

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni



STUDIO E SIMULAZIONE DI ALGORITMI DI SINCRONIZZAZIONE PER LA TRATTA DI UPLINK NEI SISTEMI LONG TERM EVOLUTION (LTE)

Relatore: Chiar.mo Prof. Vittorio RAMPA

Correlatore: Ing. Riccardo REPETTO

Tesi di Laurea Specialistica di:

Giacomo AMISANO Matr. 681197

Indice

Elenco delle figure	ix
Elenco delle tabelle	x
Lista di Acronimi	xi
Introduzione	1
1 I segnali nel sistema LTE	3
1.1 Evoluzione dei sistemi di comunicazione wireless	3
1.2 La modulazione OFDM	6
1.2.1 Definizione e progetto dei sistemi di trasmissione multiportante	6
1.2.2 Realizzazione pratica del sistema OFDM	9
1.2.3 Svantaggi e fragilità della modulazione OFDM	11
1.3 L'innovativa modulazione SC-FDMA	16
1.3.1 Approccio nel dominio del tempo	18
1.3.2 Approccio nel dominio della frequenza	19
1.3.3 La modulazione SC-FDMA nel sistema LTE	20
2 La tratta di Uplink del sistema LTE	22
2.1 L'architettura di sistema: descrizione generale	22
2.1.1 La rete Evolved Packet System (EPS)	24
2.1.2 Architettura dei protocolli della rete E-UTRAN	25
2.2 Il livello fisico	27
2.2.1 La struttura logica	27
2.2.2 La griglia di allocazione delle risorse nel dominio tempo-frequenza	29
2.2.3 Il simbolo SC-FDMA nel tempo e in frequenza	31
2.2.4 Problemi con la continua	32
2.3 Il canale fisico per la trasmissione di utente (PUSCH)	34
2.3.1 Scrambling	34
2.3.2 Modulazione	36
2.3.3 Transform precoding	36
2.3.4 Mappatura sulle risorse fisiche	37
2.3.5 Generazione del simbolo SC-FDMA	38
2.3.6 Traslazione di mezza portante	39
2.4 I segnali di riferimento in Uplink	40
2.4.1 Generazione delle sequenze associate ai Reference Signals	40
2.4.2 Sequenze base e loro raggruppamento	43
2.4.3 Costruzione di sequenze RS ortogonali dalle sequenze base	44
2.4.4 Sequence-Group Hopping (SGH) e Sequence Hopping (SH)	46

2.4.5	La struttura della trama PUSCH	47
2.5	Il canale radio: proprietà e modelli	49
2.6	Modelli di canale per il sistema LTE	50
2.7	Cambiamento della spaziatura dei ritardi	51
3	Algoritmi di sincronizzazione	53
3.1	Effetti degli errori di sincronizzazione sulla modulazione SC-FDMA	53
3.1.1	Effetti del timing offset	55
3.1.2	Effetti del frequency offset	59
3.1.3	Inseguimento del clock di campionamento	60
3.2	Algoritmi proposti in letteratura	60
3.2.1	L'algoritmo di Schmidl e Cox	60
3.2.2	L'algoritmo di van de Beek	61
3.2.3	Il metodo di van de Beek nel sistema LTE	63
3.3	L'algoritmo di sincronizzazione	66
3.3.1	Sincronizzazione in frequenza	67
3.3.2	Sincronizzazione nel tempo	85
4	La stima di canale	89
4.1	Il modello di riferimento	90
4.2	Il rapporto tra portanti di utente e virtuali	91
4.3	Modello generale del canale multi-percorso	93
4.4	Gli algoritmi di stima di canale	94
4.4.1	La stima Zero Forcing (ZF)	95
4.4.2	Stima Least Squares (LS)	95
4.4.3	Stimatore Minimum Mean Square Error (MMSE)	98
4.4.4	Tecniche MMSE approssimate	104
4.5	Tecniche di riduzione del costo computazionale	109
4.5.1	Approssimazione a rango ridotto	109
4.5.2	Regolarizzazione di Tychonov	111
4.5.3	Impiego vantaggioso delle simmetrie del problema	112
4.6	Tecniche di correzione dell'errore di correlazione	116
4.6.1	Stimatore DFT-based	118
4.6.2	Il metodo Successive Interference Cancellation (SIC)	119
4.6.3	Metodo SIC modificato	121
4.6.4	Algoritmo di path detection (PD)	124
4.7	Algoritmo di stima proposto	126
5	Il software Matlab e l'interfaccia utente	128
5.1	L'applicativo sviluppato	128
5.1.1	Le applicazioni per l'utente	128
5.1.2	I blocchi funzionali principali	129
5.1.3	Osservazioni	129
5.2	Trasmettitore PUSCH	129
5.3	Ricevitore PUSCH	132
5.4	Le interfacce grafiche e le misure sul segnale ricevuto	133
5.4.1	L'editor del canale dati (PUSCH)	133
5.4.2	Ricevitore PUSCH	136

6	Simulazione e commento dei risultati	139
6.1	Algoritmo di sincronizzazione	139
6.1.1	Il modello per le simulazioni	140
6.1.2	Obiettivi dello stimatore	141
6.1.3	Prestazioni della sincronizzazione	142
6.2	Stima di canale ed equalizzazione	146
6.2.1	Il modello per le simulazioni	147
6.2.2	Prestazioni della stima di canale	147
7	Conclusioni	150
A	Sviluppi analitici	151
A.1	Prefisso ciclico: proprietà di convoluzione circolare	151
A.2	Sincronizzazione	154
A.2.1	Sincronizzazione ritardata	154
A.2.2	Simbolo SC-FDMA affetto da CFO	155
A.3	Stima di canale	157
A.3.1	Derivazione stimatore MMSE	157
A.3.2	Calcolo Mean Square Error dello stimatore MMSE in frequenza	157
A.3.3	Proprietà dello stimatore con riduzione ottimale del rango	159
A.3.4	Algoritmo super-veloce di Schur	160
B	Il PAPR	163
B.1	Il PAPR in un sistema OFDM	163
B.2	Metodi di riduzione del PAPR in un sistema OFDM	165
B.3	Il PAPR in un sistema SC-FDMA	168
B.4	Potenza di picco in un sistema a singola portante e multiportante	170
C	Sequenze di Zadoff-Chu (ZC)	173
C.1	Proprietà delle sequenze periodiche	173
C.2	Proprietà delle sequenze ZC	175
C.2.1	Radici primitive dell'unità	175
C.2.2	Definizione delle sequenze ZC	175
C.2.3	Funzione di autocorrelazione periodica	177
C.2.4	Funzione di cross-correlazione periodica	177
C.3	Proprietà delle sequenze ZC utilizzate in LTE	179
C.3.1	Resistenza dell'autocorrelazione periodica al rumore AWGN	179
C.3.2	L'influenza del Channel Frequency Offset (CFO) sui RS	180
C.3.3	Il pattern di ripetizione dei RS nella trama	181
D	Soluzione di sistemi lineari con simmetria di Toeplitz	184
D.1	Algoritmo di Levinson	185
D.2	Algoritmo super-veloce di Schur	188
E	Proprietà del canale radio	192
E.1	Modello dei segnali in banda base	192
E.2	La risposta del canale radio	193
E.3	Descrizione statistica del canale radiomobile	194
E.3.1	Dispersione dei ritardi	195
E.3.2	Variazione del canale nel tempo	196

E.3.3	Effetti dei cammini multipli sul segnale ricevuto	197
F	Simulazione dei modelli di canale LTE	200
F.1	L'algoritmo del simulatore di canale	200
F.1.1	Definizione del Power Delay Profile e ricampionamento delle prese	200
F.1.2	Generazione dei percorsi casuali	201
F.1.3	Convoluzione con il filtro Doppler	201
F.1.4	Ricampionamento delle realizzazioni	203
F.1.5	Filtraggio a blocchi con salvataggio dello stato	203
F.2	Codice del simulatore numerico	205

Elenco delle figure

1.1	Evoluzione dell'utenza dei servizi ICT (misurata in utenti ogni 100 abitanti) a livello mondiale, dal 2000 a oggi. Fonte: ITU World Telecommunications/ICT Indicators database.	3
1.2	Cronologia approssimata degli standard di comunicazione radiomobile.	5
1.3	Suddivisione della banda B_W in un sistema multiportante.	6
1.4	Schema generale della modulazione multiportante.	
	7	
1.5	Confronto tra l'efficienza spettrale del sistema OFDM e della classica modulazione multiportante.	7
1.6	Ortogonalità tra le sottoportanti OFDM.	8
1.7	Modello del sistema OFDM.	9
1.8	Aggiunta del prefisso ciclico. La durata del simbolo diventa $T = T_S + T_{CP}$, dove T_S è $1/\Delta f$ e $T_{CP} = N_{CP}T_C$	10
1.9	Probabilità che il PAPR superi una soglia PAPR_0 per diversi valori del numero di portanti OFDM.	12
1.10	Perdita dell'ortogonalità tra le sottoportanti OFDM a causa del CFO.	13
1.11	Potenza ICI per Doppler di Jakes e per un CFO deterministico.	14
1.12	SIR dovuto all'ICI per Doppler di Jakes e per un CFO deterministico.	15
1.13	Sensibilità del sistema OFDM agli errori di sincronizzazione temporale.	15
1.14	Potenza del segnale, di ICI e ISI nel caso di un prefisso ciclico troppo corto.	16
1.15	Rapporto Segnale Interferenza (SIR) in funzione della lunghezza della CIR, per CP in configurazione normale.	17
1.16	Schema a blocchi della generazione temporale di un simbolo SC-FDMA.	18
1.17	Trasmissione distribuita con spaziatura costante tra le portanti occupate.	18
1.18	Channel Dependent Scheduling nel caso di due utenti. Le risorse sono assegnate in base alle condizioni di canale sperimentate da ciascun utente.	19
1.19	Generazione del segnale SC-FDMA in frequenza e presentazione delle mappature localizzata e distribuita delle sottoportanti	19
1.20	Confronto, rispetto al PAPR, della generazione SC-FDMA nel tempo (IFDMA), della generazione SC-FDMA in frequenza(DFT-S-OFDM) e dell'OFDM.	21
1.21	Generazione di un simbolo SC-FDMA in LTE.	21
2.1	Rappresentazione nel piano tempo-frequenza dei canali fisici trasmessi nella tratta di Uplink del sistema LTE.	23
2.2	Suddivisione funzionale tra E-UTRAN e EPC.	23
2.3	Architettura E-UTRAN.	24
2.4	Architettura dei protocolli E-UTRAN. Si distinguono il piano di utente dal piano di controllo.	25
2.5	Canali logici, di trasporto e fisici nella tratta di Uplink LTE.	26
2.6	Struttura di trama di Tipo 1, associata al Frequency Division Duplex (FDD).	28
2.7	Configurazione di uno slot nel caso di CP normale.	29
2.8	Griglia delle risorse fisiche. Sono evidenziati i Resource Elements e i Resource Blocks.	30
2.9	Rappresentazione nel dominio del tempo di un simbolo SC-FDMA.	31

2.10	Rappresentazione del simbolo SC-FDMA nel dominio della frequenza.	32
2.11	Traslazione di $\Delta f/2 = 7.5$ kHz per una banda di sistema con un numero di RB pari (a sinistra) e dispari (a destra).	33
2.12	Schema a blocchi del generatore PUSCH.	34
2.13	Scrambling del flusso di bit in ingresso.	34
2.14	Generazione della sequenza pseudocasuale $c(n)$ con una coppia di registri a scorrimento.	35
2.15	Modulazione dei bit in uscita dallo scrambler.	36
2.16	Precodifica con DFT applicata ai simboli modulati.	36
2.17	Mappatura sulle risorse fisiche: le tecniche di Frequency Hopping.	38
2.18	Generazione del simbolo SC-FDMA a partire dai resource elements.	38
2.19	Traslazione di mezza sottoportante durante la modulazione di Uplink. La variabile f_0 è la frequenza della portante.	39
2.20	Generazione dei simboli SC-FDMA per i Reference Signals. Si noti che la precodifica con la DFT non viene applicata.	41
2.21	Configurazione di uno slot LTE in Uplink con CP normale.	48
2.22	Configurazione di uno slot LTE in Uplink con CP esteso.	48
2.23	Evoluzione nel tempo di una realizzazione di canale EVA con $\nu_D = 70$ Hz.	52
2.24	Ricampionamento dei coefficienti di canale secondo il metodo di allineamento grossolano.	52
3.1	Parziale sovrapposizione tra i simboli SC-FDMA ricevuti dovuta alla presenza dei cammini multipli.	55
3.2	Esempio di sincronizzazione anticipata.	56
3.3	Due esempi di sincronizzazione ritardata.	57
3.4	Classificazione della sincronizzazione temporale.	58
3.5	Anticipo della stima $\hat{\theta}$	59
3.6	Blocco estratto dal segnale ricevuto di dimensione $2N + N_{CP}$ campioni. Sono indicati gli insiemi U e U'	62
3.7	Andamento ideale della funzione $\Lambda(n)$	63
3.8	Log-verosimiglianza per $B_W = 5$ MHz e 25 RB allocati.	64
3.9	Log-verosimiglianza per $B_W = 5$ MHz e 10 RB allocati.	64
3.10	Log-verosimiglianza per $B_W = 5$ MHz e 3 RB allocati.	65
3.11	Schema a blocchi dell'algoritmo di sincronizzazione proposto.	66
3.12	Schema a blocchi dell'algoritmo Standard Duty.	67
3.13	Esempio di segnale acquisito.	68
3.14	Esempio dell'andamento di $ R_{ry}(n) $ per $B_W = 5$ MHz. Si nota la presenza di picchi non corrispondenti al RS $y(n)$ cercato.	69
3.15	Trasformazione delle posizioni di due picchi di cross-correlazione associati allo stesso RS nella posizione del primo RS della trama.	70
3.16	Effetto del CFO sul massimo della cross-correlazione tra un RS perturbato e una sua replica non distorta.	71
3.17	Funzione $M(f_{CFO,blind})$ per $g_{CFO}^{\max} = 3.5$ kHz e $thr_{BOF} = 0.9$	72
3.18	Probabilità P_{fail}^{CFO} , quando $thr_{CFO} = 0.95$ al variare di SNR e CFO.	73
3.19	Probabilità P_{TP}^{CFO} per $SNR = 0$ dB, in funzione del CFO e di thr_{CFO}	74
3.20	Probabilità P_{TP}^{CFO} per $SNR = 2.5$ dB, in funzione del CFO e di thr_{CFO} . $B_W = 5$ MHz; $N_{used}^{RB} = 3$	74
3.21	Probabilità P_{TP}^{CFO} per $SNR = 10$ dB, in funzione del CFO e di thr_{CFO} . $B_W = 5$ MHz; $N_{used}^{RB} = 3$	75
3.22	Probabilità P_{TP}^{CFO} in funzione dell'SNR e di thr_{CFO} . A sinistra $CFO = 0$ kHz; a destra $CFO = 7.5$ kHz.	75
3.23	Funzione P_{ON}^{BC} al variare dell'SNR e di thr_{CFO} , per $CFO = 7.5$ kHz. $B_W = 5$ MHz, $N_{used}^{RB} = 3$	76
3.24	Funzione P_{ON}^{BC} al variare del CFO e dell'SNR, per $thr_{CFO} = 0.9$. $B_W = 5$ MHz, $N_{used}^{RB} = 3$	76
3.25	Ambiguità delle stime di CFO ottenute dall'algoritmo di van de Beek.	77

3.26	Schema a blocchi dello stimatore di CFO RS-based.	79
3.27	Stima del CFO con RS. Evoluzione degli intervalli di ricerca per $CFO = 2.5$ kHz.	81
3.28	Funzione $SNR_{thr}(N_{used}, B_W)$ per $B_W = \{5, 20\}$ MHz e diversi valori di N_{used}	81
3.29	Schema a blocchi dell'algoritmo di sincronizzazione in frequenza Hard Duty.	82
3.30	Forma d'onda ricevuta e filtro per ridurre i contributi di rumore ($B_W = 5$ MHz, $B_{used} = 1.8$ MHz e $SNR = 5$ dB).	83
3.31	MSE (a sinistra) e P_{TP}^{CFO} (a destra) degli algoritmi SD e HD. $B_W = 5$ MHz, $N_{used}^{RB} = 3$, $thr_{CFO} = 0.9$, $3 \leq CFO \leq 5$ kHz e $SNR = 5$ dB.	84
3.32	Schema a blocchi dell'algoritmo di sincronizzazione nel tempo.	85
3.33	Punti di $ R_{03\tilde{E}_{r,y}(n)} $ che superano la soglia thr_{BOF}	86
4.1	Modello del sistema di comunicazione per la stima di canale.	90
4.2	Modello equivalente con canali gaussiani paralleli.	91
4.3	Effetto delle portanti virtuali: funzione ideale passabanda $B[k]$	92
4.4	Confronto tra la risposta originale h e quella perturbata \tilde{h} per un canale EVA.	93
4.5	Effetto del leakage nel tempo. In blu: $b(n) = IDFT[B(k)]$, in rosso: assenza di leakage.	93
4.6	Valori singolari della matrice di Fourier F_{PL} per $N = 1024$ e $P = 600$	96
4.7	Rango normalizzato (a sinistra) e numero di condizionamento (a destra) della matrice $\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL}$ al variare di L . $B_W = 10$ MHz, $P = 600$ e $L = 72$	101
4.8	Prestazioni dell'algoritmo MMSE nel tempo con e senza portanti di guardia.	102
4.9	Effetti del mismatch di SNR sullo stimatore MMSE al variare della stima di SNR.	106
4.10	Catena di ricezione per la stima di SNR.	107
4.11	Stimatore adattativo di SNR.	108
4.12	Stimatore del Power Delay Profile.	108
4.13	Schema a blocchi dello stimatore a rango ridotto.	110
4.14	Autocorrelazione ideale in frequenza (a sinistra) e stima calcolata da dati perturbati dall'errore CEC (a destra). Canale EVA.	117
4.15	Prestazioni dello stimatore DFT-based con canale AWGN.	118
4.16	MSE della stima DFT-based al variare del numero di guardie N_V e con $SNR = \infty$	119
4.17	Numero di iterazioni N_{iter} dell'algoritmo SIC classico.	121
4.18	MSE del metodo SIC modificato per diversi valori di THR_{δ_e}	122
4.19	Media del numero di iterazioni N_{iter} per diversi valori di THR_{δ_e} . Banda $B_W = 10$ MHz; canale ETU.	122
4.20	Confronto delle risposte h_{ZF} , h_{SIC} e h , per una realizzazione di canale ETU.	124
4.21	Schema a blocchi dell'algoritmo di Path Detection preceduto dalla correzione SIC.	125
4.22	Curva ROC per il dimensionamento della soglia E_{thr}	126
4.23	Schema a blocchi dello stimatore di canale proposto.	127
5.1	Schema di principio del trasmettitore PUSCH.	130
5.2	Funzioni principali del trasmettitore PUSCH.	131
5.3	Schema di principio del ricevitore PUSCH.	132
5.4	Funzioni principali di ricezione del canale PUSCH.	133
5.5	Finestra principale del generatore di canale PUSCH.	134
5.6	Finestra per impostare la banda di sistema e i parametri dei RS.	134
5.7	Finestra di impostazione dei parametri della trama.	135
5.8	Finestra per introdurre sul segnale generato il rumore AWGN, il CFO e il canale radio.	135
5.9	Finestra che illustra le proprietà del canale radio generato.	136

5.10	Interfaccia grafica del sincronizzatore.	136
5.11	Finestra che raccoglie i parametri degli algoritmi di sincronizzazione.	137
5.12	Interfaccia dello stimatore di canale.	137
6.1	MSE della stima del CFO per l'algoritmo SD, quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 25$	142
6.2	Probabilità $P_{CFO,OK}$ per l'algoritmo SD quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 10$	142
6.3	Probabilità $P_{CFO,OK}$ per l'algoritmo SD quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 3$	143
6.4	Probabilità $P_{CFO,OK}$ per l'algoritmo HD quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 3$	143
6.5	RMSE della stima di CFO nel caso peggiore ($CFO = 7.5$ kHz) per i metodi SD e HD.	144
6.6	Probabilità $P_{BOF,OK}$ per gli algoritmi SD e HD.	144
6.7	Probabilità $P_{CFO,OK}$ per gli algoritmi di stima del CFO.	145
6.8	Probabilità $P_{CFO,OK}$ per gli algoritmi SD e HD.	145
6.9	Valore minimo di SNR richiesto per garantire una probabilità $P_{syn,OK} = 0.99$	146
6.10	Rappresentazione di un generico simbolo trasmesso e ricevuto sul piano complesso.	146
6.11	MSE in canale EVA70 al variare dell'SNR per i metodi di correzione CEC.	148
6.12	EVM medio in canale EPA5 al variare dell'SNR ($B_W = 10$ MHz, CP normal, QPSK).	148
6.13	EVM medio in canale EVA70 al variare dell'SNR ($B_W = 10$ MHz, CP normal, QPSK).	149
6.14	EVM medio in canale ETU300 al variare dell'SNR ($B_W = 10$ MHz, CP normal, QPSK).	149
B.1	Livello di PAPR nelle due tipologie di amplificatori.	163
B.2	Confronto del livello di PAPR per un segnale a portante singola e multiportante.	164
B.3	Tecnica BD (Bounded Dispersion) per limitare la posizione dei simboli di una modulazione 16-QAM165	
B.4	Algoritmo RCFBD (Recursive Clipping and Filtering with Bounded Dispersion).	166
B.5	CCDF di un sistema OFDM con varie tecniche di clipping (16-QAM/128-OFDM).	167
B.6	PSD di un sistema OFDM con varie tecniche di clipping (16-QAM/128-OFDM)	167
B.7	Confronto livello di PAPR nel caso di OFDMA, LFDMA e IFDMA.	169
B.8	Differenza tra le due tecniche di allocazione delle sottoportanti.	169
B.9	CCDF della potenza istantanea della modulazione BPSK, per diversi fattori di roll-off.	172
C.1	Valori limite della funzione di autocorrelazione periodica [1].	174
C.2	Parte reale (in alto) e immaginaria (in basso) di una sequenza ZC generata secondo lo standard LTE.	176
C.3	Modulo di $\theta_{u,0365u(p)}$, calcolata in $p = \{0, 1\}$, in funzione dell'SNR. I parametri della sequenza ZC sono $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 25$	179
C.4	Modulo di $\theta_{x,0365x(p)}$ calcolata in $p = 0$, in funzione del CFO.	181
C.5	Distribuzione del parametro N_{MAX}^{RS} al variare dei parametri di configurazione dei RS, quando SH e SGH sono disabilitati.	182
C.6	Distribuzione del parametro N_{MAX}^{RS} al variare dei parametri di configurazione dei RS. A sinistra il caso con SGH abilitato; a destra il caso con SH abilitato.	182
C.7	Distribuzione dei valori del parametro \bar{K} quando sia il SH sia il SGH sono disabilitati.	183
C.8	Distribuzione dei valori del parametro \bar{K} quando il SH è abilitato.	183
D.1	Confronto tra i costi computazionali dei metodi di Levinson e Schur al variare della dimensione della matrice \mathbf{T}	191
E.1	Modello di canale a linea di ritardo (TDL).	194
E.2	A sinistra è rappresentata l'autocorrelazione nel tempo $R_{hh}(\Delta t)$ mentre a destra lo spettro classico di Jakes	197
E.3	Esempio di collegamento radio NLOS (caso A) e LOS (caso B)	198

F.1	Schema a blocchi del simulatore di canale radio LTE.	200
F.2	Ricampionamento delle prese con coarse alignment per il modello di canale EVA. La banda di sistema è $B_W = 10$ MHz, corrispondente a una spaziatura tra le prese di $T_S = 65.1$ ns.	201
F.3	Realizzazioni dei percorsi radio. Distribuzione di ampiezza (a sinistra) e fase (a destra). Esse approssimano rispettivamente la distribuzione di Rayleigh e la distribuzione uniforme compresa tra $-\pi$ e π	202
F.4	Risposta all'impulso (a sinistra) e risposta in frequenza (a destra) del filtro Doppler per $\nu_D = 70$ Hz.	203
F.5	Interpolazione delle realizzazioni di un canale EVA con $\nu_D = 70$ Hz e $B_W = 10$ MHz. Il tasso di osservazione è pari a $OR = 14$ kHz	204
F.6	Evoluzione di alcune prese del modello di canale EVA con $\nu_D = 70$ Hz e banda di sistema $B_W = 10$ MHz.	204

Elenco delle tabelle

2.1	Parametri fondamentali della tratta di Uplink LTE al variare della banda B_W	28
2.2	Lunghezza del CP, espressa in campioni, in funzione della banda B_W	29
2.3	Modulazioni disponibili per la trasmissione PUSCH.	36
2.4	Definizione della funzione $\Gamma''011E(n)$ per $M_{sc}^{RS} = 12$	42
2.5	Definizione della funzione $\Gamma''011E(n)$ per $M_{sc}^{RS} = 24$	43
2.6	Corrispondenza tra i valori di <i>cyclicShift</i> e di $n_{DMRS}^{(1)}$	45
2.7	Corrispondenza tra i valori del campo <i>cyclic Shift Field</i> e di $n_{DMRS}^{(2)}$	46
2.8	Dispersione dei ritardi r.m.s. per i modelli ITU estesi.	51
2.9	Power Delay Profile dei modelli di canale LTE.	51
4.1	Proprietà della matrice di Fourier e della versione sottocampionata.	97
4.2	Confronto tra stimatori MMSE	104

Lista di Acronimi

- 3GPP** 3rd Generation Partnership Project
- ADC** Analogue to Digital Converter
- AMPS** Analogue Mobile Phone System
- AWGN** Additive White Gaussian Noise
- BER** Bit Error Rate
- BCH** Broadcast CHannel
- BPSK** Binary Phase Shift Keying
- CAZAC** Constant Amplitude Zero Autocorrelation
- CCCH** Common Control CHannel
- CCI** Co-Channel Interference
- CCDF** Complementary Cumulative Distribution Function
- CDM** Coded Division Multiplexing
- CDMA** Coded Division Multiple Access
- CDS** Channel Dependent Scheduling
- CEC** Correlation Error Correction
- CFO** Carrier Frequency Offset
- CFR** Channel Frequency Response
- CIR** Channel Impulse Response
- CN** Core Network
- CP** Cyclic Prefix
- DAC** Digital to Analogue Converter
- DCCH** Dedicated Control CHannel
- DCI** Downlink Control Information
- DFT** Discrete Fourier Transform
- DFT-S-OFDM** DFT-Spread OFDM
- DL** Downlink

DL-SCH Downlink Shared Channel

DM RS DeModulation RS

DS-CDMA Direct-Sequence CDMA

DTCH Dedicated Traffic CHannel

DVB Digital Video Broadcasting

EDGE Enhanced Data rate for GSM Evolution

eNodeB evolved NodeB

EPA Extended Pedestrian A

EPC Evolved Packet Core

EPS Evolved Packet System

ETSI European Telecommunication Standards Institute

ETU Extended Typical Urban

E-UTRA Evolved-UTRA

E-UTRAN Evolved-UTRAN

EVA Extended Vehicular A

EVM Error Vector Magnitude

FCCH Frequency Control CHannel

FDD Frequency Division Duplexing

FDM Frequency Division Multiplexing

FDMA Frequency Division Multiple Access

FFT Fast Fourier Transform

FH Frequency Hopping

FIR Finite Impulse Response

FTP File Transfer Protocol

GPRS General Packet Radio Service

GSM Global System for Mobile communication

GT Guard Time

HARQ Hybrid Automatic Repeat reQuest

HSDPA High Speed Downlink Packet Access

HSPA High Speed Packet Access

HSPA+ High Speed Packet Access Evolution

HSUPA High Speed Uplink Packet Access

i.i.d. Independently identically distributed

ICI Inter-Carrier Interference

IDFT Inverse DFT

IFDMA Interleaved FDMA

IFFT Inverse FFT

IMT International Mobile Telecommunications

ISI InterSymbol Interference

ITU International Telecommunication Union

J-TACS Japanese Total Access Communication System

LFSR Linear Feedback Shift Register

LMMSE Linear MMSE

LOS Line-Of-Sight

LS Least Squares

LTE Long Term Evolution

MAC Medium Access Control

MIMO Multiple-Input Multiple-Output

ML Maximum Likelihood

MME Mobility Management Entity

MMSE Minimum MSE

MSE Mean Square Error

NAS Non-Access Stratum

NLOS Non-Line-Of-Sight

NMT Nordic Mobile Telephone

NodeB Base Station in WCDMA system

OFDM Orthogonal Frequency Division Multiplexing

OFDMA Orthogonal Frequency Division Multiple Access

P/S Parallel to Serial

PAPR Peak-to-Average Power Ratio

PBCH Physical Broadcast CHannel

PDCCH Physical Downlink Control CHannel

PDCP Packet Data Convergence Protocol

PDP Power Delay Profile

PDSCH Physical Downlink Shared CHannel

P-GW Packet Data Network Gateway

PN Pseudo Noise

PRACH Physical Random Access CHannel

PRB Physical Resource Block

PSD Power Spectral Density

PUCCH Physical Uplink Control CHannel

PUSCH Physical Uplink Shared CHannel

QAM Quadrature Amplitude Modulation

QoS Quality of Service

QPSK Quadrature Phase Shift Keying

RACH Random Access CHannel

RB Resource Block

RE Resource Element

RF Radio Frequency

RLC Radio Link Control

RNTI Radio Network Temporary Identifier

RRM Radio Resource Management

RS Reference Signal

S/P Serial-to-Parallel

S-GW Serving Gateway

SAE System Architecture Evolution

SC-FDMA Single-Carrier Frequency Division Multiple Access

SDMA Space Division Multiple Access

SER Symbol Error Rate

SGH Sequence-Group Hopping

SH Sequence Hopping

SIC Successive Interference Cancellation

SIR Signal-to-Interference Ratio

SISO Single Input Single Output

SMS Short Message Service

SNR Signal-to-Noise Ratio

SRS Sounding Reference Signals

SUI Stanford University Interim

TACS Total Access Communication System

TD-SCDMA Time-Division Synchronous Code Division Multiple Access

TDD Time Division Duplexing

TDL Tapped Delay Line

TDMA Time Division Multiple Access

UE User Equipment

UL Uplink

UL-SCH Uplink Synchronization CHannel

UMB Ultra Mobile Broadband

UMTS Universal Mobile Telecommunication System

UTRA Universal Terrestrial Radio Access

UTRAN Universal Terrestrial Radio Access Network

VoIP Voice-over-IP

WCDMA Wide CDMA

WiMAX Worldwide Interoperability for Microwave Access

WSSUS Wide-Sense Stationary Uncorrelated Scattered

ZC Zadoff-Chu

ZCZ Zero Correlation Zone

ZF Zero Forcing

Introduzione

Nel corso degli ultimi due decenni i sistemi di comunicazione radiomobili hanno raggiunto velocità di trasmissione dei dati paragonabili alle infrastrutture di rete fissa. Attraverso la scelta di opportune tecniche di accesso, è stato possibile migliorare le prestazioni di questi sistemi, cambiando e stravolgendo il modo di comunicare dell'uomo.

The Long Term Evolution of UMTS (LTE) rappresenta l'ultimo passo nell'evoluzione dei sistemi radiomobili. Lo standard LTE, sviluppato dalla 3GPP (Third Generation Partnership Project) è il primo sistema di comunicazione cellulare ottimizzato, fin dal suo concepimento, per il supporto di servizi dati a commutazione di pacchetto, di cui la telefonia rappresenta solo una parte [2]. Esso fornisce capacità di trasmissione mai raggiunte da precedenti sistemi (fino a 300 Mbps in Downlink e fino a 100 Mbps in Uplink), insieme a una copertura del territorio più efficiente e a un supporto della mobilità *seamless*, letteralmente privo di cuciture, ovvero senza discontinuità nel passare da una cella all'altra.

Il raggiungimento di questi obiettivi è stato possibile grazie alle innovazioni introdotte sia nel livello fisico che nel livello logico del sistema. Le più importanti sono:

- l'adozione di *tecniche di accesso multiportante*, in particolare il sistema OFDM per la tratta di Downlink e il sistema SC-FDMA per la tratta di Uplink (capitolo 1);
- la tecnologia multi-antenna, ovvero l'introduzione di più antenne di trasmissione. Questo aspetto non viene discusso nella tesi. Si assume la presenza di una sola antenna sia in trasmissione che in ricezione (Single Input Single Output, SISO);
- un'architettura di rete basata interamente sulla commutazione di pacchetto (*Packet-Switched Radio Interface*). Grazie a questo approccio è possibile ridurre la latenza della rete e adattare l'allocazione delle risorse, la configurazione multiantenna, la modulazione utilizzata e il *code-rate* alle condizioni di trasmissione contingenti.

Lo standard LTE è stato concepito in modo che nel prossimo futuro sia possibile introdurre ulteriori modifiche ed innovazioni. Già dal 2008 è cominciato lo studio di un nuovo Standard, chiamato *LTE-Advanced*, il cui obiettivo principale è di portare la capacità di trasmissione fino a 1Gbps in Downlink e fino a 500 Mbps in Uplink.

Lo scopo di questa tesi è il progetto e la simulazione di algoritmi di sincronizzazione per la tratta di Uplink del sistema LTE. Essendo lo standard molto complesso, è stato deciso di concentrare l'attenzione sulla tratta di Uplink, la più innovativa in quanto caratterizzata dalla nuova tipologia di accesso SC-FDMA. In particolare, si considera il canale *Physical Uplink Shared CHannel* (PUSCH), dedicato alla trasmissione dei dati di utente. Molte delle soluzioni proposte possono essere adattate, almeno in linea teorica, anche agli altri canali fisici presenti in Uplink (si veda il cap. 2).

L'obiettivo finale è di simulare il funzionamento della tratta di Uplink, partendo dal segnale generato nel terminale mobile, chiamato UE (User Equipment), fino alla sua ricezione (sincronizzazione, stima di canale, equalizzazione) da parte della stazione base, detta eNodeB.

È stato realizzato in linguaggio Matlab un simulatore della tratta di Uplink in grado di generare un segnale LTE conforme allo standard e successivamente di riceverlo e analizzarlo. Grazie al simulatore è possibile studiare

separatamente le singole operazioni effettuate dal ricevitore e confrontare le prestazioni degli algoritmi proposti al variare dei parametri di sistema e delle condizioni di propagazione.

La tesi è costituita da tre parti: i primi due capitoli contengono una descrizione teorica del sistema, che comprende le tecniche di accesso utilizzate, l'architettura dei protocolli di rete e la struttura del segnale fisico generato.

Il terzo e quarto capitolo descrivono gli algoritmi realizzati per il ricevitore nella tratta di Uplink.

Il terzo capitolo presenta gli algoritmi di sincronizzazione proposti. Dopo aver discusso i disturbi causati da un'errata sincronizzazione, si illustrano le soluzioni proposte che, rielaborando le tecniche studiate in letteratura, contengono aspetti originali. In particolare, viene discusso un algoritmo di sincronizzazione capace di funzionare anche quando la banda di utente è molto ridotta. Inoltre, all'interno di questo algoritmo, viene utilizzato un nuovo stimatore del CFO basato sui Reference Signals.

Il quarto capitolo è dedicato alla stima di canale. Si descrivono inizialmente gli stimatori di canale classici (ZF, MMSE, LS) e i problemi della loro diretta applicazione nel sistema LTE. Risultato di questo studio è il progetto di uno stimatore di canale MMSE adattativo alle condizioni di propagazione. A causa dell'elevata complessità della stima MMSE, sono state studiate alcune tecniche di riduzione del costo computazionale, tra cui gli algoritmi di Levinson e di Schur. Un aspetto inedito e particolarmente svantaggioso di LTE rispetto ad altri sistemi multi-portante è il rapporto molto elevato tra portanti di guardia (portanti nulle ai bordi dello spettro) e portanti allocate in ogni simbolo SC-FDMA. Si dice che la risposta di canale è distorta dall'errore di correlazione (CE). Per ridurre questo effetto, sono state studiate alcune tecniche consolidate, ma a cui sono state apportate delle modifiche per migliorarne le prestazioni. Lo stimatore proposto è un compendio delle tecniche discusse nel capitolo e le sue prestazioni si avvicinano a quelle dello stimatore MMSE ideale, preso come riferimento.

L'ultima parte della tesi è dedicata alla sperimentazione degli algoritmi proposti.

Nel quinto capitolo viene descritto brevemente il software Matlab realizzato, evidenziando le funzioni principali.

Nel sesto capitolo sono mostrati i risultati delle simulazioni numeriche svolte. I risultati ottenuti permettono di confrontare gli algoritmi proposti e di definirne il campo di applicazione.

Capitolo 1

I segnali nel sistema LTE

In questo capitolo, dopo una breve introduzione ai sistemi radiomobili, si introduce la modulazione OFDM, utilizzata nella tratta di Downlink del sistema LTE e in molti altri sistemi di comunicazione a banda larga. In seguito si descrive la modulazione SC-FDMA, utilizzata nella tratta di Uplink. Essa rappresenta la tecnologia più innovativa nel livello fisico del sistema LTE e costituisce la base di partenza del lavoro sperimentale svolto nella tesi.

1.1 Evoluzione dei sistemi di comunicazione wireless

Nel breve arco di trent'anni, l'evoluzione dei sistemi di comunicazione radiomobile ha influenzato profondamente la società e molti aspetti delle attività umane.

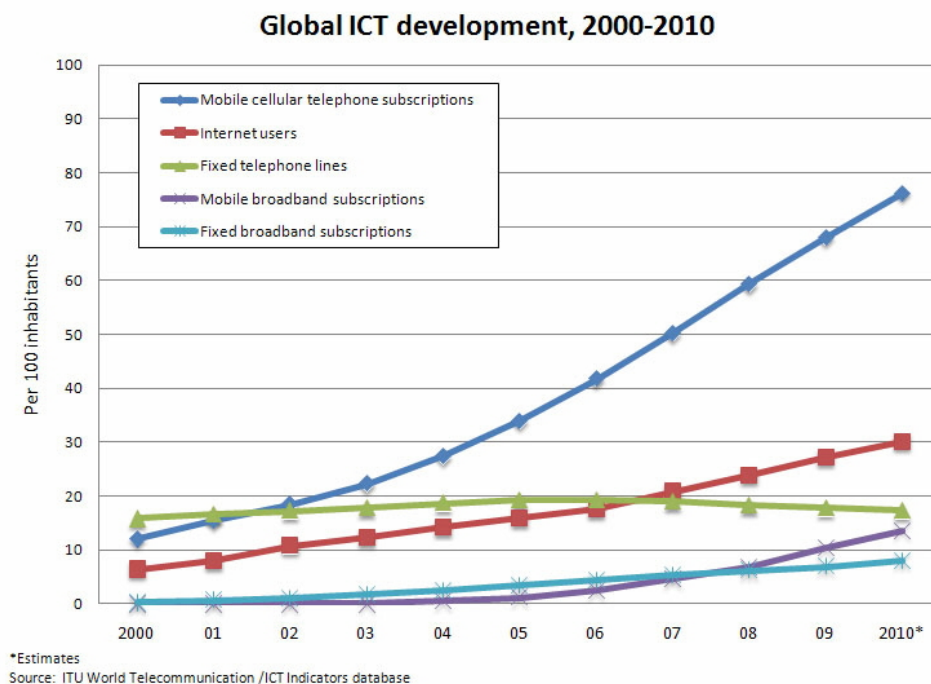


Figura 1.1: Evoluzione dell'utenza dei servizi ICT (misurata in utenti ogni 100 abitanti) a livello mondiale, dal 2000 a oggi. Fonte: ITU World Telecommunications/ICT Indicators database.

Tra i concetti fondanti dei moderni sistemi spicca la definizione di cella (*cell*), avvenuta nel 1947 presso i Laboratori Bell. La suddivisione dell'area di servizio (o di copertura) in porzioni più piccole, chiamate celle, consente di accrescere notevolmente la capacità della rete; infatti è possibile riutilizzare le stesse bande spettrali

in celle differenti, a patto che esse siano abbastanza distanti da non causare interferenze.

I primissimi sistemi radiomobili sono stati sviluppati indipendentemente da singole nazioni. Essi hanno attratto un numero di utenti molto ridotto, in quanto i dispositivi ricetrasmittenti su cui si basavano erano costosi, ingombranti e richiedevano molta energia; la loro installazione venne limitata alle autovetture.

Solo con i sistemi di *Prima Generazione*, introdotti negli anni Ottanta, i servizi di telefonia mobile iniziano a diffondersi su larga scala. La Prima Generazione comprende diversi standard basati su tecnologia analogica, sviluppatasi autonomamente in diverse parti del mondo: AMPS (Analogue Mobile Phone System), usato in America, TACS (Total Access Communication System) e NMT (Nordic Mobile Telephone), introdotti in Europa, e J-TACS (Japanese Total Access Communication System) usato in Giappone e a Hong Kong.

Il collegamento tra nazioni diverse è diventato possibile dopo l'introduzione del sistema GSM (Global System for Mobile Communications), appartenente alla *Seconda Generazione*. Esso è basato su una tecnologia di tipo numerico, che permette maggiore flessibilità di accesso alla banda, fornendo per la prima volta servizi divenuti essenziali al giorno d'oggi. Un esempio importante è il servizio di crittografia, essenziale per garantire la riservatezza delle chiamate e l'integrità dei dati trasmessi. La tecnica di accesso multiplo è ibrida, ovvero caratterizzata da una multiplazione sia nel dominio della frequenza che del tempo (FDMA/TDMA). A differenza dei predecessori, il sistema GSM è stato sviluppato unendo le competenze tecniche di numerose società di telecomunicazioni, con la supervisione dell'ETSI (European Telecommunications Standards Institute). Inoltre, grazie al contemporaneo miglioramento dei dispositivi di utente (drastica riduzione di peso, ingombro e consumo di energia), il GSM ha avuto un enorme successo commerciale, portando alla formazione di nuove aziende, sia a livello nazionale che internazionale. Nei paesi sviluppati la tecnologia GSM si è diffusa capillarmente, diventando in breve tempo un'infrastruttura indispensabile per supportare le attività quotidiane. Inoltre, nei paesi in via di sviluppo essa ha permesso il collegamento tra comunità e persone situate in regioni remote, dove, per ragioni di costo, non esiste una rete telefonica fissa.

A partire dai sistemi di Seconda Generazione, lo sviluppo delle tecnologie radiomobili è legato al lavoro congiunto delle agenzie di regolamentazione e delle organizzazioni di standardizzazione. Il legame tra il lavoro di questi enti e le prestazioni del sistema, in termini di velocità di trasmissione, è schematizzato dalla relazione [2]

$$\text{Velocità di trasmissione} = \underbrace{\text{larghezza di banda}}_{\text{ITU-R e regolatori regionali}} \times \underbrace{\text{efficienza spettrale}}_{\text{tecnologia e standard}}$$

Le agenzie di regolamentazione, come l'ITU-R, decidono quale parte dello spettro e quanta banda assegnare a un dato servizio. Il risultato di questa attività è la *standardizzazione* di famiglie di tecnologie radio che definiscono

- interfacce condivise capaci di assicurare l'interoperabilità tra dispositivi prodotti da diverse aziende
- requisiti per l'utilizzo efficiente dello spettro assegnato, allo scopo di fornire servizi innovativi e facilmente fruibili dall'utente.

In particolare, le tecnologie radio successive alla Seconda Generazione sono raccolte nella famiglia *International Mobile Telecommunications* (IMT).

Passando agli aspetti tecnologici, esistono attualmente tre principali organizzazioni responsabili di sviluppare standard capaci di soddisfare i requisiti IMT, come mostrato in figura 1.2. Si concentra l'attenzione sulla parte superiore della figura, dove è presentata l'evoluzione degli standard elaborati dalla 3GPP (3rd Generation Partnership Project).

La prima tappa di questo sviluppo comprende la famiglia di Seconda Generazione, già incontrata in precedenza, poiché le competenze sulle specifiche GSM sono state trasferite dall'ETSI alla 3GPP.

In seguito è stata introdotta la Terza Generazione, comprendente il sistema UMTS (Universal Mobile Telecommunications System) e le sue evoluzioni. L'aspetto più innovativo del sistema UMTS è l'introduzione del CDMA (Code Division Multiple Access), una tecnica di accesso multiplo in grado di abbassare sensibilmente l'interferenza tra gli utenti mobili, principale ostacolo all'incremento della banda di trasmissione.

Grazie al CDMA è stato possibile raggiungere velocità di trasmissione molto elevate e offrire agli utenti nuovi

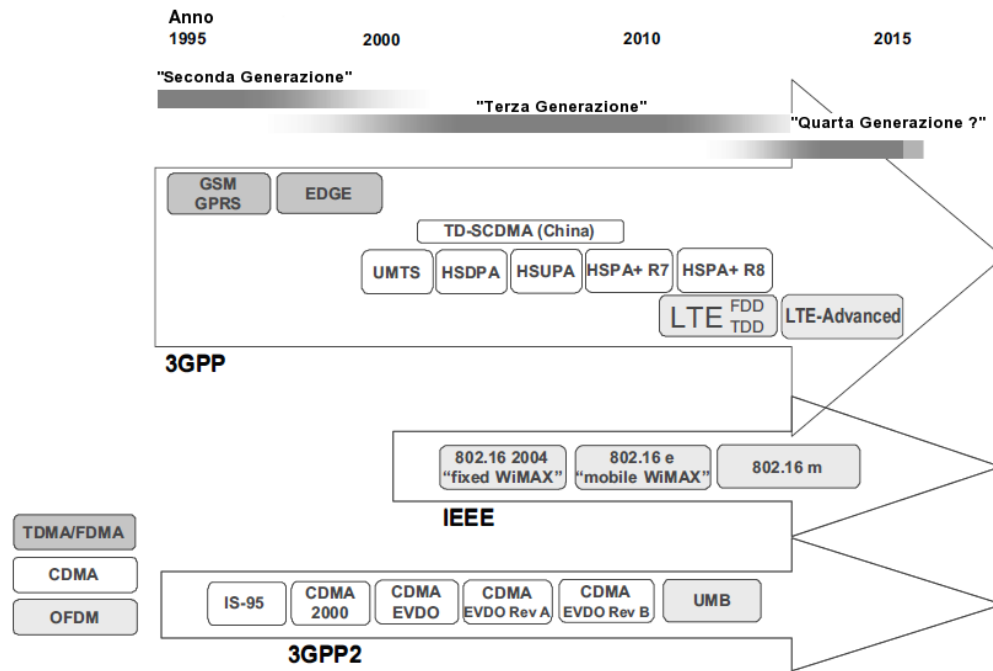


Figura 1.2: Cronologia approssimata degli standard di comunicazione radiomobile.

servizi, come la videochiamata e l'accesso a Internet, non più limitato ai soli siti che supportavano la tecnologia WAP (Wireless Application Protocol). Nel corso del tempo il sistema UMTS è stato modificato per aumentarne le potenzialità, conservando quanto più possibile la compatibilità con le precedenti versioni. Le specifiche originali, chiamate 'Release 99' sono state aggiornate con l'introduzione di collegamenti in Downlink e Uplink più veloci, noti come HSDPA2 e HSUPA3 e presenti rispettivamente nelle Release 5 e 6; il nuovo sistema ha preso il nome di 'HSPA' (High-Speed Packet Access). La specifica HSPA ha subito in seguito ulteriori modifiche raccolte nella Release 7, cambiando denominazione in HSPA+; tra queste si ricorda l'utilizzo della modulazione 64QAM e, per la prima volta in un sistema cellulare, la trasmissione con più antenne (MIMO). L'ultimo stadio di questa evoluzione è rappresentato dalla Release 8, parallelamente all'uscita della prima versione di LTE (chiamata per continuità Release 8).

Il sistema LTE, appartenente alla *Quarta Generazione* dei sistemi di telefonia mobile, ha beneficiato dei più recenti sviluppi tecnologici degli standard HSPA e HSPA+; nel contempo ha potuto adottare tecnologie completamente nuove, senza vincoli di compatibilità con precedenti sistemi. Tuttavia, LTE deve soddisfare nuovi requisiti, studiati allo scopo di rendere lo standard competitivo nell'arco di almeno 10 anni; i più significativi sono:

- riduzione dei ritardi, sia in termini di stabilimento della connessione sia della latenza trasmissiva;
- incremento delle velocità di trasmissione degli utenti;
- aumento della velocità di trasmissione ai confini delle celle, per uniformare la qualità del servizio;
- riduzione del costo per bit, che richiede un miglioramento dell'efficienza spettrale;
- maggiore flessibilità nell'utilizzo dello spettro, sia rispetto alle nuove bande che a quelle preesistenti;
- architettura di rete semplificata;
- *seamless mobility*, traducibile come 'mobilità senza giunture, senza cuciture', ovvero dove tutto procede senza alcun impaccio o rallentamento, includendo il passaggio tra tecnologie di accesso radio diverse (UMTS, GSM...);

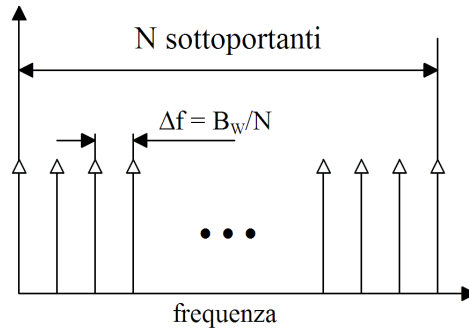


Figura 1.3: Suddivisione della banda B_W in un sistema multiportante.

- consumo di potenza limitato per l'utente mobile;

Per raggiungere tali obiettivi, il progetto del sistema LTE racchiude sia l'interfaccia di accesso radio (livello fisico), sia l'architettura di rete, supponendo che tutti i servizi offerti si basino sulla commutazione di pacchetto. La nuova architettura proposta è chiamata 'System Architecture Evolution' (SAE), di cui fa parte la rete Evolved Packet Core (EPC).

L'unione degli standard LTE e SAE costituisce il sistema EPS (Evolved Packet System), dove sia la *core network* sia le tecnologie di accesso radio sono completamente basate sulla commutazione di pacchetto.

Inoltre, il livello fisico di LTE utilizza le modalità di trasmissione Frequency-Division Duplex (FDD) e Time-Division Duplex (TDD); può anche supportare l'evoluzione del sistema TD-SCDMA (Time-Division Synchronous Code Division Multiple Access), sviluppato da 3GPP essenzialmente per soddisfare il mercato Cinese.

La tecnica di accesso multiplo per la tratta di Downlink è il consolidato sistema OFDMA, utilizzato ampiamente in altri contesti come lo standard DVB (DVB-T, DVB-S, DVB-H) o le reti Wi-Fi. I segnali OFDM sono caratterizzati da un PAPR (Peak to Average Power Ratio) elevato che causa diversi problemi nei terminali mobili, come spiegato nel par. 1.2.3.1. Per questo, nella tratta di Uplink LTE, è stata introdotta un'evoluzione della modulazione OFDM, chiamata Single-Carrier FDMA e caratterizzata da livelli di PAPR sensibilmente inferiori. La generazione e le proprietà dei segnali OFDM e SC-FDMA sono trattate nei paragrafi successivi.

1.2 La modulazione OFDM

1.2.1 Definizione e progetto dei sistemi di trasmissione multiportante

In un sistema radiomobile la trasmissione seriale di un flusso di dati ad alta velocità è fortemente disturbata dalla selettività in frequenza (multipath) del canale radio. Infatti, se la durata dei simboli trasmessi T_S è molto minore della dispersione massima dei ritardi del canale T_m (si veda il paragrafo E.2) si genera *Interferenza Intersimbolica* (ISI), eliminabile solo con una complicata procedura di equalizzazione. In questo caso, la complessità dell'equalizzazione cresce con il quadrato della lunghezza della risposta all'impulso del canale (CIR).

L'idea fondamentale della modulazione multi-portante, introdotta da Chang a metà degli anni '60 [3], è la suddivisione della banda disponibile B_W in un numero N di sottobande, chiamate comunemente sottoportanti, ciascuna di estensione $\Delta f = B_W/N$ (figura 1.3). Invece di trasmettere l'informazione di utente in modo seriale, a una velocità di R baud, il flusso dei dati viene suddiviso in blocchi di N simboli; dopo che ogni simbolo del blocco corrente ha modulato una specifica sottoportante, si generano N flussi di dati a velocità R/N , trasmessi in parallelo.

Grazie alla conversione serie/parallelo del flusso informativo, la durata dei simboli trasmessi passa da $T_S = 1/R$ a $T_S = N/R$. Scegliendo un valore di N sufficientemente grande, si può rendere questo parametro molto

maggiore di T_m , ovvero

$$T_S \gg T_m \tag{1.1}$$

Inoltre, per la dualità tempo-frequenza, la spaziatura tra le sottoportanti Δf diventa piccola rispetto alla *banda di coerenza* del canale (par. E.3.1), quindi

$$B_{coh} \gg \frac{B_W}{N} \tag{1.2}$$

Ciascuna sottoportante presenta un fading piatto, ovvero un'attenuazione costante, che riduce la complessità dell'equalizzazione a una moltiplicazione complessa per portante.

Questo risultato è valido solo se il canale rimane pressoché immutato all'interno del tempo di simbolo, ovvero se il tempo di coerenza T_{coh} è maggiore di T_S . In caso contrario non è possibile ricostruire fedelmente l'informazione trasmessa. Il limite superiore imposto dal tempo di coerenza e la condizione di fading piatto (1.2) definiscono

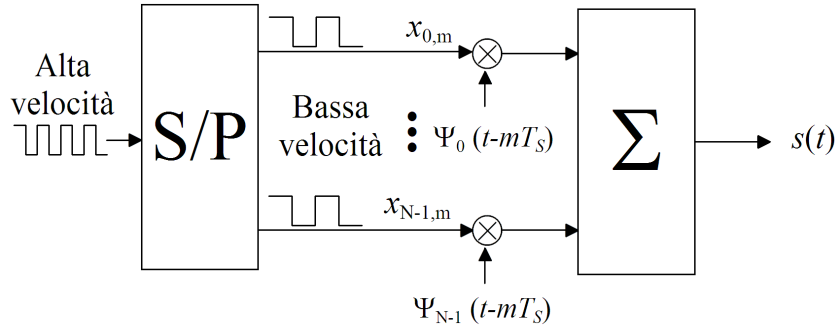


Figura 1.4: Schema generale della modulazione multiportante.

l'intervallo di valori per il corretto dimensionamento di N , dato da

$$\frac{B_W}{B_{coh}} \ll N \ll RT_{coh} \tag{1.3}$$

Come mostrato in figura 1.4, l'espressione generale di un segnale multiportante è data dalla somma di un insieme di sottoportanti modulate:

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{k,m} \psi_k(t - mT_S) \right) \tag{1.4}$$

dove $x_{k,m}$ è il simbolo di informazione che modula la k -esima sottoportante nell' m -esimo intervallo di segnalazione e ψ_k è la forma d'onda associata alla k -esima sottoportante.

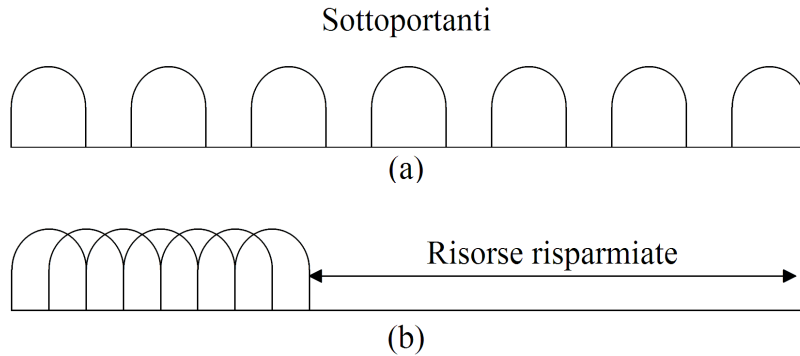


Figura 1.5: Confronto tra l'efficienza spettrale del sistema OFDM e della classica modulazione multiportante: (a) spettro classico; (b) spettro OFDM.

In ricezione, per recuperare l'informazione trasmessa, è necessario che le sottoportanti siano facilmente distinguibili. L'approccio classico dei sistemi multiportante consiste nel separare le sottoportanti adiacenti con bande di guardia, in modo che i loro spettri non si sovrappongano, come in figura 1.5 (a). Lo svantaggio di questo approccio è il mancato utilizzo di parte dello spettro.

La sovrapposizione degli spettri delle forme d'onda ψ_k consente di ottenere un'alta efficienza spettrale (figura 1.5 (b)), ma, affinché le sottoportanti siano ancora distinguibili in ricezione, è necessario che le funzioni ψ_k siano tra loro ortogonali. Un sistema multiportante che verifica queste condizioni (sovrapposizione e ortogonalità degli spettri) è chiamato *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM).

Si considera un insieme generico di funzioni ortogonali, dato da

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_S}} e^{j\omega_k t} & t \in [0, T_S] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (1.5)$$

con $\omega_k = \omega_0 + k\omega_S$ e $\omega_S = 2\pi\Delta f = \Delta\omega$. Il parametro $f_k = \omega_k/2\pi$ è la frequenza della k -esima sottoportante e $f_0 = \omega_0/2\pi$ è la frequenza più bassa. La spaziatura tra le sottoportanti è pari a $\Delta f = B_W/N$ ma, poiché le forme d'onda $\psi_k(t)$ sono definite nella finestra temporale $[0, T_S]$, vale anche la relazione $\Delta f = 1/T_S = R/N$ e dunque, per il sistema OFDM, il tasso di trasmissione R è pari alla banda disponibile B_W . La trasformata di

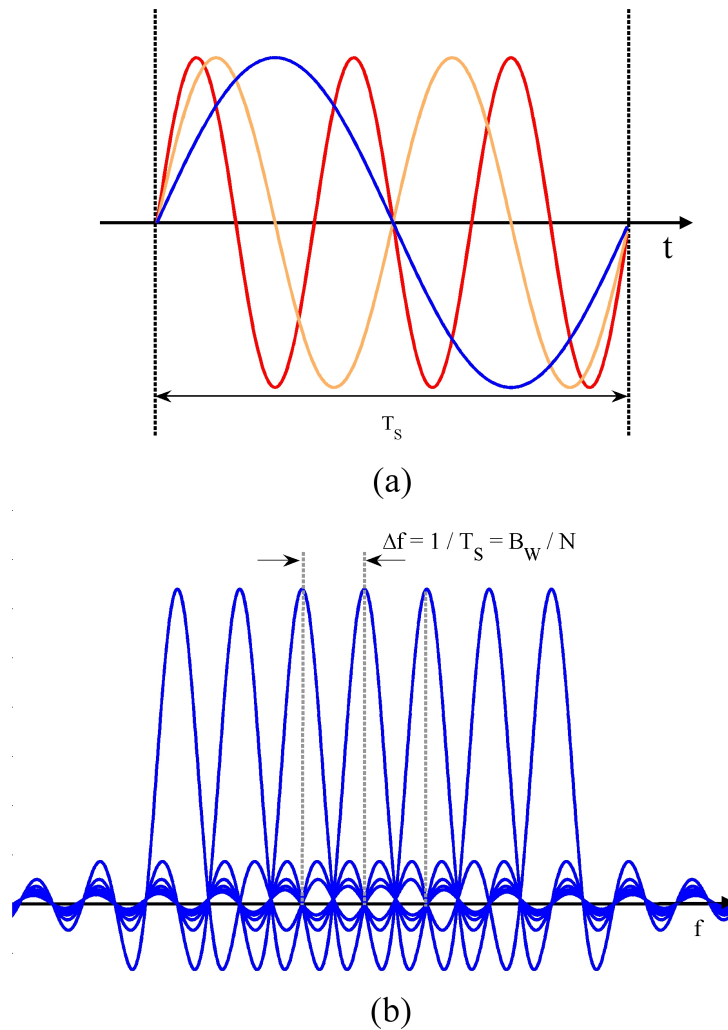


Figura 1.6: Ortogonalità tra le sottoportanti OFDM nel dominio: (a) del tempo; (b) della frequenza.

Fourier della funzione $\psi_k(t)$ è pari alla convoluzione tra un seno cardinale e un impulso in posizione f_k

$$\Psi_k(f) = T_S \cdot \exp(-j\pi T_S f) \cdot \frac{\sin(\pi(f - f_k)T_S)}{\pi(f - f_k)T_S}$$

e presenta zeri equispaziati a frequenze multiple di $\Delta f = 1/T_S$ (si veda figura 1.6). Di conseguenza, gli spettri delle sottoportanti si sovrappongono, ma alle frequenze $f = f_k$ (per $k = 0, 1, \dots, N$) non interferiscono tra loro. Infatti, per il Teorema di Parseval e per l'ortogonalità delle funzioni $\psi_k(t)$, si può scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(t)\psi_l^*(t)dt = \int_0^{T_S} \psi_k(t)\psi_l^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k(f)\Psi_l^*(f)df = \delta(k - l) \quad (1.6)$$

La corretta demodulazione del segnale trasmesso è basata su questa proprietà; essa è realizzata con un banco di N filtri adattati che restituiscono il segnale

$$y_{k,m} = \int_{mT_S}^{(m+1)T_S} s(t)\psi_k^*(t - mT_S)dt$$

Originariamente, i sistemi OFDM erano realizzati solo con tecnologia analogica, utilizzando banchi di oscillatori in trasmissione e banchi di filtri adattati in ricezione. Grazie all'introduzione della Trasformata Discreta di Fourier (DFT, 1971) e degli algoritmi di calcolo veloci, indicati con il termine Fast Fourier Transform (FFT, 1980), la realizzazione dei sistemi OFDM è diventata molto meno costosa [2]. Infatti, come mostrato nel prossimo paragrafo, gli oscillatori del trasmettitore sono stati sostituiti da una IDFT mentre il banco di filtri adattati è equivalente a una DFT. Inoltre, se il numero di portanti è costituito da fattori primi piccoli (ad esempio è una potenza di 2), si possono utilizzare gli algoritmi di trasformazione veloci.

1.2.2 Realizzazione pratica del sistema OFDM

I criteri di progetto presentati in precedenza permettono di definire il modello generale del sistema OFDM, mostrato in figura 1.7. Il segnale da trasmettere è definito nel dominio della frequenza. Un convertitore

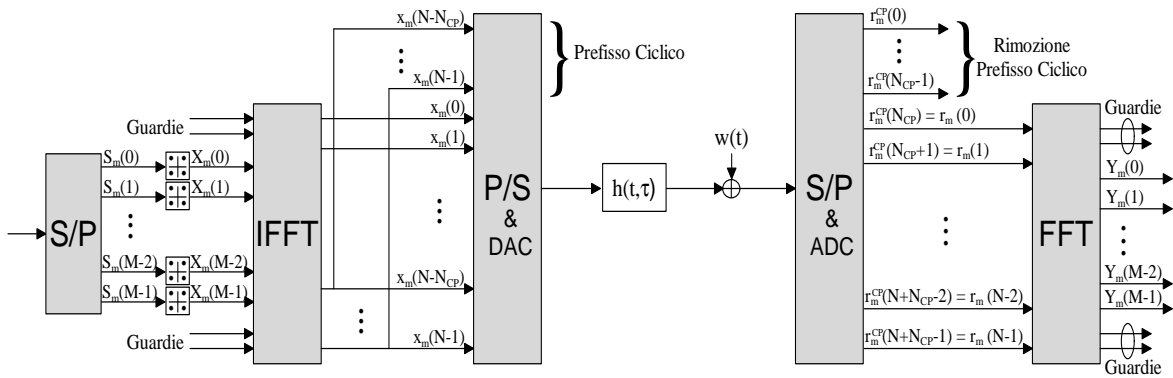


Figura 1.7: Modello del sistema OFDM.

Serie/Parallelo (S/P) raggruppa il flusso di bit della sorgente nel blocco $\mathbf{S}_m = [S_m(0), S_m(1), \dots, S_m(M-1)]^T$ di dimensione M , dove il pedice m identifica il simbolo OFDM associato al blocco di dati corrente e M rappresenta il numero totale di sottoportanti disponibili in trasmissione. Si generano così M flussi di informazione paralleli, che possono essere modulati indipendentemente; il vettore complesso in uscita dalla modulazione è $\mathbf{X}_m = [X_m(0), X_m(1), \dots, X_m(M-1)]^T$. La possibilità di utilizzare modulazioni differenti (es. QPSK o 16QAM) su ciascuna portante consente di adattare la trasmissione alla selettività in frequenza del canale radio. In generale, le sottoportanti meno attenuate trasmettono simboli con un ordine di modulazione più elevato, corrispondente

ad alti bit-rate.

In seguito, il vettore dei simboli di modulazione \mathbf{X}_m è elaborato dal blocco che calcola la FFT inversa (IFFT) su N punti. Il vettore risultante $\mathbf{x}_m = [x_m(0), \dots, x_m(N-1)]^T$, è formato da N campioni complessi nel dominio del tempo. In un sistema reale, le sottoportanti elaborate sono più numerose di quelle modulate, ovvero $N \geq M$. Le $(N - M)$ sottoportanti non modulate presentano ampiezza nulla e sono poste generalmente ai lati delle sottoportanti dati. Esse, chiamate *portanti di guardia* (o virtuali), sono utilizzate per non interferire con i canali radio di altri utenti o sistemi.

Anche se la lunghezza del simbolo OFDM è maggiore della dispersione temporale T_m (espressione 1.1), il canale multipath può causare ugualmente fenomeni di interferenza tra simboli adiacenti (ISI) e la perdita di ortogonalità tra le sottoportanti (ICI). Per ridurre questi effetti, si aggiunge all'inizio di ciascun simbolo \mathbf{x}_m un particolare intervallo di guardia, costituito dalla replica degli ultimi N_{CP} campioni del simbolo OFDM corrente e chiamato Prefisso Ciclico (CP). Come mostrato in figura 1.8, all'uscita di questa operazione si ottiene il simbolo $\mathbf{x}_m = [x_m(N - N_{CP}), \dots, x_m(N - 1), x_m(0), \dots, x_m(N - 1)]^T$.

L'interferenza intersimbolica è completamente rimossa se la lunghezza dell'intervallo di guardia è maggiore della massima lunghezza della CIR supportata dal sistema. Dunque la rimozione dell'ISI è legata alla presenza di una spaziatura tra simboli OFDM adiacenti, indipendentemente da come essa sia realizzata. Ad esempio, sarebbe

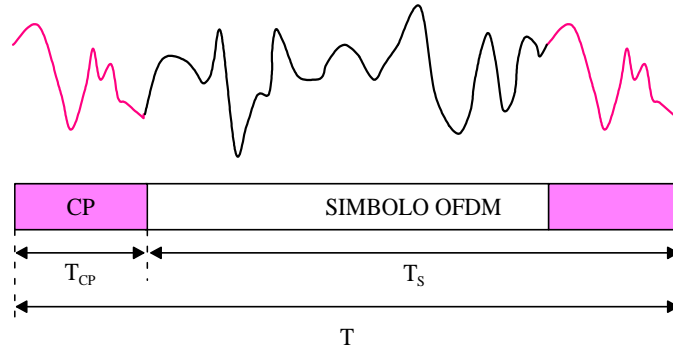


Figura 1.8: Aggiunta del prefisso ciclico. La durata del simbolo diventa $T = T_S + T_{CP}$, dove T_S è $1/\Delta f$ e $T_{CP} = N_{CP}T_C$.

sufficiente non trasmettere nulla per un intervallo di tempo $T_{CP} = N_{CP}T_C$. Tuttavia, solamente una struttura periodica, come il Prefisso Ciclico è in grado di evitare l'ICI. Infatti il CP converte la convoluzione lineare, aperiodica, tra il segnale nel tempo e la CIR in una convoluzione circolare, cioè periodica (si veda il par. A.1).

Il segnale tempo-discreto nel dominio del tempo associato all' m -esimo simbolo OFDM si può scrivere come

$$x_m(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \cdot e^{j2\pi k(n-N_{CP})/N} & \text{se } n \in [0, \dots, (N + N_{CP} - 1)] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (1.7)$$

dove i coefficienti $X_m(k)$ sono i simboli di modulazione del vettore \mathbf{X}_m , a cui si aggiungono le $(N - M)$ portanti di guardia. Il segnale completo è dato dalla concatenazione di tutti i simboli OFDM trasmessi, ovvero

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_m(n - m(N + N_{CP}))$$

Il segnale ricevuto, sempre tempo-discreto, è pari alla somma di due termini: il primo è la convoluzione di $x(n)$ con la CIR $h(n)$; il secondo è il rumore AWGN $w(n)$. Assumendo che trasmettitore e ricevitore siano perfettamente sincronizzati e che la lunghezza della CIR sia inferiore a N_{CP} , ovvero $h(n) = 0$ per $n < 0$ e

$n > N_{CP}$, il segnale ricevuto diventa

$$r(n) = \sum_{p=0}^{N_{CP}-1} h(p)x(n-p) + w(n) \quad (1.8)$$

In ricezione, la conversione serie/parallelo consente di separare i simboli OFDM che compongono il segnale (1.8). L'espressione dell' m -esimo simbolo ricevuto, completo di CP, è pari a

$$\mathbf{r}_m^{CP} = [r_m^{CP}(0), \dots, r_m^{CP}(N + N_{CP} - 1)]^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{w} \quad (1.9)$$

dove \mathbf{A} è la matrice di convoluzione

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_m(N - N_{CP}) & x_{m-1}(N - 1) & x_{m-1}(N - 2) & \cdots & x_{m-1}(N - N_{CP} + 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ x_m(N - 1) & x_m(N - 2) & \ddots & x_m(N - N_{CP} + 1) & x_m(N - N_{CP}) \\ x_m(0) & x_m(N - 1) & \ddots & x_m(N - N_{CP} + 2) & x_m(N - N_{CP} + 1) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ x_m(N - 1) & x_m(N - 2) & \cdots & \cdots & x_m(N - N_{CP}) \end{bmatrix}$$

Inoltre $\mathbf{h} = [h(0), h(1), \dots, h(N_{CP} - 1)]^T$ è il vettore del canale radio, di lunghezza inferiore al CP, e $\mathbf{w} = [w_m(0), w_m(1), \dots, w_m(N + N_{CP} - 1)]^T$ è il vettore del rumore AWGN.

Si osserva che la matrice \mathbf{A} contiene alcuni contributi di interferenza provenienti dal simbolo OFDM precedente (ISI). Essi possono essere rimossi eliminando i primi N_{CP} campioni dell' m -esimo simbolo che, in assenza di errori di sincronizzazione, corrispondono al CP. Sviluppando l'espressione (1.9) come mostrato in Appendice A, si trova l'importante espressione del segnale ricevuto nel dominio della frequenza

$$R_m(k) = X_m(k) \cdot H(k) + W_m(k) \quad (1.10)$$

dove i coefficienti $X_m(k)$, appartenenti al vettore \mathbf{X}_m , sono legati ai coefficienti $x_m(n)$ dalla relazione (1.7). Si conclude che la presenza del prefisso ciclico permette di trasformare la convoluzione lineare in convoluzione circolare. Quest'ultima corrisponde nel dominio trasformato (FFT) a un prodotto di Hadamard (ovvero termine a termine). Dunque la trasmissione di un segnale OFDM attraverso un canale selettivo in frequenza (multi-percorso) equivale, nel dominio della frequenza, alla trasmissione su N canali paralleli con fading piatto. Grazie a questo modello le operazioni di stima di canale e equalizzazione si semplificano molto rispetto ai sistemi di trasmissione su singola portante (par. 4.1). In particolare, la complessità dell'equalizzazione è pari a una moltiplicazione complessa per sottoportante.

1.2.3 Svantaggi e fragilità della modulazione OFDM

Accanto agli importanti vantaggi di scalabilità, efficienza spettrale e resistenza al fading, la modulazione OFDM presenta alcuni svantaggi e fragilità.

1.2.3.1 Peak to Average Power Ratio

Il principale aspetto svantaggioso è la scarsa efficienza energetica dei segnali OFDM, che si traduce in alti valori del Peak-to-Average Power Ratio (PAPR). Il trasmettitore OFDM applica una trasformazione lineare a un blocco di simboli di modulazione nel dominio della frequenza (ad es QAM), ben rappresentati da variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.). Per il Teorema del Limite Centrale [4], una generica sequenza di simboli OFDM nel dominio del tempo è caratterizzata da una distribuzione Gaussiana. Perciò le ampiezze del segnale OFDM possono essere molto elevate. Tuttavia, gli Amplificatori di Potenza (PA) dei trasmettitori RF presentano una caratteristica lineare solo per un limitato intervallo dinamico; dunque il segnale

trasmesso può essere soggetto a distorsioni non lineari prodotte dalla saturazione. Si manifestano sia emissioni spurie fuori banda, sia disturbi nella banda del segnale. Per garantire che l'amplificatore lavori in zona lineare, è necessario che i PA siano progettati con ampi back-off di potenza, requisito che determina un'amplificazione inefficiente e/o l'aumento del costo dei trasmettitori [2]. Il PAPR misura l'intervallo dinamico del segnale da trasmettere e permette di descrivere il potenziale degrado causato dallo stadio di amplificazione. Il PAPR di un simbolo OFDM è definito dal quadrato del rapporto tra la potenza di picco e la potenza media. Ricordando la formula dell' m -esimo segnale OFDM trasmesso (1.7) e tralasciando, per semplicità, l'indice m , si ottiene

$$\text{PAPR} = \frac{\max_n [|x(n)|^2]}{E [|x(n)|^2]} \quad (1.11)$$

Se vale l'ipotesi che la distribuzione dei coefficienti $x(n)$ sia gaussiana, il modulo degli $x(n)$ ha una distribuzione di Rayleigh e la potenza presenta una distribuzione chi quadrato centrale con due gradi di libertà [4]. La distribuzione cumulativa (CDF) $F_x(\alpha)$ della potenza normalizzata è pari a

$$F_x(\alpha) = P \left(\frac{|x(n)|^2}{E [|x(n)|^2]} < \alpha \right) = 1 - e^{-\alpha} \quad (1.12)$$

Ipotizzando che i coefficienti $x(n)$ siano incorrelati e utilizzando la teoria dei valori estremi [5] si trova che la probabilità che il PAPR superi una certa soglia PAPR_0 è data da

$$P(\text{PAPR} > \text{PAPR}_0) = 1 - F_x(\text{PAPR}_0)^N = 1 - (1 - e^{-\text{PAPR}_0})^N \quad (1.13)$$

dove $F_x(\text{PAPR}_0)$ è la (1.12) calcolata per $\alpha = \text{PAPR}_0$. La figura 1.9 illustra la probabilità (1.13) per diversi valori

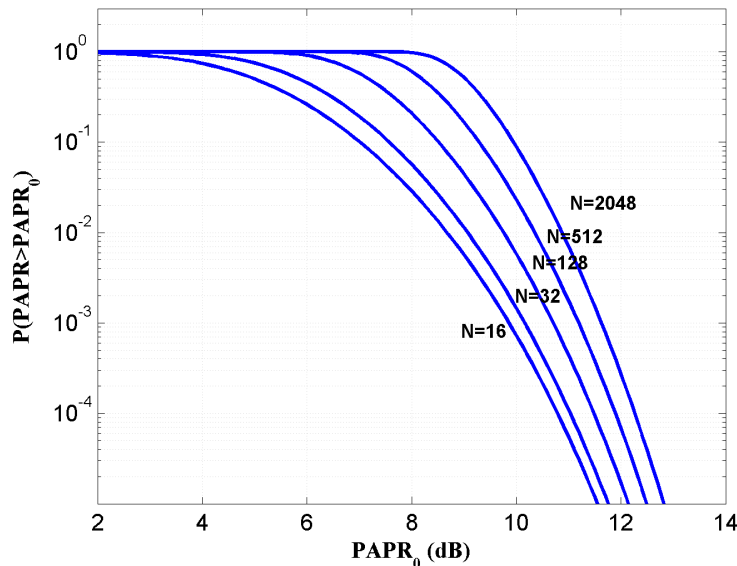


Figura 1.9: Probabilità che il PAPR superi una soglia PAPR_0 per diversi valori del numero di portanti OFDM.

del numero di sottoportanti N ; si osserva che il PAPR assume raramente valori molto alti; tuttavia, quando questo accade, è possibile che il segnale sia degradato dalle non linearità dell'amplificatore. In Appendice B sono riassunte alcune tecniche per la riduzione del PAPR. Inoltre, nel Par. 1.3 si analizza la tecnica di modulazione Single-Carrier FDMA (SC-FDMA), capace di abbassare nettamente i valori del PAPR, senza rinunciare ai vantaggi dell'OFDM. Grazie a queste proprietà, la tecnica è stata adottata nella tratta di Uplink del sistema LTE, dove la potenza dei dispositivi di utente (User Equipment) è un fattore critico, poiché i terminali mobili

sono generalmente alimentati a batteria.

1.2.3.2 Effetti del Carrier Frequency Offset e dei canali tempo-varianti

Le portanti di un simbolo OFDM sono tra loro ortogonali a condizione che il riferimento in frequenza (clock) del trasmettitore coincida esattamente con quello del ricevitore. In caso contrario, la presenza di uno scostamento tra gli oscillatori causa interferenza tra le portanti (ICI), come mostrato in figura 1.10. Il problema dell'accuratezza

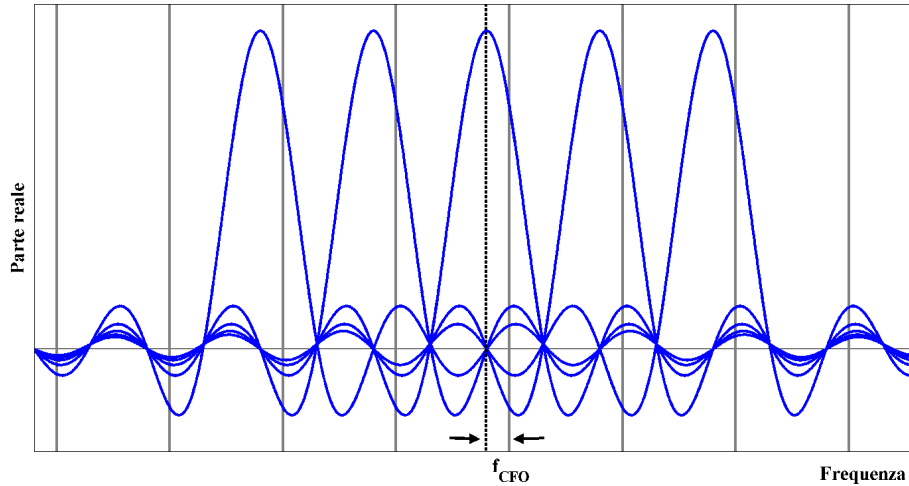


Figura 1.10: Perdita dell'ortogonalità tra le sottoportanti OFDM a causa del CFO.

degli oscillatori locali è maggiormente sentito nei terminali mobili, realizzati con componenti a basso costo. Le deviazioni dalla frequenza di riferimento variano tipicamente in funzione della temperatura e della tensione di alimentazione; esse prendono il nome di Carrier Frequency Offset (CFO).

Solitamente il CFO è espresso in funzione della spaziatura tra sottoportanti Δf , ovvero

$$f_{CFO} = (\Gamma + \epsilon) \Delta f \quad (1.14)$$

dove Δf è la spaziatura tra portanti, Γ è un intero e ϵ è la parte frazionaria, $-0.5 < \epsilon < 0.5$. Quando $\Gamma \neq 0$ i simboli di modulazione si trovano in posizioni sbagliate rispetto allo schema di mappatura delle sottoportanti utilizzato in trasmissione. Se la deviazione non è compensata si ottiene, per qualunque ϵ , un tasso di errore sul bit (BER) pari a 0.5; Quando $\Gamma = 0$ e $\epsilon \neq 0$, le sottoportanti non sono più ortogonali e si genera ICI, che degrada il BER. Normalmente, in un sistema OFDM, sono tollerati valori di CFO non superiori a $\epsilon \simeq 0.05$ [6].

Inoltre, anche il moto relativo tra il terminale mobile e la stazione base provoca una deviazione dalla frequenza di riferimento, causata dall'effetto Doppler. Quando il canale radio presenta un solo cammino e lo spostamento dell'utente avviene in modo che l'angolo di arrivo dell'onda e.m. sia costante per tutta la durata di un simbolo OFDM, il segnale è soggetto a una traslazione in frequenza ν_D , costante per tutte le portanti; nel caso di un ambiente dispersivo, le singole portanti sono soggette a uno spostamento dipendente dalla loro frequenza e descritto da una densità spettrale $S_{hh}(\nu)$ (si veda il par. E.3.2).

Come mostrato in [7], per un generico canale radio la potenza dell'interferenza tra portanti dipende dalla densità spettrale $S_{hh}(\nu)$

$$P_{ICI} = \int_{-\nu_{D,\max}}^{\nu_{D,\max}} S_{hh}(\nu) (1 - \text{sinc}^2(T_S \nu)) d\nu \quad (1.15)$$

dove $\nu_{D,\max}$ è la massima deviazione Doppler, e si assume che la potenza del segnale trasmesso sia unitaria. La deviazione frequenziale legata al CFO, di espressione (1.14), è equivalente allo spostamento Doppler introdotto da un canale radiomobile con un solo cammino di propagazione. In questo caso, la densità spettrale $S_{hh}(\nu)$ diventa

$$S_{hh}(\nu) = \delta(\nu - f_{CFO})$$

e sostituendo questa espressione nella (1.15) si trova

$$P_{ICI} = 1 - \text{sinc}^2(T_S f_{CFO}) \quad (1.16)$$

Nel caso dello spettro Doppler di Jakes (par. E.3.2), utilizzato nei modelli di canale LTE (par. 2.6), si trova invece

$$P_{ICI} = 1 - 2 \int_0^1 (1-f) J_0(2\pi\nu_{D,\max} T_S f) df \quad (1.17)$$

Inoltre, anche se non si conosce la forma dello spettro Doppler, è possibile trovare un limite superiore della potenza ICI applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz [7]

$$P_{ICI} \leq \frac{\int_0^1 [1 - \text{sinc}^2(\nu_D T_S f)]^2 df}{\int_0^1 1 - \text{sinc}^2(\nu_D T_S f) df} \quad (1.18)$$

Tale limite superiore non copre il caso di uno scostamento deterministico, come il CFO.

Disponendo del parametro P_{ICI} è possibile calcolare il SIR (Signal-to-Interference Ratio) dovuto solo all'interferenza tra portanti

$$SIR_{ICI} = \frac{1 - P_{ICI}}{P_{ICI}} \quad (1.19)$$

Le figure 1.11 e 1.12 presentano le Potenze ICI e i corrispondenti SIR per i tre casi considerati. Si osserva che la maggiore interferenza è legata a un offset di frequenza costante (CFO). Nel caso di una distribuzione Doppler, la perturbazione è minore. In particolare, nella figura 1.12, si osserva che quando il CFO è vicino alla spaziatura tra portanti ($\Delta f = 1/T_S$), ovvero $\Gamma \rightarrow 1$ nella (1.14), il SIR decade molto rapidamente. Si osserva infine che al crescere dell'ordine di modulazione, il CFO tollerabile diventa minore [2].

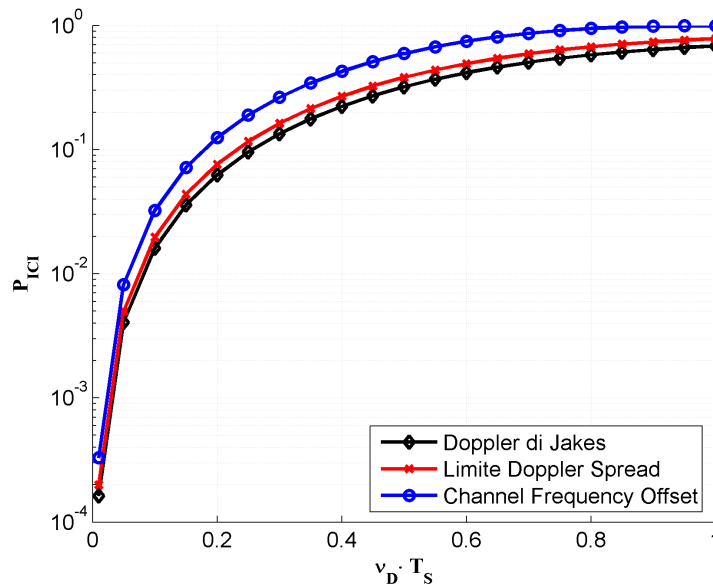


Figura 1.11: Potenza ICI per Doppler di Jakes e per un CFO deterministico.

1.2.3.3 Errori di sincronizzazione nel tempo e dimensionamento del CP

Nel caso di un canale radio impulsivo, ovvero in assenza di cammini multipli, il sistema OFDM è insensibile a errori di sincronizzazione di entità inferiore alla durata del CP. Posto T_O l'errore di sincronizzazione, se $T_O \leq T_{CP}$ le sottoportanti si mantengono ortogonali, grazie alla periodicità del CP e viene introdotto sul segnale trasmesso un termine di fase lineare, proporzionale a T_O . La sottoportante k -esima del segnale ricevuto

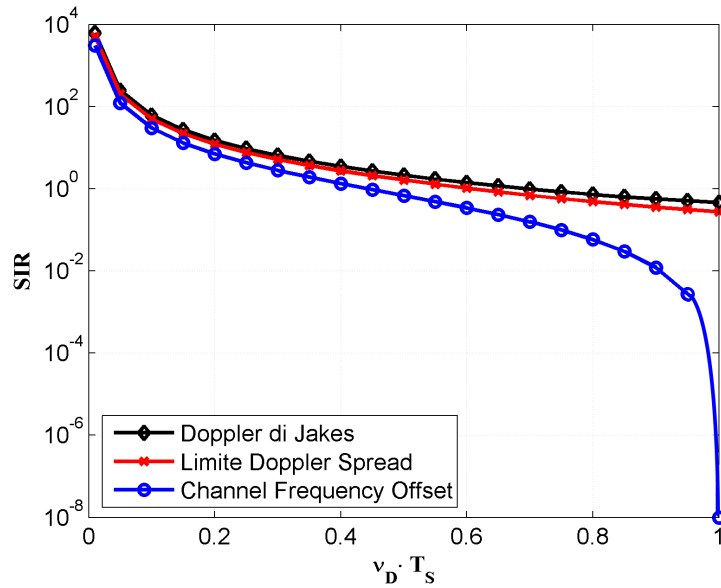


Figura 1.12: SIR dovuto all'ICI per Doppler di Jakes e per un CFO deterministico.

è data da

$$R_m(k) = X_m(k) \cdot \exp\left(j2\pi \frac{kd}{N}\right) \quad (1.20)$$

dove $d = T_O/T_C$ è l'errore di sincronizzazione espresso in campioni e $T_C = 1/B_W$ è il periodo di campionamento del sistema. L'eliminazione di questo sfasamento è effettuata in fase di sincronizzazione ed equalizzazione (si veda il par. 3.3.2). È interessante notare che, tra i possibili intervalli di guardia, solo il prefisso ciclico garantisce la trasparenza del sistema OFDM agli errori di sincronizzazione. Nel caso di un intervallo di guardia completamente nullo (zero-padding) tale proprietà non è più valida, e parte della potenza del segnale viene perduta.

In presenza di un canale radio con dispersione dei ritardi τ_d (in generale massima, ovvero $\tau_d = T_m$), il massimo errore di sincronizzazione per cui non si degrada la trasmissione OFDM si riduce di una quantità pari alla lunghezza della CIR, ovvero $T_O \leq T_{CP} - \tau_d$ come mostrato in figura 1.13.

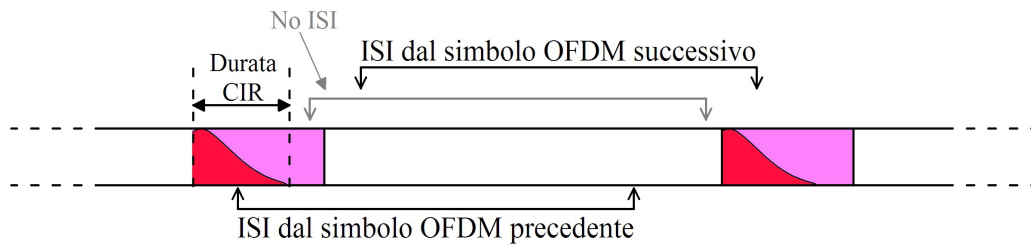


Figura 1.13: Sensibilità del sistema OFDM agli errori di sincronizzazione temporale.

Quando la lunghezza del CP è insufficiente il segnale OFDM è soggetto a ICI e ISI. Per un segnale OFDM di $N + N_{CP}$ campioni, la potenza di ICI e ISI è rispettivamente [8]

$$P_{ICI} = 2 \sum_{p=N_{CP}}^{N+N_{CP}-1} |h(p)|^2 \frac{N(p - N_{CP}) - (p - N_{CP})^2}{N^2} \quad (1.21)$$

$$P_{ISI} = \sum_{p=N_{CP}}^{N+N_{CP}-1} |h(p)|^2 \frac{(p - N_{CP})^2}{N^2} \quad (1.22)$$

Viceversa, la potenza del segnale P_S si riduce e diventa

$$P_S = \sum_{p=0}^{N_{CP}-1} |h(p)|^2 + \sum_{p=N_{CP}}^{N+N_{CP}-1} |h(p)|^2 \frac{(N-p+N_{CP})^2}{N^2} \quad (1.23)$$

Il Rapporto Segnale-Interferenza diventa quindi

$$SIR_{CP} = \frac{P_S}{P_{ISI} + P_{ICI}} \quad (1.24)$$

Nelle figure 1.14 e 1.15 sono rappresentate le equazioni dalla (1.21) alla (1.24), in funzione della durata del canale radio L , espressa in campioni, utilizzando il valore del CP di LTE in configurazione normale, di durata $T_{CP} = 4.6875 \mu s$ (si veda il capitolo 2). Si ipotizza che il canale, la cui durata verifica la condizione $L < (N + N_{CP})$, abbia un Power Delay Profile (PDP) uniforme (par. E.3.1). La linea tratteggiata rappresenta il limite del prefisso ciclico, ovvero $L = N_{CP}$.

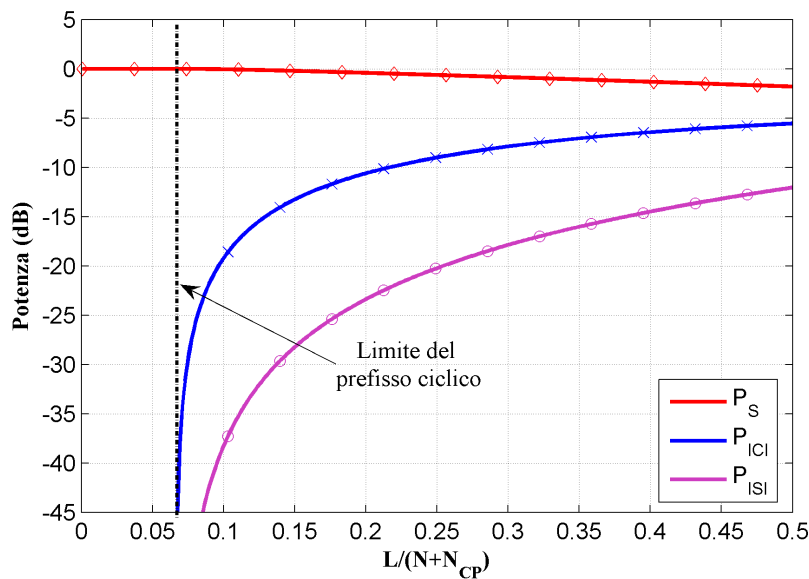


Figura 1.14: Potenza del segnale, di ICI e ISI nel caso di un prefisso ciclico troppo corto.

Inoltre, accanto ai vantaggi descritti, l'introduzione del CP provoca una riduzione dell'SNR pari a

$$SNR_{loss} = -10 \log_{10} \left(1 - \frac{T_{CP}}{T} \right) \quad (1.25)$$

dove $T = (T_{CP} + T_S)$. Infatti il CP non trasmette informazione e dunque il numero di simboli trasmessi al secondo, per ogni Hz di banda, decresce da R a $R(1 - T_{CP}/T_S)$.

Dunque la lunghezza del CP deve essere conforme agli effettivi requisiti del sistema (es. modelli di canale supportati), riducendo nel contempo le perdite in SNR e in efficienza spettrale.

1.3 L'innovativa modulazione SC-FDMA

Il progetto della tratta di Uplink del sistema LTE condivide molti aspetti con quella di Downlink, tuttavia essa presenta alcune specificità. I principali requisiti di progetto del livello fisico di utente sono:

- ortogonalità dei flussi trasmessi dai vari utenti, allo scopo di minimizzare l'interferenza intracella e di massimizzare la capacità;

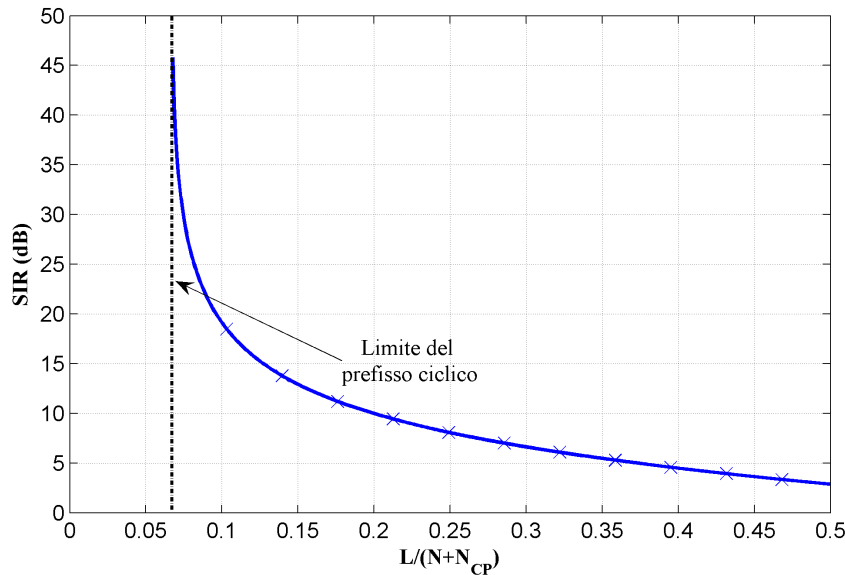


Figura 1.15: Rapporto Segnale Interferenza (SIR) in funzione della lunghezza della CIR, per CP in configurazione normale.

- flessibilità di allocazione delle risorse, per supportare diverse velocità di trasmissione e per adattare il sistema al rapporto SINR corrente;
- PAPR della forma d'onda trasmessa sufficientemente basso, in modo da ridurre costo, dimensioni e consumo di energia dell'equipaggiamento di utente (UE);
- buone prestazioni (ICI e ISI trascurabili) al variare della configurazione di banda (compresa tra 1.4 e 20 MHz);

La scelta della tecnica OFDM renderebbe le due tratte perfettamente speculari, semplificando notevolmente l'implementazione del sistema. D'altronde, poiché i segnali OFDM sono caratterizzati da elevati valori del PAPR (Par. 1.2.3.1), si è deciso di adottare una tecnica di accesso completamente nuova, chiamata Single-Carrier Frequency Division Multiple Access (SC-FDMA).

La modulazione SC-FDMA presenta allo stesso tempo i vantaggi del sistema OFDM, descritti nel Par. 1.2.1, e un basso livello di PAPR, caratteristico dei sistemi di trasmissione a portante singola. Essa è una speciale tecnica di trasmissione multiportante, caratterizzata da ortogonalità tra le diverse sottoportanti e dall'uso del prefisso ciclico per evitare ISI e ICI. Di conseguenza, come per l'OFDM, l'equalizzazione di canale richiede una sola moltiplicazione complessa per sottoportante.

A differenza dell'OFDM, dove i campioni della costellazione (QPSK o QAM) sono direttamente applicati alle sottoportanti, nel sistema SC-FDMA l'ampiezza di ciascuna sottoportante è pari a una combinazione lineare di tutti i campioni della costellazione trasmessi nello stesso istante. Tale caratteristica accomuna l'SC-FDMA ai sistemi di trasmissione a portante singola e determina una sostanziale riduzione del PAPR rispetto a schemi di trasmissione multiportante puri, come l'OFDM.

Tuttavia anche le prestazioni di questo sistema sono influenzate da spostamenti in frequenza (CFO e Doppler) e dal dimensionamento del prefisso ciclico rispetto alla risposta di canale, poiché tali fenomeni disturbano qualunque trasmissione multiportante (par. 3.1).

Il segnale SC-FDMA può essere generato sia nel dominio del tempo che della frequenza. Le due tecniche, equivalenti in linea teorica, si differenziano dal punto di vista pratico: infatti la generazione nel dominio del tempo presenta una minore efficienza spettrale, in quanto è necessario utilizzare filtri temporali con una banda in eccesso non nulla [2]. Tuttavia è più facile comprendere i principi di questa modulazione descrivendo entrambe le tipologie di generazione.

1.3.1 Approccio nel dominio del tempo

La generazione di un segnale SC-FDMA nel dominio del tempo, presentata in figura 1.16, è molto simile a una trasmissione a portante singola. Il flusso di bit in ingresso è trasformato in una sequenza di simboli di

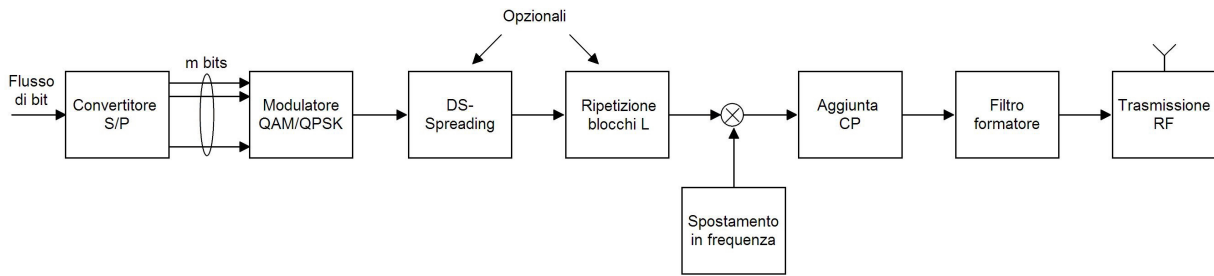


Figura 1.16: Schema a blocchi della generazione temporale di un simbolo SC-FDMA.

modulazione di ordine m (ad esempio $m = 2$ per il QPSK), organizzati in blocchi di dimensione M . Tale operazione può essere seguita da uno spreading, opzionale, e da uno stadio di ripetizione, anch'esso opzionale, in cui ciascun blocco è ripetuto L volte. Si applica inoltre una traslazione in frequenza allo scopo di posizionare i dati di ciascun utente nella porzione di banda assegnata dalla stazione base, evitando sovrapposizioni e interferenze. Infine, dopo l'inserimento del prefisso ciclico e la convoluzione con il filtro formatore dell'impulso (ad esempio un filtro a coseno rialzato), il segnale risultante viene trasmesso a radio frequenza.

Il segnale trasmesso, costituito dalla ripetizione di un generico blocco di simboli, presenta uno spettro diverso da zero solo in corrispondenza di alcune frequenze; nel caso descritto, mostrato in figura 1.17, solo una portante ogni L ha un'ampiezza non nulla. In questo caso, la trasmissione è detta *distribuita* e rappresenta un modo per

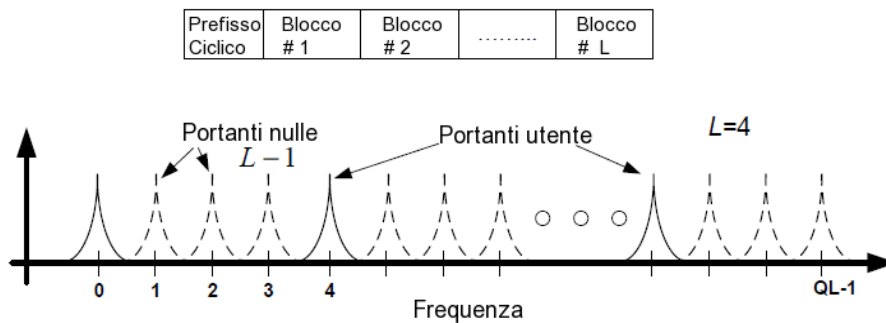


Figura 1.17: Trasmissione distribuita con spaziatura costante tra le portanti occupate.

introdurre la diversità in frequenza. Variando la dimensione del blocco M e il fattore di ripetizione L è possibile supportare un'ampia gamma di velocità di trasmissione. Quando il numero totale di portanti allocabili coincide esattamente con il prodotto ($M \cdot L$) il metodo di accesso multiplo prende il nome di Interleaved Frequency Division Multiple Access (IFDMA) [9].

Se lo stadio di ripetizione non è effettuato ($L = 1$), lo spettro del segnale occupa un insieme di portanti consecutive e la trasmissione è chiamata *localizzata*. Grazie ad essa è possibile introdurre la tecnica del Channel Dependent Scheduling (CDS), che permette di allocare le risorse in base alle condizioni di canale correnti (figura 1.18). Inoltre supporta il coordinamento dell'interferenza tra celle diverse (sezione 12.5 di [2]).

Le diverse trasmissioni di utente, aventi specifiche velocità e fattori di ripetizione L , sono tra loro ortogonali quando

- Gli insiemi di sottoportanti occupate dagli utenti non si sovrappongono. A questo scopo si assegna a ciascun utente una diversa frequenza di traslazione;

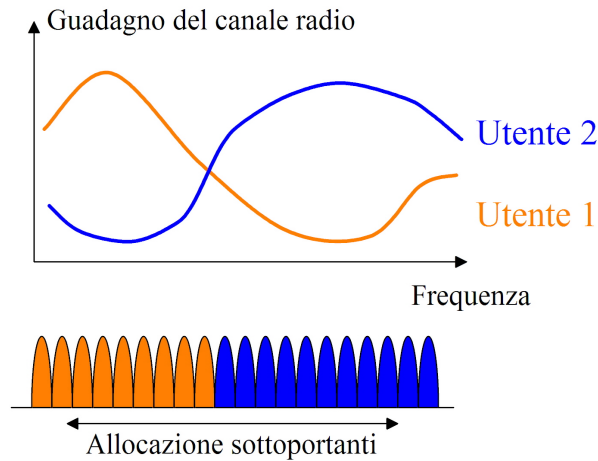


Figura 1.18: Channel Dependent Scheduling nel caso di due utenti. Le risorse sono assegnate in base alle condizioni di canale sperimentate da ciascun utente.

- Il segnale ricevuto è accuratamente sincronizzato sia nel tempo che in frequenza;
- Il prefisso ciclico è più lungo della somma tra la dispersione di canale massima e il residuo errore di sincronizzazione nel tempo tra i vari utenti;

I segnali SC-FDMA generati nel dominio del tempo presentano un livello di PAPR simile a quello di una trasmissione a portante singola, a causa della spiccata somiglianza tra le due tecniche.

