

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni
Dipartimento di Elettronica e Informazione



Tecniche di super-risoluzione per tomografia SAR 3D in ambiente urbano.

Relatore: Prof. Andrea MONTI GUARNIERI
Correlatore: Dott. Stefano TEBALDINI

Tesi di Laurea di:
Simone MANCON, matricola 732423

Anno Accademico 2010-2011

Abstract

Tra i principali orizzonti di ricerca nell'ambito del SAR sicuramente troviamo la tomografia SAR 3D, che tenta di risolvere i target in tutte e tre le direzioni spaziali. I dati a disposizione per svolgere la tomografia 3D sono solitamente immagini SAR 2D già focalizzate, che illuminano una stessa area da angolazioni differenti, in quanto sono ottenute da differenti acquisizioni dello stesso sistema SAR. Questi sistemi sono definiti Multipass e presentano particolari problematiche dovute fondamentalmente al numero limitato dei passaggi a disposizione e alla spaziatura irregolare in direzione di elevazione. Questa tesi analizza queste problematiche e propone delle tecniche che permettano di attenuarne gli effetti negativi che ne derivano sulle immagini tomografiche. Per far questo sono state svolte analisi di prestazioni su dati sintetizzati e successivamente generate sezioni tomografiche della scena a partire da immagini SAR già focalizzate di dati reali sia di un ambiente boschivo che urbano. Le tecniche proposte essendo pensate per focalizzare i target tipici dell'ambiente urbano hanno dato buoni risultati su questi dati. Come era intuibile le tecniche proposte non sono adatte a risolvere target tipici dell'ambiente boschivo.

Indice

| | |
|--|-----------|
| Abstract | 2 |
| 1 Sistemi Radar | 8 |
| 1.1 Il Radar in 1D | 8 |
| 1.1.1 L'impulso chirp. | 9 |
| 1.1.2 Trasmettitore e ricevitore. | 11 |
| 1.1.3 Focalizzazione in range. | 12 |
| 1.2 Il Radar in 2D: Il SAR | 16 |
| 1.2.1 La Geometria del SAR | 16 |
| 1.2.2 Risoluzione in azimuth. | 18 |
| 1.2.3 Ambiguità in azimuth. | 20 |
| 1.2.4 Focalizzazione in azimuth. | 22 |
| 1.2.5 Deformazioni Prospettiche | 25 |
| 1.3 Il SAR in 3D | 27 |
| 1.3.1 I sistemi Multi-Pass. | 27 |
| 1.3.2 Coregistrazione. | 29 |
| 1.3.3 Focalizzazione in elevazione. | 29 |
| 1.4 Le caratteristiche dei target. | 31 |
| 2 Le Tecniche di inversione dei dati | 34 |
| 2.1 Discretizzazione. | 34 |
| 2.1.1 Multi-Pass SAR Imaging | 36 |
| 2.2 Beamforming | 37 |
| 2.3 Inversione ai minimi quadrati. | 40 |
| 2.3.1 Pseudoinversa | 40 |
| 2.3.2 Linear Minimum Mean Square Error - LMMSE | 41 |
| 2.4 Inversione ai minimi quadrati con regolarizzazione iterativa | 44 |
| 2.5 Iteratively Re-weighted Least Square - IRLS | 45 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Dati sintetici e prestazioni | 50 |
| 3.1 | Dimensionamento del campione | 51 |
| 3.2 | Generazione del dato sintetico | 52 |
| 3.2.1 | Scelta del campionamento in cross-range. | 55 |
| 3.2.2 | Il Rumore | 56 |
| 3.3 | Focalizzazione in cross-range | 56 |
| 3.4 | Localizzazione dei target | 71 |
| 3.4.1 | Localizzazione dei target in immagini invertite con IRLS | 71 |
| 3.4.2 | Localizzazione dei target tramite Expectation-Maximization | 71 |
| 3.5 | Prestazioni | 73 |
| 3.5.1 | Errore di localizzazione - Baseline equi-spaziati. | 73 |
| 3.5.2 | Lobi laterali. | 78 |
| 4 | Dati reali | 80 |
| 4.1 | Dati di una zona boschiva | 80 |
| 4.2 | Dati di una zona urbana | 86 |
| 4.2.1 | Deramping | 87 |
| 4.2.2 | Correzione residua della fase. | 90 |
| 4.2.3 | Risultati. | 93 |
| 4.2.4 | Duomo. | 98 |
| | Riconoscimenti | 103 |
| | Bibliografia | 104 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Impulso chirp. | 10 |
| 1.2 | Trasmettitore e ricevitore. | 11 |
| 1.3 | Radar con antenna rotante, maggiore risoluzione orizzontale e bassa risoluzione verticale. | 15 |
| 1.4 | Geometria SAR. | 17 |
| 1.5 | Risoluzione e ambiguità in azimuth. | 19 |
| 1.6 | Odografa. | 23 |
| 1.7 | Focalizzazione in azimuth. | 24 |
| 1.8 | Deformazioni prospettiche. | 25 |
| 1.9 | Impostazione problema diretto. | 28 |
| 1.10 | Formazione del target “base del palazzo”. | 32 |
| 2.1 | Matrici $\frac{1}{N}\mathbf{F}^*\mathbf{F}$. a) Caso in cui F è quadrata ($s_{max} = \frac{r_0\lambda}{4B_\perp}$), $\delta s = \rho_e$ e i baseline sono regolari. b) Caso in cui F è rettangolare ($s_{max} > \frac{r_0\lambda}{4B_\perp}$), $\delta s < \rho_e$ e i baseline sono regolari. c) Caso in cui F è rettangolare ($s_{max} \leq \frac{r_0\lambda}{4B_\perp}$), $\delta s < \rho_e$ e i baseline sono non regolari. d) Caso in cui F è rettangolare ($s_{max} \leq \frac{r_0\lambda}{4B_\perp}$), $\delta s < \rho_e$ e i baseline sono regolari. . . . | 39 |
| 3.1 | Esempi di funzioni di riflettività usate nelle simulazioni. | 53 |
| 3.2 | Tecniche classiche con baseline equi-spaziati, in presenza di un solo target. | 57 |
| | (a) Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR. | 57 |
| | (b) Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR. | 57 |
| 3.3 | Tecniche proposte in questa tesi con baseline equi-spaziati, in presenza di un solo target. | 58 |
| | (a) Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR. | 58 |
| | (b) Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR. | 58 |
| 3.4 | Tecniche classiche con baseline non equi-spaziati, in presenza di un solo target. | 59 |

| | | |
|------|--|----|
| (a) | Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR. | 59 |
| (b) | Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR. | 59 |
| 3.5 | Tecniche proposte in questa tesi con baseline non equi-spaziati, in presenza di un solo target. | 60 |
| (a) | Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR. | 60 |
| (b) | Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR. | 60 |
| 3.6 | Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR baseline equi-spaziati. Ottenute tramite algoritmo IRLS ma minimizzando differenti norme, in presenza di un solo target. | 61 |
| 3.7 | Stime della funzione di riflettività, con 10 dB di SNR baseline equi-spaziati. Le tecniche rilevano due target anche se ne è stato generato uno solo. | 62 |
| 3.8 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad due volte la risoluzione del Beamforming. Tecniche classiche con baseline non equi-spaziati. | 63 |
| (a) | 50 dB di SNR. | 63 |
| (b) | 0 dB di SNR | 63 |
| 3.9 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad due volte la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0) con baseline non equi-spaziati. | 64 |
| (a) | 50 dB di SNR. | 64 |
| (b) | 0 dB di SNR | 64 |
| 3.10 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad due volte la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0.5) con baseline non equi-spaziati. | 65 |
| (a) | 50 dB di SNR. | 65 |
| (b) | 0 dB di SNR | 65 |
| 3.11 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad una volta la risoluzione del Beamforming. Tecniche classiche con baseline non equi-spaziati. | 66 |
| (a) | 50 dB di SNR. | 66 |
| (b) | 0 dB di SNR | 66 |
| 3.12 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad una volta la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0) con baseline non equi-spaziati. | 67 |
| (a) | 50 dB di SNR. | 67 |
| (b) | 0 dB di SNR | 67 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.13 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad una volta la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0.5) con baseline non equi-spaziati. | 68 |
| | (a) 50 dB di SNR. | 68 |
| | (b) 0 dB di SNR | 68 |
| 3.14 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari alla metà della risoluzione del Beamforming. Tecniche classiche con baseline non equi-spaziati. | 69 |
| | (a) 50 dB di SNR. | 69 |
| | (b) 0 dB di SNR | 69 |
| 3.15 | Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari alla metà della risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi con baseline non equi-spaziati. | 70 |
| | (a) 50 dB di SNR. | 70 |
| | (b) 0 dB di SNR | 70 |
| 3.16 | Prestazioni delle diverse tecniche nella localizzazione di un target per baseline disposti regolarmente. | 75 |
| 3.17 | Prestazioni delle diverse tecniche nella localizzazione di due target per baseline disposti regolarmente. | 76 |
| | (a) 2 target disposti ad una distanza pari a metà della risoluzione del Beamforming. | 76 |
| | (b) 2 target disposti ad una distanza pari alla risoluzione del Beamforming. | 76 |
| 3.18 | Prestazioni delle diverse tecniche nella localizzazione di due target per baseline disposti regolarmente. | 77 |
| | (a) 2 target disposti ad una distanza superiore alla risoluzione del Beamforming. | 77 |
| | (b) 2 target disposti ad una distanza pari a due volte la risoluzione del Beamforming. | 77 |
| 3.19 | Rapporto tra energia media dei lobi laterali e energia del lobo principale. | 78 |
| 3.20 | Valore quadratico medio di 100 stime della funzione di riflettività. . . | 79 |
| | (a) 0 dB di SNR. | 79 |
| | (b) 10 dB di SNR. | 79 |
| | (c) 50 dB di SNR. | 79 |
| 4.1 | Tecniche di inversione classiche. | 82 |
| | (a) Una SLC della zona boschiva. | 82 |
| | (b) Dato focalizzato con Beamforming | 82 |

| | | |
|------|---|-----|
| (c) | Dato focalizzato con Pseudoinversa | 82 |
| 4.2 | Tecniche di inversione proposte in questa tesi. | 83 |
| (a) | Una SLC della zona boschiva. | 83 |
| (b) | Dato focalizzato con IRLS - norma 0 | 83 |
| (c) | Dato focalizzato con IRLS - norma 1 | 83 |
| 4.3 | Tecniche di inversione proposte in questa tesi. | 84 |
| (a) | Una SLC della zona boschiva. | 84 |
| (b) | Dato focalizzato con Pseudoinversa - 3 iterazioni | 84 |
| 4.4 | Focalizzazione in cross-range tramite filtro di Capon. | 85 |
| 4.5 | Ricostruzione di un satellite Cosmo. | 86 |
| 4.6 | Baseline normali. | 87 |
| 4.7 | Area di Milano a disposizione. | 88 |
| (a) | Ottico della zona coregistrato con il SLC qui sotto | 88 |
| (b) | SLC master | 88 |
| 4.8 | Beamforming rappresentato in cross-range/slant-range. | 89 |
| (a) | Beamforming prima del deramping | 89 |
| (b) | Beamforming dopo il deramping | 89 |
| 4.9 | Beamforming rappresentato in altezza/ground-range. | 91 |
| (a) | Beamforming prima della correzione del punto stabile | 91 |
| (b) | Beamforming dopo la correzione del punto stabile | 91 |
| 4.10 | Area elaborata. | 93 |
| (a) | Ottico dell'area processata ottenuto tramite Google Earth | 93 |
| (b) | SLC Master dell'area processata | 93 |
| 4.11 | Scena focalizzata con Beamforming. | 94 |
| 4.12 | Scena focalizzata con Pseudoinversa. | 94 |
| 4.13 | Scena focalizzata con Pseudoinversa - 3 iterazioni. | 95 |
| 4.14 | Focalizzazione tramite IRLS | 96 |
| (a) | Scena focalizzata con IRLS - norma 0. | 96 |
| (b) | Scena focalizzata con IRLS - norma 1. | 96 |
| 4.15 | I due palazzi focalizzati. | 97 |
| 4.16 | Area elaborata. | 99 |
| (a) | Ottico dell'area processata ottenuto tramite Google Earth | 99 |
| (b) | SLC Master dell'area processata | 99 |
| 4.17 | Scena focalizzata con Beamforming. | 100 |
| 4.18 | Scena focalizzata con Pseudoinversa - 3 iterazioni. | 100 |

Elenco delle tabelle

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Parametri del sistema. | 54 |
| (a) | Parametri del sistema | 54 |
| (b) | Baseline normali irregolari in metri | 54 |

Introduzione

L'utilizzo di onde radio coerenti nell'intervallo di frequenze definito delle microonde, il fatto di essere un sistema attivo (genera lui stesso il segnale che poi registra), rendono il Radar uno strumento importante per il telerilevamento in diverse ambiti. Le immagini ottiche rimangono ancora sotto diversi punti di vista il mezzo più familiare all'uomo, ma là dove gli apparati ottici non possono ottenere una rappresentazione della realtà a causa di vincoli fisici, Il Radar trova le sue applicazioni.

Grazie al fatto che è un sistema attivo, non necessità della luce riflessa del sole per "osservare" la zona interessata (l'acquisizione può esser continuativa, notte e giorno). Le lunghezze d'onda utilizzate sono inferiori a quelle del visibile e quindi risentono molto meno della presenza di certi eventi atmosferici che per l'ottico sono degli ostacoli insormontabili, per esempio le nuvole. Inoltre trattandosi di onde coerenti ogni acquisizione porta con sé informazioni di ampiezza e di fase, che come si vedrà è di fondamentale importanza per la quasi totalità delle tecniche di prospezione Radar.

In questa tesi, le tecniche Radar attuali possono essere presentate ordinatamente sulla base al numero delle dimensioni che riescono a risolvere. Si parte dai radar più semplici che localizzano target in una sola direzione, i cui risultati poi vengono utilizzati come punto di partenza per le tecniche successive. Diverse stime di una stessa zona, effettuate in una sola direzione (ma da angolazioni differenti) tramite la prima tecnica, possono essere elaborate in modo da realizzare un'immagine a due dimensioni (immagini SAR). Come in una serie di scatole cinesi, a loro volta una raccolta di immagini prodotte dalla tecnica Radar a due dimensioni viene utilizzata come dato di partenza per dare una descrizione volumetrica (3D) dello spazio osservato (Tomografia SAR). Le tecniche 2D sono ormai piuttosto standardizzate e di conseguenza l'acquisizione dei dati è progettata ad-hoc per il relativo processing. Questo in generale non è vero per la tomografia SAR, che essendo ancora in fase di sperimentazione, nella maggior parte dei casi deve cercare di adattarsi ai dati che si hanno a disposizione.

Inoltre la tipologia di target presenti nelle immagini focalizzate influenza la scelta della miglior tecnica da utilizzare per effettuare la tomografia. A questo proposito

si distinguono fondamentalmente due tipologie di “ambienti”, uno che possiamo definire boschivo, con una prevalenza cioè di alberi, e un uno urbano, in cui la scena invece è dominata da edifici. La tipologia di target è completamente differente, e di conseguenza gli algoritmi da utilizzare.

In questa tesi una particolare attenzione viene riservata alla Tomografia dell’ambiente urbano, per questo motivo la risoluzione ottenibile con una determinata tecnica è parametro fondamentale per la valutazione della tecnica stessa. La tipologia di soluzione che ci si aspetta in questo caso è di tipo sparso, cioè con pochi campioni diversi da zero. Proprio per questo motivo sono state proposte tecniche che sfruttano la sparsità della soluzione per migliorare la qualità dell’immagine. Infatti come si vedrà le caratteristiche dei dati in ingresso portano a problematiche nelle soluzioni, come lobi laterali, e bassa risoluzione se le tecniche utilizzate sono troppo semplici e non fanno assunzioni sulle soluzioni.

L’obbiettivo di questa tesi è mettere a confronto alcune tecniche descritte in letteratura per la Tomografia SAR 3D, con nuove tecniche proposte. Per fare questo sono stati valutati i vantaggi e i limiti delle tecniche tramite l’analisi di dati sintetici da prima, e successivamente con set di immagini SAR, ottenute da dati reali, già focalizzate (nelle prime due direzioni).

Capitolo 1

Sistemi Radar

In questo capitolo viene descritto il funzionamento del radar per la generazione di immagini. A partire dai più semplici radar monodimensionali che permettono cioè di risolvere i target in una sola direzione. Passando per il Radar ad Apertura Sintetica, le cui tecniche sono già standardizzate e commercializzate, fino a quelli ancora in fase di sperimentazione, che tramite la tomografia provano a ottenere rappresentazioni della scena osservata in tutte e tre le direzioni.

1.1 Il Radar in 1D

Un Radar (Radio Detection and Ranging) è un sistema che permette di rilevare la presenza di target e di localizzarli, utilizzando onde radio.

Le onde elettromagnetiche vengono trasmesse da un antenna, si propagano nell'atmosfera¹ e incontrano delle discontinuità. A ciò segue la riflessione di buona parte dell'energia dell'onda che quindi viaggia verso l'antenna ricevente.

Si distinguono quindi già due tipologie di Radar:

- *monostatico* : se l'antenna ricevente corrisponde alla stessa che ha generato l'onda trasmessa.
- *bistatico* : se l'antenna ricevente è diversa dall'antenna che trasmette, oppure se l'antenna rimane la stessa ma la sua posizione cambia in modo significativo tra la fase di trasmissione e di ricezione.

A loro volta queste si possono dividere in altre due grandi famiglie. In generale un radar infatti può essere pensato per avere una maggiore sensibilità nel determi-

¹Parliamo di radar con applicazioni terrestri

nare la velocità di un target rispetto alla velocità del clutter, nel momento in cui il segnale trasmesso sia un'onda monocromatica. Oppure per meglio localizzare il target nei tempi (facilmente trasformabili in distanze), quando il segnale trasmesso è un impulso.

Nel primo caso il radar sfrutta il principio fisico del Doppler. Il segnale trasmesso è un segnale monocromatico del tipo $\sqrt{2P_T}\cos(2\pi f_0 t)$ con P_T la potenza media e f_0 la frequenza del segnale. In generale, in questi casi, quello che torna dalla riflessione è una somma di diversi contributi. Parte dell'onda trasmessa ritornerà dopo essere stata riflessa dall'ambiente circostante (*clutter*). Se consideriamo il sistema fermo, in segnale ricevuto sarà un segnale monocromatico alla frequenza f_0 sfasato dalla propagazione (velocità del clutter pari a zero). Parte del segnale ricevuto sarà invece proveniente da oggetti in movimento, questi solitamente vengono definiti "*target*". Il contributo dei target al segnale ricevuto (assunzione di target che si muovono con velocità costante) consiste in onde monocromatiche non più a frequenza f_0 ma con una frequenza dipendente dalla componente della velocità del target nella direzione formata da target-radar.

Al fine dei nostri scopi tratteremo esclusivamente il secondo tipo. Il radar a impulsi riesce a localizzare un target esclusivamente in una direzione, che definiremo *range* (corrisponde allo *slant-range* nel SAR). Questa operazione di determinazione della distanza dei target è definita in gergo *ranging*. La localizzazione nelle altre direzioni è strettamente limitata all'angolo solido coperto dal lobo centrale della funzione di direttività dell'antenna.

1.1.1 L'impulso chirp.

Per poter definire la risoluzione in range è necessario introdurre il segnale trasmesso dal radar, questo solitamente consiste in un impulso chirp. Un impulso chirp è un segnale complesso con ampiezza costante e una fase che varia secondo una legge quadratica:

$$x(t) = A \exp(j\pi k t^2) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (1.1)$$

Questo tipo di segnale è molto utilizzato in quanto può aumentare la sua durata a piacimento (aumentandone l'energia) anche mantenendo costante la banda. Tutto questo mantenendo costante la potenza di picco del segnale in trasmissione, che a sua volta semplifica la progettazione dell'apparato in trasmissione. Contemporaneamente questo impulso ha una autocorrelazione impulsiva, caratteristica fondamentale per essere utilizzato in queste tipologie di radar.

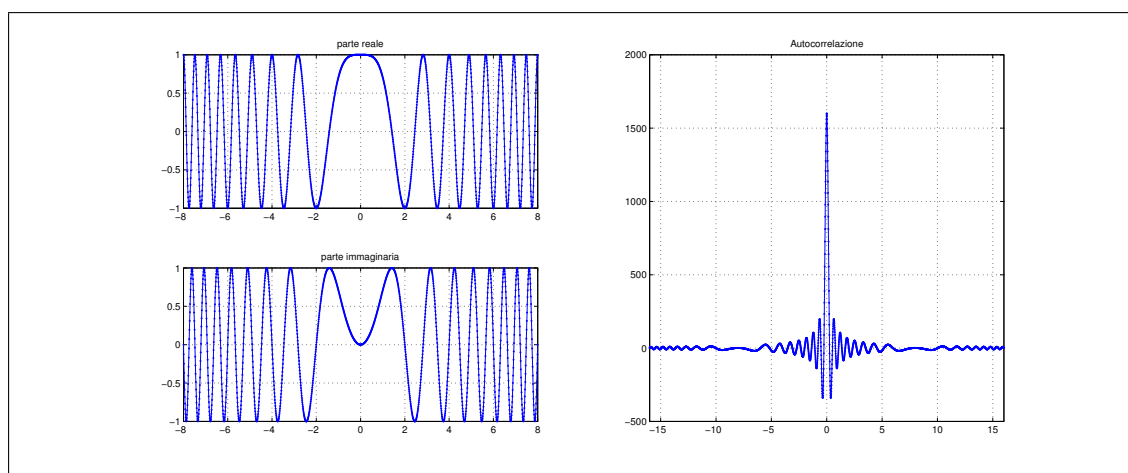


Figura 1.1: Impulso chirp.

Notiamo il secondo fattore in $x(t)$ ($rect(\frac{t}{T})$), questo non fa altro che determinare la lunghezza temporale dell'impulso in trasmissione. Questa grandezza è di fondamentale importanza in quanto l'impulso chirp ha una frequenza che varia linearmente col tempo, quindi la durata dell'impulso è strettamente legata (non vincolata) alla sua banda. Infatti se prendiamo il primo fattore della 1.1, lo centriamo in $t_0 = 0$ e estraiamo l'espressione della frequenza istantanea otteniamo $f(t) = kt$, da questa relazione si ottiene che $f(T) - f(0) = B_c = Tk$.

Dato che d'ora in poi considereremo sempre casi in cui l'antenna di trasmissione è la stessa che riceve l'impulso riflesso, quando l'antenna viene utilizzata con trasmettitore non può ricevere. La durata di un impulso e la frequenza con cui si ripete definiscono quindi il *range ambiguo*, questo perchè il tempo che intercorre tra la trasmissione un impulso e un altro, può essere visto come lo spazio che deve percorrere l'impulso per raggiungere il target e tornare indietro. La relazione generale diventa quindi: $f_{PFR} - T = \frac{2\Delta R}{c}$, dove f_{PFR} è il tempo di ripetizione dell'impulso, T corrisponde alla sua durata e ΔR è l'intervallo di range visibile al radar.

Il chirp è un segnale complesso, ma i segnali complessi possono essere considerati un formalismo matematico per esprimere segnali sinusoidali in termini di fase e ampiezza. In natura non esistono segnali complessi, possiamo quindi esprimere $x(t)$ come parte reale e parte immaginaria, e in questo caso ho due segnali reali:

$$\begin{aligned} Re(x(t)) &= A \cos(\pi kt^2) \cdot rect(\frac{t}{T}) \\ Im(x(t)) &= A \sin(\pi kt^2) \cdot rect(\frac{t}{T}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Questa scomposizione ci permette di trasmettere il chirp sotto forma di campo elettromagnetico trasmettendo due segnali reali (Parte reale e parte immaginaria del chirp), che poi quando vengono ricevuti possono essere utilizzati per ricostruire il chirp in numerico.

La fase di modulazione serve, oltre a trasmettere parte reale e parte immaginaria di un segnale complesso su di un unico segnale reale, anche a spostare il segnale da trasmettere dalla banda base ad una banda centrata intorno alla frequenza prescelta in fase di progetto (f_0 in figura 1.2).

1.1.2 Trasmettitore e ricevitore.

Quello che si fa quindi è trasmettere i due segnali reali tramite un modulatore in fase e quadratura, visibile in figura 1.2.

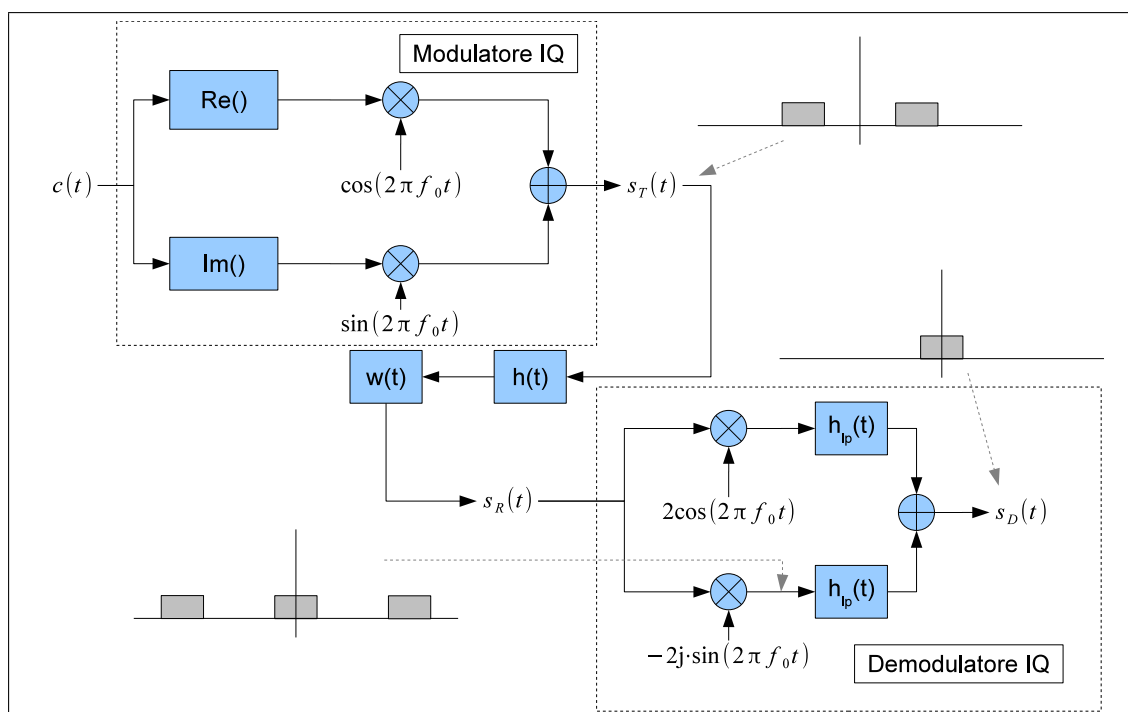


Figura 1.2: Trasmettitore e ricevitore.

Il segnale così modificato è pronto per essere trasformato in campo elettromagnetico dall'antenna, quindi trasmesso. Percorre due volte (andata e ritorno) la distanza

che separa il radar da ciascun target; sfasandosi, attenuandosi e subendo un ritardo che dipende dalla distanza percorsa.

Tra il trasmettitore e il ricevitore c'è il mondo fisico, contenente i target di interesse che si vogliono ricostruire nell'immagine radar, ma anche elementi di disturbo. Chiameremo $h(t)$ il sistema che si vuole ricostruire (non necessariamente lineare), attraverso cui passa l'onda elettromagnetica prima di essere registrata dal ricevitore. Mentre $w(t)$ quella parte del sistema che risulta un disturbo ai nostri fini. Lungo questa trattazione $w(t)$ verrà praticamente sempre considerato come un rumore additivo.

I due segnali sono completamente separabili in ricezione grazie al demodulatore in fase e quadratura. Come si vede in figura 1.2 il demodulatore è molto simile al modulatore, infatti con poche nozioni di teoria dei segnali è facile dimostrare che partendo dal segnale ricevuto (un segnale con banda B_c centrata intorno alla frequenza f_0), moltiplicando nuovamente per una sinusoidale a frequenza f_0 si ottiene lo stesso segnale riportato in banda base, più una replica con il centro banda posizionato alla frequenza $2f_0$. Successivamente alla moltiplicazione per le sinusoidi a frequenza f_0 è necessario quindi applicare un filtro passa-basso (h_{lp}) in modo tale che la demodulazione sia completa. In figura 1.2 sono presenti delle rappresentazioni intuitive della occupazione spettrale durante le fasi di trasmissione e ricezione.

1.1.3 Focalizzazione in range.

Successivamente alla demodulazione, il segnale che si ottiene può essere visto come un insieme di repliche sovrapposte del segnale trasmesso, ciascuna ritardata, sfasata e attenuata in modo differente. Dato che per inserire molta energia² nel segnale senza avere potenze di picco ingestibili, il segnale trasmesso è molto lungo. Si ottiene che l'energia dovuta alla riflessione di un singolo target è distribuita su un tempo molto lungo, perciò l'evento non è localizzabile nei tempi.

La *Focalizzazione in range* permette di ottenere un segnale con "eventi" ben localizzati nel tempo, a partire dal segnale ricevuto, grazie all'applicazione del *filtro adattato*. Ovvero il segnale demodulato viene cross-correlato con una replica del impulso trasmesso.

$$s_D(t) = a(R_T) \cdot x^* \left(t - \frac{2R_T}{c} \right) \cdot \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{2R_T}{c} \right) \quad (1.3)$$

²Questo perchè ad una maggiore energia dell'impulso corrisponde una maggior capacità di distinguere i target

$s_D(t)$ è il segnale demodulato (Schema a blocchi in figura 1.2), con R_T distanza tra target e radar, c la velocità della luce nel vuoto e $a(R_T)$ l'attenuazione dovuta alla propagazione.

$$s_F(t) = \int x(\tau-t) \cdot s_D(\tau) d\tau = a(R_T) \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{2R_T}{c}\right) \int x(\tau-t) x^*\left(t - \frac{2R_T}{c}\right) d\tau \quad (1.4)$$

Dove $s_F(t)$ corrisponde all'espressione dell'impulso focalizzato, dove il termine di ampiezza $a(R_T)$ e di fase $\exp\left(-j2\pi f_0 \frac{2R_T}{c}\right)$ possono essere portati fuori dell'integrale in quanto non dipendenti da τ .

Qui di seguito si ricava l'espressione generale dell'autocorrelazione dell'impulso chirp:

$$\begin{aligned} r_c(t) &= \int x(\tau+t) \cdot s_D(\tau) d\tau = \int x(\tau+t) \cdot x^*(\tau) d\tau \\ &= A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-t} \exp(j\pi k(\tau+t)^2) \cdot \exp(j\pi k(\tau)^2) d\tau \\ &= A^2 \exp(j\pi k t^2) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-t} \exp(j2\pi k t \cdot \tau) d\tau \\ &= A^2 \frac{\exp(j\pi k t^2)}{j2\pi k t} \left[\exp(j2\pi k t \cdot \tau) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-t} \\ &= A^2 \frac{\exp(j\pi k t^2)}{j2\pi k t} \left[\exp\left(j2\pi k t \cdot \left(\frac{T}{2}-t\right)\right) - \exp(j2\pi k t \cdot \left(-\frac{T}{2}\right)) \right] \\ &= \frac{A^2}{j\pi k t} \cdot \frac{\exp(j\pi k t(T-t)) - \exp(-j\pi k t(T-t))}{2} \\ &= A^2 T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot \text{sinc}\left(kTt \left(1 - \frac{t}{T}\right)\right) \\ &= A^2 T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot \text{sinc}(B_c t (1 - \frac{t}{T})) \simeq A^2 T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot \text{sinc}(B_c t) \quad (1.5) \end{aligned}$$

Dato che il lobo principale dell'autocorrelazione è molto più stretto rispetto alla durata totale dell'autocorrelazione stessa come si vede in Figura 1.1, nell'ultimo passaggio il termine $\frac{t}{T}$ può essere trascurato.

Dall'espressione della autocorrelazione del chirp si ottiene facilmente la forma del segnale focalizzato in range in presenza di un target a distanza R_T

$$s_F(t) = AT \left(1 - \frac{(t - \frac{2R_T}{c})}{T} \right) \cdot \text{sinc}(B_c(t - \frac{2R_T}{c})) \quad (1.6)$$

A questo punto possiamo dire che risoluzione nella direzione del range corrisponde alla larghezza del lobo principale della $s_F(t)$, che a sua volta dipende dalla banda dell'impulso chirp. Il lobo principale del seno cardinale è largo in metri $\rho_{sinc} = \frac{c}{2B_c}$, dato che però nell'autocorrelazione del chirp il seno cardinale è moltiplicato per una finestra triangolare (il chirp trasmesso ha una durata limitata), il lobo principale dell'autocorrelazione diventa:

$$\rho_r = \frac{0.88c}{2B_c} \quad (1.7)$$

Che corrisponde alla risoluzione in range del radar.

Il radar descritto finora è un radar che riesce a distinguere target solo nella direzione di puntamento dell'antenna. Per quanto riguarda invece la capacità di questi radar di discriminare la posizione dei target nelle altre direzioni, tutto dipende dalla larghezza del lobo centrale della funzione di direttività dell'antenna. Si può dimostrare che l'apertura del fascio dell'antenna in una direzione dipende dalla sua dimensione in quella direzione. secondo la regola:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{L_a} \quad (1.8)$$

Dove $\Delta\theta$ è l'apertura angolare del fascio, λ corrisponde alla lunghezza d'onda dell'onda trasmessa e L_a la dimensione fisica dell'antenna in direzione θ . I target illuminati da questo fascio sono localizzati nella stessa cella di risoluzione. Per vedere gli altri target è necessario cambiare il puntamento dell'antenna. Questo risultato ci introduce al prossimo capitolo, in cui la costruzione di un'antenna sintetica in una direzione diversa da quella di puntamento dell'antenna ci permette di discriminare i target anche in quella direzione.



Figura 1.3: Radar con antenna rotante, maggiore risoluzione orizzontale e bassa risoluzione verticale.

1.2 Il Radar in 2D: Il SAR

Una serie ordinata di *ranging* ottenute con la tecnica descritta nel capitolo precedente diventa il dato da elaborare per una nuova tipologia di radar: Radar ad apertura sintetica (SAR, Synthetic Aperture Radar). Questa tecnica radar che ci accingiamo a descrivere è principalmente utilizzata in applicazioni di monitoraggio ambientale:

- Creazione di modelli digitali del terreno (DEM, Digital elevation model).
- Monitoraggio ambientale finalizzato alla prevenzione di catastrofi (pendii soggetti a frane).
- Misurazione di risorse ambientali (biomassa a disposizione in una certa zona).

