



POLITECNICO DI MILANO

Scuola di ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile

SIMULAZIONE E COMPENSAZIONE DI UN BLOCCO FOTOGRAMMETRICO CON
OSSERVAZIONI ALTAMENTE AFFIDABILI

Relatore: Prof. Luigi Mussio

Davide Leta
Matricola n. 756090

Anno Accademico 2010-2011

ABSTRACT

Lo scopo di questo lavoro è stato individuare i metodi grazie ai quali si può, a priori, rendere un blocco fotogrammetrico più performante, al fine di evitare problematiche successive all'acquisizione stessa ma anche di migliorare in senso assoluto il risultato finale per il quale il volo è stato pensato, come può essere per esempio la produzione di cartografia.

Per far ciò ci si è avvalsi di un volo fotogrammetrico reale, realizzato sopra la provincia di Catanzaro. Tale volo, per le caratteristiche che verranno descritte nell'elaborato, può sicuramente dirsi ben fatto e di buonissima qualità. Tuttavia, grazie all'introduzione di nuove strisciate e all'omogeneizzazione dei punti di legame individuati sui fotogrammi, nonché all'inserimento di una rete di controllo lungo i bordi del blocco stesso, si potrà apprezzare un sensibile miglioramento in termini qualitativi. Questo implicherà un miglior risultato nel prodotto finale e la certezza di disporre di un numero di dati sufficiente, senza la possibilità che sorga il problema di dover possedere dati aggiuntivi in fase di processamento con le relative scomode conseguenze.

RINGRAZIAMENTI

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia, in particolar modo ai miei genitori che in questi anni mi hanno permesso di studiare e mi hanno assecondato in ogni mia necessità.

Ringrazio inoltre Jessica che mi ha seguito per quasi tutto il mio percorso universitario, ed è sempre stata un supporto fondamentale, senza il quale sarebbe stato tutto più difficile e noioso.

Ringrazio inoltre il mio relatore il Prof. Luigi Mussio per la sua disponibilità, pazienza e competenza dimostrata durante la stesura di questo lavoro, il Prof. Livio Pinto per avermi fornito il software utilizzato per la compensazione, i miei compagni Marco Nicola e Michele Redaelli per avermi fornito il materiale iniziale senza il quale non avrei potuto lavorare.

Ringrazio in generale tutti i miei compagni e tutte le persone conosciute al Politecnico, con le quali ho condiviso questi anni di studio.

INDICE

CAPITOLO 1 – TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

RIASSUNTO	6
INTRODUZIONE	6
1.1 Dallo spazio immagine allo spazio oggetto	7
1.2 Matrici di rotazione.....	8
1.3 Equazioni di collinearità.....	11
1.3.1 Equazioni di collinearità in coordinate geodetiche.....	16
1.4 Le fasi della trasformazione proiettiva – Distinzione dei parametri.....	17
1.5 Principio di complanarità – orientamento relativo.....	19
1.6 Calcolo delle coordinate modello.....	23
1.7 Orientamento Assoluto.....	25
1.7.1 Un giudizio statistico ed altre questioni statistiche numeriche.....	26
1.8 Effetto della rifrazione atmosferica sulle prese – Polinomi d autocalibrazione.....	26
1.9 La formazione del modello – Ricerca numerica esaustiva dei valori approssimati.....	31
1.10 Orientamento relativo - caso semplificato.....	32
1.11 Orientamento relativo – caso generale.....	33
1.11.1 La proposta di Inghilleri.....	36
1.12 Cilindro critico.....	36
1.13 La ricostruzione dell'oggetto – Una soluzione quasi esatta.....	41
1.14 Orientamento assoluto – metodo Anblock.....	44
1.14.1 La soluzione di Inghilleri.....	46
1.15 Triangolazione aerea.....	47
1.16 Le proposte dell'OEEPE.....	50
APPENDICE A – Analisi statistiche e numeriche	50
A.1 Impostazione del sistema di riferimento.....	50
A.2 Progettazione ed ottimizzazione.....	51
A.3 Compensazione libera.....	53
A.4 Affidabilità e robustezza.....	54
A.5 Topologia: grafi, matrici normali.....	55
A.6 Operazioni topologiche.....	57

CAPITOLO 2 – ELABORAZIONI DI IMMAGINI

2.1 Acquisizione di immagini digitali.....	61
2.2 L'oggetto da descrivere.....	61
2.3 Il tipo di descrizione	62
2.4 L'acquisizione delle immagini	63
2.5 La tecnica usata per arrivare al risultato.....	65
2.6 Visualizzazione di immagini digitali.....	67
2.7 Cambiamento di scala.....	71
2.7.1 Riduzione.....	72
2.7.2 Ingrandimento.....	74
2.8 Cambiamenti di radiometria.....	75
2.9 Il puntino luminoso e lo scorrimento dell'immagine.....	78
2.10 Elaborazione di immagini digitali.....	78
2.11 Modelli per punti immagine.....	79
2.11.1 Determinazione della geometria di presa.....	80

2.11.2 Ricerca di punti omologhi e/o linee omologhe.....	80
2.11.3 Il problema della corrispondenza.....	83
2.11.4 Calcolo delle coordinate oggetto corrispondenti ai punti omologhi.....	85
2.11.5 Ricostruzione della superficie dell'oggetto.....	85
2.11.6 Costruzione dell'ortoimmagine.....	86
2.11.7 Metodi e risoluzioni multiple.....	87
2.12 Modelli per pixel immagine.....	88
2.12.1 Il modello del sensore al momento della presa.....	88
2.12.2 Il modello della forma della superficie dell'oggetto.....	89
2.12.3 Il modello della riflettività della superficie.....	90
2.12.4 Il modello dell'illuminazione al momento della presa.....	91
APPENDICE B – Equazioni della fotogrammetria digitale in un approccio globale.....	91
APPENDICE C – Tendenze della ricerca fotogrammetrica.....	96

CAPITOLO 3 – MODELLI OTTIMALI PER L'ANALISI DEI DATI

3.1 Classi di problemi.....	121
3.2 Equazioni di condizione con parametri.....	125
3.3 Equazioni di condizione con parametri vincolati.....	126
3.4 Problemi non – lineari	131
3.5 Singolarità e condizionamento.....	136
3.6 Affidabilità e robustezza.....	142
3.7 Progettazione ed ottimizzazione.....	147
3.7.1 Impostazione del problema.....	147
3.7.2 Progettazione.....	148
3.7.3 Simulazione.....	152
3.7.4 Ottimizzazione matematica.....	153
3.7.4.1 Metodi di soluzione tramite minimi quadrati (approccio indiretto)	154
3.7.4.2 Metodi di soluzione tramite minimi quadrati (“improved design”)	156
3.7.4.3 Metodi di soluzione basati sulla programmazione matematica.....	158
APPENDICE D – Validazione dei dati e dei modelli.....	159
D.1 Autoconsistenza e crossvalidazione.....	159
D.2 Identificazione ed eliminazione dei dati anomali.....	163
D.3 Partizione in insiemi omogenei.....	165
D.4 Tecniche multilivello: eventuali rimozioni delle tendenze, prefiltraggio e secondo filtraggio.....	167
D.5 Individuazione di elementi caratteristici.....	167

CAPITOLO 4 – UN CASO DI STUDIO

4.1 Introduzione.....	171
4.2 Blocco Calabria.....	172
4.3 Conclusioni e sviluppi futuri.....	183
BIBLIOGRAFIA.....	184

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

RIASSUNTO

La fotogrammetria numerica costituisce uno dei migliori esempi d'applicazione della statistica: dall'analisi dei dati alla statistica computazionale, passando attraverso la statistica descrittiva sui dati acquisiti, la stima dei parametri dei modelli adottati, nonché la validazione dei dati e dei modelli. La ragione dell'eccellenza sta, da un lato, nella relativa facilità dei modelli usati, tipici della geometria dello spazio e, dall'altro, nella notevole mole di dati che i blocchi di immagini e maggiormente le loro sequenze presentano. Quanto segue intende mostrare le trasformazioni geometriche impiegate nei modelli analitici della fotogrammetria, tanto nello spazio immagine, quanto nello spazio oggetto, come pure metodologie e procedure dell'analisi d'immagine, tipiche della moderna fotogrammetria digitale, mettendo così in evidenza particolari aspetti statistici e numerici.

INTRODUZIONE

La Società Internazionale di Fotogrammetria e Telerilevamento, fondata nel 1910, definisce la fotogrammetria ed il telerilevamento come le arti, le scienze e le tecniche, per ottenere informazioni affidabili da immagini, non a contatto, ed altri sistemi di sensori sulla terra, il suo ambiente e altri oggetti fisici, mediante operazioni di rilevamento, misura, analisi e restituzione. Il termine fotogrammetria appare, per la prima volta, nel 1867, benché rilevamenti con la camera chiara (o lucida) datano dall'inizio dell'ottocento e rilevamenti fotografici, propriamente detti, dall'inizio della seconda metà dello stesso secolo. La fotogrammetria è stata inizialmente soprattutto aerea, per la compilazione di mappe (o carte tecniche).

A partire dalla seconda metà di questo secolo, il telerilevamento (sviluppatosi parallelamente alla fotogrammetria dello spazio) ha aggiunto il suo contributo, per lo studio delle caratteristiche qualitative, utili per la compilazione di carte tematiche. Negli ultimi decenni, i sistemi informativi a referenza spaziale: geografici (GIS) e territoriali (LIS) hanno trovato nella fotogrammetria e nel telerilevamento utili sorgenti per le loro basi di dati. In aggiunta, la fotogrammetria dei vicini ha sviluppato, con continuità e progressione, applicazioni nei campi dell'ingegneria civile ed industriale, dell'architettura, dell'archeologia, della medicina, della robotica, ecc. Infine la conquista dello spazio ha dato avvio, sia alla fotogrammetria (ed al telerilevamento) dallo spazio, sia alla fotogrammetria extraterrestre.

Il compito fondamentale della fotogrammetria è effettuare il passaggio dallo spazio immagine allo spazio oggetto, direttamente oppure, più frequentemente, attraverso la formazione del modello e la ricostruzione dell'oggetto. Due concetti sono da mettere in evidenza, prima di addentrarsi nei modelli analitici della fotogrammetria:

- un'immagine non è mai una carta;
- almeno due immagini sono necessarie, in generale, per ricostruire un oggetto.

Infatti un'immagine è, a meno di una lunga serie di alterazioni ed errori, una prospettiva centrale, mentre una carta è una proiezione (ortogonale) quotata. Inoltre sono spesso notevoli le alterazioni dovute alla quota (o profondità) degli oggetti rilevati e talvolta alla curvatura terrestre e/o alla rifrazione atmosferica (o di altro mezzo di propagazione). D'altra parte, un'immagine è un campo bidimensionale, pertanto informazioni su un oggetto, posto in un dominio tridimensionale, tranne nel caso di oggetto piano, possono essere restituite, solo acquisendo almeno due immagini da punti di presa diversi. Considerazioni relative all'affidabilità delle osservazioni, suggeriscono di elevare a tre il numero di immagini distinte.

1.1. Dallo spazio immagine allo spazio oggetto

Il problema fondamentale della fotogrammetria è trovare le espressioni geometriche che mettono in relazione le coordinate del punto immagine $Q(x,y,z)$, riferite ad un sistema cartesiano ortogonale legato al sensore, con le coordinate del corrispondente punto oggetto $P(X,Y,Z)$, riferite ad un sistema cartesiano ortogonale qualunque collegato all'oggetto. Considerando una traslazione, una rotazione e una variazione di scala, è possibile scrivere in forma matriciale una Trasformazione S (o di similitudine):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

dove (x,y,z) rappresentano le coordinate immagine, λ la variazione di scala (di un'areola dell'oggetto, localmente piana, rispetto alla corrispondente areola sull'immagine), R la matrice di rotazione, (X,Y,Z) le coordinate oggetto e (X_0, Y_0, Z_0) le coordinate del punto di presa (Fig. 1.1). Si noti come le trasformazioni S appartengano alla più vasta famiglia delle trasformazioni lineari (in questo caso specifico, nello spazio 3D), come ad esempio le trasformazioni affini (nello spazio) un po' più complesse, ma altrettanto utili.

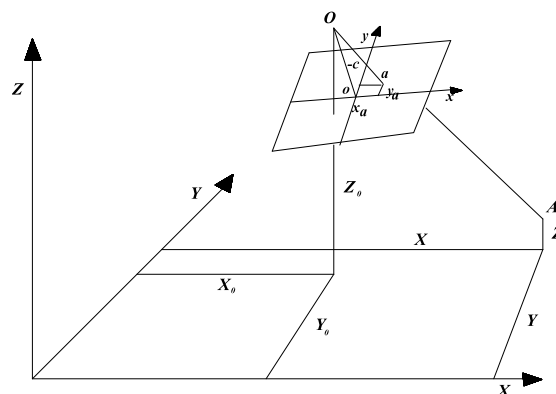


Figura 1.1 – I sistemi di riferimento fotogrammetrici.

Adattando questa espressione alla fotogrammetria e considerando la distanza del centro dell'immagine dal punto di presa (ovvero e, più precisamente, dal centro del sensore), una costante c , detta distanza (o lunghezza) focale, si può scrivere l'espressione precedente nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} x^{\circ} \\ y^{\circ} \\ -c_{ij} \end{pmatrix} = \hat{\lambda}_{ij} \hat{R}_j \left(\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_0 \\ \hat{Z}_0 \end{pmatrix}_j \right)$$

dove l'indice i è riferito al punto oggetto, l'indice j all'immagine e l'indice ij al punto i appartenente all'immagine j . L'apice rappresentato con un "pallino" ($^{\circ}$) indica una quantità osservata e quello rappresentato con un "cappello" ($\hat{}$) indica una quantità stimata. La variazione di scala λ è diversa per ogni punto sull'immagine, in quanto dipende dall'immagine stessa e da ciascun punto osservato. L'immagine è generalmente sviluppata a dimensione naturale (cioè non sono effettuati ingrandimenti, né riduzioni).

1.2 Matrici di rotazione

Dati un sistema di assi cartesiani ortogonali nello spazio ed un altro ruotato rispetto al primo, è possibile, utilizzando i coseni degli angoli fra assi originali ed assi ruotati, scrivere la matrice di rotazione così definita:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Tale matrice è ortogonale, di conseguenza, per la proprietà della stessa, la matrice inversa è uguale alla matrice trasposta e il determinante è unitario a meno di un segno. Per le condizioni di ortogonalità, si hanno le condizioni di vincolo sui coseni direttori (allora i parametri liberi sono solo tre; ad esempio, le tre rotazioni di un corpo rigido nello spazio):

$$\begin{aligned} \sum_i \hat{r}_{ki}^2 &= 1 & k &= 1, 2, 3 \\ \sum_i \hat{r}_{ki} \hat{r}_{li} &= 0 & k, l &= 1-2, 1-3, 2-3 \end{aligned}$$

Due sistemi di angoli sono noti dalla meccanica razionale: gli angoli di Cardano e gli angoli di Eulero. I primi sono quelli che storicamente si usano in fotogrammetria, mentre i secondi, con qualche adeguamento, sono usati in topografia e in geodesia, come pure nella navigazione. La ragione di questa distinzione sta nella possibilità di materializzare i primi, mediante giunti speciali, detti cardani, capaci di rotazioni nello spazio, mentre i secondi derivano direttamente dall'astronomia. Gli angoli della topografia sono utili nel caso di prese terrestri (o da elicottero), quelli della geodesia per prese da satellite, mentre il caso di prese aeree, in generale, non presenta particolari problemi nella definizione degli angoli d'assetto.

Angoli di Cardano:

Asse	Piano che ruota	Rotazione	
Z	XY	k	(sbandamento)
Y	ZX	φ	(beccheggio)
X	YZ	ω	(rollio)

Angoli di Eulero:

Asse	Piano che ruota	Rotazione	
Z	XY	α	(rotazione propria)
X	YZ	ζ	(nutazione)
Z	XY	ϑ	(precessione)

Topografia:

$$\vartheta = 2\pi - \vartheta$$

$$\zeta = \pi - \zeta$$

$$\alpha = \alpha$$

dove, in generale, ϑ è l'angolo azimutale, ζ l'angolo zenitale, mentre l'angolo α usualmente nullo. Si ricordi, a proposito, come gli angoli della topografia siano tradizionalmente orari, mentre quelli della fotogrammetria sempre antiorari, inoltre il versore tangente all'asse anticamente cosiddetto di collimazione abbia verso, nel primo caso, uscente dallo strumento di misura e, nel secondo, entrante nel sensore.

Geodesia:

$$\vartheta = \pi/2 \mp \lambda \quad (\text{longitudine})$$

$$\zeta = \pi/2 \mp \varphi \quad (\text{latitudine geocentrica})$$

$$\alpha = \pi/2 - \alpha \quad (\text{azimut})$$

dove i segni della prima formula valgono rispettivamente ad Est (+) ed a Ovest (-) del meridiano centrale; quelli della seconda a Nord (-) ed a Sud (+) dell'equatore. Si ricordi, a proposito, come gli angoli della geodesia siano tradizionalmente orari, mentre quelli della fotogrammetria sempre antiorari. Inoltre ricordando l'eccentricità dell'ellissoide ed utilizzando la latitudine geodetica, la seconda diviene:

$$\zeta = \pi/2 \mp \arctan\left[\frac{(1 - e^2) \tan|\varphi|}{\dots}\right]$$

La matrice di rotazione, nel caso di angoli di Cardano, ha forma:

$$\begin{vmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos k & \cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \varphi \cos k & \sin \omega \sin k - \cos \omega \sin \varphi \cos k \\ -\cos \varphi \sin k & \cos \omega \cos k - \sin \omega \sin \varphi \sin k & \sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \varphi \sin k \\ \sin \varphi & -\sin \omega \cos \varphi & \cos \omega \cos \varphi \end{vmatrix}$$

L'esplicitazione del valore degli angoli procede nel modo seguente:

- φ) da r_{31} facendo: $\arcsin r_{31}$
 k) da r_{11} e r_{21} facendo: $\arctan(-r_{21}/r_{11})$
 ω) da r_{32} e r_{33} facendo: $\arctan(-r_{32}/r_{33})$

Occorre tuttavia fare attenzione al valore dell'angolo φ ; infatti se esso è $\pm\pi/2$, il suo coseno è uguale a zero e, operando come prima, si avrebbero forme indeterminate per gli angoli ω e k . Allora si procede annullando, per definizione, il valore di k e ricavando l'angolo ω da r_{22} e r_{23} , facendo: $\arctan(r_{23}/r_{22})$.

L'annullamento di k si giustifica con il fatto che l'asse Z , se ruotato di $\pi/2$, viene a coincidere con l'asse x e le due rotazioni a sommarsi.

La matrice di rotazione, nel caso di angoli di Eulero, ha forma:

$$\begin{vmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \zeta & \sin \zeta \\ 0 & -\sin \zeta & \cos \zeta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \cos \zeta \sin \alpha & \sin \vartheta \cos \alpha + \cos \vartheta \cos \zeta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \zeta \\ -\cos \vartheta \sin \alpha - \sin \vartheta \cos \zeta \cos \alpha & -\sin \vartheta \sin \alpha + \cos \vartheta \cos \zeta \cos \alpha & \cos \alpha \sin \zeta \\ \sin \vartheta \sin \zeta & -\cos \vartheta \sin \zeta & \cos \zeta \end{vmatrix}$$

L'esplicitazione del valore degli angoli procede, in analogia, nel modo seguente:

- ξ) da r_{33} facendo: $\arccos r_{33}$
 ϑ) da r_{31} e $-r_{32}$ facendo: $\arctan(r_{31}/-r_{32})$
 α) da r_{13} e r_{23} facendo: $\arctan(r_{13}/r_{23})$

In questo caso bisogna fare attenzione al valore dell'angolo ξ , infatti se ha valore 0 oppure π , il suo seno sarebbe nullo. Allora si procede annullando, per definizione, il valore di α e ricavando ϑ da r_{12} e da r_{11} , facendo: $\arctan(r_{12}/r_{11})$.

Corre il dovere di segnalare che una modellazione del gruppo delle rotazioni a quattro parametri, come è possibile, ad es., con il corpo sghembo dei quaternioni di Hamilton, evita singolarità, propria di tutte le modellazioni classiche gruppo delle rotazioni. Tuttavia una simile trattazione è considerata estranea agli scopi del presente lavoro, in quanto richiede di anteporre, alla sua trattazione, la sua corrispondente algebra, comunemente non nota e non del tutto elementare.

Un'alternativa razionale alle rotazioni nello spazio è invece costituita dalla matrice di Rodriguez:

$$R = (I - S)(I + S)^{-1} \quad \text{dove:} \quad S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{vmatrix}$$

essendo S una matrice emisimmetrica qualsiasi e I la matrice unitaria (o identità). Alcuni semplici passaggi forniscono l'espressione degli elementi della matrice:

$$I - S = \begin{vmatrix} 1 & -c/2 & b/2 \\ c/2 & 1 & -a/2 \\ -b/2 & a/2 & 1 \end{vmatrix} \quad I + S = \begin{vmatrix} 1 & c/2 & -b/2 \\ -c/2 & 1 & a/2 \\ b/2 & -a/2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(I + S) = 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \quad (I + S)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} \begin{vmatrix} 4 + a^2 & ab - 2c & ac + 2b \\ ab + 2c & 4 + b^2 & bc - 2a \\ ac - 2b & bc + 2a & 4 + c^2 \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{1}{1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} \begin{vmatrix} 1 + \frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{4} & -c + \frac{1}{2}ab & b + \frac{1}{2}ac \\ c + \frac{1}{2}ab & 1 + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2)}{4} & -a + \frac{1}{2}bc \\ -b + \frac{1}{2}ac & a + \frac{1}{2}bc & 1 + \frac{(-a^2 - b^2 + c^2)}{4} \end{vmatrix}$$

Se si suppongono (a, b, c) piccoli e si linearizza rispetto ad essi, la matrice di Rodriguez risulta formalmente identica alle matrici di rotazione linearizzate, con gli angoli di Cardano ed Eulero:

$$\tilde{R} = \begin{vmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & -\varphi \\ -k & 1 & \omega \\ \varphi & -\omega & 1 \end{vmatrix}$$

1.3 Equazioni di collinearità

Le equazioni di collinearità sono le equazioni costitutive della fotogrammetria, utili nel passaggio dallo spazio immagine allo spazio oggetto. A partire dalla trasformazione di similitudine, eliminando l'incognita λ_{ij} ed introducendo i quozienti:

$$\frac{x^o}{-c} \quad \text{e:} \quad \frac{y^o}{-c}$$

chiamati TANGENTI DI DIREZIONE INTERNE, si scrivono le espressioni:

$$\frac{x^\circ}{-c} = \frac{\hat{r}_{11}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{12}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{13}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}{\hat{r}_{31}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{32}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{33}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}$$

$$\frac{y^\circ}{-c} = \frac{\hat{r}_{21}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{22}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{23}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}{\hat{r}_{31}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{32}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{33}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}$$

Si usa poi esplicitare le precedenti espressioni nel modo seguente:

$$x^\circ = -c \frac{\hat{r}_{11}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{12}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{13}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}{\hat{r}_{31}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{32}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{33}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}$$

$$y^\circ = -c \frac{\hat{r}_{21}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{22}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{23}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}{\hat{r}_{31}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{32}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{33}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}$$

Queste espressioni sono dette EQUAZIONI DI COLLINEARITÀ ed esprimono l'allineamento tra il punto oggetto, il punto immagine e il punto di presa. Geometricamente i due triangoli $C(PP)Q$ e CPH sono simili (Fig. 1.2).

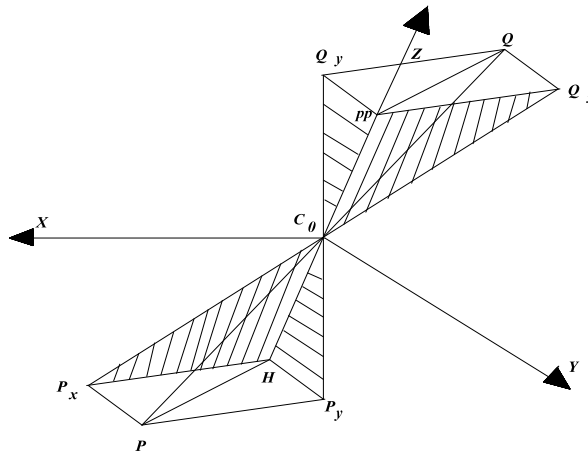


Figura 1.2 – Il teorema di Talete nello spazio.

Per il teorema di Talete, lo sono anche i triangoli ottenuti mediante la decomposizione rispetto all'asse X e all'asse Y :

$$\frac{PPQ_x}{PPC} = \frac{HP_x}{HC} \quad \text{e} \quad \frac{PPQ_y}{PPC} = \frac{HP_y}{HC}$$

essendo:

$$PPQ_x = x^\circ, \quad PPQ_y = y^\circ, \quad PPC = c$$

Di conseguenza:

$$\frac{HP_x}{HC} = A \quad \text{e:} \quad \frac{HP_y}{HP} = B$$

dove A e B indicano formalmente i secondi membri delle equazioni di collinearità. Le equazioni di collinearità sono non – lineari e, per risolverle come sistema, occorre linearizzarle attraverso uno sviluppo in serie di Taylor:

$$x = \tilde{x} + \left(\frac{\partial x}{\partial X_0}\right)\delta X_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial Y_0}\right)\delta Y_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial Z_0}\right)\delta Z_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)\delta \omega + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\delta \varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial k}\right)\delta k +$$

$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)\delta X + \left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)\delta Y + \left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right)\delta Z$$

$$y = \tilde{y} + \left(\frac{\partial y}{\partial X_0}\right)\delta X_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y_0}\right)\delta Y_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial Z_0}\right)\delta Z_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)\delta \omega + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\delta \varphi + \left(\frac{\partial y}{\partial k}\right)\delta k +$$

$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)\delta X + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\delta Y + \left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right)\delta Z$$

Indicando con una tilde (\sim) il valore approssimato di un parametro ed essendo $\delta X_0, \dots, \delta \omega, \dots$, le correzioni ai valori approssimati, le derivate della prima equazione di collinearità sono:

$$\frac{\partial x}{\partial X_0} = \frac{1}{D}(cr_{11} + xr_{31}) = \frac{1}{D}(c \cos \varphi \cos k + x \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y_0} = \frac{1}{D}(cr_{12} + xr_{32}) = \frac{1}{D}[c(\cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \varphi \cos k) - x \sin \omega \cos \varphi]$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z_0} = \frac{1}{D}(cr_{13} + xr_{33}) = \frac{1}{D}[c(\sin \omega \sin k - \cos \omega \sin \varphi \cos k) + x \cos \omega \cos \varphi]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\frac{1}{D}[(-cr_{13} + xr_{33})(Y - Y_0) + (cr_{12} + xr_{32})(Z - Z_0)] =$$

$$= -\frac{1}{D}\{c(-\sin \omega \sin k + \cos \omega \sin \varphi \cos k) + x \cos \omega \cos \varphi\}(Y - Y_0) +$$

$$+ [c(\cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \varphi \cos k) - x \sin \omega \cos \varphi](Z - Z_0)\}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{1}{D}[(-c \sin \varphi \cos k + x \cos \varphi)(X - X_0) + (c \sin \omega \cos \varphi \cos k + x \sin \omega \sin \varphi)(Y - Y_0) +$$

$$- (c \cos \omega \cos \varphi \cos k + x \cos \omega \sin \varphi)(Z - Z_0)]$$

$$\frac{\partial x}{\partial k} = y = -\frac{c}{D} \left[-\cos \varphi \sin k (X - X_0) + (c \cos \omega \cos k + \sin \omega \sin \varphi \sin k) (Y - Y_0) + (\sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \varphi \sin k) (Z - Z_0) \right]$$

e quelle della seconda equazione di collinearità:

$$\frac{\partial y}{\partial X_0} = \frac{1}{D} (cr_{21} + yr_{31}) = \frac{1}{D} (-c \cos \varphi \sin k + y \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_0} = \frac{1}{D} (cr_{22} + yr_{32}) = \frac{1}{D} [c(\cos \omega \cos k - \sin \omega \sin \varphi \sin k) - y \sin \omega \cos \varphi]$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z_0} = \frac{1}{D} (cr_{13} + yr_{33}) = \frac{1}{D} [c(\sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \varphi \sin k) + y \cos \omega \cos \varphi]$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{1}{D} [-(cr_{23} + yr_{33})(Y - Y_0) + (cr_{22} + yr_{32})(Z - Z_0)] =$$

$$= -\frac{1}{D} \left\{ -[c(\sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \varphi \sin k) + y \cos \omega \cos \varphi] (Y - Y_0) + [c(\cos \omega \cos k - \sin \omega \sin \varphi \sin k) - y \sin \omega \cos \varphi] (Z - Z_0) \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{1}{D} [(c \sin \varphi \sin k + y \cos \varphi)(X - X_0) + (-c \sin \omega \cos \varphi \sin k + y \sin \omega \sin \varphi)(Y - Y_0) + (c \cos \omega \cos \varphi \sin k - y \cos \omega \sin \varphi)(Z - Z_0)]$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = -x = \frac{c}{D} [\cos \varphi \cos k (X - X_0) + (\cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \varphi \cos k)(Y - Y_0) + (\sin \omega \sin k - \cos \omega \sin \varphi \cos k)(Z - Z_0)]$$

inoltre:

$$\frac{\partial x}{\partial X} = -\frac{\partial x}{\partial X_0}; \quad \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{\partial x}{\partial Y_0}; \quad \frac{\partial x}{\partial Z} = -\frac{\partial x}{\partial Z_0}$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial y}{\partial X_0}; \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{\partial y}{\partial Y_0}; \quad \frac{\partial y}{\partial Z} = -\frac{\partial y}{\partial Z_0}$$

essendo: $D = r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)$

La soluzione del sistema linearizzato è utilizzata come dato di partenza per una nuova iterazione. La linearizzazione parte da valori approssimati, presi opportunamente caso per caso.

Le equazioni di collinearità hanno 9 parametri incogniti (gli angoli d'assetto dei sensori, le coordinate dei punti di presa e le coordinate del punto oggetto). I valori approssimati dei parametri, se la presa è aerea, possono essere così ottenuti:

- i punti oggetto si determinano utilizzando una carta a piccola scala;
- i punti di presa possono essere definiti in base al piano di volo;
- gli angoli d'assetto, per prese nadirali, possono essere definiti in base al piano di volo.

Infatti se la presa è aerea ed il sensore ha rotazioni solo attorno all'asse Z , la matrice di rotazione ha forma:

$$R = \begin{vmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e l'angolo k è definito strisciata per strisciata. Se la presa è terrestre, in generale, le coordinate dei punti oggetto e di presa sono pre – determinate topograficamente con l'esecuzione di una rete d'appoggio; per quanto riguarda invece gli angoli d'assetto, tutti i valori di questi sono ammissibili, ma spesso si conoscono abbastanza bene assieme alla geometria della presa.

Nel caso particolare, ma di notevole interesse, di prese terrestri frontali di oggetti piani, è possibile ricondursi al caso di prese aeree nadirali, già illustrato in precedenza, istituendo la seguente corrispondenza:

Asse terrestre	Asse aereo
X	X
Y	Z
Z	$-Y$

in quanto la matrice di rotazione diviene essenzialmente una matrice di scambio fra gli assi Y e Z , con inversione del segno (ovvero ribaltamento dell'asse) per il secondo, a meno di piccole rotazioni (minori di 5°) fra gli assi:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.3.1 Equazioni di collinearità in coordinate geodetiche

Le coordinate immagine x° di un qualsiasi punto possono essere collegate alle coordinate oggetto X dello stesso punto attraverso le coordinate X_o del punto di presa, gli angoli di assetto (ω, φ, k) , opportunamente inseriti all'interno della matrice R , e un fattore di scala locale λ , per mezzo della seguente espressione:

$$x = \lambda R(X - X_0)$$

Allora le due equazioni di collinearità sono facilmente derivabili valutando opportunamente il rapporto tra la prima e la terza relazione e tra la seconda e la terza:

$$x = -c \frac{R_1(X - X_0)}{R_3(X - X_0)}; \quad y = -c \frac{R_2(X - X_0)}{R_3(X - X_0)}$$

cosicché il fattore di scala incognito sia eliminato, essendo c la distanza focale.

D'altra parte, le coordinate oggetto rettangolari di ogni punto e le stesse coordinate del punto di presa possono essere espresse per mezzo delle coordinate geodetiche (λ, φ, h) , ove di interesse. In questo modo, la linearizzazione delle equazioni di collinearità, rispetto alle coordinate del punto oggetto in esame e del punto di presa, è ottenuta moltiplicando i termini ottenuti dalle usuali derivate per lo Jacobiano delle coordinate cartesiane rispetto a quelle geodetiche. Si noti invece come le derivate rispetto agli angoli d'assetto rimangono le stesse. Di conseguenza l'espressione linearizzata delle equazioni di collinearità assume la seguente forma simbolica:

$$G = \begin{vmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{vmatrix};$$

$$G_0 = \begin{vmatrix} \varphi_0 \\ \lambda_0 \\ h_0 \end{vmatrix}$$

$$X = X(G) = \begin{vmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (N(1-e^2)+h)\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$\psi = \begin{vmatrix} \omega \\ \varphi \\ k \end{vmatrix};$$

$$r_1 = r_1(\psi)$$

$$r_2 = r_2(\psi)$$

$$r_3 = r_3(\psi)$$

$$x = \tilde{x} + \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial G} \delta G + \frac{\partial x}{\partial X_0} \frac{\partial X_0}{\partial G_0} \delta G_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \psi} + \frac{\partial x}{\partial r_3} \frac{\partial r_3}{\partial \psi} \right) \delta \psi$$

$$y = \tilde{y} + \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial G} \delta G + \frac{\partial y}{\partial X_0} \frac{\partial X_0}{\partial G_0} \delta G_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial r_3} \frac{\partial r_3}{\partial \psi} \right) \delta \psi$$

Le equazioni di collinearità, in questa forma, sono particolarmente adatte per trattare osservazioni di fotogrammetria dallo spazio. Anche i punti di appoggio devono ovviamente essere dati in coordinate geodetiche. Questo significa essenzialmente che l'ondulazione del geode deve essere sommata all'altezza ortometrica di ogni punto di appoggio: $h = H + N$. Le equazioni di vincolo dei punti di appoggio sono fornite dalle relazioni:

$$\delta\lambda = 0$$

$$\delta\varphi = 0$$

$$\delta h = 0$$

Si noti che la stessa condizione e gli stessi vincoli sono necessari per definire il sistema di riferimento per la compensazione congiunta di reti geodetiche e blocchi fotogrammetrici.

1.4 Le fasi della trasformazione proiettiva – Distinzione dei parametri

La tecnica fotogrammetrica è fondata sulla trasformazione di una prospettiva (o di una coppia di prospettive) in una proiezione (ortogonale) quotata dell'oggetto raffigurato. Tale trasformazione può avvenire tramite calcolo numerico, oppure operazioni meccaniche o grafomeccaniche; nel primo caso si parlerà di fotogrammetria analitica e nel secondo di fotogrammetria analogica.

Oggi la fotogrammetria analogica è stata totalmente sostituita da quella analitica. Tuttavia le equazioni di collinearità sono nella pratica poco usate, per una questione di trascinarsi culturale e per il fatto che, pur essendo dal punto di vista concettuale corrette, dipendono da parametri non – lineari e non si ha alcuna certezza sulla relativa facilità di acquisizione dei valori approssimati di questi.

Allora il problema consiste nello scrivere un sistema di equazioni con relazioni che utilizzano parametri approssimati di meno difficile acquisizione. Questo può avvenire se tali parametri possono essere non tutti utili insieme, avere valori approssimati nulli od unitari, e dare la possibilità di soluzione del sistema stesso con calcoli abbastanza semplici.

Prendendo in considerazione due immagini, le quattro equazioni di collinearità si particolarizzano nel modo seguente:

$$x_1^o = -c \frac{\hat{r}_{11.1}(\hat{X}_1 - \hat{X}_{01}) + \hat{r}_{12.1}(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_{01}) + \hat{r}_{13.1}(\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{01})}{\hat{r}_{31.1}(\hat{X}_1 - \hat{X}_{01}) + \hat{r}_{32.1}(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_{01}) + \hat{r}_{33.1}(\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{01})}$$

$$y_1^o = -c \frac{\hat{r}_{21.1}(\hat{X}_1 - \hat{X}_{01}) + \hat{r}_{22.1}(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_{01}) + \hat{r}_{23.1}(\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{01})}{\hat{r}_{31.1}(\hat{X}_1 - \hat{X}_{01}) + \hat{r}_{32.1}(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_{01}) + \hat{r}_{33.1}(\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{01})}$$

$$x_2^o = -c \frac{\hat{r}_{11.2}(\hat{X}_2 - \hat{X}_{02}) + \hat{r}_{12.2}(\hat{Y}_2 - \hat{Y}_{02}) + \hat{r}_{13.2}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{02})}{\hat{r}_{31.2}(\hat{X}_2 - \hat{X}_{02}) + \hat{r}_{32.2}(\hat{Y}_2 - \hat{Y}_{02}) + \hat{r}_{33.2}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{02})}$$

$$y_2^o = -c \frac{\hat{r}_{21.2}(\hat{X}_2 - \hat{X}_{02}) + \hat{r}_{22.2}(\hat{Y}_2 - \hat{Y}_{02}) + \hat{r}_{23.2}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{02})}{\hat{r}_{31.2}(\hat{X}_2 - \hat{X}_{02}) + \hat{r}_{32.2}(\hat{Y}_2 - \hat{Y}_{02}) + \hat{r}_{33.2}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{02})}$$

In esse sono contenuti i dodici parametri di ORIENTAMENTO ESTERNO:

□ coordinate dei punti di presa:

$$X_{01}, Y_{01}, Z_{01} \quad X_{02}, Y_{02}, Z_{02}$$

□ angoli d'assetto dei sensori:

$$\omega_1, \varphi_1, k_1$$

$$\omega_2, \varphi_2, k_2$$

E' possibile definire una nuova notazione per la prima immagine, supponendo che le coordinate della stessa siano le traslazioni da dare al sistema di riferimento per portarlo in quel punto e cambiando, per comodità, nome agli angoli:

$$t_x, t_y, t_z, \Omega, \Phi, K$$

Questi parametri sono detti di orientamento assoluto del modello dalla coppia di immagini. Con una notazione conseguente alla scelta fatta per la prima immagine, i parametri della seconda diventano:

$$t_x + \Delta x, t_y + \Delta y, t_z + \Delta z, \Omega + \Delta\omega, \Phi + \Delta\varphi, K + \Delta k$$

inoltre imponendo che gli spostamenti contengano in modo esplicito un fattore di scala (λ) e chiamando nuovamente le variazioni degli angoli (ω_2, φ_2, k_2), si ha:

$$t_x + \lambda b_x, t_y + \lambda b_y, t_z + \lambda b_z, \Omega + \omega_2, \Phi + \varphi_2, K + k_2$$

I secondi addendi delle notazioni trovate sono detti parametri di ORIENTAMENTO RELATIVO e rappresentano la variazione di posizione ed assetto della seconda immagine rispetto alla prima. Questi sembrerebbero addirittura sette, cosa del tutto assurda; allora per mantenere la congruenza con la notazione precedente e, volendo mantenere la scala come incognita, occorre togliere un'altra incognita. Usualmente si suppone nota la componente \bar{b}_x , perché meglio segue la direzione della base:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$$

ovvero alla scala dell'oggetto:

$$\bar{\Delta}_x = \sqrt{\Delta^2 - \Delta_y^2 - \Delta_z^2}$$

ed essendo: $\Delta = \lambda b$

si ha: $b = \sqrt{\bar{b}_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$

ovvero alla scala dell'oggetto:

$$\bar{b}_x = \sqrt{b^2 - b_y^2 - b_z^2} .$$

Inoltre poiché la scala λ non è una variazione di forma, ma solo di dimensione, essa è considerata un parametro di orientamento assoluto. Allora i parametri di orientamento relativo sono solo cinque:

$$b_y, b_z, \omega_2, \varphi_2, k_2$$

e si riferiscono per costruzione ad un orientamento relativo asimmetrico. Se si ridefiniscono poi gli angoli d'assetto della prima immagine:

$$\omega_1 = 0, \varphi_1, k_1$$

i cinque parametri $(\varphi_1, k_1, \omega_2, \varphi_2, k_2)$ sono detti parametri di orientamento relativo simmetrico. I parametri di ORIENTAMENTO ASSOLUTO, cioè quelli che riguardano l'orientamento della coppia di immagini, sono allora i sette rimanenti:

$$t_x, t_y, t_z, \lambda, \Omega, \Phi, K$$

Essi rappresentano una rototraslazione nello spazio più una variazione di scala e legano le coordinate di un punto del modello ottenuto orientando relativamente le due immagini alle coordinate del corrispondente punto dell'oggetto.

Sostituire i dodici parametri, appena definiti, nelle equazioni di collinearità non ha senso, perché si tornerebbe alla situazione di partenza. Il problema è di cercare nuove equazioni che effettuino, in successione, l'orientamento relativo e l'orientamento assoluto (queste due tappe dovrebbero, almeno in teoria, condurre allo stesso risultato delle equazioni di collinearità).

1.5 Principio di complanarità – orientamento relativo

L'orientamento relativo di due immagini si esprime matematicamente, mediante la condizione di complanarità dei raggi omologhi fra punti immagine relativi ad uno stesso punto oggetto. Infatti considerando lo schema costituito da due punti di presa e dai punti immagine di un unico punto oggetto su due immagini, le due rette passanti rispettivamente per $P1O1$ e $P2O2$ devono essere complanari con la base e, riferendosi ad un sistema di riferimento con origine in $O1$ e coassiale alla prima immagine, si può scrivere il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b_x & x_1 & b_x + \xi_2 \\ 0 & b_y & y_1 & b_y + \eta_2 \\ 0 & b_z & -c & b_z + \zeta_2 \end{vmatrix} = 0$$

dove, poiché le coordinate di P_2 hanno origine in O_2 , le componenti della base (b_x, b_y, b_z) determinano la traslazione, mentre le coordinate (ξ_2, η_2, ζ_2) sono ruotate tramite gli angoli d'assetto $(\omega_2, \varphi_2, k_2)$ della seconda immagine, per avere congruenza fra i due sistemi di riferimento (Fig. 1.3).

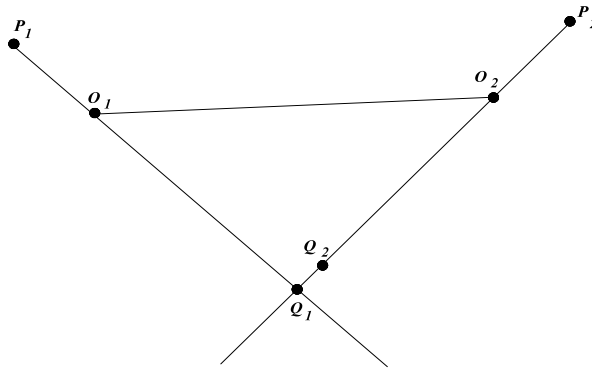


Figura 1.3 – Principio di complanarità.

Attraverso semplici combinazioni lineari tra righe e colonne si può semplificare tale determinante, fino a ridurlo alla forma:

$$\begin{vmatrix} b_x & x_1 & \xi_2 \\ b_y & y_1 & \eta_2 \\ b_z & -c & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0$$

CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ per l'orientamento relativo asimmetrico. Pertanto posto:

$$\begin{vmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{vmatrix} = R_2^T(\omega_2, \varphi_2, k_2) \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -c \end{vmatrix}$$

e sviluppando il determinante, si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{b}_x (y_1 \zeta_2 + c \eta_2) - b_y (x_1 \zeta_2 + c \xi_2) + b_z (x_1 \eta_2 - y_1 \xi_2) = 0 \\ \bar{b}_x [y_1 (r_{13} x_2 + r_{23} y_2 - r_{33} c) + c (r_{12} x_2 + r_{22} y_2 - r_{32} c)] + \\ - b_y [x_1 (r_{13} x_2 + r_{23} y_2 - r_{33} c) + c (r_{11} x_2 + r_{21} y_2 - r_{31} c)] + \\ + b_z [x_1 (r_{12} x_2 + r_{22} y_2 - r_{32} c) + y_1 (r_{11} x_2 + r_{21} y_2 - r_{31} c)] = 0 \end{aligned}$$

Anche l'equazione di complanarità è non – lineare; per risolverla come sistema, occorre linearizzarla attraverso uno sviluppo in serie di Taylor:

$$\tilde{C} + \left(\frac{\partial C}{\partial b_y} \right) \delta b_y + \left(\frac{\partial C}{\partial b_z} \right) \delta b_z + \left(\frac{\partial C}{\partial \omega_2} \right) \delta \omega_2 + \left(\frac{\partial C}{\partial \varphi_2} \right) \delta \varphi_2 + \left(\frac{\partial C}{\partial k_2} \right) \delta k_2 = 0$$

dove le sue derivate hanno espressione:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial b_y} &= -(x_1 \tilde{\xi}_2 + c \tilde{\xi}_2) & \frac{\partial C}{\partial b_z} &= x_1 \tilde{\eta}_2 + y_1 \tilde{\xi}_2 \\ \frac{\partial C}{\partial \omega_2} &= \bar{b}_x [y_1 (\tilde{r}_{12} x_2 + \tilde{r}_{22} y_2 - r_{32} c) + c (-\tilde{r}_{13} x_2 - \tilde{r}_{23} y_2 + \tilde{r}_{33} c)] + \\ & - \tilde{b}_y x_1 (\tilde{r}_{12} x_2 + \tilde{r}_{22} y_2 - r_{32} c) + \tilde{b}_z x_1 (-\tilde{r}_{13} x_2 - \tilde{r}_{23} y_2 + \tilde{r}_{33} c) \\ \frac{\partial C}{\partial \varphi_2} &= (\bar{b}_x y_1 - \tilde{b}_y x_1) \left(-\cos \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \cos \tilde{k}_2 x_2 + \cos \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \sin \tilde{k}_2 y_2 + \cos \tilde{\omega}_2 \sin \tilde{\varphi}_2 c \right) + \\ & + (\bar{b}_x c + \tilde{b}_z x_1) \left(\sin \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \cos \tilde{k}_2 x_2 - \sin \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \sin \tilde{k}_2 y_2 - \sin \tilde{\omega}_2 \sin \tilde{\varphi}_2 c \right) + \\ & - (\bar{b}_y c + b_z y_1) \left(-\sin \tilde{\varphi}_2 \cos \tilde{k}_2 x_2 + \sin \varphi_2 \sin \tilde{k}_2 y_2 - \cos \varphi_2 c \right) \\ \frac{\partial C}{\partial k_2} &= \tilde{b}_x [y_1 (\tilde{r}_{23} x_2 - \tilde{r}_{13} y_2) + c (\tilde{r}_{22} x_2 - \tilde{r}_{12} y_2)] - \tilde{b}_y [x_1 (\tilde{r}_{23} x_2 - \tilde{r}_{13} y_2) + c (\tilde{r}_{21} x_2 - \tilde{r}_{11} y_2)] + \\ & + \tilde{b}_z [x_1 (\tilde{r}_{22} x_2 - \tilde{r}_{12} y_2) - y_1 (\tilde{r}_{21} x_2 - \tilde{r}_{11} y_2)]\end{aligned}$$

tenendo opportunamente conto delle matrici derivate, rispetto agli angoli di Cardano, della matrice di rotazione (si veda, a proposito, il paragrafo successivo). Lo stesso procedimento può essere adottato per l'orientamento relativo simmetrico; in questo caso lo stesso determinante ha forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \bar{b}_x & \xi_1 & \bar{b}_x + \xi_2 \\ 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} = 0$$

nella quale si è posto:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_1 \end{vmatrix} = R_1^T(\omega_1 = 0, \varphi_1, k_1) \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \xi_2 \end{vmatrix} = R_2^T(\omega_2, \varphi_2, k_2) \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -c \end{vmatrix}$$

Procedendo, in modo analogo al caso precedente, e riducendo convenientemente il determinante, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \bar{b}_x & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0$$

condizione di complanarit  per l'orientamento relativo simmetrico. Sviluppando il determinante ed eseguite le sostituzioni dovute, si ottiene:

$$\eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2 = 0$$

$$\begin{aligned} & (r_{12.1}x_1 + r_{22.1}y_1 - r_{32.1}c)(r_{13.2}x_2 + r_{23.2}y_2 - r_{33.2}c) + \\ & - (r_{13.1}x_1 + r_{23.1}y_1 - r_{33.1}c)(r_{12.2}x_2 + r_{22.2}y_2 - r_{32.2}c) = 0 \end{aligned}$$

La linearizzazione   concettualmente identica a quella eseguita per l'orientamento relativo simmetrico:

$$\tilde{C} + \left(\frac{\partial C}{\partial \varphi_1} \right) \delta b_y + \left(\frac{\partial C}{\partial k_1} \right) \delta b_z + \left(\frac{\partial C}{\partial \omega_2} \right) \delta \omega_2 + \left(\frac{\partial C}{\partial \varphi_2} \right) \delta \varphi_2 + \left(\frac{\partial C}{\partial k_2} \right) \delta k_2 = 0$$

e le sue derivate hanno espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \varphi_1} = & (\tilde{r}_{13.2}x_2 + \tilde{r}_{23.2}y_2 - \tilde{r}_{33.2}c) \left(-\cos \tilde{\omega}_1 \cos \tilde{\varphi}_1 \cos \tilde{k}_1 x_1 - \sin \tilde{\omega}_1 \cos \tilde{\varphi}_1 \sin \tilde{k}_1 y_1 - \sin \varphi_1 \sin k_1 c \right) + \\ & - (\tilde{r}_{12.2}x_2 + \tilde{r}_{22.2}y_2 - \tilde{r}_{32.2}c) \left(-\cos \tilde{\omega}_1 \cos \tilde{\varphi}_1 \cos \tilde{k}_1 x_1 + \cos \tilde{\omega}_1 \cos \tilde{\varphi}_1 \sin \tilde{k}_1 y_1 - \cos \tilde{\omega}_1 \sin \tilde{\varphi}_1 c \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial k_1} = & (\tilde{r}_{12.2}x_2 + \tilde{r}_{22.2}y_2 - \tilde{r}_{32.2}c) (\tilde{r}_{22.1}x_1 - \tilde{r}_{12.1}y_1) + \\ & - (\tilde{r}_{13.2}x_2 + \tilde{r}_{23.2}y_2 - \tilde{r}_{33.2}c) (\tilde{r}_{23.1}x_1 - \tilde{r}_{13.1}y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \omega_2} = & (\tilde{r}_{12.1}x_1 + \tilde{r}_{22.1}y_1 - \tilde{r}_{32.1}c) (\tilde{r}_{12.2}x_2 + \tilde{r}_{22.2}y_2 - \tilde{r}_{32.2}c) + \\ & - (\tilde{r}_{13.1}x_1 + \tilde{r}_{23.1}y_1 - \tilde{r}_{33.1}c) (-\tilde{r}_{13.2}x_2 - \tilde{r}_{23.2}y_2 + \tilde{r}_{33.2}c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \varphi_2} = & (\tilde{r}_{12.1}x_1 + \tilde{r}_{22.1}y_1 - \tilde{r}_{32.1}c) \left(-\cos \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \cos \tilde{k}_2 x_2 + \cos \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \sin \tilde{k}_2 y_2 - \cos \tilde{\omega}_2 \sin \tilde{\varphi}_2 c \right) + \\ & - (\tilde{r}_{13.1}x_1 + \tilde{r}_{23.1}y_1 - \tilde{r}_{33.1}c) \left(-\cos \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \cos \tilde{k}_2 x_2 - \sin \tilde{\omega}_2 \cos \tilde{\varphi}_2 \sin \tilde{k}_2 y_2 - \sin \varphi_2 \sin k_2 c \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial k_2} = & (\tilde{r}_{12.1}x_1 + \tilde{r}_{22.1}y_1 - \tilde{r}_{32.1}c) (\tilde{r}_{33.2}x_2 - \tilde{r}_{13.2}y_2) + \\ & - (\tilde{r}_{13.1}x_1 + \tilde{r}_{23.1}y_1 - \tilde{r}_{33.1}c) (\tilde{r}_{22.2}x_2 - \tilde{r}_{12.2}y_2) \end{aligned}$$

La trasformazione fra i parametri dell'orientamento relativo simmetrico e quelli dell'orientamento relativo asimmetrico, e viceversa,   data dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
b_x &= \cos \varphi_1 \cos k_1 & \varphi_1 &= \arcsin b_z \\
b_y &= \cos \varphi_1 \sin k_1 & k_1 &= \arctan \frac{b_y}{b_x} \\
b_z &= \sin \varphi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^T(\varpi_2 \varphi_2 k_2 | b_x b_z) &= R_2^T(\varpi_2 \varphi_2 k_2) R_1(\varpi_1 \varphi_1 k_1) \\
R_2^T(\varpi_2 \varphi_2 k_2) &= R_2^T(\varpi_2 \varphi_2 k_2 | b_x b_z) R_1^T(\varpi_1 \varphi_1 k_1)
\end{aligned}$$

dove nel primo gruppo di espressioni si riconosce facilmente la trasformazione dalle coordinate polari nello spazio alle coordinate rettangolari nello stesso spazio e viceversa (a meno del raggio vettore).

1.6 Calcolo delle coordinate modello

Data la sopraccitata trasformazione di similitudine S:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ -c_{ij} \end{vmatrix} = \lambda_{ij} R_j(\omega_2, \varphi_2, k_2) \left(\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_i - \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix}_j \right)$$

si pone ora l'obiettivo di ottenere le espressioni delle coordinate modello, ivi sostituite alle coordinate oggetto. Dividendo per la scala λ_{ij} , moltiplicando per la matrice inversa della matrice di rotazione R_j e ricordando le proprietà delle matrici ortogonali: $R_j^{-1} = R_j^T$, cioè: $R_j^T R_j = I$, si ottiene:

$$\frac{1}{\lambda_{ij}} R_j^T \begin{vmatrix} x \\ y \\ -c_{ij} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_i - \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix}_j$$

Operando tra le righe, si ottengono i quozienti, chiamati TANGENTI DI DIREZIONE ESTERNE:

$$\begin{aligned}
\frac{X_i - X_{0j}}{Z_i - Z_{0j}} &= \frac{r_{11j} x_{ij} + r_{21j} y_{ij} - r_{31j} c}{r_{13j} x_{ij} + r_{23j} y_{ij} - r_{33j} c} \\
\frac{Y_i - Y_{0j}}{Z_i - Z_{0j}} &= \frac{r_{12j} x_{ij} + r_{22j} y_{ij} - r_{32j} c}{r_{13j} x_{ij} + r_{23j} y_{ij} - r_{33j} c}
\end{aligned}$$

Nel prosieguo si considera solo l'orientamento relativo asimmetrico, ribadendo tuttavia la possibilità di procedere analogamente per l'orientamento relativo simmetrico. Per la prima immagine, dove il punto di presa ha coordinate $0(0,0,h)$ e gli angoli d'assetto sono tutti nulli (di conseguenza la matrice di rotazione R è la matrice identità), le suddette espressioni diventano:

$$\frac{X}{Z-h} = \frac{x_1}{-c};$$

$$\frac{Y}{Z-h} = \frac{y_1}{-c}$$

Per la seconda immagine invece, dove il punto di presa ha coordinate $(\bar{b}_x, \bar{b}_y, h + b_z)$ e gli angoli d'assetto possono essere qualsiasi, le stesse espressioni diventano:

$$\frac{X - \bar{b}_x}{Z - (h + b_z)} = \frac{r_{11}x_2 + r_{21}y_2 - r_{31}c}{r_{13}x_2 + r_{23}y_2 - r_{33}c}$$

$$\frac{Y - \bar{b}_y}{Z - (h + b_z)} = \frac{r_{12}x_2 + r_{22}y_2 - r_{32}c}{r_{13}x_2 + r_{23}y_2 - r_{33}c}$$

Tali relazioni devono essere esplicitate per ottenere le espressioni delle coordinate modello.

Calcolo della Z:

$$X = (Z - h) \frac{x_1}{-c}$$

$$(Z - h) \frac{x_1}{-c} = \bar{b}_x + Z - (h + b_z) + \frac{r_{11}x_2 + r_{21}y_2 - r_{31}c}{r_{13}x_2 + r_{23}y_2 - r_{33}c}$$

da cui:

$$\hat{Z} = h + \frac{\bar{b}_x - b_z \frac{\hat{r}_{11}x_2^\circ + \hat{r}_{21}y_2^\circ - \hat{r}_{31}c}{\hat{r}_{13}x_2^\circ + \hat{r}_{23}y_2^\circ - \hat{r}_{33}c}}{\frac{x_1^\circ}{-c} - \frac{\hat{r}_{11}x_2^\circ + \hat{r}_{21}y_2^\circ - \hat{r}_{31}c}{\hat{r}_{13}x_2^\circ + \hat{r}_{23}y_2^\circ - \hat{r}_{33}c}}$$

Calcolo della X:

$$\hat{X} = (\hat{Z} - h) \frac{x_1^\circ}{-c}$$

Calcolo della Y:

$$\hat{Y}_1 = (\hat{Z} - h) \frac{y_1^\circ}{-c}$$

$$\hat{Y}_2 = \hat{b}_y + (\hat{Z} - (h + \hat{b}_z)) \frac{\hat{r}_{12}x_2^\circ + \hat{r}_{22}y_2^\circ - \hat{r}_{32}c}{\hat{r}_{13}x_2^\circ + \hat{r}_{23}y_2^\circ - \hat{r}_{33}c}$$

La coordinata \hat{Y} è poi calcolata come la media delle due, trovate in precedenza, perché i valori ottenuti saranno circa uguali e per darne un giudizio critico si calcola la differenza:

$$\hat{V} = \hat{Y}_2 - \hat{Y}_1$$

detta PARALLASSE D'ALTEZZA RESIDUA dopo l'orientamento relativo alla scala del modello. Queste formule hanno valore generale, in quanto non si hanno restrizioni sui valori degli angoli d'assetto.

I risultati ottenuti non sono altro che i dati pseudosservati per la successiva operazione di orientamento assoluto del modello.

$$\hat{X} = u^\circ; \quad \hat{Y} = v^\circ; \quad \hat{Z} = w^\circ$$

1.7 Orientamento assoluto

Le coordinate (u,v,w) di un punto qualsiasi del modello sono collegate alle coordinate (X,Y,Z) del corrispondente punto dell'oggetto, da una relazione di rototraslazione nello spazio più una variazione di scala, unica per tutto il modello, che definisce l'orientamento assoluto del modello stesso:

$$\begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{vmatrix}_{ij} = \hat{\Lambda}_j R_j \left(\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i - \begin{vmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{vmatrix}_j \right)$$

Questa, linearizzata in serie di Taylor, ha espressione:

$$\begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{vmatrix}_{ij} = \begin{vmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{vmatrix}_{ij} + \delta \hat{\lambda}_{ij} R_j \left(\begin{vmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \tilde{t}_x \\ \tilde{t}_y \\ \tilde{t}_z \end{vmatrix} \right) + \tilde{\Lambda}_j \tilde{R}_j \left(\begin{vmatrix} \delta \tilde{X} \\ \delta \tilde{Y} \\ \delta \tilde{Z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta \tilde{t}_x \\ \delta \tilde{t}_y \\ \delta \tilde{t}_z \end{vmatrix} \right) + \tilde{\Lambda}_j (\tilde{R}_\Omega \delta \tilde{\Omega} + \tilde{R}_\Phi \delta \tilde{\Phi} + \tilde{R}_K \delta \tilde{K})_j \left(\begin{vmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{vmatrix}_i - \begin{vmatrix} \tilde{t}_x \\ \tilde{t}_y \\ \tilde{t}_z \end{vmatrix} \right)$$

essendo:

$$R_\omega = \begin{vmatrix} 0 & -r_{13} & r_{12} \\ 0 & -r_{23} & r_{22} \\ 0 & -r_{33} & r_{32} \end{vmatrix} \quad R_k = \begin{vmatrix} r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ -r_{11} & -r_{12} & -r_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_\Phi = \begin{vmatrix} -\sin \Phi \cos K & \sin \Omega \cos \Phi \cos K & -\cos \Omega \cos \Phi \cos K \\ \sin \Phi \sin K & -\sin \Omega \cos \Phi \sin K & \cos \Omega \cos \Phi \sin K \\ \cos \Phi & \sin \Omega \sin \Phi & -\cos \Phi \sin \Phi \end{vmatrix}$$

Le coordinate modello sono il risultato di un'operazione precedente. Infatti esse sono innanzitutto output dell'operazione di orientamento relativo e diventano poi input per quella di orientamento assoluto; tuttavia esse vengono usualmente considerate come direttamente osservabili e trattate come osservazioni indipendenti e di uguale precisione.

1.7.1 Un giudizio statistico ed altre questioni statistiche e numeriche

Partendo dalla misura delle coordinate immagine, ipotizzando misure indipendenti e di uguale precisione ed applicando il criterio dei minimi quadrati alle equazioni di collinearità, poiché si trovano direttamente le coordinate oggetto, i risultati ottenuti sono del tutto rigorosi. Se questo è trasferito alle condizioni di complanarità, si ottengono risultati rigorosi fino al passaggio dall'orientamento relativo a quello assoluto: vale a dire fino al calcolo delle coordinate modello, in quanto queste ultime non possono più essere considerate indipendenti e di uguale precisione. Allora il procedimento a due tappe (orientamento relativo + orientamento assoluto) è approssimato dal punto di vista statistico, perché perde la proprietà di sufficienza delle stime nel passaggio da un orientamento all'altro. Tuttavia è utilizzato per la sua semplicità e per il fatto che, se si dovesse tenere conto delle matrici di varianza – covarianza di tutti i parametri intermedi, non avrebbe alcun significato una procedura a due tappe, quando si sarebbe ritornati, con qualche complicazione in più, al procedimento delle equazioni di collinearità.

Per quanto riguarda invece gli aspetti numerici, trattandosi di compensazioni ai minimi quadrati o, in alternativa, facendo uso di procedure robuste, nessun problema numerico è dato di problemi indicati come vertice di piramide o doppio vertice di piramide (risolti entrambi mediante le equazioni di collinearità), come pure per l'orientamento relativo, sia nel caso asimmetrico che in quello simmetrico) e per l'orientamento assoluto. Problemi di calcolo sono invece presenti nella triangolazione aerea, sia a modelli indipendenti che a stelle proiettive, dove è necessario fare ricorso a metodi diretti per matrici sparse, preceduti da opportuni algoritmi di riordino e/o dissezione dei grafi corrispondenti alle suddette matrici. Resta da osservare, come anche i piccoli problemi esposti, appena sopra, diventino computazionalmente complessi, quando si operi con il metodo della minima mediana dei quadrati degli scarti – residui (ovvero del minimo mav dei moduli degli scarti – residui), dove la soluzione richiede di eseguire in successione tanti sistemi, quanti sono determinati dal binomio di Newton fra il numero di osservazioni o equazioni ed il numero di incognite o parametri.

Infine di nuovo ad aspetti statistici, propriamente detti, è doveroso sottolineare l'importanza della validazione preliminare dei dati (misure, altre osservazioni, dati ausiliari), la necessità di controllare l'affidabilità dello schema di misura ed il buon condizionamento dei parametri adottati, l'importanza di governare tutti i passaggi non – lineari del modello funzionale (con il problema, non secondario, di ricercare i valori approssimati delle incognite, ove questi non siano già disponibili o di facile determinazione), come pure del modello stocastico (in particolare, fra osservazioni diverse fra loro: coordinate immagine, parametri di calibrazione, punti di appoggio, grandezze inerenti il campo della gravità e quello della rifrazione, ecc.), e della norma (nel caso di impiego di procedure robuste), l'utilità di valutare tutti i risultati ottenuti mediante opportuni test statistici (semplici o multipli, della normalità o non – parametrici, diretti o sequenziali).

1.8 Effetto della rifrazione atmosferica sulle prese – Polinomi di autocalibrazione

La correzione Δs , dovuta alla rifrazione atmosferica, da apportare al segmento misurato $s^{\circ\circ}$:

$$s^{\circ\circ} = s^{\circ} + \Delta s$$

permette di ottenere il segmento geometricamente corretto s° tra il punto principale e il punto immagine.

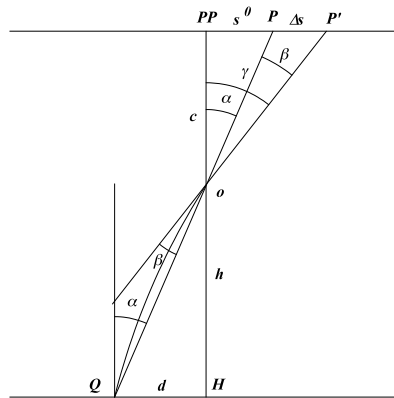


Figura 1.4 – Effetto della rifrazione atmosferica.

Infatti con riferimento alla figura 1.4, se si considera il principio di collinearità, partendo dal punto P' , si otterrebbe un punto Q' diverso da Q : ciò significa che questo principio, così come considerato finora, risulterebbe falso. Per il calcolo della correzione si può usare la formula comunemente impiegata nella livellazione trigonometrica:

$$\beta = \frac{K}{2R} d$$

dove K è il coefficiente di rifrazione atmosferica ed R il raggio di curvatura terrestre. Come noto, alle latitudini temperate, in generale, esso varia tra 0.13 e 0.15. In base alla similitudine dei triangoli, si può scrivere la proporzione:

$$d : s^\circ = h : c$$

da cui si ricava:

$$d = \frac{s^\circ h}{c} \quad \text{ovvero:} \quad \beta = \frac{K}{2R} \frac{s^\circ h}{c}$$

D'altra parte l'angolo: $\beta = \gamma - \alpha$, è la differenza tra gli angoli α e γ , sotto definiti:

$$\tan \gamma = \frac{s^\circ}{c} \quad \text{e} \quad \tan \alpha = \frac{s^\circ}{c} \quad \tan \beta = \tan(\gamma - \alpha) = \frac{\tan \gamma - \tan \alpha}{1 + \tan \gamma \tan \alpha}$$

dove l'angolo β è un angolo molto piccolo, per cui è possibile approssimare la sua tangente all'angolo stesso. Allora effettuate tutte le sostituzioni si ottiene:

$$\tan \beta (1 + \tan \gamma \tan \alpha) = \tan \gamma - \tan \alpha$$

$$\frac{K}{2R} (s^{\circ\circ} - \Delta s) \frac{h}{c} \left(1 + \frac{s^{\circ\circ}}{c} \frac{s^{\circ\circ} - \Delta s}{c} \right) = \frac{s^{\circ\circ}}{c} - \frac{s^{\circ\circ} - \Delta s}{c}$$

$$\frac{Kh}{2R} \left(s^{\circ\circ} + \frac{s^{\circ\circ 3}}{c^2} - \frac{2s^{\circ\circ 2}}{c^2} \Delta s - \Delta s + \frac{s^{\circ\circ} \Delta s^2}{c^2} \right) = \Delta s$$

dove l'ultimo termine dentro la parentesi è un infinitesimo di ordine superiore, pertanto trascurabile. Dopodiché raccogliendo opportunamente, si ha:

$$\Delta s \left[1 + \left(1 + \frac{2s^{\circ\circ 2}}{c^2} \right) \frac{K}{2R} h \right] = \frac{K}{2R} h s^{\circ\circ} \left(1 + \frac{s^{\circ\circ 2}}{c^2} \right)$$

Il termine $s^{\circ\circ 2}/c^2$ può avere valore massimo unitario e, attribuendo valori indicativi approssimati, si ottiene:

$$\frac{3Kh}{2R} \cong \frac{3 \cdot 0.13}{2 \cdot 6378} h \cong 0.03 \frac{h}{1000}$$

dove h è l'altezza di volo o dell'orbita, oppure la profondità di campo, misurata in *km*. Come evidente, anche questo numero è piccolissimo, pertanto trascurabile. Di conseguenza l'espressione della correzione dovuta alla rifrazione atmosferica, risulta:

$$\Delta s = \frac{K}{2R} h s^{\circ\circ} \left(1 + \frac{s^{\circ\circ 2}}{c^2} \right)$$

e la legge di propagazione degli errori, supposti indipendenti, ne fornisce la varianza e, a riguardo, occorre precisare che, se l'immagine fosse fortemente inclinata, il calcolo della correzione dovrebbe essere effettuato su un'immagine idealmente orizzontale.

$$\sigma_{\Delta s}^2 = \frac{K^2}{4R^2} s^{\circ\circ 2} \left(1 + \frac{s^{\circ\circ 2}}{c^2} \right) \sigma_h^2 + \frac{K^2}{4R^2} h^2 \left(1 + \frac{3s^{\circ\circ 2}}{c^2} \right) \sigma_s^2$$

La rifrazione atmosferica standard non è tuttavia l'unica causa di errore che ricorre nelle operazioni fotogrammetriche. Infatti bisogna ricordare che esistono errori dovuti alla rifrazione atmosferica anomala, non corretti con la formula precedente, ed altri dovuti alle strumentazioni usate. Alcuni di essi sono causati dal sensore che, mentre nelle considerazioni geometriche è ritenuto puntuale, in realtà è costituito da una lente larga e spessa, per poter al meglio, ma non sempre a sufficienza, correggere l'aberrazione cromatica e gli effetti di distorsione radiale e tangenziale.

Un altro problema è costituito dal fatto che l'immagine può essere raccolta su un supporto analogico o digitale. Nel primo caso, esso è generalmente una pellicola di acetato e può subire deformazioni, per azione

della molla di trazione della pellicola di acetato e nelle fasi di sviluppo e stampa. Nel secondo caso, l'immagine è una matrice di toni di grigio; tuttavia la sua memorizzazione richiede comunque un supporto analogico (elettronico) che rimanda, a sua volta, ad operazioni di calibrazione. Si noti inoltre, come anche la conversione analogico – digitale, operata mediante digitalizzazione fotogrammetrica ad uno scanner, necessita della conoscenza dei parametri di calibrazione dello stesso.

Infine bisogna considerare che il punto principale può non essere in perfetta coincidenza con l'origine delle coordinate dell'immagine ed anche la lunghezza focale effettiva può non corrispondere esattamente al valore della calibrazione del sensore. Si badi poi che questi errori di taratura, propriamente detti, sono ben più importanti dei precedenti perché, in generale, di ampiezza comparabile con gli errori accidentali di misura.

Su tutti questi errori, che si spera rimangano piccoli, si interviene con modelli deterministici cosiddetti neri, cioè con termini correttivi dei parametri di ORIENTAMENTO INTERNO, per sanare alla cieca i guasti presenti. Infatti quando le leggi sono conosciute senza dubbio, ed occorre solo stimarne i coefficienti, si adottano modelli cosiddetti grigi; invece se i dubbi sussistono anche sulle leggi impiegate, cosicché queste si devono pressoché inventare, si è in presenza di modelli cosiddetti neri. Allora se si misurano le coordinate immagine (x^{oo}, y^{oo}) , di un qualsiasi punto, invece di quelle geometricamente corrette (x^o, y^o) , le equazioni di collinearità diventano:

$$x^{oo} = x^o + P(x^{oo}, y^{oo}) = -c \frac{\hat{r}_{11}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{12}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{13}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}{\hat{r}_{31}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{32}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{33}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)} + P(x^{oo}, y^{oo})$$

$$y^{oo} = y^o + Q(x^{oo}, y^{oo}) = -c \frac{\hat{r}_{21}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{22}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{23}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)}{\hat{r}_{31}(\hat{X} - \hat{X}_0) + \hat{r}_{32}(\hat{Y} - \hat{Y}_0) + \hat{r}_{33}(\hat{Z} - \hat{Z}_0)} + Q(x^{oo}, y^{oo})$$

dove P e Q sono due POLINOMI DI AUTOCALIBRAZIONE, in funzione delle coordinate immagine del punto e possono avere forma del tipo:

$$P = \hat{a}_{00} + \hat{a}_{10}x^{oo} + \hat{a}_{01}y^{oo} + \hat{a}_{20}x^{oo2} + \hat{a}_{11}x^{oo}y^{oo} + \hat{a}_{02}y^{oo2} +$$

$$+ \hat{a}_{30}x^{oo3} + \hat{a}_{21}x^{oo2}y^{oo} + \hat{a}_{12}x^{oo}y^{oo2} + \hat{a}_{03}y^{oo3} + \dots$$

$$Q = \hat{b}_{00} + \hat{b}_{10}x^{oo} + \hat{b}_{01}y^{oo} + \hat{b}_{20}x^{oo2} + \hat{b}_{11}x^{oo}y^{oo} + \hat{b}_{02}y^{oo2} +$$

$$+ \hat{b}_{30}x^{oo3} + \hat{b}_{21}x^{oo2}y^{oo} + \hat{b}_{12}x^{oo}y^{oo2} + \hat{b}_{03}y^{oo3} + \dots$$

I coefficienti (a_{00}, b_{00}) correggono il punto principale (cioè spostano l'origine delle coordinate); i coefficienti $(a_{01}, a_{10}, b_{01}, b_{10})$, correggono la lunghezza focale (necessitando di un oggetto 3D), ruotano (in tal caso, la rotazione trovata coincide con la rotazione k dell'orientamento esterno) e torcono l'immagine (cioè definiscono le scale delle coordinate ed effettuano la rotazione e la torsione dell'immagine). Inoltre se:

$$\hat{a}_{01} = -\hat{b}_{10} \quad \text{e:} \quad \hat{a}_{10} = \hat{b}_{01}$$

si opera con una trasformazione conforme o di similitudine (allora la scala delle coordinate è unica e la torsione è nulla), in caso contrario, con una trasformazione affine generale (dove si hanno due scale distinte e anche l'angolo di rotazione non è lo stesso per tutte le direzioni; di conseguenza, a trasformazione avvenuta, non si ha la perpendicolarità fra rette in origine perpendicolari). Gli altri coefficienti permettono correzioni più sofisticate e complesse, corrispondenti a deformazioni non – lineari. La regressione multipla e, se del caso, l'analisi di varianza e le stime di covarianza permettono di procedere opportunamente alla scelta di un adeguato modello nero, così come la cluster analysis e le procedure robuste consentono la validazione preliminare dei dati e, se necessario, il loro compattamento.

