

POLITECNICO DI MILANO

I Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Ingegneria Strutturale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile – Indirizzo Strutture



Caratterizzazione meccanica di fogli sottili e
calibrazione del modello di Hill mediante
analisi inversa

Relatori: Prof. Ing. Giorgio NOVATI
Prof. Ing. Giulio MAIER

Tesi di Laurea di:

Luca NOVARA

Matr. 736552

Marcello MAINARDI

Matr. 724678

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

INDICE

CAP 1: PANORAMICA SU VARI TIPI DI FOGLI SOTTILI

1.1 Carta	7
1.1.1 Il comportamento a compressione.....	10
1.2 Laminati per contenitori alimentari.....	11
1.3 Membrane per architetture tensili	13
1.3.1 Tensostrutture.....	14
1.3.2 Strutture pneumatiche	24
1.4 Membrane per l'impermeabilizzazione delle dighe	29
1.6 Membrane utilizzate in altre applicazioni	32

CAP 2: PROVE BIASSIALI SU FOGLI SOTTILI

2.1 Introduzione.....	38
2.2 Macchine di prova e geometria dei campioni.....	40
2.3 Misure di spostamenti e deformazioni.....	45
2.4 Digital Image Correlation (DIC)	46
2.5 Prove biassiali su tessuti spalmati.....	53
2.6 Prove biassiali condotte su film di Etilene Tetra Fluor-Etilene (ETFE)	56
2.6 Prove biassiali condotte su carta.....	58

CAP 3: MODELLI COSTITUTIVI ELASTOPLASTICI E A ROTTURA

3.1 Generalità: anisotropia, influenza delle fibre e adesione	63
3.2 Elasticità lineare	69
3.3 Modello elasto-plastico di Hill	72

3.3.1 Modello isotropo di Huber-Hencky-Von Mises	72
3.3.2 Modello anisotropo di Hill	76
3.3.3 La legge d'incrudimento	81
3.4 Modello elasto-plastico di Xia-Boyce-Parks	84
3.4.1 Modello originale	84
3.4.2 Modello semplificato	89
3.4.3 Caratterizzazione dei parametri.....	90
3.5 Modelli a rottura.....	91

CAP 4: SPERIMENTAZIONE CONDOTTA SU LAMINATO

4.1 Introduzione alle prove monoassiali di trazione	98
4.2 Prova monoassiale di trazione su laminato composito.....	99
4.2.1 Materiale e strumentazione.....	99
4.2.2 Esposizione risultati e determinazione dei parametri costitutivi.....	102
4.2.3 Osservazioni conclusive.....	110
4.3 Prove monoassiali di trazione su un sistema di apertura	111
4.3.1 Materiale e strumentazione.....	111
4.3.2 Esposizione risultati	114
4.3.3 Osservazioni conclusive.....	118
4.4 Prove a pressione	119
4.4.1 Materiale e strumentazione.....	121
<i>Descrizione membranometro</i>	<i>121</i>
<i>Descrizione del profilometro laser</i>	<i>124</i>
4.2.2 Esposizione risultati	125
4.2.3 Osservazioni conclusive.....	130

CAP 5: CALIBRAZIONE DEL MODELLO DI HILL PER LAMINATO TETRA PAK

5.1 Introduzione.....	132
5.2 Analisi diretta	135
5.2.1 Determinazione dei parametri elastici e plastici.....	135
5.2.3 Simulazione della prove biassiali.....	146
5.3 Fondamenti metodologici dell'analisi inversa	149
5.3.1 Analisi di sensibilità.....	151
5.3.2 Problema d'ottimizzazione.....	152
5.3.3 Formulazione ai minimi quadrati.....	153
<i>Il metodo del gradiente.....</i>	<i>155</i>
<i>Il metodo di Gauss-Newton.....</i>	<i>156</i>
<i>Il metodo di Levenberg-Marquardt.....</i>	<i>159</i>
<i>Il metodo "trust region".....</i>	<i>161</i>
5.4 Applicazione dell'analisi inversa al caso del laminato Tetrapak.....	163
5.4.1 Identificazioni parametriche ottenute con diverse grandezze misurabili.....	165
5.4.2 Identificazioni parametriche ottenute con diversi rapporti fra gli spostamenti imposti	170
5.4.3 Identificazioni parametriche ottenute con incrudimenti diversi	175
<i>Incrudimento trilineare.....</i>	<i>175</i>
<i>Incrudimento esponenziale.....</i>	<i>178</i>
Bibliografia.....	182

Panoramica su vari tipi di fogli sottili

In questo capitolo si fornisce una panoramica, certamente non esaustiva, delle principali categorie di fogli sottili di impiego industriale, alla cui caratterizzazione meccanica questa tesi si rivolge.

Il primo settore che storicamente si occupò di fogli sottili è stato quello cartario, successivamente furono presi in considerazione anche nei campi dell'industria metallurgica e chimica. Alle industrie produttrici di materiali in forma di fogli si affiancano tutti quei settori in cui i fogli sottili vengono utilizzati come materiale primo: in campo architettonico e strutturale, nell'industria degli imballaggi, in quella delle microtecnologie e nell'industria dei rivestimenti.

In ognuno di questi settori la recente letteratura scientifica mette in luce lo sviluppo di intense attività di ricerca finalizzate a una maggiore conoscenza del comportamento fisico, meccanico, chimico dei fogli sottili, premessa necessaria per la progettazione di nuovi prodotti e di nuove tecnologie.

1.1 Carta

Il primo antenato della carta, il papiro, la cui comparsa risale a 5000 anni fa presso gli Egizi e i Greci, nacque per la necessità di disporre di un materiale comodo e maneggevole su cui trascrivere pensieri, dati, calcoli, ecc. Questo materiale veniva ricavato incollando fra loro piccole strisce derivate dalla pianta avente l'omonimo nome. Successivamente, si attribuisce al cinese Ts'ai Lun intorno al 105 a.c. l'invenzione del procedimento per la fabbricazione della carta. Tale procedimento consisteva nel ridurre in pasta e mescolare con acqua, tramite battitura, dei ritagli di seta. I fogli ottenuti una volta che questa pasta acquosa veniva fatta filtrare con stuoie di bambù, venivano posti al sole ad asciugare.

In seguito si utilizzarono altri materiali al posto della seta, come il libro del gelso e di altri vegetali. Le fettucce ottenute, una volta eliminata la corteccia, erano cotte con acqua e calce; si ricavava così una pasta che veniva sottoposta a battitura per separare le fibre. La pasta diluita era poi introdotta in un tino, in cui s'immergeva anche una specie di straccio su cui si depositavano tutte le fibre; il foglio, così ottenuto, veniva poi pressato, stacciato e asciugato all'aria. Verso il Mille l'uso della carta fu introdotto in Europa dagli Arabi, presso i quali venivano sfruttate tecniche di produzione provenienti dall'Estremo Oriente, andando a sostituire di fatto la pergamena. La diffusione del materiale, tuttavia, si ebbe con l'affermazione della tecnica di produzione utilizzata nella cartiera di Fabriano. La tecnica fabrianese era un perfezionamento di quella araba e utilizzava un maglio idraulico per ridurre in maniera più efficace gli stracci in fibra. Venne introdotta, inoltre, la collatura con gelatina animale per ridurre l'azione di microrganismi distruttori e migliorarne l'impermeabilizzazione. Nei secoli successivi le cartiere aumentarono in numero senza, ciò nonostante, modificare sostanzialmente il processo di produzione fino ai primi del 1800 quando s'iniziò ad utilizzare una nuova macchina per la produzione della pasta a fibre triturate, detta macchina olandese, e una per la produzione di fogli di lunghezza illimitata, detta macchina continua (figura 1.1).

La materia prima necessaria per la produzione di carta è la cellulosa che si trova in quantità in fibre vegetali come il cotone, il lino, la canapa dando origine alla cosiddetta pasta-straccio o pasta meccanica.

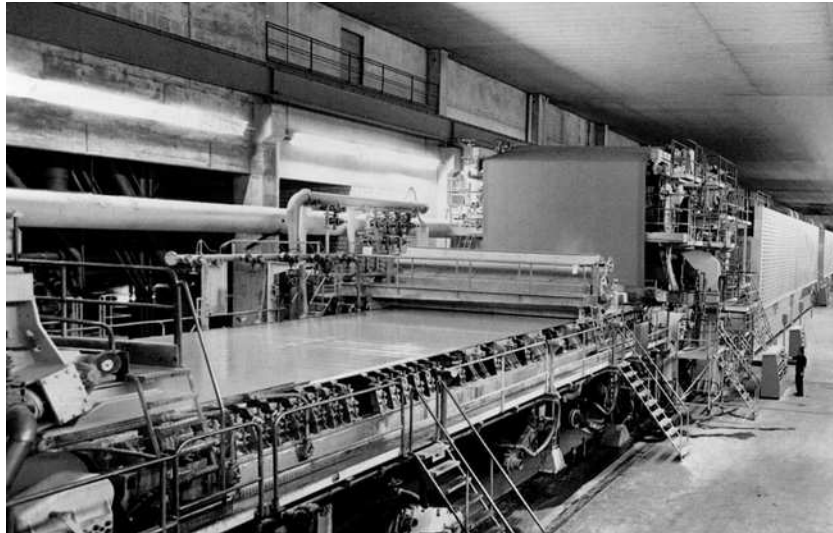


Figura 1.1: macchina continua (*www.museodellacarta.it*)

Questa materia prima, proprio perché è particolarmente di qualità, risulta essere piuttosto costosa, per cui abitualmente si estrae cellulosa da alberi di legno tenero come il pioppo, il pino, l'abete, la betulla per mezzo di trattamenti chimici, ottenendo la cosiddetta pasta chimica. Altri tipi di pasta che vengono comunemente usati sono la pasta-legno, ricavata sfibrando in piccoli pezzi il legno, e la pasta-carta. Questo secondo tipo di carta si ottiene riducendo in poltiglia la carta riciclata; per questo motivo è un tipo di carta che ha assunto negli ultimi tempi un'importanza sempre maggiore, poiché consente un maggior controllo del patrimonio boschivo **(Ageno M. , 2003)**.

La lavorazione prosegue con il trattamento della pasta in cartiera dove viene sminuzzata e mescolata con acqua tramite idroapritori, contenitori fatti a scodella al cui interno c'è una paletta. La raffinazione avviene in grosse vasche dette macchine olandesi, in cui si riduce la lunghezza delle fibre per mezzo di lame inossidabili. In seguito a questa operazione si esegue la feltrazione o filtraggio da cui si ottiene direttamente il foglio. Il processo consiste nel disporre le fibre in modo disordinato una sull'altra per la successiva pressatura ed asciugatura. In alcuni settori la macchina olandese è sostituita con altre macchine che permettono un ciclo continuo.

Durante la raffinazione si possono aggiungere alcune sostanze per migliorare la qualità del prodotto finale. In particolare le aggiunte sono costituite dalla carica, dalla collatura e dalla colorazione. La carica consiste nell'aggiunta di minerali in polvere come il talco, il caolino, il marmo per dare alla carta il peso desiderato, la stampabilità, l'opacità, ecc. La

collatura, invece, consiste nell'aggiunta di colla di origine animale, vegetale oppure sintetica e serve per dare ai prodotti la capacità di ricevere la scrittura e di resistere maggiormente all'acqua. Questo trattamento è detto superficiale se l'aggiunta viene fatta quando il foglio è già formato.

Dopo di ciò la pasta viene inviata nella macchina continua composta da una serie di cilindri rotanti che funzionano da presse ed eliminano l'acqua rimasta nella pasta. L'utilizzo della macchina continua consente, quindi, la produzione di carta in bobine lunghe qualche decina di chilometri da cui il prodotto viene tagliato e ridotto a formati commerciali o accoppiato con altri materiali secondo l'uso cui è destinato.

La carta da macero è raccolta come scarto di lavorazione degli stabilimenti cartotecnici, nelle tipografie o dalla raccolta differenziata dei rifiuti. Questa carta viene sottoposta ad un processo di disinchiostrazione con il quale vengono rimosse le particelle d'inchiostro per evitare che la carta riciclata abbia una colorazione troppo grigia. L'impiego di una materia prima secondaria come questa garantisce una serie di vantaggi economici non trascurabili sia riguardanti l'acquisto della materia prima sia in termini energetici.

I principali tipi di carta in produzione oggi sono i seguenti **(Ageno M. , 2003)**:

- Carta da stampa: carta usualmente utilizzata nelle tipografie avente caratteristiche variabili a secondo della sua destinazione d'uso.
- Carta riso: è una carta velina ottenuta dalle fibre della pianta del riso; è molto sottile e resistente (anche allo strappo) e viene impiegata ad esempio come carta da regalo.
- Carta per quotidiani: senza collanti, di qualità scadente.
- Carta per banconote: carta di ottima qualità derivata dalla pasta-straccio. Per evitare facili falsificazioni si ricorre all'inserimento della filigrana.
- Carta paglia: nota anche come carta da macellai, viene utilizzata per avvolgere alimentari, anche se ultimamente sta venendo sostituita da carta appositamente con una faccia plastificata. S'impiega solitamente con la carta oleata, è di colore giallo e con uno spessore consistente.
- Carta oleata o paraffinata: liscia, lucida, impermeabile. Per quest'ultima sua caratteristica viene normalmente usata per avvolgere alimenti.
- Carta assorbente: detta anche carta asciugante, ha un aspetto opaco e soffice, viene prodotta senza l'uso di colla.

- Altri tipi di carta molto utilizzati sono: da disegno, da lucido, da parati., per uso igienico, da pacchi e il cartone.

1.1.1 Il comportamento a compressione

Si è voluto studiare il comportamento della carta se sottoposta a compressione, in quanto è una tematica che non verrà più ripresa successivamente.

Per ciò che concerne i materiali cartacei, le prove di compressione non sono facilmente applicabili, dal momento che l'instabilità si verifica quasi immediatamente a causa della struttura sottile e della relativamente bassa rigidità flessionale (figura 1.2). Questo è un grave problema in quanto il carico deve agire nel piano del foglio.

Non si possono evitare le deformazioni neanche se le prove di compressione vengono eseguite su campioni molto corti, con lunghezza anche inferiore a 1 mm. Un'alternativa potrebbe essere una prova di compressione basata su metodo numerico-sperimentale.

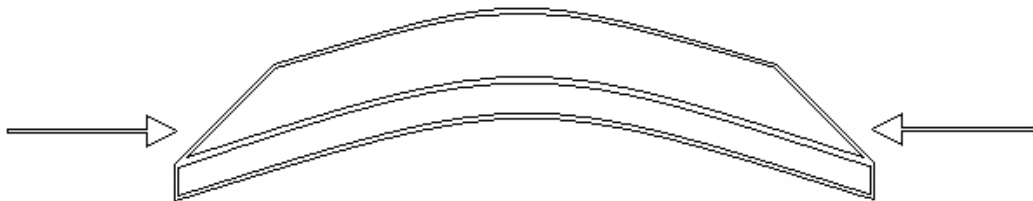


Figura 1.2: membrana compressa

Se si inserisce un fascio di gomma resistente a flessione nella zona sollecitata a compressione, con una simulazione agli elementi finiti e successivamente con l'analisi inversa, le proprietà di compressione della carta possono essere identificate. Tuttavia esso richiede di avere una buona stima dei parametri del materiale che sopporta il carico e una precisa conoscenza circa le proprietà di interfaccia tra foglio di carta e il dispositivo resistente a flessione. Se queste condizioni vengono soddisfatte allora i parametri di compressione della carta possono essere stimati. Tuttavia si tratta di una metodologia di stima ancora da brevettare (**Garbowski, 2009**).

Problemi di compressione legati a materiale cartaceo si hanno, per esempio, se consideriamo un contenitore prodotto dalla Tetra Pak, dove sono previsti gli spigoli. Una piegatura di un foglio sottile composito prevede il formarsi in qualche strato di un regime di sforzi di compressione che possono rompere il legame esistente tra i vari strati che compongono l'involucro. Per venire incontro a questo problema è necessario sagomare opportunamente la confezione laddove sono previste le piegature.

1.2 Laminati per contenitori alimentari

Per millenni la conservazione di generi alimentari è stata fatta in contenitori di terracotta o ceramica. Successivamente si è diffuso anche l'utilizzo del vetro abbinato, a partire dal XVIII secolo, al coperchio a vite dotato di guarnizione di gomma. Tali soluzioni sono tuttora in uso, si pensi alle bottiglie di vino o ai barattoli di sugo, e oggi si avvalgono naturalmente dei progressi compiuti nella sterilizzazione degli alimenti e dei contenitori e nella tecnologia del vuoto.

Accanto a questi sistemi tradizionali si sono sviluppati gli imballaggi realizzati in laminati flessibili costituiti da strati di vari materiali: tipicamente carta, alluminio e polimeri.

Il foglio di carta previene la penetrazione della luce, che può alterare il prodotto, e spesso è la base su cui si realizza l'impressione grafica dell'imballaggio. Tale strato è collegato all'alluminio mediante adesivo e viene saldato al polimero esterno, qualora sia presente.

Il ruolo del foglio di alluminio in un laminato per uso alimentare è quello di costituire un'ottima barriera nei riguardi della luce, dell'aria, dell'umidità e di micro organismi. È quindi importante che il foglio di alluminio non presenti difetti (intagli, porosità, micro fori) che ne mettano a rischio la funzione suddetta.

Il foglio in polimero può essere posto sia all'interno che all'esterno dell'imballaggio. Il film interno è sterilizzato ed inerte al contatto con l'alimento e viene legato all'alluminio mediante saldatura. Invece, lo strato più esterno, presente in certi laminati, previene l'infiltrazione dell'aria nel foglio di carta sottostante e conferisce un aspetto igienico all'imballaggio.

Per ottenere questa tipologia di materiale è necessario sottoporre il prodotto originale a una serie di trattamenti particolari, come la laminazione, la piegatura, la punzonatura, i trattamenti termici e molti altri, che consentono di ottenere un prodotto finale, avente caratteristiche meccaniche magari notevolmente diverse da quelle del materiale di origine. Difatti questi prodotti hanno proprietà strettamente dipendenti dai processi di lavorazione a cui sono stati sottoposti. Il materiale originale e i prodotti finiti, ai fini della caratterizzazione meccanica, sono perciò due cose ben diverse (Ageno M., 2003).

La scelta della geometria per gli imballaggi è piuttosto varia e dipende principalmente da scelte legate alle esigenze economiche ed estetiche (figura 1.3).



Figura 1.3: contenitori attualmente prodotti da Tetrapak (www.tetrapak.com)

Attualmente, la più grande impresa mondiale nel campo degli imballaggi è la Tetrapak che utilizza un composito di vari strati metallici, polimerici e cartacei, la cui composizione è variabile a seconda della destinazione d'uso dell'imballaggio. A questi materiali vengono abbinati dei sistemi di apertura in genere costituiti da:

- Un corpo esterno in materiale polimerico, costituente il tappo propriamente detto.
- Un laminato sottile costituito da un foglio di alluminio e due strati polimerici, che costituisce il sigillo a tenuta del sistema di apertura e viene asportato alla prima apertura.
- Un sistema di fissaggio del tappo e della linguetta al contenitore.

Le caratteristiche che un sistema di apertura deve soddisfare sono la semplicità di utilizzo e la protezione contro aperture accidentali (figura 1.4).



Figura 1.4: sistemi di apertura per prodotti Tetrapak (www.tetrapak.com)

La lavorazione dei laminati ha inizio con la produzione dei singoli componenti dell'imballaggio, successivamente si procede alla stampa dello strato cartaceo e all'incollaggio o trattamento termico dei vari strati. In questo modo si ottiene un rotolo di laminato composito che viene sottoposto alla formatura delle tracce di piegatura. I prodotti semilavorati vengono poi forniti all'azienda di confezionamento che, in apposite macchine a ciclo continuo, forma con i rotoli ricevuti un tubo continuo che viene riempito e diviso nei singoli contenitori. La conclusione del ciclo di produzione è il posizionamento dei sistemi di apertura tramite adesione a caldo durante la catena di produzione (**Agno M. , 2003**).

1.3 Membrane per architetture tensili

Si riferisce in merito a membrane costituite da tessuti spalmati la quale applicazione propone di risolvere difficoltà, quali la copertura di grandi luci, con soluzioni "flessibili", economiche e architettonicamente all'avanguardia. Lo studio che concerne alla progettazione strutturale di tali soluzioni, in parte, coincide con lo studio delle caratteristiche meccaniche dei materiali d'impiego in quanto esso assume la funzione portante. Sono dunque di fondamentale importanza le prove atte alla caratterizzazione meccanica ma, nonostante in letteratura siano presenti numerosi studi sull'argomento, non esiste ancora un protocollo di prova riconosciuto a livello europeo.

1.3.1 Tensostrutture

Esempi di architetture tensili sono ormai numerosi e riguardano contesti funzionali di natura variegata. Il loro impiego è andato crescendo nel tempo e alle tensostrutture come noi le conosciamo oggi ci si arrivò per gradi. Le prime applicazioni iniziarono a svilupparsi a cavallo tra gli anni '50 e '60; tra i pionieri del settore va ricordato Frei Otto che nel 1957 aprì un laboratorio specifico sulle strutture leggere e realizzò singolari applicazioni quali la chiesa di San Luca a Brema in Germania (1962), il padiglione tedesco all'esposizione di Montreal del 1967 e le coperture per i giochi olimpici di Monaco del 1972 (figura 1.5). Caratteristica comune tra le strutture sopra citate è che la capacità portante viene affidata a un sistema di reti di funi pretese su superfici a doppia curvatura. Tale sistema rappresenta una tra le tipologie strutturali atte a classificare le architetture tensili. La prima struttura a rete di funi, ciò nonostante, è opera dall'architetto Matthew Nowicki e degli ingegneri William Deitrik e Fred Severud che, nel 1952, realizzarono una porzione di paraboloide iperbolico, ancorata a due robusti archi in calcestruzzo armato inclinati rispetto al suolo di circa 30°; fungeva da copertura per il Dorton Arena situato nel North Carolina **(Maier G. , 1970) (Astrua, 2008)**.

Altro importante schema strutturale che caratterizza un sistema di tipo tensostrutturale è la trave piana di funi che, al contrario della trave in calcestruzzo, regno del momento flettente, è sede di azioni assiali e di conseguenza sfrutta al massimo la resistenza del materiale al mutare delle condizioni di carico. Questo comporta tuttavia, un cambiamento di forma quindi, in generale, subirà grandi spostamenti. Per far fronte all'intrinseca labilità della fune è necessario conferire sforzi auto equilibrati che preesistono sia ai carichi permanenti che a quelli accidentali. Affiancando più sistemi pre-tesi piani si può ottenere una copertura come quella realizzata da Jawerth per la realizzazione nel 1960 del palasport del ghiaccio di Stoccolma (figura 1.6) **(Maier G. , 1970)**.

La fune semplice di per sé è già in grado di esplicitare nel migliore dei modi la funzione di equilibrare le forze esterne in quanto, per la sua flessibilità, assume la forma di una funicolare di carichi; se disposte in serie possono costituire un'orditura strutturale in grado di trasferire ai sostegni verticali i carichi che agiscono sugli elementi di chiusura. Esempi di coperture realizzate avvalendosi di funi in parallelo sono gli edifici costruiti in occasione dei giochi olimpici Tokio 1964 (figura 1.8) da Kenzo Tange e Kawaguchi e la recente copertura dello stadio di Braga (2004), in Portogallo, opera di Eduardo Souto de Moura e Ove Arup **(Bridgens, Gosling, & Birchall, 2004) (Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007)**.

Un altro semplice tipo di tensostruttura è lo schema “a ruota di bicicletta” idealizzato dagli strutturisti Finzi e Maier, nella realizzazione della copertura del palasport di Genova nel 1963 (figura 1.7) (Maier G. , 1970).



Figura 1.5: particolare stadio olimpico di Monaco, 1972 (*Google Earth*)



Figura 1.6: palasport del ghiaccio di Stoccolma, 1960 (*www.arcaro.com*)



Figura 1.7: veduta interna del palasport di Genova, 1963 (*Google Earth*)



Figura 1.8: complesso olimpico di Tokio, 1964 (www.kawa-struc.main.jp)

L'idea di associare funi contrapposte e di farle interagire tra di loro conferendo pretensioni, si può estendere molto spontaneamente dal piano allo spazio: due schiere di funi intersecandosi ortogonalmente, l'una a concavità verso l'alto, l'altra tesa contro la prima e a concavità verso il basso, formano una rete, cioè una superficie portante nello spazio. Le superfici portanti realizzate con reti di funi pre-tese risultano di necessità a doppia curvatura e vengono dette anche anticlastiche o "a sella": altrimenti non potrebbero essere irrigidite con la presollecitazione **(Maier G. , 1970)**.

Caratteristica principe di una tensostruttura è quella di affidare il proprio meccanismo resistente, nei confronti dei carichi ad essa applicata, alla forma propria. Forma architettonica e comportamento strutturale, dunque, non possono essere concepiti a se stanti e la struttura risulta essere classificabile come resistente per forma.

Attualmente lo studio dello stato tensionale e della "form-finding" viene condotto avvalendosi di metodi computazionali ad elementi finiti; in passato tuttavia, l'utilizzo di modelli fisici, quali quelli a film saponosi e quelli realizzati con fili d'acciaio, hanno rivestito notevole importanza. Tali modelli consentirono un riscontro pratico all'analisi strutturale, necessario al fine di verificare la resistenza della struttura e la distribuzione degli sforzi **(Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007)**.

Gli schemi strutturali illustrati (funi semplice, trave piana di funi, tensostrutture a ruota e reti di funi) costituiscono il fattore portante; ad essi vanno associati elementi di

rivestimento quali pannelli o membrane tessili che oltre al compito di chiusura possono conferire una maggiore rigidità al sistema.

I vantaggi delle tensostrutture finora descritte risiedono in aspetti relativi al cantiere e alla logistica dei trasporti; difatti l'elevato numero di componenti prefabbricabili permette una grande velocità di costruzione e un facile stoccaggio in piccole unità.

Ma occorre rilevare e sottolineare che leggerezza non è necessariamente sinonimo di economicità poiché risulta chiaramente penalizzata, anzitutto, dal maggior costo degli acciai di alta qualità impiegati e, in misura di gran lunga maggiore, dal costo dei molti elementi costruttivi di nodo, di attacco e di registrazione. Non va però dimenticato che questi particolari costruttivi ben si prestano alla produzione in serie, potenziale fattore di economicità al quale va aggiunta la rapidità di montaggio e di "messa in tiro" **(Maier G. , 1970)**.

I criteri riferiti alle travi di funi vengono analogamente applicati a sistemi tensostrutturali continui costituiti da elementi bidimensionali consistenti in membrane. In queste strutture, diversamente da quanto avviene per le reti di funi, la funzione portante e quella di chiusura dello spazio vengono svolte contemporaneamente dal medesimo elemento. La forma assunta dalle membrane è funzione del regime di sforzi indotti dalla presollecitazione e dal posizionamento dei vincoli e delle strutture "rigide" di bordo che ne costituiscono il sostegno. Tipicamente, le forme attraverso le quali si configurano le membrane sono le stesse utilizzate per le reti di funi, ovvero superfici a doppia curvatura anticlastiche **(Bridgens, Gosling, & Birchall, 2004) (Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007)**.

La tensione di presollecitazione deve essere tale da garantire che in esercizio non vi sia un suo decadimento. Una struttura così concepita è incapace di sopportare un regime di compressione ed è ottimizzata quando gli sforzi interni si distribuiscono uniformemente su tutta la membrana.

In un progetto architettonico di tipo membrana pretesa la rigidità della struttura viene attribuita, alla forma mentre la resistenza al materiale utilizzato che, in condizioni di esercizio, è sottoposto a complesse condizioni di carico.

Da sempre il progresso tecnico e le ricerche di settore hanno permesso lo sviluppo di continue innovazioni dei materiali. I miglioramenti ottenuti consistono nella possibilità di aumentare il rapporto tra la resistenza e il peso del materiale, permettendo di estendere la mole delle costruzioni in quanto si ha una riduzione dell'incidenza del peso proprio sul massimo carico totale.

Le membrane utilizzate per le tensostrutture sono costituite da tessuti rivestiti (detti anche tessuti spalmati). Il materiale di base è rappresentato dal tessuto, realizzato con fili di trama e fili di ordito disposti lungo direzioni ortogonali (figura 1.11 (a)); il rivestimento (in uno o più strati) (figura 1.9), oltre a fornire un contributo di resistenza e rigidità alla membrana, assolve le seguenti importanti funzioni: protegge i fili da possibili danneggiamenti (abrasione, raggi UV); rende impermeabile la membrana; stabilizza la geometria del tessuto; rende la membrana giuntabile a caldo.

I due tessuti rivestiti più frequentemente utilizzati come membrane per tenso-strutture sono (figura 1.10):

- tessuti in poliestere rivestiti in PVC (PoliVinilCloruro)
- tessuti in fibra di vetro rivestiti in PTFE (PoliteTraFluoroEtilene).

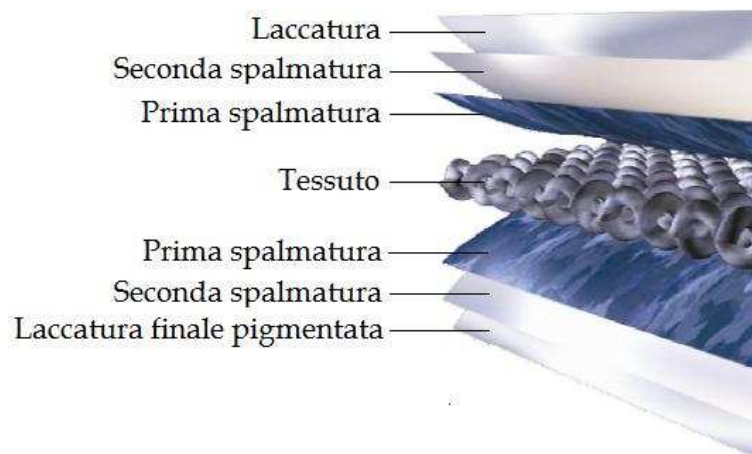


Figura 1.9: struttura caratteristica di un tessuto spalmato

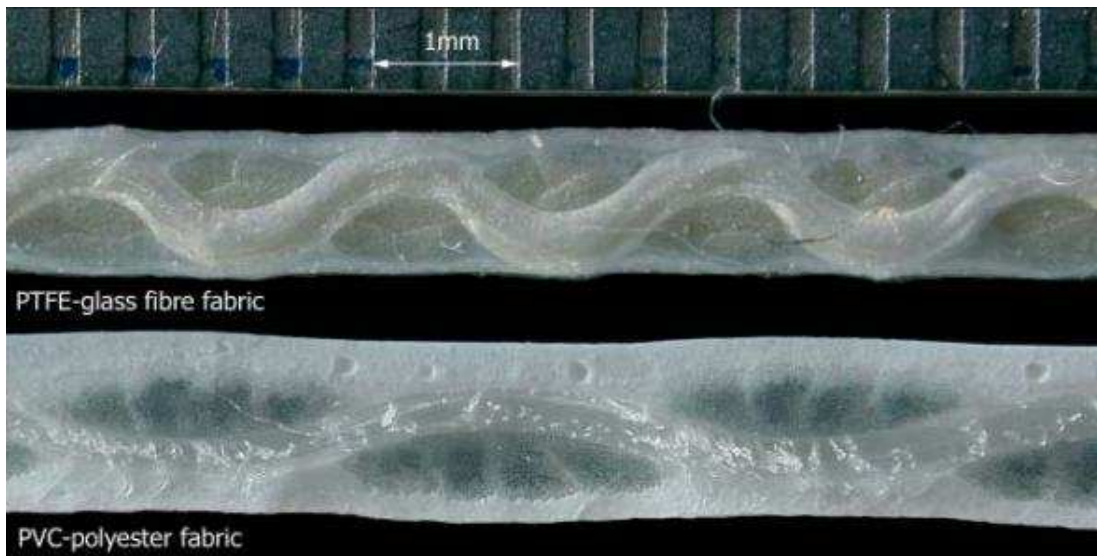


Figura 1.10: tessuti spalmati (PTFE e PVC)

I produttori di tessuti spalmati forniscono le caratteristiche del prodotto in termini di varie proprietà fisiche e di proprietà meccaniche che risultano di particolare interesse ai fini della progettazione strutturale.

Tra le proprietà fisiche (oltre al peso, al tipo di tessitura che caratterizza il tessuto) si menzionano la resistenza alla penetrazione dell'acqua, la conduttività termica, la capacità di trasmettere/riflettere la radiazione solare, il comportamento al fuoco, etc.

Tra le proprietà meccaniche che vengono solitamente specificate vi sono le seguenti:

- resistenza alla trazione, in direzione dell'ordito e della trama, dedotta da prova monoassiale svolta su una striscia di membrana avente dimensioni di 200 x 50 mm; a volte viene anche fornito l'allungamento a rottura in % (figura 1.11 (b));
- resistenza allo strappo, che commisura la capacità del tessuto spalmato di non far propagare un difetto (intaglio) disposto ortogonalmente alla direzione di carico (figure 1.12 e 1.13);
- aderenza tra rivestimento e tessuto di base, valutata in base alla forza necessaria per ottenere il distacco tra i due materiali (vedi Cap.3).

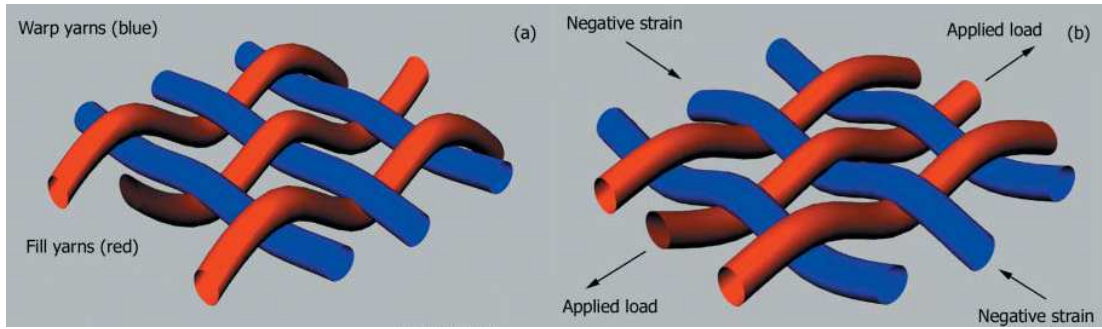


Figura 1.11: (a) intreccio, trama e ordito; (b) resistenza a trazione

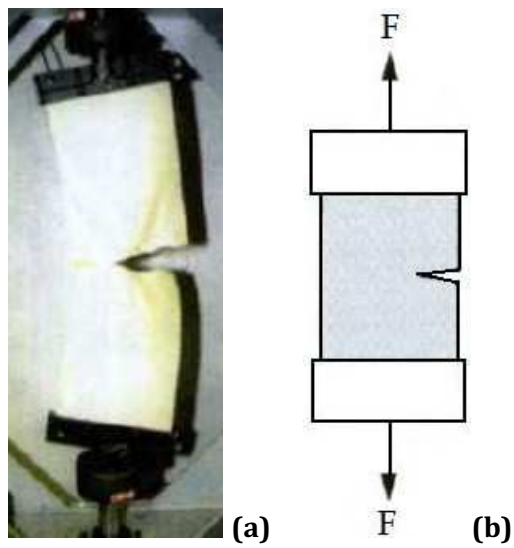


Figura 1.12 (a) e (b): test monoassiale per prova di frattura con intaglio di bordo (seidel)

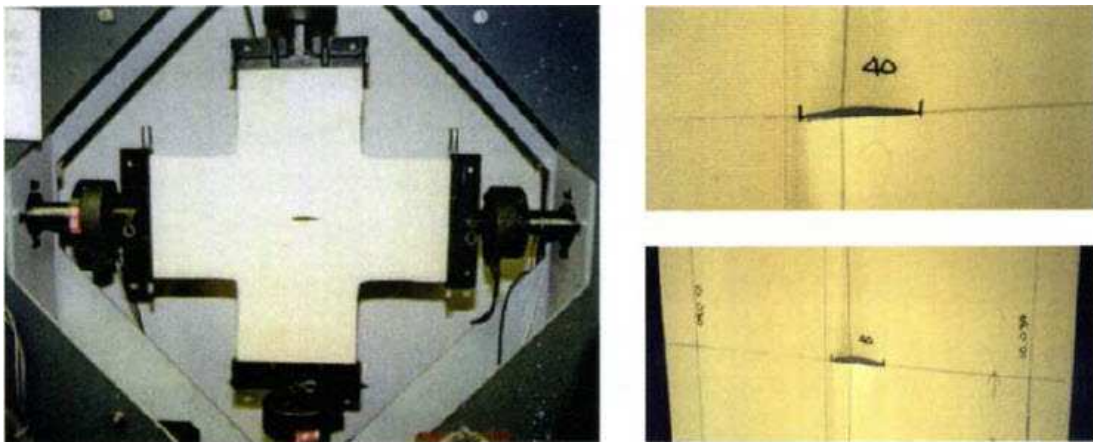


Figura 1.13: test biassiale per prova di frattura con intaglio interno (seidel)

I poliesteri, di cui sono costituiti i fili che determinano il tessuto poi ricoperto di PVC, sono una classe di polimeri ottenuti per polimerizzazione a stadi via condensazione che contengono il gruppo funzionale degli esteri lungo la catena carboniosa principale. Generalmente i poliesteri si riferiscono a particolari tessuti sintetici che, al tatto, sono meno “naturali” della controparte fibrosa: quindi spesso vengono trattati col cotone. Per quanto i poliesteri esistano in natura (ad esempio la cutina), più spesso rappresentano una famiglia di prodotti sintetici (la plastica), che include il policarbonato e soprattutto il PoliEtilene Tereftalato, più comunemente noto come PET. La fibra tessile ottenuta da macromolecole costituite da polietilene tereftalato è disponibile sia come fiocco che come filo liscio o volumizzato nonché come microfibra. I poliesteri sono combustibili a causa dell'intrinseca termoplasticità: tendono alla fiamma riducendosi fino ad estinguersi (“flame retardant”). Le caratteristiche dei fili di poliestere sono oltre ad un'ottima tenacità e resilienza, un'elevata resistenza all'abrasione, alle pieghe e al calore, un elevato modulo di elasticità e una minima ripresa di umidità, nonché una buona resistenza agli agenti chimici e fisici **(Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007)**.

Le fibre di vetro invece, di cui è costituito il tessuto vero e proprio, spalmato poi in PTFE, sono un materiale utilizzato per la produzione di compositi oppure materiali strutturali avanzati in cui diversi componenti sono integrati tra di loro per produrre un materiale di caratteristiche meccaniche superiori. L'esperienza comune ci dice che il vetro monolitico è un materiale fragile. Se esso invece viene filato a diametri di ordine inferiore al decimo di millimetro perde la sua caratteristica di fragilità per diventare un materiale ad elevata resistenza meccanica e resilienza. La fragilità del vetro comunemente usato è dovuta al gran numero di difetti della cristallizzazione che agiscono come micro fratture e zone di concentrazione degli sforzi. Al contrario la fibra di vetro non presenta tutti questi difetti, per cui raggiunge resistenze meccaniche prossime alla resistenza teorica del legame covalente **(Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007)**.

I tessuti con matrice tessile polimerica hanno quale caratteristica finale grande capacità di sopportazione alla piegatura, pertanto sono preferibili negli impieghi per costruzioni temporanee che necessitano di stoccaggio del materiale durante le fasi di non operatività della costruzione stessa o durante il trasporto. D'altro canto i tessuti a base di fibra di vetro hanno maggiore rigidità e resistenza, e sono da preferire quando l'impiego meccanico del materiale è più elevato **(Bridgens, Gosling, & Birchall, 2004)**.

Al fine di caratterizzare i materiali di impiego per le tensostrutture, la semplice prova uniassiale sul campione di tessuto risulta inevitabilmente non adatta a descrivere il reale

comportamento in esercizio: è necessaria una simulazione più realistica delle condizioni di carico. I test biassiali si prestano bene a tale scopo, poiché simulano in maniera più realistica le condizioni di carico che usualmente il tessuto deve sopportare.

Non vengono normalmente assegnate proprietà di rigidità della membrana; ciò in quanto il comportamento di un elemento di membrana, in termini di legame sforzi-deformazioni, non è di facile descrizione e non può in generale semplicemente ricondursi a quello di un materiale elastico lineare ortotropo (in stato piano di sforzo). I numerosi studi sperimentali (reperibili anche nella recente letteratura tecnica del settore) sul comportamento di membrane, spesso basati su test biassiali condotti su provini cruciformi, dimostrano che l'individuazione di un modello costitutivo adeguato per le membrane (che risulti realistico per vari livelli di sollecitazione) è tutt'ora un problema aperto.

Per illustrare meglio la grande versatilità, attuale e potenziale, dell'impiego delle architetture tensili costituite da membrane tessili, si è ritenuta opportuna una rassegna tipologica di quanto di significativo e rappresentativo è stato finora realizzato nel settore: il Pontiac Silverdome Stadium (1975), di Davidson; la copertura di piazzale Italia (figura 1.14) a Milano progettata dal Prof. Massimo Majowiecki nel 1986; la copertura dello stadio di Montreal (figura 1.15) dell'architetto Taillibert, realizzata nel 1987; il Bigo a Genova, progettato da Renzo Piano e realizzato nel 1991; il Centro M & G Ricerche (figura 1.16) realizzato a Venaforo nel 1991; la copertura dello stadio di Misano (1993); l'aeroporto internazionale di Denver (figura 1.17) progettato da Bradburn e Fentress e inaugurato nel 1994; il Millennium Dome (figura 1.19) di Londra che occupa una superficie di oltre 100.000 m² progettato da Rogers e inaugurato nel 1999; il Velodrom Abuja (figura 1.18) in Nigeria (2006) ed infine l'attuale progetto di Rem Koolhaas che prevede la costruzione dell'aeroporto internazionale di Jeddah.



Figura 1.14: copertura piazzale Italia, Milano, 1986 (www.canobbio.com)



Figura 1.15: copertura stadio di Montreal, 1987 (www.agencetallibert.com)



Figura 1.16: centro M & G ricerche, Venafro, 1991 (www.canobbio.com)



Figura 1.17: aeroporto internazionale di Denver, 1994 (Google Earth)



Figura 1.18: velodrome di Abuja/Nigeria, 2006 (www.canobbio.com)



Figura 1.19: Millennium Dome di Londra, 1999 (www.millennium-dome.com)

L'elevata efficienza statica, intesa come rapporto tra massimo carico utile e peso proprio, è certamente l'aspetto positivo più interessante ed importante. La leggerezza strutturale può essere tenuta talmente bassa da poter affrontare condizioni di impegno gravoso, quale può essere la necessità di dover superare grandi e grandissime luci. Si pensi alla già citata rete di funi progettata da Frei Otto e Leonhardt per ricoprire senza soluzione di continuità un'area di 73.000 m² nel complesso olimpionico di Monaco, o all'attuale tensostruttura progettata da Rouse per ricoprire una superficie di 200.000 m² al Ferrari World ad Abu Dhabi.

Leggerezza strutturale è anche sinonimo di idoneità in zone sismiche poiché le forze orizzontali che sollecitano una struttura in seguito a una scossa sismica dipendono direttamente dalla massa della struttura.

1.3.2 Strutture pneumatiche

Le superfici portanti viste nel paragrafo precedente risultano di necessità a doppia curvatura e vengono anche dette anticlastiche. Superfici sinclastiche ottenute da orditi di funi e di manti di rivestimento, esistono, ma in tali casi il fattore portante ed irrigidente è fornito da pressione interna: siamo allora nel campo delle costruzioni pneumatiche (**Maier G., 1970**).

La prima ipotesi di costruzione “gonfiata”, dovuta allo strutturista Lanchester risale al 1917: in un brevetto per un ospedale di campagna, egli descrive una tenda in cui una materia poco permeabile all’aria è mantenuta dalla pressione dell’aria stessa, e nella quale entrata e uscita sono assicurate dalla presenza di una camera stagna. La pressione è mantenuta da due ventilatori e la membrana è ancorata al suolo **(Fuzio, 1978)**.

Le prime applicazioni risalgono al secondo conflitto mondiale quando il guscio pneumatico viene impiegato diffusamente come rifugio d’emergenza ma anche come ricovero dei mezzi militari e riparo delle postazioni radar. Un sistema che, grazie alla facilità di montaggio e smontaggio delle strutture in PVC e aria, permette la realizzazione di ripari temporanei, e facilmente trasportabili **(Fuzio, 1978)**.

Successivamente, tra gli anni ’60 e ’70 Jungmann è l’architetto all’avanguardia della nuova modalità costruttiva e sviluppa diversi progetti nei quali esplora il gonfiabile contemplandolo nell’architettura, nelle strutture e nel design. Nel 1968 realizza una mostra delle strutture gonfiabili presso il museo dell’arte moderna di Parigi: un repertorio di oltre cento prodotti, dai veicoli di terra e di mare fino a quelli per il volo aereo e la navigazione nello spazio, oltre ai dispositivi per la sicurezza e la protezione nel campo dell’ingegneria e dell’architettura come giunti, casseformi, rivestimenti, ma anche sculture ed elementi d’arredo **(Peruccio, 2010) (Dessauce, 1999)**.

Protagonisti indiscussi di queste sperimentazioni sono i produttori stessi di pneumatici e materie plastiche come Zodiac, Dunlop, Goodyear, Firestone, Esso, Michelin e Pirelli, con i quali si ampliano i campi di applicazione della tecnologia dei gonfiabili: dall’involucro pneumatico messo a punto per la Nasa da Goodyear, fino alle cupole progettate da Buckminster con nervature in tubi pneumatici **(Peruccio, 2010) (Dessauce, 1999)**.

L’Esposizione Universale di Osaka del 1970 mise in risalto la tecnologia delle strutture pneumatiche; di particolare interesse sono il padiglione americano (figura 1.20) e il padiglione Fuji (figura 1.21) (alla quale realizzazione vi parteciparono, rispettivamente, gli strutturisti Gaigern e Kawaguchi) poiché illustrano in maniera esauriente due diverse tipologie strutturali.

Nel primo edificio viene utilizzata la tecnica delle strutture “air supported”, sperimentando, per realizzare la membrana, un tessuto di fibre di vetro immerso in una

pellicola vinilica leggera e resistente. La struttura viene completata da una rete di cavi metallici sovrapposti alla membrana che impediscono la lacerazione del telo (l'edificio misura nel suo complesso 142x82 m), e collaborano ad assorbire gli sforzi, generalmente assorbiti dalla membrana. La tensione dinamica che si crea tra membrana e cavi aggiunge alla complessiva convessità del pallone tante piccole maglie romboidali, a loro volta convesse. Nei progetti che utilizzano il cosiddetto metodo ad ambiente pressurizzato la pressione dell'aria che sostiene le membrane, potenziata con compressori o piccole turbine, è leggermente superiore all'interno della costruzione, ma non crea disagi agli utenti, non superando la differenza che esiste normalmente tra due luoghi aperti posti a 60 metri di dislivello tra loro **(Geiger, 1970)**.



(a) particolare



(b) vista panoramica

Figura 1.20: padiglione americano fiera di Osaka, 1970 (*www. Columbia.edu*)

Nel padiglione Fuji si sperimenta la tipologia di coperture pneumatiche, detta a camera d'aria e si configura una struttura che restituisce un'immagine composta da elementi convessi, sia visti dall'esterno che dall'interno. Il padiglione è composto, infatti, da una serie di 16 archi, dalla luce massima di 50 metri, accostati tra loro e formati da un grande tubo gonfiato del diametro di circa 4 metri, a sua volta realizzato con una doppia pellicola di vinylon (fibra sintetica inventata in Giappone, molto simile al cotone per grana e grado di assorbenza) ricoperta all'interno da uno strato di PVC **(Crippa, Irace, Lemoine, & Rjkert, 1993)**.



(a) Particolare



(b) Vista panoramica

Figura 1.21: padiglione Fuji fiera di Osaka, 1970 (www.kawa-struct.main.jp)

Una larga diffusione nel settore civile degli ultimi anni l'ha vista anche l'impiego dell'Etilene Tetra Fluoro-Etilene, più conosciuto col suo acronimo ETFE e utilizzato in grandi opere come: il Centro Nazionale di Attività Acquatiche (figura 1.22), realizzato per i giochi olimpici Pechino 2007 dagli architetti Peddle, Thorp e Walker, l' Eden Project in Cornovaglia (figura 1.23) realizzato da Grimshaw nel 2001 e l'Allianz arena progettata da Herzog e de Meuron per i mondiali di calcio Germania 2006.



(a) Particolare



(b) Interno

Figura 1.22: Centro nazionale di Attività Acquatiche di Pechino, 2007 (www.ptw.com.au)

I fogli di ETFE non vengono prodotti mediante un processo di tessitura come quella vista nel caso del PVC e del PTFE; le loro più basse proprietà meccaniche li rendono dunque adatti alle strutture pneumatiche più che a quelle di tipo anticlastico (**Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007**).

Le soluzioni adottate in strutture come quelle ora menzionate sono caratterizzate da una compenetrazione di solidi formati da veri e propri “cuscini in ETFE” (figura 1.14 b), all’interno dei quali viene mantenuta una pressione costante tra i 200 e i 750 Pa e ai quali viene affidata la resistenza ai carichi esterni. In genere, tali “cuscini”, sono formati 2 o 3 strati di fogli in ETFE, con spessore variabile tra i 50 e i 250 μm l’uno, installati all’interno di speciali profili di alluminio che li confinano. La pressione interna generalmente, può essere automaticamente incrementata caso fosse necessario sostenere carichi maggiori **(Robinson-Gale, Kolokotroni, Cripps, & Tanno, 2001) (Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007)**.



(a) Particolare



(b) Cuscino in ETFE

Figura 1.23: Eden Project in Cornovaglia (a) www.canadianarchitect.com; (b) www.merotsk.de

Paragonandolo al vetro, l’Etilene Tetra Fluoro-Etilene (ETFE) ha un peso specifico pari all’1 % e un costo inferiore compreso tra il 24 e il 70 %. Presenta inoltre una trasmissione della luce superiore a quelle di un ordinaria lastra di vetro, spessa 6 mm, del 5-8 %. Per ciò che concerne l’isolamento termico i “cuscini in ETFE”, sempre rispetto al vetro, fanno passare una minor quantità di calore per unità di superficie. Sono però inefficienti se si tratta dell’isolamento acustico e i fenomeni di abbagliamento sono analoghi a quelli di una qualsiasi struttura trasparente. È una struttura molto resistente e può sopportare carichi circa 400 volte superiori al suo peso proprio; ha una vita utile di circa 50 anni; funge come repellente alla sporcizia che si accumula durante l’esercizio; è totalmente riciclabile e i costi di produzione sono ridotti **(Robinson-Gale, Kolokotroni, Cripps, & Tanno, 2001)**. È tuttavia un materiale facilmente perforabile il che implica una problematica di manutenzione da non trascurare.

Riportiamo in seguito un paragone tra alcune delle caratteristiche fisiche presentate dall'ETFE e dal vetro (**Robinson-Gale, Kolokotroni, Cripps, & Tanno, 2001**) in cui la tensione di snervamento dipende dalla temperatura:

Proprietà	ETFE [MPa]	Vetro [MPa]
Carico di rottura	40-46	50-100 (temprato)
Durezza	31-33	5500
Tensione di snervamento	30-35	-
Meccanismo di rottura	Deformazione plastica	fragile

Le membrane impiegate nei sistemi strutturali “air supported” e a camera d’aria sono le stesse che, più comunemente, vengono usate per le tipologie di architetture tensili affrontate nel paragrafo precedente [tensostrutture]. Analogò è anche il sistema di sforzi attuanti sulla membrana, di conseguenza, anche la tipologia di prove atte a simulare la sollecitazione che attua in fase di esercizio è la medesima: prove biassiali.

Nel caso delle membrane in ETFE, come avremmo occasione di vedere in maniera più approfondita nel prossimo capitolo, nonostante la distribuzione del sistema di forze agente sulla membrana è analogo a quello di una qualunque struttura pneumatica, le prove monoassiali sono sufficienti.

1.4 Membrane per l'impermeabilizzazione delle dighe

Le dighe in calcestruzzo e muratura sono soggette ad un deterioramento naturale, causato dall'aggressione dell'ambiente, che ne riduce le iniziali caratteristiche di impermeabilità. Nel 1959, venne realizzata per la prima volta in Europa l'impermeabilizzazione del paramento a monte di una diga in rockfill mediante una geomembrana sintetica a bassa permeabilità.

