

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica



Approssimazione numerica di soluzioni stazionarie
delle equazioni di Navier Stokes bidimensionali ad alti
numeri di Reynolds

Relatore: Prof. Fabio Nobile

Tesi di Laurea di:
Claudia Giannini, matricola 725112

Anno Accademico 2009–2010

Indice

Indice	i
Elenco delle figure	iii
Elenco delle tabelle	vi
Introduzione	1
1 Le equazioni di Navier Stokes	11
1.1 Formulazione del problema	12
1.1.1 Equazione per la <i>stream-function</i>	14
1.2 Formulazione variazionale	15
1.3 L'approssimazione spettrale	16
1.3.1 Discretizzazione delle equazioni	20
1.3.2 Condizione di compatibilità tra velocità e pressione	22
1.3.3 Scelta degli spazi	23
1.4 Stabilizzazione: <i>spectral vanishing viscosity</i>	25
2 Risoluzione del problema stazionario	31
2.1 Il metodo di Newton	31
2.2 Il metodo dei sottospazi di Krylov	34
2.3 Il metodo di Newton Precondizionato	36
3 Soluzioni stazionarie del flusso in cavità	41
3.1 Scelta dei parametri	42

3.1.1	Convergenza del metodo di Newton	43
3.1.2	Scelta del termine forzante	44
3.1.3	Scelta del passo temporale	46
3.2	Confronto con il metodo di Newton	47
3.3	Soluzioni stazionarie del flusso in cavità	49
4	Risultati per il flusso intorno al cilindro	59
4.1	Formulazione del problema	60
4.1.1	Struttura della griglia	60
4.1.2	Caratteristiche del problema	61
4.2	Dipendenza dai parametri	62
4.2.1	Dipendenza dal numero di elementi	62
4.2.2	Dipendenza da R	64
4.2.3	Dipendenza da N_r e N_ϕ	69
4.3	Soluzioni stazionarie per il flusso intorno al cilindro circolare	70
5	Conclusioni	79
	Bibliografia	81

Elenco delle figure

1	Flusso stazionario intorno al cilindro.	2
2	Schematica delle principali caratteristiche della zona di ricircolo nel limite infinito del numero di Reynolds: modello di Kirchhoff (a) e modello di Batchelor (b).	3
3	Linea di separazione a diversi valori del numero di Reynolds	7
1.1	Trasformazione $F_k : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_k$	17
1.2	Griglia sfalsata di Legendre: i cerchi pieni rappresentano gli $N_x + 1 = N_y + 1 = 7$ nodi di Gauss-Lobatto/Gauss-Lobatto, mentre gli altri rappresentano gli $N_x - 1 = N_y - 1 = 5$ nodi di Gauss/Gauss	25
1.3	Variazione di \hat{Q}_k per $N = 20$ e $m_N = \{\sqrt{N}, 0.3N, 0.6N\}$	27
2.1	Schema dell'algoritmo	40
3.1	Flusso in cavità	42
3.2	Soluzione stazionaria a $Re = 1000$. Modulo (a), campo di pressione (b) e <i>stream-function</i> (c).	44
3.3	Profili della prima componente della velocità lungo la sezione verticale passante per il centro (a) e della seconda componente lungo la sezione orizzontale passante per il centro (b). Profili delle due componenti mostrati in [Ert09] (c) e (d).	45
3.4	Convergenza della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni temporali per $Re = 100$ e $Re = 1000$	46
3.5	Convergenza della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni temporali per $\gamma = 10^{-1}$, $\gamma = 10^{-2}$, $\gamma = 10^{-3}$ e $\gamma = 10^{-4}$	46

3.6	Convergenza della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni temporali per $\Delta t = 0.5$, $\Delta t = 2$, $\Delta t = 10$ e $\Delta t = 50$	47
3.7	Convergenza della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni di Newton per il metodo di Newton non preconditionato (rosso) e preconditionato (verde).	48
3.8	$Re = 2500$	48
3.9	$Re = 5000$	49
3.10	Contorni della <i>stream-function</i> per $Re = 7500$	51
3.11	Contorni della <i>stream-function</i> per $Re = 10000$	52
3.12	Contorni della <i>stream-function</i> per $Re = 12500$	53
3.13	Contorni della <i>stream-function</i> per $Re = 15000$	54
3.14	Contorni della <i>stream-function</i> per $Re = 20000$	55
3.15	Profili della prima componente della velocità lungo la sezione verticale passante per il centro della cavità per vari valori del numero di Reynolds.	56
3.16	Profili della seconda componente della velocità lungo la sezione verticale passante per il centro della cavità per vari valori del numero di Reynolds.	57
4.1	Rappresentazione della griglia con $R = 10$ e $N_r = N_\phi = 30$ (a) e zoom della <i>mesh</i> della regione intorno al cilindro (b).	61
4.2	Soluzione per $Re = 4$	63
4.3	Soluzione in prossimità del cilindro per $Re = 4$	64
4.4	Profili di velocità per diversi valori della griglia.	64
4.5	Profili di velocità per diversi valori del raggio.	66
4.6	<i>Stream-function</i> $Re = 20$. Contorni = $\{ 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 \}$	66
4.7	Vorticità $Re = 20$. Contorni = $\{ -4.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.6, 0, 0.1 \}$	67
4.8	Norma H^1 del modulo della velocità.	68
4.9	Soluzione per $Re = 30$ con $R = 30$	70
4.10	<i>Stream-function</i> Re diversi. Contorni = $\{ -0.2, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 \}$	74
4.11	Vorticità Re diversi. Contorni = $\{ -4.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.6, -0.4, 0, 0.1 \}$	75
4.12	Distribuzione della vorticità sulla superficie del cilindro.	76
4.13	Distribuzione della pressione sulla superficie del cilindro.	76
4.14	Posizione del punto di separazione (a) e Coefficiente di drag C_D (b).	77

4.15 Larghezza della bolla (a) e lunghezza misurata dal centro del cilindro (b). . . . 77

Elenco delle tabelle

3.1	Confronto del minimo valore della <i>stream-function</i> al centro del vortice principale a diversi numeri di Reynolds.	49
4.1	Risultati di C_f, C_p, C_D e della differenza di pressione a monte e a valle del cilindro sulla griglia non uniforme per $Re = 4$ e $R = 16$	63
4.2	Risultati sul coefficiente di drag, C_f, C_p, C_D e sulla differenza di pressione a monte e a valle del cilindro sulla griglia non uniforme per $Re = 20$ al variare di R	67
4.3	Risultati sulla bolla di separazione e sulla vorticità per $Re = 20$ al variare di R	67
4.4	Risultati sulle caratteristiche del fluido per $Re = 20$ al variare di R e N_r	68
4.5	Risultati sulle caratteristiche del fluido con diversi N_ϕ e N_r per $Re = 30$ e $R = 30$	69
4.6	Risultati sulle caratteristiche del fluido al variare di Re e R	71
4.7	Risultati sulle caratteristiche del fluido al variare di Re e R	72
4.8	Riassunto dei risultati presenti in letteratura.	73

Sommario

In questa tesi è stato studiato il problema della ricerca di soluzioni stazionarie per le equazioni di Navier Stokes ad alti valori del numero di Reynolds. Per grandi valori di questo parametro il regime stazionario governato dalle equazioni di Navier Stokes perde la sua stabilità e, ammesso che la soluzione stazionaria esista, non può essere calcolata con i metodi tradizionali.

Il nostro principale obiettivo è lo studio del comportamento della soluzione stazionaria del flusso intorno ad un cilindro, che nel caso di domini illimitati, risulta un caso ampiamente studiato sia dal punto di vista teorico [Gal04], [RS08] che applicativo [CMM09]. Nonostante la sua grande rilevanza e gli innumerevoli tentativi matematici, il problema presenta diverse questioni fondamentali ancora aperte. La più significativa è senza dubbio l'esistenza di una soluzione in 2D per alti valori del numero di Reynolds. Per quanto scoperto fino ad ora non è detto che la soluzione esista. In ogni caso, anche ammesso che esista, la soluzione stazionaria diventa già instabile ad un bassissimo numero di Reynolds.

In questo lavoro, le equazioni stazionarie incomprimibili di Navier Stokes, discretizzate con il metodo agli elementi spettrali, sono risolte applicando la tecnica della *pseudo transient continuation* al metodo di Newton. Il metodo di Newton è interessante per la risoluzione di sistemi non lineari grazie alla sua rapida convergenza, ma è molto sensibile all'iterata iniziale e può divergere se questa non è sufficientemente vicina alla soluzione. Quindi, l'obiettivo della tecnica di globalizzazione *pseudo transient continuation* è quello di "spostare" le iterate iniziali nel bacino di attrazione del metodo di Newton. Questo meto-

do sfrutta le equazioni non stazionarie per ricavare l'equazione lineare per il calcolo degli incrementi di Newton; equazione lineare che viene successivamente risolta seguendo la strategia *matrix-free* con un metodo di Krylov; dove le iterazioni di Krylov corrispondono alle integrazioni temporali del problema non stazionario.

In primo luogo introduciamo i risultati teorici e numerici, presenti in questo momento in letteratura per il problema stazionario di Navier Stokes in un dominio esterno. In secondo luogo, presentiamo il modello matematico utilizzato e il metodo di Newton preconditionato, la cui efficienza è stata testata sul problema del flusso in cavità. Infine, presentiamo i risultati da noi ottenuti per il problema di interesse.

Introduzione

La ricerca della soluzione stazionaria delle equazioni di Navier Stokes in un dominio illimitato, è una delle questioni più rappresentative e affascinanti della dinamica dei fluidi. Il problema consiste nel trovare una funzione vettoriale $\mathbf{u} = (u, v)$ e una funzione scalare p , che soddisfino il sistema:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= \text{Re} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}_*, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\infty,\end{aligned}\tag{1}$$

dove Ω rappresenta il dominio esterno di un compatto bidimensionale, mentre \mathbf{U}_∞ è un vettore fissato, $\mathbf{u}_* = (u_*, v_*)$ è il vettore imposto al bordo $\partial\Omega$ di Ω e Re è il numero di Reynolds. L'infinito diventa una frontiera fittizia e su di essa è naturale imporre un valore della velocità \mathbf{u} costante, pari al vettore \mathbf{U}_∞ . Il problema è rappresentato in Figura 1. Le equazioni (1) rappresentano le equazioni di Navier Stokes la cui descrizione è rimandata al Capitolo 2. In questo Capitolo ci limitiamo a riportare i principali risultati teorici presentati per questo tipo di problema in [Gal04].

Il quesito principale che riguarda questo tipo di studi è: *Data \mathbf{u}_* sufficientemente regolare, esiste la soluzione del problema (1) per ogni valore del numero di Re ? Il caso su cui è stata posta maggior attenzione, è quello in cui si considera il cilindro fermo, cioè quando $\mathbf{u}_* = 0$ e $\mathbf{U}_\infty \neq 0$. La risolubilità di (1) per grandi valori di Re è fondamentale per rispondere ad un altro quesito importante. Infatti, nei problemi che comportano flussi intorno ad un corpo, gli equilibri della dinamica dei vortici rivelano caratteristiche interessanti.*

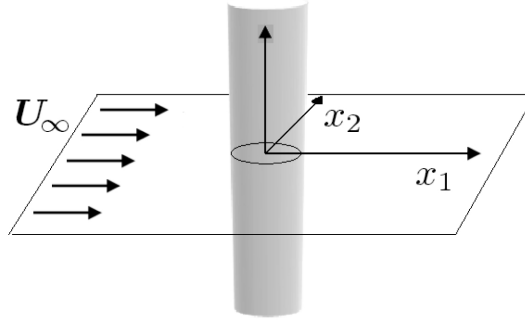


Figura 1: Flusso stazionario intorno al cilindro.

Ricordiamo che la vorticità $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ e che prendendo il rotore delle equazioni di Navier Stokes non stazionarie, si ottiene la seguente equazione evolutiva: $\frac{D\omega}{dt} = \frac{1}{Re}\Delta\omega$, dove D/dt indica la derivata materiale. Introducendo la *stream-function* definita come $\psi = \nabla^\perp \mathbf{u}$, l'equazione scalare per la vorticità nel limite $1/Re \rightarrow \infty$ diventa

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{J}(\psi, \Delta\psi) = 0$$

con $\mathcal{J}(\psi, \nabla\psi) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}$. Quindi per ottenere la soluzione stazionaria inviscida bisogna imporre $\mathcal{J}(\psi, \Delta\psi) = 0$ e questo implica che $\nabla^\perp\psi$ e $\nabla^\perp\Delta\psi$ sono paralleli e che ψ e $\Delta\psi$ devono dipendere funzionalmente. Sintetizzando, questo risultato equivale a riformulare il problema nel modo seguente:

$$\begin{cases} \Delta\psi = F(\psi) & \text{in } \Omega \\ \psi = \psi_* & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

dove $F(\psi)$ è una funzione arbitraria. È noto che il problema (2) non ammette un'unica soluzione, ma infinite. La questione ancora aperta è quale di queste rappresenti quella *giusta* corrispondente alla soluzione del problema di Navier Stokes nel limite $Re \rightarrow \infty$.

Fondamentalmente, ci sono due tipi di soluzioni possibili: flussi caratterizzati da una zona aperta di ricircolo, ottenuti utilizzando la teoria *free-streamline* di Kirchhoff (Figura 2a), e i flussi con una zona chiusa di ricircolo derivanti dal teorema di Prandtl-Batchelor (Figura 2b).

Per molto tempo l'unico modello disponibile è stato quello di Kirchhoff (1869) e Helmholtz (1868). In questo modello le soluzioni sono costruite supponendo l'esistenza di una

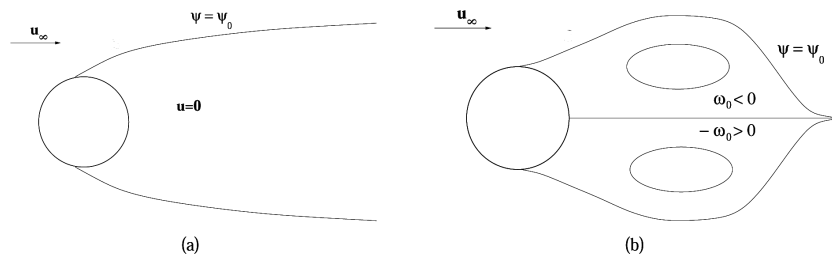


Figura 2: Schematica delle principali caratteristiche della zona di ricircolo nel limite infinito del numero di Reynolds: modello di Kirchhoff (a) e modello di Batchelor (b).

“*free streamline*” che parte dal cilindro, separando il flusso esterno da una regione di ristagno. In questa regione, situata dietro l’ostacolo, il flusso è considerato fermo. Questa linea di separazione è quindi anche una linea di discontinuità, in quanto le velocità nelle due regioni sono generalmente differenti. La pressione nella zona di stagnazione è uguale alla pressione all’infinito, in questo modo la *free streamline* coincide con una zona di vorticità. I flussi costruiti in questo modo hanno un coefficiente di drag non nullo [MT96] e quindi non danno luogo al paradosso di D’Alembert. Questo modello non forniva tuttavia alcuna informazione riguardante la natura del flusso a valle del cilindro e pertanto i ricercatori hanno studiato modelli alternativi che potessero descrivere il completo comportamento del flusso.

Un modello alternativo è quello proposto da Batchelor (1956), in cui si considerano flussi caratterizzati da una zona chiusa di ricircolo e quindi da un coefficiente di drag nullo. Il teorema formulato da Prandtl-Batchelor nello stesso anno, stipulava che per un flusso incomprimibile nel limite $Re \rightarrow \infty$ ad una regione di ricircolo limitata debba corrispondere una vorticità costante ω_0 . In questo modello la scia dietro un ostacolo simmetrico è quindi composta da due regioni di vorticità uguale e opposta posizionate vicino l’asse di simmetria dell’ostacolo.

La domanda a questo punto è: *Queste soluzioni possono essere ottenute come soluzioni del problema di Navier Stokes nel limite $Re \rightarrow \infty$?* Naturalmente, per rispondere a questa domanda è necessaria l’esistenza della soluzione del problema di Navier Stokes per *grandi* valori del numero di Reynolds.

Punto di partenza molto importante per l’analisi del problema completo di Navier Sto-

kes, sono i risultati ottenuti per il problema di Stokes. Infatti, se si considera il sistema (1) per $Re \sim 0$, è possibile ignorare il termine $Re \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, ottenendo l'*approssimazione di Stokes*

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \nabla p \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}_*, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Nel 1851 G.G. Stokes notò [Sto51] che questo problema non ammette soluzione in due dimensioni, e questa osservazione è oggi nota come:

Teorema 1. (Paradosso di Stokes) *Sia Ω un dominio esterno di classe C^2 . Non esistono soluzioni del problema (3), con $\mathbf{u}_* = 0$ e $\mathbf{U}_\infty \neq 0$.*

Questo risultato è importante per la risoluzione del problema completo di Navier Stokes. Infatti, per quanto appena detto, è evidente che se il problema di Navier Stokes ammette soluzione, il termine non lineare deve svolgere un ruolo chiave nella sua determinazione. Questo problema è stato studiato nel 1933 da J. Leray [Ler33], il quale ha ricavato le soluzioni deboli per le equazioni di Navier Stokes stazionarie in un dominio esterno 2D e 3D, e ha dimostrato l'esistenza di una soluzione (\mathbf{u}, p) per ogni numero di Reynolds nella sola ipotesi di regolarità dei dati e di flusso nullo di \mathbf{u}_* :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{n} = 0,$$

dove \mathbf{n} indica la normale esterna. Questa soluzione presenta due proprietà importanti: la prima è che la soluzione è regolare in Ω e la seconda è che essa esiste per ogni valore del numero di Reynolds. Nonostante ciò, rimane ancora aperta una questione, cioè la prova che la soluzione ottenuta soddisfi la condizione all'infinito. Questa mancanza di informazione vale solo per il caso bidimensionale, infatti per il caso a tre dimensioni J. Leray ha dimostrato che la soluzione del problema di Navier Stokes ad *integrale di Dirichlet finito*

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 < \infty, \quad (4)$$

garantisce che $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U}_\infty$ uniformemente se $\mathbf{U}_\infty = 0$ e in senso generalizzato se $\mathbf{U}_\infty \neq 0$. Queste soluzioni sono chiamate *D-solutions*. In due dimensioni, la condizione (4) non garantisce il soddisfacimento della condizione all'infinito, in quanto è soddisfatta anche

da funzioni che divergono all'infinito, come ad esempio il $\log^\alpha |x|$, con $\alpha \in (0, 1/2)$ in $\Omega = \{|x| > 1\}$.

Per il comportamento asintotico delle *D-solutions*, D. Gilbarg e H.F. Weinberger nel 1978 hanno dimostrato in [GW74] che la soluzione di Leray converge all'infinito ad un vettore costante $\tilde{\mathbf{U}}_\infty$ nel senso della convergenza in media di ordine due:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\mathbf{u}(r, \phi) - \tilde{\mathbf{U}}_\infty|^2 d\phi = 0.$$

In [Gal04] è stato in seguito dimostrato che questa convergenza è uniforme.

Anche se, nonostante i numerosi studi, non è ancora noto se $\tilde{\mathbf{U}}_\infty = \mathbf{U}_\infty$, la questione che in questi anni ha ricevuto maggior interesse è l'esistenza della soluzione per tutti valori del numero di Reynolds, esistenza che nel caso tridimensionale è garantita.

Questo problema è stato inizialmente affrontato per piccoli valori del numero di Reynolds da R. Finn e D. Smith nel 1967, i quali hanno dimostrato il seguente teorema:

Teorema 2. \exists un $Re_0 > 0$, tale che per ogni $Re \in (0, Re_0)$ e per ogni \mathbf{u}_* “sufficientemente regolare”, il problema (1) ammette almeno una soluzione.

Queste soluzioni sono *Fisicamente Ragionevoli*, nel senso che rispettano tutti i requisiti fisici di base, come l'equazione di bilancio dell'energia, e presentano una *scia* nella direzione di \mathbf{U}_∞ . Un approccio diverso al problema affrontato R. Finn e D. Smith è stato dato nel 1992 da G.P. Galdi. Un'altra questione aperta è la stabilità di queste soluzioni e se queste soluzioni possono essere ottenute come limite del problema non stazionario.

Già Finn nel 1965 aveva proposto di analizzare la relazione tra questa nuova classe di soluzioni stazionarie *Fisicamente Ragionevoli* e le corrispondenti soluzioni non stazionarie nel caso in cui $\mathbf{u}_* \neq 0$. Questo problema è stato in seguito trattato in [GHS97], dove si è dimostrata l'unicità della soluzione del problema non stazionario, nell'ipotesi di piccolezza dei dati, e la sua convergenza allo stato stazionario per $t \rightarrow \infty$.

Per quanto riguarda l'esistenza della soluzione per ogni valore del numero di Reynolds, l'unico risultato presente in questo momento è il teorema formulato da G.P. Galdi in [Gal99]. Esso fornisce come condizione sufficiente per l'esistenza della soluzione simmetrica *Fisicamente Ragionevole* del sistema (1), l'esistenza della soluzione banale del problema (1) con $\mathbf{u}_* = \mathbf{U}_\infty = 0$ nella classe delle *D-solutions* simmetriche. Il teorema è il seguente:

Teorema 3. *Supposto che $\exists Re_0 > 0$ tale che, per ogni $Re \geq Re_0$ il problema*

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= Re \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\infty,\end{aligned}$$

con $\Omega = \{|\mathbf{x}| > 1\}$, non ha soluzione. Allora, il problema omogeneo

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v} &= Re \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \Phi \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{uniformemente}\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 < \infty,$$

deve avere una soluzione non nulla.

Se la soluzione sia unica in qualche classe funzionale è un problema completamente aperto. Ciò nonostante questo risultato garantisce l'unicità della soluzione del problema non stazionario. Infatti, se non esistessero soluzioni stazionarie per $Re \geq Re_0$ il problema non stazionario non ammetterebbe un'unica soluzione. Da ciò si sviluppa l'interesse nel ricercare numericamente soluzioni stazionarie per valori alti del numero di Reynolds.

Il problema (1) è difficile da trattare numericamente a causa dell'instabilità anticipata, già presente a piccoli valori del numero di Reynolds, e dell'interessante transizione alla turbolenza. A questa difficoltà si aggiunge quella dovuta alla non limitatezza del dominio fisico. Il metodo utilizzato nella maggior parte dei casi, impiegato anche in questo lavoro, è quello che introduce un bordo artificiale. Tale soluzione permette di ridurre questi problemi ad un dominio computazionale limitato. In questo modo è necessario imporre sul bordo una condizione al contorno artificiale, come condizioni al contorno di Dirichlet o Neumann per le variabili dipendenti. L'accuratezza del metodo dipende da quanto lontano dal cilindro è imposto il confine artificiale. Per una buona approssimazione del comportamento del flusso all'infinito bisogna considerare un dominio abbastanza grande, anche se questo implica un maggiore sforzo computazionale.

In letteratura, sono stati proposti diversi approcci numerici per individuare le soluzioni stazionarie delle equazioni di Navier Stokes incomprimibili ad alti numeri di Reynolds. In [For91], Fornberg ha ottenuto risultati per alti valori di Reynolds utilizzando una tecnica

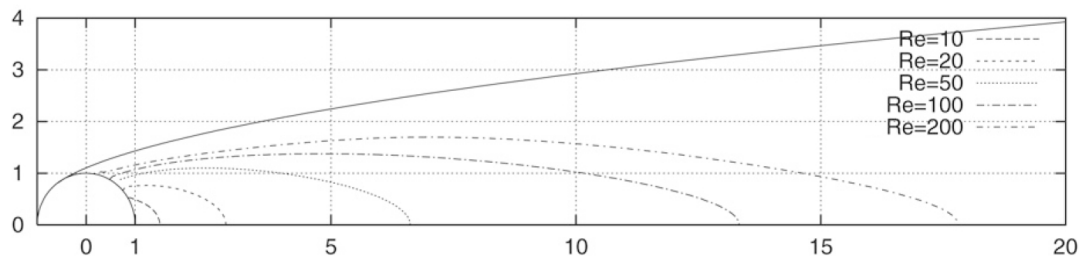


Figura 3: Linea di separazione a diversi valori del numero di Reynolds

di *smoothing*, mentre in [PW02] è stata studiata la variazione del coefficiente di drag per problemi in cui il cilindro ruota armonicamente a diverse frequenze. In questo lavoro sono stati ottenuti risultati, per le equazioni scritte in funzione della vorticità, fino a $Re = 150$ ed è stato osservato che il coefficiente di drag si riduce ad alte frequenze e che la sua riduzione è legata all'allungamento della zona di ricircolo. Recentemente è stato proposto un approccio, chiamato *Method of Variational Imbedding* [CMM09], con il quale si è raggiunto un valore del numero di Reynolds pari a $Re = 200$. L'idea principale del metodo (MVI) è quella di sostituire il problema stazionario iniziale con un problema di minimizzazione di un funzionale quadratico. Le condizioni necessarie per la minimizzazione di questo funzionale, chiamato *imbedding functional*, conducono alla risoluzione di un sistema di Eulero-Lagrange il cui minimo coincide con la soluzione del problema di partenza. Anche se questo approccio risulta apparentemente più complicato, il vantaggio è che risolvendo con un metodo iterativo il sistema di Eulero-Lagrange "tempo dipendente", in cui il tempo rappresenta un parametro artificiale, la soluzione non diventa instabile come accade nel caso del problema originale di Navier Stokes. Questo lavoro è quello più attendibile e i risultati in esso riportati, come mostrato in Figura 3, confermano la teoria di Kirchhoff.