I sistemi SAR fondamentalmente aggiungono una dimensione al sistema descritto nel capitolo precedente, restituendo quindi un'immagine 2D. Come nella formula 1.8 la larghezza dell'antenna fisica definisce, insieme alla lunghezza d'onda, la larghezza della cella di risoluzione³. Allo stesso modo l'antenna può essere costruita muovendo il sensore, sintetizzando così un'antenna virtuale in cui ogni elemento dell'array corrisponde a una delle diverse acquisizioni del radar 1D. Questi sistemi solitamente montati su aerei o su satelliti, sono sistemi attivi che lavorano nel dominio delle microonde (frequenze comprese indicativamente tra i 0.5 e i 50 GHz).

Sussistono alcune differenze tra un radar classico ed un radar ad apertura sintetica, per cominciare le acquisizioni dei vari elementi dell'array non sono simultanee, ma avvengono in tempi successivi. Questo fa sì che ci siano richieste di coerenza del target all'interno del periodo in cui vengono fatte le acquisizioni della stessa zona. Contemporaneamente tra il momento in cui l'antenna trasmette il segnale e il momento in cui invece lo riceve passano alcuni istanti, perciò almeno in teoria il SAR è un radar bistatico (l'antenna è sempre la stessa ma non è posizionata sempre nello stesso punto quando trasmette e quando riceve); nonostante questo le differenze di percorso sono trascurabili e quindi il sistema può essere considerato monostatico. Fare questa assunzione corrisponde a ipotizzare il sensore si sposti da un punto ad un altro, da qui si fermi un istante per trasmettere e per ricevere, dopo di che riparta per posizionarsi in una nuova posizione (sistema radar con approssimazione start-stop).

1.2.1 La Geometria del SAR

La geometria del sistema radar ad apertura sintetica viene rappresentata in figura 1.4, come si vede un'antenna radar viene montata su di un satellite (oppure su un

³zona entro cui ogni contributo va a sommarsi in un unico pixel.

aereo o un qualsiasi supporto in movimento).

Qui di seguito vengono elencati i parametri che definiscono la geometria SAR:

- θ_L : Inclinazione dell'antenna rispetto alla perpendicolare al terreno, viene definito anche angolo di look, per esempio corrisponde a 23 deg nel caso dei satelliti ERS-1 ed ERS-2.
- θ_I : L'angolo tra la linea di vista (line of sight) del radar e la perpendicolare al terreno nel punto di incidenza con il suolo è detto angolo di incidenza.
- **slant-range** : La direzione che coincide con la linea di vista.
- **azimuth** : La direzione perpendicolare allo slant range e parallela all'orbita del satellite (direzione di spostamento dell'aereo).
- **cross-range** : La direzione perpendicolare alle altre due, detta anche elevazione.

Le immagini SAR standard sono in range-azimuth, la terza dimensione, che verrà trattata nel prossimo capitolo, è ancora nella fase di ricerca.

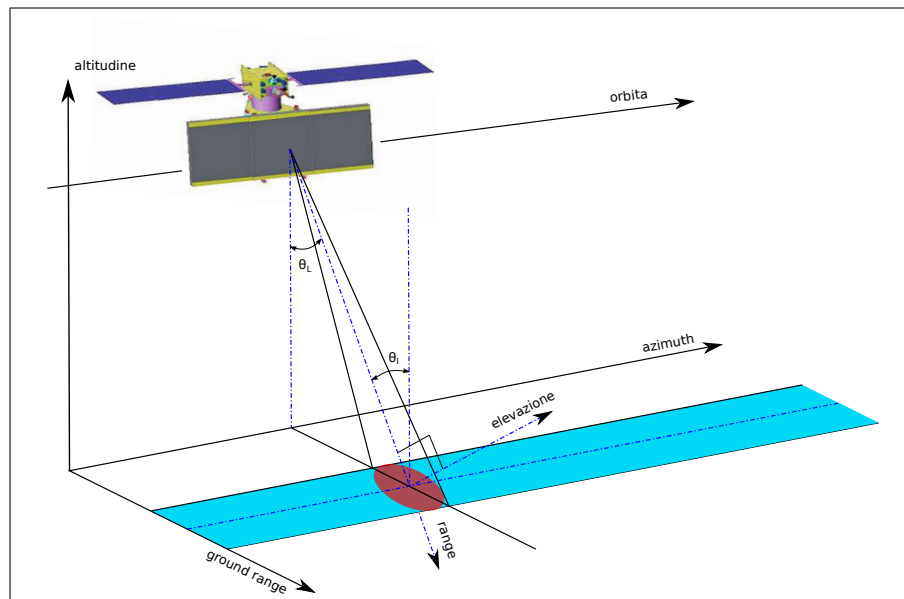


Figura 1.4: Geometria SAR.

1.2.2 Risoluzione in azimuth.

Questo sistema consente di ottenere antenne sintetiche lunghe anche chilometri (altrimenti non realizzabili fisicamente), che permettono una maggior risoluzione nella direzione di sintesi dell'antenna, mantenendo le lunghezze d'onda accettabili e meno sensibili agli eventi atmosferici oltre che antenne fisiche di dimensioni gestibili. Si intuisce che la risoluzione sia legata in qualche modo a queste due grandezze: la lunghezza L dell'antenna sintetica e lunghezza d'onda λ ; infatti applicando l'equazione 1.8 all'antenna sintetica, già si nota come la discriminazione angolare dipenda da queste due grandezze. Se poi si considera ciascun ranging come una misura monostatica della doppia distanza, emerge la dipendenza da $\lambda/2$ invece che da λ . Quindi l'espressione della risoluzione in azimuth di un SAR assume la seguente formula:

$$\rho_a = R_0 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{L} \quad (1.9)$$

Dove ρ_a è la risoluzione in azimuth, cioè la larghezza della cella di risoluzione alla distanza a cui si sta guardando, R_0 la distanza tra l'antenna e la scena, λ la lunghezza d'onda della portante con cui viene modulato il segnale in trasmissione ed infine L è la larghezza della antenna sintetica. Analogamente a quanto avviene nelle antenne a cortina, o array di antenne rifasate, la risoluzione nel SAR non è quella del singolo elemento ma quella coperta da tutte le acquisizioni effettuate nella distanza L indicata nella formula.

La lunghezza L è limitata superiormente dallo spazio che separa le due acquisizioni piú distanti che comunque illuminano uno stesso punto a terra, che a sua volta dipende dalle funzione di direttività dell'antenna fisica, e ovviamente dalla distanza che sussiste tra il radar e la scena. Spesso le antenne utilizzate possono essere ricondotte a antenne a bocca radiante illuminate uniformemente, e in quanto tali la funzione di direttività corrisponde alla trasformata di Fourier 2D dell'illuminazione. Nel caso semplice di antenne rettangolari illuminate uniformemente, la funzione di direttività diventa un seno cardinale bidimensionale, il cui lobo principale determina l'apertura del fascio dell'antenna θ . In questo modo si ottiene la relazione generale che lega l'apertura del fascio a lunghezza d'onda e dimensione dell'antenna fisica $\theta = \frac{\lambda}{L_a}$. Al tempo stesso da questa relazione deriva una limitazione, in quanto definisce la lunghezza massima dell'array sintetico, oppure il numero massimo di osservazioni effettuate dal satellite che contribuiscono alla focalizzazione di un punto ($N = \frac{L}{L_s}$). Contemporaneamente, come vedremo in seguito, è di aiuto per evitare problematiche di *aliasing*.

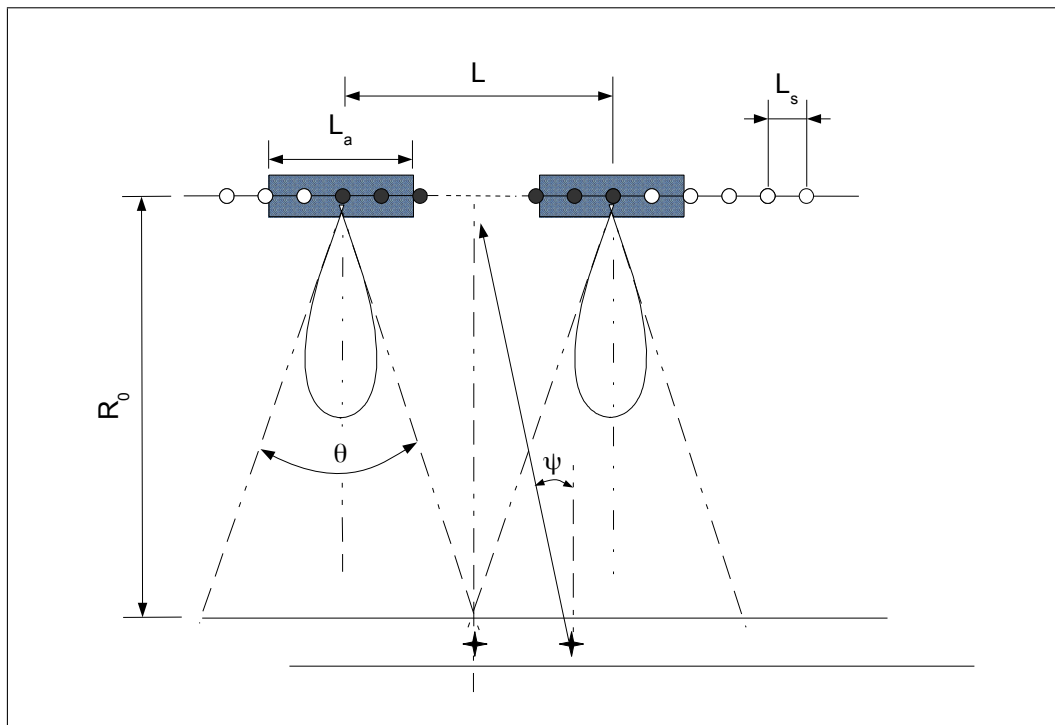


Figura 1.5: Risoluzione e ambiguità in azimuth.

$$L \leq \theta \cdot r_0 \Rightarrow L \leq \frac{\lambda r_0}{L_a} \quad (1.10)$$

Da questa ultima relazione possiamo quindi ricavare un'importante relazione di carattere generale che riguarda tutti i sistemi radar a due dimensioni. La migliore risoluzione ottenibile da questi sistemi è limitata dalla dimensione dell'antenna fisica nel seguente modo.

$$\rho_a \geq R_0 \frac{\lambda}{2} \frac{L_a}{\lambda r_0} = \frac{L_a}{2} \quad (1.11)$$

Nell'equazione 1.9, è la risoluzione per caso migliore cioè per la larghezza della cella di risoluzione intorno alla perpendicolare alla direzione di movimento del sensore (ψ in Figura 1.4). Per angoli che da $\psi = 0$ tendono a $\psi = \frac{\pi}{2}$ la cella di risoluzione si dilata. Questa problematica diventa poco evidente nel momento in cui l'angolo di vista massimo della scena è abbastanza stretto. Per esempio nei sistemi ERS l'angolo di vista massimo è di circa $\Delta\theta = 6^\circ$, quindi diventa trascurabile.

1.2.3 Ambiguità in azimuth.

Supponiamo di avere un target a distanza R_0 e che si scosta dalla linea di vista di ψ in azimuth, consideriamo inoltre che sia puntiforme e sufficientemente lontano da poter considerare l'onda ricevuta un'onda piana monocromatica. In questo caso ogni sensore riceve una copia dello stesso segnale sfasata nel seguente modo:

$$S_n(t) = A \exp \left(j2\pi f_0 \left(t - \frac{2r_0 + 2nL_s \sin \psi}{c} \right) \right) \quad (1.12)$$

Tenenndo solo il termine che differenzia un sensore dall'altro:

$$\begin{aligned} \frac{S_n(t)}{S_0(t)} &= \exp \left(-j2\pi f_0 \frac{2nL_s \sin \psi}{c} \right) \\ &= \exp \left(-j2\pi \frac{2nL_s \sin \psi}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Si noti che per R_0 molto grande non vi sono ritardi apprezzabili tra un sensore e l'altro, invece la differenza fase non è trascurabile essendo generalmente la lunghezza d'onda molto piccola in relazione a L_s .

Se consideriamo ora che ogni elemento dell'array sintetico illumina la scena all'azimuth ψ . Possiamo andare a sommare i contributi degli N sensori, relativi a quell'azimuth. Il risultato è una funzione in azimuth.

$$\frac{G(\psi)}{G(0)} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N \exp \left(-j2\pi \frac{2nL_s \sin \psi}{\lambda} \right) \right| \quad (1.14)$$

La relazione qui sopra è riconducibile alla trasformata discreta di Fourier di un rettangolo discreto composto da N campioni. in cui la frequenza corrisponde a $f = \frac{\sin \psi}{\lambda/2}$.

$$\frac{G(\psi)}{G(0)} = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(2\pi L \frac{\sin(\psi)}{\lambda})}{\sin(2\pi L_s \frac{\sin(\psi)}{\lambda})} \right| \quad (1.15)$$

Osservando l'ultima relazione: analogamente a quanto avviene passando al dominio delle frequenze tramite trasformata di Fourier discreta, a partire da un segnale discreto, il risultato è periodico. Quindi allo stesso modo si ha una ripetizione periodica dell'immagine focalizzata. Questo fenomeno ben noto dall'analisi spettrale, è definito *alias*. Il periodo di ripetizione dipende da quanto sono distanziate le osservazioni lungo l'array. Perciò per evitare di ottenere delle immagini soggette ad *alias*, è necessario che L_s sia sufficientemente piccolo, cioè devo campionare in modo tale che L_s sia inferiore all'inverso del doppio della frequenza angolare massima.

$$\begin{aligned} L_s &\leq \frac{1}{2f_{max}} \\ L_s &\leq \frac{\lambda}{4 \sin \psi} \leq \frac{\lambda}{4} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Essendo λ molto piccola il vincolo diventa molto stringente. Per ovviare a questo problema ci viene in soccorso l'antenna fisica che fa da filtro *anti-alias*,

$$\frac{G(\psi)}{G(0)} = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(2\pi L \frac{\sin(\psi)}{\lambda})}{\sin(2\pi L_s \frac{\sin(\psi)}{\lambda})} \right| \left| \text{sinc}^2 \left(\frac{L_a}{\lambda} \sin \psi \right) \right| \quad (1.17)$$

Dove il secondo termine corrisponde alla funzione di direttività dell'antenna fisica in direzione di azimuth. Questo Consente di rilassare il vincolo definito nell'equazione (1.16). Andando a filtrare gli angoli visibili dalla schiera stessa, consente a L_s di assumere valori piú grandi.

1.2.4 Focalizzazione in azimuth.

Il dato da cui si parte è l'espressione del dato focalizzato in slant-range (espressione 1.5) valutata per ciascuna delle N posizioni dell'antenna sintetica. Accostando queste funzioni ordinatamente una a fianco all'altra si ottiene un'immagine che rappresenta i dati focalizzati in range, detta anche Odografa. Un esempio di questo tipo di dato è raffigurato in figura 1.6, e formalizzata nell'equazione 1.18.

$$s_{F,n}(t) = a(R_{t,n}) \cdot A^2 \cdot \left(1 - \frac{(t - \frac{2R_{t,n}}{c})}{T}\right) \cdot \text{sinc}(B_c(t - \frac{2R_{t,n}}{c})) \cdot \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{2R_{t,n}}{c}\right) \quad (1.18)$$

Per non appesantire la trattazione si può trascurare l'effetto delle finestrate triangolare

$$s_{F,n}(t) = a(R_{t,n}) \cdot A^2 \cdot \text{sinc}(B_c(t - \frac{2R_{t,n}}{c})) \cdot \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{2R_{t,n}}{c}\right) \quad (1.19)$$

Con $R_{t,n}$ distanza tra il target t e n-esimo sensore della schiera, $s_{D,n}(t)$ corrisponde al ranging fatto con n-esimo sensore e $a(R_{t,n})$ l'attenuazione dovuta alla propagazione.

In figura 1.6 (modulo quadro dell'odografa) sono presenti tre target allo stesso azimuth ($\psi = 0$) ma a differente slant-range. Nella figura la ascisse possono essere chiamate anche *tempi lenti* (slow time) mentre le ordinate vengono chiamati *tempi veloci* (fast time), in terminologia SAR.

Quindi la tecnica di focalizzazione in azimuth partendo da questa immagine deve restituire un'immagine con i tre pixel diversi da zero ciascuno posizionato sulla sua curva ma al centro dell'immagine. Come si può vedere in figura la variazione del ritardo relativo $\frac{2R_{t,n}}{c}$ tra un sensore e l'altro diventa sempre meno evidente man mano che il target si allontana dal target.

La focalizzazione dell'immagine SAR 2D, a differenza di quanto avviene nelle classiche DOA (Direction Of Arrival), non sfrutta tutta l'apertura a disposizione per ricostruire la funzione di riflettività in un punto, ma come si vede nella formula 1.10, solo un certo numero N di acquisizioni che riescono ad illuminare questo punto. Inoltre ogni punto viene focalizzato sommando tutti i contributi a zero Doppler. Questo vuol dire che prendendo N acquisizioni con queste si ricostruisce la funzione di riflettività solo dei punti situati sulla retta che attraversa perpendicolarmente la schiera delle N acquisizioni, che poi sono i target visibili alla frequenza spaziale pari a zero.

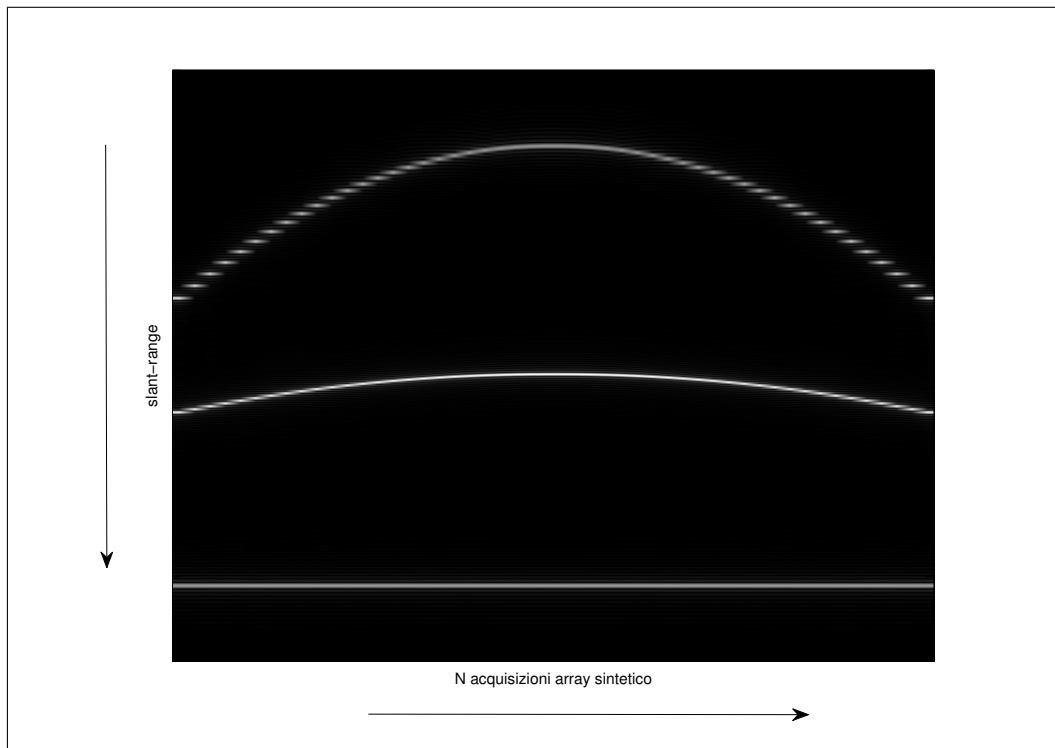


Figura 1.6: Odografa.

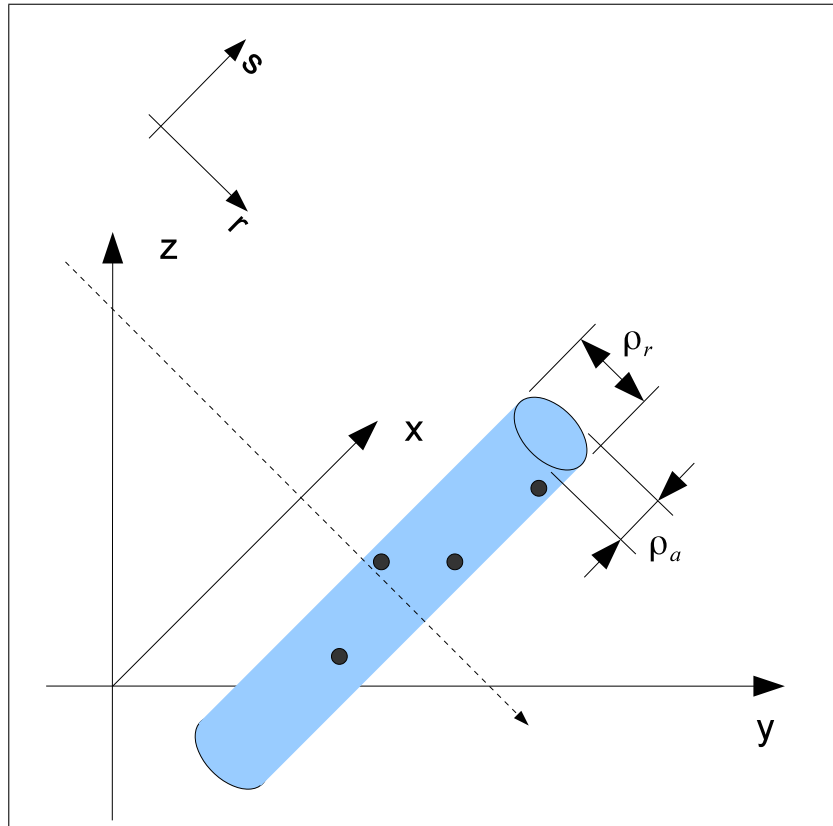


Figura 1.7: Focalizzazione in azimuth.

Non è obiettivo di questa tesi la trattazione completa della focalizzazione in azimuth di un sistema SAR, ci si limita quindi a presentare la forma del dato già focalizzato

$$s_F(r, x) = \gamma(r, x) \operatorname{sinc}\left(\frac{(r - r_0)}{\rho_r}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{(x - x_0)}{\rho_a}\right) \cdot \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{2r_0}{c}\right) \quad (1.20)$$

Con r_0 la distanza tra il centro della schiera (larga L) e il punto al centro della scena, presa come distanza di riferimento, x_0 è la posizione al centro della scena in azimuth e dipende dal puntamento dell'antenna.

Dalla formula 1.20 si nota come l'immagine SAR focalizzata sia una media pesata da un seno cardinale 2D di quello che è situato nella cella di risoluzione (slant-range/azimuth). Inoltre nella formula non è esplicitata una dipendenza dalla variabile s , questo perchè nelle immagini SAR 2D tutti i bersagli all'interno della stessa cella vengono sommati, anche se hanno differente elevazione. Quindi contribuiscono ad un unico pixel tutti quei target che si trovano nel cilindro che si vede anche in figura 1.7, invece la limitazione in elevazione (coordinata s) arriva dall'apertura della funzione di direttività dell'antenna in direzione di cross-range.

1.2.5 Deformazioni Prospettiche

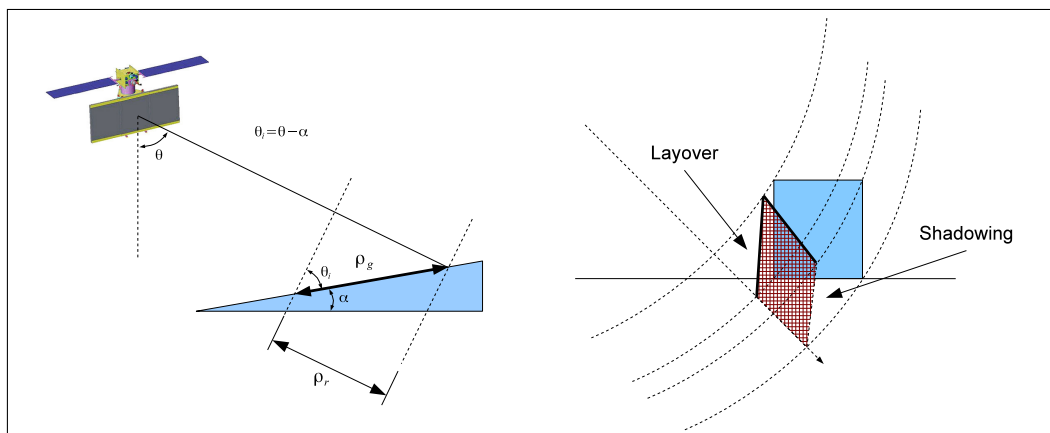


Figura 1.8: Deformazioni prospettiche.

I radar ad apertura sintetica sono normalmente utilizzati per raccogliere dati di uno spazio che per natura è a tre dimensioni, ma da cui si ottengono immagini

bidimensionali. Questo porta a delle conseguenze non sempre evidenti, una di queste è la differente risoluzione a terra, sulla base della pendenza del terreno, oppure la deformazione prospettica. La risoluzione a terra cambia al variare della pendenza secondo la seguente regola:

$$\rho_g = \frac{\rho_r}{\sin\theta_i} \quad (1.21)$$

Come si vede dalla Figura 1.8 a sinistra. La deformazione prospettica deriva proprio dal fatto che le dimensioni delle superfici inclinate sono “strecciate” e che l’immagine SAR essendo un’immagine 2D in range e azimuth, i target piú vicini vengono visualizzati prima di quelli piú lontani, ovviamente. Questo provoca i seguenti effetti.

- *layover*: effetto secondo il quale proiettando i target sul piano a elevazione pari a zero, le cime degli edifici vengono ricevute prima della base. Quindi al contrario di un’immagine ottica in un’immagine SAR classica 2D, gli edifici avranno la base in alto e la cima disposta piú in basso nell’immagine.
- *shadowing*: tutte le superfici con angoli α negativi, non sono visibili dal SAR. Possiamo dire che sono in ombra, in quanto le onde trasmesse dal satellite non incontrano nel loro tragitto le superfici con questa angolazione.

Le uniche superfici che non subiscono deformazioni prospettiche e sono rappresentate nelle immagini SAR on risoluzione pari a quella calcolata nei capitoli precedenti sono quelle con $\theta_i = 0$, come si vede dalla formula 1.21.

1.3 Il SAR in 3D

La trattazione del SAR fatta finora descrive la geometria del problema e i suoi limiti utilizzando tecniche standard di imaging 2D a partire da generici dati SAR grezzi. In questo capitolo invece si tratta come impostare il problema per ottenere una ricostruzione 3D della scena osservata.

Una singola acquisizione di un SAR standard non è sufficiente ad ottenere un'immagine 3D, questo è riconducibile alla formula della risoluzione in azimuth nell'equazione (1.9), se infatti poniamo la larghezza dell'apertura sintetica (L) a zero, otterremo una cella di risoluzione in azimuth di dimensione infinita. Allo stesso modo dato che l'array sintetico è costituito da punti regolarmente disposti su una retta (direzione di movimento del sensore), l'apertura dell'array sintetico nella direzione di elevazione è praticamente pari a zero, e di conseguenza anche la sua capacità di distinguere target differenti nella stessa direzione è nulla. Quindi tutti i contributi dei target posizionati allo stesso range e allo stesso azimuth anche se su diversi piani di elevazione vengono sommati nel medesimo pixel.

1.3.1 I sistemi Multi-Pass.

Nel momento in cui si potesse usufruire di una griglia di campionamento in entrambe le direzioni (azimuth ed elevazione) il passaggio dal 2D al 3D sarebbe piuttosto automatico, a parte i problemi di deformazione prospettica già incontrati anche nel capitolo precedente. Infatti la geometria del problema sarebbe fondamentalmente la stessa solo ruotata di 90 gradi, le tecniche di focalizzazione non cambierebbero.

Il problema è come ottenere fisicamente un campionamento omogeneo in entrambe le direzioni, soprattutto quando il sensore radar è montato su di un satellite. Meglio ancora ci si pone una domanda: è possibile utilizzare le immagini SAR già acquisite ed elaborate che vanno ad illuminare la stessa zona ma da angolazioni differenti? La risposta è sì, ma occorre tenere in conto alcune problematiche, come il campionamento non regolare nella direzione di elevazione, o la differente copertura spettrale in direzione delle frequenze di azimuth delle diverse immagini.

In figura 1.9 viene rappresentata la geometria del problema. Il sistema Multipass consiste nel utilizzare dati provenienti da differenti passaggi dello stesso satellite che illuminano una stessa zona. In un problema del genere non è possibile avere la spaziatura regolare tra le immagini SAR, quindi la griglia di campionamento 3D della scena non potrà mai essere regolare (vedi figura 1.9). Nel capitolo precedente si è definito il SAR come un sistema che permette di ottenere un'immagine 2D grazie ad un'antenna sintetica, assumendo però che nel tempo tra un'acquisizione e l'altra i

target di interesse non cambino (coerenza del target). Nella Tomografia SAR questo vincolo diventa ancora più stringente infatti tra un passaggio e l'altro del satellite possono passare anche mesi. Quello che avviene nel caso in cui il vincolo di coerenza non sia rispettato è che l'energia di una target non sempre va a concentrarsi in un unico pixel, quindi perde di intensità nell'immagine focalizzata. Fino al punto in cui, i target che risultano poco coerenti nel lasso di tempo delle osservazioni diventano parte del rumore.

La direzione perpendicolare al foglio è la direzione di movimento del satellite.

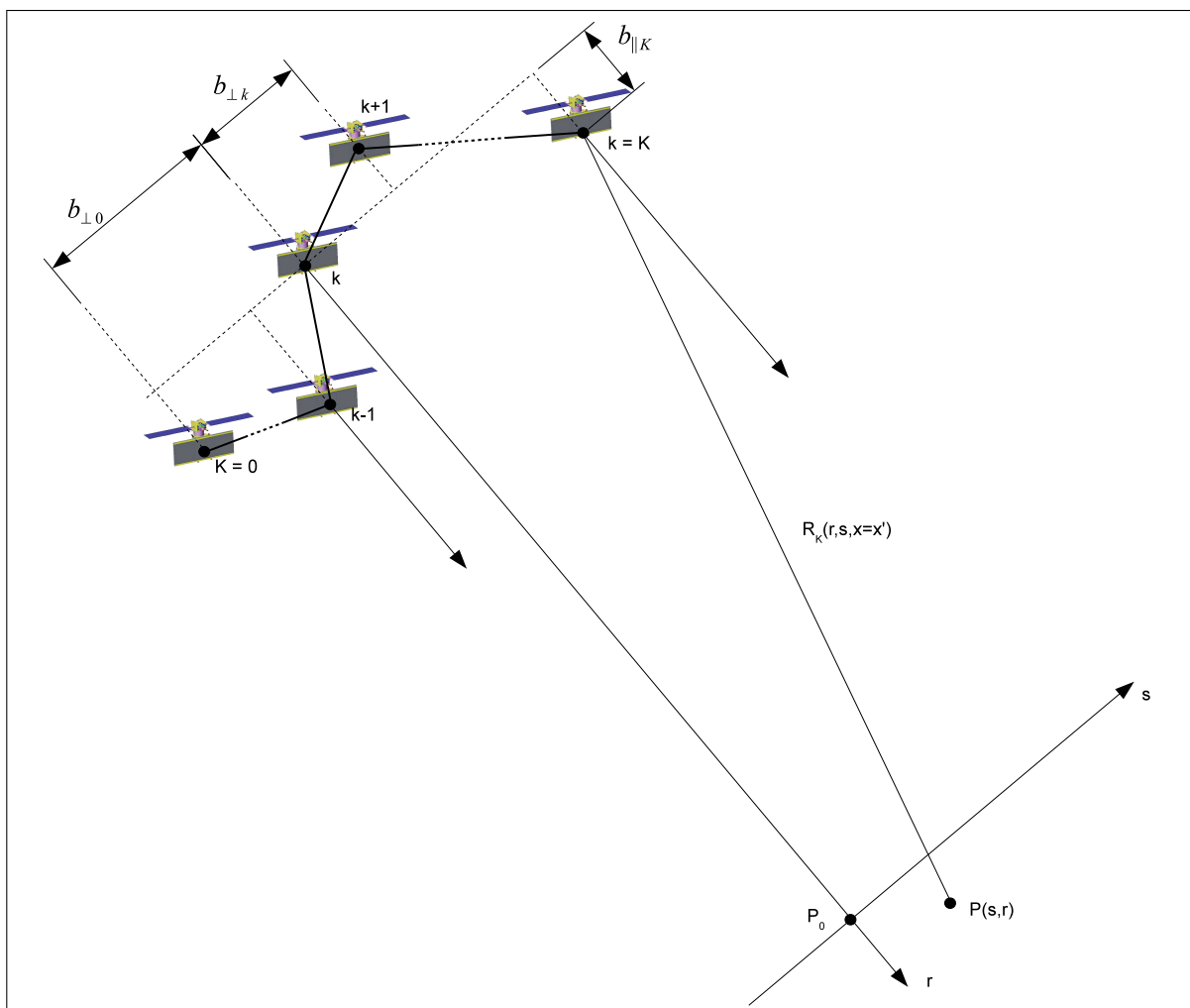


Figura 1.9: Impostazione problema diretto.

Dalla figura 1.9 definiamo:

- Una delle K acquisizioni viene chiamata *Master* e viene presa come riferimento per tutte le dimensioni dell'antenna sintetica (costruita in elevazione però).
- $b_{\perp k}$: k -esimo baseline normale, e corrisponde alla distanza tra la k -esima orbita del satellite rispetto a quella della *Master*, in direzione di cross-range.
- $b_{\parallel k}$: sono detti baseline paralleli, e definiscono lo scostamento tra k -esima rivoluzione e la linea ideale passante per la rivoluzione *Master* che definisce la direzione di sintesi dell'antenna.
- r : corrisponde allo slant-range del SAR 2D.
- s : cross-range del SAR 2D.

1.3.2 Coregistrazione.

Come già annunciato, nei sistemi SAR Multi-Pass (MP SAR), a differenza dei classici sistemi SAR, i dati a disposizione non sono stati acquisiti appositamente per questa tecnica, bensì è la tecnica stessa che deve cercare di adattarsi ai dati.

Tra le varie problematiche che affliggono i dati MP SAR (cioè immagini SAR 2D focalizzate in range e azimuth) c'è la mancanza di corrispondenza tra i pixel delle diverse immagini. Ovvero nelle diverse immagini i target da localizzare sono posizionati a differenti coordinate (azimuth e range).

Le tecniche di coregistrazione sono proprio pensate per risolvere questa problematica e rendere quindi le immagini utilizzabili da tecniche di tomografia SAR. In questa tesi non ci si dilungherà sulla trattazione di queste tecniche, ma uno dei modi più semplici per coregistrare due immagini SAR 2D potrebbe essere quello di localizzare su queste un certo numero di punti appartenenti agli stessi target e tramite tecniche di roto-traslazione e stretching fare in modo che si posizionino alle stesse coordinate.

