

POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA MATEMATICA



**Correlazioni quantistiche
indotte dall'ambiente esterno
ed evoluzioni stocastiche**

Relatore

Prof. Matteo GREGORATTI

Correlatore

Prof. Alberto BARCHIELLI

Laureando

Giacomo GALETTI (matr. 735062)

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

*Wo viel Licht ist,
ist auch viel Schatten.*

Wolfgang Goethe

Indice

1	Introduzione	7
2	Introduzione alla meccanica quantistica	13
2.1	Introduzione alla meccanica quantistica	13
2.1.1	L'esperimento di Stern-Gerlach	14
2.1.2	Algebra lineare	17
2.2	Sistema singolo	25
2.2.1	Osservabili e misure a valore di operatore positivo	25
2.2.2	Formulazione statistica	28
2.2.3	Operazioni e strumenti	33
2.2.4	Sequenze di misurazioni	41
3	Sistemi composti ed entanglement	45
3.1	Sistemi composti	45
3.1.1	Traccia parziale	47
3.1.2	Sistemi chiusi e sistemi aperti	51
3.1.3	EPR, disuguaglianza di Bell e interpretazione fisica	56
3.2	Entanglement	60
3.2.1	Gli stati entangled	61
3.2.2	Peres e gli Horodecki	63
3.2.3	Base di Bell	66
3.3	Concurrence	67

4	Tempo discreto	73
4.1	Problema e modello proposto	73
4.2	Rappresentazioni con environment	74
4.3	Analisi risultati	81
5	Tempo continuo	83
5.1	Processi stocastici	83
5.2	Equazione di Schrödinger stocastica	85
5.2.1	Equazione di Schrödinger stocastica lineare	86
5.2.2	Condizioni per l'esistenza e l'unicità della soluzione	86
5.2.3	Norma della soluzione	87
5.2.4	Cambio di probabilità	90
5.2.5	Equazione di Schrödinger stocastica non lineare	91
5.3	Master equation stocastica	93
5.3.1	Equazione per la media	94
5.4	Entanglement e SSE: il caso di operatori locali	95
5.4.1	Evoluzione di $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$	96
5.4.2	La concurrence	99
5.5	Concurrence e SSE: interazione	100
5.5.1	Uno spin	101
5.5.2	Due spin	103
5.5.3	SSE	106

Elenco delle figure

2.1	L'esperimento di Stern-Gerlach	14
2.2	L'esperimento di Stern-Gerlach sequenziale	16
2.3	Esito discreto di un esperimento	38
3.1	Schema esperimento Alice e Bob	58
4.1	Rappresentazione con environment	79

Introduzione

In questo lavoro di tesi ci siamo occupati di sistemi quantistici composti in situazioni in cui correlazioni tipicamente quantistiche sono indotte dall'ambiente esterno e dall'osservazione.

Le correlazioni quantistiche hanno un ruolo di primaria importanza nell'informazione quantistica e nel calcolo quantistico. Nell'ultimo decennio molta ricerca è stata dedicata allo studio e alla comprensione di come due sistemi quantistici si possano correlare tra di loro [5, 9, 10].

Il tipo di correlazione che vogliamo andare a studiare prende il nome di *entanglement* che potremmo tradurre con intreccio non separabile, l'entanglement è una sorta di "correlazione quantistica" priva di analogo classico diretto. Uno stato entangled è infatti uno stato che non possiamo esprimere come media pesata di stati non correlati (stati prodotto).

Questo fenomeno dell'entanglement è di fondamentale importanza in meccanica quantistica anche per le ricadute che la piena comprensione di questo fenomeno potrebbe avere sull'informazione quantistica. L'interesse in materia è molto forte anche da un punto di vista matematico-modellistico in quanto per lo studio del problema in tempo continuo sono coinvolte equazioni differenziali stocastiche (EDS), cambi di probabilità, equazioni di evoluzione deterministiche (master equations)...

Ora che abbiamo introdotto il concetto di entanglement, è importante introdurre una quantità che lo misuri. Ci sono varie misure possibili proposte in letteratura, ma noi scegliamo di utilizzare la *concurrence* in quanto è forse la più semplice da trattare da un punto di vista matematico. La concurrence è un analogo quantistico dell'indice di correlazione classico: concurrence nulla indicherà stato separabile, senza alcun entanglement, così come un indice di correlazione nullo indica due variabili decorrelate.

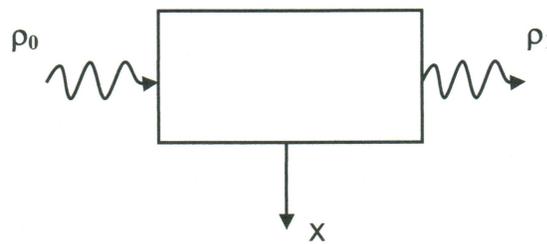
Il nostro interesse ora è cercare di descrivere situazioni in cui si crea dell'entanglement.

Consideriamo pertanto due sistemi quantistici distinguibili. Se ci fosse interazione diretta tra di essi non ci sarebbe alcun stupore nel constatare la formazione di entanglement, mentre in presenza di un environment, ovvero di un ambiente esterno o di un bagno, senza interazione diretta tra i due sistemi, ci aspetteremmo di assistere a dissipazione e distruzione dell'entanglement, proprio per la natura del bagno e dei suoi effetti di “mescolamento”. In [4] tuttavia Benatti, Liguori e Nagy hanno mostrato che dall'interazione con un ambiente esterno comune può crearsi entanglement.

Ispirati da quanto fatto in [4], in questo lavoro consideriamo situazioni in cui l'interazione con l'ambiente esterno in media distrugge l'entanglement fra i due sistemi quantistici di interesse, ma la possibilità di effettuare delle osservazioni può controbilanciare questo effetto negativo e portare a creazione di entanglement.

Consideriamo il caso di misure indirette realizzate osservando l'environment dopo la sua interazione con i due sistemi. In questo modo la misura acquisisce informazione sui due sistemi, modificandone quindi lo stato congiunto per condizionamento, ma non introduce alcun disturbo ulteriore su di essi.

Proprio per questo è necessario introdurre la definizione di stati a priori e stati a posteriori. Per semplicità consideriamo un sistema (composto, nel nostro caso) che assumiamo nello stato ρ_0 , tale sistema sottostà a una trasformazione e a un'osservazione; il risultato dell'osservazione è x e lo stato post-trasformazione, condizionato all'osservazione del valore x è ρ_1 . Tale situazione è illustrata dalla figura seguente



Indichiamo con $\rho(\Omega)$ lo stato a priori ovvero lo stato che possiamo attribuire “a priori” al sistema se non conosciamo l'esito dell'osservazione, oppure se non teniamo conto di tale risultato, ovvero se non eseguiamo proprio la misura sull'environment dopo la sua interazione col sistema. Con i simboli delle figura $\rho(\Omega)$ è la media di ρ_1 fatta su tutti i possibili risultati x .

Indichiamo invece con $\rho(\omega) \equiv \rho_1$ lo stato a posteriori ovvero lo stato che possiamo attribuire a quei sistemi nei quali si è effettivamente realizzato $\omega \equiv x$ nella misura.

In questo elaborato mostreremo come sia possibile costruire particolari modelli con evoluzione e osservazione sia a tempo discreto sia a tempo continuo per due sistemi di stato congiunto iniziale arbitrario per i quali l'evoluzione dello stato congiunto a priori distrugge sempre l'eventuale entanglement mentre lo stato congiunto a posteriori diventa entangled. Ciò significa che il processo di osservazione va in qualche modo a creare delle correlazioni che altrimenti sarebbero state distrutte.

I risultati che si ottengono nei due casi, discreto e continuo, sono analoghi: per lo stato a priori l'entanglement viene distrutto mentre per gli stati a posteriori viene creato e in particolare nel caso discreto esso assume valore massimo.

Analizzando questi risultati in termini di concurrence e pertanto di misura di entanglement, in generale possiamo affermare che la concurrence dello stato a priori può andare a zero mentre la media della concurrence degli stati a posteriori può tendere a un valore non nullo o addirittura arrivare al valore massimo.

I risultati proposti e ottenuti sia in ambito discreto sia in ambito continuo presuppongono la conoscenza della meccanica quantistica, con questo intento è stato scritto il secondo capitolo in cui, oltre a qualche breve richiamo di algebra lineare, si fornisce la formulazione statistica della meccanica quantistica che sfrutta gli operatori statistici ρ su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} del tipo

$$\rho = \sum_m \mathbb{P}(m) P_m \quad \text{dove i } P_m \text{ sono dei proiettori;}$$

con $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ indicheremo lo spazio degli operatori statistici.

Tramite questa formulazione si enunciano poi i postulati su cui si basa la meccanica quantistica e infine si definiscono tutti gli strumenti matematici necessari a una corretta modellizzazione dei possibili scenari. Ci si occupa infine di stati a priori e stati a posteriori.

Nel Capitolo 3 si passa ai sistemi composti estendendo gli strumenti introdotti precedentemente a questo caso più generale. Si dà inoltre la definizione di traccia parziale che ci permetterà di operare agevolmente su sistemi composti, selezionando opportunamente solo i sottosistemi di interesse di un sistema più grande.

Forniti tutti questi strumenti preliminari si prepara quindi il campo per il cuore vero e proprio della tesi, ci si occupa quindi di *stati separabili*, i cui operatori statistici associati sono dati da misture di stati prodotto, e di *stati entangled*, associati a operatori statistici non separabili. Ricordiamo poi il criterio di Peres-Horodecki,

che fornisce le condizioni necessarie e sufficienti, nel caso particolare di sistemi 2×2 o 2×3 , per stabilire se uno stato è separabile oppure entangled.

Ci restringiamo poi al caso di sistemi 2×2 (due *qubit*) e introduciamo in $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ la *base di Bell*. Usando i coefficienti dello sviluppo di un generico vettore su questa base forniamo infine l'espressione esplicita della concurrence per il generico stato puro.

Nel Capitolo 4 presentiamo a tempo discreto il problema che vogliamo studiare, il modello proposto e i risultati a cui siamo giunti: è teoricamente possibile che due sistemi non interagenti fra loro, ma interagenti con un comune environment, a prescindere dal loro stato congiunto iniziale, subiscano nell'evoluzione a priori la distruzione di qualsiasi eventuale correlazione iniziale, classica o quantistica che sia, mentre nell'evoluzione a posteriori si assiste alla massima creazione di entanglement possibile.

Il risultato viene mostrato considerando un sistema \mathcal{H} formato da due qubit in arbitrario stato iniziale, interagenti in modo opportuno con un ambiente esterno \mathcal{K} , costituito da quattro qubit opportunamente preparati, ed osservando opportunamente l'ambiente esterno dopo l'interazione. I sistemi \mathcal{H} e \mathcal{K} sono inizialmente indipendenti e lo stato dell'ambiente esterno \mathcal{K} è sempre lo stesso a prescindere dallo stato iniziale del primo sistema \mathcal{H} .

Otteniamo che, se non si misura l'environment, il sistema iniziale collassa in $\frac{1}{4}$, proporzionale all'identità, lo stato massimamente caotico, l'entanglement è pertanto distrutto e la concurrence è nulla, l'evoluzione degli stati a priori distrugge quindi, in questo caso, ogni forma di entanglement.

In questa analisi lo step successivo sta nel considerare non più la dinamica a priori bensì l'evoluzione a posteriori del sistema.

Abbiamo che, se si osserva l'environment, il sistema iniziale collassa su uno stato della base di Bell, dipendente dal risultato della misura, che però ha sempre concurrence pari a uno, così che lo stato a posteriori è sempre massimamente entangled.

I risultati innovativi a cui abbiamo portato il nostro contributo sono il fatto che l'evoluzione degli stati a priori distrugge sempre l'entanglement mentre gli stati a posteriori risultano essere sempre entangled. La concurrence dello stato a priori può pertanto annullarsi mentre la media della concurrence degli stati a posteriori può tendere a un valore non nullo e addirittura arrivare al suo valore massimo.

Nel Capitolo 5 abbiamo invece studiato l'entanglement e la concurrence in tempo continuo. Per descrivere osservazione ed evoluzione si usano equazioni differenziali stocastiche, *stochastic Schrödinger equation* (SSE) e *stochastic master equation* (SME), mentre per l'evoluzione degli stati a priori si ha un'equazione deterministica, la master equation quantistica. Le due equazioni stocastiche, SSE e

SME, esistono entrambe in due versioni, una lineare e una non lineare, legate da una normalizzazione e da un cambio di probabilità “alla Girsanov”.

Dopo aver esposto la struttura matematica di SSE e SME, nella seconda parte del quinto capitolo cerchiamo di ritrovare gli analoghi in tempo continuo di quanto visto a tempo discreto.

Una prima situazione che andiamo a presentare, modellizzata da operatori “locali”, consiste nel considerare i soliti due qubit che questa volta interagiscono ciascuno con un proprio bagno esterno indipendente l’uno dall’altro. Partendo dalla SSE si dimostra che, a parte casi banali, per lo stato osservato l’entanglement viene distrutto benché ciò avvenga solo per tempi infiniti. In contrasto è noto che nella stessa situazione l’entanglement per gli stati a priori può essere distrutto anche a tempi finiti. Si ha cioè un rallentamento della distruzione dell’entanglement dovuto all’osservazione, fenomeno già discusso in [9].

Successivamente si è passati alla modellizzazione in tempo continuo degli scenari studiati in tempo discreto considerando quindi due qubit distinguibili che interagiscono tra di loro indirettamente tramite l’ambiente esterno comune. Il nostro intento è di mostrare che si possono costruire modelli in cui non c’è interazione diretta e l’evoluzione a priori distrugge l’entanglement, ma in cui è l’osservazione a creare entanglement.

Costruiremo un modello in cui per tempi lunghi ogni entanglement dello stato a priori viene distrutto proprio come nel caso discreto, mentre sempre per tempi lunghi la media della concurrence dello stato a posteriori non si annulla.

Il punto focale del modello è che lo stato a priori di equilibrio per tempi lunghi sia pari a $\frac{1}{4}$, che ha concurrence pari a zero e nessuna correlazione, né classica né quantistica, mentre l’entanglement degli stati a posteriori non è nullo.

In particolare vedremo come la concurrence non si possa annullare a tempi lunghi e pertanto per tempi lunghi avremo entanglement tra i due sistemi; l’entanglement può crearsi o diminuire nel tempo, ma alla fine non si può annullare. A differenza del caso discreto non abbiamo più il massimo valore per la concurrence, pari a uno, e pertanto massimo entanglement, tuttavia c’è presenza di entanglement la cui entità nel caso continuo non si può calcolare in maniera esplicita.

Introduzione alla meccanica quantistica

2.1 Introduzione alla meccanica quantistica

Quali sono i concetti fondamentali della meccanica quantistica? Come si sono sviluppati questi concetti? Quali sono le strutture matematiche su cui costruire questa teoria? Quali nuove idee si possono apportare?

In questo primo capitolo vogliamo rispondere a un paio di queste domande. In primis cerchiamo di spiegare cosa è la meccanica quantistica mentre in un secondo tempo saranno introdotte le prime notazioni e strutture matematiche necessarie ad operare in questo ambiente.

Nella meccanica quantistica abbiamo a che fare con i mattoni fondamentali della materia, le particelle che costituiscono ogni cosa dell'universo. Queste particelle includono atomi e molecole, ma anche neutroni, protoni, elettroni; infine quark e fotoni, che sono le unità costitutive della luce. A una scala tanto ridotta tutte le familiari leggi che così bene regolano il comportamento della natura vengono meno.

In questo modo possiamo arrivare ad apprezzare lo straordinario sforzo che i fisici e matematici del primo quarto del ventesimo secolo hanno fatto nell'abbandonare i concetti cari della fisica classica tuffandosi in un mondo allora ignoto, ma che oggi rappresenta la più accurata e completa descrizione della realtà.

Presentiamo ora un esempio che illustra, in modo fondamentale, l'inadeguatezza dei concetti classici.

2.1.1 L'esperimento di Stern-Gerlach

L'esperimento in questione, realizzato nel 1922 da Stern e Gerlach a Francoforte, illustra in modo drammatico la necessità di un allontanamento radicale dai concetti della meccanica classica.

Diamone ora una breve descrizione. Alcuni atomi di argento vengono riscaldati in un forno che presenta una piccola apertura attraverso cui alcuni atomi possono sfuggire. Come mostrato in figura il fascio passa attraverso un collimatore ed è soggetto ad un campo magnetico prodotto da due poli.

A questo punto dobbiamo determinare l'effetto del campo magnetico sugli atomi di argento. A tal fine si utilizza il seguente modello semplicistico. L'atomo di argento è costituito da un nucleo e 47 elettroni di cui 46 possono essere visualizzati come una nube elettronica simmetrica priva di momento angolare complessivo.

I 47 elettroni sono attaccati al nucleo che risulta $\sim \times 10^5$ volte più pesante

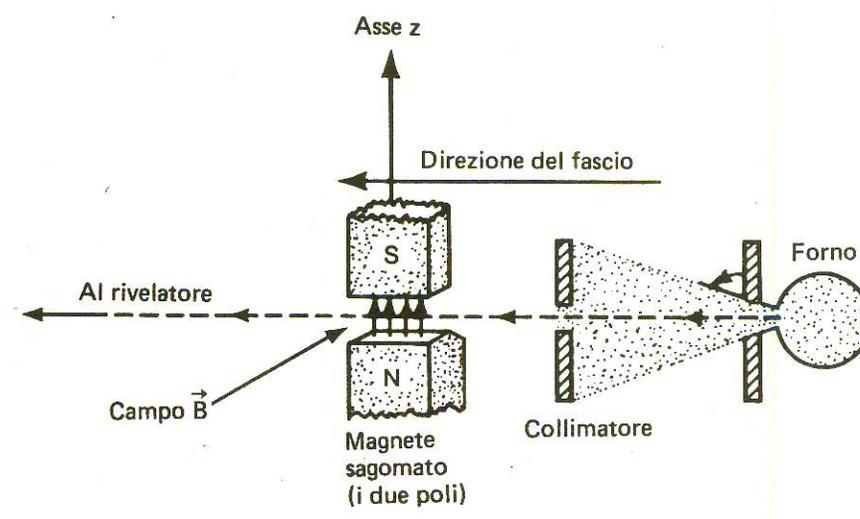


Figura 2.1: L'esperimento di Stern-Gerlach

dell'elettrone; come conseguenza, l'atomo pesante nel suo insieme possiede un momento magnetico uguale al momento magnetico di spin del 47-esimo elettrone. Ovvero il momento magnetico μ dell'atomo risulta proporzionale allo spin dell'elettrone S .

$$\mu \propto S. \quad (2.1)$$

Dove l'esatto fattore di proporzionalità, a meno di un errore inferiore al 0.2%, risulta essere $e/m_e c$.

Poiché l'energia di interazione del momento magnetico con il campo magnetico risulta essere proprio $-\mu \cdot B$, la componente z della forza a cui l'atomo è soggetto è espressa da

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\mu \cdot B) \simeq \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Dove abbiamo ignorato le componenti di B in direzioni diverse dalla direzione z . Poiché l'atomo è molto pesante ci si aspetta che il concetto classico di traiettoria possa essere correttamente utilizzato.

Rifacendoci alla figura 2.1, l'atomo con $\mu_z > 0$ ($S_z < 0$) è soggetto a una forza dall'alto verso il basso, mentre l'atomo con $\mu_z < 0$ ($S_z > 0$) è soggetto ad una forza dal basso verso l'alto.

Quello che ci si attende a questo punto è che il fascio si suddivida a seconda dai valori assunti da μ_z . L'apparato di Stern-Gerlach, a meno di un fattore di proporzionalità, coinvolge la componente z di S .

Gli atomi emessi dal forno sono orientati casualmente, μ pertanto non ha un segno preferenziale. Se l'elettrone fosse come un oggetto rotante classico, ci aspetteremmo che tutti i valori di μ_z compresi tra $|\mu|$ e $-|\mu|$ fossero realizzati. Questo ci porterebbe ad aspettarci una distribuzione continua di fasci emergenti dal dispositivo di Stern-Gerlach, come riportato in figura 2.1.

Quello che osserviamo sperimentalmente è invece più simile alla situazione di figura 2.1. Il dispositivo SG suddivide il fascio originale di argento, proveniente dal forno, in *due distinte* componenti, fenomeno cui ci si riferiva in termini di "quantizzazione spaziale".

Nei limiti in cui μ può essere identificato con lo spin S dell'elettrone, a meno del solito fattore di proporzionalità, si osserva che sono solamente due i valori della componente S possibili: S_z su e S_z giù che verranno indicate con S_{z+} e S_{z-} . Questa "quantizzazione" del momento angolare di spin dell'elettrone è il primo aspetto importante che deduciamo dall'esperimento di Stern e Gerlach e che lascia sicuramente stupito il lettore non esperto in materia. Spingiamoci più avanti lasciando questa volta senza parole un lettore non esperto.

Consideriamo ora un esperimento di Stern-Gerlach sequenziale, ovvero facciamo passare il fascio attraverso più dispositivi SG in successione. Per comodità utilizzeremo la scrittura $SG\hat{z}$ per indicare un dispositivo con il campo magnetico inhomogeneo nella direzione z mentre, analogamente, con $SG\hat{x}$ il campo magnetico risulta inhomogeneo nella direzione x .

Riferiamoci alla seguente figura per meglio capire come l'esperimento è stato svolto.

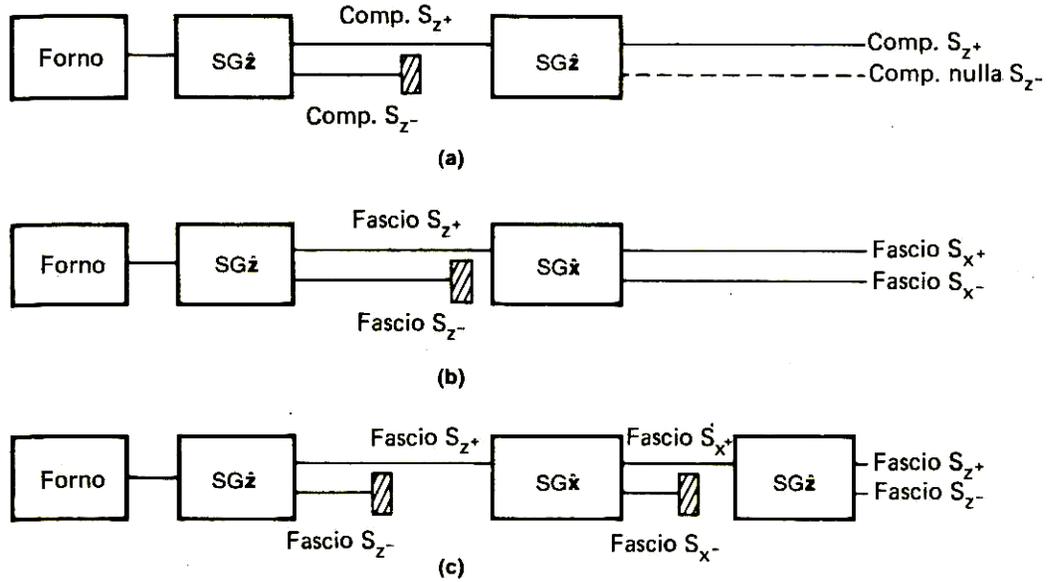


Figura 2.2: L'esperimento di Stern-Gerlach sequenziale

La figura 2.2 mostra due dispositivi $SG_{\hat{z}}$ in sequenza; dal primo dispositivo fuoriescono le due componenti S_{z+} e S_{z-} , come precedentemente spiegato, a questo punto la componente con S_{z-} viene bloccata mentre sottoponiamo l'altra componente al secondo dispositivo $SG_{\hat{z}}$, da cui fuoriesce, come ci si può attendere, la sola componente S_{z+} .

Più interessante è la combinazione proposta in figura 2.2. Come nel caso precedente il fascio di atomi passa attraverso un dispositivo $SG_{\hat{z}}$ a questo punto la componente S_{z+} viene sottoposta a un dispositivo $SG_{\hat{x}}$ da cui fuoriescono due componenti S_{x+} e S_{x-} con uguali intensità.

Concludiamo ora descrivendo la combinazione di dispositivi in figura 2.2 che sicuramente fornisce i risultati più inattesi e clamorosi.

Questa volta aggiungiamo alla combinazione mostrata in figura 2.2 un terzo dispositivo del tipo $SG_{\hat{z}}$. Si osserva sperimentalmente che sono *due* le componenti che fuoriescono dal terzo dispositivo e non una come ci si potrebbe aspettare. Com'è possibile che la componente S_{z-} che avevamo completamente bloccato riappaia? Il modello secondo cui gli atomi che entrano nel terzo dispositivo abbiano solo le componenti S_{z+} e S_{x+} è chiaramente insoddisfacente. Più precisamente

possiamo affermare che la selezione del fascio S_{x+} da parte del secondo dispositivo $SG\hat{x}$ distrugge ogni precedente informazione su S_z .

Questa limitazione che abbiamo trovato nel determinare S_z e S_x non è dovuta all'incompetenza dello sperimentatore, le peculiarità del mondo microscopico e della meccanica quantistica sono infatti imposte dall'esperimento stesso.

Ora che le evidenze sperimentali ci hanno mostrato come sia assolutamente necessario allontanarsi dai concetti della fisica classica siamo pronti a dare una caratterizzazione matematica dell'ambiente in cui opereremo.

2.1.2 Algebra lineare

In questo paragrafo diamo la formulazione matematica di base degli spazi vettoriali come viene usata nella meccanica quantistica. Ci muoveremo, nel corso di tutto il lavoro, in uno spazio di Hilbert complesso finito dimensionale \mathcal{H} , evitando così complicazioni di tipo analitico.

Scegliendo dunque un sistema ortonormale completo $\{e_i\}_{i=1}^n$ identifichiamo \mathcal{H} con \mathbb{C}^n , quindi in tutto il seguente lavoro

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n. \quad (2.3)$$

Gli elementi dello spazio \mathcal{H} sono i vettori e sono indicati con la classica notazione in colonna:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Tra vettori appartenenti allo stesso spazio vettoriale è definita un'operazione di addizione che su \mathbb{C}^n è data da

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 + \phi_1 \\ \vdots \\ \psi_n + \phi_n \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

è inoltre definita la moltiplicazione per uno scalare nel seguente modo:

$$\alpha \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\psi_1 \\ \vdots \\ \alpha\psi_n \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Ripresi questi concetti basilari di algebra lineare introduciamo ora la notazione standard utilizzata in meccanica quantistica per indicare un vettore:

$$|\psi\rangle, \quad (2.7)$$

ψ indica il generico vettore a cui ci si riferisce, mentre la notazione $|\cdot\rangle$ è utilizzata per indicare che l'oggetto in questione è un vettore colonna.

L'oggetto $|\psi\rangle$ viene chiamato *ket* ed è indicato con questa notazione standard, tramite la scrittura $\langle\psi|$ si indica invece il vettore trasposto coniugato a cui si dà il nome di *bra*.

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad \langle\psi| = [\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_n}]. \quad (2.8)$$

Ogni spazio \mathcal{H} ammette chiaramente un *vettore nullo*, indicato con 0 , tale che $|\psi\rangle + 0 = |\psi\rangle$ e un *vettore opposto*, indicato con $-|\psi\rangle$, tale che $|\psi\rangle + (-|\psi\rangle) = 0$.

Basi

Una base dello spazio \mathcal{H} è un insieme di vettori $|v_1\rangle, \dots, |v_m\rangle$ dove $m \geq n$ tali che ogni vettore $|v\rangle \in \mathcal{H}$ può essere scritto come una combinazione lineare del tipo $|v\rangle = \sum_i a_i |v_i\rangle$ dove i v_i sono i vettori della base mentre i termini a_i sono opportuni coefficienti.

Prodotti interni

Per caratterizzare lo spazio di Hilbert \mathcal{H} è ancora necessario definirne il *prodotto interno*.

Un prodotto interno sullo spazio \mathcal{H} è una funzione che riceve come input due vettori $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ appartenenti ad \mathcal{H} e restituisce come output un numero complesso.

Utilizzando la notazione propria della meccanica quantistica, dei bra e dei ket, e aiutandoci con l'equazione (2.8) abbiamo:

$$\langle\psi|\phi\rangle,$$

pertanto il prodotto $\langle\psi|\phi\rangle$ è il classico prodotto riga per colonna.

Caratterizziamo più in dettaglio la nozione di prodotto interno tramite le proposizioni e le definizioni che seguono.

Proposizione 1. Una funzione $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ è un prodotto interno se soddisfa le seguenti richieste:

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ è lineare nel secondo argomento

$$\langle \psi | \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle = \sum_i \lambda_i \langle \psi | \phi_i \rangle$$

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è coniugato lineare nel primo argomento

$$\langle \sum_i \lambda_i \psi_i | \phi \rangle = \sum_i \bar{\lambda}_i \langle \psi_i | \phi \rangle$$

- $\langle \psi | \phi \rangle = \overline{\langle \phi | \psi \rangle}$.
- $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ e si annulla se e solo se $|\psi\rangle = 0$.

Sullo spazio di riferimento $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ avremo quindi:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_i \bar{\psi}_i \phi_i = [\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Diamo ora qualche altra definizione prima di fornire la formulazione assiomatica della meccanica quantistica.

Definizione 1. Sia $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, la norma del vettore $|\psi\rangle$ è definita nel modo seguente:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}.$$

Un vettore unitario $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ è tale che $\|\psi\| = 1$.

Il vettore $|\psi\rangle / \|\psi\|$ è la forma normalizzata del vettore $|\psi\rangle$, per ogni $|\psi\rangle$ diverso da 0, ed ha norma unitaria.

Definizione 2. Siano $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ appartenenti a \mathcal{H} , tali vettori sono *ortogonali* se e solo se il loro prodotto interno è nullo.

Sfruttando le nozioni introdotte, in particolar modo la nozione di base, prodotto interno e norma, possiamo fornire un'ulteriore definizione.

Definizione 3. Sia \mathcal{H} uno spazio tale che $\dim \mathcal{H} = n$ e su tale spazio sia definito un prodotto interno, si dice *sistema ortonormale completo* o *base ortonormale* un insieme di vettori $|v_1\rangle \dots |v_n\rangle$ tale che tali vettori sono tra di loro ortogonali e di norma unitaria. Vale pertanto la seguente relazione

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Qui di seguito riportiamo un esempio di base ortonormale. Consideriamo per semplicità il caso $n = 2$ dunque $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

I seguenti vettori

$$|v_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rappresentano una base ortonormale dello spazio \mathbb{C}^2 , infatti ogni vettore $|v\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare degli elementi della base $|v\rangle = a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle$.