L'impermeabilizzazione del paramento di monte con una geomembrana a bassa permeabilità fornisce una serie di vantaggi tra cui: minimizza l'impatto ambientale, è versatile e flessibile nella progettazione e nella applicazione, scarsamente soggetta ad alterazione chimica se a contatto con terreno o acqua; infine, la facilità e l'economicità della messa in opera insieme all'alta durabilità del materiale rappresentano la chiave del successo che ha avuto questo tipo di impermeabilizzazione.

Aspetto saliente delle geomembrane è la possibilità di combinare singole proprietà di due o più componenti in un unico materiale. La maggior parte delle geomembrane sono costituite da resine polimeriche che hanno la caratteristica di diventare soffici e pieghevoli quando vengono riscaldate senza tuttavia cambiare le loro proprietà meccaniche. Un materiale alternativo alle materie plastiche utilizzato per la realizzazione di geomembrane è la gomma.

La caratteristica principale della geomembrane è quella di trattenere i liquidi ed ha una permeabilità caratteristica che può variare da 10^{-11} a 10^{-13} centimetri al secondo. In base alle caratteristiche principali inoltre possono essere definite due categorie di membrane: tessute e non tessute (**Parolini & Vitali, 2005**).

Le membrane tessute possono essere prodotte utilizzando un'ampia gamma di materie sintetiche o chimiche e sono fondamentalmente realizzate mediante tessitura.

Gli aspetti principali delle geomembrane tessute sono: la variazione dovuta alla tessitura delle caratteristiche meccaniche, l'influenza della struttura tessuta sulla porosità e la grande anisotropia. Per quanto riguarda gli aspetti meccanici, le membrane tessute mostrano generalmente una minore deformabilità e una maggiore resistenza; più la trama è densa più la struttura è solida e rigida. Difetto di tale materiale è che una volta innescato lo strappo esso si propaga nella membrana molto rapidamente.

La realizzazione di membrane non tessute inizia, a sua volta, con la produzione del materiale grezzo costituito da polimeri, elasticizzati o vulcanizzati. Questi materiali vengono fusi per formare un materiale unico e il più delle volte vengono fatti passare attraverso dei rulli in modo tale da ottenere uno spessore uniforme. Questi prodotti presentano le stesse caratteristiche di resistenza in tutte le direzioni e hanno un'elevata deformabilità.

Le caratteristiche meccaniche principali delle geomembrane sono qui riassunte:

- Resistenza allo strappo: la resistenza allo strappo per le geomembrane non tessute varia dai 20 ai 140 N/m, mentre per quelle rinforzate varia fra i 90 e i 450 N/m. La resistenza allo strappo ha un ruolo fondamentale nelle operazioni di stoccaggio e di montaggio in sito (Parolini & Vitali, 2005).
- Altra caratteristica importante delle geomembrane è la resistenza all'impatto, in quanto può avvenire che detriti trasportati dall'acqua vadano a scontrarsi con la diga.
- Modulo di elasticità: la presenza del rinforzo nelle geomembrane tessute permette di aumentare in modo sensibile la rigidità del materiale.

Attualmente, il materiale più utilizzato come impermeabilizzante è il cloruro di polivinile (PVC), questo grazie alle sue caratteristiche di elevata resistenza ed elasticità oltre che per l'ottima durabilità. Questa tendenza tuttavia non trova riscontro al di fuori del territorio europeo e in particolare, nel continente americano, il polietilene ad alta densità (HDPE) risulta essere il materiale maggiormente impiegato.

La nascita del sistema di impermeabilizzazione va fatta risalire ad un installazione pilota realizzata nel 1969 sulla diga del Lago Verde in provincia di Parma. Si era iniziato con l'impermeabilizzare solamente il giunto tra la struttura rigida in calcestruzzo al piede della diga ed il corpo diga deformabile con un sistema di geomembrane sintetiche in PVC. In seguito all'esito positivo di tale installazione, l'utilizzo di geomembrane impermeabili sintetiche fu esteso all'intero paramento di monte.

La prima realizzazione su una diga in calcestruzzo fu realizzata nel 1970 incollando, dopo una lunga ed accurata preparazione della superficie, il manto impermeabile in poliisobutilene al paramento. All'inizio il risultato fu soddisfacente, ma il materiale si deteriorò abbastanza rapidamente poiché manifestò una bassa resistenza nei confronti dell'azione dei raggi ultravioletti e delle variazioni di temperatura.

Il PVC fu utilizzato in tutte le applicazioni successive, ad iniziare dal 1976, anno in cui venne impermeabilizzato un intero paramento di monte con una geomembrane in PVC dello spessore di 2 millimetri. In questo progetto venne anche mutato il metodo di ancoraggio, e la geomembrana fu per la prima volta fissata al paramento mediante profili meccanici.

Nelle installazioni successive dal 1980 al 1988 il sistema si è progressivamente evoluto: dall'originaria geomembrana in PVC si è creato il geocomposito che viene ora comunemente usato in questo tipo di applicazioni. Il geotessile costituisce uno strato anti-punzonamento, che permette di ridurre al minimo la preparazione della superficie richiesta prima dell'installazione della geomembrana. Bisogna comunque prestare attenzione affinché i punti di discontinuità non generino potenziali problemi d'infiltrazione.

La barriera inoltre deve consentire il drenaggio dell'acqua che si trova a tergo della geomembrana e proviene da fenomeni di migrazione dell'acqua già presente nel corpo diga o per infiltrazione dell'invaso. La presenza di acque a tergo della membrana può essere di detrimento al sistema di impermeabilizzazione, specie in caso di rapido svuotamento dell'invaso; la presenza di una grande quantità di acqua può dare origine a sforzi eccessivi fino a causare il collasso del sistema impermeabilizzante.

1.6 Membrane utilizzate in altre applicazioni

Particolari tipi di membrane sono utilizzati per le più disparate applicazioni, di seguito si vuole compiere una veloce panoramica degli impieghi più rilevanti.

Le biomembrane appartengono a quella classe di sostanze che vanno sotto il nome di biomateriali. Come biomateriali vengono generalmente definite sostanze, o combinazioni di sostanze, di origine naturale o sintetica, che possono essere impiegate per un qualunque periodo di tempo, sia da sole sia come parte di un sistema, al fine di trattare, potenziare, sostituire qualsiasi tessuto, organo o funzione del corpo.

In particolare un'applicazione in cui le biomembrane trovano largo impiego è nella ricostruzione della pelle artificiale. Un interessante esempio di ricostruzione è la pelle artificiale sviluppata presso MIT di Cambridge, formata da una membrana suturabile costituita da uno strato superiore di elastomero siliconico e uno inferiore biodegradabile, consistente in un reticolo di collagene-glicosoamminoglicani (GAG) reticolati.

Nell'applicazione lo strato di collagene-GAG viene riassorbito e sostituito da tessuto neodermico, mentre quello di silicone viene espulso con la formazione della nuova epidermide.

Si può inoltre riportare come ulteriore applicazione le membrane polimeriche per ossigenatori o dialisi. Il trasporto attraverso queste membrane sintetiche dipende sostanzialmente dalle dimensioni molecolari del soluto e dalla struttura fisica della membrana, nonché dalla compatibilità del soluto con il materiale costituente la membrana stessa.

Lanciato dalla NASA il 12 agosto 1960 con un razzo Thor-Delta, Echo 1 (figura 1.24), primo satellite artificiale per telecomunicazioni, rappresenta una singolare applicazione dei fogli sottili. Questo satellite consisteva in una sfera gonfiabile dal diametro di 30 m composto da una pellicola spessa 0,127 mm di Mylar (laminato a base di poliestere) metallizzato in grado di riflettere le onde radio. Lo scopo del satellite consisteva nel verificare la possibilità di comunicare tra aree distanti sulla Terra utilizzando, come ponte radio, un oggetto in orbita. La sfera infatti, una volta fuori dall'atmosfera, era in grado di riflettere, passivamente, le onde radio inviate da una stazione a terra, il tutto quindi senza l'ausilio di apparati elettronici per la captazione e ritrasmissione del segnale a bordo del satellite. La missione fu un successo e permise, durante il passaggio del satellite tra gli Stati Uniti d'America, la prima comunicazione "diretta" tra due stazioni radio della NASA situate una in California e l'altra in Florida. Venne successivamente utilizzato per riflettere segnali radio, telefonici e televisivi anche tra continenti diversi. Grazie al suo notevole volume furono possibili misurazioni precise della densità atmosferica nell'orbita bassa e della pressione solare.



Figura 1.24: Echo I durante le prove d'infrazione, 1960 (www.history.nasa.gov)

Altro interessante impiego assunto da una membrana nel corso della storia è nella fabbricazione di aerostati, campo nel quale uno dei principali pionieri fu Umberto Nobile (ingegnere ed esploratore italiano). Il tipo di dirigibile più noto è lo Zeppelin, le cui caratteristiche principali rimasero sostanzialmente inalterate nel corso di uno sviluppo durato oltre trent'anni. Struttura rigida in alluminio, rivestita esternamente in tela trattata; tali aerostati vengono anche denominati dirigibili rigidi. Realizzati con materiali compositi formati da una trama finissima in tessuti sintetico impermeabilizzati con materiali polimerici sono invece i più moderni "dirigibili flosci". All'interno dell'involucro sono presenti più celle per il gas idrogeno. Esternamente erano installate le gondole motore, dove erano montati motori a scoppio azionanti le eliche propulsive, e la gondola di comando.

I moderni dirigibili sono destinati, prevalentemente ad uso di tipo turistico e pubblicitario; con l'avvento di nuovi tessuti più resistenti e la nuova tecnologia possono arrivare ad un'ottima pressurizzazione interna, fatto che ne ha aumentato l'utilizzo. Altre destinazioni possono essere: la misurazione degli agenti inquinanti dell'aria, il pattugliamento dei confini, le protezioni delle riserve, l'osservazione del traffico, le rivelazioni geografiche e infine il compimento di servizi di trasporto in aree di difficile accesso.

Recenti studi prevedono quali potrebbero essere gli sviluppi futuri dei dirigibili. Nephelios (figura 1.25 (a)) è un dirigibile di circa 5,5 metri di diametro riempito di elio progettato da un'università di ingegneria in Francia, prossimamente sarà impegnato in una serie di voli prova per poi provare l'attraversata della Manica. Finalità di Nephelios è quella di diventare il primo dirigibile solare per il trasporto di umani. Fa parte del progetto Sol'R ed è realizzato con uno strato sottile e leggero di alluminio avviluppato con nylon e polietilene. I pannelli solari (massimo 2.4 kW) flessibili sono posizionati sul dorso per catturare tutta l'energia possibile da trasferire al motore che azionando due propulsori lo muoverà con una velocità di crociera di circa 40 chilometri orari.

Il futuro dei viaggi aerei di lusso riguarderà sempre di più gli affascinanti velivoli hotel ecologici hitech. La compagnia spagnola Turtle Airships ha infatti mostrato il progetto di un dirigibile gigante (figura 1.25 (b)) che volerà da New York a Parigi potendo sostare sia in acqua che in terra. L'idea di Turtle Airships è che il dirigibile sarà un prodigio dell'hitech e del lusso con camere e luoghi comuni all'insegna della tecnologia e dello svago. Anch'esso trarrà tutta l'energia di cui necessita da una vasta area di pannelli fotovoltaici molto leggeri montati sul tetto e potrà atterrare o ammarare a piacimento. La superficie esterna sarà

ricoperta di uno strato di “tessuto” basato su Cadmio-Indio-Germanio (CIG) che potrà muovere il veicolo a circa 65 km/h. In caso di necessità sarà comunque possibile attivare un tradizionale motore diesel (anche se è sotto studio un secondo motore elettrico).



(a) Nephelios



(b) dirigibile Turtle Airlines

Figura 1.25: recenti sviluppi sui dirigibili (*www.innovations.de*)

Materiali analoghi a quelli degli aerostati vengono attualmente impiegati per la realizzazione delle vele da regata. La moderna produzione di tali vele si effettua in un unico pezzo mediante uno stampo che viene modellato sulla forma desiderata. Su questa forma viene steso un laminato a base di poliestere, un pettine automatizzato dispone le fibre sullo stampo infittendole laddove è prevista una maggiore sollecitazione. Terminata la disposizione la vela viene rivestita sotto vuoto da un secondo strato di Mylar (materiale utilizzato per la costruzione di Echo 1). I fogli di Mylar e le fibre vengono solidarizzate con resine che successivamente vengono saldate termicamente. Materiali innovativi nell’ambito delle vele sono il kevlar, le fibre di carbonio e la fibra di PBO.

Il kevlar è una fibra aramidica di colore giallo e possiede un modulo elastico almeno cinque volte superiore a quello del normale poliestere, la resistenza alla trazione inoltre è pari a quella dell’acciaio.

Le fibre di carbonio hanno un modulo elastico particolarmente alto e consentono la realizzazione di vele molto leggere e con altissima stabilità e resistenza all’allungamento, per questo è, attualmente, la fibra più richiesta per la realizzazione di vele “gran prix”. Queste fibre si deteriorano rapidamente, solitamente vengono richieste da chi ha come obiettivo la partecipazione a regate molto importanti.

La fibra di PBO è un prodotto sviluppato dalla società giapponese Toyobo Co. di color marrone chiaro, ha tenacità e modulo elastico superiori alle fibre aramidiche, nonché anche la resistenza all'abrasione e agli U.V. sono fattori di gran lunga superiori. Inoltre è di peso leggerissimo e basso assorbimento in ambiente umido. Purtroppo è di scarsa reperibilità, alto costo e difficile lavorazione.

Prove biassiali su fogli sottili

In questo capitolo vengono illustrate le prove biassiali che possono essere condotte su materiali in fogli piani liberi quali ad esempio la carta, i tessuti tecnici utilizzati per le tensostrutture o i film in ETFE.

Lo studio di vari articoli scientifici sull'argomento reperiti in letteratura consente di comprendere quali siano gli aspetti critici che occorre affrontare, sia sul piano operativo sia sul piano concettuale, per poter condurre e interpretare correttamente delle prove biassiali.

Vi sono infatti questioni non banali legate al modo in cui possono essere concepite e realizzate le macchine di prova stesse e alla geometria del campione da sottoporre a prova, di solito di forma cruciforme. Inoltre vi sono delle alternative nella strumentazione da utilizzare per rilevare la "risposta" del provino ai carichi imposti. E, soprattutto per certi materiali (ad esempio i tessuti spalmati), occorrerebbe definire dei protocolli di prova (che consentano di rendere confrontabili i risultati di prove svolte in laboratori diversi).

Il capitolo include anche una descrizione sommaria delle tecniche di misura di spostamenti e deformazioni che sfruttano i principi della correlazione di immagini digitali (Digital Image Correlation, DIC).

A proposito di prove che inducono stati piani di sforzo, ricordiamo che anche una prova di trazione/torsione su un tubo in parete sottile genera in ogni punto uno stato piano di sforzo. Ma è ovvio che i materiali di cui ci stiamo occupando non si prestano ad essere testati secondo questa modalità.

2.1 Introduzione

La letteratura tecnica degli ultimi anni mostra come le prove biassiali piane su provini cruciformi vengano sempre più frequentemente considerate essenziali per la caratterizzazione meccanica di materiali quali laminati, fogli liberi o membrane, che spesso manifestano un comportamento ortotropo sia in campo elastico sia in campo elastoplastico. Con il termine “caratterizzazione meccanica” s’intende la determinazione di parametri di rigidità in campo elastico lineare, di leggi sforzi-deformazioni in regime non lineare o di criteri di rottura.

Le macchine per l’esecuzione di prove biassiali sono naturalmente notevolmente più complesse e costose di quelle per prove monoassiali (figura 2.1). Anche le prove stesse sono più complesse da eseguire e da interpretare. Questa è la ragione per cui non per tutti i materiali risultano reperibili in letteratura dati sperimentali relativi a prove biassiali. E’ questo un campo della meccanica sperimentale che risulta attualmente in forte crescita, anche grazie ai continui progressi nelle tecnologie di misura delle quantità in gioco.

Tradizionalmente le prove biassiali su provino cruciforme vengono progettate e svolte in modo che nella parte centrale del provino si generi uno stato di sforzo/deformazione costante. In tale zona gli sforzi normali nella direzione dei due bracci vengono considerati noti (pari allo sforzo applicato alle estremità dei bracci moltiplicato per un eventuale coefficiente riduttivo) mentre le corrispondenti deformazioni vengono misurate tramite estensimetri. Analisi condotte da vari autori, hanno dimostrato che affinché si instaurino sforzi e deformazioni pressoché costanti in una zona centrale sufficientemente ampia, è importante fare ricorso a provvedimenti quali ed esempio l’introduzione di opportuni tagli longitudinali lungo i bracci del provino. Le prove vengono condotte imponendo gli sforzi secondo percorsi radiali, cioè mantenendo costante il rapporto tra lo sforzo normale in una direzione (allineata con uno dei due bracci del provino) e lo sforzo normale in direzione ortogonale.

Un utilizzo innovativo delle prove biassiali è oggi reso possibile grazie all’avvento di tecniche di misura di spostamenti e deformazioni basate su metodi fotografici e algoritmi di “Digital Image Correlation” (DIC). Queste tecniche consentono di rilevare campi di deformazione (sulla superficie del campione) aventi anche notevoli gradienti spaziali. Vi è

quindi la possibilità di sfruttare campi di sforzo e deformazione non-omogenei indotti nel provino cruciforme per calibrare legami costitutivi facendo uso di metodi di analisi inversa. Seguendo questa filosofia, la variabilità del campo di sforzo/deformazione indotto nel provino può costituire un vantaggio nei procedimenti di identificazione con cui si vanno a stimare i parametri che intervengono nel modello costitutivo prescelto. Può dunque essere di interesse studiare procedure di identificazione parametrica che si basino su prove biassiali su provino cruciforme perforato: il foro presente al centro del provino accresce la variabilità dei campi di sforzo e deformazione che si generano.

Si noti che anche il bursting test o prova di scoppio rappresenta una prova biassiale; in questa prova oltre che la pressione di scoppio è possibile monitorare la deformazione fuori piano della membrana per vari livelli di carico. Non risulta però possibile governare indipendentemente gli sforzi membranali su ciascun elemento del materiale agenti due direzioni ortogonali. Questa prova viene illustrata nella sezione 4.4 con riferimento a materiale cartaceo.

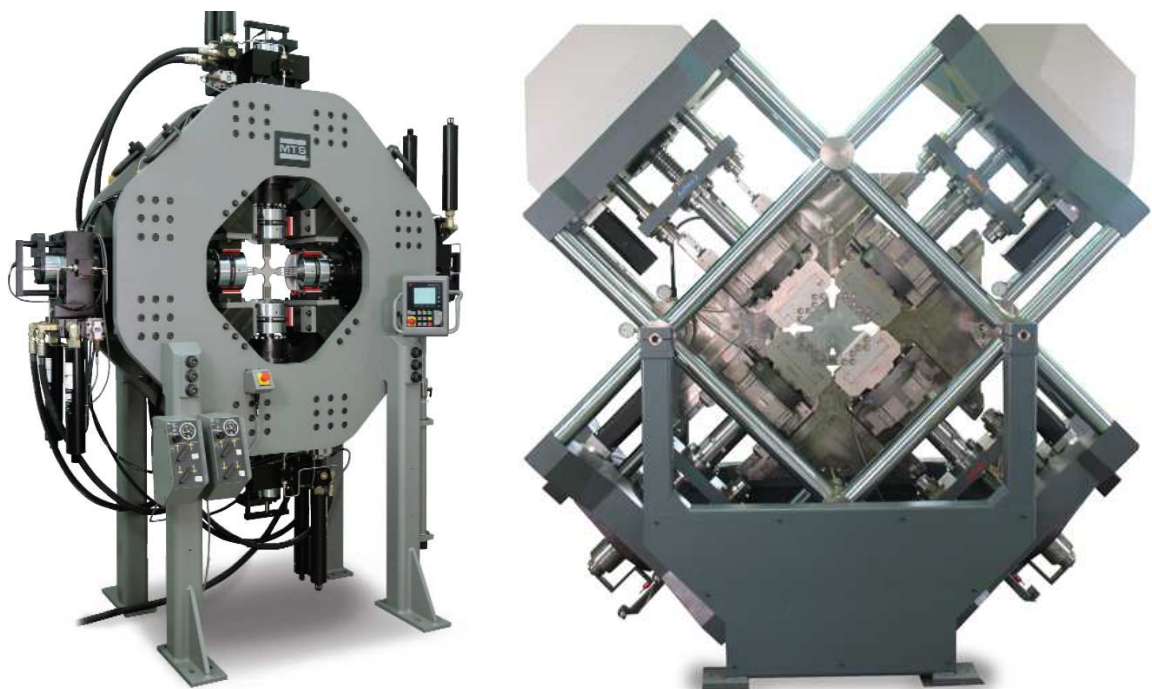


Figura 2.1: macchine per test biassiali prodotte da Zwick GmbH (www.zwick.com)

2.2 Macchine di prova e geometria dei campioni

Le macchine di prova per test biassiali attualmente in commercio sono fornite di due telai di carico trasversalmente connessi (figure 2.2 e 2.3). Il carico può essere applicato mediante l'utilizzo di cilindri idraulici, viti senza fine o attuatori elettromeccanici (figura 2.4). Normalmente il carico applicato si misura mediante celle di carico montate all'estremità degli attuatori.

Innovazione nel settore è stato il design "fluttuante" messo a punto da Architen-Landrell (figura 2.5) nel quale il telaio superiore è montato su quattro cuscinetti a sfera ed è libero di "fluttuare", compiendo rotazioni e traslazioni, nel piano del tessuto. Ciò permette di impostare una deformazione o uno sforzo lungo le direzioni trama e ordito anche qualora queste non fossero perpendicolari tra di loro. La modalità di applicazione del carico, che prevede l'applicazione sempre lungo la linea dei filati, ci consente di ottenere risultati più accurati del comportamento biassiale di un tessuto in quanto non introduce effetti indesiderati di taglio **(Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004)**.



Figura 2.2: macchina per test biassiale prodotta da Zwick GmbH (www.zwick.com)



Figura 2.3: macchina per test biassiale del laboratorio del Politecnico di Milano



Figura 2.4: attuatore elettromeccanico prodotto da Zwick GmbH (www.zwick.com)



Figura 2.5: macchina di prova basato sul design "fluttuante" dell'Università di Newcastle

Uno studio abbastanza approfondito sulla geometria che deve avere un campione cruciforme di tessuto spalmato è stato sviluppato dall'università di Newcastle (**Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004**).

Le prime prove biassiali sviluppate su campioni di tessuto prevedevano un provino di forma quadrata sottoposto a un sistema di afferraggi che si sviluppava lungo tutto il perimetro del campione. Tuttavia, tale metodo si è abbandonato in quanto si è ritenuto più interessante stabilire degli sforzi uniformi lungo la direzione della trama e dell'ordito esenti da restrizioni laterali quali quelle che si generavano da un sistema di afferraggi così concepito. Questo ha portato allo sviluppo di un provino cruciforme. All'interno delle braccia della croce, tuttavia, si sviluppano sforzi diretti ortogonalmente rispetto alla direzione con cui viene applicato il carico sul braccio; tali sforzi vanno a modificare le condizioni al contorno note che si vogliono imporre mediante il sistema di afferraggio (**Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004**), (**Chen, Ding, Fanguero, Yi, & Ni, 2007**).

Ulteriori sviluppi nella progettazione del provino cruciforme prevedono la risoluzione di tale problema mediante l'aggiunta di incisioni longitudinali lungo le braccia dette "slits". Le dimensioni utilizzate per il provino cruciforme sono quelle proposte dai costruttori di Architen-Landrell e riportate in (figura 2.6); si sono però analizzate differenti configurazioni degli "slits" che consistono in: (a) non sono presenti "slits" lungo le braccia del provino; (b) sono presenti 3 "slits" lunghi 150 mm su ogni braccio e che lo dividono in quattro parti uguali larghe 75 mm l'una; (c) sono presenti 11 "slits" lunghi 150 mm che dividono il braccio in 12 parti uguali larghe 25 mm, in questo caso (come nel caso (a) e (b)) il carico viene trasmesso al braccio mediante un sistema di afferraggio continuo; (d) la geometria è analoga al caso (c) ma ogni striscia che compone il braccio è caricata in maniera indipendente ed è libera di muoversi trasversalmente alla direzione del carico applicato. Si è notato come sia la configurazione (c), nonostante si utilizzi come sistema di afferraggio una pinza singola, quella in grado di permettere il massimo trasferimento degli sforzi all'area d'interesse (**Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004**).

Tuttavia, indipendentemente dalla geometria scelta, il livello di sforzo trasmesso all'area centrale è comunque significativamente inferiore rispetto alla sollecitazione applicata. Parte dei carichi applicati attuano nelle braccia trasversali; nella parte centrale dunque, il carico agisce effettivamente su una larghezza maggiore che quella del braccio (300mm) dove è stata applicata. Si dovrebbe così applicare un fattore di riduzione dello sforzo applicato. Questo

fattore di riduzione può essere visto come una lunghezza efficace sulla quale agisce il carico. Per la geometria conferita al campione si può utilizzare un fattore di riduzione dello sforzo pari a 0,95 (o una lunghezza utile di 315 mm anziché 300) **(Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004)**.

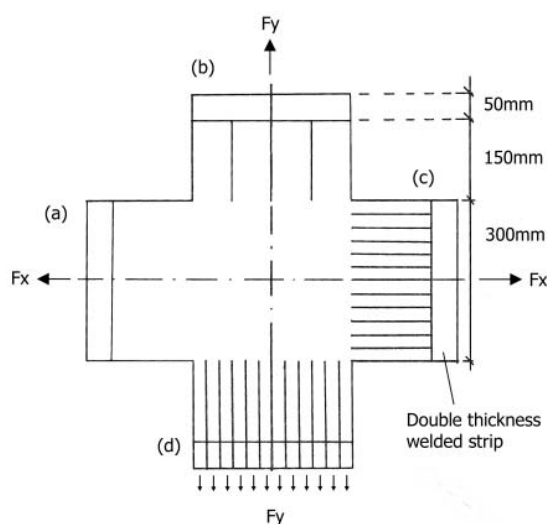


Figura 2.6: geometria del provino cruciforme e modalità di applicazione del carico

In letteratura sono presenti anche prove biassiali nel piano atte alla caratterizzazione di provini cruciformi metallici. La forma da adottare per tali provini è anch'essa tuttora molto discussa; ad esempio F. Abu-Farha, L.G Hector, Jr. e M. Khraisheh, in un articolo per cui hanno collaborato **(Abu-Farha, Hector, & Khraisheh, 2009)**, hanno raccolto alcune forme di provini cruciformi ritrovate in letteratura (figure 2.7). I tre autori osservano per ciascuno di questi provini la presenza di una fra i seguenti svantaggi:

- La geometria del provino si basa solamente su simulazioni ad elementi finiti e non è stata sottoposta a validazione sperimentale.
- La geometria preclude la creazione di deformazioni plastiche nella zona d'interesse, poiché lo snervamento iniziale e l'anisotropia sono di maggior interesse.
- La geometria è appropriata per prove a temperatura ambiente, escludendo quei materiali che si deformano solo a temperature maggiori.

Dopo aver osservato l'inadeguatezza di questi provini per i loro scopi, Abu-Farha et al. hanno eseguito una campagna di prove biassiali su materiali metallici leggeri, progettando la forma dei provini da utilizzare in relazione al campione da testare (figure 2.8).

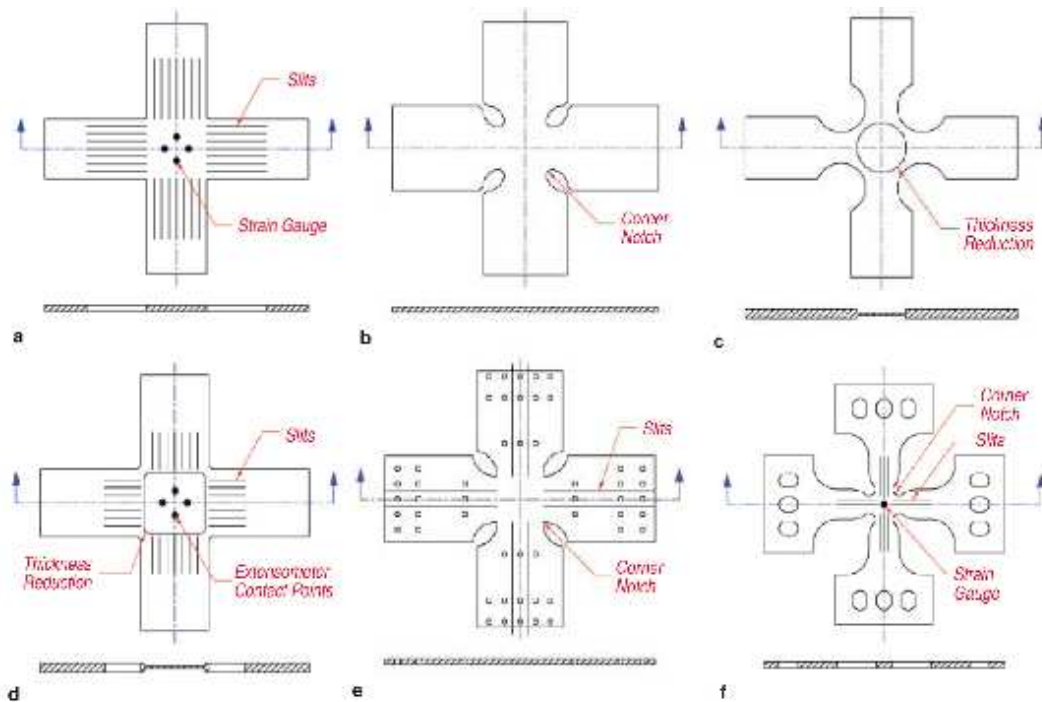


Figura 2.7: esempi di provini cruciformi di varia geometria utilizzati per prove biassiali

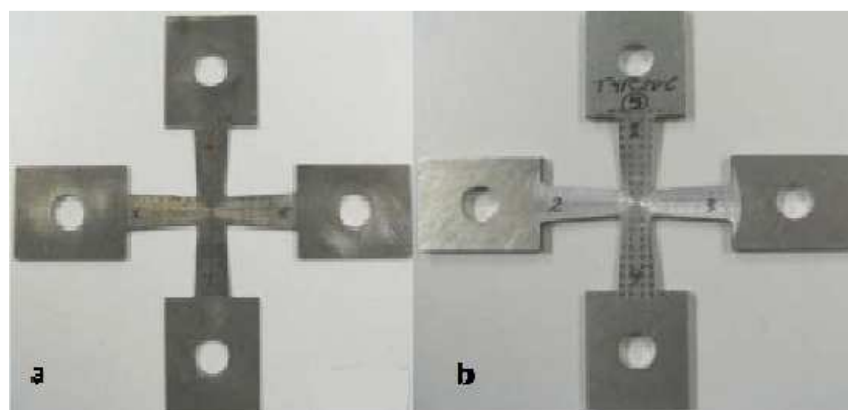


Figura 2.8: esempi di provini cruciformi adottati da Abu-Farha et al.

Esistono infine due principali filosofie che determinano la scelta della forma da adottare ad un provino cruciforme di un materiale qualunque:

- Realizzare dei tagli nei bracci del provino con l'intento di creare uno stato di sforzo uniforme nella zona centrale (**Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004**).
- Realizzare un foro circolare nella zona centrale del provino con l'intento opposto rispetto al precedente, vale a dire creare una situazione di sforzo il più possibile eterogenea (**Garbowski, 2009**).

2.3 Misure di spostamenti e deformazioni

Le metodologie sviluppate atte a misurare il campo di deformazioni che si genera in una membrana tessile possono essere classificate in due categorie: quella del contatto e quella del non contatto. Le misure delle deformazioni acquisite, per esempio, mediante estensimetri meccanici ad ago prevedono la perforazione del provino in due punti per estensimetro e per questo vengono dette “a contatto”. Tale metodologia può tuttavia interferire sulla distribuzione degli sforzi alterando i risultati. Al fine di evitare tali interferenze i metodi di non contatto vengono ampiamente utilizzati; tra di essi facciamo presente quelli fotografici quali il metodo di correlazione di immagini digitali (Digital Image Correlation, DIC), sulle cui particolarità si soffermerà il prossimo paragrafo e i rilevamenti a laser. Alcuni banchi di prova attualmente in commercio prevedono l’acquisizione dei dati mediante estensimetri laser montati direttamente sul telaio, uno sopra e l’altro sotto il provino, lungo le direzioni trama e ordito (**Chen, Ding, Fanguero, Yi, & Ni, 2007**).

Tuttora il metodo di acquisizione dei dati più diffuso è quello che prevede l’utilizzo di estensimetri meccanici ad ago; è necessario tuttavia capire come la disposizione di tali estensimetri influenzi i risultati ottenuti.

Al fine di studiare l’influenza della posizione degli estensimetri qualora si voglia misurare la deformazione del campione Chen et al. proposero lo studio della deformazione di un provino cruciforme posizionando gli estensimetri in tre diverse posizioni: A, B e C come illustrato in figura 2.9 (**Chen, Ding, Fanguero, Yi, & Ni, 2007**).

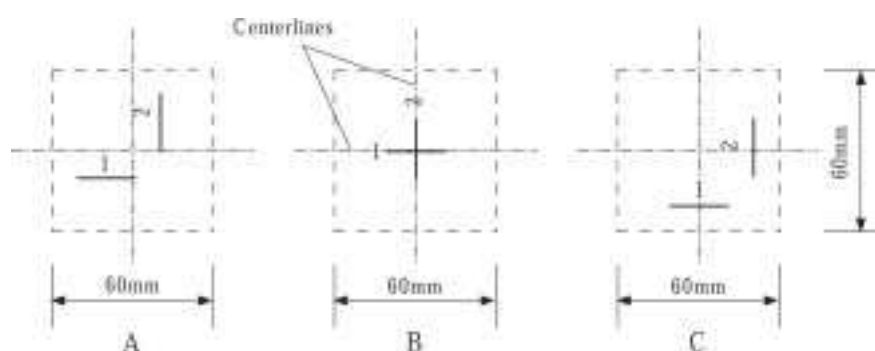


Figura 2.9: disposizione dell’estensimetro sul provino

Si è notato che per prove biassiali la posizione degli estensimetri è indifferente (grafico 2.1) ciò non avviene nel caso di una prova monoassiale dove i rilevamenti ottenuti dalle

posizioni B e C presentano rigidezza minore rispetto ad A; ciò è dovuto dal fatto che la distribuzione dello sforzo perpendicolare alla direzione del carico non è lineare come ci si potrebbe aspettare.

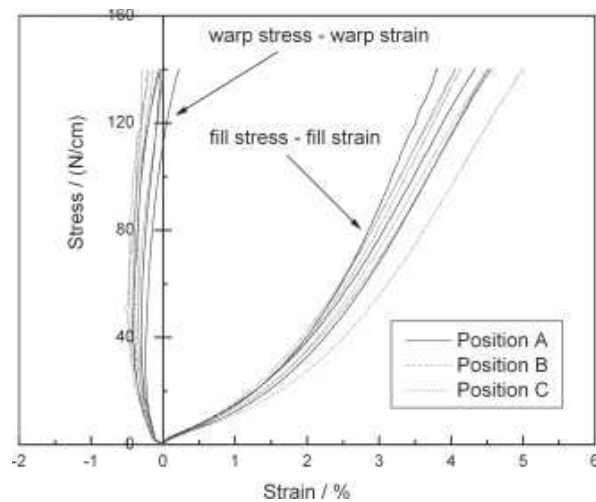


Grafico 2.1: comportamento a trazione del campione S_2 sottoposto ad una prova biassiale con posizioni diverse di misura e rapporto di sforzo 1:1

2.4 Digital Image Correlation (DIC)

La Digital Image Correlation (DIC) è una tecnica di tipo ottico per la misura di spostamenti e deformazioni nell'ambito della meccanica sperimentale. Tale tecnica consente la valutazione del campo di spostamento e di deformazione su una porzione della superficie di un solido, soggetto ad un processo deformativo, mediante il confronto tra immagini digitali registrate prima e dopo l'innesco di tale processo. Ogni zona della superficie presenta un particolare "pattern" in termini del livello di grigio, questo è legato all'intensità della luce riflessa rilevabile dai sensori di una fotocamera digitale. In tale modo è possibile scegliere un certo "pattern" da seguire durante il processo deformativo, per determinare i campi di spostamento e di deformazione corrispondenti all'elemento superficiale sede del "pattern" bersaglio. Poiché la distribuzione dei livelli di grigio è eterogenea, risulta conveniente identificare delle piccole aree di riferimento, dette "zones of influence" (ZoI) o "subsets", costituite da un insieme di pixel (solitamente zone quadrate contenenti dai 10 ai 100 pixel per lato), piuttosto che considerare ogni singolo pixel costituente l'immagine.

Il principio base su cui si fonda tale metodologia consiste nella ricerca della massima correlazione tra le ZoI appartenenti alle immagini rappresentanti la situazione indeformata e deformata. (C. S. Nunes, A. Castello, F. Matt, & M.dos Santos, 2007).

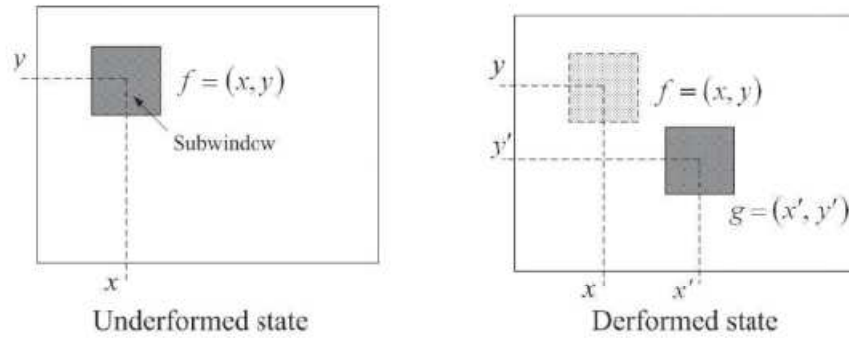


Figura 2.10: “Zones of Influence”: ricerca della massima correlazione tra le ZoI appartenenti alla configurazione indeformata e a quella deformata

Il campo di spostamenti piano (u,v) si determina confrontando differenti ZoI tra le due immagini sfruttando un processo di correlazione incrociata. Una comune formulazione della funzione di correlazione incrociata è la seguente:

$$F(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [f(x_i, y_j) - \bar{f}] \cdot [g(x'_i, y'_j) - \bar{g}]}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [f(x_i, y_j) - \bar{f}]^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [g(x'_i, y'_j) - \bar{g}]^2}}$$

Dove

$$x' = x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y \quad e \quad y' = y + v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y$$

$f(x,y)$ rappresenta il valore del livello di grigio alla coordinata (x,y) nell'immagine relativa alla configurazione indeformata, $g(x',y')$ quello alla coordinata (x',y') nell'immagine relativa alla configurazione deformata, \bar{f} e \bar{g} sono le medie delle rispettive funzioni, u e v sono le componenti di spostamento del punto centrale della ZoI nelle direzioni x e y .

Il campo di spostamento globale relativo all'immagine sarà dato dalla sovrapposizione degli spostamenti delle singole ZoI. A questo punto risulta particolarmente significativo il calcolo del relativo campo di deformazione, per il quale esistono due approcci:

- Metodo di ricerca diretto, si utilizza la formulazione per rintracciare la posizione dell'area di riferimento all'interno dell'immagine deformata in base al valore del coefficiente di correlazione incrociato. Una volta identificata, si calcola lo spostamento relativo tra le due ZoI (con precisione dell'ordine di 0,5 pixel) e per mezzo di una funzione di post-processamento, il campo di spostamento viene convertito nel relativo campo di deformazione.
- Metodo di correlazione iterativo, consente di determinare non solo lo spostamento del punto centrale dell'area di riferimento, ma anche le rotazioni e le deformazioni. Il metodo considera sia lo spostamento che il suo gradiente come delle variabili indipendenti, perciò l'accuratezza in termini di spostamento scende su valori pari a 0,01 pixel.

Recentemente sono state introdotte nuove metodologie riguardanti la massimizzazione del coefficiente di correlazione tra la situazione indeformata e quella deformata come, ad esempio, quelle basate sull'utilizzo di funzioni "di forma" ("shape functions") continue per la definizione del campo di spostamento, quali B-splines, basi polinomiali o funzioni di forma simili a quelle utilizzate nel metodo degli elementi finiti. **(Bertoli & Boschini, 2008)**.

L'ultimo metodo, in particolare, si basa sull'applicazione diretta del principio di conservazione del flusso ottico; mediante tale principio, infatti, è possibile determinare un campo di spostamenti continuo utilizzando, ad esempio, le nozioni di sviluppo in serie di Fourier o le funzioni di forma degli elementi finiti **(Bertoli & Boschini, 2008)**. Questo approccio fornisce una migliore accuratezza nella determinazione del campo di spostamento rispetto ai metodi basati sull'analisi locale delle singole ZoI. Viceversa, un difetto di queste tecniche è quello relativo alla loro incapacità di descrivere fenomeni localizzati; essi sono infatti caratterizzati da alti livelli di discontinuità quali fratture, bande di taglio o scorrimenti. In tali situazioni, quello che si verifica è la perdita di convergenza della procedura di identificazione del campo di spostamento sull'intera immagine. Un approccio che consente di superare questo problema è quello di assumere delle funzioni di forma che consentano la presenza di punti caratterizzati da discontinuità nel campo di spostamento, questo metodo è detto "Extended Digital Image Correlation" (X-DIC).

Si analizzano ora le caratteristiche specifiche che possono influenzare l'accuratezza di questa tecnologia. In particolare risultano rilevanti tre aspetti: le caratteristiche della trama ("texture"), la stima dell'errore sullo spostamento calcolato e la sensibilità al disturbo. La qualità della misura dello spostamento è principalmente influenzata dalle caratteristiche della "texture". I livelli di grigio vengono generalmente codificati a 16 bit durante la fase di acquisizione dell'immagine, poiché rende agevole la cattura delle dinamiche di variazione dei vari livelli nelle immagini originali. Ogni ZoI è caratterizzata da una deviazione standard dei livelli di grigio; nel grafico 2.2 si riporta l'andamento di tale indice normalizzato rispetto al massimo valore del livello di grigio presente all'interno dell'immagine.

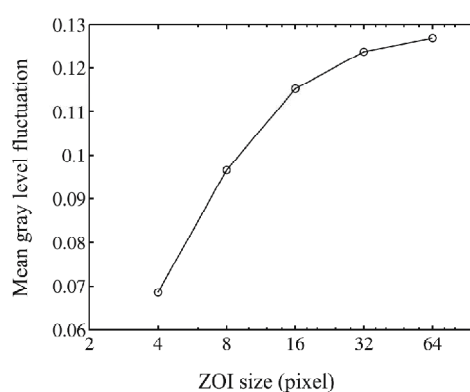


Grafico 2.2: andamento dei livelli di grigio medi su delle ZoI di differenti dimensioni normalizzati in base ai livelli di grigio dinamici dell'immagine

Si nota immediatamente che al crescere della dimensione della ZoI, cresce anche il valore della deviazione standard, e di conseguenza anche il numero d'informazioni contenuto all'interno dell'area di riferimento. Perciò è auspicabile un incremento dell'accuratezza del metodo qualora aumenti la dimensione della ZoI considerata.

La stima dell'errore viene effettuata a priori, per avere una misura dell'accuratezza del metodo sull'immagine a disposizione. La stima dell'errore viene effettuata utilizzando la sola immagine originale f e considerando g come una traslata di f in uno spazio di Fourier di una quantità prescritta (u_{pre}). Questo procedimento implica un processo di interpolazione specifico per i livelli di grigio all'interno dei singoli pixel; l'algoritmo viene allora applicato sulla coppia di immagini (f, g) e il campo di spostamento stimato $u_{est}(x)$ viene misurato. L'errore calcolato viene massimizzato nello spazio intermedio a due pixel, dove avviene l'interpolazione; per questo motivo lo spostamento prescritto viene scelto all'interno di questo spazio, in modo da massimizzare la stima dell'errore. La qualità della stima effettuata è poi caratterizzata da due indicatori:

- L'errore sistematico, $\delta_u = \|u_{est} - u_{pre}\|$;

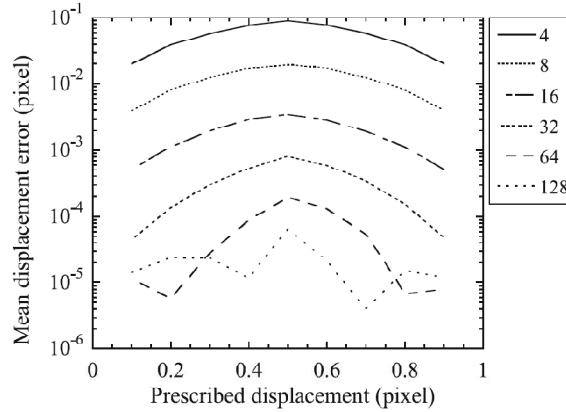


Grafico 2.3: errore medio in funzione dello spostamento prescritto per differenti dimensioni della Zoi

- La deviazione standard, $\sigma_u = \sqrt{\|u_{est} - u_{pre}\|^2}$;

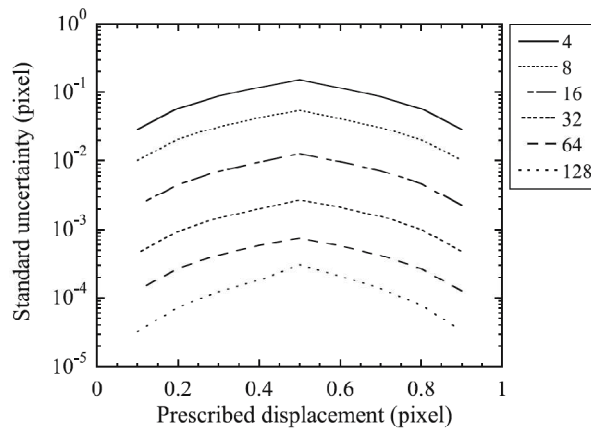


Grafico 2.4: deviazione standard in funzione dello spostamento prescritto per differenti dimensioni della Zoi

Si nota come i due indicatori assumano valore massimo in corrispondenza di uno spostamento pari a 0,5 pixel e abbiano un andamento simmetrico rispetto tale valore. Valori di spostamento imposto consentono di non dover ricorrere all'interpolazione tra i pixel e possono essere identificati in modo esatto dal procedimento multiscala, per cui si rimanda a **(Bertoli & Boschini, 2008)**. Questa evidenza conferma che l'errore principale commesso è dovuto al processo di interpolazione.

Infine, va analizzato l'effetto di un disturbo al momento dell'acquisizione dell'immagine sulla risoluzione dello spostamento calcolato. L'immagine originale viene perturbata con un "rumore bianco Gaussiano", che è caratterizzato da media nulla e deviazione standard σ_g variante da 1 a 8 livelli di grigio ad ogni pixel con nessuna correlazione spaziale tra di essi. All'immagine non viene imposto nessun campo di spostamento e viene calcolato invece quello risultante dall'applicazione di tale disturbo. Nel grafico 2.5 si riporta l'andamento della deviazione standard su in funzione del livello di disturbo σ_g per differenti dimensioni della ZoI:

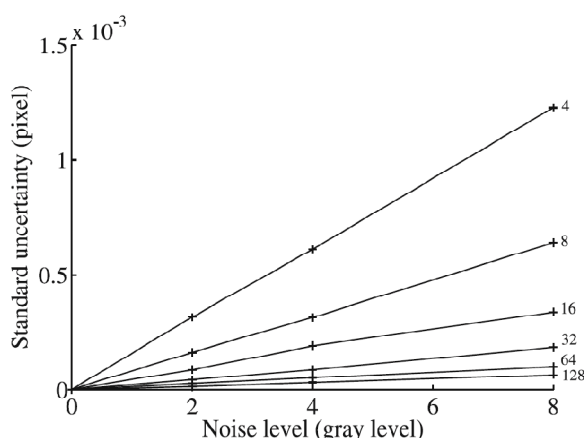


Grafico 2.5: deviazione standard dell'errore in funzione della sua ampiezza e della dimensione della ZoI

Risulta che la deviazione standard è una funzione lineare dell'ampiezza del disturbo ed è inversamente proporzionale alla dimensione della ZoI. Nella pratica reale, l'utilizzo di camere CCD ("Charge Coupled Device") comporta una perturbazione dei livelli di grigio pari ad un massimo di 3 (**Bertoli & Boschini, 2008**); di conseguenza, il contributo del disturbo dell'immagine è decisamente piccolo e ininfluenza se confrontato con quello introdotto dalla interpolazione tra i pixel vista in precedenza.

Una volta focalizzata l'importanza dei singoli aspetti nei riguardi della stima del campo di spostamento, è allora possibile realizzare delle analisi con elevata precisione in modo da poter identificare i parametri meccanici dei materiali e il loro comportamento elastico e post-elastico in differenti condizioni di carico.

La rapida diffusione avuta del DIC è legata alle seguenti ragioni:

- Permette di eseguire misure a distanza e quindi non comporta alcun disturbo sull'oggetto interessato dal processo deformativo che si vuole misurare. Per questo motivo è una tecnica che si presta ad essere utilizzata anche su materiali "soft", quali i bio-materiali.
- Fornisce l'intero campo di spostamento e di deformazione associati alla fotografia realizzata. Si tratta di un notevole vantaggio rispetto a tecniche tradizionali, quali l'impiego di estensimetri o di trasduttori di spostamento, poiché fornisce informazioni in un numero di punti maggiore.
- Manifesta grande versatilità per quanto riguarda la scala di osservazione a cui può essere applicata; la tecnica DIC può essere efficacemente utilizzata sia per lo studio delle deformazioni in componenti tradizionali di strutture o di macchine, che in contesti di micro e nano tecnologia.
- La strumentazione ottica necessaria per l'applicazione della metodologia è semplice; inoltre anche il trattamento superficiale a cui deve essere sottoposto l'oggetto della misura, per rendere la superficie sufficientemente strutturata in modo da manifestare 'patterns' riconoscibili nelle immagini digitali, non richiede tecniche di difficile applicazione (si può, ad esempio, semplicemente spruzzare la superficie dell'elemento analizzato con una vernice).

Inizialmente la tecnica DIC era applicata al caso 2D, tuttavia recentemente la sua applicazione è stata estesa anche a contesti tridimensionali. Per misurare i campi di spostamento in 3D è necessario utilizzare due fotocamere che inquadrino la regione d'interesse da due angolazioni differenti. La superficie deve essere meglio strutturata rispetto il caso 2D in modo che uno stesso 'pattern' sia riconoscibile da entrambe le fotocamere.

Attualmente sul mercato sono presenti dei sistemi DIC 3D che vantano, a detta delle ditte produttrici, la medesima accuratezza nella valutazione degli spostamenti dei sistemi 2D, vale a dire dell'ordine del centesimo di pixel (**Chen, Xia, Zhou, & Quin, 2005**).

Si menziona infine che la tecnica si presta anche a misure di spostamenti e deformazioni in campo dinamico, combinando quindi un'alta risoluzione spaziale ad un'altrettanto alta risoluzione temporale.

2.5 Prove biassiali su tessuti spalmati

La letteratura tecnica riguardante tessuti spalmati è, al contrario di quella dedicata alla carta, ricca di esperimenti biassiali condotti su membrane tessili.

Nell'industria dei "tessuti spalmati" per tensostrutture è di primaria importanza determinare il comportamento meccanico di una membrana soggetta a sforzo biassiale. Infatti è proprio nel comportamento biassiale che gioca un ruolo importante l'interazione tra le fibre dell'ordito e della trama e l'interazione tra il tessuto e la matrice. Inoltre in fase di esercizio una membrana è destinata ad essere soggetta a sforzi di natura biassiale. Per ora non esiste una normativa europea su prove biassiali (**Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004**); e anche per questo motivo a tutt'oggi le specifiche tecniche fornite dai produttori di membrane indicano solo valori di resistenza a rottura in regime monoassiale (valori in generale diversi lungo l'ordito e lungo la trama). Riportiamo in seguito, a titolo di esempio, la scheda tecnica del materiale "Preconstraint 1002 T2" prodotto da "Ferrari Architecture" (tabella 2.1).

