

POLITECNICO DI MILANO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione



**CONTROLLO MAGNETICO DELL'ASSETTO
DI SATELLITI MEDIANTE PROIEZIONI
GENERALIZZATE**

Relatore: Prof. MARCO LOVERA

Tesi di laurea di:
LORENZO INTROZZI
Matr. 708584

Anno Accademico 2009 - 2010

La fine di un viaggio è solo l'inizio di un altro.
José Saramago

A voi che mi siete vicini.

Ringraziamenti

Il mio viaggio nel mondo dell' università sembra giungere alla sua naturale conclusione e prima di cominciare il nuovo cammino che mi aspetta, desidero ringraziare coloro che mi hanno permesso di essere dove sono ora.

Innanzitutto ringrazio il mio relatore, prof. Marco Lovera, per avermi costantemente seguito in questi ultimi mesi soprattutto nel lavoro di tesi. Ha saputo sopportare con pazienza la miriade di questioni che gli ponevo senza mai scomporsi ma consigliandomi sempre sul modo migliore in cui procedere. Lo ringrazio davvero per avermi accompagnato in questo passo finale del mio percorso univesitario.

Ringrazio poi i miei genitori e la mia famiglia, per avermi sempre seguito nei miei studi, senza mai farmi pressioni e non facendomi mai mancare il loro appoggio. Questa tesi è dedicata soprattutto a loro.

Infine ringrazio anche gli amici che hanno sopportato le mie assenze e le mie giornate negative causate dal lavoro sulla tesi. Di certo non cambierò completamente, ma sarò almeno più libero e rilassato.

Indice

1	Introduzione	7
2	Modello del satellite	11
2.1	Sistemi di coordinate	11
2.1.1	Definizione dei sistemi di riferimento	11
2.2	Dinamica orbitale	14
2.2.1	Orbite kepleriane	14
2.2.2	Perturbazioni	17
2.3	Cinematica e dinamica di assetto	17
2.3.1	Equazioni di moto	17
2.4	Coppie di disturbo	19
2.4.1	Coppia gravitazionale terrestre	19
2.4.2	Resistenza atmosferica	20
2.4.3	Coppie magnetiche residue	20
2.5	Controllo di assetto	21
2.5.1	Campo magnetico terrestre	21
2.6	Modello complessivo	22
3	Controllo magnetico	25
3.1	Attuatori magnetici	25
3.1.1	Origine della coppia magnetica	26
3.1.2	Momento di dipolo per il controllo di assetto	28
3.2	Modello del satellite con attuatori magnetici	29
3.3	Legge di controllo “projection-based”	31
3.4	Legge di controllo modificata	33
4	Sintesi di controllori magnetici	37
4.1	Introduzione generale	37
4.2	Approccio di Wood-Chen	39
4.3	Controllo ottimo del modello medio della dinamica di assetto	40
4.3.1	Modello medio della dinamica di assetto	40
4.3.2	Controllo LQ su tempo infinito	42

5	Caso di studio: la missione GOCE	43
5.1	Descrizione missione	43
5.2	Risultati della simulazione	46
5.2.1	Risultati in assenza di disturbi	47
5.2.2	Risultati in presenza di disturbi	50
6	Conclusioni	57
A	Calcolo dell'integrale della matrice degli ingressi	59
A.1	Calcolo dell'integrale della matrice degli ingressi nel modello medio del sistema	59
	Bibliografia	69
	Elenco delle figure	72
	Elenco delle tabelle	73

Capitolo 1

Introduzione

Questa tesi si occupa del problema del controllo di assetto di satelliti tramite attuatori magnetici. In particolare si affronta il caso di satelliti con matrice d'inerzia mal distribuita, introducendo un nuovo approccio alla sintesi della legge di controllo.

Negli ultimi decenni si sono sempre più affermati, per particolari applicazioni specialmente di carattere scientifico, piccoli e medi satelliti caratterizzati da peso e dimensioni ridotte. In particolare negli ultimi anni sono state lanciate missioni spaziali con lo scopo di osservare la Terra al fine di valutare caratteristiche quali la conformazione geomorfica, i cambiamenti sulla superficie o anche per poter rilevare in maniera più precisa la forza del campo gravitazionale nelle diverse parti del globo [1].

Satelliti di questo genere comportano vantaggi anche dal punto di vista economico dato che hanno un'architettura semplice e i tempi di sviluppo della missione spaziale consentono di ottenere risultati in tempi ridotti.

Mantenere peso e dimensioni contenute si traduce anche nella continua ricerca di sensori e attuatori da posizionare a bordo dei satelliti che occupino sempre meno spazio garantendo comunque un'ottima affidabilità. Le costanti e numerose evoluzioni dell'elettronica consentono di sviluppare nuovi componenti e nuove tecniche di controllo. Una direzione in cui si è orientata la ricerca è nell'ambito del controllo con attuatori magnetici che sfruttano l'interazione tra un dipolo magnetico creato a bordo del satellite e il campo magnetico terrestre. Le bobine magnetiche possono sostituire le pre-esistenti componenti meccaniche per il controllo di assetto con vantaggi economici, di durata di vita del satellite e di affidabilità. Inoltre non necessitano di combustibile poichè sono attuate tramite corrente elettrica che può essere ricavata dai pannelli solari già montati a bordo dei satelliti.

Dal momento che gli attuatori magnetici generano un campo elettromagnetico, la loro collocazione all'interno del satellite deve essere studiata con accuratezza al fine di evitare possibili interazioni con le altre strumentazioni a bordo.

Un ulteriore svantaggio nell'utilizzo di questo tipo di attuatori è che il controllo di assetto dipende dalla direzione del campo magnetico terrestre e dalla sua intensità. Gli attuatori magnetici generano un dipolo magnetico a bordo del satellite che, interagendo con il campo magnetico terrestre, tende ad allineare il satellite lungo gli assi di riferimento orbitali stabiliti. La conoscenza del campo magnetico terrestre è quindi fondamentale per il problema di controllo.

In particolare, l'intensità del campo magnetico terrestre sentita dal satellite è in funzione della distanza tra l'orbita del satellite e la superficie terrestre. Gli attuatori magnetici lavorano meglio ad orbite basse piuttosto che ad orbite elevate, come quelle geostazionarie, poiché più la distanza dalla superficie della Terra aumenta, più l'intensità del campo magnetico terrestre decresce.

Lo svantaggio legato alla direzione del campo magnetico terrestre è che il momento di dipolo magnetico utilizzabile per il controllo può essere solo quello applicato perpendicolarmente al campo magnetico. Ciò significa che nel controllo di assetto il satellite è sempre sotto-attuato. Infatti la coppia magnetica ideale per il controllo spesso non è perpendicolare al campo magnetico terrestre e quindi essa non può essere implementata totalmente dagli attuatori, i quali possono fornire unicamente una parte di essa, ossia la sola componente perpendicolare al campo magnetico. Quest'ultima è dunque la coppia magnetica reale ottenibile.

Si può intuire che se la coppia magnetica ideale consistesse nella sola componente perpendicolare al campo magnetico si avrebbe la condizione ideale per il controllo di assetto. L'obiettivo del controllo deve quindi essere quello di minimizzare l'errore tra coppia magnetica ideale e reale. Nella teoria di controllo classica questo obiettivo viene conseguito tramite un'approssimazione geometrica della coppia magnetica nella sua proiezione sul piano perpendicolare al campo magnetico terrestre. Questo è il cosiddetto approccio "projection-based".

Il controllo ottenuto tramite questo approccio risulta ancora più problematico nel caso di satelliti con inerzia mal distribuita. La presenza di un momento principale d'inerzia con un valore decisamente diverso dagli altri due, causa oscillazioni del satellite che possono essere difficilmente sopprimibili impedendo di fatto di ottenere un controllo di assetto soddisfacente.

Si cerca allora un nuovo approccio alla sintesi della legge di controllo che possa pesare differentemente gli errori tra coppia magnetica ideale e reale commessi rispetto a ciascun asse di riferimento orbitale. Così facendo è quindi possibile modificare il peso di ciascun asse in modo da favorire, nello sviluppo del controllore, l'asse avente inerzia minore e migliorare di conseguenza il controllo di assetto del satellite.

Obiettivo del presente lavoro di tesi è quindi quello di implementare una legge di controllo basata su questo nuovo approccio e valutare se esso consente effettivamente di ottenere un controllo di assetto migliore rispetto a quello ottenibile con l'approccio classico.

La tesi è organizzata come segue:

Nel Capitolo 2 si introducono i riferimenti orbitali per satelliti a bassa quota e su orbite quasi circolari, necessari per descriverne la cinematica e la dinamica di assetto. Vengono anche descritti i principali disturbi noti in letteratura la cui influenza sul satellite di solito non può essere ignorata. Si delinea anche un modello semplice per la misura del campo magnetico terrestre che sarà successivamente utilizzato nel controllo di assetto.

Nel Capitolo 3 vengono presentate le bobine magnetiche, ovvero gli attuatori utilizzati nel controllo magnetico di assetto, e la teoria di base che consente di ottenere un modello linearizzato tempo-variante della dinamica del satellite con questo tipo di attuatori. Inoltre si descrive la legge di controllo classica per questo tipo di problemi di controllo e una legge di controllo innovativa che verrà poi analizzata nel seguito della tesi.

Il Capitolo 4 propone inizialmente una panoramica generale sui metodi usati al giorno d'oggi nella sintesi dei controllori magnetici, per poi analizzare il metodo da cui ha preso spunto il presente lavoro di tesi e quelli che sembrano esserne i punti deboli. Viene quindi presentato un controllore differente, sviluppato con il controllo ottimo lineare quadratico sul modello medio della dinamica di assetto del satellite.

Nel Capitolo 5 si analizza un caso di studio in cui il controllo presentato nei precedenti capitoli si dimostra di particolare interesse. Si descrivono le caratteristiche principali della missione GOCE dell' Agenzia Spaziale Europea e si mostrano successivamente i risultati del controllo ottenuti al simulatore.

Infine nel Capitolo 6 si riportano le conclusioni sul lavoro svolto.

Capitolo 2

Modello del satellite

In questo capitolo viene sviluppato il modello necessario a descrivere il moto d'assetto ed il moto orbitale di un satellite artificiale in orbita attorno alla Terra. Dopo aver definito i sistemi di riferimento e sviluppato il modello ideale dell'orbita, vengono considerate anche le principali perturbazioni che tendono a modificare la traiettoria del satellite.

Infine si introduce l'espressione del campo magnetico terrestre di cui il satellite risente e che verrà nel seguito utilizzato per attuare il controllo di assetto del satellite stesso.

2.1 Sistemi di coordinate

Nella descrizione della dinamica di assetto del satellite e della dinamica del moto orbitale è fondamentale stabilire i sistemi di riferimento rispetto a quali si definisce il sistema in esame. E' importante sottolineare che la scelta dei sistemi di riferimento è legata al tipo di problema per cui si formula il modello.

2.1.1 Definizione dei sistemi di riferimento

Tre sistemi di riferimento saranno utilizzati in seguito per definire le equazioni di moto (si veda [4]):

- IRF - Inertial Reference Frame
- LORF - Local Orbiting Reference Frame
- SCRF - Spacecraft Centered Reference Frame

IRF

Il sistema di riferimento inerziale (IRF) ha come origine il centro della Terra ed è definito come segue.

L'asse z è lungo l'asse di rotazione terrestre, uscente dal polo nord. L'asse x è diretto verso il Punto Vernale (Υ), ovvero diretto dal centro della Terra alla posizione del sole nel primo giorno di primavera. Infine l'asse y è perpendicolare al piano formato dagli altri assi completando una terna destrorsa.

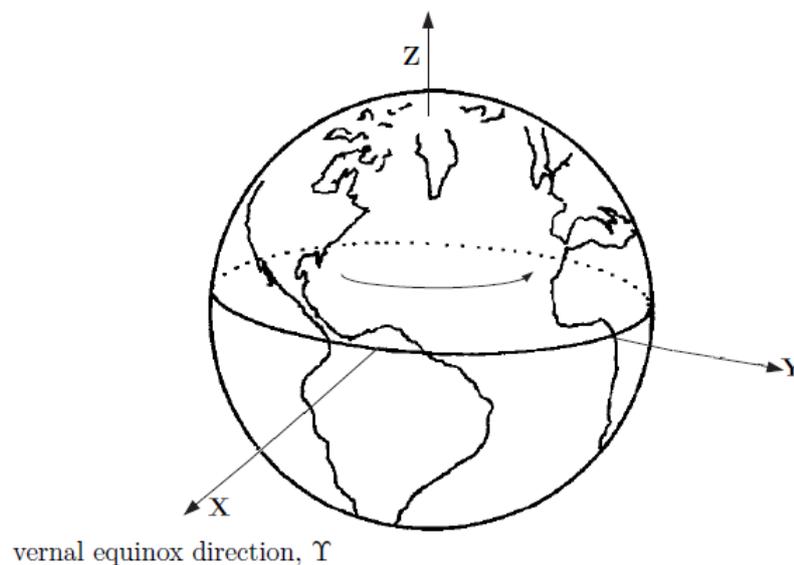


Figura 2.1: Sistema di riferimento Inerziale (IRF) rispetto alla Terra.

LORF

Questo sistema di riferimento pone l'origine degli assi nel centro di massa del satellite.

L'asse z è diretto verso il centro della Terra e l'asse y giace perpendicolarmente al piano orbitale, puntando in verso opposto al vettore di momento orbitale. Infine l'asse x è scelto perpendicolare agli altri due formando una terna destrorsa. L'asse x giace quindi sul piano orbitale ed in particolare, nel caso di orbita circolare, risulta essere tangente all'orbita, dunque diretto lungo il vettore di velocità lineare e con direzione dal nodo ascendente a quello discendente.

La rotazione attorno all'asse x è il rollio, il cui angolo è indicato con ϕ ; la rotazione attorno all'asse y è il beccheggio, indicato con θ ; la rotazione attorno all'asse z è l'imbardata, indicata con ψ .

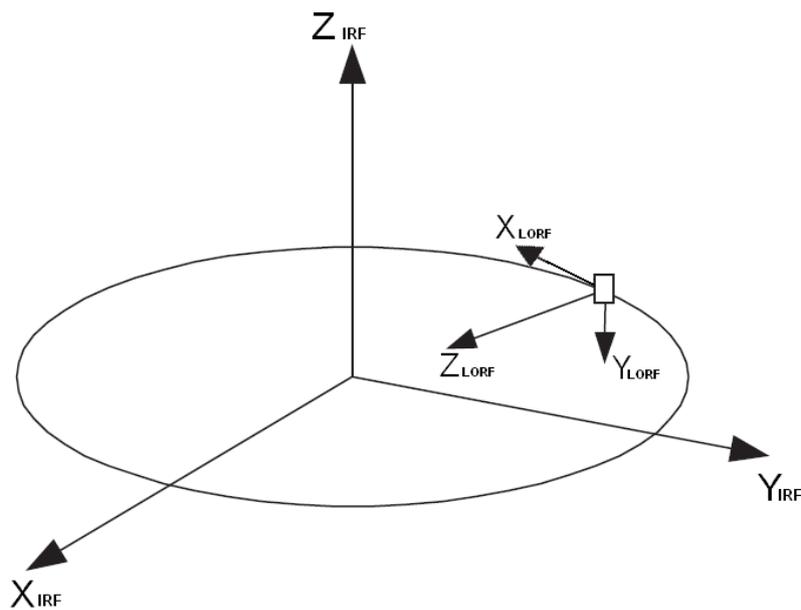


Figura 2.2: Sistema di riferimento Orbitale (LORF) rispetto a quello inerziale.

SCRIF

Il sistema di riferimento del satellite è solidale al satellite stesso. Ha origine nel centro di massa del satellite e, nel caso ideale, è perfettamente allineato con il riferimento orbitale (LORF).