Il problema principale quando si risolve il problema stazionario ad alti numeri di Reynolds è quello di assicurare un tasso di convergenza rapido delle equazioni discretizzate. Questo problema è risolto utilizzando il metodo di Newton che garantisce una convergenza quadratica delle soluzione numerica. Tuttavia, esso richiede ad ogni passo la risoluzione di sistemi lineari e il calcolo della soluzione esatta può essere troppo costoso se il numero di incognite è grande. Pertanto, sembra ragionevole utilizzare un algoritmo iterativo per risolvere questi sistemi lineari solo approssimativamente. Il metodo di *Newton inesatto* associato ad un risolutore iterativo di Krylov, rappresenta un giusto metodo per la risoluzione

di sistemi non lineari, che offre un buon compromesso tra accuratezza e sforzo computazionale necessario per ogni iterazione. Infatti non è mai necessario formulare la matrice Jacobiana in forma esplicita, in questo modo il risolutore di Newton-Krylov [BS94] che ne risulta semplifica notevolmente l'applicazione a problemi complessi, come quello di Navier Stokes. Lo svantaggio principale del metodo di Newton, consiste nel richiedere una soluzione iniziale non troppo lontana dalla soluzione esatta. Questo problema viene risolto con tecniche di globalizzazione, come la *pseudo transient continuation* [CKK04].

In questo lavoro di tesi abbiamo utilizzato questo approccio per la ricerca delle soluzioni stazionarie dell'equazioni di Navier Stokes, in particolare del problema (1). Matematicamente, questa strategia rappresenta un'omotopia che tramuta il problema stazionario in un problema tempo dipendente. Per le equazioni di Navier Stokes questa tecnica coincide con un metodo di Newton preconditionato, il cui preconditionatore per la sua forma prende il nome di *precondizionatore di Stokes*.

Il programma utilizzato per le simulazioni numeriche è stato scritto nel linguaggio C++. Per l'implementazione abbiamo utilizzato il codice già esistente, *Heat-Spectral* sviluppato da M. Altieri e A. Stefanoni nell'ambito del progetto di Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico e concepito per risolvere problemi parabolici bidimensionali attraverso il metodo agli elementi spettrali con integrazione numerica di tipo gaussiano. Il codice è stato esteso alla risoluzione delle equazioni di Navier Stokes, in cui la pressione è stata approssimata su uno spazio di due ordini inferiore rispetto a quello delle velocità; in questo modo il problema viene risolto su una griglia sfalsata che comporta una discretizzazione stabile delle equazioni. Poiché il nostro lavoro si focalizza sulla ricerca di soluzioni stazionarie delle equazioni di Navier Stokes per alti valori del numero di Reynolds, è stato necessario stabilizzare il problema. La strategia utilizzata è la *spectral vanishing viscosity*, introdotta in [XP04].

Metodi numerici per le equazioni stazionarie incomprimibili, per la loro validazione, sono spesso testati sul flusso in cavità. La nostra attenzione si è quindi inizialmente soffermata su questo tipo di problema, e in seguito il metodo è stato applicato al problema del flusso intorno al cilindro. Pertanto, le equazioni di Navier Stokes sono state implementate in coordinate cartesiane e in coordinate polari.

Nonostante la sua semplice geometria, il flusso in cavità ha una fisica complessa che si manifesta attraverso regioni di ricircolo sugli angoli della cavità a seconda del numero di

Reynolds. In letteratura è possibile trovare soluzioni del problema stazionario [ECG05] e non stazionario [CB08] per le equazioni formulate in termini di vorticità e *stream function*, e soluzioni non stazionarie per le equazioni scritte nelle variabili primitive [AP02] e [BS06]. In questo lavoro presentiamo soluzioni numeriche fino ad un numero di Reynolds pari a 20000. I risultati sono confrontati con quelli ottenuti negli articoli appena citati.

Abbiamo ottenuto soluzioni numeriche per il flusso stazionario intorno ad un cilindro fino ad un valore del numero di Reynolds pari a 200. La scia a valle del cilindro diventa più lunga e larga all'aumentare del numero di Reynolds e, in accordo con la teoria di Kirchhoff, la vorticità in questa regione è nulla. Al contrario la distribuzione della pressione all'interno della scia non è nulla, come previsto dalla teoria di Prandtl-Batchelor. Per valori più piccoli della viscosità non si raggiunge la soluzione stazionaria in quanto il metodo utilizzato non è convergente.

Il lavoro è organizzato come segue: nel Capitolo 1 vengono presentate le equazioni di Navier Stokes incomprimibili e la rispettiva discretizzazione agli elementi spettrali stabilizzata, mentre nel Capitolo 2 vengono introdotti il metodo di Newton-Krylov e il metodo di Newton preconditionato. Nel Capitolo 3, il metodo viene applicato al problema del flusso in cavità e nel Capitolo 4 vengono presentati i risultati numerici ottenuti per il flusso intorno al cilindro.

1

Le equazioni di Navier Stokes

In questo capitolo, presentiamo le equazioni di Navier Stokes, che costituiscono il modello matematico utilizzato nel nostro lavoro. Nella §1.1, il problema viene formulato in coordinate cartesiane e in coordinate polari, e viene brevemente descritto il sistema per il calcolo della *stream-function*. La formulazione debole delle equazioni, scritte in coordinate polari, è presentata nella §1.2.

La discretizzazione spaziale delle equazioni è effettuata con il metodo agli elementi spettrali. Presentiamo gli strumenti di base per formulare la discretizzazione spettrale, con particolare attenzione al metodo di Galerkin con integrazione numerica. Il problema principale legato alla formulazione delle equazioni della fluidodinamica in variabili primitive è la possibile insorgenza di modi spuri di pressione che non sono controllati dallo schema di discretizzazione. Per evitare che questi si verifichino, le discretizzazioni di velocità e pressione non possono essere scelte arbitrariamente. Il metodo agli elementi spettrali per le equazioni di Navier Stokes e la scelta degli opportuni spazi per la discretizzazione di velocità e pressione sono discussi nella §1.3.

All'aumentare del numero di Reynolds, poiché il problema diventa a trasporto dominante, può essere richiesta una forma di stabilizzazione del termine convettivo. Una scelta semplice consiste nel filtrare i modi della velocità alle frequenze più alte in ogni elemento. Una strategia di questo tipo è il metodo della *spectral vanishing viscosity* presentato nella §1.4. Questo metodo offre un modo interessante per calcolare flussi ad alti numero di Reynolds in quanto consente di stabilizzare il problema preservando allo stesso tempo il tasso esponenziale di convergenza dell'approssimazione spettrale.

1.1 Formulazione del problema

Si consideri un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e siano $\mathbf{u}(x, y) = [u(x, y), v(x, y)]^T$ il campo di velocità incognito, $p = p(x, y)$ la pressione e $\rho = \rho(x, y)$ la densità di massa. L'equazione della quantità di moto per fluidi Newtoniani incomprimibili in variabili primitive \mathbf{u} e p è data da

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f},$$

dove μ è la viscosità, \mathbf{f} è la forza per unità di volume agente sul fluido e $D\mathbf{u}/Dt$ indica la derivata materiale definita come segue:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

Queste equazioni non possono essere separate dall'equazione di conservazione della massa che implica la condizione di divergenza nulla

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Da un punto di vista fisico e ingegneristico è preferibile scrivere l'insieme delle equazioni in forma adimensionale. Si perviene alla forma classica delle equazioni di Navier-Stokes per fluidi viscosi omogenei incomprimibili:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

dove si è rinominato p/ρ con p mentre il parametro Re rappresenta il numero di *Reynolds*. La definizione del numero di Reynolds è la seguente:

$$Re = \frac{|\mathbf{u}_\infty| D}{\nu}$$

dove con \mathbf{u}_∞ si indica la velocità tipica del fluido, con D la lunghezza caratteristica del dominio computazionale Ω e con ν la viscosità cinematica, $\nu = \mu/\rho$.

Il numero di Reynolds è un parametro importante che caratterizza il moto di un fluido. Esso rappresenta una misura adimensionale dell'importanza delle forze inerziali rispetto alle forze viscosi. A partire da un valore zero, flusso di Stokes, dove la fisica è semplice perché il modello è fondamentalmente lineare, l'aumentare del valore del numero di Reynolds

conduce a flussi laminari per Re moderati e flussi turbolenti per Re elevati. In questa situazione, la fisica diventa molto complicata, anche nelle semplici configurazioni geometriche, perché la struttura del flusso è altamente non lineare e tempo-dipendente, e coinvolge scale spaziali che si sviluppano su diversi ordini di grandezza.

Le equazioni di Navier Stokes sono completate da una condizione iniziale al tempo zero e da opportune condizioni al bordo.

Se si considera il flusso tra due cilindri, il dominio nelle coordinate polari (r, ϕ) diventa

$$\Omega = \{(r, \phi), \quad \bar{r} \leq r < R, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\},$$

dove \bar{r} indica il raggio del cilindro interno, mentre R il raggio del cilindro esterno. In coordinate polari, $\mathbf{u} = u_r \hat{\mathbf{r}} + u_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$, dove $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ sono i vettori unitari nella direzione radiale e angolare, e u_r e u_ϕ sono le rispettive componenti della velocità. Le equazioni di Navier Stokes in queste coordinate diventano:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left(D u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2}{r} = f_r \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left(D u_\phi - \frac{1}{r^2} u_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} = f_\phi \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (1.4)$$

dove p è la pressione, $(f_r, f_\phi)'$ è il vettore del termine forzante e

$$D = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1.5)$$

indica l'operatore di Laplace. In questo caso la lunghezza caratteristica del dominio è il diametro del cilindro. Pertanto, il dominio per le variabili spaziali (r, ϕ) è il rettangolo $(\bar{r}, R) \times (0, 2\pi)$. Si noti che avendo considerato l'estremo inferiore dell'intervallo della coordinata radiale pari al raggio del cilindro interno, diverso da zero, il problema in coordinate polari è di una più facile risoluzione in quanto non è presente la singolarità nell'origine. In termini di variabili adimensionali, la superficie del cilindro è rappresentata da $\bar{r} = 1$, e

su di essa viene imposta la condizione al bordo di Dirichlet omogenea, che rappresenta la condizione di “no-slip”, cioè

$$\mathbf{u}_r(1, \phi) = \mathbf{u}_\phi(1, \phi) = 0. \quad (1.6)$$

Sulla coordinata radiale R la condizione da imporre dipende dal tipo di problema che si vuole risolvere.

1.1.1 Equazione per la *stream-function*

È possibile riscrivere il problema di Navier Stokes introducendo incognite diverse da quelle primitive. Infatti in fluidodinamica la rappresentazione delle soluzioni avviene spesso attraverso le *streamlines*, le quali delineano le traiettorie del flusso nel caso stazionario. Per tracciare le *streamlines* viene utilizzata la *stream-function*.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio semplicemente connesso, un risultato ben noto afferma che una funzione a valori in uno spazio vettoriale $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^2$, soddisfa il vincolo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ se, e solo se, esiste una funzione $\psi \in H^1(\Omega)$, chiamata *stream-function*, tale che

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi, \quad (1.7)$$

dove $\mathbf{u} = (u, v, 0)^T$ o $\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, 0)^T$. In coordinate cartesiane l'espressione (1.7) è equivalente a scrivere

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

mentre in coordinate polari risulta

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad u_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Moltiplichiamo entrambi i lato dell'equazione (1.7) per il rotore

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \psi) - \Delta \psi,$$

essendo $\nabla \cdot \psi = 0$ e definendo la vorticità $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, l'equazione per la *stream-function* diventa

$$\Delta \psi = -\omega$$

dove si è considerato $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^\top$. Inoltre, ricordando la definizione del rotore in coordinate polari, si riscrive l'espressione per la vorticità

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\mathbf{u}_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\phi} \right),$$

e si ricava l'equazione per la *stream-function* nel nuovo sistema di coordinate

$$D\psi = -\omega$$

dove D è l'operatore di Laplace definito in (1.5).

Queste equazioni dovranno essere completate con opportune condizioni al bordo. Moltiplicando l'espressione (1.7) per la normale al bordo \mathbf{n} , si ricava la seguente espressione

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp$$

che indica il valore della derivata parziale di ψ nella direzione normale al bordo.

1.2 Formulazione variazionale

Si considerino gli spazi per la velocità e la pressione, rispettivamente $V = [H_0^1(\Omega)]^2$ e $Q = L_0^2(\Omega)$, con $[H_0^1(\Omega)]^2$ spazio di Sobolev delle funzioni vettoriali a due componenti con derivate a quadrato sommabile che soddisfa le condizioni al bordo omogenee e con $L_0^2(\Omega)$ lo spazio delle funzioni in $L^2(\Omega)$ a media nulla.

La formulazione debole del problema di Navier Stokes è la seguente:

trovare $\mathbf{u} \in V$ e $p \in Q$ tale che

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V \\ B(\mathbf{u}, q) &= 0 & \forall q \in Q \end{aligned}$$

dove F indica il funzionale definito come $F(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$, con $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$.

Per quanto riguarda la definizione della formulazione variazionale, ci limitiamo alla trattazione del problema scritto in coordinate polari, in quanto il problema in coordinate cartesiane è più semplice da analizzare. In questo caso, le forme bilineari continue L e B sono definite nel modo seguente

$$\begin{aligned} L : \quad V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} L(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r) & L_1(\mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_r) \\ L_2(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_\phi) & L(\mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_\phi) \end{bmatrix} \\ B : \quad V \times Q &\rightarrow \mathbb{R}, & B(\mathbf{v}, p) &= \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{v}_r, p) & B_2(\mathbf{v}_\phi, p) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r) &= \frac{1}{\text{Re}} \left[(r\partial_r \mathbf{u}_r, \partial_r \mathbf{v}_r) + \left(\frac{1}{r}\partial_\phi \mathbf{u}_r, \partial_\phi \mathbf{v}_r\right) + \left(\frac{1}{r}\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r\right) \right], \\ L_1(\mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_r) &= 2\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r}\partial_\phi \mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_r\right) = -L_2(\mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_r), \\ B_1(\mathbf{v}_r, p) &= -(r\partial_r \mathbf{v}_r, p) - (\mathbf{v}_r, p) \quad B_2(\mathbf{v}_\phi, p) = -(\partial_\phi \mathbf{v}_\phi, p). \end{aligned}$$

Con (\cdot, \cdot) si indica il prodotto interno nello spazio L^2 nelle coordinate r e ϕ . Nelle definizioni precedenti si è tenuto conto dello jacobiano r per la formula di conversione.

La forma trilineare associata al termine non lineare, è definita dalla relazione

$$N : \quad V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r) & N_1(\mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_r) \\ N_2(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_\phi) & N(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_\phi) \end{bmatrix}$$

$$N(\mathbf{u}, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r) = (r\mathbf{u}_r \partial_r \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r) + (\mathbf{u}_\phi \partial_\phi \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r), \quad (1.8)$$

$$N_1(\mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_r) = -(\mathbf{u}_\phi^2, \mathbf{v}_r) \quad N_2(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_\phi) = (\mathbf{u}_r \mathbf{u}_\phi, \mathbf{v}_\phi). \quad (1.9)$$

La chiave per stabilire l'esistenza della soluzione è il lemma di Lax-Milgram e il teorema del punto fisso di Schauder [QV08]. La presenza dell'operatore non lineare complica l'analisi della buona posizione della formulazione debole. Non è possibile usare il problema omogeneo per stabilire l'unicità della soluzione. Il problema della non unicità delle soluzioni delle equazioni stazionarie è legato al concetto di *biforcazione*. All'aumentare del numero di Reynolds, si raggiunge un valore critico Re^* al quale il fluido perde la sua stabilità e si generano vortici periodici. Questo comportamento è realizzato dalle *biforcazioni di Hopf* delle equazioni di Navier Stokes.

1.3 L'approssimazione spettrale

La discretizzazione spaziale delle equazioni di Navier Stokes è effettuata con il metodo agli elementi spettrali SEM. Se si considerano geometrie complesse e si desidera maggiore accuratezza il SEM è il metodo che meglio si adatta. Per una descrizione completa rimandiamo a [CHQ07]. In questa sezione ci limiteremo a definire le basi del metodo e i parametri che saranno necessari in seguito nel nostro lavoro.

Nel metodo degli elementi spettrali il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è formato dall'unione di quadrilateri Ω_k riconducibili al quadrato di riferimento $\hat{\Omega} = (-1, 1)^2$ tramite la trasformazione

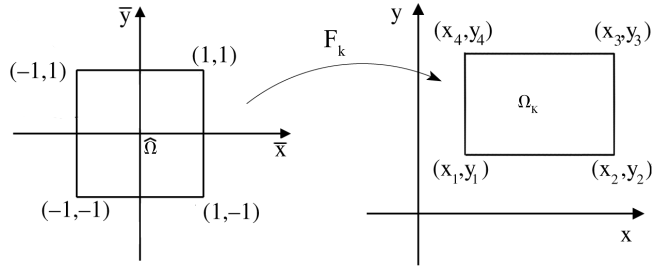


Figura 1.1: Trasformazione $F_k : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_k$.

invertibile $F_k : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_k$, Figura (1.1). L'intersezione tra due o più elementi adiacenti produce una faccia, un lato o un vertice.

Approssimando gli integrali contenuti nella formulazione debole SEM del problema con formule di quadratura numerica, si origina il metodo SEM – NI, *metodo agli elementi spettrali con integrazione numerica*. Al fine di ottenere l'ordine massimo di precisione per le formule di quadratura, vengono utilizzate formule di tipo gaussiano con i polinomi ortogonali di Legendre.

Per semplificare la trattazione è possibile affrontare il problema in un caso monodimensionale nell'intervallo di riferimento $(-1,1)$. Consideriamo formule di quadratura della forma

$$I_{N,w}(f) = \sum_{i=0}^N \alpha_i f(\bar{x}_i),$$

per approssimare l'integrale

$$I_w(f) = \int_{-1}^1 f(\bar{x}) w(\bar{x}) d\bar{x}, \quad f \in C^0([-1, 1]),$$

dove $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^N$ e $\{\alpha_i\}_{i=0}^N$ sono rispettivamente i nodi e i pesi della formula di quadrature.

Consideriamo i polinomi ortogonali di Legendre L_N di grado N definiti in $\hat{\Omega}$, il cui vantaggio è quello di utilizzare una funzione peso $w(\bar{x}) \equiv 1$ nella valutazione dell'integrale. Se si considerano i nodi e i pesi definiti come

$$\bar{x}_i \text{ zeri di } L_{N+1}(\bar{x}), \quad \alpha_i = \frac{2}{(1 - \bar{x}_i^2)[L'_{N+1}(\bar{x}_i)]^2}, \quad i = 0, \dots, N,$$

si ottiene la formula di quadratura di *Gauss*, mentre se si considerano i nodi di quadratura \bar{x}_i definiti come

$$\bar{x}_0 = -1, \quad \bar{x}_N = 1, \quad \bar{x}_i \text{ zeri di } L'_N(\bar{x}), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

ed i pesi

$$\alpha_i = \frac{2}{N(N+1)[L'_N(\bar{x}_i)]^2}, \quad i = 0, \dots, N,$$

si ottengono le formule di quadratura di *Gauss-Legendre-Lobatto*. La caratteristica delle formule di integrazione di Gauss è di avere i nodi interni all'intervallo di integrazione. In questo modo è difficile l'imposizione dei dati al bordo sulla base costituita dai polinomi caratteristici di Lagrange corrispondenti a tali nodi, e per questo sono stati introdotti i nodi GLL.

Sul dominio bidimensionale $\hat{\Omega}$ le formule di quadratura gaussiane vengono derivate dal caso monodimensionale:

$$\int_{\hat{\Omega}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\Omega \simeq \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^N f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \alpha_j \right) \alpha_i.$$

I nodi (\bar{x}_i, \bar{y}_j) , ottenuti mediante il prodotto cartesiano dei nodi $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^N$ e $\{\bar{y}_j\}_{j=0}^N$, rappresentano i nodi GLL in $\hat{\Omega}$, mentre $w_{ij} = \alpha_i \alpha_j$ rappresentano i pesi.

È possibile quindi definire il prodotto scalare discreto in questo modo

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{N, \Omega_k} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \mathbf{u}(x_i, y_j) \mathbf{v}(x_i, y_j) w_{ij} |\det J_{F_k}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)|$$

dove $\det J_{F_k}$ indica il determinante della matrice Jacobiana di F_k , e in questo caso risulta

$$|\det J_{F_k}| = \frac{|\Omega_k|}{4},$$

e $(x_i, y_j) = F_k(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$. Si nota che utilizzando le formule di quadratura di *Gauss-Legendre-Lobatto* è necessario conoscere il valore delle funzioni integrande nei nodi GLL. Indichiamo con $\hat{\phi}_{i,j}$ la base di Lagrange riferita ai nodi GLL, essa rappresenta un esempio di base *nodale*, dal momento che ogni funzione di base riproduce il valore polinomiale di un determinato nodo nel dominio. Si ha quindi la rappresentazione di \mathbf{u}_N rispetto alla base di

Lagrange

$$u_N(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i,j=0}^N u(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \hat{\phi}_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1.10)$$

dove $\hat{\phi}_{i,j}(\bar{x}, \bar{y}) = \hat{\phi}_i(\bar{x})\hat{\phi}_j(\bar{y})$ e $\{\hat{\phi}_i\}_{i=0}^N$ sono i polinomi di Lagrange di grado N definiti sull'intervallo $(-1,1)$.

Mentre nella versione nodale del metodo degli elementi spettrali le funzioni di base sono prodotti tensoriali degli interpolanti GLL di Lagrange, nella versione *modale* sono prodotti tensoriali dei polinomi ortogonali unidimensionali. Per una regione quadrilatera nello spazio $(-1,1) \times (-1,1)$ una possibile scelta della base modale è il prodotto tensore dei polinomi di Legendre. Sia quindi L_{km} la famiglia dei polinomi di Legendre definiti nel quadrato $(-1,1)^2$, ogni funzione lineare $u \in L^2[(-1,1)^2]$ in due dimensioni può essere espressa come combinazione lineare di questi polinomi:

$$u_N(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{k,m=0}^N \hat{u}_{km} L_{km}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1.11)$$

dove con $L_{km}(\bar{x}, \bar{y})$ si indica il prodotto tensoriale $L_k(\bar{x})L_m(\bar{y})$ e $\hat{u}_{km} = (k + 1/2)(m + 1/2)(u, L_{km})_{L_2(\hat{\Omega})}$.

Nel metodo degli elementi spettrali, in genere, non si fa uso di questo tipo di espansione in quanto in questo caso è difficile imporre la continuità al bordo degli elementi, mentre l'utilizzo di basi nodali fornisce un legame tra elementi confinanti.

In alcuni casi, sarà però necessario ricondursi alla rappresentazione modale. Per questo, è opportuno definire un meccanismo di trasformazione tra la rappresentazione nodale e quella modale. Dalle definizioni (1.10) e (1.11), si ricava

$$u(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \sum_{k,m=0}^N \hat{u}_{km} L_{km}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$$

o in termini di prodotto matrice-vettore

$$\mathbf{u} = \mathbf{M} \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.12)$$

Considerando la numerazione globale $(i, j) \rightarrow l = i + j \cdot (N + 1)$ e $(k, m) \rightarrow n = k + m \cdot (N + 1)$, si ha

$$u_{ij} = u_l = M_{ln} \hat{u}_n$$

per $l, n = 0 \dots N^2$, dove l'elemento della matrice $M_{l,n}$ rappresenta quindi il valore della base L_{km} valutata nei nodi di quadratura (\bar{x}_i, \bar{y}_j) .

Per ricavare i coefficienti \hat{u}_{km} dai valori nodali $u(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ consideriamo il prodotto scalare con le funzioni di base:

$$\left(\sum_{k,m=0}^N \hat{u}_{km} L_{km}, L_{ln} \right)_N = \left(\sum_{i,j=0}^N u(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \hat{\phi}_{ij}, L_{ln} \right)_N$$

o

$$\sum_{i,j=0}^N \sum_{k,m=0}^N \hat{u}_{km} L_{km}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) L_{ln}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) w_{ij} = \sum_{i,j=0}^N u(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \hat{\phi}_{ij}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) L_{ln}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) w_{ij}.$$

In forma matriciale, si ottiene

$$M^T W M \hat{u} = M^T W u$$

dove W è la matrice diagonale dei pesi di integrazione moltiplicati per lo jacobiano della mappatura da Ω_k al quadrato di riferimento $\hat{\Omega}$. Si ricava, infine, la trasformazione tra la rappresentazione nodale e quella modale

$$\hat{u} = (M^T W M)^{-1} M^T W u. \quad (1.13)$$

In coordinate polari il ragionamento è del tutto analogo, l'unica differenza consiste nella presenza del valore del raggio inserito nella matrice dei pesi.

1.3.1 Discretizzazione delle equazioni

Denotiamo con $\mathbb{Q}_N(\Omega)$ lo spazio dei polinomi definiti su Ω di grado minore o uguale ad N in ciascuna variabile. Per costruire l'approssimazione spettrale del problema (1.1) si introducono gli spazi finito dimensionali $V_N = (\mathbb{Q}_N \otimes \mathbb{Q}_N)^2 \cap V$ in cui viene approssimata la velocità, e $Q_N = (\mathbb{Q}_N \otimes \mathbb{Q}_N) \cap Q$ in cui viene approssimata la pressione. Per essere precisi, gli spazi considerati sono $V_N(\hat{\Omega})$ e $Q_N(\hat{\Omega})$, dove $\hat{\Omega}$ viene mappato in Ω_k dalla mappa F_k , e dove N è il parametro da cui si derivano le velocità e le pressioni polinomiali. Questi spazi generano quindi gli spazi locali $V_N(\Omega_k)$ e $Q_N(\Omega_k)$, attraverso la mappa F_k . Dopo aver definito gli spazi locali, è possibile introdurre gli spazi globali, che per semplicità di notazione chiameremo nuovamente V_N e Q_N

$$V_N = \{v \in V : v|_{\Omega_k} \in V_N(\Omega_k) \quad \forall \Omega_k \in \Omega\},$$

e

$$Q_N = \{q \in Q : q|_{\Omega_k} \in Q_N(\Omega_k) \quad \forall \Omega_k \in \Omega\}.$$

Dalla scelta degli spazi è evidente che le pressioni in Q_N non sono continue sugli elementi interni, mentre le velocità in V_N sono continue.