Ora che sono state fornite le nozioni basilari per muovere i primi passi negli ambiti riguardanti la meccanica quantistica, approfondiamo il nostro studio diamo al lettore ulteriori strumenti necessari per un'analisi più approfondita.

Operatori

Ora che abbiamo definito l'ambientazione in cui lavoreremo è necessario definire gli strumenti con cui lavoreremo ovvero gli operatori lineari.

Definizione 4. Un *operatore lineare* dallo spazio di Hilbert \mathcal{H} allo spazio di Hilbert \mathcal{K} è una funzione $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ lineare nei suoi argomenti:

$$A\left(\sum_i a_i |v_i\rangle\right) = \sum_i a_i A(|v_i\rangle). \quad (2.10)$$

Quando diciamo che un operatore A è definito su uno spazio di Hilbert, \mathcal{H} ad esempio, si intende che A è lineare da \mathcal{H} in \mathcal{H} .

Prima di addentrarci nella definizione di particolari operatori, che saranno molto utili nel seguito di questo lavoro, è necessaria una breve premessa che ci permetterà di trattare gli operatori tramite un linguaggio matematico semplice ovvero quello dell'algebra lineare e delle matrici.

Grande importanza ha la "rappresentazione matriciale degli operatori" che ci permette di identificare un operatore tramite una matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Cerchiamo di spiegare meglio questa affermazione.

Di fatto una matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ è un operatore lineare in quanto manda vettori dallo spazio vettoriale \mathbb{C}^n allo spazio vettoriale \mathbb{C}^m , più precisamente, affermando che A è un operatore lineare intendiamo sottolineare che l'espressione

$$A\left(\sum_i a_i |v_i\rangle\right) = \sum_i a_i A|v_i\rangle \quad (2.11)$$

è un'equazione in cui l'operazione è il prodotto fra A e i vettori colonna $|v_i\rangle$.

Vediamo ora come sia possibile dare una rappresentazione matriciale per gli operatori lineari, così da poter parlare, da ora in poi, indifferentemente di operatori e matrici rappresentanti operatori.

Supponiamo che $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ sia un operatore lineare tra gli spazi di Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{K} le cui basi ortonormali sono rispettivamente $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$ e $|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle$.

Allora

$$A_{ij} := \langle w_i | Av_j \rangle,$$

pertanto vale la seguente relazione

$$A|v_j\rangle = \sum_i A_{ij}|w_i\rangle. \quad (2.12)$$

La matrice composta dagli elementi A_{ij} è la rappresentazione matriciale dell'operatore A . Questa rappresentazione matriciale A è completamente equivalente all'operatore A .

Così facendo abbiamo quindi mostrato che risultano equivalenti il punto di vista della rappresentazione matriciale e il punto di vista degli operatori più astratto.

Possiamo quindi ora riportare, aiutandoci tramite la notazione matriciale, alcuni operatori fondamentali.

- L'*operatore identità*, indicato con $\mathbb{1}$, è tale che $\mathbb{1}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$.
- L'*operatore nullo* mappa tutti i vettori in 0, $\forall \psi \in \mathcal{H} \quad 0|\psi\rangle \equiv 0$.
- L'*operatore traccia*, indicato con $\text{Tr}\{\cdot\}$, è tale che $\text{Tr}\{A\} = \sum_i A_{ii}$ per ogni A matrice arbitraria. La traccia è ciclica e lineare ovvero, per A e B matrici arbitrarie e a, b numeri complessi, abbiamo:

$$\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}, \quad \text{Tr}\{aA + bB\} = a \text{Tr}\{A\} + b \text{Tr}\{B\}.$$

Qui di seguito riportiamo inoltre qualche ulteriore definizione più compatta che caratterizza gli operatori.

- Si dice *proiettore ortogonale* P un operatore idempotente e autoaggiunto, ossia $P^2 = P$ e $P = P^*$. Gli autovalori sono solo 0 o 1.
- Si dice *operatore aggiunto* A^* di A l'operatore così definito: $\langle \psi | A\phi \rangle = \langle A^*\psi | \phi \rangle$, $\forall \psi, \phi \in \mathcal{H}$ dato dalla matrice trasposta, complessa coniugata $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

- Si dice *operatore autoaggiunto* un operatore tale che $A^* = A$. Conseguenze: A ha autovalori reali a_k e può essere scritto come $A = \sum_k a_k P_k$, con $a_k \neq a_l$ per ogni $k \neq l$ dove gli operatori P_k sono gli autoproiettori: $P_k^2 = P_k = P_k^*$, $P_k P_l = \delta_{kl} P_l$ e $\sum_k P_k = \mathbb{1}$.
- Si dice *operatore positivo* $A \geq 0$ un operatore tale $\langle \psi | A \psi \rangle \geq 0$, $\forall \psi \in \mathcal{H}$, tale operatore è autoaggiunto e con autovalori non negativi.

Dati due operatori A e B , una quantità molto importante, che utilizzeremo nel prosieguo di questo lavoro, è il *commutatore* tra tali operatori

$$[A, B] := AB - BA, \quad (2.13)$$

un'altra notazione che utilizzeremo è l'*anticommutatore*

$$\{A, B\} := AB + BA. \quad (2.14)$$

Chiudiamo questa breve sezione riportando dei particolari operatori lineari che saranno molto utili in questo lavoro. Tali operatori, espressi grazie alla loro rappresentazione matriciale, sono chiamati matrici di Pauli e sono spesso ricorrenti negli ambiti riguardanti la meccanica quantistica.

$$\begin{aligned} \sigma_0 \equiv \mathbb{1} &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y &\equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le matrici di Pauli godono di alcune proprietà particolari, valgono infatti le seguenti relazioni.

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad \sigma_x \sigma_y = i \sigma_z \text{ e cicliche.} \quad (2.16)$$

Queste due relazioni possono essere riassunte in

$$\sigma_j \sigma_k = i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l + \delta_{jk} \mathbb{1}.$$

Dove tramite δ_{jk} indichiamo la delta di Kronecker che assume il valore 1 nel caso $j = k$, altrimenti si annulla. Mentre il simbolo ϵ è il simbolo di Ricci che assume i valori 1 nel caso di permutazioni pari degli indici (j, k, l) , -1 nel caso di permutazioni dispari degli indici (j, k, l) oppure 0 nel caso in cui due indici sono uguali.

Altre relazioni, alcune delle quali sfruttano le nozioni di commutatore e anti-commutatore, appena introdotte, sono le seguenti

$$\begin{aligned} [\sigma_z, \sigma_x] &= 2i\sigma_y & [\sigma_z, \sigma_y] &= -2i\sigma_x, \\ \sigma_x \sigma_x \sigma_x &= \sigma_x & \sigma_x \sigma_x \sigma_y \sigma_x &= i\sigma_z \sigma_x = -\sigma_y & \sigma_x \sigma_z \sigma_x &= i\sigma_x \sigma_y = -\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Prodotti tensore

In questa sezione introduciamo il concetto di prodotto tensore tra spazi di Hilbert e ne mostriamo le sue proprietà.

Riassumendo in poche parole, seppur in modo un po' semplicistico, cosa sia un *prodotto tensoriale* potremmo dire: un modo di unire insieme più spazi vettoriali per formarne di più grandi, ma vediamo in dettaglio cosa sia un prodotto tensore andando a sviscerarne le proprietà caratteristiche.

Il prodotto tensore è uno strumento fondamentale al fine di trattare sistemi complessi, composti da più particelle.

Qui di seguito non riporteremo la definizione di prodotto tensoriale in quanto non è banale, piuttosto forniremo le proprietà utili a utilizzare questo strumento matematico.

Consideriamo \mathcal{H} e \mathcal{K} due spazi di Hilbert di dimensione, rispettivamente, m e n . $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ è uno spazio di Hilbert di dimensione $m \cdot n$ e gli elementi di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ sono combinazioni lineari di “prodotti tensoriali” degli elementi $|\psi\rangle$ di \mathcal{H} e $|\phi\rangle$ di \mathcal{K} , spesso si utilizza l'abbreviazione $|\psi\phi\rangle$ piuttosto che la scrittura $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ per indicarlo.

Per definizione il prodotto tensore soddisfa alcune proprietà:

- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e siano $\psi \in \mathcal{H}$ e $\phi \in \mathcal{K}$,

$$\alpha(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (\alpha|\psi\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes (\alpha|\phi\rangle).$$

- Siano $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ e $\phi \in \mathcal{K}$

$$(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\phi\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\phi\rangle.$$

- Siano $\psi \in \mathcal{H}$ e $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}$

$$|\psi\rangle \otimes (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\phi_1\rangle + |\psi\rangle \otimes |\phi_2\rangle.$$

- Siano $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e $\psi_i, \psi'_j \in \mathcal{H}$ e $\phi_i, \phi'_j \in \mathcal{K}$

$$\left\langle \sum_i a_i \psi_i \phi_i \middle| \sum_j b_j \psi'_j \phi'_j \right\rangle \equiv \sum_{ij} \bar{a}_i b_j \langle \psi_i \phi_i | \psi'_j \phi'_j \rangle \equiv \sum_{ij} \bar{a}_i b_j \langle \psi_i | \psi'_j \rangle \langle \phi_i | \phi'_j \rangle. \quad (2.18)$$

Introdotte queste prime proprietà sui prodotti tensore, è naturale chiedersi che tipo di operatori agiscano sullo spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Per prima cosa vediamo il prodotto tensoriale fra operatori.

Siano $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ due elementi di \mathcal{H} e \mathcal{K} rispettivamente mentre A e B due operatori lineari su \mathcal{H} e \mathcal{K} rispettivamente, possiamo definire un operatore lineare $A \otimes B$ su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ nel modo seguente

$$(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) \equiv A|\psi\rangle \otimes B|\phi\rangle. \quad (2.19)$$

La definizione di $A \otimes B$ si estende in modo naturale a tutti gli elementi di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ garantendo la linearità dell'operatore

$$(A \otimes B)\left(\sum_i a_i |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle\right) \equiv \sum_i a_i A|\psi_i\rangle \otimes B|\phi_i\rangle. \quad (2.20)$$

Si può mostrare che l'operatore $A \otimes B$ appena definito sullo spazio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ risulta essere ben definito.

Un'ulteriore estensione del concetto di prodotto tensore si può fare considerando gli operatori $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ e $B : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ che hanno spazi di partenza e arrivo dei loro mappaggi differenti.

Un operatore lineare arbitrario C che mappa $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ in $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}'$ può essere rappresentato come una combinazione lineare di prodotti tensore di operatori che mappano \mathcal{H} in \mathcal{H}' e \mathcal{K} in \mathcal{K}' ,

$$C = \sum_i c_i A_i \otimes B_i,$$

sfruttando la definizione di prodotto tensore sopra riportata e la linearità otteniamo

$$\left(\sum_i c_i A_i \otimes B_i\right)|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \equiv \sum_i c_i A_i |\psi\rangle \otimes B_i |\phi\rangle.$$

Ora che abbiamo mostrato le proprietà dei prodotti tensoriali chiudiamo la sezione mostrando come agisce operativamente un prodotto tensore.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e sia $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, il risultato del loro prodotto tensore è dato dalla rappresentazione matriciale:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{bmatrix}$$

Tramite questa rappresentazione i termini del tipo $A_{ij}B$ indicano delle sottomatrici proporzionali alla matrice B , solamente riscalate dal termine A_{ij} . Qui di seguito riportiamo un ultimo esempio che utilizza le matrici di Pauli X e Y precedentemente definite, il prodotto tensore $X \otimes Y$, calcolato esplicitamente, è dato da

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot Y & 1 \cdot Y \\ 1 \cdot Y & 0 \cdot Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora che abbiamo introdotto le strutture matematiche e le notazioni proprie della meccanica quantistica dedichiamo la prossima sezione alla fisica-matematica e ai postulati della meccanica quantistica.

2.2 Sistema singolo

Enunciamo ora i postulati basilari della meccanica quantistica. Questi postulati forniscono una connessione tra il mondo fisico e il formalismo matematico introdotto nella sezione precedente.

Questi postulati sono stati proposti dopo un lungo e difficoltoso processo; talvolta le motivazioni che hanno portato a enunciare qualcuno di questi postulati non appaiono chiarissime, ma questa caratteristica è propria di quelle discipline più sorprendenti e radicalmente innovative proprio come la meccanica quantistica.

Quello che ci proponiamo di fare nelle prossime sezioni, oltre ad enunciare i postulati, sta nel capire come applicarli e quando poterli applicare.

Prima di enunciare i postulati è necessaria qualche altra nozione e precisazione che ci apprestiamo ora a fornire.

2.2.1 Osservabili e misure a valore di operatore positivo

Esordiamo quindi con la formulazione in spazi di Hilbert della meccanica quantistica: uno stato di un sistema quantistico è rappresentato da un vettore normalizzato $|\psi\rangle \in V$ dove V è uno spazio di Hilbert.

Lo stato iniziale dipende solamente da come il sistema è stato sperimentalmente preparato e determina la distribuzione di probabilità di ogni misurazione effettuata sul sistema.

Una misurazione su di un sistema quantistico può produrre differenti risultati con una certa distribuzione di probabilità che dipende dallo stato iniziale $|\psi\rangle$.

Un evento riguardante una certa misurazione è rappresentato da un operatore autoaggiunto E , chiamato *effetto*, tale che $0 \leq E \leq \mathbb{1}$. Da $E \leq \mathbb{1}$ risulta $\mathbb{1} - E \geq 0$ e da $E \geq 0$ si ha $\mathbb{1} - E \leq \mathbb{1}$, cioè anche $\mathbb{1} - E$ è un effetto.

Dato un sistema nello stato iniziale $|\psi\rangle$, è possibile calcolare la probabilità dell'evento E (in questo caso abbiamo utilizzato la stessa lettera per indicare sia l'evento sia l'effetto associato, essendo due facce della stessa medaglia) possiamo infatti scrivere

$$\mathbb{P}(E) = \langle \psi | E \psi \rangle. \quad (2.21)$$

Per ogni effetto E , l'operatore $\mathbb{1} - E$ è l'effetto associato all'evento complementare $\neg E$.

I due effetti E e $\neg E$ rappresentano l'esperimento più semplice, l'esperimento "sì-no". La misurazione in questo caso ha due possibili risultati: il risultato positivo, tradizionalmente, associato all'effetto E e il risultato negativo associato a $\neg E$.

$\mathbb{P}(E) = \langle \psi | E \psi \rangle$ dà la probabilità del risultato 'sì' quando lo stato iniziale è $|\psi\rangle$ mentre $\mathbb{P}(\neg E) = 1 - \mathbb{P}(E)$ è la probabilità del risultato 'no'.

Dal semplice esperimento "sì-no" è possibile facilmente generalizzare questo risultato. Ma andiamo per gradi, la naturale estensione di quanto visto finora è il passaggio a un insieme discreto di possibili risultati x_k .

Questo esperimento è caratterizzato da una famiglia di effetti E_k tali che $\sum_k E_k = \mathbb{1}$. Sfruttando quindi la naturale estensione di (2.21), la probabilità di osservare il risultato x_k , assegnato il sistema nello stato iniziale $|\psi\rangle$, è data da

$$\mathbb{P}(x_k) = \langle \psi | E_k \psi \rangle. \quad (2.22)$$

Il passo successivo, in questo processo di generalizzazione dei possibili risultati di un esperimento, sta nel considerare un insieme Ω di possibili esiti e come possibili eventi gli elementi di una σ -algebra \mathcal{F} di sottoinsiemi di Ω .

In questo caso l'esperimento si dice esser descritto da una POVM ovvero una misura a valore di operatore positivo sullo spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) .

Andiamo ora a sviscerare il significato e l'importanza delle POVM nell'ambito della meccanica quantistica.

Definizione 5. Sia (Ω, \mathcal{F}) uno spazio misurabile, una misura a valore di operatore positivo, POVM, è una mappa E , da \mathcal{F} nell'insieme degli effetti, normalizzata e σ -additiva. Ovvero $E(\Omega) = \mathbb{1}$ e per ogni successione F_1, F_2, \dots di eventi incompatibili, insieme disgiunti, si ha $E(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) = \sum_{j=1}^{\infty} E(F_j)$.

Alla luce di questa definizione cerchiamo ora di dare un'interpretazione alle POVM.

Sappiamo che la probabilità che il risultato di un esperimento sia in F , dove F è un insieme contenuto in \mathcal{F} , con il sistema nello stato iniziale $|\psi\rangle$, è

$$\mathbb{P}(F) = \langle \psi | E(F) \psi \rangle. \quad (2.23)$$

I risultati aleatori di un esperimento possono essere immaginati come i valori di una qualche osservabile X .

In questo caso spesso si indica $\mathbb{P}(X \in F) = \langle \psi | E(F) \psi \rangle$ e possiamo interpretare questa scrittura come la probabilità che l'osservabile X prenda un valore in F .

Grazie a questa interpretazione la POVM stessa è chiamata osservabile generalizzata.

È sempre possibile pensare ai possibili risultati di un esperimento come ai valori di un'osservabile X e grazie a questa identificazione si può parlare indifferentemente di un'osservabile X oppure di una POVM E , così come dei risultati di un esperimento o dei valori di un'osservabile.

Per le osservabili generalizzate reali, appena introdotte, è possibile parlare di media, varianza e in generale di momenti.

Qualora tali momenti esistano abbiamo una formula per poterli calcolare direttamente data da

$$\mathbb{E}[x^k] = \langle \psi | x^k \psi \rangle. \quad (2.24)$$

Chiudiamo ora questa sezione con un paragrafo dedicato al caso discreto, in cui l'equazione (2.24) ci sarà molto utile e ci permetterà di ricavare delle formule piuttosto semplici.

Osservabili e misure proiettive nel discreto

Se ci restringiamo al caso $\Omega = \mathbb{R}$ e consideriamo la σ -algebra \mathcal{F} dei Borelliani allora la POVM $E(F)$ per ogni $F \in \mathcal{F}$ si riduce a un proiettore ortogonale. Questo caso particolare di POVM associata a un operatore autoaggiunto prende il nome di pvm ovvero misura a valore di proiettore.

Grazie al teorema spettrale possiamo scrivere per ogni osservabile la seguente decomposizione

$$X = \sum_m m P_m,$$

dove P_m è il proiettore nell'autospazio di X con autovalore associato m . I possibili risultati di un esperimento, come indicato precedentemente, corrispondono agli autovalori m dell'osservabile.

La probabilità di ottenere il risultato m da un esperimento, sapendo che il sistema si trova nello stato iniziale $|\psi\rangle$, è data da

$$\mathbb{P}(m) = \langle \psi | P_m \psi \rangle.$$

Sfruttando ora le definizioni appena introdotte e quest'ultima proprietà delle misure proiettive possiamo effettuare una serie di considerazioni sul valore atteso e la varianza associate all'osservazione di un'osservabile.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_m m \mathbb{P}(m) \\ &= \sum_m m \langle \psi | P_m \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (\sum_m m P_m) \psi \rangle \\ &= \langle \psi | X \psi \rangle, \end{aligned} \tag{2.25}$$

questa formula è molto utile e rende più agevoli molti calcoli.

Da questo risultato, che permette un calcolo immediato per il valore medio di un'osservabile, discende facilmente una formula analoga per il calcolo della varianza e quindi della deviazione standard.

Sfruttando il risultato appena ottenuto per il calcolo del valore atteso di un'osservabile possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \langle \psi | X^2 \psi \rangle - \langle \psi | X \psi \rangle^2. \end{aligned}$$

Quindi per la deviazione standard abbiamo

$$\sigma(X) = \sqrt{\langle \psi | X^2 \psi \rangle - \langle \psi | X \psi \rangle^2}.$$

Ora che abbiamo introdotto questi nuovi concetti e strumenti matematici in generale per poi evidenziare il caso particolare discreto, siamo pronti a dare la formulazione statistica della meccanica quantistica che verrà utilizzata in tutto il lavoro.

2.2.2 Formulazione statistica

Ogni affermazione fisica è di tipo probabilistico, come abbiamo visto le probabilità in questione si possono ricavare dagli effetti e dagli stati del sistema. Ci sono tuttavia delle situazioni in cui un vettore normalizzato non descrive pienamente e in modo soddisfacente il problema in questione, pertanto è stata proposta una differente formulazione che utilizza i cosiddetti *operatori statistici*.

La necessità di una descrizione più esaustiva nasce quando, durante la preparazione di un esperimento, si introduce dell'incertezza in merito allo stato iniziale oppure, quando l'evoluzione del sistema oggetto di studio sottostà a un'evoluzione

con un rumore dovuto al mondo esterno oppure, ancora, quando un apparato di misurazione interviene sul sistema oggetto di studio e così via.

È infatti evidente che tutto il mondo della meccanica quantistica che da un lato appare assolutamente affascinante dall'altro è molto facile da perturbare e distruggere.

Per cercare di ovviare, in parte, a queste difficoltà si introduce il concetto di operatore di densità.

Grazie a questa formulazione matematica del problema, che ci apprestiamo a descrivere, si riuscirà a tradurre in linguaggio matematico relativamente semplici i concetti finora introdotti e si riuscirà a operare in tale ambito.

Mostriamo ora come è definito un operatore statistico, quali sono i suoi vantaggi e come agisce.

Operatori statistici

Come anticipato brevemente nella sezione precedente, consideriamo il caso in cui lo stato iniziale non sia completamente noto, ci sia incertezza su di esso.

Sappiamo tuttavia che lo stato iniziale è rappresentato da un vettore normalizzato $|\psi_m\rangle$ con probabilità $\mathbb{P}(m)$; al variare di m si ottengono tutti gli scenari possibili iniziali.

Banali sono le imposizioni che caratterizzano $\mathbb{P}(m)$ ovvero $\mathbb{P}(m) \geq 0$, $\sum_m \mathbb{P}(m) = 1$.

Sia E un effetto, sfruttando la relazione (2.21) la probabilità che accada E , condizionata al fatto che lo stato iniziale è ψ_m , è $\mathbb{P}(E|m) = \langle \psi_m | E \psi_m \rangle$.

Quindi sfruttando la formula delle probabilità totali otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \sum_m \mathbb{P}(E|m)\mathbb{P}(m) = \sum_m \mathbb{P}(m)\langle \psi_m | E \psi_m \rangle \\ &= \sum_m \mathbb{P}(m) \text{Tr}\{|\psi_m\rangle\langle \psi_m | E\} \\ &= \text{Tr}\{\sum_m \mathbb{P}(m)|\psi_m\rangle\langle \psi_m | E\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Introducendo a questo punto i proiettori $P_m = |\psi_m\rangle\langle \psi_m |$ e definendo

$$\rho = \sum_m \mathbb{P}(m)|\psi_m\rangle\langle \psi_m | = \sum_m \mathbb{P}(m)P_m, \quad (2.27)$$

è possibile scrivere, per ogni evento E

$$\mathbb{P}(E) = \text{Tr}\{\rho E\}. \quad (2.28)$$

L'operatore ρ introdotto nell'equazione (2.27) viene chiamato *operatore statistico*. Tale operatore determina la probabilità $\mathbb{P}(E)$ di un generico evento E .

L'operatore ρ risulta essere autoaggiunto, positivo e di traccia unitaria, possiamo inoltre enunciare il teorema seguente che caratterizza univocamente gli operatori statistici.

Teorema 2. *Un operatore ρ autoaggiunto è un operatore densità se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:*

- ρ ha traccia unitaria (**Condizione di Traccia**)
- ρ è un operatore positivo (**Condizione di positività**)

Dimostrazione. Sia $\rho = \sum_m \mathbb{P}(m) |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ un operatore densità. Allora

$$\text{Tr}\{\rho\} = \sum_m \mathbb{P}(m) \text{Tr}\{|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\} = \sum_m \mathbb{P}(m) = 1. \quad (2.29)$$

Sia $|\varphi\rangle$ un generico vettore nello spazio degli stati. Risulta

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\rho\varphi\rangle &= \sum_m \mathbb{P}(m) \langle\varphi|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\varphi\rangle \\ &= \sum_m \mathbb{P}(m) |\langle\varphi|\psi_m\rangle|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sia la condizione di traccia unitaria sia la condizione di positività sono soddisfatte.

Viceversa supponiamo che ρ sia un operatore che soddisfa le due condizioni. Essendo ρ un operatore positivo, ci viene in aiuto un teorema di decomposizione spettrale che ci permette di decomporre, appunto, ρ nel modo seguente

$$\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|,$$

dove i vettori $|j\rangle$ sono ortogonali mentre λ_j sono gli autovalori di ρ che risultano essere reali e non negativi, essendo ρ positivo.

Dalla condizione sulla traccia deduciamo che $\sum_j \lambda_j = 1$. Quindi un sistema nello stato $|j\rangle$ con probabilità λ_j sarà caratterizzato dall'operatore ρ . \square

Introdotti gli operatori statistici, indichiamo con $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ l'insieme che li contiene tutti e soli:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{ \text{tutti gli operatori } \rho \text{ su } \mathcal{H} \text{ tali che } \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \text{Tr}\{\rho\} = 1 \}.$$

Tale insieme risulta essere chiuso e convesso. Questo significa che, se \mathbb{P} è una misura di probabilità su di uno spazio misurabile (A, \mathcal{A}) e $\rho(m)$ è una collezione misurabile di operatori statistici allora

$$\rho = \int_A \rho(m) \mathbb{P}(dm) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}).$$

La coppia $\{\mathbb{P}, \rho(\cdot)\}$ è detta *demistura* di ρ .

Ora che abbiamo introdotto gli operatori statistici e li abbiamo caratterizzati tramite le loro proprietà forniamo qualche ulteriore definizione che ci permetta di caratterizzare gli stati, in particolare diamo la definizione di stato puro.

Definizione 6. Uno stato ρ si dice *puro* se ammette solamente una demistura banale, ovvero non è possibile scrivere

$$\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2$$

con $\lambda \in (0, 1)$ e $\rho_1 \neq \rho_2$.

Risulta che uno stato puro è rappresentato da un proiettore unidimensionale o, equivalentemente, da un vettore in \mathcal{H} . Per uno stato puro ρ valgono infatti le seguenti relazioni

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \|\psi\| = 1 \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (2.31)$$

Tutti gli altri stati vengono chiamati stati *misti* e ρ è detto essere una miscela di stati puri.

Qui di seguito riportiamo l'espressione di una miscela, vediamo chiaramente come una miscela è una somma pesata di stati puri.

$$\rho = \sum_l \mathbb{P}(l) |\psi_l\rangle\langle\psi_l|, \quad |\psi_l\rangle \in \mathcal{H} \quad \|\psi_l\| = 1 \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), \quad (2.32)$$

chiaramente $\sum_l \mathbb{P}(l) = 1$. Quest'ultima equazione è la generica espressione di un operatore densità ρ su $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Ora che tramite le equazioni (2.31) e (2.32) abbiamo le espressioni di stato puro e stato misto, qui di seguito riportiamo un teorema che ci permetta di determinare se uno stato è puro oppure misto tramite il seguente teorema.

Teorema 3. Sia ρ un generico stato in $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Allora valgono le seguenti relazioni:

- Uno stato è puro se e solo se $\text{Tr}\{\rho^2\} = 1$.
- Uno stato è misto se e solo se $\text{Tr}\{\rho^2\} < 1$.

Ora che abbiamo introdotto e caratterizzato tramite le loro proprietà gli operatori statistici, riassumiamo brevemente quanto illustrato nelle precedenti sezioni mettendo l'accento sui punti fondamentali.

Uno stato di un sistema quantistico è rappresentato da un operatore statistico $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, un evento collegato a una misurazione sul sistema è rappresentato da un effetto $E \in [0, \mathbb{1}]$ e la probabilità che accada è data da $\text{Tr}\{\rho E\}$.

Inoltre se abbiamo una generica misurazione rappresentata da una POVM l'equazione (5) può essere riscritta come

$$\mathbb{P}_\rho(F) = \text{Tr}\{\rho E(F)\} \quad (2.33)$$

Qui di seguito riportiamo per completezza il primo postulato della meccanica quantistica nel contesto di operatore densità.

Postulato 1: Associato a un sistema fisico isolato c'è uno spazio vettoriale complesso con prodotto interno (spazio di Hilbert) detto *spazio dello stato* del sistema. Il sistema è completamente descritto da un operatore densità che è un operatore positivo di traccia unitaria che agisce sullo spazio del sistema. Se un sistema quantistico si trova in uno stato ρ_m con probabilità $\mathbb{P}(m)$ allora l'operatore densità per il sistema è $\sum_m \mathbb{P}(m)\rho_m$.

Ora che è stato caratterizzato il sistema e il suo spazio di stato, sorge spontanea una domanda ovvero come evolve il sistema?

La risposta a tale domanda è racchiuso nel secondo postulato.

Postulato 2: L'evoluzione di un sistema chiuso è descritta da una *trasformazione unitaria*. Lo stato ρ del sistema al tempo t_1 e lo stato ρ' al tempo t_2 sono legati da un operatore unitario U che dipende solo dagli istanti t_1 e t_2

$$\rho' = U\rho U^* \quad (2.34)$$

L'evoluzione dell'operatore densità è descritta dall'equazione

$$\rho = \sum_m \mathbb{P}(m)|\psi_m\rangle\langle\psi_m| \xrightarrow{U} \sum_i \mathbb{P}(m)U|\psi_m\rangle\langle\psi_m|U^* = U\rho U^*. \quad (2.35)$$

Ora che abbiamo introdotto alcuni strumenti e idee che sono utilizzati in meccanica quantistica e abbiamo enunciato i primi postulati che descrivono: l'ambientazione propria della meccanica quantistica e l'evoluzione di un sistema chiuso, nella prossima sezione andremo a definire nuovi strumenti matematici e nuove nozioni fondamentali nell'ambito della meccanica quantistica.

2.2.3 Operazioni e strumenti

La teoria quantistica dei processi di misura non è certamente un argomento di facile trattazione, sia per gli strumenti matematici che utilizza sia per le ripercussioni che una misurazione causa sul sistema nella sua interezza. In ambito quantistico infatti interagendo con un sistema, quindi per esempio facendone una misurazione su di una variabile qualsiasi, si va a modificare il sistema stesso.

Cerchiamo in questa sezione di introdurre inizialmente gli strumenti matematici necessari a una completa trattazione del problema e in un secondo tempo capire cosa effettivamente comportino le misurazioni su di un sistema.

Operazioni ed eventi

Consideriamo ora un evento E collegato a una misurazione su di un sistema.

