

POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Pricing e Risk-Management dei prodotti derivati
su tassi di interesse nel quadro Multi-Curve**

Relatore:

Prof. Carlo Sgarra

Candidato:

Flavia Galante

Matr. 734584

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

Mutando riposa

Elenco delle figure	10
Elenco delle tabelle	12
1 La problematica multi-curve	14
1.1 Introduzione	14
1.2 Evoluzione del mercato	15
1.2.1 Divario tra i tassi di swap Euribor ed Eonia	16
1.2.2 Tassi FRA e tassi Forward	18
1.2.3 Basis Swaps	18
1.2.4 Collateralizzazione e Eonia discounting	20
1.3 Evoluzione della metodologia di pricing	21
1.4 Ipotesi e notazioni	23
1.4.1 Quadro mono-curve	24
1.4.2 Quadro multi-curve	25
2 Costruzione delle curve dei tassi d'interesse in multi-curve	28
2.1 Strumenti di calibrazione	28
2.2 Bootstrapping nel quadro mono-curve	34
2.3 Bootstrapping nel quadro multi-curve	35
2.4 Il ruolo dell'interpolazione	35
2.5 Test numerici	36
3 Generalizzazione del modello di Hull-White	38
3.1 Il quadro Heath-Jarrow-Morton (HJM)	38
3.2 Modello Hull-White 1 fattore	40
3.3 Modello Hull-White 2 fattori	43
3.4 Modello di Kenyon	45
3.4.1 Probabilità risk-neutral	48
3.4.2 T -forward measure	50
3.4.3 Swaptions	55
3.5 Test numerici	61
4 Soluzione numerica grazie all'EDP	66
4.1 Equazione alle Derivate Parziali associata al problema	66
4.2 Discretizzazione: schema ADI	68
4.2.1 Interesse del metodo ADI	70
4.2.2 Metodo ADI per una EDP con termine misto	72
4.3 Applicazione ad una swaption bermuda	76
4.3.1 Swaptions bermuda	77

4.3.2 Test numerici	79
Conclusioni	86
A Banche contributrici nella zona Euro	90
B Quotazione degli strumenti di mercato	92
C Cambio di numerario	95
D Generalizzazione dell'Isometria di Itô	97
Bibliografia	102
Ringraziamenti	106

Abstract

Since the subprime crisis of 2007, massive arbitrages have raised the question of the traditional valuation theory for rate products. It is now widely recognised that a unique rate curve is no longer enough to reproduce the behaviour of the market of interest rates and that it is necessary to consider several curves to estimate forward rates of different tenors.

In this report, we shall first present the multi curve model in terms of vanilla option prices and general pricing methods then we shall tackle the question of the construction of several curves. Finally, we shall get into more details for the Kenyon model, a multi curve extension of the one factor Hull-White model that will allow us to have a theoretical framework to price bermudan swaptions thanks to a 2 dimensional PDE and an ADI numerical method.

In particular, in Chapter 1 we will detail the multi-curve problematic, giving some examples that gave rise to the problem (the cotations of the forward swap rates Euribor vs Eonia, the FRA rates vs Forward rates and the basis swaps) and describing the market evolution in the pricing of interest rate derivatives.

In Chapter 2 we will introduce the bootstrapping procedure to build the yield curves. First we will illustrate the market instruments used for the calibration procedure, then we will show the difference between the mono-curve and the multi-curves frameworks in the construction procedure, giving numerical examples.

In Chapter 3, we shall first recall the HJM framework, then we shall illustrate the Hull-White 1 and 2 factors models and finally we shall detail the Kenyon framework. We will demonstrate the existence of an analytical formula for the pricing of an European Swaption.

In Chapter 4 considering the Kenyon framework, for an interest rate derivative we will write the 2-dimensional PDE associated to the state variables and we will solve numerically the problem thanks to the ADI method to price a Bermudan Swaption.

Sommario

A partire dalla crisi dei subprimes del 2007, numerose violazioni delle condizioni di non arbitraggio sono state osservate sul mercato e hanno quindi rimesso in discussione le fondamenta della teoria tradizionale della valorizzazione dei prodotti su tassi di interesse. È ormai riconosciuto che una sola curva di tassi di interesse non è più sufficiente per riprodurre il comportamento del mercato dei tassi e che è pertanto necessario considerare numerose curve con cui calcolare i tassi forward di tenori diversi.

In questa tesi, presenteremo inizialmente la problematica multi-curve in termini di prezzi di mercato delle opzioni vaniglia e di metodologia generale di pricing. In seguito affronteremo la questione della costruzione di numerose curve ed infine descriveremo il modello di Kenyon, estensione al quadro multi-curve del modello Hull-White 1 fattore che ci fornirà il quadro teorico per valorizzare una swaption bermuda grazie ad un' EDP bidimensionale e ad un metodo numerico di tipo ADI.

In particolare, nel Capitolo 1 parleremo in dettaglio della problematica multi-curve, fornendo alcuni degli esempi concreti che hanno messo in luce il problema (le quotazioni dei tassi di swap forward Euribor vs Eonia, dei tassi FRA vs tassi forward e dei basis swap) e descrivendo l'evoluzione del mercato per quanto riguarda il pricing dei derivati su tassi di interesse.

Nel Capitolo 2 introdurremo la procedura di bootstrap utilizzata per costruire le curve. In primo luogo illustreremo gli strumenti di mercato utilizzati per la calibrazione delle curve, in secondo luogo mostreremo la differenza tra il quadro mono-curva e multi-curve per quanto riguarda la procedura di costruzione, fornendo esempi numerici.

Nel Capitolo 3 faremo inizialmente dei richiami del quadro HJM, in seguito illustreremo i modelli Hull-White 1 fattore e 2 fattori ed infine descriveremo in maniera dettagliata il modello di Kenyon. Dimostreremo inoltre, nel quadro di Kenyon, l'esistenza di un'espressione analitica per valutare il prezzo di una swaption europea.

Infine nel Capitolo 4, sempre considerando il quadro teorico di Kenyon, scriveremo l'EDP bidimensionale associata alle variabili di stato per un prodotto derivato su tasso di interesse e risolveremo numericamente il problema grazie al metodo ADI per calcolare il prezzo di una swaption bermuda.

Elenco delle figure

1.1	Confronto dei tassi di swap 1Y : Euribor vs Eonia.	16
1.2	Quotazioni di mercato dei tassi FRA3x6 contro il tasso forward ottenuto a partire da due tassi Eonia 3M e 6M consecutivi, e spread tra di loro.	19
1.3	Quotazioni di mercato dei tassi FRA6x12 contro il tasso forward ottenuto a partire da due tassi Eonia 6M e 12M consecutivi, e spread tra di loro.	19
1.4	Basis Swap 3M contro 6M.	20
2.1	Differenza in basis points tra i tassi forwards 3M ottenuti con la curva forecast 3M e quelli ottenuti con la curva forecast 12M.	37
2.2	Tassi forwards 3M ottenuti a partire dalla curva forecast 3M (in rosa), dalla curva forecast 6M (in blu chiaro) e da quella 12M (in blu scuro).	37
3.1	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 100\%$, $\sigma^S = 0\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$	62
3.2	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 20\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$	63
3.3	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 50\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$	63
3.4	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 100\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$	63
3.5	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$	64
3.6	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^S = 75\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$	64
3.7	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^S = 100\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$	64
3.8	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 100\%$, $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$ e diversi valori di σ^S	65
3.9	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 50\%$, $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$ e diversi valori di σ^S	65
3.10	Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 50\%$, $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\tilde{\sigma} = 1\%$, σ^S e diversi valori di σ	65
4.1	Prezzo della swaption bermuda (espresso in basis points) in funzione del numero di punti della discretizzazione temporale.	80
4.2	Prezzo della swaption europea (espresso in basis points) in funzione del numero di punti della discretizzazione temporale.	80
4.3	Prezzo della swaption bermuda (espresso in basis points) in funzione del numero di punti di discretizzazione spaziale, con $N_1 = N_2$	81
4.4	Prezzi delle swaptions bermuda considerate.	83
4.5	Prezzo delle opzioni switch.	84

Elenco delle tabelle

4.1	Prezzi delle swaptions bermuda considerate.	82
4.2	Massimo dei prezzi (espressi in basis points) delle swaptions europee incluse.	83
B.1	Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Eonia al 03/01/2011.	92
B.2	Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Euribor 3M al 03/01/2011.	93
B.3	Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Euribor 12M al 03/01/2011.	93
B.4	Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Euribor 6M al 03/01/2011.	94

1.1 Introduzione

La crisi finanziaria apparsa a partire dall'estate 2007 ha mostrato chiaramente i limiti delle ipotesi che venivano normalmente effettuate nei metodi tradizionali di pricing e di risk management degli strumenti finanziari su tassi d'interesse. Infatti, i rischi di liquidità e di controparte, fino ad allora completamente trascurati, hanno acquisito una dimensione tale da apparire sotto forma di grandi divergenze tra i prezzi di mercato dei prodotti di tipo vaniglia. Inoltre, nonostante la crisi si sia in un certo senso stabilizzata, tali divergenze dei prezzi si sono certamente ridotte, ma continuano tuttavia a persistere a dei livelli non più trascurabili se comparati con quelli pre-crisi. Il mercato ha quindi così conservato in memoria le cause e gli effetti della crisi e pertanto i prezzi di mercato tengono ormai conto dei rischi di liquidità e di controparte.

In seguito, daremo una descrizione dettagliata delle principali divergenze constatate a partire dall'estate 2007 tra le quotazioni dei tassi di interesse del mercato interbancario (i tassi Libor, Euribor, Eonia e Federal Bunds) e quelle tra i tassi FRA e i tassi forwards indotti da due Depositi consecutivi; allo stesso modo metteremo anche in evidenza il fatto che le quotazioni di mercato degli spread dei contratti Basis Swaps, che secondo il quadro tradizionale di pricing dovrebbero essere nulli o comunque molto vicini a zero, sono ormai molto lontane dal poter esser trascurate, cosa che impone la necessità di distinguere i tenori nella descrizione di tale prodotto finanziario.

Sia le problematiche messe in rilievo che l'uso sempre più frequente di contratti con collaterale, col fine di poter rimediare alla presenza del rischio di controparte, hanno indotto la comunità finanziaria a considerare l'idea di abbandonare la teoria classica di pricing dei

prodotti su tassi di interesse e le relazioni d'assenza d'opportunità d'arbitraggio comunemente accettate ed utilizzate e di orientarsi piuttosto verso un nuovo quadro teorico che possa inglobare e giustificare le diverse osservazioni constatate sul mercato durante la crisi e che perdurano.

In particolare, sembra che una sola ed unica curva non sia più sufficiente per descrivere correttamente il mercato dei prodotti su tassi d'interesse. Attualmente le nuove pratiche del mercato consistono nel considerare una segmentazione del mercato stesso secondo il tenore. È necessario distinguere da una parte la curva per l'attualizzazione dei flussi futuri (*curva discount*) dalla curva per il calcolo dei tassi forward (*curva forecast*), e dall'altra bisogna distinguere le curve forecast per ogni tenore.

In tal senso ci si indirizza verso una descrizione di tipo *multi-curve*.

Nel seguito, vedremo dunque come in tal contesto il pricing dei prodotti derivati su tassi di interesse cambi completamente e come le relazioni d'arbitraggio normalmente accettate che derivano dalla teoria classica debbano essere abbandonate, per far spazio ad un quadro totalmente nuovo e più generale.

Ci interesseremo inizialmente alla problematica della costruzione delle curve di tassi di interesse grazie alla procedura di bootstrap. In tal modo è possibile prezzare i prodotti derivati di tipo vaniglia. Per potere inoltre ottenere il prezzo di prodotti derivati esotici è invece necessario effettuare delle ipotesi di tipo modello e mostreremo come sarà possibile, anche nel quadro multi-curve, ottenere una formula analitica per il pricing di una swaption di tipo europea e nel caso di una swaption bermuda vedremo come ottenerne il prezzo per risoluzione numerica, tramite un metodo di splitting, dell'equazione alle derivate parziali ad essa associata.

1.2 Evoluzione del mercato

Con la crisi che ha avuto inizio il mese di Agosto 2007, dei fenomeni fino ad allora trascurabili hanno assunto una dimensione considerabile, rendendo inutilizzabili tutti gli strumenti teorici classici. Illustreremo meglio questo punto nelle sezioni successive, dando degli esempi concreti. Per far questo, restringeremo il quadro di riferimento alla zona Euro, nonostante un comportamento simile sia stato osservato anche per le altre valute.

1.2.1 Divario tra i tassi di swap Euribor ed Eonia

Uno swap Eonia¹ è un contratto swap con gamba fissa contro una gamba variabile, che è indicizzata al tasso overnight (si ha un fixing giornaliero e il tasso è una media ponderata dei depositi overnight negoziati lo stesso giorno). Vista la durata molto corta alla quale il tasso Eonia fa riferimento, si può dire che esso ingloba un rischio di credito e di liquidità talmente piccoli da poter essere trascurati; pertanto è possibile considerarlo come un buon candidato per essere scelto come tasso d'interesse senza rischio.

I tassi Euribor e Eonia hanno sempre mostrato la stessa tendenza a qualche basis point di differenza, ragione per cui essi venivano considerati entrambi come tassi d'interesse senza rischio. Tuttavia, nell'Agosto 2007 un innalzamento improvviso dei tassi di swap Euribor e un decremento dei tassi di swap Eonia hanno comportato un ingrandimento dello spread tra di loro, fino a toccare più di cento basis points l'Ottobre dell'anno successivo, cosa che coincide esattamente con il fallimento di Lehman Brothers. In seguito, tale scarto è diminuito sensibilmente e si è stabilizzato a circa cinquanta basis points nel caso dell'Euribor 6M vs Eonia 6M, ma ad ogni modo esso non è mai più ridisceso ai valori precedenti la crisi.



Figura 1.1: Confronto dei tassi di swap 1Y : Euribor vs Eonia.

L'impatto della crisi sulla percezione che il mercato ha dei rischi di credito e di liquidità unito al fatto che i tassi Euribor e Eonia non hanno né la stessa interpretazione finanziaria né la

¹Euro Overnight Index Average

stessa dinamica possono spiegare la presenza di tali spread.

- Il tasso Euribor² è il tasso di riferimento per le transazioni effettuate nel mercato OTC della zona Euro. Esso rappresenta il tasso offerto nel sistema interbancario tra le banche di prima categoria e viene pubblicato quotidianamente da Thomson Reuters alle ore 11:00 (ora italiana) a partire dai dati provenienti dalle banche che hanno il più grande volume di attività nel mercato monetario della zona Euro.

Le banche contributrici sono 44 e sono indicate in Appendice A.

L'Euribor è una media arrotondata al terzo decimale dei tassi ai quali le banche selezionate sarebbero pronte a remunerare i depositi ragionevolmente significativi, escludendo dal calcolo i 15 più alti e più bassi. Per quanto riguarda le convenzioni di calcolo si considera $(T + 2)$ e $act/360$ e la pubblicazione copre 15 date di scadenza (1 settimana, 2 settimane, 3 settimane, e da 1 mese a 12 mesi).

Si vede bene quindi in che modo i tassi Euribor riflettano il costo medio di finanziamento delle banche nel mercato interbancario, per una serie di date di scadenza fissate. È possibile quindi anche comprendere come, quando la solidità del sistema finanziario mondiale è stata messa in discussione durante la crisi, l'importante aumento dei rischi di credito e di liquidità si sia ripercosso sui tassi Euribor.

- Il tasso Eonia è il tasso di riferimento per le transazioni quotidiane nel mercato OTC della zona Euro. Lo si calcola come il tasso medio delle transazioni overnight³. L'Eonia è calcolato dalla Banca Centrale Europea e pubblicato da Thomson Reuters tra le ore 18:45 e 19:00 (ora italiana). Le banche contributrici sono le stesse del mercato monetario della zona Euro.

Come è stato sottolineato precedentemente, la durata molto breve sulla quale il tasso Eonia è definito ci autorizza a non prendere in considerazione i rischi di liquidità e di credito in esso contenuti, in modo tale da poter essere considerato come il migliore candidato del mercato per rappresentare il tasso d'interesse senza rischio.

²Euro interbank offered rate

³Overnight significa da un giorno TARGET, cioè un giorno in cui il sistema TARGET (Trans-European Automated Real-Time Gross-Settlement Express Transfer) è aperto, al giorno TARGET seguente.

È possibile quindi concludere che il divario constatato tra i tassi di swap Euribor e Eonia è una conseguenza diretta dei diversi livelli di rischio di credito e liquidità che essi riflettono, ma ciò impedisce tuttavia di determinare quale controparte possiede un rischio di credito, dal momento che essi fanno riferimento non solo al rischio di fallimento di una controparte data, ma di quello del mercato monetario nella sua totalità.

Inoltre, nonostante l'aumento della liquidità soprattutto grazie ai numerosi interventi delle banche centrali e dei governi, tale scarto è ancora presente e diviene dunque indispensabile prenderlo in considerazione.

1.2.2 Tassi FRA e tassi Forward

Lo stesso tipo di osservazioni fatte nel caso del tasso di swap Euribor contro il tasso di swap Eonia si verificano anche nel caso del tasso Euribor FRA contro tasso Forward a partire dai tassi Eonia.

Il FRA3x6 (Forward Rate Agreement) è un contratto che comincia in data *spot*, cioè oggi più due giorni lavorativi nella zona Euro, con maturità 6 mesi e una gamba variabile indicizzata al tasso forward tra 3 e 6 mesi contro una gamba fissa. Si definisce tasso FRA3x6 il valore del tasso che rende il contratto FRA equo.

Se si osservano le dinamiche delle quotazioni di mercato dei tassi FRA e dei tassi forward ottenuti a partire da due Depositi Eonia consecutivi, è possibile constatare in questo caso anche la presenza di una divergenza importante tra di essi a partire dal mese di Agosto 2007, con un picco nel mese di Ottobre 2008, cosa che corrisponde perfettamente, come precisato precedentemente, con il fallimento di Lehman Brothers.

Inoltre, come per lo spread Euribor versus Eonia, si vede bene che anche quello tra i tassi FRA e forward si è stabilizzato ad un livello che è molto diverso da zero.

È possibile fare le stesse considerazioni se si osservano le dinamiche delle quotazioni dei tassi FRA6x12 e dei tassi forward ottenuti a partire dai tassi Eonia 6M e 12M consecutivi.

1.2.3 Basis Swaps

Un altro fenomeno totalmente improvviso che è stato osservato a partire da Agosto 2007, è l'esplosione sorprendente delle quotazioni degli spreads dei Basis Swaps.

Un Basis Swap è un contratto in cui ci sono due flussi indicizzati su due tassi Euribor di tenori diversi. Esso è quotato sul mercato come la differenza dei due tassi di swap.



Figura 1.2: Quotazioni di mercato dei tassi FRA3x6 contro il tasso forward ottenuto a partire da due tassi Eonia 3M e 6M consecutivi, e spread tra di loro.

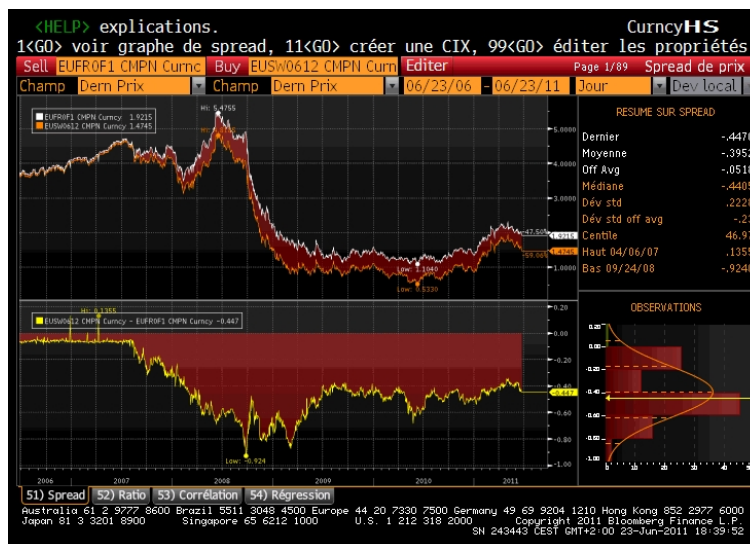


Figura 1.3: Quotazioni di mercato dei tassi FRA6x12 contro il tasso forward ottenuto a partire da due tassi Eonia 6M e 12M consecutivi, e spread tra di loro.

Per esempio la quotazione del tasso del Basis Swap Euribor 3M contro Euribor 6M è la differenza tra il tasso fisso di uno swap standard con gamba variabile Euribor 3M (pagamenti con frequenza trimestrale) contro una gamba fissa (pagamenti con frequenza annuale), e il tasso fisso di un altro swap con gamba variabile Euribor 6M (pagamenti con frequenza semestrale) contro una gamba fissa (pagamenti con frequenza annuale). La frequenza dei pagamenti della gamba variabile è il tenore dell'Euribor corrispondente.

La teoria classica assicura che bisogna osservare uno spread nullo o comunque molto piccolo.

Tuttavia, durante la crisi gli spreads quotati erano tutt'altro che trascurabili, con un picco raggiunto nell'Ottobre 2008. È possibile spiegare tale fenomeno grazie all'aumento dei rischi



Figura 1.4: Basis Swap 3M contro 6M.

di liquidità e di credito, ma anche grazie al fatto che i tassi Euribor sottostanti con tenori diversi portano con sé dei rischi diversi. Infatti, con la crisi ci si è resi conto del fatto che gli attori del mercato preferiscono molto di più ricevere dei pagamenti con una frequenza più alta indicizzata sul tasso Euribor di tenore più basso e pagare un premio per la differenza. Pertanto, in un Basis Swap la gamba variabile indicizzata sul tasso Euribor con tenore più alto deve inglobare un premio per il rischio più elevato rispetto a quello inglobato nella gamba variabile indicizzata sul tenore più basso. Ne risulta quindi uno spread tra i tassi d'equilibrio corrispondenti.

1.2.4 Collateralizzazione e Eonia discounting

Uno degli effetti più importanti dovuti alla crisi è l'aumento considerevole della presenza sul mercato di contratti con collaterale, per ridurre il rischio di controparte nei prodotti derivati nel mercato OTC.

Infatti, è possibile diminuire l'esposizione al rischio di controparte grazie all'uso del contratto di collateralizzazione (Collateral Agreement o Credit Support Annexe-CSA-) che si basa sul sistema del *margin*, cioè di un accordo contrattuale in cui le due controparti si impegnano a depositare una somma⁴ che è uguale alla variazione del Mark to Market rispetto al margin

⁴Consideriamo un contratto in presenza di collaterale tra due controparti, A e B. Se il NPV(A) è positivo allora A si aspetta di ricevere dei cashflows futuri da B. Se il NPV(B) è negativo, allora

precedente (in cash o azioni). Ad ogni istante di tempo, il montante di collaterale detenuto rappresenta il NPV totale del portafoglio, che è positivo per il creditore e negativo per il debitore. Inoltre, il debitore riceve un tasso di interesse sul collaterale che è il *collateral rate*. Questi scambi di liquidità tra creditore e debitore permettono di considerare il collaterale come un mezzo di finanziamento su delle maturità più importanti rispetto al caso dei depositi, e allo stesso tempo come un mezzo di protezione contro il default della controparte.

A causa della grande diffusione di tale tipo di contratti, i prezzi dei prodotti derivati quotati sul mercato possono essere visti come delle transazioni senza rischio. Inoltre, per il principio d'assenza d'opportunità d'arbitraggio il *margin interest rate* CSA deve essere uguale al tasso usato per l'attualizzazione dei cashflows futuri. D'altro canto, il contratto di collateralizzazione più utilizzato è caratterizzato dalla presenza dei margin con frequenza giornaliera e dall'overnight collateral rate. È per questo che è necessario utilizzare le quotazioni overnight per costruire la curva dei tassi con cui attualizzare i cashflows.

Gli swap Eonia risultano quindi essere gli strumenti più indicati per la costruzione della curva discount, in quanto forniscono la migliore approssimazione della curva del tasso senza rischio.

Qualora non si fosse in presenza del collaterale, la condizione d'assenza d'opportunità d'arbitraggio impone la necessità di attualizzare con la tradizionale struttura a termine di funding.

In tal caso allora ogni controparte possiede una propria curva di discount e fornisce un NPV diverso per i cashflows futuri e quindi un prezzo diverso. In tal modo quindi, si perde la simmetria del mercato.

Attualmente ci si trova in una fase di transizione tra la metodologia di discounting classica che si basa sull'Euribor e quella moderna che si basa sul CSA discounting.

1.3 Evoluzione della metodologia di pricing

In seguito alle evoluzioni constatate nel mercato dei tassi di interesse descritte precedentemente, le ipotesi abituali dei modelli di pricing non son più verificate. È pertanto indispensabile abbandonare il quadro classico di pricing, che si basa sulla costruzione di una sola curva di tassi utilizzata per il calcolo sia dei tassi forward che dei fattori di discount. Ci si orienta piuttosto verso un approccio di tipo multi-curve che tiene in considerazione la segmentazione

B si aspetta di pagare i cashflows futuri ad A. Il collaterale va a ridimensionare tale esposizione al credito.

del mercato.