1.3.3 Focalizzazione in elevazione.

Come già accaduto nel passaggio da una a due dimensioni, così nel passaggio a tre dimensioni i risultati del precedente capitolo diventano i nuovi dati da elaborare. Considerando che le dimensioni della scena osservata siano di molto inferiori rispetto della distanza tra il satellite e la scena stessa, possiamo assumere che la curvatura

del fronte d'onda sia trascurabile. Il segnale ricevuto dalla k-esima antenna sintetica in figura può essere modellato nel seguente modo:

$$\hat{\gamma}_k(r', x') = \int_{\Omega} \gamma(s, r, x) \cdot \text{sinc} \left(\frac{(r' - r)}{\rho_r} \right) \cdot \text{sinc} \left(\frac{(x' - x)}{\rho_a} \right) \cdot \exp(-j \frac{4\pi}{\lambda} R_k(s, r)) ds dr dx \quad (1.22)$$

Dove $\gamma(s, r, x)$ consiste nella funzione di riflettività della scena, in tutte e tre le dimensioni, introducendo quindi anche la dimensione di cross-range. Il termine esponenziale consiste nel termine di fase dovuto al tragitto di andata e ritorno percorso dall'onda e quindi $R_k(s, r)$ è la distanza tra l'k-esima acquisizione e il punto $P(r, s)$. ρ_r e ρ_a sono rispettivamente risoluzione in range e in azimuth del sistema SAR 2D con cui sono state generate le K immagini. Infine x' e y' sono le coordinate dell'immagine SAR focalizzata in slant-range e azimuth.

A partire dalla geometria in figura 1.9, possiamo definire la distanza tra il ciascun sensore e il target nel seguente modo:

$$\begin{aligned} R_k(s, r) &= \sqrt{(r - b_{\parallel k})^2 + (s - b_{\perp k})^2} \\ &\approx (r - b_{\parallel k}) + \frac{(s - b_{\perp k})^2}{(r - b_{\parallel k})} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Se consideriamo $\hat{\gamma}(s)$ come la funzione di riflettività convoluta con un seno cardinale 2D nelle direzioni di slant-range e azimuth, possiamo esprimere la funzione di direttività misurata dalla k-esima acquisizione per una coppia fissata di slant-range e azimuth nel seguente modo:

$$h_k = \int_{-a}^a \hat{\gamma}(s) \exp(-j \frac{4\pi}{\lambda} R_k(s)) ds \quad (1.24)$$

L'intervallo di integrazione (da $-a$ ad a) è il cross-range visibile, nella figura 1.7 corrisponde alla lunghezza del cilindro in direzione s . Si può notare che nell'equazione (1.25), nell'esponenziale sia presente un termine di fase quadratico comune a tutte le acquisizioni, che possiamo compensare moltiplicando per un esponenziale complesso con l'inverso del termine di fase di un'acquisizione che consideriamo di riferimento. Questa è quella che d'ora in poi chiameremo immagine *master*, e a cui verrà attribuito il baseline normale pari a zero, La scelta della *master* potrebbe ricadere su quell'acquisizione che è più vicina centro della schiera di sensori in direzione di elevazione. Questa fase viene anche definita *deramping* e si svolge nel seguente modo.

$$\begin{aligned}
g_k &= h_k \exp\left(j \frac{4\pi}{\lambda} R_k(0)\right) \\
&= \int_{-a}^a \gamma(s) \exp\left(-j \frac{4\pi}{\lambda} \frac{s^2}{2(r - b_{\parallel k})}\right) \cdot \exp\left(j \frac{4\pi}{\lambda} \frac{s \cdot b_{\perp k}}{r - b_{\parallel k}}\right) ds \quad (1.25)
\end{aligned}$$

Come si può notare rimane in ogni caso un termine di fase che dipende da s^2 , ma non dai $b_{\perp k}$. Quindi ora la incorporiamo nella fase della funzione di riflettività $\hat{\gamma}(s)$, ottenendo l'espressione seguente che è facilmente linearizzabile e di cui è evidente la profonda somiglianza con la trasformata di Fourier.

$$g_k = \int_{-a}^a \hat{\gamma}(s) \exp\left(j \frac{4\pi}{\lambda} \frac{b_{\perp k}}{r_0 - b_{\parallel k}} s\right) ds \quad (1.26)$$

Secondo un'ultima approssimazione il contributo dei baseline paralleli può essere trascurato e in questo modo le frequenze spaziali dipendono solo da quelli normali:

$$g_k = g(\zeta)|_{\zeta_k} \longrightarrow \zeta_k = \frac{2b_{\perp k}}{\lambda(r - b_{\parallel k})} \approx \frac{2b_{\perp k}}{\lambda r} \Rightarrow g_k = \int_{-a}^a \hat{\gamma}(s) \exp\left(j 2\pi \frac{2b_{\perp k}}{\lambda r_0} s\right) ds \quad (1.27)$$

Come già accaduto per il SAR 2D, è necessario fare i conti con il fatto che l'antenna sintetica è costituita da acquisizioni discrete, e si conseguenza essendo il processo di focalizzazione analogo ad una trasformata di Fourier, la stima della riflettività in elevazione sarà periodica. In realtà dato che il campionamento dell'antenna non è regolare, il problema dell'*aliasing* in elevazione è meno critico o comunque si trasforma in un problema di lobi laterali.

1.4 Le caratteristiche dei target.

Iniziamo a trattare in questo paragrafo la tipologia di target che siamo interessati a risolvere, infatti sulla base dell'ambientazione che si decide di analizzare si trovano target differenti. In questa tesi si è scelto di concentrarsi sulla tomografia SAR 3D in ambiente urbano.

Ci si trova di fronte ad un ambiente che è caratterizzato principalmente da target di tipo puntiforme [7], questo non vuol dire necessariamente che i target da localizzare siano effettivamente molto piccoli o a forma di punto. Piuttosto che la loro geometria sia fatta in modo tale che al ricevitore la somma delle onde riflesse da quel target

si vadano a concentrare in un numero limitato di pixel come accade in uno specchio curvo in ottica.

Se si prende per esempio un palazzo, target tipico in ambiente urbano, di questo risulterà molto evidente lo spigolo della cima e la base, per motivazioni diverse.

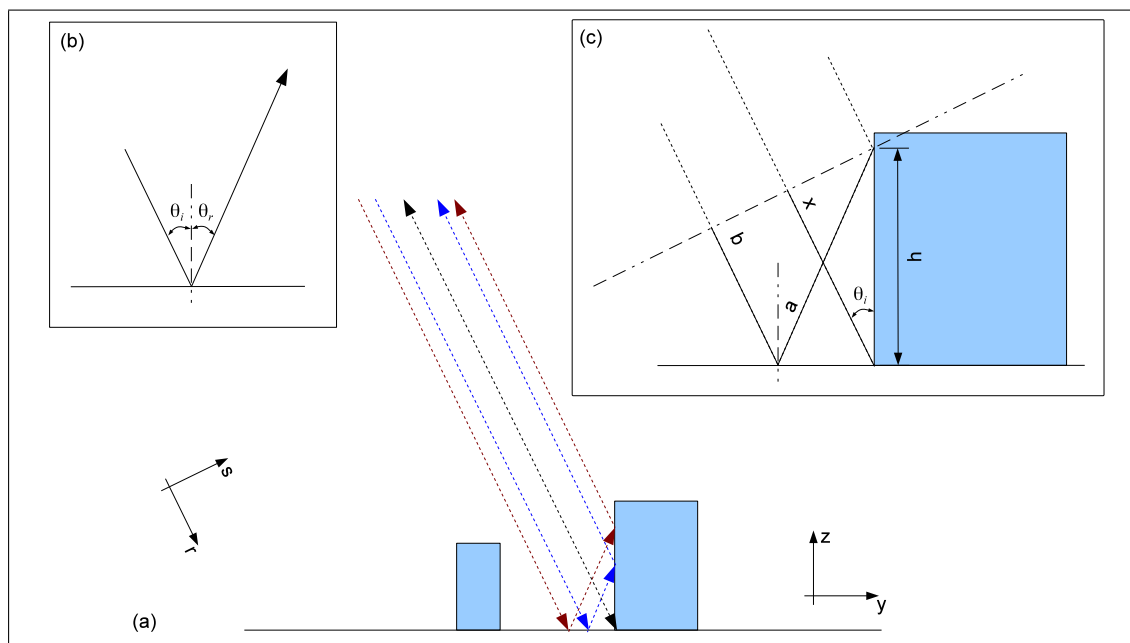


Figura 1.10: Formazione del target "base del palazzo".

Prendiamo ad esempio figura 1.10, in cui viene presentato un caso piuttosto comune di quello che avviene in ambiente urbano. Innanzitutto si assume che ci si trovi in campo sufficientemente lontano da poter considerare il fronte d'onda piano e quindi, i "raggi" di incidenza paralleli. Assumiamo, come avviene in ottica, che quando un'onda incontra una superficie viene riflessa con un angolo di riflessione pari all'angolo di incidenza, $\theta_i = \theta_r$ (figura 1.10 (b)).

Possiamo quindi dimostrare che la geometria del target in figura 1.10 (a) funziona come uno specchio concavo e quindi tutti i raggi che riflettono sul palazzo poi sul manto stradale (o viceversa) e infine tornano al radar percorrono tutti un percorso di pari lunghezza. Questo fa sì che lo slant-range di tutti questi eventi sia lo stesso, perciò le riflessioni si vanno a sommare tutte su un unico pixel, con uno slant-range pari a quello della base dell'edificio.

Per dimostrare che tutti i raggi di figura 1.10 (a) hanno la stessa lunghezza, e quindi sono localizzati dal Radar ad un unico slant-range, dobbiamo dimostrare che

$2x = a + b$ in figura 1.10 (c).

$$h = \frac{x}{\cos \theta_i}$$

$$a = \frac{h}{\cos \theta_i} = \frac{x}{\cos^2 \theta_i}$$

$$b = a \cdot \cos 2\theta_i = \frac{a \cdot \cos 2\theta_i}{\cos^2 \theta_i}$$

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{x + x \cdot \cos 2\theta_i}{\cos^2 \theta_i} \\ &= \frac{x(1 + \cos 2\theta_i)}{\cos^2 \theta_i} \\ &= \frac{x(1 + 2 \cos^2 \theta_i - 1)}{\cos^2 \theta_i} = 2x \end{aligned} \tag{1.28}$$

Da quello che è stato appena dimostrato deriva che nell'immagine focalizzata in elevazione ci sarà un pixel molto forte, dovuto a tutta la frazione del fronte d'onda "raccolta" dalla struttura appena descritta e concentrata in un unico punto in range.

Da notare però che questo avviene nel momento in cui l'onda incontra sul palazzo (e sul manto stradale) una superficie liscia e quindi l'onda viene riflessa. Quando invece l'onda incontra una discontinuità di dimensioni superiori alla lunghezza d'onda, come la cima di un palazzo, o il bordo di un balcone, si ha un effetto di diffrazione. Quando questo avviene trovandoci in condizioni di campo lontano è possibile modellare la discontinuità come una sorgente lineare che quindi irradia in tutte le direzioni un'onda cilindrica [3]. Tra le varie direzioni c'è ovviamente anche quella che riporta l'onda al satellite. Per questo motivo anche questo target è ben visibile nelle immagini focalizzate.

Le altre tipologie di target nella scena non portano ad avere una riflessione utile, cioè nella direzione di vista del satellite, oppure sono molto meno energetiche e vanno a far parte del rumore, diventando indistinguibili dai disturbi. Quindi ci si aspetta una soluzione con pochi punti molto forti immersi in un rumore di fondo, e di questa assunzione verrà tenuto conto del capitolo successivo

Capitolo 2

Le Tecniche di inversione dei dati

Dopo aver presentato nel capitolo precedente la geometria del problema, l'obiettivo di questo capitolo consiste nel fornire al lettore una serie di metodi che a partire da una raccolta di SLC restituiscano un vettore che stimi la funzione di riflettività in direzione di cross-range, con una certa risoluzione, per ciascuna coppia di coordinate azimuth e slant-range. Le tecniche vengono presentate in ordine dalla più semplice e classica alla più complessa e specifica. Ma per fare questo prima di tutto è necessario discretizzare le equazioni del capitolo precedente, in modo da poter ottenere i vettori di soluzioni tramite più comode equazioni matriciali.

2.1 Discretizzazione.

Nell'equazione 1.27 si è ottenuta la risposta all'impulso¹ del sistema. Questa comprende il viaggio di andata e ritorno dell'onda elettromagnetica, dal radar al target e poi di nuovo al radar. L'equazione è lineare in quanto l'integrale che descrive il problema diretto è un operatore lineare. Le immagini in ingresso, le SLC preparate per la tomografia SAR 3D, sono matrici 2D, in cui pixel corrispondono ai valori g_k dell'equazione 1.27, cioè il valore complesso della k-esima SLC per una certa coppia di coordinate slant-range/azimuth.

Si vuole a questo punto passare dall'espressione 1.27 che definisce la come si ricava ciascun pixel delle SLC a partire dalla funzione di riflettività continua nella variabile s , al sistema che genera tutto il vettore dei g_k a partire da un vettore discreto che descrive la funzione di riflettività solo in alcuni punti.

¹target isolato e puntiforme.

Per fare questo però è necessario passare dal modello continuo in s dell'equazione 1.27, alla forma seguente che si ottiene campionandolo con un passo δs :

$$g_k = \sum_{i=1}^M \gamma(s_i) \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp k}}{\lambda r_0} s_i\right) \quad (2.1)$$

Se ora mettiamo insieme tutti gli N vettori \mathbf{g}_k e le relazioni lineari che li descrivono avremo un sistema come quello che segue, in cui per comodità definiamo $\gamma(s_i) = \gamma_i$ come l' i -esimo elemento della funzione di riflettività:

$$\begin{cases} \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp 1}}{\lambda r_0} s_1\right) \gamma_1 + \dots + \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp 1}}{\lambda r_0} s_M\right) \gamma_M = g_1 \\ \vdots \\ \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp N}}{\lambda r_0} s_1\right) \gamma_1 + \dots + \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp N}}{\lambda r_0} s_M\right) \gamma_M = g_N \end{cases} \quad (2.2)$$

Di conseguenza il problema generale da risolvere é riconducibile a trovare la soluzione del sistema lineare qui sopra. Come è ben noto c'è una profonda relazione tra sistemi lineari e equazioni matriciali, quindi il problema diretto prende una forma analoga a quella che segue:

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g} \quad (2.3)$$

Con

•

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp 1}}{\lambda r_0} s_1\right) & \dots & \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp 1}}{\lambda r_0} s_M\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp N}}{\lambda r_0} s_1\right) & \dots & \exp\left(j2\pi \frac{2b_{\perp N}}{\lambda r_0} s_M\right) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

- \mathbf{g} corrisponde al vettore contenente tutti gli N campioni ricevuti dai sensori dell'antenna sintetica ad un certo istante (cioè per le assunzioni fatte ad un certo range r_0).
- $\boldsymbol{\gamma}$ un vettore da M elementi che rappresenta la funzione di riflettività del terreno per quel range, proiettata in direzione s e discretizzata.

Da un punto di vista puramente teorico il possiamo ottenere il vettore soluzione $\boldsymbol{\gamma}$ semplicemente invertendo la relazione 2.3, cioè:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{g} \quad (2.5)$$

Questa relazione è sempre vera nel momento in cui la \mathbf{F}^{-1} esiste, e questo in generale non è vero. Le condizioni di esistenza della matrice inversa di \mathbf{F} sono le seguenti:

- \mathbf{F} deve essere quadrata, cioè avere lo stesso numero di colonne e di righe.
- Il determinante di \mathbf{F} deve essere diverso da 0.

Per quello che è il nostro problema possiamo vedere quest'ultima condizione come la necessità che tutte le linea (riga o colonna) della matrice siano linearmente indipendenti tra loro. Come vedremo meglio in seguito le condizioni appena citate non sono praticamente mai soddisfatte nei problemi di interesse, soprattutto la prima delle due.

2.1.1 Multi-Pass SAR Imaging

Nel particolare caso del Multi-Pass SAR Imaging, il numero di tracce acquisite che definisce la dimensione dei dati del nostro problema (dimensione di \mathbf{g}), è inferiore alla dimensione della soluzione del sistema lineare (dimensione di $\boldsymbol{\gamma}$). Questo non vuol dire che le soluzioni vere e proprie, cioè la posizione dei target e il loro valore di riflettività, siano di più delle osservazioni effettuate. Ma per come viene costruito lo stimatore il vettore $\boldsymbol{\gamma}$ ha molti più valori del vettore \mathbf{g} , ci si aspetterà però che la maggior parte di questi sarà occupata da zeri, lobi laterali o comunque rumore.

Dalla teoria un problema del genere ($N < M$) viene definito sotto-determinato, e non ha soluzioni in senso classico, per il fatto che appunto la matrice inversa non esiste. Possiamo però ridefinire il concetto di soluzione, nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\gamma} = \phi(\mathbf{g}) \quad \text{con} \quad \mathbf{F}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g} \quad (2.6)$$

Con $\phi(\mathbf{g})$ una generica trasformazione del vettore \mathbf{g} non necessariamente esprimibile in forma chiusa. Ridefinendo in questo modo il problema le soluzioni non solo esistono ma sono infinite. Se non sono disponibili delle informazioni a priori sulla soluzione da ottenere, ciascuna delle infinite soluzioni possibili è equivalente. Una delle metodologie maggiormente utilizzate per la scelta della soluzione, anche a causa del fatto che può essere espressa in forma chiusa, consiste nel scegliere la soluzione la cui norma \mathcal{L}_2 è minima. Ma questo non è necessariamente il metodo migliore in ogni caso, vedremo nel seguito di questo capitolo come altri approcci o la minimizzazione di norme differenti possano dare risultati interessanti.

Uno degli obiettivi di questa tesi è di cercare tecniche di inversione dei dati che consentano di scendere al di sotto della risoluzione indicata nei primi capitoli, e questo

applicato in particolar modo alla tomografia SAR 3D. Quindi nelle trattazioni delle diverse tecniche che seguono, s (elevazione) é la variabile utilizzata come variabile indipendente per la soluzione dell'inversione, e la sua spaziatura δs , resterà inferiore alla risoluzione teorica del sistema per poter osservare gli effetti sulla risoluzione delle diverse tecniche.

In letteratura sono presenti differenti modi di rapportarsi a questo tipo di problema, ad esempio Fornaro propone [6], di utilizzare l'inversione tramite SVD². Con l'obbiettivo di ridurre i lobi laterali dovuti alla spaziatura irregolare tra i baseline, elimina i valori singolari piú piccoli di un certo valore, rispetto al valore singolare massimo, limitando cosí il condizionamento della matrice ad un certo valore. Assumendo che la soluzione sia sparsa quando rappresentata in una base ortogonale come le funzioni di Fourier, Bamler propone una tecnica basata sul Compressive Sensing [11], che punta a minimizzare la norma ℓ_1 della soluzione.

2.2 Beamforming

La tecnica di riferimento molto utilizzata, anche per la sua estrema semplicità, nell'ambito del radar ad apertura sintetica é il Beamforming. Possiamo vederla derivare direttamente dal modello continuo in equazione 1.27. Essendo quest'ultima interpretabile come trasformata di Fourier della funzione di riflettività continua $\hat{\gamma}(s)$. La sua funzione inversa che permette di ottenere $\hat{\gamma}(s)$ a partire da (\mathbf{g}) , non é altro che la relativa anti-trasformata di Fourier. Dalle ben note proprietà di invertibilità della trasformata di Fourier.

Le tecniche che verranno presentate in seguito faranno tutte riferimento alla risoluzione in cross-range che si ottiene tramite questa tecnica. Il Beamforming ha una risoluzione che deriva direttamente dalla fisica del problema, cioè la minima distanza in cross-range distinguibile dal Beamforming è pari a:

$$\rho_e = \frac{r_0 \lambda}{2L_e} \quad (2.7)$$

Dove r_0 è lo slant-range fissato, λ la lunghezza d'onda della portante in trasmissione e L_e la larghezza massima dell'apertura sintetica in direzione di elevazione. Da notare l'analogia con la risoluzione in azimuth del SAR 2D presentata nel capitolo precedente (1.9).

Nel passaggio dal continuo al discreto si parla di trasformata discreta di Fourier (vedi 2.1). La trasformata discreta di Fourier gode a sua volta di alcune particola-

²Singular Value Decomposition

rità, come quella di essere realizzabile tramite un operatore matriciale particolare, la matrice di Fourier (F), la stessa matrice descritta dall'equazione 2.4.

A questo punto è necessario soffermarsi un attimo sulla matrice $\mathbf{F}^*\mathbf{F}$,³ in quanto molte caratteristiche del problema possono essere lette da come è fatta questa matrice. Di seguito alcuni limiti e problematiche della focalizzazione vengono presentate riferendosi a caratteristiche della matrice $\mathbf{F}^*\mathbf{F}$. Possiamo vedere questa matrice come l'operatore che trasforma le soluzioni vere in quelle stimate (a meno del rumore), a causa di come è stato impostato il problema diretto (matrice F). Per rendere tutto più chiaro alcuni esempi di matrice $\mathbf{F}^*\mathbf{F}$ vengono visualizzati in figura 2.1.

La matrice F nel momento in cui i valori delle frequenze discrete $\zeta_k = \frac{2b_{\perp}k}{\lambda r_0}$ fossero equi-spaziati, e i valori di s fossero spaziati esattamente della risoluzione, sarebbe una matrice quasi-ortogonale [5]. Una matrice quasi-ortogonale è una matrice per cui vale: $\mathbf{F}^*\mathbf{F} = \text{diag}(N, N, \dots, N)$, in pratica una matrice diagonale (esempio in Figura 2.1 (a)). È semplice notare come questo ci possa tornare utile nella fase di inversione del problema lineare 2.3. Infatti in questo caso l'inversione si potrebbe ottenere semplicemente pre-moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1}{N}\mathbf{F}^*$ nel modo seguente:

$$\frac{1}{N}\mathbf{F}^*\mathbf{F}\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{N}\mathbf{F}^*\mathbf{g} = \boldsymbol{\gamma}_b \quad (2.8)$$

L'equazione 2.8 non è altro che la tecnica del *Beamforming*, cioè dopo aver linearizzato il problema diretto e averlo scritto in modo matriciale, si applica il suo Hermitiano ai dati.

Dato che i valori del vettore $\gamma(s_i)$ hanno una spaziatura inferiore rispetto alla risoluzione dettata dall'apertura dell'antenna sintetica, il risultato è che $\mathbf{F}^*\mathbf{F}$ non è nemmeno più diagonale ma ciascuna riga viene convoluta per un seno cardinale, il cui lobo principale ha la larghezza pari alla risoluzione teorica del sistema (vedi l'equazione 1.9). Quindi anche in condizioni di assenza di rumore, se ho definito in questo modo il problema diretto, la soluzione stimata di un target impulsivo è un seno cardinale centrato nella posizione dell'impulso.

Possiamo spiegare questo analogamente a quanto succede nella trasformata discreta di Fourier, se in ingresso ho M campioni e in uscita ne voglio N (con $N > M$). In questo caso posso usare comunque l'operatore di trasformazione quadrato $N \times N$ ma solo dopo aver effettuato lo zero-padding sul vettore da trasformare. Lo zero-padding può essere visto come una finestrazione del segnale con una finestra rettangolare, e quindi una convoluzione con un seno cardinale nel dominio trasformato.

³l'operatore $[\cdot]^*$ che corrisponde a fare l'Hermitiano della matrice (Trasposto e complesso-coniugato)

I problemi aumentano nel momento in cui i baseline normali $b_{\perp k}$ invece che essere equi-spaziati sono irregolari, situazione ricorrente nella focalizzazione in elevazione del SAR satellitare (in cui i baseline normali sono le spaziatore tra le orbite). In questo caso il rapporto tra i lobi laterali e lobo principale del seno cardinale tende ad aumentare, come si può vedere in Figura 2.1 (c), questo porta ad un minor contrasto tra target e rumore.

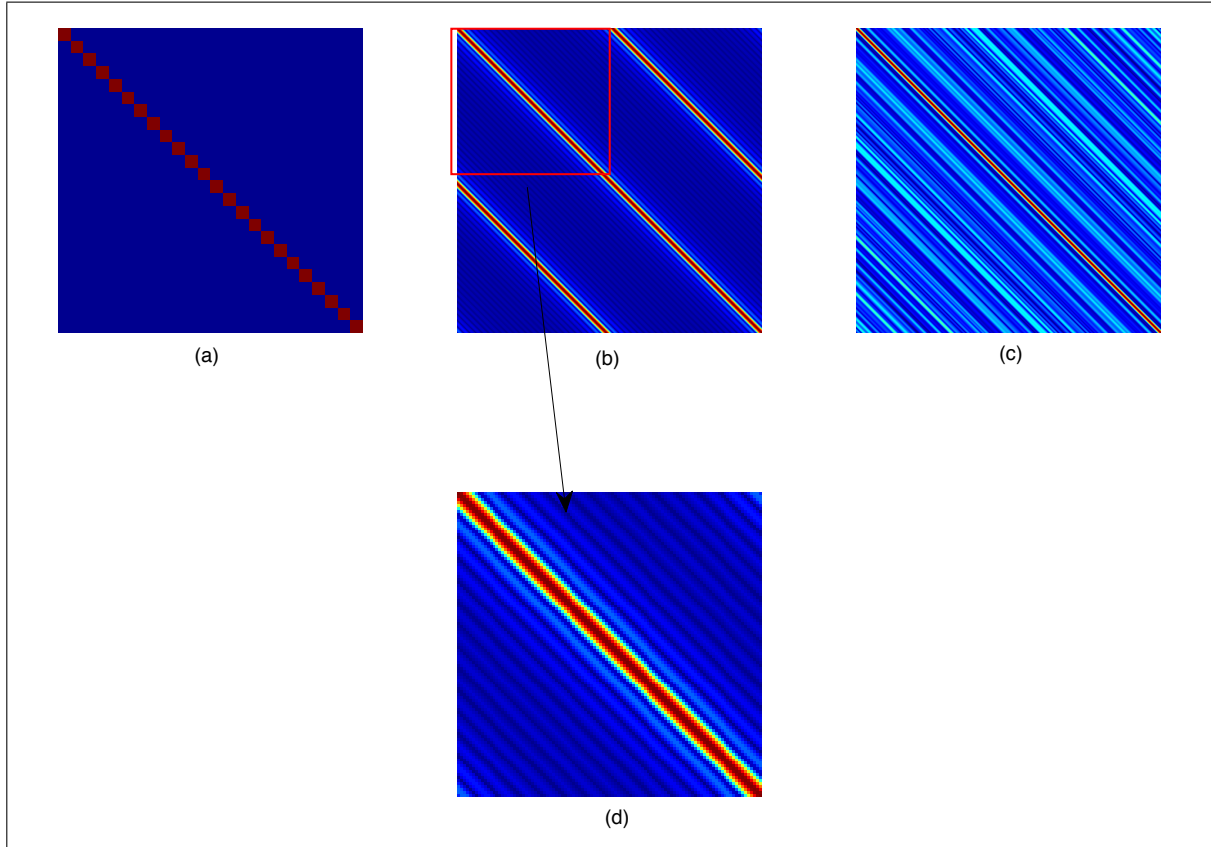


Figura 2.1: Matrici $\frac{1}{N}\mathbf{F}^*\mathbf{F}$. a) Caso in cui F è quadrata ($s_{max} = \frac{r_0 \cdot \lambda}{4 \cdot B_{\perp}}$), $\delta s = \rho_e$ e i baseline sono regolari. b) Caso in cui F è rettangolare ($s_{max} > \frac{r_0 \cdot \lambda}{4 \cdot B_{\perp}}$), $\delta s < \rho_e$ e i baseline sono regolari. c) Caso in cui F è rettangolare ($s_{max} \leq \frac{r_0 \cdot \lambda}{4 \cdot B_{\perp}}$), $\delta s < \rho_e$ e i baseline sono non regolari. d) Caso in cui F è rettangolare ($s_{max} \leq \frac{r_0 \cdot \lambda}{4 \cdot B_{\perp}}$), $\delta s < \rho_e$ e i baseline sono regolari.

Oltre ai vantaggi della trasformata discreta di Fourier, il Beamforming eredita i limiti dovuti alla discretizzazione. Se osserviamo in figura 2.1 (b), é ben visibile

il problema dell'aliasing, cioè avendo campionato la funzione di riflettività la sua trasformata è diventata periodica, limitando in questo modo il massimo coss-range non ambiguo visibile.

Per evitare equivocazione il vettore s non deve superare un certo valore dettato dalla spaziatura tra i baseline normali, secondo la relazione:

$$s_{max} < \frac{r_0 \cdot \lambda}{4 \cdot B_{\perp}} \quad (2.9)$$

Con

- r_0 che corrisponde al range a cui si sta facendo l'analisi.
- λ la lunghezza d'onda a cui è stato modulato il sistema.
- B_{\perp} La spaziatura tra i baseline normali.

Il limite dovuto all'aliasing, viene presentato in questo capitolo ma si ripresenta anche nei metodi presentati nei paragrafi successivi. Questo non vale per quanto riguarda la risoluzione della soluzione e i lobi laterali nel caso di baseline non equispaziati. Infatti le alcune tecniche presentate riescono a ridurre l'ampiezza dei lobi laterali, rendendo la soluzione più leggibile, e riducono la larghezza del lobo centrale, permettendo di distinguere due target anche al di sotto delle risoluzione del Beamforming.

2.3 Inversione ai minimi quadrati.

Le tecniche che seguono sono due tecniche classiche accomunate dalla metodologia con cui si costruisce lo stimatore. Entrambe le tecniche infatti ottengono $\phi(\mathbf{g})$ minimizzando la norma ℓ_2 o della soluzione o dello scostamento tra stimatore e soluzione vera. Inoltre entrambe le tecniche sono tecniche di inversione di tipo diretto, cioè la soluzione si ottiene pre-moltiplicando il dato per un operatore matriciale.

2.3.1 Pseudoinversa

Trascurando per un attimo le peculiarità del problema diretto, se trattiamo l'inversione del problema senza sapere nulla sulla matrice F se non che rappresenta un problema sotto-dimensionato.

Partiamo quindi dalla generica definizione di inversione definita in 2.6, e prendiamo dalla Letteratura un metodo classico per la risoluzione di sistemi sotto-determinati

[9]. Partendo da un punto di vista puramente algebrico trovare la soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati, diventa la minimizzazione di una forma quadratica con vincoli.

$$\min_{\gamma} \{\gamma^* \gamma\} \quad \text{con} \quad \mathbf{F}\gamma = \mathbf{g} \quad (2.10)$$

Cerchiamo quindi il minimo di $\gamma^* \gamma$ che soddisfi $\mathbf{F}\gamma = \mathbf{g}$. In realtà quindi avendo cambiato il significato di *soluzione*, quello che avviene è che il sistema non ammette più infinite soluzioni, ma nuovamente una sola, cioè tra tutti quei vettori γ che soddisfano $\mathbf{F}\gamma = \mathbf{g}$ quella che ha la minima norma ℓ_2 . La soluzione si trova in modo standard tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il risultato ci permette di ottenere una *Pseudoinversa* del problema diretto che viene anche chiamata in gergo, *inversa destra*.

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{F}\mathbf{F}^*)^{-1}\mathbf{g} = \bar{\gamma} \quad (2.11)$$

Dove $\bar{\gamma}$ è la soluzione nel senso dei minimi quadrati, e indicheremo d'ora in poi $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}^*(\mathbf{F}\mathbf{F}^*)^{-1}$ *Pseudoinversa*. La definizione inversione ai minimi quadrati, deriva dal fatto che si minimizza $\gamma^* \gamma$ e cioè la norma \mathcal{L}_2 di γ .

Introduciamo nel capitolo dell'inversione ai minimi quadrati un vincolo nella scelta del massimo cross-range ottenibile dall'inversione tramite \mathbf{F}^+ . La scelta della massima coordinata s influenza il condizionamento della matrice \mathbf{F} . Possiamo spiegare questa situazione in maniera intuitiva dicendo che se s non copre un range di elevazione sufficiente, a prescindere del δs , le colonne della matrice 2.4 tendono ad essere tutte molto simili, e questo conduce ad un cattivo condizionamento della matrice. Infatti tanto più due righe sono simili tanto più ci si avvicina alla situazione in cui il rango della matrice sia inferiore alla sua dimensione minima.

Questa tecnica non porta miglioramenti rispetto al *Beamforming* né in termini di risoluzione né per quanto riguarda l'impatto dei lobi laterali sulla chiarezza dell'immagine radar, è però punto di partenza per tecniche più complesse. Si rimanda al capitolo sulle simulazioni per esempi di soluzione.

2.3.2 Linear Minimum Mean Square Error - LMMSE

Spesso prima ancora di iniziare a invertire i dati, possono essere fatte delle supposizioni su alcune caratteristiche della soluzione. Nell'ambito del telerilevamento, come in altri ambiti, la soluzione del problema inverso rappresenta una grandezza fisica (riflettività del terreno, umidità, permeabilità magnetica ...). Nel nostro caso ad

esempio dato che si vuole stimare la funzione di riflettività della superficie terrestre, non avrebbe senso avere dei valori della soluzione posizionati al di sotto della superficie.

Chiamiamo questo tipo di informazioni “*informazioni a priori*”. Ci accingiamo quindi a trattare il problema inverso in modo probabilistico [4]. Lo stimatore LMMSE (vedi [9]) é uno stimatore bayesiano che sfruttando anche le informazioni a-priori cerca di minimizzare l’errore quadratico medio (MSE).

$$MSE = E[(\gamma - \phi(\mathbf{g}))^*(\gamma - \phi(\mathbf{g}))] = \int \int (\gamma - \phi(\mathbf{g}))^*(\gamma - \phi(\mathbf{g}))p[\mathbf{g}, \gamma]d\mathbf{g}d\gamma \quad (2.12)$$

Risulta necessario richiamare il teorema di Bayes e le grandezze che lo compongono.

Questo che segue é il teorema di Bayes:

$$p[\gamma|\mathbf{g}] = \frac{p[\mathbf{g}|\gamma]p[\gamma]}{p[\mathbf{g}]} \quad (2.13)$$

Inoltre é noto che:

$$p[\mathbf{g}, \gamma] = p[\mathbf{g}|\gamma]p[\gamma] \quad (2.14)$$

Definiamo quindi gli elementi che lo compongono:

- $p[\mathbf{g}, \gamma]$: detta densità di probabilità congiunta, e corrisponde alla probabilità che il termine noto assuma il valore \mathbf{g} e la soluzione il valore γ .
- $p[\mathbf{g}]$ e $p[\gamma]$: sono le densità di probabilità marginali rispettivamente di dato e soluzione.
- $p[\gamma|\mathbf{g}]$: densità di probabilità condizionata della soluzione γ supponendo di aver ricevuto il dato \mathbf{g} . Questa viene anche definita in gergo, densità di probabilità a posteriori.
- $p[\mathbf{g}|\gamma]$: densità di probabilità condizionata dell’osservazione \mathbf{g} di essere stata generata dal modello γ . A sua volta, nell’ambito del problema inverso, questa é chiamata funzione di *verosimiglianza*, o *likelihood*.

