente.

Nel prossimo capitolo verranno specificate in modo completo le condizioni iniziali delle simulazioni condotte.

5.3.3 La cartella constant

`constant` è la cartella con tutte le specifiche riguardanti la *mesh* e le proprietà del fluido. Della griglia di calcolo e della struttura della cartella

polyMesh si è già discusso nel capitolo 4, si analizzano ora nel dettaglio i file `thermodynamicProperties`, `thermophysicalProperties` e `transportProperties`. Il primo è semplicemente composto da:

```
1 Cv          Cv [0 2 -2 -1 0 0 0] 717.5;
2
3 R          R [0 2 -2 -1 0 0 0] 287;
```

Nella prima riga si definisce il calore specifico a volume costante e nella terza la costante dell'aria. Si notano tra quadre le definizioni delle unità di misura dei due valori.

`thermophysicalProperties` permette di ricavare le proprietà del fluido a partire da un modello pressione - temperatura:

```
1 thermoType
2 hThermo<pureMixture<sutherlandTransport<specieThermo
3 <hConstThermo<perfectGas >>>>>;
4
5 mixture
6   air 1 28.9      // specieThermo
7   1007 0         // hConstThermo
8   1.4792e-06 116 // sutherlandTransport (Star-CD)
```

Nelle prime tre righe è indicata la modellazione matematica del gas, in particolare [18]:

- `hThermo` è il modello termodinamico, in questo caso basato sull'entalpia
- `pureMixture` indica come è modellata la miscela di gas. In questo caso si tratta di un modello generale per miscele non reagenti e omogenee, come è l'aria. Altre opzioni possono essere ad esempio `inhomogeneousMixture` per indicare un gas con particelle di combustibile in sospensione o `dieselMixture` per riprodurre i prodotti di combustione di un ciclo Diesel.
- `sutherlandTransport` significa che le proprietà del gas, come ad esempio i calori specifici, variano con la temperatura secondo la formula di *Sutherland*¹. Nel caso si considerassero costanti si sarebbe utilizzato `constTransport`.
- `specieThermo` si riferisce al fatto che le proprietà termodinamiche sono derivate da calore specifico, entalpia ed entropia.

¹L'equazione di Sutherland calcola la viscosità dell'aria come $\mu = A_s \sqrt{T} / (1 + T/T_s)$ nella quale A_s e T_s sono coefficienti empirici

- `hConstThermo` indica un modello a calore specifico costante dal quale si ricavano entalpia ed entropia.
- `perfectGas` indica che il problema delle tre equazioni di conservazione è chiuso con l'equazione di stato del gas perfetto, già presentata nel capitolo primo.

Nelle righe da 5 a 8 sono infine indicati valori assegnati alle proprietà appena descritte.

L'ultimo file, `transportProperties`, è composto dalla sola riga in cui viene dichiarato il valore della viscosità dell'aria: se perciò si desidera una trascurarla sarà necessario porre a zero il valore nella riga di codice riportato di seguito:

```
1
2 mu                mu [1 -1 -1 0 0 0] 1.84766e-05; // Aria a 300k
```

5.4 Cartelle create per la raccolta dei risultati

Impostando l'intervallo di scrittura nel file `controlDict`, è possibile salvare in vari istanti temporali i dati relativi a tutta la griglia di calcolo per una certa quantità. Ciò permette di visualizzare in un apposito software di *post-processing* l'evoluzione fluidodinamica del fenomeno oggetto di studio, come ad esempio il percorso di un'onda sonora in un silenziatore, come mostrato nel prossimo capitolo.

Una soluzione di questo tipo, soprattutto se la *mesh* è composta da molte celle, crea però una grande mole di dati da trattare e rallenta il processo di calcolo a causa del continuo salvataggio di dati. Un approccio alternativo è, invece, considerare la simulazione in corso come un fenomeno fisico vero e proprio e raccogliere i dati solo nei punti di interesse.

In questo modo si sono raccolti i dati poi elaborati in sede di *postprocessing* per calcolare la *transmission loss*. Dal file `controlDict` è in effetti possibile impostare un salvataggio di dati solo in certi punti del dominio, per i quali sono fornite le coordinate cartesiane. *OpenFOAM™* creerà una cartella denominata `probes` in cui vi sarà un file di testo per ogni variabile acquisita, contenente i valori ai punti indicati. Tra l'altro i file così creati si prestano molto bene all'alaborazione numerica da parte di softwares come *Matlab™*.

Nel codice sottostante è riportato come esempio un file della cartella `probes` in cui sono salvati i valori di pressione in tre punti indicati:

1 #	x	0.1	0.105	0.827
2 #	y	0.0005	0.0005	0.0005
3 #	z	0	0	0
4 #	Time			
5	1e-06	100000	100000	100000
6	2e-06	100000	100000	100000
7	3e-06	100000	100000	100000
8	4e-06	100000	100000	100000
9	5e-06	100000	100000	100000
10	6e-06	100000	100000	100000

Nelle prime tre righe sono indicate le coordinate dove acquisire i valori, dopodichè iniziano le quattro colonne di dati, la prima quella del tempo, le altre quelle della variabile salvata nei punti corrispondenti. il salvataggio avviene ad ogni *timestep* della simulazione.

Le possibilità di raccolta dati sono praticamente illimitate: è possibile ad esempio raccogliere i valori medi nella sezione di entrata e di uscita salvati nella cartella `patchAverage`.

Capitolo 6

Risultati ottenuti

6.1 Introduzione

Lo scopo principale di quest'ultimo capitolo è di presentare quanto ottenuto nel mettere in pratica tutti i concetti trattati fino ad ora. L'esposizione dei risultati necessita però di essere opportunamente contestualizzata: perciò verranno prima descritte le principali impostazioni adottate per le simulazioni e verranno discusse brevemente le caratteristiche acustiche di ogni tipo di condotto. Lo scopo ultimo non è comunque sia di valutare i silenziatori, ma la modellazione numerica del loro campo sonoro.

6.2 Parametri delle simulazioni numeriche

Parte delle informazioni riguardante le prove è già nota dal capitolo quinto: si conoscono le geometrie dei condotti analizzati, le loro griglie di calcolo e le condizioni al contorno. Mancano essenzialmente due aspetti da chiarire: le condizioni iniziali delle prove e come sono stati raccolti i dati per il *postprocessing*.