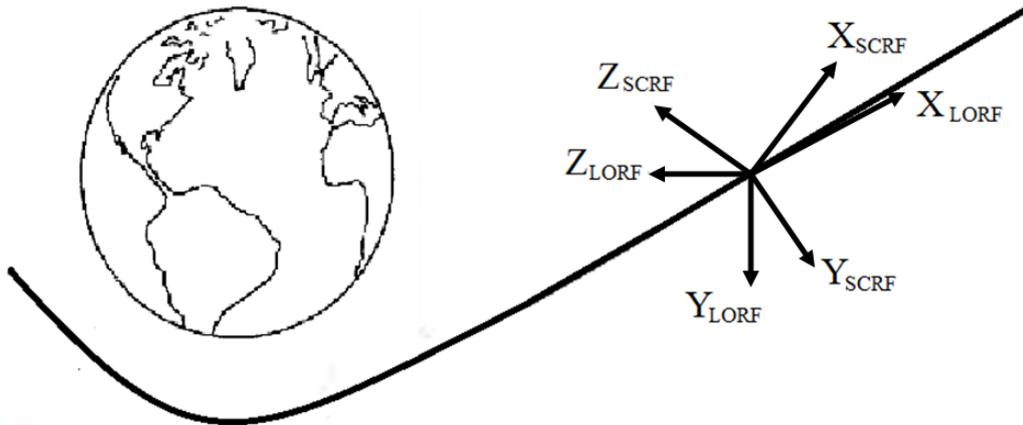


Figura 2.3: Confronto tra gli assi nel Sistema di riferimento del corpo del satellite (SCRF) rispetto al sistema di riferimento orbitale (LORF).

2.2 Dinamica orbitale

Le tre leggi di Keplero e le equazioni di Newton fissano le basi per studiare la dinamica di orbita di corpi nello spazio. Questo vale anche per i satelliti artificiali in rotazione attorno alla Terra. Per la scrittura del modello orbitale e comprendere meglio i parametri che lo caratterizzano, è necessario definire alcune grandezze note dalla teoria classica.

2.2.1 Orbite kepleriane

“I pianeti si muovono su orbite ellittiche, in cui il Sole occupa uno dei due fuochi”.

Secondo il modello kepleriano, i pianeti e in generale ogni corpo celeste che ruota attorno ad un altro, si muovono su un'orbita ellittica.

In Figura 2.4 è evidenziato il moto di un corpo, con posizione r e velocità v nel piano, che si muove intorno ad un altro corpo situato in uno dei due fuochi dell'ellisse. Supposto che la massa del corpo di riferimento si trovi nel fuoco principale F , il punto P è quello a minima distanza da tale fuoco e viene chiamato *perigeo*, mentre il punto A , che si trova a massima distanza dal fuoco, si chiama *apogeo*. Il suffisso *-geo* sta ad indicare che il corpo di riferimento è la Terra, e quindi si denotano orbite terrestri come quelle dei satelliti artificiali. La grandezza a è definita *semiasse maggiore (o periodo)* e la grandezza b si chiama *semiasse minore*. Infine l'angolo θ è chiamato *anomalia vera*: specifica la posizione del corpo sull'orbita in funzione del tempo.

Un altro parametro geometrico utile nella definizione dell'orbita è l'eccentricità, che può essere ricavata una volta noti i raggi di apocentro e pericentro:

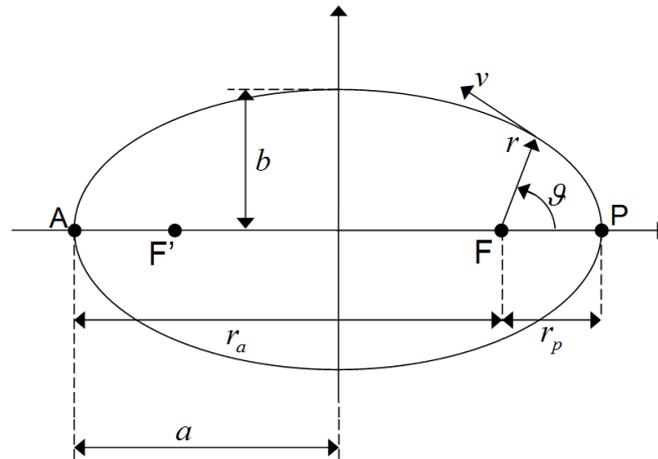


Figura 2.4: Parametri geometrici di un'orbita ellittica.

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} .$$

Il valore dell'eccentricità identifica il tipo di orbita; in caso di $0 < e < 1$ l'orbita è effettivamente ellittica; quando $e = 0$ si entra nel caso particolare di orbita circolare. Tanto più l'eccentricità tende ad essere nulla, tanto più l'orbita tende a diventare circolare.

Oltre i riferimenti nel piano orbitale sopra citati, è opportuno definire ulteriori parametri orbitali che identificano l'orbita all'interno di un sistema di riferimento inerziale.

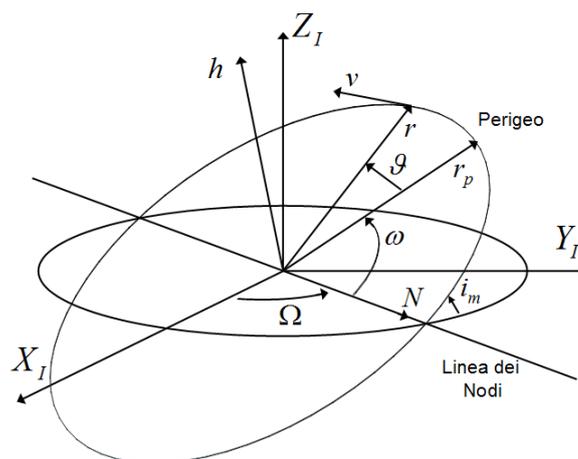


Figura 2.5: Parametri geometrici di un'orbita in un sistema di riferimento inerziale.

In Figura 2.5 sono visibili:

inclinazione - i_m è la separazione angolare del piano orbitale rispetto al sistema inerziale, in particolare rispetto al piano equatoriale terrestre;

ascensione retta del nodo ascendente - Ω è l'angolo misurato sul piano equatoriale compreso tra la direzione del punto vernale X_I e il nodo ascendente dell'orbita;

vettore momento angolare orbitale - h . Il modulo e la componente lungo l'asse z sono utili per il calcolo dell'inclinazione dell'orbita;

vettore asse nodale - N è il vettore che identifica la direzione dell'asse nodale, dato dall'intersezione di piano equatoriale e piano orbitale. Non ha componenti lungo l'asse z nel riferimento inerziale;

argomento di pericentro - ω è l'angolo, misurato sul piano orbitale, compreso tra il nodo ascendente dell'orbita e il vettore eccentricità E che ha come direzione la linea degli apsi (pericentro-apocentro) e verso uscente dal pericentro.

Un'ulteriore grandezza che rientra nei parametri orbitali è il *periodo orbitale* T del corpo, ossia il tempo che il corpo impiega per percorrere un'intera orbita. Esso è legato al semiasse maggiore dell'orbita dalla terza legge di Keplero:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}},$$

dove μ è la costante gravitazionale terrestre.

Nel caso particolare di orbita circolare, poiché il raggio orbitale coincide con il semiasse maggiore, il periodo orbitale è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\mu} r^{\frac{3}{2}}.$$

Inoltre, nelle orbite ellittiche la velocità orbitale v del corpo non è costante ma varia a seconda della posizione del corpo sul piano orbitale. Invece nelle orbite circolari la velocità orbitale è costante lungo tutta la traiettoria e può essere calcolata come:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$$

2.2.2 Perturbazioni

Le orbite Kepleriane sono orbite ideali in cui il corpo orbitante non è soggetto a disturbi. Nella realtà un corpo orbitante attorno alla Terra, come può essere un satellite artificiale su orbita bassa (200 - 1000 km), è soggetto a perturbazioni di varia natura. Tra queste si possono annoverare disturbi come la resistenza aerodinamica, l'attività solare ed anche il campo gravitazionale terrestre, che tendono a deviare il satellite dalla sua orbita ideale.

Queste perturbazioni saranno tenute in conto e discusse più approfonditamente in seguito nel definire l'assetto del satellite.

2.3 Cinematica e dinamica di assetto

Il moto di un satellite in orbita intorno ad un pianeta è descritto principalmente da due sistemi di equazioni: la dinamica di assetto ed il moto orbitale. L'assetto non è altro che l'orientamento del satellite rispetto ad un sistema di riferimento; il moto orbitale è il moto del satellite intorno al pianeta di riferimento.

2.3.1 Equazioni di moto

Il moto del sistema in esame è ricavato rispetto al sistema di riferimento IRF. Le equazioni di Eulero che descrivono la dinamica angolare del satellite, sono date da:

$$\dot{h} + \omega \times h = T, \quad (2.1)$$

dove h è il momento angolare del satellite, ω è la velocità angolare nel sistema di riferimento del satellite (SCRF) rispetto a quello inerziale (IRF) ed infine T è la coppia agente sul satellite.

Nell'equazione (2.1), il momento angolare è così definito:

$$h = J \omega, \quad (2.2)$$

in cui $J > 0$ è la matrice di inerzia del satellite.

Per la proprietà di additività delle velocità angolari relative, si può dire che:

$$\omega = \omega_{OI} + \omega_{BO}, \quad (2.3)$$

in cui ω_{OI} indica la velocità angolare nel sistema di riferimento orbitale (LORF) rispetto a quello inerziale (IRF) e ω_{BO} è la velocità angolare nel sistema di riferimento del satellite (SCRF) rispetto al riferimento orbitale (LORF). Usando una sequenza di tre rotazioni elementari attorno ai singoli assi, possiamo dire che:

$$\omega_{BO} = A^{41} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + A^{42} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + A^{43} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

in cui le matrici di trasformazione sono date da:

$$\begin{aligned}
 A^{43} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \\
 A^{42} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}, \\
 A^{41} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sostituendo ora (2.5) in (2.4) si ottiene:

$$\omega_{BO} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -\dot{\theta} \sin(\phi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \dot{\psi} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Per ricavare invece la ω_{OI} è essenziale rilevare che la trasformazione da riferimento inerziale a riferimento orbitale consiste in un'unica rotazione attorno all'asse diretto verso il centro della Terra con velocità angolare $-\omega_0$; perciò si ha che:

$$\begin{aligned}
 \omega_{OI} &= A^{41} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\omega_0 \cos(\theta) \sin(\psi) \\ -\omega_0 (\sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi)) \\ -\omega_0 (\cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi)) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dalla sostituzione di (2.6) e (2.7) in (2.3), si trova:

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) - \omega_0 \cos(\theta) \sin(\psi) \\ \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) - \omega_0 (\sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi)) \\ -\dot{\theta} \sin(\phi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \dot{\psi} - \omega_0 (\cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi)) \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Per piccole deviazioni di assetto rispetto al sistema di riferimento orbitale, l'equazione precedente si semplifica dando come risultato la seguente equazione lineare:

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \omega_0 \psi \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} + \omega_0 \phi \end{bmatrix} . \quad (2.9)$$

Riprendendo allora l'equazione di Eulero (2.1) e sostituendo i valori di ω appena calcolati, l'equazione linearizzata di moto del satellite nel sistema di riferimento del satellite stesso (SCRF) risulta:

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\phi} + (J_y - J_z) \omega_0^2 \phi - (J_x - J_y + J_z) \omega_0 \dot{\psi} &= u_x + T_x + T_{gg,x} , \\ J_y \ddot{\theta} &= u_y + T_y + T_{gg,y} , \\ J_z \ddot{\psi} - (J_x - J_y) \omega_0^2 \psi + (J_z + J_x - J_y) \omega_0 \dot{\phi} &= u_z + T_z + T_{gg,z} , \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove: u_x, u_y, u_z sono le coppie di controllo applicate dal controllore di assetto, T_x, T_y, T_z sono le coppie esogene di disturbo non gravitazionali e $T_{gg,x}, T_{gg,y}, T_{gg,z}$ sono le componenti della coppia gravitazionale sui singoli assi.

2.4 Coppie di disturbo

Come già accennato in precedenza, un satellite che ruota attorno alla Terra è soggetto a perturbazioni che tendono a modificarne la traiettoria ideale ed anche l'assetto. Le coppie di disturbo che agiscono sul sistema sono di varia natura.

2.4.1 Coppia gravitazionale terrestre

Ogni corpo di dimensioni finite in orbita attorno alla Terra, come nel nostro caso risulta essere il satellite in esame, risente di una coppia gravitazionale a causa della variazione della forza gravitazionale terrestre sul corpo stesso.

Tale coppia è esprimibile dalla seguente relazione:

$$T_{gg} = 3\omega_0^2 (R_s \times (JR_s)) , \quad (2.11)$$

con R_s versore dal centro della Terra al centro geometrico del satellite, che per semplicità è assunto coincidente con il centro di massa. Sebbene questo non sia il caso reale, l'errore che si commette con tale assunzione è irrilevante.

Ipotizzando piccole variazioni di assetto rispetto al sistema di riferimento orbitale (si veda [7]), si ha che:

$$R_s = \begin{bmatrix} \theta \\ -\phi \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

e dunque:

$$T_{gg} = 3\omega_0^2 \begin{bmatrix} (J_z - J_y)\phi \\ (J_z - J_x)\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

che fornisce un modello analitico della coppia gravitazionale.

2.4.2 Resistenza atmosferica

Un'altra perturbazione cui è soggetto un satellite in orbita bassa è dovuta all'interazione tra il corpo del satellite e l'atmosfera. Quest'ultima genera delle forze aerodinamiche in verso opposto al moto del satellite.

E' generalmente difficile modellare la forza aerodinamica che dipende, in diversa misura, dalla forma geometrica del satellite, dal flusso e dalla densità dell'aria. Di queste, soprattutto la densità dell'aria è di difficile stima in quanto non si conoscono approfonditamente le variazioni nella struttura dell'atmosfera.

Una stima di sufficiente precisione per valutare la resistenza aerodinamica è data dal seguente modello:

$$F_{aero} = \frac{1}{2} C_d \rho_{aria} S v^2,$$

in cui S è la superficie del satellite esposta alla resistenza atmosferica, C_d è il coefficiente di resistenza aerodinamica e v è la velocità del vento nella direzione opposta al moto del satellite.

Se si definisce v_{cmcp} il vettore diretto tra il centro di massa del satellite e il centro di pressione, allora è possibile definire la coppia aerodinamica come:

$$T_{aero} = F_{aero} \times v_{cmcp}.$$

2.4.3 Coppie magnetiche residue

Il satellite in esame è dotato di attuatori magnetici per il controllo di assetto. Esiste dunque anche una coppia di disturbo dovuta all'interazione tra il campo magnetico terrestre e il dipolo magnetico residuo del satellite.

Questa coppia può essere descritta dalla relazione:

$$T = M_0 \times b,$$

in cui \vec{b} è il vettore campo magnetico terrestre e M_0 è il dipolo magnetico residuo, che si considera costante.

Altre sorgenti interne al satellite potrebbero generare delle coppie magnetiche residue, come ad esempio correnti parassite o fenomeni di isteresi, ma queste sono considerate piccole e dunque trascurabili.

2.5 Controllo di assetto

Sul satellite sono montati tre attuatori magnetici (uno per ciascun asse). I momenti di dipolo magnetico generati tramite questi attuatori interagiscono con il campo magnetico terrestre permettendone il controllo di assetto e quindi, come si vedrà nei capitoli successivi, saranno le grandezze utilizzate effettivamente per il controllo del satellite.

2.5.1 Campo magnetico terrestre

Il satellite sfrutta attuatori magnetici per il controllo di assetto che interagiscono con il campo magnetico terrestre sottoponendo il satellite stesso ad una coppia magnetica, che sarà poi la stessa utilizzata per il controllo.

Esistono modelli di diversa complessità per descrivere il campo magnetico relativo alla Terra, ma nello studio analitico del sistema in esame, un modello a dipolo orientato (Tilted Dipole Model) ha sufficiente accuratezza (come descritto in [5]).

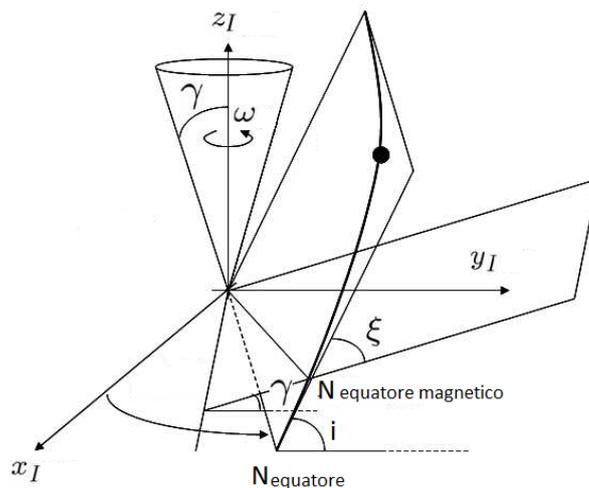


Figura 2.6: Modello del campo magnetico terrestre.

