

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria dei Sistemi

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Fisica



**Verso il singolo ciclo ottico: sintesi coerente
di amplificatori parametrici a larga banda**

RELATORE: Chiar.mo Prof. Giulio CERULLO

CORRELATORE: Ing. Cristian MANZONI

Tesi di Laurea di:
Paolo FARINELLO
Matr. 734188

Anno Accademico 2010–2011

Introduzione

La comprensione dei fenomeni che accadono in natura ha da sempre destato grande interesse nell'animo umano, attratto dalla possibilità di emularla o addirittura governarla. Alcuni fenomeni tuttavia avvengono su scale temporali così rapide da non poter essere colti nella loro interezza con il solo ausilio dei propri sensi. Ciò ha inevitabilmente posto l'uomo di fronte alla necessità di dotarsi di una strumentazione adeguata in grado di sopperire ai propri limiti. Un primo tentativo in tal senso è stato compiuto con l'avvento della macchina fotografica, utilizzata per la prima volta da Muybridge, fotografo inglese nato a Kingstone-on-Thames nel 1830, per documentare la sequenza dei movimenti di un cavallo al galoppo, impossibili da decifrare all'occhio umano: fu così possibile scoprire l'esistenza di un brevissimo intervallo di tempo in cui gli zoccoli del cavallo sono contemporaneamente sollevati da terra, ma non corrispondente alla posizione di massima estensione delle gambe come si era soliti pensare fino a quel momento. L'innovazione tecnologica e l'introduzione di dispositivi elettronici dotati di risposte sempre più rapide alle sollecitazioni hanno poi determinato un notevole impulso allo studio dei fenomeni ultraveloci, fissando un nuovo limite di risoluzione temporale nella scala dei picosecondi. Ciò nonostante esistono in natura dei fenomeni ancora più rapidi, che si esauriscono in tempi della durata di qualche femtosecondo, ben oltre le possibilità di un qualunque sistema elettronico. Per poter esaminare quei fenomeni occorre allora ricorrere ad altre soluzioni, come ad esempio l'impiego di impulsi di luce ultrabrevi, generati dai più moderni sistemi ottici. Le possibilità garantite dall'ottica vanno infatti ben aldilà di quelle fornite dall'elettronica: basti pensare che ad un'onda monocromatica che oscilla alla lunghezza d'onda $\lambda = 500 \text{ nm}$ (al centro della regione visibile dello spettro) compete una durata pari a 1.7 fs. Nella pratica tuttavia non è semplice disporre di un impulso di tale durata, a causa di due motivazioni principali: nel caso di un impulso, la durata temporale è limitata dall'estensione spettrale della sua banda, in particolare maggiore è il numero di colori che lo costituiscono e minore è la sua durata; in aggiunta a ciò, la dispersione da esso percepita nel corso della propagazione contribuisce ad aumentare la sua durata effettiva rispetto a quella minima fissata dalla sua banda. Il presente lavoro di tesi si propone di descrivere un approccio alla sintesi di un impulso della durata di pochi cicli ottici, combinando fra loro i fasci prodotti da due distinti amplificatori ottici parametrici con bande di amplificazione adiacenti, per coprire complessivamente un'estensione spettrale di circa un'ottava. In un particolare regime di funzionamento inoltre, il sistema sviluppato può restituire un impulso che sia anche stabilizzato in fase, possibilità che viene pertanto analizzata in termini di prestazioni ed efficienza. Un impulso con le caratteristiche descritte (breve durata e a fase stabile) trove-

rebbe largo impiego sia nel campo della spettroscopia ultraveloce, per sondare ad esempio dinamiche molecolari ultrarapide, sia nell'ambito dell'attuazione di tutti quegli effetti dipendenti dal campo elettrico e pertanto sensibili alla sua fase. Segue una breve descrizione del contenuto dei vari capitoli.

Il primo capitolo affronta la teoria necessaria per illustrare il funzionamento dei principali effetti non-lineari del secondo e del terzo ordine innescati dall'interazione di una radiazione luminosa con la materia, ricavando le equazioni di propagazione di un'onda nel mezzo a partire dalle equazioni di Maxwell.

Il secondo capitolo si occupa del funzionamento di un amplificatore ottico parametrico, attualizzando il significato della generazione di frequenza differenza su cui si fonda e proponendo una soluzione alle equazioni di propagazione ricavate in precedenza. Una dettagliata descrizione di parametri di merito del dispositivo e di come sia possibile migliorare le sue prestazioni è inoltre fornita prima della sua conclusione.

Il terzo capitolo descrive il significato della CEP di un impulso, affrontando il problema da diversi punti di vista (prima nel dominio del tempo e poi in quello delle frequenze). Spiega quindi come sia possibile sfruttare un amplificatore ottico per generare un impulso a fase assoluta stabile, concludendo con un'introduzione ad alcune applicazioni a cui si presta un siffatto impulso.

Il quarto capitolo approfondisce il setup sperimentale implementato per la generazione di un impulso a fase stabile, partendo dalla sorgente laser impiegata e passando poi al cuore del sistema, ovvero l'amplificatore infrarosso a doppio stadio. A conclusione del capitolo si esamina la tecnica adottata per misurare le fluttuazioni della fase assoluta.

Il quinto ed ultimo capitolo affronta infine il problema della sintesi coerente di un impulso di pochi cicli ottici, ai fini della quale si sfrutta nuovamente il parametrico infrarosso precedentemente introdotto. Si descrivono quindi i due nuovi OPA (visibile e degenere) necessari per l'amplificazione dei segnali impiegati per innescare il processo di sintesi. Dopo aver proposto un approccio con cui comprimere gli impulsi si analizza il sistema di sincronizzazione dei due OPA, indispensabile per garantire la riproducibilità dell'impulso di sintesi.

L'appendice A si occupa di un'analisi approfondita del significato del phase-matching e di come esso possa essere realizzato all'interno di un cristallo non-lineare, approfondendo un esempio pratico di generazione di seconda armonica.

Nell'appendice B è contenuta una trattazione dell'algoritmo FTSI, utilizzato per analizzare le frange di interferenza raccolte nel corso degli esperimenti.

Sommario

I recenti progressi nel campo dell'ottica ultraveloce sono stati scanditi dai numerosi sforzi orientati verso l'implementazione di sistemi dotati di una maggiore tunabilità spettrale, unitamente a quelli profusi per ottenere impulsi di durata sempre inferiore. In merito alla possibilità di sintetizzare impulsi brevi, grandi passi in avanti si sono compiuti prima con la diffusione di sorgenti laser operanti in regime di mode-locking (che garantiscono ormai impulsi di durata ~ 100 fs), successivamente con lo sviluppo di tecniche di compressione sempre più efficaci assieme all'affermazione degli amplificatori ottici parametrici a larga banda: il loro utilizzo ha permesso infatti di dimostrare la possibilità di produrre impulsi di durata inferiore ai 10 fs [1]. Le nuove competenze acquisite nell'ambito della generazioni di impulsi ultracorti hanno dunque stimolato l'interesse comune verso il raggiungimento del limite ideale di durata temporale, ovvero il singolo ciclo ottico di oscillazione della portante.

Il seguente lavoro di tesi illustra un sistema in grado di produrre impulsi della durata di pochi cicli ottici, sfruttando un meccanismo di sintesi coerente. A partire da impulsi aventi origine da una sorgente laser di Ti:Zaffiro operante in regime di mode-locking (con durata ~ 150 fs), si è realizzato un apparato preposto alla generazione di un fascio dotato di una banda spettrale estesa su un'ottava (da 500 nm a 1000 nm), corrispondente per il teorema di Fourier ad un impulso di durata 3.3 fs. Tale dispositivo consta di un amplificatore parametrico infrarosso a doppio stadio, con cui è stato possibile produrre alternativamente un fascio di idler centrato alla lunghezza d'onda $\lambda_i = 1700$ nm e dotato di una potenza $P_i = 20$ mW (RMS $\sim 1.2\%$), ed uno di segnale alla lunghezza d'onda $\lambda_s = 1300$ nm con potenza $P_s = 5.8$ mW (RMS $\sim 2\%$). Selezionando uno dei due fasci e focalizzandolo all'interno di un opportuno cristallo, è stato possibile innescare il processo di generazione del supercontinuo per dimostrare la capacità di sintetizzare luce bianca con spettro continuo nella regione da 500 nm fino a 1000 nm. Si sono sondati in particolare due diversi materiali: lo YAG, che ha permesso di ottenere una migliore qualità dello spettro attorno alla lunghezza d'onda fondamentale fornita dalla cavità laser (800 nm); lo zaffiro, che ha garantito invece una maggiore stabilità del fascio bianco prodotto. Il segnale a banda larga così ottenuto è stato usato per alimentare una nuova coppia di amplificatori parametrici, ambedue pompati dalla seconda armonica degli impulsi generati dalla sorgente. Il primo OPA, visibile, è stato usato per amplificare la porzione del fascio bianco con spettro più spostato verso lunghezze d'onda inferiori, tra 500 nm e 750 nm; il secondo, infrarosso, per amplificare la regione spettrale duale, fra 750 nm e 1000 nm. In

entrambi i casi è stata adotta una configurazione tale da massimizzare la banda di guadagno del dispositivo: si è scelta perciò una geometria non-collineare per l'OPA visibile, a valle del quale si è potuta misurare una potenza di segnale $P_v = 1.6$ mW, ed una collineare, associata ad una condizione di funzionamento in regime di degenerazione, per quello infrarosso, in grado di fornire una potenza di segnale $P_i = 1.25$ mW. I due fasci così ottenuti devono quindi essere ricombinati per realizzare un unico impulso della durata di pochi cicli ottici: confrontando la durata del ciclo ottico della portante (2.3 fs), calcolata tramite una media delle singole componenti spettrali pesata sull'intensità associata a ciascuna di esse, con quella di un impulso transform limited di banda estesa da 500 nm a 1000 nm (3.3 fs), si è dedotta una durata dell'impulso di sintesi pari a 1 singolo ciclo ottico. Al fine di agganciare in fase i due fasci e stabilizzare l'intero processo di sintesi, è stato necessario infine implementare un sistema di sincronizzazione attivo che sfrutta la parziale sovrapposizione spettrale degli impulsi per rivelare un segnale di interferenza, regolata dal ritardo fra i due. Per mezzo di un fotodiodo bilanciato si sono potute quindi monitorare in tempo reale le fluttuazioni lente del ritardo di gruppo fra gli impulsi. Un attuatore piezoelettrico, in grado di controllare la differenza di cammino percorso dai fasci e comandato da un segnale di feedback generato dal fotodiodo, è stato quindi impiegato per compensare il ritardo. Uno studio approfondito del principio di funzionamento della tecnica interferometrica ha mostrato la possibilità di migliorare la sensibilità del sistema e aumentare la reiezione al rumore introdotto da instabilità nella fase relativa tra le portanti dei due impulsi, semplicemente stringendo il range spettrale di detection. L'analisi delle frange di interferenza raccolte a retroazione spenta ha poi confermato la capacità del sistema di inseguire le fluttuazioni del ritardo nel tempo, essendo esse descrivibili su una scala temporale dell'ordine dei secondi. Allo stato attuale non sono ancora state raccolte frange ad anello chiuso, lasciando aperta una strada di investigazione futura del dispositivo.

Oltre alla possibilità di sintetizzare impulsi ultrabrevi di pochi cicli ottici, è stata sondata anche la capacità del sistema costruito di produrre impulsi a fase assoluta costante, grazie ad un meccanismo di stabilizzazione passivo basato sul fenomeno di generazione di frequenza differenza. Dati due impulsi di pulsazioni portanti ω_1 e ω_2 e con fase assoluta $\varphi_{ce,1}$ e $\varphi_{ce,2}$, il fenomeno garantisce infatti la possibilità di generare un fascio di pulsazione $\omega = \omega_2 - \omega_1$ e fase $\varphi_{ce} = \varphi_{ce,2} - \varphi_{ce,1} - \pi/2$. Assumendo dunque di innescare l'effetto a partire da due repliche identiche di uno stesso impulso, è possibile cancellare le eventuali fluttuazioni di fase assoluta nel fascio prodotto alla frequenza differenza. A tale scopo l'amplificatore infrarosso a doppio stadio è stato riarrangiato in una configurazione tale da restituire in uscita il fascio di idler (generato per frequenza differenza durante il processo di amplificazione). Si è dunque voluta testare

la stabilità della sua CEP mediante un interferometro f-2f. Per prima cosa si è sfruttato l'idler per innescare la generazione del supercontinuo all'interno di una lamina di YAG, producendo un fascio bianco caratterizzato dalla sua stessa fase assoluta. Dopodiché si sono fatte interferire la seconda armonica dell'idler con la componente alla medesima frequenza del bianco. L'analisi degli interferogrammi raccolti al variare del tempo ha permesso di risalire al valore della fluttuazione di fase assoluta, mostrando una buona stabilità ($\Delta\varphi_{RMS} = 0.3$ rad) su un intervallo di tempo di 14 secondi.

Abstract

Recent developments in the field of ultrafast optics grew up together with hard efforts towards the achievement of systems provided with greater spectral tunability and the production of shorter light pulses. Regarding the opportunity to synthesize ultrashort pulses, research was encouraged first by the introduction of mode-locking operating sources (which support duration ~ 100 fs), later by the establishment of more powerful compression techniques and the rise of broadband optical parametric amplifiers: their use showed the capability to realize pulses with duration less than 10 fs [1]. The brand new skills acquired in the area of short light pulses generation fostered the science community toward the attainment of the theoretical limit of pulse duration, set by the carrier oscillation period.

The following thesis depicts a system capable of producing light pulses comprising only few optical cycles, through coherent synthesis of two different beams belonging to adjacent spectral regions. Starting from pulses coming out of a Ti:Sapphire laser source in mode-locking regime (with a duration ~ 150 fs), we set up a device to generate a beam with spectral extent covering a full octave (from 500 nm to 1000 nm), which is associated by the Fourier theorem to a pulse having a duration of 3.3 fs. Such a device consists of a double stage infrared optical parametric amplifier, by means of that it was possible to produce an idler beam centered at wavelength $\lambda_i = 1700$ nm and carrying a power of $P_i = 20$ mW (RMS $\sim 1.2\%$), or a signal beam centered at wavelength $\lambda_s = 1300$ nm with a power $P_s = 5.8$ mW (RMS $\sim 2\%$). Taking one of the two beams and focusing it inside a proper material, it was possible to trigger supercontinuum generation in order to prove the capability to synthesize a white light spectrum spanning from 500 nm to 1000 nm. Two different materials were tested: YAG, which gave a better quality spectrum in the area around the fundamental wavelength provided by the cavity (800 nm); sapphire, which instead assured a higher stability of the white light produced. The supercontinuum was then used to seed other two OPAs, pumped by the second harmonic of the source pulses. The first one was used to amplify the visible part of the white light, between 500 nm and 750 nm; the second one, to amplify the infrared side, between 750 nm and 1000 nm. In order to maximize the gain bandwidth of both devices, they were arranged according to a non-collinear configuration (concerning the visible OPA) and to a collinear geometry (concerning the infrared OPA, forced to work at degeneracy). The power of the signals provided by the parametric amplifiers were measured to

be $P_v = 1.6$ mW and $P_i = 1.25$ mW respectively. The following step towards the synthesis of a few-cycle pulse was then to combine the separated outputs of the OPAs. We inferred a duration of the synthesized pulse comprising only a single cycle of oscillation of the carrier, comparing that of a transform limited pulse with bandwidth spanning from 500 nm to 1000 nm (3.3 fs) with the oscillation period of the carrier (2.3 fs), evaluated by means of a weighted average of the spectral components on their intensity. The two beams were then locked in phase using an active synchronization system based on the detection of an interference pattern in the region where the different spectra overlapped. The technique exploits the dependence of the fringes on the group delay between the pulses, the slow fluctuation of that we measured with a balanced photodiode. The feedback signal generated by the photodiode was then used to control a piezoelectric actuator whose position determines the path difference between the beams and thus can compensate their relative delay. Further investigation of the interferometric technique revealed the possibility to improve the performances of the system, in terms of sensitivity and rejection of the noise introduced by fluctuation of the intrinsic phase difference between the carriers of the two pulses, narrowing the spectral range of detection. The analysis of the fringes observed in case of open loop proved the capability of the system to detect the actual oscillation of the delay, which takes place over a time interval of the order of second. On the other hand, fringes observed after the activation of the synchronization system are not yet available.

The thesis deals also with the opportunity to generate CEP-stable pulses, thanks to a passive stabilization method based on difference frequency generation taking place in the amplification process. Starting from two pulses with carrier ω_1 and ω_2 and with an absolute phase $\varphi_{ce,1}$ and $\varphi_{ce,2}$, DFG ensures the possibility to generate a third pulse with carrier $\omega = \omega_2 - \omega_1$ and phase $\varphi_{ce} = \varphi_{ce,2} - \varphi_{ce,1} - \pi/2$. Assuming now to trigger the non-linear effect with two replicas of a unique pulse, one can cancel the fluctuation of CEP of the fundamental beam by taking the pulse generated at the frequency difference. For this purpose the double stage infrared OPA was rearranged in such a configuration to amplify the idler beam (obtained by DFG in the first amplification stadium). We later tested the stability of its CEP using an f-2f interferometer. First of all we triggered supercontinuum generation in a YAG plate using the idler beam, in order to obtain a white light with its same absolute phase. After that we made the second harmonic of the idler interfere with the same spectral component of the white light and collected the resulting fringes: the FTSI algorithm then allowed us to calculate the fluctuation of CEP, proving a good stability ($\Delta\varphi_{RMS} = 0.3$ rad) over a time interval of 14 seconds.

Indice

Introduzione	ii
Sommario	iv
I Fondamenti Teorici	2
1 Elementi di Ottica Non-Lineare	3
1.1 L'origine dei fenomeni non-lineari: il vettore polarizzazione	3
1.2 L'equazione di propagazione delle onde in mezzi non-lineari	5
1.3 Effetti non-lineari del secondo ordine	9
1.3.1 Interpretazione corpuscolare	10
1.3.2 Generazione di frequenza somma	11
Generazione di seconda armonica	11
1.3.3 Generazione di frequenza differenza	14
1.4 La polarizzazione del terzo ordine	14
1.5 Self-Phase Modulation	16
1.6 Self-Focusing	18
2 Amplificatore Ottico Parametrico (OPA)	19
2.1 Le equazioni di Manley-Rowe	20
2.2 Soluzione delle equazioni accoppiate per onde monocromatiche .	22
2.3 Soluzione delle equazioni accoppiate per impulsi brevi	23
2.4 Estensione della banda di amplificazione: configurazione non- collineare (NOPA)	26
3 Fase assoluta (CEP)	30
3.1 Significato fisico della CEP	30
3.2 Stabilizzazione passiva mediante OPA	35
3.3 Applicazioni di impulsi a fase stabile	38

II	Attività Sperimentale	42
4	Generazione di impulsi a fase stabile	43
4.1	Sorgente laser	43
4.2	OPA infrarosso	45
4.3	Il Supercontinuo	51
4.4	Interferometro f-2f	54
5	Verso la sintesi coerente	60
5.1	OPA visibile	60
5.2	OPA degenerare	62
5.3	Compressione mediante Chirped Mirrors	64
5.4	Sincronizzazione degli OPA	68
A	Birifrangenza	77
B	Fourier-Transform Spectral Interferometry	83
	Bibliografia	85

Elenco delle figure

1.1	Interpretazione corpuscolare	11
1.2	Sum Frequency Generation	12
1.3	Second Harmonic Generation	13
1.4	Significato fisico del phase matching	13
1.5	Difference Frequency Generation	14
1.6	Self-Phase Modulation	17
2.1	Schema del processo di amplificazione	19
2.2	Group velocity mismatch	24
2.3	Phase Matching non-collineare	27
2.4	NOPA	29
3.1	Carrier-Envelope Phase	31
3.2	Schema cavità laser	31
3.3	CEP nel dominio del tempo	33
3.4	CEP nel dominio delle frequenze	34
3.5	Schemi di stabilizzazione passiva di fase assoluta	37
3.6	Ionizzazione per effetto tunnel	39
3.7	Soglia di ionizzazione	40
4.1	Sorgente laser - schema a blocchi	44
4.2	Sorgente laser - output	46
4.3	OPA infrarosso - fotografia	47
4.4	OPA infrarosso - schema a blocchi	47
4.5	OPA infrarosso - primo stadio	48
4.6	Spettro idler - primo stadio	49
4.7	OPA infrarosso - secondo stadio	50
4.8	Spettro idler - secondo stadio	51
4.9	Spettro segnale	52
4.10	Setup per la generazione del bianco	53
4.11	Spettro della luce bianca - YAG	54

4.12	Spettro della luce bianca - zaffiro	55
4.13	Setup interferometro f-2f	57
4.14	Interferogramma f-2f	58
4.15	Fluttuazione della CEP nel tempo	59
5.1	Setup OPA visibile	61
5.2	Curve di phase matching per un OPA non-collineare	62
5.3	Spettro OPA visibile	63
5.4	Setup OPA degenere	63
5.5	Spettro OPA degenere	65
5.6	Group Delay	66
5.7	Group Delay Dispersion	66
5.8	Chirped Mirrors	67
5.9	Spettro dell'impulso di sintesi	68
5.10	Setup per la sincronizzazione	69
5.11	Rivelazione del ritardo	70
5.12	Interferenza degli impulsi visibile e degenere - ramo ①	71
5.13	Interferenza degli impulsi visibile e degenere - ramo ②	72
5.14	Interferogramma ad anello aperto	75
A.1	Ellissoide degli indici	79
A.2	Phase Matching in un cristallo uniassico	79
A.3	Ellissoide degli indici normale	80
A.4	Relazioni di dispersione di un cristallo di BBO	81

Elenco delle tabelle

3.1	CEP nei processi non-lineari	36
A.1	Tipi di phase matching	82

Parte I

Fondamenti Teorici

Capitolo 1

Elementi di Ottica Non-Lineare

Nel capitolo corrente si discute dell'origine e del significato dei principali fenomeni non-lineari del secondo ordine e del terzo ordine, con particolare riferimento a quelli di interesse per la realizzazione di un amplificatore ottico parametrico.

1.1 L'origine dei fenomeni non-lineari: il vettore polarizzazione

La non-linearità dell'interazione tra radiazione luminosa e materia è descritta attraverso la risposta del materiale all'onda incidente e contenuta nel vettore polarizzazione [2]. Limitandosi per semplicità alla descrizione di un problema monodimensionale, in cui tutti i vettori di interesse sono orientati lungo la direzione arbitraria x , è possibile esplicitare la polarizzazione in funzione dello spostamento di carica $x(t)$ indotto dal campo elettrico in ingresso nella seguente forma:

$$P(t) = -Nex(t) \quad (1.1)$$

dove N ed e sono rispettivamente il numero di dipoli per unità di volume e il modulo della carica dell'elettrone ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C). Dall'equazione 1.1 si evince che la polarizzazione è direttamente proporzionale a $x(t)$, perciò solo esplicitando l'espressione dello spostamento si potrà chiarire la non-linearità di $P(t)$. Utilizzando un modello classico [3] per descrivere l'equazione del moto dell'elettrone, tenendo conto del fatto che le forze in gioco nel nostro caso sono rappresentate da quella esercitata dall'onda incidente e quella esercitata dai nuclei, si ottiene un'equazione del tipo:

$$m \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -eE(t) - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \quad (1.2)$$

dove $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg rappresenta la massa dell'elettrone, $E(t)$ il campo elettrico incidente e $V(x)$ l'energia potenziale prodotta dalla distribuzione dei nuclei nella materia. Con riferimento al sistema unidimensionale preso in considerazione, è possibile esplicitare l'energia potenziale tramite il suo sviluppo in serie di Taylor nella forma:

$$V(x) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{m}{3}Dx^3 + \frac{m}{4}Bx^4 + \dots \quad (1.3)$$

dove $\omega_0/2\pi$ è la frequenza naturale¹ dell'oscillatore costituito dalla coppia elettrone-nucleo, mentre D e B sono costanti. Evidentemente la simmetria del materiale può modificare l'espressione dello sviluppo, selezionando i termini che compaiono al suo interno. Si è soliti perciò distinguere tra i cosiddetti materiali *centro-simmetrici*, per i quali $V(x) = V(-x)$ e la relazione 1.3 contiene solo le potenze pari di $x(t)$, e quelli *non centro-simmetrici*, per cui al contrario $V(x) \neq V(-x)$. Limitandosi per il momento² allo studio degli effetti non-lineari del secondo ordine, descritti dal termine dello sviluppo di V che dipende da x^3 , si prenda in considerazione d'ora in avanti un materiale non centro-simmetrico, il cui potenziale ammette anche le potenze dispari di x . Si valuti per il momento il ruolo svolto dal solo primo termine dello sviluppo 1.3. Sia il campo elettrico incidente un campo oscillante alla frequenza $\omega_f/2\pi$:

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_f t + \varphi) \quad (1.4)$$

Sostituendo all'interno dell'equazione 1.2 l'espressione del potenziale e ricercando una soluzione $x(t)$ che oscilli alla stessa frequenza della forzante si ottiene:

$$x(t) = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} E(t) \quad (1.5)$$

Dall'espressione di x appena trovata scaturisce evidentemente una polarizzazione che dipende linearmente dal campo elettrico E , la cui rappresentazione nel dominio delle frequenze è del tipo:

$$\tilde{P}_L(\omega) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad (1.6)$$

con ε_0 costante dielettrica del vuoto e $\chi(\omega)$ suscettività³ elettrica; si è scelto di indicare con “ $\tilde{}$ ” i campi in funzione della pulsazione. Si noti che la suscettività χ è legata all'indice di rifrazione n percepito da un'onda in un materiale mediante la relazione:

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \quad (1.7)$$

¹La frequenza di oscillazione del corrispondente oscillatore armonico libero e non smorzato.

²Fino a quando specificato diversamente.

³ $\chi^{(1)}(\omega)$ rappresenta il prim'ordine dello sviluppo in serie di Taylor della suscettività.

Un risultato ben diverso nasce introducendo nell'equazione 1.2 anche il contributo dato dal secondo termine dello sviluppo del potenziale. Tale termine infatti, originando una forzante che dipende dal quadrato dello spostamento x , risulta essere la causa della non-linearità della polarizzazione. Studiando più approfonditamente l'equazione del moto tramite analisi di Fourier, si deduce che dato un campo in ingresso a pulsazione ω lo spostamento x da esso indotto può essere scomposto in due parti: una che oscilla alla stessa pulsazione ω , risultato già contemplato dal caso lineare precedentemente descritto, l'altra che oscilla invece a pulsazione 2ω . La polarizzazione che deriva dalla nuova forma di $x(t)$ si può scrivere come:

$$\tilde{P}_{NL}(\omega) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega) \tilde{E}^2(\omega) \quad (1.8)$$

con $\chi^{(2)}$ che rappresenta il secondo termine dello sviluppo di Taylor della suscettività. Nei materiali non centro-simmetrici può dunque essere innescato, a patto che il campo in ingresso sia sufficientemente intenso, un termine di polarizzazione che dipende dalla seconda potenza di E : tale termine è responsabile [4] della complessità dei *fenomeni non-lineari del secondo ordine*, tra cui si annoverano la *generazione di seconda armonica (SHG)*, la *generazione di frequenza somma (SFG)* e la *generazione di frequenza differenza (DFG)*.

1.2 *L'equazione di propagazione delle onde in mezzi non-lineari*

Per assolvere il compito di trovare un'equazione in grado di descrivere l'evoluzione delle onde in un mezzo materiale occorre partire dalle equazioni di Maxwell [5]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & , & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & , & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.9)$$

dove si indica con \mathbf{E} il vettore campo elettrico e con \mathbf{D} lo spostamento dielettrico, \mathbf{H} è il campo magnetico e \mathbf{B} il vettore induzione magnetica, infine ρ e \mathbf{j} rappresentano rispettivamente cariche e correnti libere. Prima di procedere è inoltre utile ricordare le relazioni che legano tra loro i campi elettrico e magnetico ai vettori polarizzazione e magnetizzazione:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \end{cases} \quad (1.10)$$

con μ_0 permeabilità magnetica del vuoto. E' possibile dunque semplificare il problema ricordando che i materiali di interesse in ambito ottico manifestano

generalmente proprietà magnetiche trascurabili, perciò ha senso ammettere che $\mathbf{M} = 0$; in aggiunta a ciò si vuole trascurare il contributo dato da cariche e correnti libere, ponendo $\rho = \mathbf{j} = 0$. A questo punto per trovare l'equazione di propagazione delle onde in un mezzo basta semplicemente applicare l'operatore di rotore ad entrambi i membri, ad esempio, dell'equazione 1.9 sul rotore di \mathbf{E} :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mu_0 \mathbf{H}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Ricordando inoltre che, posto $\nabla \mathbf{E} = 0$ in assenza di cariche libere:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.12)$$

Si può scrivere, eguagliando la 1.12 alla 1.11 ed esplicitando \mathbf{D} mediante la 1.10:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

detta $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ la velocità della luce nel vuoto e avendo scomposto il vettore polarizzazione nella somma dei due contributi discussi nel paragrafo precedente. L'equazione 1.13 può essere ulteriormente semplificata assumendo che il campo elettrico sia polarizzato, ad esempio, lungo la direzione x (*approssimazione scalare*) e che sia costante sul piano ortogonale alla direzione di propagazione z (*approssimazione di onda piana*), scelta arbitrariamente:

$$\mathbf{E} = E(z, t) \mathbf{u}_x \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (1.15)$$

con \mathbf{u}_x versore diretto lungo x , $P_L = P_L(z, t)$ e $P_{NL} = P_{NL}(z, t)$ componenti rispettivamente lineare e non-lineare di $P(z, t)$.