Se si inseriscono questi polinomi nella compensazione di una triangolazione aerea (presentata nel prosieguo, in relazione alla ricostruzione dell'oggetto), si possono avere difetti di rango, oppure comunque malcondizionamento. Infatti addizionando i polinomi di autocalibrazione al primo membro delle equazioni di collinearità, si osservano comportamenti differenti corrispondentemente ai diversi coefficienti.

- I coefficienti \hat{a}_{00} e \hat{b}_{00} rappresentano il punto principale e non producono difetto di rango.
- I coefficienti \hat{a}_{10} e \hat{b}_{01} rappresentano la focale, oppure una variazione di scala e producono difetto di rango. Nel caso non fossero uguali, per una deformazione del supporto, cosa che determina una variazione di scala fra le coordinate immagine, si avrebbe un'ulteriore difetto di rango. Per sanare il difetto di rango, occorre conoscere una tangente di direzione, oppure due tangenti di direzione sugli assi X e Y , a seconda del tipo di difetto di rango. Queste tangenti si determinano come quoziente di distanze, (misurate direttamente) perpendicolari fra loro, per cui si ha:

$$\tan \alpha = \frac{s_x^o}{\hat{a}_{10}} = \frac{r_x^o}{h^o} \quad \text{e} \quad \tan \beta = \frac{s_y^o}{\hat{b}_{01}} = \frac{r_y^o}{h^o}$$

Inoltre, poiché in fotogrammetria aerea è estremamente scomodo misurare direttamente h^o , ma sfruttando la profondità di campo (ovvero la capacità di avere immagini nitide di oggetti posti a distanza iperfocale), è possibile misurare direttamente Δh^o , allora l'espressione delle tangenti diventa:

$$\tan \alpha = \frac{s_x^o}{\hat{a}_{10}} = \frac{r_x^o}{h^o} = \frac{(r_{x_2}^o - r_{x_1}^o)}{\Delta h^o} = \frac{d_{x_{21}}^o}{\Delta h^o} \quad \text{e} \quad \tan \beta = \frac{s_y^o}{\hat{b}_{01}} = \frac{r_y^o}{h^o} = \frac{(r_{y_2}^o - r_{y_1}^o)}{\Delta h^o} = \frac{d_{y_{21}}^o}{\Delta h^o}$$

- I coefficienti \hat{a}_{01} e \hat{b}_{10} rappresentano una rotazione (indistinguibile dall'angolo k dell'orientamento esterno dell'immagine) ed una torsione, provocata dai effetti distorcenti (piccoli nella pratica fotogrammetrica), e producono difetto di rango, oppure comunque malcondizionamento. In generale, essi possono essere tralasciati; di conseguenza, il difetto di rango ed il malcondizionamento non devono essere sanati.
- I coefficienti dei termini di grado superiore al primo, tanto per i termini puri, quanto per i termini misti, sono parametri corrispondenti a deformazioni non lineari e producono sempre difetto di rango. Per sanare ciascuna di queste (come, del resto, i difetti di rango dovuti ai coefficienti \hat{a}_{01} e \hat{b}_{10} , se

presenti), si devono conoscere tante tangenti di direzione sugli assi X e Y e sulle bisettrici dei quadranti, quanti sono i coefficienti non – lineari del polinomio.

La pratica fotogrammetrica suggerisce di usare un numero parecchio sovrabbondante di punti di appoggio. In assenza di questa sovrabbondanza, un'alternativa reale a misure dirette sull'oggetto è costituita dall'impiego di un campo di punti, cosiddetto di taratura.

1.9 La formazione del modello – Ricerca numerica esaustiva dei valori approssimati

La condizione di complanarità per l'orientamento relativo non può essere espressa in forma lineare tramite sostituzione di variabili. Nel caso generale, quando le prese non sono quasi nadirali, né quasi frontali, è necessario poter acquisire informazioni a priori sui valori approssimati dei parametri. In molti casi, queste informazioni sono disponibili già all'atto dell'acquisizione delle prese, mentre in altri casi devono essere ricercate numericamente.

La ricerca numerica esaustiva dei valori approssimati dei parametri è possibile per l'orientamento relativo simmetrico, in quanto è chiuso il gruppo delle rotazioni $(\varphi_1, k_1, \omega_2, \varphi_2, k_2)$. Tutto ciò invece non è possibile per l'orientamento relativo asimmetrico. Infatti pur essendo chiuso il gruppo delle rotazioni $(\omega_2, \varphi_2, k_2)$, non è chiuso il gruppo delle traslazioni (b_y, b_z) . Le relazioni per la trasformazione fra i parametri dell'orientamento relativo simmetrico e quelli dell'orientamento relativo asimmetrico, già esposta in paragrafo precedenza, permette comunque di ottenere i valori approssimati dei parametri per l'orientamento relativo asimmetrico, dati i valori approssimati dei parametri per l'orientamento relativo simmetrico.

Come noto, la convergenza della linearizzazione delle funzioni trigonometriche degli angoli è accettabile fino a valori prossimi a $\pi/4$. Pertanto una scansione del gruppo delle rotazioni con un passo pari a $\pi/4$ permette di esplorare tutte la regione ammissibile dello spazio dei parametri (si veda, a riguardo, la seguente tabella).

	φ_1	k_1	ω_2	φ_2	k_2
$-\pi/2$	○			○	
$-\pi/4$	•			•	
0	•	•	•	•	•
$\pi/4$	•	•	•	•	•
$\pi/2$	○	•	•	○	•
$3\pi/4$		•	•		•
π		•	•		•
$5\pi/4$		•	•		•
$3\pi/2$		•	•		•
$7\pi/4$		•	•		•

○ $k_1=0$ se $\varphi_1=\pm\pi/2$ e/o $k_2=0$ se $\varphi_2=\pm\pi/2$

Per ciascuna delle 12800 sequenze che si ottengono combinando, in tutti i modi possibili, i casi ammessi dalla tabella sopra riportata, si risolve un sistema lineare, assumendo i dati di ogni sequenza quali valori approssimati dei parametri per l'orientamento relativo simmetrico. Nella pratica, il numero di sequenze è ancora ulteriormente aumentato di poco, così da poter trattare separatamente i poli dalle regioni circumpolari. La soluzione di ciascun sistema lineare fornisce le stime dei parametri per l'orientamento relativo simmetrico. La maggior parte di queste soluzioni converge a valori ammissibili. La soluzione trovata è registrata nell'insieme delle soluzioni accettabili solo se sigma zero è opportunamente piccolo. Un semplice confronto fra l'insieme delle soluzioni accettabili permette di ridurre le stesse alle sole soluzioni accettabili distinte fra loro.

In generale, dette soluzioni sono in numero di quattro. Due soluzioni differiscono dalle altre due, per lo più, per un ribaltamento attorno all'asse x ($\omega_2 = \pi$). Inoltre una rotazione della seconda immagine attorno all'asse z ($k_2 = \pi$) caratterizza la differenza all'interno di ciascuna coppia di soluzioni. Essendo i quattro casi ben distinti fra loro è facile avere informazioni a priori sull'assetto dell'immagine nel caso specifico. Di conseguenza, è possibile selezionare il caso prescelto, nell'insieme delle quattro soluzioni trovate, e calcolare le stime dei parametri per l'orientamento relativo simmetrico atteso.

1.10 Orientamento relativo – caso semplificato

La condizione di complanarità per l'orientamento relativo (asimmetrico) può vantaggiosamente essere semplificata, nel caso di prese quasi nadirali o quasi frontali. Si consideri ancora la matrice di rotazione, limitandosi al caso delle prese quasi nadirali, oppure quasi frontali, dove le rotazioni sono piccole (ovvero gli angoli minori di 5°). Date le condizioni di linearizzazione, dove si pongono i coseni degli angoli uguali ad uno ed i seni degli stessi uguali all'arco sotteso, la matrice di rotazione può essere scritta in forma semplificata:

$$\tilde{R} = \begin{vmatrix} 1 & k + \omega\varphi & \omega k - \varphi \\ -k & 1 - \omega\varphi k & \omega - \varphi k \\ \varphi & -\omega & 1 \end{vmatrix}$$

e trascurando nuovamente i termini di ordine superiore al primo:

$$\tilde{R} = \begin{vmatrix} 1 & k & -\varphi \\ -k & 1 & \omega \\ \varphi & -\omega & 1 \end{vmatrix}$$

Allora la condizione di complanarità per l'orientamento relativo asimmetrico, utilizzando la matrice di rotazione approssimata \tilde{R} , diviene:

$$\bar{b}_x [y_1 (-\varphi_2 x_2 + \omega_2 y_2 - c) + c(k_2 x_2 + y_2 + \omega_2 c)] + \\ -b_y [x_1 (-\varphi_2 x_2 + \omega_2 y_2 - c) + c(x_2 - k_2 y_2 - \varphi_2 c)] +$$

$$+ b_z [x_1 (k_2 x_2 + y_2 + \omega_2 c) - y_1 (x_2 - k_2 y_2 - \varphi_2 c)] = 0$$

Trascurando ancora tutti i termini con elementi di secondo grado, dividendo per $b c$ e raccogliendo i termini in $(\hat{b}_y, \hat{b}_z, \omega_2, \varphi_2, k_2)$, risulta:

$$v^\circ = y_2^\circ - y_1^\circ = \frac{x_2 c - x_1 c}{\bar{b}_x c} \hat{b}_y + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{\bar{b}_x c} \hat{b}_z - c \left(1 + \frac{y_1 y_2}{c^2} \right) \hat{\omega}_2 + \frac{x_2 y_1}{c} \hat{\varphi}_2 - x_2 \hat{k}_2$$

Infine sfruttando nuovamente il caso di prese quasi nadirali, oppure quasi frontali, cosa che presuppone un valore piccolo:

$$\Delta y^\circ = y_2^\circ - y_1^\circ$$

si ottiene:

$$v^\circ = \Delta y^\circ = \frac{x_2 - x_1}{\bar{b}_x c} \hat{b}_y + \frac{x_2 - x_1}{\bar{b}_x c} \bar{y} \hat{b}_z - c \left(1 + \frac{\bar{y}^2}{c^2} \right) \hat{\omega}_2 + \frac{\bar{x}_2 y}{c} \hat{\varphi}_2 - x_2 \hat{k}_2$$

dove i due valori y_1 e y_2 possono essere confusi con il loro valor medio \bar{y} . Il valore osservato: $v^\circ = \Delta y^\circ$ è detto PARALLASSE D'ALTEZZA OSSERVATA prima dell'orientamento relativo, mentre la stima del valore residuo \hat{v} è chiamata PARALLASSE D'ALTEZZA RESIDUA dopo l'orientamento relativo.

1.11 Orientamento relativo – caso generale

Riprendendo la condizione di complanarità per l'orientamento relativo asimmetrico, si vuole utilizzare questa per la formazione di un modello funzionale più generale. Infatti mentre nel caso semplificato si è ottenuta una sola quantità osservabile Δy° , chiamata parallasse d'altezza, e le coordinate immagine x e y sono considerate numeri, in questo caso la parallasse d'altezza non è ben definita. Pertanto dato che gli assi dei due sensori (non quasi nadirali, oppure non quasi frontali) non coincidono approssimativamente con quelli del modello, occorre definire questi ultimi ex novo:

- l'asse x con una direzione approssimativamente coincidente con quella della base del modello;
- l'asse y (perpendicolare alla base) il più possibile aderente all'oggetto;
- l'asse z (perpendicolare alla base) il meno possibile aderente all'oggetto.

In base a queste considerazioni, le quantità osservabili sono quattro, ossia le coordinate immagine (x_1, x_2, y_1, y_2) . Per ogni punto osservato si possono allora scrivere quattro equazioni di osservazione (diretta):

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 - x_1^o &= \hat{u}_1 \\ \hat{y}_1 - y_1^o &= \hat{v}_1 \\ \hat{x}_2 - x_2^o &= \hat{u}_2 \\ \hat{y}_2 - y_2^o &= \hat{v}_2\end{aligned}$$

dove le quantità osservate, a meno di errori di misura o di modello, dovranno coincidere con le quantità stimate. A queste equazioni di osservazione si aggiunge, sempre per ogni punto, un'equazione di vincolo costituita dalla condizione di complanarità per l'orientamento relativo asimmetrico:

$$\begin{vmatrix} \bar{b}_x & \hat{b}_y & \hat{b}_z \\ \hat{\xi}_1 & \hat{\eta}_1 & \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 & \hat{\eta}_2 & \hat{\xi}_2 \end{vmatrix} = 0$$

dove si è posto:

$$\begin{vmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\eta}_1 \\ \hat{\xi}_1 \end{vmatrix} = R_1^T \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1, \hat{\varphi}_1, \hat{k}_1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ -c \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \hat{\xi}_2 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\xi}_2 \end{vmatrix} = R_2^T \begin{pmatrix} \hat{\omega}_2, \hat{\varphi}_2, \hat{k}_2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ -c \end{vmatrix}$$

La linearizzazione in serie di Taylor è la stessa già eseguita, nei paragrafi precedenti, cui vanno aggiunte le derivate parziali rispetto a x_1, y_1 e x_2, y_2 , così da collegare l'equazione di vincolo alle equazioni di osservazione. La soluzione del problema ai minimi quadrati vincolato può poi essere vantaggiosamente sostituita dalla soluzione di un problema ai minimi quadrati con pseudo – osservazioni sovrappesate.

Coordinate modello

Nel caso generale, la formazione del modello richiede una diversa strategia per il calcolo delle coordinate modello. Infatti la parallasse deve indicare la minima distanza nello spazio e non è, in generale, diretta come l'asse z , in fotogrammetria area, oppure come l'asse x , in fotogrammetria terrestre. Pertanto il vettore parallasse spaziale può essere espresso componendo tre vettori, ovvero i versori \mathbf{s} e \mathbf{t} definiti appena oltre (essendo λ e μ due opportuni fattori di scala), e la base \mathbf{b} (Fig. 1.5):

$$\mathbf{p} = \lambda \mathbf{s} - (\mathbf{b} + \mu \mathbf{t})$$

essendo:

$$\mathbf{s} = -\frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} \quad \text{e:} \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{R}_1^T \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -c \end{vmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{R}_2^T \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -c \end{vmatrix}$$

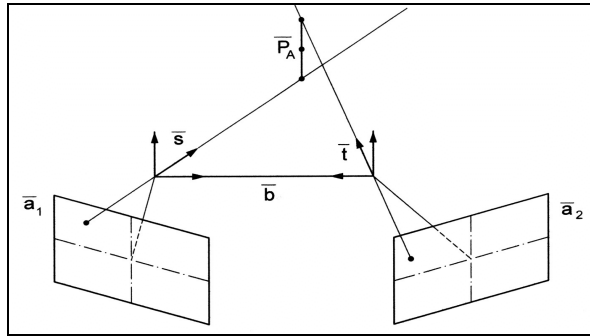


Fig. 1.5 – Parallasse spaziale e sue componenti.

Al fine di minimizzare la parallasse spaziale, occorre calcolare ed annullare le derivate del funzionale quadratico rispetto a λ e μ , ottenendo i moltiplicatori di Lagrange ed il valore della parallasse spaziale:

$$|\mathbf{p}|^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \lambda^2 + b^2 + \mu^2 - 2\lambda\mathbf{s}\mathbf{b} - 2\lambda\mu\mathbf{s}\mathbf{t} + 2\lambda\mu\mathbf{b}\mathbf{t}$$

$$\frac{\partial |\mathbf{p}|^2}{\partial \lambda} = 2\lambda - 2\mathbf{s}\mathbf{b} - 2\mu\mathbf{s}\mathbf{t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial |\mathbf{p}|^2}{\partial \mu} = 2\mu - 2\lambda\mathbf{s}\mathbf{t} + 2\mathbf{b}\mathbf{t} = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{t})}{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t})^2} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda} = \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{t})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{t})}{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t})^2}$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\lambda}\mathbf{s} - (\mathbf{b} + \hat{\mu}\mathbf{t})$$

Dopodiché le coordinate modello sono ottenute sommando o sottraendo metà della parallasse rispettivamente alla prima o alla seconda immagine:

$$\mathbf{A}_1 = \hat{\lambda}\mathbf{s} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_2 = \hat{\mu}\mathbf{t} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}$$

Procedura a tre immagini

La ricerca esaustiva dei valori approssimati dei parametri di orientamento relativo, in generale, richiede di scegliere fra quattro soluzioni, anche se ben diverse fra loro. Questa necessità, talvolta fastidiosa per la necessità di dover scegliere una soluzione accettabile fra quattro soluzioni possibili, viene meno quando si opera con tre immagini.

- ❑ Infatti formando due modelli fra tre immagini (prese ovviamente due alla volta), in generale, si hanno quattro soluzioni ammissibili per ciascun modello.
- ❑ Successivamente concatenando fra loro questi due modelli, si ottengono sedici blocchi di cui solo due speculari fra loro, geometricamente accettabili.

- Infine l'orientamento assoluto di questi due blocchi permette di scegliere la configurazione compatibile con le coordinate oggetto e, ripercorrendo all'indietro l'intera procedura, stabilisce le uniche scelte corrette fra le tante ipotesi possibili.

	2A	2B	2C	2D
1A	1A – 2A	1A – 2B	1A – 2C	1A – 2 D
1B	1B – 2A	1B – 2B	1B – 2C	1B – 2D
1C	1C – 2A	1C – 2B	1C – 2C	1C – 2D
1D	1D – 2A	1D – 2B	1D – 2C	1D – 2D

Concatenamento dei modelli ed orientamento assoluto

L'algoritmo capace di effettuare tanto il concatenamento dei modelli, quanto l'orientamento assoluto dei blocchi fotogrammetrici, facendo ovviamente uso anche dei punti di appoggio, consiste nel calcolo di una trasformazione S nello spazio 3D. Questa trasformazione può essere facilmente ricondotta a forma lineare, come sarà mostrato più oltre in questo stesso lavoro, con una procedura che, pur falsificando il modello stocastico dei dati, può essere considerata sostanzialmente esatta, al pari di tante altre procedure spesso adottate per l'analisi dei dati.

A riguardo, giova ricordare come le stime ai minimi quadrati, al pari di quelle calcolate facendo uso di procedure robuste, sono un'indicazione puntuale di un intorno più vasto nel quale la soluzione è ugualmente accettabile. Tutto ciò non solo implica tollerare una certa determinata approssimazione, inevitabile nello svolgimento dei calcoli, ma anche mette bene in luce come la statistica, fornendo le stime di valori centrali e delle loro dispersioni e dipendenze, in realtà indichi intervalli di probabilità dove trovare valori dei dati osservati, direttamente od indirettamente, compatibili con le relazioni fornite dai modelli adottati.

1.11.1 La proposta di Inghilleri

Inghilleri ha proposto di stimare, nell'orientamento relativo, anche una variazione di scala. Infatti misurando alcune distanze sull'oggetto, è possibile stimare anche questo termine, ovvero lasciare incognita anche la componente b_x della base.

In questo caso, il sistema di equazioni è dato dall'unione delle equazioni di osservazione alle distanze e delle tre equazioni di vincolo (o di pseudo – osservazioni sovrappesate), riferite alle coordinate del modello per ogni punto estremo di una distanza misurata, con il sistema di equazioni di osservazione (diretta) e di vincolo (o di pseudo – osservazioni sovrappesate), relativo al caso generale, illustrato nel paragrafo precedente.

1.12 Cilindro critico

Dati tre punti noti, è possibile determinare, per intersezione inversa, un nuovo punto incognito, misurando gli angoli α e β , facendo stazione nel suddetto punto. Questo è ottenuto scrivendo le equazioni di due circonferenze, passanti per due punti noti e quello incognito, e facendone la intersezione. Tuttavia se tutti i quattro punti si trovano su un'unica circonferenza, si è in una situazione critica (ovvero si determina una configurazione degenera) ed il punto incognito è indeterminabile (Fig. 1.6 caso a e caso b)

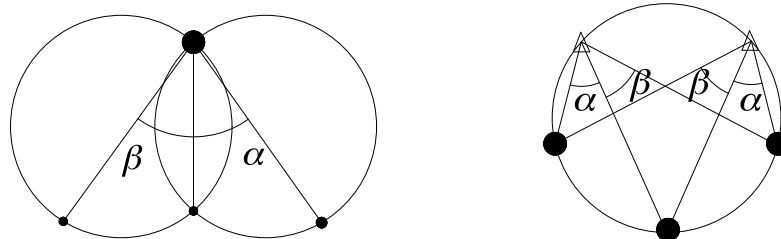


Fig. 1.6 – Intersezione inversa (caso a) e sua degenerazione (caso b).

Questa condizione sfavorevole può presentarsi anche in fotogrammetria ¹. Si consideri un oggetto di forma cilindrica (ad esempio, una valle ad U) e si supponga la base di presa sulla generatrice del cilindro stesso. Allora è necessario riconfigurare il problema, ad esempio più in alto della circonferenza involuppo, con una conseguente diminuzione della scala, oppure più in basso, con un ovvio restringimento dell'oggetto ripreso. Nel seguito si affronta lo studio analitico della configurazione detta CILINDRO CRITICO. Si consideri, a proposito, l'equazione dell'orientamento relativo asimmetrico, nel caso semplificato:

$$\frac{\Delta x}{\bar{b}_x} \hat{b}_y + \bar{y} \frac{\Delta x}{\bar{b}_x c} \hat{b}_z - c \left(1 + \frac{y}{c^2} \right) \hat{\omega}_2 + \frac{x_2 y}{c} \hat{\varphi}_2 - x_2 \hat{k}_2 - \Delta y^\circ = 0$$

ovvero approssimativamente alla scala media dell'immagine, dove sia ha: $\Delta x / \bar{b}_x \cong 1$

$$\hat{b}_y + \frac{\bar{y}}{c} \hat{b}_z - c \left(1 + \frac{\bar{y}^2}{c^2} \right) \hat{\omega}_2 + \frac{x_2 \bar{y}}{c} \hat{\varphi}_2 - x_2 \hat{k}_2 - \Delta y^\circ = 0$$

Passando alle coordinate modello (Fig. 1.7) e ricordando che:

$$\frac{x_1}{c} = \frac{X}{h} \qquad \frac{x_2}{c} = \frac{b-X}{h}$$

$$\frac{\bar{y}}{c} = \frac{Y}{h}$$

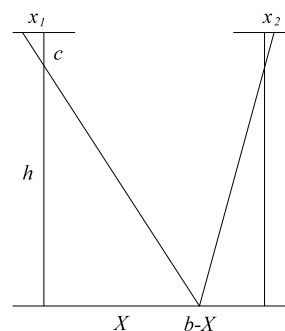


Fig. 1.7 – Coordinate modello.

si ottiene:

¹ La trattazione dell'argomento, esposto in questo paragrafo, prende avvio da un'idea del Prof. Giovanni Battista Benciolini, formalizzata in un rapporto interno; a lui va il ringraziamento dell'autore.

$$\hat{b}_y + \frac{Y}{h} \hat{b}_z - h \left(1 + \frac{Y^2}{h^2} \right) \hat{\omega}_2 + \frac{(b-X)Y}{h} \hat{\varphi}_2 - (b-X) \hat{k}_2 - \Delta Y^\circ = 0$$

Nel caso di configurazione cilindrica (Fig. 1.8), posto:

$$h = R + \sqrt{R^2 - Y^2}$$

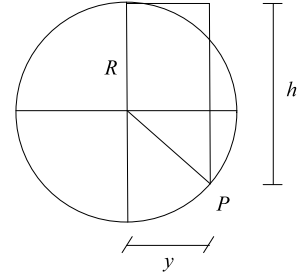


Fig. 1.8 – Sezione di cilindro.

il coefficiente dell'incognita ω_2 risulta:

$$\frac{h^2 + Y^2}{h^2} = \frac{R^2 + R^2 - Y^2 + 2R\sqrt{R^2 - Y^2} + Y^2}{h} = \frac{2R(R + \sqrt{R^2 - Y^2})}{h} = 2R$$

Pertanto l'equazione dell'orientamento relativo asimmetrico, nel caso semplificato, ha espressione:

$$\hat{b}_y + \frac{Y}{h} \hat{b}_z - 2R\hat{\omega}_2 + \frac{(b-X)Y}{h} \hat{\varphi}_2 - (b-X) \hat{k}_2 - \Delta Y^\circ = 0.$$

Introducendo due nuove incognite:

$$\hat{\psi}_1 = \frac{1}{2} (\hat{b}_y - 2R\hat{\omega}_2) \quad \text{e} \quad \hat{\psi}_2 = \frac{1}{2} (\hat{b}_y + 2R\hat{\omega}_2)$$

si ricava:

$$\hat{b}_y = \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_2 = \frac{1}{2R} (\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1)$$

Di conseguenza, l'equazione precedente diventa:

$$(\hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_1) - 2R \frac{1}{2R} (\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1) + \frac{Y}{h} \hat{b}_z + \frac{(b-X)Y}{h} \hat{\varphi}_2 - (b-X) \hat{k}_2 - \Delta Y^\circ = 0$$

$$2\hat{\psi}_1 + 0\hat{\psi}_2 + \frac{Y}{h} \hat{b}_z + \frac{(b-X)Y}{h} \hat{\varphi}_2 - (b-X) \hat{k}_2 - \Delta Y^\circ = 0$$

Questo sistema di equazioni alle parallassi d'altezza è risolvibile soltanto se l'incognita $\hat{\psi}_2$ è cancellata dal sistema. Tuttavia nell'analisi del problema posto dalla configurazione cilindrica, bisogna tenere conto anche della rugosità dell'oggetto che determina una differenziazione della grandezza h :

$$h = h_0 - \delta = R + \sqrt{R^2 - Y^2} - \delta$$

dove δ è la misura dello scostamento dal cilindro.

Calcolando nuovamente il coefficiente dell'incognita $\hat{\omega}_2$ e trascurando, perché piccolo rispetto ad h , il termine δ^2 , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{h^2 + Y^2}{h} &= \frac{(R - \delta)^2 + R^2 - Y^2 + 2(R - \delta)\sqrt{R^2 - Y^2} + Y^2}{h} = \\ &= \frac{R^2 - 2R\delta + R^2 - Y^2 + 2(R - \delta)\sqrt{R^2 - Y^2} + Y^2}{h} = \\ &= \frac{2(R - \delta)(R + \sqrt{R^2 - Y^2} - \delta + \delta)}{h} = 2(R - \delta) + 2\frac{R\delta}{h} = 2R \left[1 - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h} \right) \delta \right] \end{aligned}$$

Allora l'equazione sopracitata ha espressione:

$$\hat{b}_y + \frac{Y}{h} \hat{b}_z - 2R \left[1 - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h} \right) \delta \right] \hat{\omega}_2 + \frac{(b - X)Y}{h} \hat{\varphi}_2 - (b - X) \hat{\kappa}_2 - \Delta Y^\circ = 0$$

e, se si introducono ancora le due nuove incognite ψ_1 e ψ_2 , si ottiene:

$$(\hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_1) - 2R \frac{1}{2R} \left[1 - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h} \right) \delta \right] (\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1) + \frac{Y}{h} \hat{b}_z + \frac{(b - X)Y}{h} \hat{\varphi}_2 - (b - X) \hat{\kappa}_2 - \Delta Y^\circ = 0$$

$$2\hat{\psi}_1 + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h} \right) \delta \hat{\psi}_2 + \frac{Y}{h} \hat{b}_z + \frac{(b - X)Y}{h} \hat{\varphi}_2 - (b - X) \hat{\kappa}_2 - \Delta Y^\circ = 0$$

A rigore, il coefficiente di $\hat{\psi}_1$ dovrebbe essere:

$$2 + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h} \right) \delta$$

ma il termine contenente δ può essere trascurato, sempre perché relativamente piccolo. Inoltre anche il coefficiente di ψ_2 può essere semplificato:

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h}\right)\delta \cong \frac{\delta}{h}$$

in quanto h è approssimativamente uguale a $2R$. Allora l'equazione dell'orientamento relativo asimmetrico, per il caso semplificato, diventa:

$$2\hat{\psi}_1 + \frac{1}{h}\delta\hat{\psi}_2 + \frac{Y}{h}\hat{b}_z + \frac{(b-X)Y}{h}\hat{\varphi}_2 - (b-X)\hat{k}_2 - \Delta Y^\circ = 0$$

In particolare, scelti i punti nelle sei posizioni canoniche, la matrice dei coefficienti delle equazioni d'osservazione risulta:

ψ_1	ψ_2	b_z	φ_2	k_2
2	δ/h	0	0	$-b$
2	δ/h	0	0	0
2	δ/h	a/h	ab/h	$-b$
2	δ/h	$-a/h$	0	0
2	δ/h	$-a/h$	$-ab/h$	$-b$
2	δ/h	a/h	0	0

Allora dato il sistema normale, avendo disposto le incognite nell'ordine $(\psi_2, \psi_1, k_2, \varphi_2, b_z)$:

ψ_2	ψ_1	k_2	φ_2	b_z
$\frac{1}{h^2} \sum \delta^2$	0	0	0	0
0	$4n$	$-nb$	0	0
0	$-nb$	$\frac{n}{2}b^2$	0	0
0	0	0	$\frac{na^2b^2}{3h^2}$	$\frac{na^2b^2}{3h^2}$
0	0	0	$\frac{na^2b^2}{3h^2}$	$\frac{2na^2}{3h^2}$

la matrice normale può essere partizionata in tre blocchi diagonali principali. Infatti indicata con a la semialtezza del modello e con b la sua larghezza (corrispondente alla base), essendo n il numero di punti ed avendo supposto una distribuzione simmetrica di questi nelle sei posizioni canoniche, i blocchi

extradiagonali sono tutti nulli, con l'ulteriore ipotesi che la rugosità dell'oggetto costituisca una popolazione a media nulla.

Il numero di condizione, calcolato come rapporto fra l'autovalore minimo e l'autovalore massimo della matrice normale, è un indicatore valido del buon condizionamento del sistema normale, ovvero della relativa lontananza dalla configurazione sfavorevole di cilindro critico. L'autovalore minimo ha valore:

$$\frac{n}{h^2} \sigma_\delta^2$$

L'autovalore massimo è il maggiore fra gli autovalori massimi dei due minori:

$$\begin{bmatrix} 4n & -nb \\ -nb & \frac{n}{2}b^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \frac{na^2b^2}{3h^2} & \frac{na^2b^2}{3h^2} \\ \frac{na^2b^2}{3h^2} & \frac{2na^2}{3h^2} \end{bmatrix}$$

facilmente calcolabili, come radici delle rispettive equazioni caratteristiche di secondo grado. Il quoziente, costituito dal numero di condizione:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$$

è compreso tra i valori 0 e 1. Una situazione ideale fornisce il valore 1; tuttavia nella pratica fotogrammetrica si possono accettare valori inferiori, ad esempio, fino a 0.1.

1.13 La ricostruzione dell'oggetto – Una soluzione quasi esatta ²

La relazione di rototraslazione nello spazio con variazione di scala che definisce l'orientamento assoluto di un modello può essere espressa in forma lineare tramite sostituzione di variabili. Si badi tuttavia che, come già detto in precedenza, la procedura capace di trasformare una trasformazione S nello spazio 3D, in forma lineare, falsifica il modello stocastico dei dati, pur potendo essere considerata sostanzialmente esatta, al pari di tante altre procedure spesso adottate per l'analisi dei dati.

Si riprenda allora la relazione dell'orientamento assoluto, ovvero una trasformazione S nello spazio 3D:

$$\begin{bmatrix} u^o \\ v^o \\ w^o \end{bmatrix}_{ij} = \hat{\lambda}_j \hat{R}_j \left(\hat{\Omega}, \hat{\phi}, \hat{K} \right) \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{bmatrix}_j$$

² Corre il dovere di segnalare l'esistenza di soluzioni esatte al problema della ricostruzione dell'oggetto, tramite l'orientamento assoluto del modello, e tra queste, ad es., quella calcolata facendo uso del corpo sghembo dei quaternioni di Hamilton, così come è stata formulata e proposta da Sansò, dove la rotazione è rappresentata a quattro parametri, evitando di incorrere in singolarità, tipiche delle rappresentazioni a tre parametri. Tuttavia una simile trattazione è considerata estranea agli scopi del presente lavoro, in quanto richiede di anteporre, alla sua trattazione, come già detto in precedenza, la sua corrispondente algebra, comunemente non nota e non del tutto elementare.

Moltiplicando entrambi i membri a sinistra per R^T e dividendoli per λ , si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}_i = \frac{1}{\hat{\lambda}_j} \hat{R}_j^T \begin{pmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{pmatrix}_{ij} + \begin{pmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{pmatrix}_j = \hat{\mu}_j \hat{R}_j^T \begin{pmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{pmatrix}_{ij} + \begin{pmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{pmatrix}_j$$

Applicando ad entrambi i membri l'operatore E , si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \hat{\mu}_j \hat{R}_j^T \begin{pmatrix} \bar{u}^\circ \\ \bar{v}^\circ \\ \bar{w}^\circ \end{pmatrix}_{ij} + \begin{pmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{pmatrix}_j$$

Dopodiché sottraendo l'espressione trovata a quella appena precedente, si ricava l'espressione:

$$\begin{pmatrix} \hat{X} - \bar{X} \\ \hat{Y} - \bar{Y} \\ \hat{Z} - \bar{Z} \end{pmatrix}_i = \hat{\mu}_j \hat{R}_j^T \begin{pmatrix} u^\circ - \bar{u}^\circ \\ v^\circ - \bar{v}^\circ \\ w^\circ - \bar{w}^\circ \end{pmatrix}_{ij}$$

nella quale i parametri di traslazione sono stati eliminati. Questi ultimi possono essere calcolati, alla fine del procedimento a seguire, risolvendo rispetto agli stessi l'espressione ricavata applicando l'operatore E :

$$\begin{pmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} - \hat{\mu}_j \hat{R}_j^T \begin{pmatrix} \bar{u}^\circ \\ \bar{v}^\circ \\ \bar{w}^\circ \end{pmatrix}_{ij}$$

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri per il loro vettore trasposto, si ottiene un'equazione scalare nella sola incognita $\hat{\mu}_j^2$ (che rappresenta l'inverso del quadrato del fattore di scala $\hat{\lambda}_j$), in quanto $R_j R_j^T = I$, da cui si ha:

$$\begin{pmatrix} (\hat{X} - \bar{X}) & (\hat{Y} - \bar{Y}) & (\hat{Z} - \bar{Z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} - \bar{X} \\ \hat{Y} - \bar{Y} \\ \hat{Z} - \bar{Z} \end{pmatrix}_i = \hat{\mu}_j^2 \begin{pmatrix} (u^\circ - \bar{u}^\circ)^T & (v^\circ - \bar{v}^\circ)^T & (w^\circ - \bar{w}^\circ)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\circ - \bar{u}^\circ \\ v^\circ - \bar{v}^\circ \\ w^\circ - \bar{w}^\circ \end{pmatrix}_{ij}$$

$$\hat{\mu}_j^2 = \sqrt{\frac{\begin{pmatrix} (\hat{X} - \bar{X}) & (\hat{Y} - \bar{Y}) & (\hat{Z} - \bar{Z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} - \bar{X} \\ \hat{Y} - \bar{Y} \\ \hat{Z} - \bar{Z} \end{pmatrix}_i}{\begin{pmatrix} (u^\circ - \bar{u}^\circ)^T & (v^\circ - \bar{v}^\circ)^T & (w^\circ - \bar{w}^\circ)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\circ - \bar{u}^\circ \\ v^\circ - \bar{v}^\circ \\ w^\circ - \bar{w}^\circ \end{pmatrix}_{ij}}}$$

Per semplicità di scrittura, i vettori delle coordinate oggetto e modello, sono ridefinite nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i = \begin{vmatrix} \hat{X} - \bar{X} \\ \hat{Y} - \bar{Y} \\ \hat{Z} - \bar{Z} \end{vmatrix}_i \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{vmatrix}_{ij} = \hat{\mu}_j \begin{vmatrix} u^\circ - \bar{u}^\circ \\ v^\circ - \bar{v}^\circ \\ w^\circ - \bar{w}^\circ \end{vmatrix}_{ij}$$

dando luogo al sistema nelle sole incognite contenute nella matrice di rotazione R_j^T :

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i = \hat{R}_j^T \begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{vmatrix}_{ij}$$

Introducendo la matrice di rotazione (razionale) di Rodriguez, al posto della consueta matrice di rotazione con gli angoli di Cardano, si ottiene l'espressione:

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i = (I - S_j)^{-1} (I + S_j) \begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{vmatrix}_{ij}$$

e moltiplicando a sinistra entrambi i membri per $(I - S_j)$, si ha:

$$(I - S_j) \begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i = (I + S_j) \begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{vmatrix}_{ij} \quad \text{ovvero:} \quad \begin{vmatrix} 1 & -c_j & b_j \\ c_j & 1 & -a_j \\ -b_j & a_j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i = \begin{vmatrix} 1 & c_j & -b_j \\ -c_j & 1 & a_j \\ b_j & -a_j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{vmatrix}_{ij}$$

Da quest'ultima espressione, è possibile esplicitare le incognite lineari \hat{a}_j , \hat{b}_j , \hat{c}_j , contenute nella matrice di rotazione (razionale) di Rodriguez:

$$\begin{vmatrix} 0 & \hat{Z}_i - w^\circ_{ij} & -(\hat{Y}_i - v^\circ_{ij}) \\ -(\hat{Z}_i - w^\circ_{ij}) & 0 & \hat{X}_i - u^\circ_{ij} \\ \hat{Y}_i - v^\circ_{ij} & -(\hat{X}_i - u^\circ_{ij}) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \\ \hat{c}_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{X}_i - u^\circ_{ij} \\ \hat{Y}_i - v^\circ_{ij} \\ \hat{Z}_i - w^\circ_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

Questo sistema di equazioni può essere risolto a minimi quadrati, oppure facendo uso di procedure robuste, ottenendo così le stime delle suddette incognite lineari.

Si noti come la matrice di rotazione di Rodriguez sia stata espressa ponendo a sinistra la matrice inversa di una matrice emisimmetrica, sottratta alla matrice identità, e a destra la stessa matrice emisimmetrica, sommata alla matrice identità, ottenendo una matrice trasposta (ovvero la matrice inversa) rispetto a quella già presentata. Infatti questa matrice è spesso espressa ponendo a sinistra una matrice emisimmetrica,

sottratta alla matrice identità, ed a destra la matrice inversa della stessa matrice emisimmetrica, sommata alla matrice identità. Tuttavia proprio la modifica adottata rende utile la moltiplicazione a sinistra per $(I - S_j)$, cosa che permette l'esplicitazione delle incognite lineari \hat{a}_j , \hat{b}_j , \hat{c}_j .

$$R^T = \frac{1}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \begin{vmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab + c) & 2(ac - b) \\ 2(ab - c) & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc + a) \\ 2(ac + b) & 2(bc - a) & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{vmatrix}$$

Invece il fattore $\frac{1}{2}$ che collega le suddette incognite lineari ai coefficienti della matrice (razionale) di Rodriguez, costituisce esclusivamente una semplificazione di notazione.

1.14 Orientamento assoluto – metodo Anblock

La relazione di rototraslazione nello spazio con variazione di scala che definisce l'orientamento assoluto di un modello può vantaggiosamente essere riportata, in forma lineare, anche come stabilito dal metodo Anblock. Si riprenda la relazione dell'orientamento assoluto:

$$\begin{vmatrix} u^o \\ v^o \\ w^o_{ij} \end{vmatrix} = \hat{\lambda}_j \hat{R}_j(\hat{\Omega}, \hat{\phi}, \hat{K}) \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i - \begin{vmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{vmatrix}_j \end{pmatrix}$$

moltiplicando entrambi i membri a sinistra per R^T e dividendoli per λ , si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{vmatrix}_i = \frac{1}{\hat{\lambda}_j} \hat{R}_j^T \begin{vmatrix} u^o \\ v^o \\ w^o_{ij} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{vmatrix}_j$$

dove R^T ha la seguente forma, in quanto gli angoli d'assetto Ω e ϕ si considerano piccoli:

$$\hat{R}_j^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\hat{\Omega} \\ 0 & \hat{\Omega} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \hat{\phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\hat{\phi} & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \hat{K} & -\sin \hat{K} & 0 \\ \sin \hat{K} & \cos \hat{K} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \hat{K} & -\sin \hat{K} & \hat{\phi} \\ \sin \hat{K} & \cos \hat{K} & -\hat{\Omega} \\ -\hat{\phi} \cos \hat{K} + \hat{\Omega} \sin \hat{K} & \hat{\phi} \sin \hat{K} + \hat{\Omega} \cos \hat{K} & 1 \end{vmatrix}$$

Definite le grandezze ausiliarie:

$$\hat{a}_j = \cos \hat{K}_j / \hat{\lambda}_j \quad \text{e} \quad \hat{b}_j = \sin \hat{K}_j / \hat{\lambda}_j$$

da cui si ricava immediatamente:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_j} = \sqrt{\hat{a}_j^2 + \hat{b}_j^2} \quad \text{e} \quad \hat{K}_j = \text{arc tan} \frac{\hat{b}_j}{\hat{a}_j}$$

ed inserendo tali grandezze nella relazione precedente, si ha:

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{b} & \frac{\hat{\phi}}{\hat{\lambda}} \\ \hat{b} & \hat{a} & -\frac{\hat{\Omega}}{\hat{\lambda}} \\ \frac{-\hat{\phi} \cos \hat{K} + \hat{\Omega} \sin \hat{K}}{\hat{\lambda}} & \frac{\hat{\phi} \sin \hat{K} + \hat{\Omega} \cos \hat{K}}{\hat{\lambda}} & \frac{1}{\hat{\lambda}} \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} u^\circ \\ v^\circ \\ w^\circ \end{pmatrix}_{ij} + \begin{pmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{pmatrix}_j$$

In questo modo, le prime due righe della matrice hanno assunto forma lineare, rispetto ai parametri planimetrici dell'orientamento assoluto, mentre la terza mantiene, come in precedenza, tale forma rispetto ai parametri altimetrici.

Si considerano, a riguardo i parametri presenti, suddivisi e raggruppati come segue:

$$\begin{matrix} \hat{X}_i, \hat{Y}_i & \hat{t}_x, \hat{t}_y & \hat{\lambda}_j, \hat{K}_j & (\text{ovvero: } \hat{a}_j, \hat{b}_j) \\ \hat{Z}_i & \hat{t}_z & \hat{\Omega}_j, \hat{\phi}_j \end{matrix}$$

distinguendo così, nello spazio, due ambiti operativi: uno planimetrico e l'altro altimetrico. Per quanto riguarda λ , a rigore, questo dovrebbe essere una grandezza spaziale, ma si presume, nel caso di prese aeree, la planimetria molto più estesa dell'altimetria: ciò significa che le coordinate Z hanno una variabilità minore delle coordinate X, Y .

Inoltre è possibile mettere in evidenza tutti i parametri incogniti della matrice attraverso alcune semplici operazioni di algebra matriciale:

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u^\circ_{ij} & -v^\circ_{ij} & 0 & w^\circ_{ij}/\hat{\lambda}_j \\ v^\circ_{ij} & u^\circ_{ij} & -w^\circ_{ij}/\hat{\lambda}_j & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u^\circ_{ij} \sin \hat{K}_j + v^\circ_{ij} \cos \hat{K}_j}{\hat{\lambda}_j} & \frac{-u^\circ_{ij} \cos \hat{K}_j + v^\circ_{ij} \sin \hat{K}_j}{\hat{\lambda}_j} \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{\Omega} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}_j + \begin{pmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{pmatrix}_j + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w^\circ_{ij}/\hat{\lambda}_j \end{pmatrix}_j$$

Allora distinguendo la planimetria dall'altimetria e ricordando che, come già detto in precedenza, si ha:

$$\max |w^\circ|_{ij} \ll \max |u^\circ, v^\circ|_{ij}$$

la prima equazione matriciale del metodo Anblock risulta:

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{vmatrix}_i = \begin{vmatrix} u^\circ & -v^\circ \\ v^\circ & u^\circ \end{vmatrix}_{ij} \begin{vmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{vmatrix}_j + \begin{vmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \end{vmatrix}_j + w^\circ_{ij} \begin{vmatrix} \tilde{\phi}/\tilde{\lambda} \\ -\tilde{\Omega}/\tilde{\lambda} \end{vmatrix}_j$$

I valori approssimati $\tilde{\Omega}, \tilde{\Phi}, \tilde{\lambda}$ sono presi dal risultato dell'iterazione precedente, a partire dai valori iniziali: $\tilde{\Omega} = \tilde{\Phi} = 0$. Inoltre per i punti d'appoggio si scrive anche l'equazione di vincolo (o di pseudo – osservazione sovrappesata):

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{vmatrix}_i = \begin{vmatrix} X^\circ \\ Y^\circ \end{vmatrix}_i$$

Per quanto riguarda l'altimetria, si può riscrivere la seconda equazione matriciale del metodo Anblock nella seguente forma:

$$\begin{vmatrix} \hat{Z} \end{vmatrix}_i = \begin{vmatrix} \sin \tilde{K}/\tilde{\lambda} & \cos \tilde{K}/\tilde{\lambda} \\ -\cos \tilde{K}/\tilde{\lambda} & \sin \tilde{K}/\tilde{\lambda} \end{vmatrix}_{ij} \begin{vmatrix} u^\circ \\ v^\circ \end{vmatrix}_j \begin{vmatrix} \hat{\Omega} \\ \hat{\Phi} \end{vmatrix}_j + \begin{vmatrix} \hat{t}_z \end{vmatrix}_j + w^\circ_{ij} \begin{vmatrix} 1 \\ \hat{\lambda}_j \end{vmatrix}_j$$

Anche in questo caso i valori approssimati \tilde{K} e $\tilde{\lambda}$ sono presi dal risultato dell'iterazione precedente, senza alcun problema di avvio, considerando che si risolve sempre un sistema relativo alla planimetria, prima di un sistema relativo all'altimetria. Anche in questo caso, per i punti di appoggio si scrive l'equazione di vincolo (o di pseudo – osservazione sovrappesata):

$$\begin{vmatrix} \hat{Z} \end{vmatrix}_i = \begin{vmatrix} Z^\circ \end{vmatrix}_i$$

La soluzione finale si ottiene, in generale, al termine di tre o quattro cicli iterativi completi.

1.14.1 La soluzione di Inghilleri

Per semplificare ulteriormente il problema, Inghilleri ha proposto una nuova formulazione dello stesso ³. Infatti poiché le coordinate di un punto oggetto sono funzione dei parametri di orientamento assoluto del modello cui appartiene:

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{vmatrix}_i = F_j(\hat{a}, \hat{b}, \hat{t}_x, \hat{t}_y) \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \hat{Z} \end{vmatrix}_i = G_j(\hat{\Omega}, \hat{\Phi}, \hat{t}_z)$$

ed analogamente cambiando modello, ma riferendosi allo stesso punto oggetto si ha:

³ E' molto interessante notare come oggi giorno il problema del calcolo, per quanto ancora importante, non sia più così fondamentale, come quando questa soluzione è stata formulata e proposta. Allora infatti risolvere un sistema a minimi quadrati, anziché seguire la via incerta delle soluzioni approssimate, era davvero una conquista, per ottenere la quale era indispensabile mettere in atto moltissimi accorgimenti, divenuti via, via superflui grazie all'incremento vertiginoso delle potenzialità informatiche.

$$\begin{vmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{vmatrix}_i = F_h(\hat{a}, \hat{b}, \hat{t}_x, \hat{t}_y) \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \hat{Z} \end{vmatrix}_i = G_h(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{t}_z)$$

allora è possibile mettere in relazione tali coordinate, ottenendo per confronto:

$$F_j(\hat{a}, \hat{b}, \hat{t}_x, \hat{t}_y) = F_h(\hat{a}, \hat{b}, \hat{t}_x, \hat{t}_y) \quad \text{e} \quad G_j(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{t}_z) = G_h(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{t}_z)$$

dove le espressioni formalmente indicate con la lettera F e G , sono rispettivamente fornite dai secondi membri delle equazioni del metodo Anblock. In questo modo, è possibile risolvere un sistema che elimina, dal numero delle incognite, tutte le coordinate dei punti oggetto e considera soltanto le incognite relative ai modelli. Stocasticamente questa nuova formulazione non crea problemi, se i punti modello vengono considerati due a due soltanto, tuttavia poiché questo, in generale, non si verifica, allora subentrano problemi di pesi doppi e correlazioni non considerati, sulla base di tutte le approssimazioni finora introdotte.

1.15 Triangolazione aerea

Le due vie maestre della fotogrammetria prevedono, come già detto in precedenza:

- ORIENTAMENTO ESTERNO: mediante equazioni di collinearità;
- ORIENTAMENTO RELATIVO + ORIENTAMENTO ASSOLUTO: secondo la condizione di complanarità seguita da una trasformazione di similitudine nello spazio (ovvero S nello spazio 3D).

I suddetti procedimenti, tenuto conto anche dei punti di appoggio per il posizionamento del sistema di riferimento, si eseguono, nel primo caso, per ciascuna immagine e, nel secondo caso, per ciascuna coppia di immagini, formante un modello.

Queste stesse operazioni, sfruttando l'interazione fra immagini, unite fra loro, mediante le coordinate oggetto dei punti in comune, detti punti di legame, possono essere eseguite su un intero blocco di strisciate. Analizzando il ricoprimento tra due immagini vicine, si ha ricoprimento longitudinale, cioè lungo ciascuna strisciata, e trasversale, cioè fra strisciate adiacenti (Figure 1.9 e 1.10 caso a e caso b).

In ogni caso, si noti come sia possibile riscontrare il caso, riportato nella parte bassa delle figure relative al ricoprimento trasversale, in alcune configurazioni operative, derivanti da un non perfetto sincronismo delle strisciate. La pratica fotogrammetrica suggerisce di ricercare i punti di legame dapprima fra le strisciate sfruttando il ricoprimento trasversale, dove più difficile è la loro individuazione, e successivamente lungo ciascuna strisciata sfruttando il ricoprimento longitudinale, operazione, in generale, abbastanza agevole.

Sul bordo si ha sempre meno accuratezza, affidabilità e rigidità. Questa situazione può portare alla possibilità di avere mascheramento degli errori, oppure malcondizionamento del sistema, fatti che rendono necessaria l'introduzione di informazioni aggiuntive, ovvero di punti di appoggio, in numero ben superiore a quelli necessari per il posizionamento del sistema di riferimento.

A tal proposito, occorre ricordare che, qualora il ricoprimento trasversale fosse del 20%, si avrebbe bisogno di punti di appoggio altimetrici anche all'interno che sono, in generale, ricavabili solo tramite operazioni in campagna e non dalla cartografia eventualmente già esistente.

□ RICOPRIMENTO LONGITUDINALE (min 60%)

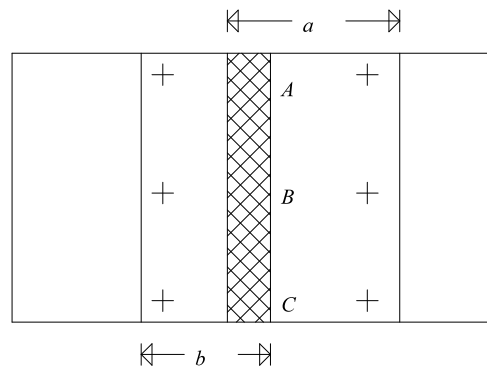


Fig. 1.9 – A, B, C = punti presenti in due immagini.

□ RICOPRIMENTO TRASVERSALE (al 20%)

(al 60%)



Fig. 1.10 – A, B, C, D, E = punti presenti in due immagini A, B = punti presenti in tre immagini.

A meno di effetti di bordo, accoppiando i due tipi di ricoprimento, è possibile dedurre l'osservabilità di un punto in un blocco fotogrammetrico:

Osservabilità di un punto

□ Ricoprimento trasversale al 20% oltre a quello longitudinale:

Punti centrali 3

Punti estremi (5) 6

□ Ricoprimento trasversale al 60% oltre a quello longitudinale:

Punti centrali (7) 9

Punti estremi (7) 9

Questo presuppone che la scelta del tipo di ricoprimento trasversale deve essere eseguita in maniera opportuna, per non incorrere in operazioni che possono risultare onerose: durata del volo per la presa fotogrammetrica o numero di immagini di fotogrammetria dallo spazio da acquisire, oppure lavoro di campagna per la determinazione dei punti di appoggio.

La pratica fotogrammetrica suggerisce di tenere distinti i punti di appoggio planimetrici (a prevalente sviluppo verticale) dai punti di appoggio altimetrici (a prevalente sviluppo verticale), cosicché entrambi siano tanto

topograficamente ben determinati e determinabili, quanto fotogrammetricamente ben individuabili e collimabili.

Il procedimento che unisce le immagini, oppure i modelli, a sottoblocchi, come pure in un blocco unico, è chiamato TRIANGOLAZIONE AEREA. Il metodo che utilizza direttamente le equazioni di collinearità è detto a “stelle proiettive” (bundle), mentre quello successivo all’orientamento relativo e alla formazione dei modelli è detto a “modelli indipendenti” ed è spesso risolto con il metodo Anblock. Riassumendo e, ove necessario, mantenendo la distinzione tra i due metodi, si hanno:

- 3 coordinate incognite per ogni punto oggetto;
- 6 parametri incogniti per ogni immagine; oppure 7 parametri incogniti per ogni modello;
- 2 coordinate osservate per ogni punto immagine; oppure 3 coordinate osservate per ogni punto modello;
- 2 coordinate planimetriche osservate per ogni punto d’appoggio planimetrico;
- 1 quota osservata per ogni punto d’appoggio altimetrico.

Si può inoltre notare che non sussistono, in generale, problemi di scarsa ridondanza, né globali, né locali. Infatti prendendo in esame il caso generale in cui si hanno m modelli (7 incognite per ogni modello), oppure $m+h$ immagini (6 incognite per ogni immagine), essendo h il numero di strisciate, e n punti oggetto (3 incognite per ogni punto), le incognite del problema sono, rispettivamente:

$$7m + 3n \qquad \qquad \qquad \text{e} \qquad \qquad \qquad 6(m+h) + 3n$$

valendo per qualunque strisciata la relazione: numero modelli uguali al numero di immagini meno uno.

Per quanto riguarda invece il rapporto modelli (oppure immagini) punti oggetto, a meno degli effetti di bordo (poco significativi, se il blocco è, come usuale, sufficientemente grande), se i ricoprimenti sono abbastanza elevati si ha approssimativamente $n = m$. Tuttavia tenendo conto degli effetti di bordo e di eventuali difetti di ricoprimento trasversali, si suole assumere un valore n pari a $2 \div 3$ volte m , per cui si ottiene:

$$7m + (2 \div 3) 3m = 13 \div 16m \qquad \qquad \qquad \text{e} \qquad \qquad \qquad 6(m+h) + (2 \div 3) 3(m+h) = 13 \div 16(m+h)$$

Per quanto riguarda invece le osservazioni si ha:

$$3km + 3l \qquad \qquad \qquad \text{e} \qquad \qquad \qquad 2k(m+h) + 3l$$

essendo k il numero di punti appartenenti ad un modello, oppure il numero dei punti su un'immagine e l il numero dei punti di appoggio. Pertanto poiché, con riferimento alla usuale prassi fotogrammetrica, il numero di punti appartenenti ad un modello è sempre maggiore o uguale a 6 e anche il numero di punti su un'immagine è sempre maggiore o uguale a 9, allora il numero delle osservazioni non potrà mai essere, né globalmente, né localmente, minore del numero delle incognite, confermando la fattibilità del procedimento. In fotogrammetria terrestre, data la configurazione solitamente parecchio irregolare dello schema di presa, è ovviamente molto più difficile definire, a priori, ricoprimenti e ridondanze. D'altra parte, sempre la pratica

fotogrammetrica suggerisce, in generale, di non allontanarsi troppo, da quanto prescritto per la fotogrammetria aerea o dallo spazio.

1.16 La proposta dell'OEEPE

Al fine di migliorare i risultati ottenibili con la triangolazione aerea, l'OEEPE (European Organization for Experimental Photogrammetric Research) ha formulato alcune proposte, inerenti tanto al blocco fotogrammetrico, quanto alla rete d'appoggio.

- ❑ Un ulteriore irrigidimento del blocco fotogrammetrico è dato dall'esecuzione totale (o quantomeno parziale), ove possibile, di un cross – block, costituito da strisciate ortogonali al blocco principale.
- ❑ Un ulteriore incremento di precisione, accuratezza ed affidabilità e della triangolazione aerea è dato dalla misura di triplette (od almeno coppie) di punti di legame o di appoggio.
- ❑ Una configurazione ottimale della rete di appoggio, in presenza comunque di un blocco fotogrammetrico con ricoprimento trasversale al 60%, è data dall'esecuzione sul perimetro di questo di un doppio anello intrecciato di poligoni geometriche, con collegamenti multipli a punti di appoggio propriamente detti.
- ❑ Un trattamento ottimale di tutte le osservazioni, derivate dalla triangolazione aerea, è dato dalla compensazione congiunta (joint adjustment) del blocco fotogrammetrico e della rete di appoggio, facendo debita attenzione alla scelta dei pesi per i vari tipi di osservazioni.

Considerazioni relative alle procedure robuste sono da tenere in conto, in relazione alla presenza di eventuali errori grossolani, solitamente fino al 1% ÷ 2% delle osservazioni del blocco stesso, come insegna la sopraccitata pratica fotogrammetrica. Queste compensazioni sono oggi giorno numericamente computabili attraverso la procedura dei minimi quadrati ripesati, oppure con il metodo della minima mediana degli scarti quadratici, operando su piccolissimi sottoblocchi in modo ancora più robusto.

Appendice A – Analisi statistiche e numeriche

A.1 Imposizione del sistema di riferimento

Si consideri la seguente casistica:

- ❑ l'orientamento esterno, calcolato mediante le equazioni di collinearità, dove le osservabili sono le coordinate immagine, necessita di sette informazioni;
- ❑ l'orientamento assoluto, calcolato mediante trasformazioni di similitudine nello spazio (ovvero trasformazioni S nello spazio 3D), dove le osservabili sono le coordinate modello, necessita nuovamente di sette informazioni;
- ❑ l'orientamento relativo, sia nel caso generale di prese qualsiasi, sia nel caso semplificato di prese quasi nadirali, oppure quasi frontali, non richiede ulteriori informazioni, trattandosi di un problema appartenente alla seconda classe e, in particolare, di una centratura di figure.
- ❑ il concatenamento di modelli, calcolato mediante trasformazioni di similitudine nello spazio (ovvero S nello spazio 3D), dove le osservabili sono le coordinate modello (concatenate), non richiede ulteriori informazioni, trattandosi di un problema appartenente alla seconda classe e, in particolare, di una centratura di corpi 3D.

Si noti come il caso della proposta Inghilleri, introducendo insieme le coordinate modello e misure di distanza, necessita di sei informazioni. Questa differenziazione è dovuta al fatto che, nella soluzione proposta da Inghilleri, le coordinate modello non possono essere considerate separatamente dall'orientamento relativo e calcolate a posteriori.

A.2 Progettazione ed ottimizzazione

Un blocco fotogrammetrico è un particolare tipo di rete. Infatti come ogni rete può essere fatto corrispondere ad un grafo. In questo grafo, i nodi sono costituiti dai punti di appoggio e di legame (tre coordinate) e dalle immagini (tre coordinate, dei punti di presa e tre angoli di assetto), mentre i lati sono costituiti dai punti osservati sulle immagini (due coordinate). Inoltre con queste precisazioni, anche un insieme di prese fotogrammetriche terrestri costituisce uno speciale tipo di blocco ed ancora un particolare tipo di rete.

In questa ottica, un blocco fotogrammetrico è sottoponibile ai medesimi problemi di ottimizzazione delle reti geodetiche, secondo i risultati ottenibili dall'applicazione dei concetti generali di ottimizzazione matematica (come minimizzare o massimizzare una funzione di rischio o di guadagno, scelta a priori). In particolare, l'ottimizzazione della configurazione delle osservazioni, o di primo ordine, può stabilire:

- ❑ la posizione dei punti di appoggio e di legame;
- ❑ la posizione dei punti di presa, ovvero la quota di volo, il ricoprimento longitudinale fra immagini, lungo una strisciata, ed il ricoprimento trasversale tra le strisciate;
- ❑ gli angoli di assetto, cosa utile nei blocchi fotogrammetrici (aerei), composti da più sottoblocchi, ed in fotogrammetria terrestre.

Invece l'ottimizzazione dei pesi delle osservazioni, o di secondo ordine, può stabilire:

- ❑ i pesi delle coordinate dei punti osservati sulle immagini;
- ❑ i pesi delle coordinate dei punti di appoggio;
- ❑ i pesi di eventuali parametri ausiliari, concernenti i punti di presa o gli angoli di assetto, oppure i (alcuni) parametri dei polinomi di autocalibrazione.

Si osservi che pesi prossimi a zero, nelle coordinate planimetriche e/o nella quota di un punto di appoggio, mostra la sua inutilità, ovvero la possibilità di non determinarlo topograficamente. Si noti poi che pesi prossimi a zero, in tutte le coordinate di tutti i punti osservati su un'immagine (o su tutte le immagini di una strisciata), mostra l'inutilità di quella immagine (o di quella intera strisciata).

Come per le reti geodetiche, i pesi, se non sono controllati da opportune condizioni di vincolo, possono dare risultati metrologicamente non accettabili. In tal caso, mentre pesi negativi e pesi positivi inferiori ad un mezzo comportano la cancellazione dell'osservazione, pesi troppo elevati sono difficilmente raggiungibili. Infatti anche ripetendo parecchie volte le osservazioni, la presenza di errori sistematici impedisce comunque il raggiungimento della precisione voluta. L'osservazione di più punti vicini costituisce, entro certi limiti, un semplice espediente per aggirare l'ostacolo.

L'ottimizzazione di secondo ordine complica inegabilmente le operazioni di misura delle coordinate dei punti osservati sulle immagini. Ciò dà valore alla proposta, formulata dal Prof. Mariano Cunietti (nell'ambito di una ricerca OEEPE per la quale ha assunto il ruolo di centro pilota), di articolare le operazioni di misura in più fasi:

- ❑ fase di misura delle coordinate planimetriche approssimate dei punti, successivamente oggetto di osservazione sulle immagini da eseguirsi (al calcolatore) su una carta, disponibile in forma numerica, a piccola scala (la quota approssimata può essere calcolata con un procedimento di media mobile, se si dispone anche di un modello digitale delle altezze, benché rozzo); un semplice programma di calcolo fornisce poi, date le coordinate planimetriche approssimate, la codifica di quegli stessi punti;
- ❑ fase di misura delle coordinate approssimate dei punti osservati sulle immagini, da eseguirsi (sempre al calcolatore) su copie ingrandite, tramite zoom, delle immagini; un opportuno programma di calcolo, dati la scala media delle immagini, l'angolo di orientamento di un sottoblocco ed i fattori di ricoprimento longitudinale e trasversale, permette di ricavare preventivamente un elenco di tentativo dei punti osservabili su un'immagine, da convalidare durante questa fase;
- ❑ fase di ottimizzazione di primo e, soprattutto, di secondo ordine, da eseguirsi con un apposito programma di calcolo;
- ❑ fase di misura delle coordinate di punti osservati sulle immagini, da eseguirsi al calcolatore su matrici di toni di grigio corrispondenti alle immagini, tramite correlazione automatica assistita; dove la codifica dei punti è acquisita dalla prima fase, l'elenco dei punti da osservare su un'immagine e la loro posizione approssimata (raggiunta automaticamente per via numerica nel caso di correlazione automatica) sono acquisiti dalla seconda fase, il peso di ogni osservazione (controllato dal calcolatore) è acquisito dalla terza fase.

Come si nota, la quarta fase diventa, sempre più, una fase destinata solo alla effettuazione di misure di alta precisione, governate da un menù, quasi interamente predisposto nelle fasi precedenti, che pertanto solo raramente dovrà essere cambiato dall'operatore (anzi spesso e, vieppiù nel futuro, proprio tutta la quarta fase sarà quella che potrà essere quasi completamente automatizzata). È poi evidente che le prime tre fasi, fatta eccezione per le misure delle copie ingrandite delle immagini, possono essere compiute prima che sia eseguito il volo fotogrammetrico (o le prese fotogrammetriche terrestri) e sono di sussidio anche al progetto di questo (o queste).

Si ricordi che la simulazione può anche essere eseguita in modo non interattivo con un comune programma di triangolazione aerea e/o di ricostruzione di prese fotogrammetriche terrestri purché, come per il metodo delle stelle proiettive, abbia quali dati di input:

- ❑ lo schema di misura, ovvero l'elenco delle immagini e l'elenco dei punti osservati sulle immagini;
- ❑ le coordinate approssimate dei punti di presa e gli angoli approssimati di assetto delle immagini;
- ❑ le coordinate approssimate dei punti di appoggio e di legame;
- ❑ sigma zero a priori.

Come noto, infatti la misura delle coordinate, ancorché approssimate, dei punti osservati sulle immagini è del tutto inutile per qualsiasi simulazione, bastando la precisione globale delle misure (cioè sigma zero), per ottenere informazioni sulla precisione dei parametri e sull'affidabilità delle misure stesse. Da ultimo, si ricordi che in fotogrammetria già la progettazione classica eseguita in forma grafica è un impegno assai oneroso, pertanto anche la simulazione non aggraverà certamente di molto i tempi complessivi di lavoro.

A.3 Compensazione libera

La compensazione libera è il modo più corretto per eseguire una compensazione dei dati, prescindendo da informazioni a priori, trattate come vincoli esterni che potrebbero forzare ed alterare i risultati della compensazione stessa. Si parla di compensazione libera quando i vincoli (nel caso fotogrammetrico: i punti di appoggio) sono in numero minimo indispensabile per sanare il difetto di rango, ovvero in numero minimo per imporre un sistema di riferimento. Questo procedimento può essere adottato per i problemi di tipo altimetrico, planimetrico e spaziale, con tre diverse modalità di applicazione: la prima arbitraria, la seconda per imposizione dei parametri medi, la terza con il metodo cosiddetto di buon adattamento (in inglese, best fitting), costituendo le ultime due una soluzione, computazionalmente praticabile, di un problema di ottimizzazione di ordine zero.

□ CASO ALTIMETRICO

In questo caso, si è in presenza di un solo parametro incognito.

a) Metodo arbitrario

Si procede fissando una quota qualsiasi e ricavando le altre rispetto a questa.

b) Parametri medi

Il parametro fissato è la media delle quote approssimate.

c) Best fitting

In questo caso, si ipotizza che i caposaldi siano collegati ad un'origine fittizia da pseudo – osservazioni, pari alle quote approssimate. Allora il parametro bloccato sul valore nullo è la traslazione dell'origine fittizia.

□ CASO PLANIMETRICO

Questo caso comporta la presenza di quattro parametri incogniti, considerando tra questi anche l'eventuale presenza di una scala.

a) Metodo arbitrario

Anche in questo caso, si procede fissando un qualsiasi punto (due coordinate), un qualsiasi angolo di direzione ed una distanza qualsiasi.

b) Parametri medi

I parametri medi sono fissati con l'imposizione del baricentro (media delle coordinate approssimate), di una rotazione nulla e di una scala unitaria.

c) Best fitting

In questo caso, date le coordinate approssimate appartenenti ad un'ipotetica rete di emanazione e le coordinate appartenenti alla rete locale, una trasformazione conforme (rototraslazione e scala)

collega tra loro i due sistemi di coordinate. Il best fitting provvede ad imporre traslazioni e rotazione nulle, e scala unitaria.

□ CASO 3D

In questo ambito possono essere distinti due sottocasi.

Caso A

Questa situazione si verifica, quando la direzione dell'asse Z è assunta come nota e gli effetti del caso altimetrico e del caso planimetrico si sommano. Quasi tutte le applicazioni fotogrammetriche, se considerate insieme alle reti che determinano i punti di appoggio, ricadono in questo caso. Infatti in fotogrammetria non si può eseguire una compensazione libera delle sole osservazioni fotogrammetriche, perchè si avrebbe un malcondizionamento (dovuto alla scarsa rigidità del blocco fotogrammetrico), se non venissero considerati anche i punti di appoggio.

Di conseguenza, per eseguire una compensazione libera, occorre compensare insieme il blocco fotogrammetrico e la rete che determina i punti di appoggio (joint adjustment). I parametri incogniti da fissare sono cinque, ovvero quattro (tre traslazioni e una rotazione nel piano orizzontale), più uno eventuale, per la presenza di una scala.

Nel caso particolare in cui siano state effettuate misure di componenti della distanza, riferite agli assi coordinati del sistema di riferimento, la soluzione del problema consiste semplicemente nell'applicare tre volte, indipendentemente per ciascuna componente, le soluzioni definite per il caso altimetrico.

Caso B

Questa situazione si verifica, quando la direzione dell'asse Z non è data; ad esempio, come nel caso in cui i punti di appoggio vengono determinati solo con misure di distanze, oppure altri invarianti geometrici. I parametri incogniti da fissare sono sette, ovvero sei (tre traslazioni e tre rotazioni nello spazio), più uno eventuale, per la presenza di una scala.

a) Metodo arbitrario

Si fissano due punti qualsiasi ed una qualsiasi quota, oppure un punto qualsiasi, un qualsiasi angolo di direzione, una distanza qualsiasi e due qualsiasi quote.

b) Parametri medi

I parametri sono fissati con l'imposizione del baricentro, di rotazioni nulle e di una scala unitaria.

c) Best fitting

Anche in questo caso, una trasformazione conforme (nello spazio 3D) collega i due sistemi di coordinate. Il "best fitting" provvede ad imporre traslazioni e rotazioni nulle e scala unitaria.

A.4 Affidabilità e robustezza

Nel trattamento di osservazioni fotogrammetriche e, nello specifico, nella compensazione della triangolazione aerea, gli errori grossolani si distinguono usualmente in grandi, medi e piccoli. Sono errori grossolani grandi:

- ❑ alcuni veri e propri errori grossolani nella preparazione dei dati: perdita totale o parziale dell'informazione, differenti unità di misura, ecc.;
- ❑ gli errori nella definizione dei sistemi di riferimento: differenti origini, differenti scale, terne sinistre invece di terne destre, ecc.;
- ❑ gli errori di codifica: questi generano falsi punti di legame e producono un accartocciamento del blocco fotogrammetrico.

Sono errori grossolani medi:

- ❑ gli scambi locali fra punti;
- ❑ gli errori di identificazione dei punti, in fase preparatoria;
- ❑ gli errori di identificazione dei punti, durante le operazioni di misura.

Anche tutti questi scambi e/o errori generano falsi punti di legame, ma non producono, in generale, un accartocciamento del blocco fotogrammetrico.

Infine sono errori grossolani piccoli gli errori di osservazione dei punti la cui entità varia fra 4 e 20 volte lo scarto quadratico medio atteso per gli errori accidentali di misura. Questi non generano, in generale, falsi punti di legame; tuttavia la loro presenza in un numero pari a 0.5 – 2 % dell'insieme di osservazioni, dove questo varia da qualche migliaio ad alcune decine di migliaia, ovvero da qualche decina ad un centinaio di piccoli errori grossolani, fa sì che gli effetti di mascheramento propri del criterio di stima dei minimi quadrati impediscano ogni discernimento. Allora anche in questo caso, come già nei due precedenti, l'uso di procedure robuste, opportunamente scelte ed impiegate, risponde vantaggiosamente alla bisogna.