6.2.1 Le condizioni iniziali

La scelta delle condizioni iniziali comporta anche la decisione di come eccitare il sistema per studiarne il comportamento. Il metodo che ha dato più risultati è stato l'impulso di pressione. Lavorando con una funzione impulsiva generata numericamente si è avuta la possibilità, oltre che di sfruttare i vantaggi intrinseci di questa tecnica, anche di limitarne gli svantaggi. Innanzitutto, le frequenze a cui la colonna di aria è stata eccitata sono definite in termini di massima, di minima e di passo di discretizzazione, permettendo quindi un controllo totale sulle armoniche coinvolte; in secondo luogo il contenuto energetico ad ogni frequenza, a differenza che nel caso reale, è costante,

poichè l'ampiezza del segnale è imposta. Proprio quest'ultima opportunità ha reso possibile, rispetto ad esempio al rumore bianco, di verificare sempre di essere in campo lineare, dove la teoria della decomposizione è valida. Il *white noise* comporta, infatti, l'utilizzo di funzioni di generazione random che non consente di conoscere le ampiezze del campo sonoro creato.

Le condizioni iniziali sono state imposte su pressione, velocità e temperatura e sono state le stesse per tutte le geometrie analizzate. Si riportano di seguito i tre file nella cartella 0 di *OpenFOAMTM* che le implementano.

Pressione:

```

1 internalField    uniform 100000;
2
3 boundaryField
4 {
5     inlet
6     {
7         type          acousticSource;
8         sourceType    "pulse";
9         refValue      uniform 100000;
10        fMin          20;
11        fMax          2000;
12        freqStep      20;
13        amplitude     5;
14        value         uniform 100000;
15    }
16    walls
17    {
18        type          zeroGradient;
19    }
20    outlet
21    {
22        type          fixedValue;
23        value         uniform 100000;
24    }
25    symmetryPlane
26    {
27        type          symmetryPlane;
28    }
29
30 }
```

riga 1. Pressione interna ambiente.

righe 7-14. Condizione iniziale di impulso di pressione sulla sezione di entrata. LE specifiche numeriche dell'impulso sono: frequenza minima 20 Hz, frequenza massima 2000 Hz, distanza tra due frequenze di eccitazione adiacenti 20 Hz, ampiezza dell'impulso 5 Pa, corrispondenti a 107,96 dB, valore medio 100000 Pa.

riga 18. Gradiente di pressione nullo sulla parete.

righe 22-23. Valore di pressione imposto pari a 100000 Pa sulla sezione di uscita.

riga 27. Il piano di simmetria viene riconosciuto con la condizione iniziale corrispondente implementata in *OpenFOAMTM*

Velocità:

```

1 internalField    uniform (0 0 0);
2
3 boundaryField
4 {
5     inlet
6     {
7         type      zeroGradient;
8     }
9     walls
10    {
11        type      fixedValue;
12        value     uniform (0 0 0);
13    }
14    outlet
15    {
16        type      fixedValue;
17        value     uniform (0 0 0);
18    }
19    symmetryPlane
20    {
21        type      symmetryPlane;
22    }
23
24 }

```

riga 1. Condizione di flusso medio nullo all'interno del silenziatore.

riga 7. Gradiente di velocità nullo sull'entrata.

righe 11-12. Velocità nulla sulle pareti.

righe 16-17. Velocità nulla sulla sezione di uscita.

riga 21. Il piano di simmetria viene riconosciuto con la condizione iniziale corrispondente implementata in *OpenFOAMTM*

Temperatura:

```

1 internalField    uniform 293;
2
3 boundaryField
4 {
5     inlet
6     {
7         type      fixedValue;
8         value     uniform 293;
9     }
10    walls
11    {
12        type      zeroGradient;

```

```
13     }
14     outlet
15     {
16         type          zeroGradient;
17     }
18     symmetryPlane
19     {
20         type          symmetryPlane;
21     }
22
23 }
```

riga 1. Temperatura ambiente su tutto il dominio di calcolo.

righe 7-8. Temperatura imposta all'entrata a 293 K.

riga 12. Gradiente di temperatura nullo alla parete.

riga 16. Gradiente di temperatura nullo all'uscita.

riga 20. Condizione di asse di simmetria.

6.2.2 La raccolta dati: posizionamento delle probes

Per raccogliere i dati su cui calcolare la *transmission loss* si sono utilizzate le **probes**, le cui caratteristiche sono state esposte nel capitolo precedente. Si sono registrate pressione, velocità e temperatura in tre punti per ogni geometria: due a monte del silenziatore e uno a valle. I primi due sono serviti per separare componente incidente e riflessa del campo sonoro tramite la teoria della decomposizione, mentre un solo punto dopo il silenziatore è stato sufficiente per acquisire la componente trasmessa grazie alla condizione di sezione di uscita non riflettente.

Le figure 6.1 e 6.2 mostrano i punti di salvataggio dei dati rispettivamente sulla camera CS, modellata come **wedge**, e sulla SC, che, date le similitudini geometriche, è esplicitiva anche delle altre configurazioni *reverse*. Nella tabella 6.1 sono invece riportate le quote geometriche rappresentate nelle figure che rappresentano le posizioni esatte in direzione assiale del condotto in cui sono poste le **probes**.

Ognuna delle quote della tabella 6.1 indica una sezione di posizionamento: il punto della sezione stessa nel quale raccogliere dati è indifferente pur di stare lontano dalle pareti e, per precauzione, di non porsi sull'asse di rotazione o sul piano di simmetria qualora vi fossero.

Geometria	Quote geometriche		
	a [mm]	b [mm]	c [mm]
CS	50	10	27
SC	27	5	27
MC	27	5	27
LC1	27	5	27
LC2	20	10	30

Tabella 6.1: Quote geometriche di posizionamento delle **probes** in direzione assiale 4.7

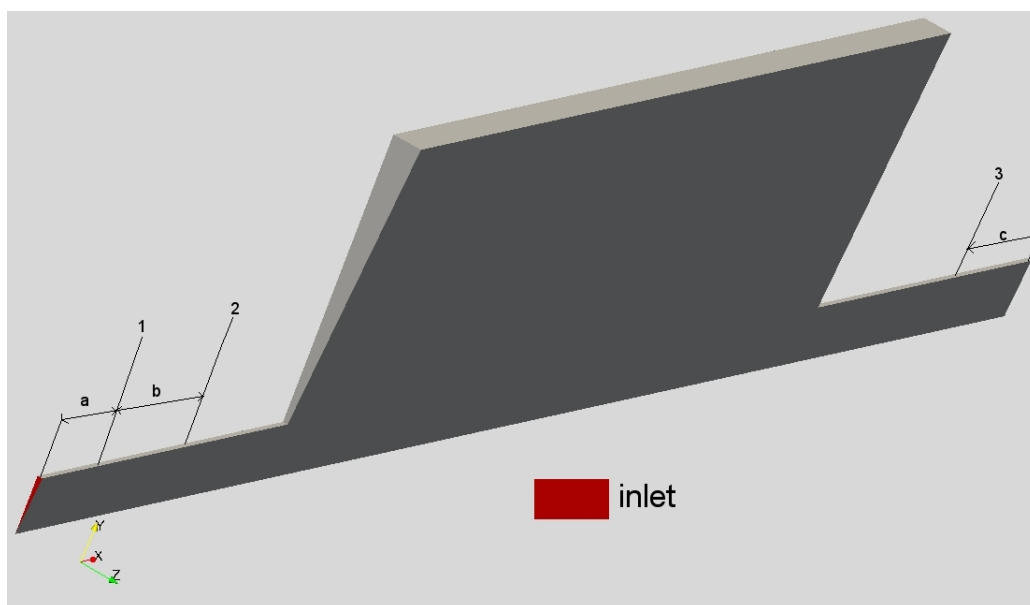


Figura 6.1: Posizionamento delle **probes** nella geometria CS, vista nella modellizzazione wedge.