È nostro obiettivo conoscere non solo la probabilità che E si verifichi, vogliamo allo stesso tempo conoscere inoltre lo stato del sistema dopo la misurazione. L'effetto, precedentemente introdotto e descritto, non è più sufficiente per una descrizione di questo tipo.

L'oggetto fondamentale è ora l'operazione.

Definizione 7. Un'operazione è una mappa lineare $\mathcal{O} : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$, completamente positiva tale che $\text{Tr}\{\mathcal{O}[\tau]\} \leq \text{Tr}\{\tau\} \quad \forall \tau \geq 0$

Nella definizione di operazione si fa riferimento a mappe completamente positive, richiamiamone brevemente la definizione.

Definizione 8. Una mappa lineare $\mathcal{A} : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ si dice *completamente positiva* se $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall \psi_i, \phi_i \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \phi_i | \mathcal{A}[|\psi_i\rangle\langle\psi_j|] \phi_j \rangle \geq 0.$$

Ma torniamo alle operazioni con ulteriori precisazioni. La richiesta che la mappa completamente positiva \mathcal{O} sia traccia decrescente è equivalente alla richiesta che $\mathcal{O}^*[\mathbb{1}]$ sia un effetto.

Il seguente teorema ci mostra qual è la struttura di un'operazione e come sia possibile decomporre una generica operazione.

Teorema 4. Una generica operazione \mathcal{O} su $L(\mathbb{C}^n)$ può essere rappresentata nel modo seguente come

$$\mathcal{O}[\tau] = \sum_k A_k \tau A_k^* \quad \forall \tau \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad (2.36)$$

dove $A_k \in L(\mathbb{C}^n)$ e

$$\sum_k A_k^* A_k \leq \mathbb{1}. \quad (2.37)$$

Il simbolo \sum_k indica una serie convergente oppure una somma finita.

Questo teorema, noto come decomposizione di Kraus ci dice che esiste sempre una decomposizione di una generica operazione, tale decomposizione in generale non è unica.

L'operatore $\mathcal{O}^*[\mathbb{1}]$ è l'effetto associato all'evento E , mentre in generale la mappa \mathcal{O} descrive il mutamento di stato. Cerchiamo di dare un'interpretazione fisico-probabilistica a questa serie di affermazioni.

Sia $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ lo stato del sistema pre-misurazione. La probabilità dell'evento E è data da

$$\mathbb{P}(E) = \text{Tr}\{\mathcal{O}[\rho]\} = \text{Tr}\{\mathcal{O}^*[\mathbb{1}]\rho\}, \quad (2.38)$$

mentre lo stato del sistema post-misurazione risulta essere

$$\rho(E) := \frac{\mathcal{O}[\rho]}{\text{Tr}\{\mathcal{O}[\rho]\}} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (2.39)$$

Soffermiamoci su quest'ultima espressione, che rappresenta una caratteristica di demarcazione propria del mondo quantistico.

La necessità di conoscere lo stato di un sistema dopo una misurazione è una legittima richiesta soprattutto se si vogliono effettuare una serie di misurazioni o, comunque in generale, più di una misurazione ed è quindi necessario interagire più volte sul sistema.

Andiamo a considerare una sequenza di due misurazioni, così facendo saremo in grado di andare a scrivere le probabilità congiunte.

Sia E' un generico effetto che viene misurato dopo aver effettuato una misurazione rappresentata da un'operazione \mathcal{O} . Sappiamo che, sfruttando (2.38), la probabilità di osservare E alla prima misurazione, per un generico sistema il cui stato pre-misurazione è ρ , è $\mathbb{P}(E) = \text{Tr}\{\mathcal{O}[\rho]\}$, mentre lo stato post-misurazione risulta essere $\rho(E)$.

Iteriamo ora il ragionamento per una seconda misurazione sul sistema, grazie a (2.28), la probabilità che E' accada è data da $\text{Tr}\{\rho(E)E'\}$. Quest'ultima probabilità è la probabilità condizionata di E' alla seconda misurazione sapendo che E è il risultato della prima.

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbb{P}(E'|E) = \text{Tr}\{\rho(E)E'\} = \frac{\text{Tr}\{\mathcal{O}[\rho]E'\}}{\mathbb{P}(E)}. \quad (2.40)$$

Conoscendo quindi la probabilità condizionale $P(E'|E)$ e la probabilità $P(E)$ dell'evento condizionante possiamo scrivere la probabilità congiunta di ottenere E nella prima misurazione ed E' nella seconda.

$$\mathbb{P}(E, E') = \mathbb{P}(E'|E)\mathbb{P}(E) = \text{Tr}\{\mathcal{O}[\rho]E'\}. \quad (2.41)$$

Da queste scritte si possono ricavare dei risultati immediati, la probabilità dell'evento complementare $\neg E$ nella prima misurazione sarà dato da $\mathbb{P}(\neg E) = 1 - \mathbb{P}(E) = 1 - \text{Tr}\{\mathcal{O}[\rho]\}$. Attenzione però che il sistema post-misurazione, condizionato all'evento $\neg E$ non è univocamente determinato da \mathcal{O} , è necessaria una seconda operazione $\tilde{\mathcal{O}}$ tale che $\tilde{\mathcal{O}}^*[\mathbb{1}] + \mathcal{O}^*[\mathbb{1}] = \mathbb{1}$, la scelta di $\tilde{\mathcal{O}}$ non risulta essere univoca, più operazioni sono infatti associate allo stesso effetto $E = \mathcal{O}^*[\mathbb{1}]$. *Osservazione 1.* È importante notare che mentre l'operazione \mathcal{O} è lineare, lo stesso non si può dire della mappa $\rho \rightarrow \rho(E)$.

Se consideriamo uno stato pre-misurazione misto, grazie alla definizione introdotta nella sezione precedente, possiamo scrivere

$$\rho = p(1)\rho_1 + p(2)\rho_2,$$

lo stato post-misurazione condizionato all'esito E , della prima misurazione, è dato da

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{p(1)\mathbb{P}_{\rho_1}(E)}{p(1)\mathbb{P}_{\rho_1}(E) + p(2)\mathbb{P}_{\rho_2}(E)}\rho_1(E) + \frac{p(2)\mathbb{P}_{\rho_2}(E)}{p(1)\mathbb{P}_{\rho_1}(E) + p(2)\mathbb{P}_{\rho_2}(E)}\rho_2(E) \\ &= p(1|E)\rho_1(E) + p(2|E)\rho_2(E). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se più in generale avessimo uno stato preparato nello stato ρ_m con probabilità $p(m)$, allora dopo l'esito E lo stato del sistema $\rho(E)$ sarebbe dato dalla combinazione convessa di tutti gli stati post-misurazione $\rho_m(E)$ con rispettive probabilità $p(m|E)$ chiaramente condizionate all'esito E .

Ora che abbiamo introdotto il concetto di operazione e spiegato il suo ruolo nell'ambito delle misurazioni quantistiche, ci apprestiamo a definire un altro concetto fondamentale ovvero il concetto di strumento.

Strumenti e osservabili

La nozione di strumento ricopre un ruolo fondamentale nel caso vogliamo conoscere lo stato di un sistema dopo la misurazione di un'osservabile X . Lo strumento ci fornisce sia la distribuzione di probabilità di X sia il cambiamento di stato dovuto alla misurazione.

Definizione 9. Sia (Ω, \mathcal{F}) uno spazio misurabile. Uno strumento \mathcal{I} è una misura a valore di operazione normalizzata cioè:

- $\mathcal{I}(F)$ è un'operazione, $\forall F \in \mathcal{F}$,
- $\text{Tr}\{\mathcal{I}(\Omega)[\tau]\} = \text{Tr}\{\tau\}$, $\forall \tau \in \mathbb{C}^n$ (proprietà di normalizzazione)
- Per ogni collezione numerabile $\{F_i\}$ di insiemi disgiunti in \mathcal{F} vale

$$\mathcal{I}\left(\bigcup_i F_i\right) = \sum_i \mathcal{I}(F_i) \quad (\sigma\text{-additività}).$$

Grazie a questa proprietà e sfruttando la definizione di POVM 5 la mappa

$$E_{\mathcal{I}}(F) = \mathcal{I}(F)^*[\mathbb{1}] \quad (2.43)$$

risulta essere una POVM che possiamo interpretare come l'osservabile X associata allo strumento \mathcal{I} .

Da questo possiamo dedurre che per ogni insieme $F \in \mathcal{F}$, assegnato uno stato pre-misurazione ρ , la probabilità di ottenere un risultato $X \in F$, indicata con $\mathbb{P}_{\rho}(F)$, è data da

$$\mathbb{P}_{\rho}(F) = \text{Tr}\{\rho E_{\mathcal{I}}(F)\} = \text{Tr}\{\rho \mathcal{I}(F)^*[\mathbb{1}]\} = \text{Tr}\{\mathcal{I}(F)[\rho]\}. \quad (2.44)$$

Oltre a indicarci la probabilità di ottenere un risultato X , lo strumento ci permette anche di conoscere lo stato dopo la misurazione condizionato al risultato stesso. Otteniamo un'espressione analoga a (2.39)

$$\rho(F) = \frac{\mathcal{I}(F)[\rho]}{\mathbb{P}_{\rho}(F)}. \quad (2.45)$$

Diversi strumenti \mathcal{I} sono associati alla stessa osservabile X così come diverse operazioni \mathcal{O} sono associati allo stesso effetto E , proprio come diverse procedure sperimentali possono misurare la stessa osservabile, ma perturbare il sistema in modi assolutamente diversi.

Stati a priori e a posteriori

Se nell'equazione (2.45) andassimo a considerare l'intero Ω al posto di F avremmo chiaramente $\mathbb{P}_{\rho}(\Omega) = 1$, lo stato condizionato si ridurrebbe quindi a

$$\rho(\Omega) = \mathcal{I}(\Omega)[\rho]. \quad (2.46)$$

Lo stato $\rho(\Omega)$ viene battezzato *stato a priori*: se conosciamo lo stato ρ prima della misura e lo strumento \mathcal{I} , allora $\rho(\Omega)$ è lo stato che possiamo attribuire a “priori” al sistema dopo la misura, se non conosciamo il risultato della misura stessa oppure non selezionassi in base al risultato osservato.

Consideriamo ora il caso in cui nell’equazione (2.45) l’insieme F si riduca ad un insieme infinitamente piccolo $d\omega$ intorno al valore $\omega \in \Omega$: la quantità

$$\rho(\omega) = \mathcal{I}(d\omega)[\rho]/\mathbb{P}_\rho(d\omega) \quad (2.47)$$

rappresenta lo stato condizionato al risultato $X \in d\omega$. La quantità $\rho(\omega)$ è lo stato che possiamo attribuire a quei sistemi nei quali si è effettivamente realizzato ω dopo la misura e per questo motivo prende il nome di *stato a posteriori*.

La definizione matematica che ne segue, dovuta a Ozawa, è la seguente.

Definizione 10. Una famiglia di operatori statistici $\{\rho(\omega), \omega \in \Omega\}$ è una famiglia di *stati a posteriori*, dato uno stato pre-misurazione ρ e uno strumento \mathcal{I} con spazio di valori (Ω, \mathcal{F}) , se la funzione $\omega \rightarrow \rho(\omega)$ è misurabile e, $\forall F \in \mathcal{F}$,

$$\int_F \rho(\omega) \mathbb{P}_\rho(d\omega) = \mathcal{I}(F)[\rho]. \quad (2.48)$$

Per ogni strumento \mathcal{I} e ogni stato pre-misurazione ρ , esiste sempre ed è unica, a meno di equivalenza, una famiglia di stati a posteriori $\rho(\omega)$.

Da un punto di vista probabilistico la funzione misurabile $\rho : \Omega \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H})$ è una variabile aleatoria che dipende dai possibili risultati ω , che si realizzano con distribuzione di probabilità \mathbb{P}_ρ . Sottolineiamo che, anche sfruttando l’equazione (2.48), la media di uno stato a posteriori calcolata rispetto a P_ρ è proprio lo stato a priori:

$$\mathcal{I}(\Omega)[\rho] = \int_\Omega \rho(\omega) \mathbb{P}_\rho(d\omega).$$

La coppia $\{P_\rho, \rho(\cdot)\}$ è una demistura dello stato a priori $\mathcal{I}(\Omega)[\rho]$.

Poniamo l’accento sul fatto che l’equazione (2.48) definisca gli stati a posteriori una volta che lo strumento \mathcal{I} e lo stato pre-misurazione ρ sono assegnati. Al contrario, se $\rho(\omega)$ e $\mathbb{P}_\rho(d\omega)$ sono assegnati per ogni stato pre-misurazione ρ e sappiamo derivino da uno strumento, allora equazione (2.48) permette di ricostruire lo strumento \mathcal{I} .

Un’ulteriore osservazione va fatta in merito alla non linearità della mappa $\rho \rightarrow \rho(\omega)$. Si verifica facilmente che assegnato uno stato pre-misurazione

$$\rho = p(1)\rho_1 + p(2)\rho_2,$$

lo stato a posteriori è dato da

$$\rho(\omega) = p(1) \frac{\mathbb{P}_{\rho_1}(d\omega)}{\mathbb{P}(d\omega)} \rho_1(\omega) + p(2) \frac{\mathbb{P}_{\rho_2}(d\omega)}{\mathbb{P}(d\omega)} \rho_2(\omega), \quad (2.49)$$

dove $\mathbb{P}_{\rho_\alpha}/\mathbb{P}_\rho$ è la derivata di Radon-Nikodym della probabilità \mathbb{P}_{ρ_α} rispetto alla probabilità $\mathbb{P}_\rho = p(1)\mathbb{P}_{\rho_1} + p(2)\mathbb{P}_{\rho_2}$. Chiaramente vale l'assoluta continuità $\mathbb{P}_{\rho_\alpha} \ll \mathbb{P}_\rho$.

L'interpretazione di quanto abbiamo appena delineato è la seguente: se un sistema quantistico è preparato sperimentalmente nello stato ρ_α con probabilità $p(\alpha)$ allora, dopo aver effettuato una misurazione e registrato il risultato ω , lo stato del sistema $\rho(\omega)$ è la combinazione convessa degli stati post-misurazione $\rho_\alpha(\omega)$ che si presentano con una probabilità $p(\alpha)$ condizionata dall'esito $X = \omega$ della misurazione.

Più avanti in questo lavoro saremo interessati al caso $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ per ogni $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, dove \mathbb{Q} è una nuova probabilità. Otteniamo pertanto anche il risultato

$$p(\omega) = p(1) \frac{\mathbb{P}_{\rho_1}(d\omega)}{\mathbb{Q}(d\omega)} \frac{\mathbb{Q}(d\omega)}{\mathbb{P}_\rho(d\omega)} \rho_1(\omega) + p(2) \frac{\mathbb{P}_{\rho_2}(d\omega)}{\mathbb{Q}(d\omega)} \frac{\mathbb{Q}(d\omega)}{\mathbb{P}_\rho(d\omega)} \rho_2(\omega) \quad (2.50)$$

Qui di seguito cerchiamo di fare qualche altra puntualizzazione, per semplicità consideriamo il caso di esito X discreto di un esperimento, aiutiamoci con la figura che segue.

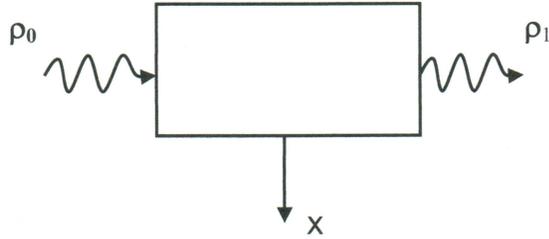


Figura 2.3: Esito discreto di un esperimento

Sia $X = k$, $k \in \Omega$ con Ω al più numerabile. La quantità che vogliamo andare a calcolare è $P(X = k|\rho_0)$, sappiamo che

$$\mathbb{P}(X = k|\rho_0) = \text{Tr}\{\mathcal{I}(k)[\rho]\} = \text{Tr}\{\rho \mathcal{I}(k)^*[\mathbf{1}]\} \quad (2.51)$$

A questo punto se osservo $X = k$ lo stato del sistema dopo la misurazione è dato da:

$$\frac{\mathcal{I}(k)[\rho]}{\text{Tr}\{\mathcal{I}[\rho]\}} = \frac{\mathcal{I}(k)[\rho]}{\mathbb{P}(X = k|\rho_0)} =: \rho_1(k) \quad (2.52)$$

Se invece, pur effettuando la misurazione, non registrassimo il risultato oppure non selezionassi in base al risultato

$$\sum_k \mathcal{I}(k)[\rho] = \sum_k \rho_1(k)P(X = k|\rho_0) =: \rho_1(\Omega) \quad (2.53)$$

Dove gli stati post-misura $\rho_1(k)$ e $\rho_1(\Omega)$ sono rispettivamente lo stato a posteriori e lo stato a priori.

Dedichiamo ora una sezione al concetto di *canale*, che riprende le definizioni e gli strumenti già introdotti.

Canale quantistico

Questa breve sezione è dedicata alla definizione del concetto di canale, verranno riprese le definizioni e le osservazioni utilizzate nelle precedenti sezioni con particolare riguardo alla sezione riguardanti le operazioni. Il formalismo utilizzato è il medesimo, verranno comunque evidenziati i passaggi in cui si utilizzano notazioni già introdotte, ma passiamo alla definizione di questo concetto.

Definizione 11. Un canale è una mappa lineare $\varepsilon : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$, completamente positiva tale che $\text{Tr}\{\varepsilon[\tau]\} = \text{Tr}\{\tau\} \quad \forall \tau \geq 0$.

Sottolineiamo come, a differenza delle operazioni, nel caso del canale la traccia si conservi invece che risultare decrescente.

Proprio come per le operazioni possiamo dare una rappresentazione di un canale tramite il teorema seguente.

Teorema 5. Un generico canale ε su $L(\mathbb{C}^n)$ può essere rappresentato come

$$\varepsilon[\tau] = \sum_k A_k \tau A_k^* \quad \forall \tau \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad (2.54)$$

dove $A_k \in L(\mathbb{C}^n)$ e

$$\sum_k A_k^* A_k = \mathbb{1}. \quad (2.55)$$

Il simbolo \sum_k indica una serie convergente oppure una somma finita.

Questo teorema, già presentato nella trattazione sulle operazioni è noto come decomposizione di Kraus. A differenza del caso precedente è importante sottolineare come nell'equazione (2.55) valga il segno di uguaglianza, mentre nell'equazione (2.37) vale il segno di minore o uguale.

Possiamo interpretare ogni rappresentazione di Kraus come uno strumento di cui ε risulta il canale associato.

Consideriamo per semplicità il caso discreto, sia $\mathcal{I}(\cdot) : \mathcal{F} \rightarrow \{\text{Operazioni}\}$ uno strumento, sfruttando i risultati ottenuti per operazioni e strumenti e le equazioni (2.52) e (2.53), possiamo allora scrivere

$$\mathcal{I}(k)[\varepsilon] = A_k \varepsilon A_k^*$$

Grazie a questa uguaglianza e sfruttando l'equazione (2.54) abbiamo ben mostrato come si possa interpretare ogni rappresentazione di Kraus come uno strumento di cui ε risulta il canale associato che trasforma stati in stati a priori.

È importante sottolineare che però che sono possibili composizioni più generali di quelle discrete appena viste, questo è il caso di osservabili non degeneri.

Chiudiamo ora la sezione dedicata alle operazioni e agli strumenti proponendo un esempio di strumento molto importante ovvero lo strumento di Von Neumann.

Strumento di Von Neumann

Un esempio di strumento è dato dal postulato di misurazione di Von Neumann.

Andiamo a considerare un'osservabile X con valori x_m e una misura proiettiva (pvm) $E_m = |m\rangle\langle m|$, $m = 1, \dots, n$, siano inoltre $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (l'insieme delle parti di Ω), lo strumento di Von Neumann è:

$$\mathcal{I}(F)[\tau] := \sum_{x_m \in F} E_m \tau E_m = |m\rangle\langle m| \tau |m\rangle\langle m|, \quad F \subseteq \Omega$$

e per ogni stato iniziale ρ , gli stati a posteriori sono sempre degli stati puri

$$\rho(x_m) = |m\rangle\langle m| = E_m.$$

Lo stato in questo caso si dice essere precipitato.

Chiudiamo ora questo capitolo dedicando una breve sezione alle distribuzioni congiunte che si riveleranno molto utili quando introdurremo la possibilità di effettuare più misurazioni sullo stesso sistema quantistico.

Distribuzioni congiunte

Quando la misurazione di un'osservabile X è descritta da uno strumento e non solo semplicemente da una POVM, è possibile utilizzare gli stati condizionati dopo la misurazione per costruire la distribuzione di probabilità di ogni altra misurazione X' , che segue la misurazione X , così come possiamo ottenere la distribuzione congiunta di X e X' .

La costruzione è molto simile a quella fornita nelle equazioni (2.38) - (2.41) nel caso di operazioni.

Sia X' data dalla POVM E' su (Ω', \mathcal{F}') . Allora, per sistemi con stato pre-misurazione dato da ρ e primo esito $X \in F$, la probabilità condizionata $P_\rho(F'|F)$ di un secondo esito $X' \in F'$ è data da

$$\mathbb{P}_\rho(F'|F) = \mathbb{P}_{\rho(F)}(F') = \text{Tr}\{\rho(F)E'(F')\} = \frac{\text{Tr}\{\mathcal{I}(F)[\rho]E'(F')\}}{\mathbb{P}_{\rho(F)}} \quad (2.56)$$

Quindi per ogni $F \in \mathcal{F}$, otteniamo la distribuzione condizionale $\mathbb{P}_\rho(\cdot|F)$ su (Ω', \mathcal{F}') per X' , con la seguente interpretazione.

Prima di effettuare il processo di misurazione, la valutazione a priori dell'esito X' è dato da $\mathbb{P}_\rho(\cdot|\Omega)$; tuttavia, se dopo la prima misurazione sappiamo che $X \in F$ allora possiamo attribuire lo stato (2.45) al sistema tra la prima e la seconda misurazione potendo così aggiornare, con questa informazione supplementare, la valutazione dell'esito di X' con la distribuzione condizionale $\mathbb{P}_\rho(\cdot|F)$.

A questo punto conoscendo la probabilità condizionata $\mathbb{P}_\rho(F'|F)$ e la probabilità $\mathbb{P}_\rho(F)$ dell'evento condizionante è banale ricavare la legge congiunta $\mathbb{P}_\rho(F', F)$ di ottenere un risultato $X \in F$ nella prima misurazione e $X' \in F'$ nella seconda misurazione:

$$\mathbb{P}_\rho(F', F) = \mathbb{P}_\rho(F'|F)\mathbb{P}_\rho(F) = \text{Tr}\{\mathcal{I}(F)[\rho]E'(F')\} = \text{Tr}\{\mathcal{I}(F)^*[E'(F')]\rho\}. \quad (2.57)$$

Questa formula fornisce la distribuzione di probabilità congiunta di X e X' sui rettangoli $F \times F' \subset \Omega \times \Omega'$ per ogni $F \in \mathcal{F}$ e $F' \in \mathcal{F}'$.

Prima di passare al secondo capitolo in cui ci dedicheremo ai sistemi composti e all'entanglement, dedichiamo ancora una sezione alle sequenze di misurazioni per sottolineare tutti i dettagli.

2.2.4 Sequenze di misurazioni

Come abbiamo già avuto modo di rimarcare, molto spesso nella pratica di esperimenti si ha la necessità di effettuare più misurazioni su di un sistema quantistico;

andiamo a vedere in dettaglio come bisogna agire e quali accorgimenti è necessario fare.

Agiremo per gradi, in una prima sezione verrà presentato il caso in cui gli strumenti siano due, successivamente si estenderanno i risultati a una sequenza di n strumenti.

Due strumenti

Consideriamo quindi la misurazione di un'osservabile X_1 seguita dalla misurazione di una seconda osservabile X_2 sotto l'ipotesi che entrambe siano rappresentate da uno strumento che possiamo indicare con \mathcal{I}_j su $(\Omega_j, \mathcal{G}_j)$ per X_j . La probabilità congiunta, sfruttando l'equazione (2.57) è data da

$$\mathbb{P}_\rho(F_1, F_2) = \text{Tr}\{\mathcal{I}_2(F_2) \circ \mathcal{I}_1(F_1)[\rho]\}. \quad (2.58)$$

In una situazione come questa è naturale non solo cercare la distribuzione congiunta di X_1 e X_2 , vorremmo anche trovare uno strumento \mathcal{I}_{12} definito su $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$ tale che

$$\mathcal{I}_{12}(F_1 \times F_2) = \mathcal{I}_2(F_2) \circ \mathcal{I}_1(F_1) \quad \forall F_j \in \mathcal{G}_j. \quad (2.59)$$

Così facendo l'intero processo di misura sarebbe descritto da un unico strumento \mathcal{I}_{12} .

L'esistenza di \mathcal{I}_{12} spesso deve sottostare a delle condizioni aggiuntive piuttosto lasche.

Cerchiamo ora di estendere questo approccio al caso di n strumenti.

Sequenza di strumenti

Consideriamo una sequenza di misurazioni di n osservabili X_j rappresentate rispettivamente da n strumenti \mathcal{I}_j sugli spazi misurabili $(\Omega_j, \mathcal{G}_j)$. Assumiamo per semplicità e per avere una notazione più intuitiva che le misurazioni siano effettuate seguendo l'ordine naturale ovvero \mathcal{I}_2 dopo \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_3 dopo \mathcal{I}_2 e così via.

Lo spazio dei risultati risulta essere, evidentemente, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ con σ -algebra $\mathcal{F} = \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}_n$.

Grazie al risultato ottenuto nel caso di due strumenti, sfruttando l'equazione (2.59), la probabilità congiunta $P_\rho(F_1, F_2, \dots, F_n)$ della successione di risultati $X_1 \in F_1, X_2 \in F_2, \dots, X_n \in F_n$ dove $X_j \in F_j$, nel caso in cui lo stato pre-misurazione sia ρ , è

$$P_\rho(F_1, F_2, \dots, F_n) = \text{Tr}\{\mathcal{I}_n(F_n) \circ \cdots \circ \mathcal{I}_2(F_2) \circ \mathcal{I}_1(F_1)[\rho]\}. \quad (2.60)$$

Assumendo che per ogni j gli spazi misurabili $(\Omega_j, \mathcal{G}_j)$ siano Borel standard, allora esiste uno strumento $\mathcal{I}_{TOT} = \mathcal{I}_n \circ \mathcal{I}_{n-1} \circ \dots \circ \mathcal{I}_1$ su (Ω, \mathcal{F}) tale che

$$\mathcal{I}_{TOT}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n) = \mathcal{I}_n(F_n) \circ \dots \circ \mathcal{I}_2(F_2) \circ \mathcal{I}_1(F_1) \quad \forall F_j \in \mathcal{G}_j. \quad (2.61)$$

Questa procedura può essere applicata analogamente per ogni $t \leq n$.

Avendo una successione di n misurazioni, possiamo posizionarci in una qualunque misurazione tra la prima e l'ultima. Quindi, per ogni $t = i, \dots, n$ possiamo considerare la probabilità condizionata degli esiti $X_{t+1} \in F_{t+1}, \dots, X_n \in F_n$ conoscendo i precedenti t esiti $X_1 \in F_1, \dots, X_t \in F_t$.

Sfruttando quindi la formula delle probabilità totali abbiamo:

$$P_\rho(F_{t+1}, \dots, F_n | F_1, \dots, F_t) = \frac{P_\rho(F_1, F_2, \dots, F_n)}{P_\rho(F_1, \dots, F_t)} =$$

$$P_{\rho(F_1, \dots, F_t)}(F_{t+1}, \dots, F_n) = \text{Tr}\{\mathcal{I}_n(F_n) \circ \dots \circ \mathcal{I}_{t+1}(F_{t+1})[\rho(F_1, \dots, F_t)]\}$$

dove lo stato condizionante

$$\rho(F_1, \dots, F_t) = \frac{\mathcal{I}_t(F_t) \circ \dots \circ \mathcal{I}_1(F_1)[\rho]}{P_\rho(F_1, \dots, F_t)} \quad (2.62)$$

rappresenta il sistema dopo le prime t misurazioni condizionato agli esiti $X_1 \in F_1, \dots, X_t \in F_t$.

Chiudiamo così il primo capitolo di introduzione alla meccanica quantistica, sono stati presentati molti strumenti matematici e fornite nozioni per iniziare a comprendere i problemi che si possono affrontare.

Nel secondo capitolo ci concentreremo sui sistemi composti e sull'entanglement.

Sistemi composti ed entanglement

3.1 Sistemi composti

Fino a questo punto ci siamo interessati esclusivamente a sistemi fisici singoli; supponiamo ora di voler studiare un sistema quantistico composto formato da due o più sistemi fisici distinti.

Sorge spontanea la domanda di come si possa descrivere tale sistema composto. Troviamo risposta a tale domanda in quello che possiamo considerare un nuovo postulato della meccanica quantistica.

Postulato 3: Lo spazio di stato di un sistema composto da n sistemi fisici distinguibili è il prodotto tensoriale degli spazi di stato dei sistemi fisici singoli. Indicando con \mathcal{H}_T lo spazio dello stato composto abbiamo

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

Se inoltre gli n sistemi sono *indipendenti* e di stato ρ_i allora il sistema composto dagli n singoli sistemi, ha stato $\rho_T = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n$.

Facciamo ora qualche considerazione che ci permetta di mettere in luce l'utilizzo delle POVM nei sistemi composti e vediamo come sia possibile estendere le definizioni viste finora al caso di un sistema composto.

Consideriamo n sistemi quantistici distinti e rappresentati su $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$.

Sia $\rho_T \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_T)$ un generico operatore densità appartenente allo spazio degli operatori densità definiti sullo spazio prodotto \mathcal{H}_T .

È nostro interesse effettuare la misurazione di una stessa osservabile sul sistema 1 in due casi distinti:

- C'è un solo sistema \mathcal{H}_1 di stato ρ_1 .
- Ci sono n sistemi distinguibili e indipendenti $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ di stato ρ_i tali che $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ e $\rho_T = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$.

Vedremo che, nonostante si voglia misurare la stessa osservabile, a causa dei due scenari differenti anche gli strumenti utilizzati saranno differenti, seppur in modo banale.

Andiamo per gradi, consideriamo innanzitutto il primo caso, ovvero il sistema \mathcal{H}_1 di stato ρ_1 .