L'equazione 1.15 descrive l'evoluzione del campo elettrico di un'onda all'interno di un mezzo che introduce non-linearità, in tutte le ipotesi sopra citate. Nel caso reale più generico possibile, occorre considerare che i termini $E(z, t)$ e $P_{NL}(z, t)$ rappresentino degli impulsi a banda larga, la cui forma è del tipo:

$$E(z, t) = A(z, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (1.16)$$

$$P_{NL}(z, t) = p_{nl}(z, t) e^{i(\omega_0 t - k_p z)} \quad (1.17)$$

Il termine $A(z, t)$ nell'equazione 1.16 ($p_{nl}(z, t)$ nella 1.17) descrive la parte lentamente variabile, detta *inviluppo*, dell'impulso, k_0 (k_p) è il modulo del vettore d'onda e ω_0 la pulsazione portante; si è indicato infine con i l'unità immaginaria. Come risulterà chiaro in seguito, occorre ammettere fin dal principio la

possibilità che k_0 e k_p non coincidano. All'interno delle formule 1.16 e 1.17, così come in tutte quelle che seguiranno, si è voluto omettere la rappresentazione dell'operatore Re (parte reale) per motivi di semplicità e chiarezza espositiva; ciò non toglie che per passare dalla notazione complessa appena introdotta a quella reale, a cui è associato il significato fisico, sia necessario estrarre la parte reale delle grandezze in gioco. Poiché è più facile studiare l'equazione di propagazione 1.15 nel dominio delle frequenze, è utile puntualizzare alcune osservazioni. In primo luogo si ricorda che la trasformata di Fourier della derivata temporale di una funzione $f(t)$ risulta:

$$F \left\{ \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \right\} = (i\omega)^n \tilde{f}(t)$$

dove si è indicato con il simbolo “ \sim ” la trasformata di Fourier della funzione, coerentemente con la notazione adottata finora. Inoltre si assume che la p_{nl} vari lentamente nel tempo⁴, per cui:

$$\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \cong -\omega_0^2 P_{NL} \quad (1.18)$$

Le considerazioni appena fatte permettono di riscrivere l'equazione 1.15 nella seguente forma:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \tilde{E} = -\omega^2 \mu_0 \tilde{P}_L - \omega_0^2 \mu_0 \tilde{P}_{NL} \quad (1.19)$$

Per procedere nella semplificazione di 1.19 bisogna esplicitare le trasformate dei campi coinvolti. Si può dimostrare che le trasformate di Fourier di E e P_{NL} coincidono con quelle dei corrispondenti involuppi a meno di un fattore di fase:

$$\tilde{E}(z, \omega) = \tilde{A}(z, \omega') e^{-ik_0 z} \quad (1.20)$$

$$\tilde{P}_{NL}(z, \omega) = \tilde{p}_{nl}(z, \omega') e^{-ik_p z} \quad (1.21)$$

avendo indicato con ω' la coordinata $\omega' = \omega - \omega_0$. Da notare che la forma di \tilde{P}_L è già nota e contenuta in 1.6. Si assuma inoltre valida la cosiddetta *Slowly Varying Envelope Approximation (SVEA)*, che afferma:

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} \ll 2k_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \quad (1.22)$$

Di fatto la 1.22 consiste nell'ammettere che l'involuppo \tilde{A} varia lentamente in un tratto di lunghezza dell'ordine della lunghezza d'onda λ_0 della portante.

⁴Cioè la variazione di p_{nl} in un intervallo di tempo dell'ordine del periodo della portante è trascurabile.

Ricordando poi l'espressione dell'indice di rifrazione descritta dall'equazione 1.7, è possibile introdurre nell'equazione 1.19 la quantità $k(\omega)$, definita come:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c_0} n(\omega) \quad (1.23)$$

con $k(\omega_0) = k_0$. Le osservazioni raccolte nelle relazioni dalla 1.20 alla 1.23 permettono di riscrivere l'equazione 1.19 nella forma:

$$-2ik_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (k^2(\omega) - k_0^2) \tilde{A} = -\omega_0^2 \mu_0 \tilde{p}_{nl} e^{-i(k_p - k_0)z} \quad (1.24)$$

L'espressione $k^2(\omega) - k^2(\omega_0)$ che compare nella 1.24 può essere così approssimata con il suo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di ω_0 arrestato al secondo ordine:

$$\begin{aligned} k(\omega) &\cong k(\omega_0) + \frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}GVD(\omega - \omega_0)^2 \\ k^2(\omega) - k^2(\omega_0) &\cong 2k_0[k(\omega) - k(\omega_0)] \\ &\cong 2k_0 \left[\frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}GVD(\omega - \omega_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

avendo indicato con $v_g = (\partial\omega/\partial k)|_{k_0}$ la velocità di gruppo della luce impulsata, con $GVD = (\partial^2 k/\partial\omega^2)|_{\omega_0}$ la sua *group velocity dispersion*. Sostituendo infine lo sviluppo di $k^2(\omega) - k^2(\omega_0)$ nell'equazione 1.24 e applicando l'antitrasformata di Fourier per tornare al dominio del tempo, si ottiene il risultato:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{2}iGVD \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -i \frac{\mu_0 \omega_0 c_0}{2n_0} p_{nl} e^{-i\Delta k z} \quad (1.26)$$

che descrive l'evoluzione nel tempo e nello spazio dell'involuppo del campo $E(z, t)$ nel mezzo non-lineare. La quantità $\Delta k = k_p - k_0$ introdotta in 1.26 prende il nome di *wave vector mismatch*. Essendo in particolare interessati agli effetti non-lineari del secondo ordine innescati dal materiale, si può trascurare il contributo dato dal termine $\propto \partial^2 A/\partial t^2$, che descrive la dispersione lineare dell'impulso che si propaga in un mezzo. Poiché inoltre la ricchezza dei fenomeni del secondo ordine può essere colta nella sua interezza considerando interazioni a tre campi [4], si riscriva:

$$E(z, t) = A_1(z, t)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + A_2(z, t)e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + A_3(z, t)e^{i(\omega_3 t - k_3 z)} \quad (1.27)$$

che rappresenta il campo elettrico in ingresso come somma di tre impulsi, tali che $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Data la nuova forma del campo elettrico, anche la

polarizzazione si può scrivere come somma di tre componenti, $P_{NL}(z, t) = P_{NL}^{(\omega_1)}(z, t) + P_{NL}^{(\omega_2)}(z, t) + P_{NL}^{(\omega_3)}(z, t)$, le quali:

$$\begin{cases} P_{NL}^{(\omega_3)}(z, t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} A_1 A_2 e^{i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z]} \\ P_{NL}^{(\omega_2)}(z, t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} A_3 A_1^* e^{i[(\omega_3 - \omega_1)t - (k_3 - k_1)z]} \\ P_{NL}^{(\omega_1)}(z, t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} A_3 A_2^* e^{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]} \end{cases} \quad (1.28)$$

dove si sono indicati con un “ * ” i campi complessi coniugati. La struttura delle equazioni 1.28 può essere facilmente interpretata nel caso ideale di mezzo *non dispersivo*: la suscettività di un materiale del genere risulterebbe infatti costante in frequenza, facendo sì che l'espressione di $P_{NL}(t)$, ricavabile applicando l'antitrasformata di Fourier all'equazione 1.8, risulti nuovamente proporzionale a $E(t)$. Si noti che ognuna delle componenti della P_{NL} così ottenute manifesta un vettore d'onda diverso in modulo l'uno dall'altro e da quello dei campi elettrici in ingresso. Ciò spiega finalmente la necessità di aver introdotto sin da subito due differenti grandezze, k_0 e k_p , nelle equazioni 1.16 e 1.17. Sostituendo infine le equazioni in 1.28 all'interno di 1.26, privata del termine $\propto \partial^2 A / \partial t^2$, e rielaborando il risultato si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}} \frac{\partial A_1}{\partial t} = -i \frac{\omega_1 d_{eff}}{n_1 c_0} e^{-i\Delta k z} A_2^* A_3 \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -i \frac{\omega_2 d_{eff}}{n_2 c_0} e^{-i\Delta k z} A_1^* A_3 \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{v_{g3}} \frac{\partial A_3}{\partial t} = -i \frac{\omega_3 d_{eff}}{n_3 c_0} e^{i\Delta k z} A_1 A_2 \end{cases} \quad (1.29)$$

Le 1.29 rappresentano la terna di equazioni accoppiate che descrivono l'evoluzione nel tempo e nello spazio dei campi coinvolti nel processo non-lineare innescato dal materiale. Nella loro formulazione si è definito il termine $d_{eff} = \frac{\chi^{(2)}}{2}$, mentre si noti il valore assunto dalla variabile $\Delta k = k_p - k_0 = k_3 - k_2 - k_1$ per ognuna delle tre equazioni (ovviamente cambiando il significato dei termini k_p e k_0 da un'equazione all'altra). Nota la 1.29 è possibile affrontare più in dettaglio il problema della generazione ottica parametrica, il fenomeno non-lineare del secondo ordine che sta alla base del processo di amplificazione ottica parametrica.

1.3 Effetti non-lineari del secondo ordine

Di seguito si vogliono brevemente discutere i principali effetti non-lineari del secondo ordine, mostrando l'andamento della soluzione delle equazioni accoppiate 1.29 nel caso di campi monocromatici in condizione di “phase matching”

$\Delta k = 0$. Si introduce inoltre il concetto di fotone, particolarmente utile per illustrare schematicamente il funzionamento dei processi in esame.

1.3.1 INTERPRETAZIONE CORPUSCOLARE

Prima di addentrarsi nel dettaglio dei diversi processi non-lineari di interesse, è utile sviluppare un approccio al problema alternativo rispetto a quello ondulatorio adottato sinora. Come è infatti noto dallo studio di fenomeni quali l'*effetto fotoelettrico* o l'*effetto Compton*, interagendo con la materia la luce talvolta manifesta un comportamento tipico di un fascio di particelle [6]. Tale osservazione scaturisce nell'assunzione, proposta per la prima volta da Einstein, che l'energia trasportata da un'onda luminosa sia quantizzata, ovvero scomponibile in unità discrete identificate col nome di *fotoni*. In questa nuova visione, al fascio che interagisce con un mezzo materiale è consentito scambiare soltanto un numero intero di fotoni; analogamente non sarebbe permesso al materiale assorbire solo una parte dell'energia associata ad un certo fotone. L'energia trasportata da ciascun fotone dipende inoltre dalla frequenza dell'onda luminosa a cui appartiene:

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad (1.30)$$

dove $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s ($\hbar = h/2\pi$) rappresenta la costante di Planck. L'equazione 1.30 è nota col nome di *relazione di Einstein*. Nota l'energia associata al singolo fotone, è anche possibile esprimere l'intensità I di un fascio in funzione del numero N di fotoni che esso trasporta, come:

$$I = Fh\nu \quad (1.31)$$

$$F = \frac{N}{S \Delta T} \quad (1.32)$$

con F *flusso fotonico*, cioè il numero di fotoni che attraversano la superficie S nell'intervallo di tempo ΔT . Alla luce di quanto affermato, è possibile interpretare i vari processi non-lineari citati nel paragrafo 1.1 in termini di assorbimento ed emissione di fotoni da parte del materiale, come illustrato negli schemi di figura 1.1. Secondo la visione corpuscolare della luce dunque, il processo di generazione della frequenza somma consiste nell'assorbimento successivo di due fotoni a pulsazione ω_1 e ω_2 da parte di un atomo del materiale, il quale viene portato su un livello energetico virtuale; essendo tale livello proibito per l'atomo, esso decade rapidamente per tornare allo stato fondamentale emettendo un fotone di pulsazione $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. La generazione di seconda armonica è solo un caso particolare del fenomeno appena descritto, in cui $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$. Nel caso di generazione di frequenza differenza invece,

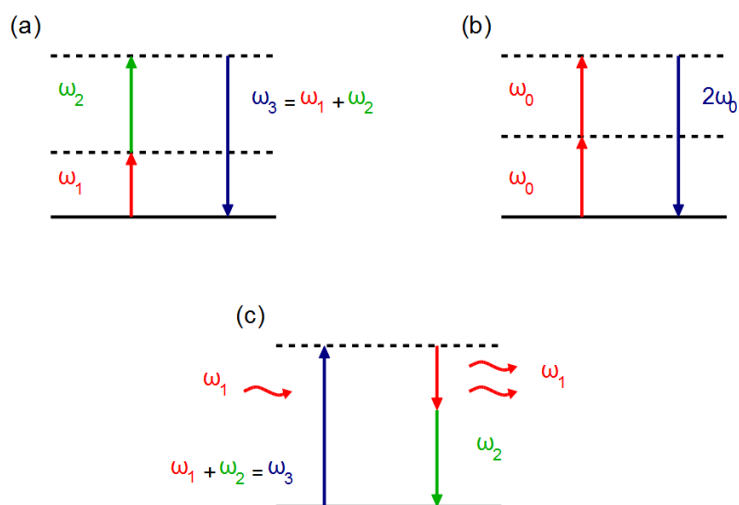


Figura 1.1: Schema dei principali processi non-lineari del secondo ordine dal punto di vista dell'interazione tra fotoni; le righe orizzontali rappresentano i livelli energetici del materiale (quelle tratteggiate in particolare i livelli virtuali); (a) generazione della frequenza somma; (b) generazione della seconda armonica; (c) generazione della frequenza differenza.

si assiste ad un assorbimento di un fotone ω_3 che porta l'atomo nuovamente su un livello virtuale, a cui segue un processo di emissione stimolata innescato da un fotone ω_1 , che stimola appunto l'emissione di un altro fotone ω_1 e contemporaneamente provoca l'emissione di un secondo fotone di pulsazione $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ per conservare l'energia del sistema.

1.3.2 GENERAZIONE DI FREQUENZA SOMMA

Si assuma di incidere sulla superficie di un cristallo non centro-simmetrico con due soli fasci, rispettivamente a pulsazioni ω_1 e ω_2 . In virtù della loro interazione col cristallo, è possibile che si verifichi un trasferimento di energia dai campi in ingresso ad un terzo fascio, la cui pulsazione risulta $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Si parla quindi di “generazione di frequenza somma” per indicare che l'energia del fotone del nuovo campo corrisponde alla somma delle energie degli altri due: $\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$. Nell'ipotesi di *bassa conversione* dell'energia del fascio a ω_2 , l'andamento della popolazione di fotoni dei tre fasci in funzione della lunghezza L del cristallo è descritto in figura 1.2.

Generazione di seconda armonica

Nel caso particolare in cui i campi in ingresso abbiano la stessa pulsazione $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, la “frequenza somma” generata dall'interazione dei fasci nel

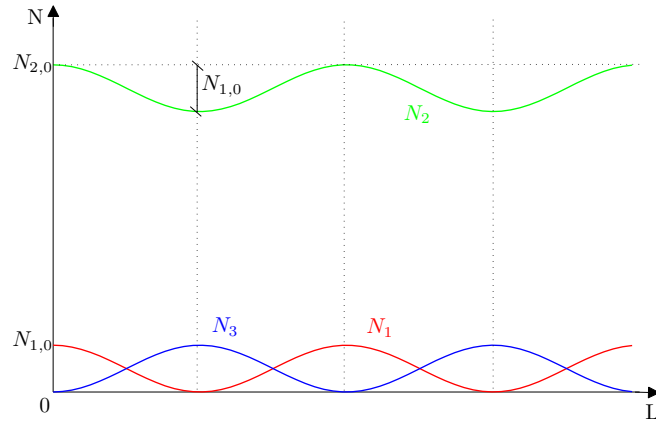


Figura 1.2: Andamento delle popolazioni di fotoni dei campi a ω_1 (rosso), ω_2 (verde) e ω_3 (blu) al variare della lunghezza del cristallo; si noti in particolare che $N_1, N_2 \propto \cos^2(L)$ e $N_3 \propto \sin^2(L)$; nell'ipotesi di bassa conversione $N_{1,0} \ll N_{2,0} \Rightarrow N_2(L) \cong \text{cost.}$

cristallo coincide con il doppio di quella iniziale: $\omega_3 = 2\omega$. Il fenomeno viene perciò più propriamente chiamato di “generazione della seconda armonica”. Si noti che il processo, per sua natura, può essere innescato agendo con un unico campo in ingresso. Ammettendo di nuovo l'ipotesi di bassa conversione dell'energia del fascio incidente, la variazione del numero di fotoni del campo a 2ω in funzione della lunghezza del cristallo è riportata in figura 1.3. Per via della semplicità del fenomeno può essere interessante indagare il modo in cui il “phase matching” influisce sulla sua efficienza. A tale scopo si consideri nuovamente l'onda fondamentale a pulsazione ω . Propagandosi all'interno del cristallo essa innesca l'oscillazione dei dipoli del materiale, i quali, in virtù della natura non-lineare dell'interazione, cominciano ad oscillare alla pulsazione 2ω , emettendo la seconda armonica. In questa visione è evidente che il campo a 2ω in uscita è dato dalla sovrapposizione di tutti quelli prodotti dai diversi dipoli del cristallo. Se allora è soddisfatta la condizione di “phase matching” $\Delta k = 0$, la fondamentale e la seconda armonica sperimentano lo stesso indice di rifrazione nel cristallo e si muovono alla stessa velocità: ciò significa che i campi a 2ω prodotti dai dipoli, la cui fase iniziale dipende da quella posseduta dalla fondamentale nell'istante in cui incontra il dipolo corrispondente, interferiscono costruttivamente fra loro, massimizzando l'efficienza del processo. Qualora invece la condizione $\Delta k = 0$ non fosse verificata, fondamentale e seconda armonica si muoverebbero a velocità diverse, compromettendo così l'efficienza. Per ulteriori informazioni sul modo in cui realizzare la condizione di “phase matching” si faccia riferimento all'appendice A.

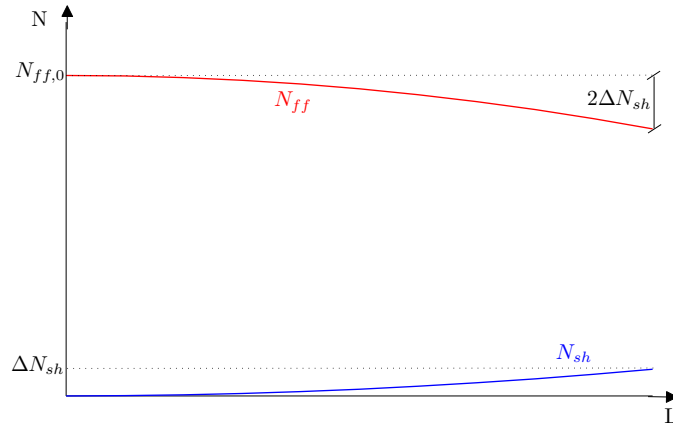


Figura 1.3: Andamento delle popolazioni di fotoni della fondamentale (ff) e della seconda armonica (sh) al variare della lunghezza del cristallo; entro i limiti di validità dell'ipotesi di bassa conversione ($2\Delta N_{sh} \ll N_{ff,0}$) risulta $N_{sh} \propto L^2$.

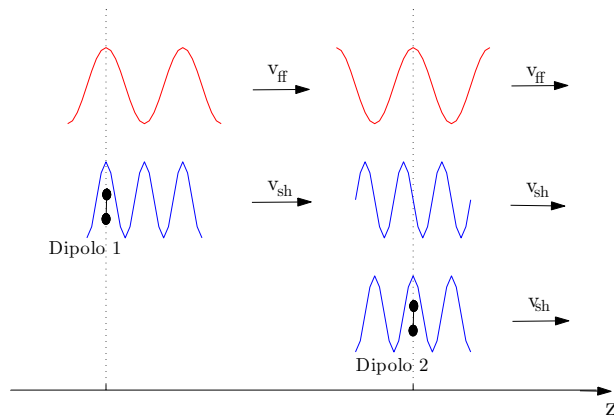


Figura 1.4: Sfasamento reciproco della fondamentale (in rosso) con le seconde armoniche (in blu) generate da differenti dipoli in assenza di "phase matching" $\Delta k \neq 0$; la coordinata z rappresenta la direzione di propagazione nel cristallo.

1.3.3 GENERAZIONE DI FREQUENZA DIFFERENZA

In accordo con il ragionamento esposto per descrivere l'effetto di frequenza somma, si consideri ora in ingresso al cristallo la coppia di fasci a pulsazione ω_3 e ω_2 . L'interazione dei nuovi campi porta questa volta alla formazione di un terzo fascio a pulsazione $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$. È evidente l'analogia tra il fenomeno in esame e quello di generazione di frequenza somma, che si distinguono l'uno dall'altro solo per le condizioni iniziali. L'energia del fotone a pulsazione ω_2 si ottiene sottraendo quella del fotone a ω_1 da quella del fotone a ω_3 , osservazione a cui il processo deve il proprio nome. Assumendo ancora una volta valida l'ipotesi di bassa conversione (per il fascio a ω_3) e avendo in mente l'interpretazione corpuscolare fornita nel paragrafo 1.3.1 è possibile ricavare un andamento delle popolazioni fotoniche dei tre campi come quello mostrato in figura 1.5.

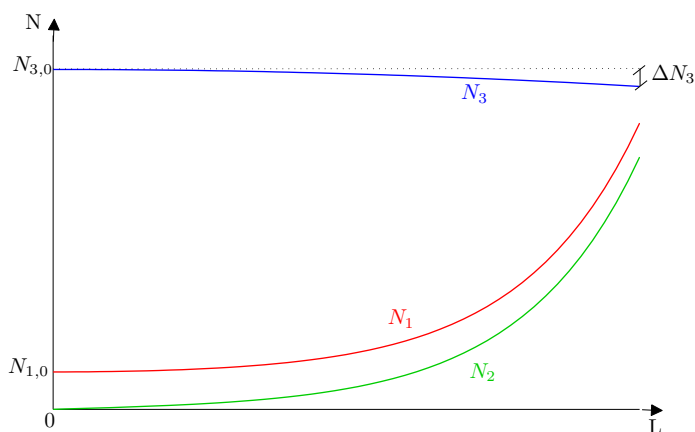


Figura 1.5: Andamento delle popolazioni di fotoni dei campi a ω_1 (rosso), ω_2 (verde) e ω_3 (blu) al variare della lunghezza del cristallo; entro i limiti di validità dell'ipotesi di bassa conversione ($\Delta N_3 \ll N_{3,0}$) risulta che $N_1 \propto \cosh(L)$ e $N_2 \propto \sinh(L)$.

1.4 La polarizzazione del terzo ordine

Nel paragrafo 1.1 si è studiato come l'introduzione di termini di ordine superiore al primo nell'espressione del potenziale $V(z)$ comporti l'estensione della dipendenza della polarizzazione $\tilde{P}(\omega)$ da potenze di $\tilde{E}(\omega)$ di ordine elevato. In particolare in quell'occasione si è voluto concentrare l'attenzione sul significato del termine $\propto z^3$, responsabile della nascita degli effetti non-lineari del

secondo ordine. Ora invece si desidera analizzare le conseguenze innescate dall'introduzione del termine $\propto z^4$ nel potenziale. A tale scopo è utile prendere in considerazione il comportamento di un materiale centro-simmetrico, come un qualunque mezzo isotropo, in modo da isolare le caratteristiche della nuova non-linearità da quella di ordine inferiore già esaminata. Per un materiale del genere l'equazione 1.3 si riduce infatti alla forma:

$$V(x) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{m}{4}Bx^4 \quad (1.33)$$

in cui non appare più il termine $\propto x^3$ per via della simmetria del materiale. In linea con l'approccio adottato nel paragrafo 1.1 per studiare il significato dei vari termini del potenziale, la relazione 1.33 conduce ad un'espressione della polarizzazione del tipo:

$$\tilde{P}(\omega) = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \tilde{E}(\omega) + \chi^{(3)} \tilde{E}^3(\omega) \right) \quad (1.34)$$

Per snellire la notazione d'ora in avanti sarà sottintesa la dipendenza da ω delle funzioni indicate col simbolo “ \sim ”. La nascita della suscettività elettrica del terzo ordine $\chi^{(3)}$ induce, tra gli altri effetti, la dipendenza dell'indice di rifrazione in un mezzo dall'intensità del campo incidente (*effetto Kerr ottico*). Si assuma dunque per il momento che l'indice di rifrazione sperimentato dall'onda nel mezzo si possa scrivere come:

$$n = n_0 + \bar{n}_2 \tilde{I} \quad (1.35)$$

Sapendo che $\tilde{I} \propto |\tilde{E}|^2$ e supposto $\bar{n}_2 \ll 1$, è possibile riscrivere la polarizzazione del materiale in esame come segue:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \varepsilon_0 \chi \tilde{E} = \varepsilon_0 (n^2 - 1) \tilde{E} \\ n &= n_0 + \bar{n}_2 |\tilde{E}|^2 \\ n^2 &= \left(n_0 + \bar{n}_2 |\tilde{E}|^2 \right)^2 \cong n_0^2 + 2n_0 \bar{n}_2 |\tilde{E}|^2 \\ \tilde{P} &= \varepsilon_0 \left[(n_0^2 - 1) \tilde{E} + 2n_0 \bar{n}_2 |\tilde{E}|^2 \tilde{E} \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'equazione 1.36, rappresentando un'altra forma di 1.34, attesta la validità dell'assunzione dell'effetto Kerr ottico, espresso dalla relazione 1.35. Al suo interno è possibile distinguere due differenti contributi: il primo rappresentato dal termine $\propto \tilde{E}$, consistente nella parte lineare della polarizzazione; l'altro dipendente dal termine $\propto |\tilde{E}|^2 \tilde{E}$, che rappresenta invece la polarizzazione non-lineare del terzo ordine.

$$\begin{cases} \tilde{P}_L &= \varepsilon_0 (n_0^2 - 1) \tilde{E} \\ \tilde{P}_{NL} &= 2\varepsilon_0 n_0 \bar{n}_2 |\tilde{E}|^2 \tilde{E} \end{cases} \quad (1.37)$$

1.5 Self-Phase Modulation

Si comincia ora a considerare uno degli effetti introdotti dalla non-linearità del terzo ordine all'interno dell'equazione di propagazione 1.26. Ipotizzando nuovamente un campo in ingresso della forma 1.16, è possibile descrivere il termine $P_{NL}(z, t)$ come:

$$P_{NL}(z, t) = \beta |\tilde{A}(z, t)|^2 A(z, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (1.38)$$

avendo posto $\beta = 2\varepsilon_0 n_0 \bar{n}_2$. Si noti che a differenza di quanto accaduto studiando gli effetti del secondo ordine, la nuova polarizzazione non-lineare condivide lo stesso vettore d'onda del campo incidente, così che $\Delta k = 0$. Adottando un sistema di riferimento solidale⁵ con l'impulso $E(z, t)$ e sostituendo l'espressione di $P_{NL}(z, t)$ nella relazione 1.26 si ottiene:

$$\begin{cases} \zeta &= z \\ \tau &= t - \frac{z}{v_g} \end{cases} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} - \frac{i}{2} GVD \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + i\gamma |A|^2 A = 0 \quad (1.40)$$

con $\gamma = k_0 \bar{n}_2$. L'equazione 1.40, che descrive la propagazione nello spazio della funzione $A(z, t)$, viene anche chiamata *equazione di Schrödinger non-lineare*: essa infatti ha la stessa forma di un'equazione di Schrödinger monodimensionale in cui il ruolo di "potenziale" è svolto dal termine non-lineare $\propto |A|^2$. Per capire le conseguenze che la non-linearità in esame introduce nella propagazione dell'impulso, si trascuri il contributo dato dal termine che descrive invece la sua dispersione, studiando l'equazione:

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = -i\gamma |A|^2 A \quad (1.41)$$

Ipotizzando una soluzione del tipo $A(\zeta, \tau) = A(0, \tau) \exp[i\varphi_{nl}(\zeta, \tau)]$ è possibile risolvere la 1.41 mediante il metodo di *separazione delle variabili*, dal momento che $|A|^2 = |A(0, \tau)|^2$ non dipende più dalla variabile ζ . Così facendo si ottiene:

$$\varphi_{nl} = -\gamma |A(0, \tau)|^2 \zeta \quad (1.42)$$

che rappresenta un termine di fase non-lineare. Dall'analisi della relazione 1.42 si evince che la polarizzazione del terz'ordine consente all'impulso di automodulare la propria fase, tramite $|A(0, \tau)|^2$, mentre si muove lungo ζ (*Self-Phase*

⁵Che si muove con la stessa velocità di gruppo v_g di $E(z, t)$.

Modulation, SPM). Per apprezzare meglio il significato della SPM si consideri preliminarmente un impulso di forma 1.16. Detta $\varphi(z, t) = \omega_0 t - k_0 z$ la fase dell'impulso, la sua *pulsazione istantanea*, ovvero la pulsazione portante, si calcola come:

$$\omega_{ist} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_0 \quad (1.43)$$

e risulta perciò costante durante la propagazione. Si valuti ora un impulso che si muove in un mezzo che manifesta una non-linearità del terzo ordine. L'espressione del campo elettrico nel sistema di riferimento 1.39 si ottiene sostituendo in 1.16 la soluzione di $A(\zeta, \tau)$ appena trovata:

$$E(\zeta, \tau) = A(0, \tau) e^{i[\omega_0 \tau + \varphi_{nl}(\zeta, \tau) - k_0 \zeta]}$$

La nuova pulsazione istantanea risulta così:

$$\omega_{ist} = \frac{\partial}{\partial \tau} [\omega_0 \tau + \varphi_{nl}(\zeta, \tau)] = \omega_0 - \gamma \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} |A(0, \tau)|^2 \quad (1.44)$$

In sostanza la presenza di una suscettività $\chi^{(3)} \neq 0$ introduce un ulteriore termine di fase dipendente dal tempo, che comporta la variazione della pulsazione portante dell'impulso lungo la coordinata temporale. L'effetto globale di tale variazione è mostrato in figura 1.6. Dunque la self-phase modulation consi-

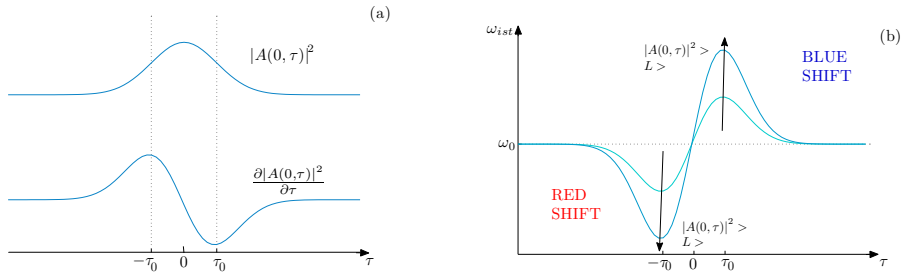


Figura 1.6: Andamento della frequenza istantanea dell'impulso al variare del tempo lungo un tratto di propagazione $\zeta = L$; procedendo nel verso positivo dell'asse dei tempi, si assiste prima alla generazione di pulsazioni inferiori a ω_0 (red shift), poi a quella di pulsazioni ad essa superiori (blue shift).

ste in un allargamento della banda dell'impulso, dovuto a una redistribuzione della sua energia in frequenza. Si noti che lo spettro risultante è modulato in ω , per via dell'interferenza fra componenti dell'impulso alla stessa pulsazione prodotte in istanti di tempo differenti.