6.3 Il campo sonoro calcolato da *OpenFOAM*TM

Prima di presentare i risultati veri e propri è interessante proporre qualche immagine di come il campo sonoro viene calcolato dal software. La *mesh* bidimensionale della camera CS, proprio per la sua semplicità, è la più adatta per rendersi conto delle principali caratteristiche del fenomeno. Nelle figure sottostanti è rappresentato il campo di pressione nei *timesteps* immediatamente successivi ad un impulso che parte nella sezione di entrata.

La figura 6.3 mostra l'impulso di pressione (di ampiezza 5Pa) che ha

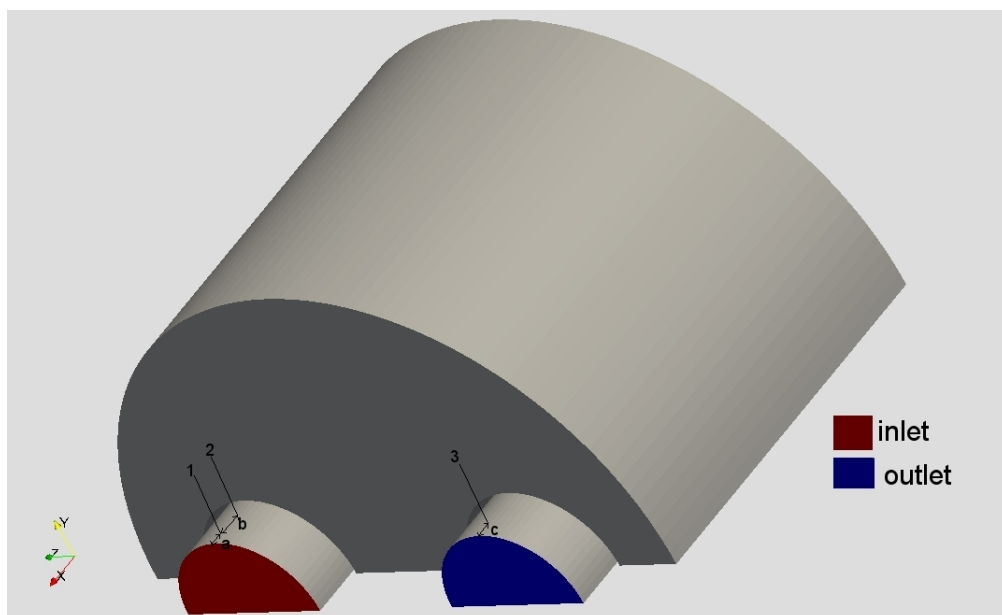


Figura 6.2: posizionamento delle probes nella geometria SC, esplicitiva anche delle LC1, LC2, MC.

appena iniziato a propagarsi nel condotto. Si può osservare chiaramente che l'approssimazione di onda piana è pienamente rispettata: la fascia più rossa, dove l'impulso ha massima ampiezza, è perfettamente verticale, segno che avanza come una sezione piana.

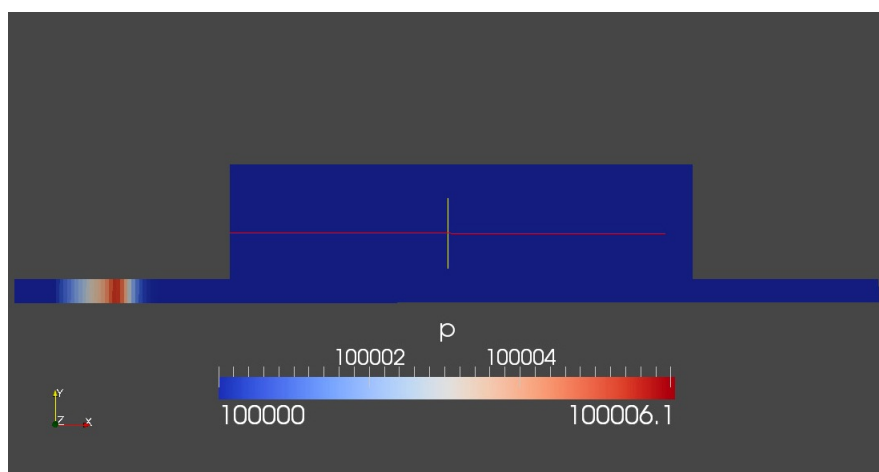


Figura 6.3: Campo di pressione nella camera CS con mesh bidimensionale 0.0004s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso.

Quando l'onda arriva al volume di espansione (figura 6.4) si vede chiaramente come l'approssimazione di onda piana cada: il fronte ha ora una forma ad arco di circonferenza. Raccogliere i dati in questa zona non porterebbe, come spiegato, a risultati soddisfacenti proprio perchè cade una delle ipotesi della teoria della decomposizione. In sostanza, in modo affine a come avviene per l'approccio della funzione di trasferimento nei sistemi meccanici, il silenziatore è "una scatola nera" dalla quale entra un certo input ed esce un certo output, sulla base di questi si caratterizza il condotto di scarico.

