

POLITECNICO DI MILANO
V Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica



IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO DI
TURBOLENZA $K - \epsilon$ IN UN AMBIENTE IN
C++ PER GLI ELEMENTI FINITI (LIFEV)

Relatore:
Prof. Luca Formaggia

Tesi di Laurea di:
Luigi Saracino
Matricola n. 721188

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

Indice

Abstract	i
1 Le equazioni di Navier - Stokes	1
1.1 Derivazione del modello	1
1.1.1 Equazione di continuità	1
1.1.2 Equazione di conservazione del momento	2
1.1.3 Conservazione dell'energia ed equazione di stato	3
1.2 Flussi incomprimibili	4
1.2.1 Il numero di Reynolds	4
1.2.2 Esistenza e unicità	5
1.2.3 Regolarità e comportamento a regime della soluzione	5
1.3 Strati limite e leggi di parete	6
1.3.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite laminare	6
1.3.2 Lastra piana	7
1.4 Leggi di parete	7
1.4.1 Idea	8
1.4.2 Leggi di parete per strati limite turbolenti	8
1.5 Turbolenza incomprimibile omogenea	9
1.6 Invarianti	10
1.7 Turbolenza statistica	12
1.7.1 Turbolenza Omogenea ed Isotropa	13
1.7.2 Invarianza di Galileo	13
1.8 Teoria di Kolmogorov	14
1.9 Ipotesi di Reynolds	16
1.9.1 Filtri	16
1.10 Sforzi di Reynolds	17
1.10.1 Mediazione alla Reynolds	18
1.10.2 Invarianze	18
1.10.3 Modello di Smagorinsky	21
2 Il modello K-Epsilon	22
2.1 Definizione del modello	22
2.1.1 Notazioni	23

2.2	Derivazione del modello	23
2.2.1	Sommario delle ipotesi	23
2.2.2	Derivazione dell'equazione per k	24
2.2.3	Derivazione dell'equazione per ϵ	25
2.3	Derivazione delle costanti	27
2.3.1	Decadimento omogeneo della turbolenza	27
2.3.2	Shear layer	27
2.3.3	Strati limite	28
2.4	Condizioni al bordo	29
2.4.1	Leggi di parete	29
2.4.2	Modello Low-Reynolds	29
2.5	Analisi matematica e approssimazione	30
2.6	Positività di k ed ϵ	31
2.6.1	Forme alternative	31
2.6.2	Positività e crescita esponenziale senza viscosità	31
2.6.3	Positività nel caso di condizioni al bordo di Dirichlet	32
2.7	Esistenza della soluzione	33
2.8	Metodi numerici	34
2.8.1	Formulazione variazionale	34
2.8.2	Discretizzazione con il metodo delle caratteristiche	34
2.8.3	Schema semi-implicito	36
3	Simulazioni numeriche	37
3.1	Risultati	38
3.1.1	Decadimento spaziale della turbolenza	38
3.1.2	Flusso di tipo mixing layer	39
4	Conclusioni	42
	Bibliografia	42

Abstract

Citando Horace Lamb, famoso fisico britannico, che nel 1932 ad un congresso della *British Association for the Advancement of Science* affermò: *Sono anziano, e quando morirò e andrò in paradiso, spero di avere chiarimenti su due questioni: una è l'elettrodinamica quantistica, e l'altra è il moto turbolento di fluidi. E circa il primo sono davvero piuttosto ottimista.* si ha una idea di quanto la turbolenza sia uno dei fenomeni chiave della fluidodinamica. Una grande sfida della modellazione numerica è infatti fornire accurati modelli di simulazione per flussi turbolenti: essi sono caratterizzati da variazioni di velocità e pressione casuali e imprevedibili. Per più di un secolo, matematici e studiosi di fluidodinamica hanno cercato di capire la turbolenza nei fluidi, analizzando i meccanismi che generano questi disordini. Essi conclusero che all'aumentare del numero di Reynolds, il flusso diventa molto turbolento e le specifiche di simulazione molto restrittive. Per questo motivo l'uso di simulazioni dirette è limitante ed occorre implementare modelli di viscosità turbolenta basati sulle equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds o modelli LES.

In questo lavoro verrà presentato il modello (a due equazioni) $k - \epsilon$ per la turbolenza.

Il lavoro si articola nel primo capitolo con la derivazione delle equazioni di Navier-Stokes, una panoramica sulla turbolenza e gli approcci per la modellistica e la mediazione alla Reynolds delle equazioni.

Il secondo capitolo illustra il modello $k - \epsilon$, la sua derivazione e un risultato di esistenza della soluzione, oltre che all'approssimazione numerica.

Il terzo capitolo è dedicato alla implementazione del modello in LifeV e al test. L'implementazione è stata effettuata in C++ utilizzando i metodi e le classi della libreria LifeV.

La validazione del modello viene effettuata mediante una verifica di decadimento spaziale della turbolenza e con una simulazione di un flusso di tipo *mixing layer*.

Capitolo 1

Le equazioni di Navier - Stokes

In questo capitolo viene trattata la derivazione delle equazioni di Navier-Stokes per i flussi comprimibili ed incomprimibili.

1.1 Derivazione del modello

Consideriamo un fluido che occupa un dominio Ω di \mathbb{R}^3 in un intervallo di tempo $[0, T']$. Denotiamo con O un sottodominio regolare di Ω , con x un punto qualsiasi di Ω e con t un generico istante temporale. Per semplicità indichiamo con x le coordinate spaziali.

Le variabili che caratterizzano il fluido sono:

- la densità $\rho(x, t)$
- il campo di velocità $\mathbf{u}(x, t)$
- il campo di pressione $p(x, t)$
- il campo di temperatura $T(x, t)$

1.1.1 Equazione di continuità

Per il principio di conservazione della massa, la variazione di massa del fluido in O , $\partial_t \int_O \rho$, deve essere uguale al flusso di massa, $-\int_{\partial O} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, attraverso il bordo ∂O di O , (\mathbf{n} sta ad indicare la normale esterna al bordo).

Utilizzando poi la formula di Stokes:

$$\int_O \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \int_{\partial O} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (1.1)$$

e sfruttando l'arbitrarietà di O , si ottiene l'*equazione di conservazione della massa*:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.2)$$

Chiamata anche *Equazione di continuità*.

Se il fluido è incomprimibile, quindi a densità ρ costante, l'equazione si riduce alla sola:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (1.3)$$

1.1.2 Equazione di conservazione del momento

Per ricavare l'equazione di conservazione del momento è necessario scrivere la legge di Newton per un volumetto O di fluido. Dalla definizione di \mathbf{u} , una particella di fluido alla posizione x al tempo t sarà approssimativamente in posizione $x + \mathbf{u}(x, t)\delta t$ al tempo $t + \delta t$; la sua accelerazione sarà pertanto:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [\mathbf{u}(x + \mathbf{u}(x, t)\delta t, t + \delta t) - \mathbf{u}(x, t)] + \sum_j u_j \partial_j \mathbf{u} \equiv \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$$

Le forze sul volume O sono:

- Le forze esterne (elettromagnetiche, Coriolis, gravità...), pari a $\int_O \mathbf{f}$ se \mathbf{f} è la forza per unità di volume.
- Le forze di pressione e viscosi dovute al moto interno al fluidi, pari a $\int_{\partial O} (\sigma - p\mathbf{I})\mathbf{n}$ dove σ è il tensore degli sforzi, \mathbf{I} è l'identità ed \mathbf{n} indica la normale esterna al bordo ∂O .

Risulta pertanto: per ogni O ,

$$\int_O \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) = \int_O \mathbf{f} - \int_{\partial O} (p\mathbf{n} - \sigma)\mathbf{n} = \int_O (\mathbf{f} - \nabla p + \operatorname{div} \sigma),$$

dove è stata applicata la formula di Stokes alla seconda eguaglianza. Pertanto

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \operatorname{div}(\sigma) = \mathbf{f}.$$

Occorre introdurre una ipotesi per legare il tensore degli sforzi σ alla velocità del fluido.

L'ipotesi di *Fluido Newtoniano* è una legge lineare che lega σ al gradiente della velocità:

$$\sigma = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \left(\xi - \frac{2\mu}{3}\right) \mathbf{I} \operatorname{div}(\mathbf{u})$$

dove μ e ξ sono il primo e il secondo coefficiente di viscosità. Il secondo coefficiente di viscosità per aria e acqua assume valori molto piccoli, perciò si suppone $\xi = 0$.

Con questa definizione del tensore degli sforzi, l'equazione di conservazione del momento risulta:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} - \frac{\mu}{3} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $div \nabla \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}$ e $div \nabla \mathbf{u}^T = \nabla(div \mathbf{u})$. Sfruttando inoltre l'equazione di continuità, è possibile scrivere l'equazione del momento in forma conservativa:

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + div(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} - \frac{\mu}{3} \nabla(div \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}$$

1.1.3 Conservazione dell'energia ed equazione di stato

Scrivendo l'energia totale su un elemento di volume $O(t)$ che si muove con il fluido, è possibile ottenere l'equazione di conservazione dell'energia. Ricordiamo che l'energia E è la somma del lavoro fatto dalle forze e del calore totale. Essa ha due contributi:

- L'energia interna e
- L'energia cinetica $u^2/2$

Così l'energia in O è

$$\int_O \rho E \quad \text{dove} \quad E = \frac{u^2}{2} + e.$$

Il lavoro fatto dalle forze è l'integrale su O di $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{f} + \sigma - p\mathbf{I})\mathbf{n}$. Dalla definizione di temperatura T , se non ci sono sorgenti di calore allora il calore assorbito (o ceduto) è proporzionale al flusso del gradiente della temperatura, ossia all'integrale sul bordo del volume di riferimento di $\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n}$. La costante κ è detta *diffusività termica*. Così otteniamo la seguente equazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{O(t)} \rho E = \int_O \{\partial_t \rho E + div[\mathbf{u} \rho E]\} = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \int_{\partial O} [\mathbf{u}(\sigma - p\mathbf{I}) - \kappa \nabla T] \mathbf{n}$$

Con l'equazione di continuità e la formula di Stokes, otteniamo l'equazione dell'energia:

$$\partial_t[\rho E] + div(\mathbf{u}[\rho E + p]) = div[\mathbf{u}\sigma + \kappa \nabla T] + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

Per un fluido ideale, come acqua e aria in situazioni regolari, i calori specifici C_v e C_p diventano costanti fisiche, così possiamo legare l'energia alla temperatura grazie alle seguenti:

$$e = C_v T \quad \text{e} \quad E = C_v T + \frac{u^2}{2},$$

e con l'equazione di stato

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

dove R è la costante del gas ideale, viene pertanto così legata l'energia alla pressione e alla densità:

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} = RT \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

Utilizzando l'espressione del tensore σ , l'equazione per l'energia totale diventa:

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)} \right] + \operatorname{div}(\mathbf{u} \left[\rho \frac{u^2}{2} + p \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \right]) \\ = \operatorname{div} \left\{ \mathbf{u} \left[\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2\mu}{3} \mathbf{I} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right] + \kappa \nabla T \right\} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

1.2 Flussi incomprimibili

Quando ρ è praticamente costante (per esempio acqua o aria a bassa velocità) possiamo considerare nulle le sue derivate, così otteniamo le *equazioni di Navier-Stokes* per il flusso incomprimibile:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

dove $\frac{\nu}{\rho}$ è la *viscosità cinematica* del fluido e $p \rightarrow \frac{p}{\rho}$ e $\mathbf{f} \rightarrow \frac{\mathbf{f}}{\rho}$ sono la pressione ridotta e le forze esterne, rispettivamente.

1.2.1 Il numero di Reynolds

Scriviamo il sistema per il flusso incomprimibile nella forma adimensionale. Sia \mathbf{U} una velocità caratteristica del fluido in esame (ad esempio una delle condizioni al bordo non omogenee). Sia invece L una lunghezza caratteristica (ad esempio il diametro del dominio Ω e T_1 un tempo caratteristico (che è uguale al rapporto $\frac{L}{U}$). Poniamo:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{U}}; x' = \frac{x}{L}; t' = \frac{t}{T_1}.$$

Le equazioni di Navier Stokes per il flusso incomprimibile in forma adimensionale sono:

$$\begin{aligned} \frac{L}{T_1 U} \partial_{t'} \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \nabla_{x'} \mathbf{u}' + U^{-2} \nabla_{x'} p - \frac{\nu}{LU} \Delta_{x'} \mathbf{u}' &= \mathbf{f} \frac{L}{U^2} \\ \operatorname{div}_{x'} \mathbf{u}' &= 0. \end{aligned}$$

Ponendo $T_1 = \frac{L}{U} p' = \frac{p}{U^2} \nu' = \frac{\nu}{LU}$ si ottiene il sistema di partenza con le variabili con apice. Il *numero di Reynolds* è definito come l'inverso di ν' .

$$Re = \frac{UL}{\nu}.$$

1.2.2 Esistenza e unicità

Le equazioni di Navier-Stokes per il flusso incomprimibile sono ben poste in $Q = \Omega \times]0, T'[$ dove Ω è un dominio aperto regolare in \mathbb{R}^d , con $d = 2$ o 3 , con le seguenti condizioni iniziali e al bordo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}^0(x) \quad x \in \Omega \\ \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{u}_\Gamma(x) \quad x \in \Gamma, \quad t \in]0, T'[\end{aligned}$$

Il problema viene riformulato in forma debole nei seguenti spazi:

$$\begin{aligned} J(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \\ J_0(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in J(\Omega) : \mathbf{v}|_\Gamma = 0\}. \end{aligned}$$

Il problema diventa quindi, trovare $\mathbf{u} \in L^2(0, T', J(\Omega)) \cap L^\infty(0, T'; L^2(\Omega))$ tale che:

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in J_0(\Omega) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u} - \mathbf{u}_\Gamma \in L^2(0, T', J_0(\Omega)).^1 \end{aligned}$$

Vale pertanto il seguente

Teorema 1.1 *Le equazioni di Navier-Stokes nella formulazione variazionale ammettono almeno una soluzione. In due dimensioni, la soluzione è unica. Se $\mathbf{f} = 0$ e $|\mathbf{u}^0|_1$ è sufficientemente piccola o se \mathbf{u} è smooth (ad esempio $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T'; L^4(\Omega))$) allora è unica anche in tre dimensioni.*

1.2.3 Regolarità e comportamento a regime della soluzione

Non è molto semplice garantire un certo tipo di regolarità della soluzione (nello specifico quella evidenziata nel teorema precedente), così la sua unicità resta un problema aperto, legato anche alla continua dipendenza dai dati iniziali. È importante sottolineare che la turbolenza è essenzialmente un fenomeno tridimensionale e che c'è almeno una perdita di dipendenza continua dai dati iniziali per il flusso medio.