1.6 *Self-Focusing*

L'analisi dell'effetto Kerr nel dominio delle trasformate (cfr. equazione 1.35) ha svelato l'esistenza di un termine di polarizzazione non-lineare del terzo ordine, responsabile del fenomeno della SPM. È interessante studiare il significato della stessa equazione nello spazio reale, la cui forma è semplicemente:

$$n(r, t) = n_0 + \bar{n}_2 I(r, t)$$

con r coordinata ortogonale alla direzione di propagazione z . Volendo allora scrivere lo sfasamento φ acquisito da un'onda che si propaga in un mezzo Kerr, risulta:

$$\varphi(L, r, t) = kn(r, t)L = kn_0L + k\bar{n}_2 I(r, t)L \quad (1.45)$$

con L lunghezza di propagazione. Evidentemente lo sfasamento 1.45 si può scomporre nella somma di due contributi:

$$\begin{cases} \varphi_l(L) &= kn_0L \\ \varphi_{nl}(L, r, t) &= k\bar{n}_2 I(r, t)L \end{cases} \quad (1.46)$$

rispettivamente un termine di sfasamento lineare che dipende solo da L e uno non-lineare che dipende anche dal profilo di intensità del fascio. Si prenda allora in esame la parte spaziale del termine φ_{nl} [7] contenuto in 1.46 e si consideri un campo elettrico con profilo di intensità gaussiano, del tipo:

$$I(r) = I_p e^{-2\left(\frac{r}{w}\right)^2} \quad (1.47)$$

con I_p intensità di picco e w dimensione di macchia del fascio (valore di r in corrispondenza del quale la sua intensità si riduce di un fattore e^2). Approssimando la 1.47 con il suo sviluppo in serie di Taylor arrestato al secondo ordine nell'intorno della coordinata $r = 0$, in cui l'intensità ha il suo valore massimo:

$$I(r) \cong I_p \left[1 - 2\left(\frac{r}{w}\right)^2 \right] \quad (1.48)$$

si ottiene un'intensità parabolica in r . Sostituendo 1.48 nell'espressione di φ_{nl} si ottiene:

$$\varphi_{nl}(L, r) = k\bar{n}_2 I_p \left[1 - 2\left(\frac{r}{w}\right)^2 \right] L \quad (1.49)$$

La relazione 1.49 mostra come lo sfasamento acquisito dall'onda sia quadratico in r , analogamente a quanto accade ad un fascio che si propaga attraverso una lente sferica. Dunque un mezzo che manifesta l'effetto Kerr si comporta nei confronti di un'onda incidente come una lente⁶ di lunghezza focale variabile a seconda del profilo trasversale di intensità del fascio (*Self-Focusing*), perciò viene indicato col nome di *Lente di Kerr*.

⁶Convergente se $\bar{n}_2 > 0$, divergente nel caso contrario.

Capitolo 2

Amplificatore Ottico Parametrico (OPA)

Un *amplificatore ottico parametrico (OPA)* [4, 1, 8] è un sistema che sfrutta l'effetto non-lineare di DFG per trasferire energia ad un campo desiderato. Per capire come tale processo possa essere impiegato per realizzare un OPA, si consideri una coppia di fasci detti *pompa*, a pulsazione ω_p più intenso, e *segnale*, a pulsazione ω_s , ad innescare il fenomeno. Nel paragrafo 1.3.3 si è mostrato come dalla loro interazione in un cristallo possa originare un terzo fascio a pulsazione $\omega_i = \omega_p - \omega_s$, qui chiamato *idler*. In realtà la generazione dell'idler è il risultato della conservazione dell'energia del sistema a seguito di un trasferimento di energia dalla pompa al segnale, che viene così amplificato. Un'interpretazione particolarmente efficace del fenomeno si evince dalla natura corpuscolare della luce: un fotone a pulsazione ω_p viene assorbito da un livello virtuale del materiale, mentre uno a pulsazione ω_s stimola l'emissione di altri due fotoni, a pulsazioni ω_s e ω_i rispettivamente. La pulsazione del segnale

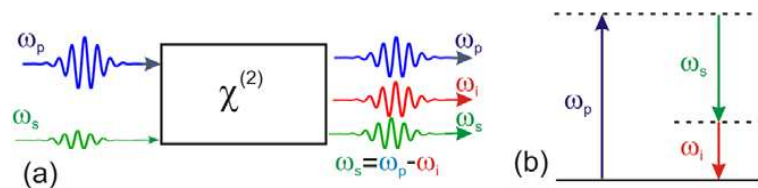


Figura 2.1: (a) Schema del processo di amplificazione; (b) bilancio energetico dei fotoni coinvolti nel processo.

da amplificare può variare in teoria da $\omega_p/2$ (*condizione di degenerazione*, in corrispondenza della quale $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$) a ω_p , conseguentemente quella dell'idler varia da $\omega_p/2$ a 0. Poiché l'efficienza del processo è direttamente proporzionale all'intensità della pompa, sistemi laser a femtosecondi risultano

particolarmente adatti alla sua realizzazione, grazie alla facilità con cui sono in grado di fornire intensità (di picco) elevate, persino operando a basse energie: tali sistemi permettono infatti di estrarre intensità dell'ordine di decine di GW/cm^2 a partire da impulsi della durata di 100 fs, con una dimensione di macchia di raggio $r \cong 200 \mu\text{m}$ ed un'energia dell'ordine dei μJ .

La DFG può essere sfruttata in due modi diversi. Nel primo caso, collocando il cristallo (necessario per innescare il fenomeno) all'interno di una cavità è possibile fare in modo che il guadagno superi le perdite, ottenendo così un sistema che oscilla come un'ordinaria cavità laser, che prende il nome di *Optical Parametric Oscillator (OPO)*. Alternativamente è possibile pensare di amplificare un opportuno segnale, detto *seed*, facendolo interagire con uno o più cristalli, ottenendo ciò che viene comunemente chiamato *Optical Parametric Amplifier (OPA)*. Entrambi gli schemi presentano aspetti positivi e negativi, che si avvicendano però in modo da renderli complementari. I sistemi OPO [1] sono ad esempio pompati da oscillatori a femtosecondi e forniscono impulsi a frequenze di ripetizione elevate ($\approx 100 \text{ MHz}$), utili per migliorare il rapporto segnale-rumore negli esperimenti in cui il segnale da rilevare è molto debole. D'altro canto non sono in grado di fornire energia in uscita elevate (valori tipici sono dell'ordine dei nJ), senza contare che la lunghezza di cavità, il cui valore dipende da quella del laser di pompa, deve essere garantita con precisione micrometrica. In aggiunta a ciò la loro accordabilità dipende dalle caratteristiche degli specchi che definiscono la cavità, perciò differenti tipi di specchi sono a priori necessari per coprire l'intero intervallo di lunghezze d'onda messo a disposizione dall'oscillatore. Gli OPA invece richiedono intensità di pompa elevate, garantite solo da sistemi a loro volta amplificati, mentre operano a frequenze basse (tipicamente da 1 a 100 kHz). D'altra parte restituiscono grandi energie in uscita, assicurano una larga banda di accordabilità e sono più semplici da realizzare, in quanto non dipendono da alcuna cavità.

Nei prossimi paragrafi si sviluppa la teoria legata al funzionamento degli OPA, partendo dalle equazioni accoppiate 1.29 e procedendo per successivi gradi di complicazione.

2.1 Le equazioni di Manley-Rowe

Si considerino innanzitutto le equazioni 1.29 in un caso particolare: quello cioè di onde interagenti stazionarie e monocromatiche¹. In riferimento alle

¹l'approssimazione è valida ogniqualvolta la durata dell'impulso è grande rispetto alla scala temporale di interesse, per cui il suo involuppo si può ritenere costante nel tempo (onda stazionaria); si noti che un involuppo costante può essere associato solo ad un'onda monocromatica.

definizioni introdotte all'inizio del capitolo si possono riscrivere le 1.29 come segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_p}{\partial z} = -i \frac{\omega_p d_{eff}}{n_p c_0} e^{i\Delta kz} A_i A_s \\ \frac{\partial A_s}{\partial z} = -i \frac{\omega_s d_{eff}}{n_s c_0} e^{-i\Delta kz} A_i^* A_p \\ \frac{\partial A_i}{\partial z} = -i \frac{\omega_i d_{eff}}{n_i c_0} e^{-i\Delta kz} A_s^* A_p \end{cases} \quad (2.1)$$

Sapendo poi che l'intensità di un'onda elettromagnetica è data da:

$$I_j = \frac{1}{2} n_j c_0 \varepsilon_0 A_j A_j^* \quad (2.2)$$

si può pensare di riscrivere il sistema 2.1 in funzione della variazione di intensità dei campi in gioco:

$$\frac{\partial I_j}{\partial z} = \frac{1}{2} n_j c_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial A_j}{\partial z} A_j^* + A_j \frac{\partial A_j^*}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

Ne risulta un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_p}{\partial z} = -i \frac{1}{2} \varepsilon_0 d_{eff} \omega_p (A_i A_s A_p^* e^{-i\Delta kz} - A_i^* A_s^* A_p e^{i\Delta kz}) \\ \frac{\partial I_s}{\partial z} = -i \frac{1}{2} \varepsilon_0 d_{eff} \omega_s (A_i^* A_s^* A_p e^{i\Delta kz} - A_i A_s A_p^* e^{-i\Delta kz}) \\ \frac{\partial I_i}{\partial z} = i \frac{1}{2} \varepsilon_0 d_{eff} \omega_i (A_i^* A_s^* A_p e^{i\Delta kz} - A_i A_s A_p^* e^{-i\Delta kz}) \end{cases} \quad (2.4)$$

che può essere molto più semplicemente ridotto nella forma [9]:

$$-\frac{1}{\hbar \omega_p} \frac{\partial I_p}{\partial z} = \frac{1}{\hbar \omega_s} \frac{\partial I_s}{\partial z} = \frac{1}{\hbar \omega_i} \frac{\partial I_i}{\partial z} \quad (2.5)$$

La 2.5 rappresenta le cosiddette *relazioni di Manley-Rowe*, la cui interpretazione è più chiara se si ricorda, secondo quanto riportato nel paragrafo 1.2, che $\omega_p = \omega_s + \omega_i$: esse infatti sanciscono la validità del principio di conservazione dell'energia nel processo non-lineare in cui i fasci sono coinvolti. In particolare si può osservare che i termini del tipo $(1/\hbar \omega_j)(\partial I_j/\partial z)$ rappresentano il flusso fotonico dell'onda corrispondente, la cui variazione deve pertanto corrispondere ad un'opportuna variazione della popolazione di fotoni degli altri due. In conclusione le relazioni di Manley-Rowe sanciscono il punto di collegamento tra la visione ondulatoria, impiegata per ricavare le equazioni accoppiate 1.29, e quella corpuscolare proposta nel paragrafo 1.3.1, rappresentando pertanto un utile strumento di comprensione del fenomeno in esame.

2.2 Soluzione delle equazioni accoppiate per onde monocromatiche

Si considerino nuovamente le equazioni 2.1, scritte nell'approssimazione di onde stazionarie e monocromatiche. Si assuma inoltre che durante il processo di amplificazione l'ampiezza del fascio di pompa rimanga costante (*ipotesi di basso svuotamento*, valida per efficienze di conversione non troppo elevate), contemporaneamente sia soddisfatta la condizione di *phase matching*: $\Delta k = k_p - k_s - k_i = 0$. Nelle nuove ipotesi il sistema 2.1 si riduce ulteriormente nella forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_s}{\partial z} = -i \frac{\omega_s d_{eff}}{n_s c_0} A_i^* A_p \\ \frac{\partial A_i^*}{\partial z} = i \frac{\omega_i d_{eff}}{n_i c_0} A_s A_p^* \end{cases} \quad (2.6)$$

Per risolvere il sistema basta allora differenziare nuovamente una delle due equazioni rispetto alla variabile z e sostituire al suo interno il contenuto dell'altra. Focalizzandosi sull'evoluzione del fascio a pulsazione ω_s si ottiene:

$$\frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} = \Gamma^2 A_s \quad (2.7)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\omega_i \omega_s d_{eff}^2 |A_p|^2}{n_i n_s c_0^2}} \quad (2.8)$$

Detta A_{s_0} l'ampiezza del segnale all'ingresso del cristallo, la soluzione di 2.7 è del tipo $A_s(z) = (A_{s_0}/2)[\exp(\Gamma z) + \exp(-\Gamma z)]$, tuttavia entro i limiti dell'*approssimazione di grande guadagno*, $\Gamma z \gg 1$, vale:

$$A_s(z) \cong \frac{A_{s_0}}{2} e^{\Gamma z} \quad (2.9)$$

Data 2.9 è possibile introdurre un parametro in grado di descrivere la bontà dell'amplificatore, in base alla seguente definizione:

$$G(L) = \frac{I_s(L)}{I_{s_0}} = \frac{1}{4} e^{2\Gamma L} \quad (2.10)$$

con L lunghezza del cristallo e I_{s_0} intensità del segnale in ingresso. La 2.10 rappresenta il *guadagno parametrico* dell'OPA, il cui valore può essere opportunamente ingegnerizzato in funzione della lunghezza del cristallo, o agendo sui fattori che determinano il parametro Γ , cioè le lunghezze d'onda di segnale e idler, l'intensità del fascio di pompa e le caratteristiche del materiale scelto per innescare l'amplificazione. È interessante soffermarsi brevemente sul significato della crescita esponenziale del guadagno con la lunghezza L . Tale

andamento è dovuto al fatto che il processo di trasferimento di energia dalla pompa al segnale produce, come osservato più volte, un terzo fascio (l'idler) che a sua volta è amplificato dalla pompa stessa: pertanto anche l'idler concorre ad aumentare il numero di fotoni del segnale, in rispetto del principio di conservazione dell'energia che governa quest'altro processo di amplificazione. La crescita esponenziale del guadagno è dunque innescata da un feedback positivo secondo cui ad un aumento del numero di fotoni del segnale segue la crescita di quello dell'idler e viceversa. Per quanto riguarda infine l'intensità dell'idler, assumendo $I_{i_0} = 0$ e I_{s_0} trascurabile rispetto al segnale amplificato $I_s(z)$, vale nei limiti delle approssimazioni effettuate finora la seguente:

$$I_i(z) = \frac{\hbar\omega_i}{\hbar\omega_s} I_s(z) \quad (2.11)$$

che sancisce l'uguaglianza del numero di fotoni di segnale e idler all'uscita dell'amplificatore.

2.3 Soluzione delle equazioni accoppiate per impulsi brevi

Nel seguente paragrafo si vogliono abbandonare le ipotesi di stazionarietà e monocromatismo fatte in precedenza per trattare il caso di reale interesse in cui nel processo di amplificazione sono coinvolti degli impulsi. A tale scopo occorre considerare nuovamente il sistema 1.29, avendo preliminarmente cura di adattarlo alla notazione utilizzata per la terna di equazioni 2.1:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_p}{\partial \zeta} = 0 \\ \frac{\partial A_s}{\partial \zeta} + \delta_{sp} \frac{\partial A_s}{\partial \tau} = -i \frac{\omega_s d_{eff}}{n_s c_0} e^{-i\Delta k z} A_i^* A_p \\ \frac{\partial A_i}{\partial \zeta} + \delta_{ip} \frac{\partial A_i}{\partial \tau} = -i \frac{\omega_i d_{eff}}{n_i c_0} e^{-i\Delta k z} A_s^* A_p \end{cases} \quad (2.12)$$

in cui si è assunta ancora una volta valida l'ipotesi di basso svuotamento della pompa e si è adottato un sistema di riferimento solidale con il fascio di pompa a velocità v_{gp} , applicando le trasformazioni:

$$\begin{cases} \zeta = z \\ \tau = t - \frac{z}{v_{gp}} \end{cases}$$

I termini δ_{sp} e δ_{ip} presentati in 2.12 rappresentano invece il *group velocity mismatch* (GVM) rispettivamente tra segnale e pompa e tra idler e pompa:

$$\delta_{mn} = \frac{1}{v_{g_m}} - \frac{1}{v_{g_n}}$$

Una prima importante considerazione riguardante la propagazione degli impulsi attraverso un materiale contempla la diversa velocità che descrive il loro moto. In particolare ciò fa sì che gli impulsi si separino dopo aver percorso una certa distanza nel cristallo, non potendo più interagire fra di loro. Si definisce allora *pulse splitting length* tra due impulsi, la lunghezza che è necessario percorrere nel materiale affinché essi si separino. Poiché il processo di amplificazione parametrica è governato dalla presenza del fascio di pompa, sono due le lunghezze utili ai fini della sua attuazione:

$$l_{jp} = \frac{\tau}{\delta_{jp}}, \quad j = s, i$$

dove si è indicata con τ la durata dell'impulso di pompa. Se per valori di lunghezza del cristallo inferiori alla pulse splitting length si possono ancora ritenere valide le soluzioni ricavate nel paragrafo 2.2, per lunghezze superiori la separazione degli impulsi determinata dal corrispondente GVM gioca un ruolo fondamentale nel processo di amplificazione. È interessante allora osservare che esiste una profonda differenza tra i casi in cui $\delta_{sp}\delta_{ip} > 0$ e $\delta_{sp}\delta_{ip} < 0$. Nel primo infatti segnale e idler si allontanano dalla pompa nella stessa direzione, innescando una rapida diminuzione del guadagno per distanze di propagazione superiori alla pulse splitting length. D'altro canto, quando $\delta_{sp}\delta_{ip} < 0$ segnale e

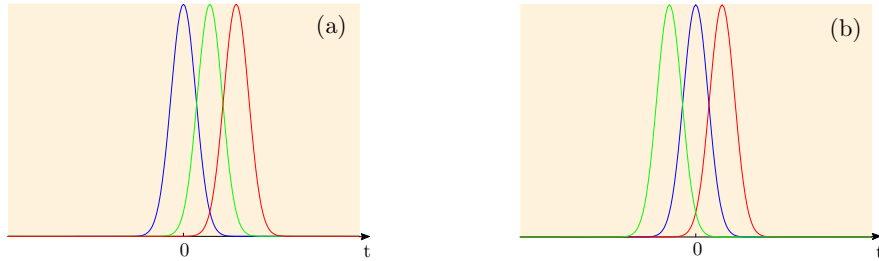


Figura 2.2: impulsi di pompa (blu), segnale (verde) e idler (rosso) dopo un tratto arbitrario di propagazione nel cristallo, nei casi $\delta_{sp}\delta_{ip} > 0$ (a) e $\delta_{sp}\delta_{ip} < 0$ (b).

idler si muovono in direzioni diverse rispetto alla pompa, favorendo la crescita esponenziale del guadagno su lunghezze ben maggiori della pulse splitting length. Per capire meglio il significato dell'ultima affermazione si consideri la situazione descritta in figura 2.2 (b), in cui il segnale, in seguito alla propagazione nel cristallo, sia leggermente in ritardo rispetto alla pompa, mentre l'idler in anticipo: durante il processo di amplificazione il segnale genera dei fotoni di idler "veloci" che tendono a muoversi in direzione del picco della pompa, dove è verificata la sovrapposizione dei tre fasci, contemporaneamente l'idler genera fotoni di segnale "lenti" che finiscono per accumularsi anch'essi al di sotto del

fascio di pompa. L'attuale configurazione garantisce dunque la presenza di un'adeguata concentrazione di fotoni sotto la pompa su tratti di propagazione anche maggiori della pulse splitting length, indispensabile per alimentare il processo di amplificazione. Si noti infine che il segno del prodotto $\delta_{sp}\delta_{ip}$ dipende dalla polarizzazione dei fasci coinvolti nel processo e pertanto dalla condizione di phase matching adottata: tipicamente un phase matching di tipo² I garantisce un prodotto positivo, mentre un tipo II ammette un prodotto negativo.

Un altro aspetto importante del problema dell'amplificazione parametrica di impulsi brevi è legato all'estensione della banda di amplificazione. Come si potrà apprezzare meglio in seguito, un ruolo fondamentale nella determinazione del suo valore è svolto ancora una volta dal GVM. Si assuma innanzitutto che un'arbitraria terna di pulsazioni $\bar{\omega}_p$, $\bar{\omega}_s$ e $\bar{\omega}_i$ soddisfi la condizione di phase matching. Dal momento che il phase matching dipende dall'indice di rifrazione delle diverse onde interagenti, il quale dipende a sua volta dalla frequenza, è evidente che tutte le altre componenti spettrali dei tre impulsi coinvolti nel processo, al di fuori di quelle sopra citate, non possono contemporaneamente soddisfare tale condizione. Si immagini allora di voler calcolare il valore del wave vector mismatch associato alla seguente terna di pulsazioni:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_p &= \bar{\omega}_s + \bar{\omega}_i \\ \omega_s &= \bar{\omega}_s + \Delta\omega \\ \omega_i &= \bar{\omega}_i - \Delta\omega \end{cases}$$

ottenuta aumentando $\bar{\omega}_s$ della quantità $\Delta\omega$ e lasciando invariata $\bar{\omega}_p$ (la nuova ω_i è vincolata dalla conservazione dell'energia). Sviluppando i termini $k(\omega_s)$ e $k(\omega_i)$ in serie di Taylor e arrendendosi al prim'ordine risulta:

$$\begin{aligned} k(\omega_j) &\cong k(\bar{\omega}_j) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\bar{\omega}_j} \Delta\omega \\ \Delta k &= k(\bar{\omega}_p) - k(\omega_s) - k(\omega_i) \\ &\cong \left(\frac{1}{v_{g_i}} - \frac{1}{v_{g_s}} \right) \Delta\omega = \delta_{si} \Delta\omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

sapendo che $j = s, i$ e $k(\bar{\omega}_p) - k(\bar{\omega}_s) - k(\bar{\omega}_i) = 0$ (in virtù del phase matching). Si noti che Δk dipende da δ_{si} , ovvero dal GVM tra segnale e idler. Volendo tenere conto della quantità Δk , occorre riformulare l'equazione 2.10:

$$G(L) = \frac{\Gamma^2}{4g^2} e^{2gL} \quad (2.14)$$

²Per informazioni sui diversi tipi di phase matching si veda l'appendice A.

$$g = \sqrt{\Gamma^2 - \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2} \quad (2.15)$$

Dalla 2.14 è possibile definire la massima banda di amplificazione³ come l'intervallo di pulsazioni $\Delta\omega$ a cui è associato un valore di Δk che dimezza il guadagno in presenza di "phase matching" espresso in 2.10:

$$\exp [2g(\Delta k)L] = \frac{1}{2} \exp (2\Gamma L)$$

$$\Delta k \cong 2(\ln 2)^{1/2} \left(\frac{\Gamma}{L}\right)^{1/2} \quad (2.16)$$

$$2\Delta\nu \cong \frac{2}{\pi}(\ln 2)^{1/2} \left(\frac{\Gamma}{L}\right)^{1/2} \frac{1}{\delta_{si}} \quad (2.17)$$

L'equazione 2.16 rappresenta il valore di Δk che riduce di un fattore due il guadagno calcolato in presenza di phase matching, mentre la 2.17 descrive la corrispondente banda in frequenza. Si intuisce dunque che l'ampiezza della banda dipende fortemente dal valore del GVM tra segnale e idler: in particolare nel caso in cui le velocità di gruppo dei due impulsi coincidano, ad esempio operando in condizione di degenerazione e adottando un phase matching di tipo I, l'estensione della banda aumenta drasticamente. In tal caso evidentemente l'equazione 2.17 perde di significato e va sostituita con un'altra che si ottiene sviluppando il termine Δk al secondo ordine:

$$\begin{aligned} \Delta k &\cong -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\bar{\omega}_i} + \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\bar{\omega}_s} \right] \Delta \omega^2 \\ 2\Delta\nu &\cong \frac{2}{\pi} (\ln 2)^{1/4} \left(\frac{\Gamma}{L}\right)^{1/4} \frac{1}{\left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\bar{\omega}_i} + \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\bar{\omega}_s} \right|} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4 Estensione della banda di amplificazione: configurazione non-collineare (NOPA)

Fino ad ora non si è data particolare importanza alla geometria dell'interazione tra i fasci, assumendo dove necessario una natura *collineare* del processo di amplificazione. Alla luce di quanto affermato nel paragrafo precedente, è facile però intuire che una geometria del genere introduce pesanti limitazioni

³Assumendo in prima approssimazione $G(L) \cong e^{2gL}/4$.

sulla banda di amplificazione: infatti fissando la direzione di propagazione nel cristallo e il tipo di phase matching si fissano anche le velocità di gruppo di segnale e idler, le quali non possono coincidere tra loro a meno di operare in condizione di degenerazione. Nella situazione in esame non è pertanto possibile garantire contemporaneamente un'ampia estensione della banda (eguagliando le velocità di gruppo) e la possibilità di accomodare la stessa a diverse regioni spettrali (tuning della banda).

Al fine di rendere il sistema più versatile è allora necessario passare ad una geometria *non-collineare*. Nella nuova configurazione la relazione di phase matching tra le componenti che concorrono all'amplificazione assume una connotazione vettoriale:

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i \quad (2.19)$$

Si consideri dunque la situazione riportata in figura 2.3 (a), secondo cui i vettori d'onda di pompa e segnale formano tra loro un angolo α , mentre l'idler è emesso ad un angolo Ω rispetto al segnale. Proiettando la relazione 2.19 nelle

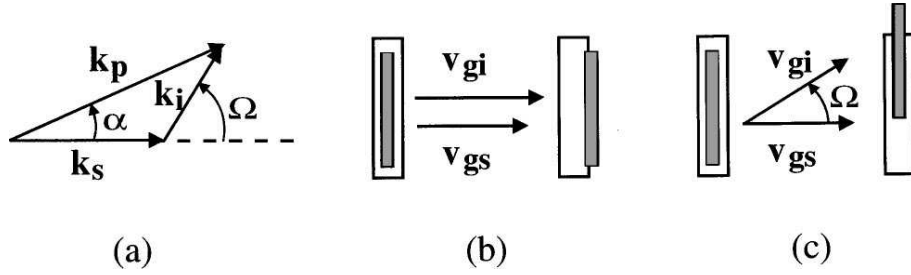


Figura 2.3: (a) Schema della geometria di interazione non-collineare; rappresentazione degli impulsi di segnale e idler in una configurazione collineare (b) e in una non-collineare (c).

direzioni parallela e ortogonale a quella del segnale si ottengono le seguenti:

$$\begin{cases} \Delta k_{\parallel} = k_p \cos \alpha - k_s - k_i \cos \Omega \\ \Delta k_{\perp} = k_p \sin \alpha - k_i \sin \Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

Si noti che l'ampiezza dell'angolo Ω dipende dalla lunghezza d'onda del segnale. Per trovare la condizione di amplificazione su larga banda occorre soddisfare, in analogia con la procedura adottata nel paragrafo 2.3, la condizione di phase matching su un ampio intervallo di frequenze. Detto che:

$$\Delta k_{\parallel}(\bar{k}_p, \bar{k}_s, \bar{k}_i) = \Delta k_{\perp}(\bar{k}_p, \bar{k}_s, \bar{k}_i) = 0$$

il wave vector mismatch lungo le due direzioni di interesse può essere sviluppato al prim'ordine per ottenere:

$$\begin{cases} \Delta k_{\parallel} \cong -\frac{\partial k_s}{\partial \omega_s} \Delta \omega + \frac{\partial k_i}{\partial \omega_i} \cos \Omega \Delta \omega - k_i \sin \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i} \Delta \omega = 0 \\ \Delta k_{\perp} \cong \frac{\partial k_i}{\partial \omega_i} \sin \Omega \Delta \omega + k_i \cos \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i} \Delta \omega = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando dunque Δk_{\parallel} per $\cos \Omega$, Δk_{\perp} per il $\sin \Omega$ e sommando i risultati:

$$v_{g_s} = v_{g_i} \cos \Omega \quad (2.21)$$

L'equazione 2.21 esprime la condizione di *group velocity matching* tra segnale e idler, indispensabile per estendere la banda del processo di amplificazione in configurazione non-collineare. Da un punto di vista geometrico la 2.21 afferma che per operare a banda larga occorre far propagare segnale e idler ad un angolo Ω tale che la velocità di gruppo del segnale coincida con la proiezione di quella dell'idler lungo la direzione del segnale stesso. Ovviamente tale condizione ha senso solo se la velocità dell'idler è maggiore.

A conclusione del paragrafo si vuole affrontare un problema di carattere pratico legato alla realizzazione dell'OPA. Poiché infatti non si dispone fin dall'inizio dell'impulso di idler, la relazione 2.21, il cui soddisfacimento garantisce l'estensione della banda di amplificazione, non può essere adottata come criterio di costruzione. Per sopperire a tale mancanza è possibile allora sfruttare il fenomeno della *superfluorescenza parametrica*, che consiste nell'amplificazione del rumore di fondo del laboratorio. Ciò significa che sul cristallo di fatto incidano in ogni istante dei fotoni, anche in assenza dell'impulso di segnale. È evidente allora che i suddetti fotoni, in presenza di un fascio di pompa sufficientemente intenso, possano essere amplificati. In particolare ci si può aspettare che lungo la direzione dedotta dalla 2.21, il processo di amplificazione sia tale da soddisfare la condizione di phase matching su banda larga, producendo una traccia visibile ad occhio nudo. Tale traccia ha simmetria cilindrica rispetto alla direzione della pompa e sancisce l'angolo α con cui bisogna far propagare pompa e segnale per operare in condizione di larga banda.

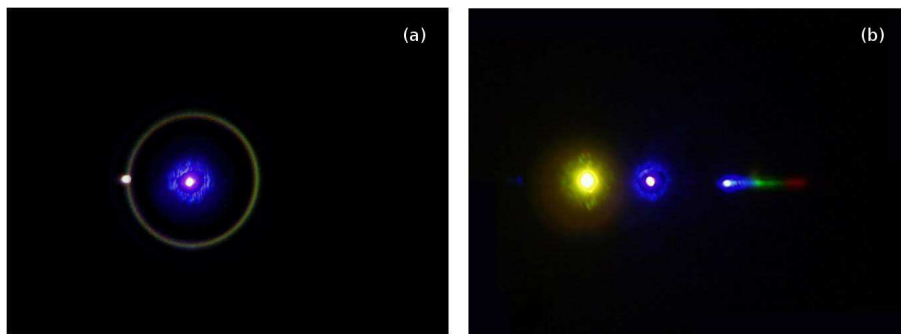


Figura 2.4: (a) anello di superfluorescenza; (b) segnale amplificato (in giallo) e idler (la cui lunghezza d'onda è funzione dell'angolo Ω di emissione) prodotti da un NOPA.