L'approssimazione agli elementi spettrali della forma debole delle equazioni di Navier Stokes fornisce il seguente problema variazionale:

trovare $\mathbf{u}_N \in V_N$ e $p_N \in Q_N$ tali che

$$\begin{aligned} \sum_k \{L_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_{\Omega_k} + N_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_{\Omega_k} + B_N(\mathbf{v}_N, p_N)_{\Omega_k}\} &= \sum_k F_N(\mathbf{v}_N)_{\Omega_k} \\ \sum_k B_N(\mathbf{u}_N, q_N)_{\Omega_k} &= 0 \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}_N \in V_N$ e $\forall q_N \in Q_N$, dove i pedici N e Ω_k indicano che il prodotto scalare discreto viene calcolato per ogni elemento della formulazione e \mathbf{u}_N e p_N denotano le approssimazioni spettrali di \mathbf{u} e p . Sia N_g il numero globale di nodi in Ω , se si considerano la base di Lagrange ζ di grado N in ogni direzione nello spazio V_N e la base η nello spazio Q_N tale che

$$\zeta_j \in C^0(\bar{\Omega}) \cap V : \quad \zeta_j|_{\Omega_k} \in [Q_N(\Omega_k)]^2 \quad \forall \Omega_k \in \Omega, \quad j = 1, \dots, 2N_g,$$

e

$$\eta_l \in C^0(\bar{\Omega}) \cap Q : \quad \eta_l|_{\Omega_k} \in Q_N(\Omega_k) \quad \forall \Omega_k \in \Omega, \quad l = 1, \dots, N_g,$$

le approssimazioni spettrali sono date da

$$\mathbf{u}_N = \sum_{j=1}^{2N_g} u_j \zeta_j(\mathbf{x}) \quad p_N = \sum_{l=1}^{N_g} p_l \eta_l(\mathbf{x}). \quad (1.14)$$

Per riscrivere il problema discreto in forma algebrica, consideriamo le funzioni di base introdotte per gli spazi associati al metodo di Galerkin, cioè $V_N = \text{span}\{\zeta_j\}$ e $Q_N = \text{span}\{\eta_l\}$.

Denotiamo con U_N e P_N i vettori dei gradi di libertà (coefficienti nelle espansioni (1.14)) che rappresentano \mathbf{u}_N e p_N . Il problema discreto è equivalente a risolvere il sistema lineare nella forma

$$\begin{bmatrix} L_N + N_N(U_N) & B_N^T \\ B_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_N \\ P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_N \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove $L_N = [L_N(\zeta_j, \zeta_i)]_{ij}$, $B_N = [B_N(\zeta_j, \eta_l)]_{lj}$ e $N_N(\mathbf{u}_N) = [N_N(\mathbf{u}_N, \zeta_j, \zeta_i)]_{ij}$.

1.3.2 Condizione di compatibilità tra velocità e pressione

È noto che l'approssimazione di tipo Galerkin per le equazioni di Navier Stokes presenta instabilità per due motivi. Ad alti numeri di Reynolds, la natura convettiva dell'equazione porta ad oscillazioni spurie sul campo di velocità. Inoltre, per la natura punto sella del problema, si formano *modi spuri di pressione*, cioè funzioni $\tilde{p}_N \in Q_N$, $\tilde{p}_N \neq 0$ tali che

$$(\tilde{p}_N, \nabla \cdot \mathbf{v}_N) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_N \in V_N. \quad (1.15)$$

Quindi, se $(\mathbf{u}_N, p_N) \in V_N \times Q_N$ è soluzione del problema discreto, lo sono anche tutte le soluzioni del tipo $(\mathbf{u}_N, p_N + \alpha \tilde{p}_N) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. La presenza di modi spuri di pressione comporta la non unicità della pressione nelle equazioni di Navier Stokes discretizzate.

È tuttavia noto che la buona posizione del problema discreto dipende dal soddisfacimento della condizione di compatibilità tra gli spazi di velocità e pressione, chiamata condizione *inf-sup* o Ladyzenskaya-Babuska-Brezzi (LBB). Quindi il secondo tipo di instabilità viene eliminato richiedendo che sia soddisfatta la seguente condizione:

Lemma 1.1. \exists una costante $\beta_N > 0$ tale che:

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in V_N} \frac{B_N(\mathbf{v}_N, q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_V} \geq \beta_N \|q_N\|_Q, \quad \forall q_N \in Q_N. \quad (1.16)$$

Il soddisfacimento della condizione *inf-sup* comporta che non vi siano modi spuri di pressione dove la costante β_N potrebbe dipendere dal grado del polinomio N .

Da un punto di vista algebrico, la (1.15) si riscrive come

$$B_N \bar{q}_N = 0$$

per una pressione discreta \bar{q}_N corrispondente alla base scelta. Osserviamo che questa condizione equivale ad affermare che la matrice $B_N^T B_N$ abbia un autovalore nullo con molteplicità maggiore di 1.

Un altro concetto importante che è correlato con la condizione *inf-sup* discreta, è il concetto di *modi pseudo-spuri di pressione*. Per introdurre questo concetto, consideriamo il

seguinte problema agli autovalori generalizzati

$$B_N^T L_N^{-1} B_N \bar{q}_N = \mu M_p \bar{q}_N$$

dove M_p denota la matrice di massa in pressione. Indicando con β_N^* la radice quadrata del più piccolo autovalore dell'equazione precedente, si dice che il metodo numerico è dotato di *modi pseudo-spuri*, se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N^* = 0.$$

In [CHQ07] è mostrato che β_N^* tende asintoticamente a β_N^2 , dove β_N è la costante *inf-sup*.

1.3.3 Scelta degli spazi

Dobbiamo scegliere le basi per gli spazi V_N e Q_N . In entrambi i casi, usiamo la base di Lagrange, associata ai punti di Gauss-Lobatto. La scelta più semplice per la discretizzazione spettrale di velocità e pressione consiste nell'utilizzare lo stesso spazio polinomiale per entrambi i campi, chiamata $Q_N - Q_N$, in cui le funzioni di base di velocità e pressione sono calcolate sugli N nodi di Gauss-Lobatto.

Da un punto di vista numerico il soddisfacimento della condizione (1.16) richiede che lo spazio finito dimensionale delle velocità discrete sia più ricco rispetto a quello della pressione. Pertanto, elementi con lo stesso grado del polinomio per entrambe le variabili primitive \mathbf{u} e p soffrono della presenza di modi spuri di pressione. Una scelta che elimina completamente i modi spuri di pressione si basa sull'utilizzo di griglie diverse per i due campi. Analogamente agli elementi finiti, dove è comune utilizzare per l'approssimazione della pressione polinomi di un ordine inferiore rispetto a quelli delle velocità, si potrebbe pensare di utilizzare spazi $Q_N - Q_{N-1}$. Tuttavia questa scelta elimina i modi spuri nel caso di un singolo elemento spettrale, ma non soddisfa la condizione *inf-sup* nel caso in cui si utilizzi una discretizzazione con diversi elementi spettrali.

In generale, per il metodo degli elementi spettrali lo spazio della pressione dovrebbe essere due ordini inferiore rispetto a quello delle velocità, pertanto si utilizzano elementi spettrali $Q_N - Q_{N-2}$. La base utilizzata per espandere la pressione può essere valutata nelle radici del polinomio di Legendre di grado $N - 1$, nodi di Gauss. Questo è simile ad un approccio in cui si utilizza una griglia *sfalsata*, perché i nodi di pressione non coincidono con i nodi di velocità. In alternativa, si potrebbero usare gli $N - 1$ nodi interni di Gauss-Lobatto, in

questo modo i nodi di pressione coincidono con i nodi interni della velocità.

Gli integrali relativi al laplaciano e al termine noto sono approssimati utilizzando la formula di quadratura di Gauss-Lobatto sugli $N+1$ nodi, mentre quelli relativi al termine non lineare su un numero maggiore di nodi. Infatti, il numero dei punti nella regola di quadratura sono scelti in modo da integrare i termini differenziali lineari esattamente. È stato verificato che una regola di quadratura insufficiente a calcolare i termini non lineari produce degli errori di *aliasing* che riducono l'accuratezza della soluzione e nel peggiore dei casi portano ad instabilità numeriche. Questi errori possono essere evitati utilizzando una *over-integration*, cioè integrando i termini non lineari nella forma variazionale con una quadratura di ordine superiore rispetto a quella impiegata per integrare i termini lineari. Sebbene l'uso di questo tipo di integrazione dei prodotti non-lineari elimini il fenomeno dell'*aliasing*, allo stesso tempo aumenta il costo di calcolo. Infatti, sono necessari almeno $3/2$ nodi di quadratura in più per direzione per integrare correttamente le non-linearità quadratiche. In [AP02], viene utilizzata un'approssimazione del termine convettivo pseudo-spettrale che fa ricorso a questa regola, chiamata *regola $3/2 N$* .

Per la pressione e i termini di divergenza si potrebbe usare la stessa formula utilizzata per i termini lineari o la formula di Gauss sugli $N - 1$ nodi. Se si utilizza la formula di Gauss per il calcolo del termine di divergenza e si prendono come funzione test per la pressione i polinomi di Lagrange nei nodi, l'equazione di continuità è collocata sui punti di Gauss. In questo lavoro, si utilizza questa formula e la condizione *inf-sup* viene quindi soddisfatta valutando la pressione sugli $N - 1$ nodi.

È stato dimostrato che se si considera una partizione bidimensionale, con questa scelta degli spazi, la costante *inf-sup* del metodo è dell'ordine di $N^{-1/2}$. Infatti, abbiamo il seguente risultato [BM92]:

Lemma 1.2. *Quando si utilizzano elementi spettrali $Q_N - Q_{N-2}$, esiste una costante $\beta > 0$ tale che*

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in V_N} \frac{B_N(\mathbf{v}_N, q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_V} \geq \beta N^{-1/2} \|q_N\|_Q, \quad \forall q_N \in Q_N.$$

In figura (1.2) è riportato un esempio di griglia *sfalsata*, in cui si sono considerati 5 nodi per la pressione e 7 per la velocità.

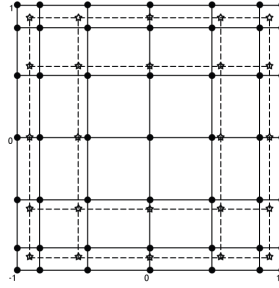


Figura 1.2: Griglia sfalsata di Legendre: i cerchi pieni rappresentano gli $N_x + 1 = N_y + 1 = 7$ nodi di Gauss-Lobatto/Gauss-Lobatto, mentre gli altri rappresentano gli $N_x - 1 = N_y - 1 = 5$ nodi di Gauss/Gauss

1.4 Stabilizzazione: *spectral vanishing viscosity*

Come si è detto prima, nell'approssimazione delle equazioni di Navier-Stokes, oltre all'instabilità sul campo delle pressioni, si ha instabilità anche sul campo delle velocità all'aumentare del numero di Reynolds. Infatti, nonostante i numerosi vantaggi del metodo agli elementi spettrali, ad alti numeri di Reynolds si hanno dei problemi di stabilità. Questo è dovuto ad una poca diffusione numerica delle approssimazioni spettrali che porta ad un accumulo dell'energia dissipata alle alte frequenze, e di conseguenza ad instabilità numeriche. Per risolvere questo problema si usano tecniche di stabilizzazione numerica che però portano ad una perdita di accuratezza del metodo spettrale.

Negli ultimi anni è stata sviluppata una tecnica di stabilizzazione, inizialmente introdotta per problemi iperbolici monodimensionali, che aggiunge all'operatore di diffusione un ulteriore termine dissipativo che agisce solo sui modi della velocità alle alte frequenze dell'approssimazione spettrale mantenendo l'accuratezza del metodo.

In [XP04] viene estesa questa tecnica, chiamata *spectral vanishing viscosity*, alle equazioni di Navier Stokes. Analogamente al caso iperbolico, si definisce il termine di diffusione artificiale $\Xi_N(\hat{\mathbf{u}}_N, \hat{\mathbf{v}}_N)$ nel modo seguente:

$$\Xi_N(\hat{\mathbf{u}}_N, \hat{\mathbf{v}}_N) = \varepsilon_N(Q^{1/2}(\nabla \hat{\mathbf{u}}_N), Q^{1/2}(\nabla \hat{\mathbf{v}}_N))$$

dove $\hat{\cdot}$ indica che si sta lavorando nello spazio spettrale di Legendre, ε_N è un parametro che tiene conto della lunghezza caratteristica degli elementi, mentre il significato di $Q^{1/2}(\nabla \hat{\mathbf{u}}_N)$

sarà chiarito in seguito. $Q^{1/2}$ è l'operatore di viscosità spettrale tale che

$$Q^{1/2}\Phi = \sum_{k,m=0}^N \widehat{Q}_{km}^{1/2} \Phi_{km} L_{km} \quad \forall \Phi, \quad \Phi(x, y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \Phi_{km} L_{km}(x, y).$$

In questo modo si possono riscrivere il termine viscoso e quello relativo alla diffusione artificiale introdotta, in forma compatta

$$\begin{aligned} L_N(\widehat{\mathbf{u}}_N, \widehat{\mathbf{v}}_N) + \Xi_N(\widehat{\mathbf{u}}_N, \widehat{\mathbf{v}}_N) &= \nu(\nabla \widehat{\mathbf{u}}_N, \nabla \widehat{\mathbf{v}}_N) + \varepsilon_N(Q^{1/2}(\nabla \widehat{\mathbf{u}}_N), Q^{1/2}(\nabla \widehat{\mathbf{v}}_N)) \\ &= \nu(Z^{1/2}(\nabla \widehat{\mathbf{u}}_N), Z^{1/2}(\nabla \widehat{\mathbf{v}}_N)) \end{aligned}$$

con

$$Z = I + \frac{\varepsilon_N}{\nu} Q.$$

Come già sottolineato, la viscosità artificiale non deve essere esplicitamente valutata nello spazio fisico ma può essere valutata come un operatore di convoluzione in uno spazio modale. Poiché l'approssimazione spettrale è spesso basata su basi nodali, bisogna proiettare l'operatore differenziale in uno spazio modale, applicare la stabilizzazione SVV e ritrasformare il nuovo operatore viscoso nello spazio fisico. Per fare ciò, definiamo la matrice differenziale D^r che valuta la derivata della base nodale $\widehat{\phi}_{ij}$ nella direzione r , che a sua volta indica la direzione x o y , nei nodi di quadratura (\bar{x}_k, \bar{y}_m)

$$D_{[l,n]}^r = \left. \frac{\partial \widehat{\phi}_{ij}}{\partial r} \right|_{(\bar{x}_k, \bar{y}_m)}.$$

Consideriamo la matrice M definita in (1.12), che valuta la base modale nei nodi di quadratura, dalla (1.13) deduciamo che la proiezione della derivata di $\widehat{\phi}_{ij}(\mathbf{x})$ sulle basi $L_{km}(\mathbf{x})$ è rappresentata da

$$(M^T W M)^{-1} M^T W D^r.$$

L'operatore SVV è quindi imposto applicando il filtro Q alla derivata proiettata delle basi, e infine si riproietta l'operatore sulle basi nodali, ottenendo la seguente formula

$$M Z^{1/2} (M^T W M)^{-1} M^T W D^r. \quad (1.17)$$

Il problema principale di questo tipo di stabilizzazione consiste nel valutare i coefficienti della matrice Q . Per fare ciò si parte dalla definizione dei coefficiente \widehat{Q}_k relativi al caso monodimensionale

$$\begin{cases} \widehat{Q}_k = 0 & k \leq m_N \\ \widehat{Q}_k = \exp \left\{ - \left(\frac{N-k}{m_N-k} \right)^2 \right\} & k > m_N \end{cases}$$

con m_N costante, la cui scelta è tipicamente $m_N \sim \sqrt{N}$ o $m_N = N/2$.

In Figura (1.3) è rappresentata la variazione di \widehat{Q}_k per tre diversi valori di m_N e per N fissato a 20. Si nota che aumentando il valore del parametro m_N , diminuisce il numero dei modi su cui viene applicata la stabilizzazione e allo stesso tempo diminuisce il valore del coefficiente \widehat{Q}_k . Infatti, per $m_N = N$ risulta $\widehat{Q}_k = 0$ per ogni valore di k e quindi non si aggiunge alcun tipo di stabilizzazione al problema.

In letteratura è possibile trovare diversi tipi di approccio per quanto riguarda l'applicazione

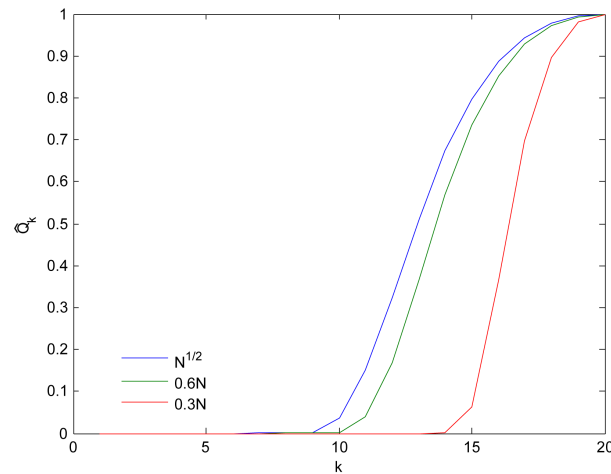


Figura 1.3: Variazione di \widehat{Q}_k per $N = 20$ e $m_N = \{\sqrt{N}, 0.3N, 0.6N\}$

della stabilizzazione SVV al problema di Navier Stokes. In [XP04], la stabilizzazione viene applicata ad ogni coordinata locale singolarmente. Infatti, se si pensasse di definire i coefficienti \widehat{Q}_{km} come prodotto tensore dei coefficienti riferiti al problema monodimensionale \widehat{Q}_k e \widehat{Q}_m , in forma forte si avrebbe

$$\nabla \cdot Q(\nabla \widehat{u}_N) = \sum_{k,m=0}^N \widehat{Q}_k \widehat{Q}_m ((\partial_x \widehat{u}_N)_{km} L'_k(X) L_m(Y) + (\partial_y \widehat{u}_N)_{km} L_k(X) L'_m(Y))$$

per $k > m_N$ e $m > m_N$. In questo modo però si stabilizza solo se si hanno alte frequenze lungo entrambe le direzioni. Se, invece, si applica la stabilizzazione ad ogni singola coordinata, se non ci sono alte frequenze lungo una direzione non si stabilizza in quella direzione e viceversa.

Per fare ciò si definisce Q , partendo dalla definizione data nel caso monodimensionale, come segue:

$$Q(\nabla \hat{\mathbf{u}}_N) = \begin{pmatrix} Q_1(\partial_x \hat{\mathbf{u}}_N) & Q_2(\partial_y \hat{\mathbf{u}}_N) \\ Q_1(\partial_x \hat{\mathbf{v}}_N) & Q_2(\partial_y \hat{\mathbf{v}}_N) \end{pmatrix},$$

dove

$$Q_1(\partial_x \hat{\mathbf{u}}_N(\cdot, y)) = \sum_{k=0}^N \hat{Q}_k(\partial_x \hat{\mathbf{u}})_k(Y) L_k(X) \quad \text{e} \quad Q_2(\partial_y \hat{\mathbf{u}}_N(x, \cdot)) = \sum_{k=0}^N \hat{Q}_k(\partial_y \hat{\mathbf{u}})_k(X) L_k(Y).$$

Quindi il termine SVV nella formulazione forte diventa

$$\nabla \cdot Q(\nabla \mathbf{u}_N) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N \hat{Q}_k(\partial_x \hat{\mathbf{u}})_k(Y) L'_k(X) + \sum_{m=0}^N \hat{Q}_m(\partial_x \hat{\mathbf{v}})_m(X) L'_m(Y) \\ \sum_{k=0}^N \hat{Q}_k(\partial_y \hat{\mathbf{u}})_k(Y) L'_k(X) + \sum_{m=0}^N \hat{Q}_m(\partial_y \hat{\mathbf{v}})_m(X) L'_m(Y) \end{pmatrix}.$$

Una definizione alternativa del filtro è quella data in [KS06]. Questo tipo di filtro sarà quello utilizzato nelle nostre simulazioni, in quanto utilizza un approccio più vicino al nostro tipo di implementazione.

Si considera come base modale il prodotto tensore dei polinomi di Legendre sul quadrato di riferimento $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in [-1, 1]$

$$L_{i(k,m)} = L_k(\bar{x}) L_m(\bar{y}), \quad k, m = 0, \dots, N$$

dove $i(k, m)$ è l'indice che rappresenta le coppie (k, m) , che come evidenziato in precedenza, nel nostro caso coincide con

$$i(k, m) = k + m \cdot (N + 1).$$

Il filtro viene quindi definito, su ogni elemento in funzione di entrambe le coordinate, come segue

$$\begin{cases} \hat{Q}_{i(k,m),i(k,m)} = 0 & k + m \leq m_N \\ \hat{Q}_{i(k,m),i(k,m)} = \exp \left\{ - \left(\frac{N - (k + m)}{m_N - (k + m)} \right)^2 \right\} & k + m > m_N \end{cases}$$

dove si considera $m_N = 2\sqrt{N} - 1$ e il parametro $\varepsilon_N = 1/N$. L'applicazione di questo filtro all'espansione di un prodotto tensore che si estende su uno spazio bilineare, generalmente implica che più del 50% dei modi totali vengono modificati.

I due filtri presentati hanno la caratteristica comune che solo i modi superiori a m_N sono modificati, ma la natura della forma del decadimento delle alte frequenze non è ancora stata completamente esplorata.

Ritorniamo alle equazioni di Navier Stokes, e indichiamo con $Z^{1/2}$ la matrice che si ricava dall'espressione (1.17) definita come segue

$$Z^{1/2} = M \left(I + \frac{\varepsilon_N}{\nu} Q \right)^{1/2} (M^T W M)^{-1} M^T W.$$

È possibile scrivere il seguente problema discreto stabilizzato:

trovare $\mathbf{u}_N \in V_N$ e $p_N \in Q_N$ tali che

$$\begin{aligned} \nu (Z^{1/2}(\nabla \mathbf{u}_N), Z^{1/2}(\nabla \mathbf{v}_N))_N + ((\nabla \mathbf{u}_N \cdot) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N - (\nabla \cdot \mathbf{v}_N, p_N)_N &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_N, q_N)_N &= 0. \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v}_N \in V_N$ e $q_N \in Q_N$, su ogni Ω_k . Esso si riconduce alla forma non stabilizzata se si considera $\varepsilon_N = 0$ oppure $m_N = N$ o $m_N = 2N$, in base alla scelta del filtro effettuata.

Risoluzione del problema stazionario

In questo capitolo, viene presentato il metodo di Newton per la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes stazionarie. Così come gli altri metodi di iterazione non lineari, anche quello di Newton, presentato nella §2.1, partendo da un dato iniziale, ad ogni passo risolve un problema linearizzato. Lo svantaggio principale di questo metodo è che il raggio dell'intorno di convergenza è tipicamente proporzionale al parametro viscoso ν . Quindi, ad alti numeri di Reynolds, se il dato iniziale non è troppo vicino alla soluzione, potrebbe non convergere. In letteratura è possibile trovare diversi approcci proposti per risolvere questo tipo di problema.

Il metodo esaminato in questo lavoro è quello di Newton preconditionato. Il preconditionatore, chiamato *precondizionatore di Stokes*, è creato in modo da sfruttare le equazioni non stazionarie per derivare un'equazione per il calcolo degli incrementi di Newton. La descrizione del metodo è riportata nella §2.3, mentre nella §2.2 vengono descritti i risolutori Newton-Krylov e l'algoritmo di Newton inesatto, che saranno utilizzati per l'implementazione.

2.1 Il metodo di Newton

Seguendo le notazioni riportate in [DFM02] riscriviamo il problema di Navier Stokes nella forma più generale:

trovare $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ tale che

$$F(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + T\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.1)$$

dove T è un operatore lineare e G una mappa in C^∞ . L'operatore lineare T agisce sulla forzante e produce la soluzione $T\mathbf{f} = \mathbf{x}$ del problema di Stokes con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee per la velocità, mentre la mappa G è definita come segue:

$$G(\mathbf{x}) := \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f}.$$

Con le definizioni appena date, il problema (2.1) ammette come soluzione \mathbf{x} la soluzione del problema di Navier Stokes. Indichiamo con D_{NS} la derivata di Fréchet del problema, risulta

$$D_{NS} = D_{\mathbf{x}}F = 1 + T(D_{\mathbf{x}}G)$$

dove $D_{\mathbf{x}}$ indica la derivata direzionale dell'operatore F nella direzione \mathbf{x} . In questo modo, è possibile calcolare soluzioni non singolari del problema solo se la derivata di Fréchet esiste, o precisamente, se la derivata di Fréchet della mappa F lungo la direzione \mathbf{x} , è un isomorfismo di $V \times Q$. Questa proprietà è verificata quando la derivata di Fréchet è limitata dal basso, cioè quando esiste una costante $C > 0$ tale che $\forall \mathbf{y} \in V \times Q$ risulta

$$\|(D_{\mathbf{x}}F)\mathbf{y}\|_{V \times Q} = \|\mathbf{y} + T(D_{\mathbf{x}}G)\mathbf{y}\|_{V \times Q} \geq C\|\mathbf{y}\|_{V \times Q}.$$

Indichiamo con k l'indice dell'iterazione. Il metodo di Newton applicato al problema discreto richiede la risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} D_{NS}(\mathbf{x}_N^k)(\delta \mathbf{x}_N^k) & = -F(\mathbf{x}_N^k) \\ \mathbf{x}_N^{k+1} & = \mathbf{x}_N^k + \delta \mathbf{x}_N^k. \end{cases} \quad (2.2)$$

Il vantaggio del metodo di Newton è la convergenza quadratica: questo comporta che l'errore, definito come la differenza tra \mathbf{x}_N^k e la soluzione esatta \mathbf{x} , al passo k è limitato superiormente a meno di una costante dal quadrato dell'errore all'iterata precedente.