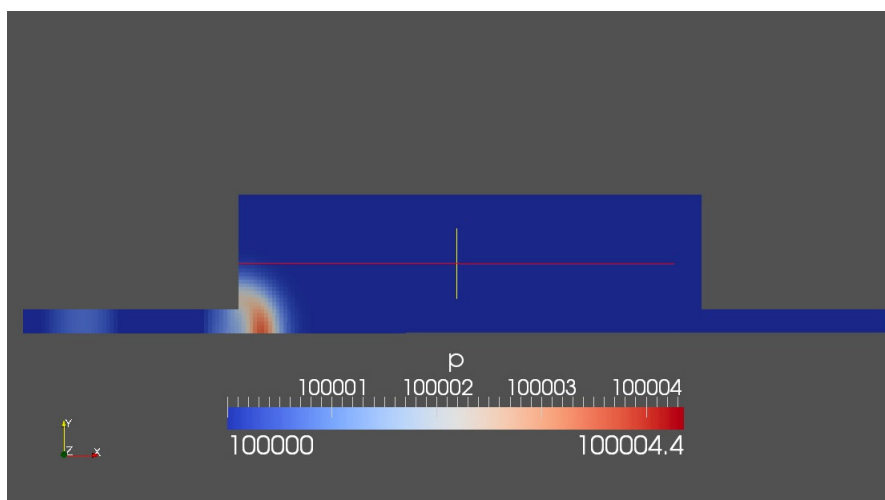


Figura 6.4: Campo di pressione nella camera CS con *mesh* bidimensionale 0.0007s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Si nota il fronte d'onda divenuto semisferico.

Nel silenziatore comincia una complessa serie di riflessioni nelle quali l'impulso iniziale dissipa energia (figura 6.5): guardando la scala delle pressioni si nota infatti che l'ampiezza dell'onda è sceso a circa 100002 Pa. Nel riquadro verde è visibile la prima riflessione dell'impulso.

In figura 6.6, mentre il primo fronte d'onda continua ad avanzare nel silenziatore, nel riquadro verde si nota la riflessione di parte dell'impulso, che risale verso l'entrata. Si osservi la differenza con le riflessioni contro le pareti del volume dell'espansione: nel condotto, la direzione dell'onda piana è solo lungo l'asse del condotto, in direzione x positiva o negativa, basta perciò raccogliere i dati in due punti per separare componente incidente e riflessa. Non è invece così dove le onde sono sferiche, due punti di acquisizione non basterebbero a discernere da dove proviene ogni onda.

La figura 6.7 mostra che parte del fronte d'onda ha imboccato il condotto di uscita mentre parte impatta contro la parete di fondo del silenziatore e si accinge a tornare indietro. Guardando la scala delle pressioni si capisce subito

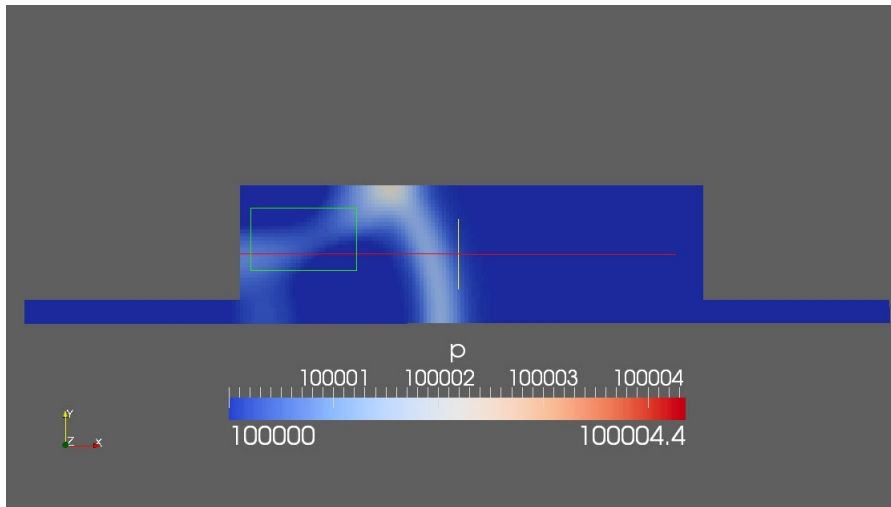


Figura 6.5: Campo di pressione nella camera CS con *mesh* bidimensionale 0.0009 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Il riquadro verde mostra la riflessione dell'onda di pressione.

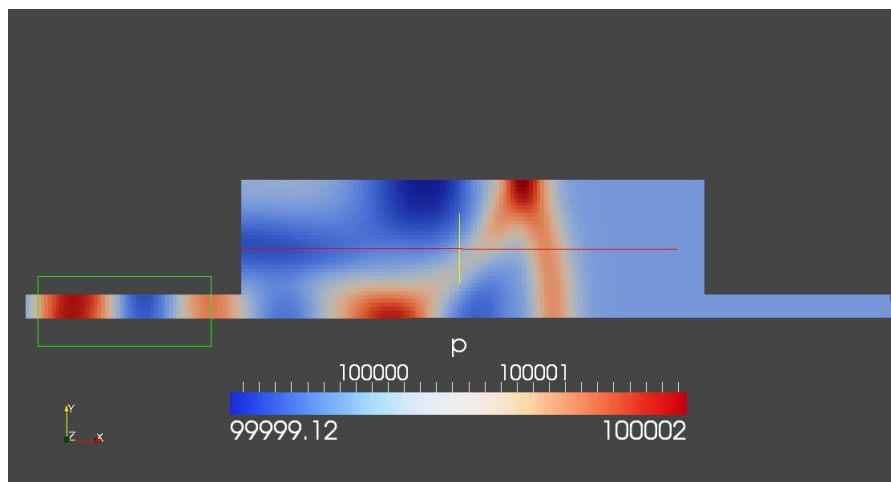


Figura 6.6: Campo di pressione nella camera CS con *mesh* bidimensionale 0.0011 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Nel riquadro verde si nota la parte di impulso riflessa dal silenziatore che risale verso l'entrata.

che entrabe le componenti hanno perso molta energia rispetto all'inizio: ora l'ampiezza massima non è neanche di 2 Pa, rispetto ai 5 iniziali.

Infine nella figura 6.8 e 6.9 è visibile il funzionamento del condizione non riflettente, il fronte d'onda che avanza verso l'uscita, ora di nuovo piano, non viene riflesso. si vede infatti che in 6.8 sta percorrendo il condotto, mentre

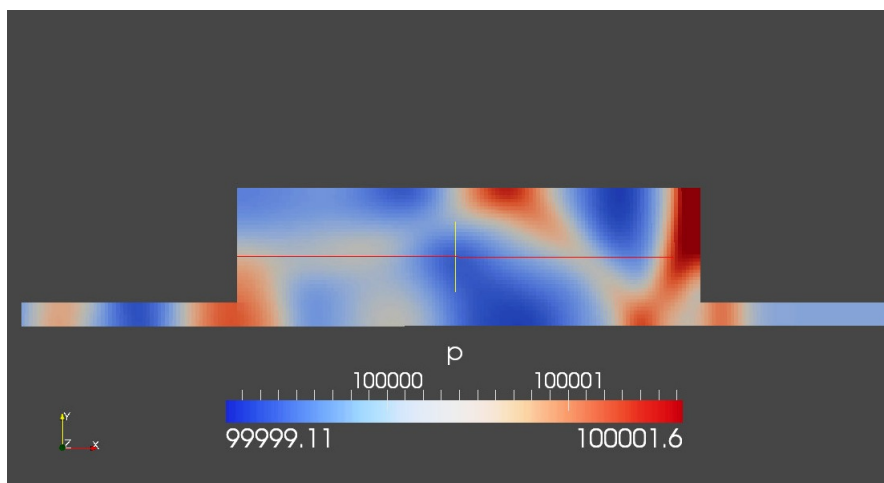


Figura 6.7: Campo di pressione nella camera CS con *mesh* bidimensionale 0.0016 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Parte dell'impulso di pressione impatta contro il fondo del silenziatore e parte imbocca il condotto che porta alla sezione di uscita.

in 6.9 ne sta uscendo, intanto un'altra parte del campo sonoro nel volume silenziante sta per entrare anch'esso nel secondo tratto di condotto.