Capitolo 3

Fase assoluta (CEP)

Nel presente capitolo si vuole esplorare il significato della fase assoluta di un impulso ultrabreve, mettendo in luce come il controllo del suddetto termine di fase sia indispensabile ai fini dell'osservazione di una serie di fenomeni sensibili al campo elettrico piuttosto che all'intensità del fascio. Tra gli altri, si introduce l'idea di sintesi coerente di un impulso della durata di pochi cicli ottici. Infine si presenta una tecnica di stabilizzazione della fase che sfrutta l'amplificatore ottico parametrico studiato nel capitolo precedente.

3.1 Significato fisico della CEP

Come si è già potuto osservare nel capitolo ??, il campo elettrico di un impulso è decomponibile nel prodotto di due enti distinti: la *portante*, che rappresenta la parte rapidamente variabile, la cui oscillazione può essere descritta da un'onda sinusoidale ad una certa frequenza; l'*inviluppo*, che rappresenta invece la parte lentamente variabile, il cui modulo al quadrato definisce anche il profilo di intensità del fascio. In base alla definizione appena esposta, è evidente che si possa descrivere la parte temporale dell'impulso con una relazione del tipo:

$$E_p(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_{ce}) \quad (3.1)$$

Il significato dell'equazione 3.1 è illustrato graficamente in figura 3.1: Si evince dunque che il termine φ contenuto nell'equazione 3.1 rappresenta il ritardo tra la portante e l'inviluppo, ed è perciò chiamato *carrier-envelope phase*, *CEP*, o *fase assoluta* [10, 11, 12, 13, 14] dell'impulso. Tale ritardo dipende dal fatto che, all'interno di un mezzo dispersivo in cui $n = n(\omega)$, le due componenti si propagano con velocità diverse, rispettivamente la velocità di fase $v_p = \omega_0/k$ e quella di gruppo $v_g = (\partial\omega/\partial k)|_{\omega_0}$, favorendo così uno "scivolamento" della portante sull'inviluppo.

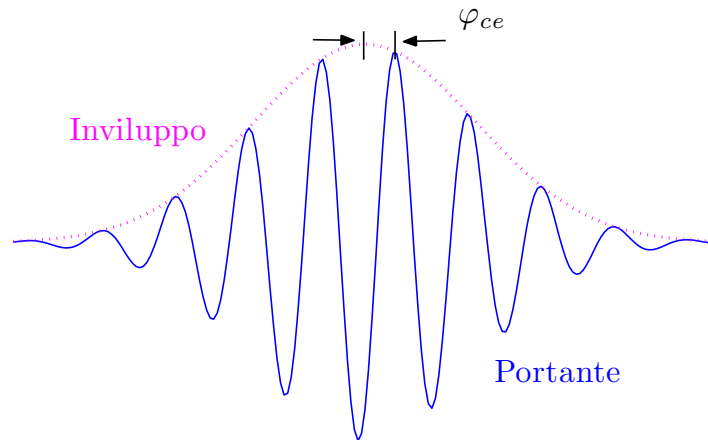


Figura 3.1: rappresentazione della fase assoluta φ , o CEP, di un impulso.

Per chiarire meglio il significato della CEP, è utile prendere in considerazione il suo comportamento all'interno di una cavità laser. Si immagina una cavità che possa essere rappresentata con lo schema riportato in figura 3.2 e che lavori in regime di mode-locking. È risaputo che un sistema del genere può

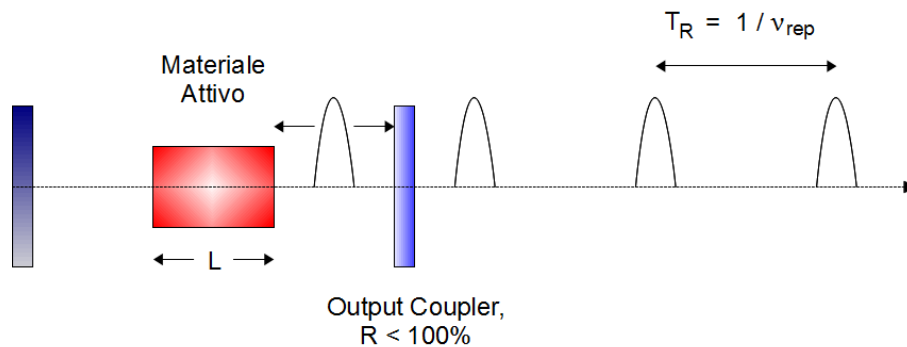


Figura 3.2: schema di una cavità laser operante in regime di mode-locking; l'intervallo di tempo che intercorre fra due impulsi in uscita coincide con la durata T_R di un round-trip, che a sua volta può essere interpretata come l'inverso della frequenza di ripetizione ν_{rep} .

essere descritto, nel dominio del tempo, mediante un impulso che si propaga avanti e indietro in cavità, per effetto di riflessioni successive sugli specchi che la delimitano. Il laser produce un impulso in uscita ogni volta che il campo all'interno della cavità incontra l'output coupler. Trascurando il contributo

di dispersione dato dall'aria, in cavità è comunque presente un mezzo dispersivo (il materiale attivo), il quale provoca una variazione della fase assoluta dell'impulso ad ogni suo passaggio:

$$\delta\varphi_{ce} = L \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_p} \right) \omega_0 \quad (3.2)$$

con L lunghezza del materiale attivo. Dal momento che l'impulso in cavità compie due passaggi attraverso il mezzo attivo prima di tornare sullo specchio di uscita, tra due impulsi successivi prodotti dal laser si assiste ad una variazione del termine di fase assoluta pari a $2\delta\varphi_{ce}$, o, in altri termini, $\Delta\varphi_{ce} + N2\pi$, volendo metter in evidenza che soltanto il termine $\Delta\varphi_{ce} = 2\delta\varphi_{ce} \bmod 2\pi$ è dotato di significato fisico. Si deduce che tra due impulsi del treno in uscita descritti dallo stesso termine di fase assoluta (a meno quindi di multipli di 2π) intercorre il tempo di *carrier-envelope offset* così definito:

$$T_{CEO} = T_R \frac{2\pi}{\Delta\varphi_{ce}} \quad (3.3)$$

dove T_R rappresenta la durata di un *round-trip*¹. Dalla relazione 3.3 è anche possibile estrarre la grandezza:

$$\nu_{CEO} = \frac{1}{T_{CEO}} = \nu_{rep} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad (3.4)$$

che giocherà un ruolo importante in seguito. Riassumendo, lo studio nel dominio del tempo della cavità laser in regime di mode-locking mostra come la CEP tra due impulsi successivi del treno in uscita vari di un fattore costante $\Delta\varphi_{ce}$, come illustrato in figura 3.3.

Un altro modo di interpretare la CEP scaturisce dall'analisi del sistema di figura 3.2 nel dominio delle frequenze. Ignorando per il momento il termine $\Delta\varphi_{ce}$, tutti gli impulsi prodotti dalla cavità sono descritti dal medesimo campo elettrico, come sancito dall'equazione 3.1, così che il campo del treno in uscita si possa esprimere come:

$$E(t) = \sum_n E_p(t - nT_R) \quad (3.5)$$

Grazie alla formula di Poisson è inoltre possibile riscrivere la 3.5 in funzione della sua trasformata di Fourier $\tilde{E}(k)$:

$$\sum_n E_p(t - nT_R) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_R} \tilde{E} \left(\frac{k}{T_R} \right) e^{i2\pi kt/T_R} \quad (3.6)$$

¹Il tempo che l'impulso in cavità impiega per compiere un giro completo (andata e ritorno) della stessa.

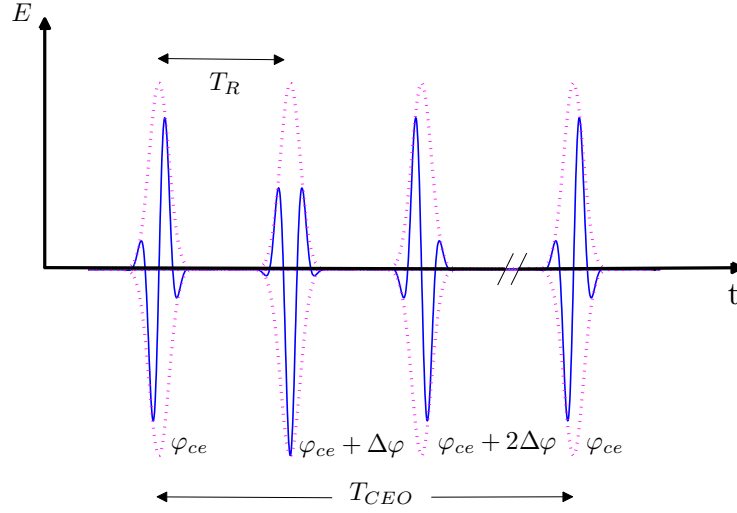


Figura 3.3: raffigurazione dello scivolamento di fase assoluta nel treno di impulsi in uscita dalla cavità nel dominio del tempo.

da cui si deduce che lo spettro del segnale in uscita dal laser consiste di una pettine discreto di frequenze multiple della frequenza di ripetizione $\nu_{rep} = 1/T_R$. Volendo ora prendere in considerazione l'effetto di slittamento di fase assoluta al passaggio dell'impulso nel materiale attivo, occorre riformulare l'espressione del campo in uscita. Questa volta infatti gli impulsi prodotti dalla cavità laser si distinguono tra loro nel termine che descrive la CEP, del tipo $\varphi_{ce} = n\Delta\varphi_{ce} + \varphi_{ce0}$ per l'impulso n-esimo, avendo indicato con φ_{ce0} la fase assoluta dell'impulso iniziale:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \sum_n E_{pn}(t - nT_R) \\
 &= \sum_n A_p(t - nT_R) e^{i(\omega_0 t - n\omega_0 T_R + n\Delta\varphi_{ce} + \varphi_{ce0})} \\
 &= \sum_n A_p(t - nT_R) e^{i(\omega_0 t + n(\Delta\varphi_{ce} - \omega_0 T_R) + \varphi_{ce0})} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier di 3.7 risulta perciò:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n A_p(t - nT_R) e^{i(\omega_0 t + n(\Delta\varphi_{ce} - \omega_0 T_R) + \varphi_{ce0})} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \sum_n e^{i(n(\Delta\varphi_{ce} - \omega_0 T_R) + \varphi_{ce0})} \int_{-\infty}^{+\infty} A_p(t - nT_R) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \\
 &= \sum_n e^{i(n(\Delta\varphi_{ce} - \omega_0 T_R) + \varphi_{ce0})} e^{-in(\omega - \omega_0)T_R} \tilde{A}(\omega - \omega_0) \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

avendo sfruttato l'uguaglianza $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) \exp(-\alpha x) dx = \exp(-i\alpha a) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\alpha x) dx$. Invertendo la formula di Poisson, 3.6, e ricordando che la trasformata di Fourier della $\delta(t)$ è una costante, si ottiene infine:

$$\tilde{E}(\omega) = e^{i\varphi_{ce}} \tilde{a}(\omega - \omega_0) \sum_k \delta(\Delta\varphi_{ce} - \omega T_R - 2\pi k) \quad (3.9)$$

Dalla 3.9 si evince dunque che lo spettro del treno di impulsi in uscita si manifesta di nuovo come un pettine discreto alle frequenze:

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{T_R} - \frac{\Delta\varphi_{ce}}{T_R}, \quad \nu_k = k\nu_{rep} + \nu_{CEO} \quad (3.10)$$

con ν_{CEO} esprimibile secondo l'equazione 3.4. Pertanto lo slittamento della fase assoluta per effetto del passaggio dell'impulso attraverso il materiale attivo risulta in un "offset" della posizione del pettine sull'asse delle frequenze.

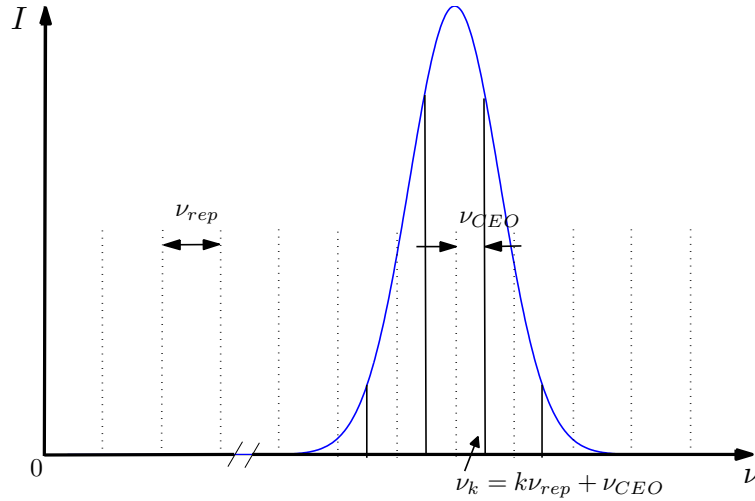


Figura 3.4: manifestazione dello scivolamento di fase assoluta nello spettro del treno di impulsi prodotto dalla cavità laser.

La traslazione in frequenza dello spettro del segnale prodotto dalla cavità laser diventa particolarmente rilevante se si pensa al fatto che il termine $\Delta\varphi_{ce}$ è soggetto a fluttuazioni nel tempo. L'instabilità nel valore dello slittamento di CEP è essenzialmente dovuta alla non-linearità del terzo ordine² del mezzo attivo, grazie alla quale l'intensità del fascio incidente modula l'indice di rifrazione percepito nel materiale. Ammettendo allora una fluttuazione nell'intensità³ dell'impulso in cavità pari a dI e detta L la lunghezza del mezzo

²Si veda il capitolo 1.

³Causata ad esempio da una variazione di intensità del fascio di pompa del materiale attivo.

attivo, la variazione di $\Delta\varphi_{ce}$ (in seguito a un doppio passaggio) si può scrivere come:

$$d(\Delta\varphi_{ce}) = k_0 (2Ln_2dI) = \frac{2\pi\nu_0}{c_0} 2Ln_2dI \quad (3.11)$$

essendo $2Ln_2dI$ la variazione di cammino ottico. La 3.11 implica un'ulteriore traslazione dello spettro del treno di impulsi in uscita dalla cavità, esprimibile come:

$$d\nu_k = -\frac{\nu_{rep}}{2\pi} d(\Delta\varphi_{ce}) = -\frac{\nu_{rep}}{c_0} \nu_0 2Ln_2dI \quad (3.12)$$

A conclusione del paragrafo si prende in esame un procedimento con cui intervenire sul valore della CEP. Come si è già avuto modo di affermare, la fase assoluta di un impulso dipende dalla differenza tra i valori di velocità di fase e di gruppo che l'impulso sperimenta attraversando un mezzo dispersivo. Introducendo dunque uno spessore opportuno di materiale nel cammino del fascio, è possibile modificare il termine φ_{ce} che lo descrive. Sapendo infatti che:

$$v_p = \frac{c_0}{n}, \quad v_g = \frac{c_0}{n - \lambda_0 \left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0}} \quad (3.13)$$

e ricordando che $\omega_0 = 2\pi c_0/\lambda_0$, è possibile riscrivere l'equazione 3.2 per ricavare la lunghezza L di materiale che è necessario introdurre al fine di modificare la fase assoluta dell'impulso di un fattore 2π :

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{ce} &= -2\pi \left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} L \\ L_{2\pi} &= \left| \left(\left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_0} \right)^{-1} \right| \end{aligned} \quad (3.14)$$

A titolo di esempio, per alterare di un fattore 2π la fase assoluta di un impulso con portante a $\lambda_0 = 800$ nm, è possibile inserire lungo il suo cammino uno spessore $L = 57.85$ μm di fused silica.

3.2 Stabilizzazione passiva mediante OPA

Si vuole ora studiare un sistema per annullare l'effetto di eventuali variazioni di fase assoluta allo scopo di ottenere un treno di impulsi caratterizzati da una CEP costante (ovvero riproducibile). Un'alternativa interessante in tal senso è rappresentata da un sistema di stabilizzazione di fase puramente ottico, fondato sull'impiego della difference frequency generation. Prima di procedere è opportuno puntualizzare il comportamento del termine di CEP nell'ambito di alcuni processi non-lineari di interesse:

generazione di luce bianca, riconducibile al fenomeno di self-phase modulation (SPM, paragrafo 1.5); studiando la SPM tramite un modello che prevede un'interazione a quattro campi (*Four-wave mixing*) si evince che il fascio bianco⁴ eredita la stessa fase assoluta dell'impulso di partenza a meno di un fattore costante pari a $\pi/2$;

generazione di frequenza somma (SFG), dette ω_1 e ω_2 le pulsazioni portanti degli impulsi interagenti e $\varphi_{ce,1}$ e $\varphi_{ce,2}$ le relative fasi assolute, la SFG produce un impulso a pulsazione $\omega_1 + \omega_2$ e fase $\varphi_{ce,1} + \varphi_{ce,2} + \pi/2$;

generazione di seconda armonica (SHG), può essere interpretata come caso particolare della SFG in cui $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e $\varphi_{ce,1} = \varphi_{ce,2} = \varphi_{ce}$; evidentemente l'impulso prodotto oscilla a pulsazione 2ω con una CEP pari a $2\varphi_{ce} + \pi/2$;

generazione di frequenza differenza (DFG), assumendo di nuovo le ipotesi fatte nel caso della SFG, l'impulso prodotto dalla DFG oscilla a pulsazione $\omega_2 - \omega_1$ con una fase data da $\varphi_{ce,2} - \varphi_{ce,1} - \pi/2$.

<i>Processo</i>	Impulsi in ingresso		Impulso in uscita	
	<i>Portanti</i>	<i>CEP</i>	<i>Portante</i>	<i>CEP</i>
SPM	ω	φ_{ce}	ω	$\varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}$
SFG	ω_1, ω_2	$\varphi_{ce,1}, \varphi_{ce,2}$	$\omega_1 + \omega_2$	$\varphi_{ce,1} + \varphi_{ce,2} - \frac{\pi}{2}$
SHG	ω	φ_{ce}	2ω	$2\varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}$
DFG	ω_1, ω_2	$\varphi_{ce,1}, \varphi_{ce,2}$	$\omega_2 - \omega_1$	$\varphi_{ce,2} - \varphi_{ce,1} - \frac{\pi}{2}$

Tabella 3.1: Riassunto del comportamento del termine di fase assoluta nell'ambito dei principali processi non-lineari del secondo e del terzo ordine.

Alla luce di quanto affermato, si intuisce la possibilità di sfruttare il fenomeno della DFG per generare un impulso a fase stabile, partendo da una coppia di impulsi in ingresso caratterizzati da un contributo di fase casuale⁵, purché sia lo stesso per entrambi. A tale scopo si può pensare di realizzare un opportuno OPA. Ricordando infatti che il dispositivo, oltre ad amplificare uno dei due

⁴Il processo di generazione del bianco verrà affrontato in dettaglio nel capitolo 4.

⁵Come accade per gli impulsi del treno prodotto da una cavità laser operante in regime di mode-locking.

fasci in ingresso, ne genera un terzo alla frequenza differenza dei primi due, utilizzando la stessa nomenclatura adottata nel capitolo 2 si avrebbe:

$$\begin{cases} \omega_i &= \omega_p - \omega_s \\ \varphi_{ce,i} &= \varphi_{ce,p} - \varphi_{ce,s} - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.15)$$

È importante ribadire che il termine $\varphi_{ce,i}$ risulta depurato di eventuali fluttuazioni di fase negli impulsi di pompa e segnale solo a patto che la stessa fluttuazione sia contenuta in entrambi $\varphi_{ce,p}$ e $\varphi_{ce,s}$. Immaginando di voler amplificare un segnale di luce bianca prodotta tramite SPM, è possibile garantire il soddisfacimento della suddetta condizione utilizzando uno degli schemi di amplificazione riportati in figura 3.5. È sufficiente quindi alimentare gli sta-

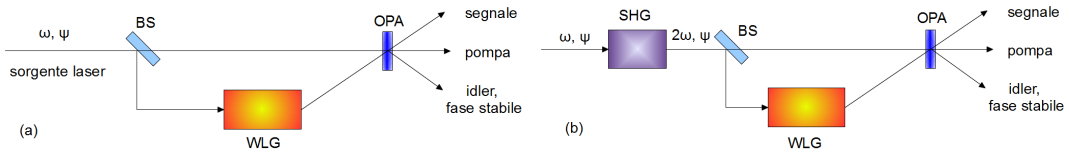


Figura 3.5: Schemi di stabilizzazione passiva della fase assoluta; BS, beam splitter; SHG, stadio di generazione di seconda armonica; WLG, stadio di generazione di luce bianca; ω e ψ rappresentano rispettivamente la pulsazione e il contributo casuale di fase dell'impulso prodotto dalla sorgente laser.

di di generazione del bianco e di amplificazione parametrica con due repliche identiche di un medesimo impulso proveniente dalla sorgente laser, affinché i fasci di pompa e segnale detengano lo stesso componente fluttuante di fase assoluta. Si noti che fino ad ora si è trascurato il contributo di CEP dovuto alla propagazione dei fasci. Indicando quindi con ψ il termine di fase casuale e con l quello dipendente dalla propagazione, si può scrivere:

$$\varphi_{ce,i} = \varphi_{ce,p} - \varphi_{ce,s} - \frac{\pi}{2} = (\psi + l_p) - (\psi + l_s) - \frac{\pi}{2} = \Delta l - \frac{\pi}{2} \quad (3.16)$$

dove si è messo in evidenza che entrambi gli impulsi di pompa e segnale manifestano la stessa fluttuazione di fase ψ , mentre si è indicato con Δl la differenza di fase $l_p - l_s$ dovuta alla propagazione degli stessi impulsi attraverso due cammini distinti. In una situazione ideale il termine Δl è costante, perciò l'idler prodotto è sempre a fase stabile. Nella realtà alcuni fattori di disturbo, come vibrazioni dei componenti ottici o turbolenze in aria, possono determinare una fluttuazione di Δl , innescando di conseguenza un'instabilità nella fase del fascio generato dall'OPA. Un modo per aggirare il problema consiste nella realizzazione di una variante del sistema di stabilizzazione, in cui la DFG sia

innescata da componenti spettrali diverse dello stesso impulso (*DFG intrapulse*): in tal caso infatti non si avrebbe solo la garanzia di far interagire dei campi recanti lo stessa fluttuazione di fase (essendo essi parte di uno stesso impulso), bensì ogni variazione di cammino coinvolgerebbe tanto l'uno quanto l'altro campo e non sarebbe perciò trasferita all'impulso in uscita. D'altro canto la nuova configurazione manifesta alcuni svantaggi, quali una stretta banda di "phase-matching" e una bassa efficienza di conversione, a meno di disporre di un impulso di partenza a banda molto larga e molto energetico.

3.3 Applicazioni di impulsi a fase stabile

Nel seguente paragrafo si vogliono brevemente investigare alcune delle principali applicazioni di impulsi ultrabrevi a fase stabile, quali i cosiddetti *orologi ottici*, la *generazione di armoniche di ordine elevato (HHG)* e la *sintesi coerente di impulsi di pochi cicli ottici*.

Storicamente la misura di frequenze ottiche (\sim THz) ha sempre prospettato una serie di difficoltà, per via dell'impossibilità di realizzare degli oscillatori elettronici sufficientemente rapidi da inseguire un segnale a frequenze così elevate. Dall'esigenza di trovare nuove tecniche in grado di effettuare misure di segnali a frequenza sempre maggiore, nasce tra le altre l'*interferometria eterodina*, che consiste nel battimento di due onde, di cui una nota, e nella conseguente misurazione della frequenza differenza tra le due. In tal modo è possibile far ricadere la frequenza differenza in un regime di frequenze "basse", ovvero facilmente misurabili, ricavando così quella del segnale incognito in modo indiretto. Tale sistema si scontra però con una serie di problemi, come la generazione di una sorgente stabile a frequenza nota e sempre più grande (per garantire che l'eterodina produca un segnale misurabile all'aumentare di quella del segnale incognito), oppure ancora la necessità di sincronizzarsi ad un orologio esterno per poter effettuare una misura di frequenza assoluta, basata cioè sull'unità di tempo assunta come standard, il "secondo"⁶. Un passo importante verso il superamento delle limitazione incontrate nell'interferometria eterodina è stato compiuto con l'avvento del mode-locking, la cui introduzione ha aperto la strada a nuove alternative [15, 16]. Facendo infatti operare una sorgente laser in regime di mode-locking (paragrafo 3.1) si ottiene in uscita un pettine di frequenze equispaziate secondo un intervallo che dipende dalla frequenza di ripetizione ν_{rep} del laser. Tale pettine inoltre ha origine con un certo sfasamento ν_{CEO} rispetto allo zero dell'asse delle frequenze, il quale dipende invece dalla variazione di fase assoluta sperimentata dall'impulso in

⁶Definito nel "Sistema Internazionale" in funzione del tempo di svolgimento di una transizione dell'atomo di Cesio localizzata nella regione delle microonde, alla frequenza di 9.193 GHz.

cavità nell'attraversamento del mezzo attivo. Riuscendo a stabilizzare il valore della suddetta coppia di parametri (ν_{rep} , sensibile a perturbazioni in grado di alterare la lunghezza della cavità percepita dall'impulso; ν_{CEO} , dipendente ad esempio da fluttuazioni dell'intensità del fascio di pompa del laser), sarebbe allora possibile ottenere una sorta di "righello" in frequenza, col quale misurare segnali anche a frequenza ottica con la solita tecnica a eterodina, oppure realizzare un nuovo standard per la definizione del secondo, basato questa volta su una transizione ottica (perciò detto "orologio ottico").

Il processo di HHG [11, 17] è innescato dall'interazione tra radiazione e un gas nobile, quando il campo elettrico incidente assume valori molto elevati (regime di *extreme non-linear optics*). Essendo il fenomeno sensibile al campo elettrico dell'onda piuttosto che alla sua intensità, dipende direttamente anche dalla sua fase. La HHG può essere facilmente interpretata tramite un modello detto di "ricollisione". Secondo tale modello l'interazione del campo elettrico di un impulso con il gas provoca un'alterazione del potenziale atomico, come mostrato in figura 3.6. Il nuovo potenziale percepito dagli elettroni di un

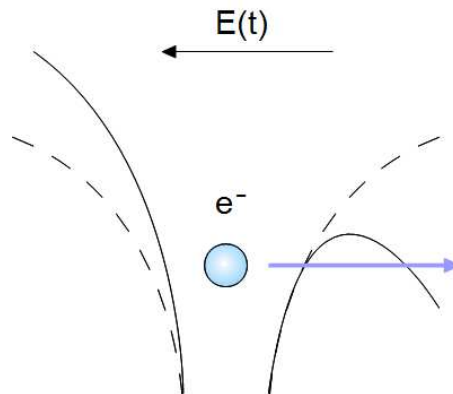


Figura 3.6: Distorsione del potenziale coulombiano per effetto dell'interazione di un campo elettrico molto elevato con la materia; la linea tratteggiata rappresenta il potenziale coulombiano mentre quella solida il potenziale effettivo percepito dall'elettrone.

atomo della materia favorisce la sua *ionizzazione per effetto tunnel*. Gli elettroni strappati agli atomi del gas e ormai liberi vengono accelerati dal campo dell'impulso incidente e possono, con una certa probabilità, ricollidere con gli atomi di provenienza, cedendo l'energia cinetica acquisita durante il loro moto sotto forma di fotoni di *bremstrahlung*⁷. Evidentemente lo spettro della radiazione emessa attraverso il processo appena descritto è limitato dall'energia

⁷Frenamento.

cinetica massima che un elettrone può acquisire prima di urtare di nuovo con il nucleo (tipicamente lo spettro si estende fino all'ultravioletto estremo X-UV). In particolare si osserva che la pulsazione di *cut-off* (che rappresenta l'estremo superiore della banda di emissione) ω_{cut} è direttamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda dell'impulso di eccitazione. Se dunque da un lato è possibile pensare di aumentare la banda di emissione facendo interagire il gas con impulsi di lunghezza d'onda maggiore, al crescere di λ è sempre più difficile ottenere un impulso di breve durata, indispensabile per poter raggiungere valori di picco del campo elettrico sufficienti ad innescare l'intero processo. Si noti inoltre che essendo la ionizzazione per effetto tunnel un fenomeno a soglia, la stabilizzazione della fase assoluta del campo incidente si pone come un requisito fondamentale per garantire la riproducibilità dell'intero processo di HHG, come illustrato in figura 3.7.

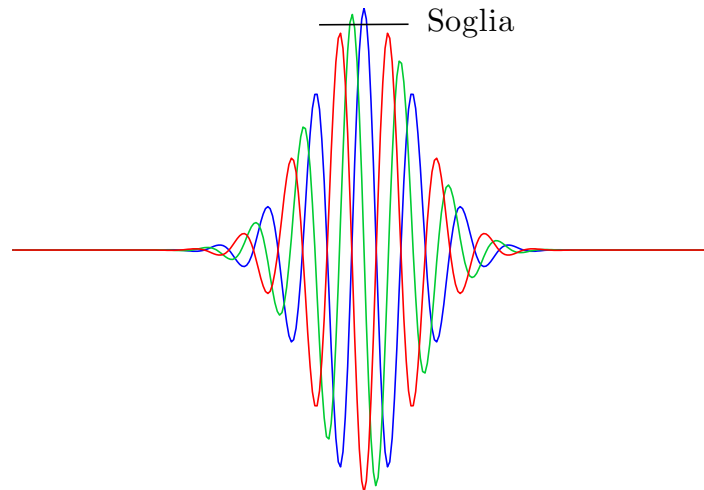


Figura 3.7: Soglia della ionizzazione per effetto tunnel e profilo di campo di una terna di impulsi di eccitazione al variare della fase assoluta; uno dei tre impulsi (in rosso) non raggiunge il minimo valore di campo elettrico richiesto per innescare il fenomeno.

La tecnica di sintesi coerente si propone di unire spettralmente due o più impulsi distinti (con bande localizzate in diverse regioni dello spettro) fissando un vincolo di fase tra loro, al fine di ottenere un unico impulso a banda molto larga e avvicinarsi così al limite del singolo ciclo ottico di oscillazione. Essa inoltre si attesta come alternativa più flessibile alle ormai consolidate tecniche di generazione di impulsi a banda larga, quali ad esempio la generazione di luce bianca e l'amplificazione ottica parametrica, che non garantiscono totale libertà

nell'accordabilità della banda dell'impulso prodotto unitamente alla capacità di creare un impulso della potenza desiderata. Un sistema preposto alla sintesi coerente di un impulso della durata di pochi cicli ottici verrà illustrato nel capitolo 5, pertanto si rimanda alla sua lettura per ulteriori dettagli al riguardo.