Date le equazioni 2.14 e 2.13, possiamo esprimere l’errore quadratico medio in funzione dalla densità di probabilità posteriori:

$$MSE = \int \left[\int (\gamma - \phi(\mathbf{g}))^*(\gamma - \phi(\mathbf{g}))p[\gamma|\mathbf{g}]d\gamma \right] p[\mathbf{g}]d\mathbf{g} \quad (2.15)$$

Imponendo a zero la derivata del valore quadratico medio rispetto a ϕ ottengo la sua minimizzazione e quindi la forma dello stimatore MMSE.

$$\phi_{MMSE} = \int \gamma p[\gamma|\mathbf{g}] d\gamma \quad (2.16)$$

Abbiamo quindi dimostrato che lo stimatore MMSE é riconducibile ad una media condizionata.

Grazie l'espressione della media condizionata per variabili casuali gaussiane:

$$E[\gamma|\mathbf{g}] = \mu_\gamma + \mathbf{C}_{\gamma g} \mathbf{C}_{gg}^{-1} (\mathbf{g} - \mu_g) \quad (2.17)$$

A questo punto possiamo sfruttare il fatto di aver linearizzato il problema per semplificare ulteriormente lo stimatore:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{F}\gamma + \mathbf{w} & \gamma &\sim N(\mu_\gamma, \sigma_\gamma^2) \\ & & \mathbf{w} &\sim N(0, \sigma_w^2) \\ \mu_g &= \mathbf{F}\mu_\gamma \\ \mathbf{C}_{\gamma g} &= \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \mathbf{F}^* \\ \mathbf{C}_{gg} &= \mathbf{F} \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \mathbf{F}^* + \mathbf{C}_{ww} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\gamma_{LMMSE} = \mu_\gamma + \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \mathbf{F}^* (\mathbf{F} \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \mathbf{F}^* + \mathbf{C}_{ww})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{F}\mu_\gamma)$$

Con

- μ_γ : media della soluzione.
- $\mathbf{C}_{\gamma\gamma}$: matrice di covarianza della soluzione.
- \mathbf{C}_{ww} : matrice di covarianza del rumore additivo.

Lo stimatore cosí ottenuto é in forma chiusa e lineare ma a differenza della *Pseudoinversa* algebrica permette di arricchire il risultato con informazioni a priori sul rumore e sulla soluzione. Quindi la tecnica precedente puó essere vista come un caso particolare della tecnica attuale. Cioé il caso in cui non siano disponibili le informazioni a-priori su dato e modello.

2.4 Inversione ai minimi quadrati con regolarizzazione iterativa

La tecnica che segue ha come punto di partenza un caso particolare dello stimatore LMMSE. Mettendo insieme il risultato puramente algebrico ottenuto dell'operatore *Pseudoinversa*, a quella che invece é la trattazione probabilistica del problema inverso, ma si suppone di non conoscere le caratteristiche del rumore additivo. Contemporaneamente si fanno delle particolari assunzioni sulla tipologia di soluzione che si vuole ottenere. Partiamo da voler risolvere lo stesso problema descritto nell'equazione 2.10, introducendo però il caso in cui la soluzione del problema (γ) sia una variabile casuale multi-variata e quindi in quanto tale dotata di un vettore di medie e di una matrice di covarianza. Ovviamente lo stesso \mathbf{g} in quanto prodotto di una trasformazione lineare di γ é da considerarsi a sua volta una variabile casuale.

A partire quindi dalla situazione generale dell'inversione ai minimi quadrati probabilistica, andiamo ora a definire le caratteristiche del caso particolare da cui si parte per costruire questo metodo. Facendo riferimento quindi alla formula 2.18:

- Si suppone di non avere informazioni a-priori sulla media del modello (funzione di direttività): μ_γ è posto uguale ad un vettore di zeri.
- Si suppone di non avere informazioni a-priori sulla varianza rumore additivo: C_{ww} è posto uguale alla matrice nulla.

Dalle assunzioni appena fatte l'operatore diventa:

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \mathbf{F}^* (\mathbf{F} \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \mathbf{F}^*)^{-1} \quad (2.19)$$

Con $E[\gamma\gamma^*] - E[\gamma]E[\gamma^*] = \mathbf{C}_{\gamma\gamma}$ per definizione la matrice di covarianza della soluzione, ma $E[\gamma]$ è stato assunto pari al vettore nullo. Facciamo ora un'assunzione di incorrelazione tra i diversi campioni della soluzione, quindi tra le posizioni dei target. Questo comporta che la sua matrice di covarianza sia diagonale. In particolare consideriamo di voler costruire la matrice di covarianza campionaria, i campioni sulla diagonale sono il modulo al quadrato dei campioni di una soluzione di partenza.

Usiamo come punto di partenza la soluzione conservativa (anche se a bassa risoluzione) del *Beamforming* (γ_b). Successivamente aggiornando i pesi della matrice di covarianza $\mathbf{C}_{\gamma\gamma}^k$ con il modulo quadro di ciascun campione della precedente soluzione, si calcola la nuova soluzione. Qui di seguito proponiamo il metodo iterativo.

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^0 = \text{diag}(|\gamma_b|^2) \\ \gamma^k = \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{(k-1)} \mathbf{F}^* (\mathbf{F} \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{(k-1)} \mathbf{F}^*)^{-1} \mathbf{g} \\ \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^k = \text{diag}(|\gamma^k|^2) \end{cases} \quad (2.20)$$

la funzione *diag*, presente nella formula precedente, è presa in prestito dal linguaggio di programmazione Matlab e corrisponde a posizionare gli elementi di un vettore sulla diagonale di una matrice diagonale. Tipiche soluzioni ottenute con questo metodo sono visibili nel capitolo riservato alle simulazioni. Ma data la sua natura iterativa questa tecnica non può più essere definita una tecnica ai minimi quadrati. Si avvicina invece alla tecnica iterativa descritta nella prossima sezione, e infatti le soluzioni ottenute dalle simulazioni saranno simili.

2.5 Iteratively Re-weighted Least Square - IRLS

Il fatto che si è parlato esclusivamente di minimizzazione della norma \mathcal{L}_2 , non vuol dire che sia l'unica soluzione e neppure che sia necessariamente la migliore. Infatti questo in particolare non è vero nel momento in cui si vuole imporre che la soluzione del sistema sia *sparsa*. Come già accennato le soluzioni possibili sono infinite, e se non abbiamo informazioni ulteriori nessuna di queste è meglio di un'altra. A questo punto introduciamo un'informazione a-priori che è possibile utilizzare per andare a restringere il range di soluzioni ottimali per il nostro scopo, cioè stimare la funzione di riflettività a terra. In particolare possiamo assumere la funzione di riflettività in ambito urbano, discretizzata con un passo dell'ordine del metro, come un vettore in cui la maggior parte degli elementi è pari a zero. Definiamo quindi che un vettore ha *sparsità* k (o è *k-sparso*) quando ha al massimo k elementi diversi da zero.

Prima di proseguire con la descrizione del metodo conviene introdurre il concetto di *Norma*. La *Norma* in matematica è un operatore che prende in ingresso un vettore e restituisce uno scalare. Fondamentalmente la norma effettua una misura del vettore in ingresso e come già accennato sono possibili tanti modi per "misurare" un vettore. Il modo più conosciuto è la norma euclidea, o norma quadratica (o norma \mathcal{L}_2), il suo "successo" è dovuto anche al fatto che se i vettori sono coordinate spaziali, la norma euclidea corrisponde alla lunghezza del vettore.

Di seguito presentiamo la formula che si usa per il calcolo della generica norma \mathcal{L}_p :

$$\|\mathbf{z}\|_{\ell_p} := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^M |z_i|^p \right)^{1/p}, & 0 < p < \infty \\ \max_{i=1, \dots, M} |z_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (2.21)$$

Intuitivamente per capire cosa comporta scegliere una norma rispetto ad una altra si pensi di scegliere una caso limite $p = 0$: in questo caso gli z_i nella sommatoria vengono tutti posti a 1 quando sono diversi da zero (in pratica conta i campioni diversi da zero), ma quindi minimizzare la norma \mathcal{L}_0 vorrà dire lasciare attivi solo quei campioni che sono strettamente necessari, da qui la sparsità.

Nota a priori la sparsità della soluzione potremmo cercare in modo esaustivo tra tutti i vettori k -sparsi quello che minimizza il residuo⁴ in senso dei minimi quadrati [8]. Definendo z un generico vettore dello stesso spazio delle righe di F , T una delle possibili liste formate da k indici di colonna di F , con quindi $k < M$ e quindi F_T costruita con F ma ponendo a zero le colonne che non appartengono a T , avremo:

$$\gamma^T := \operatorname{argmin}_z \|\mathbf{F}_T \mathbf{z} - \mathbf{g}\|_{\ell_2} \quad (2.22)$$

Ma questo metodo risulta eccessivamente oneroso e comunque richiede che sia definita la sparsità di γ . In alternativa possiamo pensare di minimizzare la norma \mathcal{L}_p (2.21) di z con $1 \leq p \leq 0$. Si noti che per definizione una soluzione che minimizza la norma \mathcal{L}_0 corrisponde ad una soluzione del tipo “ON/OFF”, quindi una soluzione che almeno in teoria rispetta le caratteristiche di sparsità richieste dalla soluzione.

Una delle fondamentali motivazioni che ha portato l’inversione ai minimi quadrati ad essere una delle tecniche più usate è sicuramente la sua semplicità e il fatto che ne esista una formulazione in forma chiusa (basta moltiplicare la *Pseudoinversa* per il vettore dei termini noti e si ottiene la soluzione). Non esiste infatti una formulazione del genere che risolva un sistema lineare minimizzando le norme diverse dalla \mathcal{L}_2 . Questo non vuol dire però che in letteratura non siano presenti tecniche che svolgono questo compito. In particolare in questo capitolo viene introdotta una di queste, una tra le più famose: l’**Iteratively Re-weighted Least Square**. L’**IRLS**, è una tecnica iterativa che permette di risolvere lo stesso problema di minimizzazione vincolata già vista nei capitoli precedenti con la differenza che la funzione da minimizzare diventa $\|\gamma'\|_{\ell_p}$ con $0 < p \leq 2$.

$$\gamma' = \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{g} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{c} \quad (2.23)$$

Con \mathbf{F}^+ la Pseudoinversa ai minimi quadrati descritta nel capitolo 2.3.1, g è il vettore contenente gli N numeri complessi presi dalle N immagini SLC per un fissato valore di slant-range e azimuth, \mathbf{N} la matrice che rappresenta lo spazio nullo della matrice \mathbf{F} , cioè le direzioni non coperte dalla matrice F che essendo rettangolare può

⁴Il termine residuo è ancora derivante dalla terminologia del problema inverso e definisce la distanza in una certa norma tra dato reale ricevuto e dato ricalcolato a valle dell’inversione.

coprire un numero di direzioni ortogonali pari alla sua dimensione minore. Mentre \mathbf{c} sono i pesi da applicare a ciascuna direzione dello spazio nullo.

Possiamo dimostrare che la soluzione trovata con questo metodo onora sempre il dato, cioè che $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{g}$, pre-moltiplicando tutti i termini della 2.23 con la matrice \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\gamma}' = \underbrace{\mathbf{F}\mathbf{F}^*(\mathbf{F}^*\mathbf{F})^{-1}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g} - \underbrace{\mathbf{F}\mathbf{N}}_{\mathbf{0}} \cdot \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{g}$$

Con \mathbf{I} la matrice identità e $\mathbf{0}$ la matrice nulla.

Concettualmente vuol dire reintrodurre nella soluzione lo spazio scartato dalla tecnica ai minimi quadrati e trovare quindi quei valori di \mathbf{c} che invece permettono di minimizzare la norma \mathcal{L}_p . Trovato il vettore \mathbf{c} ottimale tramite l'equazione 2.23 è semplice calcolare $\boldsymbol{\gamma}'$. Per ottenere la minimizzazione di questo l'equazione risolviamo il seguente sistema lineare:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{g} \quad (2.24)$$

A questo punto che abbiamo il sistema da risolvere, possiamo introdurre il metodo dell'IRLS [1]. L'equazione normale che ci permette di trovare l'equazione di aggiornamento deriva dall'aver fissato a zero la derivata della definizione di norma \mathcal{L}_p . Definiamo per comodità il vettore $\mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{g}$ come $\hat{\mathbf{g}}$ e per risolvere il problema in equazione 2.24, possiamo minimizzare la norma \mathcal{L}_p del residuo:

$$\mathbf{L}_p(r) = \left(\sum_{i=1}^N |\hat{g}_i - \sum_{j=1}^M N_{ij}c_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.25)$$

Per trovare il valore di c che minimizza la norma sopra descritta, ne calcoliamo prima la derivata e poi la uguagliamo a zero:

$$\frac{\partial \mathbf{L}_p(r)}{\partial c_k} = -p \sum_{i=1}^N N_{ik} \text{sign}(r(i)) |r(i)|^{p-1} = 0$$

dove $r(i) = \hat{g}_i - \sum_{j=1}^M N_{ij}c_j$ corrisponde all' i -esima componente del residuo.

$$\frac{\partial \mathbf{L}_p(r)}{\partial c_k} = -p \sum_{i=1}^N N_{ik} r(i) |r(i)|^{p-2} = 0$$

Da questa e sostituendo $r(i)$ con la sua definizione otteniamo:

$$\sum_{i=1}^N N_{ik} |r(i)|^{p-2} \left(\sum_{j=1}^M N_{ij} c_j \right) = \sum_{i=1}^N N_{ik} |r(i)|^{p-2} \hat{g}_i$$

Infine a dopo essere stata riorganizzata questa equazione può essere espressa in forma matriciale:

$$\mathbf{N}^* \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{c} \quad (2.26)$$

Dove

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} |r_1|^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |r_2|^{p-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & |r_N|^{p-2} \end{bmatrix}$$

Con r_n n-esima componente del vettore dei residui. A partire da questa equazione normale il (k+1)-esimo passo dell'algoritmo iterativo corrisponde a:

$$\mathbf{N}^* \cdot \mathbf{W}^k \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{W}^k \cdot \hat{\mathbf{g}}$$

$$\mathbf{c}^{k+1} = [\mathbf{N}^* \cdot \mathbf{W}^k \cdot \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{W}^k \cdot \hat{\mathbf{g}} \quad (2.27)$$

Con $\mathbf{W}^0 = \mathbf{I}_N$ e $\mathbf{W}^k = \text{diag}(g - \mathbf{N}c^k)$. Da notare che a differenza di quanto visto fin'ora il metodo è stato costruito per sistemi sovradimensionati⁵. Questo perché la nuova matrice del problema diretto è diventata \mathbf{N} che essendo la matrice dello spazio nullo di \mathbf{F} se quest'ultimo è sottodimensionato il suo spazio nullo risulta essere sovradimensionato. Un articolo di Byrd e Payne (1979) mostra come questo algoritmo sia convergente se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- I valori dei pesi disposti sulla diagonale di \mathbf{W} non siano crescenti con le iterazioni.
- Non sia permesso a $|r_i|$ di scendere sotto una certa soglia.

Per soddisfare quest'ultima condizione è stata proposta questa soluzione:

$$W_{i,i} = \begin{cases} |r_i|^{p-2} & \text{if } |r_i| > \varepsilon \\ \varepsilon^{p-2} & \text{if } |r_i| \leq \varepsilon \end{cases}$$

⁵altrimenti l'equazione di aggiornamento per problemi sottodimensionati sarebbe stata: $\mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{W}^k \mathbf{N}^* (\mathbf{N} \cdot \mathbf{W}^k \cdot \mathbf{N}^*)^{-1} \hat{\mathbf{g}}$.

Un controllo empirico sulla convergenza del metodo può essere fatto verificando che la norma \mathcal{L}_p stia effettivamente diminuendo da un'iterazione all'altra. Quindi arrestare il metodo quando per un certo numero di iterazioni la norma della soluzione tende ad aumentare.

Nella letteratura classica sull'IRLS [1], l'algoritmo viene definito come metodo per ottenere la soluzione che minimizza la norma \mathcal{L}_p ma con $1 \leq p \leq 2$. Invece imponendo la “*Proprietà di Isometria restrittiva*” detta anche RIP (Restricted Isometry Property), [8] dimostra che l'algoritmo oltre a giungere ad un'unica soluzione, permette di estendere il range a $0 \leq p \leq 2$.

Diciamo che una matrice \mathbf{N} soddisfa la condizione RIP di ordine K , se per ogni vettore \mathbf{c} di sparsità K , è verificato:

$$(1 - \delta)\|\mathbf{c}\|_{\ell_2} \leq \|\mathbf{N}\mathbf{c}\|_{\ell_2} \leq (1 + \delta)\|\mathbf{c}\|_{\ell_2} \quad (2.28)$$

Con $\delta \in (0, 1)$

Possiamo interpretare la proprietà RIP come “vicinanza” ad una matrice ortonormale, cioè una matrice le cui colonne sono ortonormali. La condizione appena citata impone praticamente che la matrice \mathbf{N} quando pre-moltiplicata per un qualsiasi vettore con sparsità K , non ne vari la norma \mathcal{L}_2 oltre un certo limite definito dal δ . Ovviamente nel momento in cui \mathbf{N} fosse perfettamente ortonormale la norma del risultato della pre-moltiplicazione sarebbe la stessa del vettore \mathbf{c} .

Facciamo notare che il comando Matlab che può essere utilizzato per ricavare la matrice N dell'equazione 2.24, genera proprio una matrice di vettori ortonormali che definiscono lo spazio nullo della matrice F . Quindi la condizione in questo caso è sicuramente rispettata.

Da notare che in altri articoli in letteratura ([11]), che comunque ricercano la sparsità della soluzione, l'unica norma utilizzata è la norma \mathcal{L}_1 , mentre IRLS consente di scegliere le altre norme per $p < 1$.

Non è obbiettivo trattare in questo testo la velocità di convergenza o il costo computazionale delle diverse tecniche, ma si fa riferimento all'articolo [8] per far notare che nel caso particolare dell'IRLS la convergenza dell'algoritmo alla soluzione aumenta man mano che la norma tende a zero.

Capitolo 3

Dati sintetici e prestazioni

Al fine di valutare le potenzialità dei diversi metodi descritti nel capitolo precedente, sono state realizzate delle simulazioni con dati sintetici. Le funzioni di riflettività utilizzate per le simulazioni sono tutte di tipo sparso, quindi con pochi valori diversi da zero, e possono essere divise in due tipologie principali:

- funzioni di riflettività con un solo target
- funzioni di riflettività con due target

I dati sintetici sono stati generati facendo passare le funzioni di riflettività attraverso un sistema lineare descritto dall'equazione 3.1.

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{w} = \mathbf{g} \tag{3.1}$$

Con \mathbf{w} una variabile gaussiana bianca a media nulla, la cui varianza è stata fatta variare nel corso delle simulazioni al fine di misurare le prestazioni al variare dei diversi valori di SNR. Il tutto ripetuto per un certo numero di volte per assicurare una certa affidabilità alle misure delle cifre di merito. I dati sintetici così generati sono quindi stati elaborati con alcune delle tecniche descritte nel capitolo precedente e i risultati ottenuti sono approssimazioni della funzione di riflettività generata, che quindi essendo nota è facilmente confrontabile.

Quindi dopo aver generato le funzioni di riflettività per le varie tecniche, ci interessa andare a valutare la loro qualità mettendole in relazione con la funzione di riflettività sintetica. Per fare questo è necessario da prima eseguire la *detection* dei target. Quest'ultima fase permette di passare dalla stima della funzione di riflettività alla stima della posizione dei target. Infine localizzati i target e note le loro posizioni

reali, le diverse tecniche possono essere messe a confronto sulla base delle seguenti cifre di merito:

- Bias
- Deviazione Standard
- RMSE

Un altro parametro della qualità dell'immagine è di certo il rapporto tra l'energia dei lobi laterali e quella dei target, in quanto da indicazione di quanto siano distinguibili i target dal resto.

3.1 Dimensionamento del campione

Ogni soluzione al problema definito in 3.1, è una variabile casuale, derivando da una o da una serie di trasformazioni lineari di un dato (\mathbf{g}) che possiamo considerare a sua volta una variabile casuale multivariata essendo affetto da rumore (che considereremo gaussiano e bianco¹). Se pensiamo a questo risulta evidente che una singola realizzazione della soluzione da poche informazioni utili al calcolo delle prestazioni, infatti la soluzione calcolata ($\hat{\gamma}$) sarebbe in generale differente da quella reale (γ), la quale, invece per definizione, se lo stimatore non è polarizzato corrisponde alla media del processo casuale $\hat{\gamma}$. Lo stesso discorso può essere fatto per i suoi K valori con modulo maggiore (cioè le posizioni in cui vengono localizzati i K target presenti nella scena). A loro volta i due parametri che servono a caratterizzare una variabile casuale gaussiana multivariata, cioè vettore delle medie e matrice di covarianza, non sono in generale ricavabili in forma chiusa da un set di realizzazioni finito della stessa variabile casuale.

Quello che si tenta di fare perciò è stimare questi due parametri tramite media e varianza campionarie, queste due misure dispongono quindi di una loro media e una varianza. La domanda che ci poniamo ora è quindi: quante realizzazioni della soluzione dobbiamo simulare per ottenere medie e varianza campionaria con deviazione standard inferiore ad un certo limite accettabile? Per rispondere ci viene in aiuto la seguente relazione che lega la varianza della media e alla varianza campionaria della variabile casuale da stimare con il numero di realizzazioni della stessa.

¹Questo fa sì che la matrice di Covarianza delle VC in gioco sia diagonale, gli unici valori diversi da zero sono quelli presenti sulla diagonale e corrispondono alle varianze del processo

$$\text{Var} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{\sigma_x^2}{n} = \sigma_{\bar{x}}^2 \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\bar{x}}^2} \quad (3.2)$$

Con

- x_i variabile casuale che rappresenta la stima della posizione di un target.
- $\sigma_{\bar{x}}^2$ varianza della media campionaria.
- σ_x^2 varianza della variabile casuale x .
- n numero delle realizzazioni della variabile casuale che si vanno a mediare.

Come la media campionaria anche la varianza campionaria richiede un certo numero di realizzazioni per poter essere espressa con una certa confidenza. Chiameremo $\hat{\sigma}_x^2$ la varianza dello stimatore “varianza campionaria”.

$$E[\hat{\sigma}_x^2] = \sigma_x^2 \quad , \quad \text{Var} [\hat{\sigma}_x^2] = \frac{2\sigma_x^4}{n-1} \quad \Longrightarrow \quad n \simeq \frac{2\sigma_x^4}{\text{Var} [\hat{\sigma}_x^2]} \quad (3.3)$$

Si vede bene che questo secondo vincolo è piú stringente di quello imposto dalla media campionaria, per esempio per ottenere una stima della varianza con deviazione standard inferiore a $\frac{1}{10}$ della risoluzione con una deviazione standard reale (σ_x) massima, paria a 2 volte la risoluzione, occorrono almeno 800 realizzazioni. Consideriamo però che in questa sede non ci interessa ottenere valori di deviazione standard piú precisi per deviazioni standard reali maggiori. Siccome in questo testo si stanno cercando di valutare le prestazioni di metodi a super-risoluzione, risulta inutile avere tecniche con alta risoluzione ma che non sono affidabili perchè comunque hanno una grande varianza.

3.2 Generazione del dato sintetico

La prima cosa da fare per generare un dato sintetico è definire la funzione di riflettività sintetica, e a questo proposito sono stati simulati due differenti casi visibili anche nella figura sottostante.

1. funzioni di riflettività con un target (ampiezza unitaria)
2. funzioni di riflettività con due target (ampiezza unitaria)

All'interno del "caso 2" è possibile distinguere ulteriori sotto-casi in cui il discriminante è la distanza tra i target.

Dato l'interesse che si da in questo articolo alla ricerca di tecniche di focalizzazione che permettano di ottenere risoluzione superiore rispetto ai metodi classici. Le prestazioni sono state misurate per spaziature multiple e sottomultiple della risoluzione di riferimento, cioè la risoluzione presentata nei primi capitoli che poi corrisponde alla risoluzione del *Beamforming*. In particolare i target sono stati posizionati a :

- $\frac{1}{2}$ la risoluzione di riferimento
- 1 volta la risoluzione di riferimento
- 2 volte la risoluzione di riferimento

Alla generazione della funzione di riflettività segue la creazione della matrice F che descrive il problema lineare. È necessario definire i parametri del sistema da simulare, a questo fine si è scelto di mantenere alcuni parametri simili a quelli del sistema satellitare COSMO-SkyMed, di cui poi sono stati elaborati anche i dati reali nel capitolo 4.2. In particolare sono riportati nella tabella 3.1.

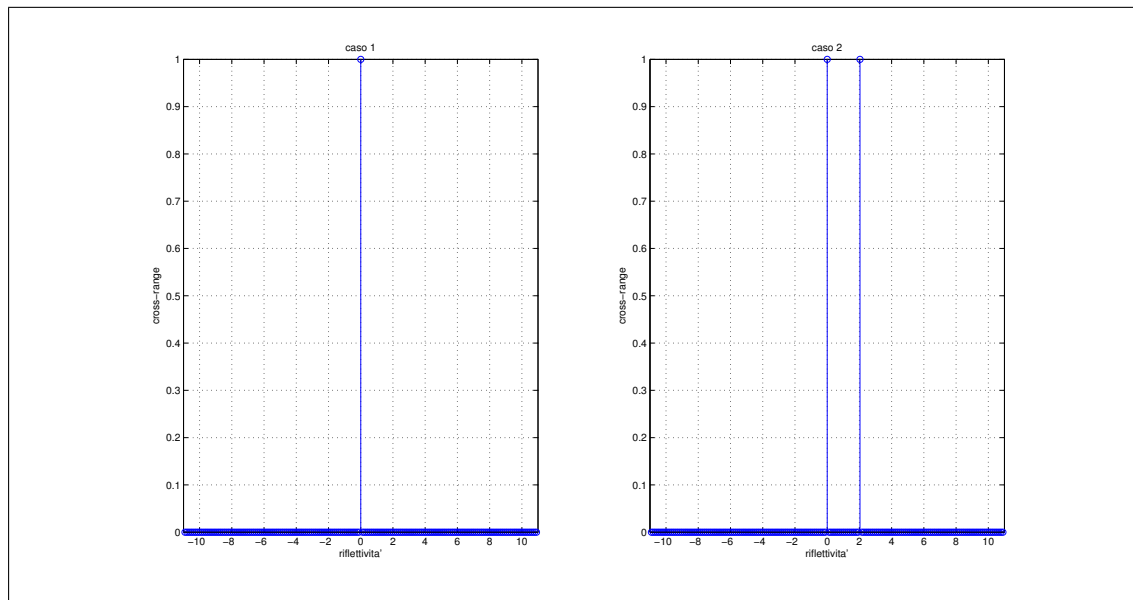


Figura 3.1: Esempi di funzioni di riflettività usate nelle simulazioni.

| Parametri delle simulazioni | |
|------------------------------------|---------------------|
| λ | 0.0312 m |
| θ | 26.5° |
| r (slant-range) | $7.098 * 10^5$ m |
| SNR | -3, 0, 3, 5, 10, 30 |
| Baseline equi-spaziati | |
| s (cross-range) | da -230 a 230 m |
| Δs | 1 m |
| Baseline non equi-spaziati | |
| s (cross-range) | da -350 a 350 m |
| Δs | 1 m |

(a) Parametri del sistema

| | |
|----|-----------|
| 1 | -765.415 |
| 2 | -490.896 |
| 3 | -439.065 |
| 4 | -397.367 |
| 5 | -365.390 |
| 6 | -329.574 |
| 7 | -235.639 |
| 8 | -149.931 |
| 9 | -116.099 |
| 10 | 1.315e-10 |
| 11 | 11.564 |
| 12 | 15.994 |
| 13 | 37.855 |
| 14 | 113.921 |
| 15 | 127.752 |
| 16 | 174.291 |
| 17 | 296.548 |
| 18 | 342.609 |
| 19 | 433.410 |
| 20 | 483.041 |
| 21 | 563.126 |

(b) Baseline normali irregolari in metri

Tabella 3.1: Parametri del sistema.

Un discorso a parte va fatto per quanto riguarda i baseline normali. L'insieme delle simulazioni può essere ulteriormente suddivise in due:

1. Baseline normali equi-spaziati: in una prima fase i baseline normali sono stati disposti regolarmente lungo la direzione di cross-range simulando quindi un sistema ideale con 21 baseline normali equi-spaziati da -700 a 700 metri rispetto al centro della schiera.
2. Baseline normali irregolari: i baseline normali sono stati posti uguali a quelli a disposizione per i dati reali trattati nel capitolo 4.2, la lista completa di quelli utilizzati è presente nella tabella 3.1 (b).

3.2.1 Scelta del campionamento in cross-range.

Il range coperto nella direzione di cross-range dal vettore s non può essere definito in modo univoco per tutte le simulazioni, è necessario differenziarlo a seconda che i baseline normali siano distribuiti omogeneamente o meno.

- a) Nel caso la spaziatura tra i baseline sia omogenea, la scelta del vettore s è piuttosto banale. L'estensione massima di s viene imposta appena inferiore all'elevazione ambigua, si rimanda al capitolo 2.2 per capire come è stata calcolata. Per quanto riguarda invece il Δs , si è impostato un valore minore delle risoluzioni del Beamforming in modo da verificare il comportamento delle tecniche di super-risoluzione.
- b) Per quanto riguarda il caso di baseline non equi-spaziati il vincolo è meno stringente, infatti se i baseline non sono uniformemente spazati in generale si perde il problema dell'ambiguità tipico del campionamento regolare. D'altra parte però un range di s non sufficientemente largo porta in entrambi i casi ad un cattivo condizionamento della matrice F con tutti gli effetti negativi che questo porta nel caso di rumore. Gli effetti sono molto accentuati in modo particolare su tecniche come la classica inversione ai minimi quadrati (vedi 2.3). Quindi l'estensione del cross-range è stata definita in modo più empirico, cioè abbastanza largo da ottenere un numero di condizionamento sufficientemente piccolo, e contemporaneamente che non porti a dimensioni eccessive, che rallenterebbero il tempo delle simulazioni.

Tutti i valori dei parametri di simulazione sono presenti nella tabella 3.1.

Definiti tutti i parametri necessari si tratta solo di sostituirli nella formula 2.4 per ottenere una matrice che chiameremo F , la quale tramite moltiplicazione matriciale

trasforma la funzione di riflettività in un'approssimazione del dato ricevuto dagli N sensori della schiera in un istante (quindi da un solo range). Di conseguenza il dato ottenuto ha slant-range e azimuth costanti.

3.2.2 Il Rumore

Al vettore dei dati viene sommato un vettore di numeri casuali del tipo $w \sim CN(0, \sigma_w^2)$ cioè una variabile casuale gaussiana complessa con media nulla e varianza σ_w^2 . La varianza viene fatta variare mantenendo invece costante l'energia del segnale, in modo da ottenere misurazioni delle prestazioni per differenti rapporti di SNR, i cui valori sono disponibili nella tabella 3.1.

3.3 Focalizzazione in cross-range

In questo paragrafo sono raccolti gli esempi di soluzioni per diverse combinazioni dei parametri di interesse, in pratica le stime della funzione di riflettività. L'obiettivo è verificare la tipologia di soluzione ottenuta da ciascun metodo, gli effetti del rumore e dei baseline irregolari sui lobi laterali e la capacità delle varie tecniche di risolvere disposti a distanze differenti.

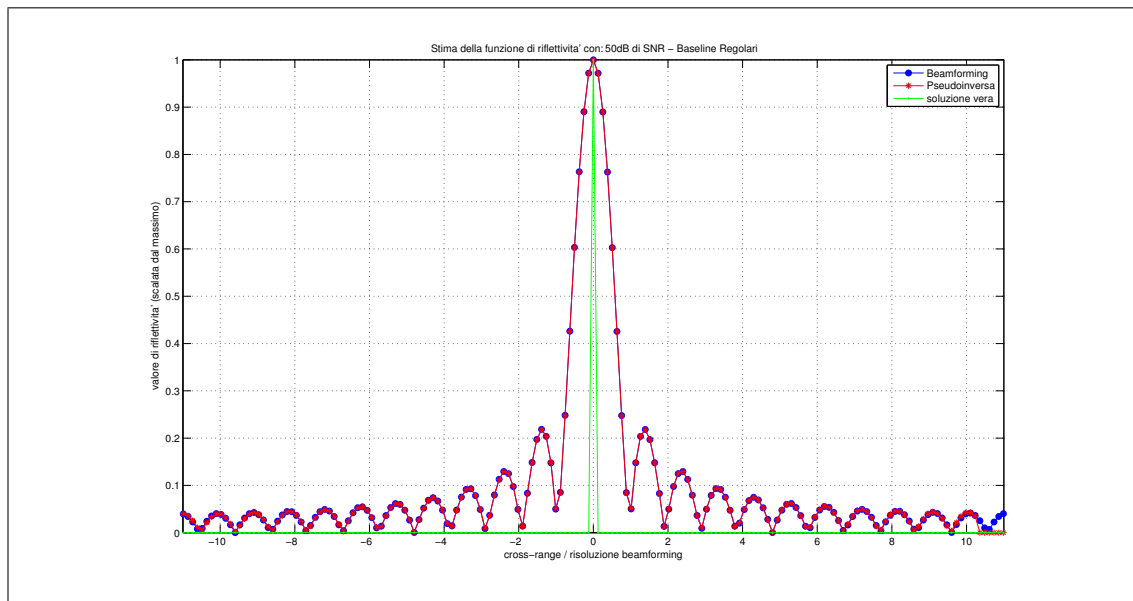
Come si può vedere le tecniche classiche si comportano mediamente allo stesso modo, infatti sia in presenza di un unico target (figure 3.2 e 3.4) sia quando invece nella scena ne sono stati posizionati due (figure 3.8, 3.11 e 3.14) le funzioni di riflettività prodotte sono molto simili. Sia usando il Beamforming che la Pseudoinversa le funzioni di riflettività stimate presentano due massimi distinti solamente quando i due target nella scena sono disposti ad una distanza superiore alla risoluzione del sistema.

Per quanto riguarda invece le tecniche proposte in questa tesi è evidente dalle figure 3.3 e 3.5 che queste tecniche per quanto risentano meno dei lobi laterali dovuti alla disposizione irregolare dei baseline sono meno robuste in caso di bassi livelli di SNR.