1.3.2 Approccio nel dominio della frequenza

La generazione di un segnale SC-FDMA nel dominio della frequenza si basa su una struttura chiamata Discrete Fourier Transform-Spread OFDM (DFT-S-OFDM) [2], presentata in figura 1.19. Dopo la conversione

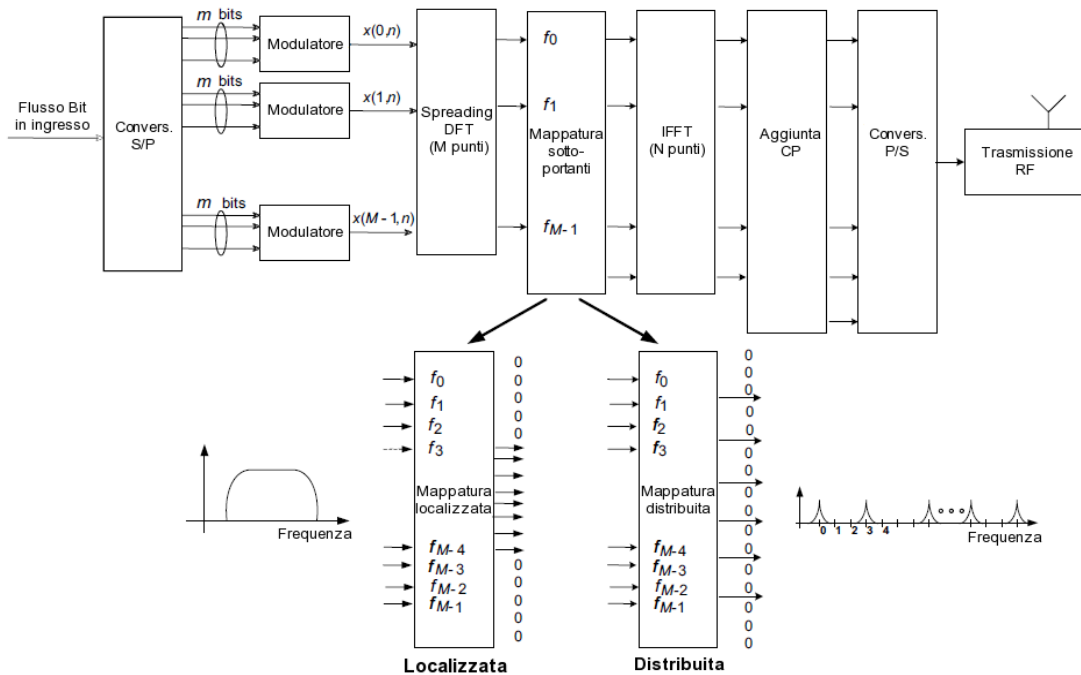


Figura 1.19: Generazione del segnale SC-FDMA in frequenza e presentazione delle mappature localizzata e distribuita delle sottoportanti

Serie/Parallelo e la modulazione del flusso di bit in ingresso, si organizzano i simboli di modulazione risultanti

in gruppi di dimensione M . Quindi si applica una precodifica (spreading) tramite DFT, ovvero si calcola la trasformata DFT su M punti di ciascun gruppo di simboli. Tale operazione costituisce l'aspetto distintivo della tecnica SC-FDMA rispetto all'OFDM e consente di abbassare sensibilmente il PAPR del segnale.

I coefficienti ottenuti dalla DFT sono quindi associati alle risorse fisiche (sottoportanti) assegnate a ciascun utente. Normalmente il numero totale delle portanti disponibili è maggiore o uguale a M e inoltre si devono aggiungere, ai lati dello spettro, le portanti di guardia, in modo da evitare interferenze; il numero complessivo di sottoportanti del sistema diventa $N > M$. Dopo l'operazione di mappatura il segnale è riportato nel dominio del tempo con una IDFT calcolata su N campioni, dove, per applicare l'algoritmo FFT, si sceglie $N = 2^m$, con $m > 0$. Grazie alla condizione $N > M$, il segnale risultante viene implicitamente sovracampionato e filtrato con un seno cardinale, che funge da filtro formatore. Infine, dopo l'aggiunta del prefisso ciclico e la conversione in serie, il segnale è pronto per essere trasmesso.

Come l'approccio nel dominio del tempo, anche la tecnica DFT-S-OFDM supporta sia trasmissioni di tipo localizzato sia distribuito:

- **Trasmissione localizzata.** Le M portanti assegnate all'utente sono tra loro adiacenti. Il segnale SC-FDMA ottenuto è equivalente a quello generato nel dominio del tempo con un fattore di ripetizione $L = 1$ e un filtro formatore di tipo 'sinc'.
- **Trasmissione distribuita.** Le M sottoportanti allocate sono separate tra loro da $(L - 1)$ portanti nulle, in modo che il numero totale di portanti disponibili soddisfi la condizione $ML < N$. Il segnale ottenuto è equivalente a quello generato dallo schema IFDMA nel tempo, con un fattore di ripetizione L e un filtro formatore di tipo 'sinc'.

Più in generale, è possibile dimostrare l'equivalenza tra lo schema DFT-S-OFDM e quello nel dominio del tempo imponendo che M sia pari a N . In questo caso le operazioni di DFT e IDFT di figura 1.19 si elidono e si ottiene una trasmissione seriale dei simboli di informazione nel tempo. D'altra parte, se $N = M$, non si ottiene né il sovracampionamento né il filtraggio degli impulsi trasmessi con il seno cardinale.

Le condizioni di ortogonalità tra gli utenti sono identiche a quelle descritte nel precedente paragrafo. Anche in questo caso, la presenza del CP consente di semplificare l'equalizzazione di canale.

È interessante notare che per effettuare la precodifica dei dati, la DFT potrebbe essere sostituita da una qualunque trasformazione unitaria, ottenendo prestazioni paragonabili [2]. Tuttavia, solo utilizzando la trasformata DFT è possibile ottenere la proprietà Single-Carrier, decisiva per ridurre il PAPR del segnale trasmesso.

1.3.3 La modulazione SC-FDMA nel sistema LTE

Dopo aver introdotto i principi fondamentali della modulazione SC-FDMA, si descrivono le scelte di progetto adottate per la tratta di Uplink del sistema LTE.

Come visto, le tecniche di generazione SC-FDMA nel tempo e in frequenza (DFT-S-OFDM) sono equivalenti in linea teorica. D'altra parte, ciascuna di esse richiede parametri progettuali distinti per ottenere un'efficiente realizzazione pratica. In particolare, il filtro formatore dell'impulso, utilizzato nella generazione temporale, presenta una banda in eccesso non nulla; si ottiene un'efficienza spettrale minore rispetto all'approccio nel dominio della frequenza, dove il filtro formatore, introdotto in modo implicito dalle operazioni di zero padding e IFFT, è di tipo *sinc* e quindi con banda in eccesso nulla. Ad esempio, per una banda di sistema di 5 MHz, la configurazione ottima nel dominio del tempo presenta una banda disponibile di 4.096 MHz (256 sottoportanti con una spaziatura di 16 kHz) con un'efficienza spettrale dell'82% [10]. Nel caso della generazione in frequenza, il processo di ottimizzazione porta a un'efficienza del 90% (con 300 sottoportanti occupate e una spaziatura di 15 kHz). Quindi, la generazione in frequenza permette di raggiungere velocità di trasmissione più elevate.

D'altra parte, la presenza di un filtro formatore con banda in eccesso non nulla permette di ridurre maggiormente il PAPR rispetto alla tecnica DFT-S-OFDM, come mostrato in figura 1.20.

Si conclude che la scelta tra l'approccio nel dominio del tempo e quello in frequenza comporta un compromesso

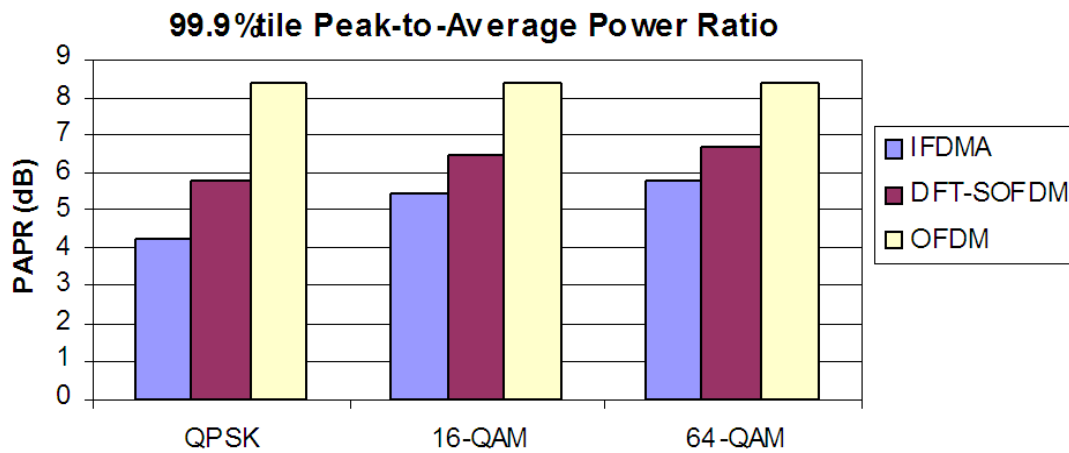


Figura 1.20: Confronto, rispetto al PAPR, della generazione SC-FDMA nel tempo (IFDMA), della generazione SC-FDMA in frequenza(DFT-S-OFDM) e dell’OFDM.

tra l’efficienza spettrale e il livello di PAPR. Un ulteriore vantaggio della generazione SC-FDMA in frequenza è la possibilità di scegliere un insieme di parametri molto simile alla modulazione OFDM, utilizzata nella tratta di Downlink. Ad esempio le due tratte hanno in comune la spaziatura tra sottoportanti Δf , il numero di portanti disponibili in una data banda di sistema, la durata dei prefissi ciclici e dunque la frequenza di campionamento. Per questi motivi, la tratta di Uplink in LTE ha adottato la tecnica di generazione frequenziale DFT-S-OFDM.

Lo schema generale di questa modulazione nel caso del sistema LTE è presentato in figura 1.21.

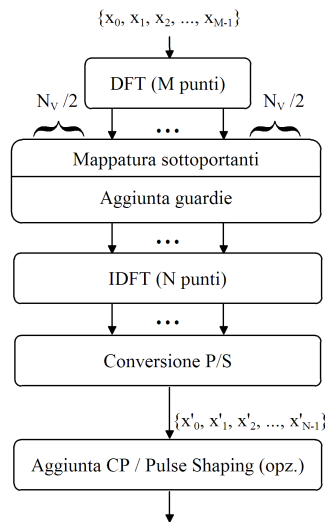


Figura 1.21: Generazione di un simbolo SC-FDMA in LTE.

Una volta nota la banda allocata all’utente, pari a M sottoportanti, si costruisce il generico blocco di M simboli di modulazione. In seguito si applica a ciascun blocco una precodifica DFT di M campioni e si allocano i coefficienti risultanti sulle risorse assegnate dalla Base Station (mappatura). L’allocazione può essere sia localizzata che distribuita, tuttavia, come spiegato nel capitolo 2, in LTE si utilizza quasi sempre una mappatura localizzata. Si aggiungono quindi N_V portanti di guardia, ottenendo complessivamente un blocco di N sottoportanti; se ne calcola la IDFT così da tornare nel dominio del tempo e, dopo la conversione Parallelo/Serie, si aggiunge il CP. Il processo di generazione è concluso dalla convoluzione con un filtro formatore, operazione facoltativa.

Capitolo 2

La tratta di Uplink del sistema LTE

In questo capitolo, si presenta la tratta di Uplink del livello fisico del sistema LTE.

Per cominciare, dopo una breve descrizione dell'architettura di sistema (par. 2.1), viene presentato il livello fisico, approfondendo in particolare la struttura della rete di accesso, chiamata E-UTRAN (par. 2.1.2).

Successivamente, nel par. 2.2, si descrive la struttura della tratta di Uplink, che comprende canali fisici, per il trasporto delle informazioni di utente e di controllo, e sequenze pilota, con il compito di facilitare le operazioni del ricevitore (es. stima di canale, sincronizzazione). Nel par. 2.2.1 è presentata la struttura generale della trama e la configurazione dei parametri principali della trasmissione multiportante (es. lunghezza del CP, spaziatura tra sottoportanti, durata del simbolo SC-FDMA). In seguito, nel par. 2.2.2 si discute la griglia delle risorse fisiche, una struttura logica che semplifica le funzioni di scheduling e la generazione del simbolo SC-FDMA, con un approfondimento sul problema della trasmissione della componente continua in frequenza (par. 2.2.4).

Dopo la parte generale, si considerano le componenti specifiche della tratta affrontate nella tesi: il canale dati Physical Uplink Shared CHannel (PUSCH) e i segnali pilota di demodulazione, chiamati DeModulation Reference Signals (DM RS). Nel par. 2.3 è descritta la catena di operazioni coinvolte nella generazione del canale PUSCH. Ciascun passaggio viene studiato separatamente, precisandone lo scopo e i dettagli realizzativi. Nel par. 2.4 si studiano i segnali DM RS, aventi un ruolo centrale nelle operazioni di demodulazione e stima di canale.

A conclusione del capitolo, si introducono i modelli di canale radio utilizzati nello standard LTE per simulare il funzionamento del sistema (par. 2.5); una breve descrizione delle proprietà generali del canale radio è presentata in appendice E.

2.1 L'architettura di sistema: descrizione generale

Come accennato nel par. 1.1, il sistema LTE è stato progettato per supportare unicamente servizi a commutazione di pacchetto, a differenza dei precedenti sistemi cellulari, basati anche sulla commutazione di circuito. Accanto all'evoluzione delle tecniche di accesso al mezzo fisico, raccolte nella rete *Evolved-UTRAN* (E-UTRAN), si è avuto un radicale cambiamento delle funzionalità logiche che ha portato alla definizione della *System Architecture Evolution* (SAE), di cui fa parte la rete *Evolved Packet Core* (EPC). L'unione delle componenti E-UTRAN e SAE costituisce il sistema *Evolved Packet System* (EPS).

L'architettura EPS è stata progettata per fornire agli utenti numerosi servizi, basati sul protocollo IP, come l'accesso alla rete Internet o il Voice over IP (VoIP). Ciascun servizio è erogato tramite gli *EPS bearer*, particolari strutture logiche associate a una specifica Qualità di Servizio (QoS). Gli utenti possono disporre di molteplici bearer, relativi a servizi diversi che richiedono QoS distinte. Ad esempio, un utente può effettuare una chiamata vocale (VoIP) e, allo stesso tempo, navigare nel web oppure scaricare un documento tramite FTP (File Transfer Protocol). Un bearer di tipo VoIP fornisce la QoS necessaria per una chiamata vocale, mentre un bearer *best-effort* è sufficiente per la navigazione web o per una sessione FTP.

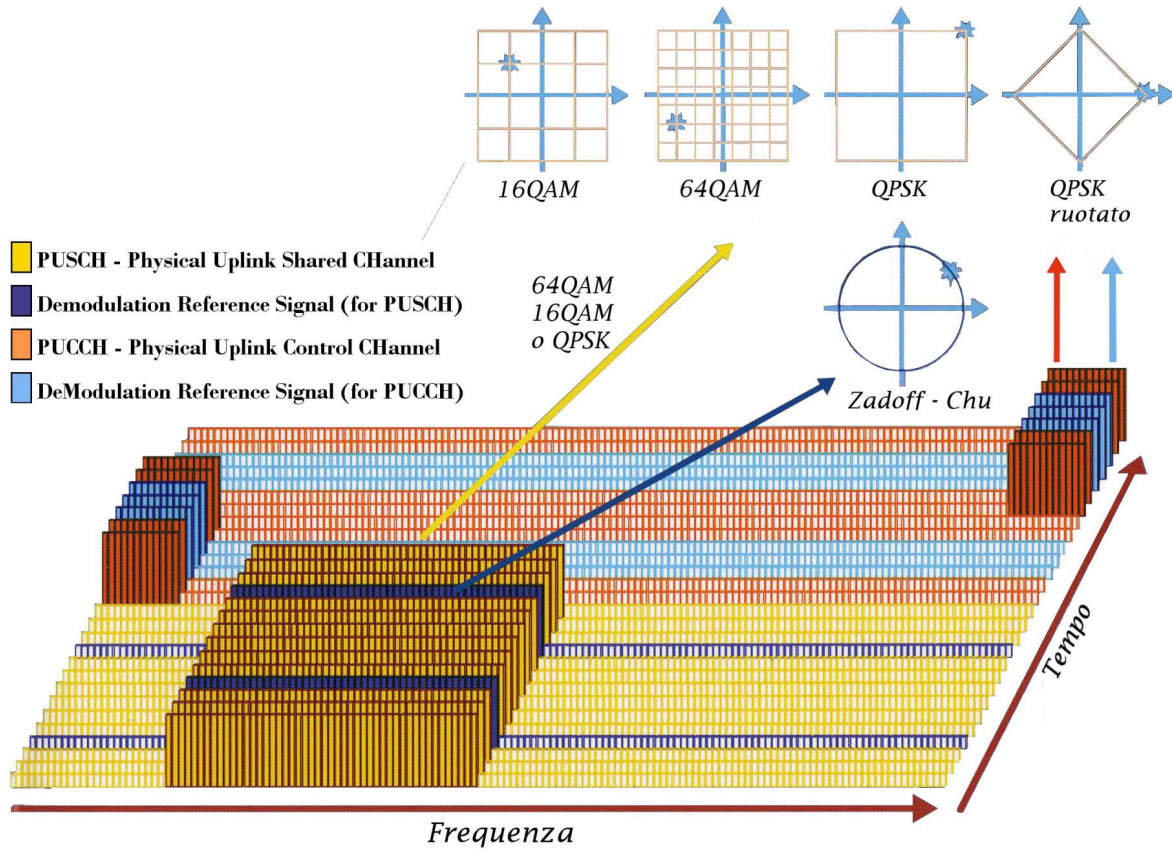


Figura 2.1: Rappresentazione nel piano tempo-frequenza dei canali fisici trasmessi nella tratta di Uplink del sistema LTE.

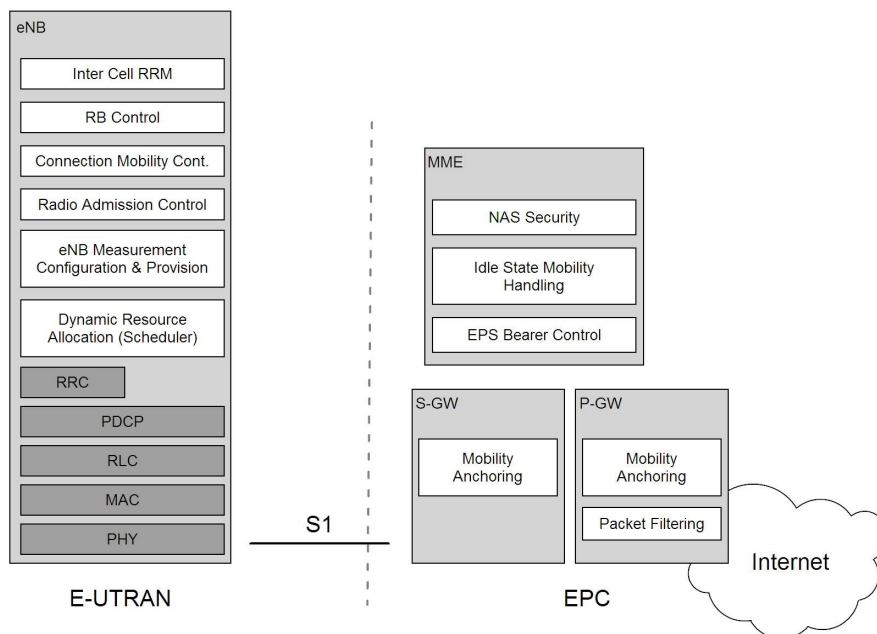


Figura 2.2: Suddivisione funzionale tra E-UTRAN e EPC.

Inoltre la rete deve garantire un livello sufficiente di sicurezza e riservatezza per l'informazione di utente e deve essere protetta da utilizzi fraudolenti o pericolosi.

2.1.1 La rete Evolved Packet System (EPS)

Per raggiungere tali obiettivi la rete EPS è composta da diversi elementi, ciascuno con competenze precise. La figura 2.2 mostra la descrizione generale dell'architettura di rete, comprendente i dispositivi, le pile protocollari e le corrispondenti interfacce.

Adottando una visione di alto livello, la rete EPS è composta da due porzioni ben distinte:

- la Core Network (CN), chiamata EPC;
- la rete di accesso, chiamata E-UTRAN.

La Core Network è responsabile del controllo degli utenti (UE) e dell'instaurazione dei bearers. In particolare, i nodi principali della rete EPC, mostrati in figura 2.2, sono [2]:

- **Packet Data Network Gateway (P-GW);**
- **Serving Gateway (S-GW);**
- **Mobility Management Entity (MME).**

Il P-GW assegna gli indirizzi IP agli utenti ed effettua il filtraggio dei pacchetti IP in base alla QoS del rispettivo bearer. Inoltre partecipa alle procedure di interworking con tecnologie non-3GPP, come CDMA2000 e WiMAX.

Il S-GW funge da punto di riferimento (*mobility anchor*) per i flussi dati quando l'utente, muovendosi, cambia l'eNodeB (cioè la Stazione Base) di pertinenza. È anche il fautore dell'interworking con altre tecnologie 3GPP, come GPRS e UMTS.

Infine, il MME è il nodo di controllo che elabora la segnalazione tra l'UE e la Core Network. I protocolli con cui comunicano l'UE e la Core Network sono chiamati Non-Access Stratum (NAS) [2].

La rete di accesso, illustrata in figura 2.3, è costituita dall'interconnessione delle Stazioni Base (BS), chiamate evolved NodeB (eNodeB), e si interfaccia sia con la Core Network, sia con gli utenti (UE). Escludendo il caso

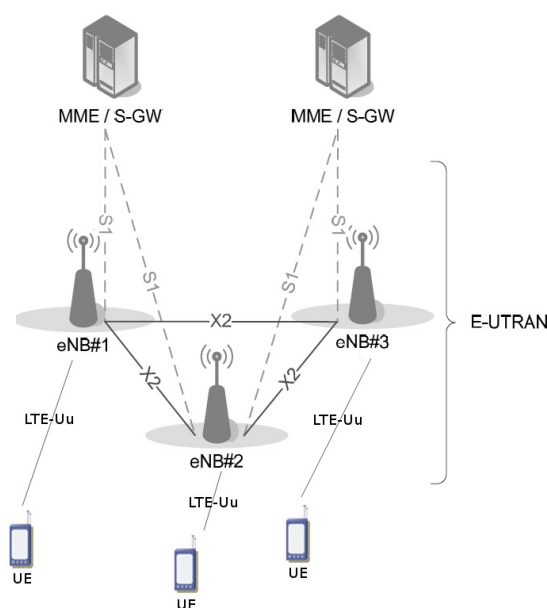


Figura 2.3: Architettura E-UTRAN.

di trasmissioni broadcast, non esiste un controllo centralizzato nella E-UTRAN; dunque l'architettura è detta piatta. Tra le sue funzioni, tutte legate agli aspetti trasmissivi, si ricordano:

- **Radio Resource Management:** raccoglie le attività di controllo e ammissione dei radio bearers, nonché la pianificazione e l'allocazione delle risorse di utente, sia in Uplink che in Downlink;
- **Compressione degli header:** gli header dei pacchetti IP possono rappresentare un overhead significativo, soprattutto quando i pacchetti hanno piccole dimensioni (es. chiamata VoIP). La loro compressione aiuta ad ottimizzare l'utilizzo delle risorse radio disponibili;
- **Sicurezza:** tutti i dati trasmessi sull'interfaccia radio sono cifrati;
- **Connettività alla EPC:** è necessario gestire il flusso di segnalazione proveniente dai nodi MME e il percorso compiuto dai bearer attraverso i Serving Gateway.

2.1.2 Architettura dei protocolli della rete E-UTRAN

Poiché in questa sede si studia il livello fisico del sistema LTE, è utile comprendere come vengono organizzate le informazioni di utente e di controllo prima di essere trasmesse. Si considera, a questo scopo, l'architettura dei protocolli della rete E-UTRAN, presentata in figura 2.4. Ivi è rappresentata la fondamentale suddivisione funzionale tra piano di utente e piano di controllo, che coinvolge unicamente i livelli superiori della gerarchia. Il piano di controllo è associato in parte agli eNodeB (Access Stratum) e in parte alla rete EPC (Non-Access Stratum, NAS). Esso gestisce l'allocazione delle risorse fisiche e l'instradamento della segnalazione proveniente dalla Core Network (EPC). Il piano di utente, presente solo negli UE, ha il compito di fornire applicazioni, ovvero servizi di alto livello, agli utilizzatori della rete.

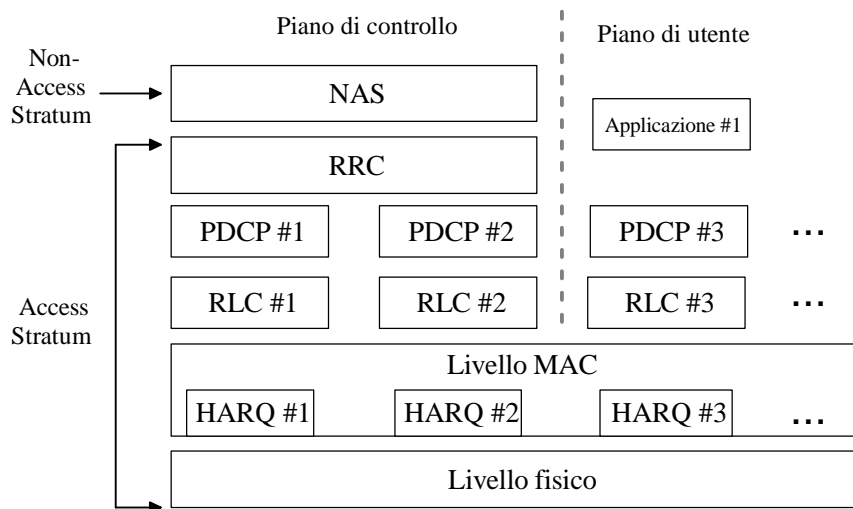


Figura 2.4: Architettura dei protocolli E-UTRAN. Si distinguono il piano di utente dal piano di controllo.

Entrambi i piani, per funzionare correttamente, si appoggiano sui livelli inferiori della gerarchia, che sono:

- il livello *LTE Layer 2*, formato dai sottolivelli **Packet Data Convergence Protocol (PDCP)**, **Radio Link Control (RLC)** e **Medium Access Control (MAC)**;
- il livello fisico.

Il livello PDCP elabora i messaggi provenienti dal Radio Resource Control (RRC) nel piano di controllo, e i pacchetti IP nel piano utente. A seconda del tipo di bearer, le principali funzioni del PDCP sono la compressione degli header, la sicurezza (integrità e cifratura), il supporto per il ripristino dell'ordine di trasmissione corretto

e per la ritrasmissione dei pacchetti durante l'handover. Esiste un'entità PDCP per ciascun radio bearer.

Il protocollo RLC si occupa della segmentazione e della ricostruzione dei pacchetti dei livelli superiori per adattarli alla trasmissione sul mezzo fisico. Per i bearer che richiedono una trasmissione senza errori, il livello RLC effettua anche la ritrasmissione e il riordino dei pacchetti quando sono ricevuti fuori sequenza; in particolare quando si utilizza l'operazione Hybrid Automatic Repeat reQuest (HARQ) nel livello MAC. Anche in questo caso esiste un'entità RLC per ciascun radio bearer.

Il livello MAC effettua la moltiplicazione dei dati provenienti da diversi radio bearer. Dunque è presente una sola entità MAC per ciascun dispositivo, sia esso un terminale di utente o un eNodeB. Questo livello decide la quantità di dati trasmessi da ciascun bearer e la dimensione dei pacchetti provenienti dal livello RLC. L'obiettivo è il raggiungimento della Qualità di Servizio associata a ciascun flusso dati, in particolare avvalendosi dello schema di ritrasmissione HARQ.

Il collegamento del MAC con il livello fisico sottostante avviene grazie ai canali di trasporto (*transport channels*); lo stesso compito, ma rispetto al livello RLC, superiore nella gerarchia, è assolto dai canali logici (*logical channels*). Essi sono mostrati in figura 2.5.

I canali logici che trasportano informazioni di controllo, come la segnalazione, sono chiamati *di controllo*; quelli che trasportano dati di utente sono detti *di traffico*. Alcuni sono specifici della direzione di trasmissione, altri sono sempre presenti. La tratta di Uplink presenta due canali di controllo e uno di traffico:

- Common Control CHannel (CCCH), trasporta informazioni di controllo durante l'instaurazione della connessione tra UE ed eNodeB;
- Dedicated Control CHannel (DCCH), trasporta informazione di controllo relativa a uno specifico utente;
- Dedicated Traffic CHannel (DTCH), trasporta i dati di un singolo utente.

I canali logici vengono moltiplicati nei canali di trasporto (figura 2.5), che per la tratta di Uplink sono:

- Uplink Shared CHannel (UL-SCH), trasporta l'informazione di tutti i canali logici, cioè sia dati di utente sia messaggi di controllo;
- Random Access CHannel (RACH), utilizzato per l'accesso alla rete quando l'UE non è sincronizzato con accuratezza nel tempo, o quando non vi sono risorse fisiche disponibili per l'utente.

Prima di essere trasmessa l'informazione dei canali di trasporto viene elaborata dal livello fisico.

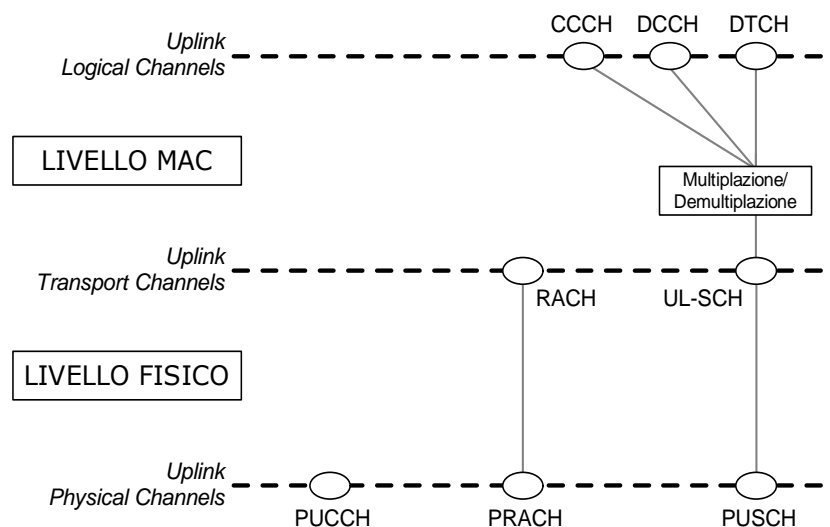


Figura 2.5: Canali logici, di trasporto e fisici nella tratta di Uplink LTE.

2.2 Il livello fisico

Il livello fisico della tratta di Uplink LTE (si veda [2]) riceve le informazioni provenienti dal MAC sotto forma di canali di trasporto (figura 2.5); prima di essere trasmesse, tali informazioni sono mappate in opportune strutture, chiamate canali fisici (*physical channels*). Essi sono stati progettati per sfruttare in modo efficiente le risorse disponibili, evitando sprechi, e per facilitare la multiploazione tra i dati e la segnalazione di controllo.

Inoltre sono disponibili tecniche di trasmissione multi-antenna, ma in questo lavoro si assume la presenza di una sola antenna sia in trasmissione che in ricezione (SISO).

I canali fisici della tratta di Uplink sono:

- **Physical Random Access CHannel (PRACH)**, che permette l'instaurazione del collegamento tra l'UE e la rete di accesso (E-NodeB). Non è stato considerato nella tesi;
- **Physical Uplink Shared CHannel (PUSCH)**, illustrato nel paragrafo 2.3;
- **Physical Uplink Control CHannel (PUCCH)**, contenente le informazioni di controllo. Non è stato considerato.

Le diverse funzioni del livello fisico sono coadiuvate dalla presenza di due tipologie di segnali, multiplati insieme ai canali fisici:

- **DeModulation Reference Signals (DM RS)**, presentati nel paragrafo 2.4;
- **Sounding Reference Signals (SRS)**, usati in prevalenza per stimare la qualità del canale, favorendo l'introduzione delle tecniche di Channel Dependent Scheduling (par. 1.3.1). Inoltre supportano numerose funzioni di start-up per utenti che richiedono risorse dopo un periodo di inattività. Non sono stati considerati.

Come visto nel paragrafo 1.3.3, la generazione dei simboli SC-FDMA nel dominio della frequenza permette di utilizzare anche in Uplink la stessa struttura logica della tratta di Downlink, semplificando notevolmente tanto i dispositivi di rete quanto le mansioni da loro svolti. Tuttavia, poiché le due tratte hanno obiettivi e funzionalità diverse, è necessario progettare specifici canali fisici e strutture di segnalazione per ciascuna di esse.

2.2.1 La struttura logica

Il livello fisico di LTE presenta sei configurazioni per la banda di sistema B_W [11], con valori compresi tra 1.4 e 20 MHz (tabella 2.1). Nel capitolo 6, dove si presentano le simulazioni svolte, si considera l'intervallo ridotto $5 \leq B_W \leq 20$ MHz, vicino alle configurazioni effettivamente utilizzate in pratica.

Come in ogni sistema multiporante, la banda è divisa in sottoporanti distanziate tra loro di $\Delta f = 15$ kHz. Il numero totale di sottoporanti disponibili in trasmissione, indicato da N_{sc}^{UL} , è compreso tra i valori 72 (per $B_W = 1.4$ MHz) e 1200 (per $B_W = 20$ MHz); si osserva che il rapporto η_B tra la banda disponibile e la banda di sistema

$$\eta_B = \frac{N_{sc}^{UL} \cdot \Delta f}{B_W} \quad (2.1)$$

è sempre minore di uno, ovvero non tutta la banda di sistema è allocabile per la trasmissione di utente, a causa delle caratteristiche non ideali dei componenti analogici [12].

La dimensione della trasformata di Fourier N_{FFT} è sempre maggiore del corrispondente parametro N_{sc}^{UL} , ovvero il segnale trasmesso è sovracampionato, affinché:

- si possano trascurare gli effetti di bordo alla frequenza di Nyquist;
- la forma dello spettro del DAC non moduli la parte significativa dello spettro;
- si possano sopprimere agevolmente le repliche spettrali.

Generalmente, nei sistemi multiportante si sceglie la più piccola potenza di 2 maggiore di N_{sc}^{UL} , ovvero:

$$N_{FFT} = 2^m, \text{ con } m = \lceil \log_2(N_{sc}^{UL}) \rceil, \quad N_{sc}^{UL} \in \{72, 180, \dots, 1200\} \quad (2.2)$$

Si osserva inoltre che, per ragioni di compatibilità con le frequenze usate nel sistema UMTS, le frequenze di campionamento ottenute dai valori di N_{FFT} (2.2), corrispondono a multipli e frazioni del chip rate del sistema UMTS, pari a 3.84 MHz (tabella 2.1). Il vantaggio è di semplificare la realizzazione pratica degli apparati di utente (UE) multimodali, in modo da garantire agli operatori di rete una transizione graduale dei sistemi cellulari dalla terza (UMTS) alla quarta generazione (LTE).

	Banda di canale , B_W [MHz]					
	1.4	3	5	10	15	20
Numero di Resource Blocks , N_{RB}^{UL}	6	15	25	50	75	100
Numero totale di portanti occupate , N_{sc}^{UL}	72	180	300	600	900	1200
Dimensione DFT (Rx) e IDFT (Tx) , N_{FFT}	128	256	512	1024	1536	2048
Frequenza di campionamento , f_s [MHz]	1.92	3.84	7.68	15.36	23.04	30.72
Frequenza di campionamento ($M/N \times 3.84$ MHz)	1/2	1/1	2/1	4/1	6/1	8/1
Periodo di campionamento , T_C [ns]	520.8	260.4	130.2	65.1	48.8	32.55
Efficienza spettrale (%)	77.1	90	90	90	90	90
Campioni per slot	960	1920	3840	7680	11520	15360

Tabella 2.1: Parametri fondamentali della tratta di Uplink LTE al variare della banda B_W .

L'informazione trasmessa è organizzata in trame (*frames*) di durata $T_f = 10$ ms. Le strutture di trama disponibili sono:

- Tipo 1, applicabile al Frequency Division Duplexing (FDD) e realizzata nella tesi;
- Tipo 2, applicabile al Time Division Duplexing (TDD); non considerata poiché la definizione attualmente presente nello standard non è completa [11].

La struttura di Tipo 1, mostrata in figura 2.6, è compatibile con configurazioni Half Duplex e Full Duplex FDD e si può utilizzare in entrambe le tratte (UL e DL). Ogni trama è composta da 20 slot di lunghezza $T_{slot} = 0.5$ ms, numerati da 0 a 19. Inoltre si definisce sottotrama (*subframe*) l'unione di due slot consecutivi, di estensione $T_{sf} = 2T_{slot} = 1$ ms. La sottotrama di indice i è formata dagli slot $2i$ e $2i+1$. Ogni slot è composto,

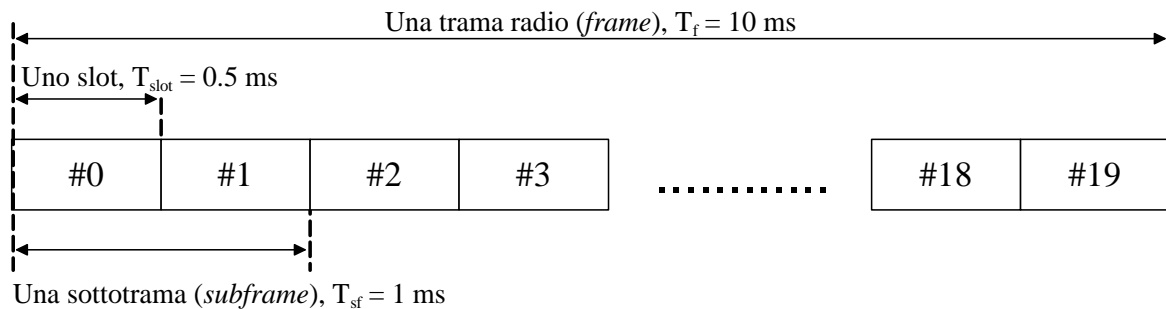


Figura 2.6: Struttura di trama di Tipo 1, associata al Frequency Division Duplex (FDD).

nel dominio del tempo, da N_{symb}^{UL} simboli SC-FDMA (figura 2.7). La parte iniziale di ogni simbolo contiene il prefisso ciclico, discusso nel par. 1.2.3.3. Nel sistema LTE il CP è presente in due formati che differiscono

per la loro durata, indicata con il simbolo T_{CP} . Essi sono chiamati rispettivamente normale (*normal*) e esteso (*extended*). Poiché T_{slot} è pari a 0.5 ms e la durata di ogni simbolo è fissata dalla relazione $T_S = 1/\Delta f = 66.6 \mu s$ (paragrafo 1.2.1), il numero di simboli SC-FDMA per slot N_{symp}^{UL} varia in funzione del formato scelto.

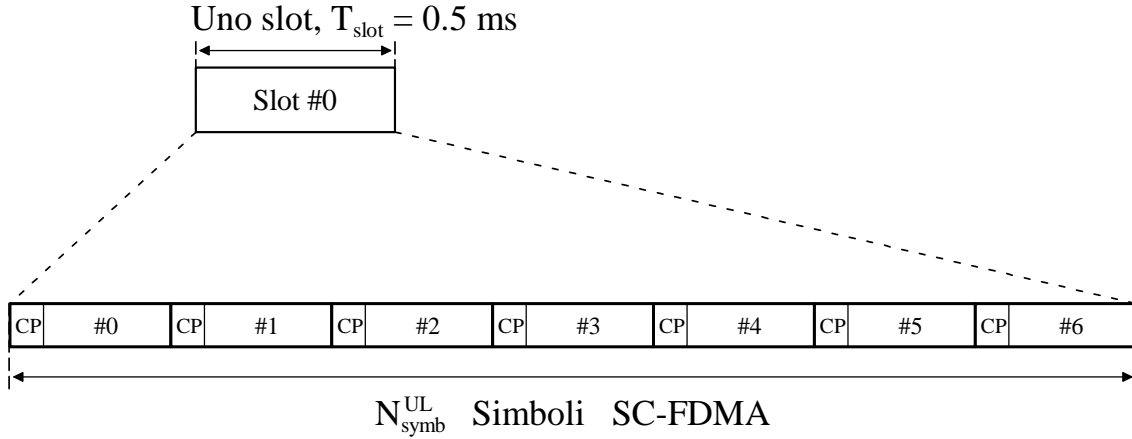


Figura 2.7: Configurazione di uno slot nel caso di CP normale.

Quando il prefisso ciclico è in configurazione normale, lo slot è composto da $N_{symp}^{UL} = 7$ simboli; il primo ha un CP più lungo, di durata $T_{CP,0} = 5.2 \mu s$, mentre i restanti 6 hanno un CP di $T_{CP,1} = 4.69 \mu s$. Questa distinzione è necessaria per rispettare la durata dello slot, infatti

$$\begin{aligned} T_{slot} &= N_{symp}^{UL} \cdot T_S + T_{CP,0} + (N_{symp}^{UL} - 1) \cdot T_{CP,1} \\ &= 7 \cdot 66.6 + 5.2 + 6 \cdot 4.69 \mu s = 0.5 \text{ ms} \end{aligned}$$

Il formato esteso ha una durata maggiore, pari a $T_{CP} = 16.6 \mu s = 1/4 \cdot T_S$, quindi il numero di simboli si riduce a $N_{symp}^{UL} = 6$. Esso è utile quando la dispersione temporale del canale (si veda il par. E.3.1) è molto elevata e/o per celle di grandi dimensioni.

La scelta del prefisso ciclico utilizzato dagli utenti è controllata dagli eNodeB in base a opportune misure delle condizioni di canale; in particolare, per evitare ISI e ICI, è necessario che il CP sia più esteso della CIR, ma non di molto, limitando così la perdita di SNR e la riduzione di efficienza spettrale conseguenti alla sua introduzione (par. 1.2.3.3).

La tabella 2.2 raccoglie la lunghezza del prefisso ciclico nelle due configurazioni, al variare della banda di sistema. I valori riportati sono espressi in campioni.

	Banda di canale , B_W [MHz]					
	1.4	3	5	10	15	20
CP normal ($l = 0$)	10	20	40	80	120	160
CP normal ($l = 1, \dots, 6$)	9	18	36	72	108	144
CP extended ($l = 0, \dots, 5$)	32	64	128	256	384	512

Tabella 2.2: Lunghezza del CP, espressa in campioni, in funzione della banda B_W .

2.2.2 La griglia di allocazione delle risorse nel dominio tempo-frequenza

Il segnale trasmesso in ogni slot è rappresentato da una griglia bidimensionale che descrive le risorse allocate nel dominio tempo-frequenza. Essa è costituita da $N_{RB}^{UL} N_{sc}^{RB}$ sottoportanti e da N_{symp}^{UL} simboli SC-FDMA.

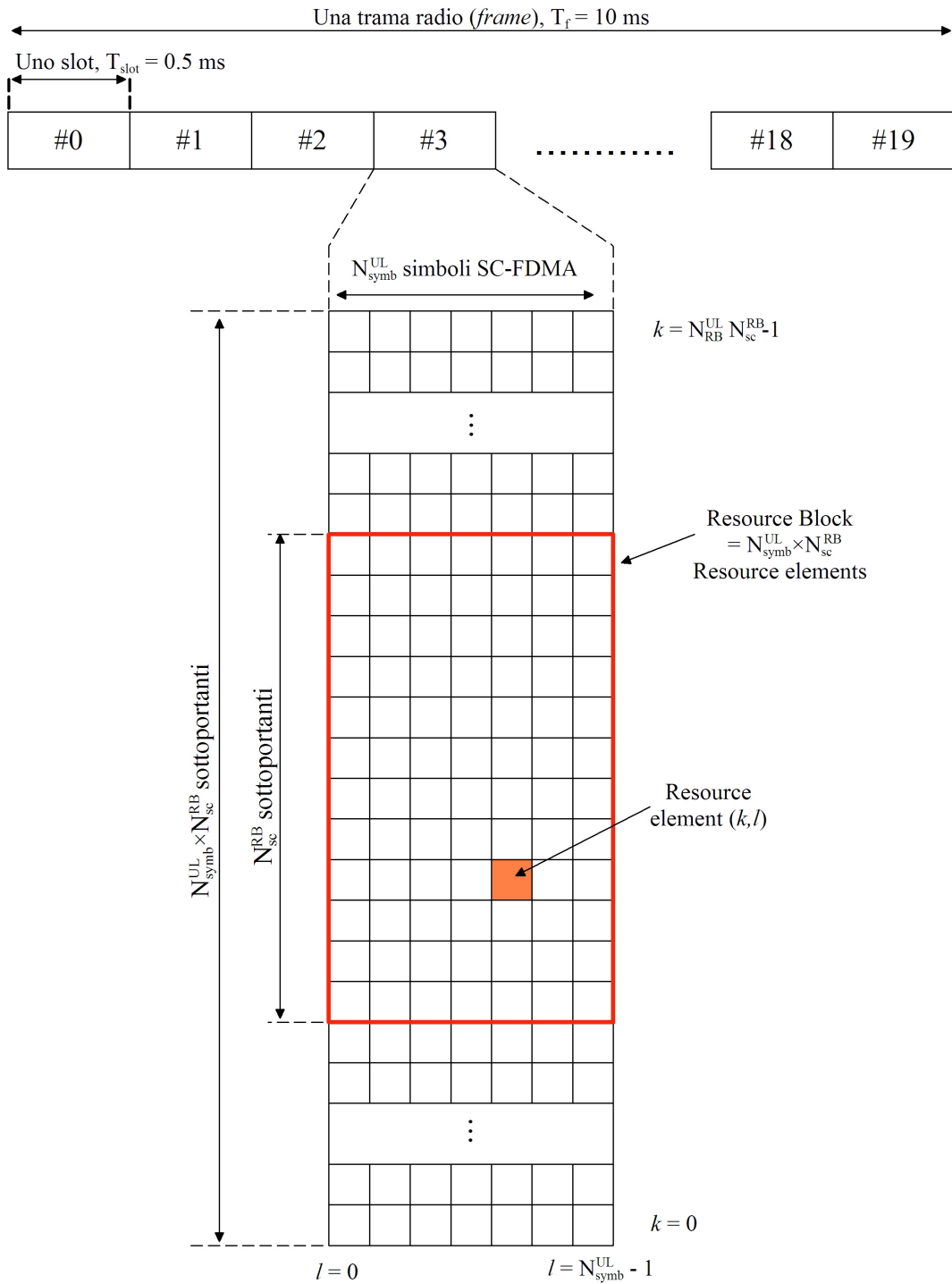


Figura 2.8: Griglia delle risorse fisiche. Sono evidenziati i Resource Elements e i Resource Blocks.

Ogni elemento della griglia di risorse è chiamato *Resource Element* (RE) e viene identificato in modo univoco, all'interno di uno slot, dalla coppia di indici (k, l) , con $k \in \{0, 1, \dots, (N_{RB}^{UL} N_{sc}^{RB} - 1)\}$ e $l \in \{0, 1, \dots, (N_{symp}^{UL} - 1)\}$ relativi rispettivamente al dominio della frequenza e del tempo. Ciascun RE può trasmettere un coefficiente di modulazione, la cui ampiezza complessa è indicata dal simbolo $a_{k,l}$. I coefficienti $a_{k,l}$ non associati alla trasmissione di canali o segnali fisici presentano un'ampiezza nulla (figura 2.8).

Tuttavia, il più piccolo insieme di risorse trasmissive allocabile dalla stazione base a un generico utente è chiamato *Physical Resource Block* (PRB) o semplicemente *Resource Block* (RB). Esso è composto da N_{symp}^{UL} simboli SC-FDMA nel tempo e da $N_{sc}^{RB} = 12$ sottoportanti consecutive in frequenza. Dunque un RB contiene esattamente $N_{symp}^{UL} \times N_{sc}^{RB}$ resource elements, che equivalgono a uno slot nel dominio del tempo e a 180 kHz in frequenza.

Inoltre esiste una relazione tra l'identificativo di PRB in frequenza n_{PRB} e l'indice k di un RE:

$$n_{PRB} = \left\lfloor \frac{k}{N_{sc}^{RB}} \right\rfloor \quad (2.3)$$

I valori del parametro N_{RB}^{UL} , pari al numero totale di RB disponibili, in funzione della banda di sistema sono elencati nella prima riga della tabella 2.1; il numero di RB *assegnati* a uno specifico utente è controllato dagli eNodeB, e dipende dal tipo di canale o segnale fisico trasmesso nonché dalle proprietà dell'ambiente di propagazione.

2.2.3 Il simbolo SC-FDMA nel tempo e in frequenza

Nel par. 2.2.1 abbiamo osservato che ogni slot è formato da N_{symp}^{UL} simboli SC-FDMA, rappresentati nel dominio del tempo come in figura 2.9.

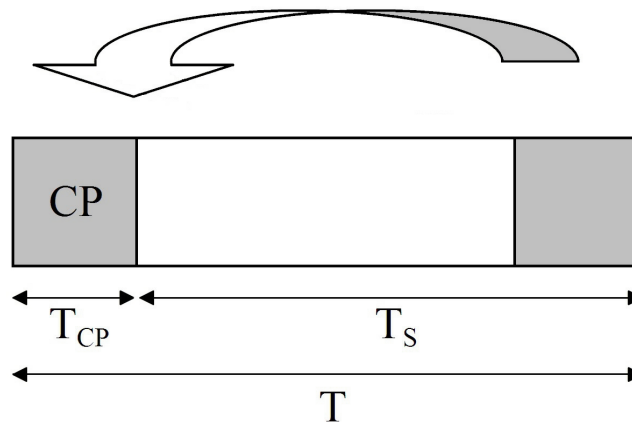


Figura 2.9: Rappresentazione nel dominio del tempo di un simbolo SC-FDMA.

Il simbolo, di durata complessiva $T = T_{CP} + T_S$, è composto da due parti:

- il tempo utile T_S , pari all'insieme dei campioni in uscita dalla IFFT (si veda il par. 1.2.1); essi sono posizionati ad istanti multipli del tempo di campionamento $T_C = 1/(\Delta f \cdot N_{FFT})$
- Il prefisso ciclico T_{CP} , costituito dalla replica esatta degli ultimi N_{CP} campioni utili del simbolo (i valori di N_{CP} sono riportati in tabella 2.2). Le proprietà del CP e i problemi legati alla sua progettazione sono introdotti nel par. 1.2.3.3.

La rappresentazione corrispondente nel dominio della frequenza si ottiene eliminando il CP e calcolando la FFT degli N_{FFT} campioni del simbolo. Essa presenta complessivamente N_{FFT} sottoportanti, suddivise in:

- *sottoportanti dati*; dedicate alla trasmissione di utente o di controllo, il cui numero è $N_{RB}^{UL} \cdot N_{sc}^{RB}$, dove N_{RB}^{UL} è dato dalla tabella 2.1 e $N_{sc}^{RB} = 12$. Tale valore rappresenta il limite superiore di risorse allocabili a un singolo utente: se N_{used} è il numero di sottoportanti assegnate all'UE, deve valere la condizione $N_{used} \leq N_{RB}^{UL} \cdot N_{sc}^{RB}$;
- *sottoportanti di guardia (o virtuali)*; hanno ampiezze nulle poiché non possono essere modulate. Come visto nel par. 1.2.2, il loro scopo è di ridurre le interferenze generate da utenti o fonti esterne che trasmettono in bande di frequenza vicine. Il numero di portanti virtuali N_V è pari alla differenza $N_V = N_{FFT} - (N_{RB}^{UL} \cdot N_{sc}^{RB})$. Esse sono suddivise in due gruppi di uguali dimensioni ($N_V/2$) e sono posizionate ai margini delle sottoportanti dati. Per questo si parla di portanti virtuali destre e sinistre. Si osserva che il rapporto tra sottoportanti virtuali e totali è molto significativo; infatti esso raggiunge il valore 0.41, ovvero più del 40% delle sottoportanti è virtuale, un valore più elevato non solo rispetto a sistemi precedenti, ma anche rispetto al concorrente WiMAX [13]. Questa scelta progettuale influisce negativamente sulle prestazioni di alcuni stimatori di canale, come verrà discusso nel par. 4.2.

Inoltre, nella tratta di Uplink LTE, il problema della sottoportante a frequenza zero (continua o DC), comune ai sistemi multiportante, è risolto applicando al simbolo una traslazione in frequenza pari a mezza spaziatura tra le sottoportanti (si veda il paragrafo 2.2.4). Nel dominio del tempo tale traslazione è applicata moltiplicando il segnale per una sinusoida complessa di espressione $v(t) = e^{j2\pi \frac{\Delta f}{2} t} = e^{j\pi \Delta f t}$ che, campionata a passo T_C , diventa

$$v(n) = e^{j\pi n/N} \tag{2.4}$$

La figura 2.10 riassume le caratteristiche principali del simbolo SC-FDMA nel dominio trasformato.

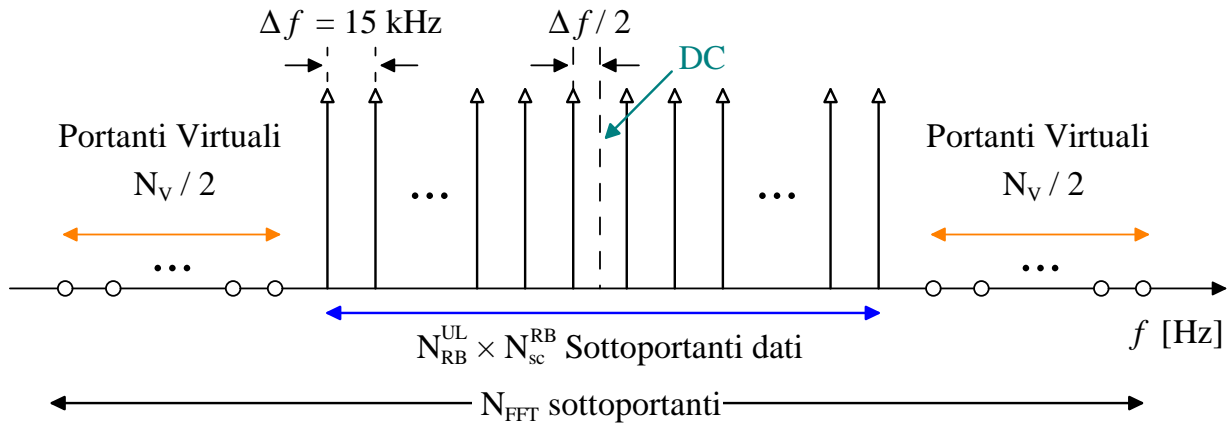


Figura 2.10: Rappresentazione del simbolo SC-FDMA nel dominio della frequenza.

2.2.4 Problemi con la continua

I trasmettitori e ricevitori a conversione diretta, utilizzati nei sistemi multiportante, demodulano il segnale senza passare per uno stadio a frequenza intermedia (IF). Così facendo, essi possono introdurre distorsioni nell'intorno della frequenza portante, ovvero, in banda base, della componente continua (DC), e causare un incremento del PAPR; tra le cause principali del fenomeno si ricorda il *leakage* dell'oscillatore locale.

Nel sistema LTE sono state proposte soluzioni distinte a seconda della direzione di trasmissione.

In Downlink si è deciso di non utilizzare la sottoportante a frequenza zero. Di conseguenza, dato che il numero di sottoportanti dati è fissato, si ha una sottoportante di guardia in meno.

Per la tratta di Uplink sono state inizialmente proposte tre diverse configurazioni della DC; l'intento finale è di raggiungere il miglior compromesso tra la riduzione degli effetti descritti e il potenziale impatto negativo introdotto dalla specifica soluzione sull'intero sistema.

- **Caso 1.** La componente continua viene posizionata al centro di un Resource Block, affinché le distorsioni coinvolgano un insieme di sottoportanti limitato; ad esempio, se la banda di sistema è $B_W = 10$ MHz, e quindi $N_{RB}^{UL} = 50$, la d.c. è inserita nel 26° RB. Tuttavia, così facendo, si riduce la qualità del RB designato a contenere la continua, conseguenza particolarmente dannosa quando la banda di trasmissione è molto stretta (ad esempio, è costituita da un unico RB).
- **Caso 2.** Si aggiunge una sottoportante supplementare a quelle stabilite dalla banda di trasmissione; ad esempio, per $B_W = 10$ MHz il numero totale di sottoportanti diventa 601. Questa scelta è vantaggiosa se la continua non è inclusa tra le sottoportanti assegnate all'utente. In caso contrario, il PAPR del segnale risultante aumenta notevolmente.
- **Caso 3.** Si applica al segnale una traslazione in frequenza di mezza spaziatura tra le sottoportanti, ovvero di $\pm \frac{\Delta f}{2} = \pm 7.5$ kHz.

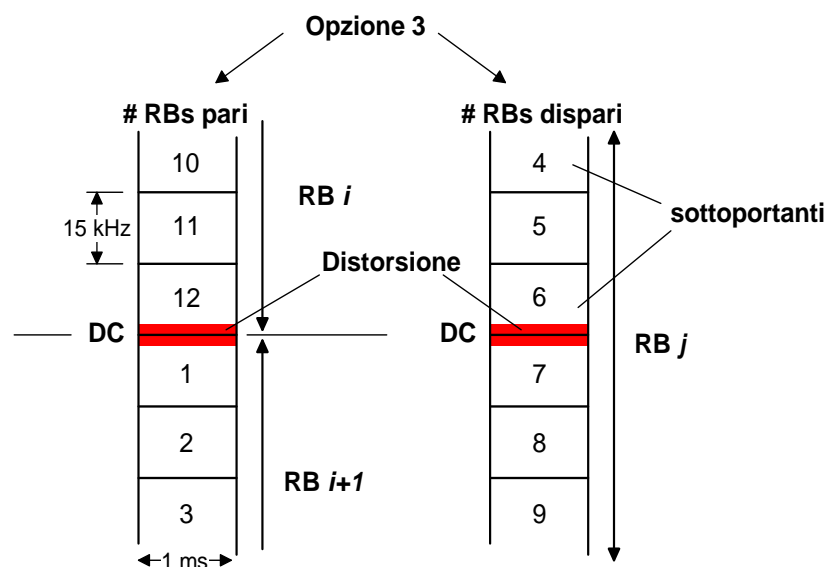


Figura 2.11: Traslazione di $\Delta f/2 = 7.5$ kHz per una banda di sistema con un numero di RB pari (a sinistra) e dispari (a destra).

La terza opzione è stata introdotta nel sistema LTE, come mostrato in figura 2.11, dove sono presenti le configurazioni associate rispettivamente a un numero di RB pari e dispari. La traslazione di mezza sottoportante riduce l'intensità delle distorsioni introdotte nel segnale. Infatti i disturbi non sono concentrati su un'unica sottoportante, come avviene nel caso 1, ma distribuiti, con minore impatto complessivo, su due sottobande. Inoltre la proprietà di PAPR ridotto propria della modulazione DFT-S-OFDM non viene mai intaccata, a differenza del caso 2.

Questa operazione è applicata alla fine della generazione del simbolo SC-FDMA, moltiplicando il segnale per un esponenziale di espressione 2.4. Inoltre, per simmetria, la rimozione della traslazione, applicando un esponenziale di segno opposto, è la prima elaborazione compiuta sul segnale ricevuto.

2.3 Il canale fisico per la trasmissione di utente (PUSCH)

Come illustra la figura 2.5, le informazioni provenienti dal livello MAC e contenute nel canale di trasporto UL-SCH (Uplink Shared CHannel) sono mappate nel canale fisico Physical Uplink Shared CHannel (PUSCH), e trasmesse sotto forma di simboli SC-FDMA, generati con la tecnica DFT-S-OFDM (par. 1.3.2). Il processo di generazione e trasmissione del canale PUSCH è illustrato in figura 2.12. La prima operazione applicata al flusso

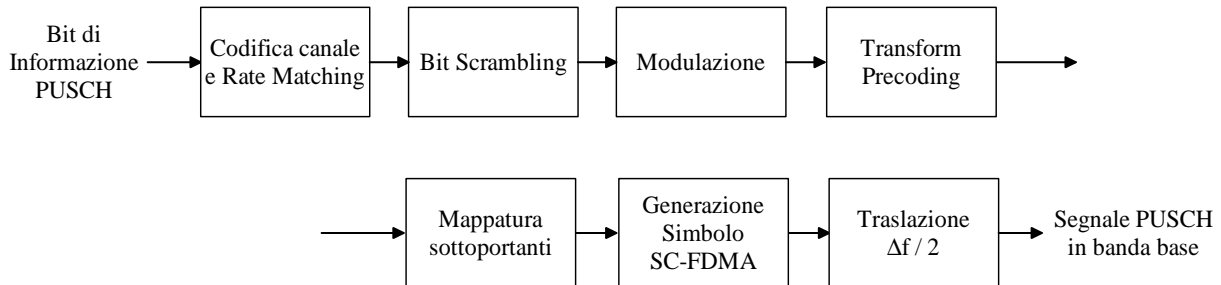


Figura 2.12: Schema a blocchi del generatore PUSCH.

di bit in ingresso è la codifica di canale con un turbo codice, ottenuto dalla concatenazione in parallelo di un codice convoluzionale (PCCC). Il tasso di codifica nativo, pari a $r = 1/3$, viene trasformato in un nuovo tasso r' , funzionale all'esecuzione dei passi successivi, grazie allo stadio di *Rate Matching* (si veda il par. 5.1.4.1 in [14]). Si è deciso di escludere dalla realizzazione pratica del trasmettitore Uplink gli stadi di codifica e decodifica, assumendo che le sequenze di bit siano già state codificate. Le operazioni successive, presenti nel trasmettitore e realizzate in dettaglio, sono descritte nel seguito [11].

2.3.1 Scrambling

Ciascun blocco di bit codificati $b(0), b(1), \dots, b(M_{bit} - 1)$, dove M_{bit} è il numero di bit trasmessi sul canale PUSCH all'interno di una sottotrama, viene sommato in modulo 2 a una sequenza PBRS (Pseudo-Random Bit Sequence) $c(i)$, specifica dell'UE. Il blocco di bit in uscita $\tilde{b}(0), \tilde{b}(1), \dots, \tilde{b}(M_{bit} - 1)$ è calcolato in base al seguente

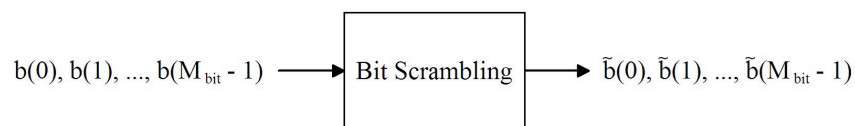


Figura 2.13: Scrambling del flusso di bit in ingresso.

algoritmo:

```

% Indice iniziale.
i = 0
% Per l'intera durata del blocco.
while(i < M_bit)
    % Bit segnapposto di ACK/NACK o di Rank Indication.
    if(b(i) == x)
        b-tilde(i) = 1
  
```

```

% Bit segnato ripetuti di ACK/NACK o di Rank Indication.
elseif(b(i) == y)
     $\tilde{b}(i) = \tilde{b}(i - 1)$ 
% In tutti gli altri casi.
else
     $\tilde{b}(i) = (b(i) + c(i)) \bmod 2$ 
end
i = i + 1
end
end

```

I termini x e y sono identificativi (*tag*) definiti nella sezione 5.2.2.6 di [14]; si osserva che, mentre i bit contrassegnati con il tag x assumono il valore '1', i bit y sono rimossi dal blocco.

Le sequenze di scrambling $c(i)$ sono definite da un codice di Gold di ordine 31; esso genera un insieme U_G di 2^{31} sequenze tali che ciascuna di esse non può mai essere ottenuta traslando circolarmente qualunque altra sequenza di U_G [2]. La loro costruzione è immediata e di complessità ridotta, poiché basta sommare tra loro (ancora in modulo 2) due sequenze generatrici, dette a *massima lunghezza* (o *M-sequences*), calcolate con due registri LFSR (Linear Feedback Shift Register). I polinomi caratteristici sono rispettivamente:

$$p_1(x) = x^{31} + x^{28} + 1 \quad (2.5)$$

$$p_2(x) = x^{31} + x^{30} + x^{29} + x^{28} + 1 \quad (2.6)$$

La sequenza pseudocasuale $c(n)$, utilizzata in LTE, è ottenuta dalle espressioni

$$c(n) = (x_1(n + N_C) + x_2(n + N_C)) \bmod 2 \quad (2.7)$$

$$x_1(n + 31) = (x_1(n + 3) + x_1(n)) \bmod 2 \quad (2.8)$$

$$x_2(n + 31) = (x_2(n + 3) + x_2(n + 2) + x_2(n + 1) + x_2(n)) \bmod 2 \quad (2.9)$$

dove $N_C = 1600$ e la sequenza $x_1(n)$ è inizializzata con i valori $x_1(0) = 1$, $x_1(n) = 0$, $n = 1, 2, \dots, 30$. I valori iniziali della sequenza $x_2(n)$, indicati da $c_{init} = \sum_{i=0}^{30} x_2(i) \cdot 2^i$, dipendono dalla particolare applicazione. Una possibile implementazione della sequenza $c(n)$ con registri a scorrimento è mostrata in figura 2.14. Più avanti,

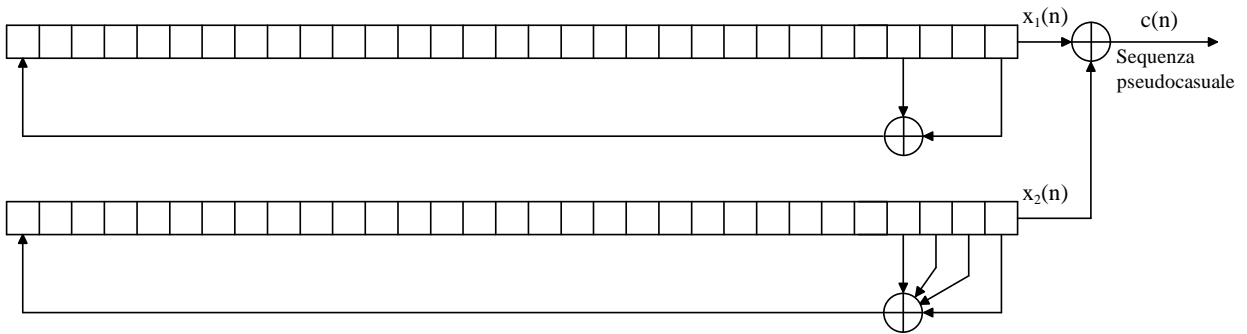


Figura 2.14: Generazione della sequenza pseudocasuale $c(n)$ con una coppia di registri a scorrimento.

la sequenza $c(n)$ verrà incontrata in altri contesti, ad esempio per combattere l'interferenza tra i Reference Signals di celle diverse (par. 2.4.4). Nel caso specifico dello scrambling il valore iniziale della seconda sequenza è $c_{init} = n_{RNTI} \cdot 2^{14} + \lfloor n_s/2 \rfloor \cdot 2^9 + N_{ID}^{cell}$, dove n_{RNTI} (Radio Network Temporary Identifier) è un coefficiente specifico della cella, n_s , compreso tra 0 e 19, è l'indice di slot all'interno della trama e N_{ID}^{cell} è l'identificatore

della cella a livello fisico (si veda il par. 6.11 di [11]).

Lo scopo dell'operazione di scrambling è la reiezione dell'interferenza inter e intra-cella. In ricezione, la ricostruzione del blocco di bit originale $b(i)$ si effettua sommando al blocco ricevuto la stessa sequenza di scrambling $c(i)$, utilizzata in trasmissione; il flusso di bit di una trasmissione interferente non può essere recuperato correttamente poiché ogni utente ha una sequenza di scrambling distinta. Dunque i contributi di interferenza si manifestano in uscita sotto forma di un rumore casuale e incorrelato, sovrapposto alla sequenza corretta.

2.3.2 Modulazione

Il blocco di bit $\tilde{b}(0), \tilde{b}(1), \dots, \tilde{b}(M_{bit} - 1)$, ottenuto dallo scrambler, viene trasformato in una sequenza di simboli di modulazione complessi $d(0), d(1), \dots, d(M_{symb} - 1)$. Le modulazioni supportate dal PUSCH (tabella 2.3) sono

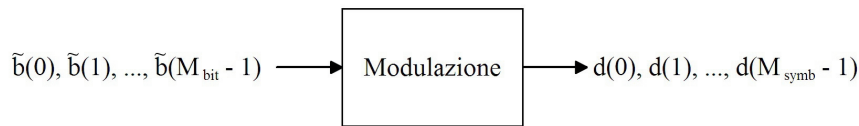


Figura 2.15: Modulazione dei bit in uscita dallo scrambler.

la QPSK, la 16QAM e la 64QAM, quest'ultima disponibile solo per gli UE di fascia più alta. Il paragrafo 7.1 di [11] riporta i valori delle ampiezze dei simboli complessi per ogni costellazione.

Canale fisico	Modulazione
PUSCH	QPSK, 16QAM, 64QAM

Tabella 2.3: Modulazioni disponibili per la trasmissione PUSCH.

2.3.3 Transform precoding

Il blocco di simboli modulati $d(0), d(1), \dots, d(M_{symb} - 1)$ è suddiviso in M_{symb}/M_{sc}^{PUSCH} sottoinsiemi, ognuno dei quali corrisponde ad un simbolo SC-FDMA. In seguito si applica a ciascun sottoinsieme una trasformata DFT,

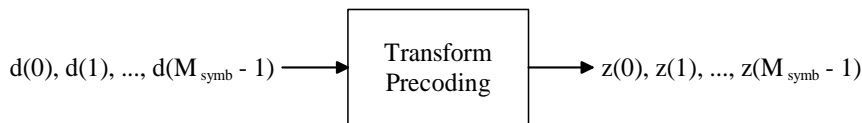


Figura 2.16: Precodifica con DFT applicata ai simboli modulati.

ovvero una precodifica, di dimensione M_{sc}^{PUSCH} . Si ottiene in uscita la sequenza $z(0), z(1), \dots, z(M_{symb} - 1)$, di espressione:

$$z(l \cdot M_{sc}^{PUSCH} + k) = \frac{1}{\sqrt{M_{sc}^{PUSCH}}} \sum_{m=0}^{M_{sc}^{PUSCH} - 1} d(l \cdot M_{sc}^{PUSCH} + m) e^{-j \frac{2\pi mk}{M_{sc}^{PUSCH}}} \quad (2.10)$$

dove $k = 0, \dots, M_{sc}^{PUSCH} - 1$ è l'indice delle sottoportanti, $l = 0, 1, \dots, (M_{symb}/M_{sc}^{PUSCH} - 1)$ è l'indice del simbolo SC-FDMA e $M_{sc}^{PUSCH} = N_{sc}^{RB} \cdot M_{RB}^{PUSCH}$ è il numero di sottoportanti assegnate alla trasmissione PUSCH. Il parametro M_{RB}^{PUSCH} è la banda assegnata dallo scheduler alla trasmissione PUSCH di un particolare UE, espressa in RB. Inoltre, per calcolare la DFT tramite gli algoritmi di trasformazione veloci (FFT), si impone la condizione $M_{RB}^{PUSCH} = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}$, dove gli esponenti α_2, α_3 e α_5 sono interi non negativi. Questa scelta è motivata dal fatto che le prestazioni degli algoritmi veloci migliorano quando la dimensione della trasformata è

un multiplo di numeri primi piccoli.

Il valore di M_{RB}^{PUSCH} è contenuto nel canale di controllo di Downlink (PDCCH), sotto forma di un campo chiamato *Resource Indication Value (RIV)*. Quest'ultimo viene calcolato partendo dalla coppia di parametri RB_{start} , indice del primo resource block allocato, e L_{CRBs} , pari al numero di RB allocati all'utente e disposti in posizione contigua. Infatti, come spiegato in seguito, l'unico tipo di allocazione delle risorse in frequenza supportato dal PUSCH è di tipo localizzato (si veda il par. 2.3.4). La formula per calcolare il campo RIV partendo da RB_{start} e L_{CRBs} si trova nel par. 8.1 di [15]. Si conclude che i parametri M_{RB}^{PUSCH} e L_{CRBs} sono equivalenti.

Come discusso nel par. 1.3.2, l'operazione di precodifica con la DFT è fondamentale, poiché dona al segnale SC-FDMA la sua proprietà *single-carrier*, responsabile della sensibile riduzione del PAPR rispetto a una classica trasmissione multiportante.

2.3.4 Mappatura sulle risorse fisiche

Dopo la precodifica, i coefficienti $z(0), z(1), \dots, z(M_{symp} - 1)$ sono mappati in sequenza sulle risorse fisiche disponibili. Ricordando la griglia delle risorse in figura 2.8, l'associazione dei dati ai resource elements di posizione (k, l) , non utilizzati per trasmissioni di segnali DM RS o SRS, avviene in ordine crescente, partendo dal primo slot della sottotrama e incrementando dapprima l'indice k (frequenza) e poi l'indice l (tempo).

A parità di banda, la posizione delle risorse fisiche su cui mappare i coefficienti $z(i)$ dipende dallo schema di *frequency hopping (FH)* adottato.

Nel sistema LTE, l'applicazione del frequency hopping ad una trasmissione localizzata, come il PUSCH, permette di introdurre la *diversità in frequenza*. Essa consiste nel trasmettere il segnale in posizioni diverse dello spettro affinché la probabilità di sperimentare condizioni di canale difficili venga ridotta in media. Infatti, se una certa porzione di banda è molto disturbata e/o attenuata in un dato istante, è molto probabile che lo sia anche in istanti successivi. D'altra parte, l'utilizzo di risorse sufficientemente distanziate limita la necessità di ritrasmettere le informazioni, abbassando il BER medio e la latenza della rete.

Il sistema supporta due modalità di FH:

- *inter-subframe hopping*: la traslazione della banda allocata (*hopping*) avviene solo tra sottotrame successive;
- *inter- e intra-subframe hopping*: la traslazione si verifica sia all'interno di una sottotrama sia tra sottotrame successive. In particolare, l'hopping intra-subframe viene effettuato a cavallo dei due slot di una stessa sottotrama; in questo caso la diversità in frequenza è introdotta all'interno di una parola di codice, chiamata *transport block*.

Le due tecniche sono illustrate in figura 2.17. La particolare configurazione da utilizzare è comunicata agli utenti con segnalazione di tipo Cell-specific (si veda la Sezione 8.4 di [15]).

Inoltre, fissata una modalità di FH, la traslazione in frequenza applicata agli L_{CRBs} resource blocks contigui del PUSCH, può essere calcolata in due modi, chiamati di *Tipo 1* e di *Tipo 2*.

Il calcolo di Tipo 1 è basato sulla definizione esplicita di un offset da parte dei livelli superiori (Sez. 8.4.1 di [15]). Questo valore, inviato agli utenti dal canale PDCCH, è espresso in multipli di RB e viene indicato dal simbolo N_{RB}^{HO} (dove *HO* significa appunto Hopping Offset).

Il calcolo di Tipo 2 fornisce una sequenza di offset pseudocasuale dipendente dalla sequenza di Gold $c(n)$, definita nel par. 2.3.1.

In entrambi i casi, quando $N_{RB}^{UL} < 50$, l'offset di hopping (modulo la banda di sistema) è circa la metà del numero di RBs disponibili per la trasmissione PUSCH (cioè $\lfloor M_{RB}^{PUSCH}/2 \rfloor$); se invece $N_{RB}^{UL} \geq 50$ i possibili valori di offset sono $\lfloor M_{RB}^{PUSCH}/2 \rfloor$ e $\pm \lfloor M_{RB}^{PUSCH}/4 \rfloor$ (Sez. 8.4 in [15]).

Quando il FH è disabilitato, l'insieme degli indici dei RB utilizzabili in trasmissione, immutato per ogni simbolo della trama, è dato da $n_{PRB} = n_{VRB}$, dove n_{VRB} si ottiene dalla coppia di parametri RB_{start} e

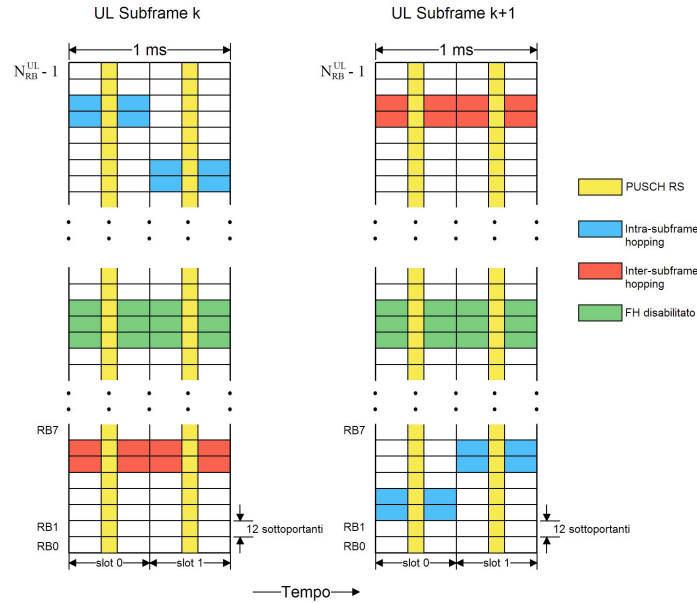


Figura 2.17: Mappatura sulle risorse fisiche: le tecniche di Frequency Hopping.

L_{CRBs} , introdotti nel par. 2.3.3. Questa situazione permette l'utilizzo di una tecnica di scheduling alternativa, chiamata Channel Dependent Scheduling (CDS) e già incontrata nel par. 1.3.1. Tuttavia, per abilitare il CDS è necessario raccogliere frequentemente informazioni sulle proprietà del canale, ottenute ad esempio con i segnali di riferimento SRS. La densità spettrale di questi segnali influenza la precisione delle misure, mentre la banda di *sounding* determina la loro completezza. Una banda di sounding estesa permette di valutare la qualità del collegamento su un numero di RB maggiore; d'altra parte, al crescere della banda, la densità spettrale dei segnali SRS si riduce, poiché la potenza totale dell'UE è limitata, incidendo negativamente sull'accuratezza delle misure.

È stato dimostrato sperimentalmente [2] che, per bande non inferiori a 5 MHz, la tecnica CDS, configurata sull'intera banda, presenta prestazioni nettamente superiori alla stessa tecnica con una banda di sounding più stretta.

2.3.5 Generazione del simbolo SC-FDMA

Dopo che la sequenza di numeri complessi $z(0), z(1), \dots, z(M_{symb} - 1)$ è stata mappata nei resource elements dello slot n_s , si ottiene l'insieme delle ampiezze $a_{\bar{k}, l}$, associate rispettivamente alla sottoportante \bar{k} -esima e al simbolo SC-FDMA l -esimo dello slot.

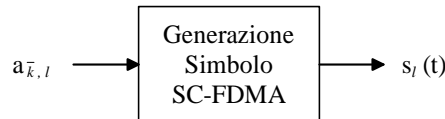


Figura 2.18: Generazione del simbolo SC-FDMA a partire dai resource elements.

L'elaborazione di questi coefficienti permette di generare i simboli SC-FDMA. Per prima cosa si applica alla sequenza degli $a_{\bar{k}, l}$ una trasformata IDFT; dopodiché si aggiunge il prefisso ciclico.

Il simbolo SC-FDMA di indice l è ottenuto dall'espressione

$$s_l(t) = \sum_{k=-\lfloor N_{RB}^{UL} N_{sc}^{RB} / 2 \rfloor}^{\lfloor N_{RB}^{UL} N_{sc}^{RB} / 2 \rfloor - 1} a_{\bar{k}, l} \cdot e^{j2\pi k \Delta f (t - N_{CP,l} T_C)} \quad (2.11)$$

definita sull'intervallo di tempo $0 \leq t < (N_{CP,l} + N) \times T_C$. L'indice delle sottoportanti \bar{k} , associato alla griglia delle risorse, è legato all'indice effettivo dei sottocanali k dalla relazione $\bar{k} = k + \lfloor N_{RB}^{UL} N_{sc}^{RB} / 2 \rfloor$. Inoltre si ricordano i valori del periodo di campionamento, $T_C = 1/(N \cdot \Delta f)$, della spaziatura tra sottoportanti, $\Delta f = 15$ kHz, e del numero di sottoportanti per RB, $N_{sc}^{RB} = 12$. La traslazione temporale $T_{CP} = N_{CP,l} T_C$ suggerisce l'aggiunta del CP, la cui lunghezza può variare in funzione dell'indice l , come mostrato in tabella 2.2.

2.3.6 Traslazione di mezza portante

Prima di essere trasmesso, lo spettro del segnale SC-FDMA $s_l(t)$ deve essere traslato di mezza spaziatura tra sottoportanti ($\Delta f/2 = 7500$ Hz), per evitare i problemi legati alla trasmissione della continua, discussi nel par. 2.2.4. Questa traslazione è compiuta moltiplicando $s_l(t)$ per un termine esponenziale, di espressione 2.4, oppure, in modo equivalente, modulando separatamente la parte reale e immaginaria del simbolo trasmesso con opportune sinusoidi, come mostrato in figura 2.19.

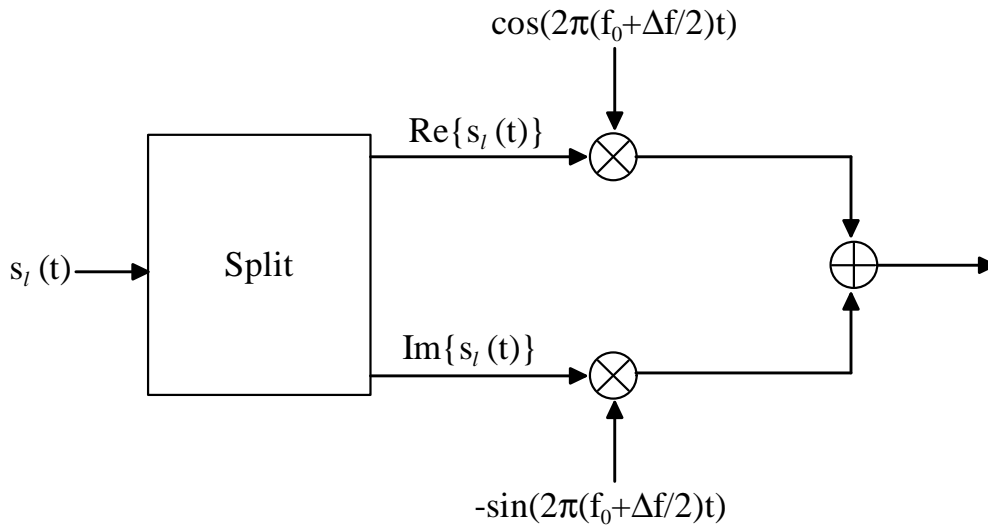


Figura 2.19: Traslazione di mezza sottoportante durante la modulazione di Uplink. La variabile f_0 è la frequenza della portante.

2.4 I segnali di riferimento in Uplink

Nella tratta di Uplink, le trasmissioni del canale dati (PUSCH) e del canale di controllo (PUCCH) sono multiplate nel tempo insieme a strutture di portanti pilota, disposte in posizioni fisse della trama e chiamate Reference Signals (RS).

Le principali funzioni di questi segnali sono:

- la sincronizzazione (par. 3);
- la stima del canale radio e la successiva equalizzazione (par. 4);
- la stima della qualità del canale radio per supportare il CDS;
- il controllo della potenza trasmessa.

La tratta di Uplink presenta due tipologie di reference signals [11]:

- *DeModulation Reference Signals (DM RS)*, associati alla trasmissione dati nel canale PUSCH e/o alla trasmissione della segnalazione di controllo nel canale PUCCH. Essi sono utilizzati principalmente per la stima di canale e la sincronizzazione.
- *Sounding Reference Signals (SRS)*, indipendenti dalla trasmissione dei canali fisici e utilizzati per misurare la qualità del canale radio. Grazie alle informazioni raccolte dai SRS, è possibile utilizzare la tecnica del Channel Dependent Scheduling (par. 1.3.1).

I segnali DM RS di ogni UE occupano la stessa banda, ovvero gli stessi Resource Blocks, della trasmissione PUSCH/PUCCH corrispondente. Dunque, assegnando ai canali fisici dei singoli utenti, presenti nella cella, insiemi di RB tra loro ortogonali (ovvero non sovrapposti) si verifica nel contempo la condizione di ortogonalità tra i segnali DM RS. I segnali SRS occupano generalmente una banda diversa da quella dei canali fisici, poiché è possibile sondare la qualità dell'intero canale o solo di una sua porzione (par. 2.3.4). Inoltre, poiché diversi UE possono trasmettere i segnali di sounding nella stessa sottotrama e non si garantisce l'ortogonalità tra i RB occupati, è disponibile, oltre alla multiplazione in frequenza, una multiplazione a divisione di codice (CDM).

I RS sono costituiti da particolari sequenze numeriche con importanti proprietà:

- ampiezza costante nel dominio della frequenza per non introdurre polarizzazioni nella stima di canale;
- PAPR nel dominio del tempo non superiore a quello dei canali fisici. Un PAPR molto ridotto permette di aumentare la potenza dei RS ai confini della cella, senza incidere sul consumo energetico dei trasmettitori mobili;
- autocorrelazione elevata, per ottenere stime di canale accurate;
- cross-correlazione molto ridotta tra sequenze RS distinte, per ridurre l'interferenza causata da RS trasmessi in celle diverse, ma sulle stesse risorse fisiche.

Le sezioni seguenti presentano la generazione dei DeModulation Reference Signals, inclusi nel trasmettitore LTE implementato (par. 5.2) e ampiamente utilizzati nel corso della tesi. I segnali SRS non sono invece considerati; essi sono definiti nella Sezione 5.5.3 di [11], e descritti dettagliatamente in [2].

2.4.1 Generazione delle sequenze associate ai Reference Signals

I segnali RS in Uplink sono basati principalmente sulle sequenze di Zadoff-Chu (ZC) [11], descritte nell'appendice C. Esse sono caratterizzate da valori ridotti di PAPR, autocorrelazione circolare ideale, e cross-correlazione ottima; dunque verificano pienamente i requisiti menzionati in precedenza.

Tuttavia in fase di generazione, il PAPR delle sequenze ZC è parzialmente degradato, ovvero incrementato,

dalla presenza delle portanti di guardia, aventi ampiezza nulla e posizionate ai lati dello spettro. Infatti (par. 2.2.1), la dimensione della IFFT è sempre maggiore del numero di sottoportanti occupate dal RS, provocando un sovracampionamento della sequenza iniziale nel dominio del tempo.

La proprietà di cross-correlazione ottima, comunque valida, consente di distribuire uniformemente l'impatto di un segnale interferente sull'intera finestra di correlazione, semplificando l'individuazione delle prese significative del canale radio (par. 2.5).

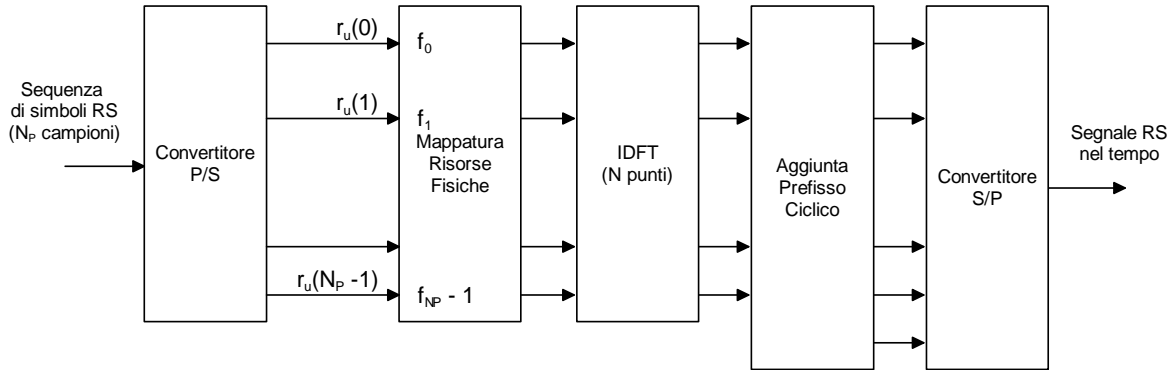


Figura 2.20: Generazione dei simboli SC-FDMA per i Reference Signals. Si noti che la precodifica con la DFT non viene applicata.

Le sequenze RS hanno una lunghezza N_p pari al numero di portanti allocate; ad esempio, per i DM RS relativi al canale PUSCH, $N_p = M_{sc}^{PUSCH}$. Più in generale essa si ricava dall'espressione

$$N_p = M_{sc}^{RS} = m \cdot N_{sc}^{RB}, \quad 1 \leq m \leq N_{RB}^{UL} \quad (2.12)$$

dove $N_{sc}^{RB} = 12$ è il numero di sottoportanti per RB e N_{RB}^{UL} è la banda di sistema in Uplink.

Il processo di generazione dei simboli RS nel tempo è illustrato in figura 2.20. A differenza della modulazione SC-FDMA, la sequenza di lunghezza N_p è applicata direttamente all'ingresso della IFFT; dunque, la precodifica tramite DFT, operazione decisiva per ridurre il PAPR dei simboli in ingresso, non viene eseguita. Infatti, ricordando che le sequenze di ZC presentano di per sé un PAPR inferiore a quello del segnale trasmesso, il calcolo della precodifica diviene superfluo.

L'equazione di una generica sequenza di ZC, formata da N_{ZC} campioni, è

$$x_q(n) = \exp \left[-j2\pi q \frac{n(n+1)/2 + rn}{N_{ZC}} \right] \quad (2.13)$$

dove r è sempre pari a 0 nel sistema LTE; N_{ZC} è il più grande numero primo che verifica la condizione $N_{ZC} \leq N_p$; $q = 1, 2, \dots, (N_{ZC} - 1)$ è l'indice della radice di 1 (*root index*) associata alla sequenza (si veda il par. C.2.1); $n = 0, 1, \dots, (N_{ZC} - 1)$.

I segnali RS sono ottenuti dalla ripetizione ciclica delle sequenze $x_q(n)$, che permette di accrescerne la lunghezza da N_{ZC} a N_p campioni secondo l'equazione:

$$\bar{r}_q(n) = x_q(n \bmod N_{ZC}), \quad n = 0, 1, \dots, (N_p - 1) \quad (2.14)$$

L'estensione di una sequenza ZC nel dominio della frequenza non influisce sulle proprietà di auto e cross-correlazione e viene preferita al troncamento perché permette di ottenere un PAPR migliore.

Tuttavia le sequenze ZC permettono di generare un numero sufficiente di Reference Signals con le proprietà richieste, soltanto se il numero dei RB allocati m è maggiore o uguale a 3. Come spiegato in seguito, devono essere disponibili almeno 30 sequenze RS per ogni allocazione di banda. Quando la banda allocata è pari a 1 o

2 RB, il PAPR delle sequenze ZC cresce eccessivamente, superando quello di sequenze QPSK con proprietà di correlazione analoghe.

Quindi, in questi due casi, sono state definite 30 sequenze di riferimento speciali (Sez. 5.5.1.2 in [11]), basate sulla modulazione QPSK e con caratteristiche simili a quelle delle sequenze ZC. La loro espressione generale è data da

$$\bar{r}(n) = e^{j\phi(n)\pi/4}, \quad n = 0, 1, \dots, (M_{sc}^{RS} - 1) \quad (2.15)$$

dove $M_{sc}^{RS} = 12$ o 24 . I valori della funzione $\phi(n)$ sono riportati, per ciascuno dei valori di M_{sc}^{RS} , nelle tabelle 2.4 e 2.5.

u	$\phi(0), \dots, \phi(11)$											
0	-1	1	3	-3	3	3	1	1	3	1	-3	3
1	1	1	3	3	3	-1	1	-3	-3	1	-3	3
2	1	1	-3	-3	-3	-1	-3	-3	1	-3	1	-1
3	-1	1	1	1	1	-1	-3	-3	1	-3	3	-1
4	-1	3	1	-1	1	-1	-3	-1	1	-1	1	3
5	1	-3	3	-1	-1	1	1	-1	-1	3	-3	1
6	-1	3	-3	-3	-3	3	1	-1	3	3	-3	1
7	-3	-1	-1	-1	1	-3	3	-1	1	-3	3	1
8	1	-3	3	1	-1	-1	-1	1	1	3	-1	1
9	1	-3	-1	3	3	-1	-3	1	1	1	1	1
10	-1	3	-1	1	1	-3	-3	-1	-3	-3	3	-1
11	3	1	-1	-1	3	3	-3	1	3	1	3	3
12	1	-3	1	1	-3	1	1	1	-3	-3	-3	1
13	3	3	-3	3	-3	1	1	3	-1	-3	3	3
14	-3	1	-1	-3	-1	3	1	3	3	3	-1	1
15	3	-1	1	-3	-1	-1	1	1	3	1	-1	-3
16	1	3	1	-1	1	3	3	3	-1	-1	3	-1
17	-3	1	1	3	-3	3	-3	-3	3	1	3	-1
18	-3	3	1	1	-3	1	-3	-3	-1	-1	1	-3
19	-1	3	1	3	1	-1	-1	3	-3	-1	-3	-1
20	-1	-3	1	1	1	1	3	1	-1	1	-3	-1
21	-1	3	-1	1	-3	-3	-3	-3	-3	1	-1	-3
22	1	1	-3	-3	-3	-3	-1	3	-3	1	-3	3
23	1	1	-1	-3	-1	-3	1	-1	1	3	-1	1
24	1	1	3	1	3	3	-1	1	-1	-3	-3	1
25	1	-3	3	3	1	3	3	1	-3	-1	-1	3
26	1	3	-3	-3	3	-3	1	-1	-1	3	-1	-3
27	-3	-1	-3	-1	-3	3	1	-1	1	3	-3	-3
28	-1	3	-3	3	-1	3	3	-3	3	3	-1	-1
29	3	-3	-3	-1	-1	-3	-1	3	-3	3	1	-1

Tabella 2.4: Definizione della funzione $\phi(n)$ per $M_{sc}^{RS} = 12$.

u	$\phi(0), \dots, \phi(23)$																							
0	-1	3	1	-3	3	-1	1	3	-3	3	1	3	-3	3	1	1	-1	1	3	-3	3	-3	-1	-3
1	-3	3	-3	-3	-3	1	-3	-3	3	-1	1	1	3	1	-1	3	-3	-3	1	3	1	1	1	-3
2	3	-1	3	3	1	1	-3	3	3	3	3	1	-1	3	-1	1	1	-1	-3	-1	-1	1	3	3
3	-1	-3	1	1	3	-3	1	1	-3	-1	-1	1	3	1	3	1	-1	3	1	1	-3	-1	-3	-1
4	-1	-1	-1	-3	-3	-1	1	1	3	3	-1	3	-1	1	-1	-3	1	-1	-3	-3	1	-3	-1	-1
5	-3	1	1	3	-1	1	3	1	-3	1	-3	1	1	-1	-1	3	-1	-3	3	-3	-3	-3	1	1
6	1	1	-1	-1	3	-3	-3	3	-3	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-3	-1	1	-1	3	-1	-3
7	-3	3	3	-1	-1	-3	-1	3	1	3	1	3	1	1	-1	3	1	-1	1	3	-3	-1	-1	1
8	-3	1	3	-3	1	-1	-3	3	-3	3	-1	-1	-1	-1	1	-3	-3	-3	1	-3	-3	-3	1	-3
9	1	1	-3	3	3	-1	-3	-1	3	-3	3	3	3	-1	1	1	-3	1	-1	1	1	-3	1	1
10	-1	1	-3	-3	3	-1	3	-1	-1	-3	-3	-3	-1	-3	-3	1	-1	1	3	3	-1	1	-1	3
11	1	3	3	-3	-3	1	3	1	-1	-3	-3	-3	3	3	-3	3	3	-1	-3	3	-1	1	-3	1
12	1	3	3	1	1	1	-1	-1	1	-3	3	-1	1	1	-3	3	3	-1	-3	3	-3	-1	-3	-1
13	3	-1	-1	-1	-1	-3	-1	3	3	1	-1	1	3	3	3	-1	1	1	-3	1	3	-1	-3	3
14	-3	-3	3	1	3	1	-3	3	1	3	1	1	3	3	-1	-1	-3	1	-3	-1	3	1	1	3
15	-1	-1	1	-3	1	3	-3	1	-1	-3	-1	3	1	3	1	-1	-3	-3	-1	-1	-3	-3	-3	-1
16	-1	-3	3	-1	-1	-1	-1	1	1	-3	3	1	3	3	1	-1	1	-3	1	-3	1	1	-3	-1
17	1	3	-1	3	3	-1	-3	1	-1	-3	3	3	3	-1	1	1	3	-1	-3	-1	3	-1	-1	-1
18	1	1	1	1	1	-1	3	-1	-3	1	1	3	-3	1	-3	-1	1	1	-3	-3	3	1	1	-3
19	1	3	3	1	-1	-3	3	-1	3	3	3	-3	1	-1	1	-1	-3	-1	1	3	-1	3	-3	-3
20	-1	-3	3	-3	-3	-3	-1	-1	-3	-1	-3	3	1	3	-3	-1	3	-1	1	-1	3	-3	1	-1
21	-3	-3	1	1	-1	1	-1	1	-1	3	1	-3	-1	1	-1	1	-1	-1	3	3	-3	-1	1	-3
22	-3	-1	-3	3	1	-1	-3	-1	-3	-3	3	-3	3	-3	-1	1	3	1	-3	1	3	3	-1	-3
23	-1	-1	-1	-1	3	3	3	1	3	3	-3	1	3	-1	3	-1	3	3	-3	3	1	-1	3	3
24	1	-1	3	3	-1	-3	3	-3	-1	-1	3	-1	3	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-3	-1	3
25	1	-1	1	-1	3	-1	3	1	1	-1	-1	-3	1	1	-3	1	3	-3	1	1	-3	-3	-1	-1
26	-3	-1	1	3	1	1	-3	-1	-1	-3	3	-3	3	1	-3	3	-3	1	-1	1	-3	1	1	1
27	-1	-3	3	3	1	1	3	-1	-3	-1	-1	-1	3	1	-3	-3	-1	3	-3	-1	-3	-1	-3	-1
28	-1	-3	-1	-1	1	-3	-1	-1	1	-1	-3	1	1	-3	1	-3	-3	3	1	1	-1	3	-1	-1
29	1	1	-1	-1	-3	-1	3	-1	3	-1	1	3	1	-1	3	1	3	-3	-3	1	-1	-1	1	3

Tabella 2.5: Definizione della funzione $\phi(n)$ per $M_{sc}^{RS} = 24$.

2.4.2 Sequenze base e loro raggruppamento

Nella tratta di Uplink, la trasmissione di utente può occupare diverse bande di frequenza (scalabilità) a patto che ogni cella della rete disponga di *almeno* una sequenza base $\bar{r}_q(n)$ per ciascuna configurazione supportata. La traslazione ciclica di una specifica sequenza base, nel dominio del tempo, permette di costruire ulteriori sequenze RS ortogonali tra loro (par. 2.4.3). Come discusso nel par. 2.4.1, i parametri N_{ZC} e $RS_{base \#} = (N_{ZC} - 1)$, pari rispettivamente alla lunghezza delle sequenze base, non estese circolarmente, e al loro numero, crescono in funzione della banda allocata, pari a M_{sc}^{RS} sottoportanti. Dunque, il valore minimo di $RS_{base \#}$, associato all'allocazione di 3 RB (la minima possibile per sequenze di ZC), è pari a

$$\min\{RS_{base \#}\} = 30 \quad (2.16)$$

Per questo motivo l'insieme delle sequenze base disponibili, associate a tutte le allocazioni di RB supportate dal sistema, è suddiviso in 30 sottoinsiemi non sovrapposti, chiamati *sequence-groups*. Infine, ogni gruppo è assegnato a una specifica cella, o a una sua porzione, come spiegato in seguito (par. 2.4.4).

Si osserva che, per allocazioni non superiori a 5 resource blocks, il numero delle sequenze base rispetta la condizione $RS_{base \#} \leq 58$. Dunque, entro i 5 RB, ogni gruppo non può contenere più di una sequenza base. Invece, oltre questa soglia, sono state incluse due sequenze base per ciascun sequence-group, permettendo il supporto della tecnica di *sequence hopping*, descritta nel par. 2.4.4.

Salvo il caso di 3 RB, per allocazioni maggiori il numero di sequenze base disponibili $RS_{base \#}$ supera quelle

effettivamente richieste da ciascun gruppo (30 o 60 a seconda dei casi). Tra tutte le $RS_{base \#}$ sequenze di lunghezza $N_{ZC,j}$ fissata, viene aggiunta al gruppo u -esimo quella che presenta la massima cross-correlazione con l'unica sequenza di Zadoff-Chu di 3 RB inclusa nel gruppo. È stato osservato in [16] che, per una banda allocata di j resource blocks, l' \bar{m} -esima sequenza di ZC, di lunghezza $N_{ZC,j}$, raggiunge il picco di cross-correlazione se il suo *root index* (Par. 2.4.1) minimizza l'espressione

$$\left| \frac{q_{3,u}}{31} - \frac{q_{j,m}}{N_{ZC,j}} \right| \quad (2.17)$$

con $u \in \{0, \dots, 29\}$ e $m \in \{1, \dots, RS_{base \#}\}$. Il parametro $q_{3,u}$ è l'indice della sequenza contenuta nel gruppo u -esimo e associata alla banda di 3 RB. Dunque, ciascun gruppo contiene le sole sequenze con cross-correlazione massima, ovvero il cui root index $q_{j,m}$ minimizza l'espressione 2.17, per $3 \leq j \leq 100$.

Poiché, per definizione, la cross-correlazione tra sequenze base corrispondenti a 3 RB è piccola (ma non nulla), essa assumerà valori altrettanto ridotti se calcolata tra sequenze di qualunque lunghezza, appartenenti a gruppi distinti; di conseguenza, con questa tecnica di raggruppamento è possibile ridurre notevolmente l'interferenza inter-cella.