Parte II

Attività Sperimentale

Capitolo 4

Generazione di impulsi a fase stabile

Nel seguente capitolo verrà descritto e caratterizzato il sistema sviluppato per generare impulsi di luce a fase stabile. Dopo aver delineato le principali proprietà della sorgente laser impiegata, si illustrerà il funzionamento dell'amplificatore infrarosso a doppio stadio usato per stabilizzare la fase assoluta degli impulsi, per poi spostare l'attenzione sul processo di generazione di luce bianca utilizzata per caratterizzare le fluttuazioni di CEP.

4.1 Sorgente laser

Si è adottato per realizzare l'esperimento un sistema laser *Quantronix Integra-C*, il cui schema è rappresentato in figura 4.1. Inizialmente un oscillatore¹ EDFL (*erbium-doped fiber laser*) produce impulsi di luce intorno alla lunghezza d'onda di 1560 nm, con una frequenza di ripetizione di 40 MHz e di durata ~ 110 fs. La seconda armonica dei suddetti impulsi, dotata di una potenza media ~ 10 mW, è dunque amplificata sfruttando la tecnica di amplificazione cosiddetta *chirped pulse amplification (CPA)*, che consiste di tre fasi successive:

1. innanzitutto uno *stretcher* aumenta la durata temporale dell'impulso di un fattore 10^3 - 10^4 , riducendo di conseguenza la sua intensità di picco² per evitare di raggiungere, durante il processo di amplificazione, potenze sufficienti a danneggiare l'amplificatore stesso;
2. l'impulso così allargato viene quindi amplificato per mezzo di un *amplificatore rigenerativo*;

¹IMRA fiber laser.

²Principio di conservazione dell'energia.

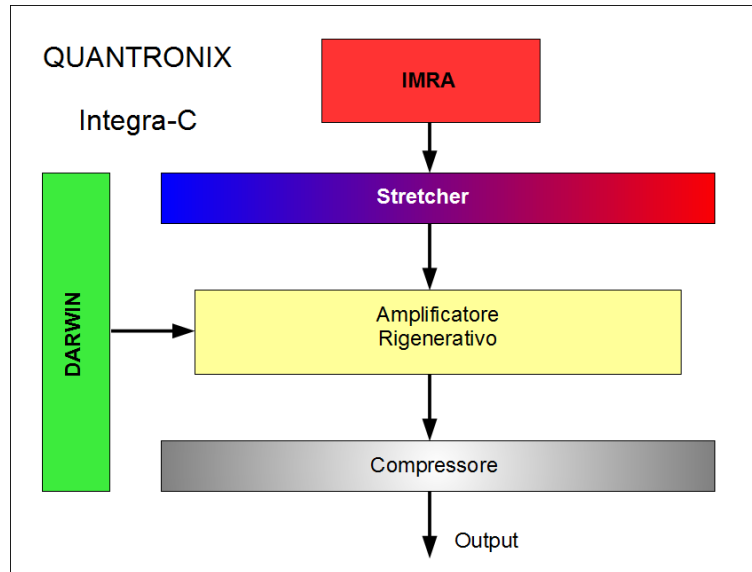


Figura 4.1: Schema a blocchi della sorgente laser impiegata per l'esperimento.

3. infine il fascio amplificato viene nuovamente compresso nel tempo tramite un *compressore*.

Il sistema Integra-C impiega una coppia di reticoli di dispersione sia per comprimere gli impulsi che come stretcher. L'amplificatore rigenerativo è invece un complesso simile ad una cavità laser, in cui l'impulso compie un certo numero di cicli³ (*roundtrips*) passando attraverso un mezzo attivo responsabile del guadagno. L'iniezione e la successiva estrazione dell'impulso dalla cavità avvengono per mezzo di una cella di Pockels sincronizzata con l'oscillatore. Un amplificatore del genere viene tipicamente progettato per operare a guadagno basso, per evitare l'innesco del processo di amplificazione dell'emissione spontanea (*ASE*). Il materiale attivo impiegato al suo interno è costituito da un cristallo di zaffiro nel quale vengono iniettati ioni di titanio (Ti^{3+}), perciò detto Ti:zaffiro, che viene pompato dalla seconda armonica del laser *Darwin*. Tale sistema consiste di una cavità pompata a diodi e operante in regime di Q-switching, il cui materiale attivo è rappresentato da un cristallo di Nd:YLF. Gli impulsi prodotti dalla cavità del Darwin sono centrati ad una lunghezza d'onda di 1053 nm, che corrisponde ad una seconda armonica di 527 nm, e sono caratterizzati da una durata di circa 200 ns.

L'intero processo di amplificazione è tale da prelevare soltanto alcuni degli impulsi prodotti dalla sorgente laser IMRA, garantendo una frequenza di ripetizione finale di 1 kHz e con una potenza dell'ordine di 1 W, alla lunghezza

³Normalmente $\sim 10-20$ roundtrips.

d'onda portante $\lambda = 800$ nm. Si riportano infine in figura 4.2 lo spettro e la traccia di autocorrelazione degli impulsi generati dal Quantronix Integra-C: si noti la durata temporale degli impulsi, dell'ordine di 150 fs.

4.2 OPA infrarosso

Il primo problema affrontato dal punto di vista sperimentale è stato quello di realizzare un dispositivo capace di cancellare le fluttuazioni di fase degli impulsi in uscita dalla cavità laser, per garantire la riproducibilità dell'andamento del campo elettrico degli stessi. Il sistema di stabilizzazione che si è deciso di adottare consiste in un OPA infrarosso a due stadi, rappresentato in figura 4.3 e 4.4. L'intero apparato è alimentato da una frazione⁴ della luce prodotta dal sistema Integra-C, di potenza $P = 550$ mW. All'inizio del setup, il beam splitter BS1 separa l'impulso incidente in due repliche, di cui quella inviata al primo stadio di amplificazione (illustrato invece in figura 4.5) è dotata di soli $P_1 = 80$ mW di potenza. Un secondo beam splitter, BS2, divide ulteriormente il fascio in due copie, che svolgono rispettivamente il ruolo di segnale e di pompa nell'ambito del processo di amplificazione. In particolare la replica meno intensa, $P_{1s} = 10$ mW, viene focalizzata mediante una lente convergente di focale $f = 75$ mm su una lamina di zaffiro di 2 mm di spessore, per innescare il fenomeno di generazione di luce bianca. La potenza effettiva incidente lo zaffiro è regolata da un attenuatore variabile posto a monte della lente di focalizzazione. Una seconda lente convergente, con focale $f = 30$ mm, viene impiegata per controllare la dimensione dello spot del bianco sul cristallo di BBO in cui avviene il processo di DFG. I restanti 70 mW del fascio in ingresso al primo stadio costituiscono la pompa, la cui sovrapposizione col segnale da amplificare all'interno del cristallo di BBO è adeguata per mezzo di una linea di ritardo (per quanto riguarda la sovrapposizione temporale) e di una lente convergente di focale $f = 300$ mm montata su un traslatore micrometrico (per regolare la sovrapposizione spaziale). L'amplificazione è innescata sfruttando una condizione di phase matching collineare, ottenuta impiegando un beam splitter (BS3) trasparente ad 800 nm e con elevata riflettività nell'infrarosso, in grado di ricombinare i fasci coinvolti. Il cristallo non-lineare adottato per avviare il processo di DFG è, come detto, un BBO, di spessore 5 mm e tipo II, per favorire il processo di amplificazione su lunghezze elevate⁵ e aumentare di conseguenza il fattore di guadagno. Per motivi di stabilità di fatto si è voluto spingere al massimo le prestazioni del primo OPA facendolo operare in

⁴Infatti a valle della sorgente laser gli impulsi vengono scomposti in diverse repliche, tramite l'uso di beam splitters, per sostenere contemporaneamente più esperimenti.

⁵Cfr. paragrafo 2.3.

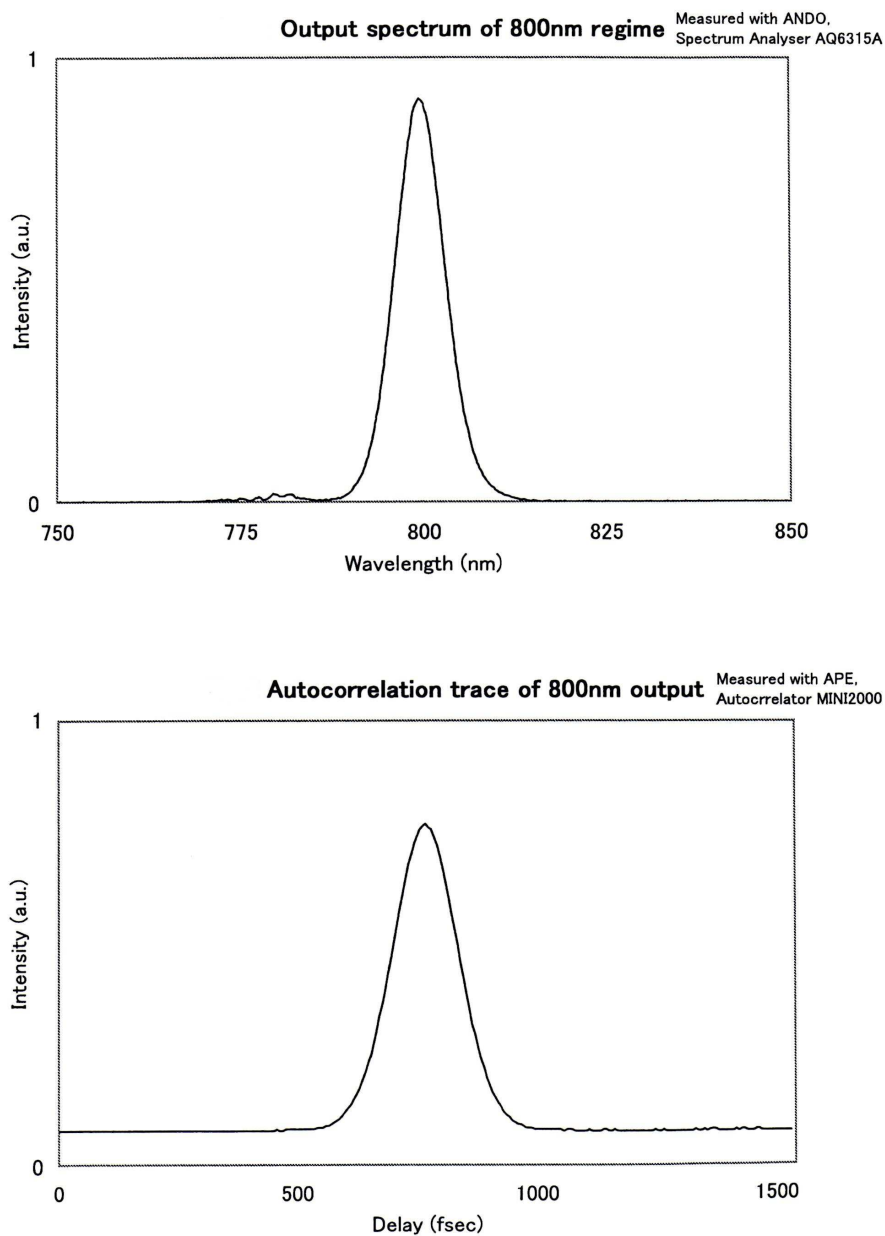


Figura 4.2: Spettro della radiazione emessa dalla sorgente laser Quantronix Integra-C (in alto); traccia di autocorrelazione (in basso) che rivela una durata dell'impulso prodotto di circa 150 fs.

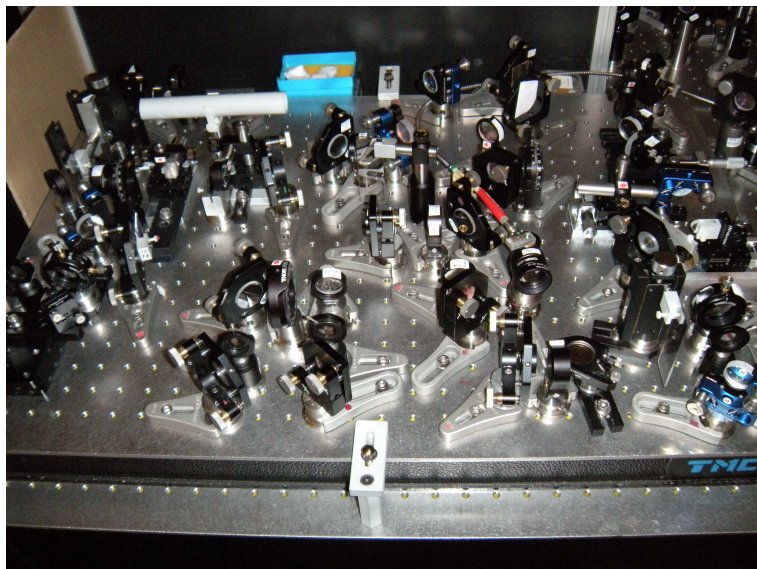


Figura 4.3: Fotografia dell'amplificatore ottico realizzato per ottenere impulsi a fase stabile.

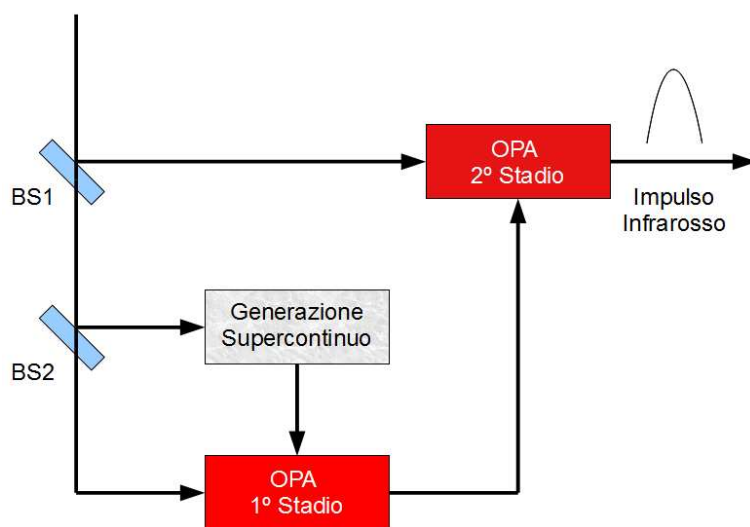


Figura 4.4: Schema a blocchi dell'amplificatore ottico realizzato per ottenere impulsi a fase stabile.

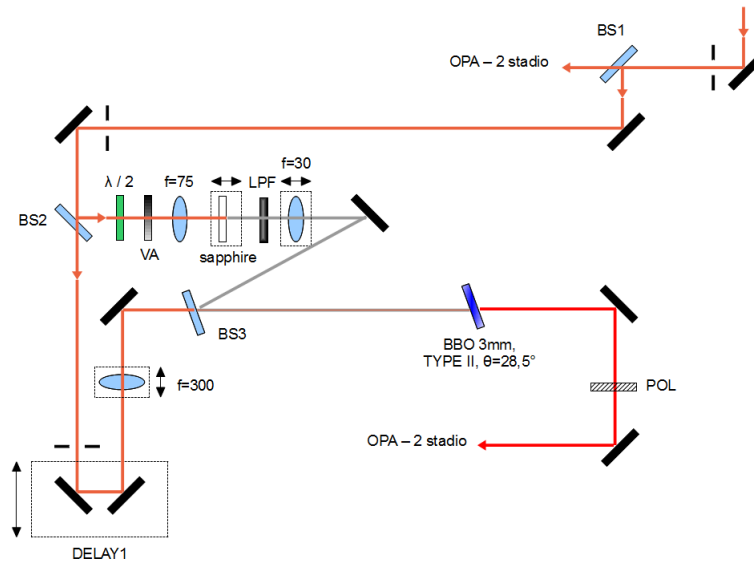


Figura 4.5: Rappresentazione del primo stadio di amplificazione; BS, beam splitter; $\lambda/2$, lamina a lambda-mezzi; VA, attenuatore variabile; sapphire, zaffiro; DELAY, linea di ritardo; LPF, filtro passa-basso; POL, polarizzatore.

una situazione di guadagno saturato, più insensibile a fluttuazioni di alcuni parametri come l'intensità tra due impulsi successivi in ingresso al sistema. In virtù delle relazioni sancite in tabella 3.1, è evidente che il dispositivo descritto (alimentato da fasci di pompa e segnale dotati della stessa fase assoluta, a meno di fattori costanti) è in grado di cancellare le fluttuazioni di CEP tra impulsi successivi nel fascio di idler generato dal processo di DFG. Essendo gli impulsi di pompa, segnale e idler collineari anche a valle del cristallo di amplificazione, si utilizza un polarizzatore (POL) per selezionare un fascio e reiettare gli altri due: discende infatti dalla condizione di phase matching $\text{segnale} (e) + \text{idler} (o) \rightarrow \text{pompa} (e)$ che i fasci di segnale e idler abbiano polarizzazione incrociata. A tale scopo si è anche deciso di introdurre una lamina $\lambda/2$ nel cammino del segnale, per poter ruotare la polarizzazione degli impulsi amplificati e disporre eventualmente di un fascio di segnale ordinario a valle del processo di amplificazione. Si noti comunque che per garantire la condizione di phase matching sopra citata ed avere un idler ordinario, l'asse della lamina deve essere parallelo alla polarizzazione del segnale, già orientata in direzione straordinaria. Tipiche potenze di idler in uscita dal primo OPA si aggirano intorno a 1 mW; in figura 4.6 si mostra lo spettro dell'idler generato ad un particolare angolo di phase matching.

La bassa potenza di idler ottenibile con il solo primo OPA risulta insufficiente per innescare il fenomeno di generazione del bianco (cfr. paragrafo 4.3)

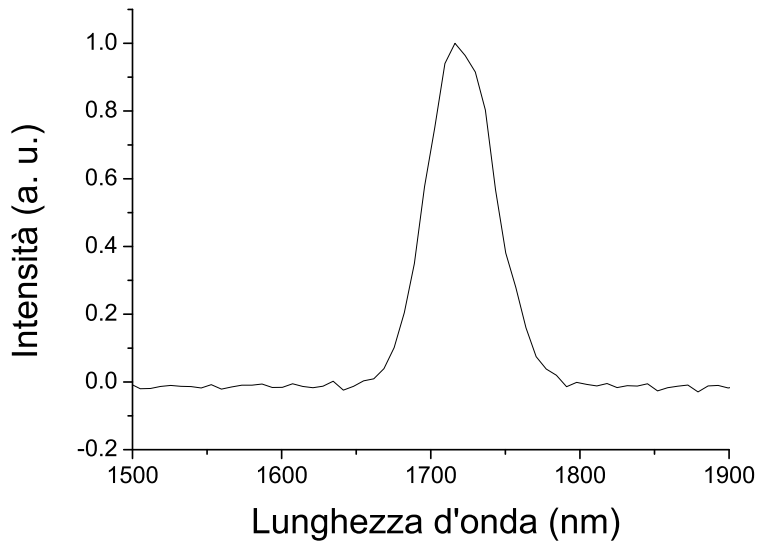


Figura 4.6: Spettro dell'idler a fase stabile prodotto dal primo OPA infrarosso; la lunghezza d'onda di picco dipende dall'angolo di phase matching formato dalla direzione di propagazione della pompa con gli assi ottici del cristallo; l'intensità è misurata in unità arbitrarie (a. u.).

che si vuole utilizzare per la sintesi dell'impulso a singolo ciclo ottico, rendendo pertanto indispensabile la realizzazione di un secondo stadio di amplificazione. Scopo del nuovo OPA, illustrato in figura 4.7, è dunque soltanto quello di aumentare la potenza dell'idler, già a fase stabile, generato dal primo. Il fascio trasmesso dal beam splitter BS1, il quale consta di circa 470 mW, viene ulteriormente suddiviso in due repliche da un altro beam splitter, BS4, che alimenta da un lato la pompa dell'OPA infrarosso descritto in figura 4.7, garantendole una potenza $P_2 = 200$ mW, mentre dall'altro restituisce un fascio in grado di pompare altri amplificatori caratterizzati nell'ultima parte dell'esperimento (cfr. capitolo 5). Il fascio di pompa dell'OPA in esame attraversa poi una linea di ritardo per controllarne la sovrapposizione temporale con l'idler in uscita dal primo stadio. Dopodiché transita per un telescopio in grado di ridurre la sua dimensione di macchia di un fattore 3 (realizzato con una lente convergente di focale $f = 300$ mm ed una divergente di focale $f = -100$ mm), affinché tutta la potenza da esso trasportata venga sfruttata per il processo di amplificazione⁶. Dall'altra parte il fascio di idler generato dal primo stadio viene collimato⁷, dopo essere stato selezionato dal polarizzatore, con una lente

⁶Infatti il processo di DFG può avvenire solo in presenza di sovrapposizione spaziale (oltre che temporale) dell'impulso di pompa con l'impulso che si vuole amplificare; pertanto se la dimensione di macchia dei due non coincide, ad esempio perché quella della pompa è maggiore dell'altra, parte della potenza della prima non viene sfruttata nel processo di amplificazione.

⁷Tale fascio eredita infatti la divergenza del bianco prodotto nello zaffiro e focalizzato sul

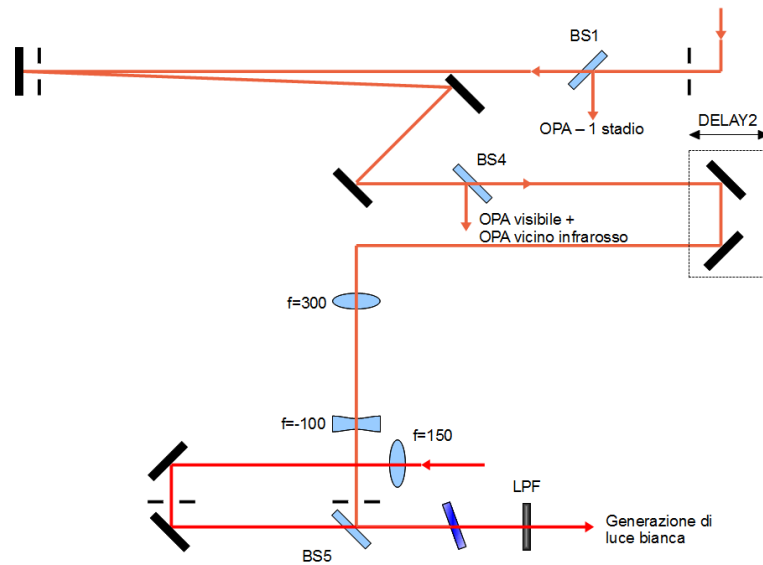


Figura 4.7: Rappresentazione del secondo stadio di amplificazione; BS, beam splitter; DELAY, linea di ritardo; LPF, filtro passa-basso.

convergente di focale $f = 150$ mm e proiettato sul cristallo di BBO. Si noti che in questo caso si è scelto un cristallo di spessore 4 mm, inferiore rispetto a quello impiegato nel primo OPA, per evitare di raggiungere la saturazione del guadagno: si è potuto infatti osservare un peggioramento degli spettri dei fasci prodotti in condizione di saturazione⁸. Nonostante la figura 4.7 mostri una geometria di amplificazione collineare, in realtà la pompa del secondo OPA e l'idler generato dal primo, ricombinati per mezzo del beam splitter BS5⁹, formano tra loro un piccolo angolo, che facilita la loro separazione a valle del cristallo. Il filtro passa-basso LPF serve infine a rimuovere la pompa a 800 nm oltre il BBO. L'introduzione del nuovo stadio di amplificazione ottica consente di incrementare la potenza del fascio di idler a fase stabile fino a $P_i = 20$ mW (con fluttuazioni dell'ordine $\sim 1.2\%$), più che sufficienti per innescare la SCG (paragrafo 4.3). Lo spettro dell'idler amplificato è rappresentato in figura 4.8.

A conclusione del paragrafo si riportano i dati ottenuti regolando il funzionamento del dispositivo in modo da amplificare il segnale prodotto nel primo stadio. Benché tale condizione non sia in grado di rimuovere la fluttuazione di fase assoluta degli impulsi in ingresso, risulta comunque interessante sia dal

cristallo di amplificazione del primo stadio.

⁸In particolare la nascita di regimi di funzionamento in cui gli spettri manifestano più massimi a diverse lunghezze d'onda.

⁹Dotato di elevato potere riflettente a 800 nm e in grado di trasmettere l'infrarosso.

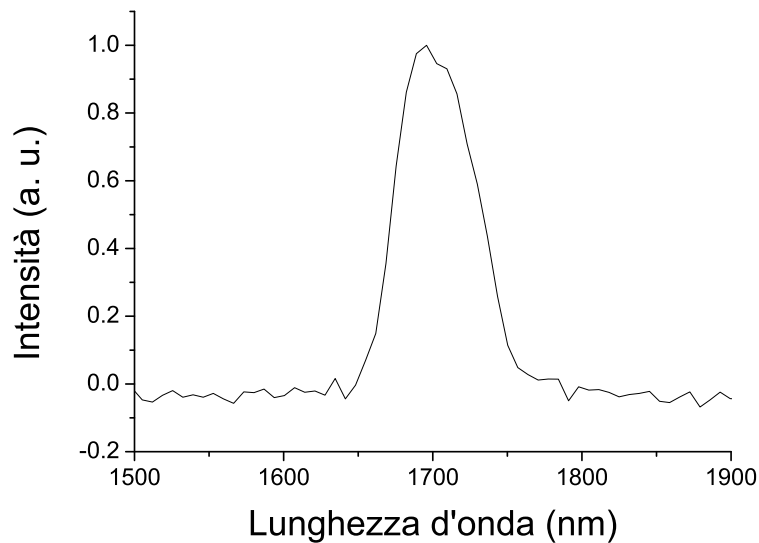


Figura 4.8: Spettro dell'idler a fase stabile amplificato dal secondo OPA infrarosso; l'intensità è misurata in unità arbitrarie (a. u.).

punto di vista della caratterizzazione dell'amplificatore, sia dal punto di vista pratico, come verrà specificato in seguito. Nella nuova configurazione è necessario ruotare di 45° la lamina $\lambda/2$ (figura 4.5), al fine di ottenere un fascio di polarizzazione ordinaria (ortogonale al piano del disegno) a valle del dispositivo. A parte ciò, lo schema dei due stadi è invariato, con il primo che fornisce un segnale di potenza dell'ordine di 1.3 mW, amplificata fino a raggiungere un valore $P_s = 5.8$ mW dal secondo (con una fluttuazione dell'ordine $\sim 2\%$). In figura 4.9 si riportano gli spettri del segnale in uscita dai due amplificatori.

Il capitolo in corso concentra la sua attenzione sul processo di generazione della luce bianca, a partire dal segnale infrarosso prodotto dalla coppia di amplificatori descritti in precedenza. Dopo aver illustrato il sistema implementato per la generazione del fascio bianco e averne analizzato lo spettro, sarà chiarito come il supercontinuo consente di caratterizzare la fase degli impulsi infrarossi impiegati per generarlo.

4.3 Il Supercontinuo

La propagazione di impulsi laser attraverso mezzi trasparenti può innescare l'allargamento della loro banda spettrale. Il fenomeno, noto col nome di *generazione del supercontinuo*, o *SCG* [18], è stato finora osservato in mezzi solidi, liquidi e gas. Benché la self-phase modulation (cfr. paragrafo 1.5) sia in grado di innescare da sola la generazione del bianco, nella maggior parte dei casi reali la SCG ha origine dall'interazione di una serie di processi non-lineari del

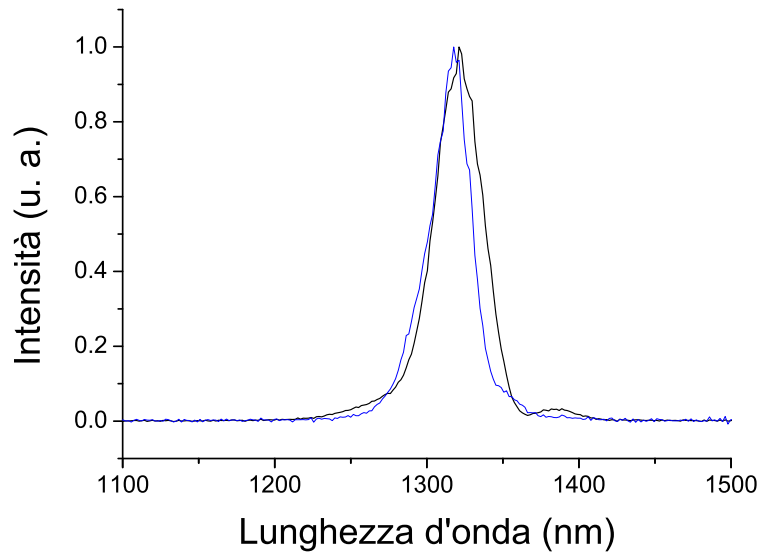


Figura 4.9: Spettro del segnale amplificato dal primo (nero) e dal secondo (blu) stadio; la lunghezza d'onda di picco dipende dall'angolo di phase matching formato dalla direzione di propagazione della pompa con gli assi ottici del cristallo; l'intensità è misurata in unità arbitrarie (a. u.).

terzo ordine, i quali concorrono alla formazione di un *filamento* di luce bianca all'interno del materiale (tra gli altri si ricordano la *ionizzazione a valanga* e la *generazione di plasma*). Particolare attenzione è stata prestata alla scelta del materiale da sfruttare per innescare il fenomeno di SCG. La caratteristica più importante di cui si è dovuto tenere conto è il band-gap del materiale, che gioca un ruolo determinante nell'ambito della generazione del fascio bianco. La sua ampiezza, unitamente all'energia dell'impulso incidente, stabilisce infatti l'efficienza dell'intero processo, basato su un tipo di interazione a più fotoni (*assorbimento multifotonico* [19]); in aggiunta a ciò sembra che la luce bianca prodotta sperimenti un taglio alle alte frequenze che dipende proprio dal valore del gap [20]. Al fine di favorire il processo di SCG e di aumentare la banda dello spettro prodotto a partire dall'idler infrarosso centrato alla lunghezza d'onda di 1700 nm (fornito dall'OPA infrarosso del paragrafo 4.2), la prima scelta è ricaduta su una lamina di YAG di 4 mm di spessore. Lo YAG infatti manifesta un gap sufficientemente piccolo da garantire un'elevata efficienza dell'assorbimento multifotonico innescato da fotoni a bassa energia come quelli infrarossi. Inoltre esso garantisce una buona qualità dello spettro intorno a 800 nm, regione a cui si è particolarmente interessati per via della difficoltà di produrvi luce [21, 22]. Lo schema sperimentale utilizzato per la generazione del fascio bianco è mostrato in figura 4.10. Un attenuatore variabile posto su un traslatore orizzontale consente di selezionare la potenza del

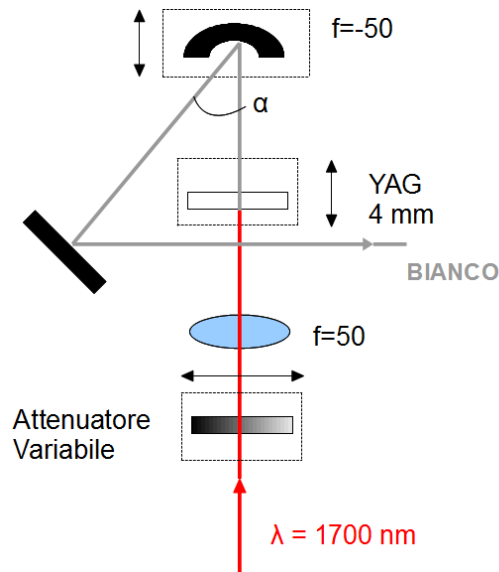


Figura 4.10: Setup sperimentale per la generazione del fascio bianco.

fascio infrarosso a fase stabile ($\lambda = 1700 \text{ nm}$) prodotto dalla coppia di OPA descritti nel paragrafo 4.2. Tale fascio viene quindi focalizzato all'interno della lamina di YAG per mezzo di una lente convergente di focale $f = 50 \text{ mm}$. Oltre il cristallo di YAG, uno specchio sferico di focale $f = -50 \text{ mm}$ ricollima il bianco (che esce dal materiale con una divergenza ben maggiore del fascio fondamentale infrarosso) e lo proietta su uno specchio piano di raccolta. Sia la posizione dello YAG che quella dello specchio curvo possono essere regolate finemente mediante dei traslatori micrometrici. Si è preferito utilizzare uno specchio per la ricollimazione del fascio al fine di evitare il problema della dispersione inevitabilmente introdotta dalla propagazione attraverso una lente. Così facendo però, è necessario ridurre il più possibile l'angolo α (figura 4.10) per evitare che lo specchio introduca un'aberrazione sul fronte d'onda del fascio¹⁰. In figura 4.11 si mostra un tipico spettro della luce ottenuta.