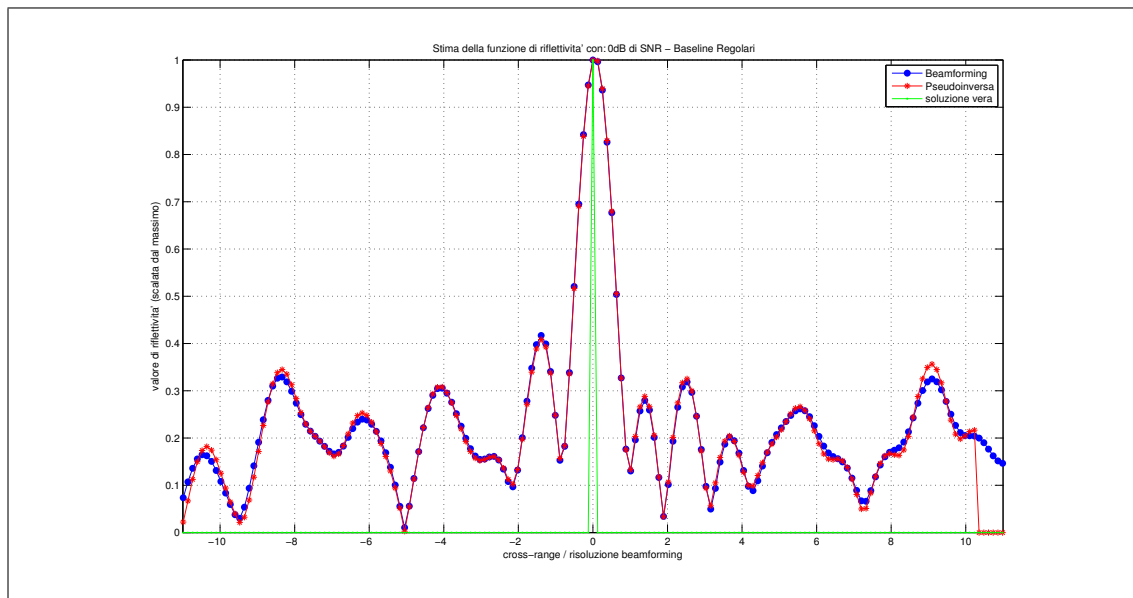
Quando il rumore non è troppo alto le tecniche iterative permettono di scendere al di sotto della risoluzione del Beamforming (figure 3.13 e 3.15).

La tecnica dell'IRLS ha il grande vantaggio di essere molto versatile, cioè permette di minimizzare la soluzione in diverse norme. Dalla classica norma ℓ_2 (che da come è possibile controllare è la stessa soluzione ottenuta tramite Pseudoinversa), fino alla norma ℓ_0 , alcuni esempi di norme sono disponibili nella figura 3.6.

Si noti come nella figura 3.7, in presenza di rumore, le tecniche che privilegiano le soluzioni sparse facciano intuire la presenza di due target molto vicini dove invece

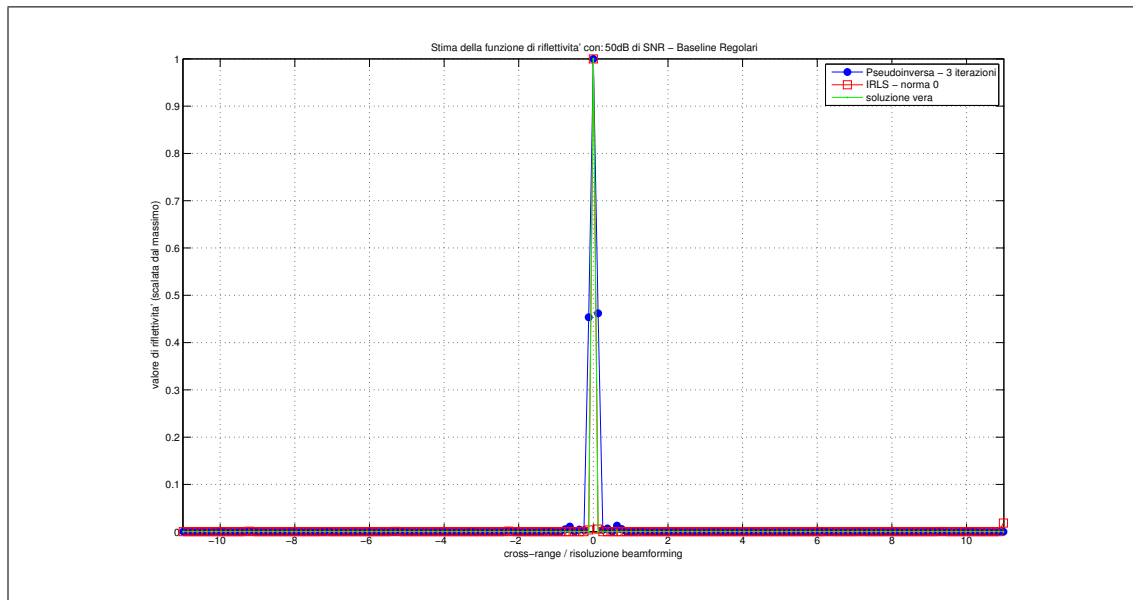


(a) Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR.

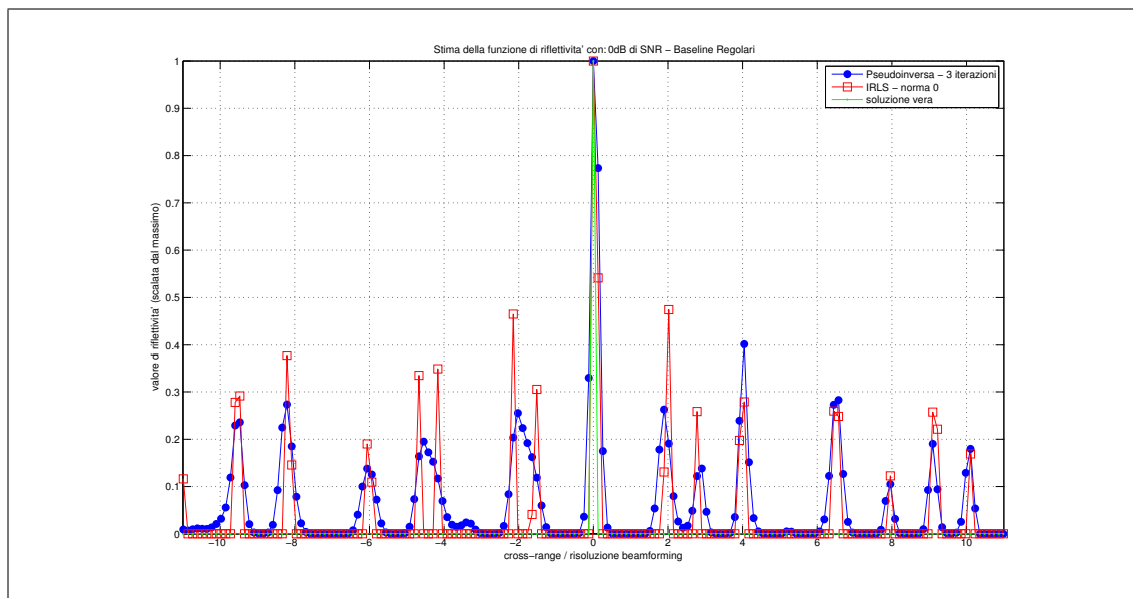


(b) Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR.

Figura 3.2: Tecniche classiche con baseline equi-spaziati, in presenza di un solo target.

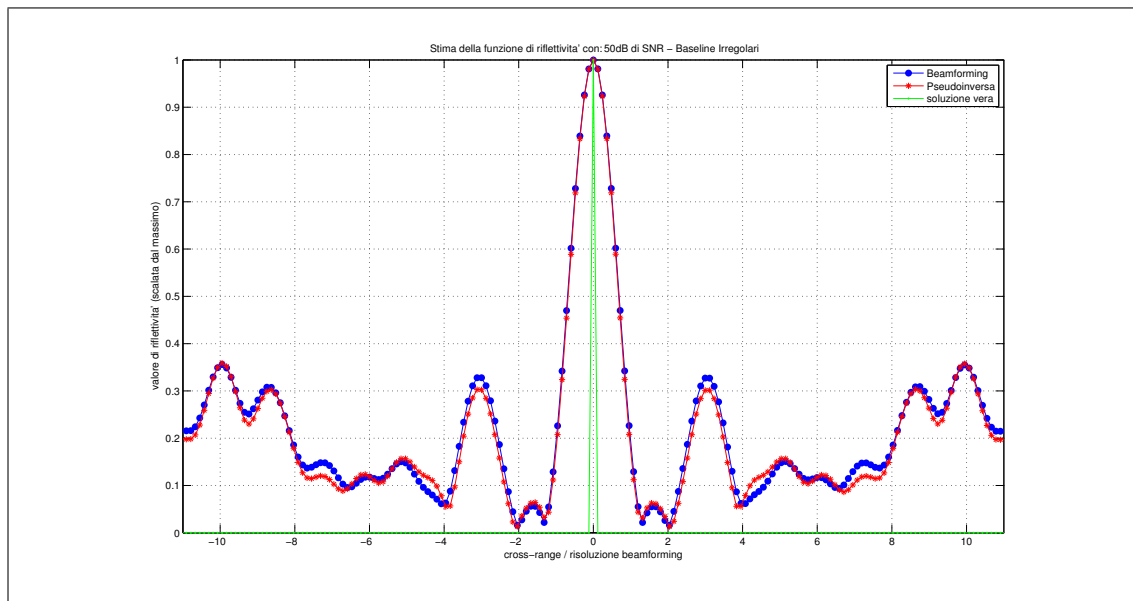


(a) Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR.

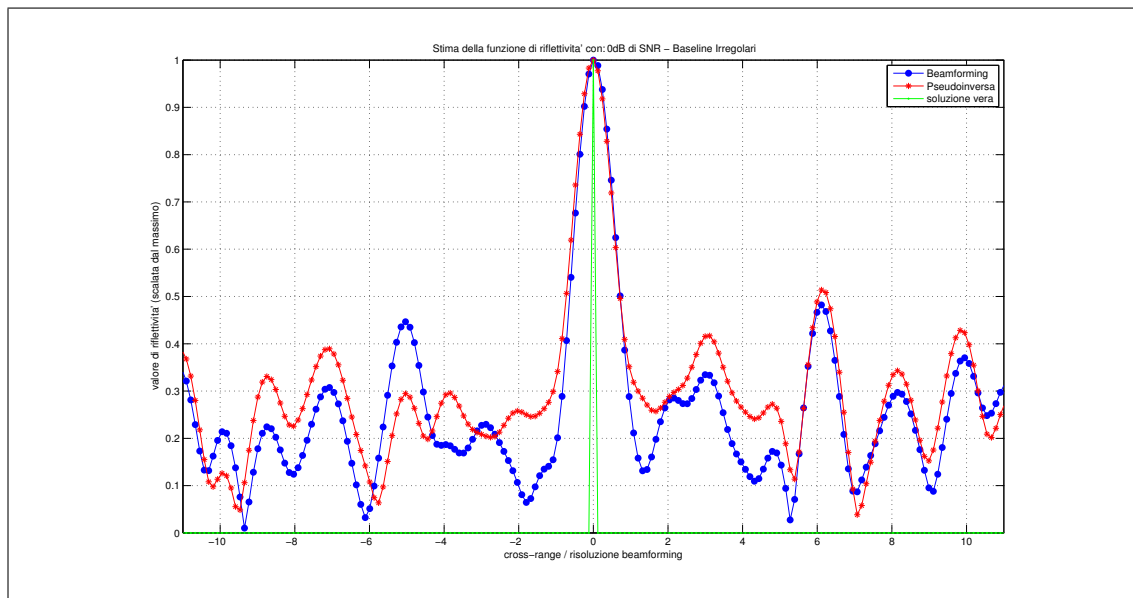


(b) Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR.

Figura 3.3: Tecniche proposte in questa tesi con baseline equi-spaziati, in presenza di un solo target.

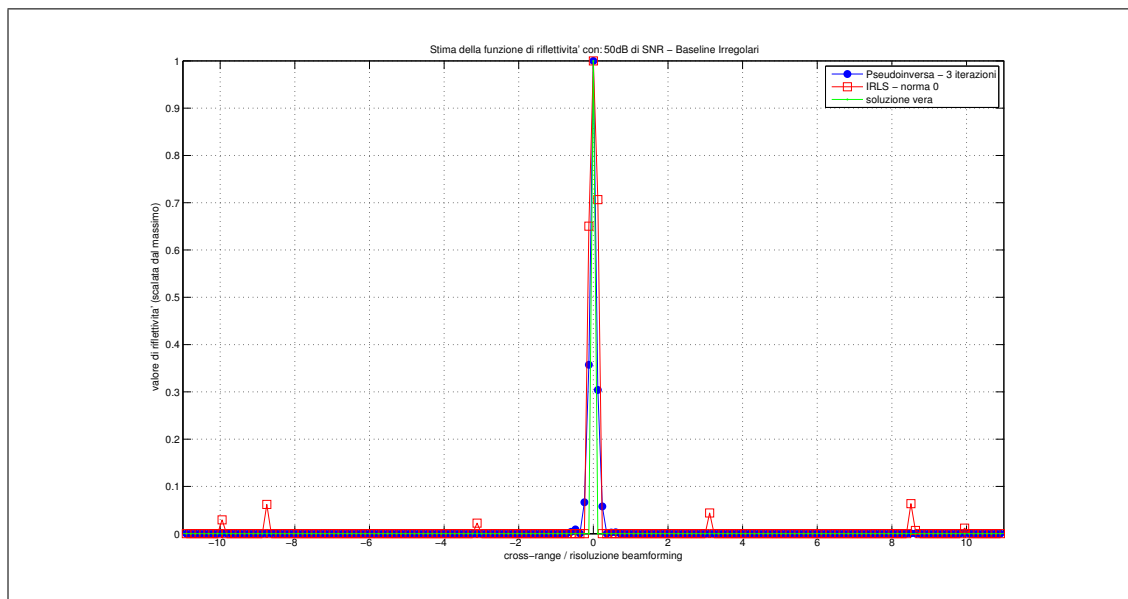


(a) Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR.

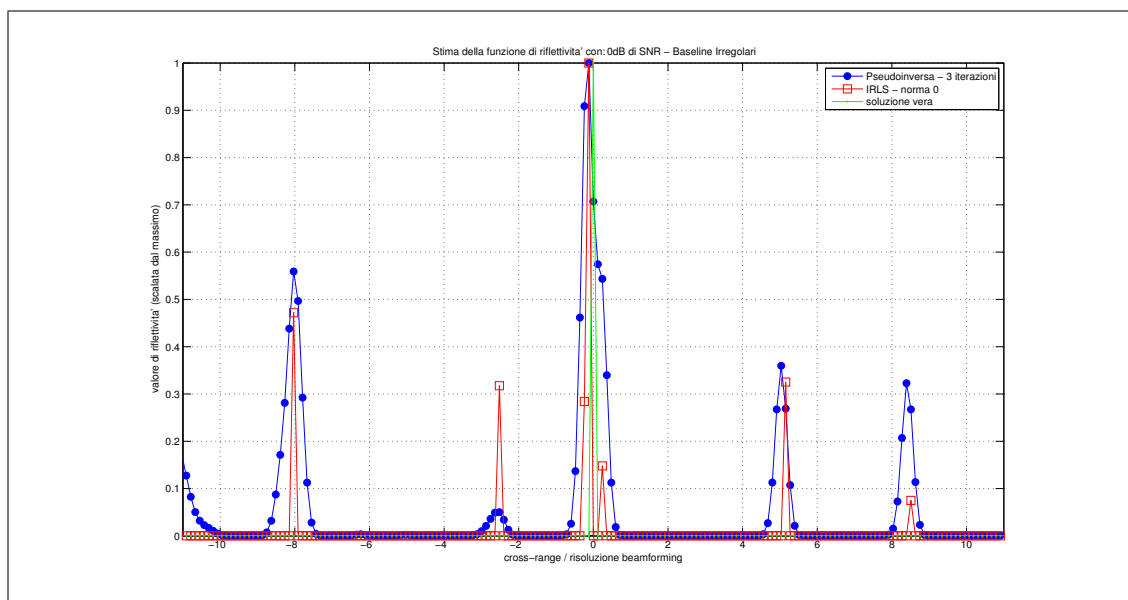


(b) Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR.

Figura 3.4: Tecniche classiche con baseline non equi-spaziati, in presenza di un solo target.



(a) Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR.



(b) Stime della funzione di riflettività, con 0 dB di SNR.

Figura 3.5: Tecniche proposte in questa tesi con baseline non equi-spaziate, in presenza di un solo target.

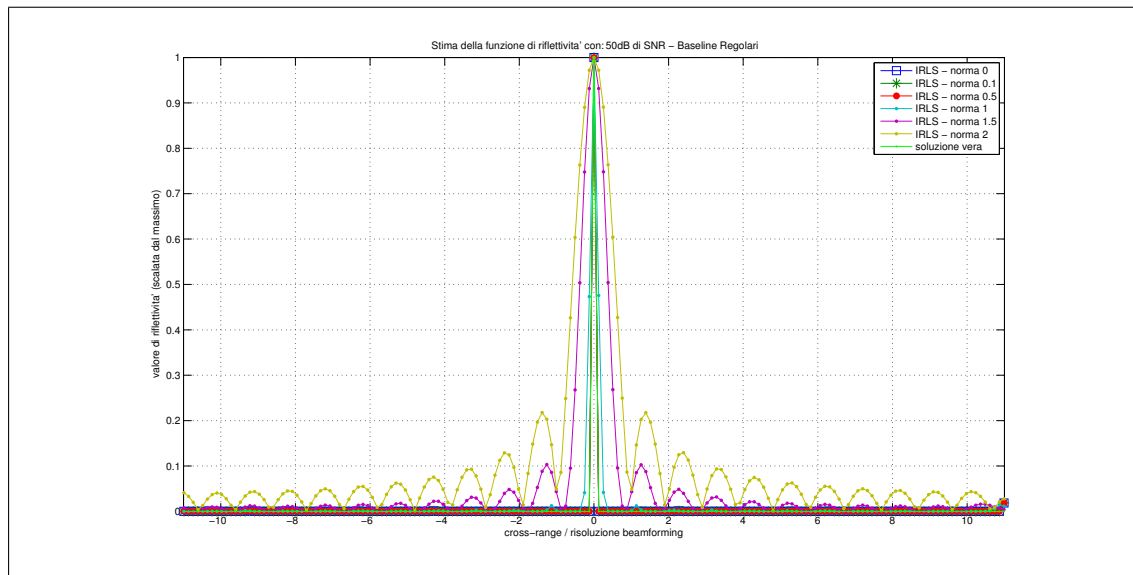


Figura 3.6: Stime della funzione di riflettività, con 50 dB di SNR baseline equi-spaziati. Ottenute tramite algoritmo IRLS ma minimizzando differenti norme, in presenza di un solo target.

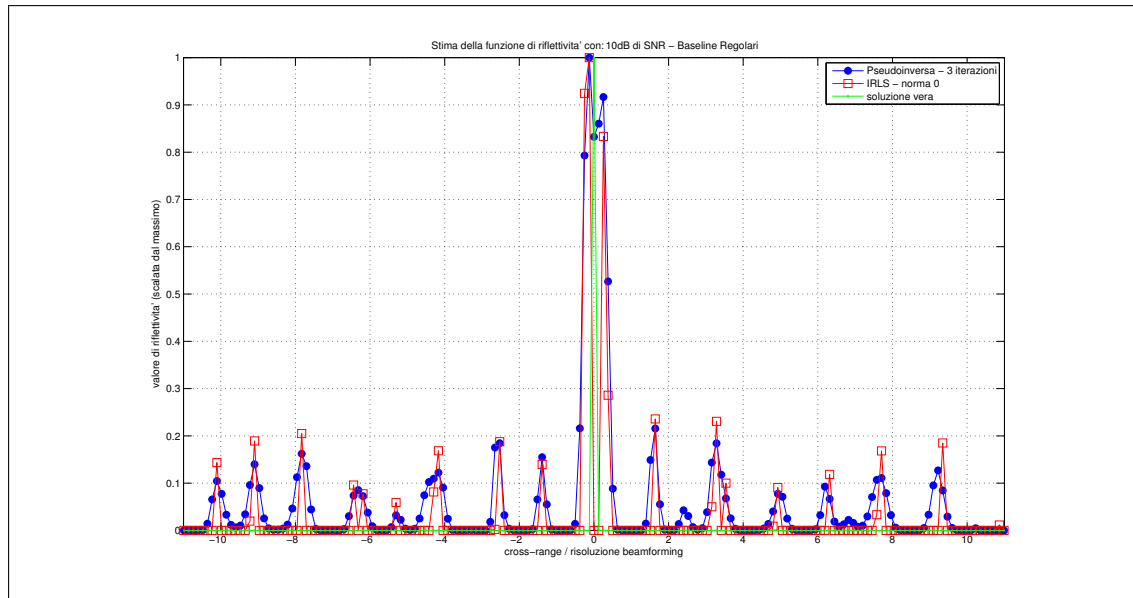
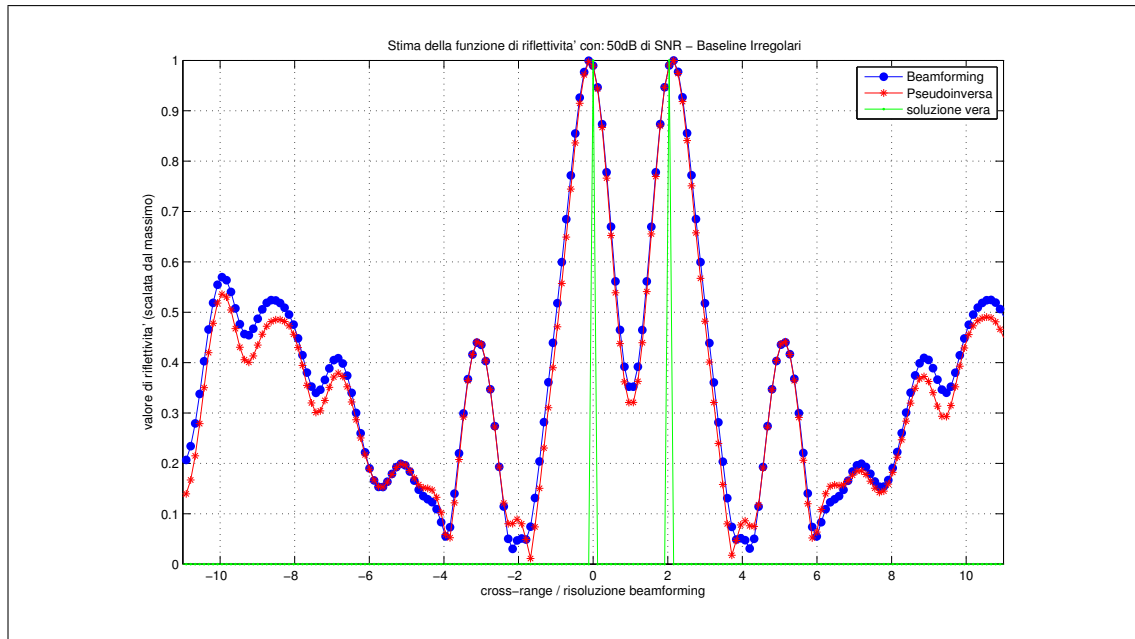
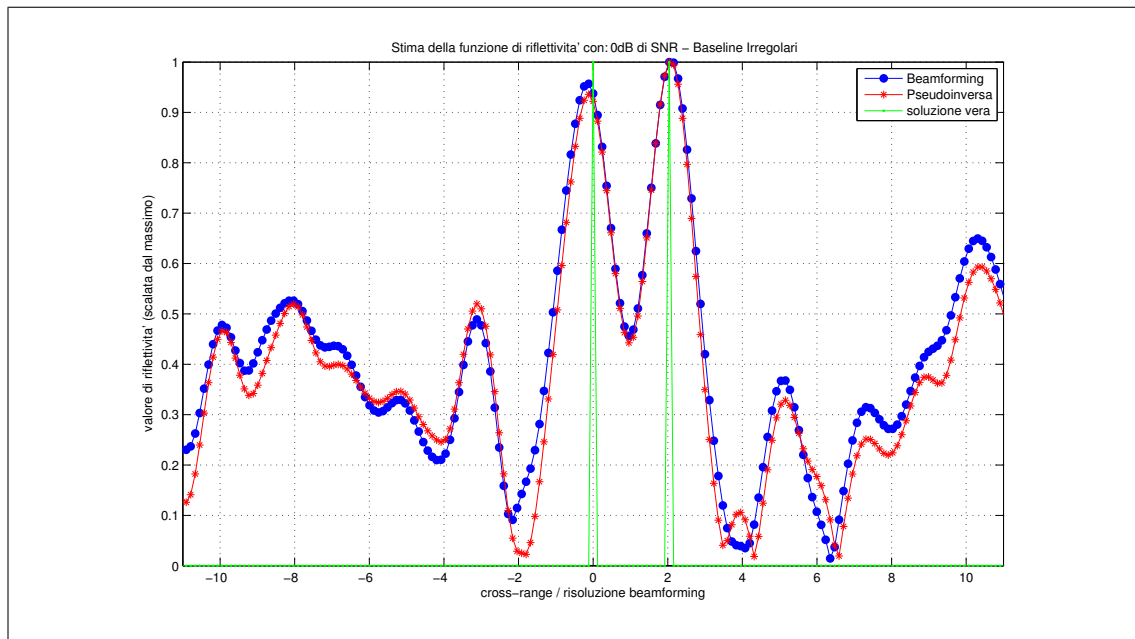


Figura 3.7: Stime della funzione di riflettività, con 10 dB di SNR baseline equi-spaziati. Le tecniche rilevano due target anche se ne è stato generato uno solo.

la funzione di riflettività sintetica ne aveva uno solo. Questo tipo di problematica non avviene così di rado, è quindi una delle principali vulnerabilità riscontrate nei due metodi proposti (in particolare caso per l'IRLS che minimizza la norma $p < 1$). In particolare quando si cerca di minimizzare la norma ℓ_0 , questo effetto si riscontra anche per alti livelli rapporto segnale rumore. La scelta di una norma intermedia ($\ell_{0.5}$ ad esempio) riduce l'effetto almeno quando il rumore è assente.

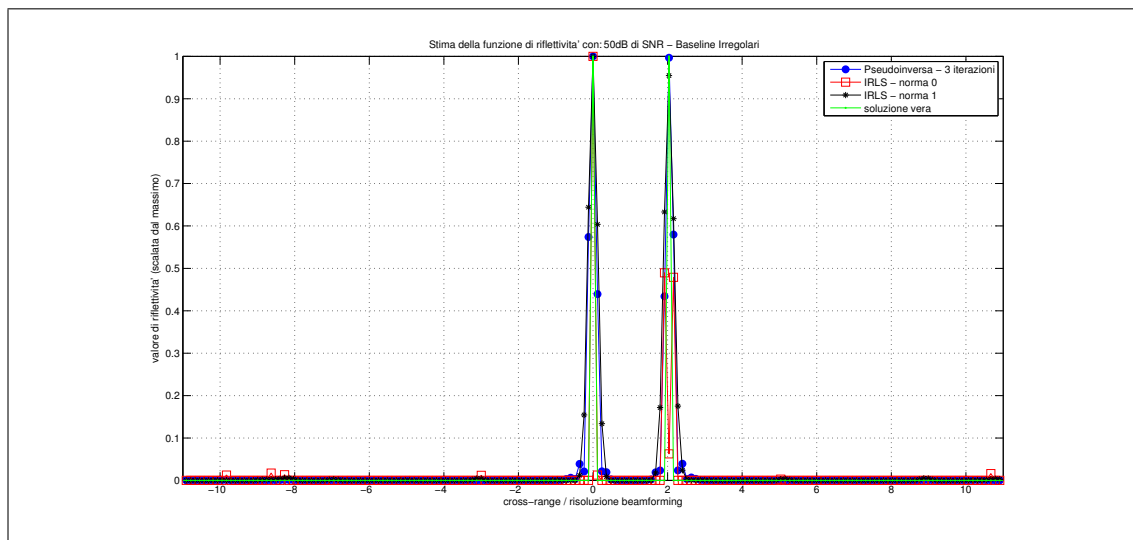


(a) 50 dB di SNR.

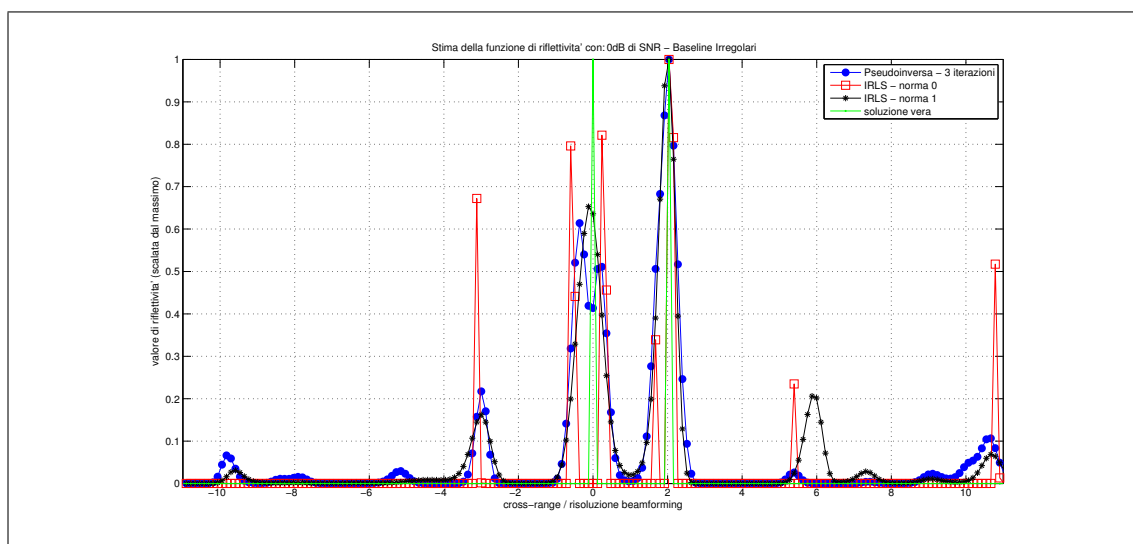


(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.8: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad due volte la risoluzione del Beamforming. Tecniche classiche con baseline non equi-spaziate.

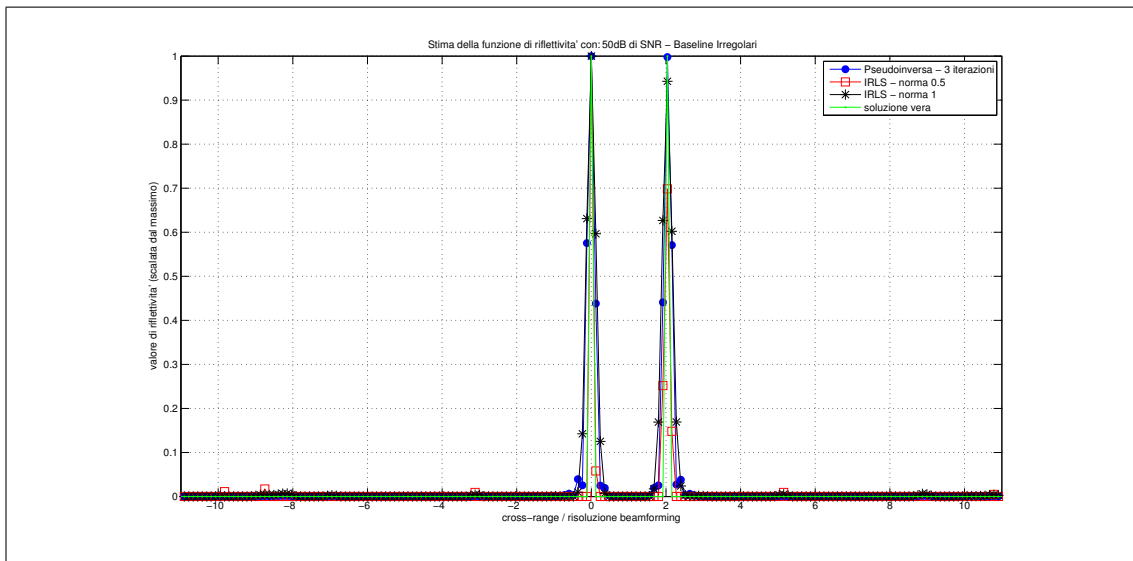


(a) 50 dB di SNR.

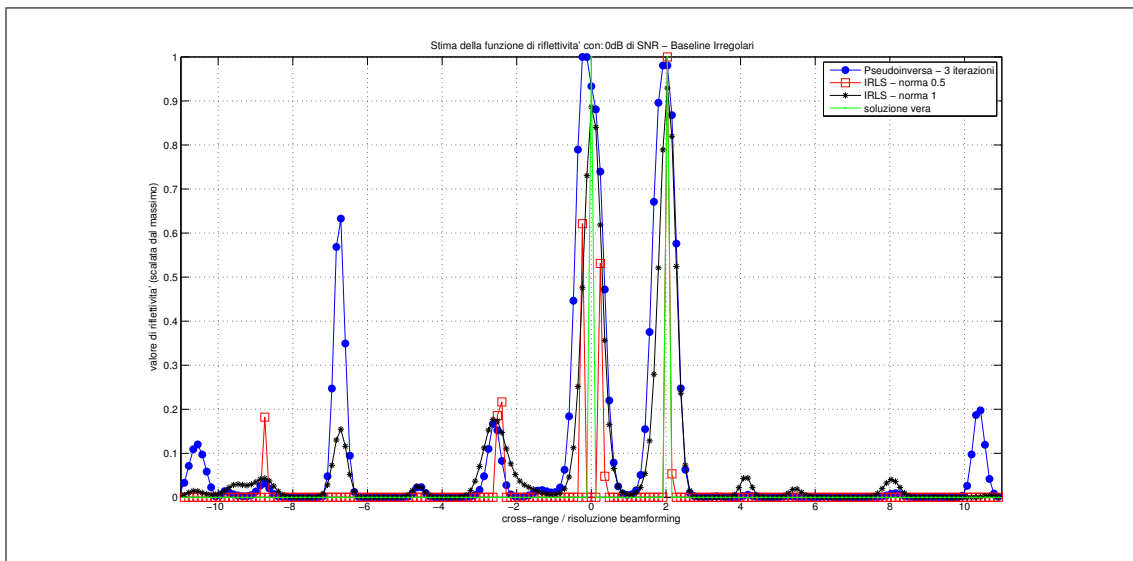


(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.9: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad due volte la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0) con baseline non equispaziate.

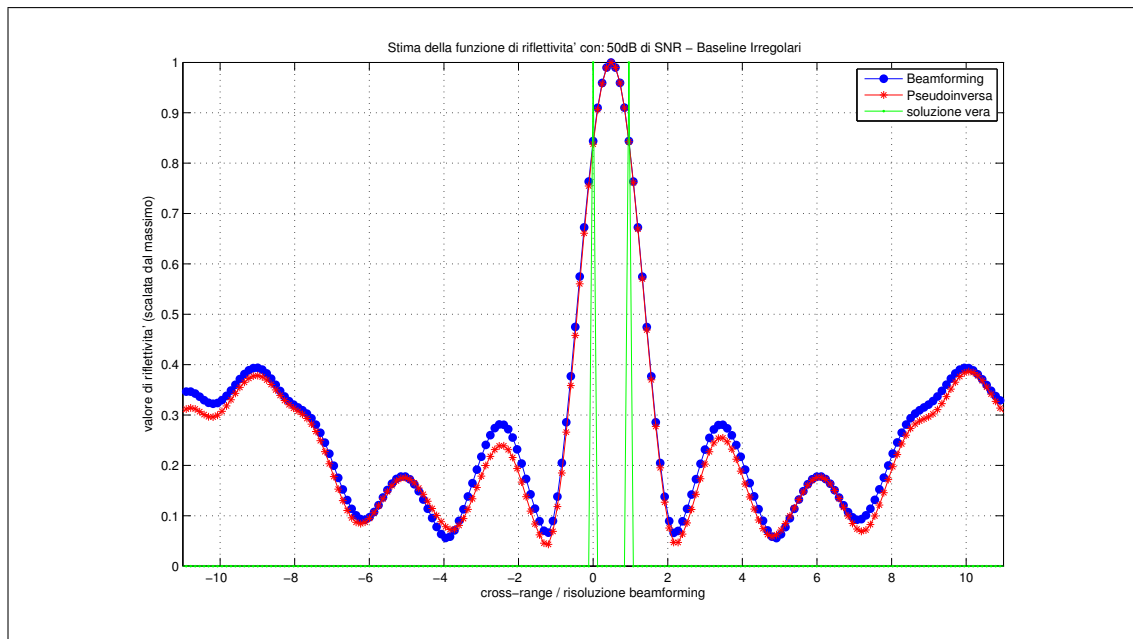


(a) 50 dB di SNR.