Per quanto riguarda la curva per attualizzare i cashflows futuri, seguendo il ragionamento fatto nella sezione precedente, bisogna distinguere più casi:

- in presenza di CSA con margin di tipo giornaliero e l'overnight collateral rate si usa la curva *Eonia* ;
- in assenza di collaterale si usa la *curva di funding* e
- in presenza di CSA non standard bisogna considerare delle curve specifiche a seconda del caso.

In seguito considereremo soltanto il caso dei contratti in presenza di collaterale, quindi quando parleremo di curva di discount faremo sempre riferimento alla curva Eonia, ottenuta dalle quotazioni degli swap Eonia.

Per quanto riguarda la curva forecast, con cui calcolare i tassi forward, saremo in presenza di una moltitudine di curve, una per ogni tenore. Quindi, la costruzione delle curve forecast necessita di una selezione degli strumenti che sia coerente con il tenore del tasso d'interesse sottostante il contratto da prezzare.

È possibile riassumere la procedura da seguire nel caso multi-curve nel modo seguente:

- costruire una *curva discount* seguendo la procedura tradizionale di tipo mono-curva;
- selezionare diversi insiemi di strumenti vaniglia separati, di maturità crescenti, in cui ogni insieme sia omogeneo nel tasso sottostante (si considerano tipicamente i tenori 1M, 3M, 6M e 12M);
- costruire delle *curve forecast* separate, una per ogni tenore, usando la procedura di **bootstrapping** sugli strumenti selezionati precedentemente;
- valutare i tassi forward ed i cashflows corrispondenti su ogni curva forecast per i prodotti sullo stesso sottostante;
- calcolare i fattori d'attualizzazione grazie alla curva di discount e
- stimare i prezzi sommando i cashflows attualizzati.

1.4 Ipotesi e notazioni

Si consideri uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ di filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T_0]}$, e si assuma che non esista opportunità d'arbitraggio. Si postula, pertanto, l'esistenza di una misura neutra al rischio \mathbb{Q}^d . Sotto \mathbb{Q}^d ogni attivo non rischioso evolve al tasso senza rischio r_t^d .

Chiamiamo, inoltre, \mathbb{Q}_T^d la misura discount T -forward, cioè la misura associata al numerario che è dato dal prezzo di un bond zero-coupon all'istante t di scadenza T .

Ricordiamo che un bond zero coupon è un contratto che versa al detentore un'unità della valuta a maturità, senza versamenti intermediari.

Denotiamo con $P_d(t, T)$ il prezzo di un bond zero coupon all'istante t di maturità T , utilizzato per la costruzione della curva discount, e con $f_d(t, T)$ il tasso forward istantaneo, definiti nella maniera seguente

$$P_d(t, T) = \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \int_t^T r_u^d du \right) \right]$$

e

$$f_d(t, T) = \mathbb{E}_t^{P_d(T)} [r_T^d],$$

dove \mathbb{E}_t indica il valore atteso condizionale rispetto a \mathcal{F}_t sotto la probabilità \mathbb{Q}^d e analogamente $\mathbb{E}_t^{P_d(T)}$ è il valore atteso condizionale sotto la probabilità \mathbb{Q}_T^d .

Chiamiamo B_t “ the bank account process ” e $D(t, T)$ il fattore di discount stocastico, tali che

$$B_t = \exp \left(\int_0^t r_s^d ds \right)$$

e

$$D(t, T) = \frac{B_t}{B_T}.$$

Sia Δ un tenore fissato e si indichi con $P_\Delta(t, T)$ il prezzo di un bond zero-coupon all'istante t di maturità T associato a Δ .

Come nel caso discount, chiamiamo \mathbb{Q}^Δ la probabilità neutra al rischio associata alla dinamica di tenore Δ e \mathbb{Q}_T^Δ la misura T -forward associata a $P_\Delta(t, T)$. Un discorso simile a quello fatto nel caso discount vale in tal caso per quanto riguarda la definizione dei valori attesi

condizionali.

Denotiamo inoltre con $L(T_0, T_1)$ il tasso Libor spot fissato all'istante T_0 di maturità T_1 e con $F(t; T_0, T_1)$ il tasso forward all'istante t per il periodo futuro $[T_0, T_1]$.

Consideriamo un prodotto derivato su tassi d'interesse in presenza di CSA che è caratterizzato dal versamento di m coupons futuri di payoff $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ e che genera m cashflows nelle date future $T = \{T_1, \dots, T_m\}$.

1.4.1 Quadro mono-curva

La teoria classica mostra la validità, nel caso mono-curva, della seguente relazione d'assenza d'opportunità d'arbitraggio che lega i tassi forward ed i bond zero-coupons

$$F(t; T_0, T_1) = \frac{1}{T_1 - T_0} \left(\frac{P(t, T_0)}{P(t, T_1)} - 1 \right). \quad (1.1)$$

È infatti possibile definire il tasso forward a partire da un contratto FRA di scadenza T_0 e di maturità T_1 , che è un contratto che dona al detentore il pagamento di un tasso di interesse per il periodo futuro $[T_0, T_1]$, il cui payoff in T_1 (nominale unitario) è dato da

$$(T_1 - T_0)(K - L(T_0, T_1)).$$

Chiamiamo allora tasso forward il valore che rende il contratto FRA equo ed abbiamo

$$F(t; T_0, T_1) = \mathbb{E}_t^{P(T)} [L(T_0, T_1)],$$

che implica che i tassi forward sono per definizione delle martingale sotto la probabilità T -forward.

Nel caso mono-curva, dopo aver costruito la sola curva dei tassi grazie agli strumenti su tassi d'interesse di tipo vaniglia più liquidi⁵, si calcolano i tassi forward per ogni coupon

⁵Tipicamente si usano le quotazioni di mercato dei depositi per il primo segmento, cioè a breve termine, dei futures 3M per la parte medio-termine e degli swaps su Euribor 6M per il segmento a lungo termine.

$$F_k(t) := F(t; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{T_k - T_{k-1}} \left(\frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right), \quad t \leq T_{k-1} \leq T_k$$

ed i cashflows come il valore atteso condizionale all'istante t rispetto alla misura T_k -forward

$$c_k(t, T_k, \pi_k) = \mathbb{E}_t^{P(T_k)}[\pi_k].$$

Allora il prezzo del prodotto derivato all'istante t , con $t < T_1 < \dots < T_m$, è dato dalla somma dei cashflows futuri attesi attualizzati

$$V(t) = \sum_{k=1}^m P(t, T_k) c_k(t, T_k, \pi_k) = \sum_{k=1}^m P(t, T_k) \mathbb{E}_t^{P(T_k)}[\pi_k].$$

1.4.2 Quadro multi-curve

Per una data di riferimento t_0 , nel caso multi-curve costruiamo la sola curva di discount

$$\mathcal{C}_d = \{T \mapsto P_d(t_0, T), \quad T \geq t_0\}$$

secondo la procedura di bootstrapping di tipo mono-curva e costruiamo anche le curve,

$$\mathcal{C}_\Delta = \{T \mapsto P_\Delta(t_0, T), \quad T \geq t_0\},$$

ognuna per ogni tenore Δ , utilizzando un insieme di strumenti di tassi d'interesse di tipo vaniglia, omogenei secondo il tenore fissato.

Come è stato già illustrato, si considerano tipicamente tenori quali $\Delta = 1M, 3M, 6M, 12M$ e si utilizza una procedura di tipo bootstrapping, grazie anche alla curva discount precedentemente costruita.

Per ogni coupon $k = 1, \dots, m$, per un tenore Δ per un tenore Δ il tasso FRA $\tilde{F}_{\Delta,k}(t)$ è calcolato nella maniera seguente

$$\tilde{F}_{\Delta,k}(t) := \tilde{F}_\Delta(t; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{T_k - T_{k-1}} \left(\frac{P_\Delta(t, T_{k-1})}{P_\Delta(t, T_k)} - 1 \right), \quad t \leq T_{k-1} \leq T_k$$

dove $P_\Delta(t, T)$ rappresenta il prezzo di un bond zero-coupon fittizio all'istante t di maturità T che ci permetterebbe di ottenere la curva \mathcal{C}_Δ , che è stata ottenuta grazie al bootstrap delle quotazioni degli strumenti di mercato considerati.

Calcoliamo poi i cashflows come il valore atteso condizionale all'istante t rispetto alla misura discount T_k forward, che è associata al numerario $P_d(t, T_k)$ della curva discount \mathcal{C}_d

$$c_k(t, T_k, \pi_k) = \mathbb{E}_t^{P_d(T_k)}[\pi_k].$$

È possibile quindi calcolare il prezzo del prodotto derivato all'istante t , con $t < T_1 < \dots < T_m$, come la somma dei cashflows futuri attesi attualizzati

$$V(t) = \sum_{k=1}^m P_d(t, T_k) c_k(t, T_k, \pi_k) = \sum_{k=1}^m P_d(t, T_k) \mathbb{E}_t^{P_d(T_k)}[\pi_k].$$

Osservazione 1. Nella pratica gli intervalli di tempo tra due date $[T_i, T_j]$ sono misurati come frazioni d'anno secondo una *day count convention* data dc_Δ , $\tau(T_i, T_j; dc_\Delta)$.

Per una data di riferimento t_0 , definiamo i tassi zero-coupons $z_\Delta(t_0, T)$ tali che

$$P_\Delta(t_0, T) = \exp\left(-z_\Delta(t_0, T) \tau_c(t_0, T)\right) = \exp\left(-\int_{t_0}^T f_\Delta(t_0, u) du\right),$$

con

$$\tau_c(t_0, T) = \tau(t_0, T; dc_c)$$

e dc_c rappresenta la convenzione per i tassi zero-coupons. La scelta più comune è quella di prendere $dc_c = \text{actual}/365$ tale che

$$\tau_c(t_0, T) = \frac{T - t_0}{365}$$

che assicura la monotonicità con gli intervalli di tempo e l'addittività, o meglio

$$\tau_c(T_1, T_2) + \tau_c(T_2, T_3) = \tau_c(T_1, T_3).$$

Ne risulta quindi che i tassi zero-coupons $z_\Delta(t_0, T)$ sono la media dei tassi forward istantanei sul periodo $[t_0, T]$.

Inoltre, vediamo facilmente che se i tassi sono non negativi, allora $P(t_0, T)$ è una funzione monotona decrescente in T , con

$$0 < P(t_0, T) \leq 1 \quad \forall T > t_0.$$

Ancora, osserviamo che la curva dei tassi forward istantanei è quindi per costruzione un indicatore della regolarità della curva dei tassi.

La convenzione utilizzata nel caso del tasso forward associato a $P_{\Delta}(t, T_1, T_2)$ con $t \geq t_0$, inizio all'istante T_1 e che copre il periodo $[T_1, T_2]$, è $dc_F = \text{actual}/360$.

Costruzione delle curve dei tassi d'interesse in multi-curve

2.1 Strumenti di calibrazione

Per poter valorizzare un prodotto finanziario su tassi di interesse è necessario disporre di una o più curve di tassi d'interesse alla data di valorizzazione. Il **bootstrapping** permette di costruire tali curve a partire dai prezzi di mercato di un numero finito di strumenti di tipo vaniglia.

Depositi

Gli *interest rate Deposits* sono dei contratti zero-coupons del mercato OTC con inizio immediato (data di riferimento $t_0 = 0, 1$ o 2 giorni). Essi definiscono i tassi a breve termine del mercato interbancario e sono generalmente osservati sul mercato per delle maturità che vanno da 1 giorno a 6 mesi e pagano l'interesse maturato nel periodo con un tasso fissato all'istante t_0 .

Se $R_\Delta(t_0, T_i)$ è il tasso quotato sul mercato associato all' i -esimo Deposito di maturità T_i e di tenore $\Delta = T_i - t_0$ mesi, allora il fattore di discount all'istante T_i è dato da

$$P_\Delta(t_0, T_i) = \frac{1}{1 + R_\Delta(t_0, T_i)\tau_F(t_0, T_i)},$$

con $t_0 < T_i$ e $\tau_F(t_0, T_i) = \tau(t_0, T_i; \text{actual}/360)$.

I tassi monetari possono essere selezionati come strumenti di bootstrapping per la costruzione della parte a breve termine della curva.

Forward Rate Agreements (FRAs)

I FRA sono dei contratti del mercato OTC che portano su un periodo di capitalizzazione futuro. Per esempio il 3x9 FRA è un contratto Deposito per il periodo di 6 mesi con inizio tra 3 mesi. Nella pratica, un FRA è quotato sul mercato per le date di starting comprese tra 3 mesi e 3 anni e per delle durate Δ che vanno da 1 a 12 mesi.

Il valore di tale contratto visto all'istante t_0 è dato da $\tilde{F}_\Delta(t_0; T, T + \Delta)$, cioè il tasso Euribor forward con data di inizio T e tenore Δ .

Otteniamo il prezzo del bond zero-coupons associato P_Δ grazie a

$$P_\Delta(t_0, T_i) = \frac{P_\Delta(t_0, T_{i-1})}{1 + \tilde{F}_\Delta(t_0; T_{i-1}, T_i)\tau_F(T_{i-1}, T_i)}, \quad \forall t_0 < T_{i-1} < T_i.$$

È possibile usare tale relazione per effettuare il bootstrapping per la curva \mathcal{C}_Δ all'istante T_i , una volta che il valore della curva all'istante T_{i-1} è noto.

Osserviamo che nel caso limite per T_{i-1} che tende verso t_0 , il FRA converge verso un contratto di Deposito, cioè

$$\lim_{T_{i-1} \rightarrow t_0} \tilde{F}_\Delta(t_0; T_{i-1}, T_i) = R_\Delta(t_0, T_i).$$

Per quanto riguarda la metodologia di pricing di tale contratto, nel caso mono-curva si ha che il prezzo di un contratto FRA di scadenza T_{i-1} , maturità T_i e di nominale N è dato da

$$V_{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, K) = NP(t, T_i)(T_i - T_{i-1})(K - F_i(t)),$$

con

$$F_i(t) := F(t; T_{i-1}, T_i) = \mathbb{E}_t^{P(T_i)} \left[L(T_{i-1}, T_i) \right],$$

mentre nel caso multi-curve si ha

$$V_{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, K) = NP_d(t, T_i)(T_i - T_{i-1})(K - \tilde{F}_{\Delta, i}(t)),$$

con

$$\tilde{F}_{\Delta,i}(t) := \tilde{F}_{\Delta}(t; T_{i-1}, T_i) = \mathbb{E}_t^{P_d(T_i)} \left[L(T_{i-1}, T_i) \right].$$

Contratti Future

Gli *Interest Rate Futures* sono dei contratti sintetici con inizio forward nel senso che essi portano su un periodo di capitalizzazione futuro. A differenza dei FRA, essi sono dei contratti inquadrati da regole precise e standardizzati.

Nella pratica, un contratto future è quotato per delle date di starting comprese tra 3 mesi e 3 anni e per delle durate Δ che vanno da 1 a 6 mesi. Nel mercato dell'Euro, i contratti più comuni sono scritti sull'Euribor 3M e terminano ogni Marzo, Giugno, Settembre e Dicembre. La data di fixing è il terzo Mercoledì del mese della maturità, l'ultimo giorno del trading è il Lunedì che lo precede.

Nel caso dei contratti Future, la griglia in tempo per effettuare il bootstrapping non è regolare, ovvero se indichiamo con S_i la maturità dell' i -esimo Future allora S_i e T_i , con $\tau_F(S_i, T_i) = 3M$, sono le date di inizio e fine del contratto FRA3M corrispondente ed in generale abbiamo $T_i \neq S_{i+1}$.

I Future sono quotati in termini di prezzo piuttosto che in termini di tassi e la relazione che li lega è ¹

$$P_{\Delta}^{Fut}(t_0, S_i, T_i) = 100 - R_{\Delta}^{Fut}(t_0, S_i, T_i).$$

Prendiamo l' i -esimo Future di tenore Δ con data di inizio S_i , il fattore d'attualizzazione alla maturità T_i si scrive

$$P_{\Delta}(t_0, T_i) = \frac{P_{\Delta}(t_0, S_i)}{1 + \tau_F(S_i, T_i)(1 - f_i^*)},$$

dove f_i^* è la quotazione sul mercato.

Nel caso in cui $S_i \neq T_{i-1}$, il valore di $P_{\Delta}(t_0, S_i)$ si ottiene per interpolazione.

A causa del meccanismo di margining giornaliero dei Future, tali contratti non hanno lo stesso payoff dei FRA corrispondenti e quindi, per passare dall'uno all'altro, bisogna effettuare

¹dove $P_{\Delta}(t_0, S_i, T_i)$ denota il fattore di discount forward tra S_i e T_i visto all'istante t_0 . Vale, inoltre, la nota relazione d'assenza d'opportunità d'arbitraggio

$$P_{\Delta}(t_0, T_i) = P_{\Delta}(t_0, S_i) \times P_{\Delta}(t_0, S_i, T_i).$$

un aggiustamento di convessità. Diviene quindi necessaria un'ipotesi di tipo modello per l'evoluzione dei tassi d'interesse.

Ci sono, infatti, molti fattori che non sono presi in considerazione nei modelli teorici utilizzati, come per esempio le spese, i costi di transazione ed il trattamento del margin, che rendono i prezzi dei FRA e dei Future diversi.

Inoltre, i contratti Future presentano un rischio di controparte che è meno importante rispetto a quello dei FRA e questo grazie al ruolo giocato dalla Camera di Compensazione; in alcuni casi essi sono addirittura molto più liquidi e più semplici da negoziare rispetto ai FRA.

Tuttavia, si assume che i prezzi forward e future sono uguali, cosa che è vera nel caso di maturità molto piccole. La differenza tra di essi diventa notevole con l'aumentare della vita dei contratti future.

Come è stato sottolineato in precedenza, dal momento che le maturità dei contratti utilizzati nella costruzione delle curve dei tassi col bootstrapping sono molto corte, l'aggiustamento di convessità tra i prezzi dei Futures e dei FRA viene trascurato e si ipotizza quindi che tali prezzi sono uguali.

Swap Euribor

L'IRS (*Interest Rate Swap*) è un contratto del mercato OTC in cui due controparti si impegnano a scambiarsi per un numero di anni, e per un montante nominale definito nel contratto, dei flussi di tassi d'interesse annuali (o pluriannali) calcolati per una parte sulla base di un tasso variabile che viene constatato a delle date prefissate, e per l'altra sulla base di un tasso fisso, chiamato *tasso di swap*.

Il prezzo dello swap è la differenza tra le due gambe e si definisce tasso di swap il tasso fisso che annulla tale valore.

Nella zona Euro si trovano le quotazioni degli Swap di tipo vaniglia che cominciano in data spot con gamba fissa annuale contro gamba variabile indicizzata al tasso Euribor Δ -mesi pagato con una frequenza di Δ -mesi. È possibile vedere gli Swap come dei portafogli di FRA (ma il primo è un contratto di Deposito).

La convenzione per le date nel caso di un contratto Swap quotato sul mercato è 30/360.

Gli Swap sono usati come strumenti di bootstrapping per la parte medio-lungo termine della struttura dei tassi.

Considerando un contratto Swap di nominale N con $T = \{T_1, \dots, T_m\}$ come date di pagamento della gamba variabile e $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ come date di pagamento di quella fissa, il suo prezzo mono-curva è

$$V_{\text{swap}}(t, T, S, K) = N \left[KA(t, S) - \sum_{k=1}^m (T_k - T_{k-1}) P(t, T_k) F_k(t) \right],$$

col tasso di swap forward dato da

$$K = \frac{\sum_{k=1}^m P(t, T_k) (T_k - T_{k-1}) F_k(t)}{A(t, S)}$$

e

$$A(t, S) = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P(t, S_j).$$

Invece, il nuovo quadro multi-curve impone che il prezzo dello stesso contratto swap si scriva

$$V_{\text{swap}}(t, T, S, K) = N \left[KA_d(t, S) - \sum_{k=1}^m (T_k - T_{k-1}) P_d(t, T_k) \tilde{F}_{\Delta, k}(t) \right],$$

col tasso di swap forward dato da

$$K = \frac{\sum_{k=1}^m P_d(t, T_k) (T_k - T_{k-1}) \tilde{F}_{\Delta, k}(t)}{A_d(t, S)}$$

e

$$A_d(t, S) = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1}) P_d(t, S_j).$$

Swap Eonia

Lo swap Eonia è uno swap di tassi d'interesse in cui la gamba variabile fissa quotidianamente. Se lo swap possiede una maturità inferiore ad un anno, allora esso presenta una sola data di pagamento che ha normalmente luogo un giorno dopo la maturità dello swap e che rappresenta la differenza tra le due gambe. Se lo swap ha una maturità superiore ad un anno, allora i cashflows sono annuali.

La gamba fissa può essere considerata come un deposito sintetico ed è quotata sul mercato come un rendimento che è applicato sul tenore dello swap. Quella variabile ha un fixing

giornaliero che è una media ponderata dei depositi overnight che sono stati trattati durante la giornata.

Basis Swap

Un Basis Swap è un contratto che possiede due flussi indicizzati su dei tassi Euribor (mercato europeo) di tenori diversi oppure su dei tassi in due valute diverse ed anche di tenori diversi. Esso è quotato sul mercato come lo spread tra i due tassi di swap.

Consideriamo un Basis Swap che è descritto da uno scambio dei tassi Euribor x contro y di nominale N . Il prezzo di tale contratto nel caso mono-curva è dato da

$$V_{BS}(t, T_x, T_y, Z) = N \left[\sum_{j=1}^{m_x} P(t, T_{x,j}) (F_{x,j}(t) + Z(t, T_x, T_y)) \tau_{x,j} - \sum_{k=1}^{m_y} P(t, T_{y,k}) F_{y,k}(t) \tau_{y,k} \right],$$

in cui lo spread

$$Z(t, T_x, T_y) = \frac{\sum_{k=1}^{m_y} P(t, T_{y,k}) F_{y,k}(t) \tau_{y,k} - \sum_{j=1}^{m_x} P(t, T_{x,j}) F_{x,j}(t) \tau_{x,j}}{A(t, T_x)} \simeq 0,$$

dove T_x e T_y sono i vettori delle date di pagamento delle due gambe variabili e si ha $\tau_{x,j} = T_x^j - T_x^{j-1}$ e $\tau_{y,k} = T_y^k - T_y^{k-1}$.

In modo analogo, si vede che il prezzo nel caso multi-curve è

$$V_{BS}(t, T_x, T_y, Z) = N \left[\sum_{j=1}^{m_x} P_d(t, T_{x,j}) (\tilde{F}_{x,j}(t) + Z(t, T_x, T_y)) \tau_{x,j} - \sum_{k=1}^{m_y} P_d(t, T_{y,k}) \tilde{F}_{y,k}(t) \tau_{y,k} \right],$$

dove lo spread è dato da

$$Z(t, T_x, T_y) = \frac{\sum_{k=1}^{m_y} P_d(t, T_{y,k}) \tilde{F}_{y,k}(t) \tau_{y,k} - \sum_{j=1}^{m_x} P_d(t, T_{x,j}) \tilde{F}_{x,j}(t) \tau_{x,j}}{A_d(t, T_x)} \neq 0$$

e T_x e T_y indicano le date di pagamento delle due gambe variabili.

2.2 Bootstrapping nel quadro mono-curva

Tradizionalmente, la *sola ed unica* curva di tassi è calibrata su una successione di strumenti di mercato definita da:

- un **segmento breve termine** costituito da tassi monetari di maturità inferiori a 6 mesi;
- un **segmento medio termine** costituito da contratti Future (o eventualmente da FRA) di maturità superiori a quella dell'ultimo tasso monetario ed
- un **segmento lungo termine** costituito da Swap di maturità superiori a quella dell'ultimo contratto Future.

Consideriamo I strumenti di mercato, di maturità $(T_i)_{i=1,\dots,I}$ a cui corrispondono le quotazioni di mercato $(f_i^*)_{i=1,\dots,I}$. Supponiamo anche che $T_1 < T_2 < \dots < T_I$.

Chiamiamo f_i il prezzo dell' i -esimo strumento di mercato; possiamo allora esprimerlo in funzione della curva d'attualizzazione in modo che

$$f_i = f_i(P(t_0, t)_{t \leq T_i}).$$

Il metodo di **bootstrapping** è un approccio di tipo ricorsivo che riduce il problema della calibrazione della struttura a termine ad una successione di risoluzione d'equazioni ad una sola incognita, secondo lo schema:

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1(P(t_0, T_1)) \\ f_2^* &= f_2(P(t_0, T_1), P(t_0, T_2)) \\ f_3^* &= f_3(P(t_0, T_1), P(t_0, T_2), P(t_0, T_3)) \\ &\vdots \\ f_I^* &= f_I(P(t_0, T_1), P(t_0, T_2), P(t_0, T_3), \dots, P(t_0, T_I)). \end{aligned}$$

Tale procedura è indipendente dal tipo di strumento di calibrazione.