La POVM risultante considerando solamente tale sistema è data da:

$$E_1(F_1) : H_1 \rightarrow H_1 \quad \forall F_1 \in \mathcal{F}_1. \quad (3.1)$$

Se ora considerassimo il sistema H_T di stato ρ_T , la POVM che corrisponderebbe a misurare la stessa osservabile del caso precedente viene chiamata *POVM fattorizzabile* ed è data da

$$\tilde{E}_1(F_1) : H_T \rightarrow H_T \quad \forall F_1 \in \mathcal{F}_1, \quad (3.2)$$

la cui scrittura esplicita è:

$$\tilde{E}_1(F_1) = E_1(F_1) \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_n. \quad (3.3)$$

Da quest'ultima equazione è evidente perché questo tipo di POVM si chiamino POVM fattorizzabili.

Oltre a questi tipo di POVM esistono inoltre delle POVM non fattorizzabili che corrispondono a quantità globali, che riguardano il sistema nel suo complesso.

Utilizzando quanto appena introdotto sulle POVM fattorizzabili, mirate alla misurazione di un'osservabile riguardante un singolo sistema i e ricordandoci i risultati ottenuti nel capitolo precedente, grazie al formalismo degli operatori statistici, è possibile effettuare le seguenti considerazioni.

Ricollochiamoci nel caso di un solo sistema \mathcal{H}_1 di stato ρ_1 . In questo caso, per ogni insieme $F_1 \in \mathcal{F}_1$, assegnato lo stato pre-misurazione ρ_1 , la probabilità di ottenere un risultato $X \in F$, indicata con $\mathbb{P}_{\rho_1}(F)$, è data da

$$\mathbb{P}_{\rho_1}(F_1) = \text{Tr}\{\rho_1 E_1(F_1)\}, \quad (3.4)$$

avendo ripreso e adattato la notazione dell'equazione (2.44) a questo contesto in particolare.

Se invece considerassimo il secondo caso, ovvero n sistemi distinguibili e indipendenti di stato ρ_i , per ogni $F_1 \in \mathcal{F}_1$, assegnato lo stato pre-misurazione composto ρ_T , per calcolare la probabilità di ottenere un risultato $X \in F$, che indicheremo con $\mathbb{P}_{\rho_T}(F)$, è necessario utilizzare la POVM fattorizzata introdotta nell'equazione (3.2)

$$\tilde{E}_1(F_1),$$

ottenendo pertanto

$$\mathbb{P}_{\rho_T}(F_1) = \text{Tr}\{\rho_T \tilde{E}_1(F_1)\}. \quad (3.5)$$

Sempre in quest'ambito è possibile effettuare altre considerazioni.

Nelle ipotesi del caso appena introdotto, consideriamo due sistemi ed effettuiamo contemporaneamente due misure E_1 su 1 e E_2 su 2.

La POVM risultante sulla misurazione congiunta è una POVM su $H_1 \otimes H_2$ e sarà data da

$$\tilde{E}(F_1 \times F_2) = E_1(F_1) \otimes E_2(F_2) \quad \forall F_1 \in \mathcal{F}_1, \forall F_2 \in \mathcal{F}_2. \quad (3.6)$$

Sulle equazioni appena introdotte, (3.4) e (3.5), è possibile effettuare ulteriori interessanti considerazioni, non prima però di aver introdotto un concetto fondamentale in meccanica quantistica ovvero la *traccia parziale*. A questo strumento dedicheremo la prossima sezione.

3.1.1 Traccia parziale

La nozione di traccia parziale è una generalizzazione del concetto di traccia. Così come la traccia è una funzione a valore scalare sugli operatori, la traccia parziale è una funzione a valore di operatore.

Diamone ora la definizione per poi comprendere il motivo della sua importanza in ambito quantistico.

Definizione 12. Siano \mathcal{H} e \mathcal{K} due spazi vettoriali di dimensione m e n , rispettivamente, le cui basi ortonormali possiamo indicare con e_1, \dots, e_m e f_1, \dots, f_n . Siano inoltre $L(\mathcal{H})$ e $L(\mathcal{K})$ i rispettivi spazi degli operatori lineari.

Consideriamo lo spazio prodotto $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ e un generico operatore lineare $T \in L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

Tale operatore ha una rappresentazione matriciale del tipo $\{a_{kl,ij}\}$ $\forall 1 \leq k, i \leq m$ e $1 \leq l, j \leq n$ relativa alla base $e_k \otimes f_l$ di $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Considerando ora la somma:

$$b_{k,i} = \sum_{j=1}^n a_{kj,ij}.$$

Questa operazione darà come risultati una matrice B di elementi $b_{k,i}$.

L'operatore lineare su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ associato è per definizione la **traccia parziale** e risulta essere indipendente dalla scelta della base. Si noti che, se ρ_1 e ρ_2 sono stati indipendenti su \mathcal{H} e \mathcal{K} rispettivamente, si ha $\text{Tr}_{\mathcal{K}}\{\rho_1 \otimes \rho_2\} = \rho_1$.

Definizione 13. Sia $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ lo spazio di Hilbert associato a un sistema prodotto, consideriamo un generico stato sullo spazio degli stati, rappresentato dalla sua matrice densità ρ_T . Si dice *stato ridotto* di ρ_T sul sistema i la traccia parziale di ρ_T rispetto a tutti i sistemi eccetto il sistema i -esimo,

$$\rho_i = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{i-1} \otimes \mathcal{H}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n} \{\rho_T\}. \quad (3.7)$$

Grazie a questa definizione qui di seguito riportiamo qualche risultato che sarà molto utile nel prosieguo di questo lavoro, in particolare il teorema seguente ci aiuterà nell'effettuare calcoli espliciti.

Teorema 6. Siano \mathcal{H} e \mathcal{K} due spazi di Hilbert, per ogni $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, fissata una base $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ in \mathcal{H} e una base $\{|l\rangle\}_{l=1}^k$ in \mathcal{K} possiamo scrivere

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}}\{\rho\} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{l=1}^k |i\rangle \langle il|\rho|jl\rangle \langle j| \quad (3.8)$$

Vediamone rapidamente la dimostrazione

Dimostrazione. Sia $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ possiamo allora scrivere l'operatore densità nella forma

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} |il\rangle \langle il|\rho|jk\rangle \langle jk|$$

Applichiamo ora la traccia parziale su \mathcal{K} allo stato ρ .

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{K}}\{\rho\} &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \langle il|\rho|jk\rangle \text{Tr}_{\mathcal{K}}\{|il\rangle \langle jk|\} \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \langle il|\rho|jk\rangle |i\rangle \langle j| \text{Tr}\{|l\rangle \langle k|\} \\ &= \sum_{i,j} \sum_l |i\rangle \langle il|\rho|jk\rangle \langle j|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dove abbiamo sfruttato la linearità della traccia e il fatto che il termine $\langle il|\rho|jk\rangle$ è uno scalare nella prima uguaglianza mentre per quanto riguarda l'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che $\text{Tr}\{|l\rangle \langle k|\} = \delta_{lk}$. \square

Nelle definizioni precedenti e grazie al teorema di caratterizzazione della traccia abbiamo iniziato a comprendere l'importanza fondamentale della traccia parziale. Facciamo qualche altra puntualizzazione.

La traccia parziale è una mappa completamente positiva che preserva la traccia e dunque verifica le ipotesi caratterizzanti le operazioni. Grazie a questo fatto possiamo vedere la traccia parziale come un'operazione. Oltre a questo richiamo tecnico cerchiamo di capire il perché dell'importanza della traccia parziale in meccanica quantistica.

Per fare ciò consideriamo due sistemi distinti 1 e 2 di stato ρ_T a tali sistemi associamo inoltre gli spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 sia inoltre ρ_1 lo stato ridotto del primo sistema

$$\rho_1 = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} \{\rho_T\}. \quad (3.10)$$

La ragione per cui viene introdotta in meccanica quantistica la traccia parziale è la seguente: se si effettua una misurazione e si osserva una quantità relativa al solo sistema 1, gli stati ρ_T e ρ_1 sono equivalenti.

Riprendendo brevemente le equazioni (3.4) e (3.5) è possibile scrivere $\forall F$ appartenente alla σ -algebra \mathcal{F}_1 la seguente uguaglianza

$$\text{Tr}\{\rho_T \tilde{E}_1(F)\} = \mathbb{P}(F) = \text{Tr}\{\rho_1 E_1(F)\}, \quad (3.11)$$

dove $\tilde{E}_1(F) = E_1(F) \otimes \mathbb{1}$ e ρ_1 è dato da (3.10).

Quanto appena mostrato è chiaramente estendibile a n sistemi e osservazione relativa al solo sistema i ; qui di seguito riportiamo i risultati senza dilungarci in ulteriori considerazioni.

Consideriamo un'osservabile $E_i(F)$ relativa al sistema i ; possiamo scrivere

$$\text{Tr}\{\rho_T \tilde{E}_i(F_i)\} = \mathbb{P}_{\rho_i}(F_i) = \text{Tr}\{\rho_i E_i(F_i)\}, \quad (3.12)$$

dove lo stato ρ_i è della forma

$$\rho_i = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{i-1} \otimes \mathcal{H}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n} \{\rho_T\}. \quad (3.13)$$

Grazie a queste equazioni, abbiamo che limitatamente all'osservazione di un'osservabile, relativa al sistema i , gli stati ρ_T e $\rho_i = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{i-1} \otimes \mathcal{H}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n} \{\rho_T\}$ sono equivalenti.

In questo tipo di analisi, la domanda che sorge ora spontanea è la seguente, cosa accade nel caso di più misurazioni?

Supponiamo quindi di avere 2 sistemi indipendenti 1 e 2 di stato

$$\rho_T = \rho_1 \otimes \rho_2.$$

Consideriamo come precedentemente una POVM $E_1(F_1)$, che corrisponde alla misurazione di un'osservabile sul solo sistema 1, e una POVM $E_2(F_2)$, che corrisponde alla misurazione di un'osservabile sul solo sistema 2. Avremo chiaramente

$$E_1(F_1) : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \quad F_1 \in \mathcal{F}_1,$$

$$E_2(F_2) : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2 \quad F_2 \in \mathcal{F}_2.$$

La POVM risultante sulla misurazione congiunta è una POVM su $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ data da

$$\tilde{E}(F_1 \times F_2) := E_1(F_1) \otimes E_2(F_2). \quad (3.14)$$

Sfruttando i risultati ottenuti nelle equazioni (3.11) e (3.12), possiamo scrivere

$$\text{Tr}\{\rho_T E_1(F_1) \otimes E_2(F_2)\} = \text{Tr}\{\rho_1 E_1(F_1)\} \text{Tr}\{\rho_2 E_2(F_2)\}. \quad (3.15)$$

Grazie a questo risultato possiamo scrivere

$$\mathbb{P}_{\rho_T}(F_1 \times F_2) = \mathbb{P}_{\rho_1 \otimes \rho_2}(F_1 \times F_2) = \mathbb{P}_{\rho_1}(F_1) \mathbb{P}_{\rho_2}(F_2). \quad (3.16)$$

Queste osservazioni possono essere estese al caso di n sistemi indipendenti, riassumiamo questo risultato nel teorma seguente

Teorema 7. *Dati n sistemi indipendenti di stati $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, allora, $\forall E_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$, tali che $0 \leq E_i \leq \mathbb{1}$ $i = 1, \dots, n$*

$$\begin{aligned} \rho_T &= \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n \\ &\Updownarrow \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{Tr}\{\rho_T E_1 \otimes \dots \otimes E_n\} = \text{Tr}\{\rho_1 E_1\} \text{Tr}\{\rho_2 E_2\} \dots \text{Tr}\{\rho_n E_n\}$$

I risultati enunciati in questa sezione sono di straordinaria importanza, abbiamo messo in luce l'importanza della traccia parziale e la ragione per cui questo strumento è stato introdotto. Nel prosieguo di questo lavoro spesso si utilizzerà la traccia parziale per fornire una descrizione esatta dello stato marginale di un sottosistema di un sistema composto.

3.1.2 Sistemi chiusi e sistemi aperti

Fino ad ora ci siamo focalizzati solamente sulla dinamica di sistemi quantistici *chiusi*, ovvero di sistemi che non hanno alcuna interazione con il mondo esterno.

Come si può facilmente immaginare nella realtà sistemi perfettamente chiusi non esistono, un'interazione con il mondo esterno è pressoché inevitabile.

I sistemi reali sono infatti soggetti ad interazioni non volute con il mondo esterno, o volute.

Il rumore che viene quindi introdotto nei sistemi deve quindi essere studiato e compreso affinché si possa descrivere in modo esauriente e corretto un sistema quantistico.

Per comprendere la differenza tra sistema aperto e chiuso possiamo rifarci tranquillamente al mondo classico e alla meccanica classica. Consideriamo, ad esempio, un pendolo di un normalissimo orologio meccanico, tale pendolo si può considerare idealmente come un sistema chiuso, la sua interazione con il mondo esterno è dovuta essenzialmente all'attrito e risulta difatti molto debole (proprio per questo viene considerata trascurabile).

Se tuttavia volessimo descrivere in maniera completamente esaustiva la dinamica del pendolo dovremmo tenere conto dell'attrito con l'aria, delle microimperfezioni del meccanismo e di molti altri dettagli.

Analogamente nel mondo quantistico se vogliamo dare una descrizione completa dobbiamo accettare il fatto che non esistono sistemi perfettamente chiusi.

Un sistema aperto, e nel nostro caso un sistema quantistico aperto, è quindi nient'altro che un sistema che interagisce con il resto del mondo, con l'*environment* circostante; da questa interazione si sviluppa un rumore che vorremmo fosse trascurabile o quantomeno controllabile.

Nostro obiettivo dei prossimi paragrafi è l'introduzione di un potente formalismo matematico che ci permetta di gestire simultaneamente diversi scenari quantistici: sistemi debolmente legati all'*environment* esterno, sistemi fortemente legati all'*environment* e anche sistemi chiusi che improvvisamente sottostanno a misurazioni e quindi aperti improvvisamente.

Sistemi aperti e traccia parziale

Ora che abbiamo introdotto l'idea di sistema aperto e di *environment* dobbiamo cercare un modo per riuscire a descrivere tali sistemi, il concetto di traccia parziale che abbiamo introdotto nel capitolo precedente sarà molto utile.

Prima di vedere all'opera la traccia parziale facciamo qualche altra precisazione.

I sistemi aperti infatti possono essere considerati come frutto dell'interazione tra il sistema principale di nostro interesse e l'*environment* circostante. Questo

nuovo sistema, frutto dell'interazione tra sistema principale e environment, forma, nel complesso, un sistema chiuso.

A questo punto è quindi lecito supporre, proprio come abbiamo enunciato nel postulato 2, una trasformazione unitaria per il binomio sistema principale-environment.

La nozione di traccia parziale che abbiamo fornito ci viene in aiuto a questo punto.

Ci siamo infatti ricondotti da un sistema aperto a un sistema chiuso, considerando l'environment circostante, tuttavia siamo interessati ad avere informazioni riguardanti solamente il nostro sistema principale di partenza.

Grazie alla traccia parziale riusciamo a isolare ed estrapolare le informazioni che riguardano solamente il sistema di nostro interesse, tralasciando l'environment.

Vediamo nella prossima sezione come si opera con la traccia parziale.

Traccia parziale all'opera

Ora che abbiamo appreso le nozioni più importanti di meccanica quantistica ed è stato introdotto il formalismo matematico per gestire scenari diversi, consideriamo un esempio di calcolo effettivo di traccia parziale così da chiarire definitivamente l'utilizzo di questo strumento.

Abbiamo già mostrato che il modo naturale per descrivere la dinamica di un sistema quantistico aperto è di considerare l'interazione tra il sistema di interesse e l'environment circostante che insieme formano un sistema chiuso che quindi sappiamo descrivere tramite trasformazione unitaria.

Supponiamo quindi di avere un sistema nello stato ρ che, legato all'environment, viene mandato in una scatola di trasformazione.

Lo stato finale del sistema, $\varepsilon(\rho)$, potrebbe non essere il frutto di una trasformazione unitaria a partire dallo stato ρ , proprio per la presenza dell'environment.

Per il momento assumiamo che lo stato sistema-environment sia dato da

$$\rho \otimes \rho_{env} \quad (3.18)$$

Dopo la trasformazione siamo interessati a considerare lo stato ridotto del sistema di interesse, trascurando pertanto l'environment.

Questo è il classico scenario di utilizzo della traccia parziale, siamo quindi interessati al calcolo di:

$$\varepsilon(\rho) = \text{Tr}_{env}\{U\rho \otimes \rho_{env}U^*\}. \quad (3.19)$$

Sia $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, indichiamo tramite X la matrice di Pauli, precedentemente introdotta, con $P_0 \equiv |0\rangle\langle 0|$, $P_1 \equiv |1\rangle\langle 1|$ due proiettori.

Assumiamo inoltre che l'environment sia nello stato $|0\rangle$. Ricordiamo brevemente che tramite le scritture $|1\rangle$ e $|0\rangle$ intendiamo $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispettivamente.

Supponiamo ad esempio che la trasformazione a cui il sistema sottostà sia data da:

$$U = P_0 \otimes \mathbb{1} + P_1 \otimes X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

se l'operatore U è di questa forma possiamo inoltre dire che è unitario infatti

$$U^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = U^{-1}$$

Passiamo al calcolo vero e proprio della traccia parziale sfruttando l'equazione (3.19).

$$\varepsilon(\rho) = \text{Tr}_{env}\{U\rho \otimes \rho_{env}U^*\},$$

utilizzando la caratterizzazione della traccia parziale proposta nel teorema (6), si ottiene:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{i,j,l} |i\rangle\langle il|(U\rho \otimes \rho_{env}U^*)|jl\rangle\langle j|.$$

A questo punto si procede passo dopo passo esplicitando le sommatorie sulle variabili i, j, l , ricordando che le variabile assumono i soli valori 0 oppure 1.

Si esplicitano inoltre gli operatori U e U^* e sfruttando l'eventuale ortogonalità tra termini o il fatto che siano paralleli ci si riduce alla seguente forma semplice e compatta.

$$\varepsilon(\rho) = |0\rangle\langle 0|\rho|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 1|,$$

che possiamo riscrivere come segue

$$\varepsilon(\rho) = \sum_k |k\rangle\langle k|\rho|k\rangle\langle k|.$$

Il canale introdotto diagonalizza ρ sulla base $|1\rangle, |0\rangle$.

Abbiamo così visto come si procede nell'effettuare il calcolo esplicito di una traccia parziale, rifacendoci al teorema di caratterizzazione (6), prima di chiudere

il capitolo, dedicando l'ultima sezione a un caso particolare di misurazioni, non ancora trattato, ovvero il caso di più misurazioni effettuate su di un sistema, facciamo ancora qualche osservazione per sottolineare l'importanza della traccia parziale.

Le seguenti osservazioni hanno il duplice intento di riassumere quanto visto finora e puntualizzare l'importanza di alcune ipotesi e dettagli imprescindibili.

1. Sia \mathcal{H} un sistema aperto e ρ uno stato preparato sperimentalmente di tale sistema.
2. Il sistema aperto e l'environment esterno sono indipendenti \rightarrow possiamo scrivere $\rho_T = \rho \otimes \rho_{env}$.
3. $\rho_T \in \mathcal{H}_T$, il sistema di interesse più l'environment è considerato un sistema chiuso.
4. I due stati inizialmente indipendenti interagiscono.
5. ρ_T sottostà a trasformazione unitaria.
6. Esiste sempre un canale $\varepsilon(\rho)$ tale che è possibile scrivere

$$\varepsilon(\rho) = \text{Tr}_{env}\{U\rho \otimes \rho_{env}U^*\}$$

e viceversa.

Le osservazioni qui riportate ben puntualizzano e riassumono quanto abbiamo visto. Prima di chiudere la sezione vogliamo però dedicare ancora qualche paragrafo per considerare la possibilità che sul sistema vengano effettuate delle misurazioni.

Nei punti 1–6 non si fa infatti riferimento a questa possibilità, completiamo quindi l'argomentazione considerando un sistema nello stato ρ . Legato allo stato d'interesse supponiamo inoltre ci sia l'environment, che si trovi in uno stato che indichiamo, come d'abitudine, con ρ_{env} , e tali stati, ρ e ρ_{env} siano indipendenti quindi il sistema composto nello stato iniziale è

$$\rho_T = \rho \otimes \rho_{env}.$$

A questo punto il sistema sottostà a una trasformazione unitaria U , come d'abitudine, e dopo tale trasformazione supponiamo sia effettuata una misurazione, sul sistema composto, descritta da una POVM.

Qui di seguito riportiamo alcune considerazioni e risultati nel caso discreto in cui le POVM si riducono a proiettori. Inoltre usiamo il postulato di precipitazione.

Lo stato principale ρ si lega all'environment ρ_{env} .
Lo stato finale del sistema composto è dato da, sfruttando l'equazione (2.39),

$$\frac{P_m U(\rho \otimes \rho_{env}) U^* P_m}{\text{Tr}\{P_m U(\rho \otimes \rho_{env}) U^* P_m\}}, \quad (3.20)$$

nell'ipotesi che il risultato della misurazione sia m .

L'equazione (3.20) ci fornisce lo stato finale del sistema composto sapendo che il risultato della misurazione è m .

Rifacendoci alla terminologia introdotta nel secondo capitolo possiamo dire che l'equazione (3.20) è lo strumento che ci fornisce lo stato a posteriori del sistema composto.

Prossimo passo che possiamo effettuare consiste nell'effettuare una traccia parziale sul risultato appena ottenuto, così da guardare al solo stato ρ di nostro interesse, abbiamo

$$\frac{\text{Tr}_{env}\{P_m U(\rho \otimes \rho_{env}) U^* P_m\}}{\text{Tr}\{P_m U(\rho \otimes \rho_{env}) U^* P_m\}} \quad (3.21)$$

da tale espressione possiamo notare come lo stato finale coinvolga: lo stato iniziale ρ del sistema principale, lo stato iniziale ρ_{env} dell'environment, la trasformazione unitaria U e l'operatore di misurazione P_m .

A questo punto se definiamo la mappa

$$\varepsilon_m(\rho) = \text{Tr}_{env}\{P_m U(\rho \otimes \rho_{env}) U^* P_m\}, \quad (3.22)$$

avremo che lo stato finale del solo sistema principale Q è dato da

$$\frac{\varepsilon_m(\rho)}{\text{Tr}\{\varepsilon_m(\rho)\}},$$

dove $\text{Tr}\{\varepsilon_m(\rho)\}$ rappresenta la probabilità di ottenere come risultato della misurazione proprio il risultato m .

A questa struttura, che qui abbiamo ricavato a partire da un risultato discreto m di una misurazione, è sempre possibile arrivare. Il risultato lo si deve a Ozawa e al suo teorema che qui di seguito riportiamo.

Teorema 8. *Sia (Ω, \mathcal{F}) uno spazio misurabile Borel standard e sia \mathcal{I} uno strumento. Allora esistono uno spazio di Hilbert separabile \mathcal{K} , una misura a valori di proiettore E su \mathcal{K} sullo stesso spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) , un operatore statistico $\rho_1 \in \mathcal{K}$, un operatore unitario U su $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ tali che*

$$\mathcal{I}(F)[\rho] = \text{Tr}_{\mathcal{K}}\{(\mathbb{1} \otimes E(F))U(\rho \otimes \rho_1)U^*\}, \quad \forall F \in \mathcal{F}, \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \quad (3.23)$$

Il termine destro dell'equazione (3.23) definisce uno strumento per ogni scelta di K , E , ρ_1 e U ; E in generale può essere una POVM su \mathcal{K} .

L'interpretazione che possiamo dare a questo teorema è la seguente. Lo strumento di misurazione è un sistema quantistico rappresentato da uno spazio di Hilbert \mathcal{K} e preparato nello stato ρ_1 . Il sistema di interesse è preparato in un generico stato ρ , senza alcuna correlazione con lo strumento di misurazione, quindi lo stato iniziale del sistema composto è dato da $\rho \otimes \rho_1$. Il sistema che viene misurato e lo strumento di misurazione interagiscono tra di loro ed evolvono in un intervallo di tempo come un singolo sistema chiuso, la cui evoluzione unitaria è rappresentata da U . A questo punto una qualche osservabile $E(\cdot)$ è misurata. Una tale osservabile fornisce informazioni sul sistema di interesse in modo indiretto. A tale schema spesso ci si riferisce come *misurazione indiretta*.

Grazie a queste puntualizzazioni abbiamo cercato di riassumere quanto mostrato finora e di dare un'interpretazione fisico-probabilistica delle operazioni e degli strumenti in generale.

La prossima sezione è centrata sul paradosso EPR a partire dal quale potremmo introdurre il concetto di entanglement.

3.1.3 EPR, disuguaglianza di Bell e interpretazione fisica

Finora abbiamo sottolineato come la meccanica quantistica abbia aperto un nuovo capitolo nel mondo della fisica moderna mostrando per esempio i risultati ottenuti da Stern e Gerlach nel loro esperimento. Che differenze possiamo rimarcare tra la meccanica quantistica e il mondo classico?

Quando parliamo di un oggetto come un libro o una tazza, assumiamo naturalmente che le proprietà fisiche dell'oggetto d'interesse abbiano un'esistenza indipendente dall'osservazione. ovvero le misurazioni agiscono solo nel rivelare tali proprietà fisiche. Per esempio una palla ha tra le sue proprietà fisiche la sua posizione, la sua velocità,

Quando la meccanica quantistica iniziò a diffondersi a cavallo tra gli anni 20 e gli anni 30 si sviluppò un punto di vista radicalmente differente dal punto , ovvero una particella non osservata non possiede delle proprietà fisiche che esistono indipendentemente dal fatto che sia osservata. Queste proprietà, piuttosto, si sviluppano come una conseguenza delle misurazioni effettuate sul sistema.

La meccanica quantistica fornisce un insieme di regole che specificano, dato lo stato di un vettore, le probabilità del risultato di una possibile misurazione quando una certa osservabile è misurata.

Questa radicale visione della Natura fu rifiutata da molti fisici. Tra i più strenui oppositori a questa teoria vi era Einstein che nel famoso "articolo EPR", scritto con

Podolsky e Rosen, aveva l'intento di mostrare come la meccanica quantistica fosse incompleta in quanto mancasse di un "elemento di realtà".

EPR tuttavia non riuscirono nel loro articolo a convincere un gran numero fisici e circa 30 anni più tardi fu proposto un test sperimentale che poteva essere utilizzato per verificare se la descrizione del mondo apportata da EPR fosse valida oppure no.

Da questo test risultò che la Natura invalidava il punto di vista di EPR mentre concordava con la meccanica quantistica.

La chiave di ciò risiede nella *disuguaglianza di Bell*; è importante sottolineare come la disuguaglianza di Bell non sia un risultato di meccanica quantistica, quindi per il momento lasciamo da parte le nostre conoscenze di meccanica quantistica.

Per ottenere tale disuguaglianza andiamo a considerare il seguente esperimento, illustrato nelle figura seguente.

Come tradizione in meccanica quantistica faremo riferimento agli sperimentatori con i nomi di Charlie, Alice e Bob.

Charlie prepara due particelle, non è importante il modo in cui le prepari, Charlie deve essere solamente in grado di ripetere la procedura sperimentale che utilizza nella preparazione. Dopo aver preparato le due particelle ne manda una ad Alice e una a Bob.

Appena Alice riceve una particella, ne effettua una misurazione. Supponiamo inoltre che Alice abbia due strumenti di misurazione differenti tra i quali scegliere per effettuare la misurazione. Le misurazioni riguardano delle proprietà fisiche che indichiamo con P_Q e P_R rispettivamente.

Alice a priori non sa quale misurazione effettuerà, supponiamo pertanto che lanci una moneta per decidere quale misurazione tra le due effettuerà.

Per semplicità supponiamo che le misurazioni possano avere i soli risultati $+1$ oppure -1 . Supponiamo che la particella di Alice abbia il valore Q per la proprietà P_Q , si assume che Q sia una *proprietà oggettiva* e che la misurazione sia un processo di solo rilevamento. Discorso analogo per R che indica il valore rilevato dalla misurazione della proprietà P_R .

Tutto questo vale anche per Bob dove utilizzeremo, per distinguere da Alice, le lettere P_S e P_T per le proprietà che rilevano un valore oggettivo S o T , ognuno dei quali, proprio come nel caso precedente può assumere i soli valori $+1$ o -1 . Anche Bob una volta ricevuta la particella sceglierà casualmente quale misurazione effettuare.

Ultima ipotesi dell'esperimento è che Alice e Bob effettuino la misurazione esattamente allo stesso tempo, così che non ci possano essere influenze di alcun tipo.



Figura 3.1: Schema esperimento Alice e Bob

Notiamo che

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T. \quad (3.24)$$

Poiché $R, Q = \pm 1$ è evidente che una delle due quantità $(Q + R)S$ o $(R - Q)T$ si annulli. In ognuno di questi due casi è facile vedere, dall'equazione (3.24) che

$$QS + RS + RT - QT = \pm 2. \quad (3.25)$$

Supponiamo inoltre che $p(q, r, s, t)$ sia la probabilità che, prima che la misurazione venga effettuata, il sistema sia nello stato $Q = q, R = r, S = s$ e $T = t$. Queste probabilità dipendono da come Charlie abbia effettuato le preparazioni delle particelle e dal rumore sperimentale.

Andiamo ora a calcolare il valore atteso di questa quantità.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[QS + RS + RT - QT] &= \sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t)(qs + rs + rt - qt) \\ &\leq 2 \cdot \sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t) \\ &= 2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dove abbiamo utilizzato l'equazione (3.25), chiaramente il valore atteso è lineare,

$$\mathbb{E}[QS + RS + RT - QT] = \mathbb{E}[QS] + \mathbb{E}[RS] + \mathbb{E}[RT] - \mathbb{E}[QT]. \quad (3.27)$$

Dal confronto tra queste due equazioni si ottiene la disuguaglianza di Bell,

$$\mathbb{E}[QS] + \mathbb{E}[RS] + \mathbb{E}[RT] - \mathbb{E}[QT] \leq 2. \quad (3.28)$$

Ripetendo l'esperimento molte volte, Alice e Bob possono stimare tutte le quantità del termine sinistro della disuguaglianza.

È possibile dunque stimare i vari valori attesi ad un'accuratezza limitata solamente dal numero di esperimenti effettuati. Effettuate tutte le stime possiamo verificare se la disuguaglianza è verificata nell'esperimento reale.