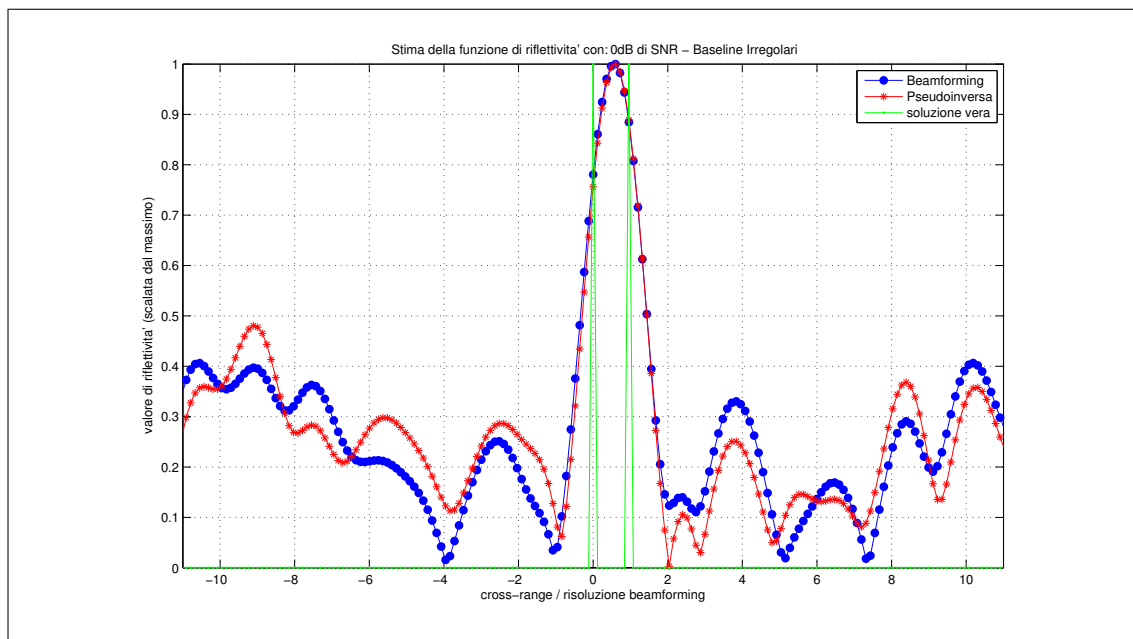


(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.10: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad due volte la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0.5) con baseline non equispaziati.

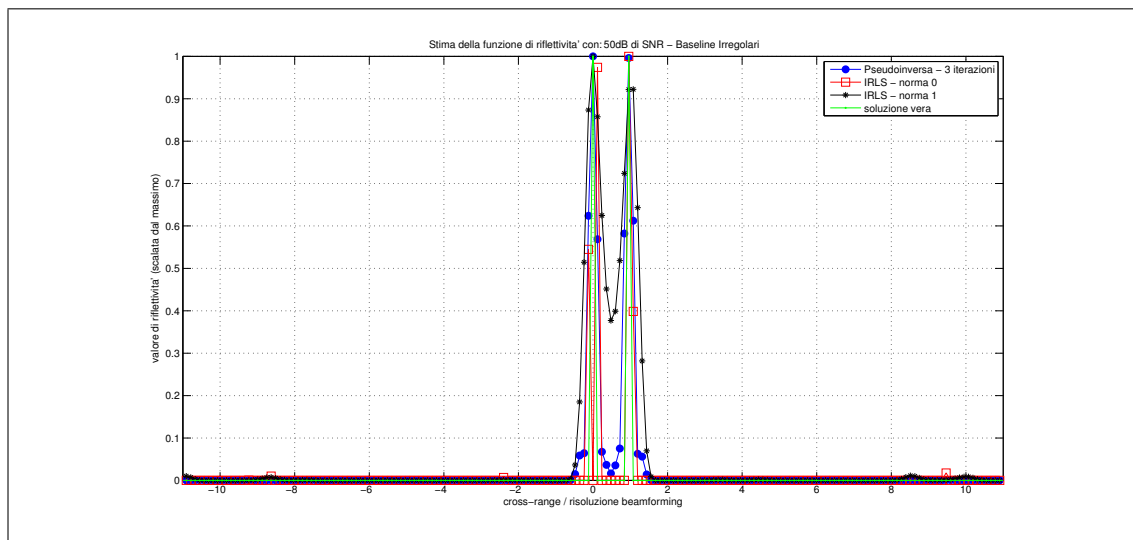


(a) 50 dB di SNR.

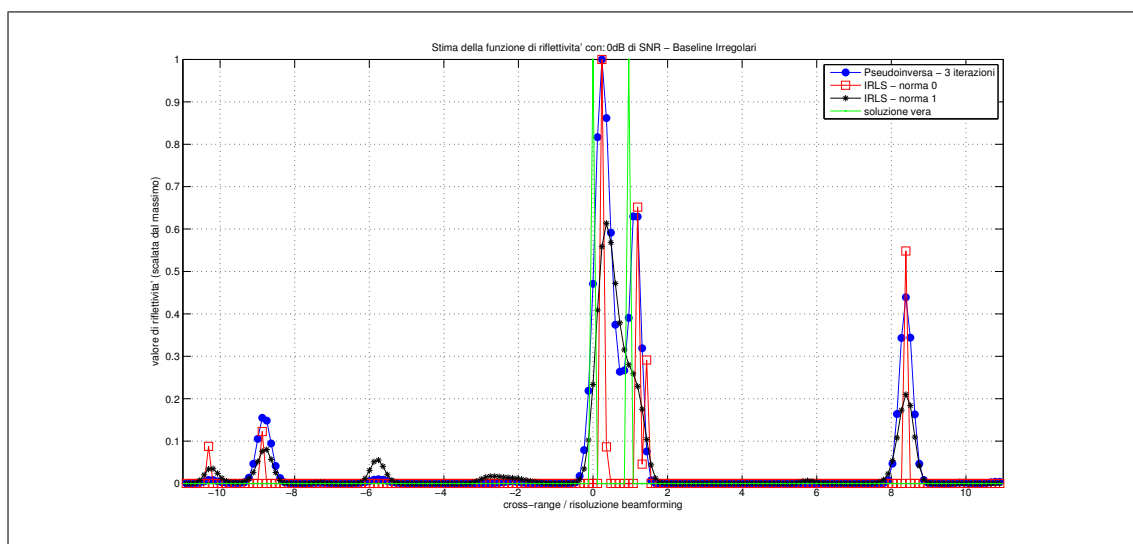


(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.11: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad una volta la risoluzione del Beamforming. Tecniche classiche con baseline non equi-spaziati.

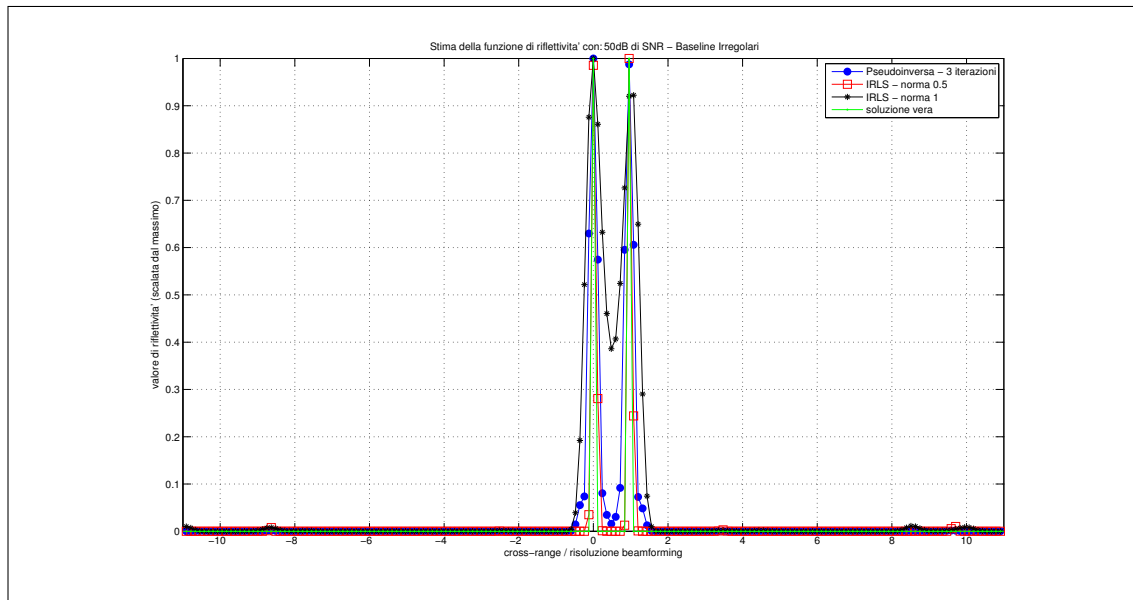


(a) 50 dB di SNR.

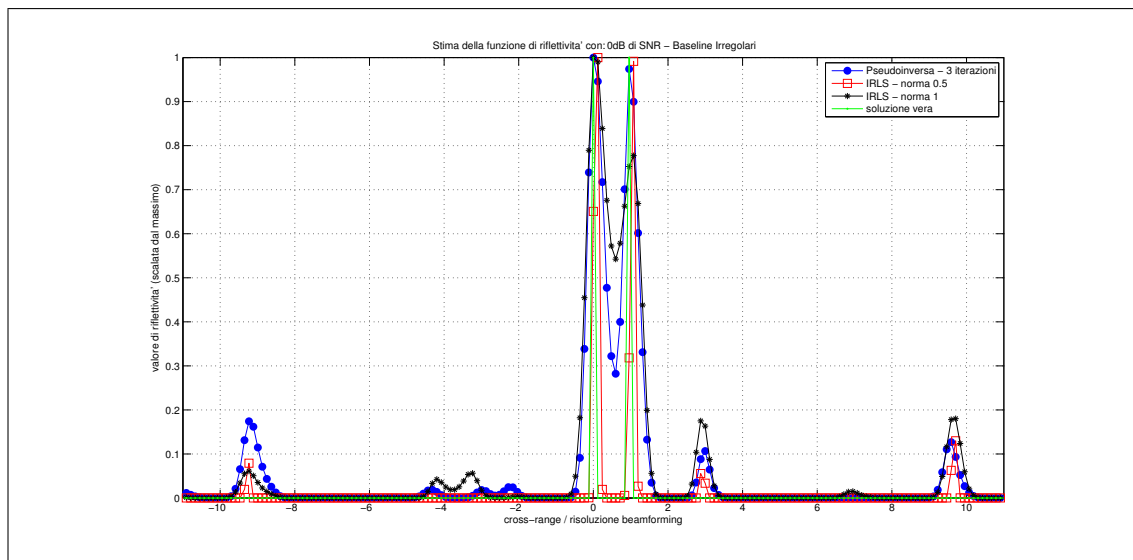


(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.12: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad una volta la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0) con baseline non equispaziati.

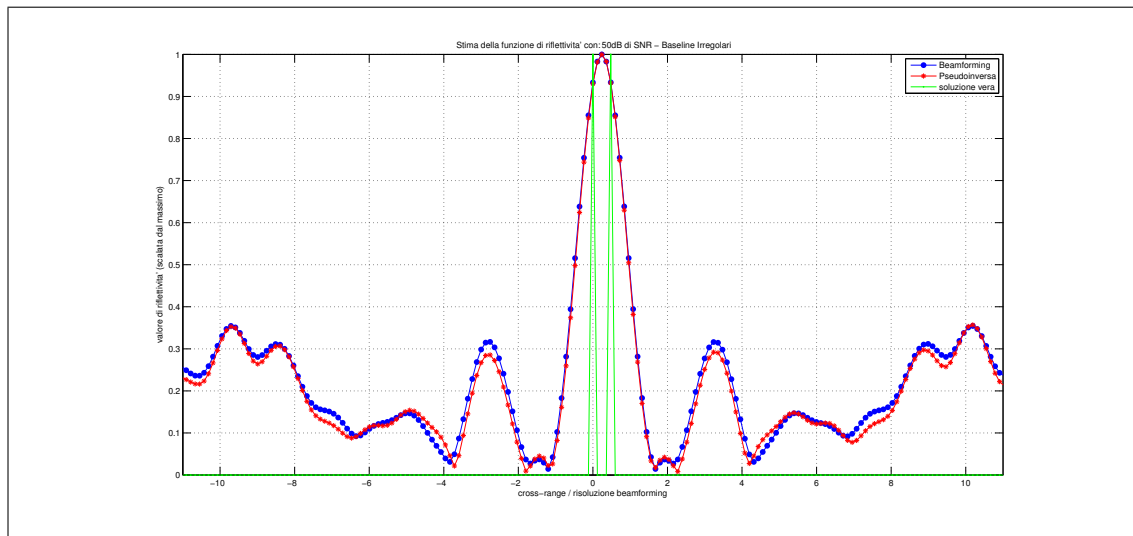


(a) 50 dB di SNR.

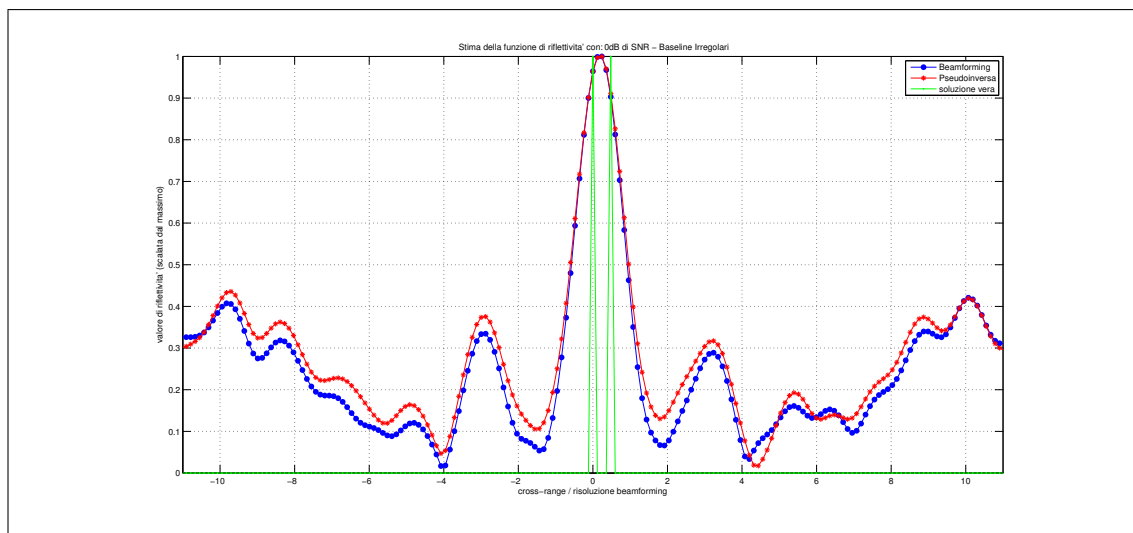


(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.13: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari ad una volta la risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi (IRLS norma 0.5) con baseline non equispaziati.

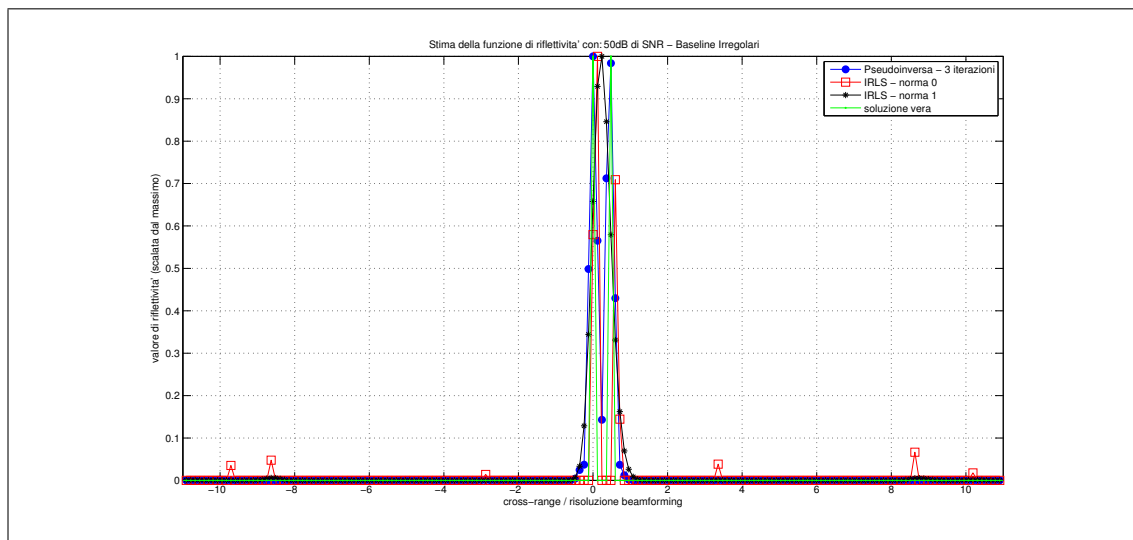


(a) 50 dB di SNR.

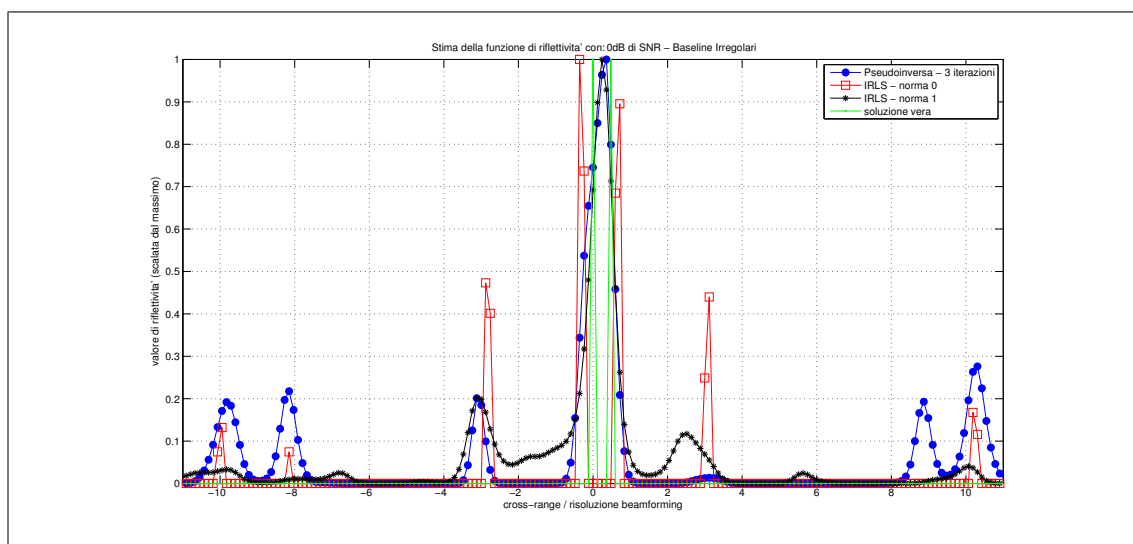


(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.14: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari alla metà della risoluzione del Beamforming. Tecniche classiche con baseline non equispaziate.



(a) 50 dB di SNR.



(b) 0 dB di SNR.

Figura 3.15: Stime della funzione di riflettività con 2 target, disposti a distanza pari alla metà della risoluzione del Beamforming. Tecniche proposte in questa tesi con baseline non equi-spaziate.

3.4 Localizzazione dei target

Il processing svolto fin'ora permette di ottenere immagini focalizzate in cross-range, approssimazioni della funzione di riflettività. Per poter a questo punto calcolare le prestazioni del metodo è necessario localizzare sull'immagine le posizioni dei target, in modo da metterle a confronto con le posizioni reali. A questo scopo sono state utilizzate due differenti metodologie, una per localizzare i target nelle immagini ottenute dalla focalizzazione tramite IRLS con norma $p < 1$, e un'altra tecnica basata sull'algoritmo Expectation-Maximization (EM) per immagini prodotte dalle altre tecniche.

Si fa presente al lettore che le tecniche che seguono valgono solo per le simulazioni con due target. Nelle simulazioni effettuate con un solo target, la localizzazione si riconduce a una semplice ricerca del massimo.

3.4.1 Localizzazione dei target in immagini invertite con IRLS

Essendo il risultato dell'inversione tramite IRLS con norma $p < 1$ per definizione un vettore sparso, i target sono indicati da degli impulsi composti da uno o due valori diversi da zero che scendono a zero molto velocemente. Questo fa sì che tra due eventi che rappresentano due diversi target sono presenti quasi sempre degli zeri. Con questo particolare tipo di funzioni di riflettività la localizzazione diventa davvero semplice. Innanzi tutto si attribuisce al primo target la posizione del massimo globale del vettore. Dopo di che l'impulso che ha come massimo il massimo globale viene azzerato, partendo dal picco si azzerano tutti i campioni fino a trovare i campioni già a zero. Infine si cerca il nuovo massimo, e la sua posizione definisce la posizione del secondo target.

Come già detto la tipologia dei vettori per i quali viene utilizzata questa tecnica, hanno sempre dei campioni a zero tra un massimo e l'altro, ma per essere sicuri oltre ogni ragionevole dubbio che tra due massimi vi siano degli zeri, possiamo applicare al vettore una soglia, sotto la quale tutto viene posto a zero.

3.4.2 Localizzazione dei target tramite Expectation-Maximization

Spesso nei risultati ottenuti dalle altre tecniche, i massimi locali delle funzioni di direttività sono separati da un minimo locale che però non sempre raggiunge lo zero. In questi casi una tecnica che da buoni risultati ed è molto intuitiva è la tecnica

di Expectation-Maximization. Lo stimatore utilizzato per localizzare i due target è proprio basato sull'algoritmo dell'Expectation-Maximization [9].

Si assuma di voler stimare la posizione di due target all'interno della funzione di riflettività, massimizzando la densità di probabilità $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, con \mathbf{x} la stima della funzione di riflettività ottenuta e $\boldsymbol{\theta}$ il set delle possibili posizioni dei due target. L'algoritmo EM cerca di massimizzare la stima ML:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}}[p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})] \quad (3.4)$$

Ma introducendo dei vettori \mathbf{y} dai quali sia possibile ottenere \mathbf{x} ma che rendano meglio condizionato la localizzazione del massimo della verosimiglianza. è intuitivo pensare a ciascun vettore \mathbf{y} come al vettore che si ottiene simulando la presenza di un unico target in ciascuna delle possibili posizioni lungo il cross-range. Quindi il vettore \mathbf{x} può essere visto come all'effetto ottenuto da una particolare coppia di posizioni dei target. L'algoritmo EM prevede due fasi sequenziali:

- Expectation step: in cui viene calcolata la nuova funzione di verosimiglianza $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ a partire da \mathbf{x} e $\boldsymbol{\theta}$.
- Maximization step: in cui la nuova funzione di verosimiglianza viene massimizzata.

In questo particolare caso la sequenza di passi è la seguente:

$$\begin{array}{ll} 1 & \psi^1(\theta) = \gamma(\theta) & E - step \\ 2 & \theta_1 = \operatorname{argmax}_{\theta}[\psi^1(\theta)] & M - step \\ 3 & \psi^2(\theta) = \phi(F(\psi^1(\theta)) - F(\gamma(\theta|\theta_1))) & E - step \\ 4 & \theta_2 = \operatorname{argmax}_{\theta}[\psi^2(\theta)] & M - step \end{array}$$

Con:

- $\gamma(\theta)$: La stima della funzione di direttività iniziale.
- $\psi^k(\theta)$: funzione di verosimiglianza da massimizzare al passo k-esimo.
- $\phi(\cdot)$ corrisponde alla tecnica di inversione dei dati attraverso cui si è ottenuto $\gamma(\theta)$.
- $F(\cdot)$: è il problema diretto, in pratica corrisponde a pre-moltiplicare per la matrice F di 2.4.
- $\gamma(\theta|\theta_k)$: è la funzione di riflettività ideale che si avrebbe in presenza di un solo target al cross-range corrispondente a θ_k .

- θ_k : posizione in cross-range del k-esimo target.

L'algoritmo può essere facilmente esteso ad un numero di target superiore a 2 reiterando i passi 3 e 4 in sequenza fino al numero di target che si vuole localizzare.

3.5 Prestazioni

In questo paragrafo in fine sono presentate le prestazioni delle diverse tecniche. Ogni valore nei grafici sottostanti è rapportato alla risoluzione del Beamforming, e contemporaneamente una linea tratteggiata evidenzia il valore del passo di campionamento della funzione di riflettività stimata. Inoltre in un paragrafo alla fine del capitolo viene trattato il comportamento delle diverse tecniche in relazione al problema dei lobi laterali. Nonostante in questa tesi non è stato trattato il costo computazionale delle diverse tecniche, ad una prima analisi superficiale la velocità di convergenza l'algoritmo IRLS diminuisce al crescere della norma minimizzata. In ogni caso il tempo necessario all'IRLS per ottenere la soluzione supera di gran lunga quello impiegato dalla Pseudoinversa iterata.

3.5.1 Errore di localizzazione - Baseline equi-spaziati.

Nel precedente capitolo è stata definita la metodologia di ricerca dei target utilizzata. Ora per poter misurare l'errore di stima è necessario mettere in relazione le posizioni stimate con quelle reali. Se ci si pone nel caso di due target è necessario decidere quale delle due posizioni stimate associare a ciascuna delle posizioni reali dei target, per poi calcolarne l'errore. In questa fase si è scelto di procedere associando la prima coppia "posizione stimata, posizione reale" in modo tale che l'errore commesso sia il minimo possibile delle quattro possibili combinazioni, l'altra posizione stimata viene ovviamente associata alla posizione reale restante.

Quest'ultima considerazione permette di spiegare come mai nei grafici che mostrano le prestazioni per il caso di due target, la deviazione standard di un target è sempre maggiore rispetto all'altro (vedi figura 3.17). Questa scelta permette di controllare se la tecnica risolve almeno uno dei due target, anche se con un certo bias, tipico dei casi in cui i due target sono ad una distanza inferiore alla risoluzione della tecnica (Beamforming e Pseudoinversa in figura 3.17).

In presenza di un solo target (figura 3.16) la tecnica che funziona meglio è il Beamforming. Questo risultato era prevedibile infatti in presenza di un solo target con rumore additivo gaussiano, il Beamforming è lo stimatore a massima verosimiglianza. In questa sede se ne omette la dimostrazione ma concettualmente basta

pensare che lo stimatore “Beamforming” in queste condizioni è facilmente riconducibile alla stima della frequenza di una sinusoide (a cui viene sovrapposto del rumore gaussiano) effettuata cercando il massimo del periodogramma.

È importante dare una spiegazione ad uno strano comportamento delle prestazioni per la tecnica dell’IRLS che minimizza la norma $n < 1$. Se si osserva il valore dell’RMSE delle figure 3.17 e 3.18 si nota un graduale peggioramento delle prestazioni della tecnica soprattutto per bassi valori di SNR, all’aumentare della distanza tra i due target. Questo è dovuto fondamentalmente ad un problema già descritto nei paragrafi precedenti, secondo il quale in alcuni casi un target viene stimato dall’IRLS con due impulsi separati. Questo porta a stimare la posizione dei due target entrambi vicini al primo e scartare l’impulso vicino al secondo.

Si noti come nella figura 3.17 (b) i valori di bias per Beamforming e Pseudoinversa, quando il rumore è sufficientemente basso, tendano ad un valore pari alla metà della risoluzione. Questo avviene perchè in quel caso i due target si posizionano in modo tale che il massimo del lobo di uno sia nella stessa posizione dello zero di un altro, quindi la funzione di riflettività stimata (che è la somma dei due contributi) presenta un massimo proprio nel centro tra i due target.

In alcuni dei grafici che seguono si possono trovare degli SNR per cui manca il valore di deviazione standard, in questi casi non vuol dire che manca l’informazione ma che il valore è stato stimato a zero e quindi non può essere rappresentato in scala logaritmica (figura 3.17).

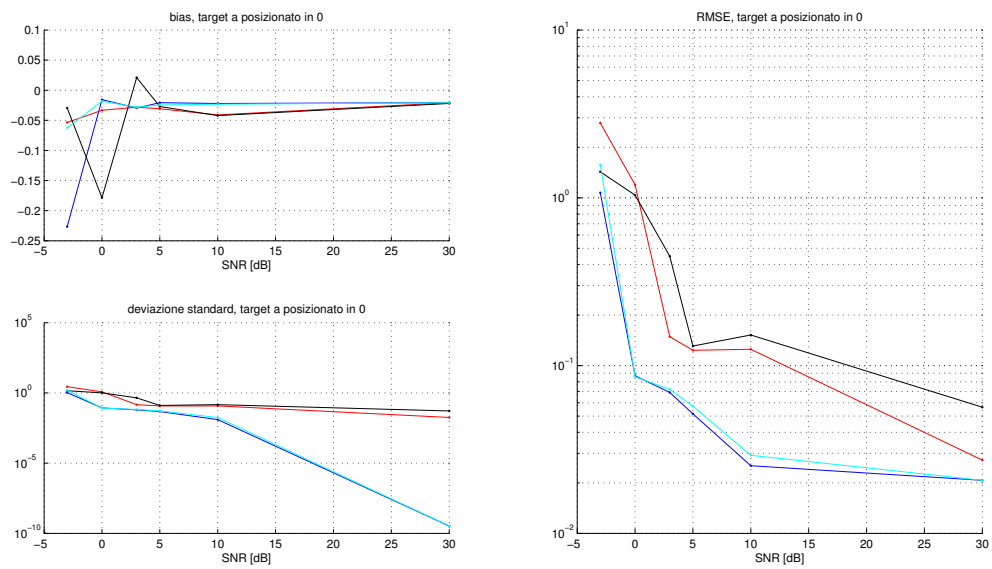
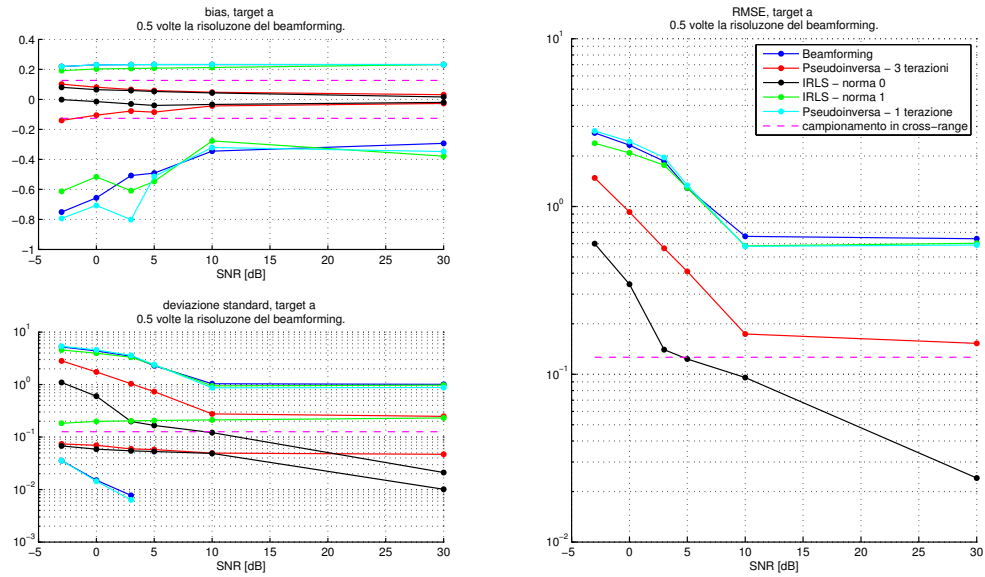
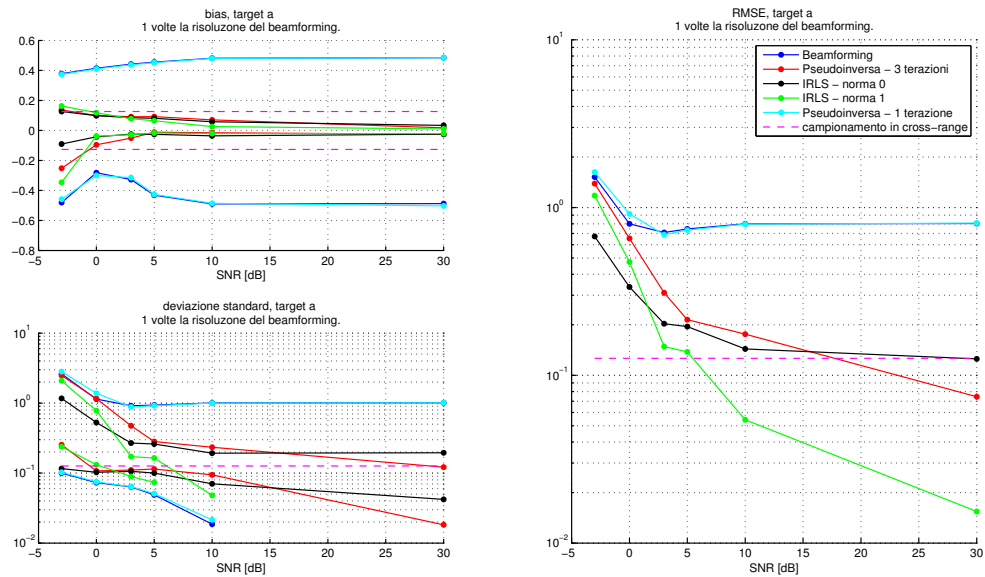


Figura 3.16: Prestazioni delle diverse tecniche nella localizzazione di un target per baseline disposti regolarmente.