Questo modello descrive le componenti del campo magnetico, espresse in coordinate satellitari, come segue:

$$b(t) = \frac{\mu_m}{a_0^3} \begin{bmatrix} \sin(\xi) \cos(\omega_0 t - \eta) \\ -\cos(\xi) \\ 2 \sin(\xi) \sin(\omega_0 t - \eta) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

dove:

- $\mu_m = 7.943 \cdot 10^{15} \text{Wb m}$ è la forza del dipolo magnetico terrestre,

- a_0 è la distanza del satellite dal centro della Terra, ossia il raggio dell'orbita, pari alla somma del raggio terrestre (6378 km) e della distanza del satellite dalla Terra,
- $\omega_0 t$ è l'anomalia vera del satellite, ossia l'angolo compreso tra il nodo ascendente e la posizione attuale del satellite,
- η è l'angolo misurato dal nodo ascendente dell'orbita rispetto all'equatore geografico al nodo ascendente dell'orbita rispetto all'equatore geomagnetico,
- ξ è l'inclinazione del piano orbitale rispetto all'equatore geomagnetico.

Quando il satellite percorre un'orbita con inclinazione intorno ai 90° si può ritenere la sua orbita quasi polare. Inoltre, se il suo periodo orbitale è di gran lunga inferiore a quello terrestre (come accade per i LEO), pur essendo sia η che ξ tempo-varianti poiché dipendono dalla posizione attuale del satellite, essi possono essere considerati costanti.

In particolare:

$$\xi = i,$$

$$\eta = 0 .$$

Tenendo conto di queste considerazioni nell'equazione (2.14), il campo magnetico terrestre è ulteriormente semplificato come segue:

$$b(t) = \frac{\mu_m}{a_0^3} \begin{bmatrix} \sin(i) \cos(\omega_0 t) \\ -\cos(i) \\ 2 \sin(\xi) \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix} . \quad (2.15)$$

2.6 Modello complessivo

Le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti vengono tenute in conto per descrivere il modello complessivo del satellite. In particolare, le equazioni di moto descritte in (2.10), tenuto conto del valore delle coppie gravitazionali (2.13) [7], si modificano come segue:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= -4 \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_0^2 \phi + \left(1 - \frac{J_y - J_z}{J_x}\right) \omega_0 \dot{\psi} = \frac{u_x + T_x}{J_x} , \\ \ddot{\theta} &= 3 \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_0^2 \theta + \frac{u_y + T_y}{J_z} , \\ \ddot{\psi} &= \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_0^2 \psi - \left(1 + \frac{J_x - J_y}{J_z}\right) \omega_0 \dot{\phi} = \frac{u_z + T_z}{J_z} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tali equazioni tradotte in un modello a spazio di stato danno luogo al seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4\sigma_1\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\sigma_1)\omega_0 \\ 0 & 3\sigma_2\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3\omega_0^2 & -(1+\sigma_3)\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/J_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

dove,

$$\sigma_1 = \frac{J_y - J_z}{J_x}, \quad \sigma_2 = \frac{J_z - J_x}{J_y}, \quad \sigma_3 = \frac{J_x - J_y}{J_z};$$

T_x, T_y, T_z , sono le componenti delle coppie agenti sul sistema (coppie di controllo e coppie di disturbo non gravitazionali).

Capitolo 3

Controllo magnetico

L'obiettivo di questo capitolo è quello di introdurre il controllo magnetico per l'assetto di un satellite. Verranno esaminati gli attuatori utilizzati per effettuare questo tipo di controllo e il modo in cui interagiscono con il campo magnetico terrestre.

Verrà spiegato successivamente come l'uso di attuatori magnetici porta a modificare il modello che descrive la dinamica del satellite. In particolare si vedrà che il sistema in esame non sarà più un sistema tempo invariante come descritto nel capitolo precedente, ma diventerà tempo-variante proprio a causa dell'utilizzo di attuatori magnetici per il controllo che interagiscono con il campo magnetico terrestre, la cui configurazione dipende direttamente dal tempo.

Infine, le ultime due sezioni del capitolo introdurranno le leggi di controllo prese in esame. Per prima verrà descritta la legge di controllo classica, in cui la coppia magnetica ideale è proiettata nella sua componente reale, perpendicolare al campo magnetico istantaneo. Successivamente si modificherà questa legge di controllo introducendo un fattore di peso con lo scopo di favorire il controllo su un asse rispetto a quello sugli altri due.

3.1 Attuatori magnetici

Gli attuatori sono una parte integrante del sistema di controllo di assetto di un satellite. In particolare, gli attuatori magnetici sono dispositivi che sfruttano l'interazione tra il momento di dipolo magnetico del satellite e il campo magnetico terrestre per generare una coppia magnetica di controllo. Questi attuatori funzionano meglio per satelliti su orbite basse piuttosto che su satelliti a orbite più alte, come quelli geostazionari, poiché quando aumenta la distanza del satellite dalla Terra, l'intensità del campo magnetico decresce.

Questo tipo di attuatori consente vantaggi notevoli soprattutto dal punto di vista economico e dimensionale; consentono un più semplice montaggio anche in

satelliti di ridotte dimensioni rispetto ad altri dispositivi di controllo, sia per il peso inferiore sia per il minore ingombro.

Gli attuatori magnetici sono in genere delle bobine magnetiche, ovvero bobine di spire percorse da corrente per generare un momento magnetico. A causa del fatto che tale momento magnetico è immerso nel campo magnetico terrestre, sarà generata una coppia magnetica. Dunque se si montano tre attuatori magnetici perpendicolari tra loro, così che siano allineati come gli assi di riferimento, le tre coppie magnetiche generate in questo modo possono essere usate per il controllo di assetto.

Nei sotto-paragrafi seguenti si analizza il modo in cui la coppia magnetica viene generata dalle bobine magnetiche e i problemi connessi all'interazione tra dipolo magnetico del satellite e campo magnetico terrestre, di cui bisogna tener conto nel realizzare il controllo di assetto.

L'origine delle coppie magnetiche può essere esaminata osservando dapprima le forze che si generano in un conduttore, immerso in un campo magnetico, percorso da corrente e successivamente descrivendo in che modo la corrente che circola nelle spire degli attuatori magnetici produce tali forze.

3.1.1 Origine della coppia magnetica

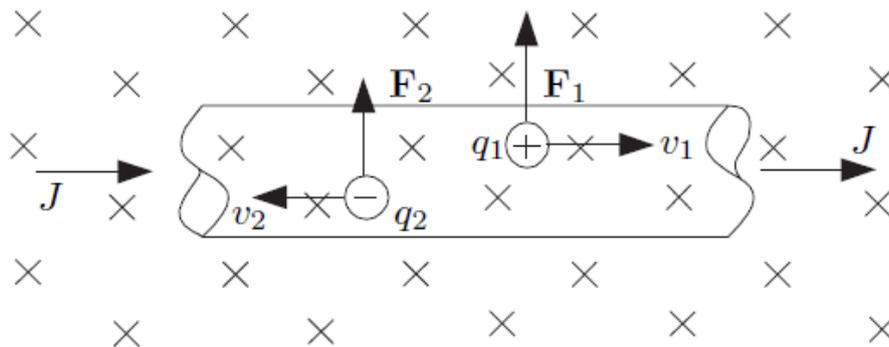


Figura 3.1: Filo metallico, percorso da corrente, immerso in un campo magnetico.

La forza F che agisce su un conduttore percorso da corrente e immerso in un campo magnetico B , come può essere un filo metallico (Figura 3.1), è una somma delle forze che agiscono sulle singole particelle elettriche in movimento:

$$F = (n_1 Al)(q_1 v_1 B) + (n_2 Al)(q_2 v_2 B) = (n_1 q_1 v_1 + n_2 q_2 v_2) Al B, \quad (3.1)$$

in cui A è la sezione trasversale del filo, l è la lunghezza, q_i sono le cariche elettriche, v_i indica la velocità di spostamento della carica, n_i è il numero di cariche

all'interno del conduttore. Inoltre $i = 1$ indica cariche positive e $i = 2$ cariche negative.

Dal momento che la quantità $(n_1q_1v_1 + n_2q_2v_2)$ è la densità di corrente J , allora:

$$F = JAlB = IlB , \quad (3.2)$$

dove I è la corrente che percorre il filo metallico.

Come si può facilmente osservare, l'equazione precedente è valida solo quando il campo magnetico è perpendicolare al filo. Se ci fosse una componente del campo magnetico parallela, questa non eserciterebbe una forza sul filo poichè si troverebbe nella stessa direzione in cui si muovono le cariche elettriche. La relazione precedente si può esprimere quindi nel caso più generale:

$$F = IlB \sin(\phi) , \quad (3.3)$$

con ϕ angolo compreso tra la direzione del campo magnetico B e quella del filo metallico.

Espressa in forma vettoriale l'equazione appena vista è descritta da:

$$F = I l \times B . \quad (3.4)$$

Quando il filo metallico viene piegato su se stesso a formare una spira rettangolare di lati a e b , e successivamente ruotato di un angolo α rispetto al campo magnetico come mostrato in Figura 3.2, le forze che agiscono su lati opposti della spira sono uguali e opposte, dunque la forza risultante sulla spira è nulla.

Invece c'è una coppia T , non nulla, dovuta al fatto che si crea un momento di coppia a causa dell'angolo α tra la spira e il campo magnetico. La coppia è pari a:

$$T = IBA \sin(\alpha) , \quad (3.5)$$

dove $A = ab$ è l'area della spira.

Da questa equazione è evidente che si ha coppia massima quando $\alpha = 90^\circ$, ossia quando il piano della spira è parallelo al campo magnetico. Quando al contrario la spira è perpendicolare al campo magnetico ($\alpha = 0^\circ$), la coppia magnetica è nulla. Considerazioni analoghe valgono nel caso in cui si consideri una bobina, ossia una serie di spire percorse da corrente.

Il momento magnetico generato dalla corrente che circola in una bobina risulta:

$$m = \mu NIA \vec{n} , \quad (3.6)$$

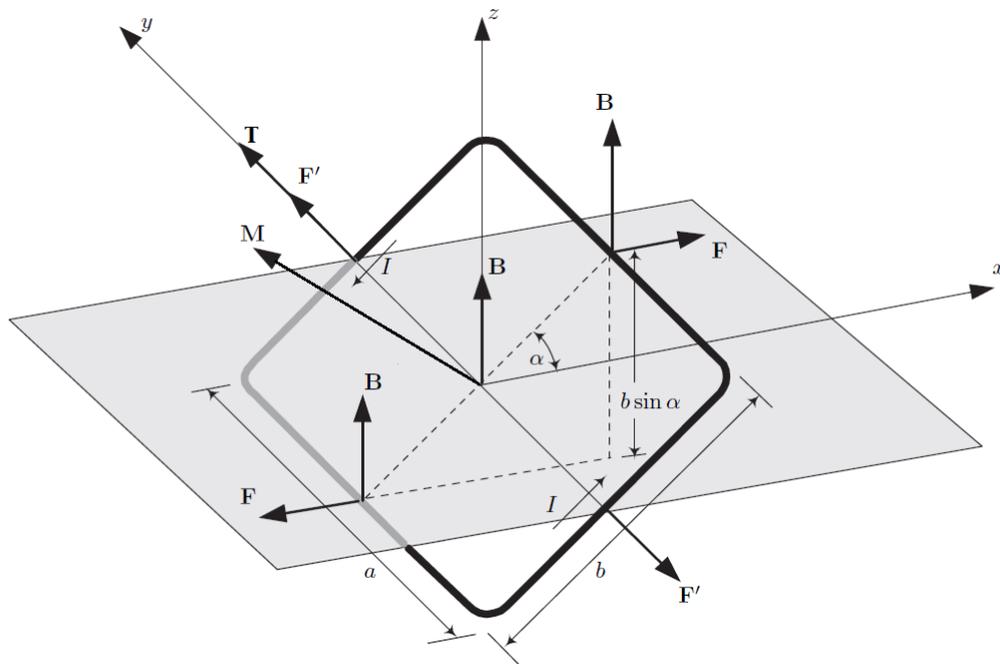


Figura 3.2: Forze agenti su una spira metallica elettrificata immersa in un campo magnetico.

con μ permeabilità del materiale interno alla bobina, N numero di spire della bobina, I è la corrente, A è la sezione della bobina e \vec{n} è un versore unitario perpendicolare al piano della spira, cioè perpendicolare alla sezione della bobina.

3.1.2 Momento di dipolo per il controllo di assetto

Nel controllo di assetto, gli attuatori magnetici sfruttano la corrente che circola nelle bobine per generare un momento di dipolo magnetico sul satellite che interagisce con il campo magnetico terrestre. La coppia magnetica deve essere perpendicolare sia al campo magnetico sia al momento di dipolo. Tale principio è illustrato visivamente in Figura 3.3.

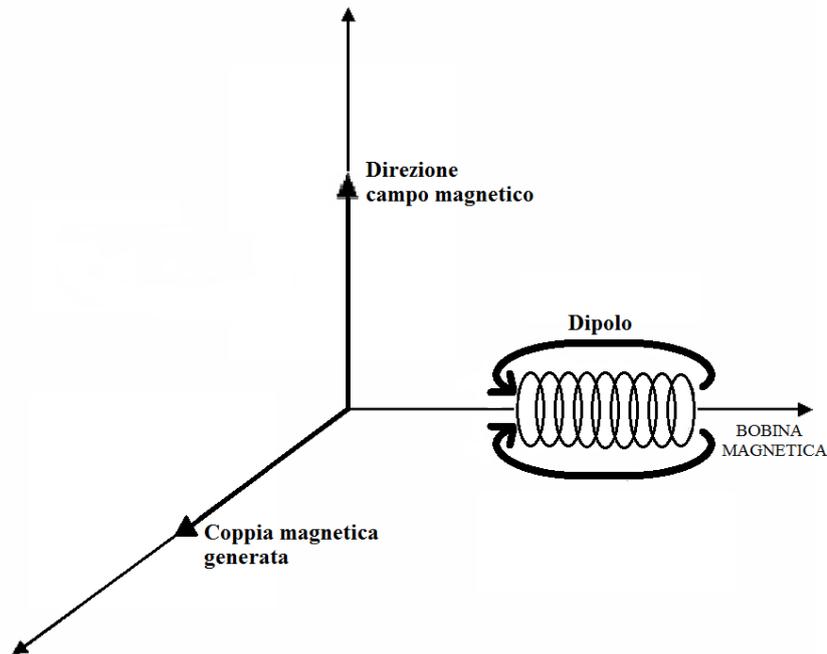


Figura 3.3: Direzione della coppia magnetica.

La coppia magnetica può essere espressa come:

$$T = m \times B . \quad (3.7)$$

Nel caso di controllo di un satellite spesso la direzione della coppia magnetica ideale non è perpendicolare al campo magnetico. In questo caso è possibile sfruttare per il controllo unicamente la componente perpendicolare al campo magnetico.

3.2 Modello del satellite con attuatori magnetici

Il modello matematico espresso in (2.17) è un modello linearizzato per il generico satellite orientato secondo gli assi di riferimento precedentemente introdotti. Il modello è quindi del tipo:

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix} T , \quad (3.8)$$

in cui x è il vettore di stato formato dai tre angoli di rotazione e dalle tre rispettive velocità angolari, T è l'insieme delle coppie di controllo T_c e di quelle di disturbo T_d , J è la matrice di inerzia. Dunque si può anche scrivere:

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix} [T_c + T_d] . \quad (3.9)$$

Nel modello linearizzato appena visto, mentre la matrice A è unicamente funzione della configurazione del satellite, la matrice B deve essere ancora analizzata dal momento che dipenderà direttamente dalla scelta degli attuatori utilizzati per il controllo.

Nel caso di controllo effettuato unicamente utilizzando attuatori magnetici, le variabili di controllo che si possono scegliere sono le coppie magnetiche o i momenti di dipolo generati dalle bobine magnetiche che dipendono direttamente dalla corrente circolante negli attuatori. In questo caso dunque, le coppie di controllo generate dalle bobine sono date dall'equazione (3.7), che può essere equivalentemente scritta nel modo seguente:

$$T_c = S(b(t))m , \quad (3.10)$$

con m vettore dei momenti di dipolo nelle tre componenti assiali. Essendo poi $b(t)$ il vettore campo magnetico terrestre in coordinate orbitali, la matrice $S(b(t))$ è così definita:

$$S(b(t)) = \begin{bmatrix} 0 & b_z(t) & -b_y(t) \\ -b_z(t) & 0 & b_x(t) \\ b_y(t) & -b_x(t) & 0 \end{bmatrix} . \quad (3.11)$$

Si noti che nonostante la matrice $S(b(t))$ sia strutturalmente singolare, una controllabilità "media" (ossia la controllabilità del sistema in senso tempo-variante) è garantita, per la maggior parte delle orbite di interesse pratico, dalla variabilità del vettore campo magnetico b , le cui componenti sono funzione del tempo.