Mostrato lo svolgimento dell'esperimento e ricavati alcuni risultati analitici, proviamo a questo punto a inserire nel conteso un po' di meccanica quantistica. Supponiamo che Charlie prepari un sistema quantistico di due qubits nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

A questo punto dà il primo qubit ad Alice e il secondo a Bob che effettuano le misurazioni sulle seguenti osservabili:

$$\begin{aligned} Q &= Z_1 & S &= \frac{-Z_2 - X_2}{\sqrt{2}} \\ R &= X_1 & T &= \frac{Z_2 - X_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dove indichiamo con X e Z le matrici di Pauli, introdotte nel primo capitolo, mentre il pedice 1 o 2 sottolinea solamente il fatto che la misurazione sia fatta da Alice o Bob rispettivamente, tale pedice non influisce in alcun modo sui termini della matrici di Pauli.

Calcoliamo ora i valori attesi delle seguenti quantità: QS , RS , RT e QT , i valori che si ottengono sono

$$\mathbb{E}[QS] = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \mathbb{E}[RS] = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \mathbb{E}[RT] = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \mathbb{E}[QT] = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.30)$$

Quindi

$$\mathbb{E}[QS] + \mathbb{E}[RS] + \mathbb{E}[RT] - \mathbb{E}[QT] = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \quad (3.31)$$

Che è in totale disaccordo con la disuguaglianza (3.28) il cui termine sinistro non può mai essere maggiore di 2.

Tuttavia muovendo un passo nella meccanica quantistica abbiamo mostrato che si ottenga il risultato $2\sqrt{2}$ che è chiaramente strettamente maggiore di 2.

Come ovviare a questa incongruenza a prima vista inconciliabile? Quale fra i due risultati è corretto?

La risposta a queste domande si trova in alcuni esperimenti di cui riportiamo solamente i risultati, senza addentrarci nei dettagli che esulerebbero dallo scopo di questo lavoro.

Ebbene, effettuando degli esperimenti con fotoni, a partire dagli anni 30 del secolo scorso fino ad avere dei risultati sperimentalmente convincenti negli anni 80 alcuni scienziati riuscirono a mostrare che la Natura non obbedisce alla disuguaglianza di Bell ma piuttosto alla predizione della meccanica quantistica.

Fatta questa forte affermazione significa dunque che alla base della disuguaglianza di Bell ci sono delle assunzioni non sempre corrette. Sulla correttezza di tali assunzioni esiste una vastissima bibliografia, qui di seguito riporteremo i punti fondamentali.

Nell'ottenere il risultato della disuguaglianza di Bell (3.28) ci sono due assunzioni sulla cui correttezza ci si può interrogare:

1. L'assunzione che le proprietà fisiche P_Q, P_R, P_S, P_T abbiano dei valori definiti Q, R, S, T che esistono indipendentemente dall'osservazione. A questa assunzione si fa riferimento spesso con l'espressione *ipotesi di realismo*.
2. L'assunzione che Alice nell'effettuare la misurazione non influisca sul risultato dell'osservazione di Bob e viceversa. A questa assunzione si fa riferimento spesso con l'espressione *ipotesi di località*.

Queste due assunzioni insieme sono conosciute come le assunzioni di *realismo locale*. Sono due assunzioni assolutamente plausibili e intuitive se legate al mondo classico e sono supportate dalla nostra esperienza quotidiana. Tuttavia la disuguaglianza di Bell mostra che necessariamente almeno una di queste assunzioni non è corretta.

Cosa possiamo imparare dalla disuguaglianza di Bell?

La conclusione ovvia a cui giungiamo è che il mondo non è localmente reale, al contrario dell'esperienza di tutti i giorni. La maggior parte dei fisici ritiene che sia non corretta l'assunzione di realismo; tuttavia altri ritengono che sia l'assunzione di localismo a portare a questa contraddizione. In entrambi i casi, comunque, per comprendere la meccanica quantistica è necessario abbandonare una o entrambe le assunzioni fatte in precedenza.

Un'altra risposta che si può dare a questa domanda è racchiusa nella parola *entanglement*, il cui significato si cercherà di sviscerare nel prossimo capitolo nel cuore di questo lavoro di tesi, qui ci limitiamo a dire che l'entanglement getta un nuovo sguardo nel mondo quantistico e apre un nuovo mondo di possibilità inimmaginabili nel mondo classico oltre il mondo classico.

Apprestiamoci quindi a entrare in una realtà molto lontana dall'esperienza comune.

3.2 Entanglement

Fino a questo punto abbiamo introdotto concetti innovativi, presentato paradossi che si scontrano con l'esperienza quotidiana, introdotto strumenti matematici e

formalismo per descrivere il mondo quantistico, così facendo abbiamo aperto la via al concetto di *entanglement* sul quale ci concentreremo e del quale proveremo a dare la spiegazione più esaustiva.

L'entanglement è un fenomeno quantistico, che potremmo tradurre con “intreccio non separabile”, privo di analogo classico, in cui ogni stato quantistico di un insieme di due o più sistemi fisici dipende dagli stati di ciascuno dei sistemi che compongono l'insieme, anche se questi sono separati spazialmente.

A questo punto ci si potrebbe dilungare in spiegazioni che vanno oltre la matematica, le interpretazioni dei problemi che si possono trovare a questo punto possono essere di diverso tipo e non vi è un'unica scuola di pensiero su tali problemi e le correnti di pensiero sono molteplici ognuna con dei pro e dei contro. Sottolineiamo solamente come l'entanglement sia un concetto straordinariamente innovativo che ha creato una profonda rottura con il mondo classico. In ambito quantistico infatti la disuguaglianza di Bell può essere violata.

Torniamo a questo punto a una trattazione più matematica per vedere quali risultati sono stati ottenuti in tale ambito.

3.2.1 Gli stati entangled

In questa sezione forniremo la definizione di stato entangled così da poterci addentrare nell'ambito matematico del problema, studiando i risultati ottenuti in materia.

Finora abbiamo caratterizzato uno stato quantistico solamente tramite la nozione di stato puro o stato misto.

Qui di seguito introduciamo le nozioni di stato separabile e stato entangled che caratterizzeremo in primo luogo per gli stati puri e successivamente per uno stato generico.

Consideriamo \mathcal{H} e \mathcal{K} spazi di Hilbert finito dimensionali e il loro prodotto tensore $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, uno stato puro $\phi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ si dice **puro separabile** se può essere scritto nella forma seguente:

$$\phi = \psi \otimes \eta \quad \psi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathcal{K} \quad \|\psi\| = \|\eta\| = 1, \quad (3.32)$$

ovvero l'operatore densità associato a tale stato può essere fattorizzato come segue

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\eta\rangle\langle\eta|. \quad (3.33)$$

Un generico stato puro si dice **puro entangled** se non è valida l'equazione (3.32), cioè non esistono $\psi \in \mathcal{H}$ e $\eta \in \mathcal{K}$ che permettano di scrivere $\phi = \psi \otimes \eta$; inoltre viene chiaramente meno la possibilità di fattorizzare come in (3.33) l'operatore densità associato a tale stato.

Ora che abbiamo dato la definizione di stato separabile ed entangled per uno stato puro, estendiamola ad un generico stato, il cui operatore densità associato sia $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

Come abbiamo precedentemente introdotto, rifacendoci all'equazione (2.32), l'espressione di un generico operatore densità può essere scritto nel modo seguente

$$\rho = \sum_l \mathbb{P}(l) |\phi_l\rangle \langle \phi_l|, \quad (3.34)$$

dove $\sum_l \mathbb{P}(l) = 1$.

Questa scrittura per un generico stato ρ mostra bene come uno stato misto sia una miscela di stati puri ovvero una somma pesata di proiettori unidimensionali, $P(l)$, a ognuno dei quali è associata una probabilità $\mathbb{P}(l)$.

Qui di seguito forniamo le definizioni di stato separabile ed entangled per un generico stato ρ .

Definizione 14. Un generico stato ρ è detto **separabile** se può essere scritto come

$$\rho = \sum_l \mathbb{P}(l) \rho_l \otimes \sigma_l, \quad (3.35)$$

dove $\rho_l \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ e $\sigma_l \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ e $\sum_l \mathbb{P}(l) = 1$.

Dall'equazione (3.35) si evince come, ad eccezione del caso con un solo valore di l a probabilità 1, gli stati non siano indipendenti gli uni dagli altri. A causa del vincolo imposto da $\sum_l \mathbb{P}(l) = 1$ i diversi stati risultano legati tra di loro, tra i diversi sistemi c'è una correlazione classica.

Il termine classica riferito a correlazione appare esclusivamente in ambiti di meccanica quantistica proprio per differenziarlo dalla correlazione quantistica.

Definizione 15. Un generico stato ρ che non sia separabile si dice **entangled**, ovvero non è possibile esprimerlo come media pesata di stati correlati classicamente, come in equazione (3.35).

I risultati appena mostrati si possono estendere facilmente al caso di n -sottosistemi. Consideriamo n spazi di Hilbert finito dimensionali $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$, consideriamo inoltre lo spazio di stato \mathcal{H}_T , dato da $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$.

Uno stato puro $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_T$ è separabile se è della forma seguente

$$|\phi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_n\rangle.$$

Uno stato misto è separabile se l'operatore densità ad esso associato è della forma seguente

$$\rho = \sum_l \mathbb{P}(l) \rho_l^1 \otimes \dots \otimes \rho_l^n.$$

Ora che abbiamo visto le definizioni di stato separabile ed entangled enunciamo qualche risultato che ci fornisce delle condizioni per verificare se uno stato sia separabile oppure entangled.

3.2.2 Peres e gli Horodecki

I risultati che mostreremo nei prossimi paragrafi si devono essenzialmente a Peres e alla famiglia Horodecki.

Al primo va riconosciuto il merito di aver trovato delle condizioni necessarie affinché uno stato ρ sia separabile, alla famiglia Horodecki va invece il merito di aver trovato delle condizioni non solo sufficienti ma anche necessarie, seppur non nella generalità dei casi, affinché uno stato ρ sia separabile.

Prima di enunciare il teorema, formulato dalla famiglia Horodecki, che fornisce condizioni necessarie e sufficienti di separabilità per sistemi 2×2 e 2×3 , richiamiamo brevemente gli strumenti matematici a cui si farà riferimento in tale teorema.

Dato un generico stato ρ , con l'espressione trasposizione parziale, indicata dal simbolo ρ^{T_2} , si intende l'operatore seguente

$$\rho^{T_2} = (\mathbf{1} \otimes T)\rho, \quad (3.36)$$

dove l'operatore T è l'operatore di trasposizione definito, in generale, nel modo seguente:

$$T : L(\mathcal{H}) \rightarrow L(\mathcal{H}) \text{ è tale che } T\rho_{ij} = \rho_{ji} \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}).$$

Mentre con la scrittura $L(\mathcal{H})$ indichiamo, come siamo sempre soliti, lo spazio degli operatori lineari su \mathcal{H} , generico spazio di Hilbert e con ρ_{ij} gli elementi di matrice di ρ in una base ortonormale fissata.

Teorema 9. *Sia ρ uno stato su $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ oppure su $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$; tale stato è separabile se e solo se la sua trasposizione parziale è un operatore positivo.*

Ora che abbiamo enunciato il teorema di Peres-Horodecki, passiamo al calcolo vero e proprio di una trasposizione parziale, così da vedere come tale operazione agisce su uno stato ρ .

Sia quindi $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$, possiamo scrivere ρ nella forma seguente:

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} |il\rangle \langle il| \rho_{jk} |jk\rangle \langle jk|. \quad (3.37)$$

Applichiamo quindi la trasposizione parziale allo stato ρ , servendoci dell'espressione (3.36), $\rho \rightarrow \rho^{T_2}$

$$\begin{aligned}
\rho^{T_2} &= (\mathbf{1} \otimes T) \sum_{i,j,k,l} |il\rangle \langle il| \rho |jk\rangle \langle jk| \\
&= \sum_{i,j,k,l} \langle il| \rho |jk\rangle (I \otimes T) |i\rangle \otimes |l\rangle \langle j| \otimes \langle k| \\
&= \sum_{i,j,k,l} \langle il| \rho |jk\rangle |i\rangle \otimes |k\rangle \langle j| \otimes \langle l| \\
&= \sum_{i,j,k,l} \langle il| \rho |jk\rangle |ik\rangle \langle jl| \\
&= \sum_{i,j,k,l} |ik\rangle \langle il| \rho |jk\rangle \langle jl| \\
&= \sum_{i,j,k,l} |il\rangle \langle ik| \rho |jl\rangle \langle jk|.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

applicando quindi il trasposto parziale otteniamo:

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} |il\rangle \langle il| \rho |jk\rangle \langle jk| \xrightarrow{T_2} \rho^{T_2} = \sum_{i,j,k,l} |il\rangle \langle ik| \rho |jl\rangle \langle jk|. \tag{3.39}$$

Dal punto di vista degli elementi di matrice abbiamo ottenuto

$$\rho_{il,jk} = \langle il| \rho |jk\rangle \xrightarrow{T_2} \langle ik| \rho |jl\rangle = \rho_{ik,jl}. \tag{3.40}$$

L'espressione matriciale esplicita per ρ è

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{00,00} & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} & \rho_{00,11} \\ \rho_{01,00} & \rho_{01,01} & \rho_{01,10} & \rho_{01,11} \\ \rho_{10,00} & \rho_{10,01} & \rho_{10,10} & \rho_{10,11} \\ \rho_{11,00} & \rho_{11,01} & \rho_{11,10} & \rho_{11,11} \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

L'equazione (3.40) ci dà poi la matrice che rappresenta ρ^{T_2} :

$$\rho^{T_2} = \begin{bmatrix} \rho_{00,00} & \rho_{01,00} & \rho_{00,10} & \rho_{01,10} \\ \rho_{00,01} & \rho_{01,01} & \rho_{00,11} & \rho_{01,11} \\ \rho_{10,00} & \rho_{11,00} & \rho_{10,10} & \rho_{11,10} \\ \rho_{10,01} & \rho_{11,01} & \rho_{10,11} & \rho_{11,11} \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Confrontando gli operatori ρ e ρ^{T_2} possiamo osservare che gli elementi di posizione (i, j) tali che $i+j = 2n+1$ per $n = 1, 2, 3$ sono differenti nei due operatori, mentre tutti gli altri elementi restano invariati.

Ora che abbiamo esplicitato l'operatore densità ρ^{T_2} e conosciamo gli elementi di matrice che lo compongono, possiamo vedere quali condizioni sui singoli termini vadano applicate affinché uno stato ρ sia separabile, ricordiamo brevemente il teorema di Peres Horodecki che dice: condizione necessaria e sufficiente affinché uno stato ρ sia separabile è che la sua trasposizione parziale sia un operatore positivo.

Ci viene in aiuto il cosiddetto *Criterio di Sylvester* che ci apprestiamo a riportare.

Teorema 10. *Una matrice M autoaggiunta è definita positiva se e solo se le seguenti matrici hanno determinante positivo:*

- *La sottomatrice di Nord-Est di dimensione 1×1 ,*
- *La sottomatrice di Nord-Est di dimensione 2×2 ,*
- *La sottomatrice di Nord-Est di dimensione 3×3 ,*
- *...*
- *M stessa*

Ovvero tutti i minori principali devono essere positivi.

Mostriamo ora qui di seguito un esempio parametrico per puntualizzare quanto visto finora su trasposizione parziale e criteri per determinare se una matrice è definita positiva.

Consideriamo ρ così definito:

$$\rho = p|\psi\rangle\langle\psi| + (1-p)\frac{\mathbb{1}}{4},$$

con $|\psi\rangle = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ dove $\{e_i\}$ è la base canonica di \mathbb{C}^2 , mentre $p \in (0, 1)$.

Sfruttando i risultati ottenuti per un generico ρ e pertanto l'equazione (3.40) e in particolare l'espressione (3.41), otteniamo:

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+p) & -2p & 0 \\ 0 & -2p & (1+p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{bmatrix}.$$

Mentre ρ^{T_2} , a partire da (3.42) risulta essere

$$\rho^{T_2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-p & 0 & 0 & -2p \\ 0 & (1+p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+p) & 0 \\ -2p & 0 & 0 & 1-p \end{bmatrix}.$$

A questo punto verifichiamo per quali valori di p il criterio di Sylvester è verificato, così da poter concludere che lo stato ρ è separabile per tali valori di p .

Il minori principali che risultano sono

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 1 - p > 0 & \forall p \in (0, 1) \\
 D_2 &= (1 - p^2) > 0 & \forall p \in (0, 1) \\
 D_3 &= (1 + p)^2(1 - p) > 0 & \forall p \in (0, 1) \\
 D_4 &= (1 + p)^2((1 - p)^2 - 4p^2) > 0 & \Leftrightarrow p \in (0, \frac{1}{3})
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Lo stato $\rho = p|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - p)\frac{\mathbb{1}}{4}$ quindi sarà separabile per tutti i valori di p compresi tra 0 e $1/3$.

Prima di passare alla sezione successiva in cui introdurremo un concetto nuovo, qui di seguito parliamo di una base particolare che ci sarà utile nel prossimo continuo, questa base prende il nome di base di Bell.

3.2.3 Base di Bell

Consideriamo come spazio di Hilbert di riferimento, lo spazio $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, su questo spazio definiamo una particolare base molto utile e ampiamente utilizzata in meccanica quantistica quando si studia l'entanglement. Questa base prende il nome di base di Bell ed è definita come segue

$$\begin{aligned}
 |B_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) \\
 |B_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\
 |B_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\
 |B_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Si verifica facilmente che valgono le seguenti relazioni:

$$\| |B_i\rangle \| = 1, \quad \langle B_i | B_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{3.45}$$

Questa base sarà molto utile nella prossima sezione e verrà utilizzata nuovamente nel capitolo successivo che si occupa del tempo continuo. Nella sezione seguente, grazie agli strumenti che abbiamo introdotto e abbiamo imparato a utilizzare verranno effettuati dei calcoli espliciti ed effettuate delle considerazioni su canali particolari che in alcuni casi creano entanglement mentre in altri casi lo distruggono.

3.3 Concurrence

Questa sezione è dedicata al concetto di *concurrence*. D'ora in avanti considereremo sempre, se non diversamente specificato, come spazio di Hilbert di nostro interesse lo spazio $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Sia φ un generico vettore in \mathcal{H} , tale vettore è della forma seguente sulla base canonica degli autostati di σ_z^1 e σ_z^2 che sono rispettivamente uguali a $\sigma_z \otimes \mathbb{1}$ e $\mathbb{1} \otimes \sigma_z$ dove σ_z indica la matrice di Pauli:

$$\varphi = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{10} \\ c_{01} \\ c_{00} \end{bmatrix}.$$

Se sfruttiamo la notazione dei ket possiamo scrivere φ come

$$\varphi = c_{11}|11\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{00}|00\rangle.$$

A questo punto indichiamo con la lettera T la coniugazione nella base canonica. Avremo pertanto

$$T\varphi := \overline{c_{11}}|11\rangle + \overline{c_{10}}|10\rangle + \overline{c_{01}}|01\rangle + \overline{c_{00}}|00\rangle. \quad (3.46)$$

Definiamo ora la quantità

$$\mathcal{C}_\varphi := \langle T\varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi \rangle, \quad (3.47)$$

dove con σ_y indichiamo la matrice di Pauli.

Esplicitiamo ora l'espressione (3.47) per arrivare a una forma più immediata:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varphi &= [c_{11} \ c_{10} \ c_{01} \ c_{00}] \left(\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{10} \\ c_{01} \\ c_{00} \end{bmatrix} \\ &= [c_{11} \ c_{10} \ c_{01} \ c_{00}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{10} \\ c_{01} \\ c_{00} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene agilmente l'espressione

$$\mathcal{C}_\varphi = 2(c_{10}c_{01} - c_{11}c_{00}). \quad (3.48)$$

Definizione 16. Sia \mathcal{C}_φ dato dall'equazione (3.48) e consideriamo il modulo di tale espressione. Definiamo una nuova quantità C_φ

$$C_\varphi := |\mathcal{C}_\varphi|. \quad (3.49)$$

Tale quantità nel caso di vettore φ normalizzato prende il nome di **concurrence**. Se consideriamo un vettore normalizzato $\psi = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$, allora

$$C_\psi = \frac{C_\varphi}{\|\varphi\|^2}. \quad (3.50)$$

Se ρ è una mistura generica la concurrence è data da

$$C_\rho := \inf \sum_i p_i C_{\psi_i}, \quad (3.51)$$

tale estremo inferiore è su tutte le decomposizioni di ρ in stati puri $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

Osservazione 2. Per gli stati separabili la concurrence è sempre nulla.

Andiamo a considerare le equazioni (3.32) e (3.35), riducendoci al caso $\varphi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. In tal caso uno stato puro separabile φ si può scrivere nella forma seguente

$$\varphi = \psi \otimes \eta = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \eta_1 \\ \psi_1 \eta_0 \\ \psi_0 \eta_1 \\ \psi_0 \eta_0 \end{bmatrix},$$

dunque grazie all'equazione (3.48) abbiamo che $\mathcal{C}_\varphi = 2(\psi_1 \eta_0 \psi_0 \eta_1 - \psi_1 \eta_1 \psi_0 \eta_0) = 0$ e pertanto la concurrence, essendo il modulo di questa espressione, si annulla.

Abbiamo qui mostrato che la concurrence si annulla per ogni stato separabile puro, il caso generale di stato separabile si ottiene sfruttando la definizione 14 e la (3.51).

Per ogni $\psi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ normalizzato possiamo inoltre dire che la concurrence risulta essere sempre inferiore o uguale a 1, questo fatto deriva semplicemente dalla definizione in quanto abbiamo:

$$C_\psi = \frac{C_\varphi}{\|\varphi\|^2} = \frac{|\mathcal{C}_\varphi|}{\|\varphi\|^2} = \frac{2|c_{10}c_{01} - c_{11}c_{00}|}{c_{11}^2 + c_{10}^2 + c_{01}^2 + c_{00}^2} \leq \frac{2(|c_{10}c_{01}| + |c_{11}c_{00}|)}{c_{11}^2 + c_{10}^2 + c_{01}^2 + c_{00}^2} \leq 1,$$

grazie a questo risultato possiamo anche scrivere

$$|\mathcal{C}_\varphi| \leq \|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$$

Si può inoltre dimostrare che per l'equazione 3.51 vale il seguente risultato

$$0 \leq C_\rho \leq 1.$$

Qui di seguito riportiamo qualche risultato che ci sarà molto utile nel capitolo finale.

Sia A un generico operatore su \mathbb{C}^2 , tale operatore è della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{01} & a_{00} \end{bmatrix}.$$

La seguente relazione sarà molto utile

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}(A \otimes \mathbb{1})\varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi \rangle &= \langle \mathbb{T}\varphi | (A^T \sigma_y) \otimes \sigma_y \varphi \rangle \\ &= \langle \mathbb{T}\varphi | (\sigma_y \tilde{A}) \otimes \sigma_y \varphi \rangle \end{aligned} \quad (3.52)$$

dove

$$\tilde{A} = \sigma_y A \sigma_y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{01} & a_{00} \end{bmatrix}$$

ed è tale che $\tilde{\tilde{A}} = A$, $\tilde{A} \tilde{A} = \det(A) \mathbb{1}$; inoltre vale chiaramente l'uguaglianza $\text{Tr}\{A\} = \text{Tr}\{\tilde{A}\}$.

Questi risultati e i seguenti saranno molto utili per poter risolvere esplicitamente dei calcoli in merito alla concurrence. Valgono infatti le relazioni.

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}\varphi | (\sigma_y \sigma_x) \otimes \sigma_y \varphi \rangle &= -i \langle \mathbb{T}\varphi | \sigma_z \otimes \sigma_y \varphi \rangle = 0 \\ \langle \mathbb{T}\varphi | (\sigma_y \sigma_y) \otimes \sigma_y \varphi \rangle &= \langle \mathbb{T}\varphi | \mathbb{1} \otimes \sigma_y \varphi \rangle = 0 \\ \langle \mathbb{T}\varphi | (\sigma_y \sigma_z) \otimes \sigma_y \varphi \rangle &= i \langle \mathbb{T}\varphi | \sigma_x \otimes \sigma_y \varphi \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Grazie a queste relazioni e dato che ogni operatore A su \mathbb{C}^2 può essere scritto come

$$A = \sum_{j=1}^3 a_j \sigma_j + \frac{1}{2} \text{Tr}\{A\} \mathbb{1},$$

sfruttando (3.52), si ha

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}\varphi | (\sigma_y A) \otimes \sigma_y \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{A\} \mathcal{C}_\varphi, \\ \langle \mathbb{T}(A \otimes \mathbb{1})\varphi | (\sigma_y A) \otimes \sigma_y \varphi \rangle &= \det(A) \mathcal{C}_\varphi. \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\langle \mathbb{T}(A \otimes \mathbb{1})\varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y (A \otimes \mathbb{1})\varphi \rangle = \det(A) \mathcal{C}_\varphi \quad (3.54)$$

$$\langle \mathbb{T}(A \otimes \mathbb{1})\varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}\{A\} \mathcal{C}_\varphi \quad (3.55)$$

$$\langle \mathbb{T}\varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y (A \otimes \mathbb{1})\varphi \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}\{A\} \mathcal{C}_\varphi \quad (3.56)$$

Queste relazioni torneranno molto utili nel prossimo capitolo nel quale andremo a studiare l'entanglement e la concurrence nel continuo.

Ora che abbiamo proposto una serie di proprietà sugli operatori, vogliamo qui definire dei particolari operatori che ci saranno molto utili in seguito.

Definizione 17. Su $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ si definiscono *operatori locali*, operatori della forma $A \otimes \mathbb{1}$ oppure $\mathbb{1} \otimes B$

Prima di chiudere questo capitolo facciamo un'ultima considerazione, vogliamo infatti esprimere la concurrence nella base di Bell. Per fare ciò utilizzeremo appunto la base di Bell, introdotta dalle relazioni (3.44), e risolveremo il sistema seguente il cui vettore soluzione ha per termini i coefficienti del vettore φ espresso appunto nella base di Bell.

$$\begin{cases} -w + z = c_{11} \\ x + y = c_{10} \\ -x + y = c_{01} \\ w + z = c_{00} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{c_{10} - c_{01}}{2} \\ y = \frac{c_{10} + c_{01}}{2} \\ w = \frac{c_{00} - c_{11}}{2} \\ z = \frac{c_{00} + c_{11}}{2} \end{cases}$$

grazie a questi risultati il vettore φ espresso nella base di Bell sarà

$$\varphi = \frac{c_{10} - c_{01}}{\sqrt{2}} |B_1\rangle + \frac{c_{10} + c_{01}}{\sqrt{2}} |B_2\rangle + \frac{c_{00} - c_{11}}{\sqrt{2}} |B_3\rangle + \frac{c_{00} + c_{11}}{\sqrt{2}} |B_4\rangle.$$

Possiamo ora calcolare il valore di $\mathcal{C}\varphi$ nella base di Bell grazie alla relazione (3.47), per comodità scriviamo un generico vettore $\varphi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ espresso nella base di Bell, nella forma seguente

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 c_i |B_i\rangle. \quad (3.57)$$

Osservazione 3. La base di Bell è reale rispetto alla base canonica e pertanto l'operatore T di coniugazione, definito sulla base canonica di $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, è analoga al caso della base canonica.

Sfruttando ora la relazione (3.47) per il calcolo di C_φ e ricordando le osservazioni appena portate otteniamo

$$\begin{aligned} C_\varphi &= \langle T\varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^4 \langle c_i B_i | \sigma_y \otimes \sigma_y c_j B_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^4 c_i c_j \langle B_i | \sigma_y \otimes \sigma_y B_j \rangle = \sum_{i,j=1}^4 (-1)^i c_i c_j \delta_{ij} = -c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - c_4^2 \quad (3.58) \end{aligned}$$

avendo sfruttato la relazione (3.45) nella penultima uguaglianza.

Pertanto la concurrence espressa nella base di Bell è

$$C_\varphi = | -c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - c_4^2 |. \quad (3.59)$$

Dopo queste ultime precisazioni passiamo ora al cuore vero e proprio di questo lavoro di tesi. I due capitoli che seguono sono organizzati in modo simili, dopo una prima parte in cui si struttura il capitolo si descrive un modello e si ottengono dei risultati interessanti sia in tempo discreto, capitolo terzo sia in tempo continuo, capitolo quarto.

Tempo discreto

Fino a questo punto dell'elaborato ci siamo occupati di comprendere e descrivere la meccanica quantistica, riportandone i postulati fondamentali sui cui si basa, gli strumenti fondamentali alla comprensione di questa materia e i risultati più importanti presenti in letteratura [7], [8] e ne abbiamo studiato alcuni risultati apparsi più recentemente in letteratura [6].

Ora che abbiamo studiato e compreso i fondamenti della meccanica quantistica e abbiamo lanciato uno sguardo verso ambiti più ristretti della meccanica quantistica vogliamo ora proporre un modello matematico che descriva un particolare scenario che possiamo ritrovare in meccanica quantistica e studiarlo con l'intento di giungere a qualche risultato innovativo.

4.1 Problema e modello proposto

In questa sezione cerchiamo ora di descrivere da cosa nasca l'idea di presentare questo nuovo modello, descrivendo lo scenario d'interesse, per poi passare alla presentazione vera e propria del modello.

Il concetto di entanglement presentato nel secondo capitolo come una sorta di "intreccio non separabile" è tra le caratteristiche più peculiari della meccanica quantistica. Questo fenomeno privo di analogo classico merita un approfondimento più dettagliato per poterne comprendere l'importanza.

L'idea di proporre questo modello nasce dalla necessità, che molti fisici hanno riscontrato in diversi esperimenti, di comprendere come l'entanglement si comporti in un sistema complesso in cui non vi sia solamente un'evoluzione dei vettori di stato ma si interagisca direttamente con il sistema oggetto di studio, per esempio

tramite una misurazione, e si parli quindi di stati a posteriori (2.47) e non più stati a priori.

Conoscere cosa crei o distrugga entanglement sarebbe un enorme passo avanti nella comprensione di particolari fenomeni.

Abbiamo più volte ribadito come nella realtà non esistano sistemi perfettamente chiusi e le interazioni con il mondo esterno siano di fatto inevitabili. Possiamo tuttavia modellare il sistema composto, dato dal sistema d'interesse e dall'environment esterno, come un sistema chiuso la cui evoluzione è unitaria grazie al risultato del Postulato 2.

Il problema che andremo quindi a studiare non è particolarmente complesso, il sistema d'interesse è formato da due qubit che non interagiscono direttamente tra di loro ma interagiscono entrambi con un comune environment esterno e sottostanno ad un'evoluzione temporale descritta da un particolare operatore.

Il risultato originale che ci proponiamo di raggiungere sta nel complicare il quadro appena descritto per descrivere quale sia l'evoluzione dell'entanglement in scenari differenti.