I fattori d'attualizzazione vengono determinati ad ogni passo grazie alla risoluzione numerica di tipo dicotomica.

2.3 Bootstrapping nel quadro multi-curve

Come è stato spiegato nella sezione precedente, l'uso di una sola curva di tassi non è sufficiente per poter spiegare e descrivere correttamente i tassi forward per dei tenori diversi.

Per quel che riguarda la curva di discount \mathcal{C}_d , si costruisce la curva Eonia utilizzando le quotazioni di mercato degli swaps Eonia per tenori diversi secondo la procedura di bootstrapping tradizionale, come nel caso mono-curve. Dopodiché, per ogni tenore Δ fissato, si considera un numero finito di strumenti di mercato di tenore Δ e si costruisce la curva forecast \mathcal{C}_Δ grazie alla curva di discount \mathcal{C}_d che è stata ottenuta precedentemente e alle quotazioni di mercato. La procedura di bootstrap, nel caso multi-curve si schematizza come segue:

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1(P_d(t_0, T_1), P_\Delta(t_0, T_1)) \\ f_2^* &= f_2(P_d(t_0, T_1), P_d(t_0, T_2), P_\Delta(t_0, T_1), P_\Delta(t_0, T_2)) \\ f_3^* &= f_3(P_d(t_0, T_1), P_d(t_0, T_2), P_d(t_0, T_3), P_\Delta(t_0, T_1), P_\Delta(t_0, T_2), P_\Delta(t_0, T_3)) \\ &\vdots \\ f_I^* &= f_I(P_d(t_0, T_1), P_d(t_0, T_2), \dots, P_d(t_0, T_I), P_\Delta(t_0, T_1), P_\Delta(t_0, T_2), \dots, P_\Delta(t_0, T_I)). \end{aligned}$$

Nella pratica, soprattutto per quanto riguarda gli swaps sulla parte lungo termine della curva, si è in presenza di troppe incognite rispetto al numero di equazioni disponibili. È quindi necessario fare un'ipotesi di interpolazione per completare il bootstrap.

2.4 Il ruolo dell'interpolazione

Le scelte più comuni per quanto riguarda l'interpolazione sono l'interpolazione affine a tratti o loglineare a tratti dei tassi zero-coupons. Faremo riferimento a tali metodi in termini di ipotesi standard.

Per gli I strumenti di mercato disponibili di tenore Δ , e per la costruzione della curva Eonia, si tratta di calibrare in modo iterativo, gli I nodi di interpolazione $(T_i, z_\Delta(0, T_i))_{i=1, \dots, I}$ in

modo che, $\forall i \in 1, \dots, I, \forall T \in [T_{i-1}, T_i]$ si abbia

$$\mathbf{H1} \quad z_{\Delta}(0, T) = (1 - \alpha_i(T)) z_{\Delta}(0, T_{i-1}) + \alpha_i(T) z_{\Delta}(0, T_i)$$

$$\mathbf{H2} \quad z_{\Delta}(0, T) T = (1 - \alpha_i(T)) z_{\Delta}(0, T_{i-1}) T_{i-1} + \alpha_i(T) z_{\Delta}(0, T_i) T_i,$$

con

$$\alpha_i(T) = \frac{T - T_{i-1}}{T_i - T_{i-1}}.$$

Al di là delle date T_1 e T_I , si suppone che la curva dei tassi zero-coupons sia costante e uguale rispettivamente a $z_{\Delta}(0, T_1)$ e a $z_{\Delta}(0, T_I)$.

Queste due ipotesi di interpolazione rendono il metodo di bootstrapping stabile e si può vedere che esse restano coerenti in termini di strategia di copertura, tuttavia esse non garantiscono però la regolarità delle curve dei tassi forward.

Pertanto, per poter ottenere delle curve forward che siano regolari è necessario utilizzare dei metodi di tipo spline accompagnati da metodi detti di *lissage*. Tuttavia tali problematiche non rientrano nel quadro di trattazione.

2.5 Test numerici

Abbiamo considerato come data di riferimento il 3 Gennaio 2011 ed abbiamo costruito la curva Eonia a partire dalle quotazioni degli swap Eonia ed utilizzando la procedura di bootstrapping di tipo mono-curva, sotto l'ipotesi di interpolazione loglineare a tratti dei tassi zero-coupon.

In seguito, grazie ad una selezione di strumenti secondo il tenore considerato, abbiamo costruito la curva forecast corrispondente facendo un'ipotesi standard di interpolazione dei tassi zero-coupon ed utilizzando un metodo particolare di lissage della curva.

Le quotazioni degli strumenti di mercato usati per la costruzione delle curve sono indicate in Appendice B. I termini MM, FWD e SWP designano rispettivamente i tassi monetari, i FRA ed i tassi di swap forward.

Calcolando i tassi forward 3M a partire dalle curve forecast per dei tenori $\Delta = 3M$ e $\Delta = 12M$ constatiamo la presenza di differenze significative. Ciò mostra bene la presenza di una segmentazione del mercato e che è quindi necessario usare la curva forecast di tenore Δ per calcolare i tassi forward dello stesso tenore. Inoltre, la presenza di una differenza

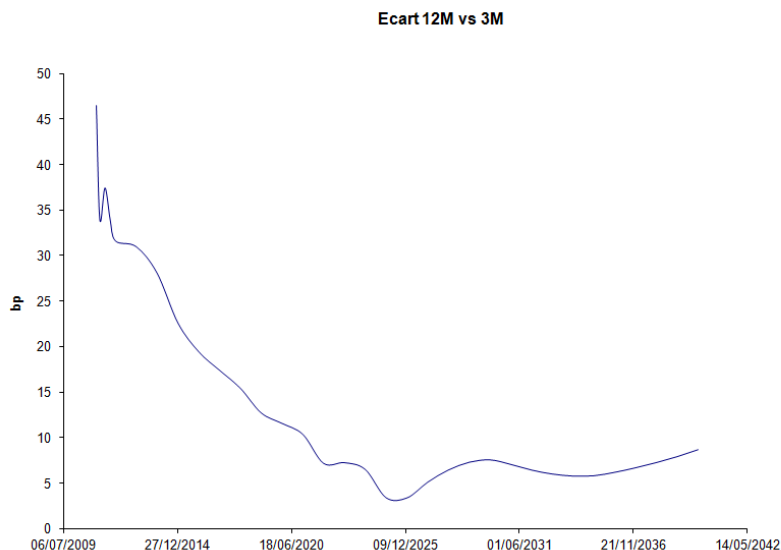


Figura 2.1: Differenza in basis points tra i tassi forwards 3M ottenuti con la curva forecast 3M e quelli ottenuti con la curva forecast 12M.

importante anche sul lungo termine rivela che il mercato conserva in memoria l'esperienza della crisi.

L'immagine seguente mostra l'evoluzione dei tassi forward 3M costruiti a partire dalle curve forecast 3M, 6M e 12M.

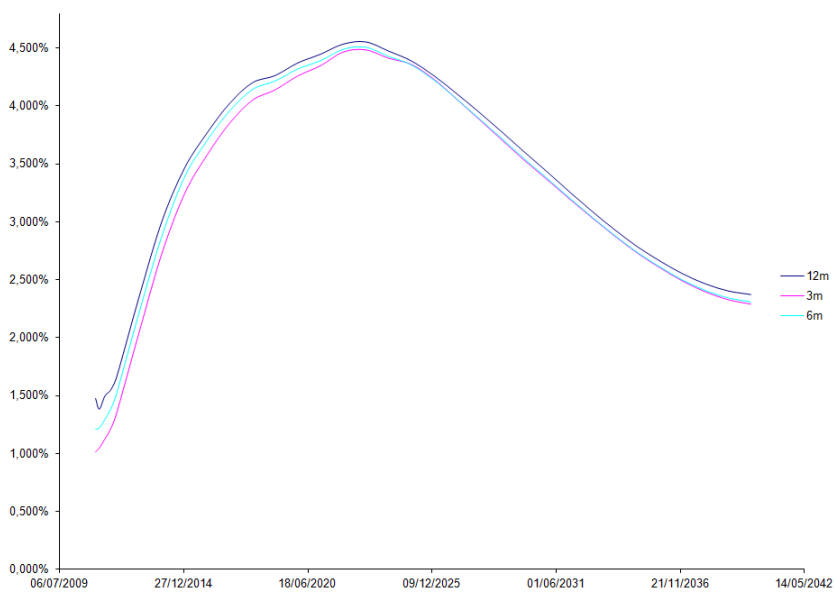


Figura 2.2: Tassi forwards 3M ottenuti a partire dalla curva forecast 3M (in rosa), dalla curva forecast 6M (in blu chiaro) e da quella 12M (in blu scuro).

Generalizzazione del modello di Hull-White

Il pricing dei prodotti derivati complessi su tassi di interesse necessita di una modellizzazione della dinamica futura della struttura a termine delle curve dei tassi. La procedura di bootstrapping ne è dunque la tappa preliminare che permette di costruire le curve dei tassi alla data di valorizzazione, che serviranno come input per i modelli di pricing.

Ci interesseremo al modello HJM, un modello molto generale per i tassi di interesse e che ingloba i modelli di tasso del tipo *short rate* che dettaglieremo in seguito.

3.1 Il quadro Heath-Jarrow-Morton (HJM)

Consideriamo (Ω, \mathcal{F}) di filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ e assumiamo che il tasso forward istantaneo $f(t, T)$ evolva secondo la dinamica

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t), \\ f(0, T) &= f^M(0, T), \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove $T \mapsto f^M(0, T)$ è la curva dei tassi forward istantanei del mercato all'istante $t = 0$, $W = (W_1, \dots, W_N)$ è un movimento browniano N -dimensionale, $\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \dots, \sigma_N(t, T))$ è un vettore di processi adattati e $\alpha(t, T)$ è un processo adattato, con

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\alpha(t, T)| dt \right] < +\infty$$

e

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\sigma_i(t, T)|^2 dt \right] < +\infty \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Il prodotto $\sigma(t, T)dW(t)$ deve essere inteso come prodotto scalare tra i vettori $\sigma(t, T)$ e $dW(t)$.

La dinamica (3.1) non soddisfa necessariamente la condizione di non arbitraggio, ma si può dimostrare che la funzione $\alpha(t, T)$ non può essere scelta in maniera arbitraria affinché esista un'unica misura equivalente di martingala, ma deve essere uguale ad una quantità che dipende dal vettore di volatilità $\sigma(t, T)$ e dal drift della dinamica dei prezzi degli N bonds zero-coupons.

Ricordiamo che il tasso forward istantaneo ed il prezzo di un bond zero-coupons sono legati dalla relazione

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right). \quad (3.2)$$

Nel quadro così definito è possibile mostrare che se il tasso forward istantaneo segue la dinamica (3.1) sotto la misura neutrale al rischio bisogna avere necessariamente

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds. \quad (3.3)$$

Si fa riferimento a tale relazione come alla *condizione di deriva di HJM*.

Pertanto la dinamica di f sotto la probabilità neutrale al rischio si scrive in forma integrale

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) \int_u^T \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s) \\ &= f(0, T) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(u, T) \int_u^T \sigma_i(u, s) ds du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(s, T) dW_i(s). \end{aligned}$$

Allo stesso modo, applicando il lemma di Itô a (3.2), la condizione d'assenza d'opportunità d'arbitraggio implica che la dinamica del prezzo di un bond zero-coupons $P(t, T)$ sulla misura di probabilità \mathbb{Q} è data da

$$dP(t, T) = P(t, T) \left(r_t dt - \Sigma_t(T) dW(t) \right), \quad (3.4)$$

dove

$$\Sigma_t(T) = \int_t^T \sigma(t, s) ds$$

e r_t è il tasso d'interesse senza rischio (*instantaneous short term interest rate*) all'istante t .

La relazione $r_t = f(t, t)$, sempre valida, ci permette di scrivere l'evoluzione di r_t sulla misura

di probabilità \mathbb{Q} nella maniera seguente

$$\begin{aligned}
r_t &= f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t) \int_u^t \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, t) dW(s) \\
&= f(0, t) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(u, t) \int_u^t \sigma_i(u, s) ds du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \sigma_i(s, t) dW_i(s). \quad (3.5)
\end{aligned}$$

3.2 Modello Hull-White 1 fattore

Il processo definito da (3.5) non è in generale un processo di Markov.

Infatti, osserviamo che l'integrale stocastico dipende dall'istante t sia negli estremi di integrazione che all'interno della funzione integranda.

Nella pratica vorremmo che il tasso corto istantaneo soddisfi la proprietà di Markovianità per poter lavorare nel quadro d'equazioni a derivate parziali.

È possibile mostrare che, ponendo per ogni $i = 1, \dots, N$

$$\sigma_i(t, T) = \xi_i(t)\psi_i(T),$$

con ξ_i e ψ_i due funzioni strettamente positive e deterministiche in tempo, allora si ha che r è un processo di Markov. Infatti, in tal caso la dinamica (3.5) si scrive

$$\begin{aligned}
r_t &= f(0, t) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \xi_i(u)\psi_i(t) \int_u^t \xi_i(u)\psi_i(s) ds du + \sum_{i=1}^N \int_0^t \xi_i(s)\psi_i(t) dW_i(s) \\
&= f(0, t) + \sum_{i=1}^N \psi_i(t) \int_0^t \xi_i^2(u) \int_u^t \psi_i(s) ds du + \sum_{i=1}^N \psi_i(t) \int_0^t \xi_i(s) dW_i(s).
\end{aligned}$$

Nel caso un fattore, cioè per $N = 1$, possiamo constatare che, ponendo A una funzione strettamente positiva e differenziabile tale che

$$A(t) := f(0, t) + \psi_1(t) \int_0^t \xi_1^2(u) \int_u^t \psi_1(s) ds du,$$

allora otteniamo

$$\begin{aligned}
dr_t &= A'(t)dt + \psi_1'(t) \int_0^t \xi_1^2(u) \int_u^t \psi_1(s) ds du + \psi_1(t)\xi_1(t)dW_1(t) \\
&= \left[A'(t) + \psi_1'(t) \frac{r_t - A(t)}{\psi_1(t)} \right] dt + \psi_1(t)\xi_1(t)dW_1(t) \\
&= [a(t) + b(t)r_t] dt + c(t)dW_1(t),
\end{aligned}$$

che coincide col considerare uno short rate model.

Supponiamo ora di considerare un modello

- **gaussiano**, che quindi vuol dire che $\sigma(t, T)$ e di conseguenza anche $\Sigma_t(T)$ sono delle funzioni deterministiche;
- **lineare**, che quindi induce a scegliere

$$\sigma(t, T) = \sigma(t)e^{-\int_t^T \lambda(s) ds}$$

e

- **calibrabile**, che significa che bisogna fare delle ipotesi sui parametri $\sigma(t)$ e $\lambda(t)$.
Pertanto ammettiamo che $\sigma(t)$ è una funzione costante a tratti e che λ è una costante.

Ne risulta che

$$\sigma(t, T) = \sigma(t)e^{-\lambda(T-t)}$$

e

$$\Sigma_t(T) = \sigma(t) \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}.$$

In tale contesto, la dinamica del tasso forward istantaneo diventa

$$df(t, T) = \sigma(t)^2 \left(\frac{e^{-\lambda(T-t)} - e^{-2\lambda(T-t)}}{\lambda} \right) dt + \sigma(t)e^{-\lambda(T-t)} dW(t),$$

da cui, in forma integrale,

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left(e^{-\lambda(T-s)} - e^{-2\lambda(T-s)} \right) ds + \int_0^t \sigma(s)e^{-\lambda(T-s)} dW(s)$$

e

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{\lambda s} ds - \frac{e^{-2\lambda t}}{\lambda} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds + e^{-\lambda t} \int_0^t \sigma(s) e^{\lambda s} dW(s).$$

D'altro canto, sappiamo che

$$d(r_t e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} dr_t + \lambda e^{\lambda t} r_t dt$$

e dunque

$$d(r_t e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \left(\partial_t f(0, t) + \lambda f(0, t) + e^{-2\lambda t} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds \right) dt + \sigma(t) e^{\lambda t} dW(t),$$

da cui la dinamica del tasso istantaneo

$$\begin{aligned} dr_t &= e^{-\lambda t} d(r_t e^{\lambda t}) - \lambda r_t dt \\ &= \left(\partial_t f(0, t) + \lambda(f(0, t) - r_t) + e^{-2\lambda t} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds \right) dt + \sigma(t) dW(t). \end{aligned}$$

Nel quadro del modello Hull White, vediamo facilmente che per ogni istante di tempo t il processo del tasso istantaneo r_t segue una legge gaussiana e ciò permette di ottenere delle formule chiuse per il pricing dei bond zero-coupons e delle opzioni che hanno dei bond zero-coupons come sottostante.

Tuttavia, con tale modello la probabilità di avere dei tassi di interesse negativi non è nulla.

Chiamiamo variabile di stato $(X_t)_{t \in [0, T]}$ il processo definito da

$$X_t = r_t - f(0, t)$$

e che quindi segue la dinamica

$$dX_t = (\phi(t) - \lambda X_t) dt + \sigma(t) dW(t), \quad X_0 = 0$$

con

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)} \sigma(s)^2 ds.$$

Vogliamo scrivere il prezzo di un bond zero-coupon in funzione della variabile di stato.

Per far questo, osserviamo che il processo $f(t, T) - e^{-\lambda(T-t)}r_t$ è deterministico.

Inoltre,

$$f(t, T) - e^{-\lambda(T-t)}r_t = f(0, T) - e^{-\lambda(T-t)}f(0, t) + \frac{e^{-\lambda(T-t)} - e^{-2\lambda(T-t)}}{\lambda} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{-2\lambda(t-s)} ds,$$

da cui

$$\int_t^T f(t, u) du = \int_t^T f(0, u) du + \int_t^T e^{-\lambda(u-t)} X_t du + \phi(t) \int_t^T \frac{e^{-\lambda(u-t)} - e^{-2\lambda(u-t)}}{\lambda} du.$$

Constatiamo che

$$\int_t^T \frac{e^{-\lambda(u-t)} - e^{-2\lambda(u-t)}}{\lambda} du = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \right)^2,$$

dunque, ponendo

$$\beta(t, T) = \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda},$$

(3.2) ci permette di scrivere la *formula di ricostruzione* del prezzo dei bonds zero-coupons

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{-\frac{1}{2}\beta(t, T)^2 \phi(t) - \beta(t, T) X_t}. \quad (3.6)$$

3.3 Modello Hull-White 2 fattori

Per poter descrivere i prodotti su tassi di interesse che coinvolgono la correlazione tra tassi di interesse di tenore diverso, è necessario utilizzare un modello a due fattori, in cui il fattore supplementare può essere visto come un modo di aggiungere casualità alla pendenza della curva del tasso del interesse.

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ di filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

La dinamica del tasso forward istantaneo, nel caso più generale in cui lo spazio in cui il primo prodotto è definito non è ortogonale, è data da

$$df(t, T) = \left(\sum_{i,j=1}^2 \rho_{ij} \sigma_i(t, T) \Sigma_t^j(T) \right) dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_i(t, T) dW_i(t) \quad (3.7)$$

Inoltre, la dinamica del prezzo del bond zero-coupons $P(t, T)$ sulla probabilità neutra al rischio \mathbb{Q} è data da

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= P(t, T) \left(r_t dt - \Sigma_t(T) dW(t) \right) \\ &= P(t, T) \left(r_t dt - \sum_{i=1}^2 \Sigma_t^i(T) dW_i(t) \right), \end{aligned}$$

dove

$$d\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho dt, \quad \rho \in [-1, 1]$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \rho \quad \text{e} \quad \rho_{11} = \rho_{22} = 1$$

e per $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \sigma_i(t, T) &= \sigma_i(t) e^{-\lambda_i(T-t)} \\ \Sigma_t^i(T) &= \sigma_i(t) \frac{1 - e^{-\lambda_i(T-t)}}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

con

$$\lambda_i > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

e $\sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot)$ costanti a tratti.

Chiamiamo variabili di stato i processi $(X_t^1)_{t \in [0, T]}$ e $(X_t^2)_{t \in [0, T]}$ tali che

$$r_t = f(0, t) + X_t^1 + X_t^2,$$

dove, per $i = 1, 2$, $(X_t^i)_{t \in [0, T]}$ segue la dinamica

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \left(\left(\sum_{j=1}^2 \phi_{ij}(t) \right) - \lambda_i X_t^i \right) dt + \sigma_i(t) dW_i(t), \\ X_0^i &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(t) &= \rho_{ij} \int_0^t \sigma_i(s, t) \sigma_j(s, t) ds \\ &= \rho_{ij} \int_0^t \sigma_i(s) \sigma_j(s) e^{-\lambda_i(t-s)} e^{-\lambda_j(t-s)} ds \\ &= \text{Cov}(X_t^i, X_t^j). \end{aligned}$$

In modo analogo al caso 1 fattore, è possibile ottenere una formula di ricostruzione del prezzo di un bond zero-coupons che dipende dalle variabili di stato all'istante t , cioè

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \phi_{ij}(t) \beta_i(t, T) \beta_j(t, T) - \sum_{i=1}^2 \beta_i(t, T) X_t^i}$$

con

$$\beta_i(t, T) = \frac{1 - e^{-\lambda_i(T-t)}}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2.$$

3.4 Modello di Kenyon

Concentriamoci ora sul caso multi-curves. Siano \mathbb{Q} e $\tilde{\mathbb{Q}}$ le misure di probabilità neutre al rischio rispettivamente per il caso discount e forecast. Consideriamo delle dinamiche su tali misure di probabilità.

L'idea è quella di diffondere le curve discount e forecast ognuna secondo il modello di Hull White 1 fattore, ma in modo che esse siano legate tra di loro secondo l'analogia col mondo del tasso di cambio tra valute diverse.

Da qui in poi considereremo un tenore Δ fissato e faremo riferimento al quadro discount e forecast rispettivamente in termini di *valuta domestica* e *valuta straniera*.

Consideriamo sulla probabilità \mathbb{Q} , per l'universo domestico, il tasso istantaneo r_t ed il tasso forward istantaneo $f(0, t)$ legati dalla variabile di stato X_t grazie alla relazione

$$r_t = f(0, t) + X_t.$$

Abbiamo inoltre che il prezzo di un bond zero-coupon $P(t, T)$ e la variabile di stato verificano le dinamiche

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= r_t dt - \Sigma_t(T) dW(t) \\ P(T, T) &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}dX_t &= (\phi(t) - \lambda X_t) dt + \sigma(t) dW(t) \\ X_0 &= 0,\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\Sigma_t(T) &= \beta(t, T)\sigma(t) \\ \beta(t, T) &= \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \\ \phi(t) &= \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)} \sigma(s)^2 ds.\end{aligned}$$

Allo stesso modo, sulla probabilità $\tilde{\mathbb{Q}}$ si ha che il tasso istantaneo \tilde{r}_t ed il tasso forward istantaneo $\tilde{f}(0, t)$ sono legati dalla variabile di stato \tilde{X}_t grazie a

$$\tilde{r}_t = \tilde{f}(0, t) + \tilde{X}_t$$

ed il prezzo del bond zero-coupons $\tilde{P}(t, T)$, di tenore fissato, e la variabile di stato \tilde{X}_t seguono le dinamiche

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{P}(t, T)}{\tilde{P}(t, T)} &= \tilde{r}_t dt - \tilde{\Sigma}_t(T) d\tilde{W}(t) \\ \tilde{P}(T, T) &= 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}d\tilde{X}_t &= (\tilde{\phi}(t) - \tilde{\lambda}\tilde{X}_t) dt + \tilde{\sigma}(t) d\tilde{W}(t) \\ \tilde{X}_0 &= 0,\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_t(T) &= \tilde{\beta}(t, T)\tilde{\sigma}(t) \\ \tilde{\beta}(t, T) &= \frac{1 - e^{-\tilde{\lambda}(T-t)}}{\tilde{\lambda}} \\ \tilde{\phi}(t) &= \int_0^t e^{-2\tilde{\lambda}(t-s)} \tilde{\sigma}(s)^2 ds.\end{aligned}$$

Sappiamo che nel caso *bi-curve-bi currency*, la condizione d'assenza d'opportunità d'arbitraggio impone l'esistenza per ogni istante $0 \leq t \leq T$ di un tasso di cambio spot, cioè il prezzo in unità domestica alla data t di un'unità straniera della stessa data. Chiamiamo tale processo $(S_t)_{t \in [0, T]}$.

Inoltre, sempre il principio di non arbitraggio tra le due economie implica anche che un prezzo straniero scritto in moneta domestica dal tasso di cambio è un prezzo domestico.