Successivamente metodologie e procedure dell'analisi multivariata, come la regressione multipla e/o l'analisi di varianza, si applicano innanzitutto alla rilevazione di piccoli e medi errori grossolani, come pure alla determinazione della significatività dei coefficienti dei polinomi di autocalibrazione, nonché degli eventuali parametri cinematici e/o morfologici di modelli continui.

A.5 Topologia: grafi, matrici normali

Per l'applicazione a problemi di compensazione delle triangolazioni aeree bisogna innanzitutto precisare chi sono i punti (topologici) ed i lati di un grafo di una rete geodetica e di un blocco fotogrammetrico. L'insieme dei parametri aggiuntivi incogniti relativi ad uno stesso punto (oppure modello o immagine) di una rete (e/o blocco fotogrammetrico), coinvolto nel sistema di equazioni di osservazione, costituisce un punto del grafo. L'insieme delle grandezze osservabili che sono state misurate fra due punti costituisce un lato del grafo. Nelle reti di livellazione geometrica, ogni caposaldo coincide con un punto del grafo ed ogni tronco di linea di livellazione rappresenta un lato del grafo: esiste cioè totale coincidenza fra gli elementi delle due strutture. Nelle reti geodetiche, in generale, è punto del grafo ogni punto (cioè l'insieme delle sue coordinate con l'eventuale orientamento della stazione), mentre è lato del grafo l'insieme delle misure effettuate fra due punti (direzioni azimutali, distanze, componenti della distanza, angoli zenitali, dislivelli). In fotogrammetria, la corrispondenza fra gli elementi delle due strutture (blocco e grafo) è meno intuitiva. In questo caso, sono punti del grafo i punti – terreno ed i modelli (o le immagini), mentre sono lati dello stesso grafo i punti –

modello (o i punti – immagine). Infine quando si introducono nelle compensazioni i risultati di precedenti compensazioni nella forma di:

- ❑ differenze di coordinate di punti (ad esempio, componenti della distanza);
- ❑ punti in altri sistemi di riferimento, dove è necessario istituire origini fittizie;
- ❑ qualsivoglia tipo di informazione correlata, totalmente o anche solo parzialmente,

sono punti del grafo i punti coinvolti da dette informazioni (comprese le origini fittizie), mentre sono lati del grafo le informazioni stesse (ivi inclusi i punti in altri sistemi di riferimento). A riguardo, si consideri il blocco fotogrammetrico illustrato nelle figure A.1 e A.2; come già detto in precedenza, il passaggio dal grafico di un blocco fotogrammetrico a un grafo (topologico) è molto meno evidente di quello dal grafico di una rete geodetica sempre a un grafo (topologico). Tuttavia le basi di dati fotogrammetrici sono sempre tali da rendere la costruzione del grafo del tutto automatica.

Queste particolari basi di dati fotogrammetrici, nella loro parte topologica, costituiscono non solo la matrice disegno simbolica, ma anche la parte più importante della matrice normale simbolica. Infatti poiché ogni trasformazione S nello spazio 3D coinvolge solo un modello ed un punto oggetto, come pure ogni equazione di collinearità coinvolge solo un punto di presa ed un punto oggetto, la matrice disegno simbolica e la matrice normale simbolica hanno una ben precisa forma come illustrano le figure A.3 ed a.4.

Si osservi che una così fatta matrice normale simbolica ha un'ampiezza di banda e soprattutto una dimensione del profilo addirittura enormi. L'applicazione a questa matrice di un algoritmo di riordino delle incognite riduce drasticamente sia l'ampiezza di banda che la dimensione del profilo, come illustra, sempre per lo stesso esempio, la Fig. A.5. In questo modo, divengono agevoli tutte quelle operazioni di algebra matriciale (normalizzazione, fattorizzazione, soluzione del sistema, inversione, propagazione della covarianza) necessarie per ottenere la soluzione a minimi quadrati ed informazioni sulla precisione e l'affidabilità della stessa.

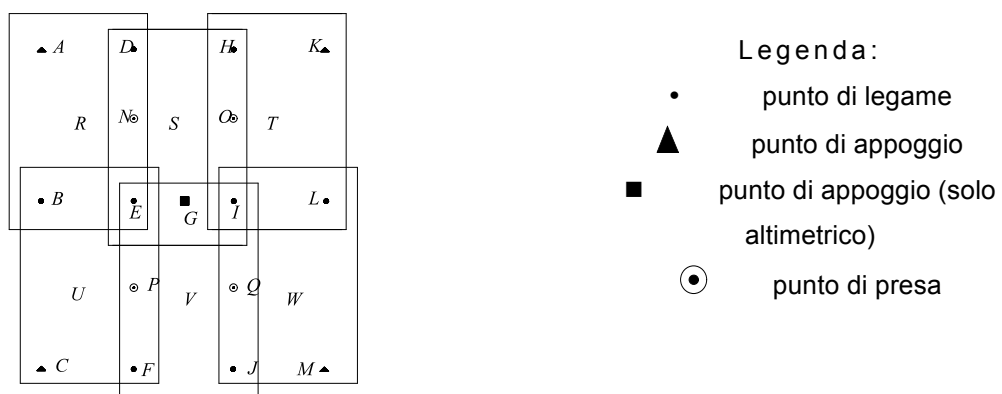


Fig. A.1 – Blocco fotogrammetrico.

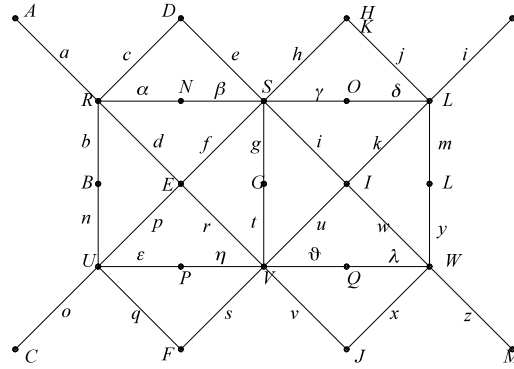


Fig. A.2 – Grafo del blocco.

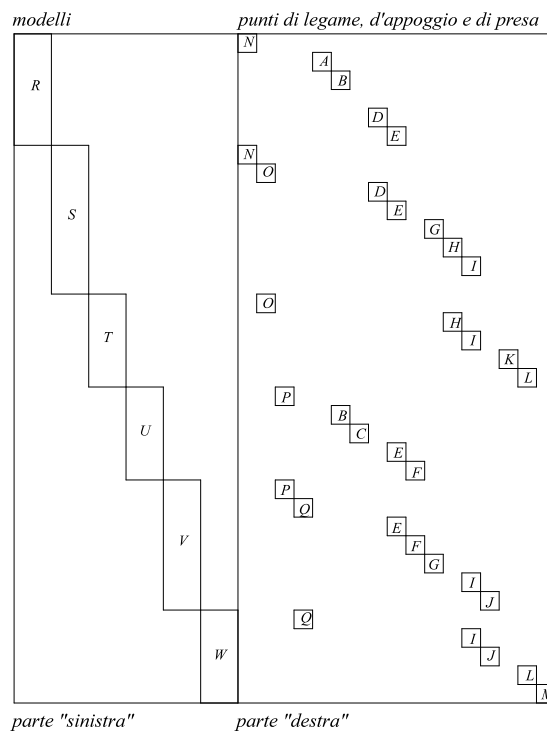


Fig. A.3 – Matrice disegno simbolica.

A.6 Operazioni topologiche

La base di dati fotogrammetrici provenienti da misure stereo ha in generale i punti raggruppati per coppie di immagini (ovvero per modelli, dopo aver eseguito l'orientamento relativo); invece la base di dati fotogrammetrici provenienti da misure mono ha i punti raggruppati per singole immagini; inoltre il passaggio da una base di dati fotogrammetrici all'altra è comunque facile. Pertanto facendo specifico riferimento all'esempio proposto, la matrice disegno simbolica può essere scomposta in due parti distinte:

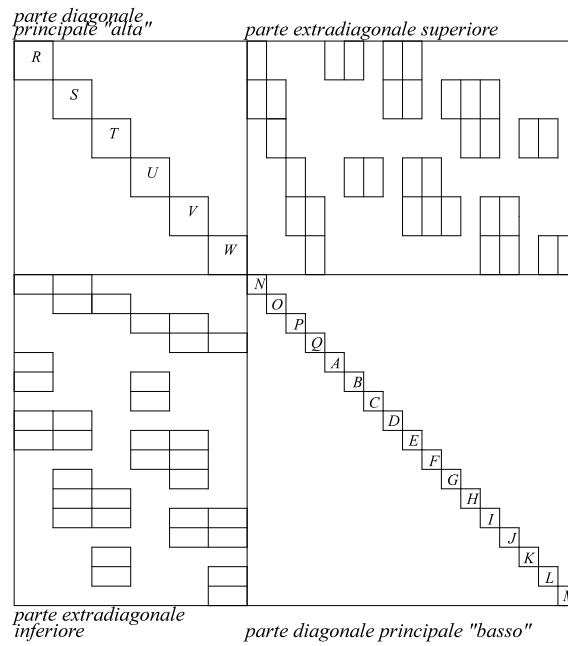


Fig. A.4 – Matrice normale simbolica.

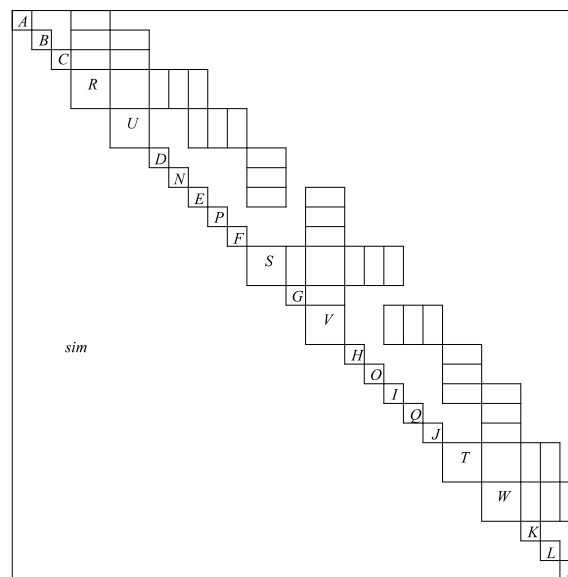


Fig. A.5 - Matrice normale simbolica (dopo l'applicazione di un algoritmo di riordino).

- ❑ una parte "sinistra" nella quale, per ogni equazione di osservazione, si trovano raggruppati gli indicatori delle incognite, relative ai parametri dell'orientamento assoluto di un modello, oppure di orientamento esterno di un'immagine;
- ❑ una parte "destra" nella quale, per ogni equazione di osservazione, si trovano raggruppati gli indicatori delle incognite, relative alle coordinate dei punti di legame o di appoggio.

Anche la matrice normale simbolica può essere scomposta in due parti: una parte diagonale principale ed una parte extradiagonale. Ancora la parte diagonale principale può essere scomposta in due parti:

- ❑ una parte diagonale principale "alta" nella quale, per ogni equazione del sistema normale, si trovano raggruppati gli indicatori delle incognite, relative ai parametri di orientamento assoluto di un modello, oppure di orientamento esterno di un'immagine;
- ❑ una parte diagonale principale "bassa" nella quale, per ogni equazione del sistema normale, si trovano raggruppati gli indicatori delle incognite, relative alle coordinate dei punti di legame o di appoggio.

Infine la parte extradiagonale può essere scomposta in due parti:

- ❑ una parte extradiagonale "superiore" nella quale, per ogni equazione del sistema normale, si trovano raggruppati gli indicatori delle incognite di tutti i punti di legame o di appoggio, compresi in un modello o individuati su un'immagine;
- ❑ una parte extradiagonale "inferiore" nella quale, per ogni equazione del sistema normale, si trovano raggruppati gli indicatori delle incognite di tutti i modelli, oppure di tutte le immagini, dove è rispettivamente compreso o individuato un punto di legame o di appoggio.

Così accanto alle solite forme di memorizzazione compatta:

- ❑ la matrice disegno simbolica per righe: matrice I;
- ❑ la matrice disegno simbolica per colonne: matrice II;
- ❑ la matrice normale simbolica per elementi isolati: matrice III,

si hanno altre forme di memorizzazione compatta:

- ❑ la parte "sinistra" della matrice disegno simbolica per colonne: matrice IV;
- ❑ la parte "destra" della matrice disegno simbolica per colonne: matrice V;
- ❑ la parte extradiagonale superiore della matrice normale simbolica per elementi isolati: matrice VI;
- ❑ la parte extradiagonale inferiore della matrice normale simbolica per elementi isolati: matrice VII,

la cui derivazione delle matrici disegno e normale simboliche (delle quali sono parte) è ovviamente immediata. Di nuovo, alla particolare forma delle matrici disegno e normale simboliche, si ha che le basi di dati fotogrammetrici, purché opportunamente riordinate, danno proprio la stessa informazione topologica di quella fornita insieme dalla matrice disegno simbolica memorizzata compatta per righe: matrice I, e dalla parte extradiagonale superiore della matrice normale simbolica memorizzata compatta per elementi isolati: matrice VI, essendo poi queste collegate, fra loro, dalla parte "sinistra" della matrice disegno simbolica memorizzata compatta per colonne: matrice IV, a sua volta opportunamente ordinata.

Tuttavia si può opportunamente ordinare le colonne della matrice IV, in modo tale che, utilizzando la matrice IV, invece della matrice VI, si ottenga un procedimento alternativo, molto più svelto. Innanzitutto si noti che la matrice IV e la matrice VI hanno sempre lo stesso numero di colonne (con riferimento all'esempio, il numero dei modelli); ogni colonna della matrice IV ha sempre lo stesso numero di elementi della corrispondente colonna della matrice VI (ovvero con riferimento all'esempio, il numero dei punti compresi in un modello). Gli elementi di ciascuna colonna della matrice VI sono disposti per numero d'ordine crescente; gli elementi di ciascuna colonna della matrice IV sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi della corrispondente colonna della matrice VI. Per tutto questo, è possibile ordinare gli elementi di ciascuna colonna della matrice IV, cosicchè la corrispondenza biunivoca sia l'identità del numero d'ordine con gli elementi della corrispondente colonna della matrice VI.

A questo punto, è facile rilevare che, se una base di dati fotogrammetrici ha modello per modello, oppure immagine per immagine, i punti disposti per numero d'ordine crescente, allora questa base costituisce insieme la matrice I e la matrice IV, in quanto non sarebbe altrimenti costituita che dai numeri d'ordine delle misure relative ai punti compresi nei modelli o individuati sulle immagini. L'uso, così definito, delle basi di dati fotogrammetrici è poi facilmente generalizzabile ad altre basi di dati fotogrammetrici (diverse da quelle di input), quali per esempio quelle composte di punti appartenenti alle strisciate, oppure ai sottoblocchi. Così il calcolo di valori approssimati, ove necessario e comunque la ricerca dei grandi e medi errori grossolani, si sviluppa effettuando, preliminarmente alle ricerche geometriche, l'intersezione (insiemistica) fra le "colonne" della base di dati fotogrammetrici, di volta in volta in esame.

Gli indicatori degli elementi, di ogni base di dati fotogrammetrici, servono da puntatore per l'indirizzamento, da questa, all'insieme generale bene – ordinato (ovvero avente proprio l'ordine dei numeri naturali) dei punti. Si ricordi infine che, per avere basi di dati fotogrammetrici provviste di proprietà d'ordine, è comunque necessario effettuare preliminarmente la sostituzione della numerazione alla nomenclatura dei punti. Eseguire questa operazione è molto semplice, se la nomenclatura dei punti usata è a quattro (sei) cifre, come si ottiene per esempio utilizzando due (tre) cifre significative della coordinata nord del punto in esame e due (tre) cifre significative della coordinata est dello stesso punto. Se invece la nomenclatura dei punti usata è a ben più di quattro (sei) cifre, come si ottiene per esempio utilizzando affiancati il nome della prima strisciata e della prima immagine, su cui è individuato un punto, più un contatore dei punti all'interno di ciascuna immagine, occorre impiegare un metodo più lento e laborioso, ma comunque contenuto per quanto concerne l'occupazione di memoria.

ELABORAZIONE DI IMMAGINI

2.1 Acquisizione di immagini digitali

La fotogrammetria si potrebbe definire, in modo molto sintetico, come la tecnica per ottenere una descrizione di un oggetto, a partire da immagini dell'oggetto. Il campo della fotogrammetria digitale comprende le tecniche fotogrammetriche che si basano su immagini digitali (Fig. 2.1).

Con l'oggetto esteso in tre dimensioni e le immagini solo in due, una singola immagine, in generale, non contiene informazioni sufficienti per una adeguata descrizione dell'oggetto. Allora sono necessarie più immagini, prese da posizioni diverse. L'oggetto può essere descritto a diversi livelli di astrazione. Una descrizione a basso livello di astrazione è quella della forma e del colore dell'oggetto. La suddivisione della superficie dell'oggetto in elementi, con un significato particolare, in un determinato contesto applicativo (ad esempio, il delineamento di strade, fiumi, ecc.) è invece una descrizione ad un livello di astrazione più elevato.

In questi anni, la fotogrammetria digitale, resa possibile dagli sviluppi tecnologici nei campi dell'acquisizione e della elaborazione di immagini digitali ha gradualmente sostituito la fotogrammetria analogica ed analitica.

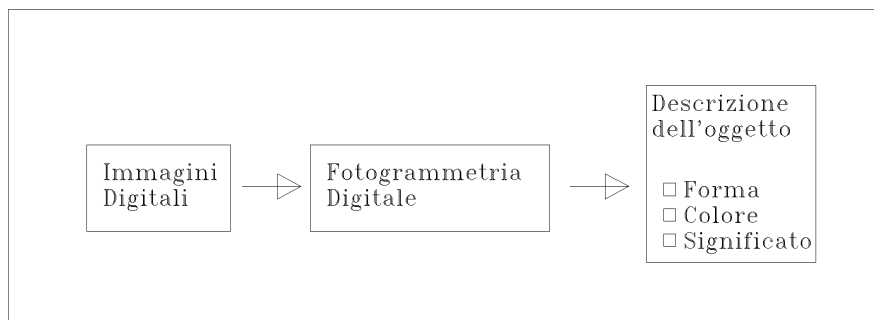


Fig. 2.1 – La fotogrammetria digitale

Fra i motivi per adottare la fotogrammetria digitale si possono citare:

- la disponibilità di immagini digitali;
- la possibilità di elaborare immagini digitali al computer;
- la possibilità di ottenere risposte in tempi brevi;
- la necessità di ottenere risposte in tempo reale, ove richieste;
- l'aumento di produttività, grazie ad un possibile maggior grado di automazione,

ed inoltre la possibilità di operare con tecnologie all'avanguardia, integrate ed integrabili con altre tecnologie dell'informazione, primi fra tutti l'informatica grafica ed i sistemi informativi territoriali.

2.2 L'oggetto da descrivere

Nella fotogrammetria aerea o dallo spazio l'oggetto da descrivere è la superficie terrestre, nel contesto della produzione di carte tecniche e tematiche. In questo settore, la produttività delle tecniche fotogrammetriche è superiore a quella di tecniche alternative come la topografia, ed il volume del lavoro giustifica i grossi investimenti in apparecchiatura richiesti dal metodo. Inoltre i lunghi tempi di elaborazione possono essere

accettati, perché i fenomeni descritti cambiano poco: la maggior parte dei dati riportati su una carta sono ancora validi ad un anno dall'acquisizione delle immagini.

Il tipo di oggetto fotografato ed investigato con tecniche fotogrammetriche può, tuttavia, essere praticamente qualsiasi: si potrebbe trattare, ad esempio, della facciata di un monumento, di uno scavo archeologico, di una componente di un'automobile, del viso di una persona o di un flusso turbolento in un canale. I motivi per l'impiego della fotogrammetria, in questi casi, potrebbero essere rispettivamente un supporto per il restauro, la documentazione, il controllo di congruenza con i dati di progetto, il monitoraggio della crescita e studi fluidodinamici. In questi campi non tradizionali, un grosso investimento per l'acquisto di una costosa apparecchiatura è spesso più problematico. Inoltre i tempi lunghi della fotogrammetria classica possono rendere superati i dati di una restituzione, quando il fenomeno descritto è in rapida evoluzione.

Pertanto sono soprattutto i settori applicativi non tradizionali che possono beneficiare della disponibilità di strumentazione fotogrammetrica digitale ad un costo relativamente basso, con brevi tempi di elaborazione e sostenuti da un possibile maggiore grado di automazione.

2.3 Il tipo di descrizione

La descrizione prodotta con tecniche fotogrammetriche si basa su immagini dell'oggetto. Queste immagini riportano il mosaico delle diverse quantità di luce, riflessa dalle varie zone della superficie dell'oggetto nella direzione del sensore al momento di presa. Poiché la riflessione della luce avviene sulla superficie dell'oggetto, è evidente che la descrizione può solo, o solo prevalentemente, riferirsi alla superficie dell'oggetto. I prodotti della fotogrammetria riguardano:

- la forma geometrica dell'oggetto;
- le coordinate di punti sulla superficie dell'oggetto;
- la descrizione completa di tutta la superficie con un Modello Digitale di Superficie (DSM);
- prodotti derivati dal DSM (sezioni, profili, calcolo di variazioni e volumi, visibilità, ecc.);
- il colore dell'oggetto;
- le ortoimmagini;
- le ortoimmagini completate con sovrapposizione di elementi vettoriali d'interesse (spesso cartografici);
- un'interpretazione del contenuto tematico delle immagini;
- carte tecniche e tematiche;
- dati di ingresso per Sistemi Informativi Territoriali (SIT).

Una parte della descrizione, la forma geometrica dell'oggetto e le sue proprietà di riflettività, è oggettiva e quantificabile. Questa parte della descrizione, in fotogrammetria aerea o dallo spazio, concretizzata rispettivamente nel modello digitale di superficie e nell'ortoimmagine, costituisce il nucleo del compito della fotogrammetria. L'oggettività e la quantificabilità risulta dal fatto che la descrizione è ad un basso livello di astrazione e, come tale, abbastanza indipendente dal contesto applicativo.

D'altra parte, è possibile ottenere dalle immagini molto più di una semplice descrizione della forma e del colore dell'oggetto ripreso. Ad esempio, nel caso di immagini aeree o satellitari, è possibile riconoscere e delineare fiumi, strade, case e campi, dando una descrizione della superficie dell'oggetto ad un livello di astrazione più alto. Questo tipo di informazione non è oggettivo, ma dipende dal contesto dell'interpretazione. Nei tempi precedenti la nascita della fotogrammetria digitale, il compito della

interpretazione delle immagini era affidato esclusivamente all'operatore e non veniva dedicato molto sforzo all'analisi degli algoritmi, ovvero dei meccanismi cerebrali, utilizzati implicitamente dall'operatore. Solo dopo, affrontando il problema della interpretazione automatica delle immagini, è risultato evidente, quanto sia complesso formalizzare questo problema, per l'uomo apparentemente così facile.

Per distinguere le operazioni che possono essere eseguite trattando i valori radiometrici, senza preoccuparsi di cosa rappresentano (facilmente automatizzabili), da compiti che presuppongano una comprensione del contenuto delle immagini (molto difficilmente automatizzabili), è stata proposta la definizione di compiti non semantici e semantici, in analogia alla linguistica che distingue l'ortografia (modo formalmente valido di combinare i caratteri) dalla semantica (significato della parola). Si osservi come, in linguistica la grammatica e la sintassi si situano ad un livello intermedio, talvolta facilmente automatizzabile (perché indipendente dal contesto) e talvolta molto difficilmente automatizzabile (perché dipendente dal contesto applicativo), ed anche in fotogrammetria esistano altre operazioni di livello intermedio, facili o complesse, a secondo dei casi (sempre riferiti al contesto applicativo).

Nel passato i vari tipi di dati prodotti, con tecniche fotogrammetriche, erano rappresentati e archiviati su supporto cartaceo. Oggi l'archiviazione su un supporto elettronico, offre una maggiore flessibilità, permettendo vari tipi di elaborazione dei dati ed il loro aggiornamento. I dati possono essere archiviati in semplici file o in un archivio costituito da una base dati ed un insieme di programmi per la sua gestione.

Anche i pixel stessi delle immagini digitali costituiscono un insieme di dati ricco di informazioni; pertanto è possibile inserire le immagini stesse in una base dati, insieme ai risultati di un'eventuale restituzione. La base dati, in questo caso specifico, deve essere in grado di gestire dati raster e alfanumerici.

2.4 L'acquisizione delle immagini

Le immagini sono il terzo elemento nella definizione della fotogrammetria. Il termine fotografia si riferisce solamente ad immagini prodotte con pellicole fotosensibili e, come tale, oggi è troppo restrittivo, perché esclude le immagini digitali prodotte dai vari tipi di scanner. Una importante suddivisione fra tipi di immagini è quella fra immagini analogiche ed immagini digitali (Fig. 2.2).

Nelle prime, grazie alla dimensione ridotta del grano fotosensibile (nell'ordine di $1 \mu m$), l'intensità di grigio (o di colore) può variare, da punto a punto al variare della intensità di luce incidente, in modo praticamente continuo, con un numero pressoché infinito di sfumature diverse fra l'intensità minima e l'intensità massima di luce rilevata.

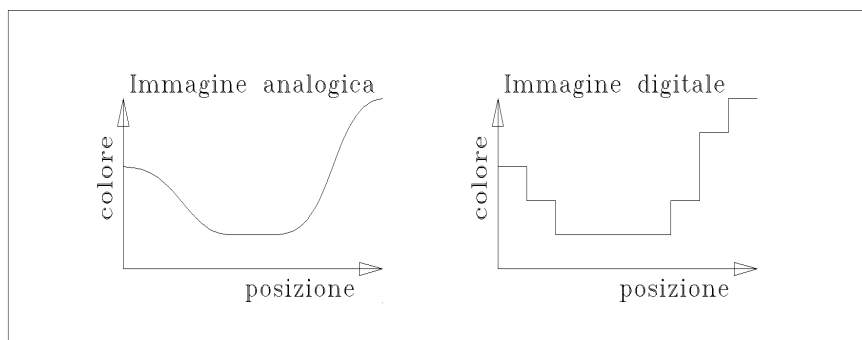


Fig. 2.2 – Immagini analogiche e digitali.

Le immagini digitali consistono di un reticolato di elementi quadrati chiamati pixel (dall'inglese: picture element, cioè elementi d'immagine), per ognuno dei quali l'intensità di grigio (o di colore) è costante ed è rappresentata da un numero intero il cui campo di variabilità è sempre limitato (ad esempio, 0 – 255). Le immagini prodotte dai vari tipi di scanner sono digitali: l'area occupata da ogni elemento fotosensibile è piccola, ma non trascurabile (nell'ordine di $5 - 30 \mu m^2$). La misura di intensità di luce, rilevata da un elemento fotosensibile, è tradotta in un numero intero da un convertitore analogico – digitale (A-D) la cui risoluzione definisce il numero di toni di grigio (o di scale di colore) presenti.

Esistono vari tipi di scanner. Una classificazione può essere fatta in base alla quantità di elementi d'immagine letti contemporaneamente. I due casi estremi sono la lettura di un elemento alla volta e la ripresa contemporanea di tutti gli elementi.

- Nel primo caso, si ha un solo elemento fotosensibile che deve essere orientato, in qualche maniera, per riprendere aree diverse dell'oggetto. Ad esempio, uno specchio rotante può convogliare sull'elemento la radiazione proveniente da zone contigue nella direzione perpendicolare all'orbita, mentre il movimento del satellite fornisce lo spostamento necessario lungo l'orbita. La presenza di un solo elemento fotosensibile facilita estremamente la calibrazione radiometrica, mentre una rigorosa descrizione della geometria è di una certa complessità, perché deve includere il movimento dello specchio rotante e quello del satellite nella sua orbita.
- Nel secondo caso, un esempio di lettura contemporanea di tutti gli elementi dell'immagine è la camera CCD. Nel piano focale di una camera CCD, una griglia regolare di elementi fotosensibili misura la luce incidente. La descrizione della geometria di presa è abbastanza semplice ed è simile a quella delle camere con pellicole analogiche. La descrizione radiometrica richiede invece la calibrazione di tutti gli elementi fotosensibili.
- Esistono anche casi in cui il tipo di scanner si colloca a metà fra i due estremi. Ogni riga è ripresa contemporaneamente da una barretta di elementi fotosensibili, mentre il moto del satellite nella sua orbita fornisce lo spostamento necessario per la ripresa di righe successive. La complessità della descrizione delle caratteristiche dell'immagine è ripartita in modo più equilibrato fra radiometria e geometria. Pertanto la calibrazione deve prendere in considerazione una riga di elementi fotosensibili, la descrizione della geometria di presa modellare l'orbita del satellite.

È sempre possibile convertire un'immagine analogica in un'immagine digitale, e viceversa, con strumentazione opportuna. Durante questi passaggi, cambiamenti nel contenuto radiometrico e geometrico sono inevitabili ed è assolutamente necessario verificare attentamente che il degrado della qualità rimanga entro limiti accettabili.

Una seconda distinzione fra tipi di immagini è quella definita dai termini inglesi *hardcopy* e *softcopy*, ovvero tra immagini su un supporto mirato all'interpretazione da parte di un operatore umano e quelle su supporto adatto ad essere letto da un calcolatore (Fig. 2.3). In generale, un'immagine *softcopy* è digitale ed un'immagine *hardcopy* analogica; tuttavia esistono anche immagini *softcopy* analogiche (ad esempio, su nastro video) e immagini *hardcopy* digitali (ad esempio, immagini prodotte con una stampante laser).

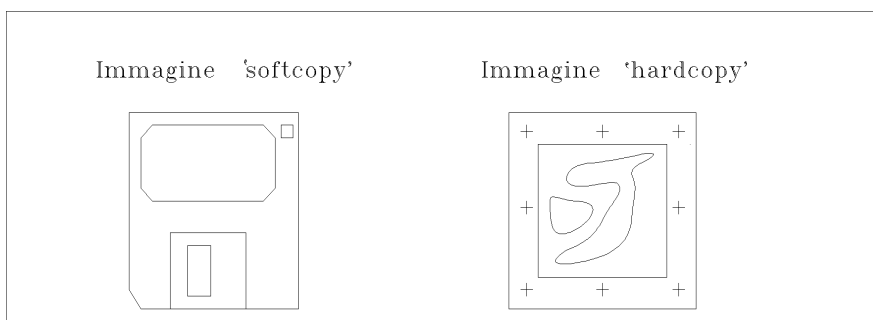


Fig. 2.3 - Immagini 'softcopy' e 'hardcopy'.

2.5 La tecnica usata per arrivare al risultato

Infine per quanto riguarda la tecnica utilizzata per poter produrre una descrizione dell'oggetto ripreso a partire dalle informazioni contenute nelle immagini, possono essere considerati due aspetti, da un lato, la strumentazione, dall'altro, gli algoritmi ed i metodi usati. L'elaborazione delle immagini analogiche richiede strumentazione altamente specializzata e molto costosa, mentre il trattamento delle immagini digitali può essere effettuato utilizzando calcolatori di uso generale e basso costo. Le figure 2.4, 2.5 e 2.6 riportano schematizzazioni dei restitutori analogico, analitico e digitale. I tre passi nell'evoluzione dei restitutori caratterizzano l'evoluzione della fotogrammetria stessa che utilizza, sempre meno, componenti ottico – meccaniche e, sempre più, elettroniche. La funzionalità di tutti i restitutori può essere suddivisa in tre aree:

- ❑ posizionamento;
- ❑ visualizzazione;
- ❑ restituzione.

In ogni caso, la visualizzazione delle immagini all'operatore è chiaramente un aspetto fondamentale, almeno finché tutte le procedure di restituzione non siano completamente automatizzate.



Figura 2.4 – Il restitutore analogico.

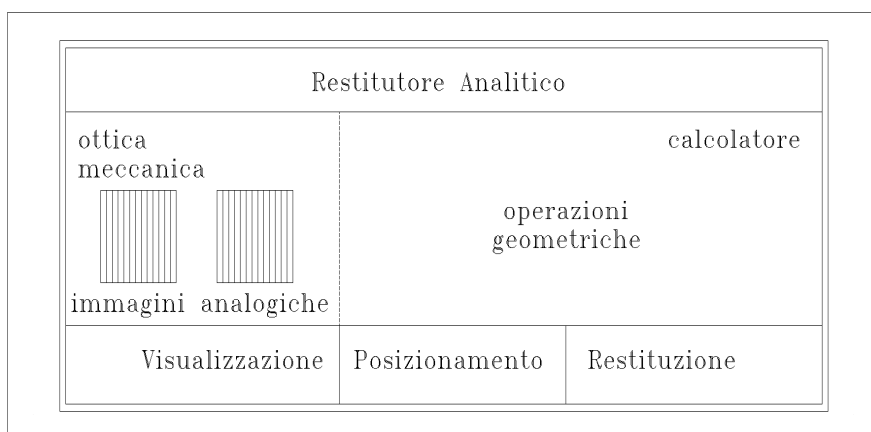


Figura 2.5 – Il restitutore analitico.

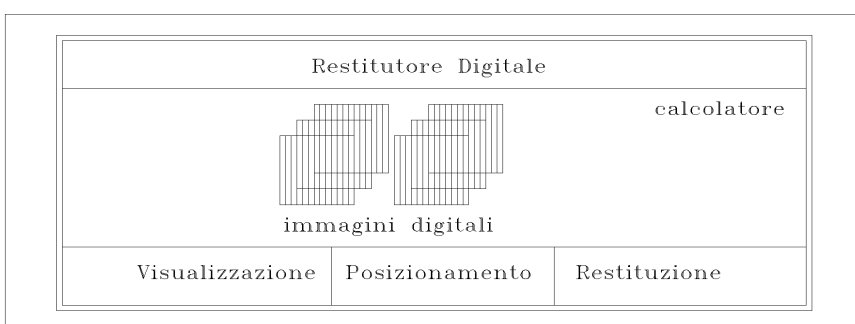


Figura 2.6 – Il restitutore digitale.

A differenza dei restitutori analogici ed analitici, i restitutori digitali permettono di visualizzare un numero qualsiasi di immagini digitali, su un monitor ad alta risoluzione, ed i programmi di visualizzazione consentono di regolare la scala, le dimensioni, il colore, il contrasto ed altri aspetti della rappresentazione delle immagini. La funzione di posizionamento permette all'operatore di mettere in evidenza un qualunque dettaglio dell'immagine, ma anche di muoversi nel modello 3D formato da una coppia di immagini. In quest'ultimo caso, il restitutore fornisce il legame fra le coordinate modello e le corrispondenti coordinate immagini. Mentre nei restitutori analogici il legame fra le coordinate modello e le corrispondenti coordinate immagine è determinato tramite la ricostruzione in modo meccanico dei raggi proiettanti, nei restitutori analitici e digitali la corrispondenza è determinata analiticamente con un algoritmo di calcolo. L'uso di un algoritmo svincola lo strumento di restituzione dalla classica proiezione centrale e permette l'utilizzo di una geometria di presa qualsiasi.

La visualizzazione delle immagini e la possibilità di posizionamento nel modello 3D sono due prerequisiti per il lavoro di restituzione. Inoltre l'operatore ha bisogno di funzioni che gli permettano di eseguire il suo lavoro vero e proprio, cioè la restituzione di punti, linee ed aree sulla superficie dell'oggetto. L'evoluzione nella strumentazione è accompagnata da notevoli cambiamenti anche negli algoritmi usati. La fotogrammetria con immagini analogiche si affida, pressoché totalmente, all'operatore fotogrammetrico. Infatti l'operatore è l'unico che vede ed interpreta le immagini. Solo i risultati della sua restituzione, le coordinate immagine o le coordinate modello, sono disponibili per l'elaborazione nel calcolatore. Invece i pixel delle immagini digitali sono direttamente disponibili nella memoria di un calcolatore e, come tale, accessibili ad algoritmi

automatici. Anche se difficilmente gli algoritmi automatici potranno completamente sostituire l'operatore, soprattutto ai livelli più alti d'interpretazione, certamente possono offrire un notevole supporto.

Gli sviluppi tecnologici recenti hanno prodotto calcolatori sempre più potenti, nuovi strumenti per la memorizzazione di grandi quantità di dati, scanner ad alta risoluzione, videocamere digitali e tutto ciò sta portando ad una sostituzione della fotogrammetria basata su immagini analogiche con quella basata su immagini digitali. Il suo basso costo e l'impiego di strumentazione non specializzata permette una maggiore penetrazione delle tecniche fotogrammetriche nei settori al di fuori delle tradizionali applicazioni cartografiche. La scomparsa della strumentazione specializzata fa sì che le applicazioni fotogrammetriche siano completamente gestite da un insieme di moduli software; in questo modo, la fotogrammetria (nata come tecnica complementare della topografia) diventa una parte dell'elaborazione di immagini.

2.6 Visualizzazione di immagini digitali

La visualizzazione di immagini è un elemento chiave dell'interfaccia uomo – macchina dei restitutori fotogrammetrici. Mentre i restitutori analogici e analitici visualizzano immagini analogiche tramite un sistema ottico – meccanico, i restitutori digitali visualizzano immagini digitali su un monitor ad alta risoluzione tramite un corredo di programmi di gestione tipici dell'informatica grafica. Nell'ambito delle ricerche fotogrammetriche questi argomenti sono relativamente nuovi, perché solo recentemente i produttori di hardware e software sono stati in grado di offrire sistemi fotogrammetrici digitali con prestazioni vicine a quelle della strumentazione fotogrammetrica classica. La visualizzazione di un'immagine digitale su un monitor richiede un'elaborazione dati nella quale i pixel immagine sono trasformati, geometricamente e radiometricamente, in pixel schermo.

La rappresentazione dell'immagine sullo schermo si basa su un'immagine digitale che divide lo schermo di una griglia regolare di pixel all'interno dei quali il colore è uniforme. Il numero di pixel è tipicamente nell'ordine di 1200×800 circa, la dimensione del singolo pixel sullo schermo varia tra 0.18 e 0.42 mm, con valori tipici di 0.3×0.3 mm². Di conseguenza, possono essere rappresentate fino a circa 3 linee al millimetro. A occhio nudo, è possibile distinguere circa 15 linee al millimetro, mentre un'immagine analogica può contenere fino a 100 linee distinte al millimetro (Fig. 2.7).

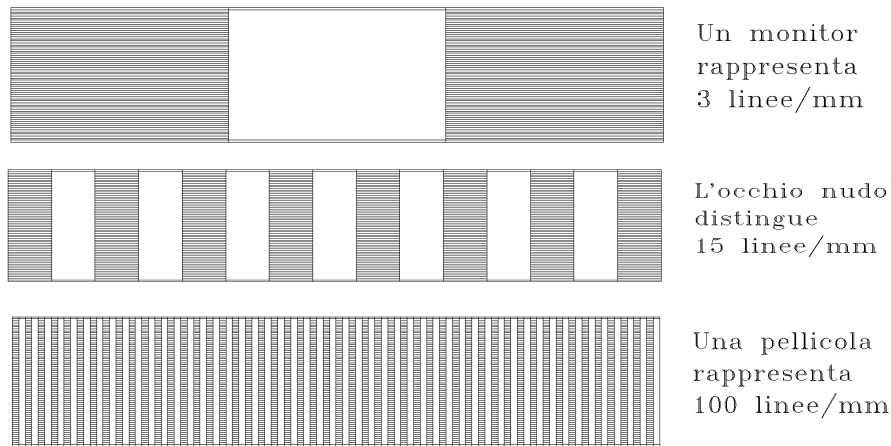


Fig. 2.7 – Confronto fra la risoluzione massima apprezzabile dall'occhio umano e le risoluzioni rappresentabili su una pellicola e su un monitor.

Il confronto dimostra come la risoluzione di un'immagine realizzata su un monitor dei restitutori digitali non solo è lontanissima da quella realizzabile su pellicola, ma è anche ben cinque volte più bassa dalla risoluzione massima apprezzabile a occhio nudo.

La maggior parte degli schermi per monitor e televisori utilizza la tecnologia CRT (Cathode Ray Tube, tubo a raggi catodici). Il principio di funzionamento è basato sulla gestione di un fascio di elettroni che eccitano uno strato di fosforo presente sul retro dello schermo. Modificando l'intensità del flusso nella scansione dei pixel si ottengono gradi di luminosità diversi. Nei monitor a colori sono necessari tre fasci di elettroni che definiscono rispettivamente le luminosità del rosso, del verde e del blu. Si noti inoltre come recenti avanzamenti tecnologici nella costruzione dei monitor non cambino, nella sostanza, il contenuto della trattazione. La fig. 2.8 riporta lo schema di due aree di memoria all'interno di una scheda video di un monitor monocromatico, la memoria schermo e la palette di colori.

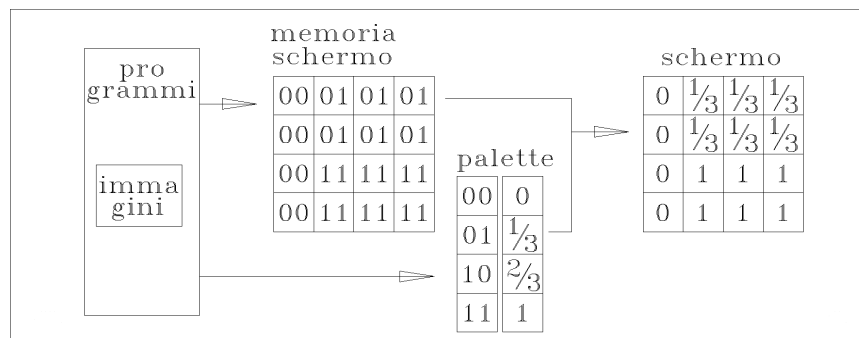


Fig. 2.8 – La memoria schermo e la palette di colori di una scheda video di un monitor monocromatico.

La memoria schermo contiene, per ogni pixel dello schermo, un'area di memoria di N bit per la definizione del colore del pixel. Il numero di bit per pixel N determina il numero di colori diversi rappresentabili simultaneamente sullo schermo (2^N): per i monitor monocromatici, esso varia generalmente fra 1 e 8. Con il numero di pixel schermo nell'ordine di un milione, la dimensione complessiva della memoria schermo è generalmente inferiore a un megabyte.

La palette dei colori di una scheda video, per un monitor monocromatico, è una tabella che contiene, per ogni codice di colore presente nella memoria schermo, un valore di intensità di grigio, compresa fra 0 (assenza di illuminazione) e 1 (illuminazione massima). La palette fornisce, per ognuno dei $2N$ colori, la corrispondente intensità di grigio. L'area di memoria disponibile, per la definizione di una intensità di grigio, deve essere almeno di N bit (per poter definire $2N$ colori diversi), ma è generalmente maggiore: nella palette è selezionato, dall'insieme di colori rappresentabili sul monitor, un sottoinsieme di intensità che possono essere effettivamente realizzate in un certo momento.

L'ampiezza delle celle della memoria schermo deve essere limitata per contenere i costi dell'hardware e per mantenere una velocità sufficiente nella gestione delle visualizzazioni. D'altra parte, è inutile spingere il numero di livelli di grigio al di sopra del numero distinguibile dall'occhio. Per uno schermo monocromatico, 8 bit (che permettono la rappresentazione di 256 livelli di grigio diversi) può essere un buon compromesso fra qualità dell'immagine e velocità di visualizzazione a costi contenuti. Avendo a disposizione N livelli di grigio, una scelta ovvia e ragionevole per le intensità di grigio g_i potrebbe essere:

$$g_i = \frac{i-1}{N-1} \quad i = 1, \dots, N$$

Le aree di memoria di una scheda video, per un monitor a colori, sono simili a quelle di una scheda video monocromatico, con l'unica differenza che per la definizione del colore di un pixel schermo occorrono tre intensità diverse (Fig. 2.9), rispettivamente per il rosso r , il verde v ed il blu b . Per questo motivo, nella palette, per ogni codice di colore devono essere specificati tre valori diversi. Un particolare colore corrisponde ad una particolare combinazione di intensità di rosso, verde e blu. Avendo a disposizione per la rappresentazione di un colore sullo schermo N colori diversi e volendo distribuire la risoluzione radiometrica equamente fra i tre canali, il numero di colori diversi per ciascun canale è: $M = \sqrt[3]{N}$. Le $2N$ combinazioni diverse delle intensità: r_i , v_j e b_k , costituiscono una palette con una distribuzione omogenea dei colori⁴:

$$r_i = \frac{i-1}{M-1} \quad i = 1 \dots M$$

$$v_j = \frac{j-1}{M-1} \quad j = 1 \dots M$$

$$b_k = \frac{k-1}{M-1} \quad k = 1 \dots M$$

⁴ E'altresi interessante notare come la colorimetria costituisca uno dei capitoli dell'ottica, assieme all'interferometria, più originali ed innovativi, e come l'ottica stessa, a sua volta, costituisca una delle branche di punta della fisica moderna. Infatti mentre l'ottica classica si è occupata della propagazione lineare della luce, ad esempio, studiando specchi e lenti, l'ottica moderna è interessata agli aspetti non – lineari della propagazione ed è contigua all'elettronica di cui non è necessario sottolineare le enormi potenzialità in tutti i campi delle tecnologie dell'informazione. Una nota particolare della moderna colorimetria è il tentativo di passare da uno studio a tre colori fondamentali (giallo, magenta e ciano), dove altri tre colori (verde, arancio e porpora) sono una loro sintesi additiva, ad uno a quattro colori opposti (rosso – verde, giallo – blu), più completo, perché capace di analizzare, in dettaglio, tutta la gamma dei verdi, tenendo presente la loro non equatorialità, rispetto al bianco ed al nero, e spingendo la classificazione fino ad oltre diecimila tinte.

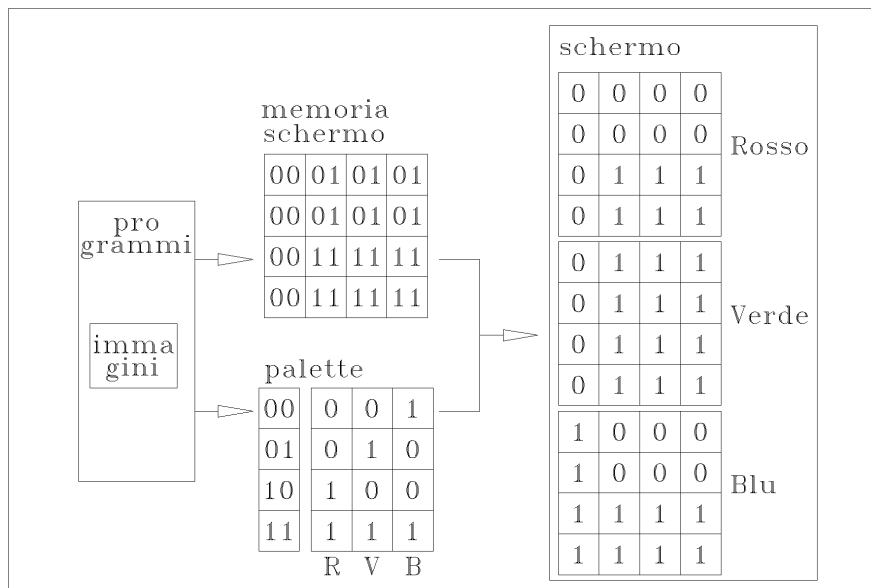


Fig. 2.9 – La memoria schermo e la palette di colori di una scheda video di un monitor a colori.

Raramente un'immagine deve occupare tutta l'area dello schermo. Generalmente è più pratico includerla in una finestra che copre solo parte dello schermo. Così i bordi della finestra possono essere utilizzati per la definizione di campi per l'attivazione, con il mouse, di funzioni come lo zoom o lo scorrimento dell'immagine. Inoltre nello spazio rimanente, l'operatore può visualizzare informazioni che possono essere d'aiuto per il suo lavoro, come la stessa immagine ad una scala diversa, dati alfanumerici o altre immagini della stessa zona. È possibile tenere ogni oggetto sullo schermo in una finestra separata, associata ad una palette privata. Ad esempio, per un'immagine a colori, tutti i colori devono essere definiti nella palette, mentre per un'immagine monocromatica tutti i colori possono essere riservati alle sfumature diverse di grigio.

Ad ogni momento, solo una delle varie palette può essere attiva; perciò cambiando finestra si deve cambiare palette. Per evitare che con questo cambio di colore vengano cambiati anche i colori d'ambiente, come lo sfondo, i bordi delle finestre, i campi dei titoli delle finestre, i testi dei titoli finestra, ecc., è necessario riservare alcuni colori delle palette per la definizione omogenea di questi colori globali (Fig. 2.10).

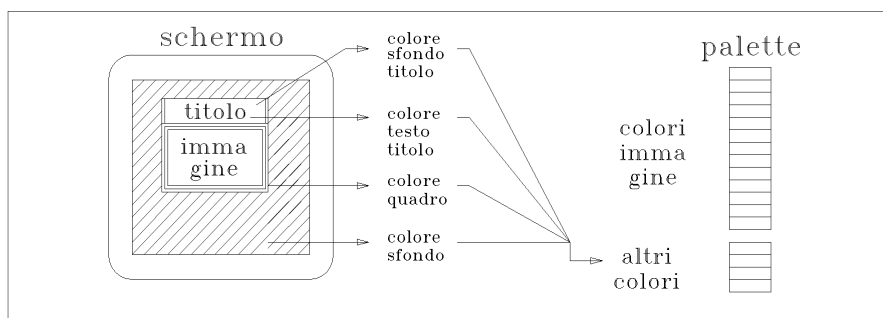


Fig. 2.10 – Una parte della palette viene riservata per i colori 'globali'.

Un altro uso speciale di alcuni colori della palette è la definizione di una sovrapposizione non distruttiva. I restitutori digitali offrono la possibilità di sovrapporre alle immagini simboli, linee, scritte ecc. Questo è un notevole passo avanti rispetto ai restitutori analogici e analitici. Infatti conviene elaborare anche le immagini monocromatiche su uno schermo a colori: mentre l'immagine rimane in sfumature di grigio, gli elementi

sovrapposti possono essere rappresentati in un determinato colore. Ovviamente la sovrapposizione deve cambiare solo la rappresentazione sullo schermo e non l'immagine digitale originale; a tale scopo, si cambia il contenuto delle celle della memoria schermo e non quelli dell'immagine digitale originale stessa. La sovrapposizione può essere realizzata in due modi: sovrapposizione distruttiva e non – distruttiva.

- ❑ Nella sovrapposizione distruttiva, nella palette il colore della sovrapposizione è definito, in modo normale, distruggendo i colori originali; allora ripristinare l'immagine sottostante è possibile solo ricaricando tutta l'immagine nella memoria schermo.
- ❑ Sovrapposizione non distruttiva, nella palette è predefinita una zona per il colore della sovrapposizione, in maniera tale che sia possibile ripristinare l'immagine originale, con un veloce aggiustamento della palette, lasciando inalterata la memoria schermo.

La figura 2.11 illustra il concetto della sovrapposizione non distruttiva. Per la dimensione limitata della palette, ritornare all'immagine originale ricaricando la palette originale è generalmente molto più veloce del ricaricamento dell'immagine nella memoria schermo. Tuttavia in cambio della maggiore velocità deve essere accettata una riduzione della risoluzione radiometrica. Per rappresentare un'immagine su una parte dello schermo, il programma di visualizzazione deve riempire le celle della memoria schermo e della palette dei colori. A questo scopo deve essere stabilita una relazione fra:

- ❑ i pixel dell'immagine digitale ed i pixel dello schermo;
- ❑ i valori radiometrici dei pixel dell'immagine e quelli dei pixel dello schermo.

Solo in casi eccezionali si verifica una relazione biunivoca fra un pixel immagine ed un pixel schermo, e fra la risoluzione radiometrica dell'immagine e quella dello schermo; pertanto devono essere affrontati problemi inerenti cambiamenti di scala e di radiometria.

2.7 Cambiamento di scala

La visualizzazione di un'immagine, a scale diverse, può essere molto utile. Talvolta infatti, conviene avere una visione globale dell'immagine, rappresentandola a scala ridotta, mentre in un altro istante, può essere necessario un forte ingrandimento per poter analizzare, con la massima precisione, un particolare. Nella strumentazione classica con immagini analogiche, la visualizzazione a scale diverse è realizzata tramite uno zoom ottico.

Nei restitutori digitali i programmi di visualizzazione sono in grado di gestire la rappresentazione dell'immagine a scale diverse. Nelle rappresentazioni sullo schermo di un'immagine digitale a scale diverse, per quanto riguarda la relazione fra un pixel immagine e la sua rappresentazione sullo schermo, possono essere distinti tre casi:

- ❑ scala: $s = 1$, dove esiste una relazione biunivoca fra pixel immagine e pixel schermo;
- ❑ riduzione (scala: $s < 1$), dove ad ogni pixel schermo corrisponde una zona nell'immagine originale maggiore di un pixel;
- ❑ ingrandimento (scala: $s > 1$), dove ad ogni pixel schermo corrisponde una zona nell'immagine originale minore di un pixel.

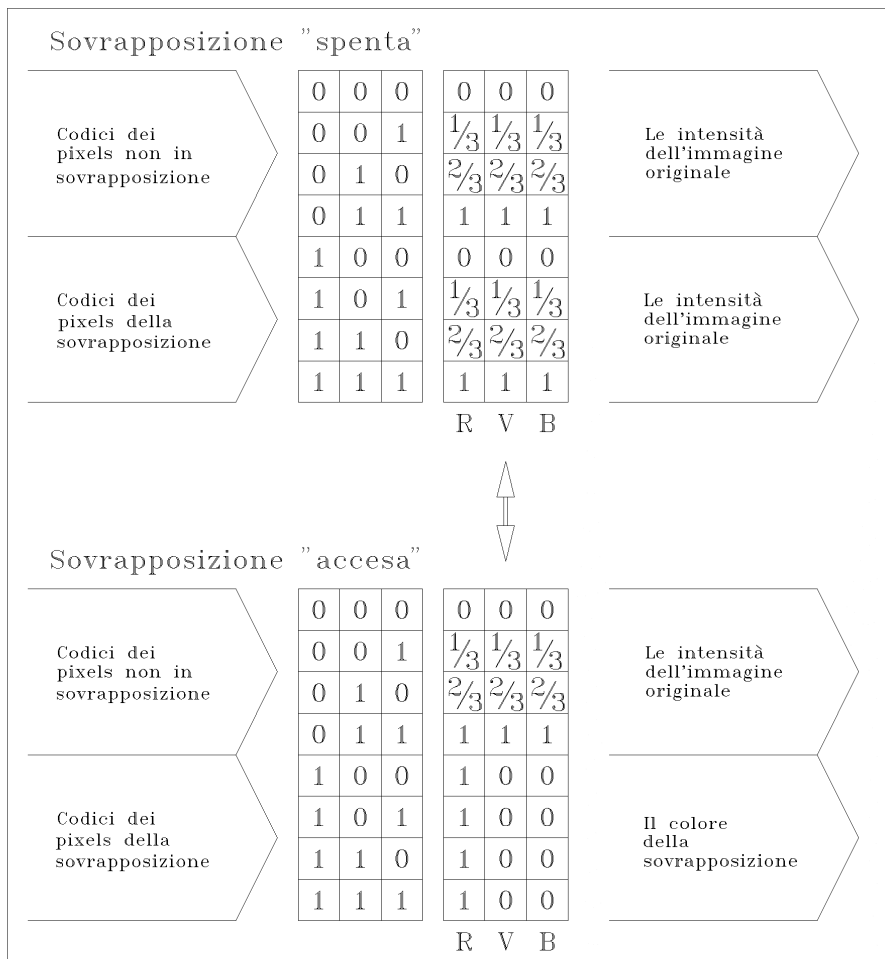


Fig. 2.11 – Il principio della sovrapposizione non – distruttiva.

Nella rappresentazione a scala: $s = 1$, ogni pixel schermo rappresenta un solo pixel immagine (Fig. 2.12): di conseguenza è sufficiente assegnare al pixel schermo il valore radiometrico del corrispondente pixel immagine.

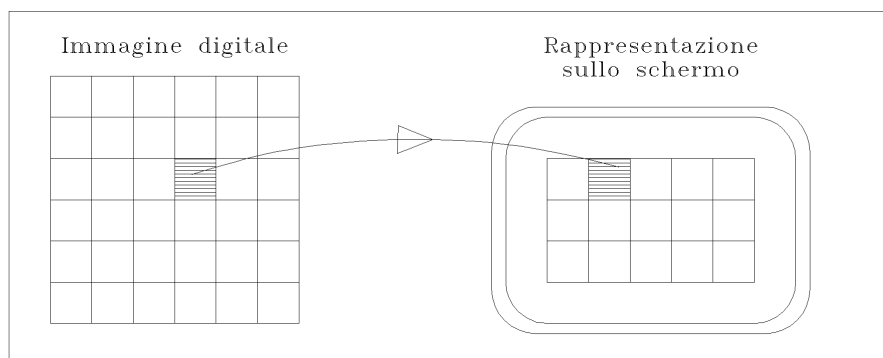


Fig. 2.12 – Visualizzazione di un'immagine digitale alla stessa scala.

2.7.1 Riduzione

Nella visualizzazione a scala ridotta ($s < 1$), ogni pixel schermo rappresenta una zona dell'immagine originale maggiore di un pixel (Fig. 2.13). In questo caso, l'approccio più semplice per il calcolo del valore radiometrico di un pixel schermo, è quello di mediare i valori radiometrici dei pixel dell'immagine compresi

nella zona rappresentata dal pixel schermo. In sostanza, si tratta di applicare un operatore di media mobile il cui nucleo K (dall'inglese: *kernel*) abbia proprietà adatte a tutta l'immagine, dove gli indici i' e j' rappresentano la riga e la colonna nell'immagine originale, corrispondente al centro del pixel $g^s(i,j)$ dell'immagine alla scala ridotta:

$$g^s(i, j) = s^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N K(i', j', k, l) g(k, l) \quad \text{dove: } K(i', j', k, l) = \begin{cases} 0 & \text{per } |i'-k| < \frac{2}{s} \wedge |j'-l| < \frac{2}{s} \\ 1 & \text{altrove} \end{cases}$$

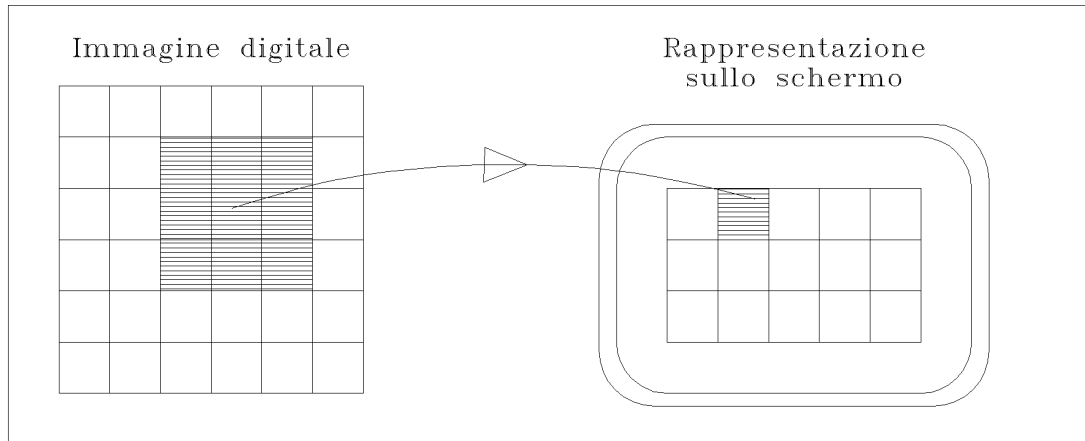


Fig. 2.13 – Visualizzazione di un'immagine digitale a scala ridotta.

La rappresentazione a scala ridotta non può contenere tutte le informazioni presenti nell'immagine alla scala originale. Infatti le frequenze più alte non sono rappresentabili e la frequenza massima rappresentabile da una griglia di pixel spaziate con equidistanza Δ è la frequenza di Nyquist:

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta} \text{ cicli/pixel}$$

La lunghezza d'onda di un segnale della frequenza di Nyquist è pari a due pixel: ad un pixel corrisponde il valore massimo all'altro il valore minimo. Nella rappresentazione a scala ridotta, la distanza fra i pixel successivi è Δ/s . Le alte frequenze dell'intervallo:

$$\left[\frac{s}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta} \right]$$

non rappresentabili alla scala ridotta e sono eliminate nelle operazioni di media dei valori radiometrici di zone contigue di pixel. Le frequenze più basse, in quanto ancora rappresentabili alla scala ridotta, possono rimanere inalterate. Tuttavia nella operazione di media vengono modificate anch'esse: per questo motivo la media non è il metodo migliore per il calcolo delle intensità da assegnare ai pixel schermo.

Un procedimento ideale, che lascia completamente inalterato il contenuto dell'immagine nelle frequenze ancora rappresentabili alla scala ridotta, richiede la convoluzione dell'immagine con la funzione sinc. Infatti la risposta spettrale di tale funzione presenta caratteristiche tali da eliminare le frequenze non rappresentabili, senza modificare le altre. Poiché la convoluzione è scritta in forma discreta, si ha:

$$g^s(i, j) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N K(i', j', k, l) g(k, l) \quad \text{dove: } K(i', j', k, l) = \frac{\sin(i'-k)}{i'-k} \cdot \frac{\sin(j'-l)}{j'-l}$$

Operativamente la scelta di questo nucleo (*kernel*) di convoluzione ideale è molto onerosa, poiché esso richiede che, nel calcolo di ogni pixel schermo, siano coinvolti tutti i pixel immagine. Fortunatamente, il contributo di un pixel immagine decresce rapidamente allontanandosi dalla zona di corrispondenza e pertanto è spesso possibile trascurare il loro contributo. Altri nuclei di convoluzione, come ad esempio quello mediano, sono invece adatti ad eliminare eventuali dati anomali, operando mediante procedure robuste.

2.7.2 Ingrandimento

Nel caso di una rappresentazione ad una scala ingrandita ($s > 1$), più pixel schermo corrispondono allo stesso pixel immagine (Fig. 2.14). Ad esempio, in un ingrandimento a scala N , ogni pixel immagine è rappresentato da una zona di $N \times N$ pixel schermo. In questi casi, la procedura più semplice è di assegnare a tutti i pixel schermo corrispondenti ad un pixel immagine il valore radiometrico del pixel immagine.

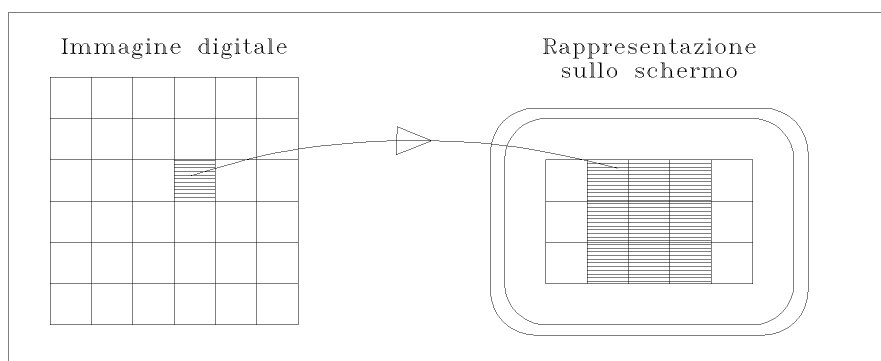


Fig. 2.14 - Visualizzazione di un'immagine digitale a scala ingrandita.

Tuttavia essendo i pixel schermo già molto grandi rispetto alla risoluzione massima distinguibile a occhio nudo, un ulteriore aumento delle aree dei pixel schermo porta ad un'immagine che l'occhio percepisce come costituito da un accostamento di zone quadrate, ciascuna di colore omogeneo. Una tale scacchiera è difficilmente interpretabile, perché i cambiamenti di forma e di colore avvengono in una maniera molto innaturale: non graduale e solo nelle direzioni orizzontale e verticale. Allora è assai meglio interpretabile un'immagine in cui i livelli di grigio cambiano in modo realistico, cioè senza direzioni preferenziali e senza la sovrapposizione di una tessitura estranea all'oggetto rappresentato. A questo scopo, la procedura di ingrandimento deve aumentare fittiziamente la risoluzione, assegnando i valori dei pixel schermo, tramite un processo di interpolazione dei valori radiometrici di un insieme di pixel immagine nella vicinanza della posizione corrispondente al pixel schermo (Fig. 2.15).

Al fine di effettuare la suddetta interpolazione, i valori radiometrici dei pixel immagine sono considerati valori puntuali rappresentativi per il centro del pixel. Per ogni pixel schermo, è definito un insieme (più o meno grande) di pixel immagine contribuenti alla funzione interpolante. In funzione del compromesso fra esigenze di prestazioni (velocità di risposta della funzione di zoom) e di precisione di rappresentazione, è poi definita una funzione interpolante (più o meno sofisticata). Il valore radiometrico di un pixel schermo è ottenuto calcolando il valore della funzione interpolante in corrispondenza al centro del pixel.

Anche nella procedura di interpolazione è ovviamente impraticabile tenere conto di tutti i pixel immagine per ogni pixel schermo, richiesto da metodi come la collocazione. D'altra parte, non è neanche necessario ricorrere a strumenti molto raffinati: già una semplice interpolazione bilineare, sui soli 4 pixel immagine più vicini, fornisce ottimi risultati.

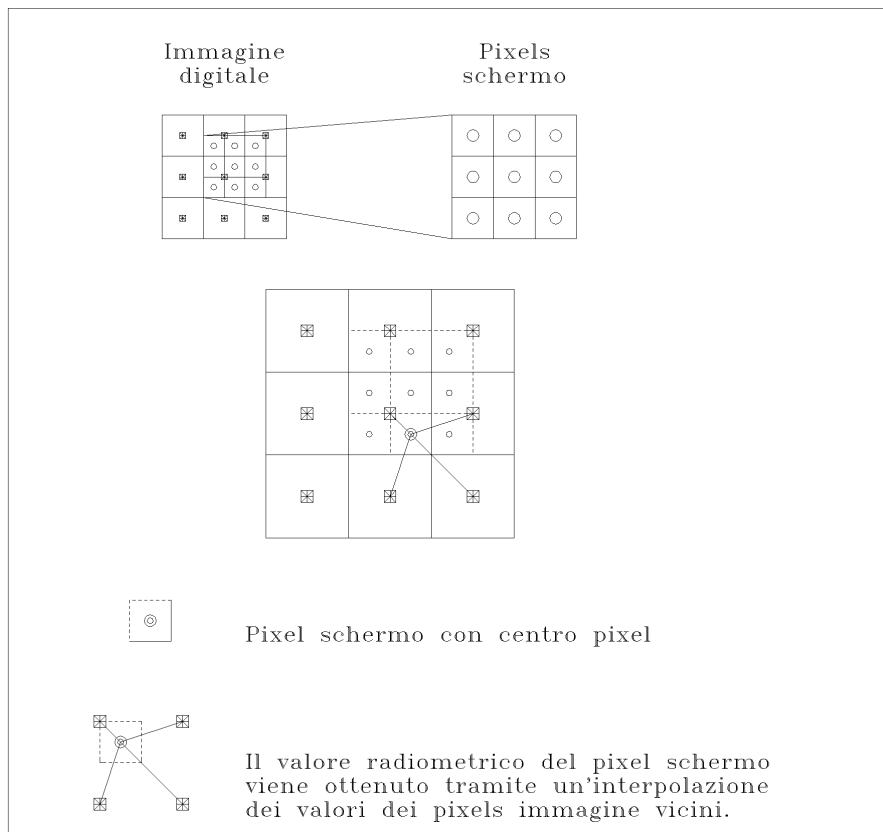


Fig. 2.15 – Ricampionamento.

2.8 Cambiamenti di radiometria

Una volta completati i processi di presa e dopo aver posizionato le immagini analogiche nei restitutori analogici od analitici, le possibilità di manipolazione dei colori nella visualizzazione dell'immagine sono molto limitate. L'unico strumento a disposizione è regolare l'intensità di illuminazione delle immagini, cioè aumentarla per osservare zone scure ed abbassarla per osservare zone particolarmente chiare. Nella visualizzazione delle immagini digitali invece la rappresentazione dei valori radiometrici può essere cambiata in diversi modi, alla ricerca della visualizzazione più adatta al processo d'interpretazione.

Le procedure precedentemente descritte danno luogo ad un insieme di pixel schermo con valori radiometrici ancora compatibili con l'immagine originale: anche se i valori radiometrici sono determinati con una procedura di media o di interpolazione, essi si riferiscono sempre ai valori radiometrici dell'immagine originale. Le procedure descritte nel prosieguo mostrano come si può definire una relazione fra i valori ancora compatibili con l'immagine e quelli dei pixel schermo, in modo tale da renderli compatibili con le caratteristiche dello schermo e venendo incontro alle esigenze dell'interpretazione dell'immagine.

Il primo passo è la definizione di un certo numero N_{sch} di intensità g_i riservate alla visualizzazione dell'immagine sullo schermo. Per un'immagine monocromatica si potrebbero per esempio dividere le intensità in modo omogeneo nell'intervallo $[0,1]$:

$$g_i = \frac{i-1}{N_{sch}-1} \quad i = 1, \dots, N_{sch}$$

Fissati i colori disponibili per la visualizzazione dei pixel schermo, il secondo passo è la determinazione di una relazione fra i valori radiometrici, presenti nell'insieme di pixel da visualizzare, ed i corrispondenti colori. I valori presenti nella parte dell'immagine che non è visualizzata possono essere trascurati: per questi non è necessario stabilire la relazione, il che permette, ad esempio, di aumentare il contrasto. Detto g_{min} il valore minimo e g_{max} il valore massimo di intensità di colore presente, il numero di valori radiometrici in ingresso N_{imm} è:

$$N_{imm} = g_{max} - g_{min} + 1$$

La procedura più semplice, per definire il colore dello schermo g_j , in funzione del valore radiometrico in ingresso g_i , è una semplice relazione lineare:

$$g_j = \frac{N_{sch}}{N_{imm}} (g_i - g_{min})$$

La relazione lineare fra colori dell'immagine e colori dello schermo lascia praticamente inalterato il contrasto dell'immagine originale: l'unico cambiamento è l'aumento (o la diminuzione) di un fattore costante N_{sch}/N_{imm} , della differenza fra due valori radiometrici successivi, in tutto l'intervallo dei colori visualizzati. Possono verificarsi tre casi distinti (Fig. 2.16).

- $N_{imm} = N_{sch}$, nel caso (particolare) in cui il numero di colori disponibili per la visualizzazione dell'immagine sullo schermo risulti uguale al numero di valori radiometrici da visualizzare, può essere definita una relazione biunivoca fra colori in ingresso e colori in uscita.
- $N_{imm} < N_{sch}$, nel caso in cui il numero di colori per la visualizzazione dell'immagine sullo schermo risulti maggiore del numero di valori radiometrici da visualizzare, il numero di colori riservati alla visualizzazione è sovradimensionato: alcuni colori dello schermo non verranno utilizzati.
- $N_{imm} > N_{sch}$, nel caso in cui il numero di colori per la visualizzazione dell'immagine sullo schermo risulti minore del numero di valori radiometrici da visualizzare, il numero di colori riservati alla visualizzazione è sottodimensionato: alcuni colori dello schermo corrispondono a più valori di ingresso e la visualizzazione avviene con una risoluzione radiometrica ridotta.

Nell'ultimo caso, esiste una tecnica (dithering) per aumentare artificialmente la risoluzione radiometrica, diminuendo tuttavia la risoluzione geometrica: non si considera più il singolo pixel schermo, ma piuttosto insiemi di $N \times N$ pixel, diminuendo artificialmente di N volte la risoluzione geometrica dello schermo.