La domanda a cui vogliamo dare risposta nella prossima sezione è la seguente: cosa accade all'entanglement in una dinamica a priori e in una dinamica a posteriori?

Andiamo così a studiare in dettaglio diversi scenari: innanzitutto una dinamica a priori legata a un sistema semplice e, per gradi, arriveremo a descrivere una dinamica a posteriori legata a un sistema complesso.

Nella prossima sezione studieremo in dettaglio questi scenari che vanno presentandosi, cercando soprattutto di trarre delle conclusioni in merito all'entanglement in scenari differenti.

4.2 Rappresentazioni con environment

Passiamo quindi ora allo studio vero e proprio degli scenari a cui abbiamo accennato nel paragrafo precedente, ci occuperemo pertanto di particolari canali e l'effetto che tali canali hanno sull'entanglement andando in tali casi a crearne e in altri casi a distruggerlo.

Il primo caso che andremo a studiare è il seguente. Consideriamo un sistema il cui spazio di Hilbert associato è lo spazio $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, questo sistema sarà preparato in uno stato ρ generico. Lo stato ρ si lega all'environment, a cui associamo lo spazio $\mathcal{K} = \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, che assumiamo essere in uno stato ρ_0 ; a questo punto possiamo quindi assumere un'evoluzione unitaria per il sistema prodotto.

La domanda che ci poniamo è la seguente: se l'operatore unitario U è un par-

icolare operatore *flip*, che definiremo a breve, a cosa equivale una traccia parziale su \mathcal{K} dello stato prodotto dopo una particolare evoluzione unitaria?

Ovvero quali informazioni possiamo trarre dal sistema di nostro interesse una volta che, legatosi all'environment, è sottostato a una particolare trasformazione unitaria?

Per poter dare delle risposte a queste domande andiamo a calcolare la quantità

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U\rho \otimes \rho_0 U^*]. \quad (4.1)$$

Sappiamo che:

- $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathbb{C}^2$
- $U = F = F^*$, $U \in \mathrm{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ dove F è un particolare operatore detto flip definito da

$$- F = \sum_{m,n} |mn\rangle\langle nm|.$$

Passiamo ora al calcolo vero e proprio della quantità (4.1), sfruttando il teorema di caratterizzazione della traccia parziale, teorema 6, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U\rho \otimes \rho_0 U^*] &= \sum_{i,j,k} |i\rangle\langle ik|F\rho \otimes \rho_0 F|jk\rangle\langle j| \\ &= \sum_{i,j,k} |i\rangle\langle ki|\rho \otimes \rho_0|kj\rangle\langle j| \\ &= \sum_{i,j,k} |i\rangle\langle k|\rho|k\rangle\langle i|\rho_0|j\rangle\langle j| \\ &= \sum_k \langle k|\rho|k\rangle \sum_i |i\rangle\langle i| \sum_j |j\rangle\langle j|\rho_0 \\ &= \rho_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

I passaggi sopra effettuati sfruttano l'azione del flip che agisce nel modo seguente

$$\begin{aligned} \langle ik|F &= \langle ik| \sum_{m,n} |mn\rangle\langle nm| = \sum_{m,n} \langle ik|mn\rangle\langle nm| \\ &= \sum_{m,n} \delta_{i=m,k=n} \langle nm| \\ &= \langle ki|, \end{aligned}$$

successivamente si effettua una fattorizzazione per separare i termini e poterli semplificare, l'ultimo passaggio infine sfrutta il fatto che $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ e pertanto è unitario.

Questo risultato merita delle puntualizzazioni; infatti possiamo notare come l'effetto di questa trasformazione unitaria scambia i due stati tra di loro.

Per meglio comprendere questa affermazione consideriamo il solo termine $F(\rho \otimes \rho_0)F^*$ e calcoliamo tale quantità sfruttando le proprietà dell'operatore flip e la fattorizzazione dei termini come fatto precedentemente.

Così facendo otteniamo

$$\begin{aligned}
F(\rho \otimes \rho_0)F &= \sum_{i,j,k,l} |ij\rangle\langle ji|\rho \otimes \rho_0|kl\rangle\langle lk| \\
&= \sum_{i,j,k,l} (|i\rangle \otimes |j\rangle)(\langle j| \otimes \langle i|)(\rho \otimes \rho_0)(|k\rangle \otimes |l\rangle)(\langle l| \otimes \langle k|) \\
&= \sum_{i,j,k} |i\rangle\langle j|\rho|k\rangle\langle l| \otimes |j\rangle\langle i|\rho_0|l\rangle\langle k| \\
&= \sum_{i,j,k} |i\rangle\langle i|\rho_0|l\rangle\langle l| \otimes |j\rangle\langle j|\rho|k\rangle\langle k| \\
&= \rho_0 \otimes \rho.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Da questo risultato e viste le caratteristiche dell'operatore flip appare evidente come effettuando una traccia parziale su \mathcal{K} all'equazione (4.3) non resti che il solo termine ρ_0 .

È inoltre importante sottolineare come il risultato ottenuto sia generale, nel senso che è verificato per per ogni stato ρ_0 di partenza, l'environment può quindi trovarsi in un qualunque stato ρ_0 .

Lo step successivo che possiamo effettuare, in ottica di generalizzare il modello, sta nello studio di questo tipo di canali e consiste nell'aumentare le dimensioni del problema, lasciandone tuttavia la struttura invariata.

Andiamo quindi a calcolare

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}}[U\rho \otimes \rho_0U^*],$$

proprio come nel caso precedente.

Questa volta però gli spazi di Hilbert associati al sistema di riferimento e all'environment sono:

- $\rho = \mathcal{S}(\mathcal{H})$ e $\rho_0 = \mathcal{S}(\mathcal{K})$ dove
 - $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$
 - $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ e $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathbb{C}^2$
- $U = F_{\mathcal{H}\mathcal{K}} = \sum_{i,j,k,l} |ijkl\rangle\langle kl ij|$, $U \in U(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

Grazie a queste puntualizzazioni otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\mathcal{K}}[U\rho \otimes \rho_0 U^*] &= \sum_{i,j,k,l,m,n} |ij\rangle\langle ijkl| F_{\mathcal{H}\mathcal{K}}(\rho \otimes \rho_0) F_{\mathcal{H}\mathcal{K}}|mnkl\rangle\langle mn| \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n} |ij\rangle\langle kl ij| \rho \otimes \rho_0 |klmn\rangle\langle mn| \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n} |ij\rangle\langle kl| \rho |kl\rangle\langle ij| \rho_0 |mn\rangle\langle mn| \\
&= \sum_{kl} \langle kl| \rho |kl\rangle \sum_{ij} |ij\rangle\langle ij| \sum_{mn} |mn\rangle\langle mn| \rho_0 \\
&= \rho_0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

I passaggi appena effettuati utilizzano, analogamente al caso precedente, l'azione del flip $F_{\mathcal{H}\mathcal{K}}$

$$\begin{aligned}
\langle ijkl| \sum_{m,n,o,p} |mnop\rangle\langle opmn| &= \sum_{m,n,o,p} \langle ijkl|mnop\rangle\langle opmn| \\
&= \sum_{m,n,o,p} \delta_{i=m,j=n,k=o,l=p} \langle opmn| \\
&= \langle kl ij|,
\end{aligned}$$

e la fattorizzazione dei termini.

Possiamo effettuare un'ulteriore precisazione affermando che $F_{\mathcal{H}\mathcal{K}} = F_{\mathcal{H}_1\mathcal{K}_1} \otimes F_{\mathcal{H}_2\mathcal{K}_2}$ infatti:

$$F_{\mathcal{H}_1\mathcal{K}_1} \otimes F_{\mathcal{H}_2\mathcal{K}_2} = \sum_{ik} |ik\rangle\langle ki| \otimes \sum_{jl} |jl\rangle\langle lj| = \sum_{i,j,k,l} |ijkl\rangle\langle kl ij|.$$

Questa fattorizzazione ci fornisce lo spunto per portare una riflessione molto importante. Fra i due qubit su \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 non vi è interazione diretta tuttavia esiste un'interazione tra i due qubit e l'environment esterno $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$.

Osserviamo infine che, come nel caso precedente, per ogni stato iniziale ρ_0 associato all'environment si collapsi su di esso.

Il prossimo caso che andiamo a studiare inizia a presentare delle difficoltà aggiuntive che ci preparano all'ultimo caso qui in esame che coinvolgerà anche le POVM ma andiamo per gradi.

La quantità che vogliamo calcolare è la seguente

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}_T}[U\rho \otimes \rho_0 U^*],$$

dove gli spazi di Hilbert che entrano in gioco e l'operatore U sono

- $\rho = \mathcal{S}(\mathcal{H})$ e $\rho_0 = \mathcal{S}(\mathcal{K}_T)$ dove
 - $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$.
 - $\mathcal{K}_T = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}'$, a sua volta $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ e $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_1 \otimes \mathcal{K}'_2$ e $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}'_1 = \mathcal{K}'_2 = \mathbb{C}^2$.
- $\rho_0 = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|$ dove $\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{y=1}^4 B_y \otimes B_y$ dove $\{B_y\}_y$ è la base di Bell introdotta dalle equazioni (3.44)
- $U = F_{\mathcal{H}\mathcal{K}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{K}'}$, $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_T)$

Grazie a tutte queste informazioni possiamo passare al calcolo vero e proprio della quantità di nostro interesse ottenendo

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{\mathcal{K}_T}[U\rho \otimes \rho_0 U^*] &= \text{Tr}_{\mathcal{K}_T}[U(\rho \otimes |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|)U] \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} \text{Tr}_{\mathcal{K}_T}[U[\rho \otimes (|B_\alpha B_\alpha\rangle\langle B_\beta B_\beta|)]U] \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,k,l,m,n,o,p} |ij\rangle\langle ijklmn| [U(\rho \otimes |B_\alpha B_\alpha\rangle\langle B_\beta B_\beta|)U] |opklmn\rangle\langle op| \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,k,l,m,n,o,p} |ij\rangle\langle kljmn| (\rho \otimes |B_\alpha B_\alpha\rangle\langle B_\beta B_\beta|) |klompn\rangle\langle op| \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k,l} \langle kl|\rho|kl\rangle \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,k,l,m,n,o,p} |ij\rangle\langle ijmn| B_\alpha B_\alpha \langle B_\beta B_\beta | opmn\rangle\langle op| \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \sum_{i,j,o,p} |ij\rangle\langle ij| B_\alpha \langle B_\alpha | op\rangle\langle op| \\
 &= \frac{\mathbb{1}}{4}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Prima di effettuare delle considerazioni in merito al risultato ottenuto facciamo qualche considerazione di natura tecnica che ci permetta di capire come è definito l'operatore $U = F_{\mathcal{H}\mathcal{K}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{K}'}$ e come agisce.

$$U = F_{\mathcal{H}\mathcal{K}} \otimes \mathbb{1} = \sum_{a,b,c,d} |abcd\rangle\langle cdab| \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{K}'} = \sum_{a,b,c,d,e,f} |abcdef\rangle\langle cdabef|,$$

l'azione di tale operatore sarà la seguente.

$$\begin{aligned}
 \langle ijklmn| \sum_{a,b,c,d,e,f} |abcdef\rangle \langle cdabef| \\
 &= \sum_{a,b,c,d,e,f} \langle ijklmn|abcdef\rangle \langle cdabef| \\
 &= \sum_{a,b,c,d,e,f} \delta_{a=i,b=j,c=k,d=l,e=m,f=n} \langle cdabef| \\
 &= \langle klijmn|.
 \end{aligned}$$

Il risultato che abbiamo ottenuto nell'equazione (4.5) è radicalmente differente dai due risultati precedenti di equazioni (4.1) e (4.4), a differenza dei casi precedenti il risultato che si ottiene dipende da ρ_0 ovvero dipende dall'environment.

In particolare nel caso in questione, in cui lo stato associato all'environment, si sviluppa su una combinazione della base di Bell, abbiamo che questo particolare canale con l'operatore U definito come sopra collassa sullo stato $\frac{1}{4}$.

Ultimo step che possiamo effettuare in questa direzione consiste nel considerare l'ipotesi di coinvolgere anche una POVM sul sistema oggetto di studio. Per aiutarci consideriamo la figura che segue. Grazie a tale figura possiamo bene capire

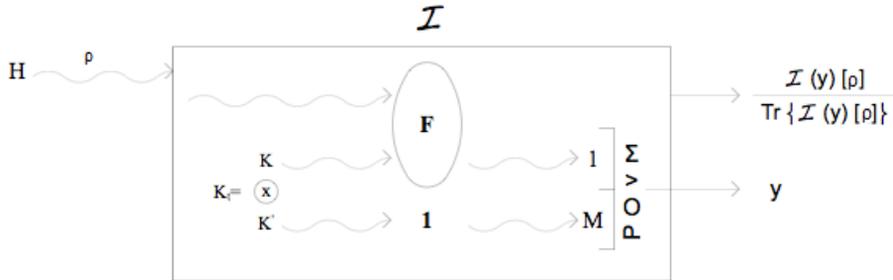


Figura 4.1: Rappresentazione con environment

in cosa consista il nostro modello. Il sistema di interesse, a cui è associato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , è stato preparato in uno stato ρ e legandosi all'environment che si trova in uno stato ρ_0 , sottostà a una trasformazione unitaria e sullo stato prodotto viene effettuata una trasformazione.

La quantità che vogliamo andare a calcolare è la seguente

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}_T} [U\rho \otimes \rho_0 U^* \mathbb{1}_H \otimes M(x)],$$

non prima però di aver puntualizzato gli spazi su cui è definito il modello, la trasformazione a cui lo stato prodotto sottostà e il tipo di misurazione effettuata.

- $\rho = \mathcal{S}(\mathcal{H})$ e $\rho_0 = \mathcal{S}(\mathcal{K}_T)$ dove
 - $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$.
 - $\mathcal{K}_T = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}'$, a sua volta $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ e $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_1 \otimes \mathcal{K}'_2$ e $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}'_1 = \mathcal{K}'_2 = \mathbb{C}^2$.
- $\rho_0 = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|$ dove $\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{y=1}^4 B_y \otimes B_y$ dove $\{B_y\}_y$ è la base di Bell introdotta dalle equazioni (3.44)
- $U = F_{\mathcal{H}\mathcal{K}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{K}'}$, $U \in U(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_T)$
- $M(x) = \mathbb{1}_K \otimes |B_x\rangle\langle B_x|$

Passando al calcolo vero e proprio otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{\mathcal{K}_T} \left[U(\rho \otimes \rho_0)U^*(\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes M(x)) \right] &= \\
 &= \text{Tr}_{\mathcal{K}_T} [U(\rho \otimes \rho_0)U(\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{K}} \otimes |B_x\rangle\langle B_x|)] \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,k,l,m,n,o,p} |ij\rangle\langle kljmn| [(\rho \otimes |B_\alpha B_\alpha\rangle\langle B_\beta B_\beta|)] |kl op B_x\rangle\langle B_x| mn\rangle\langle op| \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{kl} \langle kl|\rho|kl\rangle \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,o,p} |ij\rangle\langle ij B_x| B_\alpha B_\alpha\rangle\langle B_\beta B_\beta| op B_x\rangle\langle op| \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,o,p} |ij\rangle\langle ij B_x| B_\alpha B_\alpha\rangle\langle B_\beta B_\beta| op B_x\rangle\langle op| \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,o,p} |ij\rangle\langle ij B_x\rangle\langle B_x op\rangle\langle op| \\
 &= \frac{1}{4} |B_x\rangle\langle B_x|.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Affinché tutti i passaggi siano chiari, puntualizziamo ora come agisce l'operatore $U(\mathbb{1}_H \otimes M(x))$.

$$\begin{aligned}
\left[U(\mathbb{1}_H \otimes M(x)) \right] |opklmn\rangle &= \\
&= \left[(F_{\mathcal{HK}} \otimes \mathbb{1}_{K'}) \mathbb{1}_H \otimes \mathbb{1}_K \otimes |B_x\rangle\langle B_x| \right] |opklmn\rangle \\
&= \sum_{a,b,c,d,e,f,q,r,s,t} |abcdef\rangle\langle cdabef|qrstB_x\rangle\langle qrstB_x|opklmn\rangle \\
&= \sum_{a,b,c,d,e,f,q,r,s,t} |abcdef\rangle\langle cdabef|qrstB_x\rangle\langle B_x|mn\rangle \delta_{q=o,r=p,s=k,t=l} \\
&= \sum_{m,n} |klopB_x\rangle\langle B_x|mn\rangle
\end{aligned}$$

Ora che abbiamo presentato degli scenari differenti tra di loro ma profondamente collegati uno all'altro dedichiamo la prossima sezione ad un'analisi più approfondita di risultati ottenuti.

4.3 Analisi risultati

Prima di passare a un'analisi dei risultati, soprattutto letti in ottica di entanglement e concurrence, ribadiamo brevemente le ipotesi su cui si basa il nostro modello. Ricordiamo che i due sistemi non interagiscono direttamente fra di loro mentre vi è un'interazione con l'ambiente esterno comune.

Abbiamo visto come nei primi due casi presentati, in cui ci si occupa solamente di dinamica a priori, non osserviamo infatti alcun risultato frutto di una misurazione, si collapsi sullo stato ρ_0 qualunque sia lo stato iniziale dell'environment, questo è dovuto alla presenza di un particolare operatore unitario, chiamato flip, che scambia tra di essi gli stati ρ e ρ_0 .

Questi due primi risultati già noti sono stati ottenuti applicando gli strumenti introdotti nei capitoli precedenti.

Si è passati successivamente a un modello più complesso; utilizzando un operatore unitario $U = F_{\mathcal{HK}} \otimes \mathbb{1}$ e considerando un particolare stato iniziale dell'environment sviluppato sulla base di Bell si collapsa sullo stato $\frac{1}{4}\mathbb{1}$, pertanto su di uno stato proporzionale all'identità, ci si riferisce spesso a questa categoria di stati come a stati *massimamente caotici*, cerchiamo di capirne il motivo.

Ricordando l'espressione della grandezza \mathcal{C}_φ (3.47) e (3.48) e inoltre della concurrence (3.49) appare evidente come questa particolare dinamica a priori abbia una concurrence nulla e pertanto distrugga l'entanglement collassando sullo stato $\frac{1}{4}\mathbb{1}$.

L'ultimo esempio proposto presenta un caso ancora differente. Abbiamo complicato ancora un po' il modello proposto andando a effettuare una misurazione, descritta dall'operatore $M(x)$, su tale modello.

Sviluppando i calcoli abbiamo ottenuto come risultato un vettore della base di Bell (3.44), sempre grazie alle relazioni (3.47), (3.48) e (3.49) possiamo calcolarne la concurrence che risulta essere pari a 1 per ogni vettore della base di Bell.

La dinamica a posteriori genera pertanto entanglement.

Le due differenti dinamiche a priori e a posteriori abbiamo visto come ci portino a risultati radicalmente opposti, da un lato si distrugge entanglement dall'altro se ne genera. Grazie a questi risultati abbiamo inoltre l'occasione di rimarcare nuovamente come una misurazione interagisca direttamente e fortemente con il sistema misurato e come la dinamica a priori e la dinamica a posteriori ci portino a risultati, in questo caso, diametralmente opposti.

Ora che abbiamo ottenuto dei risultati interessanti sulla concurrence e sull'entanglement a tempo discreto passiamo al caso continuo dove proporremo anche in quell'ambito un modello per la descrizione di un particolare scenario.

Tempo continuo

In questo capitolo rivolgiamo il nostro interesse allo studio dell'entanglement sotto evoluzione e osservazione a tempo continuo.

In particolare ci occuperemo di studiare due sistemi indipendenti e soprattutto focalizzeremo la nostra attenzione sulla concurrence tra i due sistemi.

In un primo momento i sistemi oggetto del nostro studio oltre a essere indipendenti e senza alcun tipo di interazione diretta saranno caratterizzati dal non presentare neppure alcun tipo di interazione indiretta, poiché ciascuno di essi interagisce con un proprio ambiente esterno distinto.

Successivamente ci occuperemo di un modello più generale in cui è possibile un'interazione indiretta tra i due sistemi in quanto essi interagiscono con un comune ambiente esterno.

Vedremo in entrambi i casi quali risultati si ottengono in merito alla concorrenza e all'entanglement tra i due sistemi.

Nelle prossime sezioni saranno utilizzate le notazioni di calcolo stocastico classiche. Per questo motivo condensiamo nella prossima sezione alcune proprietà dei processi che andremo a considerare. Faremo riferimento a [2] per i processi stocastici.

5.1 Processi stocastici

Quando studiamo e ci occupiamo di processi stocastici la nozione fondamentale è quella di *filtrazione* di cui riportiamo la definizione.

Definizione 18. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ uno spazio di probabilità; diciamo che una *fil-*

trazione in \mathcal{F} è una collezione crescente di sotto- σ -algre: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $t > s \geq 0$.

Una filtrazione si dice soddisfare le *condizioni usuali* se

1. È continua a destra, ovvero $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, dove

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s,$$

2. Se definiamo $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{Q}(A) = 0\}$ allora $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

Data una base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_t, \mathbb{Q})$ generale è possibile costruire una base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \mathbb{Q})$ che soddisfi le condizioni usuali imponendo $\mathcal{F}_t := \overline{\mathcal{F}_{t+}}$, $\overline{\mathcal{F}_t} := \tilde{\mathcal{F}}_t \vee \mathcal{N}$

Un'altra nozione importante è quella di *filtrazione naturale di un processo stocastico*. Consideriamo una variabile aleatoria X da uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) a uno spazio (Ξ, \mathcal{E}) chiamiamo σ -algebra generata da X la σ -algebra

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}.$$

Allora, se il processo $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ è assegnato, la sua filtrazione naturale è $\{\mathcal{F}_t^X\}_t$ dove

$$\{\mathcal{F}_t^X\}_t := \sigma\{X(r), 0 \leq r \leq t\}.$$

Ogni processo è adattato alla sua filtrazione naturale.

Nel prosieguo del lavoro porremo l'accento in particolare sui seguenti processi.

Definizione 19. Sia $X = \{X(t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ un processo i cui stati stanno in uno spazio di matrici complesso \mathcal{K}

1. Diciamo che X sta in $\Lambda^2([\alpha, \beta], \mathcal{K})$ se per ogni i, j il processo monodimensionale $\{X_{ij}(t)\}_t$ è progressivo e

$$\mathbb{Q} \left[\int_{\alpha}^{\beta} |X_{ij}(t)|^2 dt < \infty \right] = 1.$$

2. Diciamo che X sta in $\mathcal{M}^2([\alpha, \beta]; \mathcal{K})$ se per ogni i, j il processo monodimensionale $\{X_{ij}(t)\}_t$ è progressivo e

$$E_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\alpha}^{\beta} |X_{ij}(t)|^2 dt \right] < \infty.$$

La definizione si può semplificare al caso in cui \mathcal{K} si riduca a uno spazio vettoriale e le componenti di X abbiano un solo indice.

Un particolare esempio di processo stocastico è il processo di Wiener definito come segue.

Definizione 20. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \mathbb{Q})$ una base stocastica. Un processo di Wiener d -dimensionale $W \equiv \{W_j(t), t \geq 0, j = 1, \dots, d\}$ è un processo continuo e adattato con le seguenti proprietà.

1. $W(0) = 0$ q.c.;
2. per $0 \leq s < t < \infty$ l'incremento $W(t) - W(s)$ è normale con vettore di medie 0 e matrice di covarianza $(t - s)\mathbb{1}$;
3. per $0 \leq s < t < \infty$ l'incremento $W(t) - W(s)$ è indipendente da \mathcal{F}_s .

Sarebbe stato equivalente definire un processo di Wiener monodimensionale e dire che un Wiener d -dimensionale è una collezione di d processi di Wiener monodimensionali indipendenti.

Questa brevissima introduzione ai processi stocastici ci fornisce gli strumenti di cui avremo bisogno nel prosieguo del capitolo, torniamo a concentrarci sulla meccanica quantistica e su alcune equazioni che ci interessano.

5.2 Equazione di Schrödinger stocastica

Questa sezione è dedicata all'equazione di Schrödinger stocastica che spesso indicheremo con la scrittura abbreviata SSE. Prima di addentrarci nello studio di tale equazione facciamo le seguenti assunzioni standard.

Considereremo una base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \mathbb{Q})$ dove la σ -algebra \mathcal{F} è definita come segue

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t.$$

Assumiamo inoltre che un processo di Wiener d -dimensionale continuo $W = (W_1, \dots, W_d)$ sia assegnato in questa base.

Come d'abitudine indicheremo $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ lo spazio di Hilbert del sistema quantistico al quale siamo interessati.

5.2.1 Equazione di Schrödinger stocastica lineare

Assumeremo che la seguente equazione differenziale stocastica con condizione iniziale al tempo $u \geq 0$ modellizzi l'evoluzione del processo $\varphi = \{\varphi(t)\}_{t \geq u}$.

$$\begin{cases} d\varphi(t) = K(t)\varphi(t)dt + \sum_{j=1}^d R_j(t)\varphi(t)dW_j(t), & t \geq u \\ \varphi(u) = \varphi_u, & \varphi_u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_u, \mathbb{Q}; \mathcal{H}). \end{cases} \quad (5.1)$$

Questa equazione prende il nome di *equazione di Schrödinger stocastica lineare*.

Assunzione 11. *Supponiamo che $K = \{K(t)\}_{t \geq 0}$ e $R_j = \{R_j(t)\}_{t \geq 0}$ con $j = 1, \dots, d$ siano delle funzioni misurabili. La struttura di K si postula essere la seguente*

$$K(t) = -iH(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d R_j^*(t)R_j(t) \quad (5.2)$$

dove $H = \{H(t)\}_{t \geq 0}$ è una funzione tale che $H(t)$ sia un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} , chiamato l'*Hamiltoniano del sistema*.

Nel prosieguo del lavoro parleremo di esistenza e unicità di una soluzione nel senso specificato nella prossima definizione.

Definizione 21. Se consideriamo l'equazione (5.1), in una base stocastica assegnata, chiamiamo soluzione in $[u, T]$ un processo continuo adattato $\{\varphi(t)\}_{t \in [u, T]}$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi_u + \int_u^t K(s)\varphi(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_u^t R_j(s)\varphi(s)dW_j(s), \quad \mathbb{Q}\text{-q.c.}, \forall t \geq u. \quad (5.3)$$

Diciamo inoltre che la soluzione è *unica per traiettorie* se due processi adattati continui qualunque φ e ϕ che soddisfano (5.3) sono indistinguibili ovvero

$$\mathbb{Q}\left(\varphi(t) = \phi(t) \quad \forall t \in [u, T]\right) = 1$$

5.2.2 Condizioni per l'esistenza e l'unicità della soluzione

Vogliamo ora fornire delle condizioni sufficienti sulle funzioni $\{R_j(t)\}_{j=1}^d$ e H che garantiscano l'esistenza e l'unicità della soluzione di equazione (5.1).

Assunzione 12. *Supponiamo che le Assunzioni 11 siano verificate, assumiamo inoltre che*

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| \sum_{j=1}^d R_j^*(t) R_j(t) \right\| \leq L(T) < \infty, \quad \forall T > 0; \quad (5.4)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|H(t)\| \leq M(T) < \infty, \quad \forall T > 0.$$

Grazie ai risultati dell'equazione (5.4) e delle precedenti assunzioni possiamo effettuare qualche altra osservazione.

$$\|K(t)\| \leq M(T) + \frac{1}{2}L(T) =: L_1(T). \quad (5.5)$$

inoltre

$$\|R_j(t)\| \leq \sqrt{L(T)}, \quad \forall j = 1, \dots, d. \quad (5.6)$$

Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} \|R_j(t)x\| &\leq \sum_j \|R_j(t)x\| = \langle R_j(t)x | R_j(t)x \rangle = \\ &= \langle x | R_j^*(t) R_j(t)x \rangle \leq \|x\| \left\| \sum_j R_j^*(t) R_j(t) \right\| \leq \|x\|^2 L(T). \end{aligned}$$

Che dà esattamente (5.6) in quanto $\|R_j(t)\| = \sup_{x: \|x\|=1} \|R_j(t)x\|$.

Il seguente teorema ci fornisce l'esistenza e l'unicità dell'equazione di Schrödinger stocastica lineare.

Teorema 13. *Nelle ipotesi che le assunzioni 12 siano rispettate, l'equazione (5.1) con condizione iniziale quadrato integrabile ammette una soluzione in $\mathcal{M}^2([u, T]; \mathcal{H})$, $\forall T > u$. Tale soluzione inoltre è unica per traiettorie.*

Abbiamo così fornito le condizioni che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione della SSE lineare, tale soluzione merita qualche ulteriore considerazione.

5.2.3 Norma della soluzione

Nelle sezioni precedenti abbiamo mostrato che, sotto le assunzioni 12, la soluzione dell'equazione (5.1) esiste ed è unica per traiettorie. Qui di seguito definiamo la

seguinte quantità che ci sarà utile nel prosieguo

$$m_j(t) := \langle \psi(t) | (R_j(t) + R_j^*(t)) \psi(t) \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle \psi(t) | R_j(t) \psi(t) \rangle \quad j = 1, \dots, d, \quad (5.7)$$

dove le $\psi(t)$ sono definite nel modo seguente

$$\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{\|\varphi(t)\|}, \quad \forall t \in [u, T], \mathbb{Q}\text{-q.c.} \quad (5.8)$$

Osservazione 4. Le quantità definite in (5.7) sono limitate vale infatti

$$\sum_{j=1}^d m_j(t)^2 \leq 4L(T). \quad (5.9)$$

Il prossimo step che vogliamo mostrare è il seguente: il processo $\|\varphi\|^2 := \{\|\varphi(t)\|^2\}_{t \in [u, T]}$ è una martingala quadrato integrabile rispetto alla base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{Q})$. Per dimostrare questo risultato utilizzeremo il seguente risultato generale.

Teorema 14. *Consideriamo il processo Z definito come segue*

$$Z(t) := \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \int_u^t G_j(q) dW_j(q) - \frac{1}{2} \int_u^t G_j(q)^2 dq \right\}$$

dove i processi G_j appartengono a $\Lambda^2([u, T]; \mathbb{C})$, $j = 1, \dots, d$ e son tali che esiste una costante K tale che $\sum_{j=1}^d \int_u^T \|G_j(q)\|^2 dq \leq K$. Allora il processo $\{Z(t)\}_{t \in [u, T]}$ è una martingala complessa quadrato integrabile, inoltre

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sup_{t \in [u, T]} \|Z(t)\|^p \right] \leq \infty, \quad \forall p \geq 1.$$

Grazie a questo risultato di calcolo stocastico possiamo provare il seguente teorema.