Il numerario di tale trasformazione è il prezzo in valuta straniera di un'unità della valuta domestica, cioè il tasso di cambio.

Osserviamo anche che la condizione di non arbitraggio impone che un'unità straniera che è capitalizzata al tasso \tilde{r} tra le date 0 e t e che è scambiata in moneta domestica è un prezzo domestico. È possibile quindi vedere il tasso di cambio come un titolo domestico che paga un dividendo continuo \tilde{r} .

Come conseguenza, sulla probabilità \mathbb{Q} , il tasso di cambio segue la dinamica

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= (r_t - \tilde{r}_t) dt + \sigma^S(t) dW^S(t) \\ S_0 &= 1, \end{aligned}$$

dove i movimenti browniani sono caratterizzati da

$$d\langle W, \tilde{W} \rangle_t = \tilde{\rho}^D dt$$

$$d\langle W, W^S \rangle_t = \rho^{D,S} dt$$

$$d\langle W^S, \tilde{W} \rangle_t = \tilde{\rho}^S dt.$$

Inoltre, sempre seguendo l'analogia con i prodotti derivati nel quadro *multi-currency*, definiamo il tasso di cambio forward tra la valuta domestica e quella straniera.

Per questo, ricordiamo che il prezzo domestico all'istante t di un flusso straniero \tilde{F}_T è per definizione uguale a $\Pi(S_T \tilde{F}_T)$, perché bisogna convertire il flusso straniero in denaro domestico.

Tra l'altro, questo stesso flusso può essere ottenuto da un portafoglio straniero valutato all'istante t in moneta domestica, cioè

$$\Pi(S_T \tilde{F}_T) = S_t \tilde{\Pi}(\tilde{F}_T).$$

Una relazione analoga lega i prezzi Φ e $\tilde{\Phi}$ all'istante t dei contratti a termine nei due mondi, cioè

$$\begin{aligned} \Phi(S_T \tilde{F}_T) &= \Phi(S_T) \tilde{\Phi}(\tilde{F}_T) \\ \Phi(S_T) &= S_t \frac{\tilde{P}(t, T)}{P(t, T)}. \end{aligned}$$

L'ultima relazione traduce il fatto che il tasso di cambio sul mercato a termine di maturità T è il contratto a termine (forward) sulla valuta della stessa maturità.

Denotiamo con $S(t, T) = \Phi(S_T)$ il tasso di cambio forward.

3.4.1 Probabilità risk-neutral

Ci interessiamo ora al cambio di probabilità per descrivere la dinamica forecast sulla probabilità neutra al rischio associata al mondo discount.

Per far questo, consideriamo un attivo finanziario A_t scritto sulla valuta straniera e che non paga dividendi. In queste condizioni, l'assenza d'opportunità d'arbitraggio impone che esso evolve sulla probabilità $\tilde{\mathbb{Q}}$ secondo la dinamica

$$\frac{dA_t}{A_t} = \tilde{r}_t dt + \tilde{\sigma}_A(t) d\tilde{W}(t).$$

Prendiamo ora il processo $(S_t A_t)_{t \geq 0}$.

Il lemma d'Itô ci assicura che

$$d(S_t A_t) = S_t dA_t + A_t dS_t + d\langle S, A \rangle_t, \quad (3.8)$$

pertanto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d(S_t A_t)}{S_t A_t} &= \frac{dA_t}{A_t} + \frac{dS_t}{S_t} + \tilde{\rho}^S \sigma^S(t) \tilde{\sigma}_A(t) \\ &= \left(r_t + \tilde{\rho}^S \sigma^S(t) \tilde{\sigma}_A(t) \right) dt + \sigma^S(t) dW^S(t) + \tilde{\sigma}_A(t) d\tilde{W}(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

D'altro canto, sappiamo che $S_t A_t$ è un attivo finanziario domestico. Il suo drift quindi, sulla

probabilità \mathbb{Q} , è dato da r_t . Sapendo poi che la parte stocastica del processo è data da

$$\sigma^S(t)dW^S(t) + \tilde{\sigma}_A(t)d\tilde{W}^{\mathbb{Q}}(t),$$

otteniamo

$$\frac{d(S_t A_t)}{S_t A_t} = r_t dt + \tilde{\sigma}_A(t)d\tilde{W}^{\mathbb{Q}}(t). \quad (3.10)$$

Da (3.9) e (3.10) abbiamo

$$\tilde{\sigma}_A(t)d\tilde{W}(t) + \tilde{\rho}^S \sigma^S(t)\tilde{\sigma}_A(t)dt = \tilde{\sigma}_A(t)d\tilde{W}^{\mathbb{Q}}(t),$$

cioè

$$d\tilde{W}(t) = d\tilde{W}^{\mathbb{Q}}(t) - \tilde{\rho}^S(t)\sigma^S(t)dt.$$

Possiamo quindi dedurre la dinamica forecast sulla probabilità neutra al rischio \mathbb{Q} :

$$\frac{d\tilde{P}(t, T)}{\tilde{P}(t, T)} = \tilde{r}_t dt - \tilde{\Sigma}_t(T) \left(d\tilde{W}^{\mathbb{Q}}(t) - \tilde{\rho}^S \sigma^S(t)dt \right), \quad \tilde{P}(T, T) = 1$$

$$d\tilde{X}_t = \left(\tilde{\phi}(t) - \tilde{\lambda}\tilde{X}_t \right) dt + \tilde{\sigma}(t) \left(d\tilde{W}^{\mathbb{Q}}(t) - \tilde{\rho}^S \sigma^S(t)dt \right), \quad \tilde{X}_0 = 0.$$

3.4.2 T -forward measure

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità di filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ e si assuma l'esistenza di una misura equivalente di martingala \mathbb{Q} . Allora se H è un attivo finanziario (una variabile aleatoria \mathcal{F}_T misurabile) simulabile, cioè tale che esista un portafoglio $(V_t)_{t \geq 0}$ autofinanziato¹ che verifica $V_T = H$, il suo prezzo all'istante t è dato da

$$\Pi_t(H) = \mathbb{E}_t \left[D(t, T) H \right], \quad (3.11)$$

dove $D(t, T)$ indica il fattore di discount stocastico ($D(t, T) = B_t/B_T$).

Giustificeremo in seguito l'interesse di considerare uno spazio di probabilità T -forward piuttosto che di restare nel quadro neutro al rischio.

La condizione di assenza d'opportunità d'arbitraggio impone che su \mathbb{Q} i prezzi attualizzati sono delle martingale. Pertanto, ponendo

$$\bar{P}(t, T) = \frac{P(t, T)}{B_t}$$

allora la dinamica del prezzo di un bond zero-coupon attualizzato sulla probabilità \mathbb{Q} è data da

$$\frac{d\bar{P}(t, T)}{\bar{P}(t, T)} = -\Sigma_t(T) dW(t),$$

cioè

$$\bar{P}(t, T) = P(0, T) \exp \left(- \int_0^t \Sigma_s(T) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \Sigma_s(T)^2 ds \right).$$

Sia ora e_t l'esponenziale stocastico

$$e_t = \exp \left(- \int_0^t \Sigma_s(T) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \Sigma_s(T)^2 ds \right). \quad (3.12)$$

¹Consideriamo *the bank account process* B_t e K attivi rischiosi $\{R^k\}$ ognuno con una dinamica sulla probabilità \mathbb{P} . Una strategia finanziaria $(\varphi)_{t \geq 0}$ è un processo $K + 1$ -dimensionale a componenti localmente limitate e prevedibili tali che il valore del portafoglio si scrive

$$V_t(\varphi) = \varphi_t^0 B_t + \sum_{k=1}^K \varphi_t^k R_t^k.$$

L'ipotesi di autofinanziamento impone che

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^0 dB_t + \sum_{k=1}^K \varphi_t^k dR_t^k.$$

Sappiamo che e_t è una martingala locale positiva. Se, inoltre, $\Sigma_t(T)$ è una funzione deterministica con $\Sigma_t(T) \in L^2(0, T)$ rispetto alla misura di Lebesgue, allora il criterio di Novikov di martingalità è verificato². Pertanto, applicando il teorema di Girsanov si ha che sotto la probabilità \mathbb{Q}_T di densità rispetto a \mathbb{Q} data da $d\mathbb{Q}_T/d\mathbb{Q} = e_T$, il processo

$$W_T(t) = W(t) + \int_0^t \Sigma_s(T) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

è un movimento browniano standard. Chiamiamo \mathbb{Q}_T la probabilità discount T -forward.

Applicando poi il cambiamento di numerario, possiamo mostrare che il prezzo all'istante t di un attivo H simulabile è dato da

$$\Pi_t(H) = P(t, T) \mathbb{E}_t^{P(T)}[H]. \quad (3.13)$$

Sappiamo che (3.11) fornisce l'unico prezzo di non arbitraggio di H in termini di valore atteso condizionale sotto la misura di martingala \mathbb{Q} . Tuttavia (3.13) mostra come il fatto di valutare un prezzo sulla probabilità neutra al rischio non è necessariamente la scelta più naturale e conveniente. Infatti, si vede chiaramente che per ottenere il prezzo su \mathbb{Q} bisogna conoscere la legge congiunta di (H, r_s) per $s < T$, mentre sotto \mathbb{Q}_T è sufficiente conoscere la legge di H , da cui l'interesse di posizionarsi sulla probabilità \mathbb{Q}_T .

Effettuiamo quindi un cambiamento di numerario.

Utilizzando il teorema di cambiamento del numerario descritto in Appendice C possiamo

2

Lemma 3.4.1. (*Criterio di Novikov*)

Se per ogni $t > 0$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \Sigma_s(T)^2 ds \right) \right] < +\infty,$$

allora il processo e_t è una martingala.

Quando la condizione di Novikov non è soddisfatta, e_t è una martingala locale positiva dunque una sopra-martingala.

scrivere

$$\begin{aligned} dW(t) &= dW_T(t) - \Sigma_t(T)dt \\ d\tilde{W}^{\mathbb{Q}}(t) &= d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_T}(t) - \tilde{\rho}^D \Sigma_t(T)dt \\ dW^S(t) &= dW^{S, \mathbb{Q}_T}(t) - \rho^{D, S} \Sigma_t(T)dt. \end{aligned}$$

Sulla misura discount T -forward \mathbb{Q}_T , le dinamiche delle variabili di stato e del tasso di cambio diventano

$$\begin{aligned} dX_t &= (\phi(t) - \lambda X_t) dt + \sigma(t) (dW_T(t) - \Sigma_t(T)dt), \\ d\tilde{X}_t &= (\tilde{\phi}(t) - \tilde{\lambda} \tilde{X}_t) dt + \tilde{\sigma}(t) \left(d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_T}(t) - (\tilde{\rho}^D \Sigma_t(T) + \tilde{\rho}^S \sigma^S(t))dt \right), \\ \frac{dS_t}{S_t} &= (r_t - \tilde{r}_t) dt + \sigma^S(t) (dW^{S, \mathbb{Q}_T}(t) - \rho^{D, S} \Sigma_t(T)dt). \end{aligned}$$

Integrando tra $[u, t]$, si ha che le dinamiche delle variabili di stato sulla probabilità T -forward relativa al mondo discount sono date da

$$X_t = X_u e^{-\lambda(t-u)} + M(u, t) + \int_u^t e^{-\lambda(t-v)} \sigma(v) dW_T(v) \quad (3.14)$$

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_u e^{-\tilde{\lambda}(t-u)} + \tilde{M}(u, t) + \int_u^t e^{-\tilde{\lambda}(t-v)} \tilde{\sigma}(v) d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_T}(v), \quad (3.15)$$

con

$$M(u, t) = \int_u^t e^{-\lambda(t-v)} (\phi(v) - \sigma(v) \Sigma_v(T)) dv$$

e

$$\tilde{M}(u, t) = \int_u^t e^{-\tilde{\lambda}(t-v)} \left(\tilde{\phi}(v) - \tilde{\sigma}(v) (\tilde{\rho}^S \sigma^S(v) + \tilde{\rho}^D \Sigma_v(T)) \right) dv.$$

Osservazione 2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano $(Y_t^1)_{t \geq 0}$ e $(Y_t^2)_{t \geq 0}$ due processi le cui dinamiche sulla misura di probabilità \mathbb{P}^* sono date da

$$\begin{aligned}\frac{dY_t^1}{Y_t^1} &= \alpha_{1,t} dt + \sigma_{1,t} dW^1(t) \\ \frac{dY_t^2}{Y_t^2} &= \alpha_{2,t} dt + \sigma_{2,t} dW^2(t),\end{aligned}$$

con

$$d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho_{1,2} dt.$$

Sia ora $(G_t)_{t \geq 0}$ il processo definito da

$$G_t = \frac{Y_t^1}{Y_t^2}.$$

È possibile mostrare con la formula di Itô che la dinamica di G_t su \mathbb{P}^* è data da

$$\frac{dG_t}{G_t} = (\alpha_{1,t} - \alpha_{2,t} + \sigma_{2,t}^2 - \rho_{1,2}\sigma_{1,t}\sigma_{2,t})dt + \sigma_{1,t}dW^1(t) - \sigma_{2,t}dW^2(t). \quad (3.16)$$

Da (3.8) e (3.16) e dal fatto che su \mathbb{Q}_T i processi attualizzati da $P(t, T)$ sono delle martingale, ne deduciamo la dinamica del tasso di cambio forward sulla misura discount T -forward

$$S(t, T) = S_t \frac{\tilde{P}(t, T)}{P(t, T)},$$

cioè

$$\frac{dS(t, T)}{S(t, T)} = \sigma^S(t) dW^{S, \mathbb{Q}_T} + \Sigma_t(T) dW_T - \tilde{\Sigma}_t(T) d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_T}.$$

In modo analogo al caso Hull White 1 fattore, per ogni $0 \leq t \leq T$ abbiamo le formule di ricostruzione dei prezzi dei bond zero-coupons nel quadro discount e forecast

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{-\frac{1}{2}\beta(t, T)^2 \phi(t) - \beta(t, T) X_t} = A(t, T) e^{-\beta(t, T) X_t} \quad (3.17)$$

e

$$\tilde{P}(t, T) = \frac{\tilde{P}(0, T)}{\tilde{P}(0, t)} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\beta}(t, T)^2 \tilde{\phi}(t) - \tilde{\beta}(t, T) \tilde{X}_t} = \tilde{A}(t, T) e^{-\tilde{\beta}(t, T) \tilde{X}_t}. \quad (3.18)$$

Osservazione 3. Chiamiamo *margin* la quantità

$$m(t, T) = \frac{\tilde{P}(t, T)}{P(t, T)} = \frac{S(t, T)}{S_t}.$$

Nel caso di un margin deterministico, cioè per valori

$$\begin{aligned} \lambda &= \tilde{\lambda} & \tilde{\rho}^D &= 1 \\ \sigma(t) &= \tilde{\sigma}(t) & \sigma^S(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

si ha che

$$m(t, T) = \frac{m(0, T)}{m(0, t)}.$$

Infatti, in tal caso

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t (r_s - \tilde{r}_s) ds}.$$

Ora, sotto tali ipotesi

$$dX_t = (\phi(t) - \lambda X_t) dt + \sigma(t) (dW_T(t) - \Sigma_t(T) dt), \quad X_0 = 0$$

$$d\tilde{X}_t = (\phi(t) - \lambda \tilde{X}_t) dt + \sigma(t) (d\tilde{W}^{\mathbb{Q}^T}(t) - \Sigma_t(T) dt), \quad \tilde{X}_0 = 0.$$

Grazie ad una decomposizione di Cholesky si vede dunque che

$$r_t - \tilde{r}_t = f(0, t) - \tilde{f}(0, t).$$

E quindi

$$m(t, T) = e^{\int_t^T (f(0, s) - \tilde{f}(0, s)) ds}.$$

3.4.3 Swaptions

Le *Swaptions* o *swap options* sono delle opzioni su IRS. Esistono principalmente due tipi di swaptions, o meglio quella di tipo *payer* e l'altra di tipo *receiver*.

Una swaption europea di tipo *payer* è un'opzione che dà il diritto (ma non l'obbligo) al detentore di entrare in un contratto swap di tipo *payer* ad una data futura data, che è la maturità della swaption. Indichiamo con T , $(T_i)_{0 \leq i \leq m}$ e $(T_j^{\text{fix}})_{0 \leq j \leq n}$ rispettivamente la data di maturità dell'opzione, le date di pagamento della gamba variabile e della gamba fissa.

L'opzione è esercitata solo se il valore dello swap sottostante è positivo. Quindi il payoff di una swaption europea di nominale N è dato da

$$\left\{ \omega N \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \tau_i P(T, T_i) \tilde{F}(T; T_{i-1}, T_i) - \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} K P(T, T_j) \right) \right\}^+,$$

dove

$$\tilde{F}(T; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{\tilde{P}(T, T_{i-1})}{P(T, T_i)} - 1 \right)$$

e $\omega = 1$ per una swaption di tipo *payer* e $\omega = -1$ per una swaption di tipo *receiver*.

Definizione 3.4.1. Consideriamo una swaption di tipo *payer* (rispettivamente *receiver*) di strike K che dona al detentore il diritto di entrare alla data T in un contratto IRS *payer* (o rispettivamente *receiver*) con date di pagamento della gamba variabile $(T_i)_{0 \leq i \leq m}$ e della gamba fissa $(T_j^{\text{fix}})_{0 \leq j \leq n}$.

Allora l'opzione è detta alla moneta (*at the money* - ATM) se e solamente se lo strike è uguale al tasso di swap forward

$$K = K_{ATM} := \frac{\sum_{i=1}^m \tau_i P(0, T_i) \tilde{F}(0; T_{i-1}, T_i)}{\sum_{j=1}^n \tau_j^{\text{fix}} P(0, T_j)}.$$

L'opzione di tipo *payer* è detta nella moneta (*in the money* - ITM) se $K < K_{ATM}$ e fuori dalla moneta (*out of the money* - OTM) se $K > K_{ATM}$. L'opzione di tipo *receiver* è ITM se $K > K_{ATM}$ e OTM se $K < K_{ATM}$.

È possibile dimostrare che una swaption di tipo *payer* è ATM se e solamente se il suo prezzo è uguale al prezzo della swaption di tipo *receiver* corrispondente.

Dimostreremo che nel quadro del modello ad 1 fattore modificato per il bi-curve, è possibile

valorizzare una swaption europea tramite una formula analitica.

Poniamo $X = X_T$ e $Y = \tilde{X}_T$ e consideriamo una swaption di strike K , di maturità T e nominale N , allora il suo prezzo all'istante 0 è

$$\begin{aligned}
SW &= \text{Swaption} \left(\omega, 0, T, (T_i)_{0 \leq i \leq m}, (T_j^{\text{fix}})_{0 \leq j \leq n}, K \right) \\
&= P(0, T) \mathbb{E}^{P(T)} \left[\left\{ \omega N \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \tau_i P(T, T_i) \tilde{F}(T, T_{i-1}, T_i) - \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} K P(T, T_j) \right) \right\}^+ \right] \\
&= P(0, T) \mathbb{E}^{P(T)} \left[\left\{ \omega N \left(\sum_{1 \leq i \leq m} P(T, T_i) \left(\frac{\tilde{P}(T, T_{i-1})}{P(T, T_i)} - 1 \right) - \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} K P(T, T_j) \right) \right\}^+ \right] \\
&= P(0, T) \mathbb{E}^{P(T)} \left[\left\{ \omega N \left(\sum_{1 \leq i \leq m} A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)X} \left(\frac{\tilde{A}(T, T_{i-1})}{A(T, T_i)} e^{(-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i))Y} - 1 \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} K A(T, T_j) e^{-\beta(T, T_j)X} \right) \right\}^+ \right] \\
&= P(0, T) \mathbb{E}^{P(T)} [\{\omega\chi\}^+],
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\chi &= N \left(\sum_{1 \leq i \leq m} A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)X} \frac{\tilde{A}(T, T_{i-1})}{A(T, T_i)} e^{(-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i))Y} - \sum_{1 \leq i \leq m} A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)X} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} K A(T, T_j) e^{-\beta(T, T_j)X} \right).
\end{aligned}$$

Abbiamo il risultato seguente.

Teorema 3.4.2. *Il prezzo all'istante $t = 0$ della swaption europea è dato da*

$$SW = -\omega N P(0, T) \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \left[\Phi(-\omega h_1(x)) - \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(x) e^{\kappa_i(x)} \Phi(-\omega h_2(x)) \right] dx, \tag{3.19}$$

dove $\omega = 1$ nel caso payer

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \left(\sum_{1 \leq i \leq m} A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)x} + \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{fix} K A(T, T_j) e^{-\beta(T, T_j)x} \right) \\ h_1(x) &= \frac{\bar{y}(x) - \mu_y - \rho_{xy} \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} \\ h_2(x) &= h_1(x) - (-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)) \sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \sigma_y \\ \kappa_i &= (-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)) (\mu_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy} (x - \mu_x)) + \frac{(-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)) (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2}{2} \\ \lambda_i(x) &= \frac{1}{\delta(x)} A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)x} \frac{\tilde{A}(T, T_{i-1})}{A(T, T_i)},\end{aligned}$$

$\bar{y} = \bar{y}(x)$ è l'unica soluzione di $\chi = 0$ e

$$\begin{aligned}\mu_x &= M(0, T), \\ \mu_y &= \tilde{M}(0, T), \\ \sigma_x^2 &= \int_0^T e^{-2\lambda(T-v)} \sigma(v)^2 dv = \phi(T), \\ \sigma_y^2 &= \int_0^T e^{-2\tilde{\lambda}(T-v)} \tilde{\sigma}(v)^2 dv = \tilde{\phi}(T), \\ \rho_{xy} &= \frac{\tilde{\rho}^D \int_0^T e^{-(\lambda + \tilde{\lambda})(T-v)} \sigma(v) \tilde{\sigma}(v) dv}{\sigma_x \sigma_y}\end{aligned}\tag{3.20}$$

Osservazione 4. Chiamiamo \mathbb{L}^2 lo spazio dei processi $(H_t)_{t \geq 0}$ progressivamente misurabili quadrato integrabili, cioè tali che per ogni $t \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right] < \infty.$$

Allora, se $(Z_t^1)_{t \geq 0}$ e $(Z_t^2)_{t \geq 0}$ sono due processi appartenenti a \mathbb{L}^2 e $(W_t^1)_{t \geq 0}$, $(W_t^2)_{t \geq 0}$ due movimenti browniani con

$$d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho_{12} dt,$$

vediamo che, dall'Isometria di Itô e facendo una scomposizione di Cholesky grazie a due movimenti browniani $(W_t^A)_{t \geq 0}$ e $(W_t^B)_{t \geq 0}$ indipendenti,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t Z_s^1 dW_s^1 \right) \left(\int_0^t Z_s^2 dW_s^2 \right) \right] = \rho_{12} \int_0^t Z_s^1 Z_s^2 ds + \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t Z_s^1 dW_s^A \right) \left(\int_0^t Z_s^2 dW_s^B \right) \right].$$

Inoltre, constatiamo che per i processi elementari si ha che

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t Z_s^1 dW_s^A \right) \left(\int_0^t Z_s^2 dW_s^B \right) \right] = 0. \quad (3.21)$$

Dalla densità dei processi elementari in \mathbb{L}^2 , possiamo dire che (3.21) resta valido per qualunque processo $(Z_t^1)_{t \geq 0}, (Z_t^2)_{t \geq 0} \in \mathbb{L}^2$.

Daremo una dimostrazione dettagliata in Appendice D per ogni coppia di martingale $(W_t^1)_{t \geq 0}, (W_t^2)_{t \geq 0}$ continue limitate in L^2 e che partono da zero.

Arriviamo quindi alla dimostrazione del teorema.

Dimostrazione. Siano $X = X_T$ e $Y = \tilde{X}_T$ tali che verifichino rispettivamente (3.14) e (3.15) per $t = T$ e $u = 0$.