Caratteristiche tecniche	Preconstraint [®] 1002 T2 indietro PVDF
Filato	PES HT 1100 Dtex
Peso	1050 g / mq - 31 g / sqyd
Larghezza	178 centimetri
Resistenza alla trazione (ordito / trama)	420/400 daN / 5 cm 480/450 Lbs
Resistenza allo strappo (ordito / trama)	daN 55/50 105/100 Lbs
Adesione	12 daN / 5 cm

Tabella 2.1: scheda tecnica fornita dal produttore (www.ferrari-architecture.com)

Proprio per questo motivo B. N. Bridgens, P. D. Gosling e M. J. S. Birchall (**Bridgens, Gosling, & Brichall, 2004**) presso l'Università di Newcastle eseguirono una serie di prove biassiali con l'intento di formulare un protocollo di prova per questo tipo di test. Tale protocollo è stato inizialmente sviluppato per il tessuto in PVC, con una successiva

applicazione su PTFE. La struttura del protocollo si suddivide in tre passi: pre-carico, condizionamento meccanico e la prova stessa.

Il provino è portato a priori a uno stato di pre-carico per meglio simulare la situazione di carico del materiale in esercizio. Il livello di pre-carico è preso pari a una percentuale di rottura ultima di una striscia del materiale (1,3% per il PVC e 2,5% per PTFE). Il valore del carico di prepensionamento non è comunque così critico e può variare a secondo dei risultati che si vogliono ricercare.

Il carico di condizionamento è del 10% superiore al carico di progetto o di prova, con l'intento di sottoporre il tessuto a carichi leggermente superiori di quelli che verranno sperimentati. Si vuole ottenere con il condizionamento meccanico un comportamento a deformazione che sia il più possibile conforme a quello d'esercizio e che quindi sia in grado di simulare il comportamento di un tessuto esposto a carichi ambientali. Uno schema ciclico di carico è perciò applicato, fino a che le deformazioni della trama e dell'ordito sono simili per un determinato stato di tensione, solitamente sono sufficienti tre cicli di carico.

Questa tipologia di materiale, dopo essere stata sottoposta a carichi, presenta deformazioni plastiche residue piuttosto alte, dovute allo scorrimento dei fili e del rivestimento oltre che a fenomeni d'attrito interno. Per determinare se un tessuto è condizionato, durante ogni ciclo le deformazioni sono confrontate dopo aver sottratto le deformazioni residue dai valori letti dal sistema di misura. La rimozione della deformazione residua dai risultati del test evita la distorsione dei dati di prova, a causa di un aumento di scorrimento a carichi elevati. Il carico di pretensione viene usato come valore iniziale per la deformazione. Un regime di carico nel quale la pretensione viene regolarmente applicata in entrambe le direzioni di ordito e trama. Le deformazioni vengono confrontate ogni volta che il pre-carico viene applicato e la deformazione residua è dedotta dalle misure in tale intervallo. La riduzione della deformazione è proporzionale al carico applicato e al tempo per il quale è stato applicato, sulla base del presupposto che maggiore è il carico applicato, maggiore è il tasso di scorrimento.

Una volta che il tessuto è stato condizionato, è importante assicurare che la sequenza di applicazione dei carichi durante la prova, non modifichi la risposta del materiale. Gli effetti della recente storia di carico sul campione provocano significative variazioni nei valori di

deformazione. Il protocollo di prova è stato progettato proprio per permettere la misura di questi effetti attraverso l'esecuzione della prova.

Si riportano i risultati ottenuti da Chen et al. (**Chen, Ding, Fanguero, Yi, & Ni, 2007**) sottoponendo a prova biassiale provini cruciformi con area centrale di 60x60 mm², area di afferraggio di 50x60 mm², bracci di 110x60 mm² in cui sono presenti "slits", per le ragioni esposte nella sezione 2.1 (figura 2.10) e di materiale descritto in tabella 2.2:

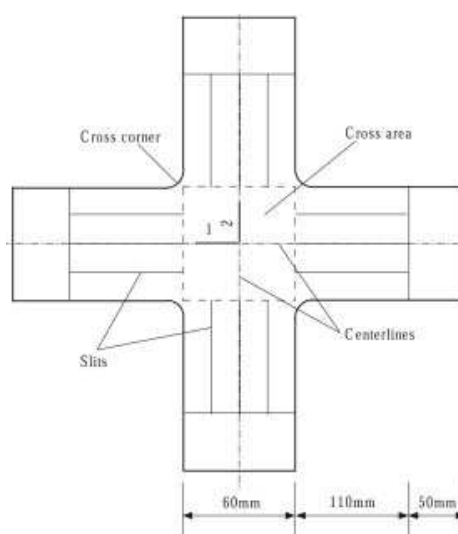


Figura 2.10: provino cruciforme utilizzato

Modello tessile		Cestino
Conteggio del filato		144.44
Densità del filato	(ordito/trama) (fili/cm)	13/13
Densità	(g/m ²)	1100
Spessore del tessuto rivestito	(mm)	1.00
Spessore medio dello strato di PVC	(mm)	0.42
Carico rottura	(ordito/trama) (N/5cm)	5500/5000

Grafico 2.2: Specifiche tecniche del tessuto in poliesteri spalmato in PVC

I risultati ottenuti misurando le deformazioni con un estensimetro ad ago sono stati riportati **nel grafico 2.6** dove W e F rappresentano la curva biassiale di trazione nelle direzioni ordito (warp) e trama (fill), seguita dal rapporto di carico tra ordito e trama.

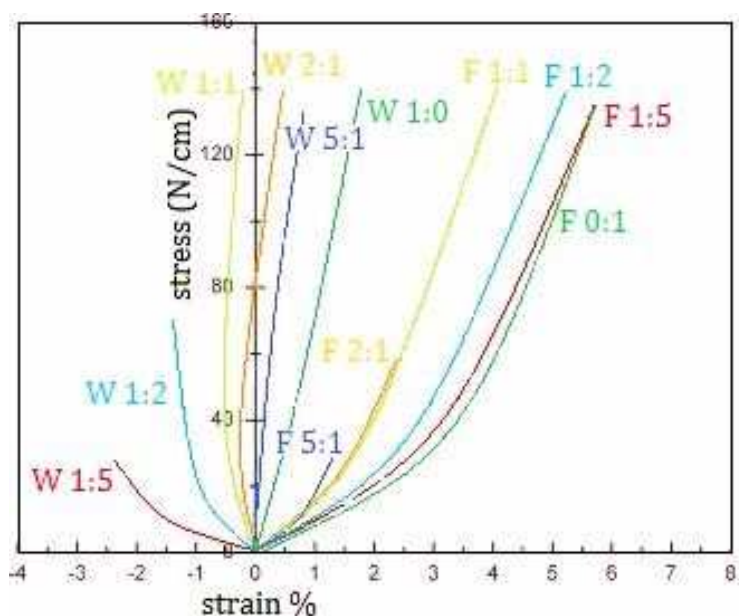


Grafico 2.6: comportamento a trazione biassiale della membrana illustrata in tabella 2.1.

2.6 Prove biassiali condotte su film di Etilene Tetra Fluor-Etilene (ETFE)

L'ETFE è un copolimero con temperatura di fusione di 250-270 °C, una densità tra 1,73-1,77 g/cm³ e una resistenza chimica molto buona. Una membrana di ETFE, a differenza dei tessuti spalmati ha un comportamento elastico isotropo bilineare e le sue proprietà principali sono riassunte in tabella 2.1 (**Foster, Mellaret, & Tensinet, 2007**):

Spessore (micron)	Peso (g/mq)	Resistenza alla trazione L/T (N/mm ²)	Allungamento L/T (%)
50	87,5	64/65	450/500
80	140	58/54	500/600
100	175	58/57	550/600
150	262,5	58/57	600/650
200	350	52/52	600/600
250	437,5	>40/>40	>300/>300

Tabella 2.1: proprietà dei film in ETFE, dove L/T indicano le direzioni longitudinale/trasversale

Il film di ETFE non presenta una struttura interna composta da trama e ordito e il legame sforzo deformazione di un campione sottoposto a prove monoassiali viene riportato nel grafico 2.7. Tale materiale presenta un modulo elastico E pari a 1180 MPa e un coefficiente di Poisson ν pari a 0,43. Come si può notare dal grafico sotto riportato il legame sforzo-deformazione calcolato per le direzioni MD, CD e a 45° si sovrappongono tra di loro il che giustifica l'isotropia considerata.

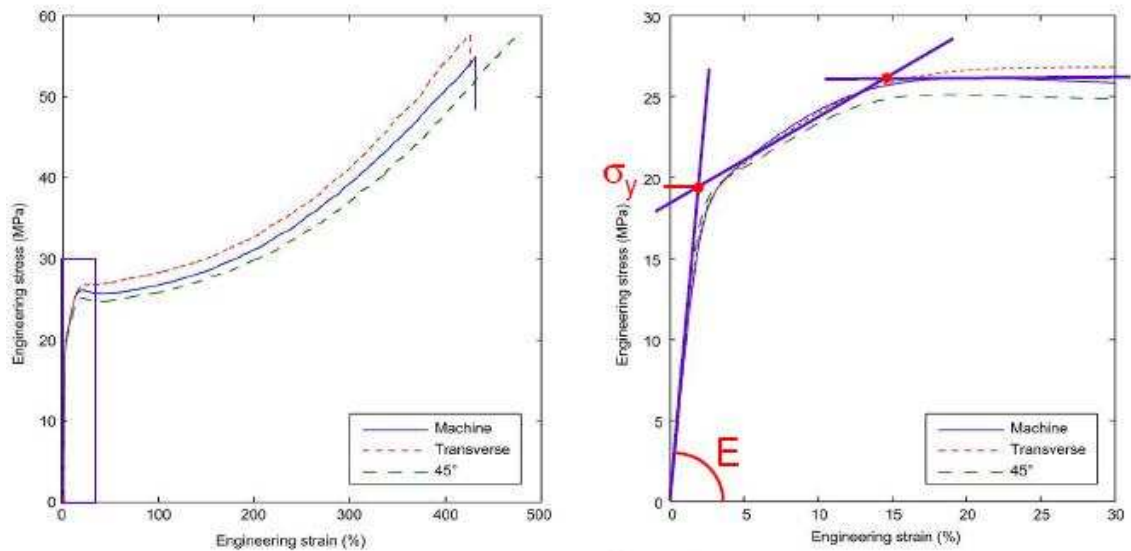


Grafico 2.7: comportamento a trazione monoassiale della membrana illustrata in tabella 2.2

Sottoponiamo ora il materiale a una prova biassiale mediante l'utilizzo di un banco di prova come quello riportato in figura 2.11:

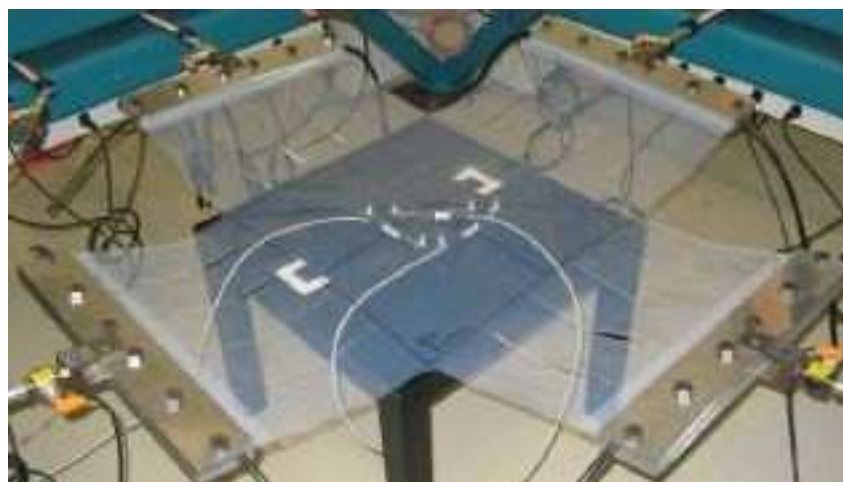


Figura 2.11: macchina per test biassiali

Tenendo il rapporto tra il carico applicato in direzione macchina e quello applicato in direzione trasversale pari a 1 otteniamo il seguente legame sforzo deformazione. In questo caso la curva che descrive gli spostamenti in direzione MD si sovrappone esattamente alla curva che descrive gli spostamenti in direzione CD (grafico 2.8).

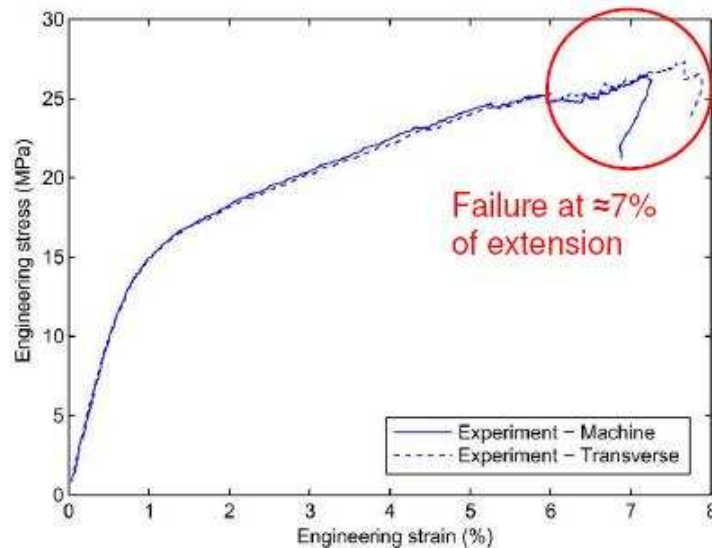


Grafico 2.8: comportamento a trazione biassiale della membrana illustrata in tabella 2.2

Galliot e Luchsinger concludono osservando che indagare il comportamento dell'ETFE conducendo test biassiali non comporta maggiori vantaggi, rispetto allo studio mediante semplici prove monoassiali. Notano inoltre che un modello elastoplastico bilineare con 4 parametri descrive bene il comportamento del materiale e che la temperatura con la quale vengono eseguiti gli esperimenti ha un'incidenza rilevante sulla deformazione del campione (Galliot & Luchsinger, 2010).

2.6 Prove biassiali condotte su carta

La letteratura riguardante prove biassiali nel piano svolte su materiale carta, cartone o laminato non è molto ricca. La maggior parte del materiale visionato riguarda studi della frattura o della viscosità, mentre pochi ricercatori si sono cimentati nella sperimentazione biassiale del materiale.

Nel 2003 Jaime Castro e Martin Ostoja-Starzewski svilupparono un modello costitutivo della risposta della carta a una prova di trazione biassiale nel piano. In particolare si concentrarono nella modellazione della risposta sotto un carico monotono, che gli permise di considerare il comportamento come non lineare elastico **(Castro & Ostoja-Starzewski, 2003)**.

In questa sede l'oggetto d'interesse della ricerca svolta da Castro e Ostoja-Starzewski sono esclusivamente i risultati delle prove biassiali da loro svolte e non il modello costitutivo che queste prove gli consentirono di sviluppare.

Il materiale campione è stato preso da un rotolo di carta bianca da schizzo prodotto dalla Crayola. Tale materiale ha uno spessore nominale di $136 \mu\text{m}$, densità di 508 kg/m^3 e grammatura di 70 g/m^2 . I provini hanno forma quadrata e dimensione di $145 \times 145 \text{ mm}$; prima di eseguire la prova biassiale sono stati condizionati a $23 \text{ }^\circ\text{C}$ e 20% di umidità relativa, anche se non sono stati testati nelle medesime condizioni (figura 2.12).

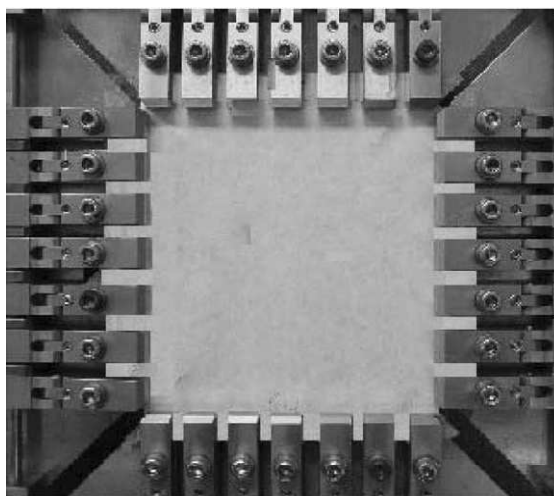


Figura 2.12: provino quadrato usato nelle prove biassiali e morsetti d'afferraggio

Le prove sono state realizzate a velocità imposta di deformazione uniforme, utilizzando undici diverse configurazioni riportate nella tabella 2.3; nel grafico 2.9 vengono riportati gli andamenti dei casi di carico rappresentati nel piano degli sforzi.

Casi di carico (ϵ_{11} ; ϵ_{22})	Velocità lungo MD (mm/sec)	Velocità lungo CD (mm/sec)
(1; -0,2)	0,5	-0,1
(1; 0)	0,5	0
(1; 0,2)	0,5	0,1
(1; 0,4)	0,5	0,2
(1; 0,6)	0,5	0,3
(1; 1)	0,5	0,5
(0,6; 1)	0,3	0,5
(0,4; 1)	0,2	0,5
(0,2; 1)	0,1	0,5
(0,1; 1)	0,05	0,5
(0; 1)	0	0,5

Tabella 2.3: casi di carico

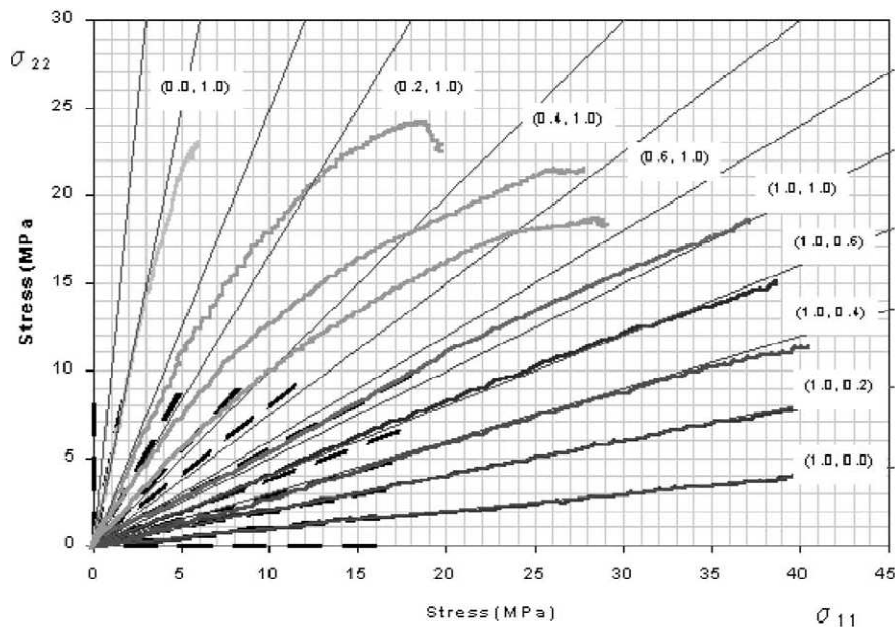


Grafico 2.9: risultati delle prove biassiali rappresentati nel piano degli sforzi

Nel grafico sono rappresentati l'andamento degli sforzi per nove diversi casi di carico (indicati fra parentesi), mentre le linee tratteggiate sono l'andamento ipotetico delle curve avendo assunto un modello elastico ortotropo.

I dati ottenuti dalle prove biassiali consentono anche di determinare la superficie di snervamento come mostrato nel grafico 2.10.

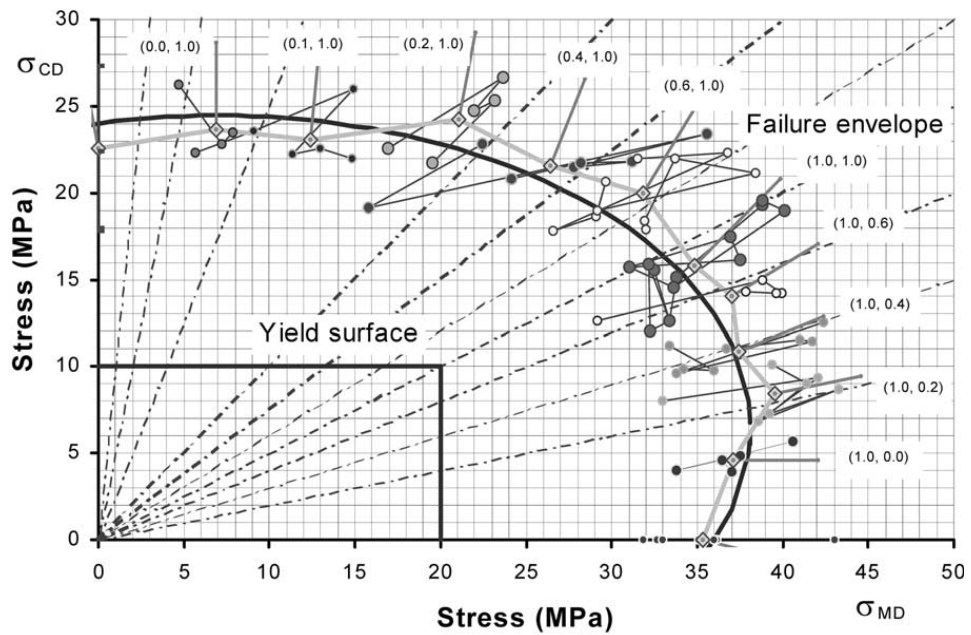


Grafico 2.10: superficie di snervamento

L'approssimazione della superficie di snervamento è dovuta alla natura alquanto indefinita del punto di snervamento della curva che descrive il comportamento della carta, e si basa fundamentalmente sulle misure eseguite dagli autori. Si propone allora una superficie di snervamento di forma rettangolare, avente come coordinate le tensioni normali misurate: 20 MPa e 10 MPa rispettivamente nelle direzioni MD e CD del materiale.

Una forma simile della superficie di snervamento si ritrova nel modello anisotropo sviluppato da Karafillis e Boyce (**Karafillis & Boyce, 1993**) proprio per la carta come rappresentato nel grafico 2.11.

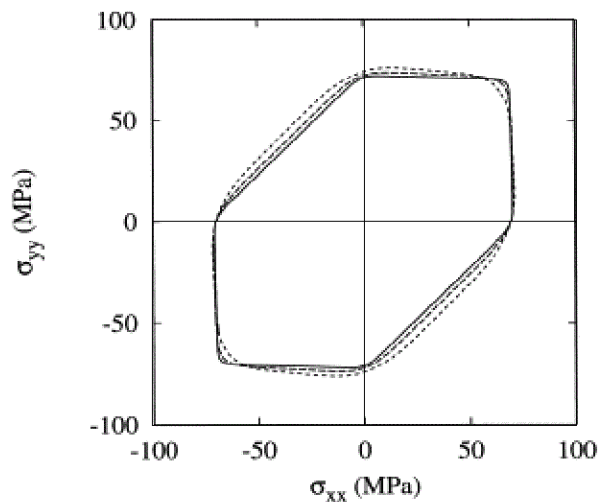


Grafico 2.11: superficie di snervamento di Karafillis e Boyce

Modelli costitutivi elastoplastici e a rottura

In questo capitolo si vogliono sintetizzare alcuni tra i principali modelli costitutivi per la caratterizzazione di fogli sottili metallici, cartacei e laminati. Si rivolge qui l'attenzione ai soli legami non dipendenti dal tempo, e che quindi non presentano fenomeni di viscosità.

Innanzitutto si compie una breve descrizione delle principali caratteristiche meccaniche della carta, rivolgendo l'attenzione all'anisotropia di comportamento, che caratterizza questo tipo di materiale.

Particolare attenzione è posta nella formulazione del modello di Hill, in quanto nel proseguo della tesi viene preso a riferimento per l'identificazione parametrica mediante analisi inversa.

3.1 Generalità: anisotropia, influenza delle fibre e adesione

Un materiale isotropo non presenta direzioni principali di comportamento e il suo legame costitutivo dovrà risultare indipendente dal sistema di riferimento in cui le componenti di sforzo e deformazione sono rappresentate. L'isotropia rappresenta la più completa simmetria di comportamento e riconduce il legame elastico lineare a due sole costanti indipendenti. È questo un caso importante ma non esaustivo, esistendo materiali di interesse la cui risposta non presenta queste caratteristiche. I materiali presenti in natura non sono mai perfettamente omogenei ed isotropi, ovvero, denotano proprietà che sono funzione della posizione e della direzione **(Corradi dell'Acqua, 1992)**.

A maggior ragione, la presenza di fibre disposte prevalentemente in particolari direzioni conferisce ai materiali compositi un comportamento fortemente anisotropo. Per alcuni materiali anisotropi, tra cui i fogli oggetto del nostro studio, si può fare ricorso a una semplificazione resa possibile dall'assunzione dell'ortotropia che, tuttavia, non fa venir meno la precisione dello studio del materiale. Un materiale è detto ortotropo se il suo comportamento è simmetrico rispetto a tre assi (x, y, z) mutuamente ortogonali, noti come direzioni principali del materiale. Solitamente le tre direzioni principali del materiale cartaceo prodotto a macchina coincidono con la direzione macchina (MD), la direzione trasversale (CD) e la direzione dello spessore (ZD) **(Bolzon, Garbowski, Maier, & Novati, 2008)** (figura 3.1).

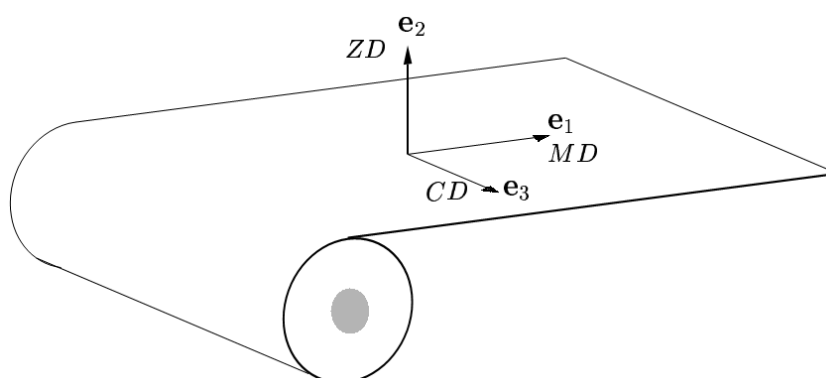


Figura 3.1: principali direzioni nella carta

Nei materiali isotropi lo sforzo normale provoca un allungamento nella direzione di applicazione del carico e una contrazione nella direzione ortogonale; lo sforzo di taglio causa, invece, solo deformazioni trasversali. Per i materiali ortotropi, lo sforzo normale in una direzione principale produce un allungamento nella direzione di applicazione del carico ed una contrazione in quella normale ad essa; lo sforzo di taglio provoca deformazioni trasversali, ma a differenza dei materiali isotropi, il modulo di taglio è indipendente dalle altre proprietà del materiale (modulo di Young e coefficiente di Poisson) **(Gloria, 2009)**.

Nei materiali anisotropi, infine, l'applicazione di un carico normale induce non solo l'estensione nella direzione di applicazione dello stesso, ma anche deformazione trasversale; uno sforzo di taglio provoca, invece, estensione e contrazione in aggiunta alla distorsione dovuta alla deformazione trasversale. Analogo comportamento è presente anche nei materiali ortotropi, qualora siano soggetti a sforzo normale in una direzione che non sia principale **(Gloria, 2009)**.

La risposta della carta a una sollecitazione uniassiale di trazione nelle due direzioni piane principali, vale a dire lungo MD e CD è mostrata in (grafico 3.1). Obiettivo del grafico è quello di evidenziare la differenza di risposte tra le direzioni piane quando vengono sollecitate dal medesimo sforzo.

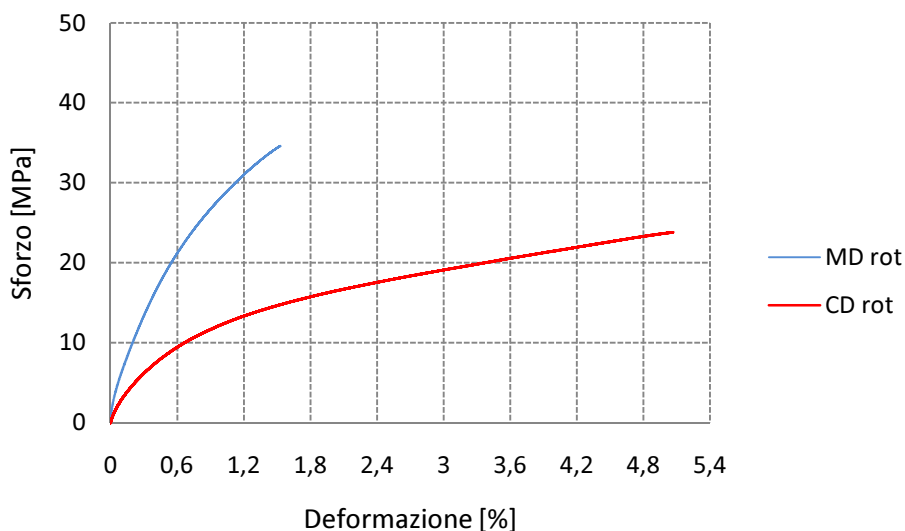


Grafico 3.1: modello costitutivo di un laminato TetraPak

Il comportamento meccanico, indipendentemente dalla situazione di carico, è legato in particolare modo alla forma delle fibre e alla densità del legame.

Gli elementi principali che costituiscono la carta sono le fibre di cellulosa, che solitamente vengono estratte da alberi di legno "tenero". Le fibre sono tipicamente strisce sottili che possiedono eccellenti capacità meccaniche in direzione longitudinale.

La modalità di esecuzione della lavorazione fa in modo che le fibre si dispongano principalmente nella direzione macchina. Inoltre, la snellezza delle fibre e l'azione della forza di gravità durante l'asciugatura assicurano che le fibre si orientino nel piano del foglio. Le forze applicate alla pasta durante la consolidazione determinano anche la forma delle fibre e la robustezza del legame che le tiene insieme. Il prodotto finale che si ottiene è una struttura di fibre distribuite in modo disomogeneo, che può essere considerato come un materiale composito in fibra, eccetto che per la mancanza di una matrice.

L'orientamento delle fibre e le loro proprietà longitudinali sono importanti fattori che contribuiscono al comportamento nel piano della carta, mentre il comportamento fuori piano è determinato principalmente dalle proprietà di flessione e dalle caratteristiche delle fibre nella direzione trasversale.

L'altro fattore determinante per il comportamento meccanico di fogli sottili, in particolare di compositi laminati è l'adesione fra i vari strati.

I moderni sistemi di imballaggio, in particolare per contenitori di cibi, sono attualmente concepiti con materiale laminato composito di carta, materia plastica polietilene e fogli di alluminio. Senza l'aggiunta di alcun tipo di additivo chimico, le tre componenti sono "incollate" grazie all'azione del polietilene estruso a caldo (non mediante l'utilizzo di collanti). Solamente tramite l'azione meccanica dell'acqua e di una pala rotante il poliaccoppiato si delamina, ossia i fogli di polietilene e alluminio si separano dalla carta. Essendo il materiale in oggetto composto da strati di materiali diversi, assume notevole importanza lo studio dell'adesione esistente tra di loro. Riportiamo in seguito una tipica struttura stratificata utilizzata come contenitore alimentare dalla Tetrapak (figura 3.2):

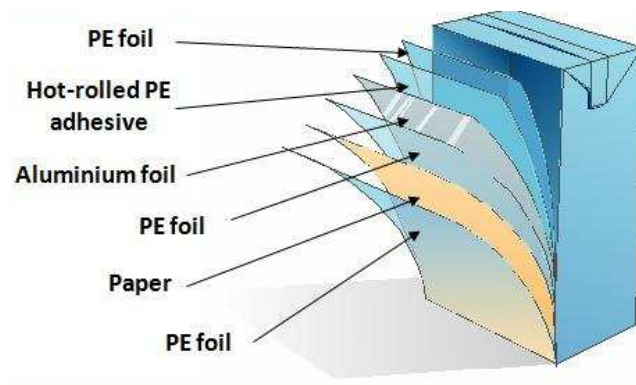


Figura 3.2: esempio di laminato utilizzato per l'imballaggio

In particolare, è necessario porre l'attenzione, al fine di ottenere una buona adesione tra gli strati, che tale processo avvenga in assenza di difetti come le micro bolle d'aria che possono formarsi tra gli strati. L'importanza di tale processo deriva dal fatto che le prestazioni del laminato sono direttamente connesse alla forza del legame esistente tra gli strati.

L'approfondita comprensione delle proprietà meccaniche del comportamento dei laminati attualmente disponibili consentirà lo sviluppo di nuovi prodotti, inteso sia come sviluppo di nuovi materiali, che come sviluppo di nuove tecniche produttive.

I meccanismi di interazione caratteristici dell'adesione sono sostanzialmente quattro: l'interazione meccanica, l'interazione intrinseca dei polimeri, l'adesione elettronica e l'adsorbimento. Tra i meccanismi che si possono innescare al fine di opporsi alla delaminazione, quello che prevale rispetto agli altri è quello della adsorbimento. Tra le formulazioni esistenti, la teoria dell'adsorbimento è la più ampiamente accettata. Tale teoria propone che, fornito un contatto molecolare sufficientemente intimo, l'adesione tra i materiali sia dovuta alle forze interatomiche e intramolecolari che si stabiliscono tra gli atomi e le molecole delle superfici dell'adesivo e del substrato. Le forze più comuni che si sviluppano sono quelle di Van der Waals.

Il parametro che caratterizza l'adesione tra le interfacce di un laminato è G_c , detto grado di energia della frattura adesiva, dato dalla somma tra G_0 , valore intrinseco dell'adesione di interfaccia, e ψ , energia dissipata. L'energia dissipata è a sua volta funzione di parametri che determinano: la velocità di rottura (\dot{a}), la temperatura (T) e la deformazione (ϵ). L'adesione d'interfaccia, a sua volta, è data dalla somma di tre parametri che caratterizzano le

possibilità di propagazione dello scollamento tra le superfici. Una struttura legata con adesivo è sostanzialmente composta da tre componenti: sottostrato 1, adesivo e sottostrato 2. Le possibilità con cui può propagarsi una rottura sono sostanzialmente 4:

- crisi dell'interfaccia tra adesivo e sottostrato 1 o 2 (figura 3.3 a e b);
- crisi della coesione dell'adesivo stesso (figura 3.3 c);
- crisi della coesione nel sottostrato 1 o 2 (figura 3.3 d);
- crisi contemporanea di interfaccia e coesione

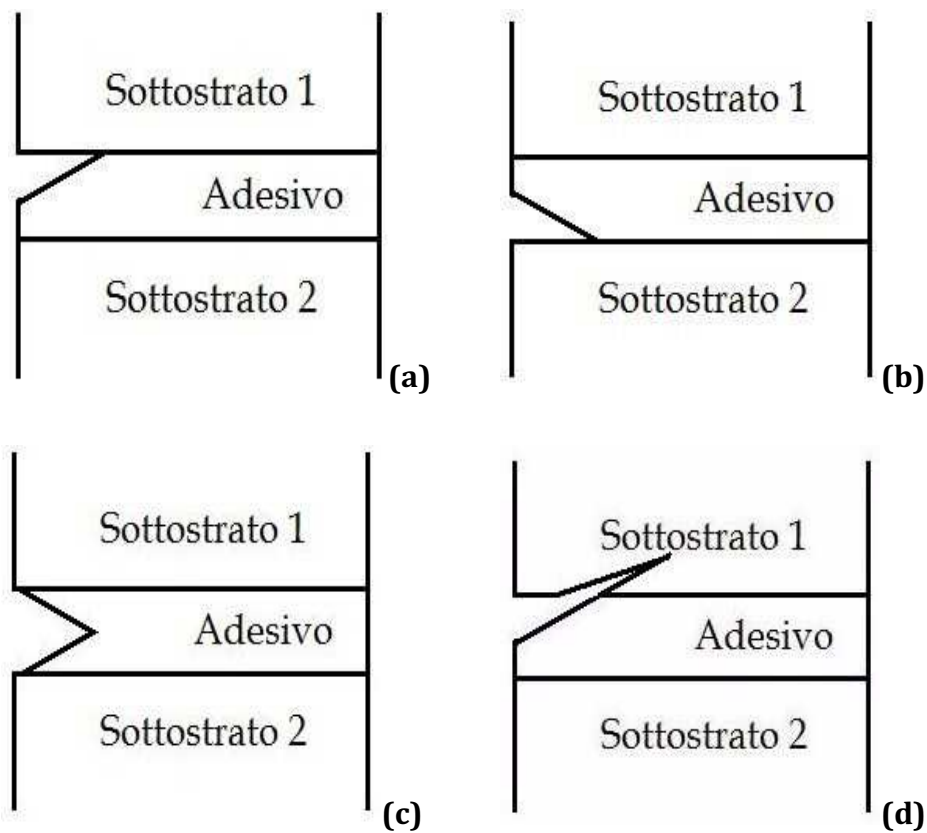


Figura 3.3: Possibilità di propagazione della crisi in un laminato

Riassumendo:

$$G_c = G_0 + \psi;$$

$$\psi = G_0 \cdot (\dot{\alpha}, T, \varepsilon)$$

$$G_0 = i \cdot G_0(\text{interfaccia}) + b' \cdot G_0(\text{adesivo}) + s \cdot G_0(\text{sottostrato})$$

Dove i , b' e s sono rispettivamente: la rispettiva frazione d'area dell'interfaccia, il coefficiente di crisi dell'adesivo e quello della crisi del sottostrato.

Un metodo ampiamente utilizzato per misurare l'adesione dei laminati è quello del "Peel Test". Tale test è generalmente utilizzato per lastre sottili e flessibili formate da due sottostrati incollati tra di loro, che possono avere, o meno, le stesse caratteristiche. I casi in esame si differenziano tra di loro dall'angolo esistente tra le facce del laminato: T-peel test (angolo di 180°) (figura 3.4), Angled peel test (può variare fino a 90°)(figura 3.5).



Figura 3.4: T-peel test



Figura 3.5: angled peel test

La marcata anisotropia rende molto complessa la modellazione di un continuo triassiale, soprattutto in relazione ai differenti meccanismi che regolano il comportamento del materiale nel piano e fuori dal piano. Nel seguito del capitolo si vuole perciò andare a studiare alcuni modelli costitutivi elastoplastici che tengano conto della complessità del materiale di cui sopra.

3.2 Elasticità lineare

Un legame costitutivo si dice elastico se può essere definito un potenziale della deformazione, detto energia di deformazione **(Corradi dell'Acqua, 1992) (Landau & Lifshitz, 1967)**. Si assume, perciò, che il processo deformativo comporti l'immagazzinamento di energia meccanica a spese della quale le deformazioni vengono recuperate una volta rimossa la causa deformante. L'energia di deformazione è definita come segue:

$$\omega(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{hk}} \sigma_{hk} \cdot d\varepsilon_{hk}$$

Da cui è possibile ricavare l'espressione dello sforzo in funzione di ω :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Un legame elastico è lineare se valgono:

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = D_{klij} = cost$$

$$\sigma_{ij} = D_{klij} \varepsilon_{kl}$$

Il termine $\sigma_{ij} \cdot \partial \varepsilon_{ij}$ deve essere un differenziale esatto, per cui vale la seguente uguaglianza tratta dal teorema di Schwartz:

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Rightarrow D_{ijkl} = D_{klij}$$

La linearità del legame comporta, come ulteriore conseguenza, che i tensori di sforzo e deformazione siano simmetrici, poiché l'energia di deformazione è definita positiva. Allora vale:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \Rightarrow & D_{ijkl} = D_{jikl} \\ \epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} & \Rightarrow & D_{ijkl} = D_{jilk} \end{cases}$$

Introducendo nel legame costitutivo tutte le semplificazioni derivate come conseguenze della linearità del legame, si passa da 81 parametri originari a 21 coefficienti indipendenti. Il legame elastico lineare generale, scritto in forma matriciale è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xxxx} & D_{xxyy} & D_{xxzz} & D_{xxxy} & D_{xxyz} & D_{xxzx} \\ \cdots & D_{yyyy} & D_{yyzz} & D_{yyxy} & D_{yyyz} & D_{yyzx} \\ \cdots & \cdots & D_{zzzz} & D_{zzxy} & D_{zzyz} & D_{zzzx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & D_{xyxy} & D_{xyyz} & D_{xyzx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & D_{yzyz} & D_{yzzx} \\ \text{sim} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & D_{zxxz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

Come già detto in precedenza, quella che è appena stata trattata è la definizione più generale di un legame elastico lineare anisotropo.

Una prima semplificazione del legame considerato è l'introduzione dell'ortotropia: il legame risulta invariante rispetto rotazioni di 180° attorno gli assi di ortotropia; ne consegue che le costanti indipendenti si riducono a 9. Il legame ortotropo viene espresso in forma ingegneristica e inversa come segue:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & \frac{-\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

L'interesse particolare di questa tesi si rivolge a un legame elastico riferito a stati piani di tensione (**Garbowski, 2009**). Il modello tridimensionale di riferimento è quello ortotropo applicato al caso d'interesse. Il legame costitutivo risultante viene espresso dalla seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

bastano dunque 4 costanti elastiche per caratterizzarlo compiutamente.

Nel legame costitutivo che descrive lo stato di sforzo piano, non compare il termine ε_z , componente di deformazione fuori dal piano, il cui valore non è nullo ma dipende dalle componenti di deformazione nel piano ε_x e ε_y .

$$\varepsilon_z = \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy} \cdot \nu_{yz}}{\nu_{xy} \cdot \nu_{yx} - 1} \varepsilon_x + \frac{\nu_{yz} + \nu_{xz} \cdot \nu_{yx}}{\nu_{xy} \cdot \nu_{yx} - 1} \varepsilon_y$$

Le espressioni precedenti fanno naturalmente riferimento alle tre direzioni principali del materiale. Se il sistema di riferimento fosse diversamente orientato rispetto a dette

direzioni le matrici assumerebbero aspetto pieno, pur conservando la simmetria. Sarebbe comunque possibile individuare una matrice di rotazione tale da restituire alla matrice del legame elastico l'aspetto canonico, secondo la trasformazione seguente:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}$$

In tale scrittura le matrici \mathbf{D} e \mathbf{D}' sono due matrici elastiche riferite a due sistemi di riferimento diversi e \mathbf{R} è la matrice di rotazione.

Nonostante la trasformazione applicata, il legame continuerebbe a conservare le proprie caratteristiche, fosse esso ortotropo, trasversalmente isotropo o isotropo; infatti, queste definizioni non fanno riferimento all'aspetto della matrice, bensì al numero minimo di parametri indipendenti sufficienti per la descrizione del comportamento del materiale.

3.3 Modello elasto-plastico di Hill

Il modello elasto-plastico di Hill non è altro che un'estensione della plasticità di Huber-Hencky-von Mises (abbreviato HHM) tale da includere il comportamento anisotropo. Perciò si descrive prima il modello di HHM per estendere le medesime considerazioni fatte su questo modello anche al più generale modello di Hill.

3.3.1 Modello isotropo di Huber-Hencky-Von Mises

Il modello di HHM (**Corradi dell'Acqua, 1992**) si basa sulla considerazione che il fenomeno dello snervamento non è influenzato dalla parte idrostatica dello sforzo. Perciò la funzione di snervamento è rappresentata, nello spazio delle tensioni principali, da una

superficie cilindrica avente per asse la trisettrice del primo ottante, il cui raggio è pari alla tensione di snervamento uniassiale (σ_0).

A partire dall'ipotesi di piccoli spostamenti e deformazioni vale la scomposizione additiva delle parti elastiche e plastiche degli incrementi di deformazione:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

Il legame elastico, non necessariamente lineare, è formulato in termini differenziali rispetto al tempo "ordinativo" e non a quello fisico ("rates"):

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij}^e &= C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \\ C_{ijkl} &= C_{ijkl}(\sigma_{kl})\end{aligned}$$

Per definire il legame plastico è necessario calcolare il tensore deviatore dello stato di sforzo che vale:

$$s = \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.1)$$

La funzione di snervamento è definita come radice quadrata dell'invariante secondo del tensore deviatore degli sforzi; tale invariante è proporzionale all'energia di deformazione elastica dovuta alla sola parte deviatorica della deformazione, da cui si perviene all'espressione in forma vettoriale e tensoriale:

$$\begin{aligned}f(\sigma) &= \sqrt{3J_2'(s)} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot s^T \cdot s} = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2} \leq \sigma_0 \\ f(\sigma_{ij}) &= \sqrt{\frac{3}{2} \cdot s_{hk} \cdot s_{hk}} \leq \sigma_0\end{aligned} \quad (3.1)$$

Se lo stato di sforzo è tale da verificare l'uguaglianza nell'espressione precedente, allora divengono possibili plasticizzazioni, il cui comportamento è governato dalla legge di normalità o legge di scorrimento associata:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}$$

Il parametro λ è detto moltiplicatore plastico e deve essere tale da soddisfare le relazioni di complementarità:

$$f \leq \sigma \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad f \cdot \dot{\lambda} = 0$$

È interessante osservare la rappresentazione grafica del legame di HHM nello spazio delle tensioni principali.

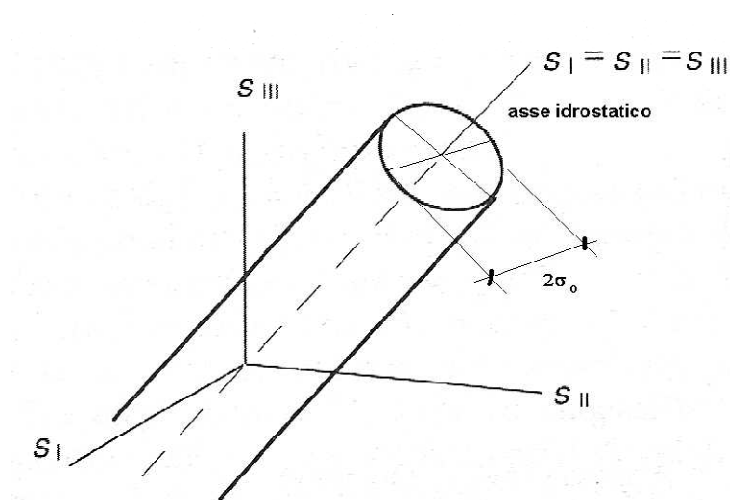


Figura 3.6: cilindro di HHM nello spazio delle tensioni principali

Si considera un problema piano negli sforzi, che rappresenta il caso del laminato oggetto delle prove; difatti lo spessore del foglio è talmente sottile nei confronti delle dimensioni da poter trascurare le variazioni di tensione sullo spessore, nonché l'entità delle componenti di sforzo dirette fuori piano. A partire da questa considerazione, l'ellissoide che rappresenta la superficie di snervamento di un materiale isotropo in stati piani (piano xy) è il seguente:

$$\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2$$

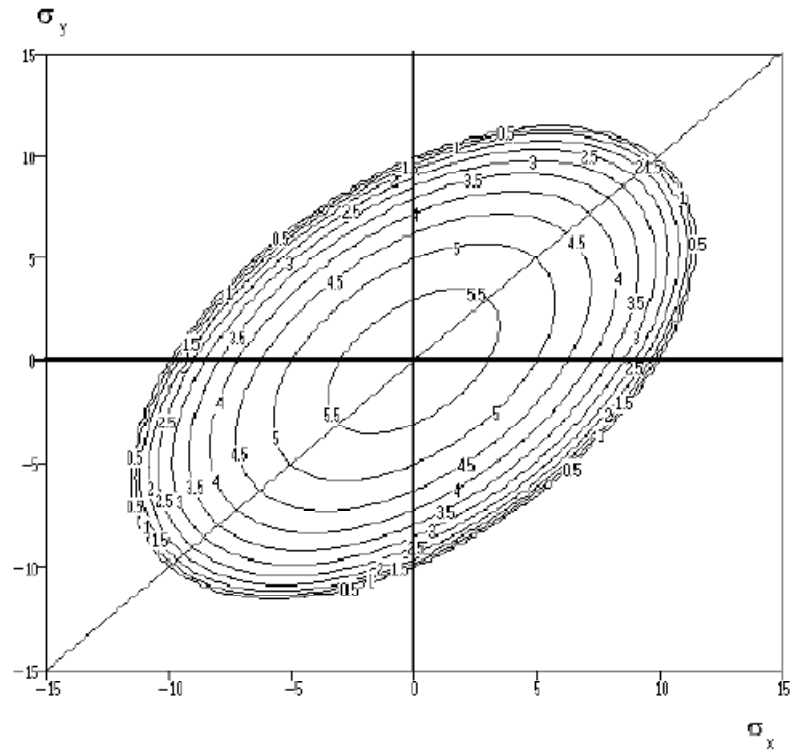


Grafico 3.2: rappresentazione dell'ellissoide di HVM a curve di livello per $\sigma_0=10$ MPa

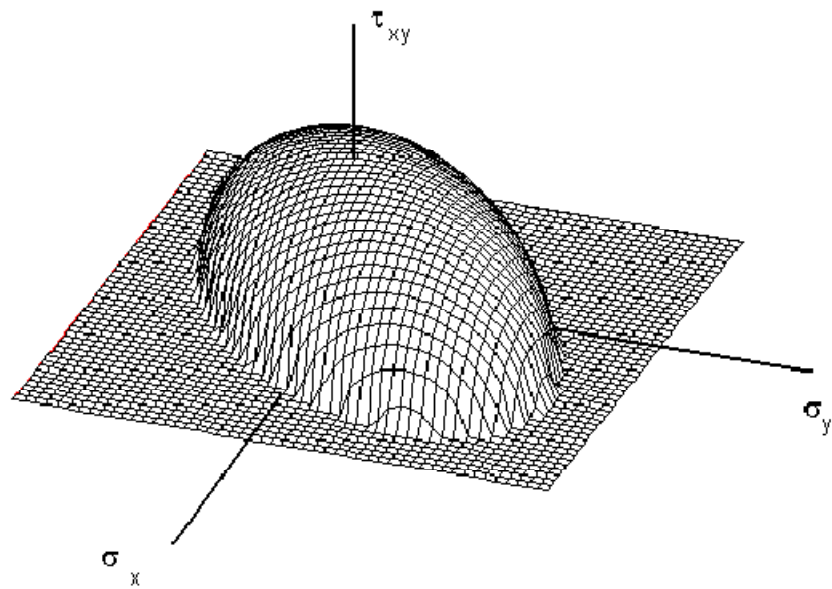


Grafico 3.3: assonometria dell'emisfero superiore dell'ellissoide di HVM

Al legame appena descritto può essere associata una legge d'incrudimento esponenziale descritta dalla seguente equazione, rappresentata nel grafico 3.4:

$$\sigma = \sigma_{\infty} - (\sigma_{\infty} - \sigma_0) \cdot \exp\left[-\frac{E}{\sigma_{\infty} - \sigma_0} \cdot \left(\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E}\right)\right]$$

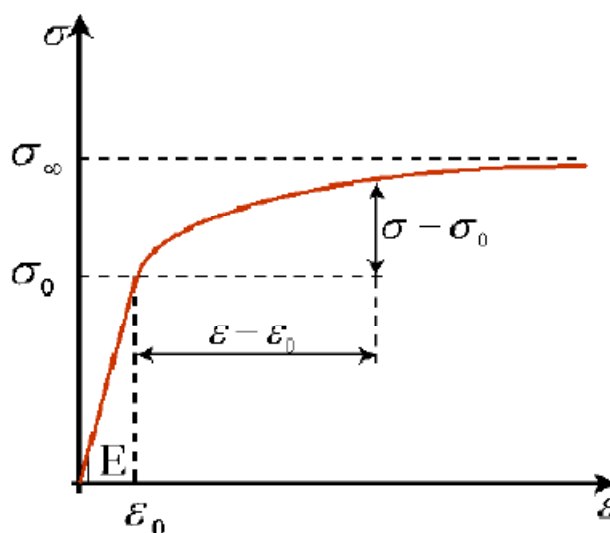


Grafico 3.4: andamento della legge d'incrudimento esponenziale

3.3.2 Modello anisotropo di Hill

Come già detto in precedenza, il modello elasto-plastico di Hill (**Hill, 1950**) (**De Borst & De Feenstra, 1990**) (**Bazant & Jiràsek, 2001**) non è altro che un'estensione della plasticità di Huber-Hencky-von Mises per materiali che mostrano una marcata anisotropia di comportamento nel caso di ortotropia. La funzione di snervamento può allora essere espressa dalla seguente relazione:

$$f(\sigma) = \sqrt{F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_x - \sigma_z)^2 + H(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 2N(\tau_{xy})^2 + 2L(\tau_{yz})^2 + 2M(\tau_{zx})^2} \leq \sigma_0$$

Le costanti F,G,H,L,M,N dipendono dal materiale in considerazione e vengono determinate mediante prove di resistenza orientate secondo gli assi di ortotropia del materiale. Sono definite come segue:

$$F = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} \right); \quad G = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} \right); \quad H = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} \right);$$

$$L = \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_{23}} \right)^2; \quad M = \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_{13}} \right)^2; \quad N = \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_{12}} \right)^2.$$

Dove τ_0 è la tensione tangenziale di riferimento è pari a:

$$\tau_0 = \sqrt{3} \cdot \sigma_0$$

Le $\bar{\sigma}$ e le $\bar{\tau}$ sopracitate sono i valori di sforzo normale e tangenziale che provocano snervamento in una prova uniassiale secondo la direzione indicata dagli indici: rappresentano il valore delle tensioni di snervamento in prove uni assiale e di taglio semplice. Sostituendo le costanti F, G, H, L, M, N con le loro espressioni in funzione delle tensioni di snervamento si ottiene:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \left[\frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} \right) (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} \right) (\sigma_x - \sigma_z)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} \right) (\sigma_y - \sigma_x)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_{12}} \right)^2 \tau_{xy}^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_{23}} \right)^2 \tau_{yz}^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_{13}} \right)^2 \tau_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_0$$

Si pongono ora le seguenti sostituzioni, introducendo i rapporti tensionali R_{ij} (definiti sempre positivi) che costituiscono un'utile semplificazione alla scrittura (**Agno, Bolzon, & Maier, 2008**):

$$\frac{1}{R_{11}} = \frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}_{11}}; \quad \frac{1}{R_{22}} = \frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}_{22}}; \quad \frac{1}{R_{33}} = \frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}_{33}};$$

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{\bar{\tau}_0}{\bar{\tau}_{12}} = \frac{\sigma_0}{\bar{\tau}_{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{1}{R_{23}} = \frac{\bar{\tau}_0}{\bar{\tau}_{23}} = \frac{\sigma_0}{\bar{\tau}_{23}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{1}{R_{31}} = \frac{\bar{\tau}_0}{\bar{\tau}_{31}} = \frac{\sigma_0}{\bar{\tau}_{31}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Inserendo le sostituzioni nella funzione di snervamento si ottengono la seguente espressione:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \left[\left(\frac{\sigma_x}{R_{11}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{R_{22}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{R_{33}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau_{xy}}{R_{12}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau_{yz}}{R_{23}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau_{xz}}{R_{31}} \right)^2 + \right. \\ \left. - \sigma_x \sigma_y \left(\frac{1}{R_{11}^2} + \frac{1}{R_{22}^2} - \frac{1}{R_{33}^2} \right) - \sigma_z \sigma_y \left(\frac{1}{R_{22}^2} + \frac{1}{R_{33}^2} - \frac{1}{R_{11}^2} \right) - \sigma_x \sigma_z \left(\frac{1}{R_{11}^2} + \frac{1}{R_{33}^2} - \frac{1}{R_{22}^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_0$$

Questo tipo di scrittura è particolarmente significativa per gli scopi di questa tesi in quanto il programma di calcolo ABAQUS richiede, per definire la funzione di snervamento di Hill al suo interno, il valore dei rapporti tensionali R_{ij} e della tensione di snervamento σ_0 (Hibbit, Karlsson, & Sorensen, 2002).