A conclusione del paragrafo si propone una configurazione alternativa per la generazione del bianco, che verrà sfruttata più direttamente per la sintesi coerente di un impulso ultrabreve discussa nel capitolo 5. Si utilizza in questo caso al posto dello YAG una lamina di zaffiro di 3 mm di spessore. Tale materiale viene spesso usato per produrre luce bianca pompando con un fascio a 800 nm (lunghezza d'onda fondamentale generata dalla cavità di Ti:zaffiro), restituendo tuttavia uno spettro particolarmente strutturato ed associato ad

¹⁰Per risolvere completamente il problema bisognerebbe incidere sullo specchio sferico con un angolo di 0° rispetto alla normale alla sua superficie.

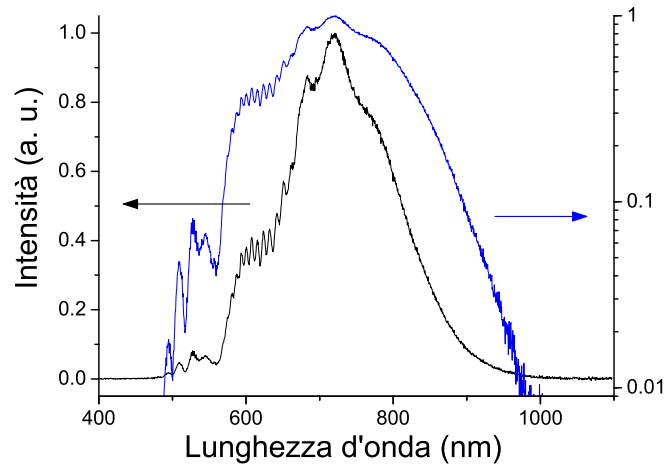


Figura 4.11: Spettro del fascio bianco, in scala lineare (nero) e semilogaritmica (blu), prodotto focalizzando un impulso infrarosso ($\lambda = 1700$ nm) in una lamina di YAG di 4 mm di spessore; l'intensità è espressa in unità arbitrarie (a. u.) in entrambe le scale.

una fase molto irregolare nell'intorno della lunghezza d'onda di pompa, a causa del principio di funzionamento della SPM stessa. Scegliendo però come fascio di pompa il segnale amplificato dall'OPA infrarosso alla lunghezza d'onda di 1300 nm, è possibile aggirare il problema e ottenere di nuovo uno spettro più regolare nel range di interesse (intorno a 800 nm). D'altra parte la scelta dello zaffiro unitamente a quella della nuova pompa si è rivelata utile per stabilizzare il comportamento degli amplificatori ottici realizzati per la sintesi coerente e descritti nel capitolo 5. In figura 4.12 si mostra lo spettro del bianco ottenuto in questo caso.

4.4 Interferometro $f-2f$

Il fascio bianco descritto nel paragrafo precedente è stato successivamente impiegato per testare la stabilità della fase assoluta degli impulsi prodotti dall'OPA infrarosso (paragrafo 4.2) per mezzo di un *interferometro $f-2f$* . Tale strumento deve il suo nome al meccanismo su cui è fondato, che può essere scomposto in due fasi: innanzitutto si duplica in frequenza la componente a lunghezza d'onda maggiore di un impulso dotato di estensione spettrale pari almeno a un'ottava; successivamente si fanno interferire il fascio alla seconda armonica così ottenuto e la componente alla stessa frequenza dell'impulso di partenza. Si noti che un sistema del genere viene indicato col nome di *self-*

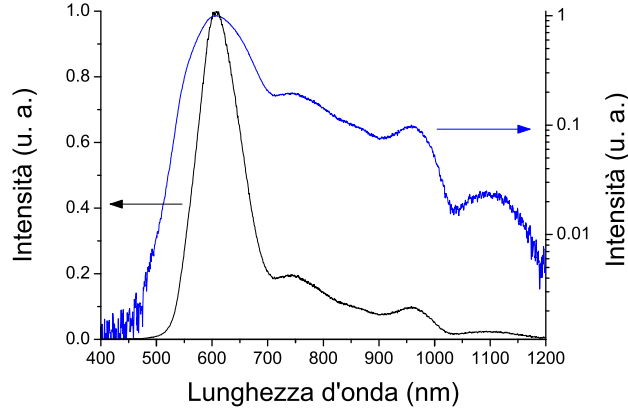


Figura 4.12: Spettro del fascio bianco, in scala lineare (nero) e semilogaritmica (blu), prodotto focalizzando un impulso infrarosso ($\lambda = 1300$ nm) in una lamina di zaffiro di 3 mm di spessore; l'intensità è espressa in unità arbitrarie (a. u.).

referencing, perché misura le proprietà di un impulso a partire dall'impulso stesso. Ai fini dell'esperimento in esame si è impiegata in realtà una variante della tecnica, che prevede di far interferire due componenti spettrali di due impulsi distinti: in particolare si tratta della componente del fascio bianco¹¹ centrata a 850 nm, con la seconda armonica dell'idler prodotto dall'OPA infrarosso alla stessa lunghezza d'onda. Per affrontare una trattazione analitica¹² del problema, si considerino un fascio di pulsazione $\omega/2$ e fase assoluta φ_{ce} , che generi il bianco, e la componente del fascio bianco a frequenza doppia:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\omega}{2}(t - \tau) + \varphi_{ce}\right) \\ \sin\left(\omega t + \varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (4.1)$$

dove il termine τ rappresenta il ritardo di tempo tra le due onde e l'ulteriore sfasamento di $\pi/2$ è imputabile al processo di generazione di luce bianca. La seconda armonica del primo fascio descritto nell'equazione 4.1 restituisce un campo del tipo:

$$\sin\left(\omega(t - \tau) + 2\varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.2)$$

¹¹Che, secondo la tabella 3.1, eredita la stessa fase assoluta dell'impulso che lo genera, a meno di un fattore di fase costante pari a $\pi/2$.

¹²Per semplicità limitata allo studio di componenti monocromatiche.

in accordo con i risultati esposti in tabella 3.1. La somma dei due campi che interferiscono alla pulsazione ω risulta perciò:

$$\begin{aligned} E_\omega(t) &= \sin\left(\omega t + \varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega(t - \tau) + 2\varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\omega t - \frac{1}{2}\omega\tau + \frac{3}{2}\varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{2}\omega\tau - \frac{1}{2}\varphi_{ce}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

in cui si sono utilizzate le formule di prostaferesi. Sapendo poi che uno spettrometro, con cui si vuole registrare l'interferenza, acquisisce l'intensità $I_\omega(\omega) \propto \langle E_\omega^2(t) \rangle$ del fascio incidente, il segnale misurato è del tipo:

$$\begin{aligned} I_\omega(t) &\propto 4 \left\langle \sin^2\left(\omega t - \frac{1}{2}\omega\tau + \frac{3}{2}\varphi_{ce} - \frac{\pi}{2}\right) \right\rangle \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega\tau - \frac{1}{2}\varphi_{ce}\right) \\ &\propto 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega\tau - \frac{1}{2}\varphi_{ce}\right) \\ &\propto 1 + \cos(\omega\tau - \varphi_{ce}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Il risultato della misura è pertanto una figura di interferenza caratterizzata da una modulazione in frequenza $\nu = \omega/2\pi$ di periodo¹³ $1/\tau$, la cui posizione lungo l'asse delle frequenze è determinata dal valore della fase assoluta φ_{ce} dell'impulso bianco. Si noti quindi che, anche se la tecnica proposta non è in grado di restituire il valore assoluto della CEP dell'impulso di test, è però capace di svelare¹⁴ eventuali fluttuazioni del parametro φ_{ce} , che si manifestano come traslazioni dell'interferogramma lungo l'asse delle frequenze.

Lo schema dell'apparato di misura è rappresentato in figura 4.13. Si osservi innanzitutto come la struttura si sviluppi lungo un'unica linea, grazie alla collinearità dei due fasci responsabili dell'interferenza (il bianco e l'idler prodotto dall'OPA). Tale struttura garantisce una maggiore stabilità interferometrica rispetto ad un sistema in cui i due impulsi si muovono lungo rami distinti: poiché infatti la differenza tra i cammini ottici percorsi dagli impulsi concorre a determinare il loro sfasamento, da cui a sua volta dipende la figura di interferenza registrata, nell'ambito di un sistema costituito da un'unica linea qualunque tipo di perturbazione in grado di alterare le distanze percorse dalle onde influenzerebbe allo stesso modo i cammini percorsi da entrambe, lasciando pertanto inalterato il cammino relativo. Uno spessore di 20 mm di BK7 a valle della lamina di YAG viene impiegato per ritardare un impulso rispetto all'altro: in particolare la componente a 850 nm del fascio bianco subisce un ritardo $\tau_0 = 740$ fs rispetto al fascio infrarosso a 1700 nm. Quest'ultimo viene quindi raddoppiato in frequenza all'interno di un cristallo di BBO (tipo I,

¹³Free Spectral Range (FSR).

¹⁴A parità di τ , supposto costante.

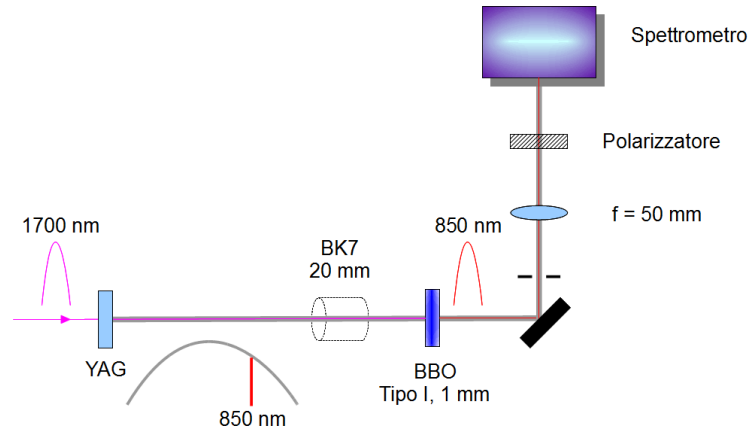


Figura 4.13: Setup sperimentale dell'interferometro f-2f; i fasci infrarosso (magenta) e la sua seconda armonica (rosso) si muovono collineari al bianco (grigio) fino allo spettrometro.

spessore 1 mm) orientato per soddisfare la condizione di phase matching del processo. Dopo il cristallo uno specchio piano raccoglie la seconda armonica (a 850 nm) e il bianco, che vengono filtrati da un'iride per eliminare le parti spaziali dei due campi che non si sovrappongono e che ridurrebbero pertanto il contrasto¹⁵ dell'interferenza: si è osservato infatti che il fascio di seconda armonica e il bianco possiedono diverse proprietà di divergenza, che si manifestano in dimensioni di macchia dei due impulsi molto diverse tra loro. Oltre l'iride una lente convergente (di focale $f = 50$ mm) preleva i due fasci e li focalizza in uno spettrometro¹⁶ per rivelare l'interferenza tra i due. Essendo i due campi di interesse polarizzati ortogonalmente l'uno rispetto all'altro (si è sfruttata infatti nel processo di SHG una condizione di phase matching di tipo¹⁷ I che ruota la polarizzazione della seconda armonica di 90° rispetto alla fondamentale), un polarizzatore a monte dello spettrometro viene utilizzato per prelevare soltanto le componenti di campo elettrico degli impulsi che oscillano nella stessa direzione (garantendo così la possibilità che si crei interferenza), e contemporaneamente bilanciare le intensità dei due fasci al fine di massimizzare il contrasto.

Nelle figure 4.14 e 4.15 sono mostrati i risultati di una tipica misura di interferenza: in particolare si possono osservare nell'immagine a colori le fran-

¹⁵Definito come $(I_{max} - I_{min})/I_{max}$.

¹⁶Spettrometro *Ocean Optics HR 2000*, il cui range di lunghezze d'onda di rilevazione si estende da 300 nm fino a 1100 nm; essendo la frequenza di ripetizione della sorgente laser, $\nu_{rep} = 1$ kHz, maggiore della risoluzione temporale dello spettrometro (pari a 3 ms), ogni spettro è stato calcolato come media di 3 impulsi successivi.

¹⁷Si veda la tabella A.1.

ge¹⁸ raccolte su un intervallo di 14 secondi e sotto ad essa l'andamento del valore della fase assoluta nel tempo, da cui è stato possibile dedurre la deviazione standard della CEP: $\Delta\varphi_{ce} = \sqrt{\langle\Delta\varphi_{ce}^2\rangle - \langle\Delta\varphi_{ce}\rangle^2}$. Sull'intero intervallo di tempo considerato risulta $\Delta\varphi_{ce} = 0.3$ rad, che valida la bontà del sistema di stabilizzazione adottato. Il risultato ottenuto dal test di interferenza spiana la strada verso la possibilità di ottimizzare il sistema di amplificazione descritto nel paragrafo 4.2, al fine di estendere l'intervallo di tempo in cui gli impulsi prodotti mostrano fase assoluta costante. In tal modo si potrebbe pensare di utilizzare l'OPA come strumento per generare impulsi a fase stabile da impiegare nell'ambito di esperimenti che richiedono un'elevata ripetibilità del profilo di campo elettrico.

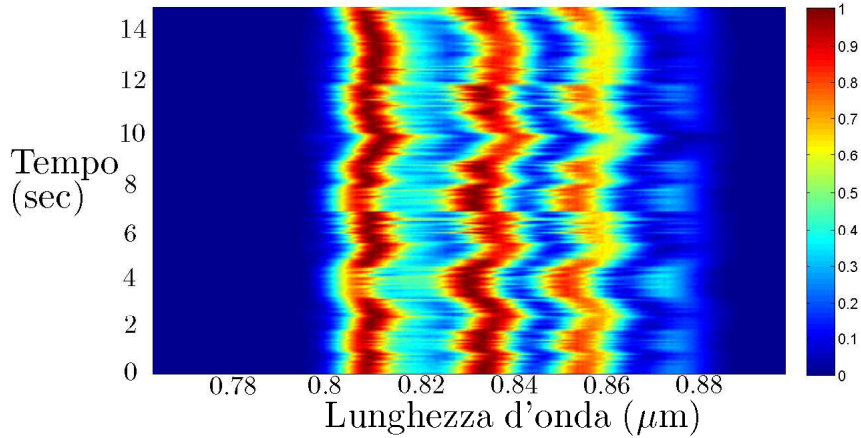


Figura 4.14: Frange di interferenza prodotte dall'interazione del fascio bianco con la seconda armonica dell'impulso infrarosso di lunghezza d'onda portante $\lambda = 1700$ nm; la traccia è stata raccolta su un intervallo temporale di 14 secondi.

Si noti infine che la presenza dello spessore di BK7 all'inizio della linea ha anche la funzione di verificare che la figura di interferenza osservata sia veramente prodotta dagli impulsi di interesse piuttosto che da altre componenti parassite: infatti soltanto nel caso in cui l'interferenza sia veramente generata dall'interazione tra il bianco con la seconda armonica del fascio infrarosso, l'inserimento di un certo spessore di materiale comporterebbe una variazione del ritardo tra gli impulsi e, di conseguenza, del parametro FSR (che si traduce in un'alterazione della densità spettrale delle frange). Il problema è di una certa rilevanza se si considera che il cristallo di BBO utilizzato per generare la seconda armonica è un materiale birifrangente che, se non orientato correttamente, può creare due repliche ritardate della componente del bianco centrata a 850

¹⁸L'analisi delle frange è stata effettuata impiegando un algoritmo di calcolo basato sulla trasformata di Fourier (cfr. appendice B).

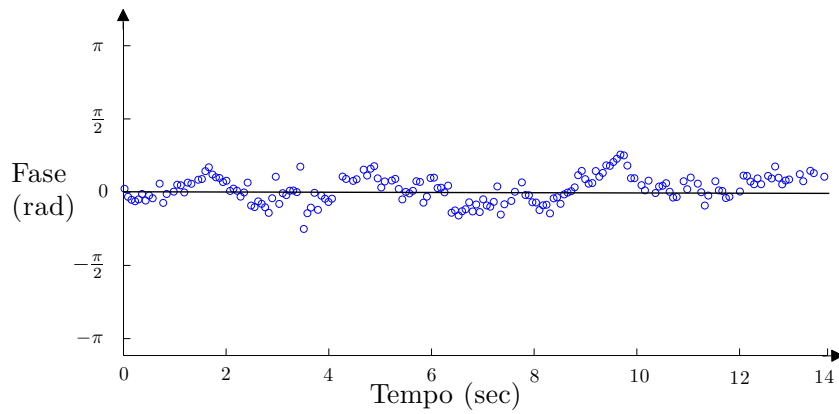


Figura 4.15: Evoluzione della fase assoluta nell'intervallo di tempo di raccolta dell'interferogramma di figura 4.14; il valore di deviazione standard calcolato è $\Delta\varphi_{ce} = 0.3$ rad.

nm, le quali interferirebbero tra loro creando frange costanti e indipendenti dalla fase assoluta.

Capitolo 5

Verso la sintesi coerente

Il capitolo affronta la possibilità di sintetizzare un impulso della durata di pochi cicli ottici a partire da due fasci distinti le cui bande coprono regioni spettrali adiacenti. A tale scopo si realizzano prima due OPA in grado di generare rispettivamente impulsi nel visibile e nel vicino infrarosso. Ai fini della sintesi è fondamentale che gli impulsi amplificati dai due OPA siano tra loro coerenti, caratteristica sempre garantita dal fatto che entrambi sono alimentati da due repliche dello stesso segnale, ottenute per mezzo di un beam splitter (cfr. figura 5.1). Il segnale in questione è costituito dal fascio bianco generato a valle dell'OPA infrarosso (cfr. paragrafo 4.3). Poiché la stabilità della sua fase assoluta non è dunque un requisito stringente ai fini della buona riuscita dell'esperimento in esame, si è scelto di innescare ora la SCG mediante il segnale (e non l'idler) amplificato dall'OPA del capitolo 4. Come si è già avuto modo di affermare infatti, tale scelta, unitamente alla sostituzione della lamina di YAG con una di zaffiro in cui innescare la SCG, ha permesso di migliorare la stabilità dei segnali amplificati di due OPA che verranno presentati successivamente nel capitolo. Ci si concentra infine sull'analisi del sistema di sincronizzazione degli impulsi prodotti dai suddetti OPA, mediante il quale si vuole garantire la bontà dell'impulso sintetizzato.

5.1 OPA visibile

Il primo amplificatore ottico realizzato per amplificare il fascio bianco generato a valle dell'OPA infrarosso del capitolo 4 è un OPA visibile in configurazione non-collineare, il cui schema è illustrato in figura 5.1. Gli impulsi di pompa si ottengono duplicando in frequenza (per mezzo di un BBO, tipo I, di spessore 1 mm) il fascio a 800 nm riflesso dal beam splitter BS4 dell'OPA infrarosso descritto nel paragrafo 4.2 (cfr. figura 4.7). La polarizzazione del suddetto fascio viene prima ruotata di 90° , da straordinaria a ordinaria (ortogonale al piano

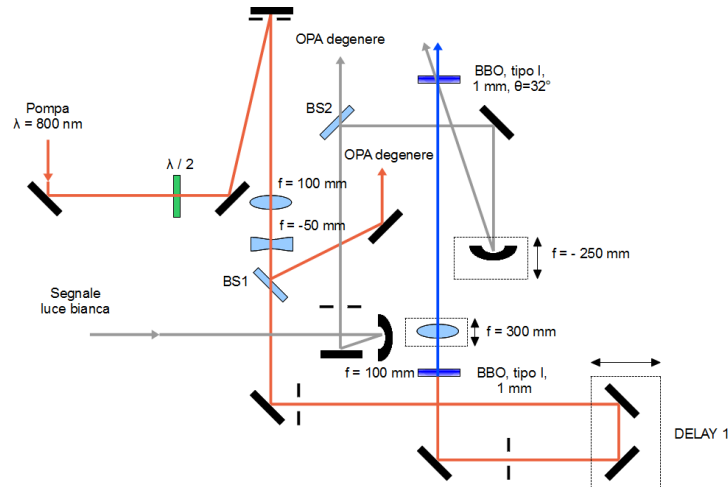


Figura 5.1: Setup sperimentale dell'OPA utilizzato per amplificare la porzione visibile dello spettro del bianco a fase stabile; DELAY, linea di ritardo; BS, beam splitter.

del disegno), per mezzo di una lamina $\lambda/2$, al fine di soddisfare la condizione di phase matching nel processo di generazione di seconda armonica. Prima di raggiungere il cristallo di SHG, l'impulso attraversa inoltre un telescopio 2:1 (costituito da una lente convergente di focale $f = 100\text{mm}$ e da una divergente di focale $f = -50\text{mm}$), per ridurre la sua dimensione di macchia e renderla confrontabile con quella del segnale da amplificare. Il montaggio ad inclinazione variabile della lente di focalizzazione ($f = 300\text{mm}$) garantisce la possibilità di ottimizzare la sovrapposizione della pompa con il segnale sul cristallo in cui avviene DFG, mentre il traslatore micrometrico su cui è collocata consente di controllare finemente la dimensione dell'impulso di pompa sul BBO; analogamente la sovrapposizione temporale fra i due fasci è regolabile mediante la linea di ritardo DELAY1. A partire da $115\ \mu\text{J}$ di energia dell'impulso a $800\ \text{nm}$ a valle del beam splitter BS1, l'efficienza del processo di seconda armonica è tale da fornire $25\ \mu\text{J}$ con cui pompare l'OPA. Il fascio di segnale che si vuole amplificare è, come detto, il bianco generato a partire dagli impulsi prodotti dall'OPA infrarosso descritto nel capitolo 4, il quale viene focalizzato sul cristallo di amplificazione per mezzo di uno specchio sferico¹ di focale $f = -250\ \text{mm}$, montato anch'esso su un traslatore a singolo asse per regolare la sua sovrapposizione con la pompa sul BBO. Un ulteriore specchio sferico collocato

¹Si sceglie di utilizzare un elemento ottico in riflessione, come lo specchio, al posto di una lente, per evitare di disperdere ulteriormente l'impulso.

prima del beam splitter BS2 funge da telescopio² per regolare la dimensione del segnale che alimenta l'amplificatore in esame e quello degenere descritto nel prossimo paragrafo. La scelta della geometria non-collineare, unitamente alle specifiche del cristallo usato per l'amplificazione (BBO³, tipo I, spessore 1 mm, $\theta = 32^\circ$), è stata adottata per massimizzare la banda di guadagno, ovvero la banda in cui è soddisfatta la condizione di phase matching. Come infatti testimonia la figura 5.2, nella configurazione impiegata esiste un particolare

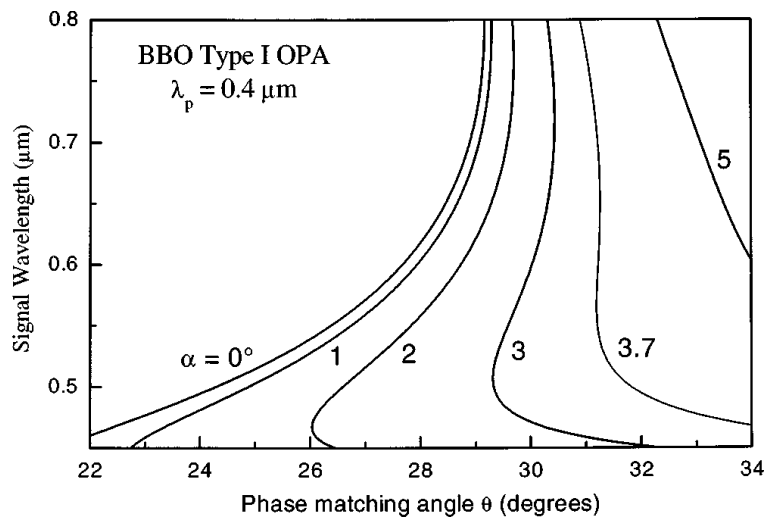


Figura 5.2: Curve di phase matching per un OPA non-collineare realizzato con un BBO tipo I [1]; α , angolo individuato dalle direzioni della pompa e del segnale; λ_p , lunghezza d'onda di pompa.

angolo α tra la direzione del fascio di pompa e quella del segnale (all'interno del cristallo) in corrispondenza del quale il phase matching è garantito su una banda che si estende da $0.5 \mu\text{m}$ a $0.75 \mu\text{m}$. In figura 5.3 si mostra un tipico spettro del segnale amplificato dall'OPA in esame. La potenza misurata del segnale alla lunghezza d'onda $\lambda = 600 \text{ nm}$ è di 1.6 mW .

5.2 OPA degenere

Il secondo parametrico realizzato è un OPA degenere che amplifica nella regione di spettro intorno a 800 nm , adiacente a quella amplificata invece dall'OPA visibile del paragrafo 5.1. In figura 5.4 è illustrato lo schema del nuovo dispositivo. Si noti la profonda simmetria tra l'amplificatore in esame e quello

²Il primo specchio del telescopio è quello curvo che raccoglie il bianco appena all'uscita dalla lamina usata per la SCG (figura 4.10).

³L'angolo θ specifica la direzione lungo cui il cristallo è stato tagliato rispetto al suo asse ottico.

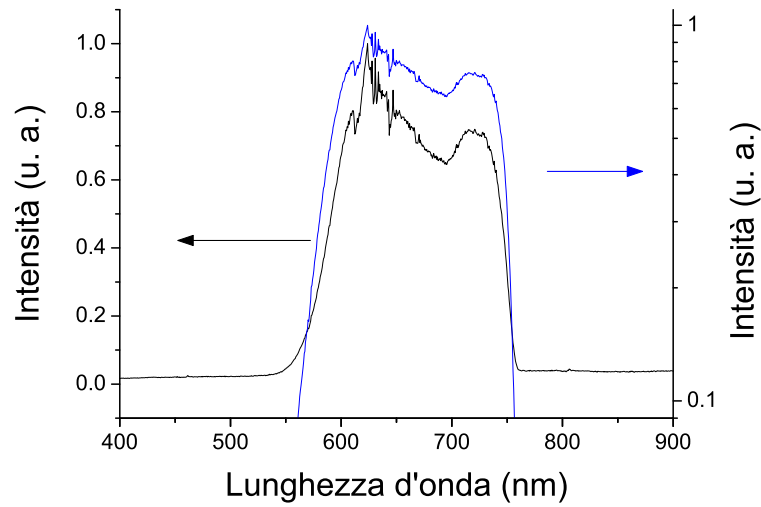


Figura 5.3: Spettro del segnale amplificato dall'OPA visibile in configurazione non-collineare, in scala lineare (nero) e semilogaritmica (blu); si può apprezzare una larghezza di banda del fascio prodotto concorde con la teoria (cfr. figura 5.2), estesa da circa 500 nm a 750 nm, lunghezza d'onda in corrispondenza della quale lo spettro manifesta un taglio dovuto ai chirped-mirrors usati per la compressione (cfr. paragrafo 5.3); l'intensità è espressa in unità arbitrarie.

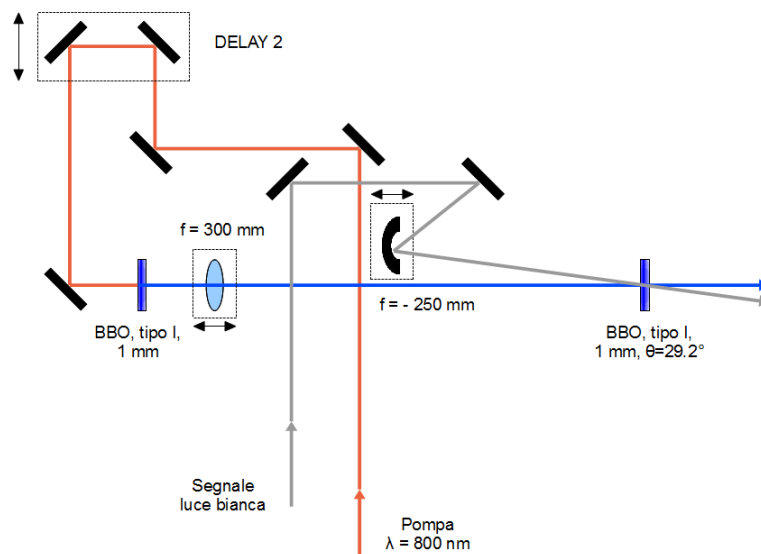


Figura 5.4: Setup sperimentale dell'OPA utilizzato per amplificare la porzione dello spettro del bianco centrata ad 800 nm; DELAY, linea di ritardo.

descritto nel paragrafo precedente, imputabile da un lato alla banda che si desidera amplificare⁴ e dall'altro alla volontà di ottenere dei modi in uscita dagli OPA il più possibile identici, vista la necessità di miscelarli per generare un unico impulso.