Allora vediamo facilmente che

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$$

e

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2),$$

con rispettivamente

$$\begin{aligned} \mu_x &= M(0, T), \\ \mu_y &= \tilde{M}(0, T), \\ \sigma_x^2 &= \int_0^T e^{-2\lambda(T-v)} \sigma(v)^2 dv = \phi(T), \\ \sigma_y^2 &= \int_0^T e^{-2\tilde{\lambda}(T-v)} \tilde{\sigma}(v)^2 dv = \tilde{\phi}(T). \end{aligned}$$

Inoltre, seguendo l'Osservazione 4, si ha che

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E} \left[\left(e^{-\lambda(t-v)} \sigma(v) dW_T(v) \right) \left(e^{-\tilde{\lambda}(t-v)} \tilde{\sigma}(v) d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_T}(v) \right) \right] = \tilde{\rho}^D \int_0^T e^{-(\lambda+\tilde{\lambda})(T-v)} \sigma(v) \tilde{\sigma}(v) dv.$$

Sia ora $g(x, y)$ la legge congiunta di (X, Y) , allora il prezzo della swaption europea si scrive

$$\begin{aligned}
& \text{Swaption} \left(\omega, 0, T, (T_i)_{0 \leq i \leq m}, (T_j^{\text{fix}})_{0 \leq j \leq n}, K \right) \\
&= P(0, T) \mathbb{E}^{P(T)} [\{\omega \chi\}^+] \\
&= P(0, T) \iint_{\mathbb{R}^2} \{\omega \chi\}^+ g(x, y) dx dy \\
&= P(0, T) \iint_{\mathbb{R}^2} \{\omega \chi\}^+ g_{Y|X}(x, y) g_X(x) dx dy.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Sappiamo che

$$Y|X = x \sim \mathcal{N} \left(\mu_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy} (x - \mu_x), (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 \right),$$

allora (3.22) equivale a

$$\begin{aligned}
& \text{SW} = \text{Swaption} \left(\omega, 0, T, (T_i)_{0 \leq i \leq n}, (T_j^{\text{fix}})_{0 \leq j \leq m}, K \right) \\
&= P(0, T) \iint_{\mathbb{R}^2} \{\omega \chi\}^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{xy}^2)\sigma_y}} e^{-\frac{\left(y - \mu_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy} (x - \mu_x)\right)^2}{2(1-\rho_{xy}^2)\sigma_y^2}} g_X(x) dy dx
\end{aligned}$$

Possiamo inoltre riscrivere χ nel modo seguente

$$\chi = N \left(\sum_i U_i F_i e^{-V_i x + G_i y} - \sum_i U_i e^{-V_i x} - \sum_j M_j e^{-V_j x} \right),$$

con

$$\begin{aligned}
U_i &= A(T, T_i) & V_i &= \beta(T, T_i) \\
F_i &= \frac{\tilde{A}(T, T_{i-1})}{A(T, T_i)} & G_i &= -\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)
\end{aligned}$$

e

$$M_j = \tau_j^{\text{fix}} K A(T, T_j).$$

La forma dei coefficienti assicura che la funzione χ è crescente rispetto alla variabile y per un x dato e quindi assicura l'esistenza di un'unica soluzione per $\chi = 0$. Chiamiamo $\bar{y} = \bar{y}(x)$ questa soluzione.

Otteniamo

$$\text{SW} = \omega P(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} (I_2 - I_1) dx,$$

dove

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta(x) \int_{\bar{y}}^{+\infty \cdot \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{xy}^2)\sigma_y}} e^{-\frac{\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \rho_{xy} \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}{2(1-\rho_{xy}^2)}} dy \\ &= \delta(x) \int_{h_1(x)}^{+\infty \cdot \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \delta(x) \Phi(-\omega h_1(x)) \end{aligned}$$

con

$$\delta(x) = \left(\sum_{1 \leq i \leq m} A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)x} + \sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} K A(T, T_j) e^{-\beta(T, T_j)x} \right)$$

e

$$h_1(x) = \frac{\bar{y} - \mu_y - \rho_{xy} \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}.$$

Inoltre,

$$I_2 = \sum_{1 \leq i \leq m} C_i \int_{\bar{y}}^{+\infty \cdot \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{xy}^2)\sigma_y}} e^{(-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i))y} e^{-\frac{(y - \mu_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy} (x - \mu_x))^2}{2(1-\rho_{xy}^2)\sigma_y^2}} dy$$

con

$$C_i = A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)x} \frac{\tilde{A}(T, T_{i-1})}{\tilde{A}(T, T_i)}.$$

Ora, visto che se $Z \sim \mathcal{N}(M, V^2)$ allora $\alpha Z \sim \mathcal{N}(\alpha M, \alpha^2 V^2)$, seguendo Mercurio [19] (dimostrazione di D.1), abbiamo

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{1 \leq i \leq m} C_i \int_{h_2(x)}^{+\infty \cdot \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\kappa_i} e^{-\frac{(y - \sqrt{1-\rho_{xy}^2}\sigma_y(-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)))^2}{2}} dy \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} A(T, T_i) e^{-\beta(T, T_i)x} \frac{\tilde{A}(T, T_{i-1})}{\tilde{A}(T, T_i)} e^{\kappa_i} \Phi(-\omega h_2(x)) \end{aligned}$$

con

$$\kappa_i = (-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)) \left(\mu_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy} (x - \mu_x) \right) + \frac{(-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i))(1 - \rho_{xy}^2)\sigma_y^2}{2}$$

e

$$\begin{aligned} h_2(x) &= \frac{\bar{y}(x) - \mu_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy} (x - \mu_x)}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \sigma_y} - \sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \sigma_y (-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)) \\ &= h_1(x) - (-\tilde{\beta}(T, T_{i-1}) + \tilde{\beta}(T, T_i)) \sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \sigma_y, \end{aligned}$$

da cui (3.19). □

3.5 Test numerici

Consideriamo una data di riferimento t_0 uguale al 3 Gennaio 2011 e le curve \mathcal{C}_d e \mathcal{C}_Δ , con $\Delta = 6$ mesi, ottenute grazie alla procedura di bootstrapping descritta nella sezione 2.5.

Vogliamo studiare la dipendenza del modello di Kenyon dai suoi parametri.

Per far questo consideriamo una swaption di maturità 5 anni e di tenore 10 anni. Supponiamo inoltre che la gamba variabile dello swap sottostante è indicizzata al tasso Euribor 6M.

Siano T la maturità della swaption, $(T_i)_{0 \leq i \leq m}$ le date di pagamento della gamba variabile e $(T_j^{\text{fix}})_{0 \leq j \leq n}$ le date di pagamento della gamba fissa. Sia, inoltre, N il nominale.

È facile vedere che, considerando il quadro mono-curva³ e prendendo

$$\begin{aligned}\lambda &= \tilde{\lambda}, \\ \sigma(t) &= \tilde{\sigma}(t), \quad \forall t \in [0, T] \\ \tilde{\rho}^D &= 1 \\ &e \\ \sigma^S(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, T],\end{aligned}\tag{3.23}$$

il modello di Kenyon degenera nel modello Hull-White 1 fattore. La buona implementazione della formula analitica è stata testata verificando che i prezzi della swaption ottenuti nel quadro mono-curva grazie al modello Hull-White 1 fattore e grazie al modello di Kenyon nel caso descritto precedentemente sono uguali.

È abitudine del mercato quotare le swaptions grazie alla formula di Black. Viene fatta implicitamente l'ipotesi che il tasso di swap forward segue, sulla la “probabilità level”⁴, una dinamica lognormale. Esprimiamo quindi i prezzi delle swaptions ottenuti grazie al modello di Kenyon in volatilità implicita “Black-equivalente”. O meglio, cerchiamo la volatilità implicita

³cioè usando la stessa curva nel caso discount e forecast ottenuta col bootstrapping di tipo mono-curva

⁴la probabilità associata al numerario dato da

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} P(0, T_j),$$

che è la durata dello swap.

σ^* tale che per ogni strike K fissato, di prezzo-modello corrispondente $SW(K)$, si abbia

$$SW(K) = N \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \tau_j^{\text{fix}} P(0, T_j) \right) \times \text{Black} (K, S_{t_0}, \sigma^*, \omega),$$

dove τ_j^{fix} è la frazione d'anno tra le date T_j e T_{j-1} , ω indica se la swaption è di tipo payer o receiver e S_{t_0} è il tasso di swap forward all'istante t_0 .

Prendiamo un contratto di tipo receiver. Nel caso considerato, il tasso di swap forward è uguale a 4,327%. Fissiamo i parametri di mean-reversion λ e $\tilde{\lambda}$ a 5%. Consideriamo innanzitutto il caso multi-curve in cui il margin tra i prezzi dei bond zero-coupons discount e forecast è deterministico, cioè scegliamo (3.23), con $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

Otteniamo

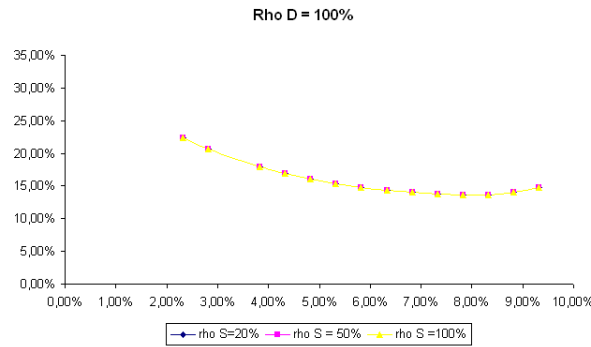


Figura 3.1: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 100\%$, $\sigma^S = 0\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

Osserviamo quindi che il modello non dipende dal parametro $\tilde{\rho}^S$ e ritroviamo la stessa forma di smile di volatilità del quadro del modello Hull-White 1 fattore.

Abbiamo in seguito considerato il caso “multi-curve multi-factors”. Per le volatilità discount e forecast $\sigma = \tilde{\sigma}$ costanti e uguali a 1%, la volatilità del tasso di cambio $\sigma^S = 10\%$, abbiám fissato la correlazione tra i mondi discount e forecast $\tilde{\rho}^D$ a dei valori diversi ed abbiám quindi fatto variare il parametro $\tilde{\rho}^S$.

Abbiamo ottenuto le curve seguenti:

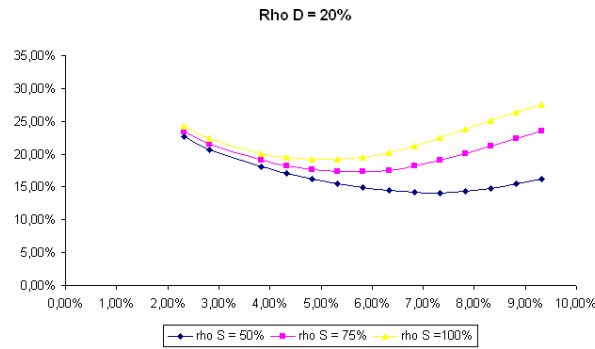


Figura 3.2: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 20\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

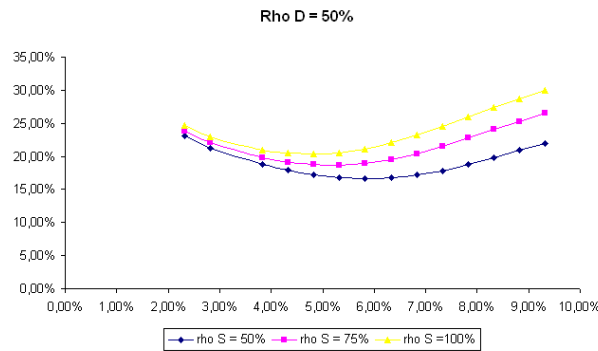


Figura 3.3: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 50\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

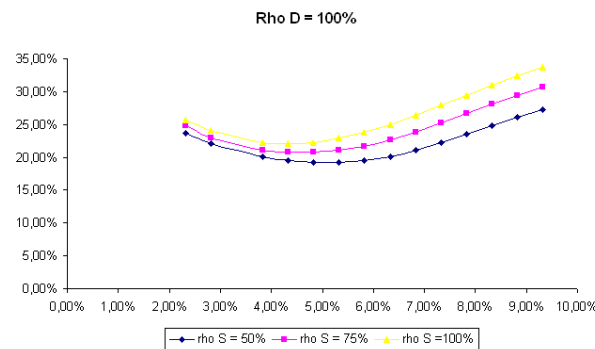


Figura 3.4: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 100\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

È possibile osservare che per $\tilde{\rho}^D$ fissato, il livello di volatilità implicita aumenta col parametro $\tilde{\rho}^S$. Osserviamo allo stesso modo che il parametro $\tilde{\rho}^D$ impatta la convessità dello

smile di volatilità. La convessità dello smile sembra aumentare con $\tilde{\rho}^D$.

Abbiamo verificato un impatto dello stesso tipo sullo smile di volatilità invertendo i ruoli dei due parametri $\tilde{\rho}^S$ e $\tilde{\rho}^D$, come mostrato dalle immagini seguenti.

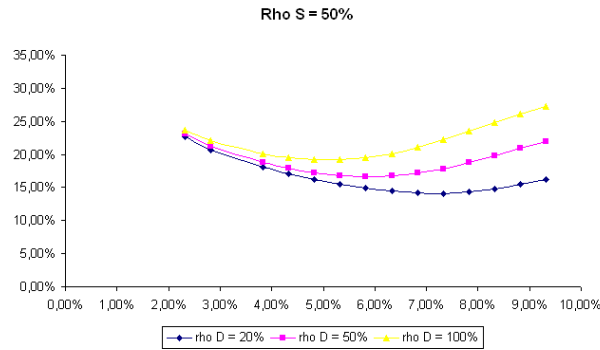


Figura 3.5: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

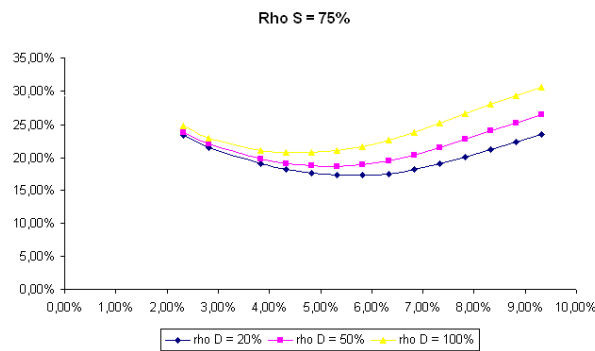


Figura 3.6: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^S = 75\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

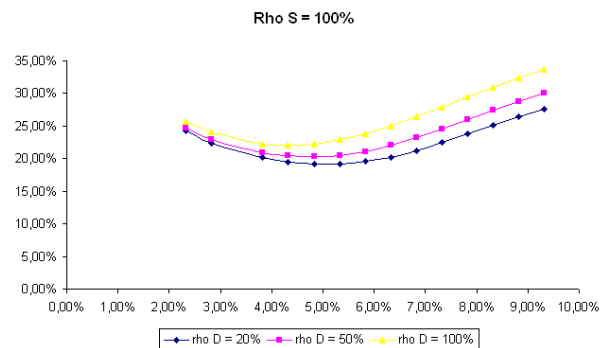


Figura 3.7: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^S = 100\%$, $\sigma^S = 10\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$.

Abbiamo poi analizzato l'impatto della volatilità del tasso di cambio e della volatilità della curva discount sullo smile di volatilità. I grafici seguenti sembrano descrivere ancora una volta lo stesso tipo di fenomeno.

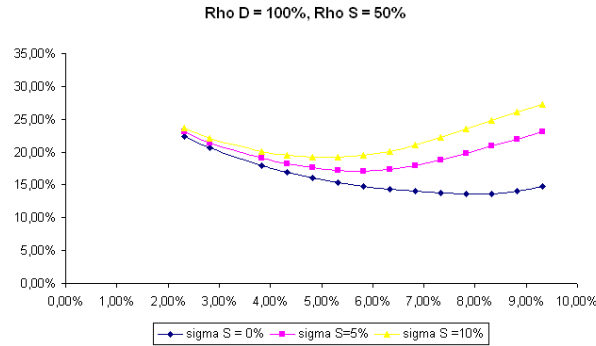


Figura 3.8: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 100\%$, $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$ e diversi valori di σ^S

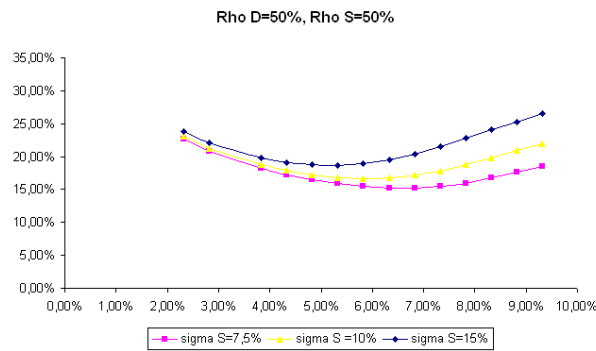


Figura 3.9: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 50\%$, $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$ e diversi valori di σ^S

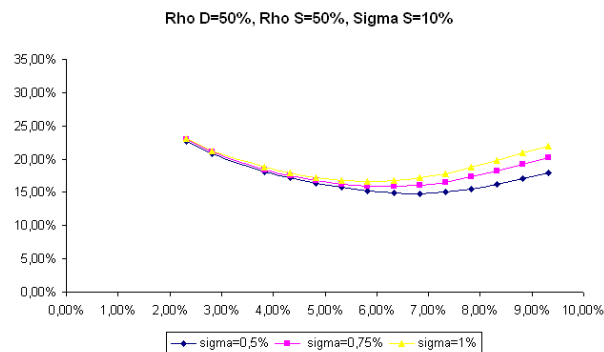


Figura 3.10: Volatilità implicita nel caso $\tilde{\rho}^D = 50\%$, $\tilde{\rho}^S = 50\%$, $\tilde{\sigma} = 1\%$, σ^S e diversi valori di σ .

Soluzione numerica grazie all'EDP

4.1 Equazione alle Derivate Parziali associata al problema

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}})$ uno spazio di probabilità di filtrazione $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Con $\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}$ facciamo riferimento alla probabilità discount T_{ref} -forward.

Siano $(X_{1,t})_{t \geq 0}$ e $(X_{2,t})_{t \geq 0}$ due processi \mathcal{F}_t -adattati che verificano le Equazioni Differenziali Stocastiche seguenti

$$dX_{1,t} = \mu_1(t, X_{1,t})dt + \sigma_1(t, X_{1,t})dW_1^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}(t), \quad X_{1,0} = x_1 \quad (4.1)$$

$$dX_{2,t} = \mu_2(t, X_{2,t})dt + \sigma_2(t, X_{2,t})dW_2^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}(t), \quad X_{2,0} = x_2 \quad (4.2)$$

con $W_1^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}$ e $W_2^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}$ due movimenti browniani tali che

$$d\langle W_1^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}, W_2^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}} \rangle_t = \rho_{1,2}dt$$

e le funzioni di drift

$$\mu_i : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad i = 1, 2$$

e di diffusione

$$\sigma_i : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad i = 1, 2$$

che siano \mathcal{F}_t -adattate e tali che $\forall t \in [0, T]$, $i = 1, 2$ si abbia q.o.

$$\int_0^t |\mu_i(s, X_{i,s})| ds < \infty, \quad \int_0^t |\sigma_i(s, X_{i,s})|^2 ds < \infty.$$

Supponiamo inoltre che μ_i e σ_i verifichino delle condizioni di esistenza ed unicità delle soluzioni di (4.1) e (4.2), per esempio le condizioni di Lipschitz e di sublinearità.

Consideriamo ora un prodotto finanziario il cui valore alla maturità T è dato da $u(T, X_{1,T}, X_{2,T})$ e fissiamo T_{ref} uguale all'ultima data di pagamento di coupon. Si parla di probabilità terminale.

Come fatto nella sezione precedente, indichiamo con $P(t, S)$ il prezzo all'istante t di un bond zero-coupon di maturità S della curva discount.

Supponiamo che

$$\frac{u(T, X_{1,T}, X_{2,T})}{P(T, T_{\text{ref}})}$$

sia un processo di Markov.

Sulla probabilità $\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}$, il prezzo $u(t, X_{1,t}, X_{2,t})$ attualizzato è una martingala e quindi abbiamo che il prezzo del prodotto derivato verifica la relazione seguente

$$\frac{u(t, X_{1,t}, X_{2,t})}{P(t, T_{\text{ref}})} = \mathbb{E}_t^{P(T_{\text{ref}})} \left[\frac{u(T, X_{1,T}, X_{2,T})}{P(T, T_{\text{ref}})} \right].$$

Sotto l'ipotesi di markovianità possiamo dire che esiste una funzione

$$v(t, X_{1,t}, X_{2,t}) = \frac{u(t, X_{1,t}, X_{2,t})}{P(t, T_{\text{ref}})}$$

tale che

$$v(t, X_{1,t}, X_{2,t}) = \mathbb{E}^{P(T_{\text{ref}})} \left[\frac{u(T, X_{1,T}, X_{2,T})}{P(T, T_{\text{ref}})} \middle| X_{1,t} = x_{1,t}, X_{2,t} = x_{2,t} \right].$$

Inoltre, applicando il lemma di Itô a $v(t, X_{1,t}, X_{2,t})$ e osservando che tale processo è una martingala, otteniamo che esso deve necessariamente verificare la seguente EDP, che è l'equazione di Kolmogorov backward associata al sistema di EDS (4.1)-(4.2) con condizione finale $u(T, X_{1,T}, X_{2,T})/P(T, T_{\text{ref}})$:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, X_{1,t}, X_{2,t}) + \mathcal{L} v(t, X_{1,t}, X_{2,t}) = 0, \quad (4.3)$$

in cui l'operatore ellittico \mathcal{L} si scrive

$$\mathcal{L} \cdot = \mathcal{L}_1 \cdot + \mathcal{L}_2 \cdot + \mathcal{L}_{1,2} \cdot,$$

con

$$\mathcal{L}_1 \cdot = \mu_1(t, X_1) \frac{\partial \cdot}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \sigma_1(t, X_1)^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial X_1^2}$$

$$\mathcal{L}_2 \cdot = \mu_2(t, X_2) \frac{\partial \cdot}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \sigma_2(t, X_2)^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial X_2^2}$$

$$\mathcal{L}_{1,2} \cdot = \rho_{1,2} \sigma_1(t, X_1) \sigma_2(t, X_2) \frac{\partial^2 \cdot}{\partial X_1 \partial X_2}$$

Allora il prezzo alla data di riferimento $t = 0$ si ottiene risolvendo l'EDP (4.3) e moltiplicando per il numerario $P(0, T_{\text{ref}})$.

4.2 Discretizzazione: schema ADI

Supponiamo ora che esista una soluzione di (4.3). Ci occupiamo ora della discretizzazione del problema e della risoluzione numerica di (4.3).

Per far questo consideriamo una griglia di discretizzazione uniforme in tempo e in spazio.

Vogliamo risolvere il problema utilizzando una discretizzazione di tipo differenze finite.

Poniamo $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$.

Per quanto riguarda la discretizzazione in tempo, supponiamo che l'intervallo $[0, T]$ sia suddiviso in $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ e per $n = 0, \dots, N - 1$ poniamo

$$\delta t = t_{n+1} - t_n.$$

Per la discretizzazione in spazio, fissiamo un parametro numerico $\epsilon > 0$ e definiamo $z \geq 0$ in modo tale da ottenere $\Phi(z) < \epsilon$, dove $\Phi(\cdot)$ indica la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard.

Per un istante di discretizzazione in tempo t_n fissato, consideriamo il dominio $[\underline{L}_1, \bar{L}_1] \times [\underline{L}_2, \bar{L}_2]$ dove, per $i = 1, 2$

$$\underline{L}_i = \mathbb{E}[x_i(t_n)] - z \times \sqrt{\text{Var}(x_i(t_n))}$$

$$\bar{L}_i = \mathbb{E}[x_i(t_n)] + z \times \sqrt{\text{Var}(x_i(t_n))}$$

e discretizziamo il fattore $x_i(t_n)$, sull'intervallo $[\underline{L}_i, \bar{L}_i]$ con $N_i + 1$ punti.