In generale siamo interessati a conoscere la soluzione a regime, per $t \rightarrow \infty$, dove il flusso non sembra fortemente dipendente dalle condizioni iniziali. Ci sono diverse modalità di *perdita di memoria* di queste condizioni iniziali per il fluido, ad esempio:

1. il flusso converge ad uno stato stazionario indipendente dal tempo;

¹ (\cdot, \cdot) indica il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$; l'uguaglianza è intesa come equivalenza in L^2 . I dati devono essere regolari, nel senso di $L^2(Q)$ per \mathbf{f} e di $J(\Omega)$ per \mathbf{u}^0 e \mathbf{u}_Γ , dove la tilde denota una estensione a tutto il dominio Ω di una funzione definita su Γ . L'ipotesi $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T'; L^2(\Omega))$ è per assicurare che gli integrali che contengono il termine $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$ esistano.

2. il flusso diventa periodico nel tempo;²
3. flussi *Quasi periodici*: la trasformata di Fourier in tempo ha uno spettro discreto e almeno due frequenze non confrontabili.
4. flussi *Caotici* con strani attrattori: la trasformata di Fourier ha uno spettro continuo e la sezione di Poincarè ha una regione densa di punti che riempiono una zona completa e definita dello spazio (*attrattore*).

Risultati sperimentali dimostrano che quando il numero di Reynolds aumenta, molti fluidi passano attraverso questi 4 regimi, e il cambiamento di regime provoca delle biforcazioni per gli equilibri (soluzioni stazionarie) nella mappa $\nu \rightarrow u$. Il regime 4 domina nel caso di Reynolds molto grande quindi può essere considerato come la *definizione matematica della Turbolenza*.

1.3 Strati limite e leggi di parete

Quando il numero di Reynolds è alto ci sono solitamente forti gradienti per la velocità e la vorticità ($rot \mathbf{u}$) nelle vicinanze del bordo solido. La simulazione numerica in queste zone è molto complessa. In questa sezione vengono richiamati alcuni concetti sullo strato limite, limitando la trattazione al solo caso incomprimibile.

1.3.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite laminare

Se ν è nulla, le equazioni di Navier Stokes vengono chiamate equazioni di Eulero:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad div \mathbf{u} = 0$$

Le condizioni al bordo standard per queste equazioni sono

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{u}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}, \quad rot \mathbf{u}|_{\Gamma^-} = \omega_{\Gamma}$$

dove $\Gamma^- = \{x \in \Gamma : \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}$ Questa differenza nelle condizioni al bordo crea uno strato sottile in cui il fluido passa dal regime Euleriano al regime di Navier Stokes. Inoltre se $rot \mathbf{u} = 0$ c'è una semplice soluzione stazionaria (*flusso potenziale*) all'equazione di Eulero:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi, \quad \Delta \phi = 0, \quad p = -\frac{1}{2} u^2.$$

Nel caso bidimensionale stazionario è possibile dimostrare che vicino alla parete solida alcuni termini possono essere eliminati nelle equazioni di Navier-Stokes. Siano infatti, x la coordinata parallela a Γ e y quella normale; allo

²C'è tuttavia una piccola possibilità di avere memoria delle condizioni iniziali, in particolare quando è lo stato stazionario a dipendere da esse.

stesso modo u_1, u_2 saranno le componenti rispettive di velocità. Le seguenti equazioni descrivono correttamente il flusso vicino al bordo fintanto che u_1 non cambia segno:

$$\begin{aligned} u_1 \partial_x u_1 + u_2 \partial_y u_1 - \nu \partial_{yy} u_1 &= -\partial_x p \\ -\partial_y p &= 0 \\ \partial_y u_2 &= -\partial_x u_1 \end{aligned}$$

Queste saranno valide in uno strato sottile B_δ sulla parete Γ . Nella regione $\Omega_\delta = \Omega - B_\delta$, sono valide le Equazioni di Eulero o l'approssimazione a potenziale. È necessario imporre condizioni sulle velocità nelle due regioni al bordo di interfaccia Σ e occorre completare con le condizioni al contorno le equazioni ridotte in B_δ .

In due dimensioni, la condizione di divergenza nulla sulla velocità implica che esiste una *funzione di flusso* ψ tale che $\mathbf{u} = \{\partial_y \psi, -\partial_x \psi\}$, così le equazioni di Prandtl diventano le cosiddette equazioni di Falkner - Skan:

$$\frac{1}{2} \partial_x (\partial_y \psi)^2 - \partial_x \psi \partial_{yy} \psi - \nu \partial_{yyy} \psi = U \partial_x U$$

dove U è la soluzione delle equazioni di Eulero. Le condizioni al bordo sono $\psi(x, 0) = \partial_y \psi(x, 0) = 0, \partial_y \psi(x, \delta) = U$.

1.3.2 Lastra piana

Assumiamo che, per qualche m :

$$\psi(x, y) = x^m f(yx^{m-1}).$$

Sostituendola nella equazione di Falkner-Skan, si trova la seguente:

$$(2m - 1)(f')^2 - m f f'' - \nu f''' = U \partial_x U x^{3-4m}$$

C'è quindi una soluzione autosimile dove $U|_\Gamma = Cx^\beta$ con $m = \frac{(1-\beta)}{2}$. Per la lastra piana, $\beta = 0$, così $m = \frac{1}{2}$. In questo caso, il calcolo si riduce alla risoluzione di una equazione differenziale ordinaria, e si dimostra che il comportamento di u vicino ad $y = 0$ è del tipo $U(1 - e^{-\frac{y}{\sqrt{\nu}}})$

1.4 Leggi di parete

Le equazioni finora mostrate mettono in evidenza che in prossimità del bordo solido, la velocità passa da valori nulli ad assumere l'ordine $O(1)$ su una distanza $\delta = O(\sqrt{\nu})$. Le simulazioni numeriche devono tenerne conto per l'adattamento della mesh all'interno degli strati limite. Le leggi di parete sono un'attenuante per ridurre questo limite.

1.4.1 Idea

L'idea di base è quella di rimuovere lo strato limite dal dominio di calcolo. Se denotiamo con $\delta(x)$ lo spessore dello strato limite sul bordo solido Γ e consideriamo:

$$B_\delta = \{x - n(x)\lambda : x \in \Gamma, \lambda \in]0, \delta(x)[\}.$$

Il dominio di calcolo ora sarà dato da $\Omega_\delta = \Omega - B_\delta$ e il nuovo bordo, che va a sostituire il precedente Γ diventa $\Sigma = \partial\Omega_\delta$. Per avere una condizione al nuovo bordo per la velocità, è possibile utilizzare uno sviluppo di Taylor di \mathbf{u} nel punto $x' + \delta(x')n(x')$ che è un punto di Γ dove $x' \in \Sigma$:

$$\mathbf{u}(x' + \delta(x')n(x')) = \mathbf{u}(x') + \delta(x') \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}(x') + o(\delta).$$

Così una condizione omogenea sulla velocità come $\mathbf{u}|_\Gamma = 0$ implica

$$\mathbf{u} + \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \approx 0 \quad \text{su } \Gamma.$$

Questo approccio funziona solo se $\partial_n \mathbf{u}$ è molto regolare in B_δ , ad esempio nella parte di strato limite lontana dal bordo solido del dominio.

Gli strati limite non soddisfano questa proprietà ovunque, così è necessario utilizzare una tecnica chiamata espansione multiscala.

1.4.2 Leggi di parete per strati limite turbolenti

Per meglio comprendere le leggi di parete nel caso di regime turbolento, consideriamo un profilo alare. Vicino al punto di ristagno si sviluppa uno strato limite. In due dimensioni è correttamente descritto dalle equazioni di Falkner-Skan. La soluzione diventa instabile e c'è una transizione ad uno stato tempo dipendente. Più a valle, la soluzione diventa totalmente turbolenta e la sua approssimazione numerica diventa impossibile se non supportata da un modello di turbolenza. Gli esperimenti mostrano alcune generalità nel comportamento turbolento di strato limite.

Più precisamente se x_1 denota la direzione del flusso medio parallelo alla parete e x_2 la coordinate della direzione normale, definiamo

$$u^* = \sqrt{\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_2}}|_{x_2=0}, \quad y^* = \frac{\nu}{u^*}$$

dove U è la velocità mediata in tempo:

$$U(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t).$$

Infine poniamo:

$$y^+ = \frac{y}{y^*}, \quad u^+ = \frac{U}{u^*}.$$

Gli esperimenti mostrano che quando $20 \leq y^+ \leq 100$, nel cosiddetto *strato logaritmico*, c'è una formula universale per il flusso medio riscaldato u^+ ,

$$u^+ = \frac{1}{\chi} \log y^+ + 5,5 \quad \text{con} \quad \chi = 0,41.$$

La costante χ è la costante di Von Karman. Vicino alla parete, $0 \leq y^+ \leq 20$, il flusso medio è lineare in y^+ . Questo è il *sottostrato viscoso*

$$u^+ = y^+.$$

È possibile utilizzare relazioni non lineari tra la velocità e la sua derivata normale per stabilire leggi di parete. Generalmente, si cerca un δ così che Σ sia nello strato logaritmico, e si risolvono le equazioni di Navier-Stokes con la seguente coppia di condizioni, che rappresentano, appunto le leggi di parete:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\sqrt{\nu \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|}} - \frac{1}{\chi} \log \left(\delta \sqrt{\frac{1}{\nu \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|}} \right) + \beta &= 0, \end{aligned}$$

dove \mathbf{n} è la normale ed \mathbf{s} la tangente al bordo Σ , $\chi = 0,41, \beta = 5,5$. È necessario verificare a posteriori che

$$20 \sqrt{\nu \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|^{-1}} \leq \delta \leq 100 \sqrt{\nu \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|^{-1}}$$

inoltre, sfortunatamente negli strati limite ci sono effetti di *separazione*³. In questo caso il segno di $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ cambia, l'analisi di Prandtl non è più valida e la regione di forti gradienti non è più ridotta. Le leggi di parete così non risultano più idonee.

1.5 Turbolenza incomprimibile omogenea

Per un flusso incomprimibile quindi, le equazioni di Navier-Stokes su un dominio Ω e in un intervallo di tempo $]0, T'[$, con condizioni iniziali e al bordo, sono le seguenti:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

³All'aumentare del numero di Reynolds gli effetti inerziali diventano sempre più importanti e in qualche localizzazione sul corpo (posizione della separazione) l'inerzia del fluido è tale che questo non riesce più a seguire la superficie curva del solido nella regione posteriore. Il risultato è una regione di scia, a valle dell'oggetto, in cui si ha flusso sia verso valle che verso monte.

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0,$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_\Gamma.$$

I dati sono:

- le forze esterne \mathbf{f} ,
- la viscosità ridotta $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ o la viscosità effettiva $\nu = Re^{-1}$ se $\mathbf{u} = O(1)$, $|\Omega| = O(1)$,
- le condizioni iniziali \mathbf{u}^0 ,
- le condizioni al bordo \mathbf{u}_Γ .

1.6 Invarianti

Consideriamo il caso $\Omega = R^3$ (nessun bordo, con quantità del flusso che vanno a zero all'infinito) con le sole condizioni iniziali, senza la presenza di forze esterne.

Invarianza del flusso medio

Integrando su O , una palla di raggio r , l'equazione del momento otteniamo:

$$\int_O \partial_t \mathbf{u} + \int_O \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \int_O \nabla p - \int_O \nu \Delta \mathbf{u} = 0$$

ma

$$\int_O \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \int_O \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \int_{\partial O} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n});$$

$$\int_O \nabla p = \int_{\partial O} p \mathbf{n};$$

$$\int_O \nu \Delta \mathbf{u} = \nu \int_{\partial O} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}.$$

Così gli integrali al bordo tendono a zero quando $r \rightarrow \infty$ abbiamo:

$$\partial_t \int_O \mathbf{u} = 0.$$

Il flusso medio è pertanto un invariante.