Nel caso uniassiale si ha solamente una tensione normale non nulla, per cui risulta:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \left| \left(\frac{\sigma_x}{R_{11}} \right) \right| \leq \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_x| \leq \sigma_0 \cdot R_{11}$$

In un problema piano negli sforzi, che è il caso d'interesse per questa tesi, si ottiene:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{R_{11}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{R_{22}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau_{xy}}{R_{12}} \right)^2 - \sigma_x \sigma_y \left(\frac{1}{R_{11}^2} + \frac{1}{R_{22}^2} - \frac{1}{R_{33}^2} \right)} \leq \sigma_0$$

Si può notare una particolarità in questo caso: nonostante le componenti di sforzo fuori dal piano xy siano trascurate, nella funzione di snervamento rientra il rapporto tensionale R_{33} . Il comportamento in stato piano di sforzo risente parzialmente, perciò, anche della resistenza fuori piano (si ricorda che R_{33} rappresenta il rapporto fra la tensione di rottura uniassiale in direzione fuori piano e la tensione di riferimento σ_0).

Si può anche riconoscere che la funzione di Hill si riduce a quella di HHM in due casi particolari:

- $R_{ij}=1$ per ogni i e j , in questo caso la tensione di snervamento vale σ_0 ;
- $R_{ij}=\alpha$ per ogni i e j , in questo caso la tensione di snervamento vale $\alpha \sigma_0$

La superficie di snervamento che si ottiene nel caso piano è l'ellissoide di Hill:

$$\sigma_y^2(F+H) + \sigma_x^2(G+H) - 2H\sigma_x\sigma_y + 2N\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2$$

L'ellissoide di Hill rappresenta una quadrica nello spazio $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$ che necessariamente non è un'ellissoide, a meno di soddisfare una serie di vincoli di natura algebrica.

Riscrivendo la quadrica di Hill in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G+H & -H & 0 \\ -H & F+H & 0 \\ 0 & 0 & 2N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} - \sigma_0^2 = 0$$

Per determinare la forma e l'orientazione della quadrica di Hill in funzione dei parametri di anisotropia del legame, anzitutto si formula il problema agli autovalori:

$$\det \left[\begin{bmatrix} G+H & -H & 0 \\ -H & F+H & 0 \\ 0 & 0 & 2N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$(2N - \lambda) \begin{vmatrix} G+H - \lambda & -H \\ -H & F+H - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2N - \lambda) [(G+H - \lambda) \cdot (F+H - \lambda) - H^2] = 0$$

Affinchè gli autovalori di questa quadrica siano positivi, ovvero sia un'ellissoide, devono essere soddisfatte le condizioni:

$$\begin{aligned} -(G+F+2H)(GF+GH+FH)\sigma_0^2 &< 0 \\ GF+GH+FH &> 0 \\ 2N &> 0 \end{aligned}$$

A tali condizioni devono sottostare anche i coefficienti del legame di Hill affinché sia preservato il significato fisico di superficie di snervamento.

L'angolo di rotazione dei semiassi dell'ellissoide di Hill rispetto al sistema σ_x - σ_y è il seguente:

$$\sin 2\vartheta = \frac{2H}{(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2H}{\sqrt{(G-F)^2 + 4H^2}}$$

La geometria dell'ellissoide di Hill è nota ed è possibile raffigurarlo come nel grafico 3.5.

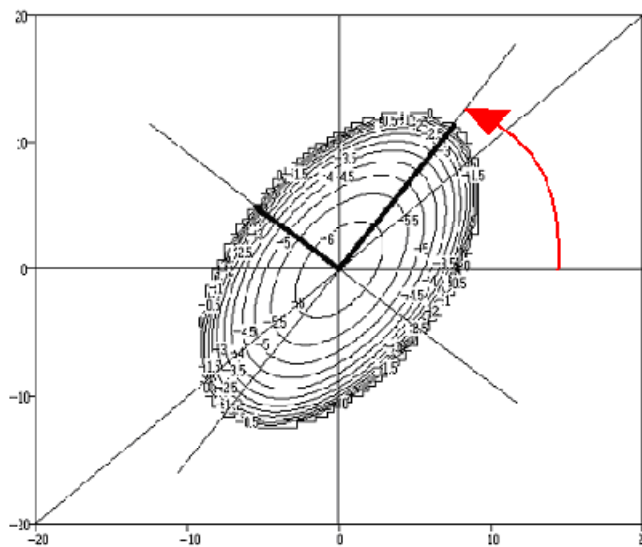


Grafico 3.5: ellissoide corrispondente alla quadrica di Hill con $H=0,6$ $N=1,25$ $G=0,3$ e $F=1$; vengono indicati i semiassi e l'angolo ϑ (in rosso)

La legge di normalità adottata da Hill, che descrive le plasticizzazioni associate al modello ortotropo precedentemente descritto, è definita dalla seguente equazione:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\gamma}$$

Calcolando per ciascun componente di deformazione l'espressione corrispondente, si ottiene che la legge di scorrimento associata è a conservazione di volume (com'era

prevedibile poiché il criterio di Hill non tiene conto della pressione idrostatica). Questo implica che:

$$\text{tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\epsilon}_{11}^p + \dot{\epsilon}_{22}^p + \dot{\epsilon}_{33}^p = 0$$

3.3.3 La legge d'incrudimento

Per concludere si può incorporare nel modello di Hill anche il comportamento a incrudimento, governato dalla seguente legge **(Ottosen & Ristinmaa, 2005)**:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{ij}, \mathbf{K}) = (\sigma_0^2 \cdot \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s})^{1/2} - \sigma(k) = \frac{\sigma_0^2}{\sigma(k)} \cdot (\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}) - \sigma(k) = 0; \quad \sigma(k) = \sigma_0 + \mathbf{K}(\mathbf{k}) \quad (3.3)$$

Dove \mathbf{s} è il tensore deviatore degli sforzi, i cui componenti sono stati già descritti in precedenza (3.1), e \mathbf{P} è la matrice che definisce la funzione di snervamento (3.2).

Sostituendo nella legge di normalità l'incrudimento e svolgendo le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\sigma_0^2}{\sigma(k)} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = \dot{\lambda} \frac{\sigma_0^2}{\sigma(k)} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} \quad (3.4)$$

da cui si può ricavare, invertendo

$$\mathbf{s} = \frac{\sigma(k)}{\dot{\lambda} \cdot \sigma_0^2} \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad \text{dove} \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1}$$

moltiplicando (3.4) per \mathbf{s}^T si ottiene che $\mathbf{s}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma(k)} \sigma_0^2 \cdot \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = \dot{\lambda} \cdot \sigma(k)$.

Prendendo le ultime due relazioni, si vuole esprimere il moltiplicatore plastico in funzione degli altri termini, da cui

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{(\dot{\epsilon}^p)^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\epsilon}^p}{\sigma_0^2} \right)^{1/2}$$

La relazione di consistenza si può esprimere in notazione matriciale:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\lambda} = 0$$

dove il modulo plastico H è definito come

$$H = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k} \quad k=0 \quad \text{e} \quad \dot{k} = \dot{\lambda} \cdot k$$

Si assume lo strain hardening e si definisce per materiali ortotropi l'incremento di deformazione plastica effettiva:

$$\dot{k} = \dot{\epsilon}_{eff}^p \quad \text{e} \quad \dot{\lambda} = \dot{\epsilon}_{eff}^p$$

Ne consegue che $k=1$ e, avendo derivato la (3.3) per \mathbf{K} , si ha $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{K}} = -1$; allora il modulo plastico H si riduce a

$$H = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k} = \frac{\partial \sigma_y(\epsilon_{eff}^p)}{\partial \epsilon_{eff}^p}$$

Si può quindi calibrare il modello riferendosi ai dati sperimentali ottenuti con prove monoassiali. Per esempio considerando una tensione di trazione uniassiale, la funzione di snervamento si riduce a

$$\sigma = \bar{\sigma}_{11} \cdot \sigma_x \sqrt{H + G}$$

dove lo snervamento iniziale si raggiunge per $\sigma = \bar{\sigma}_{11}$, perciò $\sigma_x = 1/\sqrt{H+G}$. Dalla legge di flusso si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^p \\ \dot{\epsilon}_{22}^p \\ \dot{\epsilon}_{33}^p \end{bmatrix} = \dot{\lambda} \frac{\bar{\sigma}_{11}^2}{\sigma} \sigma_x \begin{bmatrix} H+G \\ -H \\ -G \end{bmatrix}$$

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\lambda} \frac{\bar{\sigma}_{11}^2}{\sigma} \sigma_x \cdot (H+G) = \dot{\lambda} \cdot \bar{\sigma}_{11} \sqrt{H+G}$$

Da cui, per l'ortotropia del materiale, si ottiene:

$$\dot{\epsilon}_{eff}^p = \frac{1}{\sqrt{H+G}} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_{11}^p}{\bar{\sigma}_{11}}$$

Poiché la generale deformazione di un materiale inizialmente ortotropo, di solito, cambia la tensione di snervamento nelle diverse direzioni di quantità differenti, o almeno porta alla perdita di ortotropia, il modello risultante dalle suddette ipotesi fornisce solo una prima approssimazione al fenomeno dell'incrudimento.

L'approssimazione dovuta a semplici leggi del tipo precedente può essere veramente utile nell'analisi ad elementi finiti di materiali plasticamente ortotropi e, indubbiamente, rappresenta un vantaggio sostanziale nella capacità predittiva, in situazioni dove l'anisotropia plastica è un'importante caratteristica del comportamento del materiale.

3.4 Modello elasto-plastico di Xia-Boyce-Parks

Xia et al. (**Xia, Boyce, & Parks, 2002**) nel 2002 proposero un modello per la descrizione del comportamento elasto-plastico dei laminati cartacei, monostrato o multistrato. Come ipotesi fondamentale si assume che le deformazioni plastiche si sviluppino solamente nel piano del foglio (MD-CD) e che, fuori dal piano, ovvero lungo ZD, le risposte siano totalmente reversibili. Nella presente trattazione le direzioni MD, CD e ZD verranno rispettivamente indicate con i numeri 1, 2 e 3.

3.4.1 Modello originale

L'assunto comportamento elastico lineare e ortotropo nel piano, secondo il modello preso in considerazione, può dunque essere descritto come:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^e$$

Dove $\underline{\underline{\sigma}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T$;

$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = [\varepsilon_{11}^e, \varepsilon_{22}^e, 2\varepsilon_{12}^e]^T$ è la componente elastica del tensore delle deformazioni nel piano;

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ è la matrice delle rigidità definita come:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} & \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

I parametri elastici nel piano del materiale sono quindi: i moduli di Young E_1 ed E_2 ; il modulo di taglio G_{12} e i coefficienti di Poisson ν_{12} e ν_{21} .

L'evidente simmetria della matrice di rigidezza elastica $\underline{\underline{C}}$ richiede che valga: $\nu_{12} \cdot E_2 = \nu_{21} \cdot E_1$. Pertanto i parametri elastici da definire sono quattro. Sarebbero nove per la trattazione tridimensionale (cfr. Cap. 2).

Per modellare il comportamento elastico non lineare in compressione nella direzione ZD, il modulo E_3 viene assunto funzione esponenziale della deformazione in compressione:

$$E_3 = E_3^0 \cdot e^{(-a \cdot \varepsilon_{33}^e)}$$

Dove E_3^0 è il modulo elastico iniziale e all'esponente compaiono una costante e la componente diretta ZD del tensore di deformazione finita.

Poiché si presume che il modello presenti comportamento plastico solamente nelle direzioni del piano, le componenti fuori piano del tensore non vengono considerate nel criterio di snervamento. Pertanto, le già introdotte componenti di tensione normale σ_{11} , σ_{22} e quelle tangenziali σ_{12} , sono le uniche a essere utilizzate nelle equazioni di snervamento e di flusso.

Xia et al. presupposero che la superficie di snervamento fosse costituita da una combinazione non lineare di 6 "sub-superfici" piane raccordate con legge esponenziale ad esponente variabile, dove N_α è la normale a ciascuna delle "sub-superfici", come rappresentato nel grafico 2.7.

Il criterio di snervamento è espresso dalla relazione seguente:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{N}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^6 \left[\chi_\alpha \frac{N_\alpha^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha}{\sigma_\alpha(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)} \right]^{2k} - 1 \leq 0$$

dove $2k$ è una costante del materiale, con k che può essere considerato un intero positivo; $N_\alpha = [N_{11}, N_{22}, N_{12}]_\alpha$; σ_α definisce la componente di sforzo equivalente, vale a dire la distanza della generica "sub-superficie" piana α , costituente la superficie di snervamento, dall'origine del sistema di coordinate degli sforzi e la funzione $\sigma_\alpha(\hat{\epsilon}^p)$ governa, invece, l'incrudimento del materiale.

La quantità scalare $\hat{\epsilon}^p$ diventa la deformazione plastica equivalente definita come:

$$\hat{\epsilon}^p = (\epsilon^p)^T \cdot \epsilon^p$$

Infine, χ_α è un parametro di controllo tale che:

$$\chi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{if } N_\alpha^T \cdot \sigma > 0 \\ 0 & \text{if } N_\alpha^T \cdot \sigma \leq 0 \end{cases}$$

Ciascuna delle superfici piane che costituiscono quella di snervamento rappresenta l'andamento di una determinata componente del tensore degli sforzi. In particolare, a un valore (compreso fra 1 e 6) dell'indice α corrisponde: per $\alpha=1$ trazione lungo MD, per $\alpha=2$ trazione lungo CD, per $\alpha=3=6$ taglio puro, per $\alpha=4$ compressione lungo MD e per $\alpha=5$ compressione lungo CD.

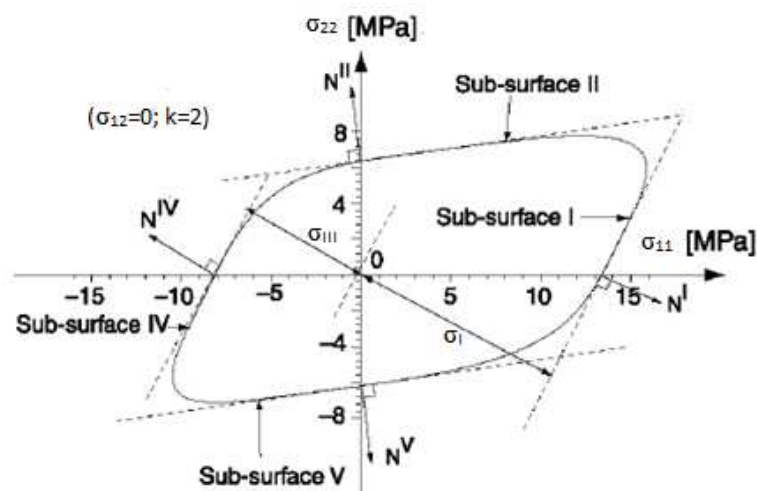


Grafico 3.6: superficie di snervamento nel caso di tensione tangenziale nulla nel piano

Il grafico 3.7 mostra, sull'esempio della figura precedente, l'effetto della variazione dell'esponente $2k$ sulla forma della funzione di snervamento; i valori estremi sono 2 (funzione quadratica, ovvero si recupera la forma ellittica della plasticità classica) e ∞ (dominio a parallelogramma, ovvero senza raccordi smussati fra le superfici costituenti):

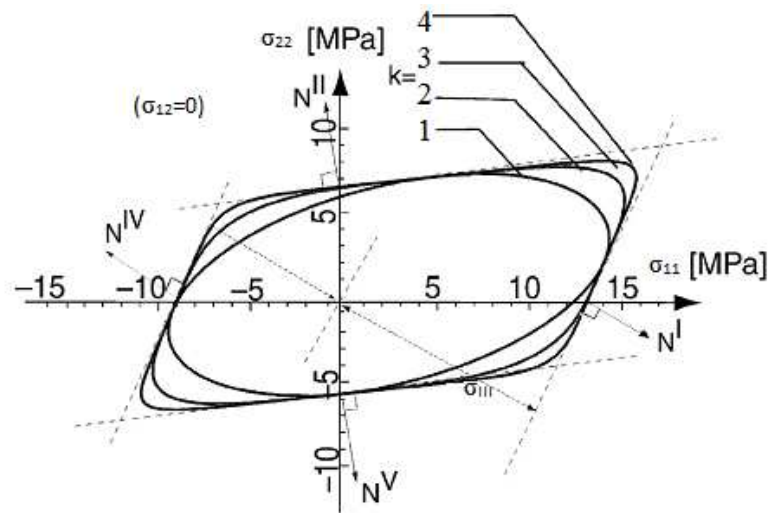


Grafico 3.7: effetto della variazione della costante del materiale k

Nel caso di tensioni tangenziali non nulle la funzione di snervamento si sviluppa nello spazio tridimensionale σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} , assumendo allora la forma indicata nel grafico 3.8.

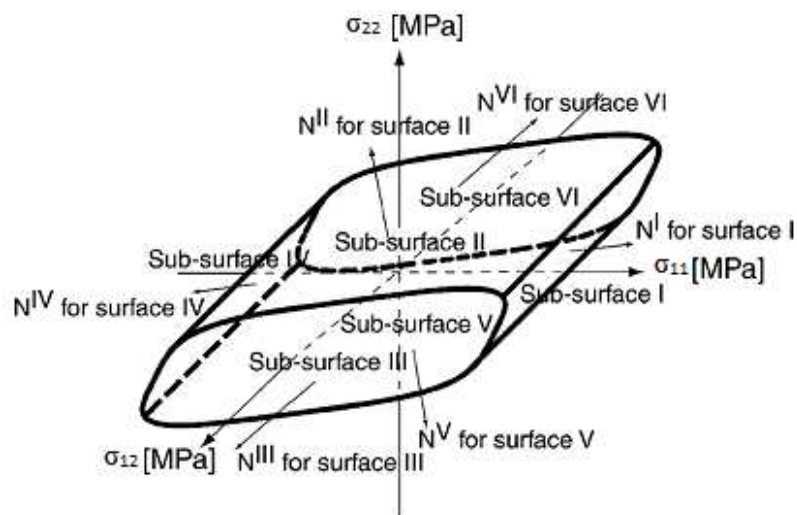


Grafico 3.8: superficie di snervamento nello spazio delle tre componenti di tensione del piano

La legge di scorrimento, assunta nel modello considerato, è di tipo associato con riferimento alle grandezze statiche e cinematiche assunte: vale a dire che il tensore velocità di deformazione plastica è proporzionale alla derivata della funzione di snervamento.

$$\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \lambda \geq 0, \quad f \lambda = 0$$

dove λ rappresenta l'unico moltiplicatore plastico.

Il gradiente della funzione di rigidità, introdotto in precedenza, vale:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \sum_{\alpha=1}^6 (a_{\alpha} \cdot \chi_{\alpha} \cdot N_{\alpha})$$

avendo definito: $a_{\alpha} = 2k \frac{\Lambda_{\alpha}^{2k-1}}{\sigma_{\alpha}(\hat{\varepsilon}^p)}$; $\Lambda_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}^T \cdot \sigma_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}(\hat{\varepsilon}^p)}$.

È importante notare il ruolo fondamentale giocato dal coefficiente di controllo χ_{α} nelle equazioni appena illustrate.

La direzione delle deformazioni plastiche è quindi quella della normale alla superficie di snervamento nel punto in cui viene raggiunta dal punto rappresentativo dello stato tensionale.

La legge d'incrudimento anisotropa proposta dagli autori è dipendente dalle deformazioni plastiche accumulate e viene espressa analiticamente dalle funzioni:

$$\sigma_{\alpha}(\hat{\varepsilon}^p) = \sigma_{\alpha}^0 + A_{\alpha} \cdot \tanh(B_{\alpha} \cdot \hat{\varepsilon}^p) + C_{\alpha} \cdot \hat{\varepsilon}^p$$

$$\sigma_{(6)} = \sigma_{(3)}$$

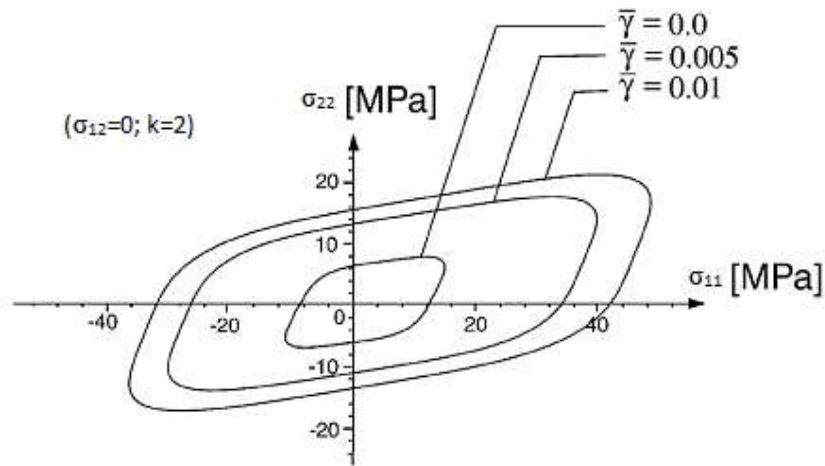


Grafico 3.9: evoluzione dell'incrudimento

3.4.2 Modello semplificato

A causa della presenza di un gran numero di parametri (in totale 27) nel modello descritto precedentemente è stata introdotta una semplificazione nella descrizione della legge d'incrudimento (**Xia, Boyce, & Parks, 2002**), (**Garbowski, 2009**). Difatti, la funzione d'incrudimento contiene 4 parametri per ciascuna superficie: lo sforzo equivalente σ_α^0 e tre parametri del materiale A_α , B_α e C_α . Secondo Makela-Ostlund il comportamento uniassiale nelle direzioni principali per piccoli incrementi di carico è ben descritto dalle relazioni Ramberg-Osgood.

$$\varepsilon_p = \frac{Q_\alpha}{E} \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_0} \right)^{n_\alpha - 1} \cdot \sigma$$

Dove σ_0 è la tensione di snervamento per la quale vale:

$$\varepsilon = \frac{(1 + Q_\alpha) \cdot \sigma_0}{E} = \varepsilon_y$$

Con l'assunzione di una funzione d'incrudimento esponenziale il numero dei parametri viene drasticamente ridotto a 2 per ciascuna superficie: il coefficiente d'incrudimento Q_α e l'esponente dell'incrudimento n_α . Tuttavia il modello semplificato può, comunque, descrivere compiutamente le principali caratteristiche della carta e del cartone.

3.4.3 Caratterizzazione dei parametri

Il modello proposto è stato formulato in modo tale da poterne caratterizzare i parametri tramite sole prove uniassiali **(Ageno, 2003)**.

Il comportamento elastico iniziale è assunto ortotropo ed è descritto da nove costanti: tre moduli di Young, tre moduli di elasticità tangenziale e tre coefficienti di Poisson. Tali parametri possono essere ottenuti direttamente dalle curve uniassiali carico-spostamento e spostamento longitudinale-spostamento trasversale.

Per quanto riguarda la funzione di snervamento, le resistenze equivalenti σ_α sono direttamente correlate alle tensioni di snervamento in prova uniassiale ed alle corrispondenti deformazioni.

È necessario eseguire quattro prove: due di trazione e due di compressione lungo le direzioni principali (MD e CD). Le superfici di snervamento relative alle quattro prove eseguite sono definite dalle seguenti equazioni, in funzione delle tensioni misurate nelle prove. Il segno è positivo per le trazioni e negativo per le compressioni.

$$\left[\frac{\sigma_0 \cdot N_1^T}{\sigma_1(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} + \left[\frac{\sigma_0 \cdot N_5^T}{\sigma_5(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} - 1 = 0 \qquad \left[\frac{\sigma_0 \cdot N_2^T}{\sigma_2(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} + \left[\frac{\sigma_0 \cdot N_4^T}{\sigma_4(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} - 1 = 0$$

$$\left[-\frac{\sigma_0 \cdot N_2^T}{\sigma_2(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} + \left[-\frac{\sigma_0 \cdot N_4^T}{\sigma_4(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} - 1 = 0 \qquad \left[-\frac{\sigma_0 \cdot N_1^T}{\sigma_1(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} + \left[-\frac{\sigma_0 \cdot N_5^T}{\sigma_5(\hat{\epsilon}^p)} \right]^{2k} - 1 = 0$$

Le resistenze equivalenti per le due superfici costituenti a taglio puro vengono assunte uguali e si determinano con una prova addizionale. Poiché risulta complicato eseguire prove di taglio puro su fogli sottili, la determinazione di questi parametri avviene eseguendo una prova di trazione uniassiale lungo la direzione bisettrice degli assi MD/CD. S'indica con V^{45} la tensione di snervamento così misurata e la si trasforma nel riferimento principale mediante un tensore di rotazione. Questa trasformazione consente di pervenire al seguente stato di sforzo nel riferimento principale, così come riportato dagli autori:

$$T = \frac{V^{45}}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo nelle funzioni di snervamento precedentemente definite si ottiene:

$$\sigma_{(3)} = \sigma_{(6)} = V^{45} N_3 \left[1 - \left(\frac{N_1 \frac{V^{45}}{2} + N_1 \frac{V^{45}}{2}}{\sigma_{(1)}} \right)^{2k} - \left(\frac{N_2 \frac{V^{45}}{2} + N_2 \frac{V^{45}}{2}}{\sigma_{(2)}} \right)^{2k} \right]^{-1/2k}$$

3.5 Modelli a rottura

Il comportamento di un materiale soggetto a fenomeni di frattura può essere coerentemente descritto da una coppia di leggi costitutive **(Campinteri, 1992)**.

- un legame sforzo-deformazioni che descriva il comportamento del materiale integro (grafico 3.10 (a));
- una relazione tensione normale - apertura della fessura che descriva il comportamento "softening" del materiale fessurato, sino al raggiungimento dell'apertura critica w_c (grafico 3.10 (b)).

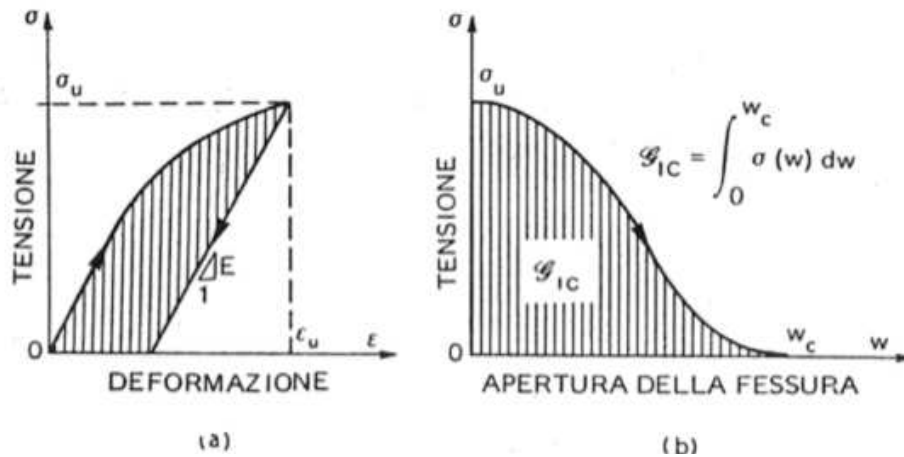


Grafico 3.10: doppia legge costitutiva: (a) tensione–deformazione; (b) tensione - apertura della fessura nel caso di materiale a comportamento elastico-incrudente–softening.

L’energia dissipata nel volume del materiale e quella dissipata sulla superficie della fessura sono pari rispettivamente all’area tratteggiata nel grafico 3.10 (a) e 3.10 (b); l’energia totale sarà data dalla somma delle due.

Il modello della fessura coesiva prevede una distribuzione delle forze coesive sul bordo della fessura non costante e decrescente all’aumentare dell’apertura, secondo una legge di “softening”. Nel grafico 3.11 (a) è rappresentata la zona prossima all’estremità della fessura reale, si può notare come sia ancora parzialmente cosparsa di inclusioni e aggregati o fibre trasversali alla discontinuità di spostamento.

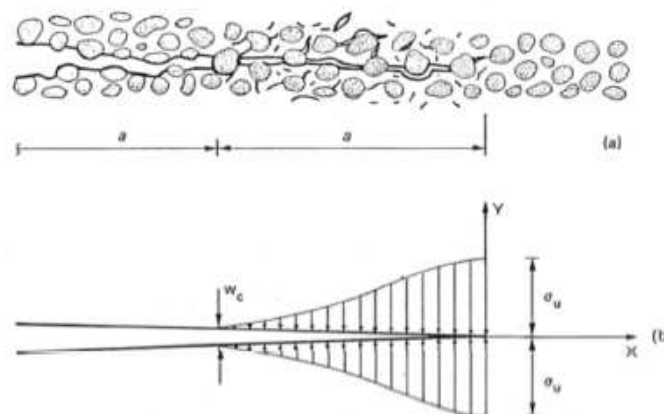


Grafico 3.11: modello della fessura coesiva: (a) zona di processo e (b) forze coesive.

In tale zona, detta zona di processo (o zona plastica), avvengono fenomeni non lineari e dissipativi di tipo microscopico e macroscopico. L'estremità della fessura coesiva (o fittizia) coincide con l'estremità della zona di processo, in cui l'apertura w si annulla e la tensione risulta pari alla resistenza a trazione σ_u ; l'estremità della fessura reale si trova, invece, in corrispondenza dell'apertura critica w_c per cui l'interazione si annulla. L'andamento riportato nel grafico 3.11 (b) riporta la situazione che si crea nei punti intermedi della zona di processo.

Il modello elastico lega gli sforzi nominali agenti sull'interfaccia alle rispettive deformazioni nominali; gli sforzi nominali, di tensore \mathbf{t} , sono costituiti dalle componenti delle forze divise per l'area originale su cui agiscono ad ogni punto d'integrazione, mentre le deformazioni nominali sono ricavate dalle aperture divise per lo spessore nominale dell'elemento ad ogni punto d'integrazione. Lo spessore nominale non coincide con lo spessore reale dell'elemento coesivo, ma viene generalmente assunto pari all'unità.

Ponendo pari a T_0 lo spessore originale dell'elemento coesivo, le deformazioni nominali sono definite come segue:

$$\varepsilon_n = \frac{\delta_n}{T_0} \quad \varepsilon_s = \frac{\delta_s}{T_0} \quad \varepsilon_t = \frac{\delta_t}{T_0}$$

Il legame elastico risultante può essere descritto in forma matriciale:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{ns} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{nt} & K_{st} & K_{tt} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

Si può notare come ci sia accoppiamento tra il comportamento normale e quello di taglio, annullando le componenti al di fuori della diagonale si ottiene un comportamento disaccoppiato.

Nel grafico 3.12 si riporta un tipico andamento definito da una legge trazione-apertura:

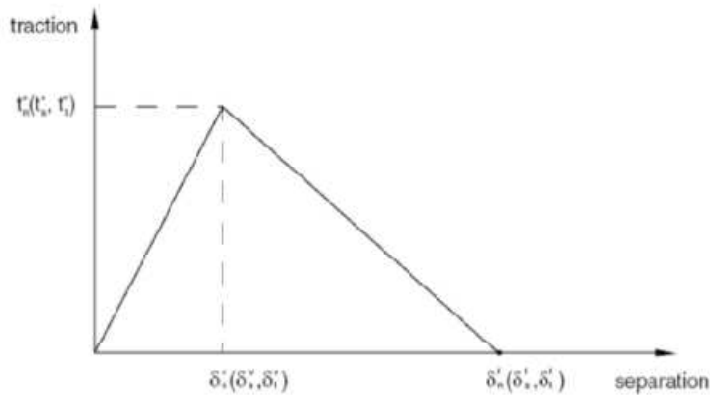


Grafico 3.12: andamento tipico dovuto ad una legge trazione-apertura.

La modellazione del danno viene assunta in modo tale da consentire la combinazione di più meccanismi agenti simultaneamente, ciascuno dei quali è costituito da tre elementi principali:

- un criterio di inizializzazione o attivazione;
- una legge di evoluzione del danno;
- una legge di rimozione degli elementi che hanno raggiunto il massimo danno.

Quando gli sforzi, o le deformazioni, raggiungono un valore tale da attivare un certo criterio, detto appunto criterio di attivazione, s'innesca il fenomeno del degrado. I criteri di inizializzazione disponibili sono i seguenti:

- criterio del massimo sforzo nominale: $\max \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}, \frac{t_s}{t_s^0}, \frac{t_t}{t_t^0} \right\} = 1;$
- criterio della massima deformazione nominale: $\max \left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0}, \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}, \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\} = 1;$
- criterio dello sforzo nominale quadratico: $\left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_s}{t_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_t}{t_t^0} \right\}^2 = 1;$
- criterio della deformazione nominale quadratica: $\left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\}^2 = 1.$

Dove t_n , t_s e t_t sono i valori di picco degli sforzi nominali quando le deformazioni registrate sono solo quelle dirette, ε_n , ε_s e ε_t sono le deformazioni massime quando sono attive solo le componenti dirette di sforzo e $\langle \rangle$ sono le parentesi di Macaulay.

L'evoluzione del danno è descritta, invece, da una legge in cui si considera la velocità con la quale la rigidità del materiale viene degradata una volta attivato il processo di fessurazione. Una variabile scalare di danno (D) rappresenta il danno globale all'interno dell'elemento coesivo e ingloba gli effetti combinati dovuti a tutti i meccanismi attivi. La presenza di questa variabile, ovviamente, incide sul valore degli sforzi agenti sulla superficie, in particolare si registra questo andamento (D cresce monotonamente da 0 a 1):

$$t_n = \begin{cases} (1-D) \cdot \bar{t}_n & \bar{t}_n \geq 0 \\ \bar{t}_n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$t_s = (1-D) \cdot \bar{t}_s$$

$$t_t = (1-D) \cdot \bar{t}_t$$

È inoltre necessario introdurre una variabile di spostamento per descrivere l'evoluzione del danno.

$$\delta_m = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2}$$

La variazione del coefficiente di danno all'interno dell'elemento può essere espressa come funzione degli spostamenti di apertura della fessura, o come funzione dell'energia di frattura sviluppata nel processo stesso.

Nel primo caso, se si pone δ_m^0 l'apertura registrata al picco di tensione, δ_m^f l'apertura massima subita dall'elemento e δ_m^{\max} il valore massimo di spostamento atteso durante la storia di carico prevista, il valore assunto da tale coefficiente, a seconda dell'andamento previsto per il ramo di "softening", è pari a:

- andamento lineare: $D = \frac{\delta_m^f \cdot (\delta_m^{\max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{\max} \cdot (\delta_m^f - \delta_m^0)}$;
- andamento esponenziale: $D = 1 - \left\{ \frac{\delta_m^0}{\delta_m^{\max}} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta_m^{\max} - \delta_m^0}{\delta_m^f - \delta_m^0} \right)}}{1 - e^{-\alpha}} \right\}$.

Nel secondo caso, invece, se si definisce l'apertura massima subita dall'elemento come:

$$\delta_m^f = \frac{2G^C}{T_{eff}^0}$$

dove T_{eff} rappresenta la forza di trazione registrata durante l'attivazione del criterio di danno e G^C l'energia di frattura. A seconda dell'andamento assunto per il ramo di "softening", il valore del coefficiente di danno sarà pari a:

- andamento lineare: $D = \frac{\delta_m^f \cdot (\delta_m^{\max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{\max} \cdot (\delta_m^f - \delta_m^0)}$;
- andamento esponenziale: $D = \int_{\delta_m^0}^{\delta_m^f} \frac{T_{eff}}{G^C - G^0} \cdot d\delta$.

Quando la variabile D raggiunge il suo valore massimo $D_{\max}=1$, l'elemento coesivo viene rimosso; questo approccio, basato sulla rimozione di quegli elementi per i quali si raggiunge il valore massimo della variabile di danno, è generalmente appropriato per la modellazione del processo di frattura completo e della separazione tra due strati in un processo di delaminazione di un materiale composito. Una volta rimosso l'elemento coesivo, esso non offre più alcuna resistenza alla separazione dall'elemento adiacente. Alternativamente, vi è la possibilità di consentire all'elemento di restare all'interno del modello anche quando si è raggiunto il valore massimo del coefficiente di danno. In questo caso, la rigidità offerta dall'elemento sarà pari a $(1-D_{\max})$ volte la rigidità iniziale, ma esso si opporrà alla separazione dagli elementi che lo circondano.

Sperimentazione condotta su laminato

Il capitolo che segue prende in esame le campagne sperimentali condotte dagli autori e finalizzate alla caratterizzazione meccanica dei laminati. Tali prove si affiancano a quelle biassiali presenti in letteratura e sono: prove monoassiali di trazione e prove a pressione su materiale cartaceo di diverso tipo.

Si pone l'attenzione sulla caratterizzazione di un laminato in specifico, fornito dalla Tetra Pak e da essa classificato come "Tetra Pak 470 mN", perchè, nel seguito della tesi, è il materiale sul quale verrà fatta la calibrazione del modello di Hill. D'ora in poi ci si riferirà a tale laminato, semplicemente, come laminato Tetra Pak.

4.1 Introduzione alle prove monoassiali di trazione

Le prove monoassiali eseguite hanno come scopo quello di illustrare le proprietà meccaniche dei campioni in esame e ci forniscono il legame sforzo-deformazione del materiale sottoposto a trazione. La stessa modalità di prova, tuttavia, a seconda che il campione presenti o meno il sistema di apertura, è stata utilizzata per conoscere, rispettivamente, le caratteristiche meccaniche del sistema di apertura o del laminato.

I campioni utilizzati durante la conduzione delle prove hanno lunghezza iniziale l_0 e sezione rettangolare con area iniziale A_0 . Le prove atte alla caratterizzazione del laminato, così come quelle atte alla caratterizzazione del sistema di apertura, sono state condotte in modo che il regime deformativo nel provino sia uniforme. A un determinato valore della forza F di trazione consegue un allungamento $\Delta l = l - l_0$ del provino: l indica la lunghezza corrente. Per la campagna di prove condotte sia sul laminato che sui sistemi di apertura si è deciso di valutare la forza necessaria per produrre determinate variazioni di lunghezza (spostamento imposto). La conduzione delle prove a “spostamento imposto” non permette, tuttavia, di scaricare i provini dopo aver raggiunto certi valori predefiniti di sforzo. Le prove cicliche su provini senza sistema di apertura dunque sono state condotte misurando l’allungamento che consegue a ogni valore della forza (carico imposto). In entrambi i casi, comunque, è stato possibile associare ad ogni valore di F il corrispondente allungamento Δl rendendo possibile il tracciamento del legame costitutivo che riflette il comportamento del materiale di cui è costituito il provino.

È peraltro evidente che campioni con dimensioni diverse subiranno, a parità di trazione, allungamenti diversi: diminuiranno con l’aumentare della superficie A_0 della sezione e aumenteranno con l’aumentare lunghezza. Pure le contrazioni trasversali risulteranno differenti. Sono quindi significativi non tanto i valori assoluti della forza applicata e delle variazioni Δl , delle dimensioni lineari del provino, quanto quelli relativi, rispettivamente, alle unità di area e lunghezza. Con riferimento alle dimensioni iniziali della barra, si può dunque porre $\varepsilon = (l - l_0) / l_0$ (quantità che definisce la deformazione in direzione longitudinale) e $\sigma = F / A_0$ (definisce lo sforzo normale). Tali equazioni sono note come misure nominali di deformazione e di sforzo relative ad una prova monoassiale. Lo sforzo ha le dimensioni di una forza per unità di superficie ed è quindi misurato in N/mm^2 (MPa). La deformazione invece è un numero puro.

In realtà, le quantità così definite, rappresentano ancora le variazioni delle dimensioni lineari del provino e la forza applicata: entrambe misurate nel corso dell'esperimento. Dividendole per quantità fisse esse possono essere ricondotte a misure unitarie.

4.2 Prova monoassiale di trazione su laminato composito

Al fine di definire la relazione tra stato di deformazione e stato di sforzo del laminato Tetra Pak sono state eseguite, presso il laboratorio Prove Materiali del DIS (Dipartimento di Ingegneria Strutturale - Politecnico di Milano), una serie di prove uniassiali di trazione condotte a velocità di deformazione controllata. Per tale campagna si è utilizzato un sistema di trazione a colonna singola "Instron 5944" con cella di carico da 2 kN.

4.2.1 Materiale e strumentazione

I campioni utilizzati nelle prove monoassiali di trazione derivano da un unico rotolo di laminato fornito direttamente da Tetra Pak; dal rotolo sono stati ricavati tre tipologie di campioni che differiscono tra di loro per le direzioni lungo le quali sono stati estratti. Le direzioni prese in considerazione nel nostro studio coincidono con quelle "principali" del materiale piano (MD e CD), ortogonali tra di loro, e con la bisettrice tra le due (45°) (figura 4.1).

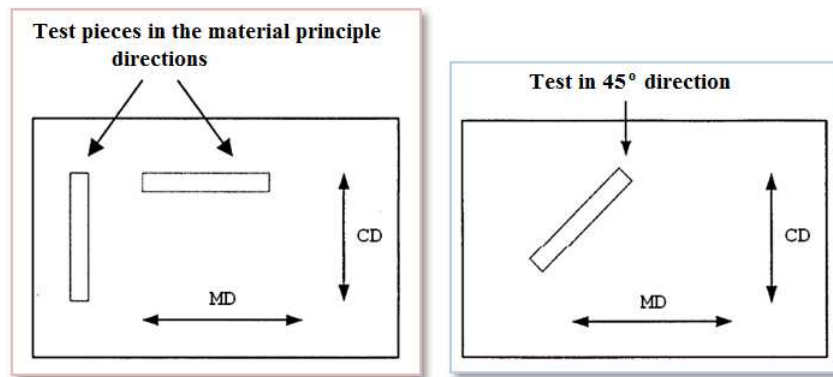


Figura 4.1: direzioni dei campioni

Ogni provino presenta uno spessore che varia tra i 0,55 e i 0,6 mm e i campioni ricavati hanno forma rettangolare con larghezza di 15 mm e lunghezza di 250 mm. La lunghezza è stata scelta tenendo conto che 5 cm in corrispondenza degli estremi servono per bloccare il campione in corrispondenza degli afferraggi, la parte di campione disposta tra gli afferraggi risulta dunque essere pari a 150 mm.

Il laminato fornitoci è lo stesso che viene utilizzato per la produzione di contenitori alimentari; esso non è dunque perfettamente liscio ma presenta delle “sagomature” dette “crease lines” (linee di piega), che costituiscono degli “inviti” per le successive operazioni, di piegatura necessarie per la realizzazione del contenitore alimentare.

Il sistema di prova a colonna singola “ Instron 5944” (figura 4.2) ci ha permesso di effettuare le prove necessarie alla caratterizzazione del materiale. I telai a colonna singola sono generalmente utilizzati per testare dispositivi medici e biomateriali, prodotti tessili, elastomeri, alimenti, componenti di piccole dimensioni e microelettronica, fili, carta e pellicole in plastica. La precisione della misurazione del carico varia da +/- 0,5 % della lettura a 1/500 della capacità della cella di carico e la velocità di acquisizione dei dati arriva fino alla registrazione di mille valori al secondo (1 kHz). Gli afferraggi “a pinza” (figura 4.3) hanno una superficie di 5x2 cm² e esercitano sul campione una pressione di 5 Bar. Al fine di verificare un possibile scorrimento del provino agli afferraggi non è stato analiticamente possibile paragonare la forza trasversale, esercitata dagli afferraggi, con quella longitudinale, esercitata dalla cella di carico, in quanto non era noto il coefficiente d’attrito esistente tra campione e afferraggi. Al fine di verificare la non presenza di tale fenomeno si è eseguita una serie di esperimenti. La cella di carico utilizzata durante le prove è stata quella da 2 kN.

Per quanto riguarda l'acquisizione dei dati è stato utilizzato un estensimetro ad aggancio statico con un apertura iniziale di 5 cm e una capacità di estensione di +/- 2,5 cm (figura 4.4). Tale strumento ha permesso di ottenere risultati ancora più precisi di quelli forniti direttamente dal sistema di prova.



Figura 4.2: sistema di prova a colonna singola "Instron 5944"



Figura 4.3: sistema di afferraggio



Figura 4.4: estensimetro

4.2.2 Esposizione risultati e determinazione dei parametri costitutivi

Per la conduzione delle prove e l'esposizione dei risultati si fa riferimento ad analoghi esperimenti presenti in letteratura; in particolare, si riportano le prove condotte da Harrysson e Ristinmaa su carta con grammatura da 150 g/m² e spessore medio di 0,32 mm, ad una temperatura di 23 °C e al 50 % di umidità (**Harrysson & Ristinmaa, 2008**).

Le curve sforzo-deformazione ricavate dalle prove monoassiali eseguite da Harrysson e Ristinmaa sono riportate in grafico 4.1. Esse rappresentano la media dei risultati ottenuti da 5 test monoassiali effettuati in ciascuna delle direzioni MD, CD e a 45°, condotti con velocità di deformazione pari a 0,8 mm/min.

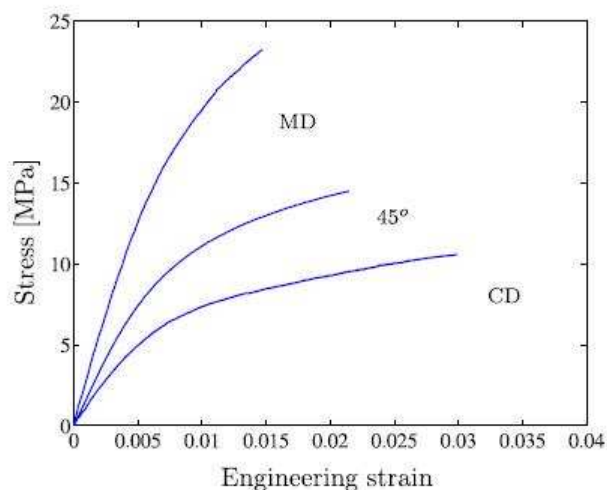


Grafico 4.1: risultati dei test monoassiali condotti nelle direzioni CD, MD e 45°

Con riferimento alle prove monoassiali condotte dagli autori sul laminato Tetra Pak si riportano in figura 4.2 i risultati delle tre prove eseguite in ciascuna delle direzioni MD, CD e a 45° applicando una velocità di deformazione pari a 0,5 mm/min.

Sovrapposizione MD, 45° e CD

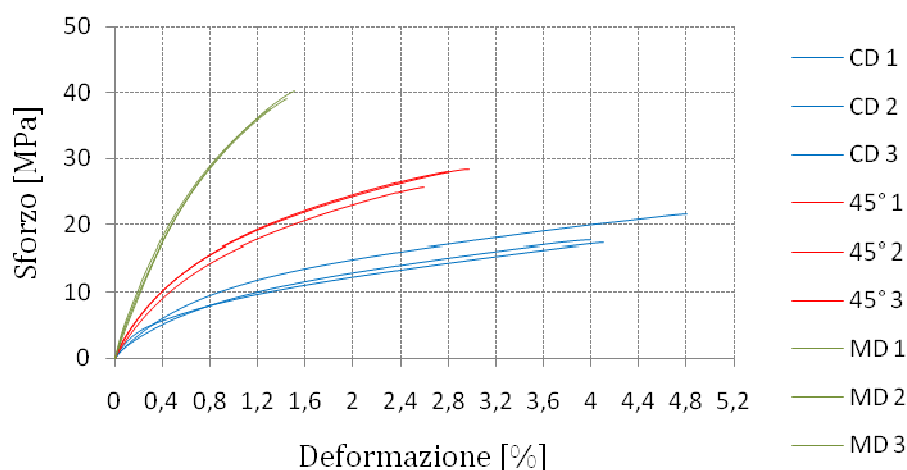


Grafico 4.2: diagramma sforzo-deformazione

Le caratteristiche salienti delle curve sforzo-deformazione nei grafici 4.1 e 4.2, per le quali il punto finale di ciascuna curva individua la rottura del campione, sono le seguenti:

- in direzione MD si evidenzia una maggiore resistenza ma una minore duttilità;
- in direzione CD si evidenzia una minore resistenza ma una maggiore duttilità;
- in direzione a 45° si manifesta un comportamento intermedio;
- in tutte le direzioni considerate si può notare una transizione graduale tra regime elastico ed elasto-plastico che rende difficile la determinazione di un preciso valore di sforzo al limite elastico.

Con riferimento alle prove su laminato Tetra Pak si osserva quanto segue. La dispersione dei risultati che si nota dai grafici, praticamente assente nella direzione macchina, è più accentuata nelle direzioni 45° e CD. Le curve 45° 1 e 2 si sovrappongono perfettamente, mentre la 45° 3 risulta avere minore curvatura e resistenza ultima rispetto alle prime due. Osservazione analoga può essere fatta nel caso dei provini ricavati lungo la direzione CD: CD 1 e 2 sono molto prossime ma differiscono dalla curva CD 3. Tali risultati sono giustificati dal fatto che, sia la resistenza ultima che il legame costitutivo, risentono dalla presenza delle “crease lines”. Solo nel caso di provini estratti in direzione MD si è potuto evitarne la loro presenza. Si è concluso che maggiore è la similitudine tra i tracciati presenti nei campioni minore è la dispersione dei risultati. Infine, sempre dai grafici 4.1 e 4.2, si può notare come le curve siano abbastanza lineari fino ad un certo valore di sforzo superato il quale la risposta diventa non lineare.