Per $k_i = 0, \dots, N_i$ poniamo

$$\delta x_i = x_{i,k_{i+1}} - x_{i,k_i} = \frac{\bar{L}_i + \underline{L}_i}{N_i}.$$

Dunque, per ogni $l = 0, \dots, N_1$ e $m = 0, \dots, N_2$ i punti della griglia $(x_{1,l}, x_{2,m})$ sono di coordinate

$$\begin{aligned} x_{1,l} &= \underline{L}_1 + l \times \delta x_1 \\ x_{2,m} &= \underline{L}_2 + m \times \delta x_2. \end{aligned}$$

Per $n = 0, \dots, N - 1$, $l = 0, \dots, N_1$ e $m = 0, \dots, N_2$ chiamiamo

$$\begin{aligned} \mu_{1,l}^n &= \mu_1(t_n, x_{1,l}) \\ \mu_{2,m}^n &= \mu_2(t_n, x_{2,m}) \\ \sigma_{1,l}^n &= \sigma_1(t_n, x_{1,l}) \\ \sigma_{2,m}^n &= \sigma_2(t_n, x_{2,m}) \end{aligned}$$

e poniamo

$$\begin{aligned} v_{l,m}^n &= v(t_n, x_{1,l}, x_{2,m}) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(t, x_1, x_2) &\simeq \frac{v_{l,m}^{n+1} - v_{l,m}^n}{\delta t} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) &\simeq \frac{v_{l+1,m}^n - v_{l-1,m}^n}{2\delta x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) &\simeq \frac{v_{l,m+1}^n - v_{l,m-1}^n}{2\delta x_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(t, x_1, x_2) &\simeq \frac{v_{l+1,m}^n - 2v_{l,m}^n + v_{l-1,m}^n}{\delta x_1^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}(t, x_1, x_2) &\simeq \frac{v_{l,m+1}^n - 2v_{l,m}^n + v_{l,m-1}^n}{\delta x_2^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}(t, x_1, x_2) &\simeq \frac{v_{l+1,m+1}^n - v_{l+1,m-1}^n - v_{l-1,m+1}^n + v_{l-1,m-1}^n}{4\delta x_1 \delta x_2}. \end{aligned}$$

Introduciamo gli operatori discreti $\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{L}}_2, \tilde{\mathcal{L}}_{1,2}$ tali che

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_1 v_{l,m}^n &= \mu_{1,l}^n \frac{v_{l+1,m}^n - v_{l-1,m}^n}{2\delta x_1} + \frac{1}{2}(\sigma_{1,l}^n)^2 \frac{v_{l+1,m}^n - 2v_{l,m}^n + v_{l-1,m}^n}{\delta x_1^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sigma_{1,l}^n}{\delta x_1} \right)^2 - \frac{\mu_{1,l}^n}{\delta x_1} \right) v_{l-1,m}^n - \left(\frac{\sigma_{1,l}^n}{\delta x_1} \right)^2 v_{l,m}^n + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sigma_{1,l}^n}{\delta x_1} \right)^2 + \frac{\mu_{1,l}^n}{\delta x_1} \right) v_{l+1,m}^n \\ &= \alpha_{1,l,m}^n v_{l-1,m}^n + \beta_{1,l,m}^n v_{l,m}^n + \gamma_{1,l,m}^n v_{l+1,m}^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_2 v_{l,m}^n &= \mu_{2,m}^n \frac{v_{l,m+1}^n - v_{l,m-1}^n}{2\delta x_2} + \frac{1}{2}(\sigma_{2,m}^n)^2 \frac{v_{l,m+1}^n - 2v_{l,m}^n + v_{l,m-1}^n}{\delta x_2^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sigma_{2,m}^n}{\delta x_2} \right)^2 - \frac{\mu_{2,m}^n}{\delta x_2} \right) v_{l,m-1}^n - \left(\frac{\sigma_{2,m}^n}{\delta x_2} \right)^2 v_{l,m}^n + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sigma_{2,m}^n}{\delta x_2} \right)^2 + \frac{\mu_{2,m}^n}{\delta x_2} \right) v_{l,m+1}^n \\ &= \alpha_{2,l,m}^n v_{l,m-1}^n + \beta_{2,l,m}^n v_{l,m}^n + \gamma_{2,l,m}^n v_{l,m+1}^n\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{1,2} v_{l,m}^n &= \rho_{1,2} \sigma_{1,l}^n \sigma_{2,m}^n \frac{v_{l+1,m+1}^n - v_{l+1,m-1}^n - v_{l-1,m+1}^n + v_{l-1,m-1}^n}{4\delta x_1 \delta x_2} \\ &= \frac{\rho_{1,2} \sigma_{1,l}^n \sigma_{2,m}^n}{4\delta x_1 \delta x_2} (v_{l-1,m-1}^n - v_{l+1,m-1}^n - v_{l-1,m+1}^n + v_{l+1,m+1}^n) \\ &= a_{l,m}^n v_{l-1,m-1}^n + b_{l,m}^n v_{l+1,m-1}^n + c_{l,m}^n v_{l-1,m+1}^n + d_{l,m}^n v_{l+1,m+1}^n.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda le condizioni di bordo del problema, dal momento che vogliamo prezzare delle swaptions europee o bermuda, imponiamo delle condizioni di tipo Neumann.

Per la risoluzione numerica utilizzeremo un metodo di splitting ADI di tipo predictor-corrector.

4.2.1 Interesse del metodo ADI

Supponiamo che $\rho_{1,2} = 0$, cioè sulla probabilità $\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}$ i movimenti browniani $W_1^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}$ e $W_2^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}$ sono indipendenti.

In tal caso (4.3) si riscrive

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x_1, x_2) + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) v(t, x_1, x_2) = 0.$$

Prendiamo in considerazione l'intervallo $[t_n, t_{n+1}]$ ed effettuiamo una discretizzazione di tipo differenze finite utilizzando il theta-metodo, con $\theta \in [0, 1]$. Otteniamo

$$\left(1 - \theta \delta t (\tilde{\mathcal{L}}_1 + \tilde{\mathcal{L}}_2)\right) v_{l,m}^n = \left(1 + (1 - \theta) \delta t (\tilde{\mathcal{L}}_1 + \tilde{\mathcal{L}}_2)\right) v_{l,m}^{n+1}, \quad (4.4)$$

da risolvere per gli $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ punti della griglia, ponendo le condizioni di bordo per $l = 0, l = N_1, m = 0$ e $m = N_2$.

Lo schema (4.4) rappresenta un sistema di equazioni lineari a $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ incognite. Riscrivendo tale sistema in forma matriciale, vediamo che la matrice da invertire è sparsa, ma diversamente che dal caso uni-dimensionale, essa non è più tridiagonale. Ricordiamo che cercare la soluzione di un sistema di $N_1 N_2$ incognite coinvolge $O(N_1^2 N_2^2)$ operazioni, cosa che, a causa della grande dimensione del problema, impedisce l'uso di metodi standard.

È quindi necessario effettuare una discretizzazione che sia molto più efficace dal punto di vista dei tempi di calcolo. Pertanto abbiamo scelto di utilizzare il metodo ADI (Alternating Direction Implicit) che è un metodo di *splitting*, in cui invece di applicare in modo simultaneo i due operatori ellittici $\tilde{\mathcal{L}}_1$ e $\tilde{\mathcal{L}}_2$ il problema è risolto prima lungo una direzione in spazio e poi secondo l'altra.

L'idea è di approssimare

$$\left(I - \theta \delta t \left(\tilde{\mathcal{L}}_1 + \tilde{\mathcal{L}}_2 \right) \right) \approx \left(I - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1 \right) \left(I - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 \right)$$

$$\left(I + \theta \delta t \left(\tilde{\mathcal{L}}_1 + \tilde{\mathcal{L}}_2 \right) \right) \approx \left(I + \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1 \right) \left(I + \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 \right)$$

in cui l'errore di troncatura resta lo stesso, cioè $O(\delta t(\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta t^2))$. Il guadagno è dal punto di vista dei tempi di calcolo. Infatti, lo schema

$$\left(1 - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1 \right) \left(1 - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 \right) v_{i,m}^n = \left(1 + \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1 \right) \left(1 + \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 \right) v_{i,m}^{n+1}$$

può essere *split* in due sistemi

$$\left(1 - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1 \right) u_{l,m} = \left(1 + \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 \right) v_{l,m}^{n+1} \quad (4.5)$$

$$\left(1 - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 \right) v_{l,m}^n = \left(1 + \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1 \right) u_{l,m}, \quad (4.6)$$

dove è stata introdotta una soluzione intermedia $(u_{l,m})_{l,m}$.

L'utilità di tale decomposizione è legata al fatto che sia in (4.5) che (4.6) bisogna risolvere dei sistemi lineari con matrici tridiagonali. Bisogna prima, per ogni m risolvere il sistema lineare (4.5), che chiede $O(N_1)$ operazioni, poi per ogni l il sistema (4.6).

Otteniamo quindi un costo totale di operazioni dell'ordine di $O(N_1 N_2)$.

Potremmo usare l'analisi di von Neumann per mostrare che questo schema (Peaceman-Rachford ADI) è A-stabile, ma non fortemente A-stabile.

Un altro schema ADI è il metodo Douglas-Rachford ADI, che useremo nel seguito. È possibile mostrare che tale schema è A-stabile per $\theta \geq 1/2$ e fortemente A-stabile per $\theta > 1/2$. Ne consideriamo una versione con il θ -metodo:

$$\left(1 - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_1\right) u_{l,m} = \left(1 + (1 - \theta)\delta t\tilde{\mathcal{L}}_1 + \delta t\tilde{\mathcal{L}}_2\right) v_{l,m}^{n+1} \quad (4.7)$$

$$\left(1 - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_2\right) v_{l,m}^n = u_{l,m} - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_2 v_{l,m}^{n+1} \quad (4.8)$$

Anche in questo caso, lo schema permette di risolvere il problema in due tappe, in cui cerchiamo delle soluzioni di sistemi di equazioni tridiagonali lungo una delle due direzioni x_1 o x_2 .

4.2.2 Metodo ADI per una EDP con termine misto

Sia ora (4.3) con $\rho_{1,2} \neq 0$. Vogliamo usare il metodo Douglas-Rachford ADI, incorporando anche l'operatore misto $\tilde{\mathcal{L}}_{1,2}$. Per questo, l'idea è di impiegare uno schema di tipo *predictor-corrector* che, per un'iterazione in tempo data e chiamato $\lambda \in [0, 1]$ il parametro di correzione, si scrive

Predictor

$$\begin{aligned} \left(1 - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_1\right) u_{l,m}^{n(1)} &= \left(1 + (1 - \theta)\delta t\tilde{\mathcal{L}}_1 + \delta t\tilde{\mathcal{L}}_2 + \delta t\tilde{\mathcal{L}}_{1,2}\right) v_{l,m}^{n+1}, \quad 0 \leq m \leq N_2 \\ \left(1 - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_2\right) u_{l,m}^{n(2)} &= u_{l,m}^{n(1)} - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_2 v_{l,m}^{n+1}, \quad 0 \leq l \leq N_1 \end{aligned}$$

Corrector

$$\begin{aligned} \left(1 - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_1\right) z_{l,m}^n &= \left(1 + (1 - \theta)\delta t\tilde{\mathcal{L}}_1 + \delta t\tilde{\mathcal{L}}_2 + (1 - \lambda)\delta t\tilde{\mathcal{L}}_{1,2}\right) v_{l,m}^{n+1} + \lambda\delta t\tilde{\mathcal{L}}_{1,2} u_{l,m}^{n(2)}, \quad 0 \leq m \leq N_2 \\ \left(1 - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_2\right) v_{l,m}^n &= z_{l,m}^n - \theta\delta t\tilde{\mathcal{L}}_2 v_{l,m}^{n+1}, \quad 0 \leq l \leq N_1 \end{aligned}$$

Osserviamo che lo schema Douglas-Rachford è applicato una prima volta per ottenere il predittore $(u_{l,m}^{n(2)})_{l,m}$ all'istante t_n della soluzione $v_{l,m}^n$. L'impiego la seconda volta nel Corrector

permette di cambiare l'istante in cui l'operatore misto è applicato. Si può dimostrare che tale schema converge con un ordine di convergenza

$$O((\delta x_1 + \delta x_2)^2 + \mathbb{1}_{\theta \neq 1/2} \delta t + \mathbb{1}_{\lambda \neq 1/2} \delta t + \delta t^2).$$

Si ha quindi convergenza al secondo ordine in tempo se $\theta = \lambda = 1/2$. Inoltre, lo schema è A-stabile per $\theta \geq 1/2$ e $1/2 \leq \lambda \leq \theta$.

A proposito della stabilità del metodo ADI, una trattazione completa per un problema a N fattori è fornita da Craig e Sneyd in [24] accompagnata, nel caso di coefficienti di drift e diffusione non costanti, dai lavori di McKee e Mitchell [25] e di Widlund [26].

Per quanto riguarda le condizioni di bordo, prendiamo le condizioni di Neumann

$$\nabla v \cdot \mathbf{n} = 0,$$

dove \mathbf{n} indica la normale uscente del dominio, che coincide con l'imporre

$$\begin{aligned} v_{l,-1}^n &= v_{l,0}^n, & 0 \leq l \leq N_1 \\ v_{l,N_2+1}^n &= v_{l,N_2}^n, & 0 \leq l \leq N_1 \\ v_{-1,m}^n &= v_{0,m}^n, & 0 \leq m \leq N_2 \\ v_{N_1+1,m}^n &= v_{N_1,m}^n, & 0 \leq m \leq N_2 \end{aligned}$$

Vogliamo ora riscrivere lo schema in forma matriciale.

Guardiamo per prima cosa la prima equazione del Predictor

$$(1 - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1) u_{i,m}^{n(1)} = (1 + (1 - \theta) \delta t \tilde{\mathcal{L}}_1 + \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 + \delta t \tilde{\mathcal{L}}_{1,2}) v_{i,m}^{n+1}, \quad 0 \leq m \leq N_2. \quad (4.9)$$

Poniamo, per m fissato

$$U_m^{n(1)} = \begin{pmatrix} u_{0,m}^{n(1)} \\ \vdots \\ u_{N_1,m}^{n(1)} \end{pmatrix} \quad V_m^{n+1} = \begin{pmatrix} v_{0,m}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{N_1,m}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Per l e m fissati, (4.9) equivale a

$$\begin{aligned} u_{l,m}^{n(1)} - \theta \delta t (\alpha_{1,l,m}^n u_{l-1,m}^{n(1)} + \beta_{1,l,m}^n u_{l,m}^{n(1)} + \gamma_{1,l,m}^n u_{l+1,m}^{n(1)}) &= v_{l,m}^{n+1} + (1 - \theta) \delta t (\alpha_{1,l,m}^n v_{l-1,m}^{n+1} + \beta_{1,l,m}^n v_{l,m}^{n+1} + \gamma_{1,l,m}^n v_{l+1,m}^{n+1}) \\ &+ \delta t (\alpha_{2,l,m}^n v_{l,m-1}^{n+1} + \beta_{2,l,m}^n v_{l,m}^{n+1} + \gamma_{2,l,m}^n v_{l,m+1}^{n+1}) \\ &+ \delta t (a_{l,m}^n v_{l-1,m-1}^{n+1} + b_{l,m}^n v_{l+1,m-1}^{n+1} + c_{l,m}^n v_{l-1,m+1}^{n+1} + d_{l,m}^n v_{l+1,m+1}^{n+1}). \end{aligned}$$

Riarrangiando in termini

$$\begin{aligned} -\theta \delta t \alpha_{1,l,m}^n u_{l-1,m}^{n(1)} + (1 - \theta \delta t \beta_{l,m}^n) u_{l,m}^{n(1)} - \theta \delta t \gamma_{l,m}^n u_{l+1,m}^{n(1)} &= (\delta t a_{l,m}^n v_{l-1,m-1}^{n+1} + \delta t \alpha_{2,l,m}^n v_{l,m-1}^{n+1} + \delta t b_{l,m}^n v_{l+1,m+1}^{n+1}) \\ &+ \left((1 - \theta) \delta t \alpha_{1,l,m}^n v_{l-1,m}^{n+1} + \delta t ((1 - \theta) \beta_{l,m}^n + 1 + \beta_{2,l,m}^n) v_{l,m}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \theta) \delta t \gamma_{1,l,m}^n v_{l+1,m}^{n+1} \right) \\ &+ (\delta t c_{l,m}^n v_{l-1,m+1}^{n+1} + \delta t \gamma_{l,m}^n v_{l,m}^{n+1} + \delta t d_{l,m}^n v_{l+1,m+1}^{n+1}). \end{aligned}$$

Possiamo quindi riscrivere (4.9) in maniera compatta, per m fissato

$$M_m^n U_m^{n(1)} = Q_m^n V_{m-1}^{n+1} + P_m^n V_m^{n+1} + R_m^n V_{m+1}^{n+1}.$$

Si vede chiaramente che le matrici M_m^n , Q_m^n , P_m^n e R_m^n sono tridiagonali. Indichiamo in maniera generale con $(c_l^d)_i$, $(c_l^l)_i$ e $(c_l^u)_i$ gli elementi rispettivamente diagonali, sottodiagonali e sopra-diagonali.

Guardiamo ora a cosa corrispondono esattamente le condizioni imposte al bordo del dominio di discretizzazione. Imporre delle condizioni di Neumann omogenee equivale ad inglobare nel termine diagonale il coefficiente mancante: per l'indice $l = 0$ inglobiamo in c_0^d il valore c_{-1}^l , per $l = N_1$ inglobiamo il termine $c_{N_1+1}^u$ in $c_{N_1}^d$, cioè

$$c_0^d = c_0^d + c_{-1}^l$$

$$c_{N_1}^d = c_{N_1}^d + c_{N_1+1}^u.$$

Inoltre, poniamo

$$U^{n(1)} = \begin{pmatrix} U_0^{n(1)} \\ \vdots \\ U_{N_2}^{n(1)} \end{pmatrix} \quad V^{n+1} = \begin{pmatrix} V_0^{n+1} \\ \vdots \\ V_{N_2}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} M_0^n & O & \cdots & O \\ O & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O \\ O & \cdots & O & M_{N_2}^n \end{pmatrix} \quad L^n = \begin{pmatrix} P_0^n & R_0^n & O & \cdots & O \\ Q_1^n & P_1^n & R_1^n & & \vdots \\ O & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & & Q_{N_2-1}^n & P_{N_2-1}^n & R_{N_2-1}^n \\ O & \cdots & O & Q_{N_2}^n & P_{N_2}^n \end{pmatrix}.$$

Risolvere (4.9) corrisponde a trovare la soluzione del sistema

$$M^n U^{n(1)} = L^n V^{n+1}.$$

Interessiamoci ora alla condizione di bordo per la variabile x_2 . Come nel caso della variabile x_1 , ciò equivale ad inglobare i termini mancanti nelle matrici diagonali corrispondenti.

Indichiamo con $(C_m^d)_m$, $(C_m^l)_m$ e $(C_m^u)_m$ gli elementi rispettivamente diagonali, sottodiagonali e sopradiagonali di ogni matrice ed abbiamo

$$C_0^d = C_0^d + C_{-1}^l$$

$$C_{N_2}^d = C_{N_2}^d + C_{N_2+1}^u.$$

Prendiamo ora la seconda equazione del Predictor, $0 \leq l \leq N_1$

$$\left(1 - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2\right) u_{l,m}^{n(2)} = u_{l,m}^{n(1)} - \theta \delta t \tilde{\mathcal{L}}_2 v_{l,m}^{n+1} \quad (4.10)$$

e, per l fissato, poniamo

$$U_l^{n(1)} = \begin{pmatrix} u_{l,0}^{n(1)} \\ \vdots \\ u_{l,N_2}^{n(1)} \end{pmatrix} \quad U_l^{n(2)} = \begin{pmatrix} u_{l,0}^{n(2)} \\ \vdots \\ u_{l,N_2}^{n(2)} \end{pmatrix} \quad V_l^{n+1} = \begin{pmatrix} v_{l,0}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{l,N_2}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Per l e m fissati, (4.10) equivale a

$$u_{l,m}^{n(2)} - \theta \delta t \left(\alpha_{2,l,m}^n u_{l,m-1}^{n(2)} + \beta_{2,l,m}^n u_{l,m}^{n(2)} + \gamma_{2,l,m}^n u_{l,m+1}^{n(2)} \right) = u_{l,m}^{n(1)} - \theta \delta t \left(\alpha_{2,l,m}^n v_{l,m-1}^{n+1} + \beta_{2,l,m}^n v_{l,m}^{n+1} + \gamma_{2,l,m}^n v_{l,m+1}^{n+1} \right).$$

Possiamo quindi riscrivere (4.10) per l fissato, in forma matriciale

$$\bar{M}_l^n U_l^{n(2)} = U_l^{n(1)} + \bar{P}_l^n V_l^{n+1}$$

e, ponendo

$$U^{n(1)} = \begin{pmatrix} U_0^{n(1)} \\ \vdots \\ U_{N_1}^{n(1)} \end{pmatrix} \quad U^{n(2)} = \begin{pmatrix} U_0^{n(2)} \\ \vdots \\ U_{N_1}^{n(2)} \end{pmatrix} \quad V^{n+1} = \begin{pmatrix} V_0^{n+1} \\ \vdots \\ V_{N_1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

vediamo che (4.10) equivale a risolvere

$$\bar{M}^n U^{n(2)} = U^{n(1)} + \bar{L}^n V^{n+1},$$

dove

$$\bar{M}^n = \begin{pmatrix} \bar{M}_0^n & O & \cdots & O \\ O & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O \\ O & \cdots & O & \bar{M}_{N_1}^n \end{pmatrix} \quad \bar{L}^n = \begin{pmatrix} \bar{P}_0^n & O & \cdots & O \\ O & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O \\ O & \cdots & O & \bar{P}_{N_1}^n \end{pmatrix}.$$

Le condizioni al bordo sono trattate in modo equivalente che per (4.9).

Analogamente a quanto fatto nel caso del Predictor, è possibile scrivere anche le equazioni del Corrector in forma matriciale.

4.3 Applicazione ad una swaption bermuda

Consideriamo il quadro teorico del modello di Kenyon descritto nel capitolo precedente e ci mettiamo sulla probabilità terminale $\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}$. Consideriamo quindi i processi $(X_t)_{t \in [0, T_{\text{ref}}]}$ e $(\tilde{X}_t)_{t \in [0, T_{\text{ref}}]}$ che seguono le dinamiche

$$\begin{aligned} dX_t &= (\phi(t) - \lambda X_t - \sigma(t) \Sigma_t(T_{\text{ref}})) dt + \sigma(t) dW_{T_{\text{ref}}}, \quad X_0 = 0 \\ d\tilde{X}_t &= \left(\tilde{\phi}(t) - \tilde{\lambda} \tilde{X}_t - \sigma(t) (\tilde{\rho}^D \Sigma_t(T_{\text{ref}}) + \tilde{\rho}^S \sigma^S(t)) \right) dt + \tilde{\sigma}(t) d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}, \quad \tilde{X}_0 = 0. \end{aligned}$$

Ricordiamo che queste dinamiche si scrivono in forma integrale

$$\begin{aligned} X_t &= M(0, t) + \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} \sigma(v) dW_{T_{\text{ref}}}(v) \\ \tilde{X}_t &= \tilde{M}(0, t) + \int_0^t e^{-\tilde{\lambda}(t-v)} \tilde{\sigma}(v) d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}(v), \end{aligned}$$

con

$$M(0, t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-v)} (\phi(v) - \sigma(v) \Sigma_v(T_{\text{ref}})) dv$$

e

$$\tilde{M}(0, t) = \int_0^t e^{-\tilde{\lambda}(t-v)} \left(\tilde{\phi}(v) - \tilde{\sigma}(v) (\tilde{\rho}^S \sigma^S(v) + \tilde{\rho}^D \Sigma_v(T_{\text{ref}})) \right) dv.$$

Siano ora x_t e \tilde{x}_t due processi tali che

$$dx_t = -\lambda x_t dt + \sigma(t) dW_{T_{\text{ref}}} \quad (4.11)$$

$$d\tilde{x}_t = -\tilde{\lambda} \tilde{x}_t dt + \tilde{\sigma}(t) d\tilde{W}^{\mathbb{Q}_{T_{\text{ref}}}}. \quad (4.12)$$

Vediamo facilmente che i processi sono legati dalle relazioni seguenti $\forall t \in [0, T_{\text{ref}}]$

$$X_t = x_t + M(0, t)$$

e

$$\tilde{X}_t = \tilde{x}_t + \tilde{M}(0, t),$$

con $x_0 = \tilde{x}_0 = 0$. Vogliamo prezzare una swaption bermuda grazie all'EDP che essa verifica.

4.3.1 Swaptions bermuda

Le *Swaptions bermuda* sono delle opzioni su IRS. Una swaption bermuda di tipo payer è un'opzione che dona il diritto (ma non l'obbligo) ad entrare in uno swap payer secondo uno scadenziario d'esercizio predefinito (è possibile esercitare l'opzione ad ogni inizio di periodo della gamba fissa). Più precisamente, ad ogni data di esercizio, l'opzione dona il diritto ad entrare in uno swap che inizia in quella stessa data e di maturità fissa.

Siano $(T_k)_{1 \leq k \leq p}$ uno scadenziario d'esercizio e T una maturità fissa. Definiamo quindi per ogni data T_k lo swap payer sottostante a partenza forward all'istante T_k e di maturità

T . Il prezzo di tale swap, visto all'istante $t \leq T_k$ si calcola in maniera usuale. Alla data d'esercizio l'opzione corrisponde alla possibilità di entrare in questo swap o di conservare il diritto d'esercitare più tardi. Infatti, se indichiamo con $V_{\text{berm}}(T_{k+1}, X_{T_{k+1}}, \tilde{X}_{T_{k+1}})$ il prezzo dell'opzione futura visto all'istante T_{k+1} , allora il prezzo dell'opzione all'istante T_k è dato da

$$V_{\text{berm}}(T_k, X_{T_k}, \tilde{X}_{T_k}) = P(T_k, X_{T_k}, T_{\text{ref}}) \max \left(\frac{V_{\text{swap}}(T_k, X_{T_k}, \tilde{X}_{T_k})}{P(T_k, X_{T_k}, T_{\text{ref}})}, \mathbb{E}_{T_k}^{P(T_{\text{ref}})} \left[\frac{V_{\text{berm}}(T_{k+1}, X_{T_{k+1}}, \tilde{X}_{T_{k+1}})}{P(T_{k+1}, X_{T_{k+1}}, T_{\text{ref}})} \right] \right),$$

dove $V_{\text{swap}}(T_k, X_{T_k}, \tilde{X}_{T_k})$ indica il prezzo dello swap sottostante alla data T_k .