Considerando gruppi di $N \times N$ pixel come unità di colore omogeneo, è possibile simulare $N^2 - 1$ sfumature di colori intermedi fra due colori successivi g_i e $g_i + 1$, assegnando a k pixel elementari il colore g_i e a $(N^2 - k)$ pixel il colore $g_i + 1$ (per $k = 1, \dots, N^2 - 1$). La figura 2.17 riporta, ad esempio, le 8 sfumature intermedie costruibili con un'insieme di 3×3 pixel. Il numero totale di colori visualizzabili, con questi superpixel $N \times N$, è uguale a:

$$N_{sch}[N \times N] = (N_{sch} - 1)N^2 + 1$$

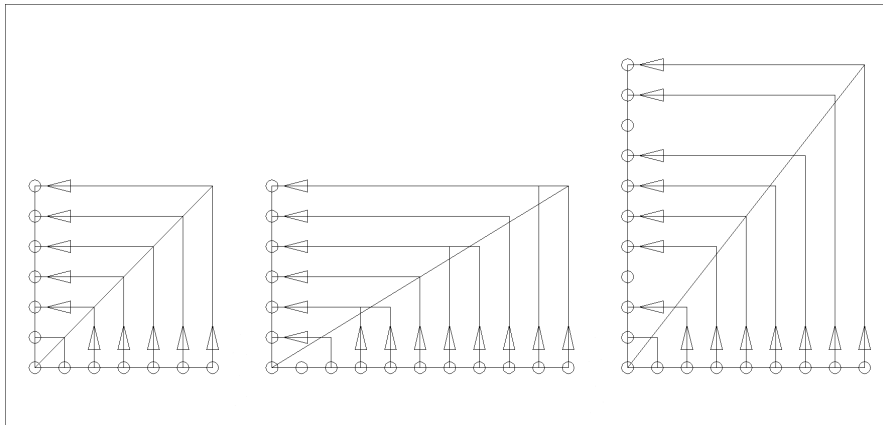


Fig. 2.16 – I tre casi fra la risoluzione radiometrica dell'immagine e quella della sua rappresentazione sullo schermo: relazione 1:1, riduzione del numero di colori, mancato utilizzo di alcuni colori.

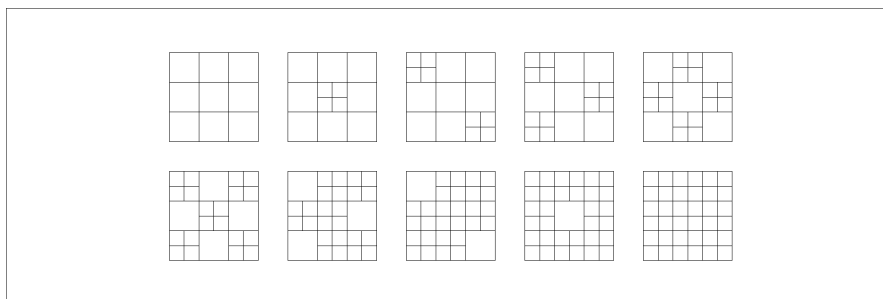


Fig. 2.17 – Simulazione di 8 sfumature intermedie di grigio con due livelli di grigio utilizzando un insieme di 3×3 pixel.

La fedeltà nella rappresentazione radiometrica è certamente un pregio, ma talvolta il risultato è una visualizzazione con scarso contrasto. Questa circostanza si presenta nei casi in cui l'istogramma dei colori possiede una coda, indicando la presenza di alcuni pixel particolarmente chiari o particolarmente scuri. Spesso accade che una piccola percentuale di pixel con valori radiometrici particolarmente alti occupano una parte consistente dell'intervallo fra g_{min} e g_{max} .

Definendo una relazione lineare fra i valori radiometrici dell'immagine ed i corrispondenti colori sullo schermo, buona parte del potere di risoluzione è dedicata alla discriminazione fra i valori radiometrici di quel piccolo gruppo di pixel, mentre è più importante poter discriminare colori vicini per gli intervalli radiometrici di cui fanno parte la maggioranza dei pixel. Quando nell'istogramma sono presenti lunghe code, si può ad esempio assegnare all'insieme del 5 % dei pixel con i valori radiometrici più elevati la luminosità massima,

all'insieme del 5 % dei pixel con valori radiometrici più bassi la luminosità minima, in modo da poter dedicare tutto il potere di discriminazione ai valori dell'insieme del 90 % dei pixel restanti:

$$g_i = \begin{cases} 0 & \text{se } g_i < g_{0,05} \\ \frac{N_{sch\ 0,90}}{N_{imm}} (g_i - g_{0,05}) & \text{se } g_{0,05} < g_i < g_{0,95} \\ 1 & \text{se } g_{0,95} < g_i \end{cases}$$

Seguendo questo ragionamento si può definire una relazione fra valori in ingresso e valori in uscita, dove si dedica ad ogni parte dell'istogramma un intervallo di contrasto proporzionale alla numerosità della classe. Questo procedimento è detto equalizzazione dell'istogramma (histogram equalization): esso ottimizza il contrasto, provocando tuttavia una distorsione del contrasto originale.

2.9 Il puntino luminoso e lo scorrimento dell'immagine

Nei restitutori digitali, anche il puntino luminoso e lo scorrimento dell'immagine sono gestiti dai programmi di visualizzazione. Il puntino luminoso non è altro che una maschera di pixel che si sovrappone all'immagine sullo schermo alla posizione attuale del cursore (mouse). In risposta ai movimenti del cursore, i programmi di visualizzazione devono spostare sullo schermo la maschera che rappresenta il puntino luminoso e fare riapparire i pixel dell'immagine quando il puntino luminoso si è spostato.

La forma ed i colori del puntino luminoso sono completamente a scelta dell'utente (almeno in teoria); pertanto è possibile cambiare il puntino luminoso per ogni singolo punto che deve essere misurato, ad esempio, adeguandone la dimensione, la forma ed il colore alla dimensione, alla forma ed al colore del punto immagine da misurare.

Quando l'operatore nei restitutori analogici o analitici cambia la posizione del puntino luminoso nel modello stereoscopico o in una delle immagini, il puntino luminoso sembra rimanere in una posizione fissa, mentre le immagini si muovono. Invece nei restitutori digitali è possibile sia tenere fermo il puntino luminoso e fare scorrere l'immagine sottostante, sia spostare il puntino luminoso rispetto ad un'immagine ferma. Per quanto riguarda l'onerosità del calcolo, è molto più vantaggioso tenere ferma l'immagine e fare spostare il puntino luminoso.

Muovere l'immagine anche di un solo pixel vuol dire dover cambiare interamente il contenuto della memoria schermo, mentre uno spostamento del cursore rispetto ad un'immagine ferma coinvolge solo i pixel delle due posizioni del puntino luminoso. D'altra parte poiché per l'operatore è più comodo avere il puntino luminoso costantemente fermo al centro dell'immagine e far scorrere l'immagine sottostante, un hardware speciale, realizzato per alcune applicazioni fotogrammetriche, mantiene il puntino luminoso fisso, nel contempo, garantendo una velocità adeguata per l'aggiornamento dello schermo (ad esempio, 70 aggiornamenti dello schermo al secondo).

2.10 Elaborazione di immagini digitali

La fotogrammetria deve fornire una descrizione di oggetti, a partire da immagini di questi oggetti; per assolvere tale compito, ha bisogno di modelli matematici che esplicitano il legame fra i dati di ingresso disponibili (le immagini) ed i dati in uscita da produrre (la descrizione dell'oggetto). Nella formulazione del modello matematico, devono essere equilibrate due esigenze contrapposte. Per poter garantire stabilità e

affidabilità della soluzione, è necessario ridurre, il più possibile, il numero di parametri incogniti. D'altra parte, un risultato preciso ed accurato richiede un modello matematico più sofisticato.

Nella ricerca di un modello matematico il più realistico possibile, si ha spesso la tentazione di introdurre sempre più parametri, per poter tenere conto dei tanti fattori che influenzano le osservazioni. Tuttavia bisogna sempre tenere presente che ogni parametro aggiunto diminuisce la stabilità della soluzione e può anche compromettere la determinabilità di uno degli altri parametri. Al contrario, un modello matematico troppo semplice spreca una parte delle informazioni contenute nelle osservazioni, aumenta l'incertezza di stima e può condurre a deviazioni delle stime. La sofisticazione del modello matematico deve perciò fermarsi al punto in cui le osservazioni non permettono più una stima affidabile delle grandezze in gioco.

Nella fotogrammetria digitale le osservazioni elementari sono i valori radiometrici dei pixel. Formulare un modello matematico per i pixel è teoricamente molto attraente. Pertanto costruendo un legame diretto fra i valori radiometrici osservati ed i parametri della descrizione dell'oggetto, è possibile sfruttare tutte le informazioni disponibili. Tuttavia nella pratica, è molto complesso formulare una descrizione realistica di questo legame che non richieda numerose informazioni, a priori, sui parametri in gioco; inoltre è molto oneroso, in termini di calcolo, dover trattare tutti i singoli pixel come osservazioni.

Un approccio più praticabile è l'impiego di osservazioni derivate dai pixel, ad esempio, punti e/o linee, misurati manualmente od in modo automatico. Questa alternativa si basa su una procedura in cinque passi, ognuno con un modello matematico relativamente semplice. La semplicità dei modelli deriva del fatto che le informazioni contenute nelle immagini sono utilizzate, di volta in volta, solo in parte.

2.11 Modelli per punti immagine

Una descrizione della forma di un oggetto ripreso può essere ottenuta con una procedura, articolata in quattro / cinque passi, che sfrutta la disponibilità dei valori di intensità dei singoli pixel:

- determinazione della geometria di presa;
- ricerca di punti omologhi o linee omologhe;
- calcolo delle coordinate oggetto corrispondenti agli elementi omologhi;
- ricostruzione della superficie e costruzione dell'ortoimmagine.

rimanendo comunque assai vicina alla prassi usuale della fotogrammetria analitica. La determinazione della geometria della presa ha un ruolo di supporto ed è relativamente indipendente dagli altri. Una volta determinata la geometria di presa, gli altri tre passi portano dai valori dei pixel immagine alla descrizione della superficie dell'oggetto rilevato. I risultati di ogni passo intermedio costituiscono i dati di ingresso per il passo successivo. Ad ogni passo, corrisponde un modello matematico che definisce quali siano i parametri da ottenere ed il modo in cui i dati di ingresso danno informazione su questi parametri. Successivamente deve essere applicato un metodo per la determinazione dei parametri, ad esempio, il metodo dei minimi quadrati o, in alternativa, l'uso di procedure robuste. Infine come già detto in precedenza, metodologie e procedure dell'analisi multivariata (ad esempio, la cluster analysis, la regressione multipla, l'analisi di varianza e le stime di covarianza) si applicano alla determinazione della significatività dei parametri dei modelli adottati, come pure alla reiezione di piccoli e medi errori grossolani.

2.11.1 Determinazione della geometria di presa

La stima della corretta geometria di presa è il primo passo della procedura. Nel caso classico della proiezione centrale, la geometria di presa è definita, nota la posizione del punto di presa e l'assetto del sensore. Nel caso di immagini, dove ogni singola cella od ogni riga è presa da un punto diverso con un orientamento diverso, è necessario un modello più complesso. Le osservazioni impiegate, in questa prima fase, sono le coordinate immagine di punti omologhi in immagini sovrapposte e soprattutto quelle relative a punti immagine con coordinate oggetto note (i punti di appoggio). Inoltre possono essere utilizzate osservazioni dirette di alcuni parametri, ad esempio, la posizione del punto di presa o l'assetto del sensore. Per ogni punto immagine, può essere definito il corrispondente raggio proiettante, cioè una retta che comprende il punto oggetto, il punto di presa ed il punto immagine.

Le osservazioni di punti immagine cosiddetti d'appoggio, cioè corrispondenti a punti oggetto con coordinate note, forniscono informazioni sulla geometria di presa rispetto al sistema di riferimento in cui sono espresse le coordinate dei punti oggetto (Fig. 2.18); pertanto il raggio proiettante deve comprendere anche il punto oggetto. Le osservazioni di punti omologhi su immagini sovrapposte forniscono informazioni sulla geometria di presa di un'immagine rispetto ad un'altra (Fig. 2.19); pertanto i raggi proiettanti devono necessariamente intersecarsi.

2.11.2 Ricerca di punti omologhi e/o linee omologhe

La fase successiva è la ricerca (preferibilmente automatica) di un numero elevato di punti omologhi e/o linee omologhe nelle immagini (Figure 2.20 e 2.21). Per quanto riguarda le ricerche automatiche, sono considerati due approcci, la ricerca di punti omologhi veri e propri che conduce ad un matching fra due o più immagini basato sulle aree e la ricerca di linee omologhe con la successiva definizione di punti omologhi su queste linee, con l'aiuto delle linee epipolari, che conduce invece ad un matching fra due o più immagini basato sulle linee caratteristiche (in inglese, features). La ricerca di figure omologhe che conduce ad un matching fra le immagini di tipo relazionale, considerando anche gli attributi di dette figure, è considerato estraneo agli scopi del presente lavoro. In questo caso specifico, la ricerca di elementi omologhi si basa sulla somiglianza fra le rappresentazioni di una stessa zona dell'oggetto su immagini sovrapposte.

Uno degli algoritmi più precisi, per la ricerca di elementi omologhi, si basa sulla ricerca del massimo della correlazione fra due o più immagini del medesimo oggetto (dove la ridondanza è solitamente richiesta per problemi d'affidabilità delle osservazioni). L'algoritmo prende in considerazione una finestra, fissa in un'immagine, e cerca una finestra corrispondente, nelle altre immagini, nella quale i pixel assomigliano il più possibile a quelli della finestra fissa, secondo il criterio dei minimi quadrati. Pertanto la somma dei quadrati delle differenze dei valori radiometrici dei pixel delle due finestrelle deve essere minima:

$$\sum_i \sum_j (g_p(i,j) - g_r(i,j))^2 = \min$$

Il più possibile può, in alternativa, essere definitivo facendo uso di procedure robuste, dove la somma, opportunamente pesata e talvolta potata, dei quadrati delle stesse differenze deve allora essere minima. Il modello più semplice contiene solo due parametri incogniti, le coordinate del punto omologo ed, implicitamente, assume che due immagini siano uguali a meno di una traslazione (Fig. 2.22):

$$g_p(i, j) = g_r(i + \Delta r, j + \Delta c)$$

In generale, due immagini sovrapposte presentano anche differenze di scala, orientamento e radiometria.

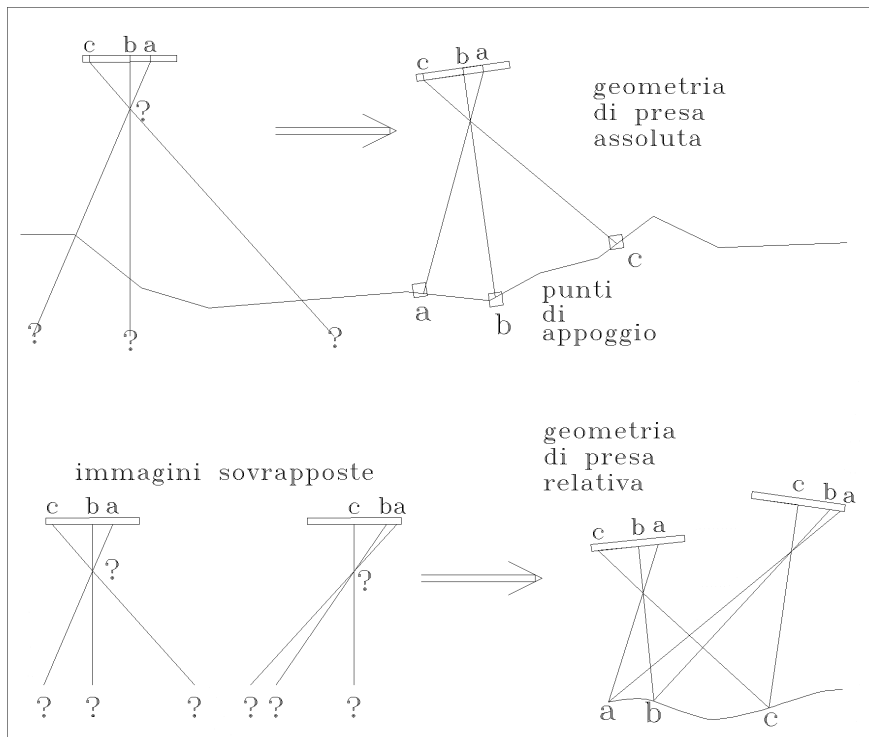


Fig. 2.18 – Contributi alla determinazione della geometria di presa: punti di appoggio e punti omologhi.

Pertanto altri parametri devono essere introdotti, per descrivere le differenze in geometria e in radiometria fra le due finestrelle. Un modello più complesso stabilisce che due immagini siano geometricamente uguali a meno di una trasformazione affine. Questo modello contiene otto parametri, oltre alle coordinate del punto omologo, due fattori di scala e due d'orientamento (una rotazione ed una torsione), nonché quelli di una trasformazione lineare per la radiometria (Fig. 2.21):

$$g_p(i, j) = c_0 + c_1 g_r(i + \Delta r + ic_2, j + \Delta c + ic_4 + jc_5)$$

Modelli ancora più complessi stabiliscono relazioni non – lineari fra due immagini e/o modelli partizionati, per lo più lineari, opportunamente raccordati fra loro; tuttavia problemi computazionali e di condizionamento numerico fanno sì che il loro uso sia, nei fatti, abbastanza raro.

E' facile dimostrare ed è intuitivamente chiaro che la ricerca della correlazione può andare a buon fine, solo se sono presenti cambiamenti di colore o di grigio in tutte le direzioni. Infatti se il colore o il grigio in una determinata direzione non cambia, non è determinabile la posizione del punto omologo in quella direzione. L'esigenza della presenza di cambiamenti in ogni direzione all'interno della finestrella limita notevolmente l'area dell'immagine nella quale il metodo può essere utilizzato. In alternativa alla ricerca di punti omologhi, è possibile individuare linee omologhe, con l'aiuto delle linee epipolari. Linee o bordi sono insiemi di pixel contigui, perpendicolari al cambiamento locale del colore o del grigio. L'omologo di un bordo è cercato, nell'altra immagine, sulla base della somiglianza di forma, della entità del cambiamento e della posizione nell'immagine. Una volta trovata una coppia di linee omologhe, è possibile ottenere una serie di punti

omologhi. Infatti con la conoscenza della geometria di presa di una coppia di immagini, la ricerca dell'omologo di un punto immagine può essere limitata ai soli punti appartenenti alla sua linea epipolare. Questa corrisponde all'intersezione di due piani:

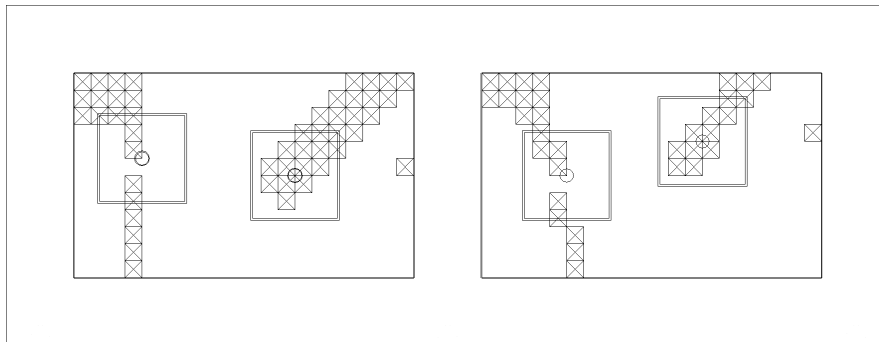


Fig. 2.19 – Punti omologhi possono essere definiti in aree dell'immagine dove si verificano cambiamenti di colore in direzioni diverse.

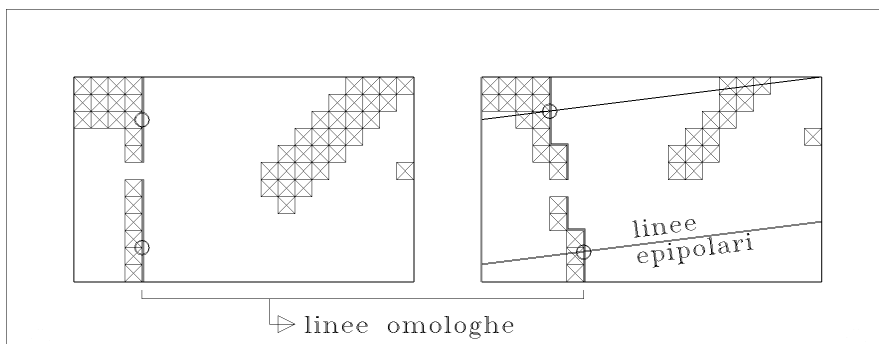


Figura 2.20 – Da linee omologhe possono essere ottenuti punti omologhi con l'aiuto delle linee epipolari.

- ❑ il piano definito dal punto immagine, preso in considerazione, ed i punti di presa delle due immagini;
- ❑ l'immagine nella quale si cerca il punto omologo.

Una volta selezionato un punto su una linea, allora il suo punto omologo è individuato dall'intersezione della linea omologa con la linea epipolare del punto prescelto.

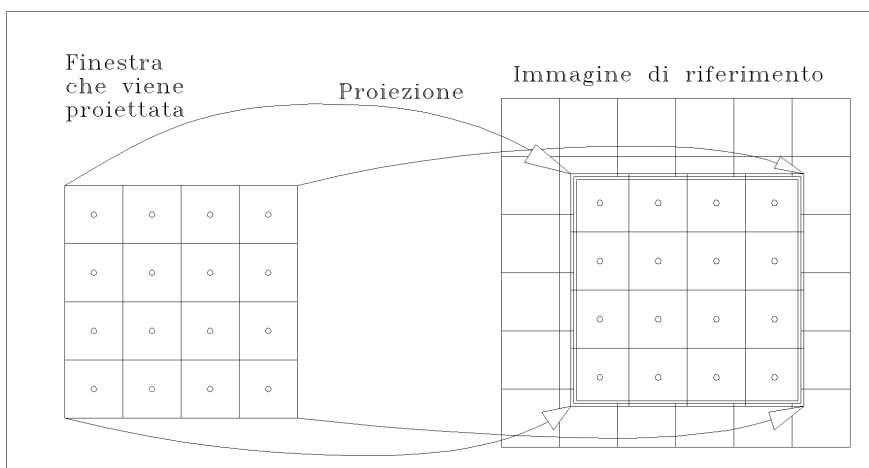


Figura 2.21 – Correlazione ai minimi quadrati, modello semplice.

Nelle immagini dove ogni singola cella od ogni riga ha un centro di proiezione diversa, le linee epipolari non corrispondono a rette e la loro determinazione è più complessa. Anche in questo caso l'algoritmo può essere applicato solo ad aree particolari dell'immagine, laddove si hanno bordi ben definiti.

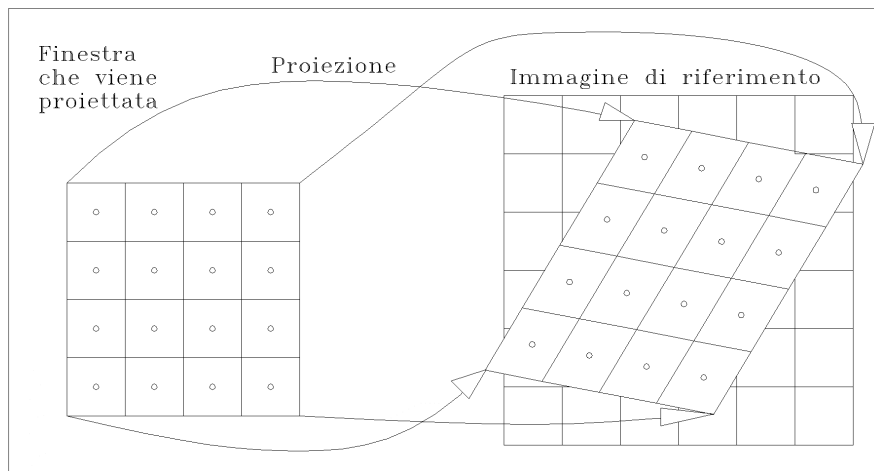


Figura 2.22 – Correlazione ai minimi quadrati, modello più complesso.

Operare con più immagini comporta l'esecuzione degli stessi passi della procedura descritta. In questo caso, il numero di parametri, per ogni modello adottato, cresce proporzionalmente al numero di immagini. Si noti, come la relativa facilità di effettuare confronti fra due, a fronte delle complessità di effettuare confronti fra molti, porti ad effettuare il matching nello spazio oggetto (considerato un riferimento comune), anziché nello spazio immagine.

2.11.3 Il problema della corrispondenza

Una volta effettuata la ricerca di elementi omologhi in due o più immagini sovrapposte, si ha a disposizione un numero (possibilmente assai elevato) di elementi caratteristici ben distribuiti sulle immagini. Nell'area di sovrapposizione le immagini sono simili; pertanto è probabile che l'omologo di un elemento caratteristico, in un'immagine, corrisponda ad un elemento caratteristico, nelle altre immagini, oppure si trovi almeno nelle sue vicinanze. Il problema è ora quello di riconoscere, fra tutte le combinazioni possibili, quali sono le coppie o le ennuple effettive di elementi caratteristici (Fig. 2.23). Se non è disponibile alcuna informazione, né sulla geometria di presa, né sulla forma dell'oggetto, non può essere esclusa dalla ricerca dell'elemento caratteristico omologo alcuna zona dell'immagine.

Per trovare, nell'altra immagine, l'elemento caratteristico che più assomiglia all'elemento caratteristico di riferimento è necessario fare il confronto con tutti gli elementi caratteristici delle altre immagini. Questo è non solo svantaggioso dal punto di vista dei tempi di calcolo, ma anche molto rischioso, perché è assai probabile trovare coppie o ennuple di finestre con un contenuto molto simile che non corrispondono ad elementi omologhi. Un caso estremo si trova nella fotogrammetria dei vicini con punti segnalizzati; infatti un punto caratteristico, corrispondente ad un segnale, assomiglia al punto caratteristico del segnale nelle altre immagini, ma altrettanto a quelli corrispondenti a tutti gli altri segnali. Più piccola è la finestrella utilizzata nella correlazione, più alta è la probabilità di non trovare finestrelle simili solo per caso.

Utilizzando la conoscenza, anche approssimata, della geometria di presa e della forma dell'oggetto, è possibile limitare l'area di ricerca per i candidati elementi omologhi, riducendo così il numero di elaborazioni

e la probabilità del verificarsi di errori grossolani nella determinazione degli elementi omologhi. Conoscendo la geometria di presa, di due o più immagini, e la forma dell'oggetto rappresentato in esse, è possibile trovare l'omologo di un elemento immagine nelle altre immagini.

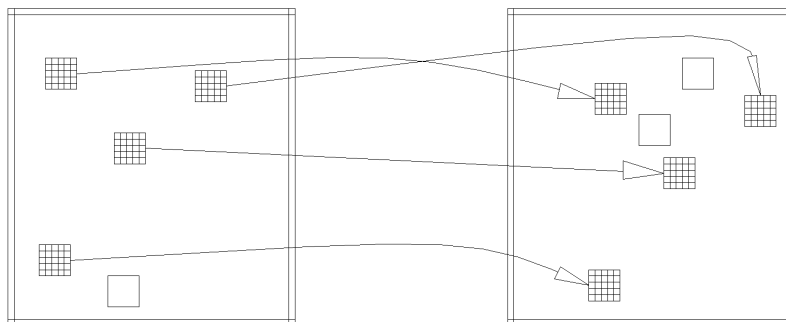


Fig. 2.23 – Il problema della corrispondenza.

Utilizzando un procedimento iterativo, si determinano dapprima le coordinate planimetriche dell'elemento, avendo assegnato, inizialmente, una quota arbitraria. Date le coordinate oggetto dell'elemento, si risolvono le equazioni di collinearità rispetto alle coordinate immagine delle immagini omologhe.

Per coppie o ennuple di immagini non a proiezione centrale, anche questo secondo passo comprende una procedura iterativa, per determinare il centro di proiezione da cui è stato preso il punto (infatti ad ogni singola cella od ad ogni riga dell'immagine, corrisponde un punto di presa diverso). Se la geometria di presa può essere considerata nota (la ricerca degli elementi omologhi avviene a valle della triangolazione aerea), la forma dell'oggetto non lo è sicuramente (ed è lo scopo della procedura determinarla). In ogni caso, qualche informazione è sempre disponibile.

Una volta tolto, per ogni elemento immagine, l'effetto della quota (cioè dopo aver riportato ogni elemento immagine alla posizione in cui si sarebbe trovato se l'elemento oggetto avesse avuto la quota arbitraria, inizialmente, assegnata), la relazione fra le posizioni di elementi omologhi, nelle diverse immagini, può essere descritta, con buona approssimazione (alcuni pixel), da una trasformazione affine cui affiancare una trasformazione lineare per la radiometria. Dato un elemento nell'immagine sinistra, la procedura per ottenere la posizione approssimata del suo omologo, nell'immagine destra (da considerarsi una alla volta, in caso di più immagini), si articola dunque in tre passi:

- ❑ correzione per la quota ipotizzata dell'elemento, ottenendo la sua posizione nell'immagine, nel caso il punto avesse avuto quota Q_0 , ovvero la quota per la quale è valida la trasformazione affine;
- ❑ trasformazione affine, per trovare l'elemento corrispondente nell'immagine destra, sotto l'ipotesi che questo si trovi a quota Q_0 ;
- ❑ correzione per riportare l'elemento, sull'immagine destra, dalla quota Q_0 alla sua quota ipotizzata.

L'incertezza nella trasformazione affine, fra le due o più immagini, è molto limitata (alcuni pixel), quella nelle due o più correzioni per la quota dipende dall'incertezza nella conoscenza della quota stessa. In base all'incertezza nella determinazione della posizione dell'elemento omologo, può essere definita, per ogni

elemento caratteristico nell'immagine, una zona più o meno ristretta nell'altra immagine alla quale può essere limitata la ricerca dell'elemento omologo.

Tre casi diversi possono essere verificati nella ricerca di elementi omologhi cui devono corrispondere ovviamente diverse risposte operative.

- Non si trova nessun elemento caratteristico nella zona. In questo caso, l'omologo dell'elemento non è evidentemente un elemento caratteristico nell'altra immagine e la ricerca dell'elemento omologo è fallita.
- Nella zona è presente un solo elemento caratteristico. In questo caso, può essere avviata la procedura di correlazione con una finestrella attorno all'elemento caratteristico e al suo candidato omologo. Se l'esito della correlazione è positivo, il risultato della correlazione è accettato come punto omologo.
- Nella zona sono presenti più elementi caratteristici. In questo caso, si applica, in successione, la procedura di correlazione con finestrella attorno a tutti gli elementi caratteristici presenti. Se fra i risultati uno è accettabile e decisamente migliore degli altri, questo è accettato come elemento omologo.

Nel terzo caso, esiste il rischio dell'accettazione di una coppia o enupla errata di elementi omologhi, se nella zona sono presenti strutture ripetitive. Il rischio aumenta con l'aumentare del numero di candidati presenti. Per questo motivo, è preferibile applicare la procedura a zone ristrette e, per poter disporre di zone ristrette, è necessario avere buoni valori approssimati per le quote. Le tecniche di multirisoluzione permettono di migliorare gradualmente le quote approssimate. Applicando la procedura descritta a versioni dell'immagine a risoluzioni crescenti (altrimenti dette multilivelli), è possibile migliorare gradualmente la conoscenza delle quote, in un modo tale che, per ogni risoluzione, le quote siano conosciute con una precisione sufficiente.

2.11.4 Calcolo delle coordinate oggetto corrispondenti ai punti omologhi

Nel terzo passo della procedura, sono ricostruiti, per ogni insieme di punti omologhi individuati in N immagini ($N > 1$) i raggi proiettanti corrispondenti. La definizione dei raggi proiettanti si basa sulla conoscenza della geometria di presa delle N immagini, ottenuta nel primo passo della procedura. Tutti i raggi proiettanti comprendono il punto oggetto ed una semplice intersezione delle N rette fornisce le coordinate oggetto del punto. L'intersezione di N rette nello spazio è un problema con $2N$ osservazioni ($2N$ coordinate dei punti immagine) e 3 incognite (3 coordinate del punto oggetto), ed è pertanto un problema sovradeterminato con $2N - 3$ gradi di libertà. La ridondanza nella determinazione della posizione del punto oggetto permette un controllo sulla presenza di errori grossolani nelle misure (ad esempio, due punti erroneamente presunti omologhi) ed offre la possibilità di stimare l'effettiva precisione delle osservazioni.

2.11.5 Ricostruzione della superficie dell'oggetto

L'ultimo passo della procedura è la ricostruzione della superficie dell'oggetto, a partire dai singoli punti oggetto determinati nel passo precedente. In questo passo, la superficie dell'oggetto deve essere espressa con una funzione, i parametri della quale devono essere determinati con i dati di input, costituiti dai singoli punti. Una interpolazione vera e propria costruisce una superficie che passa esattamente nei singoli punti (Fig. 2.24). Tuttavia l'interpolazione vera e propria non è una strada consigliabile; infatti gli svantaggi più importanti sono l'elevato numero di parametri (uguale al numero di punti) e la impossibilità di verificare la presenza di errori grossolani nelle osservazioni.

Pertanto è spesso consigliabile definire una funzione con un numero di parametri più limitato. Per definizione, una tale funzione non possiede la flessibilità necessaria per poter passare esattamente in tutti i punti, ovunque siano, e la superficie è più liscia di quella interpolata, perché implicitamente assume che esistano errori di osservazione nei dati. In tal caso, la superficie ottimale risulta meno irregolare nelle zone dove i singoli punti suggeriscono un andamento molto corrugato. Gli scarti fra superficie interpolante ed i singoli punti permettono di valutare il grado d'approssimazione della superficie, nel seguire la forma dell'oggetto, e permettono di verificare la presenza di dati anomali rispetto al modello imposto. La scelta del valore medio dei residui che si accetta indica pertanto il livello di errore ammesso per le osservazioni.

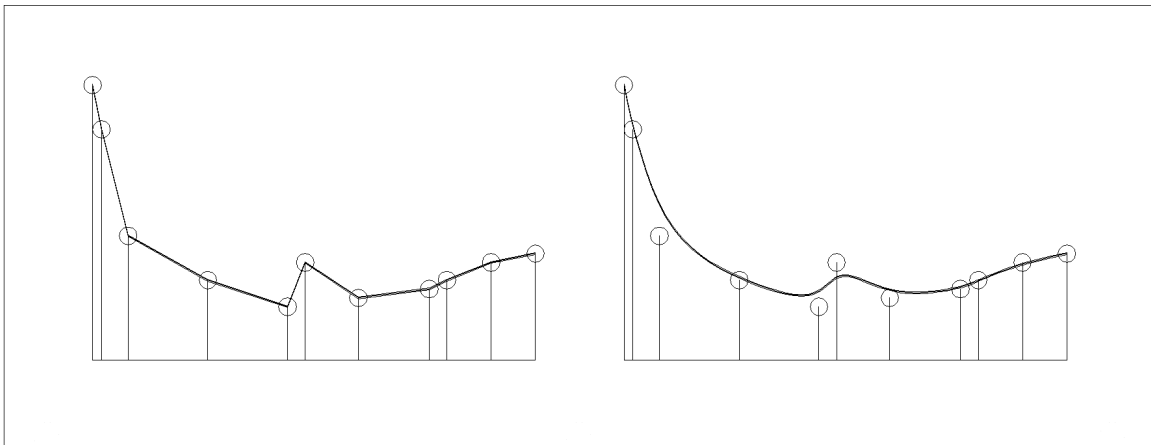


Fig. 2.24 – Due approcci per la ricostruzione della superficie a partire da singoli punti: l'interpolazione vera e propria e l'approssimazione con una superficie liscia.

Allora la funzione deve possedere una sufficiente flessibilità, per poter seguire dappertutto la forma della superficie, e tale flessibilità può variare convenientemente, da una zona ad un'altra. Inoltre per evitare un'eccessiva flessibilità della funzione, in alcune zone, ed una mancanza di flessibilità, in altre, la funzione interpolante dovrebbe essere localmente adattabile alla forma della superficie.

2.11.6 Costruzione dell'ortoimmagine

Conoscendo la geometria di presa e la superficie dell'oggetto, è abbastanza facile costruire l'ortoimmagine digitale. Si definisce un reticolato, su una qualsiasi figura approssimante l'oggetto (un piano nel caso di carte e mappe), individuando la posizione e le dimensioni dei pixel dell'ortoimmagine. Per ogni punto del reticolato, si risale alla superficie dell'oggetto (se la figura scelta non coincide con quest'ultima), calcolando il valore della funzione interpolante. Dal punto sulla superficie, si ricostruisce il corrispondente raggio proiettante, si determina l'intersezione del raggio con il piano dell'immagine e, valutando il colore o l'intensità di grigio in corrispondenza, si ottiene il valore del pixel dell'ortoimmagine.

Occorre sottolineare che, in questo caso, l'ortoimmagine non ha alcuna pretesa di rappresentazione del valore della riflettività dell'oggetto ripreso, poiché non si considera, in alcun modo, la funzione di trasferimento tra la riflettività e l'intensità rilevata dal sensore. D'altra parte, conoscendo la fonte di illuminazione si può anche correggere, seppure in modo approssimativo, l'effetto delle ombre sui valori di colore o di grigio registrati.

Resta da osservare come l'ortoimmagine possa anche essere costruita su un modello digitale di superficie, anziché su un piano, rendendo così più realistica la rappresentazione ottenuta e come entrambi i tipi di rappresentazione possano essere successivamente completati dalla sovrapposizione di elementi vettoriali di interesse (nel primo caso, a partire dal modello digitale dell'oggetto, così da rendere realmente 3D la restituzione fotografica effettuata, aggiungendo informazioni altimetriche, altrimenti mancanti).

2.11.7 Metodi a risoluzioni multiple

Le tecniche di multirisoluzione, proposte da Ackermann, si sono rivelate potentissime per la risoluzione di una grande varietà di problemi nel campo dell'analisi delle immagini. Il concetto base di queste tecniche è che la minore quantità di dati, alla risoluzione più bassa, permette un'analisi veloce ed approssimata i cui risultati possono essere di sostegno per una analisi, più dettagliata, della medesima immagine, ad una risoluzione più alta.

In un'immagine a risoluzione ridotta $1/N$, ogni pixel rappresenta una zona di $N \times N$ pixel dell'immagine alla risoluzione originale. Rispetto alla risoluzione originale, il numero di pixel è ridotto N^2 volte e, considerando algoritmi per i quali il numero di operazioni è proporzionale al numero di pixel, le informazioni, contenute in questa immagine, possono essere analizzate in un tempo N^2 volte minore di quello necessario per l'analisi dell'immagine alla risoluzione originale. L'incertezza nella posizione di elementi omologhi dovuta all'imperfetta conoscenza della quota degli elementi è N volte minore di quella nell'immagine alla risoluzione originale; d'altra parte, anche la precisione nella stima degli elementi omologhi è N volte minore.

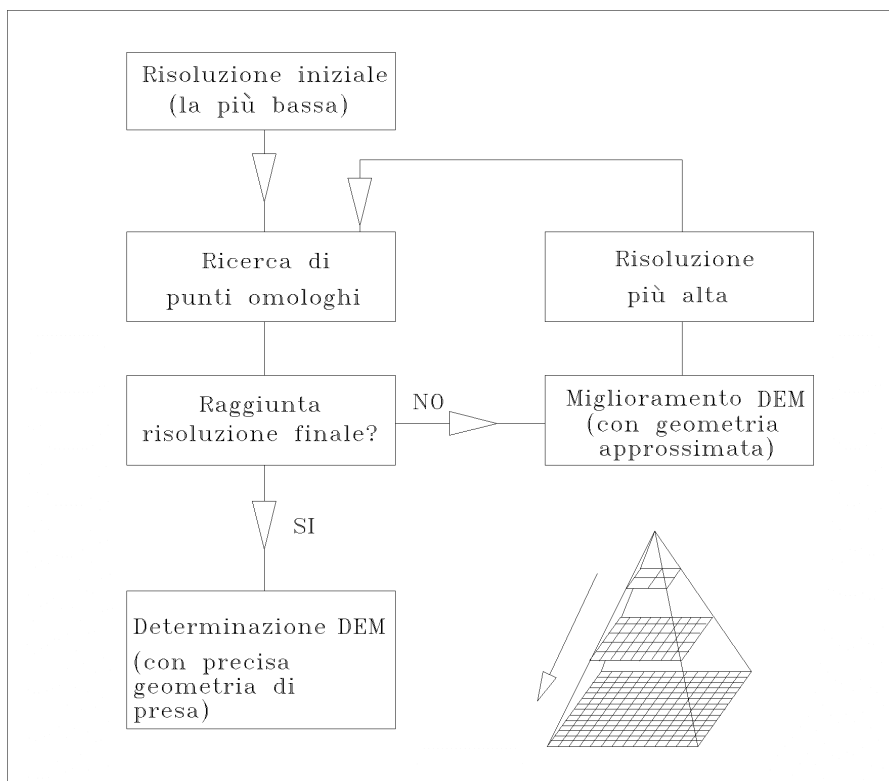


Fig. 2.25 – Metodo a risoluzioni multiple.

La ricerca di elementi omologhi, in coppie di immagini a scala ridotta, è un modo efficiente, per ottenere una ricostruzione della superficie dell'oggetto DEM (o più in generale, DSM), a bassa risoluzione e bassa precisione. Questa può successivamente essere utilizzata nella procedura applicata ad una risoluzione più alta (Fig. 2.25).

Si noti come, durante le ricerche degli elementi omologhi e nella stima delle loro quote, possa essere utilizzata una relazione approssimata per la geometria di presa. Infatti solo per gli elementi omologhi determinati nell'ultima fase, alla risoluzione massima, è necessario utilizzare la precisa geometria di presa, perché solo gli elementi, determinati in questa fase, sono passati alla fase successiva della procedura, cioè la ricostruzione della superficie dell'oggetto.

2.12 Modelli per pixel immagine

Le osservazioni elementari della fotogrammetria digitale sono i valori radiometrici dei pixel dell'immagine, cioè le misure dell'intensità di luce riflessa, dalle varie parti della superficie dell'oggetto, verso il punto di presa. Per poter trattare i valori radiometrici come osservazioni, è necessario formulare un modello matematico che esplicita il legame fra i valori radiometrici dei pixel e la descrizione della forma e della riflettività dell'oggetto. Questo modello può essere suddiviso in quattro parti:

- ❑ modello del sensore al momento della presa;
- ❑ modello della forma della superficie dell'oggetto;
- ❑ modello della riflettività della superficie;
- ❑ modello dell'illuminazione al momento della presa.

La forma e la riflettività dell'oggetto sono di interesse diretto. Il modello del sensore e della fonte di illuminazione sono indispensabili, perché il loro effetto sui valori radiometrici dei pixel non può essere ignorato. Concettualmente i parametri dei quattro modelli possono essere determinati contemporaneamente, a partire dai pixel delle immagini ed un certo numero di dati ausiliari, come punti di appoggio, dati sull'illuminazione, ecc.; tuttavia si tratta di un problema fortemente mal determinato. Infatti generalmente, esiste una molteplicità di combinazioni diverse di forma, riflettività ed illuminazione che danno luogo ad immagini identiche, anche tenendo fissa la geometria di presa. In queste condizioni, è consigliabile sfruttare ogni possibilità di riduzione dello spazio delle soluzioni. Per questo motivo, è meglio stimare separatamente il modello della geometria di presa e quello dell'illuminazione, relativamente semplici rispetto agli altri. I vincoli di radiometria e geometria di presa possono dare un importante sostegno nella stima dei parametri descrittivi della forma e della riflettività dell'oggetto.

2.12.1 Il modello del sensore al momento della presa

Lo scopo del modello del sensore al momento della presa è descrivere, per ogni pixel, la geometria del raggio proiettante e la sensibilità radiometrica del sensore stesso. In altre parole, per ogni pixel dell'immagine si definisce in quale punto, da quale direzione e con quale sensibilità radiometrica la luce entrante è stata misurata (Fig. 2.26).

2.12.2 Il modello della forma della superficie dell'oggetto

La superficie dell'oggetto, una superficie bidimensionale nello spazio tridimensionale, può essere descritta, quantomeno localmente, con una funzione F che esprime una delle coordinate della superficie, in generale z , come funzione delle altre due x e y (Fig. 2.27), da raccordarsi opportunamente con altre funzioni locali, se ne esistono più di una:

$$z = F(x, y)$$

Il modello è simile a quello della ricostruzione della superficie a partire di singoli punti.

La differenza è che alla determinazione della superficie possono contribuire tutti i cambiamenti di colore o di grigio nell'immagine e non solo particolari combinazioni, trattabili dall' algoritmo di matching. Più in generale, la ricostruzione della superficie dell'oggetto può avvalersi di descrittori di forma, per ciascuna delle coordinate dello spazio tridimensionale, in funzione di due parametri, ad esempio, un'approssimazione lineare (triangolazione) delle coordinate intrinseche della superficie stessa. Tuttavia la loro notevole complessità, specialmente con oggetti concavi o, addirittura, non semplicemente connessi, fa sì che tutto quanto riguarda i descrittori di forma sia considerato estraneo agli scopi del presente lavoro.

L'esigenza di adattare la funzione localmente alla irregolarità ed alla determinabilità della superficie complica la stima della soluzione; la funzione non può essere definita prima di conoscere la forma della superficie e la superficie non può essere determinata prima di aver definito una funzione. Allora la soluzione del problema sta in una procedura iterativa.

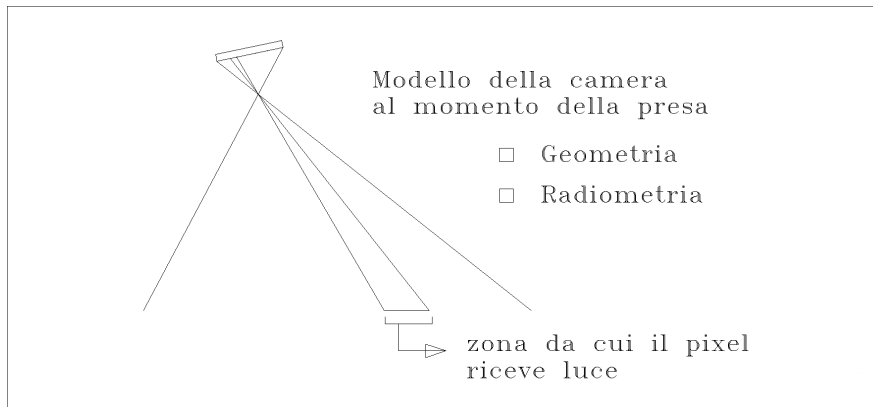


Fig. 2.26 – Il modello del sensore descrive per ogni pixel dell'immagine in quale punto, da quale direzione e con quale sensibilità radiometrica è stata misurata la luce entrante.

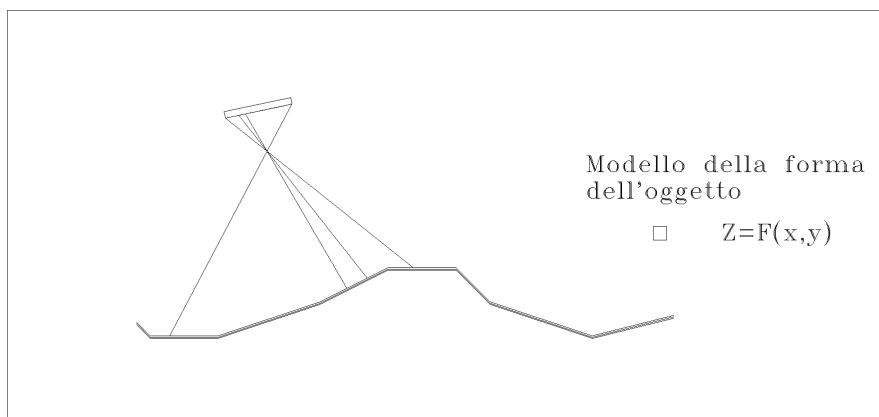


Fig. 2.27 – La superficie dell'oggetto è descritta, quantomeno localmente, con una funzione opportuna che esprime una delle coordinate come funzione delle altre due: $z = F(x, y)$.

2.12.3 Il modello della riflettività della superficie

Con l'introduzione dei pixel come osservazioni, la radiometria è diventata parte integrale della procedura. Sulla superficie, una parte della luce entrante è assorbita, mentre la parte restante è riflessa: oltre alla forma dell'oggetto, deve essere descritta la quantità di luce riflessa, dalle varie parti della superficie dell'oggetto, come percentuale della luce entrante che può essere riflessa in tanti modi ed i modi estremi sono:

- la riflessione Lambertiana, dove la quantità riflessa è uguale in tutte le direzioni, indipendente dall'angolo di incidenza;
- la riflessione speculare, dove la luce è riflessa in una sola direzione, in funzione dell'angolo di incidenza (come accade per gli specchi, le superfici metalliche e quelle liquide prive vortici ed onde).

Per una precisa determinazione del modo in cui una superficie riflette la luce, è necessario avere a disposizione un numero elevato di immagini prese da direzioni diverse. Poiché normalmente si dispone solo di un numero limitato di immagini, è necessario ipotizzare il tipo di riflessione. L'ipotesi di riflessione Lambertiana è spesso realistica (Fig. 2.28), mentre le eccezioni più significative sono gli specchi d'acqua e le superfici vetrose o metalliche. Allora la riflettività della superficie può essere descritta, quantomeno localmente, come funzione delle coordinate piane x e y , $R = F(x, y)$.

Il modello é simile a quello della forma della superficie dell'oggetto; pertanto ad esso possono essere associate le stesse considerazioni geometriche, già fatte in quella sede. Si noti tuttavia come, mentre la determinabilità della forma dipende fundamentalmente dalla presenza di cambiamenti di colore o di intensità di grigio, la determinazione della riflettività necessita i valori di intensità stessi. Conseguentemente problemi di indeterminabilità esistono solo per le parti della superficie dell'oggetto non visibili nelle immagini (occlusioni).

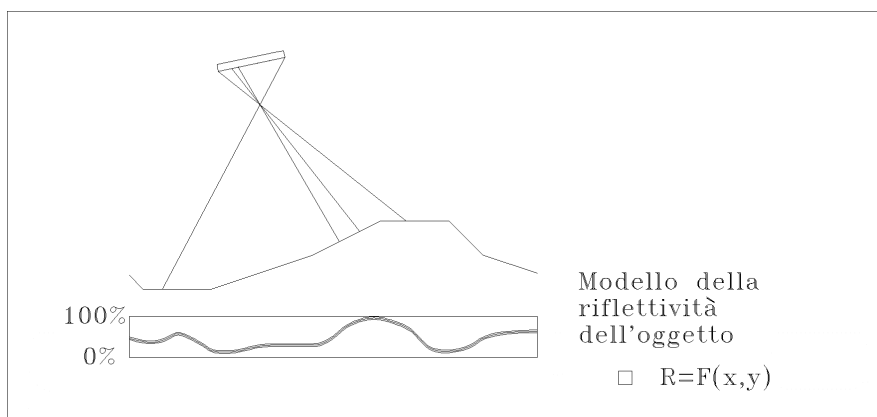


Fig. 2.28 – La riflettività (di tipo Lambertiana) della superficie dell'oggetto può essere descritta, quantomeno localmente, come funzione delle coordinate piane: $R = F(x, y)$.

2.12.4 Il modello dell'illuminazione al momento della presa

L'ultimo modello, quello dell'illuminazione (Fig. 2.29), descrive le caratteristiche delle sorgenti di luce diretta che arriva sulla superficie direttamente dalla fonte e della luce indiretta che arriva alla superficie dopo essere stata diffusa e/o riflessa nell'atmosfera. In fotogrammetria aerea o dallo spazio il sole è l'unica fonte di illuminazione. Nel caso dell'assenza di nuvole, il modello di illuminazione può essere estremamente semplice ed è sufficiente definire l'angolo di incidenza dei raggi solari e la loro intensità. La presenza di nuvole può complicare notevolmente la descrizione (in realtà, l'effetto delle nuvole appartiene ad una quinta area, quella della trasmissione della luce dentro l'atmosfera, dalla fonte di illuminazione all'oggetto e dall'oggetto al sensore). Nella fotogrammetria dei vicini, le fonti di illuminazione possono essere multiple; tuttavia l'illuminazione può essere spesso controllata ed il modello dell'illuminazione non contiene parametri incogniti. In ogni caso, la conoscenza dettagliata dell'illuminazione può essere di notevole sostegno.

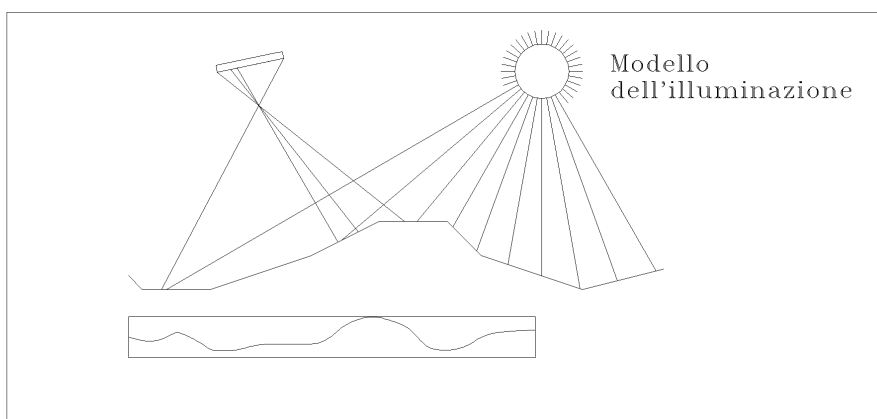


Fig. 2.29 – Il modello dell'illuminazione descrive le fonti di illuminazione.

APPENDICE B - EQUAZIONI DELLA FOTOGRAMMETRIA DIGITALE IN UN APPROCCIO GLOBALE

È possibile affrontare il problema della ricostruzione della forma e della luminosità apparente di un oggetto da sue immagini digitali, in modo globale, scrivendo equazioni valide in grande. Vari procedimenti a passi o,

almeno sotto certe condizioni, globali permettono la loro soluzione. Vale la pena ricordare, ancora una volta, due maggiori ostacoli da affrontare:

- ❑ determinazione dei valori approssimati delle incognite;
- ❑ archiviazione ed elaborazione di grandi quantità di dati.

Dette equazioni possono essere scritte, in modo formalmente molto semplice, supponendo l'oggetto ripreso descrivibile con due funzioni monodrome di due variabili rappresentanti rispettivamente:

- ❑ la forma in termini della quota in funzione delle coordinate planimetriche, anche se, in questo modo, non è possibile descrivere integralmente un solido a tutto tondo;
- ❑ la luminosità apparente della superficie dell'oggetto stesso.

Le variabili, algebriche e funzionali, da prendere in considerazione sono le seguenti:

- ❑ X, Y, Z coordinate nello spazio oggetto;
- ❑ x, y coordinate nel piano immagine;
- ❑ funzione di descrizione geometrica della superficie;
- ❑ funzione di descrizione radiometrica della superficie;
- ❑ $\underline{X} = (X, Y)$ vettore delle coordinate planimetriche;
- ❑ $\underline{x} = (x, y)$ vettore delle coordinate del piano immagine;
- ❑ $\underline{Q} = (X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, k, \dots)$ vettore dei parametri di orientamento e di calibrazione,

mentre l'osservabile è, come usualmente in fotogrammetria digitale, l'insieme di valori di toni di grigio (o di scale di colore) della superficie registrato dai pixel del sensore. Il modello funzionale, ottenuto a partire dalle ipotesi di propagazione della luce è estremamente semplice: la luce va dai punti della superficie dell'oggetto ai punti del piano del sensore, percorrendo una linea retta e copiando punto per punto il valore di grigio o di colore della superficie nel valore registrato dal pixel del sensore. Pertanto si trascurano gli effetti dovuti:

- ❑ alla non – planarità della superficie del sensore;
- ❑ alla non – uniforme spaziatura degli elementi sensibili;
- ❑ alla distorsione dell'obbiettivo;
- ❑ agli aspetti geometrici e radiometrici dell'attraversamento dell'atmosfera ad altro ancora.

Il legame tra le coordinate del punto oggetto e del corrispondente punto immagine, ed i parametri di orientamento del sensore è espresso dalle equazioni di collinearità, esprimibili modo puramente formale, nell'ambito di questa trattazione:

$$x = C(X, Z, O)$$

altrimenti semplicemente esprimibile come: $x = (X, Z, O)$. Pertanto l'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini diviene:

$$g(x(X, Z(X), O)) - G(X) = 0$$

Questa equazione é suscettibile di essere applicata in vari contesti, considerando incognite diverse grandezze.

- Nell'approccio globale, interessante per la sua generalità, é possibile considerare incogniti i parametri di orientamento di tutti i sensori e le due incognite funzionali Z, G .
- In alternativa, si possono determinare dapprima le incognite algebriche (con osservazioni apposite, oppure considerando solo alcune finestre ritagliate sulle immagini) e successivamente le incognite funzionali di descrizione dell'oggetto.
- Un caso estremo, utile tuttavia nella pratica fotogrammetrica, si ha se sono noti sia i parametri di orientamento, sia la forma della superficie ripresa; allora nell'equazione precedente risulta incognita solo la funzione G e la sua determinazione, ottenibile da un'immagine singola, é la produzione di un'ortimmagine.
- E' ovviamente possibile effettuare anche il passaggio inverso: date le funzioni Z, G , si scelgono valori convenienti per i parametri di orientamento di due immagini fittizie e si producono valori di grigio (o di colore) di due immagini sintetiche che costituiscono una stereo - orto - immagine, utile per la fotointerpretazione.

L'utilizzo delle equazioni dell'omologia fra immagini in una compensazione pone diversi problemi. L'equazione stessa deve essere linearizzata e si deve decidere, come trattare le incognite funzionali Z, G . É possibile linearizzare detta equazione e risolvere formalmente il problema di stimare tutte le incognite (algebriche e funzionali) del problema, mantenendo la descrizione continua dell'oggetto e delle immagini; é tuttavia necessario precisare che un'applicazione numerica della soluzione, definita al continuo, richiede comunque una qualche forma di discretizzazione, anche se non imposta a priori e, di conseguenza, meno arbitraria dell'adozione di modelli parametrici. Si deve ricordare anche che la funzione g é disponibile solo sotto forma di un insieme di valori discreti e si deve notare poi come certe scelte arbitrarie, quali la risoluzione e la regolarità dei modelli parametrici, possano essere guidate proprio da un'analisi del problema condotta al continuo. Infine i modelli continui, possono dare indicazioni sulla precisione delle stime.

Nel prosieguo, si trattano, sommariamente e formalmente, la linearizzazione delle equazioni di osservazione e la parametrizzazione delle funzioni che descrivono l'oggetto. La parametrizzazione più semplice e conveniente é costituita da due modelli ad elementi finiti. La risoluzione spaziale di tali modelli ed il loro grado di regolarità devono essere scelti con cura. Un'indicazione, in proposito, si potrebbe ottenere, come già detto in precedenza, dall'analisi del problema condotta al continuo; è tuttavia possibile applicare regole empiriche.

- La risoluzione del modello radiometrico deve essere paragonabile alla risoluzione delle immagini, riportata, alla scala dell'oggetto.
- La risoluzione del modello geometrico deve essere scelta in base alle caratteristiche della superficie, morfologicamente più o meno ondulata, ed alla ricchezza di contenuto geometrico delle immagini.

Le funzioni modello sono indicate con i simboli:

$$Z(\underline{X}) = Z(\underline{X}, \underline{Q}) \quad \text{e} \quad G(\underline{X}) = G(\underline{X}, \underline{R})$$

dove: $\underline{Q}, \underline{R}$, sono i vettori dei parametri dei modelli. Si possono considerare due diverse versioni discrete dell'equazione dell'omologia fra immagini e, data la funzione g , campionata ad intervalli regolari o comunque predefiniti sul piano immagine, si può scrivere:

- un'equazione d'osservazione per ogni valore campionato sul piano immagine operando sui groundel (proiezione dei pixel immagine sull'oggetto) e riflettendo così la struttura dei dati delle immagini digitali;
- un'equazione d'osservazione per punti definiti regolarmente nello spazio oggetto, operando sui voxel (discretizzazione, tridimensionale dell'oggetto), procedura che richiede l'interpolazione dei valori della funzione g , ma consente una trattazione più semplice, dovuta alla forma delle equazioni di collinearità.

Per trattare l'equazione dell'omologia fra immagini, in base alla seconda ipotesi, si introducono due indici i, k , corrispondenti rispettivamente alle diverse immagini ed ai diversi punti considerati (determinati dalle loro coordinate planimetriche nello spazio oggetto). Di conseguenza, l'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini ha espressione:

$$g_i(\underline{x}(\underline{X}_k, Z(\underline{X}_k, \underline{Q})) \underline{O}_i) - G(\underline{X}_k, \underline{R}) = 0$$

Il numero di equazioni da considerare deve essere determinato controllando, per ogni coppia i, k , se le coordinate immagine: $\underline{x}(\underline{X}_k, Z(\underline{X}_k, \underline{Q})) \underline{O}_i$, sono all'interno del formato utile delle immagini. Dopodiché avendo indicato con una tilde (\sim) i valori approssimati delle incognite e con Δ le nuove incognite delle equazioni linearizzate, l'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini linearizzata ha espressione:

$$g_i(\underline{x}(\underline{X}_k, Z(\underline{X}_k, \tilde{\underline{Q}})) \tilde{\underline{O}}_i) - G(\underline{X}_k, \tilde{\underline{R}}) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \underline{Q}} \right) \Delta \underline{Q} + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{Q}} \right) \Delta \underline{O}_i - \frac{\partial G}{\partial \underline{R}} \Delta \underline{R} = 0$$

Per trattare detta espressione linearizzata in una compensazione, si devono calcolare i valori del termine noto, interpolando la funzione g con un modello ad elementi finiti, tenendo conto delle correlazioni, propagate dai valori campionati ai valori interpolati, mentre i coefficienti dell'espressione linearizzata sono espressi come prodotti di derivate, secondo la regola di derivazione di funzione composta:

le derivate della funzione g sono determinate numericamente;

- le derivate di \underline{x} si calcolano in base alle espressioni complete delle equazioni di collinearità;
- le derivate di Z, G si calcolano in base alle espressioni esplicite dei due modelli ad elementi finiti della superficie dell'oggetto rilevato.

Il numero di incognite del problema é molto elevato e dipende dalla risoluzione dei modelli geometrico e radiometrico dell'oggetto, ovvero dalle dimensioni dei due vettori di parametri Q, R . In alcuni casi, é possibile sostituire la funzione modello G con i suoi valori direttamente definiti nei punti di coordinate X_k . In questo modo, l'espressione linearizzata diventa e le incognite G_k possono essere isolate dalle altre, nel calcolo della soluzione:

$$g_i(\underline{x}(X_k, Z(X_k, \tilde{Q}), \tilde{O}_i))) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \underline{Q}} \right) \Delta \underline{Q} + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{O}} \right) \Delta \underline{O}_i - G_k = 0$$

Le equazioni d'osservazione possono essere discretizzate, come già detto in precedenza, anche facendo riferimento al campionamento sul piano immagine. Per fare questo, conviene separare nell'equazione d'osservazione dell'omologia fra immagini, due espressioni, dove l'indice j indica un generico pixel dell'immagine i :

$$g_i(\underline{x}_j) - G(\underline{X}_{i,j}, \underline{R}) = 0$$

$$\underline{x}_j = C(\underline{X}_{i,j}, Z(\underline{X}_{i,j}, \underline{Q}), \underline{O}_i)$$

che linearizzate diventano:

$$g_i(\underline{x}_j) - G(\tilde{\underline{X}}_{i,j}, \tilde{\underline{R}}) - \frac{\partial G}{\partial \underline{X}} \Delta \underline{X}_{i,j} - \frac{\partial G}{\partial \underline{R}} \Delta \underline{R} = 0$$

$$\underline{x}_j - C(\tilde{\underline{X}}_{i,j}, Z(\tilde{\underline{X}}_{i,j}, \tilde{\underline{Q}}), \tilde{\underline{O}}_i) - \frac{\partial C}{\partial \underline{X}} \Delta \underline{X}_{i,j} - \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \underline{Q}} \right) \Delta \underline{Q} - \frac{\partial C}{\partial \underline{O}} \Delta \underline{O}_i = 0$$

Per ciascun pixel di ciascuna immagine, si ha un'equazione d'osservazione ed una coppia di equazioni di vincolo (o di pseudosservazione sovrappesate), mentre le incognite del problema comprendono anche le coordinate planimetriche x_{ij} del punto oggetto, corrispondente al singolo pixel. Si osservi come utilizzando queste equazioni non sia necessario interpolare i valori dei toni di grigio (o delle scale di colore), né derivarli.

Un'osservazione conclusiva di grande interesse pone poi l'attenzione sul fatto che quanto qui esposto, per la fotogrammetria digitale, abbia una sua possibile applicazione anche nell'ambito della cartografia numerica. Infatti il problema del passaggio da un sistema di coordinate cartografico ad un altro è un problema non troppo diverso, può essere risolto percorrendo una strada simile, richiedendo preliminarmente di prendere in considerazione i seguenti casi.

I due sistemi di coordinate cartografici sono interamente noti, cioè la forma e l'orientamento dell'ellissoide è noto, come pure è nota la proiezione / rappresentazione cartografica adottata, la condizioni di tangenza ed altri suoi eventuali particolari affatto secondari (ad es., false origini, speciali contrazioni, ecc.). Allora una

trasformazione, facente uso delle equazioni dirette ed inverse della cartografia, permette il passaggio da un sistema all'altro (e viceversa) e la stima dei parametri delle trasformazioni serve solo a minimizzare gli inevitabili errori accidentali, insiti nella misura geodetico – topografica o fotogrammetrica dei punti e nella loro rappresentazione cartografica.

I due sistemi di coordinate cartografici non sono interamente noti, oppure addirittura non lo sono per nulla, in quanto almeno uno dei due ellissoidi non è ben conosciuto, quantomeno nel suo orientamento, come pure almeno una delle due proiezioni / rappresentazioni cartografiche adottate non è ben conosciuta, quantomeno nelle condizioni di tangenza od in altri eventuali particolari affatto secondari (ad es., false origini andate perdute, contrazioni non documentate, mancanza di informazioni sull'altimetria, ecc.). Allora il passaggio da un sistema all'altro (e viceversa) non può semplicemente consistere nella stima dei parametri delle trasformazioni per minimizzare gli inevitabili errori accidentali, insiti nella misura geodetico – topografica o fotogrammetrica dei punti e nella loro rappresentazione cartografica, essendo pressoché sconosciute almeno una delle due equazioni dirette ed inverse della cartografia. Al contrario, il passaggio da un sistema all'altro (e viceversa) deve dapprima provvedere ad individuare quelle trasformazioni per mezzo delle quali procedere al passaggio stesso e solo successivamente provvedere alla stima dei parametri delle suddette trasformazioni. Come ben evidente, si tratta di adottare modelli neri (anziché modelli grigi, come nel primo caso) che possono essere forniti dalla matematica applicata e/o dalla statistica, mediante metodi deterministici o stocastici, oppure misti.

Quanto detto trova la sua prima estensione nel caso di figure e piante, dove quasi sempre si è proprio nel secondo dei due casi trattati, essendo forse stati costruiti seguendo leggi precise dell'agrimensura od altro, ma essendo quasi certamente introvabile la documentazione corrispondente (perché sepolta in archivi inaccessibili od addirittura andata perduta).

Quanto detto trova la sua ulteriore estensione anche nel caso di vedute e modelli 3D, dove quasi sempre si è ancora nel secondo dei due casi trattati, essendo forse stati costruiti seguendo leggi precise della prospettiva od altro, ma essendo quasi certamente introvabile la documentazione corrispondente.

Tuttavia l'applicazione di maggiore interesse è certamente nell'ambito della cartografia classica e consiste nel trasformare le mappe catastali in moderna cartografia numerica, georeferenziata come le moderne carte tecniche, comunemente in uso, diventate la base dei sistemi informativi territoriali. Infatti le mappe catastali hanno certamente false origini, per lo più, incognite e sono notoriamente sprovviste di altimetria; di conseguenza, i due fatti impediscono insieme un approccio facente uso di modelli grigi ed impongono un approccio alternativo facente uso di modelli neri.

APPENDICE C – TENDENZE MODERNE DELLA RICERCA FOTOGRAMMETRICA

Il rapido aumento della potenza dei mezzi di calcolo disponibili, sia nel software sia per l'hardware, si è fatto sentire anche nelle applicazioni della fotogrammetria. I procedimenti fotogrammetrici hanno, dal loro canto, avuto una maggiore diffusione, al crescere dei campi di applicazione di tale disciplina, mentre più ampie si sono fatte le aree di intersezione con altre discipline. Uno degli aspetti su cui si sofferma la attuale ricerca fotogrammetrica, proprio per gli intensi scambi con altri settori, nella fattispecie la Computer Vision ed alcune branche della Ingegneria della Conoscenza, è la possibile automazione completa dei procedimenti usuali: in

particolare, da parecchi anni si dedica molta attenzione allo sviluppo di nuove tecniche di matching, ovvero di ricerca dei punti coniugati. Pertanto da un lato, si procede sulla via tradizionale della fotogrammetria e, dopo aver trovato con procedimenti automatici i punti corrispondenti necessari all'orientamento relativo, si passa alla classica compensazione (bundle adjustment), mentre d'altro, si cerca di saltare i gradini del processo tradizionale.

Alcuni ostacoli sulla via del raggiungimento della piena automatizzazione dei procedimenti sono di natura pratica e consistono nell'alto livello tecnologico richiesto alle attrezzature, al limite delle attuali capacità realizzative. Mentre questo tipo di difficoltà non sembra insuperabile, per le normali aspettative di progresso tecnico, esistono ostacoli di altra natura che non consentono di eliminare, a livello concettuale, l'intervento di un operatore con la sua esperienza e duttilità. E' a questo punto che intervengono le tecniche ed i supporti teorici di altre discipline alleate: la costruzione di Sistemi Esperti e le tecniche di Apprendimento Automatico (Machine Learning) sono due discipline da cui la ricerca fotogrammetrica si attende importanti contributi. In effetti, sono già note soddisfacenti applicazioni di Sistemi Esperti alla fotogrammetria del vicino. Inoltre non si farà cenno, in questa sede, alle svariate applicazioni di tale disciplina nei Sistemi Informativi Territoriali.

Si risale agli anni '70 per trovare le prime ricerche che segnano il contatto tra Computer Vision e fotogrammetria. In tali studi è presentato un algoritmo di rilassamento per la visione stereoscopica che è successivamente affinato sulla base di una migliore aderenza ai dati psicologici. Osservando la figura C.1, si nota che:

- ogni punto in una immagine ha una sola profondità,
- un punto è più affidabile se la sua profondità è simile a quella dei punti vicini.

L'immagine può essere considerata come una rete binaria in cui ogni possibile "match" è rappresentato da uno stato binario (i matches hanno valore 1 e i "non-matches" hanno valore 0): i collegamenti tra matches alterni in ogni punto si inibiscono l'un l'altro, viceversa i collegamenti tra matches di uguale profondità si rinforzano (Fig. C.2). L'elaborazione procede mediante un algoritmo iterativo; in generale, il criterio di convergenza esprime la necessità che il numero di punti modificati, in una iterazione, sia minore di una certa soglia. La novità da considerare negli sviluppi successivi è che le osservazioni fotogrammetriche nello spazio immagine non derivano da misurazioni umane, bensì da tecniche automatiche di analisi dell'immagine; pertanto chiari sono i collegamenti tra la moderna fotogrammetria e la Computer Vision, da un lato, e l'Ingegneria della Conoscenza, dall'altro, discipline a loro volta tra loro strettamente legate. Infatti la Computer Vision, cioè la percezione mediante macchina basata su un input di sensori visivi, può essere considerata un campo di applicazione delle idee e delle tecniche dell'Ingegneria della Conoscenza (già precedentemente nota come Intelligenza Artificiale: "l'intelligenza Artificiale è, o dovrebbe essere, lo studio di problemi di elaborazione delle informazioni che hanno radice in alcuni settori del trattamento biologico delle informazioni").

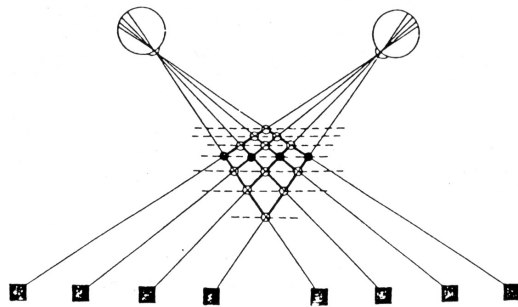


Fig. C.1

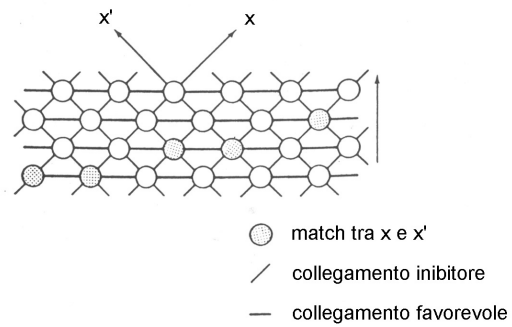


Fig. C.2

L'intelligenza Artificiale ha avuto, fin dalla sua nascita, due obiettivi principali:

- costruire macchine sempre più affidabili;
- comprendere l'intelligenza.