Invarianza dell'energia cinetica media nelle equazioni di Eulero

Per ottenere l'equazione di Eulero, poniamo la $\nu = 0$. Moltiplicando l'equazione del momento per la velocità e integrando in R^3 ottengo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla p - \int_{\Omega} \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}p) + \int_{\Omega} \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 + \int_{\Omega} \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si osserva come l'energia cinetica diventi anche dissipazione viscosa, inoltre se la soluzione iniziale u^0 è regolare allora anche il termine $|\nabla \mathbf{u}^0|$ è piccolo quando la viscosità è bassa. Allora in questo caso e per un periodo di tempo, l'energia cinetica sarà costante fino a che il flusso crea forti gradienti.

Invarianza dell'elicità nelle equazioni di Eulero

Prendendo il rotore dell'equazione del momento, ponendo $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ e moltiplicando per la velocità si ottiene:

$$\int_{\Omega} \partial_t \omega \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \omega) \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \nu \Delta \omega = 0;$$

poichè poi $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \omega)$, $\Delta \omega = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \omega)$

$$\int_{\Omega} \partial_t \int_{\Omega} \omega \cdot \mathbf{u} = \int_{\Omega} (\partial_t \operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} = \int_{\Omega} \omega \cdot \partial_t \mathbf{u},$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} \omega \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \nu \omega \cdot \operatorname{rot} \omega = 0.$$

Quindi quando la viscosità è nulla, l'elicità $\equiv \int_{\Omega} \omega \cdot \mathbf{u}$ è costante, così come in precedenza, per condizioni iniziali regolari l'elicità sarà costante fintanto che il flusso non costruisce forti gradienti.

Nel flusso tridimensionale, 4 quantità giocano quindi un ruolo importante nel bilancio dell'energia:

- l'energia cinetica $\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2$,
- il tasso di dissipazione viscosa $\int_{\Omega} \nu |\nabla \mathbf{u}|^2$,
- l'elicità $\int_{\Omega} \omega \cdot \mathbf{u}$.

Ergodicità

L'ipotesi ergodica afferma che, sotto certe condizioni, le medie statistiche possono essere sostituite dalle medie in tempo o in spazio, nei processi multidimensionali. La turbolenza è solitamente assunta sotto questa ipotesi, altrimenti gli esperimenti sarebbero impossibili da verificare. Sotto questa ipotesi gli invarianti definiti e riscaldati per unità di volume, possono essere definiti nuovamente come:

- l'energia cinetica turbolenta $\frac{1}{2}\langle |u^2| \rangle$,
- il tasso di dissipazione viscosa $\nu\langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle$
- l'elicità $\langle \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} \rangle$.

1.7 Turbolenza statistica

La turbolenza è caratterizzata da moti disordinati che si traducono in fluttuazioni aleatorie nel tempo e nello spazio e contiene un ampio spettro di frequenze temporali e spaziali. Un contributo fondamentale alla teoria della turbolenza è stato dato da Kolmogorov nel 1941. Egli ha cercato una descrizione statistica della turbolenza omogenea e isotropa basandosi su poche semplici ipotesi di similarità.

L'evoluzione temporale di un segnale turbolento mostra una grande variabilità. Sfruttando la piccolezza delle lunghezze e dei tempi di correlazione si può tentare un approccio statistico. Si considerano infatti le quantità in esame (componenti di velocità e pressione) come variabili aleatorie, se ne definisce la distribuzione di probabilità e la funzione di probabilità. Sarà così possibile calcolare i valori medi e i momenti di queste quantità. E grazie all'ipotesi di ergodicità è possibile effettuare le medie statistiche non più attraverso le varie realizzazioni (cioè effettuando l'esperimento N volte nelle stesse condizioni), bensì attraverso una sola realizzazione.

Una definizione della turbolenza è strettamente legata ai modi della trasformata di Fourier della velocità.

Definizione 1.2 *Se lo spettro di u ($\{U(k) \neq 0\}_k$) è denso in alcuni ampi intervalli $]k_1, k_2[$, $k_2 \gg k_1$ allora possiamo dire che il flusso è turbolento.*

La teoria dei sistemi dinamici identifica questa proprietà con la presenza di stati caotici, la perdita della dipendenza continua dai dati iniziali e l'aspetto casuale e imprevedibile della soluzione.

La soluzione di Navier-Stokes è deterministica ma appare un processo casuale perché da un esperimento ad un altro non è possibile riprodurre nuovamente la $u(x, t)$ ma solo la sua media su un intervallo temporale o spaziale.

1.7.1 Turbolenza Omogenea ed Isotropia

La turbolenza è *omogenea* se tutte le medie e i momenti di \mathbf{u} e i loro gradienti sono indipendenti dalle coordinate spaziali. La turbolenza è invece *stazionaria* se è indipendente dal tempo.

La turbolenza è *isotropa* se tutte le medie e tutti i momenti della velocità sono invarianti per rotazione, ossia gli stessi, calcolati su $\mathbf{u}(Mx, t)$ dove M è una matrice di rotazione.

Momenti

Possiamo estendere queste definizioni alle *funzioni di correlazione* definite come

$$R_{ij}(x, t, r) = \int u_i(x + r, t, \omega) u_j(x, t, \omega) d\omega$$

e richiedere per la turbolenza omogenea, che esse non dipendano da x, t ma che siano funzione solamente di $|r|$. Infatti il tensore delle correlazioni fornisce un'indicazione sulla vicinanza in senso statistico tra due componenti di velocità in due punti dello spazio e/o a due istanti diversi.

Proprietà di \mathbf{R}

La caratteristica di isotropia e omogeneità per un flusso turbolento si traduce nella proprietà $R_{ij}(x, t, r) = R_{ij}(r) = R_{ij}(-r)$. Inoltre, una diretta conseguenza della definizione di funzione di correlazione è:

$$\langle U_m(p) U_n(q) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int \langle u_m(x) u_n(y) \rangle e^{-ip \cdot x - iq \cdot y} dx dy = \Phi_{mn}(p) \delta(p + q)$$

dove $\langle \cdot \rangle$ denota la media statistica e il tensore Φ è la trasformata di Fourier di R :

$$\Phi_{mn}(p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int R_{mn}(r) e^{-ip \cdot r} dr.$$

Proposizione 1.3 *In una turbolenza omogenea ed isotropa il tensore Φ ha la seguente forma:*

$$\Phi_{pq}(k) = \frac{E(|k|)}{4\pi|k|^2} \left(\delta_{pq} - \frac{k_p k_q}{|k|^2} \right)$$

dove $E(K)$ è una funzione scalare da interpretare come la densità di energia cinetica della turbolenza.

1.7.2 Invarianza di Galileo

Sia U il flusso medio. La trasformazione $x \rightarrow x + Ut, \mathbf{u}(x, t) \rightarrow \mathbf{u}(x + Ut) - U$ non cambia le equazioni di Navier Stokes, ed è detta *invarianza di Galileo*. Con questa trasformazione la nuova velocità ha media zero, così,

senza perdere di generalità per una turbolenza omogenea possiamo assumere che $\int u d\omega = 0$. Delle quantità legate agli invarianti restano solo:

- La densità di energia cinetica E ,
- il tasso di dissipazione viscosa $\epsilon = \langle \nu |\nabla u|^2 \rangle$.

1.8 Teoria di Kolmogorov

Importanti risultati sulla turbolenza omogenea e isotropa furono apportati dalla teoria di Kolmogorov nel 1941. Essa parte dalle seguenti ipotesi fondamentali:

1. Si assume che valgano le proprietà di omogeneità e isotropia in senso statistico, e che vi sia una forzante a grande scala che mantiene un moto statisticamente stazionario.
2. Si assume che l'energia dissipata ϵ per unità di massa e nell'unità di tempo sia indipendente dal numero di Reynolds nel limite di grandi numeri di Reynolds. Ciò vuol dire che essa ha un limite finito per $\nu \rightarrow 0$.
3. Nello spazio di Fourier si possono individuare *tre bande energetiche*: una banda a piccoli numeri d'onda (ossia a grande scala) dove viene iniettata l'energia e dove essa non viene dissipata; una banda a grandi numeri d'onda dove agisce la dissipazione viscosa; infine una banda intermedia (la *banda inerziale*, così chiamata perché in essa prevale il termine inerziale) dove l'energia non viene né creata né dissipata ma soltanto trasferita da/verso le altre due bande
4. Le funzioni di struttura (correlazioni a due punti) dipendono solo dai parametri ϵ e ν , e se la distanza tra i punti è grande rispetto alla scala dissipativa allora le funzioni di struttura non dipendono più da ν ma soltanto da ϵ .

Legge di Kolmogorov

Si consideri una turbolenza omogenea ed isotropa stazionaria. Così la densità di energia cinetica E è una funzione polinomiale del modulo $K = |k|$ del numero d'onda k .

Proposizione 1.4 *Quando $U\nu^{-1} \ll K \ll \epsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$, $K \rightarrow E(K)$ decade come $K^{-5/3}$. Più precisamente*

$$E(K) \approx 1,5\epsilon^{2/3}K^{-5/3}.$$

Una riprova è possibile mediante una analisi dimensionale delle quantità in gioco. Assumiamo che $E(K)$ sia una funzione di ϵ e K . In termini di dimensioni:

$$\nu \approx UL, \quad \epsilon \approx \nu U^2 L^{-2} \approx U^3 L^{-1} \quad \text{e} \quad R_{ii} \approx U^2, K \approx \frac{1}{L},$$

così $E(K) \approx LU^2$. Ora, quando $K \ll \frac{U}{\nu}$, $E(K)$ non può essere funzione di ν perché la viscosità non riesce ad annullare i piccoli modi. Le uniche quantità quindi che è possibile usare sono K ed ϵ . Pertanto:

$$E(K) \approx LU^2 \approx L(\epsilon L)^{\frac{2}{3}} \approx K^{-1} \epsilon^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{2}{3}} \approx \epsilon^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{5}{3}}.$$

Gli esperimenti mostrano che la costante è circa 1,5.

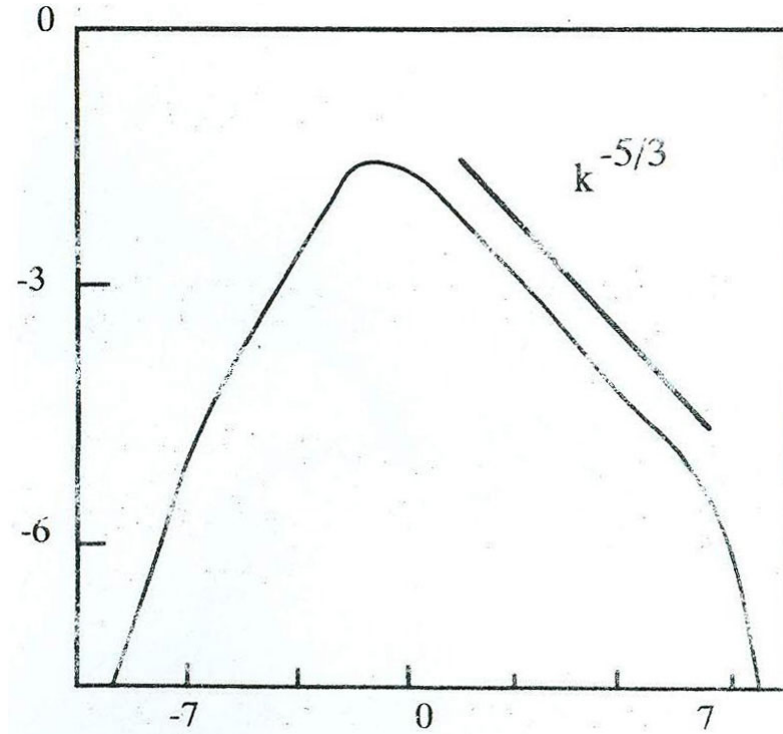


Figura 1.1: Spettro tipico, $\log_2 E(k)$ su $\log_2 k$ per un flusso turbolento in regioni di turbolenza omogenea.

Le condizioni iniziali determinano $E(K)$ al tempo $t = 0$. Successivamente c'è una lenta evoluzione, così che E si può considerare stazionario. La viscosità interviene alla fine dello spettro. Nel mezzo c'è una larga banda di K detta *banda inerziale*, dove si ritrova l'andamento secondo la legge di Kolmogorov.

La viscosità agisce quando la velocità caratteristica U e la lunghezza caratteristica L dei vortici sono tali che $UL = O(\nu)$. Ma poichè $U \approx \epsilon^{\frac{1}{3}} K^{-\frac{1}{3}}$ si ha $UL \approx \epsilon^{\frac{1}{3}} K^{-\frac{4}{3}} = O(\nu)$. Quindi la viscosità interviene nella parte dello spettro dove $K = O(\nu^{-\frac{3}{4}})$. E' chiamato *sub-range viscoso*. Questo fenomeno porta a pensare che piccoli vortici dell'ordine $O(\nu^{\frac{3}{4}})$ non possono vivere a lungo, a causa della viscosità. Così $E(K)$ è una funzione a supporto compatto e non si estende all'infinito.

1.9 Ipotesi di Reynolds

L'oggetto della modellizzazione della turbolenza è la simulazione numerica di flussi. Non è possibile calcolare accuratamente le medie senza modellizzare le interazioni dovute alle parti deviatorie. Si introduce quindi una idea, alternativa alla simulazione diretta: *assumiamo che il flusso abbia due scale così da separare una parte media da una parte deviatoria*.