Al fine di verificare se esista una dipendenza del legame costitutivo del laminato Tetra Pak dalla velocità con cui si impongono le deformazioni, è stata condotta una nuova campagna, anch'essa composta da 3 prove per direzione, caratterizzata da una velocità di deformazione pari a 2 mm/min. Confrontando la media delle curve ottenute dalle distinte campagne, si è potuto notare che la dispersione esistente tra curve medie ottenute con diverse velocità di deformazione è paragonabile alla dispersione esistente tra curve ottenute applicando la medesima velocità di deformazione (grafico 4.3).

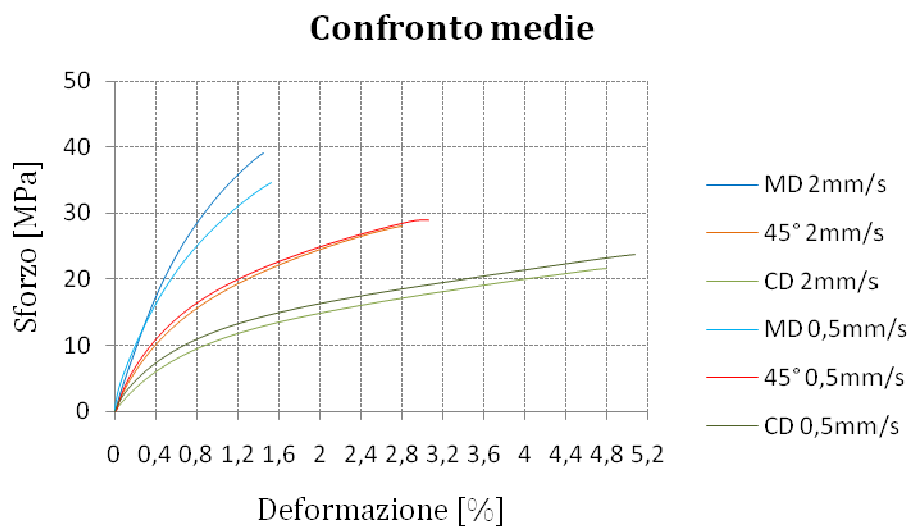


Grafico 4.3: diagramma sforzo-deformazione

I risultati medi ottenuti dalle successive prove di carico e scarico sono riportate nei grafici 4.4, 4.5 e 4.6. Tali prove sono state effettuate, con una velocità di deformazione pari a 0,5 mm/s. Al fine di confrontare i risultati si riportano anche le curve di carico scarico proposte da Harrysson e Ristinmaa (grafico 4.7).

Grafico MD estensimetro

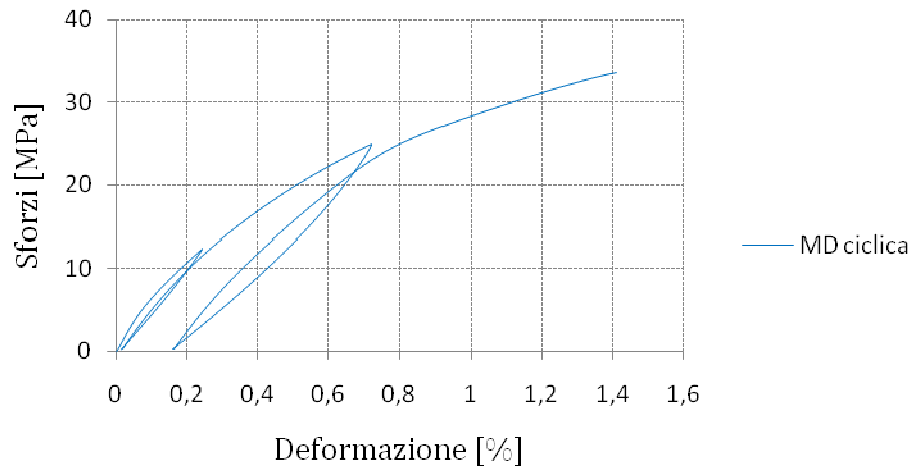


Grafico 4.4: diagramma sforzo-deformazione in direzione MD

Grafico 45° estensimetro

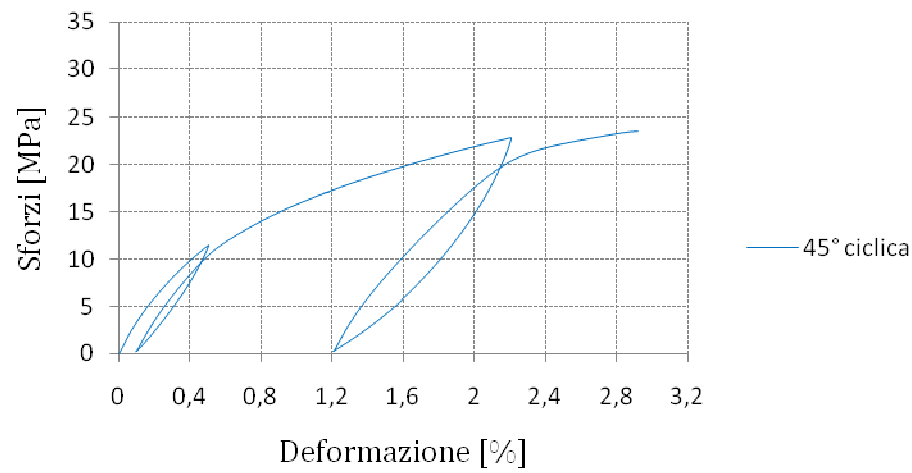


Grafico 4.5: diagramma sforzo-deformazione in direzione CD

Grafico CD estensimetro

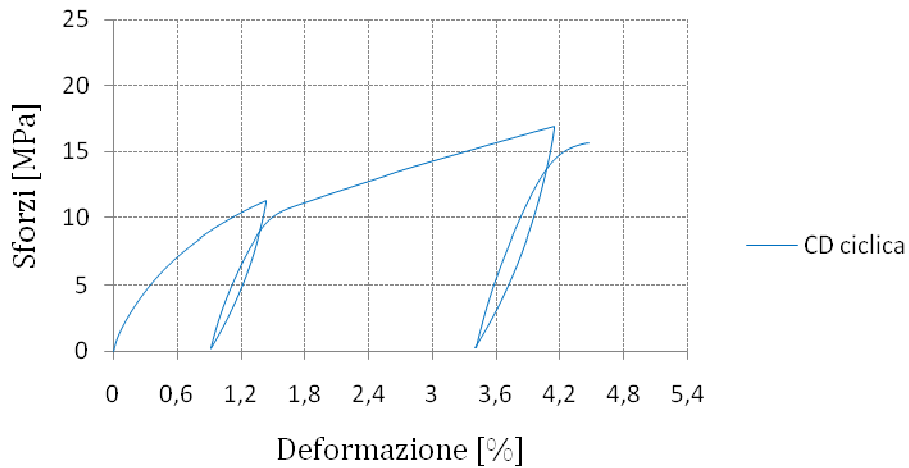


Grafico 4.6: diagramma sforzo-deformazione in direzione 45°

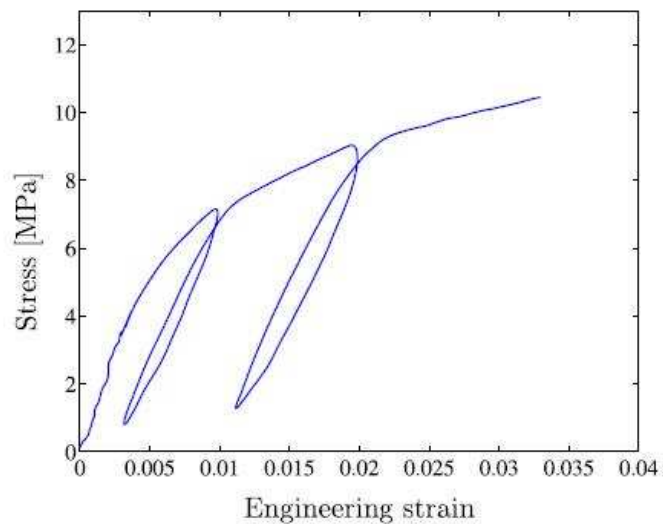


Grafico 4.7: Diagramma sforzo-deformazione in direzione CD

Così come avviene per la carta descritta da Harrysson e Ristinmaa anche per il laminato Tetra Pak si può chiaramente notare come alcune parti della deformazione non siano recuperate, motivando così la necessità di un modello elasto-plastico per la descrizione del comportamento del materiale. Riguardo alla spiegazione fisica del comportamento plastico, Seth e Page dimostrano sperimentalmente che la plasticizzazione delle fibre è la causa principale della plasticizzazione del materiale (Harrysson & Ristinmaa, 2008); (Seth & Page, 1983).

Dai grafici sopra riportati si può inoltre notare come al laminato Tetra Pak, così come tutti i materiali a matrice cartacea, manchi sia la linearità del legame sforzo-deformazione che un punto netto di transizione tra la deformazione elastica e quella elasto-plastica. Dalle prove cicliche si può tuttavia osservare come risultato trascurabile il “danneggiamento” nel senso della “damage mechanics”; ciò permette di assumere il valore del modulo elastico di Young pari al coefficiente angolare della retta che definisce la fase di scarico: dalle prove eseguite risulta che il legame sforzo-deformazione nella fase di scarico coincide con quello della fase di carico in campo elastico, come si può vedere nel grafico sottostante.

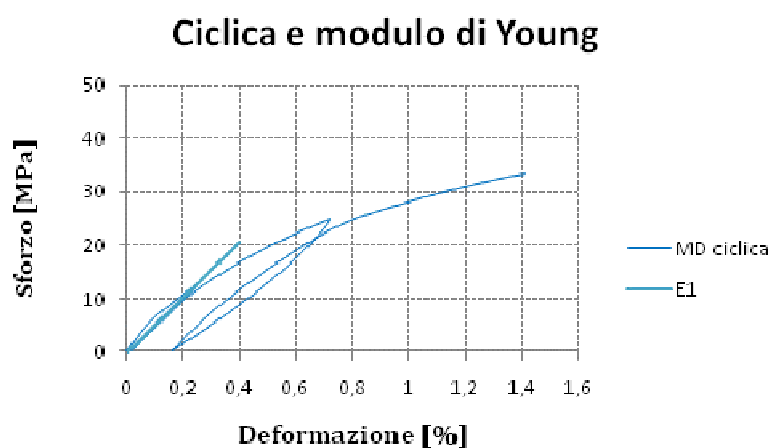


Grafico 4.8: diagramma sforzo-deformazione e modulo elastico di Young

In tabella 4.1 vengono riportati i valori dei moduli elastici di Young E_{CD} , E_{MD} , E_{45° ottenuti, rispettivamente, da prove monoassiali condotte in direzione MD, CD e 45° :

Modulo di Young	[MPa]
E_{MD}	5113
E_{CD}	2278
E_{45°	3696

Tabella 4.1: valori dei moduli elastici di Young E_{11} , E_{22} , E_{12}

Riportiamo in seguito la parte elastica del legame sforzo deformazione in direzione MD, CD e 45° (grafico 4.9):

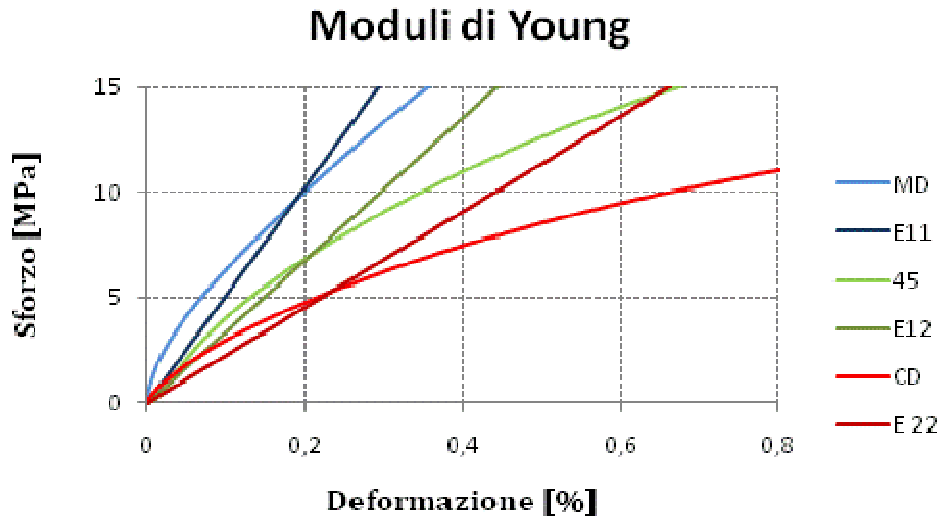


Grafico 4.9: diagrammi sforzo-deformazione e moduli elastici di Young

Dal grafico 4.9, inoltre si possono ricavare i valori dei punti di snervamento nelle direzioni considerate. Tali punti coincidono con l'intersezione tra la curva che descrive il legame costitutivo e la retta avente come pendenza il modulo elastico. Tali valori vengono riportati in tabella 4.2:

Direzione	σ (snervamento) [MPa]	ε (snervamento)
MD	10	0,002
CD	5	0,002
45°	7,35	0,002

Tabella 4.2: valori degli sforzi e delle deformazioni rispettivi ai punti di snervamento

Oltre ai moduli di Young riportati sopra, per definire il comportamento elastico del materiale nel piano MD-CD, sono necessari i coefficienti di contrazione laterale o coefficienti di Poisson ν_{12} e ν_{21} e il modulo di taglio G_{12} ; gli indici 1 e 2 indicano rispettivamente le direzioni MD e CD.

Al fine di determinare i coefficienti di Poisson è necessario misurare la contrazione laterale del provino durante la conduzione di semplici prove monoassiali. Durante le prove su laminato Tetra Pak non è stato possibile misurare tali deformazioni in quanto non si disponeva di strumenti adeguati. Si riportano le prove condotte da Harrysson e Ristinmaa nel grafico 4.9, dal quale si possono osservare le relazioni tra le deformazioni assiali e laterali durante le prove monoassiali in direzione MD e CD. Dalle curve si evince che il rapporto esistente tra le deformazioni, assiali e laterali, si mantiene sostanzialmente costante sia in campo elastico che in campo elasto-plastico.

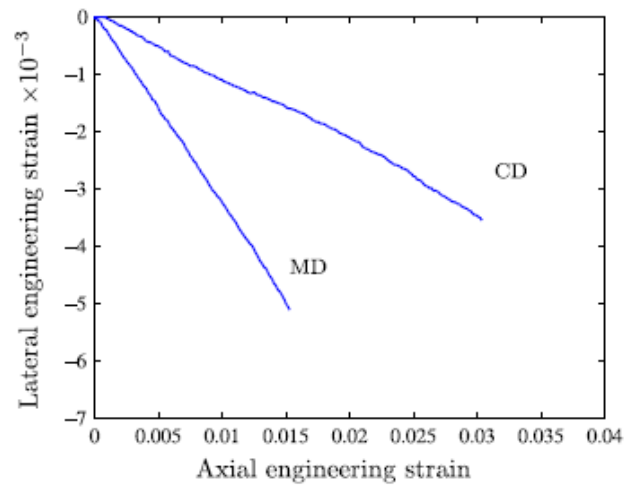


Grafico 4.9: andamento delle curve MD e CD nel piano delle deformazioni assiali e laterali

Per il materiale testato da Harrysson e Ristinmaa si ottiene il seguente valore del coefficiente di Poisson ν_{12} , da prova monoassiale in direzione MD:

$$\nu_{12} = \frac{d\varepsilon_{CD}}{d\varepsilon_{MD}} = \frac{0,005}{0,015} = 0,3;$$

noti i moduli di Young $E_{MD}=3050$ MPa e $E_{CD}=3050$ MPa e il modulo di contrazione laterale ν_{21} , si può ricavare dalla simmetria della matrice di rigidità elastica che lega gli sforzi alle deformazioni elastiche:

$$\nu_{12} \cdot E_{CD} = \nu_{21} \cdot E_{MD} \Rightarrow \nu_{21} = \frac{\nu_{12} \cdot E_{CD}}{E_{MD}} = 0,12.$$

Tale valore è in accordo con il valore ricavabile dalla curva CD del grafico 4.9 tale per cui:

$$\nu_{21} = \frac{d\varepsilon_{MD}}{d\varepsilon_{CD}} = \frac{0,0035}{0,03} = 0,12$$

Per il laminato Tetra Pak si è adottato il valore ν_{12} pari a 0,37. Questo è il valore ottenuto sperimentalmente da Xia nella propria tesi di laurea su un laminato analogo a quello Tetra Pak ma avente uno spessore leggermente più ridotto: 0,46 mm.

Sfortunatamente, il modulo di taglio G_{12} non può essere facilmente misurato. Tuttavia, poiché sono state condotte prove monoassiali anche a 45° , usando il modulo di Young E_{45} da esse ottenuto, è possibile calcolare il modulo taglio nel piano usando una trasformazione di coordinate come quella proposta da Jones e semplificata nella formula sottostante (**Jones, 1999**).

$$G_{12} = \frac{E_{MD} \cdot E_{CD} \cdot E_{45^\circ}}{-E_{45^\circ} \cdot E_{CD} + 2 \cdot E_{45^\circ} \cdot E_{CD} \cdot \nu_{12} - E_{45^\circ} \cdot E_{MD} + 4 \cdot E_{MD} \cdot E_{CD}} = 1688 [MPa];$$

Le costanti elastiche relative alla direzione fuori piano E_{zD} , G_{13} e G_{23} , così come i coefficienti di Poisson ν_{13} e ν_{23} non vengono considerati nel presente studio che è relativo a “free foils” soggetti ad uno stato piano di sforzi.

4.2.3 Osservazioni conclusive

Il laminato in oggetto, così come carta e cartoni, debbono essere considerati materiali anisotropi in quanto la risposta meccanica è strettamente dipendente dalla direzione del carico sollecitante. Il comportamento meccanico è legato in particolar modo alla forma delle fibre, alla densità del legame e al processo produttivo. Proprio la marcata anisotropia della carta rende molto complessa la modellazione di tale continuo triassiale, soprattutto in relazione ai differenti meccanismi che regolano il comportamento della carta nel piano e fuori dal piano (**Bolzon, Garbowski, Maier, & Novati, 2008**).

Altri fattori che caratterizzano il comportamento meccanico della carta e ne complicano lo studio sono la mancanza di linearità del legame sforzo-deformazione e l'inesistenza di un punto netto di transizione tra la deformazione elastica e quella elasto-plastica. Se si scarica il provino partendo da una configurazione non lineare degli sforzi e delle deformazioni si nota che il legame sforzo-deformazione nella fase di scarico coincide con quello della fase di carico in campo elastico; dunque il coefficiente angolare della retta che definisce la fase di scarico è pari al modulo elastico di Young, ovvero, risulta trascurabile il "danneggiamento" nel senso della "damage mechanics" (Bolzon, Garbowski, Maier, & Novati, 2008).

4.3 Prove monoassiali di trazione su un sistema di apertura

È stata eseguita, in parallelo, una seconda campagna di prove uniassiali di trazione presso la Stazione Sperimentale Carta Cartoni e Paste per carta (SSCCP). L'obiettivo di tali prove era quello di ottenere l'andamento della curva forza-spostamento per ciascun provino testato. I dati sperimentali conseguiti sono stati utilizzati per la caratterizzazione meccanica del sistema di apertura del campione in esame, un laminato composito prodotto dalla Tetra Pak. Il nostro contributo a questo progetto si è limitato all'esecuzione delle prove sperimentali, i cui risultati sono stati poi forniti alla professoressa Gabriella Bolzon e all'ingegnere Vladimir Buljak, che hanno elaborato tali dati per la realizzazione di un modello numerico del laminato.

4.3.1 Materiale e strumentazione

Il materiale d'interesse consiste in uno strato di alluminio rivestito da diversi polimeri posto all'interno di una carta più spessa, così come si può vedere in figura 4.6.



Figura 4.6: laminato composito e particolare del sistema di apertura

I campioni, presi in esame, provengono da due rotoli diversi dello stesso laminato composito e sono stati ricavati dalla direzione longitudinale del rotolo (“machine direction”). In particolare sono state analizzate due differenti configurazioni dei provini, come rappresentato in figura 4.7: simmetrico (a) e non-simmetrico (b). La seconda configurazione è stata pensata per provocare la propagazione di cricche lungo la linea simmetrica, in quanto poteva essere considerata la modalità di frattura principale.

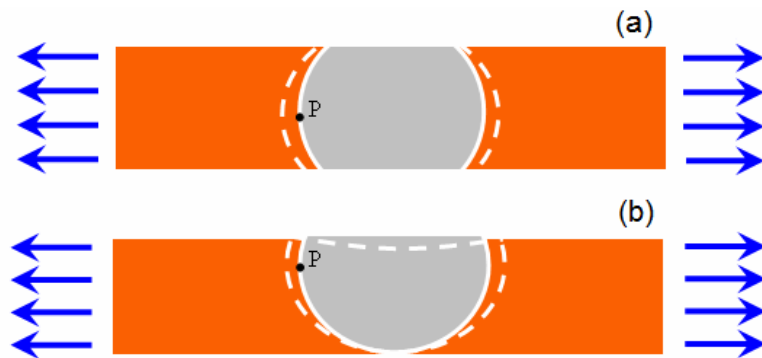


Figura 4.7: configurazione dei provini: (a) simmetrico e (b) non-simmetrico

È stato sottoposto a prove di trazione lungo la direzione longitudinale anche un laminato di diversa composizione rispetto il precedente, avente un sistema d’apertura di forma quadrangolare piuttosto che circolare (figura 4.8). Le sperimentazioni su questo campione sono state fatte nella sola configurazione simmetrica.

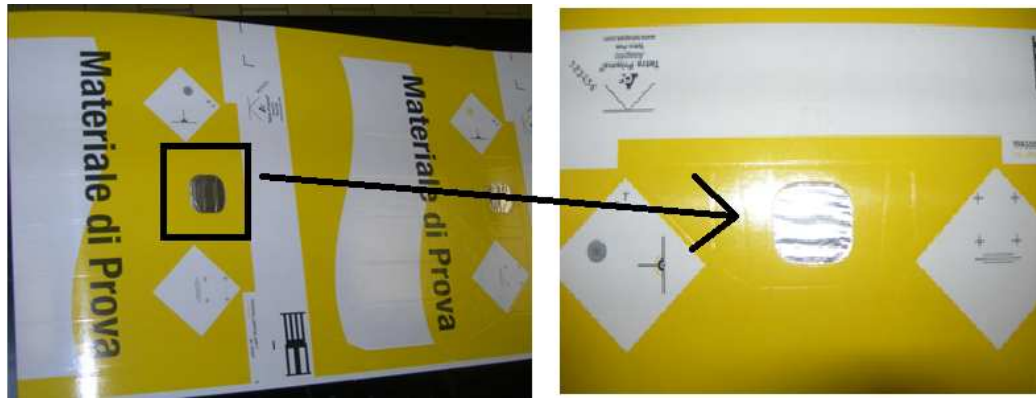


Figura 4.8: laminato composito e particolare del sistema di apertura

Per ogni prova di trazione sono stati usati delle dimensioni standard: 15 mm di larghezza e 180 mm di lunghezza (naturalmente la lunghezza del provino è superiore per consentire il suo inserimento negli afferraggi).

La macchina di prova utilizzata in questi test è un dinamometro elettronico monocolonna “Acquati” modello AG MC3 (figura 4.9), il cui funzionamento è analogo al sistema di prova “Instron” descritto nel paragrafo precedente. L'unica differenza nei due strumenti consiste nella cella di carico; per questa prova viene utilizzata una cella da 100 N.



Figura 4.9: – dinamometro elettronico monocolonna “Acquati” AG MC3

Infine, per quanto riguarda l’acquisizione dei dati, si è fatto uso del software fornito dall’azienda produttrice in allegato al dinamometro.

4.3.2 Esposizione risultati

La prima configurazione testata è stata quella simmetrica, la cui geometria ha mostrato un’ampia ripetibilità. Praticamente in tutti gli esperimenti eseguiti, la propagazione della cricca è avvenuta solo lungo il bordo dell’area interessata come si può notare in figura 4.10.



Figura 4.10: prova di trazione su un campione simmetrico

Le curve forza-spostamento ricavate da questa configurazione di prova sono riportate nel grafico 4.6, nella quale compaiono i risultati di quattro diversi provini ottenuti dal primo rotolo di laminato.

Prova di trazione

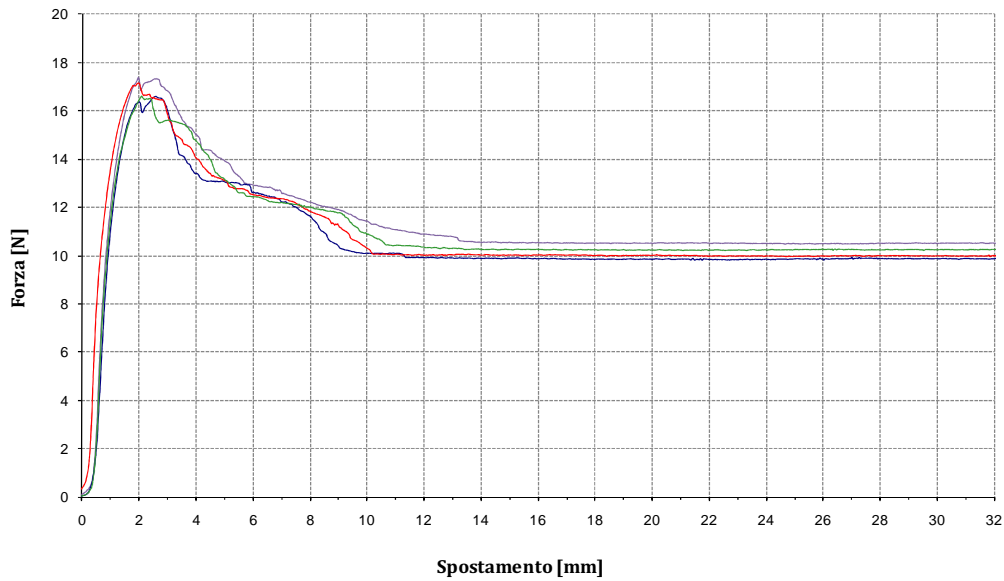
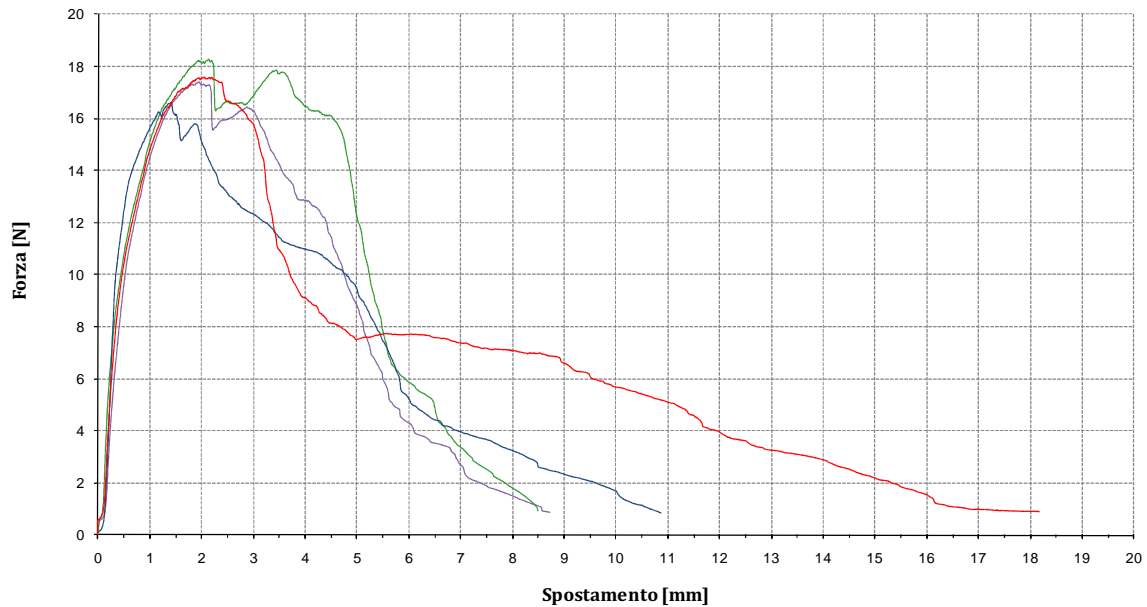


Grafico 4.6: – curve forza-spostamento per la configurazione simmetrica

La curva mostra il particolare comportamento del materiale caratterizzato dalla caduta della capacità di carico raggiunto un certo livello di forza, seguita da un comportamento a “plateau” fino a valori di spostamento molto alti per un valore del carico applicato praticamente costante. Nella prima parte della curva si può osservare un comportamento non-lineare, poiché ha inizio la deformazione plastica. Il calo di resistenza corrisponde al processo di frattura dell’alluminio: la rottura inizia prima del raggiungimento del massimo valore di forza ed è completamente terminata una volta che è stato raggiunto l’andamento a “plateau”. Da quel punto in poi il carico viene completamente trasferito dal polimero del laminato.

Le prove eseguite sui provini ottenuti dal secondo rotolo hanno fornito un comportamento abbastanza differente. Nel grafico 4.7 sono riportate le curve forza-spostamento risultanti dai questi nuovi campioni simmetrici.

Prova di trazione



Grarico 4.7: curve forza-spostamento per la configurazione simmetrica

La principale differenza che si può notare rispetto le prove precedenti è la totale mancanza del comportamento a “plateau”. Difatti negli esperimenti precedenti, l’allungamento del provino continuava con un valore di forza costante fino a valori di spostamento molto alti; mentre in questi test i campioni subiscono una rottura immediata. Ulteriori differenze possono essere rilevate in una più rapida parte di softening. Comunque, fornendo una maggiore flessibilità al modello numerico, anche questo comportamento può essere analizzato senza grandi cambiamenti all’interno del modello stesso, attribuendo diversi parametri del materiale.

Le prove condotte sui campioni tagliati secondo la configurazione non-simmetrica mostrata in figura 4.7 (b) mostrano il formarsi di cricche multiple: due parallele e vicine alla linea media e, in alcuni casi, si crea una cricca lungo il bordo (figura 4.11). Quest’ultima rottura, a causa della grande curvatura della zona, non può essere considerata come modalità di rottura principale. Si può quindi osservare la mancanza di ripetibilità nella maggior parte degli esperimenti eseguiti con questa configurazione, messa in evidenza dal diverso numero e modalità di cricca fra un provino e l’altro.

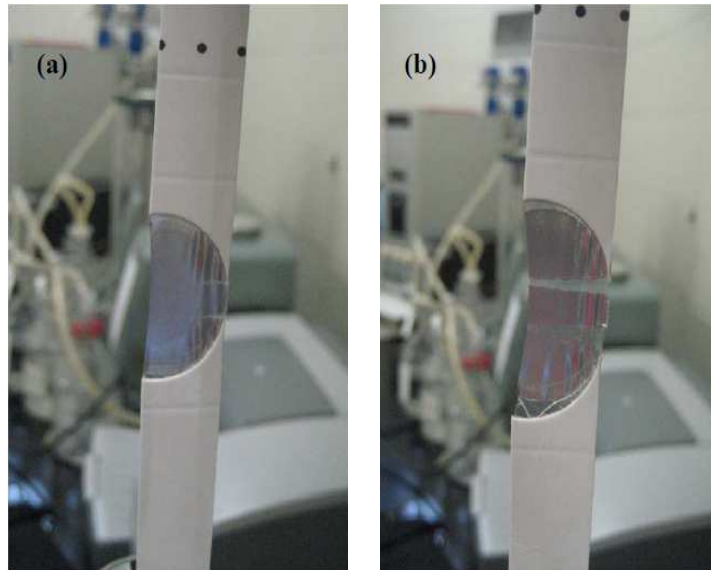


Figura 4.11: propagazione di cricche nel campione non-simmetrico

Si riportano di seguito le curve forza-spostamento ottenute in questa configurazione su tre diversi provini. Si può osservare una certa fluttuazione della curva e della forza misurata, dovuta probabilmente alla modalità di rottura multipla dei campioni (grafico 4.8).

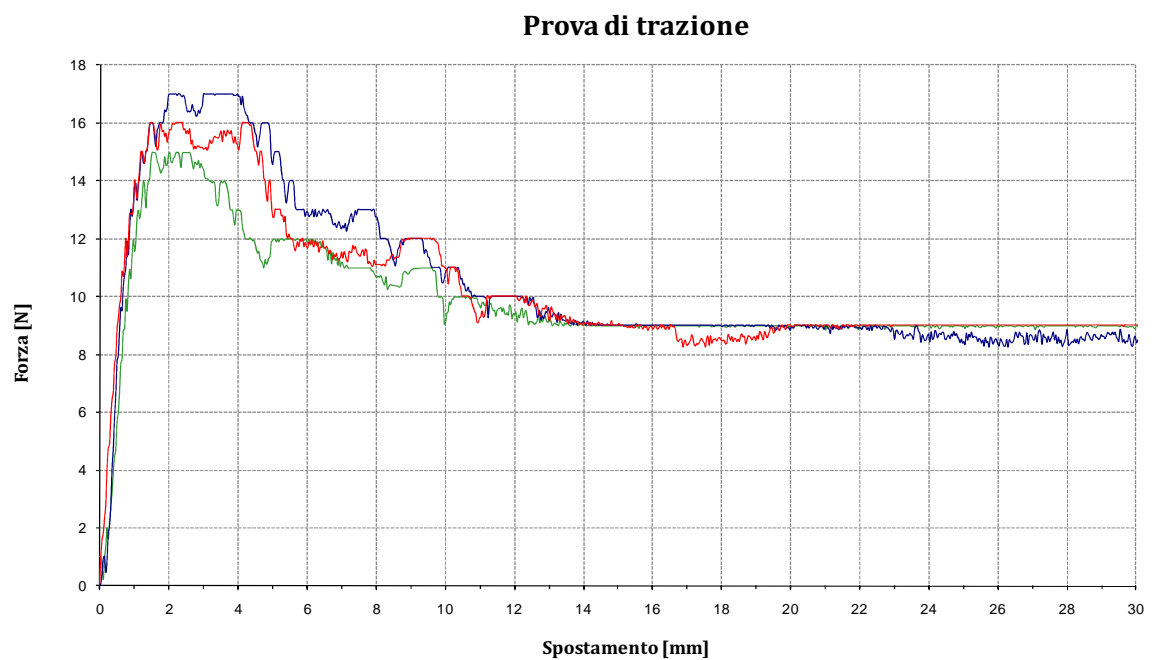


Grafico 4.8: curve forza-spostamento per la configurazione non-simmetrica

Infine si riportano in grafico i risultati ottenuti dalle prove di trazione effettuate su cinque provini ad apertura quadrata.

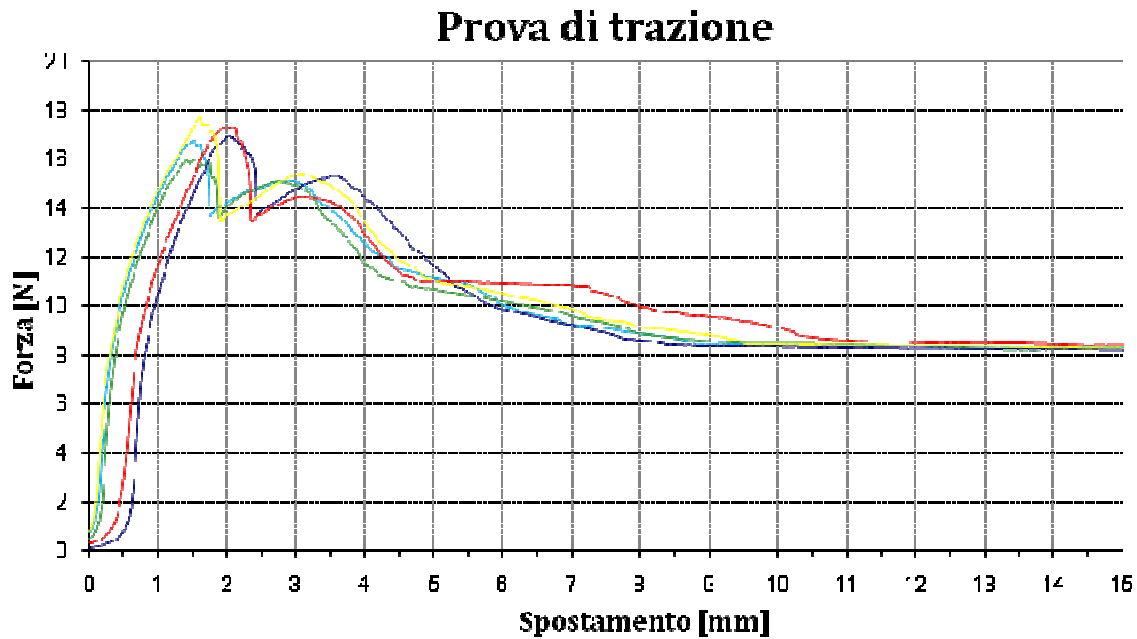


Grafico 4.9: curve forza-spostamento per il campione con apertura quadrata

Dal grafico 4.9, si nota una certa analogia di comportamento fra questo campione e il primo campione sottoposto a trazione nella sua configurazione simmetrica. In particolare si ripete la caduta della capacità di carico, raggiunto un certo livello di forza, e il comportamento a “plateau”, una volta terminato il processo di rottura dell’alluminio.

4.3.3 Osservazioni conclusive

L’esecuzione delle prove non ha causato nessun particolare problema, né relativo alla preparazione dei provini né riguardante la misura dei risultati.

I provini considerati comprendono non solo il laminato d’alluminio, d’interesse in queste prove, ma anche la carta del composito governato da un modello costitutivo più complicate. Questa circostanza complica la procedura di caratterizzazione, poiché, o si suppone di conoscere a priori le proprietà della carta, o queste devono essere incluse nella procedura d’identificazione. Nel primo caso l’errore sulla valutazione dei parametri

dell'alluminio viene influenzato dall'incertezza delle proprietà della carta circostante, mentre nel secondo caso la procedura d'identificazione risulta piuttosto complicata a causa del grande numero di parametri da determinare.

4.4 Prove a pressione

Nell'industria cartaria è abitudine misurare la resistenza a rottura di carte e cartoni mediante uno strumento detto scoppiometro (figura 4.12). Questo strumento esegue una prova di pressurizzazione di una piccola membrana circolare della carta da testare, sotto condizioni standardizzate, e fornisce come unico risultato la pressione di scoppio. Ci si rende conto, immediatamente, della povertà dei dati sperimentali che questo strumento è in grado di fornire. Inoltre, la dinamica con cui avviene il gonfiaggio progressivo della membrana suggerisce che è possibile mettere in relazione la pressione nel contenitore con la geometria della configurazione deformata. Uno strumento in grado di rilevare le deformazioni della membrana permette lo svolgimento di una prova di questo tipo: s'imponga una pressione nel contenitore e si misuri la geometria della deformata, si aumenti la pressione e si ripeta la misura, e così via fino allo scoppio.



Figura 4.12: scoppiometro in uso presso SSCP

Proprio queste considerazioni hanno portato alla creazione di un nuovo strumento di prova a pressione, denominato membranometro, nato dalla collaborazione fra il Dipartimento di Meccanica e il Dipartimento di Strutture del Politecnico di Milano.

Sono quindi state svolte una serie di prove sperimentali utilizzando questo nuovo strumento su tre diversi campioni con la collaborazione dell'ingegnere Marco Talassi.

La prova membranometrica si suddivide in tre diverse fasi:

- Progettazione della prova
- Esecuzione della parte sperimentale
- Elaborazione delle misure

La progettazione della prova consiste, innanzitutto, nello stabilire sulla base delle conoscenze reperibili del materiale da testare, un valore approssimato della pressione di scoppio, mediante un'analisi ad elementi finiti condotta assumendo un legame costitutivo plausibile. È necessario, poi, stabilire un adeguato numero di step di pressione su cui effettuare le misure; il numero di step è tanto maggiore quanto è più complesso l'aspetto plastico del legame che si vuole identificare. Il terzo aspetto da decidere riguarda il numero e la distribuzione dei diametri su cui effettuare le misure, assumendo una distribuzione di diametri uniforme sull'angolo giro. Il numero di diametri cresce allorché s'ipotizza un comportamento anisotropo o la disomogeneità del materiale. L'ultimo parametro da stabilire riguarda il numero di punti di misure su ogni diametro; è utile che tale numero cresca in ragione sia della complessità del legame, sia della tendenza all'anisotropia.

Scelti tutti i parametri utili all'esecuzione della prova, si può passare alla parte sperimentale vera e propria. Innanzitutto, si salda il provino mediante il sistema di fissaggio precedentemente descritto, in corrispondenza del foro centrale. Successivamente si pressurizza il recipiente fino al primo livello di pressione predeterminato e si esegue la scansione dei diametri mediante profilometro, impostando i parametri stabiliti nella fase di progettazione della prova. Si ripete questa fase per tutti i valori di pressione predeterminati. Eventualmente si porta a scoppio il provino per misurare la corrispondente pressione.

L'elaborazione delle misure, di cui si è occupato integralmente l'ingegnere Marco Talassi, si articola in tre fasi:

- Trattamento dei dati acquisiti durante la fase sperimentale al fine di costruire una base di dati, in cui ad ogni step di pressione sono associati tanti vettori quanto il numero di diametri misurati, ognuno dei quali è costituito di un numero di spostamenti, preso pari ai punti campionati su ogni diametro.
- Calcolo del profilo medio per un determinato campione
- Confronto con i risultati di alcune simulazioni numeriche. Il modello costitutivo adottato è quello di Hill con incrudimento esponenziale, mentre i parametri sono stati calibrati sulla base di prove di trazione precedenti.

4.4.1 Materiale e strumentazione

Come già accennato in precedenza col membranometro sono stati testati tre differenti tipi di carta forniti anch'essi dalla Tetra Pak: CLC80, Duplex 80 e Duplex 260.

Da ciascun campione sono stati ricavati 6 provini, ognuno dei quali è stato sottoposto a gonfiaggio mediante membranometro, secondo il procedimento già descritto. Le pressioni a cui abbiamo rilevato la superficie deformata sono 100, 300, 500 e 700 mbar; in seguito la pressione è stata aumentata fino allo scoppio del provino.

Descrizione membranometro

Il membranometro è un apparato sperimentale-numerico che effettua l'identificazione parametrica su fogli sottili mediante elaborazione per analisi inversa di misure sperimentali che associano, in un esperimento di gonfiaggio di una membrana, alle pressioni rilevate le corrispondenti misure di spostamento della configurazione deformata **(Ageno, 2003)**.

Lo strumento si compone di due parti fondamentali: l'apparato sperimentale e l'unità di elaborazione.

L'apparato sperimentale è costituito dai seguenti componenti:

- Un recipiente pressurizzabile con aria in acciaio, dotato di doppia ghiera con apertura circolare del diametro di 10 cm, destinata al serraggio del provino da testare. Gli orli della ghiera esterna sono smussati a 45°, mentre il piano di serraggio è stato rettificato meccanicamente. Per garantire la tenuta dei provini e impedire eventuali fenomeni di scorrimento, è presente una lamatura circolare intorno l'apertura (figura 4.16). Infine, le ghiera sono mutuamente serrate mediante 4 coppie di bulloni e dadi. Il recipiente è dotato di manicotto filettato per l'alimentazione dell'aria.
- Un apparato di carico, quale un compressore o un impianto ad aria compressa.
- Un rubinetto di regolazione dell'aria compressa con range di 0,14-4 bar.
- Un filtro di ritenuta per particelle in sospensione in aria.
- Raccordi tubolari per aria compressa in PVC di diametro di 8 mm, e relativi giunti ad innesto rapido.
- Un profilometro laser per la misura degli spostamenti della membrana pressurizzata, di cui si parlerà più approfonditamente nel prossimo paragrafo.
- Un sistema di movimentazione del profilometro per consentire di eseguire le misure in più punti del provino.
- Un manometro digitale.

L'unità di elaborazione si compone di:

- Un calcolatore di prestazioni commisurate alla complessità dei modelli costitutivi implementati nel software.
- Un'interfaccia di acquisizione dei dati provenienti dall'apparato sperimentale.
- Un software dedicato alla simulazione a elementi finiti e a problemi d'ottimizzazione.

Una visione assonometrica del recipiente in pressione nel progetto iniziale è illustrata dal rendering in figura 4.13. La figura 4.14 fa vedere come il membranometro è stato realizzato in un primo tentativo, mentre le figure 4.15 e 4.16 mostrano le migliorie che sono state apportate allo strumento sia dalla Tetra Pak (cambiamento della flangia e del sistema di serraggio) che da noi (opacizzazione della ghiera superiore).

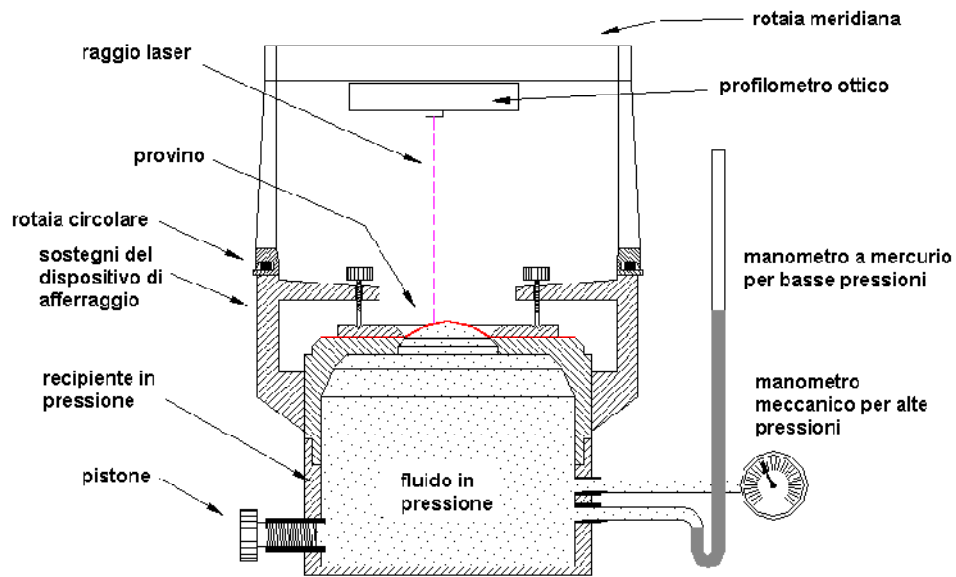


Figura 4.13: sezione funzionale del recipiente in pressione (nell'allestimento per utilizzo con fluido liquido pressurizzato da pistone scorrevole)

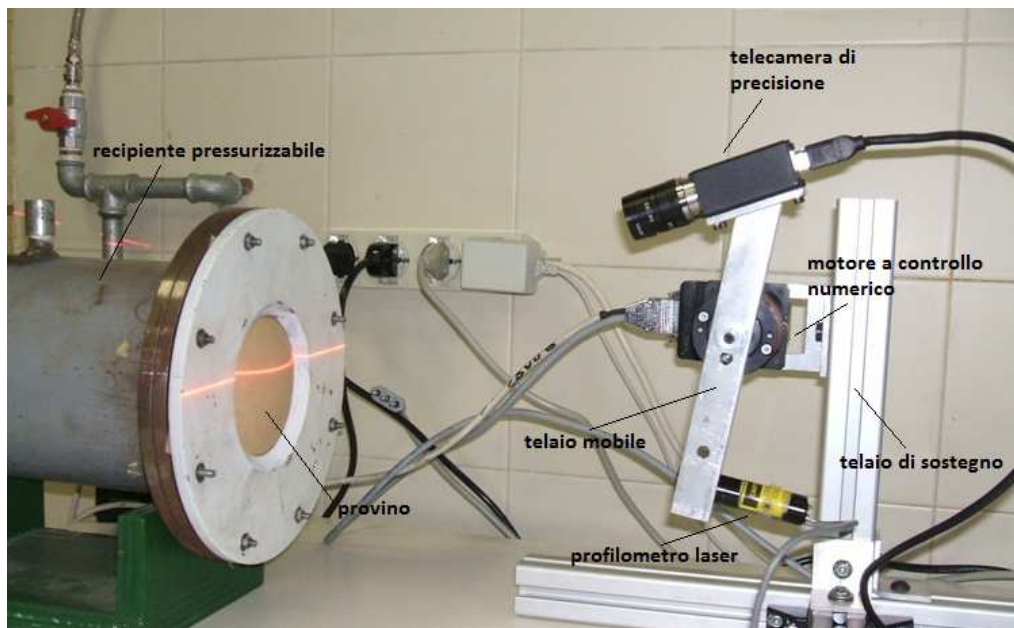


Figura 4.14: prima realizzazione del membranometro e profilometro laser



Figura 4.15: membranometro attuale

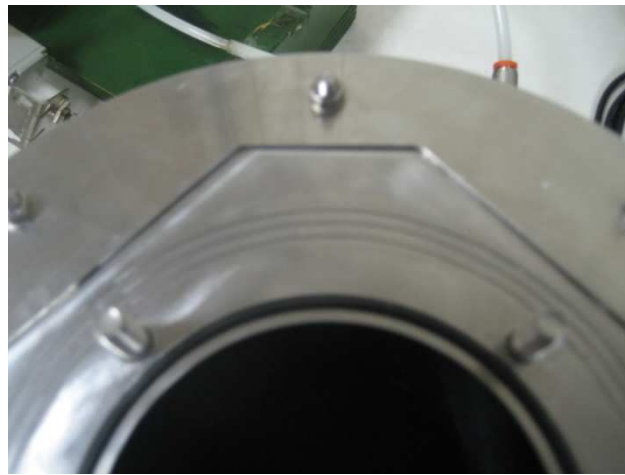


Figura 4.16: membranometro: particolare del sistema di fissaggio

Descrizione del profilometro laser

Il sistema di misura associato al membranometro (figura 4.14) si compone di:

- Un profilometro laser a lama di lunghezza d'onda 635 nm e potenza 20 mW; la lama di scansione è realizzata mediante la rapidissima rotazione del raggio laser a spazzare l'angolo al vertice della lama. Il raggio, quindi, compie un movimento simile a quello di un pendolo, in tempo tanto ridotti da apparire come una lama continua.
- Una telecamera di precisione per la visualizzazione a schermo della lama laser.
- Un telaio mobile in alluminio realizzato dal Dipartimento di Meccanica del Politecnico di Milano e dotato di alloggiamenti per il profilometro e la telecamera, e passante per il calettamento sull'albero del motore.

- Un motore a controllo numerico e relativo software di comando per eseguire il movimento rotatorio necessario alla misura degli spostamenti.
- Un telaio in profilati di alluminio per il sostegno del blocco motore-telaio mobile.

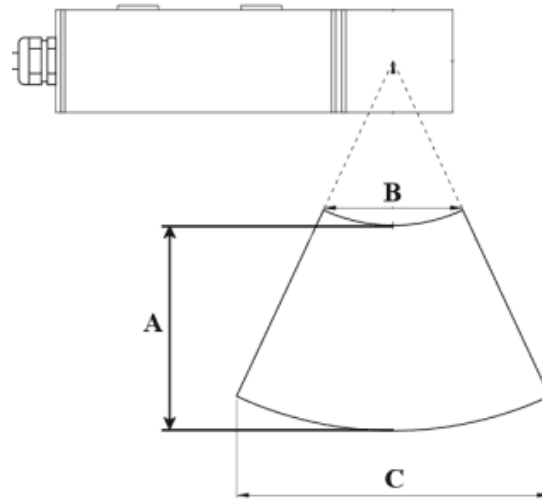


Figura 4.17: caratteristiche geometriche della lama di misura

4.2.2 Esposizione risultati

I dati forniti dal software del membranometro sono la posizione nello spazio di ciascun punto rilevato per ogni diametro scansionato dal profilometro laser. Questi dati vengono elaborati con una routine di Matlab, che restituisce come risultati alcune tabelle, in cui tali dati sono stati riordinati secondo la modalità già descritta, e delle immagini che ricostruiscono la geometria del profilo, come nelle figure 4.18. Si possono chiaramente distinguere il provino nella zona centrale in giallo e rosso, la ghiera superiore della flangia in blu e i dadi di fissaggio della stessa.