Un fascio infrarosso a 800 nm con impulsi da di 115 μJ di energia è raddoppiato in frequenza in un BBO (tipo I, spessore 1 mm) per pompare l'OPA. L'efficienza del processo di SHG è tale da produrre circa 25 μJ alla lunghezza d'onda di 400 nm. Ancora una volta il segnale amplificato può essere ottimizzato regolando l'inclinazione della lente di focalizzazione ($f = 300$ mm) della pompa sul cristallo, per la sovrapposizione spaziale dei fasci coinvolti nel processo, e la distanza della medesima dal BBO, grazie ad una piattaforma di movimentazione micrometrica; la sovrapposizione temporale è controllata dalla linea di ritardo DELAY2. Il bianco d'altro canto è focalizzato sul BBO di mediante uno specchio concavo di focale $f = -250$ mm, per gli stessi motivi descritti nel paragrafo 5.1. Il cristallo utilizzato per realizzare l'OPA è un BBO di tipo I, spessore 1 mm e il cui asse ottico è tagliato ad un angolo $\theta = 29.2^\circ$. Si noti che la massima banda di amplificazione di un OPA degenerare come quello appena descritto si raggiunge operando in una configurazione collineare. Tale configurazione, tuttavia, introduce la complicazione del filtraggio del segnale dall'idler, che si muovono ormai lungo la stessa direzione; per aggirare il problema si è scelto allora una geometria non-collineare, prestando molta cura alla realizzazione di un angolo α tra pompa e segnale che fosse il più piccolo possibile, per non compromettere contemporaneamente la larghezza della banda di amplificazione. Si riporta infine in figura 5.5 un tipico spettro della luce amplificata dall'OPA. La potenza misurata del segnale alla lunghezza d'onda $\lambda = 800$ nm è di 1.25 mW.

5.3 Compressione mediante Chirped Mirrors

A causa della propagazione in aria e attraverso gli elementi ottici del sistema, il fascio bianco generato a valle dell'OPA infrarosso e amplificato dai successivi OPA risulta disperso. Tale dispersione comporta un aumento della sua durata temporale rispetto al valore minimo che gli compete per via dell'estensione della sua banda spettrale (durata *Transform Limited*). A conferma di quanto appena affermato, si mostrano nelle figure 5.6 e 5.7 rispettivamente il *ritardo di gruppo*⁵ (GD) e la *dispersione del ritardo di gruppo*⁶ (GDD) acquisiti dal

⁴Che richiede, in entrambi i casi, lo stesso tipo di configurazione dell'OPA, e può essere selezionata semplicemente cambiando l'angolo di phase matching tra pompa e cristallo e quello di non-collinearità tra pompa e segnale.

⁵ $GD = \partial\varphi/\partial\omega$, $\varphi(\omega)$ fase spettrale dell'impulso.

⁶ $GDD = \partial(GD)/\partial\omega$.

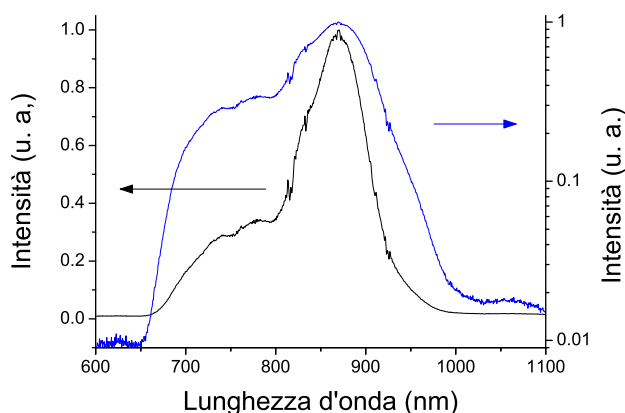


Figura 5.5: Spettro del segnale amplificato dall'OPA degenera in scala lineare (nero) e semilogaritmica (blu); si noti la presenza di luce nella regione compresa tra 700 nm e 750 nm, in comune con lo spettro prodotto dall'OPA visibile; l'intensità è espressa in unità arbitrarie.

fascio bianco dopo aver attraversato uno spessore di YAG di 4 mm (o di zaffiro da 3 mm), uno di BBO da 1 mm e 3 m di aria, che coprono il percorso compiuto dalla generazione nello YAG fino al beam splitter per la sincronizzazione degli OPA (cfr. paragrafo 5.4). Per sintetizzare dunque un impulso della durata di pochi cicli ottici, occorre compensare l'effetto della dispersione sugli impulsi generati dall'amplificatore non-collineare nel visibile e da quello degenera nell'infrarosso, prima di ricombinarli. La soluzione adottata è stata quella di comprimere gli impulsi mediante *chirped mirrors*. I chirped mirrors sono specchi multidielettrici costituiti da un'alternanza di strati ad alto e basso indice di rifrazione, basati sul principio di *alta riflettività* che si ottiene ingegnerizzando lo spessore di ogni strato: realizzando infatti dei livelli profondi $\lambda/(4n_i)$, con $i = h, l$ ($h =$ alto, $l =$ basso), è possibile massimizzare l'interferenza costruttiva delle repliche, riflesse dalle interfacce tra strati adiacenti, di un fascio a lunghezza d'onda λ che incide sul dispositivo. Se si immagina ora di depositare uno sull'altro un'alternanza di strati a spessore variabile, si ottiene uno specchio in grado di riflettere le diverse componenti spettrali di un impulso in ingresso a profondità diverse. In particolare, poiché nella regione del visibile e del vicino infrarosso un impulso subisce dispersione normale⁷ propagandosi in un mezzo materiale, si può pensare di realizzare un dispositivo in cui lo spessore degli strati aumenti con la profondità, in modo che le com-

⁷Cioè le componenti verso la coda rossa dello spettro percepiscono un indice di rifrazione minore di quelle verso il blu, che si muovono perciò più lentamente.

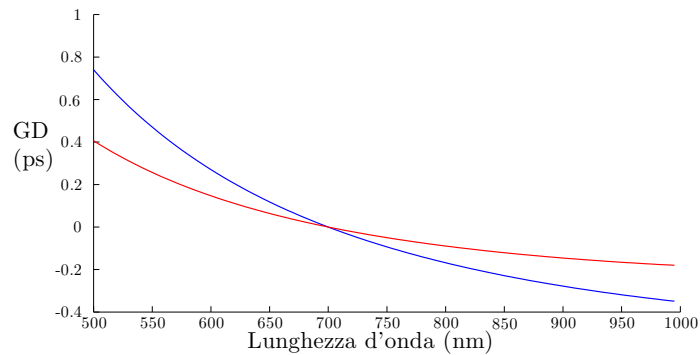


Figura 5.6: Ritardo di gruppo accumulato dalle diverse componenti spettrali dell'impulso bianco generato in una lamina di YAG da 4 mm (blu) e in una di zaffiro da 3 mm (rosso), dopo l'amplificazione negli OPA e un cammino in aria pari a 3 m; si è assunto in entrambi i casi un ritardo nullo per la componente a 700 nm, per poter apprezzare meglio il ritardo relativo fra le diverse lunghezze d'onda.

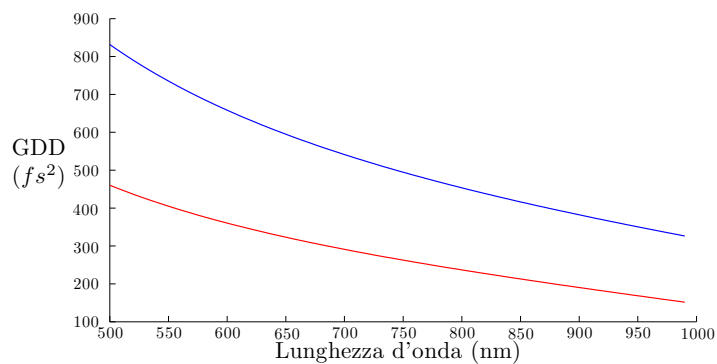


Figura 5.7: Dispersione del ritardo di gruppo di figura 5.6; si è indicata di nuovo in blu la GDD del bianco generato nello YAG e in rosso quella del bianco generato nello zaffiro.

ponenti dell'impulso incidente a lunghezza d'onda maggiore vengano riflesse più in profondità e percorrano così più strada nel chirped mirror di quelle a frequenza più grande: in tal modo la dispersione acquisita dall'impulso risulta compensata, e l'impulso compresso. A tale scopo si utilizza tipicamente una coppia di specchi chirped, sfruttando più rimbalzi del fascio da uno specchio all'altro per una compressione più efficace. I chirped mirrors garantiscono alcuni vantaggi, come compattezza, riproducibilità della misura e insensibilità alla dispersione introdotta dall'allineamento del fascio incidente (rispetto ad esempio ad una coppia di prismi). Tuttavia, essendo la lunghezza d'onda un parametro di progetto degli specchi, essi sono in grado di operare correttamente solo in una ben determinata regione spettrale. Al fine di comprimere gli impulsi prodotti dagli OPA dei paragrafi 5.1 e 5.2 si sono dovute impiegare due diverse coppie di specchi: i *double chirped mirrors* (DCM) [23] per comprimere l'impulso visibile, il cui schema è rappresentato in figura 5.8, e gli *infrared chirped mirrors* (IR-CM) per comprimere quello infrarosso. Si è veri-

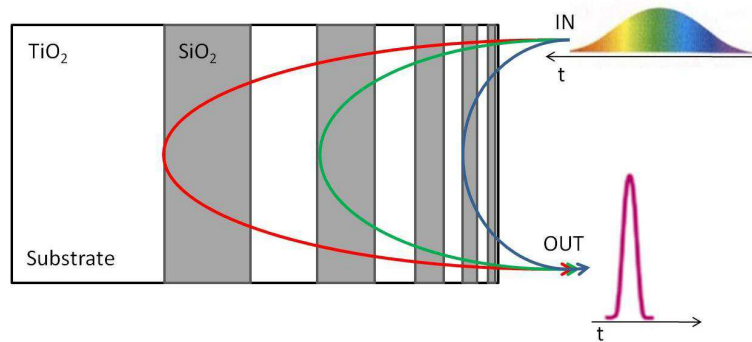


Figura 5.8: Schema di un chirped mirror per la compressione di un impulso visibile; lo specchio è costituito da un'alternanza di strati ad indice basso (SiO_2 ; $n_l = 1.5384$, in corrispondenza di $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$) e alto (TiO_2 ; $n_h = 2.4884$, in corrispondenza di $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$) di spessore variabile, per ritardare maggiormente le componenti spettrali dell'impulso incidente a lunghezza d'onda maggiore.

ficato che per compensare la dispersione degli impulsi amplificati innescando la SCG nello zaffiro, occorrono 14 rimbalzi sui DCM e 4 sugli IR-CM; sulla base poi del ritardo di gruppo rappresentato in figura 5.6, si è dedotta la necessità di aumentare il numero di rimbalzi sui DCM da 14 a 22 e quello sugli IR-CM da 4 a 8, per comprimere gli impulsi ottenuti a partire da un bianco prodotto nello YAG.

5.4 Sincronizzazione degli OPA

Il meccanismo di sintesi dell'impulso di pochi cicli ottici prevede la miscelazione dei segnali amplificati dagli OPA visibile e degenere descritti in precedenza nel capitolo. Avendo infatti essi spettri adiacenti, la loro sovrapposizione permette di coprire con continuità l'intervallo da 500 nm a 1000 nm (figura 5.9), che rappresentano gli estremi delle bande di amplificazione dei singoli OPA. Una tale estensione spettrale (pari a un'ottava) è sufficiente a garantire una durata⁸ TL dell'impulso di circa 3.3 fs; assumendo la lunghezza d'onda portante $\lambda_0 = 700$ nm, ottenuta pesando la coordinata spettrale sui corrispondenti valori di intensità del fascio, e confrontando la durata TL dell'impulso con quella del ciclo ottico della portante, $T_{700nm} = \lambda_0/c = 2.3$ fs, si deduce che l'impulso sintetizzato consta idealmente di 1 solo ciclo ottico.

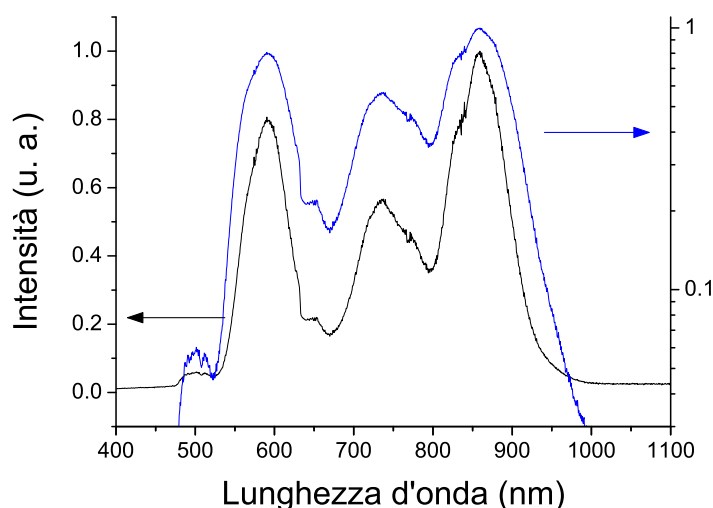


Figura 5.9: Spettro dell'impulso sintetizzato a partire dai segnali amplificati dall'OPA visibile e da quello degenere, in scala lineare (nero) e semilogaritmica (blu); lo spettro si estende per circa un'ottava, da 500 nm a 1000 nm; l'intensità è espressa in unità arbitrarie.

Nella pratica non è sufficiente sovrapporre i segnali dei due amplificatori per generare un unico impulso più corto, a causa di eventuali instabilità sulla lunghezza dei cammini percorsi, le quali si traducono in una fluttuazione del ritardo con cui i fasci si ricombinano. Al fine di rimuovere tale fluttuazione, è necessario progettare un sistema di sincronizzazione sufficientemente rapido da rivelarla e compensarla in tempo reale. L'apparato sperimentale impiegato,

⁸Calcolata nel caso ideale di spettro costante su un range di frequenze $\Delta\nu \cong 270$ THz e stimando la durata come piena larghezza a metà altezza (FWHM) in intensità della sua trasformata di Fourier.

assieme alla parte dedicata alla compressione degli impulsi già descritta nel paragrafo precedente, è schematizzato in figura 5.10. Per quanto riguarda la

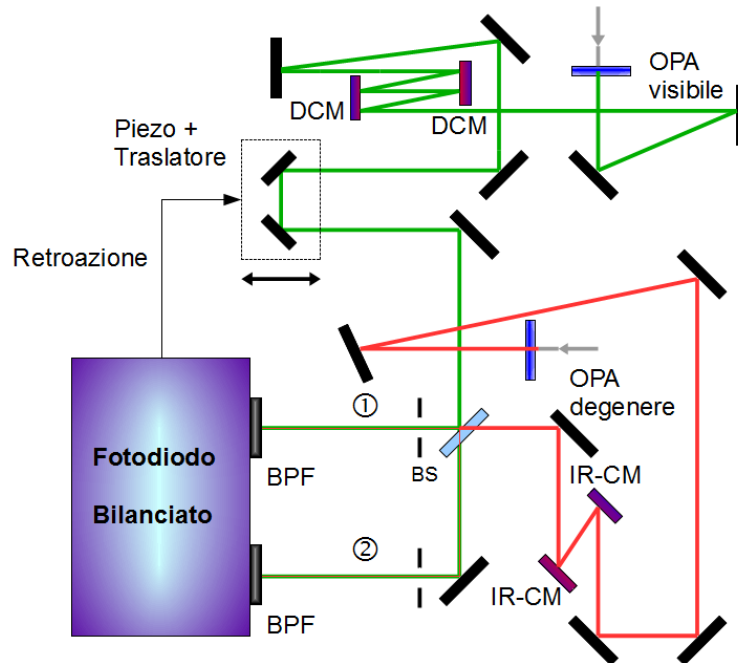


Figura 5.10: Schema del setup utilizzato per ricombinare gli impulsi amplificati dall'OPA visibile e da quello degenere; la configurazione illustrata per la compressione è quella impiegata con la lamina di zaffiro; DCM, double chirped mirrors; IR-CM, infrared chirped mirrors; BS, beam splitter; BPF, filtro passa-banda.

compensazione del ritardo, è stato impiegato un attuatore piezoelettrico montato su un traslatore che permettesse di regolare grossolanamente il ritardo fra gli impulsi manualmente. Ai fini della sua rivelazione, si è deciso di adottare una tecnica interferometrica, resa possibile dalla sovrapposizione degli spettri generati dai singoli OPA (cfr. figure 5.3 e 5.5) nel range di lunghezze d'onda intorno a 700 nm, in cui si osservano delle frange di interferenza la cui densità è funzione del ritardo tra gli impulsi. Per il principio di conservazione dell'energia, che impone alla somma dei fotoni dei segnali lungo i cammini ① e ② di essere costante in ω , le frange rivelate nei due rami risultano complementari, come mostrato in figura 5.11. Si immagina ora di registrare il valore di intensità in un certo punto ω_0 nell'istante di tempo t_0 . Una fluttuazione del ritardo nel tempo causerebbe allora la traslazione della pulsazione ω tale che $I(\omega, t) = I(\omega_0, t_0)$ e un'alterazione (uguale in modulo ma di segno opposto nei due diversi rami) dell'energia misurata nell'intorno di ω_0 . Da ciò si deduce la possibilità di rivelare le fluttuazioni del ritardo per mezzo di un opportuno fotodiode, che registri contemporaneamente i segnali di interferenza in entram-

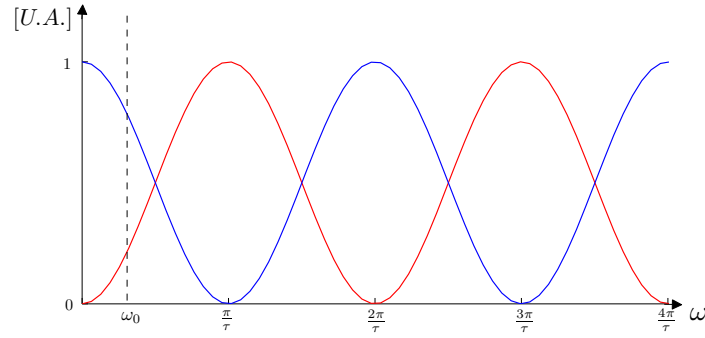


Figura 5.11: Ipotetico interferogramma rivelato nei rami ① (rosso) e ② (blu); si noti come il periodo delle frange dipende dal ritardo fra gli impulsi, qui indicato con τ ; le curve di interferenza nei due rami sono fra loro complementari come sancito dal principio di conservazione dell'energia; l'asse delle ordinate è espresso in unità arbitrarie.

bi i rami e restituisca un valore proporzionale alla loro differenza. Il segnale generato dal fotodiode è infine filtrato passa-basso, per tenere conto solo delle fluttuazioni lente, e inviato ad un controllore PID che regola la posizione del piezoelettrico. Si noti che per massimizzare la sensibilità della detection, è opportuno scegliere come punto di riferimento un flesso dell'interferogramma, dove la pendenza della curva è massima.

Di seguito si analizza quantitativamente la sensibilità della tecnica adottata. Si consideri innanzitutto la forma dei campi elettrici dei due impulsi nei due diversi rami in ingresso al fotodiode. Indicando con $E_1(\omega)$ ed $E_2(\omega)$ la rappresentazione dei campi nel dominio delle frequenze, assumendo che $|E_1(\omega)| = |E_2(\omega)| = E_0(\omega)$ e indicando con τ il ritardo con cui essi si ricombinano sul beam splitter BS, risulta nel ramo ①:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 e^{i(\omega t)} \\ E_2 = E_0 e^{i[\omega(t-\tau)+\pi]} \end{cases} \quad (5.1)$$

Nel ramo ② invece:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 e^{i(\omega t)} \\ E_2 = E_0 e^{i[\omega(t-\tau)]} \end{cases} \quad (5.2)$$

In riferimento al setup per la sintesi descritto finora, il campo E_1 rappresenta l'impulso infrarosso, mentre E_2 quello visibile. In virtù delle leggi della riflessione di Fresnel, il campo elettrico del fascio visibile acquisisce uno sfasamento di π dopo essere riflesso dal beam splitter, poiché proviene dal mezzo (aria) con indice di rifrazione più basso. Valutando quindi l'interferenza prodotta dalla sovrapposizione dei campi nel ramo ① si ottiene:

$$S_1(\omega) \propto |E_1 + E_2|^2 = |E_0|^2 \left| 1 + e^{i(-\omega\tau+\pi)} \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= 2|E_0|^2 (1 + \cos(-\omega\tau + \pi)) \\
&= 2|E_0|^2 (1 - \cos(\omega\tau)) \tag{5.3}
\end{aligned}$$

con $S_1(\omega)$ densità spettrale di energia. Il significato dell'equazione 5.3 è illustrato in figura 5.12. È interessante osservare che la stima dell'interferenza nel

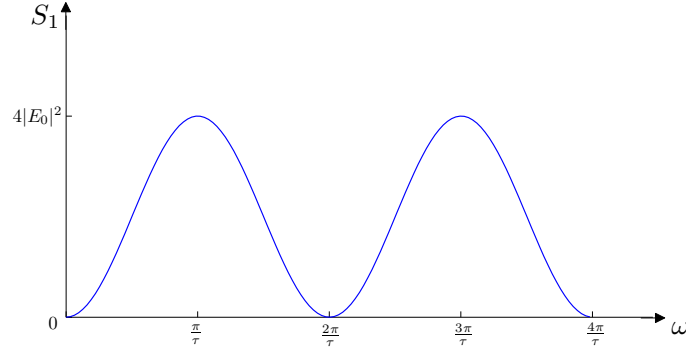


Figura 5.12: Figura di interferenza generata dalla sovrapposizione dei campi visibile e infrarosso nel ramo ① al variare della pulsazione ω ; si noti che la periodicità della funzione dipende dal ritardo di gruppo τ fra gli impulsi.

ramo contrassegnato dall'indice ② porterebbe ad un risultato del tutto analogo a quello espresso nella relazione 5.3, a parte un fattore di fase di π . L'origine del suddetto sfasamento è da imputare alla diversa forma dei campi E_1 ed E_2 nel nuovo ramo⁹ (cfr. equazione 5.2). Ricordando ora quanto affermato in merito al principio di conservazione dell'energia, risulta che:

$$\frac{S_2}{4|E_0|^2} = 1 - \frac{S_1}{4|E_0|^2} \tag{5.4}$$

$$S_2(\omega) \propto |E_1 + E_2|^2 = 2|E_0|^2 (1 + \cos(\omega\tau)) \tag{5.5}$$

Le relazioni fin qui ricavate consentono di valutare lo sbilanciamento del segnale sul fotodiode provocato da una fluttuazione $\Delta\tau$ del ritardo fra gli impulsi. Il segnale differenza D tra le energie nei due rami separati dal beam splitter BS, nell'intervallo spettrale¹⁰ $2\Delta\omega$ e attorno alla pulsazione di centro banda $\omega_0 = \pi/(2\tau)$, si può scrivere quindi come:

$$D = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \frac{\tilde{S}_2}{4|E_0|^2} d\omega - \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \frac{\tilde{S}_1}{4|E_0|^2} d\omega$$

⁹Questa volta, infatti, né il campo E_2 , trasmesso, né E_1 , riflesso ma partendo dal mezzo (beam splitter) con indice di rifrazione maggiore, vengono sfasati di π nel passaggio attraverso BS.

¹⁰Selezionato dai filtri BPF.

$$= 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \frac{\tilde{S}_2}{4|E_0|^2} d\omega - 2\Delta\omega \quad (5.6)$$

in virtù di 5.4. I termini \tilde{S}_1 e \tilde{S}_2 si ottengono sostituendo rispettivamente in

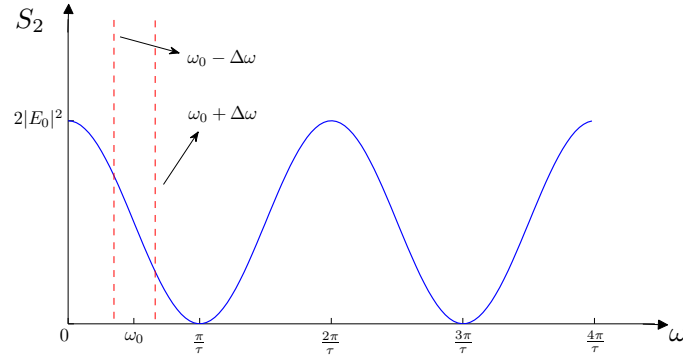


Figura 5.13: Figura di interferenza generata dalla sovrapposizione dei campi visibile e infrarosso nel ramo ① al variare della pulsazione ω ; $\omega_0 = \pi/(2\tau)$, flesso della funzione S_2 .

S_1 e S_2 la quantità $\tau + \Delta\tau$ al posto di τ , per tenere conto della fluttuazione del ritardo di gruppo:

$$\begin{cases} \tilde{S}_1 \propto 2|E_0|^2 (1 - \cos [\omega(\tau + \Delta\tau)]) \\ \tilde{S}_2 \propto 2|E_0|^2 (1 + \cos [\omega(\tau + \Delta\tau)]) \end{cases} \quad (5.7)$$

Per esplicitare il termine D occorre dunque risolvere:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \tilde{S}_2 d\omega &= \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} 2|E_0|^2 (1 + \cos [\omega(\tau + \Delta\tau)]) d\omega \\ &= 2|E_0|^2 2\Delta\omega + \frac{2|E_0|^2}{\tau + \Delta\tau} [\sin [\omega(\tau + \Delta\tau)]]_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \\ &= 4|E_0|^2 \Delta\omega - \frac{4|E_0|^2}{\tau + \Delta\tau} \sin [\Delta\omega(\tau + \Delta\tau)] \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta\tau}{\tau} \right) \end{aligned}$$

Da cui è possibile riscrivere l'equazione 5.6 nella forma:

$$D_{delay} = -2\Delta\omega \frac{\sin [\Delta\omega(\tau + \Delta\tau)]}{\Delta\omega(\tau + \Delta\tau)} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta\tau}{\tau} \right) \quad (5.8)$$

Si noti che l'equazione 5.8 rappresenta lo sbilanciamento effettivo della risposta del fotodiodo causato da una fluttuazione sul ritardo pari a $\Delta\tau$: tale sbilanciamento consiste infatti nella differenza fra il segnale D_{delay} prodotto dal fotodiodo in seguito alla fluttuazione $\Delta\tau$ e quello $\bar{D}_{delay}(\Delta\tau = 0)$ registrato in

assenza di instabilità sul ritardo; avendo cura di bilanciare¹¹ la sua risposta in modo che $\bar{D}_{delay}(\Delta\tau = 0) = 0$, risulta $D_{delay} - \bar{D}_{delay}(\Delta\tau = 0) = D_{delay}$. Il risultato espresso da 5.8 rivela un andamento oscillatorio della risposta al fotodiodo, al variare del ritardo, modulato da un $\text{sinc}[\Delta\omega(\tau + \Delta\tau)]$. Il significato di tale andamento può essere interpretato in funzione del parametro $\Delta\omega$:

- la quantità $\Delta\omega$, pari a metà della regione spettrale campionata dal filtro, è tale per cui al diminuire del suo valore gli zeri della funzione $\text{sinc}(\Delta\omega\tau)$, supposto $\Delta\tau = 0$, si allontanano dal picco centrale lungo l'asse dei ritardi; ciò significa che al crescere della selettività del filtro, la risposta

$$D_{delay} \longrightarrow -2\Delta\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta\tau}{\tau}\right)$$

nell'intorno di $\tau = 0$;

- esistono inoltre particolari valori di $\Delta\omega$ in grado di annullare completamente la sensibilità del sistema di misura

$$\Delta\omega_0 = n \frac{\pi}{\tau}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$ e assumendo di nuovo $\Delta\tau = 0$; tale valori rappresentano gli zeri della funzione $\text{sinc}(\Delta\omega\tau)$ e corrispondono ad una banda di filtraggio $2\Delta\omega$ pari ad un multiplo intero del periodo di $S_2(\omega)$.

Nella trattazione fin qui svolta si è implicitamente assunto che una qualunque variazione del segnale restituito dal fotodiodo sia causata da una fluttuazione del ritardo di gruppo τ . In realtà anche un altro termine può concorrere ad un'oscillazione di tale segnale, falsando così il risultato della misura: si tratta dell'eventuale fluttuazione della fase relativa tra le portanti degli impulsi amplificati dai due OPA. Il risultato espresso dall'equazione 5.6 è stato ricavato ipotizzando nulla la fase relativa tra i due fasci e trascurabile la sua fluttuazione. Di seguito si vuole valutare l'entità dell'effetto prodotto da una fluttuazione di fase $\Delta\varphi$ (dovuta ad esempio ad un'instabilità dei processi di amplificazione), al fine di confermare la bontà del meccanismo di sincronizzazione adottato¹². A tale scopo è necessario riformulare alcune delle equazioni

¹¹A tale scopo è possibile preparare il sistema in modo che il ritardo fra gli impulsi da sintetizzare sia sufficientemente grande da garantire una densità spettrale delle frange oltre le capacità di risoluzione del fotodiodo, che rivelerebbe allora il valore medio dell'interferenza; a questo punto basterebbe regolare l'intensità in uno dei due rami che portano all'ingresso del fotorivelatore mediante un attenuatore, affinché la risposta totale, data dalla differenza dei segnali nei due rami, sia nulla.