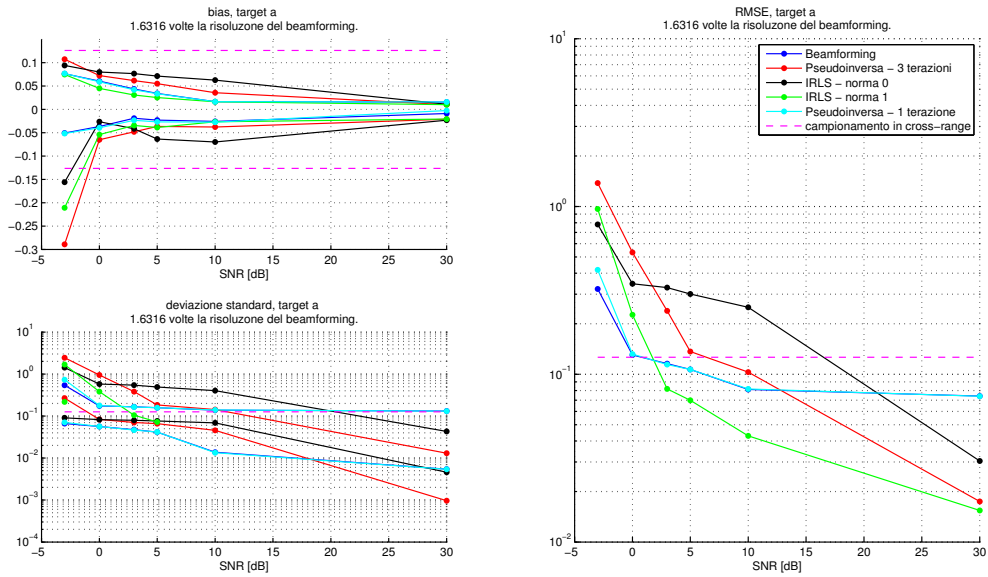


(a) 2 target disposti ad una distanza pari a metà della risoluzione del Beamforming.

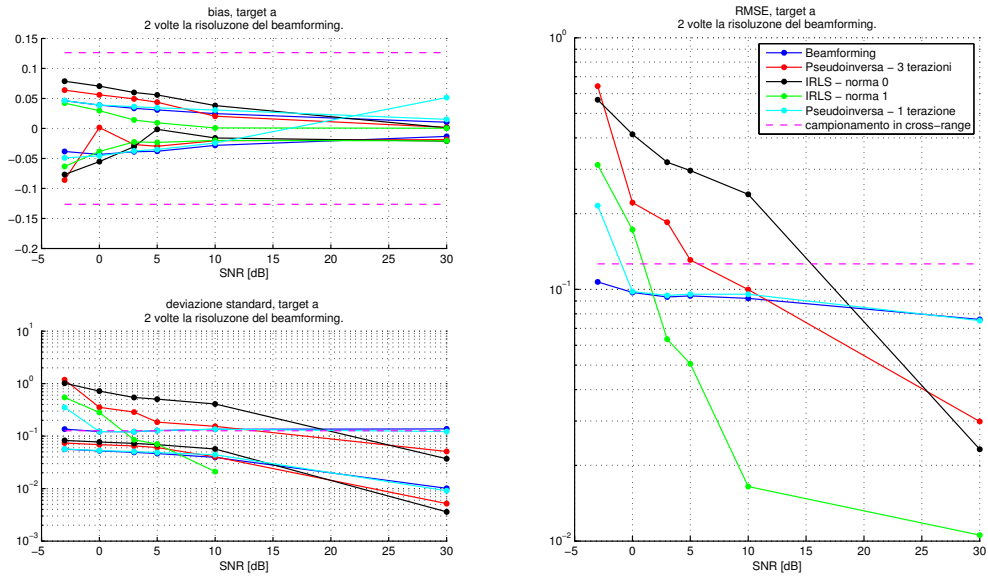


(b) 2 target disposti ad una distanza pari alla risoluzione del Beamforming.

Figura 3.17: Prestazioni delle diverse tecniche nella localizzazione di due target per baseline disposti regolarmente.



(a) 2 target disposti ad una distanza superiore alla risoluzione del Beamforming.



(b) 2 target disposti ad una distanza pari a due volte la risoluzione del Beamforming.

Figura 3.18: Prestazioni delle diverse tecniche nella localizzazione di due target per baseline disposti regolarmente.

3.5.2 Lobi laterali.

Per realizzare le figure in questa sezione sono state mediate i moduli al quadrato di 100 realizzazioni della funzione di riflettività in presenza di un target. Dalle immagini che seguono è possibile notare quanto l'utilizzo delle diverse tecniche, influenzi l'ampiezza dei lobi laterali, quando il dato viene acquisito con baseline normali non equi-spaziati, e inoltre gli viene sovrapposto del rumore.

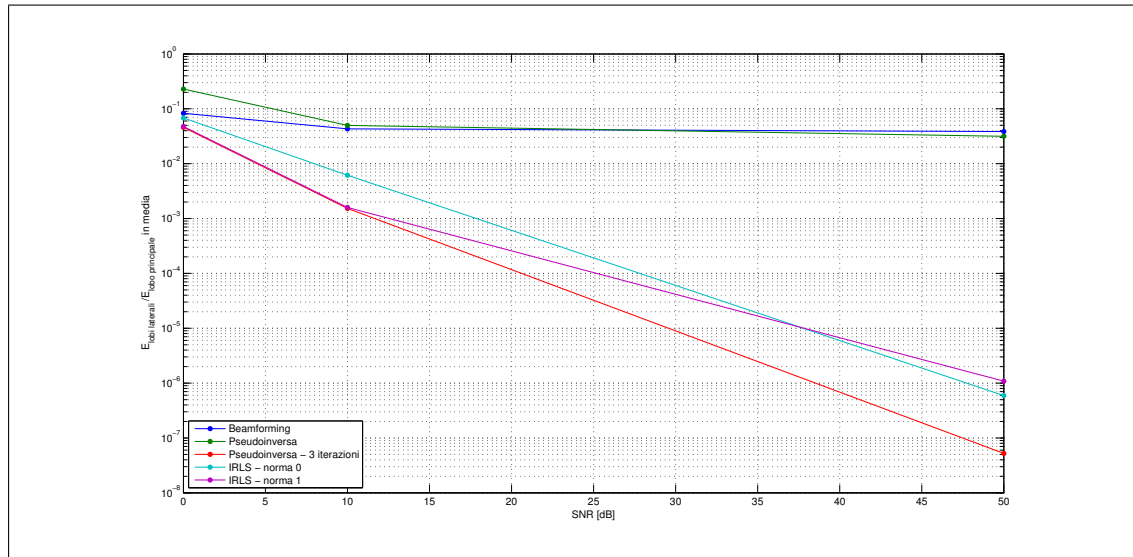
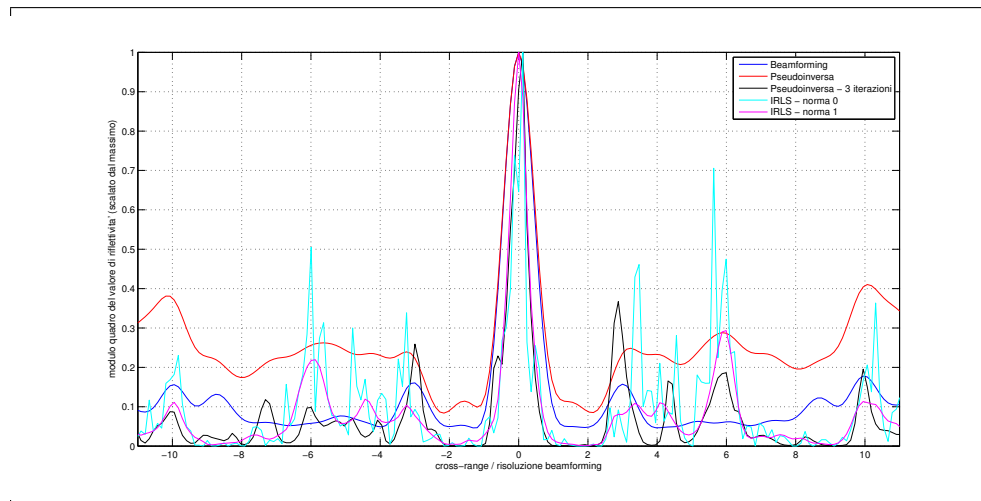
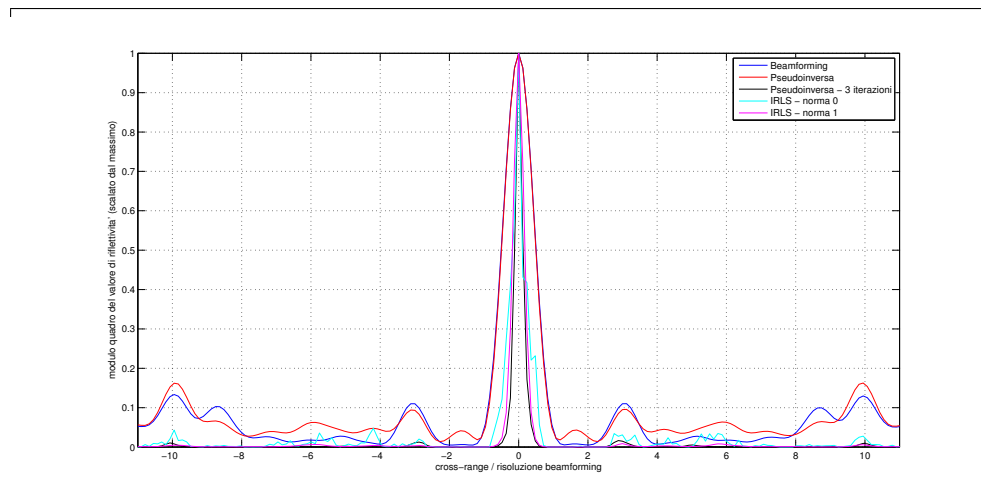


Figura 3.19: Rapporto tra energia media dei lobi laterali e energia del lobo principale.

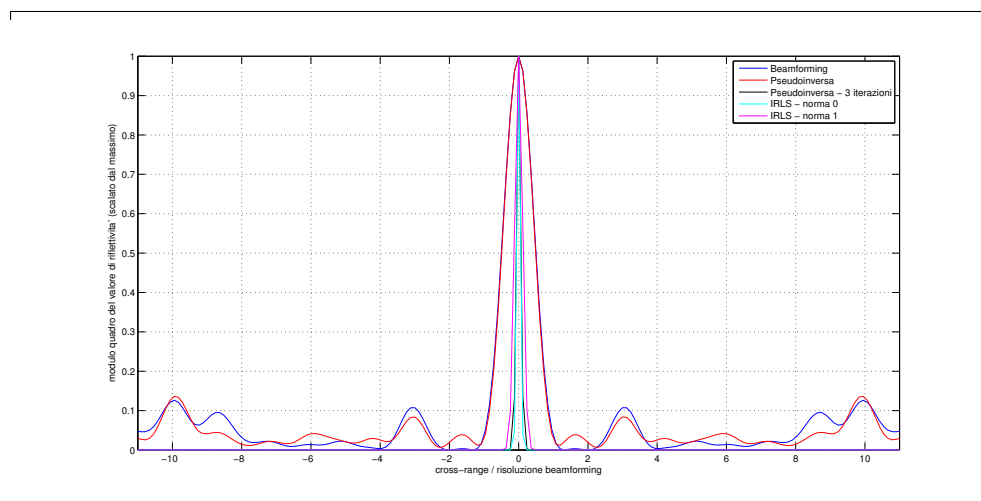
Dai grafici, come già visto in per la localizzazione dei target, L'IRLS e La Pseudoinversa peggiorano la stima classica (Beamforming) nel caso di bassi valori di SNR, ma dai 10 dB in poi le due tecniche proposte sono migliorative.



(a) 0 dB di SNR.



(b) 10 dB di SNR.



(c) 50 dB di SNR.

Figura 3.20: Valore quadratico medio di 100 stime della funzione di riflettività.

Capitolo 4

Dati reali

Infine per concludere la trattazione, in quest'ultimo capitolo si presentano i risultati delle tecniche descritte nei capitoli precedenti ma con in ingresso dati reali. Dati acquisiti da sistemi SAR satellitari in un caso e montati su un aereo nell'altro, in entrambi i casi non si è partiti a elaborare dai dati grezzi, bensì da serie di immagini già focalizzate in slant-range ed in azimuth, cioè una collezione di SLC della stessa zona. Tutte le immagini utilizzate per la tomografia erano inoltre già coregistrate.

I dati analizzati provengono da due ambienti diversi come in possono essere divise in due le tipologie di tecniche Tomografiche SAR 3D:

- Tomografia di ambiente boschivo (i target di interesse sono in generale alberi)
- Tomografia di ambiente urbano (i target di interesse sono edifici)

I due tipi di tomografia si distinguono fondamentalmente per la tipologia di target che si vogliono risolvere.

Nei due sottocapitoli successivi vengono descritte in modo generale le due situazioni e successivamente presentati e commentati i risultati ottenuti. Con una particolare attenzione alla tomografia in ambiente urbano per la quale le ultime due tecniche del capitolo 2 sono più adatte.

4.1 Dati di una zona boschiva

Il primo tipo di dato analizzato è di una zona boschiva, ed in particolare si tratta dello stesso dato elaborato negli articoli [10] e [2].

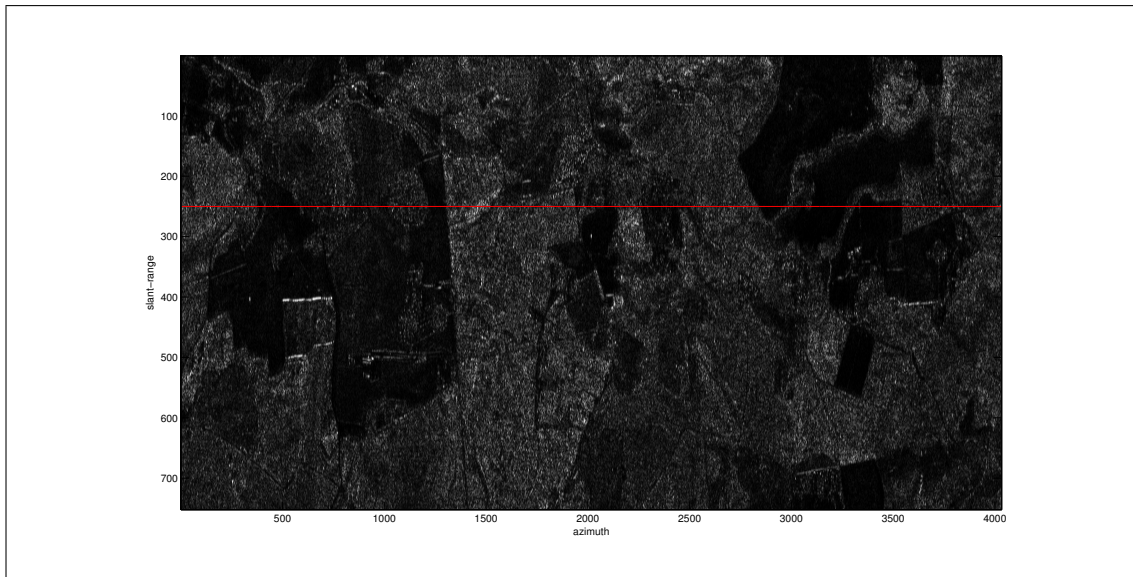
I target che la tomografia SAR di ambiente boschivo cerca di ricostruire si decorrelano piuttosto velocemente nel tempo, Questo vuol dire che come già esposto nel capitolo 1.3, le acquisizioni Multi-Pass della stessa zona non devono essere troppo distanti temporalmente. Per questo motivo in questi casi l'utilizzo dell'aereo è preferibile al satellite. Un'altra caratteristica di questi target è l'irregolarità (non sono approssimabili a forme geometriche) che comporta grandi difficoltà nella realizzazione di un modello realistico per descriverli. Quello che si fa quindi solitamente è stabilizzare la soluzione tramite un filtraggio spaziale che renda la soluzione più omogenea. infatti la risoluzione delle immagini a disposizione è di 3 metri in slant range e 1 m in azimuth, ma è preferibile ridurre la risoluzione e in cambio ottenere una soluzione più stabile, anche perchè essendo i target da localizzare alberi, non è interessante conoscere l'altezza di un singolo albero. Generalmente ai fini della misurazione delle risorse boschive di una zona si cerca di ottenere l'andamento medio dell'altezza degli alberi.

L'area rappresentata dai dati è il sito boschivo di Remningstorp, In Svezia, e sono 9 immagini di un sistema radar in banda P, acquisita tramite un aereo durante la realizzazione del progetto Biosar 2007 della ESA. La stessa area è stata elaborata in precedenza con diverse tecniche tomografiche, quindi nonostante sia un dato reale, molto della funzione di riflettività della scena era noto. Ad esempio alberi presenti sono alti mediamente 20 metri, con alcune cime che raggiungono i 30 metri,

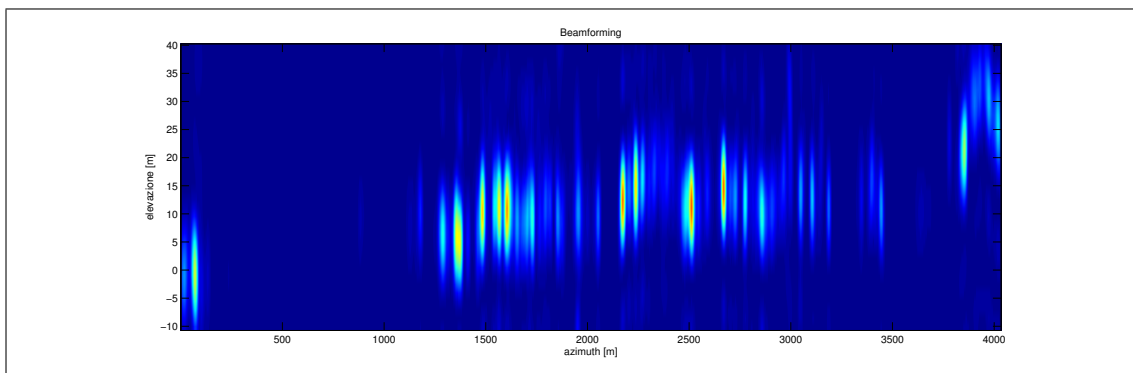
Nelle immagini che seguono sono visualizzati degli esempi di tomografia SAR 3D. Nella figura 4.1 sono presentate stime della funzione di riflettività effettuate con due tecniche semplici come il *Beamforming* e la *Pseudoinversa*, in entrambi i casi la risoluzione in elevazione rimane molto bassa e i lobi laterali sono evidenti a causa del campionamento irregolare nella direzione di cross-range. Invece nelle immagini 4.2 e 4.3 è possibile osservare le soluzioni ottenute con le due tecniche proposte in questa tesi, la *Pseudoinversa iterata* e l'*IRLS*. Queste ultime due tecniche non sono pensate per risolvere target di tipo irregolare tipici delle zone boschive, infatti nonostante dalla figura si noti un miglioramento della risoluzione in elevazione nel localizzare il terreno, ma le cime degli alberi si perdono completamente, questo è dovuto al fatto che la tecnica privilegia i target molto forti. Per rendere la scena più regolare e meno dipendente dalle irregolarità del singolo albero, viene applicato un filtro spaziale nella direzione dell'azimuth. In particolare in queste immagini è stato applicato un filtro di Hanning di 30 campioni.

La linea rossa orizzontale nelle immagini 4.1 (a) e in 4.2 (a), rappresenta la posizione in slant-range in cui è stata effettuata la tomografia.

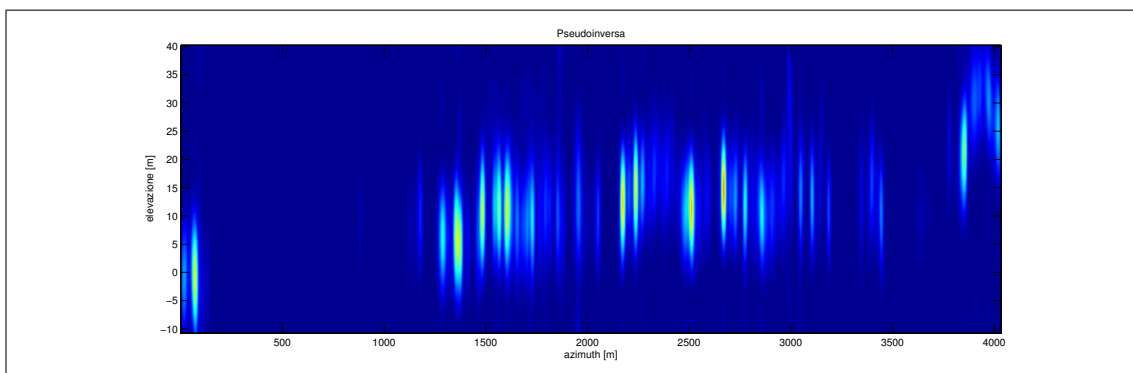
Si rimanda al prossimo capitolo per le tecniche di correzione della fase, in quanto alle immagini SLC della zona boschiva, erano già state applicate tutte le correzioni



(a) Una SLC della zona boschiva.

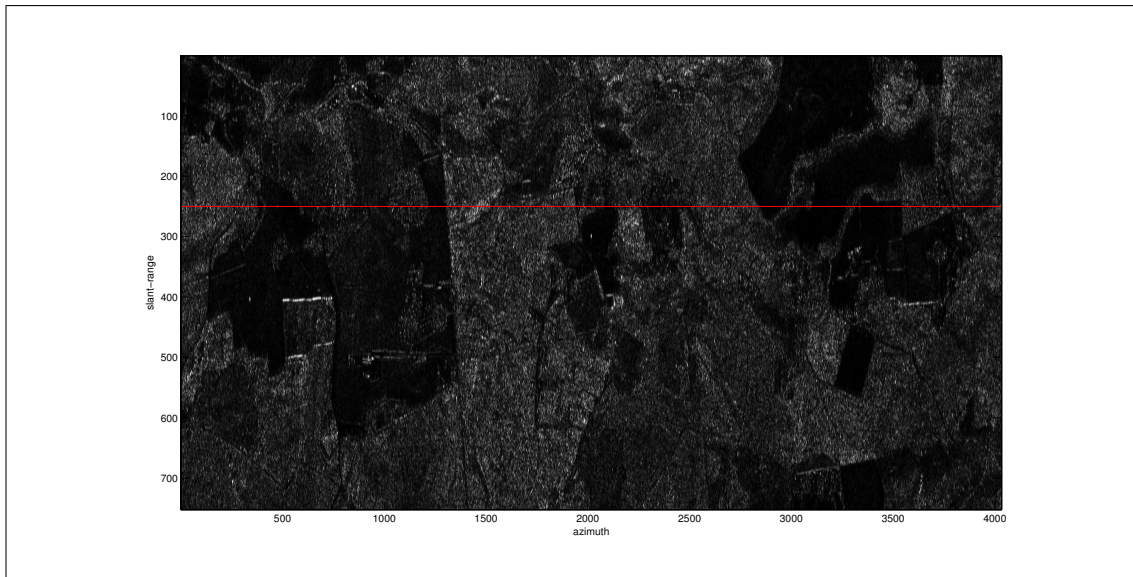


(b) Dato focalizzato con Beamforming

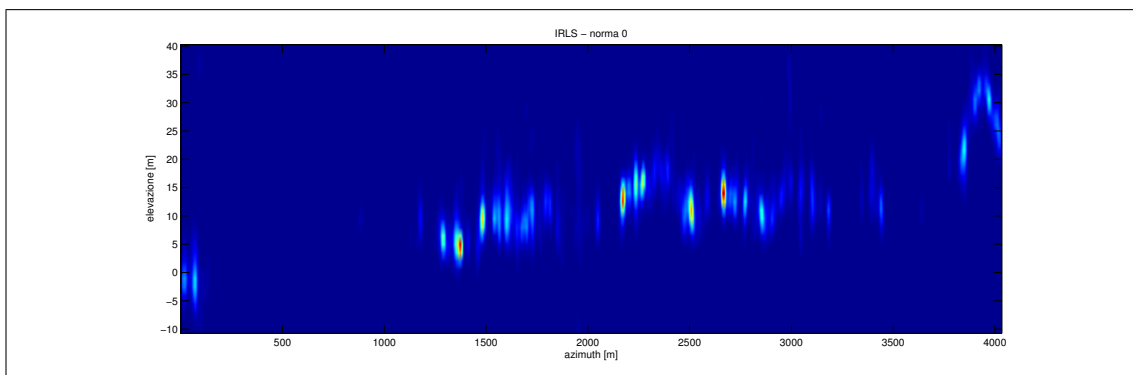


(c) Dato focalizzato con Pseudoinversa

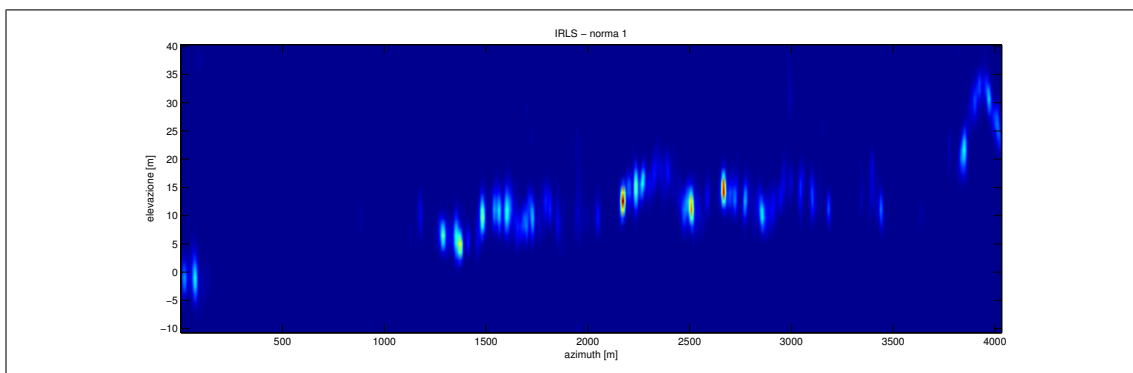
Figura 4.1: Tecniche di inversione classiche.



(a) Una SLC della zona boschiva.

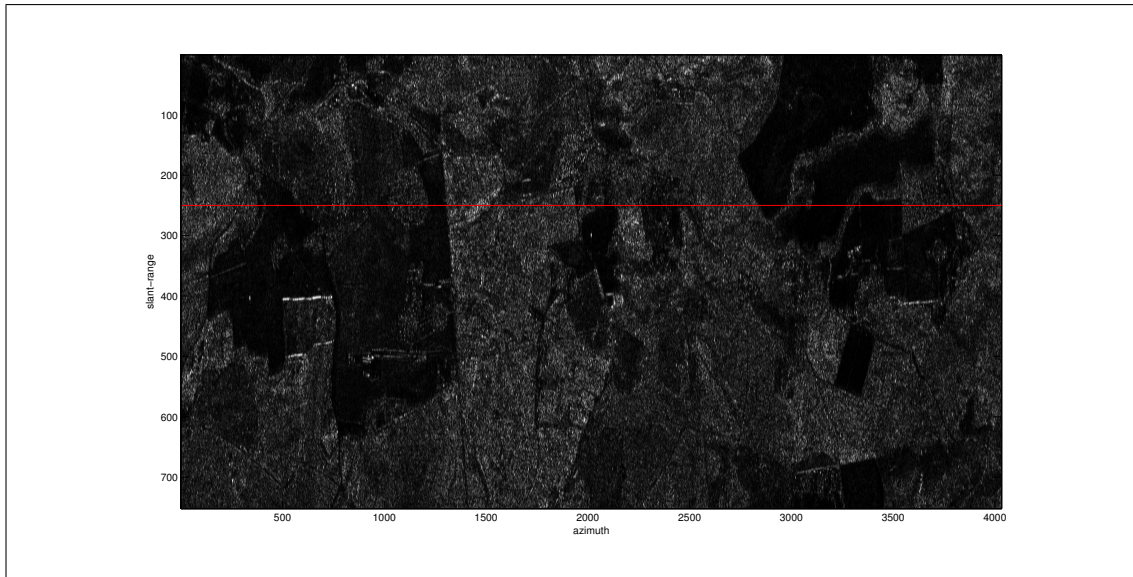


(b) Dato focalizzato con IRLS - norma 0

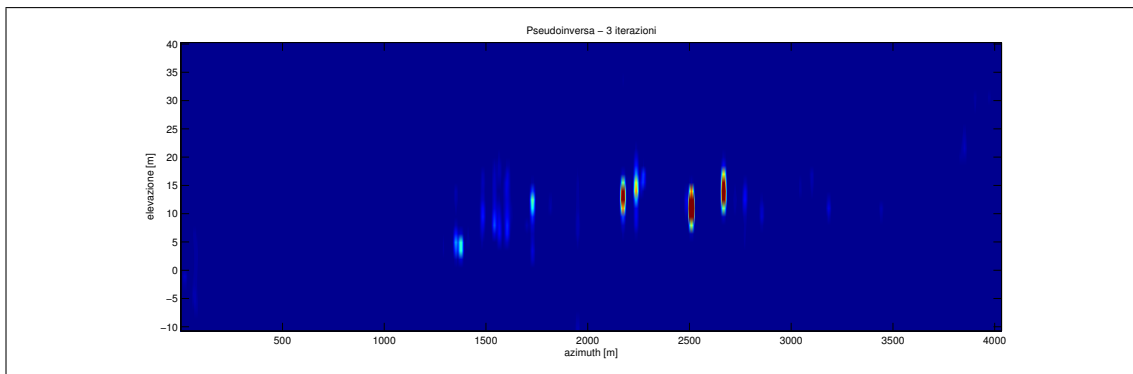


(c) Dato focalizzato con IRLS - norma 1

Figura 4.2: Tecniche di inversione proposte in questa tesi.



(a) Una SLC della zona boschiva.



(b) Dato focalizzato con Pseudoinversa - 3 iterazioni

Figura 4.3: Tecniche di inversione proposte in questa tesi.

necessarie ed perciò bastato procedere con la tomografia.

Per completezza si confrontano le immagini ottenute con le tecniche proposte in questa tesi con dei risultati ottenuti invece con tecniche pensate appositamente per la tomografia dell'ambiente boschivo. A questo proposito possiamo vedere in figura 4.4 una tomografia ottenuta tramite un filtro di Capon [10]. Questa tecnica fa assunzione di una buona continuità spaziale in slant-range e in azimuth e quindi filtra in queste direzioni. In questo modo si ottiene un'immagine in cui oltre ad essere visibile la discontinuità del terreno (molto più forte in presenza di alberi per lo stesso principio presentato nel capitolo 1.4), appena sopra il terreno dove c'è la presenza di alberi si notano delle sagome più chiare, da cui è possibile misurarne l'altezza delle cime.

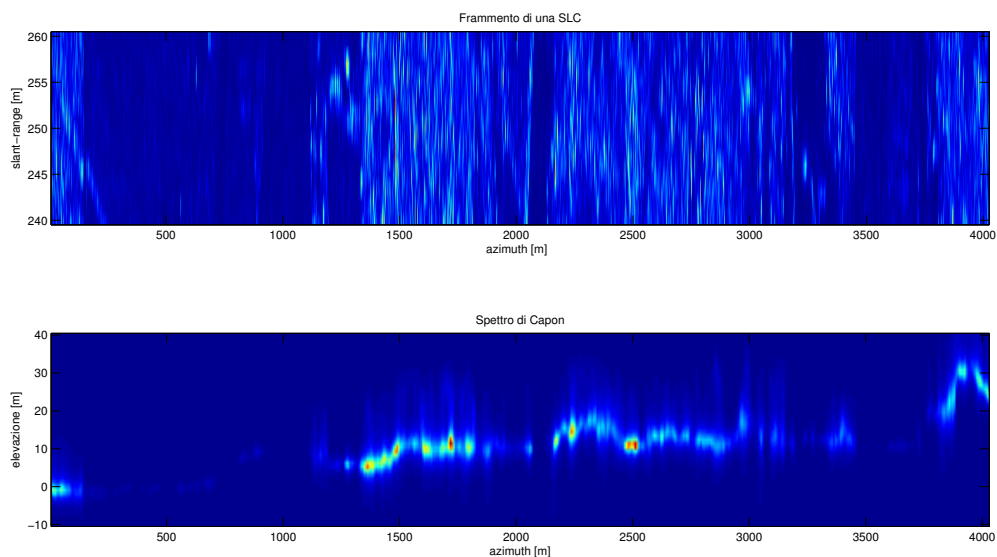


Figura 4.4: Focalizzazione in cross-range tramite filtro di Capon.

4.2 Dati di una zona urbana

Infine si arriva al dato reale attorno al quale è stata costruita la tesi, ovvero una serie di 21 immagini SLC, quindi già focalizzata in slant-range e in azimuth di una zona urbana. I dati reali sono stati acquisiti dal sistema **COSMO-SkyMed** (**CO**nstellation of small **S**atellites for the **M**editerranean basin **O**bservation). COSMO-SkyMed è un programma spaziale italiano finanziato dal ministero dell'educazione e della ricerca, dall'ASI (Agenzia Spaziale Italiana) e il ministero della difesa. E un progetto che di conseguenza è stato pensato sia per applicazioni civili che militari. Tra gli obiettivi civili ci sono sicuramente il monitoraggio del territorio per la prevenzione di catastrofi, il controllo della subsidenza e dell'insediamento urbano.

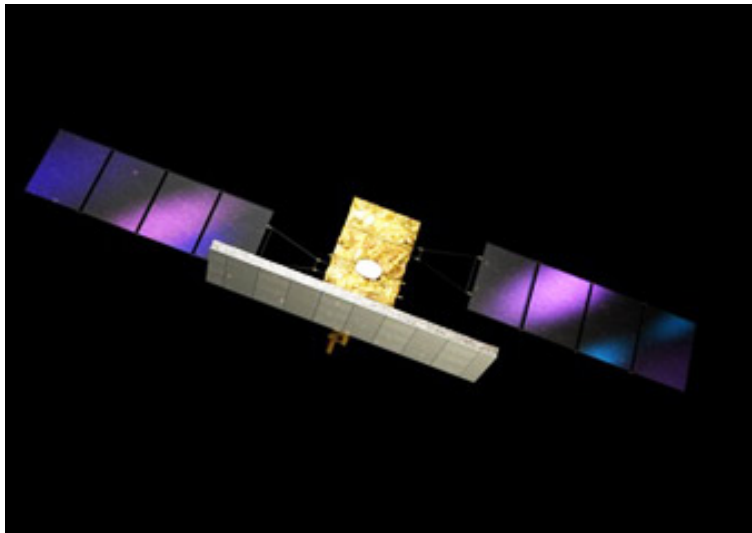


Figura 4.5: Ricostruzione di un satellite Cosmo.

il sistema COSMO-SkyMed è composto da una costellazione di 4 satelliti di dimensione media, equipaggiati con sensori per sistemi SAR in banda X ($\lambda = 3\text{ cm}$ e $f_0 = 10\text{ GHz}$). Sono progettati per orbite polari ed elio-sincrone, sfasate di 90° , della durata di ~ 97 minuti ciascuna, con un ciclo di 16 giorni. L'orbita ha una eccentricità pari a 0.00118 con il semiasse maggiore pari a 7003.52 km.