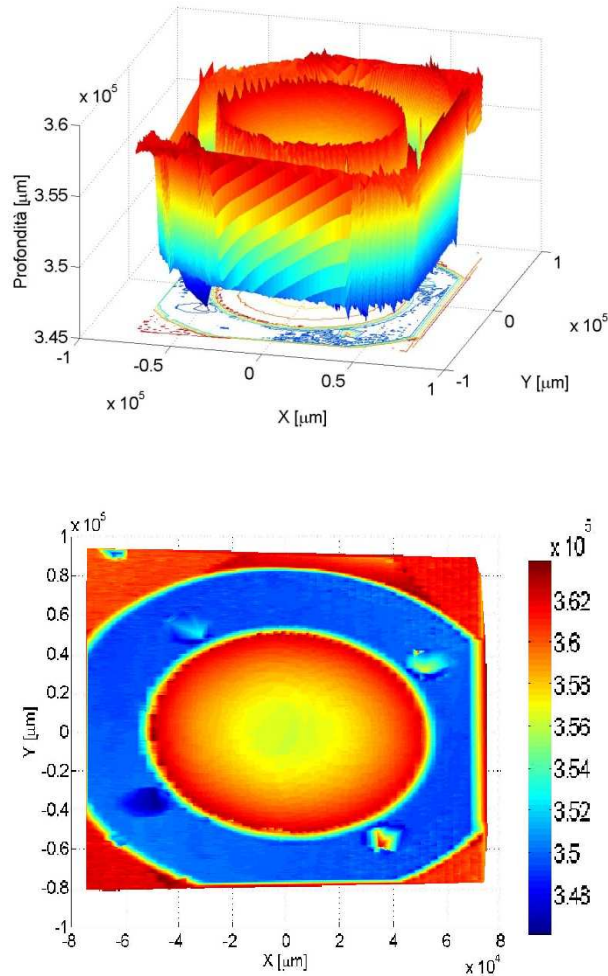


Figura 4.18: esempio della ricostruzione della geometria di un profilo

Il modello numerico costruito per simulare la prova membranometrica fornisce risultati che bene si accordano con i valori sperimentali misurati.

Sono qui di seguito riportati i valori di scoppio e le immagini dei provini scoppiati. Le foto dei provini sono orientate in modo che per i campioni Duplex 80 e CLC80 la direzione di macchina sia orizzontale, mentre per il campione Duplex 260 la direzione macchina è verticale. La rottura dei provini avviene secondo una linea parallela alla direzione trasversale, anche se per alcuni provini del CLC80 avviene la rottura dell'intero profilo come si nota dalle figure 4.19 (3) e (5).

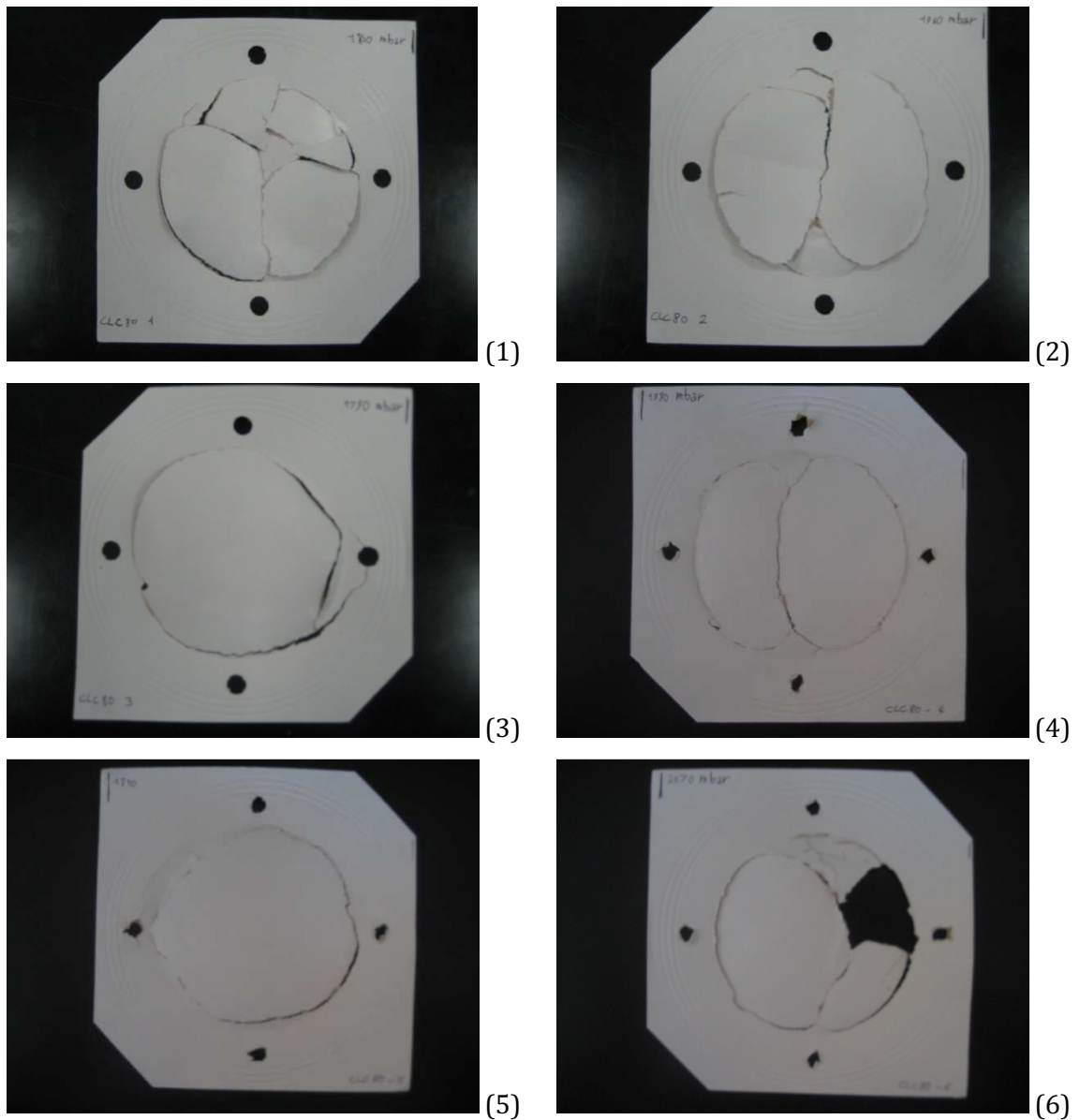


Figura 4.19: provini CLC80 scoppiati

CLC80

n° provino	pressione di scoppio	n° provino	pressione di scoppio
1	1850 mbar	4	1980 mbar
2	1960 mbar	5	1810 mbar
3	1790 mbar	6	2070 mbar
Media:	1910 mbar	Dev. Standard:	110 mbar

Tabella 4.1: valori della pressione di scoppio dei provini CLC80

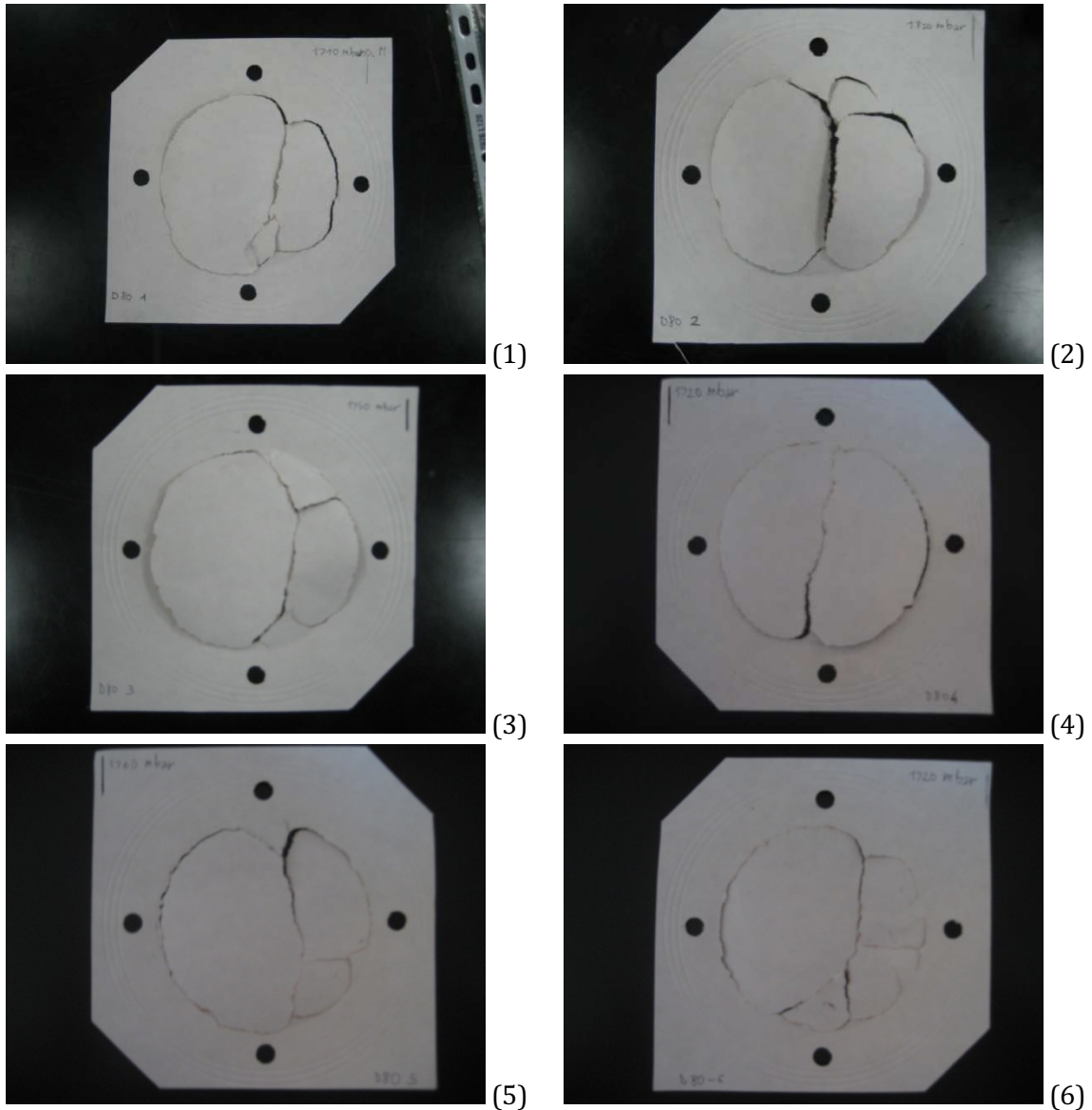


Figura 4.20: provini Duplex 80 scoppiati

Duplex 80

n° provino	pressione di scoppio	n° provino	pressione di scoppio
1	1710 mbar	4	1720 mbar
2	1820 mbar	5	1760 mbar
3	1750 mbar	6	1720 mbar
Media:	1747 mbar	Dev. Standard:	41 mbar

Tabella 4.2: valori della pressione di scoppio dei provini Duplex 80

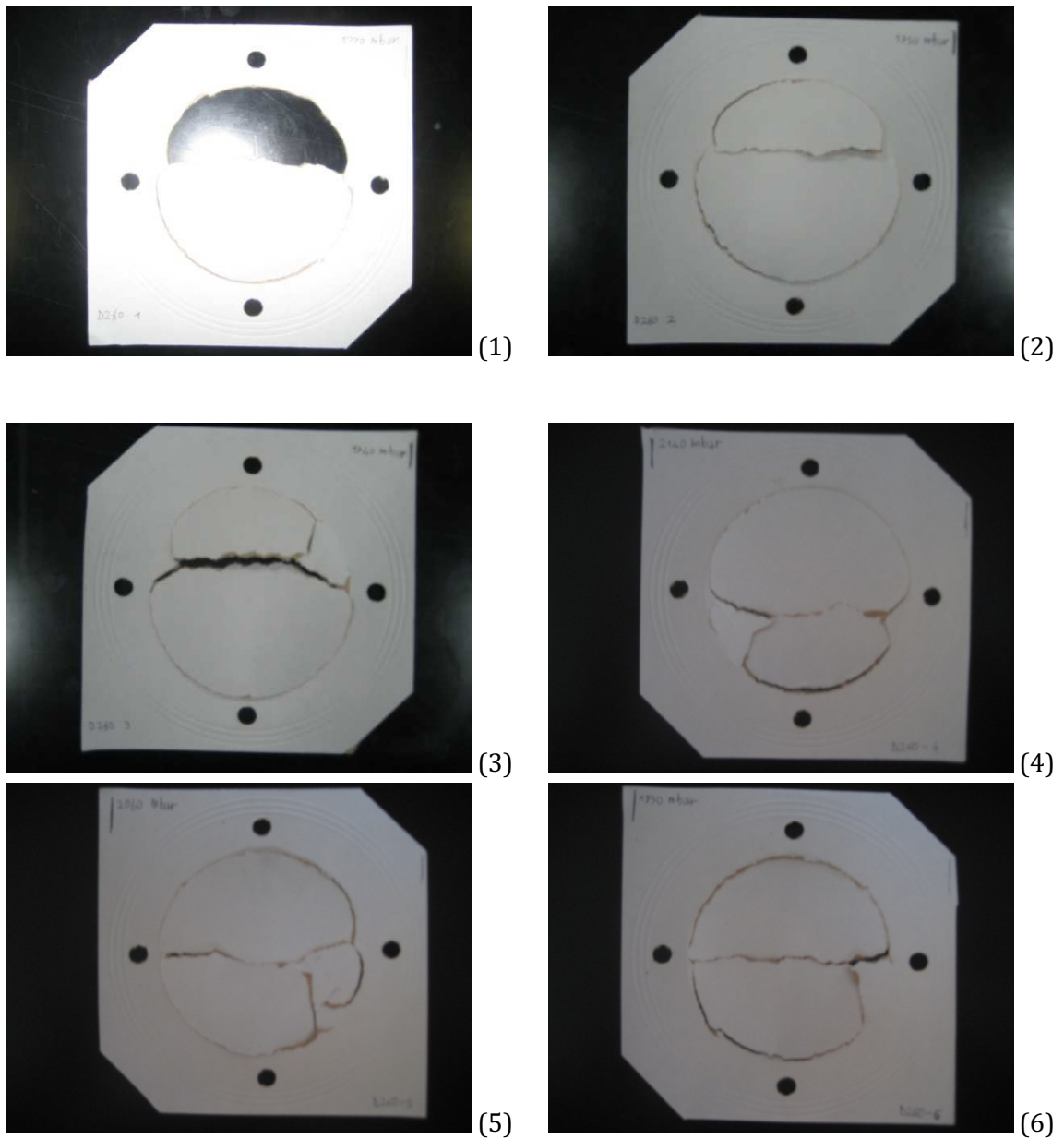


Figura 4.21: provini Duplex 260 scoppiati

Duplex 260

n° provino	pressione di scoppio	n° provino	pressione di scoppio
1	1770 mbar	4	2140 mbar
2	1950 mbar	5	2060 mbar
3	1940 mbar	6	1830 mbar
Media:	1948 mbar	Dev. Standard:	238 mbar

Tabella 4.3: valori della pressione di scoppio dei provini Duplex 260

4.2.3 Osservazioni conclusive

L'uso del profilometro laser, pur risultando molto comodo per rilevare le misure, ha causato inizialmente dei problemi legati alla riflessione della lama di luce da parte della ghiera superiore del membranometro. Questa problematica è stata risolta opacizzando la flangia d'acciaio con uno strato di vernice spray nera, come si può notare in figura 4.15.

Calibrazione del modello di Hill per laminato Tetra Pak

Nel capitolo finale della tesi si affronta la calibrazione del modello di Hill mediante analisi diretta e analisi inversa. Innanzitutto si determinano i parametri costitutivi del laminato in questione direttamente dalle curve sforzo-deformazione ottenute dalla campagna sperimentale monoassiale di cui si è parlato nel capitolo precedente.

L'interesse della tesi, tuttavia, è rivolto a caratterizzare il laminato mediante prove biassiali nel piano per i motivi spiegati nei capitoli precedenti. Perciò, noti i parametri costitutivi del laminato sono stati creati due modelli numerici mediante il software Abaqus per simulare proprio la sperimentazione biassiale e generare dei dati pseudo sperimentali necessari alla successiva identificazione parametrica.

Infine, utilizzando delle subroutine di Matlab scritte dall'ingegnere Tomasz Garbowski, assistente di professore presso la Technical University di Koszalin, e revisionate per l'esecuzione delle analisi, si è proceduto all'identificazione parametrica mediante analisi inversa con un problema ai minimi quadrati e algoritmo di minimizzazione "trust region".

5.1 Introduzione

Con riferimento al laminato Tetra Pak si descrive qui di seguito la calibrazione dei parametri da inserire nel modello di Hill, utilizzato per lo studio di problemi in stato piano di sforzo, sulla base dei seguenti elementi:

- prove monoassiali su strisce di laminato orientate nelle direzioni MD, CD e 45°;
- prova equibiaxiale di trazione (non svolta realmente; la risposta fornita da questa prova è ipotizzata “analoga” a quella documentata nell’articolo di Castro e Ostoja-Starzewski) **(Castro & Ostoja-Starzewski, 2003)**;
- valore del coefficiente di contrazione laterale ν_{12} pari a 0,73 e proposto da Xia per cartoni laminati a 5 strati **(Xia, 2002)**.

A valle di questa calibrazione, vengono eseguite delle analisi con ABAQUS su singolo elemento finito in stato di sforzo/deformazione uniforme che intendono essere delle simulazioni delle prove monoassiali effettivamente eseguite. Esse hanno i seguenti scopi:

- rappresentano una verifica della correttezza del modo in cui il modello costitutivo è stato operativamente immesso in Abaqus;
- evidenziano il grado di accuratezza con cui il modello costitutivo adottato riesce a rappresentare le prove monoassiali effettivamente eseguite.

Descriviamo di seguito lo schema logico-operativo che consente di stimare i parametri da inserire nel modello di Hill per analisi di stato piano di sforzo. In quanto segue gli indici 1,2,3 e x,y,z devono essere considerati del tutto equivalenti, intendendo che essi individuino, rispettivamente, le direzioni principali del materiale: MD, CD e ZD.

Parametri elastici:

- E_{MD} , E_{CD} e E_{45° : moduli di Young dei provini estratti lungo le direzioni principali piane e la diagonale;
- G_{12} : modulo di taglio; risulta esprimibile in funzione dei tre moduli di Young del punto precedente e del coefficiente di Poisson ν_{12} .

Snervamento:

- $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}$ e $\bar{\sigma}_{33}$: valori di sforzi normali che provocano snervamento in una prova uniassiale secondo la direzione indicata dagli indici;
- $\bar{\tau}_{12}$: valore di sforzo tangenziale che provoca snervamento in uno stato di taglio puro nel piano indicato dagli indici;

Incrudimento:

- Si è associato al criterio di snervamento di Hill un incrudimento di tipo isotropo, per il quale la forma della superficie di snervamento rimane fissa, mentre si ha un incremento delle dimensioni della stessa all'aumentare della deformazione plastica. Tale comportamento è stato descritto tramite la definizione di un opportuna curva nel piano $\varepsilon_{\text{eff}}^p - \sigma_{\text{eff}}$.

La funzione che modella lo snervamento, nel caso in cui lo stato di sforzo sia piano, può essere semplificata: le componenti della tensione diverse da zero diventano σ_x , σ_y e τ_{xy} e il criterio si riduce a:

$$f(\sigma) = \sqrt{(G+H)(\sigma_x)^2 - 2H(\sigma_y\sigma_x) + (H+F)(\sigma_y)^2 + 2N(\tau_{xy})^2} \leq \sigma_0 \quad (5.1)$$

$$\text{Dove } F = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} \right), \quad G = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} \right), \quad H = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} \right),$$

$$N = \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_{12}} \right)^2. \quad (5.2)$$

τ_0 è la tensione tangenziale di riferimento pari a $\sigma_0 / \sqrt{3}$.

Si richiamano in seguito i rapporti tensionali R_{ij} già introdotti nel capitolo 3.2 in quanto costituiscono un'utile semplificazione alla scrittura che diventa particolarmente significativa per gli scopi di questa tesi in quanto il programma di calcolo ABAQUS richiede, per definire la funzione di snervamento di Hill al suo interno, il valore di tali rapporti tensionali.

$$R_{11} = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\sigma_0}; R_{22} = \frac{\bar{\sigma}_{22}}{\sigma_0}; R_{33} = \frac{\bar{\sigma}_{33}}{\sigma_0}; R_{12} = \frac{\bar{\tau}_{12}}{\tau_0}.$$

Si nota dalle espressioni per il calcolo dei parametri F, G e H sopra riportate (5.2) che per il problema piano negli sforzi, la resistenza nel piano di formulazione del problema MD-CD è parzialmente influenzata dalla resistenza del materiale in direzione ZD. Lo sforzo al limite elastico $\bar{\sigma}_{33}$ è tuttavia di difficile determinazione sperimentale per l'assenza di macchine in grado di effettuare prove uniassiali di trazione in direzione fuori piano. Come sarà meglio dettagliato in seguito è comunque possibile determinare tale parametro attraverso una prova di trazione biassiale nel piano MD-CD.

Ottenuti i parametri costitutivi del laminato Tetra Pak sono stati costruiti due modelli matematici da sottoporre a prova biassiale simulata mediante l'utilizzo del programma commerciale di modellazione Abaqus versione 6.10-1. I modelli a elementi finiti che saranno utilizzati nell'identificazione parametrica per analisi inversa, di cui si parlerà ampiamente nei paragrafi seguenti, rappresentano entrambi un quarto del provino cruciforme da cui prendono spunto per la doppia simmetria che lo caratterizza. La differenza fra i due modelli consiste nella presenza o meno di un foro centrale (nel modello un quarto di foro), il cui scopo è la creazione rispettivamente di uno stato di sforzo eterogeneo o uniforme nella zona centrale del provino, a seconda della filosofia adottata nell'esecuzione della prova. Nella presente tesi si è scelto di adottare entrambe le strategie per verificarne la convenienza.

Seppure sia stato possibile identificare tutti i parametri costitutivi del materiale laminato attraverso analisi dirette, è stata effettuata un'identificazione parametrica mediante analisi inversa. I motivi di questa scelta si possono riassumere nelle due seguenti ragioni:

- L'analisi inversa è uno strumento più potente, dal punto di vista matematico, delle soluzioni adoperate nella calibrazione diretta del modello, quindi costituisce un rafforzamento di quanto eseguito dagli autori della presente tesi.
- Il modello costitutivo adottato per la descrizione del laminato Tetra Pak, come già spiegato in precedenza, è il modello di Hill. Tuttavia la procedura affrontata nell'identificazione parametrica può essere applicata, con qualche accorgimento, a modelli matematici più complessi, come ad esempio quello di Xia et al. descritto nel capitolo 3.

5.2 Analisi diretta

L'analisi diretta consiste nella determinazione di grandezze, quali spostamenti e forze, che costituiscano la risposta di un sistema definito da un modello matematico.

Nel caso in esame vista l'assenza di dati sperimentali di riferimento relativi a prove biassiali, si esegue un'analisi diretta per ricavare tali dati; questa procedura viene definita simulazione pseudo sperimentale.

5.2.1 Determinazione dei parametri elastici e plastici

I parametri necessari a definire il comportamento elastico del materiale sono già stati ampiamente discussi nel capitolo precedente; in seguito vengono riportati i valori delle costanti elastiche (tabella 5.1):

Parametro	Valore	Unità di misura
E_{11}	5113	MPa
E_{22}	2278	MPa
ν_{12}	0,37	
G_{12}	1688	MPa

Tabella 5.1: parametri elastici del laminato "Tetra Pak 470 mN"

Al fine di uniformare gli indici, in quanto segue, i moduli di Young E_{MD} e E_{CD} verranno rispettivamente indicati come E_{11} e E_{22} .

Anche i valori degli sforzi normali che provocano snervamento nelle direzioni principali MD e CD sono già stati assunti nel capitolo precedente; tali valori sono $\bar{\sigma}_{11}$ e $\bar{\sigma}_{22}$ e valgono rispettivamente 10 e 5 MPa.

Per quanto riguarda la determinazione del parametro $\bar{\sigma}_{33}$ esso risulta strumentale alla calibrazione del modello di Hill nei confronti del suo funzionamento in stati piani di sforzo e perde il suo significato originario di sforzo di snervamento nella direzione ortogonale al laminato. Per determinare questo parametro si fa ricorso, come descritto in quanto segue, ad una prova di trazione equibiassiale nella quale risulti identificabile la situazione al limite elastico. Come suggerito da Bazant e Jiràsek (**Bazant & Jiràsek, 2001**) nel caso di stato di sforzo piano equibiassiale, tale per cui:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_{equib.} \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

la condizione di snervamento (5.1) diventa:

$$f(\sigma) = \sqrt{(G + F) \cdot (\sigma_{equib.})^2} = \sigma_0$$

Inoltre dalle (5.2) si sa che

$$(G + F) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{11}^2} \right) = \left(\frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}_{33}} \right)^2;$$

in definitiva si ottiene:

$$\left(\frac{\sigma_{equib.}}{\bar{\sigma}_{33}} \right)^2 = 1 \Rightarrow \sigma_{equib.} = \bar{\sigma}_{33}$$

Essendo inteso che $\sigma_{equib.}$ rappresenta il valore di tensione equibiassiale che implica il raggiungimento del limite elastico.

In mancanza dell'attrezzatura sperimentale necessaria alla realizzazione della prova di cui sopra, si è deciso di affidarsi a quelle condotte da Castro e Ostoja-Starzewski e alla superficie di snervamento da loro proposta. Riportiamo in seguito il modello dedotto che approssima la superficie di snervamento ad un rettangolo nel piano σ_{MD} - σ_{CD} ottenuto

mediante prove condotte a deformazioni imposta, per la trattazione della quale si rimanda al capitolo 2.4. In figura 5.1 sono riportate in nero la superficie di rottura e l'approssimazione rettangolare della funzione di snervamento ottenuta da Castro e Ostoja-Starzewski. Dal momento che le prove monoassiali hanno fornito $\bar{\sigma}_{11} = 10$ MPa e $\bar{\sigma}_{22} = 5$ MPa, assumendo per analogia la superficie di snervamento riportata in rosso in figura 5.1, $\bar{\sigma}_{33}$ è stato fissato pari a 5 MPa.

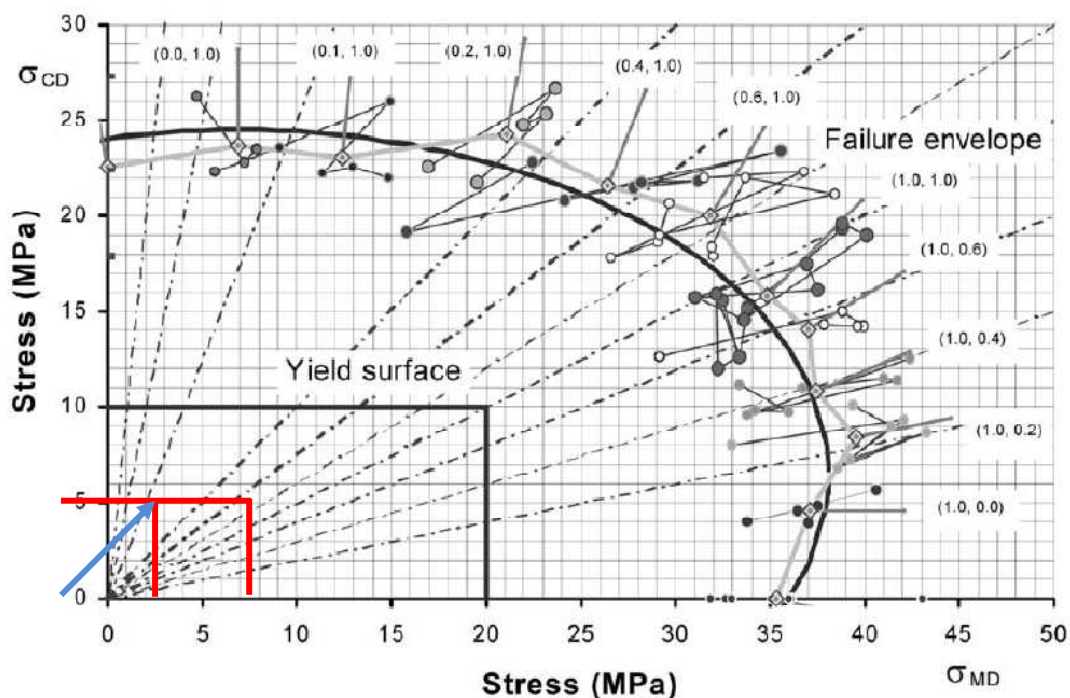


Figura 5.1: superficie di snervamento: secondo Castro e Ostoja-Starzewski in nero e per il laminato Tetra Pak in rosso.

Per quanto riguarda la determinazione del parametro $\bar{\tau}_{12}$, sarebbe necessaria una prova a taglio puro, la quale non è però realizzabile con questo materiale a causa della formazione di grinze. Le informazioni necessarie sono comunque desumibili da una prova monoassiale in direzione 45° . Nota la tensione di snervamento in questa direzione, pari a 7,35 MPa, è possibile determinare lo stato di sforzo per una giacitura parallela alle direzioni principali nel piano dal cerchio di Mohr in figura 5.2

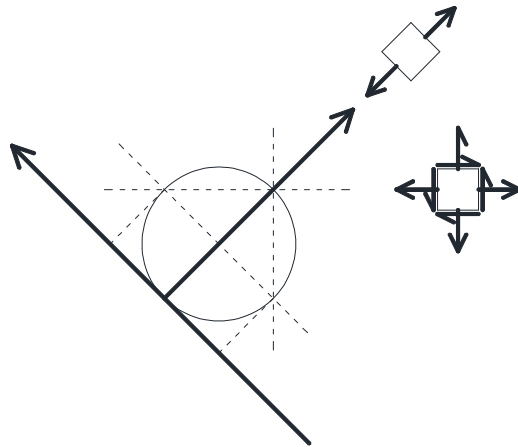


Figura 5.2: cerchio di Mohr per lo stato di sforzo monoassiale in direzione 45°

Gli sforzi ricavati sono:

$$\sigma_x = \sigma_y = 3,675 \text{ MPa}; \quad \tau_{xy} = -3,675 \text{ MPa}.$$

Considerando il valore dello sforzo efficace di snervamento σ_0 pari a 5 MPa e mettendo a sistema la funzione di snervamento con i valori di G, H, F e N si giunge al seguente valore:
 $\bar{\tau}_{12} = 5,42 \text{ MPa}$.

I valori di sforzo normale e tangenziale che provocano snervamento del materiale lungo le direzioni indicate sono riportati in tabella 5.2:

Sforzi	[MPa]
$\bar{\sigma}_{11}$	10
$\bar{\sigma}_{22}$	5
$\bar{\sigma}_{33}$	5
$\bar{\tau}_{12}$	5,42

Tabella 5.2: valori degli sforzi normali e tangenziali di snervamento

I valori ottenuti per i rapporti tensionali R_{ij} sono riportati in tabella 5.3:

R_{11}	2
R_{22}	1
R_{33}	1
R_{12}	1,877

Tabella 5.3: valori dei rapporti tensionali R_{ij}

Si analizza infine la legge che governa l'incrudimento isotropo di un materiale alla Hill esposta nel capitolo 2.3. Il grafico 5.1 riporta il legame sforzo-deformazione plastica ottenuto per le tre prove di trazione monoassiale condotte in direzione MD, CD e 45°.

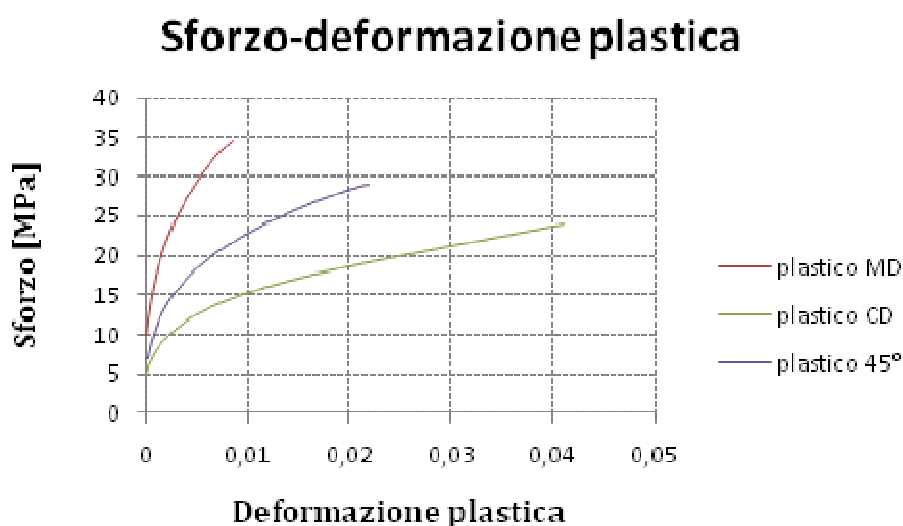


Grafico 5.1: legame sforzo-deformazione plastica nelle direzioni MD, CD e 45°

Servendosi sia di tale legame che della funzione di snervamento si possono ottenere le equazioni dalle quali si ricavano sforzi e deformazioni plastiche che generano un'espansione della superficie di snervamento, detti effettivi.

La calibrazione della curva rappresentativa dell'incrudimento isotropo nel piano $\epsilon_{\text{eff}}^p - \sigma_{\text{eff}}$ può essere condotta tramite i risultati di una prova monoassiale di tensione in

direzione generica. Per una prova in direzione MD la superficie di snervamento iniziale si può semplificare ponendo $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ e $\sigma_x = \sigma_{11}$; ottenendo:

$$f(\bar{\sigma}_{11}) = \sqrt{(G+H)} \cdot \bar{\sigma}_{11} = \sigma_0$$

L'incremento di deformazione plastica si ottiene quando $\sigma_x \geq \bar{\sigma}_{11}$ provoca un espansione della superficie di snervamento che può essere caratterizzata tramite la seguente legge di incrudimento:

$$f(\sigma_x) = \sqrt{(G+H)} \cdot \sigma_x = \sigma_{eff.}; \quad \sigma_{eff.} = \sigma_0 + K(\varepsilon_{eff.})$$

dove K è il parametro che introduce l'incrudimento, dipendente da una variabile interna qui posta pari a $\varepsilon_{eff.}$.

Per la legge di flusso l'incremento di deformazione plastica deve essere perpendicolare alla superficie di snervamento. In direzione MD si ottiene quindi:

$$\dot{\varepsilon}_x^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_x)}{\partial \sigma_x} = \dot{\varepsilon}_{eff.} \cdot \sqrt{(G+H)} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{eff.} = \frac{1}{\sqrt{(G+H)}} \cdot \dot{\varepsilon}_x^p$$

analogamente in direzione CD, si ha che

$$f(\sigma_y) = \sqrt{(F+H)} \cdot \sigma_y = \sigma_{eff.};$$

$$\dot{\varepsilon}_y^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_y)}{\partial \sigma_y} = \dot{\varepsilon}_{eff.} \cdot \sqrt{(F+H)} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{eff.} = \frac{1}{\sqrt{(F+H)}} \cdot \dot{\varepsilon}_y^p$$

Per la prova monoassiale in direzione 45° è necessario innanzitutto riportare lo stato di sforzo ad una giacitura parallela alle direzioni principali, ottenendo:

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \frac{\bar{\sigma}_{45}}{2}; \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{\bar{\sigma}_{45}}{2}$$

La superficie di snervamento iniziale può quindi essere espressa in funzione di $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ o alternativamente in funzione di $\bar{\sigma}_{45}$:

$$f(\sigma) = \sqrt{(G+H)(\sigma_x)^2 - 2H(\sigma_y\sigma_x) + (H+F)(\sigma_y)^2 + 2N(\tau_{xy})^2} = \sigma_0$$

$$f(\bar{\sigma}_{45^\circ}) = \sqrt{G+F+2N} \cdot \frac{\bar{\sigma}_{45^\circ}}{2} = \sigma_0$$

Si ottiene quindi la seguente legge di snervamento:

$$f(\sigma_{45^\circ}) = \sqrt{G+F+2N} \cdot \frac{\sigma_{45^\circ}}{2} = \sigma_{eff}.$$

Essendo la tensione di primo snervamento $\bar{\sigma}_{22}$ minore di $\bar{\sigma}_{11}$, l'applicazione di un carico in direzione 45° fa sì che il materiale raggiunga lo snervamento prima in direzione y e solo successivamente in direzione x. L'applicazione della legge di flusso in direzione y permette quindi il calcolo della deformazione plastica effettiva:

$$\dot{\epsilon}_y^p = \frac{\dot{\epsilon}_{45^\circ}^p}{\sqrt{2}} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \dot{\epsilon}_{eff}^p \cdot \frac{F}{\sqrt{G+F+2N}} \Rightarrow \dot{\epsilon}_{eff}^p = \frac{\sqrt{G+F+2N}}{\sqrt{2} \cdot F} \cdot \dot{\epsilon}_{45^\circ}^p$$

Avendo a disposizione i risultati delle prove monoassiali nelle 3 direzioni MD, CD e 45° si è deciso di mediare le curve σ_{eff} . (ϵ_{eff}) ottenute, le quali sono comunque risultate quasi coincidenti come si può notare dal grafico 5.2.

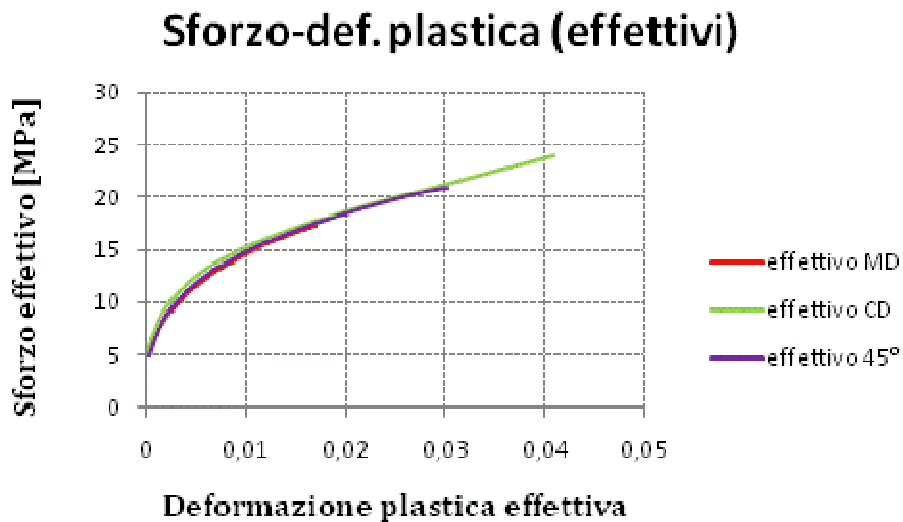


Grafico 5.2: legame sforzo-deformazione plastica (effettivi) nelle direzioni MD, CD e 45°

L'incrudimento o "hardening", può essere modellato con una o più funzioni lineari che ne ricalcano l'andamento. Sono proposti in seguito tre modelli per la descrizione dell'incrudimento: uno lineare (grafico 5.3), uno bilineare (grafico 5.4) e uno trilineare (grafico 5.5).

La "spezzata" che descrive l'incrudimento viene identificata da due o più punti a seconda che il modello sia descritto da un unico tratto o da più segmenti. Tali punti vengono identificati nel piano sforzi-deformazioni plastiche effettive. Nella tabella sottostante (tabella 5.4) vengono riportati i valori dei punti che identificano l'incrudimento nei casi trattati.

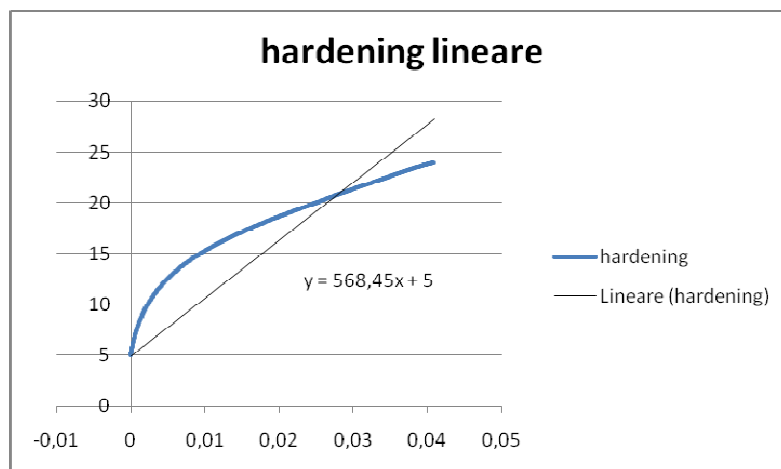


Grafico 5.3: legame sforzo-deformazione plastica (effettivi) nelle direzioni MD, CD e 45°

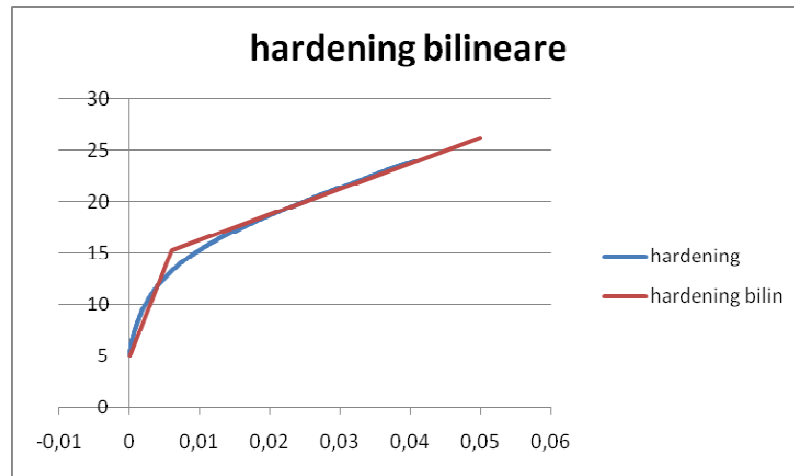


Grafico 5.4: legame sforzo-deformazione plastica (effettivi) nelle direzioni MD, CD e 45°

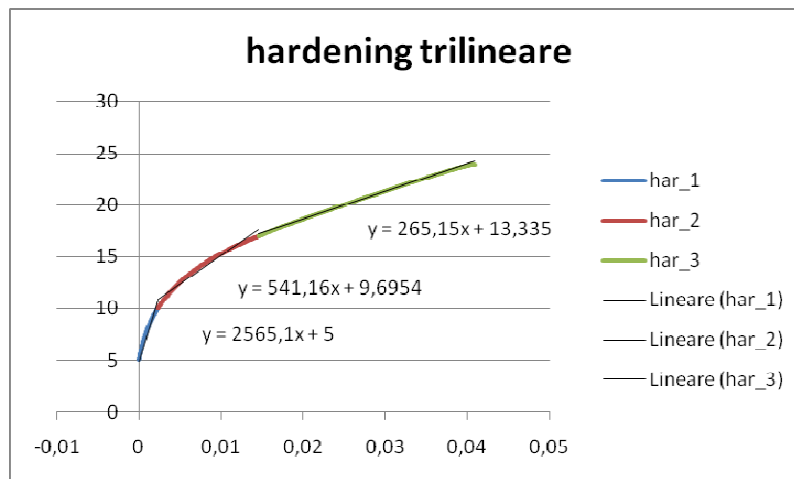


Grafico 5.5: legame sforzo-deformazione plastica (effettivi) nelle direzioni MD, CD e 45°

Modellazione trilineare		Modellazione bilineare		Modellazione trilineare	
ϵ_{eff}	σ_{eff} [MPa]	ϵ_{eff}	σ_{eff} [MPa]	ϵ_{eff}	σ_{eff} [MPa]
0	5,000	0	5,000	0	5,000
0,002	10,951	0,006	15,267	0,200	118,690
0,013	16,831	0,200	63,424		
0,200	66,365				

Tabella 5.4: valori dei punti che definiscono l'incrudimento lineare e bilineare

5.2.2 Simulazione delle prove monoassiali

Il campione è costituito da un foglio sottile con pianta rettangolare di dimensioni 15x150 mm e spessore medio di 0,6 mm. Dalle prove monoassiali di trazione descritte nella sezione 4.1 della tesi, si sono ottenuti gli sforzi e le deformazioni che ci hanno permesso di modellare il campione dovendo rispettare solamente la forma rettangolare. Le dimensioni adottate per i modelli sono 10x20 mm; inoltre si è adottata l'ipotesi membranale in quanto è la più indicata a rappresentare superfici di piccolo spessore nello spazio.

È stato utilizzato il programma commerciale Abaqus versione 6.10-1 per generare il modello costituito da un unico elemento finito di tipo membranale, e classificato come M3D4: elemento isoparametrico bilineare ad integrazione completa su quattro punti di Gauss. I gradi di libertà dei nodi dell'elemento rispettano le condizioni di vincolo tali per cui si hanno 2 gradi di libertà, che corrispondono alle possibili traslazioni nel piano, nei nodi di destra e due cerniere in corrispondenza dell'estremo di sinistra.

Obiettivo di tale verifica è quello di avere una prima validazione sia del modello utilizzato che dei parametri ricavati. È tuttavia doveroso fare presente che la trattazione proposta ha una forte limitazione, in quanto, non risulta essere in grado di verificare l'idoneità del modello nel caso in cui agiscano contemporaneamente sollecitazioni in più direzioni nel piano.

Il criterio di snervamento proposto è quello anisotropo di Hill opportunamente trattato; si è considerato inoltre un incrudimento lineare, uno bilineare e uno trilineare.

Al fine di valutare l'idoneità del modello per la descrizione di prove monoassiali si è deciso di verificare la corrispondenza tra i risultati ottenuti sperimentalmente e quelli forniti da Abaqus. I risultati sono stati riportati nei grafici sottostanti (grafici 5.6, 5.7 e 5.8):

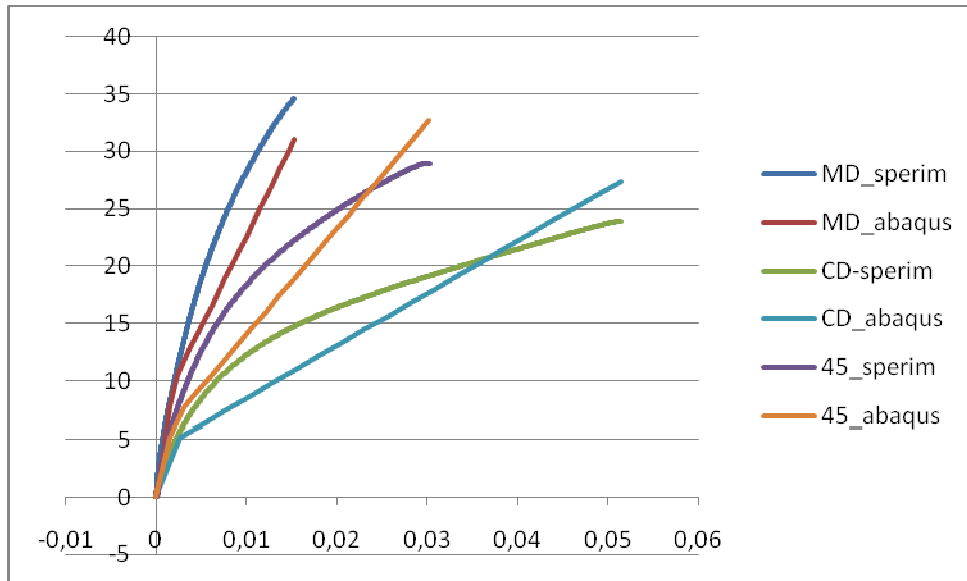


Grafico 5.6: modello lineare nelle direzioni MD, CD e 45°

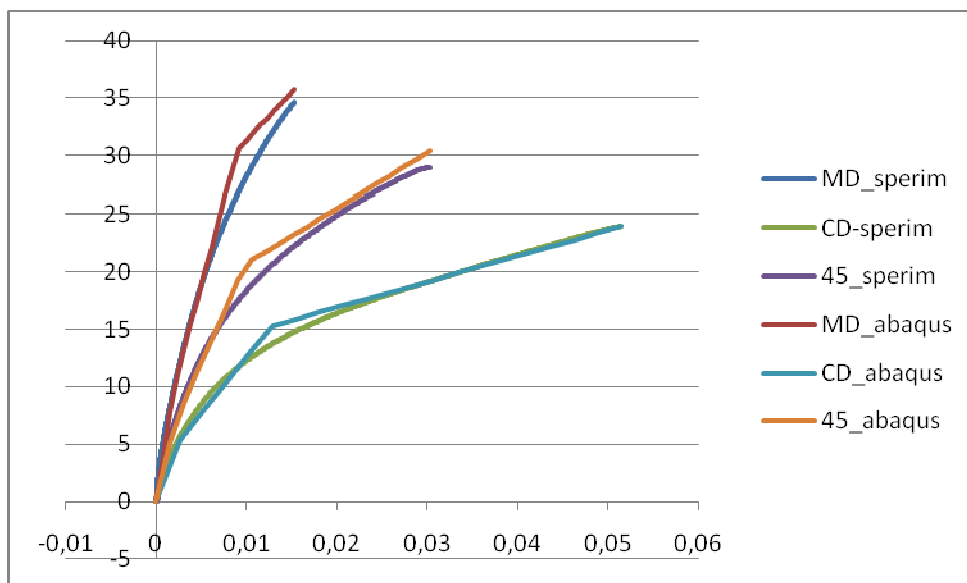


Grafico 5.7: modello bilineare nelle direzioni MD, CD e 45°

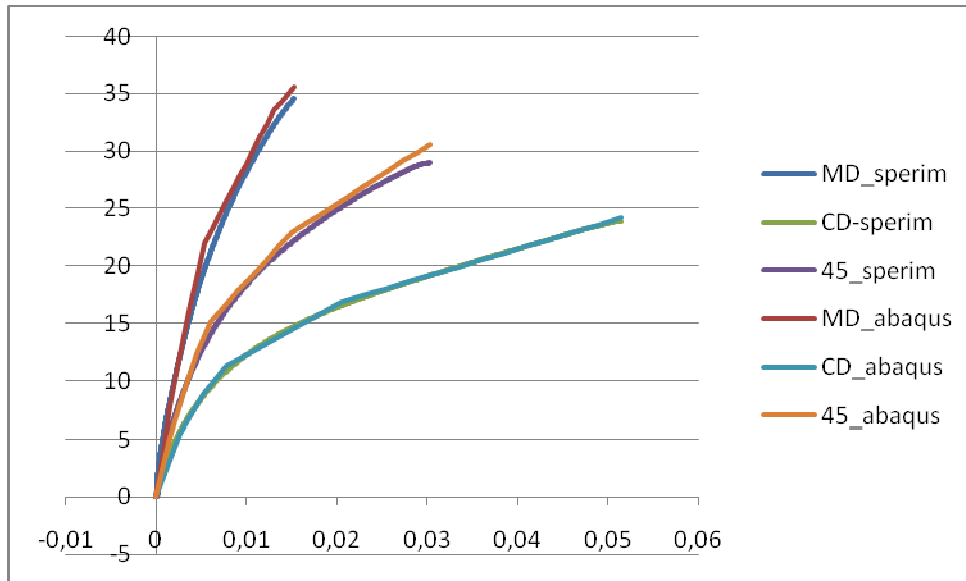


Grafico 5.8: modello bilineare nelle direzioni MD, CD e 45°

Come si può notare dal grafico 5.6, i risultati ottenuti utilizzando semplificando l'incrudimento con un'unica retta non sono in grado di descrivere il comportamento effettivo del materiale. Un incrudimento bilineare invece ricalca in maniera abbastanza accettabile i risultati sperimentali.

5.2.3 Simulazione della prove biassiali

Per l'identificazione parametrica, di cui si discuterà nel paragrafo 5.3, è necessaria una raccolta di dati sperimentali relativi a grandezze che influenzano i parametri elastici e plastici che si vogliono determinare.