La dinamica linearizzata per il controllo di assetto del sistema può allora essere definita come:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[T_c(t) + T_d(t)] . \quad (3.12)$$

oppure

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_t(t)m(t) + BT_d(t) , \quad (3.13)$$

dove:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix} ,$$

$$B_t(t) = B S(b(t)) .$$

Si sono dunque definite due differenti matrici di controllo B e $B_t(t)$ che consentono di considerare le formulazioni del problema di controllo in cui come variabili

di controllo vengono considerate rispettivamente le coppie magnetiche T_c o i momenti di dipolo m . Perciò mentre la matrice A risulta essere sempre costante, la matrice di controllo può assumere una forma tempo-variante nel caso di controllo avente come ingressi i dipoli magnetici.

In particolare si può anche affermare che la matrice $B_t(t)$ è approssimativamente periodica di periodo $2\pi/\omega_0$ a causa della sua dipendenza dal vettore campo magnetico $b(t)$ definito in (2.15).

3.3 Legge di controllo “projection-based”

La struttura di controllo classica comunemente usata nel caso di controllori magnetici è basata sulla proiezione della coppia di controllo ideale nella componente perpendicolare al campo magnetico. Come già visto in precedenza infatti, nel controllo magnetico è impossibile sfruttare per il controllo la coppia ideale che dovrebbero fornire gli attuatori poichè la sua interazione col campo magnetico terrestre non lo consente.

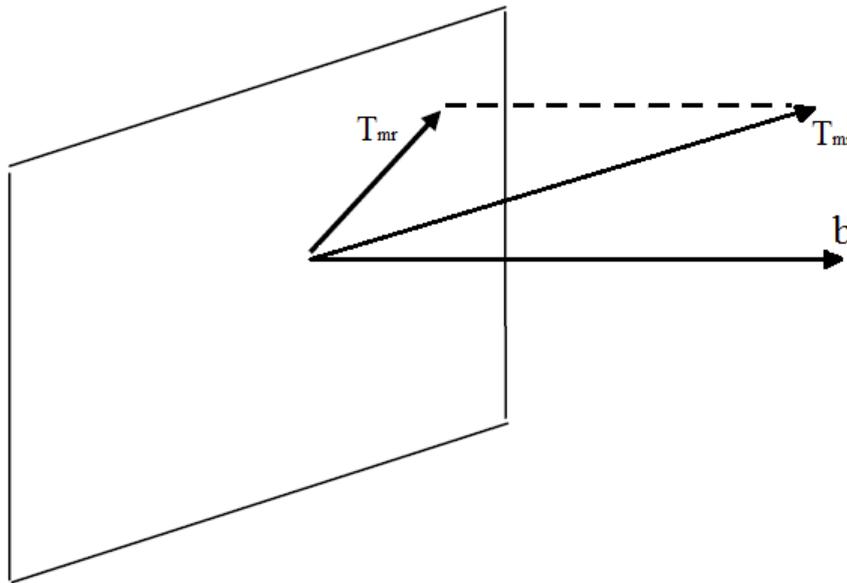


Figura 3.4: Coppia magnetica di controllo: modello “projection-based”.

Il momento di dipolo comandato dagli attuatori è quindi calcolato considerando la proiezione della coppia ideale richiesta lungo il piano ortogonale al vettore di campo magnetico terrestre nel modo seguente:

$$m(t) = \frac{b(t) \times T_{mi}(t)}{\|b(t)\|^2}, \quad (3.14)$$

in cui T_{mi} è la coppia magnetica ideale richiesta per il controllo.

In accordo a quanto espresso in (3.7) e (3.14), la trasformazione da coppia magnetica ideale T_{mi} a coppia magnetica reale di controllo T_{mr} , ossia la coppia comandata effettivamente dagli attuatori, è:

$$T_{mr}(t) = \left(I - \frac{b(t)b(t)'}{\|b(t)\|^2} \right) T_{mi}(t) . \quad (3.15)$$

La relazione appena espressa è generalmente considerata come un'approssimazione geometrica dettata dalla proiezione della coppia magnetica ideale sul piano ortogonale al campo magnetico [3]. In realtà tale approccio di controllo può essere visto come implementazione di un semplice problema di ottimizzazione dell'errore.

Infatti quello che si vuole ottenere è che la differenza tra coppia magnetica ideale richiesta e quella effettivamente disponibile per il controllo sia minima; si tratta di minimizzare il seguente funzionale di costo:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \|T_{mi} - T_{mr}\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (T_{mi} - T_{mr})'(T_{mi} - T_{mr}) , \end{aligned} \quad (3.16)$$

soggetto al vincolo:

$$T_{mr}'b = 0 . \quad (3.17)$$

Si tratta dunque di minimizzare la quantità:

$$\frac{1}{2} T_{mi}' T_{mi} - T_{mr}' T_{mi} + \frac{1}{2} T_{mr}' T_{mr} , \quad (3.18)$$

in cui si può notare che il termine $\frac{1}{2} T_{mi}' T_{mi}$ è costante rispetto alla variabile di derivazione T_{mr} , dunque può essere tralasciato nella minimizzazione del funzionale di costo. Il problema di minimizzazione si riduce quindi a una forma semplificata:

$$J = -T_{mi}' T_{mr} + \frac{1}{2} T_{mr}' T_{mr} , \quad (3.19)$$

soggetta al vincolo già espresso in (3.17).

Da quanto appena detto si ha un problema di ottimizzazione quadratica soggetto a un vincolo di uguaglianza; è possibile derivarne una soluzione esplicita attraverso l'uso dei moltiplicatori di Lagrange. Per questo tipo di problema di ottimizzazione si ha:

$$T_{mr} + b\lambda - T_{mi} = 0 , \quad (3.20)$$

$$b'T_{mr} = 0 , \quad (3.21)$$

in cui λ è il moltiplicatore di Lagrange.

Dall'equazione (3.20) si ricava:

$$T_{mr} = T_{mi} - b\lambda . \quad (3.22)$$

Sostituendo la (3.22) in (3.21):

$$b'T_{mi} - b'b\lambda = 0 , \quad (3.23)$$

e risolvendo per il moltiplicatore di Lagrange si ottiene:

$$\lambda = \frac{b'T_{mi}}{b'b} . \quad (3.24)$$

Infine sostituendo l'equazione (3.24) in (3.22) ed esplicitando la dipendenza delle variabili dal tempo, si giunge alla formula finale:

$$\begin{aligned} T_{mr}(t) &= T_{mi}(t) - \frac{b(t)b(t)'}{b(t)'b(t)} T_{mi}(t) \\ &= \left(I - \frac{b(t)b(t)'}{b(t)'b(t)} \right) T_{mi}(t) . \end{aligned} \quad (3.25)$$

La soluzione del problema di ottimizzazione dell'errore minimizza effettivamente la norma euclidea dell'errore tra la coppia magnetica ideale e quella di controllo e fornisce lo stesso risultato ottenuto con la proiezione geometrica della coppia magnetica ideale.

3.4 Legge di controllo modificata

La legge di controllo “projection-based” è utile in molti problemi di controllo di assetto dei satelliti e fornisce risultati accettabili. Quando però si considera un problema di controllo di assetto di satelliti aventi inerzia mal distribuita, il controllore basato su questo metodo di controllo non si dimostra altrettanto affidabile. Nonostante l'errore di coppia commesso sia effettivamente minimizzato, l'effetto dell'errore relativo all'asse del satellite avente inerzia minore può avere un significativo effetto negativo sul controllo di assetto.

Al fine di porre rimedio a questo problema, si considera un nuovo funzionale di costo basandosi su quello utilizzato per il controllo “projection-based”. L'errore commesso tra coppia magnetica ideale e coppia magnetica di controllo viene

pesato su ciascuno dei tre assi con l'introduzione di una matrice dei pesi Q , come descritto da Chen e Wood in [9].

Il nuovo funzionale di costo da minimizzare è:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \|Q^{\frac{1}{2}}(T_{mi} - T_{mr})\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (T_{mi} - T_{mr})' Q (T_{mi} - T_{mr}) , \end{aligned} \quad (3.26)$$

in cui Q è diagonale.

J è soggetto al vincolo:

$$T_{mr}' b = 0 . \quad (3.27)$$

Con considerazioni analoghe a quanto fatto nel paragrafo precedente, il problema di minimizzazione si riduce a una forma semplificata:

$$J = -T_{mi}' Q T_{mr} + \frac{1}{2} T_{mr}' Q T_{mr} , \quad (3.28)$$

soggetta al vincolo già espresso in (3.27).

Come nel caso del controllo "projection-based" classico, si possono usare i moltiplicatori di Lagrange per risolvere il problema di ottimizzazione:

$$Q T_{mr} + b \lambda - Q T_{mi} = 0 , \quad (3.29)$$

$$b' T_{mr} = 0 . \quad (3.30)$$

in cui λ è il moltiplicatore di Lagrange.

Dall'equazione (3.29) si ricava:

$$T_{mr} = T_{mi} - Q^{-1} b \lambda . \quad (3.31)$$

Sostituendo la (3.31) in (3.30):

$$b' T_{mi} - b' Q^{-1} b \lambda = 0 , \quad (3.32)$$

e risolvendo per il moltiplicatore di Lagrange si ottiene:

$$\lambda = \frac{b' T_{mi}}{b' Q^{-1} b} . \quad (3.33)$$

Infine sostituendo l'equazione (3.33) in (3.31) ed esplicitando la dipendenza dal tempo, si giunge alla formula:

$$T_{mr}(t) = T_{mi}(t) - Q^{-1} b(t) ((b(t)' Q^{-1} b(t))^{-1} b(t)' T_{mi}(t)) . \quad (3.34)$$

In molti problemi di ottimizzazione l'inversione della matrice $(b(t)'Q^{-1}b(t))$ non è numericamente realizzabile a causa del mal-condizionamento della matrice stessa. In questo caso però, essendo Q una matrice diagonale, non si tratta di invertire una matrice ma un semplice valore scalare:

$$(b(t)'Q^{-1}b(t)) = \frac{b_x(t)}{q_1} + \frac{b_y(t)}{q_2} + \frac{b_z(t)}{q_3} . \quad (3.35)$$

Se si scelgono $q_1, q_2, q_3 > 0$ allora tale valore scalare non sarà mai nullo, dal momento che il vettore campo magnetico terrestre non sarà mai nullo contemporaneamente in tutte e tre le direzioni.

L'equazione (3.34) può allora essere riscritta in forma più compatta:

$$T_{mr}(t) = \left(I - \frac{Q^{-1}b(t)b(t)'}{b(t)'Q^{-1}b(t)} \right) T_{mi}(t) . \quad (3.36)$$

Si può notare che una scelta della matrice dei pesi $Q = I$ riconduce al classico approccio "projection-based". Scegliere invece il valore del peso relativo a un asse superiore agli altri due, consente di dar maggior importanza, nella minimizzazione dell'errore, a quello stesso asse. Nel caso di satelliti in cui un asse ha inerzia minore degli altri due è dunque possibile modificare il peso relativo a quell'asse così da favorirlo rispetto a quelli aventi inerzia maggiore e migliorare così il controllo di assetto del satellite.

Capitolo 4

Sintesi di controllori magnetici

In questo capitolo prima di tutto viene presentata un'introduzione generale sui diversi approcci per il controllo dell'assetto di un satellite tramite l'uso di attuatori magnetici che sono stati proposti da diversi autori negli ultimi 15-20 anni, come descritto in [8]. Approcci basati su strategie di controllo lineari e non-lineari.

Successivamente si analizza l'approccio adottato da Wood e Chen in [9] osservando le limitazioni che tale metodo di controllo sembra avere e che hanno portato alla formulazione di un nuovo approccio. Quest'ultimo viene presentato nel paragrafo finale del presente capitolo.

4.1 Introduzione generale

Svariati approcci per il controllo della dinamica di assetto dei satelliti che sfruttano attuatori elettromagnetici sono stati sviluppati negli anni. Tali approcci si basano su teorie di controllo sia lineari sia non lineari, con particolare focalizzazione sul controllo periodico.

I problemi di controllo lineari sono stati studiati principalmente nella prospettiva di controllo LQ, mentre quelli non lineari vengono analizzati con l'uso di metodi di Lyapunov e sfruttando la periodicità del campo magnetico terrestre.

Per quanto concerne il controllo lineare, nel corso degli anni sono state usate leggi di controllo in retroazione sullo stato verificandone a posteriori la stabilità in anello chiuso oppure effettuando l'analisi di stabilità su un'approssimazione tempo-invariante del satellite.

Finché la dinamica in anello chiuso è sufficientemente lenta, la stabilità del sistema tempo variante può essere studiata sulla sua approssimazione tempo-invariante. Ciò consente, ad esempio, di scegliere i guadagni di un controllore PD in modo da rendere stabile il sistema in anello chiuso ideale e successivamente verificare che la stabilità è valida anche tenendo in conto i vincoli imposti dall'uso di attuatori elettromagnetici.

Recentemente invece, anche grazie a sensori più sofisticati ed accurati, si sono sviluppate tecniche di controllo periodiche che consentono di stabilizzare l'assetto del satellite sfruttando la retroazione dello stato o dell'uscita del sistema. In particolare l'attenzione si è concentrata sul controllo LQ periodico, implementandolo e migliorandolo per poter considerare anche disturbi esterni. Questi vengono modellizzati e inclusi nella descrizione del sistema.

Se si vogliono evitare controllori periodici, si possono sfruttare controllori a orizzonte finito o implementare diversi controllori a guadagno costante calcolati direttamente a bordo del satellite volta per volta; tali tecniche però non danno alcuna garanzia riguardo l'effettiva stabilità in anello chiuso.

Un ulteriore approccio consiste nell'ottenere guadagni costanti sfruttando un controllo ottimo periodico: l'idea è quella di analizzare il comportamento asintotico della soluzione dell'equazione di Riccati periodica per un problema di controllo su orizzonte infinito. Così facendo si può ottenere effettivamente un controllore costante, ma le approssimazioni introdotte non garantiscono che il guadagno così ottenuto sia effettivamente stabilizzante e dunque si rende sempre necessaria una verifica a posteriori.

Invece l'approccio H_∞ consente di ottenere un controllore periodico che stabilizza il sistema considerando la dinamica ideale di assetto del satellite o anche il modello aumentato tenendo conto anche delle coppie di disturbo esterne. Nell'implementare il guadagno del controllore è dunque possibile considerare anche obiettivi di robustezza.

Gli approcci di controllo non lineari risultano particolarmente utili nella parte iniziale della vita di un satellite, ovvero quando si ha a che fare con la fase di "acquisizione di assetto" in cui sono presenti elevati angoli di rotazione e accelerazioni angolari. La legge di controllo più comunemente usata nel caso di satelliti che sfruttano attuatori elettromagnetici è l'algoritmo "b-dot" in cui si ha che il momento di dipolo magnetico comandato è dato da:

$$m = -K\dot{b},$$

dove K è una matrice di guadagno definita positiva e \dot{b} può essere riferito alla velocità angolare del satellite: $\dot{b} \approx b \times \omega_0$.

La legge di controllo così ottenuta è equivalente a un controllo dissipativo tempo-variante e consente di ridurre l'energia cinetica del satellite. Inoltre la sua implementazione a bordo è ottenibile abbastanza facilmente grazie al fatto che i magnetometri forniscono misure del campo magnetico sufficientemente accurate per essere derivate.

Ultimamente nessuna nuova legge di controllo non-lineare è stata proposta in letteratura. L'attenzione si è spostata sul garantire la stabilità locale in anello chiuso per le leggi di controllo relative all'acquisizione di assetto già esistenti. La stabilità viene verificata sulla periodicità del campo magnetico terrestre nell'arco

di 24 ore piuttosto che sulla sua periodicità orbitale come viene fatto nel caso di controllori lineari.

4.2 Approccio di Wood-Chen

In [9] gli autori Wood e Chen concentrano la loro attenzione sul controllo lineare di assetto di un satellite LEO in cui un momento di inerzia è minore rispetto agli altri due.

La legge di controllo “projection-based” si rivela poco adatta per il problema di controllo in esame e dunque viene proposto un nuovo tipo di approccio. La coppia di controllo ideale calcolata con il controllo PD classico è implementata tramite la minimizzazione di un funzionale di costo pesato piuttosto che tramite la proiezione della stessa sul piano ortogonale al campo magnetico terrestre. Questo consente di dare maggior rilevanza all’asse con inerzia minore.