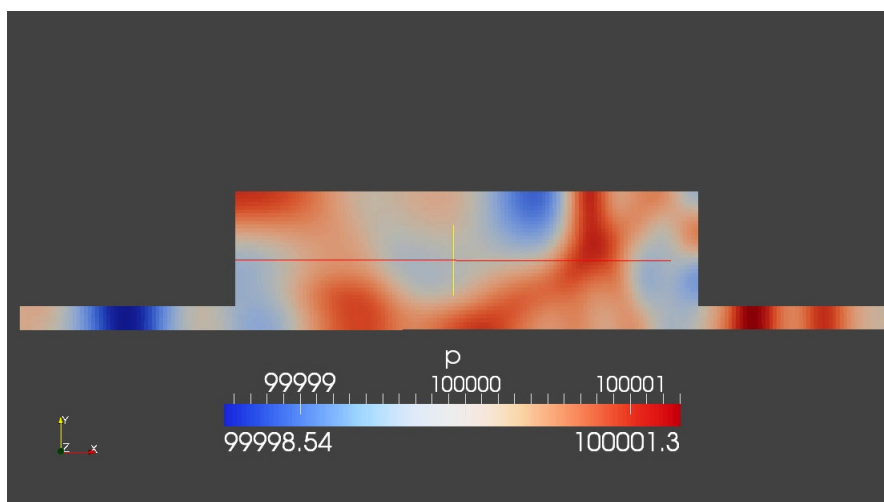


Figura 6.8: Campo di pressione nella camera CS con *mesh* bidimensionale 0.0019 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Nel silenziatore il grosso del fronte d'onda si è riflesso e sta ritornando indietro, mentre nel secondo tratto di condotto un'altra parte di impulso, ridivenuto piano, sta andando verso l'uscita.

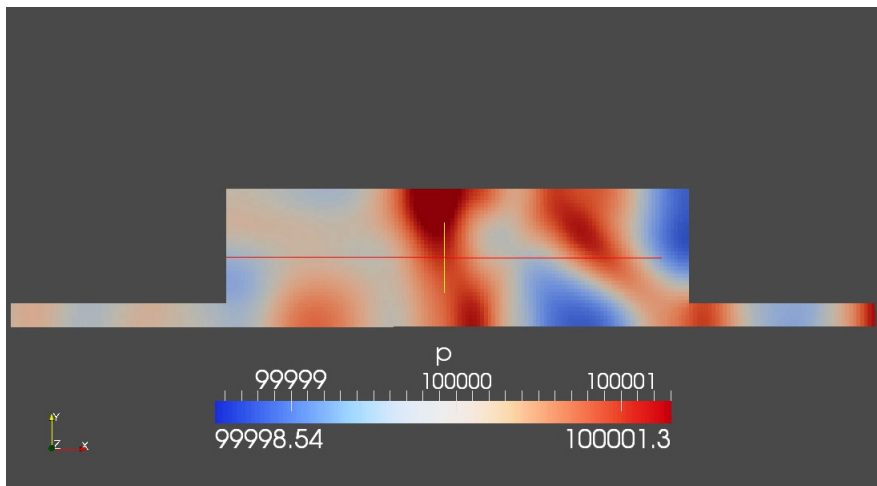


Figura 6.9: Campo di pressione nella camera CS con *mesh* bidimensionale 0.0022 s dopo l'impulso di pressione nella sezione di ingresso. Il fronte d'onda che è arrivato alla sezione di uscita la attraversa senza riflettersi.

6.4 Risultati del calcolo della *transmission loss*

Si presentano ora i risultati finali di calcolo della *transmission loss* dei vari silenziatori analizzati. Si procede dividendoli per tipo di dominio di calcolo: bidimensionale, *wedge* e tridimensionale.

6.4.1 Camera CS con *mesh* 2D

Nella figura 6.10 sono evidenti tutti i limiti della modellazione bidimensionale del dominio di calcolo. Il problema principale deriva dalla simulazione del campo sonoro nel silenziatore: essa non fornisce dati attendibili perchè le onde sferiche subiscono riflessioni multiple in una geometria tridimensionale cilindrica. In effetti, trascurare una dimensione significa considerare il dominio di calcolo indefinitamente lungo in quella direzione e quindi trascurare l'effetto di curvatura della superficie esterna del cilindro che forma il silenziatore stesso. Se perciò dal punto di vista qualitativo, come si è visto nelle immagini proposte poco sopra, la descrizione del fenomeno è realistica, dal punto di vista quantitativo è necessario passare a *mesh* in tre dimensioni.

Le carenze più gravi sono alle alte frequenze, dove non è previsto nemmeno l'andamento della TL sperimentale. Fino a circa 1000 Hz invece, pur non ottenendo risultati soddisfacenti in termini di valori numerici, si riesce per lo meno a prevedere le trasparenze del silenziatore, ovvero quelle armoniche per le quali l'attenuazione del suono è nulla e l'onda attraversa il silenziatore come se fosse un condotto rettilineo.

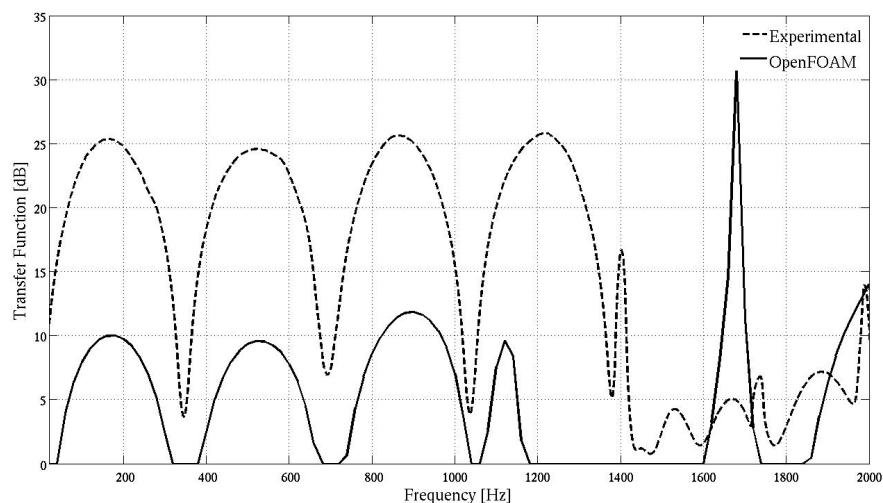


Figura 6.10: Confronto tra *transmission loss* sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera CS con mesh bidimensionale.