Dal momento che non è stato possibile realizzare una prova biassiale su provini cruciformi si è deciso di simulare tale prova con un modello agli elementi finiti creato con Abaqus. Si sono considerate due tipologie di campioni, entrambi cruciformi, una con foro centrale e l'altra senza. La doppia simmetria ci ha permesso di considerare solamente un quarto dei campioni. Le dimensioni geometriche dei provini e le relative mesh sono quelle riportate nelle figure 5.3 e 5.4:

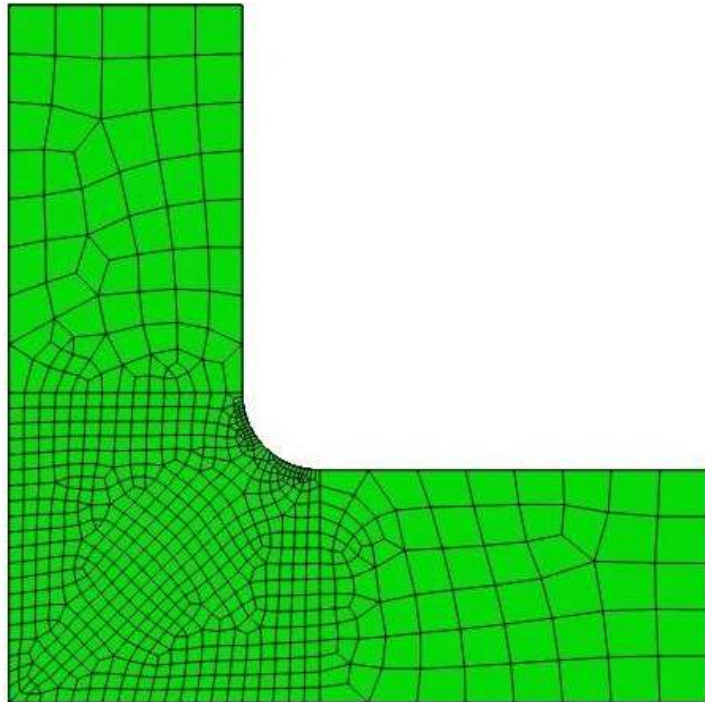


Figura 5.3: modello generato in Abaqus del provino cruciforme senza foro centrale.

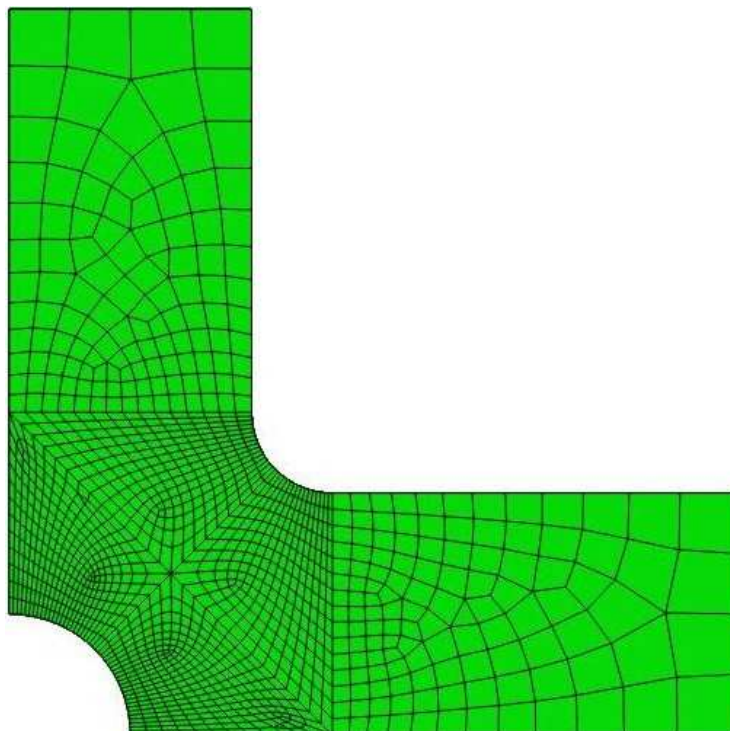


Figura 5.4: modello generato in Abaqus del provino cruciforme con foro centrale.

Per le mesh sono stati utilizzati elementi finiti classificati come elementi M3D4R e M3D3 (figura 5.5). I primi sono elementi isoparametrici bilineari ad integrazione completa su quattro punti di Gauss; mentre gli elementi M3D3 sono elementi triangolari lineari. Tali elementi sono di tipo membranale, in cui ogni nodo ha tre gradi di libertà corrispondenti alle tre possibili traslazioni nello spazio, e vengono utilizzati per rappresentare superfici di piccolo spessore, in grado di trasmettere solo forze nel piano, poichè non dotate di rigidità flessionale. Tale tipologia di elementi consente l'evoluzione dello stato di deformazione in tutte e tre le direzioni; tuttavia, come previsto, si sono presentate solamente deformazioni nel piano in quanto il problema è stato concepito come piano negli sforzi e con soli sforzi di trazione.

La mesh è stata appositamente infittita nella parte centrale di entrambi i modelli, poiché è in quella zona che si simula la misura degli spostamenti dei nodi mediante il DIC.

Si è schematizzato il comportamento anisotropo del laminato Tetra Pak tramite un modello di Hill con incrudimento lineare a tratti. Il modello matematico utilizzato è quello descritto nel capitolo 3.

Sono state introdotte opportune condizioni al contorno che rispettano il comportamento simmetrico del provino. In particolare sono stati inseriti dei carrelli lungo i bordi interni, denominati AX-1 e AX-2, che impediscono rispettivamente lo spostamento in direzione x e y. Ai lembi estremi delle braccia sono stati applicati dei cedimenti che simulano la conduzione di una prova a spostamenti imposti.

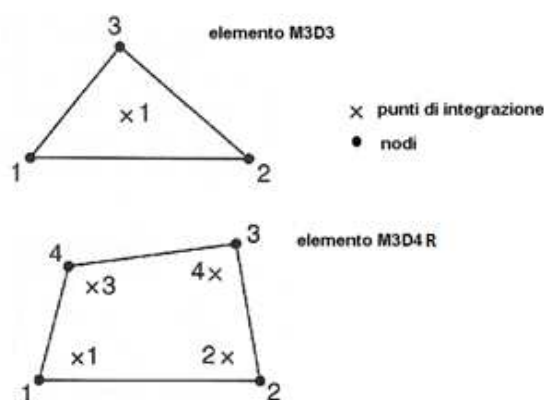


Figura 5.5: elementi finiti utilizzati nelle mesh dei due modelli.

5.3 Fondamenti metodologici dell'analisi inversa

L'identificazione parametrica mediante analisi inversa è una metodologia d'indagine con cui è possibile valutare un insieme di parametri, a priori incogniti, che caratterizzano un particolare sistema fisico osservabile sperimentalmente e di cui sia possibile dare una descrizione matematica mediante un modello di calcolo, dipendente dai parametri da identificare. Si suppone inoltre che tali parametri non siano identificabili attraverso un'analisi diretta del sistema, ma tramite opportune tecniche, alcune delle quali verranno trattate in seguito **(Archetti & Faggioli, 1984), (Ageno, Bolzon, & Maier, 2008)**.

Tale metodologia può essere esemplificata, nel caso di algoritmi di minimizzazione passo-passo, dallo schema riportato in figura 5.6.

Si adotta un certo modello matematico, detto operatore diretto, del sistema che si vuole studiare e se ne valuta la risposta a partire da un set di parametri scelti all'interno dei rispettivi domini d'ammissibilità. Da questa risposta si estraggono i valori delle grandezze simulate, omologhe a quelle che si sono ottenute mediante l'osservazione sperimentale. In assenza di dati sperimentali di riferimento, si esegue la stessa procedura effettuando in precedenza una simulazione numerica, detta pseudo sperimentale.

Si costruisce allora una norma del divario fra la risposta simulata e quella reale, il cosiddetto residuo, in termini di grandezze misurabili che sono funzione del vettore dei parametri che si vuole identificare. La minimizzazione di tale norma porta ad ottenere la migliore stima dei parametri incogniti, ovvero quella che è tale da minimizzare il divario fra le due risposte che si vanno a confrontare.

Naturalmente i modelli matematici sono semplificazioni della realtà, perciò la migliore stima dei parametri non dà una risposta simulata esattamente coincidente con quella misurata. Tanto più il modello che si assume è accurato, più aderente alla realtà è la risposta del sistema simulato.

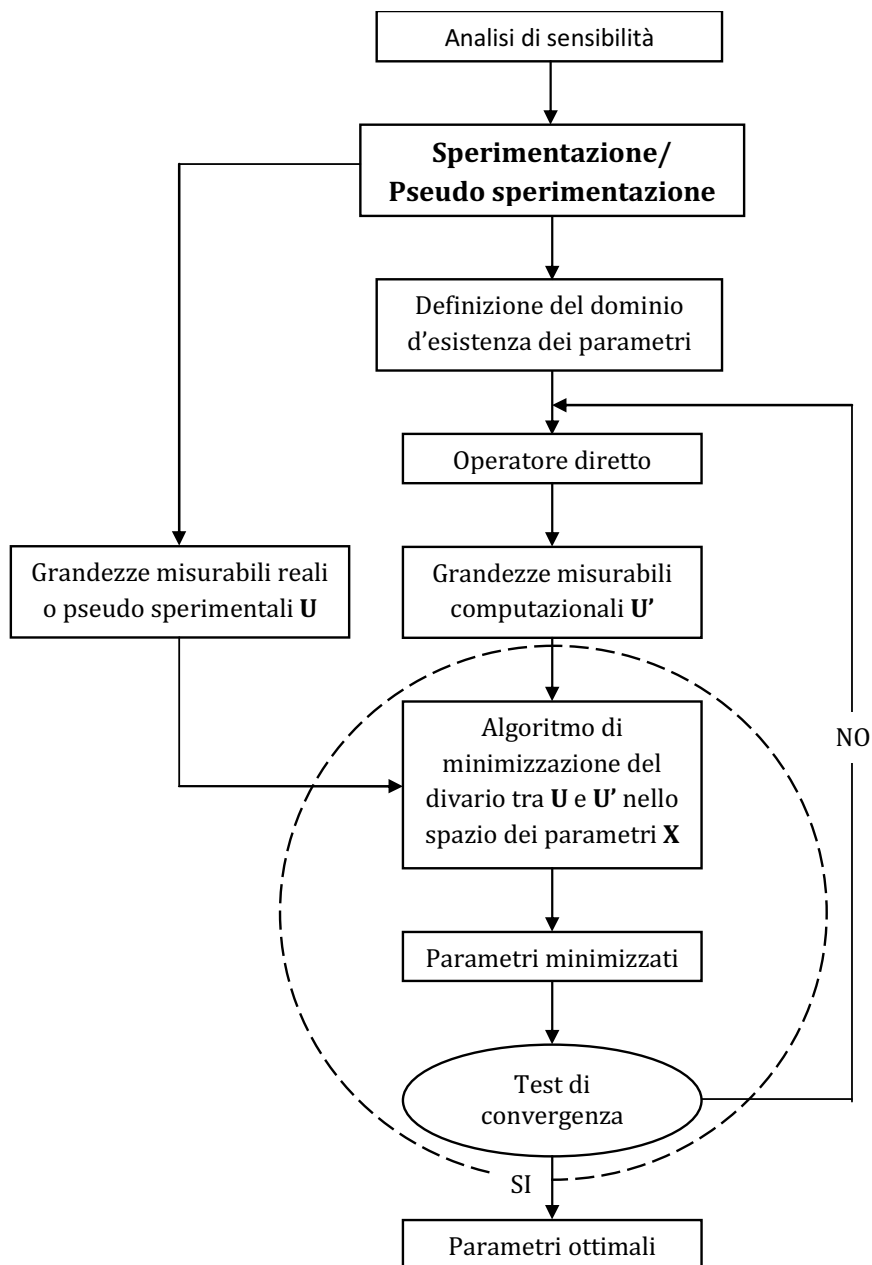


Figura 5.6: metodologia d'identificazione parametrica con analisi inversa.

L'identificazione dipende inoltre dal tipo e dal numero di misure disponibili. Infatti, si ottiene una maggiore accuratezza nella stima dei parametri quanto più ciascun parametro influenza in modo significativo un numero sufficiente di grandezze misurabili. Non è necessariamente detto, perciò, che il risultato dell'identificazione possa migliorare aumentando semplicemente il numero di grandezze misurabili utilizzate nella formulazione della norma: affinché ciò sia possibile tali grandezze dovranno essere scelte in modo che risultino adeguatamente influenzate dai parametri che si intende stimare.

5.3.1 Analisi di sensibilità

Le analisi di sensibilità sono destinate a quantificare l'influenza di ogni parametro ricercato sulle quantità misurabili e, quindi, a corroborare le aspettative sulla sua identificabilità. Sono quindi delle analisi preliminari che orientano e rafforzano la procedura d'identificazione parametrica.

La matrice di sensibilità si definisce come il gradiente della funzione che costituisce l'operatore diretto, si tratta perciò di una matrice jacobiana che contiene le derivate di ogni elemento di \mathbf{U}' nei confronti di ogni elemento di \mathbf{X} . Dato un punto di partenza \mathbf{X}_0 nel dominio d'esistenza dei parametri, si può definire la matrice di sensibilità:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{J}(\mathbf{X}_0) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}$$

$$d\mathbf{U}'_{m \times 1} = \mathbf{L}_{m \times n} \cdot [d\mathbf{X}_{n \times 1}]^T$$

Il calcolo numerico della matrice avviene, in genere, per differenze finite approssimando $d\mathbf{X}$ con passi discreti $\Delta\mathbf{X}$ sufficientemente piccoli e calcolando i corrispondenti $\Delta\mathbf{U}'$.

Considerando un procedimento alle differenze finite centrali, per semplificare il confronto le derivate approssimate vengono normalizzate rispetto lo spostamento e il parametro del materiale considerati. Si può quindi definire il generico elemento della matrice di sensibilità come:

$$L_{kh} = \frac{\partial U'_k(\mathbf{X})}{\partial X_h} \cdot \frac{\bar{X}_h}{U'_k} \bigg|_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}} \cong \frac{\bar{X}_h}{2\Delta X_h} \cdot \frac{U'_k(X_1 \dots \bar{X}_h + \Delta X_h \dots X_n) - U'_k(X_1 \dots \bar{X}_h - \Delta X_h \dots X_n)}{U'_k(\bar{\mathbf{X}})}$$

Chiaramente il vettore $\bar{\mathbf{X}}$ contiene i parametri rappresentativi del dominio d'esistenza o, preferibilmente, definiti a priori da un "esperto". Nel caso in cui non si dispone di grandezze sperimentali, $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(X_1 \dots X_n)$ contiene i valori esatti adottati dai parametri per calcolare i dati pseudo sperimentali mediante simulazione numerica.

5.3.2 Problema d'ottimizzazione

Le grandezze che si sceglie di misurare durante l'esperienza sperimentale, in base ad un'analisi di sensibilità, sono un insieme che si ritiene rappresentativo del comportamento del sistema sottoposto a prova: in genere si utilizzano spostamenti e/o forze. Nel caso di analisi pseudo sperimentale, per simulare l'errore nella rilevazione dei dati, ad esse si associa un'incertezza dipendente dalla precisione del sistema di misura che si suppone di adottare. Il modello matematico deve restituire come risposta della simulazione quantità omologhe a quelle misurate.

L'operatore diretto è proprio il modello matematico che simula il comportamento del sistema reale in funzione di un vettore di parametri costitutivi. Nella presente tesi l'operatore diretto è un modello ad elementi finiti e può quindi essere definito come una funzione reale continua non necessariamente lineare.

Si definisce funzione obiettivo o di discrepanza quella funzione che quantifica il divario fra sperimentazione e modellazione. Si può perciò assumere la distanza fra il vettore \mathbf{U} delle grandezze misurabili reali o pseudo sperimentali e il vettore \mathbf{U}' di quelle simulate per una data scelta dei parametri \mathbf{X} . Tale distanza può essere descritta efficacemente con la norma della differenza dei due vettori.

L'identificazione parametrica affrontata in questa tesi si riconduce a un problema d'ottimizzazione secondo la più comune formulazione ai minimi quadrati. La funzione obiettivo da minimizzare è la somma dei quadrati delle differenze dei componenti di \mathbf{U} e \mathbf{U}' .

$$\omega(\mathbf{X}) = (\mathbf{U} - \mathbf{U}') \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}')^T = \sum_{i=1}^m (U_i - U'_i)^2$$

5.3.3 Formulazione ai minimi quadrati

Nell'approccio ai minimi quadrati la funzione obiettivo utilizzata ha la forma seguente:

$$\omega(\mathbf{X}) = (\mathbf{U} - \mathbf{U}') \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}')^T = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T = \sum_{i=1}^m (U_i - U'_i)^2$$

Questa forma possiede numerosi vantaggi computazionali in quanto il gradiente e la matrice hessiana della funzione obiettivo assumono forme particolarmente agevoli da calcolare. Innanzitutto si determina il gradiente della funzione di discrepanza applicando la regola di derivazione a catena:

$$\nabla \omega(\mathbf{X}) = \frac{\partial \omega(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} = \frac{\partial [(\mathbf{U} - \mathbf{U}') \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}')^T]}{\partial \mathbf{X}^T} = 2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} = \frac{\partial (\mathbf{U} - \mathbf{U}')}{\partial \mathbf{X}^T} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}^T} - \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \mathbf{X}^T} = -\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \mathbf{X}^T} = -\mathbf{L}$$

Si trova che il gradiente è dato dal prodotto dello jacobiano del vettore dei residui moltiplicato per il vettore dei residui stesso. A sua volta lo jacobiano del vettore dei residui è pari alla matrice opposta a quella di sensitività in quanto \mathbf{U} rappresenta costanti note a priori le cui derivate sono tutte identicamente nulle. Il gradiente di ω è un vettore di \mathbf{R}_n , spazio vettoriale dei parametri costitutivi. Essendo il vettore dei residui un vettore di \mathbf{R}_m , spazio delle grandezze misurabili, lo jacobiano \mathbf{J} ha dimensione $n \times m$.

È possibile valutare la matrice hessiana della funzione obiettivo differenziando l'espressione del gradiente mediante la regola del prodotto:

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2 \omega(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T \partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\nabla \omega(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r})}{\partial \mathbf{X}} = (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}) + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}^T \partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{r}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}^T \partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{X}) \cong (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})$$

La matrice hessiana ha dimensione $n \times n$. L'approssimazione è giustificata dal fatto che il secondo termine della sua espressione tende a zero all'annullarsi dei residui, ovvero all'avvicinarsi ad un punto di minimo della funzione di discrepanza (locale o assoluto).

I principali algoritmi di minimizzazione utilizzati nella formulazione ai minimi quadrati del problema di ottimizzazione sono i seguenti (**Agno M. , 2003**):

- metodo di Gauss-Newton
- metodo di Levenberg-Marquardt
- metodo "trust region"

Questi metodi consentono la soluzione numerica iterativa del problema di ottimizzazione ai minimi quadrati in un numero finito di passi una volta fissata una soglia di convergenza e accertato che il problema sia ben posto, ovvero che soddisfi le seguenti condizioni (Hadamard, 1923):

- la soluzione esiste, ossia è sempre possibile trovare un vettore di parametri \mathbf{X} corrispondenti ad un dato vettore di grandezze misurabili \mathbf{U} .
- la soluzione \mathbf{X} è unica per ogni corrispondente \mathbf{U} .
- l'algoritmo è stabile, ovvero la soluzione dipende con continuità dalle variazioni di grandezze misurabili; dal punto di vista fisico la perdita di stabilità significa che a piccole perturbazioni dei dati in ingresso, ossia le grandezze misurabili, corrispondono grandi variazioni nei risultati, ovvero i parametri costitutivi.

Problemi computazionali legati alla scarsità di ridondanza si possono incontrare nel presente contesto della meccanica strutturale se il modello ha una quantità di parametri da identificare troppo elevata rispetto alla quantità di grandezze misurabili a disposizione. Difatti aumentare la complessità del modello richiede un contemporaneo aumento in quantità e qualità delle grandezze misurabili a disposizione.

Altro fattore che può intervenire è rappresentato dall'inadeguatezza dell'esperimento, dovuta al fatto che parti del modello non vengono attivate durante l'esecuzione sperimentale; ad esempio una prova monotona non potrà mai riuscire ad individuare compiutamente i parametri di un legame costitutivo formulato per descrivere prove cicliche.

Il metodo del gradiente

Il metodo del gradiente individua una direzione di ricerca del punto di minimo ad ogni iterazione nella direzione della retta di massima pendenza, calcolata nel punto di partenza dell'iterazione. Individuata la direzione di ricerca, il metodo seziona la (iper)superficie della funzione obiettivo con il piano, o meglio l'iperpiano qualora si lavora con più di due parametri costitutivi, passante per la direzione di ricerca. Tale sezione genera una funzione scalare da \mathbf{R} a \mathbf{R} il cui punto di minimo è pari al minimo della funzione obiettivo nella direzione del gradiente.

Una rappresentazione grafica del metodo del gradiente è data in figura 5.6.

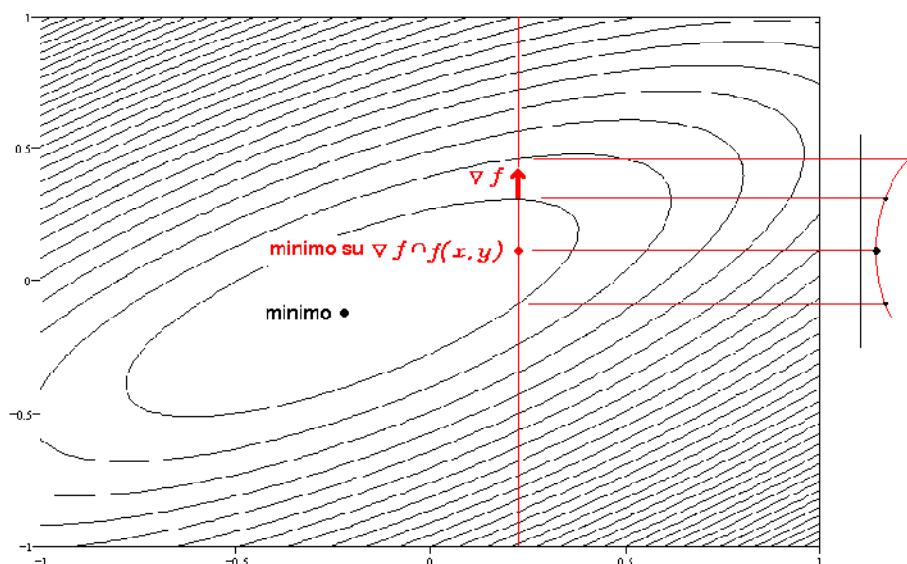


Figura 5.7: Rappresentazione grafica a curve di livello del metodo del gradiente

La formulazione matematica del metodo iterativo assume come punto di partenza il vettore \mathbf{X}_i per individuare la direzione di ricerca nel versore del gradiente:

$$\mathbf{d}_i = -\frac{\nabla \omega(\mathbf{X}_i)}{\|\nabla \omega(\mathbf{X}_i)\|}$$
$$\|\mathbf{d}_i\| = 1$$

Si definisce così la funzione scalare di argomento vettoriale:

$$g(\eta) = \omega(\mathbf{X}_i + \eta \cdot \mathbf{d}_i)$$

Tale funzione scalare in generale ammetterà minimo η_i che rappresenta il punto di minimo di ω lungo la direzione di ricerca. Tale punto costituisce il punto di partenza per la successiva iterazione:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \eta \cdot \mathbf{d}_i$$

Abitualmente tale metodo funziona bene nelle prime fasi della procedura di ottimizzazione, ma ha bassa velocità di convergenza laddove, in vicinanza del punto di minimo, il gradiente tende a zero. Il metodo del gradiente presenta un ordine di convergenza lineare. Infatti, per i sufficientemente grande, ovvero al procedere delle iterazioni, detto \mathbf{X}^* il punto di minimo, due consecutivi punti di fine iterazione \mathbf{X}_i e \mathbf{X}_{i+1} verificano la seguente relazione:

$$\frac{\|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}^*\|}{\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}^*\|} < \beta \in \mathbf{R} / \{0, \infty\}$$

Può essere dimostrato che la convergenza di questo metodo diviene tanto più lenta quanto più la matrice hessiana è mal condizionata. Si rammenta che il rapporto di condizionamento di una matrice hessiana è il rapporto fra il massimo ed il minimo autovalore. Tanto maggiore è tale rapporto tanto più la matrice è mal condizionata.

Il metodo di Gauss-Newton

Il metodo in questione detto anche metodo del gradiente con riscalatura affine, individua una direzione di ricerca e su di essa minimizza la funzione obiettivo ad essa ristretta. Il versore del gradiente viene premoltiplicato per l'inversa della matrice hessiana, in modo da ottenere la cosiddetta direzione di Newton-Gauss.

La direzione di ricerca di Gauss-Newton fa riferimento alla approssimazione al secondo ordine della funzione obiettivo attorno al punto di inizio iterazione:

$$\omega_H(\mathbf{X}) = \omega(\mathbf{X}_i) + \nabla \omega(\mathbf{X}_i)^T \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)^T \cdot \mathbf{H}(\mathbf{X}_i) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)$$

Tale approssimazione è costituita da una quadrica che ha il medesimo piano tangente e le medesime curvature della funzione obiettivo nel punto di contatto, ovvero il punto di inizio iterazione \mathbf{X}_i .

Imponendo la condizione necessaria, ma non sufficiente, di minimo sull'approssimazione quadrica di ω :

$$\left. \frac{\partial^2 \omega_H(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_{i+1}} = \mathbf{0} \rightarrow \nabla \omega(\mathbf{X}_i) + \mathbf{H}(\mathbf{X}_i) \cdot (\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i - \mathbf{H}(\mathbf{X}_i)^{-1} \cdot \nabla \omega(\mathbf{X}_i)$$

È stato così trovato il possibile punto di minimo della quadrica approssimante. Si può notare, tuttavia, che non si può garantire a priori che $\omega(\mathbf{X}_{i+1}) < \omega(\mathbf{X}_i)$; perciò la direzione individuata da $(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i)$ è una buona direzione di ricerca del minimo di ω allorché la funzione obiettivo presenti una ampia zona non troppo discosta dall'aspetto di una forma quadrica. Su tale direzione di ricerca istituimmo una tecnica di minimizzazione sezionando la funzione obiettivo, come fatto nel precedente metodo del gradiente.

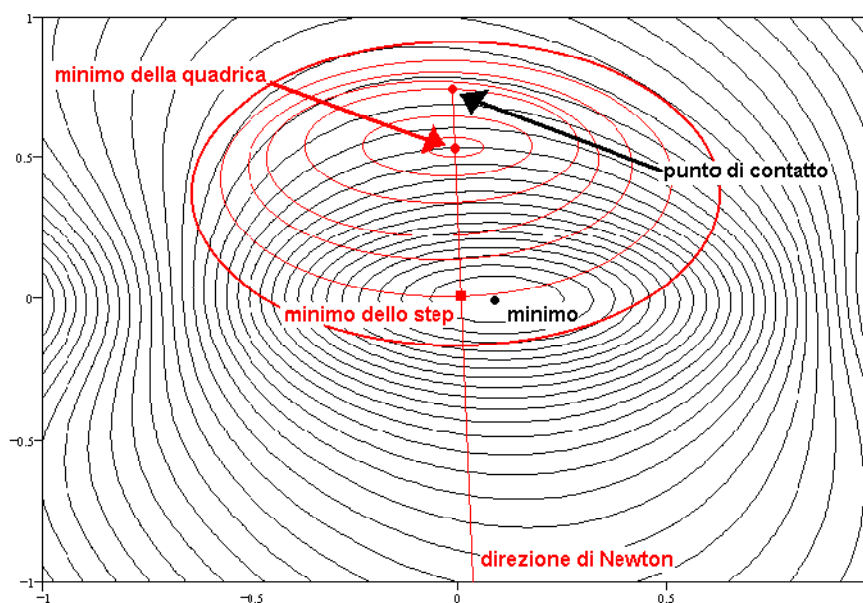


Figura 5.8: illustrazione del metodo di Gauss-Newton

Il problema computazionale è più oneroso per la necessità ad ogni iterazione di invertire la matrice hessiana, che compare nell'espressione della direzione di ricerca.

$$\mathbf{d}_i = \frac{\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i}{\|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i\|} = \frac{-\mathbf{H}(\mathbf{X}_i)^{-1} \cdot \nabla \omega(\mathbf{X}_i)}{\|-\mathbf{H}(\mathbf{X}_i)^{-1} \cdot \nabla \omega(\mathbf{X}_i)\|}$$

Esiste tuttavia un metodo numerico per evitare tale onere computazionale.

Il vettore \mathbf{d}_i , proporzionale a $(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i)$ ovvero a $(\mathbf{H}^{-1} \nabla \omega)$, si può trovare mediante soluzione iterativa di un sistema lineare in cui i coefficienti sono calcolati in \mathbf{X}_i e sono funzione, grazie alla formulazione ai minimi quadrati, dello iacobiano dell'operatore diretto e del vettore dei residui. Infatti considerando le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_i = \frac{\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i}{\|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i\|} \propto -\mathbf{H}(\mathbf{X}_i)^{-1} \cdot \nabla \omega(\mathbf{X}_i) \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}_i)^{-1} = (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \\ \nabla \omega(\mathbf{X}_i) = (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}) \end{array} \right.$$

Si perviene alla seguente:

$$\mathbf{d}_i \propto -(2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}) \Rightarrow (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}) \cdot \mathbf{d}_i = -\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}$$

Il metodo entra in crisi quando \mathbf{H} non è definita positiva ovvero allorquando il punto di partenza dell'iterazione è un punto di sella.

L'ordine di convergenza del metodo è al più quadratico, ovvero può raggiungere un ordine di convergenza superiore al metodo del gradiente.

Il metodo di Levenberg-Marquardt

Il metodo di Gauss-Newton, come visto precedentemente, va in crisi quando \mathbf{H} tende a non essere definita positiva ovvero allorquando il punto di partenza dell'iterazione è prossimo ad un punto di sella. Al fine di avere un algoritmo che converga a prescindere dal punto di partenza del procedimento iterativo, è stato formulato il metodo di Levenberg-Marquardt, che si configura come una variazione del precedente, in cui alla matrice hessiana è sommata una matrice proporzionale alla matrice unitaria, cosicchè:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_i \propto \mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i \propto -[\mathbf{H}(\mathbf{X}_i) + \lambda_i \mathbf{I}_n]^{-1} \cdot \nabla \omega(\mathbf{X}_i) \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}_i)^{-1} = (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \\ \nabla \omega(\mathbf{X}_i) = (2\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}) \end{array} \right.$$

ovvero

$$\mathbf{d}_i \propto -(\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \lambda_i \mathbf{I}_n)^{-1} \cdot (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r})$$

da cui

$$(\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \lambda_i \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{d}_i = -\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r}$$

Come casi limite si ha λ che tende a infinito e λ pari a zero; il fatto che per λ tendente a infinito si tenda alla direzione del gradiente ci assicura che esista quantomeno un insieme di valori di λ sufficientemente grandi per i quali la direzione individuata sia discendente.

$$\begin{array}{l} \lambda_i \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{d}_i \rightarrow \mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla \omega \\ \lambda_i \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{d}_i \rightarrow \nabla \omega \end{array}$$

Il parametro λ deve essere sempre tale da fornire una matrice definita positiva e può essere controllato affinché sia assicurato che ad ogni iterazione la funzione obiettivo decresca strettamente. Il termine λ può essere controllato per assicurare un calo della

funzione obiettivo anche quando i termini di ordine superiore al secondo, che vengono trascurati nella espressione della matrice hessiana, siano non trascurabili.

Il parametro λ deve essere quindi tale da:

- tutti gli autovalori di $(\mathbf{H}+\lambda\mathbf{I})$ siano positivi e superiori ad una soglia fissata, ossia che la matrice sia sufficientemente ben condizionata;
- λ abbia il minimo valore necessario ai due scopi precedenti.

La difficoltà maggiore nell'usare il metodo di Levenberg-Marquardt è l'implementazione di una tecnica che consenta di controllare λ al fine di rendere efficiente il metodo ovvero di assicurarci che ad ogni iterazione la funzione obiettivo decresca.

Al passo $i+1$ il valore della funzione obiettivo, calcolato sulla base di una approssimazione quadratica centrata sul passo precedente, vale:

$$\omega_p(\mathbf{X}_i) = \left[\mathbf{r}(\mathbf{X}_i) + \mathbf{J}^T(\mathbf{X}_i) \cdot \mathbf{d}_i \right] \cdot \left[\mathbf{r}(\mathbf{X}_i) + \mathbf{J}^T(\mathbf{X}_i) \cdot \mathbf{d}_i \right]^T$$

Si distinguono i seguenti due casi:

- $\omega_p(\mathbf{X}_i) \leq \omega(\mathbf{X}^*) \Rightarrow \lambda_i \rightarrow \lambda_{i+1} = \lambda_i + \frac{\omega_p(\mathbf{X}_i) - \omega(\mathbf{X}^*)}{\eta^*}$
- $\omega_p(\mathbf{X}_i) > \omega(\mathbf{X}^*) \Rightarrow \lambda_i \rightarrow \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{\eta^* + 1}$

dove η^* rappresenta la lunghezza del passo che porta a \mathbf{X}^* lungo la direzione di ricerca. Se non si realizzano variazioni nella direzione di ricerca si ha che $\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i$.

Il problema principale del metodo di Levenberg-Marquardt è che la regione in cui la approssimazione del secondo ordine è considerata accettabile potrebbe non contenere al suo interno il punto di minimo. Un miglioramento in tal senso si ottiene con l'algoritmo seguente.

Il metodo “trust region”

“Trust region” significa letteralmente “regione di confidenza”; difatti tale algoritmo permette di trovare una approssimazione quadratica della funzione obiettivo centrata nel punto \mathbf{X}_i , e minimizzare detta approssimazione in una regione ridotta, detta appunto “trust region”, in cui l’approssimazione quadratica sia rappresentativa della funzione obiettivo con sufficiente accuratezza, al fine di trovare il successivo punto \mathbf{X}_{i+1} .

In altre parole la “trust region” è una regione sufficientemente piccola da permettere che la differenza fra la variazione vera di ω e la variazione della sua approssimazione quadratica ω_{II} sia minore di una tolleranza ε , definibile dall’utente. La lunghezza del diametro Δ_i della “trust region” è sufficientemente piccolo che al suo interno valga ovunque:

$$q_i = \left| \frac{\omega(\mathbf{X}_{i+1}) - \omega(\mathbf{X}_i)}{\omega_{II}(\mathbf{X}_{i+1}) - \omega(\mathbf{X}_i)} \right| \leq \varepsilon$$

laddove ε è una tolleranza prefissata dall’utente. Quanto più il rapporto q_i tende all’unità, tanto più l’approssimazione ω_{II} è accurata nel descrivere ω all’interno della “trust region”.

L’approssimazione quadratica della funzione obiettivo è formulata come segue:

$$\omega_{II}(\mathbf{X}) = \omega(\mathbf{X}_i) + \nabla \omega(\mathbf{X}_i)^T \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)^T \cdot \mathbf{H}(\mathbf{X}_i) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)$$

Il problema di minimizzazione posto nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i+1} &= \mathbf{X} \in \Omega_n \subseteq \mathbf{R}^n : \{ \omega_{II}(\mathbf{X}_{i+1}; \mathbf{X}_i) \leq \omega_{II}(\mathbf{X}; \mathbf{X}_i) \quad \forall \mathbf{X} \neq \mathbf{X}_{i+1}; \mathbf{X} \in \Omega_n \} \\ \Omega_i &= \{ \mathbf{X} \in \Omega_n \subseteq \mathbf{R}^n : \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|_2 \leq \Delta_i \} \end{aligned}$$

Ovvero si ricerca quel punto \mathbf{X}_{i+1} , a partire da un punto \mathbf{X}_i appartenente al dominio di ammissibilità dei parametri \mathbf{X} , tale che sia punto di minimo di ω_{II} all’interno di una regione

limitata Ω_i ("trust region"). Tale regione limitata è l'insieme dei punti distanti meno di Δ_i dal centro \mathbf{X}_i .

\mathbf{X}_{i+1} così individuato può essere interno alla "trust region" o essere sul suo contorno. Se è sul contorno allora possiamo ripetere l'iterazione *i-esima* ampliando il diametro della regione fino a quando il punto stazionario \mathbf{X}_{i+1} risulti interno, e quindi passare all'iterazione *(i+1)-esima* centrando la "trust region" su \mathbf{X}_{i+1} .

Un'altra particolarità del metodo è quella di cercare il punto \mathbf{X}_{i+1} non come minimo in uno spazio a n dimensioni bensì nella forma $\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \mathbf{s}$, laddove \mathbf{s} è una combinazione lineare di due soli vettori particolari: il gradiente di ω calcolato in \mathbf{X}_i ed il vettore di Gauss-Newton anch'esso calcolato in \mathbf{X}_i .

In altre parole si ricerca \mathbf{X}_{i+1} in una restrizione Ω_i di \mathbf{R}^2 (sottospazio di \mathbf{R}^n) i cui versori siano \mathbf{s}_1 per il gradiente e \mathbf{s}_2 per la direzione di Gauss-Newton:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_i + \mathbf{s}$$

$$\mathbf{s} = a \cdot \mathbf{s}_1 + b \cdot \mathbf{s}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b \in \mathbf{R} \\ \mathbf{s}_1 = \nabla \omega(\mathbf{X}_i) \\ \mathbf{s}_2 : (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}) \cdot \mathbf{s}_2 = -\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{r} \end{array} \right.$$

Questo procedimento riduce notevolmente gli oneri computazionali.

L'algoritmo della "trust region" termina quando viene raggiunto un punto di minimo, oppure un punto a curvatura nulla.

Nell'utilizzo dei metodi di analisi inversa adottati nella presente tesi è necessario stabilire le seguenti tolleranze di calcolo:

- tolleranza sul valore della funzione obiettivo (Tol_{fun});
- tolleranza sulla norma del vettore dei parametri (Tol_X).

Tali sono le tolleranze che stabiliscono l'avvenuta convergenza del metodo. Si ha convergenza della procedura di analisi inversa quando sono verificate contemporaneamente le due condizioni seguenti:

$$\frac{\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}\|}{\|\mathbf{X}_i\|} \leq Tol_x$$

$$\frac{|f(\mathbf{X}_i) - f(\mathbf{X}_{i-1})|}{\|f(\mathbf{X}_i)\|} \leq Tol_{fun}$$

Nella presente tesi si è riscontrato che ponendo entrambe le tolleranze pari a 10^{-10} si ottengono identificazioni dei parametri con un'accuratezza di $\pm 10^{-3}$, pur mantenendo un numero d'iterazioni, e di conseguenza un onere computazionale, accettabili.

5.4 Applicazione dell'analisi inversa al caso del laminato Tetrapak

I modelli utilizzati nell'identificazione parametrica sono i due descritti in precedenza. Si riportano di seguito gli andamenti delle curve di convergenza ottenute dalle analisi eseguite, utilizzando come valori di riferimento dei parametri da identificare quelli riportati in tabella:

E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	G_{12} [MPa]	σ_0 [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	R_{11}	R_{22}	R_{12}
5113	2278	1688	5	15,267	63,424	2	1	1,877

Tabella 5.5: parametri costitutivi assunti per le verifiche computazionali.

Nelle simulazioni per elementi finiti della prova biassiale, si suppone di utilizzare il DIC come sistema di misura degli spostamenti e delle deformazioni dei nodi centrali del campione, la cui precisione di misura è circa pari a 10^{-5} rispetto la dimensione del campo di rilevamento. Nel caso in esame la zona monitorata ha dimensioni di 100x100 mm, perciò l'accuratezza degli spostamenti misurati con il DIC è di circa 1 μm ; si aggiunge, inoltre, anche una distribuzione uniforme casuale di perturbazione o "rumore" (noise) pari a $\pm 0,5 \mu\text{m}$.

Dove non specificato diversamente, le analisi sono state eseguite imponendo spostamenti di 1,25 mm in entrambe le direzioni principali (MD e CD), assumendo un incrudimento bilineare e utilizzando come grandezze misurabili sia i dati DIC che le forze nodali (FN).

Per semplificare l'esposizione dei risultati, in tabella 5.6 sono riportate le tipologie di analisi effettuate con le rispettive configurazioni assegnate e i rispettivi simboli per l'abbreviazione.

	MODELLO CON FORO		MODELLO SENZA FORO	
	<i>con "rumore"</i>	<i>senza "rumore"</i>	<i>con "rumore"</i>	<i>senza "rumore"</i>
spostamenti (DIC) e forze nodali (FN)	FR_DIC+FN	F_DIC+FN	NFR_DIC+FN	NF_DIC+FN
spostamenti (DIC)	FR_DIC+FN	F_DIC+FN	NFR_DIC+FN	FN_DIC+FN
forze nodali (FN)	-	F_FN	-	NF_FN
rapporto spostamenti imposti 1-1	FR_1-1	F_1-1	NFR_1-1	NF_1-1
rapporto spostamenti imposti 1-2	FR_1-2	F_1-2	NFR_1-2	NF_1-2
rapporto spostamenti imposti 2-1	FR_2-1	F_2-1	NFR_2-1	NF_2-1
vettore rapporti con DIC	FR_VETT+DIC	F_VETT+DIC	NFR_VETT+DIC	NF_VETT+DIC
incrudimento trilineare	FR_TRI	F_TRI	NFR_TRI	NF_TRI
incrudimento esponenziale	FR_ESP	F_ESP	NFR_ESP	NF_ESP
incrudimento trilineare con DIC	FR_TRI+DIC	F_TRI+DIC	NFR_TRI+DIC	NF_TRI+DIC
incrudimento esponenziale con DIC	FR_ESP+DIC	F_ESP+DIC	NFR_ESP+DIC	NF_ESP+DIC

Tabella 5.6: tipologie di analisi effettuate e loro nomenclatura.

In particolare le analisi che sono state eseguite si distinguono in tre diverse tipologie che si andranno ad esaminare. Si osserva, inoltre, per una maggiore comprensione dei risultati riportati di seguito, che i grafici di convergenza hanno come ordinate i valori dei parametri normalizzati. Con normalizzati s'intende, per ciascun parametro, il rapporto fra il valore ottenuto dall'identificazione e quello con cui si sono ricavati i dati pseudo sperimentali.

5.4.1 Identificazioni parametriche ottenute con diverse grandezze misurabili

Innanzitutto, per entrambi i modelli si sono utilizzate tre diverse configurazioni delle grandezze misurabili per calcolare il residuo:

- Gli spostamenti nelle due direzioni principali dei nodi in reticolo centrale del provino per simulare l'acquisizione dei dati mediante il sistema di misura DIC.
- Le forze che si generano nei nodi posti agli estremi del provino in cui si applicano gli spostamenti imposti; per maggiore semplicità nell'esposizione dei risultati tali forze saranno chiamate forze nodali (FN).
- Una combinazione delle due precedenti misure (DIC+FN).

Si prendono in considerazione inizialmente le analisi effettuate sul modello cruciforme privo del foro centrale.

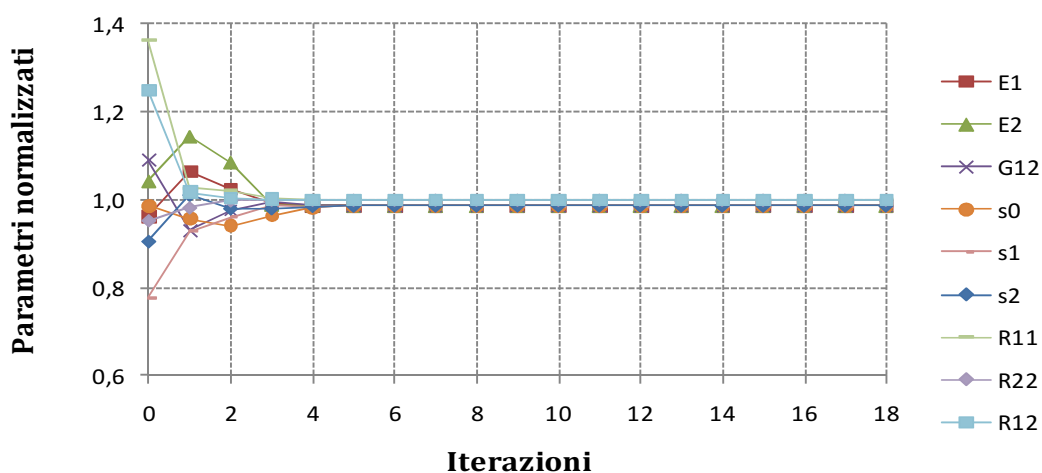


Grafico 5.9: curve di convergenza dell'analisi NF_DIC

La convergenza ottenuta è ottima poiché i parametri elastici e quelli d'incrudimento sono sottostimati di una quantità inferiore all'1%, errore ingegneristicamente accettabile; inoltre l'onere computazionale risulta piuttosto ridotto.

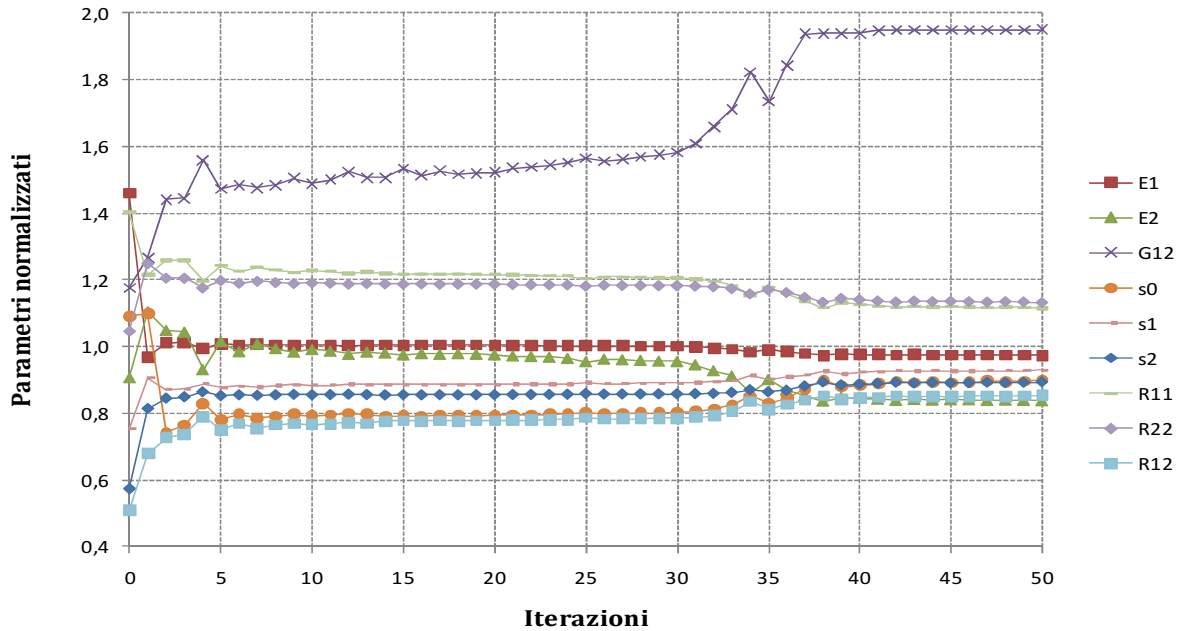


Grafico 5.10: curve di convergenza dell'analisi NF_FN

In questo caso non si ottiene convergenza perché le forze nodali non sono un numero sufficiente di informazione per l'identificazione dei parametri, sebbene siano certamente influenzate da questi ultimi.

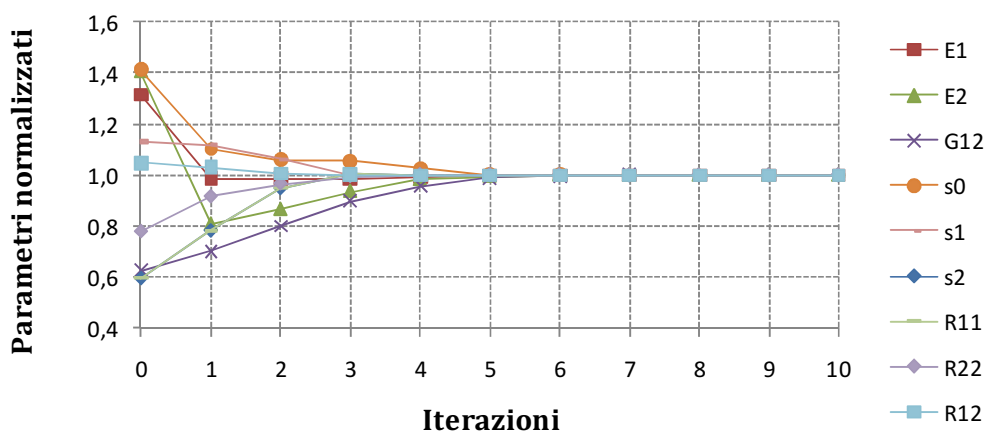


Grafico 5.11: curve di convergenza dell'analisi NF_DIC+FN

La convergenza ottenuta in questa analisi è ottima per tutti i parametri. Si può osservare come in questo caso, rispetto a quello NF_DIC, l'analisi abbia raggiunto una convergenza migliore. Tale risultato è dovuto all'uso di grandezze misurabili in numero sufficiente e adeguatamente influenzate dai parametri ricercati.

Osservazioni del tutto analoghe possono essere fatte per le analisi compiute sul secondo modello cruciforme da noi preso in considerazione, eccezione fatta per l'analisi F_DIC in cui l'errore di stima dei parametri elastici risulta più marcato, seppure inferiore al 2%.

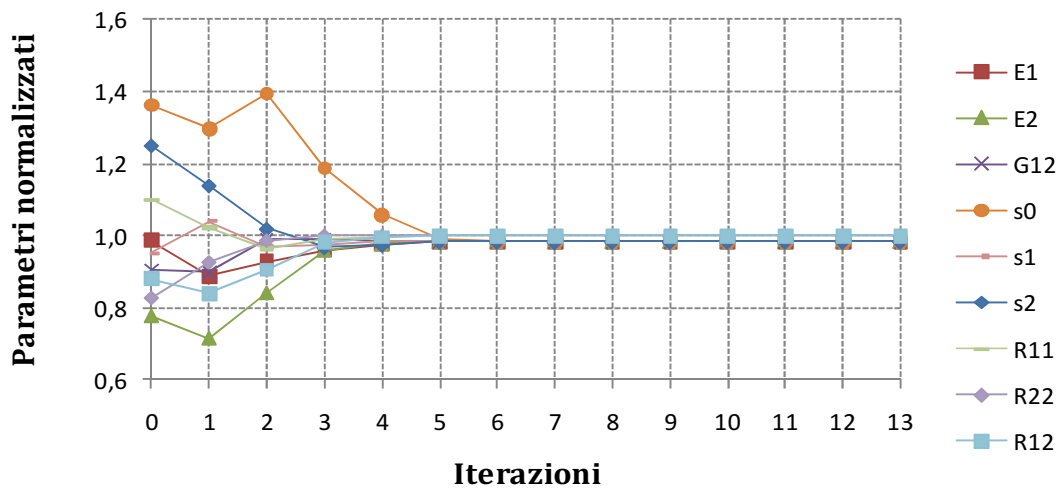


Grafico 5.12: curve di convergenza dell'analisi F_DIC

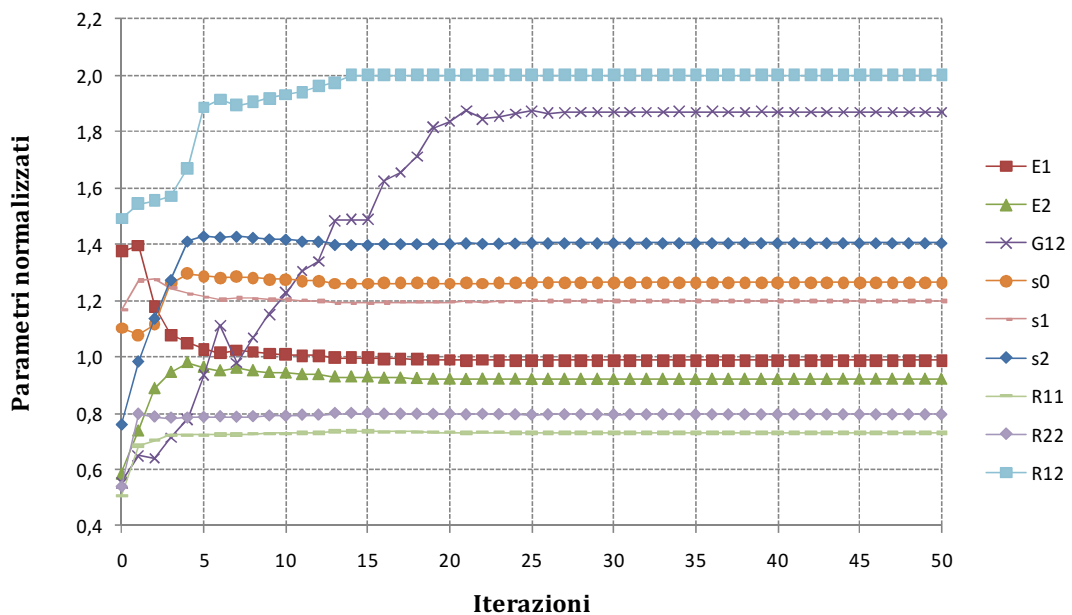


Grafico 5.13: curve di convergenza dell'analisi F_FN

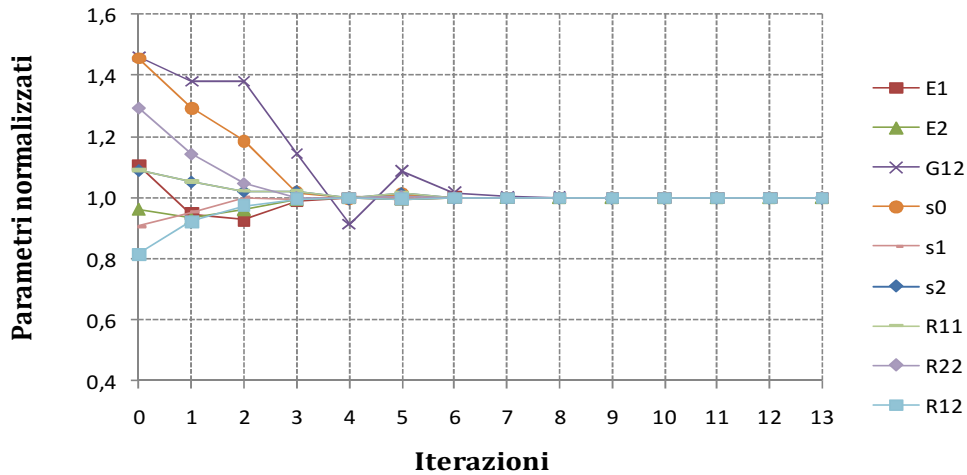


Grafico 5.14: curve di convergenza dell'analisi F_DIC+FN

Confrontando le curve di convergenza ottenute dai due diversi modelli non si notano differenze notevoli nei risultati di convergenza. L'unica osservazione che si può riportare riguarda la curva nel grafico 5.14, si può notare una maggiore difficoltà nel raggiungimento della convergenza del parametro G_{12} rispetto al caso NF_DIC+FN (grafico 5.11).