Considerato dunque il sistema lineare tempo-invariante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BT_{mr}(t) , \quad (4.1)$$

dove x è lo stato del sistema e T_{mr} è la coppia di controllo applicata al satellite, si realizza un controllo in retroazione dello stato per ottenere la coppia magnetica ideale:

$$T_{mi} = -Kx ,$$

con K matrice di guadagno in retroazione.

Tale coppia ideale è utilizzata successivamente per calcolare la coppia magnetica effettivamente utilizzabile per il controllo secondo quanto visto in (3.36):

$$\begin{aligned} T_{mr}(t) &= \left(I - \frac{Q^{-1}b(t)b(t)'}{b(t)'Q^{-1}b(t)} \right) T_{mi}(t) = \\ &= \Gamma(q, t)T_{mi}(t) . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Complessivamente si ottiene quindi una legge di controllo del tipo:

$$T_{mr} = -\bar{K}x , \quad (4.3)$$

con $\bar{K} = \Gamma(q, t)K$ e avendo scelto il guadagno ideale K tramite assegnamento dei poli.

Analizzando la sintesi del controllore così implementata si può notare che essa ha dunque il vantaggio della semplicità, ma a priori non si può affermare che sia effettivamente valida per il problema in esame. Infatti è vero che la

matrice dei guadagni in retroazione K garantisce la stabilità del sistema, ma garantisce unicamente quella del sistema tempo invariante nel caso in cui la coppia di controllo sia la coppia magnetica ideale.

Quando si considera il sistema avente come ingresso l'effettiva coppia magnetica di controllo o il momento di dipolo magnetico, si nota che esso è tempo-variante. Osservando la matrice $\Gamma(q, t)$ oltre alla dipendenza dal tempo c'è anche quella dalla matrice dei pesi Q . Si realizza dunque la sintesi del controllore sulla coppia (A, B) e successivamente si applica il controllo alla coppia $(A, B\Gamma(q, t))$.

In conclusione sono dunque presenti delle variabili di cui non si tiene conto nel calcolare la matrice K ma che influenzano il successivo comportamento del controllo sul sistema.

4.3 Controllo ottimo del modello medio della dinamica di assetto

Dalle considerazioni fatte nel paragrafo precedente scaturisce l'idea di sfruttare l'intuizione di Wood e Chen di una legge di controllo modificata, ma realizzarla sintetizzando il controllore con un approccio più robusto e che tenga conto della variabilità temporale del sistema in esame.

Il calcolo di una matrice dei guadagni in retroazione tempo-variante risulta essere pesante dal punto di vista computazionale e realizzativo; si sceglie quindi di progettare un controllo ottimo (robusto) del sistema linearizzato basato sui valori medi delle matrici del sistema.

4.3.1 Modello medio della dinamica di assetto

A partire dal modello visto nel capitolo 3.2, se si considera la legge di controllo "projection-based" modificata e come ingresso la coppia magnetica ideale T_{mi} , si ha:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_{ti}(q, t)T_{mi}(t) + BT_d, \quad (4.4)$$

in cui:

$$B_{ti}(q, t) = B\Gamma(q, t). \quad (4.5)$$

La matrice B_{ti} dipende quindi sia dal tempo che dai fattori di peso q e in particolare, dato che $\Gamma(q, t)$ dipende più specificatamente dall'espressione del campo magnetico terrestre, essa risulta essere periodica di periodo $T = 2\pi/\omega_0$, ossia:

$$B_{ti}(q, t) = B_{ti}(q, t + T).$$

Dal modello linearizzato periodico in (4.4) eliminiamo la dipendenza dal tempo definendo:

$$\begin{aligned}\bar{B}_{ti} &= \frac{1}{T} \int_0^T B_{ti}(q, t) dt = \\ &= B \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma(q, t) dt = \\ &= B \bar{\Gamma} .\end{aligned}\tag{4.6}$$

La matrice \bar{B}_{ti} è una valutazione media del comportamento della matrice tempo-variante B_{ti} lungo un'orbita compiuta dal satellite.

Ricordiamo che la matrice $\Gamma(q, t)$ ha la seguente forma:

$$\Gamma(q, t) = I - \frac{Q^{-1}b(t)b(t)'}{b(t)'Q^{-1}b(t)} .\tag{4.7}$$

Prima di procedere nel calcolarne l'integrale lungo un'orbita è necessario sostituire il valore del campo magnetico terrestre descritto in (2.14). Si ottiene così una matrice quadrata a dimensione 3.

E' possibile svolgere il calcolo dell'integrale sui singoli elementi della matrice separatamente e riunirli in seguito (per l'espressione completa della matrice Γ e il calcolo degli integrali finiti dei suoi elementi si rimanda all' Appendice A).

Così facendo si giunge alla seguente matrice:

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{4q_1}{4q_1 - q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q_3}{4q_1 - q_3} \end{bmatrix} .\tag{4.8}$$

Si può notare che la matrice ottenuta è effettivamente tempo-invariante ma è anche parametrica in dipendenza dei fattori di peso associati agli assi di rollio e imbardata, rispettivamente q_1 e q_3 . Di conseguenza, ricordando la (4.6), si ha che $\bar{B}_{ti} = \bar{B}_{ti}(q)$.

Si ottiene così un modello medio:

$$\dot{x} = Ax + \bar{B}_{ti}(q)T_{mi} + BT_d ,\tag{4.9}$$

che approssima bene il sistema vero per tempi lunghi rispetto a T .

Il problema di controllo diventa lineare tempo-invariante. La retroazione dello stato sarà sempre del tipo:

$$T_{mi} = -Kx \quad (4.10)$$

e la sintesi del controllore può essere effettuata con una qualsiasi tecnica di controllo per i problemi LTI. Tale sintesi viene effettuata sulla coppia $(A, \bar{B}_{ti}(q))$ che tiene conto del comportamento medio del satellite durante l'orbita e dunque offre maggiori garanzie sulla bontà del controllo.

Il guadagno costante K può essere risolto numericamente per ottimizzazione.

4.3.2 Controllo LQ su tempo infinito

Dato il sistema in (4.9) con condizione iniziale sullo stato $x(0) = x_0$, si sceglie di sintetizzare il controllore tramite controllo LQ a tempo infinito.

Si definisce il funzionale di costo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x'(t)Wx(t) + u'(t)Ru(t))dt \quad (4.11)$$

con $W = W^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$ costanti.

Nel funzionale di costo si sceglie quindi di pesare lo stato del sistema e il controllo. E' noto che il controllo ottimo che minimizza J è dato da:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Sx(t) , \quad (4.12)$$

dove S è una matrice quadrata, semi-definita positiva, simmetrica e costante.

Essa è soluzione dell'equazione algebrica di Riccati:

$$\frac{dS}{dt} = 0 = -A^T S - SA + (S\bar{B}_{ti}R^{-1}\bar{B}_{ti}^T S) - W , \quad (4.13)$$

che più comunemente viene scritta come:

$$A^T S + SA - (S\bar{B}_{ti}R^{-1}\bar{B}_{ti}^T S) + W = 0 . \quad (4.14)$$

In conclusione si ha che il guadagno in retroazione è:

$$K = R^{-1}B_{ti}^T S . \quad (4.15)$$

In generale in un problema LQ si ha che il guadagno in retroazione K dipende dalla scelta delle matrici dei pesi presenti nell'indice di comportamento. Nel problema particolare in esame però si ha un'ulteriore variabile da tenere in conto. La matrice \bar{B}_{ti} infatti dipende dai pesi q e dunque anche il guadagno in retroazione dipenderà direttamente dalla loro scelta: $K = K(W, R, q)$.

Capitolo 5

Caso di studio: la missione GOCE

La legge di controllo descritta nel capitolo precedente è testata in questo capitolo attraverso simulazioni effettuate al computer su un particolare caso di studio.

Verrà quindi presa in considerazione la missione GOCE dell' Agenzia Spaziale Europea (ESA) che è attualmente in corso. Dopo una breve descrizione della missione, con i parametri relativi a tale satellite si valuteranno le prestazioni del sistema di controllo sfruttando il tool Matlab per esaminare la stabilità del sistema e il relativo comportamento delle variabili di interesse, quali la precisione angolare e i momenti di dipolo generati dagli attuatori magnetici.

5.1 Descrizione missione

Il Gravity and steady state Ocean Circulation Explorer (GOCE) è una missione dell' Agenzia Spaziale Europea che fa parte del programma "Living Planet". Lanciata nel marzo del 2009 ha l'obiettivo principale di misurare, più accuratamente di quanto fatto in precedenza, il campo di gravità terrestre e identificare un modello di geoide con un'accuratezza di 1-2 cm ad una risoluzione spaziale di 100 km (si vedano [2] e [1]).

Il satellite è un corpo cilindrico con sezione trasversale ottagonale lungo all'incirca 5 m e area di circa 1 m^2 del peso di 1050 kg. Ha una configurazione completamente simmetrica sul piano orizzontale e all'esterno del satellite sono montati due pannelli solari che corrono lungo tutta la lunghezza del satellite disposti sul piano orbitale (assi X-Z del sistema di riferimento LORF) [6]. Essendo la sua orbita quasi polare, i pannelli solari sono sempre rivolti verso il sole e inoltre devono anche sopportare variazioni estreme di temperatura che sono state tenute in conto nella costruzione del satellite usando materiali con alta tolleranza alla temperatura.



Figura 5.1: Immagine virtuale del satellite GOCE in orbita attorno alla Terra (fonte: sito internet dell' Agenzia Spaziale Europea).

Inoltre, a differenza di altri satelliti, il satellite GOCE non ha alcuna parte in movimento, perciò l'insieme del corpo del satellite e della strumentazione montata a bordo costituisce un unico corpo rigido. Non si hanno disturbi causati da parti mobili.

L'orbita del satellite è stata scelta a un'altezza dalla superficie terrestre di circa 250 km al fine di avere un'elevata sensibilità all'intensità del campo gravitazionale terrestre così da poter essere rilevato con estrema precisione. Ma ad un'altezza così ridotta l'atmosfera influenza in modo rilevante il satellite che invece deve essere altamente stabile. La forma scelta è quindi dettata dalla necessità di ridurre al minimo la resistenza aerodinamica ed anche escludere eventuali disturbi di tipo meccanico.

Oltre che avere una forma aerodinamica, il satellite presenta anche un propulsore ionico montato sulla parte posteriore con lo scopo di fornire una spinta al satellite in modo da attenuare maggiormente la resistenza aerodinamica lungo la direzione del moto e mantenere l'orbita all'altezza desiderata.

All'altezza considerata il raggio dell'orbita, equivalente alla distanza radiale del corpo orbitante calcolata a partire dal centro del corpo stesso è $a_0 = 6628 \text{ km}$. Essendo poi la costante gravitazionale terrestre pari a $\mu = 3.986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, si ha che la velocità angolare del satellite è:

$$w_0 = 0.0017 \text{ rad/s} . \quad (5.1)$$

Alla velocità angolare appena vista si ha velocità orbitale $V = 7.7548 \text{ km/s}$ e un periodo orbitale di 5370.1 s.

Gli assi di riferimento del satellite sono considerati coincidenti con i momenti principali di inerzia così che la matrice di inerzia assume una forma diagonale:

$$J = \begin{bmatrix} 152 & 0 & 0 \\ 0 & 2690 & 0 \\ 0 & 0 & 2652 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Si nota immediatamente che un momento principale di inerzia presenta un valore decisamente inferiore rispetto agli altri due che invece risultano essere paragonabili tra loro. Inoltre per il controllo di assetto del satellite si hanno solo attuatori magnetici, che fanno del GOCE il primo satellite LEO di dimensioni medie con controllo di assetto puramente magnetico.

Le considerazioni appena fatte, ovvero la presenza una matrice di inerzia mal distribuita e un controllo dovuto solo ad attuatori magnetici, consentono di affermare che il satellite GOCE si presta alla tecnica di controllo descritta nel capitolo precedente.

Il campo magnetico terrestre descritto in (2.14) sentito dal satellite, data l'orbita circolare quasi polare e la distanza del satellite dalla superficie della Terra, ha l'andamento mostrato in Figura 5.2.

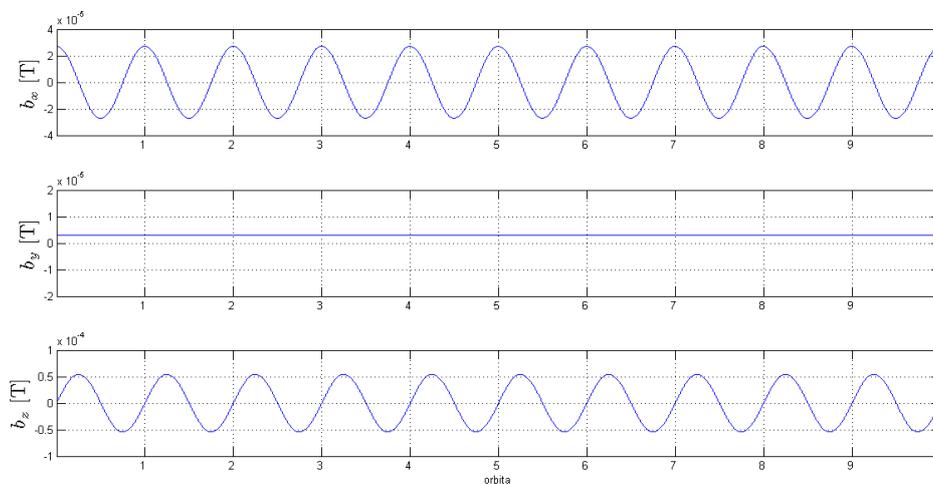


Figura 5.2: Andamento temporale del campo magnetico terrestre espresso nelle sue componenti rispetto al sistema di riferimento del satellite.

Si può notare che la componente costante b_y relativa all'asse di beccheggio ha un'influenza decisamente inferiore in confronto alle altre due componenti b_x e b_z .

Ancora più interessante è notare che non succede mai che ci siano due componenti del campo magnetico contemporaneamente nulle e, ricordando che data la particolarità del controllo tramite attuatori magnetici si ha sempre un sistema

sotto-attuato, ciò garantisce che il controllo di ciascuno dei tre assi del satellite sia sempre possibile in qualsiasi istante di tempo considerato.

I valori numerici relativi alle grandezze di interesse della missione GOCE sono riassunti nella tabella seguente:

Massa [kg]	1050
Matrice di inerzia [kg m ²]	$J = \begin{bmatrix} 152 & 0 & 0 \\ 0 & 2690 & 0 \\ 0 & 0 & 2652 \end{bmatrix}$
Inclinazione dell'orbita	96°
Eccentricità	$\simeq 0^\circ$
Altezza dell'orbita [km]	250
Velocità orbitale [km/s]	7.7548
Periodo orbitale [s]	5370.1

Tabella 5.1: Caratteristiche principali della missione GOCE.

5.2 Risultati della simulazione

Inizialmente si è provato a riprodurre il tipo di controllo e i risultati osservati nell'articolo di Wood e Chen ([9]), ma le poche informazioni disponibili non sono risultate sufficienti. Si è allora proceduto a validare il controllo LQ sul modello medio del sistema utilizzando il simulatore Simulink contenuto nell'ambiente di lavoro Matlab.

Il sistema su cui si è realizzato il controllo è quello visto in (4.9):

$$\dot{x} = Ax + \bar{B}_{ti}(q)T_{mi} + BT_d ,$$

in cui A è la matrice di stato del satellite GOCE, $\bar{B}_{ti}(q) = B\bar{\Gamma}$ è la matrice degli ingressi che dipende dai pesi q scelti come mostrato in (4.8), T_d sono coppie di disturbo esterne.

Per verificare il comportamento del controllore, si sceglie un valore iniziale dello stato pari a:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0,01745 \\ 0,01745 \\ 0,01745 \\ 1,745 \cdot 10^{-5} \\ 1,745 \cdot 10^{-5} \\ 1,745 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} ,$$

che corrisponde, per ogni asse, ad un errore di circa 1° tra i sistemi di riferimento SCRF e LORF e ad un valore iniziale di velocità angolare di circa 0.001 deg/s.

Al fine di valutare il comportamento del satellite rispetto al sistema di riferimento orbitale, si scelgono come variabili di uscita gli angoli di rollio, imbardata e beccheggio.

Come spiegato nel capitolo precedente si ha quindi che la matrice degli ingressi del sistema medio dipende dalla scelta dei pesi q , in particolare dei pesi relativi ad asse di rollio e imbardata. Di conseguenza nella legge di controllo scelta anche il guadagno in retroazione dipenderà da questi parametri oltre che dalla scelta delle matrici W e R del controllo LQ.

5.2.1 Risultati in assenza di disturbi

Le prime simulazioni effettuate sono state condotte sul modello del sistema privo di disturbi, ossia in assenza di coppie di disturbo esterne.