6.4.2 Camera CS con *mesh* a spicchio

Con questo tipo di dominio di calcolo, come detto in tutto e per tutto equivalente ad uno tridimensionale (si veda figura 6.11), i risultati sono soddisfacenti, confermando il fatto che il problema era proprio il trascurare una dimensione. La TL è questa volta riprodotta fedelmente nella zona delle vibrazioni longitudinali del volume silenziante, mentre resta un piccolo sfasamento alle alte frequenze, oltre i 1400 Hz.

6.4.3 Camere *reverse* con griglie di calcolo 3D

Sono di seguito riportate le TL calcolate per le quattro camere *reverse* (figure 6.12, 6.13, 6.14, e 6.15). La qualità dei risultati è analoga a quelli ottenuti per la camera CS con griglia *wedge*. Rispetto a prima emerge però un problema di modellazione vicino alla frequenza nulla ravvisabile in tutte e quattro le figure. Si tratta della frequenza critica nulla di cui si è parlato nel capitolo secondo al paragrafo sulla teoria della decomposizione. Come si nota il problema è comunque limitato alle bassissime frequenze e non stravolge la qualità del risultato.

Nonostante la qualità delle previsioni della TL siano soddisfacenti si ha qualche discrepanza in figura 6.12 alle alte frequenze. Visto l'esito migliore del calcolo per le altre camere *reverse* nella stessa parte di spettro il problema non sembra doversi attribuire ai calcoli svolti.

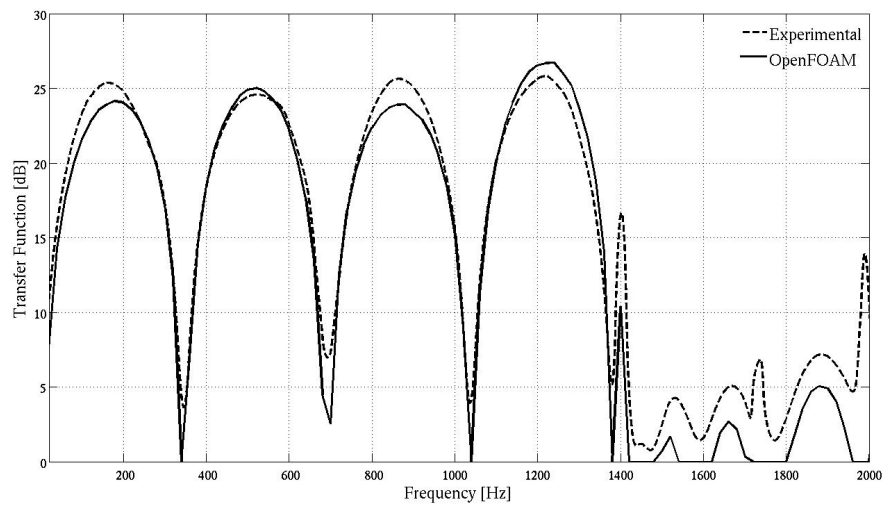


Figura 6.11: Confronto tra *transmission loss* sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera CS con mesh a spicchio.

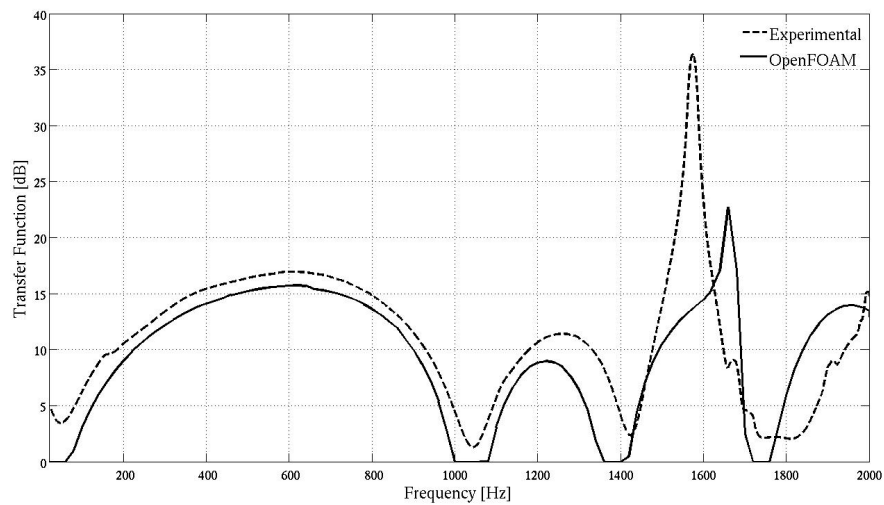


Figura 6.12: Confronto tra *transmission loss* sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera SC con mesh 3D.

6.4.4 Note sulle prove fatte

Riprendendo le ultime righe del paragrafo appena sopra, si deve precisare che i dati sperimentali posseduti per validare la teoria della decomposizione,

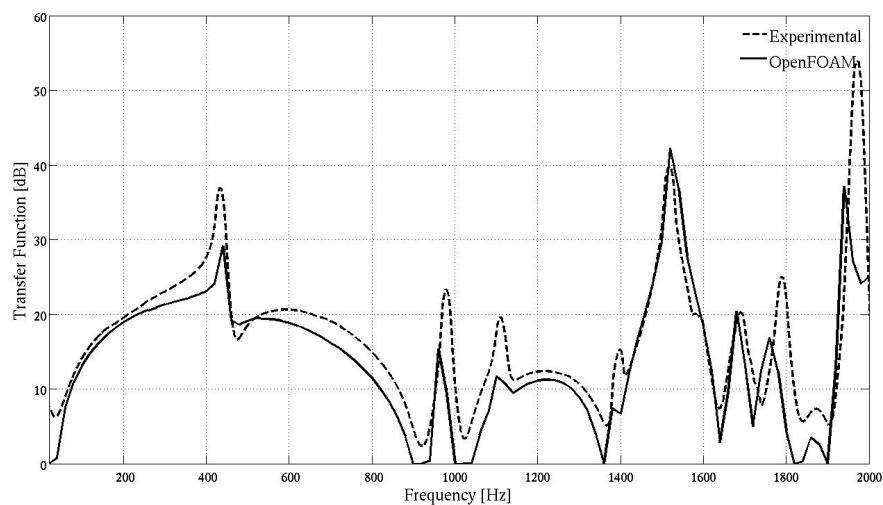


Figura 6.13: Confronto tra *transmission loss* sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera MC con mesh 3D.