Per quanto detto e ricordando la 2.14, l'espressione delle sequenze base RS può essere riscritta come

$$\bar{r}_{u,v}(n) = x_q(n \bmod N_{ZC}), \quad n = 0, 1, \dots, (M_{sc}^{RS} - 1) \quad (2.18)$$

dove

$$x_q(n) = \exp \left[-j\pi q \frac{n(n+1)}{N_{ZC}} \right], \quad 0 \leq n \leq (N_{ZC} - 1) \quad (2.19)$$

L'indice $u \in \{0, 1, \dots, 29\}$ identifica uno dei 30 sequence-groups disponibili; l'indice v distingue, quando necessario, le sequenze base di pari lunghezza N_{ZC} , appartenenti allo stesso gruppo. Esso può assumere i valori:

$$v = \begin{cases} 0, 1 & \text{per } M_{sc}^{RS} \geq 72 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.20)$$

Il legame tra la coppia di indici u, v e il root index q è ricavabile dalla seguente coppia di equazioni:

$$q = \left\lfloor \bar{q} + \frac{1}{2} \right\rfloor + v \cdot (-1)^{\lfloor 2\bar{q} \rfloor} \quad (2.21)$$

$$\bar{q} = N_{ZC} \cdot \frac{(u+1)}{31} \quad (2.22)$$

2.4.3 Costruzione di sequenze RS ortogonali dalle sequenze base

Generalmente, gli insiemi di sottoportanti assegnati agli utenti di una stessa cella sono ortogonali tra loro, ovvero non sovrapposti. Poiché anche i RS di utenti diversi sono allocati sulle stesse risorse, la loro separazione in ricezione è immediata. Tuttavia, a volte le risorse di utenti diversi possono sovrapporsi, ad esempio quando si utilizza la diversità di spazio (Space Division Multiple Access, SDMA) offerta dalla trasmissione multi-antenna. In questi casi le sequenze RS interferiscono tra loro: è fondamentale trovare un modo per distinguerle. L'utilizzo di sequenze base con diversi root index q , ma solo per UE in stato di collisione, non è una soluzione ideale, poiché la cross-correlazione non è nulla, ovvero, anche in assenza di rumore, si genera interferenza.

È possibile raggiungere una condizione di perfetta ortogonalità tra i Reference Signal, sfruttando un'importante proprietà delle sequenze di Zadoff-Chu: la correlazione di una sequenza ZC con una sua replica traslata circolarmente è nulla [2]. Infatti, l'autocorrelazione periodica di una sequenza ZC presenta un unico picco all'istante di tempo $t = 0$; la cross-correlazione periodica della stessa sequenza con la sua replica traslata circolarmente restituisce un picco all'istante $T_{CS} = N_{CS}T_C$, dove N_{CS} è la traslazione temporale espressa in campioni e T_C è il periodo di campionamento. Si genera quindi un intervallo di separazione tra le sequenze traslate [2], formato da campioni nulli e chiamato Zero Correlation Zone (ZCZ). Se il parametro N_{CS} è progettato per superare il

massimo valore di disallineamento tra le sequenze, riscontrato in pratica, esse possono essere considerate ortogonali.

Il concetto di ortogonalità ha un significato più ristretto in questo contesto, poiché due sequenze ortogonali presentano una cross-correlazione nulla per tutti i suoi campioni, e non solamente in un intervallo limitato, di estensione N_{CS} .

Assegnando a ciascun utente una diversa replica traslata della stessa sequenza base, si possono costruire segnali di riferimento distinguibili in ricezione, a patto che la distanza minima tra le traslazioni T_{CS} sia maggiore dell'estensione temporale della CIR (dispersione dei ritardi, par. 2.6). Altrimenti, la traslazione temporale della sequenza ricevuta sarebbe scambiata con quella di un altro utente.

Per quanto detto, è possibile trasmettere nello stesso simbolo SC-FDMA, di durata T , fino a un massimo di $N_{UE}^{\max} = T/T_{CS}$ segnali RS, preservando la condizione di ortogonalità. Ad esempio, quando $T/T_{CS} = 4$ e si hanno esattamente 4 trasmettitori, ciascuno di essi, individuato dall'indice $t \in \{1, 2, 3, 4\}$, costruisce il suo RS applicando alla stessa sequenza base una traslazione di $(t - 1)T_{CS}$ secondi. In seguito, la correlazione tra il segnale composito e la sequenza base non traslata permette di separare, nel dominio del tempo, le stime di canale dei singoli trasmettitori.

L'applicazione di uno spostamento temporale equivale in frequenza al prodotto con un termine di fase lineare; dunque la generica sequenza base con traslazione circolare α diventa

$$r_{u,v}^{(\alpha)}(n) = \exp(j\alpha n) \cdot \bar{r}_{u,v}(n) \quad n = 0, 1, \dots, (M_{sc}^{RS} - 1) \quad (2.23)$$

dove $\bar{r}_{u,v}(n)$ è la sequenza base di espressione (2.18). Poiché le traslazioni nel tempo sono periodiche, il parametro α è una frazione di angolo giro, pari a

$$\alpha = 2\pi n_{cs} / N_{UE}^{\max} \quad (2.24)$$

dove, per i DM RS, il parametro N_{UE}^{\max} è pari a 12. Dunque α è multiplo di $\pi/6$, e, ricordando che la durata di un simbolo SC-FDMA è pari a $T = 66.6 \mu s$, la massima dispersione di canale accettabile per preservare l'ortogonalità tra i RS traslati è $T_{CS} = T/N_{UE}^{\max} = 5.55 \mu s$.

Il parametro n_{cs} è costituito dalla somma (modulo 12) di tre spostamenti temporali:

$$n_{cs} = \left(n_{DMRS}^{(1)} + n_{DMRS}^{(2)} + n_{PRS}(n_S) \right) \bmod 12$$

Il primo spostamento, indicato con $n_{DMRS}^{(1)}$, è specifico della cella, e trasmesso in broadcast dal parametro *cyclicShift*, definito dai livelli superiori. I suoi possibili valori sono mostrati in tabella 2.6.

<i>cyclicShift</i>	$n_{DMRS}^{(1)}$
0	0
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8
6	9
7	10

Tabella 2.6: Corrispondenza tra i valori di *cyclicShift* e di $n_{DMRS}^{(1)}$.

Il valore del parametro $n_{DMRS}^{(2)}$ è contenuto nell'informazione di controllo inviata dall'eNodeB sul canale fisico PDCCH. In particolare, lo specifico campo responsabile della configurazione è chiamato *Cyclic Shift Field*

e incluso nella Downlink Control Information (DCI) di Formato 0 [11]. La tabella 2.7 descrive l'associazione tra il campo Cyclic Shift Field e lo spostamento $n_{DMRS}^{(2)}$.

<i>cyclic Shift Field</i>	
DCI format 0	$n_{DMRS}^{(2)}$
000	0
001	6
010	3
011	4
100	2
101	8
110	10
111	9

Tabella 2.7: Corrispondenza tra i valori del campo *cyclic Shift Field* e di $n_{DMRS}^{(2)}$.

La terza traslazione varia in funzione dell'indice di slot n_s e viene ricavata dalla sequenza di Gold $c(n)$, definita nel paragrafo 2.3.1:

$$n_{PRS}(n_s) = \sum_{i=0}^7 c(8N_{symb}^{UL} \cdot n_s + i) \cdot 2^i \quad (2.25)$$

Il generatore della sequenza pseudo-casuale $c(n)$ è inizializzato, prima di trasmettere ogni nuova trama, con il valore

$$c_{init} = \left\lfloor \frac{N_{ID}^{cell}}{30} \right\rfloor \cdot 2^5 + f_{ss}^{PUSCH} \quad (2.26)$$

dove $0 \leq N_{ID}^{cell} \leq 503$ è l'identificativo di cella, mentre $0 \leq f_{ss}^{PUSCH} \leq 29$ è definito nel prossimo paragrafo.

I valori di $n_{PRS}(n_s)$, e quindi di n_{cs} , variano in modo pseudo-casuale da uno slot al successivo formando una successione di 20 deviazioni temporali, associate a ciascuno dei segnali DM RS contenuti in ogni trama. Questa tecnica costruttiva è chiamata Cyclic Shift Hopping e permette di combattere efficacemente l'interferenza inter-cella. In questo caso infatti le sequenze ortogonali, derivate dalla stessa sequenza base $\bar{r}_{u,v}$, non sono assegnate a utenti della stessa cella con risorse spazio-temporali sovrapposte tra loro, bensì a UE di celle diverse ma adiacenti, allo scopo di rendere uniforme la probabilità che i trasmettitori interferiscano tra loro (*interference randomization*). Nel paragrafo seguente sono presentate altre tecniche, adottate nella definizione dei segnali RS, per ridurre l'interferenza inter-cella.

2.4.4 Sequence-Group Hopping (SGH) e Sequence Hopping (SH)

Come mostrato nell'equazione 2.18, le sequenze base $r_{u,v}$ sono caratterizzate dalla coppia di indici u e v : il primo identifica uno dei 30 sequence-groups disponibili; il secondo distingue le sequenze appartenenti allo stesso gruppo. Generalmente, la sequenza $r_{u,v}$ di ciascun trasmettitore non rimane immutata nel tempo; infatti si assiste a un continuo aggiornamento degli indici u e v , con cadenza di uno slot, in base a due tecniche distinte: il Sequence-Group Hopping (SGH) e il Sequence Hopping (SH).

La modalità SGH viene abilitata in una cella dal parametro *Group-hopping-enabled*, formato da un bit e proveniente dai livelli superiori. Essa consiste nel modificare la sequenza base utilizzata dall'utente tramite una combinazione di salti e traslazioni (*hopping/shifting*) del sequence-group u , seguendo uno tra 504 possibili schemi, corrispondenti ai valori di N_{ID}^{cell} , l'identificativo di cella a livello fisico. Poiché l'intervallo di valori di u è compreso tra 0 e 29, sono stati definiti $17 = \lceil \frac{504}{30} \rceil$ schemi di hopping distinti, costituiti dalla successione di 20 valori di sequence-group, uno per ogni slot della trama. Fissato uno schema di hopping, è possibile introdurre 30 traslazioni (modulo 30), ottenendo complessivamente 504 strutture miste di hopping/shifting.

Le considerazioni precedenti permettono di definire i valori assunti dal Sequence-group number u al variare dell'indice di slot n_s :

$$u = (f_{gh}(n_s) + f_{ss}^{PUSCH}) \bmod 30 \quad (2.27)$$

Il termine $f_{gh}(n_s)$, è la sequenza di hopping definita per ciascuno dei 20 slot della trama e deriva dalla sequenza pseudo-casuale $c(i)$, introdotta nel par. 2.3.1 e inizializzata con $c_{init} = \lfloor \frac{N_{ID}^{cell}}{30} \rfloor$; questo valore, ricalcolato dopo la trasmissione di ciascuna trama, è l'indice di uno tra i 17 schemi di hopping ed è compreso nell'intervallo $0 \leq c_{init} \leq 16$. L'espressione di $f_{gh}(n_s)$ è dunque:

$$f_{gh}(n_s) = \begin{cases} 0 & \text{se il SGH è disabilitato} \\ \left(\sum_{i=0}^7 c(8n_s + i) \cdot 2^i \right) \bmod 30 & \text{se il SGH è abilitato} \end{cases} \quad (2.28)$$

Il termine f_{ss}^{PUSCH} rappresenta una delle 30 traslazioni applicate a un qualsiasi schema di hopping e il suo valore non cambia per tutta la durata della trama. Esso si calcola come:

$$f_{ss}^{PUSCH} = (f_{ss}^{PUCCH} + \Delta_{ss}) \bmod 30 \quad (2.29)$$

dove $f_{ss}^{PUCCH} = N_{ID}^{cell} \bmod 30$ è la traslazione ciclica dei DM RS del canale di controllo PUCCH; il parametro $\Delta_{ss} \in \{0, 1, \dots, 29\}$, ricavabile dal campo di segnalazione *groupAssignmentPUSCH* e configurato dai livelli superiori, permette di distinguere le traslazioni del canale dati (PUSCH) da quelle del canale di controllo (PUCCH), per evitare interferenze.

La variazione pseudo-casuale del sequence-group u riduce sensibilmente l'interferenza intercella. Inoltre, poiché fino a 30 valori di N_{ID}^{cell} sono associati allo stesso schema di hopping, applicando alle celle diversi valori di f_{ss}^{PUSCH} si abbassa la probabilità di collisione tra i segnali RS.

Inoltre è possibile sfruttare questa tecnica insieme alle sequenze ortogonali derivate dalla traslazione circolare di una stessa sequenza base. Imponendo che celle adiacenti (ad esempio servite dallo stesso eNodeB) utilizzino la stessa sequenza base $r_{u,v}$, è possibile costruire 12 segnali RS $r_{u,v}^{(\alpha)}$ completamente incorrelati tra loro (par. 2.4.3).

Un secondo metodo per ridurre l'interferenza inter-cella, modificando la sequenza base degli utenti, è il Sequence Hopping (SH), attivato dal parametro di broadcast *Sequence-hopping-enabled*. In questo caso, passando da uno slot all'altro, non è il sequence-group u a cambiare, ma l'indice v , che distingue le sequenze all'interno di un gruppo. Riprendendo la formula (2.20), si ricorda che per una banda minore di 6 RB ogni sequence-group contiene una sola sequenza, ovvero $v = 0$, di conseguenza il SH è inapplicabile. Assumendo che la banda allocata superi i 6 RB, l'indice della sequenza base $v \in \{0, 1\}$, inclusa nel gruppo u , varia in funzione dello slot come

$$v = c(n_s) \quad (2.30)$$

dove $c(i)$ è la sequenza di Gold (par. 2.3.1) inizializzata con il valore di espressione (2.26), lo stesso utilizzato per calcolare le traslazioni delle sequenze ortogonali (par. 2.4.3). Esso è composto dall'indice dello schema di sequence-group hopping $\lfloor \frac{N_{ID}^{cell}}{30} \rfloor$ e dalla traslazione del sequence-group f_{ss}^{PUSCH} .

Le due tecniche descritte non sono mai utilizzate contemporaneamente, poiché basta intervenire su un solo parametro tra u e v per cambiare la sequenza base utilizzata dagli utenti in ogni slot. In particolare, quando il SGH è abilitato, il parametro v rimane costante e pari a 0; viceversa, poiché $f_{gh}(n_s) = 0$, è il parametro u a conservarsi (espressione (2.28)).

2.4.5 La struttura della trama PUSCH

Dopo aver descritto le proprietà del canale PUSCH e dei segnali DeModulation Reference Signals, si considera il loro posizionamento all'interno della trama di Uplink. Dato il ruolo centrale dei DM RS (soprattutto per la stima di canale), essi sono trasmessi in ogni slot della trama, occupando un intero simbolo SC-FDMA, la cui

posizione dipende dalla configurazione del prefisso ciclico (par. 2.2.1).

Quando il prefisso ciclico è normale, lo slot è composto da 7 simboli SC-FDMA. Il DM RS occupa il simbolo centrale di indice $l = 3$, mentre i restanti sei sono occupati dalle informazioni di utente (figura 2.21). Se il

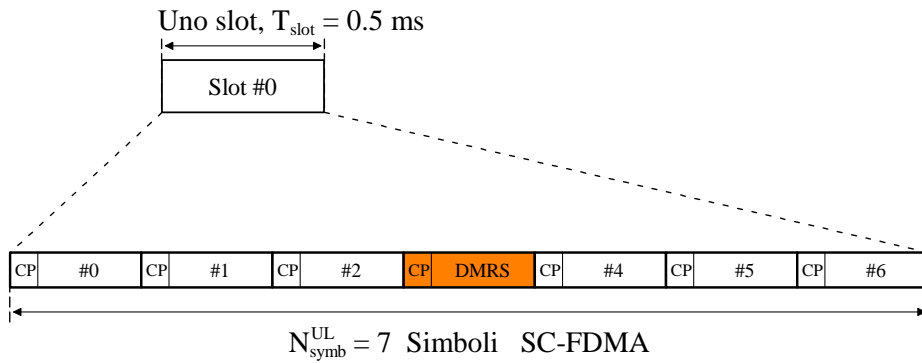


Figura 2.21: Configurazione di uno slot LTE in Uplink con CP normale.

prefisso ciclico è esteso (ovvero con durata 1/4 del tempo di simbolo), sono presenti solo 6 simboli SC-FDMA in ogni slot. Il DMRS occupa il terzo simbolo, $l = 2$, e i restanti cinque trasportano le informazioni del canale PUSCH (figura 2.22).

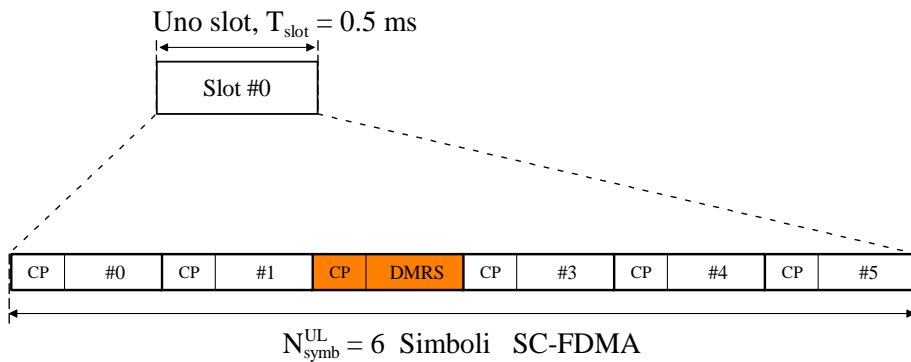


Figura 2.22: Configurazione di uno slot LTE in Uplink con CP esteso.

2.5 Il canale radio: proprietà e modelli

La comprensione delle condizioni di propagazione è un fattore critico per il progetto di un sistema di comunicazione radiomobile. L'influenza dell'ambiente di propagazione sulle proprietà del segnale trasmesso è studiata grazie all'elaborazione dei *modelli di canale*. La realizzazione di questi modelli deve rispondere a requisiti spesso in contrasto tra loro:

- una descrizione affidabile e completa dei fenomeni di propagazione
- uno strumento semplice e immediato per la simulazione del sistema
- un insieme di risposte di canale che comprenda diversi scenari, da quelli più frequenti ai casi limite, che permettano di simulare il funzionamento del sistema in modo affidabile.

Lo scenario di propagazione ideale, noto come *propagazione in spazio libero*, è costituito da un'antenna trasmittente isotropa e da una ricevente, anch'essa isotropa, posizionate in una regione di spazio priva di ostacoli. Tale collegamento in visibilità viene anche detto LOS (Line-Of-Sight). Nello spazio libero l'attenuazione delle onde e.m. con lunghezza λ cresce proporzionalmente alla distanza d percorsa, ovvero $A_{sl} = (\lambda/4\pi d)^2$. Viceversa, in condizioni reali, il mezzo di propagazione è disomogeneo e la sua configurazione fisica può variare nel tempo; esso è ben rappresentato da un processo casuale tempo-variante. Gli ostacoli, le disomogeneità e la conseguente variazione dell'indice di rifrazione causano fenomeni di:

- *riflessione*, quando il segnale trasmesso incontra ostacoli di dimensione grande o paragonabile alla propria lunghezza d'onda. Il segnale risultante è costituito dalla sovrapposizione di diversi raggi di propagazione (*cammini multipli o echi*), caratterizzati da ampiezze, ritardi e fasi specifiche. Rispetto al segnale trasmesso, la forma d'onda ricevuta è attenuata in ampiezza (*fading*) e distorta in fase, a causa dei ritardi e degli sfasamenti relativi con cui gli echi si sommano in ricezione. Dato che i parametri dei cammini variano in funzione della posizione, uno spostamento di un tratto Δl , paragonabile alla lunghezza d'onda λ , modifica sensibilmente le proprietà del segnale ricevuto. Ad esempio, per $f = 1$ GHz, l'onda compie un periodo completo dopo $\lambda = 30$ cm, dunque anche un piccolo spostamento può influenzare la qualità del collegamento radio;
- *diffusione*, quando l'onda incontra una fitta distribuzione di ostacoli piccoli rispetto a λ , ad esempio superfici ruvide, foglie, pioggia...;
- *diffrazione*, se il percorso radio tra trasmettitore e ricevitore è ostruito da un ostacolo con discontinuità nette, ad esempio un fabbricato. Vicino alla discontinuità le linee di flusso delle onde e.m. si deformano e il collegamento può avvenire anche in assenza di un percorso diretto (condizione NLOS, Non-Line-Of-Sight). Se la sorgente è molto lontana dall'ostacolo, la diffrazione riduce la potenza del segnale ricevuto introducendo un termine di attenuazione inversamente proporzionale alla distanza ricevitore-discontinuità [17].

L'azione congiunta dei fenomeni descritti provoca vari effetti sul segnale ricevuto, raccolti in tre gruppi [3]:

- *Perdite di propagazione*. Un parametro fondamentale per descrivere la qualità del collegamento radio è l'attenuazione, ossia il rapporto tra potenza trasmessa e potenza ricevuta. Essa è pari a $A_{tot} = A_{det} + A_{rand}$, ovvero alla somma di due componenti:
 - la componente deterministica, che esprime la perdita di potenza media in funzione della distanza. L'espressione generale è $A_{det} = C \left(\frac{d}{d_0}\right)^\gamma$, dove γ è un esponente dipendente dall'ambiente (urbano, rurale...) e C è l'attenuazione a una distanza di riferimento d_0 (es. $d_0 = 1$ km). Per la propagazione in spazio libero $\gamma = 2$; in un ambiente urbano può raggiungere il valore $\gamma = 5$;

- la componente casuale A_{rand} , formata a sua volta da due contributi, detti rispettivamente di larga scala e di piccola scala. La prima, detta *shadowing*, è causata dalla presenza di grandi ostacoli e/o dalla variazione della morfologia del terreno. Essa provoca, per ricevitori posti alla stessa distanza dalla sorgente, livelli medi di segnale diversi. Il fenomeno è descritto da una distribuzione log-normale [18]. La seconda componente è associata al fenomeno dei cammini multipli. Se non è presente un percorso diretto, ovvero si è in condizioni di non visibilità o NLOS (Non-Line-of-Sight), l'attenuazione è descritta da una distribuzione di Rayleigh; viceversa, in presenza di un eco dominante, l'ampiezza del segnale ricevuto è descritta da una distribuzione di Rice [18]. La sovrapposizioni di echi con diverse ampiezze, fasi e ritardi comporta la dispersione dell'informazione del segnale trasmesso (*selettività in frequenza*). Senza un'opportuna elaborazione, le componenti del segnale ricevuto interferiscono tra loro causando interferenza intersimbolica (ISI).

Inoltre, si sovrappongono all'informazione trasmessa due tipi di segnali indesiderati:

- il rumore termico ed elettronico, dipendente dalla temperatura e detto bianco per il contenuto spettrale uniforme
- l'interferenza causata dalle trasmissioni di altri utenti mobili nella stessa cella (*intracella*) e/o in celle adiacenti (*intercella*)
- *Effetto Doppler*. Le condizioni di propagazione variano nel tempo a causa del moto relativo tra trasmettitore e ricevitore e dei movimenti degli oggetti presenti nell'ambiente di propagazione (persone, auto...). A causa del moto, una riga spettrale a frequenza f subisce una traslazione di $\Delta f = v/\lambda$ Hz, dove v è la componente della velocità di spostamento nella direzione di propagazione dell'onda. Dunque le componenti spettrali del segnale si sovrappongono, generando interferenza tra *sottoportanti* (ICI)

Nel paragrafo 2.6 si descrivono i modelli di canale proposti per il sistema LTE. In seguito (par. 2.7) si discute l'adattamento di questi modelli alle diverse bande di trasmissione disponibili. Nel capitolo 4, dove si discute la stima di canale, si introducono le proprietà del canale radio assunte valide per lo sviluppo degli algoritmi di stima. Infine l'appendice E riassume alcune importanti proprietà dei canali radio.

2.6 Modelli di canale per il sistema LTE

Il sistema LTE definisce configurazioni di trasmissione multi-antenna (MIMO) e singola antenna (SISO); nella seguente analisi si discutono esclusivamente i modelli di canale relativi alla trasmissione SISO, in cui il collegamento avviene tra un'antenna trasmittente e una ricevente. Lo studio delle prestazioni del sistema LTE richiede modelli di canale a larga banda, in grado di coprire l'intervallo delle frequenze di campionamento del sistema (si veda la tabella 2.1). Essi sono ricavati dalla sintesi di modelli preesistenti a banda inferiore: i sei modelli ITU per il sistema UMTS [2] e il modello Typical Urban (TU) per il sistema GSM [19]. Il risultato di tale sintesi è la costruzione di tre modelli estesi a larga banda [20], con dispersione dei ritardi rispettivamente bassa, media e alta:

- il modello Extended Pedestrian A (EPA), relativo al movimento di un pedone in ambiente urbano coperto da celle mediamente piccole (non più di 2 Km)
- il modello Extended Vehicular A (EVA), che simula le condizioni di propagazione per un veicolo in movimento
- il modello Extended Typical Urban (ETU), associato alla propagazione in ambiente urbano e suburbano, la cui estensione è leggermente superiore della durata del CP in configurazione normale, pari a $T_{CP} = 4.6875 \mu s$

Dispersione ritardi	Modello di canale	Acronimo	τ_{RMS} (ns)
bassa	Extended Pedestrian A	EPA	43
media	Extended Vehicular A	EVA	357
alta	Extended Typical Urban	ETU	991

Tabella 2.8: Dispersione dei ritardi r.m.s. per i modelli ITU estesi.

In tabella 2.8 è riportata la deviazione standard dei ritardi dei canali LTE, parametro indicato con il simbolo τ_{RMS} e definito nel par. E.3.1 dell'appendice E.

Il ricampionamento diretto (par. 2.1 in [21]) dei modelli ITU e GSM su bande più grandi determina la nascita di picchi non voluti nella funzione di autocorrelazione in frequenza $R_{hh}(\Delta f)$ (par. E.3.1). Per ridurre tali picchi, senza modificare la dispersione dei ritardi del modello, sono stati introdotti, nelle risposte ITU e GSM, nuovi coefficienti di canale, seguendo il procedimento iterativo spiegato in [20].

La variabilità del canale radio nel tempo è stata simulata selezionando tre frequenze Doppler, pari a $\nu_D = 5, 70$ e 300 Hz. Se la frequenza portante del sistema è $f_c = 2$ GHz, corrispondono, a tali valori, velocità del ricevitore di $3, 40$ e 160 km/h. Le prestazioni del canale dati PUSCH sono analizzate utilizzando le seguenti configurazioni {canale radio}/{dispersione Doppler} (par. 8.2 in [22]):

- Canale EPA / Doppler 5 Hz
- Canale EVA / Doppler 5 e 70 Hz
- Canale ETU / Doppler 70 e 300 Hz

Lo spettro Doppler dei coefficiente di canale LTE è descritto dal modello [23] definito nel par. E.3.2.

In tabella 2.9 sono raccolti i parametri del Power Delay Profile (par. E.3.1) per ciascun modello. I ritardi sono multipli di $T_s = 10$ ns ($f_s = 100$ MHz) mentre le potenze, espresse in dB, sono normalizzate rispetto ai coefficienti più intensi.

Numero prese	Modello EPA		Modello EVA		Modello ETU	
	Ritardo prese (ns)	Potenza relativa (dB)	Ritardo prese (ns)	Potenza relativa (dB)	Ritardo prese (ns)	Potenza relativa (dB)
1	0	0.0	0	0.0	0	-1.0
2	30	-1.0	30	-1.5	50	-1.0
3	70	-2.0	150	-1.4	120	-1.0
4	80	-3.0	310	-3.6	200	0.0
5	110	-8.0	370	-0.6	230	0.0
6	190	-17.2	710	-9.1	500	0.0
7	410	-20.8	1090	-7.0	1600	-3.0
8			1730	-12.0	2300	-5.0
9			2510	-16.9	5000	-7.0

Tabella 2.9: Power Delay Profile dei modelli di canale LTE.

Come indicato nello standard [19], i coefficienti delle CIR LTE presentano una distribuzione statistica di Rayleigh, corrispondente alla condizione di non visibilità (NLOS). Infine in figura 2.23 è presentata l'evoluzione delle CIR in funzione del tempo, per il canale EVA con frequenza Doppler di $\nu_D = 70$ Hz. L'asse t presenta l'evoluzione temporale, misurata in ms, mentre l'asse τ (μ s) indica la dispersione dei ritardi della singola risposta. La figura permette di comprendere in modo qualitativo le forti distorsioni introdotte dal canale multi-percorso sul segnale trasmesso.

2.7 Cambiamento della spaziatura dei ritardi

I modelli di canale LTE sono di tipo Tapped Delay Line (TDL)[21]; i ritardi associati ai percorsi di canale sono tutti multipli dell'intervallo $T_s = 1/f_s$, dove f_s è la velocità di trasmissione del sistema, pari alla risoluzione

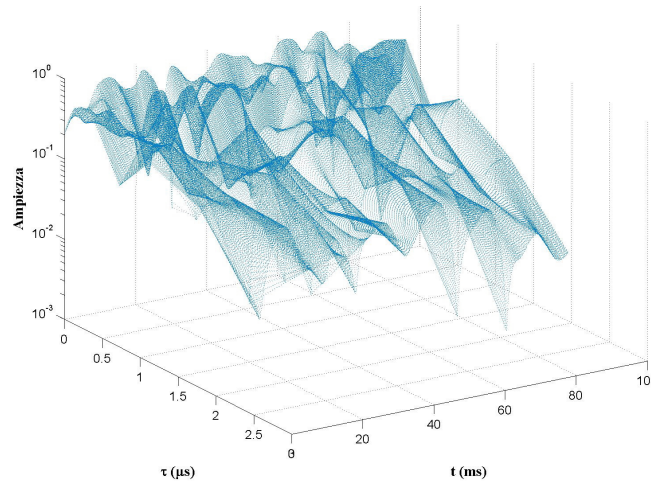


Figura 2.23: Evoluzione nel tempo di una realizzazione di canale EVA con $\nu_D = 70$ Hz.

della dispersione multi-percorso (par. E.2).

Come visto in tabella 2.9, i canali LTE sono definiti nello standard (Annex B di [22]) per $T_s = 10$ ns mentre il periodo di campionamento dei segnali LTE è multiplo intero di $T'_s = 32.55$ ns, valore associato alla banda $B_W = 20$ MHz (par. 2.2.1). Dunque le spaziature temporali del segnale e del canale radio sono diverse. È possibile adattare la griglia di campionamento dei modelli LTE a qualunque intervallo $T'_s \neq T_s$ grazie alla procedura di *allineamento grossolano* (coarse alignment) descritta nell'appendice B di [19]. Essa prevede che ogni eco con ritardo τ_l , compreso nell'intervallo $(i - 1/2)T'_s \leq \tau_l \leq (i + 1/2)T'_s$, venga traslato in posizione $\tau'_l = iT'_s$, per $i \geq 0$. Gli echi eventualmente associati allo stesso ritardo iT'_s , sono sostituiti da un solo coefficiente nella medesima posizione e con potenza pari alla somma delle potenze dei singoli echi. In figura 2.24 è mostrato un esempio di tale procedura per $T_s = 10$ ns e $T'_s = 32.55$ ns. L'insieme dei ritardi dei coefficienti originali è $\tau_l = \{10, 20, 30, 60\}$ ns e le potenze corrispondenti sono $P_m = \{0, -5.2, -6.4, -8.4\}$ dB. I coefficienti risultanti, il cui numero si è ridotto da 4 a 3, presentano ritardi $\tau'_l = \{0, 32.55, 65.11\}$ ns e potenze $P'_m = \{0, -2.748, -8.4\}$ dB.

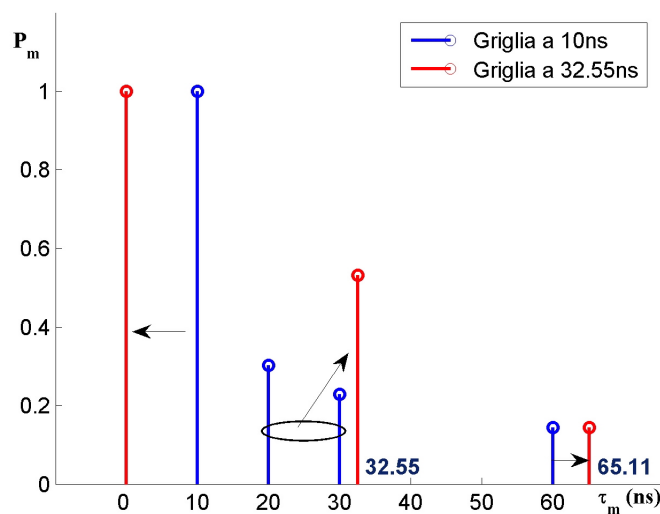


Figura 2.24: Ricampionamento dei coefficienti di canale secondo il metodo di allineamento grossolano.

Capitolo 3

Algoritmi di sincronizzazione

Prima di poter ricostruire l'informazione trasmessa, il ricevitore di un sistema multiportante deve sincronizzarsi nel tempo e in frequenza con il trasmettitore. Nel contesto delle reti a commutazione di pacchetto a larga banda, come LTE, è necessario che la sincronizzazione sia completata in un lasso di tempo molto breve, non appena vengono acquisiti i primi campioni del segnale ricevuto.

Per facilitare queste operazioni il protocollo LTE si avvale di speciali sequenze di struttura e posizione nota. Come discusso nel par. 2.4, nella tratta di Uplink LTE tali sequenze sono chiamate DeModulation Reference Signals (DMRS).

Esse sono costituite da sequenze numeriche con proprietà molto utili (si veda l'appendice C), su cui si basano gli algoritmi di sincronizzazione proposti. Inoltre tali strutture sono essenziali per effettuare la stima di canale e la conseguente equalizzazione, argomenti trattati nel capitolo 4.

Nella prima parte del capitolo (par. 3.1) si descrivono gli effetti negativi provocati dagli errori di sincronizzazione sul segnale ricevuto, sia nel tempo che in frequenza. In seguito, nel par. 3.2, si analizzano le soluzioni [24] e [25], proposte per i sistemi OFDM, evidenziando le difficoltà incontrate nella loro diretta applicazione al sistema LTE. In particolare, si dimostra che questi algoritmi non raggiungono le prestazioni desiderate quando il numero di sottoportanti assegnate all'utente è molto ridotto e per bassi valori di SNR.

Una volta note le distorsioni introdotte sul segnale ricevuto e i limiti di funzionamento delle soluzioni proposte in letteratura, è possibile descrivere e giustificare compiutamente l'approccio proposto, illustrato nel par. 3.3. Esso si può suddividere in due passi:

- *sincronizzazione in frequenza*, che permette di stimare e correggere il CFO presente sul segnale ricevuto;
- *sincronizzazione nel tempo*, che consiste nell'individuare senza ambiguità la posizione iniziale della prima trama completa nel segnale ricevuto.

L'analisi delle prestazioni è effettuata nel cap. 6, tuttavia alcuni risultati saranno anticipati per giustificare le scelte di progetto.

3.1 Effetti degli errori di sincronizzazione sulla modulazione SC-FDMA

Nel cap. 1, descrivendo le fragilità della modulazione OFDM, sono state introdotte le problematiche del Carrier Frequency Offset e degli errori di sincronizzazione temporale. Poiché la modulazione SC-FDMA è basata, al pari dell'OFDM, sulla trasmissione multiportante, anch'essa risente delle perturbazioni provocate da tali fenomeni. Mentre l'approccio descrittivo di quei paragrafi era volto a spiegare le scelte progettuali di un generico sistema di trasmissione (come il dimensionamento del CP o della spaziatura tra sottoportanti), in questa sede si ripercorrono tali tematiche nel caso specifico della tratta di Uplink LTE. L'obiettivo è di esprimere in forma analitica le distorsioni introdotte dagli errori di sincronizzazione sul segnale ricevuto.

In assenza di errori di sincronizzazione, la sequenza del segnale ricevuto nel dominio del tempo è data da

$$r(n) = \sum_l \sum_{m=0}^{L-1} h(m) s_l(n - m - lN_T) + w(n) \quad 0 \leq n \leq (N_T - 1) \quad (3.1)$$

dove $s_l(n)$ è il simbolo SC-FDMA l -esimo, di espressione (2.11), $h(m)$ è la risposta all'impulso del canale radio, $w(n)$ è il rumore AWGN con $E[w(n)] = 0$ e $E[|w(n)|^2] = \sigma_w^2$. Il parametro $N_T = (N + N_{CP})$ è la lunghezza del generico simbolo SC-FDMA completo di CP. Sviluppando la (3.1) come mostrato nel par. A.1, si trova l'espressione del segnale ricevuto nel dominio della frequenza:

$$R_l(k) = a_{k, l} \cdot H(k) + W_l(k) \quad 0 \leq k \leq (N - 1) \quad (3.2)$$

dove i coefficienti $a_{k, l}$ provengono dall'espressione (2.11), $H(k)$ è la CFR del canale radio e $W_l(k)$ è la DFT dei campioni del rumore $w(n)$. L'espressione (3.2) rappresenta la trasmissione multiportante come il parallelo di N canali gaussiani indipendenti. Essa è di fondamentale importanza per semplificare le operazioni di stima di canale ed equalizzazione. Infatti, una volta stimati i coefficienti $H(k)$, l'equalizzazione viene effettuata con una sola moltiplicazione complessa per sottoportante (si veda Cap. 4).

Si osserva che l'espressione (3.2) è molto simile alla (1.10), valida per l'OFDM; tuttavia, i coefficienti $a_{k, l}$ non rappresentano i simboli della costellazione trasmessa (QPSK, 16-QAM...), ma sono legati ad essi da una trasformata DFT di dimensione M_{sc}^{PUSCH} , come mostrato nella formula (2.10).

In un sistema reale, la dispersione Doppler e l'instabilità degli oscillatori locali provocano la nascita del *Carrier Frequency Offset* (CFO) ν_D , ovvero di uno scostamento tra la frequenza portante del segnale ricevuto f_O e la frequenza delle sinusoidi utilizzate in demodulazione. Inoltre, al momento dell'acquisizione, il ricevitore non può stabilire l'istante iniziale dei simboli SC-FDMA; dunque la finestra della trasformata DFT può essere posizionata in modo errato, e contenere i campioni di due simboli SC-FDMA adiacenti. Questa situazione comporta un errore di sincronizzazione temporale, o *Timing Offset* (TO), T_O che deve essere accuratamente stimato e compensato per evitare di introdurre forti distorsioni nel segnale. In particolare, è sufficiente localizzare la posizione di inizio simbolo con una precisione pari al periodo di campionamento del sistema T_C ; errori più piccoli, dati da frazioni di T_C , vengono accorpati nella risposta del canale radio e corretti dall'equalizzatore [6]. Perciò, nel seguito, il Timing Offset è considerato un multiplo del periodo di campionamento e rappresentato dal simbolo θ , di espressione

$$\theta = \lfloor T_O / T_C \rfloor \quad (3.3)$$

Definendo il CFO normalizzato alla spaziatura tra sottoportanti Δf come:

$$\varepsilon = \nu_D / \Delta f = \nu_D N T_S \quad (3.4)$$

i campioni del segnale ricevuto in presenza di errori di sincronizzazione diventano

$$r(n) = e^{j2\pi\varepsilon n/N} \sum_l \sum_{m=0}^{L-1} h(m) s_l(n - \theta - m - lN_T) + w(n) \quad (3.5)$$

I paragrafi seguenti illustrano le distorsioni prodotte sul segnale ricevuto da ciascuna tipologia di errore.

3.1.1 Effetti del timing offset

Nei sistemi multiportante, il recupero dei coefficienti trasmessi sulle sottoportanti avviene applicando la trasformata DFT a gruppi di campioni dello stesso simbolo SC-FDMA. Se la finestra di trasformazione contenesse campioni di simboli SC-FDMA diversi, il segnale ricostruito sarebbe affetto da interferenza intersimbolica (ISI). Come mostrato nella figura 3.1, a causa della dispersione da cammini multipli, la coda di ciascun simbolo SC-FDMA ricevuto si sovrappone ai primi $L - 1$ campioni del simbolo successivo, dove $L = T_m/T_C$ è la massima dispersione temporale del canale radio, espressa in campioni.

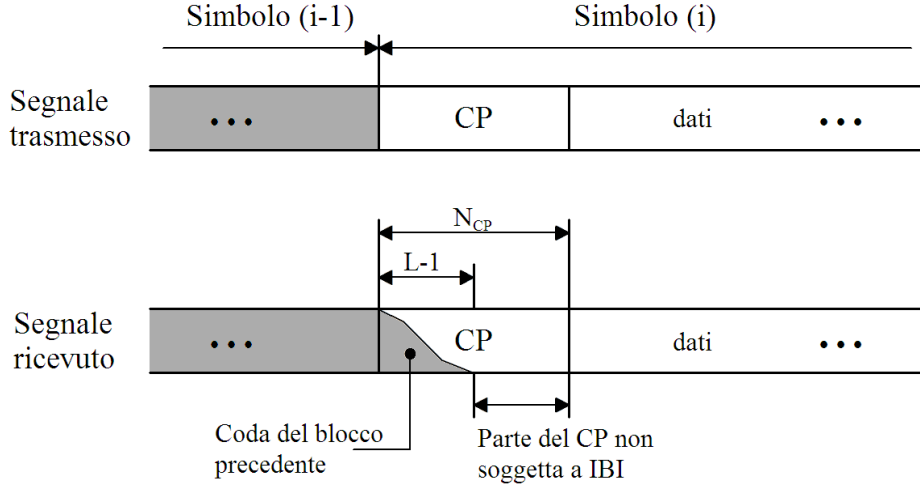


Figura 3.1: Parziale sovrapposizione tra i simboli SC-FDMA ricevuti dovuta alla presenza dei cammini multipli.

In un sistema ben progettato (par. 1.2.3.3) la lunghezza del CP deve superare la massima durata attesa della CIR. Dunque, una porzione dei campioni del CP non è perturbata dal simbolo precedente. Calcolando la DFT a partire da un qualsiasi campione in questa porzione, i coefficienti ricostruiti non presentano ISI. Per rientrare in questo caso, è necessario che l'errore di stima del Timing Offset

$$\Delta\theta = \hat{\theta} - \theta \quad (3.6)$$

sia compreso nell'intervallo

$$(-N_{CP} + L - 1) \leq \Delta\theta \leq 0 \quad (3.7)$$

dove $\hat{\theta}$ è la stima della posizione di inizio simbolo. Assumendo una perfetta sincronizzazione in frequenza, ovvero $\varepsilon = 0$, il segnale in uscita dalla DFT sarà

$$R_l(k) = a_{k,l} \cdot H(k) \cdot \exp(j2\pi k \Delta\theta / N) + W_l(k) \quad 0 \leq k \leq (N - 1) \quad (3.8)$$

L'equazione (3.8) indica che l'errore $\Delta\theta$ causa una rotazione di fase lineare tra le sottoportanti; la sua compensazione viene effettuata dall'equalizzatore di canale poiché essa è indistinguibile dalle deviazioni angolari introdotte dal canale radio.

Al contrario, se l'errore (3.6) non appartiene all'intervallo 3.7, la DFT viene calcolata su campioni appartenenti a simboli SC-FDMA diversi. In aggiunta all'interferenza intersimbolica, questa circostanza determina la perdita dell'ortogonalità tra le sottoportanti, che a sua volta provoca ICI (si veda il par. 1.2.3.3).

In questo caso, l'espressione della k -esima sottoportante ricevuta è

$$R_l(k) = \alpha(\Delta\theta) \cdot a_{k,l} \cdot H(k) \cdot \exp(j2\pi k \Delta\theta / N) + I_l(k, \Delta\theta) + W_l(k) \quad (3.9)$$

dove $\alpha(\Delta\theta)$ è un fattore di attenuazione e $I_l(k, \Delta\theta)$ raccoglie i contributi di disturbo causati da ICI e ISI.

L'influenza di tali errori sul segnale ricevuto è immediatamente comprensibile ricavando l'espressione analitica di una singola sottoportante ricostruita, in presenza di un errore di sincronizzazione temporale θ [26]; per semplicità, si assume che il canale radio sia gaussiano e non dispersivo ($\tau_{RMS} = 0$). Quando la sincronizzazione è ritardata, ovvero $\theta > 0$, il ricevitore seleziona un blocco \mathbf{r}_l di N campioni, provenienti in parte dal simbolo SC-FDMA corrente e in parte da quello successivo, ovvero

$$\mathbf{r}_l = \{r_{l,\theta}, r_{l,\theta+1}, \dots, r_{l,(N-1)}, r_{l+1,0}, r_{l+1,1}, \dots, r_{l+1,(\theta-1)}\} \quad (3.10)$$

Demodulando il blocco ricevuto con la DFT, l'espressione della k -esima sottoportante è (par. A.2.1)

$$\begin{aligned} Z_l(k) = & \underbrace{\left(\frac{N-\theta}{N}\right) a_{k,l}}_{\text{attenuazione}} \underbrace{e^{j2\pi k\theta/N}}_{\text{rotazione di fase}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-\theta-1} \sum_{i=-M/2; i \neq k}^{M/2-1} a_{i,l} e^{j2\pi(n/N)(i-k)} \cdot e^{j2\pi(i/N)\theta}}_{\text{ICI}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=N-\theta}^{N-1} \sum_{i=-M/2}^{M/2-1} a_{i,l+1} e^{j2\pi(i/N)(n+\theta-N)} \cdot e^{-j2\pi nk/N}}_{\text{ISI}} \\ & + W_l(k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il segnale ricostruito contiene il contributo del campione originario $a_{k,l}$, a cui si sovrappongono le distorsioni prodotte da ISI, ICI e rumore AWGN.

I campioni originali $a_{k,l}$ sono attenuati in ampiezza e ruotati in fase. In sistemi multiportante con N grande, l'attenuazione di ampiezza può dirsi trascurabile. La rotazione di fase, proporzionale all'indice di sottoportante e all'errore di sincronizzazione θ , può essere accorpata nella risposta di canale e facilmente eliminata dall'equalizzatore.

Ripetendo l'analisi per uno spostamento temporale θ negativo, corrispondente a un anticipo, ma compreso nell'intervallo $-N_{CP} \leq \theta < 0$, si scopre che il termine attenuativo e i contributi di ICI e ISI della (3.11) si annullano; resta unicamente la rotazione di fase, in accordo con l'espressione (3.8).

Infine, considerando un canale multi-percorso, l'intervallo dei valori di θ per cui non si presentano ICI e ISI si riduce dell'estensione della risposta di canale, ovvero $-N_{CP} + L - 1 \leq \theta < 0$.

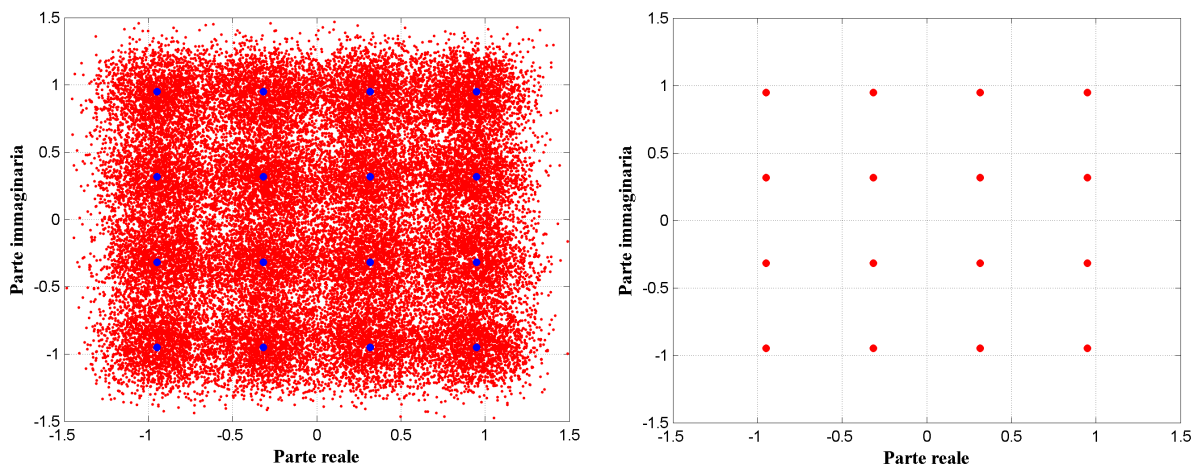


Figura 3.2: Esempio di sincronizzazione anticipata. A sinistra è mostrata la costellazione ricevuta. A destra la versione perfettamente equalizzata ($B_W = 5$ MHz, CP normale, no AWGN, no CFO, fading assente).

Per fornire un'idea intuitiva degli effetti descritti, è utile confrontare le costellazioni del segnale ricevuto ottenute prima e dopo aver effettuato l'equalizzazione. Si consideri, ad esempio, la ricezione di un segnale SC-FDMA, generato secondo lo standard LTE, non soggetto a rumore AWGN, a CFO e alle distorsioni del canale radio. Il segnale presenta banda $B_W = 5$ MHz, una banda allocata di 25 RB (la massima possibile), prefisso ciclico in configurazione normale e una modulazione 16-QAM.

Quando l'errore $\Delta\theta$ appartiene all'intervallo (3.7), si ottengono le costellazioni mostrate in figura 3.2. Una volta compensata la rotazione di fase nella (3.8), la costellazione originale è perfettamente ricostruita. Tuttavia, si osserva che la versione non equalizzata (a sinistra della figura 3.2) è irriconoscibile. Ripetendo l'esperimento per un segnale OFDM, i simboli di modulazione prima dell'equalizzazione apparirebbero semplicemente ruotati, preservando l'ampiezza corretta. Questa differenza è dovuta alla presenza, nella modulazione SC-FDMA, della precodifica tramite DFT. Nella catena di ricezione dell'SC-FDMA, ad essere ruotati sono i coefficienti $a_{k, l}$, ricavati dalla DFT del segnale ricevuto e pari alla combinazione lineare dei simboli di modulazione. Infatti, adattando l'equazione (3.8) al caso in esame (assenza di rumore e di cammini multipli), si trova

$$R_l(k) = a_{k, l} \cdot \exp(j2\pi k\Delta\theta/N) \quad 0 \leq k \leq (N-1) \quad (3.12)$$

Dopo aver riportato la continua al centro dello spettro, si selezionano dalla trasformata $R_l(k)$ i soli coefficienti di informazione corrispondenti alle M_{sc}^{PUSCH} sottoportanti allocate, indicati con il simbolo $z_l(k)$ (par. 2.3.5). L'espressione (3.12) diventa quindi

$$R_l(k') = z_l(p) e^{j2\pi k' \Delta\theta/N} \quad (3.13)$$

dove $p \in \{0, 1, \dots, (M_{sc}^{PUSCH} - 1)\}$ e k' è un sottoinsieme degli indici k , corrispondenti alle posizioni delle portanti allocate; i coefficienti dell'esponenziale nella (3.13) sono ancora definiti su base N . I simboli della costellazione ricevuta sono ottenuti invertendo l'operazione di transform precoding, calcolando la IFFT degli M_{sc}^{PUSCH} coefficienti $R_l(k')$. Si ottiene:

$$\hat{d}_l(m) = \frac{1}{\sqrt{M_{sc}^{PUSCH}}} \sum_{p=0}^{M_{sc}^{PUSCH}-1} z_l(p) e^{j2\pi k' \Delta\theta/N} e^{j2\pi mp/M_{sc}^{PUSCH}} \quad (3.14)$$

dove $m = 0, \dots, (M_{sc}^{PUSCH} - 1)$. Riorganizzando il termine esponenziale si trova

$$Q(p, k') = \exp[j2\pi(mpN - \Delta\theta k' M_{sc}^{PUSCH}) / (M_{sc}^{PUSCH} N)] \quad (3.15)$$

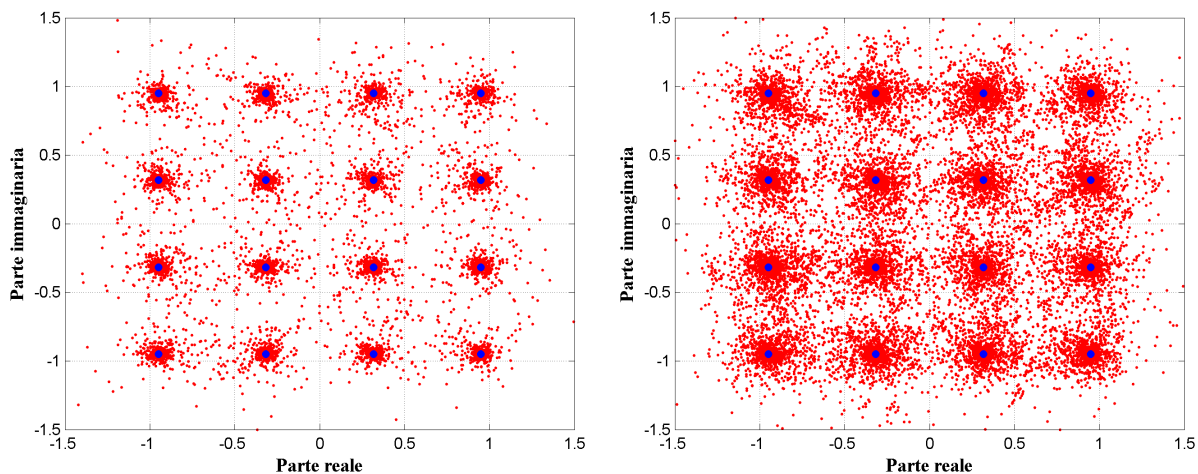


Figura 3.3: Due esempi di sincronizzazione ritardata. A sinistra il caso $\theta = 0.5N_{CP}$; a destra $\theta = 4N_{CP}$ ($B_W = 5$ MHz, CP normale, no AWGN, no CFO, fading assente).

Per il teorema di convoluzione della trasformata di Fourier, i simboli ricostruiti e non equalizzati $\hat{d}_l(m)$ in figura 3.2 si ottengono convolvendo i simboli originali $d_l(m)$ per la forma d'onda $Q(p, k')$.

Passando al caso in cui l'errore $\Delta\theta$ non è compreso nell'intervallo (3.7), si osserva l'effetto di ICI e ISI, che, anche dopo l'equalizzazione, non consente di ricostruire in modo esatto i dati trasmessi. Come mostra la figura 3.3, al crescere di $\Delta\theta$ i simboli della costellazione equalizzata diventano sempre più sparpagliati e di conseguenza cresce il tasso di errore sui simboli di modulazione ricostruiti (Symbol Error Rate, SER).

La figura 3.4 classifica la sincronizzazione temporale in base all'errore di stima $\Delta\theta$. In particolare, la sin-

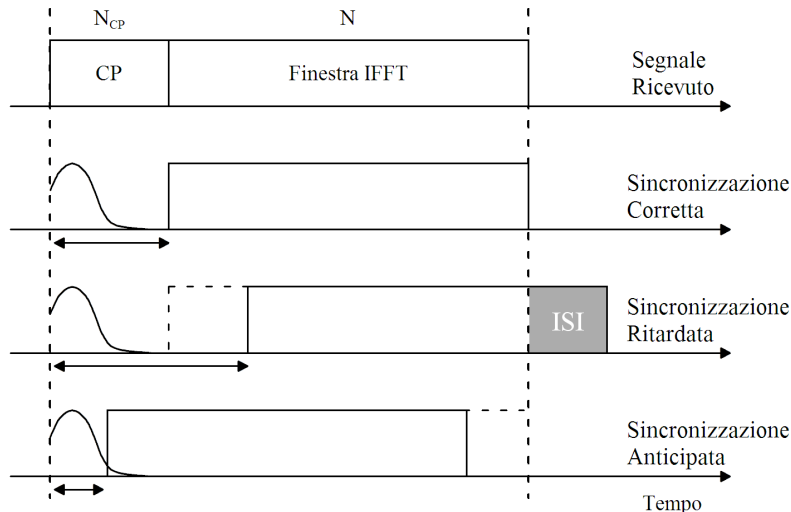


Figura 3.4: Classificazione della sincronizzazione temporale in base all'errore di stima $\Delta\theta$ del Timing Offset.

la sincronizzazione temporale si dice:

- *corretta* quando $\Delta\theta = 0$;
- *ritardata* se $\Delta\theta > 0$, ovvero quando gli ultimi campioni del simbolo corrente appartengono in realtà al simbolo successivo. Il segnale ricevuto, di espressione (3.9), è soggetto a ISI e ICI;
- *anticipata* per $\Delta\theta < 0$. Questa condizione presenta due casi notevoli distinti: se $(-N_{CP} + L - 1) \leq \Delta\theta < 0$, il segnale ricevuto, di equazione (3.8), non è perturbato e l'informazione trasmessa può essere recuperata correttamente; se $\Delta\theta \leq (-N_{CP} + L - 1)$, a causa della dispersione temporale del canale, una parte del simbolo SC-FDMA precedente si sovrappone ai campioni del simbolo corrente e si ritorna alla stessa espressione (3.9), valida per la sincronizzazione ritardata.

Si conclude che il requisito fondamentale per ottenere una sincronizzazione corretta è di mantenere l'errore della stima del Timing Offset nell'intervallo (3.7). Ipotizzando uno stimatore di TO non polarizzato, ci si aspetta che l'errore $\Delta\theta$ sia una variabile casuale con una distribuzione centrata in corrispondenza di $\Delta\theta = 0$. Quindi, la fuoriuscita di $\Delta\theta$ dall'intervallo (3.7) si presenta quasi esclusivamente nel caso di sincronizzazione ritardata. Per ridurre sensibilmente la probabilità di questo evento, una volta calcolata la stima $\hat{\theta}$, ci si sposta rispetto ad essa in anticipo di qualche campione. Nel nostro caso si è scelto un valore di traslazione ampiamente conservativo, pari a $N_{CP}/2$ campioni. Così facendo, il valore centrale della distribuzione di $\Delta\theta$ verrà traslato da 0 a $-N_{CP}/2$ e i valori corrispondenti alla sincronizzazione ritardata saranno molto meno probabili, perché compresi nella coda della distribuzione (figura 3.5). Nel capitolo 6, dove si analizzano le prestazioni dell'algoritmo, questo valore corrisponde al massimo errore tollerato in uscita dal sincronizzatore.

L'algoritmo di stima e correzione del Timing Offset è presentato nel par. 3.3.2.

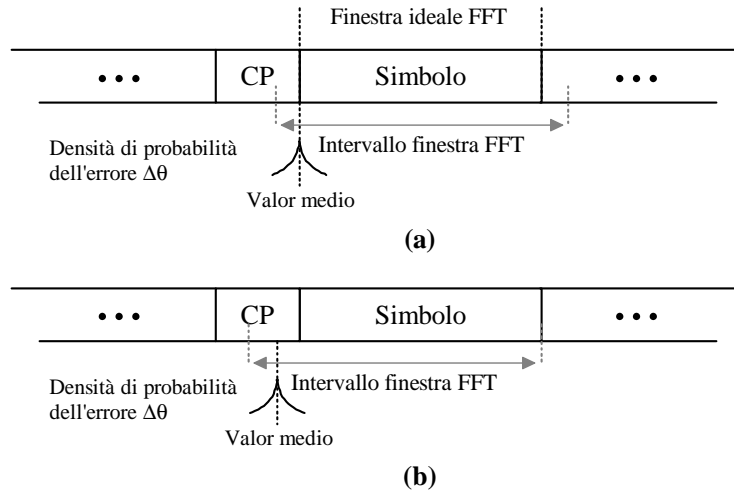


Figura 3.5: Anticipo della stima $\hat{\theta}$. (a) Stima originale. (b) Valore stimato dopo l'introduzione dell'anticipo.

3.1.2 Effetti del frequency offset

Il Carrier Frequency Offset rappresenta la traslazione delle sottoportanti rispetto alla frequenza di trasmissione teorica. Quando nel sistema ricevente non è presente un accurato algoritmo di stima e compensazione di questa non-idealità, le sottoportanti del segnale ricevuto non sono più ortogonali e interferiscono tra loro causando ICI (figura 1.10). Si consideri l'espressione generale del segnale ricevuto (3.5), quando la sincronizzazione temporale è esatta, ovvero $\hat{\theta} = \theta$:

$$r(n) = e^{j2\pi\epsilon n/N} \sum_l \sum_{m=0}^{L-1} h(m) s_l(n - m - lN_T) + w(n) \quad (3.16)$$

e si calcoli la trasformata di Fourier del simbolo SC-FDMA l -esimo, soggetto al CFO normalizzato $\epsilon = \nu_D/\Delta f$. Con semplici passaggi (par. A.2.2) si ottiene

$$R_l(k) = e^{j\phi_l} \sum_{p=0}^{N-1} a_{p,l} \cdot H(p) \cdot f_N(\epsilon + p - k) + W_l(k) \quad (3.17)$$

dove $\phi_l = \exp(j2\pi\epsilon l N_T/N)$ e $f_N(x)$ è data da

$$f_N(x) = \frac{\sin(\pi x)}{N \sin(\pi x/N)} e^{j\pi x(N-1)/N} \quad (3.18)$$

Gli effetti dell'errore di sincronizzazione sul segnale sono diversi a seconda che ν_D sia multiplo o meno della spaziatura tra sottoportanti Δf .

Se $\epsilon = \nu_D/\Delta f$ è intero, la (3.17) diventa

$$R_l(k) = e^{j\phi_l} a_{|k-\epsilon|_N, l} \cdot H(|k-\epsilon|_N) + W_l(k) \quad (3.19)$$

dove $|k-\epsilon|_N$ è il valore $(k-\epsilon)$ modulo N . L'equazione (3.19) indica che un CFO intero provoca solamente una traslazione delle sottoportanti di ϵ posizioni. Dunque, anche se i dati appaiono in posizioni errate all'uscita della DFT, l'ortogonalità tra le sottoportanti è preservata.

Quando ϵ ha un valore frazionario, le sottoportanti non sono più ortogonali e la (3.17) si può riscrivere come

$$R_l(k) = e^{j\phi_l} a_{k,l} \cdot H(k) \cdot f_N(\epsilon) + I_l(k, \epsilon) + W_l(k) \quad (3.20)$$

dove $I_l(k, \epsilon)$ rappresenta i contributi dovuti all'ICI.

È stato dimostrato in [6] che, per non degradare pesantemente le prestazioni del sistema, l'errore di stima del CFO frazionario ε non deve superare il 4-5% della spaziatura tra sottoportanti.

Nel seguito si considera unicamente un CFO frazionario, ovvero $-0.5 \leq \varepsilon \leq 0.5$, corrispondente in LTE all'intervallo non normalizzato $-7.5 \leq \nu_D \leq 7.5$ kHz.

Gli algoritmi di stima utilizzati dall'eNodeB per stimare e correggere il CFO del segnale ricevuto sono presentati nel par. 3.3.1.

3.1.3 Inseguimento del clock di campionamento

Gli oscillatori usati per generare il clock di campionamento in trasmissione e ricezione non hanno esattamente la stessa frequenza, dunque gli istanti di campionamento slittano lentamente tra loro. Si parla di *Sampling clock Frequency Offset*, (ScFO).

Nei sistemi multipiantante, questo problema provoca principalmente due tipologie di disturbi:

- una rotazione delle sottoportanti, dovuta al progressivo spostamento del tempo di simbolo;
- una penalità sul SNR a causa della perdita di ortogonalità tra le sottoportanti (ICI).

I valori massimi di ScFO tollerati dallo standard LTE sono pari a 0.15 ppm. Infatti, le deviazioni dell'oscillatore nell'eNodeB non devono superare 0.05 ppm (si veda la sezione 6.6.5.1 in [22]); il limite previsto per gli UE, più lasco, è pari a 0.1 ppm, come riportato nella sezione 5.6.1 in [27]. Poiché con questa precisione il degrado introdotto sulla forma d'onda può dirsi trascurabile, in questa sede non sono stati considerati metodi di stima e correzione dell'ScFO.

3.2 Algoritmi proposti in letteratura

Per quanto detto, si conclude che il segnale ricevuto è sensibile a due tipologie di errori di sincronizzazione:

- il CFO ν_D , causato dall'effetto Doppler e dall'instabilità degli oscillatori, che provoca la perdita di ortogonalità delle sottoportanti e l'introduzione di ICI;
- il Timing Offset θ , dovuto alla mancata conoscenza in ricezione dell'istante iniziale della trama e dei simboli SC-FDMA che la compongono, fonte di ISI e ICI quando l'errore di stima $\Delta\theta$ cade al di fuori dell'intervallo (3.7).

Ricordando l'espressione (3.5) del segnale ricevuto in presenza di errori di sincronizzazione

$$r(n) = e^{j2\pi\varepsilon n/N} \sum_l \sum_{m=0}^{L-1} h(m) s_l(n - \theta - m - lN_T) + w(n)$$

l'obiettivo degli algoritmi proposti è di calcolare opportune stime di ε e θ , indicate rispettivamente con $\hat{\varepsilon}$ e $\hat{\theta}$, elaborando i campioni del segnale ricevuto. Il valore $\hat{\varepsilon}$ viene utilizzato per rimuovere dai campioni $r(n)$ la rotazione di fase causata dal CFO, mentre la stima $\hat{\theta}$ consente di posizionare correttamente la finestra DFT del ricevitore.

Inizialmente, nella fase di progetto degli algoritmi proposti, sono stati studiati alcuni metodi già presenti in letteratura, per comprendere le difficoltà del loro utilizzo nella tratta di Uplink LTE.

In particolare è stato studiato l'algoritmo di *Schmidl e Cox* [24] e, successivamente, una sua variante basata sul prefisso ciclico e proposta da van de Beek et al. in [25].

3.2.1 L'algoritmo di Schmidl e Cox

L'algoritmo di Schmidl e Cox (*SC*) è basato sulla presenza nel segnale ricevuto di speciali *simboli di riferimento*, composti da blocchi di N campioni e caratterizzati da una struttura ripetitiva nel dominio del tempo. Si scopre

che, sfruttando la correlazione tra le parti ripetute del simbolo, è possibile costruire un robusto algoritmo di sincronizzazione, in grado di stimare sia ϵ che θ .

Più in dettaglio, si suppone che, all'inizio di ogni trama, venga trasmesso un simbolo di riferimento composto da due metà identiche di lunghezza $N/2$. Se $N/2$ è maggiore di L , lunghezza della CIR in campioni, le due metà del simbolo rimarranno del tutto identiche anche in ricezione, eccetto per la traslazione di fase introdotta dal CFO (osservazione esatta solo in assenza di rumore e con un canale lentamente variabile nel tempo). I campioni ricevuti, corrispondenti alla prima metà del simbolo, si possono scrivere come:

$$r(n) = s(n)e^{j2\pi\epsilon n/N} + w(n) \quad , \quad \text{con } \theta \leq n \leq (\theta + N/2 - 1) \quad (3.21)$$

dove $s(n)$ è il segnale utile e $w(n)$ è il rumore; quelli della seconda metà sono pari a

$$r(n + N/2) = s(n)e^{j2\pi\epsilon n/N} e^{j\pi\epsilon} + w(n + N/2) \quad , \quad \text{con } \theta \leq n \leq (\theta + N/2 - 1) \quad (3.22)$$

Sfruttando le espressioni (3.21) e (3.22), è possibile ricavare una stima dell'istante iniziale della trama $\hat{\theta}$ calcolando la funzione di autocorrelazione normalizzata [24]

$$\Gamma(m) = \frac{\sum_{q=m}^{m+N/2-1} r(q + N/2)r^*(q)}{\sum_{q=m}^{m+N/2-1} |r(q + N/2)|^2} \quad (3.23)$$

per ogni campione m del segnale ricevuto. Ci si aspetta che il massimo del modulo della (3.23) raggiunga il suo valore massimo quando l'istante m coincide con l'inizio di un simbolo di riferimento, ossia quando le due metà sono sovrapposte. La stima $\hat{\theta}$ è pari a

$$\hat{\theta} = \arg \max_m \{|\Gamma(m)|\} \quad (3.24)$$

Inoltre, valutando la fase di $\Gamma(m)$ per $m = \hat{\theta}$, si ricava una stima $\hat{\epsilon}$ del CFO; infatti, se in corrispondenza di $\hat{\theta}$ le due metà sono effettivamente sovrapposte ($\hat{\theta} = \theta$), la fase della funzione $\Gamma(m)$ coincide con quella del termine esponenziale $e^{j\pi\epsilon}$. Dunque

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{\pi} \arg \left\{ \sum_{n=\theta}^{\theta+N/2-1} r(n + N/2)r^*(n) \right\} \quad (3.25)$$

Questo metodo può essere applicato solo se nel segnale ricevuto sono presenti simboli di riferimento con le caratteristiche descritte. Anche la trasmissione PUSCH contiene simboli SC-FDMA con contenuto noto in ricezione, ovvero i Reference Signals, ma la loro struttura non presenta le periodicità richieste dall'algoritmo S&C.

3.2.2 L'algoritmo di van de Beek

Per ovviare a questo problema, si è deciso di utilizzare l'algoritmo di van de Beek [25]; esso è concettualmente simile allo S&C, ma il suo utilizzo non richiede esplicitamente la presenza di simboli con particolari simmetrie. Si consideri un blocco composto da $2N + N_{CP}$ campioni consecutivi del segnale ricevuto $r(n)$, di espressione (3.5). Così facendo si è sicuri di considerare un intero simbolo SC-FDMA completo di CP pur non conoscendo la sua posizione θ all'interno del blocco. Si definiscano gli insiemi di indici $U = \{\theta, \dots, \theta + N_{CP} - 1\}$ e $U' = \{\theta + N, \dots, \theta + N + N_{CP} - 1\}$ come in figura 3.6. Il primo contiene gli indici dei campioni del prefisso ciclico, mentre il secondo corrisponde ai campioni usati per costruirlo. Se $n \in \{U \cup U'\}$ i campioni $r(n)$ sono correlati a coppie, ovvero:

$$\forall n \in U : \quad E\{r(n)r^*(n+m)\} = \begin{cases} \sigma_s^2 + \sigma_w^2 & , m = 0 \\ \sigma_s^2 e^{-j2\pi\epsilon} & , m = N \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases} \quad (3.26)$$

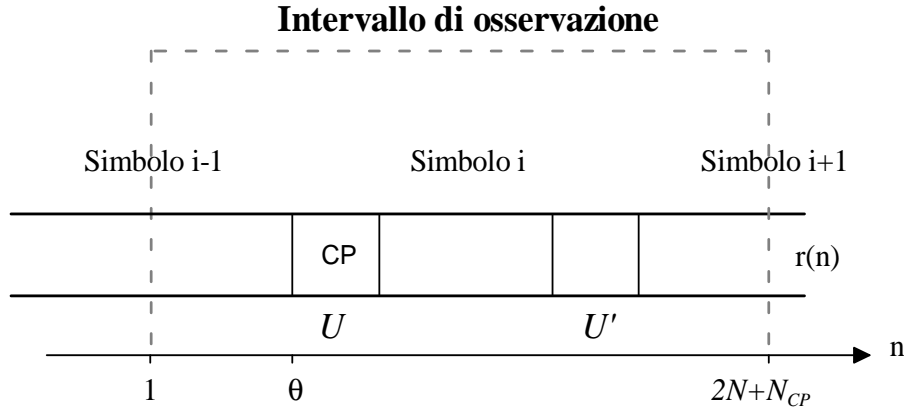


Figura 3.6: Blocco estratto dal segnale ricevuto di dimensione $2N + N_{CP}$ campioni. Sono indicati gli insiemi U e U' .

mentre i restanti campioni del blocco $r(n)$, $n \notin U \cup U'$, sono incorrelati. Indicando con \mathbf{r} il blocco di dimensione $2N + N_{CP}$ e volendo stimare i parametri θ ed ϵ , si definisce la funzione di log-verosimiglianza $\Lambda(\theta, \epsilon)$ come il logaritmo della densità di probabilità $f(\mathbf{r}|\theta, \epsilon)$ dei campioni osservati condizionata a θ ed ϵ . Sfruttando la (3.26), la log-verosimiglianza diventa

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\theta, \epsilon) &= \log[f(\mathbf{r}|\theta, \epsilon)] \\
 &= \log \left(\prod_{n \in U} f(r(n), r(n+N)) \prod_{n \notin U \cup U'} f(r(n)) \right) \\
 &= \log \left(\prod_{n \in U} \frac{f(r(n), r(n+N))}{f(r(n))f(r(n+N))} \prod_n f(r(n)) \right)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Quando i campioni di \mathbf{r} sono variabili casuali con distribuzione gaussiana complessa, la (3.27) diventa [25]

$$\Lambda(\theta, \epsilon) = |\gamma(\theta)| \cos(2\pi\epsilon + \angle\gamma(\theta)) - \rho\phi(\theta) \tag{3.28}$$

dove il simbolo \angle indica l'argomento di un numero complesso. I termini presenti nella (3.28) sono rispettivamente:

$$\gamma(m) = \sum_{n=m}^{m+N_{CP}-1} r(n)r^*(n+N) \tag{3.29}$$

$$\phi(m) = \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{m+N_{CP}-1} |r(n)|^2 + |r(n+N)|^2 \tag{3.30}$$

$$\rho = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_w^2} = \frac{SNR}{SNR + 1} \tag{3.31}$$

Le stime a massima verosimiglianza di θ, ϵ si ottengono massimizzando la funzione (3.28) in due passi:

$$\max_{(\theta, \epsilon)} \Lambda(\theta, \epsilon) = \max_{\theta} \left(\max_{\epsilon} \Lambda(\theta, \epsilon) \right) = \max_{\theta} \Lambda(\theta, \hat{\epsilon}_{ML}(\theta))$$

Il massimo rispetto al CFO si ottiene quando il termine con il coseno nella (3.28) è pari a uno; la stima ML di ϵ è quindi

$$\hat{\epsilon}_{ML}(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \angle\gamma(\theta)$$

Inoltre, poiché $\cos(2\pi\hat{\epsilon}_{ML}(\theta) + \angle\gamma(\theta)) = 1$, la funzione di verosimiglianza diventa

$$\Lambda(\theta, \hat{\epsilon}_{ML}(\theta)) = |\gamma(\theta)| - \rho\phi(\theta) \tag{3.32}$$

Il secondo problema, ben più grave, consiste nell'influenza della banda allocata B_{used} sulle prestazioni del metodo. Grazie alle simulazioni effettuate, si è scoperto che l'algoritmo funziona con prestazioni accettabili solo se almeno un quinto delle sottoportanti disponibili sono occupate da dati di utente, ovvero non hanno ampiezza nulla.

Si consideri, ad esempio, un segnale PUSCH con banda di sistema $B_W = 5$ MHz, la cui banda disponibile è pari a 4.5 MHz (ovvero 25 RB). Supponendo completa assenza di perturbazioni, si calcola la metrica (3.32) per ogni campione del segnale. Come anticipato, essa presenta un andamento dipendente dal numero di sottoportanti occupate dagli utenti.

La figura 3.8 mostra la metrica $\Lambda(n)$ ottenuta nel caso in cui vengano allocate *tutte* le risorse disponibili. I picchi

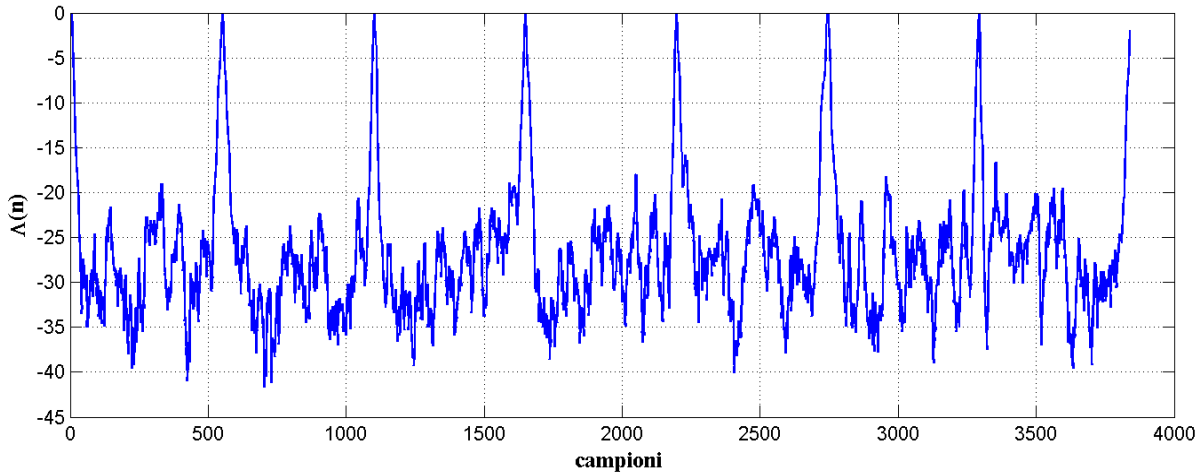


Figura 3.8: Log-verosimiglianza per $B_W = 5$ MHz e 25 RB allocati.

della metrica sono ben visibili e facilmente localizzabili: ciò permette di stimare il CFO con buona precisione. Diminuendo il numero di RB nascono picchi dove non dovrebbero essere presenti, dapprima con valori inferiori rispetto ai picchi corretti (figura 3.9) Riducendo ulteriormente il numero di sottoportanti utilizzate, nascono

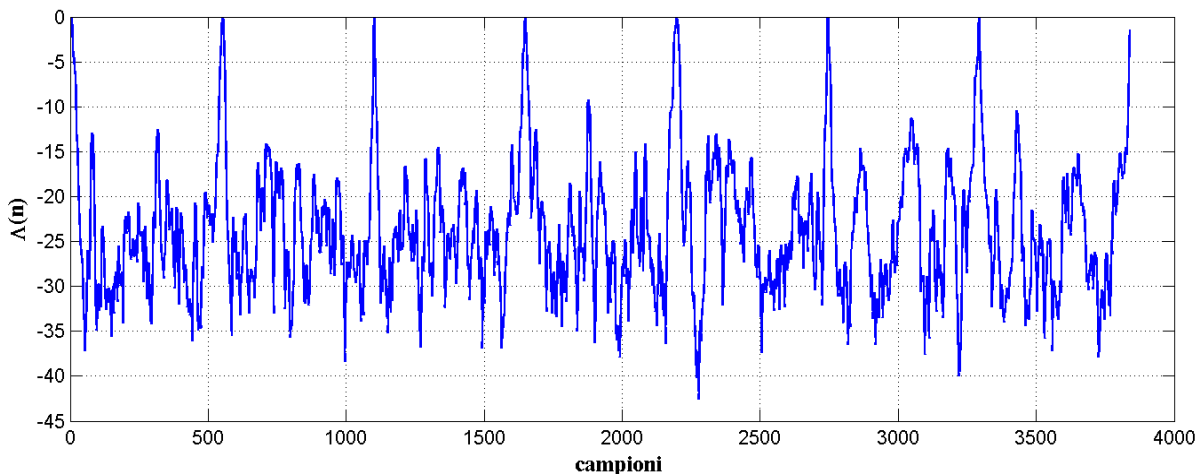


Figura 3.9: Log-verosimiglianza per $B_W = 5$ MHz e 10 RB allocati.

picchi spuri con valore di correlazione normalizzata maggiore di 1. Essi sono causati dalla correlazione esistente tra i campioni del segnale acquisito. Quando la banda allocata è pari a soli 3 RB, i picchi spuri superano sensibilmente in ampiezza quelli autentici, rendendo di fatto impossibile il riconoscimento dell'inizio dei simboli e la stima del CFO (figura 3.10).

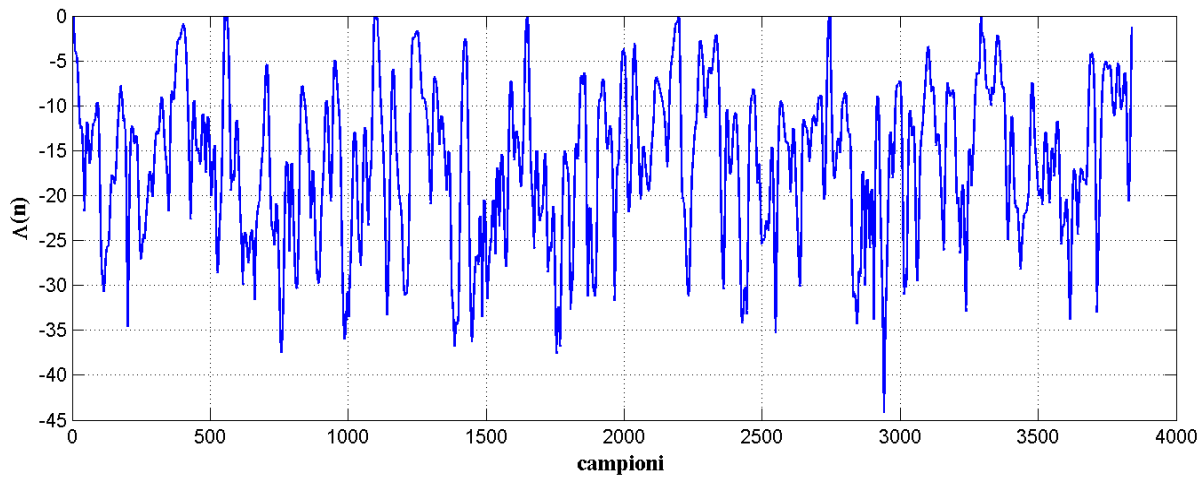


Figura 3.10: Log-verosimiglianza per $B_W = 5$ MHz e 3 RB allocati.

Si conclude che, per bande allocate molto ridotte, non è possibile individuare nell'intera metrica $\Lambda(\theta, \hat{\epsilon}_{ML}(\theta))$ le posizioni dei picchi autentici. È necessario trovare un metodo alternativo capace di individuare le posizioni iniziali dei simboli SC-FDMA, anche in modo approssimativo, e applicare il metodo di van de Beek solamente in un intorno limitato di quelle posizioni.

La qualità della stima $\hat{\epsilon}_{ML}$ è comunque influenzata da tre fattori:

- la banda allocata B_{used} ;
- il Rapporto Segnale-Rumore (SNR) [25];
- la lunghezza del prefisso ciclico N_{CP} [25].

Per affrontare i problemi discussi, è stato proposto un algoritmo capace di sfruttare la presenza dei Reference Signals, e in particolare le loro proprietà di auto e cross-correlazione (si veda l'appendice C). Si è scoperto che, grazie ad essi, è possibile effettuare la sincronizzazione di simbolo con grande precisione, a condizione che siano valide determinate condizioni esplicitate nel seguito. Una volta noto un insieme circoscritto di posizioni, classificate come probabili istanti iniziali di un simbolo SC-FDMA, si applica l'algoritmo basato sul CP, allo scopo di confermare o negare la validità della classificazione precedente. Le posizioni che passano entrambe le selezioni sono considerate istanti iniziali di simboli SC-FDMA, da cui è possibile stimare il CFO.

Dopo aver compensato il segnale ricevuto con questa stima, viene applicato alla forma d'onda corretta un algoritmo per la sincronizzazione di trama, basato anch'esso sui Reference Signals.

3.3 L'algoritmo di sincronizzazione

L'algoritmo di sincronizzazione proposto è suddiviso in due fasi distinte, rappresentate nello schema a blocchi di figura 3.11:

- *sincronizzazione in frequenza*, descritta nel par. 3.3.1 e composta da due passi intermedi:
 - *sincronizzazione di simbolo SC-FDMA*, che permette di trovare le posizioni $\hat{\theta}_{\text{symp}}$ dei simboli SC-FDMA su cui è trasmesso un RS scelto;
 - *stima e correzione del CFO*, in cui, a partire dalle posizioni stimate $\hat{\theta}_{\text{symp}}$, si calcola la stima del CFO $\hat{\epsilon}$ e si corregge con essa il segnale ricevuto;
- *sincronizzazione nel tempo*, presentata nel par. 3.3.2, che restituisce la posizione stimata $\hat{\theta}_{\text{frame}}$ della prima trama completa nel segnale ricevuto.

I blocchi che implementano le due fasi sono interdipendenti: infatti, senza una stima sufficientemente accurata del CFO (prima fase) la sincronizzazione nel tempo può divenire più imprecisa, fino a restituire risultati completamente errati.

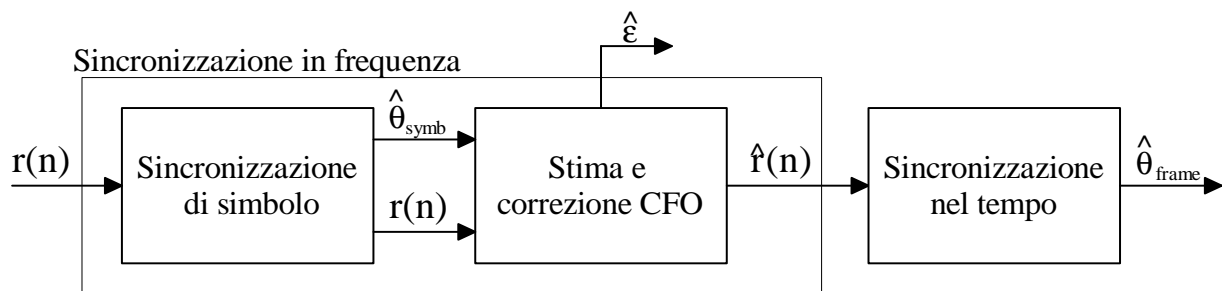


Figura 3.11: Schema a blocchi dell'algoritmo di sincronizzazione proposto.

L'algoritmo di sincronizzazione nel tempo ricerca nella forma d'onda ricevuta le posizioni dei Reference Signals e le utilizza per stimare l'istante di inizio della trama (BOF, Begin of Frame). Per trovare tali posizioni si calcola la cross-correlazione $R_{ry}(n)$ nel dominio del tempo tra il segnale ricevuto $r(n)$ e i Reference Signals originali $y(n)$, ovvero privi di disturbi, e si cercano i valori di $R_{ry}(n)$ superiori a una certa soglia. Ci si aspetta, come per l'algoritmo basato sul CP, che, nell'istante n' in cui il RS originale e quello trasmesso si sovrappongono, la funzione $R_{ry}(n)$ raggiunga un picco, di valore molto elevato e facilmente distinguibile dal rumore.

Tuttavia, la presenza del CFO causa una graduale riduzione dell'intensità di $R_{ry}(n)$ in corrispondenza delle posizioni dei RS $y(n)$. I picchi corrispondenti ai RS $y(n)$ diventano paragonabili in ampiezza al rumore e ai picchi di altri RS presenti nella trama; non potendo individuare le posizioni volute, la sincronizzazione fallisce. L'introduzione della sincronizzazione in frequenza a monte della sincronizzazione temporale permette a quest'ultima di operare in condizioni adeguate, posto che l'errore di stima $\Delta\epsilon = (\hat{\epsilon} - \epsilon)$ sia sufficientemente ridotto.

3.3.1 Sincronizzazione in frequenza

Per effettuare la sincronizzazione in frequenza, sono stati proposti due algoritmi:

- *Algoritmo Standard Duty (SD)*, così chiamato perché raggiunge le prestazioni volute con bande allocate sufficientemente estese. Quando vengono allocate poche portanti, l'algoritmo diventa estremamente sensibile al rumore AWGN e l'errore di stima aumenta in modo inaccettabile;
- *Algoritmo Heavy Duty (HD)*, rappresenta una versione modificata del primo algoritmo, a cui sono state aggiunte alcune operazioni aggiuntive, mirate a migliorare le prestazioni quando la banda allocata è molto ridotta.

Inizialmente si descrive l'algoritmo SD, il cui schema a blocchi è riportato in figura 3.12. Dopo aver illustrato le cause che ne provocano il malfunzionamento, si illustrano le soluzioni introdotte dall'algoritmo HD.

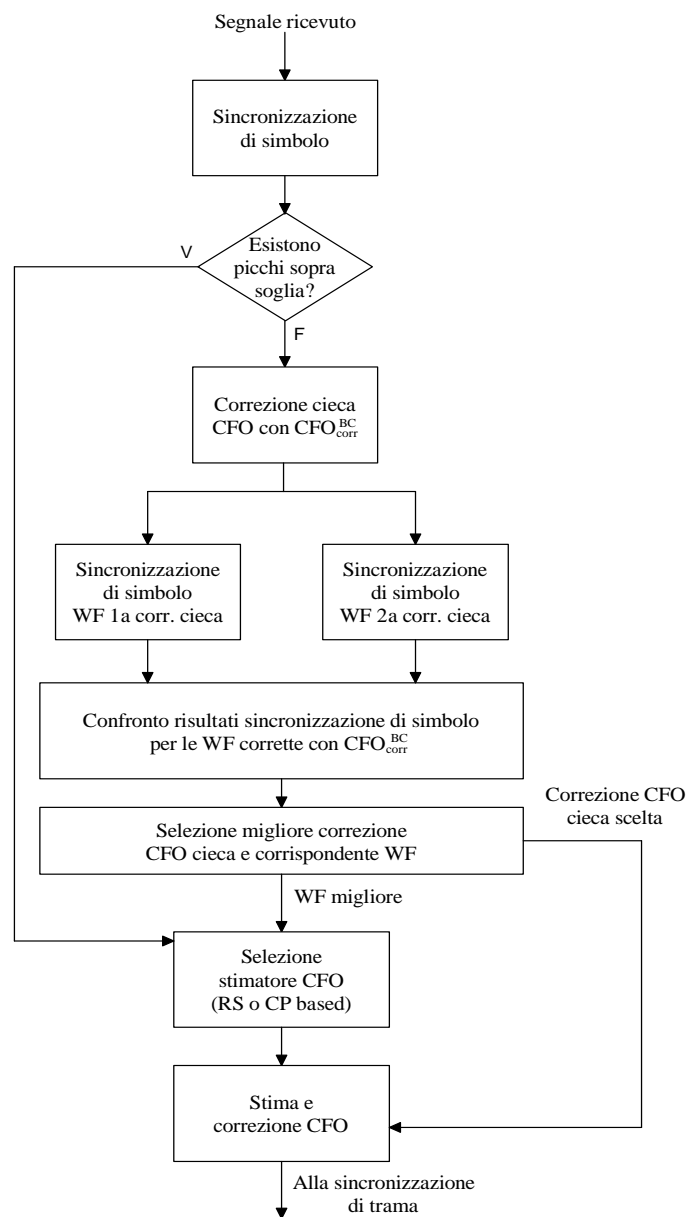


Figura 3.12: Schema a blocchi dell'algoritmo Standard Duty.

3.3.1.1 Sincronizzazione di simbolo

Nel paragrafo 3.2.3 sono state descritte le difficoltà incontrate nell'applicare a un segnale LTE l'algoritmo di van de Beek per la stima del CFO. Come vedremo, la soluzione resta valida e affidabile, ma deve essere preceduta da una tecnica di sincronizzazione di simbolo basata sui Reference Signals.

Prima di descrivere l'algoritmo SD si definiscono le caratteristiche della forma d'onda utilizzata nelle elaborazioni. Si suppone che il segnale ricevuto abbia una durata di almeno 20 ms, per garantire che al suo interno sia presente una trama completa, di durata $T_{frame} = 10$ ms. La struttura del segnale acquisito si presenta come in figura 3.13. Essa è composta da due spezzoni di trama agli estremi e da una trama completa al centro.

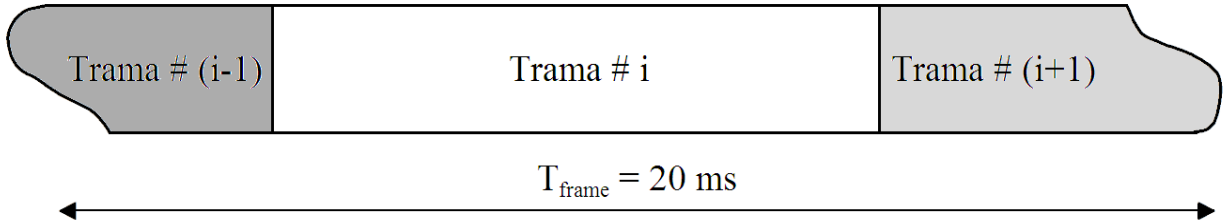


Figura 3.13: Esempio di segnale acquisito.

L'operazione fondamentale e più onerosa dell'algoritmo SD consiste nel calcolare la cross-correlazione tra il segnale ricevuto $r(n)$ e uno dei 20 RS $y(n)$ trasmessi all'interno della trama, normalizzata dall'energia del RS $y(n)$:

$$R_{ry}(n) = \frac{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} r(n+m)y^*(m)}{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} |y(m)|^2} \quad (3.36)$$

Come osservato in appendice C e nel par. 2.4.1, ciascuna sequenza RS è identificata in modo univoco dalla terna di parametri u , v e α . La variazione di questi parametri all'interno della trama è regolata dalla configurazione della modalità di hopping. Si possono riscontrare tre diverse situazioni (par. C.3.3):

- il Sequence Group Hopping (SGH) è disabilitato: il valore di $u \in \{0, \dots, 29\}$ rimane costante;
- il Sequence Hopping (SH) è disabilitato: il valore di $v \in \{0, 1\}$ rimane costante;
- sia SGH che SH sono disattivati: l'unico parametro che distingue le sequenze è la traslazione angolare $\alpha = m(\pi/6)$, con $m = 0, 1, \dots, (N_\alpha - 1)$ e $N_\alpha = 12$. Poiché queste traslazioni sono 12 in tutto e gli slot di ogni trama sono 20 esisteranno giocoforza sequenze di RS ripetute nella trama. Tale evento può manifestarsi anche quando il SH o il GH sono abilitati, ma con minor frequenza (par. C.3.3).

Per quanto detto, è naturale calcolare la cross-correlazione utilizzando il RS $y(n)$ presente nella trama il maggior numero di volte.

Successivamente, si confronta il modulo di $R_{ry}(n)$ con la soglia thr_{CFO} . I valori superiori a questa soglia corrispondono a possibili posizioni di inizio simbolo, ovvero:

$$|R_{ry}(p_i)| \geq thr_{CFO} \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{peaks}^{RS}\} \quad (3.37)$$

dove N_{peaks}^{RS} è il numero di picchi sopra soglia, i coefficienti $0 \leq p_i \leq (N_{WF} - 1)$ sono gli ipotetici istanti iniziali di un simbolo SC-FDMA e N_{WF} è la durata della forma d'onda in campioni. Il dimensionamento del valore di thr_{CFO} viene discusso nel par. 3.3.1.2.

Inizialmente si ipotizza che il confronto (3.37) abbia restituito almeno un picco p_i sopra soglia, ovvero $N_{peaks}^{RS} > 0$. Si è osservato sperimentalmente che le posizioni dei picchi sopra soglia possono appartenere a tre tipologie (figura 3.14):

- picchi effettivamente corrispondenti al Reference Signal che si sta cercando;

- picchi ottenuti correlando il RS $y(n)$ con altri RS caratterizzati dagli stessi valori dei parametri u e v , ma con diversa traslazione angolare α ;
- picchi di rumore, la cui presenza diventa significativa per bassi SNR e bande B_{used} ridotte.

Come discusso, i picchi corretti possono essere più d'uno, poiché il segnale elaborato ha una durata di 20 ms e il RS $y(n)$ può comparire più volte nella stessa trama. I picchi corrispondenti ad altri RS sono paragonabili in ampiezza a quelli corretti, e corrispondono a posizioni traslate di Δ_α campioni rispetto all'inizio del simbolo SC-FDMA [2].

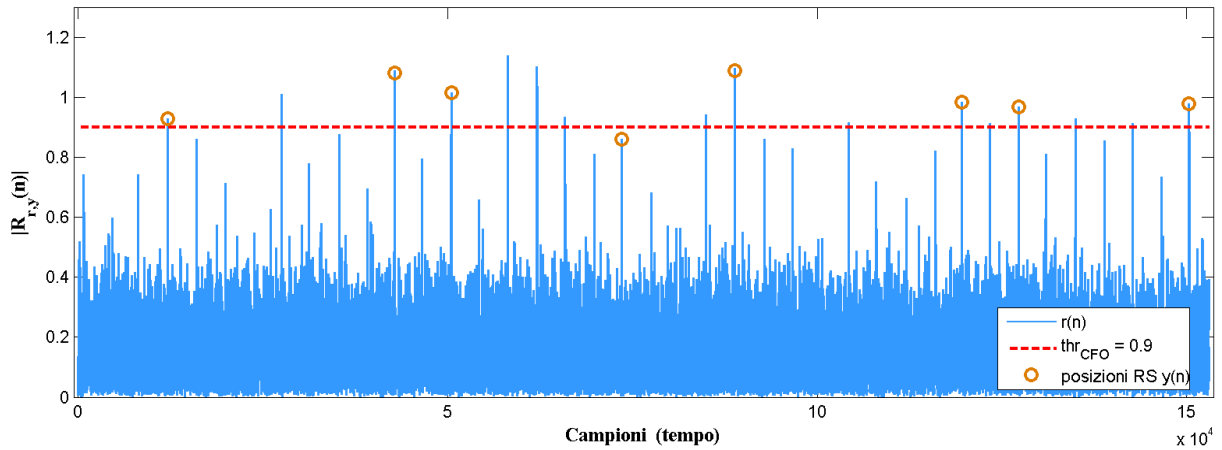


Figura 3.14: Esempio dell'andamento di $|R_{ry}(n)|$ per $B_W = 5$ MHz. Si nota la presenza di picchi non corrispondenti al RS $y(n)$ cercato.

Per individuare tra le posizioni p_i quelle corrette, si utilizza l'algoritmo di van de Beek [25].

Il procedimento descritto viene ripetuto per tutti gli N_{peaks}^{RS} picchi ricavati in precedenza:

- si seleziona la posizione p_i e si ricava da essa l'ipotetica posizione del primo RS contenuto nel segnale. Poiché i RS sono distanziati tra loro di uno slot, la posizione $\check{p}_{i,0}$ del primo RS è

$$\check{p}_{i,0} = \text{mod}(p_i, N_{slot}^{samp}) \quad (3.38)$$

dove N_{slot}^{samp} è la durata di uno slot espressa in campioni (figura 3.15);

- si calcolano i valori della funzione $\gamma(m)$, definita nella (3.29) e di $\Lambda(m)$, data dalla relazione (3.32), per l'argomento $m = \check{p}_{i,0}$:

$$\gamma(\check{p}_{i,0}) = \sum_{n=\check{p}_{i,0}}^{\check{p}_{i,0}+N_{CP}-1} r(n)r^*(n+N) \quad (3.39)$$

$$\Lambda(\check{p}_{i,0}) = |\gamma(\check{p}_{i,0})| - \rho\phi(\check{p}_{i,0}) \quad (3.40)$$

dove $\phi(m)$ è definita nella (3.30) e ρ è definita nella (3.31);

- ci si sposta dalla posizione $\check{p}_{i,0}$ esattamente di un simbolo SC-FDMA, ovvero di

$$\check{p}_{i,1} = \check{p}_{i,0} + (N_{FFT} + N_{CP}) \quad (3.41)$$

campioni e si calcola nuovamente la coppia di funzioni $\gamma(m)$ e $\Lambda(m)$ in $m = \check{p}_{i,1}$;

- si ripetono le operazioni descritte nel punto precedente per $(M_{corr}^{CP} - 1)$ volte, ricavando ad ogni passo la generica posizione $\check{p}_{i,k} = \check{p}_{i,0} + k(N_{FFT} + N_{CP})$, dove $k = \{1, 2, \dots, M_{corr}^{CP} - 1\}$;

- infine, i risultanti valori di $\gamma(m)$ e $\Lambda(m)$ sono salvati in opportuni vettori di lunghezza M_{corr}^{CP} .

Una volta completato il processo, si calcola la media degli M_{corr}^{CP} valori di $\Lambda(m)$ in modo da ridurre l'influenza del rumore sulla stima. Si ottiene così un vettore di medie

$$\bar{\Lambda}_i = \frac{1}{M_{corr}^{CP}} \sum_{k=0}^{M_{corr}^{CP}-1} \Lambda(\check{p}_{i,k}) \quad , \quad \text{con } i \in \{1, \dots, N_{peaks}^{RS}\} \quad (3.42)$$

di dimensione N_{peaks}^{RS} . Se tutto ha funzionato correttamente, la posizione i -esima associata al massimo di questo vettore

$$p_{\max} = \max_i \{\bar{\Lambda}_i\} \quad (3.43)$$

corrisponde all'istante iniziale di un simbolo SC-FDMA.

Infine, gli M_{corr}^{CP} valori della funzione $\gamma(m)$, calcolati in corrispondenza della posizione p_{\max} , sono inviati in ingresso allo stimatore di CFO basato sul CP.

È possibile che il valore massimo di $\bar{\Lambda}_i$ sia associato a più posizioni p_i , in quanto il RS cercato può essere presente più volte nella trama (figura 3.15). Se le posizioni p_i e p_j corrispondono a due repliche distinte dello stesso RS, esse sono separate tra loro da un numero di campioni multiplo di N_{slot}^{samp} ; applicando ad esse la formula (3.38) si ricostruisce la stessa posizione $\check{p}_{i,0} = \check{p}_{j,0} = p_0$. Di conseguenza le funzioni $\Lambda(m)$ e $\gamma(m)$ sono calcolate nelle stesse posizioni e le medie $\bar{\Lambda}_i$ e $\bar{\Lambda}_j$ coincidono. Imponendo la condizione (3.43) è possibile ricavare tutte le posizioni corrispondenti all'inizio del RS $y(n)$ cercato che hanno superato il valore di soglia thr_{CFO} . Questo aspetto si rivelerà utile per migliorare la qualità della stima di CFO basata sui RS (si veda il par. 3.3.1.3.2).

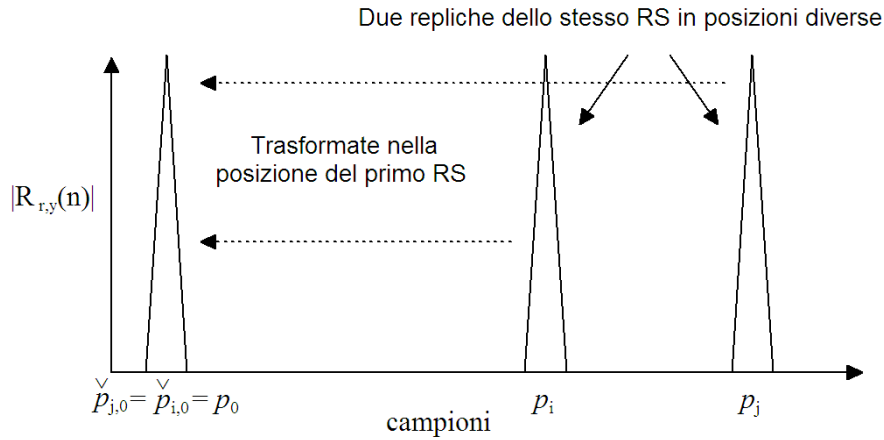


Figura 3.15: Trasformazione delle posizioni di due picchi di cross-correlazione associati allo stesso RS nella posizione del primo RS della trama.

3.3.1.2 Correzione cieca del CFO

Quando la relazione (3.37) non restituisce alcun picco sopra soglia, l'algoritmo SD effettua una sequenza di passi aggiuntivi, come illustrato in figura 3.12.