Si procede considerando $q_1, q_2, q_3 = 1$ che coincide alla scelta di utilizzare l'approccio "projection-based" classico e si progetta sulla matrice \bar{B}_{ti} così ottenuta la legge di controllo in retroazione. Dopo aver scelto le matrici W e R del controllo LQ e aver quindi calcolato il guadagno in retroazione K , si inserisce tale matrice in retroazione nel modello del sistema e si modificano i valori dei pesi q all'interno della matrice Γ descritta in (4.7).

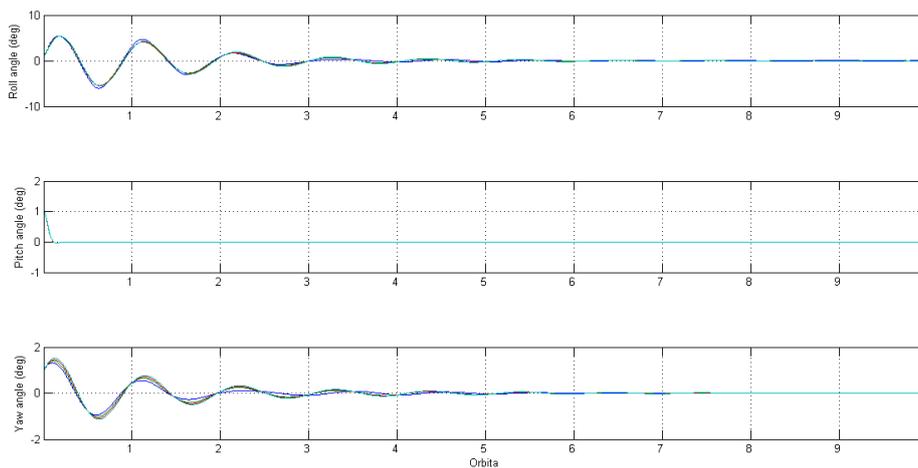


Figura 5.3: Confronto temporale dell'andamento delle variabili di uscita nel caso di q_1 maggiore di q_3 .

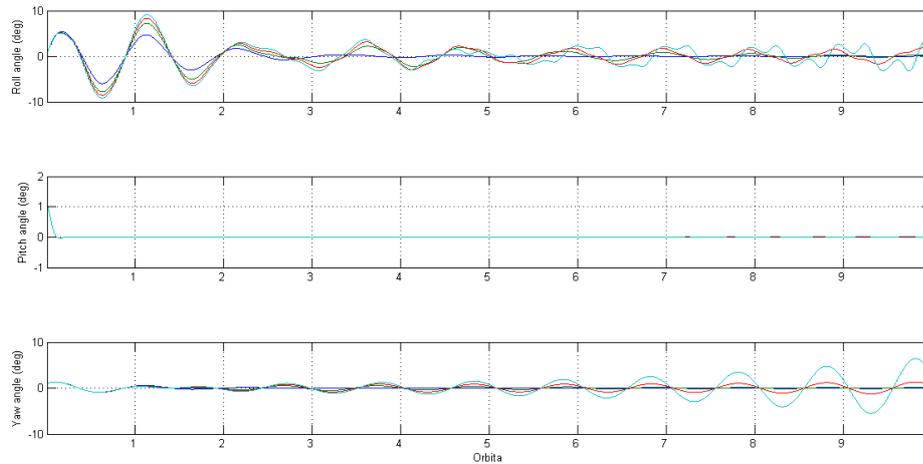


Figura 5.4: Confronto temporale dell'andamento delle variabili di uscita nel caso di q_3 maggiore di q_1 .

In Figura 5.3 si confronta l'andamento delle variabili di uscita nel caso in cui dopo aver scelto $q_1, q_2, q_3 = 1$ per calcolare il guadagno in retroazione K , si scelgono anche nel modello del satellite gli stessi valori (linea blu del grafico) oppure si scelgono valori di q_1 via via sempre più grandi rispetto a quelli di q_3 . In particolare: $q_1 = 4q_3$ (linea verde), $q_1 = 7q_3$ (linea rossa), $q_1 = 10q_3$ (linea verde).

Nella Figura 5.4 si realizza lo stesso esperimento ma scegliendo questa volta valori di q_3 maggiori rispetto a quello assegnato a q_1 , mantenendo comunque gli stessi rapporti usati nel caso precedente.

E' interessante notare che sull'asse di beccheggio non si hanno miglioramenti o peggioramenti. Ciò è dovuto al fatto che la sua dinamica è separata da quella relativa agli altri due assi.

L'angolo di rollio sembra migliorare leggermente nelle prime orbite e rimane pressoché invariato a regime, mentre l'angolo di imbardata ha un comportamento iniziale opposto dato che peggiora leggermente all'inizio per poi comunque andare a regime pressoché nello stesso tempo (Figura 5.3).

Quando invece si considera $q_3 > q_1$, che equivale a dare ancora più importanza all'asse avente già inerzia maggiore, si osserva un peggioramento generale del controllo. In particolare, dall'osservazione dell'angolo ψ , si nota che il sistema tende addirittura a divergere nel tempo.

Si sceglie comunque di proseguire nell'approccio descritto nel capitolo precedente per vedere se effettivamente si possono ottenere miglioramenti rispetto

all'approccio “projection-based” nel caso in cui il peso relativo all'asse di rollio sia maggiore degli altri due.

Siccome l'andamento temporale delle variabili di uscita considerate dipende unicamente dal rapporto tra i valori numerici dei parametri q e non dai singoli valori assunti, per comodità nei calcoli successivi si sceglie di imporre $q_2, q_3 = 1$ e di mantenere come unico parametro variabile il fattore di peso q_1 .

Inoltre, poiché sia la matrice degli ingressi B_{ti} sia il guadagno in retroazione K calcolato sul modello medio del sistema dipendono dagli stessi parametri q , risulta corretto ritenere che il parametro debba avere lo stesso valore in entrambi. Quindi si utilizza un procedimento iterativo al fine di trovare il valore di q_1 migliore per il controllo. Dopo aver posto $q_1 = 1$ nel calcolo di K sul modello medio del sistema, lo si fa variare nella simulazione del sistema e si sceglie il nuovo valore da attribuire. Si utilizza questo nuovo valore per rifare il controllo LQ e trovare la nuova matrice di guadagno in retroazione. Si procede iterativamente finché si ottiene che sia K sia B_{ti} dipendono dallo stesso valore di q_1 .

Per il sistema in esame si trova che si hanno miglioramenti fino alla scelta di $q_1 = 7$, mentre valori superiori non producono ulteriori vantaggi e dunque è inutile aumentarlo ulteriormente.

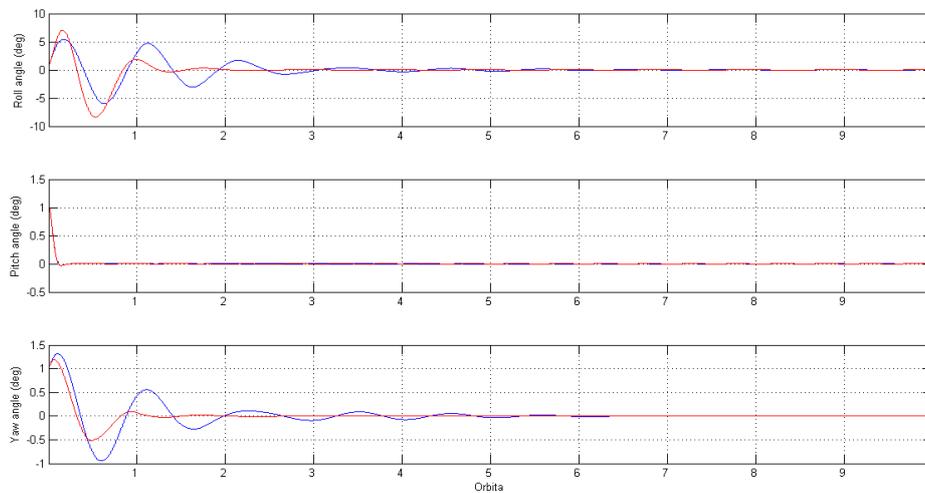


Figura 5.5: Confronto tra le variabili di uscita nel caso di controllore “projection-based” (linea blu) e controllore modificato con il fattore di peso $q_1 = 7$ (linea rossa).

Il confronto mostrato in Figura 5.5 tra i risultati ottenuti con il controllore valutato con $q_1 = 1$ e quello calcolato avendo imposto $q_1 = 7$, permette di osservare che l'introduzione del fattore di peso consente di ottenere un controllo ottimo che

riduce il tempo di assestamento a circa 2 orbite, a fronte delle 6 orbite necessarie al controllore “projection-based” per mandare il sistema a regime. Questo è ottenuto a discapito di un aumento iniziale sull’ampiezza degli angoli di rollio e imbardata. In particolare per il primo di essi si hanno ampiezze iniziali che diventano dell’ordine di circa 7° , rimanendo comunque entro valori accettabili.

5.2.2 Risultati in presenza di disturbi

Maggiore interesse riveste la simulazione su un modello di sistema che preveda anche coppie di disturbo esterne, poiché nella realtà il satellite sarà sempre soggetto a questo tipo di forze. Si inserisce allora nel modello un disturbo di coppia dovuto alla presenza di dipoli magnetici residui scelti pari a 2 Am^2 su ciascun asse del satellite per poi proseguire nella simulazione come fatto per il caso di sistema privo di disturbi.

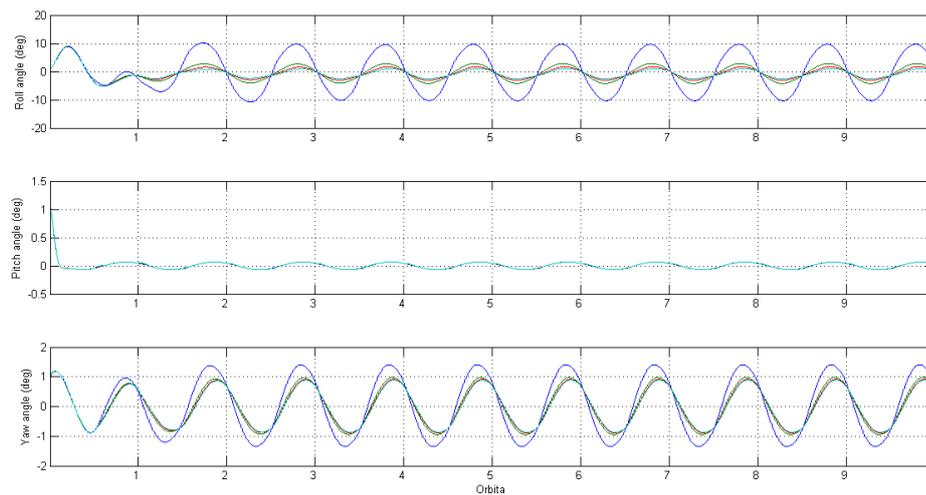


Figura 5.6: Confronto temporale dell’andamento delle variabili di uscita nel caso di q_1 maggiore di q_3 .

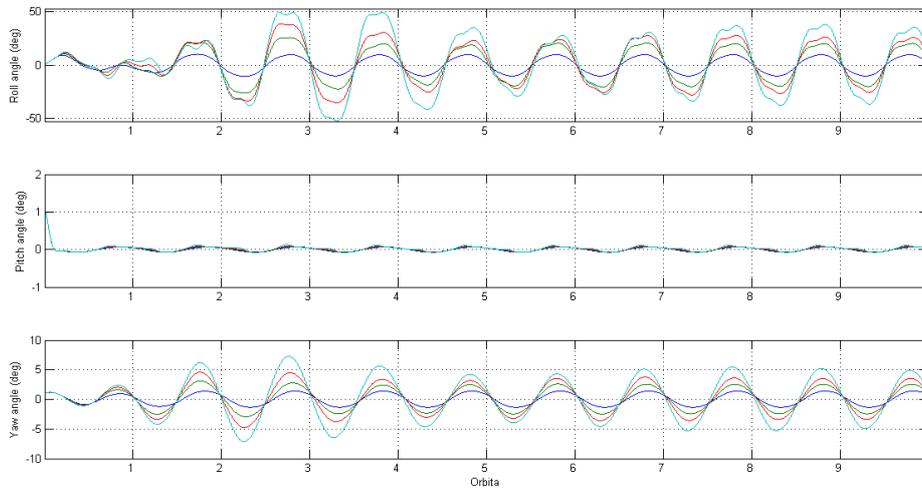


Figura 5.7: Confronto temporale dell'andamento delle variabili di uscita nel caso di q_3 maggiore di q_1 .

In Figura 5.6 si paragona l'andamento delle variabili di uscita nel caso in cui dopo aver scelto $q_1, q_2, q_3 = 1$, si scelgono anche nel modello tempo-variante del sistema gli stessi valori (linea blu del grafico) oppure si scelgono valori di q_1 via via sempre più grandi rispetto a quelli di q_3 . In particolare: $q_1 = 7q_3$ (linea verde), $q_1 = 13q_3$ (linea rossa), $q_1 = 20q_3$ (linea azzurra).

Nella Figura 5.7 si realizza lo stesso esperimento ma scegliendo questa volta valori di q_3 maggiori rispetto a quello assegnato a q_1 mantenendo gli stessi rapporti usati nel caso precedente.

Nel caso di modello del satellite e guadagno in retroazione scelti entrambi con pesi $q_1, q_2, q_3 = 1$, come ci si aspettava l'asse di rollio, che è quello avente inerzia minore, presenta angoli nettamente superiori rispetto a quelli che si hanno sugli altri assi di riferimento.

Quello che accade aumentando il peso relativo all'asse con inerzia minore è un miglioramento del controllo del satellite. L'errore sull'asse di rollio si riduce drasticamente passando da un valore di circa 10° a regime a circa un quarto di tale valore nel caso di $q_1 = 7q_3$ e ad ampiezze ancora leggermente inferiori quando si aumenta ulteriormente il valore di q_1 , fino a raggiungere valori di all'incirca 2° . L'errore dell'angolo di imbardata ψ si riduce anch'esso ma in maniera meno pronunciata: si passa da un valore di quasi $1,5^\circ$ a valori di poco inferiori a 1° .

Se invece si pone ancora più importanza all'asse di imbardata aumentando il valore del peso relativo a tale asse rispetto a quello relativo all'asse di rollio, si ha un degrado delle prestazioni del controllore.

Ancor più in presenza di disturbi rispetto alla loro assenza, la scelta che si dimostra effettivamente corretta è quella di dare maggiore peso al controllo relativo all'asse di rollio.

Analogamente a quanto fatto per il sistema privo di disturbi, si procede con un metodo iterativo per trovare il valore di q_1 ottimo. Ciò porta alla scelta finale di $q_1 = 13$ dato che valori superiori non portano miglioramenti significativi al controllo e dunque risulta inutile aumentarlo ulteriormente.

I valori relativi alle matrici del controllo LQ scelte sono:

$$Q = \text{diag}([3.1e - 8 \quad 1e - 2 \quad 1.2e - 5 \quad 1e - 2 \quad 1e - 2 \quad 1e - 2]),$$

$$R = \text{diag}([1e - 1 \quad 1 \quad 1]).$$

In Figura 5.8 viene mostrato l'andamento temporale degli angoli ottenuti con il controllore calcolato tramite le matrici Q e R appena viste e con la scelta del peso $q_1 = 13$. Rispetto al controllo "projection-based" classico, corrispondente come già detto a porre $q_1 = 1$, il nuovo approccio consente di ottenere un miglioramento significativo soprattutto sull'asse con momento di inerzia minore. L'angolo di rollio ϕ si riduce a valori di poco inferiori a 2° a regime rispetto a valori di 10° ottenuti con il controllo classico. Anche l'angolo ψ riduce la sua ampiezza arrivando a regime ad assumere valori all'incirca di $0,7^\circ$.

Osservando anche il tempo di risposta del sistema riguardo questi due assi di riferimento si può notare che il sistema si assesta in poco più di 2 orbite, a fronte di un tempo di assestamento superiore a 5 orbite per il controllore iniziale.