In alcuni flussi la separazione di scala di questo tipo è ovvia; per esempio, attorno ad un cilindro ci sono grandi vortici della *Karman vortex street*⁴ e piccoli vortici che provengono dagli strati limite. Tuttavia, a valle del cilindro non ci sono separazioni di scala. In questo caso, il problema va riformulato: vanno introdotte alcune variabili casuali nelle condizioni iniziali per rendere casuale il flusso; così le due scale sono di diversa natura: una deriva dalle oscillazioni del flusso; l'altra dalla sua casualità. Così le medie sono medie stocastiche.

In alcuni casi per separare il flusso medio dalla parte deviatoria è necessario adottare un filtro. Per questo tipo di approccio il filtro non è direttamente legato alla griglia di calcolo, ma applicato alla fisica del problema o, il più delle volte, deriva dalla casualità delle condizioni iniziali.

1.9.1 Filtri

Dividiamo la velocità come somma tra una componente media e una deviatoria

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$$

Per ottenere questo tipo di separazione è necessario un filtro $\langle \cdot \rangle$. Per le equazioni di Navier-Stokes con condizioni iniziali casuali, un filtro naturale è la *media statistica*,

$$\langle \mathbf{u} \rangle_E = \int \mathbf{u}(x, t, \omega) d\omega.$$

Altri filtri importanti sono:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} \mathbf{u}(y, t) dy \quad \text{media in spazio}$$

⁴Flusso a vortici ripetuti causato dalla separazione del flusso instabile di un fluido che investe un corpo

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t \mathbf{u}(x, \tau) d\tau \quad \text{media in tempo}$$

$$\langle\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle\rangle = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t \langle \mathbf{u} \rangle_B d\tau \quad \text{media in spazio e tempo}$$

dove $B(x, r)$ è la palla di raggio r centrata in x .

Proprietà

1. I filtri sono *operatori lineari*:

$$\langle u + \lambda v \rangle = \langle u \rangle + \lambda \langle v \rangle, \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^3 \times]0, T' [), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Per alcuni filtri, *l'operatore di media e quello di derivata commutano*.
Ad esempio:

$$\overline{\partial_x u} = \partial_x \bar{u}, \quad \overline{\partial_t u} = \partial_t \bar{u}$$

Anche la media spaziale gode di questa proprietà.

3. I filtri non hanno nessun effetto sulle variabili filtrate. Filtrando cioè una variabile filtrata, il risultato non varia. La media spaziale non gode di questa proprietà, mentre per quella temporale è necessario che la variabile filtrata sia T_1 periodica.
4. *Media del prodotto*. Si richiede che:

$$\langle v \langle u \rangle \rangle = \langle v \rangle \langle u \rangle$$

Solo la media statistica soddisfa questa proprietà.

Proposizione 1.5 *Il filtro statistico soddisfa tutte le proprietà elencate.*

1.10 Sforzi di Reynolds

Sia \mathbf{u} una soluzione (casuale) di

$$\partial_t \mathbf{u} + \text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega \times]0, T' [,$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x, \omega), \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma,$$

dove $\mathbf{u}(x, \cdot)$ è un vettore casuale valutato in \mathbb{R}^3 . Sia $\langle \cdot \rangle$ l'operatore di media statistica sulla base della legge di probabilità indotta dalla condizione iniziale \mathbf{u}^0 . Possiamo calcolare $\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle, \nu \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle \dots$?

1.10.1 Mediazione alla Reynolds

Con un filtro che soddisfa le quattro proprietà elencate in §1, denotiamo

$$\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle \quad \mathbf{u}' = \mathbf{U} - \langle \mathbf{u} \rangle.$$

Applichiamo quindi il filtro al sistema in esame. Per l'equazione della divergenza otteniamo:

$$0 = \langle \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle = \operatorname{div} \langle \mathbf{u} \rangle = \operatorname{div} \mathbf{U}.$$

Analogamente, per l'equazione del momento:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_t \mathbf{u} \rangle + \langle \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \rangle + \langle \nabla p \rangle - \nu \langle \Delta \mathbf{u} \rangle \\ &= \partial_t \langle \mathbf{u} \rangle + \operatorname{div} \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle p \rangle - \nu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle \\ &= \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \operatorname{div}[\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle - \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}] + \nabla P - \nu \Delta \mathbf{U} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle &= \langle (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \otimes (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \rangle \\ &= \langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} \rangle + \langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{u}' \rangle + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{U} \rangle + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle \\ &= \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + . \end{aligned}$$

Teorema 1.6 *Quando il filtro soddisfa tutte le quattro proprietà elencate in §1, la velocità media $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$ soddisfa le cosiddette equazioni di Reynolds:*

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla \mathbf{U} + \nabla P - \nu \Delta \mathbf{U} + \operatorname{div} \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U}_{t=0} = \langle \mathbf{u}^0 \rangle, \quad \mathbf{U}|_{\Gamma} = \langle \mathbf{u}_{\Gamma} \rangle.$$

Il *Tensore degli sforzi di Reynolds* è definito come

$$\mathbf{R} = -\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle.$$

Gli esperimenti suggerirono a Reynolds che $\mathbf{R} = -\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$ è direttamente correlato con $\nabla \mathbf{U}$, o per ragioni di simmetria al termine $\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T$. Questa assunzione è abbastanza ragionevole perché la turbolenza è spesso presente in zone di forte gradiente per il flusso. Tuttavia c'è un ovvio contro esempio a questa ipotesi:

In prossimità del bordo d'attacco di un'ala il flusso è laminare, anche se vi sono forti gradienti.

1.10.2 Invarianze

Mostriamo ora che \mathbf{R} non può essere arbitrariamente scelto. Infatti il modello deve rendere risultati indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento nella simulazione.

Invarianza per traslazioni

Supponiamo di avere $x = y + Z$ dove Z è un vettore costante di R^3 . Si ha pertanto:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{u}(x, t) = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_i}.$$

In (x, t) la velocità è $\mathbf{u}(x, t)$ e verifica:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0.$$

In (y, t) la velocità è $\mathbf{v}(y, t) = \mathbf{u}(x - Z, t)$ e verifica:

$$0 = [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u}]_{x=y+Z} = \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y p - \nu \Delta_y \mathbf{v}$$

$$\text{div} \mathbf{u}|_{x=y+Z} = \text{div}_y \mathbf{v} = 0.$$

Le equazioni di Navier-Stokes sono invarianti rispetto alle traslazioni. Le equazioni di Reynolds devono esserlo allo stesso modo, altrimenti il risultato del modello dipenderà dalla scelta del sistema di riferimento. Ma poiché $\nabla_y \mathbf{v} = \nabla_x \mathbf{u}$ si ha che $\text{div}_y R(\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T) = \text{div}_x R(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T)$. Così anche le equazioni di Reynolds sono invarianti per traslazioni.

Invarianza di Galileo

Supponiamo ora che $x = y + \boldsymbol{\omega} t$ dove $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore costante. Così:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(y + \boldsymbol{\omega} t, t) = \frac{dy}{dt} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}.$$

Posto quindi $\mathbf{v}(y, t) = \mathbf{u}(y + \boldsymbol{\omega} t, t) - \boldsymbol{\omega}$ le equazioni di Navier-Stokes per \mathbf{v} diventano:

$$\text{div}_y \mathbf{v} = \text{div}_x (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) = \text{div} \mathbf{u} = 0,$$

e osservando prima che $\partial_t \mathbf{v} = \partial_t (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \nabla_x \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \nabla_x \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y p - \nu \Delta_y \mathbf{v} = \\ &= \partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \nabla_x \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) \nabla_x (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) + \nabla_x p - \nu \Delta_x (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) \\ &= \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi le equazioni di Navier-Stokes sono invarianti per trasformazione Galileiana. Inoltre $\nabla_x = \nabla_y$ così $\text{div}_y R(\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T) = \text{div}_x R(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T)$. Così anche le equazioni di Reynolds sono invarianti per trasformazioni di Galileo.

Invarianza per rotazioni

Sia M una matrice di rotazione, che verifica

$$(M^T M)_{kj} = M_{ik} M_{ij} = (M M^T)_{kj} = M_{ki} M_{ji} = \delta_{kj}$$

Sia $x = My$, così se denotiamo con \mathbf{v} la velocità $\frac{dy}{dt}$ si ha che $\mathbf{u} = M\mathbf{v}$. Inoltre poichè:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_j} M_{ji}^T, \quad \text{ossia } \nabla_x f = M \nabla_y f.$$

Pertanto,

$$\nabla \mathbf{u} = (M \nabla_y) M \mathbf{v} = M \nabla_y \mathbf{v} M^T.$$

Applicando quindi la trasformazione di rotazione alle equazioni di Navier Stokes, otteniamo:

$$\text{div} \mathbf{u} = (M \text{div}) M \mathbf{v} = M_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} M_{ik} v_k = \text{div}_y \mathbf{v},$$

E per l'equazione del momento, semplificando la notazione con $\text{ns}(u)$, applicando la rotazione si ottiene $\text{ns}(\mathbf{u}) = \text{ns}(M\mathbf{v}) = M \text{ns}(\mathbf{v})$. Per valutare ora il tensore degli sforzi di Reynolds, basta considerare che:

$$\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T = M(\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T) M^T.$$

così è possibile valutare R in entrambi i sistemi di riferimento:

$$\begin{aligned} \text{div}_x R(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T) &= \text{div}_y [M^T R(M[\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T] M^T)] \\ &= M \text{div}_y [M^T R(M[\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T] M^T) M]. \end{aligned}$$

Sia \mathbf{u} la soluzione delle equazioni di Reynolds. Allora \mathbf{v} soddisferà le stesse equazioni nel sistema di riferimento y se e solo se:

$$M^T R(M[\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T] M^T) M = R(\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T)$$

per tutte le \mathbf{v} a divergenza nulla e tutte le M con $M^{-1} = M^T$. Dal momento che tutte le matrici A a traccia nulla sono generate da $\nabla_y \mathbf{v} + \nabla_y \mathbf{v}^T$ richiediamo che:

$$M^T R(M A M^T) M = R(A), \quad \forall A, M \text{ con } M^{-1} = M^T, \quad \text{tr}(A) = 0.$$

Invarianza per rotazioni tempo dipendenti

Riportiamo senza dimostrazione l'evidenza di invarianza per rotazioni tempo dipendenti, sia per le equazioni di Navier Stokes, sia per quelle mediate alla Reynolds, senza ulteriori condizioni sul tensore degli sforzi.

Proposizione 1.7 *Per essere invariante dal sistema di riferimento, l'unica possibile forma per una matrice simmetrica R , funzione di un'altra matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, è:*

$$R(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{d-1} A^{d-1}$$

dove le a_i sono funzioni esclusivamente degli invarianti⁵ di A .

1.10.3 Modello di Smagorinsky

Smagorinsky propose di modellizzare il tensore come:

$$R = ch^2 |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T| (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + aI, \quad c \cong 0.01$$

dove $h(x)$ è la dimensione caratteristica dell'elemento della mesh nella simulazione numerica. Il fatto che sia coinvolta anche la dimensione della mesh è giustificata dall'ipotesi di ergodicità. Usando infatti una media sulle sfere di raggio h come filtro nella definizione del tensore di Reynolds, ha senso assumere questo tipo di dipendenza. La corretta potenza di h è ricavabile mediante analisi dimensionale.

Questo modello performa bene quando la piccola scala, che è la dimensione della mesh, è nella banda inerziale di Kolmogorov. In altri termini, per testare che sia stato scelto un numero sufficiente di elementi occorre procedere in tre step:

- Scegliere la dimensione della mesh e risolvere il problema numericamente.
- Trasformare (Fourier) la velocità e plottare $|u|$ in funzione di K .
- Verificare che lo spettro d'energia nella parte finale si comporti come $K^{-\frac{5}{3}}$. In caso contrario raffinare la mesh.

⁵In due dimensioni, gli invarianti di una matrice sono $\text{tr}(A)$, $\det(A)$ o $|A| = \sqrt{\text{tr}(AA^T)}$; in tre dimensioni, anche $|A^2|$

Capitolo 2

Il modello K-Epsilon

Il modello di Smagorinsky è troppo semplice e richiede una discretizzazione molto fine per ottenere buoni risultati. Per gli strati limite, Prandtl suggerì una equazione differenziale alle derivate parziali per la quantità $\mathbf{l} = \frac{\nu T}{\mathbf{u}^*}$ del tipo:

$$\partial_t \mathbf{l} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{l} + \mathbf{l} |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T|^2 + \dots = 0.$$

Rotta migliorò il modello e suggerì un modello a due equazioni per due scale differenti di turbolenza. Ma il modello a due equazioni più usato fu introdotto da Launder e Spalding (1972), il modello $k - \epsilon$. Consiste in due equazioni per la energia cinetica turbolenta k e per ϵ , il tasso di dissipazione della turbolenza. Il modello fu successivamente esteso in modo da considerare situazioni più complesse, come curvature o turbolenza non isotropa. Ci sono stati poi diversi tentativi di fare meglio, riferendosi in particolare agli sforzi di Reynolds come, ad esempio, aggiungere nuove equazioni di diffusione e trasporto per ogni componente del tensore di Reynolds. Non è ancora chiaro se questi performino con un ordine di grandezza superiore tanto quanto la loro complessità. Il modello $k - \epsilon$ rappresenta pertanto un buon compromesso tra semplicità e generalità, sebbene non abbia validità universale.

Questo capitolo è dedicato alla derivazione del modello $k - \epsilon$ a partire dalle equazioni di Navier-Stokes. Vengono presentate prima le equazioni, ricavate e illustrate le ipotesi necessarie alla derivazione del modello.