Le sequenze di ZC, da cui derivano i RS, sono molto resistenti al rumore (par. C.3.1); ciò consente di localizzare i RS nel segnale anche per bassi valori di SNR.

Molto più dannosa per questi segnali è la perturbazione causata dal CFO (si veda il par. C.3.2). Calcolando, in assenza di rumore, il modulo della correlazione $R_{xy}(m)$ tra un RS perturbato da CFO e una sua replica non distorta per $m = 0$ (perfetta sovrapposizione tra i segnali di interesse) si trova un andamento simile a

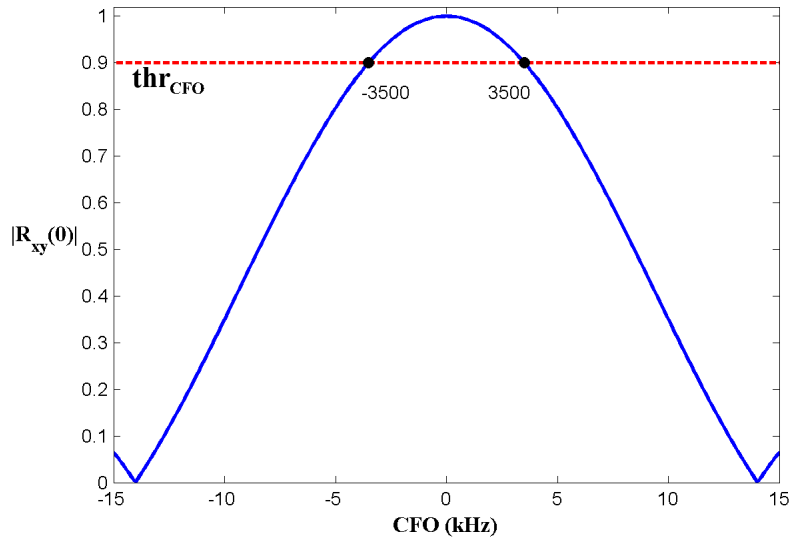


Figura 3.16: Effetto del CFO sul massimo della cross-correlazione tra un RS perturbato e una sua replica non distorta.

quello riportato in figura 3.16. Nello stesso grafico è mostrato, a titolo di esempio, un possibile valore della soglia thr_{CFO} ; i valori di CFO messi in rilievo, pari a ± 3.5 kHz, rappresentano i limiti dell'intervallo G_{CFO} per cui $|R_{xy}(0)| \geq thr_{CFO}$. Più in generale, si definisce

$$G_{CFO} : \{g_{CFO}^{\min}, g_{CFO}^{\max}\} \quad (3.44)$$

dove $g_{CFO}^{\min} = -g_{CFO}^{\max}$, ovvero G_{CFO} è simmetrico, e g_{CFO}^{\max} dipende dal valore di soglia thr_{CFO} .

Quando il CFO non ricade nell'intervallo G_{CFO} , anche il modulo della cross-correlazione $R_{ry}(m)$, definita nella formula (3.36), può non varcare la soglia thr_{CFO} ; inoltre i picchi autentici tendono a confondersi con i campioni di rumore e con i picchi associati ad altri RS.

Viceversa, se la funzione $|R_{ry}(m)|$ non supera la soglia thr_{CFO} , significa che il CFO non è compreso nell'intervallo G_{CFO} . In questi casi, è necessario anteporre alla sincronizzazione di simbolo una tecnica di riduzione del CFO, senza averne stimato il valore.

La tecnica proposta è chiamata *correzione cieca del CFO* e consiste nel correggere il segnale ricevuto con valori di CFO prestabiliti, contenuti nel vettore CFO_{corr}^{blind} .

Poiché il CFO è compreso nell'intervallo $-\Delta f/2 \leq CFO \leq \Delta f/2$ e il suo segno è incognito, è necessario definire almeno due correzioni, di pari valore e di segno opposto. Il vettore CFO_{corr}^{blind} si può esprimere come:

$$CFO_{corr}^{blind} = \{\pm f_{CFO,blind}\} \quad (3.45)$$

L'introduzione di ulteriori correzioni non migliora le prestazioni del metodo ma influisce negativamente sulla sua complessità.

L'algoritmo di correzione cieca è composto dai seguenti passi:

- si costruiscono le due versioni corrette del segnale originale, corrispondenti a ciascuno dei valori $\pm f_{CFO,blind}$. Si ottengono i segnali $r_1(n)$ e $r_2(n)$, di espressione:

$$\begin{aligned} r_1(n) &= r(n) \cdot \exp(-j2\pi \varepsilon_{CFO,blind}/N) \\ r_2(n) &= r(n) \cdot \exp(j2\pi \varepsilon_{CFO,blind}/N) \end{aligned} \quad (3.46)$$

dove $\pm \varepsilon_{CFO,blind} = f_{CFO,blind}/\Delta f$ sono le correzioni normalizzate dalla spaziatura tra sottoportanti Δf .

- si applica a ciascuno dei segnali $r_1(n)$ e $r_2(n)$ l'algoritmo di sincronizzazione di simbolo, descritto nel

paragrafo precedente. Si ricavano le posizioni dei picchi p_i e si calcolano i corrispondenti valori della funzione Λ ;

- si costruisce il vettore v_{\max}^{blind} contenente il massimo dei valori $\bar{\Lambda}_i$, definiti nella (3.42), per ciascuno dei segnali $r_1(n)$ e $r_2(n)$:

$$v_{\max}^{blind} = \{\max[\bar{\Lambda}_i(f_{CFO,blind})], \max[\bar{\Lambda}_i(-f_{CFO,blind})]\} \quad (3.47)$$

La correzione cieca associata al massimo valore di v_{\max}^{blind} è la migliore e la forma d'onda corrispondente viene inviata al passo di stima e correzione del CFO (par. 3.3.1.3).

La scelta del parametro $f_{CFO,blind}$ è legata agli estremi dell'intervallo G_{CFO} , definito nella (3.44). Si considerano per semplicità i soli valori positivi di CFO, compresi nell'intervallo $0 \leq CFO \leq \Delta f/2$.

Quando vale la condizione $0 \leq CFO \leq g_{CFO}^{\max}$ non serve introdurre alcuna correzione.

Altrimenti, per $g_{CFO}^{\max} < CFO \leq \Delta f/2$, è necessario applicare la correzione $f_{CFO,blind}$. Il suo valore ottimo permette di minimizzare la funzione

$$M(f_{CFO,blind}) = \int |CFO - f_{CFO,blind}| \, dCFO \quad (3.48)$$

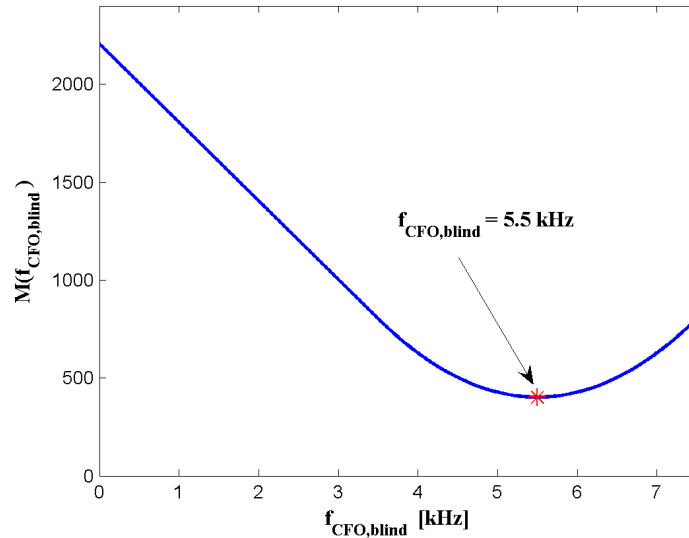


Figura 3.17: Funzione $M(f_{CFO,blind})$ per $g_{CFO}^{\max} = 3.5$ kHz e $thr_{CFO} = 0.9$. Il valore ottimale è $f_{CFO,blind} = 5.5$ kHz.

Applicando la correzione ottimale ai valori di CFO maggiori di g_{CFO}^{\max} , si trova

$$\begin{aligned} CFO' &= (CFO - f_{CFO,blind}) \\ (g_{CFO}^{\max} - f_{CFO,blind}) &\leq CFO' \leq (\Delta f/2 - f_{CFO,blind}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

La figura 3.17 mostra $M(f_{CFO,blind})$ quando $g_{CFO}^{\max} = 3.5$ kHz, valore corrispondente alla soglia $thr_{CFO} = 0.9$ (figura 3.16). Il minimo di $M(f_{CFO,blind})$, evidenziato in figura da un asterisco, è raggiunto per $f_{CFO,blind} = 5.5$ kHz. Dopo la correzione, il CFO appartiene al nuovo intervallo $-2 \leq CFO' \leq 2$ kHz, incluso in $G_{CFO} = \{\pm 3.5\}$ kHz.

Dimensionamento del valore di soglia thr_{CFO} La scelta del valore di soglia thr_{CFO} viene effettuata studiando le prestazioni dell'algorithm SD con simulazioni numeriche.

Il segnale ricevuto $r(n)$ ha una banda disponibile di 25 RB e la banda allocata è di soli $N_{used}^{RB} = 3$. Questa configurazione è la più difficile da elaborare tra quelle definite nel par. 6.1.1: dimensionando il valore di soglia nel caso peggiore, si garantisce il corretto funzionamento dell'algorithm anche in condizioni meno stringenti.

Il CP è in configurazione normale e le perturbazioni introdotte sono dovute al rumore AWGN e al CFO. L'SNR è definito nell'intervallo $0 \leq SNR \leq 10$ dB, con spaziatura $\delta_{SNR} = 2.5$, e il CFO è compreso in $0 \leq CFO \leq 7.5$ kHz, con spaziatura $\delta_{CFO} = 1$ kHz. L'algorithm SD viene applicato al segnale $r(n)$ utilizzando diversi valori di thr_{CFO} , appartenenti all'intervallo $0 \leq thr_{CFO} \leq 1$, campionato con passo $\delta_{thr} = 0.05$.

Il primo indice di qualità considerato è la probabilità P_{fail}^{CFO} che la sincronizzazione di simbolo sia fallita. Ciò avviene quando la funzione $|R_{ry}(p_i)|$ non riesce a superare thr_{CFO} , anche dopo aver introdotto la tecnica di correzione cieca. Il valore di soglia scelto deve garantire l'annullamento di P_{fail}^{CFO} per qualunque valore di SNR e CFO, ovvero:

$$thr_{CFO} : P_{fail}^{CFO}(SNR, CFO) = 0 \quad \begin{cases} \forall SNR \in \{0, \dots, 10\} \text{ dB} \\ \forall CFO \in \{0, \dots, 7.5\} \text{ kHz} \end{cases} \quad (3.50)$$

Si scopre che tale vincolo non è più valido per $thr_{CFO} > 0.9$. A titolo di esempio, in figura 3.18 è riportato l'andamento di P_{fail}^{CFO} per $thr_{CFO} = 0.95$.

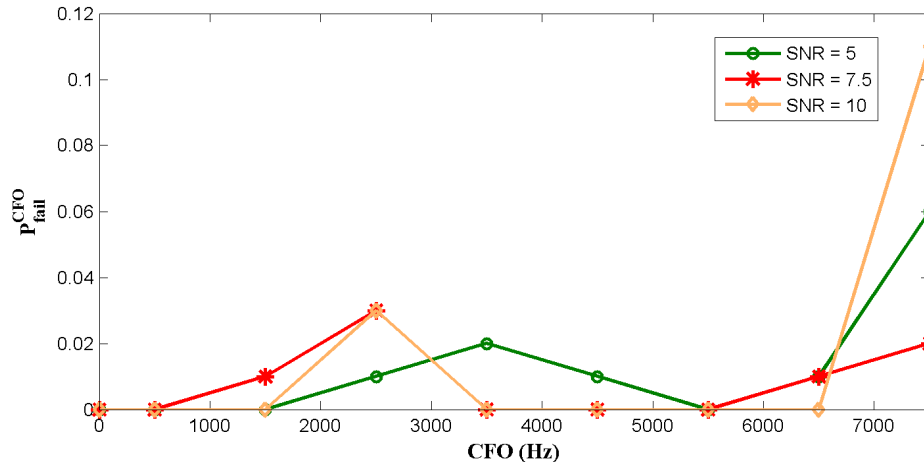


Figura 3.18: Probabilità P_{fail}^{CFO} in funzione di SNR e CFO, per $thr_{CFO} = 0.95$. $B_W = 5$ MHz; $N_{used}^{RB} = 3$.

Si valuta inoltre l'accuratezza della sincronizzazione di simbolo nel trovare le posizioni del RS cercato, ipotizzando di attivare, quando necessario, la correzione cieca.

L'indice di qualità scelto è la probabilità $0 \leq P_{TP}^{CFO} \leq 1$ che la posizione p_{max} , di espressione (3.43) corrisponda alla posizione p_{true}^{RS} del RS cercato. Il valore di soglia migliore deve restituire il massimo valore di P_{TP}^{CFO} al variare di SNR e CFO. Nelle simulazioni, la tolleranza dell'errore $|p_{max} - p_{true}^{RS}|$ è $\Delta_{toll} = \pm N_{CP}/4 = \pm 9$ campioni.

La figura 3.19 illustra l'andamento di P_{TP}^{CFO} per $SNR = 0$ dB, in funzione del CFO. Ogni curva è associata a uno specifico valore di thr_{CFO} . A causa dell'elevata potenza di rumore, la probabilità P_{TP}^{CFO} è sensibilmente

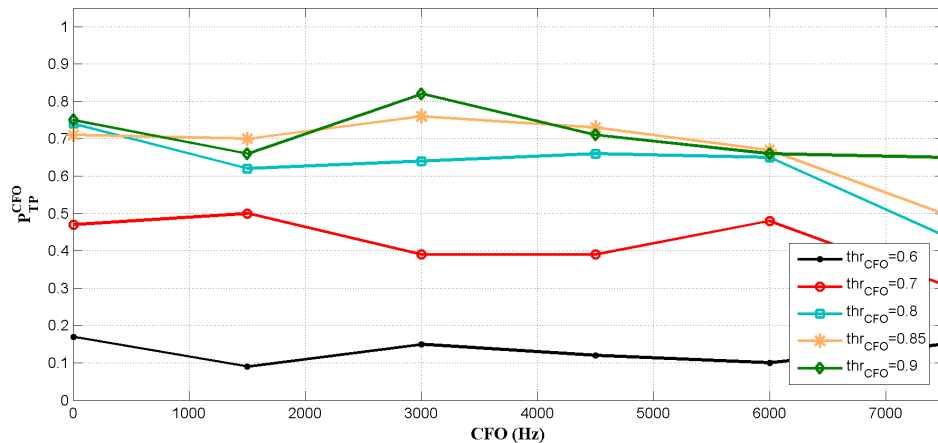


Figura 3.19: Probabilità P_{TP}^{CFO} per $SNR = 0$ dB, in funzione del CFO e di thr_{CFO} . $BW = 5$ MHz; $N_{used}^{RB} = 3$.

inferiore a 1. I valori $thr_{CFO} < 0.6$ restituiscono prestazioni inferiori al caso $thr_{CFO} = 0.6$, perciò le relative curve non sono state rappresentate. In questi casi la soglia è troppo bassa e i campioni di $|R_{ry}(n)|$ che riescono a varcarla sono molto numerosi. Una situazione simile è stata incontrata in figura 3.10, dove l'applicazione della tecnica di van de Beek a molti campioni del segnale ricevuto può restituire risultati completamente errati. L'allocazione di una banda ridotta determina l'aumento della correlazione tra i campioni del segnale e la nascita di falsi picchi nella funzione di log-verosimiglianza. In presenza di rumore la situazione si aggrava ulteriormente. Si conclude che i valori $thr_{CFO} \leq 0.6$ sono troppo bassi e non permettono di selezionare adeguatamente i campioni di $|R_{ry}(n)|$ prima di applicare l'algoritmo di van de Beek.

Aumentando il valore di thr_{CFO} si osserva un graduale miglioramento. Il valore $thr_{CFO} = 0.9$ restituisce le prestazioni migliori. In questo caso, gli errori commessi non sono legati alla scarsa selettività della soglia, quanto all'influenza del rumore sulla tecnica di van de Beek. I valori che oltrepassano la soglia corrispondono al RS cercato ed ai RS caratterizzati dalla stessa coppia di parametri u e v ma con diversa traslazione angolare α (par. 3.3.1.1). Quando il rumore è elevato, diventa difficile per l'algoritmo di van de Beek distinguere il RS voluto dalle versioni traslate e la localizzazione può fallire.

Se si incrementa lievemente l'SNR, portandolo al valore $SNR = 2.5$ dB, si osserva un miglioramento complessivo delle prestazioni e le curve delle diverse soglie si avvicinano tra loro, come mostrato in figura 3.20. Questa

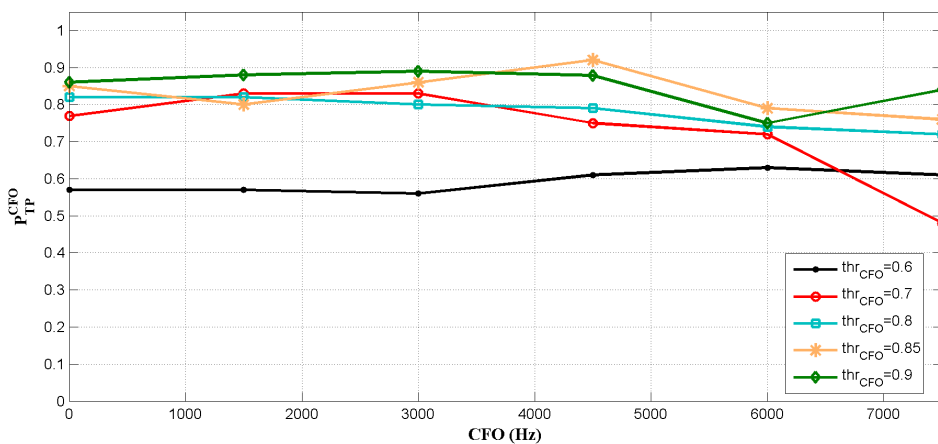


Figura 3.20: Probabilità P_{TP}^{CFO} per $SNR = 2.5$ dB, in funzione del CFO e di thr_{CFO} . $BW = 5$ MHz; $N_{used}^{RB} = 3$.

tendenza è confermata osservando l'andamento di P_{TP}^{CFO} quando $SNR = 10$ dB (figura 3.21). L'incremento

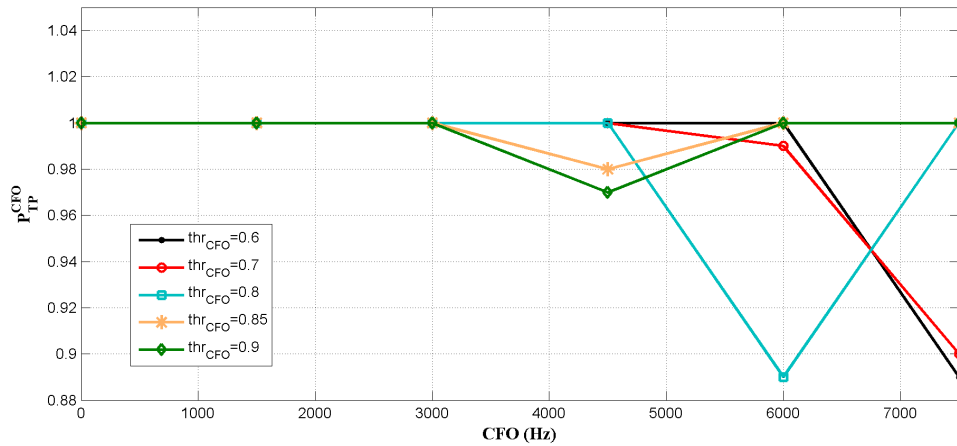


Figura 3.21: Probabilità P_{TP}^{CFO} per $SNR = 10$ dB, in funzione del CFO e di thr_{CFO} . $B_W = 5$ MHz; $N_{used}^{RB} = 3$.

dell'SNR aumenta la robustezza dell'algoritmo di van de Beek, che restituisce risultati più precisi per tutte le soglie considerate. Dunque, al crescere dell'SNR, l'intervallo dei valori di soglia che permettono di ottenere prestazioni accettabili diventa più ampio.

La figura 3.22 illustra la funzione P_{TP}^{CFO} al variare dell'SNR e di thr_{CFO} , per un valore fissato di CFO. A sinistra è mostrato il caso $CFO = 0$ kHz; a destra il caso di CFO massimo, pari a $CFO = 7.5$ kHz. Entrambi gli

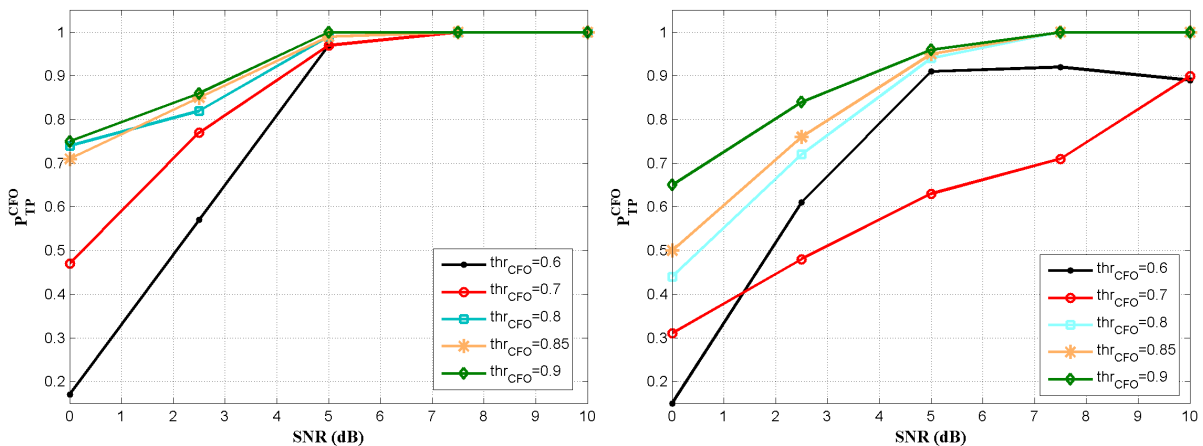


Figura 3.22: Probabilità P_{TP}^{CFO} in funzione dell'SNR e di thr_{CFO} . A sinistra $CFO = 0$ kHz; a destra $CFO = 7.5$ kHz. $B_W = 5$ MHz; $N_{used}^{RB} = 3$.

esempi confermano che il valore $thr_{CFO} = 0.9$ restituisce i risultati migliori, soprattutto in condizioni di lavoro difficili ($SNR \leq 5$ dB). In assenza di CFO i valori di P_{TP}^{CFO} sono più elevati, a parità di SNR, rispetto al caso $CFO = 7.5$ kHz.

Osservando il grafico a destra di figura 3.22, relativo al caso $CFO = 7.5$ kHz, si nota che la soglia $thr_{CFO} = 0.7$ restituisce risultati peggiori di $thr_{CFO} = 0.6$. Per capire la causa di questo malfunzionamento, nella figura 3.23 è mostrato il corrispondente tasso di attivazione della correzione cieca P_{ON}^{BC} , che misura quanto spesso è stato necessario utilizzare tale tecnica per ciascun valore di soglia. Quando $thr_{CFO} = 0.6$, la funzione $|R_{ry}(n)|$ riesce immediatamente a superare la soglia senza bisogno della correzione cieca. Quando $thr_{CFO} \geq 0.8$ si verifica la situazione opposta: senza l'introduzione della correzione cieca non si troverebbe alcun campione di $|R_{ry}(n)|$ sopra soglia. Nel caso $thr_{CFO} = 0.7$, i valori di $|R_{ry}(n)|$ oscillano a cavallo della soglia e la correzione cieca

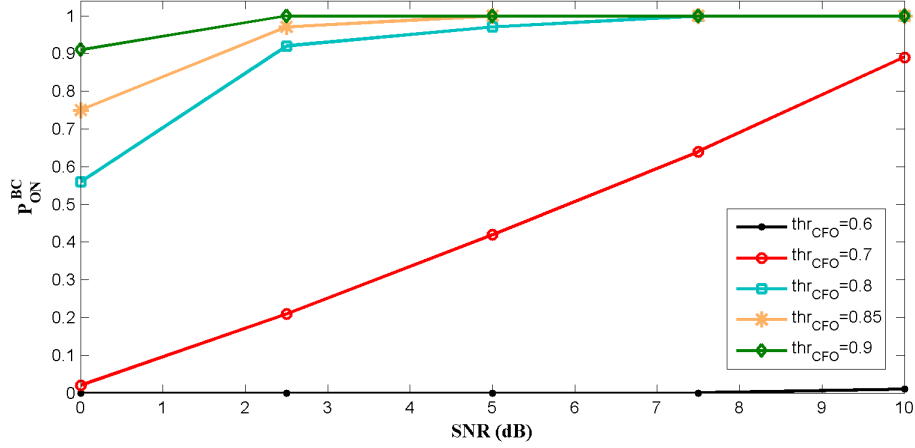


Figura 3.23: Funzione P_{ON}^{BC} al variare dell'SNR e di thr_{CFO} , per $CFO = 7.5$ kHz. $B_W = 5$ MHz, $N_{used}^{RB} = 3$.

comincia ad attivarsi frequentemente solo se l'SNR supera i 7.5 dB. Quando la correzione cieca non si attiva, può accadere che:

- tra i campioni selezionati vi siano i picchi del RS cercato, ma a causa del cattivo funzionamento dell'algoritmo di van de Beek, le posizioni selezionate corrispondono a componenti di disturbo;
- tra i campioni maggiori della soglia siano presenti solo i picchi dei RS con gli stessi parametri u, v ma con diversa traslazione angolare α .

In sostanza, è come se le due cause di errore descritte nel commentare la figura 3.10 si presentino contemporaneamente, determinando un sensibile peggioramento delle prestazioni.

L'effetto di attivazione graduale della correzione cieca si manifesta, per tutti i valori di soglia considerati, in corrispondenza dei valori estremi dell'intervallo G_{CFO} , definito nell'espressione 3.44. In assenza di rumore, non appena il CFO esce dall'intervallo $-g_{CFO}^{\max} \leq CFO \leq g_{CFO}^{\max}$ la funzione $|R_{ry}(m)|$ diventa inferiore alla soglia thr_{CFO} e la correzione cieca viene sempre attivata. In questo caso, il tasso di attivazione P_{ON}^{BC} in funzione del CFO ha un andamento a gradino, ovvero sempre nullo per $-g_{CFO}^{\max} \leq CFO \leq g_{CFO}^{\max}$ e sempre unitario altrove. La presenza del rumore e l'utilizzo di bande allocate ridotte determinano un andamento più graduale. In figura

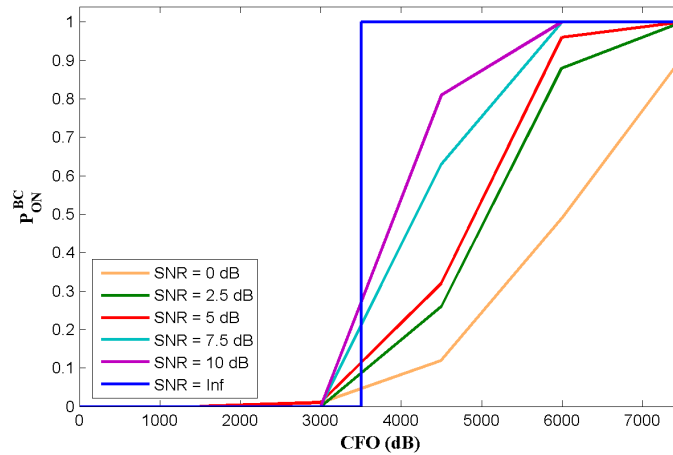


Figura 3.24: Funzione P_{ON}^{BC} al variare del CFO e dell'SNR, per $thr_{CFO} = 0.9$. $B_W = 5$ MHz, $N_{used}^{RB} = 3$.

3.24 è mostrato il tasso P_{ON}^{BC} per il segnale analizzato in precedenza, quando la soglia è pari a $thr_{CFO} = 0.9$, a cui corrisponde l'intervallo $G_{CFO} = \{\pm 3.5 \text{ kHz}\}$. La graduale attivazione della correzione cieca determina in

media un peggioramento delle prestazioni dell'algoritmo SD.

Nell'algoritmo HD, per evitare la situazione descritta, si decide di attivare la correzione cieca in base a una metrica dipendente dalla banda allocata e dall'SNR. Quando le condizioni di lavoro diventano difficili, la correzione cieca viene sempre attivata, anche se la sincronizzazione di simbolo ha restituito picchi sopra soglia. Come spiegato nel par. 3.3.1.4.2, si ottiene un sensibile miglioramento nelle prestazioni; se invece $-g_{CFO}^{\max} \leq CFO \leq g_{CFO}^{\max}$, la correzione cieca è applicata inutilmente poiché i segnali corretti presentano un CFO più elevato del segnale originale.

3.3.1.3 Stima e correzione del CFO

Se la sincronizzazione di simbolo è andata a buon fine, si dispone di tutte le informazioni necessarie per calcolare la stima del CFO.

Sono stati proposti due diversi stimatori:

- il primo, già illustrato nel par. 3.2.2, è basato sulla ridondanza introdotta dal CP;
- il secondo è stato dedotto autonomamente e appare, alle nostre attuali conoscenze, un contributo originale. Esso sfrutta a proprio vantaggio l'effetto nefasto che il CFO produce sui RS, illustrato in figura 3.16.

3.3.1.3.1 Stima di CFO basata sul CP Come discusso nel par. 3.3.1.1, per trovare i picchi corrispondenti alla posizione iniziale dei simboli SC-FDMA, sono state calcolate le funzioni $\Lambda(m)$ e $\gamma(m)$. I valori di $\gamma(m)$ sono fondamentali non solo per dedurre i valori di $\Lambda(m)$, ricordando la (3.32), ma anche per calcolare la stima del CFO. Una volta trovata la posizione p_{\max} del Reference Signal cercato, i corrispondenti M_{corr}^{CP} valori della funzione $\gamma(m)$ sono utilizzati nella formula (3.34) per ricavare le stime:

$$\hat{\epsilon}_{ML}(m) = -\frac{1}{2\pi} \angle \gamma(m) \quad m \in \check{p}_{\max,k} \quad (3.51)$$

dove $\check{p}_{\max,k} = p_{\max} + k(N_{FFT} + N_{CP})$, p_{\max} è definito nella (3.43) e $0 \leq k \leq (M_{corr}^{CP} - 1)$.

Le M_{corr}^{CP} stime così ottenute devono essere elaborate con attenzione, in base al loro segno e alla loro ampiezza. Infatti, quando il valore esatto del CFO da stimare è molto vicino ai limiti dell'intervallo di definizione (ovvero ± 7.5 kHz) la fase della funzione $\gamma(m)$ presenta un'ambiguità di 2π , ovvero passa in maniera repentina da π a $-\pi$ e viceversa. Si parla di *arrotolamento della fase* (phase wrapping). Ad esempio, una stima di 7.55 kHz assume il valore $-7.5 + 0.05 = -7.45$ kHz, stravolgendo completamente le attese (figura 3.25).

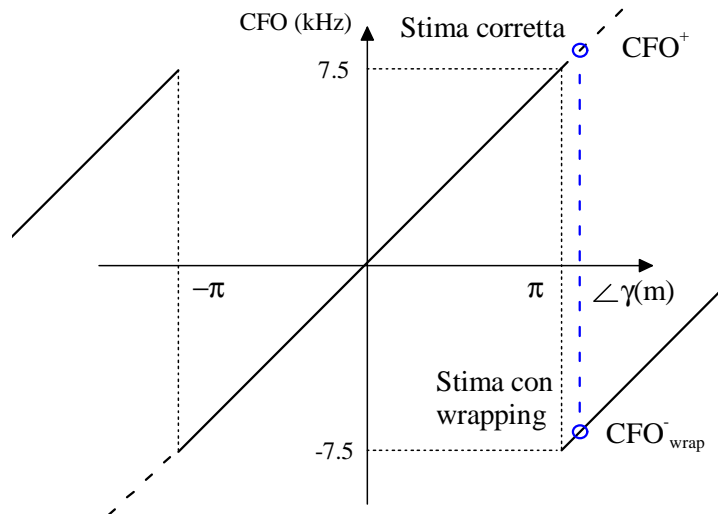


Figura 3.25: Ambiguità delle stime di CFO ottenute dall'algoritmo di van de Beek.

Inoltre non si può stabilire se il valore stimato sia soggetto ad arrotondamento o meno, perché il segno del CFO è incognito. Ad esempio, non si può stabilire se il valore -7.45 kHz identifichi un valore vero di -7.5 kHz (assenza di ambiguità) o di 7.5 kHz (presenza di ambiguità).

Si propone dunque di applicare ai valori (3.51) tre diverse elaborazioni ciascuna delle quali restituisce una stima distinta di CFO:

- il calcolo della media dei valori stimati (valore corretto se non è presente ambiguità);
- l'eliminazione dell'arrotondamento dalle sole stime negative e il calcolo della media di questi nuovi valori con le stime positive lasciate invariate (CFO da stimare assunto positivo);
- l'eliminazione dell'arrotondamento dalle sole stime positive e il calcolo della media di questi nuovi valori con le stime negative lasciate invariate (CFO da stimare assunto negativo).

La rimozione dell'arrotondamento dalle stime positive consiste nel sottrarre da esse una quantità pari alla spaziatura tra sottoportanti Δf . Infatti, considerando una stima positiva affetta da arrotondamento, si può scrivere

$$CFO_{wrap}^+ = CFO^- + \Delta f \quad (3.52)$$

dove CFO^- è la stima trasformata di segno negativo. Parimenti la rimozione dell'arrotondamento da stime negative consiste nel sommare ad esse una quantità pari a Δf . Infatti, per una stima negativa soggetta ad arrotondamento, si trova

$$CFO_{wrap}^- = CFO^+ - \Delta f \quad (3.53)$$

dove CFO^+ è la stima trasformata di segno positivo.

Ricavate le tre stime descritte, resta da capire quale di esse si avvicini maggiormente al CFO effettivo. Poiché si conosce la posizione p_{\max} del Reference Signal cercato, si può estrarre il corrispondente simbolo SC-FDMA, di dimensioni $(N_{FFT} + N_{CP})$ e correggerlo con ciascuna delle tre medie. Si calcola quindi la correlazione tra il RS non distorto $y(n)$, utilizzato nella (3.36) e ciascuno dei tre simboli corretti. La stima associata alla correlazione di valore massimo rappresenta la migliore approssimazione del CFO effettivo, e il suo valore viene usato per correggere l'intero segnale in ingresso.

3.3.1.3.2 Stima di CFO RS-based Questo secondo metodo utilizza le posizioni dei RS restituite dalla sincronizzazione di simbolo.

Si assuma di conoscere l'esatta posizione p_{\max} di un simbolo SC-FDMA nel segnale ricevuto. Come visto nel par. 3.3.1.2, l'incremento del CFO causa la riduzione graduale del valore massimo della funzione $|R_{ry}(n)|$, raggiunto in $n = p_{\max}$ (figura 3.16). Viceversa, una sua diminuzione dovrà provocare l'effetto contrario, ovvero l'innalzamento del picco.

Sviluppando questa idea intuitiva è stato costruito lo stimatore di CFO *RS-based*. Il suo schema a blocchi è illustrato in figura 3.26. L'algoritmo è composto dai seguenti passi:

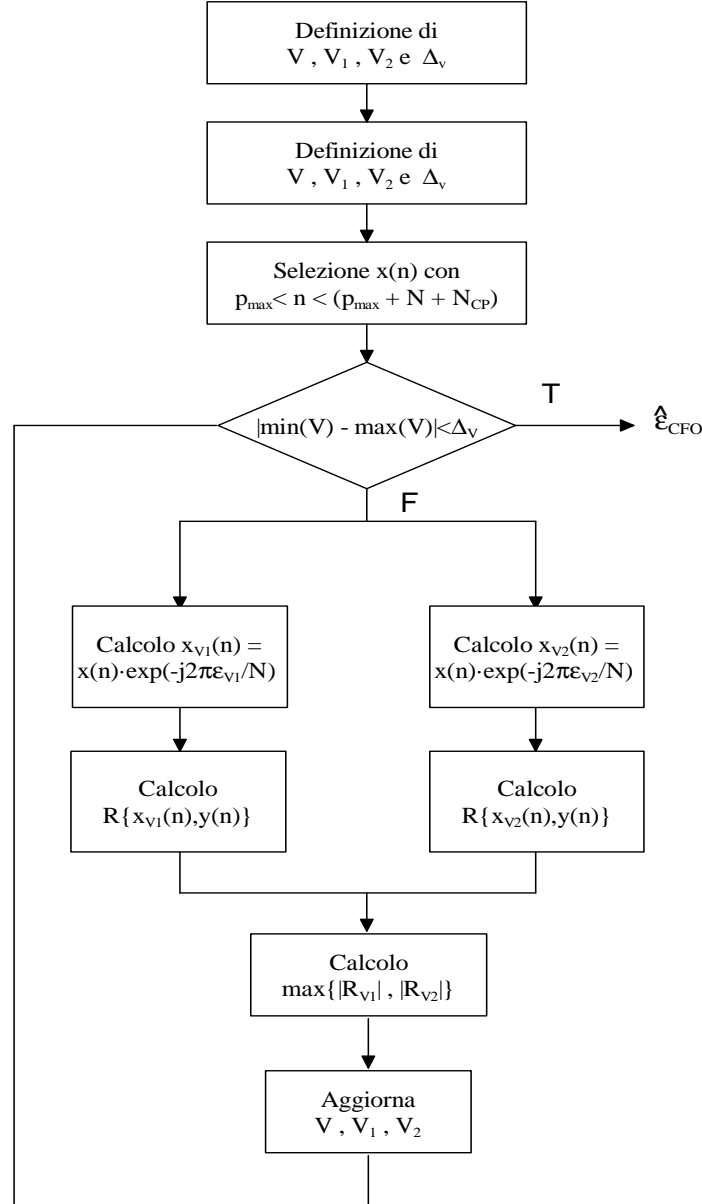


Figura 3.26: Schema a blocchi dello stimatore di CFO RS-based.

1. si definisce l'insieme V dei possibili valori assunti dal CFO e una coppia di suoi sottoinsiemi V_1 e V_2 , disgiunti e di uguali dimensioni, la cui unione restituisca V , ovvero $V \equiv V_1 \cup V_2$:

$$\begin{aligned}
 V &= \{-7.5, \dots, 7.5\} \text{ kHz} \\
 V_1 &= \{-7.5, \dots, 0\} \text{ kHz} \\
 V_2 &= \{0, \dots, 7.5\} \text{ kHz}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Inoltre si definisce il valore della variabile Δ_V che regola la condizione di uscita;

2. si estrae dal segnale ricevuto il simbolo SC-FDMA $x(n)$ relativo al RS di posizione p_{\max} :

$$x = \widehat{r}(n) \quad , \quad p_{\max} \leq n \leq (p_{\max} + N_{RS}^{samp} - 1) \quad (3.55)$$

dove $N_{RS}^{samp} = (N_{CP} + N)$ indica il numero di campioni del simbolo SC-FDMA che contiene il RS;

3. si selezionano i valori centrali CFO_{V1} e CFO_{V2} di ciascun insieme e si utilizzano per correggere il RS $x(n)$. Alla prima iterazione, tali valori sono rispettivamente $CFO_{V1} = -3.75$ kHz e $CFO_{V2} = 3.75$ kHz. Si ottengono le versioni corrette $x_{V1}(n)$ e $x_{V2}(n)$, di espressione:

$$\begin{aligned} x_{V1}(n) &= x(n) \cdot \exp(-j2\pi\varepsilon_{V1}/N) \\ x_{V2}(n) &= x(n) \cdot \exp(-j2\pi\varepsilon_{V2}/N) \end{aligned} \quad (3.56)$$

dove $\varepsilon_{V1} = CFO_{V1}/\Delta f$ e $\varepsilon_{V2} = CFO_{V2}/\Delta f$ sono le correzioni normalizzate dalla spaziatura tra sottoportanti Δf ;

4. si calcolano le cross-correlazioni

$$R_{x_{V1}, y} = \frac{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} x_{V1}(m)y^*(m)}{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} |y(m)|^2} \quad (3.57)$$

e

$$R_{x_{V2}, y} = \frac{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} x_{V2}(m)y^*(m)}{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} |y(m)|^2} \quad (3.58)$$

tra ciascun segnale corretto nella (3.56) ed una versione non distorta del RS $y(n)$;

5. se la stima CFO_{V1} è più vicina di CFO_{V2} al valore effettivo del CFO, si verifica la condizione

$$|R_{x_{V1}, y}| > |R_{x_{V2}, y}| \quad (3.59)$$

altrimenti vale la condizione duale;

6. si aggiorna l'insieme V . Esso è pari all'unione del sottoinsieme a cui appartiene la stima scelta e della metà del restante sottoinsieme più vicina a tale stima. Ad esempio, se CFO_{V1} è la stima scelta, l'insieme V è pari a

$$V \equiv V_1 \cup V_{2,1} \quad , \quad \text{dove } V_{2,1} = \{0, \dots, CFO_{V2}\} \quad (3.60)$$

7. si aggiornano i sottoinsiemi V_1 e V_2 suddividendo nuovamente l'insieme V in parti uguali; si ripetono i passi descritti, partendo dal passo 3, finché l'estensione dell'insieme V è inferiore alla variabile Δ_V .

Ad ogni nuova iterazione dell'algoritmo, ci si avvicina sempre più al valore del CFO presente, come mostrato in figura 3.27.

Osservando nuovamente la figura 3.16, si comprende che la riduzione del picco è più lenta attorno allo zero, perciò il modulo della cross-correlazione si attesta a valori abbastanza simili in quell'intorno. In presenza di rumore, può capitare che il massimo della cross-correlazione venga raggiunto per valori diversi dal CFO effettivamente presente.

Quando si dispone di più posizioni associate ai RS, è utile ripetere il processo descritto per ciascuna di esse e infine mediare le stime di CFO ottenute. Così facendo si riduce maggiormente l'influenza del rumore AWGN sulla qualità della stima ricostruita.

Il confronto delle prestazioni delle due tecniche proposte è effettuato nel capitolo 6.

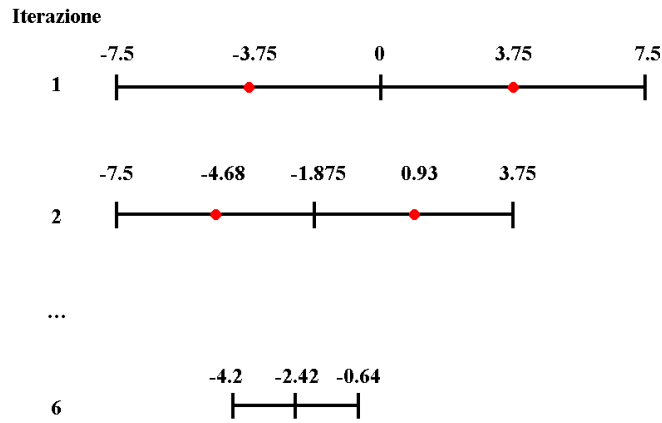


Figura 3.27: Stima del CFO con RS. Evoluzione degli intervalli di ricerca per $CFO = 2.5$ kHz.

3.3.1.4 Algoritmo Heavy Duty

Anticipando quanto dimostrato più ampiamente nel cap. 6, si può affermare che le prestazioni dell'algoritmo SD dipendono da:

- rapporto segnale-rumore (SNR);
- numero di sottoportanti assegnate all'utente N_{used} .

Grazie alle simulazioni effettuate, è stata ricavata una combinazione di valori di questi parametri per cui l'algoritmo SD non raggiunge gli obiettivi di qualità richiesti.

Più in dettaglio, fissata la banda di sistema B_W e il numero di sottoportanti allocate N_{used} , si può definire un soglia di SNR al di sotto della quale le prestazioni dell'algoritmo SD degradano sensibilmente. Ripetendo l'operazione al variare di B_W e N_{used} si ricava la funzione $SNR_{thr}(N_{used}, B_W)$, rappresentata in figura 3.28 per le bande $B_W = \{5, 20\}$ MHz. I parametri delle simulazioni e gli obiettivi di qualità sono definiti nel par. 6.1.1.

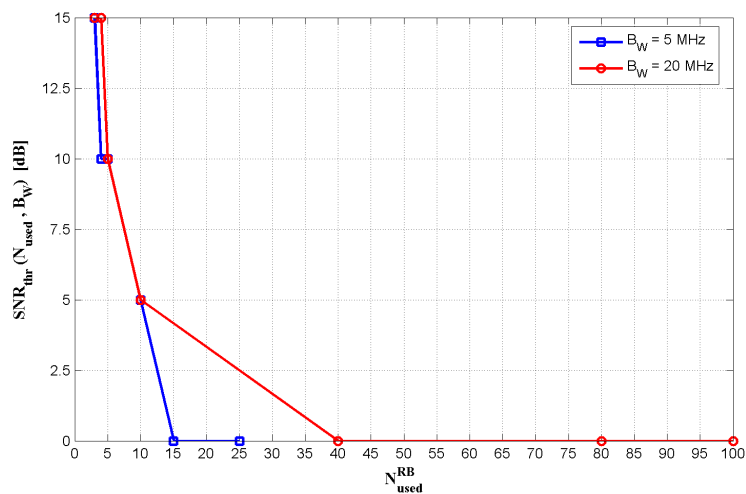


Figura 3.28: Funzione $SNR_{thr}(N_{used}, B_W)$ per $B_W = \{5, 20\}$ MHz e diversi valori di N_{used} .

Per affrontare queste difficili condizioni di lavoro, è stata introdotta una variante dell'algoritmo SD chiamata *Algoritmo Heavy Duty* (HD). Il suo schema a blocchi è presentato in figura 3.29. In condizioni di lavoro ordinarie l'algoritmo SD e HD compiono esattamente gli stessi passi. Quando il segnale ricevuto presenta una banda molto ridotta, l'algoritmo HD si differenzia dall'SD, effettuando due operazioni aggiuntive:

- filtraggio del segnale ricevuto per ridurre il rumore (par. 3.3.1.4.1);

- attivazione incondizionata della *correzione cieca di CFO* (par. 3.3.1.4.2).

L'esecuzione di queste operazioni è regolata rispettivamente dalle variabili

$$SNR_{thr}^{filt}(N_{used}, B_W) \tag{3.61}$$

$$SNR_{thr}^{BC}(N_{used}, B_W) \tag{3.62}$$

i cui valori si ricavano dalla funzione $SNR_{thr}(N_{used}, B_W)$. Quando l'SNR del segnale ricevuto è inferiore alle soglie SNR_{thr}^{filt} e SNR_{thr}^{BC} le corrispondenti operazioni vengono attivate.

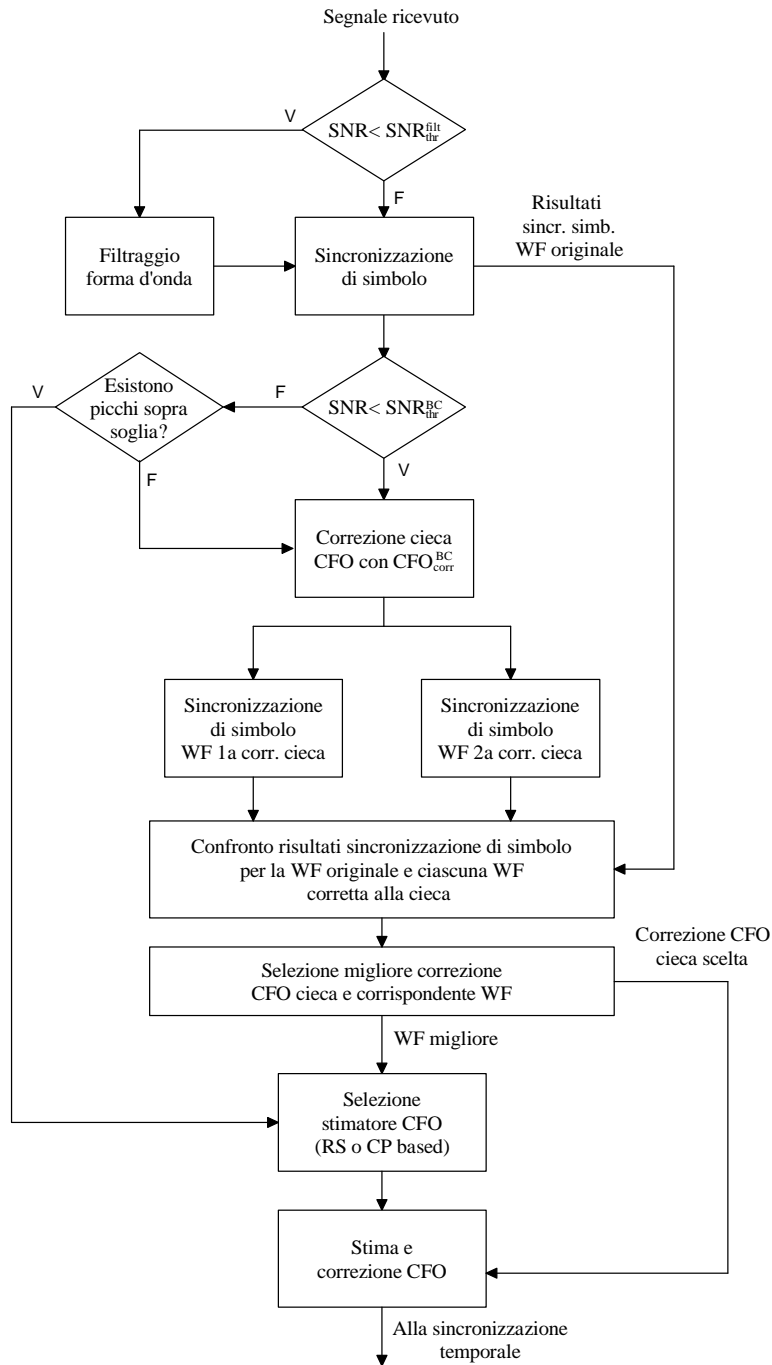


Figura 3.29: Schema a blocchi dell'algoritmo di sincronizzazione in frequenza Hard Duty.

3.3.1.4.1 Filtraggio della forma d'onda acquisita Il filtraggio della forma d'onda acquisita permette di ridurre l'impatto del rumore AWGN sulle prestazioni dell'algoritmo di sincronizzazione ed è tanto più efficace quanto più intenso è il rumore e quanto più è ridotta la banda allocata.

Questa operazione viene compiuta nel dominio frequenziale, moltiplicando lo spettro del segnale ricevuto per la risposta in frequenza di un filtro a coseno rialzato. In figura 3.30 sono rappresentati, l'uno sovrapposto all'altro, gli spettri del segnale ricevuto e del filtro passa-banda, per $B_{used} = 1.8$ MHz, $B_W = 5$ MHz e $SNR = 5$ dB. La

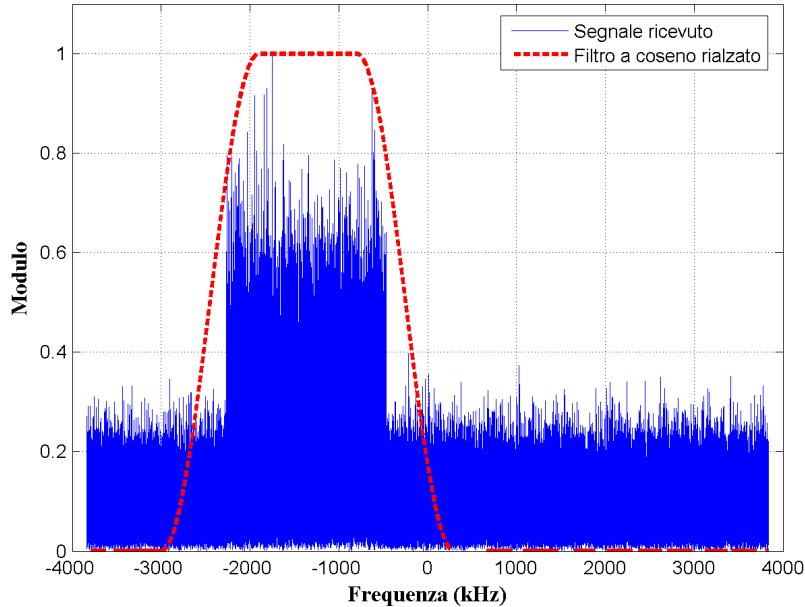


Figura 3.30: Forma d'onda ricevuta e filtro per ridurre i contributi di rumore ($B_W = 5$ MHz, $B_{used} = 1.8$ MHz e $SNR = 5$ dB).

larghezza del filtro è determinata dal numero di RB allocati, mentre il decadimento a coseno rialzato è molto dolce, in modo da non distorcere pesantemente il segnale acquisito. Il filtraggio viene abilitato quando si verifica la condizione

$$SNR \leq SNR_{thr}^{filt} \quad (3.63)$$

dove SNR_{thr}^{filt} è definito nella relazione 3.61, ovvero solo se strettamente necessario, poiché rappresenta un appesantimento ingiustificato in condizioni di lavoro meno stringenti.

3.3.1.4.2 Attivazione incondizionata della correzione cieca di CFO Nell'algoritmo SD la correzione cieca viene attivata solo se, all'uscita della sincronizzazione di simbolo, non si trovano picchi sopra soglia, qualunque sia la banda allocata e il valore corrente di SNR.

Osservando i risultati delle simulazioni numeriche, si è scoperto che, in limitati casi, è utile applicare questa tecnica indipendentemente dall'aver trovato nella (3.37) picchi sopra soglia. Infatti, per bassi SNR e bande allocate strette, il tasso di attivazione della correzione cieca P_{ON}^{BC} presenta un andamento graduale al di fuori dell'intervallo G_{CFO} , definito nella 3.44, mentre l'andamento voluto è a scalino (si veda la figura 3.24).

Per migliorare le prestazioni dell'algoritmo SD in tali circostanze è stata definita la soglia di SNR

$$SNR_{thr}^{BC}(N_{used}, B_W) \quad (3.64)$$

dipendente dalla banda allocata N_{used} e dalla banda di sistema B_W . I suoi valori sono dati dalla funzione $SNR_{thr}(N_{used}, B_W)$, rappresentata in figura 3.28.

Nell'algoritmo HD, quando l'SNR del segnale ricevuto è inferiore alla soglia SNR_{thr}^{BC} , la correzione cieca viene

sempre attivata, indipendentemente dall'esito della sincronizzazione di simbolo.

Tuttavia, se il CFO presente sul segnale è molto ridotto, entrambe le correzioni provocano un suo incremento.

La sincronizzazione temporale applicata al segnale originale $r(n)$ restituisce i risultati migliori.

L'introduzione della variabile SNR_{thr}^{BC} richiede di modificare l'ultimo punto dell'algoritmo di correzione cieca, ovvero il confronto tra i valori massimi della funzione $\bar{\Lambda}_i$.

In questo caso, il vettore v_{\max}^{blind} deve contenere i valori massimi di $\bar{\Lambda}_i$ associati sia ai segnali corretti $r_1(n)$ e $r_2(n)$ sia al segnale originale $r(n)$, ovvero:

$$v_{\max}^{blind} = \{\max[\bar{\Lambda}_i(0)], \max[\bar{\Lambda}_i(f_{CFO,blind})], \max[\bar{\Lambda}_i(-f_{CFO,blind})]\} \quad (3.65)$$

La migliore correzione corrisponde al massimo di questo vettore. Ad esempio, se il valore massimo di v_{\max}^{blind} è $\bar{\Lambda}_i(0)$, non è necessario introdurre le correzioni $\pm f_{CFO,blind}$. Tale modifica ha permesso di ottenere un sensibile miglioramento delle prestazioni. Si consideri in proposito il confronto tra l'algoritmo SD e l'algoritmo HD, ipotizzando di disattivare il filtraggio della forma d'onda. Il segnale $r(n)$ ha una banda disponibile di 25 RB, una banda allocata $N_{used}^{RB} = 3$ e un CP normale. La soglia utilizzata dalla sincronizzazione di simbolo è $thr_{CFO} = 0.9$ e l'intervallo G_{CFO} corrispondente è pari a $\pm g_{CFO}^{\max} = \pm 3.5$ kHz. Si considera un intervallo di CFO $3 \leq CFO \leq 5$ kHz posizionato a cavallo del valore $+g_{CFO}^{\max}$. L'SNR è pari a 5 dB.

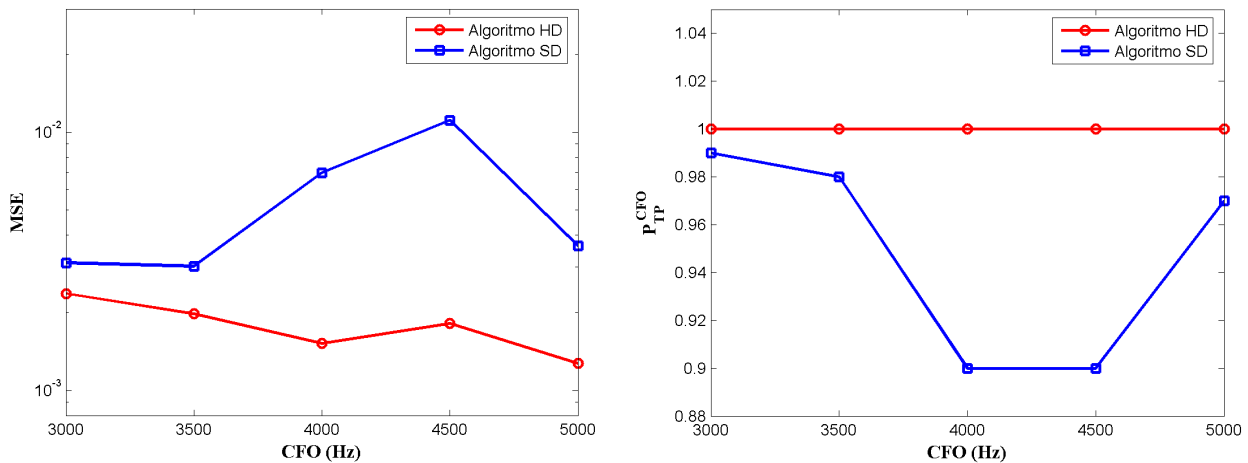


Figura 3.31: MSE (a sinistra) e P_{TP}^{CFO} (a destra) degli algoritmi SD e HD. $B_W = 5$ MHz, $N_{used}^{RB} = 3$, $thr_{CFO} = 0.9$, $3 \leq CFO \leq 5$ kHz e $SNR = 5$ dB.

In figura 3.31 sono mostrati i risultati delle simulazioni condotte. Il grafico a destra illustra la probabilità P_{TP}^{CFO} , definita nel par. 3.3.1.2. L'introduzione della modifica permette di raggiungere un'accuratezza molto prossima al 100%. Il grafico a sinistra contiene l'MSE della stima di CFO RS-based (par. 3.3.1.3.2). Si osserva una notevole riduzione dell'errore di stima, che si mantiene uniforme al variare del CFO.

Accanto al miglioramento delle prestazioni, l'introduzione di questa tecnica determina l'aumento del costo computazionale dell'algoritmo. Infatti la sincronizzazione di simbolo viene effettuata per ben tre volte invece di una sola, come nel caso dell'algoritmo SD. Inoltre, quando il CFO è molto ridotto, le elaborazioni condotte si rivelano inutili, perché non incidono sulle prestazioni del sistema. Ciò giustifica l'uso di questa tecnica solo in condizioni molto difficili, individuate durante le simulazioni numeriche e raccolte nei valori della funzione $SNR_{thr}(N_{used}, B_W)$.

3.3.2 Sincronizzazione nel tempo

Una volta completata la fase di sincronizzazione in frequenza, il segnale risultante $\hat{r}(n)$, perturbato da un CFO molto ridotto, viene inviato all’algoritmo di sincronizzazione nel tempo, il cui scopo è di stimare la posizione θ_{frame} della prima trama completa presente nel segnale. Il suo schema a blocchi è riportato in figura 3.32. L’algoritmo è composto dai seguenti passi:

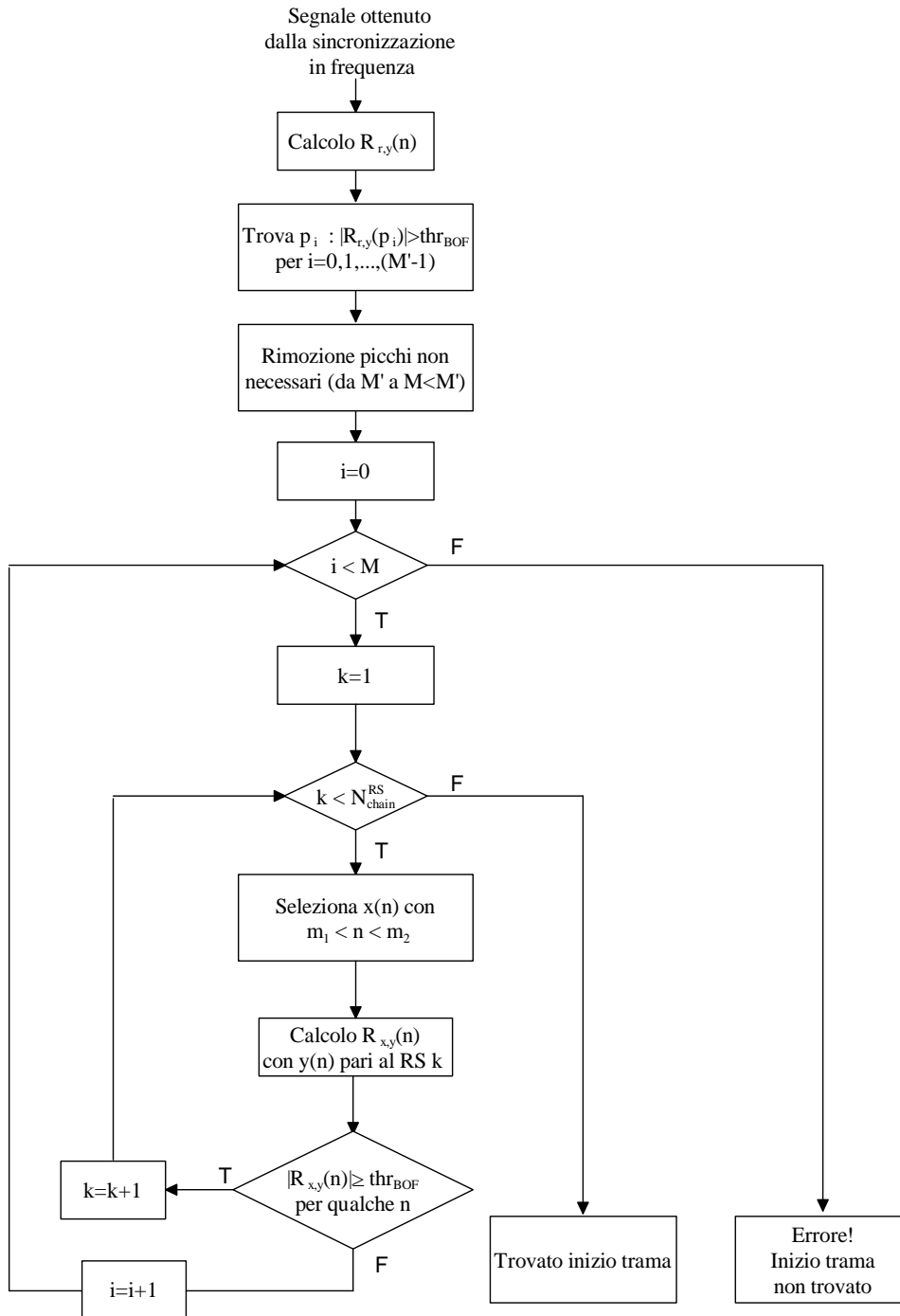


Figura 3.32: Schema a blocchi dell’algoritmo di sincronizzazione nel tempo.

- si calcola la cross-correlazione $R_{\hat{r},y}(n)$ tra il segnale $\hat{r}(n)$ e una replica non distorta del RS trasmesso nel

primo slot della trama, indicata dal simbolo $y(n)$:

$$R_{\hat{r},y}(n) = \frac{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} \hat{r}(n+m)y^*(m)}{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} |y(m)|^2} \quad (3.66)$$

A denominatore della (3.66) compare l'energia del RS $y(n)$;

- si calcola il modulo della funzione $R_{\hat{r},y}(n)$ e si costruisce l'insieme I , contenente le M' posizioni p_i dei campioni di $R_{\hat{r},y}(n)$ che soddisfano la condizione

$$|R_{\hat{r},y}(p_i)| \geq thr_{BOF} \quad , \quad i \in \{0, 1, \dots, M' - 1\} \quad (3.67)$$

- come osservato nel par. C.3.3, è possibile che lo stesso RS sia ripetuto più volte nella trama. Inoltre i picchi della funzione $|R_{\hat{r},y}(n)|$ sono caratterizzati da una crescita graduale (figura 3.33); l'insieme I contiene quindi diversi raggruppamenti di punti ravvicinati tra loro (*clusters*), i cui centri corrispondono alle posizioni del RS cercato. I punti restanti, non voluti, vengono rimossi dall'insieme I con il seguente

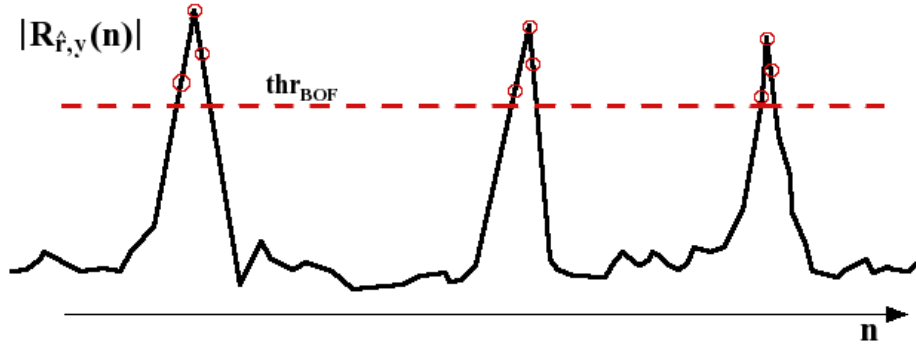


Figura 3.33: Punti di $|R_{\hat{r},y}(n)|$ che superano la soglia thr_{BOF} . Alcuni di essi non corrispondono al RS cercato e devono essere rimossi dall'insieme I .

procedimento:

- si calcola il modulo della distanza tra il primo punto di p_0 e i restanti elementi di I :

$$d_j = |p_j - p_0| \quad j = 1, \dots, (M' - 1) \quad (3.68)$$

- le posizioni più vicine tra loro di Δ_{peaks} campioni sono raccolte nell'insieme C_0 :

$$d_j \leq \Delta_{peaks} \implies p_j \in C_0 \quad (3.69)$$

- si seleziona la posizione p_{\max} del massimo di $|R_{\hat{r},y}(n)|$, con $n \in C_0$, e la si salva nell'insieme I_{red} ;
- si aggiorna l'insieme I secondo l'espressione

$$I = I \setminus C_0 \quad (3.70)$$

e si ripete il procedimento descritto selezionando il nuovo punto p_0 . Quando l'insieme I non contiene più alcun elemento, l'algoritmo termina e restituisce l'insieme I_{red} delle $M \leq M'$ posizioni utili.

- Come visto nel par. C.3.3, è possibile ricostruire senza ambiguità la posizione θ_{frame} solo dopo aver localizzato nel segnale la sequenza dei primi N_{chain}^{RS} Reference Signals. Per questo motivo, si applica alle M posizioni p_i rimaste l'algoritmo di ricerca dei RS successivi al primo:

1. si fissa il valore $i = 0$, dove i è l'indice delle M posizioni p_i ;

2. si fissa il valore $k = 1$, dove k è l'indice degli $(N_{chain}^{RS} - 1)$ RS da cercare;
3. si seleziona la porzione $x(m)$ di segnale che dovrebbe contenere il RS k -esimo, con una tolleranza di $\pm\Delta_{toll}$ campioni:

$$x = \hat{r}(n) \quad , \quad m_1 \leq n \leq m_2 \quad (3.71)$$

dove $m_1 = (p_i + k \cdot N_{slot}^{sampp} - \Delta_{toll})$ e $m_2 = (p_i + k \cdot N_{slot}^{sampp} + N_{RS}^{sampp} + \Delta_{toll})$. La variabile $p_i \in I_{red}$ rappresenta la posizione i -esima del primo RS. La variabile N_{slot}^{sampp} , pari al numero di campioni in ogni slot, indica la spaziatura tra un RS e il successivo. La variabile $N_{RS}^{sampp} = (N_{CP} + N)$ indica il numero di campioni del simbolo SC-FDMA che contiene il RS corrente. Infine la tolleranza Δ_{toll} deve essere minore della minima traslazione angolare α tra due sequenze RS. In dettaglio, poiché sono disponibili 12 traslazioni angolari e la dimensione del simbolo SC-FDMA è N_{RS}^{sampp} , la minima traslazione angolare Δ_α espressa in campioni è [2]

$$\Delta_\alpha \simeq \frac{N_{RS}^{sampp}}{12} \quad (3.72)$$

Se la tolleranza Δ_{toll} fosse maggiore di Δ_α si potrebbe confondere il RS cercato con un diverso RS, caratterizzato dagli stessi parametri u e v (SH e SGH disabilitati) ma con traslazione angolare relativa Δ_α .

4. si calcola la cross-correlazione $R_{x,y}(n)$ tra $x(n)$ e una replica non distorta del RS k -esimo, indicata dal simbolo $y(n)$:

$$R_{x,y}(n) = \frac{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} x(n+m)y^*(m)}{\sum_{m=0}^{(N+N_{CP}-1)} |y(m)|^2} \quad (3.73)$$

A denominatore della (3.73) compare l'energia del RS $y(n)$;

5. si cercano i campioni di $|R_{x,y}(n)|$ che verificano la condizione:

$$m : |R_{x,y}(m)| \geq thr_{BOF} \quad - \Delta_{toll} \leq m \leq \Delta_{toll} \quad (3.74)$$

6. se è stato trovato almeno un picco sopra soglia:

- (a) si aggiorna $k = k + 1$;
- (b) si controlla la validità della condizione:

$$k < N_{chain}^{RS} \quad (3.75)$$

- (c) se la (3.75) è vera, si ricomincia l'algoritmo dal passo 3;
- (d) se invece la (3.75) è falsa, significa che p_i è effettivamente la posizione del primo RS della trama. A partire da essa si calcola la stima $\hat{\theta}_{frame}$ della posizione iniziale della trama, data dall'equazione:

$$\hat{\theta}_{frame} = p_i - [N_{CP,1} + N_{CP} \cdot (l_{DM}^{PUSCH} - 1) + N \cdot l_{DM}^{PUSCH}] \quad (3.76)$$

dove $N_{CP,1}$ e N_{CP} sono rispettivamente le lunghezze del CP del primo e dei restanti simboli SC-FDMA. Il parametro l_{DM}^{PUSCH} è pari a 3 se il CP è in configurazione normale; $l_{DM}^{PUSCH} = 2$ se il CP è in configurazione estesa. In questo caso, l'algoritmo si conclude con successo.

7. se non sono stati trovati picchi, si aggiorna l'indice i e si controlla la condizione

$$i < M \quad (3.77)$$

- (a) se la (3.77) è vera, si ricomincia l'algoritmo dal passo 2;
- (b) se invece la (3.77) è falsa, non è stato possibile calcolare alcuna stima $\hat{\theta}_{frame}$ e l'algoritmo si conclude con un fallimento.

La qualità della stima $\hat{\theta}_{frame}$ è legata alla precisione con cui l'algoritmo di stima e correzione del CFO ha adempiuto al suo compito. È necessario che il CFO residuo abbia un valore contenuto, altrimenti, i picchi di $|R_{ry}(n)|$ non riuscirebbero a superare la soglia thr_{BOF} . Nel par. 6.1.1 il massimo errore di CFO tollerato per l'algoritmo HD è fissato a $\Delta CFO_{thr} = 300$ Hz. Ricordando la figura 3.16, ricavata in assenza di rumore, il valore di soglia associato all'intervallo $G_{CFO} = \{\pm \Delta CFO_{thr}\}$ è $thr_{BOF} \simeq 0.99$. Tuttavia, si decide di adottare il valore $thr_{BOF} = 0.9$, caratterizzato da una tolleranza più ampia ($\Delta CFO_{thr} = 3.5$ kHz), ma sufficientemente selettivo, per quanto discusso nel paragrafo 3.3.1.2.

Capitolo 4

La stima di canale

La stima di canale è il processo con cui si stimano e si correggono le interferenze prodotte dal canale radio sul segnale trasmesso. Nel sistema LTE questo processo è supportato dalla presenza di opportune sequenze pilota, chiamate Reference Signals. Nella tratta di Uplink un intero simbolo SC-FDMA per ogni slot è dedicato alla trasmissione dei DeModulation Reference Signals (par. 2.4), sequenze pilota associate al canale dati PUSCH. Il numero di portanti che compongono i RS in frequenza è pari al numero di portanti allocate per la trasmissione di utente. Le stime di canale sono calcolate direttamente solo in corrispondenza delle portanti pilota; per equalizzare i simboli SC-FDMA intermedi è necessario interpolare nel dominio del tempo le stime ottenute da RS adiacenti.

Nel par. 4.1 si descrive la struttura generale del sistema ricevente, assunta valida per tutto il capitolo; nel par. 4.2 si studia l'effetto della presenza delle portanti di guardia sul segnale ricevuto; nel par. 4.3 si definiscono le proprietà del canale radio sfruttate nella derivazione degli stimatori;

Nel par. 4.4 si introducono gli algoritmi di stima classici: i metodi Zero Forcing, il metodo Least Squares e il metodo MMSE.

Il primo è il meno costoso e costituisce il punto di partenza per molti altri algoritmi, tra cui lo stesso MMSE. Il secondo è basato sulla riduzione dell'errore quadratico. A causa della presenza delle guardie l'espressione dell'algoritmo deve essere modificata. Si propone come valida alternativa lo schema LS downsampled, descritto in [28].

Il terzo metodo minimizza l'errore quadratico medio e raggiunge il limite dato dalla potenza di rumore, se il modello di rumore è gaussiano [29], ma presenta due problemi:

- il suo costo computazionale è molto elevato
- richiede l'esatta conoscenza delle statistiche di canale (autocorrelazione e SNR corrente).

Vengono descritte entrambe le versioni dell'algoritmo MMSE, rispettivamente nel *tempo* e in *frequenza*. Tra i due approcci si decide di adottare lo schema frequenziale e si presentano le modifiche da applicare alla struttura originale per il suo utilizzo in LTE.

Nel par. 4.4.4 sono proposte due realizzazioni alternative dello schema MMSE in frequenza:

- lo stimatore MMSE mismatched, che adotta proprietà statistiche del canale fissate a priori;
- lo stimatore MMSE adattativo, che insegue durante l'esecuzione le effettive statistiche del canale radio.

Il secondo di questi schemi viene studiato con maggiore attenzione, poiché raggiunge prestazioni migliori al prezzo di un costo computazionale elevato.

La riduzione del costo computazionale per lo schema MMSE adattativo, e più in generale per stimatori che richiedono durante l'esecuzione il calcolo di una matrice inversa, è discussa nel paragrafo 4.5.

Un aspetto inedito e particolarmente svantaggioso di LTE rispetto ad altri sistemi multi-portante è il rapporto molto elevato tra portanti di guardia (portanti nulle ai bordi dello spettro) e portanti allocate in ogni simbolo

SC-FDMA. La presenza di molte guardie filtra la CFR con una finestra rettangolare, causando nel dominio del tempo un effetto di dispersione di potenza (power leakage). Si dice che la risposta di canale è distorta dall'errore di correlazione. Senza opportune correzioni, alcuni degli stimatori proposti sono inapplicabili. In particolare la stima del Power Delay Profile, fondamentale per lo stimatore MMSE adattativo, è tra questi. Le tecniche di correzione dell'errore di correlazione (CEC) sono presentate nel par. 4.6. Il primo argomento trattato è l'analisi di un particolare stimatore di canale, chiamato *DFT-based*, scelto come caso di riferimento per illustrare l'influenza dell'errore di correlazione sulle prestazioni. In seguito, si presentano le tecniche CEC affrontate: il metodo *SIC* [30]; una modifica proposta di questo metodo, chiamata *metodo SIC modificato*; la tecnica di *Path Detection* (PD), spesso utilizzata dopo l'applicazione della tecnica SIC [30].

Infine nel par. 4.7, è presentato lo schema MMSE adattativo proposto. Esso è ottenuto unendo diverse soluzioni, presentate nel capitolo, che consentono di ottimizzarne il funzionamento. In particolare, si utilizzano gli algoritmi SIC e PD per eliminare dalla CIR l'errore di correlazione; ciò permette di migliorare la stima del PDP e di avvicinare l'algoritmo adattativo al limite teorico di funzionamento. Inoltre si introducono le tecniche di riduzione del costo computazionale, basate sulla simmetria della matrice da invertire, in modo da velocizzare l'algoritmo.

In alcuni paragrafi sono presenti i risultati di alcune simulazioni numeriche, inseriti per confrontare gli algoritmi o per giustificare alcune affermazioni. Le simulazioni relative ai casi di studio sono presentate nel capitolo 6.

4.1 Il modello di riferimento

Il modello del sistema di trasmissione assunto nel seguito è di tipo SISO, ovvero il numero di antenne utilizzate in trasmissione e in ricezione è pari a 1. La tratta di Uplink, per definizione, raccoglie la trasmissione di utenti diversi, ognuno dei quali sperimenta condizioni trasmissive diverse (distanza, ostacoli, interferenze...). La trattazione condotta assume che vi sia un unico utente a cui è allocata una certa porzione della banda utile. Tuttavia gli algoritmi descritti possono essere applicati separatamente alle portanti di ciascun utente, in modo da sfruttare al meglio le conoscenze disponibili sulla statistica del canale.

La figura 4.1 illustra la struttura del sistema. Il segnale trasmesso x_n è convoluto con la risposta all'impulso

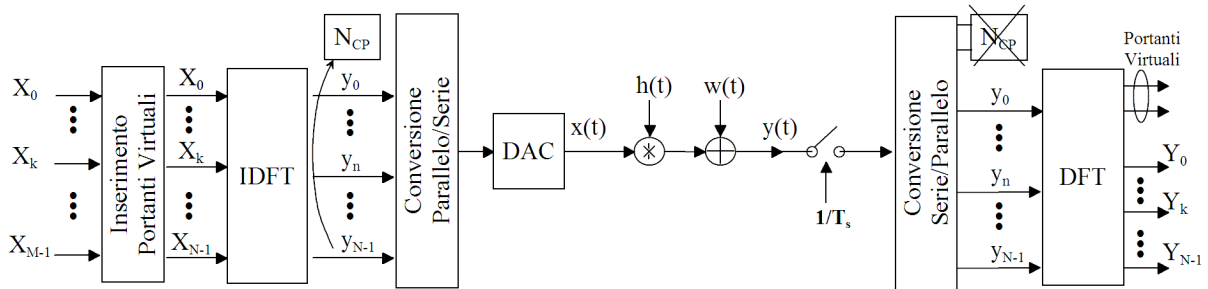


Figura 4.1: Modello del sistema di comunicazione per la stima di canale.

(CIR) h_n del canale radio, di lunghezza L . In seguito, si sovrappone al segnale risultante il rumore gaussiano w_n con potenza σ_w^2 .

Si consideri la trasmissione di un simbolo SC-FDMA alla volta, rappresentato dal segnale x_n . Dopo l'aggiunta del CP, il segnale x_n è ciclico e il filtraggio da parte di h_n avviene con una convoluzione circolare; il segnale ricevuto y_n ha espressione:

$$y_n = x_n \otimes h_n + w_n \quad 0 \leq n < (N + N_{CP}) \quad (4.1)$$

La trasformata di Fourier di y_n su N campioni è pari a

$$Y_k = H_k \cdot X_k + W_k \quad 0 \leq k < N \quad (4.2)$$

Il sistema di trasmissione nel dominio trasformato equivale alla sovrapposizione di N canali Gaussiani indipendenti, come mostrato in figura 4.2. L'equalizzazione viene effettuata dividendo elemento per elemento i

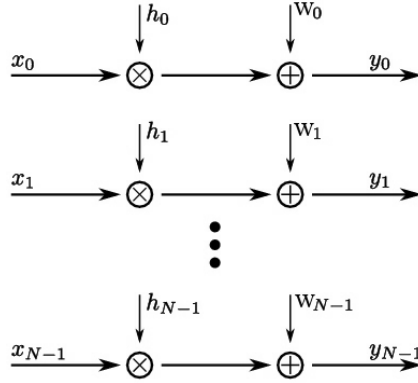


Figura 4.2: Modello equivalente con canali gaussiani paralleli.

coefficienti del segnale ricevuto Y_k per le corrispondenti stime di canale \hat{H}_k , ottenute da un generico algoritmo di stima. Per semplicità, la relazione (4.2) si può riscrivere in forma matriciale come:

$$F_N\{y(nT_s)\} = \mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{h} + \mathbf{W} = \mathbf{X}\mathbf{H} + \mathbf{W} \quad (4.3)$$

dove \mathbf{X} è una matrice contenente i coefficienti X_k sulla diagonale principale, $\mathbf{H} = [H_0, H_1, \dots, H_{N-1}]^T$, $\mathbf{W} = [W_0, W_1, \dots, W_{N-1}]^T$ e infine

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} W_N^{00} & \dots & W_N^{0(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)0} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

è la matrice della trasformata DFT, $W_N^{nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$.

Come mostrato in figura 4.1, solo M portanti trasportano informazioni di utente; le difficoltà incontrate dalla stima di canale in presenza delle portanti virtuali sono discusse nel paragrafo 4.2.

Infine, nel paragrafo 4.3, si stabiliscono alcune proprietà della CIR utilizzate nella derivazione degli algoritmi di stima.

4.2 Il rapporto tra portanti di utente e virtuali

Osservando le portanti del segnale trasmesso \mathbf{X} , solo M presentano ampiezze diverse da zero, mentre $(N - M)$ sono nulle; nell'ipotesi che tutte le M portanti del canale PUSCH trasportino dati di utente, la CFR \mathbf{H} è finestrata da un segnale rettangolare B_k , rappresentato in figura 4.3. Sia \mathbf{S}_U l'insieme degli indici delle portanti allocate, di espressione

$$\mathbf{S}_U = \{0, 1, \dots, (N_{U1} - 1), (N - N_{U2}), \dots, N - 1\} \quad (4.5)$$

dove $N_{U1} = \lfloor M/2 \rfloor$ e $N_{U2} = M - N_{U1}$. Per la tratta di Uplink di LTE vale la relazione $N_{U1} = N_{U2} = M/2$, a causa del mancato annullamento della DC (par. 2.2.4). La CFR ricevuta, indicata con \tilde{H} è data da:

$$\tilde{H}_k = B_k \cdot H_k \quad , \quad 0 \leq k < N \quad (4.6)$$

dove

$$B_k = \delta(k - k'), \text{ con } k' \in \mathcal{S}_U \quad (4.7)$$

La CIR corrispondente \tilde{h}_n è

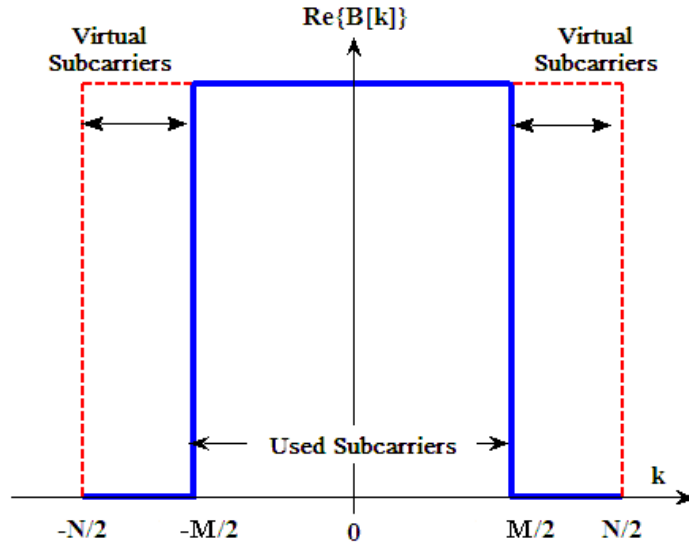


Figura 4.3: Effetto delle portanti virtuali: funzione ideale passabanda $B[k]$.

$$\tilde{h}_n = IDFT_N(\tilde{H}_k) = \sum_{l=0}^{N-1} h_{n-l} b_l \quad (4.8)$$

pari alla convoluzione tra i coefficienti di canale originali e l'antitrasformata di B_k su N campioni, di espressione:

$$b_n = \frac{\exp(-j2\pi n N_{U2}/N) - \exp(j2\pi n N_{U1}/N)}{N\{1 - \exp(j2\pi n/N)\}} \quad (4.9)$$

La CIR osservata \tilde{h}_n non è concentrata nell'originario intervallo di dispersione dei ritardi, bensì si estende per tutti gli N campioni del segnale trasmesso. In figura (4.4) è mostrato il confronto tra la risposta \tilde{h}_n e la CIR originale h , per una realizzazione di canale EVA. Si dice in questo caso che la CIR è disturbata dall'*errore di correlazione*. Alcuni algoritmi di stima nel dominio del tempo assumono che la lunghezza L della CIR \tilde{h}_n sia inferiore alla durata del CP. Supponendo che i coefficienti restanti contengano solo rumore, la risposta \tilde{h}_n viene troncata ai primi N_{CP} campioni. Questo troncamento provoca una perdita di potenza e un conseguente degrado nella stima della CFR, data da:

$$\hat{H}_k = DFT_N\{\tilde{h}_n\} \quad 0 \leq n < N_{CP} \quad (4.10)$$

L'errore di stima sulla CFR cresce all'aumentare della dispersione energetica (*leakage*), di espressione

$$Leakage = 1 - b_0 = 1 - M/N = N_V/N \quad (4.11)$$

dove $b_0 = M/N$. Essa è direttamente proporzionale al numero delle portanti virtuali presenti nel sistema. In figura 4.5 sono rappresentate le versioni tempo-continue della funzione b_n in due casi. La curva in blu rappresenta la funzione $b(t)$ per $N_V \neq 0$. La curva in rosso mostra l'andamento di $b(t)$ in assenza di leakage. Questa funzione è unitaria in $n = 0$ e nulla per i restanti valori di n , dunque corrisponde a un impulso discreto e non introduce dispersioni.

Come affermato nel par. 2.2.3 nel sistema LTE il numero di portanti virtuali può superare il 40% delle N portanti complessive. Per utilizzare gli algoritmi di stima di canale nel dominio del tempo, è necessario correggere precedentemente l'errore di correlazione. Vengono proposte a questo scopo alcune tecniche capaci di

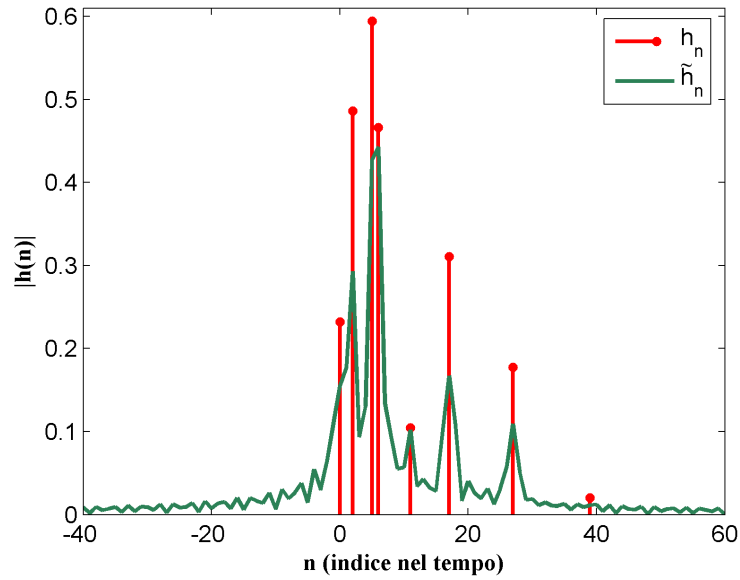


Figura 4.4: Confronto tra la risposta originale h e quella perturbata \tilde{h} per un canale EVA.

ricostruire, a meno del rumore, la risposta originale h partendo dalla versione distorta \tilde{h}_n . Tali tecniche sono discusse nel Par. 4.6.

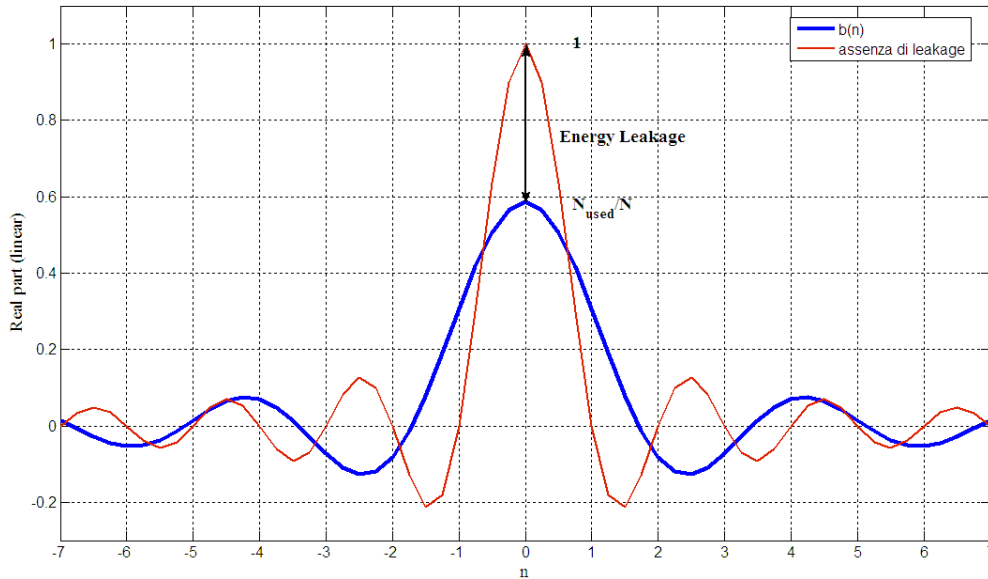


Figura 4.5: Effetto del leakage nel tempo. In blu: $b(n) = IDFT[B(k)]$, in rosso: assenza di leakage.

4.3 Modello generale del canale multi-percorso

Il modello adottato per descrivere il canale multi-percorso è dato da:

$$h(\tau) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \delta(\tau - \tau_l) \quad (4.12)$$

Esso è formato dalla sovrapposizione di L percorsi multipli, ciascuno dei quali presenta un coefficiente di attenuazione h_l e un ritardo τ_l . Questi percorsi variano in funzione del tempo sia per numero sia per le proprietà di ritardo e attenuazione, ma si ipotizza che il canale rimanga stazionario per l'intera durata di un

simbolo SC-FDMA.

Inoltre, il modello del canale radio presenta le seguenti proprietà:

- $\tau_0 = 0$, cioè la sincronizzazione nel tempo è *esatta* (par. 3.1.1);
- il canale è di tipo *sample-spaced*, ovvero i ritardi di canale τ_l sono multipli interi del periodo di campionamento T_C

$$\tau_l = m_l T_C \quad 0 \leq l \leq (L-1) \quad (4.13)$$

dove $m_l \in \mathbf{S}_L$, $\mathbf{S}_L = \{0, m_1, m_l, \dots, m_{L-1}\}$;

- vale la condizione di circolarità della convoluzione: il massimo ritardo del canale radio è minore della durata del CP, ovvero $m_{L-1} < N_{CP}$;
- i coefficienti di attenuazione h_l sono variabili casuali complesse indipendenti con distribuzione di Rayleigh (par. 2.5); essi sono raccolti nel vettore colonna $\mathbf{h}_L \in \mathbb{C}^{L \times 1}$, con $\mathbf{h}_L(m) \neq 0, \forall m \in \mathbf{S}_L$;
- grazie all'indipendenza degli h_l , il Power Delay Profile (PDP) del canale è descritto dalla matrice di autocorrelazione nel tempo:

$$R_{hh} = E[\mathbf{h}\mathbf{h}^H] = \text{diag}(\sigma_0^2, \dots, \sigma_m^2, \dots, \sigma_{L-1}^2) \quad (4.14)$$

I suoi unici elementi diversi da zero si trovano nelle posizioni (m_l, m_l) , con $m_l \in \mathbf{S}_L$.

- La traccia della matrice R_{hh} , pari all'energia del canale nel tempo, rispetta la condizione

$$\text{trace}(R_{hh}) = 1 \quad (4.15)$$

L'energia nel dominio del tempo corrisponde alla potenza media nel dominio della frequenza, quindi il canale non introduce fattori di scala sul segnale ricevuto \mathbf{Y} .

4.4 Gli algoritmi di stima di canale

In questo paragrafo vengono presentati gli algoritmi di stima di canale studiati. L'obiettivo della stima di canale è il calcolo di una versione approssimata della risposta di canale (nel tempo o in frequenza), che consenta di recuperare l'informazione trasmessa.

La stima di canale viene facilitata nel sistema LTE dalla presenza di particolari portanti pilota, chiamate Reference Signals. Nel sistema LTE le sequenze RS hanno potenza unitaria nel dominio del tempo; in frequenza la loro potenza diventa $P_{RS} = (N/\sqrt{M})^2$.

Nel dominio della frequenza, la trasmissione dei RS avviene su tutte le sottoportanti allocate all'utente. Ciò significa che il numero di portanti pilota P coincide con il numero di portanti dati M e quindi non è necessario interpolare i valori stimati. Nel dominio del tempo viene trasmesso un simbolo RS per slot, ovvero ogni 0.5 ms. Le risposte di canale intermedie, necessarie per equalizzare i dati trasmessi, vengono ricostruite tramite un'interpolazione lineare delle risposte stimate dai RS. Gli stimatori considerati nel seguito sono:

- stimatore ZF
- stimatore LS regolarizzato
- stimatore LS *downsampled*
- stimatore MMSE nel tempo e in frequenza
- stimatore MMSE *mismatched*
- stimatore MMSE adattativo

Inoltre un semplice stimatore, chiamato *DFT-based*, è presentato nel par. 4.6.1, dove si considerano gli effetti dell'errore di correlazione.

La discussione degli stimatori descritti permette di comprendere le scelte progettuali adottate nel metodo di stima proposto. Esso è una variante dello stimatore MMSE mismatched e viene presentato nel par. 4.7.

4.4.1 La stima Zero Forcing (ZF)

Riscrivendo la formula (4.2) per le sole portanti pilota, si trova

$$\mathbf{Y}_P = \mathbf{X}_P \mathbf{F}_{PL} \mathbf{h}_L + \mathbf{W}_P = \mathbf{X}_P \mathbf{H}_P + \mathbf{W}_P \quad (4.16)$$

dove \mathbf{Y}_P è il segnale ricevuto, \mathbf{X}_P è la matrice dei dati noti in ricezione e \mathbf{W}_P il vettore di rumore; inoltre \mathbf{h}_L è la CIR, di lunghezza $L \leq N_{CP}$ e \mathbf{F}_{PL} è la matrice $P \times L$ ottenuta dalla matrice di Fourier di espressione (4.4) selezionando le P posizioni spettrali delle portanti pilota e le L posizioni dei coefficienti della CIR.

Moltiplicando entrambi i membri della (4.16) per l'inversa della matrice \mathbf{X}_P , si ottiene una prima semplice stima della CFR, nelle posizioni delle portanti pilota, data da

$$\hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \hat{\mathbf{H}}_P = \mathbf{X}_P^{-1} \mathbf{Y}_P = \begin{bmatrix} \frac{Y_{p_0}}{X_{p_0}} & \frac{Y_{p_1}}{X_{p_1}} & \dots & \frac{Y_{p_{P-1}}}{X_{p_{P-1}}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{H}_P + \mathbf{X}_P^{-1} \mathbf{W}_P \quad (4.17)$$

dove i pedici esprimono le posizioni delle portanti pilota nello spettro. Questa operazione equivale a normalizzare ciascuna portante del segnale ricevuto con i campioni della sequenza nota. La CFR approssimata $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ è indicata nel seguito con il nome di stima di canale *zero-forcing* e costituisce il punto di partenza per lo sviluppo di algoritmi più articolati. Tutti gli stimatori discussi nel capitolo presentano una struttura lineare, che si adatta perfettamente al modello di segnale (4.16) e semplifica la realizzazione pratica degli algoritmi.

4.4.2 Stima Least Squares (LS)

La stima LS è la soluzione del problema ai minimi quadrati, che consiste nel minimizzare la misura del residuo nello spazio dei dati, espressa dalla norma L_2 del vettore residuo [31]. L'equazione che lega i dati disponibili ai parametri da stimare è

$$x_{obs} = G\theta + w \quad (4.18)$$

dove θ è il vettore dei parametri, di dimensione m , x_{obs} è il vettore dei dati osservati di dimensione n , w è il vettore di rumore e G è l'operatore lineare di dimensione $n \times m$ che lega i parametri alle osservazioni. Si suppone che il problema di stima sia sovradeterminato cioè $n > m$. Se $x = G\theta$ rappresenta il vettore dei dati ricalcolati, cioè la combinazione lineare delle colonne dell'operatore G , la differenza tra dati osservati e ricalcolati, o residuo è $e_x = (x_{obs} - x)$. La norma L_2 di e_x è pari a:

$$S = e_x^H e_x = (x_{obs} - G\theta)^H (x_{obs} - G\theta) = x_{obs}^H x_{obs} - 2\theta^H G^H x_{obs} + \theta^H G^H G\theta \quad (4.19)$$

Il valore di θ che annulla il gradiente della funzione S , minimizza nel contempo la norma del residuo. Il gradiente dell'espressione (4.19), calcolato rispetto a θ , è pari a

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial \theta} = -2G^H x_{obs} + 2G^H G\theta \quad (4.20)$$

e si annulla per

$$G^H G\theta = G^H x_{obs} \quad (4.21)$$

La (4.20) è nota come Equazione Normale. Essa indica che la distanza tra x_{obs} e $G\theta$ è minima quando il residuo e_x è ortogonale allo spazio dei dati, ovvero allo spazio delle colonne di G .

L'espressione della stima LS è

$$\theta_{LS} = \text{pinv}(G) \cdot x \quad (4.22)$$

dove $\text{pinv}(G)$ è la pseudo inversa di G (inversa di Moore-Penrose o di Lanczos) di espressione

$$\text{pinv}(G) = (G^H G)^{-1} G^H \quad (4.23)$$

L'espressione trovata viene adattata al problema della stima di canale, sostituendo a x il vettore \mathbf{Y} , a θ il vettore \mathbf{H} e a G la matrice $\mathbf{X}_P \mathbf{F}_{PL}$. Si trova la stima LS della CFR

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \mathbf{F}_{PL} (\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{X}_P^H \mathbf{X}_P \mathbf{F}_{PL})^{-1} \mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{X}_P^H \mathbf{Y} \quad (4.24)$$

La moltiplicazione iniziale per la matrice \mathbf{F}_{PL} riporta il risultato in frequenza. Per la tratta di Uplink LTE, i RS presentano un modulo costante su tutte le portanti e quindi il prodotto $\mathbf{X}_P^H \mathbf{X}_P$ è una matrice identità $M \times M$, di espressione

$$\mathbf{X}_P^H \mathbf{X}_P = \sigma_X^2 \cdot \mathbf{I}_M = (N/\sqrt{M}) \cdot \mathbf{I}_M \quad (4.25)$$

Inoltre il prodotto $\mathbf{X}_P^H \mathbf{Y}$ è pari a $\sigma_X^2 \cdot \hat{\mathbf{H}}_{ZF}$, dove $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ è la stima Zero Forcing (4.17).

La (4.24) diventa:

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \mathbf{A}_{LS} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{F}_{PL} (\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL})^{-1} \mathbf{F}_{PL}^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.26)$$

Un serio problema [28] per l'applicazione pratica della (4.26) è l'inversione della matrice $\mathbf{T} = (\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL})$, in quanto risulta mal condizionata. Per mostrare questo aspetto, si calcolano i valori singolari di \mathbf{T} per due casi specifici. Nel primo caso si suppone che L , l'estensione della CIR, sia pari alla durata del CP. Il secondo è un caso limite, non realistico, ma utile per comprendere la causa della singolarità di \mathbf{T} : si sceglie $L = N$, dimensione della FFT. I valori singolari di \mathbf{T} per $L = N$ sono mostrati in figura (4.6B). Vi sono esattamente M valori singolari tutti uguali, di ampiezza N . I restanti $(N - M)$ sono nulli e il loro numero coincide con quello delle portanti virtuali N_V . La struttura dei valori singolari di \mathbf{T} equivale alla funzione passa-banda B_k , di espressione (4.7), introdotta nel par. 4.2. La figura (4.6A) mostra il caso ($L = N_{CP}$); il comportamento dei valori singolari diventa più graduale, ma il rapporto tra autovalori nulli e non-nulli è vicino a N_V/M .

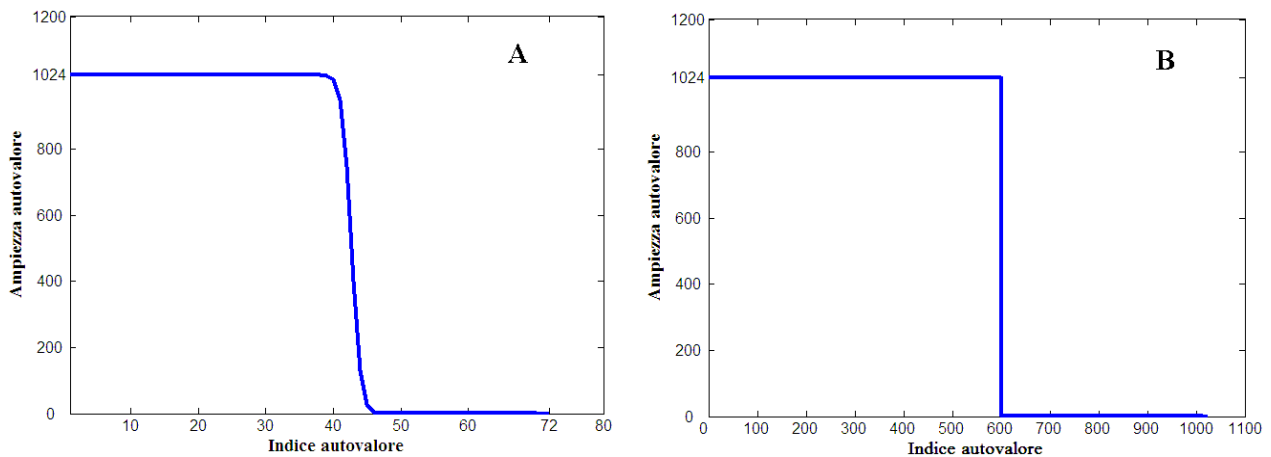


Figura 4.6: Valori singolari della matrice di Fourier \mathbf{F}_{PL} per $N = 1024$ e $P = 600$. Caso A: $L = 72$. Caso B: $L = 1024$.