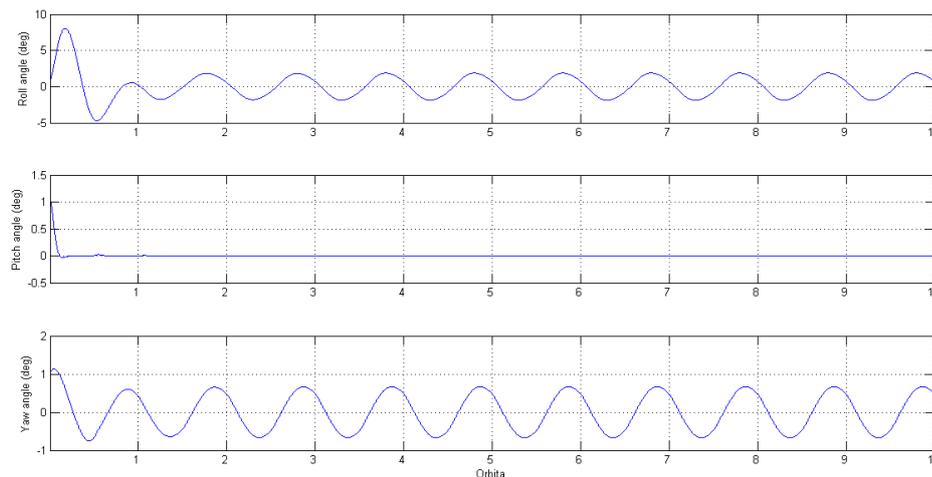


Figura 5.8: Andamento nel tempo delle variabili di uscita con la scelta di $q_1 = 13$.

Il confronto tra le coppie magnetiche fornite dagli attuatori nel caso di controllo con $q_1 = 1$ e controllo con $q_1 = 13$ (Figura 5.9) consente di vedere che l'aumento del fattore di peso relativo all'asse con inerzia minore si traduce in una coppia di controllo relativa a tale asse meno perturbata. La coppia magnetica sull'asse di imbardata presenta invece un aumento di ampiezza anche a regime.

Per quanto riguarda i dipoli magnetici comandati dal controllore e riportati in Figura 5.10, si nota un comportamento pressoché invariato per i dipoli degli assi di rollio e imbardata. Sull'asse di beccheggio che viene chiamato in gioco nel controllo di entrambi gli altri due assi di riferimento, a fronte di un aumento iniziale dell'ampiezza del dipolo comandato, si ha una diminuzione nell'ampiezza a regime. Questo si traduce anche in una corrente inferiore da far circolare all'interno della bobina magnetica con conseguente vantaggio sull'utilizzo dell'attuatore e sulla sua durata di vita.

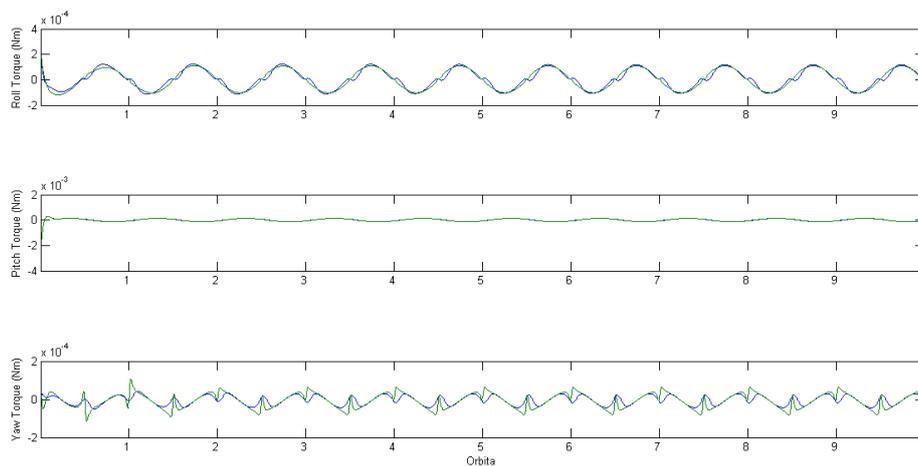


Figura 5.9: Confronto tra coppie magnetiche di controllo nel caso di $q_1 = 1$ (linea blu) e $q_1 = 13$ (linea verde).

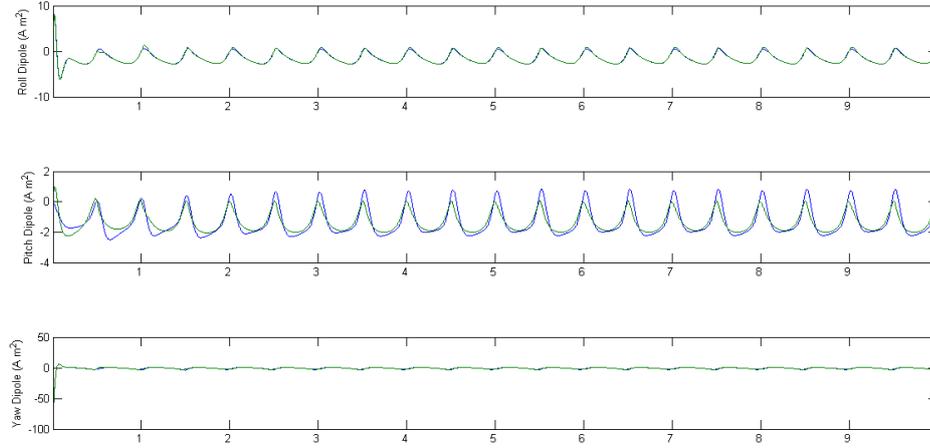


Figura 5.10: Confronto tra dipoli magnetici comandati nel caso di $q_1 = 1$ (linea blu) e $q_1 = 13$ (linea verde).

Successivamente si è provato ad ipotizzare che ci sia incertezza per quanto riguarda il tensore di inerzia, considerando anche il caso in cui la matrice d'inerzia non sia diagonale, ma siano presenti anche i momenti J_{12} e J_{13} , che sono quelli che potrebbero causare problemi nel controllo.

Si è quindi fatto riferimento ai valori nominali proposti in [6] e su questi si è introdotta l'incertezza.

In particolare si è supposto che:

$$\begin{aligned} J_{11} &= 152 \pm 15 \text{ kgm}^2, \\ J_{12} &= -23,4 \pm 15 \text{ kgm}^2, \\ J_{13} &= -5,5 \pm 5 \text{ kgm}^2, \\ J_{22} &= 2690 \pm 15 \text{ kgm}^2, \\ J_{33} &= 2652 \pm 15 \text{ kgm}^2. \end{aligned}$$

Una volta fissato il range di variazione di ciascun momento di inerzia, sono stati generati casualmente più di 500 campioni su cui sono state condotte altrettante simulazioni.

Analizzando i risultati ottenuti si è potuto notare che il controllore è in grado di garantire la stabilità del sistema anche a fronte di incertezze sui valori dei momenti di inerzia. In Figura 5.11 si confrontano il caso peggiore tra quelli ottenuti in simulazione e i risultati ottenuti con i valori di inerzia considerati inizialmente privi di incertezza.

La degradazione maggiore delle prestazioni si può notare soprattutto sull'asse di rollio, in cui si ha un differenza di circa un grado, passando da ampiezze di 2° a

poco meno di 3° . Si hanno degradazioni anche rispetto agli altri due assi: quelle relative all'asse di beccheggio sono però irrilevanti, mentre sull'asse di imbardata si ha un aumento di ampiezza di circa $0,15^\circ$.

Il peggioramento delle prestazioni è quindi più evidente sull'asse con momento di inerzia minore nonostante il controllo pesi maggiormente proprio quest'asse, ma si mantiene comunque su valori relativamente contenuti.

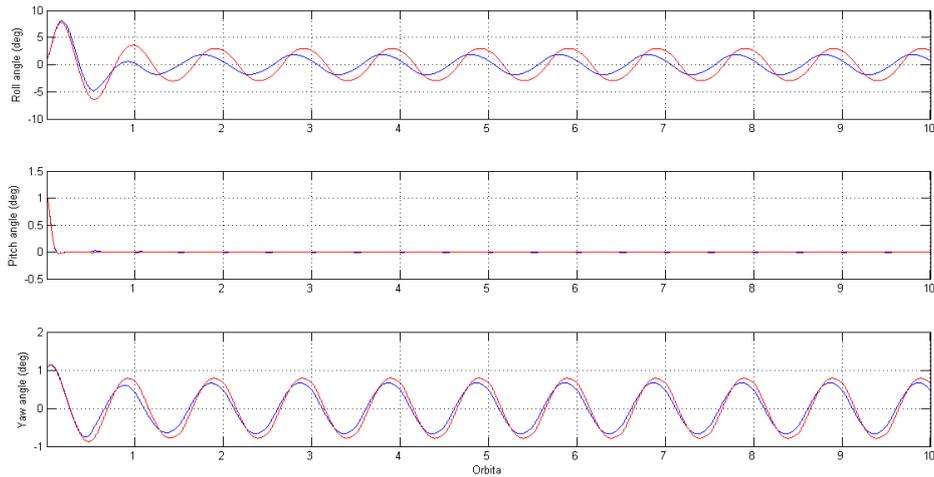


Figura 5.11: Confronto tra risposta del sistema, considerata matrice di inerzia nominale (linea blu) o affetta da incertezza (linea rossa).

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi è stato studiato un nuovo tipo di approccio di controllo per satelliti LEO con attuatori magnetici e aventi un asse di inerzia minore rispetto agli altri.

Il classico approccio basato sulla proiezione della coppia magnetica ideale nella sua componente reale risulta avere successo quando è applicato a satelliti con inerzia omogenea, ma le sue prestazioni degradano quando si considerano i satelliti sopra citati.

Dalla considerazione iniziale dell'approccio "projection-based" come risultato di un semplice problema di minimizzazione dell'errore tra coppia magnetica ideale e reale, si è esteso tale approccio proponendo l'introduzione di un fattore di peso. Tale fattore consente di dare importanza relativa diversa all'errore commesso su ciascun asse, favorendo in particolare quello con momento di inerzia minore.

Sono stati condotti esperimenti prendendo in considerazione la missione GO-CE dell' Agenzia Spaziale Europea, in cui il satellite presenta una forma allungata e quindi un momento principale di inerzia relativo all'asse di rollio decisamente inferiore agli altri due. Inoltre il satellite orbita ad una distanza relativamente vicina alla Terra, risentendo così in maniera significativa del campo magnetico terrestre; ciò consente di utilizzare l'interazione con questo campo magnetico per il controllo del satellite.

Le simulazioni effettuate in particolare sul sistema affetto da disturbi, in cui si è ipotizzato che il satellite sia soggetto a disturbi di coppia esterni, hanno consentito di rilevare prestazioni migliori ottenute col nuovo approccio proposto rispetto a quelle ottenute con l'approccio classico.

Si è scelto di utilizzare una legge di controllo in retroazione dello stato basata sul controllo LQ infinito tempo invariante in cui il controllore è calcolato a partire dal modello medio del sistema in esame, applicandolo poi al sistema vero. Così facendo si tiene conto del comportamento medio del sistema tempo-variante lungo la sua orbita. L'errore che si commette nel considerare poi il sistema vero non è così significativo come quello che si commetterebbe non tenendo conto della variabilità temporale dovuta al campo magnetico terrestre.

Le difficoltà maggiori risiedono nello calcolare le matrici da utilizzare nel controllo LQ, ma soprattutto nel valutare il valore migliore del fattore di peso dell'errore introdotto dal nuovo approccio. Esso infatti influenza sia il comportamento del sistema sia il calcolo del guadagno in retroazione. Si rende quindi necessario procedere con un metodo iterativo per poter scegliere in maniera corretta e precisa il giusto valore da assegnare al fattore di peso.

Tali difficoltà di progettazione del controllore non sono però insormontabili e non hanno un peso computazionale troppo elevato.

A fronte di queste difficoltà, le simulazioni condotte mostrano che i vantaggi apportati dal nuovo approccio sono notevoli. Rispetto a un controllo ottimo basato sull'approccio classico "projection-based" si hanno miglioramenti sia riguardo all'ampiezza a regime degli angoli di rotazione del satellite sia riguardo al tempo di assestamento del sistema.

Inoltre il controllore così progettato si dimostra anche robusto rispetto a variazioni dei valori nominali dei momenti di inerzia.

Studi futuri potrebbero comunque essere rivolti a tecniche di controllo che garantiscano maggiore robustezza rispetto a quella offerta dal controllo LQ o allo studio di controllori tempo-varianti periodici, per studiare più approfonditamente il nuovo approccio proposto.

Appendice A

Calcolo dell'integrale della matrice degli ingressi

In questa sezione vengono proposti i passaggi necessari per valutare l'espressione della matrice degli ingressi del modello medio della dinamica di assetto proposta nel capitolo 3. Al fine di valutare il comportamento medio del sistema si rende necessario valutare l'integrale della matrice degli ingressi lungo l'orbita del satellite.

A.1 Calcolo dell'integrale della matrice degli ingressi nel modello medio del sistema

Da quanto visto nel capitolo 3, la matrice degli ingressi nel modello tempo-variante, quando si considera la legge di controllo "projection-based" modificata, è definita come segue:

$$B_{ti}(q, t) = B\Gamma(q, t) . \quad (\text{A.1})$$

Se si vuole vedere il comportamento medio sulla durata di un'orbita compiuta dal satellite, è necessario valutarne l'integrale lungo l'orbita. Essendo però la matrice B costante, la valutazione dell'integrale può essere effettuata unicamente rispetto alla matrice $\Gamma(q, t)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma(q, t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[I - \frac{Q^{-1}b(t)b'(t)}{b'(t)Q^{-1}b(t)} \right] dt , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

in cui $T = 2\pi/\omega_0$ è il periodo orbitale del satellite, I è la matrice identità, Q è matrice quadrata diagonale e il vettore campo magnetico b è definito come già

visto nel capitolo 2.5:

$$b(t) := \frac{\mu_m}{a_0^3} \begin{bmatrix} \sin(\xi) \cos(\theta) \\ -\cos(\xi) \\ 2 \sin(\xi) \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta = w_0 t. \quad (\text{A.3})$$

Prima di procedere nel calcolo dell'integrale, analizziamo il denominatore della matrice Γ . Si può notare che è un valore scalare così definito:

$$b'(t)Q^{-1}b(t) = \frac{b_x^2}{q_1} + \frac{b_y^2}{q_2} + \frac{b_z^2}{q_3} \quad (\text{A.4})$$

e sostituendo la (A.3) si ottiene:

$$\begin{aligned} b'(t)Q^{-1}b(t) &= \left(\frac{\mu_m}{a_0^3}\right)^2 \left(\frac{\sin^2(\xi) \cos^2(\theta)}{q_1} + \frac{\cos^2(\xi)}{q_2} + \frac{4 \sin^2(\xi) \sin^2(\theta)}{q_3} \right) = \\ &= \left(\frac{\mu_m}{a_0^3}\right)^2 \left(\frac{\sin^2(\xi)(1 - \sin^2(\theta))}{q_1} + \frac{\cos^2(\xi)}{q_2} + \frac{4 \sin^2(\xi) \sin^2(\theta)}{q_3} \right) = \\ &= \left(\frac{\mu_m}{a_0^3}\right)^2 \left(\frac{\sin^2(\xi)}{q_1} + \frac{\cos^2(\xi)}{q_2} + \left(\frac{4 \sin^2(\xi)}{q_3} - \frac{\sin^2(\xi)}{q_1} \right) \sin^2(\theta) \right) = \\ &= \left(\frac{\mu_m}{a_0^3}\right)^2 (a + b \sin^2(\theta)), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

in cui, per comodità nello svolgimento dei calcoli successivi, si è posto:

$$a := \frac{\sin^2(\xi)}{q_1} + \frac{\cos^2(\xi)}{q_2}, \quad b := \left(\frac{4}{q_3} - \frac{1}{q_1} \right) \sin^2(\xi). \quad (\text{A.6})$$

Come si può facilmente osservare, il parametro a è sempre positivo, mentre b è positivo se $q_1 > q_3/4$ e negativo in caso contrario.

Tornando alla matrice $\Gamma(q, t)$ e sostituendo la (A.5), si ha che:

$$\Gamma(q, t) = I_3 - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\sin^2(\xi) \cos^2(\theta)}{q_1} & -\frac{\sin(\xi) \cos(\xi) \cos(\theta)}{q_1} & \frac{2 \sin^2(\xi) \sin(\theta) \cos(\theta)}{q_1} \\ -\frac{\sin(\xi) \cos(\xi) \cos(\theta)}{q_2} & \frac{\cos^2(\xi)}{q_2} & -\frac{2 \sin(\xi) \cos(\xi) \sin(\theta)}{q_2} \\ \frac{2 \sin^2(\xi) \sin(\theta) \cos(\theta)}{q_3} & -\frac{2 \sin(\xi) \cos(\xi) \sin(\theta)}{q_3} & \frac{4 \sin^2(\xi) \sin^2(\theta)}{q_3} \end{bmatrix}}{a + b \sin^2(\theta)}. \quad (\text{A.7})$$

Al fine di valutare l'integrale della matrice così ottenuta, si prosegue calcolando i singoli integrali degli elementi $\Gamma_{ij}(q, t)$.