Applichiamo il metodo di Newton al problema di Navier Stokes discretizzato. Data l'iterata (\mathbf{u}_N^k, p_N^k) si incomincia calcolando il residuo non lineare associato alla formulazione debole del problema discretizzato. Questo è rappresentato dalla coppia $(R^k(\mathbf{v}_N), r^k(q_N))$

definite come:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k &= \sum_k \mathbf{F}_N(\mathbf{v}_N)_{\Omega_k} - \sum_k \{ \mathbf{L}_N(\mathbf{u}_N^k, \mathbf{v}_N)_{\Omega_k} - \mathbf{N}_N(\mathbf{u}_N^k, \mathbf{u}_N^k, \mathbf{v}_N)_{\Omega_k} - \mathbf{B}_N(\mathbf{v}_N, \mathbf{p}_N^k)_{\Omega_k} \}, \\ \mathbf{r}^k &= - \sum_k \mathbf{B}_N(\mathbf{u}_N^k, \mathbf{q}_N)_{\Omega_k} \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}_N \in \mathbf{V}_N$ e $\forall \mathbf{q}_N \in \mathbf{Q}_N$. \mathbf{L}_N , $\mathbf{N}_N(\mathbf{u}_N)$ e \mathbf{B}_N sono state definite nel capitolo precedente. Eliminando i termini quadratici in $\delta \mathbf{u}_N^k$, possiamo formulare il metodo di Newton per il problema di Navier Stokes come segue:

trovare $(\mathbf{u}_N^{k+1}, \mathbf{p}_N^{k+1}) \in \mathbf{V}_N \times \mathbf{Q}_N$ tale che $\forall (\mathbf{v}_N, \mathbf{q}_N) \in \mathbf{V}_N \times \mathbf{Q}_N$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_N(\delta \mathbf{u}_N^k, \mathbf{v}_N) + \mathbf{N}_N(\delta \mathbf{u}_N^k, \mathbf{u}_N^k, \mathbf{v}_N) + \mathbf{N}_N(\mathbf{u}_N^k, \delta \mathbf{u}_N^k, \mathbf{v}_N) + \mathbf{B}_N(\mathbf{v}_N, \delta \mathbf{p}_N^k) &= \mathbf{R}^k, \\ \mathbf{B}_N(\delta \mathbf{u}_N^k, \mathbf{q}_N) &= \mathbf{r}^k. \end{aligned}$$

su ogni Ω_k .

La soluzione di questo problema prende il nome di correzione di Newton, e ad ogni passo si aggiorna l'iterata $\mathbf{u}_N^{k+1} = \mathbf{u}_N^k + \delta \mathbf{u}^k$ e $\mathbf{p}_N^{k+1} = \mathbf{p}_N^k + \delta \mathbf{p}_N^k$. Nel caso del problema formulato in coordinate polari la matrice relativa al termine convettivo linearizzato, scritto in forma forte per semplicità di notazione, è data da:

$$\begin{aligned} &\mathbf{N}(\delta \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + \mathbf{N}(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = \\ &\left[\begin{array}{cc} \mathbf{N}(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}_r^k, \mathbf{v}_r) + \mathbf{N}(\delta \mathbf{u}_r^k, \mathbf{u}_r^k, \mathbf{v}_r) & \mathbf{N}(\delta \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{u}_r^k, \mathbf{v}_r) + \mathbf{N}_1(\delta \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{v}_r) + \mathbf{N}_1(\mathbf{u}_\phi^k, \delta \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{v}_r) \\ \mathbf{N}(\delta \mathbf{u}_r^k, \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{v}_\phi) + \mathbf{N}_2(\delta \mathbf{u}_r^k, \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{v}_\phi) & \mathbf{N}(\mathbf{u}^k, \delta \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{v}_\phi) + \mathbf{N}(\delta \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{v}_\phi) + \mathbf{N}_2(\mathbf{u}_r^k, \delta \mathbf{u}_\phi^k, \mathbf{v}_\phi) \end{array} \right], \end{aligned}$$

dove \mathbf{N} , \mathbf{N}_1 e \mathbf{N}_2 sono le matrici definiti in (1.9).

È facile verificare la consistenza del metodo. Infatti, se poniamo nell'equazione precedente $\mathbf{u}^k = \mathbf{u}$ e $\mathbf{p}^k = \mathbf{p}$, i residui $\mathbf{R}^k(\mathbf{v}_N)$, $\mathbf{r}^k(\mathbf{q}_N)$ si annullano e il sistema ammette l'unica soluzione $\delta \mathbf{u}^k = 0$ e $\delta \mathbf{p}^k = 0$.

Come già sottolineato, lo svantaggio principale è che il raggio di convergenza è in generale proporzionale alla viscosità ν , quindi all'aumentare del numero di Reynolds sarà necessaria una soluzione iniziale sempre più vicina ad un ramo di soluzioni non singolari per garantirne la convergenza.

2.2 Il metodo dei sottospazi di Krylov

Uno tra i diversi svantaggi del metodo di Newton riguarda il condizionamento della matrice Jacobiana. La struttura di D_{NS} dipende dalla scelta fatta per la discretizzazione delle equazioni, ma in generale è molto mal condizionata. Nel caso delle equazioni di Navier Stokes incomprimibili il condizionamento diventa grande quando Re è alto o quando si usa una *mesh* molto raffinata. In questo modo i classici metodi iterativi non funzionano per la risoluzione di tali sistemi e sono necessarie tecniche di preconditionamento.

Negli ultimi anni è stato sviluppato l'algoritmo di *Newton-Krylov* dove si combina il metodo di Newton per il calcolo delle soluzioni delle equazioni non lineari e quello dei sottospazi di Krylov per il calcolo degli incrementi. I metodi dei sottospazi di Krylov sono approcci utilizzati per risolvere sistemi lineari di grandi dimensioni. Nel caso del metodo di Newton viene risolto il sistema (2.2) utilizzando il sottospazio di Krylov, \mathbf{K}_j

$$\mathbf{K}_j = \text{span}\{\mathbf{r}^0, D_{NS}\mathbf{r}^0, D_{NS}^2\mathbf{r}^0, \dots, D_{NS}^{j-1}\mathbf{r}^0\}; \quad \mathbf{r}^0 = -F(\mathbf{x}) - D_{NS}\delta\mathbf{x}^0.$$

Si noti che l'indice di iterazione non lineare, k , è stato trascurato. Questo perché l'iterazione di Krylov è eseguita ad un k fissato. Poiché la soluzione di Krylov rappresenta una correzione di Newton, l'iterazione iniziale $\delta\mathbf{x}^0$ è tipicamente pari a zero. Questo è ragionevole in quanto il valore a cui deve convergere $\delta\mathbf{x}$ alla fine delle iterazioni di Newton deve avvicinarsi allo zero.

In questo modo la matrice Jacobiana non viene costruita esplicitamente ma si richiede solo la valutazione di una serie di prodotti matrice-vettore, per questo è noto come metodo *matrix-free*. Il principale vantaggio è quindi quello di avere la convergenza del metodo di Newton senza i costi di costruzione e memorizzazione della Jacobiana. Una grande varietà di metodi iterativi rientrano nella categoria dei metodi dei sottospazi di Krylov. Tra questi il Generalized Minimal RESidual (GMRES) e il Bi-Conjugate Gradient STABILized (BICGSTAB).

L'uso di una tecnica iterativa per risolvere il metodo di Newton implica un calcolo approssimato dell'incremento $\delta\mathbf{x}^k$, per questo l'algoritmo è chiamato *Newton inesatto*. In pratica il metodo inesatto consiste nel seguente criterio di convergenza ad ogni iterazione lineare:

$$\|D_{NS}\delta\mathbf{x}^k + F(\mathbf{x}^k)\|_2 < \gamma\|F(\mathbf{x}^k)\|_2 \quad (2.3)$$

dove γ è una costante positiva più piccola di uno. In questo contesto γ è spesso chiamato *termine forzante*, dato che il suo ruolo è quello di forzare la riduzione del residuo. Si noti che $D_{NS}\delta\mathbf{x}^k + F(\mathbf{x}^k)$ è sia il residuo del problema (2.2) che il modello lineare locale di $F(\mathbf{x}^k + \delta\mathbf{x}^k)$ dato dallo sviluppo in serie di Taylor di F in \mathbf{x}^k . In questo modo, se F è ben approssimata dal modello lineare locale al passo $\delta\mathbf{x}^k$, riducendo il residuo lineare per soddisfare il criterio (2.3), si ridurrà anche il residuo non lineare.

È stato dimostrato che la convergenza locale del metodo di Newton inesatto è controllata dal termine forzante. Se γ è sufficientemente piccolo si ritrova la convergenza quadratica del metodo di Newton, ma ci deve essere un *trade-off* tra lo sforzo richiesto per risolvere il sistema ad una piccola tolleranza e il numero risultante di iterazioni non lineari. Più alto è il valore di γ meno iterazioni di GMRES saranno necessarie ma più iterazioni non lineari, mentre un valore piccolo richiede più iterazioni di Krylov per ogni iterazione di Newton.

A tal proposito, è stato formulato il teorema, riportato in [ESW05]

Teorema 2.1. *Sia $\mathbf{e}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}^k$ l'errore al k-esimo passo dell'iterata di Newton inesatto. Se \mathbf{x}^0 è sufficientemente vicino ad \mathbf{x} , allora esistono le costanti c_1 e c_2 tali che*

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| \leq c_1 \|\mathbf{e}_k\|^2 + c_2 \gamma \|\mathbf{e}_k\|.$$

Il primo termine della relazione è l'errore associato al metodo di Newton esatto, mentre il secondo è l'errore aggiuntivo dovuto all'approssimazione della matrice Jacobiana.

Nell'applicare l'algoritmo NK a problemi come quello di Navier Stokes si incontrano diversi problemi. Infatti, come sottolineato in precedenza, il metodo di Newton applicato a queste equazioni converge velocemente solo per un certo valore dei parametri, quindi per certi valori del numero di Reynolds. In questo caso si potrebbe avere convergenza nelle prime iterazioni e poi il metodo potrebbe impazzire senza un apparente motivo. In pratica, un metodo quasi-Newton per essere efficiente richiede *globalizzazione*, cioè integrazione con procedure che aumentino la probabilità di convergenza quando il dato iniziale \mathbf{x}^0 non è vicino alla soluzione. Queste strategie di globalizzazione partendo da una buona iterata iniziale portano nell'intorno di convergenza delle radici desiderate del metodo di Newton.

Di conseguenza, l'algoritmo *Newton-Krylov* è un metodo di iterazione nidificato che consiste in almeno due, di solito quattro, cicli annidati. I primi livelli, che ne danno il nome, sono il ciclo sugli incrementi di Newton e quello che costruisce il sottospazio di Krylov dal

quale si ricava ogni correzione. All'interno del metodo di Krylov di solito viene richiesto un preconditionatore, diretto o iterativo, mentre al di fuori del ciclo di Newton si applica la tecnica di globalizzazione, che potrebbe essere un passo temporale implicito o un'altra forma di continuazione.

2.3 Il metodo di Newton Precondizionato

Negli ultimi anni è stata proposta una variante del metodo di Newton [MT95, BT97, Maī09] che permette di calcolare la soluzione stazionaria del problema di Navier Stokes anche all'aumentare del numero di Reynolds. Il metodo sfrutta le proprietà del problema non stazionario per risolvere quello stazionario. Si utilizzano le equazioni non stazionarie per ricavare un problema lineare dal quale è possibile calcolare gli incrementi di Newton. La risoluzione del problema di Navier Stokes non stazionario al tendere all'infinito del tempo potrebbe condurre ad una soluzione stazionaria, ma in alcuni casi l'utilizzo di questo problema non è efficiente perché la soluzione stazionaria potrebbe essere instabile. Quando si sceglie un metodo di evoluzione temporale per globalizzare il metodo di Newton, le sue proprietà di stabilità sono di fondamentale importanza: l'accuratezza temporale non è importante in questa applicazione. Lo schema di avanzamento temporale di Eulero implicito è interessante, perché è incondizionatamente stabile.

Questo metodo è stato usato per calcolare stati stazionari del flusso sferico di Couette [MT95] e di una vasta gamma di flussi convettivi. È stata dimostrata la sua efficienza anche per la ricerca di soluzioni stazionarie stocastiche [Maī09], in cui i dati incerti del modello (condizioni iniziali, forzante, condizioni al bordo) vengono rappresentati in funzione di un numero finito di variabili casuali con densità nota.

Siano L e N rispettivamente le matrici relative al termine di laplaciano e a quello convettivo, mentre B la matrice corrispondente al termine di divergenza. È stato mostrato come un codice in grado di risolvere le equazioni temporali di Navier Stokes scritte nella forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - (\mathbf{L} + \mathbf{N})\mathbf{u} - \mathbf{B}^T\mathbf{p}$$

possa essere adattato in modo da poter calcolare attraverso il metodo di Newton la soluzione stazionaria del fluido, cioè la soluzione di

$$F - (L + N)U - B^T P = 0.$$

Si parte dal problema evolutivo discretizzato mediante lo schema di Eulero Implicito con trattamento esplicito del termine non lineare:

$$\begin{cases} (M + \Delta t L)U^{n+1} + \Delta t B^T P^{n+1} = (\Delta t F + M U^n - \Delta t N U^n) \\ B U^{n+1} = 0 \end{cases}$$

dove M indica la matrice di massa, l'indice n si riferisce all'iterazione temporale e Δt indica il passo temporale. Questa discretizzazione temporale risolve il problema lineare di Stokes per le incognite al passo $n + 1$:

$$\begin{bmatrix} U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} \Delta t F + M U^n - \Delta t N U^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dove

$$S = \begin{bmatrix} (M + \Delta t L) & \Delta t B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema (2.4) viene risolto ricavando l'espressione per la velocità

$$U^{n+1} = (M + \Delta t L)^{-1} (\Delta t F + M U^n - \Delta t N U^n - \Delta t B^T P^{n+1}), \quad (2.5)$$

che sostituita nel termine di divergenza, fornisce l'espressione per la pressione e la velocità in forma compatta:

$$P^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (B(M + \Delta t L)^{-1} B^T)^{-1} B(M + \Delta t L)^{-1} (\Delta t F + M U^n - \Delta t N U^n)$$

$$U^{n+1} = (I - (M + \Delta t L)^{-1} B^T (B(M + \Delta t L)^{-1} B^T)^{-1} B) (M + \Delta t L)^{-1} (\Delta t F + M U^n - \Delta t N U^n).$$

Cerchiamo la soluzione stazionaria del problema (2.4), ovvero

$$\begin{bmatrix} U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^n \\ P^n \end{bmatrix}.$$

Perciò applichiamo il metodo di Newton al problema e indichiamo con \mathbf{U}^k e \mathbf{P}^k la soluzione dopo la k -esima iterazione del metodo. In questo modo l'iterata successiva è data da $\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \delta\mathbf{U}^k$ e $\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \delta\mathbf{P}^k$ e l'incremento soddisfa l'equazione:

$$S^{-1} \begin{bmatrix} M\delta\mathbf{U}^k - \Delta t N_{\mathbf{U}} \delta\mathbf{U}^k \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U}^k \\ \delta\mathbf{P}^k \end{bmatrix} = -S^{-1} \begin{bmatrix} \Delta t F + M\mathbf{U}^k - \Delta t N\mathbf{U}^k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{P}^k \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

dove $N_{\mathbf{U}}$ indica il termine trilineare linearizzato scritto nella forma $N_{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^k \nabla \delta\mathbf{U}^k + \delta\mathbf{U}^k \nabla \mathbf{U}^k$.

L'idea chiave del metodo è che la differenza tra due passi consecutivi del problema di Eulero implicito/esplicito fornisce un operatore le cui radici sono le stesse di $F - (L + N)\mathbf{U} - B^T \mathbf{P}$, ma la cui matrice Jacobiana è meglio condizionata. Ciò può essere visto moltiplicando per S il sistema (2.6):

$$\begin{bmatrix} M\delta\mathbf{U}^k - \Delta t N_{\mathbf{U}} \delta\mathbf{U}^k \\ 0 \end{bmatrix} - S \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U}^k \\ \delta\mathbf{P}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t F + M\mathbf{U}^k - \Delta t N\mathbf{U}^k \\ 0 \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} \mathbf{U}^k \\ \mathbf{P}^k \end{bmatrix}$$

e, dopo alcune semplificazioni, riscrivendolo come segue:

$$\begin{bmatrix} L + N_{\mathbf{U}} & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U}^k \\ \delta\mathbf{P}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - (L + N)\mathbf{U}^k - B^T \mathbf{P}^k \\ -B\mathbf{U}^k \end{bmatrix},$$

dove è possibile riconoscere la forma classica del metodo di Newton.

Poiché S^{-1} è l'operatore del passo temporale del problema di Stokes, esso è stato chiamato *precondizionatore di Stokes*. Per $\Delta t \rightarrow 0$ il preconditionamento diventa più debole infatti $(M + \Delta t L)^{-1} \rightarrow M$ e allo stesso tempo S diventa singolare, mentre per $\Delta t \rightarrow \infty$ si ha $(M + \Delta t L)^{-1} \rightarrow (L)^{-1}$ che preconditiona l'operatore mal condizionato $N_{\mathbf{U}} + L$.

Il termine a destra dell'uguale nel sistema (2.6) non è altro che la differenza tra la soluzione calcolata da (2.4) e la soluzione al passo precedente. Allo stesso modo il termine a sinistra calcola la differenza tra due passi temporali consecutivi della soluzione del problema linearizzato.

In pratica, l'algoritmo consiste in tre cicli annidati. Il livello esterno è costituito dal metodo di Newton al quale viene calcolata l'iterata al passo $k + 1$. All'interno di questo ciclo in un primo momento viene calcolato il *right-hand side* della (2.6) calcolando un passo temporale di Eulero esplicito e risolvendo il sistema in pressione con il metodo del Gradiente

Coniugato (GC). È possibile utilizzare questo algoritmo, che calcola soluzioni numeriche di sistemi lineari le cui matrici sono simmetriche, in quanto il complemento di Schur nel nostro caso è dato da

$$\Sigma = B(M + \Delta t L)^{-1} B^T \quad (2.7)$$

risulta simmetrico. Noto il *rhs*, il sistema (2.6) non viene calcolato esplicitamente ma attraverso un metodo iterativo che richiede solo la valutazione dell'azione della matrice sul vettore. Il secondo step consiste infatti nel calcolo degli incrementi attraverso uno dei metodi iterativi, quali il GMRES o il BiCGSTAB. All'interno di questo ciclo si risolve il sistema in pressione, in cui il complemento di Schur coincide con quello definito nell'espressione (2.7). Questo step è quello più costoso dal punto di vista computazionale in quanto ad ogni passo del GMRES (BiCGSTAB), bisogna risolvere un altro sistema lineare con il GC. Il risolutore esterno utilizzato per il calcolo degli incrementi, fornisce la soluzione quando si raggiunge la tolleranza fissata e quindi quando è soddisfatta la relazione (2.3). A questo punto si calcolano le iterate di Newton al passo $k + 1$, si aggiorna la soluzione e si ripete il procedimento fino a convergenza del metodo di Newton. L'algoritmo è schematizzato in Figura 2.1.

È facile dedurre, che l'efficienza del metodo dipende sia dal tasso di convergenza delle iterazioni di Newton, quindi dal numero di iterazioni necessarie affinché il metodo di Newton converga, sia dal numero di integrazioni del sistema di Navier Stokes linearizzato per stimare gli incrementi.

La soluzione del metodo di Newton preconditionato non dipende dal valore del Δt , esso può assumere un valore arbitrariamente grande, in quanto non rappresenta più il passo temporale ma è un parametro puramente algebrico. La scelta di questo parametro avviene esclusivamente in base all'efficienza del metodo. Infatti, aumentando il Δt aumenta la convergenza del metodo di Newton, ma allo stesso tempo aumenta anche il numero di integrazioni in tempo del problema linearizzato. Bisogna quindi cercare un Δt che bilanci la riduzione del residuo da un'iterata all'altra con il numero di iterazioni necessarie per ricavare δU^k .

Inoltre, il costo computazionale aumenta all'aumentare del numero di Reynolds. Infatti, per Re grandi aumenta il numero di integrazioni in tempo, e questo implica una degradazione del condizionamento del problema.

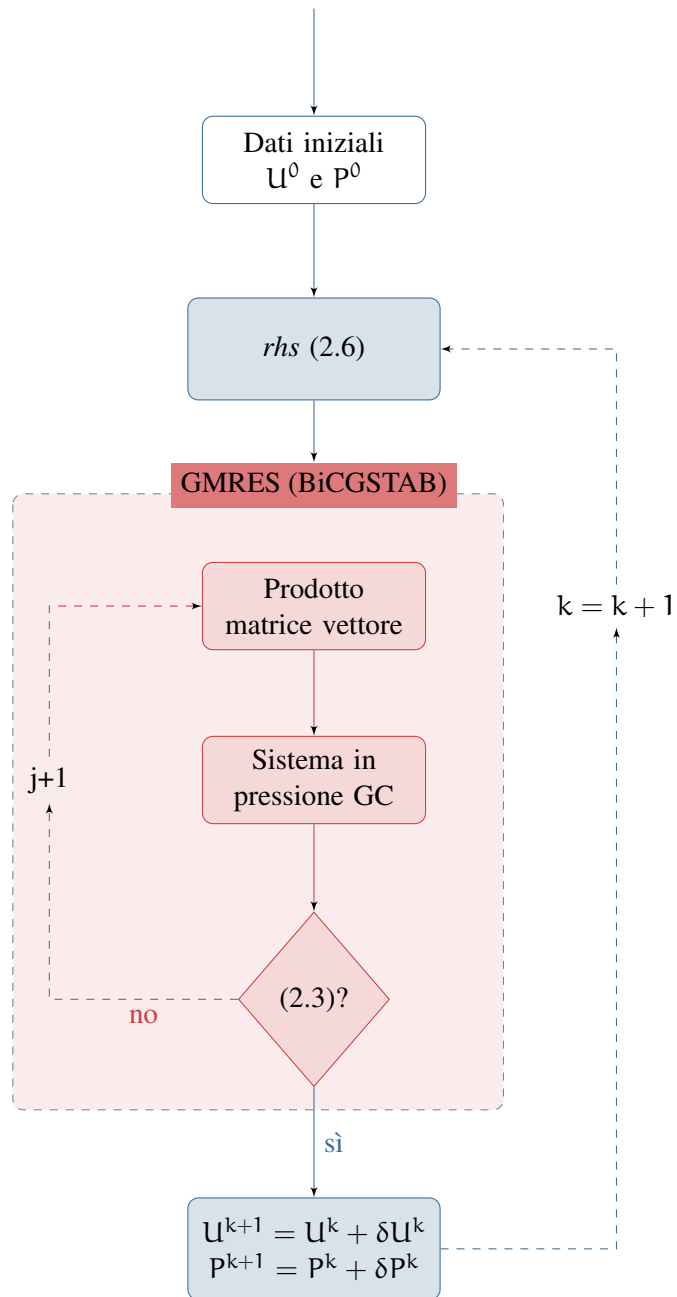


Figura 2.1: Schema dell'algoritmo

Soluzioni stazionarie del flusso in cavità

Il problema della cavità viene spesso utilizzato come problema benchmark per valutare l'accuratezza e l'efficienza di metodi numerici. In letteratura è possibile trovare numerosi studi riguardanti il flusso in cavità che si riconducono principalmente alla ricerca della soluzione stazionaria delle equazioni di Navier Stokes al crescere del numero di Reynolds. Tuttavia, il comportamento del fluido ad alti numeri di Reynolds e il valore di quest'ultimo al quale si verifica la prima biforcazione di Hopf non sono ancora chiari. È stato osservato che per alti valori di questo parametro la soluzione oscilla e non converge ad uno stato stazionario se si usa una *mesh* lasca, mentre converge se si utilizza una *mesh* più raffinata. Ciò accade perché una griglia lasca non è in grado di riprodurre i vortici più piccoli presenti negli angoli della cavità. Poiché le soluzioni dipendono dalla dimensione della *mesh*, è stato ipotizzato che la soluzione stazionaria esista e che per trovarla bisogna usare una griglia molto raffinata.

In questo Capitolo viene applicato il metodo introdotto precedentemente a questo problema. Lo schema sviluppato dipende principalmente da due parametri: il passo temporale Δt e la tolleranza γ . Nella §3.1 l'algoritmo viene quindi validato attraverso test che comportano diversi valori di questi parametri, verificando quanto dedotto nella sezione precedente. Pertanto, proviamo che la soluzione è indipendente dal passo temporale, e che aumentando Δt aumenta la convergenza del metodo di Newton ma allo stesso tempo aumenta il numero di integrazioni temporali. Inoltre, verifichiamo che una tolleranza piccola richiede più iterazioni del risolutore lineare ma meno iterazioni non lineari.

Infine, nella §3.2, confrontiamo il metodo di Newton preconditionato con il metodo di

Newton standard e nella §3.3, mostriamo le soluzioni ottenute per questo problema fino ad un valore del numero di Reynolds pari a 20000.

3.1 Scelta dei parametri

Per le nostre applicazioni consideriamo il caso standard del problema in cavità descritto da un fluido contenuto in un dominio quadrato con condizioni al contorno di Dirichlet su tutti i lati, tre lati fissi e uno in movimento, e con il termine forzante $\mathbf{f} = 0$. Come noto la difficoltà di questo problema è dovuta alle singolarità presenti agli angoli superiori della cavità, dove il valore al bordo della velocità orizzontale è discontinuo.

La Figura 3.1 mostra le condizioni al contorno e la schematica dei vortici principali generati dal flusso in cavità: il vortice principale centrale, e quelli secondari in alto a sinistra e in basso a destra e sinistra.

Per questo problema le rappresentazioni grafiche sono state ottenute attraverso l'utilizzo

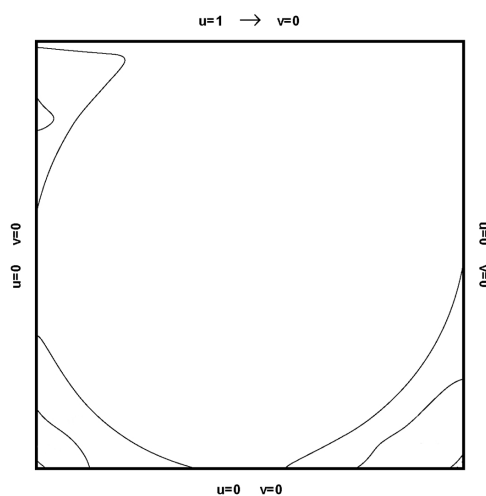


Figura 3.1: Flusso in cavità

della libreria `CHQZ` di `Matlab` [Ger07]. Questa libreria oltre a permettere la risoluzione di problemi al bordo in domini 1D, 2D e 3D attraverso i metodi spettrali su un singolo dominio e i metodi agli elementi spettrali con integrazione numerica, consente di visualizzare la soluzione noti i valori nei nodi.