Valutiamo tra le date T_{k+1} e T_k in modo backward il valore atteso condizionale

$$\mathbb{E}_{T_k}^{P(T_{\text{ref}})} \left[\frac{V_{\text{berm}}(T_{k+1}, X_{T_{k+1}}, \tilde{X}_{T_{k+1}})}{P(T_{k+1}, X_{T_{k+1}}, T_{\text{ref}})} \right]$$

grazie all'equazione alle derivate parziali corrispondente.

Poniamo

$$v(t, X_t, \tilde{X}_t) = \frac{V_{\text{berm}}(t, X_t, \tilde{X}_t)}{P(t, X_t, T_{\text{ref}})}.$$

I teoremi di esistenza della soluzione ci assicurano che la soluzione teorica $v(t, X_t, \tilde{X}_t)$ è tale che $v(t, X_t, \tilde{X}_t) \in \mathcal{C}([T_k, T_{k+1}] \times \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{C}^{1,2}([T_k, T_{k+1}] \times \mathbb{R}^2)$.

Osservazione 5. Se ci si trova in presenza di un'equazione alle derivate parziali a convezione dominante, cioè con il termine di drift molto più importante di quello di diffusione e se quindi effettuiamo una discretizzazione numerica del problema in modo "convenzionale", osserviamo la presenza di oscillazioni importanti della soluzione numerica ottenuta.

Consideriamo per esempio il caso monodimensionale, con

$$dZ_t = \mu(t, Z_t)dt + \sigma(t, Z_t)dW_t, \quad \forall t \in [0, T]$$

e prendiamo $f(t, Z_t)$ con una condizione finale $f(T, Z_T)$. Gli associamo l'EDP seguente

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, Z_t) + \mu(t, Z_t) \frac{\partial f}{\partial Z}(t, Z_t) + \frac{1}{2} \sigma(t, Z_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}(t, Z_t) = 0.$$

Prendiamo una griglia uniforme in spazio $\{Z_j\}_{0 \leq j \leq N}$ con passo di discretizzazione δz .

Chiamiamo numero di Peclet locale la quantità

$$\mathbb{P}e = \frac{|\mu(t, Z_j)| \delta z}{\sigma(t, Z_j)^2}.$$

È possibile dimostrare che per evitare delle oscillazioni numeriche è necessario verificare la condizione sul numero di Peclet locale $\mathbb{P}e < 1$. Qualora essa non sia verificata, è fondamentale impiegare dei metodi di tipo upwind.

Per evitare di ritrovarsi in presenza di un problema a convenzione dominante, per poter prezzare

$$\mathbb{E}_{T_k}^{P(T_{\text{ref}})} \left[\frac{V_{\text{berm}}(T_{k+1}, X_{T_{k+1}}, \tilde{X}_{T_{k+1}})}{P(T_{k+1}, X_{T_{k+1}}, T_{\text{ref}})} \right]$$

non consideriamo le variabili di stato X_t e \tilde{X}_t , ma piuttosto le variabili di stato centrate x_t e \tilde{x}_t .

Il prezzo allora della swaption bermuda all'istante T_k è dato da

$$\begin{aligned} V_{\text{berm}}(T_k, x_{T_k}, \tilde{x}_{T_k}) &= P(T_k, x_{T_k} + M(T_k, T_{\text{ref}}), T_{\text{ref}}) \\ &\cdot \max \left(\frac{V_{\text{swap}}(T_k, x_{T_k}, \tilde{x}_{T_k})}{P(T_k, x_{T_k} + M(T_k, T_{\text{ref}}), T_{\text{ref}})}, \mathbb{E}_{T_k}^{P(T_{\text{ref}})} \left[\frac{V_{\text{berm}}(T_{k+1}, x_{T_{k+1}}, \tilde{x}_{T_{k+1}})}{P(T_{k+1}, x_{T_{k+1}} + M(T_{k+1}, T_{\text{ref}}), T_{\text{ref}})} \right] \right). \end{aligned}$$

Riusciamo quindi a scrivere il prezzo della swaption bermuda all'istante di riferimento $t = 0$ iterando la procedura descritta per $k = 1, \dots, p$.

4.3.2 Test numerici

Consideriamo una swaption di tipo receiver di maturità 5 anni, tenore 10 anni, nominale 10000 EUR, strike $K = 4,337\%$. Supponiamo che la gamba variabile dello swap sottostante è indicizzata al tasso Euribor 6M.

Vogliamo analizzare la convergenza numerica dei prezzi delle swaptions europee e bermuda in funzione della discretizzazione temporale e spaziale.

Per far questo, poniamo $\lambda = \tilde{\lambda} = 5\%$, $\sigma = \tilde{\sigma} = 1\%$, $\tilde{\rho}^D = 70\%$, $\tilde{\rho}^S = 75\%$ e $\sigma^S = 10\%$.

Studiamo dapprima la convergenza dei prezzi rispetto alla discretizzazione temporale del problema. In tal caso consideriamo $N_1 = N_2 = 50$ punti per la discretizzazione in spazio e facciamo variare il numero di punti per la discretizzazione temporale.

Otteniamo le immagini seguenti

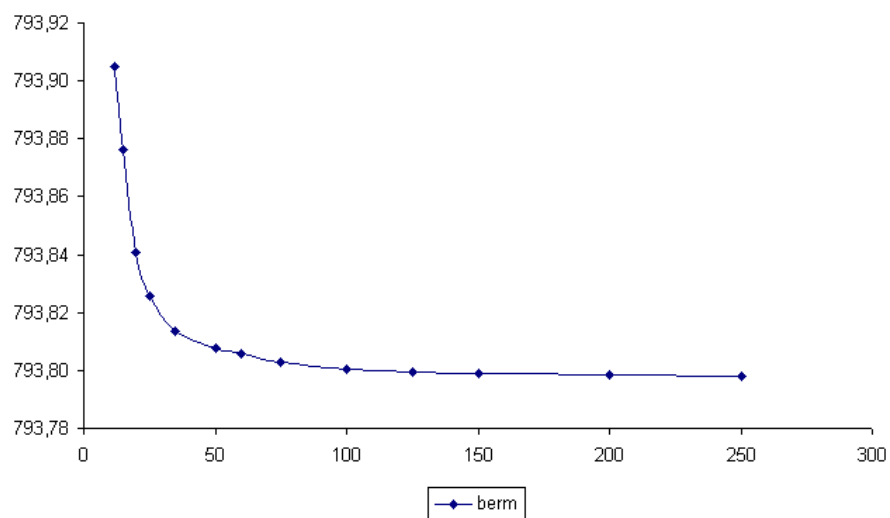


Figura 4.1: Prezzo della swaption bermuda (espresso in basis points) in funzione del numero di punti della discretizzazione temporale.

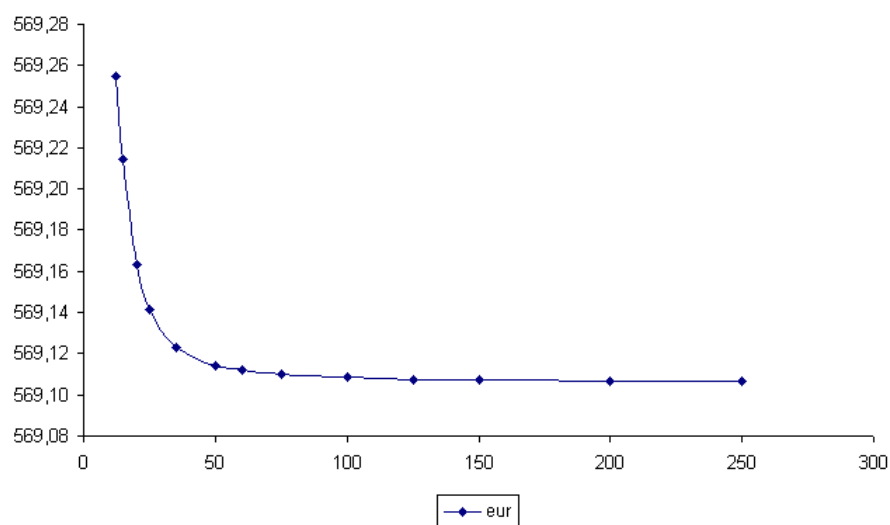


Figura 4.2: Prezzo della swaption europea (espresso in basis points) in funzione del numero di punti della discretizzazione temporale.

Dopo 50 iterazioni vediamo quindi il prezzo convergere verso la soluzione. Il prezzo della

swaption europea converge verso il prezzo analitico dato dal modello di Kenyon¹.

In seguito, per studiare la convergenza spaziale prendiamo $N = 50$ punti di iterazione. Osserviamo nel grafico seguente la dipendenza del prezzo di una swaption bermuda dalla discretizzazione in spazio, con $N_1 = N_2$.

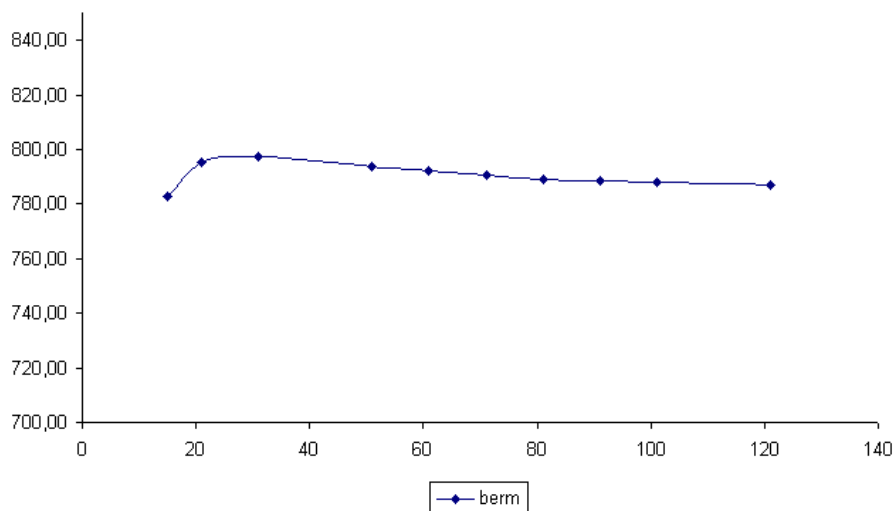


Figura 4.3: Prezzo della swaption bermuda (espresso in basis points) in funzione del numero di punti di discretizzazione spaziale, con $N_1 = N_2$.

Sembra sufficiente considerare 50 punti per la discretizzazione spaziale per ognuna delle due direzioni.

¹Abbiamo inoltre testato la buona implementazione dell'EDP verificando che i prezzi ottenuti grazie all'EDP sono uguali a quelli ottenuti analiticamente, e questo per un grande set di swaptions.

Condiseriamo ora diversi valori di strike. Siano

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} 2, 327\% \\ 3, 327\% \\ 4, 327\% \\ 5, 327\% \\ 6, 327\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 - 2\% \\ S_0 - 1\% \\ S_0 \\ S_0 + 1\% \\ S_0 + 2\% \end{pmatrix}$$

dove S_0 è il tasso di swap forward. Consideriamo diverse swaptions bermuda: analizziamo i casi

- mono-curva (**Mono**);
- multi-curve con margin deterministico (**Multi Det**);
- multi-curve con $\tilde{\rho}^D = 100\%$, $\tilde{\rho}^S = 75\%$ e $\sigma^S = 10\%$ (**Multi 1**), e
- multi-curve con $\tilde{\rho}^D = 70\%$, $\tilde{\rho}^S = 75\%$ e $\sigma^S = 10\%$ (**Multi 2**).

I prezzi delle swaptions bermuda sono dati da:

	Mono	Multi Det	Multi 1	Multi 2
2, 327%	140, 70	149, 24	235, 35	218, 39
3, 327%	298, 56	315, 88	463, 84	434, 73
4, 327%	572, 86	604, 45	832, 83	789, 46
5, 327%	997, 30	1050, 29	1350, 27	1296, 26
6, 327%	1543, 04	1621, 30	1975, 72	1911, 26

Tabella 4.1: Prezzi delle swaptions bermuda considerate.

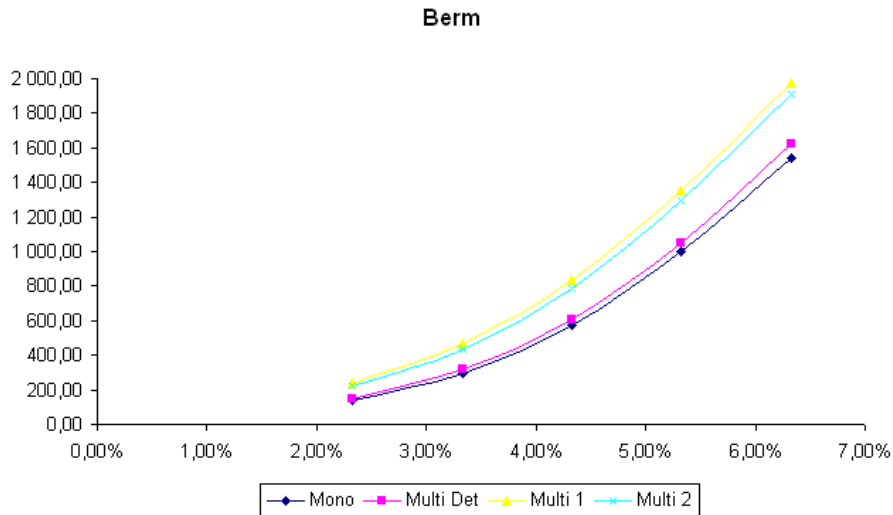


Figura 4.4: Prezzi delle swaptions bermuda considerate.

I parametri modello dei quattro casi non son stati calibrati a partire dalle quotazioni di mercato, ma sono stati scelti in modo arbitrario per effettuare i test. È pertanto difficile poter paragonare i prezzi nei quattro casi.

I prezzi sono crescenti in funzione dello strike, cosa normale in quanto son state prese in considerazione delle swaptions di tipo receiver. Più l'opzione è fuori della moneta, più i prezzi nei quattro casi convergono tra di loro.

Abbiamo inoltre verificato nel test seguente la proprietà di una swaption bermuda di avere un prezzo superiore al massimo dei prezzi delle swaptions europee incluse.

	Mono	Multi Det	Multi 1	Multi 2
2,327%	70,25	75,09	108,80	100,38
3,327%	187,05	198,18	258,29	243,01
4,327%	459,95	486,41	592,81	564,70
5,327%	900,61	949,42	1106,58	1065,52
6,327%	1489,77	1565,49	1747,07	1701,22

Tabella 4.2: Massimo dei prezzi (espressi in basis points) delle swaptions europee incluse.

Il grafico seguente mostra per ogni swaption bermuda la differenza tra il suo prezzo ed il massimo dei prezzi delle swaptions europee incluse².

²Chiamiamo tale differenza il prezzo dell'opzione *switch*.

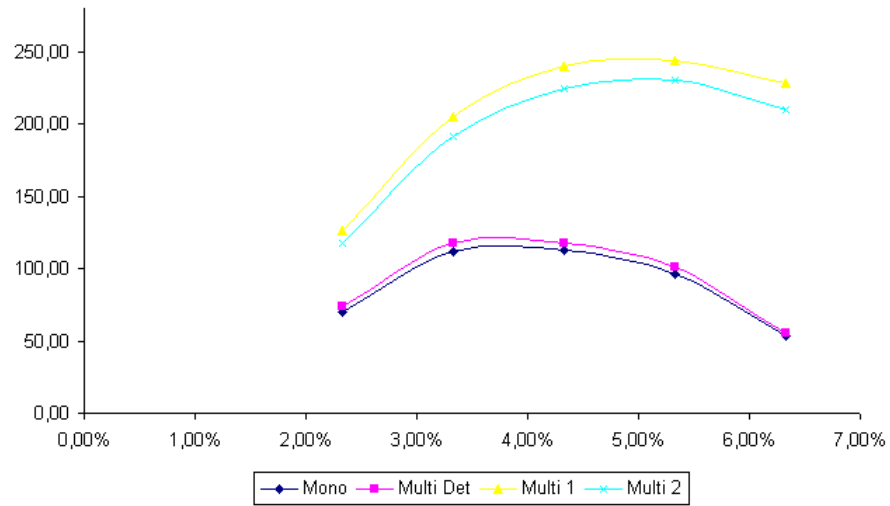


Figura 4.5: Prezzo delle opzioni switch.

Osserviamo quindi, come ci si attendeva, che i prezzi delle opzioni switch sono positivi.

Come illustrato precedentemente, le osservazioni che sono state effettuate a partire della crisi dei subprimes del 2007 hanno indotto la comunità finanziaria ad indirizzarsi verso un nuovo quadro di pricing dei prodotti derivati su tassi di interesse. Attualmente tuttavia, la situazione non risulta essere molto chiara. Ci troviamo infatti in una fase di transizione tra quello che è il quadro tradizionale di pricing totalmente mono-curva e quello multi-curve. È quindi necessario che il sistema bancario internazionale nella sua interezza faccia propria tale problematica e si conformi al nuovo quadro il più presto possibile.

L'instabilità della situazione attuale non è semplicemente la conseguenza della fase di passaggio, ma è dovuta anche alla mancanza di un'apparente intenzione globale alla conformazione. È noto infatti che nella zona JPY il quadro di pricing resta ad oggi completamente mono-curva.

La necessità è quindi quella di capire da un lato come modificare la struttura pre-esistente per adattarsi interamente al nuovo quadro di pricing e dall'altro come gestire tale situazione intermedia. Nella zona Euro si conosce invece con certezza la volontà di adeguamento al quadro multi-curve nel più breve tempo possibile. Il consensus interbancario per prodotti derivati su tassi di interesse di tipo vaniglia vigente è già basato sul quadro multi-curve. Più complessa risulta la questione dei prodotti esotici.

È inoltre possibile verificare come la problematica resti di attualità anche oggi nella nuova situazione di instabilità finanziaria.

Il lavoro sulla problematica del multi-curve è stato da me condotto all'interno dell'equipe Validazione Modello del Dipartimento dei Rischi di Natixis (Parigi), Fixed Income, nel quadro di uno stage della durata di 6 mesi. Ho potuto vedere come effettivamente la situazione sia di transizione, in particolare a proposito del sistema bancario francese. Per quanto riguarda i prodotti più complessi, cioè quelli esotici, restano ancora molte perplessità. A tal proposito

rimangono da effettuare studi e riflessioni approfondite per comprendere come poter gestire un quadro che matematicamente inizia ad esser sempre più chiaro, ma un po' meno nella pratica, soprattutto per ciò che riguarda la problematica della calibrazione e degli strumenti di calibrazione da scegliere. In particolare, il settore di Ricerca e Sviluppo di Natixis stesso pensa inizialmente di descrivere la dinamica congiunta del mondo discount e di quello forecast ancora utilizzando un modello Hull-White 1 fattore standard, ma considerando un margin tra i due mondi deterministico. Il modello di Kenyon descritto nelle sezioni precedenti permette invece di descrivere in maniera generale il mondo multi-curve, fornendo una dinamica stocastica al margin tra il mondo discount e quello forecast. Ad ogni modo l'obiettivo di Natixis è quello di conformarsi completamente al quadro multi-curve a partire da Febbraio 2012.

In tal senso quindi il lavoro da me svolto sarà essenziale per l'equipe per poter effettuare le validazioni nell'ambito dei tassi di interesse nel nuovo quadro di riferimento. Esso sarà il punto fondamentale da cui partire per poter riprezzare tutti i prodotti su tassi di interesse. È noto infatti il ruolo preponderante rivestito dalle swaptions europee e bermuda in quanto riguarda il pricing: dalla conoscenza del prezzo di tali prodotti si basa la possibilità di prez-zare prodotti molto più complessi.

Inoltre, il contributo da me apportato non è stato solo dal punto di vista teorico. Una buona parte del lavoro da me effettuato è stata l'implementazione nella libreria stessa del dipartimento. Ho integrato, cosa fatta per la prima volta da uno stagista, direttamente la libreria, implementando in C++ e SQL in QuantLib in una libreria grande e complessa da gestire, riscrivendo le basi della struttura per il caso multi-curve. Ciò permetterà quindi all'equipe di poter in seguito lavorare direttamente sul lavoro da me effettuato, senza doversi occupare della parte implementazione.

La libreria gode inoltre oggi della presenza di un solver EDP 2D efficiente, cosa che mancava e di cui si sentiva fortemente la necessità. La formula analitica che valuta il prezzo di una swaption europea da me implementata nel quadro del modello di Kenyon risulta essere molto rapida, anche qualora si scelgano parametri di volatilità costanti a tratti, indispensabile nell'ottica della calibrazione del modello. Inoltre, il fatto di ottenere gli stessi prezzi nel caso europeo, forniti dall'EDP e dalla formula analitica permette di convalidare entrambi i metodi.

Argomenti da me non trattati e che richiederebbero uno studio approfondito e non imme-

diato sono la problematica del multi-curve nel quadro multi-currency e la problematica della scelta della curva di discount, di cui è stato dato un accenno nel Capitolo 1.

Resta ancora da effettuare la calibrazione del modello di Kenyon. Bisogna capire effettivamente quali sono i parametri modello da calibrare e come calibrarli.

I parametri modello sono difatti numerosi e sembra quindi lecito domandarsi se è possibile fissarne alcuni a priori e, in tal caso, come fissarli. La problematica della calibrazione è delicata anche perché, volendo calibrare il parametro di volatilità discount σ l'idea naturale sarebbe quella di usare delle swaptions Eonia che ad oggi però non esistono.

I test numerici effettuati nel Capitolo 3 mostrano la presenza di uno smile di volatilità implicita. Sembra quindi naturale la possibilità di calibrare su uno smile di volatilità. Ancora per quanto riguarda i parametri modello, ci sono parametri quali le mean reversion che non sono osservabili sul mercato. Una questione che resta pertanto aperta è quella che riguarda come fissare tali parametri per essere sufficientemente conservatori. Quello che si fa nella pratica nel caso mono-curva è di fissare il parametro di mean reversion λ del modello Hull-White 1 fattore al valore 5% che sembra essere il valore più conservatore possibile (normalmente le banche vendono tali prodotti e considerare un tale valore permette di ottenere il prezzo più elevato). Che considerazioni è possibile fare nel caso multi-curve?

Altra problematica che resta aperta è quella che riguarda la conversione tra le swaptions cash-settlement e swap-settlement (physically delivered).

Nelle sezioni precedenti abbiamo sempre fatto riferimento implicitamente alle swaptions swap-settlement. Il meccanismo delle cash-settlement consiste nel fissare il valore dell'opzione grazie ad una quantità in cash pagata in data di scadenza.

Nel quadro multi-curve, consideriamo un contratto di tipo receiver di tenore Δ , con date di pagamento rispettivamente della gamba fissa e di quella variabile date da $(T_i^{\text{fix}})_{1 \leq i \leq n}$ e $(T_j)_{1 \leq j \leq m}$, di strike K e maturità T , con $T \leq T_0^{\text{fix}}$. Chiamiamo S_t il tasso di swap forward, definito come nelle sezioni precedenti. Il payoff di una swaption cash-settlement è dato da

$$P(T, T_0^{\text{fix}})C(S_T)(K - S_T)^+,$$

dove

$$C(S_T) = \sum_{i=1}^n \frac{\tau^{\text{fix}}}{(1 + \tau^{\text{fix}} S_T)^i}.$$

Convenzione del mercato è quella di quotare le swaptions cash-settlement. Per quanto riguarda il caso mono-curva, Henrard mostra in [27] come sia possibile passare dall'uno all'altro tipo di swaptions tramite il modello Hull-White 1 fattore. La problematica per il caso multi-curve resta tutt'oggi aperta. Non sappiamo con esattezza cosa fa oggi il mercato per effettuare tale conversione.

L'implementazione dello schema ADI per trovare la soluzione numerica dell'EDP associata al prezzo di un prodotto derivato se da un lato sarà utile per trovare il prezzo di prodotti derivati su tassi di interesse, normalmente nel caso americano in cui i metodi Monte-Carlo sembrano essere inefficaci, dall'altro sarà fondamentale per effettuare test e capire come il mercato agisce per la conversione.

In conclusione posso aggiungere che la procedura di bootstrapping per il caso multi-curve da me implementata viene già usata per prezzare i prodotti derivati su tassi di interesse di tipo vaniglia anche nel quadro multi-currency. Una volta terminata la calibrazione, tutto il lavoro effettuato nell'ambito del modello di Kenyon potrà essere messo in pratica e sarà la base per poter prezzare prodotti più complessi.

L'esperienza sulla problematica multi-curve mi ha permesso di entrare a fondo in quello che è il mondo dei prodotti derivati su tassi d'interesse, dandomi anche la possibilità di vederne i problemi pratici in quello che è la gestione delle date e le convenzioni del mercato e di vederne anche i difetti. Ho potuto quindi capire in prima persona come la scelta di orientarsi verso il nuovo quadro multi-curve cambi effettivamente le basi della teoria di pricing e cercare quindi di riflettere sul modo migliore in quanto applicabilità del modello per descrivere in modo coerente la relazione tra il mondo discount e quello forecast, fino ad arrivare ad un guadagno personale anche dal punto di vista teorico/matematico e della programmazione.