Teorema 15. *Il processo $\|\varphi\|^2 := \{\|\varphi(t)\|^2\}_{t \geq 0}$, sotto le assunzioni 12 è una martingala positiva quadrato integrabile che soddisfa l'equazione di Doléans*

$$\begin{cases} d\|\varphi(t)\|^2 = \sum_{j=1}^d m_j(t) \|\varphi(t)\|^2 dW_j(t) \\ \|\varphi(0)\|^2 = \|\varphi_0\|^2, \end{cases} \quad (5.10)$$

La cui soluzione sappiamo essere

$$\|\varphi(t)\|^2 = \|\varphi_0\|^2 \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \int_0^t m_j(q) dW_j(q) - \frac{1}{2} \int_0^t m_j(q)^2 dq \right\}. \quad (5.11)$$

Dimostrazione. Poiché φ è un processo di Ito possiamo calcolare il differenziale stocastico della sua norma al quadrato.

$$\begin{aligned} d\|\varphi(t)\|^2 &= d\langle\varphi(t)|\varphi(t)\rangle = \langle d\varphi(t)|\varphi(t)\rangle + \langle\varphi(t)|d\varphi(t)\rangle + \langle d\varphi(t)|d\varphi(t)\rangle \\ &= \langle K(t)\varphi(t)dt + \sum_{j=1}^d R_j(t)\varphi(t)dW_j(t)|\varphi(t)\rangle \\ &\quad + \langle\varphi(t)|K(t)\varphi(t)dt + \sum_{j=1}^d R_j(t)\varphi(t)dW_j(t)\rangle \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \langle R_j(t)\varphi(t)|R_j(t)\varphi(t)\rangle dt \\ &= \langle\varphi(t)|(K(t) + K^*(t) + \sum_{j=1}^d R_j^*(t)R_j(t))\varphi(t)\rangle dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \langle\varphi(t)|(R_j(t) + R_j^*(t))\varphi(t)\rangle dW_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^d m_j(t)\|\varphi(t)\|^2 dW_j(t), \quad (5.12) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato le assunzioni 11 per il processo K e la definizione (5.7) di m_j . Se il processo m_j fosse assegnato, otterremmo l'equazione di Doléans (5.10) che ha come soluzione (5.11). Inoltre grazie all'osservazione 4 possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^d \int_u^T m_j(q)^2 dq \leq \int_u^T 4L(T) dq = 4L(T)(T - u) \leq 4L(T)T.$$

Otteniamo la tesi dimostrando quindi il teorema applicando il risultato del teorema 14. \square

Grazie ai teoremi 14 e 15 abbiamo così mostrato che il processo $\|\varphi\|^2$ è una martingala quadrato integrabile rispetto alla base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_t, \mathbb{Q})$.

5.2.4 Cambio di probabilità

L'obiettivo di questa sezione è quello di mostrare che $\|\varphi(t)\|^2$ può essere utilizzata per introdurre una nuova probabilità, sotto la quale lo stato normalizzato ψ soddisfa una particolare equazione differenziale stocastica. Proseguendo in questa direzione facciamo un'ulteriore assunzione.

Assunzione 16. *La condizione iniziale dell'equazione (5.1) è normalizzata per ogni ω , ovvero $\|\varphi_0(\omega)\| = 1, \forall \omega \in \Omega$.*

Grazie alla proprietà di martingala abbiamo che il valore atteso sotto la misura \mathbb{Q} di $\|\varphi(t)\|^2$ è dato da

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\|\varphi(t)\|^2 \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\|\varphi_0\|^2 \right] = 1. \quad (5.13)$$

Fino a questo punto abbiamo considerato la base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{Q})$ e l'intervallo di tempo $[0, T]$. Guardiamo alla variabile $\|\varphi(T)\|^2$ come a una densità di probabilità e introduciamo sullo spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}_T) una nuova misura di probabilità equivalente a \mathbb{Q}_T dove \mathbb{Q}_T è la restrizione di \mathbb{Q} su $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$, possiamo anche scrivere $\mathbb{Q}_T := \mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T}$. Definiamo questa misura di probabilità come segue

$$\mathbb{P}_{\varphi_0}^T(F) := \int_F \|\varphi(T, \omega)\|^2 \mathbb{Q}(d\omega) \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_F \|\varphi(T)\|^2 \right], \quad F \in \mathcal{F}_T. \quad (5.14)$$

Scriveremo $\mathbb{E}_{\varphi_0}^T$ per indicare il valore atteso rispetto alla misura di probabilità $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$. Inoltre possiamo osservare che la famiglia $\{\mathbb{P}_{\varphi_0}^T, T > 0\}$ è consistente in questo senso:

$$0 < S < T, F \in \mathcal{F}_S \Rightarrow \mathbb{P}_{\varphi_0}^T(F) = \mathbb{P}_{\varphi_0}^S(F).$$

Questa è una conseguenza che discende direttamente dalla proprietà di martingala del processo $\|\varphi(t)\|^2$.

Qui di seguito riportiamo ora una conseguenza immediata del teorema di Girsanov, riformulato nel contesto di nostro interesse.

Teorema 17. *Il processo $\widehat{W} := (\widehat{W}_1, \dots, \widehat{W}_d)$ definito da*

$$\widehat{W}_j(t) := W_j(t) - \int_0^t m_j(s) ds, \quad j = 1, \dots, d \quad t \in [0, T], \quad (5.15)$$

è un processo di Wiener standard, d -dimensionale rispetto alla probabilità $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$ e la filtrazione $\{\mathcal{F}\}_{t \in [0, T]}$. Inoltre per ogni insieme di processi $\{G_j\}_{j=1}^d \subset \Lambda^2$, gli integrali di Ito $\sum_{j=1}^d \int_0^t G_j(s) d\widehat{W}_j(s)$ e $\sum_{j=1}^d \int_0^t G_j(s) dW_j(s)$ sono definiti per ogni $t \in [0, T]$ rispettivamente sotto le probabilità \mathbb{Q} e $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$. Vale inoltre la seguente uguaglianza quasi certamente sotto \mathbb{Q} e $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$

$$\sum_{j=1}^d \int_0^t G_j(s) d\widehat{W}_j(s) = \sum_{j=1}^d \int_0^t G_j(s) dW_j(s) - \sum_{j=1}^d \int_0^t G_j(s) m_j(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.16)$$

In questa sezione ci siamo dedicati all'equazione di Schrödinger stocastica lineare senza alcun accenno a quella non lineare. Dedicheremo la prossima sezione all'equazione non lineare.

5.2.5 Equazione di Schrödinger stocastica non lineare

Dedichiamo questa sezione a mettere in evidenza qualche particolare dell'equazione di Schrödinger stocastica non lineare. Qui di seguito diamo l'equazione di evoluzione del processo di stato $\psi = \{\psi\}_{t \in [u, T]}$ rispetto alla misura di probabilità appena introdotta $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$.

Proposizione 18. *Dato il processo $\psi(t)$, $t \in [0, T]$, il suo differenziale stocastico, sotto la probabilità $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$ è*

$$\begin{aligned} d\psi(t) &= \sum_j \left[R_j(t) - \frac{m_j(t)}{2} \right] \psi(t) d\widehat{W}_j(t) \\ &+ \left[K(t) + \sum_j \frac{m_j(t)}{2} R_j(t) - \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{m_j(t)}{2} \right)^2 \right] \psi(t) dt, \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove

$$m_j(t) = 2 \operatorname{Re} \langle \psi(t) | R_j(t) \psi(t) \rangle. \quad (5.18)$$

Dimostrazione. I risultati appena proposti sono ottenuti applicando la formula di Ito. Applichiamo innanzitutto la formula di Ito per prodotti a $\psi(t)$.

$$\begin{aligned} d\psi(t) &= d(\|\varphi(t)\|^{-1} \varphi(t)) \\ &= \|\varphi(t)\|^{-1} (d\varphi(t)) + (d\|\varphi(t)\|^{-1}) \varphi(t) + (d\|\varphi(t)\|^{-1}) (d\varphi(t)) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sfruttando quindi l'assunzione 16, assumendo quindi come condizioni iniziali dell'equazione (5.1) $\|\varphi_0(\omega)\| = 1$ per ogni $\omega \in \Omega$,

$$\|\varphi(t)\|^2 = \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \int_0^t m_j(q) dW_j(q) - \frac{1}{2} \int_0^t m_j(q)^2 dq \right\},$$

quindi

$$\|\varphi(t)\|^{-1} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^d \int_0^t m_j(q) dW_j(q) - \frac{1}{2} \int_0^t m_j(q)^2 dq \right] \right\},$$

che sotto la legge, appena introdotta, $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$ diviene

$$\|\varphi(t)\|^{-1} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^d \int_0^t m_j(q) d\hat{W}_j(q) + \frac{1}{2} \int_0^t m_j(q)^2 dq \right] \right\}.$$

Rispetto a $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$ abbiamo quindi

$$\begin{aligned} d\|\varphi(t)\|^{-1} &= \|\varphi(t)\|^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left[m_j(t) d\hat{W}_j(t) + \frac{1}{2} m_j(t)^2 dt \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^d m_j(t)^2 dt \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \|\varphi(t)\|^{-1} \sum_{j=1}^d \left[m_j(t) d\hat{W}_j(t) + \frac{1}{4} m_j(t)^2 dt \right]. \quad (5.20) \end{aligned}$$

il differenziale di $\{\varphi(t)\}_{t \in [0, T]}$ sotto la legge $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$ è il seguente

$$\begin{aligned} d\varphi(t) &= K(t)\varphi(t)dt + \sum_{j=1}^d R_j(t)\varphi(t)dW_j(t) \\ &= \left\{ K(t) + \sum_{j=1}^d m_j(t)R_j(t) \right\} \varphi(t)dt + \sum_{j=1}^d R_j(t)\varphi(t)d\hat{W}_j(t). \quad (5.21) \end{aligned}$$

A questo punto, conosciamo tutti i termini dell'equazione 5.19, sostituendovi i risultati ottenuti nelle espressioni precedenti si ottiene la tesi ricordando la definizione (5.18) di $m_j(t)$. \square

5.3 Master equation stocastica

Questa sezione è dedicata alla master equation, vediamo come ottenere tale equazione e di quali proprietà goda.

Consideriamo la famiglia di variabili aleatorie $\{\varphi^\beta\}_\beta \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_0; \mathcal{H})$ tali che

$$\sum_\beta \|\varphi^\beta\|^2 = 1$$

e definiamo l'operatore statistico aleatorio

$$\rho_0 := \sum_\beta |\varphi^\beta\rangle\langle\varphi^\beta|. \quad (5.22)$$

Assunzione 19. *Lo stato iniziale del sistema è l'operatore statistico aleatorio ρ_0 che appartiene a $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.*

Sia $\{\varphi^\beta(t)\}_{t \geq 0}$ la soluzione dell'equazione di Schrödinger stocastica lineare (5.1) di condizione iniziale $\varphi_0 = \varphi^\beta$. Definiamo allora il processo $\sigma = \{\sigma(t)\}_{t \geq 0}$

$$\sigma(t) := \sum_\beta |\varphi^\beta(t)\rangle\langle\varphi^\beta(t)|. \quad (5.23)$$

Proposizione 20. *Il processo σ appartiene a $\mathcal{M}^2([0, T]; L(\mathbb{C}^n))$.*

Proposizione 21. *Nell'ipotesi che le assunzioni 5.4 siano rispettate il differenziale stocastico del processo $\{\sigma = \sigma(t)\}_{t \geq 0}$ è*

$$d\sigma(t) = \mathcal{L}(t)[\sigma(t)]dt + \sum_{j=1}^d [R_j(t)\sigma(t) + \sigma(t)R_j(t)^*]dW_j(t), \quad (5.24)$$

dove $\mathcal{L}(t)[\cdot]$ è un operatore su $L(\mathbb{C}^n)$ definito $\forall \tau \in L(\mathbb{C}^n)$ da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t)[\tau] &:= K(t)\tau + \tau K^*(t) + \sum_{j=1}^d R_j(t)\tau R_j^*(t) \\ &= -i[H(t), \tau] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left([R_j(t)\tau, R_j^*(t)] \right) + [R_j(t), \tau R_j^*(t)] \\ &= -i[H(t), \tau] + \left(\sum_{j=1}^d R_j(t)\tau R_j^*(t) - \frac{1}{2} \{R_j^*(t)R_j(t), \tau\} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Questo risultato si ottiene applicando il differenziale di Ito per prodotti e sfruttando la struttura di K postulata in 11.

L'equazione

$$\begin{cases} d\sigma(t) = \mathcal{L}(t)[\sigma(t)]dt + \sum_{j=1}^d [R_j(t)\sigma(t) + \sigma(t)R_j^*(t)]dW_j(t), & t \geq 0 \\ \sigma(u) = \rho_0. \end{cases} \quad (5.26)$$

è chiamata *master equation stocastica lineare*.

Grazie alla proposizione 21 concludiamo rapidamente l'esistenza di una soluzione, si può inoltre mostrare come tale soluzione sia unica per traiettorie.

Un'ultima osservazione che possiamo fare in merito alla master equation stocastica lineare è che si chiuda per il processo σ .

5.3.1 Equazione per la media

In questa sezione si vuole analizzare la relazione che c'è tra l'equazione di Schrödinger stocastica (5.1) oppure (5.17) e la master equation associata all'operatore $\mathcal{L}(t)$ (5.25).

Grazie alla proposizione 21 e all'unicità per traiettorie della soluzione possiamo scrivere

$$\sigma(t) = \rho_0 + \int_u^t \mathcal{L}(s)[\sigma(s)]ds + \sum_{j=1}^d \int_u^t [R_j(s)\sigma(s) + \sigma(s)R_j^*(s)]dW_j(s). \quad (5.27)$$

Definiamo ora

$$\begin{aligned} \eta(t) &:= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sigma(t)] = \int_{\Omega} \sigma(t, \omega) \mathbb{Q}(d\omega) \\ \eta_0 &:= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\rho_0] \end{aligned} \quad (5.28)$$

per costruzione $\eta(t)$ è un operatore statistico.

A questo punto è nostro interesse calcolare il valore atteso, rispetto alla misura di probabilità \mathbb{Q} , dell'equazione (5.27) così facendo si ottiene

$$\eta(t) = \eta_0 + \int_u^t \mathcal{L}(s)[\eta(s)]ds, \quad (5.29)$$

il termine dell'integrale stocastico si è annullato grazie alle proprietà di martingala.

Inoltre possiamo scrivere quasi certamente l'equazione differenziale con condizione iniziale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t) = \mathcal{L}(t)[\eta(t)] \\ \eta(u) = \eta_0. \end{cases} \quad (5.30)$$

A quest'ultima espressione ci si rivolge con il nome di *master equation*.

Grazie all'equazione (5.30) osserviamo che l'evoluzione di $\eta(t)$ è governata dallo stesso operatore $\mathcal{L}(t)$ che appare nella master equation stocastica lineare (5.26).

Dedichiamo ora la prossima sezione allo studio di casi particolari di SSE in cui gli operatori saranno di tipo locale.

5.4 Entanglement e SSE: il caso di operatori locali

Il nostro interesse ora è studiare il comportamento dell'entanglement sotto evoluzione e osservazione a tempo continuo, il problema affrontato nel capitolo precedente a tempo discreto.

Il primo problema che affrontiamo è quello di due sistemi che non interagiscono tra loro né direttamente, tramite qualche Hamiltoniana di interazione, né indirettamente tramite l'ambiente esterno. Questo vuol dire che ciascun sottosistema ha una propria parte di evoluzione hamiltoniana che non coinvolge l'altro sistema e che ciascuno interagisce con un proprio distinto ambiente esterno. Questa idea è stata proposta nel lavoro [9], dove però è stata sviluppata solo parzialmente per il caso diffusivo, che è il caso della SSE (5.1) cui ci riferiamo in questa tesi.

In queste ipotesi, sfruttando il fatto che i due sistemi interagiscono direttamente con due bagni distinti, possiamo ricondurci a considerare il caso particolare di Hamiltoniana H della SSE (5.2) data dalla somma di due operatori locali introdotti in definizione 17. Supporremo inoltre, senza pregiudicare la generalità del caso, che l'Hamiltoniana H sia a traccia nulla. A sua volta ciascun R_j sarà di tipo locale in modo da non avere interazioni mediate dall'ambiente esterno.

Per vedere come si comporta nel tempo l'entanglement, è conveniente studiare l'evoluzione della concurrence, che è quadratica nel vettore di stato, e in particolare l'evoluzione della sua media.

La quantità che vogliamo quindi studiare sarà $C_{\psi(t)}$ introdotta in equazione (3.50), tuttavia risulta più agevole studiare la quantità $C_{\varphi(t)}$ che non presenta le complicazioni aggiuntive date dalla presenza del modulo e inoltre vale per un generico vettore $\varphi \in \mathbb{C}^2$ non necessariamente normalizzato.

Osserviamo innanzitutto che gli stati $\psi(t)$ sono i possibili stati a posteriori, nel caso ideale in cui si osservino tutte le componenti di W coinvolte. Ricordiamo

che la legge del processo ψ è quella fisica, la misura di probabilità $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$ che è stata introdotta in equazione (5.14).

In particolare per capire l'evoluzione dell'entanglement sarà molto significativo avere la media della concurrence $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\varphi_0}^T}[C_{\psi(t)}]$.

Molto utile sarà anche la relazione che permette di collegare tra di loro le quantità $C_{\psi(t)}$ e $C_{\varphi(t)}$ (3.50), che richiamiamo

$$C_{\psi(t)} = \frac{C_{\varphi(t)}}{\|\varphi(t)\|^2}.$$

Dato che $\|\varphi(t)\|^2$ è la densità di $\mathbb{P}_{\varphi_0}^T$ rispetto a \mathbb{Q} , abbiamo l'importante uguaglianza

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\varphi_0}^T}[C_{\psi(t)}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{\varphi(t)}]. \quad (5.31)$$

Ecco quindi come, grazie a questa serie di considerazioni, sia possibile studiare $C_{\varphi(t)}$ per avere informazioni sulla concurrence e sull'entanglement dei due sistemi.

Ora che abbiamo descritto lo scenario che dobbiamo affrontare e abbiamo mostrato che, per studiare l'entanglement, è sufficiente studiare $C_{\varphi(t)}$ richiamiamo brevemente la definizione prima di addentrarci nei calcoli e vedere a quali risultati si giunge:

$$C_{\varphi(t)} = \langle T \varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi \rangle,$$

dove T è l'operazione di coniugazione complessa.

5.4.1 Evoluzione di $C_{\varphi(t)}$

In questa sezione, come anticipato, esplicitiamo i calcoli che riguardano l'entanglement e la SSE nel caso di operatori locali.

Assumiamo innanzitutto che $\varphi(t)$ soddisfi (5.1) con operatori locali; vogliamo vedere come evolve la concurrence nel caso generale.

Osservazione 5. Nel seguito, per comodità, non indicheremo la dipendenza esplicita dal tempo che tutti gli operatori possono avere.

Usando la SSE e la formula di Ito è immediato ottenere il differenziale stocastico di $C_{\varphi(t)}$:

$$\begin{aligned} dC_{\varphi(t)} &= \langle T K \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi \rangle dt + \langle T \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y K \varphi(t) \rangle dt \\ &\quad + \sum_j \langle T R_j \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y R_j \varphi(t) \rangle dt \\ &+ \sum_j \left(\langle T R_j \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t) \rangle + \langle T \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y R_j \varphi(t) \rangle \right) dW_j(t). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Esplicitando K e riarrangiando i termini si ha

$$\begin{aligned}
d\mathcal{C}_{\varphi(t)} = & -i\langle \mathbb{T} H\varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t)\rangle dt - i\langle \mathbb{T} \varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y H\varphi(t)\rangle dt \\
& - \frac{1}{2} \sum_j \langle \mathbb{T} (R_j^* R_j)\varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t)\rangle dt \\
& - \frac{1}{2} \sum_j \langle \mathbb{T} \varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y (R_j^* R_j)\varphi(t)\rangle dt \\
& + \sum_j \langle \mathbb{T} R_j \varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y R_j \varphi(t)\rangle dt \\
& + \sum_j \left(\langle \mathbb{T} R_j \varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t)\rangle \right. \\
& \left. + \langle \mathbb{T} \varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y R_j \varphi(t)\rangle \right) dW_j. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Nel caso di nostro interesse, ovvero quello di operatori locali, dobbiamo ricordare che H è somma di due operatori locali della forma $H = H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2$ e ciascun R_j è a sua volta operatore locale quindi della forma $R_j = \widehat{R}_j \otimes \mathbb{1}$ oppure $R_j = \mathbb{1} \otimes \widehat{R}_j$.

Consideriamo ora l'operatore $R_j \in L(\mathbb{C}^2)$ e poniamo $\lambda_j = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\widehat{R}_j\}$. Abbiamo

$$\text{Tr}\{\mathbb{1} \otimes \widehat{R}_j\} = \text{Tr}\{\widehat{R}_j \otimes \mathbb{1}\} = 2 \text{Tr}\{\widehat{R}_j\} = 4\lambda_j. \quad (5.34)$$

Sfruttando inoltre la decomposizione (3.54) per ogni operatore appartenente a $L(\mathbb{C}^2)$ possiamo scrivere

$$\widehat{R}_j = \sum_{i=1}^3 r_{ji} \sigma_i + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\widehat{R}_j\} \mathbb{1} = \sum_i r_{ji} \sigma_i + \lambda_j \mathbb{1}, \quad (5.35)$$

dove le σ_i indicano le matrici di Pauli; inoltre abbiamo

$$\det(\widehat{R}_j) = \lambda_j^2 - r_{j1}^2 - r_{j2}^2 - r_{j3}^2, \quad \text{Tr}\{\widehat{R}_j^* \widehat{R}_j\} = 2(|\lambda_j|^2 + |r_{j1}^2| + |r_{j2}^2| + |r_{j3}^2|).$$

Grazie a queste semplici considerazioni possiamo ora semplificare l'equazione (5.33). Consideriamo $R_j = \widehat{R}_j \otimes \mathbb{1}$; il caso $R_j = \mathbb{1} \otimes \widehat{R}_j$ è analogo. Usando (3.54), (3.55) e (3.56) per i primi due termini in dt otteniamo:

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbb{T} H\varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t)\rangle \\
& = \langle \mathbb{T} (H_1 \otimes \mathbb{1})\varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t)\rangle + \langle \mathbb{T} (\mathbb{1} \otimes H_2)\varphi(t)|\sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t)\rangle \\
& = \frac{1}{2} \left(\text{Tr}\{H_1\} + \text{Tr}\{H_2\} \right) \mathcal{C}_{\varphi(t)} = 0
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\langle \mathbb{T} \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y H \varphi(t) \rangle = 0$$

Successivamente per gli altri termini in dt abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T} R_j^* R_j \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t) \rangle &= \langle \mathbb{T} (\widehat{R}_j^* \widehat{R}_j \otimes \mathbf{1}) \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \widehat{R}_j^* \widehat{R}_j \} \mathcal{C}_{\varphi(t)} = (|\lambda_j|^2 + |r_{j1}|^2 + |r_{j2}|^2 + |r_{j3}|^2) \mathcal{C}_{\varphi(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T} \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y R_j^* R_j \varphi(t) \rangle &= \langle \mathbb{T} \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y (\widehat{R}_j^* \widehat{R}_j \otimes \mathbf{1}) \varphi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \widehat{R}_j^* \widehat{R}_j \} \mathcal{C}_{\varphi(t)} = (|\lambda_j|^2 + |r_{j1}|^2 + |r_{j2}|^2 + |r_{j3}|^2) \mathcal{C}_{\varphi(t)}, \end{aligned}$$

infine

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T} R_j \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y R_j \varphi(t) \rangle &= \langle \mathbb{T} (\widehat{R}_j \otimes \mathbf{1}) \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y (\widehat{R}_j \otimes \mathbf{1}) \varphi(t) \rangle \\ &= \det(\widehat{R}_j) \mathcal{C}_{\varphi(t)} = (\lambda_j^2 - r_{j1}^2 - r_{j2}^2 - r_{j3}^2) \mathcal{C}_{\varphi(t)}. \end{aligned}$$

Per i termini in dW_j abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T} R_j \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t) \rangle &= \langle \mathbb{T} (\widehat{R}_j \otimes \mathbf{1}) \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \widehat{R}_j \} \mathcal{C}_{\varphi(t)} = 2\lambda_j \mathcal{C}_{\varphi(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T} \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y R_j \varphi(t) \rangle &= \langle \mathbb{T} \varphi(t) | \sigma_y \otimes \sigma_y (\widehat{R}_j \otimes \mathbf{1}) \varphi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \widehat{R}_j \} \mathcal{C}_{\varphi(t)} = 2\lambda_j \mathcal{C}_{\varphi(t)}. \end{aligned}$$

Grazie a questi risultati possiamo ora semplificare l'equazione (5.33) e abbiamo:

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_{\varphi(t)} &= \mathcal{C}_{\varphi(t)} \left(\sum_j 2\lambda_j dW_j \right. \\ &\quad \left. - \sum_j \left(|\lambda_j|^2 - \lambda_j^2 + |r_{j1}|^2 + |r_{j2}|^2 + |r_{j3}|^2 + r_{j1}^2 + r_{j2}^2 + r_{j3}^2 \right) dt \right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione chiusa per $C_{\varphi(t)}$. Siamo in grado di risolvere questo tipo di equazioni differenziali stocastiche e la soluzione sarà del tipo esponenziale. Ripristinando le dipendenze temporali di ogni termine, abbiamo

$$C_{\varphi(t)} = C_{\varphi(0)} \exp \left(2 \sum_j \int_0^t \lambda_j(s) dW_j(s) + \sum_j \int_0^t \left(|\lambda_j(s)|^2 + \lambda_j(s)^2 + |r_j(s)|^2 + r_{j1}(s)^2 + r_{j2}(s)^2 + r_{j3}(s)^2 \right) ds \right). \quad (5.37)$$

Grazie a questi risultati proviamo ora a dedurre qualche risultato sulla concurrence.

5.4.2 La concurrence

Ricordando la definizione 16 di concurrence $C_{\psi} = \frac{C_{\varphi}}{\|\varphi\|^2}$, $C_{\varphi} = |C_{\varphi}|$, grazie al risultato appena ottenuto, la concurrence per lo stato non normalizzato è data da

$$C_{\varphi(t)} = C_{\varphi(0)} \exp \left\{ 2 \sum_j \int_0^t \operatorname{Re}(\lambda_j(s)) dW_j(s) - 2 \sum_j \int_0^t \left(\operatorname{Re}(\lambda_j(s)) \right)^2 ds - 2 \sum_j \int_0^t \left[\left(\operatorname{Re}(r_{j1}(s)) \right)^2 + \left(\operatorname{Re}(r_{j2}(s)) \right)^2 + \left(\operatorname{Re}(r_{j3}(s)) \right)^2 \right] ds \right\}. \quad (5.38)$$

Un'ulteriore osservazione che possiamo fare riguarda l'espressione della media della concurrence dove prendendo il valore atteso, rispetto alla probabilità \mathbb{Q} , dell'equazione (5.38) si ottiene

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{\varphi(t)}] = C_{\varphi(0)} \exp \left\{ -2 \sum_j \int_0^t \sum_{k=1}^3 \left(\operatorname{Re}(r_{jk}(s)) \right)^2 ds \right\} \quad (5.39)$$

A partire dall'equazione di evoluzione per $C_{\varphi(t)}$ sfruttando i risultati proposti in (3.52) e (3.54) abbiamo ottenuto un'equazione chiusa per $C_{\varphi(t)}$ e infine grazie

alle relazioni (3.50) e (16) che legano tra di loro le grandezze $C_{\psi(t)}$ e $C_{\varphi(t)}$ siamo arrivati a (5.38) e (5.39).

Le equazioni (5.38) e (5.39) forniscono uno spunto di forte riflessione per comprendere come evolve nel tempo la concurrence. Analizziamo in primo luogo l'equazione (5.39).

È nostro interesse comprendere cosa succede all'entanglement per tempi lunghi, proprio per questo vedremo cosa accade per $t \rightarrow +\infty$.

La natura dell'integrale $\int_0^t \sum_{k=1}^3 \left(\operatorname{Re} (r_{jk}(s)) \right)^2 ds$, per $t \rightarrow +\infty$, presente in equazione (5.39), dipende chiaramente dai valori assunti dagli $r_{jk}(s)$, ma andiamo per gradi vedendo quali valori possano assumere.

Innanzitutto possiamo distinguere due casi:

- $r_{jk}(s) \equiv r_{jk}$ costanti nel tempo
- $r_{jk}(s)$ dipendenti dal tempo

Analizziamo il primo scenario, $r_{jk}(s)$ costanti nel tempo, abbiamo

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{\varphi(t)}] = \exp \left\{ -2t \sum_{j,k} \left(\operatorname{Re} (r_{jk}) \right)^2 \right\}.$$

Se tutti gli r_{jk} sono nulli la concurrence media è costante, mentre $C_{\varphi(t)}$ è una martingala a media costante. In caso contrario la concurrence media decade a zero e questo implica anche l'annullamento di $C_{\varphi(t)}$ per $t \rightarrow +\infty$.

Per quanto invece riguarda il secondo scenario ovvero $r_{jk}(s)$ dipendenti dal tempo abbiamo che la funzione $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{\varphi(t)}]$ risulta essere monotona non crescente. Eventualmente, se l'integrale diverge per $t \rightarrow +\infty$, si ha decadimento a zero.

Effettuate queste considerazioni sull'equazione (5.39) possiamo portare qualche riflessione sull'equazione (5.38) che risulta essere una martingala esponenziale moltiplicata per un termine che decade oppure che è costante.

Grazie a questi risultati possiamo a questo punto portare delle considerazioni legate alla meccanica quantistica e all'entanglement.

Per lo stato osservato infatti l'entanglement può essere distrutto, questo fenomeno tuttavia può avvenire al più per tempi infiniti, non si presenta per tanto il fenomeno noto in letteratura con il nome di sudden death, quando la concurrence per lo stato medio (non la media della concurrence) si annulla ad un tempo finito.

5.5 Concurrence e SSE: interazione

Questa sezione è dedicata a una prima possibile generalizzazione del modello che abbiamo introdotto nella sezione precedente.

Continuiamo a considerare un problema in cui ci sono due sistemi che non interagiscono direttamente tra loro ma, a differenza del caso precedente, sono accoppiati con un ambiente esterno comune.

Il nostro intento è di mostrare che la sola interazione con l'ambiente esterno comune è sufficiente a creare entanglement.