Il caso test che consideriamo in questa sezione è il flusso a $Re = 1000$. In Figura 3.2 sono rappresentati il modulo della velocità, il campo di pressione e i contorni della *streamline* della soluzione stazionaria calcolata con lo schema di Newton presentato, utilizzando elementi $Q_6 - Q_4$ su una griglia uniforme 50×50 . La Figura mostra un vortice centrale e due vortici secondari agli angoli inferiori. In Figura 3.3 sono rappresentati i profili di velocità per le sezioni passanti per il centro della cavità da noi ottenuti e quelli riportati in [Ert09]. Si osserva che entrambe le componenti si annullano in prossimità del centro della cavità, mentre la prima si annulla in zero e assume valore massimo in uno, la seconda si annulla in entrambi gli estremi.

Per analizzare la convergenza della soluzione stazionaria rispetto alle iterazioni, usiamo la norma del residuo, indicata con $\|R\|_{L^2(\Omega)}$, dove R è definito come segue:

$$R = \frac{1}{\Delta t} \left\{ S^{-1} \begin{bmatrix} \Delta t F + M U^k - \Delta t N U^k \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U^k \\ P^k \end{bmatrix} \right\}.$$

Il metodo di Newton viene risolto utilizzando un approccio di tipo Newton-Krylov, gli incrementi non vengono quindi calcolati esattamente ma attraverso un algoritmo iterativo come il GMRES o il BiCGSTAB. Il metodo di Krylov utilizzato nelle simulazioni è il GMRES. Infatti, nonostante ad ogni iterazione bisogna costruire i sottospazi di Krylov e quindi memorizzare i rispettivi vettori, solitamente il GMRES richiede meno iterazioni per il calcolo della soluzione.

3.1.1 Convergenza del metodo di Newton

Come prima analisi, studiamo il comportamento del metodo a diversi valori del numero di Reynolds. La Figura 3.4 mostra la convergenza della norma del residuo per $Re = 100$ e 1000 . Il calcolo degli incrementi di Newton è effettuato con un criterio di arresto per il risolutore lineare pari a $\gamma = 10^{-1}$ e utilizzando un passo temporale $\Delta t = 2$.

Il grafico rappresenta la norma del residuo in funzione del numero di iterazioni temporali, in cui ad ogni quadrato o pallino corrisponde un'iterazione di Newton. Dal grafico è evidente che il numero di iterazioni temporali dipende dal numero di Reynolds. Questo comportamento indica il degrado del condizionamento del problema per il calcolo degli incrementi di Newton all'aumentare del numero di Reynolds. In particolare, per $Re = 10^2$ ad ogni iterazione non lineare è necessaria un'iterazione del GMRES per risolvere il problema (2.2)

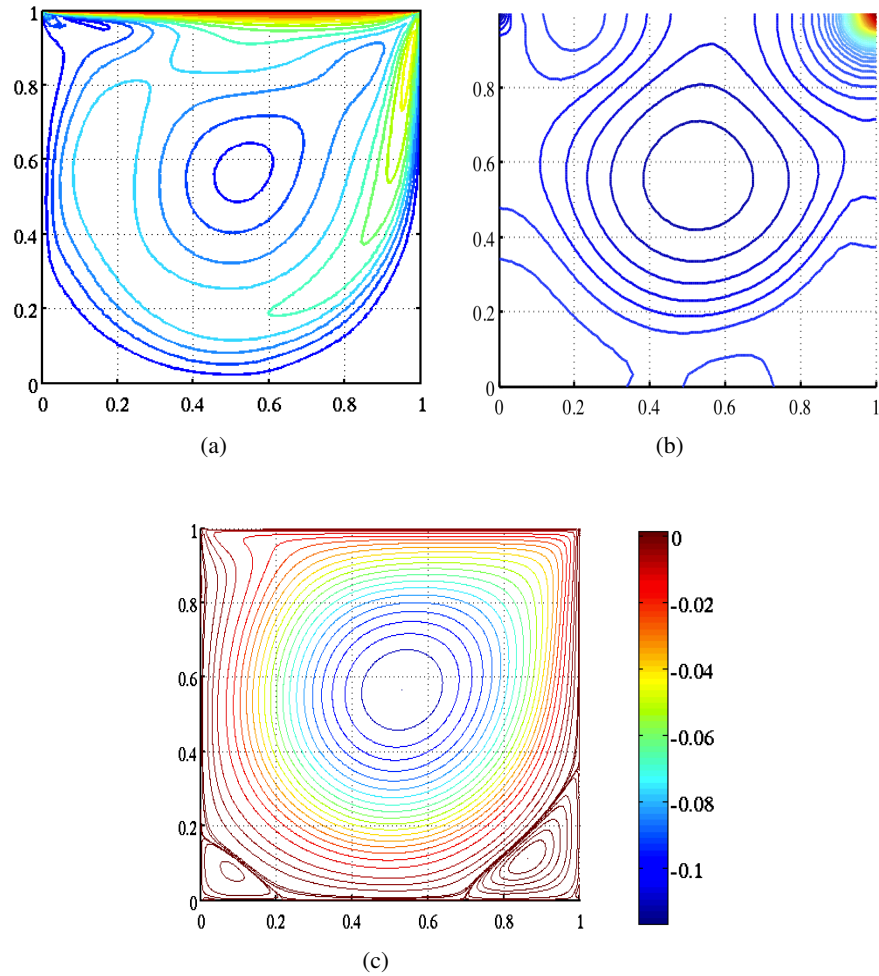


Figura 3.2: Soluzione stazionaria a $Re = 1000$. Modulo (a), campo di pressione (b) e *stream-function* (c).

alla tolleranza richiesta, mentre per $Re = 10^3$ sono necessarie ≈ 4 con la stessa tolleranza. Da ciò si deduce che anche il costo computazionale dipende dal numero di Reynolds.

3.1.2 Scelta del termine forzante

Nel metodo di Newton-Krylov le iterazioni vengono eseguite dal risolutore fino tanto che gli incrementi soddisfano la disuguaglianza (2.3). Dalla scelta del parametro γ dipendono il numero di iterazioni del metodo risolutivo e l'accuratezza della soluzione. Bisogna quindi

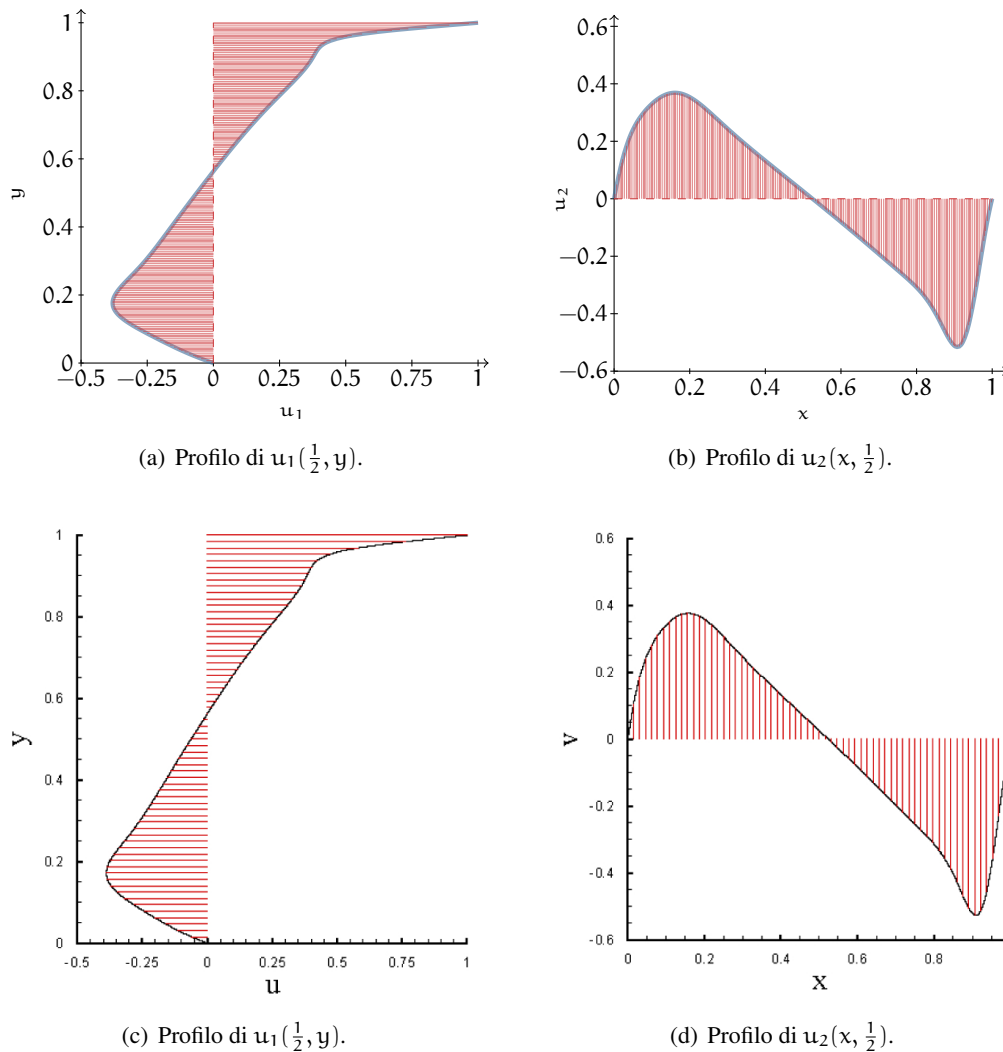


Figura 3.3: Profili della prima componente della velocità lungo la sezione verticale passante per il centro (a) e della seconda componente lungo la sezione orizzontale passante per il centro (b). Profili delle due componenti mostrati in [Ert09] (c) e (d).

trovare un valore di γ che non richieda troppe iterazioni del GMRES ma allo stesso tempo non richieda troppe iterazioni del metodo di Newton per il calcolo della soluzione. Come mostrato in Figura 3.5, per questo problema il valore di γ ottimale è 10^{-1} . Infatti, dal grafico è evidente che il numero di iterazioni temporali aumenta al diminuire del termine forzante, mentre il numero di iterazioni di Newton è uguale nei casi $\gamma = 10^{-1}$ e $\gamma = 10^{-2}$.

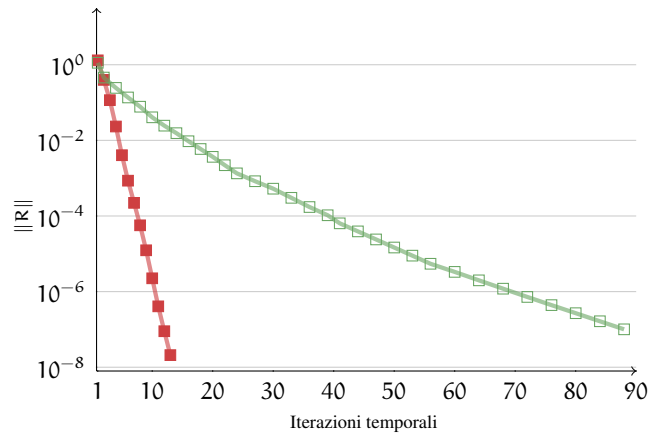


Figura 3.4: Convergence della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni temporali per $Re = 100$ e $Re = 1000$.

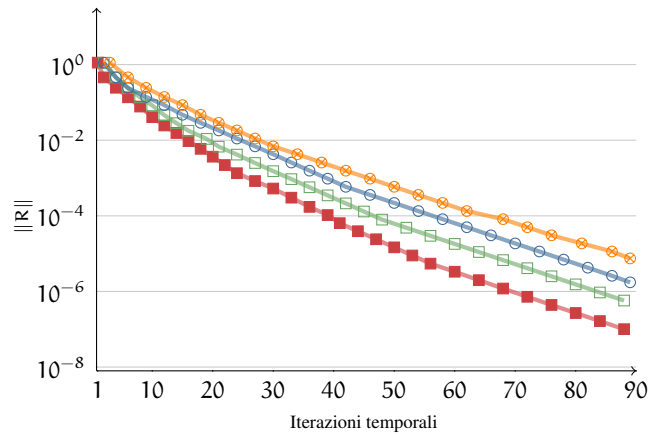


Figura 3.5: Convergence della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni temporali per $\gamma = 10^{-1}$, $\gamma = 10^{-2}$, $\gamma = 10^{-3}$ e $\gamma = 10^{-4}$.

Per $\gamma = 10^{-3}$ e $\gamma = 10^{-4}$ il metodo richiede un'iterazione in meno.

3.1.3 Scelta del passo temporale

Come evidenziato nella sezione precedente, la scelta del Δt non influenza la stabilità del sistema ma condiziona la convergenza del metodo. All'aumentare di questo parametro ci si aspetta una convergenza più veloce dell'algorithm di Newton preconditionato, ma allo stesso tempo il problema diventa mal condizionato. Infatti, per $\Delta t \rightarrow \infty$ il metodo si ridu-

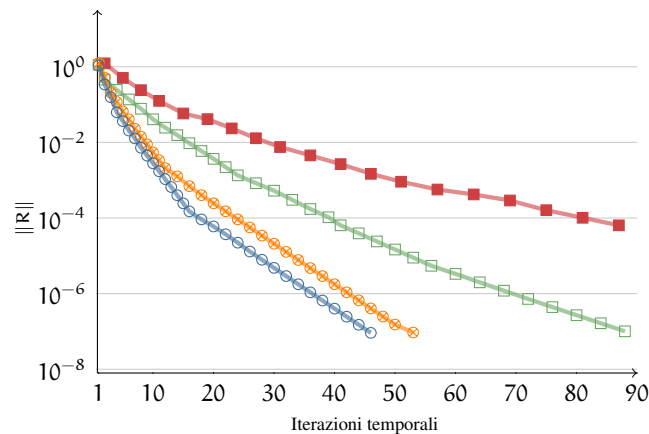


Figura 3.6: Convergenza della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni temporali per $\Delta t = 0.5$, $\Delta t = 2$, $\Delta t = 10$ e $\Delta t = 50$.

ce al classico metodo di Newton, bisogna quindi considerare un valore del passo temporale che sia $\Delta t \gg 1$ da ridurre il numero di iterazioni temporali ma allo stesso tempo non sia abbastanza grande da ricondurre il metodo a quello standard.

È importante sottolineare che non è ancora possibile determinare il valore ottimale del passo temporale a priori. Per questo, per verificare quanto deducibile dalla teoria, calcoliamo la soluzione stazionaria a diversi valori del passo temporale e con una tolleranza del GMRES fissata a $\gamma = 10^{-1}$. Consideriamo quattro valori diversi del $\Delta t = 0.5, 2.0, 10$ e 50 . In Figura 3.6 è rappresentata la riduzione della norma del residuo della velocità ai diversi valori del passo temporale in funzione del numero di iterazioni temporali. Si vede che all'aumentare del Δt il numero di iterazioni temporali si riduce, infatti, le iterazioni necessarie per la risoluzione del problema utilizzando un $\Delta t = 2$ sono quasi il doppio di quelle richieste con $\Delta t = 50$. Il numero di iterazioni di Newton è invece analogo per i tre casi, c'è uno scarto di 2 iterazioni tra un valore e l'altro. In questo caso, il valore del Δt che bilancia la riduzione del residuo e il numero di iterazioni necessarie per il calcolo degli incrementi risulta quindi $\Delta t \sim 50$.

3.2 Confronto con il metodo di Newton

In Figura 3.7 confrontiamo l'andamento del residuo non lineare del metodo di Newton preconditionato con quello del metodo di Newton standard. I test vengono eseguiti per

$Re = 10^3$ utilizzando la stessa griglia e la soluzione del problema di Stokes come dato iniziale. Osserviamo che i residui non lineari del metodo di Newton ristagnano intorno a 10^{-3} dopo le prime 30 iterazioni senza alcun progresso, mentre dopo lo stesso numero di iterazioni i residui calcolati con il metodo di Newton preconditionato con il *precondizionatore di Stokes*, con parametri $\Delta t = 50$ e $\gamma = 0.1$, sono dell'ordine di 10^{-8} .

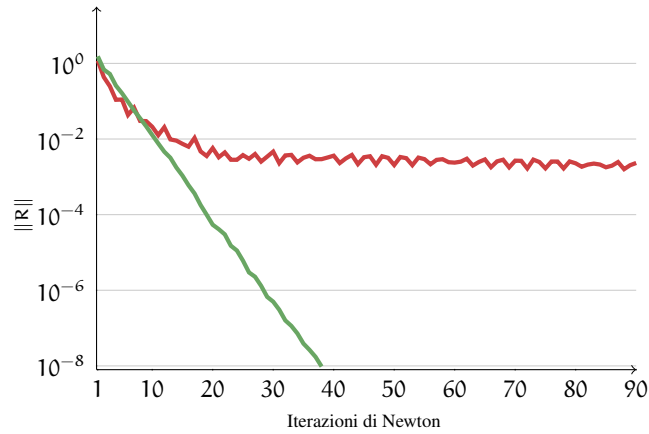


Figura 3.7: Convergenza della norma del residuo stazionario con il numero di iterazioni di Newton per il metodo di Newton non preconditionato (rosso) e preconditionato (verde).

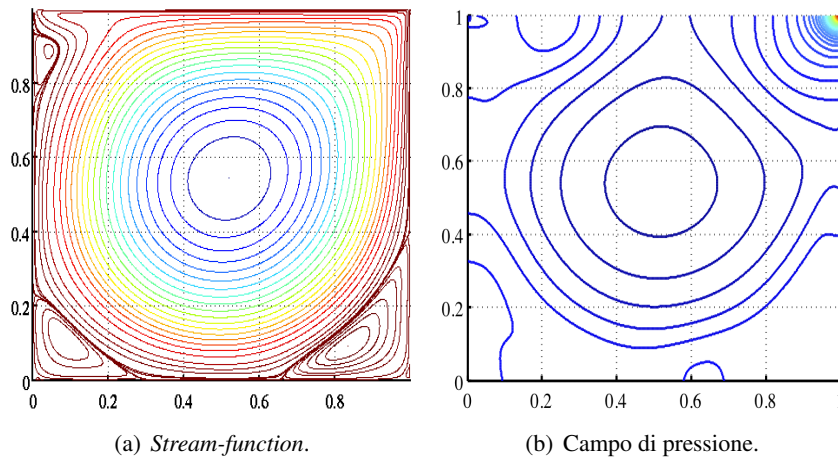
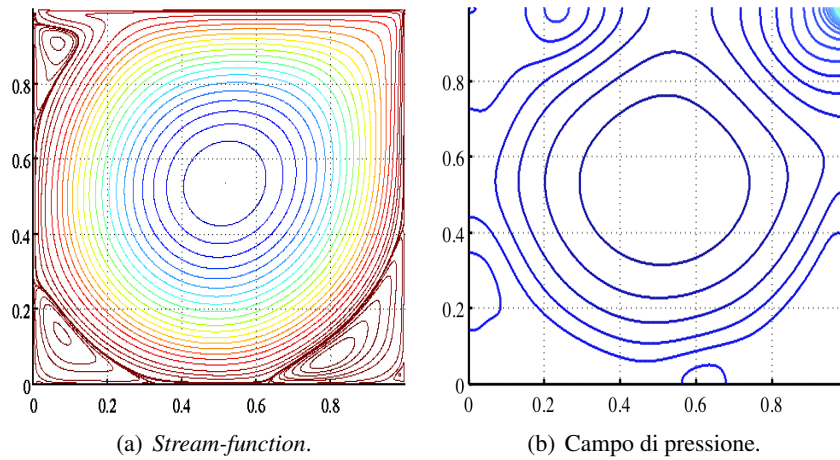


Figura 3.8: $Re = 2500$.

Figura 3.9: $Re = 5000$.

ψ	Re				
	2500	5000	7500	10000	12500
In questo elaborato	-0.119293	-0.119776	-0.120083	-0.123128	-0.131259
[ECG05]	-0.121470	-0.122233	-0.122386	-0.122390	-0.122326
[BC97]	-0.121462	-0.122219	-0.122380	-0.122393	-0.122358

Tabella 3.1: Confronto del minimo valore della *stream-function* al centro del vortice principale a diversi numeri di Reynolds.

3.3 Soluzioni stazionarie del flusso in cavità

Presentiamo ora la soluzione numerica dello stato stazionario del problema della cavità per diversi valori del numero di Reynolds. Alcuni studi, come quelli in [ECG05], presentano soluzioni stazionarie delle equazioni di Navier Stokes formulate in termini di vorticità e *stream-function* fino a $Re = 10.000$, mentre altri più recenti fino a $Re = 30.000$ [CB08], utilizzando una griglia uniforme 1024×1024 . In [APQ02] è stato invece utilizzato un metodo spettrale di proiezione del secondo ordine per risolvere le equazioni 2D di Navier Stokes non stazionarie scritte nelle variabili primitive. Il numero di Reynolds è stato aumentato passo per passo fino ad ottenere una soluzione periodica e si è trovato che la biforcazione

di Hopf si verifica nell'intervallo $8.017, 6 \leq Re \leq 8.018, 8$. Inizialmente, invece, era stato affermato che la prima biforcazione di Hopf si verifica intorno a $Re = 7.500$, in seguito alcuni esperimenti numerici hanno rivelato che essa si verifica tra $8.000 \leq Re \leq 8.050$ [BS06] mentre altri anche a Reynolds maggiori. Oltre la biforcazione di Hopf il flusso diventa periodico con una frequenza pari circa a 0.5 e intorno a $Re = 10.000$ una nuova frequenza si aggiunge allo spettro della velocità e si raggiunge un regime di flusso quasi periodico. In [APQ02] è stata riportata la presenza di una seconda biforcazione di Hopf nell'intervallo $9.687 \leq Re \leq 9.765$.

In [ECG05] è stato osservato che ad alti numeri di Reynolds, utilizzando una griglia 257×257 , la soluzione oscilla. Tuttavia, utilizzando una *mesh* più raffinata sono riusciti a trovare soluzioni stabili per alti numeri di Reynolds. Allo stesso modo, in questo lavoro, quando abbiamo utilizzato una griglia 50×50 con elementi $\mathbb{Q}_6 - \mathbb{Q}_4$ per valori del numero di Reynolds maggiori di 2500 la soluzione non è convergente verso uno stato costante ma oscilla. Tuttavia, quando abbiamo utilizzato una griglia 70×70 abbiamo ottenuto soluzioni fino a $Re = 20000$. Al di là di questo Re i nostri calcoli hanno nuovamente mostrato un comportamento periodico. Anche raffinando maggiormente la griglia, 100×100 , la situazione è la stessa. Non abbiamo utilizzato una griglia tanto più raffinata poiché aumenterebbe troppo il costo computazionale ed il tempo di calcolo.

Le soluzioni sono state calcolate utilizzando come dato iniziale la soluzione calcolata al numero di Reynolds più vicino.

Le Figure da 3.8 e 3.9 mostrano i contorni della *streamline* e i campi di pressione del flusso in cavità per valori del numero di Reynolds pari a 2500 e 5000. In accordo con la Figura 3.1, per $Re = 2500$ e $Re = 5000$ sono presenti tutti i vortici esterni. Le Figure da 3.10 a 3.14 mostrano i contorni della *streamline* fino a $Re = 20000$. È evidente che per $Re = 7500$ iniziano a formarsi anche i vortici più piccoli presenti ai due angoli inferiori della cavità e all'aumentare del numero di Reynolds si formano i restanti vortici rappresentati nello schema 3.1. Osservando la legenda in Figura 3.2 è chiaro che la *stream-function* relativa al vortice primario è negativa, mentre quella relativa ai vortici secondari è positiva. Osservando invece i valori riportati sui contorni della *streamline* rappresentanti i vortici più piccoli presenti agli angoli della cavità, si nota che anche in questo caso il valore della *stream-function* è negativa.

In Tabella 3.1 confrontiamo il valore della *stream-function* del vortice principale al centro

della cavità da noi ottenuto con i risultati presenti in letteratura per vari numeri di Reynolds. Infine, le Figure 3.15 e 3.16 presentano i profili di velocità per le sezioni passanti per il centro della cavità.

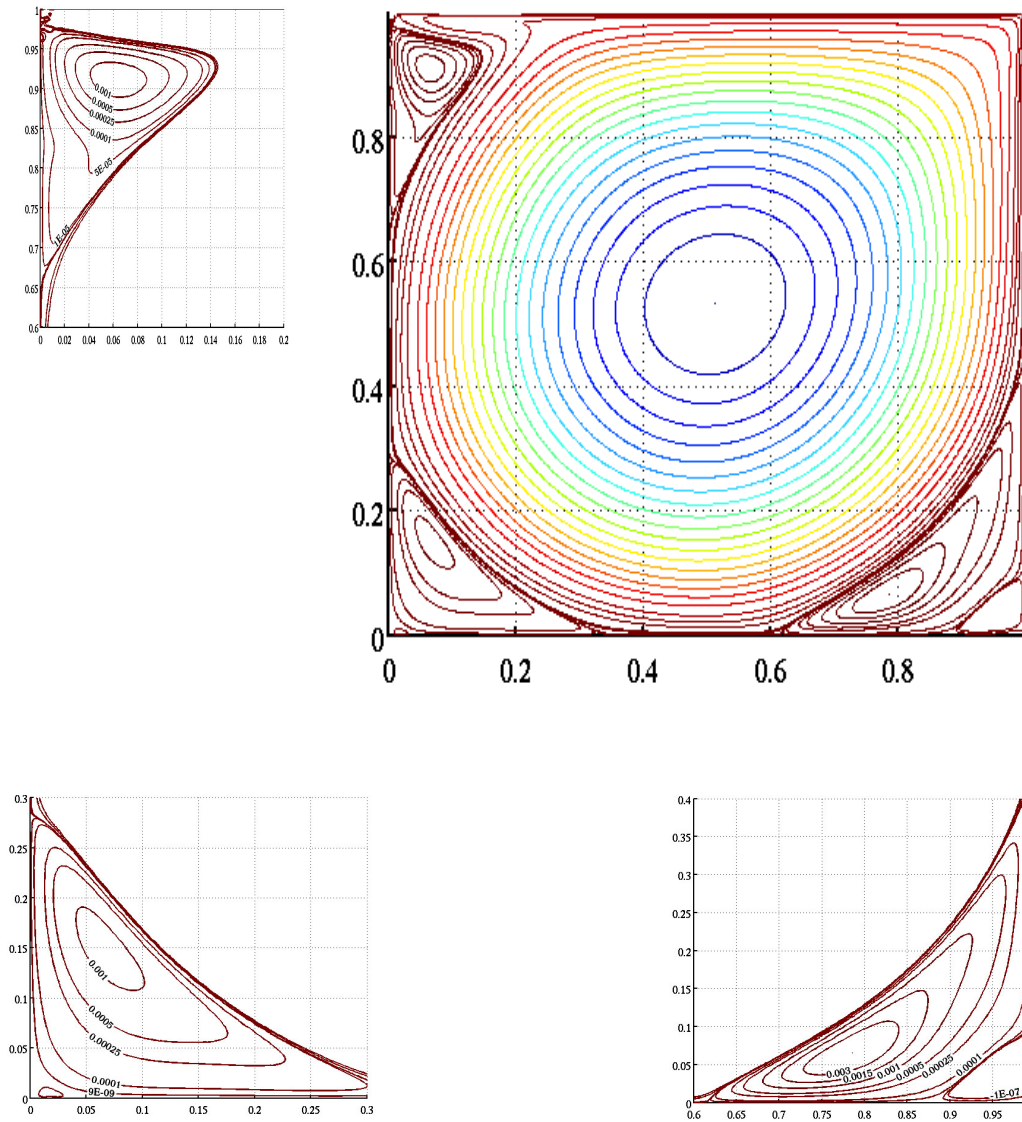


Figura 3.10: Contorni della *stream-function* per $Re = 7500$.