Si propongono due soluzioni [28]:

- la regolarizzazione dei valori singolari
- il sottocampionamento (stima LS *downsampled*)

La regolarizzazione consiste nel sommare una costante α agli elementi di \mathbf{T} posizionati sulla diagonale principale. La matrice corretta dalla costante α è non singolare, ma si introduce nell'inversione un errore sistematico. Per rendere stabile l'inversione riducendo il più possibile l'errore sistematico, si può legare il valore di α alla potenza di rumore che perturba il vettore $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$; ad esempio $\alpha = 1/\overline{SNR} = \hat{\sigma}_W^2/P_X$, con \overline{SNR} pari alla stima corrente di SNR e $\hat{\sigma}_W^2$ alla stima della potenza del rumore AWGN. Lo stimatore LS regolarizzato diventa:

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS,reg} = \mathbf{A}_{LS,reg} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{F}_{PL} (\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL} + \alpha \mathbf{I}_L)^{-1} \mathbf{F}_{PL}^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.27)$$

Si osserva che la (4.27) equivale all'espressione dello stimatore MMSE mismatched con PDP uniforme (par. 4.4.4.1).

La seconda soluzione consiste nell'affrontare direttamente la causa del cattivo condizionamento, cioè la mancata eccitazione di un gran numero di portanti del simbolo SC-FDMA. Si consideri, ad esempio, un simbolo SC-FDMA con banda $B_W = 10$ MHz. Mentre la frequenza di campionamento è $f_s = 15.36$ MHz, la banda allocata massima è $B_{used} = 9$ MHz. Poichè la CFR si può stimare solo sulla banda occupata, è utile accrescere la *banda numerica*, definita da $B_N = B_{used}/f_s = M/N$, portandola dal valore di partenza $B_N = 9/15.36 \simeq 0.5859$ a un valore di poco inferiore a 1. Ciò si può ottenere riducendo la frequenza di campionamento dal valore f_s al valore $f_s' = \frac{2}{3} f_s$; questo valore assicura l'assenza di aliasing poichè $f_s' = 10.24$ MHz $> B_{used}$. Solo due coefficienti su tre della CIR \mathbf{h} vengono effettivamente stimati e il vettore della risposta ricostruita è sottocampionato di un fattore $2/3$. I coefficienti non considerati nella stima sono scartati e posti a 0.

Il nuovo modello di canale nel tempo diventa:

$$\mathbf{h}_{down} = [h_0, h_1, 0, h_3, h_4, 0, \dots, h_{L-1}]^T \quad (4.28)$$

e la stima sottocampionata della CFR è data da

$$\mathbf{H}_{down} = \mathbf{F}_{PL} \mathbf{h}_{down} \quad (4.29)$$

Eliminando i campioni nulli dalla (4.28) si trova il vettore \mathbf{h}_{down}^{DS} , pari alla versione sottocampionata della CIR, di lunghezza $\frac{2}{3}L$. L'espressione (4.29) si può riscrivere come:

$$\mathbf{H}_{down} = \mathbf{F}_{PL}^{DS} \mathbf{h}_{down}^{DS} \quad (4.30)$$

dove la matrice \mathbf{F}_{PL}^{DS} si ottiene eliminando dalla matrice \mathbf{F}_{PL} le colonne associate ai coefficienti di canale rimossi. Partendo dallo stimatore LS di espressione (4.26), la stima LS sottocampionata diventa

$$\hat{\mathbf{H}}_{down}^{DS} = \mathbf{A}_{LS,down} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{F}_{PL}^{DS} \left(\mathbf{F}_{PL}^{DS,H} \mathbf{F}_{PL}^{DS} \right)^{-1} \mathbf{F}_{PL}^{DS,H} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.31)$$

e il problema del cattivo condizionamento è risolto.

Questa proprietà può essere verificata confrontando i valori singolari delle matrici \mathbf{F}_{PL} e \mathbf{F}_{PL}^{DS} . Ad esempio, fissati i parametri $N = 1024$, $P = 600$ e $L = N_{CP} = 72$, si calcola in ambiente Matlab il rango e il numero di condizionamento delle matrici analizzate. I risultati ottenuti sono raccolti in tabella 4.1

Matrice	Dimensioni	Rango	Cond num.	Indici CIR
\mathbf{F}_{PL}	600×72	50	$2.0854 \cdot 10^{15}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, L\}$
\mathbf{F}_{PL}^{DS}	600×48	48	$2.9703 \cdot 10^3$	$\{1, 3, 4, 6, 7, 9, \dots, L\}$

Tabella 4.1: Proprietà della matrice di Fourier e della versione sottocampionata.

Il fattore di sottocampionamento scelto, pari a $2/3$, è valido solo se tutta la banda disponibile è allocata agli utenti. Quando $M < N_{used}$ questo fattore deve essere ridotto in modo da portare la banda numerica vicino a 1.

4.4.2.1 Prestazioni e costo computazionale

Per esaminare le prestazioni dei metodi proposti, si considera come riferimento la tecnica LS, di espressione (4.26), anche se non applicabile direttamente in LTE. L'errore della stima LS vale [28]

$$\mathbf{e}_{LS} = -\mathbf{F}_{PL}(\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL})^{-1} \mathbf{F}_{PL}^H (\mathbf{X}_P^{-1} \mathbf{W}_P) \quad (4.32)$$

e la matrice di covarianza dell'errore è [28]

$$\mathbf{C}_{e_{LS}} = \frac{1}{SNR} \mathbf{F}_{PL}(\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL})^{-1} \mathbf{F}_{PL}^H \quad (4.33)$$

Essa presenta unicamente il termine dipendente dall'SNR, mentre il termine di bias legato all'autocorrelazione del canale si annulla.

Nel caso dello stimatore LS regolarizzato, il termine di bias non è nullo e causa un errore di stima costante e ineliminabile che limita le prestazioni della tecnica, soprattutto quando il rumore AWGN è meno intenso. Le stesse osservazioni valgono per lo stimatore MMSE mismatched, con PDP uniforme, presentato nel Par. 4.4.4.1. Anche la matrice di covarianza $\mathbf{C}_{e_{LS,down}}$, relativa all'algoritmo LS sottocampionato, presenta un termine di bias, in quanto $(\mathbf{F}_{PL}^{DS,H} \mathbf{F}_{PL}^{DS}) \neq (\mathbf{F}_{PL}^{DS,H} \mathbf{F}_{PL})$. Come riportato in [28], le prestazioni della tecnica downsampled sono leggermente migliori rispetto alla stima regolarizzata in quanto, partendo dallo stesso numero di dati disponibili, è necessario ricostruire un numero minore di coefficienti di canale.

Si esamina infine il costo computazionale dei vari metodi. Lo stimatore LS di equazione (4.26) è molto economico. Il suo costo è dato dal prodotto matrice-vettore $\mathbf{A}_{LS} \hat{\mathbf{H}}_{ZF}$, pari a M^2 operazioni complesse. Infatti la matrice \mathbf{A}_{LS} non deve essere mai aggiornata.

L'algoritmo LS regolarizzato ha un costo dipendente dalla frequenza di aggiornamento del parametro α . Se il valore di α è fissato a priori, basta calcolare la matrice $\mathbf{A}_{LS,reg}$ una volta sola. Invece, adattando questo valore alla stima corrente di SNR, la matrice di stima deve essere ricalcolata frequentemente. In questo caso il costo è legato a due contributi:

- inversione della matrice $\mathbf{G} = (\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL} + \alpha \mathbf{I}_L)$, che richiede $O(L^3)$ operazioni complesse.
- prodotto di \mathbf{G} per le due matrici \mathbf{F}_{PL} e \mathbf{F}_{PL}^H . Infatti il prodotto $\mathbf{G}_1 = \mathbf{F}_{PL} \mathbf{G}^{-1}$ richiede $O(PL^2)$ operazioni complesse, e il successivo prodotto $\mathbf{G}_1 \mathbf{F}_{PL}^H$ ha un costo proporzionale a $O(P^2L)$. Esse sono quindi più costose dell'inversione di \mathbf{G} .

Una valida alternativa a questo approccio è ottenuta memorizzando diverse versioni della matrice $\mathbf{A}_{LS,reg}$, ciascuna associata a uno specifico valore $\alpha_i = 1/SNR_i$. L'insieme dei valori SNR_i è scelto in modo da soddisfare i requisiti di funzionamento del sistema; ad esempio si potrebbe scegliere un intervallo uniforme, compreso tra i valori SNR_{min} e SNR_{max} , con passo di incremento δ_{SNR} . Per il calcolo della stima, si seleziona la matrice $\mathbf{A}_{LS,reg}$ con il valore SNR_i più vicino all'attuale SNR. Questa soluzione ha lo stesso costo della stima con valore di α fissato a priori ma presenta prestazioni migliori.

Come per il caso LS, anche l'algoritmo LS downsampled presenta una matrice $\mathbf{A}_{LS,down}$ calcolabile a priori e già disponibile in memoria all'arrivo del segnale. Il costo dello stimatore è nuovamente pari a M^2 operazioni complesse.

4.4.3 Stimatore Minimum Mean Square Error (MMSE)

Lo stimatore MMSE considera il parametro da stimare θ come una variabile casuale [31]. Si hanno a disposizione due tipologie di informazioni:

- l'informazione a priori sui dati osservati x e sul parametro da stimare θ . Ad esempio, se θ è una potenza, ci si aspetta che i valori stimati siano strettamente maggiori di zero.

- le informazioni sulla correlazione esistente tra parametri da stimare e dati a disposizione (note collettivamente come *informazione della teoria*).

Il teorema di Bayes rappresenta formalmente il trasferimento dell'informazione a priori e della teoria nella stima del parametro:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} \quad (4.34)$$

ovvero la probabilità a posteriori dell'esame dei dati $p(\theta|x)$ è ottenuta combinando le informazioni a priori $p(\theta)$ e $p(x)$ e il termine $p(x|\theta)$, che descrive l'influenza del parametro incognito sui dati. Se $\hat{\theta}(x)$ è la stima del parametro θ ottenuta dai dati x , l'errore quadratico medio della stima è

$$MSE = E[(\theta - \hat{\theta}(x))^H(\theta - \hat{\theta}(x))] = \int \int (\theta - \hat{\theta}(x))^H(\theta - \hat{\theta}(x))p(x, \theta)dx d\theta \quad (4.35)$$

Dalla regola di Bayes la pdf congiunta si può calcolare come il prodotto tra la pdf dei dati condizionata da θ e la pdf a priori di θ , ottenendo

$$p(x, \theta) = p(x|\theta)p(\theta) \quad (4.36)$$

e ricordando la (4.34), l'espressione (4.35) diventa:

$$MSE = \int \left[\int (\theta - \hat{\theta}(x))^2 p(\theta|x) d\theta \right] p(x) dx$$

La stima $\hat{\theta}$ che minimizza il MSE si ottiene annullando il gradiente del termine contenuto tra le parentesi quadre. Esso rappresenta l'errore quadratico medio condizionato ad uno specifico insieme di osservazioni x ; si trova

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int (\theta - \hat{\theta}(x))^2 p(\theta|x) d\theta = -2 \int (\theta - \hat{\theta}(x)) p(\theta|x) d\theta = 0$$

Osservando che $-2 \int \theta p(\theta|x) d\theta = -2\hat{\theta}(x) \overbrace{\int p(\theta|x) d\theta}^1$, lo stimatore MMSE è dato da:

$$\hat{\theta}_{MMSE} = \int \theta p(\theta|x) d\theta = E[\theta|x] \quad (4.37)$$

La generalità dell'espressione (4.37) consente di sviluppare la stima di canale MMSE sia nel dominio del tempo (CIR) sia in frequenza (CFR).

4.4.3.1 Stimatore MMSE nel tempo

L'espressione della stima MMSE nel tempo [32] è ricavata inizialmente per il modello del segnale ricevuto (4.3). Questo modello presenta le seguenti proprietà:

- assenza di portanti di guardia ($N_V = 0$)
- trasmissione sull'intero spettro disponibile ($N = N_{used}$)
- CIR del canale radio rappresentata su N campioni (\mathbf{h} ha lunghezza N)
- matrici di Fourier complete (le colonne di \mathbf{F} costituiscono una base ortogonale completa per \mathbb{R}^N)

Se \mathbf{h} è un vettore aleatorio con distribuzione gaussiana, incorrelato con il rumore \mathbf{W} , la stima MMSE ha espressione generale:

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \mathbf{R}_{hY} \mathbf{R}_{Y^{-1}Y}^{-1} \mathbf{Y} \quad (4.38)$$

dove i termini

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{hY} &= E[\mathbf{h}\mathbf{Y}^H] = \mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H \\ \mathbf{R}_{YY} &= E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] = \mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H + \sigma_W^2\mathbf{I}_N\end{aligned}\quad (4.39)$$

rappresentano rispettivamente la cross-correlazione tra \mathbf{h} e \mathbf{Y} , e la matrice di autocorrelazione di \mathbf{Y} . La matrice \mathbf{R}_{hh} è l'autocorrelazione della CIR \mathbf{h} e σ_W^2 è la varianza del rumore. Per calcolare l'espressione dello stimatore si deve conoscere il valore esatto di questi parametri, condizione difficilmente realizzabile in pratica. Generalmente i valori esatti sono rimpiazzati da stime o approssimazioni plausibili, al costo di introdurre un errore sistematico nella stima (si veda il par. 4.4.4.1). Sostituendo le espressioni (4.39) nella (4.38) si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{A}_{MMSE}^{time} \hat{\mathbf{H}}_{LS} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}[\mathbf{R}_{hh} + \sigma_W^2(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1}]^{-1}\mathbf{F}^H\hat{\mathbf{H}}_{LS} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}[\mathbf{R}_{hh} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_N]^{-1}\mathbf{F}^H\hat{\mathbf{H}}_{ZF}\end{aligned}\quad (4.40)$$

dove in questo caso la stima zero-forcing $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ coincide con la stima ai minimi quadrati $\hat{\mathbf{H}}_{LS}$. Lo sviluppo analitico della (4.40) è riportato nel par. A.3.1. Inoltre poiché le portanti pilota hanno ampiezza costante e potenza σ_X^2 , si verifica l'uguaglianza $(\mathbf{X}^H\mathbf{X}) = \sigma_X^2\mathbf{I}_N$. Se vale la condizione di circolarità della convoluzione (par. 4.3), e quindi la dispersione del canale τ_{\max} è inferiore alla durata del CP, solo $L \leq N_{CP}$ coefficienti di h sono diversi da zero e l'espressione (4.40) diventa

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{time} = \mathbf{F}_L\mathbf{R}_{hh}[\mathbf{R}_{hh} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_L]^{-1}\mathbf{F}_L^H\hat{\mathbf{H}}_{ZF}\quad (4.41)$$

L'autocorrelazione del canale \mathbf{R}_{hh} è calcolata solo sugli L taps diversi da zero e ha dimensioni $L \times L$. Il termine \mathbf{F}_L è la matrice di Fourier $N \times L$, ottenuta selezionando le L colonne di \mathbf{F} associate ai ritardi τ_l di \mathbf{h} . Le colonne di \mathbf{F}_L sono ancora ortogonali tra loro, quindi vale l'uguaglianza $(\mathbf{F}_L^H\mathbf{F}_L)^{-1} = \mathbf{I}_L$.

L'ipotesi di assenza di guardie non è valida per il sistema LTE; le espressioni dei termini (4.39) diventano

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{hY} &= E[\mathbf{h}\mathbf{Y}^H] = \mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}_{PL}^H\mathbf{X}_P^H \\ \mathbf{R}_{YY} &= E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] = \mathbf{X}_P\mathbf{F}_{PL}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}_{PL}^H\mathbf{X}_P^H + \sigma_W^2\mathbf{I}_P\end{aligned}\quad (4.42)$$

La matrice \mathbf{F}_{PL} , le cui colonne contengono i soli coefficienti non nulli dello spettro, sostituisce \mathbf{F}_L . La matrice \mathbf{X} , calcolata su N portanti viene sostituita da \mathbf{X}_P ; il prodotto $\mathbf{X}_P^H\mathbf{X}_P$ si semplifica nuovamente in una matrice identità scalata, cioè $\mathbf{X}_P^H\mathbf{X}_P = (1/\sigma_X^2 \cdot I_P)$. Il passaggio dall'espressione (4.38) alla (4.40) è permesso dall'ortogonalità delle colonne di \mathbf{F} . Questa proprietà viene persa per la matrice \mathbf{F}_{PL} poiché i suoi vettori colonna, selezione di P coefficienti delle colonne di \mathbf{F} , non sono tra loro ortogonali. L'effetto è simile a una finestrazione delle colonne della matrice \mathbf{F} per un rettangolo di N_{used} campioni, come mostrato ad esempio nella figura 4.6.

Introducendo le modifiche descritte nella (4.40) si trova

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{time} = \mathbf{A}_{MMSE}^{time} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{F}_{PL}\mathbf{R}_{hh}[\mathbf{R}_{hh} + \frac{1}{SNR}(\mathbf{F}_{PL}^H\mathbf{F}_{PL})^{-1}]^{-1}\mathbf{F}_{PL}^H\hat{\mathbf{H}}_{ZF}\quad (4.43)$$

4.4.3.1.1 Difficoltà nel calcolo dello stimatore L'applicazione pratica della (4.43) presenta due difficoltà:

- la matrice $\mathbf{T} = (\mathbf{F}_{PL}^H\mathbf{F}_{PL})$ non è sempre invertibile;
- l'antitrasformata della stima ZF $\mathbf{F}_{PL}^H\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ risente della presenza delle portanti di guardia.

La matrice \mathbf{T} era già stata incontrata nella stima LS (par. 4.4.2). Poiché lo stimatore LS non si avvale delle proprietà statistiche del canale, il numero di coefficienti da ricostruire è pari a $\widehat{L} = N_{CP}$, cioè il massimo valore possibile. Per la stima MMSE, la posizione e il numero dei coefficienti da stimare \widehat{L} variano in funzione della struttura di \mathbf{R}_{hh} . Quando il valore di \mathbf{R}_{hh} è esatto, si trova $\widehat{L} = L$, cioè si stimano solo i percorsi presenti nella risposta originale. Utilizzando una stima di \mathbf{R}_{hh} , il parametro \widehat{L} può variare da L a N_{CP} . Di conseguenza anche il numero di colonne della matrice \mathbf{F}_{PL} varia in questo intervallo. Applicando alla matrice \mathbf{T} la proprietà del rango

$$\text{rank}(A \cdot B) \leq \min[\text{rank}(A), \text{rank}(B)] \quad (4.44)$$

dove A e B sono sue generiche matrici $m \times n$, si dimostra che, quando \mathbf{F}_{PL} non ha rango pieno, \mathbf{T} è singolare. Nel grafico a sinistra di figura 4.7 è rappresentata la variazione del rango di \mathbf{T} in funzione di L , $1 \leq L \leq N_{CP}$. Si assume la configurazione per $B_W = 10$ MHz, ovvero $P = 600$ e $N_{CP} = 72$. Per chiarezza, il valore del rango è normalizzato al numero di colonne della matrice L . Quando questo parametro è pari a 1, la matrice è invertibile, altrimenti è singolare. A destra della figura 4.7 sono mostrati i numeri di condizionamento della

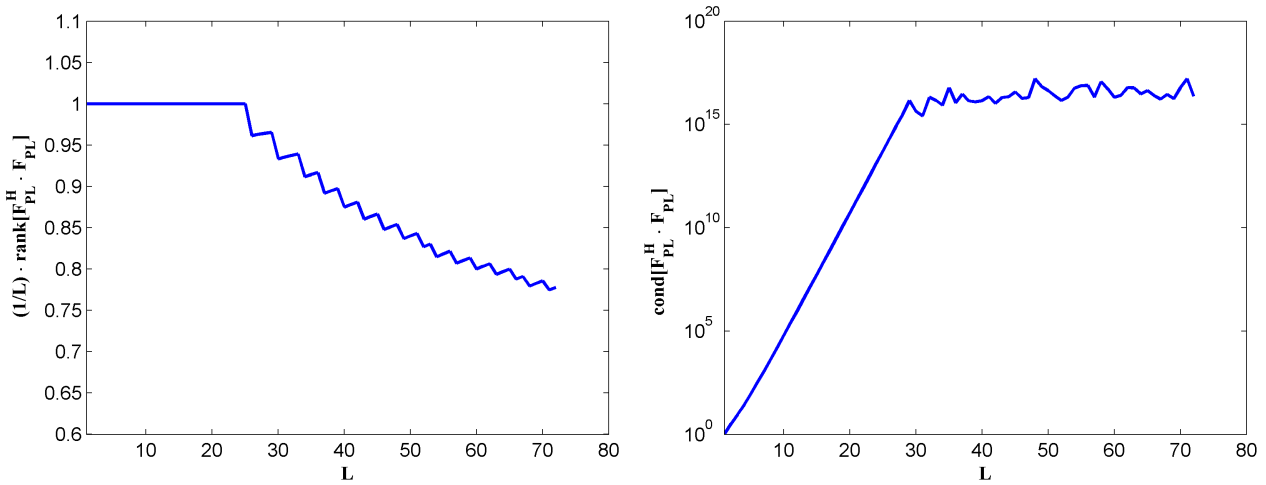


Figura 4.7: Rango normalizzato (a sinistra) e numero di condizionamento (a destra) della matrice $\mathbf{F}_{PL}^H \mathbf{F}_{PL}$ al variare di L . $B_W = 10$ MHz, $P = 600$ e $L = 72$.

matrice \mathbf{T} calcolata per lo stesso intervallo di valori di L . Si conclude che l'invertibilità di \mathbf{T} è garantita solo per piccoli valori di L .

Lo scopo della matrice \mathbf{T} è di regolarizzare la matrice \mathbf{R}_{hh} con il valore corrente di SNR, perciò si propone la sostituzione di \mathbf{F}_{PL} con \mathbf{F}_{NL} . Quest'ultima matrice ha sempre rango pari a L poichè le sue colonne sono una base ortogonale ridotta dello spazio \mathbb{R}^N . Lo stimatore diventa

$$\mathbf{A}_{MMSE}^{time} = \mathbf{F}_{PL} \mathbf{R}_{hh} [\mathbf{R}_{hh} + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_L]^{-1} \mathbf{F}_{PL}^H \quad (4.45)$$

e la sua matrice inversa è ben definita.

Per studiare il secondo problema, ovvero l'effetto delle portanti di guardia sulla qualità della stima $\widehat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{time}$, si costruisce una stima del canale nel tempo \mathbf{h}_{ZF}^{sim} non affetta dall'errore di convoluzione, a differenza di $\widehat{\mathbf{h}}_{ZF} = \mathbf{F}_{PL}^H \widehat{\mathbf{H}}_{ZF}$. La costruzione del vettore \mathbf{h}_{ZF}^{sim} è così effettuata:

- estensione della risposta vera \mathbf{h}_{RS}^{true} su N campioni (zero padding);
- calcolo di $\mathbf{w}_{norm} = \mathbf{w} / \sqrt{P_X}$ dove \mathbf{w} è il rumore sommato al segnale trasmesso e $P_X = N^2 / N_{used}$ è la potenza del segnale di riferimento \mathbf{X} ;
- calcolo di $\mathbf{h}_{ZF}^{sim} = \mathbf{h}_{RS}^{true} + \mathbf{w}_{norm}$;
- troncamento di \mathbf{h}_{ZF}^{sim} ai primi L campioni.

In seguito si calcolano le prestazioni dello stimatore \mathbf{A}_{MMSE}^{time} quando il dato in ingresso è:

- la risposta pulita \mathbf{h}_{ZF}^{sim}
- la risposta affetta dall'errore di correlazione $\hat{\mathbf{h}}_{ZF}$

La figura 4.8 mostra l'errore quadratico medio (MSE) delle stime MMSE nel tempo, per un intervallo di valori di SNR pari a $SNR = \{0, 5, 10, \dots, 30\}$. Il canale radio ha un PDP esponenziale. Ogni matrice di stima (\mathbf{A}_{MMSE}^{time} o \mathbf{A}_{MMSE}^{freq}) è costruita ipotizzando di conoscere perfettamente i valori di autocorrelazione del canale e di SNR. La stima MMSE nel tempo calcolata a partire da $\hat{\mathbf{h}}_{ZF}$ ha prestazioni disastrose. A causa dell'errore

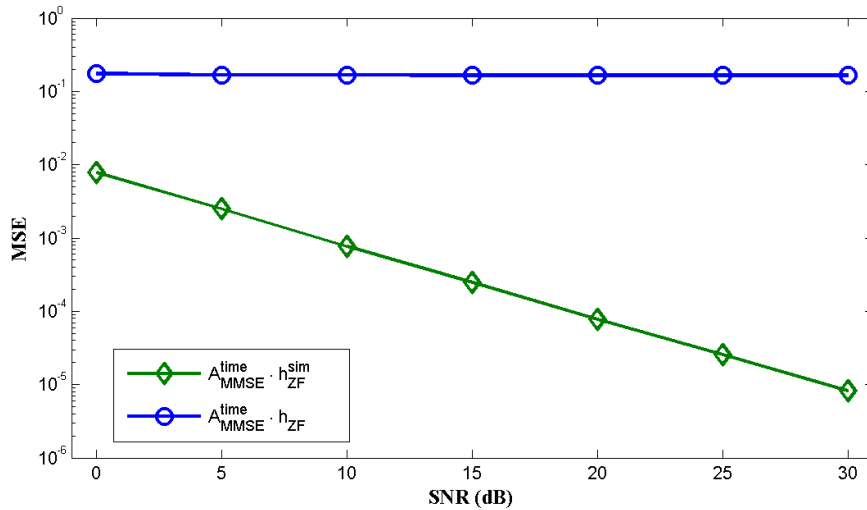


Figura 4.8: Prestazioni dell'algoritmo MMSE nel tempo con e senza portanti di guardia.

di correlazione, la CIR $\hat{\mathbf{h}}_{ZF}$ si discosta profondamente dalla risposta originale. La qualità della stima non migliora per valori di SNR crescenti; infatti l'errore di stima è indipendente dalla potenza del rumore e quindi irriducibile, anche per $\sigma_W^2 = 0$. Al contrario, la stima MMSE nel tempo con dati simulati \mathbf{h}_{ZF}^{sim} presenta ottime prestazioni, raggiungendo il limite teorico definito in [29].

Da quanto osservato, l'impiego dello stimatore \mathbf{A}_{MMSE}^{time} presenta importanti vantaggi ma risulta di fatto inapplicabile se si seguono strettamente le indicazioni dello standard in merito al numero delle portanti virtuali.

4.4.3.2 Stimatore MMSE in frequenza

La stima MMSE in frequenza si differenzia da quella nel tempo per due aspetti:

- la matrice di correlazione del canale è espressa in frequenza;
- non è necessario applicare ai dati coppie di trasformate di Fourier diretta e inversa poiché l'equalizzazione si effettua in frequenza.

Inizialmente si assumono valide le stesse ipotesi dello stimatore nel tempo, in particolare l'assenza di guardie nel segnale ricevuto ($N_V = 0$). La sostituzione delle (4.39) in (4.38), ma con un diverso sviluppo (par. A.3.1) porta all'espressione:

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{freq} = \mathbf{A}_{MMSE}^{freq} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{R}_{HH} (\mathbf{R}_{HH} + \sigma_W^2 (\mathbf{X} \mathbf{X}^H)^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.46)$$

Anche in questo caso, per calcolare lo stimatore è necessario conoscere a priori i valori esatti dei termini \mathbf{R}_{HH} , l'autocorrelazione della CFR, e σ_W^2 , la potenza del rumore AWGN. La complessità di questo algoritmo è molto alta, perchè è necessario effettuare un'inversione matriciale ogni volta che i dati nel vettore \mathbf{X} si aggiornano.

Sostituendo al termine $(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)^{-1}$ in (4.46) il suo valore atteso $E[(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)^{-1}]$, l'errore introdotto è trascurabile [29]. Inoltre trasmettendo la stessa costellazione su tutte le portanti e se i punti della costellazione sono equiprobabili, si ottiene $E[(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)^{-1}] = E\{1/|x_k|^2\}\mathbf{I}_N$, dove \mathbf{I}_N è una matrice identità ($N \times N$). Si definisce l'SNR medio come $SNR = E\{|x_k|^2\}/\sigma_n^2$; l'espressione dello stimatore semplificato diventa

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{freq} = \mathbf{A}_{MMSE}^{freq} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{R}_{HH} (\mathbf{R}_{HH} + \frac{\beta}{SNR} \mathbf{I}_N)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.47)$$

dove $\beta = E\{|x_k|^2\}E\{1/|x_k|^2\}$ è una costante dipendente dalla costellazione del segnale. Con questa forma, il cambiamento del vettore \mathbf{X} non influenza il calcolo di \mathbf{A}_{MMSE}^{freq} e inoltre, conoscendo o fissando le stime di \mathbf{R}_{HH} e SNR , la matrice \mathbf{A}_{MMSE}^{freq} si calcola una volta sola. La stima richiede quindi N^2 operazioni complesse per simbolo SC-FDMA.

Per il sistema LTE l'espressione dello stimatore si semplifica come segue:

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{freq} = \mathbf{A}_{MMSE}^{freq} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{R}_{HH} (\mathbf{R}_{HH} + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.48)$$

con $\mathbf{R}_{HH} = \mathbf{F}_{PL} \mathbf{R}_{h_L h_L} \mathbf{F}_{PL}^H$. La presenza delle guardie e la durata limitata della CIR giustificano la sostituzione del termine \mathbf{F} con \mathbf{F}_{PL} ; La matrice \mathbf{X} , calcolata su N portanti viene sostituita da \mathbf{X}_P ; il prodotto $\mathbf{X}_P^H \mathbf{X}_P = \sigma_X^2 \cdot \mathbf{I}_P$, poichè, per definizione, le sequenze di riferimento hanno tutte potenza costante. La matrice \mathbf{A}_{MMSE}^{freq} viene quindi calcolata una volta sola e mantenuta costante per ogni simbolo SC-FDMA ricevuto. Ogni stima ha il costo di P^2 operazioni complesse.

4.4.3.2.1 Prestazioni e costo computazionale Le prestazioni dello stimatore MMSE in frequenza vengono analizzate inizialmente nell'ipotesi di perfetta conoscenza di \mathbf{R}_{HH} e SNR .

Si definisce l'errore della stima MMSE (4.47) come:

$$\mathbf{e}_{MMSE} = \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{freq} \quad (4.49)$$

dove \mathbf{H} è la CFR originale, e $\hat{\mathbf{H}}_{MMSE}^{freq}$ è la stima (4.47) con $\beta = 1$. Osservando che \mathbf{R}_{HH} e $(\mathbf{R}_{HH} + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_N)$ sono hermitiane e che hanno in comune gli stessi autovettori si può scrivere la (4.49) come

$$\mathbf{e}_{MMSE} = \mathbf{U} (\mathbf{I}_N - \Delta) \mathbf{U}^H \mathbf{H} - \mathbf{U} \Delta \mathbf{U}^H \mathbf{W} \quad (4.50)$$

dove si è posto $\Delta = \Lambda (\Lambda + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_N)$ e la matrice Λ contiene i valori singolari di \mathbf{R}_{HH} . L'errore quadratico medio (MSE) è

$$MSE = \frac{1}{N} \text{Trace}\{E[\mathbf{e}_{MMSE} \mathbf{e}_{MMSE}^H]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \cdot SNR} \quad (4.51)$$

dove $\text{Trace}\{A\}$ è la traccia della matrice A e $E[\mathbf{e}_{MMSE} \mathbf{e}_{MMSE}^H]$ è la matrice di covarianza dell'errore. La derivazione della (4.51) è riportata nel par. A.3.2. Quando i valori di \mathbf{R}_{HH} e SNR non sono noti con esattezza, la (4.51) non è più valida; il peggioramento delle prestazioni causato dalla discrepanza (o *mismatch*) tra valori veri e stimati è analizzato nel Par. 4.4.4.1.

Nel sistema LTE la formula (4.51) è ancora valida ma:

- la sommatoria ivi presente è calcolata su P termini invece di N , dove $P = M$, numero di portanti allocate;
- il valore di SNR viene moltiplicato per il termine N/M .

È interessante ripetere il calcolo delle prestazioni per lo stimatore MMSE nel tempo (par. 4.4.3.1). Poichè la matrice di autocorrelazione presenta solo L coefficienti non nulli, corrispondenti ai percorsi della CIR (formula

4.43) l'MSE diventa

$$MSE = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \cdot SNR} \quad (4.52)$$

Dato che $N > L$, il dato da invertire è ottenuto eliminando molti campioni contenenti solamente rumore e il nuovo valore di SNR cresce di un fattore N/L . Per la banda $B_W = 10$ MHz e $L = 72$ (CP corto) si trova $N/L = 14.2$. Ciò permette di affermare che lo stimatore MMSE nel tempo raggiunge prestazioni superiori rispetto alla stima MMSE in frequenza. Inoltre, il costo computazionale dello stimatore nel tempo è pari a $L^2 + 2P \log(P)$ operazioni complesse per stima, a causa della coppia DFT-IDFT, generalmente molto inferiore alle P^2 moltiplicazioni del caso in frequenza. Di conseguenza, saremmo portati a scegliere lo stimatore nel tempo, ma il problema dell'errore di correlazione sui dati rende tale stimatore inapplicabile (figura 4.8). In queste condizioni, le prestazioni dello stimatore nel tempo sono pessime e non dipendono dall'SNR scelto. Al contrario lo stimatore in frequenza raggiunge le prestazioni indicate nella (4.51), in quanto i valori delle portanti si mantengono ben distinti e non soffrono dell'errore di correlazione. Le caratteristiche dei due stimatori sono riassunte in tabella 4.2.

Stimatore	Dim. dati	MSE	Costo computazionale
MMSE tempo	L	$MSE = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \cdot SNR}$	$L^2 + 2P \log(P)$
MMSE frequenza	P	maggiore	P^2

Tabella 4.2: Confronto tra stimatori MMSE

Nel seguito si è deciso di studiare l'introduzione nel sistema LTE della tecnica MMSE in frequenza, considerando tre principali aspetti:

- l'analisi di algoritmi MMSE approssimati ma realizzabili in pratica
- la riduzione del costo computazionale per questi algoritmi
- le possibili tecniche di correzione dell'errore di correlazione (CEC)

Il risultato di questi studi ha dato vita allo stimatore proposto, uno stimatore MMSE adattativo in frequenza che utilizza le tecniche di correzione CEC per stimare al meglio le proprietà del canale, in particolare del Power Delay Profile (PDP).

4.4.4 Tecniche MMSE approssimate

L'applicazione pratica dello stimatore MMSE in frequenza viene ostacolata da due fattori:

- la carenza di informazioni sui valori di SNR e autocorrelazione;
- il significativo costo computazionale.

Il primo aspetto è affrontato proponendo due soluzioni approssimate:

- *stimatore MMSE mismatched*: si stabiliscono stime fissate per i parametri incogniti, indicate rispettivamente con \widehat{SNR} e $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$, derivanti da modelli di canale frequentemente incontrati in pratica. In tal modo il calcolo della matrice di stima viene effettuato una volta per tutte;
- *stimatore MMSE adattativo*: si ricavano le statistiche di canale e di rumore con opportune stime $\widehat{SNR}(i)$ e $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}(i)$, aggiornate all'arrivo di un nuovo simbolo RS; la matrice di stima è ricalcolata con la stessa frequenza.

Lo stimatore MMSE mismatched prima tecnica presenta bassi costi di calcolo, ma prestazioni limitate a priori dal disadattamento tra valori veri e stime. La versione adattativa è molto più onerosa ma tende alle

prestazioni dello stimatore MMSE ideale. Come descritto nel par. 4.7, lo stimatore proposto è una versione ottimizzata per LTE della stima MMSE adattativa.

Il secondo fattore coinvolge sia la struttura ideale di riferimento sia le soluzioni approssimate; le tecniche di riduzione della complessità e il rispettivo contesto di applicazione sono presentati nel par. 4.5.

4.4.4.1 Stimatore MMSE mismatched

Questo stimatore è progettato sostituendo ai valori esatti SNR e \mathbf{R}_{HH} , incogniti in ricezione, le approssimazioni \widehat{SNR} e $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$, associate a modelli di canale frequentemente incontrati in pratica. La forma dello stimatore (4.48) diventa

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,mism} = \mathbf{A}_{MMSE}^{mism} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \widehat{\mathbf{R}}_{HH} (\widehat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{\widehat{SNR}} \mathbf{I}_P)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.53)$$

Dato che l'autocorrelazione in frequenza è pari a $\mathbf{R}_{HH} = \mathbf{F}_{PL} \mathbf{R}_{hh} \mathbf{F}_{PL}^H$, cioè alla trasformata dell'autocorrelazione nel tempo, è più intuitivo stabilire a priori il valore di \mathbf{R}_{hh} e poi tornare in frequenza. Infatti, nell'ipotesi di percorsi incorrelati, la matrice \mathbf{R}_{hh} è diagonale e gli elementi diversi da zero coincidono con il PDP (si veda app. E). I modelli [28] più usati per descrivere il PDP sono di tipo: a) uniforme; b) esponenziale.

Il modello uniforme rappresenta il peggior caso possibile, in quanto tutti i cammini della CIR hanno pari potenza e quindi il segnale ricevuto è una sovrapposizione di echi tutti uguali. Non esiste un percorso più intenso degli altri che preservi in ricezione una struttura riconoscibile dei dati trasmessi. Il modello uniforme del PDP è dato da:

$$\widehat{\mathbf{PDP}}_{uni}(n) = 1/L \quad 0 \leq n \leq (L-1), \quad L = N_{CP} \quad (4.54)$$

Come suggerito in [29], la scelta uniforme è la più robusta perchè il PDP non viene sagomato in alcun modo.

In molti casi il canale radio presenta un percorso diretto particolarmente intenso, seguito da una serie di echi molto più attenuati. Il modello esponenziale approssima questo andamento e la sua espressione è

$$\widehat{\mathbf{PDP}}_{exp}(n) = \gamma e^{-nT_s/\tau_{rms}} \quad 0 \leq n \leq (L-1), \quad L = N_{CP} \quad (4.55)$$

Il termine $\gamma = 1/\sum_{n=0}^{L-1} e^{-nT_s/\tau_{rms}}$ normalizza l'energia a 1. Il coefficiente τ_{rms} controlla la dispersione dei ritardi del modello; quando il suo valore aumenta, il decadimento dei taps diventa più lento e per $\tau_{rms} \rightarrow +\infty$ la distribuzione esponenziale degenera in quella uniforme. Una volta scelto il PDP, la stima della matrice di autocorrelazione diventa

$$\widehat{\mathbf{R}}_{hh} = \text{diag}(\widehat{\mathbf{PDP}}(n)) \quad 0 \leq n \leq (L-1) \quad (4.56)$$

Il valore scelto per la stima di SNR deriva da un compromesso tra prestazioni e costo computazionale. Come suggerito in [29], si progetta lo stimatore con un valore \widehat{SNR} elevato. Infatti, intuitivamente, per bassi valori di SNR le prestazioni dello stimatore sono limitate dal rumore gaussiano, mentre, per SNR crescenti, quando l'influenza del rumore diventa trascurabile, la qualità della stima dipende dall'errore di mismatch. Quindi, fissato un dato errore $e_{SNR} = (SNR - \widehat{SNR})$, esso incide maggiormente sulle prestazioni quando $e_{SNR} > 0$, cioè quando la stima è superata dal valore effettivo di SNR. Di conseguenza è meglio scegliere una stima \widehat{SNR} di valore elevato. Questa proprietà è dimostrata simulando il comportamento dello stimatore (4.53) al variare del valore di \widehat{SNR} . La figura 4.9 mostra l'MSE dello stimatore per un canale radio con PDP uniforme e intervallo di SNR compreso tra 0 e 30dB, con passo 5dB. Le curve rappresentate sono associate a stimatori con perfetto adattamento di PDP e con stima \widehat{SNR} di valore indicato in legenda. È riportata inoltre, per confronto, la curva dello stimatore perfettamente adattata in autocorrelazione e in SNR (stimatore ideale). Come previsto, le prestazioni dello stimatore tendono a saturare quando $e_{SNR} > 0$, ovvero non appena \widehat{SNR} diventa maggiore del vero SNR .

Una soluzione più accurata consiste nel calcolare lo stimatore per un insieme di valori \widehat{SNR} equispaziati e sufficientemente fitti. Conoscendo il valore corrente di SNR è possibile selezionare la matrice di stima \mathbf{A}_{MMSE}^{mism} per cui la differenza $(SNR - \widehat{SNR})$ è minima.

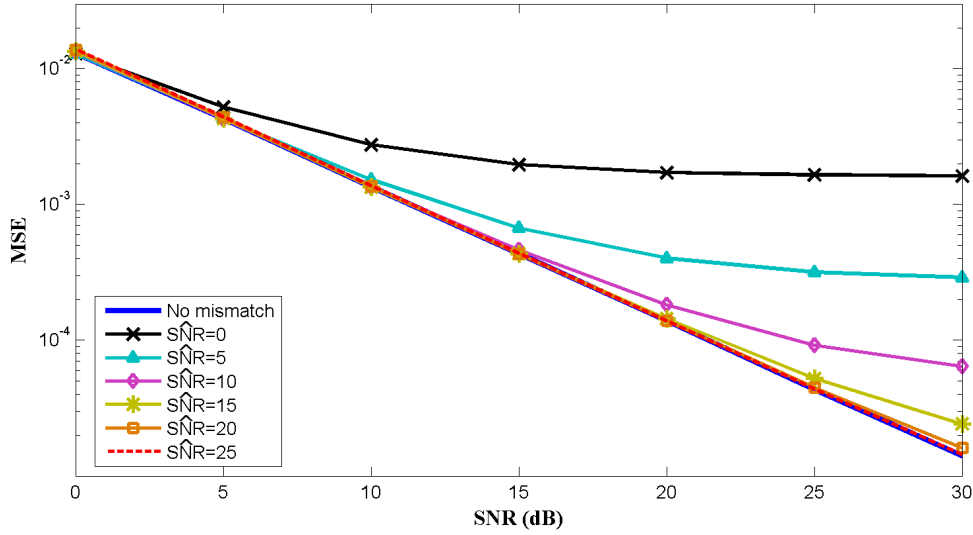


Figura 4.9: Effetti del mismatch di SNR sullo stimatore MMSE al variare della stima di SNR.

4.4.4.1.1 Prestazioni e costo computazionale Per analizzare l'influenza del mismatch sulle prestazioni, si considera l'espressione (A.27) dell'errore quadratico medio per lo stimatore MMSE ideale, dimostrata in appendice A:

$$MSE = \frac{1}{N} \text{Trace} \{ \mathbf{U} (\mathbf{I}_N - \Delta) \mathbf{U}^H E[\mathbf{H}\mathbf{H}^H] \mathbf{U} (\mathbf{I}_N - \Delta) \mathbf{U}^H + \mathbf{U} \Delta \mathbf{U}^H E[\mathbf{W}\mathbf{W}^H] \mathbf{U} \Delta \mathbf{U}^H \} \quad (4.57)$$

Nel caso dello stimatore MMSE mismatched valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_{HH} &= \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^H \\ \Delta &= \Lambda \left(\Lambda + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_N \right) \\ E[\mathbf{H}\mathbf{H}^H] &= \mathbf{R}_{HH} \neq \widehat{\mathbf{R}}_{HH} \\ E[\mathbf{W}\mathbf{W}^H] &= \mathbf{R}_{WW} \neq (1/SNR) \mathbf{I}_N \end{aligned}$$

dove sono evidenziati i termini di mismatch $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$ e \widehat{SNR} e i valori veri \mathbf{R}_{HH} e SNR . L'errore MSE diventa

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\mu_k (1 - \delta_k)^2 + \frac{\delta_k^2}{SNR} \right) \quad (4.58)$$

dove $\delta_k = \lambda_k / \left(\lambda_k + \frac{1}{SNR} \right)$ e μ_k è il k-esimo elemento diagonale di $\mathbf{U}^H \mathbf{R}_{HH} \mathbf{U}$. Ma poichè

$$E[(\mathbf{U}^H \mathbf{H})(\mathbf{U}^H \mathbf{H})^H] = \mathbf{U}^H \mathbf{R}_{HH} \mathbf{U}$$

i coefficienti μ_k si possono interpretare come le varianze delle prese del canale trasformato $\mathbf{U}^H \mathbf{H}$, quando esiste mismatch. In assenza di mismatch gli autovettori \mathbf{U} e quelli della matrice \mathbf{R}_{HH} coincidono e si ottengono i valori singolari di \mathbf{R}_{HH} . In presenza di mismatch i coefficienti del canale trasformato $\mathbf{U}^H \mathbf{H}$ sono correlati e rimane un errore ineliminabile, anche per $SNR \rightarrow \infty$. Esso dipende da due rapporti, rispettivamente $r_{\lambda_k} = \mu_k / \lambda_k$ e $r_{SNR} = \widehat{SNR} / SNR$; quando essi tendono a 1 il mismatch si riduce e le prestazioni si avvicinano al limite ideale (4.52).

Il costo computazionale è identico al caso ideale e pari a $2P^2$ operazioni complesse (P^2 somme e P^2 moltiplicazioni) per simbolo SC-FDMA, pari al prodotto matrice-vettore presente in (4.53).

4.4.4.2 Stimatore MMSE adattativo

L'algoritmo MMSE adattativo insegue la variazione delle statistiche di canale e di rumore con opportune stime $\widehat{SNR}(i)$ e $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}(i)$, calcolate in base ai dati contenuti nei RS; poichè si trasmette un RS per slot, il passo "i" di aggiornamento delle stime corrisponde allo slot corrente. La CFR associata allo slot i si ottiene costruendo la matrice MMSE relativa ai valori più recenti di $\widehat{SNR}(i)$ e $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}(i)$ e applicando ad essa la stima zero-forcing disponibile sulle portanti pilota

$$\widehat{\mathbf{H}}_{MMSE,ad} = \mathbf{A}_{MMSE}^{adapt} \widehat{\mathbf{H}}_{ZF} = \widehat{\mathbf{R}}_{HH}(i) \left(\widehat{\mathbf{R}}_{HH}(i) + \frac{1}{\widehat{SNR}(i)} \mathbf{I}_P \right)^{-1} \widehat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.59)$$

Le prestazioni di questo algoritmo sono molto più vicine al limite di prestazioni (4.52), a patto che gli stimatori di autocorrelazione e SNR riescano a inseguire l'evoluzione del canale multipath.

La stima di SNR viene calcolata utilizzando le portanti di guardia: in trasmissione queste portanti presentano coefficienti nulli e, escludendo per ipotesi la presenza di sistemi interferenti, i corrispondenti coefficienti ricevuti contengono il solo rumore gaussiano. La media dei quadrati delle N_V portanti di guardia equivale a una stima della varianza σ_W^2 di W , il rumore AWGN in frequenza; il rapporto tra la potenza di segnale $P_X = (N/\sqrt{M})^2$ e σ_W^2 fornisce il valore \widehat{SNR}_{new} . La nuova stima associata all' i -esimo slot ricevuto è:

$$\widehat{SNR}(i) = \mu \cdot \widehat{SNR}(i-1) + (1-\mu) \cdot \widehat{SNR}_{new} \quad (4.60)$$

dove μ è un coefficiente di oblio di valori $0 \leq \mu \leq 1$; in pratica μ è scelto vicino a 1, in modo da evitare che la stima sia distorta da picchi improvvisi di rumore [33]. L'ipotesi di assenza di interferenze sulle portanti di guardia è verosimile nell'ambiente di testing; in un contesto più realistico, essa non è valida, ma poichè in LTE il numero delle guardie N_V è particolarmente elevato, si assume che le guardie più vicine alle portanti allocate siano poco soggette ai disturbi intracella; quindi possono essere utilizzate come appena descritto. La catena di operazioni in ricezione per ottenere la stima di SNR è descritta in figura 4.10; l'algoritmo di stima SNR è presentato in figura 4.11, dove \mathbf{Y}_V è il vettore delle portanti di guardia ricevute, SNR_{new} è l'innovazione nel calcolo della stima e i blocchi triangolari indicano il prodotto per uno scalare.

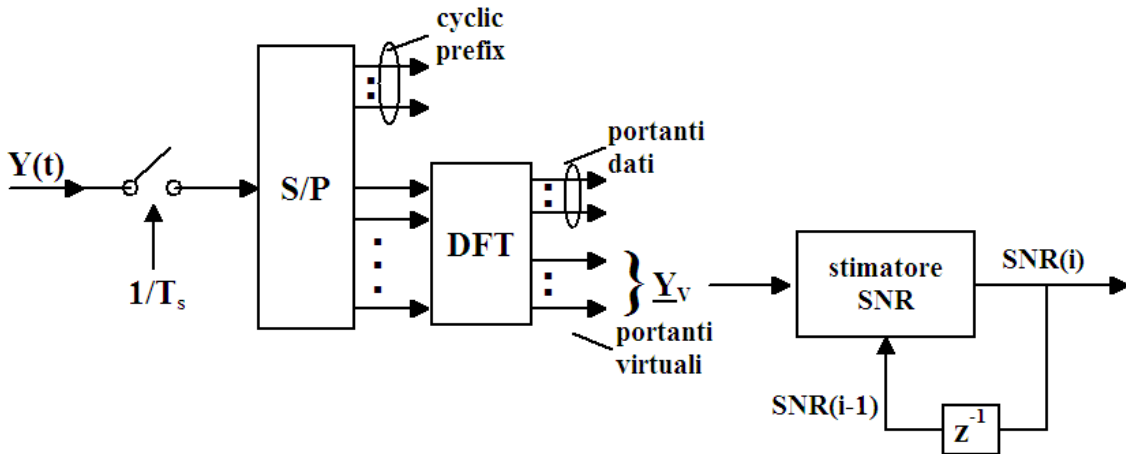


Figura 4.10: Catena di ricezione per la stima di SNR.

La stima della matrice \mathbf{R}_{HH} è calcolata nel dominio del tempo sfruttando la proprietà di incorrelazione tra i cammini della CIR (par. 4.3). Se i cammini sono incorrelati, la matrice di autocorrelazione \mathbf{R}_{hh} è diagonale e i suoi elementi non nulli descrivono la distribuzione di potenza dei cammini stessi, ovvero il PDP. Dunque, per costruire $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}(i)$ basta stimare il valore corrente del PDP.

Lo stimatore del Power Delay Profile è composto da due passi distinti. Nel primo si media la stima di canale corrente $\widehat{\mathbf{h}}$ con quelle ricevute in precedenza. Sia $\widehat{\mathbf{h}}_{PDP}(i)$ la media delle stime di canale corrispondente allo

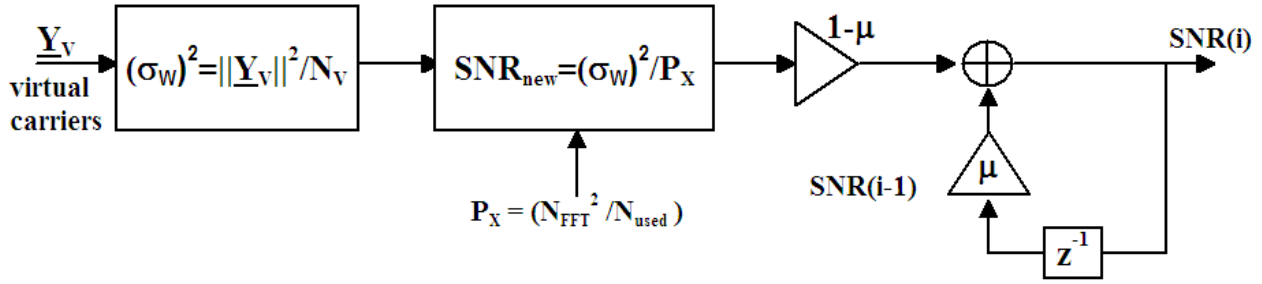


Figura 4.11: Stimatore adattativo di SNR.

slot i -esimo, di espressione

$$\hat{\mathbf{h}}_{PDP}(i) = \xi_h \hat{\mathbf{h}}_{PDP}(i-1) + (1 - \xi_h) \hat{\mathbf{h}} \quad (4.61)$$

dove $\hat{\mathbf{h}}_{PDP}(i)$ è un vettore riga di L coefficienti. Questa media preserva le sole componenti correlate nel tempo, presenti in stime $\hat{\mathbf{h}}$ successive. Il parametro ξ_h è un coefficiente di oblio, compreso nell'intervallo $0 \leq \xi_h \leq 1$.

Il secondo passo effettua l'aggiornamento della stima del PDP con l'espressione

$$\widehat{PDP}(i) = \xi_{PDP} \widehat{PDP}(i-1) + (1 - \xi_{PDP}) \cdot PDP_h \quad (4.62)$$

Il termine $\widehat{PDP}(i)$ indica il valore della stima del PDP aggiornato allo slot i ; $0 \leq \xi_{PDP} \leq 1$ è un coefficiente di oblio e $PDP_h = \text{diag}(\hat{\mathbf{h}}_{PDP}(i)^H \hat{\mathbf{h}}_{PDP}(i))$ è la potenza dei coefficienti della media $\hat{\mathbf{h}}_{PDP}(i)$. Anche in questo caso, per i coefficienti di oblio sono stati scelti valori vicini a 1, in modo da proteggersi efficacemente dal rumore. La figura 4.12 descrive lo schema a blocchi dello stimatore per il Power Delay Profile. La scelta della

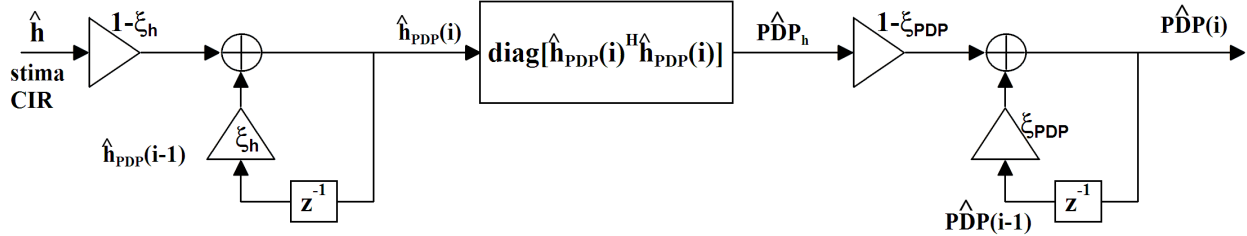


Figura 4.12: Stimatore del Power Delay Profile.

stima iniziale della CIR, indicata con $\hat{\mathbf{h}}$ incide direttamente sulle prestazioni dell'algoritmo. Se $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}_{ZF}$, cioè si utilizza l'antitrasformata della stima ZF, sorgono gli stessi problemi della stima MMSE nel tempo. L'errore di correlazione impedisce di ricostruire una stima accettabile di \mathbf{R}_{HH} , anche in assenza di rumore. Prima di poter essere introdotta nello stimatore del PDP, la stima $\hat{\mathbf{h}}_{ZF}$ deve essere elaborata da una delle tecniche di correzione dell'errore di correlazione descritte nel Par. 4.6. L'introduzione delle tecniche di correzione CEC nell'algoritmo MMSE adattativo è l'aspetto centrale dell'algoritmo proposto, descritto nel par. 4.7.

4.4.4.2.1 Costo computazionale Il costo computazionale del metodo è molto elevato e rappresenta il principale problema della sua applicazione pratica. Infatti è necessario calcolare una nuova matrice $\mathbf{A}_{MMSE}^{adapt}$ ad ogni aggiornamento delle stime di SNR e autocorrelazione. Il costo maggiore è dovuto all'inversione della matrice $(\hat{\mathbf{R}}_{HH}(i) + \frac{1}{SNR(i)} \mathbf{I}_P)$, pari a $O(P^3)$ operazioni complesse. Nel paragrafo successivo si presentano alcune tecniche per ridurre il costo dell'algoritmo MMSE adattativo. In particolare, sfruttando le simmetrie del problema, si possono ottenere riduzioni di complessità superiori a un ordine di grandezza.

4.5 Tecniche di riduzione del costo computazionale

L'espressione analitica degli algoritmi di stima può essere modificata per ridurre il costo computazionale; in certi casi questa riduzione è ottenuta sacrificando parzialmente le prestazioni, altre volte essa si consegue ricavando forme equivalenti più rapide da calcolare. In particolare, poiché l'algoritmo proposto (par. 4.7) è una versione della stima MMSE adattativa, si vuole semplificare il calcolo della matrice $\mathbf{A}_{MMSE}^{adapt}$.

Le tecniche studiate sono:

- l'approssimazione a rango ridotto [29], par. 4.5.1;
- la regolarizzazione di Tychonov [34], par. 4.5.2;
- le tecniche basate sulle proprietà di simmetria delle matrici di autocorrelazione, descritte nel par. 4.5.3.

Per ciascuna di esse vengono evidenziati il contesto di applicazione (se limitato a uno stimatore o generalizzabile), il costo e l'influenza della loro introduzione sulle prestazioni dello stimatore.

4.5.1 Approssimazione a rango ridotto

Questa tecnica è associata allo stimatore MMSE mismatched (par. 4.4.4.1). Si considera inizialmente la decomposizione SVD della matrice di autocorrelazione \mathbf{R}_{HH} (per semplicità si abbandona nella notazione la decorazione $\hat{\cdot}$):

$$\mathbf{R}_{HH} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \quad (4.63)$$

dove \mathbf{U} è la matrice ortonormale degli autovettori e $\mathbf{\Lambda}$ è una matrice diagonale i cui elementi non nulli sono i valori singolari $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$. Dato che $(\mathbf{R}_{HH})^H = \mathbf{R}_{HH}$, gli autovettori destri e sinistri coincidono e inoltre i valori singolari sono uguali agli autovalori. Lo stimatore ottimale di rango m è dato da

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,opt} = \mathbf{A}_{MMSE,opt}^{freq} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}_m \mathbf{U}^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.64)$$

dove $\mathbf{\Delta}_m$ è una matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale hanno espressione:

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \frac{\beta}{SNR}} & , \quad k = 1, 2, \dots, m \\ 0, & k = m + 1, \dots, N \end{cases} \quad (4.65)$$

e $\beta = E\{|x_k|^2\}E\{|1/x_k|^2\}$ è un coefficiente legato alla modulazione dei dati trasmessi. La derivazione della (4.64) è riportata nel par. A.3.3.

La stima a rango ridotto è calcolata con le seguenti operazioni:

- Proiezione del vettore $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ nel sottospazio definito dalla matrice ortonormale \mathbf{U}^H , interpretabile come una matrice di trasformazione
- Scalamento dei coefficienti del vettore trasformato $\mathbf{U}^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ per lo spettro (i valori singolari λ_k) del canale radio. Solo i primi m coefficienti, associati ai valori λ_k più grandi sono considerati; gli altri sono eliminati dal vettore ricostruito $\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,opt}$.
- Ricostruzione del vettore $\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,opt}$ moltiplicando i coefficienti rimasti per la matrice di trasformazione inversa \mathbf{U}

In figura 4.13 è illustrato lo schema a blocchi dello stimatore, dove la stima Zero Forcing è ottenuta dividendo ciascuna portante del dato ricevuto \mathbf{Y} per le corrispondenti portanti del simbolo di riferimento \mathbf{X} . Il vantaggio computazionale di questo schema deriva dal secondo passaggio. Il vettore $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ viene proiettato dalla matrice \mathbf{U}^H in un sottospazio di dimensioni P . Se gli autovalori significativi sono pochi ($m \ll P$) si possono eliminare $P - m$ dimensioni del sottospazio senza alterare sensibilmente la descrizione del canale radio. La dimensione m

definisce parimenti il rango della matrice ridotta Δ_m , da cui il nome della tecnica. La ricostruzione del canale stimato $\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,opt}$ richiede il contributo di sole m componenti, mentre le prestazioni ottenute si avvicinano molto allo stimatore originale.

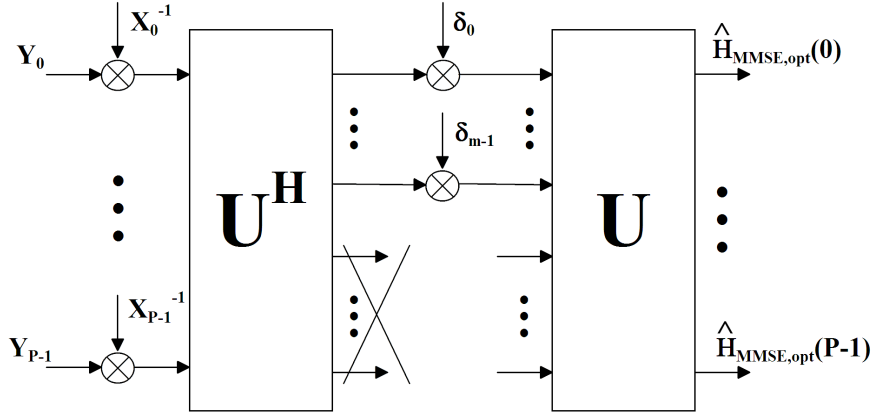


Figura 4.13: Schema a blocchi dello stimatore a rango ridotto.

La scelta del numero di valori singolari da conservare è decisiva per ottenere il giusto compromesso tra peggioramento delle prestazioni e riduzione del costo computazionale. In [35] viene dimostrato che il numero ottimale di valori singolari da preservare è pari a $m = 2BT + 1$, dove B è la banda monolaterale e T è la durata del segnale considerato. Per un canale radio sample-spaced la banda totale è $2B = 1/T_s$ e la durata del canale è $T = LT_s$. Si ottiene

$$m = 2BT + 1 = L + 1 \quad (4.66)$$

Questo risultato implica che l'ampiezza dei valori singolari di R_{HH} tende a ridursi sensibilmente dopo circa $L + 1$ termini.

4.5.1.1 Prestazioni e costo computazionale

Si può dimostrare che il costo computazionale dell'algorithm a rango ridotto è pari a $2m$ moltiplicazioni per tono (par. A.3.3). Rispetto allo stimatore originale, il costo è diminuito di $P - 2m$ moltiplicazioni per tono. Più m è piccolo rispetto a P più il costo si abbassa, a scapito di un aumento dell'errore di approssimazione. Il costo totale dell'algorithm (moltiplicazioni e somme) è pari a $4Pm$ operazioni.

Le prestazioni dello stimatore in termini di MSE si ottengono riconsiderando la formula (4.58), ricavata per lo stimatore mismatched. L'espressione si modifica in

$$MSE(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \left(\mu_k (1 - \delta_k)^2 + \frac{\delta_k^2}{SNR} \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=m+1}^N \mu_k \quad (4.67)$$

dato che la matrice Δ_m contiene solo i primi m valori singolari di R_{HH} . Il MSE è funzione del rango scelto m , decrescente all'aumentare dell'SNR, e presenta un limite inferiore dato dall'ultimo termine della (4.67)

$$\underline{MSE}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=m+1}^N \mu_k \leq MSE(m) \quad (4.68)$$

Se il rango m viene ridotto eccessivamente si perdono delle componenti utili del segnale e l'MSE, soprattutto per SNR elevati, tende a saturare al valore (4.68).

Questa tecnica si rivela efficace se le proprietà statistiche del canale e del rumore vengono fissate una volta per tutte, come avviene nel caso dello stimatore mismatched. Con questa scelta di progetto si evita di invertire la matrice $\left(\hat{\mathbf{R}}_{HH}(i) + \left(1/SNR(i) \right) \cdot \mathbf{I}_P \right)$ per calcolare ogni nuova stima di canale. La decomposizione SVD,

necessaria alla riduzione del rango, viene calcolata al più una volta sola, nella fase di inizializzazione. Per contrasto, l'applicazione della riduzione del rango a uno stimatore adattativo determina un costo altissimo (il costo di SVD per una matrice $N \times N$ è $\propto O(N^3)$) e quindi una latenza inaccettabile in fase di esecuzione.

4.5.2 Regolarizzazione di Tychonov

La regolarizzazione di Tychonov [34] si applica allo stimatore MMSE adattativo e consente di ridurre la complessità di calcolo riorganizzando la sua espressione. L'espressione 4.59 di questo stimatore, per semplicità senza l'indice i , è

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,ad} = \mathbf{A}_{MMSE}^{adapt} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \hat{\mathbf{R}}_{HH} (\hat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.69)$$

La matrice $\hat{\mathbf{R}}_{HH}$ è legata all'autocorrelazione nel tempo dall'espressione $\hat{\mathbf{R}}_{HH} = \mathbf{F}_{PL} \hat{\mathbf{R}}_{hh} \mathbf{F}_{PL}^H$. Poichè i percorsi del canale radio sono incorrelati tra loro, la matrice $\hat{\mathbf{R}}_{hh}$ è diagonale, e presenta sulla diagonale principale il PDP, cioè le potenze di ciascun cammino multiplo:

$$\hat{\mathbf{R}}_{hh} = \text{diag}(\sigma_0^2, \dots, \sigma_m^2, \dots, \sigma_{L-1}^2) \quad (4.70)$$

Sia $\hat{\mathbf{R}}_h$ una matrice che verifica l'espressione $\hat{\mathbf{R}}_h \cdot (\hat{\mathbf{R}}_h)^H = \hat{\mathbf{R}}_{hh}$; dalla (4.70) si ottiene

$$\hat{\mathbf{R}}_h = (\hat{\mathbf{R}}_{hh})^{1/2} \quad (4.71)$$

Sostituendo la (4.71) nell'espressione di $\hat{\mathbf{R}}_{HH}$ risulta

$$\hat{\mathbf{R}}_{HH} = \mathbf{F}_{PL} \hat{\mathbf{R}}_{hh} \mathbf{F}_{PL}^H = \mathbf{F}_{PL} \hat{\mathbf{R}}_h (\hat{\mathbf{R}}_h)^H \mathbf{F}_{PL}^H = \mathbb{F}_{PL} \mathbb{F}_{PL}^H \quad (4.72)$$

dove $\mathbb{F}_{PL} = \mathbf{F}_{PL} \hat{\mathbf{R}}_h$ ha dimensioni $P \times L$. Lo stimatore complessivo diventa

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,ad} = \mathbf{A}_{MMSE}^{adapt} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbb{F}_{PL} \mathbb{F}_{PL}^H (\mathbb{F}_{PL} \mathbb{F}_{PL}^H + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.73)$$

La decomposizione SVD di \mathbb{F}_{PL} è:

$$\mathbb{F}_{PL} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{\Gamma} \hat{\mathbf{V}}^H \quad (4.74)$$

La matrice $\mathbf{\Gamma}$, di dimensioni $P \times L$, contiene sulla diagonale principale i valori singolari γ_k , non nulli, di \mathbb{F}_{PL} ; se $\hat{\mathbf{R}}_{HH} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^H = \mathbf{F}_{PL} \hat{\mathbf{R}}_{hh} \mathbf{F}_{PL}^H$, i valori singolari di $\hat{\mathbf{R}}_{HH}$, cioè le potenze dei cammini multipli, coincidono per costruzione con il quadrato degli valori singolari di \mathbb{F}_{PL} . Vale quindi l'uguaglianza $\mathbf{S} = \mathbf{\Gamma}^2$. Introducendo nell'espressione (4.73) la decomposizione (4.74) si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{MMSE,tyc} &= \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{\Gamma} \hat{\mathbf{U}}^H \left(\hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{\Gamma} \hat{\mathbf{U}}^H + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P \right)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \\ &= \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{U}}^H \left(\hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{U}}^H + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P \right)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \end{aligned} \quad (4.75)$$

dove il pedice tyc sta per Tychonov. Ricordando la forma dello stimatore a rango ridotto (4.64) e la condizione $m = L + 1$, dove L è la lunghezza del canale, l'operatore di stima è

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,tyk} = \mathbf{A}_{MMSE,opt}^{freq} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{\Delta}_m (\hat{\mathbf{U}})^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.76)$$

dove $\mathbf{\Delta}_m$ è una matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono pari a

$$\delta_k = \frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^2 + \frac{\beta}{SNR}}, \quad k = 1, 2, \dots, (L + 1) \quad (4.77)$$

con $\beta = E\{|x_k|^2\}E\{|1/x_k|^2\}$. L'inversa ottenuta è esatta in quanto sono stati utilizzati tutti i valori singolari non nulli della matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$.

4.5.2.1 Prestazioni e costo computazionale

Il costo della stima si è notevolmente ridotto rispetto alla formulazione originaria, in cui era necessario calcolare l'inversa di una matrice $P \times P$ e il prodotto tra due matrici delle stesse dimensioni. La decomposizione SVD di \mathbb{F}_{PL} è molto meno costosa rispetto alla decomposizione di $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$, in quanto occorrono solo L autovettori destri di dimensione $P \times 1$ e P valori singolari. Il prodotto matriciale $\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{\Delta}_m(\widehat{\mathbf{U}})^H$ è equivalente alla cascata di due prodotti: il primo, dato da $\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{\Delta}_m$, costa $P \cdot L$ moltiplicazioni perchè la matrice $\mathbf{\Delta}_m$ è diagonale. Il secondo prodotto si effettua tra due matrici $P \times L$ e il costo complessivo è $O(P^2L)$.

Come intuibile, le prestazioni non vengono intaccate se si assume di utilizzare tutti gli L valori singolari della matrice \mathbb{F}_{PL} . Per ridurre ulteriormente il costo si può applicare lo stimatore a rango ridotto, cioè si eliminano i valori singolari γ_k meno significativi. A questa scelta si accompagna una riduzione delle prestazioni simile a quella descritta dall'equazione (4.68).

4.5.3 Impiego vantaggioso delle simmetrie del problema

Quando l'operatore di stima viene calcolato a partire da matrici con speciali simmetrie, il numero delle operazioni necessarie si può ridurre sensibilmente. Si descrivono in proposito quattro importanti algoritmi di riduzione del costo computazionale, applicati in particolare al caso dello stimatore MMSE adattativo (4.59):

- *Algoritmo di Levinson.* Risolve un sistema lineare di Toeplitz, con P equazioni, al costo di $O(P^2)$ moltiplicazioni invece di $O(P^3)$. Utile per calcolare il termine dello stimatore MMSE adattativo $\widehat{\mathbf{H}}_{part} = (\widehat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_P)^{-1}\widehat{\mathbf{H}}_{ZF}$.
- *Algoritmo super-veloce di Schur.* Capace di restituire la fattorizzazione di Cholesky dell'inversa di una matrice di Toeplitz, viene utilizzato in alternativa a Levinson per calcolare velocemente lo stimatore MMSE adattativo. Si vedrà che, per dimensioni della matrice del sistema lineare minori di $N = 256$, l'algoritmo di Levinson è più rapido [36], mentre per dimensioni superiori è più conveniente l'impiego dell'algoritmo super-veloce di Schur.
- *Calcolo semplificato di $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$.* Deriva dall'introduzione dell'algoritmo di Levinson (o di Schur). Ogni stima di canale MMSE necessita di una nuova stima della matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$, partendo dalla sua versione nel tempo $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$. Al posto della matrice completa $\widehat{\mathbf{R}}_{HH} = \mathbf{F}_{PL}\widehat{\mathbf{R}}_{hh}\mathbf{F}_{PL}^H$, l'algoritmo di Levinson richiede solo la prima colonna di $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$. Il numero delle operazioni si riduce di un fattore $K = P^2/(P+1) \simeq P$.
- *Prodotto matrice di Toeplitz - vettore $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$.* Il prodotto tra il vettore $\widehat{\mathbf{H}}_{part}$ e la matrice di Toeplitz $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$ completa il calcolo della stima MMSE adattativa. Sfruttando il legame tra matrici di Toeplitz e circolanti, la complessità è ridotta da P^2 a $O(n' \log(n'))$ moltiplicazioni, dove $n' = (2P-1)$. Inoltre questa tecnica è utilizzata per applicare la matrice inversa, calcolata con l'algoritmo di Schur, al termine noto $\widehat{\mathbf{H}}_{ZF}$.

Se i singoli percorsi che descrivono il canale multipath sono tra loro incorrelati, la matrice di autocorrelazione nel tempo $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$ ha struttura diagonale. La corrispondente autocorrelazione in frequenza si ottiene come

$$\widehat{\mathbf{R}}_{HH} = \mathbf{F}_{PL}\widehat{\mathbf{R}}_{hh}\mathbf{F}_{PL}^H \quad (4.78)$$

Essa ha simmetria di Toeplitz e hermitiana cioè i coefficienti $a_{i,j}$ di $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$ godono delle seguenti proprietà:

- grazie alla simmetria hermitiana vale la relazione $a_{i,j} = a_{j,i}^*$ per $i \neq j$
- per la simmetria di Toeplitz la matrice è descritta da soli $2n-1$ coefficienti: dati gli scalari $\{r_{-n+1}, \dots, r_0, \dots, r_{n-1}\}$ i coefficienti della matrice sono pari a $a_{i,j} = r_{j-i} \forall i, j \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

La struttura di $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$ è

$$\widehat{\mathbf{R}}_{HH} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & r_2^* & \cdots & r_{P-1}^* \\ r_1 & r_0 & r_1^* & \cdots & r_{P-2}^* \\ r_2 & r_1 & r_0 & \cdots & r_{P-3}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{P-1} & r_{P-2} & r_{P-3} & \cdots & r_0 \end{bmatrix}$$

Tale espressione si verifica facilmente. Si rappresenti la matrice \mathbf{F}_{PL} in funzione degli L vettori colonna di dimensione P che la compongono

$$\mathbf{F}_{PL} = [\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{L-1}]$$

Poichè la matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$ è diagonale, la (4.78) diventa

$$\widehat{\mathbf{R}}_{HH} = \sum_{k=0}^{L-1} \lambda_k \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^H = \sum_{k=0}^{L-1} \widehat{\mathbf{R}}_k$$

dove i λ_k sono gli autovalori della matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$, cioè il PDP del canale radio. Per costruzione, ciascuna matrice componente $\widehat{\mathbf{R}}_k$ presenta simmetria hermitiana e di Toeplitz, perchè è un prodotto esterno tra due vettori. Di conseguenza la matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$ ha le stesse proprietà delle L matrici componenti. Discorso analogo vale per la matrice $(\widehat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P)$, la cui inversa è contenuta nell'espressione dello stimatore MMSE.

Gli algoritmi di Levinson e di Schur risolvono il generico sistema lineare

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (4.79)$$

dove \mathbf{T} è una matrice di Toeplitz, con un costo molto inferiore rispetto alle $O(P^3)$ moltiplicazioni necessarie in assenza di simmetrie. Il sistema generico ha la stessa struttura del problema (4.59), associato allo stimatore MMSE adattativo; per verificarlo basta introdurre le seguenti sostituzioni $\mathbf{T} = (\widehat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P)$, $\mathbf{b} = \widehat{\mathbf{H}}_{ZF}$ e $\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{H}}_{part}$.

Poiché queste due tecniche sono ben note e molto diffuse, si è deciso, nel seguito, di considerarle note e di presentare una loro descrizione esaustiva in app. D.

4.5.3.1 Calcolo semplificato di $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$

L'introduzione dell'algoritmo di Levinson e di Schur semplifica il calcolo della matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{HH} = \mathbf{F}_{PL} \widehat{\mathbf{R}}_{hh} \mathbf{F}_{PL}^H$, necessaria per calcolare ogni nuova stima dell'algoritmo MMSE adattativo. Grazie alla simmetria di Toeplitz del sistema, tali algoritmi elaborano solo i dati contenuti nella prima colonna (o riga) della generica matrice $\mathbf{T} = (\widehat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR} \mathbf{I}_P)$, non l'intera matrice. l'algoritmo di Levinson (come quello di Durbin) richiede solo la prima colonna di \mathbf{T}_{k+1} , non l'intera matrice. Poichè la matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$ è diagonale, i suoi L valori non nulli sono raccolti nel vettore $\boldsymbol{\lambda}$ di dimensioni $L \times 1$. Riscrivendo la matrice \mathbf{F}_{PL} in funzione di P vettori riga \mathbf{f}_i di dimensioni $1 \times L$ si ottiene

$$\widehat{\mathbf{R}}_{HH}(:, 1) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_P \end{bmatrix} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{f}_1^H)$$

Infatti per trovare la prima colonna di $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$ si pesano le componenti di \mathbf{f}_1^H per gli elementi diagonali di $\widehat{\mathbf{R}}_{hh}$; il vettore risultante è applicato alla matrice \mathbf{F}_{PL} . Dunque si passa da un prodotto tra due matrici $P \times L$, di complessità P^2L , alla cascata di due operazioni più semplici: un prodotto tra vettori, di complessità L , e un prodotto matrice-vettore di complessità PL .

4.5.3.2 Prodotto matrice di Toeplitz - vettore

Infine si affronta il calcolo del prodotto tra una matrice di Toeplitz \mathbf{T} e un generico vettore [37]. Questa operazione è presente anche nella stima MMSE adattativa: dopo l'applicazione dell'algoritmo di Levinson si deve calcolare il prodotto tra il vettore risultante $\widehat{\mathbf{H}}_{part}$ e $\widehat{\mathbf{R}}_{HH}$. Si può ridurre la complessità di questa operazione sfruttando il legame esistente tra le matrici di Toeplitz e le matrici circolanti. Le matrici circolanti sono particolari matrici di Toeplitz; ciascuna colonna contiene gli stessi elementi e corrisponde alla versione traslata circolarmente della colonna precedente. La struttura risultante è

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v_0 & v_{n-1} & v_{n-2} & \cdots & v_1 \\ v_1 & v_0 & v_{n-1} & \cdots & v_2 \\ v_2 & v_1 & v_0 & \cdots & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1} & v_{n-2} & v_{n-3} & \cdots & v_0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Una rappresentazione equivalente della matrice $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ è data da

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}, \mathbf{S}_n \mathbf{v}, \mathbf{S}_n^2 \mathbf{v}, \dots, \mathbf{S}_n^{n-1} \mathbf{v}] \quad (4.81)$$

dove il vettore \mathbf{v} rappresenta gli elementi distinti di $\mathbf{C}(\mathbf{v})$,

$$\mathbf{v} = [v_0 \ v_1 \ \cdots \ v_{n-1}]^T$$

Inoltre il termine \mathbf{S}_n rappresenta la matrice di traslazione verso il basso, ovvero una particolare permutazione degli elementi di \mathbf{v} , di espressione

$$\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

È ben noto che la DFT trasforma una matrice circolante in una matrice diagonale, dunque vale la relazione

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}_n^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_n \mathbf{v}) \mathbf{F}_n \quad (4.83)$$

dove \mathbf{F}_n è la matrice DFT di dimensione n e $\text{diag}(\mathbf{m})$ rappresenta la matrice diagonale ottenuta dal vettore \mathbf{m} . Grazie alla (4.83), il prodotto di forma $\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{x}$ si può risolvere alla velocità di calcolo della FFT:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_n \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}_n \mathbf{v} \\ \mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{v}} \cdot * \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.84)$$

In sintesi, il prodotto tra una matrice circolante e un vettore si può calcolare con tre DFT e un prodotto tra vettori. La tecnica corrisponde alla convoluzione tra due segnali contenuti nei vettori \mathbf{x} e \mathbf{v} .

Si osserva inoltre che una generica matrice di Toeplitz può essere inserita all'interno di una matrice circolante.

Per $n = 3$ la matrice \mathbf{T} è pari a

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_0 & p_1 & p_2 \\ r_1 & r_0 & p_1 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

Essa coincide con il sottoinsieme di elementi contenuto nelle prime n righe e n colonne della matrice

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}') = \begin{bmatrix} r_0 & p_1 & p_2 & r_2 & r_1 \\ r_1 & r_0 & p_1 & p_2 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & p_1 & p_2 \\ p_2 & r_2 & r_1 & r_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{C}(\mathbf{v}')$ è circolante. In generale, se $\mathbf{T} = (t_{i,j})$ è una matrice $n \times n$ di Toeplitz, vale l'uguaglianza $\mathbf{T} = \mathbf{C}(\mathbf{v}')_{(1:n,1:n)}$, dove $\mathbf{C}(\mathbf{v}') \in \mathbb{R}^{(2n-1) \times (2n-1)}$ è circolante, con

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(1:n, 1) \\ \mathbf{T}(1, n:-1:2)^T \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

In base alla corrispondenza tra le matrici \mathbf{T} e $\mathbf{C}(\mathbf{v}')$, il prodotto $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ si calcola come

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}(\mathbf{v}')\mathbf{x}' \quad (4.86)$$

Il vettore \mathbf{x}' è pari a $\mathbf{x}' = [\mathbf{x}, \mathbf{0}_{n-1}]^T$, dove $\mathbf{0}_{n-1}$ è un vettore composto da $(n-1)$ zeri. Con questa scelta, i primi n campioni di \mathbf{y}' restituiscono il risultato del prodotto $\mathbf{T}\mathbf{x}$, cioè $\mathbf{y} = \mathbf{y}'(1:n)$. Dunque, applicando le trasformazioni (4.84) ai vettori \mathbf{v}' e \mathbf{x}' , il prodotto tra una matrice di Toeplitz e un vettore si ottiene con tre DFT di $(2n-1)$ campioni e un prodotto tra vettori, di complessità $(2n-1)$; rispetto alle n^2 moltiplicazioni di partenza, il nuovo costo è proporzionale a $O(n' \log(n'))$, dove $n' = (2n-1)$.

Il procedimento illustrato consente inoltre di calcolare velocemente la soluzione del sistema lineare $\mathbf{m} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ con la formula di Gohberg-Semencul (D.29). Il presente pseudocodice illustra i passi del calcolo

```

function [x] = sfschur(phi, m)
phi' = phi/phi(0)
% Calcolo primo prodotto m1 = L1 * m.
v = [phi; 0_{(P-1),1}]
m1 = [m; 0_{(P-1),1}]
m1 = ifft(fft(m1) * fft(v))
m1 = m1(1:P)
% Calcolo secondo prodotto m1' = L1^H * m1.
m1 = [m1; 0_{(P-1),1}]
v = [1; 0_{(P-1),1}; phi(2:P)]
m1 = ifft(fft(m1) * fft(v))
m1 = m1(1:P)
% Calcolo terzo prodotto m0 = U0^H * m.
v = [0; phi(2:P); 0_{(P-1),1}]
m0 = [m; 0_{(P-1),1}]
m0 = ifft(fft(m0) * fft(v))
m0 = m0(1:P)
% Calcolo quarto prodotto m0 = U0 * m0.
m0 = [m0; 0_{(P-1),1}]
v = [0_{(P),1}; phi(2:P)]
m0 = ifft(fft(m0) * fft(v))
m0 = m0(1:P)
% Differenza vettori parziali e scalamento.

```

$$\mathbf{x} = \phi(0) \cdot (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0)$$

Il parametro ϕ è un vettore colonna di dimensioni $P \times 1$. Il parametro $\mathbf{0}_{m,n}$ è una matrice con elementi nulli di dimensioni $m \times n$. L'operazione $\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i(1:P)$ serve a selezionare i primi P elementi del vettore \mathbf{m}_i . Il costo totale del calcolo è proporzionale a $O(n' \log(n'))$, con $n' = (2P - 1)$, quindi incide limitatamente sul costo dell'algoritmo super-veloce di Schur, proporzionale a $P(\log_2 P)^2$.

4.6 Tecniche di correzione dell'errore di correlazione

Nel sistema LTE, la presenza dell'errore di correlazione, discusso nel par. 4.2, causa un degrado sensibile nelle prestazioni di molti stimatori. Inoltre, lo stimatore MMSE adattativo in frequenza (par. 4.4.4.2) richiede una versione approssimata del Power Delay Profile, ottenuta da stime della CIR $\hat{h}(n)$. La presenza delle portanti di guardia provoca una finestrazione della CFR $\widehat{H}(k)$ mentre la risposta all'impulso corrispondente è convoluta circolarmente per un seno cardinale di espressione (4.9); i coefficienti nel tempo, in origine ben distinti, si influenzano a vicenda a causa della convoluzione e la forma della risposta originale è fortemente distorta. Parimenti, la distorsione dei dati nel tempo impedisce la diretta applicazione della tecnica MMSE nel tempo.

Per chiarire gli effetti descritti, è utile introdurre esplicitamente le portanti di guardia nella definizione degli stimatori. A questo scopo il simbolo di riferimento \mathbf{X} è rappresentato su tutti gli N campioni della DFT. Si trova:

$$\begin{cases} |\mathbf{X}_k|^2 = 1 \text{ per } k \in \mathbf{S}_U \\ |\mathbf{X}_k|^2 = 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \quad (4.87)$$

dove \mathbf{S}_U è l'insieme delle portanti assegnate all'utente.

La stima ZF (4.17) diventa

$$\hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{X}^H \mathbf{Y} = \mathbf{X}^H (\mathbf{X} \mathbf{F}_{NL} \mathbf{h} + \mathbf{w}) = \mathbf{B} \mathbf{F}_{NL} \mathbf{h} + \mathbf{w}' \quad (4.88)$$

dove la matrice \mathbf{X} è pari a $\text{diag}(X_k)$, il vettore $\mathbf{w}' = \mathbf{X}^H \mathbf{w}$ indica il rumore normalizzato in frequenza e la matrice diagonale $\mathbf{B} = \mathbf{X}^H \mathbf{X}$ contiene gli elementi della funzione passa-basso B_k (4.7)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(N_{U1} \times N_{U1})} & \mathbf{0}_{(N_{U1} \times N_V)} & \mathbf{0}_{(N_{U1} \times N_{U2})} \\ \mathbf{0}_{(N_V \times N_{U1})} & \mathbf{0}_{(N_V \times N_V)} & \mathbf{0}_{(N_V \times N_{U2})} \\ \mathbf{0}_{(N_{U2} \times N_{U1})} & \mathbf{0}_{(N_{U2} \times N_V)} & \mathbf{I}_{(N_{U2} \times N_{U2})} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

In questa espressione i termini $\mathbf{I}_{(n \times n)}$ e $\mathbf{0}_{(n \times n)}$ sono rispettivamente la matrice identità e la matrice nulla di dimensioni $n \times n$ e N_V è il numero delle portanti virtuali; nel caso dell'Uplink LTE, se $P = M = N_{sub}$, si trova $N_{U1} = N_{U2} = N_{sub}/2$. La stima della CIR corrispondente a $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ è

$$\mathbf{h}_{ZF} = \mathbf{F}_{NL}^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \mathbf{F}_{NL}^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{F}_{NL} \mathbf{h} + \mathbf{w}') = \mathbf{Q} \mathbf{h} + \mathbf{w}'' \quad (4.90)$$

dove $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_{NL}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F}_{NL}$ e $\mathbf{w}'' = \mathbf{F}_{NL}^{-1} \mathbf{w}'$. La matrice \mathbf{Q} è circolante e la sua prima riga contiene i coefficienti $[b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]$ di espressione (4.9), riportata qui per chiarezza:

$$b_n = \frac{\exp(-j2\pi n N_{U2}/N) - \exp(j2\pi n N_{U1}/N)}{N\{1 - \exp(j2\pi n/N)\}} \quad (4.91)$$

Il vettore \mathbf{w}'' contiene il rumore nel dominio del tempo, di varianza $(N_{sub}/N) \cdot \sigma_w^2$. La matrice \mathbf{Q} riassume l'influenza delle portanti di guardia sulla CIR. Infatti, anche in assenza di rumore ($\mathbf{w}'' = 0$), il vettore \mathbf{h} è distorto dalla convoluzione periodica con la funzione b_n ; tale operazione è equivalente al prodotto tra \mathbf{Q} , che essendo ciclica è una matrice di convoluzione, e la CIR \mathbf{h} . Di conseguenza, la potenza della risposta risultante

non è più concentrata su L campioni, bensì è distribuita per tutta la durata del simbolo SC-FDMA, pari a N campioni (si veda la figura 4.4). Se, calcolando la trasformata della risposta distorta \mathbf{Qh} , si considerassero i soli L campioni presenti nella risposta originale e si annullassero i rimanenti, la CFR ricostruita presenterebbe una forte discrepanza rispetto alla CFR originale \mathbf{H} , anche in assenza di rumore. È dunque necessario considerare tutti gli N campioni di \mathbf{Qh} per ricostruire con esattezza la risposta in frequenza.

L'obiettivo degli algoritmi CEC è di ricostruire, partendo dalla versione distorta \mathbf{h}_{ZF} , una CIR quanto più vicina alla risposta originale \mathbf{h} . La CIR ottenuta può essere usata per equalizzare il segnale ricevuto, oppure come parametro di ingresso negli algoritmi di stima, al posto di \mathbf{h}_{ZF} . In particolare per applicare lo stimatore MMSE adattativo è indispensabile conoscere una stima del PDP, in modo da calcolare la matrice di autocorrelazione \mathbf{R}_{HH} . Anche in assenza di rumore, il valore stimato del PDP è degradato dall'errore di correlazione e le prestazioni dell'algoritmo ne risentono sensibilmente. La figura 4.14 mostra la matrice di autocorrelazione ideale per un canale radio di tipo EVA e una sua stima ottenuta a partire dai dati distorti \mathbf{Qh} , in assenza di rumore AWGN. La qualità della stima è molto scadente, e le prestazioni della stima di canale

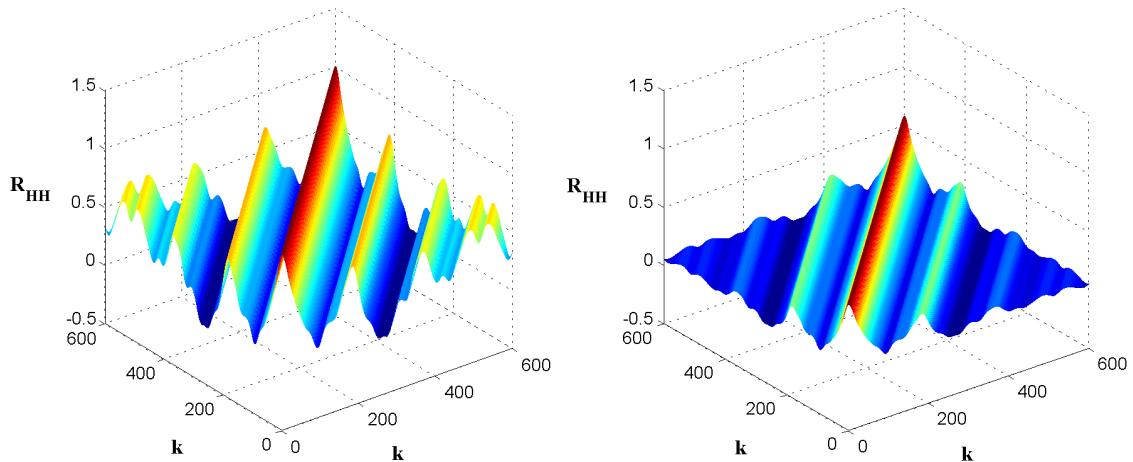


Figura 4.14: Autocorrelazione ideale in frequenza (a sinistra) e stima calcolata da dati perturbati dall'errore CEC (a destra). Canale EVA.

presentano un errore di mismatch di espressione (4.58). L'introduzione di tecniche CEC migliora nettamente le prestazioni della stima PDP rispetto all'assenza di correzione.

Il primo argomento trattato è l'analisi di un particolare stimatore di canale, chiamato *DFT-based*, scelto come caso di riferimento per illustrare l'influenza dell'errore di correlazione sulle prestazioni. In seguito, si presentano le tecniche CEC affrontate: il metodo *SIC* [30]; una modifica proposta di questo metodo, chiamata *metodo SIC modificato*; la tecnica di *Path Detection* (PD), spesso utilizzata dopo l'applicazione della tecnica SIC [30].

4.6.1 Stimatore DFT-based

Per realizzare lo stimatore DFT-based non è necessario conoscere la matrice di autocorrelazione del canale \mathbf{R}_{hh} e la potenza di rumore AWGN σ_w^2 ; a differenza dello stimatore MMSE, il suo costo computazionale è molto ridotto, poiché non occorre invertire frequentemente matrici di grandi dimensioni.

Ricordando l'espressione della stima ZF in presenza di guardie (4.90), la stima DFT-based della CIR è

$$\mathbf{h}_{DFT} = \mathbf{D}_1 \mathbf{h}_{ZF} = \mathbf{D}_1 \mathbf{Q} \mathbf{h} + \mathbf{D}_1 \mathbf{w}'' \quad (4.92)$$

e la corrispondente stima della CFR è

$$\mathbf{H}_{DFT} = \mathbf{F}_{PN} \mathbf{h}_{DFT} \quad (4.93)$$

La matrice \mathbf{F}_{PN} è la DFT diretta calcolata su $P = M$ portanti. La matrice \mathbf{D}_1 , di espressione

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(L \times L)} & \mathbf{0}_{(L \times N-L)} \\ \mathbf{0}_{(N-L \times L)} & \mathbf{0}_{(N-L \times N-L)} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

ha il compito di ridurre l'estensione della CIR ai primi L campioni, dove L è la lunghezza massima stimata (o ipotizzata) di \mathbf{h}_{ZF} . In questo modo si selezionano i soli coefficienti utili della CIR e si eliminano i restanti, contenenti esclusivamente rumore gaussiano. Se il sistema di trasmissione non utilizza portanti di guardia, questo stimatore può raggiungere prestazioni vicine alla tecnica MMSE [30]. La figura 4.15 mostra il confronto delle prestazioni, in termini di MSE, per gli stimatori ZF, MMSE ideale e DFT-based. Il canale utilizzato nella

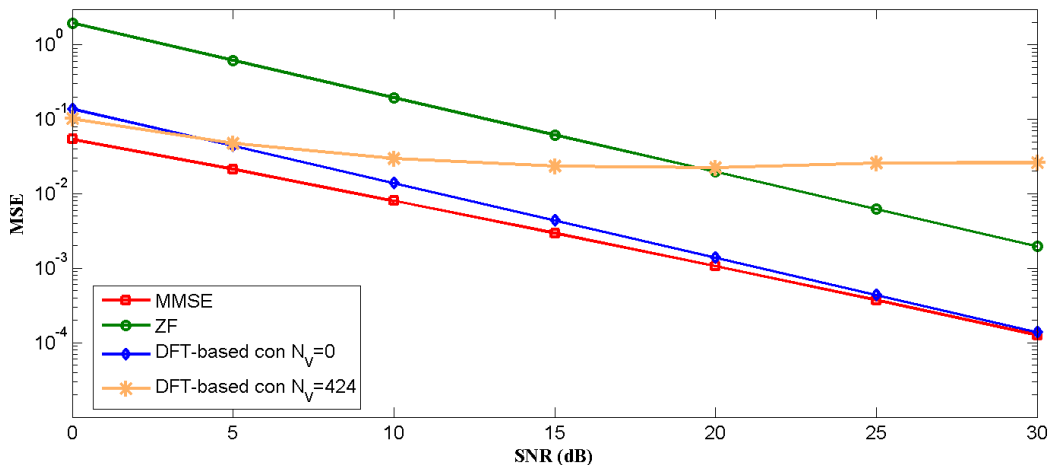


Figura 4.15: Prestazioni dello stimatore DFT-based con canale AWGN. Sono rappresentate, oltre alle curve degli stimatori MMSE e ZF, le due configurazioni: in assenza di guardie ($N_V = 0$); LTE con $B_W = 10$ MHz ($N_V = 424$).

simulazione ha un PDP esponenziale con $\tau_{RMS}/T_S = 6$ campioni e la dimensione della FFT è $N = 1024$. Nel caso dello stimatore DFT-based sono presenti due curve. La prima è calcolata in assenza di portanti di guardia; la seconda è relativa alla configurazione LTE per $N = 1024$, a cui corrispondono i valori $M = 600$ e $N_V = 424$. In assenza di guardie lo stimatore DFT-based si avvicina all'algorithmo MMSE, soprattutto per SNR decrescenti; la presenza di molte portanti di guardia peggiora la qualità della stima e si individua un contributo di errore indipendente dall'SNR. La presenza di molte guardie, come nel sistema LTE, provoca lo sparpagliamento della potenza di \mathbf{h} su tutti gli N campioni del simbolo SC-FDMA. Poiché la DFT è periodica su N campioni, le componenti vicine all'origine sono traslate attorno al campione N , come mostrato in figura 4.4; il taglio della risposta ai primi L campioni causa la perdita di molta potenza e la qualità della stima \mathbf{H}_{DFT} ne risente sensibilmente. In figura 4.16 è mostrato l'impatto dell'errore di correlazione sul MSE dello stimatore DFT-based, al variare del numero di guardie. Le simulazioni per costruire questa figura sono state condotte in

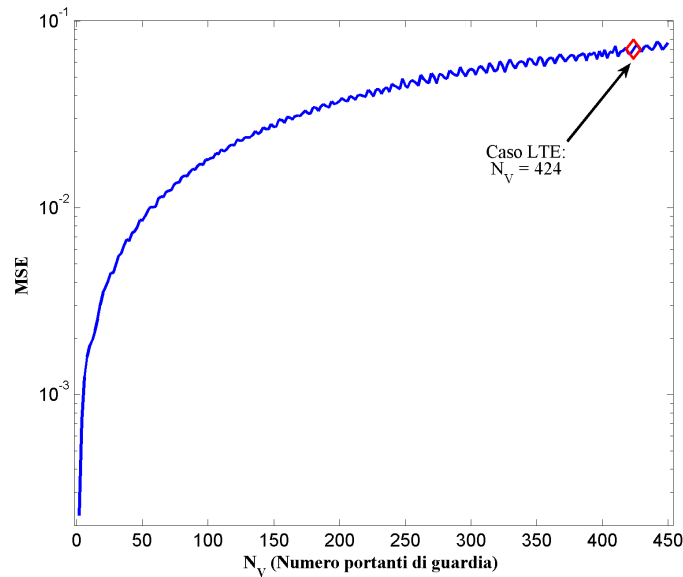


Figura 4.16: MSE della stima DFT-based al variare del numero di guardie N_V e con $SNR = \infty$. È evidenziata la configurazione LTE per $B_W = 10$ MHz ($N_V = 424$).

assenza di rumore AWGN. La dimensione della FFT è pari a $N = 1024$ e i valori del parametro N_V sono compresi nell'intervallo $2 \leq N_V \leq 450$, con passo 2. Il caso LTE, corrispondente a $N_V = 424$, è evidenziato in figura con un rombo. Il canale radio da stimare ha un PDP esponenziale.

Come anticipato, il grande vantaggio dello stimatore è il suo costo computazionale molto ridotto. Infatti l'unica operazione da svolgere è la coppia DFT/IDFT di N campioni; dunque il numero delle operazioni complesse è proporzionale a $N \log_2 N$.

4.6.2 Il metodo Successive Interference Cancellation (SIC)

Il metodo SIC, descritto in [30], riduce l'errore di correlazione utilizzando la sequenza di autocorrelazione $b(n)$, di espressione (4.9). I dati in ingresso sono ottenuti dalla stima ZF nel dominio del tempo \mathbf{h}_{ZF} .

Il modello di canale, descritto nel par. 4.3, è costituito da L percorsi distinti, con ampiezza casuale h_l e ritardo $\tau_l = m_l T_s$. In assenza di rumore AWGN, le ampiezze della CIR perturbate dall'errore CEC sono

$$h'_n = \sum_{l=0}^{L-1} h_l b(\tau_n - \tau_l) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.95)$$

L'estensione della CIR perturbata copre l'intera durata del simbolo SC-FDMA, pari a N campioni. L'errore di correlazione è

$$\varepsilon_{CEC}(n) = h(n) - \frac{h'_n}{b_0} = \sum_{k \neq n} h_k \frac{b(\tau_n - \tau_k)}{b_0} \quad (4.96)$$

dove la normalizzazione per il coefficiente $b_0 = b(0)$ consente il confronto diretto tra le ampiezze h_n e h'_n . Nel seguito la normalizzazione è da considerarsi sottintesa. L'ampiezza di ciascun percorso originale, nelle posizioni τ_l , si trasforma in una combinazione lineare di tutti i percorsi, pesati dai coefficienti $b(n)$. Se il cammino m -esimo è un percorso diretto o un forte eco, esso contribuisce all'errore $\varepsilon_{CEC}(n)$, per $n \neq m$, in modo preponderante. Viceversa la distorsione subita da questo cammino è trascurabile e vale l'approssimazione

$$h'_m \simeq h_m \quad (4.97)$$

Si può eliminare con esattezza il contributo del percorso dominante dall'errore (4.96) sottraendo da \mathbf{h}_{ZF} una replica della funzione $b(n)$, traslata di (τ_m/T_s) campioni e pesata dal guadagno non distorto h_m . In ricezione

i parametri h_m e (τ_m/T_s) sono incogniti; tuttavia, se vale la (4.97), il coefficiente massimo di \mathbf{h}_{ZF} corrisponde al cammino dominante di \mathbf{h} . La correzione approssimata del cammino dominante consente di trovare la nuova CIR

$$\mathbf{h}_{SIC}^{(1)} = \mathbf{h}_{ZF} - \mathbf{c}_{SIC}^{(1)} \quad (4.98)$$

dove $\mathbf{c}_{SIC}^{(1)}$ è la sequenza di correzione, data da $\mathbf{c}_{SIC}^{(1)}(n) = h'_m b(n-m)$. L'apice (1) nella (4.98) indica che $\mathbf{h}_{SIC}^{(1)}$ è il risultato del primo passo dell'algoritmo SIC. Lo stesso metodo è applicato a $\mathbf{h}_{SIC}^{(1)}$: si cerca nella risposta il coefficiente di ampiezza massima escludendo quello di posto m , il cui contributo all'errore è stato corretto al primo passo. Si costruisce la nuova sequenza di correzione $\mathbf{c}_{SIC}^{(2)}(n)$ e la si sottrae a $\mathbf{h}_{SIC}^{(1)}$ per ottenere $\mathbf{h}_{SIC}^{(2)}$. Complessivamente l'algoritmo viene ripetuto L volte, scartando dalla ricerca del massimo corrente i campioni considerati in precedenza. Ogni passo i restituisce una versione approssimata della CIR, indicata con $\mathbf{h}_{SIC}^{(i)}$, sempre più somigliante alla risposta originale.