E' evidente come il secondo obiettivo riguardi le ricerche di psicologi, neurologi e filosofi della scienza. Tuttavia anche nel primo ambito più strettamente tecnologico, si riscontrano intersezioni con tali discipline (ad esempio, partendo dalla visione stereoscopica dell'uomo si possono collegare gli effetti ad una rete di grafi, oppure strumenti tipici della Logica e della Grammatica costituiscono prestiti essenziali nelle tecniche di matching). Il cervello, posto di fronte ad una scena, usa sia le acquisizioni visive dall'ambiente circostante, sia le conoscenze passate, per generare una rappresentazione interna di tale scena (si confronti a riguardo la figura C.3). Analogamente nei sistemi di Computer Vision, si attua un processo che usa modelli per interpretare i dati sensoriali: modelli del mondo fisici e di formazione dell'immagine. Tali sistemi di comprensione dell'immagine che partono dagli array delle intensità dei pixel e, usando i modelli specifici o generici opportunamente archiviati, determinano il contenuto e la comprensione delle scene, differiscono per il grado di contributo di Intelligenza Artificiale utilizzata (Fig. C.4).

La prima sezione di un sistema di Computer Vision prende l'immagine formata dai pixel e la converte in feature, quali spigoli e regioni; la seconda parte di tale sistema segmenta queste feature in superfici e volumi, in modo dipendente dalla conoscenza dei contesto e dagli scopi di tale calcolo. Pertanto usando la conoscenza dei contesto da interpretare ed i vincoli associati alle relazioni tra gli oggetti compresi in esso, sono identificati gli oggetti ed analizzate tutte le scene. Si nota subito, come le tecniche, per ottenere i vari scopi intermedi all'interno dei sistema complessivo, siano apparse interessanti ai fotogrammetri e come scambi interdisciplinari siano potuti avvenire.

La transizione dalla fotogrammetria analitica a quella digitale richiede la modifica e/o l'estensione dei modelli esistenti e lo sviluppo di nuovi concetti. Nell'approccio classico la formazione del modello (orientamento relativo) e la ricostruzione dell'oggetto (orientamento assoluto) si basano sull'uso di punti distinti. Tuttavia come già detto in precedenza, si può immaginare di utilizzare, per tali scopi, particolari fotogrammetrici geometricamente diversi dai soliti punti: linee di vario tipo, oppure superfici e le loro proiezioni nello spazio immagine. Ciò che un tempo era impensabile ora, grazie alle tecniche digitali, è ancora più facile che l'estrazione dei classici punti. Pertanto se da un lato la fotogrammetria digitale ricalca la fotogrammetria analitica classica e tenta di renderne automatici i vari gradini, dall'altro si apre il campo della ricerca di nuovi

modelli fotogrammetrici per quella che può definirsi fotogrammetria delle linee e delle superfici.

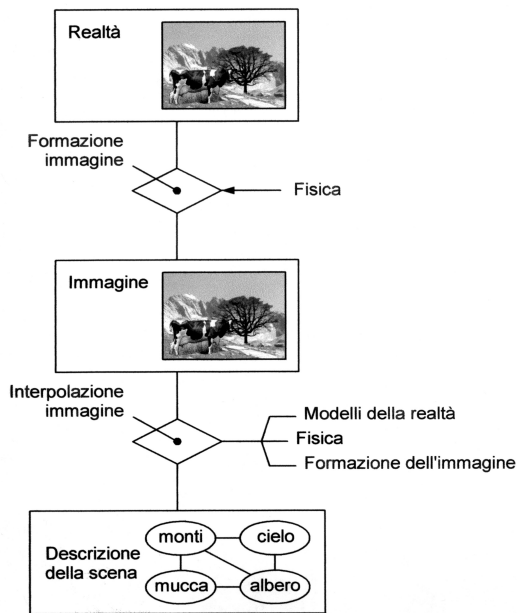


Fig. C.3

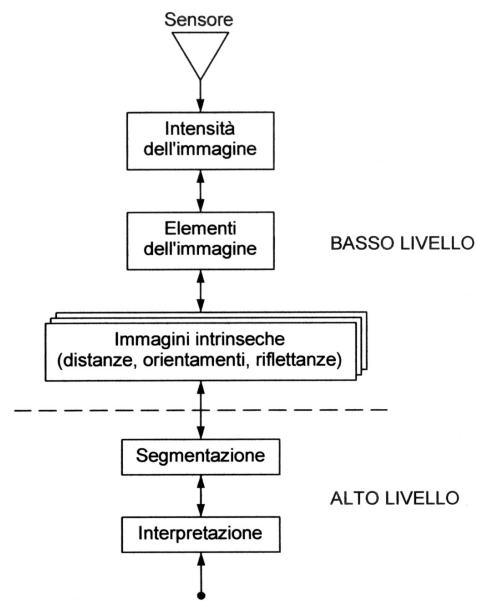


Fig. C.4

Matching di immagini

Il matching propriamente detto (la ricerca dei punti coniugati) è una tappa importantissima nelle operazioni della fotogrammetria digitale, ad esempio, quali l'orientamento automatico o la ricostruzione di superfici. In questa sede, si accenna brevemente alle osservazioni compiute nel campo della corrispondenza linea – linea e, in generale, di altre forme geometriche, dedicando maggiore spazio al matching di punti, perché è quello che, per svariati motivi (inclusi quelli storici intrinseci alla fotogrammetria), occupa maggiormente l'attenzione dei ricercatori. Per quanto riguarda invece la corrispondenza linea – linea, si tratta della formulazione di una relazione tra i punti misurati sull'immagine e i parametri di una linea tridimensionale. Il vantaggio di questa tecnica consiste nel fatto che non è necessaria la relazione tra punti omologhi nella stereocoppia: l'unico vincolo è quello che i punti misurati nelle immagini appartengano alla stessa linea nello spazio oggetto. Dopo le prime osservazioni, le ricerche più recenti si occupano di orientamento relativo ed assoluto mediante la corrispondenza linea – linea, ricercando le configurazioni di minimo, cioè il minimo numero di entità geometriche necessarie alla soluzione nel caso di orientamento esterno di una singola immagine (6 parametri), di orientamento relativo (5 parametri) e di orientamento assoluto (7 parametri).

Per quanto riguarda ad esempio l'orientamento relativo, occorre osservare che una linea retta è definita da 2 osservazioni nello spazio immagine (equazioni) e da 4 parametri nello spazio oggetto (incognite): i piani di proiezione corrispondenti si intersecano sempre in una linea retta (eccetto che per piani paralleli o identici), cosicché non si ricava fuori dall'intersezione di tali piani nessuna informazione ridondante necessaria alla determinazione dell'orientamento relativo. In conseguenza a tali osservazioni, sono necessarie almeno 3 immagini e 6 linee rette corrispondenti per immagine, per ottenere con la solita compensazione ai minimi quadrati i parametri di orientamento relativo delle immagini ed i parametri che descrivono le linee rette nello spazio del modello. La soluzione si basa sulla condizione che i 3 piani corrispondenti si intersechino in una unica linea nello spazio modello. Invece un cerchio è definito da 5

parametri nell'ellisse sull'immagine e da 6 parametri nello spazio oggetto; perciò sono necessari 2 cerchi proiettati su 2 immagini per ottenere una soluzione che includa 3 osservazioni ridondanti. La soluzione si basa sulla condizione che i coni proiettivi formati dai centri di proiezione e dalle ellissi nello spazio immagine si intersechino in un'identica immagine circolare.

Ampliando le osservazioni precedenti ed occupandosi di problemi che si verificano nella metrologia industriale, è facile constatare che, sugli oggetti rappresentati, non si trovano punti caratteristici facilmente identificabili, ma viceversa sono facilmente distinguibili linee rette. La nuova domanda è allora se si possano utilizzare tali linee, al posto dei soliti punti, e quale sia il minimo numero di misure necessarie per giungere ad una soluzione unica del problema. Per l'orientamento relativo, ad esempio, sono necessarie 3 o più coppie di linee parallele. Si assume che i punti sulle linee siano misurati separatamente nell'immagine destra e sinistra, ottenendo così punti non – omologhi, ma che si trovano sulla stessa linea nell'oggetto. L'uso della fotogrammetria delle linee può essere esteso anche a problemi riguardanti l'aggiornamento di carte, allorché è necessario il riconoscimento delle forme dei manufatti e della loro dislocazione, oppure la tessitura stradale, pur con evidenti maggiori difficoltà.

Tornando al matching propriamente detto, dopo il primo modello matematico per il processo di matching dell'immagine, utile per la determinazione dei punti coniugati, sono stati fatti molti progressi. Da un lato, il modello matematico è stato esteso con l'introduzione di vincoli geometrici, dall'altro le tecniche di matching si sono spostate da quelle basate sull'area a quelle basate su altri tipi di particolari (geometrici e/o tematici) presenti nell'immagine; infine si è pensato di combinare il matching con la ricostruzione della superficie. Si tratta, come noto, di sviluppi avvenuti in tempi successivi, durante i quali svariate sono state le incursioni nel campo della Computer Vision, pertanto si cercherà di fare un'analisi schematica dei problemi connessi con il matching, tenendo conto degli sviluppi che si sono, man mano, manifestati nel corso delle ricerche. In generale, dopo il preprocessamento, la strategia del matching prevede i seguenti passi:

- ❑ feature extraction;
- ❑ matching propriamente detto.

Gli aspetti caratteristici da estrarre dall'immagine (feature extraction) sono:

- ❑ proprietà statistiche di base, quali media, mediana, sqm, mav, autocorrelazione del livello di grigio;
- ❑ punti di particolare interesse;
- ❑ spigoli;
- ❑ valori di texture (tessitura).

Si noti, a riguardo, come texture sia un termine usato per caratterizzare la variazione del livello di grigio in un'immagine. Essa può essere considerata da diversi punti di vista:

- ❑ primitive;
- ❑ modelli strutturali;
- ❑ modelli statistici;
- ❑ gradienti.

Per quanto riguarda il primo punto, si ricorda che la primitiva visiva è il texel, con certe proprietà invarianti

che si ripetono in differenti posizioni (Fig. C.5). Il modello strutturale riguarda il modo in cui le primitive formano una trama ripetitiva e descrive tali trame mediante regole. Il modello statistico descrive la texture mediante regole statistiche che governano la distribuzione e la relazione dei livelli di grigio (va bene per quei casi in cui le primitive sono a mala pena discernibili). Il gradiente serve per determinare l'orientamento della superficie mediante alcune tecniche di derivazione vettoriale. Si osserva inoltre, per quanto riguarda il modello strutturale della posizione dei texel, che si usufruisce di modelli grammaticali, di grammatiche delle forme, di grammatiche ad albero, di grammatiche a vettori. In base alla scelta di quali di tali aspetti estrarre, i metodi di matching si raggruppano in due classi:

- ABM (area based matching);
- FBM (feature based matching).

Le immagini da sottoporre al matching possono essere qualsiasi, a patto tuttavia che siano simili e contengano sufficiente informazione fotometrica. In generale, il primo metodo si basa su criteri statistici, ad esempio, sulla correlazione dei livelli di grigio nelle due immagini. Il secondo metodo, sviluppato negli ultimi anni, si avvale di svariate tecniche che si descriveranno in seguito (talvolta all'interno di particolari strategie i due metodi ABM e FBM si incontrano). Nel metodo ABM, come noto, un'area rettangolare (templet) di una immagine è paragonata ad un'area della stessa dimensione nell'altra: il criterio si basa sulla ricerca del massimo coefficiente di cross – correlazione o sulla minimizzazione della differenza dei livelli di grigio, all'interno di una strategia ai minimi quadrati o facente uso di procedure robuste. In questo caso (LSM, least squares matching e sue varianti robuste) è utilizzato un algoritmo relativamente semplice, di alta precisione, e con bassa necessità di memoria che tuttavia è sensibile alla distorsione prospettica, ai cambiamenti di illuminazione e di contrasto, alle ombre e alle occlusioni, in generale, a tutti quei casi in cui si presentano differenze nelle proprietà radiometriche o geometriche. Tuttavia poiché i metodi ABM confrontano i pixel sulla base delle sole differenze dei livelli di grigio ed i pixel non contengono informazioni esplicite sulle aree in esame, potrebbe accadere che aree del tutto prive di interesse siano sottoposte ad un trattamento inutilmente accurato.

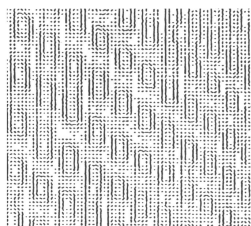


Fig. C.5

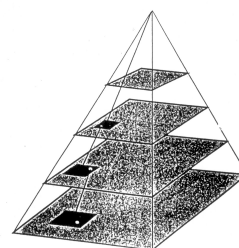
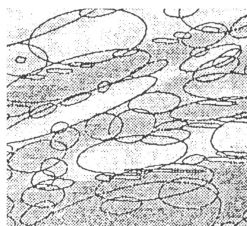


Fig. C.6

I metodi del secondo gruppo (FBM) possono essere suddivisi in quelli che partono dalla considerazione di punti e di spigoli. Nel primo caso, in ogni immagine sono estratti i punti caratteristici ed il successivo matching avviene sulla base di criteri che partono da misure di somiglianza e di coerenza; nel secondo caso, sono invece gli spigoli ad essere estratti, mediante l'uso di svariati algoritmi di rilevamento, e sono poi corretti in base a criteri, anche in questo caso, di somiglianza e coerenza. Oltre alla scelta del tipo di particolare da estrarre, bisogna effettuare una scelta riguardo alla strategia, in modo che il matching risulti rapido, preciso ed affidabile. Fino a qualche tempo fa, la tendenza tra i fotogrammetri era quella di estrarre i

punti caratteristici, mentre tipica della Computer Vision era l'estrazione di spigoli; attualmente anche la fotogrammetria prende più favorevolmente in considerazione l'estrazione di spigoli. D'altra parte, l'obiettivo del matching in fotogrammetria è comunque quello di ottenere le coordinate tridimensionali nello spazio, in seguito al processamento (mediante le equazioni di collinearità) di punti corrispondenti nella stereocoppia, mentre lo scopo della Computer Vision è quello di comprendere l'immagine. Pertanto poiché gli spigoli contengono maggiori e più ampie informazioni dei punti a questo riguardo, è naturale che siano stati applicati algoritmi per l'estrazione degli spigoli prima nella Computer Vision che in fotogrammetria digitale.

Di recente, si è sviluppato un nuovo tipo di matching, detto relational (relazionale) matching. Esso è un metodo proprio della Computer Vision che può essere pensato come un'estensione del matching FBM basato sulle proprietà (non statistiche) dell'immagine. Per poter applicare tale tipo di matching, le proprietà delle immagini debbono essere rappresentate in maniera simbolica, spesso secondo un approccio che parte dalla teoria dei grafi: la soluzione si trova allora attuando un qualche tipo di ricerca nello spazio dei grafi. In ogni caso, l'interesse delle più recenti ricerche non sta tanto nell'uso di algoritmi nuovi (infatti molti di loro sono già stati utilizzati nel corso di questi ultimi anni), quanto nei numerosi tentativi di confrontare i nuovi metodi e soprattutto di intersecarli, in modo da combinarne i vantaggi e cercare di mitigarne i rispettivi difetti. Ovviamente è necessario evitare che la giustapposizione di diversi metodi conduca a risultati illusori; perciò si deve disporre di un robusto inquadramento teorico che indirizzi i tentativi di soluzione nei campi dei valori realmente compatibili con la natura del problema.

Nel prosieguo, si tenterà di illustrare la molteplicità di questi esperimenti; tornando al tentativo di fornire uno schema dei vari tipi di matching, si osserva come, oltre alla scelta del tipo di matching sulla base del tipo di entità da estrarre dall'immagine, sia necessario compiere una scelta riguardante il tipo di strategia. Sulla scelta della strategia, può influire la capacità di fornire un matching per quanto possibile rapido, preciso ed affidabile, in base a una data configurazione di input e per un ben determinato output. D'altra parte, nel corso delle ricerche sul matching, come già detto in precedenza, sono stati immessi metodi propri della fotogrammetria: il LSM (least squares matching e sue varianti robuste) si basa sul criterio dei minimi quadrati (e sue generalizzazioni) che, come noto, è il metodo classico delle scienze geodetiche e geomatiche in senso lato. Esso inizia applicando la strategia dei minimi quadrati al matching basato sull'area e perfeziona successivamente la soluzione, tenendo conto delle piramidi di risoluzione.

- La correlazione d'immagine, a partire da aree omologhe nelle immagini che si sovrappongano in modo sufficiente e che siano rappresentabili in forma di matrici dei valori dei livelli di grigio, può essere eseguita mediante algoritmi diversi. Uno di questi consiste nella massimizzazione del coefficiente di cross – correlazione delle matrici ed è stato utilizzato finché non si è introdotto l'algoritmo ai minimi quadrati che minimizza le differenze dei valori di grigio, quando si trasforma una matrice in un'altra. Se $g_1(x), g_2(x)$ sono 2 matrici dei valori di grigio osservati e h_0, h_1, a_0, a_1 sono 4 costanti incognite esprimibili, rispettivamente, trasformazioni lineari radiometriche e geometriche fra le immagini, si ottiene la trasformazione:

$$g_2(x) = h_0 + h_1 g_1(a_0 + a_1 x)$$

nella quale si assume che entrambe le matrici riguardino le immagini dello stesso oggetto. Da questa trasformazione si ottiene l'equazione d'osservazione linearizzata, valida per ogni pixel i :

$$\Delta g(x_i) + v(x_i) = g_1(x_i)da_0 + x_i g_1(x_i)da_1 + dh_0 + g_1(x_i)dh_1$$

in cui v è la differenza tra i rispettivi rumori nelle immagini e $\Delta g_1(x)$ il gradiente dell'immagine $g_1(x)$. L'algoritmo di correlazione attualmente impiegato è una generalizzazione bidimensionale di quanto appena esposto, prevedendo una trasformazione affine generale fra le due immagini.

- Le immagini possono essere sistemate su di un unico livello, oppure disposte gerarchicamente in piramidi. Infatti esiste un teorema secondo il quale la massima frequenza spaziale nei dati dell'immagine deve essere minore della frequenza di campionatura in modo che l'immagine rappresenti l'originale senza ambiguità. Spesso gli oggetti possono essere riconosciuti in immagini con un indice basso di campionamento, per i seguenti motivi:

- i calcoli sono di mole inferiore per la riduzione di dimensione;
- dettagli confusi presenti nelle versioni ad alta risoluzione possono non apparire a bassa risoluzione.

Tuttavia in generale, anche se alcuni oggetti (ad esempio, gli spigoli) sono facilmente identificabili a bassa risoluzione, la descrizione di un oggetto ha bisogno di dettagli che si riscontrano solo ad alta risoluzione: ciò porta naturalmente alla nozione di struttura piramidale dei dati (Fig. C.6). La piramide di immagini è allora una rappresentazione di uno spazio discreto di scale e permette di operare efficacemente con tecniche multi – risoluzione e multilivello.

Le tecniche basate sullo spazio delle scale sono ampiamente usate in fotogrammetria digitale: si assume che tutte le entità trovate in immagini di risoluzione uguale appartengano allo stesso livello scalare; tuttavia esiste una variazione di scala tra entità coniugate in immagini multiple, oppure anche tra differenti entità in una stessa immagine. Gli aspetti teorici, connessi con l'uso delle tecniche basate sullo spazio di scale (sia nel dominio delle immagini, che in quello dell'oggetto) e delle relazioni tra questo tipo di rappresentazioni nei due domini, investono tanto utilizzazioni, quali il matching e la ricostruzione dell'oggetto, quanto la produzione di ortofoto e la sovrapposizione di elementi vettoriali ad immagini (o mappe) raster.

Come noto infatti, nelle immagini digitali, le variazioni di grigio corrispondono a fenomeni dello spazio oggetto che possono essere percepiti su aree di diversa ampiezza, da pochi pixel in su, e l'identificazione di queste variazioni di grigio è essenziale nella decodificazione dell'informazione intrinsecamente contenuta nelle immagini. La strategia LSM è accoppiata all'esistenza di vincoli, cioè alla possibilità di avere differenti descrizioni geometriche, come incognite aggiuntive. Tali vincoli possono essere schematicamente divisi in due gruppi:

- i vincoli geometrici definiti dalla geometria dell'immagine dovuta ai sensori (linee epipolari);
- altre informazioni geometriche (ad esempio, la conoscenza di punti vicini ed altre informazioni sull'oggetto).

Le tecniche di matching riguardano il matching di prima approssimazione e quello fine; ciascuno di

questi si presta poi ad ulteriori suddivisioni. La prima approssimazione si può realizzare per iterazione (procedimento di feedback o di retroazione), ovvero per rilassamento (alimentazione gerarchica in avanti). La sequenza di questo tipo di matching può essere programmata, come una serie prefissata di tentativi che possono essere geometricamente vincolati, oppure può essere autocorrettiva. La robustezza del procedimento può essere migliorata collegando, ad esempio, immagini adiacenti, dopo averle sottoposte individualmente al matching, in stringhe ed applicando il matching alle stringhe stesse. Il matching fine è necessario per una più elevata precisione: a questo scopo, è molto usata la sopraccitata tecnica dei least squares matching (LSM). Tale tipo di matching, come ben noto, rende minime le differenze quadratiche nell'intensità dell'immagine e consente di operare su coppie di immagini, come pure su immagini multiple. Si noti tuttavia come, proprio a causa della non linearità dell'algoritmo ai minimi quadrati, lo stesso algoritmo abbia bisogno di una conoscenza dei valori approssimati dei parametri incogniti.

La rappresentazione nello spazio delle scale di un segnale $f(x,y)$ è un gruppo di segnali che rappresenta il segnale originario, su diversi livelli di scala, in funzione di un parametro di scala. La rappresentazione su scala spaziale dell'immagine digitale è usata per produrre diverse versioni della stessa immagine, con una variazione sistematica, facile da usare, del contenuto di informazione. Quando si rappresenta la famiglia di immagini nello spazio delle scale (la piramide di immagini), si crea un numero discreto di rappresentazioni dell'immagine. Tuttavia le entità all'interno dello stesso livello piramidale possono non avere la stessa scala geometrica, diverse entità nella stessa immagine possono avere diversi fattori di scala; inoltre l'immagine della stessa entità nello spazio oggetto può avere scala diversa. Nel LSM, si prova a collegare finestre di alcuni pixel, minimizzandone le differenze radiometriche, scrivendo un'equazione per ogni coppia di punti coniugati all'interno di una coppia di finestre di immagini, approssimativamente coniugate: g_d, g_s , rispettivamente, nell'immagine destra e sinistra:

$$g_s(x_s, y_s) - g_d(x_d, y_d) = e(x, y)$$

Come già detto in precedenza, si procede all'applicazione di una trasformazione affine generale cui segue il ricampionamento dei valori di grigio, per affrontare un nuovo passo della soluzione. Le variazioni di scala possono influire in vario modo sul processo; allora per tenere conto del problema delle differenti scale, il concetto stesso di scale deve essere introdotto nel processo vero e proprio di matching, modificando opportunamente le equazioni d'osservazione:

$$g_s(x_s, y_s; s_s) - g_d(x_d, y_d; s_d) = e(x, y)$$

inserendo tra i parametri incogniti anche i fattori di scala: s_d, s_s . Un altro tipo di scelta di strategia è collegato al fatto che le entità delle immagini possono essere disposte direttamente nelle immagini (spazio delle immagini), oppure indirettamente nello spazio dei modelli virtuali (spazio degli oggetti). Se si tiene conto dello spazio in cui il matching ha luogo, si può ricorrere ad un'altra classificazione per descrivere le tecniche attuali:

- tecniche basate sullo spazio immagine;

- ❑ tecniche basate sullo spazio oggetto.

Nel primo caso, opportune primitive in un'immagine sono paragonate con analoghe primitive nell'altra immagine. Le tecniche si basano sul tipo di primitiva prescelto e sono tutte quelle cui si è accennato in precedenza (ABM, FBM, relational matching). Invece nel secondo caso, le ricerche sono avvenute più tardi e sono nate dalla necessità di ricostruire il modello digitale di superficie (DSM) da una coppia di immagini digitali. Nel primo caso, i punti coniugati della stereocoppia sono trovati dal computer invece dell'operatore, ma i calcoli seguenti (la compensazione) sono uguali in entrambi i casi, senza tenere conto di come i punti sono stati trovati. Nel secondo caso invece, poiché il matching avviene nello spazio oggetto, tutte le informazioni sull'oggetto, sia precedenti, che eventualmente ottenute nel corso del procedimento, possono essere facilmente integrate. Si badi tuttavia, come i procedimenti di calcolo richiedano una notevole mole di lavoro e causino una certa perdita di informazione fotometrica.

Matching nello spazio immagine

Le soluzioni FBM (feature based matching) si dividono, come già detto in precedenza, a seconda che prendano in considerazione:

- ❑ punti;
- ❑ spigoli.

Nella prima soluzione, punti distinti (interest points) sono estratti mediante svariati procedimenti e corretti poi tra loro, in base a misure riguardanti la somiglianza di certi parametri. Nel secondo caso, in modo analogo, gli spigoli sono estratti mediante l'uso di svariati algoritmi e correlati poi, in accordo a determinati criteri di somiglianza. Attualmente esistono due filoni di ricerca:

- ❑ dopo l'estrazione di spigoli, si procede all'individuazione di punti, mediante opportuni operatori, dai quali partire per il matching;
- ❑ il matching avviene direttamente sugli spigoli.

Un filone di ricerca per l'automazione dell'estrazione degli spigoli è stato quello di copiare il comportamento dell'operatore umano, usando le conoscenze sul sistema di visione stereoscopica dell'uomo. Ad esempio, i confini degli oggetti che tendono a mostrare discontinuità di intensità nell'immagine sono estremamente importanti nel sistema di visione umano. Infatti spesso, un oggetto può essere riconosciuto solamente da un contorno; inoltre la rappresentazione dei contorni è facilmente integrabile in una larga varietà di algoritmi per il riconoscimento di oggetti. Un rilevatore di spigoli è un operatore matematico, con una modesta estensione spaziale, che serve a rilevare uno spigolo localizzato in una funzione d'immagine.

Operatori di tipo diverso sono adatti a diverse situazioni da investigare, tuttavia il principio comune si basa sulla capacità di individuare una direzione allineata con la direzione di massimo cambiamento nel livello di grigio ed una ampiezza che segnala la consistenza di tale cambiamento. Si possono individuare due tipi principali di operatori, a seconda che approssimino il gradiente della funzione dell'immagine o la sua Trasformata Laplaciana. Per quanto riguarda il primo caso, sono stati introdotti due tipi di operatori, a seconda che approssimino i gradienti ortogonali: f_x, f_y , della funzione di immagine, ovvero il gradiente direzionale: $\partial f / \partial r$.

In tabella C.1, sono illustrati alcuni tra i più noti operatori del primo tipo. Il più noto è l'operatore di Roberts; gli operatori di Prewitt, di Sobel e quello isotropico calcolano differenze orizzontali e verticali di somme locali, con il risultato di una riduzione dell'effetto del rumore, ed hanno la proprietà di mantenere il valore zero per regioni uniformi. In tabella C.2, sono illustrati gli operatori del secondo tipo. Il più noto è l'operatore di Kirsch. Per quest'ultimo, un movimento circolare, ad un passo, degli otto elementi esterni della sua maschera, comporta una rotazione di 45° della direzione del gradiente, mentre uno a due passi comporta una rotazione di 90° , e così via. L'uso degli operatori sopraccitati, ancora raro in fotogrammetria, è raccomandato nel campo dell'elaborazione d'immagine e della Computer Vision.

Negli ultimi anni in campo fotogrammetrico è stato utilizzato l'operatore LoG. Dati la funzione del livello di grigio nell'immagine: $f(x, y)$, il filtro di Gauss:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

e la Trasformata Laplaciana del filtro di Gauss, detta operatore LoG:

$$\nabla^2 G(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} - 2\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

facendo la convoluzione della funzione dell'immagine con lo stesso operatore LoG, si ottiene la funzione:

$$C(x, y) = \nabla^2 G(x, y) * f(x, y)$$

Gli spigoli sono individuati proprio dove la funzione $C(x, y)$ va a zero; questi elementi sono chiamati: zero – crossing. Infatti l'operatore LoG combina il filtro di Gauss con la Trasformata Laplaciana:

- il filtro di Gauss ottimizza i vincoli contrastanti della limitazione nel dominio spaziale e della frequenza;
- le derivate seconde dell'immagine liscia, a loro volta, evidenziano cambiamenti bruschi nell'intensità della funzione di grigio.

Inoltre l'operatore LoG si presta assai bene a descrivere la funzione dell'immagine nello spazio delle scale. Spesso infatti, in tale tecnica multi – scalare, dapprima si liscia l'immagine con filtri gaussiani di svariate dimensioni, per definire i livelli di scala, e successivamente, individuati i punti corrispondenti su un livello grossolano, li si segue attraverso lo spazio delle scale. Una volta estratti gli spigoli, essi sono rappresentati in qualche spazio:

- spazio di Hough;
- spazio $\psi - s$;
- spazio di Fourier;

oppure possono essere approssimati con un poligono.

- La trasformata di Hough, il cui uso è stato studiato, per la prima volta alcuni decenni or sono, nel campo dell'elaborazione d'immagine e della Computer Vision, ha attualmente vaste applicazioni anche nel settore della fotogrammetria digitale. La tecnica di Hough per l'individuazione di curve è adatta ai casi in cui non ne è ben definita la posizione; viceversa la forma può essere descritta mediante una curva parametrica ed i principali vantaggi consistono nel fatto che tale tecnica è relativamente poco influenzata da interruzioni nelle curve e dal rumore. Inizialmente si prende in considerazione la definizione di linee rette su un'immagine, presumendo che siano stati scelti punti immagine verosimilmente presenti su contorni lineari. La tecnica di Hough organizza questi punti lungo linee rette, sostanzialmente considerando tutte le possibili linee rette e giudicando queste in base al modo con cui si adattano ai dati. Si consideri in figura C.7.a il punto (x', y') e l'equazione della retta: $y = mx + c$. Tutte le rette passanti per x', y' saranno quelle per cui m, c soddisfino la relazione: $y' = mx' + c$. Ritenendo fissate le coordinate x', y' , allora l'ultima equazione rappresenta una retta nello spazio parametrico m, c . Ripetendo il ragionamento, un secondo punto (x'', y'') anch'esso avrà una retta nello spazio parametrico che si intersecherà nel punto (m', c') , come mostrato in figura C.7.b. Da questa relazione tra spazio immagine e spazio parametrico, si può ricavare l'algoritmo di Hough per individuare le linee rette. Tuttavia dato che m può essere infinito nel piano m, c , una migliore parametrizzazione per la linea retta è data dall'espressione: $x \cos \theta + y \sin \theta = r$.

Questa tecnica può essere generalizzata ad altre curve, in modo diretto; infatti per ogni curva: $f(\bar{x}, \bar{a})$, \bar{a} è un vettore parametrico. Nel caso di un cerchio, l'algoritmo di Hough incrementa passo dopo passo i valori di a, b, r che stanno sulla superficie di un cono. Detta trasformata non rileva solo il cerchio in esame, ma fornisce anche il centro di tale cerchio. Lo svantaggio è che i calcoli crescono esponenzialmente con il numero di parametri; pertanto la tecnica esposta è praticamente utilizzabile solo per curve con un piccolo numero di parametri. Per una ulteriore generalizzazione della presente tecnica, si pensi al caso in cui l'oggetto ricercato non abbia forma analitica semplice, ma comunque ben

definito appaia nell'immagine con forma, orientamento e scala noti. Allora si sceglie un punto di riferimento nella figura e si traccia una linea retta fino al contorno. Sul punto del contorno individuato, si calcola la direzione del gradiente e si tiene conto del punto di riferimento, come funzione di questa direzione. E' possibile calcolare in anticipo la disposizione del punto di riferimento, a partire dai punti di contorno, una volta dato l'angolo del gradiente.

La trasformata di Hough non riconosce solo una forma predefinita, ma ne dà anche la misura, l'orientamento, l'eventuale centro: pertanto si può applicare in diverse tappe del processo fotogrammetrico. Ad esempio, un metodo basato su tale algoritmo serve l'individuazione di un punto segnalizzato. Infatti un importante obiettivo della fotogrammetria digitale è l'ottenimento di misure molto precise di punti segnalizzati sull'immagine digitale, allo scopo di ottenere la trasformazione tra coordinate immagine e coordinate oggetto. Se il segnale è un cerchio bianco in un intorno nero, contenente diametri equispaziati intersecantisi al centro; tale procedura può essere automatizzata ed il rilevamento avviene velocemente, potendo così essere utilizzato nel processo di ricognizione del modello.

- La rappresentazione $\psi - s$ di una linea è una funzione: $\alpha = \psi(s)$, dove la tangente ψ è funzione del parametro s lunghezza della linea (Fig. C.8). Si ricordano le proprietà di tale rappresentazione:
 - la rappresentazione è invariante rispetto alla posizione nel dominio originale: x, y ;
 - i vertici delle linee rette creano discontinuità nella curva $\psi - s$;
 - le linee rette diventano linee orizzontali, le linee curve di 2° grado linee rette con inclinazione proporzionale alla curvatura.

Il vantaggio di tale rappresentazione è che il nuovo dominio riduce il matching ad un problema ad una dimensione, rendendo risolvibile un problema altrimenti molto complesso. Infatti gli spigoli di forma simile nelle immagini sono caratterizzati da funzioni simili nella trasformata $\psi - s$ (per cui sono simili anche direzioni ed angoli); inoltre tale metodo è indipendente da differenze di rotazione tra le immagini.

- Una linea chiusa bidimensionale può essere descritta mediante due funzioni periodiche: $x(t), y(t)$. Il parametro t è definito da $2\pi l/L$, dove L è il perimetro della linea chiusa e l indica la lunghezza d'arco che va dal punto iniziale s fino al generico punto p (Fig. C.9). Un'ulteriore generalizzazione della presente tecnica a figure qualsiasi aperte o chiuse, anche pluriconnesse, è offerta da descrittori di forma ad elementi finiti usuali (ovvero aperti), oppure ciclici, in funzione di opportune approssimazioni del perimetro della linea.
- L'approssimazione poligonale è usata per molti scopi nella Computer Vision ed in fotogrammetria digitale (compressione dei dati, ricognizione del modello, ecc.). Nel caso esaminato, si parte dalla definizione della curvatura di una curva:

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$$

dove y è la funzione rappresentante la curva. Poiché la curva digitalizzata è definita solo in uno spazio

discreto e la sua curvatura non può essere definita rigorosamente, sono necessari metodi per rimediare a tale inconveniente, quali l'uso della funzione codice a catena, sequenza di numeri interi compresi tra 0 e 7 che indicano la direzione verso il punto seguente della curva, discretizzata da 1 a 8, a seconda del mezzo quadrante contenente la tangente alla curva.

	H_1	H_2
Roberts	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Prewitt	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Sobel	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
Isotropico	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

Tab. C.1

1°	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	3°	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	
2°	$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$	Kirsch	4°	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Tab. C.2

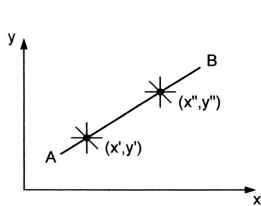


Fig. C.7a

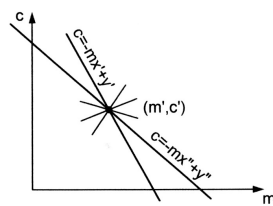


Fig. C.7.b

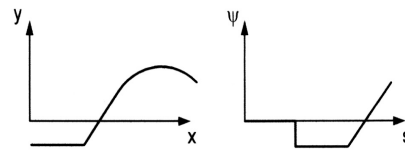


Fig. C.8

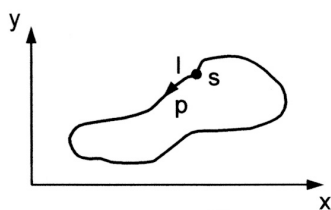


Fig. C.9a

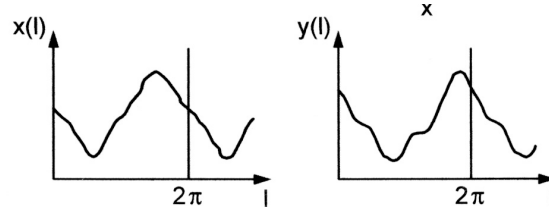


Fig. C.9b

Infine sono applicate tecniche che si basano sull'uso di invarianti della forma. In molti metodi di tipo FBM, il matching avviene su identiche linee di scansione, assumendo il vincolo della geometria epipolare e il criterio della continuità. Tuttavia le stereocoppie digitali non sono sempre nella geometria epipolare, gli zero -

crossing in entrambe le immagini, simili per forma, possono essere collegati in modo differente, ovvero possono presentarsi in una sola immagine. Pertanto il problema di trovare gli spigoli può essere espresso in termini più generali mediante la rappresentazione degli spigoli in altri spazi e facendo il matching tra poligoni o tra curve rappresentate in uno spazio tra quelli sopra citati. Si tratta, come ovvio, di una delle parti più impegnative del processo fotogrammetrico: ogni spigolo in un'immagine deve essere paragonato con gli altri spigoli nell'altra, nel corso di un processo di selezione in base a misure di somiglianza e coerenza. Da un lato, si individua una lista di possibili candidati, in base a criteri di somiglianza, poi interviene un test di coerenza. Misure di somiglianza tra approssimazioni poligonali possono svolgersi mediante confronto tra vertici e/o lati; inoltre si può tenere conto dell'orientamento, delle coordinate dei punti estremi e di quelle del punto medio. Di recente, sono state utilizzate anche primitive radiometriche oltre alle già citate primitive geometriche.

In accordo con la Teoria dei descrittori di forma di Fourier, un algoritmo realizza il matching nello spazio delle frequenze, in due versioni, per linee chiuse ed aperte. Analogo è il matching nello spazio $\psi - s$, dove si confrontano le rappresentazioni degli spigoli preventivamente estratti. Nel caso in cui il matching avviene per punti, invece, gli zero – crossing servono quale punto di partenza; infatti determinano le posizioni dei punti corrispondenti nel modo più accurato possibile. Dalla procedura di rappresentazione degli spigoli si ottiene una lista di punti corrispondenti ai massimi cambiamenti di curvatura negli zero – crossings: tali punti definiscono i centri di finestre all'interno delle quali sono calcolate le posizioni dei punti di interesse in modo monoculare. Si procede poi al matching di tali punti, cioè alla ricerca dei punti corrispondenti nelle due immagini. La determinazione monoculare di tali punti avviene mediante alcuni operatori, quali per esempio l'operatore di Foerstner.

La localizzazione di punti speciali, quali l'intersezione fra spigoli, il centro di un cerchio (o di un insieme di anelli), il punto angolare di un poliedro, coincide con il problema della selezione di una finestra ottimale e della determinazione del peso da dare al centro di tale finestra. La determinazione del baricentro della finestra si basa su un problema ai minimi quadrati, avente i seguenti modelli deterministico e stocastico:

$$\begin{cases} x_i + v_i = \hat{x} \\ y_i + v_i = \hat{y} \end{cases} \quad P_i = \begin{vmatrix} g_{x_i}^2 & g_{x_i} g_{y_i} \\ g_{x_i} g_{y_i} & g_{y_i}^2 \end{vmatrix}$$

dove: g_x, g_y , sono le derivate parziali prime della funzione dell'immagine $g(x, y)$, mentre nella determinazione dell'intersezione fra spigoli, del centro di un cerchio (o di un insieme di anelli) e del punto angolare di un poliedro gli stessi modelli hanno espressione:

$$d_i + v_i = \hat{x} \cos \alpha_i + \hat{y} \sin \alpha_i \quad P(d_i) = g_{x_i}^2 + g_{y_i}^2$$

dove: $\tan \alpha_i = g_{y_i} / g_{x_i}$ e: $d_i = x_i \cos \alpha_i + y_i \sin \alpha_i$.

Come evidente, anche il secondo problema è ai minimi quadrati, dove la distanza fra il punto origine ed il punto speciale cercato è l'osservabile, mentre il peso è il quadrato del gradiente. La soluzione numerica dei due problemi coincide, essendo identica la matrice del sistema normale di entrambi:

$$Q = \begin{vmatrix} \sum g_{x_i}^2 & \sum g_{x_i} g_{y_i} \\ \sum g_{x_i} g_{y_i} & \sum g_{y_i}^2 \end{vmatrix}$$

Per ogni punto di un'immagine l'indice che indica la prossimità dell'ellisse d'errore ad un cerchio ideale è:

$$q = \frac{4\text{Det}Q^{-1}}{(\text{Tr}Q^{-1})^2} = \frac{4\text{Det}Q}{(\text{Tr}Q)^2}$$

mentre il peso del punto d'interesse risulta:

$$w = \frac{1}{\text{Tr}Q^{-1}} = \frac{\text{Det}Q}{\text{Tr}Q}$$

Il rapporto q è derivato a partire dalla relazione tra gli autovalori della matrice normale. Se risulta:

- $q = 0$, allora si ha: $\text{det}Q = 0$, la matrice è singolare e le derivate dei livelli di grigio: g_x, g_y , sono linearmente dipendenti, ovvero il punto giace sullo spigolo;
- $q = 1$ (o $q \cong 1$), allora i due autovalori della matrice normale sono uguali fra di loro (o quasi) e l'ellisse è un cerchio (o è prossimo ad esso), ovvero il punto giace nell'intersezione fra spigoli, oppure in altri punti speciali.

Il metodo di Foerstner è molto noto in fotogrammetria digitale, perché presenta il vantaggio di una buona velocità, ma ha lo svantaggio di una non buona precisione nella localizzazione degli angoli: si tratta di un metodo ai minimi quadrati, all'interno del quale si sceglie una finestra ottimale il cui centro è opportunamente pesato. Come prevedibile, si cerca spesso di modificare la formulazione classica dei diversi algoritmi, per accentuarne i pregi e minimizzarne gli svantaggi. Ad esempio, un metodo che parte da valori approssimati ottenuti dalla Trasformata di Hough, successivamente trattati con l'operatore di Roberts, per il rilevamento di punti intersezione di spigoli, pare presenti maggiore precisione dell'operatore di Foerstner. Infatti questa tecnica consente di ottenere non solo la posizione dello spigolo, ma anche le direzioni delle due linee che formano lo spigolo, cosa utile sia per il matching, che per il riconoscimento dell'oggetto, consentendo tra l'altro una precisione superiore a quella ottenibile con la semplice applicazione della Trasformata di Hough. Un altro schema di matching combina le caratteristiche positive dei metodi ABM e FBM, nella prospettiva di ricostruire la superficie di un oggetto (DSM), a partire dal riconoscimento dei punti coniugati nella stereocoppia. In questo caso, si parte dall'estrazione di spigoli, applicando l'operatore LoG alla funzione immagine, e si ottiene l'immagine filtrata: $f'(x, y) = \nabla^2 G(x, y) * f(x, y)$, espressione nella quale il simbolo $*$ indica l'operazione di convoluzione. Tale immagine è divisa in regioni positive e negative: i confini di queste regioni sono dette 'zero – crossing' da cui il nome del metodo. Infatti gli zero – crossing sono dovuti ai bruschi cambiamenti nel livello di grigio e, nel contesto di questo metodo, si ritiene che il grado del cambiamento di grigio possa essere descritto dalla derivata prima della funzione del livello di grigio. Una volta applicato l'operatore LoG alla immagine destra ed a quella sinistra, e rilevati gli zero – crossing (ad esempio, corrispondenti a confini di manufatti, oppure ad ombre), invece di fare il matching degli spigoli veri

e propri, si procede al matching dei punti degli spigoli mediante la correlazione (ABM). I vincoli sono quelli della geometria epipolare e della continuità della immagine. Infatti i punti degli spigoli dell'immagine sinistra sono ricavati da un algoritmo opportuno, mentre per ogni punto dello spigolo nell'immagine sinistra, il punto corrispondente in quella destra si trova lungo la linea epipolare, mediante la correlazione d'immagine. Inoltre il criterio di continuità implica che i valori di differenza lungo gli zero – crossing devono essere continui e, anche in questo caso, si fa uso dello spazio di Hough.

Nello schema gerarchico dei matching a piramide di immagini è incluso un passo riguardante l'analisi dell'immagine che consente di applicare lo schema, appena descritto, con maggior sicurezza alle aree urbane. Nel caso specifico, un metodo per l'estrazione degli spigoli dalle immagini è basato sugli zero – crossing della derivata seconda, invece che della derivata prima della funzione immagine. Tale metodo è più preciso dell'uso dell'operatore di Gauss – Laplace ed assume particolare importanza nel campo del riconoscimento dei manufatti nell'immagine.

Si noti infine come, in un procedimento di orientamento relativo automatico di immagini digitali, i singoli moduli di costruzione della piramide di immagini (estrazione delle entità, matching ed ottenimento dei parametri di orientamento) possano essere studiati in funzione della possibilità di adattarli ai computers paralleli. La convenienza di tale parallelizzazione è facilmente dimostrata, in quanto l'algoritmo genera la piramide di immagini e comprende operatori di filtraggio. Allora è intuitivo, come il filtraggio, in parallelo per ogni livello della piramide, sia più efficiente di quello sequenziale. Inoltre anche altri algoritmi (determinazione del gradiente e dei suoi quadrati, calcolo della matrice normale, ecc.) sono operazioni nelle quali ogni pixel dell'immagine è indirizzato con la stessa sequenza di istruzioni. Per raggiungere tempi di calcolo accettabili per l'intero processo di orientamento relativo automatico, si può allora cercare di usare algoritmi che lavorino su macchine parallele, in quanto l'orientamento relativo delle immagini digitali comporta un enorme dispendio di tempo di calcolo. Dal punto di vista dei moduli utilizzati, si opera con una tecnica, di uso generale, come quella a multipla risoluzione all'interno di una strategia piramidale, e si procede poi con i seguenti passi:

- ❑ una funzione gaussiana permette di ottenere dalla convoluzione un'immagine lisciata;
- ❑ il successivo ricampionamento consiste nell'estrazione di un pixel su due da ogni riga e di una riga su due dall'immagine stessa;
- ❑ su ogni livello della piramide di immagini ottenuta, sono individuati i punti interessanti mediante, ad esempio, l'algoritmo di Foerstner.

Il matching vero e proprio parte dal livello più grezzo della risoluzione e prevede test iconici e geometrici per trovare i punti corrispondenti. Le corrispondenze approssimate, in un determinato livello, sono trovate usando le informazioni acquisite in quello precedente.

Matching nello spazio oggetto

Nel matching basato sullo spazio immagine, le primitive in un'immagine sono paragonate con quelle nell'altra e, come illustrato, molteplici sono state le soluzioni proposte. Il metodo basato sullo spazio oggetto trae origine da problemi collegati alla ricostruzione del modello digitale della superficie di un oggetto (DSM), a partire dalla stereocoppia digitale.

- ❑ A riguardo, si definisce groundel, nello spazio oggetto, l'elemento di superficie direttamente

corrispondente al pixel, nello spazio immagine; in tal modo, la strategia di massimizzazione della correlazione ai minimi quadrati può essere chiamata LSGC (least squares groundel correlation). Pertanto il groundel è un elemento nello spazio oggetto, avente dimensione pari a quella del pixel proiettato sulla superficie oggetto stesso, per visualizzare il quale si può immaginare l'oggetto diviso in piccoli quadrilateri, ognuno dotato di una altezza che rappresenta l'altezza media attribuibile alla sua area. Inoltre ogni groundel contiene informazioni riguardanti la riflettanza, il colore ed altre caratteristiche radiometriche. Il concetto di groundel è astratto e pertanto l'uso del groundel è molto flessibile.

Esso è stato usato dapprima all'interno di metodi convenzionali di correlazione e, per quanto riguarda il matching nello spazio oggetto, principalmente nel HRC (hierarchical relaxation correlation), finché è stato introdotto l'algoritmo di correlazione ai minimi quadrati (LSC), anche per il matching nello spazio oggetto. Il metodo HRC si basa sulla considerazione che le densità dell'immagine, cioè le risposte radiometriche del sensore, corrispondenti ad ogni groundel, possano essere calcolate analiticamente, se tutti i parametri geometrici e radiometrici sono noti, e gli errori sono dovuti solo alla non perfetta conoscenza dei valori delle quantità coinvolte. Il processo si attua con il metodo dei rilassamento. Anche nell'algoritmo di Helava l'idea di fondo è che le intensità di immagine, corrispondenti ad ogni groundel, possano essere calcolate in modo analitico, qualora siano noti i parametri geometrici e radiometrici. In questo caso tuttavia, il criterio dei minimi quadrati determina un insieme di quantità incognite o l'aggiornamento dei loro valori approssimati.

- Esiste peraltro un altro approccio al problema del matching nello spazio oggetto. La comprensione dell'immagine è il fine dell'automazione e molti obiettivi nell'analisi d'immagine possono essere formulati, come problemi di deduzione di proprietà dell'oggetto, a partire dai dati dell'immagine e con l'ausilio di certe conoscenze a priori, ad esempio, una discretizzazione dello spazio oggetto, in elementi solidi regolari detti voxel. Questo tipo di trattamento dell'informazione si chiama inversione dell'immagine, poiché l'informazione richiesta è tratta dai dati contenuti nell'immagine. Sulla base della teoria del problema inverso, è possibile mettere a punto un corretto fondamento teorico per la determinazione di generalizzazioni, descrizioni, regole e leggi, a partire da un gruppo di dati grezzi (osservazioni, caratteristiche o fatti). In effetti, molte applicazioni della Computer Vision richiedono la capacità di rappresentare in modo esplicito cognizioni contenute, in modo implicito, nei dati di partenza e possono essere formulate come problemi di carattere deduttivo.

In molti casi inoltre, si ha a che fare con informazioni incoerenti ed incomplete, da trattare sulla base di opinioni e non solo di fatti, veri o falsi che siano. Occorre allora risolvere problemi inversi mal posti (problemi malcondizionati), applicando tecniche matematiche finora considerate marginali. In generale infatti, la visione può essere considerata come un problema in cui la descrizione del mondo esterno è dedotta dalle immagini del mondo, con l'aiuto di una certa conoscenza del mondo esterno e del processo di formazione dell'immagine. Si ha cioè a che fare con tre tipi di dati di carattere informativo. I problemi di inversione hanno lo stesso scopo dei problemi di inversione deduttiva ed i problemi inversi sono un importante capitolo dell'Algebra e del Calcolo delle Probabilità e sono spesso di difficile risoluzione.

A tale proposito, un problema risolvibile è quello del calcolo della rappresentazione delle superfici, a partire da immagini multiple. Un nuovo approccio propone il matching di più immagini, molto importante nel campo delle operazioni fotogrammetriche, soprattutto per quanto riguarda la triangolazione aerea, in quanto il

ricoprimento parziale di svariate immagini può arrivare ad almeno nove e talvolta, anche se raramente, ancora di più. L'affidabilità e la precisione dei punti di legame crescono, in modo significativo, solo qualora si usino metodi di matching con immagini multiple. Due modelli matematici sono formulati per la risoluzione di tale problema. Nel primo approccio più rigoroso, i pezzi di superficie con le loro altezze ed i livelli di grigio sono determinati simultaneamente, nel secondo, i punti coniugati sono determinati indipendentemente uno dall'altro e senza far uso dei parametri dell'orientamento esterno. Questa ultima soluzione corrisponde al metodo tradizionale di triangolazione aerea, dove tutti i punti sono misurati individualmente e solo poi introdotti nella compensazione a blocchi.

In generale, il matching simultaneo di finestre coniugate, a partire da immagini multiple parzialmente ricoprentisi tra di loro, può essere messo in atto minimizzando le differenze di grigio tra tutte le possibili coppie di finestre coniugate; tuttavia allo scopo di rendere il metodo più robusto, sono introdotti vincoli geometrici, sia sotto forma di equazioni aggiuntive, sia mediante la modifica dell'espressione che mette in relazione i sistemi di coordinate delle finestre coniugate. In questo approccio, dove esistono più finestre dell'immagine che rappresentano lo stesso pezzo di superficie nello stesso numero di immagini sovrapposte, la superficie dell'oggetto è rappresentata da due funzioni continue: una geometrica $Z(x, y)$ ed una radiometrica $G(x, y)$, rappresentanti rispettivamente le altezze ed i valori di grigio. La ricostruzione del pezzo di superficie coinvolge la determinazione di alcuni parametri che possono essere determinati, definendo le trasformazioni geometrica e radiometrica tra la superficie stessa dell'oggetto e le sue immagini. Si assume una tassellatura locale, nella quale la superficie è rappresentata da un modello digitale della superficie (DSM), nonché da un modello radiometrico, inoltre che la superficie sia Lambertiana, ovvero che la riflettanza sia isotropa nello spazio. Infine se si fa anche l'ipotesi che la superficie sia liscia e che non si abbiano grandi variazioni nella geometria dell'esposizione, si può ammettere una corrispondenza biunivoca tra la tassellatura dello spazio oggetto e la finestra dell'immagine. Pertanto le equazioni d'osservazione possono essere scritte usando lo spazio oggetto come sagoma di riferimento. Le seguenti considerazioni motivano perché ricavare, a partire da una o più immagini di una scena, una precisa descrizione geometrica della scena stessa è un problema così difficile da risolvere:

- ❑ nel processo di formazione dell'immagine, il mondo tridimensionale è riprodotto in due dimensioni, con la perdita di una dimensione;
- ❑ anche i problemi ben posti sono spesso numericamente instabili, se si ha rumore sia nella scena, che nell'immagine;
- ❑ gli oggetti sono difficili da definire: infatti sono note diverse tecniche di modellazione degli oggetti, ma esse spesso non sono adeguate per definire un grande numero di oggetti naturali;
- ❑ la ricostruzione di superfici è un problema inverso malcondizionato, per regolarizzare il quale (ovvero per rendere il problema ben – condizionato), occorre fare ulteriori assunzioni (nella Computer Vision i problemi malcondizionati sono collegati alla presenza di rumore; nella ricostruzione di superfici è invece richiesta una forma di regolarizzazione anche in assenza di rumore, per poter saltare quelle aree in cui i gradienti del valore di grigio sono troppo bassi).

Un metodo classico è quello della FAST Vision che prevede un determinato tipo di regolarizzazione mediante la scelta di un'appropriata dimensione per la tassellatura e la minimizzazione della curvatura. Un

avanzamento di tale metodo, a partire dalle equazioni basilari della FAST Vision, procede ad una regolarizzazione adattativa, basata su una tecnica particolarmente appropriata a sistemi malcondizionati. Esempi significativi di un processo di matching nello spazio oggetto, sono stati proposti nella fotogrammetria dallo spazio, allo scopo di ricostruire superfici con dati acquisiti mediante camere trilineari (Fig. C.10).

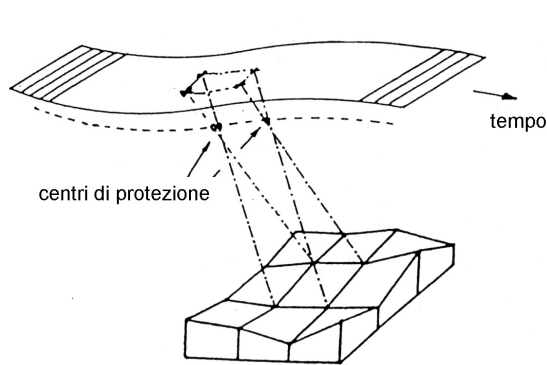


Fig. C.10

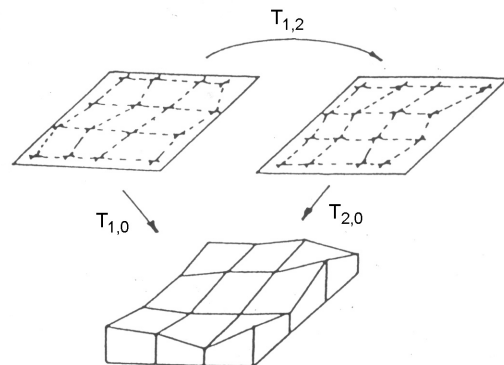


Fig. C.11

Infatti molte ricerche sul matching nello spazio oggetto sono limitate a immagini, prese da camere CCD, per applicazioni di fotogrammetria del vicino. In questo caso, in mancanza di camere digitali aeree con un'adeguata densità di pixel, occorre procedere alla digitalizzazione delle immagini analogiche, introducendo ovviamente errori aggiuntivi di tipo geometrico e radiometrico. Tuttavia con l'introduzione delle camere trilineari, con immagini direttamente digitali, si può concepire il matching nello spazio oggetto in termini davvero generali. Le camere digitali lineari sono state provate in applicazioni spaziali (SPOT e successivi sensori ad alta risoluzione). Dal punto di vista del modello uno scanner trilineare, con sensori orientati perpendicolarmente alla direzione di volo, consente di archiviare l'immagine digitale ad ogni ciclo di lettura mediante tre linee e permette la ricostruzione dell'oggetto, qualora siano disponibili informazioni di controllo di carattere generale (osservazioni geodetiche in forma di rete, parametri di orientamento esterno, oppure dati DSM). L'immagine analogica con ricoprimento longitudinale è sostituita da una composizione di successive immagini trilineari, mentre i centri di proiezione sono considerati una funzione a sei dimensioni del tempo, ovvero nella direzione della strisciata. E' noto infatti che l'estrazione del DSM, da immagini stereoscopiche, è descrivibile come una trasformazione geometrica ottimale tra due o più immagini.

- Nel matching di ogni singolo punto, dopo la trasformazione eseguita per punti discreti, è generata una griglia che fornisce il DSM;
- nel matching multipuntuale invece la trasformazione è calcolata direttamente per la griglia costituente il DSM o una parte di essa.

In ogni caso, il problema della ricostruzione di superfici è uno dei due moduli fondamentali della fotogrammetria digitale e richiede:

- il conseguimento di informazioni sufficienti, per modellare la porzione dello spazio oggetto che è stato osservato nello spazio immagine,

L'altro modulo riguarda il riconoscimento degli oggetti, caratterizzati dalla discontinuità del loro contorno nelle

immagini, e si attua in due passi da eseguirsi sequenzialmente:

- determinazione dei punti coniugati o di altre entità nelle immagini (matching);
- densificazione dei punti sottoposti al matching nello spazio oggetto (interpolazione).

La compensazione ai minimi quadrati o facente uso di procedure robuste fornisce la stima dei parametri geometrici e radiometrici della superficie oggetto, a partire dai valori di intensità dei pixel e da opportuni vincoli sulle informazioni. In quest'ottica, la ricerca fotogrammetrica più tradizionale continua ad occuparsi dei problemi dell'interpolazione e della ricostruzione di superfici, secondo un approccio gerarchico, mentre con un approccio innovativo, il matching avviene nello spazio oggetto. In quest'ultimo caso, la griglia è stabilita direttamente nello spazio oggetto (mediante i voxel, come già detto in precedenza, elementi discreti definiti nello spazio tridimensionale) e la trasformazione T_{ij} tra due immagini deve tenere conto delle trasformazioni: T_{i0}, T_{j0} , tra le immagini e l'oggetto, in modo che:

$$T_{i,j} = T_{i0} * T_{j0} = T_{i0} + T_{j0}$$

essendo: T_{i0}, T_{j0} , le trasformazioni inverse, ovvero le proiezioni dell'oggetto nei piani delle immagini (Fig. C.11). Il vantaggio di questo approccio è che la determinazione dei punti, la generazione del DSM ed il calcolo delle ortoimmagini sono processi simultanei. Si fa l'ipotesi che la superficie oggetto sia rigida, immobile, opaca ed illuminata da sorgenti esterne di luce, costanti nel tempo. Le osservazioni sono i valori di grigio nelle strisciate delle immagini $g(i, j)_s$, i parametri da determinare i valori delle altezze nei punti della griglia del DSM, i valori di grigio G_{ij} dell'oggetto e gli elementi dell'orientamento esterno, dove i valori di grigio dell'oggetto sono dipendenti dalle altezze nei punti di griglia del DSM e dagli elementi dell'orientamento esterno. Lo scopo è quello di minimizzare la somma dei quadrati della differenza tra il valore di grigio G_{ij} , di ogni groundel dell'oggetto, ed il valore di grigio della trasformata nello spazio oggetto del corrispondente pixel di ciascuna immagine $g(i, j)_s$.

Ovviamente trattandosi di una compensazione ai minimi quadrati non – lineare, sono necessari valori iniziali approssimati per le incognite e, a tale scopo, sono usate procedure gerarchiche. Un altro metodo basato sull'inversione e la regolarizzazione nel caso di problemi malcondizionati, è il metodo SFS (Shape from shading). L'intensità di un pixel è prodotto dalla luce riflessa da una piccola area della superficie vicina al punto corrispondente dell'oggetto. E' facile ottenere informazioni sulla forma di un oggetto a partire dalle immagini, se l'illuminazione e la riflettanza superficiale non cambiano da una posizione della scena all'altra. In termini analitici, è possibile avere illuminazione uniforme, se la sorgente è puntiforme ed all'infinito: allora occorre possedere informazioni sulla sorgente luminosa e sulla riflettività dell'oggetto. Esistono algoritmi, atti a quantificare tale informazione, alla base dei quali valgono le seguenti considerazioni:

- molte sorgenti di luce in posizioni diverse possono determinare l'orientamento dell'oggetto in modo unico;
- ogni posizione distinta delle sorgenti di luce dà un contributo diverso per la intensità in ogni punto;
- informazioni locali possono migliorare la determinazione della forma dell'oggetto ed in modo analogo, la

conoscenza di informazioni locali migliora la precisione nell'estrazione di spigoli.

Nel metodo Shape from shading by relaxation, l'equazione base contiene il vincolo riguardante l'orientamento dell'oggetto cui si aggiunge un'ulteriore condizione sulla mancanza di asperità della superficie. Supposto che si abbia una certa conoscenza della normale $q(x, y)$ alla superficie nel punto $p(x, y)$, se la normale non è nota con sufficiente precisione, l'equazione di riflettività: $I(x, y) = R(x, y)$, non sarà rispettata. Allora si tratta di minimizzare il funzionale $(I - R)^2$, rispettando la condizione di non asperità nei dintorni di p, q , in quanto tali termini sono piccoli nel caso di curva liscia. Senza entrare nei dettagli, si ricorda che, differenziando rispetto a p, q , il valore del funzionale quadratico:

$$E(x, y) = (I(x, y) - R(p, q))^2 + \lambda(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) = \min$$

si ottengono le equazioni del sistema normale e, da questo, la soluzione cercata. La tecnica delle misurazioni da stereocoppie per estrarre informazioni geometriche, tipica della fotogrammetria digitale e del telerilevamento, è abbandonata nel caso in cui si posseggono solo immagini monocolori. Si tratta evidentemente di un procedimento assai difficile, in quanto si derivano informazioni sugli oggetti dall'analisi di singole immagini.

Un nuovo approccio globale integra il classico matching nello spazio oggetto ed il SFS. Infatti il metodo SFS opera su singole immagini, va bene per superfici con debole texture, comporta la proiezione dallo spazio oggetto allo spazio immagine e ha bisogno che siano ben note le condizioni di illuminazione. Viceversa il matching ha bisogno di due immagini della stessa scena con discreta texture. Si tratta di metodi con caratteristiche opposte; pertanto sembra particolarmente interessante la possibilità di sfruttarne i vantaggi complementari. Infatti a partire da due o più immagini con differenti illuminazioni, si calcolano le altezze del DSM, invece delle inclinazioni della superficie (che si calcolerebbero nell'applicazione del SFS puro), all'interno di una classica compensazione ai minimi quadrati o sue varianti robuste. Utilizzando tale metodo, si può sfruttare il fatto che immagini sonar subacquee consentono la conversione delle caratteristiche di riflettività in informazioni sulle forme e sulla pendenza dei fondali degli acquiferi. Queste informazioni vanno poi combinate con dati puntuali di profondità, per ricavare un modello attendibile del fondo cercato.

Matching relazionale

Il matching relazionale, la cui comparsa in campo fotogrammetrico è abbastanza recente, è invece frequentemente usato nella Computer Vision, per confrontare entità estratte dall'immagine con un modello (riconoscimento dell'immagine). Inizialmente esso è stato introdotto come aiuto nell'interpretazione dell'immagine, essendo una specie di approssimazione del modello. Dal punto di vista teorico, si discosta soprattutto dall'area based matching (ABM) e, in generale, dai metodi statistici; inoltre in contrasto con gli usuali stimatori ai minimi quadrati e loro varianti robuste, il matching relazionale non ha bisogno di valori approssimati di posizione od orientamento. Come già detto in precedenza, le entità nelle immagini devono essere rappresentate in modo simbolico; pertanto spesso si fa uso di un approccio che trae origine dalla Teoria dei Grafi. Il passaggio critico sta comunque nella rappresentazione delle entità e nelle loro relazioni. A questo punto, il matching relazionale vero e proprio consiste in un paragone tra relazioni (un esempio è illustrato in figura C.12), mentre il matching strutturale stabilisce una corrispondenza tra le primitive delle

descrizioni strutturali.

Quando due rappresentazioni sono simili (entrambe sono immagini o strutture relazionali), il matching va inteso nel senso comune; al contrario se le rappresentazioni sono diverse (come nel caso del confronto tra un'immagine ed una struttura geometrica, quale un modello 3D), allora il matching va inteso in senso alquanto ampliato e forse si può farlo coincidere con l'adattamento, dove ogni rappresentazione è messa in relazione con un'altra preesistente. Infine si può arrivare a comprendere, sotto il termine matching relazionale, il processo di verifica di una struttura, vale a dire un'immagine può essere confrontata con determinate regole per decidere se ha senso, oppure non ne ha alcuno, assegnarle un'interpretazione. Uno fra questi processi interpretativi, consiste nel confrontare una determinata struttura con un gruppo di strutture accettabili, allo scopo di trovare il miglior adattamento.

In un esempio di un tale procedimento di matching, le linee di scansione sono rappresentate come alberi e la costruzione di informazioni strutturali avviene sia usando le proprietà geometriche, che in modo astratto sotto forma di relazioni gerarchiche tra le primitive. All'interno di tale metodo, sono state sviluppate diverse procedure che spesso dipendono dal concetto della distanza tra gli alberi, oppure dalla definizione di una grammatica collegata agli alberi che permette di usare un'analisi sintattica. Due tipi di segnali sono adottati come input:

- ❑ al primo passo, una linea di scansione di livello di grigio;
- ❑ nei assi successivi, l'output della convoluzione dell'immagine con l'operatore LoG (ritenendo che il matching relazionale sia funzionale soprattutto alla ricostruzione di superfici in aree urbane).

Lo stesso metodo può essere applicato al riconoscimento di strade, fiumi, ecc., nell'ambito della produzione di carte, a partire da immagini aeree. Allo scopo sono paragonati gli oggetti nelle immagini e gli elementi morfologici, adottando loro descrizioni strutturali, opportunamente estratte, ed etichettando sia le une, che gli altri, in termini di primitive geometriche e delle loro relazioni.

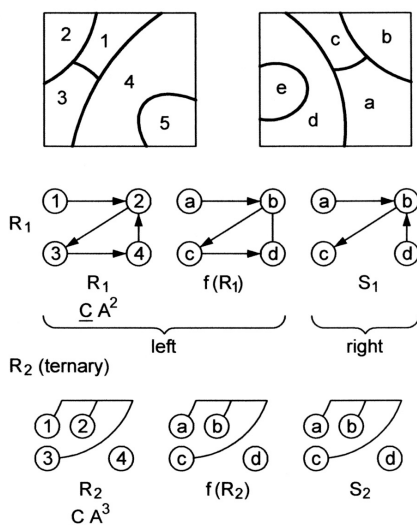


Fig. C.12a

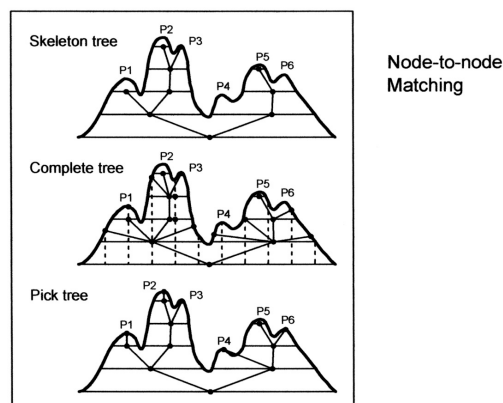


Fig. C.12b

Riconoscimento degli oggetti dopo la ricostruzione di superfici

Uno degli scopi della fotogrammetria digitale è quello di riconoscere automaticamente gli oggetti. La

produzione di carte a grande scala a partire da immagini aeree, come noto, è uno dei campi di applicazione di questa tecnica. La procedura sarà totalmente automatica quando il posizionamento e la descrizione degli oggetti si baserà su una interpretazione razionale dei contenuti dell'immagine. Una procedura, oggi molto diffusa, si compone dei seguenti passi:

- ❑ le immagini sono convolute con l'operatore LoG, ricavando gli zero – crossing, corrispondenti agli spigoli, ovvero a discontinuità nei valori di grigio;
- ❑ gli spigoli sono sottoposti a matching, per ricavare quanti più possibile punti coniugati;
- ❑ ottenuti i parametri di orientamento, si provvede alla ricostruzione di superfici, dove sono stati sottoposti al matching moltissimi spigoli, con il risultato di avere una lista di punti a grande densità spaziale, costituenti gli spigoli stessi noti nelle tre dimensioni, in modo discreto;
- ❑ in molti casi, gli spigoli corrispondono ai confini di un oggetto; allora si può procedere ad un matching tra le descrizioni simboliche di questi confini e le rappresentazioni simboliche del mondo reale, archiviate in libreria.

Il riconoscimento automatico degli oggetti, a partire da immagini multiple, fa affidamento su una procedura di interpretazione delle entità, estratte dalle immagini, mediante il confronto con modelli teorici della realtà (un esempio è illustrato in figura C.14 e fa uso di regole applicate iterativamente.)

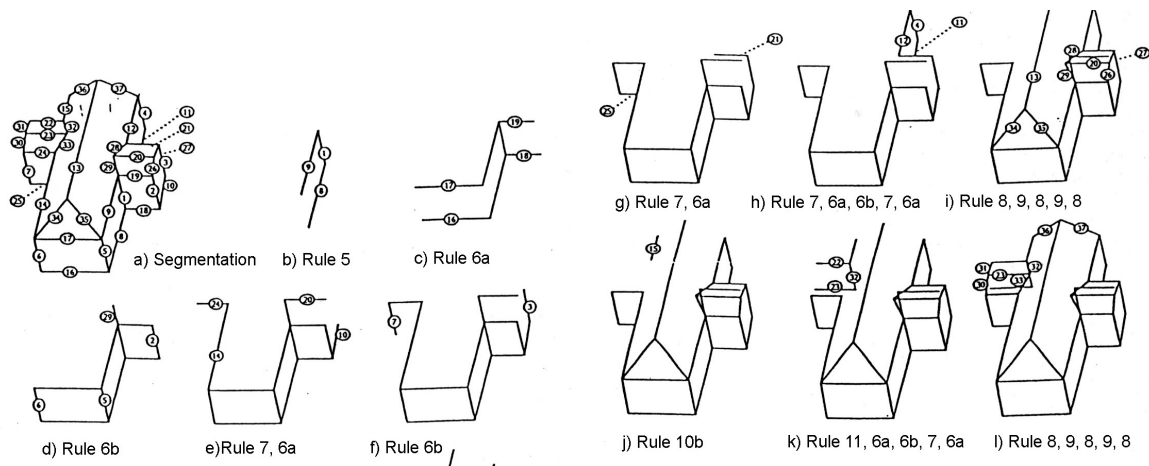


Fig. C.14

Alla conclusione, per quanto necessariamente aperta e provvisoria, di quanto esposto, in quest'appendice, sulle tendenze moderne della ricerca fotogrammetrica, giova ribadire che la transizione, dalla fotogrammetria analitica a quella digitale, richiede insieme la modifica e/o l'estensione dei modelli esistenti e lo sviluppo di nuovi concetti.

- ❑ Infatti come già detto in precedenza, nell'approccio classico della fotogrammetria digitale, la formazione del modello (orientamento relativo) e la ricostruzione dell'oggetto (orientamento assoluto) si basano sull'uso di singoli punti isolati.
- ❑ Invece un approccio alternativo alla fotogrammetria digitale, più moderno, originale ed innovativo, utilizza, per gli stessi scopi, particolari fotogrammetrici geometricamente diversi dai soliti punti: linee di vario tipo, oppure superfici e le loro proiezioni nello spazio immagine, come è stato messo bene in evidenza tanto nella seconda parte del presente lavoro, quanto in questa stessa appendice.