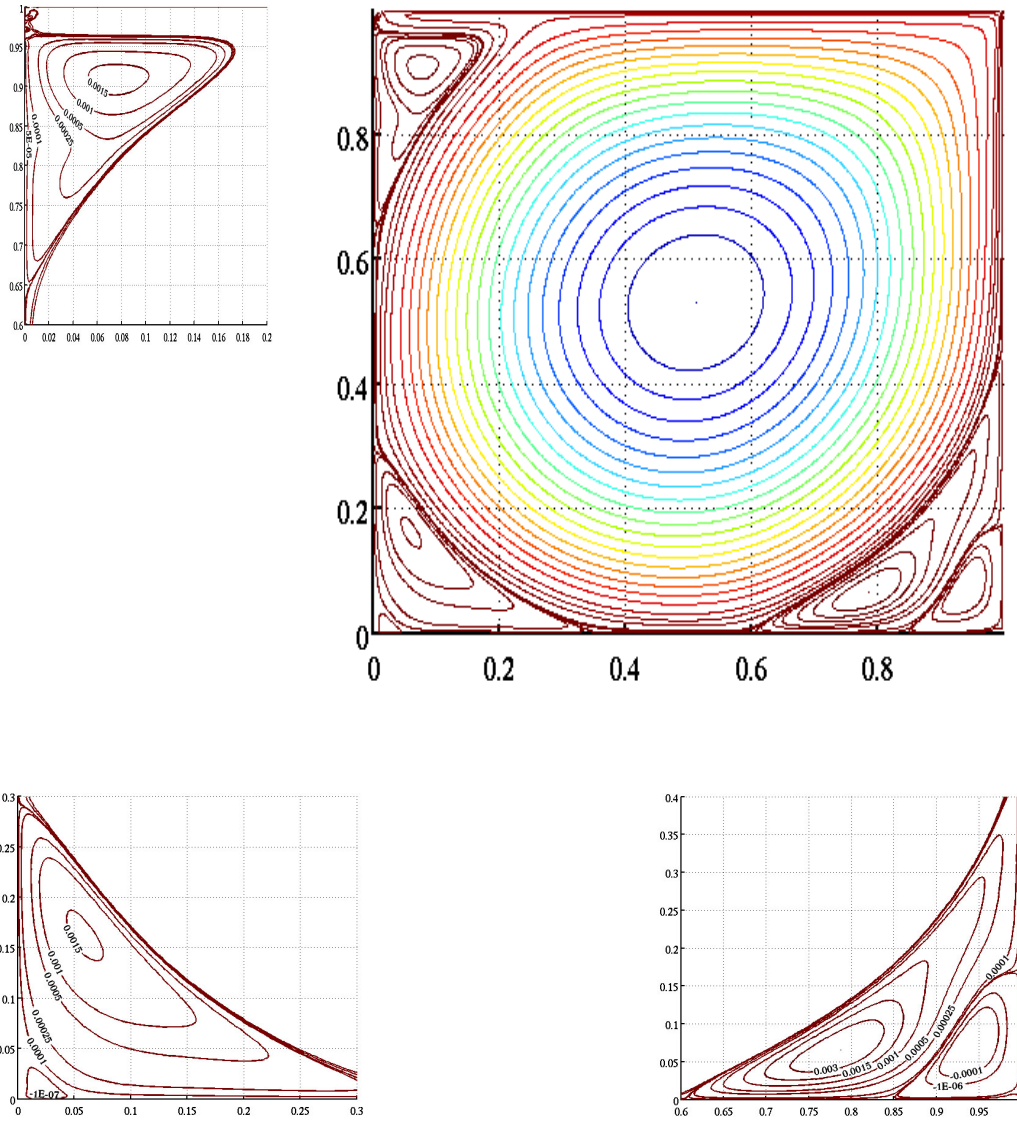


Figura 3.11: Contorni della *stream-function* per $Re = 10000$.

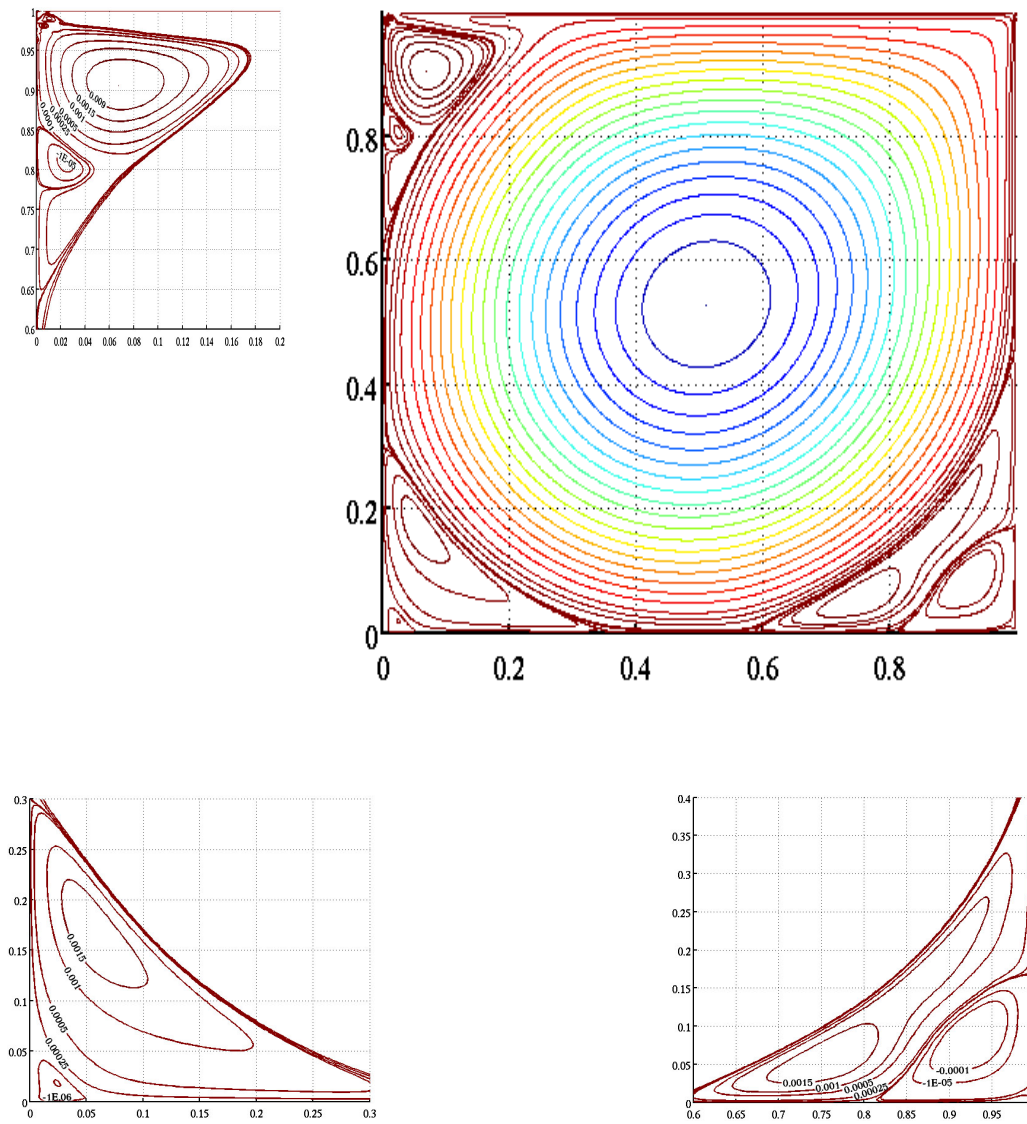


Figura 3.12: Contorni della *stream-function* per $Re = 12500$.

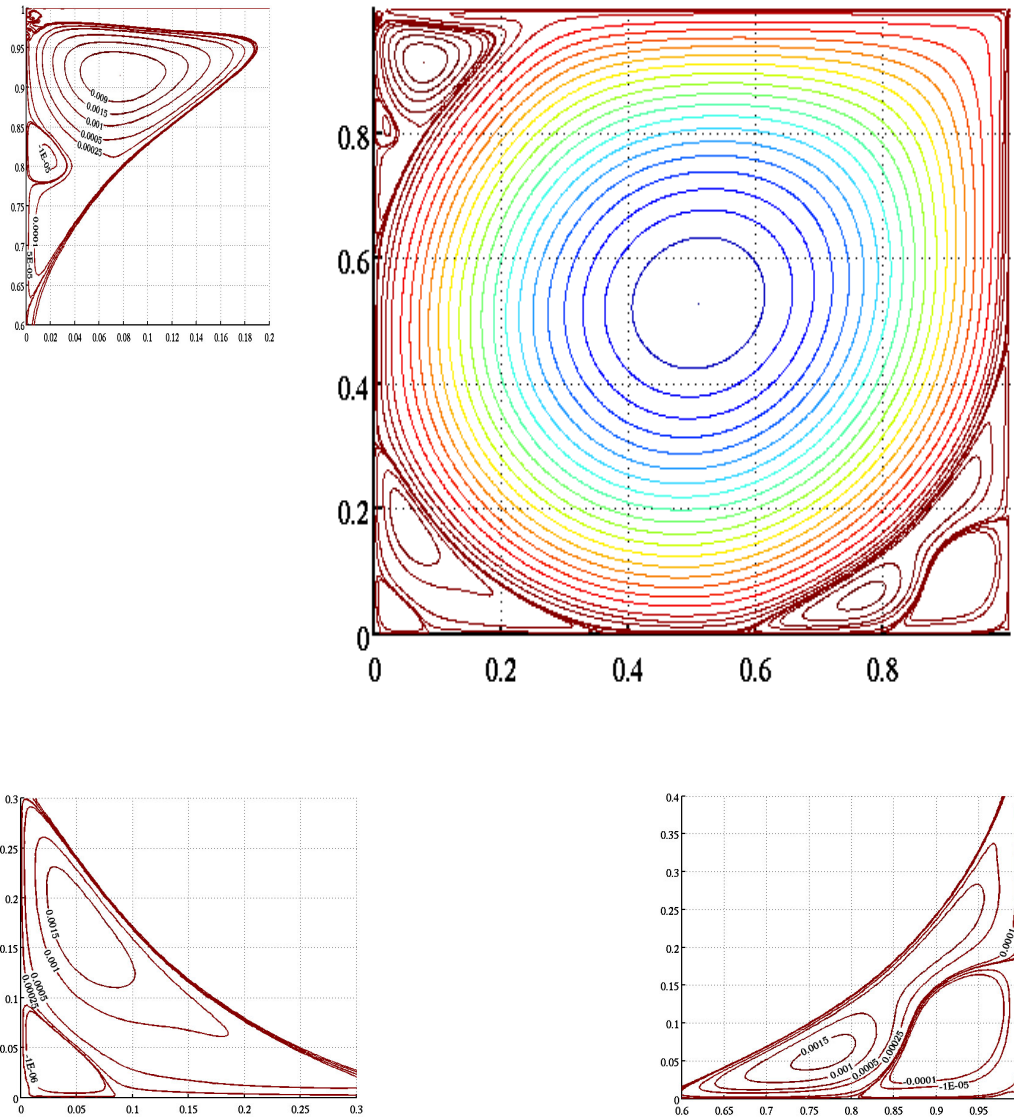


Figura 3.13: Contorni della *stream-function* per $Re = 15000$.

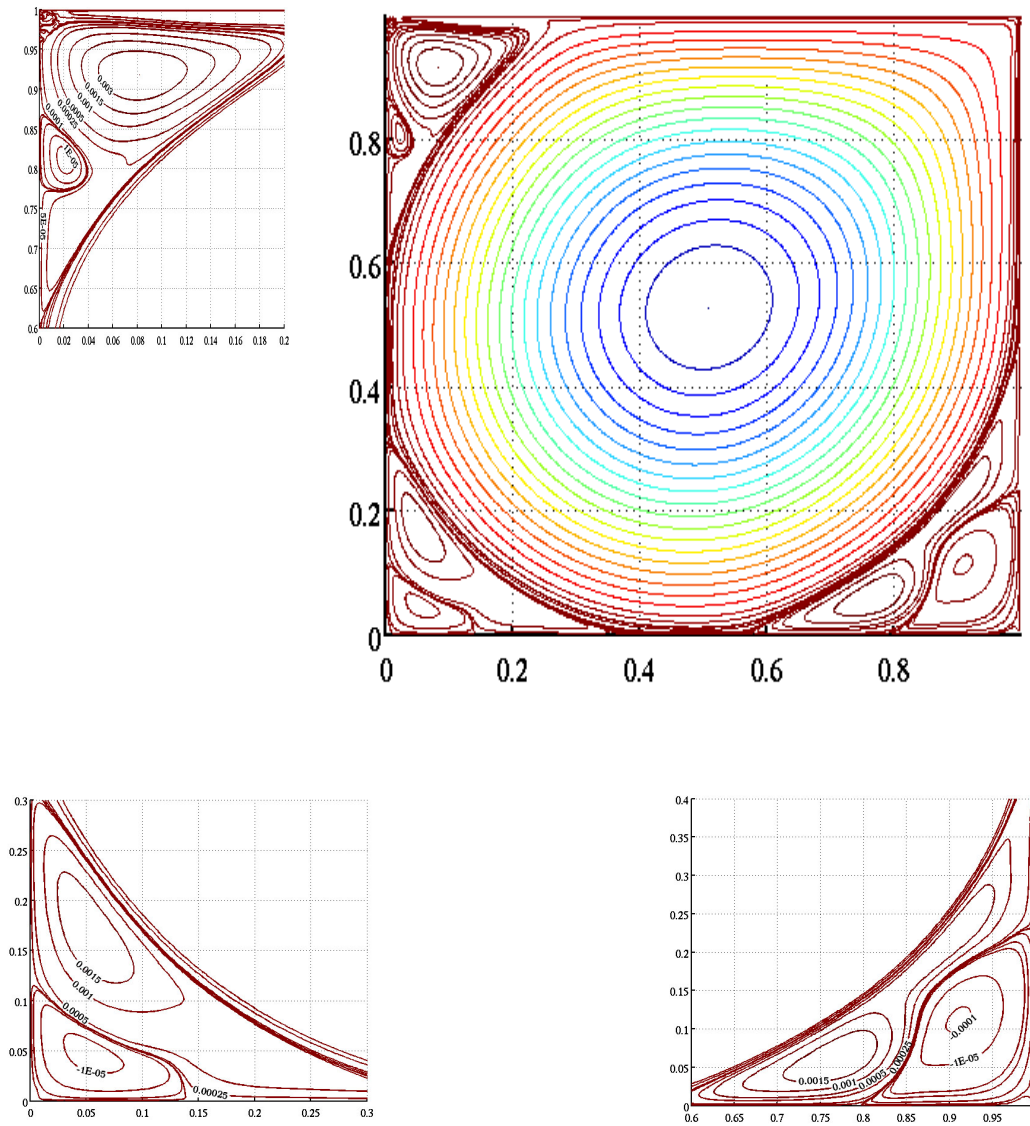


Figura 3.14: Contorni della *stream-function* per $Re = 20000$.

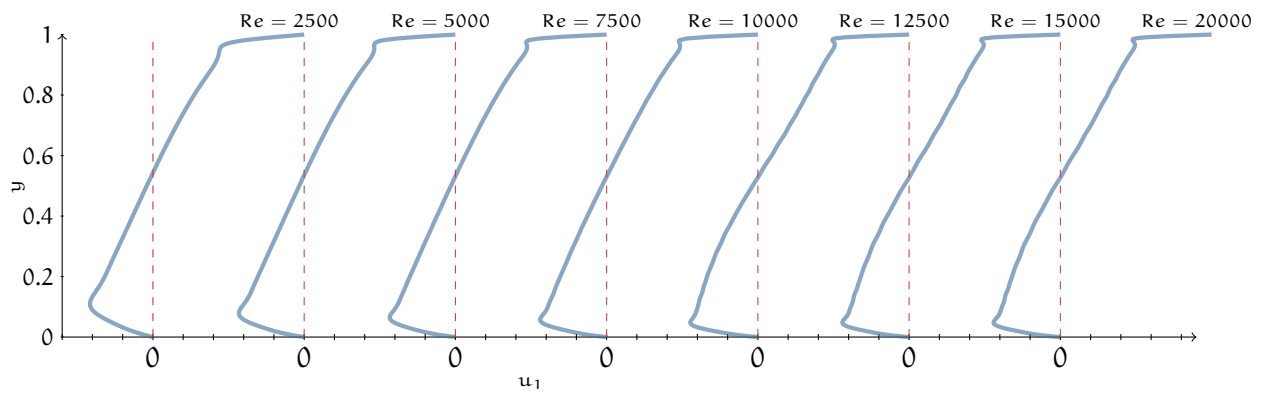


Figura 3.15: Profili della prima componente della velocità lungo la sezione verticale passante per il centro della cavità per vari valori del numero di Reynolds.

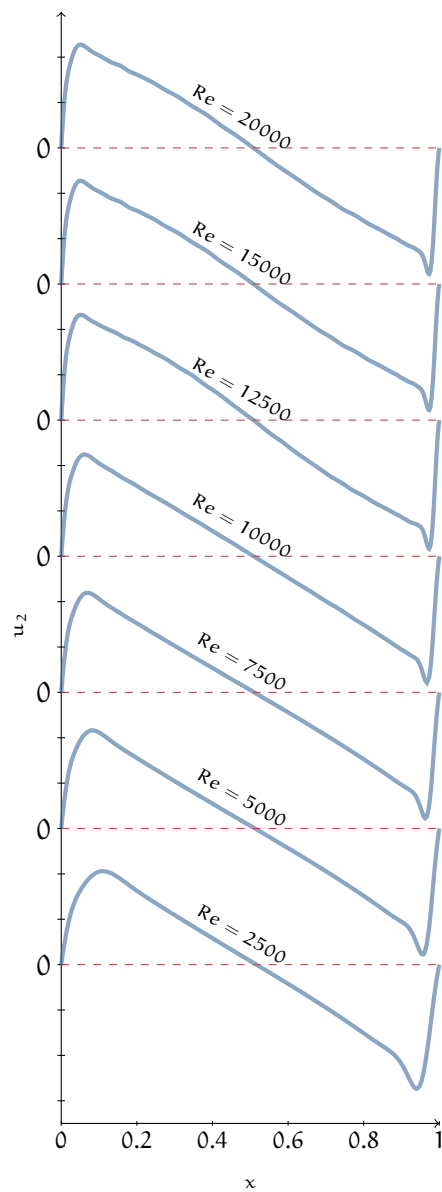


Figura 3.16: Profili della seconda componente della velocità lungo la sezione verticale passante per il centro della cavità per vari valori del numero di Reynolds.

Risultati per il flusso intorno al cilindro

Il problema di un fluido viscoso incompressibile intorno ad un cilindro ha ricevuto per lungo tempo molta attenzione, sia teoricamente che numericamente. Ci sono molte ragioni per il continuo interesse in questo problema e nel tentativo di effettuare calcoli numerici a numeri di Reynolds ancora più elevati. Una di queste ragioni è che questo problema rappresenta un buon modello per flussi intorno ad altri corpi che hanno un'importanza pratica. Negli ultimi anni l'attenzione si è spostata sulla ricerca di soluzioni stazionarie in domini illimitati. In questi casi, soprattutto per il caso bidimensionale, non è noto il comportamento della soluzione per valori elevati del numero di Reynolds, nel caso in cui essa esista. Infatti per quanto noto in letteratura e calcolato numericamente, al contrario di ciò che accade per il problema in cavità, in questo caso $Re = 200$ risulta già un valore elevato del numero di Reynolds.

Questo Capitolo è dedicato alla ricerca delle soluzioni stazionarie del problema in esame. Il problema di Navier Stokes, formulato in coordinate polari, viene risolto in un dominio anulare con le condizioni al bordo introdotte nella §4.1. In questa sezione viene illustrata la struttura della *mesh* utilizzata nelle simulazioni e vengono introdotte le caratteristiche principali del fluido. Nella §4.2 esaminiamo il comportamento della soluzione per diversi valori dei parametri che caratterizzano il dominio computazionale, come il numero di elementi lungo le due direzioni e la distanza del bordo artificiale. Infine, nella §4.3 presentiamo i risultati ottenuti per diversi valori del numero di Reynolds.

4.1 Formulazione del problema

Abbiamo considerato la formulazione del flusso in coordinate polari introdotta nella §1.1 in un dominio anulare che si estende dal cilindro interno di raggio $\bar{r} = 1$ ad un bordo circolare esterno situato ad una distanza R dal suo centro. Sul cilindro interno imponiamo le condizioni di “no-slip” (1.6), mentre sulla coordinata radiale R la seguente condizione al bordo di Dirichlet

$$u_r(R, \phi) = \cos(\phi) \quad u_\phi(R, \phi) = -\sin(\phi), \quad (4.1)$$

condizione asintotica che impone il flusso uniforme all’infinito.

In generale, se si considera un flusso non simmetrico rispetto agli assi, il problema viene risolto sul dominio computazionale, aggiungendo alle condizioni (1.6) e (4.1), la condizione di periodicità sui bordi $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$. Se invece si considerano un flusso ed un corpo simmetrici è possibile ridurre il dominio computazionale alla sola metà superiore:

$$\Omega = \{(r, \phi), \quad \bar{r} \leq r < R, \quad 0 \leq \phi < \pi\},$$

imponendo le seguenti condizioni al bordo che garantiscano la simmetria della soluzione:

$$u_\phi = \frac{\partial u_r}{\partial \phi} = 0 \quad \text{su} \quad \phi = 0 \quad \text{e} \quad \phi = \pi,$$

come riportato in [CMM09].

4.1.1 Struttura della griglia

Il comportamento complesso del flusso vicino la superficie del cilindro induce l’utilizzo di una *mesh* non uniforme. Pertanto, sarà necessario raffinare la *mesh* lungo la direzione angolare da monte a valle e dal bordo circolare esterno al cilindro lungo la direzione radiale. Nelle simulazioni consideriamo quindi la seguente griglia non uniforme, introdotta in [CMM09], con elementi $Q_4 - Q_2$:

$$r_i = \exp\left(i \frac{\Upsilon}{N_r}\right) \quad l_{r_i} = r_{i+1} - r_i, \quad \phi_j = \frac{1}{\pi} \left[j \frac{\pi}{N_\phi} \right]^2 \quad l_{\phi_j} = \phi_{j+1} - \phi_j$$

dove $\Upsilon = \ln(R)$, $i = 0, \dots, N_r$ e $j = 0, \dots, N_\phi$, con N_r e N_ϕ numero dei vertici lungo la direzione r e ϕ rispettivamente. Le lunghezze l_r e l_ϕ sono i passi di discretizzazione lungo

le due direzioni. La griglia è rappresentata in Figura 4.1. Dallo zoom in Figura 4.1 (b) è evidente che la griglia è più densa a valle del cilindro.

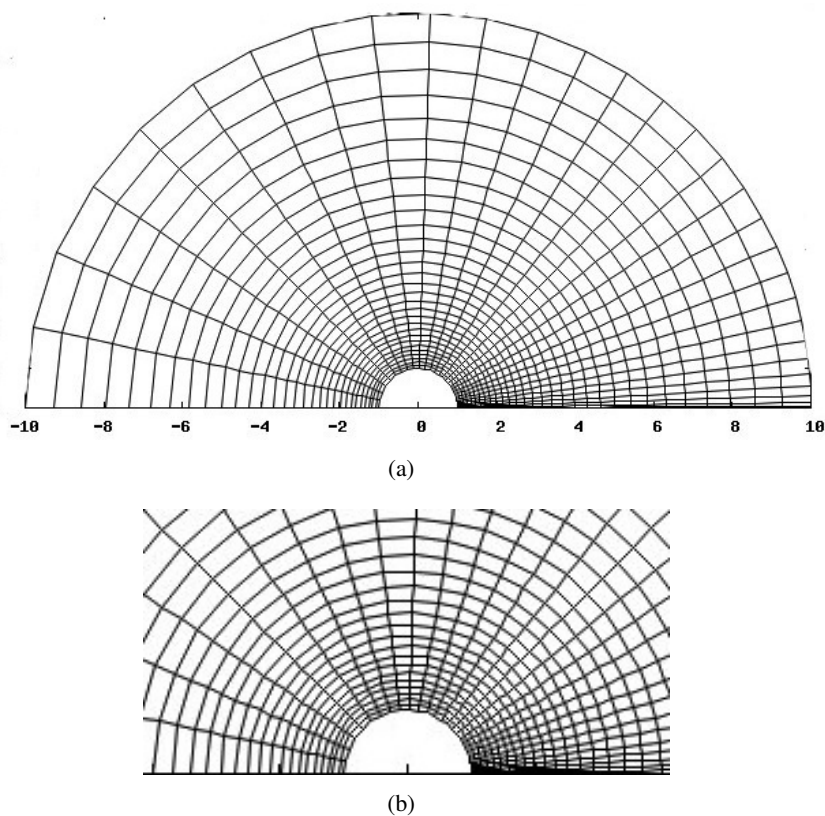


Figura 4.1: Rappresentazione della griglia con $R = 10$ e $N_r = N_\phi = 30$ (a) e zoom della *mesh* della regione intorno al cilindro (b).