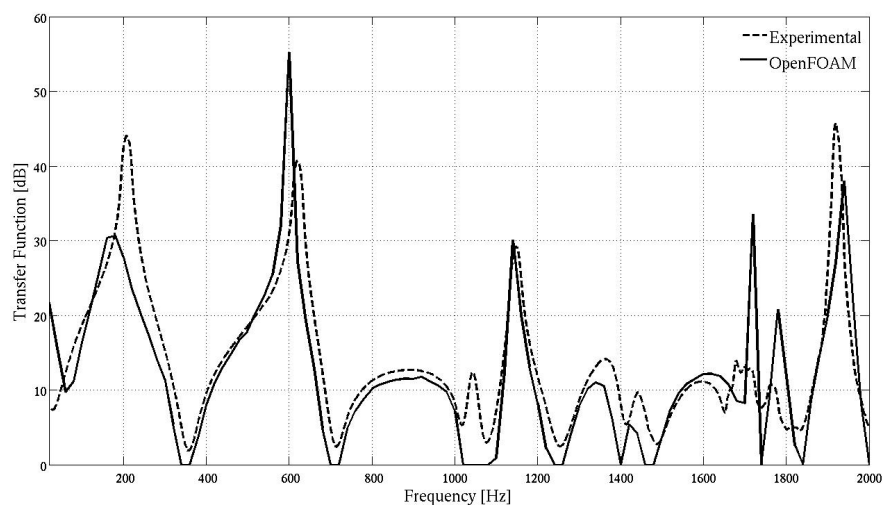


Figura 6.14: Confronto tra *transmission loss* sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera LC1 con mesh 3D.

sebbebe attendibili, sono stati forniti privi di commenti sull'apparato sperimentale adottato per acquisirli e sull'incertezza di misura. Ciò ha avuto essenzialmente due conseguenze: non si è potuto valutare quantitativamente l'errore commesso nella previsione della TL e non si è certi, anche a livel-

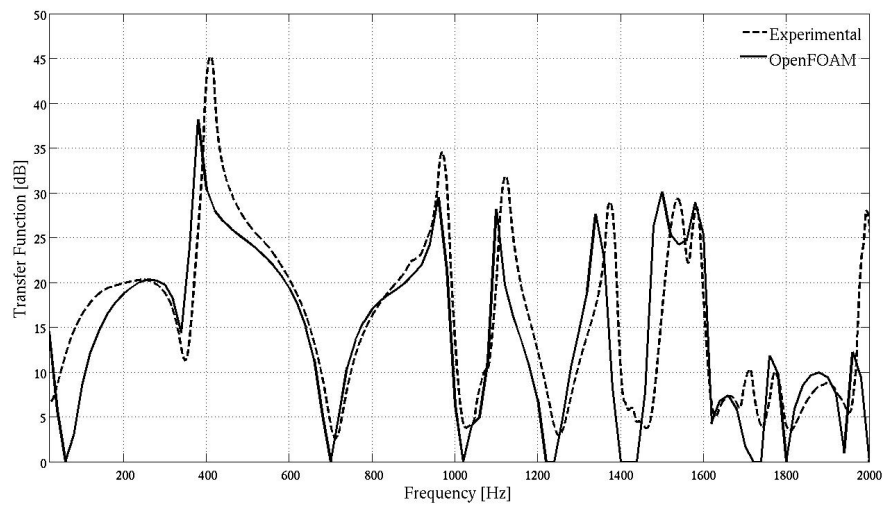


Figura 6.15: Confronto tra *transmission loss* sperimentale e calcolata con la teoria della decomposizione per la camera LC2 con mesh 3D.

lo qualitativo, di quanto sia responsabile l'eventuale scarsa qualità dei dati sperimentali nelle parti dello spettro dove i valori calcolati si discostano di più dagli sperimentali stessi. Sotto questo punto di vista sarebbe utile avere l'opportunità in futuro di ripetere le prove con dati più completi.

Una seconda precisazione riguarda la durata delle simulazioni. Essendo la frequenza minima dell'impulso di 20 Hz i calcoli dovevano arrivare almeno a 0.05 s. Quelli svolti per questa tesi sono arrivati fino a 0.15 s, procedere oltre poteva essere un vantaggio dal punto di vista del *time averaging*, ma non si è avuta l'opportunità di farlo per via della durata molto elevata delle simulazioni.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi si è raggiunto l'obiettivo di sviluppare un metodo numerico per stimare le caratteristiche acustiche di un silenziatore. Se ulteriormente affinato, il metodo qui proposto rende possibile evitare molte prove sperimentali nel progetto acustico dei condotti di scarico, permettendo al contempo di risparmiare risorse economiche e trattare geometrie anche molto complesse, per le quali predisporre un *set up* sperimentale non è così immediato.

I passaggi principali di sviluppo sono stati due: implementare la condizione di uscita anecoica nel solutore numerico utilizzato e svolgere il post-trattamento dei dati sfruttando la già nota teoria della decomposizione. Rispetto ad altri metodi numerici per il calcolo dell'acustica di condotti di scarico od aspirazione, quello che è stato proposto risulta nettamente di semplice: la parte più dipendiosa in termini di tempo è stata svolgere le simulazioni numeriche, ma si tratta di un tratto comune a tutta la numerica.

Quanto fatto si può considerare l'inizio di un lavoro di sviluppo molto promettente. In primo luogo è necessaria un'estensione delle prove in condizioni di flusso medio con *Mach* non trascurabile. Sebbene, infatti, le simulazioni numeriche fatte siano state tutte in condizioni di flusso medio nullo, i risultati sono estendibili anche in condizioni nettamente subsoniche, oltre però non si è studiata l'efficacia della teoria della decomposizione.

Un'altro punto che sarebbe utile approfondire è certamente l'imposizione di terminale anecoico, che, rispetto al comportamento reale, risulta poco significativa. Una possibile continuazione di questa tesi è quindi studiare il comportamento della teoria della decomposizione in condizioni parzialmente riflettenti.

Si ritiene infine opportuno anche includere la simulazione di altre configurazioni di silenziatori oltre a quelli studiati, come ad esempio i condotti di scarico forati: questo punto non è comunque considerato critico, in quanto i risultati presentati fanno pensare ad una discreta robustezza del metodo al tipo di geometria.