Vedremo che per tempi lunghi ogni entanglement nello stato medio (stato a priori) viene distrutto; si va addirittura in uno stato proporzionale all'identità, lo stato detto "mistura totale".

Nonostante questo mostreremo che è possibile proporre modelli per cui si può creare entanglement negli stati a posteriori $\psi(t)$ e per tempi lunghi la media dell'entanglement dello stato a posteriori non si annulla.

Nelle prossime sezioni, non potendo fare calcoli in completa generalità, ci accontenteremo di proporre modelli particolari che abbiano le caratteristiche volute.

Possiamo innanzitutto costruire una master equation che abbia come stato di equilibrio lo stato proporzionale all'identità e che non contenga interazioni dirette fra i due sistemi.

In un secondo tempo assoceremo opportunamente a questa master equation una SSE e mostreremo che la concurrence media non può essere nulla.

Per semplicità partiremo ora dal caso di uno spin per arrivare poi a costruire la master equation voluta per due spin.

5.5.1 Uno spin

Nel caso di uno spin la master equation (5.30), che scriviamo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t) = \mathcal{L}_0[\eta(t)] \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases}$$

possiamo assumere abbia un operatore $\mathcal{L}_0[\rho(t)]$ costituito da una parte Hamiltoniana e una parte dissipativa del tipo seguente

$$\mathcal{L}_0[\eta(t)] = -i\frac{\omega}{2}[\sigma_z, \eta(t)] + \frac{\gamma}{2}(\sigma_x \eta(t) \sigma_x - \eta(t)) \quad (5.40)$$

dove $\omega \neq 0$ e $\gamma > 0$. Scriviamo $\eta(t)$ nella forma

$$\eta(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{x}(t) \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.41)$$

dove indichiamo con $\vec{x}(t)$ il vettore di componenti $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ mentre con $\vec{\sigma}$ il vettore le cui componenti sono le matrici di Pauli, $\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$.

Grazie alle proprietà delle matrici di Pauli introdotte in (2.16) e (2.17), l'azione di $\mathcal{L}_0[\cdot]$ è data da

$$\mathcal{L}_0[\mathbb{1}] = 0, \quad (5.42)$$

$$\mathcal{L}_0[\sigma_x] = \omega\sigma_y \quad \mathcal{L}_0[\sigma_y] = -\omega\sigma_x - \gamma\sigma_y \quad \mathcal{L}_0[\sigma_z] = -\gamma\sigma_z.$$

Grazie a questi risultati la master equation (5.30) in cui l'operatore \mathcal{L}_0 è del tipo (5.40) si riduce a un sistema di tre equazioni differenziali accoppiate con rispettive condizioni iniziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\omega y(t) \\ \dot{y}(t) = \omega x(t) - \gamma y(t) \\ \dot{z}(t) = -\gamma z(t) \end{cases} \quad \text{con condizioni iniziali} \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (5.43)$$

L'equazione nella variabile $z(t)$ è si può risolvere immediatamente

$$z(t) = e^{-\gamma t} z_0 \quad (5.44)$$

Le equazioni nelle variabili $x(t)$ e $y(t)$ sono accoppiate, derivando $\dot{y}(t)$ e sostituendovi l'espressione di $\dot{x}(t)$ otteniamo

$$\ddot{y}(t) = \omega \dot{x}(t) - \gamma \dot{y}(t) \quad \implies \quad \ddot{y}(t) + \gamma \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0. \quad (5.45)$$

Risolviamo ora quest'equazione, gli autovalori λ_{\pm} sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} \right),$$

pertanto $\text{Re}(\lambda_{\pm}) < 0$ e la soluzione decade.

La soluzione di (5.45) è del tipo

$$y(t) = ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t} \quad \text{per} \quad \gamma^2 \neq 4\omega^2,$$

sfruttando le condizioni iniziali possiamo ricavare i coefficienti a e b .

$$\begin{cases} a + b = y_0 \\ \lambda_+ a + \lambda_- b = \dot{y}(0) = \omega x_0 - \gamma y_0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a = \frac{\omega x_0 + \lambda_+ y_0}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} \\ b = \frac{-\omega x_0 - \lambda_- y_0}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} \end{cases}$$

Possiamo ora ricavare anche l'espressione di $x(t)$

$$x(t) - x_0 = -\omega \int_0^t y(s) ds = -\omega \left(\frac{e^{\lambda_+ t} - 1}{\lambda_+} a + \frac{e^{\lambda_- t} - 1}{\lambda_-} b \right)$$

Ora che abbiamo l'espressione in forma chiusa per le tre componenti del vettore $\vec{x}(t)$ è interessante capire quale sia lo stato di equilibrio per $\eta(t)$. Osserviamo che per $t \rightarrow +\infty$ le componenti $y(t)$ e $z(t)$ si annullano, verifichiamo ora che questo è valido anche per $x(t)$.

$$\begin{aligned} x(\infty) &= x_0 + \omega \left(\frac{a}{\lambda_+} + \frac{b}{\lambda_-} \right) = x_0 + \frac{\omega}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} \left(\frac{\omega}{\lambda_+} x_0 + y_0 - \frac{\omega}{\lambda_-} x_0 - y_0 \right) \\ &= x_0 + \frac{\omega^2}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\lambda_+ \lambda_-} x_0 \\ &= x_0 - \omega^2 x_0 \frac{1}{\omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Tutte le componenti del vettore $\vec{x}(t)$ si annullano per $t \rightarrow +\infty$, pertanto lo stato di equilibrio di $\eta(t)$, sfruttando l'equazione (5.41), è data da

$$\eta^{\text{eq}} = \frac{1}{2} \mathbf{1}.$$

5.5.2 Due spin

Concentriamoci ora sul caso due spin, sottolineiamo innanzitutto che per questo sistema la master equation

$$\dot{\eta}(t) = \mathcal{L}[\eta(t)]$$

ha $\frac{1}{4} \mathbf{1}$ come *unico* stato di equilibrio.

Vogliamo realizzare un generatore della forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_0, \quad (5.47)$$

quindi con una struttura locale, tuttavia vogliamo ottenere la SSE associata in modo “non locale”. Vediamo come ottenere questo risultato.

Definiamo innanzitutto la quantità \vec{J} , chiamata *spin totale*, che è data dalla somma dei due singoli spin

$$\vec{J} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{\sigma}), \quad (5.48)$$

definiamo inoltre la quantità \vec{S} , che è ancora un momento angolare,

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x^1 - \sigma_x^2 \\ \sigma_y^1 + \sigma_y^2 \\ \sigma_z^1 - \sigma_z^2 \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Con la scrittura σ_i^1 e σ_i^2 indichiamo

$$\sigma_i^1 = \sigma_i \otimes \mathbb{1}, \quad \sigma_i^2 = \mathbb{1} \otimes \sigma_i.$$

Sia per lo spin totale \vec{J} sia per il momento angolare \vec{S} vale la seguente proprietà

$$[A_j, A_k] = i \sum_l \epsilon_{jkl} A_l,$$

dove tramite A indichiamo indifferentemente, ma in modo consistente, sia \vec{J} sia \vec{S} . Inoltre ϵ_{jkl} è il simbolo di Ricci introdotto nel primo capitolo.

Grazie all'introduzione di queste grandezze è immediato verificare che il generatore (5.47) può essere scritto come

$$\mathcal{L}[\eta] = -i[H, \eta] + \sum_{i=1}^2 \left(R_i \eta R_i^* - \frac{1}{2} \{R_i^* R_i, \eta\} \right), \quad (5.50)$$

dove

$$\begin{aligned} H &= \omega J_z & R_1 &= \sqrt{\gamma} e^{i\theta_1} J_x, \\ & & R_2 &= \sqrt{\gamma} e^{i\theta_2} S_x. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Mostriamo brevemente come i termini dissipativi di (5.47) e (5.51) siano effettivamente uguali.

$$\sum_i R_i^* R_i = \frac{\gamma}{4} \left[(\sigma_x^1 + \sigma_x^2)^2 + (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)^2 \right] = \frac{\gamma}{4} \left(2(\sigma_x^1)^2 + 2(\sigma_x^2)^2 \right) = \gamma$$

e

$$\begin{aligned} \sum_i R_i \eta R_i^* &= \frac{\gamma}{4} \left[(\sigma_x^1 + \sigma_x^2) \eta (\sigma_x^1 + \sigma_x^2) + (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \eta (\sigma_x^1 - \sigma_x^2) \right] \\ &= \frac{\gamma}{2} (\sigma_x^1 \eta \sigma_x^1 + \sigma_x^2 \eta \sigma_x^2). \end{aligned}$$

Osservazione 6. Dalla definizione degli operatori R_1 e R_2 appare evidente come la natura di questi operatori non sia locale.

Ora che stiamo iniziando a definire il quadro in cui opereremo riportiamo qui di seguito l'azione che le singole componenti di \vec{S} e \vec{J} hanno sui vettori della base di Bell, questi risultati ci saranno in seguito molto utili.

Richiamiamo brevemente i vettori della base di Bell

$$\begin{aligned} |B_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle), & |B_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |B_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle), & |B_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} J_x|B_1\rangle &= 0; & J_x|B_2\rangle &= |B_4\rangle; \\ J_x|B_3\rangle &= 0; & J_x|B_4\rangle &= |B_2\rangle; \\ J_z|B_1\rangle &= 0; & J_z|B_2\rangle &= 0; \\ J_z|B_3\rangle &= -|B_4\rangle; & J_z|B_4\rangle &= -|B_3\rangle; \\ S_x|B_1\rangle &= |B_3\rangle; & S_x|B_2\rangle &= 0; \\ S_x|B_3\rangle &= |B_1\rangle; & S_x|B_4\rangle &= 0; \end{aligned} \quad (5.53)$$

inoltre, sfruttando la matrici di Pauli, abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_x \otimes \sigma_x |B_1\rangle &= -|B_1\rangle; & \sigma_x \otimes \sigma_x |B_2\rangle &= |B_2\rangle; \\ \sigma_x \otimes \sigma_x |B_3\rangle &= -|B_3\rangle; & \sigma_x \otimes \sigma_x |B_4\rangle &= |B_4\rangle; \\ \sigma_y \otimes \sigma_y |B_1\rangle &= -|B_1\rangle; & \sigma_y \otimes \sigma_y |B_2\rangle &= |B_2\rangle; \\ \sigma_y \otimes \sigma_y |B_3\rangle &= |B_3\rangle; & \sigma_x \otimes \sigma_x |B_4\rangle &= -|B_4\rangle; \\ \sigma_z \otimes \sigma_z |B_1\rangle &= -|B_1\rangle; & \sigma_z \otimes \sigma_z |B_2\rangle &= -|B_2\rangle; \\ \sigma_z \otimes \sigma_z |B_3\rangle &= |B_3\rangle; & \sigma_z \otimes \sigma_z |B_4\rangle &= |B_4\rangle. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Qui di seguito richiamiamo brevemente i risultati ottenuti nel secondo capitolo che ci permettono di esprimere un generico vettore nella base di Bell e la concurrence nella base di Bell. Il risultato che abbiamo ottenuto in equazione (3.57)

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 c_i |B_i\rangle, \quad (5.55)$$

permette di scrivere un generico vettore φ su $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ nella base di Bell inoltre, ricordando anche l'Osservazione 3, vale

$$\mathcal{C}_\varphi = \langle \mathbb{T} \varphi | \sigma_y \otimes \sigma_y \varphi \rangle = -c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - c_4^2. \quad (5.56)$$

dell'equazione (5.60), abbiamo

$$\begin{aligned}
dc_1 &= -\frac{\gamma}{2}c_1dt + \sqrt{\gamma}e^{i\theta_2}c_3dW_2, \\
dc_2 &= -\frac{\gamma}{2}c_2dt + \sqrt{\gamma}e^{i\theta_1}c_4dW_1, \\
dc_3 &= (i\omega c_4 - \frac{\gamma}{2}c_3)dt + \sqrt{\gamma}e^{i\theta_2}c_1dW_2, \\
dc_4 &= (i\omega c_3 - \frac{\gamma}{2}c_4)dt + \sqrt{\gamma}e^{i\theta_1}c_2dW_1.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

In equazione (5.56) non appaiono tuttavia i coefficienti c_1, \dots, c_4 della rappresentazione nella base di Bell del vettore φ bensì tali coefficienti appaiono al quadrato; pertanto è necessario utilizzare la formula di Ito

$$d(c_i^2) = 2c_idc_i + (dc_i)^2$$

per calcolare questi nuovi termini. Abbiamo

$$\begin{aligned}
d(c_1^2) &= -\gamma c_1^2 dt + 2\sqrt{\gamma}e^{i\theta_2}c_1c_3dW_2 + \gamma e^{2i\theta_2}c_3^2 dt, \\
d(c_2^2) &= -\gamma c_2^2 dt + 2\sqrt{\gamma}e^{i\theta_1}c_2c_4dW_1 + \gamma e^{2i\theta_1}c_4^2 dt, \\
d(c_3^2) &= (2i\omega c_3c_4 - \gamma c_3^2)dt + 2\sqrt{\gamma}e^{i\theta_2}c_1c_3dW_2 + \gamma e^{2i\theta_2}c_1^2 dt, \\
d(c_4^2) &= (2i\omega c_3c_4 - \gamma c_4^2)dt + 2\sqrt{\gamma}e^{i\theta_1}c_2c_4dW_1 + \gamma e^{2i\theta_1}c_2^2 dt.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Grazie a questi risultati possiamo ora andare a sostituire le espressioni di $d(c_1^2), \dots, d(c_4^2)$ nell'equazione (5.56) ottenendo l'equazione per la quantità $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$

$$\dot{\mathcal{C}}_{\varphi(t)} = -\gamma \left(1 + \frac{1}{2}e^{2i\theta_1} + \frac{1}{2}e^{2i\theta_2}\right) \mathcal{C}_{\varphi(t)} - \gamma \left(\frac{1}{2}e^{2i\theta_1} - \frac{1}{2}e^{2i\theta_2}\right) \mathcal{D}_{\varphi(t)}, \tag{5.63}$$

dove abbiamo introdotto la quantità $\mathcal{D}_{\varphi(t)}$ definita da

$$\mathcal{D}_{\varphi} = \langle T \varphi | \sigma_z \otimes \sigma_z \varphi \rangle$$

che nella base di Bell è data da

$$\mathcal{D}_{\varphi} = -c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 + c_4^2. \tag{5.64}$$

L'equazione che abbiamo ottenuto per \mathcal{C}_{φ} merita qualche riflessione soprattutto confrontandola con il risultato di equazione (5.36).

Ricordiamo brevemente che l'equazione (5.36) è stata ottenuta impiegando operatori locali. In particolare l'Hamiltoniana H è data dalla somma di due operatori locali e ciascun R_j a sua volta è ancora un operatore locale così da evitare interazioni con l'ambiente esterno; nel caso di cui ci stiamo occupando in questa sezione non abbiamo invece posto questa condizione sugli operatori.

Possiamo effettuare due considerazioni da questo confronto: in entrambi i casi i termini in dW_j si annullano, annullando quindi il termine di stocasticità, tuttavia nell'equazione (5.63) a differenza di (5.36) osserviamo che l'equazione non si chiude.

Oltre al termine $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$ appare un termine $\mathcal{D}_{\varphi(t)}$, e pertanto non siamo in grado di risolvere direttamente l'equazione (5.63), per risolvere tale equazione è necessario quindi conoscere l'evoluzione anche del termine $\mathcal{D}_{\varphi(t)}$.

Così come abbiamo fatto per \mathcal{C}_{φ} dove, grazie alle equazioni (5.62), abbiamo ottenuto l'equazione differenziale (5.63), analogamente possiamo fare per la quantità $\mathcal{D}_{\varphi(t)}$ di cui conosciamo la rappresentazione (5.64) nella base di Bell pertanto abbiamo

$$\dot{\mathcal{D}}_{\varphi(t)} = -\left(1 + \frac{1}{2}e^{2i\theta_1} + \frac{1}{2}e^{2i\theta_2}\right)\mathcal{D}_{\varphi(t)} - 2i\omega\mathcal{E}_{\varphi(t)}, \quad (5.65)$$

dove abbiamo introdotto la quantità $\mathcal{D}_{\varphi(t)}$ definita da

$$\mathcal{E}_{\varphi} = \langle \mathbb{T} \varphi | J_z \varphi \rangle$$

che nella base di Bell è data da

$$\mathcal{E}_{\varphi} = -2c_3c_4. \quad (5.66)$$

Anche in questo caso notiamo come purtroppo l'equazione non si chiude, è infatti presente un termine in $\mathcal{E}_{\varphi(t)}$. Anche in questo caso non siamo in grado di risolvere esplicitamente l'equazione e dovremmo studiare l'evoluzione di questo nuovo termine e nel caso riuscissimo a risolvere questa equazione potremmo poi risalire risolvendo nell'ordine (5.65) e infine (5.63).

Purtroppo sviluppando questi calcoli ci si accorge che ad ogni step appare un termine nuovo che necessita uno studio aggiuntivo, non si riesce pertanto ad arrivare ad una soluzione esplicita dell'equazione (5.63) per $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$ a differenza del caso con gli operatori locali in cui si ottiene un'equazione chiusa di facile risoluzione e si arriva quindi alla soluzione (5.37) per $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$.

Dopo queste riflessioni di carattere generale sull'equazione (5.63), torniamo ad occuparci di entanglement negli stati a posteriori e di media dell'entanglement, il nostro obiettivo è mostrare che per tempi lunghi la media dell'entanglement degli stati a posteriori non si annulla.

Per comodità definiamo le quantità x , y e z

$$\begin{aligned}x &:= c_3^2 - c_1^2 \\y &:= c_2^2 - c_4^2 \\z &:= c_3c_4\end{aligned}\tag{5.67}$$

e riprendendo le equazioni (5.62) e ripristinando le dipendenze temporali abbiamo per x e y le seguenti equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma(1 + e^{2i\theta_1})x(t) + 2i\omega z(t), \\ \dot{y}(t) &= -\gamma(1 + e^{2i\theta_2})y(t) - 2i\omega z(t).\end{aligned}\tag{5.68}$$

Definiamo per comodità le quantità λ_1 e λ_2

$$\begin{aligned}\lambda_1 &:= -\gamma(1 + e^{2i\theta_1}) \\ \lambda_2 &:= -\gamma(1 + e^{2i\theta_2})\end{aligned}\tag{5.69}$$

così da poter scrivere

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda_1 x(t) + 2i\omega z(t), \\ \dot{y}(t) &= \lambda_2 y(t) - 2i\omega z(t).\end{aligned}\tag{5.70}$$

Se pensiamo a z come a una quantità assegnata siamo in grado di risolvere le equazioni (5.70) e otteniamo

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\lambda_1 t} x(0) + 2i\omega \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} z(s) ds, \\ y(t) &= e^{\lambda_2 t} y(0) - 2i\omega \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} z(s) ds.\end{aligned}\tag{5.71}$$

Ricordando l'espressione (5.56) della concurrence e le soluzioni (5.71) che risolvono le equazioni differenziali soddisfatte dai coefficienti della concurrence stessa possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\varphi(t) &= x(t) + y(t) \\ &= e^{\lambda_1 t} x(0) + e^{\lambda_2 t} y(0) + 2i\omega \int_0^t \left(e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)} \right) z(s) ds,\end{aligned}\tag{5.72}$$

che è soluzione di

$$\dot{\mathcal{C}}_{\varphi(t)} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathcal{C}_{\varphi(t)} + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathcal{D}_{\varphi(t)}, \quad (5.73)$$

avendo ripreso l'equazione (5.63) e la definizione di λ_1 e λ_2 .

Ora che abbiamo ottenuto l'espressione (5.72) per $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$ è nostro interesse vedere come tale soluzione si comporti per tempi lunghi; per fare ciò sfrutteremo le equazioni differenziali (5.70) e le soluzioni (5.71) di tali equazioni.

Andiamo innanzitutto a calcolare $\text{Re}(\lambda_i)$, dove i λ_i sono stati introdotti in (5.69), osserviamo che

$$\text{Re}(\lambda_i) = -\gamma(1 + \cos 2\theta_i) < 0 \quad \forall \theta_i \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Notiamo inoltre che

$$\text{Re}(\lambda_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0$$

Dall'equazione (5.72) sappiamo che la quantità \mathcal{C}_{φ} è data dalla somma dei due termini $x(t)$ e $y(t)$ le cui espressioni esplicite sono date da (5.71).

Per studiare l'andamento della concurrence \mathcal{C}_{φ} , studieremo \mathcal{C}_{φ} che è data dalla somma di $x(t)$ e $y(t)$; essendo queste due ultime grandezze le più semplici da trattare focalizzeremo la nostra attenzione su queste.

Sviluppiamo il nostro ragionamento per la quantità $x(t)$, analogamente potremo fare per $y(t)$ per cui i passaggi seguenti saranno assolutamente analoghi.

Caso $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, 2$

Facciamo la seguente supposizione di partenza.

Supposizione 22. *Supponiamo che*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Se la supposizione 22 fosse vera avremmo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 0. \quad (5.74)$$

Avendo assunto $\omega \neq 0$, per $t \rightarrow +\infty$ la prima delle equazioni (5.70) se la supposizione fosse vera si ridurrebbe a

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 x(t) + 2i\omega z(t) \xrightarrow{22 \text{ vera}} \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0. \quad (5.75)$$

Dopo questa serie di passaggi abbiamo quindi mostrato che per studiare la natura della concurrence possiamo limitarci a studiare $z(t)$. Da (5.67) sappiamo che $z(t) = c_3(t)c_4(t)$; pertanto, affinché valga $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$ necessariamente

$$c_3(t) \rightarrow 0 \quad \text{oppure} \quad c_4(t) \rightarrow 0.$$

Studiamo quindi il comportamento di $c_3(t)$, analogamente avremmo potuto studiare $c_4(t)$, la cui dinamica è data da (5.61) e la cui soluzione è

$$c_3(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}c_3(0) + i\omega \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}c_4(s)ds + \sqrt{\gamma} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}c_1(s)dW_s. \quad (5.76)$$

Studiando il limite di (5.76) per $t \rightarrow +\infty$ appare evidente come il primo termine si annulli mentre per quanto riguarda i due termini integrali, affinché $c_3(\infty) = 0$, necessariamente deve essere, per tempi lunghi,

$$c_1(t) = c_4(t) = 0$$

i due integrali non possono infatti compensarsi essendo il primo a variazione limitata e il secondo a variazione non limitata.

Se avessimo studiato $c_4(t)$ saremmo giunti a una soluzione del tutto analoga in cui i termini che si annullano per tempi lunghi sarebbero stati

$$c_2(t) = c_3(t) = 0.$$

Abbiamo quindi necessariamente che

$$c_1(t) = c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5.77)$$

Allo stesso risultato saremo giunti se invece che considerare la quantità $x(t)$ avessimo considerato $y(t)$. Pertanto affinché valga

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$$

necessariamente tutti i coefficienti del vettore di stato $\varphi(t)$ nella base di Bell devono annullarsi per $t \rightarrow +\infty$.

Siamo però giunti a un assurdo poiché da equazione (5.13) sappiamo che

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\|\varphi(t)\|^2 \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\|\varphi_0\|^2 \right] = 1. \quad (5.78)$$

Pertanto la supposizione di partenza 22 è chiaramente falsa.

Lo scenario che abbiamo presentato, ovvero che $x(t)$ e $y(t)$ si annullino per tempi lunghi, non si può verificare; tuttavia ci resta ancora da indagare la possibilità

che $x(t)$ e $y(t)$ si compensino per tempi lunghi sortendo comunque l'effetto che la quantità $\mathcal{C}_{\varphi \S}(t)$ si annulli per tempi lunghi.

Il primo caso che andiamo a studiare è il seguente

$$\lambda_2 = \lambda_1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2 = \theta_1 + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Sia quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; in questo caso siamo in grado di risolvere direttamente l'equazione (5.73) che ha come soluzione un esponenziale con decadimento a zero per $t \rightarrow +\infty$ del tipo seguente

$$\mathcal{C}_{\varphi(t)} = e^{\lambda t} \mathcal{C}_{\varphi(0)}$$

che tende a zero per tempi lunghi, ricordiamo infatti che $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Resta il caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entrambi non nulli.

Supposizione 23. *Supponiamo che*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{C}_{\varphi(t)} = 0.$$

Se la supposizione 23 fosse vera avremmo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left(e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)} \right) z(s) ds = 0$$

che a sua volta implicherebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left(\lambda_1 e^{\lambda_1(t-s)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(t-s)} \right) z(s) ds = 0.$$

Da questi due ultimi risultati otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{\lambda_i(t-s)} z(s) ds = 0 \quad i = 1, 2$$

pertanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

Così come il caso precedente siamo giunti a un assurdo in quanto per avere $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ tutti i coefficienti del vettore di stato $\varphi(t)$ nella base di Bell devono annullarsi per $t \rightarrow +\infty$; tale risultato, come già ribadito precedentemente, è in totale disaccordo con l'equazione (5.78).

Grazie ai risultati ottenuti per $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, 2$ abbiamo che l'unico caso in cui la concurrence si annulla è il caso in cui $\lambda_1 = \lambda_2$ e pertanto gli operatori R_1 e R_2 introdotti in (5.51) sono dati da

$$R_1 = \sqrt{\gamma} e^{i\theta_1} J_x, \quad R_2 = \pm \sqrt{\gamma} e^{i\theta_1} S_x. \quad (5.79)$$

In tutti gli altri casi abbiamo mostrato come la concurrence non si possa annullare per tempi lunghi.

Da (5.79) abbiamo

$$\sqrt{\gamma} e^{i\theta_1} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_x^1 (dW_1 + dW_2) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 (dW_1 - dW_2) \right\}$$

dove σ_x^1 e σ_x^2 sono due operatori locali, infatti definendo

$$B_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1(t) + W_2(t))$$

e

$$B_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1(t) - W_2(t))$$

abbiamo che questi due Wiener sono indipendenti, abbiamo

$$dB_1(t)dB_2(t) = \frac{1}{2}dt - \frac{1}{2}dt = 0,$$

siamo così ricaduti nel caso presentato nella sezione precedente, quello che utilizzava solamente gli operatori locali. A ulteriore riprova di ciò osserviamo che risolvendo (5.73) per $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ si ottiene lo stesso decadimento esponenziale per la concurrence ottenuto in (5.38).

Almeno un $\lambda_i = 0$

Gli ultimi casi da indagare sono i seguenti: almeno uno tra λ_1 e λ_2 nullo e infine il caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

I casi

- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$
- $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

sono assolutamente analoghi, data la struttura delle equazioni (5.71), pertanto ci limiteremo a studiare in dettaglio il primo caso e dedurremo i risultati del secondo per analogia.

Occupiamoci quindi del caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Le equazioni (5.70) si riducono a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2i\omega z(t), \\ \dot{y}(t) &= \lambda_2 y(t) - 2i\omega z(t). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Pertanto per $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$ vale

$$\dot{\mathcal{C}}_{\varphi(t)} = \lambda_2 y(t).$$

Sfruttando ora la supposizione 23 cerchiamo ora di dedurre come si comporti $\mathcal{C}_{\varphi(t)}$ e quindi la concurrence. Se la supposizione 23 fosse vera evidentemente

$$\Rightarrow y(t) = 0 \quad \text{per } t \rightarrow +\infty$$

e quindi, sempre per tempi lunghi, avremmo $y(t) = 0$ e anche $z(t) = 0$.

Grazie a quest'ultima osservazione e all'equazione (5.80) avremmo

$$\dot{x}(\infty) = 0$$

pertanto per tempi lunghi risulterebbe

$$x(\infty) = \text{cost}$$

e dall'equazione (5.71) segue

$$x(\infty) = x(0).$$

A questo punto gli scenari possibili sono di due tipi: $x(0) \neq 0$ oppure $x(0) = 0$. Studiamo il primo caso supponendo pertanto $x(0) \neq 0$, ricordando che $\mathcal{C}_{\varphi(t)} = x(t) + y(t)$, giungiamo facilmente a un assurdo infatti al limite per $t \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$0 = \mathcal{C}_{\varphi(\infty)} = x(\infty) + y(\infty) = x(0).$$

Per quanto invece riguarda il secondo caso, giungiamo ugualmente a un assurdo se infatti avessimo $x(0) = 0$, questa uguaglianza implicherebbe

$$x(\infty) = y(\infty) = z(\infty) = 0$$

e pertanto l'annullamento simultaneo per $t \rightarrow +\infty$ di tutti i coefficienti $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ e $c_4(t)$ giungendo a un assurdo come mostrato in equazione (5.78).

Analogamente si dimostra il caso $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ dove sviluppando gli stessi passaggi con l'accortezza di scambiare $y(t)$ e $x(t)$ si ottengono gli stessi risultati.

Ultimo scenario che presentiamo è il caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. In questo caso il risultato è banale in quanto si vede immediatamente da (5.73) che la concurrence resta costante.

Abbiamo così presentato tutti gli scenari possibili che possiamo incontrare in questa modellizzazione che abbiamo proposto.

In conclusione possiamo affermare che la concurrence, per tempi lunghi, si annulla nel solo caso $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ mentre resta costante nel caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e

pertanto l'entanglement si va a distruggere nel primo di questi due scenari mentre resta immutato nel secondo caso.

In tutti gli altri casi abbiamo invece dimostrato come la concurrence non si annulli e pertanto a tempi lunghi si ha entanglement: può formarsi entanglement o diminuire; comunque non è nullo per tempi lunghi.

Al contrario è sempre nullo l'entanglement dello stato a priori finale.

Bibliografia

- [1] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, 3rd Edition, Springer-Textbook (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [2] P. Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Quaderno UMI **28** (Pitagora, Bologna, 2000).
- [3] A. Barchielli, M. Gregoratti, *Quantum Trajectories and Measurements in Continuous Time* (Springer, Milano, 2009).
- [4] F. Benatti, A. Liguori, A. Nagy, *Environment induced Bipartite Entanglement*, *J. Math. Phys.* **49**, 042103 (2008).
- [5] A. Buchleitner, M. Busse, A. R. R. Carvalho, I Guevara, C. Viviescas, *Entanglement dynamics in open two-qubit systems via diffusive quantum trajectories*, *Phys. Rev. Lett.* 105, 210502 (2010).
- [6] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, *Phys. Lett. A* **223**,1 (1996).
- [7] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [8] J. J. Sakurai, *Meccanica Quantistica Moderna* (Zanichelli, Bologna, 1996).
- [9] D. Spehner, S. Vogelsberger, *Average Entanglement for Markovian Quantum trajectories*.

- [10] W. K. Wootters *Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits*,
Phys. Rev. Lett. 80:2245-2248 (1998).