Calcolo di $\bar{\Gamma}_{11}$

$$\bar{\Gamma}_{11} = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_{11}(q, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 - \frac{\sin^2(\xi) \cos^2(w_0 t)}{q_1 (a + b \sin^2(w_0 t))} dt . \quad (\text{A.8})$$

Per comodità definiamo $\sin^2(\xi)/q_1 := c$. Allora si ha che:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T 1 - \frac{\sin^2(\xi) \cos^2(w_0 t)}{q_1 (a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{c \cos^2(w_0 t)}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt \\ &= \frac{1}{T} [t]_0^T - \frac{c}{T} \int_0^T \frac{b \cos^2(w_0 t)}{b(a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{bT} \int_0^T \frac{b(1 - \sin^2(w_0 t)) - a + a}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{bT} \int_0^T \frac{-(a + b \sin^2(w_0 t)) + a + b}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{b} \left(\frac{1}{T} \int_0^T -1 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a + b}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt \right) = \\ &= 1 + \frac{c}{bT} [t]_0^T - \frac{c(a + b)}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 + \frac{c}{b} - \frac{c(a + b)}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{a \cos^2(w_0 t) + (a + b) \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 + \frac{c}{b} - \frac{c(a + b)}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{a \cos^2(w_0 t) (1 + \frac{a+b}{a} \tan^2(w_0 t))} dt = \\ &= 1 + \frac{c}{b} - \frac{c(a + b)}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{1 + \frac{a+b}{a} \tan^2(w_0 t)} \frac{1}{a \cos^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 + \frac{c}{b} - \frac{c(a + b)}{b} \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{a + b w_0}} \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{a+b}{a} \tan^2(w_0 t)} \frac{\sqrt{a + b w_0}}{\sqrt{a} \cos^2(w_0 t)}}_{= \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)} dt = \\ &= 1 + \frac{c}{b} - \frac{c \sqrt{a + b}}{\sqrt{ab} w_0} \frac{1}{T} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{a}} \tan(w_0 t) \right) \right]_0^T = 1 + \frac{c}{b} , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Sostituendo a c e b i loro rispettivi valori, otteniamo:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{c}{b} &= 1 + \frac{\sin^2(\xi)}{q_1} \left[\left(\frac{4}{q_3} - \frac{1}{q_1} \right) \sin^2(\xi) \right]^{-1} = \\
&= 1 + \frac{\sin^2(\xi)}{q_1} \left[\left(\frac{4q_1 - q_3}{q_1 q_3} \right) \sin^2(\xi) \right]^{-1} = \\
&= 1 + \frac{\sin^2(\xi)}{q_1} \left[\left(\frac{q_1 q_3}{4q_1 - q_3} \right) \frac{1}{\sin^2(\xi)} \right] = \tag{A.10} \\
&= 1 + \frac{q_3}{4q_1 - q_3} = \\
&= \frac{4q_1 - q_3 + q_3}{4q_1 - q_3} = \frac{4q_1}{4q_1 - q_3} .
\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\bar{\Gamma}_{11} = \frac{4q_1}{4q_1 - q_3} . \tag{A.11}$$

Calcolo di $\bar{\Gamma}_{12}$ e $\bar{\Gamma}_{21}$

$$\bar{\Gamma}_{12} = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_{12}(q, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin(\xi) \cos(\xi) \cos(w_0 t)}{q_1(a + b \sin^2(w_0 t))} dt . \tag{A.12}$$

Per comodità definiamo $\sin(\xi) \cos(\xi)/q_1 := c$, allora:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin(\xi) \cos(\xi) \cos(w_0 t)}{q_1(a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{c \cos(w_0 t)}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\
&= \frac{c}{T} \int_0^T \frac{\cos(w_0 t)}{a(1 + \frac{b}{a} \sin^2(w_0 t))} dt = \\
&= \frac{c}{aT} \int_0^T \frac{\cos(w_0 t)}{1 + \frac{b}{a} \sin^2(w_0 t)} dt = \tag{A.13} \\
&= \frac{c}{aw_0} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{\sqrt{\frac{b}{a}} w_0 \cos(w_0 t)}{1 + \frac{b}{a} \sin^2(w_0 t)}}_{= \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}} dt = \\
&= \frac{c}{\sqrt{ab}w_0} \frac{1}{T} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \sin(w_0 t) \right) \right]_0^T = 0 .
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il calcolo di $\bar{\Gamma}_{21}$ si può notare che $\Gamma_{21}(q, t)$ e $\Gamma_{12}(q, t)$ hanno la stessa forma e dunque l'integrale sarà risolvibile allo stesso modo di quello appena calcolato.

Allora riassumendo si ha:

$$\bar{\Gamma}_{12} = \bar{\Gamma}_{21} = 0 . \quad (\text{A.14})$$

Calcolo di $\bar{\Gamma}_{13}$ e $\bar{\Gamma}_{31}$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{13} &= \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_{13}(q, t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-2 \sin^2(\xi) \sin(w_0 t) \cos(w_0 t)}{q_1 (a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= \frac{-2 \sin^2(\xi)}{q_1} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2 \sin(w_0 t) \cos(w_0 t)}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= \frac{-2 \sin^2(\xi)}{q_1 b w_0} \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{2 b w_0 \sin(w_0 t) \cos(w_0 t)}{a + b \sin^2(w_0 t)}}_{=\frac{f'(x)}{f(x)}} dt = \\ &= \frac{-2 \sin^2(\xi)}{q_1 b w_0} \frac{1}{T} \left[\log(a + b \sin^2(w_0 t)) \right]_0^T = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Inoltre si ha che $\Gamma_{31}(q, t)$ e $\Gamma_{13}(q, t)$ hanno la stessa forma, dunque l'integrale $\bar{\Gamma}_{31}$ darà lo stesso risultato. Quindi si ha:

$$\bar{\Gamma}_{31} = \bar{\Gamma}_{13} = 0 . \quad (\text{A.16})$$

Calcolo di $\bar{\Gamma}_{22}$

$$\bar{\Gamma}_{22} = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_{22}(q, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 - \frac{\cos^2(\xi)}{q_2(a + b \sin^2(w_0 t))} dt, \quad (\text{A.17})$$

in cui per comodità chiamiamo $\cos^2(\xi)/q_2 := c$, così da ottenere:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T 1 - \frac{\cos^2(\xi)}{q_2(a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{c}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= \frac{1}{T} [t]_0^T - \frac{c}{T} \int_0^T \frac{1}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{T} \int_0^T \frac{1}{a \cos^2(w_0 t) + a \sin^2(w_0 t) + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{T} \int_0^T \frac{1}{a(\cos^2(w_0 t) + \frac{a+b}{a} \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{aT} \int_0^T \frac{1}{\cos^2(w_0 t) + \frac{a+b}{a} \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{aT} \int_0^T \frac{1}{\cos^2(w_0 t) (1 + \frac{a+b}{a} \tan^2(w_0 t))} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{aw_0} \sqrt{\frac{a}{a+b}} \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{a+b}{a} \tan^2(w_0 t)} \frac{\sqrt{a+b} w_0}{\sqrt{a} \cos^2(w_0 t)}}_{= \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{\sqrt{a} \sqrt{a+b} w_0} \frac{1}{T} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{a+b}{a}} \tan(w_0 t) \right) \right]_0^T = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Riassumendo:

$$\bar{\Gamma}_{22} = 1. \quad (\text{A.19})$$

Calcolo di $\bar{\Gamma}_{23}$ e $\bar{\Gamma}_{32}$

$$\bar{\Gamma}_{23} = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_{23}(q, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2 \sin(\xi) \cos(\xi) \sin(w_0 t)}{q_2(a + b \sin^2(w_0 t))} dt . \quad (\text{A.20})$$

Per comodità nei calcoli chiamiamo $2 \sin(\xi) \cos(\xi)/q_2 := c$, allora:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2 \sin(\xi) \cos(\xi) \sin(w_0 t)}{q_2(a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= \frac{c}{T} \int_0^T \frac{\sin(w_0 t)}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= \frac{c}{T} \int_0^T \frac{\sin(w_0 t)}{a + b(1 - \cos^2(w_0 t))} dt = \\ &= \frac{c}{T} \int_0^T \frac{\sin(w_0 t)}{(a + b) - b \cos^2(w_0 t)} dt = \\ &= \frac{c}{T} \int_0^T \frac{\sin(w_0 t)}{(a + b) \left(1 - \frac{b}{a+b} \cos^2(w_0 t)\right)} dt = \\ &= \frac{c}{a + b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin(w_0 t)}{1 - \frac{b}{a+b} \cos^2(w_0 t)} dt = \\ &= \frac{-c}{(a + b)w_0} \frac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{b}} \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{b}{a+b} \cos^2(w_0 t)} \frac{-\sqrt{b}w_0 \sin(w_0 t)}{\sqrt{a + b}}}_{= \frac{1}{1-f^2(x)} f'(x)} dt = \\ &= \frac{-c}{\sqrt{a + b}\sqrt{b}w_0} \frac{1}{T} \left[\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{b}{a + b}} \cos(w_0 t) \right) \right]_0^T = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Per quanto riguarda $\Gamma_{32}(q, t)$, essa ha la stessa forma di $\Gamma_{23}(q, t)$ e dunque l'integrale darà lo stesso risultato di quello appena calcolato. In conclusione:

$$\bar{\Gamma}_{32} = \bar{\Gamma}_{23} = 0 . \quad (\text{A.22})$$

Calcolo di $\bar{\Gamma}_{33}$

$$\bar{\Gamma}_{33} = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_{33}(q, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 - \frac{4 \sin^2(\xi) \sin^2(w_0 t)}{q_3(a + b \sin^2(w_0 t))} dt. \quad (\text{A.23})$$

Definiamo $4 \sin^2(\xi)/q_3 := c$, da cui:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T 1 - \frac{4 \sin^2(\xi) \sin^2(w_0 t)}{q_3(a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt - c \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin^2(w_0 t)}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= \frac{1}{T} [t]_0^T - \frac{c}{T} \int_0^T \frac{b \sin^2(w_0 t)}{b(a + b \sin^2(w_0 t))} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{b \sin^2(w_0 t) + a - a}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(a + b \sin^2(w_0 t)) - a}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \quad (\text{A.24}) \\ &= 1 - \frac{c}{b} \frac{1}{T} \int_0^T 1 - \frac{a}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{b} \left(\frac{1}{T} [t]_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt \right) = \\ &= 1 - \frac{c}{b} + \frac{c}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \\ &= 1 - \frac{c}{b} + \frac{ca}{b} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt. \end{aligned}$$

Come visto in precedenza nel calcolo di $\bar{\Gamma}_{22}$:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{a + b \sin^2(w_0 t)} dt = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a + bw_0}} \frac{1}{T} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{a+b}{a}} \tan(w_0 t) \right) \right]_0^T \quad (\text{A.25})$$

e quindi tornando all'equazione precedente si ha che,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{22} &= 1 - \frac{c}{b} + \frac{ca}{b} \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a + bw_0}} \frac{1}{T} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{a+b}{a}} \tan(w_0 t) \right) \right]_0^T = \\ &= 1 - \frac{c}{b} + \frac{c\sqrt{a}}{b\sqrt{a + bw_0}} \frac{1}{T} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{a+b}{a}} \tan(w_0 t) \right) \right]_0^T = \quad (\text{A.26}) \\ &= 1 - \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Sostituendo a c e b i loro rispettivi valori, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{c}{b} &= 1 - \frac{4 \sin^2(\xi)}{q_3} \left[\left(\frac{4}{q_3} - \frac{1}{q_1} \right) \sin^2(\xi) \right]^{-1} = \\
 &= 1 - \frac{4 \sin^2(\xi)}{q_3} \left[\left(\frac{4q_1 - q_3}{q_1 q_3} \right) \sin^2(\xi) \right]^{-1} = \\
 &= 1 - \frac{4 \sin^2(\xi)}{q_3} \left[\left(\frac{q_1 q_3}{4q_1 - q_3} \right) \frac{1}{\sin^2(\xi)} \right] = \tag{A.27} \\
 &= 1 - \frac{4q_1}{4q_1 - q_3} = \\
 &= \frac{4q_1 - q_3 - 4q_1}{4q_1 - q_3} = \frac{-q_3}{4q_1 - q_3} .
 \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\bar{\Gamma}_{33} = \frac{-q_3}{4q_1 - q_3} . \tag{A.28}$$

Integrale della matrice $\Gamma(q, t)$

L'integrale della matrice $\Gamma(q, t)$ si ottiene riassumendo i valori ottenuti per gli integrali dei singoli elementi espressi in (A.11), (A.14), (A.16), (A.19), (A.22) e (A.28) in un'unica matrice:

$$\bar{\Gamma} := \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma(q, t) dt = \begin{bmatrix} \frac{4q_1}{4q_1 - q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q_3}{4q_1 - q_3} \end{bmatrix} .$$

Bibliografia

- [1] <http://www.esa.int/specials/goce/index.html>.
- [2] European Space Agency. Goce mission requirements document. *ESA publications Division*, 2000.
- [3] C. Arduini, P. Baiocco. Active magnetic damping attitude control for gravity gradient stabilized spacecraft. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 20(1):117–122, January-February 1997.
- [4] D. Prieto, Z. Ahmad. A drag free control based on model predictive technics. *In 2005 American Control Conference*, Giugno 2005.
- [5] A. Varga T. Pulecchi, M. Lovera. Classical vs modern magnetic attitude control design: a case study.
- [6] D. Andreis M. Saponara G. Sechi, G. André. Magnetic attitude control of the goce satellite. *Proceedings of the 6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems*, Ottobre 2005.
- [7] M. Sidi. *Spacecraft Dynamics and Control*. New York: Cambridge University Press, 1997.
- [8] E. Silani, M. Lovera. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results. *Control Engineering Practice* 13, pages 357–371, 2005.
- [9] M. Wood, W. Chen. Pd control of magnetically actuated satellites with uneven inertia distribution. *Seventh International ESA conference on Guidance, Navigation and Control systems*, Giugno 2008.

Elenco delle figure

2.1	Sistema di riferimento Inerziale (IRF) rispetto alla Terra.	12
2.2	Sistema di riferimento Orbitale (LORF) rispetto a quello inerziale.	13
2.3	Confronto tra gli assi nel Sistema di riferimento del corpo del satellite (SCRF) rispetto al sistema di riferimento orbitale (LORF).	14
2.4	Parametri geometrici di un'orbita ellittica.	15
2.5	Parametri geometrici di un'orbita in un sistema di riferimento inerziale.	15
2.6	Modello del campo magnetico terrestre.	21
3.1	Filo metallico, percorso da corrente, immerso in un campo magnetico.	26
3.2	Forze agenti su una spira metallica elettrificata immersa in un campo magnetico.	28
3.3	Direzione della coppia magnetica.	29
3.4	Coppia magnetica di controllo: modello "projection-based".	31
5.1	Immagine virtuale del satellite GOCE in orbita attorno alla Terra (fonte: sito internet dell' Agenzia Spaziale Europea).	44
5.2	Andamento temporale del campo magnetico terrestre espresso nelle sue componenti rispetto al sistema di riferimento del satellite.	45
5.3	Confronto temporale dell'andamento delle variabili di uscita nel caso di q_1 maggiore di q_3	47
5.4	Confronto temporale dell'andamento delle variabili di uscita nel caso di q_3 maggiore di q_1	48
5.5	Confronto tra le variabili di uscita nel caso di controllore "projection-based" (linea blu) e controllore modificato con il fattore di peso $q_1 = 7$ (linea rossa).	49
5.6	Confronto temporale dell'andamento delle variabili di uscita nel caso di q_1 maggiore di q_3	50
5.7	Confronto temporale dell'andamento delle variabili di uscita nel caso di q_3 maggiore di q_1	51
5.8	Andamento nel tempo delle variabili di uscita con la scelta di $q_1 = 13$	52
5.9	Confronto tra coppie magnetiche di controllo nel caso di $q_1 = 1$ (linea blu) e $q_1 = 13$ (linea verde).	53

- 5.10 Confronto tra dipoli magnetici comandati nel caso di $q_1 = 1$ (linea blu) e $q_1 = 13$ (linea verde). 54
- 5.11 Confronto tra risposta del sistema, considerata matrice di inerzia nominale (linea blu) o affetta da incertezza (linea rossa). 55

Elenco delle tabelle

5.1	Caratteristiche principali della missione GOCE.	46
-----	---	----