Pertanto quello che un tempo era impensabile ora, grazie alle tecniche digitali è ancora più facile rispetto alla classica estrazione dei punti e se, da un lato, la fotogrammetria digitale ricalca la fotogrammetria analitica classica e tenta di renderne automatici i vari gradini, dall'altro, si apre il campo della ricerca di nuovi modelli per quella che può definirsi la fotogrammetria delle linee e delle superfici.

MODELLI OTTIMALI PER L'ANALISI DEI DATI

3.1 Classi di problemi

I problemi ai minimi quadrati si presentano, in generale e nell'ambito specifico delle discipline geodetiche e geomatiche, usualmente ripartiti in due classi fondamentali:

- problemi reticolari (o di compensazioni di reti);
- problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti.

Le stesse due classi si incontrano anche in problemi affini, quali ad esempio:

- i campionamenti delle osservazioni, l'ottimizzazione della configurazione di rilevamento e/o dello schema di misura, oppure dei pesi delle osservazioni;
- la "cluster analysis", l'analisi di varianza, la regressione multipla, l'analisi fattoriale (o studio delle componenti principali);
- lo studio dell'affidabilità delle osservazioni e le procedure di validazione dei dati e di stima dei parametri con procedure robuste.

In ogni caso, tutti i problemi minimi quadrati possono essere interpretati, topologicamente, come un grafo, dove:

- le osservazioni, i vincoli e le pseudo-osservazioni sovrappesate e non, come pure le informazioni a priori, le osservabili secondarie e le condizioni numeriche di regolarizzazione, costituiscono i lati del grafo;
- i parametri principali ed ausiliari (o di servizio) costituiscono i nodi dello stesso grafo.

Si noti, a riguardo, come l'interpretazione data della topologia sia indispensabile per una corretta comprensione dei casi e sottocasi in cui si articolano le suddette classi fondamentali.

Le due classi fondamentali, già precedentemente enunciate, si articolano in vari e svariati casi e sottocasi, illustrati, dettagliatamente, nel prosieguo.

I problemi reticolari (o di compensazione di reti) presentano come osservabili:

- differenze prime dei parametri;
- funzioni delle differenze prime dei parametri.

Il primo caso ha numerosi esempi, anche fuori dalle discipline geodetiche e geomatiche:

- discretizzazione di equazioni differenziali del primo ordine, tipiche della fisica, della chimica e delle scienze della terra;
- problemi di trasporto: schemi di circuitazione, traffico, circolazione e transazione, reti di comunicazione, distribuzione e telecomunicazione ed è costituito, per le suddette discipline, dalle reti di differenza di

potenziale.

Il secondo caso è, invece, tipico delle discipline geodetiche e geomatiche, anche se non esclusivo (a questo caso, infatti, fanno riferimento ben particolari discretizzazioni di equazioni differenziali, sempre riferite ai sopracitati raggruppamenti di discipline fisiche e naturalistiche), e si articola nei seguenti sottocasi:

- l'informazione fluisce completa, bidirezionalmente, come nelle reti di differenza di potenziale, lungo ogni lato del grafo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_i, P_j) = Q_k, \quad k = 1, m \\ \{ P_i, \quad i = 1, n < m \} \end{array} \right\}$$

- l'informazione fluisce completa, unidirezionalmente, lungo ogni lato del grafo, costituendo nel suo fluire almeno un albero sul grafo stesso;
- l'informazione è irradiata, in modo completo, da alcuni nodi verso altri (senza ritorno), senza che né i primi, né i secondi si scambino alcuna informazione, costituendo nel suo fluire tanti alberi (costituiti da un solo livello, oltre la radice) sul grafo stesso, quanti sono i nodi d'emanazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_i, Q_j) = R_k, \quad k = 1, m \\ \{ Q_j, \quad j = 1, n < m \} \\ \{ P_i, \quad i = 1, l < n \} \end{array} \right\}$$

- l'informazione è irradiata, in modo parziale, nelle stesse condizioni del sottocaso precedente, cosa che richiede l'individuazione di due o più co-alberi (sempre costituiti da un solo livello, oltre le radici) capaci di completare l'informazione trasmessa;
- l'informazione è irradiata, in modo parziale, senza restituzioni particolari.

Le osservabili differenze seconde dei parametri e loro funzioni richiedono la complessa sostituzione dei lati del grafo con triangoli fra i tre nodi interessati. Le osservabili differenze di ordine superiore e loro funzioni fanno riferimento, addirittura, a poligoni fra tutti i nodi coinvolti, cosa che rende la loro analisi ancora più complessa. Per queste ragioni, ad eccezione della discretizzazione di equazioni differenziali di secondo ordine o di ordine superiore e di loro trasformazioni funzionali, la loro adozione è estremamente rara.

Per quanto riguarda la determinazione del numero di parametri principali, nel caso in cui i problemi ai minimi quadrati adottino lo schema principe delle equazioni d'osservazione, questo è sempre tale da determinare difetti di rango e singolarità del sistema da risolvere per cui sono necessari vincoli o pseudo-osservazioni sovrappesate.

I problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti presentano come osservabili funzioni dirette dei parametri principali, il cui numero, sempre nel caso in cui si voglia adottare il suddetto schema principe delle equazioni d'osservazione, non è mai tale da determinare difetti di rango e singolarità del sistema da risolvere. A tutto ciò, fanno eccezione eventuali problemi di sovra-parametrizzazione, rispetto al

campionamento delle osservazioni effettuate, per cui sono indicate condizioni numeriche di regolarizzazione. Esempi di problemi di interpolazione ed approssimazione di campi di punti sono dati da:

- ricostruzione (fitting) di linee, superfici, ipersuperfici aventi come dominio lo spazio 3D:

$$s = f(x)$$

$$s = f(x, y)$$

$$s = f(x, y, z)$$

- descrittori di forma (form descriptors): contorni di figure (piane e/o gobbe), superfici (chiuse) di oggetti:

$$x = f(s) \quad ; \quad y = g(s) \quad ; \quad [z = h(s)]$$

$$x = f(s, t) \quad ; \quad y = g(s, t) \quad ; \quad z = h(s, t)$$

- centratura (matching) di segmenti, figure (immagini, mappe, disegni), oggetti (compresi modelli virtuali 3D) comunque conformati:

$$x = f(u)$$

$$x = f(u, v) \quad ; \quad y = g(u, v)$$

$$x = f(u, v, w) \quad ; \quad y = g(u, v, w) \quad ; \quad z = h(u, v, w)$$

I problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti, relativi alla ricostruzione di linee sono, ovviamente, assimilabili a quelli dello studio delle serie temporali storiche o di breve periodo, oppure frutto di simulazioni. Inoltre lo studio di serie temporali congiunto alla soluzione dei problemi reticolari (o di compensazione di reti) e/o d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti, illustrati in precedenza, permette indagini accurate sugli aspetti dinamici delle osservabili a referenza spaziale di cui ai suddetti problemi, dando un'interpretazione unitaria a dati spazio-varianti, tempo-varianti.

Limitatamente alle discipline geodetiche e geomatiche, mentre le equazioni d'osservazione dei problemi reticolari (e di compensazioni di reti) fanno uso, in generale, di modelli grigi dedotti dalla geometria del problema in esame, le equazioni d'osservazione dei problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti fanno uso, in generale, di modelli neri.

Come noto, una vasta gamma di metodi deterministici e/o stocastici risponde positivamente alla bisogna. I primi annoverano fra i più comunemente impiegati:

- l'interpolazione polinomiale;
- il metodo degli elementi finiti e l'interpolazione con funzioni splines;
- l'analisi di Fourier, nel dominio delle frequenze;
- lo studio, sempre nel dominio delle frequenze, con ondine (wavelets).

I secondi prevedono l'interpretazione dei fenomeni in istudio come realizzazioni di un processo stocastico:

- ❑ stime di covarianza, filtraggio cross-validazione e predizione;
- ❑ studio della geometria frattale.

Uno studio dettagliato di esempi particolari e significativi di problemi reticolari (o di compensazioni di reti) può essere effettuato, nell'ambito delle discipline geodetiche e geomatiche, solo facendo riferimento a discipline specifiche, quali la geodesia, la navigazione, la topografia, la fotogrammetria ed il telerilevamento.

Al contrario, uno studio dettagliato di esempi particolari e significativi di problemi d'interpolazione ed approssimazione di campi di punti richiede anche uno studio dei modelli neri.

Per una migliore comprensione si tenga presente che l'insieme delle quantità osservate è sempre costituito da quattro parti distinte:

- ❑ le informazioni topologiche, ovvero i lati del grafo che indicano le connessioni esistenti fra i nodi del grafo stesso;
- ❑ le informazioni geometriche, ovvero la posizione ed altre caratteristiche degli stessi nodi;
- ❑ le informazioni metrologiche, ovvero le osservazioni (o quantità osservate) realmente effettuate;
- ❑ le informazioni stocastiche, ovvero la precisione delle osservazioni e le eventuali correlazioni fra queste.

Infatti questo insieme, altrimenti detto: base di dati provenienti da operazioni di misura, con riferimento a ciascuna delle sopraccitate quattro parti distinte, produce nei problemi ai minimi quadrati (come pure negli altri sopraccitati problemi affini), rispettivamente:

- ❑ la matrice disegno simbolica;
- ❑ la matrice disegno numerica;
- ❑ il vettore termine noto delle equazioni d'osservazione;
- ❑ la matrice di varianza-covarianza (a priori) delle quantità osservate o, più comunemente, se non esistono correlazioni fra le stesse quantità osservate, la matrice dei pesi.

Si noti che, con la sola eccezione delle osservazioni realmente effettuate, tutto quanto può essere noto già prima di compiere una sola osservazione. Da ciò derivano tutti i problemi di ottimizzazione della matrice di varianza-covarianza dei parametri:

- ❑ intervenendo nella matrice disegno per decidere sull'effettuazione o meno di ciascuna osservazione (1° ordine);
- ❑ sulla matrice di varianza-covarianza (a priori) delle quantità osservate per stabilire, note le osservazioni da effettuarsi, le precisioni delle stesse (2° ordine);
- ❑ su opportune parziali combinazioni dei due casi precedenti (3° ordine),

avendo cura di controllare, in ogni caso, l'affidabilità delle osservazioni, quale garanzia, sufficiente minimale, che il lavoro intrapreso, qualsiasi esso sia, risulti svolto a regola d'arte.

3.2 Equazioni di condizione con parametri

Un'alternativa vantaggiosa alle equazioni di condizione pure è fornita dalle equazioni di condizione con parametri, conseguente all'introduzione nelle prime di opportuni parametri, solitamente, in numero da lasciare una sola osservabile per ogni equazione, che nel loro insieme costituiscono, a tal punto, le equazioni d'osservazione.

Si noti che più antiche espressioni denominano le stesse equazioni come equazioni delle osservazioni indirette, mentre le equazioni di condizione pure sono dette, nello stesso ambito, equazioni delle osservazioni dirette condizionate. D'altra parte l'adozione di espressioni più moderne facilita la comprensione d'assieme del metodo dei minimi quadrati e delle sue varie articolazioni e, proprio per questa ragione, dette espressioni sono adottate.

Si osservi, poi, come la scelta di operare con una sola osservabile per equazione costituisce un caso solo apparentemente particolare che, invece, come già detto, nulla toglie alla generalità del problema. Infatti tanto più generali equazioni di condizione con parametri, quanto l'inclusione di osservabili secondarie nelle usuali equazioni d'osservazione, come pure una partizione nell'insieme dei parametri fra parametri principali e parametri di servizio, esemplificano schemi differenti che possono essere ricondotti, comunque, allo schema principe delle equazioni d'osservazione.

Si badi, altresì, che anche un difetto di rango nell'insieme dei parametri, cosa che richiede l'aggiunta di opportune equazioni di vincolo o pseudo-osservazione, per sanare lo stesso, non allontana dallo schema principe prescelto. Infatti mentre l'aggiunta di equazioni di vincolo forma un insieme di equazioni di condizione con parametri vincolati (già note, altrimenti, come equazioni delle osservazioni indirette condizionate), la trasformazione delle stesse equazioni in equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate, come sarà mostrato nel prosieguo, permette proprio l'utilizzo dello schema principe delle equazioni d'osservazione.

Un problema minimi quadrati costituito da m equazioni d'osservazione delle osservabili y , coinvolgenti n parametri x , presenta il seguente modello funzionale lineare o linearizzato:

$$y = Ax + \delta$$

dove A rappresenta la matrice dei coefficienti e δ il vettore dei termini noti delle suddette equazioni, ed il modello stocastico:

$$E(y) = \bar{y}$$

$$D(y) = C_{yy} = \sigma_0^2 Q_{yy}$$

per il quale valgono le stesse considerazioni annunciate a proposito delle equazioni di condizione pure.

Ancora le stesse considerazioni sono da farsi per quanto riguarda: la non soddisfazione, in generale, di tutte le equazioni di osservazione da parte di un campione di m osservazioni y_0 ; l'indeterminazione nella definizione di opportune variabili correzione o scarti-residui v ; l'arbitrarietà di un criterio di scelta di queste ultime variabili. Pertanto avendo stabilito l'adozione del metodo dei minimi quadrati, la sua formalizzazione matematica fa sì che una norma quadratica degli scarti-residui sia minimizzata, tenendo conto tanto del modello funzionale, quanto del modello stocastico, già definiti in precedenza:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2}(\hat{y} - y_0)^T Q_{y_0 y_0}^{-1} (\hat{y} - y_0) + \lambda^T (A\hat{x} + \delta - \hat{y} - y_0) = \\ &= \frac{1}{2}\hat{v}^T P\hat{v} + \lambda^T (A\hat{x} + \delta - \hat{v} - y_0) = \min\end{aligned}$$

essendo P la matrice dei pesi delle osservazioni e λ e μ un vettore ausiliario di moltiplicatori di Lagrange.

Si riportano di seguito il valore delle stime dei parametri, delle osservabili compatibili con le relazioni di condizione e delle correzioni o scarti-residui, facendo uso della nozione di matrice inversa generalizzata (definita nei paragrafi precedenti, relativamente al secondo dei due casi esposti) ed omettendo inutili passaggi algebrici elementari.

$$\begin{aligned}\hat{x} &= -(A^T P A)^{-1} (A^T P (\delta - y_0)) \\ \hat{y} &= A\hat{x} + \delta = y_0 + \hat{v} \\ \hat{v} &= \hat{y} - y_0 = A\hat{x} + \delta - y_0\end{aligned}$$

Ancora la nota legge di propagazione della varianza-covarianza permette di ricavare, facilmente, la matrice di varianza-covarianza delle stime effettuate:

$$\begin{aligned}C_{\hat{x}\hat{x}} &= \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A)^{-1} \\ C_{\hat{y}\hat{y}} &= \hat{\sigma}_0^2 A Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T = C_{y_0 y_0} - C_{\hat{v}\hat{v}} \\ C_{\hat{v}\hat{v}} &= C_{y_0 y_0} - C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - A Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T) \\ C_{\hat{y}\hat{x}} &= -\hat{\sigma}_0^2 A Q_{\hat{x}\hat{x}} = C_{\hat{x}\hat{y}}^T \\ C_{\hat{x}\hat{v}} &\equiv 0 \quad ; \quad C_{\hat{y}\hat{v}} \equiv 0\end{aligned}$$

dove la stima del fattore di proporzionalità (sigma zero):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m - n}$$

è ottenuta imponendo, sempre direttamente, la sua correttezza. Infine tutte le stime godono e mancano delle stesse proprietà enunciate a proposito delle equazioni di condizione pure.

3.3 Equazioni di condizione con parametri vincolati

Un problema minimi quadrati costituito da m equazioni d'osservazione delle osservabili y , coinvolgenti n parametri x , collegati fra loro da l equazioni di vincolo (altrimenti detto, con un'espressione più antica, equazioni delle osservazioni indirette condizionate), presenta il seguente modello funzionale lineare o linearizzato:

$$y = Ax + \delta$$

$$Hx + \eta = 0$$

dove A e H rappresentano le matrici dei coefficienti e δ ed η i vettori dei termini noti delle suddette equazioni, ed il modello stocastico:

$$E(y) = \bar{y}$$

$$D(y) = C_{yy} = \sigma_0^2 Q_{yy}$$

anche per il quale valgono le stesse considerazioni enunciate a proposito delle equazioni di condizione pure. Ancora le stesse considerazioni sono da farsi per quanto riguarda: la non soddisfazione, in generale, di tutte le equazioni d'osservazione da parte di un campione di m osservazioni y_0 ; l'indeterminazione nella definizione di opportune variabili correzione o scarti-residui v ; l'arbitrarietà di un criterio di scelta di queste ultime variabili. Pertanto avendo stabilito l'adozione del metodo dei minimi quadrati, la sua formalizzazione matematica fa sì che una norma quadratica degli scarti-residui sia minimizzata, tenendo conto tanto del modello funzionale, quanto del modello stocastico, già definiti in precedenza:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} (\hat{y} - y_0)^T Q_{y_0 y_0}^{-1} (\hat{y} - y_0) + \lambda^T (A\hat{x} + \delta - \hat{v} - y_0) + \mu^T (H\hat{x} + \eta) = \\ &= \frac{1}{2} \hat{v}^T P \hat{v} + \lambda^T (A\hat{x} + \delta - \hat{v} - y_0) + \mu^T (H\hat{x} + \eta) = \min \end{aligned}$$

essendo P la matrice dei pesi delle osservazioni e λ e μ due vettori ausiliari di moltiplicatori di Lagrange.

L'elenco delle stime e delle informazioni sulla loro attendibilità non è, qui, riportato, perché il loro calcolo, quantunque possibile, risulta laborioso ed oneroso; infatti richiede la soluzione, a cascata, di più sistemi concatenati fra loro. Per queste ragioni, come già detto, si preferisce effettuare la trasformazione delle equazioni di vincolo in equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate e risolvere un problema minimi quadrati costituito da equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione sovrappesate, anziché d'osservazione e vincolo.

L'artificio che permette il passaggio da un problema all'altro è basato su considerazioni di carattere pratico e consiste nell'interpretare il numero zero posto al secondo membro di ogni equazione di vincolo come un'estrazione da una variabile casuale avente media e varianza nulla, cosa che fa di questa variabile casuale una pseudo-osservabile z e dello zero estratto una pseudo-osservazione z_0 .

Ancora considerazioni di ordine pratico: la necessità di calcolare un peso proporzionale all'inverso della varianza, impone di approssimare la varianza nulla con una varianza piccolissima, cosicché il peso sia sì molto grande, ma non infinito, ovvero numericamente non trattabile.

Pertanto, come già detto in precedenza, l'artificio della trasformazione delle equazioni di vincolo in equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate permette proprio l'utilizzo dello schema principe delle equazioni d'osservazione. Inoltre lo stesso artificio ha carattere, del tutto, generale e può essere esteso a qualsiasi

generalizzazione dei modelli lineari stessi, come sarà mostrato nel prosieguo.

Un problema minimi quadrati costituito da m equazioni d'osservazione delle osservabili y , coinvolgenti n parametri x , collegati fra loro di l equazioni di pseudo-osservazioni, presenta il seguente modello funzionale lineare o linearizzato:

$$y = Ax + \delta$$

$$z = Hx + \eta = 0$$

ed il seguente modello stocastico:

$$E(y) = \bar{y} \quad ; \quad E(z) = \bar{z} = 0$$

$$D(y) = C_{yy} = \sigma_0^2 Q_{yy}$$

$$D(z) = C_{zz} = \sigma_0^2 Q_{zz} \cong 0$$

$$D(y, z) = 0$$

per il quale valgono, ancora, le stesse considerazioni enunciate in precedenza. Anche in questo caso, un campione di m osservazioni y_0 richiede di introdurre opportune variabili correzione o scarti-residui v ; le stesse variabili u devono tuttavia essere introdotte per un campione di l pseudo-osservazioni z_0 . Pertanto avendo stabilito, al solito, l'adozione del metodo dei minimi quadrati, la sua formalizzazione matematica fa sì che una norma quadratica di tutti gli scarti-residui sia minimizzata, tenendo conto tanto del modello funzionale, quanto del modello stocastico, già definiti in precedenza:

$$\phi = \frac{1}{2} \left((\hat{y} - y_0)^T Q_{y_0 y_0}^{-1} (\hat{y} - y_0) + (\hat{z} - z_0)^T Q_{z_0 z_0}^{-1} (\hat{z} - z_0) \right) +$$

$$+ \lambda^T (A\hat{x} + \delta - \hat{v} - y_0) + \mu^T (H\hat{x} + \eta - \hat{u} - z_0) =$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{v}^T P \hat{v} + \hat{u}^T Q \hat{u}) + \lambda^T (A\hat{x} + \delta - \hat{v} - y_0) + \mu^T (H\hat{x} + \eta - \hat{u} - z_0) = \min$$

essendo P la matrice dei pesi delle osservazioni, $Q = hI$ la matrice dei pesi delle pseudo-osservazioni, dove h è un numero positivo opportunamente grande, e λ e μ due vettori ausiliari di moltiplicatori di Lagrange.

Come già detto, questo problema può essere ricondotto allo schema principe delle equazioni d'osservazione. Infatti effettuate le seguenti posizioni, che ridefiniscono, opportunamente, gli elementi del modello funzionale e del modello stocastico:

$$A = \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix} \quad ; \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta \\ \eta \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$y_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} ; \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} ; \quad \hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \end{bmatrix}$$

tale problema diventa, ovviamente, formalmente identico al problema minimi quadrati, già risolto, costituito da $m + l$ equazioni d'osservazione delle osservabili y e z , coinvolgenti n parametri x .

Si riportano di seguito il valore delle stime dei parametri, delle osservabili e delle pseudo-osservabili compatibili con le relazioni di condizione e delle correzioni o scarti-residui di entrambe, tenendo conto delle posizioni, che ridefiniscono gli elementi del modello funzionale e del modello stocastico, già definiti in precedenza:

$$\hat{x} = -\left(A^T P A + H^T Q H\right)^{-1} \left(A^T P (\delta - y_0) + H^T Q \eta\right)$$

$$\hat{y} = A \hat{x} + \delta = y_0 + \hat{v}$$

$$\hat{v} = \hat{y} - y_0 = A \hat{x} + \delta - y_0$$

$$\hat{z} = H \hat{x} + \eta = \hat{u} = 0$$

L'uguaglianza a zero delle stime relative alle equazioni di pseudo-osservazione dimostra il completo soddisfacimento del vincolo e discende dalle proprietà di correttezza e consistenza, godute da tutte le stime minimi quadrati.

Sempre la nota legge di propagazione della varianza-covarianza permette di ricavare, facilmente, le matrici di varianza delle stime effettuate, tenendo conto delle posizioni già definite in precedenza:

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(A^T P A + H^T Q H\right)^{-1}$$

$$C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2 A Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T = C_{y_0 y_0} - C_{\hat{v}\hat{v}}$$

$$C_{\hat{v}\hat{v}} = C_{y_0 y_0} - C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(P^{-1} - A Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T\right)$$

$$C_{\hat{y}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 A Q_{\hat{x}\hat{x}} = C_{\hat{x}\hat{y}}^T$$

$$C_{\hat{x}\hat{v}} \equiv 0 \quad ; \quad C_{\hat{y}\hat{v}} \equiv 0$$

$$C_{\hat{z}\hat{z}} = C_{z_0 z_0} - C_{\hat{u}\hat{u}} = 0$$

$$C_{\hat{u}\hat{u}} = C_{z_0 z_0} - C_{\hat{z}\hat{z}} = 0$$

$$C_{\hat{x}\hat{z}} = 0$$

$$C_{\hat{x}\hat{u}} \equiv 0 \quad ; \quad C_{\hat{y}\hat{u}} \equiv 0$$

$$C_{\hat{y}\hat{z}} = 0 \quad ; \quad C_{\hat{y}\hat{z}} \equiv 0$$

$$C_{\hat{v}\hat{u}} \equiv 0 \quad ; \quad C_{\hat{z}\hat{u}} = 0$$

dove la stima del fattore di proporzionalità (sigma zero):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m - n + l}$$

è ottenuta imponendo, ancora direttamente, la sua correttezza.

L'uguaglianza a zero delle matrici di varianza-covarianza, relative alle equazioni di pseudo-osservazione, completa la dimostrazione del completo soddisfacimento del vincolo e discende dal teorema di decomposizione ortogonale della varianza (come noto, infatti, il metodo dei minimi quadrati separa nelle osservazioni due termini incorrelati, una compatibile con le relazioni di condizione ed un altro residuo) e dalle disuguaglianze di Schwarz per i termini misti, quando non identicamente nulli.

Anche in questo caso, come in parte già detto, tutte le stime godono e mancano delle stesse proprietà enunciate a proposito delle equazioni di condizione pure.

Infine resta da sottolineare, come la trasformazione delle equazioni di vincolo in equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate introduce un problema minimi quadrati più generale, dove equazioni di pseudo-osservazione di peso qualsiasi (e non di peso opportunamente grande, come per il passaggio da un problema all'altro) possono rappresentare, tra l'altro, informazioni a priori, osservabili secondarie, condizioni numeriche di regolarizzazione. D'altra parte, la soluzione di quest'ultimo problema coincide con quella del precedente, sopra riportata, tranne per l'uguaglianza a zero del valore delle stime e delle matrici di varianza-covarianza relative alle equazioni di pseudo-osservazione sovrappesate (in nessun caso, infatti, si è fatto uso dell'essere detti pesi opportunamente grandi).

Si riportano di seguito tutti gli elementi riferiti alle equazioni di pseudo-osservazione di peso qualsiasi:

$$\hat{x} = -(A^T P A + H^T Q H)^{-1} (A^T P (\delta - y_0) + H^T Q \eta)$$

$$\hat{y} = A \hat{x} + \delta = y_0 + \hat{v}$$

$$\hat{v} = \hat{y} - y_0 = A \hat{x} + \delta - y_0$$

$$\hat{z} = H \hat{x} + \eta = z_0 + \hat{u}$$

$$\hat{u} = \hat{z} - z_0 = H \hat{x} + \eta - z_0$$

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A + H^T Q H)^{-1}$$

$$C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2 A Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T = C_{y_0 y_0} - C_{\hat{v}\hat{v}}$$

$$C_{\hat{v}\hat{v}} = C_{y_0 y_0} - C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - A Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T)$$

$$C_{\hat{y}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 A Q_{\hat{x}\hat{x}} = C_{\hat{x}\hat{y}}^T$$

$$C_{\hat{x}\hat{y}} \equiv 0 \quad ; \quad C_{\hat{y}\hat{v}} \equiv 0 \quad ; \quad C_{\hat{x}\hat{u}} \equiv 0 \quad ; \quad C_{\hat{y}\hat{u}} \equiv 0$$

$$C_{\hat{z}\hat{z}} = \hat{\sigma}_0^2 H Q_{\hat{x}\hat{x}} H^T = C_{z_0 z_0} - C_{\hat{u}\hat{u}}$$

$$C_{\hat{u}\hat{u}} = C_{z_0 z_0} - C_{\hat{z}\hat{z}} = \hat{\sigma}_0^2 (Q^{-1} - H Q_{\hat{x}\hat{x}} H^T)$$

$$C_{\hat{x}\hat{z}} = -\hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{x}\hat{x}} H^T = C_{\hat{z}\hat{x}}^T$$

$$C_{\hat{y}\hat{z}} = \hat{\sigma}_0^2 A Q_{\hat{x}\hat{x}} H^T = C_{\hat{z}\hat{y}}^T$$

$$C_{\hat{v}\hat{u}} = -C_{\hat{y}\hat{z}} \quad ; \quad C_{\hat{v}\hat{z}} = 0 \quad ; \quad C_{\hat{z}\hat{u}} = 0$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v} + \hat{u}^T Q \hat{u}}{m - n + l}$$

La presentazione di tutti gli elementi, riferiti alle equazioni di pseudo-osservazione di peso qualsiasi, dai vettori della soluzione alle loro matrici di varianza-covarianza ed a sigma zero, permette di sottolineare l'assoluta generalità del metodo, dove le pseudo-osservazioni di peso qualsiasi svolgono compiti anche sostanzialmente diversi dai vincoli. Infatti ogni qualvolta, per un qualsiasi motivo, sono date informazioni, a priori, e quando le stesse non possano essere considerate certe, rispetto alla variabilità delle osservazioni, in esame, trattare queste informazioni come vincoli, significa forzare ad esse la soluzione trovata, trasferendo arbitrariamente i loro errori di compatibilità sulla precisione delle osservazioni. Al contrario, il peso qualsiasi permette di avere scarti-residui anche per le suddette informazioni, conservando il rigore voluto, tanto nel modello funzionale, quanto in quello stocastico, e permettendo così un'appropriate analisi statistica dei risultati ottenuti.

3.4 Problemi non - lineari

La trattazione, fin qui svolta, sui problemi minimi quadrati ha riguardato, esclusivamente, l'ambito lineare di questi. D'altra parte, la maggior parte dei fenomeni e processi sono non - lineari e tale caratteristica si ripercuote, inevitabilmente, nella loro modellazione. Pertanto anche la trattazione dei problemi minimi quadrati deve potersi estendere in ambito non-lineare, fornendo modelli adatti all'analisi dei dati di questi fenomeni e processi.

La non - linearità dei problemi minimi quadrati può interessare:

- il modello funzionale;
- il modello stocastico;
- la norma.

Nel primo caso si ha, direttamente, la non - linearità delle equazioni di condizione pure, osservazione, pseudo-osservazione, vincolo, ecc.; nel secondo caso la matrice di varianza-covarianza delle osservazioni non è del tutto nota, solo a meno di una costante (ad es., il modello di Gauss-Helmert la partiziona secondo opportuni gruppi di osservazioni e considera tali sottomatrici note, ciascuna, a meno di una costante). Nel

terzo caso, invece, la modifica della norma segna un distacco definitivo dai minimi quadrati, cui si fa ritorno per operare, iterativamente, in ambito lineare. Infatti in tutti e tre i casi, la non – linearità dei problemi non permette, in generale, una soluzione diretta degli stessi e, pertanto, si sceglie o, comunque, si preferisce risolverli in modo iterativo, operando, di volta in volta, in ambito lineare.

Lo schema generale per l'attuazione di detta procedura si compone dei seguenti passi:

1. inizializzazione del problema e preparazione dei dati di partenza, in base a informazioni a priori di sufficiente approssimazione;
2. avvio di un contatore per il controllo delle iterazioni;
3. effettuazione di un passaggio in ambito lineare ed ottenimento di risultati intermedi;
4. calcolo di una norma sui risultati intermedi ottenuti per il controllo delle iterazioni;
5. esecuzione di un test d'arresto del ciclo iterativo, capace di valutare in alternativa il contenimento della suddetta norma al di sotto di un'opportuna soglia prefissata, oppure il superamento da parte del contatore di un numero massimo d'iterazioni consentite;
6. arresto del ciclo iterativo ed ottenimento dei risultati definitivi, se il test d'arresto è soddisfatto; oppure aggiornamento dei dati di partenza in base ai risultati intermedi ottenuti, se il test d'arresto non è soddisfatto;
7. incremento del contatore per il controllo delle iterazioni;
8. ripetizione della procedura descritta, a partire dal passo 3.

La figura 3.1 illustra lo schema a blocchi della procedura iterativa, appena esposta.

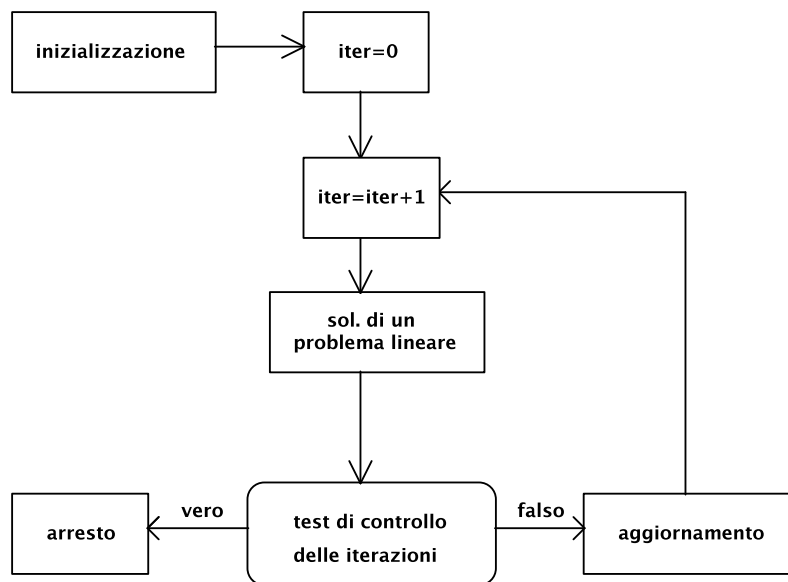


Fig. 3.1

Si osservi come tale procedura, proprio perché del tutto generale, bene si presta alla soluzione iterativa di tutti e tre i casi sopraccitati di non – linearità dei problemi minimi quadrati. Infatti nessuno di essi, pur nella sua specificità, presenta anomalie tali da dover far abbandonare uno schema molto generale e, conseguentemente, molto collaudato e sicuro.

La non – linearità del modello funzionale si manifesta, come già detto, nelle equazioni d'osservazione e pseudo–osservazione. Considerazioni analoghe valgono, ovviamente, per le equazioni di condizione pure e per le equazioni di vincolo; tuttavia la trattazione a seguire restringerà l'attenzione alle sole equazioni d'osservazione e pseudo–osservazione, giudicando l'uso di equazioni di condizione pure, estremamente,

raro e ricordando la possibilità di passaggio dalle equazioni di vincolo (e da più generali equazioni di condizione) alle equazioni di pseudo-osservazione. Pertanto dato un sistema d'equazioni non lineari d'osservazione e pseudo-osservazione:

$$y = F(x)$$

noto (o conosciuto per altra via) un vettore di opportuni valori approssimati dei parametri \tilde{x} , il suo sviluppo in serie di Taylor, arrestato al 1° ordine, ha forma:

$$y = F(\tilde{x}) + F_x(\tilde{x})(x - \tilde{x}) = \tilde{y} + J(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$

essendo $J(\tilde{x})$ la matrice Jacobiano della funzione di più variabili F .

Detta matrice costituisce la matrice dei coefficienti delle nuove incognite $(\hat{x} - \tilde{x})$, mentre il vettore \tilde{y} costituisce un vettore di costanti numeriche, da aggiungersi alle osservazioni, per fornire il vettore termine noto.

Ad ogni iterazione, ottenuto il vettore delle nuove incognite $(\hat{x} - \tilde{x})$ ed aggiornato il vettore delle incognite originarie: $\hat{x} = \tilde{x} + (\hat{x} - \tilde{x})$, quest'ultimo viene considerato un nuovo vettore di più opportuni valori approssimati dei parametri, in base al quale effettuare una nuova linearizzazione, punto di partenza di una nuova iterazione.

La procedura continua, iterativamente, fino ad ottenere la convergenza del metodo alla soluzione cercata. In pratica, ad ogni iterazione, ne succede una nuova, finché le nuove incognite sono abbastanza grandi, da dare un qualche contributo, utile all'aggiornamento delle incognite originarie.

Al contrario, quando questo contributo svanisce (cioè tutte le nuove incognite sono ormai pressoché nulle), la procedura è arrestata, perché si è ottenuta la convergenza del metodo alla soluzione cercata. La procedura è arrestata, altresì, nel caso sfavorevole in cui, dopo un numero massimo d'iterazioni consentite, non si ha alcuna convergenza.

La norma calcolata sulle nuove incognite, in base alla quale giudicare l'utilità del contributo all'aggiornamento delle incognite originarie, è largamente arbitraria.

Una norma dell'estremo superiore:

$$\max_{i=1,n} = \left(\hat{x} - \tilde{x} \right)_i$$

può essere consigliabile, perché garantisce che, effettivamente, tutte le nuove incognite siano, ormai, pressoché nulle.

La procedura, appena descritta, nota come metodo di Newton-Fourier (altrimenti detto, con un'espressione più antica, degli iperpiani tangenti), può essere notevolmente semplificata e sveltita scegliendo, ad ogni iterazione dopo la prima, di ricalcolare solo il vettore \tilde{y} (ed adottando il metodo detto, dalle stesse più antiche espressioni, degli iperpiani paralleli), anziché esso e la matrice Jacobiano. Come evidente, tutto ciò accelera, ad ogni iterazione, il calcolo della soluzione, in generale, senza arrecare alcun danno alla stessa ed al solo prezzo di qualche veloce iterazione in più.

Possibili varianti al metodo di Newton-Fourier sono date da metodi più recenti, quali:

- ❑ la regolarizzazione di Tikhonov;
- ❑ l'algoritmo di Levenberg-Marquardt.

Infatti il primo metodo serve a stabilizzare la soluzione di sistemi, non troppo ben condizionati (a riguardo, si veda più oltre il paragrafo su singolarità e condizionamento), mentre il secondo metodo serve a dare peso anche alla soluzione data dai valori approssimati delle incognite, se questi possono essere considerati abbastanza soddisfacenti.

Pertanto nel primo caso, il sistema normale risulta:

$$(A^T P A + \lambda I) x + A^T P (\delta - y^0) = 0$$

mentre nel secondo caso, il sistema normale ha espressione:

$$(A^T P A + \lambda \text{diag}(A^T P A)) x + A^T P (\delta - y^0) = 0$$

Per completezza si riporta anche lo sviluppo in serie di Taylor, arrestato al 4° ordine, dello stesso sistema d'equazioni non – lineari:

$$y = \tilde{y} + J(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + (x - \tilde{x})^T H(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \\ + (x - \tilde{x})^T (J \otimes H(\tilde{x})) \text{vec}((x - \tilde{x})(x - \tilde{x})^T) + \\ + \text{vec}((x - \tilde{x})(x - \tilde{x})^T) (H \otimes H(\tilde{x})) \text{vec}((x - \tilde{x})(x - \tilde{x})^T)$$

essendo $H(\tilde{x})$ la matrice Hessiano della funzione di più variabili F , vec l'operatore capace di disporre, una dopo l'altra, le colonne di una matrice in un vettore e \otimes il simbolo indicatore del prodotto di Kronecker.

L'analisi di queste derivate ed, in particolare, di quelle di 2° ordine che danno informazioni sulla curvatura delle superfici, rappresentazione geometrica delle equazioni non – lineari, è utile per accertarsi della possibilità di effettuare una buona linearizzazione delle equazioni stesse. Infatti tale linearizzazione è possibile, geometricamente, se si ha corrispondenza biunivoca fra superfici e piani tangenti (con un esempio cinematico, proprio della meccanica razionale, un punto materiale, mobile su una di queste superfici, ha la sua proiezione, sul corrispondente piano tangente, sempre in movimento) e, statisticamente, se la distribuzione di probabilità delle osservabili è, ivi, ben concentrata, ovvero, al di fuori della regione della corrispondenza biunivoca, la probabilità è nulla o quasi.

L'utilizzo di queste equazioni, invece, tranne per un limitatissimo numero di casi particolari (ad es., una sola equazione di 4° grado in una sola incognita; due equazioni di 2° grado, non riducibili, in due incognite; tre equazioni di 2° grado, parzialmente riducibili, per una simmetria di rotazione attorno all'asse polare, in tre incognite), trova un ostacolo insormontabile nei teoremi di Abel e Galois che affermano l'impossibilità di

trovare, in generale, radici qualsiasi di equazioni di grado superiore al 3° e 4° (grado per le quali sono note, dal '500, le cosiddette soluzioni rispettivamente di Dal Ferro – Tartaglia – Cardano e Ferrari, per completezza riportate nell'immediato prosieguo).

La soluzione delle equazioni di 3° e 4° grado si determina effettuando innanzitutto una sostituzione di variabile, al fine di annullare il coefficiente dell'incognita di grado appena inferiore a quello massimo (operazione sempre possibile per ogni equazione algebrica di grado qualsiasi):

$$x = y - a_1/na_0$$

essendo x le incognite dell'equazione originaria, y quelle dell'equazione modificata ed a_0, a_1 i primi due coefficienti dell'equazione data. Dopodiché scritta un'equazione di 3° grado nella forma:

$$y^3 + py + q = 0$$

occorre esaminare il discriminante:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

dell'equazione triquadratica: $z^6 + qz^3 - p^3/27$, avendo posto: $y = z - p/3z$, e moltiplicato per z^3 .

□ Se esso è positivo, si ha una sola radice reale (essendo le altre due radici complesse coniugate):

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

□ Se esso è negativo, posto: $\tan \vartheta = -2\sqrt{-\Delta}/q$, con: $0 < \vartheta < \pi$ ⁵, si hanno tre radici reali:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\vartheta}{3} \quad y_2 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\vartheta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \quad y_3 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\vartheta}{3} - \frac{2\pi}{3} \right)$$

□ Se esso è nullo, si hanno due radici coincidenti reali ed una terza ancora reale:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \quad y_2 = y_3 = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \quad \text{tutte coincidenti, se: } p = 0$$

Invece scritta un'equazione di 4° grado nella forma:

⁵ L'uso di funzioni trigonometriche evita di dover ricorrere a numeri immaginari e complessi coniugati, essendo dimostrato che il calcolo di più radici reali non può prescindere da essi, se si effettuano solo operazioni algebriche, diversamente da quanto avviene per le equazioni di 2° grado.

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

occorre introdurre tre incognite di servizio u , v e w , tali che: $u + v + w = y$, ed inoltre ⁶:

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \qquad u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = \frac{p^2 - 4r}{16} \qquad u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64}$$

Allora i quadrati delle tre incognite di servizio sono le radici dell'equazione cubica, detta risolvente di Eulero:

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0$$

da cui risulta:

$$y = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

dopo aver seguito il procedimento per la soluzione di un'equazione di 3° grado (esposto appena sopra) e prendendo i segni dei radicali, cosicché si abbia: $uvw = q/8$. Come noto, essendo un'equazione di grado pari, può avere quattro, oppure due, od addirittura nessuna radice reale e, tra le radici reali, le coincidenze possono essere tutte quattro, a due a due su quattro, solo due su quattro e due su due.

Resta da osservare come invece tutte le radici razionali delle equazioni algebriche di grado qualsiasi possano essere calcolate con la nota formula di Ruffini (di poco, precedente i teoremi di Abel e Galois) e come questa possa essere utilizzata anche in modo variazionale, cercando di minimizzare l'errore tra una radice irrazionale o trascendente e la sua approssimazione razionale, avendo scelto e fissato un certo livello d'approssimazione con cui eseguire i calcoli richiesti. Tutto ciò non vuole incentivare soluzioni dirette assurde di problemi non-lineari, ma riconoscere volentieri come studi di particolare dettaglio, se del caso, possano essere affrontati con strumenti matematici adeguati.

3.5 Singolarità e condizionamento

E' opinione diffusa e, comunemente, accettata dai più che insiemi di dati buoni non presentino grosse difficoltà per una loro analisi, quantomeno, con la maggior parte dei metodi in uso, mentre insiemi di dati cattivi presentano notevole difficoltà per una loro analisi, in generale, con qualsiasi metodo. D'altra parte, poiché, di solito, gli insiemi di dati non sono mai troppo buoni, anche se insiemi di dati, veramente, cattivi costituiscono più controesempi che vere eccezioni, alcune precauzioni devono essere prese, per consentire una loro analisi con il metodo dei minimi quadrati, così come è necessario fare con ogni altro metodo.

Le precauzioni da prendere possono essere innumerevoli e molto diversificate tra loro; tuttavia le principali e più importanti riguardano:

⁶ Si noti come, dati tre elementi lineari, riferiti ad un parallelepipedo, la loro somma corrisponda alla somma dei suoi tre spigoli, il loro prodotto al volume del parallelepipedo stesso e la somma delle tre coppie di prodotti distinti alla sua semi - superficie. Gli stessi termini

- il condizionamento del sistema da risolvere;
- l'affidabilità dello schema d'osservazione;
- la robustezza degli stimatori nei confronti di dati anomali.

Un discorso sul buon condizionamento del sistema da risolvere parte dall'ovvia considerazione che esso non deve essere, globalmente o localmente, singolare ed estende le precauzioni da prendere, anche, a tutte quelle situazioni prossime alla singolarità: in tal caso, si dice che il sistema da risolvere è, globalmente o localmente, malcondizionato.

A tale proposito, un sistema di equazioni di condizione pure non è mai malcondizionato. Infatti esso ha le dimensioni del numero di relazioni di condizione e può essere singolare solo se si è scritta qualche relazione combinazione lineare delle altre, eventualmente, dimenticandone qualche altra indispensabile. Il caso descritto esemplifica un clamoroso errore d'impostazione, da evitarsi restringendo, come già detto, l'utilizzo di questo metodo al caso di piccoli problemi, dove questioni di condizionamento (numerico) consigliano di evitare stime di parametri.

Al contrario, un sistema di equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione, benché molto raramente singolare, può essere talvolta, soprattutto localmente, malcondizionato, per la presenza di qualche parametro, maldeterminabile tramite l'insieme delle equazioni scritte. In questo caso, occorre definire una strategia d'allarme, per evidenziare il malcondizionamento, ed una strategia di ricerca, per identificare ed eliminare il parametro (i), fonte del malcondizionamento stesso.

Lo studio più rigoroso del condizionamento di un sistema si attua con la decomposizione ai valori singolari della matrice prodotto Z fra la matrice dei coefficienti A e la radice $P^{1/2}$ della matrice dei pesi (quest'ultima operazione consiste nella radice quadrata dei singoli pesi, se la matrice è diagonale, ed in una qualsiasi fattorizzazione, se essa non è diagonale):

$$P^{1/2} A = Z = WSY$$

dove S è una matrice rettangolare, avente le stesse dimensioni di A , ovunque identicamente nulla, tranne su una diagonale contenente i valori singolari, ottenuti dalla decomposizione, mentre W e Y sono due particolari matrici quadrate, dette ortonormali ($W^{-1} = W^T$; $Y^{-1} = Y^T$), aventi dimensioni compatibili con S (ed A)⁷.

costituiscono i tre invarianti di una matrice diagonale di dimensione e rango tre, così come somma (traccia) e prodotto (determinante) sono gli invarianti di una matrice diagonale di rango due, nonché semi-perimetro ed area di un rettangolo.

⁷ Si chiama proiettore P in un sottospazio Y di uno spazio vettoriale X , una matrice quadrata e simmetrica, tale che il vettore : $y = Px$, con $x \in X$, sia la componente del vettore x in Y . Una proprietà fondamentale di tutti i proiettori è $PP = P$, mentre, in generale, non esiste P^{-1} , tranne nel caso in cui il proiettore coincida con l'identità ($P = I$).

Si chiama rappresentazione spettrale di una matrice C quadrata, simmetrica e definita positiva la sommatoria:

Nel caso la matrice A non sia una matrice di rango pieno, ovvero il sistema da risolvere sia singolare, uno o più valori singolari saranno nulli ed il loro numero sarà pari al difetto di rango.

Nel caso la matrice A sia la matrice dei coefficienti di un sistema malcondizionato, uno o più valori singolari saranno pressoché nulli. Allora una strategia d'allarme consiste nel calcolare un numero di condizione, fondato sui valori singolari, e nel valutarlo troppo prossimo a zero:

$$\varepsilon = \frac{S_{min}}{S_{max}}$$

ed una strategia di ricerca si effettua, invece, identificando tutti i valori singolari prossimi al valore singolare minimo. Un'opportuna aggiunta di osservazioni o pseudo-osservazioni, in quanto ben mirata, sarà capace di superare i problemi di condizionamento, formando un sistema ben condizionato.

D'altra parte, la decomposizione ai valori singolari è un'operazione certamente complessa e male si presta, comunque, alla soluzione di grandi sistemi; pertanto si è soliti adottare, in sua vece, una strategia alternativa d'allarme con un numero di condizione, fondato su norme di matrici, da valutare troppo prossime a zero⁸:

$$C = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T$$

dove P_i è il proiettore di un qualsiasi vettore sull'iperspazio (insieme degli autovettori corrispondenti ad uno stesso autovalore). Si verifica, di seguito, la sopraccitata proprietà dei proiettori:

$$P_i^2 = (u_i u_i^T)(u_i u_i^T) = u_i (u_i^T u_i) u_i^T = u_i u_i^T = P_i$$

dove ogni u_i è un autovettore corrispondente all'autovalore λ_i .

La decomposizione ai valori singolari è l'estensione della precedente operazione di rappresentazione spettrale, ottenuta, per generalizzazione dell'argomento, dalle matrici quadrate alle matrici rettangolari.

⁷ Per semplicità, si considerino dapprima separatamente gli effetti prodotti dalle variazioni sul termine noto b e sulla matrice A , non singolare, di un generico sistema di equazioni d'osservazione.

$$Ax = b; \quad A(x + \delta x) = b + \delta b$$

Sottraendo le equazioni si ricava:

$$A\delta x = \delta b \\ \delta x = A^{-1}\delta b$$

ed applicando le definizioni di norma naturale di matrice, indicata con $\| \cdot \|$ una delle norme appartenenti a questo tipo, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Si consideri, di seguito, il caso in cui x e $x + \delta x$ siano le soluzioni dei seguenti sistemi:

$$Ax = b \quad ; \quad (A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

A partire dalla sottrazione dei due sistemi, si ottiene:

$$0 = A\delta x + \delta A(x + \delta x)$$

$$\delta x = -A^{-1} \delta A(x + \delta x)$$

e, in base a considerazioni già utilizzate in precedenza, si ricavano le seguenti relazioni:

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta A(x + \delta x)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|x + \delta x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Infine, qualora si consideri l'effetto congiunto delle due perturbazioni, si hanno i seguenti sistemi:

$$Ax = b \quad ; \quad (A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

Sottraendo le equazioni si ricava:

$$\delta A + A\delta x + \delta A\delta x = \delta A \cdot x + A(I + A^{-1}\delta A)\delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}(I + A^{-1}\delta A)^{-1}(\delta b - \delta A \cdot x)$$

Ed applicando le definizioni di norma naturale di matrice, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}(I + A^{-1}\delta A)^{-1}(\delta b + \delta A \cdot x)\|$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot (\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|A\|} \frac{1}{\|x\|} \right)$$

ovvero, tenuto conto che:

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|x\|} \leq \frac{1}{\|b\|} \quad \text{e} \quad \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{(1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|)}$$

$$\kappa_{\infty} = \frac{1}{\|C\|_{\infty} \cdot \|C^{-1}\|_{\infty}}$$

essendo C la matrice normale, C^{-1} la sua matrice inversa e $\|\cdot\|_{\infty}$ la norma dell'estremo superiore:

$$\|Q\|_{\infty} = \max_{i=1,n} \left(\sum_{j=1}^n |q_{ij}| \right)$$

Dopodiché una strategia alternativa di ricerca si effettua identificando, nella matrice dei coefficienti di correlazione dei parametri, tutti quei coefficienti il cui valore assoluto è, relativamente, prossimo ad uno:

$$R = (I * C^{-1})^{-1/2} C^{-1} (I * C^{-1})^{-1/2}$$

essendo C^{-1} la matrice inversa della matrice normale, I una matrice identità ed il simbolo $*$ indica il prodotto di Hadamard.

Il raggruppamento in un blocco di un insieme relazionato di coefficienti di correlazione dei parametri il cui valore assoluto è, per tutti, relativamente, prossimo ad uno, aiuta a risolvere il problema delle correlazioni multiple e, in ogni caso, un'opportuna e ben mirata aggiunta di osservazioni e pseudo-osservazioni permette di superare i problemi di condizionamento.

Nei casi più complessi, è consigliabile porre vincoli a zero (ovvero pseudo-osservazioni sovrappesate) per tutti i parametri del blocco malcondizionante, liberandone, uno alla volta, sequenzialmente, in avanti, finché non si ha malcondizionamento del sistema da risolvere ed, all'indietro, non appena questo si determina (l'ordine di selezione dei parametri e la scelta di quello malcondizionante, fra quelli divenuti fortemente correlati fra loro, è largamente arbitraria), con l'obiettivo di garantire, sempre, il buon condizionamento.

Per quanto riguarda, infine, l'indicazione di valori di soglia, pur nell'oggettiva difficoltà di fornire valori

si ottiene:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}{1 - \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

Come indice di condizionamento è stato perciò definito, in letteratura, il numero:

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

tale definizione è stata introdotta, per matrici definite positive, da Touring nella norma di Frobenius e Van Neumann nella norma 2.

(Questa nota riprende quanto esposto in: Bellone T.. (2001): Minimi quadrati: qualità ed inconvenienti. Esempi in ambito topografico. In: Rivista dell'Agenzia del Territorio, n. 1/01.).

numerici di validità universale, un numero di condizione inferiore a $10^{-3} \div 10^{-5}$ ed un coefficiente di correlazione superiore, in valore assoluto, a $0.7 \div 0.8$ possono considerarsi valori di soglia di uso abbastanza generale.

Un'alternativa possibile è data dal seguente modo di procedere⁹:

- si aggiungano, al sistema dato, tante nuove pseudo-osservazioni (di peso comparabile con le osservazioni del suddetto sistema) ciascuna costituita da uno dei parametri del sistema stesso;

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta - y_0 \\ -x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

- con metodo dei minimi quadrati, si calcoli la soluzione di questo sistema esteso, dove si ha anche la matrice di covarianza degli scarti residui delle nuove pseudo-osservazioni (sui parametri):

$$C_{\hat{u}\hat{u}} = C_{x_0x_0} - C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (Q^{-1} - Q_{\hat{x}\hat{x}})$$

- e si analizzi il vettore delle corrispondenti ridondanze locali:

$$v_i = \text{diag}(Q^{1/2} Q_{\hat{u}\hat{u}} Q^{1/2})_i = \text{diag}(Q^{1/2} (Q^{-1} - Q_{\hat{x}\hat{x}}) Q^{1/2})_i = 1 - q_i \text{diag}(Q_{\hat{x}\hat{x}})_i$$

- poiché, come noto, tutte le ridondanze locali hanno valori compresi fra zero ed uno, raggiungendo il valore zero, quando un'osservazione (o una pseudo-osservazione) è indispensabile (anche valori troppo prossimi a zero sono indice di criticità), ed il valore uno, quando la stessa è completamente superflua:

$$0 \leq 0.20 \div 0.25 \leq v_i = 1 - q_i \text{diag}(Q_{\hat{x}\hat{x}})_i \leq 1$$

- se qualcuna di queste ridondanze locali è nulla (o troppo piccola), allora il corrispondente parametro è determinato esclusivamente (o quasi esclusivamente) dalla nuova pseudo-osservazione sul parametro stesso;
- in questo caso, è proprio necessario aggiungere nuove osservazioni al sistema, per sanare la singolarità o il malcondizionamento generati, nel sistema dato, da questo parametro (come nel paragrafo successivo sull'affidabilità delle osservazioni, sarà proprio necessario aggiungere nuove osservazioni, per sanare la non-affidabilità di un'osservazione risultata tale).

⁹ Per meglio seguire questa parte conclusiva sulla singolarità ed il malcondizionamento, si consiglia di prendere in esame anche il paragrafo successivo sull'affidabilità e la robustezza, in quanto il modo di procedere proposto fa riferimento alla nozione di ridondanza locale e ne fa uso esattamente come esposto per lo studio dell'affidabilità delle osservazioni.

3.6 Affidabilità e robustezza

Uno schema d'osservazione si dice affidabile, quando è in grado di identificare uno o più dati anomali nell'insieme delle osservazioni. Ciò significa che la presenza di dati anomali, per quanto abbia, sempre, effetti distortivi sulle stime (causa la mancanza della robustezza, come già detto, proprietà antitetica al metodo dei minimi quadrati), è grazie alla ridondanza globale e locale dello schema d'osservazione, comunque, evidenziata (cioè si sa che i dati anomali sono presenti) e localizzata (cioè si sa dove i dati anomali sono accaduti).

Con preciso riferimento ad un sistema di equazioni d'osservazione e pseudo-osservazione (ma sarebbe, certamente, possibile fare riferimento anche ad un sistema di equazioni di condizione pure, anche se quanto segue deve, allora, essere formulato in modo diverso), si considerino i due seguenti schemi delle osservazioni:

- I. un insieme d'osservazioni (e/o pseudo-osservazioni) y_{02} determina, univocamente, un insieme di parametri \hat{x}_2 , la cui dimensione è, ovviamente, identica a quella del suddetto insieme di osservazioni;
- II. due insiemi d'osservazioni (e/o di pseudo-osservazioni) y_{02} e y_{03} determinano, ciascuno, univocamente, un insieme di parametri \hat{x}_2 , la cui dimensione è, ancora ovviamente, identica a quella di ciascuno dei suddetti insiemi di osservazioni.

Pertanto il primo esempio è costituito dal seguente sistema di equazioni d'osservazione (e/o pseudo-osservazione) cui è associata la matrice dei pesi sotto riportata:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 - y_{01} \\ \delta_2 - y_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

Detto sistema, ricordando l'identità fra le dimensioni dei vettori y_{02} e \hat{x}_2 , è direttamente risolubile in \hat{x}_2 , annullando il vettore degli scarti-residui \hat{v}_2 , in quanto questa scelta minimizza, ovviamente, la norma quadratica degli stessi:

$$\hat{v}_2 \equiv 0 \quad ; \quad \hat{x}_2 = -B^{-1}((\delta_2 - y_{02}) + A_2 \hat{x}_1)$$

Tutto ciò determina la completa identità fra osservazioni e stime delle osservabili compatibili con le relazioni di condizione e, per il teorema di decomposizione ortogonale della varianza, la nullità della matrice di varianza-covarianza degli scarti-residui \hat{v}_2 :

$$C_{\hat{v}_2 \hat{v}_2} \equiv 0$$

Allora un qualsiasi dato anomalo, inserito nell'insieme delle osservazioni (e/o pseudo-osservazioni) y_{02} , distorce le stime dei parametri \hat{x}_2 , lasciando sempre nulli gli scarti-residui \hat{v}_2 con precisione infinita, essendo sempre nulla, anche, la loro matrice di varianza-covarianza.

Analogamente il secondo esempio è costituito dal seguente sistema di equazioni d'osservazione (e/o pseudo-osservazione) cui è associata la matrice dei pesi sotto riportata:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & B \\ A_3 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 - y_{01} \\ \delta_2 - y_{02} \\ \delta_3 - y_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

Detto sistema, ricordando l'identità fra le dimensioni dei vettori y_{02} e y_{03} e \hat{x}_2 , è due volte direttamente risolubile in \hat{x}_2 , per cui la media ponderata dei valori ottenuti in modo indipendente, diventa il valore più probabile, comparando, tramite pesi opportuni, a meno del segno, i vettori degli scarti-residui \hat{v}_2 e \hat{v}_3 , in quanto questa scelta minimizza, ovviamente, la norma quadratica degli stessi:

$$\hat{v}'_2 = H\hat{v}_2 \equiv -K\hat{v}_3 = -\hat{v}'_3; \quad H \text{ e } K \text{ matrici di pesi (opportuni)}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= -\left(B^T Q B + C^T R C\right)^{-1} \left(B^T Q ((\delta_2 - y_{02}) + A_2 \hat{x}_1) + C^T R ((\delta_3 - y_{03}) + A_3 \hat{x}_1)\right) \\ \hat{v}_2 &= B \left(B^T Q B + C^T R C\right)^{-1} C^T R C \left(B^{-1} ((\delta_2 - y_{02}) + A_2 \hat{x}_1) - C^{-1} ((\delta_3 - y_{03}) + A_3 \hat{x}_1)\right) = -H^{-1} K \hat{v}_3 \\ \hat{v}_3 &= C \left(B^T Q B + C^T R C\right)^{-1} B^T Q B \left(B^{-1} ((\delta_2 - y_{02}) + A_2 \hat{x}_1) - C^{-1} ((\delta_3 - y_{03}) + A_3 \hat{x}_1)\right) = -K^{-1} H \hat{v}_2 \end{aligned}$$

Tutto ciò determina l'intercambiabilità (a meno del segno) delle correzioni da apportare alle osservazioni, per ottenere stime delle osservabili compatibili con le relazioni di condizione, e questa intercambiabilità, tenuto conto del teorema di decomposizione ortogonale della varianza, si ha, anche, nelle matrici di varianza-covarianza degli scarti-residui \hat{v}_2 e \hat{v}_3 :

$$\begin{aligned} C_{\hat{v}_2 \hat{v}_2} &= H C_{\hat{v}_2 \hat{v}_2} H^T \equiv K C_{\hat{v}_3 \hat{v}_3} K^T = C_{\hat{v}_3 \hat{v}_3} \\ C_{\hat{v}_2 \hat{v}_2} &= H^{-1} K C_{\hat{v}_3 \hat{v}_3} K^T (H^{-1})^T; \quad C_{\hat{v}_3 \hat{v}_3} = K^{-1} H C_{\hat{v}_2 \hat{v}_2} H^T (K^{-1})^T \end{aligned}$$

Allora un qualsiasi dato anomalo, inserito nell'insieme delle osservazioni (e/o pseudo-osservazioni) y_{02} , y_{03} , distorce le stime dei parametri \hat{x}_2 , lasciando sempre intercambiabili gli scarti-residui \hat{v}_2 e \hat{v}_3 con precisione comparabile, tramite pesi opportuni, essendo sempre intercambiabili fra loro, anche, le rispettive matrici di varianza-covarianza.

Tutto ciò diventa, particolarmente, evidente quando si ha la completa identità delle matrici dei coefficienti e delle matrici dei pesi (ovvero: $B \equiv C$ e $Q \equiv R$); in tal caso, l'intercambiabilità dei vettori degli scarti-residui e delle rispettive matrici di varianza-covarianza diventa completa identità (a meno del segno, per quanto

riguarda i vettori) degli stessi:

$$\hat{v}_2 \equiv -\hat{v}_3 \quad ; \quad C_{\hat{v}_2 \hat{v}_2} \equiv C_{\hat{v}_3 \hat{v}_3}$$

Infatti essendo unitari i sopraccitati opportuni pesi che permettono la comparazione (ovvero: $H = K = I$), la stima dei parametri \hat{x}_2 è la media (aritmetica) delle due determinazioni separate e gli scarti-residui \hat{v}_2 e \hat{v}_3 sono sempre uguali ed opposti:

$$\hat{y} = -\frac{1}{2} B^{-1} ((\delta_2 - y_{02}) + A_2 \hat{x}_1 + (\delta_3 - y_{03}) + A_3 \hat{x}_1)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{2} (((\delta_2 - y_{02}) + A_2 \hat{x}_1) - ((\delta_3 - y_{03}) + A_3 \hat{x}_1)) \equiv -\hat{v}_3$$

$$\hat{v}_3 = -\frac{1}{2} (((\delta_2 - y_{02}) + A_2 \hat{x}_1) - ((\delta_3 - y_{03}) + A_3 \hat{x}_1)) \equiv -\hat{v}_2$$

espressioni, del resto, facilmente ricavabili, particolarizzando le espressioni generali sopra riportate.

I due esempi insegnano che lo schema d'osservazione è affidabile, solo quando è elevata la ridondanza globale e locale. Pertanto globalmente, il numero d'osservazioni e pseudo-osservazioni è bene sia, quantomeno, tre volte il numero dei parametri, cosicché la ridondanza globale, in termini relativi, abbia, almeno, valore due:

$$v = \frac{m + l - n}{n} \geq 2$$

Inoltre localmente, essendo difficile individuare accanto ad un sottoinsieme d'osservazioni e pseudo-osservazioni un sottoinsieme di parametri, si considera comunemente affidabile un'osservazione (o pseudo-osservazione) la cui ridondanza locale v_i abbia, almeno, valore un quinto o un quarto dell'unità:

$$0 \leq 0.20 \div 0.25 \leq v_i = 1 - p_i a_i Q_{\hat{x}\hat{x}} a_i^T \leq 1$$

Infatti come in parte già detto, la ridondanza locale di ciascuna osservazione (o pseudo-osservazione) è fornita dal corrispondente elemento diagonale principale della matrice prodotto della matrice dei cofattori degli scarti-residui preceduta e seguita dalla radice pari della matrice dei pesi (quest'ultima operazione consiste nella radice quadrata dei singoli pesi, se la matrice è diagonale, mentre trattasi d'operazione ben più complessa, se essa non è diagonale):

$$S = P^{1/2} Q_{\hat{v}\hat{v}} P^{1/2} = P^{1/2} (P^{-1} - A Q_{\hat{x}\hat{x}} A^T) P^{1/2}$$

Allora come noto, per il teorema di decomposizione ortogonale della varianza, la ridondanza locale ha valore

zero, quando un'osservazione (o pseudo-osservazione) è indispensabile, mentre ha valore limite uno, quando la stessa è, proprio, del tutto superflua. Essendo, ovviamente, impossibile avere sempre il valore uno, valori superiori ad un quinto o un quarto dell'unità si considerano, comunemente, al di sopra di una ragionevole soglia di sicurezza.

Un riesame, ancora più approfondito, della questione dell'affidabilità conduce alla definizione di affidabilità interna ed affidabilità esterna.

Si chiama affidabilità interna di una generica osservazione (e/o pseudo-osservazione) la quantità che rimane nel corrispondente scarto-residuo, a seguito dell'immissione di un effetto perturbativo.

Questa è misurabile tramite l'espressione:

$$\nabla(\delta_i - y_{0i}) = \frac{\tau \sigma_{y_{0i}}}{\sqrt{v_i}}$$

essendo:

$\sigma_{y_{0i}}$ lo sqm dell'osservazione y_{0i} ;

v_i la corrispondente ridondanza locale;

τ l'ascissa corrispondente al valore della curva di potenza (per la distribuzione di probabilità della variabile casuale τ di Thompson), scelto un livello di significatività ed una potenza del test.

Si chiama, invece, affidabilità esterna di una generica osservazione (e/o pseudo-osservazione) la quantità che fluisce nella stima di un certo parametro, a seguito dell'immissione dello stesso effetto perturbativo.

Questa è misurabile tramite l'espressione:

$$\nabla x_j = - \left((A^T P A)_j^{-1} \right) A^T P e_i \nabla(\delta_i - y_{0i}) \quad \forall j$$

essendo: e_i , il versore unitario diretto secondo la componente i -esima del vettore delle osservazioni (e/o pseudo-osservazioni).

Infatti data la decomposizione di una generica osservazione (e/o pseudo-osservazione) y_{0i} in un valore compatibile con le relazioni di condizione \hat{y}_i ed una discrepanza (uguale ed opposta alla correzione o scarto-residuo \hat{v}_i):

$$y_{0i} = \hat{y}_i - \hat{v}_i$$

consegue, per il teorema di decomposizione ortogonale della varianza, la decomposizione:

$$\sigma_{y_{0i}}^2 = \sigma_{\hat{y}_i}^2 + \sigma_{\hat{v}_i}^2$$

dove:

$$\sigma_{y_{0_i}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

$$\sigma_{\hat{y}_i}^2 = \frac{\sigma_0^2(1 - v_i)}{p_i}$$

$$\sigma_{\hat{v}_i}^2 = \frac{\sigma_0^2 v_i}{p_i}$$

essendo, rispettivamente, p_i il peso e v_i la ridondanza locale dell'osservazione (e/o pseudo-osservazione) in esame. La standardizzazione di quest'ultima decomposizione porta alle seguenti identità:

$$z_i = \frac{y_{0_i}}{\sigma_{y_{0_i}}} = \frac{\hat{y}_i}{\sigma_{\hat{y}_i}} \cdot \frac{\sigma_{\hat{y}_i}}{\sigma_{y_{0_i}}} - \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \cdot \frac{\sigma_{\hat{v}_i}}{\sigma_{y_{0_i}}} = t\sqrt{1 - v_i} - \tau\sqrt{v_i}$$

essendo z una grandezza variabile distribuita come la variabile casuale normale, t una grandezza variabile distribuita come la variabile casuale t di Student e τ una grandezza variabile distribuita come la variabile casuale τ di Thompson.

I valori teorici di dette variabili casuali sono disponibili dalle tavole di distribuzione della probabilità e rappresentano, ciascuno, l'ascissa corrispondente al valore della rispettiva curva di potenza, scelto un livello di significatività ed una potenza del test.

Allora essendo:

$$\hat{x} = -(A^T P A)^{-1} A^T P (\delta - y_0)$$

$$\hat{v} = A \hat{x} + \delta - y_0 = \left(I - A (A^T P A)^{-1} A^T P \right) (\delta - y_0)$$

una perturbazione isolata nell'osservazione (e/o pseudo-osservazione) in esame determina una perturbazione indotta, tanto nelle stime dei singoli parametri, quanto in quella dello scarto-residuo corrispondente:

$$\nabla \hat{x}_j = - \left((A^T P A)_j^{-1} \right)^T A^T P e_i \nabla (\delta_i - y_{0_i}) \quad \forall j$$

$$\nabla \hat{v}_i = \hat{v}_i = v_i \nabla (\delta_i - y_{0_i})$$

essendo e_i , il versore unitario diretto secondo la componente i -esima del vettore delle osservazioni (e/o pseudo-osservazioni).

La prima delle due relazioni definisce l'affidabilità esterna, mentre esplicitando, opportunamente, la seconda (tenuto conto del secondo addendo delle ultime due identità, definite in precedenza, ovvero:

$$\hat{v}_i = \tau \sigma_{y_{0_i}} \sqrt{v_i}), \text{ si ottiene:}$$

$$\nabla(\delta_i - y_{0_i}) = \frac{\hat{v}_i}{v_i} = \frac{\tau \sigma_{y_{0_i}}}{\sqrt{v_i}}$$

che costituisce la definizione di affidabilità interna.

Infine per quanto riguarda gli ovvi vantaggi dell'uso di stimatori robusti nei confronti di dati anomali, se uno schema d'osservazione affidabile identifica, cioè evidenzia e localizza i dati anomali, l'uso di stimatori robusti evita effetti distortenti sulle stime come accade, invece, quando si opera con i minimi quadrati (infatti, come già detto, la robustezza è una proprietà antitetica al metodo dei minimi quadrati).

3.7 Progettazione e ottimizzazione¹⁰

3.7.1 Impostazione del problema

Un campo in cui il calcolo fornisce un prezioso ausilio ed induce a studiare modelli di compensazione ed analisi dati, sempre più complessi e più vicini alla realtà fisica di quanto sia stato possibile in passato, è quello della progettazione delle strutture reticolari. La simulazione dei risultati che si otterranno è divenuta un passo non solo fattibile, ma ormai ineliminabile nel processo di realizzazione di una struttura reticolare, se si vuole raggiungere il massimo risultato.

Dagli anni '70, sono state studiate procedure volte alla ottimizzazione di una struttura reticolare, cioè alla individuazione della configurazione migliore in assoluto per il raggiungimento di determinati obiettivi di precisione ed affidabilità. Gli algoritmi proposti sono, in generale, piuttosto sofisticati, ma permettono di dare una risposta al problema della progettazione. Nel prosieguo, sono riportate alcune procedure nel campo della progettazione, fra le più interessanti. I modelli funzionale e stocastico cui si fa riferimento sono quelli classici con equazioni d'osservazione (e/o di pseudo-osservazione sovrappesate e non) e matrice dei pesi:

$$\hat{y} = y^0 + \hat{v} = A\hat{x} + \delta \quad ; \quad P = Q_{yy}^{-1} = \sigma_0^2 C_{yy}^{-1}$$

essendo:

- y^0 il vettore delle osservazioni di ordine m ;
- \hat{y} il vettore delle stime dei valori;
- \hat{v} il vettore degli scarti - residui delle osservazioni;
- \hat{x} il vettore dei parametri di ordine n ;
- A la matrice di configurazione;
- δ un vettore di termini noti;
- σ_0^2 la varianza (a priori) dell'unità di peso;
- C_{yy} la matrice di varianza - covarianza delle osservazioni;
- Q_{yy} la matrice dei cofattori delle osservazioni;

P la matrice dei pesi delle osservazioni,

Si noti come il modello stocastico sia quello lineare di Gauss – Markov e come, mentre il passaggio ad equazioni d'osservazione e di pseudo-osservazione non – lineari non comporta alcuna modifica nel formalismo e negli algoritmi (dovendosi solo conoscere opportuni valori approssimati dei parametri), l'adozione di modelli stocastici non – lineari (ad es. di Gauss-Helmert) richieda modifiche non elementari. D'altra parte, questi modelli possono essere interpretati come un raffinamento finale del modello stocastico, effettivamente utilizzato in fase di compensazione; pertanto la loro adozione, già in fase di progettazione, in generale è da considerarsi completamente superflua.

3.7.2 Progettazione

Il progetto di una struttura reticolare consiste nella scelta di una configurazione e di uno schema di misura. Occorre decidere il numero di parametri, il tipo delle osservazioni e le metodologie e procedure operative, da applicare per conseguire la precisione voluta. Inoltre al momento della compensazione, va deciso il sistema riferimento nel cui ambito eseguire il calcolo. Questo sistema di riferimento va inteso come l'insieme dei parametri (ed eventualmente delle osservazioni) da tenere invariati; evidentemente tale scelta è strettamente connessa allo scopo per il quale la struttura reticolare è istituita. In ogni caso, si cerca ovviamente di ottenere la migliore struttura reticolare possibile, dal punto di vista dei requisiti di precisione ed affidabilità, nonché dei costi connessi.