Il valore corretto del numero di percorsi L non è noto in ricezione, perciò si suppone $L = N_{CP}$. Se il numero dei percorsi di \mathbf{h} è molto inferiore a N_{CP} , come per i canali 3GPP, può succedere che i coefficienti selezionati dall'algoritmo SIC non corrispondano a percorsi di canale effettivi; la correzione $\mathbf{c}_{SIC}^{(i)}$ associata a tali coefficienti introduce un errore ulteriore nella CIR. Per ridurre l'impatto di questo problema, mai completamente evitabile, si controlla l'evoluzione dell'algoritmo con la metrica $e(i)$:

$$e(i) = \sum_{n=0}^{L-1} \left| \mathbf{h}_{SIC}^{(i)}(n) - \mathbf{h}_{SIC}^{(i-1)}(n) \right|^2 \quad (4.99)$$

Essa rappresenta l'energia della differenza tra la CIR $\mathbf{h}_{SIC}^{(i)}$ al passo corrente e quella al passo precedente $\mathbf{h}_{SIC}^{(i-1)}$. Nell'articolo [30] la condizione che $e(i)$ deve verificare affinché l'algoritmo termini è

$$\delta_e = (e(i) - e(i-1)) > 0 \quad (4.100)$$

Indicando con N_{iter} il numero di iterazioni compiute dall'algoritmo prima di concludersi, la stima restituita dalla tecnica SIC è $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$. La scelta di tale condizione è motivata dal fatto che l'algoritmo corregge i contributi di errore in ordine di importanza, selezionando ad ogni passo il coefficiente più intenso. Se tale coefficiente corrisponde a un percorso della risposta originale \mathbf{h} , la funzione $e(i)$ dovrebbe decrescere all'aumentare dell'indice i , ovvero $e(i) < e(i-1)$. Quando $i > L$, cioè l'indice del passo supera il numero totale dei percorsi di \mathbf{h} , il coefficiente più intenso della risposta $\mathbf{h}_{SIC}^{(i-1)}(n)$, in posizione $n_{max}^{(i)}$ è poco correlato (o incorrelato) con i restanti $(N-1)$ campioni di $\mathbf{h}_{SIC}^{(i-1)}(n)$. Da questo indice in poi la metrica $e(i)$ non decresce strettamente a causa dell'accumulo di componenti indesiderate; appena la condizione (4.100) non è più valida, l'algoritmo di correzione termina.

Questa scelta, giustificabile in linea teorica, si rivela essere troppo restrittiva dal punto di vista pratico.

Per dimostrarlo, si analizza il comportamento dell'algoritmo con simulazioni numeriche. Si applica la correzione SIC alle realizzazioni di un canale ETU, partendo dai coefficienti della stima \mathbf{h}_{ZF} . La banda di sistema è $B_w = 10$ MHz e si lavora in assenza di rumore AWGN. Dopo ogni esecuzione dell'algoritmo vengono calcolati tre parametri:

- N_{iter} , numero di iterazioni compiute in ciascuna esecuzione dell'algoritmo SIC;
- MSE_{SIC} , errore quadratico medio di ciascuna risposta corretta;
- $E_{non-taps}$, energia dei coefficienti della risposta stimata $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$ compresi nell'intervallo $0 \leq n \leq N_{CP}$ che non corrispondono a cammini della risposta originale \mathbf{h} .

La figura 4.17 mostra i valori del parametro N_{iter} per 100 simulazioni. Spesso l'algoritmo esce prima di aver effettuato $L = 9$ iterazioni, dove L è il numero di prese del canale ETU con banda 10 MHz. La conclusione prematura dell'algoritmo provoca la mancata eliminazione di una parte consistente dell'errore di correlazione. Il verificarsi della condizione (4.100) non garantisce che la correzione introdotta sia dannosa. Infatti è possibile

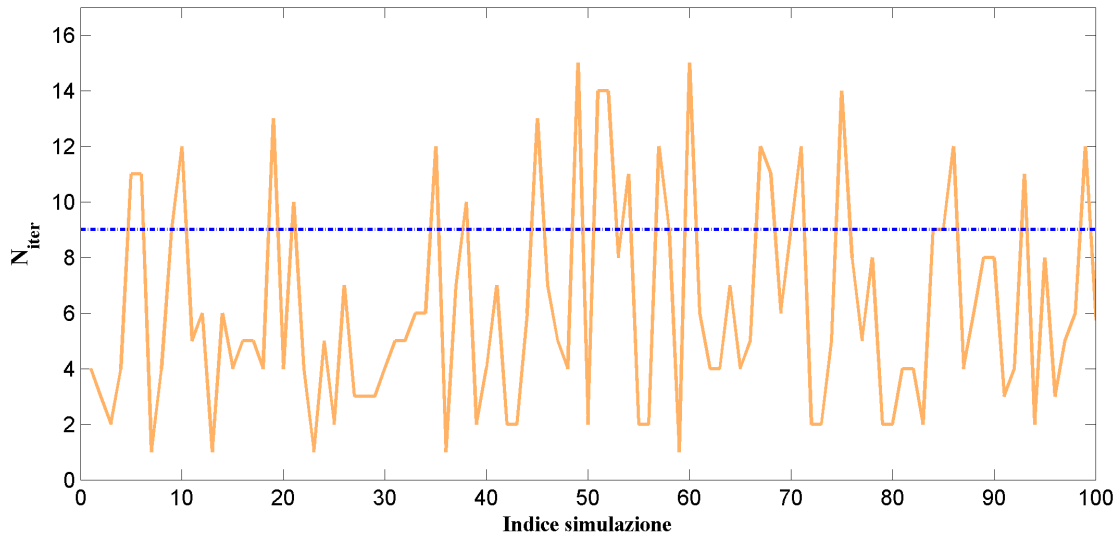


Figura 4.17: Numero di iterazioni N_{iter} dell’algoritmo SIC classico per un canale ETU con banda $B_W = 10$ MHz. La linea tratteggiata indica il numero di cammini del canale $L = 9$.

che i contributi di correzione si sommino coerentemente per ricostruire un picco, scomparso nella risposta distorta. In questo caso, l’energia della risposta ricostruita al passo i sarà aumentata rispetto al passo $i - 1$, ma non per questo la correzione introdotta è errata.

4.6.3 Metodo SIC modificato

Si propone dunque una versione dell’algoritmo modificata, caratterizzata da una condizione di uscita legata al valore assoluto di δ_e , non al suo segno.

Per prima cosa si normalizza il parametro δ_e per l’energia della risposta SIC corrente:

$$\delta_e = \frac{e(i) - e(i-1)}{\sum_{n=0}^{L-1} |\mathbf{h}_{SIC}^{(i)}(n)|^2} \quad (4.101)$$

La nuova condizione di uscita si verifica quando

$$|\delta_e| < THR_{\delta_e} \quad (4.102)$$

dove THR_{δ_e} è un valore di soglia che permette di ottenere buone prestazioni con un costo computazionale contenuto, legato al numero di iterazioni N_{iter} .

Il valore ottimo di THR_{δ_e} è ricavato tramite simulazioni numeriche. Si applica la correzione SIC alle realizzazioni di un canale ETU, partendo dai coefficienti della stima \mathbf{h}_{ZF} . La banda di sistema è $B_W = 10$ MHz e l’SNR è definito nell’intervallo $0 \leq SNR \leq 30$ dB. Dopo ogni simulazione vengono memorizzati i parametri N_{iter} , MSE_{SIC} e $E_{non-taps}$. I valori di soglia provati sono $THR_{\delta_e} = 10^{-k}$, con $k = \{1, 2, \dots, 5\}$.

In figura 4.18 è mostrato l’errore quadratico medio MSE_{SIC} del metodo SIC al variare del valore di soglia. Il metodo SIC originale, proposto in [30], è indicato con il nome *SIC originale*. I valori 10^{-4} e 10^{-5} restituiscono le prestazioni migliori e le curve associate sono abbastanza simili tra loro, soprattutto per $SNR > 20$ dB. La stima è sensibilmente più precisa rispetto al metodo [30].

Per SNR superiori a 10 dB, l’MSE si stabilizza a un valore costante. In questi casi, le prestazioni della correzione SIC dipendono maggiormente dalla struttura della specifica realizzazione di canale, piuttosto che dall’SNR. Percorsi troppo ravvicinati e simili determinano la nascita di picchi fasulli, dovuti completamente all’errore CEC. Il metodo SIC, basato sull’eliminazione del massimo corrente, può scambiare tali picchi fittizi per cammini di canale genuini, introducendo nuove componenti di errore.

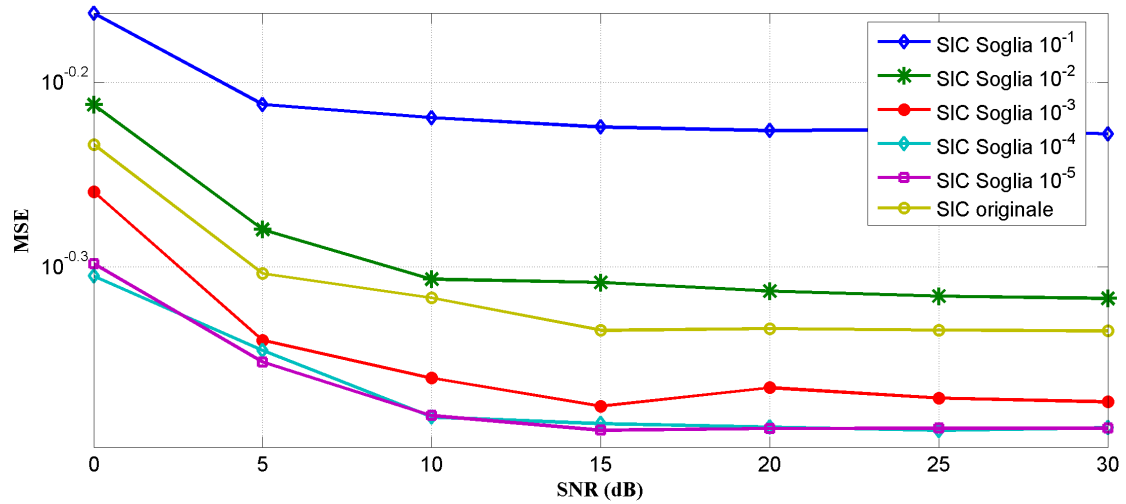


Figura 4.18: MSE del metodo SIC modificato per diversi valori di THR_{δ_e} . Banda $B_W = 10$ MHz; canale ETU.

La figura (4.19) mostra il numero medio di iterazioni dell'algoritmo in funzione dell'SNR. Il valore ottimale della

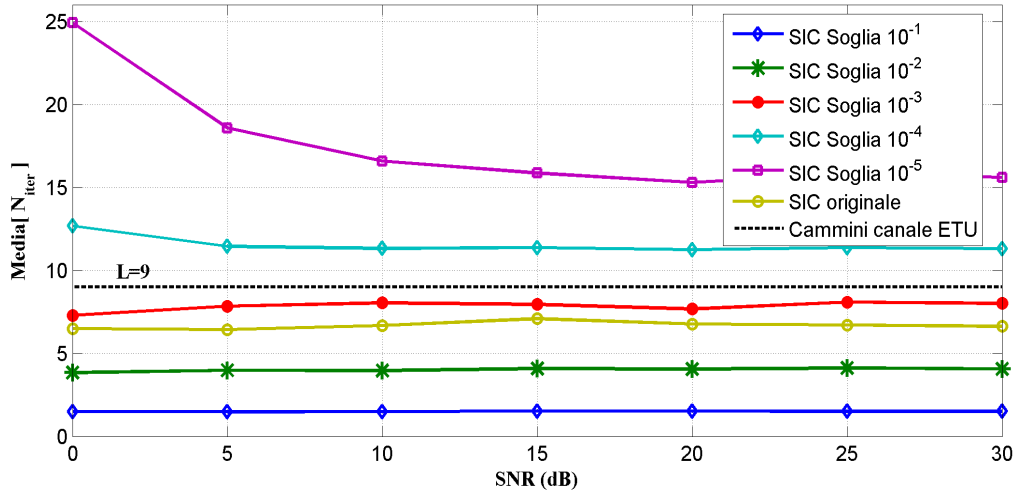


Figura 4.19: Media del numero di iterazioni N_{iter} per diversi valori di THR_{δ_e} . Banda $B_W = 10$ MHz; canale ETU.

soglia consente di ottenere buone prestazioni riducendo nel contempo il costo computazionale. Se la soglia è troppo alta, le iterazioni sono poche ma le prestazioni della correzione sono scarse. Se la soglia è troppo bassa, si assiste al fenomeno di saturazione delle prestazioni mostrato in figura (4.18) e l'algoritmo effettua molte iterazioni inutili prima di concludersi, in quanto, dopo le prime importanti correzioni, il parametro δ_e decresce lentamente.

Il miglior compromesso tra prestazioni e complessità si ottiene con il valore di soglia $THR_{\delta_e} = 10^{-4}$.

Il seguente pseudocodice riporta i passaggi dell'algoritmo SIC modificato.

```

% CIR iniziale normalizzata da  $b_0$ 
 $\mathbf{h}_{SIC}^{(0)} = (\mathbf{h}_{ZF}/b_0)$ 
% Lunghezza massima della CIR
 $L = N_{CP}$ 

```

```

% Variabile condizione di uscita
exit = 0
% Vettore dei massimi correnti
n_max^(k) = []
% Indice di iterazione
i = 1
% Inizio del ciclo
while( not(exit) )
    % Ricerca massimo distinto con n ≠ n_max^(k) , 0 ≤ k < i - 1
    n_max^(i) = find( argmax ( |h_SIC^(i-1)(n)|^2 ) )
    % Cancellazione errore con n ≠ n_max^(i)
    h_SIC^(i)(n) = h_SIC^(i-1)(n) - h_SIC^(i-1)(n_max^(i)) * b(n - n_max^(i)) / b(0)
    % Calcolo metrica di controllo
    e(i) = sum_{n=0}^{L-1} |h_SIC^(i)(n) - h_SIC^(i-1)(n)|^2
    % Variazione normalizzata
    delta_e = [e(i) - e(i-1)] / |h_SIC^(i-1)(n)|^2
    % Controllo condizione
    if (|delta_e| < THR_delta_e)
        exit = 1
        N_iter = i
        h_SIC^(N_iter)(n) = h_SIC^(i)(n)
    end
end
end

```

La variabile $n_{\max}^{(k)}$ contiene le posizioni dei coefficienti di valore massimo trovate ai passi precedenti. La funzione `find` restituisce la posizione del coefficiente massimo, trovato con la funzione `argmax`, della risposta corrente. Quando si verifica la condizione di uscita (4.102), la variabile `exit`, di tipo logico, assume valore unitario e il ciclo si conclude. La risposta $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}(n)$, restituita dall'algoritmo SIC, è la versione della CIR corretta all'ultimo passo.

La figura 4.20 mostra l'effetto della correzione SIC proposta su una realizzazione di canale EVA, con $SNR = \infty$ e soglia $THR_{\delta_e} = 10^{-4}$. Sono presentate, nell'ordine, CIR affetta dall'errore di correlazione \mathbf{h}_{ZF} , la risposta corretta con la tecnica SIC modificata $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$, e infine la CIR originale \mathbf{h} . La risposta corretta $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$ può essere utilizzata direttamente per calcolare una stima della CFR del canale \mathbf{H} :

$$\widehat{\mathbf{H}}_{SIC} = \mathbf{F}_{PL} \cdot \mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})} \quad (4.103)$$

oppure viene inviata all'algoritmo di stima del PDP (par. 4.4.4.2) per ottenere una stima più fedele dell'auto-correlazione \mathbf{R}_{HH} .

Il costo computazionale complessivo, sia per il metodo SIC originale che modificato, dipende dal numero medio di iterazioni compiute \overline{N}_{iter} . Si suppone che il metodo SIC consideri la CIR lunga $L = N_{CP}$ campioni. Il numero totale di somme complesse è

$$C_{SIC}^{sum} = \overline{N}_{iter}(2L + 1)$$

e quello di moltiplicazioni complesse è

$$C_{SIC}^{prod} = \overline{N}_{iter}(3L)$$

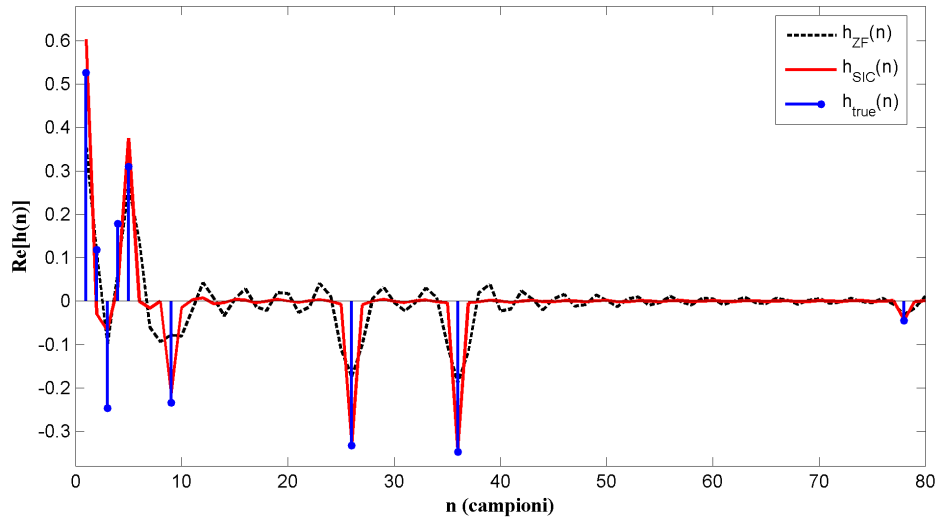


Figura 4.20: Confronto delle risposte h_{ZF} , h_{SIC} e h , per una realizzazione di canale ETU in assenza di rumore. $B_W = 10$ MHz e $THR_{\delta_e} = 10^{-4}$.

Il numero totale di operazioni complesse è

$$C_{SIC} = C_{SIC}^{sum} + C_{SIC}^{prod} = \bar{N}_{iter}(5L + 1) \quad (4.104)$$

Ad esempio, considerando le simulazioni numeriche in figura 4.19, quando $THR_{\delta_e} = 10^{-4}$ si ha $\bar{N}_{iter} \simeq 12$ per ogni valore di SNR.

4.6.4 Algoritmo di path detection (PD)

La qualità della risposta $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$ può essere migliorata ulteriormente applicando ad essa l'algoritmo di *path detection* (PD) [30]. Infatti, mentre la risposta originale \mathbf{h} è costituita da $L \leq N_{CP}$ percorsi non nulli, la risposta $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$ può estendersi su tutti gli N_{CP} campioni del CP (figura 4.20). Ad esempio, la risposta di un canale ETU con banda $B_W = 10$ MHz è composta da soli $L = 9$ percorsi, mentre, in configurazione normale, $N_{CP} = 72$.

L'algoritmo PD ha l'obiettivo di localizzare nella risposta $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$ i soli percorsi originali di \mathbf{h} ; esso è composto dai seguenti passi:

- salvataggio delle N_{PD} stime \mathbf{h}_{SIC} più recenti. Si è posto $N_{PD} = 10$ come suggerito in [30];
- calcolo della funzione $h_{PD}^{(m)}(n)$

$$h_{PD}^{(m)}(n) = \frac{1}{N_{PD}} \sum_{i=0}^{N_{PD}-1} \left| h_{SIC}^{(m-i)}(n) \right|^2, \quad 0 \leq n < N_{CP} \quad (4.105)$$

pari alla media delle potenze delle singole risposte;

- ricerca nella funzione $h_{PD}^{(m)}$ dei percorsi della risposta originale \mathbf{h} . Il processo di ricerca si può così riassumere:
 - definizione della funzione $h_{PD,sort}^{(m)}$, contenente i coefficienti della funzione $h_{PD}^{(m)}(n)$ disposti in ordine decrescente. Affinché l'ordinamento sia reversibile, è importante mantenere l'associazione tra gli indici dei coefficienti riordinati e le posizioni che essi occupano in $h_{PD}^{(m)}(n)$. Questo compito è affidato al vettore di indici n_{CIR} che verifica la condizione

$$h_{PD,sort}^{(m)}(n_{CIR}) = h_{PD}^{(m)}(n) \quad (4.106)$$

- calcolo della funzione cumulativa normalizzata $h_{PD,CUM}^{(m)}(k)$, definita dall'espressione

$$h_{PD,CUM}^{(m)}(k) = \frac{\sum_{i=0}^k h_{PD,sort}^{(m)}(i)}{\sum_{i=0}^{N_{CP}-1} h_{PD,sort}^{(m)}(i)} \quad 0 \leq k < N_{CP} \quad (4.107)$$

La funzione $h_{PD,CUM}^{(m)}(k)$ ha valori compresi tra 0 e 1;

- ricerca del primo indice \bar{k} che verifica la condizione

$$h_{PD,CUM}^{(m)}(\bar{k}) > E_{thr} \quad (4.108)$$

dove $0 \leq E_{thr} \leq 1$ è un valore di soglia scelto opportunamente;

- selezione dei primi \bar{k} indici del vettore n_{CIR}

$$n_{sel} = n_{CIR}(0 : (\bar{k} - 1)) \quad (4.109)$$

Il vettore n_{sel} contiene le posizioni dei coefficienti di $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$ classificati come percorsi della risposta originale \mathbf{h} .

- restituzione del vettore n_{sel} .

Lo schema a blocchi dell'algorithm PD è mostrato in figura 4.21.

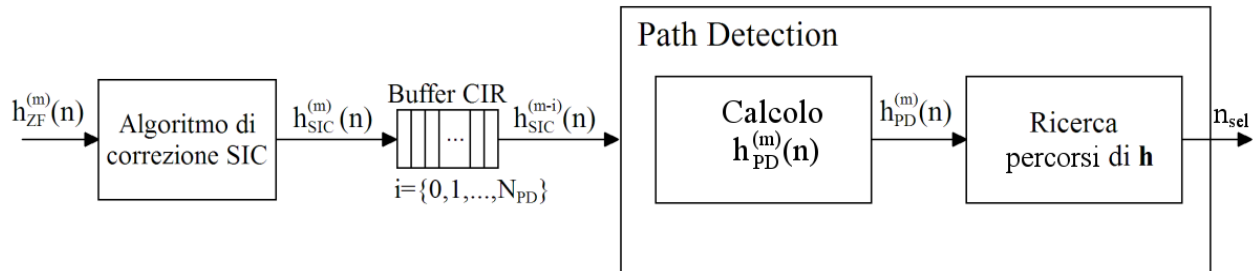


Figura 4.21: Schema a blocchi dell'algorithm di Path Detection preceduto dalla correzione SIC.

Una volta note le posizioni n_{sel} si può costruire la nuova stima della CIR $\mathbf{h}_{SIC,PD}$, definita come:

$$\mathbf{h}_{SIC,PD}(n) = \begin{cases} \mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}(n) & n \in n_{sel} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.110)$$

L'errore $\varepsilon_{CEC}(n)$, con $n \in n_{sel}$, dipende dalla qualità della stima in ingresso, ovvero dalle prestazioni della correzione SIC. Come osservato in [30], la tecnica PD elimina dalla risposta $\mathbf{h}_{SIC}^{(N_{iter})}$ le sole componenti di disturbo incorrelate, ovvero causate dall'errore AWGN. I contributi dell'errore di correlazione, trascurati dal metodo SIC, sono correlati poiché derivano da una combinazione lineare dei campioni stessi. Tali coefficienti rappresentano la maggior parte dei falsi positivi restituiti dall'algorithm di ricerca, cioè dei coefficienti classificati erroneamente come percorsi di \mathbf{h} .

La realizzazione pratica dell'algorithm PD richiede di fissare la soglia E_{thr} . Il valore ottimale di questa soglia, ricercato con simulazioni numeriche, permette all'algorithm di:

- raggiungere un tasso di successo vicino al 100%, ovvero di comprendere tra gli indici n_{sel} restituiti quelli corrispondenti ai cammini di \mathbf{h} ;
- minimizzare il tasso dei falsi positivi, a parità di tasso di successo.

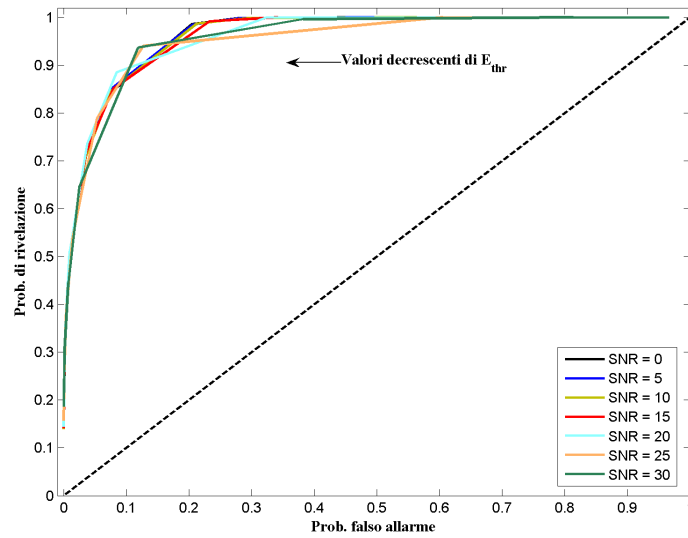


Figura 4.22: Curva ROC, che mette in relazione la probabilità di rivelazione e la probabilità di falso allarme per diversi valori di SNR. I valori della soglia E_{thr} decrescono nella direzione indicata dalla freccia. $B_W = 10$ MHz; canale EVA.

Si consideri ad esempio, il dimensionamento della soglia E_{thr} per un segnale con banda $B_W = 10$ MHz trasmesso su un canale radio di tipo EVA. La figura 4.22 mostra la receiver operating characteristic (ROC), che mette in relazione la probabilità di rivelazione (veri positivi) e la probabilità di falso allarme (falsi positivi) per diversi valori di SNR. I valori della soglia E_{thr} decrescono nella direzione indicata dalla freccia. Come mostrato in [4], grazie a queste curve è possibile calcolare il valore ottimo di E_{thr} .

Riguardo al costo computazionale dell'algoritmo PD, si osserva che $h_{PD}^{(m)}(n)$ richiede N_{CP} moltiplicazioni per trovare la potenza del simbolo m -esimo, $(N_{PD}N_{CP})$ somme per effettuare la sommatoria $\sum_{i=0}^{N_{PD}-1} |h_{SIC}^{(m-i)}(n)|^2$ e infine N_{CP} divisioni per mediare le realizzazioni della CIR. Inoltre, la funzione cumulativa $h_{PD,CUM}^{(m)}(k)$ richiede $N_{CP}(N_{CP} + 1)/2$ somme. Il costo della ricerca dell'indice \bar{k} è considerato trascurabile. In tutto il numero delle operazioni richieste è pari a

$$C_{PD} = C_{SIC}^{sum} + C_{SIC}^{prod} = N_{CP} [N_{PD} + 2 + (N_{CP} + 1)/2] \quad (4.111)$$

4.7 Algoritmo di stima proposto

L'algoritmo di stima proposto raccoglie diverse componenti analizzate separatamente nei precedenti paragrafi. Esso consiste in uno stimatore MMSE adattativo (par. 4.4.4.2) in grado di inseguire le variazioni statistiche del canale (funzione di autocorrelazione del canale e potenza del rumore AWGN).

L'espressione dello stimatore MMSE adattativo, è data da

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,ad} = \mathbf{A}_{MMSE}^{adapt} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \hat{\mathbf{R}}_{HH}(i) \left(\hat{\mathbf{R}}_{HH}(i) + \frac{1}{\widehat{SNR}(i)} \mathbf{I}_P \right)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.112)$$

Lo schema a blocchi dello stimatore è presentato in figura 4.23. Come visto nel par. 4.4.4.2, la costruzione della matrice $\mathbf{A}_{MMSE}^{adapt}$ richiede di calcolare due stime, aggiornate all'arrivo di un nuovo RS:

- la stima $\widehat{SNR}(i)$ del rapporto segnale-rumore, ricavata elaborando le portanti di guardia N_V (figura 4.11);
- la stima $\hat{\mathbf{R}}_{HH}(i)$ dell'autocorrelazione in frequenza, ovvero, in modo del tutto equivalente, del Power Delay Profile del canale radio (figura 4.12).

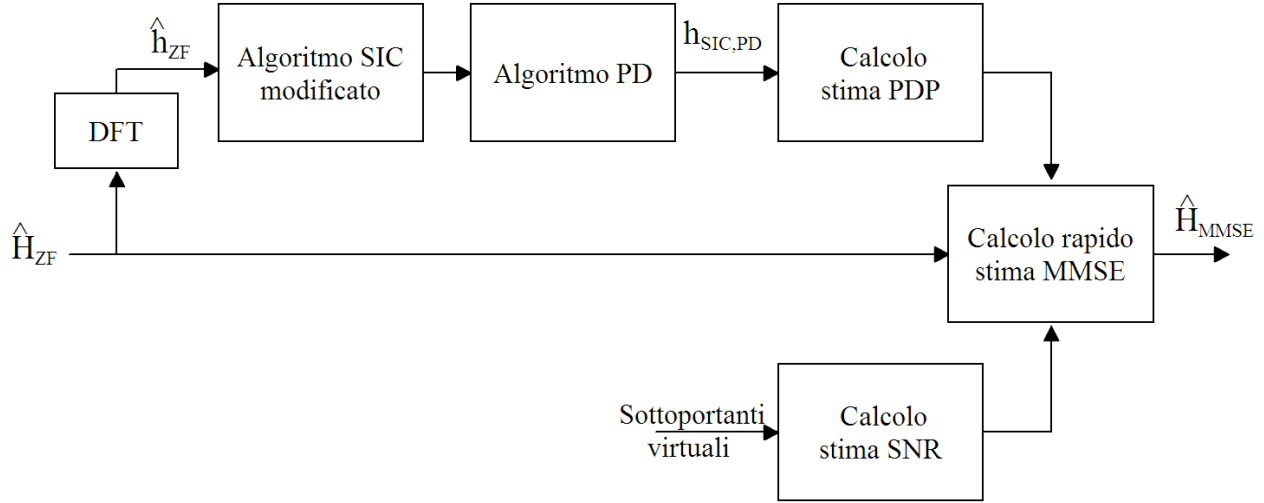


Figura 4.23: Schema a blocchi dello stimatore di canale proposto.

La seconda stima è valutata nel dominio del tempo, partendo dalle stime ZF della CIR $\hat{\mathbf{h}}_{ZF}$. Come discusso nel par. 4.2, a causa della presenza delle guardie, la generica CIR $\hat{\mathbf{h}}_{ZF}$ è affetta dall'errore di correlazione e quindi, così com'è, non consente di stimare con sufficiente precisione il PDP.

Prima di stimare il PDP, le risposte $\hat{\mathbf{h}}_{ZF}$ vengono elaborate dalle tecniche CEC (par. 4.6). Si è deciso di utilizzare l'algoritmo di correzione SIC modificato (par. 4.6.3) seguito dall'algoritmo di path detection (par. 4.6.4), come mostrato in figura 4.21.

La stima della CIR $\mathbf{h}_{SIC,PD}(n)$, corretta dall'errore CEC, viene inviata allo stimatore del PDP per costruire una stima affidabile della matrice \mathbf{R}_{HH} del canale radio.

Una volta noti i valori $\widehat{SNR}(i)$ e $\hat{\mathbf{R}}_{HH}(i)$, è possibile calcolare la nuova matrice di stima $\mathbf{A}_{MMSE}^{adapt}$. Tuttavia, essa presenta un costo computazionale molto elevato. Per velocizzarne sensibilmente il calcolo sono stati studiati alcuni algoritmi di riduzione del costo computazionale (par. 4.5).

Tra le soluzioni proposte, si è deciso di utilizzare:

- la tecnica 4.5.3.1 per velocizzare il calcolo di $\hat{\mathbf{R}}_{HH}(i)$;
- la tecnica super-veloce di Schur, presentata in appendice D, per calcolare la stima intermedia

$$\hat{\mathbf{H}}_{part} = \left(\hat{\mathbf{R}}_{HH}(i) + \frac{1}{\widehat{SNR}(i)} \mathbf{I}_P \right)^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \quad (4.113)$$

- la tecnica 4.5.3.2 per calcolare il prodotto

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,ad} = \hat{\mathbf{R}}_{HH}(i) \cdot \hat{\mathbf{H}}_{part} \quad (4.114)$$

Il costo computazionale dell'intero algoritmo è ben approssimato dal costo del calcolo della matrice inversa. In origine esso è proporzionale a $C_{MMSE,ad}^{pre} = O(P^3)$ operazioni complesse. Dopo l'introduzione dell'algoritmo di Schur, si ottiene un costo di $C_{MMSE,ad}^{post} \simeq 8P(\log_2 P)^2$ operazioni complesse. Ad esempio, per una banda $B_W = 10$ MHz, e fissando $P = 600$, ovvero allocando tutte le sottoportanti disponibili, il rapporto tra i costi $C_{MMSE,ad}^{pre}$ e $C_{MMSE,ad}^{post}$ diventa:

$$\frac{C_{MMSE,ad}^{pre}}{C_{MMSE,ad}^{post}} \simeq \frac{P^3}{8P(\log_2 P)^2} \simeq 528.3 \quad (4.115)$$

Le prestazioni di questo algoritmo in rapporto alle altre tecniche descritte sono analizzate nel cap. 6.

Capitolo 5

Il software Matlab e l'interfaccia utente

In questo capitolo si descrivono le principali funzioni sviluppate in linguaggio Matlab per simulare la trasmissione del canale PUSCH nella tratta di Uplink LTE, sia nel lato di trasmissione che nel lato di ricezione.

Inizialmente, nel par. 5.1, viene presentato il simulatore nel suo complesso, indicando le applicazioni disponibili per l'utente e i principali blocchi funzionali che lo compongono.

Nel par. 5.2 è illustrato il trasmettitore (TX), capace di costruire un segnale LTE PUSCH conforme alle direttive dello standard [11]. Nel par. 5.3 si considera il dispositivo di ricezione (RX) che recupera i simboli della costellazione trasmessa a partire dal segnale ricevuto, perturbato da rumore AWGN, multipath e CFO.

Infine, nel par. 5.4, sono presentate le interfacce utente del generatore di segnale e del ricevitore.

5.1 L'applicativo sviluppato

I codici sviluppati costituiscono nel loro insieme un simulatore della tratta di Uplink LTE, sia dal lato trasmettente (UE), sia dal lato ricevente (eNodeB).

Il lavoro si è concentrato sul solo canale dati PUSCH, senza considerare il canale di accesso casuale PRACH e il canale di controllo PUCCH. Molti degli aspetti critici nel progetto di un ricevitore PUSCH si possono ritrovare nello studio dei ricevitori per i canali PRACH e PUCCH. In particolare, le sequenze pilota (Reference Signals) di questi tre canali hanno proprietà molto simili perché derivano tutte quante da sequenze di Zadoff-Chu (app. C).

Ci si aspetta dunque che molte delle soluzioni proposte possano essere introdotte con profitto nel progetto di ricevitori PRACH e PUCCH.

5.1.1 Le applicazioni per l'utente

Le applicazioni sviluppate sono:

- un *editor* che permette di generare la forma d'onda in banda base, da cui è possibile:
 - generare una o più trame PUSCH variando a piacere i parametri di progetto;
 - perturbare il segnale generato con CFO e rumore AWGN;
 - simulare la propagazione del segnale attraverso canali radio con Power Delay Profile e dispersione Doppler definiti dallo standard (appendice B in [22]) e generati come spiegato in appendice F;
 - visualizzare il segnale così generato, sia nel dominio del tempo che in frequenza;
 - salvare la forma d'onda risultante, insieme ai parametri di progetto, in un unico file (.mat) da cui è immediato recuperare le informazioni di interesse durante la fase di elaborazione.
- Un *ricevitore/analizzatore*, che acquisisce il segnale generato in precedenza e i relativi parametri di progetto. L'elaborazione della forma d'onda ricevuta si può suddividere in due passi distinti:

- sincronizzazione nel tempo e in frequenza, i cui compiti sono
 - * stima e correzione del CFO;
 - * stima della posizione iniziale della prima trama completa ricevuta;
- stima di canale ed equalizzazione, dove vengono confrontate le prestazioni dei diversi stimatori studiati.

Durante l'esecuzione, ciascun blocco funzionale calcola e raccoglie informazioni sull'andamento dei compiti svolti, che permettono di analizzare con precisione le prestazioni dell'intero sistema e dei suoi componenti. Alcuni risultati di questa analisi sono mostrati nell'interfaccia di utente, sia sotto forma di rapporto, sia graficamente.

5.1.2 I blocchi funzionali principali

Le applicazioni di utente fanno capo a due blocchi funzionali principali:

- Trasmettitore PUSCH, che costruisce, a partire dai bit di informazione, una forma d'onda equivalente al segnale passa basso complesso da trasmettere;
- Ricevitore PUSCH, che permette di recuperare i simboli QAM generati a partire dal segnale in banda base ricevuto; esso viene suddiviso in due sotto-blocchi collegati in cascata:
 - Sincronizzatore nel tempo (BOF) e in frequenza (CFO);
 - Stimatore di canale, che raggruppa gli stimatori di canale proposti ed equalizza il segnale ricevuto con le risposte stimate da ciascuno di essi.

Il ricevitore ha una struttura più articolata del generatore, poiché comprende al suo interno gli algoritmi di stima di CFO, sincronizzazione nel tempo e stima di canale, descritti nei capitoli precedenti. Raccoglie inoltre numerose informazioni che permettono di calcolare indici di prestazioni sia dei singoli algoritmi che del sistema nel suo complesso.

5.1.3 Osservazioni

L'obiettivo di progetto consiste nel realizzare uno strumento di test che non lavora in tempo reale. Infatti, le forme d'onda vengono generate in un primo tempo e solo successivamente acquisite ed elaborate. Per questo motivo si è deciso di utilizzare la trama quale minima unità di elaborazione. Il ricevitore PUSCH comincia l'elaborazione della forma d'onda solo quando essa è stata completamente acquisita. Tale vincolo esclude la possibilità che un sistema siffatto possa lavorare in tempo reale, sia a causa delle eccessive latenze di elaborazione sia per la necessità di impiegare una memoria intermedia di grandi dimensioni.

Nei paragrafi successivi si analizza più in dettaglio l'implementazione dei blocchi funzionali, indicando i parametri richiesti e le principali operazioni svolte al loro interno.

5.2 Trasmettitore PUSCH

Il generatore di canale PUSCH può essere rappresentato in modo sintetico con lo schema a blocchi in figura 5.1.

Esso permette di generare una o più trame LTE (attraverso il parametro N_{frames}) a partire da bit di informazione creati in modo pseudocasuale o ricavati da una specifica sequenza binaria introdotta dall'utente. La struttura dati *Waveform Parameters* contiene i seguenti parametri di progetto, validi per ogni trama generata:

- la banda di sistema B_W ;
- la configurazione del Prefisso Ciclico;

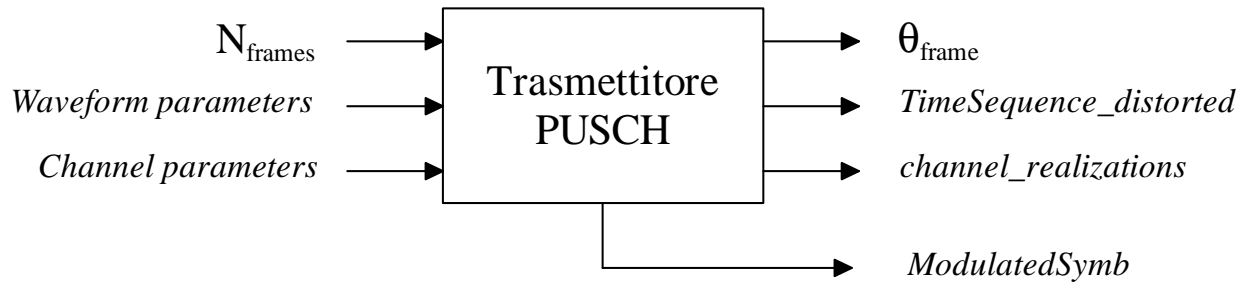


Figura 5.1: Schema di principio del trasmettitore PUSCH.

- l'identificativo di cella N_{ID}^{cell} ;
- il numero di Resource Block allocati N_{RB}^{used} ;
- la modulazione utilizzata Q_m (QPSK, 16QAM o 64QAM);
- i parametri di generazione dei DeModulation Reference Signals (par. 2.4) contenuti in ogni slot della trama:
 - I parametri *Group-hopping-enabled* e *Sequence-hopping-enabled*, che controllano rispettivamente l'abilitazione del Group Hopping e del Sequence Hopping (par. 2.4.4). Le modalità SGH e SH determinano il pattern di variazione, da uno slot all'altro, dei parametri u e v , con i quali si calcola la radice primitiva q da utilizzare per la costruzione dei RS (equazioni (2.21) e (2.22));
 - i due tipi di *cyclic shift* e il parametro Δ_{ss} ;

Si può scegliere l'entità dei disturbi introdotti sul segnale e definire le proprietà del canale radio in cui avviene la propagazione (con la struttura dati *Channel Parameters*), impostando i parametri:

- potenza del rumore AWGN espressa in dB, $\sigma_w^2 = -SNR$;
- intensità del CFO in Hz, di valori compresi nell'intervallo $-\Delta f/2 \leq CFO \leq \Delta f/2$, dove $\Delta f = 15$ kHz è la spaziatura tra sottoportanti definita dallo standard;
- tipo di canale radio, scelto tra quelli definiti da standard (EPA, EVA, o ETU) e simulato con il dispositivo descritto in app. F. È possibile controllare la velocità di variazione del canale impostando la dispersione Doppler ν_D ;
- Timing Offset. È possibile traslare la posizione della prima trama completa, rispetto all'inizio del segnale, di un certo numero di campioni, scelto in modo pseudocasuale.

Una volta determinati tutti questi parametri, si può procedere con la creazione del/dei frame LTE. In uscita si ottiene:

- il segnale PUSCH in banda base, generato secondo lo standard LTE e distorto in base alle non idealità introdotte (*TimeSequence_distorted*);
- il Timing Offset applicato (θ_{frame});
- la matrice delle CIR del canale radio introdotto (*channel_realizations*);
- il vettore dei simboli della costellazione trasmessi nella trama (*ModulatedSymb*).

Lo schema a blocchi dettagliato del trasmettitore PUSCH è rappresentato in figura 5.2; per ogni funzione sono evidenziati i principali parametri di ingresso/uscita. Ad eccezione del turbo codice che non è stato implementato, la sequenza di operazioni svolte corrisponde esattamente ai passi descritti nel documento dello Standard [11].

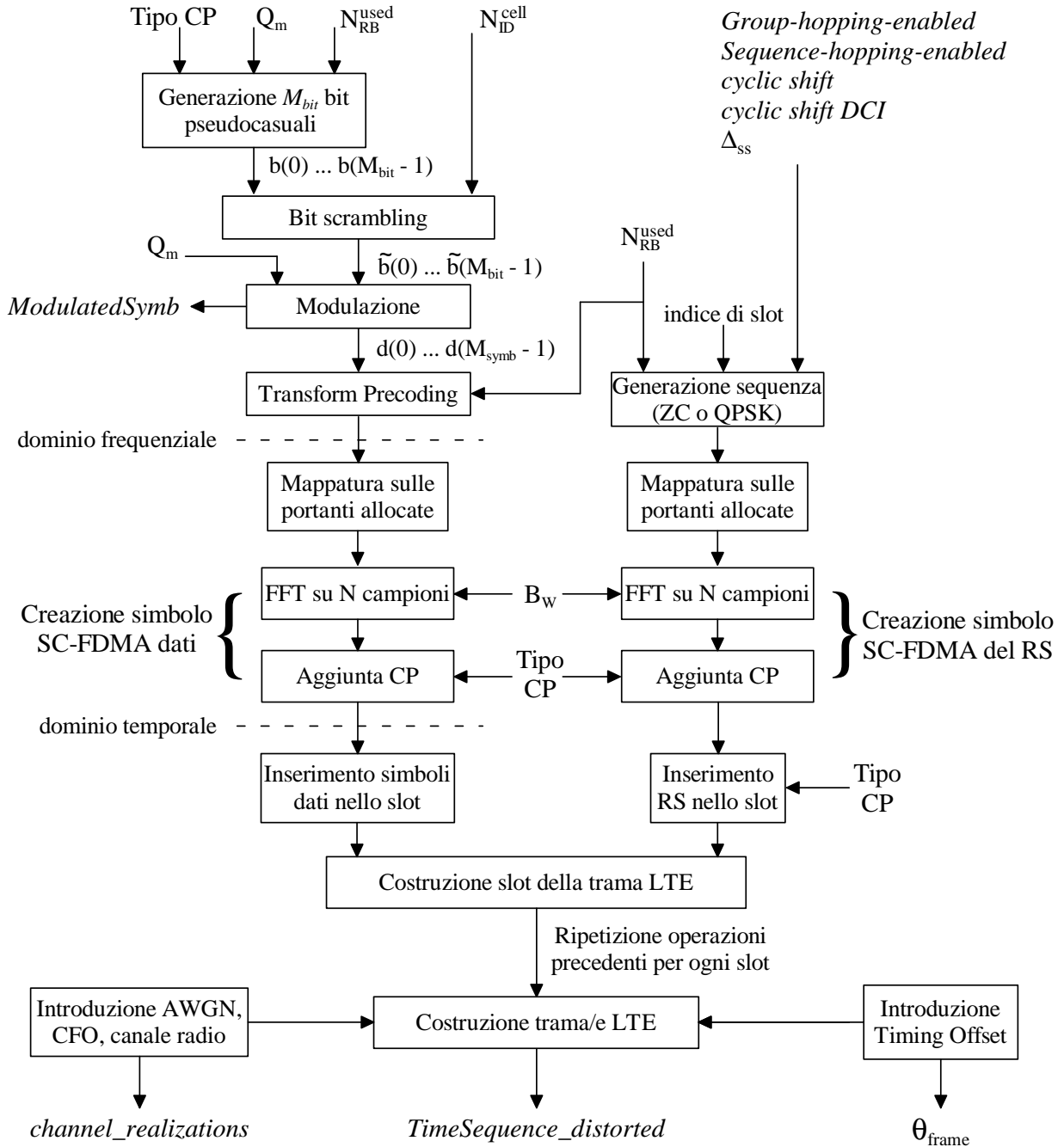


Figura 5.2: Funzioni principali del trasmettitore PUSCH.

5.3 Ricevitore PUSCH

Il ricevitore di canale PUSCH a livello fisico è rappresentato nello schema a blocchi di figura 5.3.

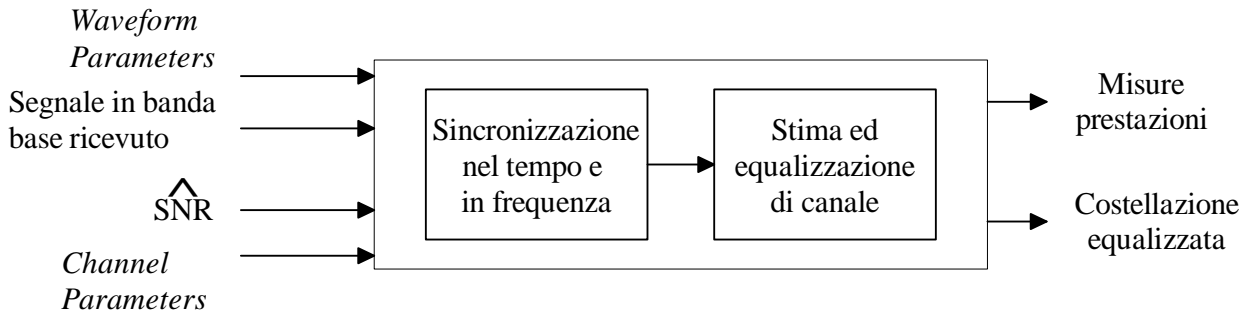


Figura 5.3: Schema di principio del ricevitore PUSCH.

Esso è composto da due blocchi collegati in cascata:

- sincronizzatore nel tempo (BOF) e in frequenza (CFO);
- stimatore di canale ed equalizzatore.

Il sincronizzatore implementa gli algoritmi descritti nel cap. 3, ovvero la stima e correzione del CFO, con i due algoritmi discussi nel par. 3.3.1.3, e la sincronizzazione di trama.

Lo stimatore di canale è pensato per confrontare le prestazioni degli algoritmi di stima proposti nel cap. 4. Ciascun algoritmo viene applicato ai RS della forma d'onda in ingresso per ricavare le stime corrispondenti della CFR. Tali stime sono utilizzate per equalizzare il segnale e ricostruire i simboli della costellazione trasmessa.

I principali parametri in ingresso del ricevitore PUSCH sono:

- il vettore contenente il segnale ricevuto in banda base;
- la struttura dati *Waveform Parameters*, già incontrata nel trasmettitore, che raccoglie i parametri di generazione del segnale (Banda di sistema, banda allocata, proprietà dei RS...);
- la stima corrente di SNR, il cui valore determina la sequenza di operazioni svolte dal sincronizzatore;
- la struttura dati *Channel Parameters*, già incontrata nel trasmettitore, che contiene le proprietà del canale radio, il valore del CFO e la potenza del rumore AWGN introdotti sul segnale.

Il ricevitore restituisce in uscita:

- la costellazione originaria e le costellazioni equalizzate con ciascuno stimatore considerato;
- la struttura dati che contiene le variabili di prestazione delle singole operazioni svolte e dell'intero sistema. Essa comprende

– variabili di prestazione del sincronizzatore:

- * la stima di CFO $\hat{\epsilon}$ e l'errore rispetto al CFO in ingresso, espressi in Hz, per entrambi gli stimatori discussi nel par. 3.3.1.3;
- * la variabile logica *CFO_blind_ON* che indica se la tecnica di correzione cieca di CFO (par. 3.3.1.2) è stata attivata e la variabile *CFO_blind_corr* che indica quale tra le due correzioni è stata introdotta.
- * la stima del Timing Offset $\hat{\theta}_{frame}$ e l'errore compiuto, espressi in campioni;

- variabili di prestazione relative a ciascuno stimatore:
 - * il valore di MMSE calcolato sulle stime di canale ottenute dai RS;
 - * il valore di EVM, espresso in dB;
 - * il Symbol Error Rate (SER), espresso in dB;

Lo schema a blocchi del ricevitore è illustrato in figura 5.4. Poiché le singole operazioni effettuate dal dispositivo sono numerose e articolate, vengono illustrati solamente i blocchi principali. Una descrizione dettagliata dei singoli blocchi è fornita nei capitoli 3 e 4.

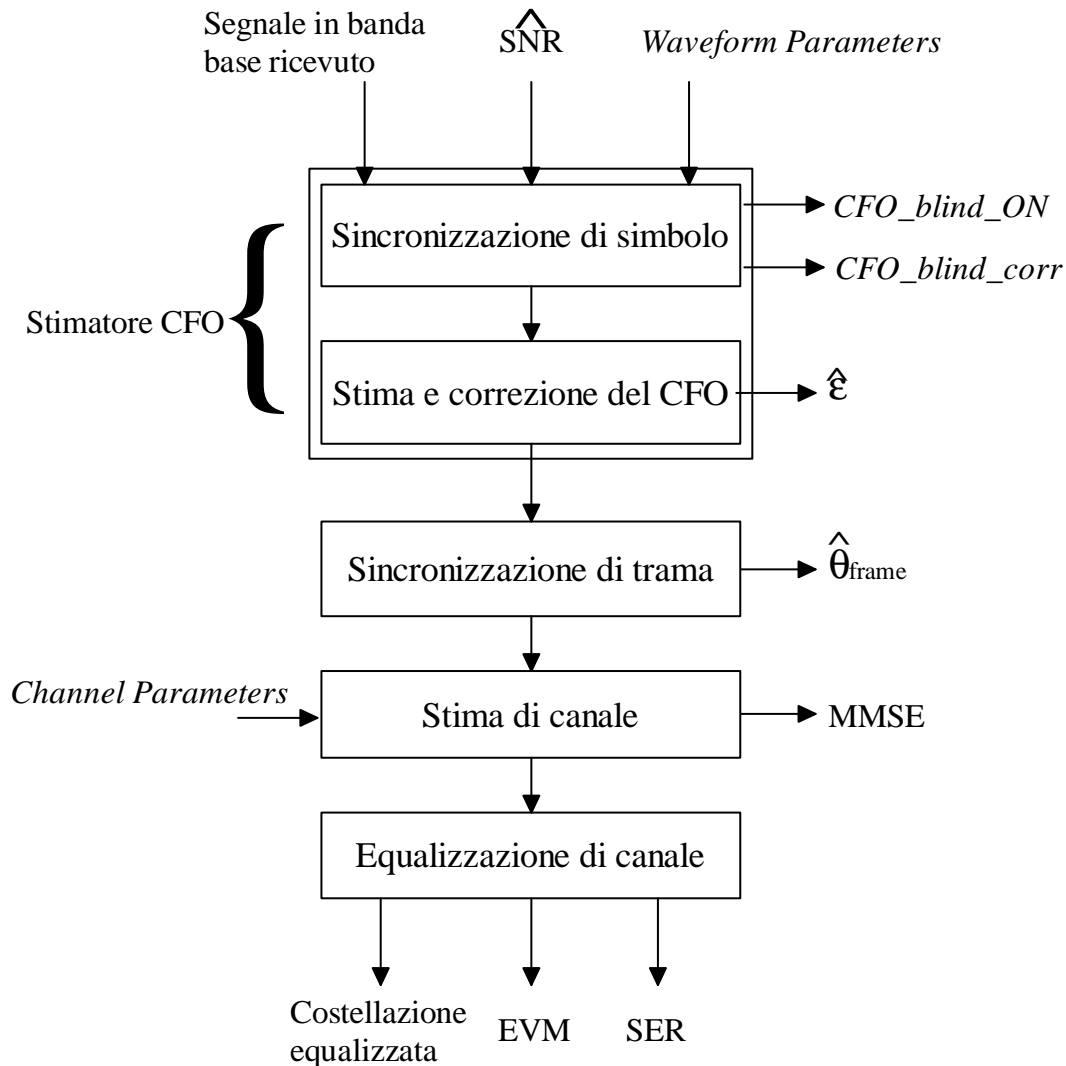


Figura 5.4: Funzioni principali di ricezione del canale PUSCH.

5.4 Le interfacce grafiche e le misure sul segnale ricevuto

Nelle seguenti sezioni si presentano le interfacce grafiche sviluppate analizzando alcune immagini catturate durante il loro funzionamento.

5.4.1 L'editor del canale dati (PUSCH)

La finestra principale dell'interfaccia del generatore PUSCH è suddivisa in due parti (figura 5.5). La parte sinistra raccoglie sia graficamente che testualmente i risultati del processo di generazione; la parte destra permette

all'utente di impostare i parametri di progetto della forma d'onda nonché i disturbi da introdurre.

Il pannello di impostazione dei parametri della finestra principale è collegato tramite *pushButtons* a sotto-finestre dedicate all'impostazione di specifici parametri. La prima sotto-finestra si apre dopo aver premuto il

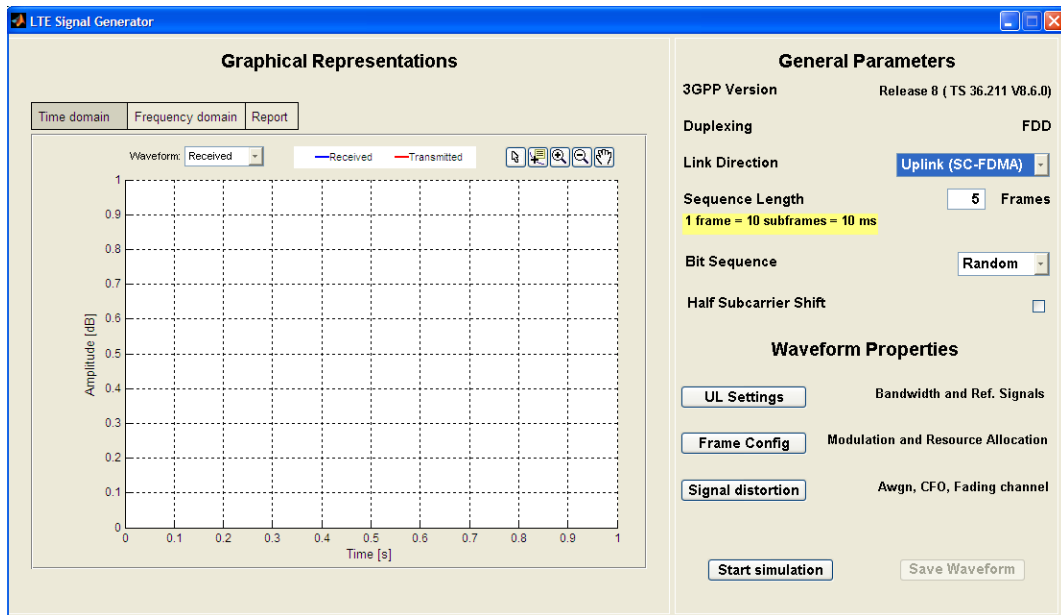


Figura 5.5: Finestra principale del generatore di canale PUSCH.

pushButton *UL Settings*. Essa permette di impostare la banda di sistema B_W e i parametri specifici della cella, necessari per generare i Reference Signals (RS) (figura 5.6). Inoltre mostra i valori dei parametri dipendenti dalla banda di sistema scelta, come il numero di sottoportanti disponibili. La seconda sotto-finestra si apre premendo

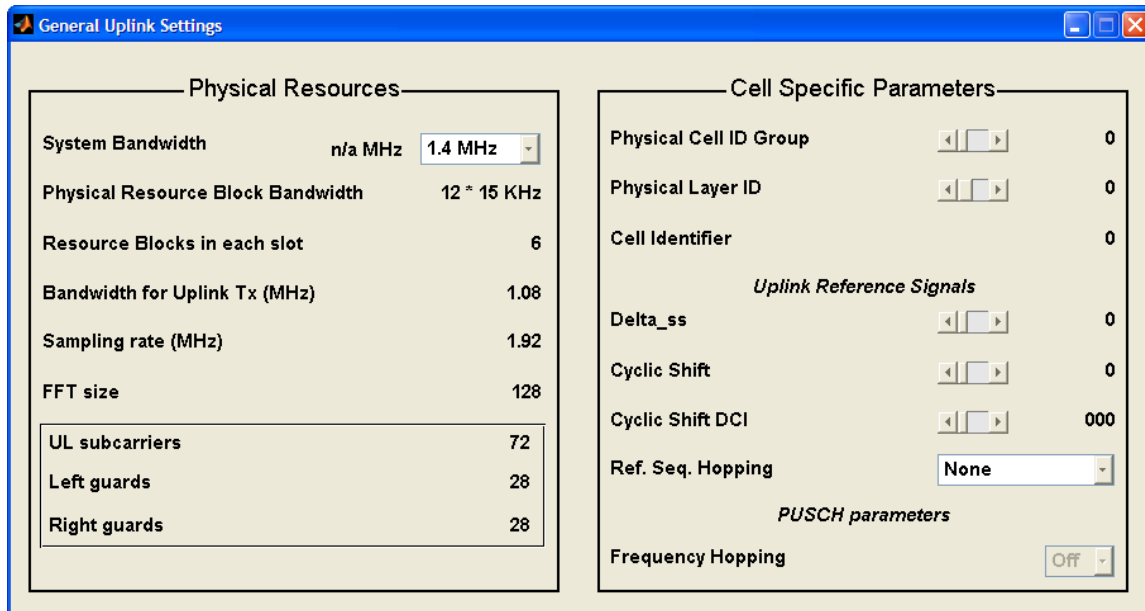


Figura 5.6: Finestra per impostare la banda di sistema e i parametri dei RS.

il pushButton *Frame Config*. In questa finestra è possibile impostare la banda occupata dall'utente e l'eventuale offset, entrambi espressi in Resource Blocks, la configurazione di prefisso ciclico e la modulazione del segnale trasmesso (figura 5.7). Per comodità dell'utente viene visualizzato il Time Plan, ovvero l'insieme delle risorse allocate in uno slot e rappresentate nel piano tempo/frequenza. Infine, la terza sotto-finestra, collegata alla finestra principale dal pushButton *Signal distortion*, è dedicata alla definizione delle perturbazioni introdotte

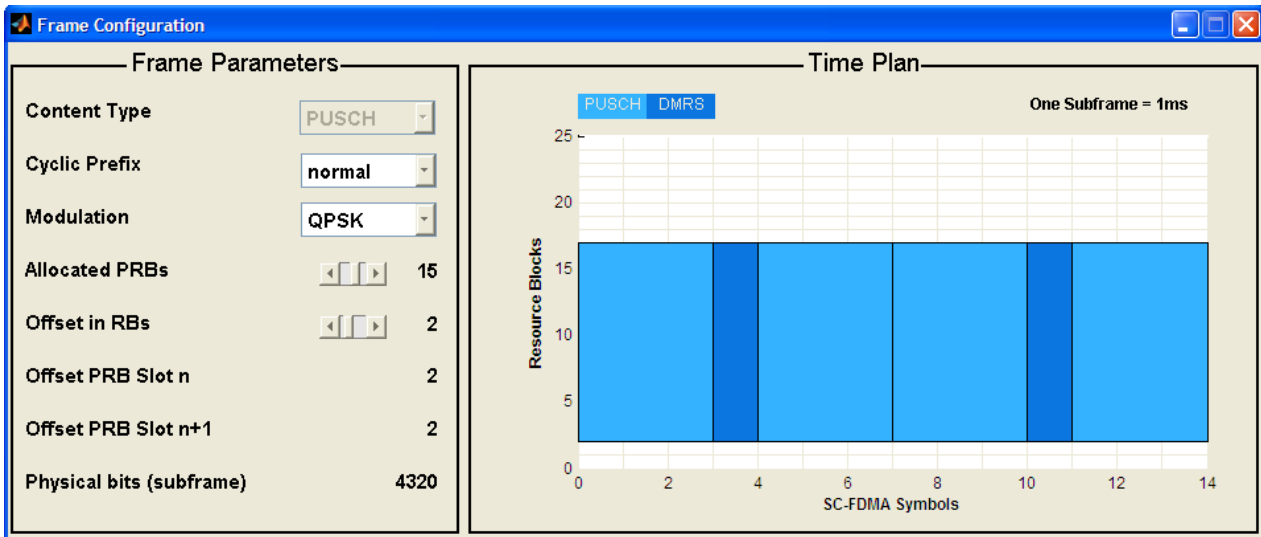


Figura 5.7: Finestra di impostazione dei parametri della trama.

sul segnale (figura 5.8). Si può scegliere la potenza del rumore AWGN espressa in dB, il valore del CFO in Hz e infine definire e generare il canale radio. La generazione del canale radio avviene premendo il pushButton *Build*

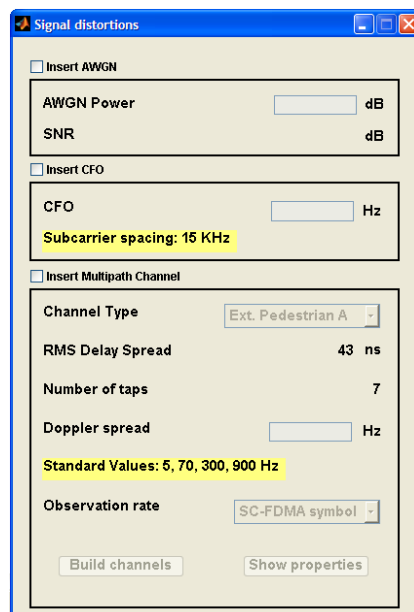


Figura 5.8: Finestra per introdurre sul segnale generato il rumore AWGN, il CFO e il canale radio.

channels. Quando la simulazione è completata, è possibile osservare le proprietà del canale nella sotto-finestra *Multipath Channel Properties* (figura 5.9), a cui si accede con il pushButton *Show properties*. La sotto-finestra *Channel Properties* presenta tre grafici che descrivono:

- il Power Delay Profile;
- la funzione di autocorrelazione in frequenza;
- l'evoluzione della CIR nel tempo, ovvero l'andamento delle realizzazioni create.

Dopo aver impostato i parametri, premendo il pushButton *Start simulation* nella finestra principale si può avviare la generazione della forma d'onda in banda base. Una volta completata la generazione, nel pannello

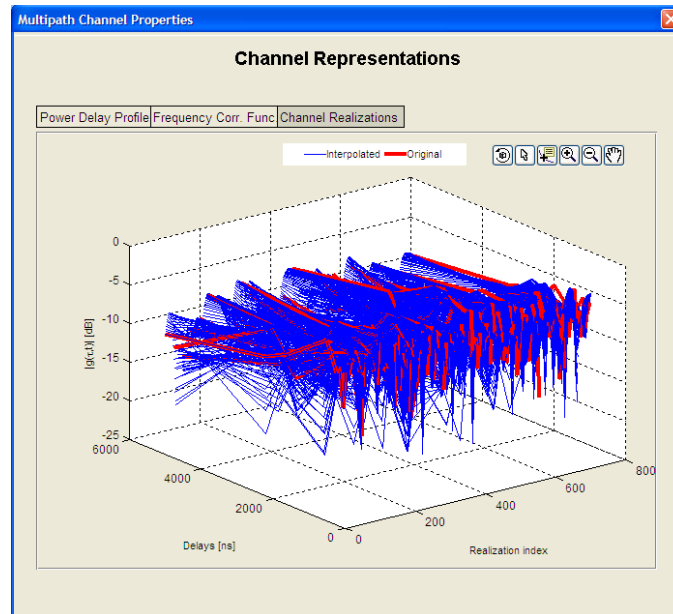


Figura 5.9: Finestra che illustra le proprietà del canale radio generato.

delle rappresentazioni è possibile vedere l'andamento del segnale sia nel dominio del tempo che in frequenza. Infine, la forma d'onda può essere salvata in un file .mat premendo il pushButton *Save Results*.

5.4.2 Ricevitore PUSCH

Per analizzare le prestazioni del ricevitore PUSCH, sono state realizzate interfacce distinte per ciascuno dei suoi blocchi componenti. Collegando i due blocchi in cascata, ovvero ponendo in ingresso allo stimatore di canale il segnale restituito dal sincronizzatore, è possibile studiare il comportamento dell'intero sistema ricevente.

L'interfaccia del sincronizzatore è mostrata in figura 5.10. Il segnale in ingresso, generato in precedenza

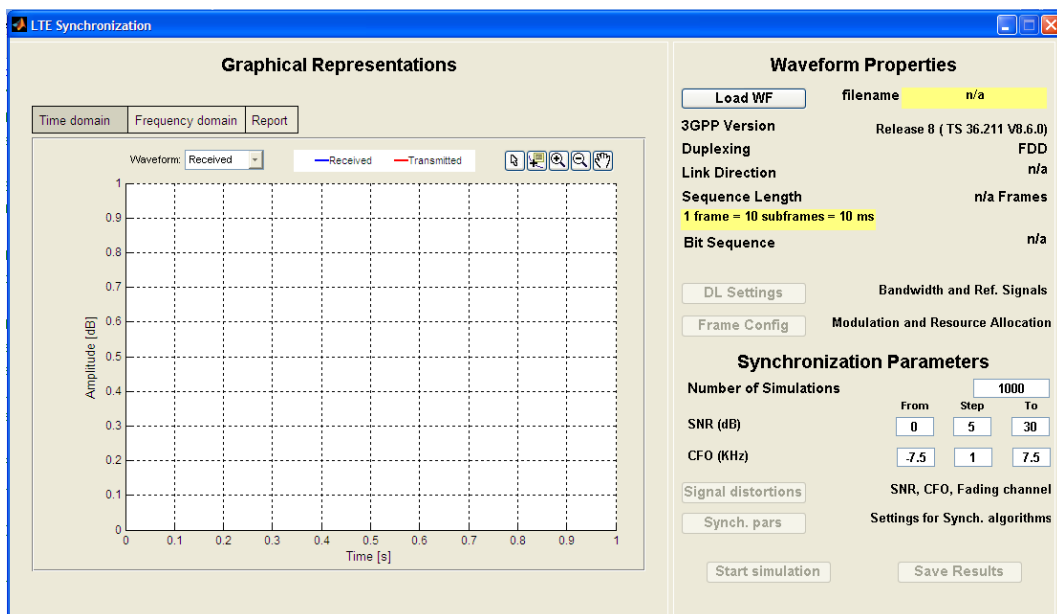


Figura 5.10: Interfaccia grafica del sincronizzatore.

dall'editor, viene caricato premendo il pushButton *Load WF*. I parametri di generazione sono mostrati in sottofinestre, identiche a quelle presenti nell'editor, ma con campi non modificabili. La forma d'onda in ingresso

non è perturbata da SNR o CFO, poiché questi disturbi sono applicati durante le simulazioni. In particolare l'utente può decidere:

- il numero di simulazioni da compiere N_{sim} per ogni valore di SNR e CFO considerati;
- l'intervallo di valori di SNR espresso in dB;
- l'intervallo di valori di CFO, espresso in kHz e compreso nell'intervallo $-7.5 \leq CFO \leq 7.5$.

I parametri degli algoritmi di sincronizzazione sono raccolti nella finestra *Synchronization Algorithms*, collegata alla finestra principale dal pushButton *Synch. pars* e mostrata in figura 5.11. Da questa finestra è possibile

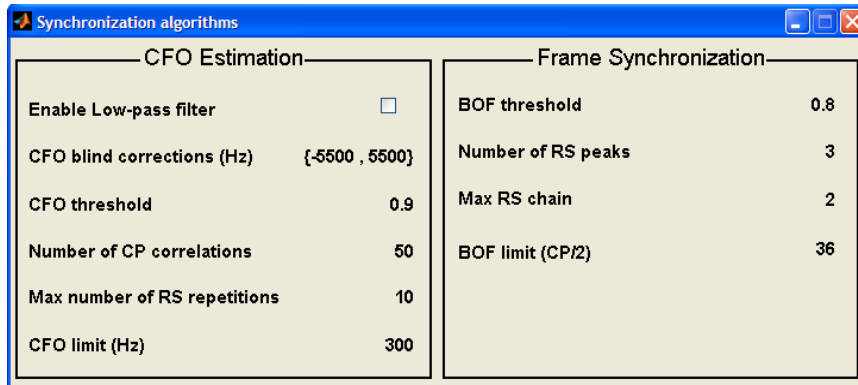


Figura 5.11: Finestra che raccoglie i parametri degli algoritmi di sincronizzazione.

controllare l'abilitazione del filtro passa-basso (par. 3.3.1.4.1).

Dopo l'impostazione dei parametri, si preme il pushButton *Start simulation*. Quando la simulazione è conclusa, le variabili di prestazione, definite nel par. 5.3, vengono salvate in un file *.mat* e rappresentate nella finestra principale.

L'interfaccia della stima di canale è mostrata in figura 5.12. Il segnale in ingresso, generato in precedenza

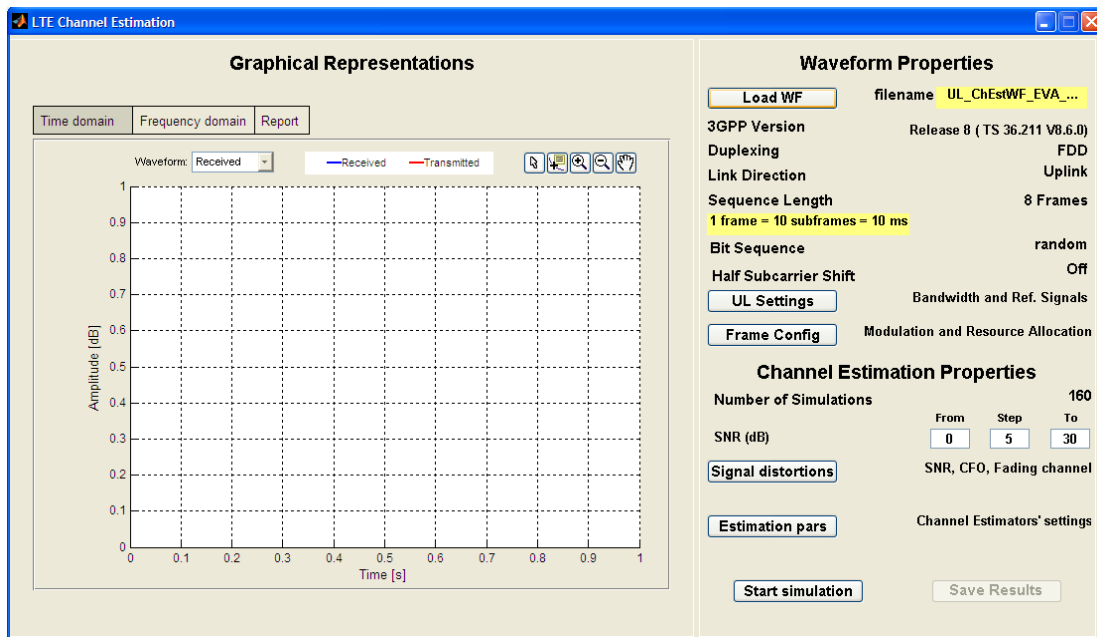


Figura 5.12: Interfaccia dello stimatore di canale.

dall'editor, viene caricato premendo il pushButton *Load WF*. I parametri di generazione sono mostrati in sottofinestre, identiche a quelle presenti nell'editor, ma con campi non modificabili. Si assume che la forma d'onda

in ingresso non sia perturbata da rumore AWGN, poiché questo disturbo è applicato durante le simulazioni. I disturbi causati dal CFO e dal canale radio sono considerati già presenti.

I parametri per effettuare le simulazioni sono:

- il numero di simulazioni da compiere N_{sim} , pari al numero di slot nel segnale in ingresso. Se il segnale è composto da 10 trame, il numero di simulazioni è $N_{sim} = 200$ (20 slot per trama);
- l'intervallo di valori di SNR espresso in dB;

Dopo l'impostazione dei parametri di simulazione, si preme il pushButton *Start simulation*. Quando la simulazione è conclusa, le variabili di prestazione, definite nel par. 5.3, vengono salvate in un file *.mat* e rappresentate nella finestra principale.

Capitolo 6

Simulazione e commento dei risultati

In questo capitolo sono raccolti i risultati di alcune simulazioni condotte con l'obiettivo di ottimizzare e verificare le prestazioni degli algoritmi realizzati.

Nel par. 6.1 sono presentate le simulazioni relative agli algoritmi di sincronizzazione, trattati nel Cap. 3. Successivamente, nel par. 6.2, si esaminano le prestazioni dei diversi stimatori di canale presentati nel Cap. 4, con particolare attenzione al metodo di stima proposto.

Prima di procedere con l'esposizione, si sottolinea che gli algoritmi proposti sono stati pensati per eseguire misure di laboratorio. Le condizioni di lavoro definite in fase di progetto sono certamente meno critiche rispetto a quelle sperimentate da un eNodeB di una rete reale.

Le prestazioni migliori saranno raggiunte per livelli di SNR medio-alti (al di sopra dei 15 dB) e in presenza di canali radio poco dispersivi (infatti, nell'applicazione di misura, la propagazione avviene su cavo coassiale e non in aria).

Tuttavia, anche per bassi valori di SNR, gli algoritmi presentano prestazioni accettabili, grazie all'introduzione di opportuni accorgimenti.

6.1 Algoritmo di sincronizzazione

Come visto nel par. 3.3, l'algoritmo di sincronizzazione del ricevitore PUSCH è suddiviso in due fasi distinte:

- *sincronizzazione in frequenza*, che permette di stimare e correggere il CFO presente sul segnale ricevuto;
- *sincronizzazione nel tempo*, che consiste nell'individuare senza ambiguità la posizione iniziale della prima trama completa nel segnale ricevuto.

L'algoritmo di sincronizzazione nel tempo ricerca nella forma d'onda ricevuta le posizioni dei Reference Signals e le utilizza per stimare l'istante di inizio della trama (BOF, Begin of Frame). Per trovare tali posizioni si calcola la cross-correlazione $R_{ry}(n)$ nel dominio del tempo tra il segnale ricevuto $r(n)$ e i Reference Signals originali $y(n)$, ovvero privi di disturbi, e si cercano i valori di $R_{ry}(n)$ superiori a una certa soglia. Ci si aspetta, come per l'algoritmo basato sul CP, che, nell'istante n' in cui il RS originale e quello trasmesso si sovrappongono, la funzione $R_{ry}(n)$ raggiunga un picco, di valore molto elevato e facilmente distinguibile dal rumore.

Tuttavia, la presenza del CFO causa una graduale riduzione dell'intensità di $R_{ry}(n)$ in corrispondenza delle posizioni dei RS $y(n)$ (par. C.3.2). I picchi corrispondenti ai RS $y(n)$ diventano paragonabili in ampiezza al rumore e ai picchi di altri RS presenti nella trama; dunque, non potendo individuare le posizioni volute, la sincronizzazione fallisce.

L'introduzione della sincronizzazione in frequenza a monte della sincronizzazione temporale permette a quest'ultima di operare in condizioni adeguate, posto che l'errore di stima $\Delta\varepsilon = (\hat{\varepsilon} - \varepsilon)$ sia sufficientemente ridotto.

Nei paragrafi seguenti si analizzano le prestazioni della sincronizzazione al variare dei parametri del sistema e/o dell'algoritmo stesso, allo scopo di comprendere la loro influenza sulla qualità delle stime.

6.1.1 Il modello per le simulazioni

Il modello di segnale utilizzato per la simulazione dell'algoritmo di sincronizzazione è stato presentato in figura 3.13. Si suppone che il segnale ricevuto abbia una durata di almeno 20 ms, per garantire che al suo interno sia presente una trama completa, di durata $T_{frame} = 10$ ms. Esso è composto da due spezzoni di trama agli estremi e da una trama completa al centro, la cui posizione θ_{frame} rappresenta il Timing Offset del segnale.

La forma d'onda generata viene analizzata dall'algoritmo di sincronizzazione che restituisce la stima del Timing Offset $\hat{\theta}_{frame}$ e del Frequency Offset $\hat{\varepsilon}$. Per conferire rilevanza statistica ai risultati, il numero delle simulazioni effettuate è pari a $N_{sim} = 1000$.

Ad ogni realizzazione vengono mantenuti inalterati:

- il numero di Resource Blocks allocati N_{used}^{RB} , i cui valori sono compresi nell'intervallo $3 \leq N_{used}^{RB} \leq N_{RB}^{UL}$. In questo intervallo i Reference Signals sono generati a partire da sequenze di ZC; quando $N_{used}^{RB} \in \{1, 2\}$ i RS sono ricavati da sequenze QPSK generate al calcolatore. Poiché gli algoritmi sono ottimizzati per sfruttare le proprietà delle sequenze ZC, questi ultimi casi non vengono analizzati;
- la banda di sistema B_W e il tipo di prefisso ciclico. Per queste simulazioni sono state considerate le bande $B_W = \{5, 20\}$ MHz, ritenute di maggior interesse pratico; inoltre si può ritenere che le prestazioni dei casi intermedi rientrino all'interno di questi due estremi. Per il prefisso ciclico si sceglie la configurazione di tipo *normal*. Rispetto alla configurazione *extended*, essa impone vincoli più stringenti sulla precisione della stima $\hat{\theta}_{frame}$ (l'errore $\Delta\hat{\theta}_{frame}$ non deve superare metà della durata del CP) e rende più imprecisa la stima del CFO basata sul CP. Infatti, se T è la durata del simbolo SC-FDMA, l'estensione del CP *extended* è pari a $T/4$, mentre quella del CP *normal* è solo di $T/13$;
- il rapporto segnale-rumore, definito nella sezione 8.1 del documento [22], e compreso nell'intervallo $0 \leq SNR \leq 30$ dB;
- il CFO, compreso nell'intervallo $-\Delta f/2 \leq CFO \leq \Delta f/2$, con $\Delta f/2 = 7.5$ kHz.

Il valore del TO θ_{frame} è variato in modo pseudocasuale.

Le N_{sim} simulazioni sono poi ripetute facendo variare, uno alla volta, la banda B_W , i RB allocati N_{used}^{RB} , l'SNR e il CFO. Si suppone in tutti i casi un canale di tipo AWGN, con risposta piatta in frequenza.

6.1.2 Obiettivi dello stimatore

Scopo del sincronizzatore è:

- Compensare l'effetto del CFO, in modo da garantire l'ortogonalità tra le sottoportanti e ridurre la rotazione della costellazione ricevuta. In [6] è stato dimostrato che, per non avere un degrado delle prestazioni del sistema, il CFO residuo non deve superare il 4-5% della spaziatura tra sottoportanti Δf . Dunque, il massimo errore tollerato in un sistema LTE deve essere inferiore a

$$\Delta CFO_{thr} = \Delta f \cdot 4\% = 600 \text{ Hz} \quad (6.1)$$

dove $\Delta f = 15 \text{ kHz}$. Tuttavia, un errore di CFO così elevato può influire sul valore di EVM della costellazione ricostruita. È stato quindi imposto un errore inferiore, pari a $\Delta CFO_{thr} = 300 \text{ Hz}$. Nel seguito si determina l'errore quadratico medio della stima di CFO, il suo valore massimo e la probabilità

$$P_{CFO,OK} = P(\Delta\varepsilon \leq (\Delta CFO_{thr}/\Delta f))$$

che il CFO rispetti la condizione di qualità richiesta.

- Stimare la posizione iniziale della prima trama completa. Si ricordi quanto affermato nel par. 3.1.1, dove sono stati illustrati i problemi introdotti da una sincronizzazione ritardata. Per evitare questa situazione la stima $\hat{\theta}_{frame}$ viene anticipata di $N_{CP}/2$ campioni (figura 3.5).

Quindi, si desidera che l'errore di stima $\Delta\theta_{frame}$ rispetti la condizione

$$\Delta\theta_{frame} \leq N_{CP}/2 \quad (6.2)$$

Nel seguito si determina l'errore quadratico medio del Timing Offset, il suo valore massimo e la probabilità

$$P_{BOF,OK} = P(\Delta\theta_{frame} \leq N_{CP}/2) \quad (6.3)$$

che l'errore di stima $\Delta\theta_{frame}$ sia inferiore al limite imposto nella (6.2).

Utilizzando le probabilità $P_{CFO,OK}$ e $P_{BOF,OK}$, si può calcolare un indice di prestazione dell'intero sistema, definito dalla seguente probabilità:

$$P_{syn,OK} = P(\Delta\varepsilon \leq (\Delta CFO_{thr}/\Delta f) , \Delta\theta_{frame} \leq N_{CP}/2) \quad (6.4)$$

L'obiettivo di qualità per la variabile $P_{syn,OK}$ è definito dalla condizione

$$P_{syn,OK} \geq 0.99 \quad (6.5)$$

Il valore limite 0.99 è stato ricavato dalle specifiche del canale PRACH, riportate nella sezione 8.4 del documento [22]. La probabilità $P_{syn,OK}$ è definita dall'intersezione degli eventi in ingresso alle probabilità $P_{BOF,OK}$ e $P_{CFO,OK}$, ovvero:

$$P_{syn,OK} = \min(P_{CFO,OK} ; P_{BOF,OK}) \quad (6.6)$$

Quindi entrambe le probabilità $P_{CFO,OK}$ e $P_{BOF,OK}$ devono verificare la condizione 6.5 affinché anche $P_{syn,OK}$ la rispetti.

6.1.3 Prestazioni della sincronizzazione

Il primo aspetto affrontato è il funzionamento della sincronizzazione in frequenza, analizzando le prestazioni degli algoritmi *Standard Duty* (SD) e *Heavy Duty* (HD), presentati nel par. 3.3.1.

Come discusso nel par. 3.3.1.4, in condizioni di lavoro ordinarie gli algoritmi SD e HD compiono esattamente gli stessi passi. Quando la banda allocata è minore di un certo limite, dipendente dalla banda di sistema B_W , l'algoritmo SD non riesce a garantire la precisione voluta per tutti i valori di SNR nell'intervallo $0 \leq SNR \leq 30$ dB (figura 3.28). In questi casi, per migliorare le prestazioni, l'algoritmo HD effettua due operazioni aggiuntive, ovvero il filtraggio del segnale e l'attivazione incondizionata della correzione cieca.

Si consideri inizialmente un segnale con banda $B_W = 5$ MHz, a cui corrispondono 25 RB disponibili, e una banda allocata N_{used}^{RB} fatta variare nell'insieme dei valori ammessi dallo standard (par. 2.3.3).

Quando $N_{used}^{RB} = 25$, ovvero si alloca tutta la banda disponibile, l'algoritmo SD raggiunge facilmente gli obiettivi di qualità prefissati. La probabilità $P_{CFO,OK}$ è sempre unitaria, mentre il MSE, in funzione del CFO e dell'SNR, è mostrato in figura 6.1. Riducendo sensibilmente la banda a 10 RB si osserva che la probabilità $P_{CFO,OK}$ non

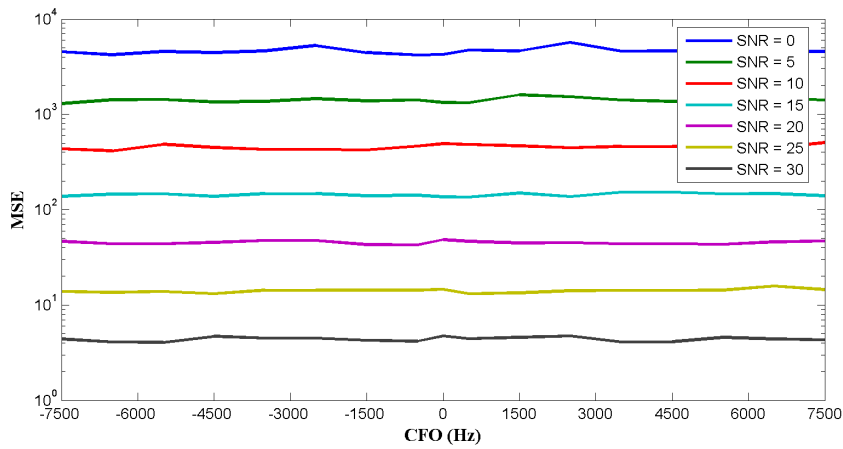


Figura 6.1: MSE della stima del CFO per l'algoritmo SD, quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 25$.

riesce a raggiungere il valore 0.99 quando $SNR = 0$ (figura 6.2). La probabilità $P_{CFO,OK}$ nel caso peggiore, in

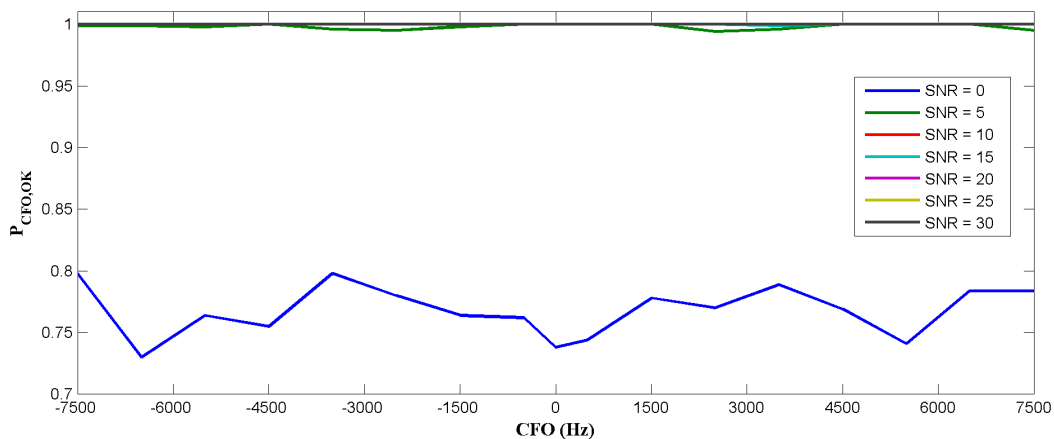


Figura 6.2: Probabilità $P_{CFO,OK}$ per l'algoritmo SD quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 10$.

cui solo $N_{used}^{RB} = 3$ RB vengono allocati, è mostrata in figura 6.3. Come discusso nel par. 3.3.1.2, l'allocazione di una banda ridotta determina l'aumento della correlazione tra i campioni del segnale e la nascita di falsi picchi nella funzione di log-verosimiglianza dell'algoritmo di van de Beek [25].

I picchi sopra soglia possono appartenere a tre tipologie (figura 3.14):

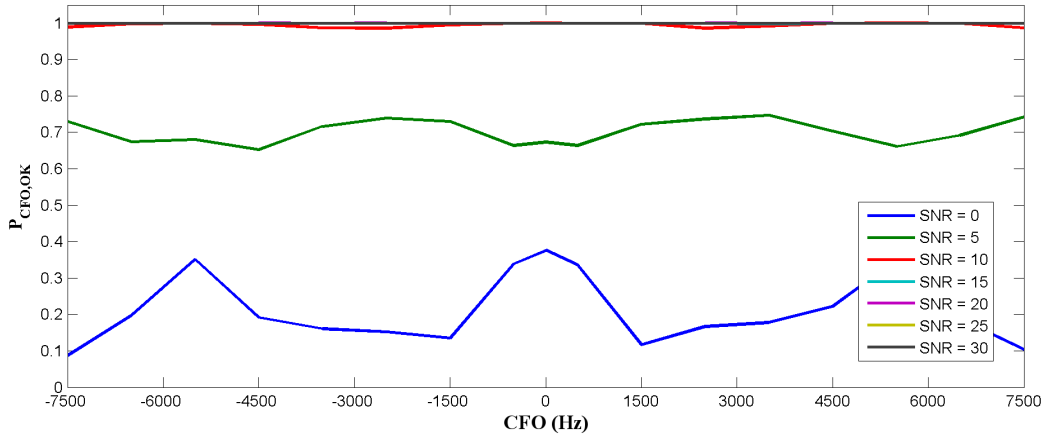


Figura 6.3: Probabilità $P_{CFO,OK}$ per l’algoritmo SD quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 3$.

- picchi effettivamente corrispondenti al Reference Signal che si sta cercando;
- picchi ottenuti correlando il RS $y(n)$ con altri RS caratterizzati dagli stessi valori dei parametri u e v , ma con diversa traslazione angolare α ;
- picchi di rumore, la cui presenza diventa significativa per bassi SNR e bande N_{used}^{RB} ridotte.

Quando il rumore è elevato, diventa difficile per l’algoritmo di van de Beek distinguere il RS voluto dai picchi spuri e la sincronizzazione in frequenza restituisce risultati errati.

Poiché l’algoritmo SD non raggiunge gli obiettivi di qualità richiesti quando $SNR < 15$ dB, è stato introdotto l’algoritmo Heavy Duty (HD), che permette di estendere l’intervallo di valori di SNR per cui la probabilità $P_{CFO,OK}$ supera il valore limite 0.99. In figura 6.4 è mostrato il caso peggiore, in cui vengono allocati $N_{used}^{RB} = 3$ RB. L’algoritmo HD riesce ad alzare complessivamente tutte le curve considerate, ed estende il funzionamento del sistema fino a 10 dB. In figura 6.5 si confronta inoltre il RMSE della stima di CFO per i due algoritmi al variare

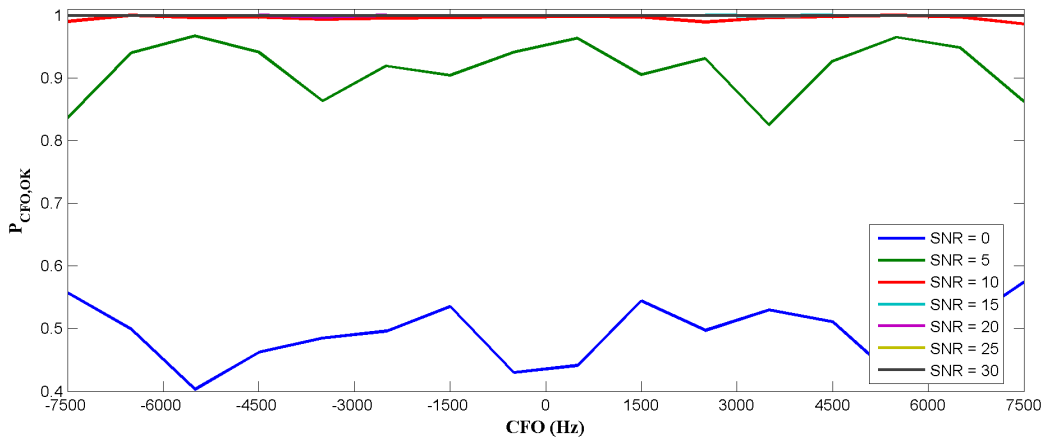


Figura 6.4: Probabilità $P_{CFO,OK}$ per l’algoritmo HD quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 3$.

dell’SNR, nel caso peggiore tra quelli esaminati, che si rivela essere quello con CFO massimo ($CFO = 7.5$ kHz). Si nota che il miglioramento più netto introdotto dall’algoritmo HD è ottenuto per i valori $SNR = \{0, 5\}$. I risultati ottenuti possono essere considerati molto buoni, se si valuta il fatto che, applicando direttamente l’algoritmo di van de Beek al segnale ricevuto, non era possibile garantire la sincronizzazione anche per SNR infiniti.

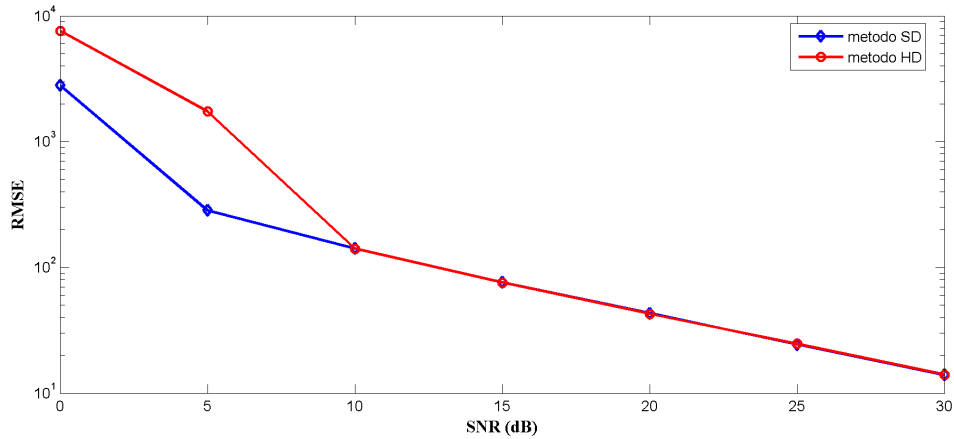


Figura 6.5: RMSE della stima di CFO nel caso peggiore ($CFO = 7.5$ kHz) in funzione dell'SNR, per i metodi SD e HD.

Si passa ora alla sincronizzazione temporale. In figura 6.6 è mostrata la probabilità $P_{BOF,OK}$ per $SNR = \{0, 5\}$ ottenuta dai due algoritmi *SD* e *HD*. Quando l'SNR è maggiore, entrambi gli algoritmi SD e HD permettono di ottenere $P_{BOF,OK} = 1$ per tutti i valori di CFO considerati. La sincronizzazione temporale raggiunge risultati mediamente migliori della sincronizzazione in frequenza. Infatti, come spiegato nel par. 3.3.2, il valore di soglia scelto $thr_{BOF} = 0.9$, è caratterizzato da una tolleranza maggiore rispetto all'errore limite del CFO $\Delta CFO_{thr} = 300$ Hz. Ciò significa che anche con stime di CFO meno precise di ΔCFO_{thr} , la sincronizzazione temporale continua a funzionare. Anche in questo caso, il metodo HD permette di raggiungere

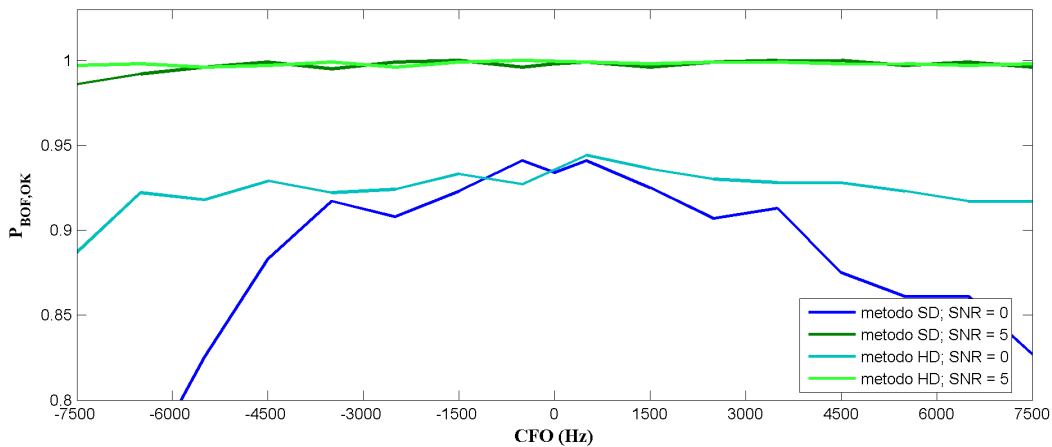


Figura 6.6: Probabilità $P_{BOF,OK}$ per gli algoritmi SD e HD quando $SNR = \{0, 5\}$, $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 3$.

le prestazioni migliori, soprattutto per il caso $SNR = 0$ dB.

Un ultimo aspetto considerato è il confronto tra gli algoritmi di stima del CFO (par. 3.3.1.3). L'algoritmo RS-based funziona meglio dell'algoritmo CP-based quando la configurazione del segnale trasmesso rende più frequente la ripetizione del RS cercato. Come osservato in appendice C, quando ad esempio SH e SGH sono disabilitati, un dato RS è ripetuto fino a 10 volte nella stessa trama. Quando invece il SGH è abilitato, il numero massimo di ripetizioni di un generico RS scende a 3. A sinistra della figura 6.7 è presentata la probabilità $P_{CFO,OK}$ per ciascuno dei metodi discussi quando il SGH è abilitato (minor ridondanza). A destra, quando SGH e SH sono disabilitati (maggiore ridondanza). La banda è $B_W = 5$ MHz, la banda allocata è $N_{used}^{RB} = 3$, l'algoritmo utilizzato è l'HD e i valori di SNR sperimentati sono $SNR = \{0, 5\}$.

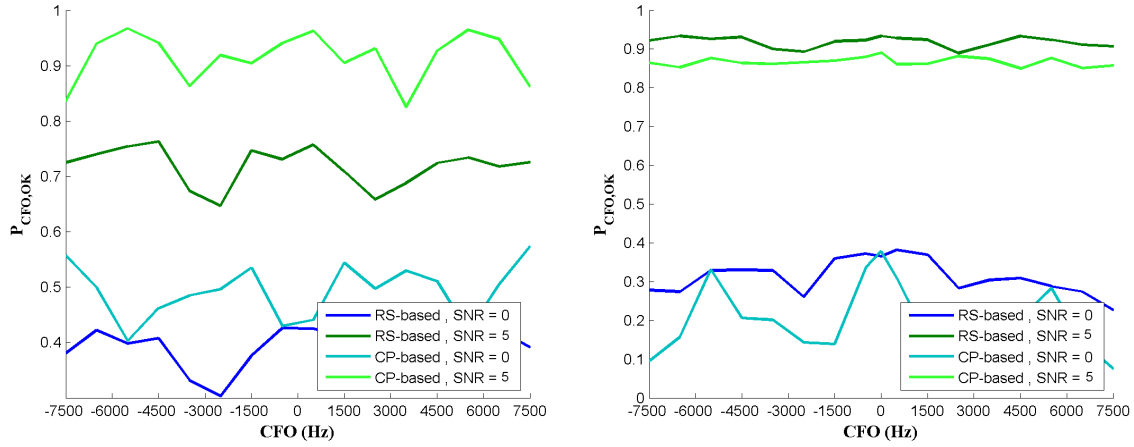


Figura 6.7: Probabilità $P_{CFO,OK}$ per gli algoritmi di stima del CFO CP-based e RS-based quando $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 3$. A sinistra per un segnale con SGH abilitato. A destra per SH e SGH disabilitati.

L'andamento delle curve rappresentate conferma pienamente quanto detto.

Ripetendo l'analisi descritta per $B_W = 20$ MHz, ovvero 100 RB disponibili, e con banda allocata $N_{used}^{RB} = 3$, si scopre che le prestazioni peggiorano rispetto al caso considerato finora ($B_W = 5$ MHz). Ciò è dovuto al fatto che la correlazione tra i campioni nel dominio temporale è maggiore, poiché il rapporto tra la banda allocata e la banda disponibile è molto inferiore. Si osserva un aumento sia dei falsi picchi della correlazione con i RS, sia un calo delle prestazioni dell'algoritmo di van de Beek, che determina l'impossibilità di distinguere i picchi voluti dal rumore e da altri RS presenti nel segnale. A titolo di esempio, nella figura 6.8 è mostrata la probabilità $P_{CFO,OK}$ per i due metodi SD e HD. Si vede, anche in questo caso, un netto miglioramento introdotto dall'algoritmo HD. Si conclude la trattazione calcolando il valore di SNR, in funzione della banda allocata, per

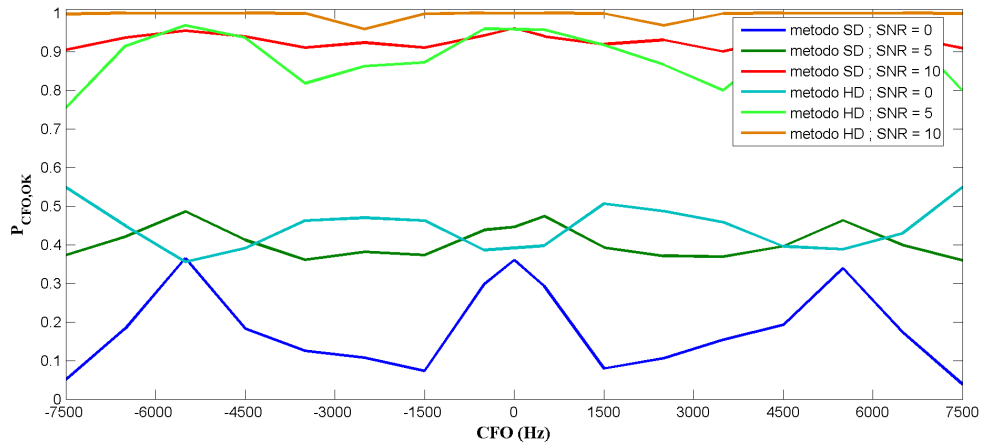


Figura 6.8: Probabilità $P_{CFO,OK}$ per gli algoritmi SD e HD quando $B_W = 20$ MHz e $N_{used}^{RB} = 3$.

cui la probabilità di sincronizzazione $P_{syn,OK}$ raggiunge le prestazioni desiderate, definite nell'equazione (6.5). Nelle simulazioni della figura 6.9 si utilizza l'algoritmo di sincronizzazione in frequenza HD.

In conclusione, si può affermare che l'algoritmo di sincronizzazione proposto funziona indipendentemente dall'entità di CFO a cui è soggetto il segnale e dalla banda di sistema B_W impiegata. Invece, l'SNR minimo per garantire una probabilità di sincronizzazione del 99% è legato al numero di sottoportanti allocate.