4.1.2 Caratteristiche del problema

L'accuratezza della soluzione dipende principalmente da tre fattori: N_r , N_ϕ e R . Per esaminare il comportamento della soluzione al variare di questi parametri, abbiamo confrontato alcune caratteristiche importanti del fluido. La prima caratteristica è il *coefficiente di resistenza viscosa*

$$C_f = -\frac{4}{\text{Re}} \int_0^\pi \frac{\partial u_\phi|_{r=1}}{\partial r} \sin(\phi) d\phi, \quad (4.2)$$

dovuto all'azione diretta degli sforzi tangenziali che si esercitano sulla parete del cilindro, mentre la seconda è il *coefficiente di pressione*:

$$C_p = -2 \int_0^\pi p(1, \phi) \cos(\phi) d\phi. \quad (4.3)$$

che deriva dal mancato recupero di pressione conseguente ad eventuali separazioni ed alla formazione della scia. Entrambi i coefficienti sono valutati da integrali di linea intorno al corpo, che numericamente sono calcolati con la formula di quadratura di Gauss-Lobatto. Introduciamo quindi il coefficiente di drag, che indica le forze che si oppongono al moto relativo di un oggetto attraverso un fluido, come somma della resistenza di forma dovuta alla pressione e della resistenza d'attrito dovuta agli sforzi viscosi tangenziali, cioè $C_D = C_f + C_p$.

4.2 Dipendenza dai parametri

Applichiamo il metodo di Newton preconditionato al problema di Navier Stokes stazionario formulato in coordinate polari, con il passo temporale $\Delta t = 50$ e la tolleranza $\gamma = 0.1$.

4.2.1 Dipendenza dal numero di elementi

Come prima analisi verifichiamo la dipendenza della soluzione dal numero di elementi utilizzati per costruire il dominio computazionale. Consideriamo la soluzione stazionaria del problema per un valore del numero di Reynolds pari a 4, con il raggio esterno fissato $R = 16$. In Figura 4.2 sono rappresentati il modulo della velocità e la pressione su tutto il dominio, mentre in Figura 4.3 sono rappresentate le *streamlines* e le isolinee della vorticità nella regione del dominio in prossimità del cilindro. I contorni della *stream-function* assumono valori positivi mentre quelli relativi alla vorticità valori negativi. Osservando le *streamlines* è possibile notare che per questo valore del numero di Reynolds non vi è ancora alcuna separazione del flusso.

Nella Tabella 4.1 confrontiamo i parametri del fluido, come il coefficiente di drag e la differenza di pressione tra i punti di ristagno posteriore e anteriore, ottenuti utilizzando le griglie non uniformi 51×27 , 101×51 e 201×101 . Nei tre casi il coefficiente di drag

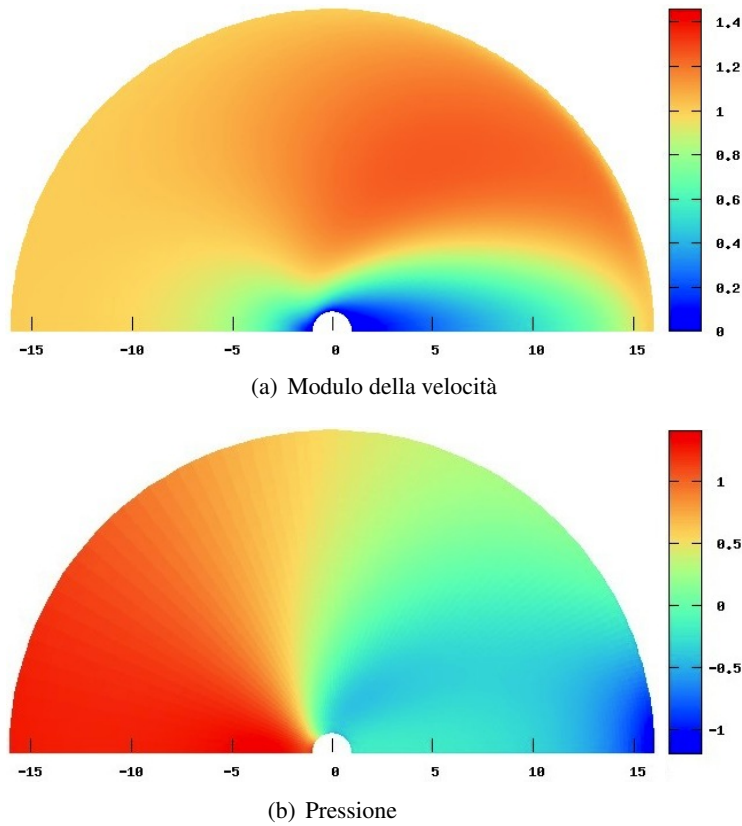


Figura 4.2: Soluzione per $Re = 4$.

Tabella 4.1: Risultati di C_f , C_p , C_D e della differenza di pressione a monte e a valle del cilindro sulla griglia non uniforme per $Re = 4$ e $R = 16$.

Griglia	C_f	C_p	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
51×27	1.71732	3.62902	5.34634	2.39667
101×51	1.80796	3.65004	5.45797	2.27851
201×101	1.85637	3.65844	5.51481	2.21934

$C_D \sim 5.4$ e la differenza di pressione ($p(1, \pi) - p(1, 0)$) ~ 2.2 . Inoltre, confrontiamo i profili delle due componenti della velocità $u_r(\hat{r}, \cdot)$ e $u_\phi(\cdot, \pi/2)$ dove $\hat{r} \sim 1.15$. Questa scelta è dettata dal fatto che la componente u_r cambia più rapidamente vicino al bordo del cilindro. Come è possibile notare in Figura 4.4 i tre profili coincidono. Infatti, grazie all'utilizzo di

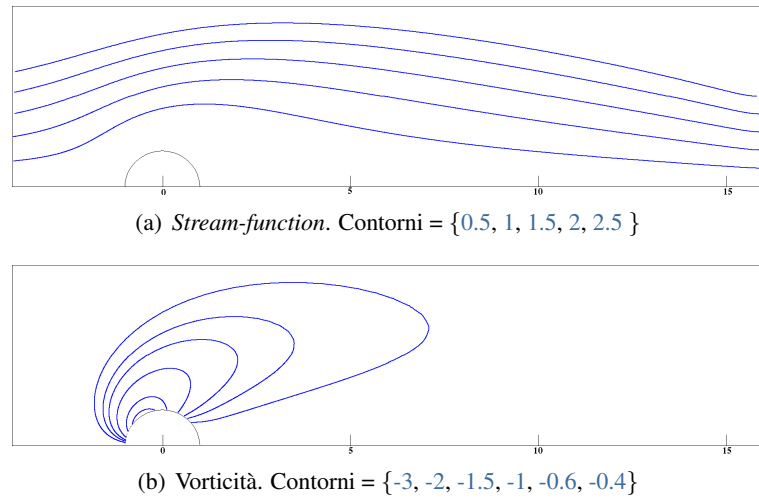


Figura 4.3: Soluzione in prossimità del cilindro per $Re = 4$.

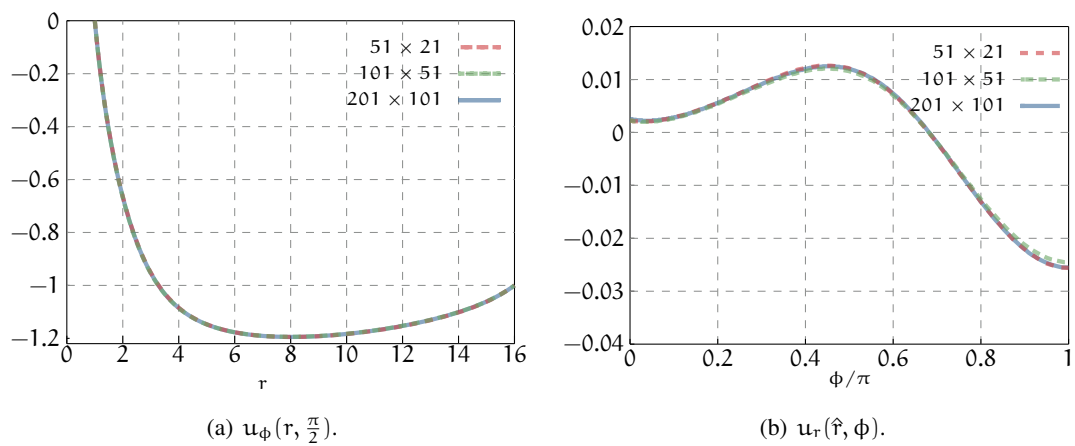


Figura 4.4: Profili di velocità per diversi valori della griglia.

passi di discretizzazione non uniformi, le griglie sono raffinate vicino al cilindro mentre sono più lasche in aree del dominio dove i cambiamenti sono trascurabili.

4.2.2 Dipendenza da R

In secondo luogo analizziamo la dipendenza della soluzione dal valore del bordo circolare esterno. È evidente che quanto più R sarà grande tanto più accurata sarà la soluzione,

ma questo corrisponde ad un aumento del tempo di calcolo. Per questo, dal punto di vista computazionale, è preferibile che le condizioni al contorno “all’infinito” siano imposte il più vicino possibile al cilindro. Un altro fattore importante da considerare nell’imposizione del valore di R , è la sua distanza dalla *bolla di separazione*. Infatti, all’aumentare del numero di Reynolds a valle del cilindro si forma una zona di ricircolo, detta appunto *bolla di separazione*, sempre più grande.

Per studiare questa dipendenza consideriamo il problema con $Re = 20$ in cui è nota la presenza della bolla. Consideriamo quattro valori di $R = 4.5, 8, 15, 22$ e confrontiamo il coefficiente di drag, la differenza di pressione, l’angolo di separazione, la lunghezza L_u e la larghezza L_a della bolla e il massimo valore della vorticità sul cilindro. I risultati sono riportati nelle Tabelle 4.2 e 4.3. Nel caso in cui $R = 15$ e quello in cui $R = 22$, le dimensioni della bolla sono principalmente le stesse e le caratteristiche del fluido non variano tanto a differenza di quelle ottenute con un valore di R più piccolo. Allo stesso modo i profili delle due componenti della velocità, rappresentati in Figura 4.5, non si differenziano nei due casi mentre variano notevolmente se si considera un raggio esterno più vicino al cilindro. Quindi, deduciamo che la soluzione stia arrivando a convergenza e che prendendo $R \sim 20$ per questo valore del numero di Reynolds si abbia una buona approssimazione del comportamento del flusso all’infinito.

È possibile osservare quanto appena detto in Figura 4.6 dove sono rappresentati i contorni della *stream-function*. Anche in questo caso le *streamlines* assumono valori positivi e il valore assunto dalla *stream-function* corrispondente alla bolla è pari a 0. In Figura 4.7 notiamo inoltre che appaiono piccole vorticità positive accanto alla superficie del corpo, nella zona di ricircolo.

I test numerici sono stati effettuati utilizzando una griglia 50×100 in tutti i quattro casi. È interessante capire se sussiste una relazione tra il numero di elementi e il valore del raggio esterno. Osservando la struttura della griglia, è evidente che per mantenere la stessa risoluzione spaziale intorno al cilindro, il rapporto $\ln(R)/N_r$ debba mantenersi costante al variare del raggio.

Per studiare il rapporto che intercorre tra le due grandezze abbiamo considerato il problema precedente con $N_\phi = 100$ e abbiamo fatto variare il numero di elementi lungo la direzione radiale all’aumentare del raggio. Abbiamo condotto due tipi di esperimenti: nel primo abbiamo mantenuto invariato il rapporto $\ln(R)/N_r$, mentre nel secondo R/N_r .

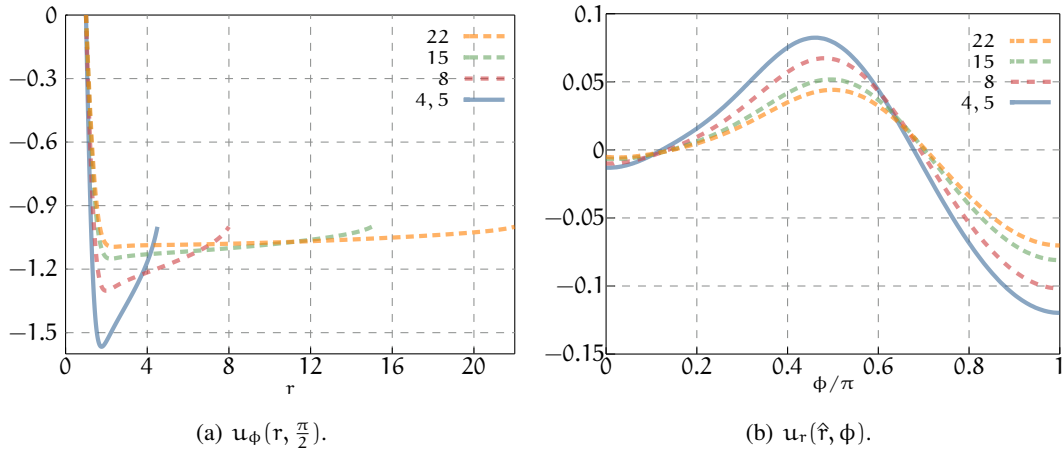


Figura 4.5: Profili di velocità per diversi valori del raggio.

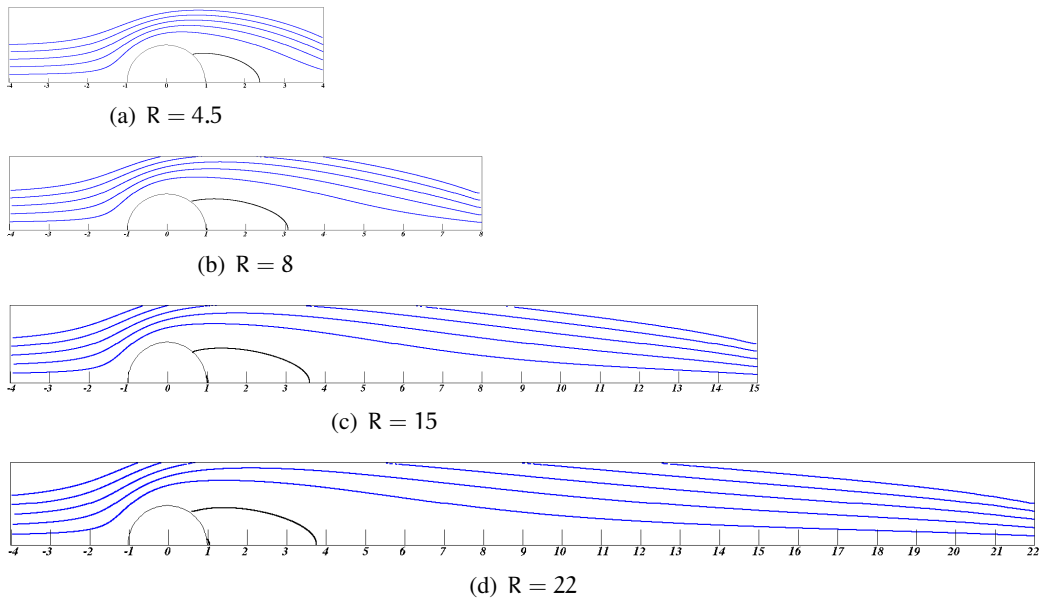


Figura 4.6: *Stream-function* $Re = 20$. Contorni = $\{ 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 \}$

In Tabella 4.4 confrontiamo i parametri visti in precedenza. È evidente che a parità di raggio i risultati coincidono in questi due casi, mentre differiscono leggermente da quelli riportati nelle Tabelle 4.2 e 4.3. Questo andamento conferma quanto anticipato e induce ad ipotizzare che per calcolare una soluzione accurata all'aumentare della distanza del bordo

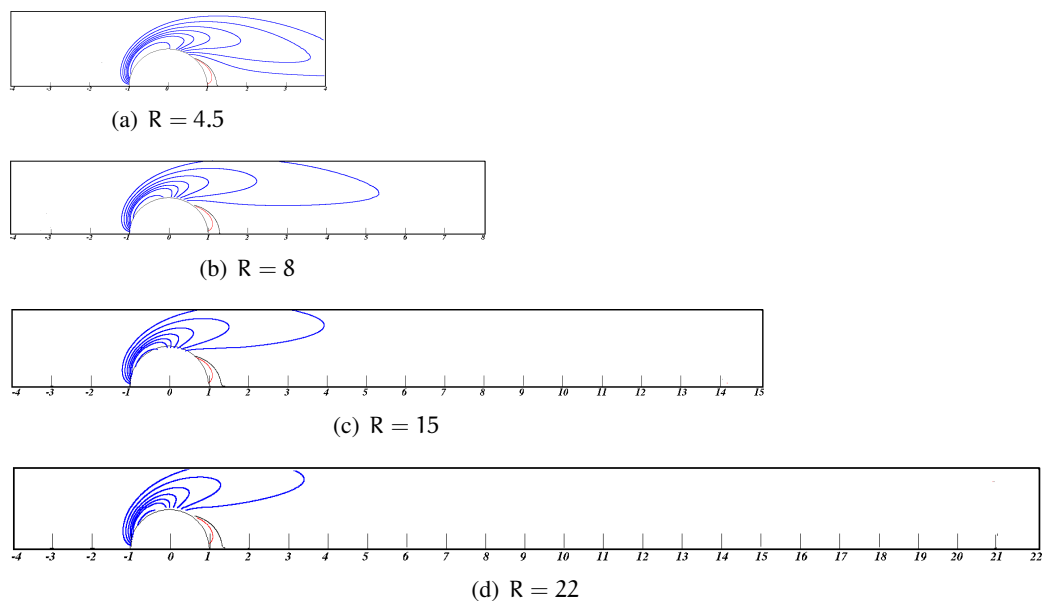


Figura 4.7: Vorticità $Re = 20$. Contorni = $\{-4.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.6, 0, 0.1\}$

Tabella 4.2: Risultati sul coefficiente di drag, C_f , C_p , C_D e sulla differenza di pressione a monte e a valle del cilindro sulla griglia non uniforme per $Re = 20$ al variare di R .

R	C_f	C_p	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
4.5	1.55821	3.65543	5.21363	2.66095
8	1.09495	2.37722	3.47217	1.8452
15	0.86030	1.79897	2.65928	1.38095
22	0.77456	1.60344	2.378	1.21855

Tabella 4.3: Risultati sulla bolla di separazione e sulla vorticità per $Re = 20$ al variare di R .

R	ϕ_{sep}	Lu	La	$\max \omega(1, \phi) $
4.5	0.754296(43.24°)	1.41	0.65	8.8504
8	0.785398(45.02°)	2.13	0.74	6.6923
15	0.785398(45.02°)	2.62	0.75	5.5435
22	0.785802(45.04°)	2.71	0.75	5.0986

circolare esterno è sufficiente che rimanga invariato il rapporto $\ln(R)/N_r$.

In ultima analisi abbiamo confrontato la seminorma H^1 del modulo della velocità al variare del raggio. Per quanto noto dalla teoria, ci si aspetta che per $R \rightarrow \infty$ essa assuma un valore costante. In Figura 4.8 osserviamo che il tasso di crescita della norma per $R = 8, 15$ e 22 è costante, mentre si riduce per valori più grandi del raggio.

Tabella 4.4: Risultati sulle caratteristiche del fluido per $Re = 20$ al variare di R e N_r .

R	N_r	C_D	ϕ_{sep}	Lu	La
8	70	3.2171	0.754296	2.14	0.75
15	90	2.4363	0.776802	2.66	0.76
22	103	2.17558	0.785398	2.77	0.77

R	N_r	C_D	ϕ_{sep}	Lu	La
8	89	3.2441	0.754296	2.14	0.75
15	167	2.4772	0.776802	2.66	0.76
22	244	2.21617	0.785398	2.77	0.77

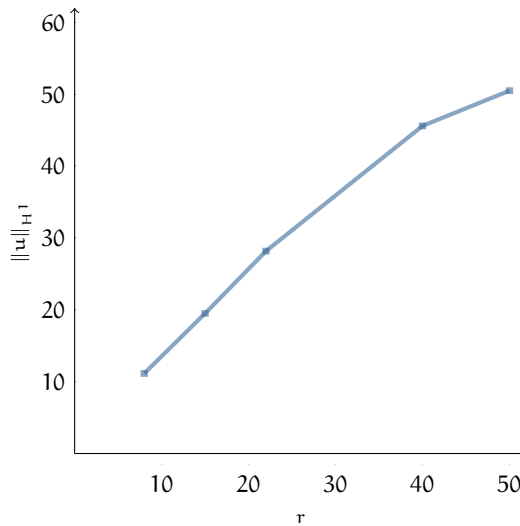


Figura 4.8: Norma H^1 del modulo della velocità.

4.2.3 Dipendenza da N_r e N_ϕ

Negli ultimi test abbiamo ipotizzato la dipendenza della soluzione dal solo passo di griglia radiale. Analizziamo ora il comportamento al variare dei parametri N_ϕ e N_r nel caso $Re = 30$ e $R = 30$.

In un primo momento fissiamo il valore del numero di elementi lungo la coordinata radiale $N_r = 100$ e differenziamo il valore di N_ϕ . È evidente dalla prima Tabella 4.5 che la dipendenza da N_ϕ non è forte. Infatti, le differenze tra i risultati ottenuti con $N_\phi = 70$ e $N_\phi = 120$ sono trascurabili. Al contrario, mantenendo il numero di elementi lungo la coordinata angolare costante pari a $N_\phi = 70$ e facendo variare N_r , i risultati sono più suscettibili alla dimensione del passo di griglia. Precisamente, sebbene nel secondo insieme di esperimenti il range in cui varia il numero dei vertici sia più piccolo, le caratteristiche del fluido variano del 3% nel primo set di esperimenti in cui $N_r = 100$ e $N_r = 120$ e dell'1% nel caso in cui $N_r = 150$.

Le *streamlines* e le isolinee della vorticità ottenute con la griglia 150×70 sono mostrate in Figura 4.9.

Tabella 4.5: Risultati sulle caratteristiche del fluido con diversi N_ϕ e N_r per $Re = 30$ e $R = 30$.

$N_r = 100$			
N_ϕ	ϕ_{sep}	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
50	0.89768(51.46°)	2.15784	1.24451
70	0.89101(51.08°)	2.17334	1.23978
120	0.89361(51.23°)	2.17592	1.23549

$N_\phi = 70$			
N_r	ϕ_{sep}	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
100	0.89101(51.08°)	2.17334	1.23978
120	0.91252(52.30°)	2.21389	1.27898
150	0.92581(53.07°)	2.22303	1.27621

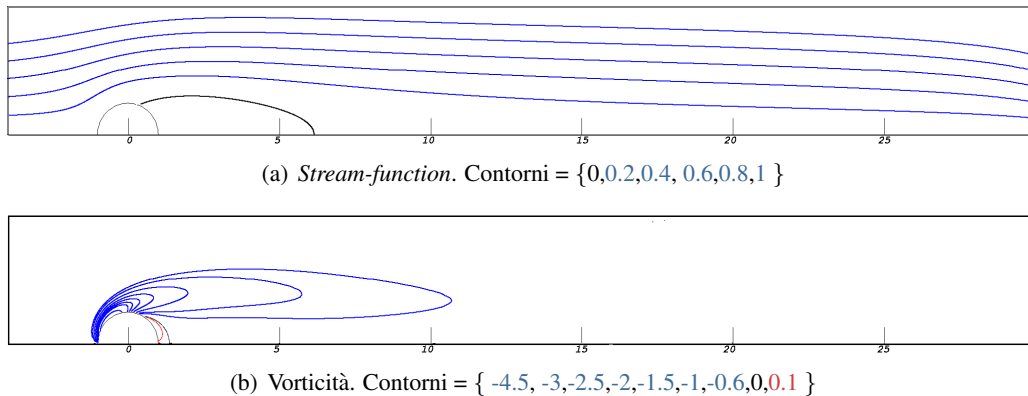


Figura 4.9: Soluzione per $Re = 30$ con $R = 30$.

4.3 Soluzioni stazionarie per il flusso intorno al cilindro circolare

È noto che le soluzioni stazionarie per il flusso intorno al cilindro diventano sperimentalmente instabili intorno a $Re = 40$ e il regime stazionario è rimpiazzato da un flusso laminare instabile chiamato *Kármán vortex street* per $40 < Re < 100$. All'aumentare del numero di Reynolds il vortice diventa turbolento nella scia a valle del cilindro. Questioni come lo sviluppo asintotico della zona di ricircolo, il valore del coefficiente di drag, la posizione del punto di separazione, la distribuzione di vorticità e pressione, sono ancora aperte e sono rilevanti per la comprensione del comportamento del flusso ad alti numeri di Reynolds.

Sia i risultati numerici che sperimentali indicano la presenza di una zona di ricircolo la cui lunghezza è $o(Re)$ e la larghezza $o(Re^{1/2})$. La persistenza di questo tasso di crescita, anche per $Re \rightarrow \infty$, è stata assunta nella maggior parte degli studi riguardanti la ricerca della soluzione stazionaria ad alti numeri di Reynolds per questo problema [Smi79]. Come anticipato, un flusso consistente con quanto appena detto è quello analizzato da Brodetsky (1923) noto come modello *Helmholtz-Kirchhoff free-streamline*. Questo modello prevede un angolo di separazione di circa 125° e un coefficiente di drag non nullo. Tuttavia, Batchelor (1956) fornisce argomentazioni che mettono in dubbio questa teoria come teoria limite. Egli suggerisce infatti che la vorticità all'interno della scia per $Re \rightarrow \infty$ non sia nulla ma costante a tratti. Questa soluzione chiamata *Prandtl-Batchelor*, nel caso in cui

esista, ammetterebbe una scia finita e quindi non ammetterebbe Drag sul corpo.