2.1 Definizione del modello

Dato un filtro $\langle \cdot \rangle$, le equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds per la velocità e la pressione medie sono:

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla \mathbf{U} + \nabla P - \nu \Delta \mathbf{U} + \text{div} R(k, \epsilon, \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) = 0,$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0.$$

Dove $R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$ è il tensore di Reynolds. L'energia cinetica turbolenta k e il tasso di dissipazione della energia turbolenta ϵ sono definiti da:

$$k = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}'|^2 \rangle, \quad \epsilon = \frac{\nu}{2} \langle |\nabla \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}'^T|^2 \rangle;$$

Così R, k, ϵ sono modellizzati in termini del flusso medio U da

$$R = -\frac{2}{3}kI + (\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon})(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T),$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla k - \operatorname{div}(c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k) - \frac{c_\mu k^2}{2\epsilon} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + \epsilon = 0,$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon - \operatorname{div}(\frac{c_\epsilon k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon) - \frac{c_1 k}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0,$$

con $c_\mu = 0,09, c_1 = 0,126, c_2 = 1,92, c_\epsilon = 0,07$.

2.1.1 Notazioni

Sia $\nu_T = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ $E = \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2$ $P^* = P + \frac{2}{3}k$ allora le equazioni del modello $k - \epsilon$ assumono la seguente forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla k - \operatorname{div}(\nu_T \nabla k) - c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} E + \epsilon = 0,$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon - \operatorname{div}(\frac{c_\epsilon}{c_\mu} \nu_T \nabla \epsilon) - c_1 k E + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla P^* - \operatorname{div}[(\nu_T + \nu)(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)] = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$$

2.2 Derivazione del modello

2.2.1 Sommario delle ipotesi

Per giustificare il modello in maniera euristica sono necessarie le seguenti ipotesi:

H1 Ipotesi di Reynolds per $\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$ (deve essere funzione solo di $\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T, k, \epsilon$).

H2 Trasporto dei campi fluttuanti produce diffusione per la media.

H3 Ergodicità per sostituire le medie con medie spaziali, dove necessario.

H4 Isotropia di u' per eliminare tutti gli integrali al bordo dopo integrazione per parti.

H5 Ipotesi di Reynolds per $\langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle$ (deve essere funzione solo di $\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T$), k, ϵ .

H6 Turbolenza quasi Gaussiana così da trascurare $\langle (\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}') : \nabla \mathbf{u}' \rangle$.

H7 Ipotesi di chiusura, per modellizzare $\nu^2 \langle |\nabla \boldsymbol{\omega}'|^2 \rangle$ con $c_2 \frac{\epsilon^2}{k}$.

H8 Il coefficiente di proporzionalità tra $\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$ e $\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T$ è $\nu_T = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$

Si noti che il termine $\frac{k^2}{\epsilon}$ ha le dimensioni di una viscosità ($\frac{L^2}{T}$). Così l'ipotesi **H8** su R è compatibile con l'ipotesi di Reynolds (ipotesi **H1**) in due dimensioni. In 3 dimensioni, l'ipotesi **H8** diventa più restrittiva poichè richiede che R sia parallelo a $\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T$)

2.2.2 Derivazione dell'equazione per k

Per ottenere un'equazione per k , richiamiamo l'equazione per \mathbf{u}' che è stata ottenuta sottraendo l'equazione di Reynolds dalle equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \nabla \mathbf{U} + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \nabla \mathbf{u}' + \nabla p' - \nu \Delta \mathbf{u}' - \text{div} \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle &= 0 \\ \text{div} \mathbf{u}' &= 0 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo questa equazione per \mathbf{u}' e applicando il filtro (assumendo che soddisfi le proprietà elencate nel capitolo 3), si ottiene:

$$\partial_t \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle : \nabla \mathbf{U} + \langle (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle + \text{div} \langle p' \mathbf{u}' \rangle - \nu \langle \mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}' \rangle = 0$$

Dalla definizione di k e di R abbiamo che:

$$\partial_t k - R : \nabla \mathbf{U} + \langle (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle + \text{div} \langle p' \mathbf{u}' \rangle - \nu \langle \mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}' \rangle = 0$$

Adesso per modellizzare il terzo termine richiamiamo il trasporto di uno scalare passivo da un campo di velocità casuale:

$$\partial_t c + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \nabla c = 0$$

dal quale deriviamo una equazione di diffusione e trasporto per la media C di c

$$\partial_t C + \mathbf{U} \nabla C - \text{div}(\kappa \mathbf{U}) = 0$$

dove κ è una funzione del momento di secondo ordine di \mathbf{u}' . Ora:

$$\partial_t \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} = 0$$

può essere vista come la parte convettiva di una equazione per $\langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle$ con velocità di trasporto $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ (ipotesi **H2**). Quindi è ragionevole che in media si abbia:

$$\partial_t \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle + \langle (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle \cong \partial_t k + \mathbf{U} \nabla k - \text{div}[\mu(R) \nabla k]$$

Certamente non è totalmente corretto perché \mathbf{u}'^2 non è dipendente da \mathbf{u}' . In ogni caso, se supponiamo che il coefficiente diffusivo $\mu(R)$ sia lo stesso che nelle equazioni di Reynolds (ad esempio $\mu(R) = \nu_T$) allora l'equazione per k è:

$$\partial_t k + \mathbf{U} \nabla k - R : \nabla \mathbf{U} - \text{div}[\nu_T \nabla k] - \nu \langle \mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}' \rangle + \text{div} \langle p' \mathbf{u}' \rangle = 0$$

Gli ultimi due termini non possono essere espressi analiticamente in termini di u, k ed ϵ : devono essere modellizzati.

Per questo è possibile utilizzare l'ipotesi ergodica e rimpiazzare il filtro con una media spaziale su una sfera di centro x e di raggio r , $B = (x, r)$ (ipotesi **H3**). Così $\langle \cdot \rangle$ è sostituito dall'integrale su B

$$\langle \mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}' \rangle \cong \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} \mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}' = -\frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} |\nabla \mathbf{u}'|^2 + \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(x,r)} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{n}}$$

Grazie alla simmetria (ipotesi **H4**) l'integrale sul bordo è trascurabile. Il secondo termine è trattabile allo stesso modo:

$$\langle \mathbf{u}' p' \rangle \cong \int_{\partial B(x,r)} p' \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} \cong 0.$$

In conclusione l'equazione per k risulta essere:

$$\partial_t k + \mathbf{U} \nabla k - R : \nabla \mathbf{U} - \text{div}[\nu_T \nabla k] + \epsilon = 0$$

Usando poi la simmetria di R , $R : \nabla \mathbf{U} = R : \frac{(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)}{2}$ e la formula per R e per ν_T otteniamo:

$$\partial_t k + \mathbf{U} \nabla k - \frac{C_\mu k^2}{2} \frac{1}{\epsilon} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \text{div}[c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k] + \epsilon = 0$$

2.2.3 Derivazione dell'equazione per ϵ

Per ottenere una equazione per ϵ , si prende il rotore dell'equazione per \mathbf{u}' , si moltiplica per $\text{rot} \mathbf{u}'$ e si sfrutta una identità per la turbolenza omogenea:

$$\epsilon = \nu \langle |\text{rot} \mathbf{u}'|^2 \rangle$$

Ponendo $\boldsymbol{\omega}' = \text{rot} \mathbf{u}'$, l'equazione viene derivata da quella di \mathbf{u}'

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}' + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \nabla \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{u}' \nabla \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}') \nabla \mathbf{u}' - \boldsymbol{\omega}' \nabla \mathbf{U} - \nu \Delta \boldsymbol{\omega}' = -\text{rot}(\text{div} R)$$

dove $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{U}$. Così dopo una moltiplicazione per $2\nu\boldsymbol{\omega}'$ e mediando, si ottiene¹:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\nu\langle\boldsymbol{\omega}' \cdot (\partial_t\boldsymbol{\omega}' + (\mathbf{U} + \mathbf{u}')\nabla\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{u}'\nabla\boldsymbol{\omega}' - (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}')\nabla\mathbf{u}' - \boldsymbol{\omega}'\nabla\mathbf{U} - \nu\Delta\boldsymbol{\omega}')\rangle \\ &= \partial_t\epsilon + \langle(\mathbf{U} + \mathbf{u}')\nabla(\nu\boldsymbol{\omega}'^2)\rangle - 2\nu\langle\boldsymbol{\omega}'\text{rot}(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})\rangle \\ &\quad - 2\nu\langle\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}'\rangle : \nabla\mathbf{U} - 2\nu\langle(\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}') : \nabla\mathbf{u}'\rangle - 2\nu^2\langle\boldsymbol{\omega}'\Delta\boldsymbol{\omega}'\rangle \end{aligned}$$

L'ultimo termine, grazie ad ergodicità e simmetria è approssimativamente $2\nu^2\langle|\nabla\boldsymbol{\omega}'|^2\rangle$. Il termine $\langle\mathbf{u}'\nabla\nu\boldsymbol{\omega}'^2\rangle$ è modellizzato da un termine diffusivo $-\text{div}(\mu_\epsilon\nabla\epsilon)$ come nell'equazione per k ; per il termine $\langle\boldsymbol{\omega}'\text{rot}(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})\rangle$ si ha (usando l'ergodicità):

$$\begin{aligned} \langle\boldsymbol{\omega}'\text{rot}(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})\rangle &= \langle(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \text{rot}\boldsymbol{\omega}'\rangle = -\langle\mathbf{u}'\text{rot}\boldsymbol{\omega}'\Delta\mathbf{u}'\rangle \\ &= -\langle u'_2\Delta u'_1\rangle\boldsymbol{\omega}_3 + \langle u'_3\Delta u'_1\rangle\boldsymbol{\omega}_2 - \langle u'_3\Delta u'_2\rangle\boldsymbol{\omega}_1 \\ &\quad + \langle u'_1\Delta u'_2\rangle\boldsymbol{\omega}_3 - \langle u'_1\Delta u'_3\rangle\boldsymbol{\omega}_2 + \langle u'_2\Delta u'_3\rangle\boldsymbol{\omega}_1. \end{aligned}$$

Così $\langle\boldsymbol{\omega}'\text{rot}(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})\rangle$ è trascurabile, perché ciascun termine cancella l'altro approssimativamente; inoltre per la formula di Green:

$$\langle u'_2\Delta u'_1\rangle = \langle u'_1\Delta u'_2\rangle + \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} [u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n}].$$

E questi integrali al bordo dovrebbero essere piccoli per simmetria. Pertanto abbiamo:

$$\begin{aligned} \partial_t\epsilon + \mathbf{U} \cdot \nabla\epsilon - 2\nu\langle\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}'\rangle : \nabla\mathbf{U} - \text{div}(\mu_\epsilon\nabla\epsilon) \\ + 2\nu\langle(\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}') : \nabla\mathbf{u}'\rangle + 2\nu^2\langle|\nabla\boldsymbol{\omega}'|^2\rangle = 0, \end{aligned}$$

Dall'invarianza del sistema di riferimento, se $\langle\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}'\rangle$ dipende solo da $\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T, k$ ed ϵ (ipotesi **H5**), si possono scomporre come combinazione della matrice identità I e della matrice $\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T$ (in due dimensioni) e con considerazioni dimensionali, il secondo termine deve essere proporzionale a k :

$$\langle(\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}')\rangle = aI - c_1k(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T).$$

Il termine $\langle(\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}') : \nabla\mathbf{u}'\rangle$ si può ignorare (ipotesi **H6**) a causa della Gaussianità di \mathbf{u}' (è un momento di ordine tre).

L'ultimo termine $\nu\langle|\nabla\boldsymbol{\omega}'|^2\rangle$ è modellizzato da una funzione di k ed ϵ . La prima funzione polinomiale che è dimensionalmente corretta è $\frac{\epsilon^2}{k}$ (ipotesi **H7**). Infine si ottiene:

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\epsilon - \frac{c_1}{2}k|\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T|^2 - \text{div}(\frac{c_\epsilon k^2}{\epsilon}\nabla\epsilon) + c_2\frac{\epsilon^2}{k} = 0.$$

¹Ricordando che $\text{rot}(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}\nabla\mathbf{u}' - \boldsymbol{\omega}'\nabla\boldsymbol{\omega}$

2.3 Derivazione delle costanti

Ci sono quattro costanti nel modello derivate riconducendo il modello a casi elementari.

2.3.1 Decadimento omogeneo della turbolenza

Quando $\mathbf{U}e\nabla U$ sono nulli, il modello si riduce a:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \epsilon = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0.$$

Questo dà come risultato un decadimento polinomiale in tempo poichè $k = k_0(1 + \lambda t)^{-n}$, $\epsilon = \epsilon_0(1 + \lambda t)^{-m}$ restituisce:

$$-\lambda n k_0 \tau^{-n-1} + \epsilon_0 \tau^{-m} = 0, \quad -\lambda m \epsilon_0 \tau^{-m-1} + c_2 \frac{\epsilon_0^2}{k_0} \tau^{-n-2m} = 0.$$

con $\tau = 1 + \lambda t$. Così

$$m = n + 1 = -n + 2m - 1 \quad c_2 = \lambda m \frac{k_0}{\epsilon_0} = \frac{m}{n} = n + \frac{1}{n}.$$

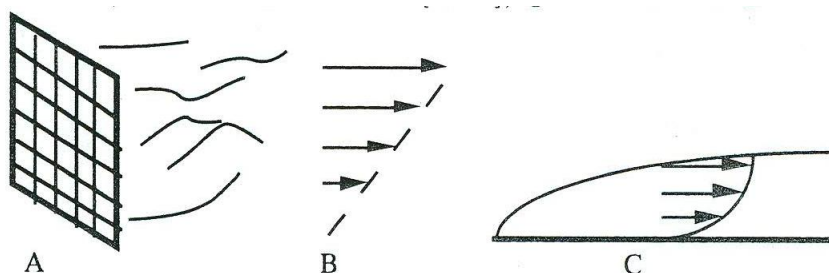


Figura 2.1: I tre esperimenti che determinano le costanti nel modello: (A) Turbolenza attraverso una griglia, (B) Shear flow, (C) Lastra piana

Gli esperimenti mostrano che $n = 1,3$ così $c_2 = 2,06$.