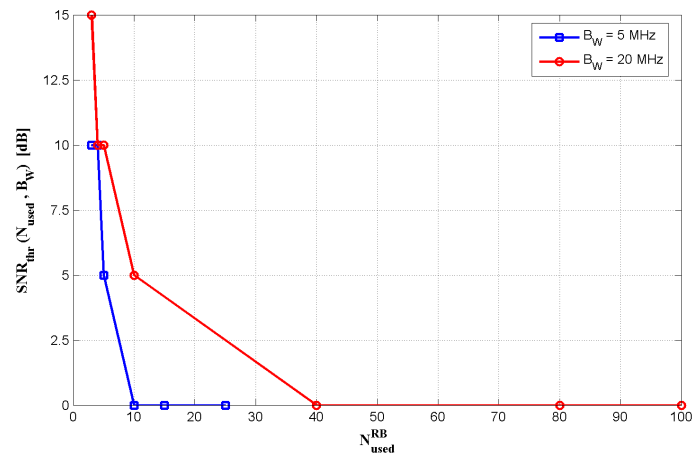


Figura 6.9: Valore minimo di SNR richiesto per garantire una probabilità $P_{syn,OK} = 0.99$ in funzione della banda allocata.

6.2 Stima di canale ed equalizzazione

Le seguenti simulazioni valutano le prestazioni degli algoritmi di stima di canale presentati nel capitolo 4.

Il confronto tra gli stimatori viene effettuato calcolando l'EVM delle costellazioni dopo l'equalizzazione, al variare sia del tipo di canale radio sia del rapporto segnale rumore.

L'EVM indica la distanza, nel piano complesso, tra il simbolo S_i della costellazione trasmessa e il corrispondente simbolo R_i della costellazione ricevuta. La deviazione del secondo rispetto al primo è causata da vari fenomeni, tra i quali: rumore, distorsione di canale CFO e ScFO, i quali contribuiscono allo spostamento, sul piano di Gauss, del segnale ricevuto. È infatti possibile rappresentare nel piano complesso I/Q il simbolo ideale trasmesso S_i , il simbolo ricevuto R_i e l'errore E_i (figura 6.10).

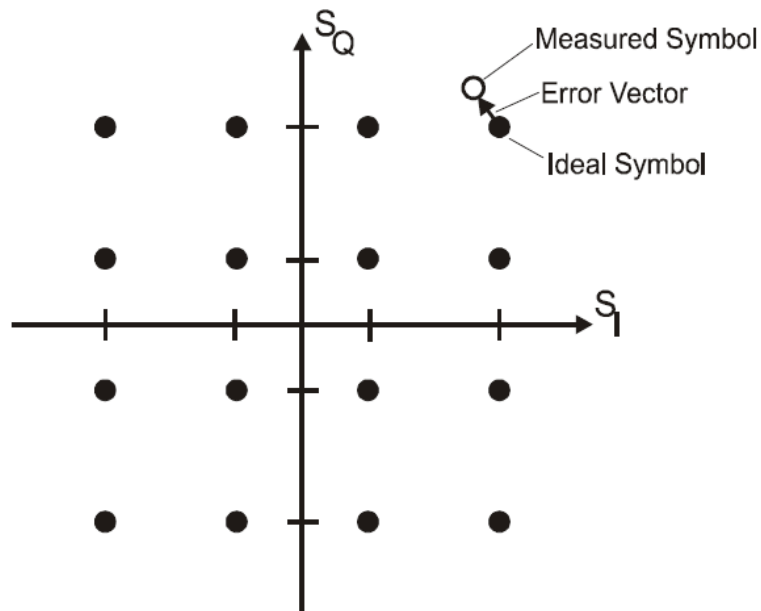


Figura 6.10: Rappresentazione di un generico simbolo trasmesso e ricevuto sul piano complesso.

La definizione di EVM utilizzata nelle simulazioni è:

$$EVM_{RMS} = \left[\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |S_i - R_i|^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |S_i|^2} \right]^{1/2} \quad (6.7)$$

Nei grafici verrà rappresentato, al variare dell'SNR, il valore di EVM_{RMS} in dB, definito come:

$$EVM_{dB} = 20 \log_{10}(EVM_{RMS}) \quad (6.8)$$

6.2.1 Il modello per le simulazioni

Il modello considerato è leggermente più complesso di quello utilizzato per le simulazioni dell'algoritmo di sincronizzazione.

Il segnale trasmesso viene fatto propagare in uno dei canali radio (EPA, EVA, ETU) definiti nello standard (appendice B in [22]). La forma d'onda ricevuta è elaborata da ciascuno degli algoritmi di stima per calcolare le CFR in corrispondenza dei RS. Dopo l'interpolazione e l'equalizzazione è possibile ricostruire la costellazione del segnale ricevuto e calcolare il parametro EVM_{dB} .

Rispetto alle simulazioni precedenti, si suppone che non vi siano errori di sincronizzazione, ovvero sia il CFO sia il Timing Offset sono supposti nulli.

Anche in questo caso si ripetono ciclicamente le operazioni di stima a parità di condizioni (1000 simulazioni), in modo da ottenere dati con rilevanza statistica. Si analizzano quindi le prestazioni dell'equalizzatore, sempre in termini di EVM, al variare di:

- rapporto segnale-rumore, definito nella sezione 8.1 del documento [22], e compreso nell'intervallo $0 \leq SNR \leq 30$ dB;
- tipo di canale (EPA,EVA ed ETU);
- frequenza Doppler ν_D , con valori contenuti nell'insieme $\nu_D = \{5, 70, 300\}$ Hz;

Si considera in tutti i casi un CP in configurazione normale, una modulazione QPSK e una banda di sistema $B_W = 10$ MHz.

6.2.2 Prestazioni della stima di canale

Si considerano inizialmente gli effetti dell'errore di correlazione sulla qualità della stima, confrontando le prestazioni dello stimatore DFT-based e delle tecniche di correzione CEC: il metodo SIC e il metodo SIC seguito da Path Detection. Il canale radio è di tipo EVA con dispersione Doppler di 70 Hz. Per effettuare la comparazione, si calcola l'MSE di ciascuno stimatore, poiché si è interessati a comprendere la qualità con cui i diversi metodi ricostruiscono la risposta di canale. L'MSE degli stimatori in funzione dell'SNR è presentato in figura 6.11. Sono anche mostrate le curve ottenute dagli stimatori ZF e MMSE.

Le prestazioni dello stimatore DFT-based tendono a saturare per $SNR \geq 10$ dB. Ciò è dovuto alla presenza dell'errore di correlazione, che determina la perdita di componenti utili della CIR quando si applica la finestra (par. 4.6.1). I metodi SIC e SIC+PD presentano anch'essi l'effetto di saturazione, ma per $SNR \geq 25$ dB. Il metodo SIC+PD si rivela più efficace del semplice metodo SIC, soprattutto per bassi SNR. In base ai risultati ottenuti si è deciso di utilizzare nell'algoritmo di stima proposto la tecnica di correzione SIC+PD. La CIR restituita da questo metodo viene utilizzata per calcolare la matrice di autocorrelazione R_{HH} , da cui si ricava la matrice dello stimatore MMSE adattativo (par. 4.7).

Si confrontano ora le prestazioni, in termini di EVM, degli algoritmi di stima rivelatisi migliori:

- lo stimatore MMSE ideale (par. 4.4.3.2);

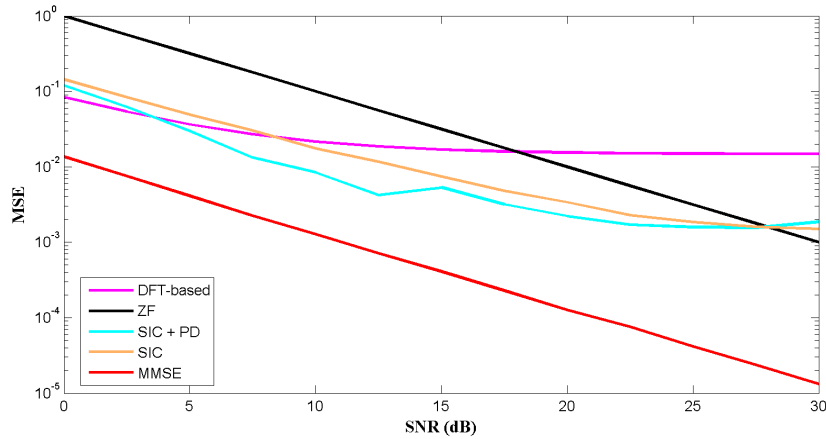


Figura 6.11: MSE in canale EVA70 al variare dell'SNR per i metodi di correzione CEC. I metodi MMSE e LS sono presentati per confronto ($B_W = 10$ MHz).

- lo stimatore MMSE adattativo proposto (par. 4.7), indicato nel seguito con l'acronimo PA;
- lo stimatore LS downsampled (par. 4.4.2).

I quattro metodi sono confrontati con il limite teorico definito in [38], valido nel caso di un canale AWGN, che definisce il valore ottimo di EVM come:

$$EVM_{ottimo}[dB] = -SNR[dB] \quad (6.9)$$

Si considera inizialmente il canale radio EPA, caratterizzato da una dispersione temporale $\tau_{RMS} = 43$ ns, ovvero molto ridotta (par. 2.6). La figura 6.12 riporta le prestazioni degli stimatori per il canale EPA con frequenza Doppler di 5 Hz, ovvero variabile molto lentamente.

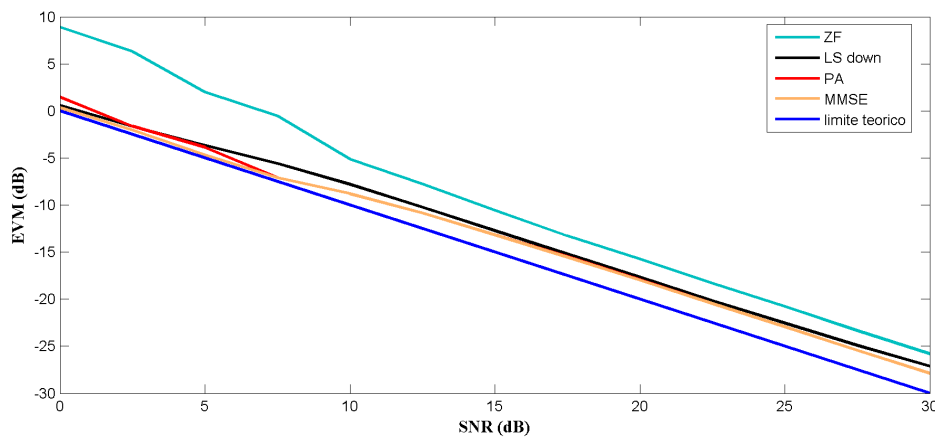


Figura 6.12: EVM medio in canale EPA5 al variare dell'SNR ($B_W = 10$ MHz, CP normal, QPSK).

Le prestazioni dei metodi sono molto elevate e tendono al limite teorico (6.9). Si passa quindi al canale EVA, avente una dispersione temporale $\tau_{RMS} = 357$ ns.

La figura 6.13 riporta le prestazioni degli stimatori per il canale EVA con frequenza Doppler di 70 Hz, ovvero un valore intermedio.

Si nota un netto peggioramento delle prestazioni rispetto al caso di figura 6.12, dovuto al cambiamento graduale del canale da uno slot al successivo. Si analizza infine il caso più difficile, rappresentato dal canale ETU, la cui

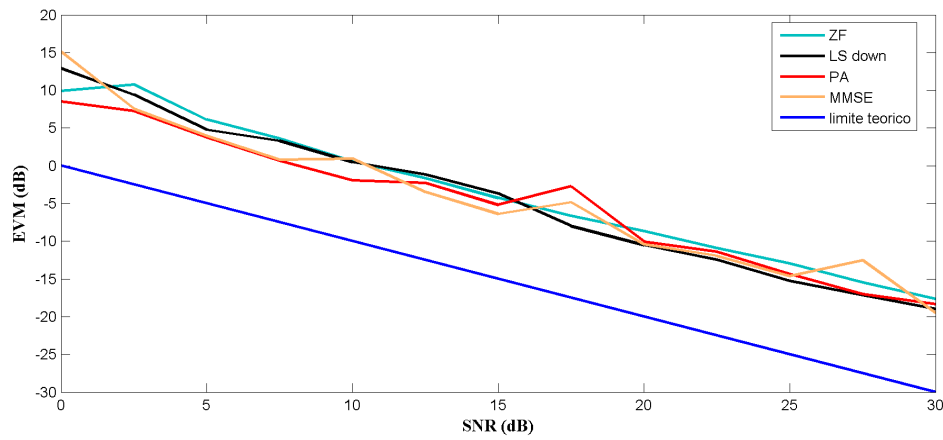


Figura 6.13: EVM medio in canale EVA70 al variare dell'SNR ($B_W = 10$ MHz, CP normal, QPSK).

dispersione temporale è di $\tau_{RMS} = 991$ ns. La figura 6.14 riporta le prestazioni degli stimatori per il canale ETU con frequenza Doppler di 300 Hz, la più elevata prevista dallo standard. Le curve dei metodi MMSE,

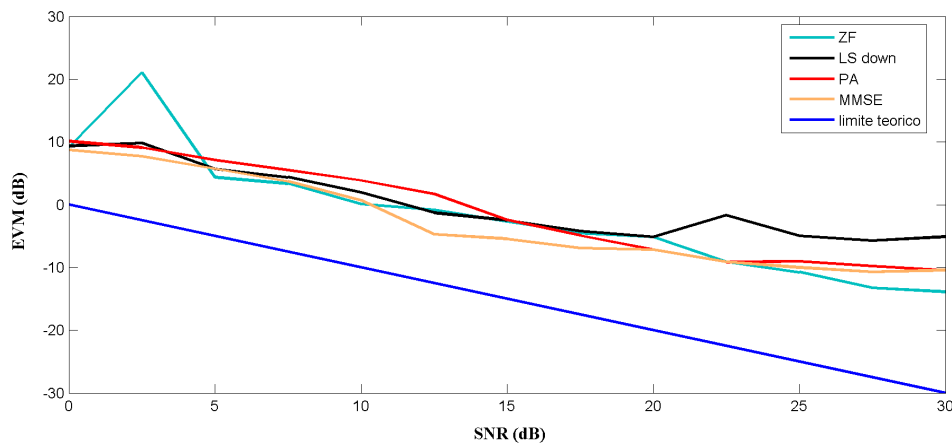


Figura 6.14: EVM medio in canale ETU300 al variare dell'SNR ($B_W = 10$ MHz, CP normal, QPSK).

ottimi per rimuovere il rumore AWGN, soffrono molto la variazione rapida del canale e non si discostano in maniera sensibile dallo stimatore ZF, che negli altri esempi era risultato il peggiore per tutti i valori di SNR.

Capitolo 7

Conclusioni

Il risultato di questo lavoro è la realizzazione di algoritmi di sincronizzazione per la tratta di Uplink del sistema LTE.

È stato realizzato in linguaggio Matlab un simulatore della tratta di Uplink in grado di generare un segnale LTE conforme allo standard e successivamente di riceverlo e analizzarlo. Grazie al simulatore è possibile studiare separatamente le singole operazioni effettuate dal ricevitore e confrontare le prestazioni degli algoritmi proposti al variare dei parametri di sistema e delle condizioni di propagazione.

La realizzazione di questi algoritmi ha richiesto un approfondito lavoro di documentazione per comprendere i vari aspetti dello standard LTE, come le proprietà delle tecniche di accesso multipointante (OFDMA e SC-FDMA), la struttura e la riconoscibilità in presenza di disturbi delle sequenze pilota, gli effetti delle sottoportanti di guardia. Inoltre sono state analizzate le conseguenze prodotte sul segnale ricevuto da varie fonti di disturbo, tra cui il rumore AWGN, il Timing Offset, il CFO, il multipath. Per limitare questi effetti e permettere la corretta ricezione del segnale sono stati analizzati algoritmi numerosi algoritmi presenti in letteratura, cercando di evidenziarne pregi e difetti e, dove possibile, sono state proposte modifiche in modo da ottenere algoritmi più performanti.

Sono stati proposti nuovi metodi per la sincronizzazione in frequenza e nel tempo, e per la stima di canale. Il funzionamento degli algoritmi proposti è stato confrontato con le soluzioni già presenti in letteratura, evidenziando l'aumento di prestazioni ottenuto.

Il codice Matlab realizzato ha permesso di costruire una libreria molto estesa di funzioni, concepite come moduli separati e interoperanti, affinché sia possibile studiare facilmente sia il sistema nel suo complesso, sia ogni sua parte separatamente dalle altre.

Appendice A

Sviluppi analitici

A.1 Prefisso ciclico: proprietà di convoluzione circolare

Si riconsidera l'espressione (1.9), relativa dell' m -esimo simbolo OFDM ricevuto, completo di CP

$$\mathbf{r}_m^{CP} = [r_m^{CP}(0), \dots, r_m^{CP}(N + N_{CP} - 1)]^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{w} \quad (\text{A.1})$$

dove \mathbf{A} è la matrice di convoluzione

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_m(N - N_{CP}) & x_{m-1}(N - 1) & x_{m-1}(N - 2) & \dots & x_{m-1}(N - N_{CP} + 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ x_m(N - 1) & x_m(N - 2) & \ddots & x_m(N - N_{CP} + 1) & x_m(N - N_{CP}) \\ x_m(0) & x_m(N - 1) & \ddots & x_m(N - N_{CP} + 2) & x_m(N - N_{CP} + 1) \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ x_m(N - 1) & x_m(N - 2) & \dots & \dots & x_m(N - N_{CP}) \end{bmatrix}$$

Inoltre $\mathbf{h} = [h(0), h(1), \dots, h(N_{CP} - 1)]^T$ è il vettore del canale radio, di lunghezza inferiore al CP, e \mathbf{w} , il vettore del rumore AWGN, è pari a $\mathbf{w} = [w_m(0), w_m(1), \dots, w_m(N + N_{CP} - 1)]^T$.

L'equazione (A.1) presenta due contributi di interferenza:

- Interferenza intra-simbolo, causata dalla selettività in frequenza del canale radio all'interno dell' m -esimo simbolo OFDM;
- Interferenza inter-simbolo, proveniente dalla sovrapposizione di due simboli OFDM consecutivi, associati rispettivamente agli indici m e $(m - 1)$;

In base a tale distinzione, la matrice \mathbf{A} si può riscrivere come

$$\mathbf{r}_m^{CP} = (\mathbf{A}_{intra} + \mathbf{A}_{inter}) \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N_{CP} - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_m(0) \\ \vdots \\ w_m(N_{CP} - 1) \\ \vdots \\ w_m(N + N_{CP} - 1) \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathbf{A}_{intra} = \begin{bmatrix} x_m(N - N_{CP}) & 0 & \cdots & 0 \\ x_m(N - N_{CP} + 1) & x_m(N - N_{CP}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_m(N - 1) & \cdots & \ddots & x_m(N - N_{CP}) \\ x_m(0) & x_m(N - 1) & \cdots & x_m(N - N_{CP} + 1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_m(N - 1) & x_m(N - 2) & \cdots & x_m(N - N_{CP}) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}_{inter} = \begin{bmatrix} 0 & x_{m-1}(N - 1) & x_{m-1}(N - 2) & \cdots & x_{m-1}(N - N_{CP} + 1) \\ 0 & 0 & x_{m-1}(N - 1) & \cdots & x_{m-1}(N - N_{CP} + 2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{m-1}(N - 1) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Per eliminare il contributo di interferenza tra simboli vicini, dovuto a \mathbf{A}_{inter} , basta scartare i primi N_{CP} campioni del simbolo ricevuto. Si trova così

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_m(0) \\ r_m(1) \\ \vdots \\ r_m(N - 1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_m^{CP}(N_{CP}) \\ r_m^{CP}(N_{CP} + 1) \\ \vdots \\ r_m^{CP}(N + N_{CP} - 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_m(0) & x_m(N - 1) & \cdots & x_m(N - N_{CP} + 1) \\ x_m(1) & x_m(0) & \cdots & x_m(N - N_{CP} + 2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_m(N - 1) & x_m(N - 2) & \cdots & x_m(N - N_{CP}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N_{CP} - 1) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} w_m(N_{CP}) \\ w_m(N_{CP} + 1) \\ \vdots \\ w_m(N + N_{CP} - 1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'aggiunta di zeri al vettore di canale permette di estendere la matrice di canale senza modificare il vettore di uscita, ovvero

$$\begin{bmatrix} r_m(0) \\ r_m(1) \\ \vdots \\ r_m(N - 1) \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N_{CP} - 1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_m(N_{CP}) \\ w_m(N_{CP} + 1) \\ \vdots \\ w_m(N + N_{CP} - 1) \end{bmatrix}$$

dove la matrice \mathbf{B} è data da

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_m(0) & x_m(N-1) & \cdots & x_m(N-N_{CP}+1) & x_m(N-N_{CP}) & \cdots & x_m(1) \\ x_m(1) & x_m(0) & \cdots & x_m(N-N_{CP}+2) & x_m(N-N_{CP}+1) & \cdots & x_m(2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_m(N-1) & x_m(N-2) & \cdots & x_m(N-N_{CP}) & x_m(N-N_{CP}-1) & \cdots & x_m(0) \end{bmatrix}$$

Questa matrice è circolante e quindi è diagonalizzata dalla trasformata di Fourier [37]. Inoltre, gli elementi non nulli della matrice diagonale equivalente corrispondono alla FFT della prima riga (o colonna) della matrice circolante. Dunque vale l'uguaglianza $\mathbf{B} = \mathbf{F}^H \mathbf{X} \mathbf{F}$, con \mathbf{X} diagonale, e il segnale ricevuto diventa

$$\begin{bmatrix} r_m(0) \\ r_m(1) \\ \vdots \\ r_m(N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^H \cdot \begin{bmatrix} X_m(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_m(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m(N-1) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N_{CP}-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_m(N_{CP}) \\ w_m(N_{CP}+1) \\ \vdots \\ w_m(N+N_{CP}-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Gli elementi della matrice di Fourier \mathbf{F} sono dati da

$$(\mathbf{F})_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (nk) \right]$$

con $0 \leq n \leq N-1$ e $0 \leq k \leq N-1$. Inoltre i coefficienti $X_m(k)$, appartenenti alla matrice \mathbf{X} , sono legati ai coefficienti $x_m(n)$ dalla relazione (1.7).

Infine, applicando la DFT a entrambi i membri della (A.2), si trova l'espressione del segnale ricevuto in frequenza

$$\begin{bmatrix} R_m(0) \\ \vdots \\ R_m(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_m(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_m(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \\ \vdots \\ H(N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_m(0) \\ \vdots \\ W_m(N-1) \end{bmatrix}$$

Dunque l'aggiunta del prefisso ciclico trasforma la convoluzione lineare in una convoluzione circolare. Essa corrisponde nel dominio di Fourier a un prodotto di trasformate. Dunque la trasmissione su un canale radio dispersivo è equivalente, in frequenza, al parallelo di N canali con fading piatto:

$$R_m(k) = X_m(k) \cdot H(k) + W_m(k) \quad (\text{A.3})$$

proprietà particolarmente utile per semplificare le operazioni di stima ed equalizzazione.

A.2 Sincronizzazione

A.2.1 Sincronizzazione ritardata

Nel par. 3.1.1 sono stati descritte le conseguenze sul segnale demodulato della sincronizzazione ritardata. In questo paragrafo si dimostra la validità della relazione (3.11).

Si consideri un segnale multiportante $s(t)$ con M sottoportanti allocate e dimensione della FFT pari a $N > M$

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T_S}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} a_{k,l} \psi_{k,l}(t) \quad (\text{A.4})$$

dove

$$\psi_{k,l}(t) = e^{j2\pi(k/T_S)(t-T_{CP}-lT)} \cdot u(t-lT) \quad (\text{A.5})$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

I parametri T_S , T_{CP} e T , rappresentati in figura 2.9, sono, rispettivamente, il tempo utile, l'estensione del CP e la durata complessiva del simbolo SC-FDMA.

Assumendo, per semplicità, che il canale radio sia gaussiano e non dispersivo ($\tau_{RMS} = 0$), i campioni $r_{n,l}$ dell' l -esimo simbolo ricevuto nel dominio del tempo sono

$$r_{n,l} = s(n'T_C) + w(n'T_C)$$

dove $n' = n + \theta + N_{CP} + l(N + N_{CP})$, $w(\cdot)$ è il rumore AWGN e $\theta = T_O/T_C$ è l'errore di sincronizzazione espresso in campioni. Si assuma, per semplicità, che il segnale sia stato trasmesso su di un canale gaussiano e non dispersivo ($\tau_{RMS} = 0$) e che l'istante di inizio del simbolo sia stato stimato con un errore $T_O = \theta T_C$, dove T_C è il periodo di campionamento del sistema. Quando la sincronizzazione è ritardata ($\theta > 0$), il ricevitore seleziona un blocco \mathbf{r}_l di N campioni, provenienti in parte dal simbolo SC-FDMA corrente e in parte da quello successivo:

$$\mathbf{r}_l = \{r_{\theta,l}, r_{\theta+1,l}, \dots, r_{(N-1),l}, r_{0,l+1}, r_{1,l+1}, \dots, r_{(\theta-1),l+1}\} \quad (\text{A.7})$$

Demodulando il blocco ricevuto con la DFT si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned} Z_l(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{r}_l \cdot e^{-j2\pi nk/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-\theta-1} \sum_{i=-M/2}^{M/2-1} a_{i,l} e^{j2\pi(n/N)(i-k)} \cdot e^{j2\pi(i/N)\theta} \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{n=N-\theta}^{N-1} \sum_{i=-M/2}^{M/2-1} a_{i,l+1} e^{j2\pi(i/N)(n+\theta-N)} \cdot e^{-j2\pi nk/N} + W_l(k) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Lo sviluppo della prima sommatoria per $0 \leq n \leq N - \theta - 1$ restituisce due termini distinti, il primo associato al caso $k = i$ e il secondo al caso $k \neq i$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-\theta-1} a_{k,l} e^{j2\pi k\theta/N} && k = i \\ &\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-\theta-1} \sum_{i=-M/2; i \neq k}^{M/2-1} a_{i,l} e^{j2\pi(n/N)(i-k)} \cdot e^{j2\pi(i/N)\theta} && k \neq i \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Sostituendo l'espressione (A.9) nella (A.8) si ottiene l'espressione completa del k -esimo campione ricostruito in

frequenza

$$\begin{aligned}
 Z_l(k) &= \underbrace{\left(\frac{N-\theta}{N}\right)}_{\text{attenuazione}} a_{k,l} \underbrace{e^{j2\pi k\theta/N}}_{\text{rotazione di fase}} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-\theta-1} \sum_{i=-M/2; i \neq k}^{M/2-1} a_{i,l} e^{j2\pi(n/N)(i-k)} \cdot e^{j2\pi(i/N)\theta}}_{\text{ICI}} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=N-\theta}^{N-1} \sum_{i=-M/2}^{M/2-1} a_{i,l+1} e^{j2\pi(i/N)(n+\theta-N)} \cdot e^{-j2\pi nk/N}}_{\text{ISI}} \\
 &+ W_l(k)
 \end{aligned}$$

Il segnale ricostruito contiene il contributo del campione originario $a_{k,l}$, a cui si sovrappongono le distorsioni prodotte da ISI, ICI e rumore AWGN.

I campioni originali $a_{k,l}$ sono attenuati in ampiezza e ruotati in fase. In sistemi multiportante con dimensione della FFT N elevata, l'attenuazione di ampiezza può dirsi trascurabile. La rotazione di fase, proporzionale all'indice di sottoportante e all'errore di sincronizzazione θ , può essere accorpata nella risposta di canale e facilmente eliminata dall'equalizzatore.

A.2.2 Simbolo SC-FDMA affetto da CFO

Si consideri l'espressione generale del segnale ricevuto (3.5), ipotizzando per semplicità una sincronizzazione temporale esatta (cioè $\hat{\theta} = \theta$)

$$r(n) = e^{j2\pi\varepsilon n/N} \sum_l \sum_{m=0}^{L-1} h(m) s_l(n - m - lN_T) + w(n) \quad (\text{A.10})$$

e si calcoli la trasformata di Fourier del simbolo SC-FDMA l -esimo, soggetto al CFO normalizzato $\varepsilon = \nu_D/\Delta f$. Il simbolo l -esimo è dato da

$$\begin{aligned}
 r_l(n) &= e^{j2\pi\varepsilon n/N} \sum_{m=0}^{L-1} h(m) s_l(n - m - lN_T) + w(n) \\
 &= e^{j2\pi\varepsilon(n'+lN_T)/N} \sum_{m=0}^{L-1} h(m) s_l(n' - m) + w(n')
 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

dove $n' = n - lN_T$ e $n = \{0, \dots, (N-1)\}$. Calcolando la DFT della (A.11) e sostituendo il simbolo n' con n , si ottiene

$$R_l(k) = \exp(j2\pi\varepsilon lN_T/N) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [(h(n) * s_l(n)) \cdot \exp(j2\pi\varepsilon n/N)] \exp(-j2\pi nk/N) + W_l(k) \quad (\text{A.12})$$

con $0 \leq k \leq (N-1)$. Questa trasformata si calcola facilmente sfruttando il teorema di convoluzione della DFT; la trasformata del termine $y(n) = h(n) * s_l(n)$ è pari al prodotto delle rispettive trasformate, ovvero

$$Y(k) = H(k) \cdot a_{k,l}$$

La trasformata del solo termine di CFO diventa

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} [\exp (j2\pi\varepsilon n/N)] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp [j2\pi(\varepsilon - k)n/N] \\
 &= \frac{1}{N} \frac{1 - \exp [j2\pi(\varepsilon - k)]}{1 - \exp [j2\pi(\varepsilon - k)/N]} \\
 &= \frac{\sin[\pi(\varepsilon - k)]}{N \sin[\pi(\varepsilon - k)/N]} \cdot \exp [j\pi(\varepsilon - k)(N - 1)/N] \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

Inoltre, la trasformata del prodotto $y(n) \cdot \exp (j2\pi\varepsilon n/N)$ è pari alla convoluzione delle corrispondenti trasformate. Sostituendo

$$f_N(x) = \frac{\sin(\pi x)}{N \sin(\pi x/N)} e^{j\pi x(N-1)/N} \quad (\text{A.14})$$

e

$$\phi_l = \exp (j2\pi\varepsilon l N_T/N) \quad (\text{A.15})$$

si trova infine

$$R_l(k) = e^{j\phi_l} \sum_{p=0}^{N-1} a_{p, l} \cdot H(p) \cdot f_N(\varepsilon + p - k) + W_l(k) \quad (\text{A.16})$$

Essa coincide con l'espressione (3.17) nel paragrafo 3.1.2.

A.3 Stima di canale

A.3.1 Derivazione stimatore MMSE

Dalla sostituzione delle correlazioni (4.39) in (4.38) si ricava

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H + \sigma_W^2\mathbf{I}_N)^{-1}\mathbf{Y} \quad (\text{A.17})$$

dove \mathbf{F} è la matrice di Fourier completa di dimensione $N \times N$; \mathbf{R}_{hh} è l'autocorrelazione del canale calcolata su N coefficienti; \mathbf{X} è la matrice diagonale $N \times N$ contenente i valori delle portanti pilota; σ_W^2 è la potenza di rumore AWGN; \mathbf{Y} il vettore $N \times 1$ del segnale ricevuto. Riarrangiando l'espressione (A.17) si ricava:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}[(\mathbf{X}\mathbf{F})(\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H + \sigma_W^2\mathbf{I}_N)(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H)^{-1}]^{-1}\mathbf{Y} & (\text{A.18}) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}[(\mathbf{X}\mathbf{F})(\mathbf{R}_{hh} + \sigma_W^2(\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H)^{-1})]^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}(\mathbf{R}_{hh} + \sigma_W^2(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1})^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}(\mathbf{R}_{hh} + \sigma_W^2(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1})^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H)^{-1}(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H)\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}(\mathbf{R}_{hh} + \sigma_W^2(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1})^{-1}(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H)\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}(\mathbf{R}_{hh} + \sigma_W^2(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1})^{-1}\hat{\mathbf{y}}_{LS} & (\text{A.19}) \end{aligned}$$

dove si è usata la proprietà $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e $\hat{\mathbf{y}}_{LS}$ è la stima LS del segnale ricevuto nel tempo. L'ultima riga delle (A.18) coincide con il primo termine a destra dell'uguale nell'espressione (4.40), cioè è lo stimatore MMSE nel tempo.

Esiste una forma alternativa dello stimatore (A.17), osservando che

$$\mathbf{C}_M\mathbf{G}^H(\mathbf{C}_D + \mathbf{G}\mathbf{C}_M\mathbf{G}^H)^{-1} = (\mathbf{G}^H\mathbf{C}_D^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1})\mathbf{G}^H\mathbf{C}_D^{-1} \quad (\text{A.20})$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\sigma_W^2\mathbf{I}_N + \mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H)^{-1}\mathbf{Y} & (\text{A.21}) \\ &= (\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\frac{1}{\sigma_W^2}\mathbf{I}_N)\mathbf{X}\mathbf{F} + \mathbf{R}_{hh}^{-1})\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\frac{1}{\sigma_W^2})\mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\frac{1}{\sigma_W^2}\mathbf{I}_N)\mathbf{X}\mathbf{F} + \mathbf{R}_{hh}^{-1})\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\frac{1}{\sigma_W^2})\mathbf{Y} \\ &= \frac{1}{\sigma_W^2}(\frac{1}{\sigma_W^2}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F} + \mathbf{R}_{hh}^{-1})\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{Y} \end{aligned}$$

dove si è usata la sostituzione: $\mathbf{C}_M = \mathbf{R}_{hh}$, $\mathbf{G} = \mathbf{X}\mathbf{F}$, $\mathbf{C}_D = \sigma_W^2\mathbf{I}_N$. In questo caso, invece di invertire la matrice $(\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{F})$ si invertono le due covarianze del rumore e dei dati.

Tornando all'espressione (A.17) è possibile un altro sviluppo, che conduce allo stimatore MMSE in frequenza. Sapendo che la matrice di correlazione in frequenza è $\mathbf{R}_{HH} = \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H$ e il termine $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ rappresenta la stima zero-forcing, si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H(\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{R}_{hh}\mathbf{F}^H\mathbf{X}^H + \sigma_W^2\mathbf{I}_N)^{-1}\mathbf{Y} & (\text{A.22}) \\ &= \mathbf{R}_{HH}[(\mathbf{X})(\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{R}_{HH}\mathbf{X}^H + \sigma_W^2\mathbf{I}_N)(\mathbf{X}^H)^{-1}]^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{R}_{HH}(\mathbf{R}_{HH} + \sigma_W^2(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)^{-1})^{-1}(\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{R}_{HH}(\mathbf{R}_{HH} + \sigma_W^2(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)^{-1})^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{ZF} \end{aligned}$$

che corrisponde all'espressione da dimostrare.

A.3.2 Calcolo Mean Square Error dello stimatore MMSE in frequenza

L'errore dello stimatore MMSE in frequenza è:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{MMSE} &= \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} \\
 &= \mathbf{H} - \mathbf{R}_{HH}(\mathbf{R}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_N)^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{ZF} \\
 &= \mathbf{H} - \mathbf{R}_{HH}(\mathbf{R}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_N)^{-1}(\mathbf{H} + \bar{\mathbf{W}})
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

dove \mathbf{H} è la CFR vera, $\bar{\mathbf{W}}$ è in vettore di rumore normalizzato ($\sigma_{\bar{\mathbf{W}}}^2 = (1/SNR)\mathbf{I}_N$) e $\beta = 1$ (caso modulazione QPSK per semplicità). Osservando che \mathbf{R}_{HH} e $(\mathbf{R}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_N)$ sono hermitiane e che hanno in comune gli stessi autovettori, cioè:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{HH} &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \\
 (\mathbf{R}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_N) &= \mathbf{U}\left(\mathbf{\Lambda} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_N\right)\mathbf{U}^H
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

si può scrivere la (A.23) come:

$$\mathbf{e}_{MMSE} = \mathbf{U}(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{U}^H\mathbf{H} - \mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^H\bar{\mathbf{W}} \tag{A.25}$$

dove si è posto $\Delta = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_N)$. L'errore quadratico medio (MSE) è:

$$MSE = \frac{1}{N}\text{Trace}\{E[\mathbf{e}_{MMSE}\mathbf{e}_{MMSE}^H]\} \tag{A.26}$$

dove $\text{Trace}\{A\}$ è la somma degli elementi sulla diagonale principale della matrice A . Per semplificare la (A.25) si utilizzano le seguenti proprietà:

- \mathbf{H} e $\bar{\mathbf{W}}$ sono incorrelati, quindi i valori attesi dei prodotti incrociati si annullano ($E[\mathbf{H}\bar{\mathbf{W}}] = 0$)
- $\text{Trace}(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^H) = \text{Trace}(\mathbf{A})$ se \mathbf{U} è unitaria
- $\text{Trace}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Trace}(\mathbf{A}) + \text{Trace}(\mathbf{B})$
- $\text{Trace}(\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D}) = \sum_k a_{k,k}d_k^2$ con \mathbf{A} matrice qualunque e \mathbf{D} matrice diagonale con elementi d_k sulla diagonale principale

Utilizzando (4.50) l'MMSE diventa:

$$MSE = \frac{1}{N}\text{Trace}\{\mathbf{U}(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{U}^H E[\mathbf{H}\mathbf{H}^H]\mathbf{U}(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{U}^H + \mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^H E[\mathbf{W}\mathbf{W}^H]\mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^H\} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
 MSE &= \frac{1}{N}\text{Trace}\{\mathbf{U}(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{U}^H\mathbf{R}_{HH}\mathbf{U}(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{U}^H + \mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^H\mathbf{R}_{WW}\mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^H\} \\
 &= \frac{1}{N}\text{Trace}\{\mathbf{U}(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H\mathbf{U}(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{U}^H + \frac{1}{SNR}\mathbf{U}\Delta^2\mathbf{U}^H\} \\
 &= \frac{1}{N}\text{Trace}\{(\mathbf{I}_N - \Delta)\mathbf{\Lambda}(\mathbf{I}_N - \Delta) + \frac{1}{SNR}\Delta^2\} \\
 &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \lambda_k(1 - \delta_k)^2 + \frac{\delta_k^2}{SNR}
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Ricordando infine che $\delta_k = \lambda_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \frac{1}{SNR}} \right)$ si ottiene l'espressione

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \cdot SNR} \quad (\text{A.29})$$

che si annulla per $SNR \rightarrow \infty$.

A.3.3 Proprietà dello stimatore con riduzione ottimale del rango

A.3.3.1 Derivazione dello stimatore

Lo stimatore con riduzione ottimale del rango $\mathbf{A}_{MMSE,opt}^{freq}$ si ottiene partendo dalle matrici di correlazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{H\hat{H}_{ZF}} &= E [\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}_{ZF}^H] \\ \mathbf{R}_{\hat{H}_{ZF}\hat{H}_{ZF}} &= E [\hat{\mathbf{H}}_{ZF}\hat{\mathbf{H}}_{ZF}^H] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

essendo $\hat{\mathbf{H}}_{ZF}^H$ la stima zero forcing del canale, e dalla decomposizione SVD

$$\mathbf{R}_{H\hat{H}_{ZF}} \mathbf{R}_{\hat{H}_{ZF}\hat{H}_{ZF}}^{-1/2} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{D} \mathbf{Q}_2^H$$

dove \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 sono matrici ortonormali e \mathbf{D} è una matrice diagonale contenente i valori singolari $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_P$. Il miglior stimatore di rango m è [RIF 5 sandell]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{MMSE,opt}(m) &= \mathbf{A}_{MMSE,opt}^{freq}(m) \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \\ &= \mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2^H \mathbf{R}_{\hat{H}_{ZF}\hat{H}_{ZF}}^{-1/2} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \end{aligned}$$

dove \mathbf{D}_m è la sottomatrice $m \times m$ ottenuta dall'angolo superiore sinistro di \mathbf{D} , quindi vengono considerati solo gli m valori singolari più grandi. Se la struttura delle portanti pilota è a pettine l'espressione non si può ridurre ulteriormente; se invece la struttura è a blocco (come in LTE Uplink) valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{H\hat{H}_{ZF}} &= \mathbf{R}_{HH} \\ \mathbf{R}_{\hat{H}_{ZF}\hat{H}_{ZF}} &= \mathbf{R}_{HH} + \frac{\beta}{SNR} \mathbf{I}_P \end{aligned}$$

Gli autovettori di queste matrici coincidono e sono pari a quelli di \mathbf{R}_{HH} dove $\mathbf{R}_{HH} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$. Inoltre si assume per semplicità $\beta = 1$. La diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{H\hat{H}_{ZF}} \mathbf{R}_{\hat{H}_{ZF}\hat{H}_{ZF}}^{-1/2} &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \left(\mathbf{U}(\mathbf{\Lambda} + (SNR^{-1})\mathbf{I}_P) \mathbf{U}^H \right)^{-1/2} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda} + (SNR^{-1})\mathbf{I}_P)^{-1/2} \mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{D} \mathbf{Q}_2^H \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{Q}_2 = \mathbf{U} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda} + (SNR^{-1})\mathbf{I}_P)^{-1/2} \end{aligned}$$

Lo stimatore di rango m diventa

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,opt}(m) &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \cdot \left(\mathbf{U} (\Lambda + (SNR^{-1})I_P) \mathbf{U}^H \right)^{-1/2} \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \\ &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\Lambda + (SNR^{-1})I_P)^{-1/2} \mathbf{U}^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \\ &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Delta_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF}\end{aligned}$$

dove Δ_m è l'angolo in alto a sinistra di dimensioni $m \times m$ della matrice

$$\begin{aligned}\Delta &= \Lambda (\Lambda + (SNR^{-1})I_P)^{-1} \\ &= \text{diag} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + SNR^{-1}}, \dots, \frac{\lambda_P}{\lambda_P + SNR^{-1}} \right)\end{aligned}$$

A.3.3.2 Complessità dello stimatore

Lo stimatore si può riscrivere come una somma di matrici di rango-1

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,opt}(m) = \left(\sum_{k=1}^m \delta_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H \right) \hat{\mathbf{H}}_{ZF} = \sum_{k=1}^m \mathbf{q}_k \langle \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \rangle$$

dove $\mathbf{q}_k = \delta_k \mathbf{u}_k$ e i termini $p_k = \langle \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{H}}_{ZF} \rangle = \mathbf{u}_k^H \hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ sono prodotti interni, ciascuno dei quali costa P moltiplicazioni. Dato che questi prodotti sono in tutto m , il loro costo è pari a Pm moltiplicazioni e Pm somme. La combinazione lineare degli m vettori \mathbf{q}_k richiede altre Pm moltiplicazioni e Pm somme. Il numero totale di operazioni richieste (somme e moltiplicazioni) è $4Pm$.

A.3.4 Algoritmo super-veloce di Schur

A.3.4.0.1 Definizioni Una matrice di Toeplitz \mathbf{T} di dimensioni $N \times N$ è caratterizzata da un *displacement* (spostamento) di rango 2

$$\mathbf{T} - \mathbf{Z}\mathbf{T}\mathbf{Z}^H = \mathbf{Y}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Y}^H \quad (\text{A.31})$$

dove \mathbf{Z} è una matrice $N \times N$ di traslazione verso il basso di espressione, per $N = 4$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Sigma} = 1 \oplus -1$ è una matrice di signature (firma) 2×2 di espressione

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e \mathbf{Y} è la matrice di generazione per \mathbf{T}

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{t_0}} \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{N-1} \\ 0 & t_1 & \dots & t_{N-1} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.32})$$

La (A.31) è chiamata equazione di spostamento (*displacement*). La matrice di generazione di una generica matrice \mathbf{T} non è unica; infatti, data una matrice di generazione \mathbf{Y} e una matrice \mathbf{H} , tale che $\mathbf{H}\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}^H = \mathbf{\Sigma}$, si

trova

$$(\mathbf{YH})\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{YH})^H = \mathbf{Y}(\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}^H)\mathbf{Y}^H = \mathbf{Y}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Y}^H \quad (\text{A.33})$$

quindi anche \mathbf{YH} è una matrice di generazione per \mathbf{T} . Per una generica $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_P \oplus -\mathbf{I}_Q$, una matrice \mathbf{H} che soddisfa $\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}^H = \boldsymbol{\Sigma}$ è detta $\boldsymbol{\Sigma}$ -unitaria. Quando $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{1} \oplus -\mathbf{1}$, tutte le matrici $\boldsymbol{\Sigma}$ -unitarie hanno espressione

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{1-|\rho|^2}} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho^* \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

dove $|a| = |b| = 1$. Cioè le matrici $\boldsymbol{\Sigma}$ -unitarie sono date dal prodotto di una rotazione iperbolica e da una matrice diagonale unitaria.

A.3.4.0.2 Algoritmo generale di Schur L'algoritmo di Schur è una tecnica rapida ($O(N^2)$) per il calcolo della fattorizzazione di Cholesky di \mathbf{T} . Esso riduce la complessità di calcolo elaborando, al posto dell'intera matrice \mathbf{T} , la sola matrice di generazione \mathbf{Y} . Si esprima la matrice \mathbf{T} nella forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_0 & \mathbf{t}_{21}^H \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Si riscrive la matrice \mathbf{Y} , di dimensioni $N \times 2$, nella forma

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

dove y_{11} e y_{12} sono scalari e \mathbf{y}_{21} , \mathbf{y}_{22} sono vettori $(N-1) \times 2$. Si calcola dunque una matrice \mathbf{H} , $\boldsymbol{\Sigma}$ -unitaria, tale che

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{YH} = \begin{bmatrix} \widehat{y}_{11} & 0 \\ \widehat{\mathbf{y}}_{21} & \widehat{\mathbf{y}}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

in cui la prima riga di $\widehat{\mathbf{Y}}$ presenta un solo elemento non nullo. Si dice che una matrice di generazione con questa espressione, come ad esempio la (A.32), è in forma propria. L'equazione (A.31) implica che

$$\begin{bmatrix} t_0 & \mathbf{t}_{21}^H \end{bmatrix} = \widehat{y}_{11} \begin{bmatrix} \widehat{y}_{11} & \widehat{\mathbf{y}}_{21}^H \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

cioè la prima riga di $(\widehat{\mathbf{Y}})^H$ è la prima riga del fattore di Cholesky di \mathbf{T} . Inoltre, definendo

$$\mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{22} - \mathbf{t}_{21}\mathbf{t}_0^{-1}\mathbf{t}_{21}^H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\widehat{\mathbf{Y}}(:,1) & \widehat{\mathbf{Y}}(:,2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

dove la notazione $(:,n)$ indica tutti gli elementi della colonna n , vale la relazione

$$\mathbf{T}_S - \mathbf{Z}\mathbf{T}_S\mathbf{Z}^H = \mathbf{Y}_S\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Y}_S^H \quad (\text{A.40})$$

Quindi, il complemento di Schur della matrice \mathbf{T} , di espressione $(\mathbf{T}_{22} - \mathbf{t}_{21}\mathbf{t}_0^{-1}\mathbf{t}_{21}^H)$, orlato di zeri ha la stessa struttura di \mathbf{T} e la sua matrice di generazione \mathbf{Y}_S si ottiene facilmente da $\widehat{\mathbf{Y}}$, matrice di generazione di \mathbf{T} . La prima riga della matrice \mathbf{Y}_S è tutta nulla, così come l'angolo in alto a sinistra della matrice \mathbf{T}_S . Eliminando gli zeri, \mathbf{T}_S e \mathbf{Y}_S si possono riorganizzare rispettivamente come nella (A.35) e nella (A.36), con la differenza che la dimensione del problema passa da N a $N-1$. L'algoritmo prosegue calcolando una nuova matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ -unitaria \mathbf{H}_2 capace di trasformare \mathbf{Y}_S in forma propria. Impostando un'espressione simile alla (A.38), il nuovo termine $\widehat{\mathbf{Y}}_S = \mathbf{Y}_S\mathbf{H}_2$ restituisce la seconda riga del fattore di Cholesky. Quindi, ad ogni passo i dell'algoritmo di Schur si calcola un'opportuna trasformazione che, applicata alla matrice di generazione corrente, restituisca la riga i -esima della fattorizzazione di Cholesky di \mathbf{T} .

A.3.4.0.3 Calcolo della matrice inversa Sia $\phi(z)$ il polinomio generatore della matrice inversa \mathbf{T}^{-1} , dove \mathbf{T} è di Toeplitz. La costruzione della matrice inversa viene effettuata grazie alla formula di Gohberg-Semencul [36]

$$\delta_n \mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{L}_1^H \mathbf{L}_1 - \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H) \quad (\text{A.41})$$

Il fattore di scala δ_n è pari al primo elemento di ϕ , cioè $\phi(0)$. Fissando $\phi' = \phi/\phi(0)$, la matrice \mathbf{L}_1 è triangolare bassa con simmetria di Toeplitz (\mathbf{L} sta per lower), di espressione

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \phi'_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \phi'_1 & \phi'_0 & \ddots & 0 & 0 \\ \phi'_2 & \phi'_1 & \phi'_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi'_{N-1} & \phi'_{N-2} & \cdots & \phi'_1 & \phi'_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

La matrice \mathbf{U}_0 è triangolare alta con simmetria di Toeplitz (\mathbf{U} sta per upper), di espressione

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \phi'_{N-1} & \phi'_{N-2} & \cdots & \phi'_1 \\ 0 & 0 & \phi'_{N-1} & \cdots & \phi'_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \phi'_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Come illustrato in seguito, poichè le matrici \mathbf{L}_1 e \mathbf{U}_0 sono di Toeplitz, la moltiplicazione per il termine noto m si può effettuare rapidamente (formula 4.5.3.2).

Appendice B

Il PAPR

B.1 Il PAPR in un sistema OFDM

Il *Peak-to-Average Power Ratio* (PAPR) è una misura indicativa dell'efficienza energetica di un trasmettitore. Nel caso ideale, un amplificatore lineare di potenza richiede un'amplificazione fino al punto di saturazione e si arriva al massimo punto di efficienza quando esso opera nel punto di saturazione. Un PAPR positivo, in dB, significa che, per evitare di distorcere il segnale risultante, è necessario ridurre la potenza media fornita dall'amplificatore: tale operazione è chiamata "*back-off*". Esiste una formula per mettere in relazione il PAPR con l'efficienza energetica (si veda [39]):

$$\eta = \eta_{\max} \cdot 10^{-\frac{PAPR}{20}} \quad (\text{B.1})$$

dove η è l'efficienza e η_{\max} il suo valore massimo.

Per un amplificatore in classe A, $\eta_{\max} = 50\%$; per un amplificatore in classe B $\eta_{\max} = 78.5\%$.

La figura B.1 mostra come un alto valore di PAPR degradi il valore di efficienza di trasmissione (si veda il cap. 15 in [2]). La potenza di picco di un generico segnale $x(t)$ è definita come il massimo valore assunto dal quadrato

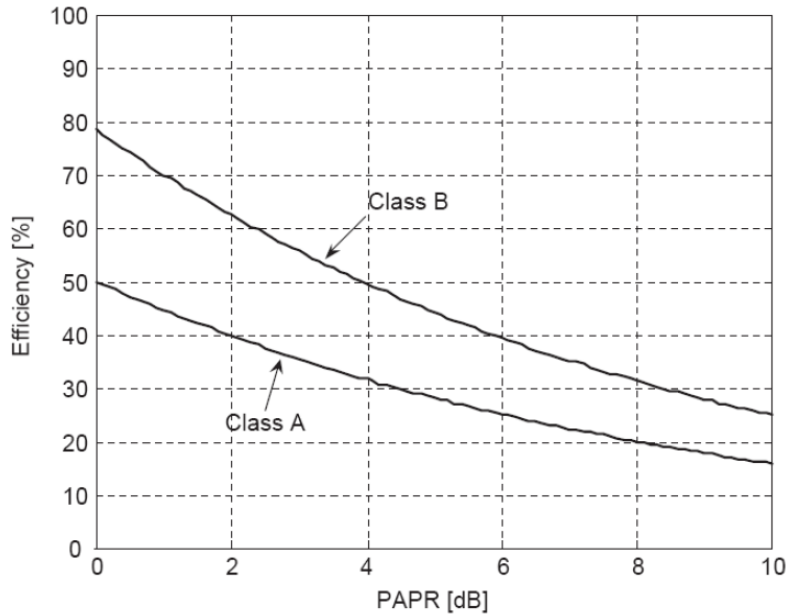


Figura B.1: Livello di PAPR nelle due tipologie di amplificatori.

del suo inviluppo:

$$P_{\max} = \arg \max_t \{|x(t)|^2\} \quad (\text{B.2})$$

La distribuzione di $|x(t)|^2$ è un parametro molto utile per descrivere la probabilità complementare di cut-off del segnale. La probabilità di cut-off al variare del valore w è definita come

$$P\{|x(t)|^2 \leq w\} = F(w) \quad (\text{B.3})$$

dove $F(w)$ è la funzione di distribuzione, e $1 - F(w)$ è la funzione di distribuzione complementare (CCDF).

In passato è stato dimostrato (si veda il paragrafo B.4) che un segnale modulato in ampiezza a singola portante non ha una distribuzione gaussiana ed è difficile determinarne statisticamente il tipo di distribuzione. Per questo motivo, è stato alternativamente proposto un metodo (si veda [39]) per determinare il limite superiore della funzione di distribuzione complementare della potenza istantanea utilizzando il limite di *Chernoff*.

Tuttavia, nel caso di un segnale OFDM multiportante, la funzione di distribuzione complementare del PAPR per N sottoportanti vale [39]:

$$P\{PAPR \geq k\} = 1 - (1 - e^{-k})^N \quad (\text{B.4})$$

Nella figura B.2 (si veda il capitolo 15 in [2]) è mostrato il confronto tra la CCDF della potenza istantanea di un sistema OFDM, al variare del numero di sottoportanti N , e quella di un sistema a singola portante, a cui è applicato un filtro formatore con diversi fattori di *roll-off* α . Fissato un determinato valore della

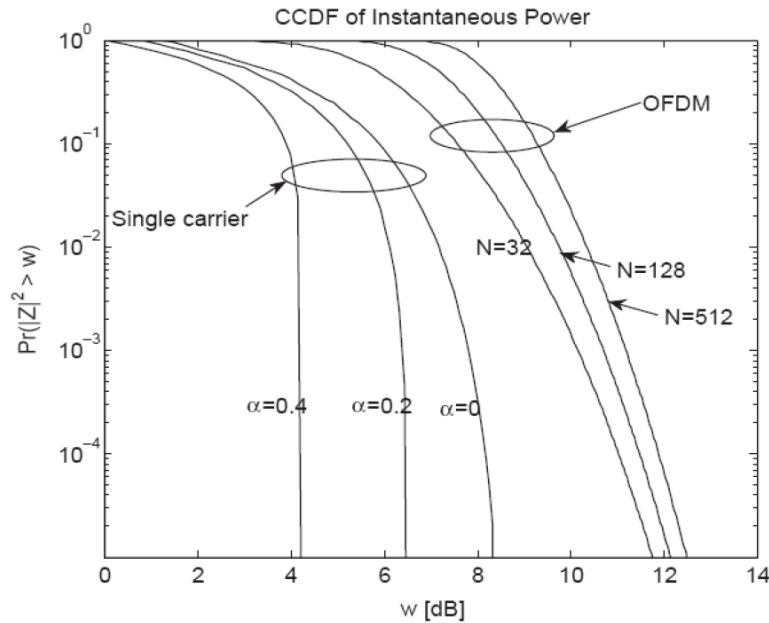


Figura B.2: Confronto del livello di PAPR per un segnale a portante singola e multiportante.

CCDF complementare, si osserva che la potenza di picco di un segnale a singola portante, e quindi il PAPR, è nettamente inferiore a quella di un segnale OFDM.

B.2 Metodi di riduzione del PAPR in un sistema OFDM

Nel corso del tempo, sono state studiate diverse tecniche per ridurre il PAPR dei segnali OFDM. Esse si possono raggruppare in tre categorie:

- tecniche che implicano una pre-distorsione non lineare del segnale (clipping) per ridurre la sua ampiezza solo in corrispondenza dei picchi o in un loro intorno. In questo modo si può limitare la potenza di picco del simbolo trasmesso (si veda [40]);
- tecniche di codifica che escludono a priori la possibilità di generare simboli OFDM con un elevato PAPR. Questa è una soluzione elegante, ma con forti limitazioni (si veda la sezione 7.5 in [39]);
- tecniche di scrambling, basate sul mescolamento dei campioni del simbolo OFDM con diverse sequenze note a priori. Tra i diversi simboli OFDM mescolati, viene trasmesso quello avente il PAPR più basso.

Delle tre soluzioni, la più utilizzata è la prima.

In particolare è stato proposto un metodo congiunto per effettuare il clipping del segnale OFDM nei tempi, tenendo allo stesso tempo sotto controllo la distorsione spettrale (si veda [40]), tramite un filtraggio ed il clipping ricorsivo. In questo modo è possibile ottenere una buona riduzione del PAPR e mantenere, allo stesso tempo, una buona velocità di trasmissione dell'informazione.

Come ben noto (si veda [41]), il clipping di un segnale OFDM nei tempi produce una dispersione spettrale fuori banda, la quale può essere filtrata per essere riportata a valori accettabili. Effettuando questa operazione più volte (da cui il termine clipping ricorsivo RCF, *Recursive Clipping and Filtering*), si possono ottenere bassi livelli di PAPR e di dispersione spettrale.

Nasce però un altro problema: all'aumentare del numero di ricorsioni, aumenta anche il BER, causato dalla crescita delle distorsioni in banda, conseguenza del rumore introdotto dal clipping.

Per questo è stata proposta da M.S. Deng e M.C. Lin (si veda [40]) una tecnica per ridurre la distorsione limitando la dispersione (RCFBD, *Recursive Clipping and Filtering with Bounded Dispersion*). L'idea è quella di effettuare un clipping digitale, sovracampionando nel dominio temporale e rimuovendo successivamente le componenti spettrali fuori banda.

L'algoritmo proposto si compone di tre parti:

- progetto di simboli (M-QAM nel caso in esame) con dispersione limitata, in modo che cadano in una regione circoscritta della costellazione, con un margine δ nell'intorno del centro simbolo (quelli che non ricadranno nella regione designata verranno opportunamente modificati), come illustrato nella figura B.3;

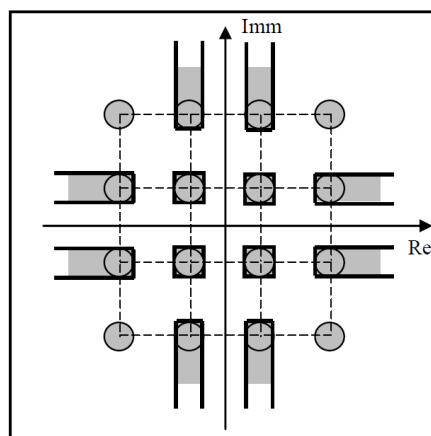


Figura B.3: Tecnica BD (Bounded Dispersion) per limitare la posizione dei simboli di una modulazione 16-QAM

- applicazione della tecnica OCF pura (*Oversampled digital Clipping and Filtering*). Poiché in questo modo non si ottengono valori sufficientemente bassi di PAPR, è necessario iterare il processo OCF, imponendo una soglia di clipping $A^{(j)}$ per l'ampiezza in frequenza dei simboli OFDM X_k (si veda la figura B.4).

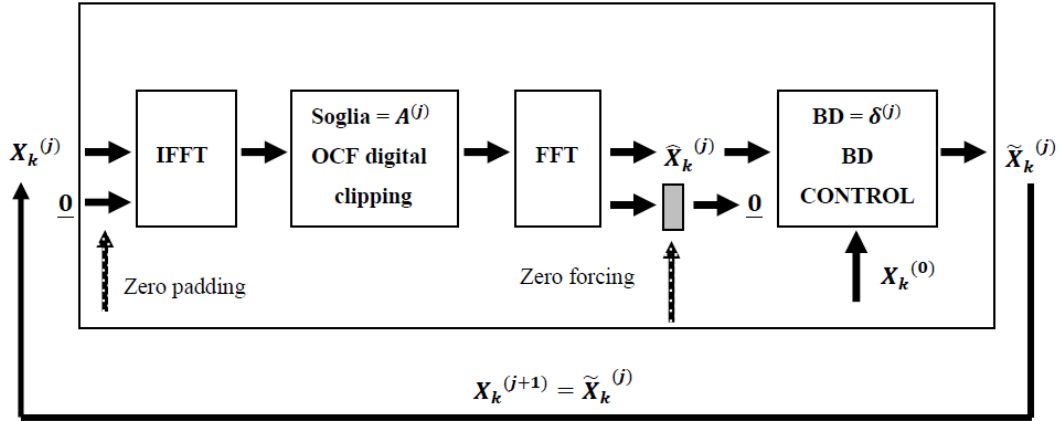


Figura B.4: Algoritmo RCFBD (Recursive Clipping and Filtering with Bounded Dispersion).

- aggiornamento della soglia $A^{(j)}$ e del margine $\delta^{(j)}$ in funzione della j -esima iterazione

della ricorsione, secondo lo schema:

$$\delta^{(j)} = \begin{cases} \alpha \delta e^{-\beta j} & \text{per } 0 \leq j < \lfloor \epsilon J \rfloor \\ \delta & \text{per } \lfloor \epsilon J \rfloor \leq j < J \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$A^{(j)} = A^{(0)} + \frac{(a - A^{(0)})j}{J} \quad \text{per } 0 \leq j < J \quad (\text{B.6})$$

dove $A^{(0)}$, α , β e ϵ sono stati fissati tramite simulazioni.

Nelle figure B.5 e B.6 si possono vedere la CCDF e la PSD di un segnale OFDM con clipping, effettuato rispettivamente secondo i metodi:

- OCF (RCF-J);
- RCFBD-J (con J numero massimo di iterazioni) in assenza di variazione di soglia e margine;
- RCFBD-J con variazione di soglia e margine;

dove P_{av} indica la potenza media necessaria alla definizione di PAPR.

Tuttavia, per ridurre il PAPR in un sistema LTE, specialmente nella tratta di Uplink, si è scelta una strada completamente nuova, ma rivelatasi molto efficiente. In particolare è stata introdotta una nuova tecnica di accesso, chiamata SC-FDMA (si veda [2]); essa si può considerare a tutti gli effetti una modulazione di tipo multiportante, come l'OFDM, ma è caratterizzata da un PAPR sensibilmente inferiore, grazie alla precodifica dei campioni della costellazione con una trasformata DFT di dimensione M (si veda il par. 2.3.3). La precodifica provoca una riduzione del PAPR perché le proprietà del segnale SC-FDMA si avvicinano a quelle di un sistema a portante singola, preservando tuttavia la flessibilità e gli altri vantaggi della modulazione OFDM.

Per comprendere meglio i vantaggi introdotti da questo nuovo tipo di accesso, si analizza l'andamento del suo PAPR.

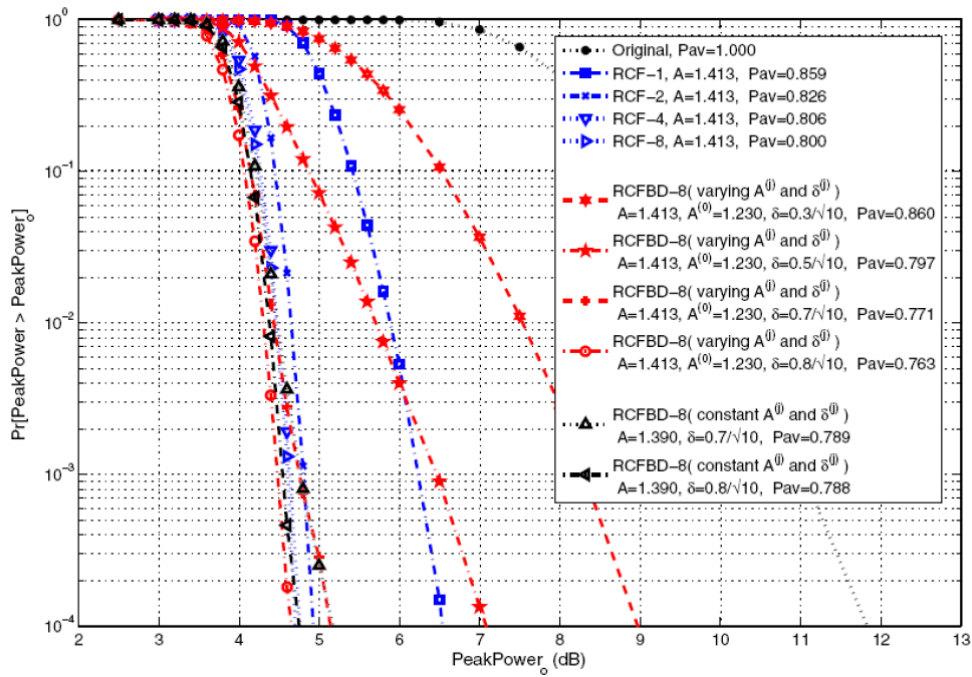


Figura B.5: CCDF di un sistema OFDM con varie tecniche di clipping (16-QAM/128-OFDM).

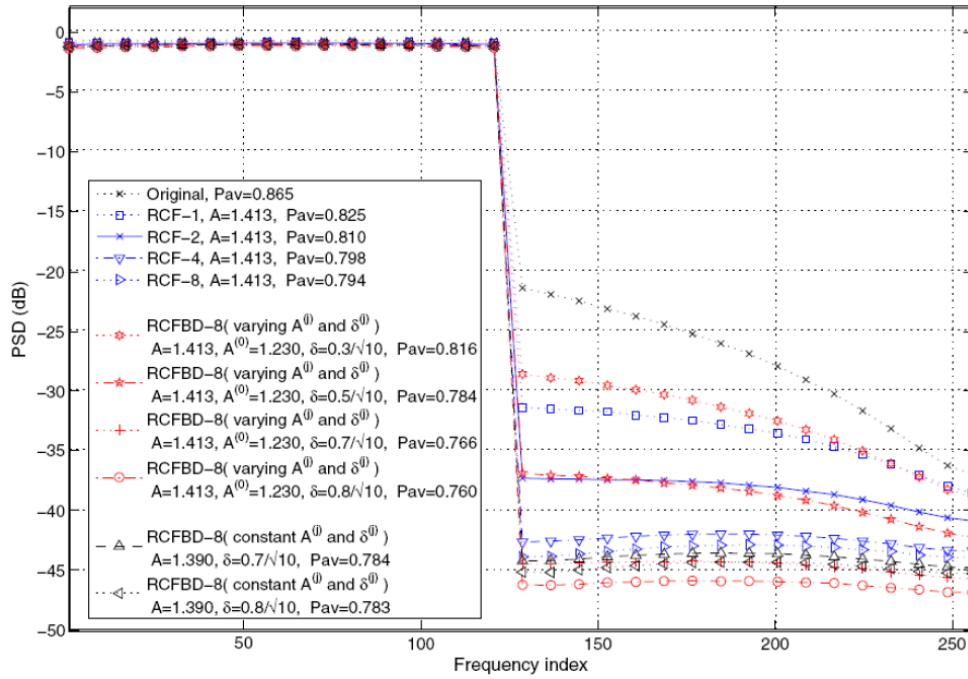


Figura B.6: PSD di un sistema OFDM con varie tecniche di clipping (16-QAM/128-OFDM)

B.3 Il PAPR in un sistema SC-FDMA

Il segnale passabanda complesso SC-FDMA $x(t)$ per un generico blocco dati di dimensione N , può essere così rappresentato:

$$x(t) = e^{j\omega_c t} \sum_{n=0}^{N-1} x_n p(t - nT)$$

dove:

- $\omega_c = 2\pi f_c$, con f_c frequenza portante del sistema;
- $p(t)$ è l'impulso in banda base;
- T è la durata temporale dell'impulso trasmesso.

Si possono considerare due forme di impulsi modulanti del segnale:

- quello a coseno rialzato, le cui espressioni, nel tempo e in frequenza, sono rispettivamente:

$$P_{RC}(f) = \begin{cases} \tilde{T} & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{\tilde{T}}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi \tilde{T}}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right] \right\} & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$p_{RC}(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T} \cdot \left(1 - 4\frac{\alpha^2 t^2}{T^2}\right)} \quad (\text{B.8})$$

- quello a radice di coseno rialzato:

$$P_{RRC}(f) = \sqrt{P_{RC}(f)} \quad (\text{B.9})$$

$$p_{RRC}(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T}(1+\alpha)\right)}{\frac{\pi t}{T} \cdot \left(1 - 16\frac{\alpha^2 t^2}{T^2}\right)} \quad (\text{B.10})$$

Il PAPR può essere definito come:

$$PAPR = \frac{\text{peak power } |x(t)|^2}{\text{average power } |x(t)|^2} = \frac{\overbrace{\max(|x(t)|^2)}_{0 \leq t \leq NT}}{\frac{1}{NT} \int_0^{NT} |x(t)|^2 dt} \quad (\text{B.11})$$

Senza il filtro formatore, il segnale campionato darà lo stesso valore di PAPR del caso continuo, perché è come se il segnale SC-FDMA fosse modulato su di una singola portante. In questo caso il PAPR può essere espresso come:

$$PAPR = \frac{\max_{n=0,1,\dots,N-1} |x_n|^2}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2} \quad (\text{B.12})$$

Come già sottolineato, rispetto ai segnali OFDM, l'ampiezza di un segnale SC-FDMA non ha una distribuzione gaussiana, ed è difficile derivare analiticamente l'esatta forma della distribuzione. Tramite simulazioni di Monte Carlo, come fatto per il segnale a singola portante, è possibile ricavare la CCDF, che è definita come la probabilità che il PAPR sia maggiore di un certo valore $PAPR_0$:

$$CCDF = P\{PAPR \geq PAPR_0\} \quad (\text{B.13})$$

Grazie alle simulazioni svolte da Myung e Goodman (si veda il capitolo 8 in [39]), è stato ottenuto il grafico sottostante che rappresenta il confronto fra le funzioni di distribuzione complementari di un segnale OFDMA e di segnali SC-FDMA con differenti mappature di sottoportanti. Il grafico riportato in figura B.7 (si veda

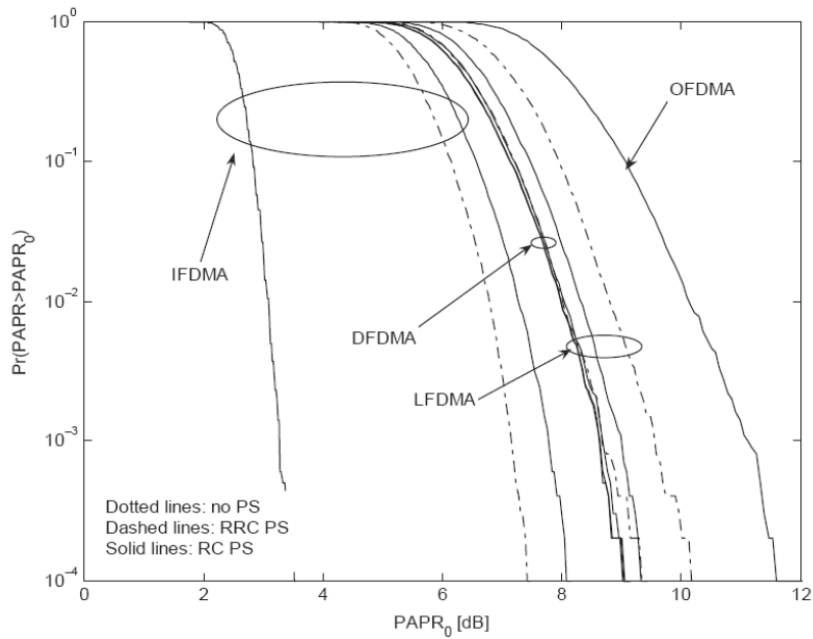


Figura B.7: Confronto livello di PAPR nel caso di OFDMA, LFDMA e IFDMA.

il capitolo 7 in [39]) fa riferimento alla modulazione QPSK. Le prestazioni dell'SC-FDMA risultano sempre superiori rispetto al sistema OFDMA. Inoltre si nota, per la modulazione SC-FDMA, una forte dipendenza della CCDF dalla specifica tecnica di allocazione delle portanti, che può avvenire in due modi:

- mappatura *localizzata* (LFDMA), ovvero accorpando le portanti l'una vicino all'altra (la tecnica definita in [11] ed implementata in questa tesi);
- mappatura *distribuita* (DFDMA) pura o tramite la tecnica di *interleaving* (IFDMA), che permette di distribuire l'effetto del PAPR su di una banda più larga.

Nella figura B.8 sono rappresentate le due tecniche di allocazione.

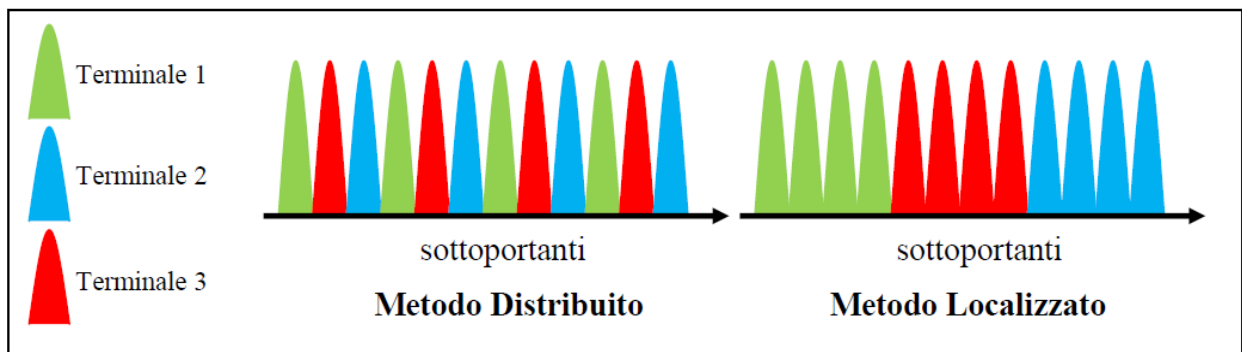


Figura B.8: Differenza tra le due tecniche di allocazione delle sottoportanti.

È stato quindi dimostrato che la modulazione SC-FDMA presenta un PAPR minore rispetto all'OFDM. Tale valore potrebbe essere ulteriormente ridotto utilizzando particolari distribuzioni, oppure applicando la tecnica del clipping anche a questa modulazione (si veda capitolo 7 in [39]).

B.4 Potenza di picco in un sistema a singola portante e multipor- tante

In [39], Wulich e Goldfeld hanno dimostrato che l'ampiezza di un segnale modulato a singola portante (SC) non ha una distribuzione gaussiana ed è difficile ricavare analiticamente la forma della sua distribuzione. Come alternativa, è stato proposto un metodo per trovare un limite superiore per la funzione di distribuzione complementare della potenza istantanea, utilizzando il criterio di *Chernoff*. La derivazione seguente caratterizza la potenza di picco per un segnale modulato a singola portante.

Si consideri la rappresentazione in banda base di un segnale modulato a portante singola:

$$x(t, \bar{s}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k p(t - kT) \quad (\text{B.14})$$

dove:

- $\{s_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ sono i simboli trasmessi $\bar{s} = [\dots s_{-1}, s_0, s_1, \dots]$;
- $p(t)$ è il filtro formatore del segnale;
- T è la durata del simbolo;
- s_k proviene dalla costellazione C di una modulazione di dimensione B , ovvero:

$$s_k \in C = \{c_b : 0 \leq b \leq B - 1\} \quad (\text{B.15})$$

ed è uniformemente distribuita.

Si supponga, inoltre, che i valori s_k siano tra di loro indipendenti. Conviene ora definire una variabile casuale Z per un dato $t_0 \in [0, T)$, nel seguente modo:

$$Z = x(t_0, \bar{s}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k p(t_0 - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$$

dove $a_k = s_k p(t_0 - kT)$ e i vari a_k sono indipendenti tra loro come lo sono i coefficienti s_k . Essendo s_k uniformemente distribuita su C , dall'equazione precedente si ottiene che:

$$P[a_k = c_b p(t_0 - kT)] = P[s_k = c_b] = \frac{1}{B} \quad 0 \leq b \leq B - 1 \quad (\text{B.16})$$

L'obiettivo è caratterizzare la CCDF, quindi:

$$P[|x(t_0, \bar{s})|^2 \geq w] = P[|Z|^2 \geq w] = P(Z \geq \delta) \quad (\text{B.17})$$

con $w \geq 0$ e $\delta = \sqrt{w}$.

Si assuma ora che la costellazione C della modulazione sia reale ed i suoi punti siano simmetrici attorno allo zero, quindi:

$$P(|Z| \geq \delta) = P(Z \geq \delta) + P(Z \leq -\delta) = 2P(Z \geq \delta) \quad (\text{B.18})$$

Utilizzando il criterio di Chernoff, la disequazione diventa:

$$P(Z \geq \delta) \leq e^{-\hat{v}\delta} E[e^{\hat{v}Z}] \quad (\text{B.19})$$

dove \hat{v} è la soluzione della seguente equazione:

$$E[Ze^{\hat{v}Z}] - \delta \cdot E[e^{\hat{v}Z}] = 0 \quad (\text{B.20})$$

Dopo diversi passaggi si ottiene

$$\delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{E[a_k e^{va_k}]}{E[e^{va_k}]} \quad (\text{B.21})$$

Risolvendo l'equazione, si ricava v per valori dati di δ . Dato che non esiste una soluzione in forma chiusa, occorre valutarla numericamente.

Inoltre, con simili passaggi, l'equazione del limite diventa:

$$P[|x(t_0, \bar{s})|^2 \geq w] \leq 2e^{-\hat{v}\delta} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} E[e^{\hat{v}a_k}] = P_{ub,SC} \quad (\text{B.22})$$

Per poter utilizzare le due equazioni in maniera numerica, è necessario trovare un intervallo di valori appropriato; per questo occorre limitare la funzione considerando valori k compresi tra:

$$-K_{\max} \leq k \leq K_{\max} \quad (\text{B.23})$$

Nel caso di IFDMA, se la lunghezza N del blocco in ingresso è maggiore di K_{\max} , la distribuzione della potenza istantanea del segnale IFDMA avrà come limite superiore la distribuzione del segnale a singola portante, perché gli ingressi del sistema saranno indipendenti tra loro nel range precedentemente descritto.

Considerando la modulazione BPSK, la cui costellazione è la seguente:

$$C_{BPSK} = \{-1, 1\} \quad (\text{B.24})$$

e la forma d'impulso a coseno rialzato è:

$$p(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T} \cdot \left(1 - 4\frac{\alpha^2 t^2}{T^2}\right)} \quad (\text{B.25})$$

dove $0 \leq \alpha \leq 1$ è il fattore di *roll-off*, l'equazione diventerà:

$$\sum_{k=-K_{\max}}^{K_{\max}} \frac{p(t_0 - kT)e^{\hat{v}p(t_0 - kT)} - p(t_0 - kT)e^{-\hat{v}p(t_0 - kT)}}{e^{\hat{v}p(t_0 - kT)} + e^{-\hat{v}p(t_0 - kT)}} \quad (\text{B.26})$$

Determinando \hat{v} dall'equazione (B.26), il limite superiore della CCDF

$$P\left[|x^{(BPSK)}(t_0, \bar{s})|^2 \geq w\right] \leq P_{ub,SC}^{(BPSK)} \quad (\text{B.27})$$

diventa:

$$P_{ub,SC}^{(BPSK)} = e^{-\hat{v}\delta} \left(\frac{1}{2}\right)^{2K_{\max}} \prod_{k=-K_{\max}}^{K_{\max}} e^{\hat{v}p(t_0 - kT)} + e^{-\hat{v}p(t_0 - kT)} \quad (\text{B.28})$$

La figura B.9 mostra $P_{ub,SC}^{(BPSK)}$ per $K_{\max} = 8$, $T = 1$ e $t_0 = \frac{T}{2} = 0.5$. I risultati empirici sono stati ottenuti tramite simulazioni di Monte Carlo, considerando fattori di roll-off α pari a 0, 0.2, 0.4 e 0.6. Le simulazioni sono ottenute generando 1000 blocchi BPSK casuali con 64 simboli per ogni blocco e calcolando un istogramma. Si può così vedere che il limite superiore derivato dalle precedenti equazioni può esser confrontato coi risultati empirici.

Un'altra interessante osservazione è data dal fatto che la potenza di picco, ad una data probabilità w , cresce al diminuire del fattore di roll-off α .

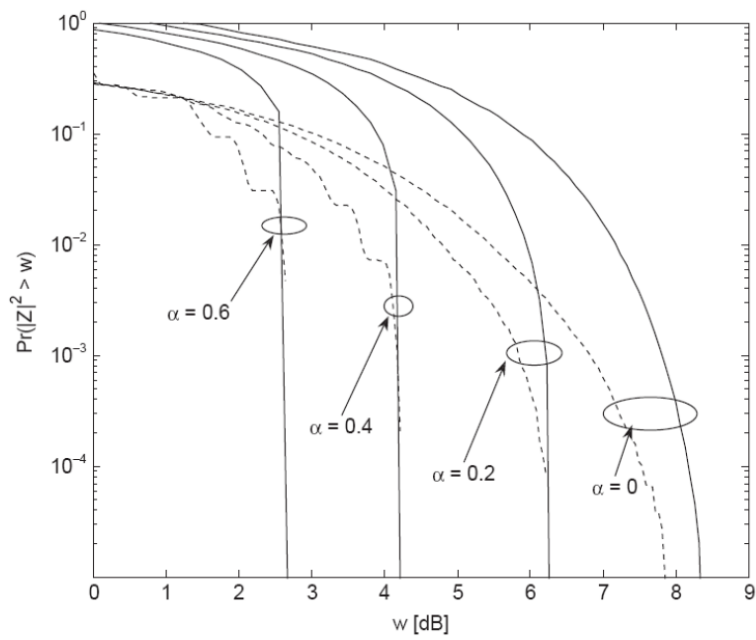


Figura B.9: CCDF della potenza istantanea della modulazione BPSK, per diversi fattori di roll-off.

Nel caso di un segnale OFDM multi portante, una funzione di distribuzione complementare del PAPR per N sottoportanti vale (si veda [39]):

$$P(PAPR \geq k) = 1 - (1 - e^{-k})^N \tag{B.29}$$

Appendice C

Sequenze di Zadoff-Chu (ZC)

Le sequenze di Zadoff-Chu sono sequenze numeriche periodiche definite partendo dalle radici complesse dell'unità. Esse appartengono alla famiglia delle sequenze polifase chirp-like (*Chirp-Like Polyphase Sequences*) [42] e sono caratterizzate da alcune proprietà fondamentali:

- ampiezza costante (proprietà CA, Constant Amplitude);
- funzione di autocorrelazione periodica ideale, ovvero impulsiva (proprietà ZAC, Zero AutoCorrelation function);
- funzione di cross-correlazione periodica ottima, ovvero la più piccola possibile tra tutti gli insiemi di sequenze aventi autocorrelazione impulsiva.
- robustezza contro il rumore

Grazie alle prime due proprietà, le sequenze di Zadoff-Chu sono anche dette CAZAC.

C.1 Proprietà delle sequenze periodiche

Le proprietà di autocorrelazione e cross-correlazione di una generica sequenza periodica sono tra loro legate. Si consideri infatti un insieme \mathbf{X} di K sequenze a valori complessi periodiche su N campioni, ovvero, per ogni sequenza $u \in \mathbf{X}$, $u_k = u_{k+N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. La cross-correlazione periodica $\theta_{u,v}(\cdot)$, con $u, v \in \mathbf{X}$ è pari a:

$$\theta_{u,v}(p) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k [v_{(k+p) \bmod N}]^*, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.1})$$

L'autocorrelazione periodica $\theta_u(\cdot)$ per la sequenza u è quindi $\theta_{u,u}(\cdot)$ e si assume che $\theta_u(0) = N$, $\forall u \in \mathbf{X}$. Inoltre l'ampiezza massima θ_a della funzione di autocorrelazione periodica (per $p \neq 0$) e l'ampiezza massima θ_c della funzione di cross-correlazione periodica sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \theta_a &= \max\{|\theta_u(p)| : u \in \mathbf{X}, 0 < p \leq N-1\} \\ \theta_c &= \max\{|\theta_{u,v}(p)| : u, v \in \mathbf{X}, u \neq v, 0 \leq p \leq N-1\} \end{aligned}$$

Si può dimostrare [1] che, per il generico insieme \mathbf{X} , le due grandezze sono legate dalla disuguaglianza

$$\left(\frac{\theta_c^2}{N}\right) + \frac{N-1}{N(K-1)} \left(\frac{\theta_a^2}{N}\right) \geq 1 \quad (\text{C.2})$$

La relazione (C.2) fornisce il limite inferiore per uno dei due parametri, quando l'altro è fissato. Questo limite è mostrato in figura C.1, dove θ_c^2/N è rappresentato sull'asse x , e θ_a^2/N sull'asse y . Per qualunque

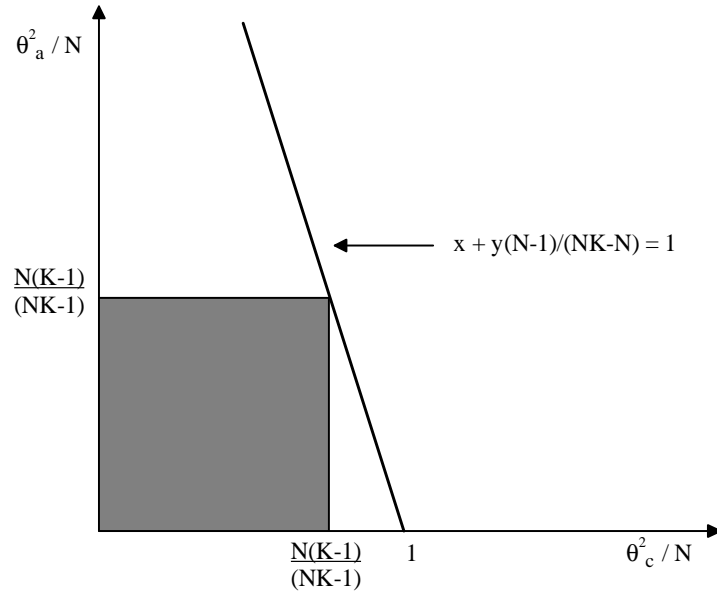


Figura C.1: Valori limite della funzione di autocorrelazione periodica [1].

insieme \mathbf{X} di K sequenze, il punto del piano $P = (\theta_c^2/N, \theta_a^2/N)$ non può giacere al di fuori del quadrato di lato N . Inoltre, per la relazione (C.2), P non può trovarsi al di sotto della retta di equazione $x + y(N-1)/(NK-N) = 1$. L'intersezione con l'asse x è sempre pari a 1, mentre quella con l'asse y è circa pari a K , per N e K grandi. Come si vedrà nel par. C.2.2, per le sequenze di ZC vale la condizione $K = N$, ovvero il numero delle sequenze dell'insieme è pari alla loro lunghezza.

La funzione di autocorrelazione periodica $\theta_u(p)$ di una generica sequenza $u_k \in \mathbf{X}$ è detta *ideale* quando soddisfa la relazione

$$\theta_u(p) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k u_{(k+p) \bmod N}^* = \begin{cases} N, & p = 0 \pmod{N} \\ 0, & p \neq 0 \pmod{N} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Considerando un insieme di sequenze con funzione $\theta_u(p)$ ideale e applicando la disuguaglianza C.2, si trova che la corrispondente ampiezza massima della cross-correlazione periodica rispetta la condizione

$$\theta_c \geq \sqrt{N} \quad (\text{C.4})$$

Ovvero, se $\theta_u(p)$ è sempre nulla (tranne quando $\theta_u(p) = 0$), il parametro θ_c non può essere inferiore a \sqrt{N} . Quando nella C.4 vale il segno di uguaglianza, si dice che le sequenze dell'insieme presentano cross-correlazione *ottima*, ovvero la minore possibile.

È inevitabile accettare un compromesso poiché, per un generico insieme di sequenze \mathbf{X} , i valori di θ_a e θ_c non possono essere nulli allo stesso tempo.

Nel prossimo paragrafo, dopo alcune definizioni generali, si descrivono le sequenze di Zadoff-Chu, e si ricavano le proprietà specifiche di auto e cross-correlazione periodica.

C.2 Proprietà delle sequenze ZC

C.2.1 Radici primitive dell'unità

Nell'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} l'unità si può rappresentare in modo equivalente come un esponenziale con rotazione angolare multipla di 2π :

$$\exp(j2\pi q) = 1 \quad \text{con } r \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.5})$$

Considerando l'equazione

$$z^N = 1 \quad (\text{C.6})$$

con $z \in \mathbb{C}$, e sostituendo la (C.5) nella (C.6) si trova

$$z_q = \exp\left(\frac{j2\pi q}{N}\right) \quad q \in \{0, 1, \dots, (N-1)\} \quad (\text{C.7})$$

I numeri complessi z_q per cui q è primo relativo con N sono *radici primitive dell'unità*:

$$W_{q,N} = \exp\left(\frac{j2\pi q}{N}\right) \quad q : \text{gcd}(q, N) = 1 \quad (\text{C.8})$$

Quando N è un numero primo, q è sempre primo relativo con N , tranne per $q = 0 \pmod{N}$, e quindi si trovano $(N-1)$ radici primitive dell'unità. Inoltre, per ogni intero u , compreso nell'intervallo $0 < u \leq (N-1)$, vale la relazione:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_{q,N}^{\pm uk} = 0 \quad (\text{C.9})$$

Infatti

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_{q,N}^{\pm uk} = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi qu}{N}\right)^{\pm k}$$

Ricordando la relazione $\sum_{k=0}^{N-1} a_k = \frac{1-a^N}{1-a}$, e poiché u è sempre primo relativo con N , se N è primo, si ottiene

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi qu}{N}\right)^{\pm k} = \frac{1 - \exp\left(\frac{j2\pi qu}{N}\right)^N}{1 - \exp\left(\frac{j2\pi qu}{N}\right)} = \frac{1-1}{1 - \exp\left(\frac{j2\pi qu}{N}\right)} = 0 \quad (\text{C.10})$$

Quando $u = 0$ la sommatoria nella (C.9) diventa

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_{q,N}^{\pm 0k} = N \quad (\text{C.11})$$

Le radici primitive rappresentano il punto di partenza per generare le sequenze chirp-like, di cui fanno parte le sequenze ZC. Anche nel sistema LTE sono state scelte radici N -esime dell'unità per cui N è un numero primo. In tal modo si ottengono $(N-1)$ radici primitive, dalle quali vengono generate altrettante sequenze ZC distinte con proprietà ottimali.

C.2.2 Definizione delle sequenze ZC

La definizione generale delle sequenze di Zadoff-Chu si differenzia a seconda che la loro lunghezza N sia un numero pari o dispari:

$$x_q(n) = \begin{cases} W_{q,N}^{n^2/2+nr} & \text{con } N \text{ pari} \\ W_{q,N}^{n(n+1)/2+nr} & \text{con } N \text{ dispari} \end{cases} \quad \text{per } n = 0, 1, \dots, (N-1) \text{ e } r \text{ qualunque} \quad (\text{C.12})$$

dove $W_{q,N}$ è definita nella (C.8).

Poiché $|W_{q,N}| = 1$, una generica sequenza ZC ha ampiezza costante e unitaria (proprietà CA, ovvero Constant Amplitude), così come la sua DFT. Questa proprietà è molto utile, soprattutto nella tratta di Uplink LTE, perché limita il PAPR del segnale trasmesso. Inoltre semplifica l'implementazione in quanto è necessario calcolare e memorizzare solo la fase della sequenza.

Tale distinzione permette di dimostrare, per qualunque valore di N , che le sequenze ZC sono periodiche su N campioni [42], ovvero

$$x_q(n + d - N) = x_q(n + d) \quad (\text{C.13})$$

Il parametro d è un ritardo arbitrario espresso in campioni. Ipotizzando che N sia pari e sostituendo la definizione (C.12) nella (C.13), si ottiene

$$\begin{aligned} x_q(n + d - N) &= W_{q,N}^{(n+d-N)^2/2+(n+d-N)r} \\ &= W_{q,N}^{[(n+d)^2-2N(n+d)+N^2]+(n+d-N)r} \end{aligned}$$

Eliminando i termini che presentano N a esponente, si trova

$$x_q(n + d - N) = W_{q,N}^{(n+d)^2/2+(n+d)r} = x_q(n + d) \quad (\text{C.14})$$

Per N dispari la dimostrazione è simile.

L'espressione generale della lunghezza N è pari a $N = sm^2$, dove s e m sono interi positivi. In LTE la lunghezza delle sequenze ZC è un numero primo: dunque $m = 1$ e s è primo. Inoltre la traslazione temporale r è sempre nulla [11]. In figura C.2 sono illustrate la parte reale e immaginaria di una sequenza ZC generata secondo lo standard LTE.

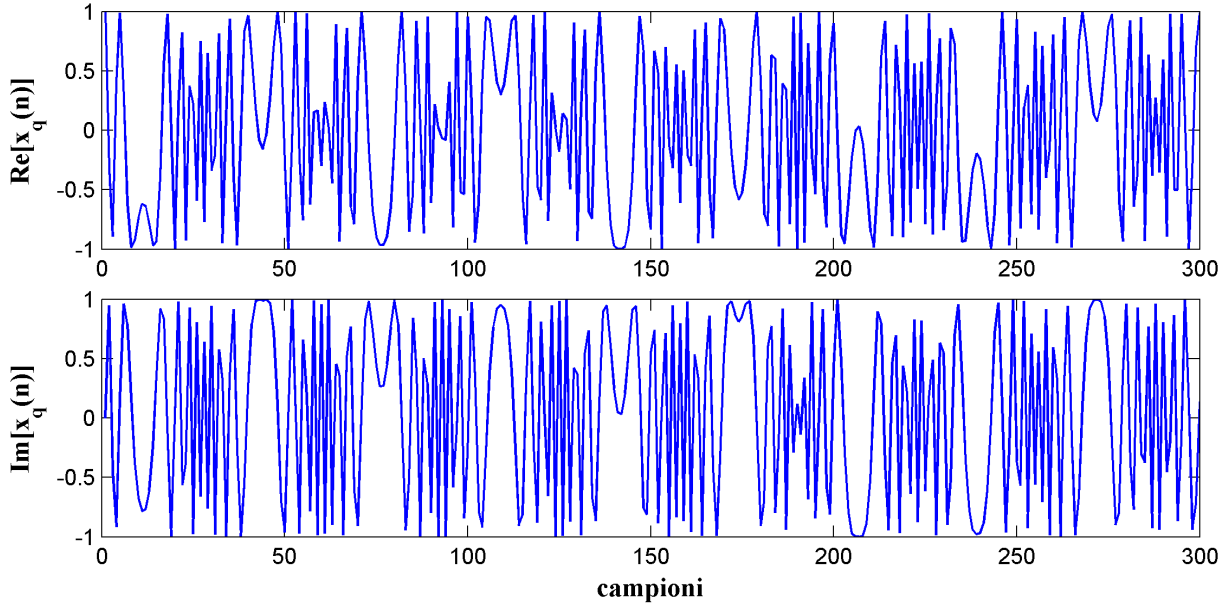


Figura C.2: Parte reale (in alto) e immaginaria (in basso) di una sequenza ZC generata secondo lo standard LTE.

C.2.3 Funzione di autocorrelazione periodica

Le sequenze di Zadoff-Chu presentano una funzione di autocorrelazione periodica ideale, definita nell'espressione (C.3).

Infatti, sostituendo la definizione (C.12) per N pari nell'espressione dell'autocorrelazione periodica (C.3) si trova:

$$\begin{aligned}
 \theta_x(p) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_q(k) x_q^*[(k+p) \bmod N] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} W_{q,N}^{(k^2/2+kr)} \cdot W_{q,N}^{-[(k+p)^2/2+(k+p)r]} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} W_{q,N}^{-(kp+p^2/2+pr)} \\
 &= W_{q,N}^{-(p^2/2+pr)} \sum_{k=0}^{N-1} W_{q,N}^{-kp}
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Grazie alle relazioni (C.9) e (C.11) si trova che la sommatoria nella (C.15) è pari a N per $p = 0$ ed è sempre nulla in tutti gli altri casi. La dimostrazione per N dispari è simile.

Si conclude che l'autocorrelazione periodica delle sequenze ZC è ideale. Questa proprietà viene spesso chiamata ZAC, over Zero Auto-Correlation e le sequenze che la posseggono sono chiamate *perfette* (perfect) [42].

C.2.4 Funzione di cross-correlazione periodica

La definizione (C.1) permette di calcolare la cross-correlazione periodica tra due generiche sequenze periodiche distinte.

Quando un insieme di sequenze periodiche gode della proprietà di autocorrelazione ideale, la condizione (C.4) impone che l'ampiezza massima della cross-correlazione periodica non possa essere minore di \sqrt{N} . In presenza di specifiche condizioni, le sequenze ZC consentono di raggiungere tale limite inferiore e perciò la loro cross-correlazione periodica è detta *ottima*.

Si considerino in proposito due sequenze ZC distinte $x_q(n)$ e $y_v(n)$ di pari lunghezza N , con N dispari, ottenute da radici primitive dell'unità diverse $W_{q,N}$ e $W_{v,N}$:

$$\begin{aligned}
 x_q(n) &= W_{q,N}^{n(n+1)/2+nr} \\
 y_v(n) &= W_{v,N}^{n(n+1)/2+nr}
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

con $n = 0, 1, \dots, (N-1)$, $q \neq v$, $\gcd(q, N) = 1$, $\gcd(v, N) = 1$.

Il valore assoluto della funzione di cross-correlazione periodica tra le due sequenze $x_q(n)$ e $y_v(n)$ è costante e uguale a \sqrt{N} , se $(q-v)$ è primo relativo con N , ovvero $\gcd[(q-v), N] = 1$.

Infatti, calcolando il modulo elevato al quadrato della cross-correlazione periodica

$$|\theta_{xy}(p)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} x_q(k) y_v^*(k+p) \sum_{l=0}^{N-1} x_q^*(l) y_v(l+p) \tag{C.17}$$

e sostituendo le sequenze (C.16) nella (C.17), si ottiene

$$\begin{aligned}
 |\theta_{xy}(p)|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp \left\{ \frac{j2\pi q}{N} [k(k+1)/2 - l(l+1)/2 + r(k-l)] \right\} \cdot \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{j2\pi v}{N} [(k+p)(k+p+1)/2 - (l+p)(l+p+1)/2 + r(k-l)] \right\}
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

Consideriamo, a questo punto, i soli esponenti dell'espressione (C.18). Sviluppando il primo esponente si trova:

$$q \left[\frac{k(k+1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} + r(k-l) \right] = q(k-l) \left[\frac{(k+l+1)}{2} + r \right] \quad (\text{C.19})$$

Il secondo esponente diventa:

$$-v \left[\frac{(k+p)(k+p+1) - (l+p)(l+p+1)}{2} + r(k-l) \right] = -v(k-l) \left[\frac{(k+l+1)}{2} + r \right] - vp(k-l) \quad (\text{C.20})$$

Sostituendo le espressioni (C.20) e (C.19) nella (C.18) si ottiene

$$|\theta_{xy}(p)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp \left[\frac{j2\pi(q-v)}{N} (k-l) \left(\frac{k+l+1}{2} + r \right) - vp(k-l) \right] \quad (\text{C.21})$$

Si introduca nella (C.21) il cambiamento di variabili

$$l = k + e \quad \text{dove } e = 0, 1, \dots, (N-1)$$

si trova

$$|\theta_{xy}(p)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{e=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{j2\pi(q-v)}{N} e \left(\frac{2k+e+1}{2} + r \right) + vpe \right]$$

Questa espressione può essere riscritta come

$$|\theta_{xy}(p)|^2 = \sum_{e=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{j2\pi(q-v)}{N} e \left(\frac{e+1}{2} + r \right) + vpe \right] \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left[-\frac{j2\pi(q-v)}{N} ek \right] \quad (\text{C.22})$$

Quando $e = 0 \pmod N$, la sommatoria di indice e si semplifica, perché composta da un solo termine, mentre quella di indice k è pari a N .

Altrimenti, per $1 \leq e \leq N-1$, la sommatoria in k è sempre nulla. Infatti, grazie all'ipotesi che $\gcd[(q-v), N] = 1$, l'esponenziale $\exp \left(-\frac{j2\pi(q-v)}{N} k \right)$ è una radice primitiva dell'unità; quando $e \neq 0$ la sommatoria in k è perfettamente identica all'espressione (C.9) e quindi è sempre nulla.

Si conclude che

$$|\theta_{xy}(p)| = \begin{cases} \sqrt{N} & \text{se } e = 0 \pmod N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

e la proprietà di cross-correlazione ottima per le sequenze ZC è dimostrata.

Questa proprietà si verifica solo per sequenze di lunghezza dispari. Infatti, se N è pari e poiché, per ipotesi, gli interi q e v sono primi relativi con N , essi devono essere entrambi dispari. Di conseguenza, l'intero $(q-v)$ deve essere per forza pari, poiché è la differenza tra due interi dispari. Quindi $\gcd[(q-v), N] \geq 2$ e la condizione di primalità, centrale nella dimostrazione, viene meno.

Inoltre, se N è primo, tutte le $N-1$ sequenze ZC, ottenute dalle corrispondenti radici primitive, presentano a coppie una cross-correlazione ottima.

C.3 Proprietà delle sequenze ZC utilizzate in LTE

Nel par. 2.4.1 sono stati descritti i DeModulation Reference Signals (DMRS), sequenze pilota associate alla trasmissione del canale PUSCH. Quando il numero di Resource Blocks allocati all'utente rispetta la condizione $N_{used}^{RB} \geq 3$, i DMRS sono generati a partire da sequenze ZC. Tali sequenze hanno un ruolo centrale nello sviluppo e nel funzionamento degli algoritmi di sincronizzazione (cap. 3) e stima di canale (cap. 4). L'analisi delle loro caratteristiche permette di comprendere quali difficoltà si incontrano nell'applicazione pratica di questi algoritmi e come è possibile affrontarle.

In particolare, vengono analizzati i seguenti aspetti:

- la resistenza al rumore AWGN dell'autocorrelazione periodica;
- l'influenza del Channel Frequency Offset (CFO);
- il pattern di ripetizione dei RS all'interno di una generica trama LTE.