Le *streamlines* e i contorni della vorticità per diversi valori del numero di Reynolds sono rappresentati nelle Figure 4.10 e 4.11. Le soluzioni stazionarie sono state valutate per diversi valori del raggio esterno. Partendo dalla soluzione per $Re = 10$ sulla griglia 110×100 con $R = 20$, abbiamo calcolato la soluzione per $Re = 40$ con $R = 30, 53$ e per $Re = 50$ con $R = 30, 53, 60$. Quindi abbiamo aumentato il numero di Reynolds a $Re = 100$ e $Re = 200$, valore del numero di Reynolds fino al quale abbiamo ottenuto soluzioni stabili, considerando valori più grandi del raggio cioè $R = 60, 90$. I nostri esperimenti confermano la relazione $R \propto Re$ ([For80], [CMM09]). Infatti, come è evidente dalle Tabelle 4.6 e 4.7, per grandi valori del numero di Reynolds è necessario considerare il raggio esterno sempre più distante dal cilindro per ottenere variazioni più piccole delle caratteristiche del fluido.

In Figura 4.10 è possibile osservare che la separazione del flusso si verifica già per $Re = 10$

Tabella 4.6: Risultati sulle caratteristiche del fluido al variare di Re e R .

Re = 40				
R	Griglia	ϕ_{sep}	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
30	125×100	0.969175	1.75483	1.11608
53	145×100	0.975176	1.72538	1.04216

Re = 50				
R	Griglia	ϕ_{sep}	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
30	125×100	1.01183	1.61108	1.16784
53	145×100	1.04018	1.49751	0.98283
60	150×100	1.04685	1.44767	0.97771

e che all'aumentare del numero di Reynolds la *bolla di separazione* diventa più lunga e più larga. La Figura 4.11 mostra che per piccoli valori di Re la vorticità complessiva è negativa, ma, come già osservato in precedenza, all'aumentare del Re appaiono piccole vorticità positive vicino alla superficie del corpo. In generale, il profilo di vorticità nella regione intorno alla linea di separazione è più ripido per valori grandi di Re , mentre all'interno della bolla di separazione è piuttosto piatto, come è possibile osservare in Figura 4.12. Quest'ultimo è in buon accordo con il modello di separazione ideale dove la vorticità nella zona di

Tabella 4.7: Risultati sulle caratteristiche del fluido al variare di Re e R .

Re = 100				
R	Griglia	ϕ_{sep}	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
60	150×100	1.19695	1.22201	0.85235
90	165×100	1.21444	1.16068	0.78264

Re = 200				
R	Griglia	ϕ_{sep}	C_D	$p(1, \pi) - p(1, 0)$
60	150×100	1.21848	0.66888	0.793355
90	165×100	1.27577	0.43004	0.726615

stagnazione è rigorosamente uguale a zero ed è una delta della linea di separazione. Ciò conferma, come già considerato in [CMM09], l'ipotesi che il flusso si separi al tendere a zero della viscosità.

La Figura 4.13 mostra la distribuzione della pressione sulla superficie del corpo. Notiamo che la pressione di ristagno posteriore tende a passare dallo zero per poi assumere valori positivi, in accordo con i risultati ottenuti in [For80]. Questo comportamento è coerente con la soluzione limite di Batchelor, ma non con quella di Kirchhoff-Helmholtz, dove la pressione è ovunque nulla all'interno della scia.

Nelle Figure 4.14 e 4.15 mostriamo le caratteristiche del flusso più rappresentative: il coefficiente di drag C_D Figura 4.14 (a), l'angolo di separazione Figura 4.14 (b), l'ampiezza della *bolla di separazione* Figura 4.15 (a) e la sua lunghezza (misurata dal centro del cilindro) Figura 4.15 (b). Sugli stessi grafici abbiamo riportato i dati disponibili in letteratura. In Tabella 4.8 osserviamo che nella maggior parte dei lavori le soluzioni sono state ottenute utilizzando una discretizzazione delle equazioni alle differenze finite del 2° ordine.

Le caratteristiche della bolla sono in accordo con i risultati numerici presenti in letteratura. Precisamente per $Re \leq 100$, come in [For80] e [CMM09], la larghezza della *bolla* soddisfa la relazione $L_a \propto \sqrt{Re}$, invece la lunghezza $L_u \propto 0.17 Re$ e questa linea è rappresentata in Figura 4.15 (b) come una linea tratteggiata, mentre per $Re = 200$ la soluzione è in accordo con quella presentata in [CMM09]. Al contrario, il coefficiente di drag assume valori leggermente maggiori. Infatti, in tutte le simulazioni da noi effettuate, il *coefficiente*

di pressione risulta più grande rispetto a quello ottenuto in [CMM09].

Per valori più grandi del numero di Reynolds, cioè $Re > 200$, non siamo riusciti a calcolare la soluzione stazionaria in quanto il metodo di Newton utilizzato non raggiunge la convergenza. Per questi valori è stata prevista teoricamente in [Smi79] la relazione $La \propto Re$.

	Discretizzazione	ordine	n° elementi	Re_{max}	R
Christov	d.f.	2°	251×150	200	88
Fornberg	d.f.	2°	129×134	300	600
Dennis & Chang	d.f.	2°	-	100	39
Takami & Keller	-	-	-	60	17

Tabella 4.8: Riassunto dei risultati presenti in letteratura.

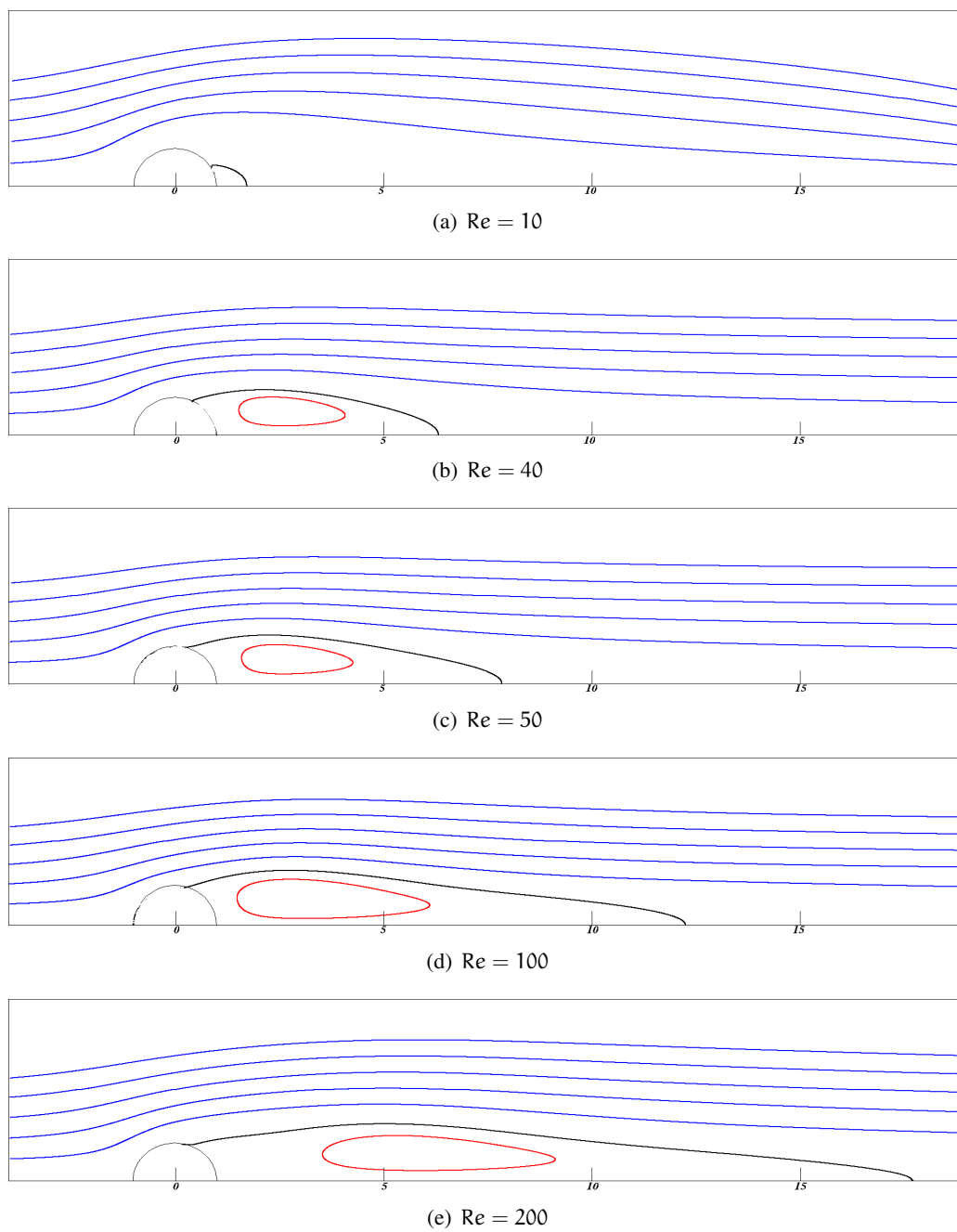
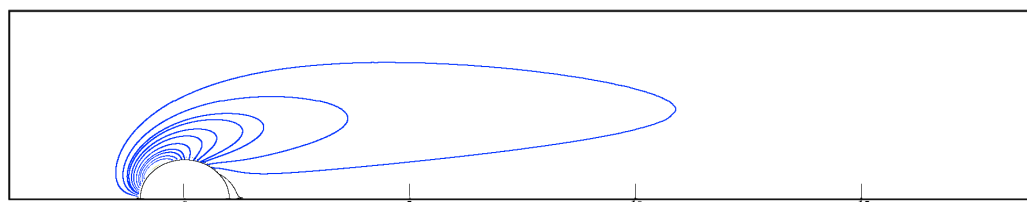


Figura 4.10: *Stream-function* Re diversi. Contorni = $\{-0.2, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$



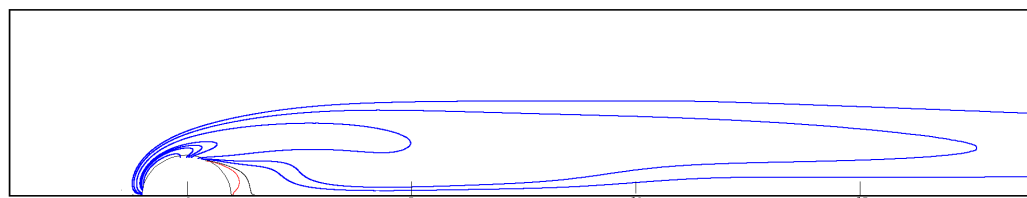
(a) $Re = 10$



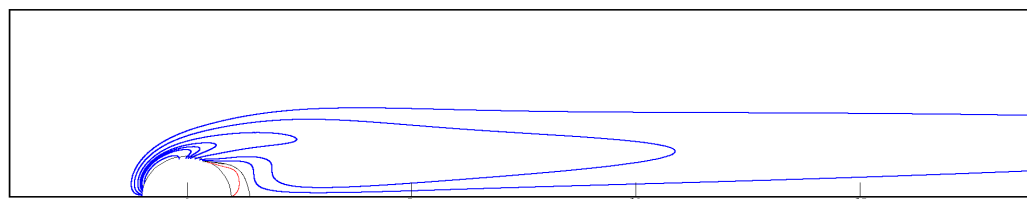
(b) $Re = 40$



(c) $Re = 50$



(d) $Re = 100$



(e) $Re = 200$

Figura 4.11: Vorticità Re diversi. Contorni = $\{-4.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.6, -0.4, 0, 0.1\}$

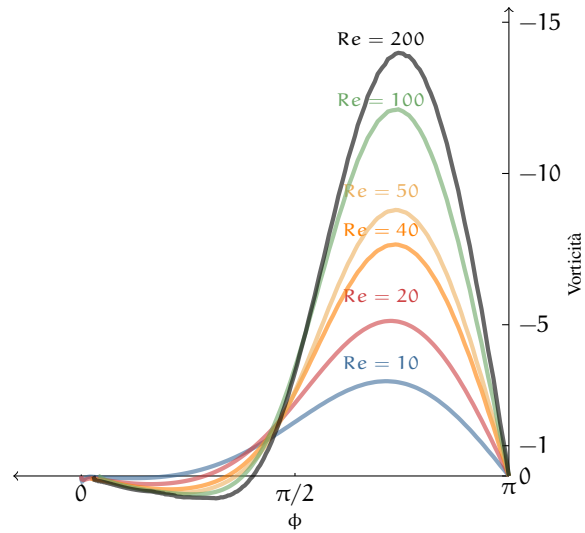


Figura 4.12: Distribuzione della vorticit  sulla superficie del cilindro.

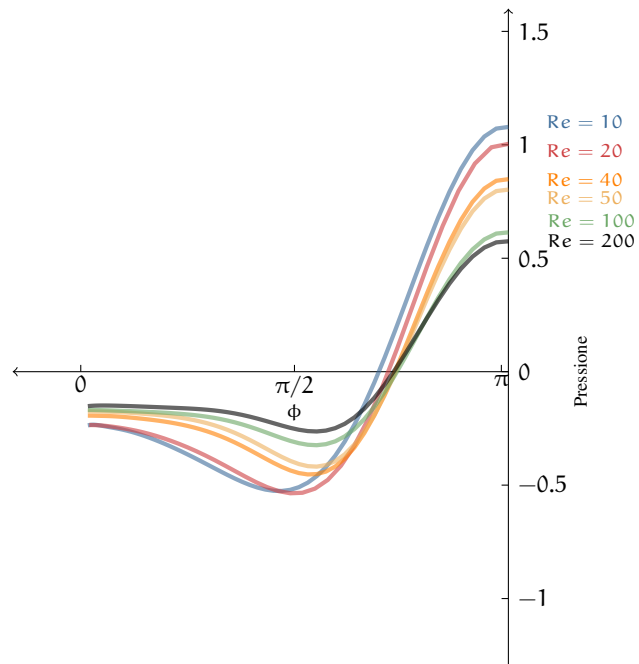


Figura 4.13: Distribuzione della pressione sulla superficie del cilindro.

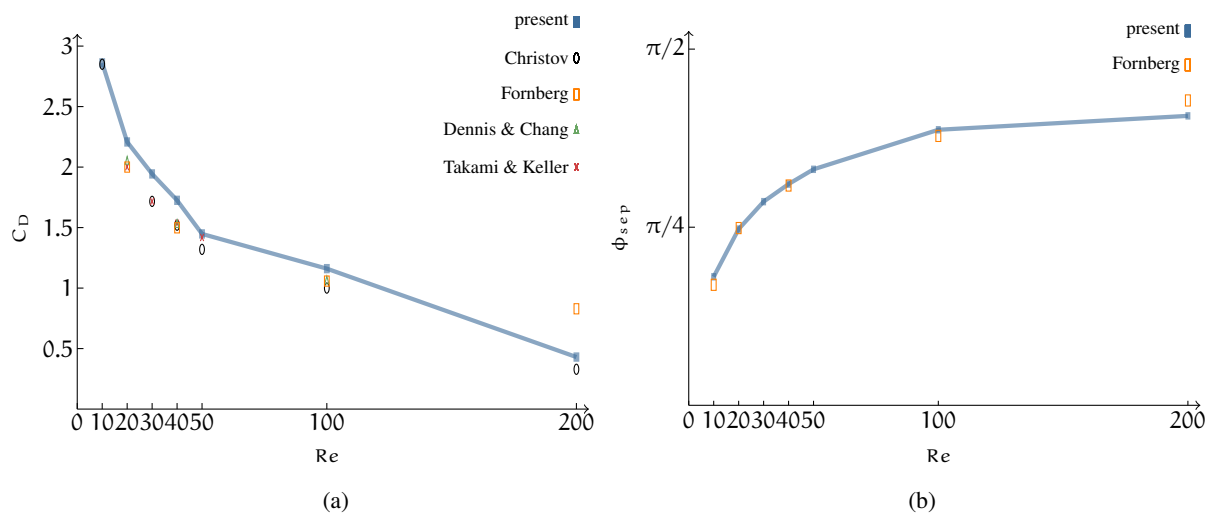


Figura 4.14: Posizione del punto di separazione (a) e Coefficiente di drag C_D (b).

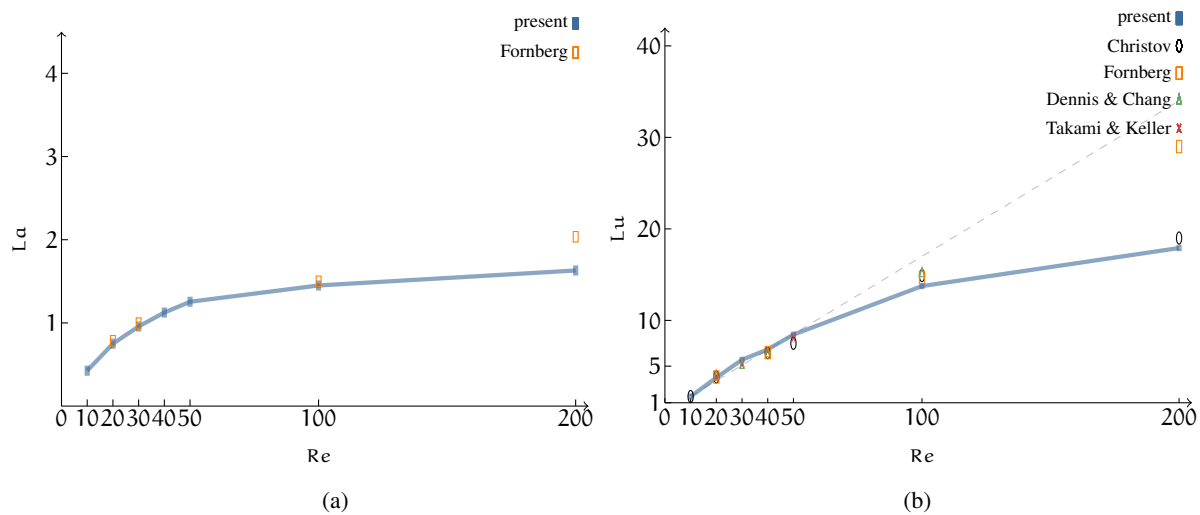


Figura 4.15: Larghezza della bolla (a) e lunghezza misurata dal centro del cilindro (b).

In questa tesi abbiamo affrontato il problema della ricerca di soluzioni stazionarie delle equazioni di Navier Stokes per fluidi viscosi incomprimibili ad alti valori del numero di Reynolds; in particolar modo per il flusso nel dominio esterno ad un cilindro. Il sistema viene risolto numericamente con il metodo iterativo di Newton inesatto *pseudo transient continuation*, sviluppato per il calcolo di soluzioni stazionarie di equazioni differenziali non lineari nel caso in cui il dato iniziale è lontano dallo stato stazionario. Il metodo induce all'utilizzo della strategia *matrix-free*, dove gli incrementi di Newton sono calcolati iterativamente, risolvendo una serie di problemi consistenti in integrazioni temporali del problema linearizzato non stazionario. Questa procedura è semplice da adattare al risolutore del metodo di Newton standard ed inoltre evita la costruzione esplicita della matrice Jacobiana.

L'efficienza del metodo è stata testata sul problema del flusso in cavità ed è stato osservato che:

- il numero di iterazioni del problema linearizzato non stazionario aumenta all'aumentare del numero di Reynolds;
- gli incrementi di Newton possono essere calcolati in modo approssimato, riducendo in questo modo il numero di integrazioni in tempo del problema linearizzato non stazionario;
- l'efficienza del metodo dipende dalla scelta del passo temporale fittizio, mentre la soluzione rimane invariata:

- il metodo è robusto nel senso che permette di trovare soluzioni anche per numeri di Re elevati.

Per questo problema sono state presentate soluzioni fino a $Re = 20000$. I nostri calcoli indicano che all'aumentare del numero di Reynolds è necessario raffinare la *mesh* così da ottenere una soluzione stazionaria e risolvere anche i vortici che appaiono agli angoli della cavità.

Il metodo applicato al problema stazionario del flusso intorno ad un cilindro mostra che è possibile calcolare la soluzione numerica anche per valori del numero di Reynolds per cui essa risulta instabile. Abbiamo infatti ottenuto soluzioni numeriche fino a $Re = 200$, nonostante sia noto che la soluzione perda la sua stabilità già per $Re > 40$. I risultati da noi ottenuti suggeriscono che, al tendere a zero della viscosità, il flusso si separi, come previsto dal modello ideale di Helmholtz-Kirchhoff.

Bibliografia

- [AP02] F. Auteri and N. Parolini, *A mixed-basis spectral projection method*, Journal of Computational Physics **175** (2002), no. 1, 1–23.
- [APQ02] F. Auteri, N. Parolini, and L. Quartapelle, *Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow*, Journal of Computational Physics **183** (2002), no. 1, 1–25.
- [AS09] M. S. Altieri and A. Stefanoni, *Heat Spectral-Generated by Doxygen 1.5.9*.
- [BC97] E. Barragy and GF Carey, *Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements*, Computers & Fluids **26** (1997), no. 5, 453–468.
- [BM92] C. Bernardi and Y. Maday, *Approximations spectrales de problemes aux limites elliptiques. (Spectral approximation for elliptic boundary value problems)*, 1992.
- [BS94] P.N. Brown and Y. Saad, *Convergence theory of nonlinear Newton–Krylov algorithms*, SIAM Journal on Optimization **4** (1994), 297.
- [BS06] C.H. Bruneau and M. Saad, *The 2D lid-driven cavity problem revisited*, Computers & Fluids **35** (2006), no. 3, 326–348.

- [BT97] D. Barkley and L. Tuckerman, *Stokes preconditioning for the inverse power method*, Fifteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer, 1997, pp. 75–76.
- [CB08] N. Cardoso and P. Bicudo, *Time dependent simulation of the Driven Lid Cavity at High Reynolds Number*, Arxiv preprint arXiv:0809.3098 (2008).
- [CHQ07] C. Canuto, M.Y. Hussaini, and A. Quarteroni, *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*, Springer Verlag, 2007.
- [CKK04] T.S. Coffey, CT Kelley, and D.E. Keyes, *Pseudotransient continuation and differential-algebraic equations*, SIAM Journal on Scientific Computing **25** (2004), no. 2, 553–569.
- [CMM09] C.I. Christov, R.S. Marinova, and T.T. Marinov, *Does the stationary viscous flow around a circular cylinder exist for large Reynolds numbers? A numerical solution via variational imbedding*, Journal of Computational and Applied Mathematics **226** (2009), no. 2, 205–217.
- [DFM02] M.O. Deville, P.F. Fischer, and E.H. Mund, *High-order methods for incompressible fluid flow*, Cambridge Univ Pr, 2002.
- [ECG05] E. Erturk, TC Corke, and C. Goökçöl, *Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **48** (2005), no. 7, 747–774.
- [Ert09] E. Erturk, *Discussions on driven cavity flow*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **60** (2009), no. 3, 275–294.
- [ESW05] H.C. Elman, D.J. Silvester, and A.J. Wathen, *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics*, Oxford University Press, USA, 2005.
- [For80] B. Fornberg, *A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder*, Journal of Fluid Mechanics, Cambridge Univ Press **98** (1980), no. 04, 819–855.
- [For91] ———, *Steady incompressible flow past a row of circular cylinders*, Journal of Fluid Mechanics **225** (1991), 655–671.

- [Gal99] GP Galdi, *On the existence of symmetric steady-state solutions to the plane exterior Navier-Stokes problem for arbitrary large Reynolds number*, *Advances in fluid dynamics* **4** (1999), 1–25.
- [Gal04] Giovanni P. Galdi, *Chapter 2 stationary navier–stokes problem in a two-dimensional exterior domain*, *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, vol. 1, North-Holland, 2004, pp. 71 – 155.
- [Ger07] P. Gervasio, *Spectral Element Library-CHQZ lib Release 1.0*.
- [GHS97] GP Galdi, JG Heywood, and Y. Shibata, *On the global existence and convergence to steady state of Navier-Stokes flow past an obstacle that is started from rest*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer **138** (1997), no. 4, 307–318.
- [GW74] D. Gilbarg and HF Weinberger, *Asymptotic properties of Leray’s solution of the stationary two-dimensional Navier-Stokes equations*, *Russian Mathematical Surveys* **29** (1974), 109.
- [KS06] R.M. Kirby and S.J. Sherwin, *Stabilisation of spectral/hp element methods through spectral vanishing viscosity: Application to fluid mechanics modeling*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195** (2006), no. 23-24, 3128–3144.
- [Ler33] J. Leray, *Etude de diverses equations integrales non lineaires et de quelques problemes que pose l’hydrodynamique*, *J. Math. Pures Appl. IX. Ser* **12** (1933), 1–82.
- [Maï09] O.L. Maïtre, *A Newton method for the resolution of steady stochastic Navier-Stokes equations*, *Computers & Fluids* **38** (2009), no. 8, 1566–1579.
- [MT95] C.K. Mamun and L.S. Tuckerman, *Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow*, *Physics of Fluids* **7** (1995), no. 1, 80–91.
- [MT96] L.M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics*, Dover Pubns (1996).
- [PW02] B. Protas and JE Wesfreid, *Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime*, *Physics of Fluids* **14** (2002), 810.

-
- [QV08] A.M. Quarteroni and A. Valli, *Numerical approximation of partial differential equations*, Springer Verlag, 2008.
- [RS08] A. Russo and G. Starita, *On the existence of steady-state solutions to the Navier–Stokes system for large fluxes*, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di scienze* **7** (2008), no. 1, 171–180.
- [Smi79] FT Smith, *Laminar flow of an incompressible fluid past a bluff body: the separation, reattachment, eddy properties and drag*, *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press **92** (1979), no. 01, 171–205.
- [Sto51] G.G. Stokes, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, Pitt Press, 1851.
- [XP04] C. Xu and R. Pasquetti, *Stabilized spectral element computations of high Reynolds number incompressible flows*, *Journal of Computational Physics* **196** (2004), no. 2, 680–704.