2.3.2 Shear layer

In un sistema di riferimento fissato sul flusso medio, assunto quindi stazionario, si ha $\partial_1 \mathbf{U} = 0$, $\partial_2 \mathbf{U} = C$ costante, così k, ϵ sono costanti e l'equazione si riduce a:

$$c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} C^2 = \epsilon, \quad c_1 k C^2 = c_2 \frac{\epsilon^2}{k}.$$

Così $c_1 = c_2 c_\mu$. Misurazioni per k, ϵ e C restituiscono $c_\mu = 0,09$. Così $c_1 = 0,17$.

2.3.3 Strati limite

Vicino al bordo possono esserci degli strati limite turbolenti per i quali osservazioni sperimentali mostrano un profilo logaritmico per il flusso medio. Più precisamente, sia \vec{x} la direzione del flusso, y la normale alla parete, e si definisca una velocità di scala e una lunghezza di scala:

$$u^*(x) = \sqrt{\nu \frac{\partial U_1}{\partial y}}(x, 0), \quad y^* = \frac{\nu}{u^*}.$$

$$\text{Ponendo infine} \quad y^+ = \frac{y}{y^*}, \quad u^+ = \frac{U}{u^*}$$

Gli esperimenti mostrano che quando $20 \leq y^+ \leq 100$ il cosiddetto strato logaritmico:

$$u^+ = \frac{1}{\chi} \ln y^+ + 5,5, \quad \chi = 0,41.$$

In questa regione il flusso medio è stazionario e $E = (\partial_y U_1)^2$. Così il modello $k - \epsilon$ diventa

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} \left(c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} + \epsilon &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(c_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) - c_1 k E + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} &= 0 \end{aligned}$$

Verifichiamo che le due sono soddisfatte da:

$$k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu}}, \quad \epsilon = \frac{u^{*3}}{\chi y} \text{ e } E = \frac{u^{*2}}{\chi^2 y^2}.$$

Le due equazioni del modello diventano:

$$\begin{aligned} 0 - c_\mu \frac{u^{*4}}{c_\mu} \frac{\chi y}{u^{*3}} \frac{u^{*2}}{\chi^2 y^2} + \frac{u^{*3}}{\chi y} &= 0 \\ \frac{c_\epsilon}{c_\mu} \frac{u^{*4}}{y^2} - c_1 \frac{U^{*4}}{\sqrt{c_\mu}} \chi^2 y^2 + c_2 \sqrt{c_\mu} \frac{u^{*4}}{\chi^2 y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Compatibili solo se:

$$c_\epsilon = \frac{\sqrt{c_\mu}}{\chi^2} (c_2 c_\mu - c_1) = 0,08.$$

Successivamente, questi valori furono leggermente modificati per dare migliori risultati. Le simulazioni numeriche condotte ora, valorizzano le costanti come introdotto all'inizio del capitolo.

2.4 Condizioni al bordo

Delle condizioni al bordo naturali potrebbero essere

$$k, \epsilon \text{ date al tempo } t = 0 ; k|_{\Gamma} = 0, \epsilon|_{\Gamma} = \epsilon_{\Gamma}$$

Tuttavia ϵ_{Γ} non è nota al bordo solido e se anche lo fosse, non sarebbe sufficiente perché il modello non è valido nelle vicinanze del bordo solido dove il Reynolds locale è basso.

2.4.1 Leggi di parete

Originariamente il modello $k - \epsilon$ è stato usato con leggi di parete per le parti di Γ corrispondenti al bordo solido. L'idea è di rimuovere il sottostrato viscoso e lo strato logaritmico dal dominio computazionale e usare la legge logaritmica come condizione al bordo:

$$k|_{y=\delta} = u^{*2} c_{\mu}^{-\frac{1}{2}}, \quad \epsilon|_{y=\delta} = \frac{u^{*3}}{\chi \delta}.$$

Questa funziona solo se $20 \leq \frac{\delta}{y^*} \leq 100$ e quando lo strato limite non si separa. Purtroppo il dominio computazionale per k ed ϵ non è lo stesso di quello per \mathbf{U} anche se viene prescritta anche per questo una legge di parete. Leggi di parete per \mathbf{U} sono del tipo:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{U} \cdot \mathbf{s}}{\partial n} = g(\mathbf{U} \cdot \mathbf{s}) \text{ a } y = \delta.$$

In questo caso conosciamo la funzione g analiticamente, perché la legge di parete è:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{s} \left| \nu \frac{\partial \mathbf{U} \cdot \mathbf{s}}{\partial n} \right|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\chi} \log \left(\frac{\delta}{\sqrt{\nu}} \left| \frac{\partial \mathbf{U} \cdot \mathbf{s}}{\partial n} \right|^{\frac{1}{2}} \right) + \beta.$$

Queste non sono molto semplici da implementare per i calcolatori. Formano un forte accoppiamento non lineare tra le incognite in gioco, dove il numero di Reynolds appare esplicitamente. È una delle maggiori difficoltà numeriche del modello $k - \epsilon$

2.4.2 Modello Low-Reynolds

La legge di parete non vede la soluzione di Navier-Stokes e le equazioni della turbolenza nelle regioni a ridosso del bordo solido. Ma dal momento che questa tecnica fallisce quando ci si trova di fronte a separazioni di flusso, non è chiaro come considerare nei calcoli le ricircolazioni.

Una possibilità è di modificare i coefficienti del modello originario per considerare questi effetti. Per questo motivo, questi modelli sono chiamati - Low-Reynolds. Più precisamente le costanti del modello $k - \epsilon$, c_{μ} , c_1 , c_2 sono

moltiplicate rispettivamente da f_μ, f_1, f_2 che sono funzioni positive tali che $0 < f_\mu \leq 1, 1 \leq f_1$ e $0 < f_2 \leq 1$ e che dipendono da due Reynolds locali:

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon} \text{ e } R_y = \sqrt{k} \frac{y}{\nu}$$

Un esempio (Lam-Bremhorst[1981])

$$f_\mu = [1 - \exp(-0,0165R_y)]^2 \left(1 + \frac{20,5}{R_t}\right),$$

$$f_1 = 1 + \left(\frac{0,05}{f_\mu}\right)^3, \quad f_2 = 1 - \exp(-R_t^2),$$

e le condizioni al bordo sono:

$$\mathbf{u} = 0, \quad k = 0 \text{ e } \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$$

Altri modelli sono stati proposti per queste funzioni, ma dal punto di vista della implementazione ad elementi finiti, una delle difficoltà di questi modelli è che spesso offrono una condizione al bordo complessa per ϵ a parete che presuppone la conoscenza della derivata seconda di k nella direzione normale alla parete stessa. Inoltre dal momento che ϵ ha forti derivate normali vicino alle pareti questi modelli richiedono un raffinamento della mesh nelle vicinanze della parete.

2.5 Analisi matematica e approssimazione

Prima di passare all'implementazione numerica del modello, è opportuno fare alcune considerazioni teoriche per risolverlo. In particolare chiedersi se il problema è ben posto e se la soluzione è stabile. Sarebbe infatti molto difficile eseguire un programma che cerca di risolvere un problema che non ammetta soluzione o che questa cresca in maniera esponenziale.

Il modello $k - \epsilon$ accoppiato con le equazioni di Navier-Stokes costituisce un sistema molto complicato, con condizioni al contorno altrettanto complesse; provarne l'esistenza, l'unicità e la stabilità può essere un esercizio molto complicato. Tuttavia, il modello risulta essere piuttosto instabile numericamente in certe condizioni, quindi è importante capirne i motivi. Ci sono inoltre alcune controversie che riguardano l'esistenza di una soluzione fisica del sistema in domini con angoli.

Poichè la viscosità è $\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$, il modello perde di significato se ϵ è negativo. Inoltre la fisica richiede che anche k lo sia.

In questo capitolo si analizzerà prima questo aspetto. Si aggiungeranno alcuni risultati parziali sull'esistenza e sulla regolarità e alcune conclusioni sulla stabilità del modello, collegata proprio alla positività dei termini turbolenti.

2.6 Positività di k ed ϵ

2.6.1 Forme alternative

Poniamo $\theta = \frac{k}{\epsilon}$. Il sistema diventa:

$$\begin{aligned} D_t \theta &= \frac{1}{\epsilon} D_t k - \frac{k}{\epsilon^2} D_t \epsilon = \theta^2 E(c_\mu - c_1) - 1 + c_2 \\ &\quad + \frac{c_\mu}{\epsilon} \operatorname{div} \left(\frac{k^2}{\epsilon} \nabla k \right) - c_\epsilon \frac{k}{\epsilon^2} \operatorname{div} \left(\frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon \right). \end{aligned}$$

Quindi

$$D_t \theta = \theta^2 E(c_\mu - c_1) - 1 + c_2 + c_\mu \frac{\theta}{k} \operatorname{div} (k \theta \nabla k) - c_\epsilon \frac{\theta^2}{k} \operatorname{div} (k \theta \nabla \frac{k}{\theta}).$$

che può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} D_t \theta - \theta^2 E(c_\mu - c_1) + 1 - c_2 \\ &= (c_\mu - c_\epsilon) \theta^2 \Delta k + c_\epsilon k \theta \Delta \theta + 4 \operatorname{sign}(k) (c_\mu - c_\epsilon) \\ &\quad \theta^2 |\nabla \sqrt{|k|}|^2 + (c_\mu + 2c_\epsilon) \nabla k \cdot \nabla \theta - c_\epsilon k |\nabla \theta|^2 \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

2.6.2 Positività e crescita esponenziale senza viscosità

Se non ci fossero termini viscosi nelle equazioni per k ed ϵ , allora l'equazione per θ diventerebbe una equazione differenziale ordinaria autonoma sulle linee di flusso:

$$D_t \theta - \theta^2 E(c_\mu - c_1) + 1 - c_2 = 0$$

Questa ha sempre una soluzione positiva limitata quando le condizioni iniziali e quelle al bordo sono positive. perché $c_\mu < c_1$ e $c_2 > 1$. Per esempio, quando E è costante e $\theta(0) = \theta^0$

$$\theta = \frac{\theta^+ - K \theta^- e^{-st}}{1 - K e^{-st}}$$

dove

$$\theta^\pm = \pm \sqrt{\frac{c_2 - 1}{E(c_1 - c_\mu)}}, \quad s = \sqrt{(c_2 - 1)(c_1 - c_\mu)E},$$

e

$$K = \frac{\theta^0 - \theta^+}{\theta^0 - \theta^-}$$

In modo simile, in assenza di termini viscosi, l'equazione per k si riduce a

$$D_t \log k = c_\mu \theta E - \frac{1}{\theta}$$

che ha sempre una soluzione positiva per dati positivi ma cresce esponenzialmente quando $c_\mu \theta^2 E > 1$.

2.6.3 Positività nel caso di condizioni al bordo di Dirichlet

Analizziamo ora il sistema completo per θ e k usando il principio del massimo. Il sistema risulta:

$$\begin{aligned} D_t\theta - \theta^2 E(c_\mu - c_1) + 1 - c_2 \\ = (c_\mu - c_\epsilon)\theta^2 \Delta k + c_\epsilon k \theta \Delta \theta + 4 \operatorname{sign}(k)(c_\mu - c_\epsilon)\theta^2 |\nabla \sqrt{|k|}|^2 + \\ + (c_\mu + 2c_\epsilon) \nabla k \cdot \nabla \theta - c_\epsilon k |\nabla \theta|^2. \end{aligned}$$

$$D_t k - c_\mu k \theta E - \operatorname{div}(c_\mu k \theta \nabla k) + \frac{k}{\theta} = 0.$$

Assumiamo dati iniziali positivi e condizioni al bordo di Dirichlet; supponiamo inoltre che la soluzione sia differenziabile con continuità.