La costellazione al completo è il miglior compromesso tra costi e performance, che permette di avere un accesso globale alla terra in poche ore, con almeno due opportunità per giorno per accedere allo stesso target da differenti angolazioni. Questo è ottimo per le applicazioni tomografiche di questa tesi.

Descritto il sistema SAR utilizzato per l'acquisizione dei dati in modo generale passiamo quindi a definire in particolare i dati elaborati in questo lavoro di tesi.

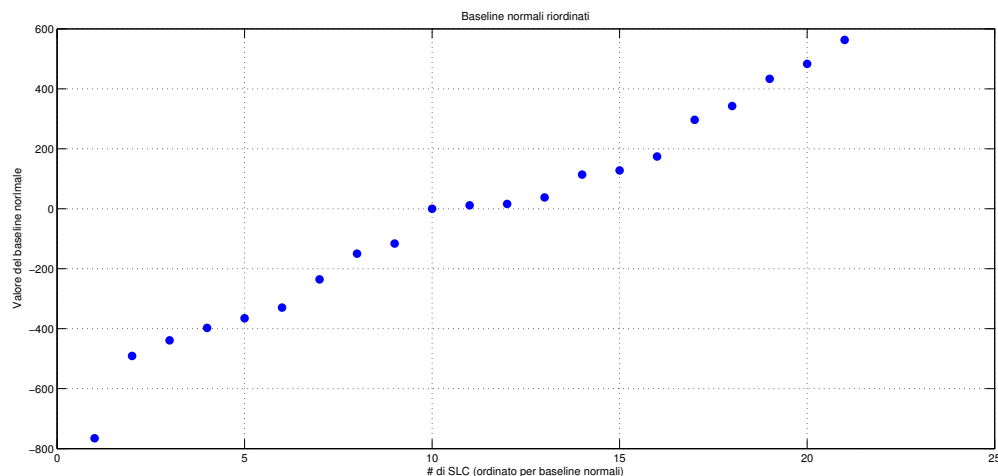


Figura 4.6: *Baseline normali.*

In figura 4.6 visualizzate le posizioni delle SLC in termini di baseline normali, riferite all'immagine utilizzata come master per il deramping (10° in figura). Ogni immagine osserva la stessa scena con angoli di look leggermente diversi ma tutte intorno ai 26.5° , e sono tutte immagini SAR 2D focalizzate e precedentemente coregistrate della città di Milano, e approssimativamente con coordinate indicate nella seguente tabella:

| | |
|--------------------------|-----------------------------|
| angolo sud-ovest | 45°27'27.77N 9° 9'56.13E |
| angolo nord-est | 45°30'11.67N 9°13'12.45E |
| inclinazione azimuth/est | $\sim 165^\circ$ |

Al fine di preparare gli SLC coregistrati per la tomografia sono necessari ancora due fasi:

4.2.1 Deramping

Ciascuna immagine è stata fornita con una matrice di correzione, all'interno della quale sono salvate le fasi relative ai target posizionati a elevazione uguale a 0. Si

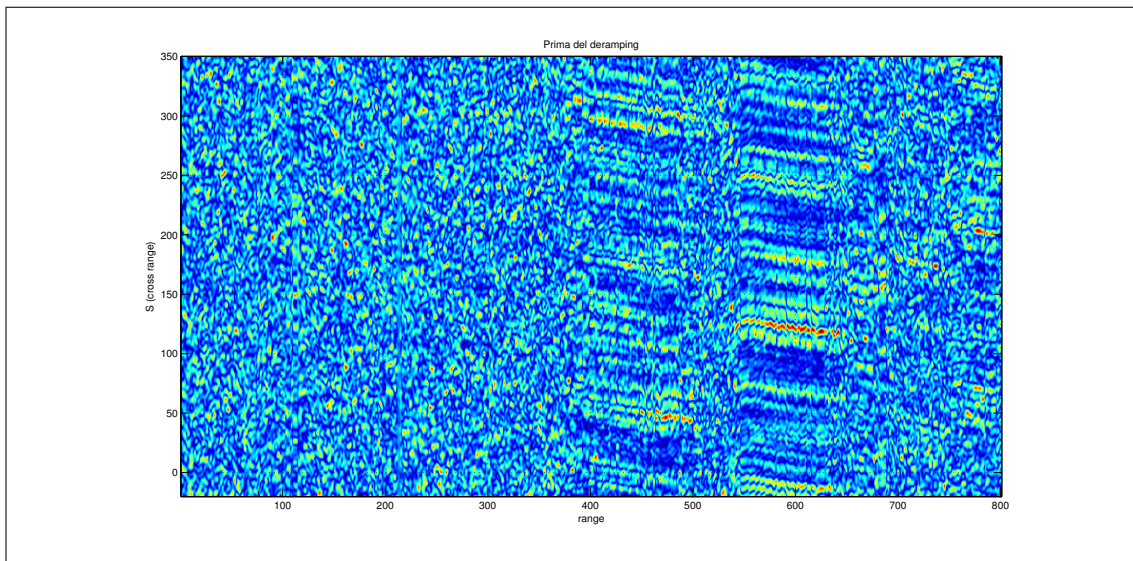


(a) Ottico della zona coregistrato con il SLC qui sotto

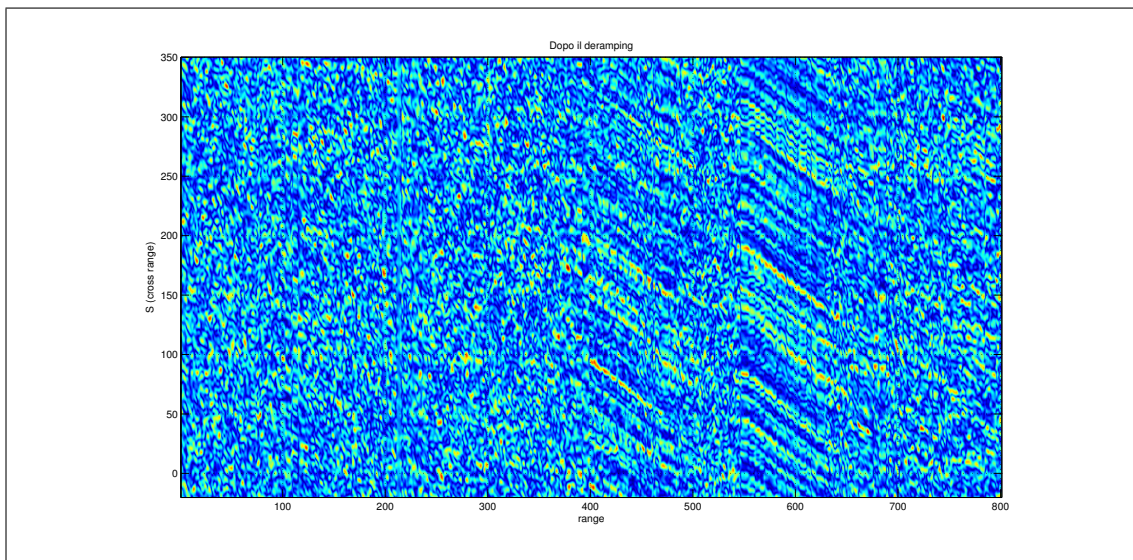


(b) SLC master

Figura 4.7: Area di Milano a disposizione.



(a) Beamforming prima del deramping



(b) Beamforming dopo il deramping

Figura 4.8: Beamforming rappresentato in cross-range/slant-range.

ricordi che a valle della coregistrazione sulla diverse immagini ogni pixel contiene lo stesso target ma di conseguenza essendo ciascuna immagine proveniente da un dato acquisito da distanze e angolazioni differenti dalle altre, ogni pixel corrisponderà ad un differente valore di range e di azimut relativo.

Tutte le SLC vengono corrette tranne quella che viene assunta come *master* cioè quella a cui viene attribuito il centro ideale della schiera (dato che i baseline non sono equi-spaziati non è propriamente al centro) e quindi il suo baseline è pari a zero. Di conseguenza, come si vede anche nel capitolo 1.3.3, la fase dipende fundamentalmente dai baseline normali, la matrice di correzione associata alla SLC master sarebbe una matrice completamente nulla.

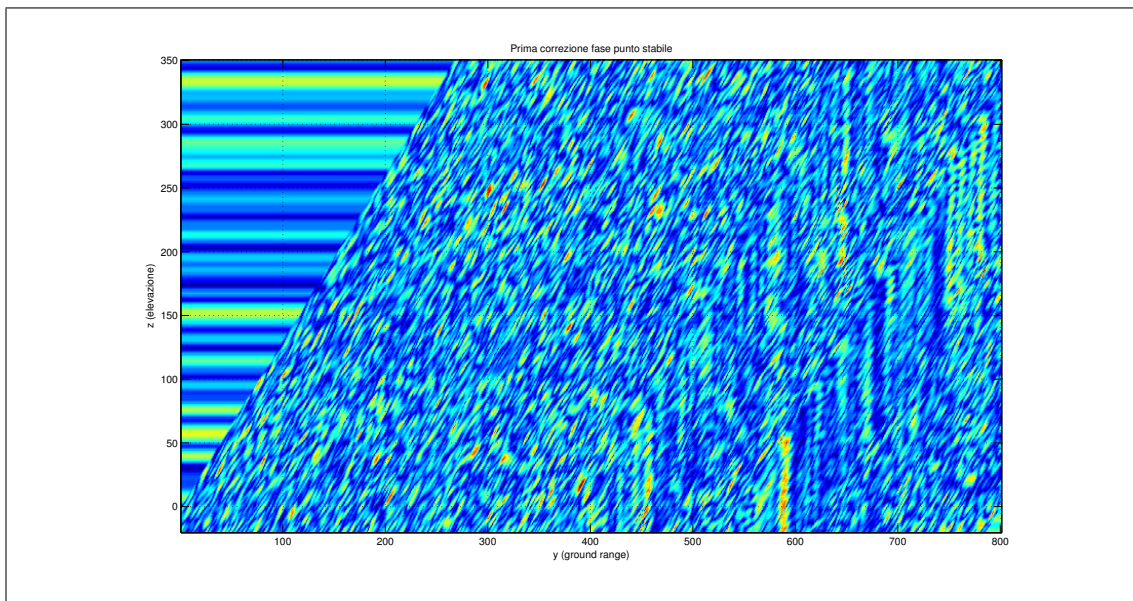
Questa prima fase di correzione della fase descritta anche nell'equazione 1.25 è detta *deramping*, non realizzata sui dati sintetici, in quanto generati direttamente con la relazione 1.27, Risulta invece di fondamentale importanza nel caso di dati reali.

4.2.2 Correzione residua della fase.

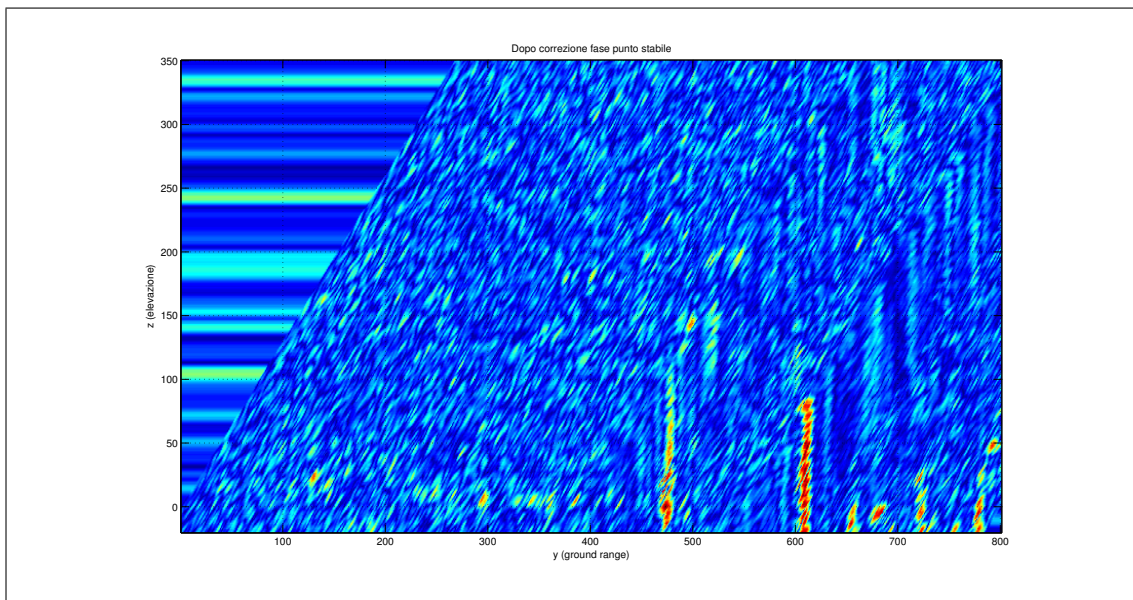
Dopo aver tolto alla fase il contributo geometrico dovuto solamente alla distanza della scena, che non dipende quindi dalla posizione in elevazione del target, potrebbe capitare che rimanga una fase residua che impedisce una buona focalizzazione da parte delle tecniche tomografiche. I disturbi di fase possono venire da diverse cause, a partire dal disturbo atmosferico, ad esempio una formazione nuvolosa o delle precipitazioni. Quindi fundamentalmente la variazione dell'indice di rifrazione dell'aria a seconda dell'umidità provoca un'apparente variazione del tragitto dell'onda. Generalmente però questi disturbi variano molto poco spazialmente, quindi molti pixel vicini possono essere considerati affetti mediamente dallo stesso disturbo di fase.

Quello che si può fare questi casi è sfruttare informazioni a priori su alcuni target ben visibili della scena, di cui sia nota la posizione a terra, e traslare tutte le fasi dei pixel limitrofi. Nei dati di Milano a disposizione si è proceduto nel seguente modo:

1. È stata ritagliata un'immagine ottica della scena grazie al software Google Earth®
2. L'immagine ottica è stata quindi coregistrata con l'immagine SAR 2D (slant-range/azimuth), in modo tale che i punti a terra corrispondessero
3. Da una prima analisi delle SLC a disposizione si è localizzato un target ben visibile e che riconoscibile dall'ottico come un punto a terra, quindi generalmente la base di un edificio.



(a) Beamforming prima della correzione del punto stabile



(b) Beamforming dopo la correzione del punto stabile

Figura 4.9: Beamforming rappresentato in altezza/ground-range.

4. Scelto il punto, per ciascuna immagine separatamente è stata eliminata la fase di quel punto da tutti i pixel dell'immagine.

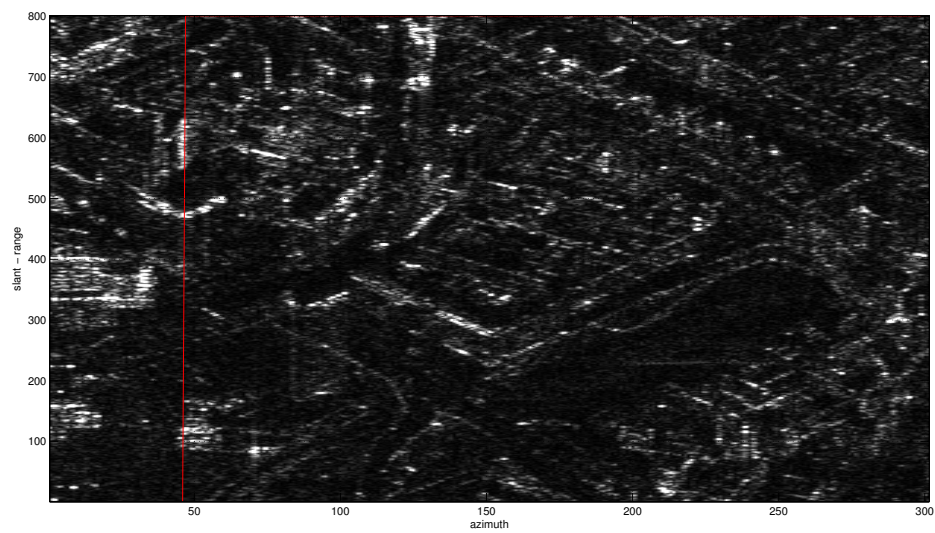
Questa procedura comporta l'aver imposto a zero la fase di un punto a terra, riportando a terra tutti i punti con la stessa fase, eliminando le traslazioni non dovute alla geometria della scena e che sono costanti per un gran numero di pixel vicini. Per garantire una migliore riuscita della tecnica conviene applicarla dopo aver suddiviso in parti non troppo grandi l'immagine radar, oppure (meglio) estrarre la fase di diversi punti a terra e interpolarne il valore in modo da sottrarre un campo di fase continuo.

Nel passare dalla figura 4.8 alla 4.9 si può notare un'ulteriore modifica dei risultati dovuta alla trasformazione delle coordinate dalle coordinate cross-range / slant-range tipiche delle immagini radar, in ground-range / altezza (y) dimensioni invece più tipiche della rappresentazione delle realtà. Questa trasformazione non corrisponde ad una semplice rotazione, infatti i punti a terra (cross-range = 0) nella prima figura rimangono a terra anche nella seconda ($y = 0$).

4.2.3 Risultati.



(a) Ottico dell'area processata ottenuto tramite Google Earth



(b) SLC Master dell'area processata

Figura 4.10: Area elaborata.

Le tecniche presentate in questa tesi non sono state ottimizzate da un punto di vista del costo computazionale di conseguenza per ridurre i tempi di processing l'elaborazione è stata effettuata su frammenti delle SLC a disposizione. Questa scelta non influenza la qualità dell'immagine.

Si è scelta la zona in figura 4.10, perchè in questa si possono osservare diversi palazzi, e i target a terra nell'immagine SAR 2D erano facilmente riconoscibile e molto forti, permettendo quindi una buona correzione della fase nella fase preliminare del processing. Nelle figure che seguono sono rappresentate le stime della funzione di riflettività nelle coordinate ground-range / altezza (y).

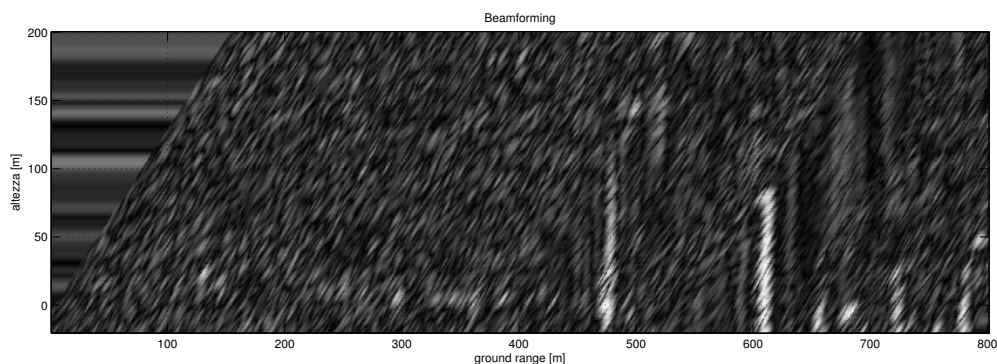


Figura 4.11: Scena focalizzata con Beamforming.

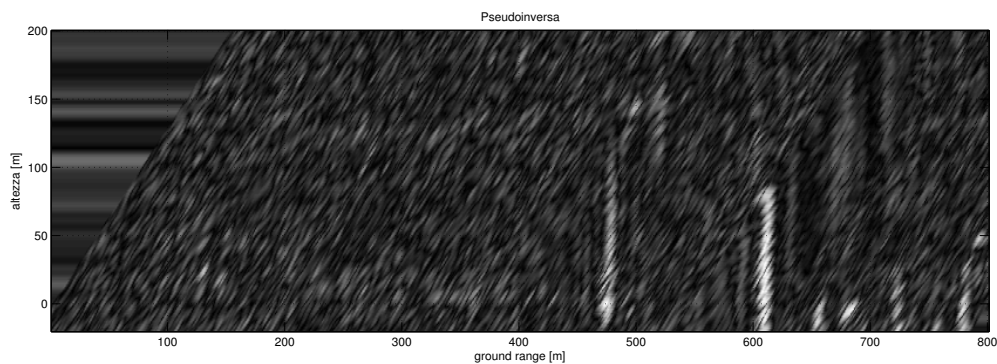


Figura 4.12: Scena focalizzata con Pseudoinversa.

Le immagini ottenute con le tecniche classiche rimangono piuttosto simili (figure 4.11 e 4.12), e in entrambi i casi i target sono facilmente distinguibili dato che la

risoluzione del sistema è già piuttosto buona. Risulta invece evidente un miglioramento della qualità delle immagini ottenuto grazie alle nuove tecniche in termini di “contrasto”, cioè i lobi laterali si abbassano in favore di una migliore visibilità dei target (figure 3.7 e 4.14).

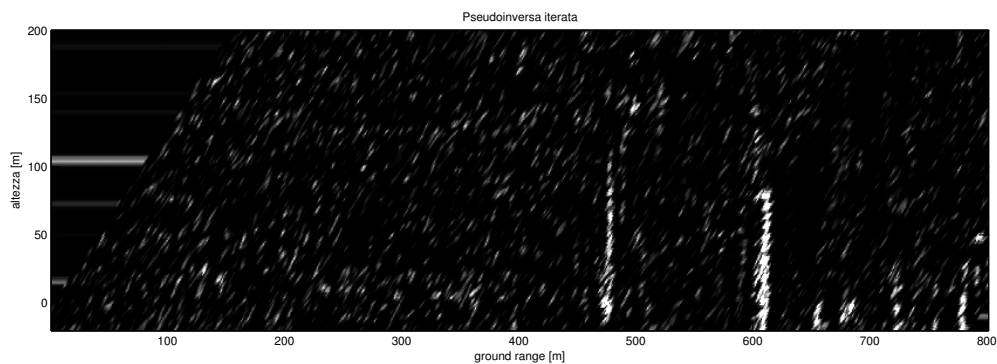
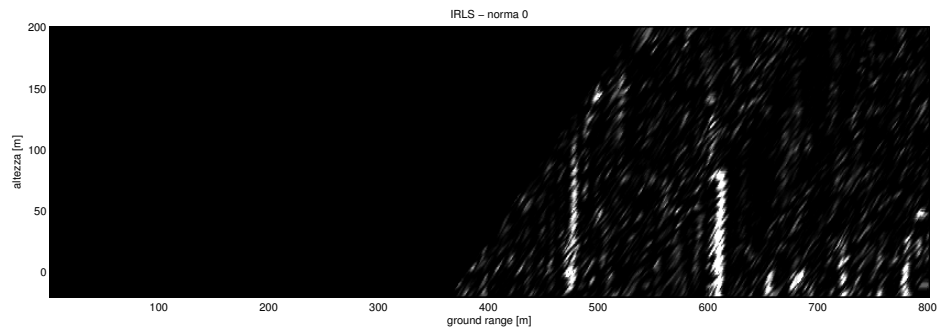
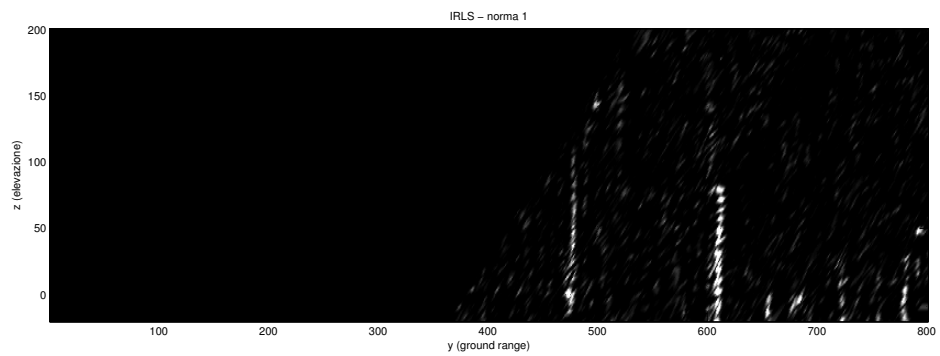


Figura 4.13: Scena focalizzata con *Pseudoinversa* - 3 iterazioni.

Nella figura 4.15, sono visualizzate le foto dei due palazzi molto visibili nel risultato. La loro forte ampiezza è probabilmente dovuta alla evidente presenza, negli edifici, di spigoli verticali che concentrano l'onda in un punto solo analogamente a quanto descritto nel paragrafo 1.4 ma questa volta la riflessione avviene sul piano a elevazione costante.



(a) Scena focalizzata con IRLS - norma 0.



(b) Scena focalizzata con IRLS - norma 1.

Figura 4.14: Focalizzazione tramite IRLS



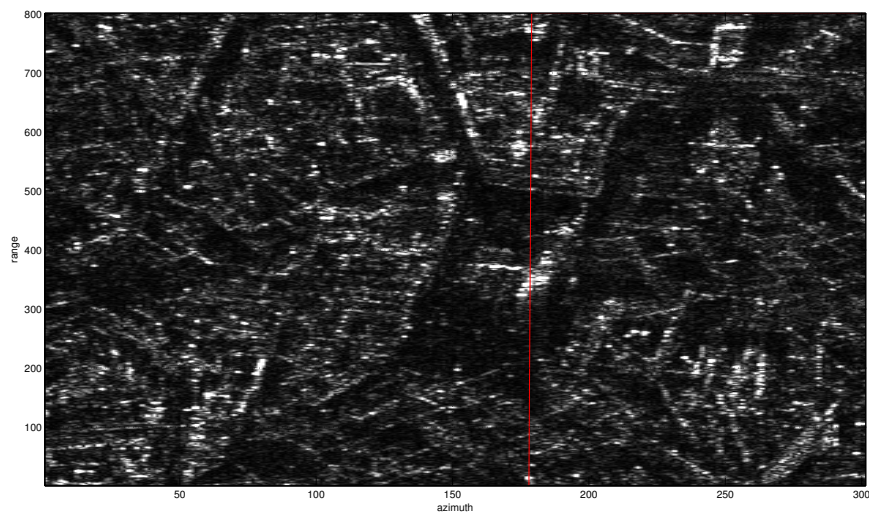
Figura 4.15: I due palazzi focalizzati.

4.2.4 Duomo.

In quest'ultima sezione sono raccolte immagini ottenute focalizzando in cross-range un'altra zona di Milano. In particolare si vede in figura 4.16 che la zona corrisponde a piazza Duomo, e la linea rossa indica la sezione a cui è stata effettuata la tomografia. Tramite la tecnica della Pseudoinversa iterata (figura 4.18) si riesce a distinguere la guglia più alta su cui è posizionata la madonnina all'incirca a 108 metri e tre guglie minori incrociate dalla particolare sezione elaborata.



(a) Ottico dell'area processata ottenuto tramite Google Earth



(b) SLC Master dell'area processata

Figura 4.16: Area elaborata.

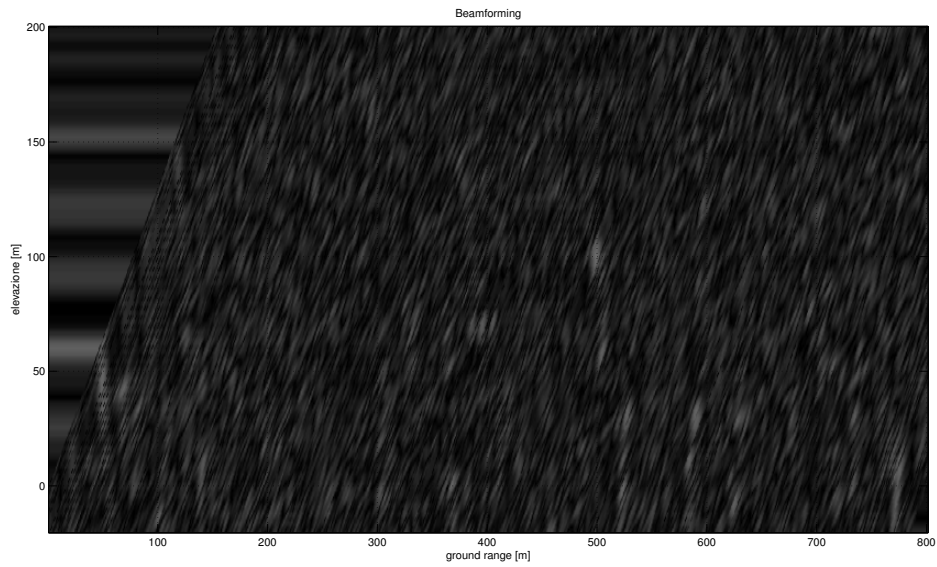


Figura 4.17: Scena focalizzata con Beamforming.

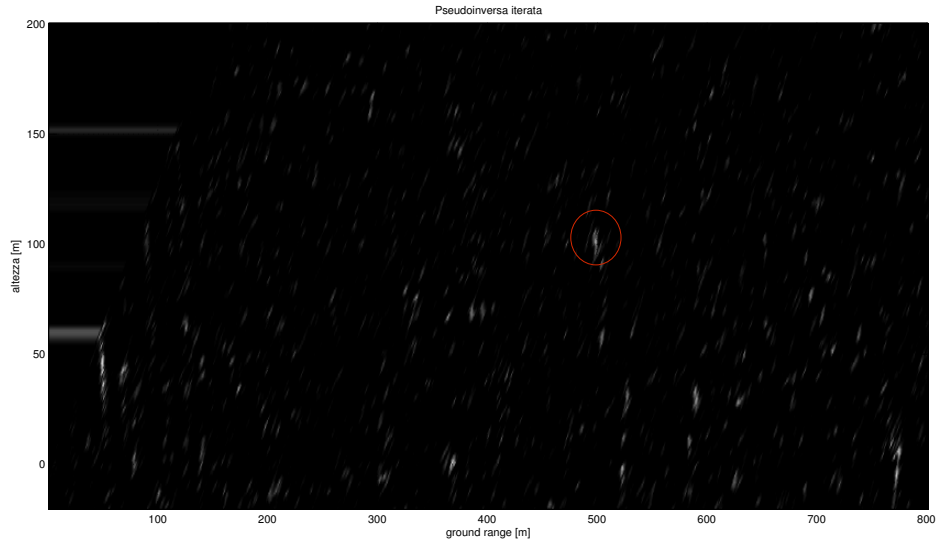


Figura 4.18: Scena focalizzata con Pseudoinversa - 3 iterazioni.

Conclusioni

In questa tesi dopo aver presentato i sistemi radar classici la trattazione si è concentrata sulla tomografia SAR 3D, quindi su sistemi che utilizzano differenti passaggi dello stesso satellite per ricostruire la scena osservata in tutte e tre le direzioni dello spazio. Le problematiche tipiche dei sistemi Multi-Pass sono state quindi analizzate e i loro effetti verificati sui risultati ottenuti con le tecniche tomografiche più semplici.

Le tecniche che sono state successivamente proposte vanno contestualizzate alla tipologia di target presenti nella scena osservata. La tomografia in ambiente urbano essendo ricca di “spigoli” e particolari strutture geometriche regolari, si presta molto bene ad essere realizzata con tecniche che fanno risaltare i target molto forti e isolati.

Una tecnica come l’IRLS che permette di trovare la soluzione che minimizza una particolare norma della soluzione è interessante in quanto permette di studiare la risoluzione del metodo al variare del modo in cui la norma della soluzione viene calcolata. Dall’analisi si è osservato che minimizzare la norma- p , con $p < 1$, nonostante porti ad un miglioramento in termini di risoluzione (rispetto alla risoluzione del beamforming) introduce però delle instabilità che rendono la tecnica più vulnerabile al rumore man mano che ci si avvicini alla norma ℓ_0 .

La tecnica che itera la pseudoinversa, trasformando le soluzioni in informazioni a priori, migliora la risoluzione in modo evidente rimanendo però più robusta al rumore.

All’effetto dei lobi laterali sulla qualità dell’immagine tomografica è stata riservata una sezione del calcolo delle prestazioni, ma in ogni caso è molto evidente come le tecniche proposte migliorino il contrasto delle immagini radar ottenute da dati reali. Questo a discapito però di una perdita di continuità tra target differenti, effetto auspicabile in ambito urbano dove i target sono principalmente di carattere impulsivo quando li si osserva tramite un radar.

L’utilizzo delle tecniche di super-risoluzione proposte, nella tomografia SLC provenienti da ambiente boschivo, ha sortito i risultati che ci si aspettava: queste tecni-

che non sono adatte a risolvere i target che presentano un certa continuità spaziale come quelli presenti in questi ambienti (boschi, foreste).

Possibili sviluppi futuri di questa tesi possono essere un'analisi dell'accuratezza radiometrica delle tecniche. Dopo aver quindi migliorato il contrasto delle immagini e la risoluzione nel localizzare i target il passo successivo potrebbe essere stimarne la riflettività con una certa accuratezza, e quindi anche il numero dei target effettivamente presenti nella scena. Per quest'ultimo problema una soluzione potrebbe essere data dalle tecniche del tipo Model Order Selection (M.O.S.) le quali pesano la presenza di un target sulla base di quanti ne sono già stati localizzati.

Infine dato ciascuna immagine SLC viene fornita con associato sia un baseline normale sia il riferimento temporale di quando è stato acquisito il relativo dato, potrebbe essere interessante introdurre una quarta dimensione alla tomografia, la velocità. Questo tomografia permetterebbe di discriminare la velocità dei target posizionati ad altezze differenti negli edifici e quindi identificarne eventuali deformazioni.

Riconoscimenti

L'elaborazione dei dati del sistema **COSMO-SkyMed** (nel capitolo 4.2) è stata eseguita nell'ambito dell'Accordo 1080 "SAR data Calibration and Validation by Natural Targets". Si ringrazia l'Agenzia Spaziale Italiana per aver messo a disposizione i dati.

Bibliografia

- [1] *IRLS algorithm* website. http://sepwww.stanford.edu/public/docs/sep61/gilles/paper_html/node4.html.
- [2] S. Tebaldini; M. Mariotti d'Alessandro; Fabio Rocca. Sar imaging of forest structure at longer wavelengths. In *Radar Conference, 2010 IEEE*, May 2010.
- [3] Aldo Paraboni; Michele D'Amico. *Radiopropagazione*. McGraw-Hill, 2002.
- [4] Giuseppe Drufuca. *Problemi Inversi*. cusl, 2004.
- [5] Marco Frontini. *Fondamenti di calcolo numerico*. Maggioli Editore, 2004.
- [6] Francesco Serafino Gianfranco Fornaro and Francesco Soldovieri. Three-dimensional focusing with multipass sar data. *IEEE TRANSACTIONS ON GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING, VOL. 41, NO. 3, MARCH 2003*.
- [7] Andrea Monti Guarnieri. *Sistemi RADAR e Localizzazione*. 2007.
- [8] Massimo Fornasier C. Sinan Güntürk Ingrid Daubechies, Ronald DeVore. Iteratively re-weighted least squares minimization for sparse recovery. 2008.
- [9] Umberto Spagnolini. *Elaborazione statistica dei segnali per le telecomunicazioni*. 2004.
- [10] S. Tebaldini. Single and multipolarimetric sar tomography of forested areas: A parametric approach. In *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, volume 48, pages 2375–2387, May 2010.
- [11] IEEE Xiao Xiang Zhu, Student Member and IEEE Richard Bamler, Fellow. Tomographic sar inversion by l1-norm regularization-the compressive sensing approach. In *IEEE TRANSACTIONS ON GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING*.