Da un punto di vista matematico, la configurazione e lo schema di misura portano alla definizione della matrice di configurazione A , la precisione delle osservazioni alla matrice dei pesi P e alla varianza (a priori) dell'unità di peso σ_0^2 . Tramite queste, è possibile calcolare la matrice dei cofattori delle incognite Q_{xx} e la precisione dei parametri. In letteratura, i problemi che si incontrano, nella progettazione di strutture reticolari, sono suddivisi in ordini. La progettazione di ordine zero, Zero Order Design (ZOD), riguarda la scelta del sistema di riferimento ottimale; quella di primo ordine, First Order Design (FOD), consiste nella scelta ottimale dei parametri, essendo nota la precisione delle osservazioni.

Fissata la configurazione e la precisione da raggiungere nei parametri, la scelta ottimale della precisione di ciascuna osservazione è l'oggetto della progettazione di secondo ordine, Second Order Design (SOD). Infine il miglioramento di una struttura reticolare già esistente, oppure di un progetto già compiuto tramite l'inserimento di nuovi parametri e/o nuove osservazioni, riguarda la progettazione di terzo ordine, Third Order Design (TOD).

I dati di ingresso ed uscita dei vari problemi di ottimizzazione possono essere riassunti nella seguente tabella.

Progettazione di ordine:	Parametri	
	noti:	incogniti:
Zero	A, P	Q_{xx}
Primo	P, Q_{xx}	A

¹⁰ Questa parte riprende ed aggiorna quanto esposto in: Barbarella M., Mussio L. (1988): Progettazione e ottimizzazione. In: M. Unguendoli (Ed) *Studi e ricerche*. CUSL, Bologna, p. 97-129.

Secondo	A, Q_{xx}	P
Terzo	Q_{xx}	A, P (in parte)

La classificazione non va intesa in modo rigido, in quanto in vari ordini di progettazione sono fortemente interconnessi. L'ottimizzazione dei pesi (SOD) porta modifiche allo schema di misura (FOD), se i pesi calcolati sono così bassi che le osservazioni corrispondenti possono essere evitate del tutto. Il terzo ordine è un miscuglio di primo e secondo.

La scelta del sistema di riferimento è comunque pregiudiziale ad ogni successiva operazione, perché la relazione matematica tra A , P e Q_{xx} è diversa a seconda dei casi. In generale, si ha: $(A^T P A) = Q_{xx}$; tuttavia il tipo di inversione dipende dal riferimento:

- l'inversa regolare di Cayley: $()^{-1}$, se sono presenti vertici fissi;
- una pseudo-inversa: $()^+$, in assenza di queste¹¹.

Da un punto di vista matematico, ottimizzare significa cercare il massimo (o il minimo) di qualche funzione dei parametri, costituente l'obiettivo da raggiungere che, nel caso specifico, descrive la qualità della struttura reticolare. A sua volta, quest'ultima riveste molteplici aspetti:

- precisione dei parametri o di grandezze da essi derivati;

¹¹ Si chiama matrice inversa generalizzata di una qualsiasi matrice rettangolare $A(m,n)$, una matrice $A^-(n,m)$ per la quale vale la relazione a) delle seguenti relazioni:

$$A A^- A = A$$

$$A^- A A^- = A^-$$

$$(A^- A)^T = A A^-$$

$$(A A^-)^T = A^- A$$

Se vengono soddisfatte le prime due condizioni, la matrice inversa generalizzata è detta simmetrica e riflessiva.

Se vengono soddisfatte tutte e quattro le suddette condizioni, la matrice si chiama matrice pseudo-inversa, nota anche come inversa di Moore-Penrose, generalmente, indicata mediante il simbolo A^+ . L'inversa di Moore-Penrose è unica e gode, inoltre, delle seguenti proprietà:

$$(A^+)^T = A^+$$

$$(A^+)^T = (A^T)^+$$

$$R(A) = R(A^+)$$

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T$$

$$A^+ = A^T (A A^T)^+$$

La matrice pseudo-inversa di una matrice A quadrata regolare ($\det A \neq 0$) coincide con l'inversa regolare di Cayley: $A^+ = A^{-1}$.

- controllabilità delle osservazioni contro la presenza di dati anomali;
- per i problemi di controllo, capacità di individuare variazioni;:
- contenimento dei costi connessi.

Purtroppo il requisito di precisione contrasta spesso con quello di controllabilità ed il contenimento dei costi contrasta, quasi sempre, con ogni ipotesi di miglioramento tecnico. Occorre perciò formulare una funzione obiettivo per dosare opportunamente i fattori contribuenti alla qualità della struttura reticolare, quale ad esempio:

$$z = a^T q + b s$$

dove:

- s indica i sopraccitati costi connessi;
- q tutti gli altri parametri che descrivono la qualità della struttura reticolare.

Modellare i costi connessi significa valutare tutto quanto è obbligatorio, una volta fissato lo schema di misura della struttura reticolare, nonché le modalità di acquisizione dei dati necessari. I parametri che definiscono la controllabilità di ogni singola osservazione sono la ridondanza locale¹² e l'affidabilità interna¹³. La precisione può essere espressa globalmente tramite gli autovalori della matrice dei cofattori dei parametri $Q_{\hat{x}\hat{x}}$; pertanto

¹² Si chiama ridondanza locale di una generica osservazione il numero adimensionale (positivo e minore di uno) calcolato, nel caso di una matrice dei pesi diagonale, come prodotto del peso di quella osservazione per il cofattore dello scarto-residuo corrispondente:

$$v_i = p_i q_{v_i} \quad \text{essendo:} \quad q_{v_i} = \frac{1}{p_i} - a_i (A^T P A)^{-1} a_i^T$$

¹³ Si chiama affidabilità interna di una generica osservazione la quantità che rimane nel corrispondente scarto-residuo, a seguito dell'immissione di un effetto perturbativo nell'osservazione stessa. Questa è misurabile tramite l'espressione:

$$\nabla(\delta_i - y_{0i}) = \frac{\hat{v}_i}{v_i} = \frac{\tau \sigma_{y_{0i}}}{\sqrt{v_i}}$$

essendo:

- $\sigma_{y_{0i}}$ lo sqm dell'osservazione y_{0i} ;
- v_i la corrispondente ridondanza locale;
- τ l'ascissa corrispondente al valore della curva di potenza, scelto un livello di significatività α ed una potenza del test β .

Si chiama invece affidabilità esterna di una generica osservazione la quantità che fluisce in un dato parametro, a seguito dell'immissione di un effetto perturbativo nell'osservazione stessa. Questa è misurabile tramite l'espressione:

$$\nabla \hat{x}_j = - \left((A^T P A)^{-1} \right) A^T P e_i \nabla(\delta_i - y_{0i}) \quad \forall j$$

essendo: e_i il versore unitario diretto secondo la componente i -esima del vettore delle osservazioni.

si può minimizzare la loro somma: $Tr(Q_{\dot{x}\dot{x}})$, oppure il loro prodotto: $Det(Tr(Q_{\dot{x}\dot{x}}))$, o anche il loro massimo valore (in questo caso, si tende a trasformare l'iperellissoide d'errore in un'ipersfera). Queste quantità si traducono spesso nella sola omogeneizzazione degli errori tra i parametri che si concentrano topologicamente in un nodo, rispettivamente dell'errore quadratico medio di un parametro per le strutture reticolari "monodimensionali" (ad es., le reti di differenze di potenziale), nell'area dell'ellisse d'errore per le strutture reticolari "bidimensionali" e nel volume dell'ellissoide d'errore per le strutture reticolari "tridimensionali" (ad es., per gli ultimi due casi, le reti di tipo geodetico).

Un approccio diverso, largamente applicato, consiste nel creare una matrice di varianza - covarianza che rappresenti una distribuzione di errore ideale: la matrice di criterio, e nel tentare di approssimarla, elemento per elemento, con la matrice di varianza - covarianza di una struttura reticolare reale.

Il tipo di matrice di criterio più usata è quella avente struttura di Taylor - Karman. Questa rappresenta una distribuzione di errore omogenea ed isotropa. Nel caso di strutture reticolari "bidimensionali", le ellissi di errore sono rappresentate da cerchi tutti uguali fra loro; nel caso di strutture reticolari "tridimensionali", gli ellissoidi di errore sono rappresentati da sfere sempre tutte uguali fra loro. Questa matrice di criterio può essere costruita a partire da due (o tre) funzioni definite positive della distanza tra due punti; esse descrivono la propagazione dell'errore lungo la congiungente due punti e lungo la/e direzione/i ad essa perpendicolare/i. E' stata tentata anche la costruzione di matrici di criterio utilizzando una funzione di covarianza discreta. I passi di questa corrispondono al minimo cammino fra due nodi sul grafo topologico, rappresentante la struttura reticolare, ovvero al minimo numero di lati da percorrere per andare da un nodo ad un altro.

Altre matrici di criterio possono essere costruite, a partire da matrici di cofattori dei parametri relative a strutture reticolari reali, migliorandole sotto qualche punto di vista opportunamente definito (Improved Design). Nel caso di strutture reticolari per scopi speciali, possono essere create matrici di criterio che fungono da matrici di varianza - covarianza per grandezze derivate dai parametri (ad es., informazioni morfologiche o cinematiche, oppure capaci di descrivere lo stato di deformazione di un corpo).

L'algoritmo da impiegare, per risolvere il problema della ottimizzazione, dipende dalla forma sotto cui è dato l'obiettivo: una funzione obiettivo scalare o una matrice di criterio da approssimare, elemento per elemento. Fino ad oggi, tutti i metodi sviluppati, per risolvere i problemi di ottimizzazione, possono essere suddivisi in due categorie:

- la simulazione al calcolatore;
- la progettazione matematica.

Nel primo caso, si ha una procedura iterativa che richiede il continuo intervento dell'operatore; questi deve essere un esperto, per analizzare i risultati ottenuti e migliorare la struttura reticolare. Nel secondo caso, uno specifico algoritmo di ottimizzazione, una volta avviato, fornisce automaticamente la struttura reticolare ottimale, secondo un qualche criterio matematico, senza ulteriori interventi.

3.7.3 Simulazione

Una strategia di progettazione consiste nella simulazione. Si definisce un progetto di struttura reticolare e si calcolano i parametri di precisione, controllabilità e costo, assunti come obiettivo. Se i valori trovati non soddisfano le richieste, si ipotizza una diversa configurazione della struttura reticolare e si ripete il calcolo. La procedura va avanti, provando e riprovando, differenti configurazioni, finché non si ottiene una configurazione soddisfacente gli obiettivi proposti. La soluzione trovata non risulterà quella ottimale, da un punto di vista matematico, ma sarà sicuramente realizzabile dal punto di vista pratico.

E' richiesta all'operatore una notevole esperienza per la scelta della configurazione iniziale e delle varianti destinate a migliorare la precisione e la controllabilità delle stime attese, nonché ad abbassare i costi connessi. La praticità del metodo è sempre strettamente collegata alla rapidità ed alla facilità con cui si possono introdurre modifiche ed ottenere risultati da analizzare visualizzandoli. Ogni ritardo, tranne il tempo impiegato per analizzare i risultati, prendere decisioni ed introdurre le modifiche, costituisce una disfunzione del sistema. Pertanto è opportuno che gli algoritmi di calcolo siano orientati alla possibilità di elaborare, in modo sequenziale, i risultati già ottenuti, per l'aggiunta o l'eliminazione di un gruppo di osservazioni e/o di un gruppo di parametri.

Si consideri un modello che tenga conto della presenza di due gruppi di osservazioni: y_1^0, y_2^0 , incorrelati tra loro e riguardanti gli stessi parametri, dove il primo sia in grado, da solo, di definire la stima dei parametri. Ad ogni gruppo, corrisponde una matrice di configurazione: A_i ($i = 1, 2$), ed una matrice dei pesi: P_i , ($i = 1, 2$), per cui il modello di compensazione risulta:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

e la matrice dei cofattori dei parametri ha espressione:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = \left(A_1^T P A_1 + A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1} = \left(\left(Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} \right)^{-1} + A_2^T P_2 A_2 \right)^{-1}$$

dove: $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} = \left(A_1^T P A_1 \right)^{-1}$, indica la matrice dei cofattori dei parametri ottenuta risolvendo la rete con le sole osservazioni y_1^0 . Applicando un noto teorema dell'algebra lineare riguardante la matrice inversa di una espressione matriciale del tipo: $Q \pm R S T$, supposta esistente S^{-1} , si ottiene la seguente espressione:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} \mp Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} A_2^T \left(P_2^{-1} \pm A_2 Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)} A_2^T \right)^{-1} A_2 Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)}$$

L'introduzione (o l'eliminazione, sostituendo nell'espressione sopra riportata il segno: +, al segno: -, e viceversa) di un gruppo di osservazioni non richiede il calcolo e l'inversione della nuova matrice normale. Basta solo togliere (o aggiungere) alla matrice di cofattori dei parametri $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)}$, già ottenuta in precedenza, un termine contenente una funzione della matrice inversa di una matrice di dimensioni molto più piccole, pari

al numero delle nuove osservazioni introdotte (o eliminate). Se si introduce (o si elimina) un'osservazione alla volta, addirittura non è necessaria alcuna inversione di matrice.

Si noti come la simulazione, eseguita sulla base degli obiettivi di precisione e controllabilità, può essere seguita da un'analisi dei costi connessi e da un'ottimizzazione logistica, ove necessaria. Pertanto la mancata esecuzione della simulazione del progetto di una struttura reticolare può attualmente essere attribuita solo ad inerzia.

3.7.4 Ottimizzazione matematica

Una diversa strategia di progettazione consiste nel ricercare una procedura matematica che, una volta avviata, fornisce automaticamente la struttura reticolare ottimale, secondo un qualche criterio matematico, con l'obiettivo di soddisfare, al meglio, i requisiti di qualità desiderati. In questo campo, significativi progressi sono stati raggiunti quasi esclusivamente per il SOD; tuttavia questo è di notevole aiuto per la soluzione di problemi FOD e TOD, potendo portare al rigetto di osservazioni contemporaneamente a basso peso e non utili ad aumentare la controllabilità di altre osservazioni.

Nel prosieguo, si fa esclusivo riferimento ai principali metodi proposti per la soluzione del SOD. Esso consiste nella ricerca dei pesi ottimali delle osservazioni, nota la configurazione della struttura reticolare e lo schema di misura, affinché la precisione dei parametri sia la più prossima possibile a quella ideale rappresentata dalla matrice di criterio prescelta. Si ricordi che tale matrice deve godere delle proprietà di simmetria e definita positività proprie delle matrici di covarianza¹⁴.

Alcuni metodi realizzano l'approssimazione classica (approssimazione dai due lati); altri metodi utilizzano tecniche proprie della ricerca operativa per individuare una struttura reticolare precisa almeno quanto quella ideale (approssimazione da un lato). La relazione cardine tra le quantità note nel SOD: le matrici A e $Q_{xx} = \Gamma$, e quelle incognite: la matrice P , è:

$$(A^T P A) = \Gamma$$

Si è indicato il simbolo di inversa generalizzata che, a seconda del rango della matrice normale derivante dalla scelta del sistema di riferimento, si tradurrà nell'inversa regolare di Cayley: $()^{-1}$, o nella pseudo-inversa: $()^{\dagger}$. Se invece i valori di Γ rappresentano un limite insuperabile (approssimazione da un lato), la stessa relazione va sostituita con disequazioni, quali ad esempio:

$$(A^T P A)_{ii} < \gamma_{ii} \quad \forall i \quad ; \quad (A^T P A)_{jj} > \gamma_{ij} \quad \forall i, j \neq i$$

¹⁴ Si chiama matrice definita positiva, una matrice quadrata e simmetrica Q tale che risulti :

$$\begin{aligned} \underline{u}^T Q \underline{u} &< 0 \quad \forall \underline{u} \\ \underline{u}^T Q \underline{u} &= 0 \quad \rightarrow \underline{u} = 0 \end{aligned}$$

esistendo anche metodi con approssimazioni e disequazioni. Inoltre poiché sarebbe praticamente impossibile acquisire dati con determinate covarianze fra le osservazioni che, se presenti, sono indice di errori sistematici per i quali si richiede un'opportuna correzione, la matrice P è sempre supposta diagonale e le incognite si riducono ai pesi delle osservazioni.

3.7.4.1 Metodi di soluzione tramite minimi quadrati (approccio indiretto)

Un primo metodo di soluzione si avvia trasformando la suddetta relazione cardine nella seguente relazione:

$$A^T P A = \Gamma^{-1}$$

cosa che richiede l'inversione della matrice di criterio. Le m incognite presenti nella matrice P e corrispondenti agli m elementi diagonali principali possono essere considerate come elementi di un vettore: $p = \text{vec } P$. Gli $N = n(n+1)/2$ elementi significativi della matrice quadrata e simmetrica Γ^{-1} possono essere messi in un altro vettore: $q = \text{vec } \Gamma^{-1}$, dove sono riportate una sotto l'altra tutte le colonne di questa matrice, a partire dagli elementi diagonali principali. La medesima relazione può essere espressa, in una forma del tutto equivalente, tramite un sistema lineare, dove p è il vettore delle incognite, q il vettore dei termini noti e la matrice dei coefficienti è ottenuta dalla matrice disegno A tramite il prodotto Katri-Rao¹⁵

$$(A^T \odot A^T)p = q$$

Si noti che questa formulazione approssima la matrice inversa della matrice di criterio.

Un secondo metodo di soluzione consiste nel moltiplicare la relazione precedente, a destra ed a sinistra, per la matrice di criterio, ottenendo grazie alle proprietà delle matrici inverse: $\Gamma (A^T P A) \Gamma = \Gamma \Gamma^{-1} \Gamma = \Gamma$.

Posto: $K^T = \Gamma A^T$, si perviene all'equazione:

$$K^T P K = \Gamma$$

¹⁵ Si chiama prodotto di Kronecker fra due matrici A e B , aventi rispettivamente dimensioni m, n e k, l , la matrice $C = A \bullet B$, avente dimensioni km, lm , ottenuta moltiplicando (con la regola del prodotto di una matrice per un numero) la matrice B per tutti gli elementi della matrice A :

$$C = A \bullet B = [a_{ij} B] \quad \forall i, j$$

Si chiama prodotto di Katri-Rao fra due matrici A e B , aventi rispettivamente dimensioni m, n e k, n la matrice: $C = A \odot B$, avente dimensioni km, n ottenuta moltiplicando (con la regola del prodotto di un vettore per uno scalare) ogni colonna della matrice B , per tutti gli elementi della corrispondente colonna della matrice A :

$$C = A \odot B = [a_j \otimes b_j] = [a_{ij} b_j] \quad \forall i, j$$

che, espressa in forma equivalente, risulta:

$$\{K^T \odot K^T\} p = q \quad \text{dove:} \quad q = \text{vec } \Gamma$$

In questo caso, si approssima direttamente la matrice di criterio.

Un terzo metodo di soluzione consiste nel calcolare la matrice dei cofattori, a partire dall'espressione della stima della soluzione: $\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P (y - y^0)$, ovvero, per la legge di propagazione della covarianza: $Q_{\hat{x}\hat{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P P^{-1} P A (A^T P A)^{-1}$. Posto $H^T = (A^T P A)^{-1} A^T P$, si perviene all'equazione:

$$H^T P^{-1} H = \Gamma$$

che espressa in forma equivalente risulta:

$$\{H^T \odot H^T\} p = q \quad \text{dove:} \quad q = \text{vec } \Gamma$$

Si noti che la matrice H contiene la matrice P ; pertanto la soluzione richiede un procedimento iterativo, a partire da una distribuzione plausibile per i pesi o, più semplicemente, dalla matrice identità.

L'aver imposto la forma diagonale alla matrice dei pesi fa sì che i suddetti sistemi siano inconsistenti; pertanto la matrice di criterio può essere solo approssimata. Il grado di approssimazione può essere espresso dalla differenza tra la matrice dei cofattori ottenuta e la matrice di criterio (ideale):

$\Delta = (A^T P A)^{-1} - \Gamma$, essendo P la matrice dei pesi ottenuta come soluzione degli stessi sistemi. A causa della inconsistenza di questi sistemi, occorre evidenziare un vettore di scarti-residui v :

$$(B^T \odot B^T) p = q + v$$

ed il sistema normale ha espressione (avendo indicato con la lettera B , di volta in volta, le matrici A , K e H):

$$(B^T \odot B^T)^T (B^T \odot B^T) p = (B^T \odot B^T)^T q$$

Introducendo il prodotto di Hadamard¹⁶, poiché vale l'uguaglianza:

$$(B^T \odot B^T)^T (B^T \odot B^T) = (BB^T)^* (BB^T),$$

lo stesso sistema normale può essere scritto nella forma:

¹⁶ Si chiama prodotto di Hadamard fra due matrici A e B , aventi stesse dimensioni (m, n) , la matrice $C = A * B$, avente ancora le stesse dimensioni, ottenuta moltiplicando (con le regole del prodotto dell'aritmetica) ogni elemento della matrice B per il corrispondente elemento della matrice A :

$$(B B^T)^* (B B^T) p = (B^T \odot B^T)^T q$$

dove il termine noto può essere facilmente calcolato con un'espressione formalmente analoga alla nota legge di propagazione della covarianza:

$$(B^T \odot B^T)^T q = \sum_{i=1}^n b_{ki}^2 q_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ki} b_{kj} q_{ij} \quad \forall k$$

Il grave difetto del primo metodo, approssimare l'inversa della matrice di criterio, anziché la matrice di criterio stessa, può essere superato tramite una trasformazione lineare dei pesi. Inoltre questo metodo ha il grande pregio della semplicità di calcolo, in quanto può essere calcolato direttamente dalle osservazioni, senza passaggio intermedi, e conserva la sparsità della matrice di configurazione. Un ulteriore miglioramento è offerto dalla possibilità di forzare gruppi di osservazioni ad avere lo stesso peso, cosa spesso molto importante da un punto di vista operativo. Il secondo metodo non presenta particolari pregi, né difetti, mentre il terzo metodo è più oneroso degli altri, in quanto iterativo nel calcolo della soluzione.

Un approccio sequenziale alla ottimizzazione matematica prevede la scelta di un primo gruppo di misure, definenti interamente la struttura reticolare. Dopodiché eseguita una prima volta il SOD, se la soluzione trovata non è considerata soddisfacente, vengono aggiunti altri gruppi di osservazioni. Si esegue nuovamente il SOD, aggiornando la prima soluzione con gli algoritmi tipici della progettazione interattiva.

Anche l'affidabilità può essere considerata nel SOD, tramite l'aggiunta di vincoli sui pesi. Infatti la scelta di valori massimi accettabili per le affidabilità interna ed esterna pone limiti ai valori dei pesi delle osservazioni. Se si accetta di forzare i pesi, superiori ai valori limiti, ad assumere questi valori, si possono imporre equazioni di vincolo (o di pseudo-osservazione sovrappesate). Queste condizioni modificano la soluzione, per l'aggiunta di termini correttivi applicati solo a quei pesi altrimenti eccedenti il valore massimo consentito. Inoltre nel caso in cui le pseudo-osservazioni sui pesi non fossero sovrappesate, queste sono da considerarsi come informazioni (a priori) sulle quantità da stimare.

3.7.4.2 Metodi di soluzione tramite minimi quadrati ("improved design")

Un approccio, dove non sia richiesta la costruzione di una matrice di criterio, prende l'avvio da una matrice di covarianza, realizzata sulla base della configurazione della struttura reticolare e dello schema di misura, e procede per successivi miglioramenti ("improved design").

Dal progetto iniziale, sulla base di una matrice dei pesi plausibile, si calcola la matrice dei cofattori della incognite $Q_{\hat{x}\hat{x}}$. Quest'ultima viene decomposta nella sua forma spettrale¹⁷:

$$C = A^* B = [a_{ij} b_{ij}] \quad \forall i, j$$

¹⁷ Si chiama proiettore: $P(y)$, in un sottospazio y di uno spazio vettoriale X , una matrice quadrata e simmetrica, tale che il vettore $\underline{y} = P(y) \underline{x}$, con $x \in X$, sia la componente del vettore \underline{x} in Y . Una proprietà fondamentale di tutti i proiettori è $P P = P$, mentre in generale non esiste P^{-1} , tranne nel caso in cui il proiettore coincida con l'identità ($P = I$) a meno di eventuali scambi.

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = U \Lambda U^T$$

essendo:

$$\text{rango}(Q_{\hat{x}\hat{x}}) = r \leq n$$

ed avendo disposto gli autovalori di $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ in ordine decrescente.

La radice quadrata degli autovalori è proporzionale alla lunghezza dei semiassi dell'iperellissoide d'errore. Se lo spettro coperto dagli autovalori è ampio, l'iperellissoide risulta molto allungato in alcune direzioni; pertanto nella struttura reticolare sono presenti forti disomogeneità di precisione.

La precisione globale della struttura reticolare può essere migliorata riducendo le dimensioni dei semiassi più lunghi, mediante una contrazione dello spettro degli autovalori (riduzione degli autovalori più alti):

$$d_i = (1-t)d_i + t d_r \quad \text{con: } 0 < t < 1 \quad \text{dove: } d_r = \min(d_i)$$

Con questi nuovi autovalori, si ricostruisce una nuova matrice di covarianza che diviene l'obiettivo da raggiungere. Per $t = 0$, non si ha alcuna contrazione, mentre per $t = 1$, si impone una distribuzione d'errore perfettamente omogenea (ipersfera di errore), come quella derivata da una struttura di Taylor - Karman.

Nei problemi di controllo, per una migliore individuazione di eventuali variazioni di parametri, conviene avere incertezza minore proprio nella direzione di prevedibile variazione. La rotazione dell'iperellissoide d'errore dalla configurazione iniziale si può ottenere agendo sugli autovettori, cioè modificando la corrispondente matrice. Questi problemi sono risolti con metodi di approssimazione, mutuati dall'analisi fattoriale, ovvero mediante trasformazioni procrustee.

Un'interessante ipotesi di lavoro suggerisce di provare a coniugare i vantaggi di questo approccio alternativo ("improved design") che non richiede di costruire una matrice dicriterio, con quelli forniti da primo metodo diretto: la possibilità di operare con matrici sparse. In questo caso, dopo aver migliorato direttamente la matrice di covarianza, occorre approssimarla con una funzione di covarianza modello (finita), invertire la matrice ottenuta a mezzo di questa e risolvere il sistema dato dal primo metodo diretto. E' tuttavia doveroso precisare che non si hanno, né si conoscono, esperienze a riguardo.

I pesi, comunque calcolati, risultano spesso difficilmente realizzabili in pratica e sollevano grossi problemi metrologici. Infatti pesi negativi o nulli (e anche pesi troppo piccoli) sono ovviamente inaccettabili e costringono ad eliminare la corrispondente osservazione. Inoltre pesi troppo elevati sono praticamente

Si chiama decomposizione spettrale di una matrice C quadrata, simmetrica e definita positiva la sommatoria:

$$C = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T = U \Lambda U^T$$

dove P_i è il proiettore di un qualsiasi vettore sull'iperspazio (insieme U degli autovettori, corrispondenti ciascuno ad un autovalore, a sua volta appartenente all'insieme Λ). Si verifica di seguito la sopraccitata proprietà dei proiettori:

$$P_i^2 = (u_i u_i^T)(u_i u_i^T) = u_i (u_i^T u_i) u_i^T = u_i u_i^T = P_i \quad (u_i^T u_i = 1)$$

dove ogni u_i è un autovettore corrispondente all'autovalore λ_i .

irrealizzabili, per le inevitabili correlazioni che si determinano in lunghe serie di osservazioni ripetute, cosa che pone un limite insuperabile al guadagno in precisione dell'osservazione da acquisire.

Questo significa che i requisiti di precisione sono espressi tramite una matrice di criterio, non sempre la migliore riguardo l'obiettivo ricercato. Talvolta la struttura reticolare reale non può, senza evidenti forzature nei pesi, approssimare la matrice di criterio. In questo caso, i pesi inaccettabili nascono probabilmente dal conflitto tra la configurazione reale e le esigenze espresse dalla matrice di criterio prescelta.

3.7.4.3 Metodi di soluzione basati sulla programmazione matematica

I primi due metodi di ottimizzazione approssimano la matrice dei cofattori alla matrice di criterio (o alla sua inversa). In questi casi, non importa quale delle due matrici ha valore maggiore, nei corrispondenti elementi, purché l'approssimazione sia stretta.

Un diverso approccio consiste nel considerare gli elementi della matrice di criterio (o la sua inversa) come un limite insuperabile, rispetto al quale gli elementi della matrice dei cofattori della struttura reticolare in esame debbono essere sempre maggiori o uguali, oppure minori o uguali. Di conseguenza, le relazioni precedenti vanno intese come disequazioni:

$$(B^T \odot B^T) p (>, =, <) q$$

dove per ciascuna disequazione occorre scegliere il segno opportuno. Inoltre queste non sono le uniche disequazioni che i pesi debbono soddisfare, in quanto i pesi sono grandezze esclusivamente positive.

La ricerca del minimo di una funzione obiettivo, in presenza di vincoli, è un problema di programmazione matematica. In particolare, il seguente modello:

$$\phi = c^T p \rightarrow \min \quad \text{con:} \quad (B^T \odot B^T) p (>, =, <) q \quad \text{e:} \quad p > 0$$

è un problema di programmazione lineare continua la cui soluzione può essere ottenuta con il metodo del simplesso¹⁸.

E' necessario un commento, riguardo la scelta del tipo più opportuno di disuguaglianza. Per la matrice di criterio, occorre certamente scegliere il segno > per gli elementi diagonali (Infatti le varianze dei parametri della struttura reticolare non devono essere superiori alle corrispondenti della matrice di criterio.), mentre per i termini fuori-diagonale si preferisce solitamente il segno <.

Quest'ultima scelta discende dalla seguente considerazione: se si è interessati a funzioni di differenze di parametri, conviene massimizzare le covarianze, per diminuire le varianze delle differenze stesse. Per l'inversa della matrice di criterio, la scelta della direzione della disuguaglianza è assai più complessa, se non problematica.

¹⁸ Si chiama metodo del simplesso un algoritmo capace di ricercare l'estremo (massimo e minimo) di una funzione lineare di più variabili, sottoposte a vincoli di disuguaglianza, anch'essi di tipo lineare. Da un punto di vista geometrico, l'insieme delle soluzioni possibili è un poliedro limitato dagli iperpiani (rette nel caso bidimensionale, piani nel caso tridimensionale), rappresentazione geometrica dei vincoli. Il metodo permette di passare da un vertice ad un altro del poliedro, alla ricerca di quello (o quelli), dove la funzione raggiunge il suo estremo. Pertanto la soluzione corrisponde sempre ad (almeno) uno dei vertici del poliedro.

Tra i vantaggi di questo terzo metodo, si ricorda che non possono risultare pesi negativi e che non è necessario imporre disequazioni su tutti elementi della matrice di criterio (o la sua inversa), ma è possibile limitarsi a considerare le sole (poche) di reale interesse.

Inoltre le disequazioni originarie possono essere sostituite o accompagnate da altre disequazioni su quantità derivate dai parametri, sulla affidabilità delle osservazioni e si possono introdurre anche disequazioni sui costi connessi o sulla massima precisione conseguibile.

Il difetto principale consiste nella eccessiva rigidità con la quale la soluzione rispetta le disequazioni e la funzione obiettivo. Spesso un gran numero di osservazioni assume peso zero ed è eliminato dallo schema di misura; di conseguenza, la struttura reticolare ottimale risulta poco ridondante ed inaccettabile sul piano della controllabilità.

Per superare questo limite, si può passare a funzioni obiettivo più sofisticate. Se il problema consiste nell'approssimare una matrice di criterio, si può introdurre il vettore di scarti-residui v :

$$(B^T \odot B^T)p = q + v$$

come misura del grado di approssimazione raggiunto, e minimizzarne la norma quadratica, rispettando insieme tutte le disequazioni esplicite ed implicite. Il modello completo risulta:

$$\phi = \frac{1}{2} v^T v \rightarrow \min \quad \text{con:} \quad (B^T \odot B^T)p \ (>, =, <) q \quad \text{e:} \quad p > 0$$

Inoltre è sempre possibile aggiungere altre disequazioni, ad esempio, sui costi connessi: $s^T p < c$, dove c indica il costo massimo¹⁹.

Appendice D – Validazione dei dati e dei modelli

VALIDAZIONE DEI MODELLI²⁰

I test di validazione dei modelli permettono di sottoporre a verifica, mediante opportuni controlli e confronti d'ipotesi, le stime effettuate come, del resto, tutti i risultati ottenuti nell'ambito della statistica. Al solito, si possono avere errori nel modello deterministico: presenza di errori grossolani nelle osservazioni, ed errori nel modello stocastico: presenza di errori sistematici nelle osservazioni, ovvero cattiva conoscenza delle varianze delle osservazioni e/o delle eventuali covarianze fra le osservazioni stesse. Un'opportuna sequenza di test permette di districarsi fra le varie cause d'errore.

D.1 Autoconsistenza e crossvalidazione

Un giudizio sui risultati può essere espresso in termini numerici e statistici. I controlli di tipo numerico rispondono a problemi di condizionamento ed affidabilità che comunemente accompagnano e seguono il metodo dei minimi quadrati, comprensivo delle sue estensioni e generalizzazioni; pertanto tutto quanto riguarda i controlli di tipo numerico è considerato estraneo agli scopi del presente lavoro. I secondi comprendono i test statistici per la valutazione di osservazioni e parametri, della loro dispersione e, se del

¹⁹ Questo problema è un problema di programmazione quadratica continua, in quanto la funzione obiettivo è funzione quadratica delle incognite. Esso può essere risolto tramite un algoritmo di complementarità lineare. I risultati di questo metodo sono confrontabili con quelli ottenuti da soluzioni classiche a minimi quadrati, con il non trascurabile vantaggio di non generare pesi inaccettabili.

²⁰ Questa appendice riprende ed aggiorna quanto esposto in: Crippa B., Mussio L. (1990): Approccio non – deterministico alla costruzione di un modello digitale delle altezze. Ricerche di *Geodesia, Topografia e Fotogrammetria*, n. 6. CLUP, Milano, p. 6–91.

caso, della loro dipendenza. Per quanto riguarda le osservazioni, la validazione avviene in termini di entità degli scarti – residui (oltreché numericamente in termini di affidabilità delle osservazioni all'interno dello schema di misura) e consiste essenzialmente nell'individuazione ed eliminazione degli errori grossolani cui si rimanda.

Per quanto riguarda i parametri, la validazione riguarda la loro significatività oppure la loro corrispondenza o meno a valori nominali di riferimento, nonché il confronto (come nel caso dei cosiddetti problemi di controllo) tra due serie identiche degli stessi ricavate da due insiemi indipendenti di dati (oltreché numericamente in termini di buon condizionamento dei parametri nella configurazione delle osservazioni) e si esplica con test globali, parziali e locali. Ciò significa analizzare rispettivamente il rapporto fra la/e varianza/e spiegata/e dai parametri e la varianza residua (sigma zero quadrato), oppure un singolo parametro standardizzato con il proprio sqm, se del caso, avendo sottratto il/i corrispondente/i valore/i nominale/i di riferimento²¹.

Questo tipo di controllo prende il nome di **autoconsistenza**, in quanto opera sull'insieme/i dei dati che sono stati immessi nel calcolo. Infatti, come noto, una prima verifica può ottenersi già raffrontando il quadrato della/e stima/e di sigma zero con il quadrato del valore di riferimento dello stesso, assunto a priori, oppure raffrontando tra loro le due stime effettuate nelle condizioni specificate più oltre. Il test ordinario sulla varianza, facente uso della distribuzione *chi quadrato* con gradi di libertà pari al numero di osservazioni meno il numero dei parametri, permette di valutare la rispondenza o meno della stima effettuata all'ipotesi fondamentale assunta, mentre il test ordinario sul rapporto di varianze, facente uso della distribuzione *F di Fisher* con gradi di libertà sempre pari al numero delle osservazioni meno il numero dei parametri, permette il confronto fra due stime effettuate a partire da insiemi indipendenti di dati²².

Si noti invece come, nel caso di un filtraggio, le correlazioni presenti fra la stima a posteriori della varianza del rumore residuo e la varianza del rumore, nota a priori (da considerare, a sua volta, una stima estratta da una variabile casuale), impediscano di operare allo stesso modo. Pertanto solo un confronto qualitativo fra l'entità della radice del valore quadratico medio dei dati $RMS(v)$ con l'entità della radice del valore quadratico medio del rumore residuo $RMS(n)$ fornirà un primo elemento di giudizio. Tanto più sarà stato

²¹ Test globale su tutti i parametri per la loro significatività, la loro rispondenza a valori nominali di riferimento ed il confronto tra i valori di due identiche serie di parametri ricavati da due insiemi indipendenti di dati:

$$F_{V_1=n, V_2=m-n} = \frac{\hat{x}^T Q_{xx}^{-1} \hat{x} / n}{\hat{\sigma}_0^2} \quad F_{V_1=n, V_2=m-n} = \frac{(\hat{x} - x)^T Q_{xx}^{-1} (\hat{x} - x) / n}{\hat{\sigma}_0^2} \quad F_{V_1=n, V_2=2(m-n)} = \frac{(\hat{x}_A - \hat{x}_B)^T Q_{xx}^{-1} (\hat{x}_A - \hat{x}_B) / n}{\hat{\sigma}_{0_A}^2 + \hat{\sigma}_{0_B}^2}$$

Test parziale su una parte dei parametri per la loro significatività, la loro rispondenza a valori nominali di riferimento ed il confronto tra i valori due identiche serie di parametri ricavati da due insiemi indipendenti di dati:

$$F_{V_1=n' < n, V_2=m-n} = \frac{\hat{x}^T (\Pi Q_{xx} \Pi^T)^{-1} \hat{x} / n'}{\hat{\sigma}_0^2} \quad F_{V_1=n' < n, V_2=m-n} = \frac{(\hat{x} - x)^T (\Pi Q_{xx} \Pi^T)^{-1} (\hat{x} - x) / n'}{\hat{\sigma}_0^2} \quad F_{V_1=n' < n, V_2=2(m-n)} = \frac{(\hat{x}_A - \hat{x}_B)^T (\Pi Q_{xx} \Pi^T)^{-1} (\hat{x}_A - \hat{x}_B) / n'}{\hat{\sigma}_{0_A}^2 + \hat{\sigma}_{0_B}^2}$$

Test locale su un parametro per la sua significatività, la sua rispondenza ad un valore nominale di riferimento ed il confronto tra due valori di uno stesso parametro ricavati da due insiemi indipendenti di dati:

$$\hat{t}_{V=m-n} = \frac{\hat{x}}{\sigma_{\hat{x}}} \quad \hat{t}_{V=m-n} = \frac{\hat{x} - x}{\sigma_{\hat{x}}} \quad \hat{t}_{V=2(m-n)} = \frac{\hat{x}_A - \hat{x}_B}{\sqrt{\sigma_{\hat{x}_A}^2 + \sigma_{\hat{x}_B}^2}}$$

²² Test su sigma zero per la sua rispondenza ad un valore nominale di riferimento e sul confronto tra due valori di sigma zero ricavati da due insiemi indipendenti di dati

possibile far risaltare il segnale stocastico riducendo così il rumore accidentale, quanto più la seconda sarà piccola rispetto alla prima. Il test non – parametrico del segno di Thompson, per campioni qualsiasi (e pertanto anche non indipendenti) sulla dispersione dei dati, permette di valutare il comportamento del rumore residuo rispetto ai dati d'ingresso, valutandone l'auspicato "miglioramento" (come nel caso dei cosiddetti studi "prima e dopo", cioè quando si osserva due volte lo stesso campione).

Un controllo più rigoroso si può essere effettuato non utilizzando tutti i dati a disposizione, bensì riservandone alcuni (ad es., da qualche per cento fino ad un massimo del 10%, per insiemi di dati veramente molto grandi) per una verifica separata, detta **crossvalidazione**. Infatti effettuata l'estrapolazione e/o la predizione per tutte queste osservazioni e calcolata la differenza fra il dato di partenza ed il valore estrapolato e/o il segnale predetto, si ottiene un insieme di discrepanze, opportunamente piccole, se il precedente trattamento delle osservazioni ha fornito buoni risultati.

Date le differenze fra i dati di partenza ed i valori estrapolati a fini di controllo: $\hat{\delta} = y_e^0 - \hat{y}_e$, è possibile valutare la loro entità, sottoponendole al test ordinario sulla media, facente uso della distribuzione *t di Student* con gradi di libertà pari al numero delle osservazioni più uno meno il numero dei parametri:

$$\hat{t}_{v=m+1-n} = \frac{\hat{\delta}}{\sigma_{\hat{\delta}}} \quad \text{essendo:} \quad \sigma_{\hat{\delta}}^2 = \sigma_{y_e^0}^2 + \sigma_{\hat{y}_e}^2$$

Il test ordinario sulla varianza di queste differenze, facente uso della distribuzione *chi quadrato* con gradi di libertà pari al numero delle differenze estrapolate, permette di giudicare, in senso statistico, la bontà della estrapolazione (crossvalidando così anche l'interpolazione e/o compensazione effettuata), mentre il test ordinario sul rapporto di varianze, facente uso della distribuzione *F di Fisher* con gradi di libertà sempre pari al numero delle differenze estrapolate, permette il confronto fra due stime effettuate a partire da insiemi indipendenti di dati:

$$\hat{\chi}_{v=m'}^2 = m' \frac{\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}^2}{\sigma_0^2} \quad F_{v_A=m', v_B=m'} = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_B^2}$$

Nel caso di un filtraggio, date invece le differenze fra i dati di partenza ed i valori predetti a fini di controllo: $\hat{\delta} = v_p^0 - \hat{s}_p$, le correlazioni presenti fra la stima a posteriori della varianza del rumore residuo e la varianza del rumore, nota a priori (da considerare, a sua volta, una stima estratta da una variabile casuale), impediscono di operare allo stesso modo. Pertanto solo un confronto qualitativo fra l'entità della radice del valore quadratico medio dei dati cosiddetti di controllo $RMS(v_p)$ con l'entità della radice del valore quadratico medio delle differenze predette $RMS(n_p)$ fornirà un primo elemento di giudizio. Tanto più sarà stato possibile far risaltare il segnale stocastico predetto riducendo così le differenze predette, quanto più la seconda sarà

$$\hat{\chi}_{v=m-n}^2 = (m-n) \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2$$

$$F_{v_A=m-n, v_B=m-n} = \hat{\sigma}_A^2 / \hat{\sigma}_B^2$$

piccola rispetto alla prima. Il test non – parametrico del segno di Thompson, per campioni qualsiasi (e pertanto anche non indipendenti) sulla dispersione dei dati, permette di valutare il comportamento delle differenze predette rispetto ai dati d'ingresso, valutandone l'auspicato "miglioramento" (come nel caso dei cosiddetti studi "prima e dopo", cioè quando si osserva due volte lo stesso campione).

Di seguito, considerando nota da informazioni a priori la varianza del rumore, viene esposto un test "ad hoc" sulla varianza di queste differenze che permette di giudicare, in senso statistico, la bontà della predizione (crossvalidando così anche il filtraggio effettuato). Data la norma quadratica delle differenze predette, definita dalla matrice inversa della loro matrice di covarianza²³:

$$E(\delta^T Q_{\delta\delta}^{-1} \delta) = Tr(Q_{\delta\delta}^{-1} E(\delta \delta^T)) = \sigma_n^2 Tr(Q_{\delta\delta}^{-1} Q_{\delta\delta}) = \sigma_n^2 Tr I_{(m)} = m' \sigma_n^2$$

una sua stima corretta e consistente si ottiene, come usuale, sostituendo la stima delle differenze ai loro valori teorici: $\hat{\sigma}_n^2 = \hat{\delta}^T Q_{\delta\delta}^{-1} \hat{\delta} / m'$.

Per agevolare il calcolo della matrice inversa della suddetta matrice di covarianza, si ponga attenzione alle seguenti considerazioni. La matrice di covarianza di queste differenze si ottiene applicando la legge di propagazione della covarianza all'espressione della stima delle differenze predette:

$$C_{\hat{\delta}\hat{\delta}} = C_{v_p v_p} + C_{s_p s} C_{vv}^{-1} C_{ss_p} - 2 C_{s_p s} C_{vv}^{-1} C_{ss_p} = C_{v_p v_p} - C_{s_p s} C_{vv}^{-1} C_{ss_p}$$

Se le differenze sono ottenute negli stessi punti di filtraggio, utilizzando una seconda serie di dati, oppure altri punti in numero minore o uguale ai punti di filtraggio e non molto lontani da questi (ad es., inferiore al 20% della lunghezza di correlazione²⁴), allora si può convenientemente effettuare la seguente approssimazione:

$$\begin{aligned} C_{\hat{\delta}\hat{\delta}} &= C_{v_p v_p} - C_{s_p s} C_{vv}^{-1} C_{ss_p} \cong C_{vv} - C_{ss} C_{vv}^{-1} C_{ss} = C_{vv} - (C_{ss} - C_{ee}) = \\ &= (C_{ss} + \sigma_n^2 I) (C_{ss} - \sigma_n^2 (I - \sigma_n^2 C_{vv}^{-1})) \cong \sigma_n^2 C_{vv}^{-1} (2C_{vv} - \sigma_n^2 I) \cong 2\sigma_n^2 I \end{aligned}$$

In questa espressione, la prima approssimazione è fatta scambiando, in termini di varianze e covarianze, il segnale predetto con quello filtrato coincidente o più vicino²⁵. Di conseguenza, la stima della suddetta norma

²³ Si chiama norma quadratica di un vettore lo scalare: $\sqrt{v^T Q v} = \sqrt{\sum_i q_{ii} v_i^2 + 2 \sum_i \sum_j q_{ij} v_i v_j}$, essendo Q una qualsiasi matrice definita positiva che, una volta scelta, definisce il tipo di norma. Si ricordi che si definisce matrice definita positiva una matrice quadrata Q che soddisfi le relazioni:

$$\begin{aligned} u^T Q u &\geq 0 \quad \forall u \\ u^T Q u &= 0 \rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

Si chiama norma euclidea di un vettore v lo scalare: $\sqrt{v^T v} = \sqrt{\sum_i v_i^2}$, indicata con il simbolo $\|v\|$.

²⁴ Si chiama lunghezza di correlazione la distanza, corrispondente all'ascissa della funzione di covarianza, dove la covarianza del segnale risulta uguale alla metà della varianza del processo.

²⁵ La seconda approssimazione ha invece il suo fondamento dell'essere, in generale: $2 Tr(C_{vv}) = 2 m \sigma_v^2 > m \sigma_n^2 = \sigma_n^2 Tr(I)$, ovvero: $\sigma_n^2 < \sigma_s^2 + \sigma_n^2 = \sigma_v^2 < 2 \sigma_v^2$. Pertanto essendo: $\sigma_{\hat{\delta}}^2 \cong 2\sigma_n^2$, e risultando tutte le differenze predette pressoché indipendenti fra loro, il calcolo della matrice inversa della loro matrice di covarianza non presenta ovviamente alcun problema.

quadratica ha espressione:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\hat{\delta}^T \hat{\delta}}{2m'} \quad \text{da cui ancora:} \quad \hat{\chi}_{v=m'}^2 = m' \frac{\hat{\sigma}_\delta^2}{\sigma_0^2}$$

per l'esecuzione del sopraccitato test sulla varianza, facente uso della distribuzione *chi quadrato* con gradi di libertà pari al numero delle differenze predette.

Da ultimo, si badi che, nel caso di confronti fra metodologie, procedure ed algoritmi, da effettuarsi ovviamente con gli stessi insiemi di dati, data la ovvia non indipendenza fra i dati, sia necessario effettuare la comparazione dei risultati ottenuti con i test non – parametrici del segno di Thompson, per campioni qualsiasi, sui valori centrali e/o sulla dispersione. Si noti, come questi confronti non siano infrequenti; al contrario, essi sono richiesti ogniqualvolta si voglia valutare l'effettivo miglioramento ottenibile con un cambio di metodologie, procedure od algoritmi. In questo caso infatti, ragioni di continuità delle serie storiche, oltre alla necessaria cautela nell'accettazione del rinnovamento proposto, richiedono di affiancare, per un certo periodo, due soluzioni comparandone i risultati, al fine di ottenere elementi di giudizio.

D.2 Identificazione ed eliminazione dei dati anomali

Accade talvolta che si abbiano molti dati anomali la cui presenza fa sì che qualsiasi operazione preliminare (ad es., il calcolo di valori approssimati dei parametri, la valutazione di correzioni da apportare alle osservazioni, ove queste si rendano necessarie, le stime empiriche delle eventuali funzioni di covarianza, in particolare, le covarianze calcolate per i dati più vicini rispetto alla varianza del segnale²⁶) risulti fortemente alterata. Per superare questo inconveniente, è necessario mettere a punto, caso per caso, una strategia che consenta **procedure robuste di esplorazione preliminare**. Infatti una strategia generale non è nota e la sua definizione cozza con l'elevata non – linearità del problema.

Una semplificazione, a riguardo, può ottenersi se si hanno informazioni, a priori, su l'entità della varianza delle osservazioni (o del loro rumore, se si suppone che esse contengano anche un segnale stocastico). In questo caso specifico, dopo aver individuato un opportuno intorno r_1 , la differenza fra lo scarto – residuo di un'osservazione qualsiasi v_i e la media degli scarti – residui delle osservazioni circostanti v_j , siti nel relativo intorno:

$$\delta_i \equiv v_i - \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} v_j \quad j \neq i \quad \text{e} \quad 0 \leq d_{ij} \leq r_1 \quad \forall i$$

costituisce una stima, anche se grossolanamente approssimata, della discrepanza δ_i (o del rumore n_i) di quella data osservazione.

Si osservi innanzitutto come l'individuazione di un opportuno intorno sia agevole quando si operi con dati intensivi (cioè puntuali) a referenza spaziale forte (indotta dalle coordinate²⁷), mentre diventi molto più

²⁶ Con specifico riferimento alla stima empirica delle funzioni di covarianza, come accade ad esempio nello studio dei modelli digitali delle altezze, è la forma della funzione di covarianza a risultare fortemente depressa.

²⁷ Una referenza spaziale debole può essere indotta dagli indirizzi o altri indicatori di località (o posizione), non aventi le proprietà

complessa in tutti gli altri casi. Si noti poi che gli scarti – residui delle osservazioni sono solitamente un prodotto finale del trattamento delle osservazioni, pertanto la loro richiesta, all'inizio dello stesso, richiede il calcolo di soluzioni approssimate e/o parziali e/o locali, per poter disporre da subito degli stessi.

Si ricordi che alternative, maggiormente robuste e pertanto più sicure, alla media delle osservazioni circostanti sono la mediana o la media potata (in questo secondo caso, con un opportuna definizione dei pesi delle osservazioni, mettendo a zero le osservazioni anomale che si sospettano affette da errori grossolani) delle stesse, cosa che permette un'individuazione e rimozione di eventuali errori grossolani, presenti al loro interno, per poter poi concludere, senza effetti di mascheramento, la sopraccitata operazione di media mobile delle osservazioni circostanti una data osservazione.

Se i dati di partenza sono distribuiti normalmente, allora anche la stima appena fatta della discrepanza (o del rumore) è distribuita normalmente con media nulla e varianza nota, assunta da informazioni a priori. Infatti come noto, qualsiasi combinazione lineare di variabili casuali normali è una variabile casuale normale. Così il test ordinario sulla media per campioni numerosi, nell'ipotesi fondamentale nulla, consente di mettere in evidenza, un'osservazione alla volta, tutti quei dati significativamente anomali.

Inoltre capita spesso che, fra i dati utilizzati, come fra quelli riservati per il controllo, si abbiano alcuni dati anomali (e talvolta anche in quantità abbastanza rilevante), da interpretarsi spesso come errori grossolani. L'identificazione e l'eliminazione (con una procedura comunemente detta **data snooping**) di questi che, per loro relativa piccolezza, non inficiano certamente le procedure di esplorazione preliminare, per lo più, è abbastanza agevole. Infatti dati gli scarti – residui delle equazioni d'osservazione, standardizzati per il relativo sqm, essi possono essere sottoposti alla verifica d'ipotesi, globalmente con il test multiplo di Pearson et al. e singolarmente con un test “ad hoc” per uno scarto – residuo.

Il test multiplo di Pearson et al., eseguito su un'opportuna combinazione quadratica dei coefficienti di asimmetria (γ) e di curtosi (β)²⁸, aventi ciascuno distribuzione asintoticamente normale, rispettivamente con media: $\mu_\gamma = 0$, $\mu_\beta = 3$, e varianza: $\sigma_\gamma^2 = 6 / m$, $\sigma_\beta^2 = 24 / m$, dove m è la dimensione del campione in esame, ed essendo gli stessi coefficienti stocasticamente indipendenti fra loro, fa uso della distribuzione *chi quadrato* con due gradi di libertà:

$$\hat{\chi}_{v=2}^2 = m \left(\frac{\hat{\gamma}^2}{6} + \frac{(\hat{\beta} - 3)^2}{24} \right)$$

Un test “ad hoc” per uno scarto residuo, facente uso della distribuzione *tau di Thompson* con gradi di libertà pari al numero delle osservazioni “effettive” meno il numero dei parametri, consente di mettere in evidenza, un'osservazione alla volta, tutti quei dati significativamente anomali:

metriche delle coordinate.

²⁸ Coefficienti di asimmetria e di curtosi:

$$\hat{\gamma} = \sum_{i=1}^m \frac{(x_i^0 - \mu)^3}{m\sigma^3} = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{v}_i^3}{m\sigma^3} = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{z}_i^3}{m} \qquad \hat{\beta} = \sum_{i=1}^m \frac{(x_i^0 - \mu)^4}{m\sigma^4} = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{v}_i^4}{m\sigma^4} = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{z}_i^4}{m}$$

$$\hat{\tau}_{\substack{v=m'-n \\ (m' \leq m)}} = \frac{v}{\sigma_{\hat{v}}}$$

essendo:

$$\tau_v = \frac{\sqrt{v} t_{v-1}}{\sqrt{(v-1) + t_{v-1}^2}}$$

L'uso più appropriato di questo test è la cosiddetta **selezione all'indietro con minimi quadrati in cascata**, a partire dallo scarto residuo standardizzato maggiore, aggiornando poi, ogni volta, la soluzione e selezionando via, via tutti gli scarti residui standardizzati, in ordine decrescente di valore assoluto, fintantoché il massimo scarto residuo standardizzato corrente risulti accettabile. Si badi come questa procedura non sia affatto robusta, in quanto gli effetti di mascheramento, propri dei minimi quadrati, non permettono di evidenziare i veri dati anomali, distinguendoli da quelli apparenti (ma, in effetti, privi d'errore), specialmente se il numero dei dati anomali e/o l'entità delle anomalie è elevato/a.

Un'alternativa, particolarmente vantaggiosa, è costituita dalla cosiddetta **selezione in avanti dopo (opportune) procedure robuste**, a partire dallo scarto residuo standardizzato minore, fra quelli preventivamente esclusi in base alle suddette procedure, capaci di separare il grosso buono dei dati dai dati anomali (veri o presunti). Dopo la riammissione della corrispondente osservazione, nell'insieme costituito dal grosso buono dei dati, un test estremale, facente uso della distribuzione *H di Hawkins* con gradi di libertà pari al numero delle osservazioni "effettive" meno il numero dei parametri, consente di mettere in evidenza, un'osservazione alla volta (in particolare, valutando il massimo scarto residuo standardizzato fra quelli delle osservazioni "effettive"), tutti quei dati significativamente anomali, con maggior sicurezza (Tutto ciò dà ulteriore ragione alla proposta strategia mista, consistente nel far precedere opportune procedure robuste ad una selezione mirata in avanti, condotta in modo sequenziale con il metodo dei minimi quadrati, fino ad ottenere a minimi quadrati il risultato atteso.):

$$\hat{H}_{\substack{v=m'-n \\ (m' \leq m)}} = \max_{i=1, m' \leq m} \left(\frac{\hat{v}_i^2}{v \sigma_{\hat{v}_i}^2} \right)$$

essendo:

$$H_v = \frac{\max(\chi_1^2)}{\chi_v^2}$$

Nel caso di un filtraggio, basta standardizzare rispettivamente il rumore o la differenza fra i dati di partenza e segnale predetto nei punti di controllo, avendone preventivamente calcolato il relativo sqm:

$$\sigma_n^2 = \sigma_n^4 \text{diag } C_{vv}^{-1}$$

e:

$$\sigma_{\delta}^2 \cong 2 \sigma_n^2$$

dove l'approssimazione è fatta scambiando, in termini di varianze e covarianze, ogni punto di controllo con quello di filtraggio coincidente o più vicino. Dopodiché il test ordinario sulla media per campioni numerosi, nell'ipotesi fondamentale nulla, permette di decidere, in senso statistico, un punto alla volta, l'eliminazione dei dati anomali.

D.3 Partizione in insiemi omogenei

I dati sono, talvolta, troppo poco omogenei fra loro, ovvero opportunamente suddivisi in insiemi, alcuni insiemi hanno varianze (o altri opportuni indicatori della dispersione) significativamente diverse dagli insiemi

circostanti o comunque prossimi²⁹. Allora è opportuno frazionare l'insieme dei dati, in tanti insiemi omogenei, quante sono le unioni connesse degli insiemi aventi pressoché le stesse varianze e le stesse scale delle eventuali funzioni di covarianza.

Nei casi più semplici, è consigliabile costruire gli insiemi mediante quadrettatura, particolarmente elementare se i dati sono disposti regolarmente o quasi. Dopodiché assunta una qualsiasi suddivisione di comodo delle classi di varianza, è immediato stabilire quali insiemi abbiano le stesse varianze e quali varianze significativamente diverse. Si osservi che problemi d'incertezza nell'attribuzione di un insieme ad una classe, dovuti all'arbitrarietà del posizionamento delle classi, sono quasi ininfluenti sui risultati.

L'attribuzione di ciascun insieme, ad una determinata classe, produce gli insiemi omogenei cercati. A tale scopo, tecniche gerarchiche ed agglomerative di cluster analysis (ad es., line – following o region growing) possono essere vantaggiosamente impiegate. Questa procedura si basa innanzitutto sull'assunzione che la varianza del segnale costituisca buona parte della varianza generale, essendo prevalente sulla varianza del rumore, considerata maggiormente costante per tutti gli insiemi, in quanto legata anche alla precisione di osservazione.

Alcuni test statistici permettono di discriminare ipotesi alternative nella partizione in insiemi omogenei. Infatti i test ordinari dell'analisi di varianza (di Fisher) e per lo studio delle componenti della varianza (di Bartlett) permettono di giudicare l'omogeneità o meno, rispettivamente delle medie e delle varianze, per campioni indipendenti e normali, mentre i test non – parametrici del rango (di Kruskal – Wallis) permettono di giudicare altri indicatori di posizione e di dispersione, per campioni comunque indipendenti, anche se non necessariamente normali. Inoltre nel caso di eventuali classificazioni di coefficienti di correlazione (oppure di coefficienti di correlazione sui ranghi di Spearman), altri test statistici permettono di discriminare ipotesi alternative nella partizione in insiemi omogenei. Infatti il test ordinario per lo studio di struttura di covarianza (di Hotelling, in particolare con l'approssimazione di Lawley) permette di giudicare l'omogeneità o meno dei coefficienti di correlazione, per campioni normali, mentre il test non – parametrico del rango (di Wilcoxon – Willcox, sempre con l'approssimazione di Lawley) permette di giudicare i coefficienti di correlazione sui ranghi di Spearman, per campioni non necessariamente normali.

Si osservi comunque come sia spesso possibile effettuare il passaggio da dati non normali a dati normali, facendo uso di note funzioni di trasformazione della distribuzione di probabilità. Si ricordi infatti che, nel caso di **eventi rari** la cui distribuzione può essere assunta approssimativamente log – normale (mentre la distribuzione esatta è data, a rigore, dalla distribuzione Gamma di Erlang), è possibile passare a dati aventi distribuzione normale, calcolando il logaritmo degli stessi dati. Un analogo passaggio a dati aventi distribuzione normale, si ottiene nel caso delle **parti piccole** la cui distribuzione può essere assunta rettangolare, calcolando la funzione inversa dalla funzione trascendente (non elementare) *erf*.

²⁹ Con specifico riferimento ai modelli digitali delle altezze, si trovano zone non – omogenee, ad es., quando si opera in zone pedemontane o in talune fasce costiere.

D.4 Tecniche multilivello: eventuali rimozione della tendenza, prefiltraggio e secondo filtraggio³⁰

Le analisi statistiche più raffinate hanno bisogno, di dati a media nulla e privi di qualsiasi sistematismo generale (detto: tendenza; dall'inglese: trend) che, se presente³¹, deve essere preventivamente rimosso, in generale con una (semplice) interpolazione polinomiale.

Inoltre, nel caso di un filtraggio, l'idea assurda di un filtraggio prima dello stesso indica un modo di procedere vantaggioso, al fine di ridurre la persistenza di correlazione³². Infatti un prefiltraggio è un'operazione del tutto simile al filtraggio, anche se meno efficiente, che fa dipendere il segnale in un punto qualsiasi principalmente dai valori osservati nei punti circostanti in un intorno prefissato. Ciò significa modellare una parte del segnale con procedimenti interpolativi locali (ad es., con il metodo degli elementi finiti). Si badi che il pre – filtraggio, proprio perché meno efficiente, in generale, non abolisce affatto il successivo filtraggio.

Infine, sempre nel caso di un filtraggio, accade talvolta che il segnale sia modellabile tramite due funzioni di covarianza: una atta a evidenziare correlazioni più lunghe (per un'entità maggiore di segnale) e l'altra atta a evidenziare correlazioni più corte (per un'entità minore di segnale)³³. In tal caso, il filtraggio separa solo il segnale maggiore, lasciando nel rumore – residuo anche il segnale minore. Allora calcolata una nuova funzione di covarianza, essa risulta colorata (ovvero mostra correlazione nel rumore – residuo). Un secondo filtraggio, in base alla nuova funzione di covarianza, separa anche il segnale minore dal rumore – residuo la cui funzione di covarianza risulta bianca (ovvero non mostra correlazione nel nuovo e più piccolo rumore – residuo).³⁴

D.5 Individuazione di elementi caratteristici

Informazioni sulla dislocazione di elementi caratteristici, oltre a quelle già fornite dalla analisi degli scarti – residui standardizzati (o del rumore – residuo) standardizzato, possono essere ottenute calcolando anche le differenze finite prime e seconde delle stesse quantità. Infatti in un campo 2D, queste grandezze rappresentano rispettivamente la pendenza e la curvatura medie dell'errore nei dati e/o di modello nell'intorno del dato, di volta in volta, in esame.

Si osservi come, in campo 3D, lo stesso studio possa essere facilmente effettuato sui tre piani ortogonali, riferiti agli assi cartesiani, in cui lo spazio tridimensionale può essere scomposto, mentre lo studio dell'intero

³⁰ Le tecniche multilivello permettono di affrontare lo studio di vari fenomeni, aggredendoli un po' alla volta, così come la spiegazione viene costruendosi, passo dopo passo, ovvero livello dopo livello, con l'aumento della risoluzione (o della granularità, oppure dell'ordine) insieme al miglioramento della precisione ed accuratezza ed alla riduzione della zona (o intervallo, oppure altro dominio del problema) in esame. Tutto ciò permette di fornire il tipo di spiegazione, richiesto ad un certo livello, adottando il modello più adeguato (per il dato il livello d'elaborazione) facendo uso di un numero ben adeguato di dati, con il campionamento sequenziale: progressivo e selettivo degli stessi per campi di punti (oppure con la progettazione ed ottimizzazione interattiva della configurazione e dello schema di misura, nel caso di strutture reticolari).

³¹ Con specifico riferimento ai modelli digitali delle altezze, si trova una tendenza nei dati, ad es., quando si opera su piccole aree (una montagna, una collina, un versante, una valle, ecc.).

³² Si definisce persistenza di correlazione il numero di passi della funzione di covarianza, prima che questa assuma definitivamente valori pressochè trascurabili (ad es., inferiori al 5% ÷ 10% della varianza generale). Si ricordi inoltre che si chiamano lunghezza di correlazione la distanza alla quale la funzione di covarianza vale (eventualmente una prima volta) la metà della varianza generale e punto di annullamento la distanza alla quale la funzione di covarianza si annulla, se ciò avviene (se ciò avviene più volte, allora la prima volta).

³³ Con specifico riferimento ai modelli digitali delle altezze, occorre procedere ad un secondo filtraggio, ad es., quando si opera su con dati molto fitti, capaci di mettere in evidenza tanto un segnale maggiore, avente una lunghezza di correlazione relativamente lunga, quanto un segnale minore, avente una lunghezza di correlazione molto più corta (anche se il suo contributo alla modellazione del fenomeno non è trascurabile). Infatti in tal caso, omettere questo secondo passo di correlazione significa lasciare il segnale minore indistinto dal rumore – residuo, cosa che ne amplifica il valore e ne cambia la natura.

³⁴ Sui risultati ottenuti è ancora possibile esprimere un giudizio, in termini numerici e statistici. I controlli di tipo numerico rispondono, anche in questo caso, a problemi di condizionamento ed affidabilità che comunemente accompagnano e seguono il metodo dei minimi quadrati, comprensivo delle sue estensioni e generalizzazioni. A loro volta, i secondi comprendono sempre i test statistici per la valutazione di osservazioni e parametri, della loro dispersione e, se del caso, della loro dipendenza.

dominio a quattro dimensioni sia innegabilmente più complesso ed ovviamente non rappresentabile visivamente.

Il calcolo delle differenze finite è facile. Infatti indicato con z_{ij} la quantità standardizzata nel punto P_{ij} di una griglia regolare a maglie quadrate di lato l^{35} , le differenze finite prime della stessa si calcolano con le seguenti espressioni:

$$\Delta z_{i,j/i} = \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2l} \qquad \Delta z_{i,j/j} = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2l}$$

e le differenze finite seconde con le successive:

$$\Delta^2 z_{i,j/ii} = \frac{z_{i+1,j} - 2z_{ij} + z_{i-1,j}}{l^2} \qquad \Delta^2 z_{i,j/jj} = \frac{z_{i,j+1} - 2z_{ij} + z_{i,j-1}}{l^2}$$

$$\Delta^2 z_{i,j/ij} = \Delta^2 z_{i,j/ji} = \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j-1} - z_{i-1,j+1} + z_{i-1,j-1}}{l^2}$$

Con specifico riferimento ai vari tipi di elementi caratteristici in un campo 2D, dove gli elementi caratteristici sono linee caratteristiche, la figura D.1 mostra l'andamento della quantità standardizzata, della sua pendenza e della sua curvatura lungo una sezione ortogonale alla linea caratteristica oggetto di studio³⁶. Le due differenze prime costituiscono le componenti del vettore Jacobiano, ovvero del vettore gradiente:

$$J = \vec{g} = \begin{bmatrix} \Delta z_{ij/i} \\ \Delta z_{ij/j} \end{bmatrix}$$

avente modulo, ovvero norma:

$$\|g\| = |g| = \sqrt{(\Delta_{ij/i})^2 + (\Delta_{ij/j})^2}$$

essendo la direzione di massima pendenza e la direzione della tangente alla curva di livello (isoipsa):

³⁵ Si osservi che si hanno sempre punti disposti su una griglia (quasi) quadrata, quando si esegue la scansione di immagini, non invece quando si procede con la digitalizzazione di mappe. Tuttavia poiché, nel secondo caso, i dati di partenza sono ottenuti mediante discretizzazione delle curve di livello; a fronte di un lavoro di produzione così ingente, la discretizzazione anche delle linee caratteristiche di rottura della superficie, solitamente riportate sulle mappe, non accresce molto il lavoro di produzione. Inoltre, anche in caso di mancanza di queste, è comunque possibile avere punti disposti su una griglia regolare a maglie quadrate, interpolando opportunamente il rumore standardizzato di tutti i punti posti in un opportuno intorno. Si noti a proposito come l'interpolazione con un piano sia adatta allo studio della pendenza, mentre l'interpolazione con una quadrica di tipo funzione (ad es., paraboloide ellittico o paraboloide iperbolico o cilindrico parabolico) è indicata allo studio della curvatura. Infine nel caso, per altro assai poco frequente di punti sparsi e radi, nessuna informazione sulle linee caratteristiche di rottura della superficie può essere fornita.

³⁶ Con specifico riferimento alla costruzione dei modelli digitali delle altezze, può accadere che si abbiano parecchi dati anomali, non sufficienti ad inficiare le varie e diverse operazioni preliminari, ma certamente troppo abbondanti e troppo "curiosamente" distribuiti per essere considerati errori grossolani. A proposito, occorre tenere presente che il terreno ha, per sua propria natura, certe linee (punti) caratteristiche: verso l'alto (picchi, creste, ecc.), verso il basso (fosse, valli, impluvi, ecc.) di transizione alto – basso (balze, scarpate, ecc.). Come evidente, si tratta di linee di rottura della continuità o della graduale variabilità della superficie del terreno che, come tali, non possono essere ricostruite con un qualsiasi metodo di interpolazione.

$$\vartheta_{max} = \arctan \frac{\Delta z_{ij/i}}{\Delta z_{ij/j}}$$

$$\vartheta_0 = \vartheta_{max} + \pi/2$$

Le quattro differenze seconde costituiscono gli elementi della matrice Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} \Delta^2 z_{ij/ii} & \Delta^2 z_{ij/ij} \\ \Delta^2 z_{ij/ji} & \Delta^2 z_{ij/jj} \end{bmatrix}$$

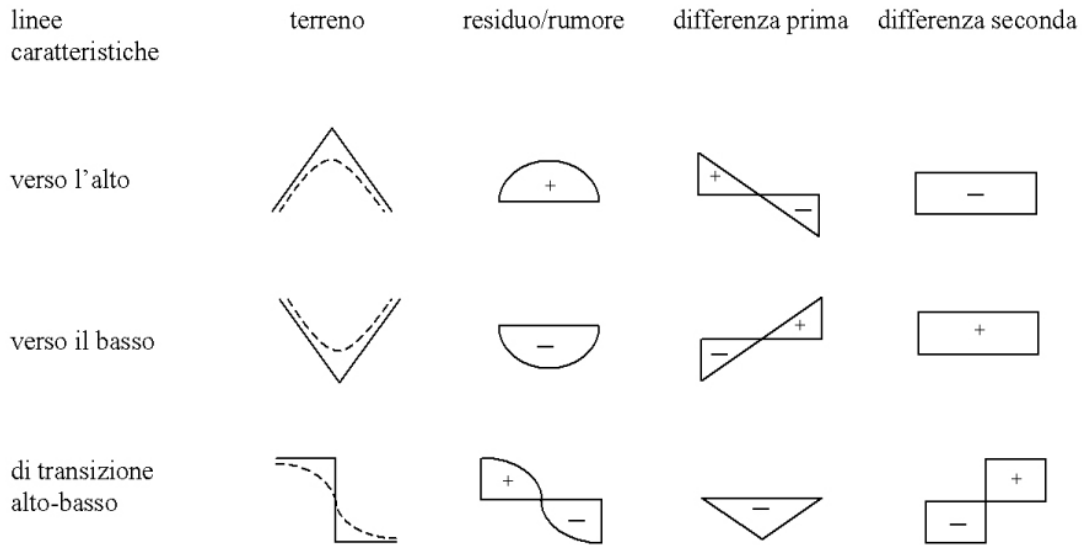


Fig. D.1

Gli autovalori massimo e minimo di questa matrice, facilmente ottenibili calcolando il suo determinante, ovvero risolvendo l'equazione caratteristica: $Det(H - \lambda I) = 0$,

$$\lambda_{max}, \lambda_{min} = \frac{\Delta^2 z_{ij/ii} + \Delta^2 z_{ij/jj}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta^2 z_{ij/ii} - \Delta^2 z_{ij/jj})^2 + 4(\Delta^2 z_{ij/ij})^2}$$

rappresentano rispettivamente la curvatura massima e la curvatura minima. Si osservi, a riguardo, che il determinante Hessiano della matrice omonima: $Det H = \Delta^2 z_{ij/ii} \Delta^2 z_{ij/jj} - (\Delta^2 z_{ij/ij})^2$, può essere minore di zero, uguale a zero e maggiore di zero, rispettivamente in un punto iperbolico, in un punto parabolico e in un punto ellittico. Nel primo caso, se in quel punto la pendenza è nulla, si ha una sella, mentre nel terzo caso, se in quel punto la pendenza è nulla, si ha un massimo, se $\Delta^2 z_{ij/ii}, \Delta^2 z_{ij/jj} < 0$, e un minimo, se $\Delta^2 z_{ij/ii}, \Delta^2 z_{ij/jj} > 0$. Nei punti ellittici, la curvatura Gaussiana è data dalla media geometrica delle curvature massima e minima:

$$\lambda_{med} = \sqrt{\lambda_{max} \lambda_{min}}$$

e indica la curvatura di una sfera che meglio aderisce alla superficie in quel punto.