Banche contributrici nella zona Euro

Banche contributrici al 25 Luglio 2011 per il calcolo dei tassi Euribor ed Eonia

Austria: Erste Group Bank AG - RZB Raiffeisen ZentralBank Österreich AG

Belgio: Dexia Bank - KBC

Finlandia: Nordea - Pohjola

Francia: Banque Postale - BNP-Paribas - HSBC France - Société Générale - Natixis - Crédit Agricole s.a. - Crédit Industriel et Commercial CIC

Germania: Landesbank Berlin - Bayerische Landesbank Girozentrale - Deutsche Bank - WestLB AG - Commerzbank - DZ Bank Deutsche - Genossenschaftsbank - Norddeutsche Landesbank Girozentrale - Landesbank Baden-Württemberg Girozentrale - Landesbank Hessen - Thüringer Girozentrale

Grecia: National Bank of Greece

Irlanda: AIB Group - Bank of Ireland

Italia: Intesa Sanpaolo - Monte dei Paschi di Siena - Unicredit

Luxembourg: Banque et Caisse d'Epargne de l'Etat

Paesi Bassi: ING Bank - RBS N.V. - Rabobank

Portogallo: Caixa Geral de Depósitos (CGD)

Spagna: Banco Bilbao Vizcaya Argentaria - Banco Santander Central Hispano - Confederacion Española de Cajas de Ahorros - La Caixa Barcelona

Altre Banche UE: Barclays Capital - Den Danske Bank - Svenska Handelsbanken

Banche Internazionali: UBS (Luxembourg) S.A. - Citibank - J.P. Morgan Chase & Co -
Bank of Tokyo Mitsubishi



Quotazione degli strumenti di mercato

Instrument	End Date	Quotation
MM	2D	0,4200%
MM	1W	0,4030%
MM	2W	0,4216%
MM	1M	0,5121%
MM	2M	0,5586%
MM	3M	0,5925%
MM	4M	0,6176%
MM	5M	0,6414%
MM	6M	0,6600%
MM	7M	0,6792%
MM	8M	0,6978%
MM	9M	0,7147%
MM	10M	0,7330%
MM	11M	0,7486%
SWP	1Y	0,7650%
SWP	15M	0,8163%
SWP	18M	0,8759%
SWP	21M	0,9455%
SWP	2Y	1,0200%
SWP	3Y	1,3540%
SWP	4Y	1,6710%
SWP	5Y	1,9540%
SWP	6Y	2,1920%
SWP	7Y	2,3980%
SWP	8Y	2,5710%
SWP	9Y	2,7150%
SWP	10Y	2,8420%
SWP	11Y	2,9530%
SWP	12Y	3,0540%
SWP	13Y	3,1350%
SWP	14Y	3,2020%
SWP	15Y	3,2560%
SWP	20Y	3,3510%
SWP	25Y	3,2900%
SWP	30Y	3,1850%
SWP	40Y	3,0300%
SWP	50Y	2,9860%

Tabella B.1: Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Eonia al 03/01/2011.

Instrument	End Date	Quotation
MM	2D	0,420%
MM	3M	1,006%
FWD	MAR11	98,973%
FWD	JUN11	98,891%
FWD	SEP11	98,806%
FWD	DEC11	98,681%
FWD	MAR12	98,545%
FWD	JUN12	98,367%
FWD	SEP12	98,183%
FWD	DEC12	97,979%
SWP	3Y	1,700%
SWP	4Y	2,013%
SWP	5Y	2,290%
SWP	6Y	2,522%
SWP	7Y	2,721%
SWP	8Y	2,887%
SWP	9Y	3,023%
SWP	10Y	3,143%
SWP	11Y	3,246%
SWP	12Y	3,339%
SWP	13Y	3,415%
SWP	14Y	3,476%
SWP	15Y	3,525%
SWP	20Y	3,601%
SWP	25Y	3,529%
SWP	30Y	3,415%
SWP	40Y	3,263%
SWP	50Y	3,221%

Tabella B.2: Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Euribor 3M al 03/01/2011.

Instrument	End Date	Quotation
MM	2D	0,420%
MM	12M	1,510%
SWP	2Y	1,531%
SWP	3Y	2,048%
SWP	4Y	2,340%
SWP	5Y	2,597%
SWP	6Y	2,811%
SWP	7Y	2,995%
SWP	8Y	3,147%
SWP	9Y	3,270%
SWP	10Y	3,379%
SWP	11Y	3,472%
SWP	12Y	3,554%
SWP	13Y	3,621%
SWP	14Y	3,675%
SWP	15Y	3,715%
SWP	20Y	3,768%
SWP	25Y	3,682%
SWP	30Y	3,560%
SWP	40Y	3,405%
SWP	50Y	3,361%

Tabella B.3: Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Euribor 12M al 03/01/2011.

Instrument	End Date	Quotation
MM	2D	0,420%
MM	6M	1,223%
FWD	SEP11	98,748%
SWP	1Y	1,307%
SWP	2Y	1,552%
SWP	3Y	1,876%
SWP	4Y	2,184%
SWP	5Y	2,456%
SWP	6Y	2,681%
SWP	7Y	2,873%
SWP	8Y	3,032%
SWP	9Y	3,161%
SWP	10Y	3,274%
SWP	11Y	3,370%
SWP	12Y	3,456%
SWP	13Y	3,526%
SWP	14Y	3,582%
SWP	15Y	3,625%
SWP	20Y	3,684%
SWP	25Y	3,602%
SWP	30Y	3,482%
SWP	40Y	3,327%
SWP	50Y	3,283%

Tabella B.4: Strumenti di mercato usati per la costruzione della curva Euribor 6M al 03/01/2011.



Cambio di numerario

Definizione C.0.1. Chiamiamo numerario ogni attivo finanziario positivo che non paga dividendi.

Normalmente si identifica un numerario Z con una strategia autofinanziante φ in cui il numerario è uguale al valore della strategia, cioè $Z_t = V_t(\varphi)$, $\forall t$.

Un numerario è un attivo di riferimento che è usato per attualizzare tutti gli altri prezzi.

È possibile mostrare che le strategie autofinanzianti sono invarianti rispetto al cambio di numerario. Infatti, prendendo una strategia finanziaria $K + 1$ -dimensionale, la condizione di autofinanziamento

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^0 dB_t + \sum_{k=1}^K \varphi_t^k dR_t^k$$

implica che

$$d\left(\frac{V_t(\varphi)}{Z_t}\right) = \varphi_t^0 d\left(\frac{B_t}{Z_t}\right) + \sum_{k=1}^K \varphi_t^k d\left(\frac{R_t^k}{Z_t}\right).$$

Osserviamo che nella definizione di misura equivalente di martingala è fatta implicitamente la scelta del bank account process come numerario, ma questa non è la sola scelta possibile e non necessariamente la più conveniente.

Vediamo come passare da un numerario all'altro.

Proposizione C.0.1. *Assumiamo che esistano un numerario N ed una misura di probabilità \mathbb{Q}^N equivalente alla misura \mathbb{P} , tali che il prezzo di ogni attivo X (senza pagamenti intermediari) sul numerario sia una martingala sotto \mathbb{Q}^N , cioè*

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_t^N \left[\frac{X_T}{N_T} \right], \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Sia U un altro numerario. Allora, esiste una misura di probabilità \mathbb{Q}^U equivalente a \mathbb{P} tale che il prezzo di ogni attivo Y simulabile normalizzato da U è una martingala sotto \mathbb{Q}^U , cioè

$$\frac{Y_t}{U_t} = \mathbb{E}_t^U \left[\frac{Y_T}{U_T} \right], \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Inoltre, la derivata di Radon-Nykodym che definisce la misura \mathbb{Q}^U è data da

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}.$$

Teorema C.0.2. (Teorema del cambio di numerario)

Siano N e U due numerari che evolvono sulla probabilità \mathbb{Q}^U nel modo seguente

$$\begin{aligned} dN_t &= \alpha^N dt + \sigma_t^N C dW^U(t), & \mathbb{Q}^U \\ dU_t &= \alpha^U dt + \sigma_t^U C dW^U(t), & \mathbb{Q}^U \end{aligned}$$

dove σ_t^N e σ_t^U sono dei vettori n -dimensionali, $W^U(t)$ è un movimento browniano n -dimensionale su \mathbb{Q}^U e $CC' = \rho$, la matrice di correlazione.

Se consideriamo il processo Y_t le cui dinamiche sotto i due numerari sono date da

$$\begin{aligned} dY_t &= \mu_t^N(Y_t) dt + \sigma_t(Y_t) C dW(t)^N, & \mathbb{Q}^N \\ dY_t &= \mu_t^U(Y_t) dt + \sigma_t(Y_t) C dW(t)^U, & \mathbb{Q}^U \end{aligned}$$

allora si può dimostrare che il drift del processo Y_t sotto il nuovo numerario U è dato da

$$\mu_t^U(Y_t) = \mu_t^N(Y_t) - \sigma_t(Y_t) \rho \left(\frac{\sigma_t^N}{N_t} - \frac{\sigma_t^U}{U_t} \right)'$$

e si ha anche

$$CdW^N(t) = CdW^U(t) - \rho \left(\frac{\sigma_t^N}{N_t} - \frac{\sigma_t^U}{U_t} \right)' dt.$$



Generalizzazione dell'Isometria di Itô

Teorema D.0.3. Sia $M = (M_t)_{t \geq 0}$ una martingala locale continua. Allora esiste un unico processo crescente denotato $(\langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ (unico a meno di indistinguibilità) tale che

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$$

è una martingala locale continua.

Inoltre, $\forall T > 0$ se consideriamo una successione di suddivisioni dell'intervallo $[0, T]$

$$0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = T$$

di passo tendente a 0, cioè con $\sup_i (t_i^n - t_{i-1}^n) \rightarrow 0$, allora si ha che

$$\langle M, M \rangle_T := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2,$$

in cui la convergenza è in probabilità.

Il processo $\langle M, M \rangle$ è chiamato la variazione quadratica di M .

Teorema D.0.4. Sia M una martingala locale con $M_0 = 0$.

Allora

(i) se M è una martingale limitata in L^2 , allora

$$\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty$$

e

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$$

è una martingala uniformemente integrabile;

(ii) se $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] < \infty$ allora M è una martingala limitata in L^2 e

(iii) abbiamo l'equivalenza tra le affermazioni seguenti

(a) M è una martingala quadrato integrabile ($\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$)

(b) $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_t] < \infty, \quad \forall t \geq 0.$

Inoltre, se tali condizioni sono verificate allora

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$$

è una martingala.

Definizione D.0.2. Siano M e N due martingale locali. Chiamiamo *crochet* di M e N la quantità

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\langle M + N, M + N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t \right).$$

Proposizione D.0.5. (i) $\langle M, N \rangle$ è l'unico processo, a meno di indistinguibilità, a variazione finita tale che

$$M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$$

sia una martingala locale;

(ii) l'applicazione $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ è bilineare e simmetrica;

(iii) se $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ è una successione di suddivisioni inscatolate dell'intervallo $[0, t]$, allora

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n} \right) \left(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n} \right),$$

in cui la convergenza è in probabilità e

(iv) per ogni tempo di arresto T si ha

$$\langle M^T, N^T \rangle_t = \langle M^T, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_{t \wedge T}.$$

Definizione D.0.3. Due martingale locali M e N sono dette ortogonali se $\langle M, N \rangle = 0$, che equivale a dire che il prodotto MN è una martingala locale.

Osservazione 6. Se M e N sono due martingale limitate in L^2 allora si ha che

$$M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$$

è una martingala uniformemente integrabile.

Inoltre se M e N sono ortogonali allora $\mathbb{E}[M_t N_t] = 0$.

Definizione D.0.4. Chiamiamo H^2 lo spazio delle martingale continue M limitate in L^2 e tali che $M_0 = 0$.

Sia $M \in H^2$. Definiamo $L^2(M)$ lo spazio dei processi progressivi H tali che

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < \infty.$$

Si ha che $L^2(M)$ è uno spazio di Hilbert di norma

$$(H, K)_{L^2(M)} = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty H_s K_s d\langle M, M \rangle_s \right], \quad \forall H, K \in L^2(M).$$

Chiamiamo \mathcal{E} il sottospazio vettoriale di $L^2(M)$ dei processi elementari, cioè dei processi H tali che

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s),$$

dove $0 \leq t_0 < \dots < t_p$ e per ogni i , $H_{(i)}$ è una variabile aleatoria \mathcal{F}_{t_i} -misurabile et limitata.

Proposizione D.0.6. Per ogni $M \in H^2$, \mathcal{E} è denso in $L^2(M)$.

Teorema D.0.7. Sia $M \in H^2$. Allora, per ogni $H \in \mathcal{E}$ definiamo $H \cdot M \in H^2$ tale che

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=1}^{p-1} H_{(i)} (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

L'applicazione $H \mapsto H \cdot M$ è una isometria da $L^2(M)$ a H^2 .

Inoltre si ha

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle, \quad \forall N \in H^2. \tag{D.1}$$

Denotiamo

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s.$$

Possiamo riscrivere (D.1) nella maniera seguente

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, N \right\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Applicando due volte questa relazione otteniamo

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot K_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s. \quad (\text{D.2})$$

Ora, dato che $H \cdot M$ è una martingala di \mathbb{H}^2 , si ha che se $M, N \in \mathbb{H}^2$, $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(N)$ allora abbiamo

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right) \left(\int_0^t K_s dN_s \right) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s \right].$$

Infatti il processo

$$A_t = \left(\int_0^t H_s dM_s \right) \left(\int_0^t K_s dN_s \right) - \left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot K_s dN_s \right\rangle_t$$

è una martingala.

Inoltre, utilizzando (D.2), abbiamo

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right) \left(\int_0^t K_s dN_s \right) \right] = \mathbb{E} \left[\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot K_s dN_s \right\rangle_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s \right].$$

Bibliografia

- [1] Whittal C., *The price is wrong*. Risk magazine, Online only, <http://www.risk.net/risk-magazine/feature/1594823/the-price-wrong>, 2010
- [2] Bianchetti M., Carlicchi M., *Interest Rate After The Credit Crunch Multiple-Curve Vanilla Derivatives and SABR*, The Capco Journal of Financial Transformation, Applied Finance (32): 35-48, 2011
- [3] Kenyon C., *Post-shock short-rate pricing*, Risk Magazine, 23 (11): 83-87, 2010
- [4] Moreni N., Pallavicini A., *Parsimonious HJM Modelling for Multiple Yield-Curve Dynamics*, SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1699300>, 2010.
- [5] Pallavicini A., Tarengi M., *Interest-Rate Modelling with Multiple Yield Curves*, SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1629688>, 2010
- [6] Morini M., *Solving the puzzle in the interest rate market (Part1 & 2)*, SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1506046>, 2009
- [7] Ametrano F. M., Bianchetti M., *Bootstrapping the illiquidity Multiple Curve Construction for Coherent Forward Rates Estimation*, in Mercurio F., *Modelling Interest Rates: Latest Advances for Derivatives Pricing*, Risk Books, London, 2009
- [8] Mercurio F. *Interest Rate and The Credit Crunch: New Formulas and Market Models*, SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1332205>, 2009
- [9] Bianchetti M. *Two Curves, One Price*, Risk Magazine, 23 (8): 66-72, 2010
- [10] Pulman C., *The Short-End of the Curve*, Lehman Brothers, http://www.nuclearphynance.com/User%20Files/5001/The_Short_End_of_the_Curve_41.pdf, 2007

-
- [11] El Karoui N., *Couverture des risques dans les marchés financiers*, Notes de Cours de Master “Probabilité et Finance”, 2003 – 2004
- [12] Lamberton D., *Calcul Stochastique et Applications en Finance*, Notes de Cours de Master “Mathématiques et Applications”, 2010
- [13] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F., *Matematica Numerica*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2000 (2a edizione)
- [14] Quarteroni A., *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2008 (4a edizione)
- [15] Salsa S., *Partial Differential Equations in Action From Modeling to Theory*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2008
- [16] Le Gall J.F., *Mouvement Brownien et Calcul Stochastique*, Notes de Cours de Master “Probabilité et Statistiques”, 2008 – 2009
- [17] Björk T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, New York, 2009 (3rd edition)
- [18] Hull J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2002 (5th edition)
- [19] Brigo D., Mercurio F., *Interest Rate Models-Theory and Practice*, Springer Finance, 2006 (2nd edition)
- [20] Andersen L.B.G., Piterbarg V.V., *Interest Rate Modelling. Volume 1: Foundations and Vanilla Models*, Atlantic Financial Press, 2010
- [21] Andersen L.B.G., Piterbarg V.V., *Interest Rate Modelling. Volume 2: Term Structure Models*, Atlantic Financial Press, 2010
- [22] Andersen L.B.G., Piterbarg V.V., *Interest Rate Modelling. Volume 3: Products and Risk Management*, Atlantic Financial Press, 2010
- [23] Baldi P., *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni*, Pitagora, 2000 (2a edizione)

-
- [24] Craig I. J. D., Sneyd A. D., *An Alternating-Direction Implicit Scheme for Parabolic Equations with Mixed Derivatives*, Computers & Mathematics with Applications, 16 (4), 341-350, 1988
- [25] McKee S., Mitchell A.R.1, *Alternating direction methods for parabolic equations in two space dimensions with a mixed derivative*, The Computer Journal, 13 (1): 81-86, 1970
- [26] O.B. Windlund. *On stability of parabolic difference schemes*, Maths Comput. 89, 1-13, 1965
- [27] Henrard M., *Cash-settled swaptions: how wrong are we?*, SSRN working paper, http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1703846&rec=1&srcabs=1898950, 2010
- [28] Mercurio F., *Cash-settled swaptions and no-arbitrage*, Risk, 21 (2): 96-98, 2008

Ringraziamenti

È arrivata ora la parte forse più dura, quella dei ringraziamenti.

Ringrazio sentitamente il Professor Sgarra per aver accettato di essere il mio relatore nonostante la lontananza e nonostante il fatto che il soggetto di tesi fosse già ben definito e la tesi stessa completa.

Ringrazio inoltre il Politecnico di Milano per avermi dato la possibilità di effettuare un'esperienza all'estero, formativa dal punto di vista scolastico, ma che mi ha anche permesso di arricchirmi dal punto di vista umano. Ringrazio quindi l'amministrazione dell'Ecole des Ponts Paris-Tech, in particolare Adeline e Malika per la disponibilità nonostante gli iniziali problemi di comunicazione ed i Professori Lelievre e Legoll. Ringrazio inoltre il Professor Grasselli per i suoi numerosi e preziosi consigli. Ancora, ringrazio il Dottor Piterbarg e il Dottor Kenyon per le risposte alle mie innumerevoli domande.

Veniamo quindi ai ringraziamenti meno ufficiali.

Volevo fare Ingegneria Genetica, poi volevo essere avvocato, in seguito far filosofia, poi andare assolutamente al Monte dei Paschi a Siena, ma in realtà quello che avrei voluto sempre fare è il macellaio. Eppoi, voilà non ricordo troppo come mai, ma eccomi diventare Ingegnere Matematico. Arrivata a questo punto è doveroso ringraziare un mucchio di persone.

Ringrazio prima di tutto la mia famiglia perché mi ha sempre appoggiato fiduciosamente in ogni scelta e mi ha dato la possibilità di raggiungere questo traguardo.

Dopodiché i vastesi sempre presenti: Irene, Naike, Sara, Silvia e Ale, che sette anni fa non pensavo proprio di stare qui a ringraziare, ma si sa che le cose sono imprevedibili. Vi siete sorbiti discorsi in una lingua non esistente cercando di catturarne in qualche modo il senso. Grazie perché nonostante la distanza c'eravate sempre.

Grazie Ale e Paoletta, perché la mia squadra (ok, anche il Kapitano) mi ha sempre appoggiato e ha sempre creduto in me. E poi, Paoletta, quei giorni a Milano son stati veramente

divertenti.

Grazie Davide, perché ci sei stato dal primo giorno e perché tra uscite strane iniziali, richieste di uova ad orari improbabili, Milano, Como, Paris e spettegoleggiamenti vari ce la siamo spassata.

Un ringraziamento particolare molto sentito va ai portatori di cibo/visitatori di Milano e Paris. Ovviamente mamma e papà, e Norma e Domenico. Grazie anche a: Irene, Paoletta, Davide, Pol, Edo, Scar (e Albe moralmente), Jack, Lorena, Giuliano, Ale & Silvia. E fu quindi così che la ventricina venne espatriata in Francia.

Il periodo milanese e quello francese, certamente abbastanza netti, si sono molto confusi e mischiati. Grazie Vale e Chiara perché ci siete sempre state, sempre di più. Grazie soprattutto a te, Chiara, perché te ne sei sentita di palle per anni, sempre lì a consigliare e a dare il tuo appoggio, nonostante la distanza. Grazie Edo, portatore della valigia e miglior custode di utensili da cucina, grazie Albe, Sad e Jack per il supporto e le risate che ci siamo fatti (poi Jack, tu sei Jack), grazie Pol perché so che ci sei sempre e che abbiamo un appuntamento tra dieci anni sull'isolotto degli innamorati e perché poi osservare Manova assieme è stato veramente, ma veramente funny. Grazie Anna, mia salvatrice sia a Milano che a Parigi in cui cantavamo convinte "Che sei una xxxxx" in direzione Bastille. Grazie Pié, Cucciolo, Rino, Giunta, Pupi, Scar, Gigi e tutti gli altri ingegneri che anche solo per un piccolo periodo ci sono stati. Grazie Lorenzo, perché probabilmente senza di te sarei morta sullo Space Mountain, eppoi sì, perché come ce l'avrei portata tutta quella roba da sola ad Alfortville?? (E anche tu ti sei sorbita di quelle lamentele...)

Grazie Ale Zilio, angelo custode e amico fedele, consigliere matematico.

Grazie Cristian e Primi, perché nonostante non siate mai venuti a Paris vi voglio bene lo stesso. Eppoi ho scoperto che la persona che mi fa più ridere al mondo viene da Todi, proprio come Jacopone.

Da qui in poi il linguaggio inizia ad essere un po' più oscuro, me ne scuso.

Grazie Jack Galetti perché insomma, tra la storia del limone e della fine del mondo, con tanto di organizzazione del viaggio a Las Vegas, quel semestre parigino è stato veramente amusant. E anche assurdo.

Grazie Peppe, il teatino che faceva la pasta con le cozze alla vastese a Parigi e che portò il

tocco di casa all'estero.

Grazie Guido, perché mi hai spinto a conoscere Cla.

Merci Krem, parce qu'avec toi j'ai compris qu'il existe des italiennes même à Sofia et parce que le fait d'apprendre le mots "maikata" a changé ma vie.

Grazie Dominik, perché tra le scene dell'assurdo c'è quella di stare a tavola con un polacco a parlare di Fantaghirò o di ricevere una chiamata improbabile dai Caraibi in un momento ancora più improbabile.

Merci Nicolas et Yendoupi car après vous deux comme chefs il est vraiment très dur de pouvoir s'améliorer. D'ailleurs, merci Monsieur Adil Reghai pour m'avoir donné la possibilité de finir aux risques. Je veux aussi remercier toute l'équipe quant du Département des Risques, Fixed Income, de Natixis et tous les stagiaires que j'ai rencontré pendant ces six mois de stage. Nous nous sommes bien amusés.

Grazie Lore Bis, perché il caso ha voluto che ci trovassimo nello stesso posto nello stesso momento and it was good.

Grazie Cla, scoperta piacevole parigina, amica, coinquilina e colei con cui condividere il letto e mangiare carbonare ad orari improbabili.

Merci Ele, perché nonostante due anni in cui ci mettiamo una vita a capirci, poi alla fine ci capiamo sempre e perché yahoo answer mi ha cambiato profondamente.

Merci Simon, parce qu'un jour tu as décidé que j'aurais dû parler français et moi j'ai décidé que tu aurais dû manger des patês et boire du café :)

Merci Max perché tra qualche razzetta, il Klem, il bureau, l'avenue, aux cadrans, quai de la gare, PPP, l'apollineo e il dionisiaco, il puffo, il multi-curve, Miguel, Richard un incrocio così non s'era mai visto.

Merci Casi, prince des princes et roi des edps, merci Pantheon, ma deuxième maison, merci La Montaigne, merci la caserne de Saint Paul, merci gli Indiani d'America et la Route du Rhum, merci Gianluca perché hai risollevato i momenti di grande depressione con pizza e lasagne, merci Mario Razzini, le Yorkshire, πy qui a fait rêver les italiennes, Pierre, Rémi, le jambon, M'madi qui gère, Tony qui tonne, Alfonsi qui fonce. Doucement !

J'ajoute un "Super !"

E ora?