¹²Qualora infatti la variazione del segnale sul fotodiodo prodotta da una fluttuazione di fase fosse confrontabile o superiore a quella innescata da un'oscillazione del ritardo, l'apparato di sincronizzazione impiegato risulterebbe non idoneo a mantenere il ritardo costante nel tempo.

ricavate in precedenza, avendo comunque in mente l'approccio già sviluppato all'analisi della risposta del fotodiode.

$$\begin{cases} E_1 &= E_0 e^{i(\omega t)} \\ E_2 &= E_0 e^{i[\omega(t-\tau)+\Delta\varphi]} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\tilde{S}_2 \propto 2|E_0|^2 [1 + \cos(\omega\tau - \Delta\varphi)] \quad (5.10)$$

che rappresentano rispettivamente la nuova forma dei campi nel ramo ② e la densità spettrale di energia dovuta alla loro interazione. Il termine D è invariato rispetto a quanto sancito dall'equazione 5.6. Per quanto riguarda invece:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \tilde{S}_2 d\omega &= \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} 2|E_0|^2 [1 + \cos(\omega\tau - \Delta\varphi)] d\omega \\ &= 2|E_0|^2 2\Delta\omega + \frac{2|E_0|^2}{\tau} [\sin(\omega\tau - \Delta\varphi)]_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \\ &= 4|E_0|^2 \Delta\omega - \frac{4|E_0|^2}{\tau} \sin(\Delta\omega\tau) \sin(\Delta\varphi) \end{aligned}$$

Da cui:

$$D_{phase} = \frac{2}{\tau} \sin(\Delta\omega\tau) \sin(\Delta\varphi) \quad (5.11)$$

Un'analisi dell'equazione 5.11 al variare di $\Delta\varphi$ e $\Delta\omega$ mostra che:

- il fotodiode risulta bilanciato anche nei confronti delle fluttuazioni di fase

$$D_{phase}(\Delta\varphi = 0) = 0 ;$$

- anche in questo caso esistono valori di $\Delta\omega$ che sopprimono la sensibilità del sistema

$$\Delta\omega_0 = m \frac{\pi}{\tau}$$

con $m = 0, 1, 2, \dots$; come prima ciò significa disporre di una banda di filtraggio $2\Delta\omega$ multipla del periodo di $S_2(\omega)$;

- a differenza invece del caso precedente, la capacità dell'apparato di rivelare fluttuazioni di fase è massima in corrispondenza di particolari valori di $\Delta\omega$

$$\Delta\omega_{max} = \frac{\pi}{2\tau} (2m + 1)$$

con $m = 0, 1, 2, \dots$; tali valori corrispondono questa volta ad una banda $2\Delta\omega$ multipla dispari di mezzo periodo di oscillazione di $S_2(\omega)$.

Dal confronto delle analisi di D_{delay} e D_{phase} scaturisce un'importante osservazione: stringendo opportunamente l'intervallo spettrale di rilevazione (cioè la banda passante del filtro) è possibile massimizzare la sensibilità del sistema nei confronti di fluttuazioni del ritardo di gruppo, contemporaneamente aumentando la sua reiezione alle fluttuazioni di fase (infatti $\Delta\omega \rightarrow 0 \Rightarrow D_{phase} \rightarrow 0$). Dunque è possibile, in teoria, far tendere le prestazioni del sistema di sincronizzazione proposto al caso ideale in cui il segnale misurato dal fotodiodo rivela unicamente la quantità $\Delta\tau$, che si vuole compensare col piezoelettrico.

Di seguito si riporta un tipico interferogramma raccolto a retroazione spenta (figura 5.14), con il quale si vogliono mostrare le potenzialità della tecnica interferometrica di rivelazione del ritardo. In particolare, le lente fluttuazioni

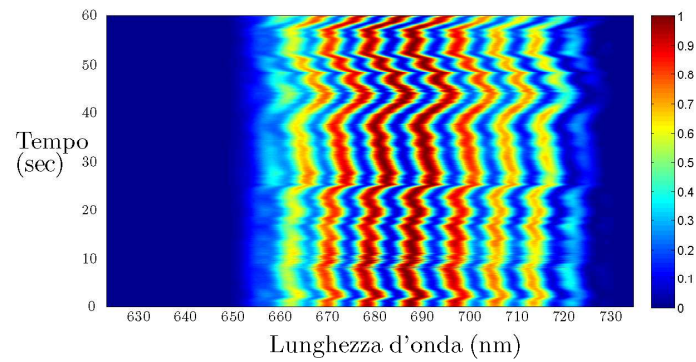


Figura 5.14: Frange di interferenza prodotte dall'interazione dell'impulso visibile con quello infrarosso, nel range di lunghezze d'onda in cui i due spettri si sovrappongono; la traccia è stata raccolta su un intervallo temporale di 60 secondi.

osservate, sulla scala temporale dei secondi, confermano la capacità del sistema di inseguire efficacemente le variazioni del ritardo e garantiscono la possibilità di compensarle. Da uno studio delle frange mediante analisi di Fourier (cfr. appendice B) si è poi potuto determinare l'entità della fluttuazione del ritardo di gruppo, pari a $\Delta\tau = 1.15$ fs. Prima di procedere è interessante confrontare il risultato appena descritto con quello ottenuto nel capitolo 4. Le frange di figura 5.14 manifestano una buona stabilità su un intervallo temporale ben maggiore di quello osservato con l'interferometro f-2f. Ciò sottolinea lo scarso ruolo assunto dalle fluttuazioni di lunghezza dei cammini ottici¹³ ai fini della stabilità dell'interferogramma prodotto: dunque la possibilità di migliorare le prestazioni del sistema di stabilizzazione della CEP è vincolata alla necessità di disporre di segnali intrinsecamente più stabili (ad esempio generati con effetti diversi dalla SCG).

¹³L'interferogramma di figura 5.14 è prodotto dall'interazione di due repliche di uno stesso impulso le quali percorrono una distanza di qualche metro prima di ricombinarsi; nel caso invece dell'interferogramma di figura 4.14 la distanza percorsa è dell'ordine dei centimetri.

Allo stato attuale non si dispone ancora di misure di interferenza a retroazione attiva. È comunque possibile anticipare la necessità di implementare una diversa tecnica di analisi numerica per ricavare la fluttuazione del ritardo ad anello chiuso, dal momento che la FTSI mostra dei limiti di efficienza al tendere di τ a zero. Una possibilità in tal senso consiste nel dedurre l'oscillazione di τ in funzione della fluttuazione della posizione di un flesso dell'interferogramma.

Appendice A

Birifrangenza

Nella discussione degli effetti non-lineari del secondo ordine è stato messo più volte in evidenza come l'efficienza di tali processi sia fortemente influenzata dal wave vector mismatch $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$. Di seguito si vuole pertanto investigare il modo in cui sia possibile modificare il suo valore, per raggiungere al limite la condizione di phase matching $\Delta k = 0$. A tale scopo è utile innanzitutto riscrivere l'espressione del wave vector mismatch nella forma:

$$\omega_3 n(\omega_3) = \omega_2 n(\omega_2) + \omega_1 n(\omega_1) \quad (\text{A.1})$$

ottenuta ricordando la relazione 1.23. Immaginando di far propagare le onde coinvolte nel processo all'interno di un materiale *isotropo*, cioè che manifesta le stesse proprietà ottiche lungo ogni direzione, non è detto che sia possibile soddisfare il phase matching per una qualunque terna di pulsazioni, a causa della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza. Per risolvere il problema è allora necessario introdurre un nuovo grado di libertà per l'equazione A.1. A tale scopo è utile impiegare un materiale che, al contrario dei precedenti, risponda in modo diverso all'onda incidente, a seconda della sua direzione di propagazione: un materiale del genere viene detto *anisotropo* [5]. Appartengono alla nuova categoria di materiali la maggior parte dei cristalli e alcune materie plastiche artificiali costituite da molecole lunghe, orientate lungo la stessa direzione.

Si prenda ora in considerazione un cristallo anisotropo. Studiandone il comportamento a fronte di un campo elettrico in ingresso \mathbf{E} , si evince che al suo interno i vettori \mathbf{P} , \mathbf{E} e \mathbf{D} non sono paralleli tra loro, come accade invece per un materiale isotropo. La stessa conclusione può essere dedotta dall'osservazione che nel cristallo anisotropo la suscettività elettrica χ ha l'aspetto di un tensore simmetrico. Adottando però un opportuno sistema di assi cartesiani, detti *assi*

crystallografici, è possibile diagonalizzare la chi χ , per ottenere:

$$\begin{cases} P_x = \varepsilon_0 \chi_x E_x \\ P_y = \varepsilon_0 \chi_y E_y \\ P_z = \varepsilon_0 \chi_z E_z \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Il nuovo sistema di riferimento presenta quindi l'enorme vantaggio di semplificare la descrizione del problema. Al fine di studiare le proprietà ottiche del cristallo, si introduce una funzione detta *ellissoide degli indici di rifrazione* e definita come segue:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (\text{A.3})$$

dove x, y e z sono coordinate nel sistema degli assi cristallografici mentre gli indici di rifrazione percepiti lungo i diversi assi rappresentano i semiassi dell'ellissoide. A seconda della simmetria dell'ellissoide è possibile distinguere fra tre categorie di cristalli:

cristalli isotropi dove $n_x = n_y = n_z = n$; il materiale non manifesta alcuna anisotropia e l'ellissoide degenera ad una sfera di raggio n ; la suscettività elettrica è descrivibile mediante una grandezza scalare;

cristalli uniassici in cui $n_x = n_y \neq n_z$; l'ellissoide degli indici è un ellissoide di rotazione attorno all'asse caratterizzato da n_z , anche detto asse ottico del sistema;

cristalli biassici in cui $n_x \neq n_y \neq n_z$; l'ellissoide non ha particolari simmetrie.

Dal punto di vista delle applicazioni risultano particolarmente interessanti i cristalli uniassici, per i quali si è soliti indicare col simbolo n_e l'*indice di rifrazione straordinario* associato all'asse ottico, con n_o quello *ordinario* associato ad un qualsiasi asse ortogonale a quello ottico. Si usa inoltre distinguere fra *cristalli uniassici negativi*, nei quali $n_e < n_o$ e il cui ellissoide ha una forma schiacciata nella direzione dell'asse ottico, e *cristalli uniassici positivi*, nei quali al contrario $n_e > n_o$ e l'ellissoide è allungato in direzione dell'asse ottico.

Per capire meglio il funzionamento di un cristallo uniassico si immagini di incidere su di esso con un'onda monocromatica a pulsazione ω_0 per generare la seconda armonica. Si supponga inoltre che le pulsazioni ω_0 e $2\omega_0$ cadano nella regione spettrale del visibile, a *dispersione normale*¹. La condizione di phase matching da soddisfare in questo caso è:

$$n(2\omega_0) = n(\omega_0) \quad (\text{A.4})$$

¹ $\frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} > 0$.

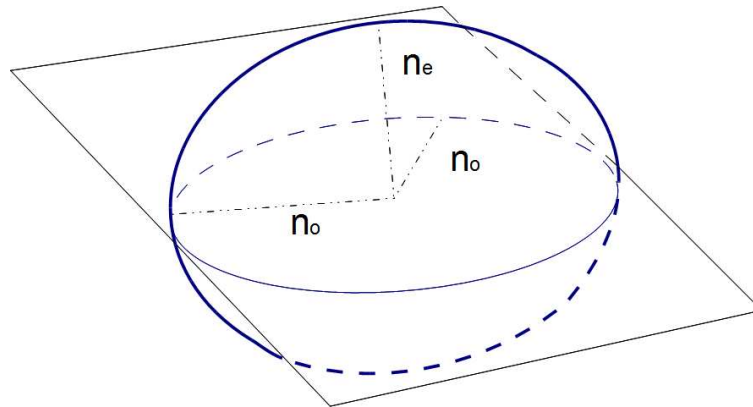


Figura A.1: Ellissoide degli indici di rifrazione di un cristallo uniassico negativo, con $n_e < n_o$.

ottenuta da A.1 ponendo $\omega_2 = \omega_1 = \omega_0$ e $\omega_3 = 2\omega_0$. Evidentemente non c'è modo di verificare A.4 facendo propagare l'onda in un mezzo isotropo, in cui $n(2\omega_0) > n(\omega)$. Ben diversa però è la situazione in un cristallo uniassico, ad esempio negativo. Nel caso in esame infatti, l'espressione assunta dall'ellissoide degli indici è del tipo:

$$\frac{x^2 + y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \tag{A.5}$$

In particolare la sezione dell'ellissoide sul piano π contenente l'asse ottico e il vettore d'onda \mathbf{k} dell'onda incidente consiste in un'ellisse di semiassi n_o e n_e , rappresentato in figura A.2. Si è assunto inoltre nell'illustrazione che il campo

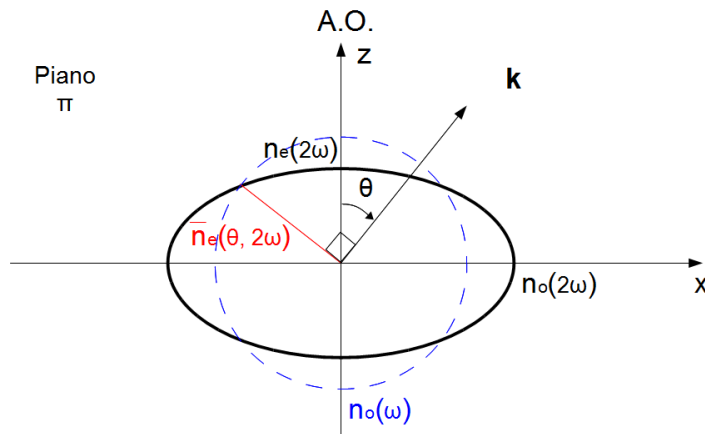


Figura A.2: Sezione sul piano π dell'ellissoide degli indici di rifrazione di un cristallo uniassico negativo; all'angolo θ di phase matching vale $n_o(\omega) = \bar{n}_e(\theta, 2\omega)$.

elettrico dell'onda in ingresso sia polarizzato lungo la direzione ortogonale a

π (caratterizzata anch'essa da un indice di rifrazione ordinario n_o), mentre il campo di seconda armonica sia polarizzato sul piano nella direzione ortogonale a \mathbf{k} . È facile osservare a questo punto che l'indice di rifrazione sperimentato dalla seconda armonica è funzione dell'angolo θ formato dalla direzione di propagazione con l'asse ottico:

$\theta = 0^\circ$ l'onda è polarizzata lungo uno dei due assi ordinari dell'ellissoide, perciò
 $n \equiv n_o$;

$\theta \neq 0^\circ$ l'onda percepisce un indice di rifrazione $n_e < \bar{n}_e(\theta) < n_o$ (al limite se $\theta = 90^\circ$ e il campo elettrico è polarizzato lungo l'asse ottico $\bar{n}_e(\theta) \equiv n_e$).

Alla luce dell'ultima affermazione, si potrebbe pensare di ottenere phase matching selezionando l'angolo θ , e quindi l'indice di rifrazione $\bar{n}_e(\theta)$ percepito dalla seconda armonica, fra la direzione di propagazione dell'onda fondamentale a pulsazione ω_0 e l'asse ottico. Per procedere nel calcolo dell'angolo di phase matching è utile applicare all'ellisse di figura A.2 una rotazione di 90° attorno all'asse normale a π , in modo da sovrapporre la direzione di polarizzazione della seconda armonica sul vettore \mathbf{k} . L'operazione appena descritta restituisce il cosiddetto *ellissoide degli indici normale*, mostrato in figura A.3, la cui equazione nel piano di interesse:

$$\frac{x^2}{n_e^2} + \frac{z^2}{n_o^2} = 1 \quad (\text{A.6})$$

Sapendo dunque che:

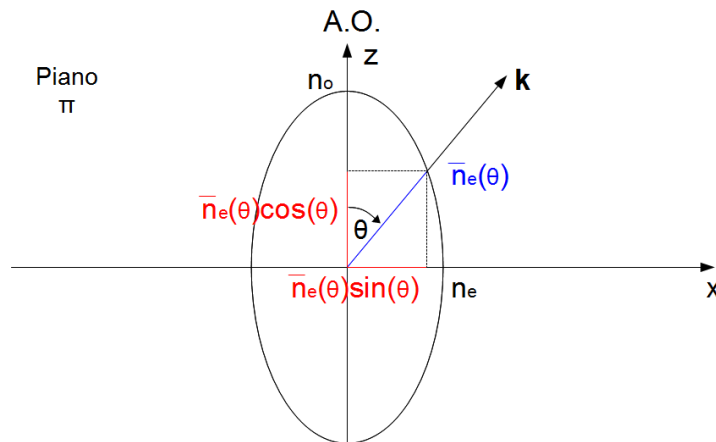


Figura A.3: Sezione sul piano π dell'ellissoide degli indici normale per un cristallo uniassico negativo.

- per soddisfare la condizione di phase matching deve risultare $\bar{n}_e(\theta, 2\omega_0) = n_o(\omega_0)$;
- le proiezioni di $\bar{n}_e(\theta, 2\omega_0)$ sugli assi x e z (si veda la figura A.3) sono rispettivamente $\bar{n}_e(\theta, 2\omega_0) \sin \theta$ e $\bar{n}_e(\theta, 2\omega_0) \cos \theta$.

Si può concludere che:

$$\theta = \arcsin \sqrt{\left| \frac{n_o(2\omega_0)^2 n_e(2\omega_0)^2 - n_o(\omega_0)^2 n_e(2\omega_0)^2}{n_o(\omega_0)^2 [n_o(2\omega_0)^2 - n_e(2\omega_0)^2]} \right|} \quad (\text{A.7})$$

A conclusione della breve introduzione al comportamento dei cristalli anisotropi, si vuole dare qualche informazione più dettagliata riguardo un cristallo molto spesso usato in ottica non-lineare: il *BBO* [24]. Il *Beta-borato di bario* ($\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$) è caratterizzato da una struttura cristallina trigonale e possiede una spiccata birifrangenza uniassica negativa. Tra le sue principali proprietà si annovera la scarsa sensibilità dei suoi indici di rifrazione alla temperatura. Inoltre il suo ampio range di trasmissione, da circa 200 nm a oltre 3 μm , lo rende particolarmente interessante nelle applicazioni, soprattutto per la sua trasparenza nell'ultravioletto. Il cristallo manifesta purtroppo anche un moderato comportamento igroscopico. È interessante notare che il BBO è una variante del così chiamato *α -borato di bario*, che trova invece scarso impiego in ambito ottico non-lineare per via della sua simmetria di tipo centrico. In figura A.4 sono rappresentate le relazioni di dispersione del cristallo lungo i suoi assi ordinario e straordinario.

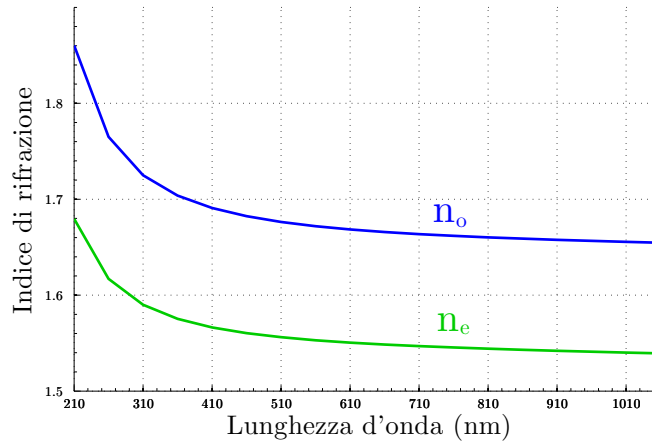


Figura A.4: Andamento dell'indice di rifrazione ordinario (blu) e straordinario (verde) in un cristallo di BBO [25, 26].

Si riporta infine in tabella A.1 la classificazione dei possibili *tipi* di phase matching in un cristallo uniassico, in funzione della direzione di polarizzazione dei diversi fasci coinvolti nel processo non-lineare di interesse.

TIPO	POLARIZZAZIONI ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)	CRISTALLO
Tipo I	ooe	negativo
Tipo II	ooe	negativo
Tipo II	oeo	negativo
Tipo I	eeo	positivo
Tipo II	eeo	positivo
Tipo II	oeo	positivo

Tabella A.1: Elenco delle condizioni di phase matching consentite per tipo di cristallo.

Appendice B

Fourier-Transform Spectral Interferometry

L'analisi delle frange di interferenza mostrate nei capitoli 4 e 5 sfrutta l'applicazione di un algoritmo matematico basato sulla trasformata di Fourier, perciò detto *Fourier-Transform Spectral Interferometry (FTSI)* [27], che consente di risalire alla differenza di fase $\Delta\varphi$ tra gli impulsi che interferiscono. Per capire meglio in che modo opera il suddetto algoritmo, si considerino due campi $E_0(t)$ ed $E(t)$ nel dominio del tempo, aventi rispettivamente trasformata di Fourier $\tilde{E}_0(\omega)$ ed $\tilde{E}(\omega)$; allora l'espressione della differenza di fase incognita risulta: $\Delta\varphi(\omega) = \arg[\tilde{E}(\omega)] - \arg[\tilde{E}_0(\omega)]$. Assumendo ora la presenza di un ritardo τ fra i due impulsi, occorre riscrivere l'espressione dei campi elettrici per ottenere:

$$\begin{cases} E_0(t) & \xrightarrow{F} \tilde{E}_0(\omega) \\ E(t - \tau) & \xrightarrow{F} \tilde{E}(\omega)e^{i(\omega\tau)} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

L'interferenza prodotta dalle onde di equazione B.1 restituisce un'intensità $I(\omega)$ del tipo:

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \left| \tilde{E}_0(\omega) + \tilde{E}(\omega)e^{i(\omega\tau)} \right|^2 \\ &= \left| \tilde{E}_0(\omega) \right|^2 + \left| \tilde{E}(\omega) \right|^2 + \tilde{E}_0^*(\omega)\tilde{E}(\omega)e^{i(\omega\tau)} + \text{c. c.} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

dove "c. c." rappresenta il complesso coniugato del termine immediatamente precedente. La somma degli ultimi due termini dell'equazione B.2 è direttamente proporzionale alla funzione $\cos[\Delta\varphi(\omega) + \omega\tau]$, che descrive il cuore dell'interferenza, causando un'oscillazione dell'intensità in frequenza. Indicando ora con $f(t)$ il prodotto di correlazione degli impulsi interagenti, si ottiene:

$$\begin{cases} f(t) &= E_0^*(-t) \otimes E(t) \\ \tilde{f}(\omega) &= \tilde{E}_0^*(\omega)\tilde{E}(\omega) = \left| \tilde{E}_0^*(\omega)\tilde{E}(\omega) \right| e^{i[\Delta\varphi(\omega)]} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

dove il simbolo “ * ” rappresenta il complesso coniugato. La relazione B.3 consente di riscrivere la B.2 nella forma:

$$I(\omega) = |E_0(\omega)|^2 + |E(\omega)|^2 + f(\omega)e^{i(\omega\tau)} + c. c. \quad (\text{B.4})$$

Si evince inoltre dall'equazione B.3 la possibilità di esprimere la differenza di fase di interesse in funzione della quantità $f(\omega)$, molto semplicemente come $\Delta\varphi(\omega) = \arg[f(\omega)]$, che giustifica la reinterpretazione dell'interferenza in termini del prodotto di correlazione dei campi coinvolti. Stando così le cose, per estrarre $\Delta\varphi$ è necessario innanzitutto estrarre il termine $f(\omega)$ dagli altri dell'equazione B.4. A tale scopo bisogna antitrasformare con Fourier l'espressione B.4:

$$F^{-1}[I(\omega)] = E_0^*(-t) \otimes E_0(t) + E^*(-t) \otimes E(t) + f(t - \tau) + f^*(-t - \tau) \quad (\text{B.5})$$

I primi due termini di B.5 rappresentano l'autocorrelazione dei singoli impulsi nel tempo e sono centrati in $t = 0$; gli altri due consistono invece nei prodotti di correlazione incrociati, centrati rispettivamente in $t = \tau$ e $t = -\tau$. Assumendo pertanto che $f(t - \tau)$ o $f(-t - \tau)$ non siano sovrapposti¹ a nessun altro termine dell'equazione B.5, si può pensare di filtrare il risultato espresso da B.5 in modo da prelevare soltanto una finestra temporale contenente, ad esempio, $f(t - \tau)$. Noto il ritardo fra gli impulsi, è possibile poi traslare la funzione ottenuta per risalire ad $f(t)$. Fatto ciò, un'ultima trasformata di Fourier per tornare al dominio delle frequenze restituisce il valore di $f(\omega)$, da cui estrarre $\Delta\varphi(\omega) = \arg[f(\omega)]$. Si noti che sarebbe addirittura possibile pensare di rimuovere completamente il contributo dei prodotti di autocorrelazione nell'equazione B.5, eseguendo due addizionali misure in frequenza, con cui rivelare alternativamente uno solo dei due fasci, avendo bloccato l'altro. Sottraendo poi il risultato delle due misure da B.4, si riuscirebbe ad isolare in frequenza il termine di interferenza vero e proprio. La variante dell'algoritmo appena esposta consentirebbe perciò di applicare un ritardo τ anche piccolo, senza inficiare la bontà della FTISI stessa.

¹Ipotesi verificata per impulsi che mostrano un andamento nel tempo non troppo strutturato, e per τ sufficientemente grande.

Bibliografia

- [1] Giulio Cerullo and Sandro De Silvestri, *Ultrafast optical parametric amplifiers*, Rev. Sci. Instr. **74**, 1, (2003).
- [2] Amnon Yariv, OPTICAL ELECTRONICS, CBS College Publishing, Third Edition, 1985.
- [3] Ashcroft Neil W. and Mermin N. David, SOLID STATE PHYSICS, Holt Rinehart and Winston, 1976.
- [4] Andrew M. Weiner, ULTRAFAST OPTICS, John Wiley & Sons, 2009.
- [5] P. Mazzoldi, M. Negro e C. Voci, FISICA, Volume II, EdiSES, Seconda Edizione, 1998.
- [6] R. Eisberg e R. Resnick, QUANTUM PHYSICS OF ATOMS, MOLECULES, SOLIDS, NUCLEI, AND PARTICLES, John Wiley & Sons, 1985.
- [7] Orazio Svelto, PRINCIPLES OF LASERS, Plenum Press, Fourth Edition, 1998.
- [8] D. Brida, C. Manzoni, G. Cirimi, M. Marangoni, S. Bonora, P. Villoresi, S. De Silvestri and G. Cerullo, *Few-optical-cycle pulses tunable from the visible to the mid-infrared by optical parametric amplifiers*, J. Opt. **12**, (2010).
- [9] Cristian Manzoni, SVILUPPO DI DUE AMPLIFICATORI OTTICI PARAMETRICI SINCRONIZZATI CON DURATA DELL'IMPULSO INFERIORE A 20 FEMTOSECONDI E ACCORDABILITÀ DAL VISIBILE AL VICINO INFRAROSSO, Tesi di Laurea specialistica in Ing. elettronica, Dipartimento di Fisica, Politecnico di Milano, Anno Accademico 2001–2002.
- [10] F. X. Kärtner, FEW-CYCLE LASER PULSE GENERATION AND ITS APPLICATIONS, Springer-Verlag, 2004.

-
- [11] Daniele Brida, IMPULSI A FEMTOSECONDI CON FASE ASSOLUTA STABILIZZATA TRAMITE GENERAZIONE DI FREQUENZA DIFFERENZA, Tesi di Laurea specialistica in Ing. Fisica, Politecnico di Milano, Anno Accademico 2005–2006.
- [12] Steven T. Cundiff, *Phase stabilization of ultrashort optical pulses*, J. Phys. D: Appl. Phys. **35**, R43–R59, (2002).
- [13] Andrius Baltuška, Takao Fuji and Takayoshi Kobayashi, *Controlling the Carrier-Envelope Phase of Ultrashort Light Pulses with Optical Parametric Amplifiers*, Phys. Rev. Lett. **88**, 13, (2002).
- [14] Cristian Manzoni, ULTRABROADBAND LIGHT PULSES: CARRIER-ENVELOPE PHASE STABILIZATION AND TIME-RESOLVED SPECTROSCOPY OF NANOSTRUCTURES, Tesi di dottorato in Fisica **XVIII Ciclo**, Dipartimento di Fisica, Politecnico di Milano, (2006).
- [15] David J. Jones, Scott A. Diddams, Jinendra K. Ranka, Andrew Stentz, Robert S. Windeler, John L. Hall and Steven T. Cundiff, *Carrier-Envelope Phase Control of Femtosecond Mode-Locked Lasers and Direct Optical Frequency Synthesis*, Science **288**, 635–639, (2000).
- [16] Steven T. Cundiff, Jun Ye and John L. Hall, *Optical frequency synthesis based on mode-locked lasers*, Rev. Sci. Instr. **72**, 10, 3749–3771, (2001).
- [17] Thomas Brabec and Ferenc Krausz, *Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics*, Rev. Mod. Phys. **72**, 2, 545–591, (2000).
- [18] Douglass Schumacher, *Controlling continuum generation*, Opt. Lett. **27**, 6, 451–453, (2002).
- [19] Milosz Pawlicki, Hazel A. Collins, Robert G. Denning and Harry L. Anderson, *Two-Photon Absorption and the Design of Two-Photon Dyes*, DOI: 10.1002/anie.200805257, (2009).
- [20] Alexander L. Gaeta, *Catastrophic Collapse of Ultrashort Pulses*, Phys. Rev. Lett. **84**, 16, 3582–3585, (2000).
- [21] A. M. Siddiqui, G. Cirimi, D. Brida, F. X. Kärtner and G. Cerullo, *Generation of <7 fs pulses at 800 nm from a blue-pumped optical parametric amplifier at degeneracy*, Opt. Lett. **34**, 22, 3592–3594, (2009).
- [22] Giulio Cerullo, Mauro Nisoli and Sandro De Silvestri, *Generation of 11 fs pulses tunable across the visible by optical parametric amplification*, Appl. Phys. Lett. **71**, 25, 3616–3618, (1997).

-
- [23] G. Cerullo, M. Nisoli, S. Stagira, S. De Silvestri, G. Tempea, K. Krausz and F. Ferencz, *Mirror-dispersion-controlled sub-10-fs optical parametric amplifier in the visible*, Opt. Lett. **24**, 1529, (1999).
- [24] D. N. Nikogosyan, *Beta Barium Borate (BBO)*, Appl. Phys. A **52**, 6, 359–368, (1991).
- [25] Dongxiang Zhang, Yufei Kong and Jing-yuan Zhang, *Optical parametric properties of 532-nm-pumped beta-bariumborate near the infrared absorption edge*, Opt. Commun. **184**, 485–491, (2000).
- [26] K. Kato, *Second-Harmonic Generation to 2048 Å in β -BaB₂O₄*, IEEE J. Quantum Electron. **QE-22**, 7, 1013–1014, (1986).
- [27] Christophe Dorrer, Nadia Belabas, Jean-Pierre Likforman and Manuel Joffre, *Spectral resolution and sampling issues in Fourier-transform spectral interferometry*, J. Opt. Soc. Am. B **17**, 10, 1795–1802, (2000).