Lista dei simboli

Simboli

a	velocità del suono
a_{nn}	elementi della matrice $[A]$
A	ampiezza
A_{px}	ampiezza di oscillazione di un'onda di pressione
A_{px+}	ampiezza di oscillazione onda di pressione incidente
A_{px-}	ampiezza di oscillazione onda di pressione riflessa
A_{ux}	ampiezza di oscillazione di un'onda di velocità
A_{ux+}	ampiezza di oscillazione onda di velocità incidente
A_{ux-}	ampiezza di oscillazione onda di velocità riflessa
b_i	coefficiente della serie di fourier
b_0	coefficiente della serie di fourier
\mathbf{b}	vettore dei termini noti
c_i	coefficiente della serie di fourier
c_p	calore specifico a pressione costante
c_v	calore specifico a volume costante
C_{geom}	fattore geometrico
C_{AB}	parte reale cross spettro tra componente incidente e riflessa
C_{12}	parte reale cross spettro tra punto 1 e 2
Co	numero di Courant
e	energia specifica
f	frequenza
f_0	frequenza fondamentale
f_{camp}	frequenza di campionamento
f_{max}	frequenza massima
$f(t)$	funzione generica di esempio
$F(f)$	trasformata di Fourier di $f(t)$
$g(t)$	funzione generica di esempio
$G(f)$	trasformata di Fourier di $G(t)$
h	entalpia
h_T	entalpia totale
i	indice contatore
I	intensità sonora
j	unità immaginaria

Simboli

k	indice contatore
k	numero d'onda
l	lunghezza
L_I	livello di intensità sonora
L_p	livello di pressione sonora
L_W	livello di potenza sonora
$[L]$	matrice triangolare inferiore
L	ampiezza onda sonora caratteristica
m	massa
N	numero di campioni
n	regime di rotazione motore
n	contatore
\mathbf{n}	vettore normale
n_c	numero cilindri del motore
p	pressione
q	calore scambiato
p_e	pressione efficace
Q_{AB}	parte immaginaria cross spettro tra componente incidente e riflessa
Q_{12}	parte immaginaria cross spettro tra punto 1 e 2
R_{gg}	autocorrelazione di un segnale g
R_{fg}	crosscorrelazione tra due segnali f e g
R	raggio
S_{AA}	auto spettro componente incidente
S_{SS}	autospettro componente riflessa

Simboli

S_{GG}	auto spettro di un segnale G
S_{GF}	cross spettro tra due segnali F e G
S	sezione di un condotto
S_{11}	auto spettro dati nel punto 1
S_{22}	auto spettro dati nel punto 2
S_{33}	auto spettro dati nel punto 3
t	tempo
T	periodo temporale
T	temperatura
T_w	periodo di acquisizione
u	velocità
$[U]$	matrice triangolare superiore
V_s	volume del silenziatore
W	potenza
x_1	distanza punto 1 da entrata condotto
x_2	distanza punto 2 da entrata condotto
$\delta(t)$	funzione di Dirac
γ	rapporto dei calori specifici
Γ	diffusività
λ_e	fattore di interpolazione
λ	velocità onda sonora caratteristica
ε	giri motore per compiere un ciclo termodinamico completo
φ	fase di un segnale
ϕ	grandezza generica delle equazioni di conservazione
ω	pulsazione
Ω	volume di integrazione generico
ρ	densità
Σ	superficie di integrazione generica
τ_n	sforzi viscosi

Pedici

0	grandezza in condizioni di riferimento
rif	grandezza in condizioni di riferimento
x	componente in direzione x della grandezza
y	componente in direzione y della grandezza
z	componente in direzione z della grandezza
i	quantità incidente o all'ingresso a seconda del contesto
t	quantità trasmessa

Apici

Simboli matematici

$\frac{\delta^n}{\delta x^n}$	derivata parziale di ordine n rispetto alla variabile x
∇	gradiente
$\nabla \cdot$	divergenza
∇^2	laplaciano
$\bar{}$	numero complesso coniugato
Δ	davanti una grandezza indica un intervallo un passo di discretizzazione
$\det[\]$	determinante della matrice

Acronimi

<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>TL</i>	Transmission Loss

Bibliografia

- [1] Giancarlo Ferrari, *Motori a Combustione Interna*, ed. Il Capitello, 2008, capitolo 13
- [2] F. Piscaglia, A. Montorfano, G. Ferrari, G. Montenegro, High resolution central schemes for multi-dimensional non-linear acoustic simulation of silencers in internal combustion engines, *Mathematical and computer modelling*, in Press, 2010
- [3] Bramanti, Pagani, Salsa, *Matematica, calcolo infinitesimale e algebra lineare*, ed. Zanichelli, 2000, capitoli 14 e 15
- [4] A. C. Neve, *Introduzione al Digital Signal Processing*, ed. Schäffer and Ziegler, 2002, capitoli da 2 a 6
- [5] Sito del corso di “Misure“ al Politecnico di Milano, materiale didattico online del corso, <http://misure.mecc.polimi.it/>, 2010
- [6] G. Moncada Lo Giudice, S. Santoboni, *Acustica*, ed. Casa Editrice Ambrosiana, 2000, capitolo 1
- [7] Gabriele Toti, *Acustica dei sistemi di aspirazione e scarico*, Dispensa, capitolo 1
- [8] Z. Tao, A. F. Seybert, A Review of Current Techniques for Measuring Muffler Transmission Loss, *SAE International*, 2003
- [9] F. Seybert, Two-sensor methods for the measurement of sound intensity and acoustic properties in ducts, *Acoustical Society of America*, 1988
- [10] J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, ed. Springer 2002, capitoli 1,2,4,5,8
- [11] C. Osnaghi, *Teoria delle Turbomacchine*, ed. Progetto Leonardo 2002, capitolo 2

- [12] A. Quarteroni, F. Saleri, *Introduzione al Calcolo Scientifico*, ed. Springer 2002, capitoli 4,7
- [13] Wikipedia, The Free Encyclopedia, mathematics and science portals. <http://www.wikipedia.org/>, 2011
- [14] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics* ed. Longman 1995, introduzione e capitolo 6
- [15] T. J. Poinso, S. K. Lele, Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows, *Academic Press Inc.*, 1992
- [16] T. J. Poinso,., *Theoretical and Numerical Combustion* ed. R.T. Edwards Inc., 2005, capitolo 9
- [17] D. Winterbone e R. Pearson, *Design Techniques for Engine Manifolds* ed. Professional Engineering Publishing
- [18] *OpenFoam User Guide* versione 1.5, 2008