Un altro importante funzionale della matrice Hessiana è il Laplaciano, ovvero la traccia della matrice omonima:

$$\nabla^2 z = \text{Tr} H = \Delta^2 z_{ij/ii} + \Delta^2 z_{ij/jj}$$

che rappresenta una dilatazione o contrazione, mentre:

$$\gamma = \sqrt{(\Delta^2 z_{ij/ii} - \Delta^2 z_{ij/jj})^2 + 4(\Delta^2 z_{ij/ij})^2}$$

è il massimo fattore di taglio.

UN CASO DI STUDIO

4.1 Introduzione

La pratica fotogrammetrica è tutt'ora fortemente influenzata dalla sua origine situata nella fotogrammetria analogica, dove l'uso di strumenti fotogrammetrici complessi e laboriosi, e le potenzialità di calcolo ridotte al minimo hanno sempre consigliato di ridurre fortemente il numero di immagini e il numero di punti immagine (di legame e di appoggio).

L'avvento della fotogrammetria digitale fa scomparire gli strumenti fotogrammetrici, a vantaggio di stazioni fotogrammetriche e cartografiche costituite da potenti computer (ormai largamente diffusi) i quali, a loro volta, rendono agevole lo sviluppo dei calcoli.

In questo modo perseguire un accrescimento dell'accuratezza e della precisione delle stime effettuate (in particolare, delle coordinate dei punti di legame e di appoggio), dell'affidabilità dello schema di misura delle misure fotogrammetriche e di quelle geotopografiche ausiliare, ed il condizionamento del sistema che permette la compensazione congiunta di tutte le osservazioni della triangolazione aerea (TA) è cosa raccomandabile e praticamente fattibile.

Allo scopo, preso in considerazione un blocco triangolato eseguito per la formazione del CTR della regione Calabria (Blocco Calabria), lo stesso blocco è stato sottoposto ad una procedura asseverata di simulazione ed ottimizzazione, con l'obiettivo principale di garantire alta affidabilità di tutte le osservazioni e quello secondario di migliorare la precisione delle stime delle coordinate dei punti di legame e di appoggio, ove possibile.

Un primo passo della simulazione consiste nel raddoppio delle strisciate, così da avere sempre un ricoprimento trasversale pari al 60%, contro il 20% del blocco originale. Questo fatto dà, già di per se stesso un notevole irrigidimento del blocco fotogrammetrico e conseguentemente un miglior condizionamento del sistema da risolvere. Infatti un ricoprimento trasversale al 20% fa "cerniera" tra strisciate adiacenti, mentre un ricoprimento trasversale al 60% "incastra" la strisciata intermedia tra la precedente e la successiva.

Un secondo passo della simulazione, avendo suddiviso ogni fotogramma con una maglia regolare 3 x 3, conta quanti punti immagine sono visibili in ciascuna di queste partizioni ed accresce il numero dei punti individuati in modo tale che nessuna partizione abbia meno di tre punti (e per limitare il punto selezionato non ne abbia, nel contempo, più di dieci). Infatti avere triplette di punti vicini tra loro permette facilmente di isolare punti eventualmente affetti da errori grossolani, senza distorcere fortemente le coordinate di altri punti e l'assetto delle immagini. Ovviamente procedure robuste di compensazione sono certamente utili per facilitare la ricerca di errori grossolani, ma altresì noto che una bassa o addirittura nulla affidabilità delle osservazioni non permette di individuare alcun errore. Per quanto riguarda la limitazione a 10 punti fotografici, questa è semplicemente dettata dal buon senso e dal rendere la compensazione della triangolazione aerea praticamente computabile.

Un terzo passo della simulazione è pressoché automaticamente ottenuto contando per ogni punto oggetto (di legame o di appoggio) in quante immagini questo punto è osservato. Infatti prescindendo per semplicità dal calcolo effettivo della compensazione della triangolazione aerea, la sola restituzione di un punto oggetto ha un SQM delle sue coordinate approssimativamente diviso per la radice quadrata del numero di immagini nel quale lo stesso punto è osservato. In questo modo, se il numero di immagini è solo due o tre il denominatore del quoziente è ancora circa uno, mentre se il numero di immagini è prossimo a dieci il

denominatore dello stesso quoziente supera tre. I numeri due/tre e dieci non sono detti a caso: due/tre è un classico per immagini con scarso ricoprimento, mentre nove (numero prossimo a dieci) deriva da tre immagini ricomprendesi lungo una strisciata, a loro volta, ricoperte da tre più tre immagini appartenenti alla strisciata precedente ed a quella successiva.

4.2 Blocco Calabria

Le Figure 4.1 e 4.2 illustrano lo schema delle strisciate acquisite per la formazione del Blocco Calabria, con un ricoprimento trasversale del solo 20% e la disposizione dei punti oggetto (a riguardo, una figura di servizio, denominata Figura 4.3, mostra l'insufficienza di punti in un numero affatto trascurabile d'immagini). La Tabella 4.1 riporta il numero totale di immagini, il numero totale di punti immagine, il numero totale di punti oggetto suddivisi in punti di legame e punti d'appoggio, nonché il numero totale di equazioni e il numero totale di incognite del sistema per la compensazione della TA. In questo schema, si sono considerati noti i punti di presa e i punti di appoggio perchè entrambi determinati tramite misure GPS (la cui compensazione è precedente alla compensazione della TA). Le Tabelle 4.2a, 4.2b, 4.2c riportano i valori quadratici medi e i valori massimi di tutte le stime: coordinate dei punti oggetto, coordinate dei punti di presa e parametri d'assetto delle immagini, scarti residui delle equazioni sui punti immagine.

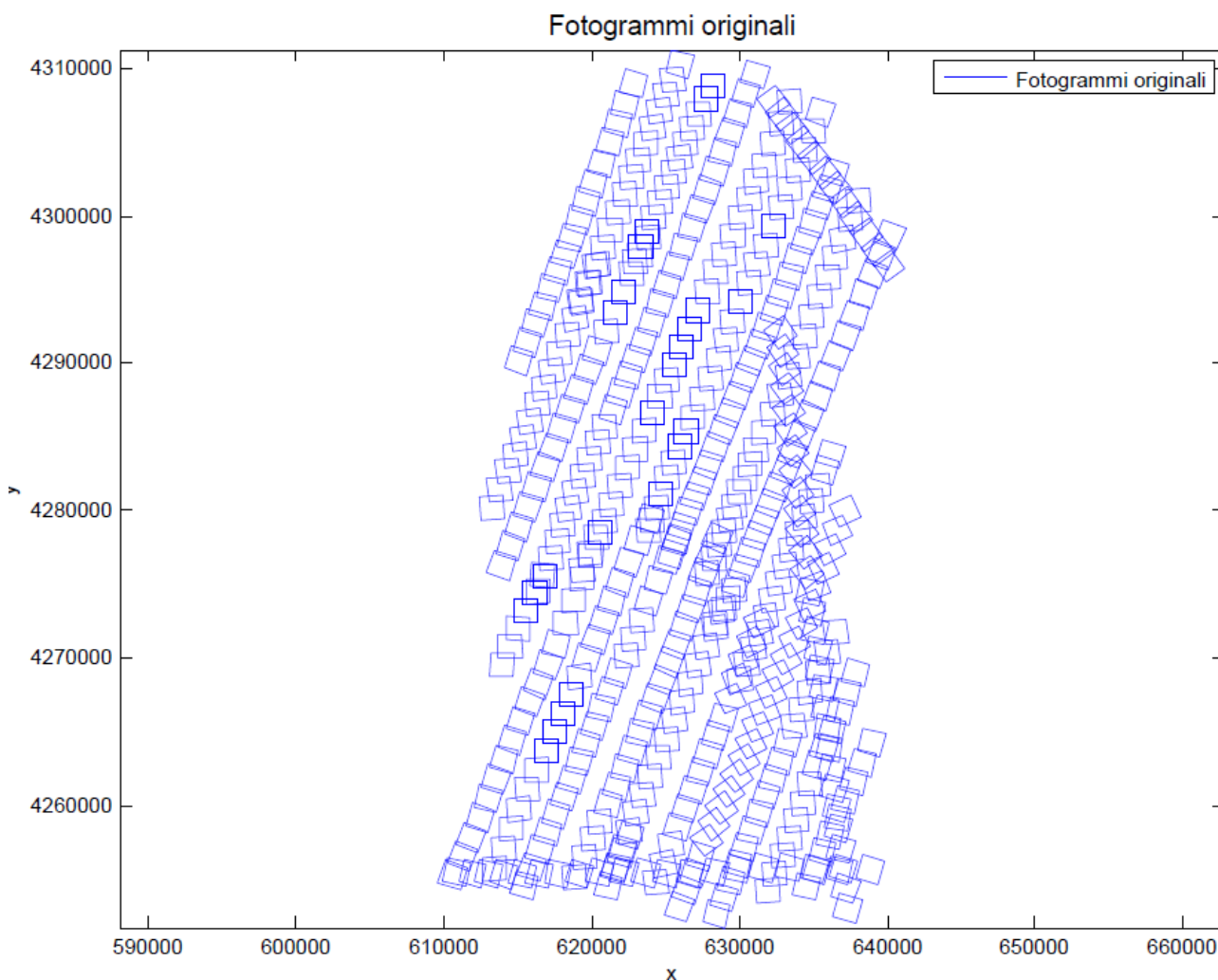


Fig 4.1 – Schema delle strisciate

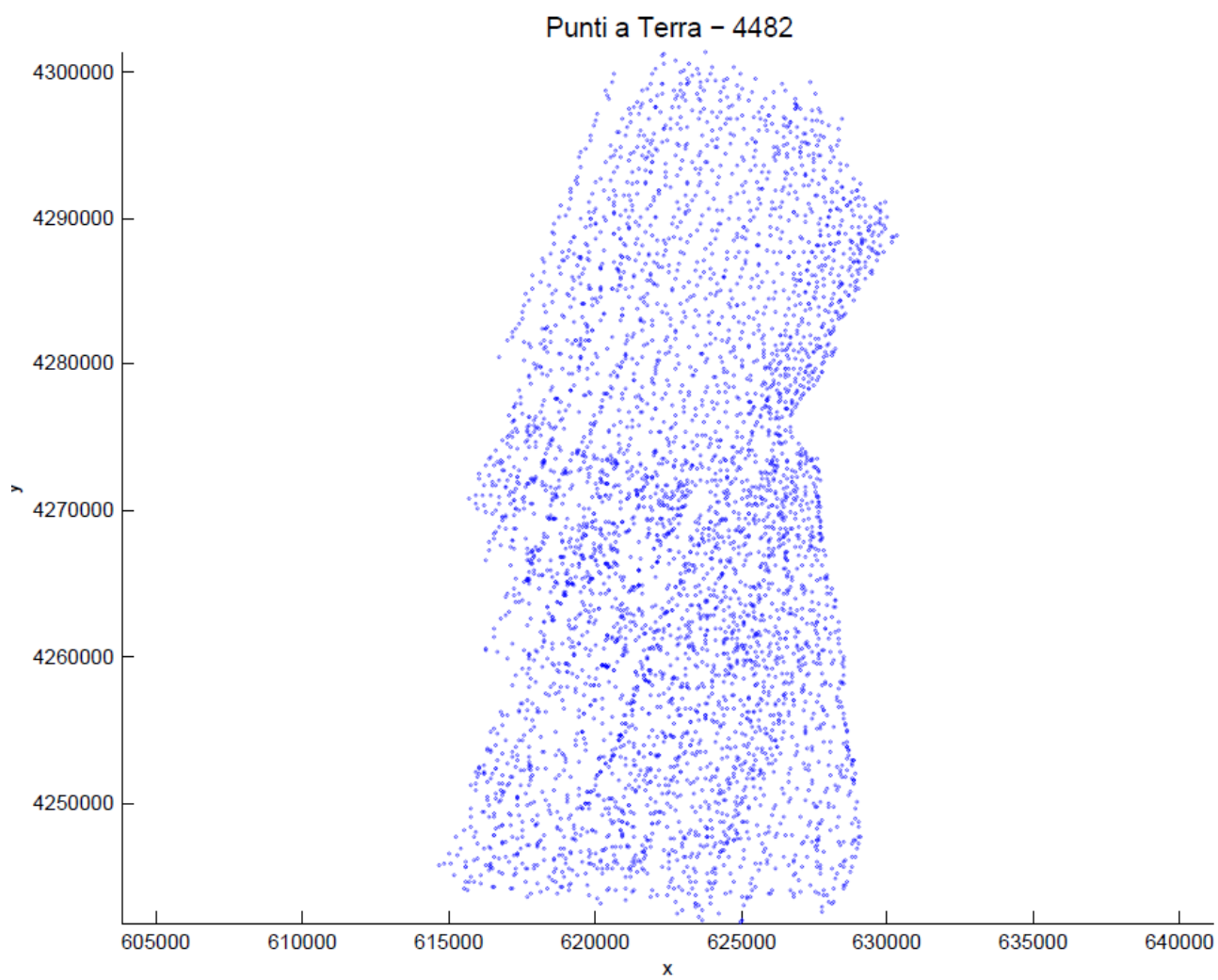


Fig 4.2 – Disposizione dei punti oggetto

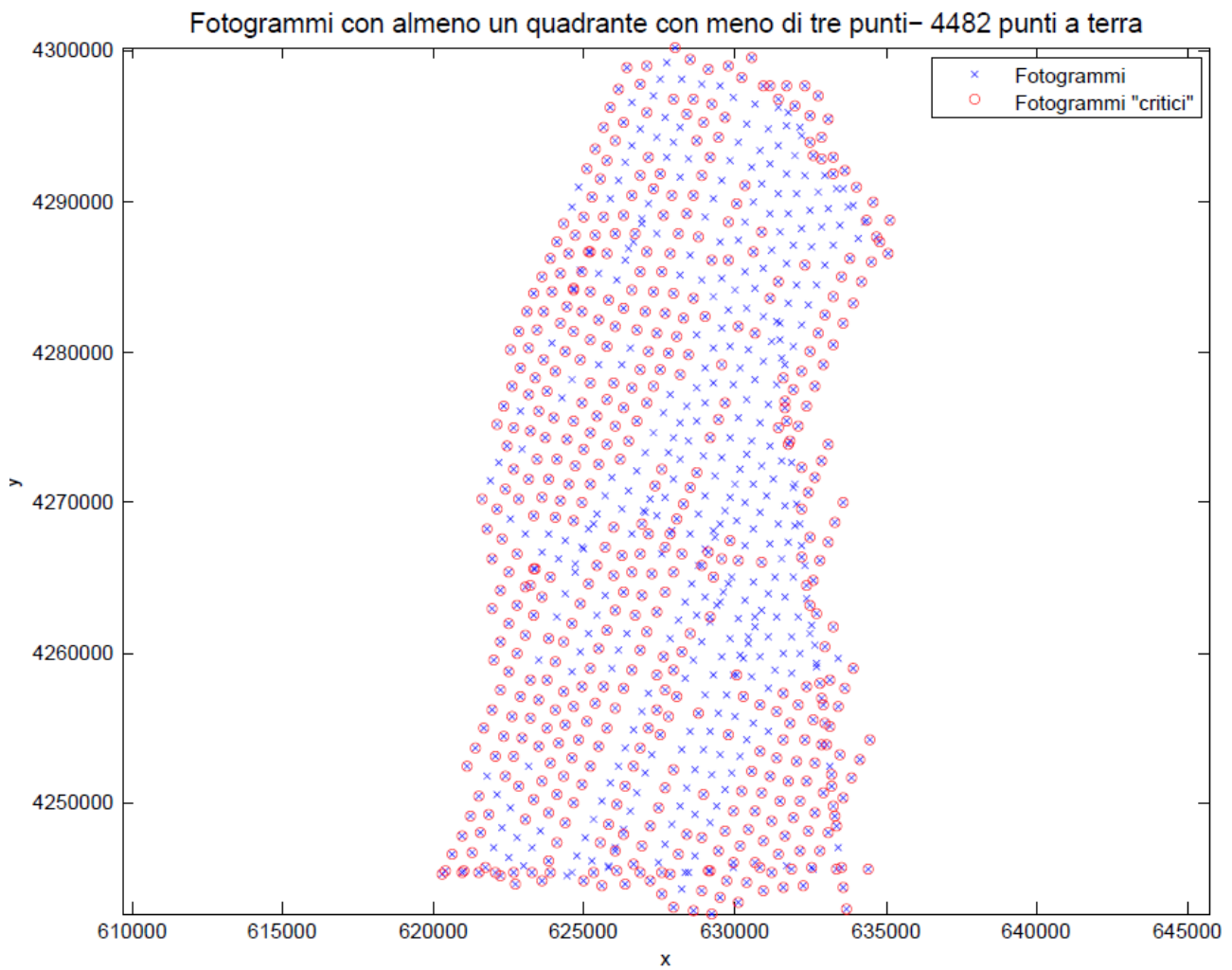


Fig 4.3 – Cerchiati in rosso i fotogrammi con almeno una porzione con meno di 3 punti

Tot. Immagini	Tot. Punti immagine	Tot. Punti oggetto	Tot. Equazioni	Tot. incognite
487	25475	4482	52305	16338
		124 d'appoggio		
		4358 di legame		

Tab. 4.1

	RMS	MAX
COORDINATA X TERRENO	554.0	777.8
COORDINATA Y TERRENO	547.9	788.6
COORDINATA Z TERRENO	750.69	1163.67

Tab. 4.2a

	RMS	MAX
COORDINATA X PUNTO PRESA	581.4	702.7
COORDINATA Y PUNTO PRESA	563.9	696.9
COORDINATA Z PUNTO PRESA	722.37	884.85
ANGOLO ASSETTO OMEGA	37.8	73.1
ANGOLO ASSETTO PHI	52.4	106.3
ANGOLO ASSETTO KAPPA	22.1	84.9

Tab. 4.2b

	RMS	MAX
COORD. X FOTOGRAMMA	8.2	9.8
COORD. Y FOTOGRAMMA	8.4	9.9

Tab. 4.2c

La Figura 4.4 mostra a livello di punti oggetto le ridondanze locali, relative ai punti immagine, secondo la seguente convenzione: la coordinata peggiore dell'immagine peggiore. A riguardo si osservi che ogni punto immagine ha due coordinate e lo stesso punto è ripetuto per tutte le immagini nelle quali è osservato. Per quanto riguarda invece il significato di peggiore, nel caso in esame, si considera poco affidabile un'osservazione con ridondanza locale inferiore a 0,5, variando le ridondanze locali tra 0 e 1 ed dove è uguale a 0, la ridondanza locale di un'osservazione indispensabile e completamente inaffidabile, mentre uguale a 1 la ridondanza locale di un'osservazione praticamente superflua e completamente controllabile.

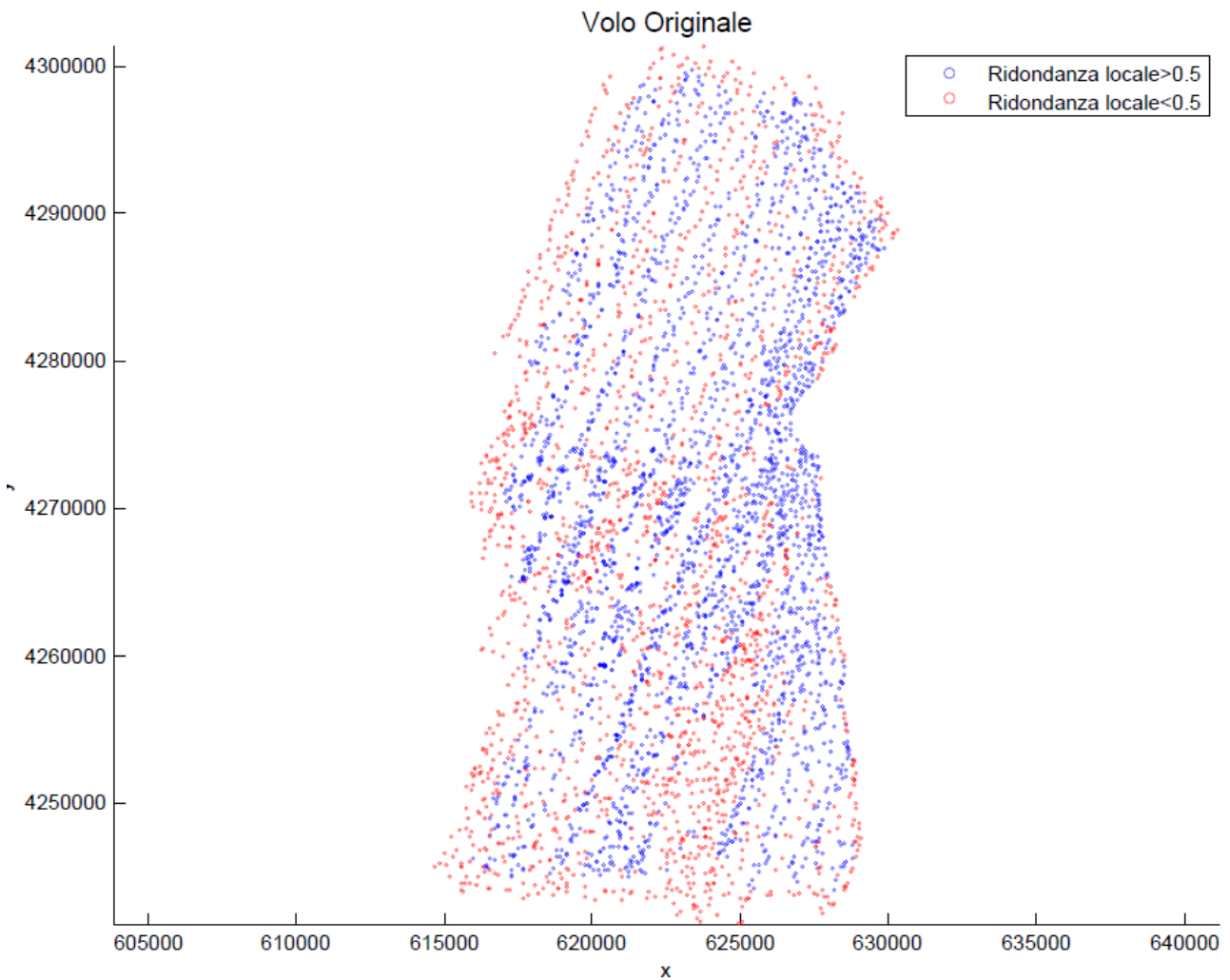


Fig 4.4 – Ridondanze locali

Sigma zero di ciascuna compensazione è fissato a priori pari a 10 micron, così da rendere tutte le compensazioni indipendenti dalle misure realmente effettuate. Questa precauzione è indispensabile per trattare correttamente le simulazioni effettuate nelle quali valori arbitrari di SQM delle misure potrebbero far sì che i risultati appaiano ingiustamente eccezionali o al contrario piuttosto scadenti.

Si noti come l'aver effettuato diversi passi di simulazione, anche più volte ripetuti per ricercare un miglior risultato, corrisponda al calcolo di più compensazioni, qui omesse per motivi di brevità.

Le Figura 4.5 e 4.6 illustrano lo schema delle strisciate simulate per l'ottimizzazione del Blocco Calabria, con un ricoprimento trasversale 60% e la disposizione dei punti oggetto. Come nel caso precedente, la Tabella 4.3 riporta il numero totale di immagini, il numero totale di punti immagine, il numero totale di punti oggetto suddivisi in punti di legame e punti d'appoggio, il numero totale di basi GPS (distinte in basi GPS tra i punti di presa, Figura 4.7, e basi GPS di una fitta rete di poligoni intrecciate, Figura 4.8), nonché il numero totale di equazioni e il numero totale di incognite del sistema per la compensazione della TA. A riguardo la rete di poligoni intrecciate è formata da maglie di quadrilateri trilaterati e corre lungo tutto il bordo del blocco fotogrammetrico spingendosi all'interno fintanto che i punti oggetto sono osservabili solo in non più di quattro immagini (Figura 4.9). Di fatto questa rete coinvolge i punti oggetto relativi a tutte le strisciate esterne ed alla prima e all'ultima immagine di ogni striscia interna. D'altra parte il primo non ammette un precedente e

l'ultimo non ammette un successivo, allora ripetizioni per immagine non possono essere troppo elevate e per tanto le ridondanze locali risultano sempre relativamente basse (in questo caso, solo un appoggio adeguato sana un difetto di affidabilità altrimenti insanabile). Si noti come l'utilizzo delle basi GPS al posto dei punti di presa e di appoggio porti ad una compensazione congiunta del blocco e delle misure geotopografiche ausiliarie, con una modellazione più adeguata dell'insieme delle misure. Infatti oggi giorno la precisione ottenibile da misure fotogrammetriche di alta precisione non è così lontana dalla precisione delle misure geotopografiche ed il trattamento congiunto equalizza gli errori senza privilegiarne alcuno e senza indurre conseguenti effetti distorcenti. La Tabelle 4.4a, 4.4b, 4.4c, 4.4d riportano, ancor una volta, i valori quadratici medi e i valori massimi di tutte le stime: coordinate dei punti oggetto, coordinate dei punti di presa e parametri d'assetto delle immagini, scarti residui delle equazioni sui punti immagine, scarti residui delle equazioni per le basi GPS relative ai punti di presa ed alla rete di poligonali.

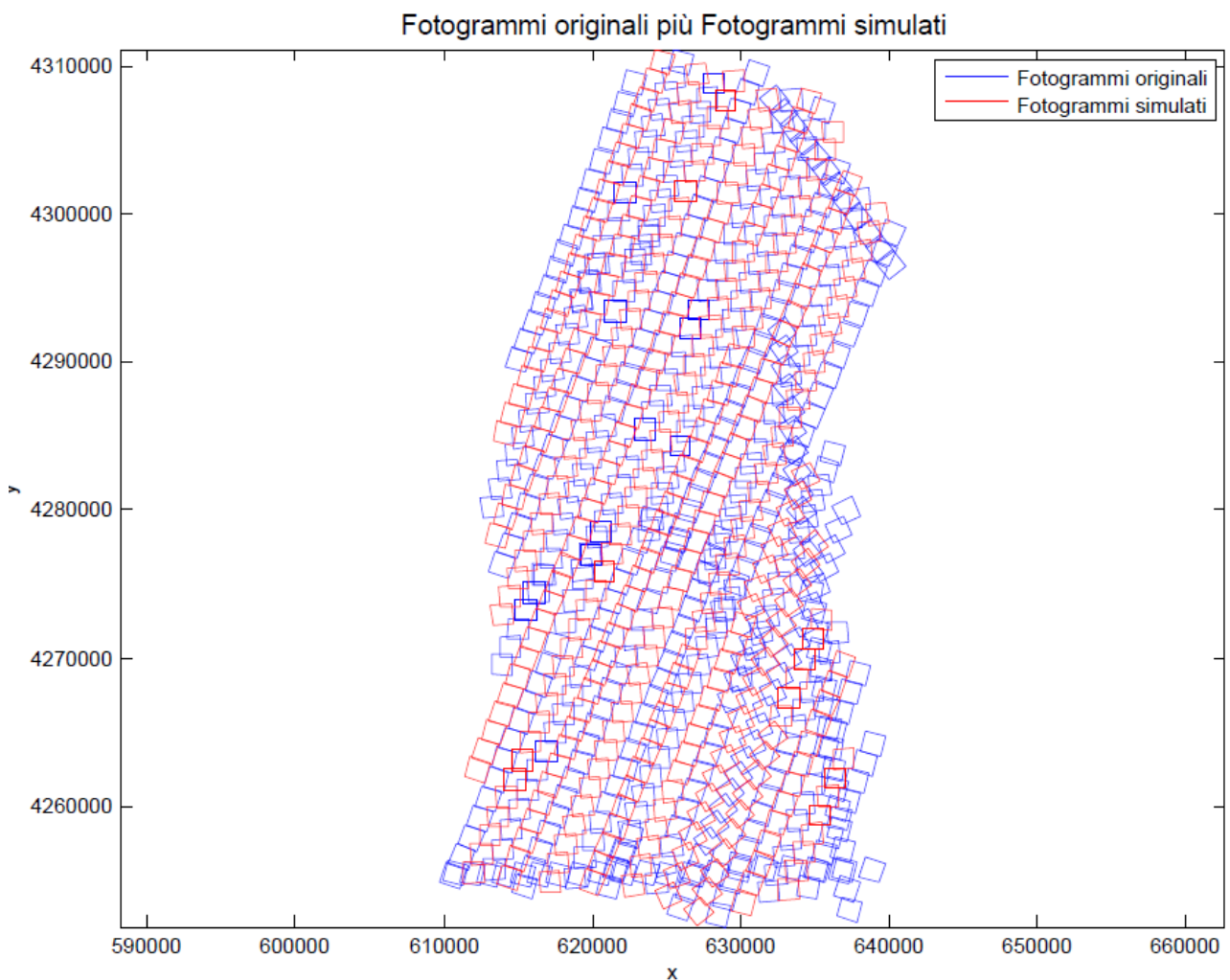


Fig 4.5 – Schema delle strisciate

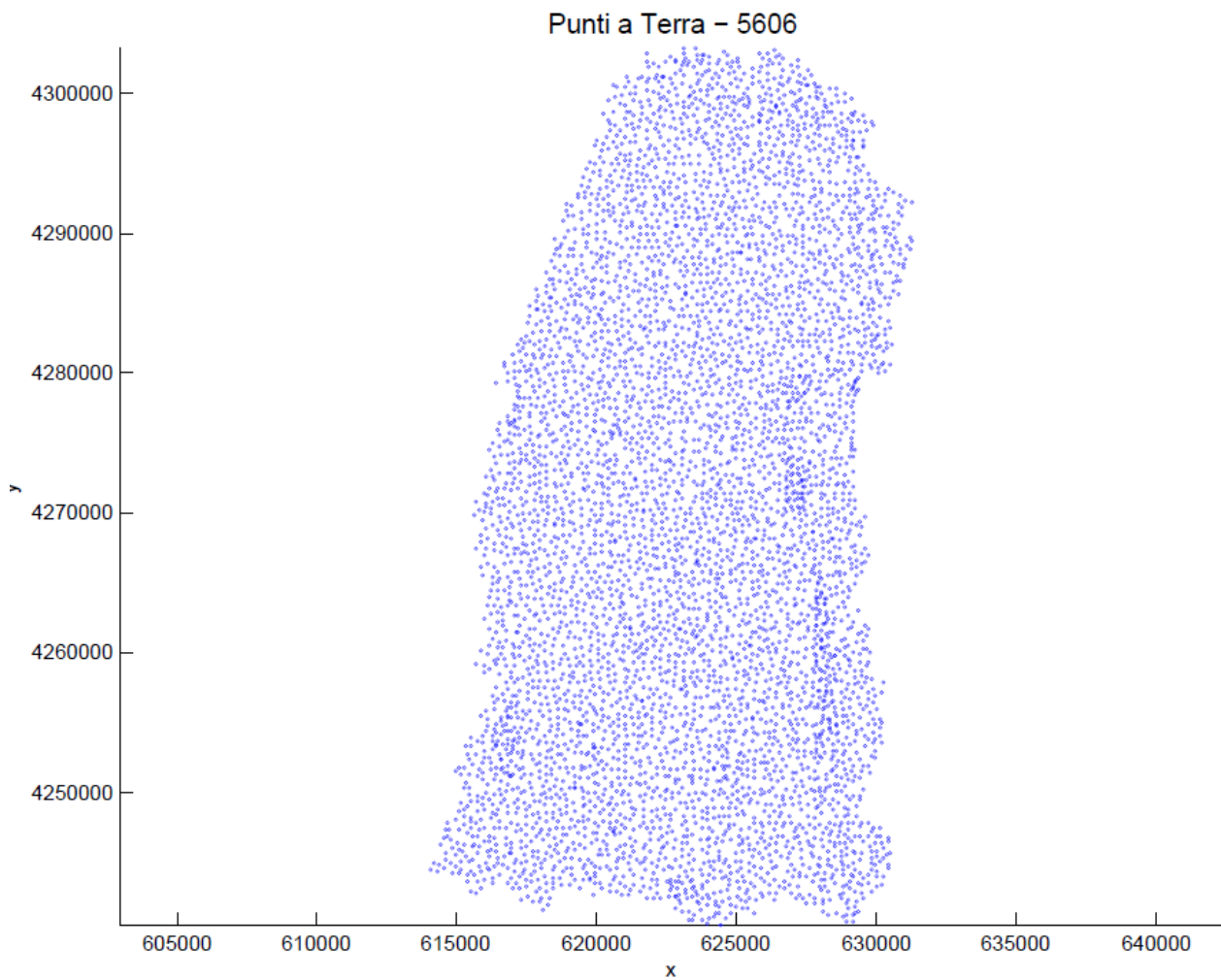


Fig 4.6 – Disposizione dei punti oggetto

Tot. Immagini	Tot. punti immagine	Tot. punti oggetto	Basi GPS	Tot. equazioni	Tot. Incognite
864	48321	5606	9758	125912	22002
		4 d'appoggio 5602 di legame	814 sui centri di presa 8944 sulla rete di poligonali		

Tab 4.3

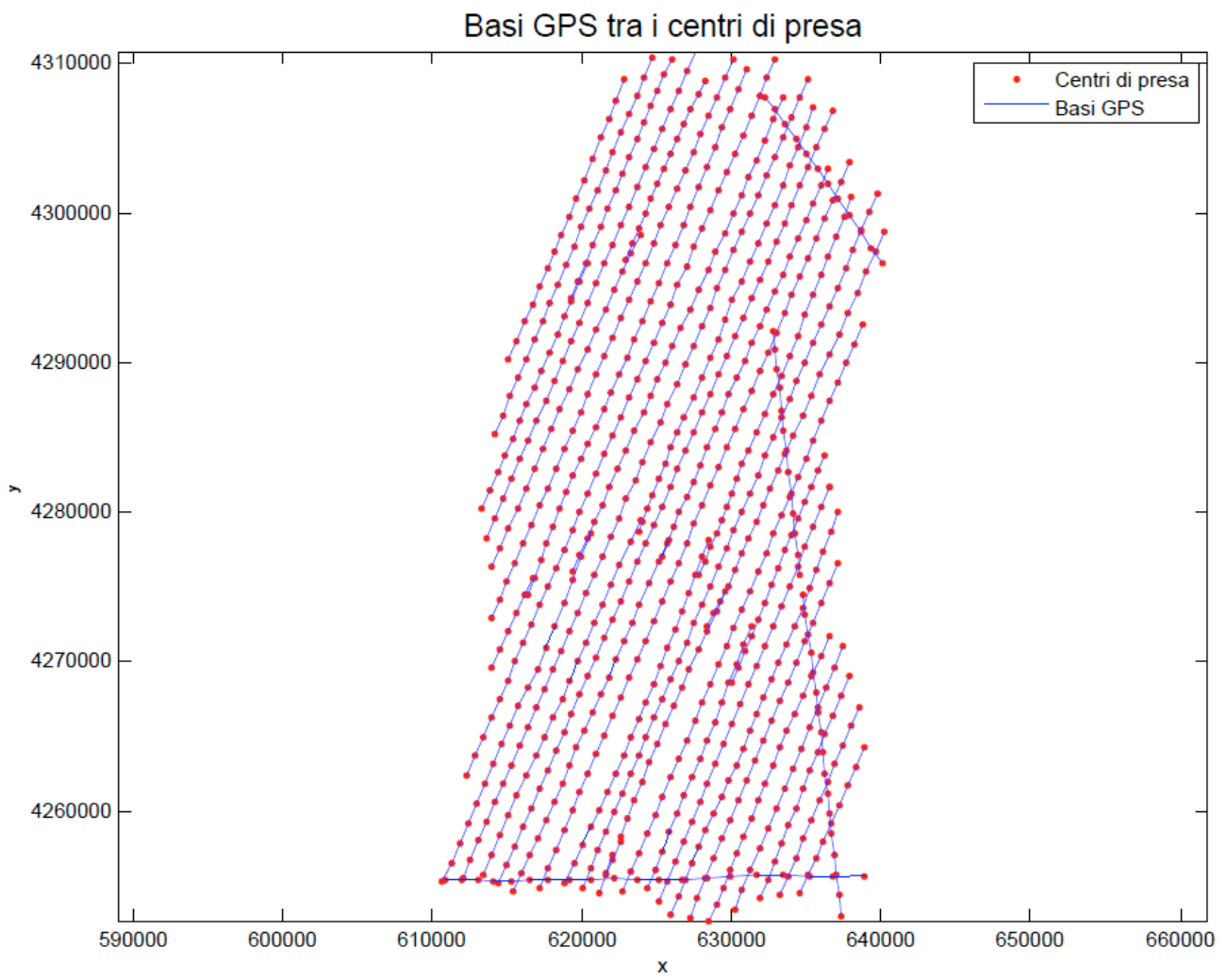


Fig 4.7 – Basi GPS tra i centri di presa

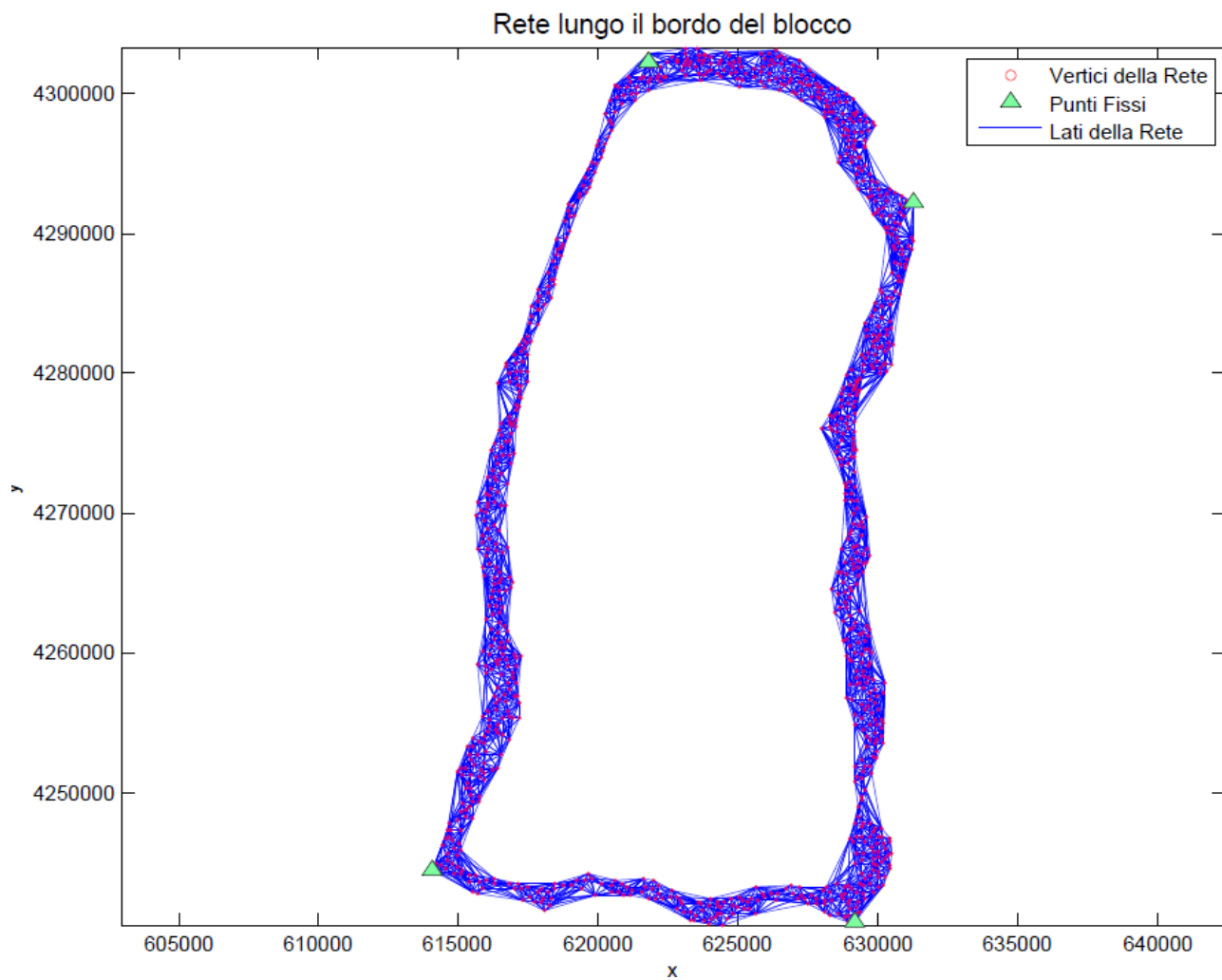


Fig 4.8 – Basi GPS di una fitta rete di poligonali intrecciate

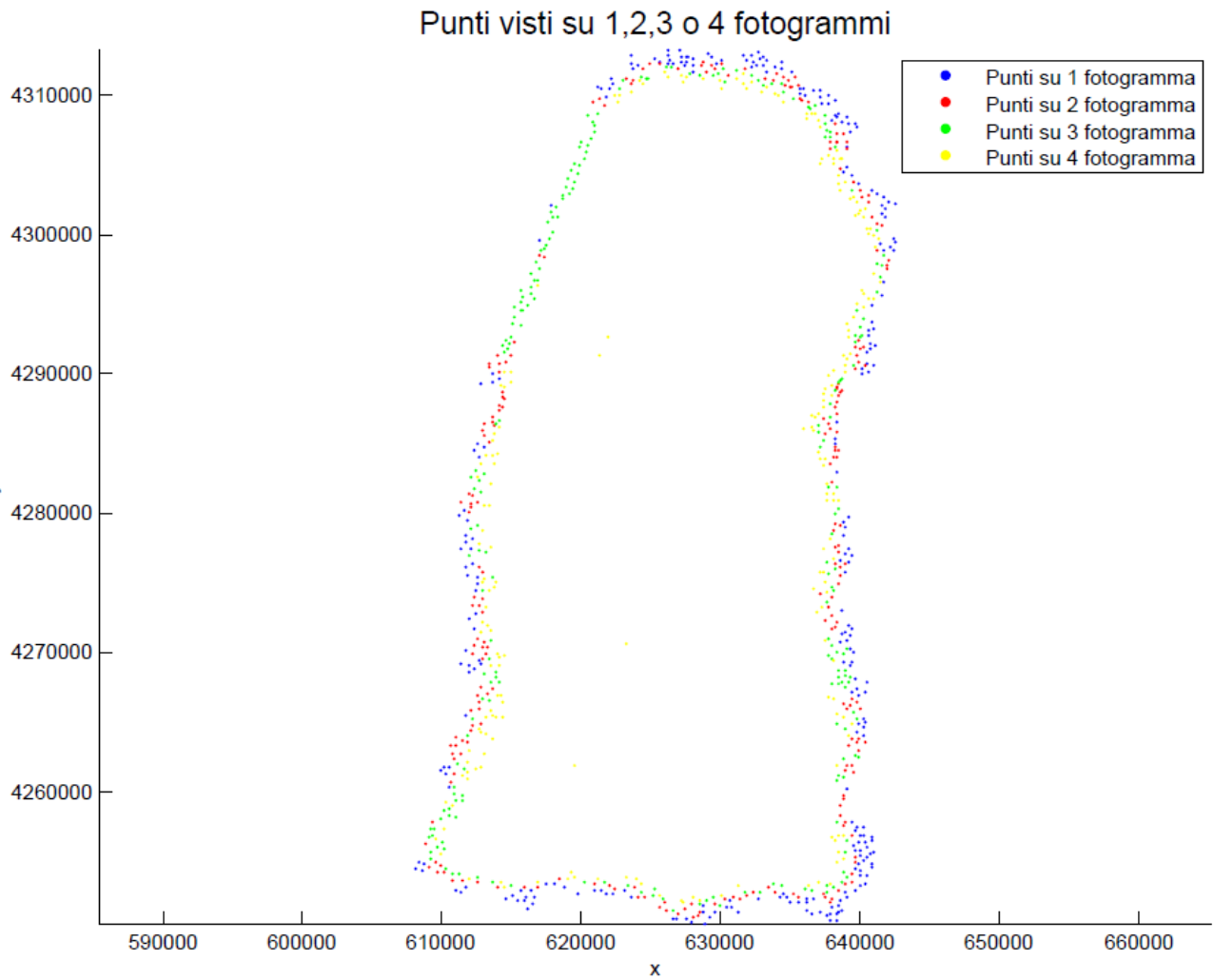


Fig 4.9 – Punti visti solo su 1,2,3 o 4 fotogrammi

	RMS	MAX
COORDINATA X TERRENO	59.4	160.5
COORDINATA Y TERRENO	58.6	224.2
COORDINATA Z TERRENO	127.18	331.79

Tab. 4.4a

	RMS	MAX
COORDINATA X PUNTO PRESA	118.3	144.1
COORDINATA Y PUNTO PRESA	110.9	143.3
COORDINATA Z PUNTO PRESA	94.63	133.88
ANGOLO ASSETTO OMEGA	23.0	33.9
ANGOLO ASSETTO PHI	24.7	34.9
ANGOLO ASSETTO KAPPA	10.3	13.8

Tab. 4.4b

	RMS	MAX
COORD. X FOTOGRAMMA	9.0	10
COORD. Y FOTOGRAMMA	9.0	10

Tab. 4.4c

	RMS	MAX
DX	157.4	197.8
DY	155.9	195.3
DZ	190.66	198.48

Tab. 4.4d

La Figura 4.10 mostra a livello di punti oggetto le ridondanze locali, relative ai punti immagine, secondo la convenzione già enunciata in precedenza. Un confronto immediato tra la Figura 4.4 e la Figura 4.10 mostra la pressoché totale sparizione delle osservazioni considerate inaffidabili, cosa che, unita al guadagno in precisione, in particolare, sulle coordinate dei punti oggetto, attesta la bontà delle scelte effettuate e testimonia come una pratica fotogrammetrica attuale sia preferibile al retaggio di una pratica fotogrammetrica passata. A riguardo massimo è il rispetto per gli sforzi ed i risultati notevoli dei fotogrammetri delle passate generazioni che hanno operato con mezzi tecnici di gran lunga inferiori, ma tentazioni passatiste sono, alla luce dei risultati ottenuti, e di altri che potranno essere conseguiti in futuro, del tutto inadeguate.

Volo con punti ben distribuiti e Rete lungo il bordo del blocco

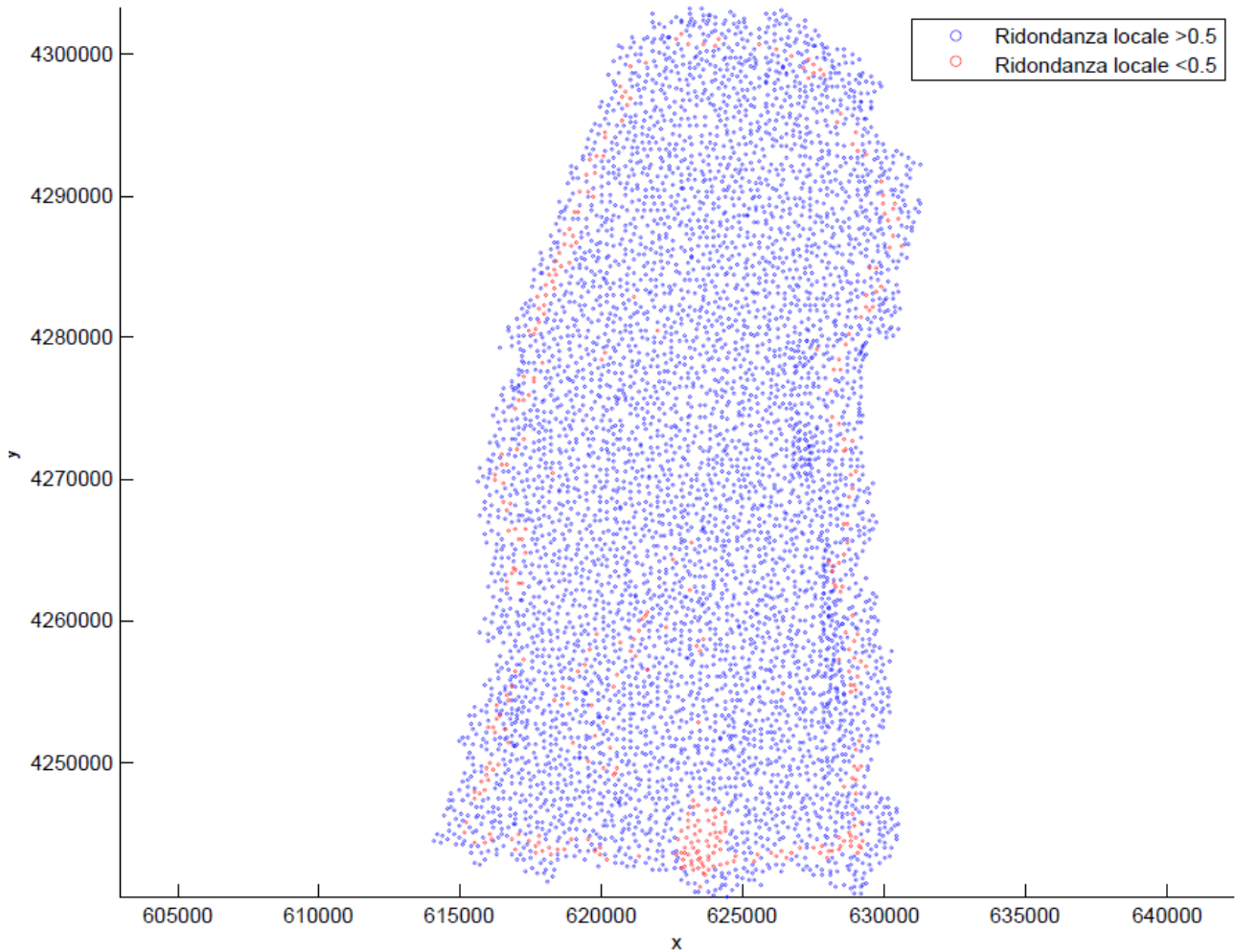


Fig 4.10 – Ridondanze locali

4.3 Conclusioni e sviluppi futuri

Una considerazione conclusiva riguarda possibili miglioramenti e, in particolare, la precisione delle quote stimate pari a circa la metà di quella ottenuta nelle coordinate planimetriche. Questo fatto è dovuto alla particolare geometria della presa, dove gli angoli sotto cui sono “viste” le quote è molto più acuto di quello sotto cui sono “viste” le coordinate planimetriche. Angoli retti peggiorerebbero di poco le coordinate planimetriche ma migliorerebbero notevolmente le quote; a tal fine prese convergenti, scattate contemporaneamente a prese nadirali, una in avanti e l'altra indietro determinerebbero angoli pressoché retti e, di conseguenza, una precisione delle quote comparabile a quella delle coordinate planimetriche.

BIBLIOGRAFIA

1. Ackermann F. (1984): Digital image correlation: performance and potential application in Photogrammetry. *Photogrammetric Record*. Vol. 11 n. 64, 429-439.
2. Ackermann F. (1991): Structural changes in Photogrammetry. *Proceedings of the 43rd Photogrammetric Week at Stuttgart University*, 1-15. Universitaet Stuttgart. Stuttgart.
3. Ackermann F., Hahn M. (1991): Image pyramids for digital Photogrammetry. *Digital Photogrammetric Systems*. Wichmann, Karlsruhe.
4. Adamos C., Faig W. (1992): Hough Transform in digital Photogrammetry. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 250-254.
5. Agouris P., Schenk T., Stefanidis A. (1989): Zero-crossings for edge detection. *Proceedings ASPRS-ACSM Fall Convention*, 91-99.
6. Agouris P., Schenk T. (1992): Multiple image matching. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 802-807.
7. Al-Tahir R., Schenk T. (1992): On the interpolation problem of automated surface reconstruction. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 227-232.
8. Ballard D., Brown C.M. (1982): *Computer Vision*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
9. Bammeke A.A., Baldwin R.V. (1992): Designing and planning of close-range photogrammetric networks: is an expert approach possible?. *IntArchPhRS*. Vol. 29 V, 454-459.
10. Braun C. (1992): Interpreting single images of polyhedra. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 514-521.
11. Buchanan B. (1983): "Constructing an expert system". *Building Expert Systems*. AddisonWesley, Boston.
12. Cho W., Schenk T. (1992) Resampling digital imagery to epipolar geometry. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 404-408.
13. Diehl H., Heipke C. (1992): Surface reconstruction from data of digital fine cameras by means of object based image matching. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III 287-294.
14. Dowman I. (1991): Design of digital photogrammetric workstations. In: Ebner H., Fritsch D., Heipke C. (Ed's) *Digital photogrammetric systems*, 28-38. Wichmann, Karlsruhe.
15. Ebner H., Heipke C. (1988): Integration of digital image matching and object surface reconstruction. *IntArchPhRS*. Vol. 27 III, 534-545.
16. Ebner H., Muelier B. (1986): Processing of digital three-line imagery. *IntArchPhRS*. Vol. 26 3/1, 212-222.
17. Foerstner W. (1986): A feature based correspondence algorithm for image matching. *IntArchPhRS*. Vol. 26 3/3, 150-166.
18. Foerstner W., Guelch E. (1987): A fast operator for detection and location of distinct points, corners and centers of circular features. *Proceedings ISPRS Intercommission Workshop on Fast processing of Photogrammetric Data*, Interfaken, 172-183.
19. Foerstner W. (1992): *Robust Computer Vision*. Wichmann, Karlsruhe.
- Greenfeid J. (1987): A stereo vision approach to automatic stereo matching in Photogrammetry. Rep n. 31, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University.
20. Greenfeid J.S., Schenk T. (1989): Experiments with edge-based stereo-matching. *PE&RS*. Vol. 55, 1771-1777.
21. Greenfeid J. (1991): An operator-based matching system. *PE&RS*. Vol. 57, 1049-1055.
22. Grimson W.E.L. (1981): *Theory of human stereo vision*. Mc Graw-Hill, N. York.
23. Gruen A. (1985): Adaptive least square correlation: a powerful image matching technique. *South Africa Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Cartography*. Vol. 14 n. 3, 175-187.
24. Gruen A., Baltsavias E. (1985): Adaptive least square correlation with Geometrica constraints. *Proceedings of SPIEE*. Vol. 599, 72-82.
25. Gruen A., Baltsavias E. (1988): Geometrically constrained multiphoto matching. *PE&RS*. Vol. 54 n. 5, 633-641.
26. Guelch E. (1991): Results of the test on image matching of ISPRS WG III/4. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. Vol 46, 1-18.
27. Guelch E. (1992): A knowledge based approach to reconstruct buildings in digital aerial imagery. *IntArchPhRS*. Vol. 29 II, n. 2, 410-418.
28. Haala N., Vosselman G. (1992): Recognition of road and river patterns by relational matching. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 969-975.
29. Hahn M., Foerstner W. (1988): The applicability of a feature-based and a least square matching algorithm for DEM-Acquisition. *IntArchPhRS*. Vol. 27 III, 137-147.
30. Hannah M.J. (1988): Digital stereo image matching techniques. *IntArchPhRS*. Vol. 27 III, 280-293.
31. Haralick R.M. (1984): Digital step edges from zero-crossings of second directional derivatives. *IEEE, Trans. Pattern Anal. Machine Inteli*. Vol. PAMI-6 n. 1, 58-68.
32. Heipke C. (1992): Integration of digital image matching and multi- image shape from shading.

- IntArchPhRS. Vol. 29 III, 832-841.
33. Helava U.V. (1978): Digital correlation in photogrammetric instruments *Photogrammetria*. Vol. 34, 19-41.
 34. Helava U.V. (1988): Object space least square correlation. *PE&RS*. Vol. 54 n. 6, 711-714.
 35. Ikuchi K., Horn B.K.P. (1981): Numerical shape from shading and occluding boundaries. *Artificial Intelligence*. Vol. 17 n. 1-3, 141-184.
 36. Jansa J., Trinder J.C. (1992): Knowledge based system for close range digital Photogrammetry. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 461-463.
 37. Kubik K. (1991): Relative and absolute orientation based on linear features. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. Vol. 46, 199-204.
 38. Kubik K. (1992): Photogrammetric restitution based on linear features. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 687-690.
 39. Krupnik A., Schenk T. (1992): Segmentation of edges in 3D object space. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 522-528.
 40. Leberl F. (1991): The promise of softcopy photogrammetry. In: Ebner H., Fritsch D., Heipke C. (Ed's) *Digital photogrammetric systems*, 3-14. Wichmann, Karlsruhe.
 41. Lemmens M. (1988): A survey of stereo matching techniques. *IntArchPhRS*. Vol. 27, B8/III, 11-23.
 42. Li R. (1992): Reconstruction of seafloor surface models by shape from shading. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 780-784.
 43. Lugini J. (1982): The digitized feature- a new source of control. *IntArchPhRS*. Vol. 24 III, 188-202.
 44. Marr D., Poggio T. (1979): A computational theory of human stereo vision. *Proceedings Royal Society of London B* 204, 301-328.
 45. Marr D., Hildreth E.C. (1980): A theory of edge detection. *Phil. Trans. Royal Society of London B* 207, 187-217.
 46. Marr D. (1982): *Vision*. Freeman, San Francisco.
 47. Marsy S.E. (1981): Digital mapping using entities: a new concept. *PE&RS*. Vol. 48 n. 11, 1561-1599.
 48. Mason S., Kepuska V. (1992): On the representation of close-range network design knowledge. *IntArchPhRS*. Vol. 29 V, 446-453.
 49. McKeown D. (1991): Information fusion in cartographic feature extraction from aerial imagery. In: Ebner H., Fritsch D., Heipke C. (Ed's) *Digital photogrammetric systems*, 103-110. Wichmann, Karlsruhe.
 50. Medioni G., Nevatia R. (1985): Segment-based stereo matching. *Computer Vision Graphics, and Image Processing*. n. 31, 2-18.
 51. Modi J.J. (1988): *Parallel algorithms and matrix computations*. Oxford Univ. Press, London.
 52. Muiawa D., Milkhalil E.M. (1988): Photogrammetric treatment of linear feature. *IntArchPhRS*. Vol. 27 III, 383-393.
 53. Muelier B., Hahn M. (1992): Parallel processing- the example of automatic relative orientation. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 623-629.
 54. Pavlidis S. (1974): Segmentation of plane curves. *IEEE transaction of Computers*. Vol. 23 n. 8, 860-870.
 55. Pavlidis S. (1977): *Structural pattern recognition*. Springer, N. York.
 56. Qiu Z., Liu Y. (1992): A research of boundary extraction based on zero-crossings of second directional derivatives. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 43-46.
 57. Rosenholm D. (1987): Least squares matching method. *Photogrammetric Record*. Vol. 12 n. 70.
 58. Sarjakoski T. (1988): *Artificial intelligence in Photogrammetry*. *Photogrammetria*. Vol. 42, 245-270.
 59. Schenk T., Hofmann O. (1986): Stereo matching using line segments of zero-crossings. *Proceedings ISP, Comm. III. Rovaniemi*, 246-261.
 60. Schenk T., Li C., Toth C. (1991): Towards an autonomous system for orienting digital stereopairs. *PE&RS*, Vol. 57, n. 8, 1057-1064.
 61. Schenk T., Stefanidis A. (1992): On the application of scale space techniques in digital Photogrammetry. *Proceedings of ISPRS*, 586-590.
 62. Schenk T., Toth C. (1992): Reconstructing small surface patches from multiple images. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 255-258.
 63. Sester M. (1992): Automatic model acquisition by Learning. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 856-863.
 64. Stokes J. (1992): Parsing segmented digital images. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 727-734.
 65. Strunz G. (1992): Feature based image orientation and object reconstruction. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 113-118.
 66. Tseng Y., Schenk T. (1992): A least squares approach to matching lines with Fourier descriptors. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 469-475.
 67. Vosselman G. (1992): *Relational matching*. Lecture notes in computer science. N. 628. Springer Verlag, Berlin.
 68. Wang L., He D.C. (1990): A new statistical approach for texture analysis. *PE&RS*. Vol. 56 n. 1, 61-66.
 69. Weissensee M., Wrobel B.P. (1991): State of the art of digital matching for object reconstruction. In: Ebner H., Fritsch D., Heipke C. (Ed's) *Digital photogrammetric systems*, 135-152. Wichmann, Karlsruhe.
 70. Wiikin A. (1992): Robust 3D-object representation by linear feature. *IntArchPh*. Vol. 29 V 659-665.
 71. Wrobel B. P. (1987): Digital image matching by facets using object space models. *SPIE*. n. 804, 325-333.

72. Wrobel B.P. (1987): A new approach to computer stereo vision and to digital Photogrammetry. Proceedings of Intercommission Workshop on Fast Processing of Photogrammetric Data, Interlaken, 231-258.
73. Wrobel B.P. (1988): Least square matching for surface reconstruction from images. *IntArchPhRS*. Vol 27, B3, 806-821.
74. Wrobel B.P., Kaiser B., Hausianden J. (1992): Adaptive regularization- a new method for stabilization of surface reconstruction from images. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 824-831.
75. Zhang J., Zhang Z., Wang Z. (1992): High accurate location on digital image and application in automatic relative orientation. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 78-82.
76. Zhang J., Min Y., Zhang Z. (1992): Image segmentation based on Hough Transformation. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 633-638.
77. Zielinski H. (1992): Line Photogrammetry with multiple images. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 669-676.
78. Zilberstein O. (1992): Relation matching for stereopsis. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 711-716.
79. Zong Z., Li C., Schenk T. (1992): Aerial image matching based on zero-crossings. *IntArchPhRS*. Vol. 29 III, 144-150.
80. Blachut T.J., Chrzanowsky A., Saastamoinen J.H. (1979): *Urban Surveying and Mapping*. Springer, New York.
81. Bonford B.G. (1952): *Geodesy*. Oxford University Press, London.
82. Doebelin E.O. (1975): *Measurement Systems. Application and Design*. McGraw-Hill, New York.
83. Heiskanen W.A., Moritz H. (1967): *Physical Geodesy*. Freeman and Company, San Francisco.
84. Kramer B. (1988): *The Art of Measurement. Metrology in Fundamental and Applied Physics*. VCH, Weinheim (Rhein-Neckar).
85. Lambeck K. (1988): *Geographical Geodesy – The Slow Deformation of the Earth*. Oxford University Press, Oxford.
86. Moritz H. (1980): *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
87. Richardus P., Adler R.K. (1972): *Map Projections*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
88. Richardus P., Allam J.S. (1977): *Project Surveying*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
89. Telford W.M., Geldart L.P., Sheriff R.E., Keys D.A. (1976): *Applied Geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge.
90. Torge W. (1980): *Geodesy*. De Gruyter, Berlin.
91. Vaníček P., Krakiwsky E. (1982). *Geodesy: the Concepts*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
92. Baarda W. (1967): A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Commission, *Publications on Geodesy New Series*, Delft, Vol. 2, n. 5.
93. Baarda W. (1967): Statistical Concepts in Geodesy. Netherlands Geodetic Commission, *Publications on Geodesy New Series*, Delft, Vol. 2, n. 4.
94. Barrodale I., Roberts F. (1973): An improved algorithm for discrete L_1 linear approximation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, n. 10 (1973).
95. Barnett V., Lewis T. (1978): *Outliers in statistical data*. J. Wiley & Sons, New York.
96. Bartels R.H., Golub G.H. (1969): The simplex method of linear programming using LU-decomposition. In: *Communication of the ACM*, Vol. 12, n. 5, New York.
97. Bjerhammar A. (1973): *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
98. Bloomfield P., Steiger W.L. (1983): *Least Absolute Deviations*. Birkhäuser, Boston.
99. Cross P.A. (1982): Computer aided design of geodetic networks. In: *Int. Symp. on Geodetic Networks and Computations*, DGK Reihe B Heft 258/III, Monaco di Baviera.
100. Cross P.A. and Fagir A.H. (1982): Procedures for the first and second order design of vertical control networks, In: *Survey Control Networks*, HBSw, n. 7, Monaco di Baviera.
101. Dwyer P.S. (1951): *Linear Computation*. John Wiley & Sons, New York.
102. Forstner W. (1986): Reliability, Error detection and self calibration. In: *Int. Arch. of Photogram. Remote Sensing*, Rovaniemi, Vol. 26, Part 3/4.
103. Frederiksen P., Kubik K., Weng W. (1984): Oh, Grossorors!. In: *Int. Arch. of Photogram. Remote Sensing*, Rio de Janeiro, Vol. 25, Part A3a.
104. Fuchs H. (1982): Contributions to the adjustment by minimizing the sum of absolute residuals. In: *Manuscripta Geodaetica*, n. 7 (1982).
105. Grafarend E.W. et al. (1979): *Optimierung Geodätischer Messoperationen*. Wichmann, Karlsruhe.
106. Grafarend E.W., Sansò F. et al. (1985): *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer, Berlino.
107. Hageman L.A., Young D.M. (1981): *Applied Iterative Methods*. Academic Press, New York.
108. Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. (1986): *Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions*. Wiley & Sons, New York.
109. Hawkins D.M. (1980): *Identification of outliers*. Chapman and Hall, Londra.

110. Huber P.J. (1964): Robust estimation of a location parameter. In: *Ann. Math. Statist.*, n. 35, p. 73–
111. Huber P.J. (1972): Robust statistics: a review. In: *Ann. Math. Statist.*, n. 43, p. 1041–1067.
112. Huber P.J. (1981): *Robust Statistics*. Wiley & Sons, New York.
113. Heiskanen W.A., Moritz H. (1967): *Physical Geodesy*. Freeman and Company, San Francisco.
114. Jorgensen P., Frederiksen P., Kubik K., Weng W (1984): Ah, robust estimation. In: *Int. Arch. of Photogram. Remote Sensing*, Rio de Janeiro, Vol. 25, part A3a.
115. Koch K.R. (1987): *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Springer, Berlino.
116. Krarup T., Juhl J., Kubik K.: Götterdämmerung of least squares. In: *Int. Arch. of Photogram. Remote Sensing*, Hamburg, Vol. 23, Part B3.
117. Meissl P. (1982): *Least Squares Adjustment a Modern Approach*. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 43, Graz.
118. Mikhail E.M., Ackermann F. (1976): *Observations and Least Squares*. IEP–A Dun–Donnelley Publisher,, New York.
119. Moritz H. (1980): *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
120. Muller H. (1984): A numerically efficient solution of the second order design problem. In: *Bulletin Géodésique*, n. 58 (1984).
121. Muller H. (1985): Second order design of combined linear–angular networks. In: *Bulletin Géodésique*, n. 59 (1985).
122. Rousseeuw P.J, Leroy A.M. (1987): *Robust Regression and Outlier Detection*. Wiley & Sons, New York.
123. Schaffrin B. (1981): Some proposals concerning the diagonal second order design of geodetic networks. In: *Manuscripta Geodaetica*, n. 6 (1981).
124. Schaffrin B. (1982): Some considerations on the optimal design of geodetic networks. In: *Int. Symp. on Geodetic Networks and Computations*, DGK Reihe B Heft 258/III, Monaco di Baviera.
125. Schaffrin B. (1985): On design problems in geodesy using models with prior information. In: *Statistics & Decision*, Suppl. Issue n. 2 (1985).
126. Schmitt G. (1977): Experiences with the second order design of geodetic networks. In: *Proc. Int. Symp. on Optimization of Design and Computation of Control Networks*, Sopron.
127. Acheson J.D. (1952): *Quality Control and Industrial Statistics*. R.D. Irwin, Homewood (Illinois).
128. Agresti A. (1984): *Analysis of Ordinal Categorical Data*. Wiley & Sons, New York.
129. Andersen E.B. (1980): *Discrete Statistical Models with Social Science Applications*. North Holland Publishing Company, Amsterdam.
130. Ball G.H., Hall D.J. (1967): A Clustering Technique for Summarizing Multivariate Data. In: *Behavioral Science*, 12 (1967), p. 153–155.
131. Barnett V. (1973): *Comparative Statistical Inference*. John Wiley & Sons, London.
132. Barry A.B. (1978): *Errors in Practical Measurement in Science, Engineering, and Technology*. John Wiley & Sons, New York.
133. Beyer W. H, (1966): *CRC Handbook of Tables for Probability and Statistics*. CRC Press, Boca Raton (Florida).
134. Bury K.V. (1975): *Statistical Models in Applied Science*. Wiley & Sons, New York.
135. Chiswick B.R., Chiswick S.J. (1975): *Statistics and Econometrics. A Problem–solving Text*. Uninersity Park Press, Baltimore.
136. Cochran W.G. (1977): *Sampling Techniques*. John Wiley & Sons, New York.
137. Cox D.R., Hinkley D.V. (1974): *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, Londra.
138. Cramer H. (1946): *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton.
139. Cressie N.A. (1991): *Statistics for Spatial Data*. John Wiley and Sons, New York.
140. David F.N. (1954): *Tables of The Ordinates and Probability Integral of the Distribution of the Correlation Coefficient in Small Samples*. Cambridge University Press, Cambridge.
141. Davies O.L. (1960): *The Design and Analysis of Industrial Experiments*. Oliver and Boyd, Londra.
142. Davies O.L. (1961): *Statistical Methods in Research and Production*. Oliver and Boyd, Londra.
143. Draper N.R., Smith H. (1981): *Applied Regression Analysis*. Wiley and Sons, New York.
144. Federer W.T. (1973): *Statistics and Society. Data Collection and Interpretation*. M. Dekker, New York.
145. Fischer F.E. (1973): *Fundamental Statistical Concepts*. Canfield Press, San Francisco.
146. Franwaert E. (1987): L1 in Fuzzy Clustering. In: Y. Dodge (Ed), *Statistical Data Analysis Based on the L1–norm and Related Methods*, North Holland, p. 417–426.
147. Guttman I., Wilks S.S., Hunter S. J. (1965): *Introductory Engineering Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
148. Hawkins D.M. (1982): *Topics in Applied Multivariate Analysis*. Cambridge University Press, London.
149. Jobson J.D. (1991/2): *Applied Multivariate Data Analysis: vol. I & II*. Springer, New York.
150. Kaufman L., Rousseeuw P.J. (1987): Clustering by Means of Medoids. In: Y. Dodge (Ed), *Statistical Data Analysis Based on the L1–norm and Related Methods*, North Holland, p. 405–416.

151. Kaufman L., Rousseeuw P.J. (1990): Finding Groups in Data. Wiley & Sons, New York.
152. Kendall M. (1980): Multivariate Analysis. Charles Griffin & Company LTD, London.
153. Lauritzen S.L. (1998): Graphical Models. Clarendon Press, Oxford.
154. McPherson G. (1990): Statistics in Scientific Investigation. Springer, New York.
155. Middlebrooks E.J. (1976): Statistical Calculation, How to Solve Statistical Problems. Ann Arbor Science, Ann Arbor (Michigan).
156. Mood A.M., Graybill F.A., Boes D.C. (1974): Introduction to the Theory of Statistics. Mc Graw-Hill Book Company, Londra.
157. Papoulis A. (1965): Probability Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, New York.
158. Pfeiffer P.E. (1978): Concepts of Probability Theory. Dover Publications, New York.
159. Rao C.R. (1965): Linear Statistical Inference and Its Applications. Wiley & Sons, New York.
160. Sachs L. (1984): Applied Statistics. A handbook of Techniques. Springer, New York.
161. Savage L.J. (1954): The Foundations of Statistics. John Wiley & Sons, New York.
162. Spath H. (1987): Using the L1 norm within cluster analysis. In: Y. Dodge (Ed), *Statistical Data Analysis Based on the L1-norm and Related Methods*, North Holland, p. 427–433.
163. Tanner M.A. (1996): Tools for Statistical Inference. Springer, New York.
164. Wald A. (1947): Sequential Analysis. Wiley & Sons, New York.
165. Watson G.N. (1948): A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, Cambridge, Mac Millan Company, New York.
166. Whittle P. (1990): Risk-sensitive Optimal Control. John Wiley & Sons, Chichester (West Sussex).

167. Schmitt G. (1978): Numerical problems concerning the second order design of geodetic networks. In: *Proc. 2nd Int. Symp. Related to the Redefinition of North American Geodetic Networks*, Washington DC:
168. Schmitt G. (1987): Optimal design problems. In: *Geodetic Theory and Methodology*, University of Calgary, Calgary.
169. Stefanovic P. (1978): Blunders and least squares. ITC Journal, n. 1 (1978).
170. Thompson E.H. (1969): An Introduction to the Algebra of Matrices With Some Applications. A. Hilger, London.
171. Wimmer H. (1982): Second order design of geodetic networks by an interactive approximation of a given criterion matrix. In: *Int. Symp. on Geodetic Networks and Computations*, DGK Reihe B Heft 258/III, Monaco di Baviera.