C.3.1 Resistenza dell'autocorrelazione periodica al rumore AWGN

Come dimostrato nel par. C.2.3, una sequenza ZC $u(n)$ di N campioni presenta un'autocorrelazione periodica $\theta_u(p)$ ideale, definita dall'espressione:

$$\theta_u(p) = \begin{cases} N, & p = 0 \pmod{N} \\ 0, & p \neq 0 \pmod{N} \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

La (C.24), valida in assenza di perturbazioni, permette di localizzare la sequenza $u(n)$ in un generico segnale ricevuto $r(n)$. Infatti, calcolando la cross-correlazione $\theta_{ru}(n)$ tra il segnale $r(n)$ e una replica di $u(n)$, si ottiene un picco di valore elevato in corrispondenza della posizione di $u(n)$ nel segnale. Questa tecnica rappresenta il fondamento degli algoritmi di sincronizzazione discussi nel cap. 3.

Quando il segnale ricevuto è perturbato da rumore AWGN, i valori di $\theta_u(p)$ per $p \neq 0$ non si annullano e, al crescere della potenza di rumore, si avvicinano al valore massimo $\theta_u(0)$ confondendosi con esso. La localizzazione della sequenza u nel segnale ricevuto diventa via via più difficile e le prestazioni della sincronizzazione subiscono un forte degrado.

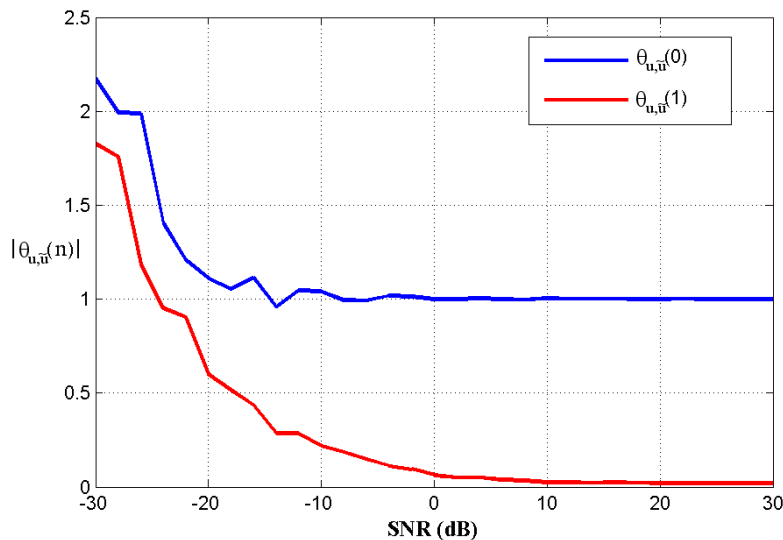


Figura C.3: Modulo di $\theta_{u,\tilde{u}}(p)$, calcolata in $p = \{0, 1\}$, in funzione dell'SNR. I parametri della sequenza ZC sono $B_W = 5$ MHz e $N_{used}^{RB} = 25$.

Lo studio dell'andamento di $\theta_u(p)$ in presenza di rumore permette di capire l'intervallo di valori di SNR per cui si può garantire il funzionamento degli algoritmi di sincronizzazione, in assenza di altre perturbazioni.

L'esperimento condotto consiste nel calcolare la cross-correlazione periodica

$$\theta_{u,\tilde{u}}(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_{(k)} [\tilde{u}_{(k+p) \bmod N}]^*$$

tra la sequenza ZC $u(n)$ e una sua replica $\tilde{u}(n)$

$$\tilde{u}(n) = u(n) + w(n)$$

dove $w(n)$ è il rumore AWGN con potenza σ_w^2 .

In figura C.3 è rappresentato l'andamento di $|\theta_{u,\tilde{u}}(p)|$ in funzione dell'SNR, per $p = \{0, 1\}$. I valori della funzione $|\theta_{u,\tilde{u}}(p)|$ per $p > 1$ non vengono disegnati perché variano in modo simile a $\theta_{u,\tilde{u}}(1)$. La sequenza ZC $u(n)$ è utilizzata per generare i RS di una trasmissione PUSCH con banda di sistema $B_W = 5$ MHz e banda allocata $N_{used}^{RB} = 25$.

Si osserva che, per SNR maggiori di -10 dB, il valore di $\theta_{u,\tilde{u}}(0)$ diventa costante e pari a 1, come in condizioni ideali. Anche $\theta_{u,\tilde{u}}(1)$ tende al suo valore ideale quando il rumore si riduce mentre si avvicina pericolosamente a $\theta_{u,\tilde{u}}(0)$ per $SNR \leq -20$ dB.

Si conclude che le sequenze di ZC utilizzate in LTE sono molto resistenti al rumore AWGN [2]. Infatti è possibile individuarle nel segnale ricevuto anche per valori di SNR molto ridotti.

C.3.2 L'influenza del Channel Frequency Offset (CFO) sui RS

Nel sistema LTE, una generica sequenza ZC è definita dall'espressione (par. 2.4.2)

$$X_q(k) = \exp \left[-j\pi q \frac{k(k+1)}{N_{ZC}} \right], \quad 0 \leq k \leq (N_{ZC} - 1) \quad (C.25)$$

dove la lunghezza della sequenza N_{ZC} è un numero primo e q è la radice primitiva della sequenza. Le sequenze ZC sono definite nel dominio della frequenza e successivamente antitrasformate.

Si definisca inoltre la sequenza $\tilde{X}_q(k)$

$$\tilde{X}_q(k) = X_q(k) * \mathcal{F}[\exp(j2\pi\epsilon n/N_{ZC})] \quad (C.26)$$

che rappresenta una replica di $X_q(n)$ perturbata dal CFO $\epsilon = \nu_D/\Delta f$. Si può dimostrare [43] che la DFT della sequenza ZC $X_q(k)$ è pari a una versione coniugata e scalata nel tempo della sequenza stessa:

$$X_q(k) = DFT [x_q(n)] = x_q^*(u^{-1}k) \cdot X_q(0) \quad (C.27)$$

Trascurando scalamento e coniugazione, si può dire che la sequenza $X_q(k)$ e la sua antitrasformata coincidono, ovvero:

$$x_q(n) = \mathcal{F}^{-1}[X_q(k)] = \exp \left[-j\pi q \frac{n(n+1)}{N_{ZC}} \right], \quad 0 \leq n \leq (N_{ZC} - 1) \quad (C.28)$$

La IDFT della sequenza perturbata (C.26) diventa:

$$\tilde{x}_q(n) = x_q(n) \cdot \exp(j2\pi\epsilon n/N_{ZC}) \quad (C.29)$$

Si calcoli la cross-correlazione

$$\theta_{x,\tilde{x}}(p) = \frac{1}{N_{ZC}} \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} x_q(n) [\tilde{x}_q(n+p)]^* \quad (C.30)$$

tra la sequenza originale e la replica perturbata dal CFO. Sviluppando la (C.30) si trova

$$\theta_{x,\tilde{x}}(p) = \frac{1}{N_{ZC}} \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} [x_q(n)x_q^*(n+p)] \cdot \exp(-j2\pi\varepsilon(n+p)/N_{ZC}) \quad (\text{C.31})$$

La variazione di $\theta_{x,\tilde{x}}(p)$ in $p = 0$ al variare dell'intensità del CFO permette di capire l'influenza di questo disturbo sulla riconoscibilità della sequenza $x_q(n)$. Sostituendo $p = 0$ nella (C.31) si ottiene:

$$\begin{aligned} \theta_{x,\tilde{x}}(0) &= \frac{1}{N_{ZC}} \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} |x_q(n)|^2 \cdot \exp(-j2\pi\varepsilon n/N_{ZC}) \\ &= \frac{1}{N_{ZC}} \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\sin(\pi\varepsilon/N_{ZC})} \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Il modulo di $\theta_{x,\tilde{x}}(0)$ per $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ è mostrato in figura C.4

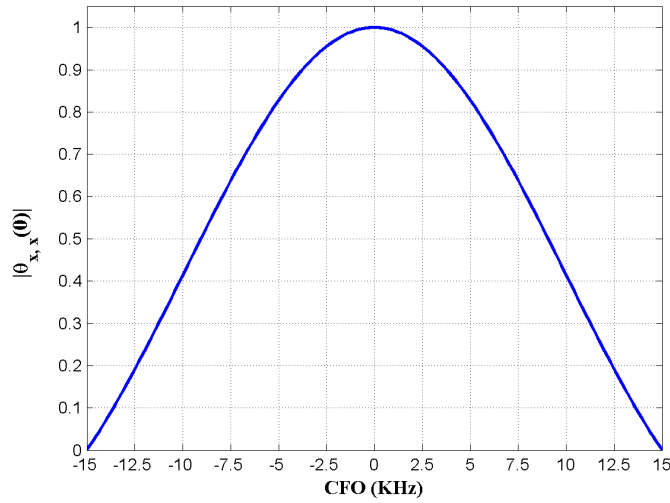


Figura C.4: Modulo di $\theta_{x,\tilde{x}}(p)$ calcolata in $p = 0$, in funzione del CFO.

L'effetto descritto è stato incontrato nel derivare gli algoritmi di sincronizzazione. La riduzione di $|\theta_{x,\tilde{x}}(0)|$ rende difficile, o impossibile, la localizzazione del RS nel segnale ricevuto e provoca il fallimento della sincronizzazione. Per affrontare il problema, nel par. 3.3.1.2 è stata introdotta la tecnica di correzione cieca del CFO.

C.3.3 Il pattern di ripetizione dei RS nella trama

Come visto nel par. 2.4.2, ciascuna sequenza RS è identificata dalla terna di parametri u , v e α . Ogni trama LTE è composta da 20 slot. Ciascuno di essi contiene un RS in posizioni prestabilite. I valori di u e v per i RS della trama sono stabiliti dalla modalità di hopping scelta tra:

- Sequence Group Hopping (SGH); il parametro $u \in \{0, \dots, 29\}$ varia da uno slot al successivo secondo uno schema pseudocasuale, mentre v rimane costante;
- Sequence Hopping (SH); il parametro $v \in \{0, 1\}$ varia da uno slot al successivo secondo uno schema pseudocasuale, mentre u rimane costante;
- SGH e SH disabilitati; sia u che v assumono lo stesso valore per ciascuno slot.

Indipendentemente dalla modalità di hopping, la traslazione angolare $\alpha = m(\pi/6)$, con $m = 0, 1, \dots, (N_\alpha - 1)$ e $N_\alpha = 12$, varia in modo pseudocasuale dopo ogni slot.

Per studiare la ridondanza dei RS nella trama si costruisce una matrice \mathbf{A} contenente, nella colonna i -esima, la

terna di parametri u, v, α del RS trasmesso nell' i -esimo slot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_0 & \dots & u_i & \dots & u_{19} \\ v_0 & \dots & v_i & \dots & v_{19} \\ \alpha_0 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_{19} \end{bmatrix} \quad (\text{C.33})$$

Se due colonne m, n di \mathbf{A} contengono gli stessi elementi, allora i corrispondenti RS coincidono. In particolare, è utile ricavare il numero massimo di volte N_{MAX}^{RS} in cui un RS si ripete nella trama, per ogni configurazione distinta dei parametri di generazione. In figura C.5 è mostrata la distribuzione del parametro N_{MAX}^{RS} quando sia il SH sia il SGH sono disabilitati. In questo caso il RS più frequente si ripete nella trama da 3 a un massimo

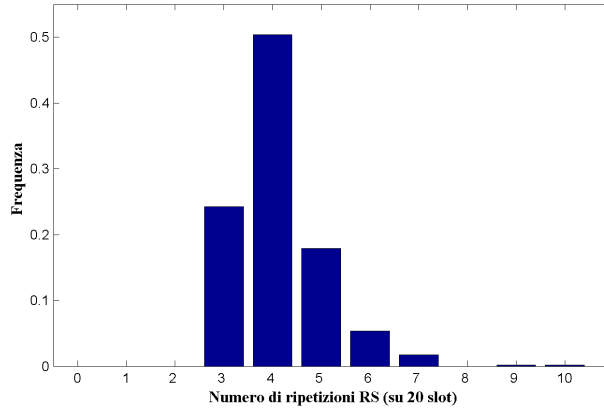


Figura C.5: Distribuzione del parametro N_{MAX}^{RS} al variare dei parametri di configurazione dei RS, quando SH e SGH sono disabilitati.

di 10 volte. Le distribuzioni per SGH abilitato e SH abilitato sono mostrate in figura C.6. L'algoritmo di

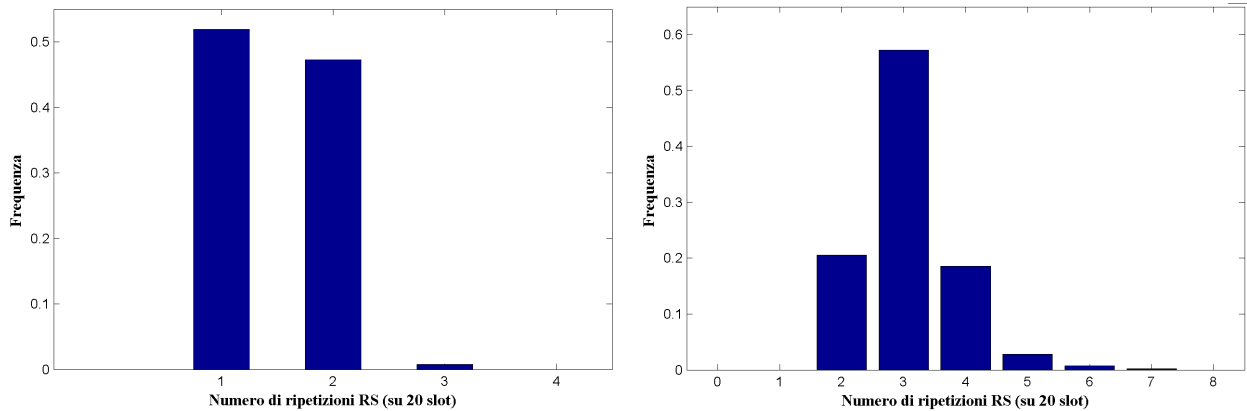


Figura C.6: Distribuzione del parametro N_{MAX}^{RS} al variare dei parametri di configurazione dei RS. A sinistra il caso con SGH abilitato; a destra il caso con SH abilitato.

sincronizzazione in frequenza, discusso nel par. 3.3.1, cerca nel segnale ricevuto la posizione di un RS. Sfruttando la ridondanza dei RS, ovvero cercando il RS più presente nella trama, l'algoritmo ottiene più informazioni, a parità di campioni elaborati.

Il secondo aspetto affrontato concerne l'unicità della serie costituita dai primi K RS della trama.

Si consideri nuovamente la matrice \mathbf{A} , e si costruisca una matrice \mathbf{B}_K formata dalle prime K colonne di \mathbf{A} :

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{K-1} \\ v_0 & v_1 & \dots & v_{K-1} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{K-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

per $1 \leq K \leq 20$. Si costruisca ora l'insieme di matrici $\mathbf{A}_{i,K}$, contenenti K colonne consecutive della matrice \mathbf{A} , a partire dalla colonna i -esima, con $1 \leq i \leq (20 - K)$. Ad esempio, la matrice $\mathbf{A}_{4,3}$ è data da

$$\mathbf{A}_{4,3} = \begin{bmatrix} u_4 & u_5 & u_6 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Si confronti la matrice \mathbf{B}_K con ciascuna delle matrici $\mathbf{A}_{i,K}$. Se \mathbf{B}_K coincide con almeno una delle matrici $\mathbf{A}_{i,K}$, la sequenza dei primi K RS si ripete in più punti della trama. In questo caso, si costruiscono nuove matrici \mathbf{B}_K e $\mathbf{A}_{i,K}$ con $K = K + 1$ e si ripete il confronto. Quando nessuna delle $\mathbf{A}_{i,\bar{K}}$ coincide con $\mathbf{B}_{\bar{K}}$, si può dire che la sequenza dei primi \bar{K} RS è univoca. Come discusso nel par. 3.3.2, localizzando le posizioni dei primi \bar{K} RS nel segnale ricevuto, è possibile calcolare la posizione iniziale di una generica trama senza ambiguità.

La ripetizione del procedimento descritto per tutti i parametri di configurazione dei RS permette di costruire le seguenti figure. In figura C.7 è rappresentata la distribuzione dei valori del parametro \bar{K} quando sia il SH sia il SGH sono disabilitati. In figura C.8 è rappresentato la distribuzione di \bar{K} quando il SH è abilitato.

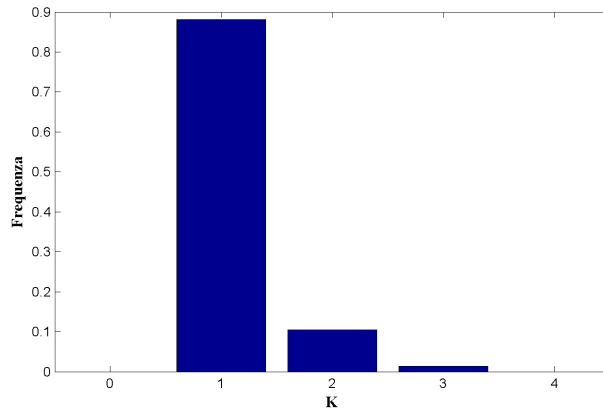


Figura C.7: Distribuzione dei valori del parametro \bar{K} quando sia il SH sia il SGH sono disabilitati.

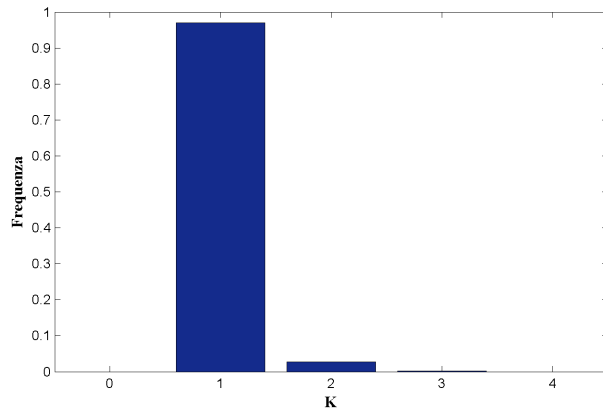


Figura C.8: Distribuzione dei valori del parametro \bar{K} quando il SH è abilitato.

Il caso di SGH abilitato non viene riportato poiché si verifica sempre la condizione $\bar{K} = 1$.

Appendice D

Soluzione di sistemi lineari con simmetria di Toeplitz

I metodi presentati risolvono il generico sistema lineare

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (\text{D.1})$$

dove \mathbf{T} è una matrice di Toeplitz, con un costo molto inferiore rispetto alle $O(P^3)$ moltiplicazioni necessarie in assenza di simmetrie. Il sistema generico ha la stessa struttura del problema (4.59), associato allo stimatore MMSE adattativo; per verificarlo basta introdurre le seguenti sostituzioni $\mathbf{T} = (\hat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_P)$, $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{H}}_{ZF}$ e $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{H}}_{part}$.

Le matrici di Toeplitz appartengono alla classe delle matrici persimmetriche. Una matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{P \times P}$ è persimmetrica se è simmetrica rispetto alla sua antidiagonale, ovvero se $a_{i,j} = a_{(P-j+1),(P-i+1)}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, P\}$. Tale condizione si esprime in forma matriciale come

$$\mathbf{T} = \mathbf{E}(\mathbf{T})^T \mathbf{E} \quad (\text{D.2})$$

dove la matrice \mathbf{E} è la *exchange matrix* $P \times P$, un caso particolare di matrice di permutazione, di espressione

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Le matrici di Toeplitz sono persimmetriche e l'inversa di una matrice di Toeplitz non singolare è persimmetrica, ma *non* necessariamente di Toeplitz.

Gli sviluppi successivi sono adattati al caso specifico affrontato, cioè a una matrice \mathbf{T} con le seguenti proprietà:

- la matrice è definita positiva, cioè gli autovalori sono tutti maggiori di zero, ovvero la forma quadratica $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \neq 0 \forall \mathbf{x} \neq 0 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^P$.
- la matrice presenta simmetria di Toeplitz e hermitiana
- gli elementi sulla diagonale principale di \mathbf{T} sono unitari, cioè $t_{k,k} = 1 \forall k \in \{1, 2, \dots, P\}$. In caso contrario, sia \mathbf{T} che il vettore dei termini noti \mathbf{b} vengono normalizzati per il coefficiente $t_{0,0}$.

D.1 Algoritmo di Levinson

Prima di calcolare la soluzione del sistema (D.1) è necessario affrontare un secondo problema, descritto dalle equazioni di Yule-Walker

$$\mathbf{T}_P \mathbf{y} = -\mathbf{r} = -[r_1, \dots, r_P]^T \quad (\text{D.4})$$

Si supponga di aver calcolato la soluzione del sistema di equazioni di Yule-Walker

$$\mathbf{T}_k \mathbf{y} = -\mathbf{r} = -[r_1, \dots, r_k]^T$$

per qualche valore di k : $1 \leq k \leq P-1$; grazie all'algoritmo di Durbin [37], il sistema lineare di ordine $(k+1)$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_k & \mathbf{E}_k \mathbf{r}^* \\ \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ r_{k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

si può risolvere in $O(k)$ operazioni. Sviluppando la (D.5) si ottengono le espressioni

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{T}_k)^{-1} \mathbf{r} - \alpha (\mathbf{T}_k)^{-1} \mathbf{E}_k \mathbf{r}^* \quad (\text{D.6})$$

$$\alpha = -r_{k+1} - \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k \mathbf{z} \quad (\text{D.7})$$

Dato che: a) $-(\mathbf{T}_k)^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{y}$; b) $(\mathbf{T}_k)^{-1}$ è persimmetrica, cioè $\mathbf{T}_k^{-1} = \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^{-1})^T \mathbf{E}_k$ (formula D.2); c) $\mathbf{E}_k \mathbf{E}_k = \mathbf{I}_k$; d) $\mathbf{T}_k^T = \mathbf{T}_k^*$; la (D.6) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{y} - \alpha \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^{-1})^T \mathbf{E}_k \mathbf{E}_k \mathbf{r}^* \\ &= \mathbf{y} - \alpha \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^T)^{-1} \mathbf{r}^* \\ &= \mathbf{y} - \alpha \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^*)^{-1} \mathbf{r}^* \end{aligned}$$

In conclusione

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + \alpha \mathbf{E}_k \mathbf{y}^* \quad (\text{D.8})$$

La sostituzione della (D.8) nella (D.7) porta all'espressione

$$\begin{aligned} \alpha &= -r_{k+1} - \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k (\mathbf{y} + \alpha \mathbf{E}_k \mathbf{y}^*) \\ &= -(r_{k+1} + \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k \mathbf{y}) / (1 + \mathbf{r}^T \mathbf{y}^*) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Le espressioni (D.8) e (D.9) rappresentano il passo k -esimo dell'algoritmo di Durbin. La definizione completa è presentata nel seguente pseudocodice. Il vettore $\mathbf{z}^{(k)}$ può anche essere omissso.

```

% Coefficienti equazioni YW.
r_i = [r_0 = 1, r_1, ..., r_P]
% Matrice del problema.
T_{i,j} = (r_{|i-j|}) ;
% Equazioni di Yule Walker.
T y = - r = -[r_1, ..., r_P] ;
% Valore iniziale della soluzione.
y^{(1)} = -r_1
% Inizio del ciclo.
for (k = 1 : P - 1)
    beta_k = 1 + r^{(k)T} (y^{(k)})^*
    alpha_k = -(r_{k+1} + r^{(k)T} E_k y^{(k)}) / beta_k

```

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{E}_k (\mathbf{y}^{(k)})^*$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{(k)} \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

end

Il costo totale dell'algoritmo è pari a $C_{durbin} = 3P^2 - 2P - 1$ operazioni complesse. Infatti, considerando il costo di ogni iterazione, si trova che il calcolo di β_k è composto da k moltiplicazioni e k somme; il calcolo di α_k richiede $k + 1$ moltiplicazioni e k somme, infatti il prodotto matrice-vettore $\mathbf{E}_k \mathbf{y}^{(k)}$ non deve essere calcolato, è sufficiente ribaltare sotto-sopra il vettore $\mathbf{y}^{(k)}$; infine, il termine $\mathbf{z}^{(k)}$ si ottiene effettuando k moltiplicazioni per il prodotto tra lo scalare α_k e il vettore $\mathbf{E}_k (\mathbf{y}^{(k)})^*$ e k somme. Si effettuano in tutto $P - 1$ cicli, dunque il numero totale di moltiplicazioni è

$$C_{durbin}^{prod} = \sum_{k=1}^{P-1} (3k + 1) = 1.5P^2 - 0.5P - 1 \quad (D.10)$$

Il numero totale di somme è pari a

$$C_{durbin}^{sum} = \sum_{k=1}^{P-1} 3k = 1.5P^2 - 1.5P \quad (D.11)$$

Infine il numero totale di operazioni complesse è

$$C_{durbin} = C_{durbin}^{prod} + C_{durbin}^{sum} = 3P^2 - 2P - 1 \simeq 3P^2 \quad (D.12)$$

La soluzione del sistema (D.1), lineare e di Toeplitz si ottiene con un processo iterativo molto simile all'algoritmo di Durbin. Si supponga di aver risolto il sistema

$$\mathbf{T}_k \mathbf{x} = \mathbf{b} = [b_1, \dots, b_k]^T$$

per qualche valore di $k : 1 \leq k \leq P - 1$; Si voglia ora risolvere il sistema lineare di ordine $(k + 1)$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_k & \mathbf{E}_k \mathbf{r}^* \\ \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} \quad (D.13)$$

dove il vettore \mathbf{r} è pari a $[r_1, \dots, r_P]^T$; inoltre è nota la soluzione del sistema di Yule-Walker $\mathbf{T}_k \mathbf{y} = -\mathbf{r}$, di ordine k . Sviluppando la (D.13) si ottengono le espressioni

$$\mathbf{v} = (\mathbf{T}_k)^{-1} \mathbf{b} - \mu (\mathbf{T}_k)^{-1} \mathbf{E}_k \mathbf{r}^* \quad (D.14)$$

$$\mu = b_{k+1} - \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k \mathbf{v} \quad (D.15)$$

Dato che: a) $(\mathbf{T}_k)^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{x}$; b) $(\mathbf{T}_k)^{-1}$ è persimmetrica, cioè $\mathbf{T}_k^{-1} = \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^{-1})^T \mathbf{E}_k$; c) $\mathbf{E}_k \mathbf{E}_k = \mathbf{I}_k$; d) $\mathbf{T}_k^T = \mathbf{T}_k^*$; la (D.14) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{x} - \mu \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^{-1})^T \mathbf{E}_k \mathbf{E}_k \mathbf{r}^* \\ &= \mathbf{x} - \mu \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^T)^{-1} \mathbf{r}^* \\ &= \mathbf{x} - \mu \mathbf{E}_k (\mathbf{T}_k^*)^{-1} \mathbf{r}^* \end{aligned}$$

In conclusione

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mu \mathbf{E}_k \mathbf{y}^* \quad (D.16)$$

Sostituendo la (D.16) nella (D.15) si ricava l'espressione

$$\begin{aligned}\mu &= b_{k+1} - \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k (\mathbf{x} + \mu \mathbf{E}_k \mathbf{y}^*) \\ &= (b_{k+1} - \mathbf{r}^T \mathbf{E}_k \mathbf{x}) / (1 + \mathbf{r}^T \mathbf{y}^*)\end{aligned}\quad (\text{D.17})$$

La transizione dallo stato k allo stato $k+1$ avviene in $O(k)$ operazioni. La soluzione del sistema (D.4) si ottiene risolvendo simultaneamente i due sistemi

1. $\mathbf{T}_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ per $k = 1 : P-1$
2. $\mathbf{T}_k \mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{r}^{(k)}$ per $k = 1 : P-2$

L'algoritmo descritto è dovuto a Levinson [37]: la definizione completa è presentata nel seguente pseudocodice. Il vettore $\mathbf{z}^{(k)}$ può anche essere omissso.

```

% Coefficienti matrice di Toeplitz.
r_i = [r_0 = 1, r_1, ..., r_{P-1}]
% Matrice del problema.
T_{i,j} = (r_{|i-j|});
% Sistema lineare.
T x = b = [b_1, ..., b_P];
% Valori iniziali delle soluzioni.
y^{(1)} = -r_1
x^{(1)} = b_1
% Inizio del ciclo.
for (k = 1 : P - 1)
    beta_k = 1 + r^{(k)T} (y^{(k)})^*
    mu_k = (b_{k+1} - r^{(k)T} E_k x^{(k)}) / beta_k
    v^{(k)} = x^{(k)} + mu E_k (y^{(k)})^*
    x^{(k+1)} = [ v^{(k)} ]
                [ mu_k ]
    % Controllo ultimo passo.
    if (k < P - 1)
        alpha_k = -(r_{k+1} + r^{(k)T} E_k y^{(k)}) / beta_k
        z^{(k)} = y^{(k)} + alpha_k E_k (y^{(k)})^*
        y^{(k)} = [ z^{(k)} ]
                  [ alpha_k ]
    end
end
end

```

Applicando le stesse osservazioni relative all'algoritmo di Durbin, il numero di moltiplicazioni complesse richiesto è

$$C_{Levinson}^{prod} = \sum_{k=1}^{P-1} (3k+1) + \sum_{k=1}^{P-2} (2k+1) = 2.5P^2 - 2.5P - 1 \quad (\text{D.18})$$

Il numero di somme complesse è

$$C_{Levinson}^{sum} = \sum_{k=1}^{P-1} 3k + \sum_{k=1}^{P-2} 2k = 2.5P^2 - 4.5P + 2 \quad (\text{D.19})$$

Infine il numero totale di operazioni complesse è

$$C_{Levinson} = C_{Levinson}^{prod} + C_{Levinson}^{sum} = 5P^2 - 7P + 1 \simeq 5P^2 \quad (\text{D.20})$$

Riesaminando l'espressione dello stimatore MMSE (4.59), invece di eseguire il calcolo dell'inversa della matrice $\mathbf{T} = (\widehat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_P)$ e del prodotto matrice-vettore $(\mathbf{T})^{-1}\widehat{\mathbf{H}}_{ZF}$, si può applicare l'algoritmo di Levinson alla matrice \mathbf{T} , e al vettore dei termini noti $\mathbf{b} = \widehat{\mathbf{H}}_{ZF}$. Questa scelta comporta una significativa riduzione della complessità, che passa da $O(P^3)$ a $O(P^2)$ operazioni.

D.2 Algoritmo super-veloce di Schur

L'algoritmo super-veloce di Schur viene utilizzato in questa sede per risolvere sistemi lineari. L'obiettivo, come per l'algoritmo di Levinson, è di calcolare l'espressione dello stimatore MMSE adattativo (4.59) con un costo computazionale ridotto, sfruttando le simmetrie del problema. In particolare si vedrà che il calcolo dell'inversa della matrice di Toeplitz $\mathbf{T} = (\widehat{\mathbf{R}}_{HH} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_P)$ può essere effettuato in $O(N \log^2 N)$ operazioni complesse [36]. Le definizioni utilizzate nello sviluppo e la descrizione dell'algoritmo generale di Schur sono presentate nel par. A.3.4 dell'app. A.

La versione super-veloce dell'algoritmo di Schur viene descritta seguendo l'impostazione presente in [44]. La velocizzazione dell'algoritmo viene ottenuta rappresentando le colonne della matrice di generazione sotto forma di polinomi. L'obiettivo è di sostituire i costosi prodotti matriciali tra le trasformazioni \mathbf{H} e le matrici di generazione \mathbf{Y} , con prodotti tra polinomi. Tali operazioni sono equivalenti a convoluzioni tra sequenze, calcolabili rapidamente con la DFT. Questi ultimi sono equivalenti a calcolabili usando la FFT, in $O(N \log N)$ operazioni. In sostanza le costose moltiplicazioni tra matrici sono rimpiazzate da rapide convoluzioni calcolate con la FFT. Sia \mathbf{T} una matrice di Toeplitz di dimensioni $N \times N$ con rango di *displacement* (spostamento) pari a 2, avente matrice di generazione

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ w_0 & w_1 & \dots & w_{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (\text{D.21})$$

Si definiscono polinomi generatori di \mathbf{Y} le quantità

$$\mathbf{Y}(z) = [v_0(z) \ w_0(z)] \quad (\text{D.22})$$

dove

$$\begin{aligned} v_0(z) &= v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \dots + v_{n-1} z^{n-1} \\ w_0(z) &= w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \dots + w_{n-1} z^{n-1} \end{aligned}$$

La moltiplicazione per z sostituisce la traslazione verso il basso della prima colonna di \mathbf{Y} , avente espressione (A.39); il primo passo dell'algoritmo di Schur diventa

$$[v_1(z) \ w_1(z)] = \frac{1}{\sqrt{1 - |\rho_1|^2}} [v_0(z) \ w_0(z)] \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al passo k si ottiene

$$[v_k(z) \ w_k(z)] = \frac{1}{\sqrt{1 - |\rho_k|^2}} [v_{k-1}(z) \ w_{k-1}(z)] \begin{bmatrix} 1 & \rho_k \\ \rho_k^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

perciò

$$[v_k(z) \ w_k(z)] = [v_0(z) \ w_0(z)] \begin{bmatrix} a_k^{(0)}(z) & b_k^{(0)}(z) \\ \tilde{b}_k^{(0)}(z) & \tilde{a}_k^{(0)}(z) \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{bmatrix} a_k^{(0)}(z) & b_k^{(0)}(z) \\ \tilde{b}_k^{(0)}(z) & \tilde{a}_k^{(0)}(z) \end{bmatrix} = \left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{1 - |\rho_j|^2}} \right) \begin{bmatrix} z & \rho_1 \\ z\rho_1^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & \rho_1 \\ z\rho_2^* & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} z & \rho_k \\ z\rho_k^* & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.23})$$

Dunque, la produttoria ottenuta applicando k passi dell'algoritmo di Schur è rappresentata in modo equivalente e più compatto dai polinomi di Schur $a_k^{(0)}(z)$ e $b_k^{(0)}(z)$. Inoltre si può dimostrare per induzione che

$$\tilde{a}_k^{(0)}(z) = z^k [a_k^{(0)}(1/z)]^* \quad , \quad \tilde{b}_k^{(0)}(z) = z^k [b_k^{(0)}(1/z)]^* \quad (\text{D.24})$$

cioè, i polinomi $\tilde{a}_k^{(0)}(z)$ e $\tilde{b}_k^{(0)}(z)$ si ottengono ribaltando l'ordine dei coefficienti rispettivamente di $a_k^{(0)}(z)$ e $b_k^{(0)}(z)$.

La rappresentazione di una sequenza arbitraria di k passi consecutivi dell'algoritmo si ottiene in modo simile, osservando che l'apice del polinomio di Schur definisce il passo di partenza (cioè il passo 0). Dunque, i polinomi di Schur che rappresentano k passi consecutivi a partire dal passo l -esimo si indicano come $a_k^{(l)}(z)$ e $b_k^{(l)}(z)$; moltiplicandoli per i polinomi generatori $v_l(z)$ e $w_l(z)$, essi forniscono i polinomi generatori di k passi successivi, indicati con $v_{l+k}(z)$ e $w_{l+k}(z)$

$$[v_{l+k}(z) \ w_{l+k}(z)] = [v_l(z) \ w_l(z)] \begin{bmatrix} a_k^{(l)}(z) & b_k^{(l)}(z) \\ \tilde{b}_k^{(l)}(z) & \tilde{a}_k^{(l)}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{D.25})$$

Utilizzando la FFT per svolgere questo prodotto il costo sarà proporzionale a $O(N \log N)$. Il calcolo dei polinomi di Schur può essere ottenuto tramite una tecnica *divide-et-impera*, cioè riscrivendo i polinomi di Schur del passo $p = mk$ (dove m è un numero primo) come il prodotto di m polinomi di Schur che coprono k passi. Se la dimensione della matrice T è una potenza di due, cioè se $N = 2^n$ il processo divide-et-impera è descritto dall'equazione

$$\begin{bmatrix} a_{2k}^{(0)}(z) & b_{2k}^{(0)}(z) \\ \tilde{b}_{2k}^{(0)}(z) & \tilde{a}_{2k}^{(0)}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k^{(0)}(z) & b_k^{(0)}(z) \\ \tilde{b}_k^{(0)}(z) & \tilde{a}_k^{(0)}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k^{(k)}(z) & b_k^{(k)}(z) \\ \tilde{b}_k^{(k)}(z) & \tilde{a}_k^{(k)}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{D.26})$$

Quindi i polinomi di Schur per effettuare $2k$ passi dell'algoritmo si possono ottenere dal prodotto tra i polinomi dei primi k passi ($a_k^{(0)}(z)$, $b_k^{(0)}(z)$) e dei successivi k ($a_k^{(k)}(z)$, $b_k^{(k)}(z)$). Anche in questo caso, l'impiego della FFT accelera il calcolo. Nel caso dello stimatore MMSE adattativo le dimensioni della matrice da invertire sono pari al numero delle $M = P$ portanti allocate all'utente. Come spiegato nel par. 2.3.3 questo numero è sempre composto da fattori primi minori o uguali a $p = 5$ e non è mai inferiore a 12, dimensione di un Resource Block. La realizzazione pratica dell'algoritmo per il sistema LTE deve includere l'estensione della tecnica divide-et-impera a fattori primi $p = 2, 3, 5$; ogni passo di divisione può quindi presentare due, tre o cinque sotto-matrici di espressione simile alla (D.26). Inoltre il prodotto per i polinomi di Schur di espressione (D.25) accresce il grado dei polinomi generatori, ma poichè le dimensioni della matrice di generazione \mathbf{Y} non aumentano durante l'esecuzione dell'algoritmo, è possibile ignorare i termini di $v(z)$ e $w(z)$ con grado maggiore del passo k . Durante l'esecuzione quindi, i polinomi generatori verranno troncati, risparmiando memoria e calcoli. Nel caso di $v(z) = v_0 + v_1z + v_2z^2 + \dots + v_{n-1}z^{n-1}$, il troncamento è indicato dall'apice (k), con $k < n$:

$$v^{(k)}(z) = v_0 + v_1z + v_2z^2 + \dots + v_{k-1}z^{k-1}$$

Si ricordi che per i polinomi di Schur l'apice non indica il troncamento dei coefficienti ma il passo iniziale dell'algoritmo a cui si riferiscono. Dalla combinazione delle espressioni (D.25) e (D.26) si ottiene l'algoritmo per il calcolo rapido dei polinomi di Schur $a_k^{(0)}(z)$ e $b_k^{(0)}(z)$.

function $[a(z), b(z)] = \mathbf{sfschur}(v(z), w(z), n)$

if $n > 1$

$$[a_{n/2}^{(0)}(z), b_{n/2}^{(0)}(z)] = \mathbf{sfschur}(v^{(n/2)}(z), w^{(n/2)}(z), n/2)$$

$$v_{n/2}(z) = v(z)a_{n/2}^{(0)}(z) + w(z)\tilde{b}_{n/2}^{(0)}(z)$$

$$w_{n/2}(z) = v(z)\tilde{b}_{n/2}^{(0)}(z) + w(z)a_{n/2}^{(0)}(z)$$

$$[a_{n/2}^{(n/2)}(z), b_{n/2}^{(n/2)}(z)] = \mathbf{sfschur}(v_{n/2}^{(n/2)}(z), w_{n/2}^{(n/2)}(z), n/2)$$

$$a(z) = a_{n/2}^{(0)}(z)a_{n/2}^{(n/2)}(z) + b_{n/2}^{(0)}(z)\tilde{b}_{n/2}^{(n/2)}(z)$$

```

        b(z) = a_{n/2}^{(0)}(z)b_{n/2}^{(n/2)}(z) + b_{n/2}^{(0)}(z)\tilde{a}_{n/2}^{(n/2)}(z)
    else
        \rho = -w(z)/v(z)
        a(z) = z/\sqrt{1-|\rho|^2}
        b(z) = \rho/\sqrt{1-|\rho|^2}
    end
    
```

La funzione `sfschur` prende in ingresso due polinomi generatori di grado $n - 1$ che rappresentano le colonne della matrice di generazione \mathbf{Y} . Il numero di coefficienti n è un parametro distinto. I parametri di uscita $a(z)$ e $b(z)$ sono i polinomi di Schur $a_n^{(0)}(z)$ e $b_n^{(0)}(z)$ utilizzati per applicare n passi dell'algoritmo. Poichè ogni chiamata ricorsiva della funzione `sfschur` utilizza i polinomi generatori $v^{(n/2)}(z)$ e $w^{(n/2)}(z)$, troncati di $n/2$ campioni, la dimensione del problema è dimezzata ad ogni passo della ricorsione. Per $n = 1$ si applica una semplice rotazione iperbolica, coincidente con quella che trasformava la matrice di generazione in forma propria (si veda l'espressione (A.37))

$$[\tilde{v}_k(z) \quad 0] = \frac{1}{\sqrt{1-|\rho|^2}} [v(z) \quad w(z)] \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho^* & 1 \end{bmatrix}$$

con $\rho = -w(z)/v(z)$ e

$$\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ \tilde{b}(z) & \tilde{a}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-|\rho|^2}} \begin{bmatrix} z & \rho \\ z\rho^* & 1 \end{bmatrix}$$

Per risolvere un sistema lineare $\mathbf{m} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, con \mathbf{T} matrice di Toeplitz, si forniscono alla funzione `sfschur` i polinomi generatori di \mathbf{T} e si calcolano i polinomi $a_n^{(0)}(z)$, $b_n^{(0)}(z)$; una volta noti è possibile calcolare le quantità

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \tilde{a}_n^{(0)}(z) + b_n^{(0)}(z) \\ \tilde{\phi}(z) &= a_n^{(0)}(z) + \tilde{b}_n^{(0)}(z) \end{aligned} \tag{D.27}$$

ovvero i polinomi generatori per la matrice \mathbf{T}^{-1} . I coefficienti del polinomio $\phi(z)$ coincidono, a meno di un fattore di scala, con gli elementi della prima colonna della matrice \mathbf{T}^{-1} . La normalizzazione è effettuata secondo la formula

$$\phi(z) = \phi(z) \cdot \left(\frac{\phi(0)(1-|\rho|^2)}{t_0(1-\rho)^2} \right) \tag{D.28}$$

Il termine t_0 compensa lo scalamento della matrice di generazione \mathbf{Y} , che nella (A.32) presenta un fattore di scala $1/\sqrt{t_0}$. Anche gli elementi di ϕ sono scalati per la radice del primo coefficiente di \mathbf{T}^{-1} : dato che essa coincide con $\phi(0)$, è necessario scalare $\phi(z)$ per questo coefficiente. Infine il termine ρ caratterizza la rotazione iperbolica che lega il generico polinomio generatore di \mathbf{T} (D.21) alla sua forma propria $\hat{\mathbf{Y}}$. Si indica con il simbolo ϕ il vettore $N \times 1$ ricavato dal polinomio $\phi(z)$, i cui elementi rappresentano la prima colonna di \mathbf{T}^{-1} . La costruzione della matrice inversa viene effettuata grazie alla formula di Gohberg-Semencul [36]

$$\delta_n \mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{L}_1^H \mathbf{L}_1 - \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H) \tag{D.29}$$

Il fattore di scala δ_n è pari al primo elemento di $\phi(0)$, \mathbf{L}_1 e \mathbf{U}_0 sono opportune matrici triangolari con simmetria di Toeplitz (si veda il Par. A.3.4.0.3). Come illustrato in seguito, poichè le matrici \mathbf{L}_1 e \mathbf{U}_0 sono di Toeplitz, la moltiplicazione per il termine noto m si può effettuare rapidamente (Par. 4.5.3.2).

Il costo computazionale dell'algoritmo super-veloce di Schur è ricavato dal Teorema 5.1 in [36]. Assumendo che la matrice da invertire sia $n \times n$, con $n = 2^\nu > 4$, l'algoritmo super-veloce di Schur richiede al massimo

$$C_{shur} = 8n(\log_2 n)^2 - 2n \log_2 n + \frac{31}{4}n - 20 \log_2 n - 29 \tag{D.30}$$

operazioni complesse. Il costo totale è quindi leggermente inferiore a $8n(\log_2 n)^2$, mentre, dall'espressione (D.20) si ricava che il costo totale dell'algoritmo di Levinson è leggermente inferiore a $5n^2$ operazioni complesse. Disegnando le due funzioni limite al variare di n , come in figura D.1, il punto di intersezione tra di esse si ottiene per $n \simeq 54$. Nel caso dello stimatore MMSE adattativo, la banda allocata $P = M = n$, pari alle dimensioni

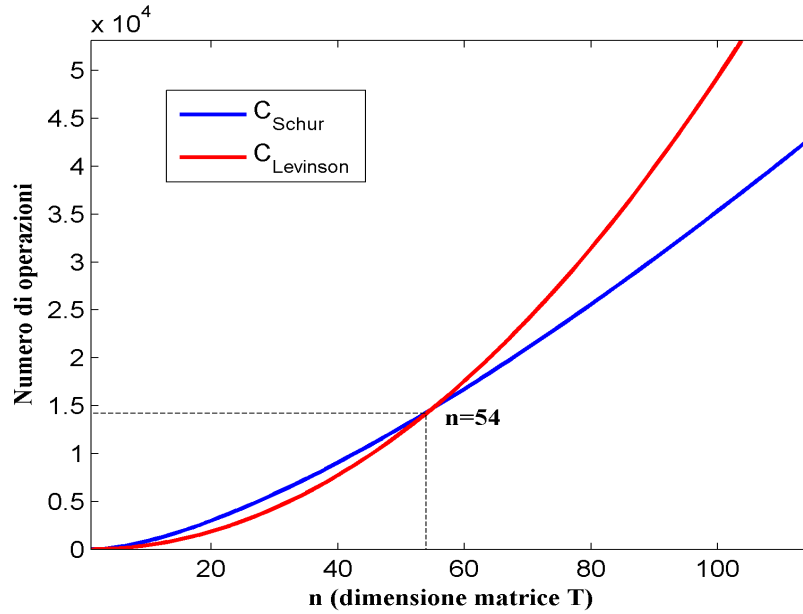


Figura D.1: Confronto tra i costi computazionali dei metodi di Levinson e Schur al variare della dimensione della matrice \mathbf{T} .

della matrice da invertire, è composta da fattori primi $\{2, 3, 5\}$, quindi è possibile che per certe configurazioni di banda allocata l'algoritmo di Levinson sia meno costoso di quello di Schur. Inoltre l'algoritmo di Schur presenta un numero di addizioni circa doppio rispetto alle moltiplicazioni, come avviene per la FFT; per l'algoritmo di Levinson vale l'approssimazione $C_{Levinson}^{prod} \simeq C_{Levinson}^{sum}$ (si ricordano le espressioni D.18 e D.19).

Appendice E

Proprietà del canale radio

Come accennato nel par. 2.5, le componenti deterministiche (attenuazione di spazio libero) e di larga scala (shadowing) determinano il livello della potenza media del segnale ricevuto in una data posizione. La presenza di ostacoli nell'ambiente di propagazione provoca la nascita di percorsi multipli, generalmente variabili nel tempo, caratterizzati da ampiezze, fasi e ritardi specifici. Il segnale ricevuto è dato dalla sovrapposizione delle singole repliche (echi) del segnale trasmesso, associate ai percorsi multipli; dunque il canale radio è interpretabile come un sistema lineare tempo-variante, con risposta all'impulso $h(\tau, t)$. Tale funzione descrive la risposta del canale, valutata nell'istante t , ad un impulso ideale trasmesso al tempo $(t - \tau)$.

E.1 Modello dei segnali in banda base

Per descrivere i segnali considerati è conveniente introdurre la rappresentazione equivalente in banda base [18]. Sia $s(t)$ un segnale generico a banda relativa stretta, ovvero per cui valga la condizione $B_r = B_W/f_c \ll 1$, dove B_W è la banda di $s(t)$, f_c è la frequenza portante e B_r è la banda relativa. Esso appare come una sinusoide con ampiezza e fase variabili nel tempo, di espressione

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)] = s_I(t) \cos \omega_c t - s_Q(t) \sin \omega_c t \quad (\text{E.1})$$

Il segnale (E.1) è equivalente a un vettore sinusoidale, rappresentabile nel piano complesso in funzione dei vettori di riferimento $\cos \omega_c t$ e $\sin \omega_c t$, mediante le componenti in fase e in quadratura $s_I(t)$ e $s_Q(t)$, di espressione

$$\begin{aligned} s_I(t) &= a(t) \cos(\phi(t)) \\ s_Q(t) &= a(t) \sin(\phi(t)) \end{aligned}$$

Dunque si può rappresentare $s(t)$ con il segnale complesso

$$u(t) = s_I(t) + js_Q(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} a = |u(t)| = \sqrt{s_I^2 + s_Q^2} \\ \phi = \tan^{-1}(s_Q/s_I) \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

avente spettro in banda base, chiamato *inviluppo complesso* di $s(t)$. Esso è legato al segnale passabanda dalla relazione

$$s(t) = \text{Re} [u(t)e^{j\omega_c t}] \quad (\text{E.3})$$

Inoltre, poiché $\text{Re} [u(t)e^{j\omega_c t}] = \frac{1}{2} [u(t)e^{j\omega_c t} + u^*(t)e^{-j\omega_c t}]$, le trasformate di Fourier dei due segnali sono legate dalla relazione

$$S(f) = \frac{1}{2} [U(f - f_c) + U^*(-f - f_c)]$$

Lo spettro dell'involuppo complesso è dato dallo spettro di $s(t)$, per le frequenze positive, traslato in banda base. Valgono risultati analoghi per un generico sistema lineare applicato a segnali passabanda, come il canale multipath, rappresentato da un sistema lineare con risposta in frequenza (CFR) $H(f)$ e risposta all'impulso (CIR) $h(t)$. Si definisce funzione di trasferimento *equivalente in banda base* la risposta $H_L(f)$ legata a $H(f)$ dalla relazione

$$H(f) = H_L(f - f_c) + H_L^*(-f - f_c)$$

Il calcolo della trasformata inversa di Fourier porta all'espressione

$$h(t) = h_L(t)e^{j\omega_c t} + h_L^*(t)e^{-j\omega_c t} = 2 \operatorname{Re} [h_L(t)e^{j\omega_c t}] \quad (\text{E.4})$$

dove $h_L(t) = \mathcal{F}^{-1} [H_L(f)]$. A parte il fattore 2, $h_L(t)$ è l'involuppo complesso di $h(t)$.

Dunque, le proprietà del segnale ricevuto $r(t)$ si possono ricavare considerando l'involuppo complesso $u(t)$, di espressione (E.2), e la funzione passabasso equivalente $h_L(t)$.

Poiché nel dominio delle frequenze il segnale ricevuto è $R(f) = \mathcal{F} [r(t)] = H(f)S(f)$, lo spettro dell'involuppo complesso di $R(f)$ è $V(f) = H_L(f)U(f)$. Nel dominio del tempo si può scrivere

$$v(t) = h_L(t) * u(t) \quad (\text{E.5})$$

ovvero il problema riformulato in banda base è del tutto equivalente a quello originale.

E.2 La risposta del canale radio

La risposta del canale tempo-variante è legata al suo equivalente in banda base dalla relazione

$$h(\tau, t) = \operatorname{Re} [h_L(\tau, t)e^{j\omega_c t}] \quad (\text{E.6})$$

dove

$$h_L(\tau, t) = \sum_{i=1}^{N(t)} c_i(t) \delta(\tau - \tau_i(t)) e^{j\psi_{D_i}} \quad (\text{E.7})$$

Ogni percorso i -esimo presenta un'ampiezza complessa $c_i = a_i(t)e^{-j\phi_i(t)}$, un ritardo $\tau_i(t)$ e un termine di fase, causato dall'effetto Doppler, pari a $\psi_{D_i} = \int 2\pi\nu_{D_i}(t)dt$.

Grazie alla relazione (E.5), l'equivalente passabasso del segnale ricevuto è:

$$r_L(t) = h_L(t) * s_L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} c_i(t) s_L(\tau - \tau_i(t)) e^{j\psi_{D_i}} \quad (\text{E.8})$$

dove $s_L(t)$ è l'involuppo complesso del segnale trasmesso.

Se la banda di $s_L(t)$ è pari a B_W , si può rappresentare il canale radio con una linea di ritardo equivalente (Tapped Delay Line), le cui prese sono uniformemente spaziate a intervalli multipli di $T_s = 1/B_W$. Secondo il teorema del campionamento l'involuppo complesso del segnale trasmesso, con banda B_W si può scrivere come

$$s_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_L(n/B_W) \cdot \frac{\sin[\pi B_W(t - n/B_W)]}{\pi B_W(t - n/B_W)}$$

La trasformata di Fourier è costituita da una serie di rettangoli, ovvero

$$S_L(f) = \begin{cases} \frac{1}{B_W} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_L(n/B_W) e^{-j2\pi f n/B_W} & |f| \leq B_W/2 \\ 0 & |f| > B_W/2 \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

Il corrispondente segnale ricevuto è pari a

$$r_L(t) = \int h_L(\tau, t) \cdot s_L(t - \tau) d\tau = \int H_L(f, t) \cdot S_L(f) e^{j2\pi f t} df \quad (\text{E.10})$$

Sostituendo l'espressione (E.9) nella (E.10) si trova

$$r_L(t) = \frac{1}{B_W} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_L(n/B_W) \int_{-B_W/2}^{B_W/2} H_L(f, t) e^{j2\pi f(t-n/B_W)} df = \frac{1}{B_W} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_L(n/B_W) \cdot c(t - n/B_W, t)$$

dove $c(t - n/B_W, t) = \int_{-B_W/2}^{B_W/2} H_L(f, t) e^{j2\pi f(t-n/B_W)} df$.

Tale espressione è una convoluzione discreta che può essere riscritta come

$$r_L(t) = \frac{1}{B_W} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_L(t - n/B_W) \cdot c(n/B_W, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) \cdot s_L(t - n/B_W)$$

I termini $c_n(t) = \frac{1}{B_W} c(n/B_W, t)$ contengono l'attenuazione, il ritardo e lo spostamento Doppler di ogni eco; essi sono caratterizzati da una spaziatura costante $T_s = 1/B_W$, che diventa la *risoluzione* della dispersione multipath. Infatti due echi sono *risolvibili* se la differenza dei loro ritardi è maggiore dell'inverso della banda del segnale trasmesso, ovvero dell'intervallo T_s ; altrimenti sono combinati in un unico eco. Dal punto di vista pratico, il numero di echi non è ovviamente infinito, ma si può troncare a

$$N(t) = T_m B_W + 1 = T_m / T_s + 1$$

dove T_m è il tempo di dispersione massimo, pari a

$$T_m = \max(\tau_i - \tau_j) \quad (\text{E.11})$$

con $i, j = 1, \dots, N(t)$. In conclusione il modello a linea di ritardo (TDL) del canale $h_L(\tau, t)$ con ritardi equispaziati è

$$h_{L,EQ}(\tau, t) = \sum_{i=1}^{N(t)} c_i(t) \delta(\tau - i/B_W)$$

Lo schema a blocchi del modello TDL è presentato in figura E.1.

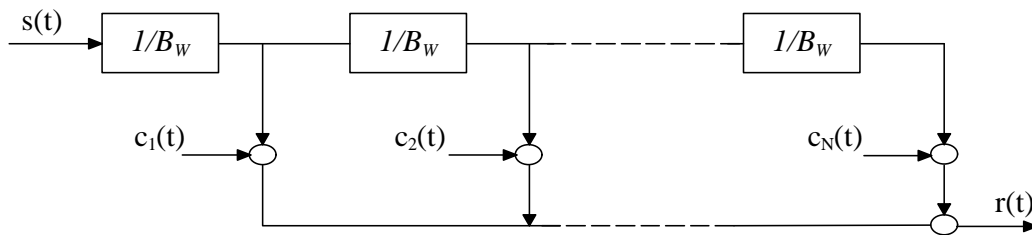


Figura E.1: Modello di canale a linea di ritardo (TDL).

E.3 Descrizione statistica del canale radiomobile

Nei sistemi di comunicazione radiomobili il canale non ha una struttura fissa e determinata, ma aleatoria. In questo caso, la risposta all'impulso del canale è ben descritta da un processo casuale. Considerando l'involuppo

complesso della CIR, la funzione di autocorrelazione è

$$R_{hh}(\tau_1, \tau_2; t_1, t_2) = E[h_L(\tau_1, t_1)h_L^*(\tau_2, t_2)] \quad (\text{E.12})$$

Se le componenti della CIR corrispondenti a ritardi diversi sono tra loro incorrelate, la (E.12) diventa

$$\begin{aligned} R_{hh}(\tau_1, \tau_2; t_1, t_2) &= E[h_L(\tau_1, t_1)h_L^*(\tau_2, t_2)] \\ &= R_{hh}(\tau_1; t_1, t_2)\delta(\tau_1 - \tau_2) \\ &= R_{hh}(\tau; t_1, t_2) \end{aligned}$$

Inoltre, se il processo casuale $h_L(\tau, t)$ è stazionario rispetto all'istante di tempo t , la correlazione di ciascuna componente della CIR dipende solo dalla separazione temporale $\Delta t = (t_2 - t_1)$ tra le singole realizzazioni. Si trova infine

$$\begin{aligned} R_{hh}(\tau; t_1, t_2) &= R_{hh}(\tau; t_2 - t_1) \\ &= R_{hh}(\tau; \Delta t) \end{aligned}$$

dove

$$R_{hh}(\tau; \Delta t) = E[h_L(\tau, t)h_L^*(\tau, t + \Delta t)] \quad (\text{E.13})$$

Il modello descritto, largamente utilizzato nei sistemi radiomobili, è chiamato Wide-Sense Stationary Uncorrelated Scattering (WSSUS), e descrive una diffusione di cammini incorrelata e stazionaria in senso lato.

E.3.1 Dispersione dei ritardi

La trasformata di Fourier della (E.13) rispetto alla variabile Δt è chiamata *funzione di diffusione* (scatter)

$$S_{hh}(\tau; \nu) = \int R_{hh}(\tau; \Delta t)e^{-j2\pi\nu\Delta t}d\Delta t$$

Essa fornisce la distribuzione della potenza degli echi in funzione del ritardo τ e della variabile ν , che rappresenta la dispersione in frequenza Doppler.

Si definisce Power Delay Profile (PDP) la distribuzione di potenza degli echi in funzione del ritardo τ . Essa è pari alla funzione di autocorrelazione (E.13) calcolata per $\Delta t = 0$, ovvero all'integrale della funzione di diffusione rispetto alla variabile ν

$$PDP(\tau) = E[|h_L(\tau, t)|^2] = \int S_{hh}(\tau; \nu)d\nu$$

Ricordando l'espressione della CIR (E.7) costituita da una sovrapposizione di cammini discreti, l'espressione del PDP diventa

$$PDP(\tau) = \sum_{i=1}^N |c_i|^2 \delta(\tau - \tau_i) \quad (\text{E.14})$$

dove si è abbandonata la dipendenza temporale dei parametri dei percorsi. Il PDP dei canali LTE è riportato in tabella 2.9.

La dispersione temporale dei percorsi multipli può essere descritta dalla *dispersione massima dei ritardi* T_m , di espressione (E.11), oppure dalla radice della dispersione quadratica media τ_{RMS} , più nota come *RMS Delay Spread*

$$\tau_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\tau - \bar{\tau})^2 P(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau) d\tau}} \quad \text{con} \quad \bar{\tau} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tau \cdot P(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau) d\tau} \quad (\text{E.15})$$

Per il PDP discreto di espressione (E.14), l'espressione (E.15) diventa

$$\tau_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N-1} (\tau_i - \bar{\tau})^2 \cdot |c_i|^2}{\sum_{i=0}^{N-1} |c_i|^2}} \quad \text{con} \quad \bar{\tau} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i |c_i|^2}{\sum_{i=0}^{N-1} |c_i|^2}$$

Il valore $\Delta\tau \approx 4\tau_{RMS}$ è spesso usato per approssimare l'estensione della CIR, generalmente incognita in ricezione. La funzione di autocorrelazione in frequenza si calcola dall'autocorrelazione (E.13) con la relazione

$$R_{hh}(\Delta f) = \int \left\{ \int R_{hh}(\Delta t; \tau) d\Delta t \right\} e^{-j2\pi\Delta f\tau} d\tau \quad (\text{E.16})$$

Si definisce *banda di coerenza* (coherence bandwidth) il valore del parametro Δf per cui la (E.16) si riduce di 3dB, ovvero

$$\left. \frac{R_{hh}(\Delta f)}{R_{hh}(0)} \right|_{\Delta f = B_{coh}} = \frac{1}{2} \quad (\text{E.17})$$

I parametri B_{coh} e τ_{RMS} sono legati da una proporzionalità inversa, ovvero

$$B_{coh} \simeq 1/\tau_{RMS} \quad (\text{E.18})$$

Per evitare interferenza tra simboli adiacenti (ISI), la velocità di trasmissione del segnale trasmesso deve essere inferiore alla banda di coerenza B_{coh} . Nel progetto dei sistemi di trasmissione multiportante (OFDM/SC-FDMA), la banda di coerenza condiziona la scelta della spaziatura tra sottoportanti adiacenti. Nel sistema LTE tale spaziatura è pari a $\Delta f_{sub} = 15$ kHz; sfruttando la relazione (E.18) e ricordando i valori di τ_{RMS} associati ai canali LTE, riportati in tabella 2.8, la condizione $\Delta f_{sub} < B_{coh}$ è ampiamente verificata per tutti i modelli di canale.

E.3.2 Variazione del canale nel tempo

L'integrale dell'espressione (E.13) rispetto a τ fornisce la funzione di correlazione nel tempo

$$R_{hh}(\Delta t) = \int R_{hh}(\Delta t; \tau) d\tau \quad (\text{E.19})$$

Il *tempo di coerenza* (coherence time) è l'intervallo di tempo Δt per cui la (E.19) si riduce di 3dB, ovvero

$$\left. \frac{R_{hh}(\Delta t)}{R_{hh}(0)} \right|_{\Delta t = T_{coh}} = \frac{1}{2} \quad (\text{E.20})$$

Esso descrive la variazione delle realizzazioni del canale nel tempo. Inoltre, considerando la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione $R_{hh}(\Delta t)$ si trova lo spettro Doppler del canale:

$$S_{hh}(\nu) = \int R_{hh}(\Delta t) e^{-j2\pi\nu\Delta t} \Delta t \quad (\text{E.21})$$

La funzione (E.21) equivale all'integrale della funzione di scatter rispetto alla variabile τ . La frequenza ν_D per cui lo spettro Doppler si riduce di 3dB rispetto al suo valore in $n = 0$ è chiamata dispersione Doppler. Essa è legata al tempo di coerenza dalla relazione

$$\nu_D \simeq 1/T_{coh} \quad (\text{E.22})$$

Il confronto tra l'intervallo di simbolo T_s e il tempo di coerenza consente di classificare il fading in due categorie: si parla di fading lento quando vale la condizione

$$T_{coh} \gg T_s$$

ovvero se il canale si può considerare costante durante l'intervallo di segnalazione. Altrimenti il canale è soggetto a fading veloce e le componenti spettrali interferiscono tra loro (ICI).

Il modello più diffuso per descrivere la dispersione Doppler ν_D di un canale multi-percorso è lo spettro di Jakes [23]. Nel ricavare tale modello si assume che la velocità relativa del ricevitore sia pari a v e che gli angoli di arrivo dei percorsi multipli siano uniformemente distribuiti. Se la dispersione Doppler massima è pari a $\nu_D = v f_c / c$, dove f_c è la frequenza portante e c è la velocità della luce, la correlazione del canale nel tempo diventa

$$R_{hh}(\Delta t) = J_0(2\pi\nu_D\Delta t)$$

dove J_0 è la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero. Lo spettro Doppler corrispondente è

$$S_{hh}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu_D^2 - \nu^2}} \quad \text{con } |\nu| \leq \nu_D \quad (\text{E.23})$$

In figura E.2 è illustrato lo spettro di Jakes e la corrispondente funzione di correlazione nel tempo. Nella

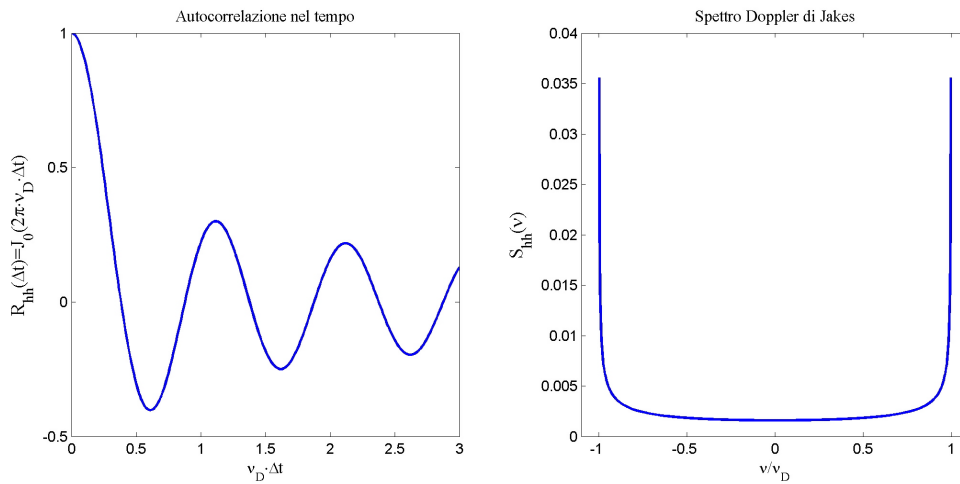


Figura E.2: A sinistra è rappresentata l'autocorrelazione nel tempo $R_{hh}(\Delta t)$ mentre a destra lo spettro classico di Jakes

derivazione si è ipotizzato che l'angolo di arrivo dei cammini sia una variabile casuale con distribuzione uniforme, nell'intervallo $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. In queste condizioni la funzione di correlazione nel tempo $R_{hh}(\Delta t)$ è strettamente reale, lo spettro Doppler è reale e simmetrico rispetto alla frequenza $\nu = 0$ e vale la separabilità delle variabili tempo (t) e ritardo (τ) nella funzione di diffusione $S_{hh}(\tau; \nu)$, cioè

$$S_{hh}(\tau; \nu) \propto PDP(\tau) \cdot S_{hh}(\nu) \quad (\text{E.24})$$

La condizione di separabilità è valida soprattutto in ambienti urbani, ricchi di riflessi, i cui contributi determinano una diffusione omnidirezionale. Tale proprietà si rivela molto utile poiché consente di suddividere il problema della stima di canale, definito in due dimensioni, in una coppia di stime monodimensionali, riducendo drasticamente la complessità del calcolo.

E.3.3 Effetti dei cammini multipli sul segnale ricevuto

Infine si vuole studiare la distorsione di ampiezza e fase introdotta dal canale radio sul segnale ricevuto, di espressione (E.8). Per semplicità si ipotizza di trasmettere un segnale con involuppo complesso costante e unitario, ovvero una sinusoidale. In questo caso, l'equivalente in banda base del segnale ricevuto è pari alla CIR

espressa in banda base

$$r_L(t) = h_L(t) * s_L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} a_i(t) e^{j\kappa_i(t)} \quad (\text{E.25})$$

Il legame tra le ampiezze reali $a_i(t)$ e i coefficienti complessi c_i , precedentemente introdotti, è dato da $c_i = a_i(t) e^{-j\phi_i(t)}$; inoltre il termine di fase $\kappa_i(t)$ incorpora sia la deviazione angolare di $c_i(t)$ sia la dispersione Doppler, dunque la sua espressione è pari a $\kappa_i(t) = \psi_{D_i} - \phi_i(t)$. Ipotizzando una condizione di propagazione NLOS (si veda il punto A in Figura E.3), è possibile rappresentare i singoli percorsi del canale radio con variabili casuali indipendenti a valor medio nullo. Le componenti in fase e in quadratura del segnale ricevuto sono ottenute dalla somma di tali contributi; dunque, invocando il Teorema del Limite Centrale, si trova che la loro distribuzione è gaussiana, con valor medio $\mu = 0$ e varianza σ^2 , descrizione sempre più vera al crescere del numero di percorsi $N(t)$. L'ampiezza del segnale ricevuto, pari a $x = |r(t)| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2}$, è distribuita secondo la legge di Rayleigh

$$f_x(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{E.26})$$

mentre la fase presenta una distribuzione uniforme tra 0 e 2π . Inoltre la potenza, definita come $y = x^2$ ha una distribuzione esponenziale

$$f_y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{y}{y}\right) \quad (\text{E.27})$$

con $\bar{y} = E[y] = 2\sigma^2$.

Come già indicato in precedenza, la condizione di propagazione più favorevole si presenta invece quando le antenne dei due terminali sono direttamente visibili (figura E.3); si parla in questo caso di trasmissione *line of sight* (LOS). In ricezione, oltre alla distribuzione aleatoria dei cammini multipli, è presente un eco dominante,

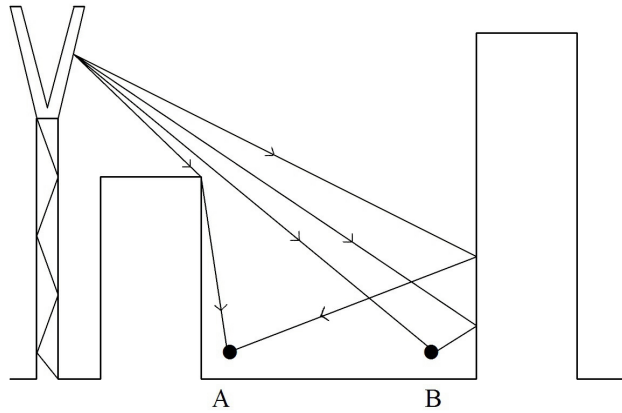


Figura E.3: Esempio di collegamento radio NLOS (caso A) e LOS (caso B)

deterministico, di forte intensità. Il segnale ricevuto si ottiene sommando il contributo del percorso diretto, di ampiezza costante A , e il vettore complesso gaussiano, con componenti r_I e r_Q indipendenti, a valor medio nullo e varianza σ^2 . In questo caso, l'ampiezza del vettore risultante è pari a

$$x = |r(t)| = \sqrt{(b + r_I)^2 + r_Q^2}$$

e la sua distribuzione è data dalla *legge di Rice*

$$f_x(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right) \quad (\text{E.28})$$

dove $I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} d\theta$ è la funzione di Bessel modificata di ordine zero e di prima specie. La dimostrazione

delle equazioni (E.26) e (E.28) è presentata nel par. 6.2 di [4]. Come indicato nel par. 2.6, le prestazioni del sistema sono analizzate nelle condizioni peggiori; infatti i coefficienti dei modelli di canale LTE presentano una distribuzione statistica di Rayleigh, corrispondente a un collegamento in assenza di visibilità (NLOS).

Appendice F

Simulazione dei modelli di canale LTE

Lo studio delle prestazioni degli algoritmi proposti, sia per la sincronizzazione che per la stima di canale, richiede di progettare un simulatore del canale radio tempo-variante. Esso descrive l'interazione tra l'ambiente di propagazione e il segnale trasmesso grazie a un modello statistico, variabile nel tempo, derivato dalla teoria della radiopropagazione, i cui principi sono stati presentati nell'Appendice E.

Poiché la simulazione di canale è parte integrante dello sviluppo di un sistema di comunicazione radiomobile, la letteratura sull'argomento è molto vasta. In particolare, si è deciso di rielaborare un importante lavoro svolto dalla IEEE nel contesto dello standard WiMAX (802.16) [45]. Infatti, sfruttando le somiglianze tra i due sistemi (obiettivi di qualità, proprietà dell'ambiente di propagazione, modulazione multiportante, scalabilità della banda di trasmissione...) è stato costruito un simulatore di canale in grado di soddisfare le richieste di testing formulate nello standard (Annex B di [22]). Esso restituisce modelli di canale a linea di ritardo (tapped delay line, TDL) tempo-varianti, di cui fanno parte non solo i modelli ITU extended, proposti per LTE (par. 2.6), ma anche i classici modelli ITU per il GSM e i modelli SUI (Stanford University Interim) utilizzati nel sistema WiMAX. L'evoluzione temporale delle realizzazioni è determinata dal particolare modello di dispersione Doppler scelto, ad esempio il classico spettro di Jakes (par. E.3.2) oppure gli spettri rounded [45] e indoor [3] derivati da campagne di misura.

Lo schema logico del simulatore è riportato in figura F.1. Nei paragrafi successivi vengono brevemente analizzati i suoi blocchi funzionali. L'ultima operazione non è legata alla simulazione ma consente di applicare la risposta di canale alle forme d'onda LTE non distorte.

Poiché il simulatore è stato programmato in ambiente Matlab, sono state sfruttate, quando possibile, le funzioni predefinite di questo linguaggio.

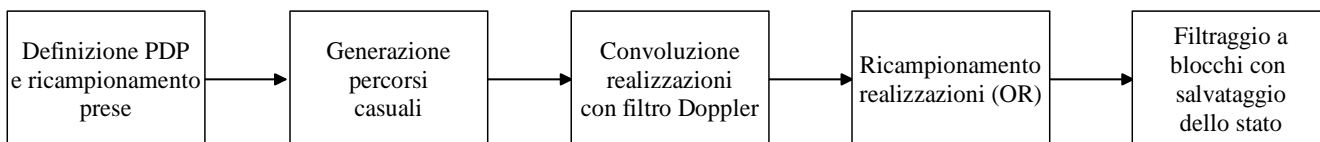


Figura F.1: Schema a blocchi del simulatore di canale radio LTE.

F.1 L'algoritmo del simulatore di canale

F.1.1 Definizione del Power Delay Profile e ricampionamento delle prese

I modelli di canale LTE sono completamente descritti dal Power Delay Profile (PDP), ovvero dalla coppia di vettori P e τ che contengono rispettivamente le potenze e i ritardi di tutti gli L percorsi del canale. Nello

standard LTE i cammini del canale radio presentano una risoluzione temporale di 10 ns mentre il periodo di campionamento del segnale trasmesso T_C , dipendente dalla banda di sistema B_W , è multiplo di 32.55 ns (periodo di campionamento associato alla banda $B_W = 20$ MHz, par. 2.2.1). L'adattamento della risoluzione standard al valore di T_C viene effettuato ricampionando il PDP con una speciale tecnica, chiamata *coarse alignment* e descritta nel par. 2.7. Un esempio, per il modello di canale EVA, con $B_W = 10$ MHz, è mostrato in figura F.2.

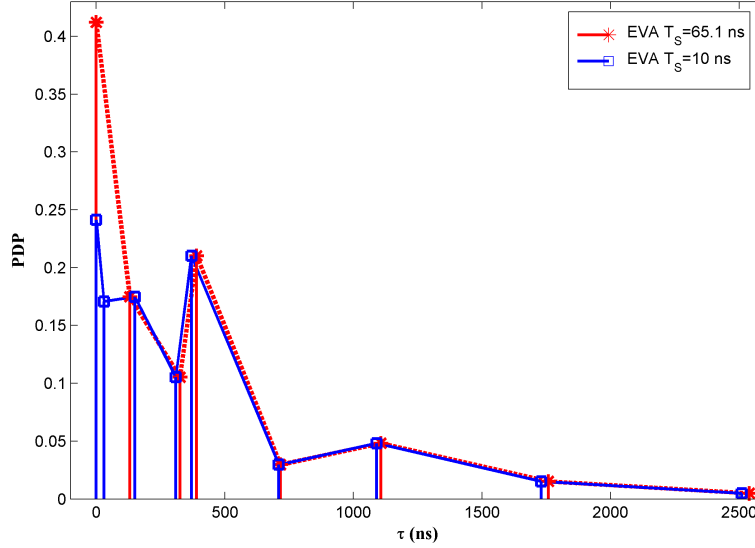


Figura F.2: Ricampionamento delle prese con coarse alignment per il modello di canale EVA. La banda di sistema è $B_W = 10$ MHz, corrispondente a una spaziatura tra le prese di $T_S = 65.1$ ns.

F.1.2 Generazione dei percorsi casuali

Ciascun cammino dei modelli di canale LTE è descritto da una variabile casuale con una distribuzione gaussiana complessa a media nulla e varianza data dal corrispondente valore del PDP [21]. Si ricorda che il modulo di una variabile gaussiana complessa presenta una distribuzione di Rayleigh, mentre la fase, compresa tra i valori $-\pi$ e π , è distribuita in modo uniforme (figura F.3). Le condizioni di propagazione descritte sono particolarmente stringenti per il collegamento radio in quanto non esiste un percorso diretto tra sorgente e ricevitore (condizione NLoS).

Quindi, utilizzando la funzione $randn()$, viene generato, per ogni presa, un vettore pseudocasuale con distribuzione gaussiana complessa, formato da N_{sim} realizzazioni.

Complessivamente, il modello numerico del canale radio è costituito da una matrice di $N_{sim} \times L$ coefficienti complessi e corrisponde perfettamente alla sua descrizione continua nel tempo, di espressione E.7. Ciascuna colonna della matrice contiene la CIR $h(\tau, \bar{t})$ a un fissato istante di tempo \bar{t} ; inoltre, ciascuna riga contiene l'evoluzione di uno specifico percorso della CIR $h(\bar{\tau}, t)$, con ritardo $\bar{\tau}$, al variare del tempo.

F.1.3 Convoluzione con il filtro Doppler

Le N_{sim} realizzazioni casuali del canale, generate nel passaggio precedente, sono tra loro statisticamente indipendenti; quindi la loro densità spettrale (PSD) è uniforme. Ad esempio, considerando un percorso generico in posizione $\bar{\tau}$, e ricordando l'espressione (E.13), la funzione di autocorrelazione nel tempo del canale è pari a:

$$R_{hh}(\Delta t) = \int R_{hh}(\tau; \Delta t) d\tau = \int E[h_L(\tau, t)h_L^*(\tau, t + \Delta t)] d\tau = \delta(\Delta t) \quad (\text{F.1})$$

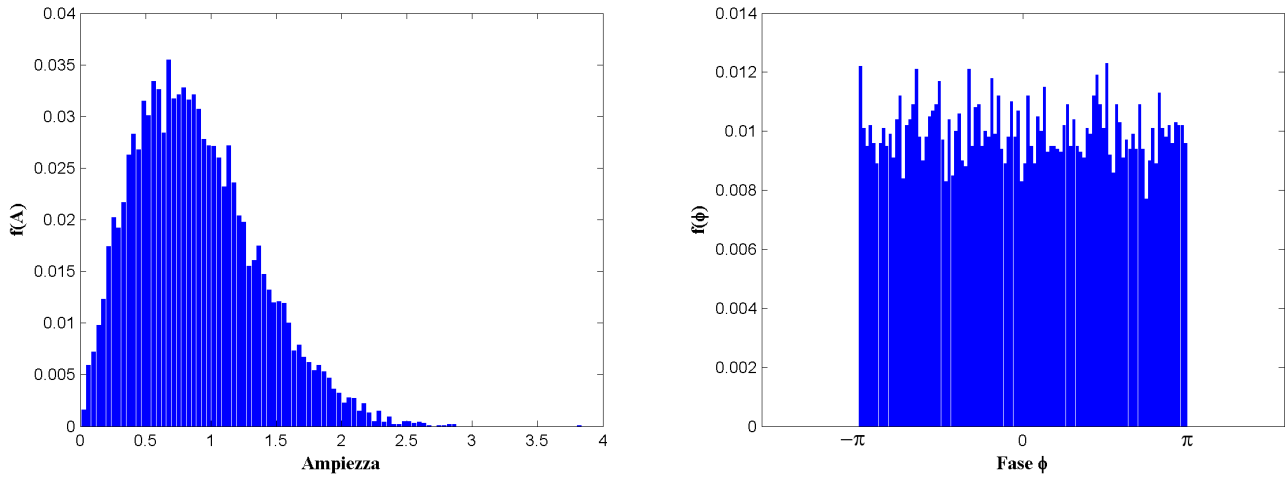


Figura F.3: Realizzazioni dei percorsi radio. Distribuzione di ampiezza (a sinistra) e fase (a destra). Esse approssimano rispettivamente la distribuzione di Rayleigh e la distribuzione uniforme compresa tra $-\pi$ e π .

dove $\delta(\cdot)$ è la funzione delta di Dirac.

Tuttavia, in condizioni reali, la correlazione tra le realizzazioni non è nulla, a causa della dispersione spettrale introdotta dall'effetto Doppler. Nei modelli di canale LTE (Annex B del documento [22]), l'effetto Doppler è descritto da una densità spettrale di Jakes:

$$S_{hh}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{\nu_D}\right)^2}} \quad \text{con} \quad -\nu_D \leq \nu \leq \nu_D \quad (\text{F.2})$$

Essa è stata definita nel par. E.3.2 e il suo andamento è rappresentato in figura E.2.

La costruzione di un insieme di coefficienti di canale con densità spettrale (F.2) viene effettuata correlando i coefficienti originali con un filtro numerico, la cui risposta in frequenza è pari a

$$Z(f) = \sqrt{S_{hh}(\nu)} \quad (\text{F.3})$$

Si osserva che $S_{hh}(\nu)$ non può essere calcolata direttamente in frequenza poiché, quando ν si avvicina ai valori estremi dell'intervallo di definizione ($\pm\nu_D$), la funzione diverge a $+\infty$. Per evitare questo ostacolo, si è scelto di progettare il filtro della PSD Doppler nel dominio del tempo, ritornando successivamente in frequenza tramite una DFT.

Alla luce delle osservazioni svolte, le operazioni richieste per costruire la risposta all'impulso del filtro Doppler sono:

- Definizione della funzione di autocorrelazione nel tempo, ovvero, ricordando la formula (E.21), dell'anti-trasformata di $S_{hh}(\nu)$, pari a

$$R_{hh}(\Delta t) = J_0(\pi x) \quad (\text{F.4})$$

dove J_0 è la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero, $x \in \{0, 1, \dots, (N-1)\}$ e la variabile N indica la lunghezza del filtro Doppler; quest'ultima influenza l'accuratezza con cui il filtro tempo-discreto approssima la funzione di trasferimento.

- Trasformata DFT della funzione di Bessel, pari allo spettro $S_{hh}(\nu)$ e calcolo della risposta in frequenza $Z(f)$, definita dalla relazione (F.3).
- IDFT della funzione $Z(f)$ e normalizzazione dei coefficienti del filtro affinché l'energia della risposta all'impulso (potenza della DFT) sia unitaria.

In figura F.4 sono mostrate la risposta all'impulso (a sinistra) e la risposta in frequenza (a destra) del filtro Doppler, per $\nu_D = 70$ Hz.

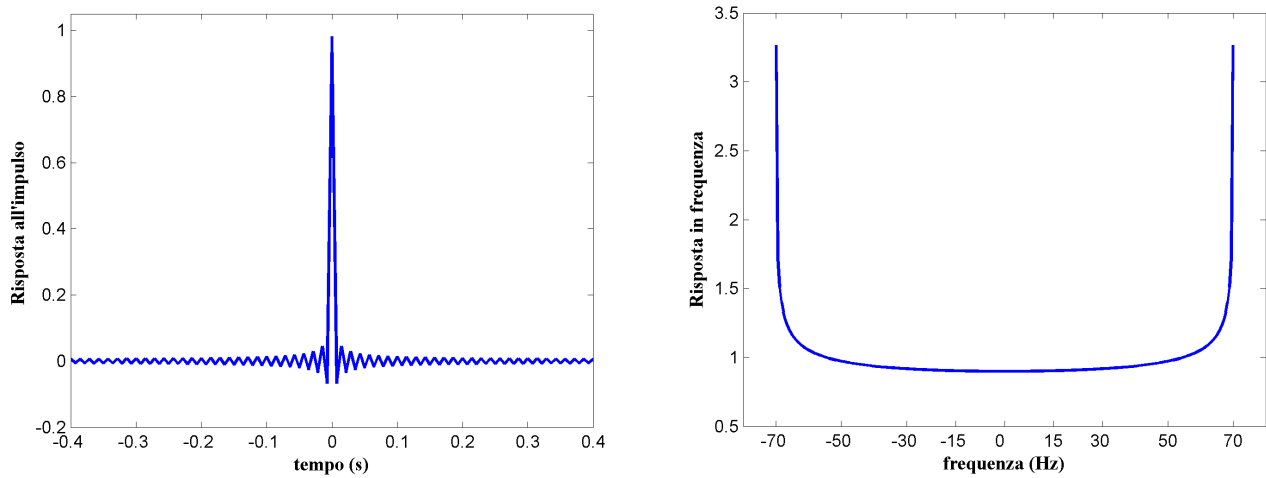


Figura F.4: Risposta all'impulso (a sinistra) e risposta in frequenza (a destra) del filtro Doppler per $\nu_D = 70$ Hz.

F.1.4 Ricampionamento delle realizzazioni

La frequenza di aggiornamento delle realizzazioni del canale simulato, indicata con SR , è stata definita implicitamente dalla dispersione Doppler, ovvero

$$SR = 2\nu_D \quad (F.5)$$

Essa deve essere adattata al *tasso di osservazione* OR , che indica quanto spesso la risposta di canale viene aggiornata prima della sua applicazione alla forma d'onda originale. In particolare, si è deciso di modificare la realizzazione di canale corrente dopo:

- ogni slot, quindi $OR = 1/(T_{slot}) = 2$ kHz, poiché $T_{slot} = 0.5$ ms.
- ogni simbolo SC-FDMA; in questo caso OR può assumere due valori, a seconda del prefisso ciclico:

$$OR = \begin{cases} 14 \text{ kHz se il CP è normale} \\ 12 \text{ kHz se il CP è esteso} \end{cases} \quad (F.6)$$

Una volta calcolato il fattore di sovra o sottocampionamento, l'interpolazione delle realizzazioni di ogni percorso viene effettuata usando la funzione Matlab *resample*. Essa utilizza un filtro di interpolazione caratterizzato da una struttura polifase e da una finestra di Kaiser per evitare fenomeni di equivocazione (*aliasing*). L'accuratezza del risultato dipende dal numero di campioni, posizionati ai lati del campione corrente, considerati nel calcolo. La figura F.5 presenta un esempio di interpolazione per un canale EVA con dispersione Doppler $\nu_D = 70$ Hz. La banda del sistema è pari a $B_W = 10$ MHz e il tasso di osservazione è $OR = 14$ kHz (CP normale).

F.1.5 Filtraggio a blocchi con salvataggio dello stato

L'ultima operazione da svolgere consiste nel distorcere la forma d'onda LTE originale, ottenuta dal generatore di segnale, con le risposte all'impulso simulate del canale radio. In figura F.6 è mostrata la variazione nel tempo delle prese di un canale EVA, in modulo, con $\nu_D = 70$ Hz, per un intervallo di 10 trame (100 ms).

Fissato un generico istante di tempo \bar{t} , l'equivalente numerico della CIR $h(\tau, \bar{t})$ viene filtrato per una porzione di segnale corrispondente alla durata di uno slot o di un simbolo SC-FDMA, a seconda del tasso di osservazione

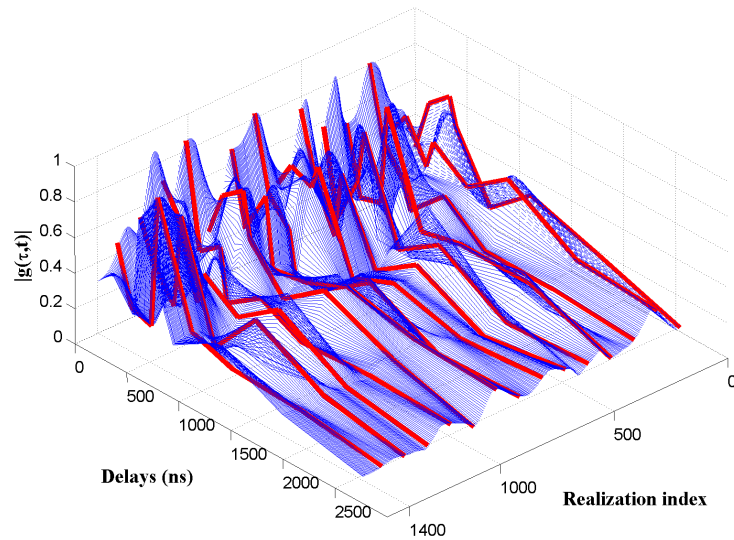


Figura F.5: Interpolazione delle realizzazioni di un canale EVA con $\nu_D = 70$ Hz e $B_W = 10$ MHz. Il tasso di osservazione è pari a $OR = 14$ kHz

OR scelto.

Dopo un intervallo di $(OR)^{-1}$ secondi, ovvero all'istante $\bar{t}' = \bar{t} + (OR)^{-1}$, la risposta di canale viene aggiornata dalla realizzazione successiva; durante questo passaggio, si deve preservare lo stato del filtro di convoluzione, in modo da non introdurre brusche discontinuità nella forma d'onda risultante.

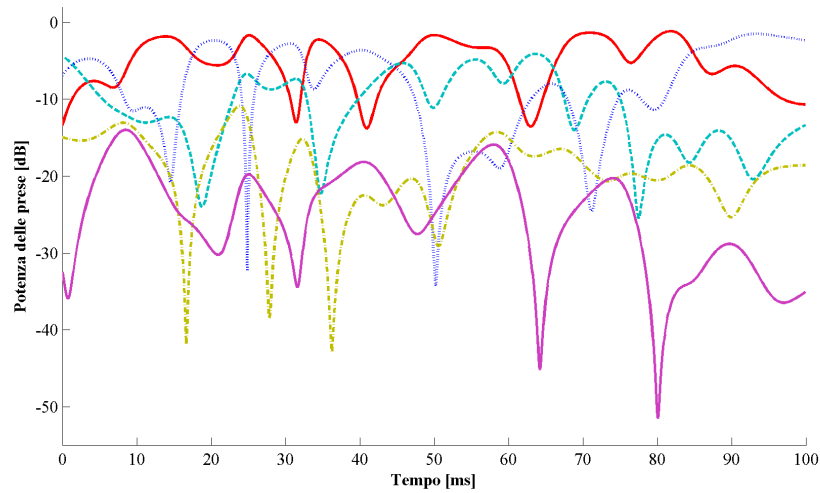


Figura F.6: Evoluzione di alcune prese del modello di canale EVA con $\nu_D = 70$ Hz e banda di sistema $B_W = 10$ MHz.

F.2 Codice del simulatore numerico

Si riporta per completezza la funzione Matlab del simulatore di canale, descritto nei precedenti paragrafi. Essa riprende il codice proposto in [45], con alcune modifiche per meglio rispondere alle esigenze del sistema LTE.

```

function [P_NG, tau_NG, g_res] = LTE_ChannelSimulator(channelID, f_s, N_frames, f_Dop, OR,
CPcondition)
%
% Simulatore di canale per il generatore di segnale LTE.
%
% Input: - channelID, identificatore di canale LTE.
%         Valori: channelID ∈ {'EPA', 'EVA', 'ETU'}.
%         - f_s, frequenza di campionamento del sistema (MHz).
%         - N_frames, numero di trame del segnale LTE da distorcere.
%         - f_Dop, dispersione Doppler richiesta dalla simulazione.
%         - OR, tasso di osservazione.
%         - CPcondition, configurazione del CP, normale o estesa.
%
% Utilizza: - funzione LTE_ChannelParameters: carica i parametri del modello
%           di canale.
%           - funzione SamplingGridChange: ricampiona le prese
%           con il metodo del coarse alignment.
%
% Output: - P_NG, potenza di ogni presa (dB) dopo il ricampionamento.
%
%         - tau_NG, ritardi di ciascuna presa (ns) dopo il ricampionamento.
%         - g_res, matrice del canale radio simulato. Essa contiene, lungo le
%           righe, le CIR a un dato istante; lungo le colonne le realizzazioni
%           di ciascuna presa.

% Parametri di simulazione.
% Numero simboli SC-FDMA per trama.
switch(CPcondition)
    case 'normal' , N_symb_frame=140;
    case 'extended' , N_symb_frame=120;
end
N_slot_frame=20; % Numero di slot per trama.
N_sim=10^4; % Numero di realizzazioni indipendenti.

% Parametri per la dispersione Doppler.
L_Dop=256; % Numero di prese del filtro Doppler.
Dop_res=1; % Risoluzione Doppler (Hz)
% (ricampionamento realizzazioni).
res_acc=20; % Precisione del ricampionamento.

% Caricamento parametri di canale campionati a 10 ns (Standard).
% P - Potenza dei percorsi; tau - ritardi dei percorsi.
[P, tau]=LTE_ChannelParameters(channelID);

```

```

% Ricampionamento dei percorsi con il coarse alignment.
% La frequenza di campionamento passa da 100 MHz (1/10 ns) a f_s MHz (1/T_s ns).
[P_NG, tau_NG] = SamplingGridChange(P, tau, f_s);
% Generazione dei percorsi casuali.
% Conversione dei guadagni delle prese in scala lineare.
P_NG=10.^(P_NG./10);
% Fattore di normalizzazione dei guadagni (dB).
Norm_f=-10*log10(sum(P_NG));
% Coefficienti di canale con distribuzione gaussiana complessa.
% Ampiezza con distribuzione di Rayleigh; Fase uniforme.
g=sqrt(0.5).*(randn(N_sim, N_taps_NG)+j.*randn(N_sim, N_taps_NG))*diag(sqrt(P_NG));

% Generazione del filtro Doppler.
% Variabile indipendente per l'autocorrelazione R(Dt).
x=pi.*([0:(L_Dop-1)]);
% Autocorrelazione nel tempo, R(Dt)=J0(2*pi*f_d*Dt) dove f_d=v*f_c/c.
R_Dt=besselj(0,x);
% Funzione di trasferimento del filtro Doppler.
% La quantità real(fft(R_Dt)) è la PSD di Jakes.
dop_filterFFT=sqrt(real(fft(R_Dt)));
% Risposta all'impulso del filtro Doppler.
dop_filter=real(iff(dop_filterFFT));
% Normalizzazione del filtro per la sua energia.
% La funzione di trasferimento presenterà potenza unitaria.
dop_filter=dop_filter./sqrt(sum(dop_filter.^2));

% Convoluzione delle realizzazioni di ogni percorso, aventi spettro bianco, con il filtro.
for(k=1:N_taps_NG)
    g_tmp=fftfilt(dop_filter, [g(:,k).' zeros(1,L_Dop)]);
    g(:,k)=g_tmp((1+L_Dop/2):(end-L_Dop/2)).';
end
% Scalamento delle prese per il fattore di normalizzazione.
g=g*10^(Norm_f/20);

% Ricampionamento delle realizzazioni al tasso di osservazione OR.
% Tasso di campionamento implicito del filtro Doppler.
SR=2*f_Dop;
% Numero di realizzazioni da interpolare.
% Se OR coincide con la cadenza degli slot (OR=2000 Hz).
N_rlz=0;
if(OR==2000)
    N_rlz=ceil(N_frames*N_slot_frame*SR/OR);
% Altrimenti (OR=14000/12000 Hz).
else
    N_rlz=ceil(N_frames*N_symb_frame*SR/OR);
end
% Selezione delle realizzazioni da interpolare.
g=g(1:N_rlz,:);

```

```

for(k = 1 : N_rlz)
    E_g = (g(k,:)*g(k,:))';
    g(k,:) = g(k,:)/sqrt(E_g);
end
% Minimo comune multiplo tra SR e OR.
m=lcm(SR/Dop_res , OR/Dop_res);
% Numeratore del fattore di ricampionamento.
Numerator=m/SR*Dop_res;
% Denominatore del fattore di ricampionamento.
Denominator=m/OR*Dop_res;
% Array delle realizzazioni interpolate.
g_res=zeros(ceil(Numerator/Denominator*N_rlz), N_taps_NG);
for(k=1:N_taps_NG)
    g_res(:,k) = resample(g(:,k),Numerator,Denominator,res_acc);
end

% Normalizzazione delle risposte all'impulso.
for(k=1:ceil(Numerator/Denominator*N_rlz))
    E_g = ((g_res(k,:)*(g_res(k,:))));
    g_res(k,:) = g_res(k,:)/sqrt(E_g);
end

```

Bibliografia

- [1] D.V. Sarwate, “Bounds on crosscorrelation and autocorrelation of sequences”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 6, November 1979.
- [2] S. Sesia, I. Toufik, and M. Baker, *LTE - The UMTS Long Term Evolution : From Theory to Practice*, John Wiley and Sons, 2009.
- [3] M. Engels, *Wireless OFDM Systems - How to Make Them Work?*, Springer-Verlag, 2002.
- [4] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 3rd edition, 1991.
- [5] K.V. Burry, *Statistical Methods in Applied Science*, John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [6] M. Morelli, C.-C. J. Kuo, and M.-O. Pun, “Synchronization techniques for orthogonal frequency division multiple access (OFDMA): A tutorial review”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 7, pp. 1394–1427, July 2007.
- [7] X. Cai and G.B. Giannakis, “Bounding performance and suppressing intercarrier interference in wireless mobile OFDM”, *IEEE Trans. on Communications*, vol. 51, pp. 2047–2056, March 2003.
- [8] A. G. Burr, “Irreducible BER of COFDM on IIR channel”, *Electronics Letters*, vol. 32, pp. 175–176, February 1996.
- [9] U. Sorger, I. De Broeck, and M. Schnell, “Interleaved FDMA - a new spread-spectrum multiple-access scheme”, *Proc. IEEE International Conference on Communications*, pp. 1013–1017, 1998.
- [10] Motorola, “R1-050584: EUTRA uplink numerology and design”, Tech. Rep., www.3gpp.org, 3GPP TSG RAN WG1, meeting 41bis, Sophia Antipolis, France, June 2005.
- [11] V9.1.0 (2010-03) TS 36.211, “Evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA); physical channels and modulation”, Tech. Rep., 3GPP.
- [12] Motorola, “R1-050584: EUTRA uplink numerology and design”, Tech. Rep. meeting 41bis, 3GPP TSG RAN WG1, Sophia Antipolis, France, June 2005.
- [13] WiMAX Forum White Paper, “Mobile WiMAX - part i: A technical overview and performance evaluation”, Tech. Rep., March 2006.
- [14] V9.3.0 (2010-10) TS 36.212, “Evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA); multiplexing and channel coding”, Tech. Rep., 3GPP.
- [15] V9.3.0 (2010-10) TS 36.213, “Evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA); physical layer procedures”, Tech. Rep., 3GPP.
- [16] LG Electronics, “R1-080257: Details on grouping for UL DM RS”, Tech. Rep., January 2008.
- [17] A. Paraboni and M. D’amico, *Radiopropagazione*, McGraw-Hill, 2002.

- [18] G. Tartara and L. Reggiani, *Sistemi Di Radiocomunicazione*, Polipress, Milano, 2009.
- [19] 3GPP TR 25.943 V6.0.0 (2004-12), “Deployment aspects (release 6)”, Tech. Rep., 3GPP, December 2008.
- [20] T.B. Sorensen, P.E. Mogensen, and F. Frederiksen, “Extension of the ITU channel models for wideband (OFDM) systems”, *Proc. Vehicular Technology Conf.*, September 2005.
- [21] Motorola Ericsson, Nokia and Rohde Schwarz, “R4-070572: Proposal of LTE channel models”, Tech. Rep. meeting 43, 3GPP TSG RAN WG4, Kobe, Japan, May 2007.
- [22] V10.0.0 (2010-10) TS 36.104, “Base station (BS) radio transmission and reception”, Tech. Rep., 3GPP.
- [23] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [24] T. M. Schmidl and D. C. Cox, “Robust frequency and timing synchronization for OFDM”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 45, no. 12, pp. 1613–1621, December 1997.
- [25] J-J Van de Beek, M. Sandell, and O. Borjesson, “ML estimation of time and frequency offset in OFDM systems”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 7, pp. 1800–1805, July 1997.
- [26] M. Speth, S. A. Fechtel, G. Fock, and H. Meyr, “Optimum receiver design for wireless broad-band system using OFDM - part I”, *IEEE Trans. On communications*, vol. 47, no. 11, pp. 1668–1677, November 1999.
- [27] V10.0.0 (2010-10) TS 36.101, “User equipment (UE) radio transmission and reception”, Tech. Rep., 3GPP.
- [28] S. Omar, A. Ancora, and D.T.M. Slock, “Performance analysis of general pilot-aided linear channel estimation in LTE OFDMA systems with application to simplified MMSE schemes”, *IEEE 19th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, pp. 1–6, 2008.
- [29] O. Edfors, M. Sandell, J. J. van de Beek, and S. K. Wilson, “OFDM channel estimation by singular value decomposition”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 7, pp. 931–938, July 1998.
- [30] I. Se-Bin and C. Hyung-Jin, “Efficient OFDM channel estimation for realistic band-limited and non-sample-spaced channels”, *Signal Process.*, vol. 90, no. 6, pp. 1768–1778, 2010.
- [31] G. Drufuca, *Problemi Inversi*, CUSL (Milano), 2 edition, 2004.
- [32] J.J. Van de Beek and alii, “On channel estimation in OFDM systems”, *Proc. IEEE Vehicular Technology Conf.*, vol. 2, pp. 815–819, July 1995.
- [33] S. Kinjo, “A new MMSE channel estimation algorithm for OFDM systems”, *IEICE Electronics Express*, vol. 5, pp. 738–743, 2008.
- [34] S. Schiffermuller and V. Jungnickel, “Practical channel interpolation for OFDMA”, *Global Telecommunications Conference, GLOBECOM '06. IEEE*, pp. 1–6, 2006.
- [35] H. J. Landau and H. O. Pollak, “Prolate spheroidal functions, fourier analysis and uncertainty, III. the dimension of the space of essentially time- and band-limited signals”, *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 41, no. 23, pp. 1295–1336, July 1962.
- [36] G. S. Ammar and W. B. Gragg, “Superfast solution of real positive definite toeplitz systems”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 9, no. 1, pp. 61–76, January 1988.
- [37] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations (John Hopkins Studies in Mathematical Sciences)*, JHU Press, 3rd edition, 1996.
- [38] R. A. Shafik, S. Rahman, and R. Islam, “On the extended relationships among EVM, BER and SNR as performance metrics”, *4th International Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2006.

- [39] H.G. Myung and D.J. Goodman, *Single Carrier FDMA, a New Air Interface for Long Term Evolution*, Wiley, 2008.
- [40] S.K. Deng and M.C. Lin, “OFDM PAPR reduction using clipping with distortion control”, *IEEE Wireless Communications*, January 2005.
- [41] C.J. Meyer, “Measuring the peak-to-average power of digitally modulated signals”, *Boonton electronics*, 1993.
- [42] B. M. Popovic, “Generalized chirp-like polyphase sequences with optimum correlation properties”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 38, no. 4, July 1992.
- [43] S. Beyme and C. Leung, “Efficient computation of DFT of zadoff-chu sequences”, *Electronics Letters*, vol. 45, no. 9, April 2009.
- [44] M. Stewart, “A superfast toeplitz solver with improved numerical stability”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 25, no. 3, pp. 669–693, 2003.
- [45] IEEE 802.16 Broadband Wireless Access Working Group, “Channel models for fixed wireless applications”, Tech. Rep., IEEE, July 2001.