Sia t^* il primo istante temporale per il quale θ si annulli e assumiamo che k sia positiva nell'intervallo $[0, t^*]$. Sia x^* il punto dove questo accade. Poichè abbiamo assunto *smooth* le funzioni θ e k e poichè x^* non può essere sul bordo (dove θ è noto), x^* deve essere un minimo per θ così abbiamo:

$$\nabla \theta(x^*, t^*) = 0, \quad \theta(x^*, t^*) = 0 \text{ (e se } \theta \in C^2 : \Delta \theta(x^*, t^*) \geq 0 \text{)}.$$

Scrivendo l'equazione per θ in questo punto, otteniamo:

$$\partial_t \theta = c_2 - 1 > 0$$

E' una contraddizione; infatti $t \rightarrow \theta(x^*, t)$ è decrescente fino a t^* , così $\partial_t \theta$ è negativa e improvvisamente diventa positiva; così θ non è differenziabile con continuità (in ogni caso cresce nuovamente oltre lo zero). Sia ora $x^0(t)$ il minimo di $k(x, t)$ in x . Se $x^0(t)$ è sul bordo, allora il minimo diventa positivo, k è positiva al tempo t . Se $x^0(t)$ non è sul bordo, allora ∇k è zero e $\Delta k \geq 0$ in $\{x^0(t), t\}$. Così l'equazione per k :

$$\partial_t k + \mathbf{U} \nabla k - c_\mu k \theta E - c_\mu k \theta \Delta k - c_\mu \nabla(k\theta) \cdot \nabla k + \frac{k}{\theta} = 0.$$

rende:

$$\partial_t k \geq k(c_\mu \theta E - \frac{1}{\theta}) \text{ in } \{x^0(t), t\}.$$

Ora sia $\kappa(t) = k(x^0(t), t)$. Per costruzione $\partial_t \kappa = \partial_t k$ così l'equazione sopra implica:

$$\kappa(t) = \min_x k(x, t) \geq \kappa(0) e^{\int_0^t [c_\mu \theta E - \frac{1}{\theta}](x^0(t'), t') dt'}$$

Quindi k è strettamente positivo.

2.7 Esistenza della soluzione

Un risultato parziale di esistenza che riportiamo senza dimostrazione, è dovuto a Lewandoski e altri [1991]. La loro analisi è basata su una nuova variabile $\varphi = \frac{\epsilon^2}{k^3}$ che soddisfa il seguente

$$\begin{aligned}
D_t\varphi + (3c_\mu - 2c_1)E\varphi\theta + (2c_2 - 3)\frac{\varphi}{\theta} &= \\
&= 2\frac{\epsilon}{k^3}\operatorname{div}(c_\epsilon\frac{k^2}{\epsilon}\nabla\epsilon) - 3\frac{\epsilon^2}{k^4}\operatorname{div}(c_\mu\frac{k^2}{\epsilon}\nabla k) \\
&= -3c_\mu\varphi^2\theta^2\operatorname{div}(\frac{1}{\varphi\theta}\nabla\frac{1}{\varphi\theta^2}) + 2c_\epsilon\varphi^2\theta^3\operatorname{div}(\frac{1}{\varphi\theta}\nabla\frac{1}{\varphi\theta^3}) \\
&= (3c_\mu - 2c_\epsilon)\frac{\Delta\varphi}{\varphi\theta} + 6(c_\mu - c_\epsilon)\frac{\Delta\theta}{\theta^2} + \\
&\quad + (21c_\mu - 20c_\epsilon)\frac{\nabla\theta \cdot \nabla\varphi}{\theta^2\varphi} - \\
&\quad + (9c_\mu - 6c_\epsilon)\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2\theta} - (24c_\mu - 30c_\epsilon)\frac{|\nabla\theta|^2}{\theta^3}.
\end{aligned}$$

Il vantaggio di questa equazione rispetto a quella per k è che in assenza di termini viscosi (la parte destra), è esplicita in $\log \varphi$:

$$D_t \log \varphi = -(3c_\mu - 2c_1)E\varphi\theta - (2c_2 - 3)\frac{\varphi}{\theta}.$$

Quindi φ è sempre decrescente poichè $3c_\mu - 2c_1 = 0,0188$, e $2c_2 - 3 = 0,84$. Considerando il seguente modello:

$$D_t\theta - c_\theta\operatorname{div}(\frac{\nabla\theta}{\varphi\theta}) - E(c_\mu - c_1)\theta^2 + 1 - c_2 = 0$$

$$D_t\varphi - c_\varphi\operatorname{div}(\frac{\nabla\varphi}{\varphi\theta}) - E\varphi\theta(3c_\mu - 2c_1) + (2c_2 - 3)\frac{\varphi}{\theta} = 0,$$

dove a, b, c, e sono funzioni C^∞ di x, t strettamente positive, e dove c_φ e c_θ sono costanti strettamente positive. Considerando le seguenti condizioni al bordo:

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= \theta^0 & \varphi(0) &= \varphi^0 \\
\theta|_\Gamma &= \theta_\Gamma & \varphi|_\Gamma &= \varphi_\Gamma
\end{aligned}$$

Questo modello è esattamente identico al modello $k - \epsilon$ con una diffusione modificata dello stesso tipo della precedente poichè $\frac{k^2}{\epsilon} = \frac{1}{\varphi\theta}$.

Teorema 2.1 *Assumiamo che $E, \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega \times]0, T'[)$ e che $\theta^0, \varphi^0, \theta_\Gamma, \varphi_\Gamma$ siano strettamente positive e limitate. Allora esiste $\{\theta, \varphi\} \in L^\infty(0, T'; H^1(\Omega))^2$ soluzione del sistema. Inoltre $\{\theta, \varphi\}$ sono positive e limitate.*

2.8 Metodi numerici

2.8.1 Formulazione variazionale

Si consideri il seguente modello:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{div}[\nu_T(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad a \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \nu \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\partial \mathbf{n}} = b \end{aligned}$$

dove a, b sono funzioni note di $\mathbf{u}, k, \epsilon, \nabla \mathbf{u}$ e $\nu_T = \nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$. Queste condizioni al contorno derivano dalla legge di parete, illustrata in precedenza.

La formulazione variazionale può essere scritta nello spazio delle funzioni a traccia e a divergenza nulla:

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\nu_T(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \int_\Gamma [a \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} - b \mathbf{v}] &= 0 \\ \forall \mathbf{v} \in J_{0n}(\Omega); \quad \mathbf{u} \in J_{0n}(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\} \end{aligned}$$

2.8.2 Discretizzazione con il metodo delle caratteristiche

Con la discretizzazione della derivata totale, possiamo considerare uno schema semi-implicito,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^{m+1} - \mathbf{u}_h^m, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{2}(\nu_{T_h}^m(\nabla \mathbf{u}_h^{m+1} + \nabla \mathbf{u}_h^{m+1T}), \nabla \mathbf{v}_h + \nabla \mathbf{v}_h^T) \\ + \int_\Gamma (a^{m+1} \mathbf{u}_h^m - b^m) \mathbf{v}_h d\gamma = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in J_{0n}(\Omega) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_h^{m+1} \in J_{0nh} = \{\mathbf{v}_h \in V_h : (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h; \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_h|_\Gamma = 0\}$$

dove $V_h \in Q_h$ sono spazi ad elementi finiti che soddisfino la condizione inf-sup, ad esempio, data una triangolazione T_h di Ω , lo spazio dei polinomi costanti a tratti quadratici per la velocità, lineari per la pressione:

$$V_h = \{\mathbf{v} \in C^0(\bar{\Omega})^3 : v_i|_T \in P^2, i = 1, 2, 3 \forall T \in T_h\}$$

$$Q_h = \{q \in C^0(\bar{\Omega}) : q|_T \in P^1, \forall T \in T_h\}$$

e $\nu_{T_h}^m$ è ν_T , valutata al tempo $n\delta t$.

Ci possono essere problemi con lo spazio J_{0nh} e la scelta della normale \mathbf{n}_h , specialmente se Ω ha angoli ma è possibile considerare:

$$J'_{0nh} = \{\mathbf{v}_h \in V_h : (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, \nabla q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\}$$

perché:

$$0 = (\mathbf{u}, \nabla q) = -(\operatorname{div}(\mathbf{u}, q) + \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} q d\gamma, \forall q \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ e } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$$

Con lo spazio J'_{0nh} le condizioni al bordo sono soddisfatte solo in senso debole, ma la normale n_h non appare ora. Le tecniche sviluppate per le equazioni di Navier-Stokes possono essere adattate a questo sistema, in particolare la soluzione del sistema lineare può essere ricavata con l'algoritmo del gradiente coniugato, o preferibilmente, con un gradiente bi-coniugato. Tuttavia le matrici dovranno essere ricostruite ad ogni iterazione perché a, ν_T dipendono da m .

Per risolvere le equazioni $k-\epsilon$, possiamo usare lo stesso metodo; aggiungiamo al precedente sistema: per ogni $w_h \in W_{0h}$

$$\begin{aligned} & (k_h^{m+1} - k_h^m oX_h^m, w_h) + \delta t c_\mu \left(\frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} \nabla k_h^{m+1}, \nabla w_h \right) \\ & + \int_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} [\epsilon_h^m - c_\mu \frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} E_h^m](X(t)dt, w_h) = 0, \\ & (\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m oX_h^m, w_h) + \delta t c_\epsilon \left(\frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} \nabla \epsilon_h^{m+1}, \nabla w_h \right) \\ & + \int_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} [c_1 k_h^m E_h^m - c_2 \frac{\epsilon_h^{m^2}}{k_h^m}](X(t)dt, w_h) = 0. \end{aligned}$$

dove $E_h^m = \frac{|\nabla \mathbf{u}_h^m + \nabla \mathbf{u}_h^{Tm}|^2}{2}$. Gli integrali da mk a $(m+1)k$ sono risolti lungo le linee di flusso per una maggiore stabilità del metodo numerico. Ad ogni iterazione, occorre calcolare il termine destro con il metodo delle caratteristiche di Galerkin e:

- risolvere il sistema lineare per u_h^{m+1}, p_h^{m+1} ,
- risolvere il sistema lineare per $k_h^{m+1}, \epsilon_h^{m+1}$

L'algoritmo non è molto stabile e converge lentamente in alcuni casi. Maggiori performance si ottengono in una più implicita versione di entrambe le equazioni risolte simultaneamente da un metodo come GM-RES:

$$\begin{aligned} & (k_h^{m+1} - k_h^m oX_h^m, w_h) + \delta t c_\mu \left(\frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} \nabla k_h^{m+1}, \nabla w_h \right) \\ & + \int_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} [\epsilon_h^{m+1} - c_\mu \frac{k_h^{m+1^2}}{\epsilon_h^{m+1}} E_h^m](X(t)dt, w_h) = 0, \\ & (\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m oX_h^m, w_h) + \delta t c_\epsilon \left(\frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} \nabla \epsilon_h^{m+1}, \nabla w_h \right) \\ & + \int_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} [c_1 k_h^{m+1} E_h^m - c_2 \frac{\epsilon_h^{m+1^2}}{k_h^{m+1}}](X(t)dt, w_h) = 0. \end{aligned}$$

2.8.3 Schema semi-implicito

Per ridurre i costi dello schema implicito si consideri il seguente metodo:

$$(k_h^{m+1} - k_h^m oX_h^m, w_h) + \delta t c_\mu \left(\frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} \nabla k_h^{m+1}, \nabla w_h \right) + \\ \delta t k_h^{m+1} \left(\frac{\epsilon_h^m}{k_h^m}, w_h \right) = \delta t c_\mu \left(\frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} E_h^m, w_h \right)$$

$$(\epsilon_h^{m+1} - \epsilon_h^m oX_h^m, w_h) + \delta t c_\epsilon \left(\frac{k_h^{m^2}}{\epsilon_h^m} \nabla \epsilon_h^{m+1}, \nabla w_h \right) + \\ \delta t c_2 \left(\epsilon_h^{m+1} \frac{\epsilon_h^m}{k_h^m}, w_h \right) = \delta t c_1 (k_h^m E_h^m, w_h), \forall w_h \text{ in } W_{0h}.$$

L'idea di base è di splittare i termini di ordine zero nella loro parte positiva e parte negativa e trattare implicitamente i termini positivi e esplicitare gli altri. Tutti i termini sulla sinistra saranno positivi, così come quelli sulla destra. Il principio del massimo per le equazioni differenziali alle derivate parziali nel caso discreto assicura la positività di $k_h^{m+1}, \epsilon_h^{m+1}$ quando le triangolazioni hanno solo angoli acuti.

Capitolo 3

Simulazioni numeriche

In questo capitolo verranno presentate delle simulazioni numeriche per la validazione del modello. L'ambiente di implementazione del codice è LifeV, una libreria di metodi numerici agli elementi finiti (FE) per la risoluzione di problemi differenziali. Il progetto LifeV è nato dalla collaborazione di tre istituzioni: École Polytechnique Fédérale de Lausanne (CMCS) in Svizzera, Politecnico di Milano (MOX) in Italia e INRIA (BANG) in Francia ed è attualmente seguito da una comunità internazionale di sviluppatori. La libreria è sviluppata in linguaggio C++ ed evolve come supporto alla ricerca nel campo dei metodi matematici e numerici, ma al tempo stesso si propone come strumento risolutivo in diversi campi applicativi (problemi di dinamica dei fluidi e delle strutture, trasporto di calore, interazione fluido-struttura, trasporto in mezzi porosi,...). Per l'implementazione del modello in esame sono state utilizzate due *template class* già esistenti: la prima, *OseenSolver* per la risoluzione del problema di Navier-Stokes, l'altra *ADRassembler* per la risoluzione del problema di diffusione e trasporto.