Si vuole ora osservare come varia la convergenza introducendo la perturbazione pseudo sperimentale nei dati di spostamento dei punti centrali di entrambi i modelli.

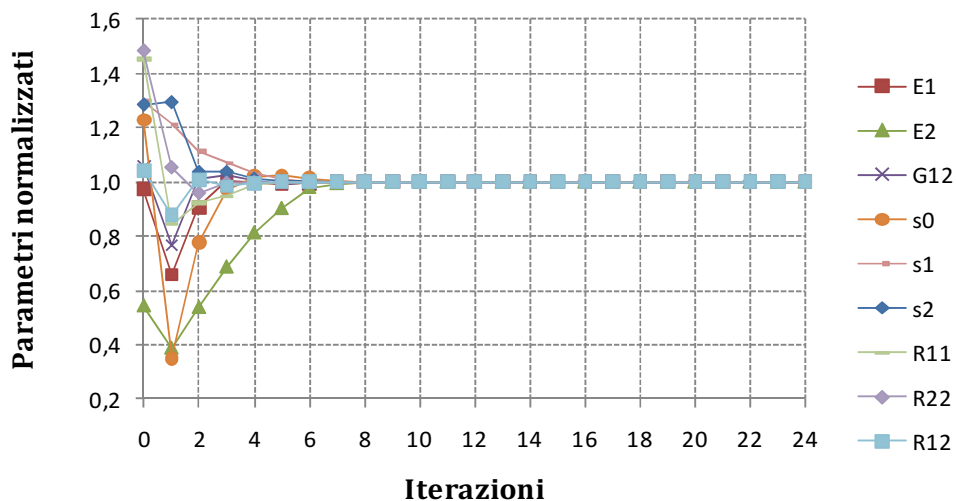


Grafico 5.15: curve di convergenza dell'analisi NFR_DIC+FN

La convergenza, in questo caso, non risulta influenzata, a dimostrazione della bontà del processo d'identificazione e della scelta delle grandezze.

Considerando il caso NFR_DIC, invece, si nota un peggioramento della convergenza con un errore di circa il 5% nell'identificazione dei parametri elastici e d'incrudimento.

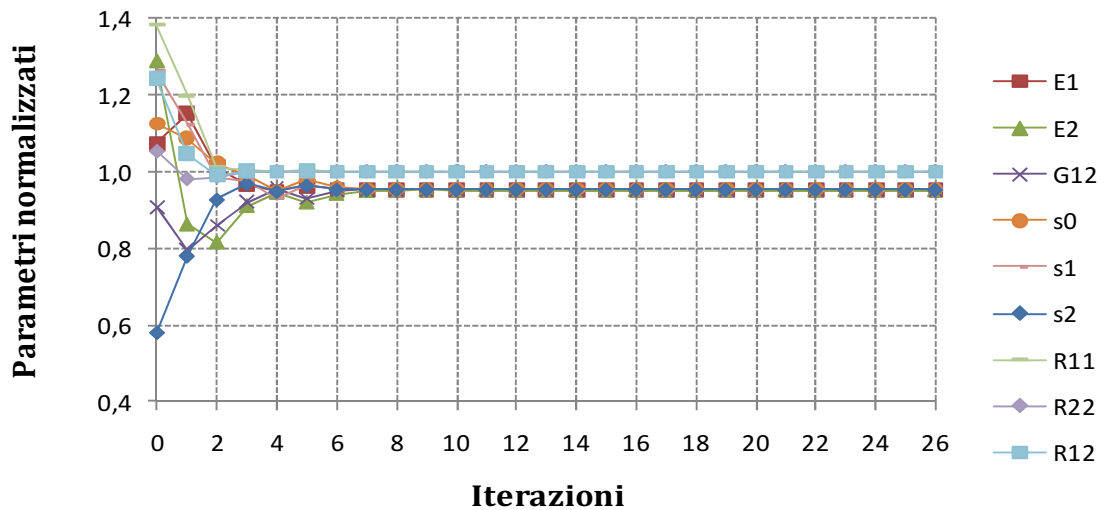


Grafico 5.16: curve di convergenza dell'analisi NFR_DIC

Le medesime analisi sono state compiute sul modello col foro centrale e i risultati ottenuti sono del tutto analoghi a quelli appena presentati.

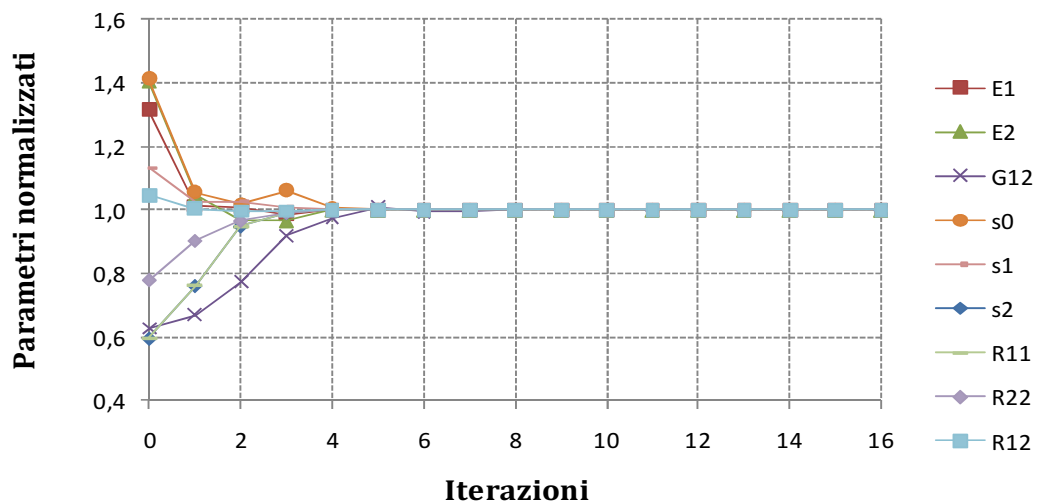


Grafico 5.17: curve di convergenza dell'analisi FR_DIC+FN

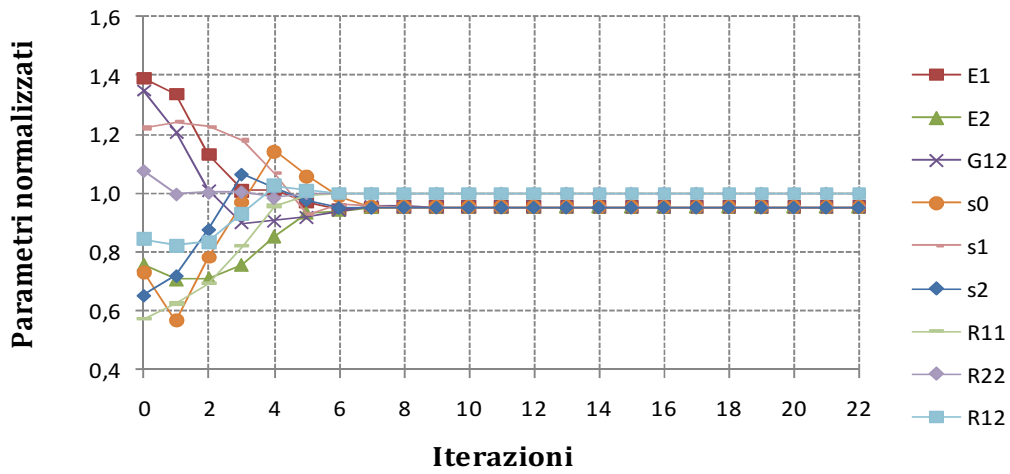


Grafico 5.18: curve di convergenza dell'analisi FR_DIC

5.4.2 Identificazioni parametriche ottenute con diversi rapporti fra gli spostamenti imposti

Prendendo come grandezze sia i dati derivati dal DIC che le forze nodali, si è studiata l'influenza sulla convergenza se si variano i rapporti fra gli spostamenti imposti agli estremi liberi del provino. In particolare si sono considerati due casi: il primo con rapporto 1-2 e il secondo 2-1, in cui le direzioni di spostamento sono rispettivamente MD e CD. Poiché i risultati ottenuti per entrambi i modelli sono qualitativamente identici, si riportano le curve di convergenza solo per il modello privo di foro centrale.

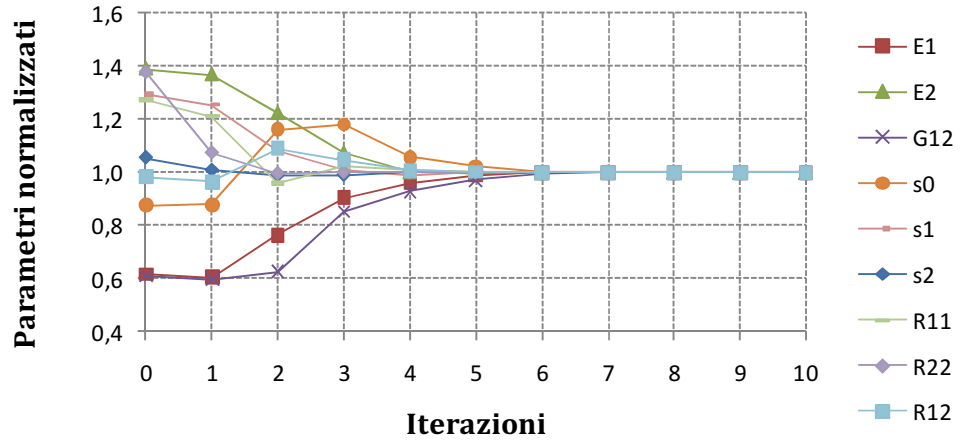


Grafico 5.19: curve di convergenza dell'analisi NF_1-1

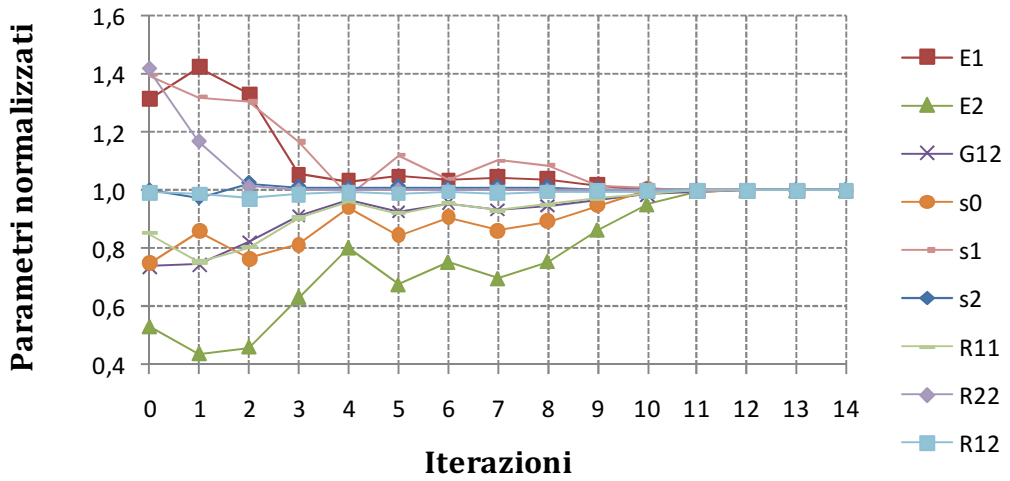


Grafico 5.20: curve di convergenza dell'analisi NF_1-2

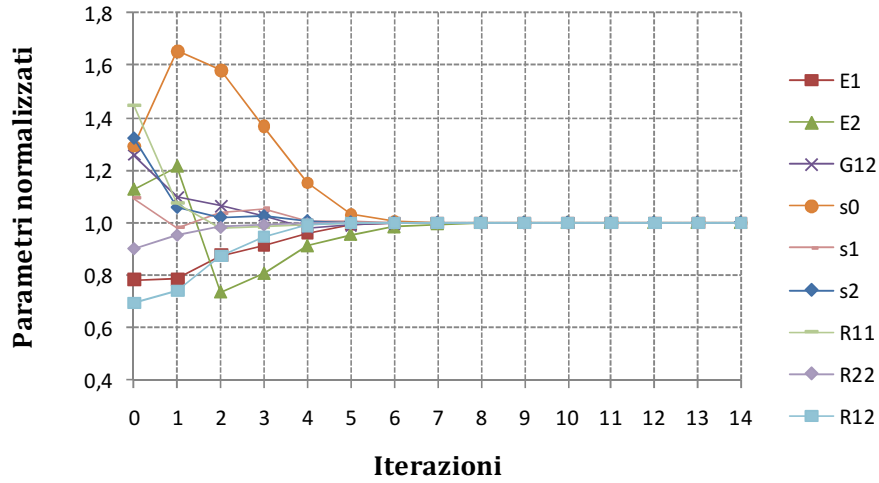


Grafico 5.21: curve di convergenza dell'analisi NF_2-1

La convergenza che si ottiene è ottima e non risulta afflitta da errore.

Anche in questo caso si è studiata l'influenza del "rumore" pseudo sperimentale sull'identificazione dei parametri nei tre casi precedentemente riportati.

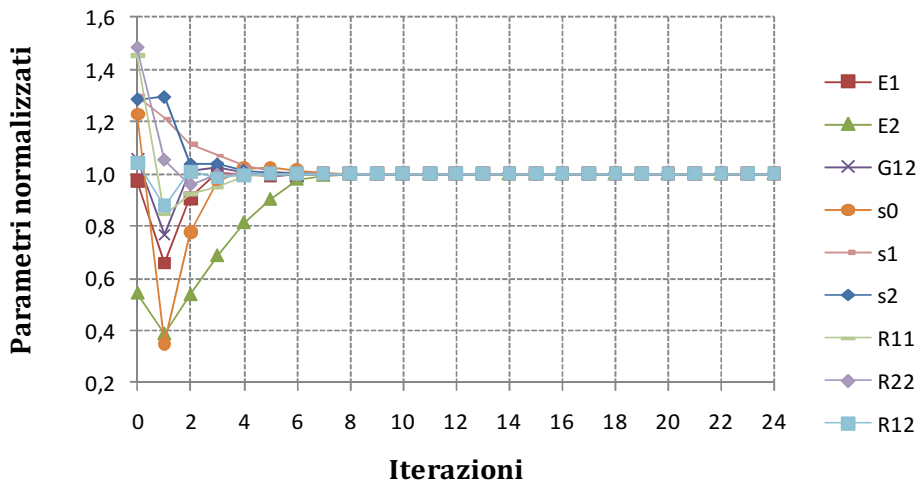


Grafico 5.22: curve di convergenza dell'analisi NFR_1-1

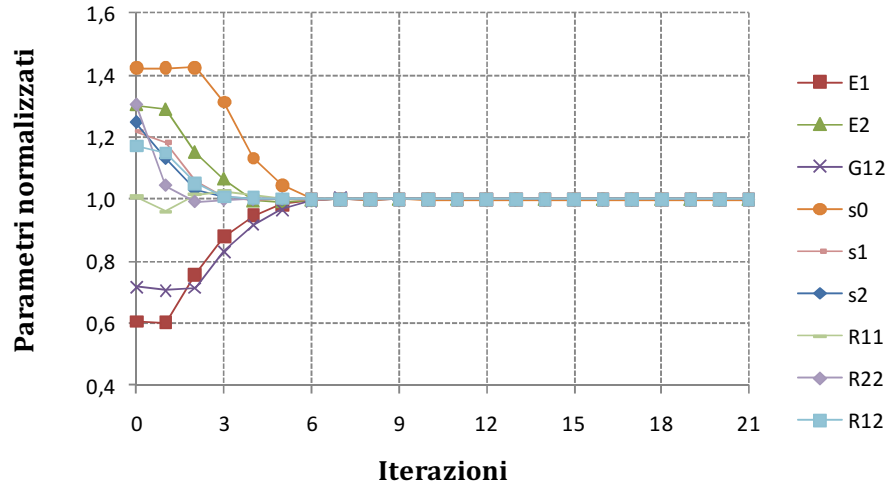


Grafico 5.23: curve di convergenza dell'analisi NFR_1-2

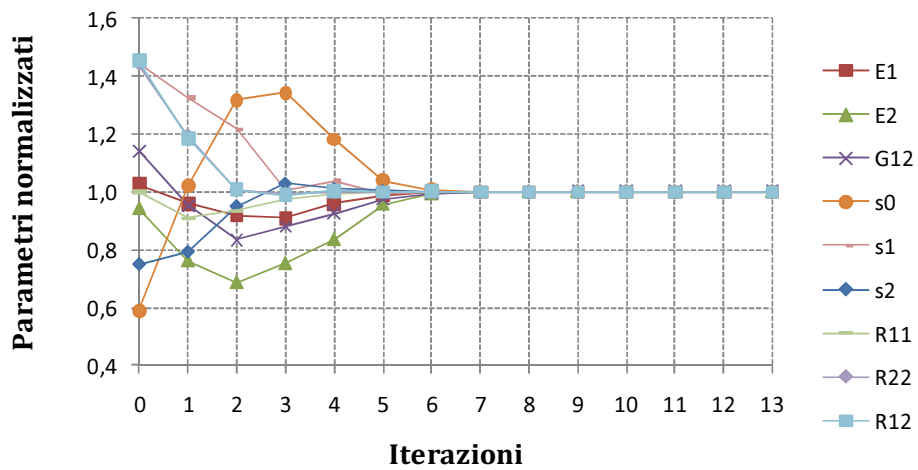


Grafico 5.24: curve di convergenza dell'analisi NFR_2-1

Si può notare che anche in queste analisi l'introduzione di una perturbazione nelle grandezze misurate, non influisce particolarmente sul raggiungimento della convergenza.

Infine si è svolta un'analisi costruendo un vettore contenente gli spostamenti misurabili dal DIC ottenuti dalle tre configurazioni precedenti. Si è svolta inoltre un'analisi analoga in cui si è considerata l'influenza del "rumore" pseudo sperimentale.

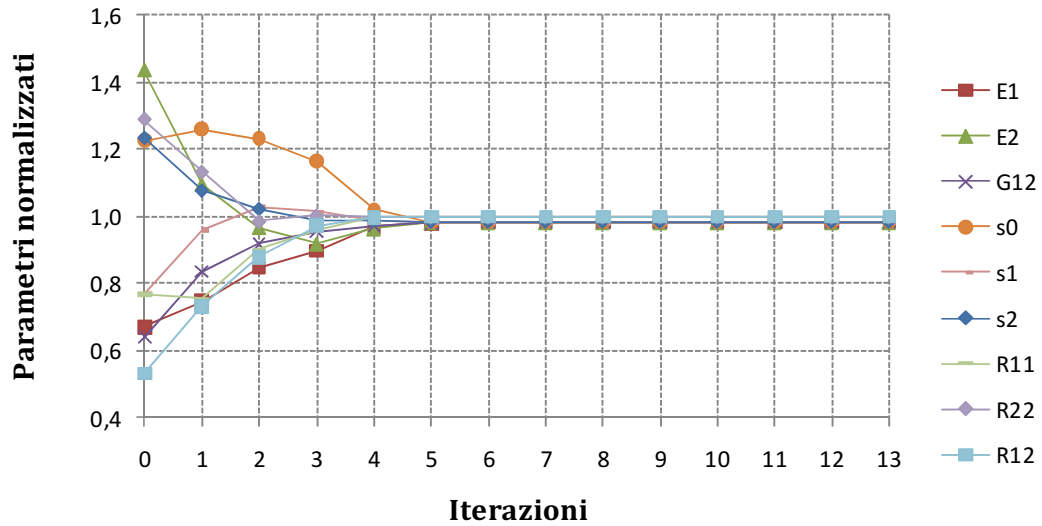


Grafico 5.25: curve di convergenza dell'analisi NF_VETT+DIC

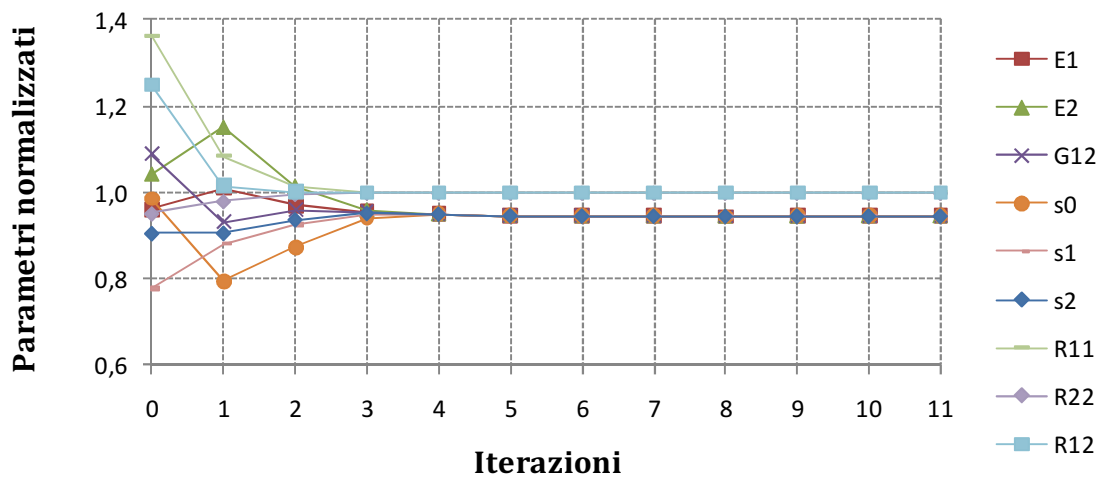


Grafico 5.26: curve di convergenza dell'analisi NFR_VETT+DIC

Mentre l'identificazione riportata in grafico 5.25 ha un errore accettabile prossimo all'1%, la convergenza nel caso NFR_VETT+DIC è abbastanza approssimativa: si ottiene il 5% di errore nell'identificazione dei parametri elastici e d'incrudimento.

5.4.3 Identificazioni parametriche ottenute con incrudimenti diversi

Infine sono stati studiati gli effetti sull'identificazione parametrica di diversi tipi di incrudimento e in particolare quello trilineare, descritto in precedenza, e uno di natura esponenziale. Si è scelto volontariamente di non eseguire analisi con incrudimento lineare, poiché, come si può notare dal grafico 5.5, tale modello ricalca in maniera molto approssimativa l'andamento reale delle deformazioni in campo plastico.

Incrudimento trilineare

L'assunzione di un incrudimento approssimato da tre funzioni lineari (grafico 5.8) comporta l'aumento delle variabili da identificare nell'analisi inversa. I parametri costitutivi del modello di Hill divengono perciò 10 invece che 9.

E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	G_{12} [MPa]	σ_0 [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	σ_3 [MPa]	R_{11}	R_{22}	R_{12}
5113	2278	1688	5	10,951	16,831	66,365	2	1	1,877

Tabella 5.7: parametri costitutivi assunti nel caso di incrudimento trilineare.

Le curve di convergenza che verranno riportate sono relative ad analisi effettuate con il provino cruciforme avente foro centrale, vista l'analogia nei risultati con il modello senza foro.

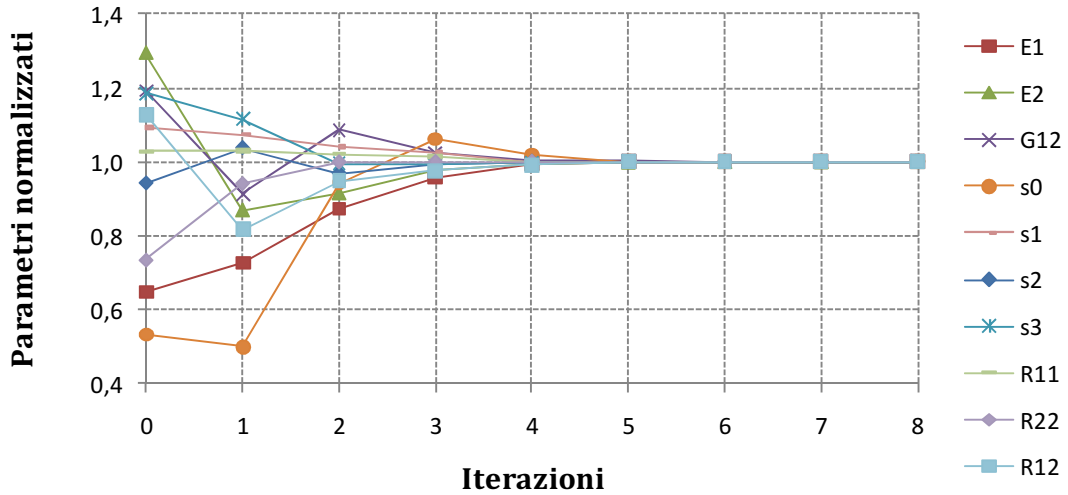


Grafico 5.27: curve di convergenza dell'analisi F_TRI

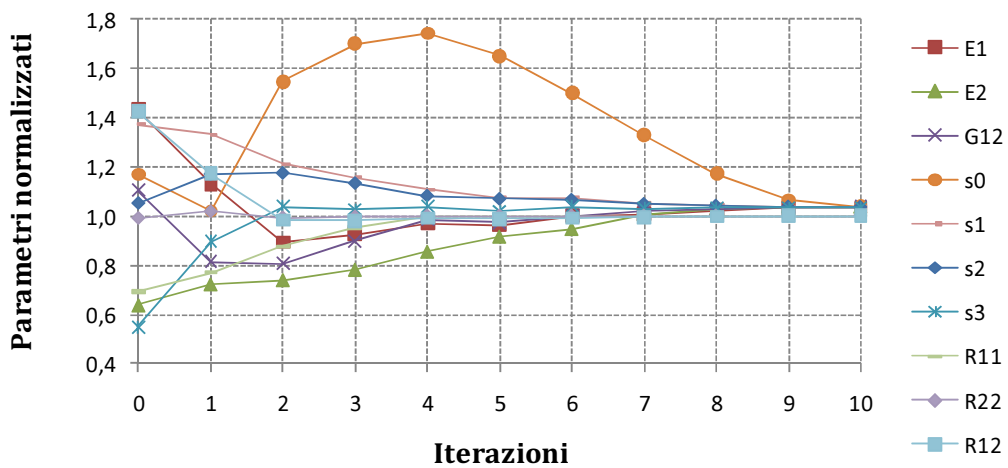


Grafico 5.28: curve di convergenza dell'analisi F_TRI+DIC

L'errore misurato nella convergenza dei parametri elastici e d'incrudimento nel grafico 5.28 è inferiore al 4%, mentre i parametri plastici convergono perfettamente.

Anche in questo caso si è operata l'aggiunta di perturbazione pseudo sperimentale per simulare l'acquisizione dei dati di spostamento mediante DIC.

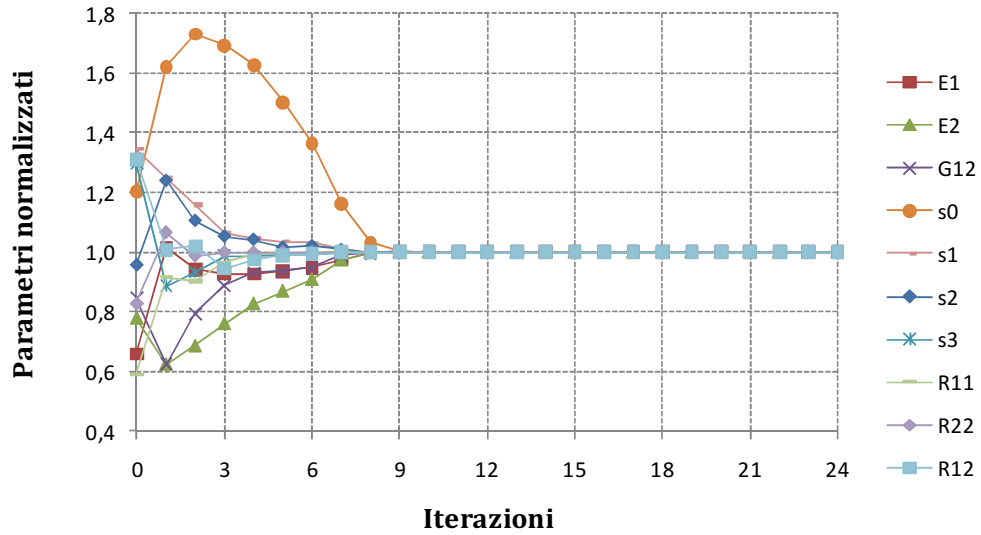


Grafico 5.29: curve di convergenza dell'analisi FR_TRI

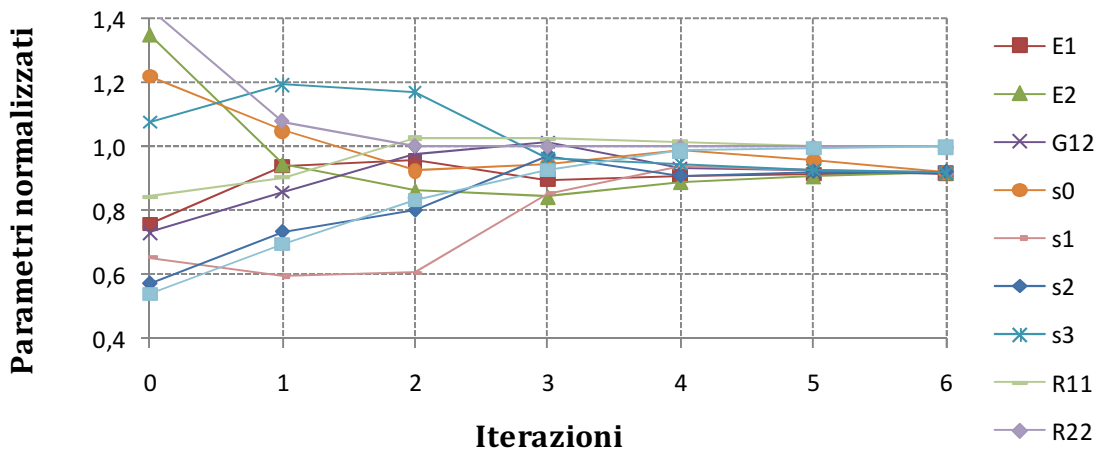


Grafico 5.30: curve di convergenza dell'analisi FR_TRI+DIC

La convergenza risulta accettabile nel caso FR_TRI, mentre si registra un errore di circa il 5% sull'identificazione dei parametri elastici e d'incrudimento per quanto riguarda l'analisi FR_TRI+DIC. Si può giustificare un risultato simile considerando che, sebbene il numero delle grandezze misurabili sia sufficiente, i parametri che convergono con approssimazioni del 5% non influiscono su tali grandezze in maniera sufficientemente adeguata.

Incrudimento esponenziale

Come ultimo caso si è voluto assumere un andamento dell'incrudimento di natura esponenziale, definito dalla seguente equazione:

$$\sigma_{eff} = \sigma_0 + q \cdot (\varepsilon_{eff}^p)^n$$

Dove q e n rappresentano i parametri d'incrudimento che si vogliono identificare nell'analisi inversa, i cui valori di riferimento sono stati calcolati come un problema di ottimizzazione ai minimi quadrati mediante algoritmo "trust region".

E_1	E_2	G_{12}	σ_0	q	n	R_{11}	R_{22}	R_{12}
5113	2278	1688	5	77,900	0,433	2	1	1,877

Tabella 5.8: parametri costitutivi assunti nel caso di incrudimento esponenziale.

Nonostante la formulazione dell'incrudimento mediante una funzione esponenziale, l'andamento delle deformazioni plastiche viene comunque approssimato nel programma di calcolo da funzioni lineari. Difatti Abaqus richiede, per la descrizione del materiale secondo il modello di Hill, coppie di punti del legame sforzo-deformazioni in campo plastico; in questo caso particolare sono state calcolate utilizzando la funzione sopra citata e rappresentata nel grafico 5.31.

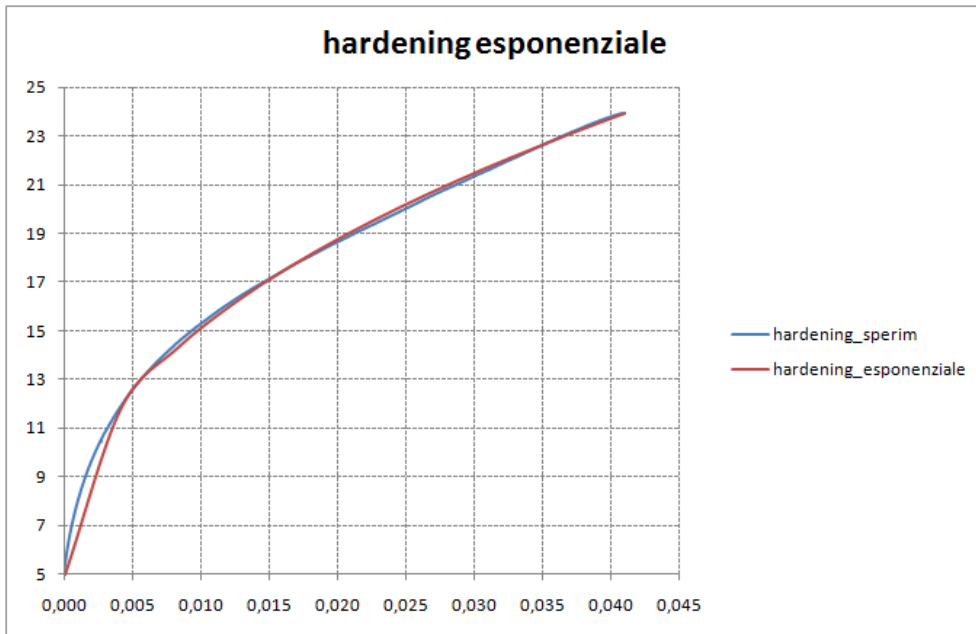


Grafico 5.31: legame sforzo-deformazione plastica (effettivi)

Le analisi inverse svolte con il modello privo del foro centrale hanno restituito delle buone convergenze dei parametri, affette da un errore massimo intorno al 4% nel caso dell'analisi NFR_ESP+DIC.

Per il campione cruciforme con foro, invece, sono stati ottenuti i seguenti risultati.

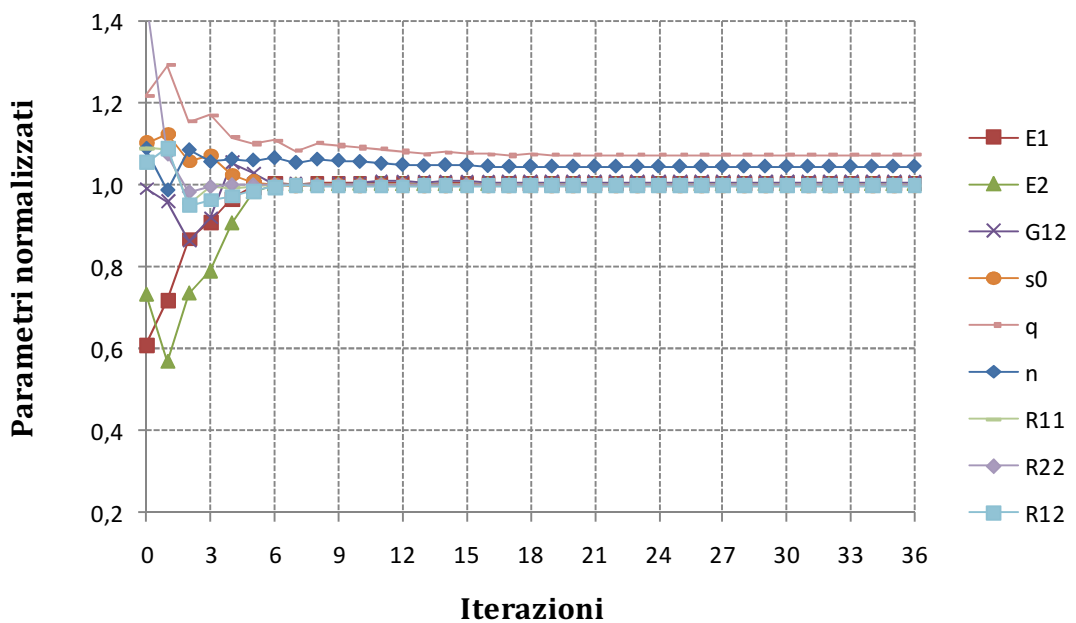


Grafico 5.32: curve di convergenza dell'analisi F_ESP

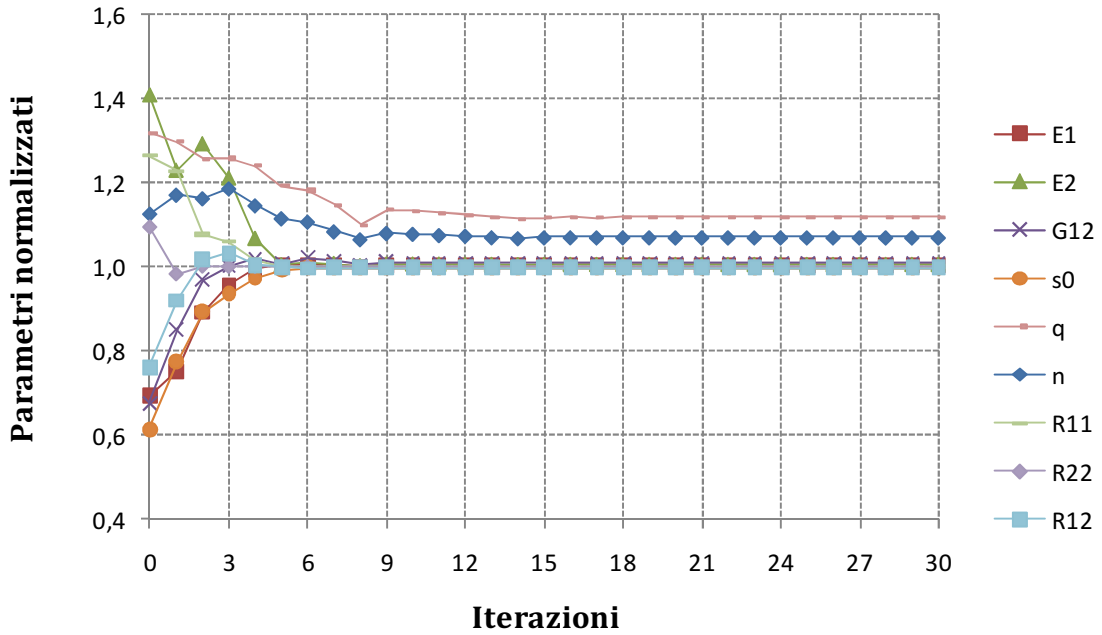


Grafico 5.33: curve di convergenza dell'analisi FR_ESP

Come si può notare dai grafici 5.32 e 5.33 la convergenza ha un'accuratezza inferiore rispetto ai casi precedentemente illustrati, se si considera una legge d'incrudimento esponenziale. In particolare, proprio i parametri che caratterizzano l'incrudimento sono affetti da un errore che varia fra il 3% e il 10%.

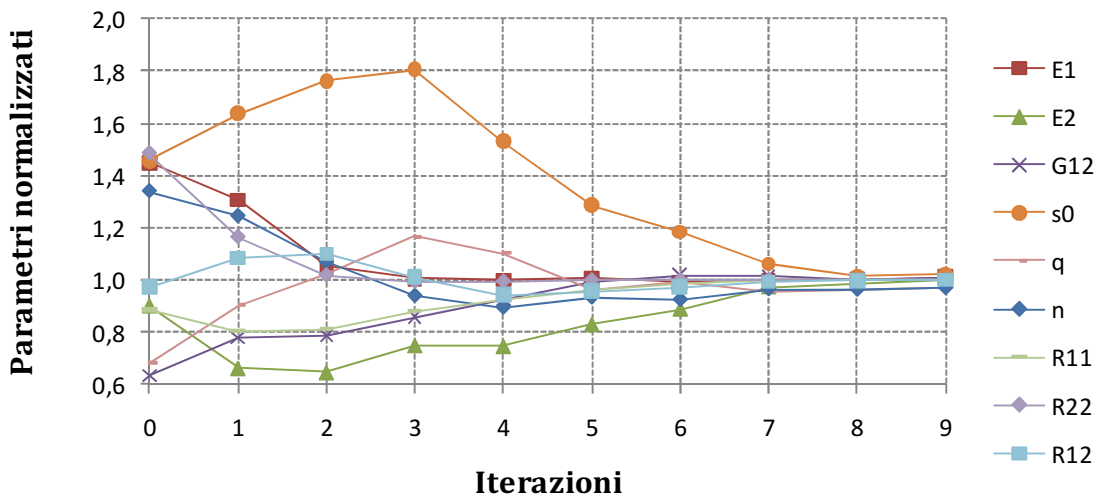


Grafico 5.34: curve di convergenza dell'analisi F_ESP+DIC

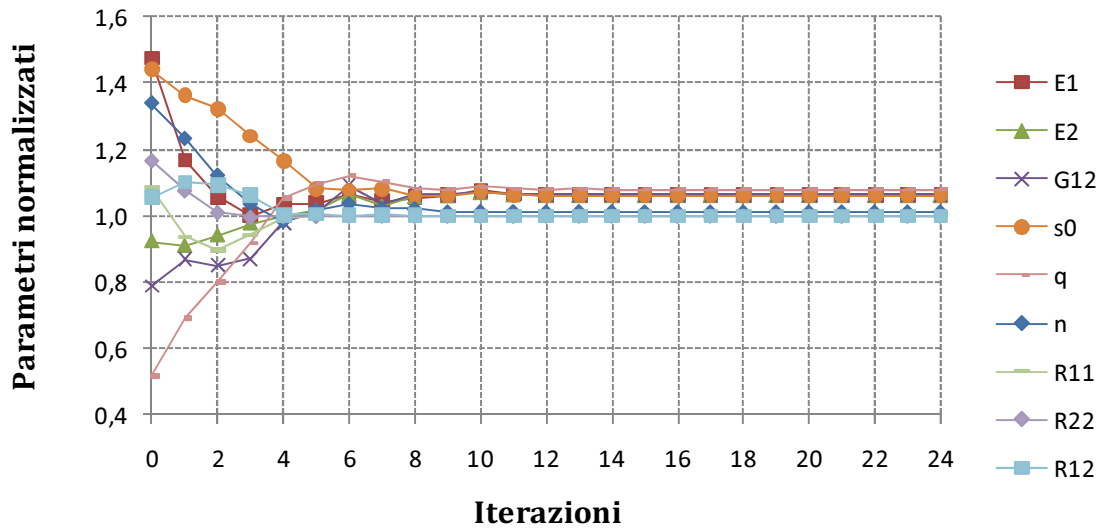


Grafico 5.35: curve di convergenza dell'analisi FR_ESP+DIC

Ripetendo le medesime analisi, ma usando come grandezze misurabili gli spostamenti dei nodi della mesh nella parte centrale del modello, ossia quegli spostamenti che simulano il calcolo delle misure mediante DIC, si ottengono le curve di convergenza riportate nei grafici 5.34 e 5.35. Anche in questo caso i risultati non sono molto confortanti poiché si ottiene un'approssimazione sulla convergenza dei parametri d'incrudimento che varia fra il 3,5% e l'8%.

Bibliografia

Abu-Farha, F., Hector, L., & Khraisheh, M. (2009, agosto). Cruciform-shaped Specimen for elevated temperature biaxial testing of lightweight materials. *JOM vol. 61, n°8*, p. 48-56.

Agno, M. (2003). *Caratterizzazione Meccanica di Fogli Sottili Liberi*. Milano: Politecnico di Milano (Tesi Laurea Magistrale).

Agno, M., Bolzon, G., & Maier, G. (2008). *An inverse analysis procedure for the material parameter identification of elastic-plastic free-standing foils*.

Archetti, F., & Faggioli, E. (1984). *Introduzione alla programmazione matematica*. Torino: G. Giappichelli Editore.

Astrua, F. (2008). L'involucro edilizio: rapporto tra forma e funzione. *Edifici a grande luce: nuove tecnologie dell'acciaio applicazioni al campo dell'Architettura e dell'Ingegneria Edile* (p. 63 -76). Torino: Politecnico di Torino (DISTET).

Bertoli, P., & Boschini, C. (2008). *Nuove tecniche di identificazione parametrica per la diagnosi strutturale di dighe in calcestruzzo con martinetti piatti*. Milano: Politecnico di Milano (Tesi Laurea Specialistica).

Bolzon, G., Garbowski, T., Maier, G., & Novati, G. (2008). *Parameter identification in a popular elastic plastic model for paper*. Milano: Report of the activities conducted within a 2008 research contract between TetraPak Company and Politecnico di Milano, DIS.

Bridgens, B. N., Gosling, P. D., & Birchall, M. S. (2004). Tensile fabric structure: concepts, practice & developments. *The structural engineer*, 21-27.

Bridgens, B., Gosling, P., & Birchall, M. (2004, luglio 20). Membrane material behaviour: concepts, practice & developments. *The structural engineer*, p. 28-33.

C. S. Nunes, L., A. Castello, D., F. Matt, C., & M.dos Santos, P. (2007). *Parameter estimation using digital image correlation and inverse problems*. Sao Paulo: Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.

Campinteri, A. (1992). *Meccanica dei materiali e della frattura*. Bologna: Pitagora.

Castro, J., & Ostoja-Starzewski, M. (2003, febbraio 4). Elasto-plasticity of paper. *International journal of plasticity* 19, p. 2083-2098.

Chen, J., Xia, G., Zhou, K., & Quin, Y. (2005). *Two step digital image correlation for micro-region measurement*. Optics and Lasers in Engineering.

Chen, S., Ding, X., Figueiro, R., Yi, H., & Ni, J. (2007, ottobre 30). Tensile behavior of PVC-coated woven membrane materials under uni- and bi-axial loads. *Wiley Periodicals InterScience*, p. 2038-2044.

Corradi dell'Acqua, L. (1992). *Meccanica delle Strutture (Il comportamento dei mezzi continui)*. Milano: McGraw-Hill.

Crippa, M. A., Irace, F., Lemoine, B., & Rijkert, J. (1993). *Architettura del XX secolo*. Milano: Jaca Book.

De Borst, R., & De Feenstra, P. (1990). Studies in anisotropic plasticity with reference to the Hill criterion. *Int J. Num. Meth. Eng.*, vol.29, 315-336.

Dessauce, M. (1999). *The Inflatable Moment. Pneumatics and Protest in '68*. Parigi: Princeton Architectural Press.

Foster, B., Mellaret, M., & Tensinet. (2007). *Progettare con le membrane (Tensostrutture e Pressostrutture; Materiali e Tecnologie)*. Maggioli Editore.

Fuzio, G. (1978). *Costruzioni Pneumatiche, Quaderni del Centro di Documentazione sulla Industrializzazione Edilizia*. Milano: DEDALO LIBRI.

Galliot, C., & Luchsinger, R. (2009, aprile 14). A simple model describing the non-linear biaxial tensile behaviour of PVC-coated polyester fabrics for use in finite element analysis. *Composite structures*, p. 438-447.

Galliot, C., & Luchsinger, R. (2010, settembre 16-18). Tensile architecture: connecting past and future. *Biaxial testing of architectural membranes and foils*. Sofia, Bulgaria: EMPA, Swiss Federal Laboratories for Materials Science and Technology.

Garbowski, T. (2009). *Material Model Calibration Based on Full-Field Measurements and Inverse Analysis, with Applications to Concrete Dams and Anisotropic Free-Foils*. Milano: Politecnico di Milano (Doctoral Thesis).

Geiger, D. (1970). *US Pavilion at EXPO 70 Features Air-Supported Cable Roof*. New York: Civil Engineering - ASCE.

Gloria, A. (2009). *Polimeri e Composti Funzionali per la Ricostruzione dei Tessuti*. Napoli: Università Degli Studi di Napoli Federico II (Tesi di Dottorato).

Harrysson, A., & Ristinmaa, M. (2008, February 15). Large strain elasto-plastic model of paper and corrugated board. *International Journal of Solids and Structures* 45 , p. 3334–3352.

Hibbit, Karlsson, & Sorensen. (2002). "Abaqus/Standard User Manual" versione 6.3, vol. I,II,III. Pawtuket: Abaqus.

Hill, R. (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford: Clarendon Press.

Jones, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials*. Blacksburg, Virginia: Taylor & Francis.

Karafillis, A. P., & Boyce, M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion using bounds and transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids* 41 , 1859-1886.

Landau, L., & Lifshitz, E. (1967). *Phisique thèorique, Tome 7, Thèorie de l'èlasticité*. Mosca: Edizioni MIR.

Maier, G. (1970). Il problema delle grandi luci risolto mediante tensostrutture. *L'acciaio nell'edilizia alberghiera, negli impianti sportivi, turistici e culturali* (p. 6). Bologna: UISAA.

Ottosen, N. S., & Ristinmaa, M. (2005). *The mechanics of constitutive modeling*. Great Britain: Elsevier.

P. Bazant, Z., & Jiràsek, M. (2001). *Inelastic analysis of structures*. England: Wiley.

Parolini, A., & Vitali, M. (2005). *Membrane Impermeabilizzanti e Applicazioni alle Dighe*. Milano: Politecnico di Milano (tesi di laurea).

Peruccio, P. P. (2010). Strutture Pneumatiche. *LUX*, n°5 , 56-69.

Robinson-Gale, S., Kolokotroni, M., Cripps, A., & Tanno, S. (2001). ETFE foil cushions in roofs and atria. *Construction and buildings materials* 15 , 323-327.

Sawyer, J., Jones, R., & McKinlay, P. (1996, October 2). An experimental description of the response of paper. *Composite Structures* (36) , p. 101-111.

Seth, R., & Page, D. (1983). The stress–strain curve of paper. The Role of Fundamental Research in Papermaking. *Transactions of the Seventh Fundamental Research Symposium* (p. 421). Cambridge, London, UK: Mechanical Engineering Publications, Ltd.

Xia, Q. S. (2002). *Mechanics of inelastic deformation and delamination in paperboard*. Massachusetts: Massachusetts institute of technology (PhD thesis).

Xia, Q. S., Boyce, M. C., & Parks, D. M. (2002). *A constitutive model for the anisotropic elastic-plastic deformation of paper and paperboard*. Oxford: Int J. S. S.

Zanelli, A. (2008). I tessuti tecnici innovativi per l'architettura. *Sperimentazione del progetto di architettura e ciclo di vita dei prodotti edilizi* (p. 17-22). Torino: Politecnico di Milano.