Il modello, come illustrato infatti non è lineare e i coefficienti sono variabili in tempo, perchè funzioni delle soluzioni al passo precedente. L'attuale implementazione della classe *ADRassembler* non prevede l'assemblaggio di un modello a coefficienti non costanti. L'implementazione ha previsto pertanto l'aggiunta di una classe chiamata *CoefficientManager* per il calcolo dei coefficienti utili al modello. Una prima versione di questa classe ha previsto il calcolo dei coefficienti mediati su tutti gli elementi finiti. L'idea iniziale era infatti quella di non modificare la template class per l'assemblaggio delle equazioni per le quantità turbolente, l'*ADRassembler*, mantenendo il più astratto possibile la sua natura. Tuttavia questa idea uniformava i coefficienti su tutto il dominio di calcolo, compromettendo le peculiarità del modello e il passaggio dei coefficienti corretti, ai metodi di assemblaggio. Si è proceduto quindi con la modifica della template class utilizzando opportuni metodi di estrazione locale della soluzione sull'elemento finito. Il metodo estrae il vettore locale della soluzione sui gradi di libertà. Ad ogni passo tempo-

rale, infatti l'*ADRassembler* viene aggiornato con la soluzione corrente per permettere l'estrazione utile allo step successivo.

3.1 Risultati

Sia per le difficoltà nella creazione di mesh ad hoc, sia per le difficoltà implementative delle condizioni al bordo solido (leggi di parete), verrà illustrato un modello di semplice validazione delle equazioni per k ed ϵ di diffusione e trasporto in un campo di velocità uniforme, in un dominio rettangolare bidimensionale, verificando il decadimento spaziale delle quantità turbolente. Successivamente nello stesso dominio, verrà illustrata la simulazione di un flusso di tipo *mixing layer*.

3.1.1 Decadimento spaziale della turbolenza

Viene analizzato il decadimento spaziale della turbolenza in un flusso uniforme $\mathbf{u} = (1, 0)$ in un dominio $\Omega = [0, 1][0, 1/10]$. Il sistema viene risolto imponendo sul bordo di inflow $k = k^0 = 2$ ed $\epsilon = \epsilon^0 = 2$ e condizioni di Neumann omogeneo sulla parte restante del bordo a partire da condizioni iniziali $k = k^0, \epsilon = \epsilon^0$. Vengono considerati elementi finiti \mathbb{P}^1 e i passi spaziali e temporali $h = 0.05$ e $\delta t = 0.01$. Si riporta l'output di Paraview con il confronto tra la soluzione numerica e quella teorica.

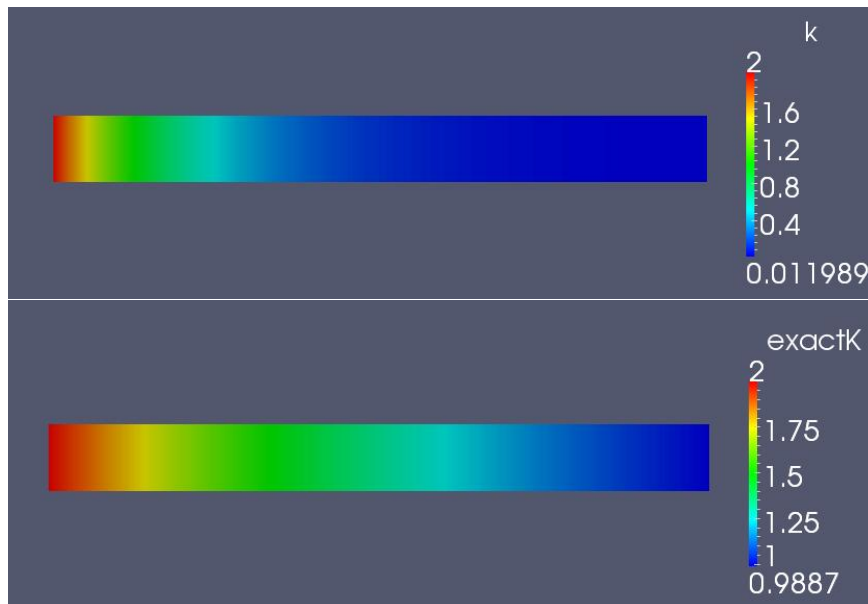
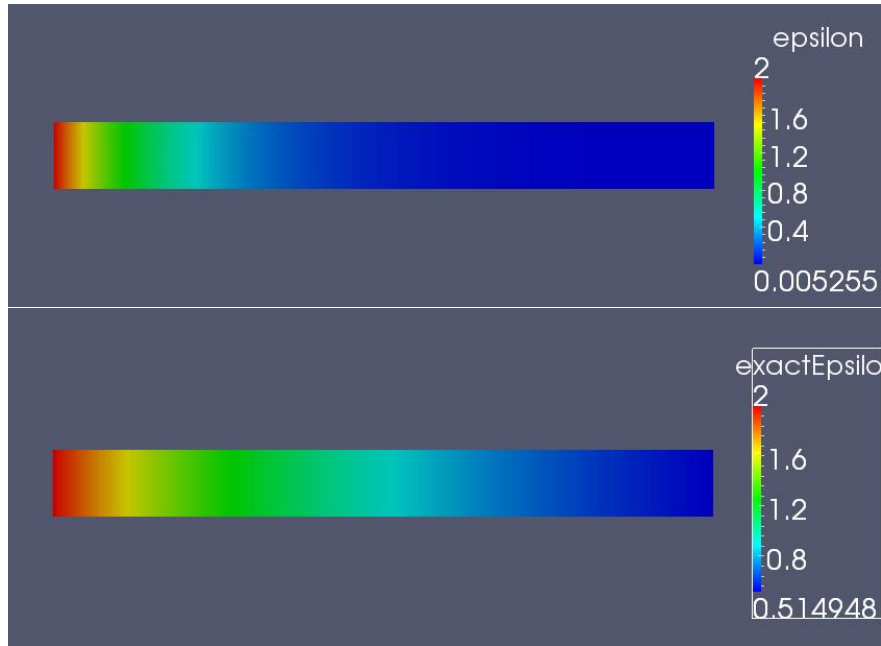


Figura 3.1: Soluzione per k numerica ed esatta

Figura 3.2: Soluzione per ϵ numerica ed esatta

La soluzione ottenuta è stata confrontata con la soluzione analitica data da:

$$k = k^0 \left(1 + (C_2 - 1)x \frac{\epsilon^0}{k^0}\right)^{\frac{1}{1-c_2}}$$

$$\epsilon = \epsilon^0 \left(1 + (C_2 - 1)x \frac{\epsilon^0}{k^0}\right)^{\frac{c_2}{1-c_2}}$$

L'errore in norma L^2 è dell'ordine di 10^{-1} . Difatti si osserva che nella simulazione numerica, il modello sembra decadere maggiormente rispetto a ciò che ci si aspetta teoricamente.

3.1.2 Flusso di tipo mixing layer

Viene utilizzato il modello $k-\epsilon$ per la simulazione di un flusso di tipo *mixing layer*.

Si considera un dominio $\Omega = [0, 1][-1/8, 1/8]$ con condizioni al contorno date da

$$-p\mathbf{n} + (\nu + \nu_T) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

$$\frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

su $\Gamma_{out} = \{(x, y) \in \partial\Omega, x = 1\}$, $\forall t > 0$. Mentre sulla restante parte del bordo:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } y > 0, \\ (2, 0), & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

$$k = k^0 = 0.01, \quad \epsilon = \epsilon^0 = 0.01,$$

A partire dalle seguenti condizioni iniziali:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } y > 0, \\ (2, 0), & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

$$k = k^0, \quad \epsilon = \epsilon^0,$$

in Ω , $t > 0$. Viene risolto il problema considerando una discretizzazione ad elementi finiti $\mathbb{P}^2/\mathbb{P}^1$ per velocità e pressione, elementi finiti \mathbb{P}^1 per le quantità turbolente e passi di discretizzazione spaziale e temporale pari a $h = 0.1$ e $\delta t = 0.01$. Il valore di viscosità è 10^{-2} . Viene mostrato in figura 3. il profilo di velocità per alcuni passi temporali.

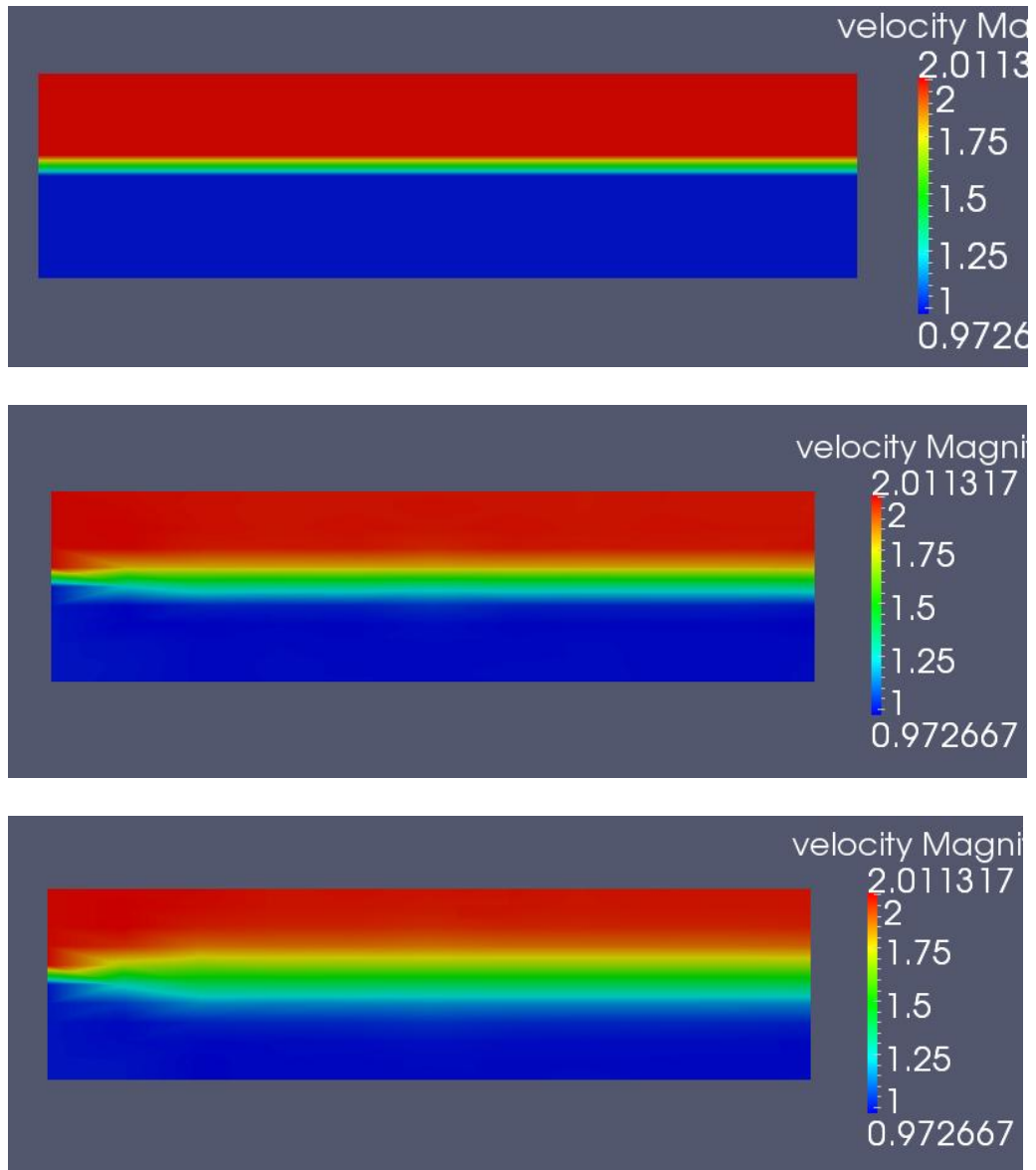


Figura 3.3: Evoluzione del profilo di velocità di tipo mixing layer

Capitolo 4

Conclusioni

Questo primo tentativo di implementazione del modello $k - \epsilon$ si è dovuto scontrare con l'impossibilità di utilizzare i metodi delle template class così come presentati nella libreria, poichè non adatti.

Il primo ostacolo è stato infatti aggirare la sola possibilità di assemblare le matrici del modello con coefficienti costanti. Questo ha portato a delle sostanziali modifiche alla struttura, ad esempio della classe che assembla le matrici per le equazioni di diffusione, trasporto e reazione, affinché gestissero anche casi come questi. I coefficienti calcolati, tuttavia sono ad-hoc per questo modello e le modifiche sono pertanto lontane dall'essere generali e utilizzabili per altri modelli con coefficienti non costanti.

L'approssimazione del valore del coefficiente con la media della soluzione sull'elemento finito ha sicuramente compromesso il risultato ed è necessario rivedere l'implementazione per una maggiore accuratezza. Uno dei principali sviluppi potrebbe essere quindi quello di prevedere una classe ad-hoc per il modello implementato (ad esempio un *KEPSAssembler* o, ad un livello più astratto, agire sui metodi di assemblaggio elementari per gestire ADR a coefficienti non costanti per simulare questo e altri modelli della fluidodinamica.

Bibliografia

- [1] B. Mohammadi e O. Pironneau, *Analysis of the K-Epsilon Model*. Masson, 1994.
- [2] A. Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. Springer, 2008.
- [3] L.Formaggia, F.Saleri, A. Veneziani *Applicazioni ed Esercizi di Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. Springer, 2005.
- [4] J.E.Bardina, P.G.Huang, T.J. Coakley *Turbulence Modeling Validation, Testing, and Development*. Ames Research Center, 1997.
- [5] D.Kuzmin, O.Mierka, S. Turek *On the implementation of the k-Epsilon turbulence model in incompressible flow solvers based on a finite element discretization*. Institute of Applied Mathematics (LS III), University of Dortmund, Dortmund, Germany.